

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

М.А.МАХКАМОВА, Д.М.ЯКУБОВА, М.Г.РАХМАТОВА

ОСНОВЫ ЭКОНОМЕТРИКИ

Рекомендовано Министерством высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан в качестве учебного пособия.

Ташкент – 2020

УДК 330.43.1(076.5)

Махкамова М.А., Якубова Д.М., Рахматова М.Г. по дисциплине Основы эконометрики. Учебное пособие – Т.: 2021 -стр.

Основным назначением учебного пособия к проведению лекций и практических занятий по дисциплине «Основы эконометрики» является обеспечение качества реализации ГОС по направлению бакалавриата 5231900 – «Корпоративное управление» в части, касающейся лекций и практических занятий, выполняемых студентами.

Данное учебное пособие дает возможность проведения лекционных и практических занятий для получения знаний по основам эконометрики, обеспечивает методическую и компьютерную поддержку практических занятий. Содержит решение типовых задач, описание реализации на компьютере с помощью пакета прикладных программ EXCEL. Учебное пособие предназначено для студентов направления бакалавриата 5231900 – «Корпоративное управление».

Ushbu o'quv qo'llanmani yaratishdan asosiy maqsad «Ekonometrika asoslari» fanidan 5231900 – «Korporativ boshqaruv» bakalavr yo'nalinishida tahsil olayotgan talabalarga DTS bo'yicha ma'ruza va amaliy mashg'ulotlarni sifatli olib borishdir.

Ushbu o'quv qo'llanma eonometrika asoslari bo'yicha bilimlarini olish uchun ma'ruza va amaliy mashg'ulotlarni o'tkazish uchun imkoniyat yaratadi, amaliy mashlug'ulotlarni uslubiy va kompyuter bilan ta'minlaydi. Unda odatiy vazifalarning yechimi, ECEL dastur paketidan foydalangan holda kompyuterda bajarish tavsifi keltirilgan. Qo'llanma 5231900 – Korporativ boshqaruv talabalari ucun mo'ljallangan.

The main purpose of the manual for lectures and practical exercises in the discipline “Fundamentals off Econometrics” is to ensure the quality of the implementation of the CRP in direction of undergraduate 5231900 – Corporate Governance regarding lectures and practical exercises performed by students.

This methodologic manual provides the opportunity to provide lectures and practical classes for obtaining knowledge on the basics of econometrics provides methodological and computer support for practical classes. It contains a solution of typical tasks, a description of the implementation on a computer using the EXCEL application package.

The manual is intended for undergraduate students 5231900 – Corporate governance.

Рецензенты:

Алмуродов А.А. - к.э.н., доцент кафедры «Эконометрика» ТГЭУ.

Исхаков А.К. - к.э.н., доцент кафедры «Экономика и менеджмент промышленности» ТГТУ.

Печатается по решению методического совета Ташкентского государственного технического университета

@ Ташкентский государственный технический университет, 2021

ВВЕДЕНИЕ

Эконометрика – быстро развивающаяся отрасль науки, цель которой состоит в том, чтобы придать количественные меры экономическим отношениям. Слово «Эконометрика» представляет собой комбинацию двух слов от греч: «экономика» и «метрия». Эконометрика - научная дисциплина, изучающая количественные характеристики экономических явление и процессов средствами математического и статистического анализа.

Основной базой для эконометрических исследований служат данные официальной статистики, либо данные бухгалтерского учета. Целью преподавания дисциплины является получение знаний в области построения эконометрических моделей и определения возможностей использования моделей для описания анализа и прогнозирования реальных экономических процессов как на микро, так и на макроуровне. Основными задачами изучения дисциплины являются:

- методология принятия решений о спецификации и идентификации моделей;
- ознакомление с методами и приемами интерпретации результатов эконометрического моделирования;
- изучение принципов выбора метода оценки параметров моделей;
- выработка устойчивых практических навыков разработки прогнозных оценок.

В результате усвоения материала дисциплины студент должен знать:

- терминологию, основные понятия и определения;
- принципы и методы построения эконометрических моделей на основе пространственных данных и временных рядов;
- принципы решения типовых задач с учетом мультиколлинеарности и автокорреляции;

-возможности реализации типовых задач на компьютере с помощью пакета прикладных программ Excel.

Предлагаемое учебное пособие ориентировано на проведение лекционных и практических занятий. Особое внимание уделяется построению эконометрических моделей на основе пространственных данных и временных рядов. Все темы учебного пособия имеют идентичную структуру:

- текст лекций;
- учебное задание;
- вопросы для самопроверки;
- тесты для проверки знаний;
- решение типовых задач;
- указания по решению типовой задачи на компьютере с помощью пакета прикладных программ EXCEL;
- задачи, предлагаемые студентам для тренировки и контроля.

При этом большое число задач составлено таким образом, чтобы обеспечить индивидуализацию работы каждого студента: предусмотрена возможность различных комбинаций объясняющих (независимых) переменных, выбор различной объясняемой (зависимой) переменной, предлагаются дифференцированные задания. Такая гибкость формулировок заданий позволяет преподавателю учесть уровень студентов при распределении упражнений, ориентировать работу в малых группах. Кроме того, каждая тема пособия содержит упражнения разной степени сложности.

Тема 1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ «ОСНОВЫ ЭКОНОМЕТРИКИ»

1.1. Понятие «Эконометрика». Задачи эконометрики. Предмет и метод эконометрики.

Ключевые слова: эконометрика, модель, статистическое наблюдение, моделирование, экономико-математическая модель, экономико-математические методы, объект, область, метод, цели, эконометрическое моделирование, спецификация,

Эконометрия как наука относится к классу общественных дисциплин и точное определение ее содержания и области исследования имеет существенное значение.

"Эконометрика" наука, появившаяся в начале тридцатых годов путем интерференции математики, статистики и экономики. Родоначальники, создавшие термин "эконометрика" имели в виду развитие, прежде всего, экономических исследований в тесной связи со статистикой и математикой. Авторы, изобретавшие термин "эконометрика" являются одновременно и основателями эконометрического общества. 29 декабря 1930 года в Кливленде было основано "Эконометрическое общество" и в последующем журнал "Эконометрика".

«Эконометрика» — это наука, изучающая в количественном аспекте, связи между сложными экономическими процессами и явлениями, изменяющимися в динамике. Следовательно, *предметом* эконометрии является экономика, ее процессы и явления.

Объектом изучения эконометрики выступают существующие экономические связи и тенденции в национальной экономике. *Область* эконометрики определяется моделями математической экономики.

Как известно, математическая экономика изучает экономические проблемы применением математики для более удобного исследования

сложных экономических явлений. Эконометрия ищет числовые значения параметров моделей математической экономики. Она занимается измерением экономических объектов как аналогичных эквивалентов экономико-математической модели.

Методом эконометрики является метод, предложенный математической статистикой. Это первое важное разграничение, которое необходимо сделать между эконометрией и количественной экономикой вообще. Не всякие результаты измерений, и не всякая количественная информация должны или могут быть использованы математической статистикой. В экономико-математические модели могут быть введены параметры, получаемые из инженерных источников (технические данные) на основе интуиции или непосредственно из первичных статистических данных. Но иногда технические данные или отсутствуют, или искажены различными факторами, а статистические данные, полученные статистическими наблюдениями не корреспондируют истинной структуре экономического процесса. В этом случае математическая статистика должна искать связь между данными, получаемыми из наблюдений, чтобы раскрыть истинное структурное или причинное отношение в экономическом объекте, из которого возникают эти данные.

Предположим, что сделано статистическое наблюдение динамики национальной экономики за 1980-1995 годы и зарегистрировано состояние национального дохода (в неизменных ценах) за каждый год наблюдения. Одновременно проведено статистическое наблюдение за состоянием занятости населения за указанный период. Известно или предполагается с некоторыми вероятностями, что величины национального дохода (Y) в каждом году определяются каким-то образом состоянием занятости (X , т.е. числом производительно занятых работников). Другими словами, можно предположить, что в действительности величины X трансформируются в Y и что существует некоторый механизм такого преобразования.

1.2. Цели и задачи курса

Целью эконометрики является открытие подобных механизмов трансформации путем формулирования нескольких рациональных гипотез об этих механизмах в виде математических моделей, приспособления к ним числовых данных и выбора в качестве "истинной" той модели, которая обнаруживает максимальное правдоподобие.

При таком определении цели эконометрики имеются два преимущества. Во-первых, эконометрика не смешивается с математической статистикой, а лишь использует часть ее аппарата. Потенциально из математической статистики все может быть использовано в эконометрике. Однако в большинстве случаев на практике применяются те методы, которые постулируют нормальное распределение Гаусса-Лапласа. Ошибок наблюдаемых величин изучаемой переменной.

Во-вторых, эконометрика не является единственным методом количественного исследования экономических связей (отношений). Ряд структурных аспектов экономики может быть исследован также при помощи других методов, помимо тех, которые содержатся в данном определении эконометрики (например, модели "затраты выпуск" В.Леонтьева). В данной модели механизм трансформации промежуточной продукции (производственное потребление) в общую продукцию показан непосредственными числовыми измерениями.

Эконометрика как метод познания имеет свои границы. Но познание должно достигнуть этих границ с тем, чтобы выйти за их пределы при помощи других методов. Переход этих границ почти невозможен при помощи количественных методов. Это можно сделать лишь при помощи методов чисто рационалистических или даже интуитивных. Поэтому можно сказать, что эконометрическое изучение экономических явлений представляет собой этап или ступень в процессе познания. Если даже во

многих случаях этот метод не разрешает, а напротив, создает или вскрывает противоречия и пробелы в экономических исследованиях, именно этим он дает чрезвычайно много. Мир предстает перед экономистом совсем иным до и после изучения эконометрики.

Эконометрика является дальнейшим последовательным развитием, усовершенствованием и детализацией численных методов математической экономики.

Опыт количественных исследований в экономике показывает, что существует много ступеней в процессе построения эмпирической модели из рационалистически созданной. Прежде всего перед нами исследуемый объект или процесс. Различные математические модели выражают его более или менее детально, или в целом. Затем регистрируются сигналы, которые исходят от исследуемого объекта. Эти наблюдения являются экономической статистикой. Однако изображение очень сложного механизма взаимодействия рыночных факторов (например, продажи товаров и цен) с помощью корреляции не очень.

Эконометрия идет дальше этого упрощенного способа подхода к количественному экономическому анализу. Она исходит из того факта, что статистические сведения порождают более сложными механизмами, чем непосредственно наблюдаемые отношения.

Поэтому эконометрика исходит первоначально из экономико-математических методов, которые строят модели возможного, варианты, умозрительно изображающие механизмы, которые для исследователя являются первичными причинами, порождающими статистику. Иными словами, эконометрика рассматривает модели математической экономики как порождающие статистику механизмы, а затем выбирает для данной статистики модель, которая может считаться наиболее приемлемым ее генератором. Эконометрика является таким методом испытания математических моделей - единственный вид испытаний, который

доступен экономическим наукам вследствие того, что объект их исследования не может вместиться в лабораторный эксперимент. Преимущества, так же и ограничения, эконометрического метода будут проявляться постепенно, в процессе его изучения, в аспекте противоречия между сигналом и моделью.

Эконометрия применяется там, где заранее не известны некоторые общие, хотя и существенные, черты изучаемой структуры в подобных случаях и модель должна быть очень общей, чтобы ее можно было приспособить к особенностям производства.

Производственная деятельность состоит в комбинировании векторов производства в условиях, определенных границами находящимися в распоряжении факторов, сообразно с целью производства. По завершении деятельности получают множество сведений о результатах и факторах производства. Это статистика, которая составляет первичный материал для эконометрии. В самом деле, эконометрика исходит из этой системы данных и пытается восстановить механизм, при помощи которого одни трансформируются в факторы, а другие - в результаты (цели).

Эконометрика означает воспроизводство числовых моделей эконометрических структур и механизмов на основе имитируемых ими сигналов, которые нам известны в форме статистических данных.

Эконометрика выдвигает определенные гипотезы об исследуемой функции и выбирает параметры функции (оценки) таким образом, чтобы они соответствовали (с максимальной вероятностью) гипотезам, выдвинутым относительно их свойств. Эконометрика располагает только таким знанием, которое, с одной стороны, очень невелико, а с другой - имеет неоценимое достоинство.

Все эконометрические методы созданы на принципах вероятности, однако их познавательная деятельность различна в естественных науках и науках об обществе. Задача построения эконометрической модели состоит

в том, чтобы найти ответ на вопрос: изменяется ли переменная величина случайно (стахостически), например, в результате ошибки измерения, или, напротив, систематически.

Ошибка - одна из основных понятий эконометрики. Определение и сведение ее к минимуму в наших измерениях считается предварительным условием построения моделей для предвидения.

Ошибки измерения бывает двоякого рода: неполнота спецификации исследуемого объекта. Ошибка агрегирования наиболее велики в макроэкономических моделях. Основная цель эконометрических исследований - восстановление структур, не поддающихся непосредственному наблюдению, которые связывают между собой экономические переменные.

Понятие нормального распределения - главное в эконометрии и вполне позволяет определить ошибки между ожидаемой величиной переменной и ее реальной величиной.

Для экономиста вся проблема заключается в установлении различий между ошибкой измерения и ошибкой в оценке эконометрических функций.

Цель эконометрики состоит не в простом применении математико-статистических методов к схематизации рядов, наблюдаемых данных с помощью функций и уравнений, а в выявлении внутренних структур, порождающих значение этих данных. Необходимость решения задач такого рода привела к созданию некоторых специфических эконометрических методов оценок, связанных с проблемами идентификации экономических структур.

Эконометрика является техникой выявления или идентификации механизмов, при помощи которых одно множество переменных X превращается в другое - Y . Эти механизмы могут быть удовлетворительными и убедительными моделями для других механизмов,

посредством которых в "реальном мире" экономики определенные факторы (X) превращаются в определенные результаты (Y). Но при исследовании тренда национального дохода, например, мы не получим модели механизма, который преобразует время в заработную плату, прибыль, налоги и т.д. В конечном счете время является средством эконометрического анализа, не будучи само по себе предметом исследования.

Контрольные вопросы

1. В чем суть понятия "эконометрика"?
2. Предмет и метод эконометрики.
3. Математические методы, применяемые в эконометрике.
4. Где применяется эконометрика?

ТЕМА 2. ОСНОВЫ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Ключевые слова: модель, моделирование, экономико-математическая модель, экономико-математические методы.

2.1. Основы моделирования экономики.

В Указе Президента Республики Узбекистан Ш.Мирзиёева «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» отмечается: «Отказ от административно-командного управления экономикой, поэтапная реализация рыночных реформ и взвешенная денежно-кредитная политика способствовали обеспечению макроэкономической стабильности, высоких темпов роста экономики, удержанию инфляции в прогнозных пределах, созданию широких возможностей и благоприятных условий для развития малого бизнеса и частного предпринимательства, фермерского движения.

Вместе с тем, всесторонний анализ пройденного этапа развития страны, изменяющаяся конъюнктура мировой экономики в условиях глобализации и усиливающаяся конкуренция требуют выработки и

реализации кардинально новых идей и принципов дальнейшего устойчивого и опережающего развития страны»¹.

Благодаря приверженности курсу и стратегическим принципам собственной «узбекской модели» развития и создания современной государственности, выработанным под руководством И.А.Каримова, а также реализация комплексной Программы дальнейшего реформирования, структурных преобразований и диверсификации экономики на 2015-2019 годы позволили сохранить высокие темпы роста валового внутреннего продукта на уровне 7,8 процента.

Высокие темпы экономического роста достигнуты при сохранении макроэкономической сбалансированности, характеризующейся положительным сальдо внешнеторгового оборота, профицитом Государственного бюджета в размере 0,1 процента к ВВП и низким уровнем инфляции, составившей 5,7 процента.

В настоящее время экономическая наука и практика все более глубоко овладевает достижениями прикладной математики, превращая их из инструмента научных исследований в важное средство эффективного решения сложных социально-экономических проблем. Главные преимущества математики как средства научного познания раскрываются при построении математических моделей, заменяющих в определенном отношении исследуемые объекты. Математические модели экономики, отражающие с помощью математических соотношений основные свойства экономических процессов и явлений, представляют собой эффективный инструмент исследования экономических проблем (обычно такие модели называют экономико-математическими).

Экономико-математическое моделирование включает такие этапы обучения, как изучение основ моделирования сложных экономических систем, моделирование на примере конкретных экономических объектов,

¹ Мирзиёев Ш. О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан // «Народное слово» от 8 февраля 2017 года № 28 (6692).

изучение их экономического смысла, решение задач с помощью компьютерных программ и проведение экономического анализа полученных результатов.

Математические модели и методы, являющиеся необходимым элементом современной экономической науки, как на микро-, так и макроуровне.

Макроэкономические модели изучают экономику в целом, опираясь на такие укрупнённые показатели, как валовый национальный продукт, потребление, инвестиции, занятость и т.д.

2.2. Классификация экономико-математических моделей.

Слово «модель» произошло от латинского слова «*modulus*», означает «мера», «образец». Его первоначальное значение было связано со строительным искусством, и почти во всех европейских языках оно употреблялось для обозначения образа или прообраза, или вещи, сходной в каком-то отношении с другой вещью. Например, перед строительством здания, сооружения делали его уменьшенную копию для обсуждения, улучшения, утверждения проекта.

Термин «модель» широко используется в различных сферах человеческой деятельности и имеет множество смысловых значений. В этом разделе мы будем рассматривать только такие модели, которые являются инструментами получения знаний.

Модель - это такой материальный или мысленно представляемый, то есть информационный объект, который в процессе исследования замещает объект-оригинал, обладая его существенными информационными свойствами (качественно-логическими и количественно-математическими), то есть характером отношений между элементами изучаемого объекта и его отношений к другим объектам физической реальности, так, что изучение модели дает новые знания об объекте-оригинале. Более строго, по сути модель представляет собой вид

информационной системы, копирующей целевые системы (информационные, энергетические, вещественные), и предназначенной для изучения свойств последних.

Модель может описывать либо внутреннюю структуру объекта, либо, если структура неизвестна, - его поведение, т.е. реакцию на воздействие известных факторов (принцип «черного ящика»). Один и тот же объект может быть описан различными моделями в зависимости от исследовательской или практической потребности, возможностей математического аппарата и т.п. Поэтому всегда необходима оценка модели и области, в которой выводы из ее изучения могут быть достоверны.

Математическая модель - приближенное описание объекта моделирования, выраженное с помощью математической символики.

Экономико-математическая модель [*economic model, economic-mathematical model*] - математическое описание экономического *процесса* или *объекта*, произведенное в целях их исследования и управления ими: математическая запись решаемой экономической задачи (поэтому часто термины “модель” и “задача” употребляются как синонимы). Существует еще несколько вариантов определения этого термина.

Моделирование - процесс построения, изучения и применения моделей. Оно тесно связано с такими категориями, как абстракция, аналогия, гипотеза и др. Процесс моделирования обязательно включает и построение абстракций, и умозаключения по аналогии, и конструирование научных гипотез. Главная особенность моделирования в том, что это метод опосредованного познания с помощью объектов-заместителей.

Процесс моделирования включает три обязательных компонента:

- субъект (исследователь);
- объект исследования;

- модель, опосредствующую отношения познающего субъекта и познаваемого объекта.

Основные цели моделирования:

- познание объекта или системы;
- прогнозирование поведения объекта;
- принятие наилучших решений для достижения объектом поставленной перед ним цели.

Основное требование, предъявляемое к моделям – это их адекватность реальным процессам или объектам, которые замещает модель. Практически во всех науках о природе, живой и неживой, об обществе, построение и использование моделей является мощным орудием познания. Реальные объекты и процессы бывают столь многогранны и сложны, что лучшим (а иногда и единственным) способом их изучения часто является построение и исследование модели, отображающей лишь какую-то грань реальности и потому многократно более простой, чем эта реальность. Многовековой опыт развития науки доказал на практике плодотворность такого подхода. Более конкретно, необходимость использования метода моделирования определяется тем, что многие объекты (или проблемы, относящиеся к этим объектам) непосредственно исследовать или вовсе невозможно, или же это исследование требует слишком много времени и средств.

Основные экономико-математические методы приведена на рис. 2.1.

В моделировании есть два различных подхода. Это натурное и абстрактное моделирование.

Классификация экономико-математических моделей

1. Экономико-математические модели классифицируются по разным основаниям.

По целевому назначению они делятся на:

- теоретико-аналитические – в исследованиях общих свойств и закономерностей;

- прикладные - при решении конкретных экономических задач (модели экономического анализа, прогнозирования, управления).

По исследуемым экономическим процессами содержательной проблематике экономико-математические модели делятся на:

- модели производства в целом и его подсистем – отраслей, регионов и т.д.;

- комплексы моделей производства, потребления, формирования и распределения доходов, трудовых ресурсов, ценообразования, финансовых связей и т.д.



Рис. 2.1. Основные экономико-математические методы²

В соответствии с классификацией математических моделей они подразделяются на:

² Федосеев В.В. Экономико-математические методы и прикладные модели. Учебное пособие. –М.: ЮНИТИ, 2009. – 595 с.

- функциональные;
- структурные;
- структурно-функциональные.

Применение в исследованиях на хозяйственном уровне структурных моделей обосновано взаимосвязью подсистем. Типичными в данном случае являются модели межотраслевых связей.

Функциональные модели широко применяются в сфере экономического регулирования. Типичными в данном случае являются модели поведения потребителей в условиях товарно-денежных отношений. Один и тот же объект может быть представлен в виде и структурной, и функциональной модели одновременно. Так, например, для планирования отдельной отраслевой системы используется структурная модель, а на хозяйственном уровне – функциональная.

2. Различия между моделями дескриптивными и нормативными выявляются при рассмотрении их структуры и характера использования.

Дескриптивные модели дают ответ на вопрос: «Как это происходит?» или «Как это вероятнее всего может дальше развиваться?», то есть объясняют наблюдаемые факты или прогнозируют вероятность каких-либо фактов.

Цель дескриптивного подхода – эмпирическое выявление различных зависимостей в экономике. Это могут быть установление статистических закономерностей экономического поведения социальных групп, изучение вероятных путей развития каких-либо процессов при неизменных условиях или без внешних воздействий и другие исследования. Примером здесь может быть модель покупательского спроса, построенная на основе обработки статистических данных.

Нормативные модели признаны ответить на вопрос: «Как это должно быть?», то есть предполагают целенаправленную деятельность. Типичным примером является модель оптимального планирования.

3. Признаки дескриптивных и нормативных моделей сочетаются, если нормативная модель сложной структуры объединяет отдельные блоки, которые являются частными дескриптивными моделями. Так, межотраслевая модель может включать функции покупательского спроса, отражающие поведение потребителей при изменении доходов.

Дескриптивный подход широко распространен в имитационном моделировании.

По характеру обнаружения причинно-следственных связей различают модели жестко детерминистские и модели, включающие элементы случайности и неопределенности.

4. По способам отражения фактора времени экономико-математические модели делятся на статические и динамические.

В статических моделях все закономерности экономики относятся к одному моменту или периоду времени. Динамические модели характеризуют изменения во времени.

2.3. Этапы экономико-математического моделирования

Как и любое моделирование, процесс экономико-математического моделирования представляет собой последовательность нескольких взаимосвязанных этапов, а именно (рис. 2.2):

1. Постановка проблемы, формулировка целей моделирования.

2. Построение концептуальной модели. Выделение в исследуемой экономической системе структурных или функциональных элементов, соответствующих целям моделирования, и их наиболее важных характеристик.

3. Построение математической модели. Введение символьных обозначений и формализация взаимосвязей, т.е. выражение экономической проблемы в виде конкретных математических зависимостей (уравнений, неравенств, функций и др.).

4. Математический анализ модели. Важным моментом этого этапа является доказательство существования решения сформулированной задачи.

5. Проведение расчетов вручную или на ЭВМ (вычислительный этап).

7. Анализ и интерпретация полученных результатов. Проверяется адекватность модели тем свойствам, которые выбраны в качестве существенных.

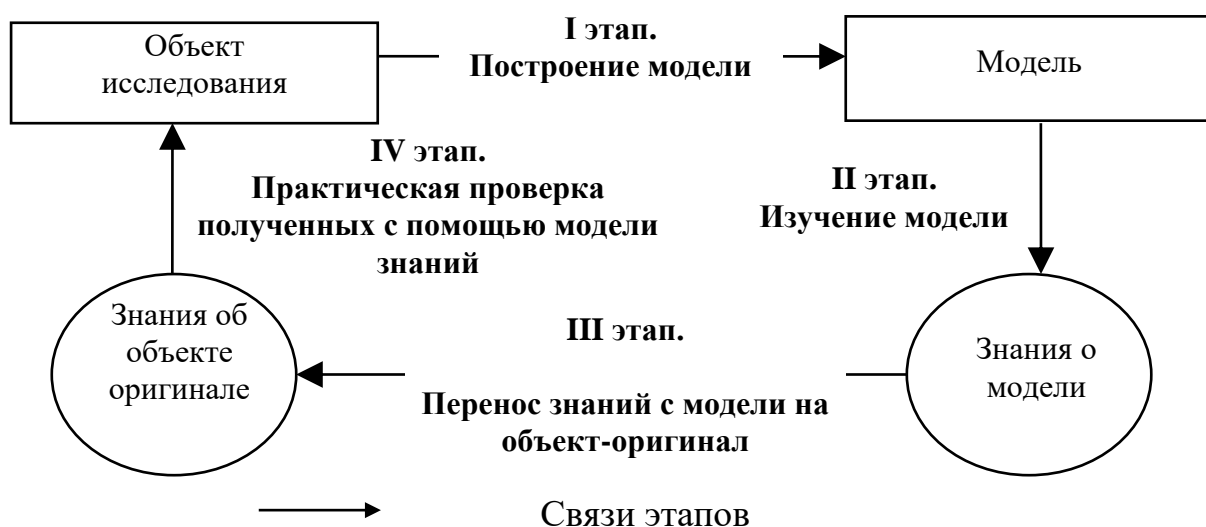


Рис. 2.2. Общая схема процесса моделирования³

Учебное задание

1. Сформулируйте понятие эконометрика и определите ее место в системе экономических знаний.

2. Экономическая, математическая и эконометрическая модели.

"Традиционная"

идеология эконометрического исследования; ее недостатки.

3. Современное понимание прикладного эконометрического исследования.

Основные этапы прикладного эконометрического исследования.

³ Федосеев В.В. Экономико-математические методы и прикладные модели. Учебное пособие. –М.: ЮНИТИ, 2009. – 595 с.

Вопросы для самопроверки.

1. Кто первый ввел в употребление термин «Эконометрика»?
2. В каком году был основан журнал «Econometrics»?
3. Каких вы знаете лауреатов нобелевской премии по экономике за достижения в эконометрических методах.?
4. На каких «трех китах» базируется современная экономическая теория?
5. Приведите определение эконометрики, отражающее современный взгляд на эту науку.
6. Каковы прикладные цели эконометрики?

Тесты для проверки знаний

1. Эконометрика - это ...
 - a) раздел экономической теории, связанный с анализом статистической информации
 - b) наука, которая осуществляет качественный анализ взаимосвязей экономических явлений и процессов
 - c) Специальный раздел математики, посвященный анализу экономической информации
 - d) наука, которая дает количественное выражение взаимосвязей экономических явлений и процессов

2. Величина коэффициента детерминации ...
 - a) характеризует долю дисперсии остаточной величины в общей дисперсии зависимой переменной
 - b) оценивает значимость каждого из факторов, включенных в уравнение регрессии
 - c) характеризует долю дисперсии зависимой переменной $y > 0$ объясненную уравнением, в ее общей дисперсии
 - d) рассчитывается для оценки качества подбора уравнения регрессии

3. Число степеней свободы общей, факторной и остаточной дисперсий связано ...

- a) только с числом единиц совокупности
- b) с числом единиц совокупности и видом уравнения регрессии
- c) характером исследуемых переменных
- d) только с видом уравнения регрессии

4. Для расчета критического значения распределения Стьюдента служат следующие параметры:

- a) уровень значимости
- b) количество зависимых переменных
- c) коэффициент детерминации
- d) объем выборки и количество объясняющих переменных

5. Примером нелинейной зависимости экономических показателей является ...

- a) зависимость объема продаж от недели реализации, выраженная линейным трендом
- b) классическая гиперболическая зависимость спроса от цены
- c) линейная зависимость затрат на производство от объема выпуска продукции
- d) линейная зависимость выручки от величины оборотных средств

6. Среди нелинейных эконометрических моделей рассматривают следующие классы нелинейных уравнений:...

- a) внешне линейные
- b) внутренне нелинейные
- c) внутренне линейные
- d) внешне нелинейные

Задание N 15

Укажите последовательность этапов оценки параметров нелинейной регрессии $Y = a + b \cdot X + c \cdot X^2$.

Варианты ответов

- определяются исходные параметры из тождеств:
 $a = b_0; b = b_1; c = b_2$
- задается спецификация модели в виде
 $Y = b_0 + b_1 \cdot X + b_2 \cdot Z$, где $b_0 = a; b_1 = b; b_2 = c$
- выполняется замена переменной X^2 на Z
- оцениваются параметры регрессии b_0, b_1, b_2

7. Величина коэффициента эластичности показывает ... на сколько процентов изменится в среднем результат при изменении фактора на 1%
- a) во сколько раз изменится в среднем результат при изменении фактора
 - b) предельно возможное значение результата
 - c) предельно допустимое изменение варьируемого признака
 - d) все ответы правильно
8. Временным рядом является совокупность значений .
- a) экономических однотипных объектов по состоянию на определенный момент времени
 - b) экономического показателя за несколько последовательных моментов (периодов) времени
 - c) экономического показателя для однотипных объектов на определенный момент времени
 - d) последовательных моментов (периодов) времени и соответствующих им значений экономического показателя
9. Установите соответствие между эконометрическими терминами и их определениями.
- a) автокорреляция уровней временного ряда – это корреляционная зависимость между последовательными уровнями ряда
 - b) коэффициент автокорреляции уровней временного ряда

- c) автокорреляционная функция
- d) коррелограмма

10. Аддитивная модель содержит компоненты в виде ...

- a) комбинации слагаемых и сомножителей
- b) слагаемых
- c) сомножителей
- d) отношений

11. Моделирование - это метод, который изучает экономические процессы:

- a) Аналитическом аспекте
- b) Качественном аспекте
- c) Психологическом аспекте
- d) Количественном аспекте

12. Случайным называется такое событие, которое:

- a) может произойти или не произойти в условиях данного эксперимента;
- b) не происходит никогда в условиях данного эксперимента;
- c) происходит всегда в условиях данного эксперимента.
- d) все ответы не правильно

13. Достоверным называется такое событие, которое:

- a) происходит всегда в условиях данного эксперимента;
- b) может произойти или не произойти в условиях данного эксперимента;
- c) не происходит никогда в условиях данного эксперимента
- d) а и с

ТЕМА 3. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Ключевые слова: экономическая информация, переменные, корреляционная зависимость, зависимые и независимые переменные, статистические и динамические модели

3.1. Статистическая природа экономической информации

Одной из основных задач *экономической статистики* является сбор, обработка и представление экономических данных в наглядной форме: в виде таблиц, графиков, диаграмм. Эконометрика также активно пользуется этим инструментарием, но идет дальше, применяя его для анализа экономических взаимосвязей и прогнозирования.

Мощным аппаратом эконометрических исследований является аппарат *математической статистики*. Действительно, большинство экономических показателей носит характер случайных величин, предсказать точные значения, которых практически невозможно. Вследствие этого использование методов математической статистики в эконометрике естественно и обоснованно. Однако в силу специфики получения статистических данных в экономике (например, в экономике невозможно проведение управляемого эксперимента) эконометристам приходится использовать свои собственные наработки и специальные приемы анализа, которые в математической статистике не встречаются.

Таким образом, можно сказать, что *эконометрика* устанавливает и исследует количественные закономерности в экономике на основе методов теории вероятностей и математической статистики, адаптированных к обработке экономических данных⁴. Основа этих методов – *корреляционно-регрессионный анализ*.

⁴Gujarati D.N. Basic Econometrics. McGraw-Hill, 4th edition, 2013 (Gu), Inc.p. 2

Еще раз отметим, что значительный блок эконометрики составляют методы математической статистики, т.е. методы, апеллирующие к вероятностной природе анализируемых данных. Этот инструментарий применим только в случае соблюдения условий статистического ансамбля, что означает возможность многократного воспроизведения эксперимента (наблюдения) в неизменных условиях. Однако для большинства исследуемых в экономике явлений данное требование не соблюдается. Экономические процессы развиваются во времени, и каждый временной ряд уникален.

Важный этап в построении эконометрических моделей – ***отбор включаемых в нее показателей и факторов.***

Обычно на исследуемый показатель воздействует очень большое количество факторов.

Включение всех их в модель либо невозможно, либо экономически нецелесообразно по отношению к реально разработанной модели.

Весь комплекс показателей и факторов можно представить в виде:

$$y = f(x_1, \dots, x_k / x_{(k+1)}, \dots, x_m / x_{(m+1)}, \dots, x_n)$$

1) Первая группа факторов (x_1, \dots, x_k) - это переменные величины, включаемые в модель.

2) Факторы $(x_{(k+1)}, \dots, x_m)$ – в модель не включаются, но каждый из них в наблюдаемой статистической совокупности контролируются исследователем в тех или иных величинах.

3) Факторы $(x_{(m+1)}, \dots, x_n)$ – случайные переменные, которые не контролируются исследователем, но на изменение "y" влияют.

Эконометрическая модель считается надежной, когда в 1-ую группу входят пусть небольшое по количеству факторов, но максимально сильно влияющих на изменение "y".

Кроме того, желательно, чтобы из оставшихся факторов большее их число входило во 2-ую группу и меньшее в 3-ю группу.

Эконометрическая модель считается надежной, когда в 1-ую группу входят пусть небольшое по количеству факторов, но максимально сильно влияющих на изменение "у".

Кроме того, желательно, чтобы из оставшихся факторов большее их число входило во 2-ую группу и меньшее в 3-ю группу.

3.2. Требования по построению эконометрических моделей

Исходными данными, необходимыми для построения эконометрической модели, являются известные наборы (массивы) значений зависимой переменной y и независимых факторов x_i . При этом могут использоваться два принципиально различных типа исходных информационных массивов – статический и динамический. Статический массив представляет собой значения результирующей (зависимой, объясняемой и т.п.) переменной y и влияющих на нее факторов (независимых, объясняющих переменных) x_i , имевших место у объектов однородной совокупности в определенный период времени. В качестве y в практических исследованиях часто рассматриваются показатели производительности труда, объемов выпускаемой продукции и некоторые другие. В качестве x_i – влияющие на уровень этих показателей факторы – объемы используемых фондов, численность и квалификация рабочей силы и т.п.

Для традиционных направлений исследований проблема обоснования состава показателей обычно считается решенной. Например, в исследованиях производительности труда, макроэкономическом анализе обычно рассматриваются уже устоявшиеся наборы показателей, значения которых публикуются в статистических сборниках, научных отчетах и т. п.

Их примером являются выработка на одного работающего как показатель, выражающий явление “производительность труда”, объемы ВВП (показатель результативности экономики), объем основных фондов (показатель уровня материальной обеспеченности производственного процесса, экономики) и т.д.

Неправильный выбор показателя, представляющего рассматриваемое явление в модели, может существенно повлиять на ее качество. В этой связи к проблеме обоснования состава показателей (переменных) эконометрической модели на практике следует относиться с предельным вниманием.

На этапе содержательного анализа решается вопрос о целесообразности включения в модель тех или иных факторов, исходя из “здорового” смысла. В макроэкономических исследованиях состав факторов, как правило, определяется на основании допущений экономической теории. Пример – двухфакторные производственные функции типа Кобба-Дугласа, постоянной эластичности замены, которые строятся в предположении, что объем выпуска (производства) экономической системы в основном зависит от размеров используемых основных фондов и количества затраченного труда.

При этом можно предложить и некоторые общие рекомендации, которых целесообразно придерживаться, следуя этим путем:

1. Число факторов, включаемых в модель, не должно быть слишком велико. Их увеличение может свести к минимуму ее практическую ценность, так как в этом случае модель начинает отражать не закономерность развития на фоне случайности, а саму случайность.

2. Простота модели в значительной степени является гарантией ее адекватности, поскольку более сложные зависимости часто априорно трудно уловимы на ограниченном временном интервале, но в то же время они допускают аппроксимацию достаточно простыми функциями. Иными

словами, сложная модель может в большей степени выражать второстепенные взаимосвязи между переменными в ущерб основным.

К построению эконометрических моделей предъявляются следующие требования:

1) В модель должны включаться только главные факторы, влияющие на изменение исследуемого показателя "у".

2) Все независимые факторы "х" должны быть тесно связаны с зависимой переменной "у".

Между собой каждый из независимых факторов "х" должны быть связаны слабо, поэтому их называют независимыми.

3.3. Выбор единицы измерений факторов. Формирование исходной информации

Формы выражения единиц измерения показателей и факторов эконометрической модели:

- а) абсолютные величины в натуральном выражении;
- б) абсолютные величины в стоимостном выражении (в неизменных ценах);
- в) относительные величины структуры и динамики;
- г) фиктивные (качественные) переменные.

В эконометрических моделях в качестве *независимых факторов* выступают затраты различных ресурсов: труда; основных оборотных средств; природных ресурсов и др.

В качестве *зависимой переменной* обычно анализируются итоговые показатели экономической деятельности исследуемого объекта. Например, на микроуровне для фирмы этими показателями могут быть: рентабельность, доля выпускаемой продукции на рынке, платежеспособность.

Все данные могут быть разграничены на *одновременные* и *разновременные* наблюдения⁵.

Данные, относящиеся к одному периоду времени по разным объектам образуют совокупность *единовременных* или *пространственных* (перекрестных) наблюдений.

Модели, построенные по таким данным, называются *статическими*.

Наблюдения, взятые за разные периоды времени, образуют *временные* ряды. Модели, построенные по таким данным, называются *динамическими*. *Пространственные* и *временные* данные имеют свои достоинства и недостатки.

На *пространственные* данные меньше сказываются происходящие во времени *качественные* изменения в *продукции* и *ресурсах*, но больше влияют некоторые *неучтенные* факторы, вплоть до уровня *руководства* фирмы.

После выбора вида модели можно приступить к *формированию* исходной информации.

Нужно соблюдать определенное соотношение между количеством наблюдений и количеством факторов, включенных в модель. Эмпирически считается, что число наблюдений должно как минимум в 3-5 раз превышать количество факторов, включенных в модель.

Учебное задание

1.Классификация моделей. Этапы моделирования. Основные свойства экономических систем.

2.Классификация переменных в эконометрических исследованиях.

3. Выявление проблем и их причин, существующих на предприятии. Спецификация модели. Идентификация модели.

4. Свойства оценок параметров модели.

⁵Gujarati D.N. Basic Econometrics. McGraw-Hill, 4th edition, 2013 (Gu), Inc.p. 24

Вопросы для самопроверки

1. Что такое модели? Какие виды моделей знаете?
2. Перечислите основные этапы эконометрического моделирования.
3. Что входит в спецификацию модели?
4. Что происходит на этапе идентификации модели?
5. Какие основные типы экономических данных вы знаете?
6. Основные типы эконометрических моделей.
7. Как происходит верификация модели?

Тесты для проверки знаний

1. Какие науки лежат в основании эконометрических методов»
 - 1) экономическая статистика;
 - 2) Экономическая теория;
 - 3) логистика;
 - 4) математическая статистика.
 - 5) математический анализ.
2. Расположите этапы эконометрического моделирования в порядке их проведения:
 - 1) верификация модели;
 - 2) осознание того факта, что некоторые переменные в экономике связаны между собой;
 - 3) идентификация модели;
 - 4) сбор данных;
 - 5) эконометрическое моделирование.
3. Какие причины приводят к тому, что в модель, для обеспечения точного равенства, приходится включать случайный член:
 - a) невключение в модель влияющих переменных;
 - b) неправильный выбор формы зависимости между переменными;

- c) случайный член является суммарным проявлением всех вышеперечисленных факторов;
- d) ни один из вышеперечисленных факторов не вносит свой вклад в случайный член.

4. Остаток в i -м наблюдении – это:

- a) разница между значением объясняющей переменной в i -м наблюдении и прогнозным значением этой переменной;
- b) разница между значением переменной Y в i -v наблюдении и прогнозным значением этой переменной, полученным по выборочной линии регрессии;
- c) разница между значением переменной Y в i -v наблюдении и прогнозным значением этой переменной, полученным по истинной линии регрессии;
- d) разница между прогнозным значением зависимой переменной, полученным по выборочной линии регрессии и значением объясняющей переменной в этом наблюдении.

5. Ошибка в i -м наблюдении – это:

- a) разница между значением объясняющей переменной в i -м аблюдении и прогнозным значением этой переменной;
- b) разница между значением переменной Y в i -v наблюдении и прогнозным значением этой переменной, полученным по выборочной линии регрессии;
- c) разница между значением переменной Y в i -v наблюдении и прогнозным значением этой переменной, полученным по истинной линии регрессии;
- d) разница между прогнозным значением зависимой переменной, полученным по выборочной линии регрессии и значением объясняющей переменной в этом наблюдении.

6. Виды коэффициента корреляции:

- a) Парный, частный и множественный
- b) Парный, частный, множественный, постоянный
- c) Парный, частный, множественный, переменный
- d) Парный, частный и множественный, постоянный, мультиколленеарный

7. Как определяется коэффициент детерминации?

- a) $d = \sqrt{r_{xy}}$
- b) $d = r_{xy}^2$
- c) $d = \sqrt{1 - r_{xy}^2}$
- d) $d = \frac{n + m}{r_{xy}}$

8. Укажите формулу определяющий коэффициент корреляции:

- a) $r_{xy} = \frac{\sum x^2 - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sqrt{\sigma_y}}$
- b) $r_{xy} = \frac{\overline{xy} + \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x - \sigma_y}$
- c) $r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$
- d) $r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x + \sigma_y}$

9. Какая из нижеприведенной функции является линейной?

- a) $y = a + bx$
- b) $y = a + b/x$
- c) $y = a + bx^2$
- d) $y = a + bx + c/x^2$

10. Эконометрическая модель - это
- a) Система математических символов
 - b) Описательная модель
 - c) Состоит из балансовых матриц
 - d) Система уравнений и неравенств

ТЕМА 4. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Ключевые слова: экономическая модель, математическая зависимость, субъект и объект исследования, случайность и неопределенность, адекватность модели, материальные и идеальные модели, экзогенные переменные, эндогенные переменные.

4.1. Особенности экономических наблюдений и измерений

Уже длительное время главным тормозом практического применения математического моделирования в экономике является наполнение разработанных моделей конкретной и качественной информацией. Точность и полнота первичной информации, реальные возможности ее сбора и обработки во многом определяют выбор типов прикладных моделей. С другой стороны, исследования по моделированию экономики выдвигают новые требования к системе информации. В зависимости от моделируемых объектов и назначения моделей используя в них исходная информация имеет существенно различный характер и происхождение. Она может быть разделена на две категории: о прошлом развитии и современном состоянии объектов (экономические наблюдения и их обработка) и о будущем развитии объектов, включающую данные об ожидаемых изменениях их внутренних параметров и внешних условий (прогнозы). Вторая категория информации является результатом

самостоятельных исследований, которые также могут выполняться посредством моделирования.

Методы экономических наблюдений и использования результатов этих наблюдений разрабатываются экономической статистикой. Поэтому стоит отметить только специфические проблемы экономических наблюдений, связанные с моделированием экономических процессов. В экономике многие процессы являются массовыми; они характеризуются закономерностями, которые не обнаруживаются на основании лишь одного или нескольких наблюдений. Поэтому моделирование в экономике должно опираться на массовые наблюдения. Другая проблема порождается динамичностью экономических процессов, изменчивостью их параметров и структурных отношений. В следствии этого экономические процессы приходится постоянно держать под наблюдением, необходимо иметь устойчивый поток новых данных. Поскольку наблюдения за экономическими процессами и обработка эмпирических данных обычно занимают довольно много времени, то при построении математических моделей экономики требуется корректировать исходную информацию с учетом её запаздывания.

Познание количественных отношений экономических процессов и явлений опирается на экономические измерения. Точность измерений в значительной степени предопределяет и точность конечных результатов количественного анализа посредством моделирования. Поэтому необходимым условием эффективного использования математического моделирования является совершенствование экономических измерителей. Применение математического моделирования заострило проблему измерений и количественных сопоставлений различных аспектов и явлений социально-экономического развития, достоверности и полноты получаемых данных, их защиты от намеренных и технических искажений.

В процессе моделирования возникает взаимодействие «первичных» и

"вторичных" экономических измерителей. Любая модель народного хозяйства опирается на определенную систему экономических измерителей (продукции, ресурсов, элементов и т. д.). В то же время одним из важных результатов народнохозяйственного моделирования является получение новых (вторичных) экономических измерителей - экономически обоснованных цен на продукцию различных отраслей, оценок эффективности разнокачественных природных ресурсов, измерителей общественной полезности продукции. Однако эти измерители могут испытывать влияние недостаточно обоснованных первичных измерителей, что вынуждает разрабатывать особую методику корректировки первичных измерителей для хозяйственных моделей.

С точки зрения "интересов" моделирования экономики в настоящее время наиболее актуальными проблемами совершенствования экономических измерителей являются: оценка результатов интеллектуальной деятельности (особенно в сфере научно-технических разработок, индустрии информатики), построение обобщающих показателей социально-экономического развития, измерение эффектов обратных связей (влияние хозяйственных и социальных механизмов на эффективность производства).

4.2. Случайность и неопределенность в экономическом развитии

Для методологии планирования экономики важное значение имеет понятие неопределенности экономического развития. В исследованиях по экономическому прогнозированию и планированию различают два типа неопределенности: "истинную", обусловленную свойствами экономических процессов, и "информационную", связанную с неполнотой и неточностью имеющейся информации об этих процессах. Истинную неопределенность нельзя смешивать с объективным существованием

различных вариантов экономического развития и возможностью сознательного выбора среди них эффективных вариантов. Речь идет о принципиальной невозможности точного выбора единственного (оптимального) варианта.

В развитии экономики неопределенность вызывается двумя основными причинами. Во-первых, ход планируемых и управляемых процессов, а также внешние воздействия на эти процессы не могут быть точно предсказуемы из-за действия случайных факторов и ограниченности человеческого познания в каждый момент. Особенно характерно это для прогнозирования научно-технического прогресса, потребностей общества, экономического поведения. Во-вторых, общего государственное планирование и управление не только не всеобъемлющи, но и не всеильны, а наличие множества самостоятельных экономических субъектов с особыми интересами не позволяет точно предвидеть результаты их взаимодействий. Неполнота и неточность информации об объективных процессах и экономическом поведении усиливают истинную неопределенность.

На первых этапах исследований по моделированию экономики применялись в основном модели детерминистского типа. В этих моделях все параметры предполагаются точно известными, однако детерминистские модели неправильно понимать в механическом духе и отождествлять их с моделями, которые лишены всех “степеней выбора” (возможностей выбора) и имеют единственное допустимое решение. Классическим представителем жестко детерминистских моделей является оптимизационная модель народного хозяйства, применяемая для определения наилучшего варианта экономического развития среди множества допустимых вариантов. В результате накопления опыта использования жестко детерминистских моделей были созданы реальные возможности успешного применения более совершенной методологии

моделирования экономических процессов, учитывающих стохастичеку и неопределенность. Здесь можно выделить два основных направления исследований. Во-первых, усовершенствуется методика использования моделей жестко детерминистского типа: проведение многовариантных расчетов и модельных экспериментов с вариацией конструкции модели и ее исходных данных; изучение устойчивости и надежности получаемых решений, выделение зоны неопределенности; включение в модель резервов, применение приемов, повышающих приспособляемость экономических решений к вероятным и непредвидимым ситуациям. Во-вторых, получают распространение модели, непосредственно отражающие стохастичеку и неопределенность экономических процессов и использующие соответствующий математический аппарат: теорию вероятностей и математическую статистику, теорию игр и статистических решений, теорию массового обслуживания, стохастическое программирование, теорию случайных процессов.

4.3. Этапы эконометрического моделирования.

Основные этапы процесса моделирования уже рассматривались выше. В различных отраслях знаний, в том числе и в экономике, они приобретают свои специфические черты. Проанализируем последовательность и содержание этапов одного цикла экономико-математического моделирования.

1. Постановка экономической проблемы и ее качественный анализ. Главное здесь - четко сформулировать сущность проблемы, принимаемые допущения и те вопросы, на которые требуется получить ответы. Этот этап включает выделение важнейших черт и свойств моделируемого объекта и абстрагирование от второстепенных; изучение структуры объекта и основных зависимостей, связывающих его элементы; формулирование

гипотез (хотя бы предварительных), объясняющих поведение и развитие объекта.

2. Построение математической модели. Это - этап формализации экономической проблемы, выражения ее в виде конкретных математических зависимостей и отношений (функций, уравнений, неравенств и т. д.). Обычно сначала определяется основная конструкция (тип) математической модели, а затем уточняются детали этой конструкции (конкретный перечень переменных и параметров, форма связей). Таким образом, построение модели подразделяется в свою очередь на несколько стадий.

Неправильность полагать, что чем больше фактов учитывает модель. Тем она лучше “работает” и дает лучшие результаты. То же можно сказать о таких характеристиках сложности модели, как используемые формы математических зависимостей (линейные и нелинейные), учет факторов случайности и неопределенности и т.д. Излишняя сложность и громоздкость модели затрудняют процесс исследования. Нужно учитывать не только реальные возможности информационного и математического обеспечения, но и сопоставлять затраты на моделирование с получаемым эффектом (при возрастании сложности модели прирост затрат может превысить прирост эффекта).

Одна из важных особенностей математических моделей - потенциальная возможность их использования для решения разнокачественных проблем. Поэтому, даже сталкиваясь с новой экономической задачей, не нужно стремиться "изобретать" модель; вначале необходимо попытаться применить для решения этой задачи уже известные модели. В процессе построения модели осуществляется взаимосооставление двух систем научных знаний - экономических и математических. Естественно стремиться к тому, чтобы получить модель, принадлежащую хорошо изученному классу математических задач. Часто

это удастся сделать путем некоторого упрощения исходных предпосылок модели, не искажающих существенных черт моделируемого объекта. Однако возможна и такая ситуация, когда формализация экономической проблемы приводит к неизвестной ранее математической структуре. Потребности экономической науки и практики в середине XX в. способствовали развитию математического программирования, теории игр, функционального анализа, вычислительной математики. Вполне вероятно, что в будущем развитие экономической науки станет важным стимулом для создания новых разделов математики.

3. Математический анализ модели. Целью этого этапа является выяснение общих свойств модели. Здесь применяются чисто математические приемы исследования. Наиболее важный момент – доказательство существования решений в сформулированной модели (Теорема существования). Если удастся доказать, что математическая задача не имеет решения, то необходимость, а последующей работе по первоначальному варианту модели отпадает; следует скорректировать либо постановку экономической задачи, либо способы ее математической формализации. При аналитическом исследовании модели выясняются такие вопросы, как, например, единственно ли решение, какие переменные (неизвестные) могут входить в решение, каковы будут соотношения между ними, в каких пределах и в зависимости от каких исходных условий они изменяются, каковы тенденции их изменения и т. д. Аналитическое исследование модели по сравнению с эмпирическим (численным) имеет то преимущество, что получаемые выводы сохраняют свою силу при различных конкретных значениях внешних и внутренних параметров модели. Знание общих свойств модели имеет столь важное значение, часто ради доказательства подобных свойств исследователи сознательно идут на идеализацию первоначальной модели. И все же модели сложных экономических объектов с большим трудом поддаются

аналитическому исследованию. В тех случаях, когда аналитическими методами не удастся выяснить общих свойств модели, а упрощения модели приводят к недопустимым результатам, переходят к численным методам исследования.

4. Подготовка исходной информации. Моделирование предъявляет жесткие требования к системе информации. В то же время реальные возможности получения информации ограничивают выбор моделей, предназначенных для практического использования. При этом принимается во внимание не только принципиальная возможность подготовки информации (за определенные сроки), но и затраты на подготовку соответствующих информационных массивов. Эти затраты не должны превышать эффект от использования дополнительной информации.

В процессе подготовки информации широко используются методы теории вероятностей, теоретической и математической статистики. При системном экономико-математическом моделировании исходная информация, используемая в одних моделях, является результатом функционирования других моделей.

5. Численное решение. Этот этап включает разработку алгоритмов для численного решения задачи, составления программ на ЭВМ и непосредственное проведение расчетов. Трудности этого этапа обусловлены прежде всего большой размерностью экономических задач, необходимостью обработки значительных массивов информации.

Обычно расчеты по экономико-математической модели носят многовариантный характер. Благодаря высокому быстродействию современных ЭВМ удается проводить многочисленные "модельные" эксперименты, изучая "поведение" модели при различных изменениях некоторых условий. Исследование, проводимое численными методами, может существенно дополнить результаты аналитического исследования, а

для многих моделей оно является единственно осуществимым. Класс экономических задач, которые можно решать численными методами, значительно шире, чем класс задач, доступных аналитическому исследованию.

6. Анализ численных результатов и их применение. На этом заключительном этапе цикла встает вопрос о правильности и полноте результатов моделирования, о степени практической применимости последних.

Математические методы проверки могут выявлять некорректные построения модели и тем самым сужать класс потенциально правильных моделей. Неформальный анализ теоретических выводов и численных результатов, получаемых посредством модели, сопоставление их с имеющимся знаниями и фактами действительности также позволяют обнаружить недостатки постановки экономической задачи. Сконструированной математической модели, ее информационного и математического обеспечения. Изображены связи между этапами одного цикла экономико-математического моделирования.

Обратим внимание на возвратные связи этапов, возникающие вследствие того, что в процессе исследования обнаруживаются недостатки предшествующих этапов моделирования.

Уже на этапе построения модели может выясниться, что постановка задачи противоречива или приводит к слишком сложной математической модели. В соответствии с этим исходная постановка задачи корректируется. Далее математический анализ модели (этап 3) может показать. Что наибольшая модификация постановки задачи или ее формализация дает интересный аналитический результат.

Наиболее часто необходимость возврата к предшествующим этапам моделирования возникает при подготовке исходной информации (этап 4). Может обнаружиться, что необходимая информация отсутствует или же

затраты на ее подготовку слишком велики. Тогда приходится возвращаться к постановке задачи и ее формализации, изменяя их так, чтобы приспособиться к имеющейся информации.

Поскольку экономико-математические задачи могут быть сложны по своей структуре, иметь большую размерность, то часто случается, что известные алгоритмы и программы для ЭВМ не позволяют решить задачу в первоначальном виде. Если невозможно в короткий срок разработать новые алгоритмы и программы, исходную постановку задачи и модель упрощают: снимают и объединяют условия, уменьшают число факторов, нелинейные соотношения заменяют линейными, усиливают детерминизм модели и т. д.

Недостатки, которые не удается исправить на промежуточных этапах моделирования, устраняются в последующих циклах. Но результаты каждого цикла имеют вполне самостоятельное значение. Начав исследование с построения простой модели, можно быстро получить полезные результаты, а затем перейти к созданию более совершенной модели, дополняемой новыми условиями, включающей уточненные математические зависимости.

По мере развития и усложнения экономико-математического моделирования его отдельные этапы обособляются в специализированные области исследований, усиливаются различия между теоретико-аналитическими и прикладными моделями, происходит дифференциация моделей по уровням абстракции и идеализации.

Теории математического анализа моделей экономики развилась в особую ветвь современной математики - математическую экономику. Модели, изучаемые в рамках математической экономики, теряют непосредственную связь с экономической реальностью; они имеют дело с исключительно идеализированными экономическими объектами и ситуациями. При построении таких моделей главным принципом является

не столько приближение к реальности, сколько получение возможно большего числа аналитических результатов посредством математических доказательств. Ценность этих моделей для экономической теории и практики состоит в том, что они служат теоретической базой для моделей прикладного типа.

Довольно самостоятельными областями исследований становятся подготовка и обработка экономической информации и разработка математического обеспечения экономических задач (создание баз данных и банков информации, программ автоматизированного построения моделей и программного сервиса для экономистов-пользователей). На этапе практического использования моделей ведущую роль должны играть специалисты в соответствующей области экономического анализа, планирования, управления. Главным участком работы экономистов-математиков остается постановка и формализация экономических задач и синтез процесса экономико-математического моделирования.

4.4. Роль прикладных экономико-математических исследований.

