Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами

I

ОЛИЙ ЎҚУВ ЮРТЛАРИ УЧУН

Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами

I

Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги университетлар талабалари учун ўқув қўлланма сифатида тавсия этган

ТОШКЕНТ
«ЎЗБЕКИСТОН»
1993

Муаллифлар:
А. САЪДУЛЛАЕВ, Ҳ. МАНСУРОВ,
Г. ХУДОЙБЕРГАНОВ, А. ВОРИСОВ, Р. ҒУЛОМОВ

Тақризчилар: физика-математика фанлари доктори, профессор
А. АЪЗАМОВ
Самарқанд давлат университети математик анализ кафедраси

ISBN 5-640-01328-1

$С\frac{1602070000-76}{М351(04)-93}93$

СЎЗ БОШИ

Ўзбекистон жумҳуриятида тил ҳақидаги қонун қабул қилинганидан сўнг, деярли ҳамма фанлар бўйича ўзбек тилидаги адабиётларнинг тақчиллиги сезилиб қолди. Математик анализ бўйича Т. Азларов ва Ҳ. Мансуров томонидан ёзилган икки жилдлик китоб бу масалага маълум қадар жавоб бўлди. Шу билан бирга бу китобларга мос мисол ва масалалар тўплами яратиш эҳтиёжи туғилди.

Ушбу китоб Тошкент Давлат университети математика факультети ўқитувчиларининг бир гуруҳи томонидан тайёрланган бўлиб, у математика ихтисослиги бўйича мутахассислар тайёрлаш дастури ва юқорида қайд этилган китоблар асосида ёзилган.

Китобнинг бу қисмига дастлабки тушунчалар, сонли кетма-кетлик ва унинг лимити, функция ва унинг лимити, функция узлуксизлиги ва текис узлуксизлиги, функциянинг ҳосила ва дифференциали, дифференциал ҳисобнинг асосий теоремалари ва татбиқлари, аниқмас ва аниқ интеграллар, аниқ интегралларнинг баъзи бир татбиқлари ва сонли қаторлар мавзулари киритилган.

Қўлланмани ёзишда муаллифлар ҳар бир математик тушунча ва тасдиқларни мос мисол ва масалаларни тўлиқ ва синчиклаб таҳлил қилиб ечиш орқали ўқувчиларга етказишга ҳаракат қилдилар. Қўлланмада 244 та мисол ва масала батафсил ечиб кўрсатилган бўлиб, 1502 та мисол ва масала мустақил ечиш учун тавсия этилган.

Ушбу китобни ёзишда Тошкент Давлат университетида кўп йиллар мобайнида математик анализ курси бўйича олиб борилган дарслар катта ёрдам берди. Шу билан бирга китоб қўлёзмаси тайёр бўлгач, у машқ дарсларида синовдан ўтказилди.

Китоб қўлёзмасини ўқиб, унинг яхшиланишига ўз ҳиссаларини қўшган профессор А. Аъзамов, доцентлар М. Зоҳиров, А. Назаров, А. Жалиловларга муаллифлар миннатдорчилик билдирадилар.

Қўлланмадаги камчиликларни бартараф этиш ва унинг сифатини яхшилаш борасидаги фикр-мулоҳазалар учун муаллифлар олдиндан ўз миннатдорчиликларини билдирадилар.

I боб
ДАСТЛАБКИ ТУШУНЧАЛАР

1-§. ТЎПЛАМ. ТЎПЛАМЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

Тўплам тушунчаси математиканинг бошланғич, айни пайтда муҳим тушунчаларидан биридир. Тўпламни ташкил этган нарсалар (предметлар) унинг элементлари дейилади. Одатда тўпламлар бош ҳарфлар билан, унинг элементлари эса кичик ҳарфлар билан белгиланади. Тўпламлар элементларининг сони нуқтаи назаридан икки хил бўлади: 1) чекли тўпламлар, масалан, $A=\{2, 4, 6, 8\}$ тўплам, 2) чексиз тўпламлар, масалан, $N=\{1, 2, 4, \ldots\}$ тўплам.

Иккита A ва B тўплам берилган бўлсин. Агар A тўпламнинг ҳар бир элементи B тўпламнинг ҳам элементи бўлса, A тўплам B тўпламнинг қисми ёки қисмий тўплами деб аталади ва $A\subset B$ каби ёзилади.

1-таъриф. *Агар $A\subset B$ ва $B\subset A$ бўлса, у ҳолда A ва B тўпламлар бир-бирига тенг тўпламлар деб аталади ва $A=B$ каби ёзилади.*

2-таъриф. *A ва B тўпламларнинг барча элементларидан ташкил топган тўплам A ва B тўпламлар йиғиндиси (бирлашмаси) деб аталади ва $A\cup B$ каби ёзилади.*

3-таъриф. *A ва B тўпламларнинг умумий элементларидан ташкил топган тўплам A ва B тўпламлар кўпайтмаси (кесишмаси) деб аталади ва $A\cap B$ каби ёзилади.*

4-таъриф. *A тўпламнинг B тўпламга тегишли бўлмаган элементларидан тузилган тўплам A тўпламдан B тўпламнинг айирмаси деб аталади ва $A\setminus B$ каби ёзилади.*

5-таъриф. *A тўпламнинг B тўпламга тегишли бўлмаган элементларидан ва B тўпламнинг A тўпламга тегишли бўлмаган элементларидан тузилган тўплам A ва B тўпламларнинг симметрик айирмаси деб аталади ва $A\Delta B$ каби ёзилади.*

6-таъриф. *Биринчи элементи A тўпламдан, иккинчи элементи B тўпламдан олинган (a, b) $(a \in A,\ b \in B)$ кўринишдаги жуфтликлардан тузилган тўпламга A ва B тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси ёки тўғри кўпайтмаси деб аталади ва $A \times B$ каби ёзилади.*

1-мисол. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$ бўлсин. У ҳолда

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\},\ A \cap B = \{2\};$$
$$A \setminus B = \{1, 3\},\ B \setminus A = \{4\},\ A \Delta B = \{1, 3, 4\};$$
$$A \times B = \{(1, 2),\ (1, 4),\ (2, 2),\ (2, 4),\ (3, 2),\ (3, 4)\}$$

бўлади.

7-таъриф. *Агар A тўплам U тўпламнинг қисми, яъни $A \subset U$ бўлса, ушбу*

$$U \setminus A = \{x : x \in U,\ x \notin A\}$$

тўплам *A тўпламни U тўпламга тўлдирувчи тўплам деб аталади ва CA ёки $C_U A$ каби белгиланади.*

Қуйидаги хоссалар ўринлидир:

1°. $C(CA) = A$.
2°. $C(A \cup B) = CA \cap CB$.
3°. $C(A \cap B) = CA \cup CB$.
4°. $A \setminus CA = \varnothing$, $A \cup CA = U$ ($\varnothing$-бўш тўплам).

2-мисол. Ушбу

$$A \setminus B = A \cap CB$$

тенглик ўринли эканини кўрсатинг.

Икки тўпламнинг бир-бирига тенг бўлиши таърифига асосан берилган тенгликнинг ўринли бўлишини кўрсатиш учун

$$A \setminus B \subset A \cap CB \text{ ва } A \cap CB \subset A \setminus B$$

муносабатларнинг бажарилишини кўрсатиш етарли.

$\forall a \in A \setminus B$ бўлсин, у ҳолда:

$$a \in A,\ a \notin B \Rightarrow a \in A,\ a \in CB \Rightarrow a \in A \cap CB.$$

Демак, $A \setminus B \subset A \cap CB$.

Энди $\forall a \in A \cap CB$ бўлсин:

$$a \in A \cap CB \Rightarrow a \in A,\ a \in CB \Rightarrow a \in A,\ a \notin B \Rightarrow a \in A \setminus B.$$

Демак, $A \cap CB \subset A \setminus B$. Натижада

$$A \setminus B \subset A \cap CB,\ A \cap CB \subset A \setminus B \Rightarrow A \setminus B = A \cup CB$$

бўлишини топамиз.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги муносабатларнинг ўринли бўлишини кўрсатинг:

1. $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.
2. $A \cap (A \cup B) = A$.
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
5. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
6. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
7. $A \cup (CA \cap B) = A \cup B$.
8. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
9. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
10. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \cap (CA \cup CB)$.

2-§. ҲАҚИҚИЙ СОНЛАР

Q — барча рационал сонлардан иборат тўплам бўлсин.

6-таъриф. *Рационал сонлар тўплами Q нинг қисмлари A ва A' тўпламлар*

1) $A \neq \varnothing$, $A' \neq \varnothing$,
2) $A \cup A' = Q$,
3) $\forall a \in A,\ \forall a' \in A' \Rightarrow a < a'$

шартларни қаноатлантирсин. У ҳолда A ва A' тўпламлар Q тўпламда кесим бажаради дейилади ва бу кесим (A, A') каби белгиланади. A тўплам кесимнинг қуйи синфи, A' тўплам кесимнинг юқори синфи дейилади.

Q тўпламда бажарилган ҳар қандай кесим фақат икки турли бўлиши мумкин:

1) қуйи синфида энг катта элемент ёки юқори синфида энг кичик элемент мавжуд бўлган кесим. Бундай кесим **рационал кесим** деб аталади.

2) қуйи синфида энг катта элемент мавжуд бўлмаган ва юқори синфида энг кичик элемент мавжуд бўлмаган кесим. Бундай кесим **иррационал кесим** деб аталади.

Биз 1-турдаги кесимга унга мос энг катта ёки энг кичик рационал сонни мос қўямиз. Бу келишувга кўра 2-турдаги кесим учун бирор рационал сонни мос қўйиб бўлмайди.

7-таъриф. *Рационал сонлар тўплами Q да бажарилган иккинчи тур кесим (иррационал кесим) иррационал сонни аниқлайди дейилади.*

Берилган кесим (A, A') аниқлаган сон $\alpha = (A, A')$ кўринишда ҳам ёзилади. Рационал ва иррационал сонлар битта умумий ном билан **ҳақиқий сонлар** дейилади. Барча ҳақиқий сонлар тўплами R ҳарфи билан белгиланади.

Ҳақиқий сонлар тўплами қуйидаги хоссаларга эга:

1°. Ҳақиқий сонлар тўплами тартибланган тўплам.

2°. Ҳақиқий сонлар тўплами зич тўплам.

3°. Ҳақиқий сонлар тўплами тўлиқ (узлуксиз) тўплам.

Ҳақиқий сонлар устида арифметик амаллар бажарилади (қаранг: [I], 2-боб, 7-§).

3-мисол. Ушбу $x^3=2$ тенгламани қаноатлантирувчи ҳақиқий соннинг мавжудлигини кўрсатинг.

Қуйидаги рационал сонлар тўпламини оламиз:

$$A'=\{r: r\in Q,\ r^3>2\},$$
$$A=\{r: r\in Q,\ r^3<2\}.$$

Бу A, A' тўпламлар Q да (A, A') кесим бажаради, чунки:

1) $1\in A,\ 2\in A' \Rightarrow A\neq\varnothing,\ A'\neq\varnothing$.

2) $\forall a\in A,\ \forall a'\in A' \Rightarrow a^3<2<(a')^3 \Rightarrow a^3<(a')^3 \Rightarrow a<a'$.

3) $A\cup A'=Q$.

Бу кесим бирор α ҳақиқий сонни аниқлайди:

$$\alpha=(A, A').$$

Энди A тўпламда энг катта, A' тўпламда эса энг кичик элемент (сон) мавжуд эмаслигини кўрсатамиз.

A' тўпламда r_0 сонни ($r_0>1$) олиб, унинг ёрдамида ушбу $r_0-\frac{1}{n}$ рационал сонни қараймиз. (Бунда n натурал сон $n>\frac{3r_0^2}{r_0^3-2}$ тенгсизликни қаноатлантирсин $\left(n=\left[\frac{3r_0^2}{r_0^3-2}\right]+\right.$ $\left.+1\right.$ деб олиш мумкин). Агар

$$\left(r_0-\frac{1}{n}\right)^3=r_0^3-\frac{3r_0^2}{n}+\frac{3r_0}{n^2}-\frac{1}{n^3}>r_0^3-\frac{3r_0^2}{n}+\frac{3r_0}{n^2}-$$
$$-\frac{1}{n^2}=r_0^3-\frac{3r_0^2}{n}+\frac{3r_0-1}{n^2}>r_0^3-\frac{3r_0^2}{n}>2$$

бўлишини эътиборга олсак, унда $\left(r_0-\frac{1}{n}\right)\in A'$ бўлишини топамиз. Шундай қилиб $r_0\in A'$ сон олинганда, бу сондан кичик бўлган шундай $r_0-\frac{1}{n}$ сон мавжудки, $r_0-\frac{1}{n}\in A'$ бўлади. Бу эса A' тўпламнинг элементлари орасида энг кичиги мавжуд эмаслигини кўрсатади. Худди шу йўл билан A тўпламнинг элементлари орасида энг каттаси мавжуд эмаслиги кўрсатилади. Демак, (A, A') иккинчи тур кесим бўлиб, у α иррационал сонни аниқлайди.

Ҳақиқий сонлар устида арифметик амаллар бажариш қоидасидан фойдаланиб $\alpha^3=2$ эканлигини кўриш қийин эмас.

Юқорида кўрсатилган усул билан мураккаброқ ҳақиқий сонларга, масалан, $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}$ сонларга мос кесимларни қуриш ҳам қийин эмас.

3-§. ҲАҚИҚИЙ СОННИНГ АБСОЛЮТ ҚИЙМАТИ

Бирор $x\in R$ $(x\neq 0)$ сонни олайлик. Равшанки, x, $-x$ сонларидан бири албатта мусбат бўлади. Бу мусбат сон x **соннинг абсолют қиймати** деб аталади ва уни $|x|$ кўринишда белгиланади. Ноль соннинг абсолют қиймати деб ноль сонининг ўзи олинади. Демак,

$$|x|=\begin{cases}x, & \text{агар } x\geqslant 0 \text{ бўлса,}\\ -x, & \text{агар } x<0 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

Ҳақиқий соннинг абсолют қиймати қуйидаги хоссаларга эга:

1°. $\forall x\in R$ сон учун

$$|x|\geqslant 0,\ |x|=|-x|,\ x\leqslant|x|,\ -x\leqslant|x|$$

муносабатлар ўринлидир.

2°. Ушбу

$$|x|<a \Rightarrow -a<x<a,\ (a>0)$$
$$|x|\leqslant a \Leftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a$$

муносабатлар ўринлидир.

3°. Ушбу

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|,$$
$$|x-y|\geqslant||x|-|y||,$$
$$|x\cdot y|=|x|\cdot|y|,$$
$$\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}\ (y\neq 0).$$

муносабатлар ўринлидир.

4-§. СОНЛИ ТЎПЛАМЛАРНИНГ ЧЕГАРАЛАРИ

Элементлари ҳақиқий сонлардан иборат тўплам **сонли тўплам** деб аталади. Масалан,

$$\{x: x\in R,\ a\leqslant x\leqslant b\}=[a, b], \quad (1)$$
$$\{x: x\in R,\ a<x<b\}=(a, b), \quad (2)$$
$$\{x: x\in R,\ a\leqslant x<b\}=[a, b), \quad (3)$$
$$\{x; x\in R,\ a<x\leqslant b\}=(a, b] \quad (4)$$

тўпламлар сонли тўпламлардир. (1) тўплам **сегмент** ёки **кесма,** (2) тўплам **интервал,** (3) ва (4) тўпламлар **ярим интерваллар** деб аталади.

Бирор E тўплам ($E \subset R$) берилган бўлсин.

8-таъриф. *Агар шундай M сон (m сон) мавжуд бўлсаки, $\forall x \in E$ учун $x \leqslant M$ ($x \geqslant m$) тенгсизлик бажарилса, E тўплам юқоридан (қуйидан) чегараланган дейилади.*

9-таъриф. *Агар $\forall M$ сон ($\forall m$ сон) олинганда ҳам шундай $x_0 \in E$ топилсаки $x_0 > M$ ($x_0 < m$) тенгсизлик бажарилса, E тўплам юқоридан (қуйидан) чегараланмаган дейилади.*

10-таъриф. *Агар E тўплам ҳам қуйидан, ҳам юқоридан чегараланган бўлса, E тўплам чегараланган дейилади.*

1-теорема. **Ҳар қандай юқоридан чегараланган тўплам учун уни юқоридан чегараловчи сонлар ичида энг кичиги мавжуд.**

11-таъриф. *Юқоридан чегараланган E тўплам учун уни юқоридан чегараловчи сонларнинг энг кичиги тўпламнинг аниқ юқори чегараси дейилади ва* $\sup E$ *каби белгиланади.*

Равшанки,

$$\sup E = a \Longleftrightarrow \begin{cases} (1) & \forall x \in E \ \text{учун}\ x \leqslant a, \\ (2) & \forall \varepsilon > 0 \ \text{учун}\ \exists x_0 \in E,\ x_0 > a - \varepsilon. \end{cases}$$

2-теорема. **Ҳар қандай қуйидан чегараланган тўплам учун уни қуйидан чегараловчи сонлар орасида энг каттаси мавжуд.**

12-таъриф. *Қуйидан чегараланган E тўплам учун уни қуйидан чегараловчи сонларнинг энг каттаси тўпламнинг аниқ қуйи чегараси деб аталади ва* $\inf E$ *каби белгиланади.*

Равшанки,

$$\inf E = b \Longleftrightarrow \begin{cases} (1) & \forall x \in E \ \text{учун}\ x \geqslant b \\ (2) & \forall \varepsilon > 0 \ \text{учун}\ \exists x_0 \in E,\ x_0 < b + \varepsilon. \end{cases}$$

4-мисол. Агар E тўплам ($E \subset R$) юқоридан чегараланган бўлиб, $E_1 \subset E$ бўлса, у ҳолда

$$\sup E_1 \leqslant \sup E$$

бўлишини кўрсатинг.

E тўплам юқоридан чегараланган, $E_1 \subset E$ бўлгани сабабли E_1 тўплам ҳам юқоридан чегаралангандир.

Демак, 1-теоремага кўра, $\sup E_1$ ва $\sup E$ лар мавжуд. Уларни мос равишда a ва b билан белгилайлик:

$$\sup E_1 = a, \ \sup E = b.$$

Энди $a \leqslant b$ бўлишини исботлаймиз. Тескарисини фараз қилайлик, яъни $a > b$ бўлсин. У ҳолда ҳар доим $a > \alpha > b$ тенгсизликни қаноатлантирувчи α рационал сонни топиш мумкин. $a = \sup E_1$ бўлгани учун, шундай $a^* \in E_1$ мавжудки, $a^* > \alpha$, демак, $a^* > b$ бўлади. Аммо $a^* \in E_1$ ва $E_1 \subset E$ бўлгани учун $a^* \leqslant b$. Шундай қилиб, $b < a^* \leqslant b$ тенгсизликларга эга бўлдик. Бу эса $\alpha > b$ тенгсизликка зид. Демак, $a \leqslant b$, яъни $\sup E_1 \leqslant \sup E$ бўлади.

Мисол ва масалалар

11. $\sqrt{3}$ сонни аниқловчи кесим тузинг.

12. Ушбу $x^2 = 2$ тенглама рационал сонлар тўпламида ечимга эга эмаслигини кўрсатинг.

13. Кесим ёрдамида $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$ эканини кўрсатинг.

14. Кесим ёрдамида $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ эканини кўрсатинг.

15. Кесим ёрдамида $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ бўлишини кўрсатинг.

16. Ушбу $x^5 = 3$ тенгламани қаноатлантирувчи ҳақиқий соннинг мавжудлигини кўрсатинг.

Берилган A ва B тўпламларга кўра $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ тўпламларни топинг.

17. $A = \{x \in R\colon\ x^2 - 5x + 6 \leqslant 0\}$,
$B = \{x \in R : 2x^2 - 5x < 0\}$.

18. $A = \{x \in R : |x| + |x - 1| \leqslant 3\}$,
$B = \{x \in R : x^2 - 5|x| + 6 < 0\}$.

19. $A = \{(x, y) \in R \times R\colon\ |x| + |y| \leqslant 1\}$,
$B = \{(x, y) \in R \times R\colon\ x + y \geqslant 1\}$.

20. $A = \{(x, y) \in R \times R\colon\ xy \leqslant 0\}$,
$B = \{(x, y) \in R \times R\colon\ y \geqslant x^2\}$.

21. $A = \{x \in R\colon\ 1 < |x - 3| \leqslant 2\}$,
$B = \{x \in R\colon\ 2|x| < 3\}$.

22. $A = \{(x, y) \in R \times R\colon\ x^3 > y^3\}$,
$B = \{(x, y) \in R \times R\colon\ x^2 > y^2\}$.

23. $A = \{(x, y) \in R \times R\colon\ \sin(x - y) = 0\}$,
$B = \{(x, y) \in R \times R\colon\ \cos(x + y) = 0\}$.

24. $A = \{(x, y) \in R \times R\colon\ |\cos xy| \geqslant 1\}$,
$B = \{(x, y) \in R \times R : |\cos xy| \leqslant 1\}$.

25. $A = \{(x, y) \in R \times R\colon\ x^2 + y^2 = 0\}$,
$B = \{(x, y) \in R \times R\colon\ x^2 - y^2 = 0\}$.

26. Агар $A \subset B$ бўлса, $\inf A \geqslant \inf B$ эканини кўрсатинг.

27. $A=\{x\}$ ва $B=\{y\}$ ҳақиқий сонлар тўплари берилган бўлиб, $\{x+y\}$ тўплам эса $\{x+y: x\in A,\ y\in B\}$ йиғиндилардан иборат тўплам бўлсин. Унда

$$\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\},$$
$$\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$$

бўлишини исботланг.

28. $A=\{x\}$ ва $B=\{y\}$ манфий бўлмаган ҳақиқий сонлар тўпламлари берилган бўлиб, $\{x\cdot y\}$ тўплам эса $\{x\cdot y: x\in A,\ y\in B\}$ кўпайтмалардан иборат тўплам бўлсин. Унда

$$\sup\{xy\}=\sup\{x\}\cdot\sup\{y\},$$
$$\inf\{xy\}=\inf\{x\}\cdot\inf\{y\}$$

бўлишини исботланг.

29. $A=\{x\}$ ҳақиқий сонлар тўплами берилган бўлиб, $\{-x\}$ тўплам $-x$ сонлардан $(x\in A)$ иборат тўплам бўлсин. Унда

$$\sup\{-x\}=-\inf\{x\},$$
$$\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$$

бўлишини кўрсатинг.

30. Ушбу

$$\left\{\frac{m}{n}\right\}=\left\{\frac{m}{n}: m\in N,\ n\in N,\ m<n\right\}$$

тўпламнинг аниқ юқори чегараси $\sup\left\{\frac{m}{n}\right\}$ ва аниқ қуйи чегараси $\inf\left\{\frac{m}{n}\right\}$ ларни топинг.

II боб
СОНЛАР КЕТМА-КЕТЛИГИ ВА УНИНГ ЛИМИТИ

1-§. СОНЛАР КЕТМА-КЕТЛИГИ ТУШУНЧАСИ

Фараз қилайлик, f ҳар бир натурал сон $n\in N$ га бирор ҳақиқий $x_n\in R$ сонни мос қўювчи акслантириш бўлсин:

$$f: n\to x_n.$$

Бу акслантириш қийматларидан тузилган

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \tag{1}$$

ифода ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги (қисқача сонлар кетма-кетлиги) дейилади ($\{x_n\}$ кўринишда белгиланади).

x_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ сонлар (1) кетма-кетликнинг ҳадлари дейилади.

Мисоллар:

1) $x_n=\frac{1}{n}: 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$

2) $y_n=(-1)^n: -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots,\ (-1)^n,\ \ldots$

3) $z_n=\frac{(-1)^n}{n}: -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{(-1)^n}{n},\ \ldots$

4) $u_n=1: 1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \ldots$

1-таъриф. *Агар шундай ўзгармас M сони мавжуд бўлсаки, $\forall n\in N$ учун $x_n\leqslant M$ $(x_n\geqslant M)$ бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ кетма-кетлик юқоридан (қуйидан) чегараланган дейилади.*

Бу таърифни қисқача

$$\exists M\in R,\ \forall n\in N: x_n\leqslant M\ \ (x_n\geqslant M)$$

каби ифодалаш мумкин. Масалан,

$$-1,\ -2,\ -3,\ \ldots,\ -n,\ \ldots$$

кетма-кетлик юқоридан,

$$1,\ 4,\ 9,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots$$

кетма-кетлик эса қуйидан чегаралангандир.

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳам қуйидан, ҳам юқоридан чегараланган бўлса, у чегараланган кетма-кетлик дейилади.

2-таъриф. *Агар шундай ўзгармас $M>0$ сон мавжуд бўлсаки, $\forall n\in N$ учун $|x_n|\leqslant M$ бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ кетма-кетлик чегараланган дейилади.*

Бу таърифни қисқача

$$\exists M>0,\ \forall n\in N,\ |x_n|\leqslant M$$

каби ифодалаш мумкин. Масалан, ушбу

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

кетма-кетлик чегараланган кетма-кетликдир.

1-мисол. Ушбу

$$\frac{2}{1!},\ \frac{4}{2!},\ \frac{8}{3!},\ \ldots,\ \frac{2^n}{n!},\ \ldots$$

кетма-кетликнинг юқоридан чегараланганлигини исботланг.

Бу кетма-кетликнинг n-ва $(n+1)$-ҳадлари

$$x_n = \frac{2^n}{n!}, \quad x_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

учун

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2}$$

тенглик ўринли бўлади. Агар ихтиёрий натурал n $(n \geqslant 1)$ сон учун $\frac{n+1}{2} \geqslant 1$ эканини эътиборга олсак, унда

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} \geqslant 1 \Rightarrow x_n \geqslant x_{n+1}$$

бўлишини кўрамиз. Демак,

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \ldots$$

Бундан эса ихтиёрий $n \geqslant 1$ учун

$$x_n \leqslant x_1 = 2$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, шундай M сони, яъни $M = 2$ сон топилдики, $\forall\, n \in N$ учун $x_n = \frac{2^n}{n!} \leqslant 2$ бўлди. Бу эса берилган кетма-кетлик юқоридан чегараланганлигини билдиради. $x_n \geqslant 0$ эканлигини назарга олсак, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чегараланганлигини кўрамиз.

2-мисол. Ушбу

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \ldots,\ \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ та илдиз}},\ \ldots \qquad (2)$$

кетма-кетликнинг чегараланганлигини исботланг.

Равшанки, $x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ та илдиз}}$ бўлиб, $\forall\, n \in N$ учун $x_n \geqslant \sqrt{2}$ бўлади. Бу кетма-кетликнинг қуйидан чегараланганлигини билдиради.

Агар

$$2 = \sqrt{2+2} > \sqrt{2+\sqrt{2}} = x_2,$$

$$2 = \sqrt{2+\sqrt{2+2}} > \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = x_3,$$

$$2 = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+2}}}}_{(n-1) \text{ та илдиз}} >$$

$$> \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ та илдиз}} = x_n$$

бўлишини эътиборга олсак, математик индукция усулидан фойдаланиб $\forall\, n \in N$ учун $x_n < 2$ эканини аниқлаймиз. Шундай қилиб, (2) кетма-кетликнинг ҳам қуйидан, ҳам юқоридан чегараланганлиги кўрсатилди. Демак, берилган кетма-кетлик чегаралангандир.

3-мисол. Ушбу $\{x_n\} = \{\sqrt{n}\}$:

$$1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \ldots,\ \sqrt{n},\ \ldots$$

кетма-кетликнинг юқоридан чегараланмаганлигини кўрсатинг.

Ихтиёрий мусбат M сонни олайлик. Бу сонга кўра $n_0 = [M+1]^2$ олинса, унда

$$x_{n_0} = \sqrt{n_0} = \sqrt{[M+1]^2} = [M+1] > M \qquad (3)$$

бўлади. Бу эса $\{\sqrt{n}\}$ кетма-кетликнинг юқоридан чегараланмаганлигини билдиради.

4-мисол. Ушбу

$$\{x_n\} = \left\{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$$

кетма-кетликнинг юқоридан чегараланмаганлигини исботланг.

Равшанки,

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Демак,

$$x_n \geqslant \sqrt{n}.$$

Юқоридаги (3) муносабатдан фойдалансак, ҳар қандай M учун шундай $n_0 \in N$ мавжудки, бу n_0 учун

$$x_{n_0} > M$$

бўлади.

Демак,

$$M > 0,\ \exists\, n_0 \in N : x_{n_0} \geqslant \sqrt{n_0} > M.$$

Бу эса берилган кетма-кетликнинг юқоридан чегараланмаганлигини билдиради.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги кетма-кетликларнинг чегараланганлигини исботланг:

1. $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$
2. $x_n = \sqrt{n^2 + (n-1)\sin n} - n.$
3. $x_n = \log_{(n+1)} 2.$
4. $x_n = \frac{\log_2 n}{n}.$
5. $x_n = \frac{n}{4 + n^2}.$
6. $x_n = \frac{n^2}{2^n}.$
7. $x_n = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\,n},\ (n \geqslant 2).$
8. $x_n = \sin 1 + \frac{\sin 2}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{\sin n}{(n-1)\,n},\ (n \geqslant 2).$
9. $x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha},\ (\alpha \geqslant 2).$
10. $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$
11. $x_n = \underbrace{\sin \sin \ldots \sin}_{n\ \text{та}} x.$

Қуйидаги кетма-кетликларнинг чегараланмаганлигини исботланг:

12. $x_n = \frac{3^n}{n^3}.$
13. $x_n = (-1)^n\, n.$
14. $x_n = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{агар } n \text{ жуфт бўлса,} \\ \frac{1}{n}, & \text{агар } n \text{ тоқ бўлса.} \end{cases}$
15. $x_n = \begin{cases} \sqrt[3]{n}, & \text{агар } n = k^3 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } n \neq k^3 \text{ бўлса.} \end{cases}$

16. $x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha},\ (\alpha \leqslant 1).$
17. $x_n = \log_2 (n^2 + n).$

18. Агар $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ чегараланган кетма-кетликлар бўлса, у ҳолда $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n\, y_n\}$ кетма-кетликларнинг чегараланган эканлигини кўрсатинг.

19. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар чегараланмаган бўлса, $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$ кетма-кетликлар ҳақида нима дейиш мумкин?

20. Агар $\{x_n\}$ чегараланган, $\{y_n\}$ эса чегараланмаган кетма-кетлик бўлса, у ҳолда $\{x_n + y_n\}$ кетма-кетликнинг чегараланмаганлигини кўрсатинг.

21. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун $x_n + x_{n+1}$ йиғинди чегараланган бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чегараланган бўлиши шартми?

22. Агар $\{x_n\}$ чегараланган кетма-кетлик бўлса, у ҳолда $y_n = \frac{x_1 + x + \ldots + x_n}{n}$ кетма-кетлик ҳам чегараланган эканлигини кўрсатинг. Тескариси ўринлими?

23. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун $\{x^3_n - x_n\}$ айирма чегараланган бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг чегараланган бўлишини кўрсатинг.

24. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун $x_n^2 + \frac{1}{x_n}$ йиғинди чегараланган бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ ва $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ кетма-кетликларнинг чегараланган бўлишини кўрсатинг.

25. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун $x_n > 0$ ва $x_{n+1} \leqslant x_n(1 - x_n)$, $n \geqslant 1$ шартлар бажарилса, $\{nx_n\}$ кетма-кетликнинг чегараланган бўлишини кўрсатинг.

Фараз қилайлик,

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

кетма-кетлик берилган бўлсин.

3-таъриф. *Агар* $\forall\, n \in N$ *учун*

$$x_n \leqslant x_{n+1}\ (x_n < x_{n+1})$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ *ўсувчи (қатъий ўсувчи) кетма-кетлик дейилади.*

Агар $\forall\, n \in N$ учун

$$x_n \geqslant x_{n+1}\,(x_n > x_{n+1})$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ камаювчи (қатъий камаювчи) кетма-кетлик дейилади.

4-таъриф. *Ўсувчи ва камаювчи кетма-кетликлар монотон кетма-кетликлар дейилади.*

Масалан

$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ \ldots,$ ўсувчи,

$2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots,\ 2^n\ \ldots,$ қатъий ўсувчи,

$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots,$ қатъий камаювчи,

$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n},\ \ldots$ камаювчи

кетма-кетликлар бўлади.

Юқоридаги таърифдан бевосита, $\forall\, n \in N$ учун

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} \leqslant 1\ (x_n > 0)\ \text{ёки}\ x_n - x_{n+1} \leqslant 0$$

бўлганда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ўсувчи,

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} \geqslant 1\ (x_n > 0)\ \text{ёки}\ x_n - x_{n+1} \geqslant 0$$

бўлганда эса кетма-кетликнинг камаювчи бўлиши келиб чиқади.

5-мисол. Ушбу $\{x_n\} = \left\{\frac{n}{2^n}\right\}$:

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{2^2},\ \ldots,\ \frac{n}{2^n},\ \ldots$$

кетма-кетликнинг камаювчи эканлигини кўрсатинг.

$$x_n = \frac{n}{2^n}\ \text{ва}\ x_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

лар учун

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)\,2^n}{2^{n+1}\,n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

бўлади. Бу тенгсизликдан эса

$$x_n \geqslant x_{n+1}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\forall\, n \in N$ учун

$$x_n \geqslant x_{n+1}$$

бўлади. Бу эса берилган кетма-кетликнинг камаювчи эканини билдиради.

