J.KARIMOV

AMALIY MATEMATIKA 2 DAN MASALALAR TO‘PLAMI

TOSHKENT

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS
TA’LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT DAVLAT IQTISODIYOT UNIVERSITETI

Javlon Karimov

AMALIY MATEMATIKA 2 DAN MASALALAR TO‘PLAMI

Toshkent

UO‘K: 22.1
KBK 22.1ya73
K 56

Karimov J.K. Amaliy matematika. O‘quv qo‘llanma. – T.: «Innovatsion rivojlanish nashriyot-matbaa uyi», 2021 – 154 b.

ISBN 978-9943-7629-2-3

Taqrizchilar:

A.Gulamov – Toshkent Davlat Iqtisodiyot universiteti “Amaliy matematika” kafedrasi mudiri, dotsent

A.X.Raxmatullayev – Toshkent irrigatsiya va qishloq xo‘jaligi mexanizatsiyalash muhandislari instituti “Oliy matematika” kafedrasi dotsenti

UO‘K: 22.1
KBK 22.1ya73

ISBN 978-9943-7629-2-3

Kirish

Ushbu o‘quv qo‘llanma o‘zbek tilida universitet va institutlarda iqtisodchi mutaxassisliklarida o‘qitiladigan amaliy matematika 2 qursining o‘quv dasturiga moslab yozilgan o‘quv darslik va qo‘llanmalarning kamligini hisobga olgan holda yozilgan. Qo‘llanma o‘z ichiga aniq integral, ikki o‘zgaruvchili funktsiyasining hosilasi va differentsiali, qatorlar, ehtimollar nazariyasiga kirish, tasodifiy miqdorlar, katta sonlar qonuni, matematik statistika elemenlari va korrelyatsiya nazariyasi elementlari doir qisqacha nazariy materiallarni, mashqlarni, misol va masalalarini qamrab olgan.

Har bir mavzularda yechib ko‘rsatilgan misollarni qunt bilan takroran ishlab har bir o‘quvchi mashqda berilgan misollarni mustaqil yechish imkoniyatiga ega bo‘ladi.

Bu qo‘llanmadan o‘quv dasturining xajmi va mazmuniga ko‘ra hamma turdagi iqtisodchi talabalar shuningdek, texnika, qishloq xo‘jaligi, pedagogika oliy o‘quv yurtlarining ba’zi fakultetlari talabalari qo‘shimcha o‘quv qo‘llanma sifatida to‘liq foydalanishlari mumkin.

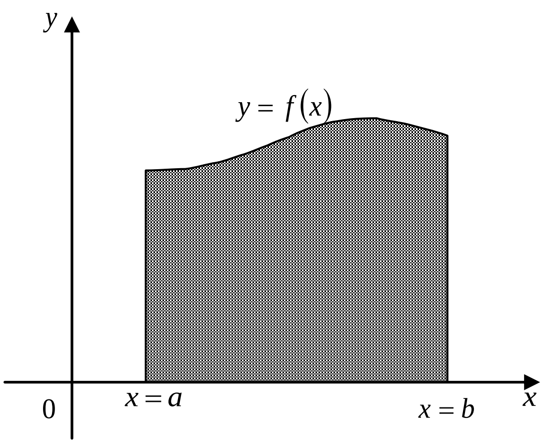
1. Aniq integral

1.1. Aniq integral ta’rifi.

1.2. Aniq integral yordamida yuzalarni, yoy uzunligini, o‘q atrofida aylanishdan hosil bo‘ladigan jism hajmlarini hisoblash.

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlngan va uzluksiz bo‘lgan. Bu kesmani $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ nuqtalar bilan n ta qismga bo‘lamiz. Har bir (x_{i-1}, x_i) oraliqdan ixtiyoriy ξ_i nuqtani olamiz va ushbu yig‘indini tuzamiz:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_p$$



bunda $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Ushbu $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$ ko‘rinishdagi yig‘indi integral yig‘indi, bu yig‘indining $\max \Delta x_i \to 0$ dagi limitini, agar bu limit mavjud bo‘lsa, $f(x)$ funksiyadan a dan b gacha olingan aniq integral deyiladi va

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

ko‘rinishda belgilanadi. Bu holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi funksiya deyiladi. a va b sonlar mos ravishda integrallashning quyi va yuqori chegaralari deyiladi.

Agar $[a,b]$ kesmada $f(x) > 0$ bo‘lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx$ integral geometrik jihatdan $y = f(x), y = 0, x = b$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapesiya ko‘rinishidagi shaklning yuzini ifodalaydi.

Aniq integralning asosiy xossalarini keltiramiz.

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

2. $\int_b^a f(x)dx = 0$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$

5. $\int_a^b Rf(x)dx = R\int_a^b f(x)dx$, bunda R – o‘zgarmas

6. agar $[a,b]$ kesmada $f(x) \geq 0$ bo‘lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

7. agar $[a,b]$ kesmada $f(x) \geq g(x)$ bo‘lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

8. agar m va M mos ravishda $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymati bo‘lsa, u holda

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

tengsizlik o‘rinli (aniq integralni baholash haqidagi teorema).

9. $\int_a^b f(x)dx = f'(c)(b-a)$, bunda $c \in (a,b)$ (o‘rta qiymat haqidagi teorema).

Agar $F(x)$ $[a,b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyalaridan biri bo‘lsa, u holda Nyuton – Leybnisning quyidagi formulasi o‘rinli:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Bu formuladan aniq integrallarni hisoblashda foydalaniladi.

1-misol. Integralni hisoblang. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$

Yechish. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x|\Big|_e^{e^2} = \ln(\ln e^2) - \ln(\ln e) = \ln 2$

2-misol. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 xdx$ ni hisoblang.

Yechish. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \sin xdx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)d(\cos x) = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3}\cos^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$$= -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) + \frac{1}{3}\left(\cos^3\frac{\pi}{2} - \cos^3 0\right) = \frac{2}{3}.$$

Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz, $x = \varphi(t)$ funksiya esa differensiallanuvchi bo‘lib, shu bilan birga $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$ bo‘lsa, u holda ushbu tenglik o‘rinli:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Ko‘pincha $x=\varphi(t)$ o‘ringa qo‘yish o‘rniga $t=\psi(x)$ teskari almashtirishdan foydalaniladi. Bu holda integrallashning yangi chegaralari α va β bevosita $\alpha=\psi(a)$ va $\beta=\psi(b)$ tengliklardan topiladi. Bunda integrallash chegaralarini almashtirishni quyidagi jadval shaklida yozish qulay:

x	t
a	α
b	β

3-misol. $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $x=\sin t$ o‘rniga quyishdan foydalanamiz:

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = \left\{\begin{matrix} x=\sin t. \\ dx=\cos t dt, \end{matrix}\right. \left.\begin{matrix} x & t \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\pi}{4} \\ 1 & \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t} - \cos t dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt =$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt = \left(-ctgt - t\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(-ctg\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) - \left(-ctg\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4}$$

4-misol. $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $t=\sqrt{x+1}$ formula bo‘yicha o‘zgaruvchini almashtiramiz:

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \left\{\begin{matrix} t=\sqrt{x+1}, \\ x=t^2-1, \end{matrix}\right. dx=2tdt \left.\begin{matrix} x & t \\ 3 & 2 \\ 8 & 3 \end{matrix}\right\} = \int_2^3 \frac{(t^2-1)2tdt}{t} = 2\int_3^3 (t^2-1)\Big|_2^3 =$$

$$= 2(9-3) - 2\left(\frac{8}{2} - 2\right) = \frac{32}{2}.$$

Agar $u=u(x)$, $v=v(x)$funksiyalar va ularning hosil $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

tenglik o‘rinli (bo‘laklab integrallash formulasi).

5-misol. $\int_1^e x\ln^2 x dx$ integralni toping.

Yechish. Bo‘laklab integrallash formulasini qo‘llaymiz:

$$\int_1^e x\ln^2 x dx = \left\{ \begin{aligned} & u=\ln^2 x, \quad du = 2\ln x\cdot\frac{dx}{x}, \\ & dv = xdx, \quad v=\frac{x^2}{2} \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x\Big|_1^e - \int_1^e x\ln x dx =$$

$$\left\{ \begin{aligned} & u=\ln x, \quad du=\frac{dx}{x}, \\ & dv=xdx, \ v=\frac{x^2}{2} \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{x^2}{2}\ln\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx\right) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\int_1^e xdx =$$

$$= \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{1}{4}\left(e^2-1\right)$$

Aniq integral yordamida yuzalarni, yoy uzunligini, o‘q atrofida aylanishdan hosil bo‘ladigan jism hajmlarini hisoblash.

$y=f(x)$ funksiya grafigi, $x=a,\ x=b$ ikkita to‘g‘ri chiziq va Ox o‘q bilan chegaralangan figura egri chiziqli trapesiya deyiladi.

Bunday egri chiziqli trapesiyaning yuzi $f(x)\ge 0$ bo‘lsa,

$$S=\int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.

$y=f_1(x)$ va $y=f_2(x)$ $(f_2(x)\ge f_1(x))$ egri chiziqlar va $x=b$ ikkita to‘g‘ri chiziq bilan chegaralangan figuraning yuzi

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$$

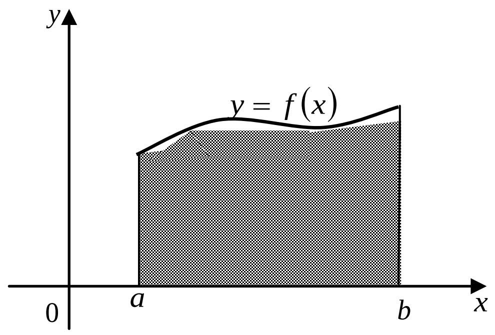
formula bo‘yicha hisoblanadi.

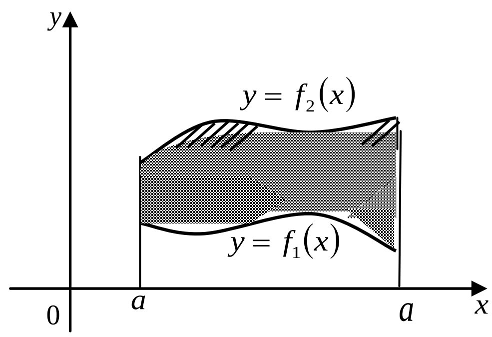
Agar egri chiziqli trapesiya $x=f(y)$ funksiya grafigi, $y=c,\ y=d$ to‘g‘ri chiziqlar va Oy o‘q bilan chegaralangan bo‘lsa, uning yuzi $f(y)\ge 0$ uchun

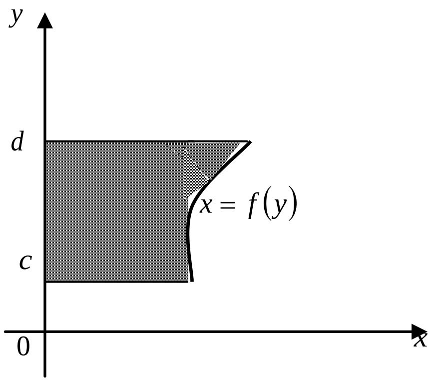
$$S=\int_a^b f(y)dx = \int_a^b xdy$$

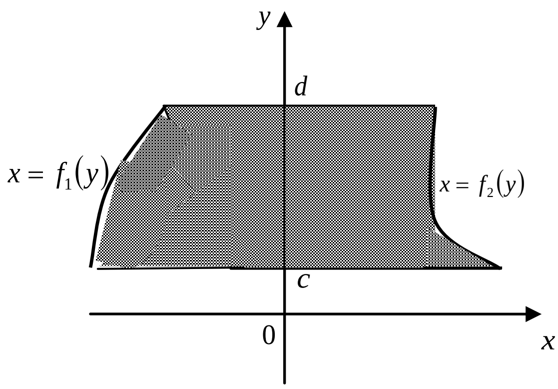
formula bo‘yicha hisoblanadi.

$x_1=f_1(y)$ va $x=f_2(y)$ $(f_2(y)\ge f_1(y))$ egri chiziqlar va $y=c$ va $y=d$ ikkita to‘g‘ri chiziq bilan chegaralangan figura yuzi









$$S = \int_c^d \left(f_2(y) - f_1(y) \right) dy$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.

Agar egri chiziq $x = x(t),\ y = y(t)$ parametrik tenglamalar bilan berilgan bo‘lsa, u holda shu egri chiziq, $x = a,\ x = b$ to‘g‘ri chiziqlar Ox o‘q bilan chegaralangan egri chiziqli trapesiyaning yuzi

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} y(t) dx(t)$$

formula bo‘yicha hisoblanadi, bunda t_1 va t_2 $a = x(t_1),\ b = x(t_2)$ $(y(t) \geq 0)$ tenglamalardan aniqlanadi.

$r = r(\varphi)$ funksiya grafigi va $\varphi = \alpha,\ \varphi = \beta$ ikkita nur bilan chegaralangan figura egri chiziqli sektor deyiladi, bunda φ va r - qutb koordinatalari. Egri chiziqli sektorning yuzi

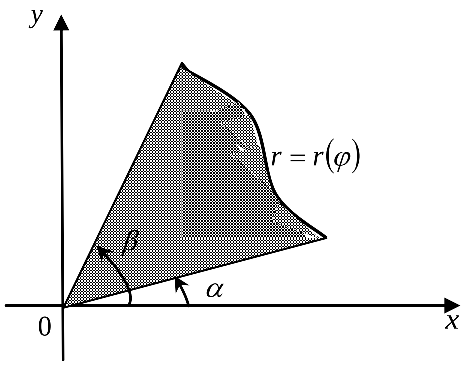
$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2 d\varphi$$

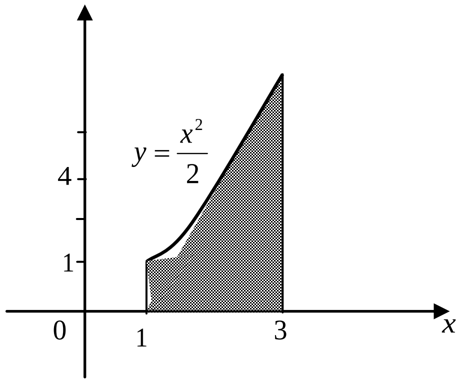
formula bo‘yicha hisoblanadi.

1-**misol.** $y = \frac{x^2}{2}$ parabola, $x = 1,\ x = 3$ to‘g‘ri chiziqlar va Ox o‘q bilan chegaralangan figuraning yuzini hisoblang.

Yechish. Avval shaklni chizamiz. Izlanayotgan yuz ushbu formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$S=\int_a^b ydx=\int_1^3 \frac{x^2}{2}dx=\left.\frac{x^3}{6}\right|_1^3=\frac{1}{6}\left(3^3-1^3\right)=\frac{26}{6}=\frac{13}{3} \text{ (kv.birl.).}$$





2-**misol.** $x=2-y-y^2$ egri chiziq va ordinatalar o‘qi bilan chegaralangan figuraning yuzini hisoblang.

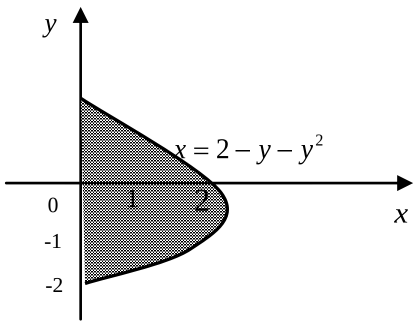
Yechish. Figura Oy o‘qqa yopishib turadi, uning yuzi $S=\int_c^d xdy$ formula bo‘yicha hisoblanadi.

$$S=\int_c^d xdy=\int_{-2}^1\left(2-y-y^2\right)dy=\left.\left(2y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\right|_{-2}^1=$$

$$=\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(-4-\frac{4}{2}+\frac{8}{3}\right)=\frac{9}{2} \text{ (kv.birl.).}$$

3-**misol.** $y=2-x^2$ va $y^3=x^2$ egri chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzini toping.

Ye**chish.** Berilgan tenglamalar sistemasini yechib, egri chiziqlarning kesishish nuqtalarini topamiz: $A(-1,1)$ va $B(1,1)$. Integrallash chegaralari bo‘lib $x=-1$ va $x=1$ xizmat qiladi. Figura yuzi $S=\int_c^d\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx$ formula bo‘yicha hisoblanadi.



$$S=\int_c^d\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(2-x^2-\sqrt[3]{x^2}\right)dx=\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=$$

$$=\left(2-\frac{1}{3}-\frac{3}{5}\right)-\left(-2+\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\right)=\frac{16}{15}+\frac{16}{15}=\frac{32}{15}\ \text{(kv.birl.).}$$

4-**misol.** Ellipsning

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t \end{cases}$$

parametrik tenglamalaridan foydalanib, uning yuzini toping.

Yechish. Ellipsning simmetrikligidan foydalanib, izlanayotgan yuzning to‘rtdan birini hisoblaymiz. $x=a\cos t$ tenglamada $x=0$ va $x=a$ deb olsak, ushbu integrallash chegaralariga ega bo‘lamiz: $t_1=\frac{\pi}{2},\ t_2=0$. Hisoblaymiz:

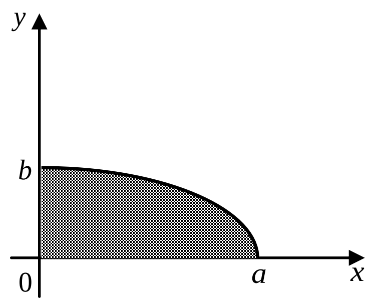
$$\frac{1}{4}S=\int_{t_1}^{t_2}y\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}b\sin t(-a\sin t)dt=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt=$$

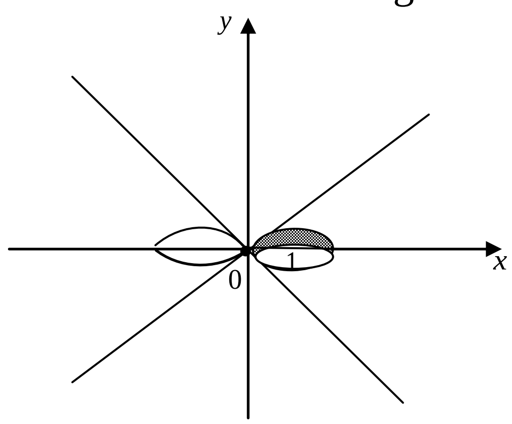
$$\frac{ab}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{ab}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi ab}{4}$$

Demak, butun figuraning yuzi

$S=\pi ab$ (kv.birl.).

5-**misol.** $r^2=2\cos 2\varphi$ Bernulli lemniskatasi bilan chegaralangan figura yuzini toping.





Yechish. Egri chiziqning simmetrikligidan foydalanib, oldin izlanayotgan yuzning to‘rtdan birini topamiz. Izlanayotgan yuzning to‘rtdan bir qismi φ ning 0 dan $\frac{\pi}{4}$ gacha o‘zgarishiga to‘g‘ri keladi.

Figura yuzini quyidagi formula bo‘yicha hisoblaymiz:

$$\frac{1}{4}S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2\varphi d\varphi=\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}.$$

Shunday qilib, izlanayotgan yuz: $S=\frac{1}{2}$ (kv. birl.)

Egri chiziq yoylari uzunliklarini hisoblash

Agar to‘g‘ri burchakli koordinatalarda $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada silliq (ya’ni $y'=f'(x)$ hosil uzluksiz) bo‘lsa, u holda bu egri chiziq mos yoyining uzunligi

$$l=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.

Egri chiziq

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$$

Parametrik tenglamalar bilan berilgan bo‘lsa, bu egri chiziqning $t\in[t_1,t_2]$ parametrning monoton o‘zgarishiga mos yoyining uzunligi

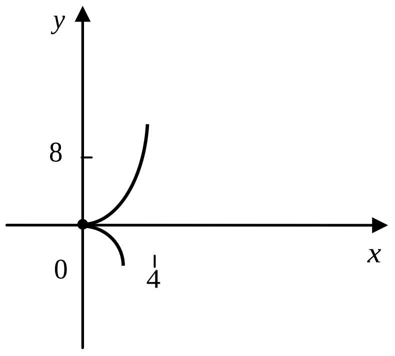
$$l=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2+(y')^2}dt$$

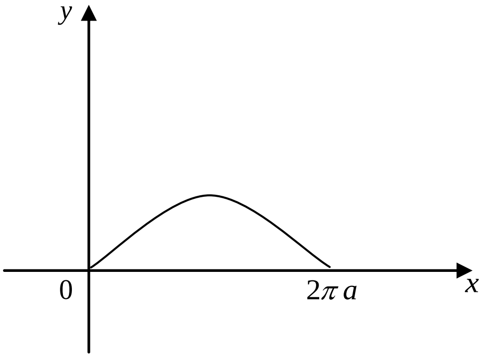
formula bilan hisoblanadi.

Agar silliq egri chiziq qutb koordinatalarda $r=r(\varphi)\ (\alpha\le\varphi\le\beta)$ tenglama bilan berilgan bo‘lsa, u holda yoy uzunligi

$$l=\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2+(r')^2}d\varphi$$

formula bilan hisoblanadi.





1-**misol.** $y^2=x^3$ yarim kubik parabolaning koordinatalar boshidan $A(4,\ 8)$ nuqtagacha bo‘lgan yoyi uzunligini toping.

Yechish. Avval shaklni chizamiz. Parabola tenglamasini differensiallaymiz:

$$y = x^{\frac{3}{2}},\ y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

Formulaga ko‘ra:

$$l = \int_0^4 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \frac{4\cdot 2}{9\cdot 3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$$ (uzun.birl.).

2-**misol.** Bitta sikloidagi uzunligini toping:

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t). \end{cases}$$

Yechish. sikloidaning barcha arkasi bir xil, qaysi arka bo‘ylab t parametr 0 dan 2π gacha o‘zgarsa, o‘sha arkani olamiz:

$$x' = a(1-\cos t),\ y' = a\sin t.$$

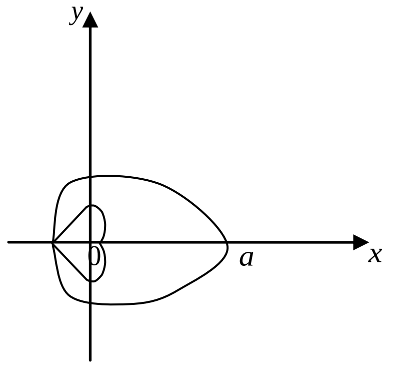
Shu sababli:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= -4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} - 8a$$ (uzun.birl.).

3-**misol.** $r = a\sin^4\frac{\varphi}{4}$ yopiq egri chiziqning uzunligini hisoblang.

Yechish. Berilgan funksiya juft funksiya. Shu sababli berilgan egri chiziq qutb o‘qiga nisbatan simmetrik. Nuqta butun egri chiziqni φ 0 dan 4π



gacha o‘zgarganda chiziladi, shunga ko‘ra egri chiziqning yarmi φ 0 dan 2π gacha o‘zgarganda chiziladi. $r' = a\sin^3\frac{\varphi}{4}\cdot\cos\frac{4}{\varphi}$. Demak,

$$\frac{l}{2}=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^8\frac{\varphi}{4}+a^2\sin^6\frac{\varphi}{4}\cos^2\frac{\varphi}{4}}d\varphi=a\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{\varphi}{4}d\varphi=$$

$$=-4a\int_0^{2\pi}\sin\frac{2\varphi}{4}d\left(\cos\frac{\varphi}{4}\right)=-4a\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{\varphi}{4}\right)d\left(\cos\frac{\varphi}{4}\right)=$$

$$=-4a\left(\cos\frac{\varphi}{4}-\frac{\cos^3\frac{\varphi}{4}}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=4a\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{3}a$$

Demak, $l=\frac{16}{3}a$ (uzun.birl.).

Hajmlarni hisoblash

Agar $S(x)$ yuz jismning Ox o‘qqa perpendikulyar tekislik bilan kesishishidan hosil bo‘lgan kesimi bo‘lib $[a,b]$ kesmada uzluksiz funksiya bo‘lsa, jismning hajmi

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

formula bilan hisoblanadi.

$y=f(x)$ egri chiziq va $x=a,\ x=b,\ y=0$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapesiya Ox o‘qi atrofida aylantirilsa, u holda aylanish jismining hajmi

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx$$

formula bilan hisoblanadi.

Agar shu figuraning o‘zi Oy o‘qi atrofida aylantirilsa, u holda aylanish jismining hajmi

$$V=2\pi\int_a^b xy\,dx$$

formula bilan hisoblanadi.

Agar $y_1=f_1(x)$ va $y_2=f_2(x)$ (bunda $f_1(x)\geq f_2(x)$) egri chiziqlar hamda $x=a,\ x=b$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan figura Ox o‘qi atrofida aylansa, aylanish jismining hajmi

$$V=\pi\int_a^b\left(y_2^2-y_1^2\right)dx$$

formula bilan hisoblanadi.

Agar shu figuraning o‘zi Oy o‘qi atrofida aylantirilsa, u holda aylanish jismining hajmi

$$V = 2\pi \int_a^b x(y_2 - y_1)dx$$

formula bilan hisoblanadi.

Agar egri chiziqli trapesiya $x = f(y)$ funksiya grafigi, $y = c,\ y = \alpha$ to‘g‘ri chiziqlar va Oy o‘qi bilan chegarlansa, Oy o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jismning hajmi

$$V = \pi \int_a^d x^2 dy$$

formula bilan hisoblanadi.

Agar shu figuraning o‘zi Ox o‘qi atrofida aylansa, aylanish jismining mos hajmi

$$V = 2\pi \int_c^d xy\,dy$$

formula bo‘yicha aniqlanadi.

Agar $x_1 = f_1(y)$ va $x_2 = f_2(y)$ (bunda $x_2 \geq x_1 \geq 0$) egri chiziqlar va $y = c,\ y = d$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan figura Oy o‘qi atrofida aylansa, u holda aylanish jismining hajmi

$$V = \pi \int_a^d \left(x_2^2 - x_1^2\right)dy$$

formula bo‘yicha topiladi.

Agar shu figuraning o‘zi Ox o‘qi atrofida aylansa, u holda aylanish jismining mos hajmi ushbuga teng bo‘ladi:

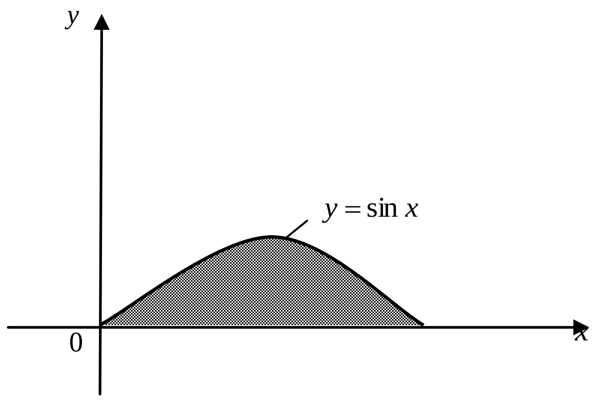
$$V = 2\pi \int_c^d y(x_2 - x_1)dy$$

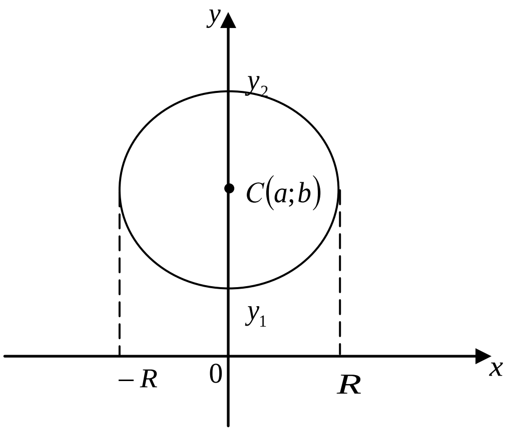
7.6. Agar egri chiziq parametrik yoki qutb koordinatalarda berilsa, u holda keltirilgan formulalarda mos o‘ringa qo‘yishlarni bajarish kerak bo‘ladi.

1-misol. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsoidning hajmini toping.

Yechish. Ellipsoidning Ox o‘qqa perpendikulyar biror tekislik bilan kesishdan hosil bo‘lgan kesimining yarim o‘qlari

$$b_1 = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \text{va} \quad c_1 = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$





bo‘lgan

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1$$

ellipsdir. Demak, kesim yuzi:

$$S(x)=\pi b_1c_1=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

bunda x o‘zgaruvchi – a dan a gacha o‘zgaradi. Shunga ko‘ra ellipsoidning hajmi ushbuga teng:

$$V=\int_{-a}^{a}S'(x)dx=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=$$

$$=\pi bc\left[\left(a-\frac{a^3}{3a^2}\right)-\left(-a+\frac{a^3}{3a^2}\right)\right]=\frac{4}{3}\pi abc \text{ (kub birl.).}$$

2-misol. $y=\sin x$ sinusoidning bitta yarim to‘lqini va Ox o‘qning $[0,\pi]$ kesmasi bilan chegaralangan figuraning a) Ox o‘qi atrofida va b) Oy o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jismlarning hajmini hisoblang.

Yechish. a) $V=\pi\int_{a}^{b}y^2\,dx=\pi\int_{0}^{\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}(1-\cos 2x)dx=$

$$=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi}=\frac{\pi}{2}(\pi)=\frac{\pi^2}{2} \text{ (kub birl.).}$$

b) $V=2\pi\int_{0}^{\pi}xy\,dx=2\pi\int_{0}^{\pi}x\cdot\sin x\,dx=\begin{cases}u=x,\ du=dx\\ dv=\sin dx,\ v=-\cos x\end{cases}=$

$$= 2\pi\left(-x\cdot\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x dx\right) = 2\pi^2 \text{ (kub birl.).}$$

3-misol. $x^2 + (y-b)^2 \le R^2 (b > R)$ doiraning Ox o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan torning hajmini toping.

Yechish. $x^2 + (y-b)^2 = R^2$ aylana tenglamasidan:

$$y_1 = b - \sqrt{R^2 - |x^2},\quad y_2 = b + \sqrt{R^2 - x^2}, \text{ (kub birl.).}$$

Shuning uchun

$$V = \pi\int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2\right)dx = \pi\int_{-R}^{R}\left[\left(b + \sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 - \left(b - \sqrt{R^2 - x^2}\right)^2\right]dx =$$

$$= 4\pi b\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}dx = \left\{\begin{array}{l} x = R\sin t. \\ dx = R\cos t dt, \end{array} \begin{array}{cc} x & t \\ -R & -\frac{\pi}{2} \\ R & \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} =$$

$$= 4\pi bR^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt = 2\pi bR^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1 + \cos 2t)dt = 2\pi bR^2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$2\pi^2 bR^2 \text{ (kub birl.).}$$

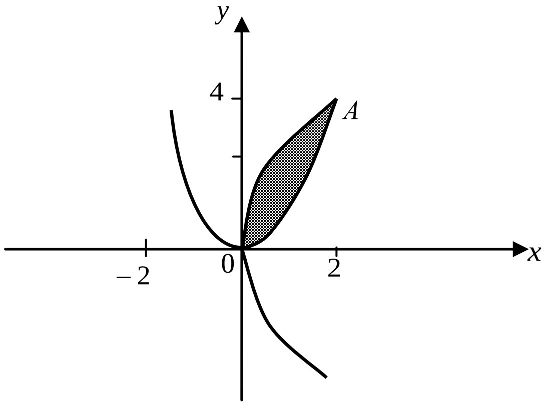
4-misol. $y = x^2$ va $8x - y^2$ parabolalar bilan chegaralangan figurani Oy o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

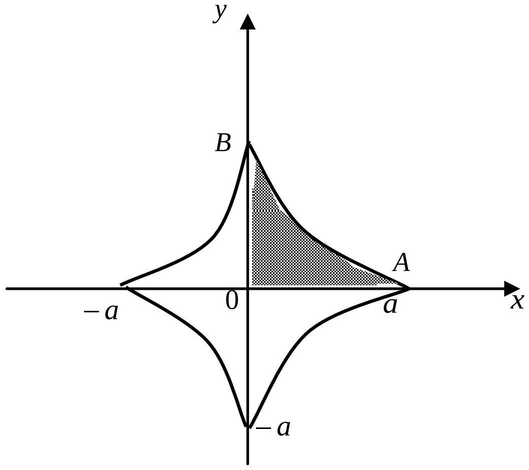
Yechish.

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = 8x \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan parabolalarning kesishish nuqtalarini topamiz:

$O(0,0)$ va $A(2,4)$.





$x_2(y)=\sqrt{y}\geq x_1(y)=\dfrac{y^2}{8}$ ga egamiz, o‘zgaruvchi y 0 dan 4 gacha o‘zgaradi. Demak,

$$V=\pi\int_c^d\left(x_2^2-x_1^2\right)dy=\pi\int_0^4\left(y-\frac{y^4}{64}\right)dy=\pi\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^5}{320}\right)\Bigg|_0^4=\pi\left(8-\frac{32}{10}\right)=\frac{24\pi}{5}$$ (kub birl.).

5-misol. $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ astroida bilan chegaralanagan figuraning Ox o‘qi atrofida aylantirilishidan hosil bo‘lgan jismning hajmini hisoblang.

Yechish. Izlanayotgan hajm *OAV* figurani aylantirishdan hosil bo‘lgan hajmning ikkilanganiga teng. Shuning uchun

$$.\ V=2\pi\int_0^a y^2dx$$

O‘zgaruvchini almashtiramiz:

$$V=2\pi\int_0^a y^2dx=\left\{\begin{matrix}x=a\cos^3 t & x & t\\ dx=-3a\cos^2 t\cdot\sin t dt, & 0 & \dfrac{\pi}{2}\\ y'=a\sin^3 t. & a & 0\end{matrix}\right\}=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a^2\sin^6 t\left(-3a\cos^2 t\sin t\right)dt=$$

$$=6\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\cos^2 tdt=-6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 t\right)^3\cos^2 td(\cos t)=-6\pi a^3\left(\frac{1}{3}\cos^3 t-\frac{3}{5}\cos^5 t+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{7}\cos^7 t-\frac{1}{9}\cos^9 t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=6\pi a^3\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{5}+\frac{3}{7}-\frac{1}{9}\right)=\frac{32}{105}\pi a^3$$ (kub. birl.).

1.1. $\int x\cdot 2^{-x}dx$ **1.2.** $\int\dfrac{\arcsin xdx}{\sqrt{1+x}}$

1.3. $\int\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ **1.4.** $\int\arcsin xdx$

1.5. $\int\dfrac{xdx}{\cos^2 x}$ **1.6.** $\int e^x\sin xdx$

1.7. $\int xarctgxdx$ **1.8.** $\int x\ln(x-1)dx$

1.9. $\int\dfrac{\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx$ **1.10.** $\int\sin^3 6x\cos 6xdx$

1.11. $\int\dfrac{xdx}{\cos^2 x^2}$ **1.12.** $\int\cos\sqrt{x}\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$

1.13. $\int\dfrac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ **1.14.** $\int\sqrt{\dfrac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$

1.15. $\int\dfrac{x^3dx}{1+x^8}$ **1.16.** $\int\dfrac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$

1.17. $\int \frac{x}{e^x}dx$

1.18. $\int (\ln x)^2 dx$

1.19. $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$

1.20. $\int \sqrt{1-x^2}dx$

1.21. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$

1.22. $\int xe^{2x}dx$

1.23. $\int (5x+6)\cos 2xdx$

1.24. $\int x\sin(1-x^2)dx$

1.25. $\int \sin(\lg x)\frac{dx}{x}$

1.26. $\int \frac{arctg\frac{x}{2}}{4+x^2}dx$

1.27. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}}$

1.28. $\int (5x^2+7x-\frac{2}{x})dx$

1.29. $\int \frac{x^2dx}{1+x^6}$

1.30. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$

1.31. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} ctg^3 xdx$

1.32. $\int_0^{\pi} x\sin xdx$

1.33. $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx$

1.34. $\int_1^2 e^{x+e^x}dx$

1.35. $\int_0^{2\pi} \cos 5x\cos xdx$

1.36. $\int_{-1}^1 xarctgxdx$

1.37. $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^2}$

1.38. $\int_1^e x\ln xdx$

1.39. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^3 xdx$

1.40. $\int_0^1 xe^{-x}dx$

1.41. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

1.42. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+x}$

1.43. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

1.44. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx$

1.45. $\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx$

1.46. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

1.47. $\int_0^2 \frac{x^4}{x^2+4}$

1.48. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

1.49. $\int_1^2 e^{x+e^x}dx$

1.50. $\int_0^2 \frac{x^2+1}{x-1}dx$

1.51. $\int\limits_{1}^{2} \frac{x-4}{x^3}dx$

1.52. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^4}{x^2+4}dx$

1.53. $\int\limits_{1}^{e} x\ln x dx$

1.54. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{ctg^2 x}{\sin^2 x}dx$

Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan yuzalar topilsin.

1.55. $xy = 4, \quad x = 1, \quad x = 2, \quad y = 0$

1.56. $y = \ln x, \quad x = 1, \quad x = 3, \quad y = 0$

1.57. $y = 9 - x^2, \quad y = 0, \quad x = 0$

1.58. $x = 4 - y^2, \quad x = 0$

1.59. $y = x^3, \quad y = x$

1.60. $y^2 = x^3, \quad x = 1$

1.61. $y = \ell^x, \quad y = \ell^{-x}, \quad x = 1$

Ko‘rsatilgan chiziqlar bilan chegaralangan yuzaning

$0x$ o‘qi, $0y$ o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan aylanma jism hajmi hisoblansin.

1.62. $y = 4 - x^2, \quad y = 0$

1.63. $x = 1 - y^2, \quad x = 0$

1.64. $y^2 = x^3, \quad x = 1, \quad x = 0$

1.65. $y = 2x, \quad x = 1, \quad y = 0$

1.66. $y = x, \quad x = 2, \quad y = 0$

1.67. $xy = 2, \quad x = 1, \quad x = 3, \quad y = 0$

1.68. $y^2 = 4x, \quad x = 1$

2. XOSMAS INTEGRALLAR

2.1. 1-tur xosmas integral va uning yaqinlashuvchanligi

2.2. 2-tur xosmas integral va uning yaqinlashuvchanligi

Berilgan $y = f(x)$ funksiyaning aniq integrali tushunchasini ikkita shart bajarilgan holda qaragan edik. Birinchidan, $[a,b]$ integrallash sohasining *a* va *b* chegaralari chekli sonlardan iborat deb olingan edi. Ikkinchidan, integral ostidagi $f(x)$ funksiya $[a,b]$ integrallash sohasida chegaralangan deb hisoblangan edi.