Можно выделить по крайней мере четыре аспекта применения математических методов в решении практических проблем.

1. Совершенствование системы экономической информации. Математические методы позволяют упорядочить систему экономической информации, выявлять недостатки в имеющейся информации и выработать требования для подготовки новой информации или ее корректировки. Разработка и применение экономико-математических моделей указывают пути совершенствования экономической информации, ориентированной на решение определенной системы задач планирования и управления. Прогресс в информационном обеспечении планирования и управления опирается на бурно развивающиеся технические и

программные средства информатики.

2. Интенсификация и повышение точности экономических расчетов. Формализация экономических задач и применение ЭВМ многократно ускоряют типовые, массовые расчеты, повышают точность и сокращают трудоемкость, позволяют проводить многовариантные экономические обоснования сложных мероприятий, недоступные при господстве “ручной” технологии.

3. Углубление количественного анализа экономических проблем. Благодаря применению метода моделирования значительно усиливаются возможности конкретного количественного анализа;

изучение многих факторов, оказывающих влияние на экономические процессы, количественная оценка последствий изменения условий развития экономических объектов и т. п.

4. Решение принципиально новых экономических задач. Посредством математического моделирования удается решать такие экономические задачи, которые иными средствами решить практически невозможно, например, нахождение оптимального варианта народнохозяйственного плана, имитация народнохозяйственных мероприятий, автоматизация контроля за функционированием сложных экономических объектов. Сфера практического применения метода моделирования ограничивается возможностями и эффективностью формализации экономических проблем и ситуаций, а также состоянием информационного, математического, технического обеспечения используемых моделей. Стремление во что бы то ни стало применить математическую модель может не дать хороших результатов из-за отсутствия хотя бы некоторых необходимых условий. В соответствии с современными научными представлениями системы разработки и принятия хозяйственных решений должны сочетать формальные и неформальные методы, взаимоусиливающие и взаимодополняющие друг

друга. Формальные методы являются прежде всего средством научно обоснованной подготовки материала для действий человека в процессах управления. Это позволяет продуктивно использовать опыт и интуицию человека, его способности решать плохо формализуемые задачи.

Вопросы для самопроверки

1. В чем особенности экономических наблюдений и измерений?
2. Основные этапы эконометрического моделирования?
3. Что вы понимаете под случайностью и неопределенностью?
4. В чем применение прикладных экономико-математических моделей?
5. В чем состоят важные особенности математических моделей?
6. Каковы взаимосвязи этапов эконометрического моделирования?

ТЕМА 5. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ЭКОНОМЕТРИКЕ

Ключевые слова: совокупность, вариация, случайная величина, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.

5.1. Основные математико-статистические понятия

Математическая статистика – раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и использованию статистических данных для научных и практических выводов.

Математическая статистика – это наука, занимающаяся методами обработки экспериментальных данных. Любая наука решает в порядке возрастания сложности и важности следующие задачи:

- 1) описание явления;
- 2) анализ и прогноз;
- 3) поиск оптимального решения.

Такого рода задачи решает и математическая статистика:

- 1) систематизировать полученный статистический материал;
- 2) на основании полученных экспериментальных данных оценить интересующие числовые характеристики наблюдаемой случайной величины;
- 3) определить число опытов, достаточное для получения достоверных результатов при минимальных ошибках измерения.

Математическая статистика анализирует не все объекты, а только несколько, которые были выбраны из большой группы, создана по общим признакам таких объектов. Это явление в математической статистике носит имя *выборочный метод анализа*.

5.2. Понятие о генеральной совокупности. Основные, выборочные, ограниченные и неограниченные совокупности.

Совокупность всех возможных значений случайной величины называется *генеральной совокупностью*. Подмножество генеральной совокупности называется выборкой. Основная задача математической статистики – оценивание характеристик генеральной совокупности по выборке. Обо всей генеральной совокупности мы, как правило, ничего не знаем точно и можем строить лишь догадки - гипотезы. Для проверки своих гипотез мы исследуем независимую выборку из генеральной совокупности и строим на основании выборки выборочные оценки неизвестных теоретических параметров.

Совокупность - масса единиц, обладающих некоторыми общими свойствами, существенными для их характеристики.

Различают совокупности:

- генеральную;
- выборочную;
- конечную;
- бесконечную.

Единица совокупности - элемент совокупности, подлежащий наблюдению.

Признак - свойство единиц совокупности.

Признаки бывают:

- количественные, которые выражаются числом;
- атрибутивные, те признаки, которые не поддаются количественному выражению.

Вариация - колеблемость признака, изменчивость величины признака у единиц, входящих в состав совокупности.

Вариант - отдельное конкретное значение варьирующего признака. Варианты обозначаются буквами латинского алфавита: X , Y , W и т.д. Например:

$$X_1, X_2, \dots, X_k$$
$$Y_1, Y_2, \dots, Y_k$$

Вариационный ряд - совокупность значений варьирующего признака и соответствующих им численностей единиц совокупности. Если варианты расположены в возрастающем или убывающем порядке, вариационный ряд называется упорядоченным.

5.3. Понятие о случайных величинах. Случайные дискретные величины. Непрерывные случайные величины

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие **случайной величины**. Оно описывает результаты (исходы) стохастического эксперимента. Так называются эксперименты, результаты которых нельзя предугадать заранее.

Если случайная величина принимает конечное или счетное множество значений, то она называется **дискретной**.

Дискретные случайные величины удобно задавать с помощью таблицы, в первой строке которой перечислены значения, которые

принимает случайная величина, а во второй – соответствующие вероятности:

X	X_1	...	X_n
P	P_1	...	P_n

Случайная величина X – количество очков на верхней грани брошенной кости

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Случайные величины разделяют на два типа:

- дискретные;
- непрерывные.

Случайная величина называется *дискретной*, если она принимает конечное или счетное (1, 2, 3,...) число значений.

Случайная величина называется *непрерывной*, если всевозможные значения полностью покрывают некоторый интервал $[a, b]$. *Дискретной* называется случайная величина X , имеющая определенный набор возможных значений. Пример – сумма выпавших очков при бросании двух игральных костей.

Математическое ожидание дискретной случайной величины – это взвешенное среднее всех ее возможных значений, причем в качестве весового коэффициента берется вероятность соответствующего исхода. Математическое ожидание случайной величины часто называют ее *средним по генеральной совокупности*.⁶

⁶Christopher Dougherty. Introduction to Econometrics. Oxford University Press, 2011. – 573 p.

Предположим, что X может принимать n конкретных значений (x_1, x_2, \dots, x_n) и что вероятность получения x_i равна p_i . Тогда:

$$\hat{M}(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

5.4. Количественные характеристики распределения случайной величины

Средняя арифметическая величина: $\bar{X} = \frac{\sum X}{n}$.

Частота (m) - абсолютное число, показывающее сколько раз тот или иной вариант, встречается в совокупности.

Частность (W_i) - относительная величина структуры, т.е. доля частоты или иного варианта, или интервала (m_i) в сумме всех частот:

$$w_i = \frac{m_i}{\sum m_i} \quad \sum w_i = 1.$$

Вариационный размах (R) - амплитуда колебания, или широта рассеяния, есть разность между экстремальными значениями вариационного ряда.

$$R = X_{\max} - X_{\min}.$$

Среднее линейное отклонение

$$\rho = \frac{\sum |X - \bar{X}|}{n};$$

$$\rho = \frac{\sum |X - \bar{X}| \cdot m}{\sum m}.$$

Дисперсия - средний квадрат отклонений вариантов (x) от средней арифметической - является мерой вариации, т.е. колеблемости признака.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n};$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (X - \bar{X})^2 \cdot m}{\sum m}.$$

Среднеквадратическое отклонение (σ) - представляет собой меру колеблемости и вычисляется по формуле – невзвешенное и взвешенное

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{X})^2 \cdot m}{\sum m}}$$

Коэффициент вариации (V) - относительная величина, служащая для характеристики колеблемости признака, представляет собой процентное отношение абсолютных величин.

$V_R = \frac{R}{\bar{X}} \cdot 100\%$ - коэффициент вариации по вариационному размаху, его называют коэффициентом осцилляции.

$V_\rho = \frac{\rho}{\bar{X}} \cdot 100\%$ - коэффициент вариации по среднему линейному отклонению.

$V_\sigma = \frac{\sigma}{\bar{X}} \cdot 100\%$ - коэффициент вариации по среднеквадратическому отклонению.

Медиана соответствует варианту, стоящему в середине ряда с увеличивающимся порядком. Для нечетного числа данных, медиана - это вариант, стоящий в середине. Для четного числа данных, медиана - это среднее значение двух данных, находящихся в середине.

Мода - это вариант, которому соответствует наибольшая частота. Она часто используется в отношении качественных данных.

Автокорреляция - корреляционная зависимость между последовательными (т.е. соседними) значениями уровней динамического ряда y_1 и y_2 ; y_2 и y_3 и т.д.)

Авторегрессия - регрессия, учитывающая влияние предыдущих уровней динамического на последующие.

Учебное задание

1. Статистическая база эконометрических моделей.
2. Случайные переменные, мат. ожидание, теория выборок.

Математическое ожидание дискретной случайной величины. Правила расчета мат. Ожидания.

3. Основные виды эконометрических моделей и их связь с другими моделями.

4. Ковариация, дисперсия и корреляция. Выборочная ковариация. Альтернативное выражение для выборочной ковариации. Выборочная дисперсия. Правила расчета дисперсии. Коэффициент корреляции

Вопросы для самопроверки

1. Когда используются экономико-статистические модели?
2. В чем особенности экономико-статистических моделей?
3. Основные понятия экономико-статистических моделей?
4. Что вы понимаете под динамическими рядами?
5. Правила составления эконометрических уравнений
6. Правила расчета математического ожидания.
7. Какие основные эконометрические модели вы знаете?
8. Что такое ковариация и как она вычисляется?
9. Что такое дисперсия и как она вычисляется?
10. Как вычисляется выборочная ковариация?

Тесты для проверки знаний

1. Предопределенные переменные включают в себя:
 - a) - экзогенные переменные, определенные внешними для данной модели факторами;
 - b) - экзогенные переменные и лаговые эндогенные переменные;
 - c) - эндогенные переменные.
 - d) - экзогенные и эндогенные переменные.

2. Структурной формой модели называется система ____ уравнений.
 - a) фиксированный
 - b) взаимосвязанных

- c) независимых
- d) рекурсивных

3. Выберите верные утверждения по поводу структурной формы системы эконометрических уравнений:

- a) каждое уравнение системы может, рассматриваться в качестве отдельного уравнения регрессии зависимости одной переменной от группы факторов
- b) система одновременных уравнений описывает реальное экономическое явление или процесс
- c) эндогенные переменные в одних уравнениях
- d) могут выступать в роли независимых переменных в других уравнениях системы

4. Косвенный метод наименьших квадратов применим для...

- a) неидентифицируемой системы уравнений
- b) идентифицируемой системы одновременных уравнений
- c) любой системы одновременных уравнений
- d) неидентифицируемой системы рекурсивных уравнений

5. Фиктивными переменными в уравнении множественной регрессии являются

- a) регрессии факторов, повышающие адекватность модели
- b) дополнительные количественные переменные, улучшающие решение
- c) переменные, представляющие простейшие
- d) функции от уже включенных в модель переменных
качественные переменные, преобразованные в количественные

6. Метод наименьших квадратов используется для оценивания...

- a) величины коэффициента детерминации параметров линейной регрессии

- b) средней ошибки аппроксимации
- c) величины коэффициента корреляции
- d) все ответы правильно

7. Предпосылками МНК являются ...

- a) гетероскедастичность случайных отклонений
- b) случайные отклонения коррелируют друг с другом
- c) дисперсия случайных отклонений постоянна для всех наблюдений
- d) случайные отклонения являются независимыми друг от друга

8. Несмещенность оценки характеризует ...

- a) равенство нулю математического ожидания остатков
- b) увеличение точности ее вычисления с увеличением объема выборки
- c) ее зависимость от объема выборки
- d) наименьшую дисперсию остатков

9. Укажите справедливые утверждения по поводу критерия Дарбина-Уотсона:

- a) позволяет проверить гипотезу о наличии автокорреляции первого порядка
- b) равен 0 в случае отсутствия автокорреляции
- c) применяется для проверки гипотезы о наличии гетероскедастичности остатков
- d) изменяется в пределах от 0 до 4

10. Корреляция подразумевает наличие связи между

- a) случайными факторами
- b) результатом и случайными факторами
- c) переменными
- d) параметрами

11. Если коэффициент корреляции между двумя случайными величинами больше нуля, то значит:

- a) случайные величины имеют прямую линейную зависимость;
- b) случайные величины имеют обратную линейную зависимость;
- c) случайные величины не зависимы.
- d) случайные величины мультиколлинеарны;

12. Если коэффициент корреляции между двумя случайными величинами меньше нуля, то значит:

- a) случайные величины имеют обратную линейную зависимость;
- b) случайные величины имеют прямую линейную зависимость;
- c) случайные величины независимы.
- d) случайные величины мультиколлинеарны;

13. Какие из перечисленных числовых характеристик используются для анализа степени взаимосвязи случайных величин?

- a) ковариация;
- b) коэффициент корреляции;
- c) ковариация и коэффициент корреляции;
- d) вероятность и коэффициент корреляции.

14. Ковариация является:

- a) абсолютной мерой взаимосвязи;
- b) относительной мерой взаимосвязи;
- c) относительной частотой взаимосвязи.
- d) показателем относительности;

15. Коэффициент корреляции является величиной:

- a) размерной;
- b) безразмерной;

- c) имеет ту же единицу измерения, что и случайная величина.
- d) относительной;

16. Укажите, какая из приведенных величин является мерой разброса возможных значений случайной величины вокруг среднего значения:

- 1) Математическое ожидание
- 2) Медиана
- 3) Мода
- 4) Дисперсия
- 5) Корреляция
- 6) Ковариация

17. Какое из желаемых свойств оценок неизвестного параметра распределения означает, что оценка имеет минимальную дисперсию среди всех возможных статистических оценок неизвестного параметра распределения из некоторого класса:

- 1) Несмещенность
- 2) Эффективность
- 3) Состоятельность

ТЕМА 6. ПАРНЫЙ КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Ключевые слова: корреляционная зависимость, линейная зависимость, нелинейная зависимость, коэффициент корреляции, интервалы изменения, метод наименьших квадратов.

6.1. Понятие о парных связях в экономических процессах

Изучая процессы и явления, исследователи наталкиваются на проблему изучения не отдельных показателей, а их совокупности, взаимного влияния друг на друга и взаимосвязи между собой. При изучении тех или иных явлений признаки (факторы) можно разделить на две группы: зависимые факторы и независимые. Такое деление является чисто условным, так как фактор, являющийся зависимым в одном случае, может стать независимым в другом. Изучая массовые явления, в частности, экономические явления, необходимо логически провести классификацию всех изучаемых признаков (факторов) на независимые и зависимые.

Между социально-экономическими процессами взаимозависимости делятся на два типа:

а) Функциональная зависимость – это полная зависимость, в которой изменению значения одного критерия или нескольких критериев всегда соответствует определенное изменение результата.

б) Корреляционная зависимость – это неполная зависимость, в которой каждому значению факторов в различных условиях соответствуют различные значения результата.

В дальнейшем будем придерживаться следующих обозначений:

i - номер изучаемого фактора, $i \in N$; X_i - изучаемый независимый фактор; Y - изучаемый зависимый фактор. В отдельных ситуациях Y можно

рассчитать как функцию от X_i : $Y = f(X_1, X_2, X_i, \dots, X_n)$. В этом случае говорят, что Y и множество X_i связаны функциональной зависимостью. Функция $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ должна включать в себя еще случайную переменную " U ":
 $Y = f(X_1, X_2, X_i, \dots, X_n, U)$.

Закономерности в экономике проявляются как взаимосвязи между экономическими показателями. Изучая объем выпуска продукции Y на некотором предприятии, естественно полагать, что он зависит от затрат различных видов ресурсов X_i и записать: $Y = f(X_1, X_2, X_i, \dots, X_n)$. Данное соотношение представляет собой модель, которая устанавливает, каким образом переменные связаны между собой. В общем случае связь между зависимой переменной Y (результативным показателем) и n независимыми переменными можно записать: $Y = f(X_1, X_2, X_i, \dots, X_n)$.

Независимые переменные в эконометрике называют также факторными, объясняющими переменными, регрессорами.

Если каждому набору $\bar{X} = (X_1, X_2, X_i, \dots, X_n)$ соответствует одно определенное значение Y , то связь называется функциональной. Характерной особенностью функциональной связи является то, что в каждом отдельном случае известен полный перечень факторов, определяющих величину результативного показателя, а также точный механизм этого влияния, выраженный определенным уравнением. Функциональные связи имеют место и в экономике (например, связь между оплатой труда Y и выработкой X при простой сдельной оплате труда).

Однако в большинстве случаев экономические величины складываются под влиянием множества факторов, одни из которых действуют объективно, т.е. независимо от воли людей, другие являются результатом целенаправленной деятельности, не исключены и чисто случайные воздействия. Кроме того, при изучении экономических

зависимостей мы чаще всего имеем дело с неполной информацией: не известен полный перечень факторов, влияющих на исследуемый показатель, эти факторы могут быть качественно неоднородны и их действие проявляется неоднозначно.

Значения зависимой переменной в этом случае подвержены случайному разбросу, они не могут быть предсказаны точно, а только с определенной вероятностью. Такие связи называются стохастическими и могут быть записаны следующим образом:

$$Y = f(X_1, X_2, X_i, \dots, X_n) + \varepsilon,$$

где $X_i, i = \overline{1, n}$ – независимые (факторные, объясняющие) переменные;

$f(X_1, X_2, X_i, \dots, X_n)$ – часть результативного показателя, сформировавшаяся под влиянием учтенных факторных признаков, находящихся в стохастической связи с Y .

ε - часть результативного показателя, возникшая вследствие действия неконтролируемых или неучтенных факторов, а также неточности измерения учтенных переменных) $X_i (i = \overline{1, n})$ и прочих случайных явлений.

Таким образом, главным допущением при построении эконометрических моделей является выполнение требования случайности изучаемой величины.

Наличие зависимости между изучаемыми показателями устанавливается обычно не математическим путем, а в результате качественного анализа явления, позволяющего вскрыть его внутреннюю сущность и порождающие его причины. *Задача эконометрического моделирования состоит в установлении вида функции, т.е. отыскании такого уравнения, которое наилучшим образом соответствует характеру изучаемой связи.* Для выбора наилучшего уравнения связи осуществляется ее количественное измерение и оценка надежности, для чего используются методы дисперсионного анализа.

6.2. Коэффициент ковариации и корреляции. Методы их расчета

Частным случаем статистической зависимости является **корреляционная зависимость**.

Корреляционная зависимость – это связь, при которой каждому значению независимой переменной X соответствует определенное математическое ожидание (среднее значение) зависимой переменной Y .

Корреляционная связь является «неполной» зависимостью, которая проявляется не в каждом отдельном случае, а только в средних величинах при достаточно большом числе случаев.

Наиболее разработанной в эконометрике является методология **парной линейной корреляции**, рассматривающая влияние вариации переменной X на переменную Y и представляющая собой однофакторный корреляционный и регрессионный анализ.

Корреляционный анализ – это раздел математической статистики, посвященный изучению взаимосвязей между случайными величинами.

Корреляция – это статистическая зависимость между случайными величинами, при которой изменение одной из случайных величин приводит к изменению математического ожидания другой.

Теснота связи количественно выражается величиной коэффициентов корреляции. Построение коэффициентов корреляции основано на сумме произведений отклонений индивидуальных значений признаков x_i и y_i от их средних значений \bar{x} и \bar{y} :

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Эта величина, деленная на число единиц совокупности n называется **ковариацией**.⁷

Формула определения ковариации:

⁷Эконометрика. Учебник/ Под ред. И.И.Елисеевой. - М.: Финансы и статистика, 2013. с. 48

$$\text{cov}(y, x) = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}$$

Формула расчета линейного (парного) коэффициента корреляции:

$$r_{yx} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} * \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}$$

где σ_x, σ_y - среднеквадратические отклонения случайных величин x и y .

Определяются:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n}}$$

Коэффициент корреляции принимает значение от -1 до +1. Положительное значение коэффициента свидетельствует о наличии прямой связи, отрицательное – обратной связи.

Если $r_{yx} = \pm 1$, корреляционная связь представляется линейной функциональной зависимостью.

При $r_{yx} = 0$ линейная корреляционная связь отсутствует.

Существуют следующие границы изменения коэффициента корреляции:

- 1) от 0 до $|\pm 0,3|$ - связь практически отсутствует
- 2) от $|\pm 0,3|$ до $|\pm 0,5|$ - связь слабая
- 3) от $|\pm 0,5|$ до $|\pm 0,7|$ - связь умеренная
- 4) от $|\pm 0,7|$ до $|\pm 1|$ - связь сильная.

Мерой линейной зависимости двух случайных величин является ковариация этих величин, определяемая выражением:

$$\text{Cov}(x, y) = S_{xy} = \frac{\sum(y_i - \bar{y})(\tilde{o}_i - \bar{x})}{n}$$

Тесноту совместного влияния факторов на результат оценивает *индекс множественной корреляции*:

$$R_{y x_1 x_2 \dots x_p} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{y_{ост}}^2}{\sigma_y^2}}$$

Значение индекса множественной корреляции лежит в пределах от 0 до 1 и должно быть больше или равно максимальному парному индексу корреляции:

$$R_{yx_1, x_2, \dots, x_p} \geq r_{yx_i}, \quad (i = \overline{1, p}).$$

Индекс множественной корреляции для уравнения в стандартизованном масштабе: можно записать в виде

$$R_{yx_1, x_2, \dots, x_p} = \sqrt{\sum \beta_i r_{yx_i}}.$$

При линейной зависимости *коэффициент множественной корреляции* можно определить через матрицу парных коэффициентов корреляции:

$$R_{yx_1, x_2, \dots, x_p} = \sqrt{1 - \frac{\Delta r}{\Delta r_{11}}},$$

где

$$\Delta r = \begin{vmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} & \dots & r_{yx_p} \\ r_{yx_1} & 1 & r_{x_1 x_2} & \dots & r_{x_1 x_p} \\ r_{yx_2} & r_{yx_1} & 1 & \dots & r_{x_2 x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{yx_p} & r_{x_p x_1} & r_{x_p x_2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

- определитель матрицы парных коэффициентов корреляции.⁸

Частные коэффициенты корреляции, измеряющие влияние на фактора x_i при неизменном уровне других факторов, можно определить по формуле

$$r_{yx_i \cdot x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_p} = \sqrt{1 - \frac{1 - R_{yx_i \cdot x_1 x_2 \dots x_i \dots x_p}^2}{1 - R_{yx_i \cdot x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_p}^2}}.$$

или по рекуррентной формуле:

$$r_{yx_i \cdot x_1 x_2 \dots x_p} = \frac{r_{yx_i \cdot x_1 x_2 \dots x_{p-1}} - r_{yx_p \cdot x_1 x_2 \dots x_{p-1}} r_{x_i x_p \cdot x_1 x_2 \dots x_{p-1}}}{\sqrt{(1 - r_{yx_i \cdot x_1 x_2 \dots x_{p-1}}^2)(1 - r_{x_i x_p \cdot x_1 x_2 \dots x_{p-1}}^2)}}.$$

⁸Эконометрика. Учебник/ Под ред. И.И.Елисеевой. - М.: Финансы и статистика, 2003. стр. 97

Частные коэффициенты корреляции изменяются в пределах от -1 до 1.

Качество построенной модели в целом оценивает коэффициент детерминации. *Коэффициент множественной детерминации* рассчитывается как квадрат индекса множественной корреляции:

$$R^2_{y, x_1, x_2, \dots, x_p}.$$

6.3. Понятие о парной линейной регрессии (эконометрическая модель).

Коэффициенты регрессии

Корреляционный анализ может дать представление о степени связи, но не о ее виде. Для анализа воздействия на результативный признак одного или нескольких факторных признаков используется регрессионный анализ. Если выявленные на основе корреляционного анализа связи между изучаемыми признаками окажутся *существенными* (т.е. достаточно сильными и статистически значимыми), то целесообразно найти их математическое выражение в виде регрессионной модели и оценить ее адекватность.

В парной регрессии выбор вида аналитической зависимости может быть осуществлен тремя методами:

- *графическим* (на основе анализа поля корреляции);
- *аналитическим* (на основе изучения теоретической природы связи между исследуемыми признаками);
- *экспериментальным* (построение нескольких моделей различного вида с выбором наилучшей, согласно применяемому критерию качества).

Адекватная регрессионная модель может использоваться для прогнозирования изучаемого явления или показателя.

Регрессионный анализ заключается в подборе соответствующей аппроксимирующей функции для имеющегося набора наблюдений.

Аппроксимация (от лат. *approximo* – приближаюсь) – это приближенное выражение эмпирических данных в виде функции.

Полученная функциональная зависимость называется **уравнением регрессии**, или просто **регрессией**.

Регрессия – это зависимость *среднего* значения какого-либо признака от *среднего* значения других (одного или нескольких) признаков.

Парной регрессией называется уравнение связи двух переменных y и x вида:

$$y = f(x),$$

где y – зависимая переменная (результативный признак); x – независимая, объясняющая переменная (признак-фактор). Различают линейные и нелинейные регрессии.

Линейная регрессия описывается уравнением (рис.6.1):

$y = f(x) + \varepsilon$	
↓	↓
часть значения y , которая объяснена уравнением регрессии	Необъясненная часть значения y (или возмущений)

Рис. 6.1. Уравнение парной регрессии⁹

Экономический смысл ε :

1) Невключение объясняющих переменных в уравнение. На самом деле на переменную Y влияет не только переменная X , но и ряд других переменных, которые не учтены в модели по следующим причинам:

- мы знаем, что другая переменная влияет, но не можем ее учесть, потому как не знаем, как измерить (психологический фактор, например);
- существуют факторы, которые мы знаем, как измерить, но влияние их на Y так слабо, что их не стоит учитывать;
- существенные переменные, но из-за отсутствия опыта или знаний мы их таковыми не считаем.

⁹uslide.ru/ekonomika/16860-parnaya-regressiya-i-korrelyaciya-v-ekonometriches.html

2) Неправильная функциональная спецификация. Функциональное соотношение между Y и X может быть определено неправильно. Например, мы предположили линейную зависимость, а она может быть более сложной.

3) Ошибки наблюдений и измерений.

Различают линейные и нелинейные регрессии. Линейная регрессия: $y = a + bx + \varepsilon$. Нелинейные регрессии делятся на два класса: регрессии, нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам, и регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам. Регрессии, нелинейные по объясняющим переменным:

- полиномы разных степеней - $y = a + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \varepsilon$;
- равносторонняя гипербола - $y = a + \frac{x}{b} + \varepsilon$.

Регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам:

- степенная - $y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$;
- показательная - $y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$;
- экспоненциальная - $y = e^{a+bx} \cdot \varepsilon$;
- Логарифмическая - $y = a_0 + a_1x + a_2 \lg X + \varepsilon$.

6.3. Расчет коэффициентов регрессии с помощью метода наименьших квадратов. Экономический смысл коэффициентов регрессии

Построение уравнения регрессии сводится к оценке ее параметров. Для оценки параметров регрессий, линейных по параметрам, используют метод наименьших квадратов (МНК). МНК позволяет получить такие оценки параметров, при которых сумма квадратов отклонений

фактических значений результативного признака y от теоретических \hat{y}_x минимальна, т.е.

$$\sum (y - y_x)^2 \rightarrow \min .$$

Для линейных и нелинейных уравнений, приводимых к линейным, решается следующая система относительно, a и b :

$$\begin{cases} na + b \sum x = \sum y \\ a \sum x + b \sum x^2 = \sum yx \end{cases} .$$

Можно воспользоваться готовыми формулами, которые вытекают из этой системы:

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}, b = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x^2} = \frac{\overline{yx} - \bar{y}\bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} .$$

Оценка параметров нелинейных моделей

Зависимость	Формула	Линеаризующее преобразование	Зависимость между параметрами
Гиперболическая	$y = a + \frac{b}{x}$	$y' = y$ $x' = \frac{1}{x}$	$a = a'$ $b = b'$
Логарифмическая	$y = a + b \cdot \ln x$	$y' = y$ $x' = \ln x$	$a = a'$ $b = b'$
Экспоненциальная	$y = e^{a+bx}$	$y' = \ln y$ $x' = x$	$a = a'$ $b = b'$
Степенная	$y = a \cdot x^b$	$y' = \ln y$ $x' = \ln x$	$\ln a = a'$ $b = b'$
Показательная	$y = a \cdot b^x$	$y' = \ln y$ $x' = x$	$\ln a = a'$ $\ln b = b'$

Тесноту связи изучаемых явлений оценивает линейный коэффициент парной корреляции r_{xy} для линейной регрессии ($-1 \leq r_{xy} \leq 1$):

$$r_{xy} = b \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\overline{yx} - \bar{y}\bar{x}}{\sigma_x \sigma_y},$$

а индекс корреляции ρ_{xy} - для нелинейной регрессии ($0 \leq \rho_{xy} \leq 1$):

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{ост}^2}{\sigma_y^2}} = \sqrt{1 - \frac{\sum (y - y_x)^2}{\sum (y - \bar{y})^2}}.$$

Учебное задание

1. Классическая линейная регрессионная модель. Условия Гаусса-Маркова и их интерпретация.
2. Предположение о нормальном распределении случайной составляющей. Числовые характеристики оценок коэффициентов классической линейной регрессионной модели.
3. Теорема Гаусса-Маркова. Парная регрессионная модель. Теоретическая и выборочная регрессии.
4. Экономическая интерпретация случайной составляющей. Проблема выбора регрессионной функции. Диаграмма рассеяния.
5. Парная линейная регрессионная модель (ПЛРМ). Задача оценивания параметров ПЛРМ. Метод наименьших квадратов (МНК) оценки коэффициентов ПЛРМ.
6. Коэффициент корреляции. Примеры подгонки модели линейной связи к реальным данным экономической статистики (модели спроса, расходов и др.). Фиктивная линейная связь. Частная корреляция.

Вопросы для самопроверки.

1. Что такое функциональная зависимость между переменными?
2. Что такое статистическая зависимость?
3. Что такое корреляционная зависимость?
4. Дайте определение независимых переменных.
5. Что такое линия регрессии?
6. Какова основная идея метода наименьших квадратов?
7. Какие меры близости точек к линии регрессии вы знаете?
8. Почему мы называем расчетные коэффициенты линии регрессии «статистическими оценками»?
9. Как выбрать функциональную форму линии регрессии?
10. Формулы записи МНК коэффициента наклона регрессионной прямой.
11. В чем заключается экономический смысл случайной составляющей регрессионного уравнения?
12. Для чего нужен коэффициент корреляции?
13. Как связан коэффициент корреляции и коэффициент наклона линии Регрессии?
14. Перечислите свойства коэффициента корреляции.
15. В каком случае линии регрессии по методу наименьших квадратов не существует?

Тесты для проверки знаний

1. Что изучает корреляционный анализ?
 - a) Взаимосвязи между изменяющимися величинами
 - b) Взаимосвязи между постоянными величинами
 - c) Только два фактора, которые не связаны
 - d) Только убывающие динамические ряды
2. Определите, какой из этих высказываний является моделью

- a) 2010 году населения республики будут жить два раза лучше
- b) Безработицу можно уменьшить
- c) Инфляция - это краткосрочный экономический процесс
- d) Спрос будет снижаться с повышением цен на товары

3. Если расчетное значение критерий Дарбина-Уотсона меньше чем табличное, то

- a) Динамический ряд содержит автокорреляцию
- b) Полученная модель считается надежной
- c) Теснота связи между факторами очень слабая
- d) Динамический ряд содержит авторегрессию

4. Коэффициент корреляции r_{xy} меняется

- a) $0 < r_{xy} < 1$
- b) $-1 < r_{xy} < 1$
- c) $-1 < r_{xy} < 0$
- d) $0 < r_{xy} < 10$

5. Величина, равная среднему значению квадрата отклонений отдельных значений признаков от средней арифметической, называется:

- a) Коэффициентов вариации
- b) Коэффициентом ковариации
- c) Коэффициентом корреляции
- d) Дисперсией

6. С помощью критерия Фишера определяется:

- a) Теснота связи между факторами
- b) Надежность прогноза
- c) Степень рассеивания точек

d) Адекватность полученной модели

7. Корреляция - это:

- a) Теснота связи между факторами
- b) Система нормальных уравнений
- c) Отбор факторов по признакам
- d) Показывает надежность полученной модели

8. Критерий Дарбина Уотсона показывает:

- a) Отбор факторов по признакам
- b) Тесноту связи между факторами
- c) Наличие автокорреляции в динамическом ряду
- e) Наличие авторегрессии в динамическом ряду

9. Что минимизируется согласно методу наименьших квадратов?

- a) $-\sum (y_i - \hat{y}_i)^2$
- b) $-\sum |y_i - \hat{y}_i|$
- c) $-\sum (y_i - \hat{y}_i)$
- d) $-\sum (y_i - \hat{y}_i)^2$

10. Укажите неверное утверждение относительно метода наименьших квадратов (МНК) оценки линейной регрессионной модели:

- a) МНК минимизирует сумму квадратов остатков;
- b) МНК стоит линию регрессии, проходящую через «центр облака наблюдений»;
- c) МНК максимизирует сумму квадратов остатков;

d) МНК строит линию регрессии, которая близка одновременно ко всем точкам облака наблюдений.

11. Регрессия – это

- a) Теснота связи между независимых переменных
- b) Зависимость между независимыми величинами
- c) Зависимость среднего значения какой-либо величины от некоторой другой величины
- d) Зависимость предельного значения стохастической величины от некоторой другой величины

12. Косвенный метод наименьших квадратов применим для

- a) неидентифицируемой системы уравнений
- b) идентифицируемой системы одновременных уравнений
- c) любой системы одновременных уравнений
- d) неидентифицируемой системы рекурсивных уравнений

Решение типовых задач

Задача 1.1. По семи региональным территориям за 2018 год известны значения двух признаков (табл. 1.1).

Требуется:

- для характеристики зависимости y от x рассчитать параметры;
- оценить модель через ошибку аппроксимации A и F -критерий.

Решение. Для расчета параметров, a и b линейной регрессии $y = a + bx$ решаем систему нормальных уравнений относительно, a и b :

$$\begin{cases} na + b \sum x = \sum y, \\ a \sum x + b \sum x^2 = \sum yx. \end{cases}$$

Таблица 1.1

Район	Расходы на покупку продовольственных товаров в общих расходах, у %	Среднедневная заработная плата одного работающего, x, у.е
1	68,8	45,1
2	61,2	59
3	59,9	57,2
4	56,7	61,8
5	55	58,8
6	54,3	47,2

По исходным данным рассчитываем $\sum y, \sum x, \sum yx, \sum x^2, \sum y^2$
(табл. 1.2)

$$b = \frac{\overline{yx} - \bar{y}\bar{x}}{\sigma_x^2} = \frac{3166,05 - 57,89 \cdot 54,9}{34,33} = -0,35,$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 57,89 + 0,35 \cdot 54,9 = 76,88.$$

Уравнение регрессии: $y = 76,88 - 0,35x$.

С увеличением среднедневной заработной платы на одну условную единицу (у. е.) доля расходов на покупку продовольственных товаров снижается в среднем на 0,35% пункта.

Рассчитаем линейный коэффициент парной корреляции:

$$r_{xy} = b \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = -0,35 \frac{5,9}{5,7} = -0,362.$$

Таблица 1.2

№ п/п	y	x	yx	x^2	y^2	\hat{y}_x	$y - \hat{y}_x$	A_i
1	68,8	45,1	3102,88	2034,01	4733,44	61,3	7,5	10,9
2	61,2	59,0	3610,80	3481,00	3745,44	56,5	4,7	7,7
3	59,9	57,2	3426,28	3271,84	3588,01	57,1	2,8	4,7
4	56,7	61,8	3504,06	3819,24	3214,89	55,5	1,2	2,1
5	55,0	58,8	3234,00	3457,44	3025,00	56,5	-1,5	2,7
6	54,3	47,2	2562,06	2227,84	2948,49	60,5	-6,2	11,4
7	49,3	55,2	2721,36	3047,04	2430,49	57,8	-8,5	17,2
Итого	405,2	384,2	22162,34	21338,41	23685,76	405,2	0,0	56,7
Среднее значение	57,89	54,9	3166,05	3048,34	3383,68	-	-	8,1
σ	5,7	5,9	-	-	-	-	-	-
σ^2	32,43	34,33	-	-	-	-	-	-

Связь умеренная, обратная.

Определим коэффициент детерминации:

$$r_{xy}^2 = (-0,362)^2 = 0,131.$$

Вариация результата на 13,1% объясняется вариацией фактора x .

Подставляя в уравнение регрессии фактические значения x , определим теоретические (расчетные) значения \hat{y}_x .

Найдем величину средней ошибки аппроксимации \bar{A} :

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum A_i = \frac{1}{n} \sum \left| \frac{y - \hat{y}}{y} \right| \cdot 100 = \frac{56,7}{7} = 8,1\%.$$

В среднем расчетные значения отклоняются от фактических на 8,1%.

Рассчитаем F -критерий:

$$F_{\text{факт}} = \frac{0,127}{0,873} \cdot 5 = 0,7.$$

Полученное значение указывает на необходимость применять гипотезу H_0 о случайной природе выявленной зависимости, т. к. $F_{\text{факт}} < F_{\text{табл.}} = 6,61$ (табличные значения F -критерия приведены в Приложении).

Задача 1.2. По территориям региона приводятся данные (табл. 1.3).

Таблица 1.3

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум Одного трудоспособного в месяц у.е	Среднемесячная зарботная плата у.е
1	78	133
2	82	148
3	87	134
4	79	154
5	89	162
6	106	195
7	67	139
8	88	158
9	73	152
10	87	162
11	76	159
12	115	173

Требуется:

- построить линейное уравнение парной регрессии y от x ;
- рассчитать линейный коэффициент парной корреляции и среднюю ошибку аппроксимации.

Решение. Для расчета параметров уравнения линейной регрессии строим расчетную табл. 1.4.

$$b = \frac{\overline{yx} - \bar{y}\bar{x}}{\sum \bar{x}^2 - (\bar{x})^2} = \frac{13484 - 85,6 \cdot 155,8}{7492,3 - 85,6^2} = \frac{151,8}{164,94} = 0,92,$$
$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 155,89 - 0,92 \cdot 85,6 = 77,0.$$

Таблица 1.4

№ п/п	x	y	yx	x^2	y^2	\hat{y}_x	$y - \hat{y}_x$	A_i
1	78	133	10374	6084	17689	149	-16	12,0
2	82	148	12136	6724	21904	152	-4	2,7
3	87	134	11658	7569	17956	157	-23	17,2
4	79	154	12166	6241	23716	150	4	2,6
5	89	162	14418	7921	26244	159	3	1,9
6	106	195	20670	11236	38025	174	21	10,8
7	67	139	9313	4489	19321	139	0	0,0
8	88	158	13904	7744	24964	158	0	0,0
9	73	152	11096	5329	23104	144	8	5,3
10	87	162	14094	7569	26244	157	5	3,1
11	76	159	12084	5776	25281	147	12	7,5
12	115	173	19895	13225	29929	183	-10	5,8
Итого	1027	1869	161808	89907	294377	1869	0	68,8
Среднее значение	85,6	155,8	13484,0	7492,3	24531,4	-	-	5,7
σ	12,95	16,53	-	-	-	-	-	-
σ^2	167,7	273,4	-	-	-	-	-	-

Получено уравнение регрессии: $y = 77,0 + 0,92x$.

С увеличением среднедушевого прожиточного минимума на одну у. е. среднедневная заработная плата возрастет в среднем на 0,92 у. е.

Тесноту линейной связи оценит коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = b \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0,92 \frac{12,95}{16,53} = 0,721; r_{xy}^2 = 0,52.$$

Это означает, что 52% вариации заработной платы (y) объясняется вариацией фактора x – среднедушевого прожиточного минимума.

Качество модели определяет средняя ошибка аппроксимации:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum A_i = \frac{68,9}{12} = 5,7\%.$$

Качество построенной модели хорошее, так как A не превышает 8–10%.

Задача 1.3. По группе предприятий, производящих однородную продукцию, известно, как зависит себестоимость единицы продукции y от факторов, приведенных в табл. 1.5.

Таблица 1.5

Признак-фактор	Уравнение парной регрессии	Среднее значение фактора
Объем производства, x_1 , млн с.	$\hat{y}_{x_1} = 0,65 + 58,85 \cdot 1/x_1$	$\bar{x}_1 = 2,55$
Трудоемкость единицы продукции, x_2 , чел.-ч.	$\hat{y}_{x_2} = 9,50 + 9,85x_2$	$\bar{x}_2 = 1,58$
Оптовая цена за 1 т энергоносителя, x_3 , млн. с.	$\hat{y}_{x_3} = 15,75 \cdot x_3^{1,55}$	$\bar{x}_3 = 1,53$
Доля прибыли, изымаемой государством, x_4 , %	$\hat{y}_{x_4} = 14,07 \cdot 1,01^{x_4}$	$\bar{x}_4 = 28,35$

Требуется:

- определить с помощью коэффициентов эластичности силу влияния каждого фактора на результат;
- ранжировать факторы по силе влияния.

Решение. Для уравнения равносторонней гиперболы

Для формирования уровня себестоимости продукции группы предприятий первоочередное значение имеют цены на энергоносители;

В гораздо меньшей степени влияют трудоемкость продукции и отчисляемая часть прибыли.

$$\hat{y}_{x_1} = 0,65 + 58,85 \cdot \frac{1}{x_1} :$$

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_{yx_1} &= f'(x_1) \frac{\bar{x}_1}{\bar{y}} = -\frac{b}{\bar{x}_1^2} \cdot \frac{\bar{x}_1}{a + b/\bar{x}_1} = -\frac{b}{a\bar{x}_1 + b} = \\ &= -\frac{58,85}{0,65 \cdot 2,55 + 58,85} = -0,973\% . \end{aligned}$$

Для уравнения прямой $\hat{y}_{x_2} = 9,50 + 9,85x_2$:

$$\bar{\Theta}_{yx_2} = f'(x_2) \frac{\bar{x}_2}{\bar{y}} = \frac{b\bar{x}_2}{a + b\bar{x}_2} = \frac{9,85 \cdot 1,58}{9,50 + 9,85 \cdot 1,58} = 0,62\% .$$

Фактором снижения себестоимости выступает размер производства: с ростом его на 1% себестоимость единицы продукции снижается на – 0,973%.

Для уравнения степенной зависимости $\hat{y}_{x_3} = 15,75x_3^{1,55}$:

$$\bar{\Theta}_{yx_3} = f'(x_3) \frac{\bar{x}_3}{\bar{y}} = ab\bar{x}_3^{b-1} \frac{\bar{x}_3}{a\bar{x}_3^b} = b = 1,55\% .$$

Для уравнения показательной зависимости $\hat{y}_{x_4} = 14,07 \cdot 1,01^{x_4}$:

$$\bar{\Theta}_{yx_4} = f'(x_4) \frac{\bar{x}_4}{\bar{y}} = ab\bar{x}_4 \ln b \frac{\bar{x}_4}{a \cdot b\bar{x}_4} = \ln b \bar{x}_4 = \ln 1,01 \cdot 26,35 = 0,26\% .$$

Сравнивая значения $\bar{\Theta}_{yx_i}$, ранжируем x_j по силе их влияния на себестоимость единицы продукции:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \bar{\Theta}_{yx_3} = 1,55\% , & \text{б) } \bar{\Theta}_{yx_1} = -0,973\% , & \text{в) } \bar{\Theta}_{yx_2} = 0,62\% , \\ \text{г) } \bar{\Theta}_{yx_4} = 0,26\% . & & \end{array}$$

1.3. Решение с помощью ППП Excel

Задача 1.4. По территориям региона приводятся данные (табл. 1.6).

1) Встроенная статистическая функция **ЛИНЕЙН** определяет параметры линейной регрессии $y = a + bx$. Порядок вычисления следующий:

1. Введите исходные данные или откройте существующий файл, содержащий анализируемые данные;

Таблица 1.6

Номер региона	Среднедушевой прожиточный минимум одного трудоспособного в месяц у.е	Среднемесячная заработная плата у.е
1	78	133
2	82	148
3	87	134
4	79	154
5	89	162
6	106	195
7	67	139
8	88	158
9	73	152
10	87	162
11	76	159
12	115	173

2. Выделите область пустых ячеек 5×2 (5 строк, 2 столбца) для вывода результатов регрессионной статистики или область 1×2 получения только оценок коэффициентов регрессии;

3. Активизируйте Мастер функций любым из способов:

а) в главном меню выберите **Вставка/Функция**;

б) на панели инструментов Стандартная щелкните по кнопке Вставка Функции;

4. В окне категория (рис. 6.1) выберите Статистические, в окне функция – **ЛИНЕЙН**. Щелкните по кнопке ОК;

5. Заполните аргументы функции (рис. 6.2):

Известные_значения_u – диапазон, содержащий данные результативного признака;

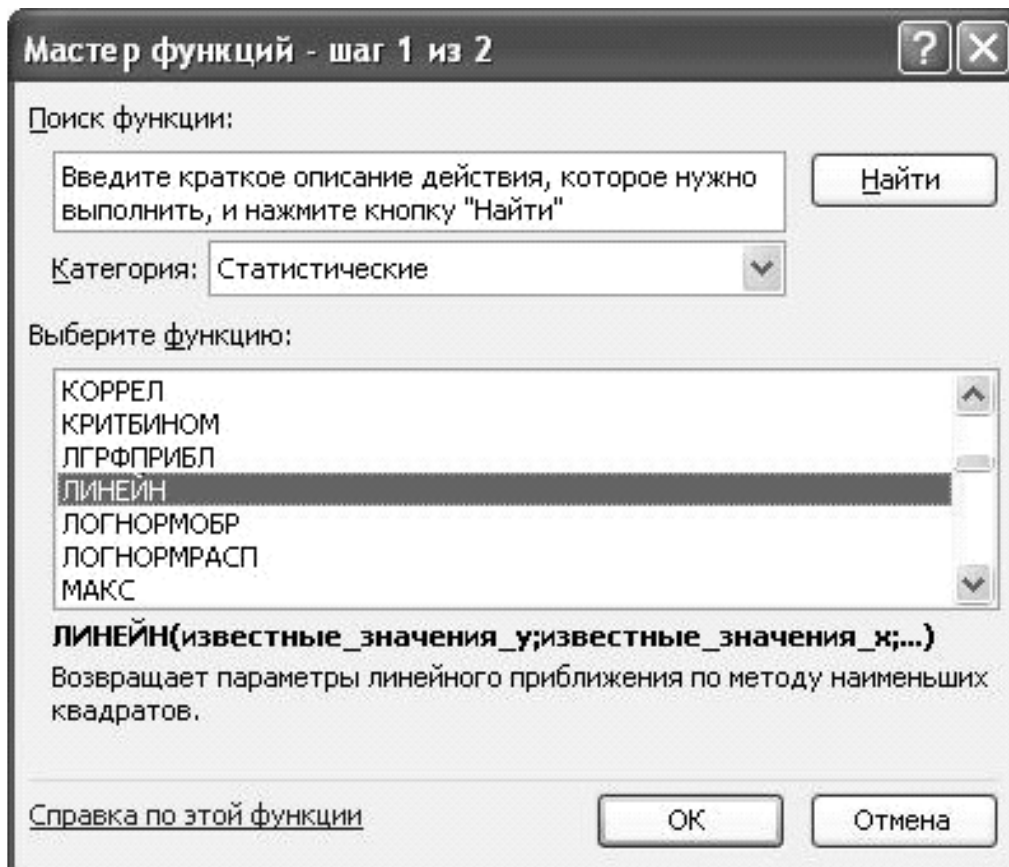


Рис. 6.2. Диалоговое окно Мастер функций

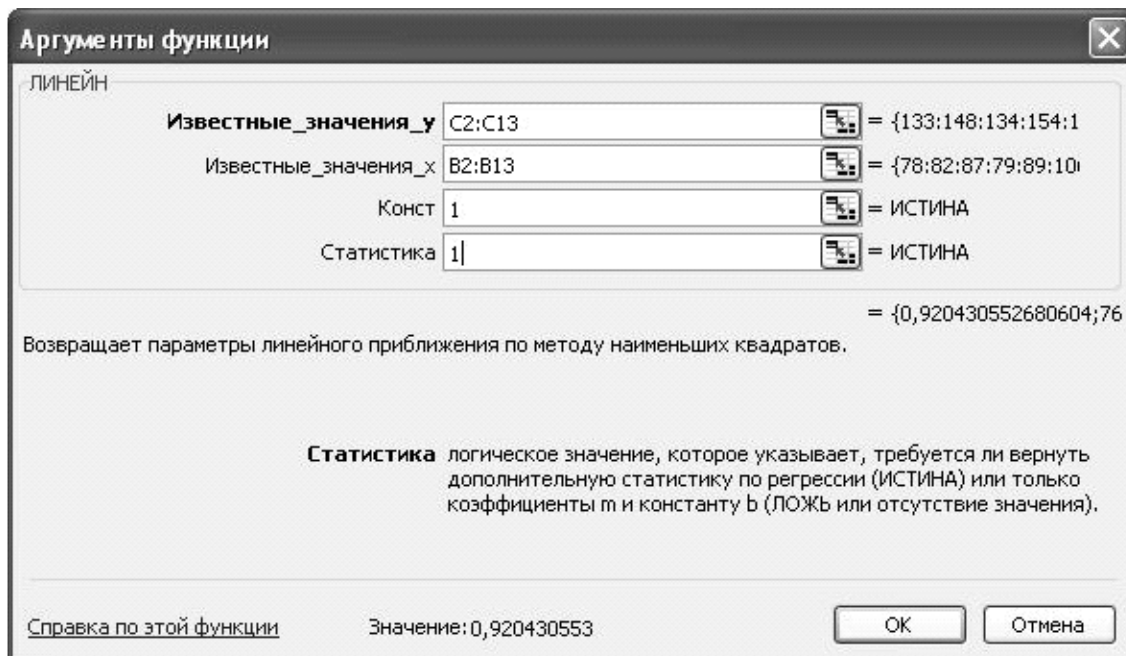


Рис. 6.3. Диалоговое окно ввода аргументов функции ЛИНЕЙН

Известные_значения_x – диапазон, содержащий данные факторов независимого признака;

Константа – логическое значение, которое указывает на наличие или отсутствие свободного члена в уравнении; если Константа = 1, то свободный член рассчитывается обычным образом, Константа = 0, то свободный член равен 0;

Статистика – логическое значение, которое указывает, выводить дополнительную информацию по регрессионному анализу или нет.

Если Статистика = 1, то дополнительная информация выводится, если Статистика = 0, то выводятся только оценки параметров уравнения.

Щелкните по кнопке ОК;

6. В левой верхней ячейке выделенной области появится первый элемент итоговой таблицы. Чтобы раскрыть всю таблицу, нажмите на клавишу < F2 > , а затем – на комбинацию клавиш < CTRL > + < SHIFT > + < ENTER > .

Дополнительная регрессионная статистика будет выводиться в порядке, указанном в следующей схеме:

Значение коэффициента <i>b</i>	Значение коэффициента <i>a</i>
Среднеквадратическое отклонение <i>b</i>	Среднеквадратическое отклонение <i>a</i>
Коэффициент детерминации	Среднеквадратическое отклонение <i>y</i>
<i>F</i> -статистика	Число степеней свободы
Регрессионная сумма квадратов	Остаточная сумма квадратов

Для данных из задачи 6.3 результат вычисления функции ЛИНЕЙН приведен на рис.6.3.

2) С помощью инструмента анализа данных Регрессия, помимо результатов регрессионной статистики, можно получить остатки и графики подбора линии регрессии и остатков. Порядок действий следующий:

1. Проверьте доступ к пакету анализа. В главном меню последовательно выберите Сервис/Настройки. Установите флажок Пакет анализа (рис.6.5).

2. В главном меню выберите Сервис/Анализ данных/Регрессия.

Щелкните по кнопке ОК.

3. Заполните диалоговое окно ввода данных и параметров вывода (рис. 6.6):

Входной интервал Y – диапазон, содержащий данные результативного признака;

	A	B	C	D	E	F	G
	Территории региона	Прожиточный минимум - x	Среднемесячная зарплата - y		Линейн		
1	Территории региона	Прожиточный минимум - x	Среднемесячная зарплата - y				
2	1	78	133		0,920431	76,97649	
3	2	82	148		0,279716	24,21156	
4	3	87	134		0,519877	12,54959	
5	4	79	154		10,82801	10	
6	5	89	162		1705,328	1574,922	
7	6	106	195				
8	7	67	139				
9	8	88	158				
10	9	73	152				
11	10	87	162				
12	11	76	159				
13	12	115	173				
14							
15							
16							
17							
18							

Рис. 6.4. Результат вычисления функции ЛИНЕЙН

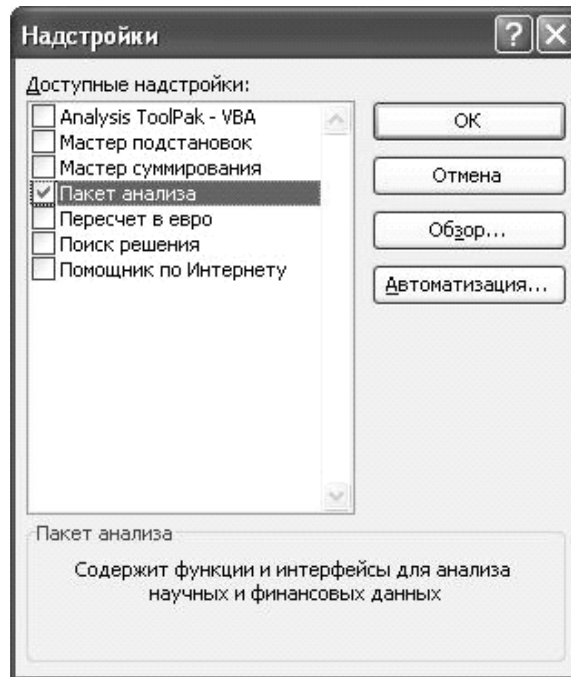


Рис. 6.5. Подключение надстройки Пакет анализа

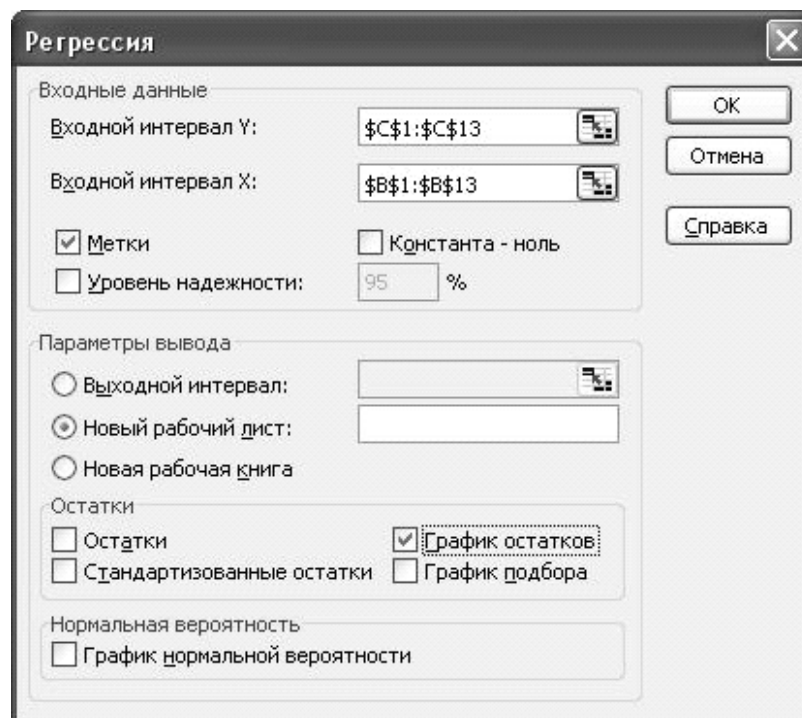


Рис. 6.6. Диалоговое окно ввода параметров инструмента Регрессия

Входной интервал X – диапазон, содержащий данные факторов независимого признака;

Метки – флажок, который указывает, содержит ли первая строка названия столбцов или нет;

Константа – ноль – флажок, указывающий на наличие или отсутствие свободного члена в уравнении;

Выходной интервал – достаточно указать левую верхнюю ячейку будущего диапазона;

Новый рабочий лист – можно задать произвольное имя нового листа.

