O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

ABU RAYHON BERUNIY NOMIDAGI
TOSHKENT DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI

OLIY MATEMATIKA

fanining aniq integral va uning tatbiqlari qismidan

Uslubiy qo‘llanma

Toshkent – 2014 y.

Yuldashev A., Pirmatov Sh., Olimov A., Rasulov S. OLIY MATEMATIKA fanining aniq integral va uning tatbiqlari qismidan uslubiy qo‘llanma. Tashkent, ToshDTU 2014. 75 b.

Ushbu uslubiy qo‘llanma Toshkent davlat texnika universitetining talabalari uchun mo‘ljallangan bo‘lib, Oliy matematika fanining asosiy bo‘limlaridan biri bo‘lgan aniq integral tushunchasi va aniq integralga keladigan masalalar haqida asosiy tushunchalar beriladi, bundan tashqari «Turbo-Paskal» tilida aniq integrallarni taqribiy hisoblash uchun standart programmalar dasturi berilgan.

Abu Rayhon Beruniy nomidagi Toshkent davlat texnika universiteti ilmiy-uslubiy kengash qaroriga ko‘ra chop etildi.

Taqrizchilar: F. Zokirov - TAYI Oliy matematika kafedrasi dotsenti
Sh.Qayumov - ToshDTU Oliy matematika kafedrasi dotsenti

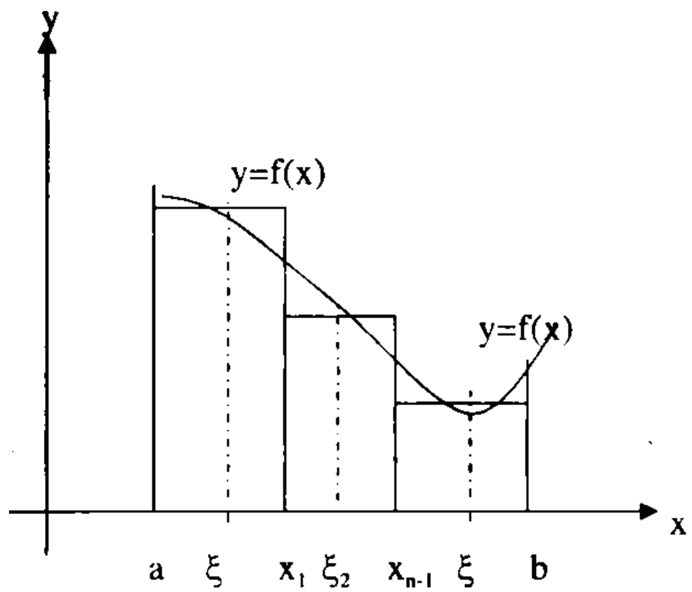
K I R I S H

Mazkur uslubiy qo‘llanma Toshkent davlat texnika universiteti Oliy matematika fanining o‘quv rejasi asosida tayyorlangan bo‘lib, aniq integral haqida to‘la tushunchalarni o‘z ichiga oladi, shu bilan bir qatorda aniq integralga keladigan ayrim fizik va mexanik masalalar ustida mukammal to‘xtalib o‘tiladi. Aniq integralni taqribiy yechishni uchta usuli: to‘g‘ri to‘rt burchak usuli, trapetsiya usuli va Simpson usul isbotlari bilan berilgan. Hozirgi zamon talablaridan kelib chiqqan holda aniq integrallarni taqribiy hisoblashning to‘g‘ri to‘rt burchak, trapetsiya va Simpson usullariga «Turbo-Paskal» tilida standart programmalar dasturi yaratilgan bo‘lib, unda integral osti funksiyalari alohida qism programma shaklida yaratilgan bo‘lib, bunda har bir qism programmaning ishlash prinsipi izohlar yordamida tushuntirib berilgan. Talabalar bu yaratilgan hech qiyinchiliksiz foydalana olishlari mumkin. Talabalarga yanada qulaylik tug‘dirish uchun uslubiy qo‘llanmaning oxirgi bo‘limida aniq integrallarni hisoblashga keltirilgan barcha asosiy formulalarning mundarijasi berilgan. Talaba bu mundarija orqali kerakli formulalarni tez topib oladi.

1. Aniq integral tushunchasiga keltiruvchi masalalar.

1.1. **Egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi haqidagi masala.**

$y = f(x)$- $[a,b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va musbat funksiya bulsin. Oxy tekislikda yuqoridan $y = f(x)$ funksiyaning grafigi bilan, yon tomonlardan $x = a$ va x=b to‘g‘ri chiziqlar bilan, pastdan esa Ox o‘qi bilan chegaralangan shakl (bu shaklni egri chiziqli trapetsiya deb ataymiz) uchun yuza tushunchasini kiritib, bu yuzani hisoblash talab etilgan bulsin. Bu masalani yechish uchun $[a,b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ nuqtalar yordamida n ta $[x_{i-1}, x_i]$ bo‘lakchalarga bo‘lib, har bir bo‘lakchadan bittadan x_i nuqta olamiz va $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$, (bu yerda $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$,) yig‘indini tuzamiz.



1 –rasm

Bu yig‘indining hadlari geometrik jixatdan 1-rasmda shtrixlab ko‘rsatilgan to‘rtburchaklarning yuzasini, S_n yig‘indi esa yuqoridan zinasimon siniq chiziq bilan yon tomonlardan $x = a$ va x=b to‘g‘ri chiziqlar bilan, pastdan Ox o‘qi bilan chegaralangan shaklning yuzasini aniqlaydi.

S_n yig‘indini yuqorida aytib o‘tilgan egri chiziqli trapetsiya yuzasining taqribiy qiymati deb olish mumkin. $[x_{i-1}, x_i]$ bo‘lakchalarning uzunliklari qanchalik kichik bo‘lsa, S_n yig‘indi egri chiziqli trapetsiya yuzasini shunchalik aniqroq ifodalaydi deyish uchun bizda asos bor, chunki $[x_{i-1}, x_i]$ bo‘lakchalarning uzunliklari 0 ga intilganda zinasimon siniq chiziq $f(x)$ funksiyaning grafigiga qaysidir ma’noda «yaqinlashib» boradi.

Endi $[x_{i-1},x_i]$ bo‘lakchalar sonini shunday orttirib boramizki, bu bo‘lakchalarning eng kattasining uzunligi $\max \Delta x_i \to 0$ ga intilsin. Agar bunda S_n yig‘indi biror chekli S limitga intilsa va bu limit [a,b] kesmani $[x_{i-1},x_i]$ bo‘lakchalarga bo‘lish usuliga, hamda bo‘lakchalardan x_i nuqtalarni tanlab olish usuliga bog‘liq bo‘lmasa, uni egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi deb qabul qilamiz. Bunday aniqlangan yuza tushunchasi tajriba natijalari bilan butunlay mos tushadi.

1.2. Bir jinsli bo‘lmagan sterjenning massasi haqidagi masala.

Ox o‘qining [a,b]kesmasida joylashgan sterjenning massasini hisoblash talab etilsin. Sterjenning x nuqtadagi chiziqli zichligi f(x) ga teng deb faraz qilamiz. Oldingi masaladagi kabi [a,b]kesmani $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ nuqtalar yordamida n ta $[x_{i-1},x_i]$ bo‘lakchalarga bo‘lamiz. Agar f(x) funksiyaning $[x_{i-1},x_i]$ kesmadagi o‘zgarishi unchalik katta bo‘lmasa, sterjenning $[x_{i-1},x_i]$ bo‘lakchaga mos keladigan qismining massasi taqriban $f(x_i)\Delta x_i$ ga teng deb hisoblash mumkin (bu erda x_i - $[x_{i-1},x_i]$ kesmadan olingan ixtiyoriy nuqta, Δx_i esa $[x_{i-1},x_i]$ kesmaning uzunligi). Butun sterjenning massasi taqriban

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i, \tag{1.1}$$

ga teng. Sterjen massasining aniq qiymati esa (1.1) yig‘indining $n \to \infty$ ga intilgandagi limitiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i .$$

1.3. O‘zgaruvchan kuch bajargan ish haqidagi masala.

Ox o‘qidagi M moddiy nuqtaga Ox o‘qi yo‘nalishida Ϝ(x) kuch ta’sir qilayotgan bo‘lsin. Bu kuch ta’sirida M nuqta a nuqtadan b nuqtaga ko‘chganda bajarilgan ishni hisoblaymiz. Yana avvalgi masalalardagidek [a,b] oraliqni

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

nuqtalar yordamida n ta $[x_{i-1},x_i]$ bo‘lakchalarga bo‘lamiz va har bir bo‘lakchadan bittadan x_i nuqta olamiz. Ϝ(x) kuchning $[x_{i-1},x_i]$ kesmadagi o‘zgarishi uncha katta emas deb faraz qilsak, uning M moddiy nuqtani x_{i-1} nuqtadan x_i nuqtaga ko‘chirishda bajargan ishi taqriban $F(x_i)\Delta x_i$ ga, a nuqtadan b nuqtaga ko‘chirishda bajargan ishi taqriban

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i,$$

ga teng. Bu ishning aniq qiymati esa

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i.$$

ga teng bo‘ladi.

Yuqorida qaralgan uchchala masalada ham biz [a,b] kesmada aniqlangan funksiyalar ustida bir xil matematik amalni bajardik. Mazkur matematik amal mexanika, fizika, biologiya kabi fanlarning turli masalalarini yechish jarayonida keng tatbiq qilinadi. Bu matematik amal - funksiyalarni kesma bo‘yicha integrallash amali, uning natijasi esa funksiyaning kesmadagi aniq integrali deyiladi.

1.4. Aniq integralning ta’rifi.

Ox sonlar o‘qidagi [a,b] kesmadan olingan

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

shartni qanoatlantiruvchi $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nuqtalarning tartiblangan $p=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ to‘plamini (keyinchalik bu to‘plamni $p=\{x_i\}_{i=0}^{n}$ ko‘rinishda belgilaymiz) [a,b] kesmani qismiy kesmalarga bo‘linishi deymiz. $|p|:=\max\limits_i |x_i-x_{i-1}|$ son, ya’ni $[x_{i-1},x_i]$ qismiy kesmalarning maksimal uzunligi $\boldsymbol{p}$ bo‘linishning moduli deyiladi.

Ta’rif. f(x)- [a,b] kesmada aniqlangan funksiya, $p=\{x_i\}_{i=0}^{n}$ esa [a,b]kesmani qismiy kesmalarga bo‘linishi bulsin. Har bir $[x_{i-1},x_i]$ qismiy kesmadan ixtiyoriy tarzda bittadan x_i nuqta olamiz va f(x) funksiyaning p bo‘linishga mos keluvchi integral yig‘indisi deb ataladigan quyidagi

$$s(p,f)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i,$$

(bu yerda $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ $[x_{i-1},x_i]$ qismiy kesmaning uzunligi) yig‘indini tuzamiz. Agar qismiy kesmalarning maksimal uzunligi $|p|\to 0$ ga intilganda $s(p,f)$ integral yig‘indi chekli I limitga intilsa, hamda bu limit p bo‘linishlarga va $[x_{i-1},x_i]$ qismiy kesmadan x_i nuqtani tanlab olish usuliga bog‘liq bo‘lmasa, u holda bu limit f(x) funksiyaning [a,b] oraliqdagi aniq integrali deyiladi va yozuvda $\int_a^b f(x)dx$ ko‘rinishda belgilanadi.

Shunday qilib, $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$, bunda a soni integralning quyi chegarasi, b soni esa integralning yuqori chegarasi, [a,b] kesma integrallash oralig‘i, f(x) - integral ostidagi funksiya , x -integral o‘zgaruvchisi deyiladi. Agar f(x) funksiyaning [a,b] kesmadagi aniq integrali mavjud bo‘lsa, bu funksiya [a,b] kesmada integrallanuvchi deyiladi.

Izoh. Aniq integralning yuqoridagi ta’rifida integralning quyi chegarasi a uning yuqori chegarasi b dan kichik deb faraz qilindi. Agar b<a bo‘lsa, [b,a] kesmada integrallanuvchi har qanday f(x) funksiya uchun ta’rifga ko‘ra

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad (1.2)$$

deb olinadi. Bundan, agar a=b bo‘lsa, a nuqtada aniqlangan har qanday f(x) funksiya uchun

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad (1.3)$$

tenglik kelib chiqadi. Haqiqatan (1.2) tengilkdagi b ni a bilan almashtirsak,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

tenglik hosil bo‘ladi. Biroq oxirgi tenglik faqat $\int_a^a f(x)dx = 0$ bo‘lgandagina o‘rinli.

Aniq, integral haqida gan borganda tabiiy tarzda quyidagi ikki masala paydo bo‘ladi:

1. [a,b] kesmada integrallanuvchi funksiyalar sinfini aniqlash;
2. aniq integralni hisoblash usullarini aniqlash.

Biz ushbu ma’ruzalar matnida e’tiborni asosan 2-masalaga qaratamiz. 1-masala yuzasidan esa quyidagi teoremani isbotsiz bayon etish bilan cheklanib, bu masalaga oid kengroq ma’lumot olishni istagan o‘quvchilarga [1], [2], [3] adabiyotlarga murojaat etishlarini tavsiya etamiz.

Teorema. [a,b] kesmada uzluksiz funksiya bu oraliqda integrallanuvchidir.

1.5. Aniq integralning xossalari.

1-xossa. Agar f(x) funksiya [a,b] kesmada integrallanuvchi bo‘lsa, u xolda $l\ f(x)$ (l - o‘zgarmas son) funksiya ham bu kesmada integrallanuvchidir va

$$\int_a^b l\ f(x)dx = l\int_a^b f(x)dx$$

tenglik o‘rinli, boshqacha aytganda, o‘zgarmas ko‘paytuvchini integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

Isboti.

$$\int_a^b l\ f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} l\ f(x_i)\Delta x_i = l\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = l\int_a^b f(x)dx$$

2-xossa. $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi f(x) va g(x) funksiyalarning algebraik yig‘indisi ham bu kesmada integrallanuvchidir, xamda ushbu

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

tenglik o‘rinli.

Isboti.

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) \pm g(x_i)]\Delta x_i =$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \pm \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Yuqorida keltirilgan ikki xossa aniq integralning chiziqlilik xossasi deyiladi.

3-xossa. (Aniq integralning additivlik xossasi.) Agar f(x) funksiya [a,b] kesmada integrallanuvchi bo‘lsa, u xolda [a,b] kesmadan olingan har qanday c son uchun

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (1.4)$$

tenglik o‘rinli, boshqacha aytganda, agar $[a,b]$ kesma s nuqta yordamida ikkita $[a,c]$ va $[c,b]$ bo‘laklarga ajratilsa, f(x) funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi integrali bu funksiyaning $[a,c]$ va $[c,b]$ bo‘laklardagi integrallarining yig‘indisiga teng.

Isboti. Integral yigindining limiti $[a,b]$ kesmani bo‘laklarga bo‘lish usuliga bog‘liq bo‘lmagani uchun x=s nuqtani bo‘liniish nuqtalari qatoriga kiritamiz. $[a,b]$ kesmadagi integral yig‘indi $[a,c]$ va $[c,b]$ kesmalarga mos integral yig‘indilardan iborat ikkita qo‘shiluvchiga ajraladi:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{a}^{c} f(x_i)\Delta x_i + \sum_{c}^{b} f(x_i)\Delta x_i$$

Bu tenglikda $n \to \infty$ da limitga o‘tib, (1.4) tenglikni hosil qilamiz. ■

Izoh. Biz 3-xossa bayonida s nuqta $[a,b]$ kesmada yotadi, ya’ni $a \le c \le b$ deb faraz qildik. Agar f(x) funksiya chegaralari a,b,c nuqtalarda joylashgan kesmalarning eng uzunida integrallanuvchi bo‘lsa, (1.4) formula s nuqta $[a,b]$ (yoki $[b,a]$) kesmadan tashqarida yotganda ham o‘rinli bo‘ladi. Masalan, $\boldsymbol{a,b,c}$ nuqtalar $\boldsymbol{a < b < c}$ tartibda joylashib, f(x) funksiya $[\boldsymbol{c,a}]$ kesmada integrallanuvchi bo‘lsin, u holda yuqorida isbotlangan (1.4) formulaga asosan

$$\int_c^a f(x)dx = \int_c^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx,$$

bundan

$$-\int_b^a f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Endi (1.2) formulani e'tiborga olsak, oxirgi tenglikdan

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

munosabat kelib chiqadi.

4-xossa. (Aniq integralning musbatlik xossasi.). Agar f(x) va g(x) funksiyalar $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib,

$$f(x) \geq g(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

shartni qanoatlantirsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx,$$

xususan $f(x) \geq 0$ bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Isbot. $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x_i = \int_a^b g(x)dx$

5-xossa. Agar f(x) funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lib,

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \forall x \in [a,b]$$

(bu yerda m va M - o'zgarmas sonlar) shartni qanoatlantirsa, u holda

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \tag{1.5}$$

Isboti. 4-xossaga ko'ra

$$\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx. \tag{1.6}$$

Ammo $\int_a^b mdx = m\int_a^b dx = m\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = m(b-a),$, shuningdek $\int_a^b Mdx = M(b-a).$.
Bu tengliklardan va (1.6) dan (1.5) tengsizliklar kelib chiqadi.

6-xossa. (o'rta qiymat haqidagi teorema). $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan f(x) funksiya uchun

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), \qquad c \in [a,b] \tag{1.7}$$

shartni qanoatlantiruvchi s nuqta mavjuddir.

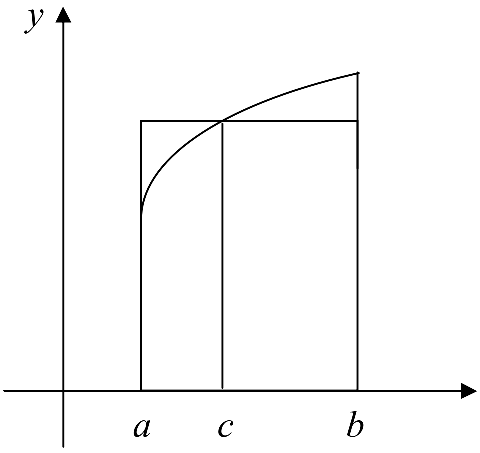
Isboti. m va M sonlar $f(x)$ funksiyaning [a,b] kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari bo'lsin:

$$m \le f(x) \le M. \qquad (1.8)$$

5-xossaga asosan $\quad m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$

Bu tengsizlikni hamma qismini b-a>0 ga bo‘lib, $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$

ni hosil qilamiz. Bundan ko‘rinadiki $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ ifodaning son qiymati $[m,M]$ kesmaga tegishli. Biroq $f(x)$ funksiya [a,b] kesmada uzluksiz bo‘lgani sababli u $[m,M]$ kesmadagi hamma qiymatlarni qabul qila oladi. Demak, biror $c \in [a,b]$ nuqtada $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglikni ikkala tomonini b-a ga ko‘paytirib, (1.7) ni hosil qilamiz.■



2-rasm

O‘rta qiymat haqidagi teorema sodda geometrik ma’noga ega: $f(x) > 0$ bo‘lganda yuqoridan $f(x)$ funksiyaning grafigi bilan chegaralangan b-a asosli egri chiziqli trapetsiyaning yuzi o‘shanday asosli va balandligi $f(x)$ funksiyaning [a, b] kesmadagi biror qiymatiga teng bo‘lgan to‘rtburchakning yuziga teng. (2-rasmga qarang).

7-xossa.(o‘rta qiymat haqidagi umumlashgan teorema).

Agar

1) $f(x)$- $[a,b]$ kesmada uzluksiz funksiya;

2) $g(x)$- $[a,b]$ kesmada ishorasini o‘zgartirmaydigan integrallanuvchi funksiya bo‘lsa u holda

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx \qquad a \le c \le b \qquad (1.9)$$

shartni qanoatlantiruvchi s nuqta mavjud.

Isboti. Umumiylikni buzmagan holda $g(x) \ge 0$ deb faraz qilamiz. (Agar

$g(x) \le 0$ bo‘lsa, bu funksiya o‘rniga $\bar{g}(x) = -g(x)$ funksiya qaraladi). (1.8) tengsizlikni $g(x)$ ga ko‘paytirib, $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x),\ \ a \le x \le b$ tengsizlikka, bu tengsizlikning hadlarini integrallab,

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx \tag{1.10}$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Agar $\int_a^b g(x)dx = 0$ bo‘lsa, (1.10) ga kura $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ va (1.9) barcha $c \in [a,b]$ uchun bajariladi. $\int_a^b g(x)dx \ne 0$ bo‘lsin. U holda $\int_a^b g(x)dx > 0$

(1.10) tengsizlikni bu songa bo‘lib, $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$ ni hosil qilamiz,

ya’ni $\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ son f(x) ning qiymatlar sohasiga tegishli. Shu sababli biror

$c \in [a,b]$ uchun $\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = f(c)$

Bu tenglikdan (1.9) kelib chiqadi. ■

2. Yuqori chegarasi o‘zgaruvchi integral. N’yuton – Leybnis formulasi. Aniq integralni hisoblash.

Avvalo shuni ta’kidlab o‘tamizki, aniq integralning son qiymati faqatgina integral ostidagi funksiya bilan integrallash oralig‘iga bog‘liq, integral o‘zgaruvchisining qanday belgilanishiga bog‘liq emas:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

Agar aniq integralning quyi chegarasi a ni tayin qilib olib, yuqori chegara x ni o‘zgartirib borsak, umuman aytganda integralning son qiymati ham o‘zgaradi, ya’ni $\int_a^x f(t)dt$ ifoda x ning funksiyasi bo‘ladi. Bu funksiyani

$f(x)$ orqali belgilaymiz: $f(x) = \int_a^x f(t)dt, \ \ x \in [a,b].$

1-teorema. Agar $f(t)$ funksiya $t = x$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa, $f(x)$ funksiyaning hosilasi integral ostidagi funksiyaning yuqori chegaradagi qiymatiga teng, ya’ni

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x) \qquad \text{yoki} \qquad f'(x) = f(x).$$

Isboti. x argumentga Δx orttirma beramiz va aniq integralning 3-xossasiga asoslanib, $f(x)$ funksiyaning Δf orttirmasi uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - \Delta f = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

O‘rta qiymat haqidagi teoremaga ko‘ra $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x,$

bunda

$$x \le c \le x + \Delta x. \qquad (2.1)$$

Yuqorida aytilganlarga asosan

$$\Delta \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c})\Delta \boldsymbol{x}$$

Bu tenglikni ikkala tomonini $\Delta \boldsymbol{x}$ ga bo‘lib, $\Delta \boldsymbol{x} \to 0$ da limitga o‘tamiz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c)$$

Chap tomondagi limit $f'(x)$ ga tengligi ravshan. O‘ng tomondagi limit esa (2.1) ga va $f(t)$ning uzluksizligiga asosan $f(x)$ ga teng bo‘ladi.