6-мисол. Ушбу

$$\{x_n\} = \left\{1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n-1)}\right\}\ (n \geqslant 2)$$

кетма-кетликнинг ўсувчи эканлигини кўрсатинг.

Берилган кетма-кетликнинг

$$x_n = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n-1)},$$

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n+1)}$$

ҳадларини олиб, уларнинг айирмаси

$$x_{n+1} - x_n$$

ни қараймиз:

$$x_{n+1} - x_n = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\,n} + \frac{1}{n(n+1)} - \left(1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\,n}\right) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Равшанки, $\forall\, n \in N$ учун

$$\frac{1}{n(n+1)} > 0.$$

Демак, $\forall\, n \in N$ учун

$$x_{n+1} - x_n > 0 \Leftrightarrow x_{n+1} > x_n$$

бўлади ва бу берилган кетма-кетликнинг ўсувчи эканини билдиради.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги кетма-кетликларнинг ўсувчи ёки камаювчи бўлишини аниқланг:

26. $x_n = \frac{3^n}{n!}$.

27. $x_1 = 1,\quad x_{n+1} = 1 - \frac{1}{4x_n}\ (n \geqslant 1)$.

28. $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),\quad x_1 > 0,\ a > 0.$

29. $x_{n+1}=x_n(2-x_n),\ 0<x_n<1\ (n\geqslant 1)$.

30. n_0 ни қандай танланса, $n\geqslant n_0$ лар учун қуйидаги кетма-кетликлар монотон бўлади:

а) $x_n=\frac{3^n}{n^5}$; б) $x_n=\frac{n^2}{2^n}$; в) $x_n=\frac{n!}{n^n}$.

Қуйидаги кетма-кетликларнинг монотон ва чегараланганлигини кўрсатинг:

31. а) $x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n+1}$;

б) $y_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$.

32. $x_1=9,\ x_{n+1}=(x_n-3)^2$ кетма-кетликнинг ўсувчи эканини исботланг.

2-§. СОНЛАР КЕТМА-КЕТЛИГИНИНГ ЛИМИТИ

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \tag{1}$$

сонлар кетма-кетлиги ҳамда бирор a сон ($a\in R$) берилган бўлсин.

5-таъриф. *Агар $\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам шундай натурал $n_0=n_0(\varepsilon)$ сон топилсаки, барча $n>n_0$ натурал сонлар учун*

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи дейилади, a сон эса $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити деб аталади ва

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \quad \text{ёки} \quad x_n\to a$$

каби белгиланади.

Бу таърифни қисқача

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,n_0=n_0(\varepsilon)\in N,\ \forall\,n>n_0\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon$$

каби ифодалаш мумкин.

7-мисол. Ушбу

$$\{x_n\}=\left\{\frac{n}{n+1}\right\}:\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \ldots,\ \frac{n}{n+1},\ \ldots$$

кетма-кетликнинг лимити $a=1$ бўлишини кўрсатинг.

Ихтиёрий мусбат ε сонни оламиз. Бу $\varepsilon>0$ сонга кўра $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ дейилса, у ҳолда $\forall\,n>n_0$ учун

$$|x_n-a|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n_0+1}<\varepsilon$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

8-мисол. Ушбу

$$\{x_n\}=\left\{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right\}:\ -1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \ldots,\ \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},\ \ldots$$

кетма-кетликнинг лимити ноль бўлишини таърифга асосан исбот қилинг.

Ихтиёрий мусбат ε сонни олайлик. Унда бу $\varepsilon>0$ сонга кўра шундай натурал $n_0\,(n_0=n_0(\varepsilon)\in N)$ сон топилишини кўрсатиш керакки, $n>n_0$ бўлган барча натурал n сонлар учун (демак, топилган n_0 сондан кейин келадиган натурал сонлар учун)

$$|x_n-0|=|x_n|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилсин. Юқорида айтилган n_0 сонни топиш, одатда $|x_n|<\varepsilon$ тенгсизликни ечиш орқали амалга оширилади:

$$|x_n|=\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right|<\varepsilon.$$

Равшанки,

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{\varepsilon}<\sqrt{n}\Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Демак, n_0 натурал сон сифатида $\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]+1=n_0$ олинса, унда $\forall\,n>n_0$ учун

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-0\right|=\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$$

бўлади. Кетма-кетлик лимити таърифига биноан

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}=0$$

бўлади.

Эслатма. Шуни таъкидлаш лозимки, кетма-кетлик лимити таърифидаги берилган $\varepsilon > 0$ га кўра топиладиган $n_0 = n_0(\varepsilon)$ натурал сонлар (яъни $\forall\, n > n_0$ учун $|x_n - a| < \varepsilon$ тенгсизлик бажариладиган) жуда кўп бўлади. Улардан бирини олиш етарлидир.

6-таъриф. *Агар*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ ни чексиз кичик миқдор деб аталади.

Масалан:

$$1)\ \{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\};\quad 2)\ \{x_n\} = \left\{-\frac{1}{n}\right\};\quad 3)\ \{x_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$$

лар чексиз кичик миқдорлар бўлади.

7-таъриф. *Агар $\forall\, E > 0$ сон олинганда ҳам шундай натурал n_0 сон топилсаки, $\forall\, n > n_0$ учун*

$$|x_n| > E$$

бўлса, $\{x_n\}$ ни чексиз катта миқдор деб аталади.

Агар $\forall\, E > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ топилсаки, $\forall\, n > n_0$ учун $x_n > E$ $(x_n < -E)$ бўлса, унда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити $+\infty\,(-\infty)$ деб олинади ва $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty)$ каби белгиланади.

9-мисол. Ушбу

$$\{x_n\} = \{2^{\sqrt{n}}\}:\ 2,\ 2^{\sqrt{2}},\ 2^{\sqrt{3}},\ \ldots,\ 2^{\sqrt{n}},\ \ldots$$

кетма-кетликнинг лимити $+\infty$ эканини кўрсатинг.

Ихтиёрий $E > 0$ сонни олайлик. Унда бу сонга кўра шундай $n_0 \in N\ (n_0 = n_0(E))$ сон топилишини кўрсатиш кераки, барча $n > n_0$ учун

$$x_n = 2^{\sqrt{n}} > E$$

тенгсизлик бажарилсин.

Олдинги мисолни ечиш жараёнида айтганимиздек, n_0 сон

$$2^{\sqrt{n}} > E \tag{4}$$

тенгсизликни ечиш орқали аниқланади.

Равшанки,

$$2^{\sqrt{n}} > E \Leftrightarrow \log_2 2^{\sqrt{n}} > \log_2 E \Rightarrow \sqrt{n} > \log_2 E.$$

$0 < E \leqslant 1$ бўлганда, $n_0 = n_0(E) = 1$ дейилса, $E > 1$ бўлганда, $n_0 = [\log_2^2 E]$ дейилса, унда $\forall\, n > n_0$ учун ҳар доим (4) тенгсизлик бажарилади:

$$x_n = 2^{\sqrt{n}} > E.$$

Бу эса

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 2^{\sqrt{n}} = +\infty$$

эканини билдиради.

$\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар берилган бўлсин. Қуйидаги

$$x_1 + y_1,\quad x_2 + y_2,\ \ldots,\ x_n + y_n,\ \ldots$$
$$x_1 - y_1,\quad x_2 - y_2,\ \ldots,\ x_n - y_n,\ \ldots$$
$$x_1 \cdot y_1,\quad x_2 \cdot y_2,\ \ldots,\ x_n \cdot y_n,\ \ldots$$
$$\frac{x_1}{y_1},\ \frac{x_2}{y_2},\ \ldots,\ \frac{x_n}{y_n},\ \ldots\quad (y_n \neq 0,\ n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

кетма-кетликлар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларнинг мос равишда йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва нисбати деб аталади ва

$$\{x_n + y_n\},\quad \{x_n - y_n\},\quad \{x_n \cdot y_n\},\quad \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$$

каби белгиланади.

3-§. ЛИМИТГА ЭГА БЎЛГАН КЕТМА-КЕТЛИКЛАР ҲАҚИДА ТЕОРЕМАЛАР

Айтайлик, $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар берилган бўлиб, улар чекли лимитга эга бўлсин:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\quad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

У ҳолда:

$$1)\ \lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b;$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b;$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}\ \ (b \neq 0)$$

бўлади.

4) агар $\forall\, n \in N$ учун $x_n \leqslant y_n$ бўлса, $a \leqslant b$ бўлади.

Эслатма. Агар $\forall\, n \in N$ учун $x_n < y_n$ бўлса, $a < b$ бўлиши шарт эмас. Масалан, $x_n = \dfrac{1}{n+1}$, $y_n = \dfrac{1}{n}$ кетма-кетликлар учун $x_n < y_n$ ва $a = b = 0$.

Лимитларга доир мисол ва масалалар кўпинча 1) — 3) қоидалар ёрдамида ечилади.

10-мисол. Ушбу $\{x_n\} = \left\{\frac{5\sqrt{n}}{n+1}\right\}$ кетма-кетликнинг лимитини топинг.

Бу кетма-кетликнинг лимити қуйидагича топилади:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5\sqrt{n}/n}{(n+1)/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{\sqrt{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 0.$$

Бу ерда биз фойдаланган $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{\sqrt{n}} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ муносабатлар бевосита лимит таърифига кўра исбот қилинади.

11-мисол. Ушбу $\{x_n\} = \{\sqrt[n]{n}\}$;

$$1,\ \sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \ldots,\ \sqrt[n]{n},\ \ldots$$

кетма-кетликнинг лимитини топинг.

Равшанки, $\forall\ n \geqslant 2$ да $\sqrt[2n]{n} > 1$ бўлади. Агар

$$\alpha_n = \sqrt[2n]{n} - 1 \Rightarrow \sqrt[2n]{n} = 1 + \alpha_n \Rightarrow \sqrt{n} = (1+\alpha_n)^n$$

дейилса, сўнг Бернулли тенгсизлигидан фойдаланилса (Азларов Т., Мансуров Х. «Математик анализ» I жилди, 66-бетга қаранг), унда

$$\sqrt{n} = (1+\alpha_n)^n > 1 + n\alpha_n > n\alpha_n$$

бўлишини топамиз. Кейинги тенгсизликдан

$$\alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

бўлиши келиб чиқади. Натижада ушбу

$$1 < \sqrt[n]{n} < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \qquad (5)$$

тенгсизликка келамиз. Агар

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = 1$$

эканини ҳисобга олсак, у ҳолда 5) ва юқоридаги 4) қоидага кўра

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

бўлишини топамиз.

5) $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ ва $\{z_n\}$ кетма-кетликлар берилган бўлсин. Агар $\forall\ n \in N$ учун $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$$

бўлса, у ҳолда $\{y_n\}$ кетма-кетликнинг лимити мавжуд бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a$$

бўлади.

12-мисол. Ушбу $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\cos n\right\}$ кетма-кетликнинг лимитини топинг.

Равшанки, бир томондан, $x_n = \frac{1}{n}$ cos, n учун

$$-\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}\cos n \leqslant \frac{1}{n}$$

тенгсизлик бажарилади, иккинчи томондан,

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Унда $\{x_n\} = \left\{\frac{\cos n}{n}\right\}$ кетма-кетлик ҳам лимитга эга бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos n = 0$$

бўлади.

6) Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи бўлиб, юқоридан чегараланган бўлса, унинг чекли лимити мавжуд бўлади.

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик камаювчи бўлиб, қуйидан чегараланган бўлса, унинг чекли лимити мавжуд бўлади.

13-мисол. Биринчи ҳади $x_0 = 2$, кейинги ҳадлари эса $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$ қоида ёрдамида аниқланадиган кетма-кетликнинг лимити мавжуд эканлигини кўрсатинг ва шу лимитни топинг.

Аввало $x_0 = 2$ ва $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$ $(n \geqslant 0)$ бўлганлигидан $x_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ бўлиши равшан.

Энди $x_{n+1} - x_n$ айирмани қараймиз:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n - x_{n-1} + \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_n - x_{n-1} + \frac{x_{n-1} - x_n}{x_{n-1}x_n}\right) \leqslant \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1} +$$

$$+ x_{n-1} - x_n) = 0.$$

Демак,

$$x_{n+1} - x_n \leqslant 0 \Rightarrow x_n \geqslant x_{n+1}$$

тенгсизлик бажарилиб, бу берилган кетма-кетликнинг камаювчи бўлишини билдиради. Шундай қилиб, берилган кетма-кетлик камаювчи ва қуйидан чегараланган экан. Унда кетма-кетлик чекли лимитга эга бўлади. Бу лимитни c билан белгилаб

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$$

тенгликда лимитга ўтсак, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \Rightarrow c = \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{c}\right) \Rightarrow c^2 = 1$$

бўлиши келиб чиқади. Яқинлашувчи кетма-кетликларнинг хоссаларига кўра $x_n > 0$ бўлгани учун $c = 1$, яъни

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$$

муносабатга эга бўламиз.

7) $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиши учун, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон мавжуд бўлиб, $\forall n > n_0$ ва $\forall m > n_0$ ларда $(n \neq m)$

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли (Коши критерийси).

14-мисол. Ушбу

$$\{x_n\} = \left\{\frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}\right\}$$

кетма-кетликнинг яқинлашувчи эканини исботланг.

Берилган кетма-кетлик учун $(n > m)$

$$x_n = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n!}{n(n+1)},$$

$$x_m = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos m!}{m(m+1)}$$

бўлиб,

$$|x_n - x_m| = \left|\frac{\cos(m+1)!}{(m+1)(m+2)} + \frac{\cos(m+2)!}{(m+2)(m+1)} + \ldots +\right.$$

$$\left.+ \frac{\cos n!}{n(n+1)}\right| \leqslant \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) + \left(\frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3}\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{m+1}$$

бўлади.

Агар $\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ дейилса, у ҳолда $n > m > n_0$ бўлганда

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$$

бўлади. Демак, Коши критерийсига кўра берилган кетма-кетлик чекли лимитга эга.

15-мисол. Ушбу

$$\{x_n\} = \left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right\}$$

кетма-кетликнинг яқинлашувчи эмаслигини кўрсатинг.

Коши критерийсига кўра бу кетма-кетликнинг яқинлашувчи эмаслигини исботлаш учун шундай $\varepsilon_0 > 0$ сон ва ихтиёрий натурал n учун шундай m_0, $n_0 \in N$ топилиб, $n_0 > n$ ва $m_0 > n$ бўлганда

$$|x_{n_0} - x_{m_0}| \geqslant \varepsilon_0$$

бажарилишини кўрсатиш керак.

$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}$, $n_0 = n + 1$, $m_0 = 2(n+1)$ (равшанки $n_0 > n$, $m_0 > n$) бўлганда

$$|x_{2(n+1)} - x_n| = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2(n+1)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{n+1}{2(n+1)} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0$$

бўлади. Демак, берилган кетма-кетлик лимитга эга эмас.

Мисол ва масалалар

Сонлар кетма-кетлиги лимити таърифига кўра кўрсатилган сонлар берилган кетма-кетликларнинг лимити эканлигини исботланг:

33. $x_n = \frac{(-1)^n}{2n+5}, \quad a = 0.$

34. $x_n = \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}, \quad a = 0.$

35. $x_n = \frac{3^n}{n!}, \quad a = 0.$

36. $x_n = \frac{\log_2 n}{\sqrt{n}}, \quad a = 0.$

37. $x_n = \frac{n+1}{n}, \quad a = 1.$

38. $x_n = \frac{2n^2+3n+1}{4n^2-5n+6}, \quad a = \frac{1}{2}.$

39. $x_n = \sqrt[n]{2}, \quad a = 1.$

Қуйидаги сонлар кетма-кетликларининг лимитини топинг:

40. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{4n+1}{n}}.$

41. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^3+n+1} - \sqrt{n^2-1}\right).$

42. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4+n+1} - \sqrt{n^4+1}\right).$

43. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{13}+(n+2)^{10}}{(n-1)^{13}+1}.$

44. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+2^n+\cos n}{2^n+\sin n}.$

45. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n}, \quad (a \geqslant 0).$

46. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n+3b^n}{5a^n+7b^n}, \quad (a>0,\ b>0).$

47. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right).$

48. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \ldots + \frac{1}{4n^2-1}\right).$

49. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)}{n^3}.$

50. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\right).$

51. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2\cdot 2+\ldots+n\cdot a^n}{na^{n+2}}, \quad (a>1).$

52. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+n+1}.$

53. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+5^n}.$

54. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n\cdot 3^0 + 2^{n-1}\cdot 3 + \ldots + 2^0\cdot 3^n}.$

55. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^\pi + 2^\pi + \ldots + n^\pi}.$

56. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right).$

57. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}\right).$

Коши критерийсидан фойдаланиб қуйидаги кетма-кетликларнинг чекли лимитга эга бўлишини кўрсатинг:

58. $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}.$

59. $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$

60. $x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$

61. $x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$ учун $\alpha > 1$ бўлса яқинлашувчи, $\alpha \leqslant 1$ бўлса узоқлашувчи эканлигини кўрсатинг.

62. $\{x_n\}$ кетма-кетлик Коши критерийсини қаноатлантирса, $\{x_n^2\}$, $\{\sqrt{|x_n|}\}$ лар ҳам Коши критерийсини қаноатлантиришини кўрсатинг.

63. Агар $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ кетма-кетликлар Коши критерийсини қаноатлантирса, $\{x_n+y_n\}$ $(n \geqslant 1)$, $\{x_n y_n\}$ ҳам Коши критерийсини қаноатлантиришини кўрсатинг.

64. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун $|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2^n}$ бўлса, $\{x_n\}$ Коши критерийсини қаноатлантиришини кўрсатинг.

4-§. КЕТМА-КЕТЛИКНИНГ ҚУЙИ ВА ЮҚОРИ ЛИМИТЛАРИ

Фараз қилайлик, ихтиёрий

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

кетма-кетлик берилган бўлсин. Бу кетма-кетлик ҳадларидан тузилган ушбу $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ $(n_1 < \ldots \leq n_k < \ldots,$ $n_k \in N,\ k = 1, 2, \ldots,)$ кетма-кетлик берилган $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг **қисмий кетма-кетлиги** деб аталади.

$\{x_n\}$ кетма-кетликнинг яқинлашувчи қисмий кетма-кетлигининг лимити берилган **кетма-кетликнинг қисмий лимити** деб аталади.

$\{x_n\}$ кетма-кетлик қисмий лимитларининг энг каттаси берилган **кетма-кетликнинг юқори лимити** деб аталади ва

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

каби белгиланади.

$\{x_n\}$ кетма-кетлик қисмий лимитларининг энг кичиги берилган **кетма-кетликнинг қуйи лимити** деб аталади ва

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

каби белгиланади.

Кетма-кетликнинг юқори ва қуйи лимитларини қуйидагича ҳам ифодалаш мумкин:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = L \Longleftrightarrow \begin{cases} 1^\circ.\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n > n_0 \Rightarrow x_n < L + \varepsilon \\ 2^\circ.\ \forall \varepsilon > 0, \forall N,\ \exists n > N \Rightarrow x_n > L - \varepsilon, \end{cases}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = l \Longleftrightarrow \begin{cases} 1^\circ.\ \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0 \Rightarrow x_n > l - \varepsilon \\ 2^\circ\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall N, \exists n > N \Rightarrow x_n < l + \varepsilon. \end{cases}$$

16- мисол. Ушбу

$$\{x_n\} = \left\{1 + \cos\frac{n\pi}{2}\right\}$$

кетма-кетликнинг қуйи ва юқори лимитларини топинг.

Берилган кетма-кетликнинг

$$\{x_{2m-1}\} \text{ ва } \{x_{2m}\}$$

қисмий кетма-кетликларини қараймиз.

Равшанки,

$$x_{2m-1} = 1 + \cos\frac{(2n-1)\pi}{2} = 1$$

бўлади. Демак, берилган кетма-кетликнинг

$$\{x_{2m-1}\};\quad x_1,\ x_3,\ x_5,\ \ldots,\ x_{2m-1},\ \ldots$$

қисмий кетма-кетлиги лимитга эга ва у 1 га тенг:

$$\lim_{m\to\infty} x_{2m-1} = 1.$$

Энди $\{x_{2m}\}$ қисмий кетма-кетликни қараймиз:

$$x_{2m} = 1 + \cos m\pi.$$

Агар

$$\cos m\pi = \begin{cases} 1, \text{ агар } m = 2k, \\ -1 \text{ агар } m = 2k-1 \end{cases}$$

эканини эътиборга олсак, унда

$$\{x_{2m}\} = \{1 + (-1)^m\} = \{0, 2, 0, 2, \ldots\}$$

бўлишини кўрамиз. $\{x_{2m}\} = \{0, 2, 0, 2, \ldots\}$ қисмий кетма-кетлик яқинлашувчи эмас. Бу кетма-кетликда

$$x_{4k} = 2,\quad x_{4(k-1)} = 0$$

бўлиб, 2 ва 0 сонлари қисмий лимит эканлигини кўрамиз.

Энди

$$\{x_{4k-2}\}:\ x_2,\ x_6,\ x_{10},\ \ldots,\ x_{4k-2},\ \ldots$$

кетма-кетликларни қарайлик.

$\{x_{4k}\}$ кетма-кетлик учун $\forall k \in N$ да

$$x_{4n} < x_{4(k+1)} \text{ ва } x_{4k} < 2$$

бўлади. Демак, $\{x_{4k}\}$ кетма-кетлик ўсувчи ва у юқоридан чегараланган. Унда бу кетма-кетликнинг лимити мавжуд ва

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k} = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{4k}{4k+1}\right) = 2.$$

Шундай қилиб, берилган кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетликлари лимитлари орасида энг каттаси 2, энг кичиги эса 0 га тенг эканлигини кўриш қийин эмас. Демак,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(1 + \cos\frac{n\pi}{2}\right) = 2,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\left(1 + \cos\frac{n\pi}{2}\right) = 0.$$

17- мисол. Агар $\alpha_n = \sup\limits_{\kappa > n}\{x_\kappa\}$ бўлса, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$ эканлиги кўрсатилсин.

Аввало $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$ мавжудлигини кўрсатамиз:

$$\alpha_1 = \sup_{k\geq 1}\{x_k\}, \ldots, \alpha_{n+1} = \sup_{k\geq n+1}\{x_k\}.$$

Бундан кўринадики, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_{n+1} \ldots$, яъни $\{\alpha_n\}$ кетма-кетлик монотон камаювчи экан. У ҳолда чекли ёки чексиз $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$ мавжуд.

1-ҳол. $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha$ бўлиб, α чекли сон бўлсин. У ҳолда $\forall\varepsilon>0$, $n_0 = n_0(\varepsilon)\in N$ топиладики, $\forall n > n_0$ учун $\alpha-\varepsilon < \alpha_n < \alpha+\varepsilon$ бўлади.

$\alpha_n = \sup\limits_{k\geq n} x_k$ экани сабабли

$$\alpha-\varepsilon < \sup_{k\geq n} x_k < \alpha+\varepsilon.$$

Равшанки, барча $n \geq 1$ лар учун

$$x_n \leq \sup_{k\geq n} x_k < \alpha+\varepsilon \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\in N,$$

$$\forall n > n_0, \ x_n < \alpha+\varepsilon \qquad (1)$$

эканлигини кўрамиз.

$\alpha_n = \sup x_k$ сабабли, ўша берилган $\forall\varepsilon>0$ учун шундай $k\geq n$ $k(\varepsilon)\in N$ топиладики, унинг учун

$$x_{k(\varepsilon)} > \alpha_n - \varepsilon$$

бўлади. Аммо, барча $n \geq 1$ лар учун $\alpha_n \geq \alpha$, шу сабабли

$$x_{k(\varepsilon)} > \alpha_n - \varepsilon \geq \alpha - \varepsilon \Rightarrow x_{k(\varepsilon)} > \alpha - \varepsilon. \qquad (2)$$

(1) ва (2) лардан кўринадики,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \alpha = \lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n} x_k.$$

2-ҳол. $\alpha = -\infty$ бўлсин. У ҳолда:

$$\forall E>0, \ \exists n_0 = n_0(E)\in N, \ \forall n>n_0, \ \alpha_n < -E \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sup_{k\geq n}\{x_k\} < -E \Rightarrow x_n < -E.$$

Шу сабабли:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty}\sup_{k\geq n} x_n = -\infty.$$

18-мисол. а) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n) \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$;

б) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)$

эканини кўрсатинг.

$\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларнинг юқори ва қуйи лимитлари чекли сон бўлган ҳоли билан чекланамиз.

Юқорида келтирилган мисолларга асосан:

а) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geq n}\{x_k\} +$

$+ \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geq n}\{y_k\} = \lim\limits_{n\to\infty}(\sup\limits_{k\geq n}\{x_k\} + \sup\limits_{k\geq n}\{y_k\}) \geq$

$\geq \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geq n}\{x_k+y_k\} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\{x_n+y_n\}$;

б) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}[(x_n+y_n)+(-x_n)] \leq$

$\leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n) + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-x_n) =$

$= \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n) - \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n)$.

Бундан: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)$.

19-мисол. Агар $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ мавжуд бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\{y_n\}$ учун

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$$

эканлигини кўрсатинг.

Юқорида келтирилган мисолларга асосан:

а) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n) \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$;

б) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n) \geq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$.

Булардан

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$ экани келиб чиқади.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги кетма-кетликларнинг юқори ва қуйи лимитларини топинг:

65. $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

66. $x_n = n^{(-1)^n}$.

67. $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$.

68. $x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos^2\frac{n\pi}{2}$.

69. $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

70. $x_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$.

71. $x_n = -n[2+(-1)^n]$.

72. $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n(-1)^n + \sin\frac{n\pi}{4}$.

73. $x_n = \sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$.

74. $x_n = \cos^n\frac{2n\pi}{3}$.

Исботланг:

75. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = a$.

76. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-x_n) = -\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

77. $\{x_{n(k)},\ k\geqslant 1\}$, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг ихтиёрий қисмий кетма-кетлиги бўлса, у ҳолда

а) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_{n(k)}$,

б) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_{n(k)} \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$

эканлигини кўрсатинг.

78. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \lim \inf\limits_{k\geqslant n}\{x_k\}$ эканини кўрсатинг.

79. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n^2 = \max\left((\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n)^2, (\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n)^2\right)$

эканини кўрсатинг.

80. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n) \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$

эканини кўрсатинг.

81. Агар $x_n \geqslant 0$, $y_n \geqslant 0$ бўлса, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n\, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n \leqslant$

$\leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n\cdot y_n) \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x\, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$

бўлишини кўрсатинг.

III боб

ФУНКЦИЯ ВА УНИНГ ЛИМИТИ

1-§. ФУНКЦИЯ ТУШУНЧАСИ

X ва Y ҳақиқий сонларнинг бирор тўпламлари бўлсин:

1-таъриф. *Агар X тўпламдаги ҳар бир x сонга бирор қоида ёки қонунга кўра Y тўпламдан битта y сон мос қўйилса, X тўпламда функция берилган (аниқланган) деб аталади ва $f: x\to y$ ёки $y=f(x)$ каби белгиланади.*

Бунда X — функциянинг аниқланиш тўплами (соҳаси), Y — функциянинг ўзгариш тўплами (соҳаси) деб аталади. x — эркли ўзгарувчи (функция аргументи), y эса эрксиз ўзгарувчи (x ўзгарувчининг функцияси) деб аталади.

Масалан: 1) f — ҳар бир ҳақиқий x сонга унинг бутун қисми $[x]$ ни мос қўювчи қоида бўлсин. Демак, $f: x\to[x]$ ёки $y=[x]$ функцияга эга бўламиз. Бу функциянинг аниқланиш тўплами $X=R$, ўзгариш тўплами эса $Y=Z$ бўлади.

2) Ҳар бир рационал сонга 1 ни, ҳар бир иррационал сонга 0 ни мос қўйиш натижасида функция ҳосил бўлади. Уни **Дирихле функцияси** дейилади ва $D(x)$ каби белгиланади:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x\in R \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x\in R \text{ иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

Дирихле функциясининг аниқланиш соҳаси $X=R$, ўзгариш соҳаси $Y=\{0,\ 1\}$ бўлади.

1-мисол. Ушбу

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

$\sqrt{1-x^2}$ ифода каср махражида эканлигини ҳисобга олиб, $1-x^2>0$ муносабатга эга бўламиз, яъни $|x|<1$.

Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси $(-1,\ 1)$ интервалдан иборат.

2-мисол. Ушбу

$$y = \sqrt{\log_{1990}\sin x}$$

функциянинг аниқланиш соҳаси ва функция қийматлари тўпламини топинг.

$\sqrt{\log_{1990}\sin x}$ ифода $\log_{1990}\sin x \geqslant 0$

муносабатини қаноатлантирувчи x ларда маънога эга эканлигини ҳисобга олиб, $\sin x \geqslant 1$ тенгсизликка эга бўламиз.

$\sin x$ функциянинг энг катта қиймати 1 эканидан $\sin x = 1$, яъни $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in Z$ бўлади. Демак, функциянинг аниқланиш соҳаси $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z\right\}$ тўпламдан иборат.

Энди k нинг ҳар бир $k \in Z$ қийматида $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$ бўлгани учун, функциянинг аниқланиш соҳасидан олинган ҳар қандай x да $\log_{1990} \sin x = 0$ бўлади. Шундай қилиб, қаралаётган функциянинг қийматлари тўплами $\{0\}$ тўпламдан иборат.

$y = f(x)$ функция X тўпламда аниқланган бўлсин.

2-таъриф. *Агар шундай ўзгармас M (ўзгармас m) сон топилсаки,* $\forall x \in X$ учун

$$f(x) \leqslant M \ (f(x) \geqslant m)$$

бўлса, $f(x)$ функция X тўпламда юқоридан (қуйидан) чегараланган деб аталади. Агар $f(x)$ функция ҳам юқоридан, ҳам қуйидан чегараланган бўлса, яъни шундай ўзгармас M ва m сонлар топилсаки, $\forall x \in X$ учун

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

бўлса, $f(x)$ функция X тўпламда чегараланган деб аталади.

3-мисол. Ушбу

$$f(x) = 2^{\cos^2 x} + 3 \sin 2x$$

функциянинг чегараланганлигини кўрсатинг. Равшанки, бу функция $R = (-\infty, +\infty)$ да аниқланган;

$$|2^{\cos^2 x} + 3 \sin 2x| \leqslant |2^{\cos^2 x}| + 3|\sin 2x| \leqslant 2 + 3 = 5.$$

Демак, функция R да чегараланган.

Функциянинг юқоридан (қуйидан) чегараланмаганлиги бундай таърифланади.

3-таъриф. *Агар ихтиёрий M (ихтиёрий m) сон олинганда ҳам, шундай $x_0 \in X$ ($x_0' \in X$) сон топилсаки,*

$$f(x_0) > M \ \ (f(x_0') < m)$$

бўлса, $f(x)$ функция X тўпламда юқоридан (қуйидан) чегараланмаган дейилади.

4-мисол. Ушбу $f(x) + x^2$; $x \in (0, +\infty)$ функциянинг юқоридан чегараланмаганлигини кўрсатинг.

Бу функция юқоридан чегараланган бўлсин дейлик, яъни шундай M сони топилиб, барча $x \in (0, +\infty)$ лар учун $x^2 < M$ муносабат ўринли. Бу тенгсизликдан кўринадики, $M > 0$. Энди $x_0 = \sqrt{M} + 1$ сонни қарайлик. Функциянинг бу нуқтадаги қиймати $f(x_0) = x_0^2 = (\sqrt{M} + 1)^2 = M + 2\sqrt{M} + 1$ га тенг.

Фаразимизга кўра $f(x) < M$, $f(x_0)$ эса $M + 2\sqrt{M} + 1$ га тенг бўлиб, у ҳар доим M дан катта. Бу зиддият қаралаётган функциянинг юқоридан чегараланмаганлигини кўрсатади.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг:

1. $f(x) = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}$.
2. $f(x) = \lg(1 - x^2)$.
3. $f(x) = 3 - 2\cos x$.
4. $f(x) = \sqrt{-\log_6(x - x^2)}$.
5. $f(x) = 5^x - 2^{x+1}$.
6. $f(x) = \operatorname{tg}\sqrt{16 - x^2}$.
7. $f(x) = \arcsin x + \sqrt{\frac{2}{\pi x - 1}}$.
8. $f(x) = |x| - 2$.
9. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x| - 2|x-1|}}$.
10. $f(x) = \log_{\cos x} \sin x$.
11. $f(x) = \sqrt{\cos x}$.
12. $f(x) = \ln \cos x$.
13. $f(x) = \arccos(3 - x)$.
14. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{1 - |x|}}$.
15. $f(x) = \sqrt{x^2 - |x| - 2}$.
16. $f(x) = \log_{(x+1)}(x^2 - 3x + 2)$.

17. Аналитик усулда берилган, аниқланиш соҳаси фақат битта сондан иборат функцияга мисол келтиринг.