Если необходимо получить информацию и графики остатков, установите соответствующие флажки в диалоговом окне. Щелкните по кнопке ОК. Результаты регрессионного анализа для данных из задачи 6.5 приведены на рис. 6.7.

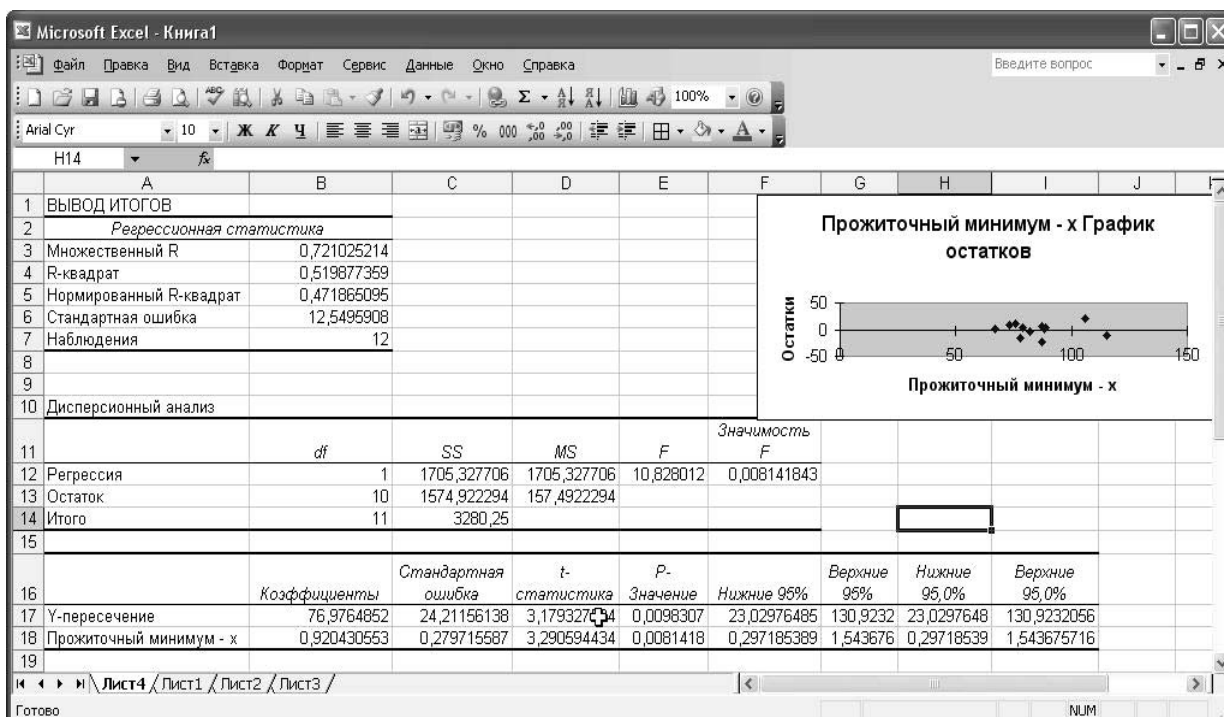


Рис. 6.7. Результат применения инструмента Регрессия

Контрольные задания

Задача 1. Для трех видов продукции A , B , C модели зависимости удельных постоянных расходов от объема выпускаемой продукции выглядят следующим образом:

$$Y_A = 500, Y_B = 85 + 0,75x, Y_C = 40x^{0,5}.$$

Задание:

- определите коэффициенты эластичности по каждому виду продукции и поясните их смысл;
- сравните при $x = 1000$ эластичность затрат для продукции B и C ;
- определите, каким должен быть объем выпускаемой продукции, чтобы коэффициенты эластичности для продукции B и C были равны.

Задача 2. Исследуя спрос на продукцию марки N , аналитический отдел компании АБС, по данным, собранным по 19 торговым точкам компании, выявил следующую зависимость: $\ln y = 15,0 - 0,85 \ln x$, где y – объем продаж телевизоров марки N в отдельной торговой точке; x – средняя цена телевизора в данной торговой точке.

Задание. До проведения этого исследования администрация компании предполагала, что эластичность спроса по цене для продукции марки N составляет 0,9. Подтвердилось ли предположение администрации результатами исследования?

Задача 3. По территориям района Узбекистана известны данные за 2018 г. (табл. 1.7).

Задание:

- рассчитайте параметры уравнения линейной парной регрессии;
- оцените тесноту связи с помощью показателей корреляции и детерминации;

Таблица 1.7

Район, обл.	Средний размер назначенных ежемесячных пенсий, <i>у, сум</i>	Прожиточный минимум в среднем на одного пенсионера в месяц, <i>х, сум</i>
Ташкент	350 000	280 000
Ташкент обл.	285 000	220 000
Андижан	210 000	190 000
Бухара	260 000	185 000
Наманган	280 000	210 000
Навай	290 000	220 000
Фергана	320 000	195 000
Сурхандария	310 000	270 000
Кашкадария	300 000	250 000
Джиззах	285 000	220 000
Самарканд	275 000	231 000
Сирдария	311 000	290 000

- дайте с помощью среднего коэффициента эластичности сравнительную оценку силы связи фактора с результатом;
- оцените с помощью средней ошибки аппроксимации качество уравнения.

Задача 4. По территориям районы Ташкента известны данные за 2018 год. (табл. 1.8)

Задание:

- рассчитайте параметры уравнения линейной парной регрессии;
- оцените тесноту связи с помощью показателей корреляции и детерминации;

Таблица 1.8

Район, обл.	Потребительские расходы на душу населения, у, сум.	Денежные доходы на душу населения, х, сум.
Алмазарский	450 000	520 000
Бектемирский	385 000	420 000
Новзинский	420 000	460 000
Шайхантахурский	410 000	450 000
Юнусабадский	395 000	470 000
Сергелийский	410 000	445 000
Мирабадский	405 000	465 000
Учтепинский	425 000	445 000

- дайте с помощью среднего коэффициента эластичности сравнительную оценку силы связи фактора с результатом;
- оцените с помощью средней ошибки аппроксимации качество уравнения.

ТЕМА 7. НЕЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Ключевые слова: нелинейная регрессия, коэффициенты нелинейной модели, линейная и нелинейная модели, коэффициент эластичности

7.1. Модели нелинейной регрессии

Линейные регрессионные модели, рассмотренные в предыдущих темах, обладают тем свойством, что они *линейны по переменным* (переменные входят в модель в первой степени) и *линейны по параметрам* (параметры выступают в качестве коэффициентов при переменных). Однако не все экономические зависимости можно выразить или достаточно адекватно приблизить линейными функциями.

Многие экономические зависимости не являются линейными по своей сути, поэтому использование для их изучения линейных моделей может привести к неадекватным результатам. Так при исследовании зависимости спроса от цены часто используют логарифмические модели, при анализе издержек от объема выпуска наиболее обоснована полиномиальная (кубическая) модель, а при рассмотрении производственных функций обычно используются степенные модели.

Рассмотрим некоторые (наиболее часто используемые на практике) нелинейные модели, для которых возможно сведение к линейным. Для того чтобы свести нелинейную модель к линейной (*линеаризовать модель*) обычно с помощью некоторых преобразований переменных нелинейную модель представляют в виде линейного соотношения между преобразованными переменными, оценивают коэффициенты этого соотношения и затем, с помощью обратного преобразования, находят оценки параметров исходной нелинейной модели.

Сразу заметим, что не всякая нелинейная модель может быть оценена подобным образом, в ряде случаев невозможно подобрать подходящее преобразование, линеаризующее модель. В этом случае приходится использовать методы нелинейной оптимизации.

Говоря о нелинейных моделях, часто выделяют модели, *нелинейные по переменным* (но *линейные относительно параметров*) и модели, *нелинейные по оцениваемым параметрам*.

Оценка моделей, *нелинейных по объясняющим переменным, но линейных по оцениваемым параметрам* не представляет особой сложности: в этом случае обычно используют *замену переменных* для сведения модели к линейной и оценки параметров с помощью обычного МНК (примененного к модели с замененными переменными).

Таким образом, различают линейные и нелинейные регрессии (рис.6.1). Линейная регрессия: $y = a + bx + \varepsilon$.

Если между экономическими явлениями существуют нелинейные соотношения, то они выражаются с помощью соответствующих нелинейных функций: например, равносторонней гиперболы, параболы второй степени и др.

Как было выше сказано, нелинейные регрессии делятся на два класса: регрессии, нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам, и регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам.

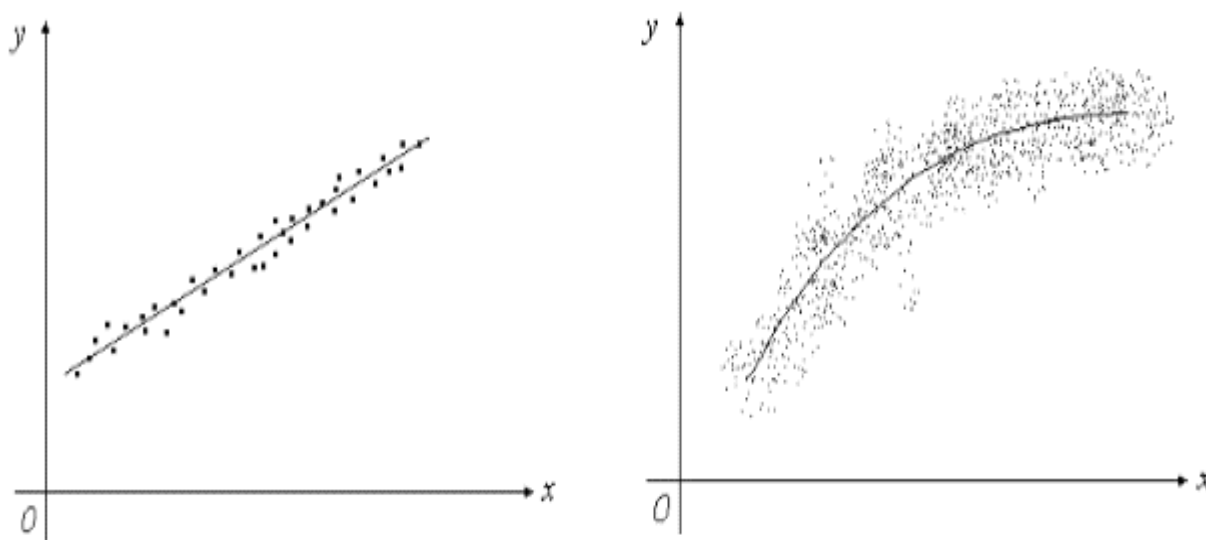


Рис.7.1. Линейная и нелинейная регрессия¹⁰

Регрессии, нелинейные по объясняющим переменным:

- полиномы разных степеней - $y = a + b_1x + b_1x^2 + b_3x^3 + \varepsilon$;
- равносторонняя гипербола - $y = a + \frac{x}{b} + \varepsilon$.

Регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам:

- степенная - $y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$;

¹⁰ Елисеева. И.И., Курышева С.В. и др. Эконометрика: Учебник. - М.: Финансы и статистика, 2007.

- показательная - $y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$;
- экспоненциальная - $y = e^{a+bx} \cdot \varepsilon$;
- логарифмическая - $y = a_0 + a_1 x + a_2 \lg X + \varepsilon$.

7.2. Корреляция для нелинейных зависимостей

Качество нелинейной корреляционной зависимости можно оценить с помощью индекса корреляции:

$$R = \sqrt{\left(1 - \frac{\sigma_{ост}^2}{\sigma_y^2}\right)}$$

где σ_y^2 - общая дисперсия результативного признака y ;

$\sigma_{ост}^2$ - остаточная дисперсия, определяемая уравнением регрессии $\hat{y}_x = f(x)$.

Индекс корреляции может быть также записан в следующем виде:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum (y - \hat{y}_x)^2}{\sum (y - \bar{y})^2}}$$

Индекс корреляции для нелинейных форм связи изменяется в пределах $[0;1]$. Чем ближе его значение к единице, тем сильнее взаимосвязь между изучаемыми переменными.

Если возвести индекс корреляции в квадрат, то полученная величина будет называться индексом детерминации.

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{y}_x - \bar{y})^2}{\sum (y - \bar{y})^2}$$

Индекс детерминации показывает, какую долю от общей дисперсии результативного признака y составляет дисперсия результативного признака y , объясненная регрессионной моделью.

Помимо индексов корреляции и детерминации оценить тесноту связи между переменными x и y позволяют коэффициенты эластичности.

Общий коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов приблизительно изменится результивный признак y при изменении факторного признака на 1%.

$$\bar{\varepsilon} = f'(x) \frac{\bar{x}}{\bar{y}}.$$

Различают обобщающие (средние) и точечные коэффициенты эластичности. Обобщающий коэффициент эластичности рассчитывается для среднего значения \bar{x} и показывает на сколько процентов изменится y относительно своего среднего уровня при росте x на 1% относительно своего среднего уровня.

Точечный коэффициент эластичности рассчитывается для конкретного значения $x = x_0$ и показывает на сколько процентов изменится y относительно уровня $y(x_0)$ при увеличении x на 1% от уровня x_0 .

В зависимости от вида зависимости между x и y формулы расчета коэффициентов эластичности будут меняться. Основные формулы приведены в таблице 7.1.

Только для степенных функций ($y = a \cdot x^b$) коэффициент эластичности представляет собой постоянную независящую от x величину (равную в данном случае параметру b).

Таблица 1.9

Формулы расчета коэффициентов эластичности¹¹

Вид функции	Коэффициент эластичности
$y = f(x)$	

¹¹ <https://studfiles.net/preview/2801762/page:2/>

Линейная $y = b_0 + b_1 \cdot x$	$\varepsilon(x_0) = \frac{b_1 \cdot x_0}{b_0 + b_1 \cdot x_0}$
Парабола $y = a + b \cdot x + c \cdot x^2$	$\varepsilon(x_0) = \frac{(a + 2c \cdot bx_0) \cdot x_0}{a + b \cdot x_0 + c \cdot x_0^2}$
Равносторонняя гипербола $y = a + b/x$	$\varepsilon(x_0) = \frac{-b}{a \cdot x_0 + b}$
Степенная $y = a \cdot x^b$	$\varepsilon(x_0) = b$
Показательная $y = a \cdot b^x$	$\varepsilon(x_0) = x_0 \cdot \ln b$

Именно поэтому степенные функции широко используются в эконометрических исследованиях. Параметр b в таких функциях имеет четкую экономическую интерпретацию - он показывает процентное изменение результата при увеличении фактора на 1%.

Вопросы для контроля

1. Как можно классифицировать уравнение регрессии?
2. Как рассчитывается корреляция для нелинейных зависимостей?
3. Для чего рассчитывается индекс детерминации?
4. Что вы знаете о кривой Филлипса и для решения какой задачи она применяется?
5. Какие методы применяются для выбора вида модели регрессии?
6. Какие функции чаще всего используются для построения уравнения нелинейной регрессии?
7. Какой вид имеет система нормальных уравнений метода наименьших квадратов в случае нелинейной регрессии?

ТЕМА 8. МНОГОФАКТОРНЫЙ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

План

8.1. Методология выбора факторов при построении эконометрической модели.

8.2. Многофакторная эконометрическая (регрессионная) модель. Выбор формы уравнения регрессии.

8.3. Расчет коэффициентов многофакторных эконометрических моделей при помощи метода наименьших квадратов.

8.4. Экономический анализ параметров эконометрических моделей. Расчет коэффициентов эластичности.

Ключевые слова: множественная регрессия, коэффициенты многофакторной модели, линейная и нелинейная модели, коэффициент эластичности

8.1. Методология выбора факторов при построении эконометрической модели

Множественная регрессия – уравнение связи с несколькими независимыми переменными:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

где y – зависимая переменная (результативный признак); X_1, X_2, \dots, X_n – независимые переменные (факторы). Множественная регрессия применяется в ситуациях, когда из множества факторов, влияющих на результативный признак, нельзя выделить один доминирующий фактор и необходимо учитывать влияние нескольких факторов. Основная цель множественной регрессии – построить модель с большим числом факторов, определив при этом влияние каждого из них в отдельности, а также совокупное их воздействие на моделируемый показатель.

Как и в случае парной регрессии, построение уравнения множественной регрессии осуществляется в два этапа:

- спецификация модели;
- оценка параметров выбранной модели.

Спецификация модели включает в себя решение двух задач:

- отбор n факторов x_j , наиболее влияющих на величину Y ;
- выбор вида уравнения регрессии $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Отбор факторов при построении множественной регрессии

Включение в уравнение множественной регрессии того или иного набора факторов связано, прежде всего, с представлением исследователя о природе взаимосвязи моделируемого показателя с другими экономическими явлениями. Факторы, включаемые во множественную регрессию, должны отвечать следующим требованиям:

1. Они должны быть количественно измеримы. Если необходимо включить в модель качественный фактор, не имеющий количественного измерения, то ему нужно придать количественную определенность (например, в модели урожайности качество почвы задается в виде баллов; в модели стоимости объектов недвижимости районам присваиваются ранги);

2. Факторы не должны быть взаимно коррелированы и тем более находиться в точной функциональной связи. Если между факторами существует высокая корреляция, то нельзя определить их изолированное влияние на результативный показатель, и параметры уравнения регрессии оказываются неинтерпретируемыми. Включаемые во множественную регрессию факторы должны объяснить вариацию независимой переменной.

8.2. Многофакторная эконометрическая (регрессионная) модель.

Выбор формы уравнения регрессии

Корреляционный анализ может дать представление о степени связи, но не о ее виде.

Для анализа воздействия на результативный признак одного или нескольких факторных признаков используется регрессионный анализ.

Если выявленные на основе корреляционного анализа связи между изучаемыми признаками окажутся *существенными* (т.е. достаточно сильными и статистически значимыми), то целесообразно найти их математическое выражение в виде регрессионной модели и оценить ее адекватность.

Адекватная регрессионная модель может использоваться для прогнозирования изучаемого явления или показателя.

Регрессионный анализ заключается в подборе соответствующей аппроксимирующей функции для имеющегося набора наблюдений.

Аппроксимация (от лат. *approximo* – приближаюсь) – это приближенное выражение эмпирических данных в виде функции.

Полученная функциональная зависимость называется *уравнением регрессии*, или просто *регрессией*.

Регрессия – это зависимость *среднего* значения какого-либо признака от *среднего* значения других (одного или нескольких) признаков.

Этапы построения уравнения регрессии:

- 1) выбор формулы уравнения регрессии;
- 2) определение параметров выбранного уравнения;
- 3) анализ качества уравнения и проверка адекватности уравнения

эмпирическим данным, совершенствование уравнения.

Множественная регрессия - уравнение связи с несколькими независимыми переменными:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_p),$$

где y - зависимая переменная (результативный признак);

x_1, x_2, \dots, x_p - независимые переменные (факторы).

Как и в парной зависимости, возможны разные виды уравнений множественной регрессии: линейные и нелинейные. Ввиду четкой интерпретации параметров наиболее широко используются линейная и степенная функции.

В уравнении линейной множественной регрессии $y = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_p \cdot x_p$ параметры при x_i называются коэффициентами «чистой» регрессии. Они характеризуют среднее изменение результата с изменением соответствующего фактора на единицу при неизменном значении других факторов, закрепленных на среднем уровне.

Для построения уравнения множественной регрессии чаще используются следующие функции:

Линейная - $y = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_p \cdot x_p + \varepsilon$;

Степенная - $y = a \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot \dots \cdot x_p^{b_p} \cdot \varepsilon$;

Экспонента - $y = e^{a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_p \cdot x_p + \varepsilon}$;

Гипербола - $y = \frac{1}{a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_p \cdot x_p + \varepsilon}$.

Можно использовать и другие функции, приводимые к линейному виду.

8.3. Расчет коэффициентов многофакторных эконометрических моделей при помощи метода наименьших квадратов.

Построение уравнения регрессии сводится к оценке ее параметров. Для оценки параметров уравнения множественной регрессии применяют *метод наименьших квадратов (МНК)*.

Для оценки параметров регрессий, линейных по параметрам, используют метод наименьших квадратов (МНК).

МНК позволяет получить такие оценки параметров, при которых сумма квадратов отклонений фактических значений результативного признака y от теоретических \hat{y}_x минимальна, т.е.

$$\sum (y - \hat{y}_x)^2 \rightarrow \min .$$

Пусть

$$\bar{Y} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \sum [2(Y - a_0 - a_1X - a_2X^2 - \dots - a_nX^n)] \cdot (-1) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \sum [2(Y - a_0 - a_1X - a_2X^2 - \dots - a_nX^n)] \cdot (-X) = 0$$

.....

$$\frac{\partial S}{\partial a_n} = \sum [2(Y - a_0 - a_1X - a_2X^2 - \dots - a_nX^n)] \cdot (-X^n) = 0$$

Для линейных уравнений и нелинейных уравнений, приводимых к линейным, строится следующая система нормальных уравнений, решение которой позволяет получить оценки параметров регрессии:

$$\begin{cases} \sum y = na + b_1 \sum x_1 + b_2 \sum x_2 + \dots + b_p \sum x_p \\ \sum yx_1 = a \sum x_1 + b_1 \sum x_1^2 + b_2 \sum x_1x_2 + \dots + b_p \sum x_1x_p, \\ \dots \\ \sum yx_p = a \sum x_p + b_1 \sum x_1x_p + b_2 \sum x_2x_p + \dots + b_p \sum x_p^2. \end{cases}$$

Для ее решения может быть применён метод определителей:

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta}, \quad b_1 = \frac{\Delta b_1}{\Delta}, \dots, \quad b_p = \frac{\Delta b_p}{\Delta},$$

Где $\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum x_1 & \sum x_2 & \dots & \sum x_p \\ \sum x_1 & \sum x_1^2 & \sum x_2x_1 & \dots & \sum x_px_1 \\ \sum x_2 & \sum x_1x_2 & \sum x_1^2 & \dots & \sum x_px_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_p & \sum x_1x_p & \sum x_2x_p & \dots & \sum x_p^2 \end{vmatrix}$ - определитель системы;

$\Delta a, \Delta b_1, \dots, \Delta b_p$ - частные определители; которые получаются путем замены соответствующего столбца матрицы определителя системы данными левой части системы.

Другой вид уравнения множественной регрессии – *уравнение регрессии в стандартизованном масштабе*:

$$t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} + \dots + \beta_p t_{x_p},$$

где $t_y = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}, t_{x_i} = \frac{x_i - \bar{x}_i}{\sigma_{x_i}}$ - стандартизованные переменные;

β_i - стандартизованные коэффициенты регрессии.

К уравнению множественной регрессии в стандартизованном масштабе применим МНК. Стандартизованные коэффициенты регрессии определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} r_{yx_1} = \beta_1 + \beta_2 r_{x_2 x_1} + \beta_3 r_{x_3 x_1} + \dots + \beta_p r_{x_p x_1}, \\ r_{yx_2} = \beta_1 r_{x_2 x_1} + \beta_2 + \beta_3 r_{x_3 x_2} + \dots + \beta_p r_{x_p x_2}, \\ \dots \\ r_{yx_p} = \beta_1 r_{x_p x_1} + \beta_2 r_{x_p x_2} + \beta_3 r_{x_p x_3} + \dots + \beta_p, \end{cases}$$

Система нормальных уравнений:

а) для полиномов k -той степени:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum t + a_2 \sum t^2 + \dots + a_k \sum t^k = \sum y \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 + a_2 \sum t^3 + \dots + a_k \sum t^{k+1} = \sum yt \\ \dots \\ a_0 \sum t^k + a_1 \sum t^{k+1} + a_2 \sum t^{k+2} + \dots + a_k \sum t^{2k} = \sum yt^k \end{cases}$$

б) для экспоненциальной функции:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum t + a_2 \sum t^2 + \dots + a_k \sum t^k = \sum \ln y \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 + a_2 \sum t^3 + \dots + a_k \sum t^{k+1} = \sum t \ln y \\ \dots \\ a_0 \sum t^k + a_1 \sum t^{k+1} + a_2 \sum t^{k+2} + \dots + a_k \sum t^{2k} = \sum t^k \ln y \end{cases}$$

8.4. Экономический анализ параметров эконометрических моделей.

Расчет коэффициентов эластичности

Связь коэффициентов множественной регрессии β_i со стандартизованными коэффициентами β_i описывается соотношением:

$$b_i = \beta_i \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_i}}$$

Параметр a определяется как $a = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2 - \dots - b_p \bar{x}_p$.

Средние коэффициенты эластичности для линейной регрессии рассчитываются по формуле:

$$\bar{\mathcal{E}}_{yx_j} = b_j \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}}$$

И показывают, на сколько процентов в среднем по совокупности изменится результат y от своей величины при изменении фактора x на 1 % от своего значения при неизменных значениях других факторов. Для расчета *частных коэффициентов эластичности* применяется следующая формула:

$$\mathcal{E}_{yx_i} = b_i \frac{x_i}{y_{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p}}$$

Вопросы для контроля

1. Что такое множественная регрессия?
2. Как формулируется система нормальных уравнений для множественной регрессии?
3. Как вычисляются параметры множественного уравнения регрессии?
4. Выбор формы уравнения регрессии.
5. Метод наименьших квадратов для множественной регрессии.
6. Какие критерии используются для вычисления значимости уравнения регрессии?

7. Экономический анализ параметров эконометрических моделей?
8. Как рассчитываются частные коэффициенты эластичности?

Учебное задание

1. Множественная линейная регрессионная модель (МЛРМ). Метод наименьших квадратов оценки коэффициентов МЛРМ. Матричное выражение МНК-оценок коэффициентов МЛРМ. Геометрическая интерпретация МНК.

2. Нелинейные регрессионные модели. Нелинейные регрессионные модели. Преобразования модели с целью сведения ее к линейной. Предположения о случайном члене.

3. Линейная в логарифмах модель как модель с постоянной эластичностью. Полулогарифмическая модель – модель с постоянными темпами роста.

4. Полиномиальная регрессия. Выбор между моделями. Выбор между линейной и логарифмической моделью.

Вопросы для самопроверки.

1. Система нормальных уравнений для нахождения коэффициентов по МНК.
2. В каком случае линии регрессии по методу наименьших квадратов не существует?
3. Приведите пример модели, в которой присутствует полная мультиколлинеарность.
4. Укажите размерности матриц, участвующих в формуле МНК-коэффициентов.
5. Как устранить проблему полной мультиколлинеарности?
6. Выведите систему нормальных уравнений.

7. Выведите матричную формулу МНК коэффициентов.
8. Приведите пример ситуации, когда линейной зависимости между объясняющими переменными нет, а коэффициенты МЛРМ не существуют.
9. Как влияют выбросы на результаты оценивания?
10. Как исследовать устойчивость результатов оценивания?
11. Какие вы знаете виды нелинейных моделей?
12. Какие вы знаете нелинейные методы оценивания?
13. Как определять эластичность?
14. Что такое предельные эффекты переменных?
15. Основные способы линеаризации моделей?
16. Какие вы знаете типы производственных функций?
17. Как выбрать между линейной и логарифмической моделями?
18. Экономический смысл коэффициентов линейной модели.
19. Экономический смысл коэффициентов логарифмической модели
20. Экономический смысл коэффициентов полулогарифмической модели.

Тесты для проверки знаний

1. Укажите требования к факторам, включаемым в модель множественной линейной регрессии:
 - а) между факторами не должна существовать высокая корреляция
 - б) факторы должны быть количественно измеримы
 - с) факторы должны представлять временные ряды
 - д) факторы должны иметь одинаковую размерность
2. Выберите верные утверждения по поводу структурной формы системы эконометрических уравнений:
 - а) каждое уравнение системы может, рассматриваться в качестве отдельного уравнения регрессии зависимости одной переменной от группы факторов

- b) система одновременных уравнений описывает реальное экономическое явление или процесс
- c) эндогенные переменные в одних уравнениях
- d) могут выступать в роли независимых переменных в других уравнениях системы

3. Косвенный метод наименьших квадратов применим для

- a) неидентифицируемой системы уравнений
- b) идентифицируемой системы одновременных уравнений
- c) любой системы одновременных уравнений
- d) неидентифицируемой системы рекурсивных уравнений

4. Фиктивными переменными в уравнении множественной регрессии

являются ...

- a) комбинации из включенных в уравнение
- b) регрессии факторов, повышающие адекватность модели
- c) дополнительные количественные переменные, улучшающие решение
- d) функции от уже включенных в модель переменных
качественные переменные, преобразованные в количественные

5. Метод наименьших квадратов используется для оценивания...

- a) величины коэффициента детерминации параметров линейной регрессии
- b) средней ошибки аппроксимации
- c) величины коэффициента корреляции
- d) переменные, представляющие простейшие

6. Предпосылками МНК являются ...

- a) гетероскедастичность случайных отклонений
- b) случайные отклонения коррелируют друг с другом
- c) дисперсия случайных отклонений постоянна для всех наблюдений

d) случайные отклонения являются независимыми друг от друга

7. Несмещенность оценки характеризует ...

- a) равенство нулю математического ожидания остатков
- b) увеличение точности ее вычисления с увеличением объема выборки
- c) ее зависимость от объема выборки
- d) наименьшую дисперсию остатков

8. Укажите справедливые утверждения по поводу критерия Дарбина-Уотсона:

- a) позволяет проверить гипотезу о наличии автокорреляции первого порядка
- b) равен 0 в случае отсутствия автокорреляции
- c) применяется для проверки гипотезы о наличии гетероскедастичности остатков
- d) изменяется в пределах от 0 до 4

9. Множественный коэффициент корреляции $R_{yx_1x_2}=0,8$. Определите, какой процент дисперсии зависимой переменной y объясняется влиянием x_1 и x_2 .

- a) -80%
- b) -28%
- c) -32%
- d) -64%

10. Какое значение может принимать коэффициент детерминации:

- a) - 0.4
- b) -0,5
- c) -0,2
- d) - 1,2

11. Какое значение не может принять множественный коэффициент корреляции:

- a) - 1,2
- b) - -1
- c) - -0.5
- d) - 0

Решение типовых задач

Задача 1. Зависимость спроса на компьютеры x_1 от цены на них x_2 и от цены на ноутбуки x_3 представлена уравнением:

$$\lg x_1 = 0,1274 - 0,2245 \lg x_2 + 2,8557 \lg x_3.$$

Требуется:

- представить данное уравнение в естественной форме (не в логарифмах);
- оценить значимость параметров данного уравнения, если известно, что t -критерий для параметра b_2 при x_2 составил 0,8, а для параметра b_3 при x_3 – 1,1.

Решение.

Представленное степенное уравнение множественной регрессии приводим к естественной форме путем потенцирования обеих частей уравнения:

$$x_1 = 10^{0,1274} x_2^{-0,2245} x_3^{2,8557};$$
$$x_1 = 1,3409 \frac{1}{x_2^{0,2245}} x_3^{2,8557}.$$

Значения коэффициентов регрессии b_1 и b_2 в степенной функции равны коэффициентам эластичности результата x_1 от x_2 и x_3 .

$$\bar{\epsilon}_{x_1 x_2} = -0,2245\%; \quad \bar{\epsilon}_{x_1 x_3} = 2,8557\%$$

Спрос на компьютеры x_1 сильнее связан с ценой на ноутбуки – он увеличивается в среднем на 2,86% при росте цен на 1%. С ценой на компьютеры спрос на них связан обратной зависимостью – с ростом цен на 1% потребление снижается в среднем на 0,22%.

Табличные значения t -критерия обычно лежат в интервале от 2 до 3. Поэтому в данном примере t -критерий меньше табличного значения, что свидетельствует о случайной природе взаимосвязи, о статистической ненадежности всего уравнения. Применять полученное уравнение для прогноза не рекомендуется.

полученное уравнение для прогноза не рекомендуется.

Задача 2. Имеются данные о ценах и дивидендах по обыкновенным акциям, а также о доходности компании (табл. 1.10).

Задание: построить линейное уравнение множественной регрессии и пояснить экономический смысл его параметров.

Решение.

Необходимо построить расчетную табл. 1.10.

Таблица 1.10

№ п/п	Цена акции, у. е.	Доходность капитала, %	Уровень дивидендов, %
1	25	15,2	2,6
2	20	13,9	2,1
3	15	15,8	1,5
4	34	12,8	3,1
5	20	6,9	2,5
6	33	14,6	3,1
7	28	15,4	2,9
8	30	17,3	2,8
9	23	13,7	2,4
10	24	12,7	2,4
11	25	15,3	2,6
12	26	15,2	2,8
13	26	12,0	2,7
14	20	15,3	1,9
15	20	13,7	1,9
16	13	13,3	1,6
17	21	15,1	2,4
18	31	15,0	3,0
19	26	11,2	3,1
20	11	12,1	2,0

Таблица 2.1

№ п/п	y	x_1	x_2	$x_2^*x_2$	$x_1^*x_1$	y^*x_1	y^*x_2	$x_1^*x_2$
1	25	15,2	2,6	6,76	231,04	380,0	65,0	39,52
2	20	13,9	2,1	4,41	193,21	278,0	42,0	29,19
3	15	15,8	1,5	2,25	249,64	237,0	22,5	23,70
4	34	12,8	3,1	9,61	163,84	435,2	105,4	39,68
5	20	6,9	2,5	6,25	47,61	138,0	50,0	17,25
6	33	14,6	3,1	9,61	213,16	481,8	102,3	45,26
7	28	15,4	2,9	8,41	237,16	431,2	81,2	44,66
8	30	17,3	2,8	7,84	299,29	519,0	84,0	48,44
9	23	13,7	2,4	5,76	187,69	315,1	55,2	32,88
10	24	12,7	2,4	5,76	161,29	304,8	57,6	30,48
11	25	15,3	2,6	6,76	234,09	382,5	65,0	39,78
12	26	15,2	2,8	7,84	231,04	395,2	72,8	42,56
13	26	12,0	2,7	7,29	144,0	312,0	70,2	32,40
14	20	15,3	1,9	3,61	234,09	306,0	38,0	29,07
15	20	13,7	1,9	3,61	187,69	274,0	38,0	26,03
16	13	13,3	1,6	2,56	176,89	172,9	20,8	21,28
17	21	15,1	2,4	5,76	228,01	317,1	50,4	36,24
18	31	15,0	3,0	9,0	225,0	465,0	93,0	45,0
19	26	11,2	3,1	9,61	125,44	291,2	80,6	34,72
20	11	12,1	2,0	4,0	146,41	133,1	22,0	24,20
Итого	471	276,5	49,4	126,7	3916,59	6569,1	1216	682,34
Среднее значение	23,55	–	–	–	–	325,455	60,8	34,117
σ	6,07	2,168	0,484					

По данным табл. 2.1 строится система нормальных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \sum y = na + b_1 \sum x_1 + b_2 \sum x_2, \\ \sum yx_1 = a \sum x_1 + b_1 \sum x_1^2 + b_2 \sum x_1x_2, \\ \sum yx_2 = a \sum x_2 + b_1 \sum x_1x_2 + b_2 \sum x_2^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 471 = 20a + 276,5b_1 + 49,4b_2, \\ 6569,1 = 276,5a + 3916,59b_1 + 682,34b_2, \\ 1216 = 49,4a + 682,34b_1 + 126,7b_2. \end{cases}$$

Из этой системы находятся коэффициенты a , b_1 , b_2 :

$$a = -13,925; b_1 = 0,686; b_2 = 11,331.$$

Таким образом, уравнение множественной регрессии имеет следующий вид:

$$\hat{b} = -13,925 + 0,686x_1 + 11,331x_2.$$

Экономический смысл коэффициентов b_1 и b_2 в том, что это показатели силы связи, характеризующие изменение цены акции при изменении любого факторного признака на единицу своего измерения при фиксированном влиянии другого фактора.

Решение с помощью ППП Excel

Задача 3. По 20 предприятиям региона (табл. 2.3) изучается зависимость выработки продукции на одного работника y (тыс. сум.) от ввода в действие новых основных фондов x_1 (% от стоимости фондов на конец года) и от удельного веса рабочих высокой квалификации в общей численности рабочих x_2 (%).

Сводную таблицу основных статистических характеристик для одного или нескольких массивов данных можно получить с помощью инструмента анализа данных *Описательная статистика*. Для этого выполните следующие шаги:

1) введите исходные данные или откройте существующий файл, содержащий анализируемые данные;

- 2) в главном меню выберите последовательно пункты Сервис / Анализ данных / Описательная статистика, после чего щелкните по кнопке ОК;
- 3) заполните диалоговое окно ввода данных и параметров вывода (рис. 8.1).

Входной интервал – диапазон, содержащий анализируемые данные, это может быть одна или несколько строк (столбцов);

Группирование – по столбцам или по строкам – необходимо указывать дополнительно;

Метки – флажок, который указывает, содержит ли первая строка названия столбцов или нет;

Выходной интервал – достаточно указывать левую верхнюю ячейку будущего диапазона;

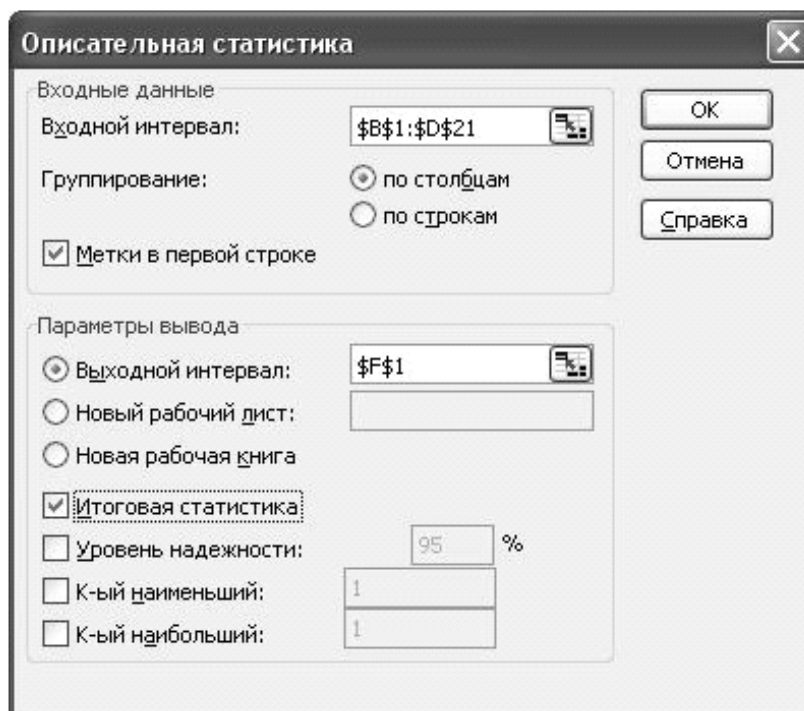


Рис. 8.1. Диалоговое окно ввода параметров инструмента *Описательная статистика*

Таблица 2.2

Номер предприятия	y	x_1	x_2
1	7,0	3,9	10,0
2	7,0	3,9	14,0
3	7,0	3,7	15,0
4	7,0	4,0	16,0
5	7,0	3,8	17,0
6	7,0	4,8	19,0
7	8,0	5,4	19,0
8	8,0	4,4	20,0
9	8,0	5,3	20,0
10	10,0	6,8	20,0
11	9,0	6,0	21,0
12	11,0	6,4	22,0
13	9,0	6,8	22,0
14	11,0	7,2	25,0
15	12,0	8,0	28,0
16	12,0	8,2	29,0
17	12,0	8,1	30,0
18	12,0	8,5	31,0
19	14,0	9,6	32,0
20	14,0	9,0	36,0

Новый рабочий лист – можно задать произвольное имя нового листа. Если необходимо получить дополнительную информацию Итоговой статистики, Уровня надежности, k -го наибольшего и наименьшего значений, установите соответствующие флажки в диалоговом окне. Щелкните по кнопке ОК. Результаты вычисления соответствующих показателей для каждого признака приведены на рис. 8.2.

Матрица парных коэффициентов корреляции переменных рассчитывается с использованием инструмента анализа данных Корреляция.

Для этого:

- 1) в главном меню последовательно выберите пункты Сервис / Анализ данных / Корреляция; щелкните по кнопке ОК;
- 2) заполните диалоговое окно ввода данных и параметров вывода (рис. 8.1);
- 3) результаты вычислений – матрица коэффициентов парной корреляции – приведены на рис. 8.1.

Для вычисления параметров линейного уравнения множественной регрессии используется инструмент анализа данных Регрессия. Она аналогична расчету параметров парной линейной регрессии, описанной выше, только в отличие от парной регрессии в диалоговом окне при заполнении параметра *входной интервал X* следует указывать не один столбец, а все столбцы, содержащие значения факторных признаков (рис. 8.2). Результаты анализа приведены на рис. 8.2.

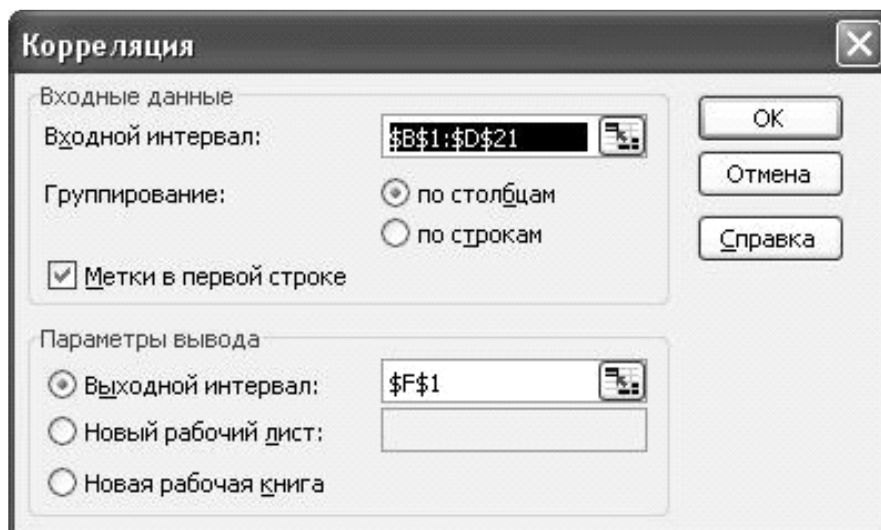


Рис. 8.3. Диалоговое окно ввода параметров инструмента Корреляция

A1	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
	y	x1	x2		y		x1		x2	
1			10,0							
2	1	7,0	3,9		Среднее	9,6	Среднее	6,19	Среднее	22,3
3	2	7,0	3,9		Стандартная ошибка	0,549641031	Стандартная ошибка	0,433622301	Стандартная ошибка	1,523672848
4	3	7,0	3,7		Медиана	9	Медиана	6,2	Медиана	20,5
5	4	7,0	4,0		Мода	7	Мода	3,9	Мода	20
6	5	7,0	3,8		Стандартное отклонение	2,458069418	Стандартное отклонение	1,938773351	Стандартное отклонение	6,814072127
7	6	7,0	4,8		Дисперсия выборки	6,042105263	Дисперсия выборки	3,758842105	Дисперсия выборки	46,43157895
8	7	8,0	5,4		Экссесс	-1,196054269	Экссесс	-1,331425706	Экссесс	-0,536652906
9	8	8,0	4,4		Асимметричность	0,445095914	Асимметричность	0,188100846	Асимметричность	0,327800798
10	9	8,0	5,3		Интервал	7	Интервал	5,9	Интервал	26
11	10	10,0	6,8		Минимум	7	Минимум	3,7	Минимум	10
12	11	9,0	6,0		Максимум	14	Максимум	9,6	Максимум	36
13	12	11,0	6,4		Сумма	192	Сумма	123,8	Сумма	446
14	13	9,0	6,8		Счет	20	Счет	20	Счет	20
15	14	11,0	7,2							
16	15	12,0	8,0							
17	16	12,0	8,2							
18	17	12,0	8,1							
19	18	12,0	8,5							
20	19	14,0	9,6							
21	20	14,0	9,0							
22										
23										
24										
25										
26										
27										
28										
29										
30										
31										
32										
33										

Рис. 8.2. Результат применения инструмента Описательная статистика

Microsoft Excel - Книга1

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Arial Cyr 10 Ж К Ч

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		y	x1	x2					
2	1	7,0	3,9	10,0					
3	2	7,0	3,9	14,0					
4	3	7,0	3,7	15,0					
5	4	7,0	4,0	16,0					
6	5	7,0	3,8	17,0					
7	6	7,0	4,8	19,0					
8	7	8,0	5,4	19,0					
9	8	8,0	4,4	20,0					
10	9	8,0	5,3	20,0					
11	10	10,0	6,8	20,0					
12	11	9,0	6,0	21,0					
13	12	11,0	6,4	22,0					
14	13	9,0	6,8	22,0					
15	14	11,0	7,2	25,0					
16	15	12,0	8,0	28,0					
17	16	12,0	8,2	29,0					
18	17	12,0	8,1	30,0					
19	18	12,0	8,5	31,0					
20	19	14,0	9,6	32,0					
21	20	14,0	9,0	36,0					
22									

Матрица коэффициентов парной корреляции

	y	x1	x2
y	1,0000		
x1	0,9699	1,0000	
x2	0,9408	0,9428	1,0000

Рис. 8.4. Матрица коэффициентов парной корреляции

Регрессия

Входные данные

Входной интервал Y:

Входной интервал X:

Метки Константа - ноль

Уровень надежности: %

Параметры вывода

Выходной интервал:

Новый рабочий лист:

Новая рабочая книга

Остатки

Остатки График остатков

Стандартизованные остатки График подбора

Нормальная вероятность

График нормальной вероятности

OK Отмена Справка

Рис. 8.5. Диалоговое окно ввода параметров инструмента Регрессия

Вывод итогов								
Регрессионная статистика								
Множественный R	0,973101182							
R-квадрат	0,94692591							
Нормированный R-квадрат	0,9406819							
Стандартная ошибка	0,598670364							
Наблюдения	20							
Дисперсионный анализ								
	df	SS	MS	F	Значимость F			
Регрессия	2	108,7070945	54,35354726	161,6534774	1,46045E-11			
Остаток	17	6,092905478	0,358406205					
Итого	19	114,8						
Коэффициенты								
	Коэффициенты	Стандартная ошибка	t-статистика	P-Значение	Нижние 95%	Верхние 95%	Нижние 95,0%	Верхние 95,0%
Y-пересечение	1,83530694	0,471064997	3,896080054	0,001161531	0,84144668	2,8291672	0,84144668	2,8291672
x1	0,945947723	0,212576487	4,449917001	0,00035148	0,497450544	1,394444902	0,497450544	1,394444902
x2	0,085617787	0,060483309	1,415560577	0,174963664	-0,041990838	0,213226413	-0,041990838	0,213226413

Рис. 8.6. Результат применения инструмента Регрессия

Контрольные задания

Задача 1. Зависимость спроса на товар К от его цены характеризуется по 20 наблюдениям уравнением:

$$\lg y = 5,25 - 0,851 \lg x.$$

Задание.

- записать данное уравнение в виде степенной функции;
- оценить эластичность спроса на товар в зависимости от его цены.

Задача 2. Изучается влияние стоимости основных и оборотных средств на величину валового дохода торговых предприятий (табл. 2.3).

Задание:

- используя ППП Excel, получить таблицу статистических характеристик;
- построить линейное уравнение множественной регрессии и пояснить экономический смысл его параметров;

Таблица 2.3

№ п/п	y , валовый доход за год	x_1 , среднегодовая стоимость основных фондов	x_2 , среднегодовая стоимость оборотных средств
1	303	118	205
2	163	128	156
3	145	117	154
4	213	150	163
5	221	156	128
6	188	202	150
7	210	216	154
8	156	224	142
9	180	214	136
10	237	254	206
11	160	215	188
12	175	198	146

- рассчитать частные коэффициенты эластичности;
- определить частные и парные коэффициенты корреляции, а также множественный коэффициент корреляции;
- дать оценку полученного уравнения на основе коэффициента детерминации и F -критерия Фишера.

ТЕМА 9. СТАНДАРТНОЕ УРАВНЕНИЕ РЕГРЕССИИ

Ключевые слова: множественная корреляция, частная корреляция, частные уравнения регрессии, частные коэффициенты эластичности

9.1. Построение частных уравнений регрессии и определение частных коэффициентов эластичности

В отличие от парной регрессии частные уравнения регрессии характеризуют изолированное влияние фактора на результат, ибо другие факторы закреплены на неизменном уровне. Эффекты влияния других

факторов присоединены в них к свободному члену **уравнения множественной регрессии.**

На основе линейного уравнения множественной регрессии

$$y = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \dots + b_p \cdot x_p + \varepsilon$$

могут быть найдены частные уравнения регрессии:

$$\begin{cases} y_{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_p} = f(x_1), \\ y_{x_2 \cdot x_1 \cdot x_3 \dots x_p} = f(x_2), \\ \dots \dots \dots \\ y_{x_p \cdot x_1 \cdot x_2 \dots x_{p-1}} = f(x_p). \end{cases}$$

т.е. уравнения регрессии, которые связывают результативный признак с соответствующими факторами x при закреплении других учитываемых во множественной регрессии факторов на среднем уровне. Частные уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{cases} y_{x_1 \cdot x_2, x_3 \dots x_p} = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot \bar{x}_2 + b_3 \cdot \bar{x}_3 + \dots + b_p \cdot \bar{x}_p + \varepsilon \\ y_{x_2 \cdot x_1, x_3 \dots x_p} = a + b_1 \cdot \bar{x}_1 + b_2 \cdot \bar{x}_2 + b_3 \cdot \bar{x}_3 + \dots + b_p \cdot \bar{x}_p + \varepsilon \\ \dots \dots \dots \\ y_{x_p \cdot x_1, x_2, \dots x_{p-1}} = a + b_1 \cdot \bar{x}_1 + b_2 \cdot \bar{x}_2 + \dots + b_{p-1} \bar{x}_{p-1} + b_p \cdot \bar{x}_p + \varepsilon \end{cases}$$

При подстановке в эти уравнения средних значений соответствующих факторов они принимают вид парных уравнений линейной регрессии, т.е. имеем:

$$\begin{cases} \hat{y}_{x_1 \cdot x_2, x_3 \dots x_p} = A_1 + b_1 \cdot x_1, \\ \hat{y}_{x_2 \cdot x_1, x_3 \dots x_p} = A_2 + b_2 \cdot x_2, \\ \dots \dots \dots \\ \hat{y}_{x_p \cdot x_1, x_2, \dots x_{p-1}} = A_p + b_p \cdot x_p \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} A_1 = a + b_2 \cdot \bar{x}_2 + b_3 \cdot \bar{x}_3 + \dots + b_p \cdot \bar{x}_p \\ A_2 = a + b_1 \cdot \bar{x}_1 + b_3 \cdot \bar{x}_3 + \dots + b_p \cdot \bar{x}_p \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_p = a + b_1 \cdot \bar{x}_1 + b_2 \cdot \bar{x}_2 + \dots + b_{p-1} \bar{x}_{p-1} \end{cases}$$

В отличие от парной регрессии частные уравнения регрессии характеризуют изолированное влияние фактора на результат, ибо другие факторы закреплены на неизменном уровне. Эффекты влияния других факторов присоединены в них к свободному члену уравнения множественной регрессии.

Это позволяет на основе частных уравнений регрессии определять частные коэффициенты эластичности:

$$\mathcal{E}_{yx_i} = b_i \frac{x_i}{\hat{y}_{x_i \cdot x_1 x_1 \dots x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot x_p}},$$

где b_i – коэффициенты регрессии для фактора x_i в уравнении множественной регрессии;

$\hat{y}_{x_i \cdot x_1 \cdot x_2 \dots x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot x_p}$ – частное уравнение регрессии.

9.2. Множественная корреляция

Любая экономическая политика заключается в регулировании определенных экономических параметров и поэтому должна основываться на знании того, как эти параметры влияют на другие составляющие экономической среды. В экономических исследованиях, как правило, встречаются стохастические зависимости, которые отличаются приблизительностью, неопределенностью. Они проявляются только в среднем по значительному количеству объектов (наблюдений). Здесь каждой величине факторного показателя (аргумента) может соответствовать несколько значений результативного показателя (функции). Взаимосвязь между исследуемыми факторами и

результативным показателем проявится, если взять для исследования большое количество наблюдений (объектов) и сравнить их значения. Тогда в соответствии с законом больших чисел влияние других факторов на результативный показатель сглаживается, что дает возможность установить связь, соотношения между изучаемыми явлениями.

Корреляционная (стохастическая) связь – это неполная, вероятностная зависимость между показателями, которая проявляется только в массе наблюдений. Стохастические взаимосвязи экономических переменных можно описать с помощью так называемых корреляционных характеристик. Отличают парную и множественную корреляцию. Парная корреляция – это связь между двумя показателями, один из которых является факторным, а другой – результативным. Множественная корреляция возникает от взаимодействия нескольких факторов с результативным показателем.

Необходимые условия применения корреляционного анализа.

1. Наличие достаточно большого количества наблюдений о величине исследуемых факторных и результативных показателей (в динамике или за текущий год по совокупности однородных объектов).

2. Исследуемые факторы должны иметь количественное измерение и отражение в тех или иных источниках информации.

Применение корреляционного анализа позволяет решить следующие задачи:

1) определить изменение результативного показателя под воздействием одного или нескольких факторов (в абсолютном измерении), т. е. определить, на сколько единиц изменяется величина результативного показателя при изменении факторного на единицу;

2) установить относительную степень зависимости результативного показателя от каждого фактора.

Исследование корреляционных зависимостей имеет огромное значение. Это проявляется в том, что устанавливаются место и роль каждого фактора в формировании уровня исследуемых показателей, углубляются знания об изучаемых явлениях, определяются закономерности их развития и как итог – точнее обосновываются планы и управленческие решения, более объективно оцениваются итоги деятельности предприятий.

Одной из основных задач корреляционного анализа является определение влияния факторов на величину результативного показателя (в абсолютном измерении). Для решения этой задачи подбирается соответствующий тип математического уравнения, которое наилучшим образом отражает характер изучаемой связи (прямолинейной, криволинейной и т. д.). Подбор уравнения играет важную роль в корреляционном анализе, потому что от правильного выбора уравнения регрессии зависит ход решения задачи и результаты расчетов.

Множественная корреляция - это вероятностная зависимость между одной величиной Y с одной стороны, и одновременно несколькими другими X_1, X_2, \dots, X_m , с другой стороны. То есть, в отличие от парной корреляции, при которой на изменения зависимой (результатирующей) переменной влияет одна независимая (объясняющая) переменная, при множественной корреляции независимых (объясняющих) переменных две или больше.

Цель корреляционного анализа в случае множественной корреляции - установить, есть ли зависимость между переменными и насколько тесно связаны между собой зависимая переменная, с одной стороны, и независимые переменные, с другой стороны, и зависят ли друг от друга независимые переменные X_1, X_2, \dots, X_m .

Для того чтобы можно было бы применять модель множественной линейной регрессии, прежде, при анализе множественной корреляции должны быть установлены следующие факты:

- зависимая переменная тесно зависит от независимых переменных (тесноту связи, как и в случае парной корреляции, показывают значения коэффициента корреляции);
- нет тесной зависимости между независимыми переменными.

Тесноту совместного влияния факторов на результат оценивает *индекс множественной корреляции*:

$$R_{yx_1x_2, \dots, x_p} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{y_{ост}}^2}{\sigma_y^2}}.$$

Значение индекса множественной корреляции лежит в пределах от 0 до 1 и должно быть больше или равно максимальному парному индексу корреляции:

$$R_{yx_1x_2, \dots, x_p} \geq r_{yx_i}, \quad (i = \overline{1, p}).$$

При линейной зависимости *коэффициент множественной корреляции* можно определить через матрицу парных коэффициентов корреляции:

$$R_{yx_1x_2, \dots, x_p} = \sqrt{1 - \frac{\Delta r}{\Delta r_{11}}},$$

где

$$\Delta r = \begin{vmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} & \dots & r_{yx_p} \\ r_{yx_1} & 1 & r_{x_1x_2} & \dots & r_{x_1x_p} \\ r_{yx_2} & r_{yx_1} & 1 & \dots & r_{x_2x_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{yx_p} & r_{x_p x_1} & r_{x_p x_2} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

- определитель матрицы парных коэффициентов корреляции.¹²

9.3. Частная корреляция.

Частная корреляция — анализ взаимосвязи между двумя величинами при фиксированных значениях остальных величин.

Целесообразность внесения того или иного фактора в модель доказывается величиной показателя частной корреляции. Частные коэффициенты корреляции характеризуют тесноту связи между результатом и соответствующим фактором при устранении влияния других факторов, включённых в уравнение регрессии.