<u>Nyuton-Leybnis formulasi</u>. Biz endi aniq integralni hisoblash imkonini beruvchi asosiy formulani bayon etishga kirishamiz,

2-teorema. $F(x) - [a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lgan f(x) funksiyaning biron boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsin. U xolda quyidagi tenglik o‘rinli:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (2.2)$$

(2.2) tenglik aniq integralni hisoblashning asosiy formulasi (N’yuton-Leybnis formulasi) deyiladi.

$$f(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Isboti. 1-teoremaga ko‘ra ham $f(x)$ funsiyaning $[a,b]$ kesmadagi boshlang‘ich funksiyasi bo‘ladi. Ammo bir funksiyaning ikki boshlang‘ich funksiyasi

$$f(x)=F(x)+C, \quad x\in[a,b], \quad C-const,$$

tenglik bilan bog‘lanishi aniqmas integrallar nazariyasidan ma’lum. Boshqacha aytganda

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)+C \tag{2.3}$$

tenglik $[a,b]$ kesmadagi barcha x lar uchun o‘rinli. Xususan, $x=a$ da $\int_a^a f(t)dt=F(b)-F(a)$ yoki (1.3) ga asosan $0=F(a)+C,$ ya’ni $C=-F(a)$ tenglik hosil bo‘ladi. C ning topilgan ifodasini (2.3) ga qo‘ysak, $\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a),\ x\in[a,b]$ tenglik hosil bo‘ladi. Bu tenglikdan $x=b$ da $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$ formula kelib chiqadi.

Ammo aniq integral integral o‘zgaruvchisining belgilanishiga bog‘liq bo‘lmagani uchun oxirgi formulani $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ ko‘rinishida yozishimiz mumkin.

Agar $F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$ belgilash kiritsak, oxirgi formula quyidagi ko‘rinishida yoziladi:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Misollar. 1) $\int_1^e \frac{dx}{x}$ hisoblansin.

Yechimi: $\int_1^e \frac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^e=\ln e-\ln 1=1$

2) $\int_0^{\pi} \cos x dx$ hisoblansin.

Yechimi: $\int_0^{\pi} \cos x dx=\sin x\Big|_0^{\pi}=\sin\pi-\sin 0=0$

3-teorma. (Antiq integralda o‘zgaruvchini almashtirish.) $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha,\beta]$ kesmada uzluksiz va uzluksiz hosilaga ega bo‘lib, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ shartni qanoatlantirsin. $f(x)$ esa $[\alpha,\beta]$ kesmaning φ -akslantirishdagi obrazi bo‘lmish $[a,b]=\varphi([\alpha,\beta])$ kesmada uzluksiz bo‘lsin. U holda

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (2.4)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isboti. $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning $[a,b]$ kesmadagi boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsin. U holda $\Phi(t)=F[\varphi(t)]$ funksiya $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ funksiyaning $[\alpha,\beta]$ kesmadagi boshlang‘ich funksiyasi bo‘ladi. Haqiqatan, murakkab funksiyadan hosila olish qoidasiga binoan

$$\Phi'(t)=(F[\varphi(t)])'=F'[\varphi(t)]\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$$

Қuyidagi tengliklar zanjiri (2.4) tenglikni o‘rinli ekanini ko‘rsatadi (bunda birinchi va oxirgi tenglik Nyuton-Leybnis formulasidan, o‘rtadagi tengliklar esa masala shartidan kelib chiqadi).

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Misollar. 3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$ ni hisoblang.

Yechimi. $x=2\sin t$ almashtirish qilamiz. U holda, $dx=3\cos tdt$. $0=2\sin\alpha$ tenglikdan yangi t o‘zgaruvchining quyi chegarasi α ni topamiz: $\alpha=0.$. Xuddi shu kabi $1=2\sin\beta$ tenglikdan, $\beta=\frac{\pi}{6}$. Yuqoridagi teoremaga ko‘ra

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos tdt}{\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}}=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{1}{4}tgt\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{4\sqrt{3}}$$

4) $\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+x^2}dx$ ni hisoblang.

Yechimi:

$$\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\,dx = \left\| \begin{array}{l} x = sht, dx = chtdt \\ 0 = sha \Rightarrow a = 0, \sqrt{3} = shb \Rightarrow b = \ln(2+\sqrt{3}) \end{array} \right| = \int_0^{\ln(2+\sqrt{3})} \sqrt{1+sh^2t}\,chtdt =$$

$$= \int_0^{\ln(2+\sqrt{3})} ch^2tdt = \frac{1}{2}\int_0^{\ln(2+\sqrt{3})} (1+ch2t)dt = \frac{1}{2}(t+\frac{1}{2}sh2t)\Big|_0^{\ln(2+\sqrt{3})} = \ln\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{3}$$

Shuni ta’kidlab o‘tish lozimki, ba’zan aniq integralni hisoblashga o‘zgaruvchini almashtirish haqidagi teoremani tatbiq qilishda eski x o‘zgaruvchini yangi t o‘zgaruvchi orqali ifodalaydigan x = cp(t) almashtirish emas, aksincha, yangisini eskisi orqali ifodalaydigan t - u(x) almashtirishdan foydalanish qulayroq.

5) $\int_{-1}^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ hisoblansin.

Yechimi:

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int_{-1}^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \left| \begin{array}{l} t = x+1, dt = dx \\ t(-1) = 0, t(\sqrt{3}-1) = \sqrt{3} \end{array} \right| = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= arctgt\Big|_0^{\sqrt{3}} = arctg\sqrt{3} - arctg\sqrt{0} = \frac{\pi}{3}.$$

6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 xdx$ hisoblansin.

Yechimi:.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \cos xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)d(\sin x) = \left| \begin{array}{l} t = \sin x, \\ t(0) = \sin 0 = 0, \\ t(\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 (1-t^2)dt = (t-\frac{t^3}{3})\Big|_0^1 = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

4-teorema. Agar f-juft funksiya bo‘lsa, ya’ni $f(-x)=f(x)$ shartni qanoatlantirsa, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ tenglik o‘rinli.

Isboti.

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \left| \begin{matrix} t=-x & dt=-dx \\ t(-a)=a & t(0)=0 \end{matrix} \right| = \int_{a}^{0} f(-t)(-dt) = -\int_{a}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(x)dx$$

5-teorema. Agar f- toq funksiya bo‘lsa, ya’ni $f(-x)=-f(x)$ shartni qanoatlantirsa,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Isboti.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \left| \begin{matrix} t=-x & dt=-dx \\ t(-a)=a & t(0)=0 \end{matrix} \right| = \int_{a}^{0} f(-t)(-dt) = \int_{a}^{0} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Shuning uchun $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$.

6-teorema. Agar f- davri 2T ga teng davriy funksiya bo‘lsa,

$$\int_{a}^{a+2T} f(x)dx = \int_{0}^{2T} f(x)dx$$ tenglik o‘rinli.

Isboti.

$$\int_{a}^{a+2T} f(x)dx = \left| \begin{matrix} t=x-2T, dt=dx \\ t(2T)=0, t(a+2T)=a \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_{0}^{a} f(t+2T)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt = -\int_{a}^{0} f(x)dx.$$

Bundan

$$\int_a^{a+2T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^{2T} f(x)dx + \int_{2T}^{a+2T} f(x)dx =$$

$$= \int_a^0 f(x)dx + \int_0^{2T} f(x)dx - \int_a^0 f(x)dx = \int_0^{2T} f(x)dx$$

7-teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ [a,b] kesmada uzluksiz va uzluksiz hosilaga ega funksiyalar bo‘lsa, u holda bo‘laklab integrallash formulasi deb ataluvchi quyidagi

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \qquad (2.5)$$

tenlik o‘rinli.

Isboti. $u(x)\cdot v(x)$ ko‘paytmaning hosilasi uchun

$$(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

tenglik o‘rinli. Bu tenglikning ikkala tomonini $[a,b]$ kesma bo‘yicha integrallab tenglikning chap tomoniga Nyuton-Leybnis formulasini tadbiq etib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b = \int_a^b (u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x))dx = \int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx + \int_a^b (x)\cdot v'(x)dx.$$

Bu tenglikdan (2.5) tenglik kelib chiqadi.
(2.5) formulani differensiallar yordamida quyidagicha yozish mumkin:

$$\int_a^b udv = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \qquad (2.5')$$

Bu formula yordamida hisoblanadigan integralning ikkita sinfini ko‘rsatamiz.
$\sin x,\ \cos x,\ tgx,\ ctgx,\ a^x$ funksiyalarni to‘g‘ri funksiyalar,
$\arcsin x,\ \arccos x,\ arctgx,\ arcctgx,\ \log_a x$ funksiyalarni esa teskari funksiyalar deb ataymiz.

a) agar integral ostidagi funksiya ko‘phad va to‘g‘ri funksiyaning ko‘paytmasi shaklida tasvirlangan bo‘lsa, u orqali ko‘phadni belgilaymiz, so‘ngra integral ostidagi ifodadan ko‘phadni tushirib qoldirib, qolgan ifodani dv orqali belgilaymiz. Shundan so‘ng u ni differensiallab, dv ni esa integrallab, (2.5') formulani tatbiq etamiz:

$$\int_a^b \text{ko‘phad}\cdot \textit{to‘g‘ri funksiya}\, dx = \left| \begin{array}{l} u = \text{ko‘phad, du=(ko‘phad)'dx} \\ dv = \textit{to‘g‘ri funksiya}\,\text{dx, v=}\int \textit{to‘g‘ri funksiya}\,\text{dx} \end{array} \right| =$$

$$= u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

b) agar integral ostidagi funksiya ko‘phad va teskari funksiyaarning ko‘paytmasi shaklida tasvirlangan bo‘lsa, u orqali teskari funksiyani belgilaymiz, shundan so‘ng integral ostidagi ifodadan teskari funksiyani tushirib qoldirib, qolgan ifodani dv orqali belgilaymiz va (2.5') formulani tatbiq etamiz:

$$\int_a^b \text{ko‘phad}\cdot \textit{teskari funksiya}dx = \left| \begin{array}{l} u = \textit{teskari funksiya},\ \text{du=(}\textit{teskari funksiya}\text{)'dx} \\ dv = \text{ko‘phaddx, v=}\int \text{ko‘phad dx} \end{array} \right| =$$

$$= u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Misollar. 7) $\int_0^{\pi} (x-\pi)\cos x dx$ hisoblansin.

Yechimi:

$$\int_0^{\pi} (x-\pi)\cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x-\pi,\ \ du = dx \\ dv = \cos x dx,\ \ v = \sin x \end{array} \right| = (x-\pi)\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = \cos x\Big|_0^{\pi} = -2$$

8) $\int_0^1 (3x^2+1)arctgx dx$ hisoblansin.

Yechimi:

$$\int_0^1 (3x^2+1)arctgxdx = \left| \begin{array}{l} u = arctgx,\ \ du = \dfrac{dx}{x^2+1}, \\ dv = (3x^2+1)dx,\ \ v = x^3+x \end{array} \right| =$$

$$= (x^3+x)arctgx\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{(x^3+x)dx}{x^2+1} = 2\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2};$$

9) $\int_0^1 \ln(x+1)dx$ hisoblansin.

Yechimi:

$$\int_0^1 \ln(x+1)dx = \left| \begin{matrix} u=\ln(x+1), & du=\dfrac{dx}{x+1} \\ dv=dx, & v=x \end{matrix} \right| = x\ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{x+1} =$$

$$= \ln 2 - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln 2 - x\Big|_0^1 + \ln(x+1)\Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1.$$

3. Aniq integralni taqribiy hisoblash uchun to‘g‘ri to‘rtburchak, trapetsiya va Simpson formulalari

Ko‘pgina amaliy va nazariy masalalarni echish jarayonida biron $f(x)$ funksiyaning [a,b] kesmdagi aniq kiymatini hisoblashga to‘g‘ri keladi. Agar $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi ma’lum bo‘lsa, bu integralni hisoblashga Nyuton-Leybnis formulasini tatbiq qilish mumkin. Ammo ba’zi hollarda (hatto $f(x)$ uzlukchiz bo‘lganda ham) boshlang‘ich funksiyani elementar funksiyalarning chekli kombinatsiyasi shaklida ifodalab bo‘lmaydi. Bundan tashqari amaliyotda $f(x)$ funksiya jadval ko‘rinishda berilgan bo‘lishi ham mumkin, bunday holda boshlang‘ich funksiya tushunchasini o‘zi ma’noga ega bo‘lmay qoladi.

Shuning uchun ham aniq integrallarn taqribiy hisoblash usullari katta amaliy ahamiyatga ega.

3.1. To‘g‘ri to‘rtburchak formulasi.

Eng sodda taqribiy hisoblash formulasi bevosita aniq integralning ta’rifidan kelib chiqadi. [a,b] kesmani

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n} \qquad \text{(k=0,1,...,n)} \tag{3.1}$$

nuqtalar yordamida, har birining uzunligi $\boldsymbol{h=\dfrac{b-a}{n}}$ ga teng bo‘lgan, n ta bo‘lakka bo‘lamiz va qaralayotgan aniq integralning taqribiy qiymati sifatida $h\sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k)$ yig‘indini olamiz (bu erda $\bar{x}_k = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2} \in [x_k, x_{k+1}]$ kesmaning o‘rtasida joylashgan nuqta), ya’ni

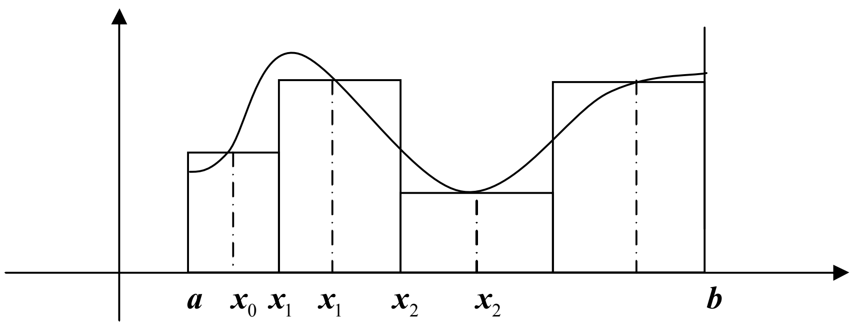
$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k) \tag{3.2}$$

formulani hosil qilamiz. Bu formula to‘g‘ri to‘rtburchak formulasi deyiladi.

Ko‘rinib turibdiki, (3.2) formulada x_k lar bevosita ishtirok etmaydi. $\boldsymbol{h}$ va $\boldsymbol{x_k}$ larni esa quyidagi

$$h=\frac{b-a}{n}, x_0=a+\frac{h}{2}, \quad x_k=x_{k-1}+h, (k=1,2,...n-1) \tag{3.3}$$

(3.2) formula $f(x)\geq 0$ bo‘lganda geometrik jihatdan yuqoridan $f(x)$ funkisiyaning grafigi bilan chegaralangan $\boldsymbol{b-a}$ asosli egri chiziqli trapetsiya yuzasi $h=\frac{b-a}{n}$ asosga va $f(x_k)$ balandlikka ega bo‘lgan to‘rtburchaklar yuzalari taqriban tengligini ifodalaydi (3-rasm).



3-rasm

Ma’lumki, $n\to\infty$ da $h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$ integral yig‘indi $\int_a^b f(x)dx$ ga intiladi. Shuning uchun (3.2) formulaning chap va o‘ng tomonlari orasidagi farqni absolyut qiymat bo‘yicha istalgancha kichik qilib olish mumkin.

Shuni ta’kidlab o‘tamizki, agar $\boldsymbol{f(x)}$ chiziqli funksiya bo‘lsa, ya’ni u $f(x)=Ax+B$ ko‘rinishda tasvirlansa, (3.2) formulaning chap va o‘ng tomonlari teng bo‘ladi. Boshqacha aytganda, chiziqli funksiyalar uchun to‘rtburchaklar formulasi integralning aniq qiymatini beradi.

(3.2) formulani baholash haqidagi masalani qarab chiqamiz. Shu maqsadda ushbu

$$R_n(f):=\int_a^b f(x)dx-h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

belgilash kiritamiz. Bu ayirma (3.2) formulanng qoldiq hadi deyiladi.

3.1-teorema. (3.2) formulaning qoldiq hadi uchun

a) $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada monoton (o‘suvchi yoki kamayuvchi) bo‘lsa,

$$|R_n(f)|\leq\frac{|f(b)-f(a)|}{n}(b-a) \tag{3.4}$$

b) $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada $|f'(x)|\leq M_1$ shartni qanoatlantiruvchi $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa,

$$|R_n(f)|\leq\frac{M_1(b-a)^2}{4n} \tag{3.5}$$

tengsizlik;

v) $f(x)$ funksiya $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ kesmada $|f''(x)| \le M_1$ shartni qanoatlantiruvchi $f''(x)$ hosilaga ega bo‘lsa,

$$|\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{f})| \le \frac{\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^3}{24\boldsymbol{n}^2} \tag{3.6}$$

tengsizlik o‘rinli;

Isboti. Ushbu $hf(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)dx$ tenglikni e’tiborga olib,

$$R_n^{(k)}(f) := \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx - hf(x_n) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x) - f(x_k)]dx$$

tenglikni olamiz. Bundan

$$|R_n^{(k)}(f)| \le \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)|dx \tag{3.7}$$

tengliksiz kelib chiqadi.

a) Agar $f(x)$ monoton o‘suvchi bo‘lsa, $|f(x) - f(x_k)| \le f(x_{k+1}) - f(x_k)$ tengsizlik o‘rinli. Bundan va (3.7) dan

$$|R_n^{(k)}(f)| \le \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_{k+1}) - f(x_k))dx = [f(x_{k+1}) - f(x_k)]h$$

tengsizlik hosil bo‘ladi. Oxirgi tengsizliklarni $\boldsymbol{k}$ indeks bo‘yicha yig‘ib,

$$|R_n(f)| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} R_n^{(k)}(f)\right| \le \sum_{k=0}^{n-1} |R_n^{(k)}(f)| \le [f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + ... + f(x_n) - f(x_{n-1})]h =$$

$= [f(b) - f(a)] \cdot \dfrac{b-a}{n}$ tengsizlikni hozil qilamiz.

b) Lagranj formulasiga asosan $f(x) - f(x_k) = f'(\xi)(x - x_k)$, bunda ξ nuqta x_k va x orasida yotadi. Bu tenglikdan va teorema shartidan $|f(x) - f(x_k)| \le M_1|x - x_k|$

Hosil bo‘lgan tengsizlikni ikkala tomonini $[x_k, x_{k+1}] = [x_k - \frac{h}{2}; x_k + \frac{h}{2}]$ kesmada integrallab,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |(f(x) - f(x_k)|dx \le M_1 \int_{x_k - \frac{h}{2}}^{x_k + \frac{h}{2}} |x - x_k|dx = \frac{M_1h^2}{4}$$

tengsizlikni hosil qilamiz (oxirgi integralni hisoblashda $t = x - x_k$ almashtirishdan foydalandik). Bundan va (3.7) dan

$$|R_n^{(k)}(f)| \le \frac{M_1h^2}{4}$$

Bu tengsizliklarni ham k indeks bo‘yicha yig‘ib,

$$|R_n(f)| \le n \cdot \frac{M_1h^2}{4} = n \cdot \frac{M_1(b-a)^2}{4n^2} = \frac{M_1(b-a)^2}{4n}$$

tenglikni hosil qilamiz.

v) $\boldsymbol{f(x)}$ funksiyaga $x = x_k$ nuqtada Teylor formulasini tatbiq etib,

$$f(x) - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2} f''(\theta)(x - x_k)^2$$

tenglikni yozamiz, bunda θ son x_k va x lar orasida yotadi. Bu tenglikni ikkala tomonini $[x_k, x_{k+1}] = [x_k - \frac{h}{2}; x_k - \frac{h}{2}]$ kesmada integrallab,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x) - f(x_k)]dx = \int_{x_k - \frac{h}{2}}^{x_k + \frac{h}{2}} f'(x_k)(x - x_k)dx + \frac{1}{2} \int_{x_k - \frac{h}{2}}^{x_k + \frac{h}{2}} f''(\theta)(x - x_k)^2 dx$$

tenglikni hosil qilamiz. $t = x - x_k$ almashtirish yordamida bu tenglikning o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchi 0 ga tengligiga, ikkinchi qo'shiluvchi uchun esa

$$\left| \frac{1}{2} \int_{x_k - \frac{h}{2}}^{x_k + \frac{h}{2}} f''(\theta)(x - x_k)^2 dx \right| \le \frac{M_2}{2} \int_{x_k - \frac{h}{2}}^{x_k + \frac{h}{2}} (x - x_k)^2 dx = \frac{M_2}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t^2 dx = \frac{M_2 h^3}{24}$$

tengsizlik o'rinli ekaniga ishonch hosil qilamiz.

$$\left| R_n^{(k)}(f) \right| \le \frac{M_2 h^3}{24} \qquad k = 0, 1, ..., n - 1$$

tengsizliklar kelib chiqadi. Oxirgi tengsizliklarni $\boldsymbol{k}$ indeks bo'yicha yig'ib,

$$\left| R_n(f) \right| \le \sum_{k=0}^{n-1} \left| R_n^{(k)}(f) \right| \le n \cdot \frac{M_2 h^3}{24} = \frac{M_2 (b - a)^3}{24 n^2}$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Izoh. (3.4) va (3.5) tengsizliklar $R_n(f)$ qoldiq had – tartibi n^{-1} ning tartibidan past bo'lmagan, (3.6) esa tartibi n^{-2} ning tartibidan past bo'lmagan cheksiz kichik ekanini ko'rsatadi, ya'ni 1 – teoremaning a) va b) qismlarining shartlari bajarilganda

$$R_n(f) = O(n^{-1}),$$

v) qismning sharti bajarilganda esa

$$R_n(f) = O(n^{-2}),$$

munosabat o'rinli. Bulardan ko'rinadiki, chegaralangan ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lgan funksiyalar sinfi uchun to'g'ri to'rtburchaklar formulasining yaqinlashish tartibi yuqoriroq ekan. Ammo shuni ta'kidlab o'tish joizki, chegaralangan l tartibli $(l > 2)$ hosilaga ega bo'lgan funksiyalar sinfi uchun to'g'ri to'rtburchaklar formulasining yaqinlashish tartibi yaxshilanmaydi, bu tartib $O(n^{-2})$ ga tengligicha qoladi.