18. Аналитик усулда берилган, аниқланиш соҳаси $[1, 2]$ сегментнинг нуқталари бўлган функцияга мисол келтиринг.

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳалари ва функция қийматлари тўпламларини топинг:

19. $f(x)=\log_2(-x)$.

20. $f(x)=\sqrt{\lg\cos x}+4$.

21. $f(x)=\frac{|x|}{x}e^{x^2}$.

22. $f(x)=2^{\log_2 x}$.

23. $f(x)=||x|-1|-x$.

24. $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

25. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

26. $f(x)=\cos\sqrt{x+100}$.

27. $f(x)=\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{tg}x$.

28. $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$.

29. Аналитик усулда берилган, қийматлар тўплами қуйидагича бўлган функцияларга мисоллар келтиринг:

а) фақат битта сондан иборат;
б) иккита сондан иборат;
в) натурал сонлардан иборат;
г) барча бутун сонлардан иборат;
д) (0,1) интервал нуқталаридан иборат бўлсин.

Қуйидаги функцияларнинг чегараланганлигини кўрсатинг:

30. $f(x)=\frac{1}{x-10},\ x\in[0,5]$.

31. $f(x)=\frac{x^3}{x^4+1},\ x\in R$.

32. $f(x)=\frac{x^2-1}{|x^3-1|},\ x\in R,\ x\neq 1$.

33. $f(x)=\frac{2\sin x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$.

34. $f(x)=\frac{1}{x}\sin x$.

35. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпламда аниқланган бўлиб, чегараланган бўлса, у ҳолда

а) $f(x)+g(x)$;
б) $f(x)-g(x)$;
в) $f(x)\cdot g(x)$;

г) $|f(x)|$

функциялар ҳам X тўпламда чегараланганлигини кўрсатинг;

д) қандай шарт бажарилса, $\frac{f(x)}{g(x)}$ функция ҳам X тўпламда чегараланган бўлади?

36. $f(x)$ функция X тўпламда аниқланган ва чегараланган бўлсин, у ҳолда ушбу функцияларнинг X да чегараланганлигини кўрсатинг:

а) $\sqrt[n]{f(x)}$;
б) $a^{f(x)}$;
в) $\cos f(x)$;
г) $\sin f(x)$;
д) $\arcsin f(x)$;
е) $\arccos f(x)$;
ё) $\operatorname{arctg} f(x)$;
ж) $\operatorname{arcctg} f(x)$.

Қуйидаги функцияларнинг ўз аниқланиш соҳаларида чегараланмаганлигини кўрсатинг:

37. $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

38. $f(x)=|x+2|$.

39. $f(x)=2^{\sqrt{x}}$.

40. $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

41. $f(x)=|x|+|2x+1|$.

42. $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x\cdot x$.

43. $f(x)=x\sin x$.

44. $f(x)=\frac{1}{\cos x}$.

45. $f(x)=\frac{1}{\operatorname{ars\,ctg} x}$.

46. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпламда аниқланган ва чегараланмаган бўлсин. $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг айирмаси X тўпламда чегараланган бўлиши мумкинми? Мисоллар келтиринг.

47. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпламда аниқланган бўлиб, $f(x)$ функция X да чегараланган, $g(x)$ эса чегараланмаган бўлсин. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар орасида арифметик амаллар бажариш натижасида ҳосил бўлган функцияларнинг чегараланганлиги ҳақида нима дейиш мумкин? Мисоллар келтиринг.

48. Ихтиёрий функциянинг квадрати қуйидан чегараланганлигини исботланг.

4-таъриф. *Агар $\forall x_1, x_2\in X$ лар учун $x_1<x_2$ бўлишидан $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ ($f(x_1)<f(x_2)$) бўлса, $f(x)$ функция X тўпламда ўсувчи (қатъий ўсувчи) деб аталади.*

Агар $\forall x_1, x_2\in X$ лар учун $x_1<x_2$ бўлишидан $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$) бўлса, $f(x)$ функция X тўпламда камаювчи (қатъий камаювчи) деб аталади.

Ўсувчи ва камаювчи функция монотон функциялар деб аталади.

5-мисол. Ушбу

$$f(x)=x^3 \quad (x\in R)$$

функциянинг қатъий ўсувчи эканини исботланг.

$\forall x_1, x_2 \in R$ нуқталарни олиб, $x_1<x_2$ бўлсин деб қарайлик. У ҳолда

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1\cdot x_2+x_1^2)=$$

$$=(x_2-x_1)\left[\left(x_2+\frac{1}{2}x_1\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2\right]>0$$

бўлади.

Демак, $\forall x_1, x_2\in R,\ x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$. Бу эса $f(x)=x^3$ функциянинг R да қатъий ўсувчи эканини билдиради.

6-мисол. Ушбу

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

функциянинг $[0;+\infty)=X$ да камаювчи эканини кўрсатинг.

$\forall x_1, x_2\in X$ нуқталарни олиб, $x_1<x_2$ бўлсин деб қарайлик. У ҳолда $f_1(x)=x^2$ учун

$$f_1(x_2)-f_1(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)>0$$

бўлади. Демак,

$$\forall x_1, x_2\in X,\ x_1<x_2\Rightarrow f_1(x_1)<f_1(x_2).$$

Бу эса $f_1(x)=x^2$ функциянинг, жумладан, $f_2(x)=x^2+1$ функциянинг қаралаётган оралиқда ўсувчи эканини билдиради.

Энди $\forall x_1, x_2\in X$ нуқталар учун $x_1<x_2$ бўлган ҳолда $f(x_2)-f(x_1)$ айирмани қарайлик.

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{1+x_2^2}-\frac{1}{1+x_1^2}=\frac{1}{f_2(x_2)}-\frac{1}{f_2(x_1)}.$$

$f_2(x_2)>f_2(x_1)$ бўлганидан $\frac{1}{f_2(x_2)}-\frac{1}{f_2(x_1)}<0$ эканини топамиз. Демак, $\forall x_1, x_2\in X,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_2)<f(x_1)$, яъни $f(x)$ функция X тўпламда камаювчи.

5-таъриф. *Агар шундай ўзгармас T $(T\neq 0)$ сони мавжуд бўлсаки,* $\forall x\in x$ учун

$$x+T\in X,\ x-T\in X,$$

$$f(x+T)=f(x)$$

бўлса, $f(x)$ функция даврий функция дейилади ва бу шартларни қаноатлантирувчи мусбат T ларнинг энг кичиги (агар у мавжуд бўлса) функциянинг даври деб аталади.

7-мисол. Ушбу

$$f(x)=3\cos x+\cos 2x$$

функциянинг даврий функция эканини кўрсатинг.

Функциянинг аниқланиш соҳаси бутун сонлар ўқидан иборатдир. Фараз қилайлик, бирор $T>0$ учун

$$3\cos(x+T)+\cos(2(x+T))=3\cos x+\cos 2x$$

муносабат ўринли бўлсин. $x=0$ да

$$3\cos T+\cos 2T=4$$

тенгламага эга бўлиб,

$$\cos T\leqslant 1,\ \cos 2T\leqslant 1$$

тенгсизликларни эътиборга олсак,

$$3\cos T+\cos 2T\leqslant 4$$

бўлади.

Демак, T қуйидаги тенгламалар системасини қаноатлантиради:

$$\begin{cases}\cos T=1,\\ \cos 2T=1.\end{cases}$$

Бу тенгламалар системасининг энг кичик мусбат ечими $T=2\pi$ экани равшандир.

Энди $T=2\pi$ сонни берилган функциянинг даври эканини текшириш қийин эмас: $\forall x\in R$ учун

$$3\cos(x+2\pi)+\cos(2(x+2\pi))=3\cos x+\cos 2x$$

тенглик ўринлидир. Шундай қилиб, қаралаётган функция даврий бўлиб, унинг даври 2π га тенг экан.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг ўсувчи ёки камаювчи эканини аниқланг:

49. $f(x)=2^{x^2+1}$.
50. $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$.
51. $f(x)=\frac{1}{\cos x}$, $x\in[-\pi,\pi]$, $|x|\neq\frac{\pi}{2}$.
52. $f(x)=\sqrt{x}\sin x$.

53. $f(x) = \arccos |x|$.

54. $f(x) = \sin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

55. $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x - x$.

56. $f(x) = \frac{x-1}{|x|-1}$.

57. $f(x) = x - \sqrt{x^2-1}$.

58. $f(x) = \frac{2-\sin x}{2+\sin x}$, $x \in [0, 2\pi]$.

59. $f(x) = 2\cdot 3^{1-x} - 9^{-x}$.

60. $f(x) = x - \varepsilon \sin x$ $(0 < \varepsilon \leqslant 1)$.

61. Агар $f(x)$ функция X тўпламда аниқланган бўлиб, монотон бўлса, у ҳолда $y = -f(x)$ функциянинг ҳам монотонлигини исботланг.

62. Агар $f(x) > 0$ тенгсизлик барча $x \in X$ лар учун ўринли ва $f(x)$ монотон бўлса, у ҳолда $y = \frac{1}{f(x)}$ функциянинг ҳам монотонлигини исботланг.

63. Монотон функциялардан тузилган мураккаб функциянинг монотонлигини исботланг.

Қуйидаги функцияларнинг даврий функция эканини кўрсатинг.

64. $f(x) = \operatorname{tg}(\sin x)$.

65. $f(x) = \sqrt{\sin 3x}$.

66. $f(x) = 2^{|\sin x - \cos x|}$.

67. $f(x) = \lg \sin x - \lg \cos x$.

68. $f(x) = \sin^2 x$.

69. $f(x) = |\cos x|$.

70. $f(x) = \{2x\}$.

71. $f(x) = \cos \sqrt{2}\, x$.

72. $f(x) = [2x+5] - 2x$, бу ерда $[a]$—қаралаётган a соннинг бутун қисмини билдиради.

73. $f(x) = \cos(\sin x)$.

74. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

75. $f(x)$ функция $X = R$ тўпламда аниқланган бўлиб, унинг графиги $x = a$, $x = b$ $(a \neq b)$ чизиқларга нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда унинг даврийлигини исботланг.

76. $f(x)$ функция X тўпламда аниқланган бўлиб, шундай $T \neq 0$ сони топилсаки, ҳар қандай $x \in X$ лар учун $x + T \in X$, $x - T \in X$ *бўлиб*, қуйидаги шартлардан биттаси бажарилса, унинг даврийлигини исботланг:

1) $f(x+T) = -f(x)$;

2) $f(x+T) = \frac{1}{f(x)}$;

3) $f(x+T) = \frac{f(x)+a}{bf(x)-1}$;

4) $f(x+T) = \frac{1}{1-f(x)}$;

5) $f(x+T) = f(x)$.

77. $f(x) = \cos x + \sin ax$ даврий функция бўлса, у ҳолда a рационал сон эканлигини исботланг.

78. Бутун сонлар ўқидан битта нуқта чиқариб ташланган тўпламда аниқланган функциянинг даврий эмаслигини исботланг.

$y = f(x)$ функция $X (X \subset R)$ тўпламда аниқланган бўлиб, $\forall x \in X$ учун $-x \in X$ бўлсин.

6-таъриф. *Агар $\forall x \in X$ учун $f(-x) = f(x)$ бўлса, $f(x)$ жуфт функция, $f(-x) = -f(x)$ бўлса, $f(x)$ функция тоқ функция деб аталади.*

8-мисол. Ушбу

$$f(x) = \log_2 (x + \sqrt{1+x^2})$$

функциянинг жуфт ёки тоқ функция эканини аниқланг.

$\forall x \in R$ ларда $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ бўлгани учун функциянинг аниқланиш соҳаси R дан иборат.

$\forall x \in R$ учун $f(-x) = \log_2 (-x + \sqrt{1+x^2}) =$

$$= \log_2 \left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot (-x+\sqrt{1+x^2})\right) = \log_2 \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} =$$

$= \log_2 (x + \sqrt{1+x^2})^{-1} = -\log_2 (x+\sqrt{1+x^2}) = -f(x)$ бўлади. Бу эса қаралаётган функциянинг тоқ эканини билдиради.

$y = f(x)$ функция X тўпламда аниқланган бўлиб, Y эса функция қийматларидан иборат тўплам бўлсин: $Y = \{f(x) : x \in X\}$. Шу билан бирга Y тўпламдан олинган ҳар бир y га X тўпламдан фақат битта x мос келсин, яъни $x_1 \neq x_2$ бўлганда $f(x_1) \neq f(x_2)$ бўлсин. Бу ҳолда Y тўпламдан олинган ҳар бир y га X тўпламда битта x мос қўйилишини ифодалайдиган функцияга келамиз. Бу функция $y = f(x)$ га нисбатан ***тескари функция*** дейилади ва у $x = f^{-1}(y)$ каби белгиланади.

9-мисол. Ушбу $y = f(x) = 2x+1$, $x \in [0, 1]$ функцияга нисбатан тескари функцияни топинг.

Бу функциянинг қийматлари тўплами [1, 3] оралиқни ташкил этади. [1, 3] оралиқда аниқланган $x = f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$ функция берилган $y = 2x + 1$ функцияга нисбатан тескари функция бўлади.

$y = f(x)$ функция X тўпламда аниқланган бўлиб, $z = \varphi(y)$ функция ўз навбатида $Y = \{f(x): x \in X\}$ $\{f: X \to Y\}$ тўпламда аниқланган бўлсин:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\varphi} Z.$$

Натижада X тўпламдан олинган ҳар бир x га битта $z \in Z$ сон мос қўйилади. Бундай ҳолда f ва φ функцияларнинг мураккаб функцияси берилган дейилади ва $z = \varphi(f(x))$ каби белгиланади.

10-мисол. Ушбу

$$f(x) = x^2, \; g(x) = 2^x$$

функциялар ёрдамида мураккаб функциялар топинг.

Бу мураккаб функциялар қуйидагича бўлади:

$$f(g(x)) = [g(x)]^2 = (2^x)^2 = 2^{2x};$$
$$g(f(x)) = 2^{f(x)} = 2^{x^2};$$
$$f(f(x)) = [f(x)]^2 = (x^2)^2 = x^4;$$
$$g(g(x)) = 2^{g(x)} = 2^{2^x}.$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг жуфт ёки тоқлигини аниқланг:

79. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$.

80. $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

81. $f(x) = \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x}}}$.

82. $f(x) = \sqrt{x^4 - |x|} \cdot \log_2 x^2$.

83. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ -1, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса.} \end{cases}$

84. $f(x) = \sin \sqrt{x}$.

85. $f(x) = \arccos |x|$.

86. $f(x) = \frac{1 + \sin x}{\sin x}$.

87. $f(x) = \frac{|\sin x|}{1 - \cos x}$.

88. $f(x) = (x - 1)^2 \sin^2 x$.

89. $f(x) = \arcsin(\arccos x)$.

90. $f(x) = \left| \frac{10^x + 1}{10^x - 1} \right|$.

91. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар жуфт функциялар бўлса, улардан тузилган мураккаб функцияларнинг ҳам жуфт функция бўлишини исботланг.

92. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар тоқ функциялар бўлса, улардан тузилган мураккаб функцияларнинг тоқ функция бўлишини исботланг.

93. O нуқтага нисбатан симметрик бўлган X тўпламда аниқланган ҳар қандай $f(x)$ функция жуфт ва тоқ функциялар йиғиндиси кўринишида ифодаланишини исботланг.

94. $f(x) = 2^x$ функцияни жуфт ва тоқ функциялар йиғиндиси кўринишида ифодаланг:

95. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \geqslant 0 \text{ бўлса,} \\ x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса} \end{cases}$ функцияни жуфт ва тоқ функциялар йиғиндиси кўринишида ифодаланг.

96. Жуфт ва тоқ функциялардан тузилган мураккаб функцияларнинг жуфт ёки тоқлиги ҳақида нима дейиш мумкин?

Қуйидаги функцияларга нисбатан тескари бўлган функцияларни топинг:

97. $f(x) = (x + 1)^2$. $x \in [-1; +\infty]$.

98. $f(x) = \sin x$, $x \in \left[-10; -\frac{11}{4}\pi\right]$.

99. $f(x) = \frac{2x + 1}{x}$.

100. $f(x) = -e^{\frac{1-x^2}{2}}$, $x \in [0; +\infty)$.

101. $f(x) = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in (0; -\infty)$.

102. $f(x) = \pi - \arcsin x$, $x \in [-1; 1]$.

103. $f(x) = 2^{x^2 - 2x}$, $x \in (-\infty; 1]$.

104. a ва b ларнинг қандай қийматларида $f(x) = ax + b$ тескари функцияга эга бўлиб, $y = f(x)$ билан бир хил бўлади?

105. $\alpha \in R$ нинг қандай қийматида $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$ тескари функцияга эга бўлиб, у $f(x)$ билан бир хил бўлади?

Қуйидаги функциялар бўйича шу функцияларнинг мураккаб функцияларини топинг:

106. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$.

107. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

108. $f(x) = x^5$, $g(x) = x + 5$.

109. $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$.

110. $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = 1 + x^2$.

111. $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = 1 + x - [x]$.

112. $f(x) = \ln x^2$, $g(x) = \sin x$.

113. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{агар } x \in [0; +\infty) \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \in (-\infty; 0) \text{ бўлса.} \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \in [0; +\infty) \text{ бўлса,} \\ x^2, & \text{агар } x \in (-\infty; 0) \text{ бўлса.} \end{cases}$

114. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ бўлса, $f(f(\ldots f(x))) \ldots)$ (n марта) ни топинг.

Текисликда Декарт координаталар системасини оламиз. Текисликнинг $(x, f(x))$ каби аниқланган нуқталаридан иборат ушбу

$$\{(x, f(x))\} = \{(x, f(x)) : x \in X, \ y = f(x) \in Y\}$$

тўплам $y = f(x)$ функциянинг ***графиги*** деб аталади.

Мураккаб функцияларнинг графиги уларнинг ординаталари устида аналитик (қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш, илдиз чиқариш, логарифмлаш ва ҳ. к.) амаллар бажариш ёрдамида тақрибан чизилади. Функцияларни тўлиқ текшириш, уларнинг аниқ графикларини ифодалаш билан биз кейинроқ батафсил шуғулланамиз.

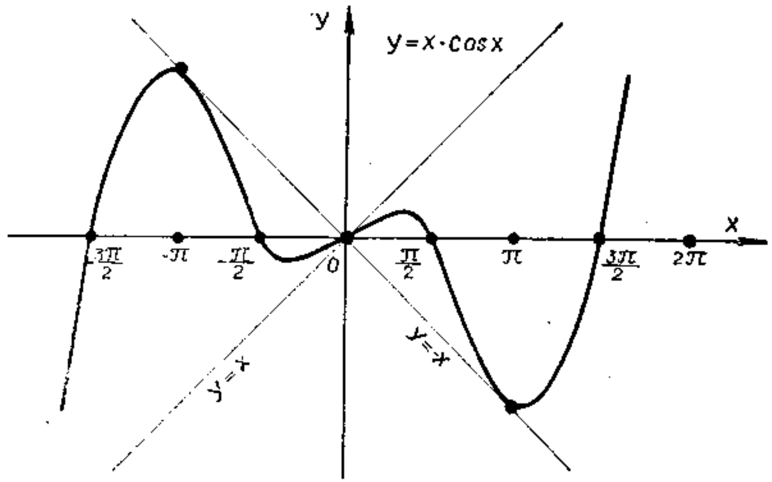
11-мисол. Ушбу

$$y = x \cos x, \ x \in R$$

функциянинг графигини чизинг.

Функция тоқ бўлгани учун, унинг графигини $x \geqslant 0$ лар учун ясаш етарли. Қаралаётган функциянинг ординаталари $y_1 = x$ ва $y_2 = \cos x$ функцияларнинг ординаталарини кўпайтириш натижасида ҳосил бўлади.

Функция графиги координаталар бошидан ўтиб, Ox ўқини $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in Z$, $\cos x = 0$) нуқталарда кесади. $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ бўлгани учун, $x \geqslant 0$ ларда $-x \leqslant x \cos x \leqslant x$ бўлади. Демак, $y = x \cos x$ функциянинг графиги $y = x$ ва $y = -x$ чизиқлар орасида ётади. $x = 2k\pi$ нуқталарда $\cos x = 1$ бўлгани учун, функция графиги $y = x$ чизиқ билан $x = 2k\pi$ нуқталарда умумий қийматларга эга, $x = \pi + 2k\pi$ нуқталарда эса $y = -x$ чизиқ билан умумий нуқталарга эгадир ($\cos x = -1$, $x = \pi + 2k\pi$, $k \in Z$), $0 < x < 1$ да $0 < x \cos x <$



1- чизма.

$< \cos x$, яъни $x \cos x < x$. Бу эса функция графиги $y = \cos x$ ва $y = x$ функцияларнинг графигидан пастда жойлашганлигини билдиради.

$x = 1$ да $y = x \cos x$ ва $y = \cos x$ функцияларнинг графиги кесишади. $y = \cos 1 \approx 0{,}54$. Агар $x > 1$ бўлса, $|x \cos x| > |\cos x|$. Шу маълумотларга асосланиб берилган функциянинг графигини чизамиз (1-чизма).

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг графикларини чизинг:

115. $f(x) = x \sin x$.

116. $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$.

117. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

118. $f(x) = \operatorname{sgn} \cos x$.

119. $f(x) = \ln \sin x$.

120. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.

121. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^2}$.

122. $f(x) = [x]$.

123. $f(x) = \left[\dfrac{1}{x}\right]$.

124. $f(x) = [x^2]$.

125. $f(x) = |x-1| + |x-2| - |x-3|$.

126. $f(x) = [|x|]$.

127. $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$.

128. $f(x) = e^x \cos x$.

129. $f(x) = e^{-x} \cos x$.

130. $f(x) = 2^{\operatorname{tg} x}$.

131. $f(x) = x + \sin x$.

2-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЛИМИТИ

$X=\{x\}$ ҳақиқий сонлар тўплами берилган бўлиб, a нуқта унинг лимит нуқтаси бўлсин. Бу тўпламда $y=f(x)$ функция аниқланган.

7-таъриф (Гейне таърифи). *Агар X тўпламнинг нуқталаридан тузилган a га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ $(x_n\neq a,\ n=1, 2 \ldots)$ кетма-кетлик олинганда ҳам мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт ягона b (чекли ёки чексиз) лимитга интилса, шу b га $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги (ёки $x\to a$ даги) лимити деб аталади ва уни $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ ёки $x\to a$ да $f(x)\to b$ каби белгиланади.*

12-мисол. Ушбу

$$f(x)=x^5$$

функциянинг $x\to 2$ даги лимити 32 га тенг эканини кўрсатинг.

2 га интилувчи ихтиёрий $\{x_n\}$ $(x_n\neq 2, n=1, 2, \ldots)$ кетма-кетликни оламиз. Мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик қуйидаги $\{f(x_n)\}=\{x_n^5\}$ кўринишда бўлади. Яқинлашувчи кетма-кетликлар устидаги арифметик амалларга биноан:

$$\lim_{x_n\to 2} f(x_n)=\lim_{x_n\to 2} x_n^5=2^5=32.$$

Демак, таърифга кўра:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=32.$$

13-мисол. Ушбу

$$f(x)=\cos\frac{1}{x}\quad (x\neq 0)$$

функциянинг $x\to 0$ да лимитга эга эмаслигини кўрсатинг.

Нолга интилувчи иккита турли

$$\{x_n'\}=\left\{\frac{2}{(4n+1)\pi}\right\},\ \{x_n''\}=\left\{\frac{1}{2n\pi}\right\}$$

кетма-кетликларни олайлик. У ҳолда

$$f(x_n')=\cos\frac{(4n+1)\pi}{2}=0,$$

$$f(x_n'')=\cos 2n\pi=1$$

бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n')=0,\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n'')=1$$

бўлади.

Бу эса $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ функциянинг $x=0$ нуқтада лимити мавжуд эмаслигини кўрсатади.

8-таъриф (Коши таърифи). *Агар $\forall\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сон топилсаки, аргумент x нинг $0<|x-a|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча қийматларида $|f(x)-b|<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, b сон $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги ($x\to a$ даги) лимити деб аталади.*

14-мисол. Ушбу

$$f(x)=\sin x$$

функциянинг $x=\frac{\pi}{2}$ нуқтадаги лимити 1 га тенг экани кўрсатилсин.

$\forall\varepsilon>0$ сонга кўра δ ни $\delta=\varepsilon$ деб олсак, у ҳолда $\left|x-\frac{\pi}{2}\right|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x лар учун

$$|\sin x-1|=\left|\sin x-\sin\frac{\pi}{2}\right|=$$

$$=\left|2\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\cdot\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|2\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right|\leqslant\left|x-\frac{\pi}{2}\right|<\delta=\varepsilon$$

муносабат бажарилади. Бундан, таърифга кўра, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$ экани келиб чиқади.

$X=\{x\}$ ҳақиқий сонлар тўплами берилган бўлиб, a нуқта унинг ўнг (чап) лимит нуқтаси бўлсин. Шу тўпламда $f(x)$ функция аниқланган.

9-таъриф (Гейне таърифи). *Агар X тўпламнинг нуқталаридан тузилган ва ҳар бир ҳади a дан катта (кичик) бўлиб a га интилувчи ҳар қандай $\{x_n\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳамма вақт ягона b га интилса, шу b ни $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги ўнг (чап) лимити деб аталади.*

10-таъриф (Коши таърифи). *Агар $\forall\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta=\delta(\varepsilon)$ сон топилсаки, аргумент x нинг $a<x<a+\delta$ $(a-\delta<x<a)$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча $x\in X$ қийматларида $|f(x)-b|<\varepsilon$ тенг-*

сизлик бажарилса, b сон $f(x)$ функциянинг a нуқтадаги ўнг (чап) лимити деб аталади.

Функциянинг ўнг (чап) лимитлари қуйидагича белгиланади:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b \text{ ёки } f(a+0) = b,$$

$$(\lim_{x\to a-0} f(x) = b \text{ ёки } f(a-0) = b).$$

15-мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ \dfrac{\cos x}{2}, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

функциянинг $x = 0$ нуқтадаги ўнг ва чап лимитларини топинг.

$$\lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0} \sin x = 0,$$

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Мисол ва масалалар

Функция лимити таърифларидан фойдаланиб қуйидаги муносабатларни исботланг:

132. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = 6.$

133. $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0.$

134. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = 0.$

135. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x^2-4x} = 2.$

136. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1.$

137. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x-3} = \infty.$

138. $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0.$

139. $\lim\limits_{x\to 3} x^4 = 81.$

140. $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0.$

Қуйидаги функциялар a нуқтада лимитга эга эмаслигини исботланг:

141. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}, \ a = 0.$

142. $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}, \ a = 0.$

143. $f(x) = \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{x}, \ a = 0.$

144. $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + x + 1, & \text{агар } x \geqslant 1 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x < 1 \text{ бўлса.} \end{cases} \quad a = 1.$

145. $f(x) = x - [x], \ a = 2.$

146. $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса, } a = 0, \\ b + x, & \text{агар } x \geqslant 0 \text{ бўлса, } b \neq 1. \end{cases}$

147. Дирихле функциясининг бирорта нуқтада ҳам лимити мавжуд эмаслигини исботланг.

148. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \end{cases}$

функция қандай нуқталарда лимитга эга?

149. $f(x) = [x] \cdot \dfrac{1}{x}$ функциянинг $x \to 0$ даги лимити мавжудми?

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган нуқтадаги ўнг ва чап лимитларини топинг:

150. $f(x) = \operatorname{th} \dfrac{1}{x}, \ a = 0.$

151. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ \cos x, & \text{агар } x \leqslant 0 \text{ бўлса,} \end{cases} \quad a = 0.$

152. $f(x) = \operatorname{sgn} x^2, \ a = 0.$

153. $f(x) = \operatorname{sgn} \cos x, \quad a = \dfrac{\pi}{2}.$

154. $f(x) = \dfrac{1}{x + 3^{\frac{1}{3-x}}}, \quad a = 3.$

155. $f(x) = \dfrac{1}{x - [x]}, \ a = -1.$

156. $f(x) = x + [x^2], \ a = 10.$

157. $f(x)$ функциянинг a нуқтада бир томонли лимитлар таърифлари инкорини Коши ва Гейне бўйича келтиринг.

158. Функциянинг a нуқтада бир томонли лимитлари мавжуд бўлишидан унинг шу нуқтада лимитга эга бўлиши келиб чиқадими?

X ($X \subset R$) тўплам берилган бўлиб, a унинг лимит нуқтаси бўлсин. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар a нуқтада чекли лимитга эга бўлиб,

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \lim_{x\to a} g(x) = c$$

бўлсин. У ҳолда

1) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = b \pm c$,

2) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = b \cdot c$,

3) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$, $c \neq 0$

бўлади.

16-мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to 0} \left((10 \sin^2 x + 3 \cos^3 x + \frac{x-1}{x+2}\right)$$

ни топинг.

$$\lim_{x\to 0} \sin^2 x = \lim_{x\to 0} \sin x \lim_{x\to 0} \sin x = 0,$$

$$\lim_{x\to 0} \cos^3 x = \lim_{x\to 0} \cos x \cdot \lim_{x\to 0} \cos x \cdot \lim_{x\to 0} \cos x = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} (x-1)}{\lim\limits_{x\to 0} (x+2)} = -\frac{1}{2}.$$

Демак,

$$\lim_{x\to 0} \left(10 \sin^2 x + 3 \cos^3 x + \frac{x-1}{x+2}\right) = \lim_{x\to 0} 10 \sin^2 x +$$

$$+ \lim_{x\to 0} 3 \cos^3 x + \lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x+2} = 0 + 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}.$$

Функция лимитининг мавжудлиги ҳақида теоремалар

1°. Агар x нинг a нуқтанинг $U_\delta(a)$ атрофидан олинган қийматларида

$$f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x)$$

бўлиб, $x \to a$ да $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар лимитга эга ҳамда

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} f_2(x) = b$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция ҳам лимитга эга ва

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

бўлади.

2°. $X \subset R$ тўплам берилган бўлиб, a шу тўпламнинг лимит нуқтаси ва барча $x \in X$ лар учун $x \leqslant a$ бўлсин. Агар $f(x)$ функция X тўпламда ўсувчи (камаювчи) бўлиб, юқоридан (қуйидан) чегараланган бўлса, $f(x)$ функция a нуқтада чекли лимитга эга.

11-таъриф. *Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta = \delta(\varepsilon)$ сон топилсаки, аргумент x нинг*

$$0 < |x' - a| < \delta, \quad 0 < |x'' - a| < \delta$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий x' ва x'' ($x' \in X$, $x'' \in X$) қийматларида

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

бўлса, $f(x)$ функция учун a нуқтада Коши шарти бажарилади дейилади.

$f(x)$ функция a нуқтада чекли лимитга эга бўлиши учун унинг бу нуқтада Коши шартини қаноатлантириши зарур ва етарли (Коши критерийси).

17-мисол. Ушбу

$$f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$$

функция учун $a = 0$ нуқтада Коши шартининг бажарилишини кўрсатинг.

Ҳақиқатан ҳам, $\forall \varepsilon > 0$ сон олиб, δ ни $\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ деб қаралса, x нинг

$$0 < |x' - a| = |x'| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}},$$

$$0 < |x'' - a| = |x''| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи ихтиёрий x', x'' қийматлари учун қуйидагига эга бўламиз:

$$|f(x'') - f(x')| = \left|x''^2 \cos\frac{1}{x''} - x'^2 \cos\frac{1}{x'}\right| \leqslant \left|x''^2 \cos\frac{1}{x''}\right| +$$

$$+ \left|x'^2 \cos\frac{1}{x}\right| \leqslant |x''^2| + |x'^2| < \varepsilon.$$

Бу эса қаралаётган функциянинг $x=0$ нуқтада Коши шартининг бажарилишини кўрсатади.

Функцияларни таққослаш

$X\subset R$ тўпламда $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар аниқланган бўлсин. Бирор a нуқтанинг $U_\delta(a)(U_\delta(a)\subset X)$ атрофида $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар қуйидагича таққосланади.

12-таъриф. *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун шундай ўзгармас $\delta>0$ ва $C>0$ сонлар топилсаки, барча $x\in U_\delta(a)$ лар учун*

$$|f(x)|\leqslant C\,|g(x)|$$

бўлса, у ҳолда $x\to a$ да $f(x)$ функция $g(x)$ функцияга нисбатан чегараланган дейилади ва $f(x)=O(g(x))$ каби белгиланади.

Агар $f(x)=O(g(x))$ ва $g(x)=O(f(x))$ бўлса, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $x\to a$ да *бир хил тартибли функциялар* дейилади.

Агар

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

бўлса, $x\to a$ да $g(x)$ ва $f(x)$ лар *эквивалент функциялар* деб аталади ва $f(x)\sim g(x)$ каби белгиланади.

18-мисол. Ушбу

$$f(x)=\sqrt{|x|+\sqrt{|x|}}\ \text{ва}\ g(x)=\sqrt[4]{|x|}$$

функцияларнинг $x\to 0$ да ўзаро эквивалентлигини кўрсатинг.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{|x|+\sqrt{|x|}}}{\sqrt[4]{|x|}}=\lim_{x\to0}\sqrt{1+\sqrt{|x|}}=1.$$

Демак, қаралаётган функциялар ўзаро эквивалент.