Ammo bir qator masalalarni yechishda quyi yoki yuqori chegaralaridan kamida bittasi cheksiz $(\pm\infty)$ yoki integral ostidagi $f(x)$ funksiya integrallash sohasida chegaralanmagan integrallar paydo bo‘ladi. Masalan, $y = e^{-x}$, $x = 0$ va $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyani yuzasini topish masalasi $[0, \infty)$ cheksiz soha bo‘yicha integral tushunchasini kiritishni va uni hisoblashni taqozo qiladi. Yoki $y = 2\sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$, parabola yoyining uzunligini topish masalasi $[0, 1]$ kesmada chegaralanmagan $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ funksiyani integrallash masalasiga keladi. Shu sababli aniq integral tushunchasini bunday hollar uchun umumlashtirishga to‘g‘ri keladi va bu yerda biz shu masala bilan shug‘ullanamiz.

I tur xosmas integrallar. Berilgan $y = f(x)$ funksiya $[a, +\infty)$ cheksiz yarim oraliqda aniqlangan va ixtiyoriy chekli $b \geq a$ uchun $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi, ya’ni

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx$$

integral mavjud bo‘lsin.

1-Ta’rif: $y = f(x)$ funksiyaning $[a, +\infty)$ cheksiz yarim oraliq bo‘yicha **I tur xosmas integrali** deb yuqori chegarasi o‘zgaruvchi $F(b)$ integralning $b \to +\infty$ bo‘lgandagi limitiga aytiladi.

$y = f(x)$ funksiyaning $[a, +\infty)$ cheksiz yarim oraliq bo‘yicha I tur xosmas integrali

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad (1)$$

deb belgilanadi va, ta’rifga asosan,

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} f(x)dx \qquad (2)$$

kabi aniqlanadi.

Geometrik nuqtai nazardan (1) xosmas integral $y = f(x)\,[f(x) \geq 0]$, $x = a$ va $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan cheksiz shaklning yuzasini ifodalaydi.

2-Ta'rif: Agar (2) limit mavjud va chekli bo'lsa, unda (1) xosmas integral ***yaqinlashuvchi***, aks holda esa ***uzoqlashuvchi*** deyiladi.

(1) xosmas integralni qarashda ikkita masala paydo bo'ladi.

I. (1) xosmas integral yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlash;

II. (1) xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lgan holda uning qiymatini topish.

Misol sifatida ushbu I tur xosmas integralni qaraymiz:

$$I_a = \int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^a}, \; a > 0 \qquad (3)$$

Bu integralni uch holda tahlil etamiz.

1. Dastlab $a > 1$ holni qaraymiz. Bu holda xosmas integral ta'rifi va Nyuton – Leybnits formulasiga asosan quyidagi natijani olamiz:

$$I_a = \lim_{b\to+\infty} \int_{a}^{b} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{a}^{b} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - a^{1-\alpha}\right) = \frac{1}{1-a}\left(0 - a^{1-\alpha}\right) = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$$

Demak, bu holda qaralayotgan (3) xosmas integral yaqinlashuvchi va uning qiymati $a^{1-a}/(a-1)$ bo'ladi.

2. Endi $a = 1$ holni tahlil etamiz:

$$I_1 = \lim_{b\to+\infty} \int_{a}^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln x \Big|_{a}^{b} = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln a) = \infty$$

Demak, bu holda (3) xosmas integral uzoqlashuvchi.

3. $a < 1$, ya'ni $1 - a > 0$ holni ko'rib chiqamiz:

$$I_a = \lim_{b\to+\infty} \int_{a}^{b} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{a}^{b} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{b\to+\infty} \left(b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right) = \infty$$

Demak, bu holda ham (3) xosmas integral uzoqlashuvchi ekan.

Shunday qilib, (3) xosmas integral $a > 1$ holda yaqinlashuvchi, aks holda, ya'ni $a \leq 1$ bo'lganda uzoqlashuvchi bo'ladi. Bu natijaning geometrik ma'nosi shundan iboratki, tekislikdagi

$$y = \frac{1}{x^a}\,(x > 0,\; a > 0),\; x = 1,\; y = 0$$

chiziqlar bilan chegaralangan yarim cheksiz geometrik shakllar $\alpha > 1$ holda qiymati $S = a^{1-\alpha} / (\alpha - 1)$ bo‘l gan chekli yuzaga ega.

Aksincha, $\alpha \le 1$ bo‘lganda esa bu geometrik shakllar cheksiz yuzaga ega bo‘ladi.

Ko‘p hollarda (1) xosmas integralning aniq qiymatini bilish shart bo‘lmasdan, uning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini va, yaqinlashuvchi bo‘lgan holda, qiymatini baholash yetarlidir. Bunday hollarda quyidagi teoremalardan foydalaniladi.

1-Teorema: Agar $a \le x < \infty$ cheksiz yarim oraliqda $0 \le f(x) \le g(x)$ va $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ unda xosmas integral ham yaqinlashuvchi va quyidagi tengsizlik o‘rinli bo‘ladi:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

2-Teorema: Agar $a \le x < \infty$ cheksiz yarim oraliqda $0 \le g(x) \le f(x)$ va $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi bo‘lsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ unda xosmas integral ham uzoqlashuvchi bo‘ladi:

Bu teoremaning isboti 1-teorema isboti singari amalga oshiriladi va o‘quvchiga mustaqil ish sifatida havola etiladi.

Masalan, $I = \int_1^{\infty} \frac{x+4}{\sqrt{x^3}} dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi ekanligini ko‘rsatamiz. Haqiqatan ham, $x \ge 1$ bo‘lganda, integral ostidagi funksiya

$$f(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = g(x)$$

shartni qanoatlantiradi va

$$\int_1^{+\infty} g(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \to +\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b = \lim_{b \to +\infty} \left(2\sqrt{b} - 2\right) = +\infty$$

Bu yerdan, 2-teoremaga asosan, berilgan *I* integral uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Agar xosmas integral ostidagi $f(x)$ funksiya turli ishorali qiymatlarni qabul etsa, unda quyidagi teoremadan foydalanish mumkin.

3-Teorema: Agar $x \ge a$ $x \geq a$ bo‘lganda $|f(x)| \le g(x)$ va $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ unda xosmas integral ham yaqinlashuvchi va

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \le \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx \le \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx \qquad (4)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.
Masalan, ixtiyoriy λ haqiqiy soni uchun

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^{\alpha}} dx \;\; (\alpha > 1, \;\; a > 0) \qquad (5)$$

xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘ladi, chunki

$$\left| \frac{\cos \lambda x}{x^{\alpha}} \right| \le \frac{1}{x^{\alpha}} = g(x) \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^{\alpha}} dx \le \int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$$

3-Ta’rif: Agar $J = \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, unda $I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral ***absolut yaqinlashuvchi*** deyiladi.

Agar *I* yaqinlashuvchi, *J* esa uzoqlashuvchi bo‘lsa, unda *I* xosmas integral ***shartli yaqinlashuvchi*** deb ataladi.

Masalan, (5) xosmas integral $a > 1$ holda absolut yaqinlashuvchi, $0 < a \le 1$ holda esa shartli yaqinlashuvchi ekanligini ko‘rsatish mumkin.

Yuqoridagi (4) tengsizlikdan absolut yaqinlashuvchi xosmas integral yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Agar $y = f(x)$ funksiya $(-\infty, b]$ cheksiz yarim oraliqda aniqlangan bo‘lsa, uning bu soha bo‘yicha I tur xosmas integrali yuqoridagi (2) tenglikka o‘xshash tarzda quyidagicha aniqlanadi:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a = -\infty} \int\limits_a^{b} f(x)dx \qquad (6)$$

Bu xosmas integral uchun ham uning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligi 2-ta’rif asosida aniqlanadi.

Masalan, har qanday chekli *b* va $\lambda > 0$ sonlari uchun $I = \int\limits_{-\infty}^{b} e^{\lambda x} dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi, chunki

$$I=\int_{-\infty}^{b}e^{\lambda x}dx=\lim_{a=-\infty}\int_{a}^{b}e^{\lambda x}dx=\frac{\lim\limits_{a\to-\infty}1}{\lambda}e^{\lambda x}\Big|_{a}^{b}=\frac{\lim\limits_{a\to-\infty}1}{\lambda}\left(e^{b}-e^{a}\right)=\frac{1}{\lambda}\left(e^{b}-0\right)=\frac{e^{b}}{\lambda}$$

Agar $y=f(x)$ funksiya cheksiz $(-\infty,\infty)$ oraliqda aniqlangan bo‘lsa, uning bu oraliq bo‘yicha I tur xosmas integrali yuqorida kiritilgan xosmas integrallar orqali

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{\infty}f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c}f(x)dx+\lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b}f(x)dx \qquad (7)$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bunda $c-$ ixtiyoriy chekli son, jumladan 0 bo‘lishi mumkin.

4-Ta’rif: Agar (7) tenglikning o‘ng tomonidagi ikkala xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, unda tenglikning chap tomonidagi xosmas integral ham ***yaqinlashuvchi*** deyiladi. Agar o‘ng tomondagi xosmas integrallardan kamida bittasi uzoqlashuvchi bo‘lsa, unda chap tomondagi xosmas integral ***uzoqlashuvchi*** deb ataladi.

Masalan,

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2}}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^{2}}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2}}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^{2}}+\lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^{2}}=\lim_{a\to-\infty}arctg\Big|_{a}^{0}+\lim_{b\to+\infty}arctg\Big|_{0}^{b}=\pi\ ,$$

ya’ni J xosmas integral yaqinlashuvchi ekan. Demak, $y=1/\left(1+x^{2}\right),\ x\in(-\infty,+\infty)$, va $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan cheksiz geometrik shakl chekli va π soniga teng yuzaga ega bo‘ladi.

II tur xosmas integrallar. Endi chegaralanmagan funksiyalar uchun aniq integral tushunchasini umumlashtiramiz. Berilgan $y=f(x)$ funksiya $(a,\,b]$ yarim oraliqda chegaralanmagan, ammo ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun bu funksiya $[a+\varepsilon,\,b]$ kesmada chegaralangan va integrallanuvchi bo‘lsin. Bu holda

$$F(\varepsilon)=\int_{a,\,+\varepsilon}^{b}f(x)dx,\ \ \varepsilon<0$$

funksiyani qarash mumkin.

5-Ta’rif: $F(\varepsilon)$ funksiyaning $\varepsilon\to0+0$ holdagi o‘ng limiti berilgan $f(x)$ funksiyaning $[a,\,b]$ kesma bo‘yicha ***II tur xosmas integrali*** deb ataladi.

Berilgan $f(x)$ funksiyaning $[a,\,b]$ kesma bo‘yicha II tur xosmas integrali quyidagicha belgilanadi va aniqlanadi:

$$\int_{a,}^{b}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\leftarrow0\ +0}F(\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\leftarrow0\ +0}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx \qquad (8)$$

limitga aytiladi.

6-Ta’rif: Agar (8) limit mavjud va chekli bo‘lsa, u holda II tur xosmas integral ***yaqinlashuvchi*** deyiladi. Aks holda bu xosmas integral ***uzoqlashuvchi*** deb ataladi.

Misol sifatida ushbu II tur xosmas integralni ko‘ramiz:

$$I(\alpha)=\int_0^b \frac{dx}{x^\alpha}\left(0<b<+\infty,\ \alpha>0\right) \tag{9}$$

Bu yerda uch holni qaraymiz.

1. Dastlab 0<α<1 holni tahlil etamiz:

$$I(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_\varepsilon^b \frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{\alpha-1}\right|_\varepsilon^b=\frac{1}{\alpha-1}\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(b^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha}\right)=b^{1-\alpha}$$

Demak, bu holda (9) II tur xosmas integral yaqinlashuvchi va uning qiymati $b^{1-\alpha}$.

2. Endi α=1 holni o‘rganamiz:

$$I(1)=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_\varepsilon^b \frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\ln\Big|_\varepsilon^b=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\ln b-\ln\varepsilon\right)=+\infty\ .$$

Demak, bu holda (9) II tur xosmas integral uzoqlashuvchi bo‘ladi.

3. α>1 holni qaraymiz:

$$I(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_\varepsilon^b \frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{\alpha-1}\right|_\varepsilon^b=\frac{1}{\alpha-1}\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(b^{1-\alpha}-\varepsilon^{1-\alpha}\right)=-\infty\ .$$

Demak, bu holda ham (9) II tur xosmas integral uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Shunday qilib, (9) xosmas integral 0<α<1 holda yaqinlashuvchi, α≥1 holda esa uzoqlashuvchi ekan. Bu natijaning geometrik ma’nosi shundan iboratki, $y=1/x^\alpha$, $x=0$, $x=b>0$, $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan cheksiz geometrik shaklning S yuzasi 0<α<1 holda chekli va $S=b^{1-\alpha}$, α≥1 holda esa bu shakl yuzasi cheksiz bo‘lar ekan.

$y=f(x)$ funksiya $[a,b)$ yarim oraliqda chegaralanmagan, ammo ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun bu funksiya $[a,b-\varepsilon]$ kesmada chegaralangan va integrallanuvchi bo‘lsin. Bu holda $f(x)$ funksiyaning II tur xosmas integrali quyidagicha kiritiladi:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx\ .$$

Bu yerda ham tenglikning o‘ng tomonidagi limit mavjud va chekli bo‘lsa xosmas integral yaqinlashuvchi, aks holda – uzoqlashuvchi deyiladi.

Masalan,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}\ -2\lim_{\varepsilon\to 0+0}\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon}=-2\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\sqrt{\varepsilon}-1\right)=2\ .$$

Demak, bu II tur xosmas integral yaqinlashuvchi.

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^2 x}=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{dx}{\cos^2 x}=\lim_{\varepsilon\to 0+0} tgx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0+0} tg\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)=+\infty\ .$$

Demak, bu II tur xosmas integral uzoqlashuvchi.

Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmaning biror ichki $x=c$ nuqtasida chegaralanmagan bo‘lsa, bu holda II tur xosmas integral

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx \tag{10}$$

tenglik orqali kiritiladi. Bu xosmas integralning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo‘lishi 4-ta’rif singari aniqlanadi.

II tur xosmas integrallarning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini yetarli shartlari oldin I tur xosmas integrallar uchun ifodalangan 1-3 teoremalarga o‘xshash ifodalanadi.

2.1. $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{4+x^2}$ 2.2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$

2.3. $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}}dx$ 2.4. $\int_0^{\infty}\frac{x}{1+x^4}dx$

2.5. $\int_0^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$1. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ 2.6. $\int_1^{+\infty}e^{-x}dx$

2.7. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x}}$ 2.8. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+4)^2}$

2.9. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ 2.10. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^{2x}}$

2.11. $\int_1^{+\infty}(\ell^x+3)dx$ 2.12. $\int_1^{+\infty}(\ell^x+2)^3\ell^x dx$

2.13. $\int_0^1\frac{dx}{1-x}$ 2.14. $\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{3-x}}$

2.15. $\int_{-1/2}^{0}\frac{dx}{2x+1}$ 2.16. $\int_1^5\frac{dx}{x-4}$

2.17. $\int_0^2\frac{dx}{(x-2)^3}$ 2.18. $\int_1^4\frac{dx}{(x-3)^2}$

2.19. $\int_1^{\ell}\frac{dx}{x\ln x}$ 2.20. $\int_4^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$

2.21. $\int_2^6\frac{dx}{\sqrt{x-2}}$ 2.22. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

2.23. $\int_{-4}^{0}\frac{dx}{(x+4)^4}$ 2.24. $\int_{-3}^{0}\frac{dx}{x+2}$

3. IKKI O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYANING HUSUSIY HOSILALARI VA EKSTREMUMI

3.1. Ikki o‘zgaruvchili funksiya tushunchasi.

3.2. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning hususiy hosilalari tushunchasi.

3.3. Ikki o‘zgaruvchili funksiyani ekstremumga tekshirish.

3.4. Shartli ekstremum.

1. Agar biror *D* to‘plamning har bir (x, y) haqiqiy sonlar juftligi biror qoida bilan *E* to‘plamdagi yagona *z* haqiqiy songa mos qo‘yilgan bo‘lsa, u holda *D* to‘plamda ikki o‘zgaruvchining funksiyachi *z* aniqlangan deyiladi va quyidagi ko‘rinishlarda belgilanadi:

$z = f(x, y),\ z = z(x, y)$ va h.k.

D to‘plam funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi.

Geometrik nuqtai nazardan $z = f(x, y)$ funksiyaning $Oxyz$ to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasidagi tasviri (funksiyaning grafigi
Biror sirtdan iboratdir.

Istalgan chekli sondagi o‘zgaruvchining funksiyasi ham yuqoridagi kabi aniqlanadi.

1-misol. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish. Berilgan funksiya $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, ya’ni $x^2 + y^2 \leq 4$ shartda haqiqiy qiymatlar qabul qiladi. Demak, funksiyaning aniqlanish sohasi markazi koordinatalar boshida bo‘lgan radiusi 2 ga teng doiradan iborat.

2-misol. $u = \ln\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right)$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish. Berilgan funksiya $1 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$, ya’ni $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ shartda aniqlangan. Binobarin, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi markazi koordinatalar boshida, radiusi 1 ga teng shar bo‘ladi, bunda shar sirti (sfera) aniqlanish sohasiga kirmaydi.

Agar *x* o‘zgaruvchiga biror Δx orttirma berib, *u* ni o‘zgarishsiz qoldirsak, u holda $z = f(x, y)$ funksiya $\Delta_x z$ orttirma oladi, bu orttirma *z* funksiyaning *x* o‘zgaruvchi bo‘yicha xususiy orttirmasi deyiladi:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x,\ y) - f(x, y).$$

Xuddi shunday *u* o‘zgaruvchi Δy orttirma olib, *x* o‘zgarishsiz qolsa, u holda *z* funksiyaning *u* o‘zgaruvchi bo‘yicha xususiy orttirmasi quyidagicha yoziladi:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Agar $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ chekli limit mavjud bo‘lsa, u $z = f(x, y)$ funksiyaning erkli o‘zgaruvchi *x* bo‘yicha xususiy hosilasi deyiladi va $\frac{\partial z}{\partial x}$ yoki $f'_x(x, y)$ bilan belgilanadi. Demak,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$$

Agar $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ chekli limit mavjud bo‘lsa, u $z = f(x, y)$ funksiyaning erkli o‘zgaruvchi *u* bo‘yicha xususiy hosilasi deyiladi va $\frac{\partial z}{\partial y}$ yoki $f'_y(x, y)$ bilan belgilanadi.

Xususiy hosilalar uchun bir o‘zgaruvchi funksiyasini differensiallashning qoida va formulalar saqlanadi.

Istalgan chekli sondagi erkli o‘zgaruvchi funksiyasining xususiy hosilalari ham yuqoridagidek aniqlanadi.

3-misol. $z = arc\sin \frac{x}{y}$ funksiyaning xususiy hosilalarini toping.

Yechish. *u* ni o‘zgarmas deb, *x* bo‘yicha xususiy hosilani topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}} \left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

Endi *x* ni o‘zgarmas deb hisoblab, *u* o‘zgaruvchi bo‘yicha xususiy hosilani topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

4-misol. $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ funksiyaning xususiy hosilalarini toping.

Yechish. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}.$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}\cdot(-2y)=-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}\cdot(-2y)=-\frac{z}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}.$$

1. Agar x va u o‘zgaruvchilar mos ravishda Δx va Δy orttirmalar olsa, u holda $z=f(x,y)$ funksiya $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ to‘liq orttirma oladi. Bu to‘liq orttirmaning Δx va Δy larga nisbatan chiziqli bo‘lgan bosh qismi funksiyaning to‘liq differensiali deyiladi va dz orqali belgilanadi.

$z=f(x,y)$ funksiyaning to‘liq differensiali quyidagi formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

bu yerda $dx=\Delta x,\ dy=\Delta y.$

To‘liq differensialdan ko‘pincha funksiyaning taqribiy qiymatlarini hisoblash uchun foydalaniladi, chunki $\Delta z\approx dz$, ya’ni

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+\Delta z\ .$$

5-misol. $z=arctg\dfrac{y}{x}$ funksiyaning to‘liq differensialini toping.

Yechish. Dastlab xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

To‘liq differensial formulasiga ko‘ra:

$$dz=\frac{-ydx}{x^2+y^2}+\frac{xdy}{x^2+y^2}=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}\ .$$

6-misol. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ funksiyaning to‘liq differensialini toping.

Yechish. Xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot(-2y)=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Demak, to‘liq differensial:

$$dz = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{xdx - ydy + zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

7-misol. $1{,}02^{3{,}01}$ ni taqribiy hisoblang.

Yechish. $z = x^y$ funksiyani qaraymiz. Uning $x=1$ va $y=3$dagi qiymati $z=1^3=1$ ga teng.

$$dz = yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x\Delta y.$$

$x=1, y=3, \Delta x = 0{,}02$ va $\Delta y = 0{,}01$. Shuning uchun $dz = 3\cdot 1^2\cdot 0{,}02 + 1^3 \ln 1\cdot 0{,}01 = 0{,}06$ bo‘ladi. U holda izlanayotgan qiymat:

$$(1{,}02)^{3{,}01} \approx f(x,y) + dz = 1 + 0{,}06 = 1{,}06$$

1. Agar $z = f(x,y)$ funksiyaning $P_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning biror atrofidagi istalgan $P(x, y)$ nuqtasidagi qiymatidan katta, ya’ni $f(x_0, y_0) > f(x,y)$ bo‘lsa, $z = f(x,y)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada maksimumga ega deyiladi.

Agar $z = f(x,y)$ funksiyaning $P_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning birorta atrofidagi istalgan $P(x, y)$ nuqtasidagi qiymatidan kichik bo‘lsa, ya’ni $f(x_0, y_0) < f(x,y)$ bo‘lsa, $z = f(x,y)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada minmumga ega deyiladi.

Funksiyaning maksimumi yoki minimumi uning ekstremumi deyiladi. Funksiya ekstremumga ega bo‘lgan nuqta uning ekstremum nuqtasi deyiladi.

2. Ekstremumning zaruriy shartlari: agar $P_0(x_0, y_0)$ nuqta uzluksiz funksiyaning ekstremum nuqtasi bo‘lsa, u holda $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ bo‘ladi yoki bu hosilalarning akalli bittasi mavjud bo‘lmaydi.

Bu shartlar bajariladigan nuqtalar kritik nuqtalar deyiladi. Har qanday kritik nuqta ham ekstremum nuqtasi bo‘lavermaydi.

3. Ikkinchi tartibli hosilalarning $P_0(x_0, y_0)$ kritik nuqtadagi qiymatlarini

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0);\ B = f''_{xy}(x_0, y_0);\ C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

orqali belgilaymiz va $\Delta = AC - B^2$ diskriminantni tuzamiz.

Ekstremumning yetarli sharti.

a) agar $\Delta > 0$ bo‘lsa, $z = f(x,y)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada ekstremumga ega bo‘lib, bunda $A < 0$ (yoki $C < 0$) bo‘lganda P_0 nuqta maksimum nuqtasi, $A > 0$ (yoki $C > 0$) bo‘lganda minimum nuqtasi bo‘ladi;

b) agar $\Delta < 0$ bo‘lsa, P_0 nuqtada ekstremum mavjud emas;

v) agar $\Delta = 0$ bo‘lsa, ekstremum mavjud bo‘lishi ham, mavjud bo‘lmasligi ham mumkin.

8-misol. $z = xy(x + y - 2)$ funksiyaning ekstremumlarini toping.

Yechish. Funksiya butun *Oxu* tekislikda aniqlangan. Kritik nuqtalarni quyidagi tenglamalardan topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2 - 2y = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2xy - 2x = 0$$

Bu sistemani yechib, to‘rtta kritik nuqtani topamiz:

$P_1(0,0),\ P_2(2,\ 0), P_3(0,\ 2),\ P_4\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$. Ikkinchi tartibli xususiy hosilalar.

$$f''_{xx}(x,\ y) = 2y;\ \ f''_{xy}(x, y) = 2x + 2y - 2;\ \ f''_{yy}(x, y) = 2x$$

Har bir kritik nuqtadagi diskriminantni hisoblaymiz:

a) $P_1(0,0)$ nuqtada: $\Delta = AC - B^2 = (2\cdot 0)\cdot(2\cdot 0) - (2\cdot 0 + 2\cdot 0 - 2)^2 = -4 < 0$, demak ekstremum yo‘q (ekstremumning yetarli shartiga muvofiq);

b) $P_2(2,0)$ nuqtada: $\Delta = -4 < 0$, demak ekstremum mavjud emas;

v) $P_3(0,2)$ nuqtada: $\Delta = -4 < 0$, demak ekstremum mavjud emas;

g) $P_4\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ nuqtada: $\Delta = \frac{12}{9} > 0,\ A = \frac{4}{3} > 0$, demak funksiyaning minimum nuqtasiga egamiz, bu nuqtada $z_{\min} = f\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$.

4. Chegaralangan yopiq $\overline{D}$ sohada differensiallanuvchi funksiya o‘zining eng katta va eng kichik qiymatiga yo $\overline{D}$ soha ichida yotuvchi kritik nuqtada, yo bu bu soha chegarasida erishadi.

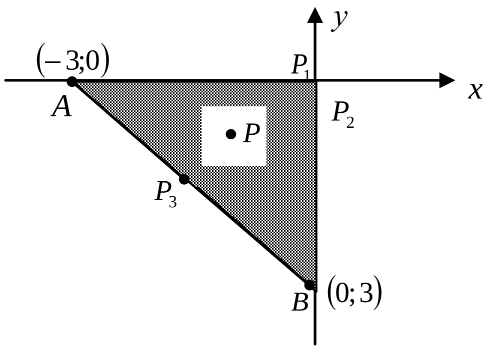
Yopiq $\overline{D}$ sohada funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatini topish uchun: a) soha ichida va uning chegarasida yotgan barcha kritik nuqtalar topiladi; b) funksiyaning bu nuqtalardagi va chegaradagi qiymatlari hisoblanadi; v) topilgan qiymatlar orasida eng katta va eng kichik qiymatlar topiladi.

9-misol. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ funksiyaning $x \le 0,\ y \le 0,\ x + y \ge -3$ sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechish. D soha AOB uchburchakdan iborat.

a) Ushbu sistemadan soha ichidagi kritik nuqtalarni topamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$



Bu yerdan: $x=-1,\ y=-1$, demak, $P_0(-1,\ -1)$ nuqtaga egamiz.

b) Funksiyani soha chegarasida tekshiramiz.
Tenglama $y=0$ bo‘lgan AO chegarada $z=x^2+x$ funksiyaga egamiz: kritik nuqtalarning abssissalarini $z'_x=2x+1=0$ tenglamadan aniqlaymiz: $x=-\frac{1}{2}$.

Demak, kritik nuqta: $P_1\left(-\frac{1}{2},0\right)$. Tenglamasi $x=0$ bo‘lgan BO chegarada $z=y^2+y$ funksiyaga egamiz: kritik nuqtalarning ordinatalarini $z'_y=2y+1=0$ tenglamadan topamiz: $y=-\frac{1}{2}$. Demak, kritik nuqta $P_2\left(0,-\frac{1}{2}\right)$. Tenglamasi $y=-3-x$ bo‘lgan AB tenglamasidan $y=-\frac{3}{2}$. Demak, kritik nuqta: $P_3\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$.

v) Berilgan funksiyaning P_0,P_1,P_2,P_3 kritik nuqtalardagi hamda chegaralar tutashadigan *A*, *V* va *O* nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$z_0=f(P_0)=f(-1,\ 1)=-1;$$

$$z_1=f(P_1)=f\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)=-\frac{1}{4};$$

$$z_2=f(P_2)=f\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4};$$

$$z_3=f(P_3)=f\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4};$$

$$z_4=f(O)=f(0,\ 0)=0;$$

$$z_5=f(A)=f(-3,\ 0)=6;$$

$$z_6=f(B)=f(0,\ -3)=6$$

g) Funksiyaning topilgan barcha qiymatlarini taqqoslab, $z_{\text{энг кат.}} = f(A) = f(B) = 6$ va $z_{\text{энг кич.}} = f(P_0) = -1$ degan xulosaga kelamiz.

3.4. Shartli ekstremum

$z = f(x,y)$ funksiyaning shartli ekstremumi deb bu funksiyaning *x* va *u* o‘zgaruvchilarning bog‘lanish tenglamasi deb ataluvchi $\varphi(x,y)=0$ tenglama bilan bog‘langanlik shartida erishadigan ekstremumiga aytiladi.

Ushbu $\Phi(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$ funksiya Lagranj funksiyasi deyiladi, bu yerda $\lambda -$ biror o‘zgarmas ko‘paytuvchi. Shartli ekstremumni topish $\Phi(x,y,\lambda)$ funksiyasining oddiy ekstremumini izlashga keltiriladi. Lagranj funksiyasi ekstremumining zaruriy sharti quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x,\ y) = 0 \end{cases}$$

Agar $P_0(x_0\,,\ y_0),\ \lambda_0 -$bu sistemaning istalgan yechimi va

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi_x(x_0,y_0) & \varphi_y(x_0,y_0) \\ \varphi_x(x_0,y_0) & \Phi''_{xx}(x_0,y_0,\lambda_0) & \Phi''_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0) \\ \varphi_y(x_0,y_0) & \Phi''_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0) & \Phi''_{yy}(x_0,y_0,\lambda_0) \end{vmatrix}$$

bo‘lsa, $\Delta < 0$ da $z = f(x,y)$ funksiya $P_0(x_0,y_0)$ nuqtada shartli maksimumga, $\Delta > 0$ da shartli minimumga ega bo‘ladi.

10. **Misol.** $z = x + 2y$ funksiyaning *x* va *u* o‘zgaruvchilar $x^2 + y^2 = 5$ tenglama bilan bog‘langan shartdagi ekstremumini toping.

Yechish. Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$\Phi(x,y,\lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Quyidagi egamiz:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 + 2x\lambda,\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2 + 2y\lambda,\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 5$$

$\Phi(x,y,\lambda)$ funksiya uchun ekstremumning zaruriy shartlari ushbu tenglamalar sistemasini beradi:

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0, \\ 2 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, ikkinta:

$$x_1=-1,\quad y_1=-2,\quad \lambda_1=\frac{1}{2}$$

va

$$x_2=1,\quad y_2=2,\quad \lambda_2=-\frac{1}{2}$$

yechimlarni topamiz.

Endi

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=2x;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=2y,$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=2\lambda;\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=2\lambda;\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=0$$

ekanligini e'tiborga olsak, u holda

1) $\lambda_1=\frac{1}{2},\ x_1=-1,\ y_1=-2$ da

$$\Delta_1=-\begin{vmatrix}0 & -2 & -4\\ -2 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 1\end{vmatrix}=20>0,$$

ya'ni funksiya $P_1(-1,-2)$ nuqtada shartli minimumga ega: $z_{\min}=-1-4=-5$

2) $\lambda_2=-\frac{1}{2},\ x_2=1,\ y_2=2$ da

$$\Delta_2=-\begin{vmatrix}0 & 2 & 4\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & 0 & -1\end{vmatrix}=-20<0,$$

ya'ni funksiya $P_2(1,2)$ nuqtada shartli maksimumga ega: $z_{\max}=1+2\cdot2=5$

3.1. Quyidagi funksiyalar hosilasini hosilaning ta'rifi yordamida hisoblang.

a) $y=x^3$ b)y=cosx

v) $y=\sqrt{x}$ g)y=tgx

3.2. a) $y=tgx$, $y'''=?$ b) $y=2^x+2^{-x}$, $d^{(n)}=?$

3.3. a) $y=(3x+5)^2\cdot(2x^2+3)\cdot(x+7)^2$. $y^{(6)}=?$ b) $x^3+y^3-3xy=0$. $d^2y=?$

3.4. $f(x)=e^{2x-4}+2\ln x$ funksiyalarning grafigiga $x_0=2$ nuqtasidan o`tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

3.5. a) $f(x)=x-\cos x$ funksiyalarning grafigiga $x_0=\frac{\pi}{4}$ nuqtasidan o`tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

3.6. a) $y=x\cos^3 x$. $y'''=?$ b) $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$. $d^{(n)}y=?$

3.7. a) $y = x^3 \ln x.\ \ y''' = ?$ b) $y = \dfrac{1+x}{1-x}.\quad d^{(n)}y = ?$

3.8. a) $f(x) = -\log_5(x^2 + 2x + 6)$ funksiyalarning grafigiga $x_0 = -1$ nuqtasidan o\`tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

3.9. a) $f(x) = 3^x + x^{-3}$ funksiyalarning grafigiga $x_0 = 2$ nuqtasidan o\`tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

3.10. a) $y = a^{3x}.\ y^{(5)} = ?$ b) $y = \sqrt{1+x^2} \cdot arctgx.\ d^3y = ?$

3.11. a) $y = \dfrac{7}{x^3},\ \dfrac{dy}{dx} = ?$ b) $x = t^2,\quad y = \dfrac{t^3}{3} - t$. $Y_x' = ?$

3.12. a) $y = -\dfrac{4}{11}x^5\sqrt{x} + \dfrac{2}{15}x\sqrt[7]{x}.\ y' = ?$ b) $x = e^{2t},\quad y = e^{3t}$. $Y_x' = ?$

3.13. a) $y = x^2 \sin 2x$. $y' = ?$ b) $x = a\cos t,\ y = a\sin t$. $Y_x' = ?$

3.14. a) $y = e^{4x} tg 2x$ b) $x = e^{-t}, y = e^{3t} + t. y_x' = ?$.

3.15. a) $y = (x^2+1)^{ctg 2x}$ • $y' = ?$ b) $x = a\cos 5t,\ y = a\sin 5t$ • $Y_x' = ?$

3.16. a) $y = \sqrt{x^2+1} \cdot ctg^2 3x$ b) $x = a\cos 5t,\ y = b\sin 3t$ • $Y_x' = ?$

3.17. a) $y = x^5 \ln x.\ \ y''' = ?$ b) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}.\ d^{(n)}y = ?$

3.18. a) $y = \ln^3\left(\sqrt{x} - 2^{-x^2}\right)$. $y' = ?$ b) $\sin(x-y) = \dfrac{x}{y}$ • $y' = ?$

3.19. a) $y = \ln\left(\sqrt{x} - 2^{-x^2}\right)$. $y' = ?$ b) $\sin(x+y) = \dfrac{x}{y}$ • $y' = ?$

3.20. a) $y = \ln tg\sqrt{x}$ b) $\cos(x-y) = \dfrac{x}{y}$

3.21. a) $y = \sin^2 x^3$ • $y' = ?$ b) $\cos(x+y) = \dfrac{x}{y}$ • $y' = ?$

3.22. a) $y = \dfrac{\ln^2 x}{2}.\quad y''' = ?$ b) $y = 5 - 3\cos^2 x.\ d^{(n)}y = ?$

3.23. a) $y = arctg(x + \sqrt{1+x^2}).\ y''' = ?$ b) $y = \ln x^2$ • $d^2y = ?$

3.24. a) $y = \dfrac{x}{2} + arctgx.\quad y''' = ?$ b) $y = \dfrac{\ln^2 x}{x} - 3x.\quad d^{(n)}y = ?$

3.25. a) $y = \lg^4(x^5 - \sin^5 2x)$• $y' = ?$ b) $x\ln y + y\ln x = e^{xy}$ • $y' = ?$

3.26. a) $y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}.\ \ y''' = ?$ b) $y = 2x - \dfrac{\cos x}{x}.\quad d^2y = ?$

3.27. a) $y = -x \cdot arctgx.$• $y''' = ?$ b) $y = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2}.\quad d^{(n)}y = ?$

3.28. a) $y = \ln\ln x \cdot (\ln\ln\ln x - 1).\ y' = ?$ b) $5^x + 5^y = 5^{x+y}$ • $y' = ?$

3.29. a) $y = x^3 \ln x$, $y'' = ?$ b) $y = x^n\sqrt{x}.\quad d^{(n)}y = ?$

3.30. a) $y = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{2x^3}{3} + x.\ y' = ?$ b) $5^x + 5^y = xy$ • $y' = ?$

4. SONLI QATORLAR

4.1. Sonli qator tushunchasi.
4.2. Sonli qator yaqinlashuvchiligi.
4.3. Sonli qator yaqinlashishini zaruriy sharti.
4.4. Xossalari.

Sonli $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ ketma – ketlik berilgan bo‘lsin. Ushbu

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

ko‘rinishidagi yig‘indi sonli qator deyiladi, $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ sonlar qatorning hadlari, qatorning *n* - hadi u_n esa qatorning umumiy hadi deb ataladi.

Sonli qatorning dastlabki *n* ta hadining yig‘indisi S_n orqali belgilanadi va qatorning *n* – xususiy yig‘indisi deyiladi:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Agar $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ – chekli limit mavjud bo‘lsa, qator yaqinlashuvchi, *S* – uning yig‘indisi deyiladi. Agar $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ bo‘lsa, yoki mavjud bo‘lmasa, qator uzoqlashuvchi deyiladi.

Quyidagi

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m} + \ldots$$

ifoda qatorning *n* qoldig‘i deyiladi.

Geometrik progressiyaning hadlaridan tuzilgan

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$$

qator $|q| \ge 1$ bo‘lganda uzoqlashuvchi, $|q| < 1$ bo‘lganda yaqinlashuvchidir (bunda u $S = \dfrac{a}{1-q}$ yig‘indiga ega).

Ushbu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

qator garmonik qator deb ataladi, u uzoqlashuvchidir.

Umumlashgan garmonik qator (yoki Dirixle qatori) deb ataluvchi

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

qator $p \le 1$ bo‘lganda uzoqlashuvchi, $p > 1$ da yaqinlashuvchidir.

Qatorning yaqinlashuvchi bo‘lishining zaruriy sharti: Agar $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ qator yaqinlashsa, u holda $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Qator uzoqlashuvchi bo‘lishning (qator uzoqlashishining) yetarli sharti: Agar $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ bo‘lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ qator uzoqlashadi.

1.Misol. Ushbu qatorning yig‘indisini toping:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$$

Yechish. qatorning umumiy hadi $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ni sodda kasrlar yig‘indisi ko‘rinishida ifodalaymiz:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}$$

Bundan

$$1=A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1)$$

Bu yerda ketma – ket $n=1, n=2, n=3$ qiymatlarni berib, hosil bo‘lgan chiziqli tenglamalar sistemasini yechib, $A=\frac{1}{2}, B=-1, C=\frac{1}{2}$ ni hosil qilamiz.

Shunday qilib,

$$u_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}$$

yoki

$$u_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

Bu yerdan

$$u_1=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right);$$

$$u_2=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{2}+\frac{1}{4}\right);$$

$$u_3=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right);$$

$$u_4=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right);$$

…………………………

$$u_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

Chap va o‘ng tomonlarni jamlaymiz:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

Shunday qilib, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$. Demak, qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi $S = \frac{1}{4}$ ga teng.

Yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari:

a) Agar $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ qator yaqinlashuvchi bo‘lib, uning yig‘indisi S ga teng bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n$ (λ – o‘zgarmas son) qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi va uning yig‘indisi $\lambda \cdot S$ ga teng bo‘ladi;

b) agar $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ qatorlar yaqinlashuvchi bo‘lib, yig‘indilari mos ravishda S hamda δ ga teng bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ qator ham yaqinlashuvchi bo‘lib, yig‘indisi $(S \pm \delta)$ ga teng bo‘ladi;

v) agar qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda unda istalgan chekli sondagi hadlarni tashlab yuborish yoki unga chekli sondagi hadlarni qo‘shish natijasida hosil bo‘lgan qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.

4.1. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 5n + 6}$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 13n + 42}$

4.2. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2 - 9}$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 6n + 5}$

4.3. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 + 3n - 2}$. b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{24}{9n^2 - 12n - 5}$

4.4. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 7n - 12}$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 7n - 12}$

4.5. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 15n + 56}$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 11n + 30}$

Quyidagi qatorlarning yaqinlashuvchiligini tekshiring.

4.6. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5 + 2}}$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{2})^{n+1} \frac{n}{n+1}$

4.7. a) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(e^{\frac{\sqrt{n}}{n^3 - 1}} - 1 \right)$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$

4.8. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (4n-1)}$. b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n!}$

4.9. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n\cdot 2^n}}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n^2+n+1}$

4.10. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$.

b) 1,1-1,02+1,003-1,0004+…

4.11. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n n^7$.

b) $\frac{1}{2}-\frac{4}{5}+\frac{7}{8}-\frac{10}{11}+\ldots$

4.12. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$.

b) $\frac{1}{10}+\frac{7}{10^2}-\frac{13}{10^3}+\frac{19}{10^4}+\frac{25}{10^5}-\frac{31}{10^6}+\ldots$

4.13. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$.

b) $\frac{2}{2^3+1}-\frac{3}{3^3+2}+\frac{4}{4^3+3}-\frac{5}{5^3+4}+\ldots$

4.14. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{2^n}\right)^{3n}$.

b) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots$

4.15. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{5^n}$.

b) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}-\frac{6}{7}+\ldots$

4.16. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n2}$.

b) $3\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}-3\frac{1}{8}-3\frac{1}{16}+3\frac{1}{32}+3\frac{1}{64}-3\frac{1}{128}-3\frac{1}{256}+\ldots$

4.17. a) $1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots$.

b) $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\frac{1}{\ln 6}-\frac{1}{\ln 7}+\ldots$

5. TURLI HIL SONLI QATORLARNING YAQINLASHUVCHANLIGI

5.1. Musbat hadli qatorlarning yaqinlashuvchanligi
5.2. Ishora almashuvchi qatorlarning yaqinlashuvchanligi
5.3. Ihtiyoriy ishorali qatorlarning yaqinlashuvchanligi

Taqqoslash alomati. Agar musbat hadli ikkita $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ qator berilgan bo‘lib, biror *N* nomerdan boshlab $u_n \le v_n$ tengsizlik bajarilsa, u holda:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ qatorning yaqinlashishidan $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ qatorning ham yaqinlashishi kelib chiqadi;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ qatorning uzoqlashishidan $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ qatorning ham uzoqlashishi kelib chiqadi.

1-misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \ldots$$

qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanini tekshiring.

Yechish. $u_n = \frac{1}{n \cdot 2^n} \le \frac{1}{2^n} = v_n$ ekanligi ravshan. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ qator maxraji $q = \frac{1}{2} < 1$ bo‘lgan geometrik progressiya hadlari yig‘indisidan iborat va u yaqinlashuvchi. Taqqoslash alomatiga ko‘ra berilgan qator ham yaqinlaguvchidir.

2-misol. Ushbu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \ldots + \frac{\ln n}{n} + \ldots$$

qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanini tekshiring.

Yechish. Barcha $n \ge 3$ uchun $u_n = \frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} = v_n$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – garmonik qatorning uzoqlashuvchanligidan va taqqoslash alomatidan berilgan qatorning ham uzoqlashuvchi bo‘lishi kelib chiqadi.

Taqqoslashning limit alomati. Agar hadlari musbat ikkita $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ qator berilgan bo‘lib, chekli va musbat $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A$ limit mavjud bo‘lsa, u holda ikkala qator bir vaqtda yaqinlashadi yoki bir vaqtda uzoqlashadi.

3-misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots$$

qatorning yaqinlashuvchi va uzoqlashuvchi ekanini tekshiring.

Yechish. Berilgan qatorni garmonik $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ qator bilan taqqoslaymiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}>0.$$

Garmonik qator uzoqlashuchi ekanidan berilgan qatorning ham uzoqlashuvchi ekani kelib chiqadi.

Dalamber alomati. Agar musbat hadli $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ qator uchun $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{v_n}=d$ mavjud bo‘lsa, u holda bu qator $d<1$ da yaqinlashadi, $d>1$ bo‘lganda uzoqlashadi.

4-misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$$

qatorning yaqinlashuvchi va uzoqlashuvchi ekanini tekshiring.

Yechish. Bu yerda $u_n=\frac{2n-1}{2^n}$ va $u_{n+1}=\frac{2n+1}{2^{n+1}}$,

shuning uchun

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}(2n-1)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{2n}}=\frac{1}{2}<1$$

Demak, berilgan qator yaqinlashadi.

Koshi alomati. Agar musbat hadli $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ qator uchun $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=C$ mavjud bo‘lsa, bu qator $C<1$ bo‘lganda yaqinlashadi, $C>1$ da uzoqlashadi.

5-misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

qatorning yaqinlashuvchi va uzoqlashuvchi ekanini tekshiring.

Yechish. $u_n = \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ bo‘lgani uchun

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1.$$

Demak, berilgan qator uzoqlashadi.

Koshining integral alomati. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} u$ qatorning hadlari musbat va o‘smaydigan bo‘lib, $x>1$ da aniqlangan uzluksiz, musbat va manoton kamayuvchi $f(x)$ funksiya uchun $f(1)=u_1,\ f(2)=u_2 \ldots,\ f(n)=u_n \ldots$ tenglamalar o‘rinli bo‘lsa, u holda

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

xosmas integral yaqinlashsa, berilgan qator ham yaqinlashadi va aksincha, xosmas integral uzoqlashsa, qator ham uzoqlashadi.

6-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(n^2+1)^2}$ qatorning yaqinlashuvchi va uzoqlashuvchi ekanini tekshiring.

Yechish. $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ deb olaylik. Bu funksiya Koshining integral alomatining barcha talabalarini qondiradi.

$$\int_1^{\infty}\frac{2xdx}{(x^2+1)^2} = \lim_{N\to\infty}\int_1^{N}\frac{d(1+x^2)}{(x^2+1)^2} = \lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{x^2+1}\right)\Bigg|_1^N = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N^2+1}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Demak, xosmas integral yaqinlashadi, shuning uchun berilgan qator ham yaqinlashadi.

O‘zgaruvchi ishorali qatorlar

Hadlarining ishoralari turlicha bo‘lgan qator o‘zgaruvchi ishorali qator deyiladi. Qatorning har bir musbat hadidan keyin manfiy had va har bir manfiy hadidan keyin musbat had kelsa, bunday qator ishoralari navbatlanuvchi qator deyiladi. ishorasi navbatlanuvchi qatorni bunday yozish mumkin.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n+1}u_n + \ldots (u_n > 0).$$

Leybnis alomati. Agar ishoralari navbatlashuvchi qatorda qator hadlarining absolyut qiymatlari kamayuvchi, ya’ni

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$$

bo‘lib, uning umumiy hadi u_n nolga intilsa: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, u holda bu qator yaqinlashuvchi bo‘ladi va uning yig‘indisi S ushbu $0 < S < u_1$ shartni qanoatlantiradi.

Ishorasi navbatlanuvchi qator qoldig‘i $|R_n| <= u_{n+1}$ tengsizlik bilan baholanadi.

7-misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$$

qatorning yaqinlashuchanligini tekshiring.

Yechish. Berilgan qator uchun Leybnis alomatining shartlari bajarilayapti, ya’ni

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots$$

va

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Shu sababli qator yaqinlashadi.

Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar. O‘zgaruvchi ishorali $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ qator berilgan bo‘lib, uning hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, berilgan qator absolyut yaqinlashuvchi qator deyiladi.

Agar o‘zgaruvchi ishorali qator yaqinlashuvchi bo‘lib, bu qator hadlarining absolyut qiymatlaridan tuzilgan qator uzoqlashuvchi bo‘lsa, u holda berilgan o‘zgaruvchi ishorali qator shartli yaqinlashuvchi qator deyiladi.

8-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha}{n^3} = \frac{\sin\alpha}{1^3} + \frac{\sin 2\alpha}{2^3} + \ldots + \frac{\sin n\alpha}{n^3} + \ldots$

qatorning yaqinlashuchanligini tekshiring.

Yechish. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin\alpha|}{n^3}$ qatorni qaraymiz. $|\sin n\alpha| \le 1$ bo‘lganligi uchun

$$u_n = \frac{|\sin\alpha|}{n^3} \le \frac{1}{n^3} = v_n$$

ni hosil qilamiz. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ qator yaqinlashuvchidir, chunki u umumlashgan garmonik qator bo‘lib, $p = 3 > 1$. Taqqoslash alomatiga ko‘ra, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin\alpha|}{n^3}$

qator ham yaqinlashuvchi. Demak, berilgan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin\alpha|}{n^3}$ qator absolyut yaqinlashuvchidir.

5.1. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\ldots$

5.2. $2-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}+\ldots$

5.3. $\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}-\frac{1}{8^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)^2}+\ldots$

5.4. $1-\frac{3}{4}+\frac{5}{9}-\frac{7}{10}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{n^2}+\ldots$

5.5. $\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}-\frac{4}{2^4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n}{2n}+\ldots$

5.6. $1-\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1+n}{1+n^2}+\ldots$

5.7. $\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}+\ldots$

5.8. $-\frac{1}{2}+\frac{2}{2\cdot 2^2}-\frac{3}{3\cdot 2^3}+\frac{4}{4\cdot 2^4}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

5.9. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$

6.FUNKSIONAL QATORLAR

6.1. Funksiyanal qator tushunchasi va uning yaqinlashuvchanligi.

6.2. Darajali qatorlar va ularning yaqinlashuvchanligi.

Hadlari x ning funksiyalaridan iborat bo‘lgan

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

qator funksional qator deyiladi.

Agar $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ sonli qator yaqinlashsa, funksional qator $x=x_0$ nuqtada yaqinlashuvchi deyiladi. x ning $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ qator yaqinlashuchi bo‘ladigan barcha qiymatlari to‘plami funksional qatorning yaqinlashish sohasi deyiladi.

$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$ yig‘indi funksional qatorning n – qismiy yig‘indi deyiladi. $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$ funksiya funksional qatorning yig‘indisi deb, $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$ ayirma esa qator qoldig‘i deb ataladi.

1-misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^4}+\ldots+\frac{1}{1+x^{2x}}+\ldots$$

funksional qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Yechish. $|x|=1$ bo‘lsa, yana uzoqlashuvchi

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

qatorni hosil qilamiz.

Agar $|x|>1$ bo‘lsa, u holda berilgan qatorning hadlari ushbu

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\ldots+\frac{1}{x^2n}+\ldots$$

cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya hadlaridan kichik bo‘ladi, demak taqqoslash alomatiga ko‘ra, qator yaqinlashadi.

Shunday qilib, berilgan funksional qatorning yaqinlashish sohasi $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ dan iborat bo‘ladi.

Agar yaqinlashuvchi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ funksional qator uchun har qanday $\varepsilon>0$ berilganda ham shunday $N(\varepsilon)$ nomer topish mumkin bo‘lsaki, $n\ge N$ bo‘lganda $[a,b]$ kesmadagi istalgan x uchun $|R_n(x)|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, berilgan funksional qator $[a, b]$ da tekis yaqinlashuvchi deyiladi.

Funksional qatorning tekis yaqinlashuvchi bo‘lishining Veyershtrass alomati: agar $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funksional qator uchun hadlari musbat sonli shunday $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ qator mavjud bo‘lib, $x \in [a,b]$ da $|u_n(x)| \le c_n$ bo‘lsa, u holda funksional qator bu $[a, b]$ kesmada tekis yaqinlashadi.

2-misol. Ushbu

$$\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^4+2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{x^2+n} + \ldots$$

qator x ning barcha qiymatlarida tekis yaqinlashishini isbot qiling.

Yechish. Leybnis alomatiga ko‘ra berilgan ishorasi navbatlashuvchi qator x ning istalgan qiymatlarida yaqinlashadi, shuning uchun bu qatorning qoldig‘i $|R_n(x)| < u_{n+1}(x)$, ya’ni $|R_n(x)| < \frac{1}{x^{2n+2}+n+1} < \frac{1}{n+1}$ tengsizlik yordamida baholanadi.

Ravshanki, istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday N nomer tanlash mumkinki, barcha $n > N$ va istalgan x uchun $|R_n(x)| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

Shunday qilib, berilgan qator tekis yaqinlashadi.

3-misol. Veyershtrass qator tekis yaqinlashadi $\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^2} + \ldots$ qator barcha x lar uchun tekis yaqinlashishini isbot qiling.

Yechish. $|u_n(x)| = \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \ge \frac{1}{n^2}$ va $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$ qator yaqinlashuvchi bo‘lgani uchun berilgan qator barcha x lar uchun tekis yaqinlashadi.

4.3. Tekis yaqinlashuvchi funksional qatorlarning xossalari:

a) agar tekis yaqinlashuvchi funksional qatorning hadlari $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, uning yig‘indisi $S(x)$ ham bu kesmada uzluksiz bo‘ladi;

b) agar $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ funksional qatorning hadlari $[a, b]$ kesmada aniqlangan va bu kesmada $u_n'(x)$ uzluksiz hosilalarga ega bo‘lsin. Agar bu kesmada berilgan qator yaqinlashuvchi va uning hadlari hosilalaridan tuzilgan

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x)$$

qator tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda funksional qatorning yig‘indisi $S(x)$ ham $[a,b]$ kesmada hosilaga ega bo‘ladi va

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

4-misol. Ushbu

$$arctg x + arctg \frac{x}{2\sqrt{2}} + arctg \frac{x}{3\sqrt{3}} + \ldots + arctg \frac{x}{n\sqrt{n}} + \ldots$$

qatorga qatorlarni hadma-had differensiallash to‘g‘risidagi xossani tatbiq qilish mumkinmi?

Yechish. Berilgan qatorni yaqinlashuvchi

$$x + \frac{x}{2^{3/2}} + \frac{x}{3^{3/2}} + \ldots + \frac{x}{n^{3/2}} + \cdots$$

qator bilan taqqoslaymiz (istalgan tayin *x* da).

Yetarlicha katta *n* larda $arctg \frac{x}{n 3/2} \sim \frac{x}{n^{3/2}}$ bo‘lgani uchun va taqqoslashning limit alomatiga ko‘ra berilgan qator ham yaqinlashadi. Berilgan qator umumiy hadining hosilasini topamiz:

$$u_n'(x) = \frac{n^{3/2}}{x^2 + n^3}$$

Hosilalardan tuzilgan qator quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\frac{1}{x^2 + 1^3} + \frac{2\sqrt{2}}{x^2 + 3^3} + \frac{3\sqrt{3}}{x^2 + 3^3} + \cdots + \frac{n\sqrt{n}}{x^2 + n^3} + \ldots$$

Bu qatorning hadlari yaqinlashuvchi $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n}} + \ldots$ qatorning mos hadlaridan kichik ekanini ko‘ramiz. Demak, Veyershtrass alomatiga ko‘ra hosilalardan tuzilgan qator $(-\infty, +\infty)$ oraliqda tekis yaqinlashadi, binobarin, qatorlarni differensiallash xossasini berilgan qatorga qo‘llash mumkin.

Ushbu

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

ko‘rinishidagi funksional qator darajali qator deyiladi. bu yerda $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$- o‘zgarmas sonlar darajali qatorning koeffitsientlari deyiladi.

Xususiy holda, $x_0 = 0$ da ushbu darajali qatorga ega bo‘lamiz:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n .$$

Abel teoremasi. a) Agar $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ darajali qator birorta $x = x_1 \neq 0$ nuqtada yaqinlashsa, u holda u x ning $|x| < |x_1|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday qiymatida absolyut yaqinlashadi;

b) agar $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ darajali qatorga birorta $x = x_1$ qiymatda uzoqlashsa, u holda u x ning $|x| > |x_1|$ shartni qanoatlantiruvchi istalgan qiymatlarida uzoqlashadi.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ darajali qator uchun shunday $(-R, R)$ oraliq mavjudki, u mazkur oraliq ichida absolyut yaqinlashib, undan tashqarida esa uzoqlashadi; bu oraliq qatorning yaqinlashish oralig‘i deyiladi. R soni yaqinlashsh radiusi deyiladi, u xususiy hollarda 0 yoki ∞ ga teng bo‘lishi ham mumkin. Yaqinlashish oralig‘ining chetki nuqtalari $x = \pm R$ da darajali qatorning yainlashishi yoki uzoqlashishi masalasi alohida hal qilinadi.

Agar qatorning barcha $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ koeffitsientlari nolga teng bo‘lmasa, $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ darajali qatorning yaqinlashish radiusi ushbu formula orqali aniqlanadi:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{yoki} \quad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Agar qator faqat juft yoki toq darajalarni o‘z ichiga olsa yoki darajalari qirrali bo‘lsa, va h.q., u holda yaqinlashish oralig‘i bevosita Dalamber yoki Koshi alomatlaridan foydalanib topiladi.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{np}$ qator uchun yaqinlashish radiusi quyidagicha topiladi:

$$R = \sqrt[p]{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|} \quad \text{yoki} \quad R = \sqrt[p]{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} .$$

5-misol. Quyidagi qatorning yaqinlashishini tekshiring:

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots + \frac{1}{n}x^n + \ldots$$

Yechish. Bu yerda $a_n = \frac{1}{n}, a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Qatorning yaqinlashish radiusini topamiz:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1\,.$$

Demak, berilgan darajali qator $(-1,1)$ oraliqda absolyut yaqinlashadi, $(-\infty;-1)\cup(1,+\infty)$ da esa uzoqlashadi. Berilgan qatorning bu oraliqning chekka nuqtalarida yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlaymiz. $x=1$ bo‘lganda berilgan qator $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ko‘rinishdagi garmonik uzoqlashuvchi qator bo‘ladi. $x=-1$ da esa $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ qatorni hosil qilamiz, bu qator yaqinlashadi, chunki u Leybnis alomati shartlarini qanoatlantiradi.

Shunday qilib, berilgan darajali qatorning yaqinlashish sohasi $[-1,\,1)$.

6-misol. Ushbu

$$1+\frac{x^3}{10}+\frac{x^6}{10^2}+\frac{x^9}{10^3}+\ldots+\frac{x^{3n}}{10^n}+\ldots$$

qatorning yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. $a_n=\frac{1}{10^n}$, shuning uchun yaqinlashish radiusini

$$R=\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}=\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}10}=\sqrt[3]{10}$$

formuladan topamiz. Demak, berilgan qatorning yaqinlashish oralig‘i $\left(-\sqrt[3]{10},\,\sqrt[3]{10}\right)$ bo‘ladi. Qatorning yaqinlashishini oraliqning chekka nuqtalarida tekshiramiz. Agar $x=\sqrt[3]{10}$ bo‘lsa, qator $1+1+1+\ldots$ ko‘rinishga ega bo‘lib, bu qator uzoqlashadi. Agar $x=-\sqrt[3]{10}$ bo‘lsa, qator $1-1+1-\cdots$ ko‘rinishda bo‘lib, u ham uzoqlashadi.

Shunday qilib, berilgan qatorning yaqinlashish sohasi $\left(-\sqrt[3]{10},\,\sqrt[3]{10}\right)$.

7-misol. Quyidagi

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Yechish. $a_n=\frac{1}{n!},\ a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$.

Qatorning yaqinlashish radiusini topamiz:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot(n+1)!}{n!\cdot 1}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

Demak, berilgan qator butun son o‘qida yaqinlashadi.

Agar umumiy ko‘rinishdagi

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

qator berilgan bo‘lsa, uning yaqinlashish radiusi R oldingi formulalar bilan aniqlanaveradi, yaqinlashish oralig‘i esa markazi $x=x_0$ nuqtada berilgan $(x_0-R,\ x_0+R)$ oraliq bo‘ladi.

8-misol. Ushbu

$$1-\frac{x-2}{2\sqrt{2}}+\frac{(x-2)^2}{4\sqrt{3}}-\frac{(x-2)^3}{8\sqrt{4}}+\ldots+(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^n\sqrt{n+1}}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^n\sqrt{n+1}}$$

qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Yechish. Qatorning yaqinlashish radiusini topamiz:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n\sqrt{n+1}}\cdot\frac{2^{n+1}\cdot\sqrt{n+2}}{1}=2\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}=2\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n+1}}=2$$

Demak, qator (0; 4) oraliqda absolyut yaqinlashadi.

$x=0$ da $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ qatorni hosil qilamiz, u uzoqlashadi, chunki uning hadlari uzoqlashuvchi garmonik qatorning hadlaridan katta $\left(u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\frac{1}{n+1}=v_n\right)$.

$x=4$ da $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ qatorni hosil qilamiz, u Leybnis alomatiga ko‘ra yaqinlashadi.

Shunday qilib, berilgan qatorning yaqinlashish sohasi $(0,4]$.

5.4. darajali qatorlarning xossalari:

a) yaqinlashish oralig‘ining ichida yotuvchi har qanday $[a,b]$ kesmada darajali qator tekis yaqinlashadi. Uning yig‘indisi yaqinlashish oralig‘ida uzluksiz funksiya bo‘ladi.

b) darajali qatorlarni ularning yaqinlashish oralig‘ida hadma – had integrallash va differensiallash mumkin.

9-misol. Ushbu

$$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$$

qatorning yig‘indisini toping.

Yechish. Qatorning yaqinlashish radiusini topamiz:

$$R=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{1(2n+1)}{(2n-1)\cdot 1}}=1$$

Demak, (-1; 1) oraliqda qator yaqinlashadi, shuning uchun uni yaqinlashish oralig‘ida hadma – had differensiallash mumkin. Berilgan qatorning yig‘indisini $S(x)$ orqali belgilasak,

$$S'(x)=1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n-2}+\ldots$$

Hosil qilingan qator – geometrik progressiya hadlari yig‘indisi va u $(-1,\ 1)$ oraliqda yaqinlashadi, uning yig‘indisi: $S'(x)=\frac{1}{1-x^2}$.

Hosilalardan tuzilgan qatorni integrallab, berilgan qatorning yig‘indisini topamiz:

$$S(x)=\int_0^x \frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|,\quad (|x|<1).$$

Quyidagi qatorlarning yaqinlashish sohasini toping

6.1. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(2n-1)^n}$

6.2. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n}$

6.3. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}\left(x^n+x^{-n}\right)$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-3)^n}{2n-1}$

6.4. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(2n-1)!}$

6.5. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$ b) $(x+1)+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 4}+\frac{(x+1)^3}{3\cdot 4^2}+\ldots+\frac{(x+1)^n}{n\cdot 4^{n-1}}+\ldots$

6.6. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n^n}x^n$ b) $(2x-5)-\frac{(2x-5)^2}{3}+\frac{(2x-5)^3}{5}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(2x-5)^n}{2n-1}+\ldots$

6.7. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{n}{2}}x^n}{(n+1)!}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n,\quad 0\le x\le 1$

6.8. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\left(\frac{x-2}{1+2x}\right)^n$

6.9. Qatorni hadma – had differensiallab, yig`indisini toping

a) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots$ b) $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots$

6.10. Qatorni hadma – had differensiallab yoki integrallab , yig`indisini toping.

a) $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\ldots$ b) $1-3x^2+5x^4-7x^6+9x^8-\ldots$

6.11. Quyidagi funksiyalarni darajali qatorga yoying.

a) $y = \ln(1+5x)$ b) $y = \sin\frac{x}{2}$

6.12. Quyidagi funksiyalarni darajali qatorga yoying.

a) $y = \frac{1}{1+x^4}$ b) $y = \ln(5+2x)$

6.13. Quyidagi funksiyalarni darajali qatorga yoying.

a) $y = e^x \ln(1+x)$ b) $y = \ln\left(6+x-x^2\right)$

7. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

7.1. O‘zgaruvchilarga ajraladigan differensial tenglamalar.
7.2. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama.
7.3. Bernulli tenglamasi.
7.4. To‘la differensial tenglama.

Erkli o‘zgaruvchi, noma’lum funksiya va uning hosila (differensial)larini bog‘lovchi

$$f\left(x,\ y,\ y',\ y'',\dots,y^{(n)}\right)=0$$

munosabat oddiy differensial tenglama deyiladi.

Differensial tenglamaga kiruvchi hosila (differensial)larning eng yuqori tartibi differensial tenglamaning tartibi deyiladi.

Differensial tenglamaning yechimi deb, tenglamaga qo‘yganda uni ayniyatga aylantiradigan differensiallanuvchi $y=\varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

Bunday tenglama uchun Koshi masalasi boshlang‘ich shartlar deb ataluvchi ushbu

$$y\big|_{x=x_0}=y_0\, y'\big|_{x=x_0}=y_0',\dots,y^{(n-1)}\big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topishdan iboratdir.

n –tartibli oddiy differensial tenglamaning umumiy yechimi deb, tenglamaning tartibi qancha bo‘lsa, shuncha ixtiyoriy o‘zgarmaslarga bog‘liq bo‘lgan shunday $y=\varphi(x,c_1,\dots,c_n)$ funksiyaga aytiladiki, bu funksiya uchun quyidagi shartlar bajariladi:

b) boshlang‘ich shartlar har qanday bo‘lganda ham, ixtiyoriy o‘zgarmaslarning shunday qiymatini topish mumkinki, bu qiymatlarda $y=\varphi(x,c_1,c_2,\dots,c_n)$ yechim boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiradi.

Ushbu

$$M(x)dx+N(y)dy=0$$

ko‘rinishdagi tenglama o‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama deyiladi. unin o‘ziga xos tomoni shundaki, dx oldida faqat x ga bog‘liq ko‘paytuvchi, dy oldida esa faqat u ga bog‘liq ko‘paytuvchi turadi. Bu tenlamaganing yechimi uni hadma – had integrallash yo‘li bilan aniqlanadi:

$$\int M(x)dx+\int N(y)dy=C.$$

Differensial tenglamananing oshqormas holda ifodalangan yechimi bu tenglamaning integrali deyiladi.

Integrallash doimiysi S ni yechim uchun qulay ko‘rinishda tanlash mumkin.

1-misol. $tgxdx - ctgydy = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Bu yerda o‘zgaruvchilari ajralgan tenglamaga egamiz. Uni hadma-had integrallaymiz:

$$\int tgx\,dx + \int ctgy\,dy = C$$

yoki $$-\ln|\cos x| - \ln|\sin y| = -\ln \overline{C},$$

bu yerda integrallash doimiysi S ni $-\ln \bar{c}$, ya’ni $C = -\ln \bar{c}$ orqali belgilash qulaydir, bu yerdan $\ln \sin y \cdot \cos x = \ln C$ yoki $\sin y \times \cos x = C -$ umumiy integral.

Ushbu

$$M_1(x) \cdot M_2(y)dx + N_1(x) \cdot N_2(y)dy = 0$$

tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama deyiladi. Bu ko‘rinishdagi tenglama $M_2(y) \cdot N_1(x) \neq 0$ ga bo‘lish natijasida o‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamaga keltiriladi.

2-misol. Ushbu

$$(1 + x^2)dy + ydx = 0$$

tenglamaning $y|_{x=1} = 1$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

Yechish. Bu yerda o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga egamiz. Tenglamani

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{1 + x^2} = 0$$

ko‘rinishga keltirib, integrallaymiz:

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{1 + x^2} = C \text{ yoki } \ln|y| + arctgx = C.$$

Tenglamaning integralini hosil qildik. Berilgan $y|_{x=1} = 1$ boshlang‘ich shartdan foydalanib, ixtiyoriy o‘zgarmas S ni topamiz:

$$\ln 1 + arctg1 = C$$

ya’ni $C = \frac{\pi}{4}$. Demak, $\ln y + arctgx = \frac{\pi}{4}$, bu yerdan izlanayotgan yechimni hosil qilamiz:

$$y = e^{\frac{\pi}{4} - arctgx}.$$

Agar $f(x,y)$ funksiyada x va u o‘zgaruvchilar mos ravishda tx va ty ga almashtirilganda (t – ixtiyoriy parametr)

$$f(tx,ty)=f(x,y)$$

shart bajarilsa, u holda $f(x,y)$ funksiya bir jinsli funksiya deb ataladi.

Bir jinsli funksiya $f(x,y)$ ni

$$f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Agar $y'=f(x,y)$ differensial tenglamada $f(x,y)$ bir jinsli funksiya bo‘lsa, bunday tenglama bir jinsli differensial tenglama deyiladi. bir jinsli differensial tenglamalar

$$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

ko‘rinishga keltiriladi va $y=u\cdot x$ o‘rniga qo‘yish yordamida o‘zgaruvchilari ajaraladigan differensial tenglamaga keltiriladi ($u=u(x)$ noma’lum funksiya):

$$xdy=(\varphi(u)-u)dx\ .$$

3-misol. Ushbu

$$\left(x^2+2xy\right)dx+xydy=0$$

tenglamaning yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani $y'=-\dfrac{x^2+2xy}{xy}$ ko‘rinishga keltiramiz. $f(x,y)=\dfrac{x^2+2xy}{xy}-$ bir jinsli funksiya. $y=ux, y'=u'x+u$ o‘rniga qo‘yishni bajaramiz. U holda berilgan tenglama

$$u'x+u=-\frac{x^2+2ux^2}{ux^2} \quad \text{yoki} \quad u'x+u=-\frac{1+2u}{u}$$

ko‘rinishga keladi, bu yerdan

$$u'x=-\frac{1+2u+u^2}{u} \quad \text{yoki} \quad u'x=-\frac{(1+u)^2}{u}.$$

O‘zgaruvchilarni ajratamiz: $\dfrac{udu}{(1+u)^2}=-\dfrac{dx}{x}$. Integrallab, topamiz:

$$\int\frac{udu}{(1+u)^2}=C-\int\frac{dx}{x} \quad \text{yoki} \quad \int\frac{(u+1)-1}{(1+u)^2}dy=C-\ln|x|.$$

Natijada quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\ln|1+u|+\frac{1}{1+u}=\ln\overline{C}-\ln x \quad \text{yoki} \quad \frac{1}{1+u}=\ln\frac{C}{x(1+u)}.$$

$u=\frac{y}{x}$ ekanligini hisobga olib, $\frac{x}{x+y}=\ln\frac{C}{x+y}$ ni hosil qilamiz.

Ushbu

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

ko‘rinishdagi tenglama $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ bo‘lganda

$$x=x_1+\alpha,\ \ y=y_1+\beta$$

o‘rniga qo‘yish yordamida bir jinsli tenglama ko‘rinishiga keltiriladi, bu yerda $\alpha,\beta-$ $a_1x+b_1y+c_1=0$ va $a_2x+b_2y+c_2=0$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasining koordinatalari. Agar $a_1b_2+a_2b_1=0$ bo‘lsa, u holda $a_1x+b_1y=t$ o‘rniga qo‘yish yordamida o‘zgaruvchilar ajratiladi.

4-misol. $(2x+y+1)dx+(x+2y-1)dy=0$ tenglamaning umumiy integralini toping.

Yechish. Tenglamani quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$$y'=-\frac{2x+y+1}{x+2y-1}.$$

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3\neq 0$ bo‘lgani uchun bu tenglama bir jinsli tenglamaga keltirilishi mumkin. Ushbu

$$\begin{cases} 2x+y=-1 \\ x+2y=1 \end{cases}$$

to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasini topamiz: $x=\alpha=-1;\ y=\beta=1$. Endi

$$x=x_1-1,\quad dx=dx_1,$$
$$y=y_1+1,\quad dy=dy_1,$$

deb, tenglamada o‘zgaruvchilarni almashtiramiz:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=-\frac{2x_1+y_1}{x_1+2y_1}.$$

Hosil qilingan bu bir jinsli tengamada $y_1=ux_1$ belgilash kiritsak, $y_1'=u'x_1+u$ bo‘ladi. U holda

$$u'x_1+u=-\frac{2x_1+ux_1}{x_1+2ux_1}\qquad \text{yoki}\qquad u'x_1+u=-\frac{2+u}{1+2u}.$$

Natijada o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$u'x_1=-\frac{2(u^2+u+1)}{1+2u}\qquad \text{yoki}\qquad \frac{(2u+1)du}{u^2+u+1}=-\frac{2dx_1}{x_1}.$$

Integrallab, topamiz:

$$\ln\left|u^2+u+1\right|=-2\ln|x_1|+\ln C$$

yoki $u^2+u+1=\frac{C}{x_1^2}$.

x_1 va y_1 o‘zgaruvchilarga qaytsak,

$$\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2+\frac{y_1}{x_1}+1=\frac{C}{x_1^2} \quad \text{yoki} \quad y_1^2+x_1y_1+x_1^2=C$$

$x_1=x+1,\ y_1=y-1$ almashtirishlarni hisobga olib, yechimni x va y o‘zgaruvchilarga nisbatan yozamiz:

$$(y-1)^2+(y-1)(x+1)+(x+1)^2=C$$

yoki oddiy shakl almashtirishlardan so‘ng

$$x^2+xy+y^2+x-y=\overline{C}$$

ko‘rinishdagi umumiy yechimga ega bo‘lamiz.

Ushbu

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

ko‘rinishdagi tenglama chiziqli differensial tenglama deyiladi. Bu yerda $P(x)$ va $Q(x)$ lar x ning ma’lum uzluksiz funksiyalari. Agar $Q(x)\neq 0$ bo‘lsa, tenglama chiziqli bir jinsli bo‘lmagan tenglama, agar $Q(x)=0$ bo‘lsa, chiziqli bir jinsli tenglama deyiladi.

$y=u(x)v(x)$ o‘rniga qo‘yish (bu yerda u va v noma’lum funksiyalar) yordamida tenglama

$$u'v+uv'+P(x)uv=Q(x)$$

yoki

$$u'v+u\left[v'+P(x)v\right]=Q(x)$$

ko‘rinishga keltiriladi.

u va v funksiyalardan biri (masalan, u) ixtiyoriy tanlab olinishi mumkinligidan foydalanib, v funksiyani oxirgi tenglamada qavs ichida turgan $(v'+Pv)$ ifoda nolga teng bo‘ladigan qilib olinadi. U holda ikkinchi noma’lum funksiya u ni topish uchun $u'v=Q(x)$ tenglamani yechish kifoya.

Shunday qilib, berilgan tenglama $y=uv$ o‘rniga qo‘yish yordamida o‘zgaruvchilari ajraladigan ushbu ikkita tenglamaga keltiriladi:

$$v' + P(x)v = 0,$$
$$u' v = Q(x).$$

Bularni integrallab berilgan tenglamaning umumiy yechimi topiladi:

$$y = e^{\int pdx}\left(C + \int Qe^{\int pdx}dx\right).$$

Ba’zan differensial tenglama u ning funksiyasi x ga nisbatan chiziqli bo‘lgan, ya’ni

$$x' + p(y)x = q(y)$$

ko‘rinishga keltirilishi mumkin. bu tenglama $x = uv$ o‘rniga qo‘yish orqali yuqoridagidek yechiladi.

5-misol. Ushbu

$$\left(x^2 - x\right)y' + y = x^2\left(2x - 1\right)$$

tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Tenglamani $\left(x^2 - x\right) \neq 0$ ga bo‘lib, ushbu ko‘rinishga keltiramiz:

$$y' + \frac{y}{x^2 - x} = \frac{x^2\left(2x - 1\right)}{x^2 - x}$$

yoki

$$y' + \frac{y}{x(x-1)} = \frac{x(2x-1)}{x-1}.$$

Tenglama chiziqli bo‘lib, bu yerda $P(x) = \frac{1}{x(x-1)},\ Q(x) = \frac{x(2x-1)}{x-1}$.

$y = uv,\ y' = u'v + uv'$ o‘rniga qo‘yish natijasida berilgan tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x(x-1)}\right) = \frac{x(2x-1)}{x-1}.$$

u ning oldidagi ko‘paytuvchini nolga tenglab:

$$\begin{cases} v' + \dfrac{v}{x(x-1)} = 0 \\ u'v = \dfrac{x(2x-1)}{x-1} \end{cases}$$

tenglamalarni hosil qilamiz. Dastlab birinchi tenglamaning istalgan xususiy yechimini topamiz:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x(x-1)} \qquad \text{yoki} \quad \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{x-(x-1)}{x(x-1)}dx.$$

Bundan

$$\ln|v| = -\ln|x-1| + \ln x$$

yoki

$$v=\frac{x}{x-1}.$$

Topilgan v funksiyani sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo‘yamiz:

$$u'\frac{x}{x-1}=\frac{x(2x-1)}{x-1},$$

bu yerdan $u'=2x-1$. Integrallasak:

$$u=x^2-x+C.$$

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi:

$$y=uv=\frac{x\left(x^2-x+C\right)}{x-1}.$$

6-misol. $\left(2x-y^2\right)y'=2y$ tenglamaning $y|_{x=1}=1$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama x ga nisbatan chiziqlidir. Haqiqatan ham,

$\left(2x-y^2\right)\frac{1}{x'}$ yoki $2x-y^2=2x'y$, yoki $x'-\frac{x}{y}=-\frac{y}{2}$ (bu yerda $p(y)=-\frac{1}{y},\ q(y)=-\frac{y}{2}$).

$x=uv,\ \ x'=u'v+uv'$ o‘rniga qo‘yish natijasida berilgan tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$u'v+u\left(v'-\frac{v}{y}\right)=-\frac{y}{2},$$

bu yerdan ushbu ikkita tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$v'-\frac{v}{y}=0 \quad \text{va} \quad uv'=-\frac{y}{2}.$$

Birinchi tenglamani yechib, topamiz:

$$\frac{dv}{v}=\frac{dy}{y} \quad \text{va} \quad v=y.$$

Ikkinchi tenglamaga $v=y$ ni qo‘yamiz:

$$u'y=-\frac{y}{2}, \quad \text{yoki} \quad u'=-\frac{1}{2}, \text{ yoki } u=C-\frac{y}{2}.$$

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi:

$$x=uv=y\left(C-\frac{y}{2}\right).$$

$y|_{x=1}=1$ boshlang‘ich shartdan

$$1=C-\frac{1}{2} \quad \text{yoki} \quad C=\frac{3}{2}.$$

Shunday qilib, berilgan tenglamaning xususiy yechimi $x=\frac{1}{2}y(3-y).$

Ushbu

$$y'+P(x)y=y^{\alpha}Q(x)$$

ko‘rinishdagi differensial tenglama Bernulli tenglamasi deyiladi. Bu tenglamada $\alpha-const,\ \alpha\neq 0,\ \alpha\neq 1,\ P(x)$ va $Q(x)$ funksiyalar x ning uzluksiz funksiyalari. Yangi $z=y^{1-\alpha}$ funksiya kiritilib, Bernulli tenglamasi ko‘rib chiqilgan

$$z'+(1-\alpha)zP(x)=(1-\alpha)Q(x)$$

chiziqli tenglamaga keltiriladi.