3.1 – teoremadan shunday qoida kelib chiqadi:

$\int_a^b f(x)dx$ integralni ε aniqlikdagi taqribiy qiymatini to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi yordamida hisoblash uchun $f(x)$ funksiya 3.1 – teoremaning a) qismi shartini qanoatlantirganda

$$n=\left[\frac{|f(b)-f(a)|}{\varepsilon}(b-a)\right]+1$$

tenglik orqali,

b) qismi shartini qanoatlantirganda

$$n=\left[\frac{M_1(b-a)^2}{4\varepsilon}\right]+1$$

tenglik orqali,

v) qismi shartini qanoatlantirganda esa

$$n=\left[\sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{24\varepsilon}}\right]+1$$

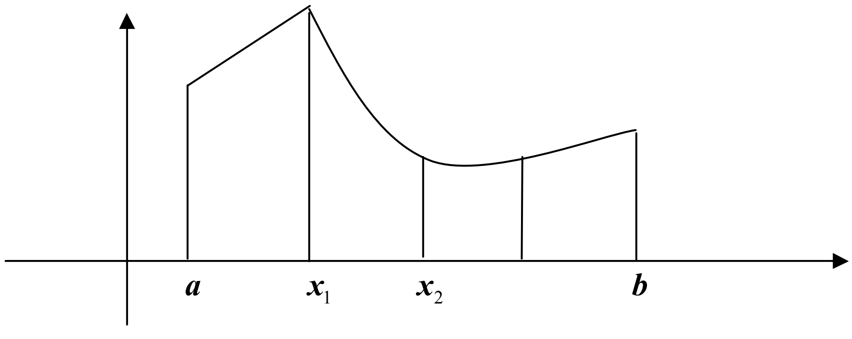
tenglik orqali n natural son hisoblanadi. (Bu formulalarda $[x]$ orqali x sonining butun qismi belgilanadi). Topilgan n natural son yordamida (3) formula orqali h qadam va x_k tugun nuqtalar hisoblanadi. Shundan so‘ng

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

formula yordamida qaralayotgan integralning ε aniqlikdagi taqribiy qiymati hisoblanadi.

3.2. Trapetsiya formulasi.

$[a,b]$ kesmani bo‘lishni avvalgidek qoldiramiz ((1) ga qarang), lekin $y=f(x)$ chiziqning $[x_k, x_{k+1}]$ qismiy kesmaga mos keluvchi har bir yoyini bu yoyning chetki nuqtalarini tutashtiruvchi vatar bilan almashtiramiz. Bu berilgan egri chiziqli trapetsiya n ta trapetsiyalar yuzalari yig‘indisi bilan almashtirilganini bildiradi (4-rasm).



4-rasm

Bunday figuraning yuzi egri chiziqli trapetsiyaning yuzini to‘g‘ri to‘rtburchaklardan tuzilgan pog‘onali figuraning yuzasiga qaraganda ancha aniq ifodalashi geometrik jihatdan ravshandir.

Har bir xususiy trapetsiyaning yuzasi

$$\frac{b-a}{n}\cdot\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}$$

ga teng bo‘lgani uchun qaralayotgan figuraning yuzasi

$$\frac{b-a}{n}\cdot\left[\frac{f(a)+f(x_1)}{2}+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\ldots+\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right]=$$
$$=\frac{b-a}{n}\cdot\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right]$$

ga teng bo‘ladi. Shunday qilib, ushbu

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\cdot\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right] \tag{3.8}$$

formulani hosil qildik. Bu formula trapetsiyalar formulasi deyiladi.

$f(x)$ ikkinchi tartibli chegaralangan hosilaga ega deb faraz qilib, alohida olingan trapetsiya uchun qoldiq hadni baholaymiz. Bu qoldiq hadni

$$R(h)=\int_c^{c+h}f(x)dx-\frac{h}{2}\cdot\left[f(c)+f(c+h)\right] \tag{3.9}$$

ko‘rinishda yozamiz.

(3.9) ifodani h o‘zgaruvchining funksiyasi sifatida tasavvur qilib, undan h bo‘yicha ikki marta hosila olamiz:

$$R'(h)=f(c+h)-\frac{h}{2}\left[f(c)+f(c+h)\right]-\frac{h}{2}f'(c+h);$$

$$R''(h)=f'(c+h)-\frac{1}{2}f'(c+h)-\frac{1}{2}f'(c+h)-\frac{h}{2}f''(c+h)=-\frac{h}{2}f''(c+h);$$

Ravshanki, $R(0)=R'(0)=0$.Bu tengliklardan, Nyuton – Leybnis formulasidan va o‘rta qiymat haqidagi umumlashgan teoremalan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$R'(h)=R'(0)+\int_0^h R''(t)dt=-\int_0^h\frac{t}{2}f''(c+t)dt=-\frac{1}{2}f''(x_1)\int_0^h tdt=-\frac{h^2}{4}f''(x_1),$$ bu

yerda $x_1\in(c;c+h)$. Shuningdek,

$$R(h)=R(0)+\int_0^h R'(t)dt=-\frac{1}{4}\int_0^h t^2 f''(\xi_1)dt=-\frac{1}{4}f''(\xi)\int_0^h t^2dt=-\frac{h^3}{12}f''(\xi),$$ bu yerda $\xi\in(c;c+h)$.

Shunday qilib,

$$R(h)=-\frac{h^3}{12}f''(\xi),\quad \xi\in(c;c+h) \tag{3.10}$$

Bu tenglikdan ko‘rinadiki, (3.8) trapetsiya formulasi $f''\geq 0$ bo‘lganda integralning ortig‘i bilan olingan, $f''\leq 0$ bo‘lganda esa kami bilan olingan taqribiy qiymatini beradi.

3.2–teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada $|f''(x)|\leq M_2$ shartni qanoatlantiruvchi uzluksiz ikkinchi tartibli hosilaga ega bo‘lsa, (3.8) trapetsiyalar formulasining qoldiq hadi uchun

$$|R_n(f)|\leq\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$$

tengsizlik o‘rinli.

Isboti. (3.10) dan

$$|R(h)|\leq\frac{h^3}{12}M_2$$

tengsizlik kelib chiqadi. Xususan,

$$h=\frac{b-a}{n},\ c=x_k=a+kh\quad (k=0,1,...,n-1)$$

bo‘lganda,

$$R_k(h):=\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)dx-\frac{h}{2}\left[f(x_k)+f(x_{k+1})\right]\qquad (k=0,1,...,n-1)$$

qoldiq hadlar uchun

$$|R_k(h)|\leq\frac{h^3}{12}M_2\qquad k=0,1,...,n-1$$

tengsizliklar hosil bo‘ladi. Bu tengsizliklarni k indeks bo‘yicha qo‘shib chiqib,

$$|R_n(f)|\leq\sum_{k=0}^{n-1}|R_k(h)|\leq\frac{nh^3}{12}M_2=\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$$

ga ega bo‘lamiz.

Qoida. Agar $f(x)$ funksiya 3.2 – teorema shartini qanoatlantirsa, trapetsiyalar formulasi orqali $\int_a^b f(x)dx$ integralning ε aniqlikdagi taqribiy qiymatini hisoblash uchun

$$n=\left[\sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{12\varepsilon}}\right]+1$$

formula yordamida n natural son topiladi. Topilgan n natural son orqali

$$h=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+kh \quad k=1,2,...,n-1$$

formula yordamida h qadam va x_k tugun nuqtalar hisoblanadi. Shundan so‘ng

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right)$$

formula yordamida qaralayotgan integralning ε aniqlikdagi taqribiy qiymati hisoblanadi.

3.3. Simpson formulasi.

Biz yuqorida, to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasini hosil qilishda $f(x)$ funkisiyani qismini intervallarda $f(x_k)$ o‘zgarmaslar (0 – tartibli ko‘phad), trapetsiyalar formulasini hosil qilishda esa chiziqli funksiyalar (1-chi – tartibli ko‘phad) bilan almashtirdik. $f(x)$ funksiya almashtirilayotgan ko‘phadning tartibi ortirilganda yanada aniqroq formula hosil bo‘lishini kutish tabiiydir.

$$h=\frac{b-a}{2m} \tag{3.11}$$

bo‘lsin. $[a,b]$ kesmani $x_k=a+kh$, $k=0,1,...,2m$ nuqtalar yordamida $n=2m$ ta juft miqdordagi teng qismlarga bo‘lamiz va $f(x)$ funksiyaning x_k nuqtalardagi qiymatlarini $y_k=f(x_k)$, $k=0,1,...,2m$ orqali belgilaymiz.

$f(x)$ funkksiyaning $[x_0;x_2]$ kesmadagi grafigini $M_0(x_0;y_0);M_1(x_1;y_1);M_2(x_2;y_2)$ nuqtalardan o‘tuvchi parabola yoyi bilan almashtiramiz (5-rasm). Bu parabolaning tenglamasini

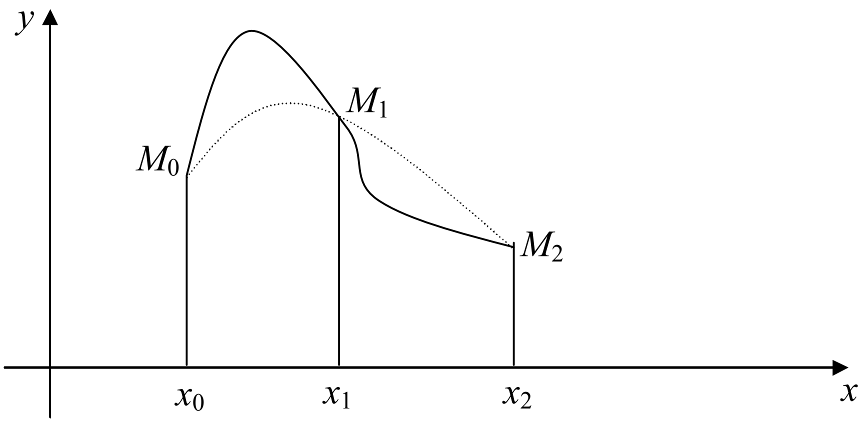
$$y=A(x-x_1)^2+B(x-x_1)+C \tag{3.12}$$

ko‘rinishda izlaymiz. (3.12) parabola M_0,M_1,M_2 nuqtalardan o‘tish shartidan

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C$$
$$y_1 = C,$$
$$y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

tenglamalar hosil bo‘ladi (bu yerda biz $x_0 - x_1 = -h, x_2 - x_1 = h$ tengliklardan foydalandik). Bu sistemadan A va S noma’lumlarni topamiz:

$$A = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2), \quad C = y_1 \tag{3.13}$$



5-rasm

Endi (3.12) funksiyadan $[x_0, x_2]$ kesmada olingan integralni hisoblaymiz:

$$S_1 = \int_{x_0}^{x_2} [A(x - x_1)^2 + B(x - x_1) + C]dx = \left| \begin{matrix} t = x - x_1 & dt = dx \\ t_0 = -h & t_1 = h \end{matrix} \right| = \int_{-h}^{h} \left(At^2 + Bt + C\right)dt =$$
$$= \frac{2A}{3}h^3 + 2Ch$$

A va C o‘rniga ularning (3.13) ifodalarni qo‘yib, $S_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$ tenglikni hosil qilamiz va oxirgi ifodani $\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx$ ning taqribiy qiymati sifatida olamiz:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \tag{3.14}$$

Xuddi shu kabi $f(x)$ funksiyaning $[x_2; x_4], [x_4; x_6]$ va boshqa kesmalardagi grafigini tegishli parabolalarning mos yoylari bilan almashtirib,

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$\int_{x_4}^{x_6} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6) \qquad (3.15)$$

....

$$\int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m})$$

formulalarga ega bo‘lamiz. (3.14) va (3.15) formulalarini qo‘shib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2})\right]$$

(3.11) ni e’tiborga olib

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}\left(y_0 + y_{2m} + 4\sum_{k=1}^{m} y_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{m} y_{2k}\right)$$

Yoki

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{m} (x_{2k})\right] \qquad (3.16)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bu formula Simpson formulasi (yoki parabolalar formulasi) deyiladi.

3.3 – teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada

$$\left|f^{IV}(x)\right| \le M_4 \qquad (3.17)$$

shartni qanoatlantiruvchi, uzluksiz f^{IV} hosilaga ega bo‘lsa, (3.16) formulaning qoldiq hadi uchun

$$\left|R_{2m}(f)\right| \le \frac{M_4(b-a)^5}{2880m^4} \qquad (3.18)$$

tengsizlik o‘rinli.

Isboti. Dastlab qoldiq hadni $[c-h;c+h]$ kesmadagi bitta parabola uchun baholaymiz, bu yerda $c \in (a,b)$ $h > 0$.

$$R(h) = \int_{c-h}^{c+h} f(x)dx - \frac{h}{3}\left[f(c-h) + 4f(c) + f(c+h)\right]$$

bo‘lsin. Bu ifodai h o‘zgaruvchining funksiyasi sifatida tasavvvur qilib, undan h

bo‘yicha uch marta hosila olamiz:

$$R'(h)=f(c+h)+f(c-h)-\frac{1}{3}\left[f(c-h)+4f(c)+f(c+h)\right]-\frac{h}{3}\left[-f'(c-h)+\right.$$

$$\left.+f'(c+h)\right]=\frac{2}{3}\left[f(c-h)+f(c+h)\right]-\frac{4}{3}f(c)-\frac{h}{3}\left[-f'(c-h)+f'(c+h)\right];$$

$$R''(h)=\frac{2}{3}\left[-f'(c-h)+f'(c+h)\right]-\frac{1}{3}\left[-f'(c-h)+f'(c+h)\right]-\frac{h}{3}\left[f''(c-h)+\right.$$

$$\left.+f''(c+h)\right]=\frac{1}{3}\left[-f'(c-h)+f'(c+h)\right]-\frac{h}{3}\left[f''(c-h)+f''(c+h)\right];$$

$$R'''(h)=\frac{1}{3}\left[f''(c-h)+f''(c+h)\right]-\frac{1}{3}\left[f''(c-h)+f''(c+h)\right]-\frac{h}{3}\left[-f'''(c-h)+\right.$$

$$\left.+f'''(c+h)\right]=-\frac{h}{3}\left[f'''(c+h)-f''(c-h)\right]=-\frac{2h^2}{3}f^{IV}(x_3),$$

bu yerda $x_3\in(c-h;c+h)$. Oxirgi tenglik Lagranj formulasi yordamida hosil qilindi. Bundan tashqari $R(0)=R'(0)=R''(0)=0$ ekani ravshan. Nyuton – Leybnis fomulasidan va o‘rta qiymat haqidagi umumlashgan teoremadan foydalanib,

$$R''(h)=R''(0)+\int_0^h R'''(t)dt=-\frac{2}{3}\int_0^h t^2 f^{IV}(x_3)dt=-\frac{2}{3}f^{IV}(x_2)\int_0^h t^2dt=-\frac{2}{9}h^3f^{IV}(x_2)$$

tenglikka ega bo‘lamiz, bu yerda $x_2\in(c-h;c+h)$. Yuqoridag amalni yana takrorlab,

$$R'(h)=R'(0)+\int_0^h R''(t)dt=-\frac{2}{9}\int_0^h t^3 f^{IV}(x_2)dt=-\frac{2}{9}f^{IV}(x_1)\int_0^h t^3dt=-\frac{1}{18}h^4f^{IV}(x_1)$$

tenglikni hosil qilamiz, bu yerda $x_1\in(c-h;c+h)$. Xuddi shu kabi

$$R(h)=R(0)+\int_0^h R'(t)dt=-\frac{1}{18}\int_0^h t^4 f^{IV}(x_1)dt=-\frac{1}{18}f^{IV}(x)\int_0^h t^4dt=-\frac{1}{90}h^5f^{IV}(x)$$

bu yerda $x\in(c-h;c+h)$.

Shunday qilib,

$$R(h)=-\frac{h^5}{90}f^{IV}(x) \qquad (3.19)$$

(3.17) tenglikni e’tiborga olsak,

$$|R(h)|\le\frac{h^5M_4}{90} \qquad (3.20)$$

tengsizlik hosil bo‘ladi.

(3.20) tengsizlikda $h=\dfrac{b-a}{2m}, c=x_{2k-1}, k=1,2,...,m$ deb faraz qilib,

$$R_k(h) = \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx - \frac{h}{3}\left[f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right]$$

qoldiq had uchun

$$\left|R_k(h)\right| \leq \frac{h^5}{90} M_4 \quad k = 1,2,...,m$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Bu tengsizliklarni k indeks bo‘yicha yig‘ib,

$$\left|R_{2m}(f)\right| \leq \sum_{k=1}^{m} \left|R_k(h)\right| \leq \frac{mh^5}{90} M_4 = \frac{M_4(b-a)^5}{2880m^4}$$

tengsizlikka kelamiz.

Izoh. (3.18) tengsizlik Simpson formulasi yordamida darajasi uchdan yuqori bo‘lmagan ko‘phadlar uchun integralning qiymati aniq hisoblanishini ko‘rsatadi. Haqiqatan xam, bu holda $f^{IV} = 0 \quad (M_4 = 0)$. Bundan (3.18)ga asosan $R_{2m}(f) = 0$

Qoida. Agar $f(x)$ funksiya 3.3 – teorema shartini qanoatlantirsa, Simpson formulasi yordamida $\int_a^b f(x)dx$ integralning ε aniqlikdagi taqribiy qiymatini hisoblash uchun

$$m = \left[\sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{2880\varepsilon}}\right] + 1$$

formula orqali m natural son topiladi. Bu natural son orqali $h = \frac{b-a}{2m}$ qadam va $x_k = a + kh, \quad (k = 0,1,2,...,2m)$ tugun nuqtalar topiladi. So‘ng

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k})\right]$$

formula yordamida qaralayotgan integralning ε aniqlikdagi taqribiy qiymati hisoblanadi.

Ba’zi hollarda Simpson formulasidagi xatolikni hisoblash uchun (3.18) tenglikdan foydalanish ma’lum qiyinchiliklarni vujudga keltiradi. Shu sababli, biz quyida qoldiq hadni baholashga imkon beradigan bir muncha soddaroq usulni bayon qilamiz. (3.19 tenglikda) $h = \frac{b-a}{2m}$ $c = x_{2k-1}, \quad k = 1,2,...,m$ deb faraz qilib,

$$R_k(h) = -\frac{h^5}{90} f^{IV}(x_k)$$

tenglikka ega bo‘lamiz, bu yerda $x_k \in (x_{2k-1} - h; x_{2k-1} + h)$. Bu tenliklarni k indeks bo‘yicha yig‘ib, Simpson formulasining qoldiq hadi uchun

$$R(h)=\sum_{k=1}^{m} R_k(h)=-\frac{h^5}{90}\sum_{k=1}^{m} f^{IV}(x_k)$$

tenglikni hosil qilamiz. $f^{IV}(x)$ $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lgani uchun

$$\sum_{k=1}^{m} f^{IV}(x_k)=m\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f^{IV}(x_k)=mf^{IV}(\eta)$$

shartni qanoatlantiruvchi $\eta\in[a,b]$ nuqta mavjud. Bundan,

$$R(h)=-\frac{h^5}{90}mf^{IV}(\eta)=-\frac{h^4(b-a)}{180}f^{IV}(\eta)$$

Bu mulohazalardan ko‘rinidaki, agar $f(x)$ to‘rtinchi tartibli ko‘phad bo‘lsa, $R(h)$ qoldiq had uchun

$$R(h)=Mh^4 \tag{3.21}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi, bu yerda M - o‘zgarmas son. Biz quyida $f^{IV}(h)$ ning $[a,b]$ kesmadagi o‘zgarishi kichik deb faraz qilib, (3.21) tenglik umumiy holda ham o‘rinli deb hisoblaymiz.

$\int_a^b f(x)dx$ integralning aniq qiymatini I orqali, Simpson formulasi orqali hisoblanadigan

$$\frac{h}{3}\left(y_0+y_{2m}+4\sum_{k=1}^{m} y_{2k-1}+2\sum_{k=1}^{m} y_k\right) \tag{3.22}$$

taqribiy qiymatini esa $\Sigma(h)$ orqali belgilaymiz. (3.22) ifodani esa h qadamga mos keluvchi Simpson yig‘indisi deb ataymiz.