13-таъриф. *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар учун*

$$f(x)=\alpha(x)\cdot g(x)$$

бўлиб, бунда $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ бўлса, у ҳолда $x\to a$ да $f(x)$ функция $g(x)$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик функция деб аталади ва $f(x)=o(g(x))$ каби белгиланади.

19-мисол. Ушбу $|x|^{5/2}=o(x^2)$ муносабат $x\to 0$ да ўринли эканини кўрсатинг. $|x|^{5/2}=\sqrt{|x|}\cdot x^2$ тенгликдан ва

$\lim\limits_{x\to0}\sqrt{|x|}=0$ эканлигидан $|x|^{5/2}=o(x^2)$ эканлиги келиб чиқади.

Лимит ҳисоблашга оид бўлган мисолларда кўпинча қуйидаги ажойиб лимитлардан фойдаланилади:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a\ (a>0).$

3) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e.$

20-мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x\cdot\sin 2x)}{x^2}$$

лимитни ҳисобланг

Бу ифода $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликдир.

$x\to 0$ да $x\sin 2x\to 0$ эканини ҳисобга олиб топамиз:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x\sin 2x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin(x\sin 2x)\cdot\sin 2x}{x\cdot(\sin 2x)\cdot 2x}=$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\sin(x\cdot\sin 2x)}{x\cdot\sin 2x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}=2.$$

21-мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\sin^2 x}$$

лимитни ҳисобланг.

$\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{\sin^2 x}$ ифоданинг кўринишини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\frac{e^{x^2}-\cos x}{\sin^2 x}=\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{\sin^2 x}=\frac{e^{x^2}-1}{\sin^2 x}+2\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{e^{x^2}-1}{\sin^2 x}+2\cdot\frac{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}+\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}.$$

Бундан эса

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}+\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}}+\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

22-мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}$$

лимитни ҳисобланг.

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{-\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot 4}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

23-мисол. Агар $x\to 0$ да $f(x)\to 0$ бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+f(x^2)]=0$ эканини исботланг. Шартга кўра $x\to 0$ да $f(x)\to 0$. Бу эса Гейне таърифига кўра, ҳар қандай нолга интилувчи $\{x_n\}$ $(x_n\neq 0,\ n=1,2,\dots)$ кетма-кетликни олганимизда ҳам, мос $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик ҳаммавақт ягона 0 лимитга интилишини англатади.

$y_n=x_n^2$ деб олсак, $n\to\infty$ да $y_n\to 0$ бўлиб, юқоридаги таърифга биноан $f(y_n)=f(x_n^2)\to 0$ муносабатга эга бўламиз. Демак, $f(x^2)$ функция ҳам $x\to 0$ да нолга интилар экан. Чекли лимитга эга бўлган функциялар устидаги арифметик амалларга кўра $f(x)+f(x^2)$ функциянинг $x\to 0$ да 0 га интилишини топамиз.

Энди $x\to 0$ да $f(x)+f(x^2)\to 0$ бўлсин. $x\to 0$ да $f(x)$ нинг нолга интилиши ҳақида нима дейиш мумкин?

Мисол сифатида ушбу

$$f(x)=\begin{cases}(-1)^n, & \text{агар } x=\frac{1}{2^{2^n}} \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x\neq\frac{1}{2^{2^n}} \text{ бўлса,}\end{cases}$$

функцияни қарайлик. У ҳолда

$$f(x^2)=\begin{cases}(-1)^{n+1}, & \text{агар } x=\frac{1}{2^{2^n}} \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x\neq\frac{1}{2^{2^n}} \text{ бўлса}\end{cases}$$

бўлиб, $x\to 0$ да $f(x)+f(x^2)\to 0$ бўлади. Лекин $x\to 0$ да $f(x)$ функциянинг лимити мавжуд эмас. Шундай қилиб, исбот қилинган муносабатнинг тескариси ҳар доим ўринли бўлиши шарт эмас экан.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги лимитларни топинг:

159. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\quad (a>0).$

160. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^3-8}.$

161. $\lim\limits_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x^3}-8}{\sqrt{x}-4}.$

162. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}\quad (m,\ n\in N).$

163. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}\quad (n,\ m\in N).$

164. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{n}{1-x^n}-\frac{m}{1-x^m}\right)(n,\ m\in N).$

165. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}.$

166. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{4}{x}}-\sqrt[4]{1+\frac{3}{x}}}{1-\sqrt[5]{1-\frac{5}{x}}}.$

167. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[n]{1+ax}\cdot\sqrt[m]{1+bx}-1}\quad (n,\ m\in N).$

168. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x},\ n\in N.$

169. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

170. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$, $n\in N$.

Қуйидаги лимитларни топинг:

171. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin mx^2}{nx^2}$.

172. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$.

173. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{\sin 6x-\sin 7x}$.

174. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos 3x^3-1}{\sin^6 2x}$.

175. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

176. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{2}{\sin 2x\cdot\sin x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

177. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}$.

178. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos x}}{\operatorname{tg} x^2}$.

179. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\arcsin 5x}{x}$.

180. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$.

181. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\cos\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{3}{x}\right)$.

182. $\lim\limits_{x\to\infty} \sin^2\pi\sqrt{n^2+2n}$.

183. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x\cdot\cos^2 2x\cdot\cos^3 3x}{x^3}$.

184. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sin\dfrac{1}{n^2}+\sin\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\sin\dfrac{n}{n^2}\right)$.

185. $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x^2-a^2}}$.

186. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

187. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$.

188. $\lim\limits_{x\to0} (\sin x+\cos x)^{\frac{1}{2x}}$.

189. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

190. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{7x}-e^{2x}}{\operatorname{tg} x}$.

191. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

192. $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ $(a>0,\ b>0)$.

193. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin 4x-\cos 4x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

194. $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$.

195. $f(x)=\sin x$ функция $x\to+\infty$ да лимитга эга эмаслигини кўрсатинг.

196. $f(x)=\operatorname{sgn}\sin\dfrac{1}{x}$ функция $x\to0$ да лимитга эга эмаслигини кўрсатинг.

197. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар a нуқтада лимитга эга бўлмаса, $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ функцияларнинг бу нуқтада лимити ҳақида нима дейиш мумкин? Мисоллар келтиринг.

198. $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+\dfrac{1}{|f(x)|}\right)=0$ бўлса, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ни топинг.

199. Агар $f(x)>0$ бўлиб, $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\right)=2$ бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ эканини исботланг.

200. Агар $f(x)$ функция даврий бўлиб, $x\to\infty$ да $f(x)\to c$ бўлса, у ҳолда $f(x)=c$ эканлигини кўрсатинг.

6-мисол. Ушбу

$$f(x) = [x]$$

функциянинг $x_0 = 2$ нуқтада биринчи тур узилишга эга эканини кўрсатинг.

$$\lim_{x\to 2-0} [x] = 1, \quad \lim_{x\to 2+0} [x] = 2.$$

Демак, функция $x_0 = 2$ нуқтада биринчи тур узилишга эга.

Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ — рационал бўлса,} \\ -1, & \text{агар } x \text{ — иррационал бўлса.} \end{cases}$$

функциянинг $\forall x_0 \in R$ нуқтадаги лимити мавжуд эмас, демак, бу функция x_0 нуқтада иккинчи тур узилишга эга.

$f(x) = \operatorname{ctg} x$ функциянинг $x_0 = \pi$ нуқтадаги ўнг ва чап лимитлари

$$\lim_{x\to\pi+0} \operatorname{ctg} x = -\infty, \quad \lim_{x\to\pi-} \operatorname{ctg} x = +\infty$$

бўлади.

Демак, $f(x) = \operatorname{ctg} x$ функция $x_0 = \pi$ нуқтада иккинчи тур узилишга эга.

2. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпламда аниқланган бўлиб, $x_0 \in X$ нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

Агар $f(x)$ ва $g(x)$ x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x),$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0, \ \forall x \in X)$$

функциялар ҳам x_0 нуқтада узлуксиз бўлади.

7-мисол. Ушбу

$$f(x) = 3x^3 + \sin^2 x$$

функциянинг $X = R$ да узлуксизлигини кўрсатинг.

$\varphi(x) = x$, $g(x) = \sin x$ функциялар R да узлуксиз. $f(x)$ функцияни

$$f(x) = 3 \cdot x \cdot x \cdot x + \sin x \cdot \sin x$$

кўринишда ёзамиз. У ҳолда узлуксиз функциялар устидаги арифметик амалларга кўра $f(x)$ функциянинг R да узлуксизлиги келиб чиқади.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг узлуксизлигини кўрсатинг:

1. $f(x) = \sin x$.
2. $f(x) = x^4$.
3. $f(x) = \sqrt{x}$.
4. $f(x) = |x|$.
5. $f(x) = \operatorname{sh} x$.
6. $f(x) = xe^{\frac{\sin x}{x}}$.
7. $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада бир томондан (ўнгдан ва чапдан) узлуксиз бўлиши таърифларини келтиринг.
8. $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксиз бўлиши зарурий ва етарли шартларини ифодаланг.
9. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $|f(x)|$ функциянинг ҳам шу нуқтада узлуксиз бўлишини исботланг.
10. $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксизлигининг геометрик талқинини ифодаланг.
11. Агар $f(x)$ функция a нуқтада узлуксиз бўлса, $\varphi(x) = f(bx + c)$ $(b \neq 0)$ функция $\frac{a-c}{b}$ нуқтада узлуксиз бўлишини исботланг.

Қуйидаги функцияларнинг узилиш нуқталарини аниқланг ва графикларини чизинг:

12. $f(x) = \frac{|x+2|}{x+2}$.
13. $f(x) = \operatorname{sgn}(e^x - 1)$.
14. $f(x) = x - [x]$.
15. $f(x) = \frac{1}{x - [x]}$.
16. $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$.
17. $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2 - x^3}$.
18. $f(x) = \operatorname{sgn} \sin x$.
19. $f(x) = \frac{x}{\sin x}$.
20. $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.
21. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.
22. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ x^2, & \text{агар } x \leqslant 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$
23. Ҳеч бир нуқтада узлуксиз бўлмаган функцияга мисол келтиринг.
24. Фақат биргина $x_0 \in R$ нуқтада узлуксиз, бошқа нуқталарда узлуксиз бўлмаган функцияларга мисол келтиринг.
25. $f(x) + g(x)$ функция биринчи тур узилишга эга бўл-

са, у ҳолда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг камида биттаси биринчи тур узилишга эга бўлиши шартми?

26. $f(x)\cdot g(x)$ функция иккинчи тур узилишга эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг жуда бўлмаганда биттаси иккинчи тур узилишга эга бўлиши шартми?

3. $f(x)$ функция X тўпламда аниқланган бўлиб, $x_0 \in X$ нуқтада узлуксиз бўлсин. У ҳолда

1) x_0 нуқтанинг етарли кичик атрофида функция чегараланган бўлади.

2) Агар $f(x_0) \neq 0$ бўлса, x_0 нуқтанинг етарли кичик атрофида $f(x)$ ўз ишорасини сақлайди.

(Булар узлуксиз функцияларнинг локал хоссалари.)

$y = f(x)$ функция X тўпламда $z = \varphi(y)$ функция Y тўпламда аниқланган бўлиб, улар ёрдамида $z = \varphi(f(x))$ мураккаб функция тузилган бўлсин.

Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада, $z = \varphi(y)$ функция x_0 га мос келган $f(x_0)$ нуқтада узлуксиз бўлса, $z = \varphi(f(x))$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлади. (Мураккаб функция узлуксизлиги ҳақидаги теорема).

1-теорема (Больцано—Кошининг биринчи теоремаси). **Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган узлуксиз бўлиб, сегментнинг четки нуқталарида ҳар хил ишорали қийматларга эга бўлса, у ҳолда шундай c $(a < c < b)$ нуқта топиладики, у нуқтада функция нолга айланади: $f(c) = 0$.**

2-теорема (Больцано—Кошининг иккинчи теоремаси). **Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, унинг четки нуқталарида $f(a) = A$, $f(b) = B$ қийматларга эга ва $A \neq B$ бўлса, A ва B орасида ҳар қандай C сон олинганда ҳам a билан b орасида шундай c нуқта топиладики,**

$$f(c) = C$$

бўлади.

3-теорема (Вейерштрасснинг биринчи теоремаси). **Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у шу сегментда чегараланган бўлади.**

4-теорема (Вейерштрасснинг иккинчи теоремаси). **Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, функция шу сегментда ўзининг аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегараларига эришади.**

(Юқорида келтирилган Больцано—Кошининг ва Вейерштрасс теоремалари узлуксиз функцияларнинг глобал хоссаларидир).

8-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{|x| - x}{x^2}$$

функцияни узлуксизликка текширинг.

Маълумки,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса,} \\ -x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Бундан фойдаланиб, топамиз:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ -\dfrac{2}{x}, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$x = 0$ нуқтада функция аниқланмаган бўлиб,

$$\lim_{x \to +0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to -0} f(x) = +\infty$$

муносабатлар ўринлидир.

Бу эса таърифга кўра $x = 0$ нуқта $f(x)$ функция учун иккинчи тур узилиш нуқтаси эканини билдиради.

9-мисол. Бутун сонлар ўқида аниқланган, $x = 1$, $x = -1$ нуқталарда узлуксиз, қолган барча нуқталарда узилишга эга бўлган функцияни тузинг.

Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарайлик.

Бу функцияни

$$f(x) = (x^2 - 1)\, D(x)$$

Дирихле функцияси ёрдамида ҳам ёзиш мумкин.

Маълумки, Дирихле функцияси сонлар ўқининг ҳамма нуқталарида узилишга эга. 1 га интилувчи ихтиёрий $\{x_n\}$ кетма-кетлик олайлик, у ҳолда мос функция қийматларидан иборат бўлган $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик $n \to \infty$ да нолга интилади. Бу эса функциянинг $x = 1$ нуқтада узлуксиз эканини англатади.

Функциянинг $x = -1$ нуқтада узлуксизлиги худди шунга ўхшаш кўрсатилади.

Энди ихтиёрий $a \in R$, $a \neq \pm 1$ га интилувчи рационал сонлар ва иррационал сонлар кетма-кетлигини қарасак, мос функция қийматларидан иборат кетма-кетликлар $a^2 - 1$ га ва 0 га интилади. $a \neq \pm 1$ бўлгани учун $a^2 - 1 \neq 0$. Демак, қаралаётган функция $x=1$, $x=-1$ нуқталардан бошқа барча нуқталарда узилишга эга.

10-мисол. Ушбу

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$$

функцияни узлуксизликка текширинг ва унинг графигини чизинг.

$f(x)$ функциянинг $x=0$, $x>0$, $x<0$ нуқталардаги қийматларини қарайлик:

$$f(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^0-n^0}{n^0+n^0}=0.$$

$x>0$ лар учун

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^{-2x}}{1+n^{-2x}}=1.$$

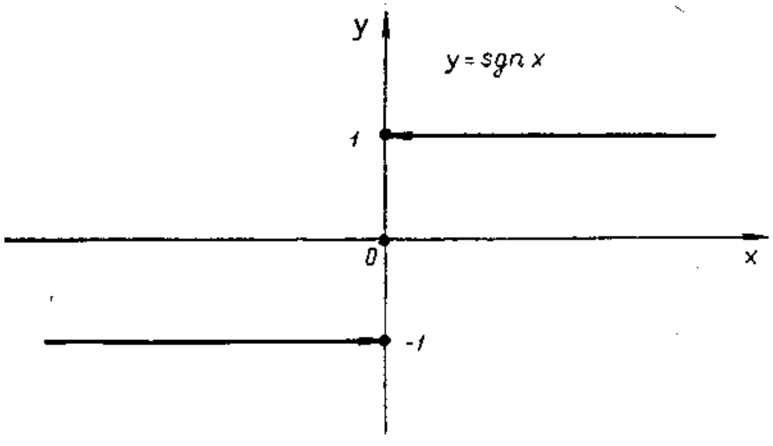
$x<0$ лар учун эса

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^{-2x}}{1+n^{-2x}}=-1$$

бўлади. Демак,

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{агар } x>0 \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса,}\\ -1, & \text{агар } x<0 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

Бу функция $f(x)=\operatorname{sgn}x$ бўлиб, маълумки у $x=0$ нуқтада биринчи тур узилишга эга (2-чизма).



2- чизма.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларни узлуксизликка текширинг ва улар графикларини чизинг:

27. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}$ $(x\geqslant 0)$.

28. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$ $(x\geqslant 0)$.

29. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$.

30. $(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+x^{2n}}$.

31. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+e^{n(x+1)}}$.

32. $f(x)=x^2-[x^2]$.

33. $f(x)=\frac{1}{\sin x^2}$.

34. $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{1}{x}\right)$.

35. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x+e^{nx}}{1+xe^{nx}}$.

36. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$.

37. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^x x^{2x}+x^2+1}{x^{2n}+1}$.

38. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(x\operatorname{arctg}(n\cdot\operatorname{ctg}x))$.

39. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n}x$.

40. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\cos^{2n}x+\sin^{2n}x}$.

41. $f(x)=[x]\sin\pi x$.

Қуйидаги функцияларни a нинг қандай қийматларида узлуксиз бўлишини аниқланг:

42. $f(x)=\begin{cases}\frac{(1+x)^n-1}{x}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,}\\ a, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса.}\end{cases}$

43. $f(x)=\begin{cases}x\cdot\operatorname{ctg}x, & \text{агар } x\neq 0,\ |x|<\frac{\pi}{2} \text{ бўлса,}\\ a, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса.}\end{cases}$

44. $f(x)=\begin{cases}\frac{c^x-1}{x}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,}\\ a, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса.}\end{cases}$ $(c>0)$

45. $f(x)=\begin{cases}\frac{\operatorname{sh}x}{x}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,}\\ a, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса.}\end{cases}$

46. $$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,}\\ a, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

47. $$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,}\\ a, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

48. $$f(x)=\begin{cases}e^{x}, & \text{агар } x<0 \text{ бўлса,}\\ a+x, & \text{агар } x\geqslant 0 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

49. Монотон функциянинг узлуксизлиги ва узилиши ҳақидаги теоремаларни келтиринг.

50. Қуйидаги функциялардан тузилган мураккаб функцияларни узлуксизликка текширинг:

а) $f(x)=\operatorname{sgn} x,\quad g(x)=1+x^2$;

б) $f(x)=\operatorname{sgn} x,\quad g(x)=-1+x^3$;

в) $f(x)=\operatorname{sgn} x,\quad g(x)=1+x-[x]$.

51. $f(g(x))$ мураккаб функция x_0 нуқтада биринчи тур (иккинчи тур) узилишга эга бўлса, $g(x)$ нинг x_0 нуқтада албатта биринчи тур (иккинчи тур) узилишга эга бўлиши шартми?

52. Монотон, лекин узлуксиз бўлмаган функцияларга мисол келтиринг.

53. Вейерштрасс теоремаларида $[a, b]$ сегмент ўрнига $[a, b)$ ёки $[a, b]\cup[c, d]$ қаралса, тасдиқ ўринли бўладими?

54. $[a, b]$ сегментда чегараланган ихтиёрий $f(x)$ функция узлуксиз бўладими?

55. Узлуксиз бўлмаган функциялар учун Вейерштрасс теоремалари ўринлими?

56. $xe^x=1$ тенглама $(0,1)$ оралиқда ҳеч бўлмаганда битта илдизга эга эканини кўрсатинг.

57. Агар $f(x)$ функция $\{x_1\}$ ва $\{x_2\}$ тўпламларда узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг $\{x_1\}\cup\{x_2\}$ тўпламда узлуксизлиги ҳақида нима дейиш мумкин?

58. $f(x)$ функция узлуксиз бўлиб,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{2k+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^{2k+1}}=1\quad (k\in N)$$

муносабат бажарилса, у ҳолда шундай a нуқта топилиб, $f(a)=0$ бўлишини кўрсатинг.

59. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$p(x)=\max_{\forall x\in[a,b]}\{f(x), g(x)\},\quad q(x)=\min_{\forall x\in[a,b]}\{f(x), g(x)\}$$

функциялар ҳам $[a, b]$ да узлуксизлигини кўрсатинг.

60. $f(x)$ функция $[a, c]$ ва $[c, b]$ сегментларда узлуксиз бўлсин. $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлиши учун етарли шартни келтиринг ва исботланг.

61. Агар $f(x)$ функция $\forall\ [a, b]\subset X$ сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда у X тўпламда узлуксиз бўлишини исботланг $(a<b)$.

62. Тескари функция мавжудлиги ва узлуксизлиги ҳақидаги теоремани келтиринг.

63. $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган бўлиб, қатъий монотон бўлса, у ҳолда унга тескари функциянинг узлуксизлигини исботланг.

64. $f(x)$ функция $[0,1]$ оралиқда аниқланган, монотон бўлиб, $f(0)=0$, $f(1)=1$ бўлсин. Агар $\forall\ x\in[0,1]$ учун шундай $n\in N$ топилсаки,

$$\underbrace{f(f(f\ \ldots\ f(f(x))\ \ldots\ )}_{n\ \text{та}}=x$$

муносабат бажарилса, $[0,1]$ оралиқда $f(x)=x$ эканини исботланг.

65. $f(x)$ функция R да узлуксиз бўлиб, $\forall\ x\in R$ учун $f(f(x))=x$ муносабат бажарилса, у ҳолда шундай c нуқта топилиб, $f(c)=0$ бўлишини исботланг.

66. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар узлуксиз ва бир хил даврли бўлсин. Агар

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=0$$

бўлса,

$$f(x)=g(x)$$

эканлигини исботланг.

2-§. ФУНКЦИЯНИНГ ТЕКИС УЗЛУКСИЗЛИГИ

Бирор $y=f(x)$ функция X тўпламда берилган бўлсин.

4-таъриф. *Агар $\forall\ \varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta(\varepsilon)>0$ сон топилсаки, X тўпламнинг $|x'-x''|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий x' ва x'' $(x', x''\in X)$ нуқталарида*

$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция X тўпламда текис узлуксиз деб аталади.

Бу таърифни қисқача

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall\, x',\ x'' \in X: |x' - x''| < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

кўринишда ифодалаш мумкин.

11-мисол. Ушбу

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

функциянинг $X = [1, 2]$ тўпламда текис узлуксизлигини кўрсатинг.

$\forall\, \varepsilon > 0$ сон учун $\delta(\varepsilon) > 0$ сонни $\delta = 3\varepsilon$ деб олсак, унда $|x' - x''| < \delta = 3\varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall\, x',\ x'' \in [1, 2]$ ларда

$$\left|\sqrt[3]{x'} - \sqrt[3]{x''}\right| = \frac{|x' - x''|}{\sqrt[3]{x'^2} + \sqrt[3]{x' x''} + \sqrt[3]{x''^2}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|x' - x''|}{3} < \frac{\delta}{3} = \varepsilon$$

бўлишини топамиз. Бу эса, таърифга кўра, берилган $f(x) = \sqrt[3]{x}$ функциянинг $X = [1, 2]$ да текис узлуксиз эканини билдиради.

$f(x)$ функция X да текис узлуксиз эмаслигини тубандагича таърифлаш мумкин.

5-таъриф *Шундай мусбат ε сони мавжуд бўлиб, $\forall\, \delta > 0$ сон олинганда ҳам $|x' - x''| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи шундай $x',\ x'' \in X$ нуқталар топилсаки*

$$|f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция X тўпламда текис узлуксиз эмас дейилади.

Бу таърифни қисқача

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, \delta > 0,\ \exists\, x' \in X,\ \exists\, x'' \in X: |x' - x''| < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon$$

кўринишда ифодалаш мумкин.

12-мисол. Ушбу

$$f(x) = x^2$$

функция $X = (0, +\infty)$ тўпламда текис узлуксиз эмаслигини кўрсатинг. Ихтиёрий мусбат δ сонни олайлик. Агар $\varepsilon = 1$ ва $x' = \frac{1}{\delta}$, $x'' = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ деб олинса, унда

$$|x' - x''| = \left|\frac{1}{\delta} - \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)\right| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

бўлиб,

$$|f(x') - f(x'')| = |x'^2 - x''^2| = \left|\left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\delta}\right)^2\right| =$$
$$= 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon.$$

Бу эса $f(x) = x^2$ функциянинг $X = (0, +\infty)$ тўпламда текис узлуксиз эмаслигини билдиради.

5-теорема (Кантор теоремаси). **Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у шу сегментда текис узлуксиз бўлади.**

Масалан, ушбу

$$f(x) = \sqrt{x}$$

функция, $[0, 1]$ сегментда текис узлуксиз бўлади, чунки бу функция шу сегментда узлуксиздир.

13-мисол. Ушбу

$$f(x) = \ln x$$

функция $X = (0, 1)$ тўпламда текис узлуксиз эмаслигини кўрсатинг.

Ихтиёрий мусбат δ сонни олиб, $\varepsilon = \frac{1}{2}\ln 2$ ва $x' = \frac{1}{n}$, $x'' = \frac{1}{2n}$ дейлик. n ни етарлича катта қилиб олиш ҳисобига

$$|x' - x''| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n} < \delta$$

тенгсизликка эришиш мумкин. Унда

$$|f(x') - f(x'')| = \left|\ln\frac{1}{n} - \ln\frac{2}{n}\right| = \ln 2 > \frac{1}{2}\ln 2 = \varepsilon$$

бўлади. Бу эса $f(x) = \ln x$ функциянинг $(0, 1)$ да текис узлуксиз эмаслигини билдиради.

$f(x)$ функция X тўпламда берилган бўлиб, δ ихтиёрий мусбат сон бўлсин.

6-таъриф. *Ушбу*

$$\omega(f; \delta) = \sup\{|f(x') - f(x'')| : \forall x',\ x'' \in X: |x' - x''| \leqslant \delta\}$$

$f(x)$ функциянинг X тўпламдаги узлуксизлик модули деб аталади.

6-теорема. **$f(x)$ функция X тўпламда текис узлуксиз бўлиши учун**

$$\lim_{\delta\to+0}\omega(f;\delta)=0$$

лимит муносабатнинг бажарилиши зарур ва етарли.

14-мисол. Ушбу

$$f(x)=x^2+1$$

функциянинг $X=[0,1]$ сегментдаги узлуксизлик модулини топинг ва $f(x)$ нинг X да текис узлуксизлигини кўрсатинг.

$X=[0,1]$ да ихтиёрий x' нуқта олиб, x'' нуқтани эса $x''=x'-\delta$ деб қарайлик $(0<\delta<1)$. Равшанки, $2\delta-\delta^2>0$ ва

$$|f(x')-f(x'')|=|(x'^2+1)-(x''^2+1)|=$$
$$=|2x'\delta-\delta^2|\leqslant 2\delta-\delta^2.$$

Демак,

$$\omega(f;\delta)=\sup\{|f(x')-f(x'')|:\forall x',x''\in X:$$
$$:|x'-x''|\leqslant\delta\}\leqslant 2\delta-\delta^2.$$

Агар $x'=1$, $x''=1-\delta$ нуқталар учун $|x'-x''|\leqslant\delta$ ва $|f(x')-f(x'')|=2\delta-\delta^2$ бўлишини эътиборга олсак, унда $\omega(f;\delta)=2\delta-\delta^2$ эканини топамиз. Бундан эса:

$$\lim_{\delta\to+0}\omega(f;\delta)=\lim_{\delta\to+0}(2\delta-\delta^2)=0.$$

Демак, берилган $f(x)=x^2+1$ функция $[0,1]$ да текис узлуксиз.

15-мисол. Ушбу

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}$$

функциянинг $X=(0,+\infty)$ тўпламдаги узлуксизлик модулини топинг ва $f(x)$ функцияни текис узлуксизликка текширинг.

Ихтиёрий мусбат δ сонни олайлик.

Равшанки,

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\sin\frac{1}{x'}-\sin\frac{1}{x''}\right|\leqslant 2\quad (x',x''\in X).$$

Жумладан $|x'-x''|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий x' ва x'' лар учун ҳам

$$\left|\sin\frac{1}{x'}-\sin\frac{1}{x''}\right|\leqslant 2$$

бўлади. Демак,

$$\omega\left(\sin\frac{1}{x};\delta\right)\leqslant 2.$$

Иккинчи томондан,

$$x_n'=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2n\pi},\quad x_n''=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$$

дейилса, унда n ни етарлича катта қилиб олиш ҳисобига бу x_n' ва x_n'' лар учун

$$|x_n'-x_n''|<\delta$$

тенгсизликка эришиш мумкин. Унда

$$\left|\sin\frac{1}{x_n'}-\sin\frac{1}{x_n''}\right|=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)-\right.$$
$$\left.-\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right|=2$$

бўлади.

Демак,

$$\omega\left(\sin\frac{1}{x};\delta\right)=2.$$

Аммо

$$\lim_{\delta\to+0}\omega\left(\sin\frac{1}{x};\delta\right)=2\neq 0$$

бўлгани сабабли $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ функция $(0;+\infty)$ да текис узлуксиз эмас.

16-мисол. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар бирор $\{x\}$ тўпламда текис узлуксиз бўлса, $\varphi(x)=f(x)\cdot g(x)$ функцияни текис узлуксизликка текширинг.

Аввало $\{x\}=[a,b]$ бўлган ҳолни қарайлик. Шартга кўра $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,b]$ да текис узлуксиз. $\forall x'\in[a,b]$, $\forall x''\in[a,b]$ нуқталарни олиб қуйидаги айирмани қараймиз:

$$\varphi(x')-\varphi(x'')=f(x')g(x')-f(x'')g(x'')=f(x')g(x')-$$
$$-f(x')g(x'')+f(x')g(x'')-f(x'')g(x'')=$$
$$=f(x')[g(x')-g(x'')]+g(x'')\cdot[f(x')-f(x'')].$$

Вейерштрасснинг иккинчи теоремасига биноан

$$A=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|,\quad B=\sup_{x\in[a,b]}|g(x)|$$ ..бот-

ларга эга бўламиз. Бундан эса

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|\leqslant A|g(x')-g(x'')|+B\cdot|f(x')-f(x'')|$$

бўлади. Равшанки, $\varphi(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда текис узлуксизлиги учун, $f(x)$ ва $g(x)$ ларнинг бу сегментда текис узлуксизлиги кифоя.

Агар қаралаётган $[a, b]$ сегмент ўрнига $(-\infty; +\infty)$ оралиқни олсак, умуман айтганда, $\varphi(x)$ текис узлуксиз бўлмасдан қолиши мумкин. Масалан, $f(x)=x$, $g(x)=x$ функциялар бутун сонлар ўқида текис узлуксиз, лекин $f(x)\cdot g(x)=x^2$ функция қаралаётган оралиқда текис узлуксиз эмас.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларни текис узлуксизликка текширинг:

67. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ $(0<x<\pi)$.

68. $f(x)=x\cdot\sin x$ $(0\leqslant x<+\infty)$.

69. $f(x)=x^2$ $(-e<x<e)$.

70. $f(x)=e^x$ $(-\infty<x<+\infty)$.

71. $f(x)=\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{x}$ $(0<x<1)$.

72. $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ $(0<x<\pi)$.

73. $f(x)=\sin\sqrt{x}$ $(1\leqslant x<+\infty)$.

74. $f(x)=e^{-\arcsin x}$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

75. $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{агар } x\leqslant 0 \text{ бўлса,}\\ e^{-x}, & \text{агар } x>0 \text{ бўлса.}\end{cases}$

76. $f(x)=\sin|x|^{\alpha}$, $\alpha>0$.

Қуйидаги функцияларнинг берилган оралиқдаги узлуксизлик модулларини топинг ва текис узлуксизликка текширинг:

77. $f(x)=x^2$ $(-e\leqslant x\leqslant e)$.

78. $f(x)=\frac{1}{x}$ $(0<a<x<+\infty)$.

79. $f(x)=\sin x+\cos x$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$.

80. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ $(0<x<1)$.

81. $f(x)=x^3$ $(-\infty<x<+\infty)$.

82. Агар $\delta_1<\delta_2$ бўлса, $\omega(f;\delta_1)\leqslant\omega(f;\delta_2)$ тенгсизликни исботланг.

83. Агар $f(x)$ функция X тўпламда чегараланган бўлса, у ҳолда $\forall\,\delta>0$ учун $\omega(f;\delta)<+\infty$ эканини исботланг.

84. Агар $f(x)$ функция чегараланган X тўпламда аниқланган бўлиб, чегараланмаган бўлса, у ҳолда $\forall\,\delta>0$ учун $\omega(f;\delta)=+\infty$ эканлигини исботланг.

85. $f(x)$ функция a нуқтада текис узлуксиз, деган жумла маънога эгами?

86. (a, b) оралиқда текис узлуксиз функция чегараланган бўладими? (97- масалага қаранг.)

87. Функция текис узлуксизлигининг геометрик талқинини ифодаланг.

88. Агар $f(x)$ функция X тўпламда узлуксиз бўлса, у берилган тўпламда текис узлуксиз бўладими?

89. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ва $[b, c]$ сегментларда текис узлуксиз бўлса, у ҳолда у $[a, c]$ сегментда ҳам текис узлуксизлигини исботланг.