Bernulli tenglamasini yangi z o‘zgaruvchi kiritmay, chiziqli tenglama sifatida $y=uv$ o‘rniga qo‘yishdan foydalanib ham yechish mumkin.

7-misol. $y'+\frac{y}{x}=y^2\frac{\ln x}{x}$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama Bernulli tenglamasi bo‘lib, bu yerda $\alpha=2,\ y=uv,\ y'=u'v+uv'$ o‘rniga qo‘yishni bajaramiz, natijada:

$$u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=u^2v^2\frac{\ln x}{x}.$$

$u,\ v$ funksiyalarni topish uchun ushbu sistemani tuzamiz:

$$\begin{cases} v'+\dfrac{v}{x}=0, \\ u'v=u^2v^2\dfrac{\ln x}{x}. \end{cases}$$

Birinchi tenglamani integrallab, $v=\frac{1}{x}$ xususiy yechimni olamiz, uni ikkinchi tenglamaga qo‘ysak,

$$u'=-\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln x}{x}u^2$$

ga ega bo‘lamiz. o‘zgaruvchilarni ajratamiz va integrallaymiz:

$$\frac{du}{u^2}=\frac{\ln x}{x^2}$$

yoki

$$-\frac{1}{u}=\int\frac{\ln x}{x^2}dx,$$

bu yerda

$$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \left\{\begin{matrix} s = \ln x,\ ds = \dfrac{dx}{x} \\ dt = \dfrac{1}{x^2},\ t = -\dfrac{1}{x} \end{matrix}\right\} = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - C.$$

Demak, $-\frac{1}{u} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - C$, bu yerda $u = \frac{x}{Cx + 1 + \ln x}$

Berilgan Bernuli tenglamasining umumiy yechimi:

$$y = uv = \frac{x}{Cx + 1 + \ln x}$$

Agar

$$M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy = 0$$

ko‘rinishdagi tenglamaning chap qismi biror $u(x, y)$ funksiyaning to‘liq differensiali, ya’ni

$$du = M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy$$

bo‘lsa, u holda bunday tenglama to‘liq differensialli tenglama deyiladi.

Yuqoridagi tenglama to‘liq differensialli tenglama bo‘lishi uchun

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

shart bajarilishi kerak.

To‘liq differensialli tenglama ta’rifidan $du = 0$, bundan $u(x,\ y) = C$ ekanligi kelib chiqadi (*S* – ixtiyoriy o‘zgarmas).

$u(x, y)$ ni topish uchun *u* ni o‘zgarmas deb hisoblaymiz, u holda $dy = 0$ ekanidan $du = M(x, y)dx$ bo‘ladi. Bu tenglikni *x* bo‘yicha integrallasak,

$$u = \int M(x,\ y)dx + \varphi(y).$$

Oxirgi tenglikni *u* bo‘yicha differensiallaymiz va natijani $N(x,\ y)$ ga tenglaymiz, chunki $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,\ y).$

$$\int \frac{\partial M}{\partial y}dx + \varphi'(y) = N(x,\ y)$$

yoki

$$\varphi'(y) = N(x,\ y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}dx.$$

Bu ifodani *u* bo‘yicha integrallab, $\varphi(y)$ ni topamiz:

$$\varphi(y) = \int\left(N(x,\ y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}dx\right)dy + C.$$

Demak,

$$u(x,y)=\int M(x,y)dx+\int\left(N(x,y)-\int\frac{\partial M}{\partial y}dx\right)dy+C.$$

Bu ifodani ixtiyoriy o‘zgarmasga tenglab, tenglamaning umumiy integralini hosil qilamiz.

8-misol. $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Bu yerda $M(x,\ y)=3x^2+6xy^2,\ N(x,\ y)=6x^2y+4y^3.$

$\frac{\partial M}{\partial y}=12xy,\ \frac{\partial N}{\partial x}=12xy$, ya’ni $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

$\frac{\partial u}{\partial y}=M(x,\ y)$ bo‘lganligi sababli

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+6xy^2.$$

Bu tenglikni *x* bo‘yicha integrallaymiz:

$$u=x^3+3x^2y^2+\varphi(y).$$

Bundan

$$\varphi'(y)=\frac{\partial u}{\partial y}-6x^2y.$$

$\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,\ y)$ ekanligini hisobga olsak,

$$\varphi'(y)=6x^2y+4y^3-6x^2y=4y^3.$$

Bundan

$$\varphi(y)=y^4+C.$$

Demak,

$$u=x^3+3x^2y^2+y^4=C$$

yoki

$$x^3+3x^2y^2+y^4=C.$$

$y^{(n)}=f(x)$ ko‘rinishdagi tenglama o‘ng tomonni ketma – ket *n* marta integrallash yordamida yechiladi.

9-misol. $y''=xe^{-x}$ tenglamaning $y|_{x=0}=1,\ y'|_{x=0}=0$ boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani ketma – ket integrallab, umumiy yechimini topamiz:

$$y'=\int xe^{-x}dx=\left\{\begin{matrix}u=x, & du=dx\\ dv=e^{-x}dx, & v=-e^{-x}\end{matrix}\right\}=-xe^{-x}-e^{-x}+C_1,$$

$$y=\int\left(C_1-xe^{-x}-e^{-x}\right)dx=C_1x-\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right)+e^{-x}+C_2$$

yoki $y=xe^{-x}+2e^{-x}+C_1x+C_2.$

Boshlang‘ich shartlardan

$$\begin{cases} 1 = 2 + C_2, \\ 0 = -1 + C_1, \end{cases}$$

bu sistemaning yechimlari $C_1 = 1$ va $C_2 = -1$. Shunday qilib, berilgan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechim:

$$y = xe^{-x} + 2e^{-x} + x - 1.$$

$y^{(n)} = f\left(x, y^{(R)}, \ldots, y^{(n-1)}\right)$ ko‘rinishdagi tenglamada noma’lum funksiya va uning $(R-1)$- tartibgacha hosilalari qatnashmaydi. Bunday tenglamaning tartibini $y^{(R)} = p(x)$ o‘rniga qo‘yish yordamida pasaytirish mumkin.

10-misol. $y'' = \frac{y'}{x} \ln \frac{y'}{x}$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y' = p(x),\ y'' = p'(x)$ deb berilgan tenglamani

$$p' = \frac{p}{x} \ln \frac{p}{x}$$

ko‘rinishga keltiramiz. Birinchi tartibli bir jinsli tenglamani hosil qildik. Endi $p = ux,\ p' = u'x + u$ deb, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$u'x + u = u \ln u \quad \text{yoki} \quad \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

Uning yechimi

$$\ln|\ln u - 1| = \ln x + \ln C_1 \quad \text{yoki} \quad \ln u - 1 = Cx$$

bu yerda $u = e^{C_1 + 1}$. Dastlabki u o‘zgaruvchiga qaytib,

$$y' = p = ux = xe^{C_1 + 1} \quad \text{yoki} \quad y' = xe^{C_1 x + 1}$$

tenglamani olamiz. Bu tenglamani integrallab, umumiy yechimini topamiz:

$$y = \int xe^{C_1 x + 1}\, dx = \left\{ \begin{array}{l} S = x, \quad ds = dx \\ dt = e^{C_1 x + 1} dt,\ t = \frac{1}{C_1} e^{C_1 x + 1} \end{array} \right\} = \frac{x}{C_1} e^{C_1 x + 1} - \frac{1}{C_1^2} e^{C_1 x + 1} + C_2.$$

$y^{(n)} = f\left(y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ ko‘rinishdagi tenglamada x erkli o‘zgaruvchi qatnashmaydi. Bunday tenglamaning tartibini $y' = p(y)$ o‘rniga qo‘yish orqali pasaytirish mumkin.

11-misol.

$$y'' = \frac{1 + y^2}{н}$$ tenglamani yeching.

Yechish. $y' = p(y),\ y'' = p''p$ o‘rniga qo‘yishni amalga oshirsak, tenglama

$$p'p=\frac{1+p^2}{y}$$

ko‘rinishga keladi. Bu – o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. O‘zgaruvchilarni ajratib va integrallab, topamiz:

$$\frac{pdp}{1+p^2}=\frac{dy}{y} \quad \text{yoki} \quad \frac{1}{2}\ln\left|1+p^2\right|=\ln|y|+\ln C_1,$$

bu yerdan

$$1+p^2=C_1^2y^2 \quad \text{yoki} \quad p=\pm\sqrt{C_1^2y^2-1}.$$

y o‘zgaruvchiga qaytsak

$$y'=\pm\sqrt{C_1^2y^2-1} \qquad \text{yoki} \quad \frac{dy}{\sqrt{C_1^2y^2-1}}=\pm dx$$

bundan

$$\frac{1}{C_1}\ln\left|C_1y+\sqrt{C_1^2y^2-1}\right|=\pm(x+C_2)$$

7.1. a) $(4x^2+xy+y^2)dx+(4y^2+3xy+x^2)dy=0$ b) $y'-y\cdot tgx+y^2\cdot\cos x=0$

7.2. a) $x\cos\frac{y}{x}dy+\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)dx=0$ b) $(2x+1)\,y'=4x+2y$.

7.3. a) $\left(xye^{\frac{y}{x}}+x^2\right)dy-y^2C^{\frac{y}{x}}dx=0$ b) $y'-y=\sin x$

7.4. a) $y-xy'=x+yy'$ b) $y'-\frac{y}{1-x^2}-1-x=0, y(0)=0$

7.5 a) $y'=3\sqrt[3]{y^2};\quad y(2)=0$ b) $x(y'-y)=(1+x^2)e^x$

7.6 a) $y'ctgx+y=2;\quad y(0)=-1$ b) $xy'+y=e^x$

7.7 a) $xy'-y=y^3$ b) $(2x+1)y'+y=x$

7.8. a) $xyy'=1-x^2$ b) $y'-ytgx=ctgx$

7.10. a) $y'ctgx+y=2,\ y(0)=-1.$ b) $xy'+y=y^2\ln x$

7.11. a) $(2x+3y-1)dx+(4x+6y-5)dy=0$ b) $xy'-4y-x^2\cdot\sqrt{y}=0$

7.12. a) $3x^2ydx+2\sqrt{4-x^3}dy=0$ b) $y'+\frac{y}{1+x}+y^2\cdot\cos x=0$

7.13. a) $(xy-x^2)y'=y^2$ b) $(1-x^2)y'-xy=xy^2, y(0)=0{,}5$

7.14. a) $(x+y)dx+xdy=0$ b) $y'-y\cdot tgx+y^2\cdot\cos x=0$

7.15. a) $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ b) $(1+x^2)y'+2xy=xy^2,\quad y(0)=0.5$

7.16. a) $(3x-1)dy+y^2dx=0$ b) $x^2\,y'+xy+1=0$.

7.17. a) $e^{-y}(1+y')=1$ b) $xy'+y+e^{x}=0, y(a)=b$.

7.18. a) $y' = \dfrac{1-3x-3y}{1+x+y}$ b) $y'\sin x = y\ln y$, $y(\dfrac{\pi}{2}) = e.$

7.19. a) $x\cos\dfrac{y}{x}dy + \left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx = 0$ b) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 2$

7.20. a) $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$ b) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

7.21. a) $xy^2dy = \left(x^3+y^3\right)dx$ b) $y' + y = \cos x$

7.22. a) $x^2(2yy'-1) = 1;\ \ y(1) = 0$ b) $y' - y\cdot tgx + y^2\cdot\cos x = 0$

7.23. a) $\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)y' - y = 0;\ \ y(1) = 1$ b) $y' + \dfrac{y}{1+x} + y^2\cdot\cos x = 0$

7.24. a) $\left(1+x^2\right)y^3dx - \left(y^2-1\right)x^3dy = 0;\ \ y(1) = -1$ b) $y' + ytgx = \dfrac{1}{\cos x}$

7.25. a) $(x+2y)y' = 1;\ \ y(0) = -1$ b) $y' + xy = -x$, $y(0) = 1$

7.26. a) $xy' + y = y^2;\ \ y(1) = 0{,}5$ b) $y' + \dfrac{y}{1+x} + y^2 = 0$, $y(0) = 1$

7.27. a) $xyy' = 1 - x^2$, . b) $y' + 2xy = -2x$, $y(1) = 1$

7.28. a) $xy' + y = y^2, y(1) = 0{,}5$. b) $y' - ytgx = -y^2\cos x$

7.29. a) $\sqrt{y^2-1}dx = xydy$ b) $y' + \dfrac{y}{x} - y^4x^2 = 0$

7.30. a) $e^{x+y}dx + ydy = 0$ b) $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$, $y(2) = 1$

8. HODISALAR VA ULARNING EHTIMOLLARI

8.1. Tasodifiy hodisalar va ehtimollar nazariyasining predmeti.

8.2. Tasodifiy hodisa ehtimolining statistik ta'rifi.

8.3. Hodisalarning yig'indisi va ko'paytmasi. Ehtimollarni qo'shish qoidasi.

Tasodifiy natijaga ega bo'lgan tajribalarning matematik modelini tuzishda elementar hodisalar fazosi tushunchasi qo'llaniladi.

Elementar hodisalar fazosi deb, bir-birini rad etuvchi va faqat bittasigina ro'y bera oladigan tajriba natijalarining to'plamiga aytiladi. Uni Ω orqali belgilaymiz. Ω ning elementlari elementar hodisalar deb ataladi va ω lar bilan belgilanadi $\Omega=\{\omega\}$Masalan, $\Omega-$ chekli bo'lsa, $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$, $\Omega-$ sanoqli bo'lsa, $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...\}$ ko'rinishda yoziladi. Agar Ω ning elementlari soni chekli yoki sanoqli bo'lsa, u diskret bo'ladi. Agar Ω ning elementlari soni chekli yoki sanoqli bo'lmasa, u kontinuum yoki uzluksiz deyiladi.

Elementar hodisalar fazosi ko'pi bilan sanoqli, ya'ni diskret bo'lsin. Ω ning ixtiyoriy qism to'plami A ni tasodifiy hodisa deb ataymiz. Agar A to'plam bo'sh bo'lsa, uni ro'y bermaydigan hodisa deb $\varnothing$ orqali belgilaymiz va Ω ning o'zini esa muqarrar hodisa deb ataymiz.

Hodisalar ham to'plam bo'lgani sababli ular uchun ham to'plamlar ustidagi barcha amallar o'rinlidir. Faqat bu amallar va tushunchalarning ehtimollar nazariyasida o'ziga xos talqini qo'llaniladi. Shu sababli biz quyidagi jadvalni keltiramiz.

Belgilash	To‘plamlar nazariyasidagi talqini	Ehtimollar nazariyasidagi talqini
Ω	fazo (asosiy to‘plam)	Elementar hodisalar fazosi, muqarrar hodisa
$\omega,\ \omega\in\Omega$	Fazo elementi	Elementar hodisa
$A,\ A\subseteq\Omega$	To‘plam	Hodisa
$A\bigcup B,\ A+B$	A va B to‘plamlarning birlashmasi, yig‘indisi	A va B hodisalar yig‘indisi
$A\bigcap B,\ AB$	A va B to‘plamlarning kesishmasi, ko‘paytmasi	A va B hodisalar ko‘paytmasi
$A\setminus B$	A to‘plamdan B to‘plamning ayirmasi	A hodisadan B hodisani ayirmasi
$\varnothing$	bo‘sh to‘plam	Ro‘y bermaydigan hodisa
$\overline{A}$	A to‘plamga to‘ldiruvchi	A hodisaga qarama qarshi hodisa
$AB=\varnothing$	A va B to‘plamlar kesishmaydi	A va B hodisalar birgalikda emas
$A\subseteq B$	A to‘plam B ning qismi	A hodisa B ni keltirib chiqaradi
$A=B$	A va B to‘plamlar ustma-ust tushadi	A va B hodisalar teng kuchli

Hodisalarni qo‘shish va ko‘paytirish amallari hodisalarning ixtiyoriy sondagi to‘plamlari uchun ham o‘rinlidir. Jumladan, quyidagi tengliklar bajariladi:

$$\overline{\sum_k A_k}=\prod_k \overline{A_k}\ ;\ \overline{\prod_k A_k}=\sum_k \overline{A_k}$$

Ω fazo chekli bo‘lgan holda ehtimolni klassik ta’rifidan foydalanib hisoblashda elementar hodisalarning soni muhim rol o‘ynaydi. Bunday hollarda kombinatorikadagi o‘rinlashtirish, o‘rin almashtirish va guruhlash tushunchalari keng qo‘llaniladi.

N ta elementdan iborat $A=\{a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_N\}$ to‘plamni olamiz. A to‘plamning N ta elementidan n tasini o‘z ichiga olgan o‘rinlashtirish deb, har qanday tartiblangan $\{a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_n}\}$ to‘plamga aytiladi. N ta elementdan n tasini o‘z ichiga olgan barcha turli o‘rinlashtirishlarning soni $A_N^n=N(N-1)\ldots(N-n+1)$ ga teng. O‘rinlashtirishning $n=N$

bo‘lganidagi xususiy holi o‘rin almashtirish deb ataladi va $A_N^N = N(N-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = N!$ Demak,

$$A_N^n = \frac{N!}{(N-n)!}.$$

A to‘plamning N ta elementidan n tadan guruhlash deb, elementlari soni n bo‘lgan ixtiyoriy $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}\}$ qism to‘plamga aytiladi. N ta elementdan n tadan barcha guruhlashlarning soni

$$C_N^n = \frac{A_N^n}{n!} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

ga teng.

Ehtimolning statistik ta’rifi. Hodisa ro‘y bergan sinashlar sonining aslida jami sinashlar soniga nisbatiga aytiladi. Ya’ni

$$W(A) = \frac{m}{n}.$$

1-teorema. Ikkita birgalikda bo‘lmagan hodisadan istalgan birining ro‘y berish ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining yig‘indisiga teng:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Natija. Har ikkitasi birgalikda bo‘lmagan bir nechta hodisalardan istalgan birining ro‘y berishi ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining yig‘indisiga teng:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = P(A_1) + P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

2-teorema. Ikkita erkli hodisalarning birgalikda ro‘y berish ehtimoli, bu hodisalar ehtimollarining ko‘paytmasiga teng:

$$P(AB)=P(A)\,P(B)$$

NATIJA. Bir nechta erkli hodisalarning birgalikda ro‘y berish ehtimoli, bu hodisalar ehtimollarini ko‘paytmasiga teng:

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$$

3-teorema. Ikkita bog‘liq hodisalarning birgalikda ro‘y berish ehti-moli ulardan birining ehtimolini ikkinchisining shartli ehtimoliga ko‘paytmasiga teng.

$$P(AB)=P(A)\,P(B/A) = P(B)\,P(A/B)$$

NATIJA: Bir nechta bog‘liq hodisalarning birgalikda ro‘y berish ehtimoli ulardan birining ehtimolini qolganlarining shartli ehtimollariga ko‘paytirilganligiga teng, shu bilan birga, har bir keyingi hodisaning ehtimoli oldingi hamma hodisalar ro‘y berdi degan farazda hisoblanadi:

$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2)\ldots. P(A_n/ A_1A_2\ldots A_{n-1})$

4-teorema. Ikkita birgalikda bo‘lgan hodisadan kamida bittasining ro‘y berish ehtimoli bu hodisalarning ehtimollari yig‘indisidan ularning birgalikda ro‘y berish ehtimolining ayirmasiga teng:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) – P(AB)$$

Agar A va B hodisalar bog‘liq bo‘lsa , $P(A+B) = P(A) + P(B) – P(B)P(A/B)$ bog‘liq bo‘lmasa $P(A+B)= P(A) + P(B) – P(A) \cdot P(B)$ formulalaridan foydalanamiz.

5-teorema. Birgalikda bog‘liq bo‘lmagan $A_1,A_2,\ldots A_n$ hodisalaridan kamida bittasining ro‘y berishidan iborat A hodisaning ehtimoli 1dan $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, … $\overline{A_n}$ qarama-qarshi hodisalar ehtimollari ko‘paytmasining ayir-masiga teng:

$$P(A) = 1 – P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\ldots P(\overline{A_n})$$

8.1. 5 ta bir xil sug‘urta shartnomalari o‘rganilayapti. Quyidagi hodisalarga qarama - qarshi hodisalarni ko‘rsating:

a) A – 2 ta shartnomadan da’vo kelib tushdi;

b) B – kamida 2 ta shartnomadan da’vo kelib tushdi;

v) C – birorta ham da’vo kelib tushmadi;

g) D – shartnomalarning yarmidan ko‘pidan da’vo kelib tushdi.

8.2. Avtomobilni sug‘urtalash bo‘yicha 4 ta shartnoma o‘rganilmoqda. i – shartnomadan kelib tushgan da’vo bo‘yicha sug‘urta qoplamasi miqdori i – shartnomaga to‘langan sug‘urta badalidan ortiq bo‘lishi hodisasini A_i bilan belgilaymiz. Quyidagi hodisalarni A_i orqali ifodalang:

a) A – barcha 4 ta shartnoma sug‘urta badalidan ko‘p bo‘lgan da’vo kelib tushdi;

b) B – hech bo‘lmaganda bitta shartnoma sug‘urta badalidan ko‘p bo‘lgan da’vo kelib tushdi;

v) C – faqat bitta shartnoma sug‘urta badalidan ko‘p bo‘lgan da’vo kelib tushdi;

g) D – kamida 3 ta shartnoma sug‘urta badalidan ko‘p bo‘lgan da’vo kelib tushdi. 8.3. Ifodalarni soddalashtiring:

a) $(B+C)\cdot(B+\overline{C})$

b) $(B+C)\cdot(B+\overline{C})\cdot(\overline{B}+C)$

8.4. Quyidagi tenglikdan C tasodifiy hodisani toping:

$$\overline{C+A}+\overline{C+\overline{A}}=B$$

8.5. A, B, C – uchta tasodifiy hodisalar bo‘lsin. Quyidagi hodisalarni toping:

a) faqat B hodisa sodir bo‘ldi;

b) A va B hodisalar sodir bo‘ldi;

v) uchchala hodisa sodir bo‘ldi.

g) faqat bitta hodisa sodir bo‘ldi

d) faqat ikkita hodisa sodir bo‘ldi

8.6. 8 ta ruxni shaxmat doskasida bir-birini urolmaydigan qilib necha xil usul bilan joylashtirish mumkin?

8.7. Raqamlari turlicha bo‘lgan nechta uch xonali son mavjud?

8.8. 5 ta raqamdan iborat seyf kodi tasodifiy ravishda terilyapti. Agar

a) barcha raqamlar turlicha ekanligi ma’lum bo‘lsa;

b) birinchi va oxirgi raqamlar bir xil ekanligi ma’lum bo‘lsa;

v) raqamlar haqida hech qanday ma’lumot yo‘q bo‘lsa, qancha turlicha kombinatsiyalarni terishga to‘g‘ri keladi?

8.9. 10 ta avtomobildan 5 tasi bir xil markaga tegishli. Agar 5 ta bir xil markadagi avtomobillarning barchasi yonma-yon turishi talab qilinsa, avtomobillarni necha xil usul bilan qatorga joylashtirish mumkin?

8.10. Sug‘urta kompaniyasining yangi yil bayramiga atalgan lotereya o‘yinida 34 kishi (eng «tartibli» avtomobil haydovchilari) ishtirok etdi. O‘yinga qo‘yilgan 5 ta asosiy yutuqni necha xil usul bilan taqsimlash mumkin?

8.11. 10 kishi necha xil usul bilan kassaga navbatga turishi mumkin?

8.12. Ikkita parallel to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lib, ularning bittasida n ta, ikkinchisida k ta nuqta belgilangan. Uchlari shu nuqtalarda bo‘lgan nechta uchburchak mavjud?

8.13. Avtomobil nomeri 1 ta harf va 4 xonali sondan iborat. O‘zbek alifbosining 26 ta harfi ishlatilsa, nechta avtomobil nomeri tuzish mumkin?

8.14. 6 ta turli belgilardan foydalanib, 2 ta belgili signallardan nechta tuzish mumkin?

8.15. 7 yigit va 4 qizdan iborat talabalar guruhidan 6 ta talabani shunday tanlab olish kerakki, ularning ichida qizlar soni 2 tadan kam bo‘lmasin. Buni necha xil usul bilan amalga oshirish mumkin?

8.16. n ta belgidan tuzilgan o‘rin almashtirishlarda nechta usulda 2 ta tayin belgi yonma-yon turib qolmaydi?

8.17. Talaba 7 kun davomida 5 ta sinovni topshirishi kerak. Agar dekanat bir kunda 2 ta sinovni topshirishni man etsa, talaba necha xil usul bilan barcha sinovlarni topshirishi mumkin?

8.18. Agar

a) har bir keyingi raqami oldingi raqamidan katta bo‘lsa,

b) har bir keyingi raqami oldingi raqamidan kichik bo‘lsa, nechta 4 xonali son tuzish mumkin?

8.19. Agar

a) 0, 1, 2, 3, 4 raqamlardan,

b) 0, 1, 2, 3, 4, 5 raqamlardan tuzilgan sonning juft bo‘lishi talab qilinsa,

v) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 raqamlardan tuzilgan sonning 5 ga karrali bo‘lishi talab qilinsa nechta besh xonali son tuzish mumkin?

8.20. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 raqamlardan foydalanib (takrorlamasdan), har birida bitta bir qatnashgan 4 xonali sonlardan nechta tuzish mumkin?

8.21. 12 ta turli xil buyumlarni 3 ta idishga har biriga 4 tadan solib, necha xil usulda joylashtirish mumkin?

8.22. 4 ta unli va 4 ta undosh harflarni bir to‘g‘ri chiziqqa shunday joylashtirish kerakki, bunda 2 ta unli yoki 2 ta undosh harflar yonma-yon turib qolmasin. Buni necha xil usul bilan amalga oshirish mumkin?

8.23. 1, 2, 3, …, 100 sonlardan 2 tadan olib mumkin bo‘lgan barcha ko‘paytmalar olingan. Hosil bo‘lgan sonlar ichida uchga karrali bo‘lganlari nechta?

8.24. Seyfda 6 ta obligatsiya bo‘lib, ular turlicha nomerlangan. Barcha obligatsiyalar seyfdan tasodifiy ravishda bittadan olinadi. Ketma-ket olingan obligatsiyalar nomerlari o‘sib borish tartibida bo‘lishi ehtimolini toping.

8.25. Sug‘urta kompaniyasining 12 ta mijozidan kelib tushgan da’volar: a) yilning turli oylariga to‘g‘ri kelishi; b) hammasi bir oyga to‘g‘ri kelishi; v) sentabr va oktabr oylariga to‘g‘ri kelishi ehtimolini toping.

8.26. Kompaniya portfelida 10 ta bir guruhga tegishli va 20 ta ikkinchi guruhga tegishli shartnomalar bor. Tasodifiy ravishda kelib tushgan 7 ta da’vodan: a) 5 tasi birinchi guruh shartnomalaridan va 2 tasi ikkinchi guruh shartnomalaridan bo‘lishi; b) kamida 5 tasi birinchi guruh shartnomalaridan bo‘lishi; v) yarmidan ko‘pi ikkinchi guruh shartnomalaridan bo‘lishi; g) barchasi ikkinchi guruh shartnomalaridan bo‘lishi ehtimolini toping.

8.27. 8 ta bir xil kartochkaga mos ravishda 2, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 13 sonlari yozilgan. Tavakkaliga olingan 2 ta kartochkadan oddiy kasr tuziladi. Tuziladigan kasrning

a) qisqaradigan;

b) to‘g‘ri;

v) to‘g‘ri va qisqaradigan kasr bo‘lishi ehtimolini toping.

9. ELEMENTAR HODISALAR FAZOSI

9.1. Ehtimollar nazariyasi fanining aksiomalari.
9.2. Ehtimolni hisoblashni klassik usuli.
9.3. Ehtimolni geometrik ta'rifi.

Aksioma 1 (salbiy emas): har qanday A hodisaning sodir bo'lish ehtimoli har doim ijobiy yoki nolga teng, *P (A) =0*. Hodisaning ehtimoli 0 ga teng bo'lganda, u chaqiriladi *imkonsiz voqea*.

Aksioma 2 (aniqlik): har doim E ga tegishli bo'lgan har qanday hodisa, uning yuzaga kelish ehtimoli 1 ga teng, biz uni quyidagicha ifodalashimiz mumkin *P (E) = 1*. Bu "a" deb nomlanuvchi narsa *aniq voqea* Chunki tajriba o'tkazishda albatta natija bo'ladi.

Aksioma 3 (qo'shimcha): A deb nomlangan ikkita yoki undan ortiq mos kelmaydigan hodisalar bo'lsa A_1, A_2, A_3…, A hodisasining sodir bo'lish ehtimoli A_1 plyus A_2 plyus A_3 va hokazo, bu har birining alohida sodir bo'lish ehtimoli yig'indisiga teng.

Ehtimolning klassik ta'rifi. $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$ chekli elementar hodisalar fazosi bo'lib, elementar hodisalar teng imkoniyatli bo'lsin, ya'ni $P(\omega_i)=\frac{1}{n},\ i=1,2,...,n$. Agar $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},...,\omega_{i_m}\}\ (m\le n)$ bo'lsa, u holda

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Bu formula ehtimolning klassik ta'rifi deb ataladi.

Hodisa ehtimoli quyidagi xossalarga ega:

$$1^{\circ}.\quad P(\varnothing)=0,\quad P(\Omega)=1;$$

$$2^{\circ}.\quad P(\overline{A})=1-P(A);$$

Hodisaning ehtimolini klassik ta'rifga ko'ra Ω - elementar hodisalar fazosi chekli bo'lgandagina hisoblashimiz mumkin. Agar Ω cheksiz teng imkoniyatli elementar hodisalardan tashkil topgan bo'lsa, geometrik ehtimoldan foydalanamiz.

O'lchovli biror G soha berilgan bo'lib, u D sohani o'z ichiga olsin. G sohaga tavakkaliga tashlangan X nuqtani D sohaga tushishi ehtimolini hisoblash masalasini ko'ramiz. Bu yerda X nuqtaning G sohaga tushishi muqarrar va D sohaga tushishi tasodifiy hodisa bo'ladi. $A=\{X\in D\}-X$ nuqtaning D sohaga tushishi hodisasi bo'lsin.

Ta'rif. A hodisaning geometrik ehtimoli deb, D soha o'lchovini G soha o'lchoviga nisbatiga aytiladi, ya'ni

$$P(A)=\frac{mes\{D\}}{mes\{G\}},$$

bu yerda mes orqali uzunlik, yuza, hajm belgilangan.

1-misol (uchrashuv haqidagi masala). Ikki do'st soat 9 bilan 10 orasida uchrashishga kelishishdi. Birinchi kelgan kishi do'stini 15 daqiqa davomida kutishini, agar shu vaqt mobaynida do'sti kelmasa, u ketishi mumkinligini shartlashib olishdi. Agar ular soat 9 bilan 10 orasida ixtiyoriy momentda kelishlari mumkin bo'lsa, bu ikki do'stning uchrashishi ehtimolini toping.

Yechish. Birinchi kishi kelgan momentni x, ikkinchisiniki y bo'lsin: $0\le x\le 60,\ 0\le y\le 60.$ U holda ularning uchrashishlari uchun $|x-y|\le 15$ tengsizlik bajarilishi kerak. Demak, $\Omega=\{(x,y):0\le x\le 60,\,0\le y\le 60\}$, $A=\{(x,y):|x-y|\le 15\}$. x va y larni Dekart koordinatalar tekisligida tasvirlaymiz. U holda

$$P(A)=\frac{mes\{A\}}{mes\{G\}}=\frac{60^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 45\cdot 45}{60^2}=\frac{7}{16}.$$

9.1. Sug'urta kompaniyasining 360 ta mijozining familiyalariga e'tibor berilganda ularning 7 tasi A bilan, 5 tasi Ye bilan, 8 tasi I bilan, 9 tasi O bilan, 4 tasi U bilan, 2 tasi Yu bilan, 1 tasi Ya bilan, qolganlari esa undosh harflar bilan boshlanishi aniqlandi. Tasodifiy tanlangan mijozning familiyasi

a) A harfi bilan;

b) undosh harf bilan;

v) unli harf bilan boshlanish ehtimolini toping.

9.2. To'qqiz qavatli binoning birinchi qavatida liftga 3 kishi kirdi. Ularning har biri ikkinchidan to'qqizinchigacha bo'lgan qavatlarning ixtiyoriy birida bir xil ehtimol bilan tushib qolishi mumkin.

a) barcha yo'lovchilarning oltinchi qavatda;

b) barcha yo'lovchilarning bitta qavatda;

v) yo'lovchilarning turli qavatlarda tushib qolish ehtimolini toping.

9.3. Doiraviy stol atrofida tasodifiy ravishda n kishi o‘tiradi. Tayin 2 kishining yonma-yon o‘tirib qolish ehtimolini toping.

9.4. Hamma yog‘i bo‘yalgan kub 1000 ta bir xil o‘lchamli kubchalarga bo‘lingan va yaxshilab aralashtirilgan. Tavakkaliga olingan kubchaning

a) bitta yog‘i;

b) ikkita yog‘i;

v) uchta yog‘i bo‘yalgan bo‘lishi ehtimolini toping.

9.5. Yaxshilab aralashtirilgan 28 ta domino toshlaridan tavakkaliga bittasi tanlandi. Ikkinchi marta tavakkaliga tanlangan toshning birinchi tosh yoniga o‘yin qoidasi bo‘yicha qo‘yish mumkinligi ehtimolini birinchi tosh

a) dubl bo‘lganda;

b) dubl bo‘lmaganda toping.

9.6. 8 ta turli kitob bitta tokchaga tavakkaliga terib qo‘yiladi. Tayin 2 ta kitobning yonma-yon bo‘lib qolishi ehtimolini toping.

9.7. Qulfning umumiy o‘qida 5 ta disk bor. Ularning har biri turli raqamlar yozilgan 6 ta sektorga bo‘lingan. Har bir disk qulfning korpusiga nisbatan tayin bir vaziyatda bo‘lgandagina qulf ochiladi. Disklarni tasodifiy ravishda o‘rnatilganda qulfni ochish mumkin bo‘lishi ehtimolini toping.

9.8. Kutubxonada 10 ta turli kitob bor, bunda 5 ta kitobning har biri 4000 so‘mdan, 3 ta kitob 1000 so‘mdan va 2 ta kitob 3000 so‘mdan turadi. Tavakkaliga olingan 2 ta kitobning bahosi 5000 so‘m bo‘lish ehtimolini toping.

9.9. Sug‘urta kompaniyasining $2n$ ta shartnomalari tasodifiy ravishda 2 ta teng qismga bo‘lindi. Bunda eng katta sof mukofotli 4 ta shartnomaning

a) bitta qismda;

b) har bir qismda ikkitadan joylashgan bo‘lishi ehtimolini toping.

9.10. Agar qabul qilish shartlariga ko‘ra 50 ta buyumdan ko‘pi bilan 1 ta buyum yaroqsiz bo‘lganda qabul qilish mumkin bo‘lsa, ichida 5 ta yaroqsizi bo‘lgan 100 ta buyumdan tavakkaliga yarmi olib tekshirlganda bu partiyaning hammasi qabul qilinish ehtimolini toping.

9.11. Ikkita idishning har birida oq va qora sharlar bo‘lib, har ikkala idishdagi sharlarning umumiy miqdori 25 ta. Har bir idishdan tavakkaliga 1 tadan shar olinadi. Agar idishlardan olingan ikkala sharning oq bo‘lish ehtimoli 0,54 ga teng bo‘lsa, olingan ikkala sharning qora bo‘lish ehtimolini toping.

9.12. Sug‘urta kompaniyasi avtomobil zavodi jamoasi bilan ishlab chiqarish shikastlanishdan sug‘urtalash bo‘yicha shartnoma tuzdi. Statistik ma’lumotlarga ko‘ra yig‘uv sexi ishchisining yil davomida shikastlanish ehtimoli 0,15 ga teng. Sexdagi 10 ta ishchidan yil davomida

a) 3 ta ishchi shikastlanishi;

b) yarmidan ko‘p ishchi shikastlanishi;

v) hech bo‘lmaganda bitta ishchi shikastlanishi;

g) birorta ham ishchi shikastlanmasligi ehtimolini toping.

9.13. Xaridor 2 ta A va B kompaniyalarning aksiyalarini sotib olishi mumkin. Birinchisini ishonchliligini ekspertlar tomonidan 90% darajasida, ikkinchisinikini esa 80% darajada deb baholandi. Quyidagi hollarning ehtimoli qanday bo‘ladi:

a) yil davomida ikkala kompaniya inqirozga uchramaydi;

b) hech bo‘lmaganda bittasida inqiroz boshlanadi?

9.14. Avtopoygada 3 ta avtomobil ishtirok etadi. 1-avtomobilning marshrutdan chiqib ketish ehtimoli 0,15 ga, 2-avtomobil uchun bu ehtimol 0,05 ga, 3-avtomobil uchun 0,1 ga teng. Marraga

a) faqat 1 ta avtomobilning;

b) faqat 2 ta avtomobilning;

v) kamida 2 ta avtomobilning yetib kelish ehtimolini aniqlang.

9.15. Tikuvchi – modeler bahor mavsumi uchun yashil, qora va qizil rangli matolardan yangi kiyimlar to‘plamini tayyorlayapti. Bahorda yashil rang rasm bo‘lish ehtimolini modeler - tikuvchi 0,3 deb baholayapti, qora rangni esa 0,2, qizil rangni rasm bo‘lish ehtimolini esa 0,15 deb belgiladi. Ranglar bir-biridan bog‘liq bo‘lmagan holda tanlanishini faraz qilgan holda hech bo‘lmaganda bitta rang bo‘yicha to‘plam ranglari muvaffaqiyat bilan tanlanganligi ehtimolini baholang.