Если рассматривается регрессия с n факторами, то возможны частные коэффициенты корреляции первого, второго и так далее n - порядка.

Сопоставление коэффициентов частной корреляции разного порядка по мере увеличении числа внешних факторов показывает процесс “очищения” зависимости результатного признака с наследственным фактором. Хотя частная корреляция разных порядков удобна при анализе, в практических исследованиях предпочтение отдают показателям частной корреляции самого высокого порядка, так как эти порядки являются дополнительными к уравнению множественной регрессии.

Порядок частного коэффициента корреляции определяется количеством факторов, влияние которых исключается.

Коэффициенты парной корреляции называют коэффициентами нулевого порядка.

Коэффициенты частной корреляции более высоких порядков можно определить через коэффициент частной корреляции более низких порядков по *рекуррентной формуле*.

¹²Эконометрика. Учебник/ Под ред. И.И.Елисеевой. - М.: Финансы и статистика, 2003. стр. 97

Подсчитанные по рекуррентной формуле частные коэффициенты корреляции изменяются в пределах от -1 до $+1$. А по формуле через множественные коэффициенты детерминации от 0 до 1 .

В эконометрике частные коэффициенты корреляции не имеют самостоятельного значения. В основном их используют на стадии формирования модели в процедуре отсева факторов: строя многофакторную модель методом исключения переменных на первом шаге определяется уравнение регрессии с полным набором факторов и рассчитывается матрица частных коэффициентов корреляции. Далее выбирается фактор с наименьшей несущественной по t - критерию величиной частного коэффициента корреляции.

Исключив данный фактор из модели, строится новое уравнение регрессии, и процедура продолжается до тех пор, пока не окажется, что все частные коэффициенты корреляции существенно отличаются от нуля.

Существуют случаи, когда две переменные связаны между собой, не за счет внутренних связей, а за счет взаимосвязи с третьей переменной, или влияния на них неученых факторов. Обнаружение и исключение таких факторов, влияющих на корреляции переменных, и расчет частных коэффициентов корреляции задача многомерного корреляционного анализа.

При вычислении частных корреляций алгоритм работы следующий: предварительно фиксируется значение некоторой случайной величины (влияющих факторов), если корреляция между интересующими нас переменными уменьшается, то это значит, что их связь частично возникает под воздействием этой фиксированной величины. В случае же если частный коэффициент корреляции между исследуемыми нами переменными равен нулю или близок к нему, то делается вывод о том, что взаимосвязь между исследуемыми переменными обусловлена их собственным воздействием.

Показатели частной корреляции определяются как отношение сокращения остаточной дисперсии за счет дополнительного включения в анализ нового фактора к остаточной дисперсии, имевшей место до введения его в регрессионную модель.

Частные коэффициенты корреляции, измеряющие влияние на y фактора x_i при неизменном уровне других факторов, можно определить по формуле

$$r_{yx_i \cdot x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_p} = \sqrt{1 - \frac{1 - R_{yx_i \cdot x_1 x_2 \dots x_i \dots x_p}^2}{1 - R_{yx_i \cdot x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_p}^2}}.$$

или по рекуррентной формуле:

$$r_{yx_i \cdot x_1 x_2 \dots x_p} = \frac{r_{yx_i \cdot x_1 x_2 \dots x_{p-1}} - r_{yx_p \cdot x_1 x_2 \dots x_{p-1}} r_{x_i x_p \cdot x_1 x_2 \dots x_{p-1}}}{\sqrt{(1 - r_{yx_i \cdot x_1 x_2 \dots x_{p-1}}^2)(1 - r_{x_i x_p \cdot x_1 x_2 \dots x_{p-1}}^2)}}.$$

Качество построенной модели в целом оценивает коэффициент детерминации. *Коэффициент множественной детерминации* рассчитывается как квадрат индекса множественной корреляции:

$$R_{yx_1 x_2 \dots x_p}^2.$$

Скорректированный индекс множественной детерминации содержит поправку на число степеней свободы и рассчитывается по формуле

$$\widehat{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{(n-1)}{(n-t-1)},$$

где n – число наблюдений;

t – число факторов.

Для вычисления частного коэффициента корреляции между тремя переменными требуется знать их коэффициенты корреляции Пирсона.

Формула частного коэффициента корреляции для коэффициента корреляции Пирсона следующая:

$$r_{xy-z} = \frac{r_{xy} - r_{xz}r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xz}^2)(1 - r_{yz}^2)}}$$

где r_{xy}, r_{xz}, r_{yz} коэффициенты корреляции r -Пирсона исследуемых переменных между собой.

Однако следует помнить, что частная корреляция не обязательно говорит о причинности существующей между переменными, для этих целей лучше использовать дисперсионный анализ.

Вопросы для контроля

1. Каким образом можно сравнить парные уравнения регрессии и частные уравнения регрессии?
2. Как записывается частное уравнение регрессии?
3. Что определяют частные коэффициенты эластичности и по какой формуле они определяются?
4. Какие задачи решаются при построении уравнения регрессии? Какие методы применяются для выбора вида модели регрессии?
5. Что определяет множественная корреляция и при помощи каких формул определяется множественный коэффициент корреляции.
6. Что определяет частная корреляция и при помощи каких формул определяется частный коэффициент корреляции.

ТЕМА 10. ОБЩАЯ ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ. ОЦЕНКА СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЗНАЧИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ КОРРЕЛЯЦИИ И РЕГРЕССИИ

Ключевые слова, верификация, критерий Фишера, метод наименьших квадратов, критерий Дарбина-Уотсона, критерий Стьюдента, доверительные интервалы.

10.1. Стадия верификации. Оценка качества формы зависимости эконометрических моделей при помощи ошибки аппроксимации и критерия Фишера

На стадии верификации качество модели регрессии оценивается по следующим направлениям:

- проверка качества всего уравнения регрессии;
- проверка значимости всего уравнения регрессии;
- проверка статистической значимости коэффициентов уравнения регрессии;
- проверка выполнения предпосылок МНК¹³.

Оценку качества построенной модели даст коэффициент (индекс) детерминации, а также средняя ошибка аппроксимации.

Коэффициент детерминации R^2 показывает долю объясненной вариации зависимой переменной:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}.$$

Используется для предварительной оценки качества модели и как основа для расчета других показателей

Коэффициенты R^2 в разных моделях с разным числом наблюдений (и переменных) несравнимы

Основные свойства коэффициента детерминации:

1. $0 \leq R^2 \leq 1$.
2. Чем ближе R^2 к 1, тем лучше регрессия аппроксимирует статистические данные, тем теснее линейная связь между зависимой и объясняющими переменными.
3. Если $R^2 = 1$, то статистические данные лежат на линии регрессии, т.е. между зависимой и объясняющими переменными имеется

¹³Gujarati D.N. Basic Econometrics. McGraw-Hill, 4th edition, 2003 (Gu),Inc.p. 315

функциональная зависимость. Если $R^2 = 0$, то вариация зависимой переменной полностью обусловлена воздействием неучтенных в модели переменных.

4. В случае парной регрессии $R^2 = r_{xy}^2$.

Оценку качества модели дает также **средняя ошибка аппроксимации** – среднее отклонение расчетных значений \hat{y}_i зависимой переменной от фактических значений y_i :

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \cdot 100\%.$$

Допустимый предел значений A – не более 10%. Чем меньше значение A , тем лучше.

Значения A в моделях с разным числом наблюдений и одинаковым количеством переменных сравнимы.

F-тест на качество оценивания уравнения регрессии.

Основан на основном тождестве дисперсионного анализа

$$\begin{aligned} \text{Var}(y) &= \text{Var}(\hat{y}) + \text{Var}(e) \times n \Rightarrow \\ \underbrace{\sum (y_i - \bar{y})^2}_{TSS} &= \underbrace{\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2}_{ESS} + \underbrace{\sum e_i^2}_{RSS}. \end{aligned}$$

где: TSS – общая сумма квадратов отклонений;

ESS – объясненная сумма квадратов отклонений;

RSS – необъясненная сумма квадратов отклонений.

F-статистика для проверки качества уравнения регрессии.

F -статистика представляет собой отношение объясненной суммы квадратов (в расчете на одну независимую переменную) к остаточной сумме квадратов (в расчете на одну степень свободы)

$$F = F_{\text{факт}} = \frac{\frac{\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{m}}{\frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - m - 1}} = \frac{\frac{ESS}{m}}{\frac{RSS}{n - m - 1}}$$

где n – число выборочных наблюдений, m – число объясняющих переменных.

При отсутствии линейной зависимости между зависимой и объясняющими(ей) переменными F -статистика имеет F -распределение Фишера-Снедекора со степенями свободы $k_1 = m$, $k_2 = n - m - 1$.

Уравнение регрессии значимо на уровне α , если

$$F_{\text{факт}} > F_{\alpha; k_1; k_2}$$

где $F_{\alpha; k_1; k_2}$ - табличное значение F -распределения, определенное на уровне значимости α при степенях свободы k_1 и k_2 .

В парной ($m=1$) регрессии F -статистика является отношением объясненной суммы квадратов к остаточной сумме квадратов (в расчете на одну степень свободы), причем $m=1$, $n-m-1 = n-2$.

$$F = \frac{ESS / m}{RSS / (n - m - 1)} = \frac{(ESS / TSS) / m}{(RSS / TSS) / (n - m - 1)} = \frac{R^2}{(1 - R^2) / (n - 2)}.$$

F -статистика в парной регрессии по n наблюдениям имеет F -распределение с 1 и $(n-2)$ степенями свободы

Порядок работы при проверке значимости парного уравнения по F -статистике:

1. Выбираем уровень значимости α (1% или 5%).
2. Вычисляем число степеней свободы 1 и $(n-2)$.
3. По таблицам F -распределения определяем критическое значение $F_{\alpha; 1; n-2}$ (всегда одностороннее).
4. Если F -статистика больше $F_{\alpha; 1; n-2}$, то уравнение в целом является значимым на уровне значимости α .
5. В противном случае уравнение в целом не значимо (на данном уровне α).

Связь между значимостью коэффициента регрессии и уравнения в

целом в парной регрессии F -статистика равна квадрату t -статистики; то же верно и для их критических уровней (односторонний для t -статистики):

$$t^2 = F(t_{\alpha; n-2})^2 = F_{\alpha; 1; n-2}$$

В парной регрессии значимость коэффициента регрессии и значимость уравнения в целом эквивалентны F -статистики в разных моделях с разным числом наблюдений и (или) переменных несравнимы.

10.2. Оценка статистической значимости параметров эконометрической модели по критерию Стьюдента

Проверка значимости на основе t -статистик заключается в установлении наличия линейной зависимости между Y и X . Данный анализ осуществляется по схеме проверки статистических гипотез. Проверяются альтернативные гипотезы:

$$H_0 : \beta_1 = 0 \quad H_1 : \beta_1 \neq 0.$$

Если принимается гипотеза H_0 , то считают, что величина Y не зависит от X . В этом случае говорят, что коэффициент b_1 *статистически незначим* (т.к. слишком близок к нулю).

В противном случае говорят, что коэффициент b_1 *статистически значим*, что указывает на наличие линейной зависимости между Y и X .

Для парной линейной регрессии более важным является анализ статистической значимости коэффициента b_1 , т.к. именно в нем скрыто влияние объясняющей переменной X на зависимую переменную Y .

t -статистика соизмеряет значение коэффициента с его стандартной ошибкой:

$$t(b_0) = \frac{b_0}{S_{b_0}} \quad t(b_1) = \frac{b_1}{S_{b_1}}$$

t -статистики в парной регрессии по n наблюдениям при справедливости гипотезы H_0 имеют распределение Стьюдента с числом степеней свободы $l = n - 2$.

Порядок работы при проверке значимости коэффициента по t -статистике

1. Выбираем уровень значимости α (1% или 5%).
2. Вычисляем число степеней свободы ($n-2$).
3. По таблицам распределения Стьюдента определяем критическое значение $t_{\alpha/2; n-2}$ (двухсторонний критерий) или $t_{\alpha; n-2}$ (односторонний критерий).
4. Если модуль t -статистики больше критического значения, то коэффициент является значимым на уровне значимости α .
5. В противном случае коэффициент не значим (на данном уровне α).

Правило оценки значимости коэффициентов регрессии без использования таблиц

1. Если $|t_{b_i}| \leq 1$, то коэффициент b_i не признан значимым, т.к. доверительная вероятность менее 0,7.
2. Если $1 < |t_{b_i}| \leq 2$, то найденная оценка может рассматриваться как относительно (слабо) значимая. При этом доверительная вероятность лежит между 0,7 и 0,95.
3. Если $2 < |t_{b_i}| \leq 3$, то коэффициент значим. Доверительная вероятность лежит между значениями 0,95 и 0,99.
4. Если $|t_{b_i}| > 3$, то это почти полная гарантия значимости коэффициента.

Для оценки *статистической значимости коэффициентов регрессии и корреляции* рассчитываются *t -критерий Стьюдента и доверительные интервалы* каждого из показателей. Выдвигается гипотеза H_0 о случайной природе показателей, т.е. о незначимом их отличии от нуля. Оценка

значимости коэффициентов регрессии и корреляции с помощью *t*-критерия Стьюдента проводится путем сопоставления их значений с величиной их случайной ошибки:

$$t_b = \frac{b}{m_b}; t_a = \frac{a}{m_a}; t_r = \frac{r}{m_r};$$

Случайные ошибки параметров линейной регрессии и коэффициента корреляции определяются по формулам:

$$m_b = \sqrt{\frac{\sum (y - y_x)^2 / (n-2)}{\sum (x - \bar{x})^2}} = \sqrt{\frac{S_{ocm}^2}{\sum (x - \bar{x})^2}} = \frac{S_{ocm}}{\sigma_x \sqrt{n}};$$

$$m_a = \sqrt{\frac{\sum (y - y_x)^2}{(n-2)} \frac{\sum x^2}{n \sum (x - \bar{x})^2}} = \sqrt{S_{ocm}^2 \frac{\sum x^2}{n^2 \sigma_x^2}} = S_{ocm} \frac{\sqrt{\sum x^2}}{n \sigma_x};$$

$$m_{r_{xy}} = \sqrt{\frac{1 - r_{xy}^2}{n - 2}}.$$

Сравнивая фактическое и критическое (табличное) значение *t*-статистики - $t_{табл}$ и $t_{факт}$ - принимаем или отвергаем гипотезу H_0 .

Связь между *F*-критерием Фишера и *t*-статистикой Стьюдента выражается равенством

$$t_r^2 = t_b^2 = \sqrt{F}.$$

Если $t_{табл} < t_{факт}$, то H_0 отклоняется, т.е. a , b и r_{xy} не случайно отличаются от нуля и сформировались под влиянием систематически действующего фактора x . Если $t_{табл} > t_{факт}$, то гипотеза H_0 не отклоняется и признается случайная природа формирования a , b и r_{xy} .

10.3. Расчет доверительных границ значений коэффициентов эконометрической модели для генеральной совокупности.

Построение доверительных интервалов для коэффициентов линейной регрессии при заданном уровне значимости α :

$$\text{для } \beta_0: \left(b_0 - t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} \cdot S_{b_0}; b_0 + t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} \cdot S_{b_0} \right)$$

$$\text{для } \beta_1: \left(b_1 - t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} \cdot S_{b_1}; b_1 + t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} \cdot S_{b_1} \right)$$

Доверительные интервалы с надежностью $(1-\alpha)$ покрывают истинные значения β_0 и β_1

Порядок работы при проверке значимости коэффициента по доверительному интервалу

1. Выбираем уровень значимости α (1% или 5%).
2. Вычисляем число степеней свободы $(n-2)$.
3. По таблицам распределения Стьюдента определяем критическое значение $t_{\alpha/2; n-2}$ (двухсторонний критерий).
4. Вычисляем границы доверительного интервала.
5. Если точка 0 (ноль) не лежит внутри доверительного интервала, то коэффициент является значимым на уровне значимости α .
6. В противном случае коэффициент не значим (на данном уровне α).

Для расчета доверительного интервала определяем *предельную ошибку* Δ для каждого показателя:

$$\Delta_a = t_{\text{табл}} m_a, \quad \Delta_b = t_{\text{табл}} m_b,$$

Формулы для расчета *доверительных интервалов* имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \gamma_a &= a \pm \Delta_a; \gamma_{a_{\min}} = a - \Delta_a; \gamma_{a_{\max}} = a + \Delta_a; \\ \gamma_b &= b \pm \Delta_b; \gamma_{b_{\min}} = b - \Delta_b; \gamma_{b_{\max}} = b + \Delta_b; \end{aligned}$$

Если в границы доверительного интервала попадает ноль, т.е., нижняя граница отрицательна, а верхняя положительна, то оцениваемый параметр принимается нулевым, так как он не может одновременно принимать и положительное, и отрицательное значения.

Прогнозные значения y_p определяется путем подстановки в уравнение регрессии $\hat{y}_x = a + bx$ соответствующего (прогнозного) значения x_p . Вычисляется средняя стандартная ошибка прогноза $m_{\hat{y}_p}$:

$$m_{\hat{y}_p} = \sigma_{ocm} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\sum (x - \bar{x})^2}},$$

где

$$\sigma_{ocm} = \sqrt{\frac{\sum (y - \hat{y})^2}{n - m - 1}}.$$

И строится *доверительный интервал прогноза*:

$$\gamma_{y_p} = y_p \pm \Delta_{y_p}; \gamma_{y_{pmin}} = y_p - \Delta_{y_p}; \gamma_{y_{pmax}} = y_p + \Delta_{y_p},$$

где

$$\Delta_{y_p} = t_{табл} \cdot m_{y_p}$$

Учебное задание

1. Степень соответствия линии регрессии имеющимся данным. Коэффициент детерминации. Свойства коэффициента детерминации. Поправка коэффициента детерминации на увеличение числа объясняющих переменных – скорректированный коэффициент детерминации. Свойства скорректированного коэффициента детерминации.

2. Оценка дисперсии случайной составляющей. Оценки числовых характеристик оценок коэффициентов классической линейной регрессионной модели. Статистические свойства оценок коэффициентов КЛММР в предположении о нормальном распределении случайной составляющей.

3. Проверка гипотез относительно коэффициентов регрессии. Проверка гипотезы о равенстве коэффициента линейного регрессионного уравнения некоторому гипотетическому числу. Проверка гипотезы о незначимом отличии от нуля коэффициента регрессионного уравнения.

4. t -статистика коэффициента регрессии. Доверительные интервалы для коэффициентов регрессионного уравнения.

5. Проверка гипотезы о значимости регрессии в целом. F - статистика регрессии.

Вопросы для самопроверки.

1. Для чего нужен коэффициент детерминации?
2. Основная идея построения характеристики качества подгонки линии регрессии к имеющимся данным?
3. Как связаны между собой коэффициент детерминации и коэффициент корреляции в парной модели?
4. В каком случае коэффициент детерминации имеет смысл?
5. Докажите, что второе слагаемое в разложении общей вариации равно нулю?
6. Какие вы знаете свойства коэффициента детерминации
7. В каких случаях нельзя использовать коэффициент детерминации для сравнения моделей.
8. Что такое скорректированный коэффициент детерминации?
9. Всегда ли скорректированный коэффициент детерминации увеличивается при добавлении новых переменных?
10. Перечислите свойства скорректированного коэффициента детерминации.
11. Какие вы знаете свойства статистических оценок?
12. Какие свойства относятся к асимптотическим свойствам оценок.
13. Перечислите условия Гаусса-Маркова.
14. Каков содержательный смысл условия гомоскедастичности?
15. Каков содержательный смысл условия отсутствия автокорреляции ошибок?
16. Какие условия Гаусса Маркова используются при доказательстве

несмещенности МНК-коэффициентов?

17. Какие условия Гаусса Маркова используются при доказательстве эффективности МНК-коэффициентов?

18. Что произойдет, если математическое ожидание ошибки уравнения будет отлично от нуля?

19. Где используется предположение о нормальности ошибок?

20. Что такое стандартная ошибка регрессии, стандартная ошибка коэффициента?

21. Согласны ли вы с тем, что несмещенная оценка всегда лучше, чем смещенная?

Тесты для проверки знаний

1. Для расчета критического значения распределения Стьюдента служат следующие параметры:

- a) уровень значимости и число степеней свободы
- b) количество зависимых переменных
- c) коэффициент детерминации
- d) объем выборки и количество объясняющих переменных

2. Примером нелинейной зависимости экономических показателей является ...

- a) зависимость объема продаж от недели реализации, выраженная линейным трендом
- b) классическая гиперболическая зависимость спроса от цены
- c) линейная зависимость затрат на производство от объема выпуска продукции
- d) линейная зависимость выручки от величины оборотных средств

3. Среди нелинейных эконометрических моделей рассматривают следующие классы нелинейных уравнений:...

- a) внешне линейные
- b) внутренне нелинейные
- c) внутренне зависимые
- d) внешне нелинейные

4. Величина коэффициента эластичности показывает

a) на сколько процентов изменится в среднем результат при изменении фактора на 1%

b) во сколько раз изменится в среднем результат при изменении

фактора в два раза

- c) предельно возможное значение результата
- d) предельно допустимое изменение варьируемого признака

5. Дисперсия - это:

- a) Характеристика тесноты связи между факторами
- b) Квадрат разниц двух динамических рядов
- c) Математическое ожидание временного ряда
- d) Характеристика рассеивания значений случайной

величины,

измеряемая квадратом их отклонений от среднего значения

6. Уравнение регрессии показывает связь:

- a) Между некоррелированными признаками
- b) Между независимыми переменными
- c) Между зависимыми переменными
- d) Между зависимой и независимой переменной

7. Если сумма коэффициентов эластичности в ПФ Кобба-Дугласа равен 1, то это означает:

- a) Линейность функции
- b) Функция квадратична
- c) Функция симметрична
- d) Однородность функции

8. С помощью каких критериев проверяются уравнение регрессии?

- a) Критериями Дарбина-Уотсона и Фишера
- b) Критериями Дарбина-Уотсона и Стьюдента
- c) Критериями Дарбина-Уотсона, Стьюдента и Фишера
- d) Критериями Парето и Дарбина-Уотсона

9. Регрессия - это

- a) Теснота связи между независимых переменных
- b) Зависимость между независимыми величинами
- c) Зависимость среднего значения какой-либо величины от некоторой другой величины
- d) Зависимость предельного значения стохастической величины от некоторой другой величины

10. Если коэффициент корреляции принял значение $r_{xy} = -0,021$

- a) Существует сильная связь
- b) Существует обратная связь
- c) Существует слабая связь
- d) Связь между факторами не существует

ТЕМА 11. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ О ВРЕМЕННЫХ РЯДАХ

Ключевые слова: уровни ряда, динамический ряд, сглаживание временного ряда, метод сглаживания

11.1. Общие понятия временных рядов и задачи их анализа.

Виды временных рядов (трендовые модели)

Динамические ряды – упорядоченная совокупность последовательных наблюдений одного показателя y в зависимости от последовательно возрастающих или убывающих значений другого показателя x .

Временные ряды – динамические ряды, у которых в качестве признака упорядочения выбрано время t .

Формы представления временных рядов:

- Векторная $Y(t), t = 1, 2, \dots, N$ – фактор времени,
- Табличная

	1	2	\dots	N
y_t	y_1	y_2	\dots	y_n

Графическая форма представления ВР (рис. 11.1.)

Уровни ряда - отдельные значения временного ряда, характеризующие изменение показателя во времени.

Уровни ряда могут измеряться в различных величинах:

- абсолютных (размер прибыли, издержек,...);
- относительных (объем производства сельскохозяйственной продукции на душу населения);
- средних за некоторый период времени (среднесуточная выработка продукции,...);
- индексных (индексы роста накопленного дохода,...).

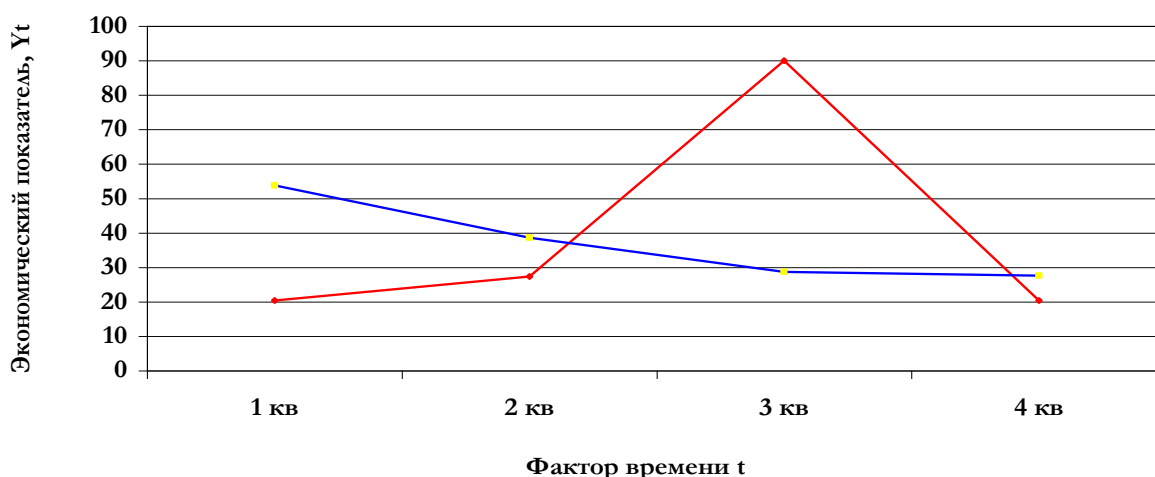


Рис. 11.1. Графическая форма представления ВР¹⁴

Всякий временной ряд состоит из отдельных уровней.

Уровни временного ряда могут принимать:

- детерминированные значения – не представляют интереса (например, число дней в месяце);
- случайные значения – подвергаются научному анализу, при этом они могут быть: *дискретными* и *непрерывными*.

Длина временного ряда определяется количеством наблюдений *n*.

Среди временных рядов выделяют два вида:

- *моментные временные ряды* – последовательные наблюдения характеризуют показатель на некоторый момент времени
- *интервальные временные ряды* – показатель характеризуется за определенный период времени.

Предварительный анализ временных рядов:

1. *Выявление аномальных наблюдений* Метод Ирвина.
2. *Сглаживание временных рядов.*

Метод простой скользящей средней.

Метод взвешенной скользящей средней.

¹⁴pptcloud.ru/ekonomika/ekonometrika

Метод экспоненциального сглаживания.

3. *Проверка наличия тренда.*

Метод проверки разностей средних уровней.

Метод Фостера-Стьюарта.

4. *Вычисление количественных характеристик развития экономических процессов.*

11.2. Основные типы трендов.

Тренд – долговременная устойчивая тенденция изменения показателя во времени.

Существует три вида линий тренда:

Восходящая - строится по минимумам волн восходящего тренда и выступает в роли линии поддержки.

Нисходящая - строится по вершинам волн медвежьего тренда и выступающая в роли линии сопротивления.

Горизонтальная - соединяет равные по значению максимумы или минимумы, которые зачастую поочередно меняют один другого. Выступает одновременно в роли горизонтальной линии поддержки и сопротивления.

Для выявления тренда используются:

- Знаковый критерий Кокса и Стьюарта;
- метод Фостера-Стьюарта;
- метод проверки разностей средних уровней;
- метод автокорреляционных функций и другие.

Метод обнаружения тренда - сравнение средних уровней ряда.

Временной ряд разбивают на две примерно равные по числу уровней части, каждая из которых рассматривается как некоторая самостоятельная выборочная совокупность, имеющая нормальное распределение. Если временной ряд имеет тенденцию к тренду, то средние, вычисленные для каждой совокупности, должны существенно (значимо) различаться между

собой. Если же расхождение незначительно, несущественно (случайно), то временной ряд не имеет тенденции. Таким образом, проверка наличия тренда в исследуемом ряду сводится к проверке гипотезы о равенстве средних двух нормально распределенных совокупностей.

Формирование уровней ряда определяется закономерностями трех основных типов: инерцией тенденции, инерцией взаимосвязи между последовательными уровнями ряда и инерцией взаимосвязи между исследуемым показателем и показателями-факторами, оказывающими на него причинное воздействие. Соответственно различают задачи анализа и моделирования тенденций, взаимосвязи между последовательными уровнями ряда; причинных взаимодействий между исследуемым показателем и показателями - факторами. Первая из них решается с помощью *моделей кривых роста*, вторая - с помощью *адаптивных методов и моделей*, а третья с помощью *регрессионных моделей*.

Плавную кривую (гладкую функцию), аппроксимирующую временной ряд принято называть *кривой роста*.

Аналитические методы выделения (оценки) неслучайной составляющей временного ряда с помощью кривых роста реализуются в рамках моделей регрессии, в которых в роли зависимой переменной выступает переменная y_t , а в роли единственной объясняющей переменной – время t .

В качестве кривых роста для описания тренда могут выбираться различные функции:

1. Полиномиальные (полином q –й степени):

$$y_t = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_qt^q.$$

2. Экспоненциальные:

- простая экспонента $y_t = a_0 \cdot e^{a_1t}$.

- модифицированная $y_t = a_0 + a_1 \cdot e^{a_2t}$.

3. S – образные:

- Гомперца

$$y_t = a_0 \cdot a_1^{a_2 t}$$

- логистическая

$$y_t = \frac{a_0}{(1 + a_1 \cdot e^{-a_2 t})}$$

Вопросы для самопроверки.

1. Что такое временной ряд?
2. Определение сильно стационарного ряда.
3. Определите слабо стационарный ряда.
4. Какие виды трендов существуют?
5. Как определяются уровни ряда?
6. Какие значения могут принимать уровни временного ряда?
7. В чем заключается предварительный анализ временных рядов?

ТЕМА 12. АДДИТИВНЫЕ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ МОДЕЛИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ.

АВТОКОРРЕЛЯЦИЯ УРОВНЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Ключевые слова: тренд, сезонность, аддитивная модель, мультипликативная модель, динамический ряд, сглаживание временного ряда, метод сглаживания

12.1. Содержание временного ряда: циклическая компонента, сезонная компонента и остаточная компонента. Аддитивные и мультипликативные модели. Анализ сезонности

Изучение структуры временных рядов строится на основе компонентного анализа - разложения исходного ряда на составляющие компоненты:

f_t – тренд (систематическая) составляющая или тенденция;

c_t – **циклическая составляющая** – нестрогие периодические циклические колебания, которые совершаются в течение ряда лет и вызваны политическими, военными, экономическими причинами;

s_t – **сезонная составляющая** – строго периодические циклические колебания, которые совершаются в течение года и вызваны природно-климатическими условиями;

ε_t – **случайная составляющая** (несистематическая) – все то, что осталось от временного ряда после выделения из него f_t, c_t, s_t .

Экономические процессы могут быть представлены в виде различных моделей:

- одной из названных составляющих компонент: $y_t = f_t, s_t, \dots$;
- **аддитивной модели** (сумма составляющих компонент):

$$y_t = f_t + c_t + s_t + \varepsilon_t ;$$

- **мультипликативной модели** (произведение составляющих компонент):

$$y_t = f_t \cdot c_t \cdot s_t \cdot \varepsilon_t.$$

Любой ряд можно описать в виде композиции этих составляющих. Надо, однако, помнить, что операция разложения временного ряда, допустимая с математической точки зрения и часто полезная для моделирования изучаемого явления, может в некоторых случаях ввести в заблуждение. В частности, при таком подходе чрезмерным упрощением может оказаться предположение о независимом влиянии указанных компонент. Наиболее простым для обнаружения и выделения является эффект сезонности. Под *сезонностью* понимают влияние внешних факторов, действующих с заранее известной периодичностью. Так, в ряду ежемесячных данных естественно ожидать наличие сезонных эффектов с периодом 12, в квартальных рядах – с периодом 4. В свою очередь, в информации, собираемой с интервалом 1 час, вполне могут возникнуть сезонные эффекты с периодом 24. Распространенный пример сезонности –

колебания цен на сельхозпродукцию в течение года. Всегда цены на овощи, например, минимальны летом и максимальны зимой.

Если все компоненты в ряду выявлены верно, то ε_t должна :

- подчиняться нормальному закону распределения;
- представляться случайными числами;
- быть независима от остатков других уровней ряда;
- математическое ожидание $M(\varepsilon_t) \approx 0$.

12.2. Сглаживание временных рядов

Методы определения тенденции временного ряда: метод вытягивания показателя ряда, метод среднего скользящего, метод адаптивного среднего, метод экспоненциального сглаживания, трендовый метод, метод МНК.

Под тенденций понимают некоторое общее направление развития, долговременную эволюцию. Тенденцию ряда динамики представляют в виде гладкой, которая аналитически выражается некоторой функцией времени, называемой трендом. Тренд характеризует основную закономерность движения во времени.

Под трендом обычно понимают регрессию на время. Отклонение от тренда есть влияние случайных факторов. Исходя из этого уровни временного ряда описываются следующим уравнением: $y_t = f(t) + \varepsilon_t$ где $f(t)$ - статистическая составляющая, характеризующая основную тенденцию явления во времени; ε_t - случайная составляющая.

Во временных рядах можно наблюдать тенденции трех видов: тенденция среднего уровня; тенденция дисперсии; тенденция автокорреляции.

Тенденция среднего уровня аналитически можно выразить в виде функции $f(t)$. Тенденция дисперсии - это изменения отклонений эмпирических значений временного ряда от значений, вычисленных по

уравнению тренда. Тенденция автокорреляции - это тенденция изменения связи между отдельными уровнями временного ряда.

Наиболее распространенным и простым способом моделирования тенденции социально-экономического явления является сглаживание временного ряда. Существуют различные приемы сглаживания, но суть их одна - замена фактических уровней ряда расчетными. Наибольшее распространение имеют линейные тренды, общая формула которых имеет вид:

$$\bar{y}_t = \sum_{\tau=-q}^s a_{\tau} y_{t+\tau}$$

где \bar{y}_t - сглаженное значение уровня на момент t ;

a_{τ} - вес приписываемого уровня ряда, находящемуся на расстоянии τ от момента t ;

s - число уровней после момента t ;

q - число уровней до момента t .

В зависимости от того, какие значения принимают веса a_{τ} сглаживание по формуле будет выполнено либо с помощью скользящих средних, либо экспоненциальных средних. Процесс выравнивания состоит из двух основных этапов: выбора типа кривой, оценивания параметров кривой. Существуют различные приемы, позволяющие выбрать форму кривой. Наиболее простой путь - это визуальный, на основе графического изображения временного ряда.

1) Полиномы:

- первой степени

$$\bar{y}_t = a_0 + a_1 t;$$

- второй степени

$$\bar{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2;$$

- третьей степени

$$\bar{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3;$$

- k -й степени

$$\bar{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_k t^k.$$

2) Различные экспоненты:

$$\bar{y}_t = a_0 a_1^t$$

$$\bar{y}_t = a_0 a_1^{b_1 t + b_2 t^2}$$

3) Логистические кривые:

$$\bar{y}_t = \frac{k}{1 + a_0 e^{-a_1 t}}$$

где e - основание натурального логарифма.

4) Кривая Гомперца:

$$\bar{y} = k a_0^{a_1 t}$$

Другой путь выявления формы кривой заключается в применении метода последовательных разностей.

$$\Delta_{t^1} = y_t - y_{t-1}; \Delta_{t^2} = \Delta_{t^1} - \Delta_{t-1}^1; \Delta_{t^3} = \Delta_{t^2} - \Delta_{t-1}^2 \dots$$

Расчет этих разностей ведется до тех пор, пока разности не будут приблизительно равными. Таким образом, достаточно простым методом выявления тенденции развития является сглаживание временного ряда, т.е. замена фактических уровней расчетными, имеющими меньшую колеблемость, чем исходные данные. Соответствующее преобразование называется фильтрованием. Рассмотрим несколько методов сглаживания.

Метод скользящих средних. Данный метод основан на представлении ряда в виде суммы достаточно гладкого тренда и случайной компоненты. В основе метода лежит идея расчета теоретического значения на основе локального приближения. Для построения оценки тренда в точке t по значениям ряда из временного интервала $[t-m, t+m]$ рассчитывают теоретическое значение ряда. Наибольшее распространение в практике сглаживания рядов получил случай, когда все веса для элементов интервала $[t-m, t+m]$ равны между собой. По этой причине этот метод называют методом скользящих средних, так как при выполнении процедуры происходит скольжение окном шириной $2m + 1$ по всему ряду. Ширину окна обычно берут нечетной, так как теоретическое значение

рассчитывается для центрального значения: количество слагаемых $k = 2m+1$ с одинаковым числом уровней слева и справа от момента t (рис.12.1).

Формула для расчета скользящей средней в этом случае принимает вид:

$$\tilde{Y}_t = \frac{1}{2m+1} \sum_{i=t-m}^{t+m} Y_i.$$

Общая формула метода “взвешенных” скользящих средних имеет вид:

$$\tilde{Y}_t = a_{-m}Y_{t-m} + \dots + a_0Y_t + \dots + a_mY_{t+m} = \sum_{i=t-m}^{t+m} a_i y_i ; \quad \sum_{i=t-m}^{t+m} a_i = 1,$$

где \tilde{Y}_t – сглаженное (отфильтрованное) значение уровня на момент t ;

a_m – “вес”, приписываемый уровню ряда, находящемуся на расстоянии m от момента t .

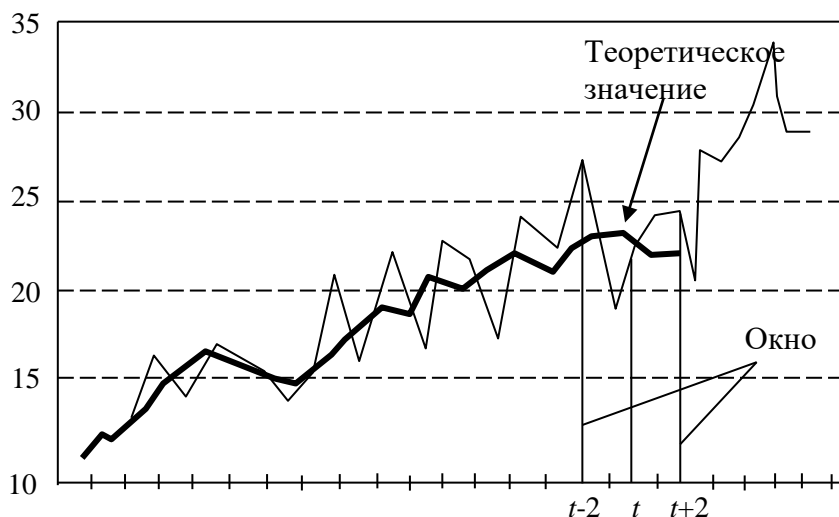


Рис. 12.1. Пример расчета 5-летней скользящей средней для временного ряда¹⁵

Суммирование в фильтре распространяется на $1+2m$ уровней (m уровней до момента t и m уровней после него).

Дисперсия для \tilde{Y}_t , равна σ^2/k , где через σ^2 обозначена дисперсия исходных членов ряда, а k – интервал (или окно) сглаживания, поэтому чем больше интервал сглаживания, тем сильнее усреднение данных и менее изменчива выделяемая тенденция. Чаще всего сглаживание

¹⁵https://ru.wikipedia.org/wiki/Скользящая_средняя

производят по трем, пяти и семи членам исходного ряда. При этом следует учитывать следующие особенности скользящей средней: если рассмотреть ряд с периодическими колебаниями постоянной длины, то при сглаживании на основе скользящей средней с интервалом сглаживания, равным или кратным периоду, колебания полностью устранятся; нередко сглаживание на основе скользящей средней столь сильно преобразует ряд, что выделенная тенденция развития проявляется лишь в самых общих чертах, а более мелкие, но важные для анализа детали (волны, изгибы и т.д.) исчезают; после сглаживания мелкие волны могут иногда поменять направление на противоположное – на месте “пиков” появляются “ямы”, и наоборот. Все это требует осторожности в применении простой скользящей средней и заставляет искать более тонкие методы описания.

Краевые эффекты. Метод скользящих средних не дает значений тренда для первых и последних m членов ряда. Этот недостаток особенно заметно сказывается в случае, когда длина ряда невелика, или же если необходимо провести экстраполяцию на будущее.

Этот метод (и другие, подобные ему) может вызывать автокорреляцию остатков, даже если она отсутствовала в исходных данных. Это – так называемый эффект Слуцкого-Юла.

Экспоненциальное сглаживание. Экспоненциальная средняя Q_t является примером асимметричной взвешенной скользящей средней, в которой учитывается степень старения данных – чем старше информация, тем с меньшим весом входит она в формулу для расчета сглаженного значения уровня ряда Q_t :

$$Q_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)Q_{t-1},$$

здесь: Q_t – экспоненциальная средняя, заменяющая наблюдаемое значение ряда y_t (в сглаживании участвуют все данные, полученные к текущему моменту t), α – параметр сглаживания, характеризующий вес текущего (самого нового) наблюдения, $0 < \alpha < 1$.

Метод применяется для прогнозирования нестационарных временных рядов, имеющих случайные изменения уровня и угла наклона. По мере удаления от текущего момента времени в прошлое вес соответствующего члена ряда быстро (экспоненциально) уменьшается и практически перестает оказывать какое-либо влияние на значение Q_t .

Легко получить, что $Q_t = Q_{t-1} + \alpha(y_t - Q_{t-1})$. Последнее соотношение позволяет дать следующую интерпретацию экспоненциальной средней: если Q_{t-1} – прогноз значения ряда y_t , то разность $y_t - Q_{t-1}$ есть погрешность прогноза; таким образом, прогноз Q_t для следующего момента времени $t+1$ учитывает ставшую известной в момент t ошибку прогноза. Можно показать, что

$$MQ_t = MY_t, \quad DQ_t = \frac{\alpha}{2-\alpha} DY_t,$$

т.е. математические ожидания наблюдений и экспоненциальных средних совпадают, а дисперсия сглаженных уровней меньше дисперсии исходных наблюдений. Если α близка к единице, то различие между дисперсиями невелико, однако с уменьшением α колебания экспоненциальной средней более сглаживаются. Выбор параметра сглаживания представляет собой достаточно сложную проблему. Общие соображения таковы: метод хорош для прогнозирования достаточно гладких рядов. В этом случае можно выбрать сглаживающую константу путем минимизации ошибки прогноза на один шаг вперед, оцененной по последней трети ряда. Некоторые специалисты рекомендуют, если высокочастотная компонента ряда имеет достаточно большую дисперсию, не следует использовать большие значения параметра сглаживания, например больше 0,2. (Использование больших значений сглаживающей константы приведет к плохим прогнозам.) На самом деле для каждого конкретного ряда исследователь волен выбрать свое значение α в зависимости от цели сглаживания.

Медианное сглаживание. Основное достоинство медианного сглаживания – устойчивость к выбросам. В основе метода лежит вычисление скользящей медианы. Для того чтобы найти значение скользящей медианы в точке t , вычисляется медиана значений ряда во временном интервале $[t-q, t+q]$. Медиана ряда во временном интервале определяется как центральный член вариационного ряда – последовательности значений ряда, входящих в этот временной интервал, упорядоченной по возрастанию. Соответствующее значение называется $(2q + 1)$ – точечной скользящей медианой. В отличие от выборочного среднего, выборочная медиана значительно более устойчива по отношению к наличию выбросов и других случайных искажений данных. Например, при введении в базу данных последовательности чисел (24, 27, 23, 31, 29, 27, 26) была допущена ошибка: вместо числа 23 было введено 233. Эта ошибка в меньшей мере скажется на результатах расчета медианы этого ряда, так как при построении вариационного ряда ошибочное значение будет находиться в самом конце ранжированного по возрастанию ряда, а за теоретическое значение берется центральный член. Как ясно из описания, если момент времени t стоит от начала или конца ряда менее, чем на q точек, вычисление становится невозможным. Для того чтобы тем не менее не сужать область определения сглаженного ряда по сравнению с исходным, для устранения этих краевых эффектов используют различные методы. Например, для таких точек, за исключением концевых, вычисляется значение скользящей медианы меньшего, максимально возможного порядка.

Применение сглаживания и критерии качества. В зависимости от целей сглаживания применяется тот или иной метод, либо их комбинация. Следует заметить, что повторное сглаживание уже сглаженного ряда дает несколько другие результаты, чем изменение параметров сглаживания. При использовании метода скользящего среднего и медианного

сглаживания под параметрами понимается ширина окна. Одним из распространенных методов сглаживания является последовательность из трех фильтров 3, 5, H, где 3 - сглаживание методом скользящих средних с шириной окна 3, далее с шириной окна 5 и затем фильтр Хеминга – сглаживание скользящим средним с шириной окна 3 и весами [0,25; 0,5; 0,25].

Выравнивание методом скользящих средних наиболее распространено как метод для оценки тенденции. Однако фильтрацию методом простого скользящего среднего можно сравнить с применением частотного фильтра. При относительно небольшой ширине окна сглаживания (m) фильтр простого скользящего среднего работает как фильтр высоких частот, т.е. исключает колебания высокой частоты. С другой стороны, фильтр простого скользящего среднего обладает тем преимуществом, что вычисления его весьма просты. Кроме того, заранее известны периоды извлекаемых частот. Таким образом, с помощью простого скользящего среднего можно совершенно исключить вклад некоторой заданной частоты подбором подходящей длины фильтра.

Метод экспоненциального сглаживания – это один из методов сглаживания, который обладает хорошими прогностическими способностями. Он применяется для краткосрочного прогнозирования. При использовании метода медианного сглаживания достаточно часто применяется целая серия сглаживаний с разной шириной окна. Критерием качества при разных целях сглаживания могут выступать разные показатели. Все критерии основываются на анализе остатков ряда. Наиболее распространенные критерии – это средняя величина остатков, максимальная величина остатков. Существует еще несколько критериев.

12.3. Оценка предпосылок «МНК» по критерию Дарбина-Уотсона.

Автокорреляция остатков

Критерий Дарбина-Уотсона или d – критерий (свойство независимости остатков, т.е. отсутствие автокорреляции):

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2},$$

где $e_i = y_i^{\text{факт}} - y_i^{\text{расч}}$

Критерий d – распределен в интервале от 0 до 4.

Если $d < 2$, то присутствует положительная автокорреляция между остатками уровней и отрицательная - если $d > 2$.

Если $0 < d < d_1$, то остатки содержат автокорреляцию.

Если $d_1 < d < d_2$, то имеется неопределенность и тогда рассчитывается первый коэффициент автокорреляции по формуле:

$$r(1) = \frac{\sum_{i=2}^n \varepsilon_i \cdot \varepsilon_{i-1}}{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}.$$

Рассчитанное значение $r(1)$ сопоставляется с $r(1)_{\text{табл}}$ табличным, и если $r(1) < r(1)_{\text{табл}}$, то автокорреляция отсутствует, в противном случае присутствует ($r(1)_{\text{табл}} = 0,36$).

Если $d_2 < d < 2$, то ряд остатков не коррелирован.

Если $d > 2$, то d - критерий пересчитывается по формуле: $d' = 4 - d$ и дальнейшие выводы делают по d' .

Наличие или отсутствие свойства “случайности” в ряду выборочной ошибки модели e_t , $t = 1, 2, \dots, T$; в определенной мере указывает на “соответствие” или “несоответствие” модели описываемому ею процессу y . В том случае, когда ошибка модели “неслучайна”, может быть

рекомендовано уточнить рассматриваемый вариант модели, выбрать более подходящий для данной ситуации метод оценки ее параметров.

Как было отмечено выше, “неслучайность” ошибки может иметь различный характер. Наиболее часто она выражается наличием автокорреляционной связи между соседними ее значениями, тенденциями, характеризующими изменения их квадратов, т. е. тенденциями в ряду ε_i^2 , $i=1, 2, \dots, n$ и других ее производных.

Тест Дарбина-Уотсона обычно используется для установления факта наличия автокорреляционной зависимости первого порядка в ряду ошибки ε_i , т.е. между соседними ее значениями, ε_i и ε_{i+1} , $i=1, 2, \dots, n$. Обычно соседние значения ошибки связаны более сильной зависимостью, чем значения ε_i и ε_{i+2} , ε_i и ε_{i+3} и т.д. Вследствие этого отсутствие автокорреляционной связи между рядами значений выборочной ошибки ε_i и ε_{i-1} , $i=1, 2, \dots, n-1$; позволяет с большой степенью уверенности утверждать, что в ряду истинной ошибки модели ε_i отсутствуют вообще какие-либо автокорреляционные взаимосвязи.

Значение критерия Дарбина-Уотсона рассчитывается по следующей формуле:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)^2}{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}.$$

Раскрывая квадрат в числителе выражения, получим:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (\varepsilon_{i+1} - 2\varepsilon_i + \varepsilon_i + \varepsilon_i^2)^2}{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2} \approx 2(1 - r_1),$$

где r_1 – коэффициент автокорреляции первого порядка ошибки ε_i , т. е. корреляции между рядами ε_i и ε_{i-1} .

Из выражения непосредственно вытекает, что

$$0 \leq d \leq 4.$$

Значение $d = 0$ соответствует случаю, когда между рядами ε_i и ε_{i+1} существует строгая положительная линейная зависимость, т. е. $r_1 = +1$, и значение $d=4$ соответствует строгой отрицательной связи, $r_1 = -1$. Если ряды ε_i и ε_{i+1} независимы, то $r_1 = 0$ и $d=2$.

Точки $d=0; 2; 4$ и определяют границы критерия Дарбина-Уотсона, в пределах которых гипотеза о наличии автокорреляции первого порядка в последовательности ошибок либо принимается (в областях близких к 0 или 4), либо отвергается (в области $d=2$), либо решение по данному критерию остается неопределенным (в промежутках между отмеченными областями). Иными словами, на отрезке $[0,4]$ выделяются четыре промежуточные точки, таким образом, что $0 \leq d_1 \leq d_2 \leq 2 \leq d_3 \leq d_4 \leq 4$. Если расчетное значение критерия Дарбина-Уотсона находится на отрезках $[0, d_1]$, $[d_4, 4]$, то гипотеза о наличии автокорреляции первого порядка в ряду ошибок модели принимается, если расчетное значение d находится в интервале $[d_2, d_3]$, – то отвергается. Значения d , приходящиеся на полуинтервалы $[d_1, d_2]$ и $[d_3, d_4]$, не позволяют сделать однозначного суждения по данной гипотезе. В последнем случае необходимо проводить более глубокий анализ зависимостей между значениями ошибки ε_i , $i=1,2,\dots, n$.

Учебное задание

1. Сильная и слабая стационарность. Автокорреляционная функция временного ряда. Примеры временных рядов (стационарных и нет). Мнимая регрессия.

2. Проверка ряда на стационарность. Разностная и трендовая нестационарность. Способы избавления от нестационарности. Модели стационарных временных рядов авторегрессии и скользящего среднего -

(ARMA(p,q)-модели). Свойства и основные характеристики каждого процесса.

3. Характерное поведение коррелограмм процессов. Примеры типичных реализаций процессов.

Вопросы для самопроверки.

1. Что такое автокорреляционная функция ряда.
2. Что такое тренд.
3. Приведите примеры стационарных и нестационарных временных рядов.
4. Как проверить стационарность ряда.
5. Какие вы знаете типы нестационарных рядов. Приведите примеры.
6. Чем нам грозит регрессия одного стационарного ряда на другой.
7. Что такое ARMA представление стационарного ряда.
8. Как подобрать адекватную ARMA модель ряда.

Тесты для проверки знаний

1. В стационарном временном ряде трендовая компонента
 - a) имеет линейную зависимость от времени
 - b) имеет нелинейную зависимость от времени
 - c) отсутствует
 - d) присутствует
2. Методом выравнивания временных рядов является:
 - a) Метод наименьших квадратов
 - b) Метод скользящих средних
 - c) Метод экспоненциального сглаживания
 - d) Все вышеприведенные.
3. Критерий Дарбина-Уотсона применяется для определения:
 - a) Тесноты связи

b) Автокорреляции

c) Авторегрессии

d) Адекватности модели

4. Временным рядом является совокупность значений.

a) экономических однотипных объектов по состоянию на определенный момент времени

b) экономического показателя за несколько последовательных моментов (периодов) времени

c) экономического показателя для однотипных объектов на определенный момент времени

d) последовательных моментов (периодов) времени и соответствующих им значений экономического показателя

5. Признаком мультиколлинеарности является:

a) - высокие коэффициент детерминации и частные коэффициенты корреляции

b) -высокий DW

c) -высокое значение F-статистики

d) - высокие значения ошибки аппроксимации

6. Аддитивная модель временного ряда имеет вид:

a) - $Y_t = T_t + S_t + V_t + \varepsilon_t$;

b) - $Y_t = T_t \cdot S_t \cdot V_t \cdot \varepsilon_t$;

c) - $Y_t = T_t \cdot S_t \cdot V_t + \varepsilon_t$.

d) - $Y_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$;

7. Какой из этих тестов не является тестом на гомоскедастичность:

1) Тест Голфилда–Квандта.

2) Тест ранговой корреляции Спирмена.

3) Тест Бреуш–Пагана.

4) Тест Уайта.

5) Тест Вальда;

6) F – тест.

8. Какие из приведенных ниже типов данных являются наблюдением одной переменной в различные моменты времени:

a) Пространственные данные;

b) панельные данные;

c) временной ряд.

d) нет ответа

9. Как можно обнаружить наличие автокорреляции во временном ряду:

1) графически (глядя на график ряда);

2) коррелограммы;

3) статистики Дарбина_Уотсона;

4) F – статистики;

5) теста Уайта.

10. К каким последствиям приводит наличие автокорреляции и гетероскедастичности в остатках:

a) МНК-оценки коэффициентов уже не обладают меньшей дисперсией, но остаются несмещенными и линейными; МНК – стандартные ошибки неправильны, их надо корректировать;

b) МНК-оценки коэффициентов остаются наилучшими линейными несмещенными оценками, проблема только в стандартных ошибках, их надо корректировать.

c) МНК-оценки коэффициентов уже не обладают меньшей дисперсией, но остаются несмещенными и линейными; МНК – стандартные ошибки правильны (состоятельны), тестами, в которых они участвуют, пользоваться можно.

d) Ни один из приведенных выше вариантов не подходит.

Решение типовых задач

Задача 1. Имеются данные об общем количестве правонарушений на таможне одного из субъектов Узбекистана (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Год	Квартал	t	Количество возбужденных дел, y_t
2015	I	1	375
	II	2	371
	III	3	869
	IV	4	1015
2016	I	5	357
	II	6	471
	III	7	992
	IV	8	1020
2017	I	9	390
	II	10	355
	III	11	992
	IV	12	905
2018	I	13	461
	II	14	454
	III	15	920
	IV	16	927

Данный временной ряд содержит сезонные колебания периодичностью 4, так как количество правонарушений в первый-второй кварталы ниже, чем в третий-четвертый. Необходимо рассчитать компоненты аддитивной модели временного ряда.

Шаг 1. Проводится выравнивание исходных уровней ряда методом скользящей средней (табл. 3.2).

Для этого:

1. Суммируются уровни ряда последовательно за каждые четыре квартала со сдвигом на один момент времени.

Таблица 3.2

№ квартала, t	Количество правонарушений, y_t	Итого за четыре квартала	Скользящая средняя за четыре квартала	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной компоненты
1	2	3	4	5	6
1	375	–	–	–	–
2	371	2630	657,5	–	–
3	869	2612	653	655,25	213,75
4	1015	2712	678	665,5	349,5
5	357	2835	708,75	693,75	–336,75
6	471	2840	710	709,375	–238,375
7	992	2873	718,25	714,125	277,875
8	1020	2757	689,25	703,75	316,25
9	390	2757	689,25	689,25	–299,25
10	355	2642	660,5	674,875	–319,875
11	992	2713	678,25	669,375	322,625
12	905	2812	703	690,625	214,375
13	461	2740	685	694	–233
14	454	2762	690,5	687,75	–233,75
15	920	–	–	–	–
16	927	–	–	–	–

2. Разделив полученные суммы на 4, находятся скользящие средние. Полученные таким образом выровненные значения уже не содержат сезонной компоненты.
3. Необходимо привести эти значения в соответствие с фактическими моментами времени, для чего находятся средние значения из двух

последовательных скользящих средних – центрированные скользящие средние.

Шаг 2. Находятся оценки сезонной компоненты как разность между фактическими уровнями ряда и центрированными скользящими средними. Эти оценки используются для расчета значений сезонной компоненты S_i . Для этого находят средние за каждый квартал (по всем годам) оценки сезонной компоненты \bar{S}_i . В моделях с сезонной компонентой обычно предполагается, что сезонные воздействия за период взаимопогашаются. В аддитивной модели это выражается в том, что сумма значений сезонной компоненты по всем кварталам должна быть равна нулю (табл. 3.3).