90. Агар 89- мисолда $[b, c]$ сегмент ўрнига $(b, c]$ оралиқ олинса, $f(x)$ функциянинг $[a, c]$ сегментда текис узлуксизлиги ҳақида нима дейиш мумкин?

91. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпламда текис узлуксиз бўлса, у ҳолда $\forall\,\alpha,\ \beta\in R$ лар учун $\alpha f(x)+\beta g(x)$ функция ҳам X тўпламда текис узлуксиз эканини исботланг.

92. Мураккаб функциянинг текис узлуксиз бўлиши учун бирорта етарли шарт келтиринг ва исботланг.

93. Агар $f(x)$ функция A ва B тўпламларда текис узлуксиз бўлса, у ҳолда $A\cap B$ тўпламда ҳам текис узлуксиз бўлишини исботланг.

94. Узлуксиз даврий функция текис узлуксиз бўлишини исботланг.

95. Интервалда (чекли ёки чексиз) узлуксиз, чегараланган монотон функциянинг текис узлуксизлигини исботланг.

96. Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда текис узлуксиз бўлмаса, у ҳолда унинг ҳеч бўлмаганда $[a,b]$ оралиқдаги бирорта нуқтада узилишга эга эканлигини исботланг.

97. Чекли (a,b) оралиқда $f(x)$ функция текис узлуксиз бўлиши учун, унинг (a,b) оралиқда узлуксиз бўлиб, чекли

$$\lim_{x\to a+0}f(x),\ \lim_{x\to b-0}f(x)$$

лимитларнинг мавжудлиги зарур ва етарлилигини исботланг.

98. $f(x)$ функция $[0; +\infty]$ оралиқда текис узлуксиз бўлса, у ҳолда $x \to +\infty$ да

$$f(x) = o(x)$$

эканлигини исботланг.

99. X тўпламда α тартибли Гёльдер шартини қаноатлантирувчи функциянинг текис узлуксизлигини исботланг.

100. $f(x)$ функция $[0, 1]$ сегментдаги барча рационал сонлар тўплами Q_0 да аниқланган бўлсин. $[0, 1]$ да узлуксиз $g(x)$ функция мавжуд бўлиб, $\forall x \in Q_0$ ларда $f(x) = g(x)$ тенглик бажарилиши учун, $f(x)$ функциянинг Q_0 да текис узлуксиз бўлиши зарур ва етарлилигини исботланг.

V боб

ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАРИ

1-§. ФУНКЦИЯНИНГ ҲОСИЛАСИ

1°. Функция ҳосиласининг таърифи. $y = f(x)$ функция x_0 нуқтанинг $(x_0 \in R)$ бирор атрофида берилган бўлсин. Бу функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \tag{1}$$

нинг аргумент орттирмаси Δx га нисбати

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \quad (\Delta x \neq 0)$$

ни қараймиз.

1-таъриф. *Агар $\Delta x \to 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатнинг лимити*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{2}$$

мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $y = f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи деб аталади ва $f'(x_0)$ ёки $y'_{x=x_0}$ ёки $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ *кўринишларда белгиланади.*

Демак,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

$y = f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи қуйидагича ҳам таърифланиши мумкин:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{3}$$

1-мисол. Ушбу $y = f(x) = x^2$ функциянинг $x = x_0$ нуқтадаги ҳосиласини топинг.

Бу функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси (1) га кўра

$$\Delta f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

бўлади. Унда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

бўлади.

Демак, $f'(x_0) = (x^2)'_{x=x_0} = 2x_0$.

2-мисол. Ушбу $f(x) = e^x$ функциянинг $x_0 = 1$ нуқтадаги ҳосиласини топинг.

Юқоридаги (3) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$f'(1) = (e^x)'_{x=1} = \lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{e(e^{x-1} - 1)}{x - 1} =$$

$$= e \cdot \lim_{x \to 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} = e \cdot \ln e = e.$$

Демак,

$$f'(1) = (e^x)'_{x=1} = e.$$

3-мисол. Ушбу $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$, $f(0) = 0$ функция $x=0$ нуқтада ҳосилага эга эмас. Ҳақиқатан ҳам бу функция учун

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \cdot \sin \frac{1}{x}}{x} = \sin \frac{1}{x}$$

бўлиб, $x \to 0$ да

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin \frac{1}{x}$$

нисбат лимитга эга эмас. Демак, берилган функция $x = 0$ нуқтада ҳосилага эга бўлмайди.

4-мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ -x^2, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса,} \end{cases}$$

функциянинг $x = 0$ нуқтадаги ҳосиласи $f'(0) = 0$ бўлишини исботланг.

Берилган функция учун:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} x, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ -x, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса,} \end{cases}$$

бўлиб, унинг лимити $x \to 0$ да 0 бўлади.

Демак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0.$$

Бу эса

$$f'(0)=0$$

бўлишини билдиради.

5- мисол. Агар $\varphi(x)$ функция $x=a$ нуқтада узлуксиз бўлса, ушбу

$$f(x)=(x-a)\cdot\varphi(x)$$

функциянинг $x=a$ нуқтадаги ҳосиласи $f'(a)=\varphi(a)$ бўлишини кўрсатинг.

Берилган функциянинг $x=a$ нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f(a)=f(a+\Delta x)-f(a)=(a+\Delta x-a)\cdot\varphi(a+\Delta x)-$$
$$-(a-a)\cdot\varphi(a)=\Delta x\cdot\varphi(a+\Delta x)$$

бўлади. Унда

$$\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}=\frac{\Delta x\cdot\varphi(a+\Delta x)}{\Delta x}=\varphi(a+\Delta x)$$

бўлиб,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}=\varphi(a+\Delta x)$$

бўлиши келиб чиқади. $\varphi(x)$ функциянинг $x=a$ нуқтада узлуксиз эканини эътиборга олиб, топамиз:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(a+\Delta x)=\varphi(a).$$

Демак,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}=\varphi(a).$$

Бу эса $f'(a)=\varphi(a)$ эканини билдиради.

2°. Бир томонли ҳосилалар

2- таъриф. *Агар* $\Delta x\to+0$ $(\Delta x\to-0)$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *нисбатнинг лимити*

$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\left(\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right)$$

мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ўнг (чап) ҳосиласи деб аталади ва уни $f'(x_0+0)$ $(f'(x_0-0))$ каби белгиланади.

Функциянинг ўнг ва чап ҳосилалари ***бир томонли ҳосилалар*** деб аталади.

6- мисол. Ушбу

$$f(x)=x^2\cdot\cos\frac{1}{x},\quad f(0)=0$$

функциянинг $x=0$ нуқтадаги ўнг ва чап ҳосилаларини топинг.

Бу функциянинг $x=0$ нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f(0)=f(0+\Delta x)-f(0)=f(\Delta x)=\Delta x^2\cdot\cos\frac{1}{\Delta x}$$

бўлиб,

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\frac{\Delta x^2\cdot\cos\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\Delta x\cdot\cos\frac{1}{\Delta x}$$

бўлади. Агар

$$\lim_{\Delta x\to+0}\Delta x\cdot\cos\frac{1}{\Delta x}=0,$$
$$\lim_{\Delta x\to-0}\Delta x\cdot\cos\frac{1}{\Delta x}=0$$

эканлигини эътиборга олсак, унда

$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=0,$$
$$\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=0$$

бўлишини топамиз.

Демак, берилган функциянинг $x=0$ нуқтадаги ўнг ҳосиласи $f'(+0)=0$, чап ҳосиласи $f'(-0)=0$ бўлади.

7- мисол. Ушбу $f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}$ функциянинг $x=0$ нуқтадаги ўнг ва чап ҳосилаларини топинг. Бу функциянинг $x=0$ нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f(0)=f(0+\Delta x)-f(0)=f(\Delta x)-f(0)=$$
$$=\sqrt{1-e^{-(\Delta x)^2}}-\sqrt{1-e^{-0}}=\sqrt{1-e^{-(\Delta x)^2}}$$

бўлиб,

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\cdot\sqrt{1-e^{-(\Delta x)^2}}=$$

$$=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\cdot\sqrt{\frac{1-e^{-(\Delta x)^2}}{(\Delta x)^2}}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\sqrt{\frac{1}{e^{\Delta x^2}}\cdot\frac{e^{\Delta x^2}-1}{(\Delta x)^2}}$$

бўлади. Агар

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{\frac{1}{e^{0(\Delta x)^2}}\cdot\frac{e^{\Delta x^2}-1}{(\Delta x)^2}}\sqrt{1\cdot\ln e}=1$$

эканини эътиборга олсак, унда

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=1.$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$f'(+0)=1,\quad f'(-0)=-1.$$

8- м и с о л. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{агар } x\leqslant 0 \text{ бўлса,}\\ x\cos\dfrac{1}{x}, & \text{агар } x>0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функциянинг $x=0$ нуқтадаги бир томонли ҳосилаларини топинг.

Бу функция учун

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\ (\Delta x\leqslant 0)$$

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\cos\frac{1}{\Delta x}\ \ (\Delta x>0)$$

бўлиб,

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1$$

бўлади. Демак, берилган функциянинг $x=0$ нуқтадаги чап ҳосиласи $f'(-0)=1$ бўлади. Бироқ $\Delta x\to +0$ да $\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\cos\frac{1}{\Delta x}$ нисбат лимитга эга эмас. Демак, берилган функция $x=0$ нуқтада ўнг ҳосилага эга эмас.

9- м и с о л. Ушбу $f(x)=x\cdot\cos\frac{1}{x}$ функциянинг $(f(0)=0)$ $x=0$ нуқтадаги ўнг ва чап ҳосилаларининг мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

Бу функциянинг $x=0$ нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f(0)=f(0+\Delta x)-f(0)=\Delta x\cdot\cos\frac{1}{\Delta x}$$

бўлиб,

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\frac{\Delta x\cdot\cos\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\cos\frac{1}{\Delta x}$$

бўлади. $\Delta x\to\pm 0$ да

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\cos\frac{1}{\Delta x}$$

нисбат лимитга эга эмас.

Демак, берилган функция $x=0$ нуқтада ўнг ва чап ҳосилаларга эга эмас.

3°. Ч е к с и з ҳ о с и л а л а р.

$y=f(x)$ функция x_0 нуқтанинг $(x_0\in R)$ бирор атрофида берилган бўлиб, у x_0 нуқтада узлуксиз бўлсин.

3- т а ъ р и ф. *Агар $\Delta x\to 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta y}$ нисбатнинг лимити*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$+\infty$ (ёки $-\infty$) бўлса, уни ҳам $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи дейилади. Бундай ҳосила чексиз ҳосила деб аталади.

Демак,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=+\infty\ \ (\text{ёки } -\infty).$$

Бир томонли чексиз ҳосилалар ҳам худди шунга ўхшаш таърифланади.

10- м и с о л. Ушбу $f(x)=\sqrt[3]{x}$ функциянинг $x=0$ нуқтадаги ҳосиласини топинг.

Бу функциянинг $x=0$ нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f(0)=f(0+\Delta x)-f(0)=\sqrt[3]{\Delta x}$$

бўлиб,

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}$$

бўлади. Бундан эса

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}=+\infty$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, берилган функциянинг $x=0$ нуқтадаги ҳосиласи $+\infty$ бўлади.

11-мисол. Ушбу $f(x)=\sqrt[3]{\cos x}$ функциянинг $x=\frac{\pi}{2}$ нуқтадаги ҳосиласи топилсин. Бу функциянинг $x=\frac{\pi}{2}$ нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt[3]{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right)}-$$

$$-\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2}}=\sqrt[3]{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right)}=\sqrt[3]{-\sin\Delta x}=$$

$$=-\sqrt[3]{\sin\Delta x}$$

бўлиб.

$$\frac{\Delta f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\Delta x}=-\frac{\sqrt[3]{\sin\Delta x}}{\Delta x}=-\sqrt[3]{\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}$$

бўлади. Бундан эса

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-\sqrt[3]{\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}\right]=-\infty$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, берилган функциянинг $x=\frac{\pi}{2}$ нуқтадаги ҳосиласи $-\infty$ бўлар экан.

12-мисол. Ушбу $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ функциянинг $x=0$ нуқтадаги ўнг ва чап ҳосилаларини топинг.

Бу функциянинг $x=0$ нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f(0)=f(0+\Delta x)-f(0)=\sqrt[3]{\Delta x^2}$$

бўлиб,

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{\Delta x^2}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$$

бўлади. Равшанки,

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}=+\infty$$

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}=-\infty$$

бўлади. Демак, берилган функциянинг $x=0$ нуқтадаги ўнг ҳосиласи $f'(+0)=+\infty$, чап ҳосиласи $f'(-0)=-\infty$ экан.

13-мисол. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } x\leqslant 1 \text{ бўлса},\\ \sqrt{x-1}, & \text{агар } x>1 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функциянинг $x=1$ нуқтадаги ўнг ва чап ҳосилаларини топинг.

Бу функциянинг $x=1$ нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f(1)=f(1+\Delta x)-f(1)=\begin{cases}0, & \text{агар } \Delta x<0 \text{ бўлса},\\ \sqrt{\Delta x}, & \text{агар } \Delta x<0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

бўлиб,

$$\frac{\Delta f(1)}{\Delta x}=\begin{cases}0, & \text{агар } \Delta x<0 \text{ бўлса},\\ \sqrt{\Delta x}\cdot\frac{1}{\Delta x}, & \text{агар } \Delta x>0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{1}{\sqrt{\Delta x}}=+\infty,$$

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}0=0.$$

Берилган функциянинг $x=1$ нуқтадаги ўнг ҳосиласи $f'(-1)=+\infty$, чап ҳосиласи $f'(-1)=0$ дан иборат.

4°. Функция ҳосиласининг геометрик ва механик маънолари.

$f(x)$ функция (a, b) оралиқда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $x_0\in(a, b)$ нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда $f(x)$ функция графигига $M_0(x_0, f(x_0))$ нуқтада ўтказилган урунма мавжуд. Функциянинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи $f'(x_0)$ эса бу уринманинг бурчак коэффициентини ифодалайди. Уринманинг тенгламаси

$$y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0) \tag{4}$$

кўринишда бўлади.

14-мисол. Ушбу $f(x)=\cos x$ функция графигига $M_0\left(\frac{\pi}{6}, f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ нуқтада ўтказилган уринма тенгламасини топинг.

Берилган функциянинг ҳосиласи $f'(x)=-\sin x$ га тенг. Агар

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2},\ f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда (4) формулага кўра $M_0\left(\frac{\pi}{6},\ f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ нуқтадан ўтувчи уринма тенгламасини

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

эканини топамиз.

Агар $f'(x_0)=\pm\infty$ бўлса, $f(x)$ функция графигига $(x_0, f(x_0))$ нуқтадан ўтказилган уринма Ox ўққа перпендикуляр бўлади.

Моддий нуқтанинг тўғри чизиқли ҳаракати $s=f(t)$ функция билан ифодаланган бўлсин, бунда t — вақт, s шу вақт ичида ўтилган йўл (масофа).

$s=f(t)$ функциянинг t_0 нуқтадаги ҳосиласи $f'(t_0)$ ҳаракат қилаётган моддий нуқтанинг t_0 пайтдаги оний тезлигини билдиради.

5°. Тескари функциянинг ҳосиласи.

Агар $y=f(x)$ функция x_0 нуқтада $f'(x_0)\neq 0$ ҳосилага эга бўлса, бу функцияга тескари $x=f^{-1}(y)$ функция x_0 нуқтага мос бўлган $y_0(y_0=f(x_0))$ нуқтада ҳосилага эга ва

$$(f^{-1}(y))'_{y=y_0}=\frac{1}{f'x(x_0)}$$

бўлади.

15-мисол. Ушбу $y=\arcsin x$ функциянинг ҳосиласини топинг.

Равшанки, $y=\arcsin x$ функция $x=\sin y$ функцияга $\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$ тескари функциядир. Унда юқоридаги қоидага кўра

$$y'=(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}$$

бўлади. Маълумки, $(\sin y)'=\cos y$. Демак,

$$y'=(\arcsin x)'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1<x<1).$$

6°. Ҳосилалар жадвали.

Қуйида элементар функцияларнинг ҳосилаларини топиш формулаларини келтирамиз:

1) $(x^{\mu})'=\mu\cdot x^{\mu-1},\quad (\mu>0).$

2) $(a^x)'=a^x\cdot\ln a,\ (a>0,\ a\neq 1).$

3) $(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e\ (x>0,\ a>0,\ a\neq 1).$

4) $(\sin x)'=\cos x.$

5) $(\cos x)'=-\sin x.$

6) $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k=0,\pm1,\pm2,\ \dots$

7) $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x},\ x\neq k\pi;\ k=0,\pm1,\pm2,\ \dots$

8) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1.$

9) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1.$

10) $(\operatorname{arc\,tg} x)'=\frac{1}{1+x^2}.$

11) $(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$

12) $(\ln x)'=\frac{1}{x},\ x>0.$

13) $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x.$

14) $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x.$

15) $(\operatorname{th} x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$

16) $(\operatorname{cth} x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x},\ (x\neq 0).$

7°. Ҳосила ҳисоблашнинг содда қоидалари.

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $x\in(a,b)$ нуқтада $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0$ функциялар ҳам ҳосилага эга ва

1) $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x);$

2) $[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x);$

3) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}\quad (g(x)\neq 0)$

бўлади.

16- мисол. Ушбу

$$y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$$

функциянинг ҳосиласини топинг.

Бу функциянинг ҳосиласини топишда юқоридаги қоидадан ҳамда ҳосилалар жадвалидан фойдаланамиз:

$$y' = (x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})' = (x + x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}})' =$$

$$= (x)' + (x^{\frac{1}{2}})' + (x^{\frac{1}{3}})' = 1 + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad (x > 0).$$

17- мисол. Ушбу

$$f(x) = x \cdot |x|$$

функциянинг ҳосиласини топинг:

а) $x > 0$ бўлсин. У ҳолда $f(x) = x \cdot |x| = x^2$ бўлиб, $f'(x) = 2x$ бўлади.

б) $x < 0$ бўлсин. У ҳолда $f(x) = x \cdot |x| = -x^2$ бўлиб, $f'(x) = -2x$ бўлади.

в) $x = 0$ бўлсин. У ҳолда, ҳосила таърифига кўра:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot |\Delta x|}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} |\Delta x| = 0.$$

Демак, берилган функциянинг ҳосиласи:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x, \text{ агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ 2x, \text{ агар } x \geqslant 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

8° Мураккаб функциянинг ҳосиласи

$u = f(x)$ функция (a, b) оралиқда, $y = F(u)$ функция эса (c, d) оралиқда берилган бўлиб,

$$y = F(f(x))$$

мураккаб функцияга эга бўлайлик.

Агар $u = f(x)$ функция $x_0 \in (a, b)$ нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлиб, $y = F(u)$ функция эса x_0 нуқтага мос u_0 ($u_0 = f(x_0)$) нуқтада $F'(u_0)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда мураккаб функция $F(f(x))$ ҳам x_0 нуқтада ҳосилага эга ва

$$[F(f(x))]'_{x=x_0} = F'(u_0) \cdot f'(x_0) \tag{5}$$

бўлади.

18- мисол. Ушбу

$$y = \sin 5\sqrt{x}$$

функциянинг ҳосиласини топинг.

Равшанки, бу мураккаб функция бўлиб, уни

$$y = F(u) = \sin u, \quad u = f(x) = 5\sqrt{x}$$

деб қараш мумкин. (5) формулага кўра:

$$y' = (\sin 5\sqrt{x})' = (\sin u)'_{u=5\sqrt{x}} \cdot (5\sqrt{x})' =$$

$$= \cos 5\sqrt{x} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5 \cdot \cos 5\sqrt{x}}{2 \cdot \sqrt{x}} \quad (x > 0)$$

19- мисол. Ушбу

$$y = \ln(10x^4 + 2x^2 + 1)$$

функциянинг ҳосиласини топинг.

Равшанки,

$$y = F(u) = \ln u, \quad u = f(x) = 10x^4 + 2x^2 + 1.$$

(5) формулага кўра

$$y' = (\ln(10x^4 + 2x^2 + 1))' =$$

$$= (\ln u)'_{u=10x^4+2x^2+1} \cdot (10x^4 + 2x^2 + 1)' =$$

$$= \frac{1}{10x^4 + 2x^2 + 1} \cdot (40x^3 + 4x) = \frac{4x(10x^2 + 1)}{10x^4 + 2x^2 + 1}.$$

20- мисол. Ушбу

$$y = \arcsin\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$$

функциянинг ҳосиласини топинг. Бу функциянинг ҳосиласи қуйидагича топилади:

$$y' = \left[\arcsin\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)\right]' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)^2}} \times$$

$$\frac{-(1 + x^2) \cdot 2x - (1 - x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{-4x}{\sqrt{\frac{4x^2}{(1 + x^2)^2}} \cdot (1 + x^2)^2} =$$

$$= \frac{-4x}{2 \cdot |x| \cdot (1 + x^2)}.$$

Демак,

$$y' = \begin{cases} -\frac{2}{1+x^2}, \text{ агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ \frac{2}{1+x^2}, \text{ агар } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Берилган функция $x = 0$ нуқтада эса ҳосилага эга эмас.

Мисол ва масалалар

I Ҳосила таърифидан фойдаланиб қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

1. $f(x) = \sqrt{x}.$
2. $f(x) = 2^x \cdot \sin x.$
3. $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x}$
4. $f(x) = 2^{x+1}.$
5. $f(x) = \ln x.$
6. $f(x) = \sin 5x.$
7. $f(x) = \mathrm{arctg}\, 3x.$
8. $f(x) = 2\sin 3x,\ x_0 = \frac{\pi}{6}.$
9. $f(x) = 1 + \ln 2x,\ x_0 = 1.$
10. $f(x) = x + \mathrm{tg}\, x,\quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$
11. $f(x) = 5|x+1|,\ x_0 = -2.$
12. $f(x) = x^3,\ x_0 = 0{,}1.$
13. $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 0.$
14. $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}, \text{ агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$
15. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|^5} \cdot \cos\frac{1}{x}, \text{ агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$
16. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$

Ҳосила таърифидан фойдаланиб қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари мавжудлигини текширинг.

17. $f(x) = |x|,\ x_0 = 0.$
18. $f(x) = |(x-1)(x-2)|,\ x_0 = 1,\ x_0 = 2.$
19. $f(x) = |x^3|,\ x_0 = 0$
20. $f(x) = x|x|,\ x_0 = 0.$
21. $f(x) = |\sin x|,\ x_0 = \pi.$
22. $f(x) = |x^2 - x|,\ x_0 = 1.$
23. $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ x^4, \text{ агар } x \leqslant 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$ $x_0 = 0.$
24. $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ агар } x \geqslant 0 \text{ бўлса,} \\ x^2, \text{ агар } x < 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$
25. $f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos\frac{1}{x}, \text{ агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$
26. $f(x) = \begin{cases} x^3, \text{ агар } x \leqslant 0 \text{ бўлса,} \\ e^{-\frac{1}{x}} \text{ агар } x > 0 \text{ бўлса} \end{cases}$ $x_0 = 0.$
27. $f(x) = \begin{cases} x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|, \text{ агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } x = 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$ $x_0 = 0$
28. $f(x) = \begin{cases} x, \text{ агар } x - \text{рационал сон бўлса,} \\ 0, \text{ агар } x - \text{иррационал сон бўлса,} \end{cases}$ $x_0 = 0.$
29. Ушбу $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ агар } x - \text{рационал сон бўлса,} \\ 2(x-1), \text{ агар } x - \text{иррационал сон бўлса.} \end{cases}$

Функциянинг ҳосилалари мавжуд бўлган нуқталарини аниқланг ва бу нуқталарда ҳосилаларни топинг.

II. Қуйидаги функцияларнинг ўнг ва чап ҳосилалари мавжудлигини текширинг.

30. $f(x) = |2^x - 2|,\ x_0 = 1.$

31. $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$, $x_0=0$, $x_0=\sqrt{\pi}$

32. $f(x)=\arccos\frac{1}{x}$, $x_0=1$, $x_0=-1$.

33. $f(x)=\begin{cases} x^4\sin\frac{1}{x}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса,}\end{cases}$ $x_0=0$.

34. $f(x)=\begin{cases} x, & \text{агар } x\geqslant 0 \text{ бўлса,}\\ \sqrt[3]{x^4}\ln x, & \text{агар } x>0 \text{ бўлса,}\end{cases}$ $x_0=0$.

35. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса,}\end{cases}$ $x_0=0$.

36. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|\sin x|}{|x|}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,}\\ 1, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса,}\end{cases}$ $x_0=0$.

37. 37. $f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x^2}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса,}\end{cases}$ $x_0=0$

38. $f(x)=|x-1|\cdot e^x$, $x_0=1$.

39. $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса,}\end{cases}$ $x_0=0$,

40. $f(x)\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса,}\end{cases}$ $x_0=0$, $x_0=1$.

III. Қуйидаги функцияларнинг берилган нуқтадаги тескари функциялари ва уларнинг ҳосилаларини топинг:

41. $y=2x-\frac{\cos x}{2}$, $y_0=-\frac{1}{2}$.

42. $y=2x^2-x^4$, $x>1$, $y_0=0$.

43. $y=0{,}1x+e^{0{,}1x}$, $y_0=1$.

44. Агар $x=\operatorname{sh} y$ бўлса, $y'(x)$ ни топинг.

45. Агар $y=x+\sin x$ бўлса, $x\in R$ қандай нуқталарда бу функцияга тескари функция $+\infty$ ҳосилага эга бўлади?

IV. Ҳосалалар жадвали ва қоидалари ёрдамида қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини ҳисобланг:

46. $y=\frac{\ln 3}{x}+e^2$.

47. $y=7x^{25}+25x^{-7}$

48. $y=x^{\sqrt{2}}-x^{-\sqrt{2}}$.

49. $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, $c\neq 0$.

50. $y=5x\sin x$.

51. $y=(x+1)\operatorname{tg} x$.

52. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,}\\ 1, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса.}\end{cases}$

53. $y=(x^2-7x+8)e^x$

54. $y=e^{ax}\cdot(a\sin bx-b\cos bx)$.

55. $y=2^x\ln|x|$.

56. $y=\log_x 2$.

57. $y=\log_x 2^x$.

58. $y=\operatorname{sh}^2 x-\operatorname{ch}^2 x$

59. $y=\sqrt{x^2-a^2}$.

60. $y=x\sqrt[3]{x^2+1}$.

61. $y=\sqrt{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}}$.

62. $y=\sin^2(\cos x)+\cos^2(\sin x)$.

63. $y=\sin(\sin(\sin x))$.

64. $y=2^{\cos x+\operatorname{tg}x}$.

65. $y=e^x\cdot\sin x$.

66. $y=e^{x^2}\cos 2x.$

67. $y=e^{e^x}+x^{e^x}.$

68. $y=x^{x}.$

69. $y=\ln(\ln(\ln x)).$

70. $y=\frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a},\ a<0,$

71. $y=\ln|x|.$

72. $y=\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2}).$

73. $y=\ln\sin x.$

74. $y=\sin(\ln x).$

75. $y=\arcsin\frac{x}{a}.$

76. $y=\mathrm{arctg}\,\frac{1+x}{1-x^2}.$

77. $y=\arccos\frac{1}{x}.$

78. $y=\arcsin(\sin x).$

79. $y=\mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}\,x).$

80. $y=\sin(\arcsin x).$

81. $y=\ln\frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}}+\frac{a}{b}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{b};\ a,b>0.$

82. $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a},\ a>0$

83. $y=\frac{\mathrm{arscos}\,x}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}.$

84. $y=\mathrm{arctg}\sqrt{x^2-1}+\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}.$

85. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}.$

86. $y=\ln(e^x\sqrt{1+e^{2x}}).$

87. $y=\mathrm{arctg}\,(x+\sqrt{1+x^2}).$

88. $y=(\sin x)^{\cos x}.$

89. $y=\mathrm{sh}\,(\mathrm{tg}\,x).$

90. $y=\mathrm{th}\,(\cos x).$

91. $y=\ln(\mathrm{sh}\,x).$

92. $y=\lg(\mathrm{ch}\,x).$

93. $y=\mathrm{arctg}\,(\mathrm{th}\,x).$

94. $f(x)=x(x-1)(x-2)\ \ldots\ (x-1000);$ $f'(0)$ ни топинг.

95. Ушбу

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \ldots & f_{1n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{k1}(x) & \ldots & f_{kn}(x)) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1}(x) & \ldots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \ldots & f_{1n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f'_{k1}(x) & \ldots & f'_{kn}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n1}(x) & \ldots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}$$

муносабатни исботланг.

96. Бутун сонлар ўқида аниқланган ва иккита нуқтада ҳосилага эга бўлмаган функцияга мисол келтиринг.

97. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпламда аниқланган бўлиб, $f(x)$ x_0 да ҳосилага эга, $g(x)$ эса бу нуқтада ҳосилага эга бўлмасин. У ҳолда

а) $f(x)\pm g(x)$,

б) $f(x)\cdot g(x)$

функцияларнинг x_0 нуқтадаги ҳосилалари ҳақида нима дейиш мумкин? Мисоллар келтиринг.

98. Агар 97- мисолда $f(x)$ функция ҳам x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлмаса, у ҳолда $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ функцияларнинг x_0 нуқтадаги ҳосилалари ҳақида нима дейиш мумкин? Мисоллар келтиринг.

99. Бутун сонлар ўқида аниқланган ва фақат n та нуқтада ҳосилага эга бўлган функцияга мисол келтиринг.

100. Ҳосилага эга бўлган жуфт функциянинг ҳосиласи тоқ функция эканини исботланг.

101. Ҳосилага эга бўлган тоқ функциянинг ҳосиласи жуфт функция эканини исботланг.

102. Ҳосиласи жуфт функция бўлган, ўзи тоқ бўлмаган функцияга мисол келтиринг.

103. Агар $f(x)$ функциянинг ҳосиласи $f'(x)$ тоқ функция бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция жуфт эканини исботланг.

104. Агар ҳосилага эга бўлган $f(x)$ функция даврий бўлиб, унинг даври T га тенг бўлса, у ҳолда $f'(x)$ ҳам дав-

рий бўлиб, унинг ҳам даври T га тенг бўлишини исботланг.

105. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, функция x_0 нуқтанинг бирор атрофида ҳосилага эга бўладими?

106. Бутун сонлар ўқида аниқланган бўлиб, ихтиёрий $x \in R$ нуқтада ҳосилага эга бўлмаган, лекин квадрати $\forall x \in R$ нуқтада ҳосилага эга бўлган функцияга мисол келтиринг.

107. x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлмаган $f(x)$ ва $g(x)$ функциялардан тузилган мураккаб функцияларнинг ҳосилалари ҳақида нима дейиш мумкин? Мисоллар келтиринг.

108. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $\left\{n\left(f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right)\right\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи эканини исботланг. Тасдиқнинг тескариси ўринлими?

109. Агар $f(x) < g(x)$ бўлса, бу тенгсизликдан ҳосила олиш ўринлими?

110. а) $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$;

б) $1^2+2^2x+3^2x^2+\ldots+n^2x^{n-1}$;

в) $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx$;

г) $\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx$

йиғиндиларни ҳисоблаш формулалари топилсин.

111. $y=|\sin^9 x|$ ва $y=[x]\sin^2\pi x$ функцияларнинг ҳосилалари топилсин.

112. $f(x)$ функция бутун сонлар ўқида аниқланган ва $\forall x \in R$ учун $f'(x)$ мавжуд бўлсин. Агар $|f'(x)| \leqslant M$ тенгсизлик $\forall x \in R$ учун ўринли бўлса, қандай $\delta > 0$ лар учун $|x| < \delta$ тенгсизликдан $|f(x)-f(0)| < \varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқади? $(\forall \varepsilon > 0)$.

113. $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$ функциялар X тўпламда аниқланган бўлиб, $x \in X$ нуқтада $f_i'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин, $i=\overline{1,n}$. У ҳолда

$$(f_1(x)\cdot f_2(x)\ldots f_n(x))'=\sum_{k=1}^{n} f_1(x)\ldots f_{k-1}(x)\cdot f_k'(x)\cdot f_{k+1}(x)\ldots f_n(x)$$

формулани исботланг.

114. Қандай нуқталарда $y=\frac{x+2}{x-2}$ функция графигига ўтказилган уринма Ox ўқнинг мусбат йўналиши билан $135°$ ли бурчак ташкил этади?

115. $y=\sin x$ функция графиги абсциссалар ўқини қандай бурчаклар остида кесади?

Қандай нуқталарда қуйидаги $y=f(x)$ функциялар графигига ўтказилган уринмалар Ox ўққа параллел бўлади?

116. $y=(3-x^2)e^x$.

117. $y=2x^3-3x^2-12x+7$.

118. $y=|x-5|\cdot(x-3)^3$.

Қандай нуқталарда қуйидаги $y=f(x)$ функциялар графигига ўтказилган уринмалар берилган тўғри чизиқларга параллел бўлади?

119. $f(x)=x^3-3x^2+2$, $y=3x$.

120. $f(x)=x^2-7x+3$, $5x+y-3=0$.

121. $f(x)=\ln(4x-1)$, $y=x$.

122. $f(x)=\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{\sqrt{3}}{3}\cos 3x$, $y=-x$.