U holda $I=\Sigma(h)+R(h)$ $I=\Sigma(2h)+R(2h)$ yoki (3.21) ni e’tiborga olsak $I=\Sigma(h)+Mh^4$ $I=\Sigma(2h)+16Mh^4$

Bu tengliklarning birinchisidan ikkinchisini ayirib, $0=\Sigma(h)-\Sigma(2h)-15Mh^4$ tenglikni, bundan

$$Mh^4=\frac{\Sigma(h)-\Sigma(2h)}{15}$$

yoki (3.21) ga ko‘ra

$$Mh^4=\frac{\Sigma(h)-\Sigma(2h)}{15}$$

tenglikni hosil qilamiz. Qoldiq hadning bu ifodasini e’tborga olib, ushbu qoidani yoza olamiz:

Qoida. Agar $f(x)$ funksiya 3.3 – teorema shartini qanoatlantirsa, $I=\int_a^b f(x)dx$ integralning ε aniqlikdagi qiymatini hisoblash uchuun biror m natural son olib

$b_0 = \dfrac{b-a}{2m}$ va $h_1 = \dfrac{h_0}{2}$ qadamlarga mos $\sigma(h_0)$ va $\sigma(h_1)$ Simpson yig‘indilarini hisoblaymiz va $R(h_1) = \dfrac{\sigma(h_1) - \sigma(h_0)}{15}$ ifodani tekshiramiz. Agar bu ifoda absolyut qiymati bo‘yicha ε dan kichik bo‘lsa, I integralning ε aniqlikdagi taqribiy qiymati sifatida $\sigma(h_1) + R(h_1)$ ifodani olamiz. Aks holda $h_2 = \dfrac{h_1}{2}$ qadamga mos keladigan $\sigma(h_2)$ Simpson yig‘indisini tuzamiz va $R(h_2) = \dfrac{\sigma(h_2) - \sigma(h_1)}{15}$ ifodani tekshiramiz. Agar $|R(h_2)| < \varepsilon$ shart bajarilsa, $I \approx \sigma(h_2) + R(h_2)$, aks holda $h_3 = \dfrac{h_2}{2}$ qadam bo‘yicha $\sigma(h_3)$ Simpson yig‘indisini tuzamiz va hokazo....

$\lim\limits_{k \to \infty} R(h_k) = 0$ bo‘lgani uchun bu jarayon cheksiz davom etmaydi, biror k- chi qadamda $|R(h_k)| < \varepsilon$ shart bajariladi va $\sigma(h_k) + R(h_k)$ esa I integralning ε aniqlikdagi taqribiy qiymati bo‘ladi.

4. Aniq integralni taqribiy hisoblashda “Turbo-paskal” algaritmi.

Aniq integralni taqribiy xisoblashda ma’lum kiyinchiliklarga tugri keladi,jumladan etarlicha katta n larda hisob-kitob ishlari kiyinlashib boradi. Bunday xollarda integralni xisoblash ishlarini komp’yuterga yuklansa maqsadga muvofiq bo‘ladi.Shuning uchun biz yuqorida keltirilgan usullarning har biriga aniq misollarda Turbo-paskal tilida tuzilgan dasturlarni keltiramiz. Bu dasturlarni xech qiyinchiliksiz integral ostidagi funksiya ixtiyoriy bo‘lgan xol uchun xam qo‘llash mumkin. Misol tariqasida quyidagi integralni takribiy hisoblashning algoritmini ko‘rib chiqamiz.

Misol 1.

$$\int_0^1 Sin(x^2)\,dx \tag{4.1}$$

(4.1) integralni bizga ma’lum usullar yordamida boshlang‘ich funksiyasini topib bo‘lmaydi, chunki integral ostidagi funksiya elementar funksiya emas, shuning uchun unga Nyuton-Leybnis formulasini qo‘llab bo‘lmaydi.

T o‘g‘ri to‘rtburchak formulasini (4.1) integralni xisoblash uchun qo‘llaymiz

$$\int_0^1 Sin(x^2)dx \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Sin(\frac{i-\frac{1}{2}}{n})^2 = \frac{1}{2}\left[Sin(\frac{1}{2n})^2 + Sin(\frac{3}{2n})^2 + ...+ Sin(\frac{n-\frac{1}{2}}{n})^2 \right] \tag{4.2}$$

Yetarlicha katta n (n= 100,1000 va h.k.) larda berilgan integralni (4.2) formula bilan hisoblash faqatgina elektron hisoblash mashinalari(EXM) yordamida amalga oshiriladi.(4.1) integralni (4.2) formula yordamida hisoblashning Turbo-paskal tilida tuzilgan dasturi quyida keltirilgan:

4.1. Aniq integralni taqribiy hisoblashda to‘g‘ri to‘rtburchak usuli uchun Turbo Paskal algaritmi.

```
{ bu dastur   berilgan integralni to‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli bilan
taqribiy hisoblab beradi }
Program  INT_1 ;
  const n=100; { n  - (4.2) yigindidagi hadlar soni }
var   { bu bo‘limda dasturda qatnashayotgan o‘zgaruvchilar e’lon qilinadi}
I,n:integer;
a,b,h,s:real;
t, ZNA_INT:real;
Function FUNKSIYA(x:real): real; { bu bo‘limda (4.1) formuladagi integral osti
funksiyasi e’lon qilinadi}
const          {bu bo‘limda integral ostidagi funksiyaning parametrlari kiritiladi };
var  x1:real;
begin
x1:= x*x;
FUNKSIYA:= sin(x);{integral ostidagi funksiya}
end;
{quyidagi bo‘limda (4.2) formulani xisoblashning algoritmi keltiriladi}
BEGIN
WriteLN(‘ Integralni quyi chegarasini kiriting= ’);
ReadLN(a);
WriteLn(‘Integralni yuqori chegarasini kiriting= ’);
ReadLn(b);
 WriteLn(‘Yi g‘indidagi hadlar soni ya’ni  n ni kiriting=’);
ReadLn(N);
H:=(b-a)/n;
S:=0;
For i:=1 to n do
begin
t:=a+(b-a)*(i-1/2)/n;
S:=S+ FUNKSIYA(t);
end;
ZNA_INT:=H*S;
WriteLn(‘ Integral kiymati= ‘,ZNA_INT);
end.
```

4.2. Aniq integralni taqribiy hisoblashda trapetsiya usuli uchun Turbo Paskal algaritmi.

Endi (4.1) integralni trapetsiya usuli yordamida xisoblashga kirishamiz.Buning uchun (3.8) ni qo‘llab quyidagi tenglikni xosil qilamiz

$$\int_0^1 Sin(x^2)dx\frac{1}{2}\left[\frac{Sin(0^2)+Sin(1^2)}{2}+Sin(\frac{1}{n})^2+......+Sin(\frac{n-1}{n})^2\right] \qquad (4.3)$$

Yuqorida keltirilgan algoritmni unchalik ko‘p bulmagan o‘zgartirishlar kiritib quyidagi algoritmni olamiz

```
For i:=1 to n-1 do
begin
t:=a+h*I;
s:=s+FUNKSIYA(t);
end;
ZNA_INT:=H*(S+(FUNKSIYA(a)+FUNKSIYA(b))/2);
```

4.3. Aniq integralni taqribiy hisoblashda Simpson formulasi uchun Turbo Paskal algaritmi.

Va nihoyat (4.1) integralni Simpson formulasi yordamida hisoblovchi algoritmni keltiramiz. (3.16) formulani berilgan misol uchun qo‘llab quyidagi tenglikni hosil qilamiz

$$\int_0^1 Sin(x^2)dx\frac{1}{6m}\left[Sin(0^2)+Sin(1^2)+4*Sin(\frac{1}{2n})^2+2*Sin(\frac{1}{n})^2+......+4*Sin(\frac{2n-1}{2n})^2\right] \quad (4.4)$$

Simpson formulasi uchun Turbo-paskal tilida yozilgan dastur quyidagi ko‘rinishda buladi

```
{n- juft son   n=2*m }
H:=(b-a)/(2*m);
t:=H;
For i:=1 to m do
begin
S:=S+4*FUNKSIYA(t);
T:=T+H;
S:=S+2*FUNKSIYA(T);
T:+T+H;
end;
ZNA_INT:=H*(S++FUNKSIYA(a)-FYNKSIYA(b))/3;
```

Yuqorida yaratilgan dasturlar asosida (4.1) integral taqribiy hisoblanib uning natijalari quyidagi jadvallarda keltirilgan:

1) to‘g‘ri to‘rtburchak formulasi bo‘yicha hisoblash natijalari 1-jadvalda

keltirilgan

N	Integralning Hisoblangan kiymatlari	Absolyut xatolikning moduli
20	0.310156	0.000112
50	0.0/310250	0.000018
100	0/310264	0.000004
200	0/310267	0.000001

Jadval-1.

2) trapetsiya formulasi bo‘yicha hisoblash natijalari 2- jadvalda keltirilgan

N	Integralning Hisoblangan kiymatlari	Absolyut xatolikning Moduli
20	0.310494	0.000226
50	0.310304	0.000036
100	0.310277	0.000009
200	0.310271	0.000003

Jadval -2.

3) Simpson formulasi bo‘yicha hisoblash natijalari 3-jadvalda keltirilgan

N	Integralning Hisoblangan kiymati	Absolyut xatolikning moduli
1	0.305181	0.005087
2	0.309944	0.000324
5	0.310260	0.000008
10	0.310268	0/0000001 dan kichik

Jadval -3.

Olingan natijalar shuni ko‘rsatadiki Simpson formulasi N- ning unchalik yuqori bo‘lmagan qiymatlarida ham trapetsiya va to‘gri to‘rtburchak formulalariga qaraganda integralning qiymatini yuqori aniqlikda hisoblash imkonini beradi.

5. Xosmas integrallar

Aniq itegral tushunchasini keltirib chiqarishda integral ostidagi funksiyaning berilgan kesmada uzluksizligi shartidan kelib chiqqan edik. Bu shartni qanoatlantirmaydigan integrallarni aniqlashning zarurligi bilan bog‘liq masalalar uchraydi. Bunday integrallar xosmas integrallar deb ataladi. Xosmas integralning ikkita turini ko‘rib chiqamiz.

5.1.Chegarasi cheksiz xosmas integrallar.

Ta’rif .Yarim $[a,+\infty)$ intervalda uzluksiz bo‘lgan funksiyaning xosmas integrali quyidagicha belgilanadi: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ va ushbu tenglik bilan aniqlanadi:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \tag{5.1}$$

Agar (5.1.) formulaning o‘ng tomonida turgan limit mavjud bo‘lsa, u holda xosmas integral yaqilashuvchi deyiladi.

Agar integral ostidagi $f(x)$ funksiya uchun $F(x)$ boshlang‘ich funksiya ma’lum bo‘lsa, u holda xosmas integralni yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlash mumkin. Nyuton-Leybnis formulalari yordamida quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{gathered}\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \\ \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty}[F(b)-F(a)] = F(+\infty)-F(a)\end{gathered} \tag{5.2}$$

Xosmas integral $(-\infty;b]$ yarim cheksiz intervalda ham shunga o‘xshash aniqlanadi:

$$\begin{gathered}\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx = \\ \lim_{a\to-\infty} F(x)\Big|_a^b = \lim_{a\to-\infty}[F(b)-F(a)] = F(b)-F(-\infty)\end{gathered} \tag{5.3}$$

Agar $f(x)$ funksiya butun sonlar o‘qida uzluksiz bo‘lsa, u holda umumlashgan xosmas integral quyidagi formula bilan aniqlanadi.

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{c'} f(x)dx + \int_{c'}^{\infty} f(x)dx =$$

$$= F(c) - \lim_{a\to-\infty}F(a) + F(c') - F(c) + \lim_{b\to+\infty}F(b) - F(c') = F(c') - \lim_{a\to-\infty}F(a) +$$

$$+ \lim_{b\to+\infty}F(b) - F(c') = \int_{-\infty}^{c'} f(x)dx + \int_{c'}^{+\infty} f(x)dx.$$

Tabiiyki, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ integralning son qiymati (5.3) tenglikning o‘ng tomonidagi har ikkala qo‘shiluvchi yaqinlashgandagina mavjud bo‘ladi, aks holda u uzoqlashuvchi deyiladi.

Misollar.1) $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ $(a>0)$ xosmas integral hisoblansin.

Yechimi: Uchta holni alohida qarab chiqamiz:
1-hol. $p<1$ bo‘lsin. U holda

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}\cdot\frac{1}{x^{p-1}}\Bigg|_a^b=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}\left(b^{1-p}-a^{1-p}\right)=+\infty$$

- integral uzoqlashuvchi.

2-hol. $p=1$ bo‘lsin. U holda

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln|x|\Big|_a^b=\lim_{b\to+\infty}(\ln b-\ln a)=+\infty$$

- integral uzoqlashuvchi.

3 -hol. $p>1$ bo‘lsin. U holda

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}\cdot\frac{1}{x^{p-1}}\Bigg|_a^b=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{b^{1-p}}-\frac{1}{a^{1-p}}\right)$$

- integral yaqinlashuvchi

Shunday qilib,

$$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}+\infty\ , & \text{agar } p\le 1 \text{ bo'lsa, integral uzoqlashuvchi}\\ \dfrac{1}{(p-1)a^{p-1}}, & p>1 \text{ bo'lsa, integral yaqinlashuvchi}\end{cases}$$

2) $\int\limits_{-\infty}^{b}a^x dx$ $(0<a\neq1)$ xosmas integral hisoblansin.

Yechimi:

$$\int\limits_{-\infty}^{b}a^x dx=\lim_{c\to-\infty}\int\limits_c^b a^x dx=\lim_{c\to-\infty}\frac{a^x}{\ln a}\Bigg|_c^b=\lim_{c\to-\infty}\frac{1}{\ln a}\left(a^b-a^c\right)=$$

$$=\begin{cases}+\infty\ , & \text{agar } 0<a<1 \text{ bo‘lsa,}\\ \dfrac{a^b}{\ln a}, & \text{agar } a>1 \text{ bo‘lsa,}\end{cases}$$

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-4x+5}$ xosmas integral hisoblansin .

Yechimi: $c=2$ nuqta yordamida integrallash oralig‘inni ikkiga ajratamiz va har bir oraliq bo‘yicha integrallarni alohida hisoblaymiz:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-4x+5}=\int\limits_{-\infty}^{2}\frac{dx}{(x-2)^2+1}+\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{(x-2)^2+1}=\lim_{a\to-\infty}arctg(x-2)\Big|_a^2+\lim_{b\to+\infty}arctg(x-2)\Big|_2^b=$$

$$=arctg0-\lim_{a\to-\infty}arctg(a-2)+\lim_{b\to+\infty}arctg(b-2)-arctg0=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

5.2. Chegaralanmagan funksiyalarning xosmas integrallari.

Ta’rif. $f(x)$ funksiya $[a;b)$ yarim intervalda aniqlangan bo‘lib, har bir $b'\in[a,b)$ uchun $\int\limits_a^{b'} f(x)dx$ mavjud bo‘lsin. U holda

$$\lim_{\substack{b'\to b\\ b'<b}} \int\limits_a^{b'} f(x)dx \qquad (5.4)$$

limit $f(x)$ funksiyadan $[a;b)$ yarim interval bo‘yicha olingan II - tur xosmas integral deyiladi va

$$\int\limits_a^{b} f(x)dx \qquad (5.5)$$

ko‘rinishda belgilanadi, ya’ni

$$\int\limits_a^{b} f(x)dx = \lim_{\substack{b'\to b\\ b'<b}} \int\limits_a^{b'} f(x)dx$$

Agar (5.4) limit mavjud bo‘lib, chekli sondan iborat bo‘lsa, (5.5) xosmas integral yaqinlashuvchi, aks holda uzoqlashuvchi deyiladi.

b nuqta (5.5) integral uchun maxsus nuqta deiiladi. Bunday holda (5.5) integral b nuqtada yagona maxsuslikka ega deymiz.

Huddi yuqoridagi usulda $(a;b]$ yarim intervalda aniqlangan va har bir $[a';b](a'>a)$ kesmada integrallanuvchi $f(x)$ funksiya uchun

$$\int\limits_a^{b} f(x)dx = \lim_{\substack{a'\to a\\ a'>a}} \int\limits_{a'}^{b} f(x)dx$$

formula yordamida maxsus nuqtasi quyi chegarada bo‘lgan II-tur xosmas integral tushunchasini kiritish mumkin.

Misol. 4). $\int\limits_0^b \frac{dx}{x^p}$ (b>0) hisoblansin.

Yechimi: 1) misoldagi kabi bu yerda ham uchta holni alohida qarab chiqamiz:

$p<1$ bo‘lsin. U holda

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{\substack{a\to 0\\ a>a}} \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_a^b = \lim_{\substack{a\to 0\\ a>a}}\left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}\right) = \frac{b^{1-p}}{1-p}$$

2 hol. $p=1$ bo‘lsin. U holda

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{\substack{a\to 0\\ a>a}} \ln x\Big|_a^b = \lim_{\substack{a\to 0\\ a>a}}(\ln b - \ln a) = +\infty$$

3 hol. $p>1$ bo‘lsin. U holda

$$\int_a^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{\substack{a\to 0\\ a>a}} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Bigg|_a^b = \lim_{\substack{a\to 0\\ a>a}} \left(\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}\right) = +\infty$$

Shunday qilib,

$$\int_a^b \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{b^{1-p}}{1-p}, & \text{agar p<1 bo‘lsa,} \\ +\infty, & \text{agar } p \geq 1 \text{ bo‘lsa.} \end{cases}$$

Har qanday $[a';b'] \subset (a,b)$ kesmada integrallanuvchi $f(x)$ funksiya uchun ikkala chegarasi ham maxsus bo‘lgan II-tur xosmas integral tushunchasi quyidagicha kiritiladi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \tag{5.6}$$

bu yerda $c \in (a,b)$ intervaldan olingan ixtiyoriy son. (5.6) ifoda c songa bog‘liq emasligi ravshandir.

Ba’zan, amaliyotda maxsus nuqtasi integrallash oralig‘ining ichida joylashgan yoki aralash turdagi xosmas integrallar ham uchrab turadi. Lekin, hamma vaqt integrallash oralig‘ini bir necha bo‘laklarga ajratish hisobiga (ya’ni integralning additivlik xossasidan foydalanib) bunday integralni yagona maxsuslikka ega bo‘lgan xosmas integrallarning yig‘indisi shaklida tasvirlash mumkin.

Misollar. 5) $\int_{-2}^{3} \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$ integral ikkita: $x_1 = -1$ va $x_2 = 2$ maxsus nuqtalarga ega. Shuning uchun [— 2;3] integrallash oralig‘ini -1, 0,2 nuqtalar yordamida to‘rtta bo‘lakka ajratib, qaralayotgan integralni

$$\int_{-2}^{3} \frac{dx}{(x+1)(x-2)} = \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x+1)(x-2)} + \int_{-1}^{0} \frac{dx}{(x+1)(x-2)} + \int_{0}^{2} \frac{dx}{(x+1)(x-2)} + \int_{2}^{3} \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$$

yig‘indiga ajrata olamiz. Bunda har bir qo‘shiluvchi yagona maxsuslikka ega bo‘lgan II tur xosmas integraldir.

6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$ aralash turdagi xosmas integral bo‘lib, $x_1 = -1, x_2 = 1$ nuqtalarda maxsuslikka ega. Shuning uchun uni

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2-1} + \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2-1} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-1} + \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$$

ko‘rinishda yagona maxsuslikka ega bo‘lgan integrallarning yig‘indisi shaklida tasvirlash mumkin.

7) $\int_0^e \frac{dx}{x\ln^2 x}$ hisoblansin.

Yechimi: Qaralayotgan integral x=0 va x=1 nuqtalarda maxsuslikka ega. Shuning uchun $0, e^{-1}, 1$ nuqtalar yordamida integrallash oralig‘ini uch qismga ajratamiz va har bir oraliqda integralni alohida hisoblaymiz:

$$\int_0^e \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int_0^{e^{-1}} \frac{dx}{x\ln^2 x} + \int_{e^{-1}}^1 \frac{dx}{x\ln^2 x} + \int_1^e \frac{dx}{x\ln^2 x},$$

$$\int_0^{e^{-1}} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int_0^{e^{-1}} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_a^{e^{-1}} = \lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \left(1+\frac{1}{\ln a}\right) = 1$$

Lekin, $\displaystyle\int_{e^{-1}}^1 \frac{dx}{x\ln^2 x} \lim_{\substack{b\to 1\\ b<0}} \left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_{e^{-1}}^{b} = \lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \left(-\frac{1}{\ln b} - 1\right) = +\infty$

Xuddi shu kabi $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\ln^2 x} = +\infty$

Shuning uchun qaralayotgan integral uzoqlashadi.

Eslatma. Agar yuqoridagi integralni integrallash oralig‘ining ichki x=1 nuqtasida maxsuslikka ega bo‘lishini e’tiborga olmay hisoblasak, quyidagi noto‘g‘ri natijaga kelgan bo‘lar edik:

(5.3) formula s ga bog‘liq emasligi qanday isbotlangan bo‘lsa, bu yerda qam shunday mulohaza yuritiladi.

$$\int_0^e \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int_0^e \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_a^{e} = \lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \left(-1+\frac{1}{\ln a}\right) = -1$$

Xosmas integrallarni hisoblashni quyidagi tartibda olib borish maqsadga muvofiqdir.

1) integralning ichki maxsus nuqtalari topiladi;

2)integral yagona maxsuslikka ega (yoki maxsus nuqtalari chegaralarida) bo‘lgan integrallarning yig‘indisiga keltiriladi;

3) har bir qo‘shiluvchi alohida hisoblanadi.

4) topilgan natijalar qo‘shiladi.

Shuni ta’kidlab o‘tamizki, aniq integralning 1-chi va 2-chi ma’ruzalarida qayd etilgan deyarli barcha asosiy xossalari (o‘rta qiymat haqidagi teoremalardan tashqari) xosmas integrallar uchun ham o‘rinlidir.