9.16. Ma’lum bir oziq-ovqat turi bo‘yicha firmaning marketing bo‘limi iste’molchilarning fikrini bilish uchun so‘rov o‘tkazdi. Tekshirish o‘tkazilayotgan hudud aholisining 10% i qiziqayotgan firmaning iste’molchilaridir va ular firmaga to‘liq baho berishlari mumkin. Kompaniya butun aholidan 10 kishini tasodifiy ravishda tanlab oldi. Tanlanganlardan hech bo‘lmaganda bittasi oziq-ovqat to‘g‘risida to‘liq baho berishi ehtimolini toping.

9.17. Savdo vakili kitobning namunasini mijozlarga taklif etadi. Avvalgi tajribalardan ma’lumki, u kitobni taklif qilgan har 65 mijozdan o‘rtacha bittasi uni sotib oladi. Hozircha u yangi kitob namunasini 20 ta mijozga ko‘rsatdi. Uning hech bo‘lmaganda bitta kitobni sotish ehtimolini toping.

9.18. Uzunligi 1 km bo‘lgan AB telefon liniyasi biror D nuqtada uzilgan. D nuqtaning liniyadagi vaziyati teng imkoniyatli. D nuqta A nuqtadan: a) 400 m dan ortiq bo‘lmagan; b) 400 m dan kam bo‘lmagan masofada bo‘lish ehtimolini toping.

9.19. Doiraga teng tomonli uchburchak ichki chizilgan. Doira ichiga tavakkaliga qo‘yilgan nuqta uchburchak ichida bo‘lish ehtimolini toping.

9.20. Radiusi 20 sm bo‘lgan doira ichida bir-biri bilan kesishmaydigan va birining radiusi 5 sm, ikkinchisiniki 10 sm bo‘lgan ikkita aylana o‘tkazilgan. Katta doira ichida tavakkaliga olingan nuqta kichik aylanalardan birining ichida bo‘lish ehtimolini toping.

9.21. tomonli kvadrat qarama-qarshi tomonlarning o‘rtalarini tutash-tiruvchi kesmalar bilan to‘rtta bo‘lakka ajratilgan. Bu kvadratga radiusi bo‘lgan tanga tashlangan. Tanga asosiy kvadratni bo‘lishdan hosil qilingan kvadratlarning tomonlaridan hech birini kesmaslik ehtimolini toping.

9.22. Ikki do‘st ma’lum joyda soat 10 bilan 11 orasida uchrashishga kelishishdi. Birinchi kelgan ikkinchini 20 daqiqa davomida kutadi, shundan so‘ng ketadi. Agar ko‘rsatilgan vaqt oralig‘ida do‘stlarning kelish mo¬mentlari teng imkoniyatli bo‘lsa, ularning uchrashish ehtimolini toping.

9.23. uzunlikdagi kesmada tavakkaliga ikkita nuqta olinadi. Ular ora-sidagi masofaning bo‘lish ehtimolini toping.

9.24. R radiusli doiraga nuqta tashlanadi. Bu nuqta doiraga ichki chizilgan kvadrat ichiga tushish ehtimolini toping.

9.25. R radiusli doiraga nuqta tavakkaliga tashlangan. Tashlangan nuqtaning doiraga ichki chizilgan muntazam uchburchak ichiga tushishi ehtimolini toping.

9.26. Tavakkaliga har biri 2 dan katta bo‘lmagan ikkita x va y musbat son olinganda, bu sonlarning ko‘paytmasi xy birdan katta bo‘lmasligi, $\frac{y}{x}$ bo‘linma esa ikkidan katta bo‘lmasligi ehtimolini toping.

9.27. Kvadratga ichki doira chizilgan. Kvadratga tavakkaliga tash-langan nuqtaning doira ichiga tushishi ehtimolini toping.

9.28. Ikkita *x* va *y* haqiqiy son $x \le 1$, $0 \le y \le 1$ tengsizliklarni qanoatlantiradigan qilib, tavakkaliga tanlanadi. $x^2 < y$ shartning bajari-lish ehtimolini toping.

10. HODISALARNING ERKLILIGI VA ENG SODDA FORMULALAR

10.1. Shartli ehtimol

10.2. Erkli hodisalar va ko‘paytirish qoidasi

10.3. To‘la ehtimol va Bayes formulalari

Shartli ehtimol. Asosiy teoremalar. A hodisaning B hodisa ro‘y bergandagi shartli ehtimoli deb, $\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}$ $(P(B)\neq 0)$ ga aytamiz va $P_B(A)$ deb belgilaymiz.

O‘zaro bog‘liq bo‘lgan A va B hodisalar qaralayotgan bo‘lib, $P(A)$ va $P_A(B)$ ularning ehtimollari bo‘lsin. Bu hodisalarning birgalikda ro‘y berish ehtimolini quyidagicha aniqlash mumkin.

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)$$

Xuddi shunga o‘xshash

$$P(ABC)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)$$

Amaliyotda bog‘liq bo‘lmagan hodisalar muhim ahamiyatga ega.

Agar $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$ bo‘lsa, u holda A va B hodisalar bog‘liqmas (erkli) deyiladi.

Agar A va B hodisalar birgalikda bo‘lmasa, u holda

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Bitta tajribada ikkita hodisadan birining ro‘y berishi ikkinchisining ro‘y berishini inkor kilmasa, bu hodisalar birgalikda deyiladi.

Birgalikda bo‘lgan ikkita hodisadan kamida bittasining ro‘y berishidan iborat bo‘lgan $A+B$ hodisaning ehtimoli shu hodisalar ehtimollari yig‘indisidan ularning birgalikda ro‘y berish ehtimolining ayirilganiga teng:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$$

A va B hodisalar erkli bo‘lganda

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

shuningdek bog‘liq hodisalar uchun

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P_A(B)$$

To‘la ehtimol formulasi. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ hodisalar to‘la gruppa tashkil etuvchi hodisalar deb ataladi, agar:

1. $B_iB_j=\varnothing,\ i\neq j$ uchun, ya’ni juftliklar o‘zaro birgalikda bo‘lmasa;

2. $B_1 + B_2 + \ldots + B_n = \Omega$, ya’ni kamida bittasi albatta ro‘y bersa.

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + ... + P(B_n)\cdot P_{B_n}(A).$$

A

hodisa to‘la gruppa tashkil etuvchi $B_1, B_2, \ldots, B_n$ hodisalardan biri ro‘y berish shartidagina ro‘y berishi mumkin bo‘lsin. Bu hodisalardan qaysi biri ro‘y berishi avvaldan gipoteza sifatida qabul qilinsin.

Faraz kilaylik, tajriba o‘tkazilgan bo‘lib, uning natijasida A hodisa sodir bo‘lgan bo‘lsin. Gipotezalarning ehtimollari qanday o‘zgarganligini quyidagicha aniqlash mumkin:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}, \quad i = \overline{1,n}$$

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + ... + P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)$$

Bu formula **Bayes** formulasi deb yuritiladi va sinash natijasida A hodisa ro‘y berganligi ma’lum bo‘lgandan so‘ng gipotezalar ehtimolini qayta hisoblashga imkon beradi.

10.1. Sug‘urta kompaniyasining 30, 40 va 50 yoshli 3 ta mijozlarining 70 yoshgacha yashash ehtimollari mos ravishda 0,55; 0,61 va 0,69 ga teng.

a) uchchala mijozning 70 yoshgacha yashashi;

b) faqat bitta mijozning 70 yoshgacha yashashi;

v) hech bo‘lmaganda bitta mijozning 70 yoshgacha yashashi;

g) kamida 2 ta mijozning 70 yoshgacha yashashi;

d) agar eng yosh mijozning 70 yoshgacha yashagani ma’lum bo‘lsa, kamida 2 ta mijozning 70 yoshgacha yashagan bo‘lishi ehtimolini toping.

10.2. Sug‘urta kompaniyasi portfelida 12 ta hayotni sug‘urtalash shartnomalari, 5 ta yong‘indan sug‘urtalash shartnomalari va 10 ta avtomobilni sug‘urtalash shartnomalari bor. 2 ta shartnoma tasodifiy ravishda olinadi.

a) agar kamida bitta shartnoma hayotni sug‘urtalash bo‘yicha ekanligi ma’lum bo‘lsa, ikkala shartnomaning ham hayotni sug‘urtalash bo‘yicha bo‘lishi;

b) 2 ta turli shartnoma bo‘lishi;

v) agar birorta ham shartnoma avtomobilni sug‘urtalash bo‘yicha emasligi ma’lum bo‘lsa, 2 ta bir xil shartnoma bo‘lishi;

g) agar bitta shartnoma yong‘indan sug‘urtalash bo‘yicha ekanligi ma’lum bo‘lsa, ikkala shartnomaning ham yong‘indan sug‘urtalash bo‘yicha bo‘lishi ehtimolini toping.

10.3. 4 ovchi nishonga tekkizish bo‘yicha shartlashib olishdi. Oldingi otgan ovchi xato otgan taqdirdagina keyingi ovchi o‘q uzadi. Har bir ovchi uchun nishonga tekkizish ehtimoli 0,6 teng.

a) 1 ta o‘q uzilishi;

b) 2 ta o‘q uzilishi;

v) 3 ta o‘q uzilishi;

g) 4 ta o‘q uzilishi ehtimolini toping.

10.4. $1, 2, 3, 4, 5$ raqamlardan tavakkaliga qaytarmasdan ketma-ket 2 tasi tanlanadi.

a) birinchi tanlangan raqam;

b) ikkinchi tanlangan raqam;

v) ikkala tanlangan raqamning ham juft bo‘lish ehtimolini toping.

10.5. Agar $P_B(A) > P(A)$ bo‘lsa, u holda $P_A(B) > P(B)$ munosabat o‘rinli bo‘lishini isbotlang.

10.6. Agar $P(A) = a$ va $P(B) = b$ bo‘lsa, u holda $P_B(A) \geq \frac{a+b-1}{b}$ tengsizlik o‘rinli bo‘lishini isbotlang.

10.7. Firmaning 550 xodimidan 380 tasi oliy ma’lumotga, 412 tasi esa o‘rta-maxsus ma’lumotga hamda 357 tasi oliy va o‘rta maxsus ma’lumotga egadir. Ixtiyoriy tanlangan xodim:

a) oliy:

b) o‘rta maxsus

v) ham oliy, ham o‘rta maxsus ma’lumotlarga ega ekanligi ehtimolini toping.

10.8. A va B aksiyalar bitta tashkilotda chiqarilgan. A aksiyaning narxi kelasi haftada ko‘tarilishi ehtimoli 0,2 ga, ikkala aksiyalar narxining ko‘tarilishi ehtimoli 0,12 ga teng. Faraz qilaylik, siz kelasi haftada A aksiyaning narxi ko‘tarilishini bilasiz. B aksiyaning ham narxi ko‘tarilish ehtimolini toping.

10.9. Kompyuter va amaliy dasturlar to‘plamini sotib olmoqchi bo‘lgan xaridorni faqat kompyuter sotib olish ehtimoli 0,15 ga, faqat amaliy dasturlar to‘plamini sotib olish ehtimoli esa 0,1 ga teng. Har ikkalasini sotib olish ehtimoli esa 0,05 dir. Kompyuter yoki amaliy dasturlar to‘plamini sotib olinish ehtimoli nechaga teng?

10.10. Brokerlik firmasiga investitsiya qilish imkoniyatlari bilan qiziquvchilarning 85% aksiyalar sotib olmaydilar, 33% esa obligatsiyalar sotib olmaydilar. Yana shu narsa ma’lumki, qiziquvchilarning 28% aksiya va obligatsiya kabi qimmatli qog‘ozlarni sotib olishni to‘xtatdilar. Kimdir kompaniya ishlari bilan qiziqmoqda; uning yoki aksiya yoki obligatsiya yoki ikkalasini sotib olish ehtimoli nechaga teng?

10.11. Iqtisodiyot fakulteti bitiruvchisining diplom himoyasidan a’lo baho olish ehtimoli 0,6 ga teng. Uning diplom himoyasini a’loga topshirishi va bankda ishlashga taklif olishi ehtimoli 0,4 ga teng. Deylik, talaba diplomni himoya qildi. Unga bankdan ishga taklif tushish ehtimoli nimaga teng?

10.12. Talabalar guruhi 28 kishidan iborat. Talabalarning 20 tasi 19 yoshdan katta, 8 tasi esa 22 yoshdan katta. Qur’a tashlash yo‘li bilan konsertga taklif chiptasi o‘ynaldi. Chipta 19 yoshdan katta bo‘lgan talabaga yoki 22 yoshdan katta bo‘lgan talabaga tushish ehtimoli topilsin.

10.13. Ertaga iste’mol mollari narxining o‘sish ehtimoli 0,3 ga teng, shuningdek, ertaga kumush narxining ko‘tarilish ehtimoli 0,2 ga teng. Bir vaqtda har ikkalasi narxining ko‘tarilish ehtimoli esa 0,06 ga teng. Iste’mol mollari va kumushning narxlari bir-biriga bog‘liqmi yoki yo‘qmi? Javobni asoslang.

10.14. Supermarketga kiruvchi xaridorlar sonini hisoblash maqsadida kiraverishda yashirin «elektron ko‘z» o‘rnatilgan. Do‘konga 2 ta xaridor ketma-ket kirganda birinchi xaridorni elektron qurilma 0,98 ehtimol bilan, ikkinchisini 0,94 ehtimol bilan, har ikkalasini esa 0,93 ehtimol bilan hisobga oladi. Qurilmaning do‘konga birgalikda kirgan ikki xaridordan kamida bittasini hisobga olish ehtimoli nimaga teng?

10.15. Chetdan mol keltirish va chetga mol chiqaruvchi firma rivojlanayotgan mamlakatlarning biri bilan qishloq xo‘jalik asbob-uskunalari bilan ta’minlash to‘g‘risida shartnoma tuzmoqchi. Agar asosiy konkurent firma bir vaqtda o‘sha shartnomaga da’vogarlik qilmasa, u holda shartnomani qo‘lga kiritish ehtimoli 0,45 deb baholanadi, aks holda esa 0,25 deb hisoblanadi. Kompaniya ekspertlarining baholashi bo‘yicha konkurent firmaning shartnomani tuzish uchun o‘zining taklifini kiritish ehtimoli 0,4 ga tengdir. Shartnomaning tuzilish ehtimolini toping.

10.16. Bank 6 ta filialga ega. Har bir filial 0,2 ehtimol bilan bir-biriga bog‘liqmas holda ertangi kunga yirik miqdorda buyurtma berishi mumkin. Ish kunining oxirida bankning vitse-prezidentlaridan biri tushgan buyurtmalar bilan tanishdi.

a) roppa-rosa 2 ta buyurtma;

b) hech bo‘lmaganda 1 ta buyurtma tushish ehtimolini toping. Agar 2 ta buyurtma tushgan bo‘lsa, shulardan biri birinchi filialdan tushganligi ehtimoli nimaga teng?

10.17. Har birida faqat bitta chipta yutish imkoniyati bo‘lgan 25 talaba 4 ta yutuqli chiptani o‘ynashmoqda. Agar ularning 15 tasi qizlar bo‘lsa,

a) 4 ta qiz;

b) 4 ta o‘smir;

v) 3 ta o‘smir va 1 ta qiz yutishi ehtimolini toping.

10.18. Talaba imtihon dasturidagi 25 savoldan 20 tasini biladi. Agar talaba imtihon biletidagi qo‘yilgan 4 ta savoldan kamida 3 tasiga javob bera olsa, imtihon topshirilgan bo‘ladi. Talaba olgan biletidagi 1-savolga ko‘z tashlab, unga javob bera olishini bildi. Talabaning

a) imtihonni topshirishi;

b) imtihonni topshira olmasligi ehtimolini toping.

10.19. 20 ta jamg‘arma bankdan 10 tasi shahar chekkasida joylashgan. Tekshirish uchun tasodifiy ravishda 5 ta bank tanlab olindi. Tanlangan banklar orasida

a) 3 ta bank;

b) hech bo‘lmaganda 1 ta bank shahar chekkasida joylashgan bo‘lishi ehtimolini toping.

10.20. Firmada ishlaydigan 8 ta auditordan 3 tasi yuqori malakali, 5 ta programmistdan esa 2 tasi yuqori malakali. 3 ta auditor va 2 ta programmistni safarga jo‘natish kerak. Agar hamma mutaxassislarning safarga borish imkoniyatlari teng bo‘lsa, bu guruhda hech bo‘lmaganda bitta yuqori malakali auditor va kamida bitta yuqori malakali programmist bo‘lishi ehtimolini toping.

10.21. Ishchi bir-biriga bog‘liqmas ishlaydigan 4 ta stanokka xizmat ko‘rsatadi. Smena mobaynida birinchi stanok ishchining e’tiborini jalb qilish ehtimoli 0,3 ga, ikkinchisi 0,6 ga, uchinchisi 0,4 ga va to‘rtinchisi 0,25 ga teng. Smena mobaynida hech bo‘lmaganda bitta stanokning ishchi e’tiborini jalb qilmasligi ehtimolini toping.

10.22. Qimmatli qog‘ozlar bozorida mavjud bo‘lgan aksiyalar paketi egasiga 0,5 ehtimol bilan daromad keltiradi (har bir paket uchun). Hech bo‘lmaganda aksiyalarning bir paketi bo‘yicha daromadi 0,96875 dan kam bo‘lmagan ehtimol bilan kutish mumkin bo‘lishi uchun turli firmalarning nechta paket aksiyalarini sotib olish kerak?

10.23. «Tez yordam» stansiyasi tibbiy yordam so‘rab qilingan qo‘ng‘iroqlarni qabul qiladi. Qo‘ng‘iroqlar o‘rtacha har 5 minutda kelib turadi. Yarim soat ichida

a) 3 ta qo‘ng‘iroq;

b) hech bo‘lmaganda bitta qo‘ng‘iroq bo‘lish ehtimolini toping.

10.24. Radist muxbirni 3 marta chaqiradi. Birinchi chaqiriqning qabul qilinish ehtimoli 0,2 ga, ikkinchisi uchun 0,3 ga, uchinchisi uchun 0,4 ga teng. Yuborilgan chaqiriq qabul qilingan bo‘lishi hodisalarini bog‘liqmas deb hisoblab, muxbir radist chaqirig‘ini eshitishi ehtimolini toping.

10.25. Imtihon biletlari ichida talaba bilmaydiganlari ham bor. Qaysi holda talaba uchun u biladigan biletni olish ehtimoli katta bo‘ladi: u biletni birinchi bo‘lib olgandami yoki ikkinchi bo‘lib olgandami?

10.26. Talabalarning sport musobaqalari saralash bosqichida ishtirok etish uchun 1-kursdan 4 ta, 2-kursdan 6 ta, 3-kursdan 8 ta talaba ajratildi. 1-, 2- hamda 3-kurs talabalarining oliygoh terma jamoasiga tushish ehtimollari mos ravishda 0,7; 0,6 va 0,8 ga teng. Tavakkaliga tanlangan talabaning universitet termasiga tushish ehtimolini toping.

10.27. Bir yilga hayotni sug‘urtalash bo‘yicha qaralayotgan 15 ta shartnoma mijozlarning yoshiga qarab 2 ta guruhga ajratildi. Shunda 1-guruhga 10 ta mijoz, 2-guruhga esa 5 ta mijoz to‘g‘ri keldi. 1-guruhdagi mijozning sug‘urta davri davomida o‘lish ehtimoli 0,3 ga, 2-guruhdagi mijozniki esa 0,1 ga teng. Tasodifiy tanlangan mijoz sug‘urta davri oxirigacha yashadi. Uning qaysi guruhga tegishli bo‘lish ehtimoli kattaroq?

10.28. Korxonaning 2 sexida mos ravishda 2:1 nisbatda bir xil detallar ishlab chiqariladi. 1-sexda yaroqsiz detallar ishlab chiqarish ehtimoli 0,03 ga, 2-sexda esa 0,02 ga teng. Tavakkaliga tanlangan detalning yaroqli bo‘lish ehtimolini toping.

10.29. Detallar tekshirish uchun konveyer orqali 2 nazoratchidan biriga kelib tushadi. Tekshiriladigan detalning 1-nazoratchi qo‘lidan o‘tish ehtimoli 0,7 ga, 2-sidan o‘tish ehtimoli esa 0,3 ga teng. 1- va 2-nazoratchilar tomonidan tekshirilgan detalning sifatli deb tan olinish ehtimollari mos ravishda 0,9 va 0,8 ga teng. Detalning sifatsiz deb tan olinish ehtimolini toping.

10.30. Korxonaning 1-, 2- va 3-sexlari barcha mahsulotning mos ravishda 25%, 35% va 40% larini ishlab chiqaradi. Ushbu sexlarda sifatsiz mahsulotni ishlab chiqarish mos ravishda 2%, 1% va 4% larni tashkil etadi. Tasodifiy tanlangan mahsulot sifatsiz bo‘lib chiqdi. Bu mahsulotning a) 1-sexda; b) 2-sexda; v) 3-sexda tayyorlangan bo‘lish ehtimolini toping.

10.31. Ma’lum bo‘lishicha, barcha erkaklarning 5% i va barcha ayollarning 0,25% i daltoniklar ekan. Tasodifiy tanlangan kishining daltonikligi aniqlandi. Uning erkak kishi bo‘lish ehtimolini toping. Ayol kishi bo‘lish ehtimoli-chi? (Erkak va ayollar teng miqdorda deb hisoblansin).

10.32. Detallar 2 ta korxonada tayyorlanadi. 2-korxonaning ishlab chiqarish hajmi 1-korxonanikidan 2 marta ko‘p. 1-korxonada yaroqsiz detal tayyorlanish ehtimoli 0,1 ga, 2-korxona uchun esa 0,2 ga teng. Tavakkaliga tanlangan detalning yaroqsiz ekanligi aniqlandi. Uning 2-korxonada ishlab chiqarilgan bo‘lish ehtimolini toping.

10.33. 3 ta qutida mos ravishda 20, 30 va 10 detallar bo‘lib, ularda standart detallar soni mos ravishda 15, 24 va 8 tani tashkil etadi. Tavakkaliga tanlangan detalning yaroqsizligi aniqlandi. Uning qaysi qutidan olingan bo‘lishi ehtimoli kattaroq?

10.34. Aeroport aviayo‘llarining 60% mahalliy, 30% MDH va 10% xalqaro reyslarni tashkil etadi. Mahalliy aviayo‘llardan yo‘lovchilarning 50% tadbirkorlik bilan bog‘liq ishlar tufayli foydalanadilar, bunday yo‘lovchilar MDH va xalqaro aviayo‘llarda mos ravishda 60% va 90% larni tashkil etadi. Aeroportga kelgan yo‘lovchilardan bittasi tavakkaliga tanlandi. Uning

a) tadbirkor;

b) mahalliy reys bilan uchib kelgan tadbirkor;

v) MDH davlatlaridan uchib kelgan tadbirkor;

g) xalqaro reys bilan uchib kelgan tadbirkor ekanligi ehtimoli nimaga teng?

10.35. Ruxshunoslarning tadqiqoti bo‘yicha erkaklar va ayollar hayotning ba’zi bir ma’lum holatlariga har xil e’tibor berar ekanlar. Tadqiqotlar natijasi shuni ko‘rsatadiki, o‘rganilayotgan vaziyatlar sohasiga 70% ayollar ijobiy qaragan paytda 40% erkaklar u vaziyatlarga salbiy qarar ekanlar. 15 ta ayol va 5 ta erkak to‘ldirgan so‘rovnomalarda taklif qilingan vaziyatlarga o‘z munosabatlarini bildirishgan. Tasodifiy tanlab olingan so‘rovnomada salbiy munosabat bildirilgan bo‘lsin. Bu so‘rovnomani erkak kishi to‘ldirgani ehtimoli nimaga teng?

10.36. Agar raqobatchi firma savdoga turdosh mahsulotni chiqarmasa, bozorda mahsulotning muvaffaqiyat bilan sotilish ehtimoli 0,67 ga teng. Bozorda mahsulotning raqobatchi firma mahsuloti mavjudligida muvaffaqiyat bilan sotilish ehtimoli 0,42 ga teng. Bizni qiziqtirayotgan davr mobaynida raqobatchi firmaning turdosh mahsulotini bozorga chiqarish ehtimoli 0,35 ga teng. Mahsulotning muvaffaqiyat bilan sotilish ehtimoli nimaga teng?

10.37. Bank mijozining kreditni qaytarmaslik ehtimoli iqtisodiy o‘sish davrida 0,04 ga, iqtisodiy inqiroz davrida esa 0,13 ga teng. Deylik, iqtisodiy o‘sish davrining boshlanish ehtimoli 0,65 ga teng bo‘lsin. Tasodifiy tanlangan mijozning olgan kreditni bankka qaytarmaslik ehtimoli nimaga teng?

10.38. Ikkita firmaning aksionerlik kapitallarini qo‘shilishida aksiyalarni nazorat paketlarini qo‘lga kirituvchi firmaning tahlilchilari shunday hisoblaydilar: agarda o‘zlashtiruvchi firma direktorlar kengashining raisi iste’foga chiqsa, bu bitim muvaffaqiyat keltirishi ehtimoli 0,65 ga, aks holda 0,3 ga teng ekan. Raisning iste’foga chiqish ehtimoli 0,7 ga teng deb faraz qilinadi. Bitimning muvaffaqiyatli bo‘lish ehtimolini toping.

10.39. Kimyo zavodida avariya yuz berganligi haqida signal beruvchi moslama o‘rnatilgan. Avariya holati yuz bergan taqdirda moslamaning ishlash ehtimoli 0,95 ga teng. Moslamaning avariya holati yuz bermagan taqdirda ham tasodifan ishlab ketish ehtimoli 0,02 ga teng. Avariya holatining yuz berish ehtimoli 0,004 ga teng. Deylik, moslama ishlab ketdi. Haqiqatdan ham avariya holati yuz berganligi ehtimoli nimaga teng?

10.40. Oliygoh talabalarining 30% 1-kursda, 35% 2-kursda, 20% 3-kursda va 15% 4-kursda o‘qiydi. Dekanatlarning ma’lumotlariga ko‘ra, ma’lum bo‘ldiki, 1-kurs talabalarining 20% qishki sinovni faqat a’lo baholarga topshirdilar. Bunday o‘zlashtirish 2-, 3- va 4-kurslarda mos ravishda 30%, 35% va 40% larni tashkil etdi. Tavakkaliga tanlangan talaba a’lochi ekanligi ma’lum bo‘lsa, uning 3-kurs talabasi ekanligi ehtimoli nimaga teng?

10.41. Kompaniya boshlig‘ida ishga da’vogar shaxslarning ism-shariflari yozilgan 2 ta ro‘yxat bo‘lib, birinchi ro‘yxatda 5 ayol va 2 erkakning, ikkinchi ro‘yxatda esa 2 ayol va 6 erkakning ism-shariflari qayd etilgan. 1-ro‘yxatdagi da’vogarlardan bittasining ism-sharifi 2-ro‘yxatga tasodifiy ravishda o‘tkaziladi, so‘ngra 2-ro‘yxatdagi da’vogarlardan bittasining ism-sharifi tasodifiy tanlanadi. Agar bu tanlangan ism-sharif erkakka tegishli ekanligi ma’lum bo‘lsa, 1-ro‘yxatdan ikkinchisiga ayolning ism-sharifi o‘tkazilganligi ehtimolini toping.

10.42. Detallarga qayta ishlov berish uchun 2 ta tayyorlov sexlaridan mos ravishda 70% va 30% miqdorda keltiriladi. 1-sex mahsulotlarining 1%i, 2-sex mahsulotlarining 2% yaroqsiz. Tavakkaliga tanlangan detalning yaroqli bo‘lish ehtimoli nimaga teng?

10.43. Do‘kon 4 ta ulgurji omborlardan qutilarda mahsulot qabul qilib oldi: 1-ombordan 4 quti, 2-ombordan 5 quti, 3-ombordan 7 quti va 4-ombordan 4 quti. Sotuvga chiqarish uchun tasodifiy ravishda qutilardan biri tanlandi. Tanlangan qutining 1- yoki 3-ombordan bo‘lishi ehtimolini toping.

10.44. Avtokorxonaga 3 ta motor ishlab chiqaruvchi korxonadan dvigatellar kelib tushdi: 1 - korxonadan 10 ta, 2-korxonadan 6 ta va 3- korxonadan 4 ta. Kafolat muddati davomida bu dvigatellarning buzilmay ishlash ehtimollari mos ravishda 0,9; 0,8 va 0,7 ga teng.

a) avtomobilga o‘rnatilgan dvigatelning kafolat muddati davomida buzilmay ishlash ehtimolini toping.

b) buzilmay ishlagan dvigatelning 1-korxonada, 2-korxonada tayyorlanganligi ehtimolini toping.

10.45. Do‘konda 3 xil markaga tegishli bo‘lgan 25 ta (mos ravishda 5, 7 va 13 ta) muzlatgichdan 21 tasi sotildi. Agar har bir markadagi muzlatgichlarning sotilish ehtimoli bir xil bo‘lsa, u holda sotilmay qolgan muzlatgichlarning

a) bitta markaga;

b) uch xil markaga tegishli bo‘lish ehtimolini toping.

10.46. Sexda 2-smenada 1-smenaga qaraganda detallarni ishlab chiqarish unumdorligi 2 baravar kam bo‘lib, sifatsiz detallar esa 1,5 baravar ko‘p ishlab chiqariladi. Ikkala smenada ishlab chiqarilgan detallar aralashtirilib, undan bir detal tavakkaliga olindi. Agar olingan detalning sifatsizligi ma’lum bo‘lsa, uning 2-smenada ishlab chiqarilganligi ehtimolini toping.

10.47. Bankda kredit so‘rash statistikasi quyidagicha: 10% i davlat organlariga, 80% i boshqa banklarga, qolganlari esa jismoniy shaxslarga to‘g‘ri keladi. Olingan kreditlarning qaytarilmasligi ehtimollari mos ravishda 0,01; 0,05 va 0,2 ga teng. Navbatdagi so‘ralgan kreditning qaytarilmasligi ehtimolini toping.

10.48. Maxsus kasalxonaga 70% bemorlar K kasallik bilan, qolganlari esa M kasallik bilan kelib tushadilar. K kasallikning to‘la davolanish ehtimoli 0,8 ga, M kasallikniki esa 0,9 ga teng. Kasalxonaga kelib tushgan bemor to‘la davolanib chiqib ketdi. Uning K kasallik bilan og‘rigani ehtimolini toping.

10.49. Nashriyot ro‘znomalarni 3 ta aloqa bo‘linmasiga jo‘natdi. Ro‘znomalarni 1-, 2- va 3-bo‘limlarga o‘z vaqtida yetkazib berilishi ehtimollari mos ravishda 0,95; 0,9 va 0,8 ga teng. Quyidagi hodisalar ehtimollarini toping:

a) faqat bitta bo‘lim ro‘znomalarni o‘z vaqtida oladi;

b) hech bo‘lmaganda bitta bo‘lim ro‘znomalarni kechikish bilan oladi.

10.50. Sug‘urta kompaniyasi sug‘urtalanganlarni "xavf-xatar" sinflari bo‘yicha ajratadi. Birinchi sinf kichik “xavf”ga, ikkinchi sinf o‘rtacha, uchinchi sinf esa katta “xavf”ga ega. Bu mijozlar orasida 50% birinchi, 30% ikkinchi va 20% uchinchi sinf “xavf”ga ega. Sug‘urta foizi to‘lash zarurati ehtimoli birinchi sinf “xavf”i uchun 0,01 ga, ikkinchi sinf uchun 0,03 ga, uchinchi sinf uchun 0,08 ga teng.

a) sug‘urtalanuvchining sug‘urta foiz olishi;

b) sug‘urta foizi olgan sug‘urtalanuvchining kichik “xavf” sinfiga taalluqli bo‘lishi ehtimolini toping.

10.51. Bir tumanga mahsulotlar 3 ta firma tomonidan 5:8:7 nisbatda keltiriladi. Birinchi firma mahsulotlarining 90% i, ikkinchisining 85%, uchinchisining 75% standart mahsulotlarni tashkil qiladi.

a) xarid qilingan buyumning nostandart chiqish ehtimolini toping;

b) agar xarid qilingan buyumning standart bo‘lib chiqqani ma’lum bo‘lsa, u uchinchi firmada tayyorlangan bo‘lishi ehtimoli qanday?

10.52. Sexning barcha mahsulotlari ikki nazoratchi tomonidan tekshiriladi. Birinchi nazoratchi 55% mahsulotni, qolganini ikkinchisi tekshiradi. Birinchi nazoratchi uchun nostandart mahsulotni o‘tkazib yuborish ehtimoli 0,01 ga teng. Ikkinchisi uchun esa 0,02 ga teng. Tavakkaliga olingan standart sifatida belgilangan mahsulot nostandart bo‘lib chiqdi. Bu mahsulot ikkinchi nazoratchi tomonidan tekshirilganligi ehtimolini toping.

10.53. Korxonada yaroqsiz mahsulot tayyorlanish ehtimoli 0,04 ga teng. Mahsulot chiqarilishidan avval soddalashtirilgan tekshiruvdan o‘tkaziladi, bunda yaroqli mahsulot 0,96 ehtimol bilan, yaroqsizi esa 0,05 ehtimol bilan o‘tkaziladi.

a) tayyorlangan mahsulotlarning qanday qismi korxonadan chiqarilishini;

b) soddalashtirilgan tekshiruvdan o‘tgan mahsulotning yaroqsiz bo‘lishligi ehtimolini toping.

10.54. Virusli kasallikni aniqlash uchun o‘tkaziladigan tibbiy sinov quyidagi natijalarni beradi. 1) agar tekshiriluvchi kasallangan bo‘lsa, u holda sinov 0,92 ehtimol bilan ijobiy natijani beradi; 2) agar tekshiriluvchi kasallanmagan bo‘lsa, u holda sinov 0,04 ehtimol bilan ijobiy natijani beradi. Bu kasallik kamdan-kam uchraydigan bo‘lgani uchun u bilan aholining faqatgina 0,1% kasallangan. Deylik, tasodifiy tanlangan kishida tibbiy tahlil o‘tkazildi va ijobiy natija olindi. Bu kishining haqiqatda kasallangan bo‘lish ehtimoli nimaga teng?

11. BERNULLI SXEMASI VA LIMIT TEOREMALAR

11.1. Bernulli sxemasi. Binominal ehtimollar
11.2. Laplasning lokal va integral teoremalari
11.3. Puassonnig limit teoremalari

Bog‘liqmas tajribalar ketma – ketligi

A hodisaning n-ta erkli sinovlarning har birida ro‘y berish ehtimoli p bo‘lsin. $P_n(k)$ - A hodisaning n sinovlarda k marta yuzaga kelish ehtimolini topamiz.

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad (1)$$

$k = 0,1,2,3,...,n$. (1) formula Bernulli nomi bilan ataladi.

Bu formula tajribalar soni n yetarlicha katta bo‘lganda, hisoblash uchun juda noqulaydir, shuning uchun katta n larda taqribiy lekin hisoblash oson bo‘lgan formulalardan foydalanamiz.

n ta erkli sinovlarning har birida ro‘y berish ehtimoli p kichik bo‘lib,

$$np \to \lambda \ \ (\lambda > 0) \qquad (2)$$

shart bajarilsin. U holda

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (3)$$

(3) formula Puasson formulasi deyiladi

Agar A hodisaning har bir sinovda yuzaga kelish ehtimoli p o‘zgarmas, bir va noldan farqli bo‘lsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty}\left(P_n(k) - \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} \right) = 0 \qquad (4)$$

bu yerda

$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

(4) formula Muavr - Laplasning lokal formulasi deyiladi.

Agar A hodisaning har bir sinovda yuzaga kelish ehtimoli p o‘zgarmas, bir va noldan farqli bo‘lsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty}\left(P_n(a \le m \le b) - \Phi(x_2) + \Phi(x_1) \right) = 0, \qquad (5)$$

bu yerda

$$x_1 = \frac{a-np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{b-np}{\sqrt{npq}} \qquad (6)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (7)$$

(5) formula Muavr-Laplasning integral teoremasi deyiladi.

11.1. Sotuvga kelgan avtomobillarning o‘rtacha beshdan bir qismi but chiqmaydi. O‘nta avtomobildan but emaslari: a) uchta; b) uchtadan kam bo‘lishi ehtimolini toping.

11.2. Sug‘urta kompaniyasi o‘rtacha 15% shartnomalar bo‘yicha sug‘urta qoplamasini to‘laydi. O‘nta shartnomadan:

a) uchtasida;

b) ikkitadan kamida sug‘urta holati vujudga kelishi bilan sug‘urta qoplamasini to‘lashga to‘g‘ri kelishi ehtimolini toping.

11.3. Hodisaning bitta sinashda ro‘y berish ehtimoli 0.2 ga teng bo‘lsa 5 ta sinashda roppa rosa 3 marta ro‘y berish ehtimolini toping.

11.4. Har bir bog‘liqmas tajribada hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,8 ga teng. 100 ta shunday tajriba o‘tkazilganda hodisaning kamida 70 marta ro‘y berish ehtimolini toping.

11.5. Har bir bog‘liqmas tajribada hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,8 ga teng. 100 ta shunday tajriba o‘tkazilganda hodisaning kamida 80 marta ro‘y berish ehtimolini toping.

11.6. Har bir bog‘liqmas tajribada hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,8 ga teng. 100 ta shunday tajriba o‘tkazilganda hodisaning kamida 90 marta ro‘y berish ehtimolini toping.

11.7. Hayotni sug‘urtalash bo‘yicha 10000 ta bir jinsli shartnomalar o‘rganildi. Bu guruhdagi har bir mijozning tabiiy sabablar bilan o‘lish ehtimoli 0,004 ga teng. Sug‘urta kompaniyasiga a) 10 tadan ko‘p bo‘lmagan da’voning kelib tushishi; b) 100 tadan 120 tagacha da’voning kelib tushishi ehtimolini toping.

11.8. Sug‘urta kompaniyasi shaxtada ishlovchi mehnat jamoasi bilan tibbiy sug‘urta bo‘yicha shartnoma tuzdi. Shaxtyorning sil kasali bilan og‘rishi ehtimoli 0,002 ga teng. Tasodifiy ravishda tanlab olingan nechta shaxtyordan kasallanmasligini 0,9 ehtimol bilan kutish mumkin?

11.9. 900 ta bog‘liqmas tajribaning har birida hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,5 ga teng. Hodisaning ro‘y berishi nisbiy chastotasining uning ehtimolidan chetlanishi 0,02 dan oshmasligi ehtimolini toping.

11.10. Har bir bog‘liqmas tajribada hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,8 ga teng. Hodisa ro‘y berishi nisbiy chastotasining uning ehtimolidan chetlanishi 0,02 dan katta bo‘lmasligini 0,95 ehtimol bilan kutish uchun nechta tajriba o‘tkazish kerak?