Таблица 3.3

Показатели	Год	№ квартала, i			
		I	II	III	IV
	2015	–	–	213,75	349,5
	2016	–336,75	–238,375	277,875	316,25
	2017	–299,25	–319,875	322,625	214,375
	2018	–233	–233,75	–	–
Всего за i -й квартал		–869	–792	814,25	880,125
Средняя оценка сезонной компоненты для i -го квартала, \bar{S}_i		–289,667	–264	271,417	293,375
Скорректированная сезонная компонента, S_i		–292,448	–266,781	268,636	290,593

Для данной модели имеем:

$$-289,667 - 264 + 271,417 + 293,375 = 11,125.$$

Корректирующий коэффициент $k = 11,125 / 4 = 2,781$.

Расчет скорректированных значений сезонной компоненты

$$(S_i = \bar{S}_i - k).$$

Проверка равенства нулю суммы значений сезонной компоненты:

$$-292,448 - 266,781 + 268,636 + 290,593 = 0.$$

Шаг 3. Исключается влияние сезонной компоненты, путем вычитания ее значения из каждого уровня исходного временного ряда. Получаются величины

$$T + E = Y - S.$$

Эти значения рассчитываются за каждый момент времени и содержат только тенденцию и случайную компоненту (табл. 3.4).

Таблица 3.4

t	y_t	S_i	$y_t - S_i$	T	$T+S$	$E = y_t - (T+S)$	E_2
1	2	3	4	5	6	7	8
1	375	-292,448	667,448	672,700	380,252	-5,252	27,584
2	371	-266,781	637,781	673,624	406,843	-35,843	1284,721
3	869	268,636	600,364	674,547	943,183	-74,183	5503,117
4	1015	290,593	724,407	675,470	966,063	48,937	2394,830
5	357	-292,448	649,448	676,394	383,946	-26,946	726,087
6	471	-266,781	737,781	677,317	410,536	60,464	3655,895
7	992	268,636	723,364	678,240	946,876	45,124	2036,175
8	1020	290,593	729,407	679,163	969,756	50,244	2524,460
9	390	-292,448	682,448	680,087	387,639	2,361	5,574
10	355	-266,781	621,781	681,010	414,229	-59,229	3508,074
11	992	268,636	723,364	681,933	950,569	41,431	1716,528
12	905	290,593	614,407	682,857	973,450	-68,450	4685,403
13	461	-292,448	753,448	683,780	391,332	69,668	4853,630
14	454	-266,781	720,781	684,703	417,922	36,078	1301,622
15	920	268,636	651,364	685,627	954,263	-34,263	1173,953
16	927	290,593	636,407	686,550	977,143	-50,143	2514,320

Шаг 4. Определение компоненты T данной модели. Для этого проводится аналитическое выравнивание ряда $(T + E)$ с помощью линейного тренда. Результаты аналитического выравнивания следующие:

$$T = 671,777 + 0,9233t.$$

Подставляя в это уравнение значения $t = 1, 2, \dots, 16$, находятся уровни T для каждого момента времени.

Шаг 5. Находятся значения уровней ряда, полученные по аддитивной модели. Для этого к уровням T прибавляются значения сезонной компоненты для соответствующих кварталов.

Для оценки качества построенной модели применяется сумма квадратов полученных абсолютных ошибок.

$$R^2 = 1 - \frac{E^2}{(y_t - \bar{y})^2} = 1 - \frac{37911,973}{1252743,75} = 0,970.$$

Следовательно, можно сказать, что аддитивная модель объясняет 97% общей вариации уровней временного ряда количества правонарушений по кварталам за четыре года.

Шаг 6. Прогнозирование по аддитивной модели. Необходимо дать прогноз об общем объеме правонарушений на I-й и II-й кварталы 2016 года. Прогнозное значение F_t уровня временного ряда в аддитивной модели есть сумма трендовой и сезонной компонент. Для определения трендовой компоненты воспользуемся уравнением тренда

$$T = 671,777 + 0,9233t.$$

Получим

$$T_{17} = 671,777 + 0,9233 \cdot 17 = 687,473;$$

$$T_{18} = 671,777 + 0,9233 \cdot 18 = 688,396.$$

Значения сезонных компонент за соответствующие кварталы равны:

$S_1 = -292,448$ и $S_2 = -266,781$. Таким образом,

$$F_{17} = T_{17} + S_1 = 687,473 - 292,448 \approx 395;$$

$$F_{18} = T_{18} + S_2 = 688,396 - 266,781 \approx 422.$$

То есть в первые два квартала 2016 года следует ожидать порядка 395 и 422 правонарушений соответственно.

Задача 2. На основе помесечных данных о числе браков (тыс.) в регионе за последние три года была построена аддитивная модель временного ряда. Скорректированные значения сезонной компоненты за соответствующие месяцы приведены в табл. 3.5.

Таблица 3.5

Месяц	Скорректированные значения сезонной компоненты	Месяц	Скорректированные значения сезонной компоненты
Январь	-1,0	Июль	3,0
Февраль	2,0	Август	1,0
Март	-0,5	Сентябрь	2,5
Апрель	0,3	Октябрь	1,0
Май	-2,0	Ноябрь	-3,0
Июнь	-1,1	Декабрь	?

Уравнение тренда выглядит следующим образом:

$$y_t = 2,5 + 0,03t.$$

При расчете параметров тренда использовались фактические моменты времени (t от 1 до 36 месяцев).

Требуется:

- определить значение сезонной компоненты за декабрь;
- на основе постоянной модели дать прогноз, заключенных в течение 1-го квартала следующего года.

Решение.

Сумма значений сезонной компоненты внутри одного цикла должна быть равна 0 (в соответствии с методикой построения аддитивной модели временного ряда). Следовательно, значение сезонной компоненты за декабрь составит:

$$S_{12} = 0 - (-1 + 2 - 0,5 + 0,3 - 2 - 1,1 + 3 + 1 + 2,5 + 1 - 3) = -2,2.$$

Прогнозное значение уровня временного ряда F_t в аддитивной модели есть сумма трендового значения T_t и соответствующего значения сезонной компоненты S_t .

Число браков, заключенных в I-м квартале следующего года, есть сумма числа браков, заключенных в январе F_{37} , феврале F_{38} и марте F_{39} .

Для расчета трендовых значений воспользуемся уравнением тренда, указанным в условии задачи:

$$\begin{aligned}\hat{y}_t &= 2,5 + 0,03t; \\ T_{37} &= 2,5 + 0,03 \cdot 37 = 3,61; \\ T_{38} &= 2,5 + 0,03 \cdot 38 = 3,64; \\ T_{39} &= 2,5 + 0,03 \cdot 39 = 3,67.\end{aligned}$$

Соответствующие значения сезонных компонент составят:

$$\begin{aligned}S_1 &= -1 && \text{(январь)} \\ S_2 &= 2 && \text{(февраль)} \\ S_3 &= -0,5 && \text{(март)}\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}F_{37} &= T_{37} + S_1 = 3,61 - 1,0 = 2,61; \\ F_{38} &= T_{38} + S_2 = 3,64 + 2,0 = 5,64; \\ F_{39} &= T_{39} + S_3 = 3,67 - 0,5 = 3,17.\end{aligned}$$

Количество браков, заключенных в I-м квартале следующего года, составит:

$$2,61 + 5,64 + 3,17 = 11,42 \text{ тыс.}$$

Решение с помощью ППП Excel

Задача 1. Динамика выпуска продукции Швеции характеризуется данными (млн дол.).

1. Для определения параметров линейного тренда по методу наименьших квадратов используется статистическая функция ЛИНЕЙН, для определения экспоненциального тренда – ЛГРФПРИБЛ. В качестве

зависимой переменной в данном примере выступает время ($t = 1, 2, \dots, n$).

Приведем результаты вычисления функции ЛИНЕЙН и ЛГРФПРИБЛ

Запишем уравнение линейного и экспоненциального тренда, используя

данные.
$$\hat{y}_t = -1921124,37 + 977,12t, \hat{y}_t = -1,0045^t.$$

2. Построение графиков осуществляется с помощью Мастера диаграмм.

Порядок построения следующий:

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Год, x	Выпуск продукции, y			Линейн		
2	1970	1054			977,1198198	-1921124,369	
3	1971	1104			60,67808483	120053,2457	
4	1972	1149			0,884084673	3782,05096	
5	1973	1291			259,3175535	34	
6	1974	1427			3709254808	486332921,9	
7	1975	1505					
8	1976	1513					
9	1977	1635					
10	1978	1987					
11	1979	2306					
12	1980	2367					
13	1981	2913					
14	1982	3837					
15	1983	5490					
16	1984	5502					
17	1985	6342					
18	1986	7665					
19	1987	8570					
20	1988	11172					
21	1989	14150					
22	1990	14004					
23	1991	13088					
24	1992	12518					
25	1993	13471					
26	1994	13617					
27	1995	16356					
28	1996	20037					
29	1997	21748					
30	1998	23298					
31	1999	26570					
32	2000	23080					

Рис. 12.2. Результат вычисления функции ЛИНЕЙН

- 1) введите исходные данные или откройте существующий файл, содержащий анализируемые данные;
- 2) активизируйте Мастер диаграмм любым из следующих способов:

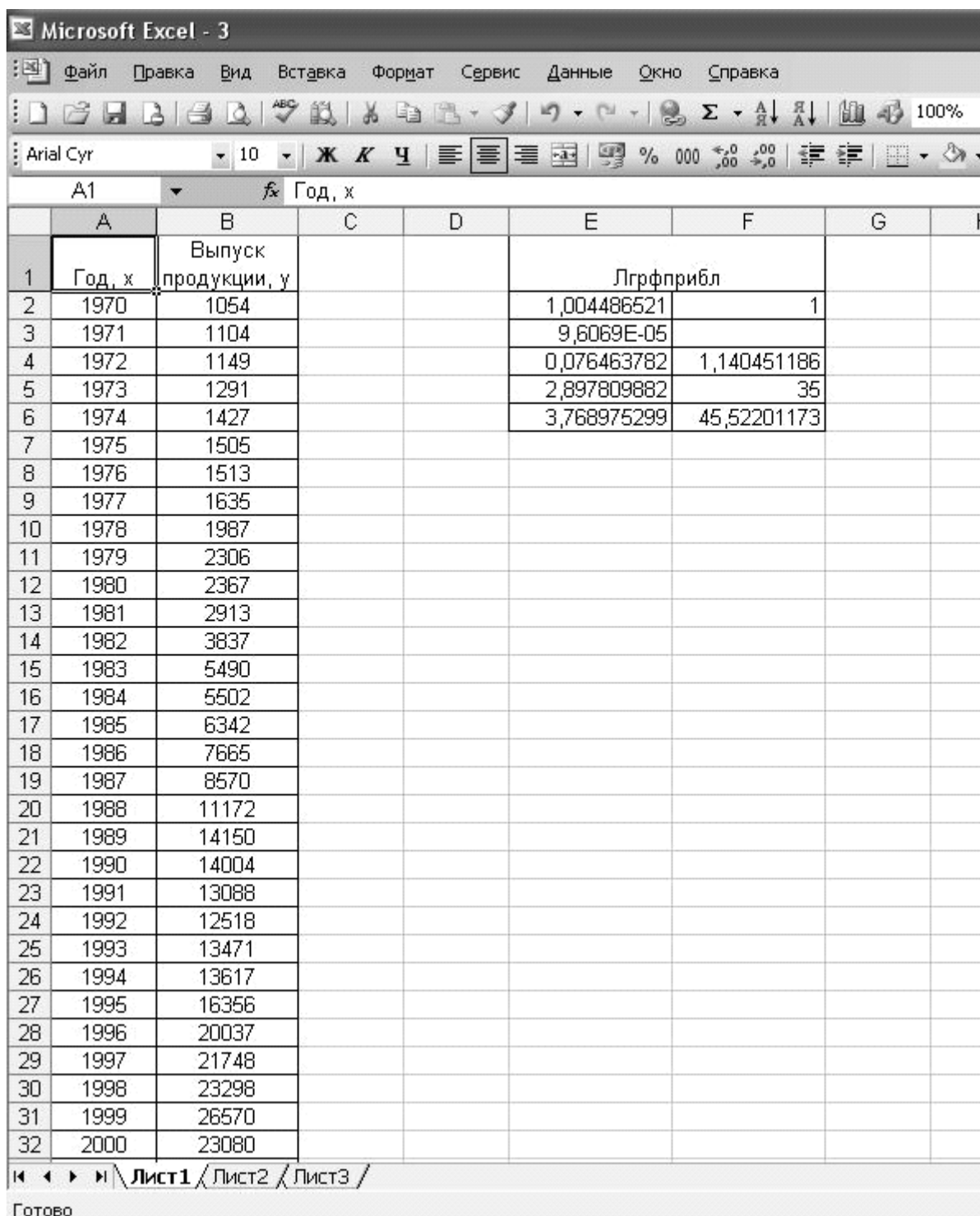


Рис. 12.3. Результат вычисления функции ЛГРФПРИБЛ

- а) в главном меню выберите Вставка / Диаграмма;
- б) на панели инструментов Стандартная щелкните по кнопке Мастер диаграмм;
- 3) в окне Тип выберите График (рис. 12.2); вид графика выберите в поле рядом со списком типов. Щелкните по кнопке Далее;

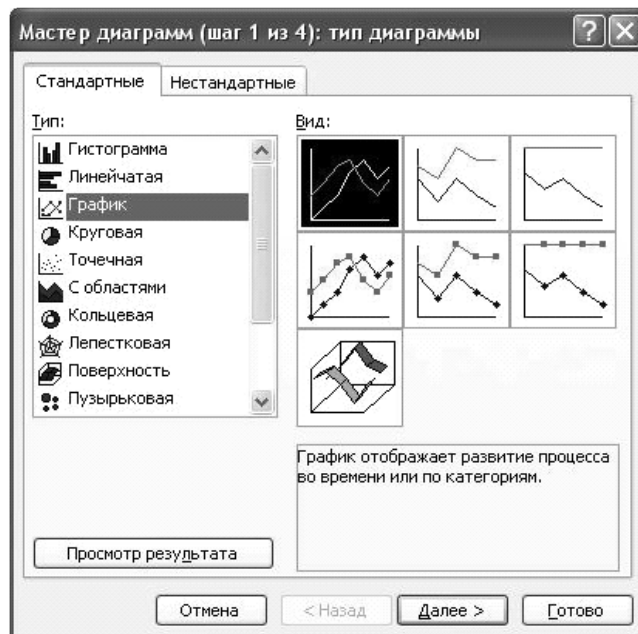


Рис. 12.4. Диалоговое окно Мастера диаграмм: тип диаграммы

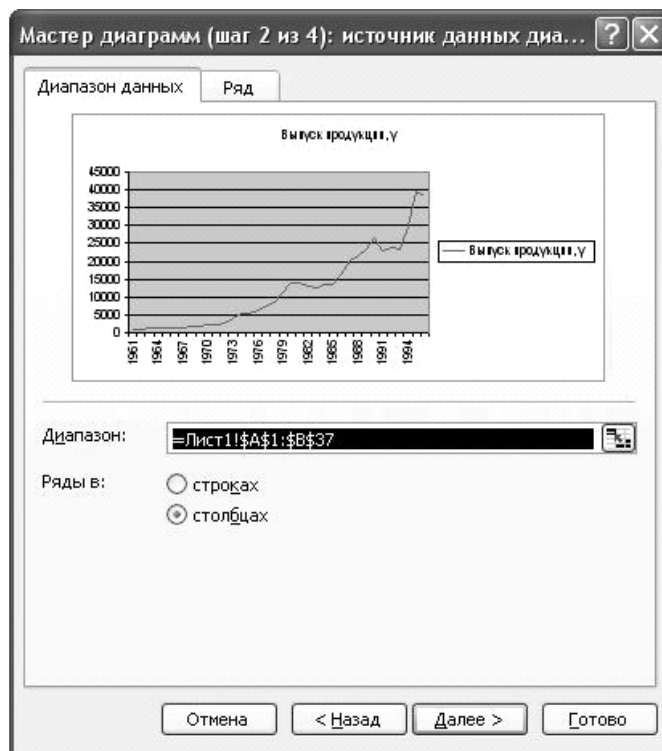


Рис. 12.5. Диалоговое окно Мастера диаграмм: источник данных

4) заполните диапазон данных, как показано на рис. 12.3. Установите флажок размещения данных в столбцах (строках). Щелкните по кнопке Далее;

- 5) заполните параметры диаграммы на разных закладках (рис. 12.4): название диаграммы и осей, значение осей, линии сетки, параметры легенды, таблица и подписи данных. Щелкните по кнопке Далее;
- 6) укажите место размещения диаграммы на отдельном или имеющемся листе (рис. 12.5). Щелкните по кнопке Далее. Готовая диаграмма, отражающая динамику уровня изучаемого ряда, приведена на рис. 12.6.

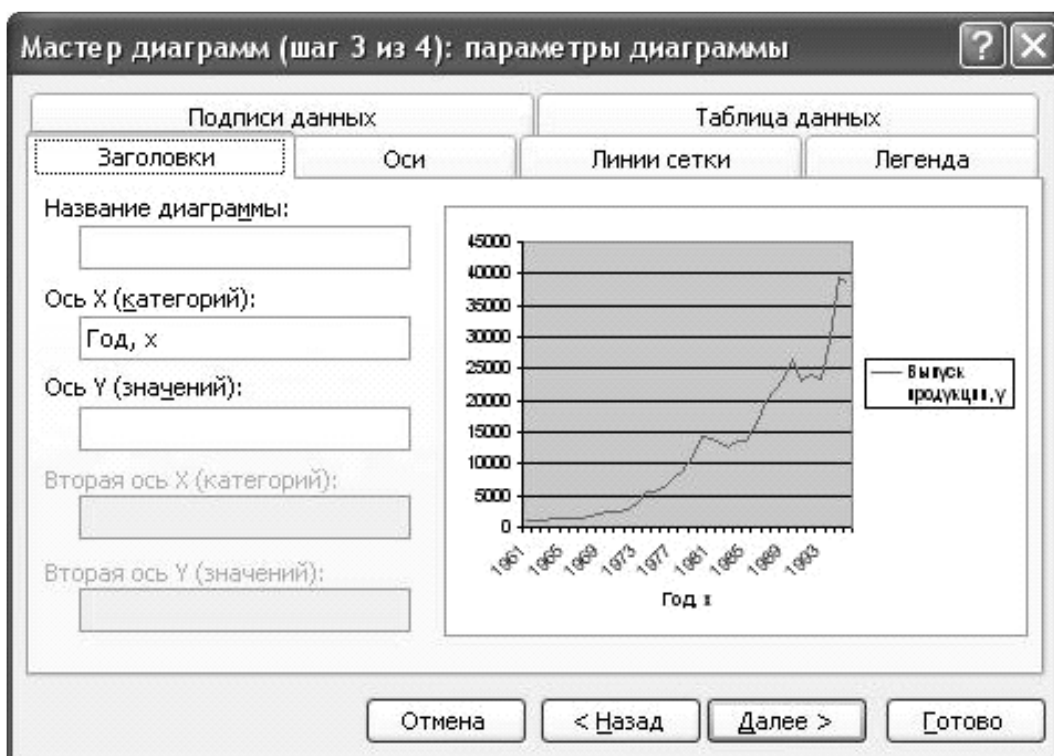


Рис.12.6. Диалоговое окно Мастера диаграмм: параметры диаграммы

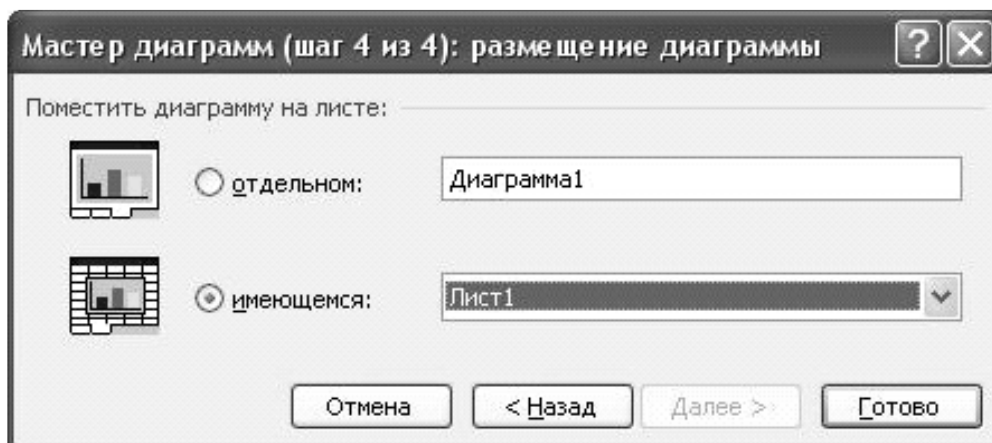


Рис. 12.7. Диалоговое окно Мастера диаграмм: размещение диаграммы

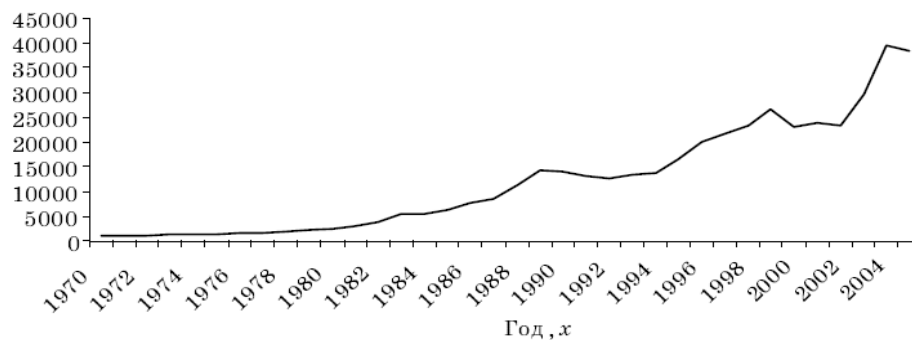


Рис. 12.8. Динамика выпуска продукции: – выпуск продукции, y

В ППП MS Excel линия тренда может быть добавлена в диаграмму с областями гистограммы или в график. Для этого:

- 1) выделите область построения диаграммы; в главном меню выберите Диаграмма / Добавить линию тренда;
- 2) в появившемся диалоговом окне (рис. 12.9) выберите вид линии тренда и задайте соответствующие параметры. Для полиномиального тренда необходимо задать степень аппроксимирующего полинома, для скользящего среднего – количество точек усреднения.

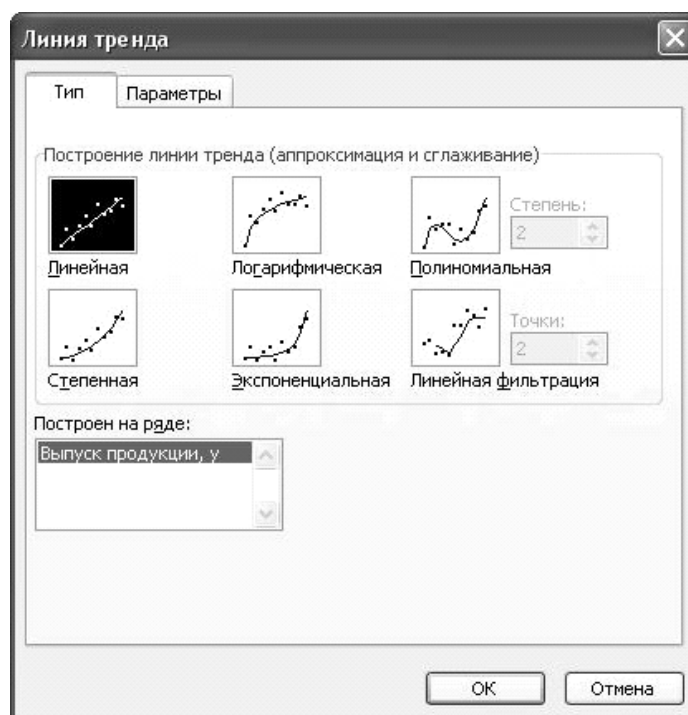


Рис. 12.9. Диалоговое окно типов линий тренда

В качестве дополнительной информации на диаграмме можно отобразить уравнение регрессии и значение среднеквадратического отклонения, установив соответствующие флажки на закладке Параметры (рис. 12.9). Щелкните по кнопке ОК.

На рис. 12.10–12.13 приведены различные виды трендов, описывающие исходные данные задачи.

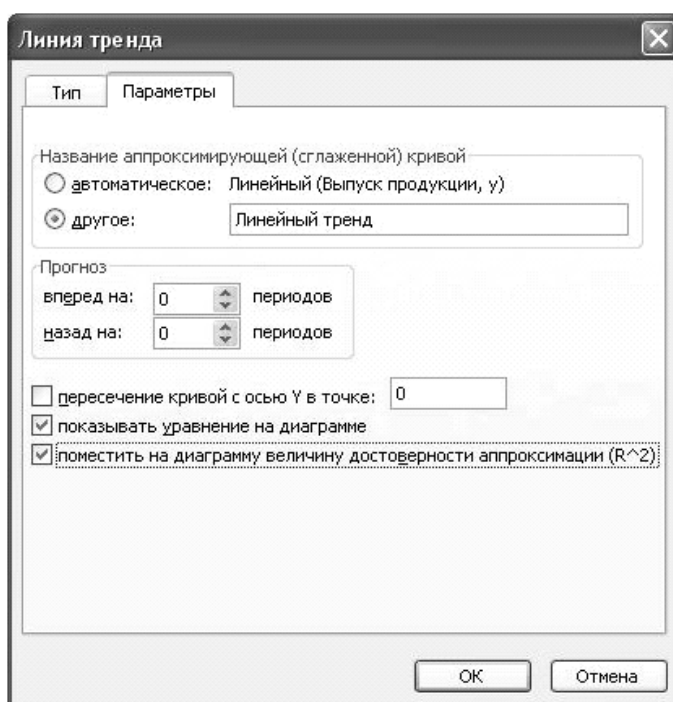


Рис. 12.10. Диалоговое окно параметров линии тренда

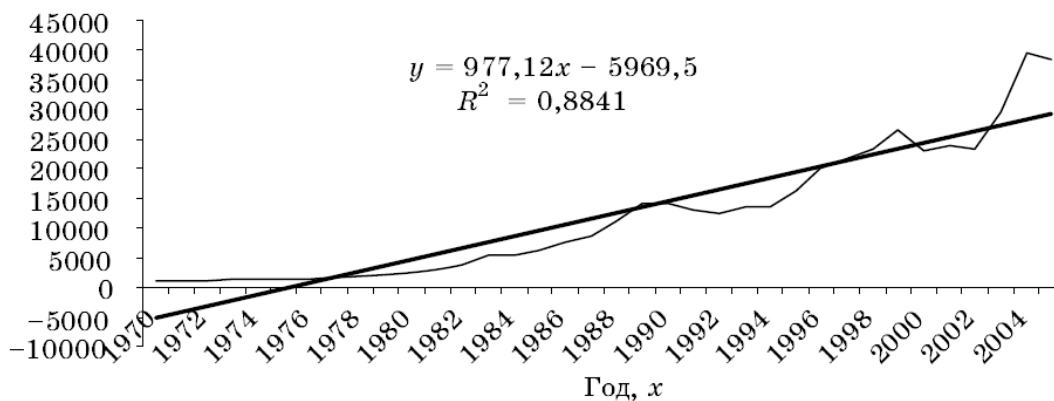


Рис. 12.11. Линейный тренд:

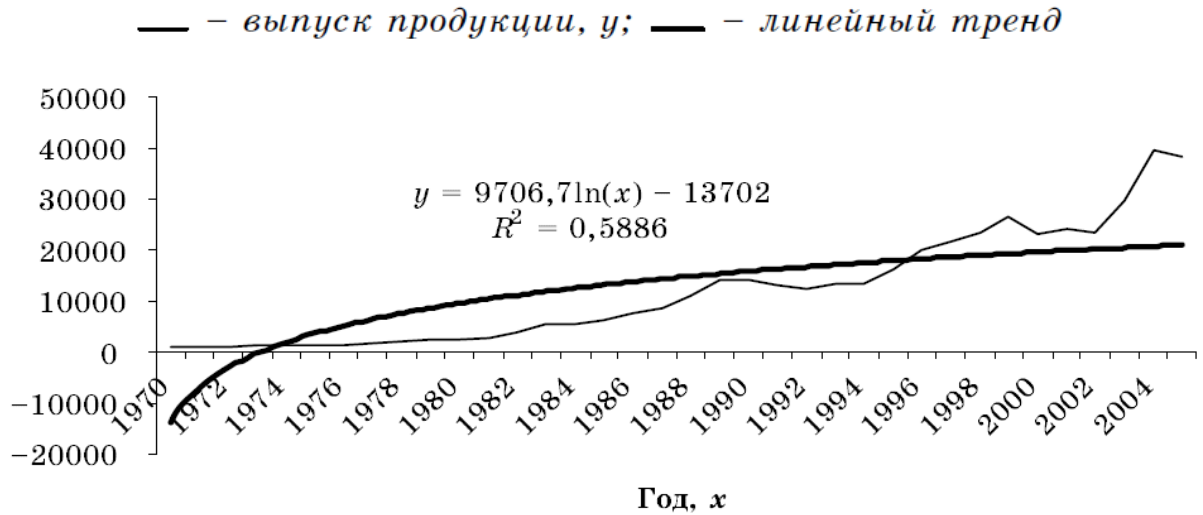


Рис. 12.12. Логарифмический тренд:

— - выпуск продукции, y ; — - логарифмический тренд

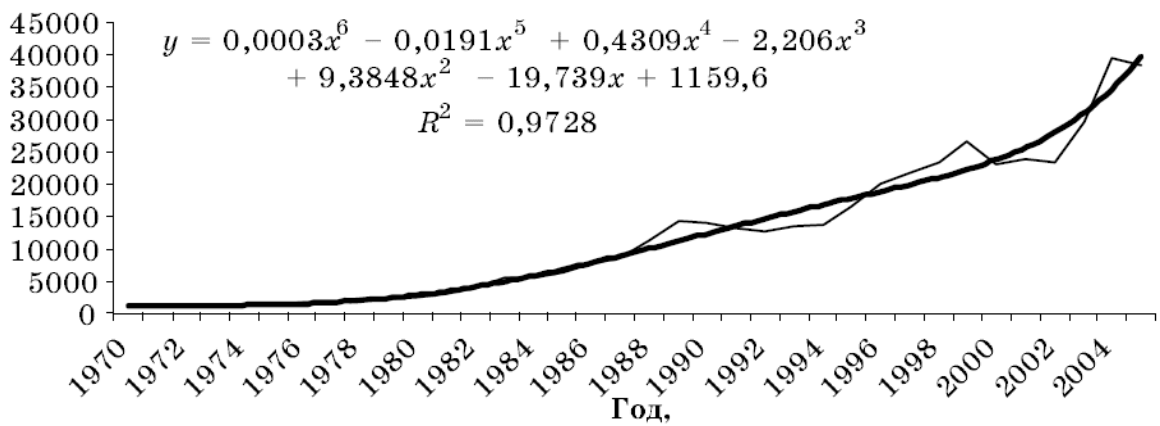


Рис. 12.13. Полиномиальный тренд:

— - выпуск продукции, y ; — - полиномиальный тренд 6-й степени

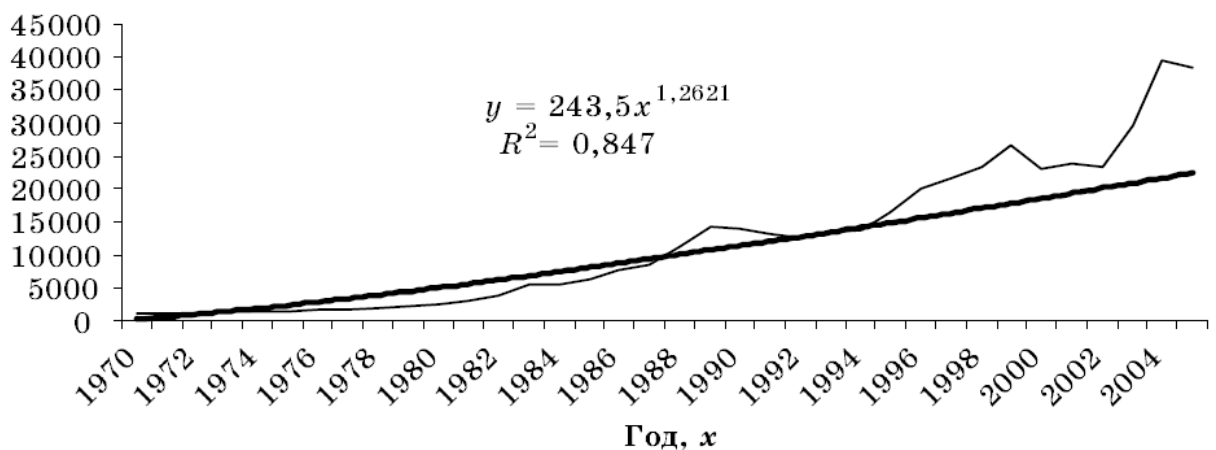


Рис. 12.14. Степенной тренд:

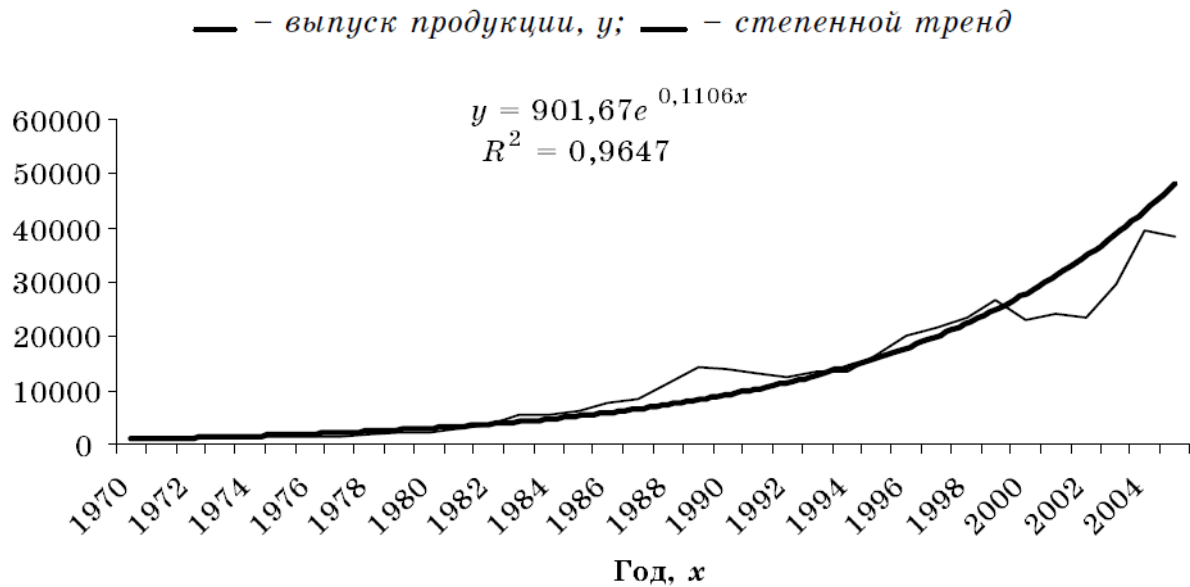


Рис. 12.15. Экспоненциальный тренд:

— - выпуск продукции, y ; — - экспоненциальный тренд

3. Сравним значения r^2_{xy} (или R^2) по разным уравнениям трендов:
 полиномиальный 6-й степени – $r^2_{xy} = 0,9728$; экспоненциальный –
 $r^2_{xy} = 0,9647$; линейный – $r^2_{xy} = 0,8841$; степенной – $r^2_{xy} = 0,8470$;
 логарифмический – $r^2_{xy} = 0,5886$.

Исходные данные лучше всего описывает полином 6-й степени.
 Следовательно, в рассматриваемом примере для прогнозных значений
 следует использовать полиномиальное уравнение.

Контрольные задания

Задача 1. На основе месячных данных о потреблении электроэнергии за последние три года была построена аддитивная модель временного ряда (табл. 3.5).

Таблица 3.5

Месяц	Скорректированные значения сезонной компоненты	Месяц	Скорректированные значения сезонной компоненты
Январь	+25	Июль	-25
Февраль	+10	Август	-18
Март	+6	Сентябрь	+2
Апрель	-4	Октябрь	+15
Май	-32	Ноябрь	+27
Июнь	-38	Декабрь	?

Уравнение тренда выглядит следующим образом: $y_t = 300 + 1,5t$.

При расчете параметров тренда использовались фактические моменты времени (t от 1 до 36 месяцев).

Задание:

- определить значение сезонной компоненты за декабрь;
- дать точечный прогноз ожидаемого потребления электроэнергии в течение I-го квартала следующего года.

Задача 2. Имеются ежемесячные данные о темпах роста заработной платы за 10 месяцев 2018 г. в процентах к уровню декабря 2017 г.

(табл. 3.8).

Таблица 3.8

Месяц	Темпы роста номинальной месячной заработной платы
Январь	82,9
Февраль	87,3
Март	99,4
Апрель	104,8
Май	107,2
Июнь	121,6
Июль	118,6
Август	114,1
Сентябрь	123,0
Октябрь	127,3

Используя ППП Excel, выбрать наилучший тип тренда и определить его параметры.

ТЕМА 13. ЭКОНОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ В ВИДЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ. ПРИВЕДЕННЫЕ И СТРУКТУРНЫЕ ФОРМЫ МОДЕЛЕЙ

Ключевые слова: Системы эконометрических уравнений, виды эконометрических уравнений, уровень затрат ресурсов, уравнения статистического характера, причинно - следственные зависимости, экзогенные и эндогенные переменные, рекурсивные системы.

13.1. Системы эконометрических уравнений. Виды системы эконометрических уравнений.

Сложность и многогранность производственных взаимосвязей, объектов анализа и прогнозирования, специфика конкретной производственной структуры или особые цели и формы исследования часто обуславливают необходимость представления производственной функции не одним уравнением, а в виде системы уравнений.

Системы эконометрических уравнений можно условно подразделить на три вида. К первому виду относятся системы независимых уравнений, каждое из которых решается самостоятельно, вне зависимости от других уравнений, но все они рассматриваются совместно в рамках единой экономико-математической модели, предназначенной для анализа, планирования или прогнозирования производства. Иными словами, интересы исследования производства в целом требуют совместного рассмотрения ряда функций, каждая из которых может характеризовать лишь одну из сторон этого производства. Простейший вариант такой системы уравнений возникает при анализе выпуска продукции с применением определенной технологии, требующей строго

фиксированных пропорций затрат различных ресурсов (непосредственная заменяемость ресурсов отсутствует). Тогда уровень затрат ресурса изменяется пропорционально изменению объема производства. Если рассматриваются два ресурса, причем возможен их расход сверх минимальной потребности на данный объем производства y , то производственная функция представляется системой неравенств:

$$x_1 \geq a_1 y,$$

$$x_2 \geq a_2 y.$$

Технологическая характеристика описываемого этой системой производственного процесса определяется коэффициентами затрат

$$a_1 = \frac{x_1}{y} \quad \text{и} \quad a_2 = \frac{x_2}{y}$$

В экономико-математических моделях часто исследуется определенный набор технологических процессов, в которых затрачивается ряд видов ресурсов и производится различная продукция. Если сохраняются предположения о пропорциональности затрат выпуску и отсутствии взаимозаменяемости ресурсов в рамках каждого производственного процесса, то основой модели служит система производственных функций вида:

$$x_{ij} = a_{ij} y_j,$$

где x_{ij} - уровень затрат i -го ресурса в j -м технологическом процессе; y_j - интенсивность j -го процесса или выпуск j -го вида продукции; a_{ij} - технологический коэффициент, норма затрат i -го ресурса на единицу интенсивности j -го процесса (или на единицу j -го вида продукции).

При m ресурсах и n производственных процессах эта система содержит, очевидно, mn уравнений. Такой вид производственных функций широко применяется в моделях межотраслевого баланса и линейных

моделях оптимального планирования и прогнозирования; они будут рассмотрены в последующих главах.

Ко второму виду относятся системы зависимых уравнений статического характера. Можно выделить два случая зависимости уравнений. В одном случае уравнения описывают последовательную цепочку прямых причинно-следственных связей; при этом факторы, влияющие на анализируемый результирующий производственный показатель, сами являются функциями иных факторов, последние также находятся в зависимости от своих показателей-факторов и т.д. Например, одно уравнение системы может представлять объем национального дохода y в зависимости от величины трудовых ресурсов x_1 и производственных фондов x_2 т. е. функцию $y = f(x_1, x_2)$. Другое уравнение определяет величину трудовых ресурсов x_1 как функцию общей численности населения L , т. е. $x_1 = y(L)$. В такой системе уравнения решаются последовательно (сначала, например, определяется объем трудовых ресурсов на основе прогнозных данных о численности населения, а затем уже может рассчитываться национальный доход из первого уравнения).

В другом случае в цепи причинно-следственных зависимостей отражаются обратные связи, например, национальный доход y является функцией трудовых ресурсов и производственных фондов, т. е. $y = f(x_1, x_2)$, а величина производственных фондов x_2 ставится в зависимость от созданного национального дохода y и иных факторов Z , т.е. $x_2 = y(y, z)$. В такой системе уравнения должны решаться совместно, одновременно.

В обоих рассматриваемых случаях системы уравнений второго вида включают два типа переменных: эндогенные и экзогенные переменные. Эндогенными являются "внутренние" переменные — их значения рассчитываются в рамках самой системы уравнений. Экзогенные переменные влияют на эндогенные, но сами определяются за пределами данной системы уравнений; они являются как бы "внешними"

переменными в том смысле, что воздействующие на них факторы данной системой уравнений не контролируются. Например, в только что приведенных примерах национальный доход, трудовые ресурсы, производственные фонды являются эндогенными переменными, а общая численность населения — переменная экзогенная, ее величина определяется социально-демографическими факторами, лежащими вне рамок производственных функций. Для разрешимости системы уравнений необходимо, вообще говоря, чтобы число эндогенных переменных в системе было равно числу уравнений.

К третьему виду относятся динамические системы уравнений, охватывающие ряд периодов времени и устанавливающие зависимость переменных не только в пределах каждого периода, но и в связи с их состоянием в предшествующие периоды. Обратимся к примеру. Предположим, что в задачу прогнозирования входит определение четырех взаимосвязанных переменных для некоторого периода t : $x_{1,t}$, $x_{2,t}$, $x_{3,t}$, $x_{4,t}$. В анализ включены не только их связи в самом периоде t , но и воздействие с запаздыванием, т. е. зависимости величин переменных в периоде t от состояния влияющих переменных в предыдущем (или еще более раннем) периоде. Такие влияния с запаздыванием вполне реальны; например, величина производственных фондов в народном хозяйстве в данном периоде в значительной степени зависит от объема капиталовложений предыдущего периода.

13.2. Экзогенные и эндогенные переменные.

При построении системы уравнений нужно учитывать, что помимо влияний, показанных на рисунке, каждая анализируемая переменная может испытывать воздействие одной или нескольких экзогенных переменных. Пусть $Z_{1,t}$ обозначает экзогенные факторы переменной $x_{1,t}$; соответственно

для $x_{2,t}$, $x_{3,t}$, $x_{4,t}$ введем агрегированные экзогенные переменные $Z_{2,t}$, $Z_{3,t}$, $Z_{n,t}$. Тогда с учетом всех взаимосвязей имеем в общем виде следующую систему уравнений:

$$x_{1,t} = f_1(x_{3,t}, x_{2,t-1}, Z_{1,t})$$

$$x_{2,t} = f_2(x_{1,t}, x_{3,t-1}, Z_{2,t})$$

$$x_{3,t} = f_3(x_{2,t}, x_{4,t-1}, Z_{3,t})$$

$$x_{4,t} = f_4(x_{2,t}, x_{3,t-1}, Z_{4,t}).$$

В этой системе четко различаются три группы переменных:

1) эндогенные переменные $x_{1,t}$, $x_{2,t}$, $x_{3,t}$, $x_{4,t}$, определение которых требует решения приведенной системы уравнений;

2) запаздывающие эндогенные переменные $x_{1,t-1}$, $x_{2,t-1}$, $x_{3,t-1}$, $x_{4,t-1}$; для t -го периода они считаются известными, определенными либо на основе статистической информации, либо в результате решения аналогичной системы уравнений, составленной для $(t-1)$ -го периода;

3) экзогенные переменные $Z_{1,t}$, $Z_{2,t}$, $Z_{3,t}$, $Z_{4,t}$, определяемые за рамками данной системы уравнений.

Переменные второй и третьей групп имеют то общее, что их значения predeterminedены внешними по отношению к системе уравнений факторами; влияя на переменные t -го периода, они сами не подвержены их обратному влиянию. Переменные второй и третьей групп будем называть predeterminedенными. Количество predeterminedенных переменных в уравнениях, как будет показано в следующем параграфе, имеет существенное значение для решения систем эконометрических уравнений. Частным случаем, упрощающим расчеты, является система уравнений в виде причинной цепочки зависимостей при отсутствии обратных связей между переменными. Пример такой системы зависимостей показан на рис. 8. Как видим, любая цепочка связей приводит в конечном счете к переменной $x_{4,t}$, последовательно и без возвратов.

Данная цепь взаимосвязей с добавлением экзогенных переменных дает систему уравнений:

$$x_{1,t} = f_1(x_{2,t-1}, x_{3,t-1}, Z_{1,t})$$

$$x_{2,t} = f_2(x_{1,t}, x_{3,t-1}, x_{4,t-1}, Z_{2,t})$$

$$x_{3,t} = f_3(x_{1,t}, x_{2,t}, x_{4,t-1}, Z_{3,t})$$

$$x_{4,t} = f_4(x_{2,t}, x_{3,t}, Z_{4,t}).$$

Такие системы уравнений в виде однозначной причинной цепи называются рекурсивными (рекуррентными) системами. Уравнения в них решаются не одновременно, а последовательно. Так, в приведенной системе вначале решается первое уравнение — определение $x_{1,t}$, как функция только predetermined переменных. Затем из второго уравнения получаем $x_{2,t}$, как функцию predetermined переменных и уже вычисленной $x_{1,t}$. Далее последовательно получаем $x_{3,t}$ из третьего уравнения и $x_{4,t}$ из последнего уравнения системы. Здесь расчеты в первых трех уравнениях являются, в сущности, подготовительными этапами для решения четвертого уравнения, в котором переменная $x_{4,t}$ может в конечном счете рассматриваться как сложная функция всех остальных переменных системы. В этом смысле рекурсивные системы занимают промежуточное положение между производственными функциями, состоящими из одного уравнения, и системы эконометрических уравнений, требующих одновременного решения.

13.3. Построение и расчет эконометрических моделей.

Важным этапом построения эконометрической модели, в частности производственной функции, является отбор включаемых в нее показателей-факторов. Исследователь редко может назвать все факторы, в

той или иной мере воздействующие на прогнозируемый “показатель, но если он знает достаточно много факторов, включение их всех в функции либо невозможно, либо просто нецелесообразно: влияние одних факторов может быть заведомо весьма слабым, по другим отсутствуют необходимые данные, наконец, множество включаемых факторов делает производственную функцию слишком громоздкой, неудобной в анализе и применении, к тому же сильно затрудняются вычисления. По отношению к реально разрабатываемым функциям, комплекс показателей-факторов обычно можно представить в виде

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k/x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m/x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)$$

Из n факторов, определяющих величину зависимой переменной y , первые k факторов являются переменными величинами, включаемыми в уравнение производственной функции; факторы от $(k + 1)$ -го до t -го в уравнение не входят, но каждый из них в наблюдаемой статистической совокупности фиксирован на определенном уровне, не варьирует и потому не влияет на колебания зависимой переменной; факторы от $(m + 1)$ -го до n -го являются переменными величинами, вариация которых влияет на изменения зависимой переменной, но в функцию эти факторы по тем или иным причинам не включены. На получение надежного уравнения производственной функции можно рассчитывать в том случае, когда первую группу составляет пусть небольшая по числу, но максимально мощная по силе воздействия на y совокупность важнейших факторов, а из остальных $(n - k)$ факторов возможно большее число принадлежит ко второй, контролируемой группе.

В уравнение не должны одновременно включаться факторы, находящиеся между собой в строгой функциональной зависимости; включается лишь один из них — по влиянию наиболее важный.

Нежелательно и включение факторов, между которыми существует тесная корреляционная связь.

Специфика производственных функций состоит в том, что в качестве независимых переменных в них фигурируют в основном различные ресурсы производства. Построение производственной функции предполагает решение вопросов о перечне вводимых в функцию первичных ресурсов (труд, производственные фонды, природные ресурсы), о включении в модель промежуточных продуктов (сырье, материалы, топливо, энергия), об отражении качественных характеристик различных ресурсов. Практически в однопродуктовые эконометрические модели для народнохозяйственного уровня включают только первичные ресурсы либо двух видов (труд и производственные фонды), либо трех (добавляются природные ресурсы, чаще всего — используемые земли). На уровнях отраслей, объединений, предприятий, списки ресурсов отличаются гораздо большим разнообразием, причем в них зачастую фигурируют промежуточные продукты, например, электроэнергия, топливо, корма, удобрения и др. Особо важное значение имеет достижение качественной однородности вводимых в модель ресурсов.

13.4 Проблема идентификации для систем эконометрических уравнений.

Введение искусственных переменных. На основе качественного анализа сущности изучаемой зависимости и списка переменных величин делаются предварительные предположения о виде эконометрической модели: будет она представлена одним уравнением или системой уравнений, какую математическую форму намечается применить, каково примерно будет количество параметров функции. Окончательно эти вопросы решаются в процессе расчета модели.

Наличие исходных статистических данных и выбранной формы уравнения позволяет перейти к расчету параметров производственной функции. Существует ряд методов расчета параметров, однако практически в большинстве случаев применяется метод наименьших квадратов, который позволяет получить параметры функции, удовлетворяющие требованию минимальной суммы квадратов отклонений фактических значений зависимой переменной от вычисленных по уравнению.

Метод наименьших квадратов может применяться и в случае, когда модель состоит не из одного уравнения производственной функции, а представляет собой систему уравнений. Однако расчет параметров для системы уравнений имеет некоторые особенности. Очень важное значение для расчетов имеет характеристика системы с точки зрения количества и "размещения" переменных в уравнениях.

Уже отмечалось, что переменные в системах эконометрических уравнений бывают двух видов — эндогенные и predetermined (к последним относятся экзогенные и запаздывающие эндогенные переменные). Учитывая это, введем понятие идентификации уравнений.

Обозначим через N число эндогенных переменных, входящих с ненулевыми коэффициентами в исследуемое уравнение системы. Через D обозначим число predetermined (экзогенных и запаздывающих эндогенных) переменных, которые содержатся в системе, но не входят в данное уравнение. Уравнение называется точно идентифицированным, если число N на единицу больше числа D , т. е.

$$D + 1 = N$$

При условии $D+1 > N$ уравнение называется сверхидентифицированным, а при $D+1 < N$ - неидентифицированным.

Рассмотрим в качестве примера систему уравнений, приведенную на стр.4. Первое уравнение этой системы содержит две эндогенные переменные $x_{1,t}$ и $x_{3,t}$, т. е. $N = 2$. Предопределенных переменных, входящих в систему, но не в первое уравнение, насчитывается пять, это $x_{3,t-1}$, $x_{4,t-1}$, $Z_{2,t}$, $Z_{3,t}$, $Z_{4,t}$. Итак, для первого уравнения $D+1=6>N$ и уравнение является сверхидентифицированным. Аналогично можно показать, что и остальные уравнения этой системы являются сверхидентифицированными.

Для расчета параметров системы эконометрических уравнений наиболее благоприятен случай, когда все уравнения системы точно идентифицированы. Предположим, что система состоит из n точно идентифицированных уравнений с n эндогенными и m предопределенными переменными:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; Z_1, Z_2, \dots, Z_m) = 0; i = 1, 2, \dots, n.$$

Для расчета параметров система вначале перестраивается в приведенную форму, при которой каждая эндогенная переменная выражается как функция только предопределенных переменных. Такая система имеет вид:

$$x_1 = Y_i(Z_1, Z_2, \dots, Z_m), i = 1, 2, \dots, n.$$

Для каждого уравнения этой системы на основе статистических данных определяются параметры методом наименьших квадратов (если он применим) или каким-либо другим методом, используемым для вычисления параметров отдельных уравнений регрессии. Затем приведенная система с вычисленными параметрами преобразуется алгебраическими методами в исходную систему уравнений. На этом последнем этапе расчета как раз и проявляется важность проблемы

идентификации: для точно идентифицированного уравнения достаточно легко производится исключение не входящих в него predetermined переменных.

Контрольные вопросы.

1. Виды системы эконометрических уравнений.
2. Системы независимых уравнений и методы их решения.
3. Системы зависимых уравнений и методы их построения.
4. Динамические системы уравнений.
5. Виды переменных эконометрических уравнений.
6. Методика построения системы эконометрических уравнений.
7. Понятие мультиколлинеарности в эконометрических системах.
8. Проверка мультиколлинеарности с использованием коэффициента корреляции.

Учебное задание

1. Системы линейных одновременных уравнений Экзогенные, эндогенные и приведенные переменные.
2. Структурная и приведенная форма уравнений. Взаимозависимые и рекурсивные системы.
3. Условия идентификации. Проблема идентифицируемости. Неидентифицируемость. Сверхидентифицируемость.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите примеры систем одновременных уравнений.
2. Классификация переменных в системах одновременных уравнений.
3. Что такое структурная форма уравнений системы.
4. Что такое приведенные уравнения.
5. Для каких переменных выводят приведенные уравнения.

6. Что такое проблема идентифицируемости.
7. Приведите пример идентифицируемых уравнений.
8. Приведите пример неидентифицируемых уравнений
9. Приведите пример сверхидентифицируемых уравнений.
10. Какие вы знаете критерии идентифицируемости уравнений.
11. Коэффициент детерминации (с доказательством того факта, что если в уравнении присутствует свободный член, то $TSS = ESS + RSS$).
12. Свойства коэффициента детерминации.
13. Скорректированный коэффициент детерминации. Его свойства.
14. Условия Гаусса-Маркова. Интерпретация условия гомоскедастичности.
15. Условия Гаусса-Маркова. Интерпретация условия отсутствия автокорреляции ошибок.
16. Теорема Гаусса-Маркова. Ее значение.
17. Описание распределения МНК-оценок коэффициентов регрессионного уравнения β).
18. Оценка параметров распределения β).
19. Проверка гипотезы о равенстве коэффициента регрессионного уравнения некоторому гипотетическому числу.
20. t – статистика коэффициента регрессии.
21. Проверка гипотезы о значимости регрессионного уравнения в целом.
22. Проверка гипотезы о равенстве нулю q коэффициентов регрессии.
23. Проверка наличия линейного ограничения на коэффициенты уравнения регрессии.
24. Понятие мультиколлинеарности. Последствия мультиколлинеарности
25. Понятие мультиколлинеарности. Способы обнаружения и способы устранения эффекта мультиколлинеарности.
26. Гетероскедастичность. Последствия гетероскедастичности. Тесты на гетероскедастичность.
27. Гетероскедастичности. Коррекция на гетероскедастичность.

28. Автокорреляция. Последствия автокорреляции. Тесты на автокорреляцию.
29. Автокорреляция. Коррекция на автокорреляцию.
30. Обобщенный метод наименьших квадратов.
31. Стационарные и нестационарные временные ряды. Тесты на стационарность: визуальный анализ временного ряда, анализ коррелограммы, формальные тесты на стационарность.
32. Ранговая и трендовая нестационарность.
33. Модель стационарных временных рядов.
34. Модели нестационарных временных рядов. Выбор модели, оценка и проверка ее адекватности.
35. Системы одновременных уравнений Проблема идентифицируемости. Неидентифицируемость. Сверхидентифицируемость. Проблема смещения.
36. Структурная и приведенная форма уравнений. КМНК. Метод ИП. Двухшаговый МНК.
37. Внешне не связанные уравнения.

Тесты для проверки знаний

1. Система эконометрических уравнений включает в себя следующие переменные:
 - a) эндогенные
 - b) системные
 - c) случайные
 - d) экзогенные
2. Корреляция подразумевает наличие связи между
 - a) случайными факторами
 - b) результатом и случайными факторами
 - c) переменными

d) параметрами

3. По 40 точкам оценена следующая модель производственной функции:

$$y = 0,6 + 0,46l + 0,32k,$$

$$t = (2,6)(0,75)(1,81)$$

$$R^2 = 0,75; DW = 2,45$$

y, l, k - темпы прироста объема выпуска, затрат труда и затрат капитала.