Xususan, integrallarda o‘zgaruvchini almashtirish haqidagi teoremalarni xosmas integrallarga ham tatbiq etish mumkin.

Misol. 8) $\displaystyle\int_c^{+\infty} a^{-x}dx$ $(0<a\neq 1)$ hisoblansin.

Yechimi: t=-x almashtirish kiritib, hamda 2-misoldagi integralni e’tiborga olib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int_c^{+\infty} a^{-x}dx = -\int_{-c}^{-\infty} a^t dt = -\int_{-\infty}^{-c} a^t dt = \begin{cases} +\infty, & \text{agar } 0<a<1 \text{ bo‘lsa} \\ \dfrac{a^{-c}}{\ln a}, & \text{agar } a>1 \text{ bo‘lsa} \end{cases}$$

5.3. Taqqoslash teoremalari.

Ba'zan xosmas integralning son qiymati masala yechimi uchun muhim ahamiyatga ega bo'lmay, faqatgina uning uzoqlashuvchi yoki yaqinlashuvchi ekanini (ya'ni yaqinlashuvchanligini) tekshirish bilan kifoyalanishga to'gri keladi. Bunday hollarda taqqoslash teoremalari alohida ahamiyat kasb etadi.

5.1-teorema.

$$\int_a^b f(x)dx \tag{5.7}$$

va

$$\int_a^b g(x)dx \tag{5.8}$$

integrallar b nuqtada ($b=+\infty$ hol istisno qilinmaydi) yagona maxsuslikka ega bo'lgan xosmas integrallar bo'lib, $[a,b)$ oraliqda

$$0 \le f(x) \le g(x) \tag{5.9}$$

tengsizlik bajarilsin. U holda (5.8) integralning yaqinlashishidan (5.7) integralning ham yaqinlashishi kelib chiqadi va

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. (5.7) integralning uzoqlashishidan esa (5.8) integralning ham uzoqlashishi kelib chiqadi.

Isboti. (5.9) dan $b' \in (a,b)$ uchun

$$\int_a^{b'} f(x)dx \le \int_a^{b'} g(x)dx \tag{5.10}$$

tengsizlik o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Agar (5.8) integral yaqinlashsa, u holda (5.10) tengsizlikning o'ng tomoni va demak, chap tomoni ham b' o'sganda yuqoridan chegaralangandir. b' o'sganda chap tomon monoton kamaygani uchun u

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b'\to b}\int_a^{b'} f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

limitga (integralga) yaqinlashadi.

Aksincha, (5.7) integralning uzoqlashishidan $b' \to b$ da (5.10) tengsizlikni chap tomoni va demak, o'ng tomoni ham $+\infty$ ga intilishi kelib chiqadi. ■

Misol. 9) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ integralning yaqinlashuvchanligi tekshirilsin.

Yechimi: $\frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ tengsizlikdan va $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ integralning yaqinlashuvchiligidan (1- misolga qarang) isbotlangan teoremaga ko‘ra tekshirilayotgan integralning ham yaqinlashishi kelib chiqadi.

5.2-teorema. (5.7) va (5.8) xosmas integrallar b nuqtada ($b = +\infty$ hol istisno qilinmaydi) yagona maxsuslikka ega bo‘lib, integral ostidagi funksiyalar musbat bo‘lsin.

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = A \tag{5.11}$$

mavjud bo‘lib, $0 < A < +\infty$ shart bajarilsa, u holda (5.7) va (5.8) integrallar yoki birgalikda yaqinlashadi yoki birgalikda uzoqlashadi.

Isboti. (5.11) ga ko‘ra musbat ε son uchun

$$\frac{f(x)}{g(x)} < A + \varepsilon \quad (c<x<b),$$

shartni qanoatlantiruvchi $c \in [a,b]$ nuqtani ko‘rsatish mumkin. Oxirgi tengsizlikni ikkala tomonini $g(x) > 0$ ga ko‘paytirib,

$$f(x) < (A + \varepsilon) g(x) \tag{5.12}$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. $\int_a^b g(x)dx$ integralning yaqinl'ashishidan $\int_c^b g(x)dx$ integralning yaqinlashishi, bundan esa $\int_c^b (A+\varepsilon) g(x)dx$ integralning yaqinlashishi kelib chiqadi. U holda oldingi teoremaga asosan $\int_c^b f(x)dx$ integralning va demak, $\int_a^b f(x)dx$ integralning ham yaqinlashishi kelib chiqadi.

Aksincha, $\int_a^b f(x)dx$ integralning yaqinlashishidan (5.11) tenglik bilan birgalikda,

$$\lim_{x \to b-0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{A} > 0$$

munosabat ham bajarilgani sababli, $\int_a^b f(x)dx$ integralning yaqinlashishi kelib chiqadi. ■

Eslatma. Biz 5.1 va 5.2 teoremalarda xosmas integrallar yuqori chegarada maxsuslikka ega deb faraz qildik. Bu teoremalarni xosmas integrallar quyi chegarada maxsuslikka ega bo‘lgan hol uchun ham bayon etish mumkin. Bu holda (5.9) tengsizlik $(a,b]$ oraliqda bajariladi deb faraz qilinadi va (5.11) shart

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=A>0$$

shart bilan almashtiriladi.

Taqqoslash teoremalari yordamida $\int_a^b f(x)dx$ integralning yaqinlashuvchanligi tekshirilayotganda bu integraldan tashqari yaqinlashishi yoki uzoqlashishi oldindan ma’lum bo‘lgan, qaralayotgan integral taqqoslanadigan $\int_a^b g(x)dx$ integralning mavjudligi talab qilinadi. Bunday integrallarni biz andoza integrallar[1] deb ataymiz.

Andoza integrallar sifatida ko‘pincha $\int_a^b \frac{dx}{x^p}$ va $\int_a^b a^x dx$ integrallar olinadi. Bu integrallarning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi 1), 2), 4) va 8) misollarda ko‘rib o‘tildi. Umuman, tekshirilayotgan integral b (yoki a) nuqtada yagona maxsuslikka ega bo‘lsa $x\to b-0$ da (yoki $x\to a+0$ da) o‘sish yoki kamayish tartibi $f(x)$ funksiyaning o‘sish yoki kamayish tartibi bilan bir hil bo‘lgan $g(x)$ funksiyadan olingan $\int_a^b g(x)dx$ integralni andoza integral sifatida olish mumkin.

Quyida biz ikki integral orasiga qo‘yilgan "$\sim$" belgi orqali bu integrallarning birgalikda yaqinlashishi yoki uzoqlashishini ifodalaymiz. $f(x)\geq 0$ bo‘lganda $\int_a^b f(x)dx<+\infty$ yozuv integralning yaqinlashishini $\int_a^b f(x)dx=\infty$ esa integralning uzoqlashishini bildiradi.

Misollar. 10) $\int_1^{+\infty}\frac{x-1}{x}e^{-x}dx$ integralning yaqinlashuvchanligi tekshirilsin.

Yechimi. Qaralayotgan integral $b=+\infty$ nuqtada yagona maxsuslikka ega va $x\to+\infty$ da $\frac{x-1}{x}e^{-x}\sim e^{-x}$. Shuning uchun

$$\int_1^{+\infty}\frac{x-1}{x}e^{-x}dx\sim\int_1^{+\infty}e^{-x}dx<\infty$$

11) $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+5}+\sqrt[6]{3x^2-2}}{x^2+\sqrt[5]{x^2+1}}dx$ integralning yaqinlashuvchanligi tekshirilsin.

Yechimi. Integral $x=+\infty$ da yagona maxsuslikka ega. Integral ostidagi $f(x)=\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+5}+\sqrt[6]{3x^2-2}}{x^2+\sqrt[5]{x^2+1}}$ funksiyaning surati $x\to+\infty$ da $x^{\frac{2}{3}}$ ga, maxraji esa x^2 ga

---

[1] Bu atama matematikaga oid adabiyotlarda keng urf bo‘lgan emas.

ekvivalent. Bundan esa funksiyaning o‘zi $g(x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^2}=\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$ ga ekvivalent ekani kelib chiqadi. Shuning uchun

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+5}+\sqrt[6]{3x^2-2}}{x^2+\sqrt[5]{x^2+1}}\,dx \sim \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\frac{4}{3}}}<\infty$$

12) $\int_0^1\frac{\sqrt{2x+x^2}-\sqrt[3]{4x^2-2x^3}}{\sqrt[4]{x^3+x^4}+x}\,dx$ integralning yaqinlashuvchanligi tekshirilsin.

Yechimi. Integral $x=0$ nuqtada yagona maxsuslikka ega va $x\to 0+0$ da integral ostidagi funksiyaning o‘sish tartibi $g(x)=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}$ funksiyaning o‘sish tartibi bilan bir xil. Shu sababli,

$$\int_0^1\frac{\sqrt{2x+x^2}-\sqrt[3]{4x^2-2x^3}}{\sqrt[4]{x^3+x^4}+x}\,dx \sim \int_0^1\frac{dx}{x^{\frac{1}{4}}}<\infty$$

13) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ integralning yaqinlashuvchanligi tekshirilsin.

Yechimi. Berilgan integral aralash turdagi integral bo‘lib, $x_1=-\infty,\ x_2=0,\ x_3=+\infty$ nuqtalarda maxsuslikka ega. Avval bu integrallarni yagona maxsuslikka ega bo‘lgan integrallarning yig‘indisi sifatida tasvirlaymiz:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\int_{-\infty}^{-1}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx+\int_{-1}^{0}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx+\int_{0}^{1}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx+\int_{1}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$$

Bu qo‘shiluvchilarning hammasi yaqinlashadi: 1-chi va 4-chi qo‘shiluvchilarning yaqinlashuvi $\frac{\sin^2 x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$ tengsizlikdan va 5.1 -teoremadan, (9-misolga qarang) 2-chi va Z-chi qo‘shiluvchilarning yaqinlashuvi esa $x\to 0$ da $\frac{\sin^2 x}{x^2}\sim 1$ munosabatdan kelib chiqadi.

14) $\int_{-\infty}^{0}\frac{e^x}{x^2}dx$ integralning yaqinlashuvchanligi tekshirilsin.

Yechimi: $\int_{-\infty}^{0}\frac{e^x}{x^2}dx=\int_{-\infty}^{-1}\frac{e^x}{x^2}dx+\int_{-1}^{0}\frac{e^x}{x^2}dx,\ \int_{-\infty}^{-1}\frac{e^x}{x^2}dx<\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2}<\infty$

Lekin $\int_{-1}^{0}\frac{e^x}{x^2}dx\sim\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}=\infty$. Bundan esa berilgan integralning uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

5.4. Absolyut va shartli yaqinlashuvchilik

Taqqoslash teoremalari faqatgina manfiy bo‘lmagan funksiyalarning integrallariga tatbiq qilinadi.

Bu teoremalarning tatbiq doirasini yanada kengaytirish maqsadida absolyut yaqinlashuvchilik tushunchasini kiritamiz.

Ta’rif.

$$\int_a^b f(x)dx \tag{5.13}$$

b nuqtada ($b=+\infty$ hol istisno qilinmaydi) yagona maxsuslikka ega xosmas integral bo‘lsin. Agar

$$\int_a^b |f(x)|dx \tag{5.14}$$

integral yaqinlashsa (5.13) integral absolyut yaqinlashuvchi integral deb ataladi.

Agar (5.14) uzoqlashuvchi bo‘lib, (5.13) yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda (5.13) shartli yaqinlashuvchi integral deyiladi.

5.3-teorema. Absolyut yaqinlashuvchi integral yaqinlashadi.

Isboti. (5.14) integral yaqinlashgani tufayli ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $b_0\in(a,b)$ ni ko‘rsatish mumkinki, har qanday $b',b''\in(b_0,b)$ uchun

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right| \le \int_{b'}^{b''} |f(x)|dx<\varepsilon$$

munosabat bajariladi, $F(t)=\int_a^t f(x)dx$ funksiya uchun b nuqta atrofida Koshi sharti bajariladi. ■

Misollar. 15) $\int_0^{\infty} e^{-x}\sin kx dx$ integralning yaqinlashuvchanligi tekshirilsin.

Yechimi: $\int_0^{\infty} |e^{-x}\sin kx|dx \le \int_0^{\infty} e^{-x}dx<\infty$

Demak, berilgan integral yaqinlashadi.

16) $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$ integralning yaqinlashuvchanligi tekshirilsin.

Yechimi: $\int_0^1 \left|\frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right|dx \le \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}<\infty$.

Bundan, berilgan integralning yaqinlashishi kelib chiqadi.

5.4-teorsma. Agar

$$\int_a^b f(x)dx \tag{5.15}$$

b $(|b|<\infty)$ nuqtada yagona maxsuslikka ega bo‘lib, $f(x)$ funksiya $[a,b)$ yarim intervalda chegaralangan bo‘lsa, u holda (5.15) integral yaqinlashadi.

Isboti. $|f(x)|<M\ \forall x\in[a,b)$ bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun $b',b''\in\left(b-\frac{\varepsilon}{M},b\right)$ bo‘lganda

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right| \le \int_{b'}^{b''}|f(x)|dx \le \int_{b'}^{b''} M dx = M(b''-b') \le M\left(b-\left(b-\frac{\varepsilon}{M}\right)\right)=\varepsilon$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi, ya’ni (5.15) integral uchun Koshi sharti bajariladi.

Misol. 17) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ integralning yaqinlashuvchanligi tekshirilsin.

Yechimi. $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \le 1$ bo‘lgani uchun qaralayotgan integral yaqinlashadi.

Yuqorida isbotlangan teoremaga ko‘ra chegaralangan funksiyadan chekli oraliq bo‘yicha olingan integral yaqinlashadi, ya’ni integrallash natijasi aniq sondan iborat bo‘ladi. Shu sababli, ba’zan bunday integrallar aniq integrallar sirasiga kiritilib, II-tur xosmas integrallar chegaralanmagan funksiyadan olingan integral degan nom bilan ataladi.

6. Aniq integralning tatbiqi.

6.1. Geometriya masalalari.Yassi shakllar yuzasini hisoblash.

6 – rasmdagi shakl chegarasining tenglamasi dekart koordinatalarida berilganda. Yuqoridan $y=f(x)$ $(f(x)>0)$ chiziq bilan chegaralangan $[a,b]$ asosli egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

formula yordamida hisoblanadi. Agar yassi shakl yuqoridan $y=f(x)$, quyidan $y=\varphi(x)$ $(\varphi(x)>0)$ chiziqlar bilan chegaralangan bo‘lsa, bu shaklni $aABb$ egri chiziqli trapetsiyadan $aDCb$ (6-rasm) egri chiziqli trapetsiyani ayirmasi sifatida tasavvur qilib uning yuzasi uchun

$$S_{ABCD}=S_{aABb}-S_{aDCb}=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b \varphi(x)dx=\int_a^b (f(x)-\varphi(x))dx$$

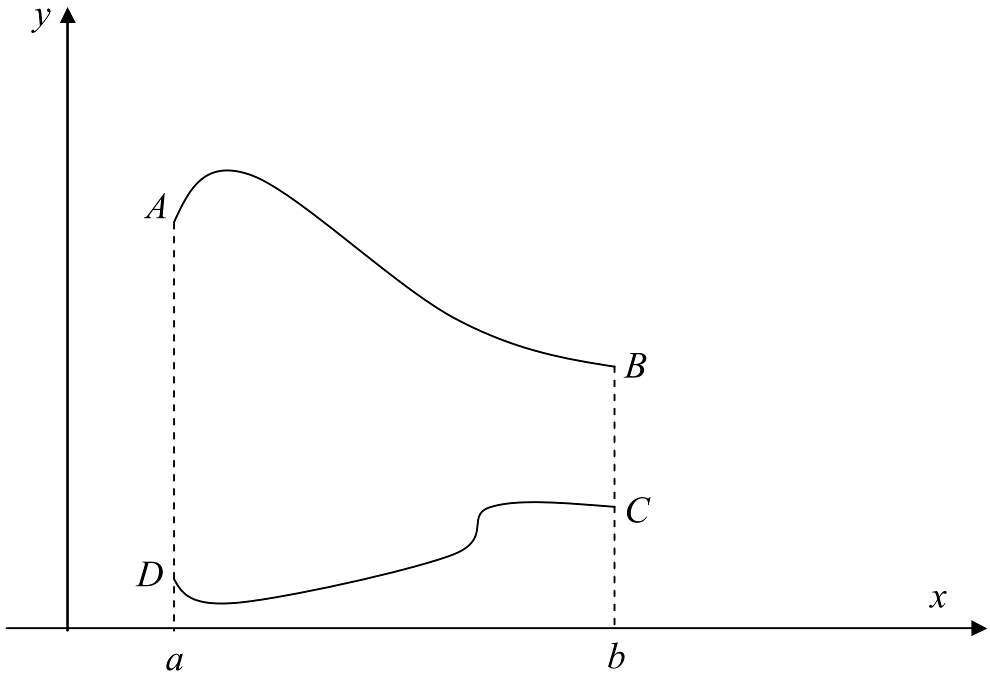
ya’ni

$$S_{ABCD}=\int_a^b (f(x)-\varphi(x))dx \tag{6.1}$$

formulani yoza olmaiz.[2]

---

[2] Xususiy holda A va D nuqtalar (shuningdek B va C nuqtalar ham) ustma-ust tushishi mumkin.



6-rasm

(6.1) formula $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar nafaqat musbat, balki $f(x)\ge\varphi(x)$ $(a\le x\le b)$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy uzluksiz funksiyalar bo‘lganda ham o‘rinlidir. Haqiqatan, agar $\varphi(x)\ge 0$ $x\in[a,b]$ shart bajarilmasa, u holda $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar o‘rniga $\bar{f}(x)=f(x)+k,\ \bar{\varphi}(x)=\varphi(x)+k$ funksiyalarni qaraymiz, bu yerda $k-|\varphi(x)|<k,\ x\in[a,b]$ shartni qanoatlantiruvchi son ($\varphi(x),[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lgani uchun bunday son albatta mavjud bo‘ladi). Yuqoridan $y=\bar{f}(x)$, pastdan esa $y=\bar{\varphi}(x)$ chiziqlar bilan chegaralangan shakl yuzasi uchun (6.1) formulani qo‘llash mumkin. Lekin bu shaklning yuzasi $f(x)$ va $\varphi(x)$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzasiga tengdir. Chunki $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalarga o‘zgarmas k sonini qo‘shilishi $f(x)$ va $\varphi(x)$ chiziqlarni k birlik yuqoriga siljitishga teng kuchlidir. Tabiiyki, bunda mazkur chiziqlar bilan chegaralangan shaklning formasi va demak, yuzasi ham o‘zgarmaydi. Shunday qilib,

$S_{ABCD}=\int_a^b(\bar{f}(x)-\bar{\varphi}(x))dx=\int_a^b[(f(x)+k)-(\varphi(x)+k)]dx=\int_a^b(f(x)-\varphi(x))dx$ ya’ni (6.1) formula bu holda ham o‘rinlidir.

Misollar. 1) $y=x^2-2x-1$ va $y=1-x$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzasi hisoblansin.

Yechimi. Avvalo bu chiziqlar kesishadigan nuqtalarning abssissalarini aniqlaymiz. Buning uchun berilgan chiziqlar tenglamasidan

$$\begin{cases} y=x^2-2x-1 \\ y=1-x \end{cases}$$

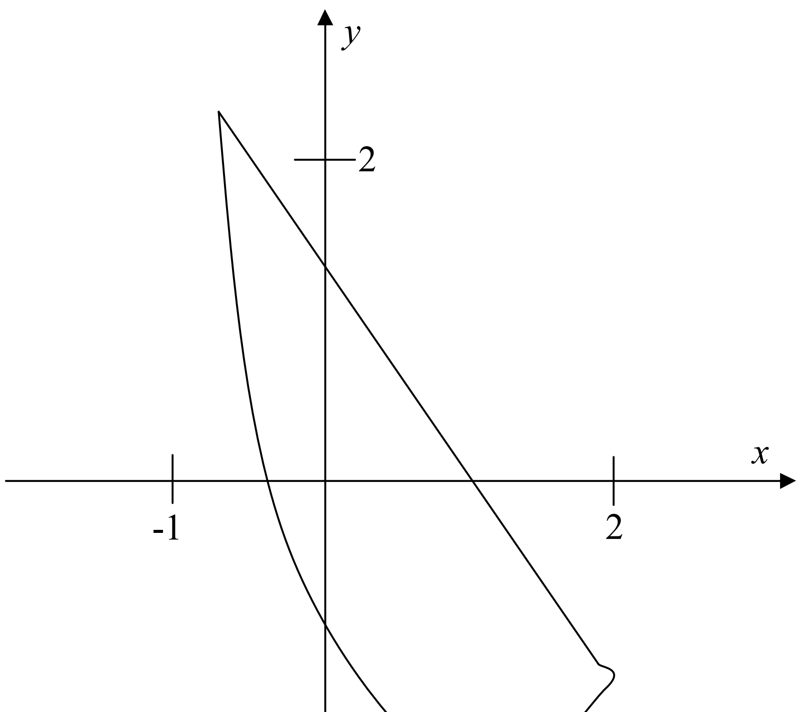
sistema tuzib, bu sistemadan x noma'lumni topish kifoya. Sistema ikkita $x_1 = -1, y_1 = 2$ va $x_2 = 2, y_2 = -1$ yechimga ega. Bundan esa integrallash oralig'i $[-1,2]$ kesmadan iborat ekani kelib chiqadi. $y = x^2 - 2x - 1$ va $y = 1 - x$ chiziqlarning qaysi biri yassi shaklning yuqori chegarasi, qaysi biri quyi chegarasi ekanini aniqlash uchun $(x^2 - 2x - 1) - (1 - x)$ ayirmani qaraymiz. Bu ayirma $[-1,2]$ kesmada ishorasini o'zgartirmaydi va bu kesmadagi nuqtalaridan birida, masalan, $x = 0$ da – 2 ga teng manfiy qiymat qabul qiladi. Shuning uchun $y = 1 - x$ yassi shaklning yuqori chegarasi, $y = x^2 - 2x - 1$ esa quyi chegarasi bo'ladi. (7 – rasm). Izlanayotgan yuza esa

$S = \int_{-1}^{2} \left((1 - x) - (x^2 - 2x - 1)\right)dx = \int_{-1}^{2} \left(2 + x - x^2\right)dx = 4,5$ kv.birl.ga teng bo'ladi.