11.11. Hayotni sug‘urtalash bo‘yicha 10 yil muddatga tuziladigan shartnomalarni ko‘raylik. Bu sug‘urta shartnomalari bo‘yicha to‘lovni talab etish ehtimoli 0,25 ga teng. Sug‘urta kompaniyasi 100 ta bog‘liqmas sug‘urta shartnomalarini tuzdi.

a) 30 tadan ortiq to‘lovni talab etish;

b) rosa 25 ta to‘lovni talab etish ehtimolini toping.

11.12. Bankka keluvchilar soni Puasson taqsimotiga bo‘ysinadi. Bankka har 3 minutda o‘rtacha 1 ta mijoz kirib keladi.

a) 1 minut mobaynida bankka 1 ta mijoz kirishi ehtimoli nimaga teng?

b) 1 minut mobaynida bankka hech bo‘lmaganda 3 ta mijoz kirishi ehtimoli nimaga teng?

11.13. Zargarlik do‘koni sotuvchisining aniqlashicha, xaridorlar bilan yuzlashganda zargarlik buyumini sotish ehtimoli 0,03 ga teng. Ish kuni mobaynida sotuvchiga 100 ta xaridor murojaat qildi. Uning kamida bitta buyumni sotish ehtimoli nimaga teng?

11.14. Restoran boshqaruvchisining tajribasidan ma’lumki, kechki buyurtmani buyurgan mijozlarning 70% restoranga kechki taomni tanavvul qilishga keladilar. Restoranda bo‘sh stollar 15 ta bo‘lishiga qaramay, boshqaruvchi bugun kechqurunga 20 ta buyurtmani qabul qilishga qaror qildi. 15 tadan ko‘p buyurtma bergan mijozlarning restoranga kelishi ehtimoli nimaga teng?

11.15. Universitetga o‘qishga kirish uchun kirish imtihonlarini muvaffaqiyatli topshirish kerak. Abiturientlarning o‘rtacha 25% bu imtihonlarni muvaffaqiyatli topshira oladi. Qabul hay’atiga 1889 ta ariza kelib tushdi. Hech bo‘lmaganda 500 abiturientning imtihonlarni muvaffaqiyatli topshirishi ehtimoli nimaga teng?

11.16. Aniq bir reysga dastlabki buyurtmani bergan yo‘lovchilarning o‘rtacha 5% undan foydalanmaydi. Agar aviakompaniya 155 o‘rinli samolyotga 160 ta chipta sotgan bo‘lsa, buyurtma bergan va uchishni rejalashtirayotgan har bir yo‘lovchi uchun o‘rin yetarli bo‘lish ehtimoli nimaga teng?

11.17. Kompyuter sistemasi 45 ta bir xil mikroelementlardan iborat. Ixtiyoriy mikroelementning belgilangan vaqtda ishlash ehtimoli 0,8 ga teng. Kerakli amalni bajarish uchun kamida 30 mikroelementning ish holatida bo‘lishi talab etiladi. Kerakli amalning muvaffaqiyat bilan bajarilish ehtimoli nimaga teng?

11.18.O‘g‘il va qiz bolalar tug‘ilish ehtimolini bil xil deb olib, Bernulli tengsizligi yordamida yangi tug‘ilgan 1000 ta bolalardan o‘g‘il bolalar soni 465 bilan 535 orasida bo‘lish ehtimolini baholang.

11.19. Akademiya talabalarining 38% i statistikadan o‘tkazilgan imtihonni a’lo va yaxshi baholarga topshirishdi. Tasodifiy tanlangan 100 talabadan kamida 30 tasining statistikadan a’lo va yaxshi baholar olishi ehtimoli nimaga teng?

11.20. Shahardagi o‘rta maktablardagi 500 ta bitiruvchilardan 72% i oliygohga o‘qishga kirishga tayyorlanadilar. Tasodifiy tanlangan bitiruvchilar ichida oliygohga kirishni xohlovchilar ulushi 80% dan yuqori bo‘lish ehtimoli nimaga teng?

11.21. Talabalarning 50% i “statistika” fanidan bo‘ladigan imtihonni “a’lo”ga topshiradilar. Tanlanmadagi 100 ta talabadan “a’lo”ga topshiradiganlari 50% dan ko‘p bo‘lish ehtimoli nimaga teng?

12. TASODIFIY MIQDORLAR VA ULARNING TAQSIMOT QONUNLARI

12.1. Tasodofiy miqdor tushunchasi

12.2. Diskret tasodifiy miqdorlar

12.3. Binominal va Puasson taqsimot qonunlari

Diskret tasodifiy miqdorlar

Ta'rif: Elementar hodisalar fazosida aniqlangan har qanday sonli funksiya tasodifiy miqdor deyiladi.

1-Misol: Ma'lum vaqt davomida avtosalonda sotilgan avtomobillar soni tasodifiy miqdordan iborat.

Tasodifiy miqdorlar diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlarga ajraladi.

Qabul qiladigan qiymatlari chekli yoki sanoqli bo'lgan tasodifiy miqdor diskret tasodifiy miqdor deyiladi. Agar qabul qiladigan qiymatlari sonlar o'qining birorta oralig'ini to'ldirsa, u holda bunday tasodifiy miqdor uzluksiz deyiladi.

Diskret tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari va bu qiymatlarni qabul qilish ehtimollari tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deyiladi. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha yoziladi:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_k	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_k	$\dots$

Har qanday tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni ikki xossaga ega:

1) $p_i \geq 0$, $i = 1,\ 2,\ 3, \dots$

2) $p_1 + p_2 + \dots = 1$

Iqtisodiyotda ko'p uchraydigan taqsimot qonunlarini keltirib o'tamiz.

Binomial taqsimot qonuni.

X	0	1	2	...	n
P	p_0	p_1	p_2	...	p_n

bu yerda $p_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Puasson taqsimot qonuni.

X	0	1	...	n	...
P	p_0	p_1	...	p_n	...

bu yerda $p_n = \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$.

Geometrik taqsimot qonuni.

X	1	2	...	n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

bu yerda $p_n = p \cdot (1-p)^{n-1},\ n = 1, 2, \ldots$.

12.1.Hayotni sug‘urtalash bo‘yicha 4 ta bog‘liqmas shartnomalardan yil davomida to‘lovni talab qilinish ehtimoli 0,25 ga teng. Sug‘urta to‘lovini talab qilishlar sonining taqsimot qonunini tuzing. Kamida 2 ta to‘lovni talab qilinish ehtimolini toping.

12.2. Yutuqli o‘yinda qatnashayotgan 10 ta chiptaning 4 tasi yutuqli. Tavakkaliga 2 ta chipta sotib olinadi. Sotib olingan chiptalar ichidagi yutuqlilari sonining taqsimot qonunini tuzing.

12.3. Hayotni sug‘urtalash bo‘yicha 4 ta bog‘liqmas shartnomalardan yil davomida da’voning kelib tushish ehtimoli 0,1 ga teng. Sug‘urta da’vosining kelib tushishlari sonining taqsimot qonunini va taqsimot funksiyasini tuzing.

12.4.Quyida avtomobilni sug‘urtalash bo‘yicha tuzilgan 100 ta shartnomaga to‘langan sug‘urta to‘lovlari soni haqida ma’lumot keltirilgan:

To‘lovlar soni	0	1	2
Avtomobillar soni	77	19	4

Bitta sug‘urta shartnomasidan kelib tushgan da’volar soni X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. Taqsimot funksiyasini toping va uning grafigini chizing.

12.5. Tibbiy sug‘urta bo‘yicha bitta shartnomadan kelib tushgan da’vo qiymati X_1 tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagi ko‘rinishga ega:

X_1	0	50	100
P	0,3	0,5	0,2

Xuddi shu turdagi 2-shartnoma bo‘yicha taqsimot qonuni quyidagi ko‘rinishga ega:

X_2	0	50	150
p	0,6	0,3	0,1

X_1+X_2 tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni va taqsimot funksiyasini toping.

12.6. Barselona klubining har bir o‘yinda yutish ehtimoli 0.9 ga teng bo‘lsa, birinchi marta yutkazgunga qadar o‘yinlar soni taksimot qonunini tuzing.

12.7. X tasodifiy miqdor $0,1,2,...,n$ qiymatlarni bir xil ehtimollar bilan qabul qiladi. Bu tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini tuzing va uning grafigini chizing.

12.8. X va Y tasodifiy miqdorning birgalikdagi taqsimoti berilgan:

X \ Y	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1/16	1/32	0	1/32	1/32	1/32	1/32	1/32
2	1/32	1/16	1/32	0	1/32	1/32	1/32	1/32
3	1/32	1/32	1/16	1/32	0	1/32	1/32	1/32
4	1/32	1/32	1/32	1/16	1/32	0	1/32	1/32

a) $\max\{X,Y\}$ taqsimotni;

b) $\min\{X,Y\}$ taqsimotni;

v) $X+Y$ taqsimotni;

g) $P\{X\ge 3,\ \max\{X,Y\}\ge 4\}$ ni;

d) $P\{1\le X\le 3;\ \ \min\{X,Y\}\ge 5\}$ ni;

e) $P\{\min\{X,Y\}\le 2,\ \max\{X,Y\}\ge 4\}$ ni toping.

12.9. X va Y bog‘liqmas tasodifiy miqdor bo‘lib, $P\{X=i\}=P\{Y=i\}=\dfrac{1}{n+1},\ \ i=0,1,..,n$ taqsimotga ega. $X+Y$ taqsimotni toping.

12.10. Harf teruvchining har varaqda qiladigan xatolari soni X tasodifiy miqdor bo‘lib, uning taqsimoti quyida berilgan:

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0,01	0,09	0,30	0,20	0,20	0,10	0,10

a) X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini tuzing;

b) $F(x)$ taqsimot funksiyadan foydalanib, harf teruvchining har varaqda 2 tadan ko‘p xato qilish ehtimolini toping;

v) uning har varaqda ko‘pi bilan 4 ta xato qilish ehtimolini aniqlang.

12.11. Bosh og‘rig‘iga qarshi yangi vositani televizorda berilgan reklamani ko‘rgandan so‘ng sotib olgan kishilar foizi tasodifiy miqdor bo‘lib, u quyida berilgan:

X	0	10	20	30	40	50
P	0,10	0,20	0,35	0,20	0,10	0,05

a) bu tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini toping;

b) 20% dan ko‘p kishilarning reklamaga xayrixohlik bildirish ehtimolini aniqlang.

12.12. Avtosalonda har kungi sotilgan mashinalar soni qayd qilib boriladi:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1

Bu ma’lumotlar keyingi kun sotilishi mumkin bo‘lgan taqsimotni tuzishda qo‘llaniladi.

a) ertaga sotiladigan avtomobillar soni 2 tadan 4 tagacha bo‘lish ehtimolini toping;

b) har kungi sotiladigan avtomobillar sonining taqsimot funksiyasini tuzing.

12.13. Qurilmada ishlab chiqarilgan mahsulotlar ichida yaroqsizlari soni X tasodifiy miqdor taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	0	1	2	3	4
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

a) $P\{1 < X < 3\}$ ni;

b) $P\{1 < X < 4\}$ ni toping;

v) taqsimot funksiyasini tuzing.

12.14.Shaharda 10 ta tijorat banklari mavjud bo‘lib, har birining yil davomida inqirozga uchrash ehtimoli 10% ni tashkil etadi. Kelayotgan yil davomida inqirozga uchrashi mumkin bo‘lgan banklar sonining taqsimot qonunini tuzing. Yil davomida ko‘pi bilan bitta bankning inqirozga uchrash ehtimoli nimaga teng?

12.15. Ishlab chiqarish korxonasida rais boshchiligida 3 erkak va 4 ayol ishlaydi. Raisga maxsus ish uchun 2 ishchini ajratish zarur bo‘lib qoldi. U kimningdir shaxsiyatiga tegmaslik uchun ikki ishchini tasodifan tanlashga qaror qildi. Tanlanmada ayollar sonining taqsimot qonunini tuzing.

12.16.Avtosalonda bir markaga tegishli 15 ta avtomobillar bo‘lib, ularning 7 tasi qora, 6 tasi kulrang va 2 tasi oq rangda. Firma vakillari rangidan qat’iy nazar shu markaga tegishli bo‘lgan 3 ta avtomobilni ularga sotish haqidagi taklif bilan murojaat qildilar. Sotilgan qora rangdagi avtomobillar sonining taqsimot qonunini tuzing. Firmaga sotilgan avtomobillar ichida 2 tasi qora rangda bo‘lishi ehtimoli qanday?

12.17.3 ta omborning har birida zarur mahsulotning bo‘lmasligi ehtimoli 0,1 ga teng. Xaridor qaysidir mahsulotni sotib olishni rejalashtirdi. Ayni vaqtda kerakli bo‘lgan mahsulot yo‘q bo‘lgan omborlar sonining taqsimot qonunini tuzing.

12.18. Buxgalteriya balansini tuzishda xatoga yo‘l qo‘yilish ehtimoli 0,1 ga teng. Auditorga tekshirib xulosa chiqarish uchun korxonaning 3 ta balansi topshirildi. Tekshiriladigan balanslarga to‘g‘ri xulosa chiqarishlar sonining taqsimot qonunini tuzing.

12.19. Do‘konga Jizzax va Sirdaryo viloyatlaridan bir xil miqdorda tarvuzlar keltirildi. Xaridorning xom tarvuz sotib olishi ehtimoli mos ravishda 0,01 va 0,03 ga teng. 4 ta tarvuz sotib olingan. Sotib olingan tarvuzlar ichida pishganlari sonining taqsimot qonunini tuzing.

12.20. Ikki xaridor bir-biridan bog‘liqmas holda bittadan xaridni amalga oshirishayapti. 1 xaridorning xarid qilish ehtimoli 0,8 ga, 2 xaridorniki esa 0,6 ga teng. Xaridorlarning qilgan xaridlari sonining taqsimot qonunini toping.

12.21.Avtosalonda xaridorlar avtomobil tanlashmoqda. Xaridor o‘ziga yoqqan avtomobilni tanlagunicha dastlabki bir necha taklif qilingan avtomobillarni p ehtimollik bilan rad etadi. Rad etilgan avtomobillar sonining taqsimot qonunini tuzing.

12.22.15 ta yig‘ilgan agregatdan 6 tasi qo‘shimcha moylashga muhtoj. Agregatlar umumiy sonida tavakkaliga olingan 5 tasi orasida qo‘shimcha moylashga muhtojlari sonining taqsimot qonunini tuzing.

12.23.Do‘konda 5 ta mahalliy va 3 ta xorijiy televizorlar sotilmoqda. Tavakkaliga tanlangan 4 ta televizordan xorijiylari sonining taqsimot qonunini tuzing. Bu tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini toping va grafigini chizing.

13. UMUMIY KO‘RINISHDAGI TASODIFIY MIQDORLAR. TAQSIMOT FUNKSIYA

13.1. Ehtimollarning taqsimot funksiyasi.

13.2. Taqsimot funksiyaning xossalari.

13.3. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar taqsimot qonunlari. Kesmadagi tekis taqsimot. Normal taqsimot.

Diskret tasodifiy miqdorlar uchun taqsimot funksiya tushunchasini kiritamiz: $F(x) = P(X < x)$

Taqsimot funksiya quyidagi xossalarga ega:

1. $F(x)$ kamaymaydigan funksiya.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
3. $F(x)$ chapdan uzluksiz.
4. $F(x)$ faqat chekli yoki sanoqli sondagi uzilish nuqtalariga ega.
5. $F(x)$ faqat chekli uzilishga ega.

Tasodifiy miqdorning $[a;\, b)$ oraliqqa tushish ehtimoli $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$

Uzluksiz tasodifiy miqdorlar

X uzluksiz tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi deb, $p(x) = F'(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$ ga aytiladi.

$p(x)$ - zichlik funksiya quyidagi hossalarga ega:

1. $p(x) \ge 0,\ x \in R$,
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{p}(x)dx = 1$

Tasodifiy miqdor $[a,b]$ kesmadagi qiymatlarni qabul qilish ehtimoli, $x = a$ va $x = b$ to‘g‘ri chiziqlar, yuqoridan $y = p(x)$ funksiyaning grafigi va Ox o‘qi bilan chegaralangan egri chiziqli trapesiyaning yuziga teng, ya’ni

$$P(a \le x < b) = \int\limits_a^b p(x)dx$$

Agar X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $p(x)$ bo‘lsa, u holda bu tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi quyidagicha topiladi:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)dy$$

Bir necha muhim zichlik funksiyalarini keltiramiz:

Tekis taqsimlangan zichlik funksiya

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a;\, b] \\ 0, & x \notin [a;\, b] \end{cases}$$

Ko‘rsatkichli zichlik funksiya

$$p(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \qquad \lambda > 0$$

Normal zichlik funksiya

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

bu yerda a va σ^2 - parametrlar.

13.1. Yong‘in natijasida ko‘rilgan zarar miqdori (shartli pul birligida) $[0;c]$ oraliqda tekis taqsimlangan. $P\left\{0 \leq X \leq \dfrac{c}{2}\right\}$ ni hisoblang.

13.2. X tasodifiy miqdor $p(x) = ae^{-\lambda x}, \ x > 0$ zichlik funksiyasiga ega.

a) a parametrni;

b) X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini toping.

13.3. X tasodifiy miqdor $\lambda > 0, \ a > 0$ parametrli Pareto taqsimotiga ega:

$$p(x) = \frac{a}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{a+1}, \ x > 0$$

a) $P\{1 < X < 2\}$ ni hisoblang;

13.4.Avariya natijasida ko‘rilgan zarar miqdori X $\alpha = 3$ va $\lambda = 1000$ parametrli Pareto taqsimotiga ega. Avariya oqibatlari bo‘yicha sug‘urta shartnomasini tuzgan mijoz 500 pul birligida sug‘urta to‘lovini to‘ladi.

a) Talab etilgan da’voning qiymati sug‘urta badalidan 2 barobar kam bo‘lish ehtimolini, ya’ni $P\{X < 250\}$ ni toping;

b) Talab etilgan da’voning qiymati sug‘urta badalidan 2 barobar ortiq bo‘lish ehtimolini, ya’ni $P\{X > 1000\}$ ni toping.

13.5. 50 dan 60 yoshgacha bo‘lgan kishilar bilan tuzilgan n ta tibbiy sug‘urta shartnomalari o‘rganilmoqda. Bu mijozlarga tibbiy xizmat ko‘rsatish harajatlari $X_i \ (i=\overline{1,n})$ $\Gamma(\alpha_i,\beta)$ gamma taqsimotiga bo‘ysinishi ma’lum. $p(x)=\begin{cases} 0, & agar \ \ x \le 0, \\ \dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}, & agar \ x \ge 0 \end{cases}$ $X_1+X_2+...+X_n$ miqdorning taqsimot funksiyasini toping.

13.6. X tasodifiy miqdor (0,1) parametrli normal taqsimotga ega. $P(-2 \le X \le 2)$ ni hisoblang.

13.7. X tasodifiy miqdor Koshi taqsimotiga ega:

$$p(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

a) X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini;

v) $P\{-\sqrt{3} \le X \le 1\}$ ni;

s) $P\{|X| \ge \sqrt{3}\}$ ni toping.

13.8. Shaxsiy mulk sug‘urtasi bo‘yicha 2 ta shartnomadan kelib tushgan tasodifiy da’vo miqdori mos ravishda $N(a_1,\sigma_1^2)$ va $N(a_2,\sigma_2^2)$ taqsimotga ega. Shu shartnomalar bo‘yicha da’vo miqdorlarii yig‘indisining taqsimotini toping.

13.9. $p(x)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{x^2+\pi^2}$ funksiya qandaydir X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi ekanini ko‘rsating va $P(\pi < X < +\infty)$ ehtimolni toping.

13.10. X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi berilgan:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ,x \le 1 \\ a+b\arcsin x, & -1 < x < 1 \\ 1 & , \quad x \ge 1 \end{cases}$$

a) a, b parametrlarni;

b) $P\left\{|X| \le \dfrac{1}{2}\right\}$ ehtimolni;

v) X ning zichlik funksiyalarini toping.

13.11. X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi berilgan:

$$F(x)=a+b\,arctg\frac{x}{2}$$

a) a, b ni;

b) $P\left\{-\dfrac{\pi}{2} \le X \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$ ni;

v) zichlik funksiyasini toping.

13.12. X tasodifiy miqdor Reley taqsimotiga ega;

$$p(x)=\begin{cases} Axe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

a) A parametrni;

b) X ning taqsimot funksiyasini;

v) zichlik funksiyasi maksimumga erishadigan nuqtani toping.

13.13. X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$p(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}, & |x|<2; \\ 0, & , |x| \geq 2 \end{cases}$$

a) a ni;

b) X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini;

v) $P\left\{\frac{a}{2} < X < 2a\right\}$ ni toping.

13.14. X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan;

$$p(x)=\begin{cases} a\left(4x-x^3\right), & x \in [0,\ 2] \\ 0 & , \ x \in [0,\ 2] \end{cases}$$

a) a ni;

b) $P\{-1 \leq X \leq 1\}$ ni toping.

13.15. Sug‘urta da’volari soni X tasodifiy miqdor $(40; 100)$ parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan. X ning $[30; 80]$ oraliqqa tushish ehtimolini toping.

13.16. Ma’lum hududdagi yoshi katta erkaklarning o‘rtacha bo‘yi $a=170\,см$ bo‘lib, $\sigma=10\,см$. Bu hududdan tavakkaliga tanlangan erkakning bo‘yi 165 bilan 180 sm orasiga tushish ehtimolini toping. Tanlanma normal taqsimlangan deb hisoblansin.

13.17. Katta yoshdagi ayolning bo‘yi tasodifiy miqdor bo‘lib, u normal qonun bo‘yicha taqsimlangan. Uning matematik kutilmasi 164 sm, o‘rtacha kvadratik chetlanishi 5,5 smga teng. Bu tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini toping va tavakkaliga olingan 5 ayoldan kamida bittasining bo‘yi $[163; 165]$ oraliqda bo‘lish ehtimolini toping.

13.18.Standart normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning -2 va 1 orasidagi qiymatlarni qabul qilish ehtimolini toping.

13.19. Standart normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning -2,33 dan katta qiymatlarni qabul qilish ehtimolini toping.

13.20. X normal taqsimlangan tasodifiy miqdor bo‘lib, matematik kutilmasi $a = 410$ va o‘rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma = 2$. X ning 407 bilan 415 orasidagi qiymatlarni qabul qilish ehtimoli nimaga teng?

13.21. X normal taqsimlangan tasodifiy miqdor bo‘lib, matematik kutilmasi $a = 16$ va o‘rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma = 3$.

a) $P\{11 < X < 20\}$;

b) $P\{17 < X < 49\}$;

v) $P\{17 < X < 19\} + P\{X > 15\}$ ehtimollarni toping.

13.22. Viloyat ma’muriyati binosida liftni kutish vaqti tasodifiy bo‘lib, 0 bilan 5 minut orasida tekis taqsimlangan.

a) bu tekis taqsimot uchun $F(x)$ taqsimot funksiyani yozing.

b) liftni 3,5 minutdan ko‘p kutish ehtimoli nimaga teng?

v) liftning dastlabki 45 sekund ichida kelish ehtimoli nimaga teng? g) liftni kutish vaqti 1 bilan 3 minut orasida bo‘lish ehtimoli nimaga teng?

13.23. Yil davomida kompaniya aksiyalarining narxi normal taqsimotga bo‘ysinib, matematik kutilmasi 48 (shartli pul birligida) ga va standart chetlanishi 6 ga teng. Kuzatilayotgan davrning tasodifiy olingan kunida aksiya narxi 60 dan ko‘p bo‘lishi ehtimoli nimaga teng? 60 dan kam bo‘lishi, 40 dan yuqori bo‘lishi, 40 bilan 50 orasida bo‘lishi ehtimoli nimaga teng?

13.24. X tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi bilan berilgan:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right), & x \in [1;3] \\ 0 \quad , & x \notin [1;3] \end{cases}$$

Bu tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasini tuzing va grafigini chizing.

13.25. X uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$p(x) = \frac{2C}{1 + x^2}$$

C parametrni toping.

13.26. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va o‘rtacha kvadratik chetlanishi mos ravishda 12 va 2 ga teng. Bu tasodifiy miqdorning $(14;16)$ intervaldagi qiymatlarni qabul qilish ehtimolini toping.

13.27. Ma’lumki, bir gektar haydalgan yerga solinadigan o‘g‘itning o‘rtacha sarfi 80 kg ni tashkil etadi, o‘rtacha kvadratik chetlanish esa 5 kg ga teng. O‘g‘it sarfini normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deb hisoblab, solinadigan o‘g‘it ulushi 0,98 ehtimol bilan tushadigan oraliqni aniqlang.

13.28. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning o‘rtacha kvadratik chetlanishi 10 ga matematik kutilmasi esa 110 ga teng. Bu tasodifiy miqdorning $[90; 150]$ oraliqqa tushish ehtimolini toping.

13.29. Ko‘rsatkichli taqsimotga ega bo‘lgan

$$p(x)=\begin{cases}0, & t\le 0;\\ 0{,}2e^{-0{,}2t}, & t>0\end{cases}$$

T tasodifiy miqdorning $(4;10)$ intervalga tushish ehtimolini toping.

13.30. X tasodifiy miqdor $[2; 6]$ intervalda joylashgan bo‘lib, $F(x)=\dfrac{1}{16}(x^2-4x+4)$ taqsimot funksiya bilan berilgan. X tasodifiy miqdorning

a) 4 dan kichik;

b) 6 dan kichik;

v) 3 dan kichik bo‘lmagan;

g) 6 dan kichik bo‘lmagan qiymatlarni qabul qilish ehtimolini toping.

13.31. Ixtiyoriy tasodifiy miqdorning o‘z matematik kutilishidan chetlanishi (absolyut qiymat bo‘yicha) o‘rtacha kvadratik chetlanishning uchlanganidan katta bo‘lmasligi ehtimolini baholang (uch sigma qoidasi).

13.32. Tasodifiy tanlangan talabaning bo‘yi normal qonunga bo‘ysinadi. Barcha talabalar 156 sm dan 192 sm gacha bo‘lgan bo‘yga ega deb, matematik kutilmani 174 ga teng bo‘lgan holda «uch sigma» qoidasi yordamida σ ni va $\mathrm{P}(T>180)$, $\mathrm{P}(T<190)$, $\mathrm{P}(160<T<190)$ ehtimollarni toping.

13.33. X tasodifiy miqdor $(1; 4)$ intervalda joylashgan bo‘lib, $x=4$ da maksimumga ega bo‘lgan $F(x)=ax^2+bx+c$ kvadratik funksiya bilan berilgan. a, b, c parametrlarni toping va X tasodifiy miqdorning $[2; 3]$ intervalga tushishi ehtimolini hisoblang.

14. TASODIFIY MIQDORLARNING SONLI XARAKTERISTIKALARI

14.1. Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilishi.
14.2. Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi.
14.3. Matematik kutilish va dispersiya xossalari.

Diskret tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari

Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan bo‘lsin:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_k	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_k	$\dots$

Diskret tasodifiy miqdor X ning matematik kutilishi deb, $MX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n + ...$ songa aytiladi.

Matematik kutilishning xossalarini qarab chiqamiz.

1. O‘zgarmas miqdorning matematik kutilishi shu miqdorning o‘ziga teng:

$$MC = C$$

2. O‘zgarmas ko‘paytiruvchini matematik kutilish belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$MCX = CMX$$

3. Tasodifiy miqdorlar yig‘indisining matematik kutilishi shu miqdorlar matematik kutilishlarining yig‘indisiga teng:

$$M(X+Y) = MX + MY$$

4. Bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar ko‘paytmasining matematik kutilishi shu miqdorlar matematik kutilishlarining ko‘paytmasiga teng:

$$M(X \cdot Y) = MX \cdot MY$$

X tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb, shu tasodifiy miqdor va uning matematik kutilishi orasidagi ayirma kvadratining matematik kutilishiga aytiladi:

$$D(X) = M(X - M(X))^2,$$

agar X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan bo‘lsa,

$$DX = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - MX)^2 p_k \text{ yoki } DX = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 p_k - \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k\right)^2$$

X tasodifiy miqdorning o‘rtacha kvadrat chetlanishi deb, $\sigma = \sqrt{DX}$ ga aytiladi.

Dispersiya quyidagi xossalarga ega:

1. O‘zgarmas miqdorning dispersiyasi 0 ga teng:

$$DC = 0$$

2. O‘zgarmas ko‘paytuvchini dispersiya belgisidan tashqariga kvadratga oshirib chiqarish mumkin:

$$D(CX) = C^2 DX$$

3. Ikki bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar yig‘indisining dispersiyasi har bir tasodifiy miqdor dispersiyalarining yig‘indisiga teng:

$$D(X+Y) = DX + DY$$

4. Ikki bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar ayirmasining dispersiyasi har bir tasodifiy miqdor dispersiyalarining yig‘indisiga teng:

$$D(X-Y) = DX + DY$$

Uzluksiz tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari

Ta’rif. X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi deb $MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$ tenglik bilan aniqlanuvchi MX songa aytiladi.

Matematik kutilishning hossalarini qarab chiqamiz.

1. O‘zgarmas miqdorning matematik kutilishi shu miqdorning o‘ziga teng:

$$MC = C$$

2. O‘zgarmas ko‘paytiruvchini matematik kutilish belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$MCX = CMX$$

3. Tasodifiy miqdorlar yig‘indisining matematik kutilishi shu miqdorlar matematik kutilishlarining yig‘indisiga teng:

$$M(X+Y) = MX + MY$$

4. Bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar ko‘paytmasining matematik kutilishi shu miqdorlar matematik kutilishlarining ko‘paytmasiga teng:

$$M(X \cdot Y) = MX \cdot MY$$

X tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb, shu tasodifiy miqdor va uning matematik kutilishi orasidagi ayirma kvadratining matematik kutilishiga aytiladi:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx\right)^2$$

Ko‘pincha DX belgilash o‘rniga σ^2 belgilash ishlatiladi.

Dispersiyaning xossalari

1) O‘zgarmas sonning dispersiyasi 0 ga teng.

$DC = 0$

2) O‘zgarmas ko‘paytuvchini dispersiya belgisidan tashqariga kvadratga oshirilib chiqarilishi mumkin.

$DCX = C^2 DX$

3) Bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar yig‘indisining dispersiyasi tasodifiy miqdor dispersiyalarining yig‘indisiga teng.

$D(X + Y) = DX + DY$

4) Bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar ayirmasining dispersiyasi tasodifiy miqdor dispersiyalarining yig‘indisiga teng.

$D(X - Y) = DX + DY$

$\sigma = \sqrt{DX}$ kattalik o‘rtacha kvadratik chetlanish deyiladi.

Dispersiya va o‘rtacha kvadratik chetlanishlar tasodifiy miqdor qiymatlarining matematik kutilishidan o‘rtacha chetlanish darajasini xarakterlaydi: dispersiya yoki o‘rtacha kvadratik chetlanish qancha katta bo‘lsa, tasodifiy miqdorning qiymatlarini sochilish darajasi shuncha katta bo‘ladi.

Agar $Y = \varphi(X)$ bo‘lsa, u holda $MY = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) p(x) dx$ formula yordamida hisoblanadi.

Hayotni sug‘urtalash bo‘yicha 4 ta bog‘liqmas shartnomalardan yil davomida da’voning kelib tushishi ehtimoli 0,25 ga teng. Sug‘urta da’vosining kelib tushishlari soni X ning taqsimot qonunini tuzing. MX, DX larni toping.

14.1.Quyida avtomobilni sug‘urtalash bo‘yicha tuzilgan 100 ta shartnomaga to‘langan sug‘urta to‘lovlari haqida ma’lumot keltirilgan:

Sug‘urta to‘lovlari soni	0	1	2
Avtomobillar soni	77	19	4

Sug‘urta da’volari soni X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

14.2. X va Y tasodifiy miqdorlar avtomobilni sug‘urtalash bo‘yicha tuzilgan 2 ta bog‘liqmas shartnomalardan kelib tushgan da’volar soni bo‘lsin.

X	0	1	2	3
p	1/2	1/6	1/6	1/6

va

Y	0	1	2
p	1/2	1/2	1/6

a) $MX,\ DX$ b) $MY,\ DY$ v) $M(X+Y),\ D(X+Y)$ larni hisoblang.

14.3. X tasodifiy miqdor λ parametrli Puasson taqsimotiga ega. $MX,\ DX$ larni hisoblang.

14.4. X tasodifiy miqdor geometrik taqsimotga ega:

$$P\{X=k\}=p\cdot(1-p)^{k-1};\ k=1,2...$$

$MX,\ DX$ larni hisoblang.

14.5. X tasodifiy miqdor (n,p) parametrli binomial taqsimotga ega. $MX,\ DX$ larni toping.

14.6. Baxtsiz hodisa sodir boʻlganda oʻlgan shaxsga toʻlanadigan sugʻurta toʻlovi qiymati $b_1=5000000$ soʻm, tabiiy sharoitda sodir boʻlgan oʻlim uchun bu qiymat $b_2=10000000$ soʻmga teng. Yil davomida baxtsiz hodisa tufayli oʻlish ehtimoli $q_1=0{,}0005$ ga, tabiiy sabablar bilan oʻlish ehtimoli $q_2=0{,}002$ ga teng. Bir yilga hayotni sugʻurtalash boʻyicha oʻlimning turiga qarab toʻlanadigan sugʻurta toʻlovining oʻrtacha qiymatini va dispersiyasini hisoblang.

14.7. Statistik ma'lumotlarga koʻra, 25 yoshli kishining yana bir yil yashash ehtimoli 0,998 ga teng. Sugʻurta kompaniyasi 25 yoshli kishiga 1 mln. soʻmga sugʻurtalanishni taklif etdi. Sugʻurta toʻlovi 3000 soʻmga teng. Kompaniya 25 yoshli bir kishini sugʻurtalash bilan qancha foyda olishini kutishi mumkin?

14.8. Firma sotishga moʻljallagan ombordagi 10 ta kompyuterdan 4 tasi nuqsonli ekanligi ma'lum. Xaridor bu haqda bilmasdan ularning 3 tasini sotib oldi. Sotib olingan barcha kompyuterlarning nuqsonsiz ekanligi ehtimoli nimaga teng? Bitta kompyuterni ta'mirlash 50$ boʻlsa, sotib olingan kompyuterlarning nuqsonlilarini ta'mirlashga ketadigan harajatning matematik kutilmasini va dispersiyasini toping.

14.9. Ikkita bogʻliqmas tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari berilgan:

x	2	4	6	8
p	0,4	0,2	0,1	0,3

va

Y	0	1	2
P	0,5	0,2	0,3

$Z = 2X + 3Y$ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

14.10. Ikki tovarshunos mahsulotlar partiyasini tekshirmoqda. Ularning ish unumdorligi nisbati 5:4 kabi. 1-tovarshunos tomonidan yaroqsiz mahsulotni topish ehtimoli 85%, 2-tovarshunos uchun bu ehtimol 90% ni tashkil etadi. Tekshirilgan mahsulotlar ichidan tavakkaliga 4 tasi tanlab olindi. Tanlangan mahsulotlar ichida yaroqlilari sonining

a) matematik kutilmasi;

b) dispersiyasini toping.

14.11.Kompaniya turli hududlarda 4 ta bino qurish loyihasini ko‘rib chiqadi. Qurilish harajatlarini bo‘lajak yashovchilarning o‘zlari oldindan to‘laydilar. Uylarni qurish uchun zaruriy mablag‘ning yig‘ilish ehtimoli 0,8 ga teng deb baholanmoqda. Loyihadagi har bir qurilgan uy kompaniya barcha harajatlarining uchdan bir qismini qoplaydi. Kompaniya sof foydalarining taqsimotini va kutilayotgan foydani toping.

14.12. Reklama maqsadlarida firma har o‘ninchi tovar birligiga 1 ming so‘mga teng pul yutug‘ini qo‘ydi. 5 ta xarid uchun yutuq hajmidan iborat tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing. Bu tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

14.13. Bir biriga bog‘liq bo‘lmagan bank mijozlarining kreditlarni muddatida qaytarmaslik ehtimoli 0,1 ga teng. 5 ta berilgan kreditdan muddatida qaytarilganlari soni taqsimot qonunini tuzing. Bu tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi, dispersiyasi va o‘rtacha kvadratik chetlanishini toping.

14.14. Sug‘urta kompaniyasi sug‘urta hodisasi yuz berishi munosabati bilan o‘rtacha 10% shartnomalar bo‘yicha sug‘urta summasini to‘laydi. Tavakkaliga olingan 4 ta shartnoma ichida shundaylari soni uchun taqsimot qonunini tuzing. Bu tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini hisoblang.

14.15. Uch aksiya paketlaridan daromad olish ehtimollari mos ravishda 0,5; 0,6 va 0,7 ga teng bo‘lgan taqdirda uch xil aksiyadan egasining daromad oladigan paketlari soni taqsimot qonunini tuzing. Bu tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping, taqsimot funksiyasini tuzing.

14.16. Savdo vakili 5 ta xaridorlarning telefon raqamlariga ega bo‘lib, mahsulot xaridiga buyurtma olguncha ularga ketma-ket telefon qila boshlaydi. Xaridorning buyurtma berish ehtimoli 0,4 ga teng. Qilingan qo‘ng‘iroqlar sonining taqsimot qonunini tuzing. Bu tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

14.17. Har bir abiturient oliygohga kirish uchun 3 ta imtihon topshirishi kerak. Birinchi imtihonni muvaffaqiyatli topshirish ehtimoli 0,9 ga, ikkinchisi 0,8 ga, uchinchisi 0,7 ga teng. Oldingi imtihonni muvaffaqiyatli topshirgan taqdirdagina u keyingisini topshirishga ruxsat oladi. Abiturient tomonidan muvaffaqiyatli topshirilgan imtihonlar sonining taqsimot qonunini tuzing. Bu tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

14.18. 4 ta kalitdan faqat bittasi qulfga to‘g‘ri keladi. Agarda bir marta ishlatib ko‘rilgan kalit keyingi urinishlarda ishtirok etmasa, qulfni ochishga urinishlar soni taqsimot qonunini tuzing. Bu tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi, dispersiyasi va o‘rta kvadratik chetlanishini toping.

14.19. A kompaniyaga 10 mln. so‘m va B kompaniyaga 15 mln. so‘mlik ikkita yuqori riskli jamg‘arma tashkil qilindi A kompaniya 50% yillik foyda va’da qilayapti, lekin uning “sinish” ehtimoli 0,2 ga teng. B kompaniya 40% yillik foyda va’da berayapti, lekin u 0,15 ehtimol bilan “sinishi” mumkin. Bir yildan keyin ikki kompaniyadan olingan umumiy foyda summasidan iborat tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzing va uning matematik kutilmasini toping.