Укажите неверный вывод:

- a) - имеет место автокорреляция остатков первого порядка, поэтому надо изменить форму зависимости;
- b) - надо исключить фактор l , так как он оказался статистически незначим;
- c) - модель имеет удовлетворительные статистики, поэтому нет смысла ее совершенствовать.
- d) необходимо от линейной формы зависимости перейти к нелинейной;

4. Какие из приведенных ниже методов выделения неслучайной составляющей являются аналитическими:

- 1) выделение тренда определенной формы при помощи VYR;
- 2) сезонное сглаживание временного ряда при помощи сезонных индексов;
- 3) сезонное сглаживание ряда при помощи дамми-переменных;
- 4) метод конечных разностей;
- 5) сглаживание при помощи скользящих средних.

5. Какие из приведенных ниже методов выделения неслучайной составляющей являются алгоритмическими:

- 1) выделение тренда определенной формы при помощи VYR;
- 2) сезонное сглаживание временного ряда при помощи сезонных индексов;
- 3) сезонное сглаживание ряда при помощи дамми-переменных;

- 4) метод конечных разностей;
 5) сглаживание при помощи скользящих средних.

6. Как называются тренды, приведенные ниже:

- 1) $Y_t = a + bt$ -
 2) $Y_t = f(t) = ae^{rt}$ -
 3) $Y_t = a + b Y_{t-1}$ -
 4) $\ln Y_t = a + b \ln Y_{t-1}$ -
 5) $Y_t = a + bt + ct^2$ -

7. Дана матрица ковариаций системы трех случайных величин.

$$\begin{matrix} 2 & -1 & 0,5 \\ -1 & 4 & -0,3 \\ 0,5 & 0,3 & 3 \end{matrix}$$

Чему равна дисперсия случайной величины $3X-2Y+5$

8. Даны две независимые случайные величины. Одна величина (X) с параметрами $m = 5, \sigma = 2$. Другая (Y) – с параметрами $m = 1, \sigma = 1$. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины

$$Z = 2X - Y + 1:$$

1. $EZ = 4, \text{Var}Z = 18$
 2. $EZ = 10, \text{Var}Z = 7$
 3. $EZ = 10, \text{Var}Z = 17$
 4. $EZ = 10, \text{Var}Z = 18$
 5. Ни один из ответов не подходит (по значению).
 6. Информации для расчета недостаточно.

Решение типовой задачи

Задача 1. Изучается модель вида

$$y = a_1 + b_1(C + D);$$

$$C = a_2 + b_2y + b_3y_{-1},$$

где y – валовой национальный доход; y_{-1} – валовой национальный доход предшествующего года; C – личное потребление; D – конечный спрос (помимо личного потребления).

Информация за девять лет о приростах всех показателей дана в табл. 4.1.

Для данной модели была получена система приведенных уравнений:

$$\begin{cases} y = 8,219 + 0,6688D + 0,2610y_{-1}, \\ C = 8,636 + 0,3384D + 0,2020y_{-1}. \end{cases}$$

Требуется:

- провести идентификацию модели;
- рассчитать параметры первого уравнения структурной модели.

Таблица 4.1

Год	D	y_{-1}	y	C
1	-6,8	46,7	3,1	7,4
2	22,4	3,1	22,8	30,4
3	-17,3	22,8	7,8	1,3
4	12,0	7,8	21,4	8,7
5	5,9	21,4	17,8	25,8
6	44,7	17,8	37,2	8,6
7	23,1	37,2	35,7	30,0
8	51,2	35,7	46,6	31,4
9	32,3	46,6	56,0	39,1
Σ	167,5	239,1	248,4	182,7

Решение. В данной модели две эндогенные переменные y и C и две экзогенные переменные D и y_{-1} . Второе уравнение точно идентифицировано, так как содержит две эндогенные переменные и не

содержит одну экзогенную переменную из системы. Иными словами, для второго уравнения имеем по счетному правилу идентификации равенство:

$$2 = 1 + 1.$$

Первое уравнение сверхидентифицировано, так как на параметры при C и D наложено ограничение: они должны быть равны. В этом уравнении содержится одна эндогенная переменная y . Переменная C в данном уравнении не рассматривается как эндогенная, так как она участвует в уравнении не самостоятельно, а вместе с переменной D . В данном уравнении отсутствует одна экзогенная переменная, имеющаяся в системе. По счетному правилу идентификации получаем:

$1 + 1 = 2: D + 1 > H$. Это больше, чем число эндогенных переменных в уравнении. Следовательно, система сверхидентифицирована.

Для определения параметров сверхидентифицированной модели используется двухшаговый метод наименьших квадратов.

Шаг 1. На основе системы приведенных уравнений по точно идентифицированному второму уравнению определим теоретические значения эндогенной переменной C . Для этого в приведенное уравнение $y = 8,636 - 0,3384D + 0,2020y$ подставим значения D и $y=1$.

Получим:

$$\hat{C}_1 = 15,8; \hat{C}_2 = 16,8; \hat{C}_3 = 7,4; \hat{C}_4 = 14,3; \hat{C}_5 = 15,0; \hat{C}_6 = 27,4;$$

$$\hat{C}_7 = 24,0; \hat{C}_8 = 33,2; \hat{C}_9 = 29,0.$$

Шаг 2. По сверхидентифицированному уравнению структурной формы модели заменяем фактические значения C на теоретические C и рассчитываем новую переменную $C + D$ (табл. 4.2).

Далее к сверхидентифицированному уравнению применяем метод наименьших квадратов. Обозначим новую переменную $C + D$ через Z .

Решаем следующее уравнение:

$$y = a_1 + b_1 Z.$$

$$\begin{cases} \sum y = na_1 + b_1 \sum Z, \\ \sum yZ = a_1 \sum Z + b_1 \sum Z^2, \end{cases} \quad \begin{cases} 248,4 = 9a_1 + 350,4b_1, \\ 13508,71 = 350,4a_1 + 21142,02b_1. \end{cases}$$

Таблица 4.2

Год	D	\hat{C}	$\hat{C} + D$
1	-6,8	15,8	9,0
2	22,4	16,8	39,2
3	-17,3	7,4	-9,9
4	12,0	14,3	26,3
5	5,9	15,0	20,9
6	44,7	27,4	72,1
7	23,1	24	47,1
8	51,2	33,2	84,4
9	32,3	29,0	61,3
Σ	167,5	182,9	350,4

$$a_1 = 7,678; \quad b_1 = 0,512;$$

Первое уравнение структурной модели будет иметь следующий вид:

$$y = 7,678 + 0,512(C + D).$$

Контрольные задания

Задача 1. Модель Кейнса (упрощенная версия), описывающая макроэкономическое равновесие, зависимость объема производства и уровня занятости от размеров совокупного спроса, при условии, что отсутствует изменение заработной платы и цен, представлена следующими уравнениями:

$$C_t = a_1 + b_{11}y_t + b_{12}y_{t-1} \text{ — функция потребления;}$$

$$I_t = a_2 + b_{21}y_t \text{ — функция инвестиций;}$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t - \text{тождество доходов,}$$

где C – потребление; Y – ВВП; I – валовые инвестиции; G – государственные расходы; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период.

Задание:

- применив необходимое и достаточное условие идентификации, определите, идентифицировано ли каждое из уравнений;
- определите метод оценки параметров модели;
- запишите приведенную форму модели.

Задача 2. Модель спроса и предложения на деньги

$$\begin{aligned} R_t &= a_1 + b_{11}M_t + b_{12}Y_t; \\ Y_t &= a_2 + b_{21}R_t, \end{aligned}$$

где R – процентные ставки в период t ; Y – ВВП в период t ; M – денежная масса в период t .

Задание:

- применив необходимое и достаточное условие идентификации, определите, идентифицировано ли каждое из уравнений;
- определите метод оценки параметров модели;
- запишите приведенную форму модели.

Задача 3. Макроэкономическая модель (упрощенная модель Клейна):

$$\begin{aligned} C_t &= a_1 + b_{12}Y_t + b_{13}T_t; \\ I_t &= a_2 + b_{21}Y_t + b_{24}K_{t-1}; \\ Y_t &= C_t + I_t, \end{aligned}$$

где C – потребление; I – инвестиции; Y – доход; T – налоги; K – запас капитала; t – текущий период; $t-1$ – предыдущий период.

Задание:

- применив необходимое и достаточное условие идентификации, определите, идентифицировано ли каждое из уравнений;
- определите метод оценки параметров модели;
- запишите приведенную форму модели.

ТЕМА 14. НЕПОСРЕДСТВЕННЫЙ И ДВУХУРОВНЕВЫЙ МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ.

Ключевые слова: метод наименьших квадратов, идентификация моделей, обобщенный метод наименьших квадратов, системы регрессионных уравнений

14.1 Метод наименьших квадратов.

Эконометрическая модель в виде непосредственно отражает структуру связей между переменными поэтому называется *структурной формой* эконометрической модели. Предположим, что систему можно решить относительно y . Тогда получим систему равенств:

$$y_{1t} = r_{10}x_{0t} + r_{11}x_{1t} + \dots + r_{1m}x_{mt} + v_{1t} ;$$

$$y_{2t} = r_{20}x_{0t} + r_{21}x_{1t} + \dots + r_{2m}x_{mt} + v_{2t} ;$$

.....

$$y_{kt} = r_{k0}x_{0t} + r_{k1}x_{1t} + \dots + r_{km}x_{mt} + v_{kt} .$$

В матричной форме систему этих равенств можно переписать так:

$$y = Rx + v.$$

Вектор случайных остатков v_{1t}, \dots, v_{kt} представляет собой линейную комбинацию остатков u_{1t}, \dots, u_{kt} из структурной формы. Коэффициенты r_{ij} ,

$i = j = 1, \dots, k$, связаны с матрицей коэффициентов структурной формы следующим образом:

$$R = (I - A)^{-1} B,$$

где I — единичная квадратная матрица порядка k . Запись эконометрической модели в виде называется *приведенной формой*.

Проблемы численной оценки параметров в структурной форме и возможность преобразования структурной формы в приведенную тесно связаны с понятием идентификации модели.

Модель называется идентифицируемой, если регрессионные уравнения структурной формы дают однозначное выражение экономических связей. Каждое уравнение в идентифицируемой системе отражает определенную связь переменных, не дублируется и не может быть заменено никакой комбинацией других уравнений. Другими словами, модель идентифицируема, если никакая линейная комбинация уравнений структурной формы не может привести к уравнению, содержащему те же переменные, что и некоторое уравнение в структурной форме. Для идентифицируемых моделей приведенная форма определяется однозначно с помощью соотношений. Матрица $I - A$ всегда не вырождена. Условие идентифицируемости должно проверяться для каждого уравнения системы. Необходимое условие идентифицируемости формулируется следующим образом. Обозначим общее число экзогенных переменных системы через m , число эндогенных переменных, входящих в i -е уравнение структурной формы, — через k_i , число экзогенных переменных, входящих в i -е уравнение структурной формы, — через m_i . Тогда число экзогенных переменных, не входящих в i -е уравнение структурной формы, определится разностью $m - m_i$. Необходимое условие идентифицируемости системы — выполнение для каждого ее уравнения неравенства

$$K_i - 1 \leq m - m_i \quad (1)$$

Это условие означает, что для каждой эндогенной переменной, входящей в правую часть i -го уравнения структурной формы системы, должна существовать хотя бы одна экзогенная переменная из другого уравнения системы и не содержащаяся в i -м уравнении. Если для всех соотношений (1), $i = 1, \dots, k$, имеет место равенство, то говорят, что система строго идентифицируема. Если хотя бы для одного из уравнений выполняется строгое неравенство, то система называется сверхидентифицируемой.

Проблемы идентификации тесно связаны с задачей оценивания параметров в структурной форме эконометрической модели. Дело в том, что непосредственное применение метода наименьших квадратов к каждому уравнению структурной формы не корректно. Действительно, в структурной форме модели одни и те же эндогенные переменные входят в разные уравнения модели, а это приводит к зависимости остатков u_t от эндогенных переменных.

Если модель строго идентифицируема, то можно применить следующий метод оценки параметров ее структурной формы: оценив по методу наименьших квадратов параметры в приведенной модели и получив таким образом матрицу R , найдем матрицу A из соотношения.

Применение метода наименьших квадратов в приведенной системе дает несмещенные и состоятельные оценки матрицы R , совпадающие с оценками максимального правдоподобия.

Только что описанный метод оценивания параметров в структурной форме называется косвенным методом наименьших квадратов. В случае сверхидентифицируемых систем применение косвенного метода наименьших квадратов уже не ведет к однозначной оценке структурной формы.

14.2 Обобщенный метод наименьших квадратов.

Обобщенный метод наименьших квадратов, известный также под названием метода Эйткена, дает удовлетворительные оценки параметров в случаях, когда не выполняется условие б), т. е. когда ковариационная матрица ошибок не диагональна. Предположим, что матрица ковариаций ошибок известна и может быть представлена в виде

$$E(uu') = \Sigma = RR', \quad (2)$$

где R — невырожденная матрица.

Если теперь обе части уравнения умножить слева на R^{-1} , то получим новое регрессионное уравнение, ошибки в котором $\varepsilon_t = R^{-1}u_t$ не коррелированы. Условие б) для этого уравнения выполняется и, следовательно, удовлетворительные оценки параметров для него могут быть получены обычным методом наименьших квадратов. Вернувшись затем к исходному уравнению, получим следующие *эффективные* оценки параметров b :

$$b = (X' \Sigma^{-1} X)^{-1} X' \Sigma^{-1} y. \quad (3)$$

Системы регрессионных уравнений, в которых зависимая переменная каждого из уравнений не выступает как независимая переменная ни в каком другом уравнении модели, называются простыми. Простая система состоит из m уравнений типа с m эндогенными переменными $y_i = 1, \dots, m$, и может быть записана в виде:

$$Y_i = X_i \beta_i + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

Предположим, что для каждого из уравнений (6) выполняются условия

а) – г), однако остатки u_i из разных уравнений системы могут быть зависимы. В этом случае оценивать параметры следует обобщенным методом наименьших квадратов. Ковариационную матрицу Σ можно

оценить, таким образом: вычислив с помощью обычного метода наименьших квадратов оценки b_i для каждого из уравнений, найдем значения ошибок u_i из соотношения

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - X_i b_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Оценки ковариации ошибок получаем по формуле

$$s_{ij} = \frac{1}{T} (\hat{u}_i' \hat{u}_j).$$

Обобщенный метод наименьших квадратов для моделей вида обычно дает удовлетворительные результаты, но требует множества вычислений. Если корреляции случайных ошибок не слишком велики, то хорошие оценки параметров можно получить в результате применения к каждому уравнению обычного метода наименьших квадратов. Обобщенный и обычный методы наименьших квадратов идентичны в двух случаях: когда корреляция ошибок в разных уравнениях равна нулю и когда каждое уравнение содержит одинаковый набор экзогенных переменных. Как мы увидим далее, последнее имеет место для приведенных форм систем уравнений.

ТЕМА 15. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ. ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ. МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Ключевые слова: производственная функция, затраты труда, затраты основных производственных фондов, логарифмическая функция, спрос, предложение, экономический рост

15.1. Производственные функции. Виды производственных функций.

Степенная функция

Производственная функция есть экономико-математическое

выражение зависимости результатов производственной деятельности от показателей - факторов, обусловивших эти результаты. В условиях экономической действительности результат процесса производства определяется действием большого количества различных факторов - технических, экономических, социальных, природных. Все эти факторы учесть в производственной функции невозможно, т.к. одни из факторов не поддаются количественному выражению, а воздействие других практически мало. Поэтому производственная функция включает в себя те факторы, которые оказывают решающее воздействие на изучаемый показатель.

Аппаратом исследования производственных функций служат методы математической статистики. По своему содержанию производственные функции охватывают всевозможные зависимости в сфере производства на различных уровнях - предприятие, отрасль, национальная экономика. С учетом изучаемой зависимости, целей и задач исследования применяются многообразные формы производственных функций. В простом случае изменение результативного показателя ставится в связь с изменением одного из показателей - факторов. Тогда производственная функция представляет собой уравнение $y = f(x)$ с двумя переменными - независимой x (показатель фактор) и зависимой y (результативный показатель). Это уравнение может быть линейным или нелинейным.

Чаще строятся многофакторные производственные функции, позволяющие измерить характер и силу совместного влияния нескольких показателей-факторов на величину результативного фактора.

Уравнение многофакторной производственной функции имеет вид:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

y - результативный показатель (выпуск продукции и т.д.), а x_1, x_2, \dots, x_n - показатели - факторы (затраты труда и средств производства, природные условия и т.д.).

Многофакторное уравнение может быть линейным или нелинейным. Многофакторная производственная функция может быть представлена в виде системы взаимосвязанных уравнений, когда это необходимо. Различают статистические и динамические производственные функции. В статистических функциях не учитывается время как фактор, изменяющий основные характеристики изучаемой зависимости. Динамические производственные функции включают фактор времени: время может в них рассматриваться как самостоятельная переменная, влияющая на результат; параметры и показатели-факторы могут рассматриваться как функции времени.

Экономико-математическое исследование производственных функций позволяет получить ряд показателей, связанных с содержанием и формой функции и дают возможность анализа о характере изучаемой зависимости. Рассмотрим эти показатели на примере одной из производственных функций - функции Кобба-Дугласа.

Предположим, что в масштабах национальной экономики изучается зависимость величины валовой продукции от двух факторов: затрат живого труда и производственных фондов. Эта зависимость имеет вид:

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$$

где: y - величина валовой продукции;

x_1 - затраты труда;

x_2 - объем производственных фондов;

a_0, a_1, a_2 - параметры производственной функции;

$0 < a_i < 1$, где $i = 1, 2$.

15.2. Функция Кобба-Дугласа. Метод преобразования степенной функции к линейной. Характеристики производственной функции

Производственная функция представляет собой математическую модель, характеризующую зависимость объема выпускаемой продукции от объема трудовых и материальных затрат. При этом модель может быть построена как для отдельной фирмы и отрасли, так и всей национальной экономики. Рассмотрим производственную функцию, включающую два фактора производства: затраты капитала (K) и трудовые затраты (L), определяющих объем выпуска Y . Тогда можно записать:

$$Y = f(K, L).$$

Определенного уровня выпуска можно достигнуть с помощью различного сочетания капитальных и трудовых затрат, а кривые, описываемые условиями $f(K, L) = const$, обычно называют изоквантами. Обычно предполагается, что по мере роста значений одной из независимых переменных предельная норма замещения данного фактора производства уменьшается. Поэтому при сохранении постоянного объема производства экономия одного вида затрат, связанная с увеличением затрат другого фактора, постепенно уменьшается. На примере производственной функции Кобба-Дугласа рассмотрим основные выводы, которые можно получить, исходя из предположений о том или ином виде производственной функции.

Производственная функция Кобба-Дугласа, включающая два фактора производства, имеет вид:

$$Y = A \cdot K^\alpha \cdot L^\beta,$$

где A , α , β – параметры модели. Величина A зависит от единиц измерения Y , K и L , а также от эффективности производственного процесса.

При фиксированных значениях K и L функции, характеризующейся большей величиной параметра A , соответствует большее значение Y , следовательно, и производственный процесс, описываемый такой

функцией, более эффективен. Описываемая функция однозначна и непрерывна (при положительных K и L). Параметры α и β называют коэффициентами эластичности. Они показывают, на какую величину в среднем изменится Y , если α или β увеличить соответственно на один процент.

Рассмотрим поведение функции при изменении масштабов производства. Предположим для этого, что затраты каждого фактора производства увеличились в C раз. Тогда новое значение будет определяться следующим образом:

$$Y_1 = A \cdot (CK)^\alpha \cdot (CL)^\beta = C^{\alpha+\beta} \cdot Y,$$

При этом, если $\alpha+\beta=1$, то уровень эффективности не зависит от масштабов производства.

Если $\alpha + \beta < 1$, то средние издержки, рассчитанные на единицу продукции растут, а при $\alpha + \beta > 1$ – убывают по мере расширения масштабов производства.

Следует отметить, что эти свойства не зависят от численных значений K , L и сохраняют силу в любой точке производственной функции. Для определения параметров и вида производственной функции необходимо провести дополнительные наблюдения. Как правило, пользуются двумя видами данных – динамическими рядами и данными одновременных наблюдений (пространственной информацией). Динамические ряды данных характеризуют поведение одной и той же фирмы во времени, тогда как данные второго вида обычно относятся к одному и тому же моменту, но к различным фирмам. В случаях, когда исследователь располагает временным рядом, например, годовыми данными, характеризующими деятельность одной и той же фирмы, возникают трудности, с которыми не пришлось бы столкнуться при работе с пространственными данными. Так,

относительные цены со временем становятся иными, а, следовательно, меняется и оптимальное сочетание затрат отдельных факторов производства. Кроме того, с течением времени меняется и уровень административного управления. Однако основные проблемы при использовании временных рядов порождают последствия технического процесса, в результате которого меняются нормы затрат производственных факторов, соотношения, в которых они могут замещать друг друга, и параметры эффективности. Отсюда с течением времени могут меняться не только параметры, но и формы производственной функции. Технический прогресс может быть учтен в форме некоторого временного тренда, включаемого в состав производственной функции.

Тогда:

$$Y_t = \phi(K, L, t).$$

Рассмотренные выше производственные функции носили детерминированный характер и не учитывали влияние случайных возмущений, присущих каждому экономическому явлению. Поэтому в каждое уравнение, параметры которого предстоит оценить, необходимо ввести еще случайную переменную ε , которая будет отражать воздействие на процесс производства всех тех факторов, которые не вошли в состав производственной функции в явном виде. Таким образом, в общем виде производственную функцию Кобба-Дугласа можно представить как:

$$Q = A K^\alpha L^\beta e^\varepsilon$$

Мы получили степенную регрессионную модель, оценки параметров которой A , α и β можно найти с помощью метода наименьших квадратов, лишь прибегнув предварительно к логарифмическому преобразованию. Тогда для i -го наблюдения имеем:

$$\ln Q_i = \ln A + \alpha \ln K_i + \beta \ln L_i + \varepsilon_i,$$

где Q_i , K_i и L_i – соответственно объемы выпуска, капитальных и трудовых затрат для i -го наблюдения ($i=1,2,\dots,n$), а n -объем выборки, число наблюдений, используемых для получения оценок $\ln A$, α и β параметров производственной функции. Относительно ε_i обычно предполагается, что они взаимно независимы между собой и $\varepsilon_i \in N(0, \sigma)$. Исходя из априорных соображений значения α и β должны удовлетворять условиям: $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$. Если предположить, что с изменением масштабов производства уровень эффективности остается постоянным, то, приняв $\beta = 1 - \alpha$, имеем

$$Y = A K^\alpha L^{1-\alpha} e^\varepsilon = A (K/L)^\alpha L e^\varepsilon,$$

или

$$Y/L = A (K/L)^\alpha e^\varepsilon$$

и

$$\ln(Q/L) = \ln A + \alpha \ln (L/K) + \varepsilon.$$

Прибегнув к такой форме выражения производственной функции можно устранить влияние мультиколлинеарности между $\ln K$ и $\ln L$.

Определим на основании производственной функции показатель производительности труда, как отношение величины валового продукта к совокупным затратам труда:

$$\frac{y}{x_1} = a_0 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2}$$

то выражение характеризует среднюю производительность труда, т.к. показывает среднее количество продукции приходящееся на единицу отработанного времени, т.к. коэффициент $0 < a_1 < 1$, то показатель степени $(a_1 - 1)$ при x_1 - отрицательная величина, т.е. с увеличением затрат труда производительность снижается.

Производительность труда снижается с ростом трудовых затрат при прочих равных условиях, т.е. при неизменном объеме других ресурсов, в том числе производственных фондов x_2 .

Увеличение производственных функций помимо средних показателей большую роль играют предельные величины. Предельная

производительность труда показывает, сколько дополнительных единиц продукции приносит дополнительная единица затраченного труда. Уравнение предельной производительности труда для производственной функции есть частная производная выпуска продукции по затратам труда:

$$\frac{dy}{dx_1} = a_0 a_1 x_1^{a_1-1} x_2^{a_2}$$

Из этого выражения видно, что предельная производительность труда зависит от трудовых затрат x_1 и производственных фондов x_2 . С увеличением затрат труда при неизменных производственных фондах предельная производительность труда снижается. С увеличением объема фондов при неизменных затратах труда предельная производительность труда увеличивается.

Одновременное изменение переменных x_1 и x_2 приводит к разным результатам - снижению, росту или неизменной величине предельной производительности труда.

Сопоставляя вышеуказанные выражения получим:

$$\frac{dy}{dx_1} = a_1 \frac{y}{x_1}$$

т.к. $0 < a_1 < 1$, то в производственной функции предельная производительность труда ниже средней производительности.

Аналогичные показатели рассчитываются по отношению ко второму фактору x_2 - производственным фондам. Объем продукции на единицу используемых фондов есть фондоотдача, рассчитаем среднюю:

$$\frac{y}{x_2} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2-1}$$

Это выражение показывает, что средняя фондоотдача увеличивается при увеличении ресурсов труда (при неизменных фондах) и уменьшается с увеличением фондов (при неизменных трудовых ресурсах).

Показатель предельной фондоотдачи есть частная производная выпуска продукции по объему фондов:

$$\frac{dy}{dx_2} = a_0 a_2 x_1^{a_1} x_2^{a_2-1}$$

т.к. $0 < a_2 < 1$, то предельная фондоотдача ниже средней.

Наряду с исчислением абсолютного прироста продукции на единицу прироста затрат исчисляют относительный прирост объема производства на единицу относительного увеличения ресурсов труда:

$$\frac{dy}{dx_1} \frac{x_1}{y} = a_1$$

Полученный показатель называется эластичностью выпуска продукции по затратам труда. Он показывает, на сколько процентов увеличивается выпуск при увеличении затрат труда на 1%. Относительная величина не зависит от ресурсов, и при любом их сочетании увеличение трудовых затрат на 1% приводит к росту объема производства на a_1 %.

Относительная предельная фондоотдача или эластичность выпуска продукции по объему производственных фондов определяется выражением:

$$\frac{dy}{dx_2} \frac{x_2}{y} = a_2$$

Производственная функция позволяет исследовать и вопросы соотношения, замещения, взаимодействия ресурсов. При изучении взаимодействия трудовых ресурсов и производственных фондов определяется показатель фондовооруженности труда.

Взаимодействующие в рамках производственной функции ресурсы могут замещать друг друга. Это означает, что единицу одного ресурса

можно было бы заменить некоторым количеством другого ресурса так, что объем продукции при этом не изменится.

Предельная норма замещения затрат труда производственными фондами равна:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{a_1 x_2}{a_2 x_1}$$

На основе производственной функции можно рассчитать предельную норму замещения ресурсов. Предельная норма замещения затрат производственных фондов трудовыми ресурсами равна:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = - \frac{a_2 x_1}{a_1 x_2}$$

Знак минус в этом выражении означает, что при фиксированном объеме производства увеличению одного ресурса соответствует уменьшение другого, и наоборот. Предельная норма замещения ресурсов зависит не только от параметров a_1 и a_2 , но и от соотношения объемов ресурсов. Чем выше фондовооруженность труда, тем выше норма замещения затрат живого труда производственными фондами.

15.3. Эконометрические модели спроса и предложения

В условиях рынка цены большинства товаров и услуг не планируются «сверху», не регулируются государством, а свободно устанавливаются и изменяются на самом рынке. Но это не значит, что величина свободно определяемых цен совершенно произвольна, не зависит ни от каких факторов. Основными факторами, управляющими движением цен на рынке, являются спрос и предложение товаров.

Допустим вначале, что спрос и предложение данного товара являются функциями его цены. Естественно предположить, что спрос есть убывающая, а предложение - возрастающая функция от цены. Иными словами, спрос с ростом цены падает, а с уменьшением цены - растет;

предложение, наоборот, возрастает с увеличением цены и снижается с ее уменьшением.

Предположим, рыночная экономика функционирует в условиях так называемой совершенной конкуренции: производителей товара много, а производит каждый не слишком много, значит, монополизировать цену никто не может; потребителей тоже много, диктовать цену никому не удастся. Сначала цена устанавливалась довольно высокая. Что будет происходить дальше? При высокой цене предложение может превышать спрос, цена станет падать, в связи с чем предложение будет уменьшаться, а спрос расти - процесс этот в условиях совершенной конкуренции будет длиться до той поры, когда спрос и предложение сравняются при некоторой равновесной цене. Вот эта цена нас и интересует с научно-методической точки зрения.

Построим график и математическую модель для описанной процедуры образования равновесных цен. Обозначим величину спроса через D , объем предложения - через S , цену — через P . На графике (рис.15.1.) представлены функции предложения S и спроса D в зависимости от цены \bar{P} . Точке равенства спроса и предложения x_0 соответствует равновесная цена \bar{P}

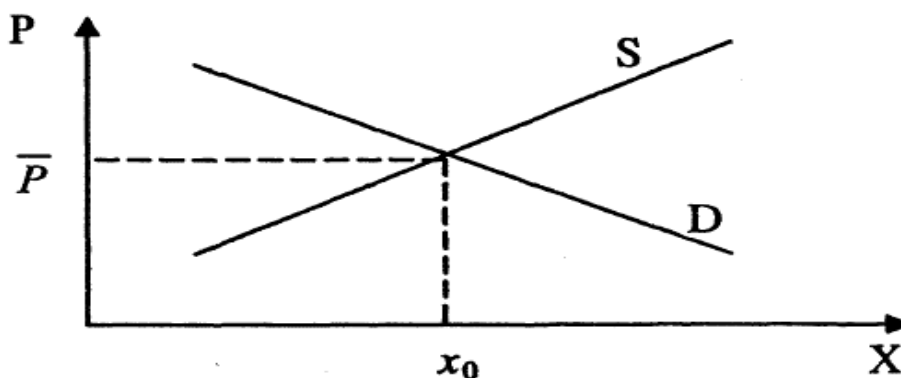


Рис. 15.1. Функции спроса и предложения¹⁶

¹⁶www.studopedia.info/1-123507.html

Получив на основе обработки статистических данных уравнения зависимости предложения S и спроса D от цены P , т.е. функции $S(P)$ и $D(P)$, можно приравнять обе эти функции (положив равными предложение и спрос) и получить уровень цены равновесия \bar{P} :

$$S(\bar{P}) = D(\bar{P})$$

Процесс формирования равновесной цены можно проследить с помощью так называемой паутинообразной модели. Будем предполагать, что в некоторый отрезок времени t спрос есть функция цены этого же периода, а предложение — функция цены предыдущего периода $t-1$, то есть:

$$D_t = D(P_t),$$

$$S_t = S(P_{t-1}).$$

При равенстве спроса и предложения в период t имеем уравнение:

$$D_t = D(P_t) = S(P_{t-1}) = S_t$$

Совпадение спроса и предложения приводит к появлению равновесной цены, при которой:

$$D(\bar{P}) = S(\bar{P})$$

Модель функционирует следующим образом. При цене P_0 некоторого начального для расчета периода определяется объем предложения как $S_1 = S(P_0)$. Тогда из уравнения $D(P_1) = S_1$ можно определить величину P_1 . Затем следуют расчеты $S_2 = S(P_1)$ и $D(P_2) = S_2$ для нахождения P_2 и т. д.

Рассмотрим пример, предположив, что спрос и предложение являются линейными функциями цен:

$$D_t = a_0 + a_1 P_t;$$

$$S_t = b_0 + b_1 P_{t-1}$$

$$S_t = D_t$$

Поскольку функция спроса - убывающая, то $a_1 < 0$; функция предложения - возрастающая, значит $b_1 > 0$.

Из приведенных соотношений имеем для равновесной цены p :

$$D(\bar{P})= a_0 + a_1, \bar{P} = b_0 + b_1\bar{P} = S(\bar{P}),$$

$$\bar{P} = \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1}$$

Знаменатель этого выражения положителен (так как $b_1 > 0$ и $a_1 < 0$), значит, для положительности равновесной цены необходимо, $a_0 > b_0$.

15.4. Модели экономического роста

В экономической науке существует два основных направления теорий экономического роста: неокейнсианское и неоклассическое и соответственно два типа моделей, его характеризующих.

Неокейнсианское направление возникло на основе идей Дж.М. Кейнса об относительной нестабильности капиталистической экономики и макроэкономического равновесия.

Неоклассическое направление уходит своими корнями к взглядам Адама Смита о саморегулировании рыночной экономики, факторной теории Ж.-Б. Сэя и теории предельной производительности экономических факторов Джона Бейтса Кларка.

Центральная проблема макроэкономики для кейнсианской теории - факторы, определяющие уровень и динамику национального дохода, а также его распределение на потребление и сбережение (оно затем трансформируется в накопление капитала, т.е. инвестиции). Именно сдвижением потребления и накопления Кейнс связывал объем и динамику национального дохода, проблему его реализации и достижение полной занятости.

Чем больше инвестиций, тем меньше размеры потребления сегодня и значительнее условия и предпосылки для его увеличения в перспективе. Поиск разумного соотношения между сбережением и потреблением - одно из перманентных противоречий экономического роста и вместе с тем

условие для совершенствования производства, умножения национального продукта.

Если сбережения превышают инвестиции, то не полностью реализуется потенциальный экономический рост страны. Если же инвестиционный спрос опережает размеры сбережения, то это ведет к «перегреву» экономики, подстегивает инфляционный рост цен и заимствования за рубежом.

Для всех моделей кейнсианского направления характерна общая зависимость между сбережением и инвестициями. Темпы прироста национального дохода зависят от нормы накопления и эффективности инвестиций.

Неокейнсианство.

Среди неокейнсианских моделей в экономической науке наибольшую известность получили модели экономического роста, созданные английским экономистом Роем Харродом (1900-1978) и американским экономистом российского происхождения Евсеем Домаром (1914-1997). Предложенные ими варианты моделей весьма сходны, в них анализируется длительный период устойчивого экономического роста, одним из основных условий которого является равенство сбережений и инвестиций ($S=I$). Однако в долгосрочном периоде возникает различие между сегодняшними сбережениями и завтрашними инвестициями. В силу ряда причин не все сбережения превращаются в инвестиции. Уровень и динамика сбережений и инвестиций зависят от действия разных факторов. Если сбережения определяются главным образом ростом дохода, то инвестиции зависят от многих переменных: состояния конъюнктуры, уровня процентной ставки, размеров налогообложения, ожидаемой рентабельности капиталовложений.

В полной модели экономического роста Р. Харрода анализируются соотношения между тремя величинами: фактическим (G), естественным (G_n) и гарантированным (G_w) темпами роста.

Исходным является уравнение фактического темпа роста: $GC = S_y$

где: G - означает отношение приращения дохода к величине базового периода ($G = \Delta Y / Y$);

C - коэффициент капиталоемкости, показывает отношение инвестиции к приросту дохода ($C = I / \Delta Y$); S_y - доля сбережений в национальном доходе (S / Y).

Устойчивый темп роста производства, который обеспечивается всем приростом населения (это один фактор экономического роста) и всеми возможностями увеличения производительности труда (это второй фактор роста), Харрод называет естественным темпом роста, т.е. таким, который имел бы место, если бы не было хронической безработицы, недогрузки мощностей и экономических кризисов. Третьим фактором роста Харрод считает размеры накопленного капитала и коэффициент капиталоемкости.

Чем больше величина сбережений, тем больше размер инвестиций и выше темпы экономического роста. Зависимость между коэффициентом капиталоемкости и темпами экономического роста обратная. Естественный темп роста представляет (по Харроду) максимально возможный темп роста экономики при данном росте населения и технологических возможностях.

При устойчивом темпе роста экономики потребности в инвестициях будут выражены величиной $G_n C_r$, где G_n - это естественный темп роста, C_r - темп роста основной и оборотного капитала. В краткосрочном и среднесрочном периодах потребность в инвестициях может колебаться в ходе цикла за счет главным образом размеров оборотного капитала. С точки зрения длительной перспективы C_r при неизменной норме процента является величиной постоянной, при длительном понижении нормы процента C_r растет, а при длительном повышении C_r - сокращается.

Уравнение Харрода, выражающее условия равновесия или его нарушения при естественном темпе роста, имеет вид:

$$G_n \cdot C_r = \text{или} \neq S_y$$

где S_y - сбережение.

По существу, это модификация уравнения Кейнса: $I=S$. Разница в том, что, согласно Кейнсу, размеры инвестиций определяются предельной эффективностью капитала (нормой прибыли) и ставкой процента, а Харрод связывает эти размеры с ростом населения, техническим прогрессом и коэффициентом капиталоемкости, т.е. с ростом основного и оборотного капитала. Размеры сбережения S и в том, и в другом случае определяются предельной склонностью к сбережению.

Подчеркивая различие между фактическим темпом роста и естественным темпом и доказывая возможность ликвидации разрыва между ними, Харрод вводит новую категорию - «гарантированный» темп роста - G_w . «Это прогнозируемая величина, тот всеобщий темп продвижения вперед, который устраивает предпринимателей: он определяется опытным путем, исходя из оценок прошлого и ожиданий в отношении будущего».

В уравнении гарантированного темпа роста $G_w C_r = S_y$ величина S_y относится к прошлому периоду, а величина $G_w C_r$ - к будущему. т.е. увеличение размера инвестиций зависит от доли сбережения в доходе.

Если бы фактический темп роста совпадал с прогнозируемым гарантированным, то наблюдалось бы устойчивое непрерывное развитие. Однако в рыночной экономике такое равновесие случается крайне редко. Фактический темп бывает ниже или выше гарантированного, что при относительном постоянстве доли сбережения в доходе, как предполагает Р.Харрод, влияет на динамику инвестиций, соответственно понижая их или повышая. Таким образом Р.Харрод объясняет кратковременные циклические колебания.

Более длительные колебания экономической конъюнктуры Харрод анализирует на основе сопоставления гарантированного и естественного темпов роста и считает, что отношение G_n и G_w имеет решающее значение для определения того, будет ли на протяжении ряда лет преобладать оживление или депрессия.

Согласно так называемому фундаментальному уравнению Р. Харрода

$$G_w C_r = S_y = G_n C_r$$

т.е. $G_w C_r$ одно из неперменных условий устойчивого экономического роста - равенство сбережений и инвестиций. Если сбережения превышают инвестиционный спрос, то образуются излишние запасы, не полностью используется оборудование, растет число безработных. Если же инвестиционный спрос опережает размеры сбережений, то это способствует инфляционному росту цен и «перегреву» экономики.

Неоклассическое направление.

В центре неоклассического направления стоит идея равновесия, основанного на оптимальной рыночной системе, рассматриваемой как совершенный саморегулирующийся механизм, позволяющий наилучшим образом использовать все производственные факторы не только отдельному экономическому субъекту, но и экономике в целом.

В реальной экономической жизни общества это равновесие нарушается. Однако моделирование равновесия позволяет найти отклонение реальных процессов от идеала.

Значительный вклад в развитие теории экономического роста внес лауреат Нобелевской премии американец Роберт Солоу, который модифицировал производственную функцию Кобба-Дугласа путем ввода еще одного фактора - уровня развития технологий. При этом он исходил из того, что изменение технологии приводит к одинаковому увеличению K и L :

$$Q = T \cdot F(K, L)$$

где Q - выпуск продукции; K - основной капитал; L - вложенный труд (в виде заработной платы); T - уровень развития технологий; $F(K, L)$ - производственная функция Кобба-Дугласа.

Если доля капитала в выпуске продукции измеряется такими показателями, как капиталовооруженность (или фондовложенность) на одного работающего, и фондоотдача (количество продукции на одну денежную единицу производственных фондов); доля труда - на основе производительности труда, то вклад технического прогресса представляется как остаток после вычета из прироста выпуска продукции доли, полученной за счет прироста труда и капитала. Это так называемый остаток Солоу, который выражает долю экономического роста за счет технического прогресса, или «прогресса в знаниях».

Предпосылками анализа в модели Р.Солоу является: взаимозаменяемость труда и капитала (как в модели Кобба-Дугласа), убывающая предельная производительность капитала; постоянная отдача от масштаба, постоянная норма выбытия основных фондов; отсутствие инвестиционных лагов.

При неизменной численности занятых динамика объема выпуска зависит от объема капитала (в данном случае в расчете на одного занятого, т.е. капиталовооруженности (фондовооруженности)). В свою очередь, объем капитала меняется под воздействием инвестиций и выбытия основных фондов. Размеры инвестиций зависят от нормы сбережения, с ростом которой они увеличиваются, превышая выбытие капитала, и фондovoоруженность возрастает. С ростом фондovoоруженности темп роста инвестиций (сбережений) естественно падает. Инвестиции увеличивают запас капитала, выбытие уменьшает. Уровень запаса капитала, при котором инвестиции равны его выбытию, есть равновесный уровень фондovoоруженности труда. При достижении этого экономика будет находиться в состоянии долгосрочного равновесия.

В случае, когда рост становится сбалансированным, его дальнейший темп зависит только от роста населения и технического прогресса.

Рост населения при том же объеме капитала снижает фондовооруженность. Привлекаемые при этом инвестиции должны не только покрыть выбытие капитала, но и обеспечить капиталом новых рабочих в прежнем объеме.

Для того чтобы фондовооруженность оставалась постоянной и при росте населения, капитал должен возрастать таким же темпом, что и население:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta K}{K}$$

Технологический прогресс в модели Солоу является единственным условием непрерывного повышения уровня жизни, так как только при его наличии наблюдается устойчивый рост фондовооруженности и выпуска продукции в расчете на одного занятого, т.е. фондоотдачи.

Однако по мере роста фондовооруженности количество продукции на одного занятого (Q/L) возрастает в меньшей степени, чем фондовооруженность, так как падает предельная производительность капитала.

Обозначим производство продукции на одного занятого (Q/L) q , количество капитала на одного работающего (K/L) через k (капитало- или фондовооруженность), тогда производственная функция примет следующий вид:

$$q = TF(k)$$

Как видно из рис. (15.2), по мере роста фондовооруженности происходит рост q (количество продукции на одного занятого), но оно возрастает в меньшей степени, так как падает предельная производительность капитала (фондоотдача), согласно закону убывающей отдачи.

В модели Солоу объем производства Q определяется инвестициями I и потреблением C . Предполагается, что экономика носит закрытый от мирового рынка характер и отечественные инвестиции I равны национальным сбережениям, или объему валового сбережения S т.е. $I = SS$.

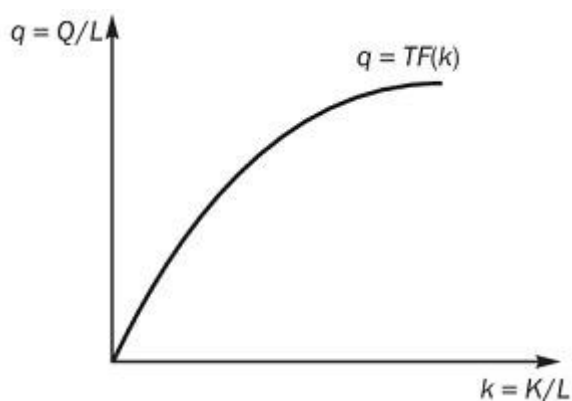


Рис. 15.2. Производственная функция в расчете на душу населения¹⁷

В настоящее время в западных странах получила распространение концепция «экономического развития без роста» или «нулевого экономического роста». Это связано, с одной стороны, с тем, что на основе НТР уже достигнут высокий уровень подушевого производства, а с другой - значительно уменьшились темпы роста населения. Кроме того, сторонники этой концепции считают, что экономический рост приводит к нарушению биосферы жизни человека и ограничен в силу недостаточности сырьевых и топливных ресурсов планеты.

В частности, группа исследователей под руководством Дениса и Донеллы Медоуз предупреждают об опасности «глобальной катастрофы», которая грозит человечеству вследствие технического прогресса, разрушающего окружающую среду.

Полемизуя с ними, другие специалисты и ученые (известный теоретик и историк экономической мысли, российский ученый

¹⁷www.grandars.ru › Экономическая теория › Макроэкономика

Ю.Ольсевич; германский экономист и политик Э. Пестель и др.) считают, что нужно изменить тенденции роста, ввести ограничения на использование природных ресурсов, загрязнение среды. С помощью современных технологий вполне можно смягчить противоречия между растущими потребностями и ограниченными ресурсами.

Вопросы для контроля

1. Как определяется предельная производительность труда в производственной функции Кобба-Дугласа?
2. Где применяется Критерий Дарбина-Уотсона?
3. Что показывает коэффициент эластичности?
4. Производственная функция Кобба-Дугласа?
5. Предельные затраты – это?
6. Если расчетное значение критерий Дарбина-Уотсона меньше чем табличное, то что это означает?
7. Что показывают коэффициенты эластичности факторов в производственной функции?
8. Как рассчитываются эконометрические модели спроса и предложения?
9. Какие модели экономического роста вы знаете?

Учебное задание

1. Понятие производственной функции одной переменной.
Производственные функции нескольких переменных.
2. Полная и частная мультиколлинеарность. Теоретические последствия наличия в модели мультиколлинеарности. Признаки наличия мультиколлинеарности.
3. Подходы к устранению мультиколлинеарности в данных (факторный анализ, смещенные методы оценивания и др.)

Вопросы для самопроверки.

1. В каком случае возникает проблема мультиколлинеарности.
2. Какие последствия для статистических выводов присутствие в модели мультиколлинеарности.
3. Какие вы знаете статистические тесты, обнаруживающие мультиколлинеарность.
4. Какие внешние признаки мультиколлинеарности.
5. Как обнаружить наличие мультиколлинеарности в модели.
6. Что делать, если в модели присутствует мультиколлинеарность.
7. Что вы понимаете под производственную функцию?
8. Какие производственные функции вы знаете?
9. Что определяет функция Кобба-Дугласа?
10. Как выглядит эконометрическая модель спроса и предложения?
11. В каких случаях применяется функция Кобба-Дугласа?
12. Что такое факторный анализ и когда он применяется?
13. Какие подходы существуют для устранения мультиколлинеарности?
14. Какие признаки мультиколлинеарности существуют?

Тесты для проверки знаний

1. Средняя фондоотдача в производственной функции Кобба-Дугласа –
 - a) Соотношение ВВП и капитала
 - b) Соотношение капитала и ВВП
 - c) Соотношение ВВП и затрат труда
 - d) Соотношение ВВП и коэффициента эластичности капитала
2. Метод наименьших квадратов служит для
 - a) Вычисления средних показателей динамического ряда
 - b) Определения тесноты связи между факторами
 - c) Выравнивания динамических рядов
 - c) Определения уровня соответствия факторов

3. Наиболее существенная причина экономического роста в развитых странах — это:

- a) Увеличение объема рабочего времени
- b) Технологические изменения в производстве
- c) Увеличение объема применяемого капитала
- d) Рост квалификации рабочей силы

4. Если коэффициент эластичности равен 0,02, то

- a) Влияющий фактор увеличится на 2%
- b) Результативный фактор увеличится на 2%
- d) Результативный фактор уменьшится на 2%
- c) И влияющий, и результативный факторы увеличатся на 2%

5. В каких случаях применяется производственная функция Кобба-Дугласа

- a) При оптимальном использовании ресурсов предприятия
- b) При построение балансовых моделей макроэкономических процессов
- c) При построение сетевых графиков
- d) При прогнозировании макроэкономических показателей

6. Надежность построенной математической модели зависит от

- a) От объема собранной информации
- b) От квалификации исследователя
- c) От процесса моделирования
- d) Все ответы верны

7. Укажите правильный ответ

- a) Критерий Фишера определяет тесноту связи между факторами
- b) Критерий Дарбина-Уотсона определяет мультиколлинеарность

- c) Коэффициент детерминации определяет адекватность модели
- d) Критерий Стьюдента определяет надежность коэффициента регрессии

8. Экономический рост - это

- a) Одинаковое изменение уровня инфляции и безработицы
- b) Увеличение Центрального Банка процентных ставок на 10 %
- c) Увеличение ВВП на душу населения
- d) Увеличение объема импорта над экспортом

9. Трендовая модель относится к

- a) Статическим моделям
- b) Балансовым моделям
- c) Динамическим моделям
- d) Сетевым моделям

10. Функция спроса - это

- a) Потребность предприятий и фирм в некоторых видах ресурсов
- b) С увеличением цен, объем спроса уменьшается
- c) Цены не влияют на объем спроса
- d) Функция приводящая к равновесию рынка

11. Функция предложения – это

- a) Процесс обмена произведенной продукции
- b) Установление цены продукции между конкурирующими предприятиями
- c) Зависимость производства от новых технологий
- d) Увеличение цены приводит к увеличению объема предложения

12. Если сумма коэффициентов капитала и труда больше единицы, то это
- a) Смешанная экономика
 - b) Растущая экономика
 - c) Снижающая экономика
 - d) Циклическая экономика
13. Когда коэффициент корреляции будет принимать значение 1,37
- a) Если количество наблюдений больше 100
 - b) Если количество факторов меньше 100
 - c) Такого коэффициента не существует
 - d) Если количество факторов больше количество наблюдений
14. Отрицательное значение коэффициента регрессии показывает, что
- a) Линия результатного показателя параллельна с осью X
 - b) Линия результатного показателя параллельна с осью Y
 - c) Линия результатного показателя снижающая
 - d) Линия результатного показателя увеличивающая
15. Если, фактор влияющие на объем спроса увеличится на 1%, и объем предложения увеличится на 1,6%, то это
- a) Неэластичное предложение
 - b) Предложение имеет единичное эластичность
 - c) Эластичное предложение
 - d) Уменьшающие предложение
16. При увеличение неценовых факторов спроса график спроса
- a) Сдвигается вверх
 - b) Сдвигается вниз
 - c) Остается неизменным

d) Сдвиг точек происходит на кривой спроса

17. Если расчетное значение критерия Стьюдента меньше табличного, то

- a) Коэффициент регрессии является надежным
- b) Коэффициент корреляции является надежным
- c) Коэффициент детерминации является надежным
- d) Коэффициент регрессии является ненадежным

18. В теории потребления потребитель желает

- a) Максимизировать функцию полезности
- b) Минимизировать располагаемый доход
- c) Минимизировать набор благ
- d) Максимизировать предельный доход

ТЕМА 16. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ПРОГНОЗИРОВАНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ. МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ. МЕТОДЫ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ТРЕНДОВ

Ключевые слова: прогноз, предвидение, прогнозирование, трендовые модели, имитация, сценарий.

16.1. Социально-экономическое прогнозирование: общие понятия и объекты. Функции прогнозирования

Под прогнозом понимается научно-обоснованное суждение о возможных состояниях объекта в будущем, альтернативных путях и сроках его осуществления. Социально-экономическое прогнозирование – это процесс разработки экономических и социальных прогнозов, основанный на научных методах познания экономических и социальных

явлений, и использования всей совокупности методов, способов и средств экономической прогностики.

Прогнозирование имеет две стороны, или плоскости, конкретизации: предсказательную (дескриптивную, описательную) и предуказательную (предписательную). Предсказание означает описание возможных или желательных перспектив, состояний, решений проблем будущего. Предуказание означает решение этих проблем путем использования информации о будущем в целенаправленной деятельности.

Таким образом, в прогнозировании различают два аспекта: теоретико-познавательный и управленческий. Экономическое прогнозирование имеет своим объектом процесс конкретного расширенного воспроизводства во всем его многообразии. Предметом экономического прогнозирования является познание возможных состояний функционирующих экономических объектов в будущем, исследование закономерностей и способов разработки экономических прогнозов.

В основе экономического прогнозирования лежит предположение о том, что будущее состояние экономики в значительной мере предопределяется ее прошлым и настоящим состояниями. Будущее несет в себе и элементы неопределенности. Это объясняется следующими моментами:

- наличием не одного, а множества вариантов возможного развития;
- зависимостью действия экономических законов в будущем не только от прошлого и настоящего состояний экономики, но и от управленческих решений, которые еще только должны быть приняты и реализованы;
- неполнотой степени познания экономических законов, дефицитом и недостаточной надежностью информации.

Единство определенности (детерминированности) и неопределенности будущего - решающая предпосылка экономического прогнозирования.

Если бы будущее было полностью определенным, то тогда бы не было потребности в прогнозировании. При неопределенности будущего сама возможность экономического прогнозирования исключается.

Важную роль в развитии экономического прогнозирования играет прикладная научная дисциплина «прогностика» и ее составная часть – «экономическая прогностика».

Прогнозирование следует рассматривать в комплексе с более широким понятием - предвидением, которое дает опережающее отображение действительности, основанное на познании законов природы, общества и мышления. Различают три формы научного предвидения: гипотезу, прогноз и план.

Гипотеза характеризует научное предвидение на уровне общей теории. На уровне гипотезы дается качественная характеристика исследуемых объектов, выражающая общие закономерности их поведения.

Прогноз в сравнении с гипотезой имеет значительно большую качественную и количественную определенность и отличается большей достоверностью. Прогностика - наука о построении будущего. *Прогноз* - это научно обоснованное суждение о будущем и путях его достижения.

В процессе прогнозирования решаются следующие основные *задачи*: установление целей развития, определение рациональных путей и средств достижения, расчет необходимых ресурсов.

В практике используется классификация прогнозов по следующим признакам:

- *по назначению*: научно-технические; социально-экономические; военные; демографические; политические;

- *по масштабу действий*: международные прогнозы; национальные прогнозы; межотраслевые прогнозы; отраслевые прогнозы; прогнозы самостоятельных хозяйствующих единиц (фирм и т. п.);

- по периоду прогнозирования: оперативные прогнозы (до 6 мес.); краткосрочные (до 2 лет); среднесрочные (до 5 лет); долгосрочные (свыше 5 лет).

Особенность разработки прогнозов состоит в том, что при прогнозировании, кроме объекта прогнозирования, необходимо прогнозировать влияние активного фона, или внешней среды.

Алгоритм разработки прогноза включает определенные этапы.

1. Предпрогнозная ориентация (системно-структурный анализ объекта) включает постановку задачи для разработки прогноза (уточняются характеристики объекта).

2. Определение масштабов - определение периодов прогнозирования, условий и ограничений, при которых будет разрабатываться прогноз.

3. Анализ и установление факторов прогнозного (активного) фона.

4. Формирование информационной базы для прогноза активного фона и объекта.

5. Разработка собственно прогнозной модели и выбор метода прогнозирования.

6. Разработка прогноза и оценка его достоверности.

7. Разработка плановых решений (по результатам прогноза).

При прогнозировании следует принимать во внимание определенные *особенности*: необходимо знать предельные значения параметров развития; учитывать не объект как таковой, а развитие объекта через параметры эффективности.

Разработка прогнозов строится на определенных принципах:

- 1) системности (представление объекта в виде системы);
- 2) согласованности (скоординированная система целей);
- 3) верификации (доверие к результатам прогноза);
- 4) непрерывности.

Принцип системности прогнозирования означает, что экономика рассматривается, с одной стороны, как единый объект, а с другой - как совокупность относительно самостоятельных объектов или направлений прогнозирования. Системный подход предполагает построение прогнозов на основе системы методов и моделей, характеризующейся определенной субординацией и последовательностью, что позволяет разрабатывать согласованный и непротиворечивый прогноз экономического развития по каждому объекту народного хозяйства. Однако в условиях переходной экономики построить целостную систему моделей социально-экономического прогнозирования очень сложно, в связи с чем необходимы унификация блочных моделей, использование вычислительных способов решения, создание информационного банка данных.

Можно выделить ряд функций прогнозирования.

1. *Научный анализ экономических, социальных, научно-технических процессов и тенденций.* Он осуществляется по трем стадиям (ретроспекция, диагноз, проспекция).

Под ретроспекцией понимается этап прогнозирования, на котором исследуется история развития объекта прогнозирования для получения его систематизированного описания. На этой стадии происходит сбор, хранение и обработка информации, источников, необходимых для прогнозирования, оптимизация как состава источников, так и методов измерения и представления ретроспективной информации, окончательное формирование структуры и состава характеристик объекта прогнозирования.

Диагноз - это такой этап прогнозирования, на котором исследуется систематизированное описание объекта прогнозирования с целью выявления тенденции его развития и выбора моделей и методов прогнозирования. На этой стадии анализ заканчивается не только

разработкой моделей прогнозирования, но и выбором адекватного метода прогнозирования.