Izoh. Agar $y = f(x), y = \varphi(x)$ chiziqlar $[a,b]$ kesma ustida kesishmasa yoki kesishish nuqtalarining abssissasi a va b sonlardan (yoki bu sonlarning biridan) iborat bo'lsa, $y = f(x), y = \varphi(x)$, $x = a, x = b$ chiziqlar bilan chegaralangan yassi shaklning yuzasi

$$S = \left| \int_a^b \left(f(x) - \varphi(x)\right)dx \right|$$

formula orqali hisoblash mumkin.



7-rasm

Bu formulada $f(x)$ va $\varphi(x)$ chiziqlardan qaysi biri yassi chiziqning yuqori chegarasiyu, qaysi biri quyi chegarasi ekanining ahamiyati yo‘q.

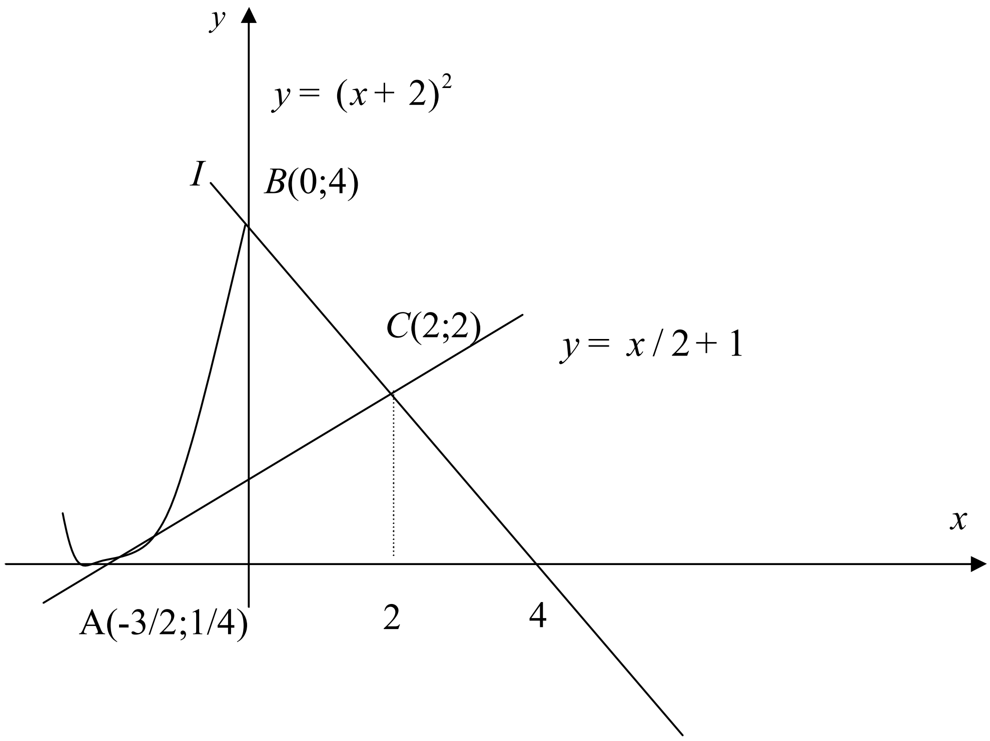
2) $y=(x+2)^2, y=4-x$ va $y=\dfrac{x}{2}+1$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzasi hisoblansin.

Yechimi. Chizma yordamida yassi shaklning oxy dekart koordinatalar sistemasidagi vaziyatini aniqlab olib, (8-rasm), uning A, V va S uchlarining koordinatalarini topamiz.

Masalan, A nuqta $y=(x+2)^2$ parabola va $y=x/2+1$ to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtalaridan biri bo‘lgani uchun uning koordintalari

$$\begin{cases} y=(x+2)^2 \\ y=\dfrac{x}{2}+1 \end{cases}$$

sistemaning yechimlaridan biridir.



8-rasm

Shuningdek, V ning koordinatalari $\begin{cases} y=(x+2)^2 \\ y=4-x \end{cases}$, sistemasidan, S ning koordinatalari esa $\begin{cases} y=4-x \\ y=\dfrac{x}{2}+1 \end{cases}$ sistemadan topiladi: $A(-\frac{3}{2};\frac{1}{4}), B(0;4), C(2;2)$. Bundan ko‘rinadiki, integrallash oralig‘i $\left[-\frac{3}{2};2\right]$ kesmadan iborat. Lekin bu kesmani ikkita $\left[-\frac{3}{2};0\right]$ va $[0;2]$

qismlarga ajratishga to‘g‘ri keladi, chunki bu kesmalarda yassi shaklning yuqori chegarasi turli tenglamalar bilan aniqlangan. $\left[\frac{3}{2};0\right]$ kesmada u parabolaning tenglamasidan $[0;2]$ kesmada esa I to‘g‘ri chiziqning tenglamasidan iborat bo‘ladi. Shuning uchun

$$S=\int_{-\frac{3}{2}}^{0}\left[(x+2)^2-\left(\frac{3}{2}x+1\right)\right]dx+\int_{0}^{2}\left[(4-x)-\left(\frac{3}{2}x+1\right)\right]dx=4\frac{11}{16}$$

b) Agar egri chiziqli trapetsiya yuqoridan parametrik shaklda berilgan $x=\varphi(t), y=\psi(t)\quad t\in[\alpha,\beta]$ chiziq bilan chegaralangan bo‘lib, $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$ bo‘lsa, u holda bu tenglamalar $[a;b]$ kesmada biror $y=f(x)$ funksiyani aniqlaydi. Binobarin, egri chiziqli trapetsiya yuzasini

$$S=\int_a^b ydx$$

formula bo‘yicha hisoblash mumkin. Bu integralda o‘zgaruvchilarni almashtiramiz:

$x=\varphi(t),\quad dx=\varphi'(t)dt,\quad \varphi(\alpha)=a,\quad \varphi(\beta)=b$

$y=f(x)=f(\varphi(t))=\psi(t)$

$\int_a^b ydx=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt$

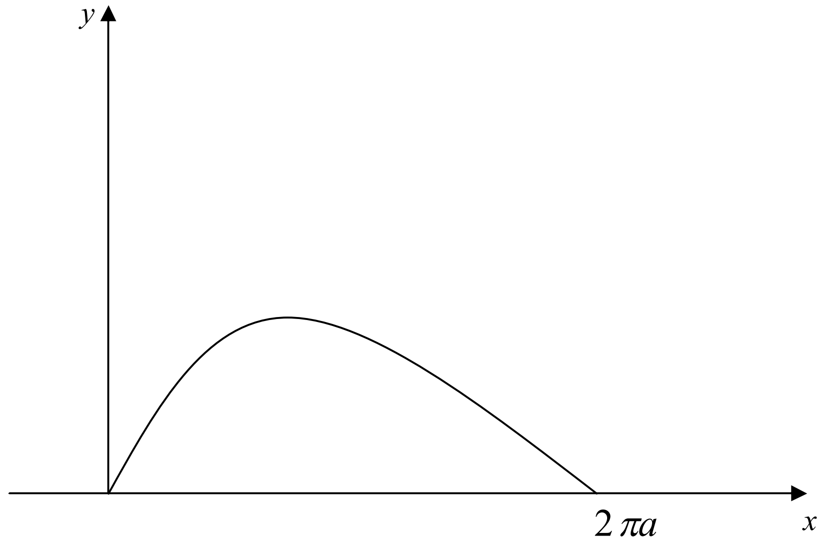
Shunday qilib, quyidagini hosil qilamiz:

$$S=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt \qquad (6.2)$$

Misollar. 3) Ox o‘qi va $x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$ sikloidaning bir arki bilan chegaralangan shakl yuzasi hisoblansin.

Yechimi. Sikloidaning bir arkini hosil qilish uchun t 0 dan 2π gacha o‘zgaradi (9 –rasm). (6.2) formulaga asosan bu yuza quyidagicha hisoblanadi:

$$S=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt=3\pi a^2$$

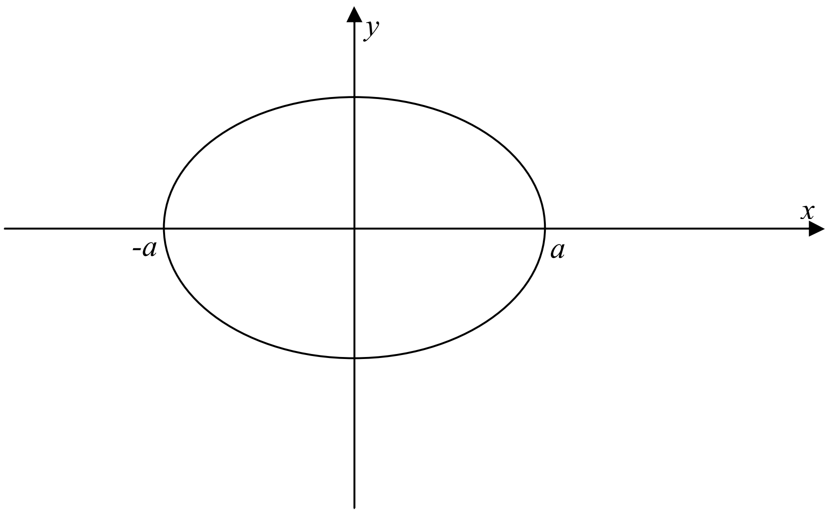


9-rasm

4) $x = a\cos t, y = b\sin t$ ellips bilan chegaralangan sohaning yuzi hisoblansin.

Yechimi. Ellipsning ox o‘qiga nisbatan simmetrik ekanligini e’tiborga olib, bu yuzani hisoblash uchun ellipsning yuhqori yarim sohasi yuzasi hisoblab, uni ikkiga ko‘paytirish kifoya. Bu yerda x ning qiymati –a dan a gacha o‘zgaradi, demak t ning qiymati $-\pi$ dan 0 gacha o‘zgarishi lozim (10-rasm).

$$S = 2\int_{\pi}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = \pi ab$$



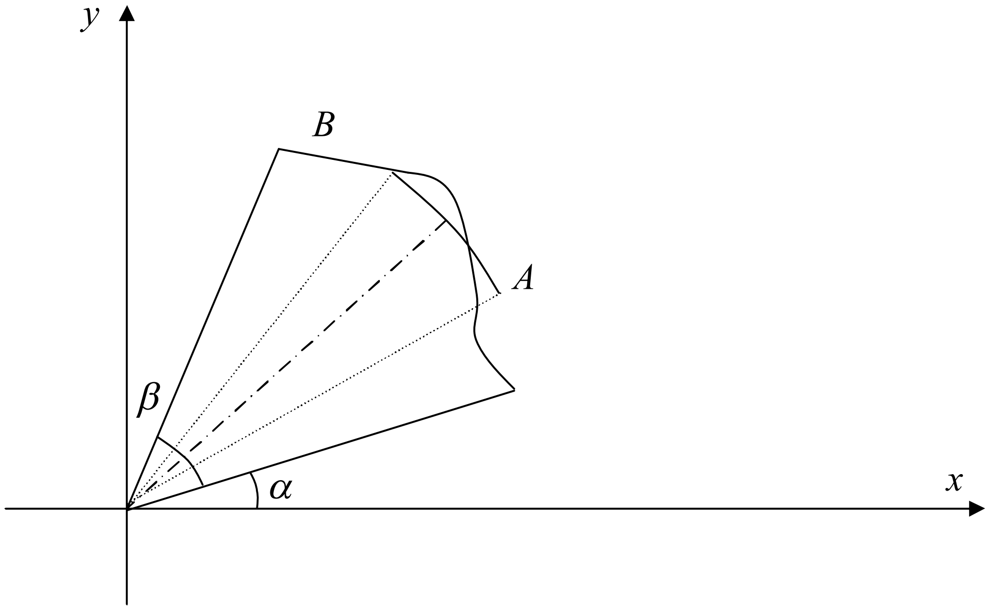
10-rasm

v) Qutb koordinatalarida $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$, nurlar va $r = r(\varphi)$ chiziq (bu yerda φ - qutb burchagi) bilan chegaralangan shakl[3] (11 – rasm) yuzasini hisoblash haqidagi masalani qarab chiqamiz.

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta$$

---

[3] Bu shakl egri chiziqli sektor deyiladi.



11-rasm

nuqtalar yordamida $[\alpha,\beta]$ kesmani n ta bo‘lakka bo‘lamiz va har bir $[\varphi_{i-1},\varphi_i]$ bo‘lakka mos keluvchi OAV egri chiziqli sektor yuzasini

$$\Delta S_i = \frac{1}{2} r(\xi_i)^2(\varphi_i - \varphi_{i-1}), i = 1,2,...n \tag{6.3}$$

doiraviy sektor yuzasi bilan almashtiramiz (bu yerda $\xi_i[\varphi_{i-1},\varphi_i]$ oraliqdan olingan ixtiyoriy son) (6.3) doiraviy sektorlar yuzalari yig‘indisi

$$\sigma(S) = \sum_{i=1}^{n} r^2(\xi_i)\Delta\varphi_i$$

(bu yerda $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$) izlanayotgan egri chiziqli sektor yuzasining taqribiy qiymatini, bu yig‘indining $n \to \infty$ dagi limiti, ya’ni $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$ integral esa izlanayotgan yuzaning aniq qiymatini beradi.

Shunday qilib, egri chiziqli sektor yuzasi uchun

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi \tag{6.4}$$

formula o‘rinlidir.

Misol. 4)

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 - 2a^2\left(x^2 - y^2\right) = 0 \tag{6.5}$$

Chiziq bilan chegaralangan soha yuzasi hisoblansin.

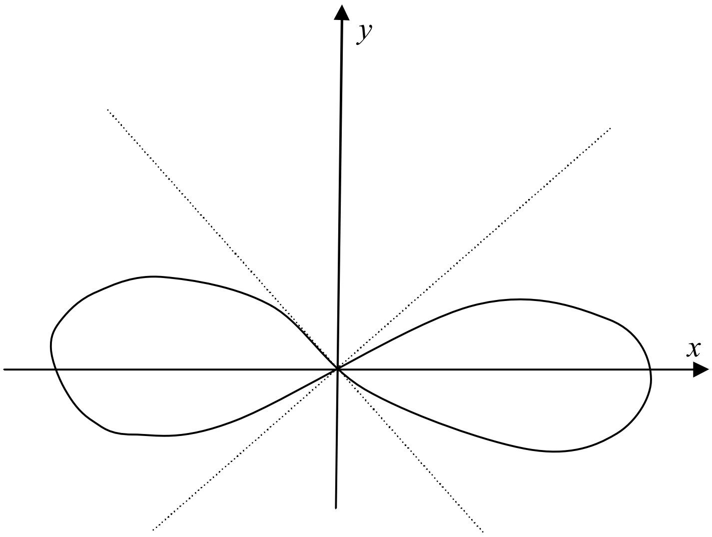
Yechimi. Soha yuzasini qutb koordinatalari sistemasiga o‘tib hisoblasak, ish ancha osonlashadi.

Agar, $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ almashtirish kiritsak, u holda $x^2 + y^2 = r^2,\ x^2 - y^2 = r^2\cos 2\varphi$. Bu ifodalarni (6.5) tenglamaga qo‘ysak, $r^4 - 2a^2r^2\cos 2\varphi = 0$ yoki

$$r^2 = 2a^2\cos 2\varphi \qquad (6.6)$$

tenglik hosil bo‘ladi. (6.6) chiziq bilan chegaralangan soha yuzasini (12-rasm) (6.4) formula yordamida hisoblaymiz. Agar $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$ kesmada o‘zgarsa, radius-vektor izlanayotgan yuzaning choragini chizadi. Shuning uchun

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2a^2\cos 2\varphi \, d\varphi = 2a^2 \text{ kv.b.}$$

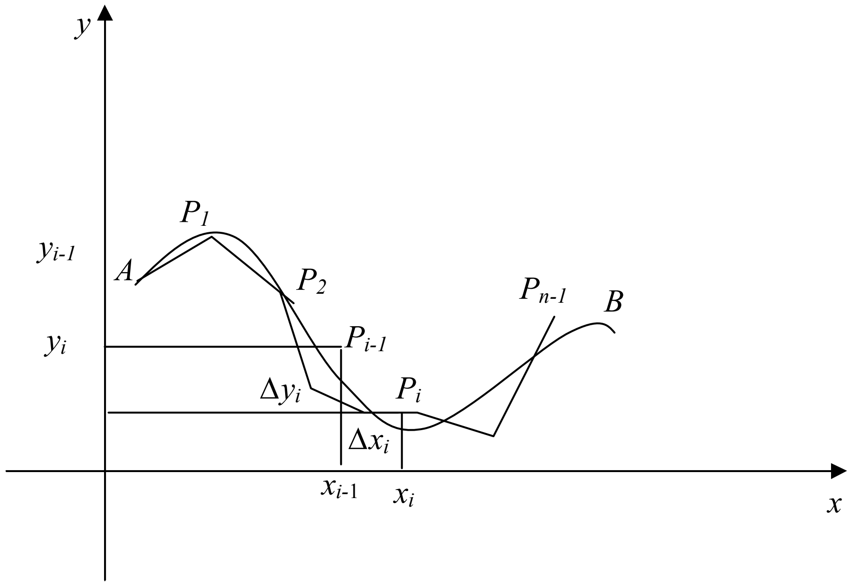


12-rasm

6.2. Egri chiziq uzunligi haqidagi masala.

AB egri chiziq uchun uzunlik tushunchasini kiritamiz. Shu maqsadda egri chiziqni (egri chiziq bo‘ylab) ketma-ket joylashgan $A = P_0, P_1, ..., P_n = B$ nuqtalar yordamida n ta bo‘lakka bo‘lamiz va egri chiziqning har bir $P_{i-1}P_i$ yoyini $P_{i-1}P_i$ kesma bilan almashtiramiz. Natijada siniq chiziq hosil bo‘ladi. (13-rasm). Bu siniq chiziq egri chiziqqa ichki chizilgan siniq chiziq deyiladi. Siniq chiziq uzunligi (perimetrini) egri chiziq uzunligining taqribiy qiymati sifatida olamiz. Agar siniq chiziq bo‘g‘inlari sonini shunday orttirsakki, bunda har bir bo‘g‘in uzunligi 0 ga intilsa, u holda siniq chiziq AB egri chiziqqa qaysidir ma’noda “yaqinlashib” boradi. Shu sababli, egri chiziq uzunligi siniq chiziq uzunligining limiti sifatida kiritilishi tabiiydir.

Ta’rif. Agar $\max P_{i-1}P_i \to 0$ da AB egri chiziqqa ichki chizilgan $AP_1P_2...P_{n-1}B$ siniq chiziq uzunligi biror l chekli limitga intilsa va bu limit egri chiziqdan P_i $i = 1, 2, ...n$ nuqtalarni tanlash usuliga bog‘liq bo‘lmasa, u holda bu limit AB egri chiziqning uzunligi deyiladi.



13-rasm

Teorema. Agar AB egri chiziq $y = f(x)$ $x \in [a,b]$ tenglama bilan berilgan bo‘lib, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va uzluksiz $f`(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, u holda AB egri chiziqning uzunligi

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f`(x))^2}\,dx \tag{6.7}$$

formula bilan hisoblanadi.

Isboti. Ravshanki, egri chiziqning $P_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$ va $P_i(x_i, y_i)$ nuqtalarini tutashtiruvchi $P_{i-1}P_i$ bo‘g‘iniing uzunligi

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \quad i = 1,2,...n \tag{6.8}$$

ga teng (13-rasmga qarang), bu yerda $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Lagranj teoremasiga asosan Δy_i orttirma uchun $\Delta y_i = f`(x_i)\Delta x_i$ $i = 1,2,...n$ tenglik o‘rinli. Bundan va (6.8) formuladan

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + (f`(x_i))^2}\Delta x_i \quad i = 1,2,...n \tag{6.9}$$

bu yerda $x_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Oxirgi tenglikdan ichki chizilgan siniq chiziq uzunligi uchun $\sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f`(x_1))^2}\Delta x_i$ ifodani hosil qilamiz. Lekin bu ifoda $g(x) := \sqrt{1 + (f`(x))^2}$ funksiyadan $[a,b]$ kesma bo‘yicha olingan integral yig‘indidir. $f(x)$ uzluksiz funksiya bo‘lgani uchun $|f(x)| < M$ $x \in [a,b]$ shartni qanoatlantiruvchi M soni mavjud. Buni va (6.9) ni e’tiborga olib Δl_i uchun

$\Delta l_i \le M\Delta x_i \quad i=1,2,...n$ tengsizlikni yoza olamiz. Oxirgi tengsizlikdan va (6.8) dan $\max\Delta l_i \to 0$ munosabat $\max\Delta x_i \to 0$ munosabatga teng kuchli ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, $l=\lim\limits_{\max\Delta l_i\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta l_i=\lim\limits_{\max\Delta x_i\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f`(x_i))^2}\Delta x_i=\int\limits_a^b\sqrt{1+(f`)^2}dx$

ya'ni (6.7) formula isbotlandi.

Misol. 5) $y=\frac{x^2}{2}$ parabolaning A(0;0) va $B(\sqrt{3};\frac{3}{2})$ nuqtalarini tutushatiruvchi yoy uzunligi hisoblansin.