14.20. Zayom obligatsiyalarining yil davomida yutish ehtimoli 0,1 ga teng. 19 ta sotib olingan obligatsiyalar ichida yutuq chiqqan obligatsiyalar soni uchun taqsimot qonunini tuzing. Bu tasodifiy miqdorning matematik qutilmasi, dispersiyasi, o‘rta kvadratik chetlanishi topilsin.

14.21. Sug‘urta kompaniyasining 10000 mijozi bor. Ularning har biri baxtsiz hodisadan sug‘urtalanib 5000 so‘m to‘laydi. Baxtsiz hodisa ro‘y berish ehtimoli 0,0055 ga teng, jabrlanganlarga to‘lanadigan sug‘urta summasi esa 500000 so‘mni tashkil etadi. a) Sug‘urta kompaniyasi zarar ko‘rishi; b) to‘lanadigan sug‘urta summasi uchun mijozlardan tushgan barcha mablag‘ning yarmidan ko‘pi sarflanishi ehtimolini toping.

14.23. X tasodifiy miqdor $[a, b]$ da tekis taqsimlangan.

a) MX , DX ni;

b) agar $a=0,\ b=2$ bo‘lsa, $MX^2,\ M(X-1)^2,\ M\sin X$ ni;

v) agar $a=0,\ b=1$ bo‘lsa, $M\ln\left(\frac{1}{X}\right),\ M\sin 2\pi X,\ Me^X$ ni;

g) radiusi X ga teng bo‘lgan, aylana uzunligi Y ning matematik kutilmasini;

d) qirrasining uzunligi X ga teng bo‘lgan muntazam piramida hajmi Y ning matematik kutilmasini toping.

14.24. X va Y bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar bo‘lib, $[0;1]$ da tekis taqsimlangan.

a) $M\min\{X, Y\}$ ni;

b) $M\max\{X, Y\}$ ni toping.

14.57. X tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi bilan berilgan:

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\notin\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]\\ A\cos x, & x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$$

Noma’lum koeffitsient A, MX va DX ni toping.

14.25. X tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi bilan berilgan:

$$p(x)=\begin{cases}\lambda(4x-x^3), & x\in[0;\ 2]\\ 0, & x\notin[0;\ 2]\end{cases}$$

λ, MX va DX ni toping.

14.26. X tasodifiy miqdor (0;1) parametrli normal taqsimot qonuniga ega.

a) MX va DX ni;

b) X^2 ning taqsimotini toping.

14.27. X tasodifiy miqdor $N(a,\sigma^2)$ MX va DX ni toping.

14.28. T tasodifiy miqdor ko‘rsatkichli zichlik funksiyaga ega. $DT=\frac{1}{\lambda^2}$ ni isbotlang.

14.29. X tasodifiy miqdor normal qonunga bo‘ysunadi va $MX=0$. $(-2;2)$ oraliqqa tushish ehtimoli 0,5 ga teng. Bu tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

14.30. X tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$p(x)=\begin{cases} -\dfrac{3x^3}{4}+\dfrac{9x}{2}-6, & x\in(2;\ 4) \\ 0, & x\notin(2;\ 4) \end{cases}$$

X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

14.31. Avtobus bekatga 5 minut interval bilan keladi. Avtobusni kutish vaqti X tasodifiy miqdorni tekis taqsimlangan deb hisoblab, bu tasodifiy miqdor uchun o‘rtacha kutish vaqti va o‘rtacha kvadratik chetlanishni toping.

14.32. X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi berilgan:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ 1-e^{-0,4x}, & x>0 \end{cases}$$

X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va o‘rtacha kvadratik chetlanishini toping.

14.33. X tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasi bilan berilgan:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ x^2, & 0<x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

a) $p(x)$ zichlik funksiyasini;

b) $M(X)$ matematik kutilmasini;

v) $D(X)$ dispersiyasini;

g) $P(X=0{,}5)$, $P(X<0{,}5)$, $P(0{,}5\le X\le 1)$ ehtimollarni toping;

d) $p(x)$ va $F(x)$ funksiyalarning grafiklarini chizing va unda matematik kutilma hamda ehtimollarni ko‘rsating.

14.34. $X-$fond birjasida bir kvartal davomida $n=400$ ta investorlar bilan qilingan shartnomalar soni bo‘lsin. Quyidagi jadvaldan foydalanib

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	146	97	73	34	23	10	6	3	4	2	2

X tasodifiy miqdor uchun

1) poligon va empirik taqsimot funksiyasini tuzing;

2) a) $\bar{x}$ o‘rtacha qiymatni;

b) dispersiyasini va s o‘rtacha kvadratik chetlanishini toping.

14.35. Qurilma ishlashlari bir-biriga bog‘liqmas bo‘lgan, 1000 ta elementdan tashkil topgan. Ixtieriy elementni t vaqt mobaynida ishdan chiqish ehtimoli 0,002 ga teng. a) t vaqt mobaynida ishdan chiqqan elementlar soni uchun taqsimot qonunini tuzing; b) bu tasodifiy miqdorning matematik qutilmasini va dispersiyasini toping; v) t vaqt mobaynida hech bo‘lmaganda bitta element ishdan chiqish ehtimolini aniqlang.

14.36. O‘lchov asbobi shkalasi bo‘linmasining qiymati 0,2 ga teng. Asbob ko‘rsatkichi yaqin butun son bilan yaxlitlanadi. Hisoblashda yaxlitlash xatoligi tekis qonun bo‘yicha taqsimlangan deb hisoblab:

1) bu tasodifiy miqdorni matematik qutilmasi, dispersiyasi va o‘rta kvadratik chetlanishi;

2) yaxlitlash xatoligi ehtimoli a) 0,04 dan kichik; b) 0,05 dan katta bo‘lishi topilsin.

14.37. Qimmatli qog‘oz narxi normal taqsimlangan. Oxirgi yil mobaynida ish kunlarining 20% ida u 88 pul birligidan past,75% ida esa – 90 pul birligidan yuqori bo‘lgan: a) qimmatli qog‘oz narxining matematik qutilmasi va o‘rta kvadratik chetlanishi; b) sotib olinadigan kuni narx 83 dan 96 gacha pul birligi chegarasida bo‘lishligi ehtimolini; v) 0,95 ishonchlilik bilan qimmatli qog‘oz narxi o‘rta (kutiladigan) qiymatidan maksimal chetlanishi (absolyut qiymati bo‘yicha) aniqlansin.

15. KATTA SONLAR QONUNI VA MARKAZIY LIMIT TEOREMA

15.1. Chebishev tengsizligi.
15.2. Chebishev teoremasi. Bernulli teoremasi.
15.3. Markaziy limit teorema.

Chebishev tengsizligi. X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi $a = MX$ va dispersiyasi $\sigma^2 = DX$ mavjud bo‘lib, $\delta > 0$ istalgancha kichik son bo‘lsin.U holda $P\{|X_N - a| > \delta\} \le \frac{DX}{\delta^2}$ bo‘ladi.

Agar $X_1, X_2, ..., X_N, ...$ bog‘liqmas tasodifiy miqdorlar ketma - ketligi bo‘lib, $DX_N \le C,\ n \ge 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi chekli C mavjud bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{N\to\infty} P\{|\frac{1}{N}\sum\limits_{\alpha=1}^{N} X_\alpha - M(\frac{1}{N}\sum\limits_{\alpha=1}^{N} X_\alpha)| > \delta\} = 0$ bo‘ladi.

$x_1, x_2, ..., x_n$ bog‘liqmas va bir hil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo‘lib, $M(x_1) = a$ *ва* $D(x_1) = \sigma^2 > 0$ bo‘lsin. U holda

$$\lim_{n\to\infty}\left|P\{\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n - n\cdot a}{\sigma\cdot\sqrt{n}} \le x\} - \phi(x)\right| = 0$$

Chebishev teoremasi $X_1, X_2, ... X_n$ tasodifiy miqdorlar o‘zaro bog‘liq bo‘lmay, ularning har biri C soni bilan chegaralangan dispersiyaga ega bo‘lsa, u holda berilgan ketma-ketlik uchun katta sonlar qonuni o‘rinli bo‘ladi.

Bernulli teoremasi. *n* ta erkli tajribada A hodisaning ro‘y berishlari soni m bo‘lsin, har bir tajribada A hodisa o‘zgarmas P ehtimol bilan ro‘y bersin. U holda, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - P\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Bu teoremaning ma’nosi quyidagicha: n yetarlicha katta bo‘lganda $\frac{m}{n}$ ni istalgan aniqlik bilan P ga teng deb olish mumkin. Ya’ni $\frac{m}{n}$ ning qiymatlari P ehtimol atrofida joylashgan bo‘ladi. Bundan tashqari, bu teorema sinashlar soni yetarlicha katta bo‘lganda nisbiy chastota nima uchun turg‘unlik xossasiga ega bo‘lishini tushuntiradi va ehtimolning statistik ta’rifini asoslaydi.

Markaziy limit teoremasi

Teorema. $X_1, X_2, ..., X_n$ tasodifiy miqdorlar bog‘liqsiz, bir xil taqsimlangan bo‘lib, chekli $MX_i = a$ matematik kutilma va $DX_i = \sigma^2, \ i = \overline{1,n}$ dispersiyaga ega bo‘lsin, $0 < \sigma^2 < \infty$, u holda $Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}}$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni $n \to \infty$ da standart normal taqsimotga intiladi, ya’ni

$$F_{Z_n}(x) = P\{Z_n < x\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Ta’rif. Agar X tasodifiy miqdor uchun $MX = 0, \ DX = 1$ bo‘lsa, X tasodifiy miqdor markazlashtirilgan va normallashtirilgan (yoki standart) tasodifiy miqdor deyiladi.

Markaziy limit teoremasi yordamida yetarlicha katta n larda tasodifiy miqdorlar yig‘indisi bilan bog‘liq hodisalar ehtimolini hisoblash mumkin. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ tasodifiy miqdorni standartlashtirsak, yetarlicha katta n larda

$$P\left\{\alpha \le \sum_{i=1}^{n} X_i \le \beta\right\} = P\left\{\frac{\alpha - na}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{\beta - na}{\sigma\sqrt{n}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{\beta - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) \text{ yoki}$$

$$P\{\alpha \le S_n \le \beta\} \approx \Phi\left(\frac{\beta - MS_n}{\sqrt{DS_n}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - MS_n}{\sqrt{DS_n}}\right).$$

1-misol. X_i bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar $[0, 1]$ oraliqda tekis taqsimlangan bo‘lsa, $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping va $P\{55 < Y < 70\}$ ehtimolni hisoblang.

Yechish. Markaziy limit teorema shartlari bajarilganligi uchun, Y tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $f_Y(y) \approx \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-MY)^2}{2\sigma_y^2}}$ bo‘ladi. Tekis taqsimotning matematik kutilmasi va dispersiyasi formulasidan

$$MX_i = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}, \quad DX_i = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

bo‘ladi. U holda $MY = M\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} MX_i = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50,$

$$DY = D\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} DX_i = 100 \cdot \frac{1}{12} = \frac{25}{3},\quad \sigma_Y = \frac{5\sqrt{3}}{3},\quad \sigma_Y = \frac{5\sqrt{3}}{3},$$ shuning

uchun $f_Y(y) \approx \frac{3}{5\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{3(y-50)^2}{50}}$. Oxirgi formulaga ko‘ra

$$P\{55 < S_n < 70\} \approx \Phi\left(\frac{70-50}{\frac{5\sqrt{3}}{3}}\right) - \Phi\left(\frac{55-50}{\frac{5\sqrt{3}}{3}}\right) = \Phi\left(4\sqrt{3}\right) - \Phi\left(\sqrt{3}\right) \approx 0,04.$$

15.1. Sug‘urta kompaniyasi mijozining yil davomida ishlab chiqarishda jarohatlanmasligi ehtimoli 0,97 ga teng. 1000 ta mijoz ichida jarohat olmagan mijozlar ulushi 0,97 ehtimoldan chetlanish (absolyut qiymat bo‘yicha) 0,002 dan ko‘p bo‘lmasligi ehtimolini toping.

15.2. Hodisaning har bir tajribada ro‘y berish ehtimoli 0,3 ga teng. Chebishev tengsizligi yordamida hodisa chastotasining uning ehtimolidan chetlanishining absolyut qiymati 0,01 dan kichik bo‘lish ehtimoli 0,99 dan kichik bo‘lmasligi uchun nechta tajriba o‘tkazish kerak ekanligini toping.

15.3.Bog‘liqmas 4500 ta tasodifiy miqdorlarning har birining dispersiyasi 5 dan oshmaydi. Bu tasodifiy miqdorlarning o‘rta arifmetigi ularning matematik kutilmalari o‘rta arifmetigidan chetlanishi 0,04 dan oshmasligi ehtimolini baholang.

15.4. A hodisaning bitta tajribada ro‘y berish ehtimoli 0,3 ga teng. Chebishev tengsizligi yordamida bu hodisaning 100 ta tajribadagi chastotasi $[0,2;\, 0,4]$ oraliqda yotish ehtimolini baholang.

15.5. Samolyot kursini o‘lchash xatoligining o‘rtacha kvadratik chetlanishi $s = 20$. O‘lchash xatoligining matematik kutilmasini 0 ga teng deb hisoblab, ushbu kursni o‘lchashdagi xatolik 50 dan katta bo‘lish ehtimolini baholang.

15.6. A hodisaning har bir tajribada ro‘y berish ehtimoli 0,3 ga teng. Agar 9000 ta tajriba o‘tkazilganligi ma’lum bo‘lsa, Chebishev tengsizligi yordamida hodisa chastotasining uning ehtimolidan chetlanishi (absolyut qiymat bo‘yicha) 0,01 dan katta bo‘lmasligi ehtimolini baholang.

15.7. Aholi punktidagi sutkalik suv sarfi tasodifiy miqdor bo‘lib, uning o‘rtacha kvadratik chetlanishi 1000 l ga teng. Chebishev tengsizligi yordamida bu punktdagi sutka davomidagi suv sarfi uning matematik kutilmasidan 25000 l dan ortiq chetlanishi (absolyut qiymat bo‘yicha) ehtimolini baholang.

15.8.Agar D(X)=0,001 bo‘lsa, |X-M(X)|<0,1 ning ehtimolini Chebishev tengsizligi bo‘yicha baholang.

15.9. Quyidagilar berilgan: P(|X-M(X)|< ε)≥0,8,D(X)=0,004. Chebishev tengsizligidan foydalanib ε ni toping.

15.10. Biror punktda shamolning o‘rtacha tezligi 16 km/s. Bitta kuzatishda shamolning tezligi 80 km/s dan oshmasligini baholang.

15.11. Toshkent shahrining bitta rayonida elektroenergiyaning o‘rta-cha sarfi may oyida 360000 kvt/s. May oyida elektroenergiya sarfining 1000000 kvt/s dan oshmasligini baholang.

15.12. Aholi punktida 1 kunda suvning o‘rtacha sarfi 50000 litr. Bir kunda suv sarfining 150000 litrdan oshmasligini baholang.

15.13. X tasodifiy miqdor uchun M(X)=1 va $\sigma(X)=0.2$ ga teng. Chebishev tengsizligidan foydalanib, 0,5<X<1.5 tengsizlikni baholang.

15.14. X tasodifiy miqdorning o‘z matematik kutilish chetlanishi uchlangan o‘rtacha kvadratik chetlanishdan kichik bo‘lish ehtimolini Chebishev tengsizligidan foydalanib baholang (“uch sigma” qoidasi).

15.15. Agar D(X)=0,004 bo‘lsa, Chebishev tengsizligidan foydalanib |X-M(X)| <0,2 ning ehtimolini baholang.

15.16. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan.

X:	0,3	0,6
P:	0,2	0,8

||X-M(X)| <0,2 ni baholang.

15.17.Avtotransport sug‘urtasi shartnomalari bo‘yicha yil davomida sug‘urtasi davolari sonining matematik kutilmasi 0,2 ga teng bo‘lgan Puasson taqsimotiga bo‘ysunadi. Bir yil muddatga tuzilgan 100 ta bir-biriga bog‘liqmas sug‘urta shartnomalari mavjud. Shartnomani to‘la ishlash muddatida (bir yil davomida) sug‘urtasi davolari umumiy sonining aniq taqsimoti qanday? Yil davomida sug‘urtasi davolari soni 19, 20 va 21 ta bo‘lish ehtimolini hisoblang. Aniq taqsimotga yaqinlashish uchun qanday normal taqsimotni qo‘llash mumkin? Nima uchun biz bu holda markaziy limit teoremani qo‘llashimiz mumkin? 19, 20 va 21 ta sug‘urtasi davolarining taqribiy ehtimoli qanday? Taqribiy va aniq ehtimollar qanday taqqoslanadi?

15.18.Aholi punktidagi kunlik o‘rtacha suv sarfi 50 000 l ni tashkil etadi. Bu aholi punktidagi kunlik suv sarfi 120 000 l dan oshmasligi ehtimolini baholang.

15.19.Chorvachilik fermasida o‘rtacha kunlik suv sarfi 1000 l ni tashkil etadi, bu tasodifiy miqdorning o‘rtacha kvadratik chetlanishi 200 litrdan oshmaydi.

Chebishev tengsizligidan foydalanib, bu fermada ixtiyoriy olingan kundagi suv sarfi 2000 litrdan oshmasligi ehtimolini baholang.

15.20.Partiyadagi elektr lampalarining o‘rtacha yonish davomiyligini aniqlash uchun mavjud 200 ta bir xil qutilarning har biridan tanlanma usulda bittadan lampa olindi. Agar har bir qutidagi lampalarning yonish davomiyligining o‘rtacha kvadratik chetlanishi 7 soatdan oshmasligi ma’lum bo‘lsa, tanlangan 200 ta elektr lampalarining o‘rtacha yonish davomiyligi partiyadagi barcha elektr lampalarining o‘rtacha yonish davomiyligidan 5 soatdan ortiq farq qilmasligining ehtimolini baholang.

15.21. Bankomatdan 500, 100 va 50 dollarlik standart qiymatda pul olish mumkin. Kunlik olingan pullarning 10% i 100 dollarlik, 60% i esa 50 dollarlik qiymatlarni tashkil etadi. Agar bankomatdan kuniga taxminan 100 marta pul olinishi ma’lum bo‘lsa, ertasi kuni ertalabgacha 0,9 dan kam bo‘lmagan ehtimol bilan pul yetishi uchun bankomatga qancha miqdorda pul qo‘yish kerak?

15.22. Tumanda 10 ta supermarket joylashgan. Ularning kunlik kirimi o‘rtacha 10 mln. so‘mni tashkil etadi va 90% hollarda ko‘pi bilan 1 mln. so‘mga farq qiladigan kirimlar sodir bo‘ladi. Kelasi sutkada kunlik kirim

a) 12 mln. so‘mdan oshishi;

b) 9 mln. so‘mdan kam bo‘lishi;

v) 8 mln. bilan 12 mln. so‘m orasida bo‘lishi ehtimolini toping.

15.23. Kelayotgan referendum arafasida tanlanma so‘rov o‘tkazish kelishib olindi. Ovozlarning taxminiy taqsimoti ma’lum bo‘lib, betaraflar 20% atrofida, «ha» va «yo‘q» ovozlar esa teng foizlarni tashkil etadi. So‘rovlar natijasida «ha» deb javob berganlar soni haqiqatda «ha» deb javob beradiganlar sonidan 2% dan oshmasligi ehtimoli 0,9 ga teng bo‘lishi uchun so‘rovda qancha kishi qatnashishi kerak?

15.24. Kompaniyalar aksiyalari kursining bir birja savdosi davomida o‘rtacha o‘zgarishi 0,3% ni tashkil etadi. Yaqin bo‘lajak savdoda kurs 3% dan ko‘p o‘zgarishi ehtimolini toping.

16. MATEMATIK STATISTIKA ELEMENLARI

16.1. Taqsimotning empirik qonuni variatsion qator.
16.2. Variatsion qator uchun poligon va gistogramma.
16.3. Nuqtaviy va oraliq baholar.

Tasodifiy hodisalar ustida o‘tkaziladigan kuzatish natijalariga asos-lanib, ommaviy tasodifiy hodisalar bo‘ysunadigan qonuniyatlarni aniq-lash mumkin. Matematik statistikaning asosiy vazifasi kuzatish natijala-rini (statistik ma’lumotlarni) to‘plash, ularni guruhlarga ajratish va qo‘-yilgan masalaga muvofiq ravishda bu natijalarni tahlil qilish usullarini ko‘rsatishdan iborat.

Biror X tasodifiy miqdor F(x) taqsimot funksiyasiga ega deylik. X tasodifiy miqdor ustida o‘tkazilgan n ta tajriba (kuzatish) natijasida olin-gan $x_1, x_2,...x_n$ qiymatlar to‘plamiga n hajmli tanlanma deyiladi, $x_1, x_2,...x_n$ qiymatlarni bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan va X tasodifiy miqdor bilan bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar deb qarash mumkin. Ba’zan $x_1, x_2,...x_n$ tanlanma F(x) nazariy taqsimot funksiyaga ega bo‘lgan X bosh to‘plamdan olingan deb ham ataladi.

Bosh to‘plamdan tanlanma olingan bo‘lsin. Birorta x_1 qiymat n_1 marta, x_2 qiymat n_2 marta va hokazo kuzatilgan hamda

$$\sum n_1 = n$$

bo‘lsin. Kuzatilgan x_i qiymatlar variantalar, kuzatishlar soni n_i chasto-talar deyiladi. Kuzatishlar sonining tanlanma hajmiga nisbatini

$$W_i = \frac{n_i}{n}$$

nisbiy chastotalar deyiladi.

Tanlanmaning statistik taqsimoti deb variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar ro‘yxatiga aytiladi.

Shunday qilib, taqsimot deyilganda ehtimollar nazariyasida tasodi-fiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasi-dagi moslik, matematik statistikada esa kuzatilgan variantalar va ular-ning chastotalari yoki nisbiy chastotalari orasidagi moslik tushuniladi.

Aytaylik, X son belgi chastotalarining statistik taqsimoti ma’lum bo‘lsin. Quyidagi belgilashlar kiritamiz: n_x-belgining x dan kichik qiymati kuzatilgan kuzatishlar soni; *n* – kuzatishlarning umumiy soni.

Taqsimotning empirik funksiyasi (tanlanmaning taqsimot funksiyasi) deb har bir *x* qiymati uchun (X<x) hodisaning ehtimolini aniqlaydigan $F_n^*(x)$ funksiyaga aytiladi. Shunday qilib, ta'rifga ko'ra:

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

Bu yerda: n_x – x dan kichik variantalar soni, n – tanlanma hajmi.

Tanlanmaning statistik taqsimotini ko'rgazmali tasvirlash hamda kuzatilayotgan X belgining taqsimot qonuni haqida xulosalar qilish uchun poligon va gistogrammadan foydalaniladi.

Chastotalar poligoni deb kesmalari $(x_1, n_1), (x_2, n_2)$, … (x_k, n_k) nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziqqa aytiladi. Bu yerda x_i – tanlanma variantalari, n_i – mos chastotalar.

Nisbiy chastotalar poligoni deb kesmalari $(x_1, w_1), (x_2, w_2)$, … (x_k, w_k) nuqtalarni tutashtiradigan chiziqqa aytiladi, bu yerda x_i – tanlanma variantalari, W_i –ularga mos nisbiy chastotalar.

Chastotalar gistogrammasi deb asoslari *h* uzunlikdagi oraliqlar, balandliklari esa $\frac{n_i}{h}$ (chastota zichligi) nisbatlarga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat pog'onali figuraga aytiladi.

Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb asoslari *h* uzunlikdagi oraliqlar balandliklari esa $\frac{w_i}{h}$ (nisbiy chastota zichligi) nisbatlarga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat pog'onali figuraga aytiladi.

1-misol. Hajmi 30 bo'lgan tanlanmaning chastotalari taqsimoti berilgan.

x_i	2	8	16
n_i	10	15	5

Nisbiy chastotalar taqsimotini tuzing.

Yechish: Nisbiy chastotalarni topamiz. Buning uchun chastotalarni tanlama hajmiga bo'lamiz.

$$W_1 = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}, \qquad W_2 = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}, \qquad W_3 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

u holda, nisbiy chastotalar taqsimoti

x_i	2	8	16
w_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

2-misol. Quyidagi taqsimot qatori bilan berilgan tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasini tuzing va grafigini chizing.

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

Yechish:

$n = n_1 + n_2 + n_3 = 10 + 15 + 25 = 50$

$W_t = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} = 0.2;$ $\quad W_2 = \frac{15}{20} = \frac{3}{10} = 0.3;$ $\quad W_3 = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} = 0.5$

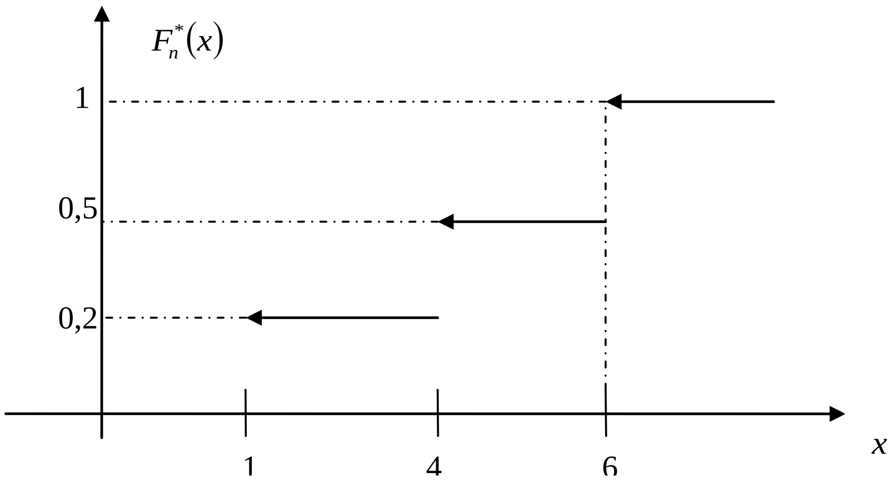
U holda, nisbiy chastotalar empirik taqsimoti

x_i	1	4	6
w_i	0.2	0.3	0.5

Empirik taqsimot funksiya quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0_i\,, agar, x \le 1, bo'lsa \\ 0.2, agar, 1 < x \le 4, bo'lsa \\ 0.5, agar, 4 < x \le 6, bo'lsa \\ 1, agar, x > 6, bo'lsa \end{cases}$$

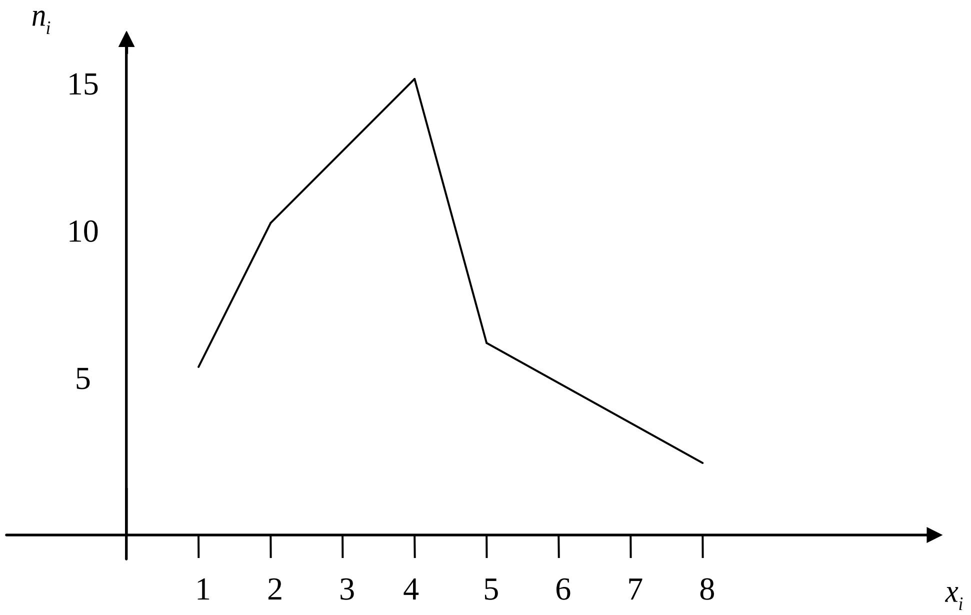
Topilgan qiymatlar asosida grafikni yasaymiz.



3-misol. Berilgan tanlanma taqsimoti bo‘yicha chastotalar va nisbiy chastotalar poligonlarini chizing.

x_i	1	2	4	5	8
n_i	5	10	15	7	3

Yechish: n=5+10+15+7+3=40 tanlanma hajmi. Chastotalar poligoni quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

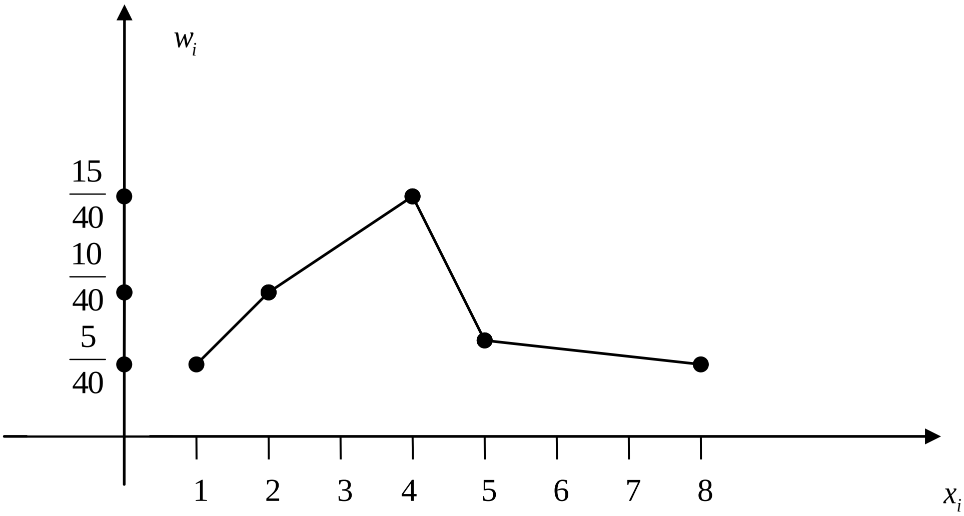


Nisbiy chastotalarni topamiz.

$W_t = \frac{5}{40}$; $W_2 = \frac{10}{40}$; $W_3 = \frac{15}{40}$; $W_4 = \frac{7}{40}$; $W_5 = \frac{3}{40}$;

x_i	**1**	**2**	**4**	**5**	**8**
w_i	$\frac{5}{40}$	$\frac{10}{40}$	$\frac{15}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{3}{40}$

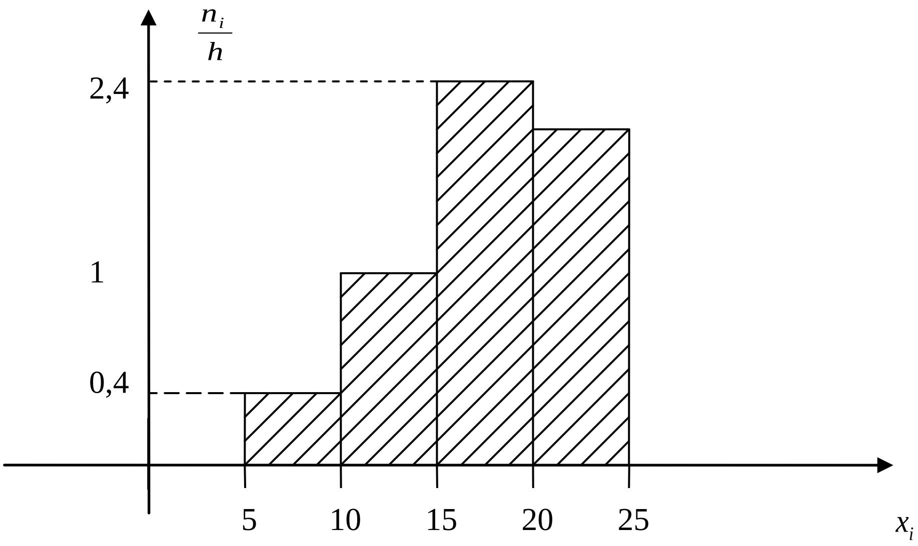
U holda, nisbiy chastotalarni poligoni quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



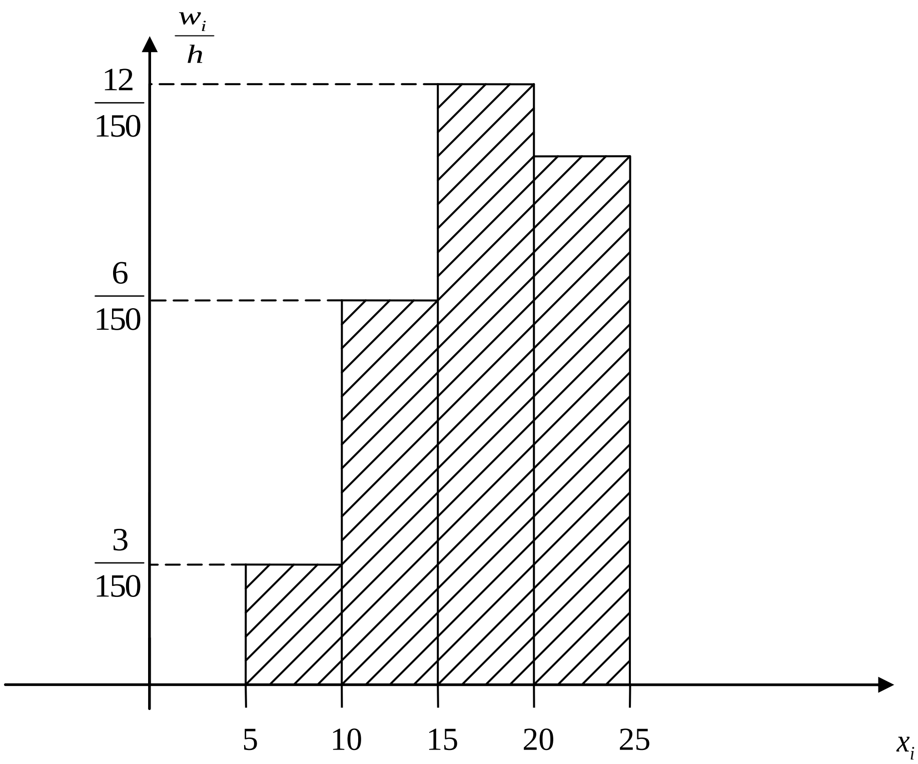
4-misol. Berilgan tanlanma taqsimoti bo‘yicha chastotalar va nisbiy chastotalar gistogrammalarini chizing.

Interval nomeri	Qism interval	Intervaldagi variantalar chastotalari yig‘indisi	Chastotalar zichligi	Nisbiy chastotalar	Nisbiy chastotalar zichligi
I	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i/h	w_i	w_i/h
1	5–10	2	0.4	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{150}$
2	10–15	6	1.2	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{150}$
3	15–20	12	2.4	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{150}$
4	20–25	10	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{150}$

Chastotalar gistogrammasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



Nisbiy chastotalar gistogrammasi esa quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



Nuqtaviy baholash

Matematik statistikaning asosiy vazifasi o‘rganilayotgan jarayon ustida o‘tkazilgan tajribalar asosida olingan miqdorlardan foydalanib, jarayon haqida asoslangan ilmiy xulosalar olishdan iborat.

Bu tajribalarning natijalari $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tajribadan tajribaga o‘zgarib borganligi uchun ularni tasdofiy miqdor deb qarash to‘g‘ri bo‘ladi. Bu aniq jarayon ustida o‘tkazilgan tajribalar bo‘lganligi uchun $x_1, x_2, \ldots, x_n$ larni bir xil taqsimlangan deb olinishi tabiiy.

Ta’rif: Bog‘liqmas va bir xil taqsimlangan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tasdofiy miqdorlarga tanlanma deyiladi.

Tanlanma matematik statistikaning asosiy ob’ektdir.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ tanlanmaning taqsimot qonuni $p(x,\theta)$ (θ - noma’lum parametr) bo‘lsin.

Ta’rif: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tanlanmaning har qanday sonli funksiyasi noma’lum parametr θ uchun baho deyiladi va $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(x_1, \ldots, x_n)$ deb belgilanadi.

Tanlanma berilgan bo‘lsa, noma’lum parametr uchun bir – biridan farq qiluvchi turlicha baholar qurish mumkin. Shuning uchun noma’lum parametr uchun qurilgan $\hat{\theta}_n$ noma’lum baho “yaxshi” baho bo‘lishi uchun quyidagi shartlarni qanoatlantirishi maqsadga muvofiqdir. Bu shartlar siljimaganlik, asoslilik va effektivlikdir.

1) $\hat{\theta}_n$ baho noma’lum parametr θ uchun siljimagan baho deyiladi, agar

$M\hat{\theta}_n = \theta$ bo‘lsa,

2) $\hat{\theta}_n$ baho noma’lum parametr θ uchun asosli baho deyiladi, agar har qanday $\varepsilon > 0$ uchun

$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right\} = 1$ bo‘lsa.

3) $\hat{\theta}_{n1}$ baho, $\hat{\theta}_{n2}$ bahoga nisbatan effektivroq deyiladi, agar

$D\hat{\theta}_{n1} \le D\hat{\theta}_n$ bo‘lsa.

$\hat{\theta}_n$ baholar ichida eng kichik dispersiyaga ega bo‘lgani noma’lum parametr θ uchun effektiv baho deyiladi.

R.Fisher tomonidan ishlab chiqilgan haqiqatga eng yaqin baholash usuli yordamida topilgan baho yetarlicha umumiy shartlarda:

a) yagona;

b) asosli;

s) asimptotik effektiv bo‘ladi.

Bu usulning mohiyati shundan iboratki, noma’lum parametr θ uchun $\hat{\theta}_n$ baho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tanlamaning ro‘y berish ehtimoli

$L(x:\theta) = p(x_1:\theta)\cdot p(x_2:\theta)\cdot ...p(x_n:\theta)$ ni maksimumga erishish shartidan topiladi.

Avval bu funksiyaning kritik nuqtalarini aniqlaymiz. $L(x:\theta)$ va $\ln L(x:\theta)$ bir xil kritik nuqtaga ega bo‘lganliklari uchun $\frac{\partial \ln L(x,\theta)}{\partial \theta} = 0$ tenglamani yechib $\theta = \theta_0$ kritik nuqtani topamiz. Agar bu kritik nuqtada $\left.\frac{\partial^2 \ln L(x,\theta)}{\partial \theta^2}\right/_{\theta=\theta_0} < 0$ bo‘lsa, u holda topilgan $\theta_0 = \theta_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ baho haqiqatga eng yaqin usul bilan topilgan baho bo‘ladi.