Проспекция представляет собой этап прогнозирования, на котором по данным диагноза разрабатываются прогнозы развития объекта прогнозирования в будущем, производится оценка достоверности, точности или обоснованности прогноза (верификация), а также реализация цели прогноза путем объединения конкретных прогнозов на основе принципов прогнозирования (синтез). На стадии проспекции выявляется недостающая информация об объекте прогнозирования, уточняется ранее полученная, вносятся коррективы в модель прогнозируемого объекта в соответствии с вновь поступившей информацией.

2. *Исследование объективных связей социально-экономических явлений развития народного хозяйства в конкретных условиях в определенном периоде.*

При непрерывном характере прогнозирования анализ его объекта происходит также непрерывно, сопровождая все стадии формирования прогнозов, тем самым осуществляется обратная связь между реальным объектом и его прогностической моделью. В результате научного анализа хозяйственных процессов и тенденции развития экономики определяется, насколько принятые решения соответствуют будущему развитию, выявляются несоответствия в экономике, достигнутый в стране уровень сравнивается с мировым опытом.

3. *Оценка объекта прогнозирования базируется на сочетании аспектов детерминированности (определенности) и неопределенности.*

4. *Выявление объективных вариантов экономического и социального развития.* На основе теоретических исследований, достижений общественных, естественных и технических наук выясняются объективные варианты изучаемого процесса и тенденции его развития на перспективу.

5. *Накопление научного материала для обоснованного выбора определенных решений.* Реализация функций прогнозирования осуществляется на основе двух подходов: поискового и нормативного.

10.2. Методы прогнозирования и ее виды

Под методами прогнозирования следует понимать совокупность приемов и способов мышления, позволяющих на основе ретроспективных данных внешних и внутренних связей объекта прогнозирования, а также их измерений в рамках рассматриваемого явления или процесса вывести суждения относительно будущего состояния и развития объекта.

В настоящее время насчитывается свыше 150 различных методов прогнозирования, из которых на практике используется 15–20.

В процессе экономического прогнозирования применяются как общие научные методы и подходы к исследованию, так и специфические методы, свойственные социально-экономическому прогнозированию. В числе общих можно выделить следующие методы:

- исторический - заключается в рассмотрении каждого явления во взаимосвязи его исторических форм;
- комплексный - заключается в рассмотрении явлений в их взаимозависимости, используя для этого методы исследования не только данной, но и других наук, изучающих эти явления;
- системный - предполагает исследование количественных и качественных закономерностей протекания вероятностных процессов в сложных экономических системах;
- структурный - позволяет установить причины исследуемого явления, объяснить его структуру;
- системно-структурный - предполагает, с одной стороны, рассмотрение системы в качестве динамически развивающегося целого, а с

другой - расчленение системы на составляющие структурные элементы и рассмотрение их во взаимодействии.

Специфические методы экономического прогнозирования целиком и полностью связаны с экономической прогностикой. Среди инструментов экономической прогностики важную роль играют экономико-математические методы, методы экономико-математического моделирования, статистической экстраполяции и др.

Наиболее важными являются приведенные ниже методы:

- индуктивный метод (от частного к общему);
- подход по ходу времени (на основе уже прожитого);
- поисковые (исследовательские) методы;
- дедуктивный метод мышления (от общего к частному);
- нормативные методы.

Поисковые методы: статистические; экстраполяции (развитие состоит из двух составляющих):

$$y_t = x(t) \text{ случайная составляющая} + \varepsilon(t) \text{ систематическая ошибка.}$$

(применяется, когда мы находимся в фазе развития и смотрим, можем ли идти дальше); интерполяции (развитие исходя из граничных данных); метод огибающих кривых; методы аналогии.

- Публикационные (опережающие, параметрические) методы. В качестве параметров используются – интенсивные (коэффициент роста; функциональные характеристики; темпы роста и т.д.) и экстенсивные (объем выпуска; величина дохода и т.п.). Примером публикационных методов являются анализ динамики публикаций и определение перспектив развития (рост или спад); патентный метод (анализ патентов и новшеств).

- Экспертные методы: индивидуальная экспертиза (методы интервью - метод «Дельфы»); методы аналитических справок - метод морфологического

анализа; методы генерации идей - мозговая атака, метод дерева целей, матричный метод); коллективная экспертиза.

Алгоритм комплексной системы прогнозирования включает: построение сценария прогнозов; разработку поисковых прогнозов динамики основных характеристик; морфологический анализ с точки зрения определения вариантов развития; разработку дерева целей; оценку элементов уровня дерева целей (важность, полезность, состояние готовности при реализации); оценку альтернатив развития; верхние уровни принимают окончательное решение; разработку вариантов распределения ресурсов по элементам дерева целей; оценку и проработку принятого варианта прогноза.

В процессе прогнозирования, начиная с разработки задания на прогноз, должен быть проведен всесторонний анализ объекта прогнозирования. Этот анализ включает определение объекта и предмета исследования целей и задач его прогнозирования, его зависимости от внешней среды, его структуры; механизма его функционирования, управления им. Формально - содержательное исследование объекта приводит обычно к построению его моделей с их последующей корректировкой; выявлением альтернативных управляющих воздействий на объект и выбором оптимальной альтернативы.

Мы будем рассматривать социально-экономические системы, а их анализ как объектов прогнозирования достаточно натрудим в связи с тем, что относятся они к системам очень сложным. Для исследования сложных объектов требуется применение глубоко разрабатываемой в последние десятилетия теории систем, системного анализа.

Важной особенностью методологии исследования систем является функциональный подход к их анализу. Функция системы проявляется в ее поведении, в непрерывном взаимодействии всех ее элементов для достижения стоящих перед системой целей. Система связана с внешней

средой своими входами и выходами. Допустим, что нам известны три вектора, описывающих состояния в момент времени t : вектор состояний входов $X_t=(x_1, x_2, \dots, x_m)_t$. Вектор состояний выходов $Y_t=(y_1, y_2, \dots, y_m)_t$. Вектор внутренних состояний системы $S_t=(s_1, s_2, \dots, s_m)_t$. Функция системы, ее поведение характеризуется вектором состояний выходов. Если считать что в момент t состояния выходов определяются состояниями входов системы и ее внутренними состояниями, то имеем зависимость $y_t=f(X_t, S_t)$. Выявление таких функций часто оказывается весьма полезным для прогнозирования сложной системы: ведь протезируют обычно состояния выходов в зависимости от возможных, ожидаемых или достижимых состояний входов и внутренних состояний системы. Классификация прогнозов осуществляется по ряду признаков в зависимости от целей, задач, объектов протезирования, времени упреждения, научно - методических основ и организации прогнозирования, формы и его конечных результатов. Рассмотрим типология социально - экономических прогнозов по основным критериям. По масштабам прогнозируемой системы дифференциация очень велика от протезов мирового хозяйства до протезов предприятий и отдельных производств. Здесь можно выделить следующие группы прогнозов (рис.16.1):

- прогнозы международной экономики, включая конъюнктуру мирового рынка и внешней торговли;
- прогнозы экономики страны в целом как укрупненные однопродуктовые, так и межотраслевые;
- прогнозы народнохозяйственных комплексов таких, как топливно-энергетический комплекс агропромышленный комплекс и другие;
- прогнозы отраслей народного хозяйства, однопродуктовые или многопродуктовые;
- прогнозы регионов, охватывающие по возможности всю региональную социально-экономическую систему.

Классификация прогнозов представлена на рис.16.1 (левая сторона), справа приводится типология прогнозов по объектам прогнозирования. Выделено 10 групп таких прогнозов, относящихся полностью или почти полностью (как демографические, экологические) к социально - экономическому прогнозированию. Остановимся на содержании каждой из этих групп.

Демографические прогнозы охватывают динамику народонаселения исходя из половозрастной его структуры, данных о рождаемости и смертности, продолжительности жизни.

Исследуются объемы и направления миграционных потоков населения, воспроизводство трудовых потоков населения, воспроизводство трудовых ресурсов и занятость, численность и величина семей. Особое значение для других экономических и социальных расчетов имеют прогнозы численности, состава и размещения трудоспособного населения.

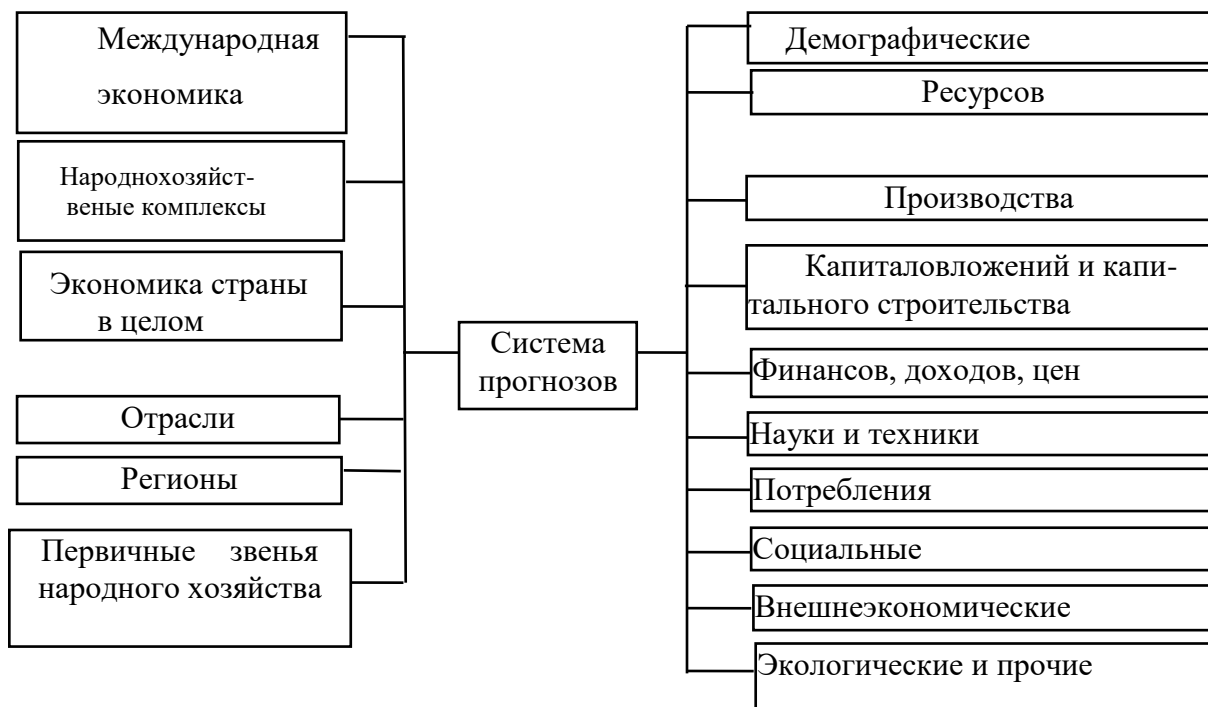


Рис. 16.1. Схема классификации прогнозов¹⁸

¹⁸www.uamconsult.com/book_547_chapter_6_1.4._Klassifikacija_prognozov.html

Прогнозы ресурсов охватывают прежде всего природные ресурсы как базу общественного производства: топливно-энергетические, минерально-сырьевые, водные, лесные и т.д. Ясно, что наличием ресурсов во многом определяется структура всего народного хозяйства, а происходящее уменьшение запасов, снижение качества, ухудшение условий добычи многих видов ресурсов требуют тщательно обоснованной информации об ожидаемом в будущем состоянии этой проблемы. Представляют интерес и прогнозы о количестве и использовании вторичных и попутных ресурсов.

Прогнозы производства: многосторонне включают различные аспекты производительных сил и производственных отношений. Это темпы экономического роста, объем и структура конечного продукта народного хозяйства, межотраслевые связи, территориальное размещение производства, объемы, состав, качество основных производимых продуктов в натуральном исчислении.

В прогнозы капиталовложений и капитального строительства включаются объемы и структура капитальных вложений, стоимость выполняемого строительства, ввод в действие основных фондов, сооружений, сроки их службы, выбытия и замены.

Прогнозами финансов, доходов, цен охватываются важнейшие балансы денежно-финансовой системы - государственный бюджет, баланс денежных доходов и расходов населения, баланс финансовых ресурсов, бюджет социального страхования. Включаются также прогнозы издержек производства, прибылей, все возможных ценообразующих факторов.

Значение прогнозов науки и техники все более возрастает, поскольку завершается превращение науки в непосредственную производительную силу общества. Научно-технические прогнозы включают в себя прогнозы науки в направлениях фундаментальных и прикладных исследований, прогнозы развития и внедрения достижений научно-технического прогресса в различные производства, отрасли экономики, прогнозы

социального воздействия научно-технического прогресса на общественную жизнь.

В прогнозах потребления исследованию подлежат общественные потребности, которые сводятся к двум формам - потребностям личным и производственным. Необходимость в прогнозировании потребления связана с тем что величина и структура потребностей в будущем носят весьма вероятностный характер, зависят от множества факторов, а без знания потребностей невозможно правильно спланировать производство.

Социальными прогнозами исследуется такая сложная совокупность как образ жизни, т.е. способ жизнедеятельности людей, коллективов, социальных групп, общества в целом в аспектах условий труда, быта и отдыха, степени удовлетворения всевозможных материальных и духовных потребностей, развития социальной инфраструктуры, тенденцией в области культуры, образования, здравоохранения и т.д. Значительную долю занимают прогнозы потребительского спроса и потребления населением всех видов товаров и услуг.

Внешнеэкономические прогнозы__охватывают общие тенденции развития мировой экономики, экономические взаимоотношения нашей страны с другими странами, конъюнктуру международного рынка и внешней торговли.

Экологические прогнозы исследуют состояние природопользования, проблемы загрязнения природной среды, перспективы развития растительного и животного мира, продуктивность сельскохозяйственных угодий, возможности совершенствования производства с целью минимизации строительных последствий. Все эти 10 групп выделенных прогнозов существенно необходимы для анализа и управления социально - экономическими процессами развития общества.

По сроку прогнозирования (периоду упреждения) выделяются прогнозы оперативные, краткосрочные, среднесрочные, долгосрочные,

дальнесрочные. По характеру научно методического обоснования прогнозы делятся на поисковые (исследовательские, изыскательские) и нормативные. Существует также разграничение прогнозов на пассивные и активные. Методы прогнозирования можно разделить на две большие группы - логико-эвристические методы базируются на широко известной общенаучной теории логики и на эвристике, которая определяется словарями как «Искусство нахождения истины» (рис 10.2).

В этой группе выделяются четыре подгруппы методов, это методы формальной логики, аналогии, экспертных оценок и специальные эвристические. Методы моделирования основаны прежде всего на количественных, математических и статистических исследованиях, на выявлении формальных зависимостей и тенденции развития, на построении прогностических моделей и экспериментировании с ними на базе компьютерной техники. В качестве подклассов выделяются модели экстраполяции, эконометрические, нормативно - целевые и имитационные. Отдельно в классификации представлены комплексные методы в которых сочиняются как логико-эвристические подходы, так и моделирование.

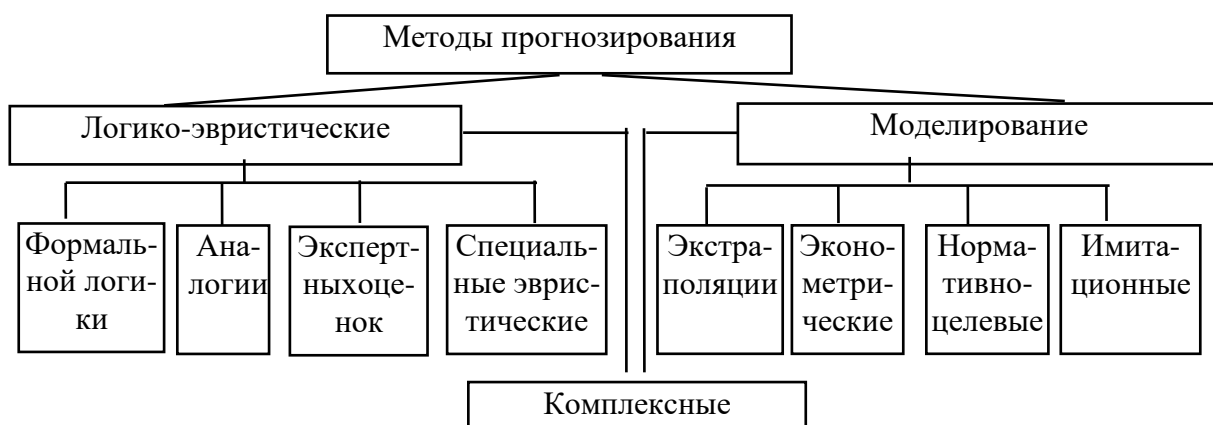


Рис 16.2. Классификация методов прогнозирования¹⁹

¹⁹www.uamconsult.com/book_547_chapter_6_1.4._Klassifikacija_prognozov.html

В ходе научных исследований вообще, прогнозирования в частности, дедукция и индукция тесно между собой взаимосвязаны. Без индукции строго говоря, возникновение дедукции становится невозможным. Диалектика не позволяет беспрепятственно оделять анализ от синтеза, индукцию от дедукции. Более того - и в своем сочетании они могут оказаться недостаточными для полного обоснования прогноза, а часто служат лишь дополнением и поклонением при использовании более специализированных методов прогнозирования.

Модель какой - либо сложной системы тоже представляет собой систему (и нередко весьма сложную), имеющую физическое воплощение либо записанную с помощью слов, шифр, математических обозначений, графических изображений и т.д. Таким образом, можно сказать, что модель - это физическая или знаковая система, имеющая объективное подобие с исследуемой системой в отношении функциональных, а часто и структурных характеристик, являющихся предметом исследования.

10.3. Прогнозирование на основе трендовых моделей

Прогнозирование экономических показателей на основе трендовых моделей, как и большинство других методов экономического прогнозирования, основано на идее экстраполяции. Как уже сказано выше, под экстраполяцией обычно понимают распространение закономерностей, связей и соотношений, действующих в изучаемом периоде, за его пределы. В более широком смысле слова ее рассматривают как получение представлений о будущем на основе информации, относящейся к прошлому и настоящему. В процессе построения прогнозных моделей в их структуру иногда закладываются элементы будущего предполагаемого состояния объекта или явления, но в целом эти модели отражают закономерности, наблюдаемые в прошлом и настоящем, поэтому

достоверный прогноз возможен лишь относительно таких объектов и явлений, которые в значительной степени детерминируются прошлым и настоящим.

Существуют две основные формы детерминации: внутренняя и внешняя. Внутренняя детерминация, или самодетерминация, более устойчива, ее проще идентифицировать с использованием экономико-математических моделей. Внешняя детерминация определяется большим числом факторов, поэтому учесть их все практически невозможно. Если некоторые методы моделирования, например адаптивные, отражают общее совокупное влияние на экономическую систему внешних факторов, т.е. отражают внешнюю детерминацию, то методы, базирующиеся на использовании трендовых моделей экономических процессов, представленных одномерными временными рядами, отражают внутреннюю детерминацию объектов и явлений.

При экстраполяционном прогнозировании экономической динамики на основе временных рядов с использованием трендовых моделей выполняются следующие основные этапы:

- 1) предварительный анализ данных;
- 2) формирование набора моделей (например, набора кривых роста), называемых функциями-кандидатами;
- 3) численное оценивание параметров моделей;
- 4) определение адекватности моделей;
- 5) оценка точности адекватных моделей;
- 6) выбор лучшей модели;
- 7) получение точечного и интервального прогнозов;
- 8) верификация прогноза.

Прогноз на основании трендовых моделей (кривых роста) содержит два элемента: точечный и интервальный прогнозы. **Точечный прогноз** - это прогноз, которым называется единственное значение прогнозируемого

показателя. Это значение определяется подстановкой в уравнение выбранной кривой роста величины времени t , соответствующей периоду упреждения: $t = n + 1$; $t = n + 2$ и т.д. Такой прогноз называется точечным, так как на графике его можно изобразить в виде точки.

Очевидно, что точное совпадение фактических данных в будущем и прогностических точечных оценок маловероятно. Поэтому точечный прогноз должен сопровождаться двусторонними границами, т.е. указанием интервала значений, в котором с достаточной долей уверенности можно ожидать появления прогнозируемой величины. Установление такого интервала называется *интервальным прогнозом*.

Интервальный прогноз на базе трендовых моделей осуществляется путем расчета *доверительного интервала* такого интервала, в котором с определенной вероятностью можно ожидать появления фактического значения прогнозируемого экономического показателя. Расчет доверительных интервалов при прогнозировании с использованием кривых роста опирается на выводы и формулы теории регрессий. Перенесение выводов теории регрессий на временные экономические ряды не совсем правомерно, так как динамические ряды, как выше уже отмечали, отличаются от статистических совокупностей. Поэтому к оцениванию доверительных интервалов для кривых роста следует подходить с известной долей осторожности.

Методы, разработанные для статистических совокупностей, позволяют определить доверительный интервал, зависящий от стандартной ошибки оценки прогнозируемого показателя, от времени упреждения прогноза, от количества уровней во временном ряду и от уровня значимости (ошибки) прогноза.

Стандартная (среднеквадратическая) ошибка оценки прогнозируемого показателя S_y определяется по формуле

$$S_{\hat{y}} = \sqrt{\frac{\sum (y_t - \hat{y}_t)^2}{n-k}}$$

где:

y_t - фактическое значение уровня временного ряда для времени t ;

\hat{y}_t - расчетная оценка соответствующего показателя по модели (например, по уравнению кривой роста);

n - количество уровней в исходном ряду;

k - число параметров модели.

В случае прямолинейного тренда для расчета доверительного интервала можно использовать аналогичную формулу для парной регрессии, таким образом, доверительный интервал прогноза в этом случае будет иметь вид

$$U_y = \hat{y}_{n+L} t_\alpha \pm S_{\hat{y}} \sqrt{1 \frac{1}{n} + \frac{3(n+2L-1)^2}{n(n^2-1)}}$$

где:

L - период упреждения;

\hat{y}_{n+L} - точечный прогноз по модели на $(n+L)$ -й момент времени;

n - количество наблюдений во временном ряду;

$S_{\hat{y}}$ - стандартная ошибка оценки прогнозируемого показателя, рассчитанная по ранее приведенной формуле для числа параметров модели, равного двум;

t_α - табличное значение критерия Стьюдента для уровня значимости α и для числа степеней свободы, равного $n-2$.

Если выражение

$$t_\alpha \pm S_{\hat{y}} \sqrt{1 \frac{1}{n} + \frac{3(n+2L-1)^2}{n(n^2-1)}}$$

обозначить через K , то формула для доверительного интервала примет вид

$$U_y = \hat{y}_{n+L} S_{\hat{y}} Kt$$

Иногда для расчета доверительных интервалов прогноза относительно линейного тренда применяют приведенную выше формулу в несколько преобразованном виде:

$$U_y = \hat{y}_{n+L} t_\alpha \pm S_{\hat{y}} \sqrt{1 \frac{1}{n} + \frac{(t_L - \bar{t})^2}{\sum (t - \bar{t})^2}}$$

Здесь t - порядковый номер уровня ряда ($t = 1, 2, \dots, n$); $t_L = n + L$ - время, для которого делается прогноз; \bar{t} - время, соответствующее середине периода наблюдений для исходного ряда, например $\bar{t} = (n+1):2$; суммирование ведется по всем наблюдениям.

Эту формулу можно упростить, если, как часто делается на практике, перенести начало отсчета времени на середину периода наблюдений ($\bar{t} = 0$):

$$U_y = \hat{y}_{n+L} t_\alpha \pm S_{\hat{y}} \sqrt{1 \frac{1}{n} + \frac{(t_L)^2}{\sum (t)^2}}$$

Формула для расчета доверительных интервалов прогноза относительно тренда, имеющего вид полинома второго или третьего порядка, выглядит следующим образом:

$$U_y = \hat{y}_{n+L} t_\alpha \pm S_{\hat{y}} \sqrt{1 \frac{1}{n} + \frac{(t_L)^2}{\sum (t)^2} \frac{\sum t^4 - 2t_L^2 \sum t^2 + nt_L^4}{\sum (t)^2}}$$

Аналогично вычисляются доверительные интервалы для экспоненциальной кривой роста, а также для кривых роста, имеющих асимптоту (модифицированная экспонента, кривая Гомперца, логистическая кривая), если значение асимптоты известно.

Таким образом, формулы расчета доверительного интервала для трендовых моделей разного класса различны, но каждая из них отражает

динамический аспект прогнозирования, т.е. увеличение неопределенности прогнозируемого процесса с ростом периода упреждения проявляется в постоянном расширении доверительного интервала.

16.4. Метод имитации. Метод сценария

Метод — это сложный прием, упорядоченная совокупность простых приемов, направленных на разработку прогноза в целом; путь, способ достижения цели, исходящий из знания наиболее общих закономерностей.

Методы (методика) прогнозирования — определенное сочетание приемов (способов) выполнения прогностических операций, получение и обработка информации о будущем на основе однородных методов разработки прогноза.

Методология прогнозирования — область знания о методах, способах, системах прогнозирования. Методологии прогнозирования разделились по следующим категориям: *предвидение, целеполагание, планирование, программирование, проектирование, перспективы развития процессов* с целью выявления проблем, подлежащих решению.

Методика разработки прогноза — выбранное конкретное сочетание приемов и методов прогнозирования.

Система прогнозирования («прогнозирующая система») — это упорядоченная совокупность методик, технических средств, предназначенная для прогнозирования сложных явлений или процессов.

Прием прогнозирования — конкретная форма теоретического или практического подхода к разработке прогноза; одна или несколько математических или логических операций, направленных на получение конкретного результата в процессе разработки прогноза.

Методы прогнозирования. В 1927 году В.А.Базаров-Руднев предложил 3 метода прогноза: *экстраполяция, аналитическая модель, экспертиза.*

В настоящее время существует около 220 методов прогнозирования, но чаще всего на практике используются не более 10, среди них: *фактографические* (экстраполяция, интерполяция, тренд-анализ), *экспертные* (в т.ч. опрос, анкетирование), *публикационные* (в т.ч. патентные), *цитатно-индексные, сценарные, матричные, моделирование, аналогий, построение графов и т.д.*

Появляются новые методы:

– *адаптивные* методы прогнозирования – построение самонастраивающихся рекуррентных моделей, способных отражать изменяющиеся во времени динамические свойства временного ряда и учитывать информационную ценность его членов;

– *морфологическое* исследование (для систематического и непредубежденного отбора возможностей в связи с изыскательским прогнозированием);

– *ретро альтернативистика* (И.В. Бестужев-Лада);

– метод «*дерево целей*» (впервые использован при разработке схемы ПАТТЕРН) для нормативного прогнозирования и оценки «общих элементов»;

– «*контекстуальное картографирование*» (contextual mapping);

– *причинноследственный* метод, близкий к проблемно-целевому методу Базарова-Руднева;

– *комбинированный прогноз* – некоторая обобщающая оценка, получаемая на основе формального или неформального объединения частных прогнозов, чаще всего путем суммирования их с определенными весовыми коэффициентами.

Приведенное разделение способов прогнозирования условно, потому что на практике эти способы взаимно перекрещиваются и дополняют друг друга, так:

– прогнозная оценка обязательно включает в себя элементы экстраполяции и моделирования;

– процесс экстраполяции невозможен без элементов оценки и моделирования;

– моделирование подразумевает предварительную оценку и экстраполирование.

При прогнозировании объекта часто приходится прогнозировать не один, а несколько его показателей. При этом прогноз развития одного показателя можно выполнять одним методом, а другого показателя — другим методом, т.е. используются *сочетания методов*.

При социальном прогнозировании (Табл.16.1. «Методы социального прогнозирования (Шепитько Г.Е.)»):

Таблица 16.1.

Методы социального прогнозирования (Шепитько Г.Е.)²⁰

Методы социального прогнозирования	Формализованные	Метод экстраполяции трендов		
		Методы корреляционного и регрессионного анализов		
		Методы математического моделирования		
	Экспертные	Индивидуальные	Метод составления сценариев	
			Метод «интервью»	
			Метод	

²⁰www.astronom2000.info/прогнозирование/mipp/

			аналитических докладных записок
		Коллективные	Метод анкетных опросов
			Метод «комиссий»
			Метод «мозговых атак»
			Метод «Дельфи»

Наиболее распространенными методами (свыше 90% всех сделанных в мире прогнозов) являются *экспертиза* и *фактографические* методы. Популярен метод *аналогий*. Методы *линейного программирования*, построение циклов (Н.Д. Кондратьев) широко используются в науке. Ведутся разговоры, что любой прогноз, если в нем закладывать правильные исходные данные и если он претендует на научность, можно описать формулами (формулизовать).

Аналогия (предвидение по аналогии, метод общих тенденций) – предполагает, что в достаточной степени осознает текущую ситуацию, чтобы искать для нее аналогии на основе опыта, чаще всего при помощи аналогии с достаточно хорошо известными сходными явлениями и процессами, и способен, опираясь на референтную ситуацию, установить основные черты, дающие основание говорить о совпадении направления развития событий.

Аналогия – более рациональный процесс, чем экстраполяция. Ни одна процедура не кажется более естественной, чем поиск аналогий. *Данный метод раньше часто использовался при прогнозе погоды: по состоянию температуры, влажности и давления в настоящем искался аналогичный*

день в прошлом и проецировался на дальнейшее развитие для будущего состояния в настоящем.

Фактографические методы (экстраполяция, трендовая модель, тренд-анализ, интерполяция, моделирование, математическое моделирование, сценарии, эксперименты, «прогнозы до абсурда», имитации, графы, матрицы, подборки показателей, графические изображения) основаны на экстраполяции в будущее тенденций, закономерности развития которых в прошлом и настоящем хорошо известны.

Модель – это заместитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение только некоторых свойств оригинала, но способный замещать оригинал таким образом, что изучение поведения модели в новых условиях дает новую информацию об объекте-оригинале.

Моделирование – это процесс получения информации об объекте-оригинале путем проведения экспериментов с его моделью в заданных внешних условиях; построение поисковых и нормативных моделей с учетом вероятного или желательного (не желательного) изменения прогнозируемого объекта на период упреждения прогноза по имеющимся прямым или косвенным данным о масштабах и направлениях изменений.

Трендовая модель (или **математическое моделирование**) предполагает постоянное подобное развитие системы («как развивалась до этого, так и будет дальше»).

Эксперимент («*пост-фактум*») — свершившееся нововведение, которое условно рассматривается «задним числом» как проведенный эксперимент.

Сценарии дают возможность четко формулировать и сопоставлять между собой различные вероятные или желательные перспективы развития.

«Прогнозы до абсурда» используются для выявления возможных кризисов и катастроф раньше, чем эти кризисы реально наступят (перенаселение мира, наркомании). Это действенный способ своевременной мобилизации ресурсов.

Экспертиза — итоговое суждение эксперта (или группы экспертов, населения) о динамике показателей анализируемого объекта или об альтернативных вариантах их возможного развития в будущем, которое: объективно, научно обосновано, вероятно по природе, корректируемо в рамках прогнозного периода по мере поступления новой информации, верифицируемо после завершения прогнозного периода, должно быть четким, ясным, не допускать неожиданных толкований, строго соответствовать заданию на прогноз, быть доказательным и воспроизводимым.

Начало методу экспертизы положила книга Трилла «Наука об управлении» (1911). Метод используется при неопределенности. Экспертиза – это предположение: *что надо сделать, чтобы было «то-то»*; или *«что будет, если...»*.

Эксперт – носитель специальных знаний и/или практического опыта, а также представитель групп интересов или организаций, который:

– имеет или дает объективные и полные сведения об особенностях и свойствах внешнего объекта и/или рекомендации относительно предпочтительных вариантов управленческих решений, касающихся этого объекта;

– обладает совокупностью сбалансированных прав и обязанностей, а также несет ответственность за свое экспертное заключение;

– включен в процесс принятия решений и участвует в научном обосновании этих решений;

– независимо от внешних влияний и собственной выгоды высказывает суждения по поставленным перед ним вопросам из области его специальных знаний и/или практического опыта.

В экспертизе используются методы: *экспертные методы, анкетирование, интервьюирование, метод мозговой атаки (штурма), метод контрольных вопросов, метод аналитических докладных записок, метод лицом к лицу, метод ситуационного анализа, метод суда, метод «комиссий» («круглого стола»), «дельфийская техника» (метод «Дельфи»).*

Экспертные оценки разделяются на *индивидуальные* и *коллективные*.

Экспертные методы (оценки) – очный или заочный, индивидуальный или коллективный опрос экспертов (или населения) при разработке прогноза. Методы экспертных оценок основываются на рациональных доводах и на интуитивных знаниях экспертов.

Опрос, как правило, проводится анонимно через интервьюирование и анкетирование, как одного человека (эксперта), так и коллектива (экспертов, населения).

Опрос населения в практике прогнозирования применяются сравнительно редко.

Опрос экспертов — сложный коллективный опрос. Проходит в несколько туров (для усовершенствования интуитивного мышления). Экспертные модели описывают (творчески, неформально, но в рамках определенных правил) процедуры функционирования в виде процесса, специальных формул и алгоритмов. Это может быть коллективная генерация идей ученых-экспертов, которую можно отнести к субъективным методам.

Анкетирование – один из разновидностей опроса. Это социологический метод, содержание которого состоит в опросе группы лиц с целью выявить их словесное одобрение или неодобрение, согласие

или несогласие по поводу ряда вопросов или стандартных предложений, представленных в анкете.

Метод анкетных опросов не связанных друг с другом людей с последующей статистической обработкой полученных оценок.

Метод «интервью» предполагает беседу организатора прогнозной деятельности с экспертом путем постановки вопросов о будущем состоянии объекта прогнозирования и его прогнозного фона.

Метод «комиссий» («круглого стола») — группа экспертов многократно собирается для открытого обсуждения одного и того же вопроса. В нем организатор экспертизы не руководит обсуждением, а лишь обеспечивает активную работу каждого эксперта. Метод оперативен, но существует опасность взаимного влияния мнений экспертов, особенно мнений признанных авторитетов в данной области исследований.

Метод составления сценариев - описание будущего составляется с учетом правдоподобных предположений о нескольких вариантах будущего состояния прогнозного фона и введения в анализ разрушительных событий (например, катастроф).

Метод аналитических докладных записок – самостоятельная работа эксперта над анализом динамики объекта прогнозирования и возможных путей его развития.

Метод «мозговых атак» - основывается на коллективной генерации идей, высказываемых спонтанно участниками различных профессий и специализаций.

Метод «Дельфи» получил свое название по имени греческого античного города Дельфи, где проживали известные дельфийские оракулы. Метод является дальнейшим развитием методов анкетного опроса и состоит из несколько туров последовательного анонимного анкетирования экспертов с обратной связью. Обратная связь осуществляется за счет того, что перед каждым последующим туром опроса экспертам сообщают

обобщенные результаты предыдущего тура. Число туров определяется или требуемым уровнем точности, или установленной степенью детализации проблемы. Дельфийская процедура использует только числа.

Основные цели экспертизы:

– повышение обоснованности принимаемых решений на основе заключений экспертов;

– контроль соблюдения соответствия и/или установления соответствия между характеристиками объекта экспертизы и требованиями, предусмотренными нормативными, нормативно-правовыми и законодательными документами различных уровней.

Экспертные методы прогнозирования наиболее востребованы, они хорошо работают на большие периоды и являются основными для долгосрочного прогноза. Для краткосрочного прогноза экспертные прогнозы не подходят (особенно в экономике). В экономике наиболее приемлемы экономико-математические методы, так как они работают по принципу инерционности.

Технология экспертного прогнозирования (ТЭП). Необходимо представить технологию экспертного прогнозирования как систему, т.е. как некоторое единство элементов связанных в целое некоторыми отношениями (в частном случае - взаимодействиями). Кроме того, необходимо выявить системно-образующие элементы и возможности их преобразования в системно-составляющие (Рис. «Технологическая схема разработки экспертного прогноза (Ю.В.Сидельников)»).

Системность, таким образом, будет реализовываться в двушаговом подборе элементов технологии получения экспертного заключения. На первом шаге разработки прогноза необходимо из нескольких множеств элементов технологии, рассматриваемой как системы и обладающих «системозначимыми» свойствами, выделить их подмножества. На втором

шаге из этих подмножеств выбираются элементы, обладающие «системоопределенными» свойствами.

Три основных условия подбора элементов и выделения подмножеств:

1. Специфика рассматриваемого объекта или процесса;

2. Ограничения разного рода:

- финансовые (оплата всей работы, независимых экспертов);
- кадровые (возможности подбора экспертов, организаторов прогноза, прогнозистов);

прогнозистов);

• временные (период, необходимый для организации и проведения прогноза);

3. Уровень понимания проблемы Лица Принимающего Решение (ЛПР) и Заказчика и их цели.

Основными системно-образующими элементами ТЭП являются:

1. Способы формирования экспертных групп (взаимных рекомендаций, снежного кома и другие);

2. Критерии отбора специалиста в экспертную группу;

3. Способы опроса экспертов (в частности, анкетирование, интервьюирование);

4. Простейшие виды экспертных оценок, (включая вербальные, балльные, интервальные, числовые;

5. Основные принципы проведения экспертизы.

6. Алгоритмические операции и процедуры, позволяющие получать выбранный вид экспертной оценки. Например, методы классификации, множественных сравнений или три группы методов получения количественных оценок субъективной вероятности;

7. Простейшие процедуры и методы организации деятельности экспертных групп, позволяющие получить новые знания от экспертов (например, «мозговая атака» или метод «Дельфи»);

Математические методы.

Математическая модель – модель объекта, описанная в виде математических соотношений между математическими понятиями.

Для описания математических моделей сложных объектов используются следующие разделы математики:

- теория функций (детерминированные модели),
- математическая статистика (вероятностные модели),
- теория нечетких множеств (модели на основе нечетких суждений экспертов),
- теория нелинейных уравнений (квазидетерминированные модели на базе теорий управляемого хаоса, теории катастроф, синергетики – науки о самоорганизации систем и фрактального анализа).

Виды математических методов прогнозирования: *корреляционный анализ, регрессионный анализ, факторный анализ, распознавание образов, вариационное исчисление, спектральный анализ, цепи Маркова, алгебра логики, теория игр и др.*

Статистический метод (*экстраполяция и интерполирование; математический анализ; математическая статистика, аналитическое моделирование*) - это метод прогнозирования временных рядов на перспективу, он предполагает экстраполяцию (линейное развитие во времени) и интерполирование в будущее (выявление промежуточного значения двумя известными моментами процесса) - это условное продолжение в будущее наблюдаемых объектов (тенденций, закономерности развития которых в прошлом и настоящем достаточно хорошо известны). Построение динамических рядов развития показателей прогнозируемого явления на протяжении периодов основания прогноза в прошлом и упреждения прогноза в будущем (ретроспекции и проспекции прогнозных разработок).

Статистический прогноз – это статистическое описание будущих значений исследуемого показателя (переменной). Данный прогноз

подразделяется на *краткосрочные* (на один интервал наблюдения вперед), *среднесрочные* (на срок до пяти интервалов) и *долгосрочные* (более пяти интервалов). Различают *точечный* (представляется единственным значением) и *интервальный* (задается двумя числами – нижней и верхней границей интервала) статистический прогноз.

Разновидности статистического метода:

- *математическая статистика* — использование динамических рядов характеристик объекта;
- *математический анализ* — использует экстраполяцию, т.е. линейное развитие во времени.

Условия для использования данного метода. При построении прогноза динамики какой-либо системы по данному методу необходимо получение полного описания всех ее параметров, а также их взаимосвязи и зависимости от внешних для системы факторов.

Аналитическое (математическое) моделирование работает в том случае, если есть модель развития (например, в виде плана). При этом статистические данные, которые используются должны носить правдивый характер, и не подчиняться желаниям правящих кругов.

Достоинство метода. Математическая статистика имеет наиболее мощное программное обеспечение, в которое входят такие известные прикладные программы, как Excel, Statgraphics, Stadia и др.

Недостатками статистического метода является:

- приводит к абстрактным схемам, мало согласованным с физикой явления,
- не объясняет причин событий,
- дает краткосрочный прогноз,
- не обладают высокой достоверностью и устойчивостью,

- обладает излишней точностью (это связано с тем, что статистика имеет дело с совокупностью, а не с отдельными единицами. А в совокупности признак варьирует),

- имеет логическую ошибку. Она допускается в том случае, когда упускается из виду, что, используется статистический метод при решении конкретных задач в экономике, биологии, метеорологии, физике и др., а статистические данные - это просто исходная информация для устранения закономерностей соответствующей наукой.

Метод подразумевает, что закономерность - есть единообразие хода событий, поэтому его можно использовать, когда есть устойчивость развития или четкая повторяемость. Роль статистики в данном случае вспомогательная. Статистика не устанавливает законы, а подсказывает, где их искать; не дает рецепт разрешения той или иной проблемы, а подводит к возможному исходному пункту ее решения. Статистические данные надо интерпретировать, а это функция предметной науки.

Трендовая модель одного цикла строится на истинном течении данного прогнозируемого процесса и работает (дает хороший прогноз) не более, чем на 10 лет (если есть история стабильного развития данного процесса).

Примером статистического метода, вероятно, могут служить законы развития цикла. Все циклы делится на 2 периода (подъем и спад) в пропорции «золотого сечения». И примеров «золотой пропорции» множество. Например, протекание 11-летнего цикла солнечной активности; экономический закон деления прибыли (32% общие налоги + 68% зарплата работнику) и т.д.

Сценарный метод прогнозирования («метод сценария»). Это один из самых старых методов. Он дает возможность получения не только общих данных представления о будущей ситуации, в которой будет находиться прогнозируемый объект, но и устанавливает возможность изменения этой

ситуации в желаемом для него направлении. В конкретных задачах прогнозирования необходимо провести классификацию рисков, поставить задачу оценивания конкретного риска, провести структуризацию риска, в частности, построить «деревья причин» (в другой терминологии, «деревья отказов») и «деревья последствий» («деревья событий»).

Разработку сценарного прогноза выполняют в тех случаях, когда прогноз невозможно или нецелесообразно выполнить статистическими методами или использованием специальных экономико-математических моделей.

Достоинство метода – дает возможность управлять будущим.

Метод “сценариев”- один из методов экспертных оценок, с помощью которого дается картина исследуемого объекта в будущем на основе сложившейся ситуации. При помощи данного метода определяются главные цели развития объекта исследования. Он способствует разработке решения проблемы на основе выявления всех возможных препятствий и обнаружения серьезных недостатков. Сценарии строятся не только на рассуждениях, но и на результатах технических или статистических анализов, характеристиках и показателях объекта исследования. Сценарий - описательный материал, необходимый для работы по развитию объекта исследования.

Составление сценария разделено на следующие этапы:

- формулировка вопроса:
 - собирается и изучается вся базовая информация;
 - выявляются все внутренние проблемы;
 - формулируется точный вопрос исследования;
- определение сфер влияния - изучается влияние окружения на объект исследования;
- установление степени влияния факторов объекта исследования на будущую ситуацию,

- введение в исследование ранее неспрогнозированных событий, которые могут изменить направление исследования. Такие события могут носить как отрицательный (аварии, сбои в системе и др.), так и положительный (технологические взрывы, политические примирения и др.) характер. События, которые могут оказать наиболее сильное воздействие, должны быть учтены при составлении сценариев;

- определение последствий - определяется уровень воздействия на объект исследования предложенных вариантов решения;

- принятие решения - на основе выбранного варианта решения вопроса исследования выбираются меры по претворению его в жизнь.

Для разработки сценариев привлекаются ведущие специалисты исследуемой области знаний, которые пользуются помощью специалистов по системному анализу при подготовке сценария. Специалисты по системному анализу при изучении объекта исследования выполняют следующие роли:

- выявляют общие закономерности системы;
- анализируют внешние и внутренние факторы, влияющие на развитие системы и формирование ее целей;
- определяют источники этих факторов;
- анализируют высказывания ведущих специалистов в периодической печати, научных публикациях и других источниках научно-технической информации;
- создают вспомогательные информационные фонды (лучше автоматизированные), способствующие решению соответствующей проблемы.

Учебное задание

1. Понятия и функции прогнозирования. Классификация прогнозов, объекты и способы прогнозирования.

2. Методы экономического и социального прогнозирования.

Классификация методов прогнозирования.

3. Методы прогностической экстраполяции.

Вопросы для самопроверки.

1. Какие вы знаете ошибки спецификации.
2. Каковы последствия невключения в модель существенной переменной.
3. Каковы последствия включения в модель несущественной переменной.
4. Каковы последствия выбора неправильной формы зависимости.
5. Какой подход к построению модели теоретически более правильный: «снизу-вверх» или «сверху вниз»
6. Что такое прогноз и прогнозирование?
7. Дайте классификацию прогнозов?
8. Расскажите о способах прогнозирования.
9. Какая существует классификация методов прогнозирования?
10. Что такое прогностическая экстраполяция?

Тесты для проверки знаний

1. Корреляционная связь между значениями одного и того же случайного процесса $X(t)$ в моменты времени t_1 и t_2 называется:
 - a) Авторегрессией
 - b) Автокорреляцией
 - c) Мультиколлинеарностью
 - d) Нет правильного ответа
2. Прогнозы, основанные на сопоставлении различных вариантов возможного развития экономических объектов, называется:
 - a) Вариантные прогнозы
 - b) Альтернативные прогнозы

- c) Долгосрочные прогнозы
- d) Краткосрочные прогнозы

3. Определите формулу расчета коэффициента эластичности:

a) $\varepsilon_i = \frac{a_i}{x_i \cdot y_i}$

b) $\varepsilon_i = a_i \cdot \frac{\bar{y}}{x_i}$

c) $\varepsilon_i = a_i \cdot \frac{\bar{x}_i}{y}$

d) $\varepsilon_i = a_i \cdot \frac{\bar{x}_i}{y}$

4. Что показывают коэффициенты эластичности факторов в производственной функции?

- a) Эффективность использования ресурсов
- b) Эффективность использования капитала
- c) Эффективность использования труда
- d) Эффективность вложенных инвестиций

5. Производственная функция Кобба-Дугласа

- a) Однородная первой степени
- b) Однородная второй степени
- c) Однородная n -ной степени
- d) Неоднородная функция

6. Что показывает коэффициент эластичности?

- a) Изменение зависимой переменной при однопроцентном изменении независимой переменной
- b) Изменение независимой переменной при однопроцентном изменении зависимой переменной
- c) Изменение зависимой переменной при единичном изменении независимой переменной

d) Изменение независимой переменной при единичном изменении зависимой переменной

7. Значение переменной Y для некоторого наблюдения составило 12, прогнозируемое значение Y в этом наблюдении составило 11,5. Чему равен остаток в этом наблюдении:

- a) 1;
- b) 0,5;
- c) 0,7;
- d) 1,5.

8. По результатам наблюдений получено следующее регрессионное уравнение $Price = 0.75 + 0.350 * TOTSQ. + 2 * FLOOR - 0.128 * DISTC$, где PRICE - цена квартиры в тыс. долл.

TOTSQ - общая площадь в кв. м.

FLOOR - первый или последний этаж (1-нет, 0-да)

DISTC - расстояние от Центра, км.

На сколько изменится в среднем цена на квартиру, если общая площадь увеличится на 1 кв. м. при прочих равных условиях:

- 1) уменьшится на 350 долл.;
- 2) увеличится на 350 долл.
- 3) уменьшится на 128 долл.
- 4) увеличится на 2 тыс. долл.

9. По данным п. 10. определите, насколько изменится в среднем цена на квартиру, если расстояние до центра уменьшится на 1 км. при прочих равных условиях:

- 1) уменьшится на 350 долл.;
- 2) увеличится на 350 долл.
- 3) уменьшится на 128 долл.

4) увеличится на 2 тыс. долл.

10. Дано регрессионное уравнение $Y = 10 + 0.5 X$

Чему равно прогнозное значение переменной Y , если $X = 10$:

- а) 20;
- б) 15;
- в) 5;
- г) 0.

11. При проверке гипотезы о равенстве коэффициента при переменной

TOSTQ нулю было получено значение t – статистики равное 8,6,

Критическое значение для уровня значимости 5% составило 1,96. Какой сделаем вывод:

- 1) коэффициент значимо отличается от нуля и, следовательно, переменная «общая площадь» оказывает влияние на цену на квартиру;
- 2) коэффициент незначимо отличается от нуля и, следовательно, переменная «общая площадь» не оказывает влияние на цену на квартиру

12. Коэффициент детерминации R^2 в п. 3. равен 0,75. Это означает, что (выберите неверное утверждение)

- 1) модель объясняет имеющиеся данные на 75%;
- 2) доля объясненной части вариации переменной PRICE вокруг своего среднего составляет 0,75;
- 3) доля объясненной части вариации переменной PRICE вокруг своего среднего составляет 0,25;
- 4) доля необъясненной части вариации переменной PRICE вокруг своего среднего составляет 0,25;

ТЕМА 17. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Ключевые слова : динамическое равновесие, спрос и предложение, эластичность спроса, инвестиционные функция.

17.1. Паутинообразная модель динамического равновесия спроса и предложения. Функции потребления.

Из опыта мы знаем, что движение цен на рынке определяется спросом и что цены меняются в направлении, противоположным спросу. При этом изменении цен влияет на спрос различным образом для разных видов товаров.

Часто товары классифицируют по степени реакции спроса на них в зависимости от изменения цен. В этом случае говорят, что товары обладают более высокой или более низкой эластичностью спроса.

Цена – не единственный фактор, определяющий движение спроса. Существуют и другие факторы, а также их комбинации, относительно которых имеет смысл изучать эластичность спроса. Чаще всего рассматриваются эластичности спроса по следующим трем факторам:

- 1) *эластичность спроса по цене*, обычно с отрицательным знаком;
- 2) *эластичность спроса по доходу*, обычно с положительным знаком;
- 3) *перекрестная эластичность*. Это – эластичность спроса данного вида товаров в зависимости от цены другого вида товара. Перекрестная эластичность может как положительный, так и отрицательный знак в зависимости от того, взаимозаменяемы или не взаимозаменяемы эти группы товаров.

Несколько удачных примеров, интерпретирующих понятие эластичности спроса. Предположим теперь, что цена некоторого товара, равная в начальный момент $p = 10$, выросла на 2 единицы, т.е. $\Delta p = 2$. Относительное изменение цен тогда составит 20%:

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{2}{10} \cdot 100 = 20\%.$$

Пусть цене $p = 10$ соответствовала величина спроса $d = 100$ и пусть при новой цене $p_1 = p + \Delta p = 12$ спрос определяется величиной $d_1 = 90$. Тогда абсолютное его изменение – 10%:

$$d_1 - d = -10$$

и

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{-10}{100} \cdot 100 = -10\%.$$

Коэффициент эластичности, вычисляемый как отношение относительных величин приростов спроса и цены, равен:

$$E_{d,p} = \frac{\Delta d}{d} : \frac{\Delta p}{p} = \frac{-10}{100} : \frac{2}{10} = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, коэффициент эластичности спроса по цене показывает, что при изменении цены на 1 % величина спроса изменится на 0,5 %. При этом движении спроса и цен противоположно.

Аналогичным образом можно определить эластичность предложения по ценам:

$$E_{s,p} = \frac{\Delta S}{S} : \frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta Sp}{\Delta p S},$$

Таким же способом исследуется эластичность спроса в зависимости от расходов населения на определенные виды товаров.

Расходы населения определяются величиной pd . Предположим, что цены могут изменяться. При снижении цен на определенный вид товаров общие расходы населения изменятся. Изменение расходов можно оценить по первой производной функции расходов. При эластичности спроса от цены $E_{d,p} = 1$ первая производная функции расходов равна нулю и, следовательно, произведение pd не меняется. Спрос при этом обратно пропорционален цене. Если эластичность спроса $E_{d,p} > 1$, то спрос падает

быстрее роста цен и поэтому произведение pd уменьшается; при $E_d, p < 1$ спрос падает медленнее цен и величина расходов населения растет.

В наших предыдущих рассуждениях фактор времени во внимание не принимался, т.е. предполагалось, что все изучаемые зависимости не меняются со временем. В реальной экономике вид зависимостей, конечно, меняется со временем вследствие непрерывной модификации структуры спроса, производства, влияния социальных и психологических факторов и т.д. Это означает, что точки равновесия кривых спроса, предложения определяется производством, и длительность процесса производства необходимо учитывать при конструировании функции предложения.

Приведенные рассуждения наводят на мысль о целесообразности введения фактора времени в функции предложения и спроса. Будем рассматривать следующие зависимости:

$$d_t = f(p_t); \quad (17.1)$$

$$S_t = g(p_{t-1}). \quad (17.2)$$

Введение в функцию предложения временного сдвига ведет к усложнению модели. Модель вида (17.1) и (17.2) называется паутинообразной. Рассмотрим траектории движения, определяемые паутинообразной моделью. Обозначим множество товаров, предлагаемых на рынке, через x . Объем предложения товаров, соответствующих рыночной (равновесной) цене p , обозначим через x . Объем предложения товаров, соответствующих рыночной (равновесной) цене p , обозначим через x . Предположим, что в начальный момент времени t_0 на рынке наблюдалась нехватка товаров, т.е. $x_0 < x$. Следовательно, товар на рынке не может быть реализован по цене p , а продается по цене $p_0 < p$. В этих условиях производитель заинтересован в увеличении объема товара и в следующий момент времени t_1 он выбросит на рынок товар в объеме $x_1 > x$. Это множество товаров, однако, не может быть теперь реализовано по

старой цене p_0 , а продажная цена должна быть $p_1 < p$. Учитывая вновь сложившуюся ситуацию, производитель товара в следующий момент t_2 выбросит на рынок товар в меньшем объеме: $x_2 < x$. Кривая спроса снова будет находиться под кривой предложения и, следовательно, товар реализуется по более высокой цене $p_2 > p$. Таким образом, получаем непрерывное колебание вокруг равновесной точки и цен. Это движение товаров и цен.

Спрос и предложение в паутинообразной модели удовлетворяют цепочке равенств:

$$\text{спрос: } x_0 = f(p_0); \quad x_1 = f(p_1); \quad x_2 = f(p_2); \dots$$

$$\text{предложение: } x_1 = g(p_0); \quad x_2 = g(p_1); \dots$$

Если предположить, что функции $f(p)$ и $g(p)$ линейны, то имеем:

$$d_t = f(p_t) = a_0 + a_1 p_t;$$

$$S_t = g(p_{t-1}) = b_0 + b_1 p_{t-1}.$$

При равновесии спроса и предложения должно выполняться условие $x = d = S$, и, следовательно,

$$x = a_0 + a_1 p = b_0 + b_1 p.$$

отсюда находим значения рыночной цены p и соответствующего ему объема товаров x :

$$p = \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1};$$

$$x = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1 - a_1}.$$

паутинообразная модель показывает, как в условиях капиталистической экономики возникает циклическое движение производства и цен. В плановом социалистическом хозяйстве центральные

Множество

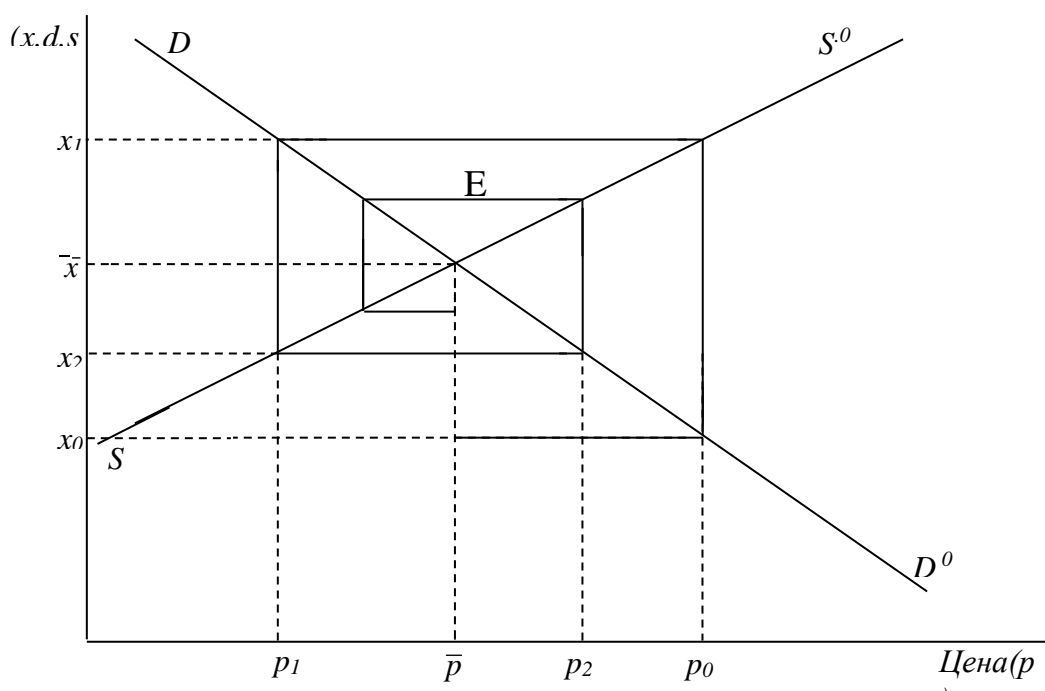


Рис. 17.1. . Паутинообразная модель динамического равновесия спроса и предложения.