Yechish. $y'=x,\quad \sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+x^2}$ va (6.7) formulaga asosan quyidagiga ega bo'lamiz: $l=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+x^2}dx=\ln\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{3}$ (2-ma'ruzadagi 2.4-misolga qarang).

Agar AB egri chiziq $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[a,b]$ parametrik tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, u holda (7) formulada o'zgaruvchini almashtirib, (bunda $dx=x'_t dt$ va parmetrik funksiyadan hosila olish qoidasiga binoan $f'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$) egri chiziq uzunligi uchun $l=\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2}x'_t dt$ formulani hosil qilamiz. Integral ostidagi ifodani soddalashtirib,

$$l=\int\limits_a^b\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}dt \qquad (6.10)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Misol. 6) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)\ (0\le t\le 2\pi)$ sikloidaning bitta arki uzunligi hisoblansin.

Yechimi. $x'_t=a(1-\cos t), y'_t=a\sin t$ bo'lgani uchun $\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}=2a\sin\frac{t}{2}$

(6.10) formulaga ko'ra $l=\int\limits_0^{2\pi}2a\sin\frac{t}{2}dt=8a$

Izoh. AB egri chiziq $x=x(t), y=y(t),\ z=z(t),\ t\in[a,b]$ tenglamalar bilan fazoda berilgan bo'lsa, (6.10) formula $l=\int\limits_a^b\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2+(z'_t)^2}dt$ ko'rinishni oladi.

Agar AB egri chiziq qutb koordinatalarida $r=r(\varphi)\ \varphi\in[a,b]$ tenglama bilan berilgan bo'lsa, qutb burchagini parametr sifatida olib, egri chiziq tenglamasini $x=r(\varphi)\cos\varphi,\ y=r(\varphi)\sin\varphi,\ \varphi\in[a,b]$ ko'rinishdagi parametrik tenglamalarga keltirish mumkin. Bu tengliklardan x'_φ va y'_φ larni topamiz:

$$x'_\varphi=r'\cos\varphi-r\sin\varphi,\ y'_\varphi=r'\sin\varphi+r\cos\varphi.$$

Topilgan ifodalarni (6.10) ga qo‘yib egri chiziq uzunligi uchun

$$l=\int_a^b \sqrt{(\rho'\cos\varphi-\rho\sin\varphi)^2+(\rho'\sin\varphi+\rho\cos\varphi)^2}\,dt=$$

$$=\int_a^b \sqrt{(\rho')^2\cos^2\varphi-2\rho'\rho\cos\varphi\cdot\sin\varphi+\rho^2\sin^2\varphi+(\rho')^2\sin^2\varphi-2\rho'\rho\cos\varphi\cdot\sin\varphi+\rho^2\cos^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\int_a^b \sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi$$

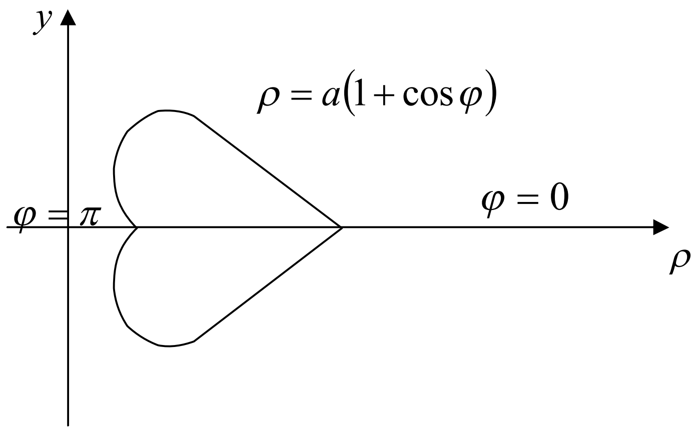
ya’ni

$$l=\int_a^b \sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi$$

formulani hosil qilamiz.

Misol.7) $\rho=a(1+\cos\varphi)$ kardioidaning uzunligi topilsin.

Yechimi. Ravshanki, kardioida ox o‘qiga nisbatan simmetrik, hamda φ qutb burchagi 0 dan π gacha o‘zgarganda, $M(\varphi,\rho)$ nuqta kardioidaning yuqori yarmini chizadi (14-rasm)



14-rasm

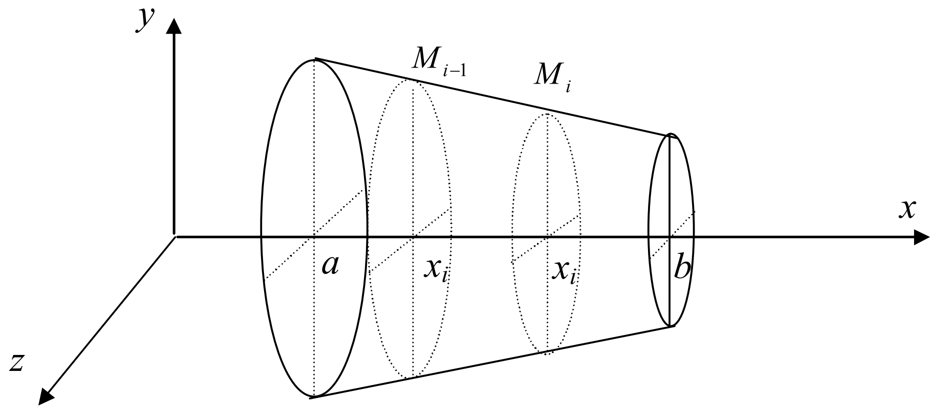
Shuning uchun

$$l=2\int_0^\pi \sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi=2\int_0^\pi \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2a\int_0^\pi \sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi=4a\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=8a$$

6.3. Aylanma sirtlarning yuzasi.

Oxy tekislikdagi uzluksiz va uzluksiz hosilaga ega bo‘lgan musbat $y=f(x)\ x\in[a,b]$ tenglama bilan berilgan chiziqni ox o‘qi atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan $y^2+z^2=f^2(x)$ sirt (analitik geometriya kursiga qaralsin.) uchun yuza tushunchasini kiritib, bu yuzani hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz. Shu maqsadda $[a,b]$ kesmalarni $a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$ nuqtalar yordamida n ta bo‘lakka bo‘lamiz va egri chiziqni uchlari $M_i(x_i, y_i)$ ($y_i = f(x_i)$) $i = 1,2,....n$ nuqtalarda bo‘lgan siniq chiziq bilan almashtiramiz. Egri chiziq aylanganda bu siniq chiziqning uchlari $M_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$ va $M_i(x_i, y_i)$ nuqtalarda bo‘lgan bo‘g‘ini yon sirtining yuzasi



15-rasm

$$\pi(y_{i-1} + y_i)\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

ga teng bo‘lgan kesik konus chizadi. Shuning uchun siniq chiziqning ox o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt yuzasi uchun

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \pi(y_{i-1} + y_i)\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \tag{6.11}$$

formula o‘rinlidir.

Ta’rif. $S := \lim\limits_{n \to \infty} S_n$

limit $y = f(x)$ chiziqni ox o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt yuzasi deyiladi.

Δy_i ayirmaga Lagranj teoremasini tatbiq qilib (6.11) formulani

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i))\sqrt{1 + (f'(x_i))^2}\Delta x_i \tag{6.12}$$

ko‘rinishda yozish mumkin (bu yerda $x_i \in [x_{i-1}, x_i]$). (6.12) yig‘indi

$$2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)} \tag{6.13}$$

funksiya uchun integral yig‘indi bo‘la olmaydi, chunki $[x_{i-1}, x_i]$ kesmaga mos bo‘lgan qo‘shiluvchida bu kesmaning bir necha (x_{i-1}, x_i, x_1) nuqtalari qatnashayotir. Lekin (6.12) yig‘indining limiti (6.13) funksiya integral yig‘indisining limitiga teng bo‘lishini isbot qilish mumkin, ya’ni

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx \tag{6.14}$$

Misol 8. R radiusli sfera sirti hisoblansin.

Yechimi. Mazkur sfera $y=\sqrt{R^2-x^2}$ funksiya grafigini Ox o‘qi atrofida aylantirib hosil qilinadi. Bu holda $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ va demak $\sqrt{1+y'^2}=\dfrac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}$. Shuning uchun har qanday $\varepsilon>0$ uchun $y=\sqrt{R^2-x^2}$ funksiya $[-R+\varepsilon,R-\varepsilon]$ $(0<\varepsilon<R)$ kesmada uzluksiz va uzluksiz hosilaga ega[4]. Bundan (6.14) formulaga ko‘ra, aylananing $[-R+\varepsilon,R-\varepsilon]$ kesmaga mos yoyini Ox o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan S_ε sirtining yuzasi

$$S_\varepsilon=2\pi\int_{-R+\varepsilon}^{R-\varepsilon} y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\pi R\int_{-R+\varepsilon}^{R-\varepsilon} dx=4\pi R(R-\varepsilon)$$

ga teng. Bundan esa sferaning S yuzasi uchun $S=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}S_\varepsilon=4\pi R^2$ formula hosil bo‘ladi.

6.4. Aylanma jismlarning hajmi.

$y=f(x)$ $x\in[a,b]$ chiziqni Ox o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt, $x=a$ va $x=b$ tekisliklar bilan chegaralangan jismning V hajmini hisoblash haqidagi masalani qaraymiz. $[a,b]$ kesmani $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ nuqtalar bilan n ta bo‘lakka bo‘lamiz va jismning $[x_{i-1},x_i]$ bo‘lakka mos V_i hajmi $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ balandlikka hamda $y_i=f(x_i)$ radiusga ega bo‘lgan silindr hajmiga teng deb hisoblaymiz:

$$\Delta V_i=\pi y_i^2\Delta x_i=\pi f(x_i)^2\Delta x_i.$$

U holda $V_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta V_i=\pi\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)^2\Delta x_i$ ifoda V hajmning taqribiy qiymatini, uning $n\to\infty$ dagi limiti esa aniq qiymatini ifodalaydi:

$$V=\lim_{n\to\infty}\pi\sum_{i=1}^{n}f(x_i)^2\Delta x_i=\pi\int_a^b f(x)^2dx \tag{6.15}$$

Misol 9. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2+z^2}{b^2}=1$ ellipsoid bilan chegaralangan jism hajmi hisoblansin.

Yechimi. Qaralayotgan ellipsoid $y=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$ $(-a\le x\le a)$ chiziqni Ox o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘ladi. Shuning uchun (6.15) formulaga ko‘ra

---

[4] y' hosila $x=\pm R$ nuqtalarda aniqlanmagani uchun $[-R;R]$ kesma o’rniga $[-R+\varepsilon,R-\varepsilon]$ kesma olindi

$$V=\pi b^2\int\limits_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

7. Mexanika va fizika masalalari.

1-§ da sterjenning massasi, o‘zgaruvchan kuch ta’sirida bajarilgan ish haqidagi masalalarni qaraganimizda sterjen $[a,b]$ kesmaga joylashadi, o‘zgaruvchan kuch ta’sirida moddiy nuqta to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakatlanadi deb faraz qilgan edik.

Endi bu masalaga bir oz umumiyroq nuqtai nazardan yondoshamiz, ya’ni massasi hisoblanishi talab qilinayotgan jism L egri chiziq $x=x(t),\ y=y(t)\ \ a\le t\le b$ parametrik tenglamalar bilan berilgan bo‘lsin. Biz quyida L egri chiziq silliq, ya’ni $x(t)$ va $y(t)$ funksiyalar uzluksiz hamda uzluksiz hosilalarga ega deb faraz qilamiz.

Agar l orqali L egri chiziqning boshlang‘ich $M(a)$ nuqtasidan $M(t)$ nuqtasigacha bo‘lgan yoyi uzunligini belgilasak, M nuqtaning L chiziqdagi vaziyati l kattalik orqali to‘la aniqlanadi. Shuning uchun l ni L chiziqning biron tenglamasidagi parametr sifatida olish mumkin. (6.10) ga ko‘ra l eski t parametr bilan $l_t'=\int\limits_a^t\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$ tenglik orqali bog‘langan. Bundan, 2.1-teoremaga ko‘ra,

$$l_t=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$$

yoki

$$dl=l_t'dt=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt \tag{7.1}$$

Endi L egri chiziq shaklidagi jism uchun chiziqli zichlik tushunchasini kiritamiz. Qisqalik uchun bu jismni ham egri chiziq deb ataymiz.

M - L egri chiziqning biror nuqtasi bo‘lsin. L egri chiziqdan $\boldsymbol{M}$ dan farqli M' nuqta olamiz va Δl orqali MM' yoyining uzunligini, $\Delta\boldsymbol{m}$ orqali MM' yoyining massasini belgilaymiz. U holda

$$\rho(M)=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta l} \tag{7.2}$$

limit L egri chiziqning M nuqtasidagi chiziqli zichligi deyiladi.

Parametr sifatida yoy uzunligi l ni olib, chiziqli zichlikni $\boldsymbol{l}$ ning funksiyasi sifatida tasavvur qilishimiz mumkin:

$$\rho=\rho(l),\quad 0\le l\le |L|$$

Bu yerda $|L|$- L egri chiziqning uzunligi.

7.1. Egri chiziq massasini hisoblash.

Yoy uzunligi l o‘zgaradigan $[0;|L|]$ kesmani $0=l_0<l_1<...<l_n=|L|$ nuqtalar yordamida n ta bo‘lakka bo‘lamiz. U holda $M_0(l_0), M_1(l_1),...,M_n(l_n)$ nuqtalar L egri chiziqni n ta bo‘lakka bo‘ladi. $M_{i-1}M_i$ bo‘lakning massasi Δm_i uchun $\Delta m_i \approx \rho(\overline{l}_i)\Delta l_i$ $i=1,2,....n$ taqribiy tenglik o‘rinli bo‘ladi, bu yerda $\overline{l}_i \in [l_{i-1}, l_i]$ $\Delta l_i = l_i - l_{i-1}$. Bu tengliklarni i indeksi bo‘yicha qo‘shib, L chiziqning massasi uchun $M \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\overline{l}_i)\Delta l_i$ taqribiy tenglikni hosil qilamiz. Agar Δl_i lar qanchalik kichik bo‘lsa, bu tenglik shunchalik aniqroq bo‘ladi. Shuning uchun $M = \lim\limits_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\overline{l}_i)\Delta l_i$

Ammo, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(\overline{l}_i)\Delta l_i = \int_0^{|L|} \rho(l)dl$. Shuning uchun L chiziqning massasi $M = \int_0^{|L|} \rho(l)dl$ formula bilan hsoblanadi. Bu integraldagi l o‘zgaruvchini t parametr bilan almashtirsak, (6.16) ga asosan

$$M = \int_a^b \rho(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt \tag{6.18}$$

formula hosil bo‘ladi[5].

Agar L egri chiziq $y = f(x)$ $a \le x \le b$ shakldagi tenglama bilan berilgan bo‘lsa, x ni parametr sifatida olib, L egri chiziqning tenglamasi $x = x,\ y = f(x)$ $a \le x \le b$ parametrik shaklda deb faraz qilib, (6.18) ni $M = \int_a^b \rho(x)\sqrt{1 + y'(x)}\,dx$ ko‘rinishda yozishimiz mumkin.

7.2. Egri chiziqning statik momenti.

A nuqtada joylashgan moddiy nuqtaning O nuqtaga nisbatan statik momenti O va A nuqtalar orasidagi r masofa bilan moddiy nuqtaning m massasi ko‘paytmasi rm ga teng. Moddiy nuqtaning o‘qqa nisbatan statik momenti ham xuddi shuningdek hisoblanadi. Mexanikadan ma’lumki, bir nechta nuqtaning o‘qqa nisbatan statik momenti bu nuqtalarning har birini shu o‘qqa nisbatan statik momentlarining yig‘indisiga teng. Ana shundan kelib chiqib, yuqoridagi L chiziqning oy va ox o‘qlariga nisbatan statik momentlarini hisoblash uchun formulalar keltirib

---

[5] *Agar biron u o‘zgaruvchi φ o‘zgaruvchi esa t o‘zgaruvchining funksiyasi bo‘lsa, yozuvni murakkablashtirmaslik maqsadida $u(\varphi(t))$ murakkab funksiyani $u(t)$ shaklida belgilaymiz. Shu sabali ushbu matnda $u(\varphi)$ va $u(t)$ lar turli funksiyalarni bildiradi. Aniqroq aytganda $u(\varphi)$ - u o‘zgaruvchi φ o‘zgaruvchiga qanday bog‘liqligini bildirsa, $u(t)$ - o‘sha u o‘zgaruvchi t o‘zgaruvchigiga qanday bog‘liqligini bildiradi.*

chiqaramiz. Agar L chiziqning $M_{i-1}M_i$ bo‘lagini moddiy nuqta deb hisoblasak, uning oy o‘qqa nisbatan statik momenti $x(\bar{l}_i)\rho(\bar{l}_i)\Delta l_i$ i=1,2,...n ga teng. Bu ifodalarni i indeks bo‘yicha yig‘indisini L egri chiziqning oy o‘qqa nisbatan statik momentining taqribiy qiymati sifatida olamiz:

$$M_y \approx \sum_{i=1}^{n} x(\bar{l}_i)\rho(\bar{l}_i)\Delta l_i$$

$M_{i-1}M_i$ bo‘laklar qanchalik kichik bo‘lsa, bu taqribiy qiymat shunchalik aniqroq bo‘ladi. Shuning uchun $n \to \infty$ da

$$M_y = \int_0^{|L|} x(l)\rho(l)dl \qquad (6.19)$$

formula hosil bo‘ladi. Xuddi shu usula L egri chiziqning ox o‘qqa nisbatan statik momenti uchun

$$M_x = \int_0^{|L|} y(l)\rho(l)dl \qquad (6.20)$$

formulani keltirib chiqarish mumkin.

(6.19) va (6.20) formulalarda integral o‘zgaruvchisi l ni t parametr bilan almashtirsak, M_y va M_x statik momentlar uchun

$$M_y = \int_a^b x(t)\rho(l)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt \qquad (6.21)$$

$$M_x = \int_a^b y(t)\rho(l)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt \qquad (6.22)$$

formulalar hosil bo‘ladi.

7.3. Og‘irlik markazi.

Mexanikaga ko‘ra yassi jismning og‘irlik markazi $P_0(x_0, y_0)$ shunday nuqtaki, agar jismning hamma massasi P_0 nuqtaga to‘plansa, jismning o‘qlarga nisbatan statik momenti $\boldsymbol{P}_0$ nuqtaning o‘qlariga nisbatan statik momentiga teng bo‘ladi:

$$\begin{cases} M_y = x_0 M, \\ M_x = y_0 M \end{cases}$$

Bu tengliklardan yassi jism og‘irlik markazining kooordinatalari uchun $x_0 = \dfrac{M_y}{M}$, $y_0 = \dfrac{M_x}{M}$ tenglamalar hosil bo‘ladi.

Agar jism L egri chiziqdan iborat bo‘lsa, (6.18), (6.21) va (6.22) formulalarga ko‘ra uning $P_0(x_0, y_0)$ og‘irlik markazi koordintalari uchun

$$x_0=\frac{\int_a^b x(t)r(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt}{\int_a^b r(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt} \qquad (6.23)$$

$$y_0=\frac{\int_a^b y(t)r(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt}{\int_a^b r(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt} \qquad (6.24)$$

formulalar hosil bo‘ladi.

7.4. Aniq integral qo‘llanishining umumiy sxemasi.

Berilgan $[a,b]$ kesmada aniq qiymat qabul qiluvchi Q - mexanik yoki fizik miqdorni aniqlash talab qilinsin. Q - additiv miqdor deb faraz qilinadi, ya’ni $[a,b]$ kesma bir necha qismlardan iborat bo‘lsa, Q miqdor Q ning shu qismlardagi qiymatlari yig‘indisidan iborat bo‘ladi. Masalaning shartidan Q miqdorning $[x,x+dx]$ “elementar oraliqqa” mos keluvchi dQ “elementi” $dQ=q(x)$ shaklida ifodalanishi aniqlanadi. Oxirgi tenglikni x o‘zgaruvchi bo‘yicha $[a,b]$ oraliqda integrallab $Q=\int_a^b q(x)dx$ miqdor topiladi.

7.5. Moddiy nuqta bosib o‘tgan yo‘l.

Moddiy nuqta to‘g‘ri chiziq bo‘ylab V - o‘zgaruvchan tezlik bilan harakat qilayotgan bo‘lib, bu tezlik vaqtning ma’lum funksiyasi bo‘lsin: $V=f(t)$ moddiy nuqtaning t_1 dan t_2 gacha bo‘lgan vaqt davomida bosib o‘tgan yo‘lini topish talab qilinadi. Elementar vaqt oralig‘i sifatida $[t,t+dt]$ ni olamiz. Bu vaqt oralig‘ida moddiy nuqta

$$dS=Vdt=f(t)dt \qquad (6.25)$$

yo‘lni bosib o‘tadi. Bu esa moddiy nuqta bosib o‘tgan yo‘l ”elementidir”. Moddiy nuqtaning $[t_1,t_2]$ kesmada integrallab topamiz:

$$S=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt \qquad (6.26)$$

10-masala. Nuqtaning harakat tezligi $V=\sqrt{1+t}$ formula bilan berilgan. Harakat boshlanganidan 10 sek. o‘tgach nuqta bosib o‘tgan yo‘lni hisoblang. Shu vaqt oralig‘ida nuqta harakatining o‘rtacha tezligi nimaga teng?