Қандай нуқталарда қуйидаги $y=f(x)$ функциялар графигига ўтказилган уринмалар берилган тўғри чизиқларга перпендикуляр бўлади?

123. $f(x)=x^3+2x-1$, $x+y=0$.

124. $f(x)=\sin x$, $x-10=0$.

125. $f(x)=\ln x$, $2y+x+1=0$.

126. $f(x)=\operatorname{tg} x$, $x+y=0$.

127. $y=-\sqrt{2x^3}$, $4x-3y+2=0$.

$y=f(x)$ функция графигига берилган нуқтада ўтказилган уринма тенгламасини ёзинг:

128. $y=\sqrt{5-x^2}$, $x=1$.

129. $y=\operatorname{arctg} 2x$, $x=0$.

130. $y=\ln\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$, $x=0$.

131. $y=4\operatorname{ctg} x-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$, $x=\frac{\pi}{2}$.

132. $y=|x-1|\sqrt[3]{x+2}$, $x=6$.

133. $y=e^x$, $x=1$.

Қуйидаги функцияларнинг графиклари қайси нуқталарда қандай бурчак остида кесишишларини аниқланг:

134. $y_1=\sqrt{2}\sin x$, $y_2=\sqrt{2}\cos x$.

135. $y_1 = \frac{1}{x}$, $y_2 = \sqrt{x}$.

136. $y_1 = \ln x$, $y_2 = \frac{x^2}{2e}$.

137. $y_1 = x^3$, $y_2 = \frac{1}{x^2}$.

138. $y_1 = x^2$, $x = y^2$.

Қуйидаги функцияларнинг графикларига берилган нуқталарда ўтказилган бир томонли уринмалар орасидаги бурчакни топинг:

139. $y = |x|$, $M(0, 0)$.

140. $y = \sqrt[3]{x^2}$, $M(0, 0)$.

141. $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$, $M\left(1, \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)$.

142. $y = \sqrt{2x^3 + 9x^2}$, $M(0, 0)$.

143. $y = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$ $M(0, 0)$.

144. $y = \sqrt{1 - e^{-a^2x^2}}$, $M(0, 0)$.

145. Параметр n нинг қандай қийматида $y = \operatorname{arctg} nx$ $(n > 0)$ чизиқ Ox ўқ билан $89°$ дан катта бурчак остида кесишади?

146. $y = |x|^{\alpha}$ чизиқ $0 < \alpha < 1$ бўлганда Oy ўққа, $1 < \alpha < +\infty$ бўлганда Ox ўққа уринишини исботланг.

2-§. ФУНКЦИЯНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛИ

1°. Функциянинг дифференциалланувчи бўлиши тушунчаси. $y = f(x)$ функция x_0 нуқтанинг $(x_0 \in R)$ бирор атрофида берилган бўлсин. Бу функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ни қарайлик. Равшанки, бу орттирма Δx га боғлиқдир.

4-таъриф. *Агар $y = f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси Δy ни*

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \tag{6}$$

(бунда A — ўзгармас, $\alpha = \alpha(\Delta x)$ бўлиб, $\Delta x \to 0$ да $\alpha(\Delta x) \to$

$\to 0$) кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи деб аталади.

(6) муносабатни қуйидагича

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = A\,\Delta x + 0(\Delta x) \tag{7}$$

ёзиш ҳам мумкин.

$A\Delta x$ га функциянинг дифференциали дейилади. Функция дифференциали $dy = df(x_0)$ каби белгиланади: $df(x_0) = A\,\Delta x$ бўлиб, $\Delta x = dx$ ни эътиборга олсак, $df(x_0) = A\,dx$ бўлади.

21-мисол. Ушбу

$$f(x) = x^3 + x^2 + 1$$

функциянинг $x_0(\forall\, x_0 \in R)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлишини кўрсатинг.

Бу функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмасини топамиз:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 + (x_0 + \Delta x)^2 + \\ + 1 - (x_0^3 + x_0^2 + 1) = 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot \Delta x^2 + \\ + \Delta x^3 + 2x_0 \Delta x + \Delta x^2 = (3x_0^2 + 2x_0)\Delta x + \\ + (3x_0 \Delta x + \Delta x + \Delta x^2) \cdot \Delta x.$$

Агар $A = 3x_0^2 + 2x_0$, $\alpha = \alpha(\Delta x) = (3x_0 + 1)\Delta x + \Delta x^2$ дейилса, у ҳолда

$$\Delta f(x_0) = A\,\Delta x + \alpha(\Delta x)$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса берилган функциянинг x_0 нуқтада дифференциалланувчи эканини билдиради.

22-мисол. Ушбу

$$f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad f(0) = 0$$

функция $x = 0$ нуқтада дифференциалланувчи бўладими?

Бу функциянинг $x = 0$ нуқтадаги орттирмасини топамиз:

$$\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = \Delta x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{\Delta x}.$$

Бу тенгликдан кўринадики, берилган функциянинг $x = 0$ нуқтадаги орттирмаси $\Delta f(0)$ ни (7) кўринишда ифодалаб бўлмайди. Демак, функция $x = 0$ нуқтада дифференциалланувчи бўлмайди.

23-мисол. Ушбу

$$f(x) = a^x$$

$y=f(x)$ функция (a, b) оралиқда берилган бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. Бу ҳолда

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x$$

бўлади. Равшанки, Δx етарлича кичик бўлганда ушбу

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot\Delta x,$$

яъни

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x \qquad (9)$$

тақрибий формулага келамиз.

28- мисол. Ушбу

$$\sqrt{1,2}, \quad \sqrt{1,02}, \quad \sqrt{1,002}$$

миқдорларнинг тақрибий қийматларини топинг.

Ушбу

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

функцияни қарайлик. Бу функциянинг ҳосиласи

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \quad (x \neq -1)$$

эканлигини эътиборга олиб, сўнг (9) формуладан фойдаланиб, топамиз:

$$\sqrt{1+(x_0+\Delta x)} \approx \sqrt{1+x_0} + \frac{1}{2\sqrt{1+x_0}}\cdot\Delta x.$$

Агар $x_0 = 0$, $\Delta x = 0,2$ дейилса, унда

$$\sqrt{1+0,2} \approx 1 + \frac{1}{2}\cdot 0,2$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $\sqrt{1,2} \approx 1,1$.

Агар $x_0 = 0$, $\Delta x = 0,02$ дейилса, унда

$$\sqrt{1+0.02} \approx 1 + \frac{1}{2}\cdot 0,02$$

бўлади. Демак, $\sqrt{1.02} \approx 1,01$.

Агар $x_0 = 0$, $\Delta x = 0,002$ дейилса, унда

$$\sqrt{1+0,002} \approx 1 + \frac{1}{2}\cdot 0,002$$

бўлади. Демак, $\sqrt{1,002} \approx 1,001$.

29- мисол. Ушбу

$$\cos 60°6'$$

миқдорнинг тақрибий қийматини топинг.

(9) формулага кўра:

$$\cos(x_0+\Delta x) \approx \cos x_0 + (-\sin x_0)\cdot\Delta x.$$

$x_0 = \frac{\pi}{3}$, $\Delta x = \frac{\pi}{1800}$ деб олинса, унда:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{1800}\right) \approx \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{1800} =$$

$$= 0,5 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{1800} \approx 0,4985.$$

Демак,

$$\cos 60°6' \approx 0,4985.$$

Мисол ва масалалар

1. Қуйидаги функцияларни берилган нуқталарда дифференциалланувчанликка текширинг:

147. $f(x) = 2x^2 + 7x - 1, \ \forall x_0 \in R.$

148. $f(x) = e^{2x}, \ \forall x_0 \in R.$

149. $f(x) = \begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x^2}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса}, \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса}, \end{cases}$ $\quad x_0 = 0.$

150. $f(x) = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}, \ x_0 = 0, \ x_0 = 1.$

151. $f(x) = 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}, \quad x_0 = \frac{1}{\pi}.$

152. $f(x) = 3\cos 2x - \sqrt{1-\sin 2x}\,(\sin x + \cos 2x), \quad x_0 = \frac{\pi}{6}.$

153. $f(x) = \ln(1+\sin^2 x) - 2\sin x \operatorname{arctg}\sin x, \ x_0 = \frac{\pi}{2}.$

154. $f(x) = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}, \ x_0 = 1, \ x_0 = -1, \ x_0 = 0.$

155. $f(x) = (\operatorname{ch} x)^{\operatorname{sh} x}, \ x_0 = 0.$

156. $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x + 1}, \ x_0 = 0.$

157. $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}.$

158. $f(x) = \max(7x - 6x^2, |x|^3)$, $x_0 = 0$.

159. $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{arctg} \sqrt[5]{\cos \ln^2 x}}$, $x_0 = 1$.

160. $f(x) = \left(\sqrt{1 + 3^x}\right)^{\ln x^2}$, $x_0 = 1$.

161. $f(x) = \cos^4 x \cdot \cos nx$, $\forall\, x_0 \in R$.

162. $f(x) = 2^{\sin^2 x^2}$, $\forall x_0 \in R$.

163. $f(x) = 2^{\cos^2 x}$, $\forall\, x_0 \in R$.

2. Қуйидаги функцияларнинг дифференциалини топинг.

164. $f(x) = \ln \ln \left(\frac{x}{2}\right)$.

165. $f(x) = \cos \frac{1}{\log_2 x}$.

166. $f(x) = 10^{\frac{x}{\log_e x}}$.

167. $f(x) = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$.

168. $f(x) = \ln \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} \cos x}{\sqrt{3} + \sqrt{2} \cos x}$.

169. $f(x) = \operatorname{arc\,tg} e^{\frac{x}{2}} - \ln \sqrt{\frac{e^x}{e^x + 1}}$.

170. $f(x) = x^{x^2}$.

171. $f(x) = x^{e^x}$.

172. $f(x) = 5^{x^x}$.

173. $f(x) = |\sin x|^{\cos x}$.

174. $f(x) = \sqrt[x]{x}$, $(x > 0)$.

175. $f(x) = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}$, $a > 0, x > 0$.

176. $f(x) = \frac{\log_x e}{e}$.

177. $f(x) = \ln^2 (\sec 2\sqrt[3]{x})$.

178. $f(x) = \ln (\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x})$.

179. $f(x) = \ln \frac{1 + \sqrt{\sin x}}{1 - \sqrt{\sin x}} + 2\operatorname{arctg} \sqrt{\sin x}$.

180. $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\ln x}{x}$, $x_0 = \frac{1}{e}$, $x_0 = e$.

181. $f(x) = \left(\frac{1}{x} + \ln \frac{x-1}{x}\right)$, $x_0 = -1$.

182. $f(x) = \frac{x^2 2^x}{x^x}$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$.

183. $f(x) = \frac{(2x-1)\sqrt[3]{2+3x}}{(5x+4)^2 \sqrt[3]{1-x}}$, $x_0 = 1$.

3. Қуйидаги функцияларнинг берилган нуқталарда тақрибий қийматларини топинг.

184. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $x = 65$, $x = 125{,}1324$.

185. $f(x) = \sin x$, $x = 29°$, $x = 359°$.

186. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x = 44°50'$.

187. $f(x) = \ln \operatorname{tg} x$, $x = 47°15'$.

188. $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$, $x = 0{,}15$.

189. $f(x) = \cos x$, $x = 151°$.

190. $f(x) = \lg x$, $x = 11$.

3-§. ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ҲОСИЛА ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАР

1°. Функциянинг юқори тартибли ҳосилалари

$y = f(x)$ функция x_0 нуқтанинг бирор атрофида берилган бўлиб, шу атрофда $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Агар $f'(x)$ ҳам x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, уни $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги *иккинчи тартибли ҳосиласи* деб аталади ва

$$y''_{x_0} \text{ ёки } f''(x_0), \text{ ёки } \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}$$

каби ёзилади. Демак,

$$y''_{x_0} = (y')'_{x=x_0}, \quad f''(x_0) = (f'(x))'_{x=x_0},$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}.$$

$f(x)$ функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳ. к. тартибдаги ҳосилалари худди шунга ўхшаш таърифланади.

Умуман, агар $y=f(x)$ функциянинг $(n-1)$-тартибли $f^{n-1}(x)$ ҳосиласи x_0 нуқтанинг бирор атрофида мавжуд бўлиб, бу $f^{n-1}(x)$ функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, уни $y=f(x)$ функциянинг x_0 *нуқтадаги n-тартибли ҳосиласи* деб аталади ва

$$y^{(n)}_{x=x_0},\ f^{(n)}(x_0),\quad \left.\frac{d^n y}{dx^n}\right|_{x=x_0}$$

белгиларнинг бири орқали ёзилади.

Шундай қилиб,

$$f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))',$$

$$\left(\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{n-1}}\right)\right)$$

бўлади.

30-мисол. Ушбу $y=\ln\sin x$ функциянинг учинчи тартибли ҳосиласини топинг.

Функциянинг учинчи тартибли ҳосиласини топиш учун унинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топиш керак бўлади:

$$y'=(\ln\sin x)'=\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=\operatorname{ctg} x,$$

$$y''=(y')'=(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$y'''=(y'')'=\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)'=-\frac{-2\sin x\cos x}{\sin^4 x}=\frac{2\cos x}{\sin^3 x}.$$

Демак,

$$y'''=\frac{2\cos x}{\sin^3 x}.$$

31-мисол. Ушбу

$$y=\frac{x^2}{1-x}$$

функциянинг саккизинчи тартибли ҳосиласини топинг.

Аввало берилган функцияни

$$y=\frac{x^2}{1-x}=\frac{-(1-x^2)+1}{1-x}=-(1+x)+$$

$$+\frac{1}{1-x}=-(1+x)+(1-x)^{-1}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Шундан кейин унинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$y'=[-(1+x)+(1-x)^{-1}]'=-1+(-1)(1-x)^{-2},$$

$$y''=[-1+(-1)\cdot(1-x)^{-2}]'=0+(-1)\cdot(-2)(1-x)^{-3},$$

$$y'''=[(-1)(-2)\cdot(1-x)^{-3}]'=(-1)(-2)(-3)(1-x)^{-4}=$$

$$=(-1)^3\cdot 3!(1-x)^{-4}.$$

Шу йўл билан

$$y^8=(-1)^8\cdot 8!\,(1-x)^{-9}=8!\,(1-x)^{-9}$$

бўлишини топамиз.

2°. Содда қоидалар ва асосий формулалар

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар x_0 нуқтанинг бирор атрофида аниқланган бўлиб, улар шу атрофда $f^{(n)}(x)$, $g^{(n)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда

1) $[c\cdot f(x)]^{(n)}=c\cdot f^{(n)}(x),\quad c=\text{const}.$

2) $[f(x)\pm g(x)]^{(n)}=f^{(n)}(x)\pm g^{(n)}(x),$

3) $[f(x)\cdot g(x)]^{(n)}=f^{(n)}(x)\cdot g(x)+C_n^1\ f^{(n-1)}(x)\cdot g'(x)+$
$+C_n^2\ f^{(n-2)}(x)\cdot g''(x)+\ \ldots\ +C_n^{n-1}f'(x)\cdot g^{(n-1)}(x)+$
$+f(x)\cdot g^{(n)}(x)$

(Лейбниц формуласи) бўлади.

Энди асосий формулаларни келтирамиз:

1) $y=a^x$ бўлса, $y^{(n)}=a^x\cdot\ln^n a,\ a>0.$

2) $y=e^x$ бўлса, $y^{(n)}=e^x.$

3) $y=\sin x$ бўлса, $y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$

4) $y=\cos x$ бўлса, $y^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$

5) $y=\ln x$ бўлса, $y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$

6) $y=\frac{1}{x}$ бўлса, $y^{(n)}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}}.$

7) $y=x^m$ бўлса, $y^{(n)}=m(m-1)\ \ldots\ (m-n+1)\,x^{m-n}.$

8) $y=(1+x)^\alpha$ бўлса, $y^{(n)}=(\alpha(\alpha-1)\ \ldots\ (\alpha-n+$
$+1)(1+x)^{\alpha-n}.$

32-мисол. Ушбу

$$y=e^{2x}\sin^2 x$$

функциянинг n-тартибли ҳосиласини топинг.

Берилган функцияни

$$y = e^{2x}\sin^2 x = e^{2x}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{2x}\cdot\cos 2x)$$

кўринишда ёзиб оламиз. Шундан кейин унинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$y' = 1\cdot e^{2x}\cdot\left[1 - 2^{\frac{1}{2}}\cdot\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Юқоридаги формулалардан фойдаланиб

$$y^{(n)} = 2^{n-1}e^{2x}\left[1 - 2^{\frac{n}{2}}\cos\left(2x + n\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

бўлиши топилади.

33-мисол. Ушбу $y = \sin ax$ функциянинг n-тартибли ҳосиласини топинг.

Равшанки,

$$y' = (\sin ax)' = \cos ax\cdot a = a\cdot\sin\left(ax + \frac{\pi}{2}\right).$$

Юқоридаги 3)-формуладан фойдаланиб

$$y^{(n)} = a^n\sin\left(ax + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

бўлишини топамиз.

34-мисол. Ушбу

$$y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

функциянинг n — тартибли ҳосиласи топилсин.

Берилган функцияни

$$y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Юқорида келтирилган содда қоида ва (8) формуладан фойдаланиб, топамиз:

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right)^{(n)} = \left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} =$$

$$= [(x-2)^{-1}]^{(n)} - [(x-1)^{-1}]^{(n)} = (-1)(-1-1)\ ..$$

$$..\ (-1-n+1)(x-2)^{-1-n} - [(-1)(-1-1)\ ..$$

$$..\ (-1-n+1)(x-1)^{-1-n}] = (-1)^n\cdot n!\,[(x-2)^{-n-1} -$$

$$-(x-1)^{-n-1}] = (-1)^n\cdot n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right].$$

Демак,

$$y^{(n)} = (-1)^n\cdot n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right].$$

35-мисол. $y = x\cdot\cos ax$ функциянинг n-тартибли ҳосиласини топинг.

Бу функциянинг n-тартибли ҳосиласини топишда Лейбниц формуласидан фойдаланамиз. Лейбниц формуласида $f(x) = \cos ax$, $g(x) = x$ деймиз. Агар

$$f^{(n)}(x) = (\cos ax)^{(n)} = a^n\cos\left(ax + n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$g'(x) = 1,\ g''(x) = g'''(x) = \ldots = g^{(n)}(x) = 0.$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$y^{(n)} = (f(x)\cdot g(x))^{(n)} = (x\cdot\cos ax)^{(n)} =$$

$$= xa^n\cos\left(ax + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) + C_n^1\cdot a^{n-1}\cos\left(ax + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= xa^n\cos\left(ax + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) + na^{n-1}\cos\left(ax + \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= xa^n\cos\left(ax + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) + na^{n-1}\sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$$

бўлишини топамиз. Демак,

$$y^{(n)} = xa^n\cos\left(ax + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) + na^{n-1}\sin\left(ax + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

36-мисол. Агар $x = a$ нуқтанинг атрофида $\varphi(x)$ функция $(n-1)$-тартибли узлуксиз ҳосилага эга бўлса, у ҳолда

$$y = y(x) = (x-a)^n\cdot\varphi(x)$$

функциянинг $x = a$ нуқтадаги n-тартибли ҳосиласини топинг.

Айтайлик,

$$f(x) = (x-a)^n,\quad g(x) = \varphi(x)$$

бўлсин. У ҳолда

$$(f(x))^{(n-1)} = [(x-a)^n]^{(n-1)} =$$

$$= n\cdot(n-1)(n-2)\ \ldots\ 2\cdot(x-a) = n!\,(x-a),$$

$$[g(x)]^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x)$$

бўлади. Лейбниц формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$y^{(n-1)} = [f(x)\cdot g(x)]^{(n-1)} = [(x-a)^n \cdot \varphi(x)]^{(n-1)} =$$
$$= [(x-a)^n]^{(n-1)}\cdot\varphi(x) + C_{n-1}^1 [(x-a)^n]^{(n-2)}\cdot\varphi'(x) + \ldots +$$
$$+ C_{n-1}^{n-2} [(x-a)^n]'\cdot\varphi^{(n-2)}(x) + (x-a)^n\varphi^{(n-1)}(x) =$$
$$= n!\,(x-a)\,\varphi(x) + (n-1)(n-1)\,n\,(n-2)\ldots 2\ldots$$
$$\ldots(x-a)^2\varphi'(x) + \ldots + (n-1)\,n\,(x-$$
$$-a)^{n-1}\varphi^{(n-2)}(x) + (x-a)^n\varphi^{(n-1)}(x).$$

Энди

$$y^{(n-1)} = n!\,(x-a)\,\varphi(x) + \alpha\,(x-a).$$

деб оламиз, бунда

$$\lim_{x\to a}\alpha = 0$$

бўлади. Равшанки,

$$y^{(n-1)}(a) = 0.$$

Шуни эътиборга олиб, сўнгра ҳосила таърифидан фойдаланиб, топамиз:

$$y^{(n)}(a) = \lim_{x\to a}\frac{y^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{y^{(n-1)}(x)}{x-a} =$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{n!\,(x-a)\,\varphi(x) + \alpha\,(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a}[n!\,(x-a)\,\varphi(x) + \alpha] =$$
$$= n!\lim_{x\to a}\varphi(x).$$

Шартга кўра $\varphi(x)$ функция $x = a$ нуқтада узлуксиз.

Демак,

$$\lim_{x\to a}\varphi(x) = \varphi(a).$$

Натижада берилган функциянинг $x = a$ нуқтадаги n — тартибли ҳосиласи

$$y^{(n)}(a) = n!\,\varphi(a).$$

бўлиши келиб чиқади.

3°. Функциянинг юқори тартибли дифференциаллари

$y = f(x)$ функция x_0 нуқтанинг бирор атрофида берилган бўлиб, шу атрофда икки марта дифференциалланувчи бўлсин. $f(x)$ функция дифференциали $dy = df(x)$ нинг дифференциали берилган функциянинг *иккинчи тартибли дифференциали* деб аталади ва

$$d^2y \text{ ёки } d^2f(x)$$

каби ёзилади. Демак, $d^2y = d(dy)$ ёки $d^2f(x) = d(df(x))$. Юқорида келтирилган функциянинг иккинчи тартибли дифференциали қуйидагича изоҳланади;

а) dy фақат x нинг функцияси деб фараз қилинади, яъни $f'(x)\,dx$ нинг дифференциали ҳисобланганда dx ўзгармас кўпаювчи деб қаралади.

б) $f'(x)$ нинг дифференциали ҳисобланганда x нинг орттирмаси $\Delta x = dx$ ни биринчи тартибли дифференциал $dy = f'(x)\,dx$ ни ҳисоблагандаги dx нинг қийматига тенг деб қаралади.

$f(x)$ нинг учинчи, тўртинчи ва ҳ. к. тартибдаги дифференциаллари худди шунга ўхшаш таърифланади.

Умуман, $f(x)$ функциянинг n-тартибли дифференциали $d^n f(x)$ ни

$$d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x))$$

деб таърифланади.

Функциянинг ҳосилалари билан унинг дифференциаллари орасида

$$d^n y = y^{(n)}\,dx^n \quad \text{ёки} \quad d^n f(x) = f^{(n)}(x)\,dx^n \tag{10}$$

боғланиш мавжуд.

37-мисол. Ушбу $y = \ln x$ функциянинг 100-тартибли дифференциалини топинг.

(10) формулага кўра

$$d^{100}y = d^{100}(\ln x) = (\ln x)^{100}\,dx^{100}$$

бўлади. Агар

$$(\ln x)^{(100)} = \frac{(-1)^{100-1}(100-1)!}{x^{100}} = -\frac{99!}{x^{100}}$$

бўлишини ҳисобга олсак, унда

$$d^{100}y = -\frac{99!}{x^{100}}\,dx^{100}$$

экани келиб чиқади.

4°. Содда қоидалар ва асосий формулалар

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар x_0 нуқтанинг бирор атрофида аниқланган бўлиб, улар шу атрофда $f^{(n)}(x)$ ва $g^{(n)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда

1) $d^n(c\cdot f(x)) = c\cdot d^n f(x)$, c — const,
2) $d^n(f(x) \pm g(x) = d^n f(x) \pm d^n g(x)$,

3) $d^n(f(x)\cdot g(x)) = d^n f(x)\cdot g(x) + C_n^1\, d^{n-1} f(x)\cdot dg(x) +$
$+ C_n^2\, d^{n-2} f(x)\cdot d^2 g(x) + \ldots + C_n^{n-1}\, df(x)\, d^{n-1} g(x) +$
$+ f(x)\, d^n g(x)$

(Лейбниц формуласи) бўлади.

Энди асосий формулаларни келтирамиз:

1) $y = a^x$ бўлса, $d^n y = a^x \ln^n a\, dx^n$.

2) $y = e^x$ бўлса, $d^n y = e^x dx^n$.

3) $y = \sin x$ бўлса, $d^n y = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) dx^n$.

4) $y = \cos x$ бўлса, $d^n y = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) dx^n$.

5) $y = \ln x$ бўлса, $d^n y = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\, dx^n$.

6) $y = \frac{1}{x}$ бўлса, $d^n y = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\, dx^n$.

7) $y = x^m$ бўлса, $d^n y = m(m-1)\ldots(m-n+1)\times$
$\times x^{m-n}\, dx^n$,

8) $y = (1+x)^\alpha$ бўлса, $d^n y = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+$
$+1)(1+x)^{\alpha-n}\, dx^n$.

38-мисол. Агар $y = f(x)$ функция n-тартибли ҳосилага эга бўлса,

$$d^n f(ax+b) = a^n f^{(n)}(ax+b)\, dx^n$$

бўлишини кўрсатинг (a, b — ўзгармас сонлар).

(10) формулага кўра

$$d^n f(ax+b) = [f(ax+b)]^n\, dx^n$$

бўлади. Энди $f(ax+b)$ нинг n — тартибли ҳосиласини ҳисоблаймиз. Равшанки,

$$[f(ax+b)]' = f'(ax+b)\cdot(ax+b)' = a\cdot f'(ax+b),$$
$$[f(ax+b)]'' = [af'(ax+b)]' = a\,[f'(ax+b)]' =$$
$$= a\cdot f''(ax+b)\cdot(ax+b)' = a^2 f''(ax+b),$$
$$[f(ax+b)]''' = [a^2\cdot f''(ax+b)]' = a^2\,[f''(ax+b)]' =$$
$$= a^2\cdot f'''(ax+b)\cdot(ax+b)' = a^3 f'''(ax+b).$$

Бу муносабатлардан фойдаланиб қаралаётган функциянинг n — тартибли ҳосиласи учун ушбу

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b) \qquad (11)$$

формулани ёзамиз. Унинг тўғрилигини математик индукция усули ёрдамида кўрсатиш қийин эмас. Маълумки, $k=1$ да

$$[f(ax+b)]' = a\cdot f'(ax+b).$$

Энди (11) муносабат $k\,(k>1)$ да ўринли, яъни

$$[f(ax+b)]^{(k)} = a^k\cdot f^k(ax+b)$$

бўлсин деб, унинг $k+1$ да ўринли бўлишини кўрсатамиз.

Таърифга кўра:

$$[f(ax+b)]^{(k+1)} = \{[f(ax+b)]^{(k)}\}'.$$

Шунинг учун

$$[f(ax+b)]^{(k+1)} = \{[f(ax+b)]^{(k)}\}' =$$
$$= [a^k\cdot f^{(k)}(ax+b)]' = a^k\,[f^{(k)}(ax+b)]' =$$
$$= a^k\cdot f^{(k+1)}(ax+b)(ax+b)' = a^{k+1}\cdot f^{(k+1)}(ax+b)$$

бўлиши келиб чиқади. Бу эса (11) формула ихтиёрий n учун ўринли бўлишини билдиради.

Демак,

$$d^n f(ax+b) = [f(ax+b)]^{(n)}\, dx^n = a^n\cdot f^{(n)}(ax+b)\, dx^n.$$

39-мисол. Агар u — ўзгарувчи x нинг икки марта дифференциалланувчи функцияси экани маълум бўлса, унда ушбу

$$y = e^u$$

функциянинг иккинчи тартибли дифференциалини топинг.

Бу функциянинг дифференциалларини, юқорида келтирилган қоидалардан фойдаланиб, кетма-кет ҳисоблаймиз:

$$dy = d(e^u) = e^u du,$$

$$d^2y = d(dy) = d(e^u du) = d(e^u)\, du + e^u d(du) =$$
$$= e^u du du + e^u d^2u = e^u (du)^2 + e^u d^2u = e^u (du^2 + d^2u).$$

Мисол ва масалалар

1. Қуйидаги функцияларнинг иккинчи тартибли] сег-
ларини топинг:
функция

191. $y = x\sqrt{1+x^2}$.

192. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

193. $y = x \ln x$.

194. $y = e^{-x^2}$, $f(a) =$

195. $y = \mathrm{tg}$ опиладики,

196. $y =$
$+$

3°. Лагранж теоремаси. **$y=f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Агар бу функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда шундай $c(a<c<b)$ нуқта топиладики, бу нуқтада**

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

бўлади.

4°. Коши теоремаси. **$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Агар бу функциялар (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлиб, $\forall x\in(a, b)$ учун $g'(x)\neq 0$ бўлса, у ҳолда шундай $c(a<c<b)$ нуқта топиладики,**

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

бўлади.

1-мисол. Ушбу $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-1$ функция $(-1, 1)$ интервалнинг ички $x=0$ нуқтасида ўзининг энг кичик қийматига эришса ҳам, бу функция учун Ферма теоремасининг хулосаси ўринли эмас. Шуни кўрсатинг.

Берилган функция $x=0$ нуқтада ўзининг энг кичик қийматига эришади. Бироқ функция шу $x=0$ нуқтада чекли ҳосилага эга эмас. Бу ушбу

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{\Delta x^2}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$$

нисбатнинг $\Delta x\to 0$ да чекли лимитга эга эмаслигидан келиб чиқади. Демак, Ферма теоремасининг шарти бажарилмайди. Бинобарин, теореманинг хулосаси ўринли эмас.

2-мисол. Ушбу $f(x)=\sin x$ функция учун $[0, 2\pi]$ сегментда Ролль теоремасининг шартлари бажариладими?

Равшанки, $f(x)=\sin x$ функция $[0,2\pi]$ сегментда узлуксиз ҳамда $f'(x)=(\sin x)'=\cos x$ ҳосилага эга. Бу функциянинг $[0,2\pi]$ сегментнинг четки нуқталаридаги қийматлари $f(0)=0$, $f(2\pi)=0$ бўлиб, улар бир-бирига тенг. Демак, берилган функция $[0,2\pi]$ сегментда Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. $[0, 2\pi]$ сегментнинг $c_1=\frac{\pi}{2}$, $c_2=\frac{3}{2}\pi$ нуқталарида функциянинг ҳосилалари нолга айланади:

$$f'(c_1)=\cos\frac{\pi}{2}=0,\ f'(c_2)=\cos\frac{3}{2}\pi=0.$$

3-мисол. Ушбу $f(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$, $f(0)=0$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ функция ҳосиласини нолга айлантирадиган нуқталардан тузилган $\{c_n\}$ кетма-кетликнинг лимити ноль бўлишини кўрсатинг.

Равшанки, берилган функция $[0,1]$ сегментда узлуксиз, $(0,1)$ интервалда ҳосилага эга ва $f(0)=f(1)=0$. Демак, функция $[0,1]$ сегментда Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. $[0,1]$ сегментни қуйидаги

$$\left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \ldots, \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \ldots$$

сегментчаларга ажратамиз. Ҳар бир $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ сегментчада $(n=1, 2, \ldots)$ $f(x)$ функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Бинобарин, $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ сегментда $(n=1, 2, \ldots)$ шундай c_n нуқта $\left(\frac{1}{n+1}<c_n<\frac{1}{n}\right)$ топиладики, $f'(c_n)=0$ бўлади.

Агар

$$\frac{1}{n+1}<c_n<\frac{1}{n}\quad (n=1, 2, \ldots)$$

ва

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty}c_n=0$$

экани келиб чиқади.

4-мисол. Агар $f(x)$ функция: 1) $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз, 2) (a, b) интервалда n-тартибли ҳосилага эга, 3) ушбу $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ $(a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<b)$ нуқталарда

$$f(a)=f(x_1)=f(x_2)=\ldots=f(x_{n-1})=f(b)=0$$

бўлса, у ҳолда (a, b) да камида битта c нуқта топиладики,

$$f^{(n)}(c)=0$$

бўлади. Шуни исботланг.

