

$X = \{a, b, c, d, e, f\}$ to'plam berilgan.

1. Quyidagilardan qaysilari X da topologiya hosil qilishini aniqlang:

(a) $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, f\}, \{b, f\}, \{a, b, f\}\};$

(b) $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a, b, f\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, f\}\};$

(c) $\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{f\}, \{e, f\}, \{a, f\}\}.$

2.

(a) $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{c\}, \{b, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \{b\}\};$

(b) $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, d, e\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, e\}\};$

(c) $\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{b, d, e, f\}\}.$

3. $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ to'plam berilgan va τ - shu to'plamdagi diskret topologiya bo'lsin.

Quyidagi munosabatlardan qaysilari o'rinli?

(a) $X \in \mathcal{T};$ (b) $\{X\} \in \mathcal{T};$ (c) $\{\emptyset\} \in \mathcal{T};$ (d) $\emptyset \in \mathcal{T};$

(e) $\emptyset \in X;$ (f) $\{\emptyset\} \in X;$ (g) $\{a\} \in \mathcal{T};$ (h) $a \in \mathcal{T};$

(i) $\emptyset \subseteq X;$ (j) $\{a\} \in X;$ (k) $\{\emptyset\} \subseteq X;$ (l) $a \in X;$

(m) $X \subseteq \mathcal{T};$ (n) $\{a\} \subseteq \mathcal{T};$ (o) $\{X\} \subseteq \mathcal{T};$ (p) $a \subseteq \mathcal{T}.$

4. Haqiqiy sonlar o'qi \mathbb{R} da quyidagi to'plamlar oilalarining har biri topologiya bo'lishini ko'rsating:

1) τ_1 oila \mathbb{R} , bo'sh to'plam va $(-n, n)$ ko'rinishdagi barcha intervallardan iborat, n -natural son;

2) τ_2 oila \mathbb{R} , bo'sh to'plam va $[-n, n]$ ko'rinishdagi barcha intervallardan iborat, n -natural son;

3) τ_3 oila \mathbb{R} , bo'sh to'plam va $[n, +\infty)$ ko'rinishdagi barcha intervallardan iborat, n -natural son.

5. \mathbb{N} – barcha natural sonlar to'plami bo'lsa, quyidagi oilalarning \mathbb{N} da topologiya ekanligini isbotlang:

1) τ_1 oila \mathbb{N} , bo'sh to'plam va $\{1, 2, \dots, n\}$ ko'rinishdagi barcha to'plamlardan iborat;

2) τ_2 oila \mathbb{N} , bo'sh to'plam va $\{n, n+1, \dots\}$ ko'rinishdagi barcha to'plamlardan iborat. (n – nat.)

6. Biror (X, τ) topologic fazo berilgan bo'lib, X cheksiz to'lam bo'lsin. Agar X ning har qanday cheksiz qism to'plami τ topologiyaga tegishli bo'lsa, u holda τ - diskret topologiya ekanligini isbotlang.

7. (X, τ) ixtiyoriy topologik fazo bo'lsin. τ ning ixtiyoriy chekli sondagi elementlarining kesishmasi yana τ ga tegishli bo'lishini tekshiring. (Bu natijani isbotlash uchun matematik induksiyadan foydalaning.)

8. Quyidagi to'plamlarda barcha bo'lishi mumkin bo'lgan topologiyalarni ko'rsating.

(a) $X = \{a, b\}$

(b) $Y = \{a, b, c\}$

9) \mathbb{R} barcha haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin. \mathbb{R} ning quyidagi 10 ta qism to'plamlar sistemasidan (oilasidan) 3 tasi aynan topologiya bo'ladimi? Bularni aniqlang va javoblaringizni izohlang.

1) τ oila \mathbb{R}, \emptyset va ixtiyoriy (a, b) intervaldan iborat. Bu yerda $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

2) τ oila \mathbb{R}, \emptyset va ixtiyoriy $(-r, r)$ intervaldan iborat. Bu yerda r musbat haqiqiy son.

3) τ oila \mathbb{R}, \emptyset va ixtiyoriy $(-r, r)$ intervaldan iborat. Bu yerda r musbat ratsional son.

4) τ oila \mathbb{R}, \emptyset va ixtiyoriy $[-r, r]$ intervaldan iborat. Bu yerda r musbat ratsional son.

5) τ oila \mathbb{R}, \emptyset va ixtiyoriy $[-r, r]$ intervaldan iborat. Bu yerda r musbat irratsional son.

6) τ oila \mathbb{R}, \emptyset va ixtiyoriy $(-r, r)$ intervaldan iborat. Bu yerda r musbat irratsional son.

7) τ oila \mathbb{R}, \emptyset va ixtiyoriy $[-r, r)$ intervaldan iborat. Bu yerda r musbat haqiqiy son.

8) τ oila \mathbb{R}, \emptyset va ixtiyoriy $(-r, r]$ intervaldan iborat. Bu yerda r musbat haqiqiy son.

9) τ oila \mathbb{R}, \emptyset va ixtiyoriy $[-r, r]$ segment va $(-r, r)$ intervaldan iborat. Bu yerda r musbat haqiqiy son.

10) τ oila \mathbb{R}, \emptyset va ixtiyoriy $[-n, n]$ segment va $(-r, r)$ intervaldan iborat. Bu yerda r musbat haqiqiy son va n natural son.

11) $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ to'plam va $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$ unda aniqlangan topologiya bo'lsa, u holda X ning barcha 64 ta qism to'plamlarini ochiq, yopiq va ochiq-yopiq turlarga ajarating.

12) (X, τ) bu quyidagi xossaga ega topologic fazo bo'lsin: Har bir qism to'plam yopiq. Bu fazo diskret ekanligini isbotlang.

13) Agar (X, τ) bu diskret yoki trivial fazo bo'lsa, u holda har bir ochiq to'plam ochiq-yopiq bo'lishini ko'rsating. $X = \{a, b, c, d\}$ to'plamda diskret yoki trivial bo'lmagan lekin har bir ochiq to'plam ochiq-yopiq bo'lgan topologiyani toping.

14) X cheksiz to'plam bo'lsin. Agar τ oila X to'plamda topologiya bo'lib, X ning har bir cheksiz qism to'plami yopiq bo'lsa, τ ni diskret topologiya ekanligini isbotlang.

15) X cheksiz to'plam va τ esa unda aniqlangan topologiya bo'lib, X ning ochiq bo'lgan yagona cheksiz qism to'plami X ning o'zidan iborat. (X, τ) trivial fazo bo'lishi kerakmi?

16) i) τ oila X to'plamda topologiya bo'lib, aynan 4 ta to'plamdan tashkil topsin, yani, $\tau = \{X, \emptyset, A, B\}$. Bu yerda A va B to'plamlar X ning bog'liqsiz (kesishmasi bo'sh bo'lgan) qism to'plamlari. (A to'plam X ning to'g'ri qism to'plami bu $A \subseteq X$ va $A \neq X$ ekanligini anglatadi). A va B to'plamlar quyidagi shartlardan aynan bittasini qanoatlantirishi kerak ekanligini isbotlang:

$$(a) B = X \setminus A \quad (b) A \subset B \quad (c) B \subset A.$$

(Dastlab A va B to'plamlar shartlardan kamida bittasini qanoatlantirishini ko'rsating va keyin ularni shartlardan bittadan ko'prog'ini qanoatlantira olmasligini ko'rsating.)

ii) (i) dan foydalanib $X = \{1,2,3,4\}$ to'plamda aynan 4 ta to'plamdan tashkil topgan barcha toplogiyalarni ko'rsating.