органы планирования обеспечивают равномерный рост производства и стабильный уровень цен.

Функции потребления. Потребление представляет собой один из важнейших макроэкономических показателей, характеризующих конечную фазу процесса воспроизводства. С развитием эконометрии возникает возможность широкого изучения взаимосвязей всего воспроизводственного процесса. Вначале анализ потребления ограничивался рассмотрением функций потребления на микроэкономическом уровне. Первые исследования потребления основывались на изучении отраслевых функций спроса и условий равновесия спроса и предложения на отдельные виды товаров. В дальнейшем анализ все более концентрировался на вопросах общего равновесия, которое определяется равновесием спроса и предложения всей совокупности товаров, выбрасываемые на рынок. Функция спроса на этом случае зависит от цен на основные виды продуктов и уровня дохода, т.е.

$$d = f(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, Y).$$

Если предположить, что потребительский спрос определяется в основном уровнем доходов населения, то можно ввести в рассмотрение следующую функцию потребления:

$$d = f(Y).$$

Разрабатывают также более сложные функции потребления, независимыми переменными которых являются другие экономические и внеэкономические факторы. При анализе потребительского спроса на макроэкономическом уровне принимаются во внимание абсолютные или относительные цены на соответствующие виды товаров, цены на заменяемые и дополняющие товары, учитываются имеющиеся в распоряжении населения доходы за данный и предыдущий моменты времени, долгосрочные и краткосрочные тенденции в изменении доходов, распределении доходов и т.д.

Экономический анализ потребления дает возможность оценить влияние потребления отдельных видов товаров на совокупный спрос.

Анализ потребительских функций, построенных по данным за 1955-1972 гг., показал, что потребительский спрос в Словакии в основном определяется имеющимися в распоряжении населения доходами (67,1%). Существенным оказывается также влияние доходов за предыдущий момент времени (30,4%). Зависимость от цен, напротив, оказалась весьма незначительной (2,5%).

17.2. Инвестиционные функции.

Увеличение основных средств ведет к росту продукции. Если предположить, что рост основных фондов обеспечивается инвестициями, то можно ввести следующую инвестиционную функцию:

$$I = aY - bK, \quad (17.3)$$

где, I – инвестиции;

Y – объем продукции;

K – размер основных фондов.

Инвестиционная функция вида (17.3) выражает положительную зависимость инвестиций от величины продукта (или дохода) и отрицательную связь инвестиций с основными фондами. Иногда инвестиции рассматриваются как функции от прибыли. В этом случае инвестиционная функция записывается так:

$$I_t = I_0 + cR_{t-1},$$

где, I_t – инвестиции в текущий момент времени;

I_0 – значение инвестиций в начальный момент;

R_{t-1} – прибыль, полученная в предыдущем временном интервале.

Временной сдвиг здесь показывает, что существует лаг между принятием решения об инвестировании и его реализацией. Фактор прибыли выступает как стимулятор инвестиционного процесса и вместе с тем является основным источником финансирования инвестиций. Имеет смысл рассмотреть также инвестиционную функцию вид

$$I_t = I_0 + cY_{t-1} \quad (17.4)$$

Коэффициент c из соотношения (17.4) называют предельной склонностью к инвестированию.

Принцип акселерации основан на предположении, что производитель стремится сохранить неизменным отношение между основными фондами и объемом продукции, т. е.

$$\frac{K_t}{Y_t} = a$$

Отсюда следуют соотношения вида

$$K_t = aY_t$$

и

$$I_t = \Delta K_t = a\Delta Y_t \quad (17.5)$$

Таким образом, инвестиции зависят не от абсолютного объема продукции, а от его приращения. Равенство (17.5) можно переписать так:

$$\frac{I_t}{\Delta Y_t} = a$$

Принцип акселерации предполагает, что производственные мощности используются полностью. В условиях капиталистического хозяйства это требование практически невыполнимо.

Предположим далее, что существует некоторая зависимость между потребностью в инвестициях и возможностями их удовлетворения. Так, например, если обозначить спрос на основные фонды в момент t через K_t , то можно записать:

$$I_t = K_t - K_{t-1} = a (K_t - K_{t-1}) \quad (0 \leq a \leq 1). \quad (17.6)$$

Если линейная связь вида (17.6) не удовлетворяет условиям реальной экономики, то можно ввести в рассмотрение нелинейное отношение:

$$\frac{K_t}{K_{t-1}} = \left(\frac{K_t}{K_{t-1}} \right)^d \quad (0 \leq d \leq 1).$$

Здесь параметр d и выражает связь между реальным и ожидаемым темпами роста.

Спрос на основные фонды или ожидаемый их объем определяется ожидаемой величиной продукта, уровнем цен и тенденциями научно-технического прогресса. В связи с этим можно ввести следующую функцию:

$$K_t = a (Y_t)^b (p_t)^c e^{rt},$$

где Y_t — ожидаемый объем продукции;

p_t — индекс цен;

e^{rt} — трендовая составляющая, характеризующая научно-технический прогресс.

Очевидно, что параметр r здесь должен иметь отрицательный знак.

17.3. Анализ основных средств производства.

Инвестиции являются источником прироста основных средств производства. Однако только часть инвестиций, вкладываемых в текущий момент времени, обуславливает прирост основных фондов в этот же момент времени. Другая часть инвестиций направляется на рост основных фондов в будущем, таким образом, они реализуются с некоторым запаздыванием, обусловленным спецификой воспроизводства этих фондов.

Предположим, что прирост основных фондов ΔK_t зависит от всей совокупности инвестиций, сделанных в предыдущие моменты времени, причем влияние более отдаленных инвестиционных вложений убывает в геометрической прогрессии, т.е.

$$\Delta K_t = a + bI_t + bqI_{t-1} + bq^2I_{t-2} + \dots$$

Последнее равенство выражает зависимость прироста от двух факторов: текущих инвестиций и прироста за предыдущий момент времени:

$$\Delta K_t = a(1 - q) + bI_t + q\Delta K_{t-1}.$$

ТЕМА 18. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ АДАПТИВНЫХ ОЖИДАНИЙ И РАСПРЕДЕЛЕННЫХ МОДЕЛЕЙ

Ключевые слова: метод оценивания параметров, алгоритм оценивания параметров, метод наименьших квадратов, комплексные конометрические модели.

18.1. Выбор метода оценивания параметров в комплексных эконометрических моделях.

Выбор метода оценивания параметров в комплексных эконометрических моделях. В предыдущем параграфе мы рассмотрели основные методы оценивания параметров эконометрических моделей. При работе с конкретной эконометрической моделью необходимо выбрать такой метод оценивания, который бы лучше всего соответствовал характеру модели и используемому в ней статистическому материалу. При этом не следует стремиться к методам, дающим наилучшие оценки с теоретической точки зрения (например, методы с полной информацией), так как они чрезвычайно сложны и результаты чувствительны к мультиколлинеарности и ошибкам спецификации. В основе выбора методов оценивания и проверки гипотез должны лежать практические потребности. Системы уравнений, отражающие реальные связи народного хозяйства, обычно взаимосвязаны и содержат большое количество переменных. Чаще всего для оценивания параметров в таких моделях применяют либо двухшаговый метод наименьших квадратов, либо метод максимального правдоподобия с ограниченной информацией, либо метод инструментальных переменных.

Как мы уже говорили, в двухшаговом методе каждая эндогенная переменная выражается через все преддетерминированные переменные модели. Поэтому для моделей, содержащих большое число факторов, рассматриваемых в сравнительно коротких временных интервалах, применение двухшагового метода наименьших квадратов затруднительно. Например, комплексная модель WS-4 содержала 87 преддетерминированных переменных, данные о которых мы имеем лишь за 18 лет. Очевидно, что в этом случае применять двухшаговый метод просто невозможно. Здесь можно было бы предложить метод инструментальных переменных. Однако он обычно приводит к неоднозначному решению.

Наиболее приемлем в данной задаче метод главных компонент. Применение этого метода в комплексной эконометрической модели дает возможность сконцентрировать необходимую информацию на множестве главных компонент. В ЧССР метод главных компонент впервые был опробован на модели VVS-2.

В эконометрической практике оценивание комплексных моделей происходит в два этапа. На первом этапе производят уточнение формы модели, применяя обычный метод наименьших квадратов к различным альтернативам отдельных регрессионных уравнений. На втором этапе производят уточнение оценок параметров с помощью методов, учитывающих взаимные связи в рамках всех моделей.

Для моделей большой размерности на втором этапе выбирается способ, позволяющий наиболее полно сконцентрировать всю информацию об эндогенных переменных в некоторой группе преддетерминированных переменных. Мы уже обсуждали различные теоретические аспекты методов оценивания параметров. Далее будут приведены алгоритмы, позволяющие переложить эти методы на машинный язык.

18.2. Алгоритм оценивания параметров обычным методом наименьших квадратов.

Алгоритм оценивания параметров обычным методом наименьших квадратов. Напомним, что обычный метод наименьших квадратов применяется для оценивания параметров отдельного регрессионного уравнения вида

$$y = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_mx_m + u,$$

где y — вектор зависимой переменной размерности n ;

x_0 — вектор размерности n , все элементы которого равны единице;

x_1, \dots, x_m — векторы независимых (экзогенных) переменных, размерность каждого из которых равна l ;

$b_0, \dots, b_m - m + 1$ оцениваемых параметров уравнения;

u — вектор остатков размерности n ;

n — число наблюдений (длина рядов);

m — число независимых переменных.

При применении метода наименьших квадратов обычно оценивают следующие характеристики:

- а) параметры b_0, \dots, b_m ;
- б) значение зависимой переменной y в моменты $t = 1, 2, \dots, n$;
- в) остатки (разности между наблюдаемыми значениями зависимой переменной y и вычисленными из уравнения \hat{y});
- г) стандартные ошибки параметров;
- д) коэффициенты β , показывающие отношение отдельных переменных в дисперсии зависимой переменной;
- е) стандартные ошибки остатков с поправкой на число степеней свободы;
- ж) коэффициент множественной детерминации;
- з) автокорреляция остатков.

Последовательность вычисления значений а), б), в) включает следующие этапы:

1. Вычисление матрицы $X'X$ и вектора $X'y$, где X — матрица порядка $n \times (m+1)$, первый столбец которой состоит из единиц, а каждый i -й столбец представляет собой n наблюдаемых значений i -й независимой переменной; X' — транспонированная матрица X .

2. Обращение матрицы $X'X$, где $X'X$ — квадратная матрица порядка $m + 1$.

3. Вычисление параметров b_0, \dots, b_m из соотношения

$$b = (X'X)^{-1}(X'y).$$

4. Вычисление значений эндогенных переменных по регрессионному уравнению

$$\hat{y} = b_0x_0 + b_1x_1 + \dots + b_mx_m,$$

где b_0, \dots, b_m — параметры, оцененные

5. Вычисление остатков

$$u = y - \hat{y}, t = 1, 2, \dots, n.$$

Алгоритм оценивания параметров двухшаговым методом наименьших квадратов.

Как мы уже отмечали, двухшаговый метод наименьших квадратов позволяет оценить параметры одного регрессионного уравнения системы с учетом его взаимосвязи с остальными уравнениями. Каждое регрессионное уравнение системы запишем в виде:

$$y_i = Y_i a_i + X_i b_i + u_i, i = 1, 2, \dots, m,$$

где y_i — вектор наблюдаемых значений i -й зависимой переменной размерности n ;

Y_i - матрица размерной $n \times m$, состоящая из векторов эндогенных переменных, входящих и правую часть i -го уравнения системы;

X_i , — матрица размерности $n \times k_i$, состоящая из k_i векторов экзогенных переменных системы, входящих в i -е уравнение (включая свободный член);

a_i b_i — $m_i + k_i$ оцениваемых параметров системы;

u_i — вектор остатков в i -м уравнении системы размерности n .

Двухшаговый метод наименьших квадратов состоит из следующей последовательности операций.

1. Вычисление квадратной матрицы $X'X$ порядка k и обратной матрицы $(X'X)^{-1}$.

2. Вычисление матрицы $X(X'X)^{-1}X'$ размерности $n \times n$.

3. Вычисление трех матриц:

$$Y_i' X (X' X)^{-1} X' Y_i — \text{размерности } m_i \times m_i;$$

$Y_i' X_i$ — размерности $m_i \times k_i$;

$X_i' X_i$ — размерности $k_i \times k_i$.

Эти матрицы необходимы для формирования следующей блочной матрицы моментов размерности $(m_i \times k_i) \times (m_i \times k_i)$:

$$M_i = \begin{bmatrix} Y_i' X (X' X)^{-1} X' Y_i & Y_i' X \\ X_i' Y_i & X_i' X_i \end{bmatrix}$$

4. Вычисление двух векторов: $Y_i' X (X' X)^{-1} X' y_i$ размерности m_i и $X_i' y_i$ размерности k_i для формирования вектора g_i размерности $m_i + k_i$:

$$g_i = \begin{bmatrix} Y_i' X (X' X)^{-1} X' y_i \\ X_i' y_i \end{bmatrix}$$

5. Вычисление матрицы, обратной к M_i .

6. Вычисление вектора параметров размерности $m_i + k_i$:

$$\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} = M_i^{-1} g_i \quad (18.1)$$

7. Вычисление значений i -й эндогенной переменной по значениям a_i и b_i из (18.1):

$$\hat{y}_i = a_i Y_i + b_i X_i$$

8. Вычисление вектора остатков в i -м уравнении системы:

$$u_i = y_i - \hat{y}_i$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Требуется определить, как изменяется количество продаваемого товара в розницу в зависимости от цены:

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Количество, т/день	50	46	38	52	43	47	36	57	51	31	42	29
Цена за единицу, сум	30	32	34	29	31	30	33	25	30	35	32	37

Задача 2. Исследование о зависимости сбережений и полученных годовых доходах дало следующие результаты:

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8
Годовой доход, тыс. сум.	50,3	30,7	73,8	60,5	48,2	52,8	34,1	44,3
Сбережения, тыс. сум.	2,7	0,8	4,5	3,1	1,9	2,8	1,1	1,7

Задача 3. По приведенным данным по 10 магазинам изучается зависимость издержек обращения от товарооборота:

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Товарооборот, тыс. сум.	430	510	530	540	570	590	620	640	650	660
Издержки обращения, тыс. сум.	30	25	31	28	29	32	36	36	37	38

Задача 4. Найти зависимость между потреблением электроэнергии городскими семьями:

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число членов семьи, чел.	1	2	2	3	3	3	4	4	5	6

Годовое потребление эл.энергии, тыс. кВт.-ч.	0,4	1,2	1,1	1,4	1,6	2,1	2,5	2,2	2,3	2,5
---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Задача 5. По данным обследования семейных бюджетов исследуется зависимость потребления мяса от уровня дохода:

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Среднегодовой доход, тыс. р.	31,2	40,8	52,3	36,3	60,5	47,6	68,1	25,5	34,7	53,2
Годовое потребление мяса на душу населения, кг	25,3	34,7	37,8	30,1	40,2	35,0	40,5	15,6	27,9	36,6

Задача 6. Анализ спроса на легковые автомобили марки в зависимости от их цены дал следующие результаты:

Модель	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Цена, тыс. сум.	35	38	42	53	55	46	39	60	63
Кол-во проданных автомобилей в среднем за месяц, шт.	15	12	14	10	13	16	18	10	11

Задача 7. Имеется информация по 10 регионам о среднедневной зарплате X (ден. ед.) и расходах на покупку продовольственных товаров в общих расходах Y (%):

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	340	389	452	509	540	567	643	658	679	720
Y	70,1	62,1	66,1	65,6	55,6	57,99	55,1	57,3	53,1	48,1

1. Оцените коэффициенты линейной регрессии $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ по методу наименьших квадратов.

2. Проверьте статистическую значимость оценок b_0, b_1 теоретических коэффициентов β_0, β_1 при уровне значимости $\alpha = 0,05$.

3. Рассчитайте 95%-е доверительные интервалы для теоретических коэффициентов регрессии.

4. Спрогнозируйте долю расходов на покупку продовольственных товаров при средней зарплате $X = 700$ ден.ед. и рассчитайте 95% доверительный интервал для условного математического ожидания $M(Y|X = 700)$.

5. Рассчитайте границы интервала, в котором будет сосредоточено не менее 95% возможных значений Y при $X = 700$.

6. Оцените на сколько процентов изменятся расходы на покупку продовольствия, если среднедневная зарплата вырастет на 10 ден.ед.

7. Рассчитайте коэффициент детерминации R^2 .

8. Рассчитайте F - статистику для коэффициента детерминации и оцените его статистическую значимость.

Задача 2. Имеется информация по 10 предприятиям о зависимости себестоимости Y (ден.ед.) единицы продукции от трудоемкости единицы продукции X (чел -час):

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	10,3	11,2	12,3	11,8	14,6	15,8	15,2	14,2	13,1	10,8
Y	110	125	130	131	150	172	158	145	140	118

1. Оцените коэффициенты линейной регрессии $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ по методу наименьших квадратов.

2. Проверьте статистическую значимость оценок b_0, b_1 теоретических коэффициентов β_0, β_1 при уровне значимости $\alpha = 0,05$.

3. Рассчитайте 95%-е доверительные интервалы для теоретических коэффициентов регрессии.

4. Спрогнозируйте себестоимость при трудоемкости $X = 15,0$ и рассчитайте 95% доверительный интервал для условного математического ожидания $M(Y|X = 15,0)$.

5. Рассчитайте границы интервала, в котором будет сосредоточено не менее 95% возможных значений себестоимости при трудоемкости $X = 15,0$.

6. Оцените на сколько изменится себестоимость, если трудоемкость вырастет на 1 чел-час.

7. Рассчитайте коэффициент детерминации R^2 .

8. Рассчитайте F - статистику для коэффициента детерминации и оцените его статистическую значимость.

Задача 8. Проанализировать матрицу частных и парных коэффициентов корреляции, отобрать факторы, участвующие в уравнении регрессии – основной фактор – x_2 :

	x1	x2	x3	x4	x5
x1	1	0,865	0,452	-0,213	0,453
x2	0,865	1	0,756	0,259	0,561
x3	0,452	0,756	1	0,982	0,623
x4	-0,213	0,259	0,982	1	0,211
x5	0,453	0,561	0,623	0,211	1

	x1	x2	x3	x4	x5
x1	1		0,752	0,288	0,633
x2					

x3	0,752	1	0,678	0,111
x4	0,288	0,678	1	0,345
x5	0,633	0,111	0,345	1

Задача 9. На основе данных предложения и цены построить уравнение регрессии.

S_i	4	6	8	10	12
P_i	1	2	3	4	5

Задача 10. На основе данных спроса и предложения построить уравнения регрессии и найти точку равновесия:

D_i	6	5	4	3	2
S_i	2	3	4	5	6
P_i	1	2	3	4	5

Задача 11. Построить уравнение регрессии по следующей информации и рассчитать ошибку аппроксимации, проанализировать:

У(прибыль)	5	6	7	8	9
Х(инвестиции)	0,1	0,3	0,5	0,6	0,8

Задача 12. Проанализировать матрицу частных и парных коэффициентов корреляции, отобрать факторы, участвующие в уравнении регрессии – основной фактор – **x3**:

	x1	x2	x3	x4	x5
x1	1	0,865	0,452	-0,213	0,453
x2	0,865	1	0,756	0,259	0,561
x3	0,452	0,756	1	0,982	0,623
x4	-0,213	0,259	0,982	1	0,211
x5	0,453	0,561	0,623	0,211	1

	x1	x2	x3	x4	x5
x1	1	0,255		0,288	0,633
x2	0,255	1		0,825	0,341
x3					
x4	0,288	0,825		1	0,345
x5	0,633	0,341		0,345	1

Задача 13. Рассчитайте коэффициент частной и парной корреляции:

У(прибыль)	2	5	6	7	8
X1(фонды)	1	2	3	4	5
X2(инвестиции)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5

Задача 14. Проанализировать матрицу частных и парных коэффициентов корреляции, отобрать факторы, участвующие в уравнении регрессии – основной фактор – x4:

	x1	x2	x3	x4	x5
x1	1	0,865	0,452	0,956	0,453
x2	0,865	1	0,756	0,653	0,561
x3	0,452	0,756	1	0,982	0,623
x4	0,956	0,653	0,982	1	0,211
x5	0,453	0,561	0,623	0,211	1

	x1	x2	x3	x4	x5
x1	1	0,255	0,253		0,633
x2	0,255	1	0,852		0,341
x3	0,253	0,852	1		0,754
x4					
x5	0,633	0,341	0,754		1

Задача 15. Рассчитайте коэффициент частной и парной корреляции:

У(прибыль)	2	5	6	7	8
X1(фонды)	1	2	3	4	5
X2(инвестиции)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5

Задача 16. Постройте уравнение зависимости У о X1. Рассчитайте ошибку аппроксимации:

У(прибыль)	2	5	6	7	8
X1(фонды)	1	2	3	4	5
X2(инвестиции)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5

Рассчитайте коэффициент парной корреляции, проанализируйте.

Задача 17.

Получены функции:

1. $y = a + bx^3 + \varepsilon$,

2. $y = a + b \ln x + \varepsilon$,

3. $\ln y = a + b \ln x + \varepsilon$,

4. $y = a + bx^c + \varepsilon$,

5. $y^a = b + cx^2 + \varepsilon$,

6. $y = 1 + a(1 - x^b) + \varepsilon$,

7. $y = a + b \frac{x}{10} + \varepsilon$,

Определите, какие из представленных выше функций линейны по переменным, линейны по параметрам, нелинейны ни по переменным, ни по параметрам.

Задача 18.

По 25 территориям страны изучается влияние климатических условий на урожайность зерновых y (ц/га). Для этого были отобраны две объясняющие переменные:

X_1 – количество осадков в период вегетации (мм);

X_2 – средняя температура воздуха ($^{\circ}$ C).

Матрица парных коэффициентов корреляции этих показателей имеет следующий вид:

	y	x_1	x^2
y	1,0		
x_1	0,6	1,0	
x_2	-0,5	-0,9	1,0

Задача 19. Имеется информация по 10 регионам о среднедневной зарплате X (ден. ед.) и расходах на покупку продовольственных товаров в общих расходах Y (%):

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	340	389	452	509	540	567	643	658	679	720
Y	70,1	62,1	66,1	65,6	55,6	57,99	55,1	57,3	53,1	48,1

1. Оцените коэффициенты линейной регрессии $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ по методу наименьших квадратов.

2. Проверьте статистическую значимость оценок b_0, b_1 теоретических коэффициентов β_0, β_1 при уровне значимости $\alpha = 0,05$.

3. Рассчитайте 95%-е доверительные интервалы для теоретических коэффициентов регрессии.

4. Спрогнозируйте долю расходов на покупку продовольственных товаров при средней зарплате $X = 700$ ден.ед. и рассчитайте 95% доверительный интервал для условного математического ожидания $M(Y|X = 700)$.

5. Рассчитайте границы интервала, в котором будет сосредоточено не менее 95% возможных значений Y при $X = 700$.

6. Оцените на сколько процентов изменятся расходы на покупку продовольствия, если среднедневная зарплата вырастет на 10 ден.ед.

7. Рассчитайте коэффициент детерминации R^2 .

8. Рассчитайте F - статистику для коэффициента детерминации и оцените его статистическую значимость.

Задача 20. Имеется информация по 10 предприятиям о зависимости себестоимости Y (ден.ед.) единицы продукции от трудоемкости единицы продукции X (чел -час):

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	10,3	11,2	12,3	11,8	14,6	15,8	15,2	14,2	13,1	10,8
Y	110	125	130	131	150	172	158	145	140	118

1. Оцените коэффициенты линейной регрессии $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ по методу наименьших квадратов.

2. Проверьте статистическую значимость оценок b_0, b_1 теоретических коэффициентов β_0, β_1 при уровне значимости $\alpha = 0,05$.

3. Рассчитайте 95%-е доверительные интервалы для теоретических коэффициентов регрессии.

4. Спрогнозируйте себестоимость при трудоемкости $X = 15,0$ и рассчитайте 95% доверительный интервал для условного математического ожидания $M(Y|X = 15,0)$.

5. Рассчитайте границы интервала, в котором будет сосредоточено не менее 95% возможных значений себестоимости при трудоемкости $X = 15,0$.

6. Оцените на сколько изменится себестоимость, если трудоемкость вырастет на 1 чел-час.

7. Рассчитайте коэффициент детерминации R^2 .

8. Рассчитайте F - статистику для коэффициента детерминации и оцените его статистическую значимость.

Задача 21. Зависимость среднемесячной производительности труда от возраста рабочих характеризуется моделью: $y = a + bx + cx^2$. Ее использование привело к результатам, представленным в таблице:

№ по порядку	Производительность труда рабочих, тыс.сум., у	
	фактическая	расчетная
1	12	10
2	8	10
3	13	13
4	15	14
5	16	15
6	11	12
7	12	13
8	9	10
9	11	10
10	9	9

Оцените качество модели, определив индекс корреляции и F -критерий Фишера.

Задача 22. Моделирование прибыли фирмы по уравнению $y = ab^x$ привело к результатам, представленным в таблице:

№ п/п	Прибыли фирмы фактическая, тыс.сум.	Прибыли фирмы расчетная, тыс.сум.
1	10	11
2	12	11
3	15	17
4	17	15
5	18	20
6	11	11
7	13	14
8	19	16

Оцените качество модели, определив индекс корреляции и F-критерий Фишера.

Задача 23. Для двух видов продукции А и В зависимость расходов предприятия у (тыс.сум.) от объема производства х (шт.) характеризуется следующими данными:

$$y_A = 160 = 0.8x, r = 0,85, n = 30$$

$$y_B = 50x^{0.6}, \rho = 0,72, n = 25$$

Поясните смысл величин 0,8 и 0,6 в уравнениях регрессии. Сравните эластичность расходов от объема производства для продукции А и В при выпуске продукции А в 500 единиц. Оцените значимость каждого уравнения регрессии с помощью F–критерия Фишера.

Задача 24. Зависимость объема продаж у (тыс.долл.) от расходов на рекламу х (тыс.долл.) характеризуется по 12 предприятиям концерна следующим образом: $y = 10,6 + 0,6x, \sigma_x = 4,7, \sigma_y = 3,4$. Определите

коэффициент корреляции, значимость коэффициента регрессии. Сделайте экономические выводы

Задания для самостоятельной работы:

Задача 1. Уравнение регрессии, построенное по 12 наблюдениям, имеет вид:

$$y = 12 - 0,24x_1 + 6,4x_2 - ?x_3$$

m_{ϵ}	(8)	()	(3,2)	(4,0)
t_{ϵ}	()	(-2,4)	()	(-3,1)

Пропущенные значения, а также доверительный интервал для b_3 с вероятностью 0,9 равны:

- $t_a = 1,5$; $m_{\epsilon_1} = 0,1$; $t_{\epsilon_2} = 2,0$; $(-19,84; -4,96)$
- $t_a = 1,5$; $m_{\epsilon_1} = 0,1$; $\epsilon_3 = 12,4$; $(19,84; 4,96)$
- $t_a = 1,5$; $t_{\epsilon_2} = 2,0$; $\epsilon_3 = 12,4$; $(21,62; 3,18)$
- $m_{\epsilon_1} = 0,1$; $m_{\epsilon_2} = -2,0$; $\epsilon_3 = -12,4$; $(-21,62; -3,18)$

Задача 2. Уравнение регрессии, построенное по 17 наблюдениям, имеет вид:

$$y = ? + 0,36x_1 - 9,6x_2 + ?x_3$$

m_{ϵ}	(3)	()	(3,0)	(5,0)
t_{ϵ}	(1,4)	(1,5)	()	(2,4)

Пропущенные значения, а также доверительный интервал для b_2 с вероятностью 0,99 равны:

- $a = 4,2$; $m_{\epsilon_1} = 0,24$; $\epsilon_3 = 12$; $(-18,64; -0,56)$
- $a = 4,2$; $m_{\epsilon_1} = 0,24$; $t_{b_2} = -3,2$; $(-16,08; -3,12)$
- $a = 4,2$; $t_{\hat{a}_2} = -3,2$; $\hat{a}_3 = 12$; $(0,56; 18,64)$
- $m_{\epsilon_1} = 0,24$; $t_{\epsilon_2} = -3,2$; $\epsilon_3 = 12$; $(3,12; 16,08)$

Задача 3. Уравнение регрессии, построенное по 15 наблюдениям, имеет вид:

$$y = 12,4 - 9,6x_1 + ?x_2 - 6,3x_3$$

$$m_{\hat{a}} \quad () \quad (3,2) \quad (0,12) \quad ()$$

$$t_{\hat{a}} \quad (1,55) \quad () \quad (4,0) \quad (-3,15)$$

Пропущенные значения, а также доверительный интервал для σ_3 с вероятностью 0,99 равны:

$$-m_{\hat{a}} = 8; \quad t_{\hat{a}_1} = -3,0; \quad m_{\hat{a}_3} = 2,0; \quad (-12,51; -0,09)$$

$$-m_{\hat{a}} = 8; \quad t_{\hat{a}_1} = -3,0; \quad \hat{a}_2 = 0,48; \quad (-10,7; -1,9)$$

$$-m_{\hat{a}} = 8; \quad \hat{a}_2 = 0,48; \quad m_{\hat{a}_3} = 2,0; \quad (1,9; 10,7)$$

$$-t_{\hat{a}_1} = -3,0; \quad \hat{a}_2 = -0,48; \quad m_{\hat{a}_3} = 2,0; \quad (-9,89; -2,71)$$

Задача 4. Уравнение регрессии, построенное по 18 наблюдениям, имеет вид:

$$y = 12,4 + ?x_1 - 9,6x_2 - 12x_3$$

$$m_{\hat{a}} \quad (5,0) \quad (0,4) \quad (3,0) \quad ()$$

$$t_{\hat{a}} \quad () \quad (1,8) \quad () \quad (2,4)$$

Пропущенные значения, а также доверительный интервал для σ_1 с вероятностью 0,95 равны:

$$-t_{\hat{a}_2} = -3,2; \quad m_{\hat{a}_3} = 5; \quad t_{\hat{a}} = 2,48; \quad (6,34; 8,06)$$

$$-t_{\hat{a}} = 2,48; \quad \sigma_1 = 7,2; \quad t_{\hat{a}_2} = -3,2; \quad (-6,5; -7,9)$$

$$-t_{\hat{a}} = 2,48; \quad t_{\hat{a}_2} = 3,2; \quad m_{\hat{a}_3} = 5; \quad (-8,06; -6,34)$$

$$-t_{\hat{a}} = 2,48; \quad \sigma_1 = 7,2; \quad m_{\hat{a}_3} = 5; \quad (6,01; 8,39)$$

Задача 5. Уравнение регрессии, построенное по 20 наблюдениям, имеет вид:

$$y = 15 - 5x_1 + 3,5x_2 + 0,3x_3$$

$$m_{\hat{a}} \quad (7,5) \quad (2,5) \quad () \quad ()$$

$$t_{\hat{a}} \quad () \quad () \quad (1,75) \quad (2,5)$$

Пропущенные значения, а также доверительный интервал для β_3 с вероятностью 0,9 равны:

$$-t_{\hat{a}_1} = -2,0; \quad t_a = 2,0; \quad m_{\hat{a}_3} = 1,2; \quad (0,09;0,51)$$

$$-t_a = -2,0; \quad t_{\hat{e}_1} = 2,0; \quad m_{\hat{e}_3} = 1,2; \quad (0,09;0,51)$$

$$-t_{\hat{e}_1} = -2,0; \quad t_{\hat{e}_2} = 2,0; \quad m_{\hat{e}_3} = 1,2; \quad (0,05;0,55)$$

$$-t_a = 2,0; \quad t_{\hat{a}_2} = 2,0; \quad m_{\hat{a}_3} = 1,2; \quad (0,05;0,55)$$

Задача 6. Уравнение регрессии, построенное по 16 наблюдениям, имеет вид:

$$y = 12 - ?x_1 + 2x_2 + 0,5x_3$$

$m_{\hat{a}}$	()	(3,0)	(0,8)	()
$t_{\hat{a}}$	(2,0)	(2,0)	()	(-2,5)

Пропущенные значения, а также доверительный интервал для β_2 с вероятностью 0,99 равны:

$$-\hat{a}_1 = 6; \quad t_{\hat{a}_2} = 2,5; \quad m_{\hat{a}_3} = 0,2; \quad (-0,44;4,44)$$

$$-m_a = 6; \quad t_{\hat{a}_2} = 2,5; \quad m_{\hat{a}_3} = 0,2; \quad (0,26;3,74)$$

$$-m_a = 6; \quad \hat{e}_1 = 6; \quad m_{\hat{e}_3} = 0,2; \quad (0,57;3,43)$$

$$-m_a = 6; \quad \hat{e}_1 = 6; \quad t_{\hat{e}_2} = -2,5; \quad (-0,44;4,44)$$

Задача 7. Уравнение регрессии, построенное по 18 наблюдениям, имеет вид:

$$y = ? - 2,5x_1 + 3,2x_2 + 0,36x_3$$

$m_{\hat{a}}$	(6)	()	()	(0,12)
$t_{\hat{a}}$	(2,5)	(-2,0)	(1,6)	()

Пропущенные значения, а также доверительный интервал для β_1 с вероятностью 0,95 равны:

$$-a = 15; \quad m_{\hat{a}_2} = 2; \quad t_{\hat{a}_3} = 3; \quad (-5,18;0,18)$$

$$-a = 15; \quad m_{\hat{e}_1} = 1,25; \quad t_{\hat{e}_3} = 3; \quad (-4,7;-0,3)$$

$$-a = 15; \quad t_{e_1} = 1,25; \quad m_{e_2} = 2; \quad (-6,22; 1,22)$$

$$-m_{e_1} = -1,25; \quad t_{e_2} = 2; \quad t_{e_3} = 3; \quad (-4,5; -0,3)$$

Задача 8. Имеется информация за 15 лет относительно среднего дохода X и среднего потребления Y (млн.сум.):

Годы	X	Y	Годы	X	Y	Годы	X	Y
2009	10,5	8,8	1991	16,1	11,9	2014	23,1	20,5
2010	11,6	12,0	1992	17,3	13,5	2015	24,3	19,5
2011	12,3	13,0	1993	18,7	15,0	2016	25,5	19,1
2012	13,7	12,6	1994	20,1	18,2	2017	27,8	19,3
2013	14,5	11,2	1995	21,8	21,2	2018	30,0	24,0

1. Оцените коэффициенты линейной регрессии $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ по методу наименьших квадратов.
2. Вычислите значение DW статистики Дарбина-Уотсона и проанализируйте наличие автокорреляции остатков.
3. При наличии автокорреляции переоцените уравнение регрессии, используя для этого один цикл метода Кохрана-Оркатта.

Задача 9. Известны данные для 30 домохозяйств (в условных единицах) по доходам (X) и расходам (Y):

X	26	28	31	32	34	35	37	40	41	43
Y	11,2	9,74	12,4	15	12,2	12,1	16,4	14,7	16,4	20,2
X	45	48	49	52	53	54	57	60	61	62
Y	14,9	19,2	23	24,4	21,2	17,8	22,8	28,2	21,6	20,5
X	63	66	67	68	69	70	75	77	79	80
Y	29,6	31	24,8	22,4	22,8	34,9	31,5	30,8	23,3	41,1

1. Оцените коэффициенты линейной регрессии $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ по методу наименьших квадратов.

2. Примените тест Голдфелда-Квандта для изучения гипотезы об отсутствии гетероскедастичности остатков.
3. В случае гетероскедастичности остатков примените взвешенный метод наименьших квадратов, предполагая, что дисперсии отклонений σ_i^2 пропорциональны x_i^2 .
4. Определите, существенно ли повлияла гетероскедастичность на качество оценок в уравнении, построенном по обычному методу наименьших квадратов.

Задача 3. Имеются следующие данные об остатках парной линейной регрессии (t - номер момента наблюдения)

$$\sum_{t=1}^{15} e_t^2 = 90, \quad \sum_{t=2}^{15} (e_t - e_{t-1})^2 = 31.$$

Сделайте вывод о наличии или отсутствии автокорреляции, применив тест Дарбина- Уотсона.

Задания для самостоятельной работы:

Подготовить презентацию на одну из следующих тем:

1. Производственные функции и их применение в анализе хозяйственной деятельности.
2. Использование экономико–математических моделей развития малого бизнеса и частного предпринимательства в Узбекистане.
3. Эконометрическое моделирование спроса и предложения.
4. Применение функции эластичности в эконометрическом анализе.
5. Экономический рост – как показатель развития страны.
6. Направления экономического роста в Узбекистане.
7. Инвестиции – как действенный элемент экономического роста.
8. Проблемы накопления капитала и экономического роста.
9. Провести анализ на гетероскедастичность.
10. Провести анализ на гомоскедастичность.

11. Временные ряды в эконометрических исследованиях.
12. Модели панельных данных.
13. Анализ множественной корреляционно-регрессионной системы.
14. Оценка нелинейных систем уравнения.
15. Оценка статистических параметров множественной линейной регрессии.

Презентация должна включать в себя:

- Титульный лист (название работы, Ф.И.О. и № группы студента);
- текст, рисунки, схемы, таблицы, и диаграммы по изучаемой проблематике;
- заключение по теме исследования.

Приложение

Таблица 1. Значения F (критерия Фишера при уровне значимости $\alpha = 0,05$)

	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	161,5	199,5	215,7	224,6	230,2	233,9	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
∞										

Число степеней свободы d.f.	α			Число степеней свободы d.f.	α		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
1	6,3138	12,706	63,657	18	1,7341	2,1009	2,8784
2	2,9200	4,3027	9,9248	19	1,7291	2,0930	2,8609
3	2,3534	3,1825	5,8409	20	1,7247	2,0860	2,8453
4	2,1318	2,7764	4,5041	21	1,7207	2,0796	2,8314
5	2,0150	2,5706	4,0321	22	1,7171	2,0739	2,8188
6	1,9432	2,4469	3,7074	23	1,7139	2,0687	2,8073
7	1,8946	2,3646	3,4995	24	1,7109	2,0639	2,7969
8	1,8595	2,3060	3,3554	25	1,7081	2,0595	2,7874
9	1,8331	2,2622	3,2498	26	1,7056	2,0555	2,7787
10	1,8125	2,2281	3,1693	27	1,7033	2,0518	2,7707
11	1,7959	2,2010	3,1058	28	1,7011	2,0484	2,7633
12	1,7823	2,1788	3,0545	29	1,6991	2,0452	2,7564
13	1,7709	2,1604	3,0123	30	1,6973	2,0423	2,7500
14	1,7613	2,1448	2,9768	40	1,6839	2,0211	2,7045
15	1,7530	2,1315	2,9467	60	1,6707	2,0003	2,6603
16	1,7459	2,1199	2,9208	120	1,6577	1,9799	2,6174
17	1,7396	2,1098	2,8982	∞	1,6449	1,9600	2,5758

ГЛОССАРИЙ

Алгоритм	Алгоритм	Algorithm	<p>совокупность предписаний, необходимая и достаточная для решения какой-либо конкретной задачи; 2) совокупность правил, определяющих эффективную процедуру решения любой задачи из некоторого заданного класса задач. Понятие А. использовалось в математике давно, но как математический объект исследуется в связи с решением ряда проблем оснований математики с х гг. XX в. Тогда же были разработаны основные понятия теории алгоритмов. В связи с развитием ЭВМ и их широким применением понятие А стало одним из центральных в прикладной математике.</p>
Алгоритмическая модель	Алгоритмик модел	Algorithm model	<p>– математическая модель, представленная в форме алгоритма, перерабатывающего заданный набор входных данных в заданный набор выходных данных. А.м. применяют, когда использование аналитических (расчетных) моделей затруднено либо</p>

			нецелесообразно. Частным видом А.м. являются имитационные модели.
Аналитическая модель	Аналитик модели	Analytical model	математическая модель, представляющая собой совокупность аналитических выражений и зависимостей, позволяющих оценивать определенные свойства моделируемого объекта. Аналитические модели могут относиться к функциональным моделям (совокупность явных зависимостей выходных величин от входных), геометрическим (совокупность уравнений поверхности и (или) линий, задающих геометрическую форму моделируемого объекта), к обеспечению программному.
Априорные модели	Априори модели	A priori model	математические модели, используемые в принятии многокритериальных решений, в которых структура и вид обобщенного критерия постулируются вначале, т.е. вся информация, позволяющая определить наилучшее решение, скрыта в формальной модели

			задачи. Архиватор – программа или программный пакет, предназначенный для «сжатия» (архивации) файла или группы файлов с целью уменьшения занимаемого файлами дискового пространства.
Временной ряд	Вактли қатор	Temporal row	это последовательность наблюдений, упорядоченных во времени (или пространстве). Если какое-нибудь явление наблюдают на протяжении некоторого времени, имеет смысл представить данные в том порядке, в котором они возникали, из-за того, в частности, что последовательные наблюдения могут быть зависимыми. Временной ряд хорошо представлять на диаграмме рассеяния. Значение ряда X откладывают по вертикальной оси, а время t - по горизонтальной. Время называют независимой переменной. Существует два типа временных рядов: 1. Непрерывные, в которых мы имеем наблюдения в каждый момент времени, например показатели

			<p>детектора лжи, электрокардиограммы.</p> <p>Их обозначают как наблюдение X в момент t, Xt.</p> <p>2. Дискретные, в которых наблюдения делаются через некоторые (обычно одинаковые) интервалы времени.</p> <p>Их обозначают X_i Примеры</p> <p>1. Экономические: недельные цены на акции; месячные прибыли.</p> <p>2. Метеорологические: дневные осадки; скорость ветра; температура.</p> <p>3 Социологические, показатели преступности (например, число арестов), показатели безработицы.</p>
Гетероскедаст-ичность	Гетероскедастик	Geteroskedastik	условие, когда дисперсии регрессионных остатков не отвечают условию гомоскедастичности
Гистограмма	Гистограмма	Histogram	это способ представления данных, измеренных в интервальной шкале (как дискретных, так и непрерывных). Часто используется в разведочноанализе данных для иллюстрации

			<p>основных характеристик распределения. Гистограмма делит диапазон возможных значений множества данных на классы, или группы. Каждой группе соответствует прямоугольник, длина которого равна диапазону значений в заданной группе, а площадь пропорциональна числу наблюдений в этой группе. Это означает, что прямоугольники скорее всего будут различаться по высоте. Гистограмма годится только для числовых переменных, измеренных в номинальной шкале. Как правило она используется для больших множеств данных (>100 наблюдений), когда не хотят строить диаграммы ствол-лист. Гистограммы помогают выявить необычные наблюдения (выбросы) и пропуски в множестве данных.</p>
Гомоскедастичность	Гомоскедастик	Gomoskedastik	Условие постоянства дисперсий регрессионных остатков.

Корреляция	Корреляция	Correlation	<p>Когда говорят, что две случайные переменные коррелированы, имеют в виду, как правило, что они друг с другом как-то связаны. Стандартной мерой связи переменных является коэффициент корреляции. Следует, однако, помнить, что он измеряет лишь силу линейной связи.</p>
Коэффициент корреляции	Корреляция коэффициенты	Coefficient correlation	<p>меняется в пределах от -1 до 1, измеряет степень линейной связи двух случайных переменных. Положительное значение коэффициента корреляции означает, что с ростом одной из переменных другая также растет, с убыванием одной из них убывает и другая. Отрицательное значение означает, что с ростом одной из переменных другая убывает, с убыванием одной из них другая растет. Коэффициент корреляции, равный нулю, означает, что между нашими переменными отсутствует линейная связь. Обратите внимание: даже если коэффициент</p>

			корреляции равен 1 по абсолютной величине и, следовательно, переменные функционально связаны (линейно), ничего нельзя сказать о причинно-следственной связи между ними. В статистической практике в ходу два коэффициента корреляции: для числовых переменных используется коэффициент корреляции Пирсона, для ранговых—коэффициент корреляции Спирмена.
Линейная регрессия	Чизикли регрессия	Linear regrees	В линейной регрессии модельное (теоретическое, предсказанное) значение Y является линейной комбинацией значений одного или более предикторов: $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon$.
Медиана	Медиана	Median	это точка, по обе стороны которой располагается одинаковое количество элементов выборки. Если объем ыборки нечетен и равен $2n + 1$, то медиана равна элементу вариационного ряда с номером $n + 1$. Если объем выборки четен и равен $2n$, то медиана

			равна полусумме элементов вариационного ряда с номерами n и $n + 1$.
Метод наименьших квадратов	Энг кичик квадратлар усули	Metod	это распространенный метод оценивания параметров. Ищутся оценки, минимизирующие сумму квадратов отклонений между смоделированными (предсказанными) и наблюдаемыми значениями.
Независимость	Боглик булмаган	Independence	Две случайные переменные независимы, если их совместная плотность распределения равна произведению отдельных (маргинальных) плотностей. Менее формально, две случайные переменные A и B независимы, если информация о значении B не влияет на распределение вероятностей значений A и наоборот. Выборка взаимно независимых случайных переменных называется независимой выборкой.
Независимая переменная	Боглик булмаган узгарувчи	Independent variable	Переменная, используемая для объяснения зависимой переменной.

Нелинейная регрессия	Чизикчис регрессия	Non-linear regrees	предполагается, что зависимость отклика от предикторов является нелинейной функцией предикторов
Однородность	Бирхиллик	Similarity	Равенство дисперсий переменной, подсчитанных в пределах разных групп. Является стандартным требованием в таких, например, методах, как регрессионный и дисперсионный анализы. Синоним: гомоскедастичность. Антоним: гетероскедастичность
Производственная функция	Ишлаб-чикариш функцияси	Production function	Отражает зависимость между количеством применяемых ресурсов и максимально возможным объемом выпускаемой продукции в единицу времени; описывает всю совокупность технически эффективных способов производства (технологий).
Сглаживание, фильтрация	Текислаш	Smooth over	сглаживание применяется для уменьшения иррегулярности (случайных изменений) временных рядов. Распространенным методом сглаживания является сглаживание простым скользящим средним

			(хотя существуют и другие способы). Способ сглаживания определяется свойствами ряда и целями его обработки.
Статистический критерий	Статистик критерий	Statistic criterion	Статистический критерий состоит из следующих компонент: пара гипотез - нулевая и альтернативная, статистика критерия и уровень значимости; по ним находится критическая область. Проверка гипотезы начинается с вычисления статистики. Если значение попадает в критическую область, мы отвергаем нулевую гипотезу и считаем истинной ее альтернативу. В противном случае у нас нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.
Статистика	Статистика	statistics	это функция элементов выборки. Дает информацию о неизвестных значениях параметров генеральной совокупности. Например, среднее выборки является, как правило, оценкой среднего совокупности, из которой была взята выборка. Из генеральной

			совокупности можно сделать много разных выборок, причем значение статистики в общем случае будет меняться от выборки к выборке; другими словами, выборка является случайной, а значит, случайной величиной является и статистика. Например, выборочные средние для разных выборок из одной и той же совокупности могут различаться между собой. Статистики обычно обозначают латинскими буквами, а оцениваемые ими параметры – греческими.
стационарный	стационар	stationary	СТАЦИОНАРНЫМИ называются показатели, среднее которых можно считать неизменным; нестационарными - показатели среднее которых изменяется со временем
Системы одновременных эконометрических уравнений	Бирвактили эконометрик тенгламалар тизими	Simultaneous econometric equation sistem	являются третьим основным классом моделей, которые применяются для анализа и (или) прогноза. Эти модели описываются системами уравнений, которые могут состоять из тождеств и регрессионных

			<p>уравнений, каждое из которых может, кроме объясняющих переменных, включать в себя также объясняемые переменные из других уравнений системы.</p> <p>Т.е. набор объясняемых переменных связан через уравнения системы.</p>
Тренд	Тренд	trend	<p>для лучшего понимания временного ряда мы выделяем его основные характеристики. Одной из таких характеристик является тренд. Тренд это долговременное изменение временного ряда. Это направление (тенденция к повышению или снижению) и скорость изменения временного ряда, при сделанных допущениях о других компонентах.</p>
Циклическая компонента	Циклик компонента	Cyclical component	<p>чтобы лучше понять поведение временного ряда, выделяют его основные характеристики. Одной из таких характеристик является циклическая компонента. В недельных или месячных данных</p>

			циклическая компонента описывает любые регулярные колебания. Это не сезонная компонента, изменение которой подчиняются некоторому распознаваемому циклу.
Экспоненциальное сглаживание	Экспоненциал текислаш	Eksponencial smooth out	метод сглаживания временного ряда, используемый для уменьшения иррегулярности (случайных колебаний) временного ряда, что позволяет получить более ясное представление о лежащих в основе этого ряда закономерностях. Используется также для прогнозирования значения ряда (для 1-2 шагов) прогноза.
Экстраполяция	Экстраполяция	ecstropolace	Предсказание значения переменной за пределами интервала анализа. Термин применяется, как правило, при анализе временных рядов. Для коротких промежутков времени применяются количественные предсказания, интерполяции. Количественное предсказание далекого будущего, как правило, менее

			полезно и применяется для указания на необходимость изменения построенной модели.
--	--	--	---

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Damodar N. Gujarati, Dawn C. Porter Basic econometrics /. — 5th ed. Boston Burr Ridge, IL Dubuque, IA New York San Francisco St. p. cm. www.mhhe.com
2. Shodiev T. va boshqalar. Ekonometrika O'quv qo'llanma. –T.: O'RYAJN, 2005.
3. Абдуллаев О.М., Ходиев Б.Ю., Ишназаров А.И. Эконометрика. Учебник. Т.: Фан ва технология. 2007. -750с.
4. Валентинов В.А. Эконометрика. Учебник. М.: Издательство “Дашков и К”, 2009. – 448с.

Дополнительная литература

5. Ш. Мирзиеев. «Мы все вместе построим свободное, демократическое и процветающее государство Узбекистан», выступление на торжественной церемонии вступления в должность Президента Республики Узбекистан на совместном заседании палат ОлийМажлиса Тошкент - «Узбекистон» - 2016.- 56 с.
6. Ш. Мирзиеев. «Критический анализ, жесткая дисциплина и персональная ответственность должны стать повседневной нормой в деятельности каждого руководителя», доклад на расширенном заседании Кабинета Министров, посвященном итогам социально-экономического развития страны в 2016 году и важнейшим приоритетным направлениям экономической программы на 2017 год 14 января 2017 года, Тошкент - «Узбекистон» - 2017. - 104 с.
7. Указ Президента Узбекистана, «Стратегия действий по пяти приоритетным направлениям развития Республики Узбекистан в 2017-2021 годы», 7 февраля 2017 .
8. Clopper Almon. The Craft of Economic Modelling. Departament of Economics University of Maryland College Park, MD 20742.
9. Елисеева И.И. Эконометрика. Учебник. –М.: Финансы и статистика,

2006. - 455 с.

10. Айвазян С.А. Прикладная статистика и основы эконометрики. Учебник. –М. ЮНИТИ, 2003.

11. Доугерти К. Введение в эконометрику: Учебник. -М.: ИНФРА - М, 2001.

Электронные ресурсы

12. www.economics.ru

13. www.stat.uz

14. www.cer.uz

15. www.uza.uz

16. www.Lex.uz

17. www.ziyonet.uz

Введение.....	4
Тема 1. Цели и задачи дисциплины «Основы эконометрики».....	6
Тема 2. Основы эконометрического моделирования.....	13
Тема 3. Информационное обеспечение эконометрических моделей.....	26
Тема 4. Информационные технологии эконометрических моделей.....	35
Тема 5. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики в эконометрике.....	48
Тема 6. Парный корреляционный анализ. Парный регрессионный анализ.....	58
Тема 7. Нелинейная регрессия.....	87
Тема 8. Многофакторный эконометрический анализ.....	93
Тема 9. Стандартное уравнение регрессии.....	115
Тема 10. Общая оценка качества эконометрических моделей. Оценка статистической значимости коэффициентов корреляции и регрессии.....	125
Тема 11. Основные понятия о временных рядах.....	137
Тема 12. Аддитивные и мультипликативные модели временных рядов. Автокорреляция уровня временных рядов.....	142
Тема 13. Эконометрическая модель в виде системы уравнений. Приведенные и структурные формы моделей.....	174
Тема 14. Непосредственный и двухуровневый метод наименьших квадратов.....	194
Тема 15. Практические эконометрические модели. Производственные функции. Модели экономического роста.....	198
Тема 16. Использование эконометрических моделей при прогнозировании экономических показателей. Методы прогнозирования. Методы экстраполяции трендов.....	224
Тема 17. Динамические эконометрические модели.....	263
Тема 18. Оценка параметров адаптивных ожиданий и распределенных моделей.....	272

Задания для самостоятельной работы.....	276
Приложения.....	
Список использованной литературы.....	

МУНДАРИЖА

Мавзу1. Эконометрика асослари фанининг мақсади ва вазифалари.....6	
Мавзу2. Эконометрик моделлаштириш асослари.....13	
Мавзу3. Эконометрик моделларнинг ахборот таъминоти.....26	
Мавзу4. Эконометрик моделларнинг ахборот технологиялари.....35	
Мавзу5. Эконометрикада эҳтимоллар назарияси ва математик статистиканинг асосий тушунчалари.....48	
Мавзу6. Жуфт корреляцион таҳлил. Жуфт регрессион таҳлил.....58	
Мавзу7. Чизиқсиз регрессия.....87	
Мавзу8. Кўп омилли эконометрик таҳлил.....93	
Мавзу9. Регрессиянинг хусусий тенгламаси.....115	
Мавзу10. Эконометрик моделларни баҳолаш. Регрессия ва корреляция коэффициентларини статистик аҳамиятини баҳолаш.....125	
Мавзу11. Вақтли қаторлар ҳақида асосий тушунчалар.....137	
Мавзу12. Вақтли қаторларнинг аддитив ва мультипликатив моделлари. Вақтли қатор даражаларининг автокорреляцияси.....142	
Мавзу13. Тенгламалар тизими кўринишидаги эконометрик модел. Моделнинг келтирилган ва таркибий шакли.....174	
Мавзу14. Билвосита ва икки босқичли энг кичик квадратлар усули.....194	
Мавзу15. Амалий эконометрик моделлар. Ишлаб чиқариш функциялари. Иқтисодий ўсиш кўрсаткичлари моделлари.....198	
Мавзу16. Иқтисодий кўрсаткичларни прогнозлашда эконометрик моделлардан фойдаланиш. Прогнозлаш усуллари. Трендларни экстраполяция усули.....224	
Мавзу17. Эконометриканинг динамик моделлари.....263	
Мавзу18. Мослашувчан тахминлар ва тақсимланган моделларни баҳолаш Мустақил ишлаш учун топшириқлар.....272	
Иловалар	
Фойдаланилган адабиётлар рўйхати	

CONTENT

Topic1.Goal and objectives of the discipline fundamentals of economettricals.....6

Topic2. Basics of econometric modeling..... 13

Topic3. Information supports of econometric models.....26

Topic4. Information technology of econometric models.....35

Topic5. Basic concepts of probability theory and mathematical statistics in econometrics.....48

Topic6. Paired correlation and regression analysis.....58

Topic7. Nonlinear regression.....87

Topic8. Multivariate econometric analysis.....93

Topic9. Standard regression equation.....115

Topic10. General assessment of the quality of econometric models. Assessment of the statistical significance of the correlation and regression coefficients....125

Topic11. Main points about time series.....137

Topic12. Additive and multiplicative time series models. Auto-correlation of the level time series.....142

Topic13. Econometric model in the form of a system of equations. The given and structural forms of models.....174

Topic14. Direct and two-level least squares method.....194

Topic15. Practical econometric models. Production functions. Growth models.....198

Topic16. The use of econometric models in forecasting economic indicators. Trend extrapolation methods.....224

Topic17. Dynamic econometric modes.....263

Topic18. Assessment of adaptive expectations and distributed models.....272

Task for independent work

Appendix

Used literature

**Махкамова Махлакрат Абдукодировна
Якубова Дилдар Мухаммеджановна
Рахматова Маъсуда Гайбуллаевна**

**Методическое пособие
по Эконометрике
Редактор:**