16.1. Quyidagi tanlanma berilgan.

2, 1, 3, 3, 1, 2, 3, 3, 3, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 3, 4, 2, 4, 3.

a) Variatsion qatorni tuzing.
b) Chastotalar jadvalini tuzing.
v) Nisbiy chastotalar poligonini chizing.

16.2. Korxona ishchilaridan tavakkaliga 25 tasi tanlanib, ularning tarif razryadlari haqida quyidagi ma’lumotlar olingan.

1, 2, 4, 6, 3, 4, 4, 2, 6, 3, 5, 3, 3, 1, 5, 4, 2, 5, 4, 3,5,4,1,3,4.

Shu ma’lumotlarga asoslangan holda:

a) Tanlanmaning statistik taqsimotini tuzing va chastotalar poligonini yasang.

b) Empirik taqsimot funksiyasini tuzing.

16.3. Tanlanma

x_i	4	6	8	10
n_i	5	2	5	8

chastotalar taqsimoti ko‘rinishda berilgan. Nisbiy chastotalar taqsimo-tini toping.

16.4. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha uning empirik funksiyasini toping.

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

16.5. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha chastota-lar poligonini yasang.

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

16.6. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha nisbiy chastotalar poligonini yasang.

x_i	2	4	5	7	10
w_2	0.15	0.2	0.1	0.1	0.45

16.7. Quyidagi ma’lumotlar asosida empirik funksiyasini toping.

x_i	4	7	10
n_i	5	2	3

16.8. Chastotalar poligonini yasang.

x_i	15	20	25	30	10
n_i	10	15	30	20	25

16.9. Nisbiy chastotalar poligonini yasang.

x_i	20	35	55	80
w_2	0.1	0.3	0.2	0.4

16.10. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha chastotalar gistogrammasini yasang.

Interval ro‘yxati	Qism interval	Intervaldagi variantalar chastotalarining yig‘indisi	Chastota zichligi
I	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i / h
1	2–7	4	
2	7–12	10	
3	12–17	25	
4	17–22	6	
5	22–27	5	

16.11. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha chastotalar gistogrammasini yasang.

Interval ro‘yxati	Qism interval	Qism intervaldagi variantalar chastotalarining yig‘indisi
I	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	0–2	25
2	2–4	30
3	4–6	45
		$n=\sum n_i=100$

16.12. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha chastotalar gistogrammasini yasang.

Interval ro‘yxati	Qism interval	Qism intervaldagi variantalar chastotalarining yig‘indisi
I	$x_i - x_{i+1}$	n_i
1	2–5	5
2	5–8	10
3	8–11	4
4	11–14	6
		$n=\sum n_i=25$

16.13. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha chastota-lar poligonini yasang.

x_i	1	3	7	10	12
w_i	0.15	0.25	0.3	0.2	0.1

16.14. Quyidagi ma’lumotlar asosida empirik funksiyani toping.

x_i	2	15	17
n_i	3	2	5

16.15. Nisbiy chastotalar poligonini yasang.

x_i	6	10	12	15
w_i	0.1	0.2	0.3	0.4

16.16. Tanlanma

x_i	3	7	8	10
n_i	5	2	3	10

chastotalar taqsimotini ko‘rinishida berilgan. Empirik taqsimot funksiya-ni toping va grafigini chizing.

16.17. Quyida berilgan tanlanma taqsimotiga asoslanib, X tasodifiy miqdor dispersiyasi uchun siljimagan bahoni toping.

x_i	1	5	6	8	10
n_i	6	4	7	3	6

16.18. $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanma ko‘rsatkichli taqsimlangan $p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0\end{cases}$. λ parametrning bahosini toping.

16.19. $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanmaning taqsimot funksiyasi $F(x)=1-e^{-\lambda x}$ $(x\ge 0)$ ga teng. λ parametrning bahosini toping.

16.20. $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanma tekis taqsimlangan $p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a;b);\\ 0 & , x\notin(a;b)\end{cases}$

a va b parametrlarning bahosini toping.

16.21. $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanma normal taqsimot qonuniga bo‘ysinadi. $p(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\alpha)^2/2\sigma^2}$. a parametrning bahosini va σ parametrning siljimagan bahosini toping.

16.22. X tasodifiy miqdor binomial qonun bo‘yicha taqsimlangan. Jadvalda tanlanmaning statistik taqsimoti keltirilgan:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i	2	3	10	22	26	20	12	5

p parametrning bahosini toping.

16.23.Qo‘ychilik fermasida qo‘ylarning og‘irligini aniqlash uchun podadan tanlanma usulda 36 ta qo‘y ajratib olindi. Ularning o‘rtacha og‘irligi 50 kg chiqdi. Taqsimotni normal va tanlanma dispersiyaning siljimagan bahosini $s^2=16$ deb hisoblab,

a) 0,8;

b) 0,9;

v) 0,95 ishonchlilik bilan matematik kutilma bahosi uchun ishonchlilik intervalini toping

16.24. Bir qancha minimarketlarda 100 ta mahsulotning sifati tekshirildi, so‘ngra olingan ma’lumotlar tahlil qilindi. Natijada tanlanma o‘rtacha kvadratik chetlanishning $s=4$ siljimagan bahosi olindi. Sifatli mahsulotlar taqsimotini normal deb hisoblab, 0,95 ishonchlilik bilan o‘rtacha kvadratik chetlanish bahosi uchun ishonchlilik intervalini toping.

16.25. Ta’minotchining ta’kidlashicha, yangi o‘g‘itlar partiyasini qo‘llash bug‘doy hosildorligini 60 s/ga ga yetkazar ekan. Yangi o‘g‘it 37 ga maydonga solindi va 3 s/ga “tuzatilgan” o‘rtacha kvadratik chetlanish bilan 55 s/ga hosil olindi. 5% lik qiymatlilik darajasida ta’minotchining ta’kidi to‘g‘riligini baholang.

16.26. Sexdagi 1000 ta ishchidan 50 tasi tanlanib, quyidagicha natija olingan:

Soatbay ishlab chiqarish	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9
Ishchilar soni	1	2	10	17	16	4

0,99 ishonchlilik bilan soatbay ish miqdorning o‘rtacha qiymatdan chetlanishining eng katta qiymatini toping.

16.27. Shahardagi telefon stansiyasida tasodifiy tanlash usulida 100 ta nazorat o‘tkazildi va bitta telefon suhbatining o‘rtacha davomiyligi 10 minut, o‘rtacha kvadratik chetlanishi 5 minut ekanligi tasdiqlandi.

a) Bosh to‘plam o‘rta qiymati uchun 0,997 ehtimol bilan ishonchlilik chegaralarini aniqlang;

b) Bu tanlanmani reprezentativ deb hisoblash mumkinmi?

16.28. Korxonada tanlanma usulda 12 erkak va 8 ayolning ish stajlari tekshirildi. Kuzatuv natijalari quyida keltirilgan.

Ishchilar guruhi	n_i	O‘rtacha ish staji (yil)	Stajning o‘rtacha kvadratik chetlanishi (yil)
Erkaklar	12	14	3
Ayollar	8	4	2

a) Tanlanma ma’lumotlariga ko‘ra ishchilarning umumiy o‘rtacha ish stajini hisoblang.

b) Korxona ishchilarining o‘rtacha ish stajlari uchun ishonchlilik chegaralarini 0,954 ehtimol bilan aniqlang.

16.29. Avtomobil pasporti ma’lumotlariga ko‘ra, dvigatelning yonilg‘i sarfi har bosib o‘tilgan 100 km yo‘lga 10 l bo‘lib, o‘rtacha kvadratik chetlanish 2 l ni tashkil etadi. Dvigatel tuzilishini takomillashtirish natijasida yonilg‘i sarfi kamayishi kutildi. Tekshirish uchun yangi uslubdagi dvigatellar o‘rnatilgan avtomobillarning 25 tasi tasodifiy ravishda tanlab olinib, tajriba o‘tkazildi. Natija: har 100 km bosib o‘tilgan yo‘lga yonilg‘i sarfi 9,2 l ni tashkil etdi. 5% lik qiymatlilik darajasini qo‘llab, yangi uslubning yonilg‘i sarfiga ta’sir etgani haqidagi gipotezani tekshiring.

16.30. Bir xil o‘lchamdagi ananaslarning katta partiyasidan tasodifiy ravishda 36 tasi tanlab olindi. O‘lchash natijasida bitta ananasning tanlanma o‘rtacha og‘irligi 930 gr ga tengligi aniqlandi. Agar

a) o‘rtacha kvadratik chetlanish ma’lum bo‘lib, 200 gr ni tashkil etsa;

b) o‘rtacha kvadratik chetlanish noma’lum, lekin «tuzatilgan»i 250 gr ni tashkil etsa, $\alpha = 0,05$ qiymatlilik darajasida ikki tomonlamani qo‘llab, bitta ananasning o‘rtacha og‘irligi 1 kg ni tashkil etishi haqidagi gipotezani tekshiring.

16.31. A va B korxonalarda tayyorlangan harakatdagi avtomobillar tezligini aniqlashda qo‘llaniladigan radarlarning to‘g‘ri ishlashini tekshirish uchun tajriba o‘tkazildi. Tajriba bitta yo‘lda va bitta mashinada o‘tkazildi. Natijada avtomobil spidometri va radar ko‘rsatkichlari orasidagi chetlanish miqdori aniqlandi.

A *zavod*

Chetlanish, km/s	Δx_i	-	-	-	0,5	0,8	0,9	1,0	1,2	1,3
O‘lchashlar soni	n_i	5	4	2	6	3	1	3	1	1

B *zavod*

Chetlanish, km/s	Δy_i	-0,6	-0,1	0,4	0,7	1,0	1,4
O‘lchashlar soni	m_i	4	5	3	2	2	1

0,1 qiymatlilik darajasida A va B korxonalarda tayyorlangan radarlarning bir xil aniqlikda ishlashi haqidagi gipotezani tekshiring.

16.32. Bir oy davomida shahardagi sabzavot sotish shohobchalarida tanlanma tekshirish o‘tkazildi. Bir turdagi sabzavotni xaridorlarga kam tortishlar bo‘yicha 2 ta tekshirish natijalari quyida keltirilgan:

Interval nomeri	Kam tortishlar intervallari, g.	Chastotalar	
		1-tanlanma uchun n_{i1}	2-tanlanma uchun n_{i2}
1	0 – 10	3	5
2	10 – 20	10	12
3	20 – 30	15	8
4	30 – 40	20	25
5	40 – 50	12	10
6	50 – 60	5	8
7	60 – 70	25	20
8	70 – 80	15	7
9	80 – 90	5	5
		$n_{i1}=100$	$n_{i2}=100$

Sabzavotlarni kam tortishlarni ikki marta tekshirishlar natijasiga ko‘ra $\alpha=0{,}05$ qiymatlilik darajasida tasodifiy tanlanmani aynan bitta taqsimot funksiyasi yordamida ifodalansa bo‘ladi deb hisoblash mumkinmi?

16.33. Reklamada tasdiqlanishicha A aksiyalar bo‘yicha oylik daromad B aksiyalar bo‘yicha daromaddan 0,3% ko‘proq. Bir yillik davr mobaynida B aksiya bo‘yicha o‘rtacha oylik daromad 0,5% ni, A aksiya bo‘yicha esa 0,65% ni tashkil etdi, ularning o‘rtacha kvadratik chetlanishlari esa mos ravishda 1,9% va 2%. Har bir turdagi aksiya bo‘yicha daromadlar normal taqsimlangan deb hisoblab, 0,05 qiymatlilik darajasida reklamada keltirilgan tasdiqni tekshiring.

16.34. Institutning 2 ta fakultetida kirish imtihonlari o‘tkazildi. Moliya-kredit fakultetidagi $n_1=900$ ta abiturientdan $m_1=500$ tasi, hisob-statistika fakultetidagi $n_2=800$ ta abiturientdan $m_2=408$ tasi imtihonlarni muvaffaqiyatli topshirdi. Ikkita fakultetdagi abiturientlar tayyorgarliklari orasida keskin farq mavjud emasligi haqidagi gipotezani $a=0{,}05$ qiymatlilik darajasida tekshiring. Ikkita hol qaralsin: a) raqobatchi gipoteza $H_1: p_1 \neq p_2$; b) raqobatchi gipoteza $H_1: p_1 > p_2$.

16.35. Kompaniya yillik daromadlarning dispersiyasi 0,04 dan ko‘p bo‘lgan investitsion mablag‘ qo‘yishlarni amalga oshirmaydi. A mablag‘lar bo‘yicha kuzatishlarning 52 tasidan olingan tanlanmalardan ko‘rinadiki, uning daromadliligining tanlanma dispersiyasi 0,045 ga teng. Bu kompaniya uchun A mablag‘larga qiymatlilik darajasi

a) 0,05;

b) 0,01 bo‘lgan investitsion mablag‘ qo‘yish mumkin yoki yo‘qligini aniqlang.

16.36. Standartga muvofiq mahsulot tarkibidagi aktiv modda 10% ni tashkil qilishi lozim. 100 ta namunadan tanlanma nazorat tekshiruvi tarkibdagi aktiv modda 15% ligini ko‘rsatdi. 0,05 qiymatlilik darajasida mahsulotni yaroqsiz deyish zarur yoki zarurmasligini aniqlang. Ikkita hol qaralsin: raqobatchi gipoteza $p_1 \neq 0,1;$ b) raqobatchi gipoteza $p_1 > 0,1.$

16.37. Firma buyurtmachilarga reklama kataloglarini jo‘natadi. Tajribaning ko‘rsatishicha, katalogni olgan tashkilotning reklama qilingan mahsulotni olish ehtimoli 0,08 ga teng. Firma 1000 ta yangi, yaxshilangan holatdagi katalogni jo‘natdi va 100 ta buyurtma oldi. 0,05 qiymatlilik darajasida yangi holatdagi reklamani oldingisidan keskin darajada yaxshi deb hisoblash mumkin yoki yo‘qligini aniqlang.

16.38. Berilgan 20 ta korxona bo‘yicha kapital sarmoya X (mln so‘m) va mahsulot ishlab chiqarish Y (mln so‘m) orasidagi korrelyatsion bog‘liqlikni o‘rganish natijasida quyidagi regressiya tenglamalari topilgan: $y = 1,2x + 2$ va $x = 0,7y + 2.$ Quyidagilarni toping: a) qaralayotgan belgilar orasidagi korrelyatsiya koeffitsientini va uning qiymatliligini 5% lik darajada baholash; b) kapital sarmoyaning va mahsulot ishlab chiqarishning o‘rta qiymatini.

16.39. Firmaning vaznni yo‘qotish uchun ishlab chiqarish vositasini maxsus parxez bilan qabul qilganda odam o‘rtacha haftasiga 400 g yo‘qotadi. Tasodifan 25 odam tanlab olindi va ma’lum bo‘ldiki, o‘rtacha haftalik vaznni yo‘qotishi 430 g. teng. O‘rtacha haftasiga 400 g. vazn yo‘qotish gipotezasini tekshiring. Ishonchlilik darajasi 0,95.

17. KORRELYATSIYA NAZARIYASI ELEMENTLARI

17.1. Ikki o‘lchovli tasodifiy miqdor.

17.2. Funksional va tasodifiy bog’lanishlar.

17.3. Korrelyatsion bog’lanish, korrelyatsion moment korrelyatsiya koeffitsenti.

Korrelyatsion tahlil sifat belgilariga va miqdoriy belgilarga ega bo‘lgan nazariy- ehtimoliy modellarni o‘rganish bilan shug‘ullanadi, ya’ni regression va dispersion usullarni birlashtiradi. Quyida faqat bir noma’lumli, bir omilli kovariatsion tahlilni o‘rganamiz.

Bu holda kovariatsion model quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$$Y_i = a_o + a_i X_i + \varepsilon_i$$

bu yerda Y_i -natijaviy belgining qiymatlaridan iborat tasodifiy miqdor; X_i -erkli o‘zgaruvchining qiymatlari; $\varepsilon_i -$ esa $M(\varepsilon_i)=0,\ D(\varepsilon_i)=\sigma^2$ shartlarni qanoatlantiruvchi, normal taqsimlangan bog‘liqmas tasodifiy miqdorning qiymatlari. $a_o,\ a_1 -$ parametrlar. Bu model chiziqli regression model deyiladi.

Y tasodifiy miqdorlarning X tasodifiy miqdorga nisbatan chiziqli regressiya tenglamasi

$$y(x) - \bar{y} = r_T \frac{S_y}{S_x}(x - \bar{x}),$$ bu yerda

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n), \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + ... + x_n), \qquad S_x^2 = \frac{1}{n}x_i^2 - (\bar{x})^2,$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n}\sum y_i^{\ 2} - (\bar{y})^2, \qquad S_x = \sqrt{S_x^2}, \quad S_y = \sqrt{S_y^2}, \qquad r_T = \frac{\sum x_i y_i - n\overline{xy}}{nS_x S_y}$$

Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti r_T ikki tasodifiy miqdor orasidagi bog‘liqlik darajasini ko‘rsatadi. Ikki tasodifiy miqdor bog‘liqmas bo‘lsa, u holda $r_T = 0$. Ammo aksinchasi to‘g‘ri emas, ya’ni ikki tasodifiy miqdor tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti $r_T = 0$ bo‘lsa, u holda bu ikki tasodifiy miqdor bog‘liqmas bo‘lishi shart emas. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsientining xossalarini keltirib o‘tamiz:

1) Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti qiymatlari uchun $-1 \le r_T \le 1$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

2) Agar $r_T = 1$ bo‘lsa, u holda $Y = aX + b,\ \ a > 0$, agar $r_T = -1$ bo‘lsa, u holda $Y = aX + b,\ \ a < 0$ bo‘ladi.

3) Agar $Y = aX + b,\ \ a > 0$ bo‘lsa, u holda $r_T = 1$, agar $Y = aX + b,\ \ a < 0$ bo‘lsa, $r_T = -1$ bo‘ladi.

Korrelyatsion tahlil sifat belgilariga va miqdoriy belgilarga ega bo‘lgan nazariy- ehtimoliy modellarni o‘rganish bilan shug‘ullanadi, ya’ni regression va dispersion usullarni birlashtiradi. Quyida faqat bir noma’lumli, bir omilli kovariatsion tahlilni o‘rganamiz.

Bu holda kovariatsion model quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$$Y_i = a_o + a_i X_i + \varepsilon_i$$

bu yerda Y_i -natijaviy belgining qiymatlaridan iborat tasodifiy miqdor; X_i -erkli o‘zgaruvchining qiymatlari; $\varepsilon_i -$ esa $M(\varepsilon_i) = 0,\ D(\varepsilon_i) = \sigma^2$ shartlarni qanoatlantiruvchi, normal taqsimlangan bog‘liqmas tasodifiy miqdorning qiymatlari. $a_o,\ a_1 -$ parametrlar. Bu model chiziqli regression model deyiladi.

Y tasodifiy miqdorlarning X tasodifiy miqdorga nisbatan chiziqli regressiya tenglamasi

$$y(x) - \bar{y} = r_T \frac{S_y}{S_x}(x - \bar{x}), \text{ bu yerda}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n), \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + ... + x_n), \qquad S_x^2 = \frac{1}{n} x_i^2 - (\bar{x})^2,$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n}\sum y_i{}^2 - (\bar{y})^2, \qquad S_x = \sqrt{S_x^2}, \quad S_y = \sqrt{S_y^2}, \qquad r_T = \frac{\sum x_i y_i - n\overline{xy}}{nS_x S_y}$$

Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti r_T ikki tasodifiy miqdor orasidagi bog‘liqlik darajasini ko‘rsatadi. Ikki tasodifiy miqdor bog‘liqmas bo‘lsa, u holda $r_T = 0$. Ammo aksinchasi to‘g‘ri emas, ya’ni ikki tasodifiy miqdor tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti $r_T = 0$ bo‘lsa, u holda bu ikki tasodifiy miqdor bog‘liqmas bo‘lishi shart emas. Tanlanma korrelyatsiya koeffitsientining xossalarini keltirib o‘tamiz:

1) Tanlanma korrelyatsiya koeffitsienti qiymatlari uchun $-1 \le r_T \le 1$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

2) Agar $r_T = 1$ bo‘lsa, u holda $Y = aX + b,\ \ a > 0$, agar $r_T = -1$ bo‘lsa, u holda $Y = aX + b,\ \ a < 0$ bo‘ladi.

3) Agar $Y = aX + b,\ \ a > 0$ bo‘lsa, u holda $r_T = 1$, agar $Y = aX + b,\ \ a < 0$ bo‘lsa, $r_T = -1$ bo‘ladi.

17.1. Ikki o‘lchovli (X, Y) diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:

X / Y	0	1	2	3
-1	0,02	0,03	0,09	0,01
0	0,04	0,20	0,16	0,10
1	0,05	0,10	0,15	0,05

a) X va Y tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlarini;

b) X tasodifiy miqdorning $Y=2$ sharti ostidagi va Y tasodifiy miqdorning $X=1$ sharti ostidagi shartli taqsimot qonunlarini tuzing.

17.2. X va Y tasodifiy miqdorlarning qiymatlarini o‘lchash natijasida olinganlarga asoslanib,

X	3	5	7	9	10	12
Y	14	10	9	9	6	5

X ning Y bo‘yicha chiziqli regressiyasini va korrelyatsiya koeffitsientini toping.

17.3. X ning Y bo‘yicha regressiya tenglamasini toping.

x_i / y_j	10	15	20	25	30	35
15	6	4	—	—	—	—
23	—	6	8	—	—	—
35	—	—	—	21	2	5
45	—	—	—	4	12	6
55	—	—	—	—	1	5

17.4. Y ning X bo‘yicha regressiya tenglamasini tuzing.

x_i / y_j	5	10	15	20	25	30
14	4	6	—	8	—	4
24	—	8	10	—	6	—
34	—	—	32	—	—	—
44	—	—	4	12	6	—

17.5. Ikki o‘lchovli $(X;Y)$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:

Y / X	2	3	5
1	0,10	0,20	0,15
3	0,05	0,14	0,11
4	0,12	0,08	0,05

Korrelyatsiya koeffitsientini toping.

17.6.Ikki o'lchovli $(X;Y)$ tasodifiy miqdorning berilgan taqsimot qonuni uchun

$X \backslash Y$	1	4
3	0,12	0,20
5	0,24	0,15
6	0,22	0,07

X va Y tasodifiy miqdorlar orasidagi korrelyatsiya koeffitsientini toping va Y ning X ga nisbatan chiziqli regressiya tenglamasini yozing.

17.7. Ikki o'lchovli $(X;Y)$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:

$X \backslash Y$	1	3	4
2	0,20	0,15	0,05
4	0,10	0,11	0,14
5	0,08	0,05	0,12

X ning Y ga nisbatan chiziqli regressiya tenglamasini toping.

17.8.Quyida qand ishlab chiqaruvchi 8 ta korxonalardagi asosiy ishlab chiqarish fondlari bahosi X (mln. sum) bilan sutkalik qayta ishlangan qand lavlagi miqdori Y (ming tonna) haqida ma'lumotlar keltirilgan:

	2,0	2,3	2,4	2,9	2,9	3,7	3,7	4,1
Y	8,9	10,0	9,9	10,3	10,0	13,0	12,8	13,1

1. Y ning X buyicha regressiya tenglamasini toping va uning parametrlari qiymatini $t-$kriteriy yordamida aniqlang.

2. Avtokorrelyatsiyadagi qoldiq miqdorlarni tekshiring.

a) korrelyatsion munosabat;

b) chizikli korrelyatsiya koeffitsienti.

17.9.Quyida 10 ta xo'jaliklardagi don ostiga solingan mineral o'g'it miqdori X (kg/ga) bilan don hosildorligi Y (s/ga) haqida ma'lumotlar keltirilgan:

X	15	18	19	19	21	30	30	35	38	40
Y	13,5	14,0	14,0	14,3	14,0	15,0	18,2	15,0	17,0	20,0

Korrelyatsiya koeffitsientini hisoblang.

17.10. Kollejning 8 o‘quvchisining matematikadan (X) va ijtimoiy fanlardan (Y) mustakil ish uchun olgan ballari mikdori quyida keltirilgan.

Talaba	A	B	V	G	D	E	J	Z
X	90	60	46	68	82	71	66	78
Y	75	69	45	49	58	54	59	70

Matematika va ijtimoiy fanlardan o‘zlashtirish orasidagi korrelyatsiya koeffitsientini hisoblang.

17.11.Qishloq xo‘jaligi ekinini parvarishlashda olti yil mobaynida beshta har xil texnologiyadan foydalanildi. Tajriba natijalari (s.ga) jadvalda keltirilgan.

Kuzatishlar nomerlari (yil)	Texnologiya (A faktor)				
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	1,2	0,6	0,9	1,7	1,0
2	1,1	1,1	0,6	1,4	1,4
3	1,0	0,8	0,8	1,3	1,1
4	1,3	0,7	1,0	1,5	0,9
5	1,1	0,7	1,0	1,2	1,2
6	0,8	0,9	1,1	1,3	1,5
Jami	6,5	4,8	5,4	8,4	7,1

Har xil texnologiyaning ekin hosildorligiga ta’sirini $\alpha = 0.05$ qiymatlilik darajasida aniqlang.

17.12. Zavodda qoplama plitalar chiqarish bo‘yicha 4 ta tizim o‘rnatilgan. Har tizimda bir ish smenasida chiqarilgan plitalardan tasodifiy holda 10 tasi olindi va ularning qalinliklari o‘lchandi (mm). Nominal o‘lchamdan chetlanishlar jadvalda keltirilgan:

Plita chiqaruvchi tizim nomeri	Tajriba nomeri									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	,6	0,2	0,4	0,5	0,8	0,2	0,1	0,6	0,8	0,8
2	,2	0,2	0,4	0,3	0,3	0,6	0,8	0,2	0,5	0,5
3	,8	0,6	0,2	0,4	0,9	1,1	0,8	0,2	0,4	0,8
4	,7	0,7	0,3	0,3	0,2	0,8	0,6	0,4	0,2	0,8

Ishlab chiqarish tizimining sifatli plitalar ishlab chiqarishga ta’sirini 0,05 qiymatliligi darajasida aniqlash talab qilinadi.

17.13. Ajratilgan 5 ta yer uchastkasida (blok) yetishtirilgan 4 xil navli bug‘doy hosildorligi to‘g‘risidagi quyidagi ma’lumotlar olingan:

Bug‘doy navi	Tajriba nomeri				
	1	2	3	4	5
1	45	47	51	52	54
2	47	49	49	47	57
3	42	42	53	48	48
4	44	45	47	44	53

Bug‘doy navining va yer uchastkasining hosildorlikka ta’sirini 0,05 qiymatlilik darajasida aniqlash talab etiladi.

17.21. 4 ta B_1, B_2, B_3, B_4 tashkilotdagi mahsulot ishlab chiqarishda uchta A_1, A_2, A_3 texnologiya tekshirildi. Shartli birliklardagi mehnat unumdorligi haqidagi ma’lumotlar keltirilgan.

A	A_1		A_2		A_3	
	2	3	2	3	2	3
	54	58	60	58	71	65
	46	50	59	60	54	61
	48	50	62	60	66	64
	55	56	54	50	74	62

Mehnat unumdorligiga texnologiyaning va tashkilotning ta’sirini 0,05 qiymatlilik darajasida aniqlang.

17.22 Qaysidir shirkat yaqinda o‘z do‘konlaridagi kir yuvish vositalarining antiseptik sifatlarini namoyish etib, reklama mavsumini o‘tkazdi. 10 haftadan keyin shirkat bu turdagi reklamalar samaradorligini tahlil qildi, bunda haftalik sotuv hajmi bilan reklama harajatlari (ming so‘m) solishtirib ko‘rildi:

Sotuv hajmi (ming so‘m)	72	76	78	70	68	80	82	65	62	90
Reklama harajatlari (ming so‘m)	5	8	5	5	3	9	12	4	3	10

Berilganlar bo‘yicha grafik yasang va shunga ko‘ra bog‘liqlikning xususiyatini aniqlang. Chiziqli korrelyatsiyaning tanlanma koeffitsientini hisoblang, uning qiymatliligini tekshiring, regressiya tenglamasini tuzing va olingan natijalar interpretatsiyasini bering.

17.23. Ish staji haqidagi tanlanma ma’lumot X (yil) va ishchining bir smenadagi ishlab chiqarishi haqidagi ma’lumot Y (dona) berilgan.

X	1	3	4	5	6	7
Y	14	15	18	20	22	25

Boshlang‘ich ma’lumotlar grafigini yasang va shunga ko‘ra bog‘liqlik xususiyatini aniqlang. Chiziqli korrelyatsiyaning tanlanma koeffitsientini hisoblang, uning qiymatliligini tekshiring, regressiya tenglamasini tuzing va olingan natijalar interpretatsiyasinin bering.

17.24. Tashkilot guruhlariga ko‘ra hisobot davri uchun mahsulot birligining tannarxi Y (ming so‘m) ning mahsulot ishlab chiqarish miqdori X (ming dona) ga bog‘liqligi o‘rganilmoqda. Iqtisodchi 5 ta tashkilotni tekshirdi va quyidagi natijalarga ega bo‘ldi:

X	10	15	20	25	30
Y	5	10	16	20	24

$\alpha = 0{,}05$ da X va Y belgilar orasidagi statistik bog‘liqlik qiymatliligini aniqlang. Agar belgilar korrelyatsiyalansa, regressiya tenglamasini tuzing va uning ma’nosini tushuntiring. Bug‘doyning yer 22 sm chuqurlikda haydalgandagi hosildorligi to‘g‘risida prognoz qiling.

17.25. Universitetdagi fakultetlardan birining 4-kurs talabalari orasidan tavakkaliga 10 ta talaba olinib, ularning 1-kursdagi baholari X va 4-kursdagi baholari Y larning o‘rtacha qiymatlari hisoblangan. Quyidagi ma’lumotlar olingan:

X	3,5	4,0	3,8	4,6	3,9	3,0	3,5	3,9	4,5	4,1
Y	4,2	3,9	3,8	4,5	4,2	3,4	3,8	3,9	4,6	3,0

X va Y orasida chiziqli bog‘lanish mavjud deb hisoblab, chiziqli regressiyaning tanlanma tenglamasini aniqlang va topilgan koeffitsientlar ma’nosini tushuntiring. Agar qiymatlilik darajasini 0,05 deb qabul qilsak, korrelyatsiya koeffitsientining qiymatliligi, yo‘na-lishi hamda X va X ko‘rsatkichlarning bog‘lanish darajasi qanday?

17.26.Bir xil o‘lchamdagi 10 ta tajriba maydonidagi biror ekinning hosildorligi haqidagi X (t) va tarkibidagi oqsil miqdori Y(%) kattaliklar berilgan:

Hosildorlik, m	9,9	10,2	11,0	11,6	11,8	12,5	12,8	13,5	14,3	14,4
Oqsil miqdori %	10,7	10,8	12,1	12,5	12,8	12,8	12,4	11,8	10,8	10,6

a) Y ning X ga bog‘liqligini ikkinchi tartibli parabola bo‘yicha muvozanatlash va topilgan regressiya tenglamasining qiymatliligini tekshiring; b) hosildorlikning qanday qiymatida tarkibiy oqsilning o‘rtacha foizi maksimal bo‘lishini aniqlash va bu foizni toping.

17.27. Olti oylik davr uchun uchta aksiya bo‘yicha oylik daromadlarning yillik maoshlar haqidagi quyidagi ma’lumotlar mavjud:

	Oylar bo‘yicha daromadlar %					
A	5,4	5,3	4,9	4,9	5,4	6,0
B	6,3	6,2	6,1	5,8	5,7	5,7
C	9,2	9,2	9,1	9,0	8,7	8,6

C aksiyaga ko‘ra olinadigan Y daromad A va B aksiyalarga ko‘ra olinadigan X_1 va X_2 daromadlarga bog‘liq deyishga asos bor. Y ning X_1 va X_2 lar buyicha regressiya tenglamasini tuzing.

17.28.Quyidagi shartli ma’lumotlardan foydalanib, Y ning X bo‘yicha chiziqli regressiya tenglamasini yozing: $\overline{x} = 15$, $\overline{x^2} = 289$, $\overline{y} = 50$, $\sigma_y = 4$, $r_{xy} = 0,6$.

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ funksiyaning qiymatlari jadvali

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,4	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3327	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1216	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046

3,0	0,0040	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ funksiyaning qiymatlari jadvali.

x	F(x)	x	F(x)	*x*	F(x)	*x*	F(x)
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	071879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0763	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,22	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,23	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,24	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,25	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238		
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

x	F(x)	x	F(x)	*x*	F(x)	*x*	F(x)
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4659	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Puasson taqsimoti $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ ning qiymatlari

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
0,1	0,3048	0,0905	0,0045	0,0002													
0,2	0,8187	0,1637	0,0164	0,0011	0,0001												
0,3	0,7408	0,2223	0,0333	0,0033	0,0003												
0,4	0,6703	0,2681	0,0536	0,0072	0,0007	0,0001											
0,5	0,6065	0,3033	0,0758	0,0126	0,0016	0,0002											
0,6	0,5488	0,3293	0,0988	0,0198	0,0030	0,0003											
0,7	0,4966	0,3476	0,1216	0,0284	0,0050	0,0007	0,0011										
0,8	0,4493	0,3595	0,1438	0,0383	0,0077	0,0012	0,0002										
0,9	0,4066	0,3659	0,1647	0,0494	0,0111	0,0020	0,0003										
1	0,3679	0,3679	0,1839	0,0613	0,0153	0,0031	0,0005	0,0001									
2	0,1353	0,2707	0,2707	0,1805	0,0902	0,0361	0,0120	0,0034	0,0009	0,0002							
3	0,0498	0,1494	0,2240	0,2240	0,1681	0,1008	0,0504	0,0216	0,0081	0,0027	0,0008	0,0002	0,0001				
4	0,0183	0,0733	0,1465	0,1954	0,1954	0,1563	0,1042	0,0595	0,0298	0,0132	0,0053	0,0019	0,0006	0,0002	0,0001		
5	0,0067	0,0337	0,0842	0,1404	0,1755	0,1755	0,1462	0,1045	0,0653	0,0363	0,0181	0,0082	0,0034	0,0013	0,0005	0,0002	
6	0,0025	0,0149	0,0446	0,0892	0,1339	0,1606	0,1606	0,1377	0,1033	0,0689	0,0413	0,0225	0,0113	0,0052	0,0022	0,0009	0,0003
7	0,0009	0,0064	0,0223	0,0521	0,0912	0,1277	0,1490	0,1490	0,1304	0,1014	0,0710	0,0452	0,0264	0,0142	0,0071	0,0033	0,0015
8	0,0003	0,0027	0,0107	0,0286	0,0572	0,0916	0,1221	0,1396	0,1396	0,1241	0,0993	0,0722	0,0481	0,0296	0,0169	0,0090	0,0045
9	0,0001	0,0011	0,0050	0,0150	0,0337	0,0607	0,0911	0,1171	0,1318	0,1318	0,1186	0,0970	0,0728	0,0504	0,0324	0,0194	0,0109
10	0,0001	0,0005	0,0023	0,0076	0,0189	0,0378	0,0631	0,0901	0,1126	0,1251	0,1251	0,1137	0,0948	0,0729	0,0521	0,0347	0,0217

Fisher-Snedokorning F taqsimoti kritik nuqtalari

(k_1 - katta dispersiyaning ozodlik darajalar soni)

(k_2 - kichik dispersiyaning ozodlik darajalar soni)

k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5695	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,85	7,20	5,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

$t_\gamma = t(\gamma, n)$ kiymatlar jadvali

γ / n	0,95	0,99	0,999	γ / n	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,729	3,600
9	2,31	2,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2.617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3291
19	2,10	2,88	3,92				

$q = q(\gamma, n)$ kiymatlar jadvali

γ / n	0,95	0,99	0,999	γ / n	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

χ^2 taksimotning kritik nuktalari

Ozodlik darajalar soni, R	α kiymatdorlik darajasi					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,6	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Student taqsimotning kritik nuqtalari

Ozodlik darajalar soni, R	α kiymatdorlik darajasi (ikki tomonlama kritik soxa)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Qiymatdorlik darajasi, α (ikki tomonlama kritik soha)					

Fisher-Snedokorning F taqsimoti kritik nuqtalari

(k_1 - katta dispersiyaning ozodlik darajalar soni)

(k_2 - kichik dispersiyaning ozodlik darajalar soni)

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5695	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,85	7,20	5,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Jabborov N.M. Oliy matematika. I-jild. darslik.-T.: “Universitet” nashiyoti,-2017-yil,315-bet.

2. Jabborov N.M. Oliy matematika. II-jild. darslik.-T.: “Universitet” nashiyoti,-2017-yil,280-bet.

3. Jabborov N.M. Oliy matematika. III-jild. darslik.-T.: “Universitet” nashiyoti,-2017-yil,280-bet.

4. Sh. Sharaxmetov, O. Kurbanov Iqtisodchilar uchun matematika darslik.-T.: O‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashiyoti,-2017-yil,384-bet.

5. Sh. Sharaxmetov., T.M. Muhiddinov., D.B.Sagdullayev., X.J.Qosimov Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar to‘plami o‘quv qo‘llanma-T.: Iqtisodiyot, 2012-yil, 105-bet.

6. Adirov T., Mamurov E. “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar va ularni yechishga doir ko‘rsatmalar”. –T.: “IQTISOD-MOLIYA”, –2007-yil, 116-bet.

7. Ё.У.Соатов Oliy matematika. III-jild-T.: Ўзбекистон-1990-йил, 640-бет.

8. Гмурман.В.Е. “Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика” –Т.: “Ўқитувчи”,-1977 йил, 366-бет.

9. Прикладная математика : учебное пособие / В.В. Аюпов, А.В. Аюпов; М-во с.-х. РФ; федеральное гос. бюджетное образов. учреждение высшего образов. «Пермская государственная с.-х. акад. имени акад. Д. Н. Прянишникова». – Пермь: ИПЦ «Прокростъ», 2017.– 147 с.

10. Буре, В. М. Теория вероятностей и вероятностные модели: учебник / В. М. Буре, Е. М. Парилина, А. А. Седаков. — Санкт-Петербург: Лань, 2020. — 296 с.

11. Алон, Н. Вероятностный метод : учебное пособие / Н. Алон, Д. Спенсер; перевод с английского А. А. Сапоженко. — 4-е изд. — Москва: Лаборатория знаний, 2020. — 323 с.

Mundarija

INNOVATSIYA NASHRIYOTI
ISBN 978-9943-7629-2-3
9 789943 762923