Yechish. Nuqtaning harakat boshlanganidan 10 sek. o‘tgach bosib o‘tgan yo‘lini (6.27) formula orqali hisoblaymiz:

$$S=\int_0^{10}\sqrt{1+t}\,dt=\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{10}=\left(\frac{22}{3}\sqrt{11}-\frac{2}{3}\right)\approx 23{,}6m$$

$$V_{o'rt}\frac{S}{10}=\frac{11\sqrt{11}-1}{15}\approx 2{,}36m/sek.$$

7.6. Kuch ta'sirida bajarilgan ish.

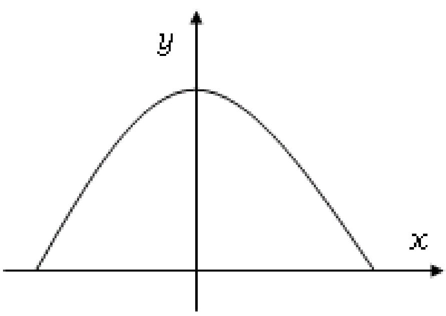
Modiy nuqta O_x o'qi bo'ylab $x=a$ nuqtadan $x=b(a<b)$ nuqtaga qarab, yo'nalishi harakat yo'nalishi bilan bir hil bo'lgan $\vec{F}=\vec{F}(x)$ o'zgaruvchan kuch ta'sirida harakat qilayotgan bo'lsin. Shu ko'chish davomida $\vec{F}$ kuch ta'sirida bajarilgan ishni toping.

Elementar ko'chishni $[x,x+dx]$ shaklda olamiz. Elementar ko'chish davomida kuchning bajargan ishi quyidagicha teng bo'ladi:

$$dA=\vec{F}(x)dx \qquad (6.27)$$

$\vec{F}$ kuch ta'sirida moddiy nuqtaning $x=a$ nuqtadan $x=b$ nuqtaga ko'chishi natijasida bajarilgan ish (6.27) tenglikni x bo'yicha $[a,b]$ kesmada integrallab topiladi:

$$A=\int_a^b F(x)dx \qquad (6.28)$$



16-расм

Misollar 11. Yarim aylana shaklidagi bir jinsli simning og'irlik markazi topilsin.

Yechimi. Koordinata o'qlarini rasmda ko'rsatilgandek qilib o'tkazamiz. Bunda yarim aylana 0u o'qqa nisbatan simmetrik va koordinata boshi aylana markazida joylashgan. U holda yarim aylananing tenglamasi $x=R\cos t,\ y=R\sin t$, $0\le t\le\pi$ ko'rinishda yoziladi va (6.18), (6.21), (6.22) tenglikka ko'ra

$$M=\int_0^{\pi}\rho\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}\,dt=\rho\pi R,$$

$$M_y=\int_0^{\pi}R\cos t\rho\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}\,dt=0,$$

$$M_x=\int_0^{\pi}R\sin t\rho\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}\,dt=2\rho R^2.$$

Bulardan (6.23) va (6.24) ga ko'ra $x_0=\frac{0}{\rho\pi R}=0,\ y_0=\frac{2\rho R^2}{\rho\pi R}=\frac{2\rho R^2}{\rho\pi R}$

12-masala. F kuch ta'sirida moddiy nuqta $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$

sikloida bo‘ylab $A(0;0)$ nuqtadan $B(2\pi a;0)$ nuqtaga keldi. F kuchning kattaligi oddiy nuqta bosib o‘tgan yo‘lga proporsional, yo‘nalishi esa sikloidaga moddiy moddiy nuqta harakatlanayotgan nuqtada o‘tkazilgan urinma yo‘nalishi bilan bir xil. Bajarilgan ishni toping

Yechimi. Sikloidaning $A(0;0)$ va $B(2\pi a;0)$ nuqtalariga t parametrning $t_1 = 0$ va $t_2 = 2\pi$ qiymatlariga mos keladi. Shuning uchun sikloidaning AB yoyi uzunligi $|L| = 8a.$ Agar k - F kuch kattaligining bosib o‘tilgan yo‘lga proporsionallik koeffisienti bo‘lsa, u holda (6.25) tenglamaga ko‘ra bajarilgan ish $A = \int_0^{8a} kldl = 32ka^2$ ga teng bo‘ladi.

13-masala. Massasi m ga teng bo‘lgan jismni Yer yuzidan h_m balandlikka ko‘tarish uchun qancha ish bajarish kerak? Agar jismni Yer sathidan cheksiz uzoqlashtirish kerak bo‘lsa bu ish miqdori nimaga teng?

Yechish. Yer sathidan jismni ko‘tarishda bajarilgan ishga sarflangan kuch miqdori $\vec{F}$ jismning Yerga tortilishi kuchi miqdoriga teng, ya’ni $\vec{F}(r) = k\dfrac{mM}{r^2}$, bu tenglikda m - jismning, M - Yerning massasi, r - jismdan Yer markazigacha bo‘lgan masofa, k - o‘zgarmas koeffitsient, kuch esa Yer markazidan jismga qarab chiqqan radius bo‘ylab yo‘nalgan bo‘lib, jismning $r_1 = R$ (R - Yerning radiusi) vaziyatdan $r_2 = R + h$ vaziyatga ko‘chishi ham shu yo‘nalish bo‘yicha yuz bergan.

Jismning $[R, R+h]$ yo‘lini o‘tishida $\vec{F}(r)$ kuchning bajargan ish (6.10) formula orqali hisoblanadi:

$$A = \int_R^{l+h} k\frac{mM}{r^2}dr = kmM\int_R^{R+h}\frac{dr}{r^2} = kmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$$

Yer sirtida ($r = -R$ bo‘lganda) tortishish kuchi $\vec{F} = mg$ ekanligini hisobga olgan holda k - koeffitsientni topamiz : $mg = k\dfrac{mM}{R^2}$. Bu tenglikdan esa $k = \dfrac{gR^2}{M}$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, $A = kmM\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R+h}\right) = mgR^2\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R+h}\right)$

Jism Yer sirtidan cheksiz uzoqlashganda esa

$\lim\limits_{h\to\infty} A = \lim\limits_{h\to\infty} mgR^2\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R+h}\right) = mgR$ yoki $A_\infty = mgR$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

14-masala. Ikki elektrik zaryadlar $l_1 = \dfrac{1}{3}\cdot 10^{-7}k$ va $l_2 = \dfrac{2}{3}\cdot 10^{-7}k$ bir-biridan 10 sm. masofada joylashgan. Ularni ajratib turuvchi muhit parafindan iborat.

Kuzatish boshlangan vaqtda ikkala zaryad ham qo‘zg‘almas qilib mahkamlangan bo‘lib, kuzatish davomida l_2 zaryad bo‘shatilib, u yo‘nalish l_1 zaryad tomondan l_2 zaryad tomonga yo‘nalgan vektor bilan bir xil bo‘lgan kuch ta’sirida l_1 zaryaddan 1 m. masofaga uzoqlashtirilgan bo‘lsa. Bu kuch ta’sirida qanday ish bajarilgan.

Ko‘rsatma. Kulon qonuniga ko‘ra zaryadlarning o‘zaro ta’sir kuchi

$$g(x) = \frac{1}{4pe_0} Ч \frac{e_1 Ч e_2}{ex^2} \qquad (6.29)$$

formula orqali ifodalanadi. Bu formulada e_1, e_2 - zaryadlarning miqdorlari (k), x - zaryadlar orasidagi masofa (m), vakuumning dielektrik o‘tkazuvchanligi, e - muhitning dielektrik o‘tkazuvchanligi (parafin uchun $e = 2$).

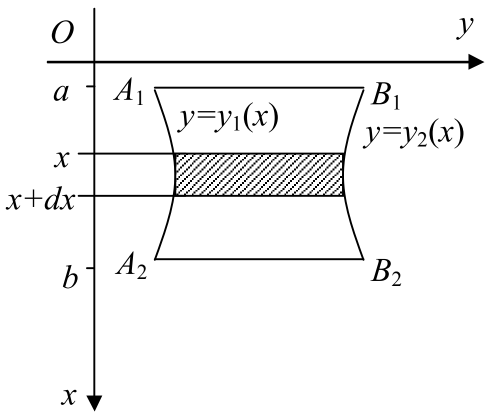
15-masala. Agar 10 k. kuch prujinani 1 sm ga cho‘zish uchun etsa, shu prujinani 6 sm ga cho‘zish uchun qancha ish sarflanadi?

Ko‘rsatma. Guk qonuniga ko‘ra prujinani cho‘zuvchi kuch $F(x) = kx$ formula orqali topiladi. Bu formulada x - prujinaning cho‘zilishi, k - masala shartidan osongina aniqlanadigan proporsionallik koeffisienti.

7.7. Suyuqlikning bosimi.

Suyuqlikka $x = a, x = b$ to‘g‘ri chiziqlar, va $y = y_1(x), y = y_2(x)$ egri chiziqlar bilan chegaralangan $A_1B_1B_2A_2$ plastinka vertikal bajarilgan bo‘lsin.

Koordinata sistemasini O_y o‘q suyuqlik sirtida yotadigan qilib tanlangan deb faraz qilamiz. Plastinkaning har ikki tomoniga ta’sir qilayotgan to‘la gidrostatik bosim R ni topish talab qilinadi.



$[a, b]$ kesmada olingan $[x, x + dx]$ elementar kesmani qaraymiz. Bu elementar kesma yordamida plastinkadan yuzini taqriban yuzi $dS = (y_2 - y_1)dx$ ga teng bo‘lgan to‘g‘ri burchakli to‘rtburchakka tenglashtirish mumkin bo‘lgan elementar figura ajratiladi (shaklda elementar figura shtrixlab ko‘rsatilgan). Suyuqlikning bu elementar figuraga bosimi – suyuqlikning butun $A_1B_1B_2A_2$ plastinkaga bosimining “elementi” dP bo‘ladi. dP - bosim “elementi”ni hisoblash uchun Paskal qonunidan foydalanamiz.

Paskal qonuniga ko‘ra-suyuqlikning suyuqlik sirtidan x chuqurlikda joylashgan

dS yuzaga bosim – asosi shu yuzadan iborat bo‘lib, balandligi x ga teng bo‘lgan silindrik ustun og‘irligiga teng, ya’ni $dP = gxds$. Bu tenglikda g - suyuqliknig solishtirma og‘irligi, $dS = (y_2 - y_1)dx$ ekanligini hisobga olsak, $dP = gx(y_2 - y_1)dx$ tenglikni hosil qilamiz. Oxirgi tenglikni x bo‘yicha $[a,b]$ kesmada integrallab suyuqlikning butun plastinka yuziga bosimini topamiz:

$$P = g\int_a^b x(y_2 - y_1)dx \tag{6.30}$$

15-masala. Radiusi r ga teng bo‘lib, diametri suyuqlik sirtida yotadigan qilib suyuqlikka botirilgan yarim doiraning har bir tomonga ta’sir qiladigan bosimini toping. Suyuqlikning solishtirma og‘irligi g deb olinsin.

Yechish. Yarim doiraning simmetrik ekanligidan foydalanib, uning bir tomonga ta’sir qilayotgan bosimini topish uchun yarim doira yarmiga ta’sir qilayotgan bosimni topib, ikkiga ko‘paytirish yetarli ekanligini ko‘ramiz.

Koordinata sistemasini shaklda ko‘rsatilgandek qilib tanlab olamiz. Bosim (6.30) formula formula orqali $a = 0, b = r, y_1(x) = 0, y_2(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ bo‘lgan holda hisoblaymiz:

$$\frac{1}{2}P = g\int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}dx = \frac{1}{3}g(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^r = \frac{1}{3}gr^3 \text{ yoki } P = \frac{2}{3}gr^3.$$

7.8. Elektr toki oqimining miqdori.

O‘tkazgichdan o‘zgaruvchan $I = I(t)(I(t) \geq 0)$ tok kuchiga ega bo‘lgan tok o‘tyapti. O‘tkazgich ko‘ndalang kesimidan $[t_1, t_2](t_1 > t_2)$ vaqt oralig‘ida o‘tgan elektr toki oqimining miqdorini aniqlang.

Ma’lumki, o‘zgarmas tok kuchi I uchun $Q = I(t_2 - t_1)$ tenglik o‘rinli.

Birinchi punktdagi mulohazalarga asosan o‘zgaruvchan tok kuchi uchun $[t, t + dt]$ elementar vaqt oralig‘i ajratib, unga mos keladigan elektr toki oqimining “elementi “ dQ ni hisoblaymiz .

Ma’lumki, $dQ = I(t)dt$. Oxirgi tenglikni t bo‘yicha $[t_1, t_2]$ kesmada integrallab, quyidagini hosil qilamiz:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt \tag{6.31}$$

Izoh. Agar $I(t)$ funksiya $[t_1, t_2]$ kesmada ishorasini o‘zgartirsa (tok yo‘nalishi vaqt davomida o‘zgarsa), (6.31) formula o‘tkazgichning ko‘ndalang kesimi bo‘yicha $(t_2 - t_1)$ vaqt oralig‘ida bir tomonga o‘tgan elektr toki oqimi bilan shu vaqt davomida u yo‘nalishga qarama-qarshi tomonga o‘tgan elektr toki oqimi orasidagi ayirmani beradi.

17-masala. Temperatura o‘zgarganda metalll o‘tkazgichlarning qarshiligi (odatdagi temperaturalarda) quyidagi qonunga binoan o‘zgaradi:

$$R = R_0(1 + 0{,}004q)$$

Yuqoridagi tenglikda R_0 - o‘tkazgichning $0^{\circ}C$ dagi qarshiligi, q - o‘tkazgichning Selsiy bo‘yicha temperaturasi.(Bu qonun tabiatdagi juda ko‘p toza metallar uchun o‘rinli). Qarshiligi $0^{\circ}C$ da $P = 100\,ì$ ga teng bo‘lgan o‘tkazgich $q_1 = 20^{\circ}$ dan $q_2 = 200^{\circ}$ gacha 10 minut davomida qizdiriladi. Bu vaqtda o‘tkazgich bo‘ylab quvvati $V = 120\,â$. bo‘lgan tok o‘tyapti. Shu vaqt mobaynida o‘tkazgichdan qancha kulon elektr oqimi o‘tgan?

Yechish. Masala shartiga ko‘a o‘tkazgich temperaturasi q o‘zgarmas $\dfrac{dq}{dt} = \dfrac{200^{\circ} - 20^{\circ}}{600\,ñåê} = 0{,}3\,\dfrac{ãðàä}{ñåê}$, tezlik bilan kattalashadi, demak temperatura $q = q_1 + 0{,}3t = 20 + 0{,}3t$ qonun bilan o‘zgaradi.

Bu holda o‘tkazgich qarshiligi

$$R = R_0(1 + 0{,}004q) = 10[1 + 0{,}004(20 + 0{,}3t)] = 10{,}8 + 0{,}012t,$$

Tok kuchi esa Om qonuniga ko‘ra $I = \dfrac{120}{10{,}8 + 0{,}012t}$ bo‘ladi.

Elektr oqimi (6.31) formula orqali topamiz:

$$Q = \int_0^{600} \frac{120\,dt}{10{,}8 + 0{,}012t} = \frac{120}{0{,}012} \ln(10{,}8 + 0{,}012t)\Big|_0^{600} =$$
$$= 10^4(\ln 18 - \ln 10{,}8) \approx 5110(k)$$

8. Aniq integrallarni hisoblashda asosiy formulalar va ma’lumotlar

1. $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ - integral yig’indi.

$f(\xi_i)$ - ξ_i nuqtadagi $f(x)$ funksiyaning qiymati, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ - argument ortirmasi.

$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ - funksiya ortirmasi.

2. $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$ - aniq integral ta’rifi.

a - aniq integralni quyi chegarasi.

G - aniq integralni quyi chegarasi.

$f(x)$ - aniq integral ostidagi funksiya.

$f(x)dx$ - integral ostidagi ifoda, x - argument.

dx - x argumentni diffrensiali.

3. $m = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$ - $[a,b]$ oraliqdagi jismni massasini hisoblash.

4. $\int_a^b f(x)dx$ - aniq integralni mavjudligi.

a) $f(x)$ funksiya $x \in [a,b]$ oraliqda uzluksiz.

b) $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ - limitning mavjudligi.

v) $[a,b]$ oraliqni bo‘laklarga bo‘linishiga va $\xi_i \in [a,b]$ nuqtani tanlanishiga bog’liq emas.

5. Aniq integral xossalari.

1-xossa. $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$, λ - o‘zgarmas son.

2-xossa. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

3-xossa. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in (a,b)$.

4-xossa. Agar $f(x) \ge g(x), \ \forall x \in [a;b]$ bo‘lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$.

5-xossa. Agar $f(x)$ $\forall x \in [a;b]$ - integrallanuvchi va $m \le f(x) \le M$ bo‘lsa, u holda $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$ bo‘ladi. (m va M lar o‘zgarmas sonlar).

6-xossa. O‘rta qiymat haqidagi teorema.

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), \quad c \in [a,b].$$

7-xossa. O‘rta qiymat haqidagi umumlashgan teorema.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b f(x)dx, \quad (a \le c \le b).$$

6. Nyuton-Leybnis formulasi.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

7. To‘g‘ri to‘rtburchak formulasi.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}(y_0 + y_2 + y_3 + ... + y_{n-1}).$$

8. Trapetsiya formulasi.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_{n-1})\right].$$

9. Simpson formulasi.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n}\left[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + ... + y_{2n-1}) + \right.$$

$$\left. + 2(y_2 + y_4 + y_6 + ... + y_{2n-2})\right].$$

10. Chegarasi cheksiz bo‘lgan xosmas integrallar (I-tip xosmas integrallar).

a) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$.

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$.

v) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{a\to-\infty}\int_c^b f(x)dx$.

Bu formulalarda $c \in]-\infty; +\infty[$.

11. Chegaralanmagan funksiyalarni xosmas integrallari $f(x)$ funksiya $a < x \le b$ oraliqda uzluksiz va a nuqtada uzulishga ega, ya’ni $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ bo‘lsa

a) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx, \quad (\varepsilon > 0)$.

b) $f(x)$ funksiya $a \le x < b$ oraliqda uzluksiz va b nuqtada uzulishga ega, ya’ni $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty$ bo‘lsa, u holda $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,\ (\varepsilon>0)$.

12. Aniq integral yordamida yassi shakl yuzasini hisoblash.

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx, \quad (f(x)>0).$$

13. Agar $f_1(x)\le f_2(x),\ (a\le x\le b)$ bo‘lsa $S=\int\limits_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx$.

14. Parametrik tenglamalar bilan berilgan bo‘lsa, ya’ni $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$ $(t_1\le t\le t_2)$ u holda yuza quyidagicha topiladi.

$$S=\int\limits_{t_1}^{t_2}\psi(t)\cdot\varphi'(t)dt.$$

15. Qutb koordinata sistemasida yuzani topish.

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

16. Egri chiziqning yoy uzunligini topish. Agar egri chiziq $y=f(x),\ x\in[a,b]$ ko‘rinishda berilgan bo‘lsa yoy uzunligi quyidagicha topiladi:

$$l=\int\limits_a^b\sqrt{1+y'^2}dx.$$

17. Agar egri chiziq $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[t_1,t_2]$ ko‘rinishda berilgan bo‘lsa

$$l=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt \text{ bo‘ladi.}$$

18. Agar egri chiziq tenglamasi qutb koordinatalar sistemasida berilgan bo‘lsa, ya’ni $\rho=\rho(\varphi),\ \varphi\in[\alpha,\beta]$ u holda yoy uzunligi quyidagicha hisoblanadi

$$l=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\varphi.$$

19. Aylanma sirtni yuzasi.

$$S=2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx.$$

20. Aylanma jismning xajmi.

$$V_{ox}=\pi\int\limits_a^b y^2dx=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$$

$$V_{oy}=\pi\int\limits_c^d x^2dy=\pi\int\limits_c^d \varphi^2(y)dy.$$

21. Egri chiziqning statik momentlari.

$$M_x=\int_a^b yds=\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx$$

$$M_y=\int_a^b xds=\int_a^b x\sqrt{1+(y')^2}dx\,.$$

22. Egri chiziqli trapetsiyani statik momenti.

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx,\quad M_y=\int_a^b xydy\,.$$

23. Egri chiziqni og‘irlik markazini topish.

$$\overline{x}=\frac{M_y}{l}=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx}$$

$$\overline{y}=\frac{M_x}{l}=\frac{\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx}$$, (l - egri chiziq uzunligi).

24. Egri chiziqli trapetsiyani og‘irlik markazini topish.

$$\overline{x}=\frac{M_y}{S}=\frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx},\quad \overline{y}=\frac{M_x}{S}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx}{\int_a^b ydx}$$

(S - egri chiziqli trapetsiya yuzasi).

25. Moddiy nuqta bosib o‘tgan yo‘l formulasi.

$$S=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt\,.$$

26. Kuch ta’sirida bajarilgan ish formulasi.

$$A=\int_a^b \vec{F}(x)dx\,.$$

27. Suyuqlikning bosimi formulasi.

$$P=\gamma\int_a^b x(y_2-y_1)dx\,.$$

γ - suyuqlikning solishtirma og‘irligi.

$ds=(y_2-y_1)dx$

28. Elektr toki oqimining miqdorini topish formulasi.

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} J(t)\,dt, \quad \left(J(t) \ge 0\right)$$

$t \in [t_1, t_2]$, $(t_1 > t_2)$ - vaqt oralig‘i.

ADABIYOTLAR

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление.- М.: Наука, 1983.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов. -М.: Наука, в 2х частях, 2001.
3. Пискунов Н.С. Дифференциал ва интеграл ҳисоб. Олий техника ўқув юртлари талабалари учун ўқув қўлланма. -Т.: Ўқитувчи, 1974. 1,2 -қисм.
4. Д.Писменный. «Конспект лекции по высшей математике» 1,2 - часть. -М.: Айрис Пресс, 2008.
5. Соатов Ё.У. «Олий математика» I, II -қисм. –Т., 1990.
6. Данко П.С., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. -М.: Высшая школа. 1985.
7. Абдуалимов Б.А. «Олий математика».-Т., 1989.

M U N D A R I J A

Muharrir: K. Sidiqova
Musahhih: SH. Adilxodjayeva