$[a, b]$ сегментни юқорида айтилган $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ нуқталар ёрдамида n та

$$[a, x_1],\ [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b]$$

сегментларга ажратамиз. $f(x)$ функция ҳар бир сегментда Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Унда Ролль теоремасига кўра шундай $c_1, c_2, \ldots, c_n$ нуқталар $(a<c_1<x_1,\ x_1<c_2<x_2, \ldots, x_{n-1}<c_n<b)$ топиладики,

$$f'(c_1)=f'(c_2)=\ldots=f'(c_n)=0$$

бўлади. Энди

$$[c_1, c_2],\ [c_2, c_3], \ldots, [c_{n-1}, c_n]$$

сегментларни қарайлик. Бу сегментларнинг ҳар бирида $f'(x)$ функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Ролль теоремасига мувофиқ шундай $c_1', c_2', \ldots, c_{n-1}'$ нуқталар $(c_1<c_1'<c_2,\ c_2<c_2'<c_3, \ldots, c_{n-1}<c_{n-1}'<c_n)$ топиладики,

$$f''(c_1')=f''(c_2')=\ldots=f''(c_{n-1}')=0$$

бўлади. Энди

$$[c_1', c_2'],\ [c_2', c_3'], \ldots, [c_{n-2}', c_{n-1}']$$

сегментларни қарайлик. Бу сегментларнинг ҳар бирида $f''(x)$ функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Ролль теоремасига кўра шундай $c_1'', c_2'', \ldots, c_{n-2}''$ нуқталар $c_1'<c_1''<c_3'',\ c_2'<c_2''<c_3', \ldots, c_{n-2}'<c_{n-2}''<c_{n-1}')$ топиладики,

$$f'''(c_1'')=f'''(c_2'')=\ldots=f'''(c_{n-2}'')=0$$

бўлади.

Шу жараённи давом эттириб $(n-1)$-қадамдан кейин $[c_1^{(n-1)}, c_2^{(n-1)}]$ сегментга келамизки, бу сегментда $f^{(n-1)}(x)$ функция Ролль теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Унда Ролль теоремасига кўра шундай c нуқта $(c_1^{(n-1)}<c<c_2^{(n-1)})$ топиладики,

$$f^{(n)}(c)=0$$

бўлади.

5-мисол. Агар $f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлса, унинг шу интервалда текис узлуксиз бўлишини исботланг.

Модомики, $f'(x)$ чекли экан, унда шундай ўзгармас $M>0$ сон топиладики, $\forall\, x\in(a, b)$ учун $|f'(x)|\leqslant M$ бўлади.

(a, b) интервалда ихтиёрий x_1 ва x_2 нуқталарни олайлик: $x_1, x_2\in(a, b)$. Унда Лагранж теоремасига кўра

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(c)|\cdot|x_2-x_1|$$

бўлади. Демак,

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant M\cdot|x_2-x_1|.$$

Агар $\forall\,\varepsilon>0$ олинганда ҳам $\delta=\delta(\varepsilon)<\frac{\varepsilon}{M}$ дейилса, у ҳолда

$$|x_2-x_1|<\delta<\frac{\varepsilon}{M}\Rightarrow|f(x_2)-f(x_1)|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

бўлади. Бу эса $f(x)$ функциянинг (a, b) да текис узлуксиз бўлишини билдиради.

6-мисол. Ушбу $f(x)=x^2+3$ функция $[-1, 2]$ сегментда Лагранж теоремасининг шартларини қаноатлантирадими?

Равшанки, берилган функция $[-1, 2]$ сегментда узлуксиз ва $(-1, 2)$ интервалда $f'(x)=2x$ ҳосилага эга. Демак, $f(x)=x^2+3$ функция $[-1, 2]$ сегментда Лагранж теоремасининг шартларини қаноатлантиради. Лагранж теоремасига кўра шундай c нуқта $(-1<c<2)$ топиладики,

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)=2c$$

бўлади. Кейинги тенгликдан $c=\frac{1}{2}$ эканини топамиз.

7-мисол. Ушбу

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}\quad(0<b<a)$$

тенгсизликни исботланг.

$[b, a]$ сегментда $f(x)=\ln x$ функцияни қарайлик. Бу функция шу сегментда узлуксиз ва (b, a) интервалда $f'(x)=\frac{1}{x}$ ҳосилага эга. Унда Лагранж теоремасига кўра шундай c нуқта $(b<c<a)$ топиладики,

$$\frac{\ln a-\ln b}{a-b}=\frac{1}{c}$$

бўлади. Равшанки,

$$b<c<a\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{c}<\frac{1}{b}.$$

Демак,

$$\frac{1}{a} < \frac{\ln a - \ln b}{a - b} < \frac{1}{b}.$$

Кейинги тенгсизликлардан эса

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$$

бўлиши келиб чиқади.

8-мисол. Агар $x \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$$

тенгликни исботланг. Бунда

$$\frac{1}{4} \leqslant \theta(x) < \frac{1}{2}, \ \lim_{x\to+0}\theta(x) = \frac{1}{4}, \ \lim_{x\to\infty}\theta(x) = \frac{1}{2}$$

бўлишини ҳам кўрсатинг.

Ушбу

$$f(y) = \sqrt{y}$$

функцияни $[x, x+1]$ сегментда $(x \geqslant 0)$ қарайлик. Бу функция шу сегментда узлуксиз, $(x, x+1)$ да $f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ ҳосилага эга. Унда чекли орттирмалар формуласи

$$F(t+\Delta t) - F(t) = F'(t+\theta(t)\cdot\Delta t)\,\Delta t$$

га кўра

$$f(x+1) - f(x) = f'(x+\theta(x))\cdot 1,$$

яъни

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$$

бўлади. Бу тенгликдан топамиз:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}} \Rightarrow 2\sqrt{x+\theta(x)} =$$

$$= \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \Rightarrow 4(x+\theta(x)) = x+1+x+$$

$$+ 2\sqrt{x(x+1)} \Rightarrow 4\theta(x) = 1 + 2\sqrt{x(x+1)} - 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\sqrt{x(x+1)} - x).$$

Кейинги тенгликдан эса

$$\lim_{x\to+0}\theta(x) = \lim_{x\to+0}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\sqrt{x(x+1)} - x)\right] = \frac{1}{4},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\theta(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{x(x+1)} - x}{2}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{4} + \frac{x^2+x-x^2}{2(\sqrt{x(x+1)}+x)}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}+2}\right] = \frac{1}{2}.$$

$\theta(x)$ функциянинг

$$\theta(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}+2}$$

ифодасидан, унинг $(0, +\infty)$ оралиқда ўсувчи эканини топамиз. Демак,

$$\frac{1}{4} \leqslant \theta(x) < \frac{1}{2}$$

бўлади.

9-мисол. Ушбу

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

функциялар $[-3, 3]$ сегментда Коши теоремасининг шартларини қаноатлантирадими?

Берилган функциялар $[-3, 3]$ сегментда узлуксиз, $(-3, 3)$ да

$$f'(x) = e^x, \quad g'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

ҳосилаларга эга. Бироқ, $g'(0) = 0$. Демак, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар Коши теоремасининг шартларини қаноатлантирмайди.

10-мисол. Агар $f(x)$ функция $[x_1, x_2]$ сегментда $(x_1, x_2 > 0)$ дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда ушбу

$$\frac{1}{x_1 - x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(c) - cf'(c)$$

$(x_1 < c < x_2)$ тенгликнинг ўринли бўлишини исботланг.

Иккита

$$\alpha(x) = \frac{f(x)}{x}, \quad \beta(x) = \frac{1}{x}$$

функцияларни олайлик. Модомики, $x_1 \cdot x_2 > 0$ экан, $x = 0 \notin [x_1, x_2]$ бўлади. Бу функциялар $[x_1, x_2]$ сегментда узлуксиз, (x_1, x_2) да

$$\alpha'(x) = \frac{f'(x)\cdot x - f(x)}{x^2}, \quad \beta'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

ҳосилаларга эга ва $\beta(x) \neq 0$ $(x \in [x_1, x_2])$. Демак, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ функциялар Коши теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради. Унда Коши теоремасига кўра шундай c нуқта $(x_1 < c < x_2)$ топиладики,

$$\frac{\alpha(x_2) - \alpha(x_1)}{\beta(x_2) - \beta(x_1)} = \frac{\alpha'(c)}{\beta'(c)}$$

бўлади. Кейинги тенгликдан топамиз:

$$\frac{\frac{f(x_2)}{x_2} - \frac{f(x_1)}{x_1}}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}} = \frac{\frac{cf'(c) - f(c)}{c^2}}{-\frac{1}{c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} = -[cf'(c) - f(c)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1 - x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(c) - cf'(c).$$

Мисол ва масалалар

1. $f(x) = x(x^2 - 1)$ функция учун $[-1, 1]$ ва $[0, 1]$ оралиқларда Ролль теоремасининг шартларини текширинг.

2. $f(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$ функция учун $(-1, 1)$ ва $(1, 2)$ интервалларда шундай нуқталар топингки, бу нуқталарда функция графигига ўтказилган уринма абсциссалар ўқига параллел бўлсин

3. Ҳақиқий коэффициентли кўпҳад фақат ҳақиқий илдизларга эга бўлса, унинг ҳосилалари ҳам фақат ҳақиқий илдизларга эга эканини исботланг.

4. Шундай $\xi \in (a, b)$ мавжуд бўлиб, $f'(\xi) = 0$ бўлиши учун, Ролль теоремасининг шартлари зарур ва етарлими?

5. $$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функция учун $[-1, 1]$ оралиқда Лагранж теоремаси ўринлими?

Лагранж теоремасидан фойдаланиб қуйидаги тенгсизликларни исботланг:

6. $\frac{x}{1+x} < \ln(1 + x) < x, \quad x > 0.$

7. $e^x > ex, \quad x > 1.$

8. $e^x > 1 + x, \quad x \in R.$

9. $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|.$

10. $|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leqslant |a - b|.$

11. $x^\alpha |\ln x| < \frac{1}{2e}, \quad 0 < x < 1, \ \alpha > 0.$

12. $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ функциялар учун $[-1, 1]$ оралиқда Коши теоремаси ўринлими?

13. Агар $f(x)$ функция $x > 0$ нуқталарда дифференциалланувчи бўлиб, $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ эканини исботланг.

14. Агар $f(x)$ функция $x > 0$ нуқталарда дифференциалланувчи бўлиб, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x \to +\infty} |f'(x)| = 0$ эканини исботланг.

15. Агар $f(x)$ функция чекли (a, b) интервалда дифференциалланувчи ва чегараланмаган бўлса, у ҳолда унинг ҳосиласи ҳам чегараланмаганлигини исботланг.

16. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда дифференциалланувчи бўлиб, $f(a) = f(b)$ бўлса, у ҳолда $\exists\, \xi \in (a, b)$ бўлиб, $f(a) - f(\xi) = \frac{1}{2}\xi f'(\xi)$ муносабат ўринлилигини исботланг.

2-§. ТЕЙЛОР ФОРМУЛАСИ

1°. Функциянинг Тейлор формуласи (локаль формула).

$y = f(x)$ функция x_0 нуқтанинг $(x_0 \in R)$ бирор атрофида берилган бўлсин. Агар функция x_0 нуқтанинг шу атрофида $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлиб, x_0 нуқтада n-тартибли $f^{(n)}(x_0)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k +$$

$$+ o((x - x_0)^n) \ (f^{(0)}(x) = f(x)) \qquad (1)$$

бўлади. Бу Тейлор формуласидир.

2°. Маклорен формуласи.

Агар (1) формулада $x_0 = 0$ деб олсак, унда ушбу

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+$$

$$+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n) \qquad (2)$$

формула ҳосил бўлади. Бу Маклорен формуласидир.

Ушбу $f(x)=e^x$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=(1+x)^m$, $f(x)=\ln(1+x)$ функциялар учун (2) Маклорен формуласи қуйидагича бўлади:

1) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$,

2) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+$
$+o(x^{2n})$,

3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$,

4) $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots$
$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$.

5) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+$
$+o(x^n)$.

3°. Тейлор формуласи (оралиқ учун).

$y=f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда берилган бўлсин. Агар функция шу сегментда $f'(x), f''(x)\ldots f^n(x)$ ҳосилаларга эга бўлиб, x_0 нуқтада $(a<x_0<b)$ $f^{(n+1)}(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

бўлади. Бу Тейлор формуласидир. $R_n(x)$ ни Тейлор формуласининг *қолдиқ ҳади* дейилади. У қуйидаги кўринишларга эга:

1) $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n$ (Коши кўриниши).
$(c=x_0+\theta(x-x_0),\ \theta<\theta<1)$.

2) $R_n(x)=\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (Лагранж кўриниши),
$(c=x_0+\theta(x-x_0),\ 0<\theta<1)$.

11-мисол. Ушбу $f(x)=\sqrt{x}$ функцияни $x-1$ нинг манфий бўлмаган даражалари бўйича ёйилмасининг учта ҳадини топинг.

Бу ҳол учун (1) формула ушбу

$$f(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+0((x-1)^2)$$

кўринишда бўлади. Берилган функциянинг ҳосилаларини топамиз:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\qquad f''(x)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^3}}.$$

Равшанки,

$$f(1)=1,\quad f'(1)=\frac{1}{2},\quad f''(1)=-\frac{1}{4}.$$

Демак,

$$\sqrt{x}=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+0((x-1)^2).$$

12-мисол. Агар $x\to0$ да

$$f(x)=1+\frac{1}{2}x+0(x)$$

бўлса,

$$\lim_{x\to0}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=\sqrt{e}$$

бўлишини исботланг.

Ушбу

$$y=[f(x)]^{\frac{1}{x}}$$

функцияни қарайлик. Уни қуйидагича

$$y=e^{\ln[f(x)]^{\frac{1}{x}}}=e^{\frac{1}{x}\ln f(x)}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Агар

$$\ln f(x)=\ln\left[1+\frac{1}{2}x+0(x)\right]$$

ҳамда

$$\ln\left[1+\frac{1}{2}x+0(x)\right]=\frac{1}{2}x+0(x)$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$y=e^{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x+0(x)\right)}=e^{\frac{1}{2}+\frac{0(x)}{x}}$$

бўлишини топамиз. Кейинги тенгликдан

$$\lim_{x\to0}y=\lim_{x\to0}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}(e^{\frac{1}{2}+\frac{0(x)}{x}})=\sqrt{e}$$

эканлиги келиб чиқади.

13-мисол. Тейлор формуласидан фойдаланиб ушбу

$$\alpha=\sin 36^\circ,\quad \beta=(1{,}2)^{1{,}1}$$

миқдорларни тақрибий ҳисобланг.

(3) формулага асосланиб

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+0(x^5)$$

муносабатга ва ундан ушбу

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$$

тақрибий формулага келамиз. Бу тақрибий формуладан фойдаланиб, топамиз:

$$\alpha=\sin 36^\circ=\sin\frac{\pi}{5}\approx\frac{\pi}{5}-\frac{1}{6}\cdot\frac{\pi^3}{125}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{\pi^5}{5^5}\approx0{,}588.$$

Демак,

$$\alpha\approx0{,}588.$$

(3) формулага асосланган ҳолда

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+0(x^2)$$

бўлишига эга бўламиз. Бундан эса

$$(1+x)^m\approx1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2$$

тақрибий формулага келамиз.

Энди шу формуладан фойдаланиб β миқдорни тақрибий ҳисоблаймиз:

$$\beta=(1{,}2)^{1{,}1}=1{,}2\cdot(1{,}2)^{0{,}1}=1{,}2\cdot(1+0{,}2)^{0{,}1}\approx$$
$$\approx1{,}2\left(1+0{,}1\cdot0{,}2+\frac{0{,}1\cdot(-0{,}9)}{2}\cdot0{,}2^2\right)\approx1{,}121.$$

Демак,

$$\beta\approx1{,}121.$$

14-мисол. (3) формулалардан фойдаланиб ушбу

а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$,

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

лимитларни топинг.

а) да кўрсатилган лимитни топишда (3) формуланинг қуйида

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+0(x^2),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+0(x^5)$$

ҳолидан фойдаланамиз.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\left[1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+0(x^2)\right]\left[x-\frac{x^3}{3!}+0(x^5)\right]-x(1+x)}{x^3}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)x^3+0(x^3)-x-x^2}{x^3}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3+0(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}+\lim_{x\to0}\frac{0(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

Демак,

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

б) да кўрсатилган лимитни топишда (3) формуланинг

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^2+0\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

ҳолидан фойдаланамиз.

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+0\frac{1}{x^2}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x-x+\frac{1}{2}+0\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

Демак,

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларни Маклорен формуласи бўйича $0(x^2)$ ҳадгача ёйинг:

17. $f(x)=e^{\operatorname{tg} x}$.

18. $f(x)=e^{\sqrt{1+2x}}$.

19. $f(x)=\ln\cos x$.

Қуйидаги функцияларни Маклорен формуласи бўйича $0(x^3)$ ҳадгача ёйинг:

20. $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

21. $f(x)=\sqrt[3]{1+3\sin x}$.

22. $f(x)=\ln(1+\arcsin x)$.

23. $f(x)=\operatorname{arctg}(\sin x)$.

Қуйидаги функцияларни Маклорен формуласи бўйича $0(x^n)$ ҳадгача ёйинг:

24. $f(x)=e^{5x-1}$.

25. $f(x)=\sin(2x+3)$.

26. $f(x)=\cos\left(\frac{x}{2}+2\right)$.

27. $f(x)=\ln(e^x+2)$.

28. $f(x)=\frac{2}{(1-x)^2}$.

29. $f(x)=3^{2-x}$.

30. $f(x)=(x^2-x)e^{-x}$.

31. $f(x)=\ln\frac{1+2x}{1-x}$.

32. $f(x)=\ln(2+x-x^2)$.

33. $f(x)=\frac{x^2+3e^x}{e^{2x}}$.

34. $f(x)=\frac{x^3}{x-1}$.

35. $f(x)=\frac{x^2+1}{2x-3}$.

36. $f(x)=\frac{1-2x^2}{2+x-x^2}$.

Қуйидаги функцияларни Тейлор формуласи бўйича x_0 нуқтанинг атрофида $0((x-x_0)^2)$ ҳадгача ёйинг:

37. $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=2$.

38. $f(x)=\sin(2x-3)$, $x_0=1$.

39. $f(x)=xe^{2x}$, $x_0=-1$.

40. $f(x)=x^2e^{-2x}$, $x_0=-1$.

41. $f(x)=(x^2-1)e^{2x}$, $x_0=-1$.

42. $f(x)=\sin(x+1)\sin(x+2)$, $x_0=-1$.

43. $f(x)=\ln(2x+1)$, $x_0=\frac{1}{2}$.

44. $f(x)=\ln\sqrt[3]{7x-2}$, $x_0=1$.

45. $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}\ln x$, $x_0=1$.

46. $f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$, $x_0=2$.

Қуйидаги лимитларни ҳисобланг:

47. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

48. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$.

49. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^4}$.

50. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

51. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}{x^2}$.

52. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}$.

53. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$.

54. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^2}$.

55. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

56. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{tg} x) - x}{x^3}$.

57. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - x\cos x}{\ln^3(1-x)}$.

58. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0} \left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\operatorname{tg} x\right)^{\operatorname{tg} x}$.

59. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x^3 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x^2 + \frac{x}{2}\right)$.

60. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1\right)e^{\frac{1}{x}} - \sqrt[4]{x^{12} - x^9 + 2}\right)$.

61. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(\sin \pi x)}{\ln(1+\ln x)}$.

62. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - e^{\pi x - 2x^2}}{\cos x}$.

63. $\lim\limits_{x\to \infty} x\left[(2e)^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} - 2\right]$.

64. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \operatorname{tg} x}\right)$.

65. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x^2 - \frac{x}{2} - (x^3 + x + 1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$.

VII боб

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБНИНГ БАЪЗИ ТАТБИҚЛАРИ

1-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЎСУВЧИЛИГИ ҲАМДА КАМАЮВЧИЛИГИ

Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция X оралиқда ($X \subset R$) берилган бўлсин. Маълумки,

$$\forall\ x_1,\ x_2 \in X,\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

бўлса, $f(x)$ функция X да ўсувчи,

$$\forall\ x_1,\ x_2 \in X,\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

бўлса, $f(x)$ функция X да камаювчи дейилар эди.

Функция ҳосиласи ёрдамида унинг ўсувчилигини ҳамда камаювчилигини аниқлаш мумкин.

1-теорема. **$f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Бу функция шу интервалда ўсувчи бўлиши учун (a, b) да**

$$f'(x) \geqslant 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

2-теорема. **$f(x)$ функция (a, b) интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Бу функция шу интервалда камаювчи бўлиши учун (a, b) да**

$$f'(x) \leqslant 0$$

бўлиши зарур ва етарли.

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{x^2}{10} - \ln x$$

функцияни ўсувчи ва камаювчи бўлишга текширинг.

Бу функция $(0, +\infty)$ да аниқлангандир. Унинг ҳосиласи

$$f'(x) = \frac{x}{5} - \frac{1}{x}$$

бўлади. Энди

$$f'(x) \geqslant 0, \quad \text{яъни} \quad \frac{x}{5} - \frac{1}{x} \geqslant 0$$

ёки

$$f'(x) \leqslant 0, \quad \text{яъни} \quad \frac{x}{5} - \frac{1}{x} \leqslant 0$$

бўлишга текширамиз:

$$\frac{x}{5} - \frac{1}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5}{5x} \geqslant 0 \Leftrightarrow x(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) \geqslant 0.$$

Бундан эса, $(\sqrt{5}, +\infty)$ да $f'(x) \geqslant 0$, $(0, \sqrt{5})$ да $f'(x) \leqslant 0$ бўлишини топамиз. Демак, берилган функция $(0, \sqrt{5})$ да камаювчи, $(\sqrt{5}, +\infty)$ да ўсувчи бўлади.

2-мисол. Ушбу

$$f(x) = \ln |x|$$

функциянинг ўсувчи ва камаювчи бўладиган оралиқларини топинг.

Бу функция $R \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ да аниқланган. Унинг ҳосиласи

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

бўлади. Бундан эса, $x > 0$ бўлганда $f'(x) > 0$ бўлади, $x < 0$ бўлганда $f'(x) < 0$ бўлади. Демак, берилган функция $(-\infty, 0)$ да камаювчи, $(0, +\infty)$ да ўсувчи бўлади.

3-мисол. Ҳосиласи

$$f'(x) = \frac{5}{3 - 2x - x^2} - 1$$

бўлган $f(x)$ функциянинг ўсувчилиги ҳамда камаювчилиги тўғрисида нима дейиш мумкин.

Бу масалани ҳал қилиш учун

$$f'(x) \geqslant 0 \quad \text{ёки} \quad f'(x) \leqslant 0$$

тенгсизликларни ечиш лозим.

Энди

$$f'(x) = \frac{5}{3 - 2x - x^2} - 1 < 0$$

тенгсизликни ечамиз:

$$\frac{5}{3 - 2x - x^2} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x - 3} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 1 + 1}{(x+3)(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2 + 1}{(x+3)(x-1)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-1) > 0.$$

Демак, $(-\infty; -3) \cup (1, +\infty)$ да $f'(x) < 0$ бўлади. $(-3, 1)$ оралиқда эса $f'(x) > 0$ бўлади. Шундай қилиб, берилган функция $(-\infty -3) \cup (1, +\infty)$ да камаювчи, $(-3, 1)$ оралиқда эса ўсувчи бўлади.

4-мисол. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар: 1) $[a, b]$ сегментда аниқланган ва шу сегментда чекли $f'(x)$, $g'(x)$ ҳосилаларга эга; 2) $f'(x) \geqslant g'(x) (x \in [a, b])$; 3) $f(a) = g(a)$ бўлса, у ҳолда $(a, b]$ ярим интервалда $f(x) > g(x)$ бўлишини исботланг.

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар айирмасини $\varphi(x)$ билан белгилаймиз:

$$\varphi(x) = f(x) - g(x).$$

Унда $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x)$ бўлиб, 2) шартга кўра $\varphi'(x) \geqslant 0$ бўлади. Демак, $\varphi(x)$ функция $[a, b]$ да ўсувчи. Агар $\varphi(a) = f(a) - g(a) = 0$ бўлишини эътиборга олсак, унда $(a, b]$ ярим интервалда $\varphi(x) > 0$ эканлигини топамиз. Демак,

$$\varphi(x) > 0 \Rightarrow f(x) - g(x) > 0 \Rightarrow f(x) > g(x).$$

Шундай қилиб, (a, b) да

$$f(x) > g(x)$$

бўлади.

5-мисол. Ушбу

$$\ln(1 + x) > x - \frac{x^2}{2}$$

тенгсизликни исботланг.

Бу тенгсизликни исботлашда 4-мисолда келтирилган шартлардан фойдаланамиз. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар сифатида

$$f(x) = \ln(1 + x), \quad g(x) = x - \frac{x^2}{2}$$

функцияларни олайлик. Бу функциялар учун $(0, +\infty)$ оралиқда 4-мисолдаги шартлар бажарилади:

1) $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $g'(x) = 1 - x$;

2) $(0, +\infty)$ оралиқда

$$\frac{1}{1+x} > 1 - x$$

бўлади (чунки $1 - x^2 < 1 \Rightarrow (1 - x)(1 + x) < 1 \Rightarrow 1 - x < \frac{1}{1+x}$);

2-§. ФУНКЦИЯНИНГ ЭКСТРЕМУМЛАРИ

$y=f(x)$ функция (a, b) интервалда берилган бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ бўлсин.

1-таъриф. *Агар x_0 нуқтанинг шундай атрофи*

$$U_\delta(x_0)=\{x \in R: x_0-\delta<x<x_0+\delta;\ \delta>0\} \subset (a, b)$$

мавжуд бўлсаки, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ учун

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad (f(x) \geqslant f(x_0))$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга (минимумга) эришади дейилади. $f(x_0)$ қиймат $f(x)$ нинг максимум (минимум) қиймати дейилади ва

$$f(x_0)=\max_{x \in U_\delta(x_0)}\{f(x)\} \quad (f(x_0)=\min_{x \in U_\delta(x_0)}\{f(x_0)\})$$

каби белгиланади.

Функциянинг максимум ва минимуми умумий ном билан унинг **экстремуми** дейилади.

1°. Экстремумнинг зарурий шарти

Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада $(x_0 \in (a, b))$ чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлиб, бу нуқтада $f(x)$ функция экстремумга эришса, у ҳолда

$$f'(x_0)=0$$

бўлади.

2° Экстремумнинг етарли шартлари

$x_0 \in (a, b)$ нуқтанинг

$$U_\delta^-(x_0)=\{x \in R: x_0-\delta<x<x_0;\ \delta>0\},$$

$$U_\delta^+(x_0)=\{x \in R: x_0<x<x_0+\delta;\ \delta>0\}$$

чап ва ўнг атрофларини қараймиз.

Фараз қилайлик, $y=f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлиб, $U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$ да чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

а) Агар

$$\forall x \in U_\delta^-(x_0) \ \text{учун} \ f'(x)>0,$$

$$\forall x \in U_\delta^+(x_0) \ \text{учун} \ f'(x)<0$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга эришади.

б) Агар

$$\forall x \in U_\delta^-(x_0) \ \text{учун} \ f'(x)<0,$$

$$\forall x \in U_\delta^+(x_0) \ \text{учун} \ f'(x)>0$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эришади.

в) Агар

$$\forall x \in U_\delta^-(x_0) \ \text{учун} \ f'(x)>0,$$

$$\forall x \in U_\delta^+(x_0) \ \text{учун} \ f'(x)>0$$

ёки

$$\forall x \in U_\delta^-(x_0) \ \text{учун} \ f'(x)<0,$$

$$\forall x \in U_\delta^+(x_0) \ \text{учун} \ f'(x)<0$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эришмайди.

$f(x)$ функция x_0 нуқтада $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ ҳосилаларга эга бўлиб,

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0, \quad f^{(n)}(x_0)\neq 0$$

бўлсин.

г) Агар n жуфт сон бўлиб,

$$f^{(n)}(x_0)<0$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга,

$$f^{(n)}(x_0)>0$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада минимумга эришади.

д) Агар n тоқ сон бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада экстремумга эришмайди.

6-мисол. Ушбу $f(x)=e^{-x^2}$ функция $x=0$ нуқтада максимумга эришишини кўрсатинг ва максимум қийматини топинг.

$x=0$ нуқтанинг $U_\delta(0)=\{x \in R: -\delta<x<\delta;\ \delta>0\}$ атрофидаги исталган x нуқта учун $(\forall x \in U_\delta(0))$

$$f(x)=e^{-x^2} \leqslant e^0=1=f(0)$$

бўлади. Демак, берилган функция $x=0$ нуқтада максимумга эришади. Унинг максимум қиймати

$$\max\{f(x)\}=\max\{e^{-x^2}\}=f(0)=1$$

бўлади.

7-мисол. Ушбу $f(x)=3x^2-2x$ функцияни экстремумга текширинг.

Берилган функциянинг ҳосиласи

$$f'(x)=6x-2=2(3x-1)$$

ни нолга тенглаймиз.

$$f'(x)=2(3x-1)=0$$

ва бундан $x=\frac{1}{3}$ стационар нуқта эканлигини топамиз. Шу нуқта атрофида ҳосила ишорасининг ўзгаришини аниқлаймиз.

Равшанки,

$$\forall\, x\in U_\delta^-\left(\frac{1}{3}\right)=\left\{x\in R:\frac{1}{3}-\delta<x<\frac{1}{3};\ \ \delta>0\right\}$$

учун

$$f'(x)=2(3x-1)=-6\left(\frac{1}{3}-x\right)<0,$$

$$\forall\, x\in U_\delta^+\left(\frac{1}{3}\right)=\left\{x\in R:\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}+\delta;\ \delta>0\right\}$$

учун

$$f'(x)=2(3x-1)=-6\left(\frac{1}{3}-x\right)>0$$

бўлади. Демак, функциянинг ҳосиласи $x=\frac{1}{3}$ нуқтадан ўтишда ўз ишорасини манфий («—») дан мусбат («+») га ўзгартирар экан. Берилган функциянинг ўзи $x=\frac{1}{3}$ нуқтада узлуксиз. Демак, $f(x)=3x^2-2x$ функция $x=\frac{1}{3}$ нуқтада минимумга эришади. Унинг минимум қиймати

$$\min f(x)=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}.$$

8-мисол. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,}\\ 1, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функцияни экстремумга текширинг.

Бу функциянинг ҳосиласи $f'(x)=2x$ бўлиб, $x=0$ нуқтанинг атрофида:

$$\forall\, x\in U_\delta^-(0)=\{x\in R:-\delta<x<0;\ \delta>0\}\ \text{учун}$$

$$f'(x)=2x<0,$$

$$\forall\, x\in U_\delta^+(0)=\{x\in R:0<x<\delta;\ \delta>0\}\qquad\text{учун}$$

$$f'(x)=2x>0$$

бўлади, яъни функция ҳосиласи $x=0$ нуқтани ўтишда ўз ишорасини «—» дан «+» га ўзгартиради. Бироқ, берилган

функция шу нуқтада минимумга эришмайди. Бунга сабаб, функциянинг $x=0$ нуқтада узлуксиз эмаслигидир.

9-мисол. Ушбу

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x$$

функцияни экстремумга текширинг.

Бу функциянинг

$$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot 3x^2-\frac{5}{2}\cdot 2x+6=x^2-5x+6$$

ҳосиласини нолга тенглаймиз:

$$f'(x)=x^2-5x+6=0.$$

Бундан $x_1=2$, $x_2=3$ ларнинг стационар нуқталар эканини топамиз.

Аввало $x_1=2$ нуқта атрофида функция ҳосиласининг ишорасини аниқлаймиз.

$$\forall\, x\in U_\delta^-(2)=\{x\in R:2-\delta<x<2;\ 0<\delta<1\}\ \text{учун}$$

$$f'(x)=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)>0,$$

$$\forall\, x\in U_\delta^+(2)=\{x\in R:2<x<2+\delta;\ 0<\delta<1\}\ \text{учун}$$

$$f'(x)=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)<0$$

бўлади. Берилган функция $x_1=2$ нуқтада узлуксиз. Демак, берилган функция $x_1=2$ нуқтада максимумга эришади ва унинг максимум қиймати

$$\max f(x)=\frac{1}{3}\cdot 2^3-\frac{5}{2}\cdot 2^2+6\cdot 2=4\frac{2}{3}$$

бўлади.

Худди шу йўл билан $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x$ функциянинг $x_2=3$ нуқтада минимумга эришишини ва унинг минимум қиймати

$$\min f(x)=4\frac{1}{2}$$

га тенглиги топилади.

10-мисол. Ушбу

$$f(x)=\frac{x^3}{e^{2x}}$$

функцияни экстремумга текширинг. Бу функция ҳосиласи

$$f'(x)=\frac{x^2}{e^{2x}}(3-2x)$$

ни нолга тенглаймиз:

$$f'(x)=\frac{x^2}{e^{2x}}(3-2x)=0.$$

Бу тенгламадан $x_1=0$, $x_2=\frac{3}{2}$ ларнинг стационар нуқталар эканини топамиз.

Энди функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$f''(x)=\frac{2x(2x^2-6x+3)}{e^{2x}}.$$

$f(x)$ функциянинг берилишидан $x=0$ нуқта экстремумга эга эмаслиги келиб чиқади.

$$f''\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{e^3}<0,$$

демак, қаралаётган функция $x=\frac{3}{2}$ нуқтада максимумга эришади ва унинг максимум қиймати

$$\max f(x)=\frac{9}{4}e^{-3}$$

га тенг.

Изоҳ: а) Маълумки, $f(x)=|x|$ функциянинг $x=0$ нуқтада ҳосиласи мавжуд эмас, лекин бу нуқтада минимумга эга бўлиши равшандир.

б) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ функция $x=0$ нуқтада чексиз ҳосилага эга бўлиб, унинг бу нуқтада минимумга эга эканлигини кўриш қийин эмас. Демак, функция ҳосиласи мавжуд бўлмаган ёки чексизга айланадиган нуқталарда ҳам экстремум мавжуд бўлиши мумкин экан.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг экстремум қийматларини топинг:

40. $f(x)=2x^2-x^4$.

41. $f(x)=\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{11}{2}x^2-6x+3$.

42. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,}\\ 2 & \text{агар } x=0 \text{ бўлса.}\end{cases}$

43. $f(x)=xe^{-x}$.

44. $f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}$.

45. $f(x)=\frac{1}{x^2-x}$.

46. $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

47. $f(x)=e^x\sin x$.

48. $f(x)=|x|e^{-|x-1|}$.

49. $f(x)=|x^2-1|e^{|x|}$.

50. $f(x)=|x^2-4|e^{-|x|}$.

51. $f(x)=e^{-|x-1|}/(x+1)$.

52. $f(x)=x+\sqrt{3-x}$.

53. $f(x)=\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

54. $f(x)=\ln\cos x-\cos x$.

55. $f(x)=x^x$.

56. $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$.

57. $f(x)=|x-5|(x-3)^3$.

58. $f(x)=\sqrt[3]{x^2|2-x|}$.

59. $f(x)=\sin|x-3|+\cos x,\ x\in(0,\pi)$

60. $f(x)=\begin{cases} 1+x, & \text{агар } x\leqslant 0 \text{ бўлса,}\\ x^{x^2\ln x}, & \text{агар } x>0 \text{ бўлса.}\end{cases}$

3-§. ФУНКЦИЯ ГРАФИГИНИНГ ҚАВАРИҚЛИГИ ВА БОТИҚЛИГИ. ФУНКЦИЯ АСИМПТОТАЛАРИ

$y=f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган бўлиб, $a<x_1<x_2<b$ бўлсин. $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ нуқталарни қараймиз. Маълумки, бу нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси

$$y=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$$

кўринишда бўлади. Бу тенгламанинг ўнг томонидаги ифодани $l(x)$ билан белгиласак, у ҳолда тенглама қисқача $y = l(x)$ кўринишга эга бўлиб,

$$l(x_1) = f(x_1), \ l(x_2) = f(x_2)$$

бўлиши равшандир.

2-таъриф. *Агар ҳар қандай, $x_1, x_2 (a < x_1 < x_2 < b)$ ларда $\forall x \in (x_1, x_2)$ лар учун $f(x) \geqslant l(x)$ $(f(x) \leqslant l(x))$ тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция графиги (a, b) интервалда қавариқ (ботиқ) дейилади.*

3-теорема. **$y = f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган ва бу интервалда чекли $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. $f(x)$ функциянинг (a, b) да қавариқ (ботиқ) бўлиши учун $f'(x)$ нинг (a, b) да камаювчи (ўсувчи) бўлиши зарур ва етарли.**

4-теорема. **$y = f(x)$ функция (a, b) интервалда аниқланган ва бу интервалда иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосилага эга бўлиб, $\forall (\alpha, \beta) \subset (a, b)$ $(\alpha \neq \beta)$ ларда $f''(x) \neq 0$ бўлсин. $f(x)$ функция (a, b) интервалда қавариқ (ботиқ) бўлиши учун шу интервалда $f''(x) \leqslant 0$ $(f''(x) \geqslant 0)$ тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.**

11-мисол. Ушбу

$$f(x) = x^4 - 6x^2 - 6x + 1$$

функциянинг қавариқ ва ботиқлиги оралиқларини топинг.

Функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x - 6.$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1),$$

$$|x| > 1 \text{ да } f''(x) > 0, \ |x| < 1 \text{ да } f''(x) < 0.$$

Демак, $(-1, 1)$ интервалда функция графиги қавариқ, $(-\infty, -1), (1, +\infty)$ интервалларда эса функция графиги ботиқ бўлади.

$f(x)$ функция x_0 нуқтанинг $U_\delta(x_0)$ атрофида аниқланган бўлсин.

3-таъриф. *Агар $f(x)$ функция $U_\delta^-(x_0)$ оралиқда қавариқ (ботиқ) бўлиб, $U_\delta^+(x_0)$ оралиқда эса ботиқ (қавариқ) бўлса, у ҳолда x_0 нуқта функциянинг (функция графигининг) эгилиш нуқтаси деб аталади.*

5-теорема. **$y = f(x)$ функция x_0 нуқтанинг $U_\delta(x_0)$ атрофида аниқланган ва иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Агар $f''(x_0) = 0$ бўлиб, $U_\delta^-(x_0)$, $U_\delta^+(x_0)$ оралиқларда $f''(x)$ ҳосила турли ишорали бўлса, у ҳолда $(x_0, f(x_0))$ функция графиги учун эгилиш нуқтаси бўлади.**

12-мисол. Ушбу

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

функциянинг эгилиш нуқтасини топинг.

Функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи

$$f''(x) = 2xe^{-x^2}(2x^2 - 3)$$

ни нолга тенглаб топамиз.

$$x = 0, \ x = \sqrt{\frac{3}{2}}, \ x = -\sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \text{ ва } \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \text{ интервалларда } f''(x) < 0,$$

$$\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right) \text{ ва } \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty\right) \text{ интервалларда } f''(x) > 0$$

эканини кўриш қийин эмас. Демак,

$$A\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}\right), \ B(0, 0), \ C\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}\right)$$

нуқталар функция графигининг эгилиш нуқталаридир.

$y = f(x)$ функция a нуқтанинг бирор атрофида аниқланган бўлсин.

4-таъриф. *Агар ушбу*

$$\lim_{x \to a+0} f(x), \ \lim_{x \to a-0} f(x)$$

лимитлардан бири ёки иккаласи чексиз бўлса, у ҳолда $x = a$ тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг вертикал асимптотаси деб аталади.

Масалан, $y = \frac{1}{x-1}$ функция графиги учун $x = 1$ тўғри чизиқ вертикал асимптота бўлади.

5-таъриф. *Шундай k ва b сонлари мавжуд бўлиб, $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ да $f(x)$ функция қуйидаги*

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

кўринишда ифодаланса (бунда $\lim \alpha(x) = 0$), у ҳолда $y = kx + b$ тўғри чизиқ $y = f(x)$ функция графигинине оғма асимптотаси дейилади.

13-мисол. Ушбу

$$f(x)=\frac{2x^2+x-2}{x-1}$$

функция графигининг оғма асимптотасини топинг.

Берилган функция кўринишини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$f(x)=2x+3+\frac{1}{x-1}.$$

$x\to\pm\infty$ да $\alpha(x)=\frac{1}{x-1}\to 0$ бўлгани учун, $f(x)$ функцияни $f(x)=2x+3+\alpha(x)$ кўринишда ифодалаш мумкин. Бундан эса $y=2x+3$ тўғри чизиқ функция графигининг оғма асимптотаси экани келиб чиқади.

6-теорема. **$y=f(x)$ функция графиги $x\to+\infty$ да $y=kx+b$ оғма асимптотага эга бўлиши учун**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b$$

лимитларнинг ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Бу теорема $x\to-\infty$ да ҳам ўринлидир.

14-мисол. Ушбу

$$f(x)=\frac{x^4}{(1-x)^3}$$

функция графигининг оғма асимптоталарини топинг.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4}{x(1+x)^3}=1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^4}{(1+x)^3}-x\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4-x(1+3x+3x^2+x^3)}{(1+x)^3}=-3.$$

Демак, қаралаётган функция учун

$$y=x-3$$

чизиқ оғма асимптота бўлади.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг қавариқлик ва ботиқлик оралиқларини топинг:

61. $f(x)=x^\alpha$, $\alpha>1$, $x>0$.
62. $f(x)=e^x$.
63. $f(x)=\ln x$.
64. $f(x)=x^5-10x^2+3x$.
65. $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$.

66. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+x}$.
67. $f(x)=e^{-x^2}$.
68. $f(x)=x+\sin x$.
69. $f(x)=x\sin\ln x$, $x>0$.
70. $f(x)=e^{\operatorname{arctg} x}$.

Қуйидаги функциялар графикларининг эгилиш нуқталарини топинг:

71. $f(x)=\cos x$.
72. $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.
73. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.
74. $f(x)=(x^2-1)^3$.
75. $f(x)=4x^2+\frac{1}{x}$.
76. $f(x)=\frac{|x-1|}{x^2}$.
77. $f(x)=e^{\cos x}$.
78. $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.
79. $f(x)=1+x^2-\frac{x^4}{2}$.
80. $f(x)=e^{2x-x^2}$.
81. $f(x)=2x^2+\ln x$.
82. $f(x)=e^{-2x}\sin^{-2}x$.
83. $f(x)=\frac{ax}{x^2+b^2}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$.
84. $f(x)=\frac{x^4}{(1+x)^3}$.
85. $f(x)=\sqrt{1-x^3}$.

4-§. ФУНКЦИЯЛАРНИ ТУЛИҚ ТЕКШИРИШ ВА ГРАФИКЛАРИНИ ЧИЗИШ

Функцияларни текшириш ва уларнинг графикларини чизишни қуйидаги қоида бўйича амалга ошириш мақсадга мувофиқдир:

1°. Функциянинг аниқланиш тўпламини топиш;

2°. Функцияни узлуксизликка текшириш ва узилиш нуқталарини топиш;

3°. Функциянинг жуфт, тоқ ҳамда даврийлигини аниқлаш;

4°. Функцияни монотонликка текшириш;

5°. Функцияни экстремумга текшириш;

6°. Функция графигининг қавариқ ва ботиқлик оралиқларини аниқлаш, эгилиш нуқталарини топиш;

7°. Функция графигининг асимптоталарини топиш;

8°. Агар имконияти бўлса, функциянинг Ox ва Oy ўқлар билан кесишадиган (агар улар мавжуд бўлса) нуқталарини топиш ва аргумент x нинг бир нечта характерли қийматларида функциянинг қийматларини ҳисоблаш.

15-мисол. Ушбу $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ функцияни тўлиқ текширинг ва графигини чизинг.

Берилган функция $\{(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 1)\cup(1,\ +\infty)\}$ тўпламда аниқланган. Бу функция учун $f(-x)=f(x)$ бўлганидан у жуфтдир. Демак, функциянинг графиги Oy ўққа нисбатан симметрик бўлади ва уни $[0,\ +\infty)$ оралиқда текшириш кифоя.

Функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалари:

$$f'(x)=\frac{-4x}{(x^2-1)^2},\quad f''(x)=\frac{4(1+3x^2)}{(x^2-1)^3}.$$

Биринчи тартибли ҳосила $[0,\ +\infty)$ оралиқнинг $x=1$ нуқтасидан бошқа барча нуқталарида аниқланган ва $x=0$ нуқтада нолга айланади. Иккинчи тартибли ҳосиланинг $x=0$ нуқтадаги қиймати $f''(0)=-4<0$. Шунинг учун $f(x)$ функция $x=0$ нуқтада максимумга эга ва бу максимум қиймат $f(0)=-1$ бўлади.

Энди $(0,\ 1)$ ва $(1,\ +\infty)$ да $f'(x)<0$ бўлганидан бу тўпламда $f(x)$ нинг камаювчилиги келиб чиқади. Сўнгра

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty,\quad \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty,\quad \lim_{x\to -1-0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty$$

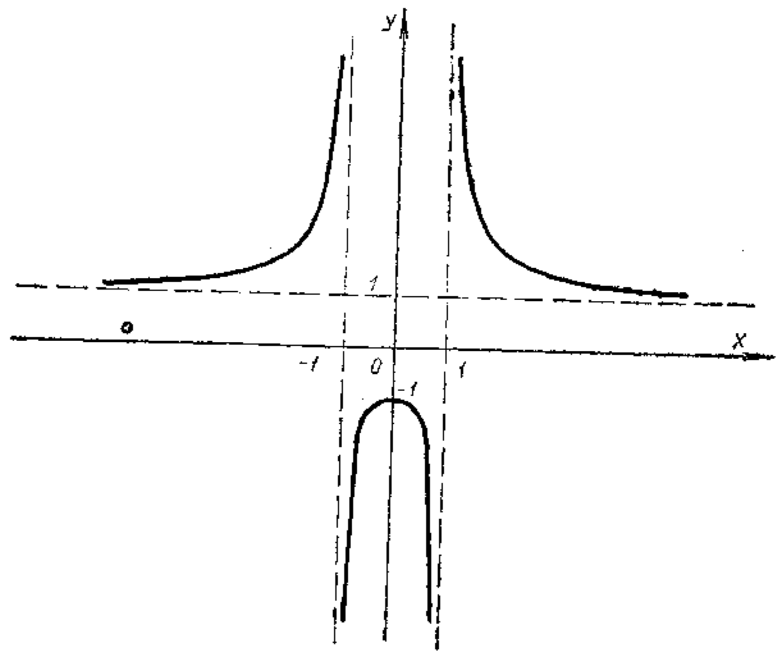
бўлгани учун $x=\pm 1$ (функциянинг иккинчи тур узилиш нуқталари) тўғри чизиқлар вертикал асимптоталар эканлигини ва

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot\frac{1}{x}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=1$$

лимитларга кўра $y=1$ горизонтал тўғри чизиқ $f(x)$ функция графигининг асимптотаси эканлигини ҳосил қиламиз.

Энди $1+3x^2=0$ тенглама ҳақиқий сонлар ўқида ечимга эга бўлмагани сабабли функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи нолга тенг бўлмаслиги, яъни эгилиш нуқтаси йўқлиги келиб чиқади. Иккинчи тартибли ҳосиланинг қийматлари: $[0,\ 1)$ да $f''(x)<0$, $(1,\ +\infty)$ да $f''(x)>0$. Демак, функция графиги $[0,\ 1)$ да қавариқ ва $(1,\ +\infty)$ да ботиқ бўлади (3-чизма).



3-чизма.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги функцияларнинг графикларини чизинг:

86. $f(x)=3x-x^3$.
87. $f(x)=-x^3+4x-3$.
88. $f(x)=x(x-1)^3$.
89. $f(x)=(x+2)^2(x-1)^2$.
90. $f(x)=\frac{20x^2}{(x-1)^3}$.
91. $f(x)=\frac{x^3}{x-1}$.
92. $f(x)=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$.
93. $f(x)=\frac{x^4}{(1+x)^3}$.
94. $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4$.
95. $f(x)=\frac{x^5-8}{x^4}$.
96. $f(x)=\frac{x}{(1-x^2)^2}$.
97. $f(x)=\frac{(x-1)^5}{(x-2)^4}$.
98. $f(x)=(x-3)\sqrt{x}$.
99. $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.
100. $f(x)=x^2\sqrt{x+1}$.
101. $f(x)=x(x+1)^{\frac{3}{2}}$.
102. $f(x)=\frac{8x}{\sqrt{x^2-4}}$.
103. $f(x)=\frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x}{2}$.

104. $f(x)=(x^2+8x+12)^{\frac{2}{3}}$.

105. $f(x)=|x|\sqrt{1-x^2}$.

106. $f(x)=\dfrac{|1+x|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$.

107. $f(x)=e^x-x$.

108. $f(x)=xe^{-2x}$.

109. $f(x)=x^2e^{-x}$.

110. $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$.

111. $f(x)=\ln x-x+1$.

112. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

113. $f(x)=x^2\ln x$.

114. $f(x)=x\ln^2 x$.

115. $f(x)=\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+\dfrac{6}{x+1}$.

116. $f(x)=x-\sqrt{x^2-2x}$.

117. $f(x)=x^2-2\ln x$.

118. $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x$.

119. $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$.

120. $f(x)=\sin x-\sin^2 x$.

121. $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\cos x}$.

122. $f(x)=\dfrac{x}{2}-\operatorname{arctg} x$.

123. $f(x)=\dfrac{3}{2}x-\arccos\dfrac{1}{x}$.

124. $f(x)=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

125. $f(x)=\dfrac{1}{\operatorname{arcctg} x}$.

126. $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

127. $f(x)=e^{\cos x}$.

128. $f(x)=e^{-\operatorname{arctg} x}$.

129. $f(x)=\sin x-\ln\sin x$.

130. $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

5-§. АНИҚМАСЛИКЛАРНИ ОЧИШ

(Лопиталь қоидалари)

1°. $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликлар.

7-теорема. $f(x)$ **ва** $g(x)$ **функциялар учун қуйидаги шартлар ўринли бўлсин:**

1) $f(x)$ **ва** $g(x)$ **функциялар** a **нуқтанинг бирор атрофида аниқланган ва чекли ҳосилага эга;**

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$;

3) a **нуқтанинг шу атрофида** $g'(x)\neq 0$;

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ **чекли ёки чексиз.**

У ҳолда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

тенглик ўринли бўлади.

Изоҳ. Агар бу теореманинг шартлари a нуқтанинг чап (ёки ўнг) ярим атрофида бажарилса, у ҳолда теорема $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ нинг a нуқтадаги чап (ёки ўнг) лимитига нисбатан ўринли бўлади.

16-мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$$ лимитни ҳисобланг.

Бу ҳолда $f(x)=e^{\alpha x}-\cos\alpha x$, $g(x)=e^{\beta x}-\cos\beta x$ бўлиб, улар учун теорема шартлари бажарилади:

а) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=\lim\limits_{x\to 0} g(x)$,

б) $f'(x)=\alpha\,(e^{\alpha x}+\sin\alpha x)$, $g'(x)=\beta\,(e^{\beta x}+\sin\beta x)$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}+\sin\alpha x}{e^{\beta x}+\sin\beta x}=\dfrac{\alpha}{\beta}$, у ҳолда теоремага кўра:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

8-теорема. $f(x)$ ва $g(x)$ **функциялар учун қуйидаги шартлар ўринли бўлсин:**

1) $f(x)$ **ва** $g(x)$ **функциялар** $(a, +\infty)$ **да аниқланган ва чекли ҳосилага эга;**

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0;$

3) $g'(x)\neq 0,\ \forall\, x\in(a, +\infty);$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ — **чекли ёки чексиз.**

У ҳолда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

тенглик ўринли бўлади.

17-мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$ лимитни ҳисобланг.

Бу ерда

$$f(x)=\pi-2\operatorname{arctg}x,\quad g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

функциялар теореманинг 1) — 3) шартларини қаноатлантиришини текшириш қийин эмас.

Равшанки,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\,\frac{1}{1+x^2}}{\frac{x}{1+x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{1+x^2}}{\frac{1}{(1+x)\,x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1+x^2}(1+x)\,x=2.$$

Демак, 4) шарт ҳам бажарилади. Шунинг учун теоремага кўра:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=2.$$

2° $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликлар.

9-теорема. $f(x)$ **ва** $g(x)$ **функциялари учун қуйидаги шартлар ўринли бўлсин:**

1) **бу функциялар** a **нуқтанинг бирор атрофида аниқланган ва чекли ҳосилага эга**

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty;$

3) a **нуқтанинг шу атрофида** $g'(x)\neq 0;$

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ — **чекли ёки чексиз.**

У ҳолда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

тенглик ўринли бўлади.

18-мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}x}$$ лимит ҳисоблансин.

Бу ерда

$$f(x)=\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right),\quad g(x)=\operatorname{tg}x$$

бўлиб, улар теореманинг 1) — 3) шартларини қаноатлантиради ва

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{x-\frac{\pi}{2}}.$$

Кейинги лимит $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмаслик бўлиб,

$$f_1(x)=\cos^2 x,\quad g_1(x)=x-\frac{\pi}{2}$$

функциялар 7-теореманинг барча шартларини қаноатлантиради. Шу теоремага асосан:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x\,(-\sin x)}{1}=0.$$

Демак, 9-теоремага кўра,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg} x} = 0.$$

3°. Бошқа кўринишдаги аниқмасликлар
Маълумки,

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0,\ \lim_{x\to a} g(x) = \infty \text{ бўлса, } f(x)\cdot g(x)$$

кўпайтма $0\cdot\infty$ кўринишдаги аниқмаслик бўлиб, уни

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

кўринишда ифодалаш орқали $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликка келтириш мумкин.

Шунингдек, $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ бўлса, $f(x) - g(x)$ айирма $\infty - \infty$ кўринишдаги аниқмаслик бўлиб, уни ҳам

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}$$

кўринишда ифодалаб, $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликка келтириш мумкин.

Шундай қилиб, функция ҳосилалари ёрдамида $0\cdot\infty$ ва $\infty - \infty$ кўринишдаги аниқмасликларни очишда, уларни $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликка келтириб, сўнгра юқоридаги теоремалар қўлланилади.

Маълумки, $x\to a$ да $f(x)$ функция 1, 0 ва ∞ га, $g(x)$ функция эса мос равишда ∞, 0 ва 0 га интилганда

$[f(x)]^{g(x)}$ даражали — кўрсаткичли ифодада 1^∞, 0^0, ∞^0 кўринишдаги аниқмасликлар келиши мумкин. Бу кўринишдаги аниқмасликларни очиш учун аввало

$$y = [f(x)]^{g(x)}$$

ифода логарифмланади:

$$\ln y = g(x)\ \ln f(x).$$

$x\to a$ да $g(x)\ln f(x)$ ифода $0\cdot\infty$ кўринишдаги аниқмасликни ифодалаши равшан.

Изоҳ. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциянинг $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилалари ҳам $f(x)$ ва $g(x)$ лардек юқорида келтирилган теоремаларнинг барча шартларини қаноатлантирсэ, у ҳолда

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

тенгликлар ўринли бўлади, яъни бу ҳолда Лопиталь қоидасини такрор қўллаш мумкин бўлади.

19-мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}2x}$$

лимитни ҳисобланг.

Бу лимит 1^∞ кўринишдаги аниқмаслик бўлиб, юқорида айтилганларга асосан:

$$y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$$

ифодани логарифмлаш натижасида

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \ln y = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{(\operatorname{tg} 2x)^{-1}}$$

$\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликка келади.

Энди Лопиталь қоидасини қўлласак:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\ln \operatorname{tg} x)'}{[(\operatorname{tg}2x)^{-1}]'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\frac{2}{\cos^2 2x}}{(\operatorname{tg} 2x)^2}} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \sin 2x = -1.$$

Демак,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}2x} = \frac{1}{e}$$

экан.

Мисол ва масалалар

131. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,\mathrm{ctg}\,x - 1}{x^2}$.

132. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\,\mathrm{tg}\,4x - 12\,\mathrm{tg}\,x}{3\sin 4x - 12\sin x}$.

133. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$.

134. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,(e^x + 1) - 2\,(e^x - 1)}{x^3}$.

135. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$.

136. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$.
$(a > 0)$.

137. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$.

138. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{x^{\varepsilon}}$ $(\varepsilon > 0)$.

139. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{\alpha} - 1}{x^{\beta} - 1}$,
$(\beta \neq 0)$.

140. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - 1}{\ln x}$.

141. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos\,(2m+1)\,x}{\cos\,(2n+1)\,x}$,
$m \in N,\ n \in N$.

142. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x - x + 1}{x - x^x}$.

143. $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\ln x}{\ln \sin x}$.

144. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^{\alpha} \ln^{\beta} x}{e^{\alpha x}}$.

145. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^{x\,\alpha} \ln^{\beta} x}$.

146. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n e^{-x^2}$.

147. $\lim\limits_{x\to +0} (x^x - 1) \ln x$.

148. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$.

149. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{\alpha}{1 - x^{\alpha}} - \dfrac{\beta}{1 - x^{\beta}}\right)$,
$\alpha,\ \beta \neq 0$.

150. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

151. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,x\right)^x$.

152. $\lim\limits_{x\to +0} (1 + x)^{\ln x}$.

153. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2} - 0} (\pi - 2x)^{\cos x}$.

154. $\lim\limits_{x\to +0} |\ln x|^{2x}$.

155. $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^x - 1}$.

156. $\lim\limits_{x\to 0} (x^{x^x} - 1)$.

157. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(a + x)^x - a^x}{x^2}$, $(a > 0)$.

158. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\mathrm{th}\,x)^x$.

159. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

160. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$.

161. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1 + x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$.

162. $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{1}{\ln \mathrm{sh}\,x}}$.

163. $\lim\limits_{x\to +0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

164. $\lim\limits_{x\to +0} (\arcsin x)^{\mathrm{tg}\,x}$.

165. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

166. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arcsin x}\right)$.

167. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{7}{8}}-x^{\frac{6}{7}}\ln^2 x\right)$

168. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)$.

169. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{\ln^3(1+x)}$.

170. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}a^{x},\ \alpha>0,$
$a\neq 1$.

VIII боб

АНИҚМАС ИНТЕГРАЛЛАР

1-§. АНИҚМАС ИНТЕГРАЛ ТУШУНЧАСИ

$f(x)$ функция бирор (a, b) (чекли ёки чексиз) интервалда аниқланган бўлсин.

1-таъриф. *Агар (a, b) интервалда $f(x)$ функция ($f(x)\,dx$ ифода) шу интервалда дифференциалланувчи $F(x)$ функциянинг ҳосиласига (дифференциалига) тенг бўлса, яъни ушбу*

$$F'(x)=f(x)\quad (dF(x)=f(x)\,dx),\quad x\in(a,\ b)$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция (a, b) интервалда $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$$

функциянинг $(-\infty;\ +\infty)$ интервалда бошланғич функцияси

$$F(x)=\ln(1+x^2)$$

бўлади, чунки

$$F'(x)=[\ln(1+x^2)]'=\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x=f(x).$$

3-мисол. Ушбу

$$\int\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}\,dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функцияни

$$\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}=x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Натижада

$$\int\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}\,dx=\int\left(x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

тенгликка келамиз.

Аниқмас интегралнинг содда хоссалари ва юқорида келтирилган жадвалдан фойдаланиб, топамиз:

$$\int\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}\,dx=\int x^{\frac{3}{2}}\,dx+\int x^{\frac{1}{2}}\,dx+2\cdot\int\frac{dx}{2\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+2\sqrt{x}+C=\frac{2\cdot x^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+$$

$$+2\sqrt{x}+C=\frac{2x^2\sqrt{x}}{5}+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+2\sqrt{x}+C=$$

$$=2\sqrt{x}\left(\frac{x^2}{5}+\frac{x}{3}+1\right)+C.$$

2-§. ИНТЕГРАЛЛАШ УСУЛЛАРИ

1°. Ўзгарувчини алмаштириш усули

Агар $\varphi(t)$ функция (c, d) интервалда бошланғич функция $\Phi(t)$ га эга бўлиб, $g(x)$ функция (a, b) интервалда дифференциалланувчи ҳамда $x\in(a, b)$ қийматларда $g(x)\in(c, d)$ бўлса, у ҳолда

$$\int\varphi(g(x))\,g'(x)\,dx=\Phi(g(x))+C$$

формула ўринлидир.

Демак, $\int \varphi(g(x))\, g'(x)\, dx$ интегрални ҳисоблаш $t = g(x)$ алмаштириш ёрдамида $\int \varphi(t) dt$ интегрални ҳисоблашга келтирилган экан. Бундай у с у л ў з г а р у в ч и н и а л м а ш т и р и ш у с у л и деб аталади.

4- м и с о л. Ушбу

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$$

интегрални ҳисобланг.

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\, dx = -\int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}.$$

Охирги интегралдан кўринадики, ўзгарувчини $\frac{1}{x} = t$ деб алмаштириш мақсадга мувофиқдир. Янги ўзгарувчи t орқали интеграл қуйидаги кўринишга келади: $I = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ айниятни ҳисобга олиб, $t = \operatorname{sh} z$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда

$$dt = \operatorname{ch} z\, dz, \quad \sqrt{1+t^2} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 z} = \operatorname{ch} z$$

бўлиб,

$$I = -\int \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{ch} z}\, dz = -\int dz = -z + C$$

натижани оламиз. Берилган интегралнинг x ўзгарувчи орқали ифодаси

$$I = -\ln\left|\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right| + C$$

бўлиши равшандир.

5- м и с о л. Ушбу

$$\int e^{\operatorname{arctg} x} \frac{dx}{1+x^2}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $\operatorname{arctg} x = t$ алмаштиришни бажарамиз. Натижада $\frac{dx}{1+x^2} = dt$ бўлиб,

$$\int e^{\operatorname{arctg} x} \frac{dx}{1+x^2} = \int e^t\, dt = e^t + C = e^{\operatorname{arctg} x} + C$$

бўлади.

6- м и с о л. Ушбу

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$$

интеграл ҳисоблансин. Бу интегралда $x = \operatorname{tg} t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

бўлиб,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} = \int \frac{\cos^3 t}{\cos^2 t}\, dt = \int \cos t\, dt = \sin t + C = \sin(\operatorname{arctg} x) + C$$

бўлади.

7- м и с о л. Ушбу

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}\, dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $\ln(\ln x) = t$ алмаштиришни бажариш натижасида $\frac{dx}{x\ln x} = dt$ бўлиб,

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}\, dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{[\ln(\ln x)]^2}{2} + C$$

бўлади.

Мисол ва масалалар

Ўзгарувчини алмаштириш усулидан фойдаланиб қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

1. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$
2. $\int x\sqrt{1-x^2}\, dx.$
3. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx.$
4. $\int \frac{dx}{x\ln x \ln(\ln x)}.$
5. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}.$
6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$
7. $\int \frac{dx}{e^{x/2}+e^x}.$
8. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\, dx.$

9. $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x}\, dx.$

10. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}.$

12. $\int x e^{-x^2} dx.$

13. $\int \frac{\ln^{100} x}{x}\, dx.$

14. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx.$

15. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}.$

16. $\int \frac{dx}{\sin x}.$

17. $\int \frac{dx}{x^4 + 1}.$

18. $\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}\, dx.$

19. $\int \frac{2^x\, 3^x}{9^x - 4^x}\, dx.$

20. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}.$

21. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}.$

22. $\int \sqrt{1-x^2}\, dx.$

23. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx.$

24. $\int \frac{\sin x \cdot \cos^3 x}{1+\cos^2 x}\, dx.$

25. $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}.$

2°. Бўлаклаб интеграллаш усули

Фараз қилайлик, $u(x)$ ва $v(x)$ функциялар (a, b) **интервалда** дифференциалланувчи бўлиб, $v(x) \cdot u'(x)$ функция бу интервалда бошланғич функцияга эга бўлсин. У ҳолда $u(x)v'(x)$ функция хам бошланғич функцияга эга ва

$$\int u(x)\, v'(x) dx = u(x)\, v(x) - \int v(x)\, u'(x)\, dx$$

тенглик ўринлидир. Бу тенглик **бўлаклаб интеграллаш формуласи** дейилади. Бўлаклаб интеграллаш формуласини

$$\int u(x)\, dv(x) = u(x)\, v(x) - \int v(x)\, du(x)$$

кўринишда ёзиш ҳам мумкин.

8-мисол. Ушбу

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\, dx.$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги ифодани $u = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$, $dv = dx$ лар кўпайтмаси деб оламиз. У ҳолда $du = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, $v = x$ бўлади. Бўлаклаб интеграллаш формуласига кўра:

$$I = \int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\, dx = x \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int \frac{x\,dx}{2\sqrt{x}\,(1+x)} =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x}.$$

$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x}$ интегралда $\sqrt{x} = t$ деб оламиз. Натижада $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$ бўлиб,

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x} = \int \frac{t \cdot 2t}{1+t^2} dt = 2\int \frac{t^2 dt}{1+t^2} =$$

$$= 2\left[\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2}\right] = 2t - 2\operatorname{arctg} t + C = 2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$$

Шундай қилиб, берилган интеграл қуйидагига тенг бўлади:

$$I = x \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x} + C =$$

$$= (x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$$

9-мисол. Ушбу

$$I = \int \sin(\ln x)\, dx$$

интегрални ҳисобланг.

$u = \sin(\ln x)$, $dv = dx$ деб оламиз. У ҳолда $du = \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$, $v = x$ бўлади.

Бўлаклаб интеграллаш формуласидан топамиз:

$$I = x \cdot \sin(\ln x) - \int x \frac{\cos(\ln x)}{x} dx =$$

$$= x \cdot \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\, dx.$$

$I_1 = \int \cos(\ln x)\, dx$ интегралда худди юқоридаги каби бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланамиз:

$$I_1 = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\, dx.$$

Демак, қаралаётган интеграл қуйидагича кўринишга эга бўлади:

$$I = x\sin(\ln x) - x\cos\ln x - \int \sin(\ln x)\, dx =$$

$$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - I.$$

Шундай қилиб, I га нисбатан чизиқли тенглама ҳосил бўлди, бундан

$$I=\frac{x}{2}\left(\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right)+C$$

эканини топамиз.

10-мисол. Ушбу

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}\quad (n=1,2,3,\ \dots)$$

интегрални хисобланг.

Аввало бу интегралда $n=1$ бўлган ҳолни қарайлик. Бу ҳолда

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$$

муносабатга эга бўламиз.

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$

интегралда

$$u=\frac{1}{(x^2+a^2)^n},\quad dv=dx$$

деб олсак,

$$du=-\frac{2nx\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}},\quad v=x$$

бўлиб, бўлаклаб интеграллаш формуласига кўра

$$I_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx$$

бўлади.

$\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}$ ифоданинг кўриниши

$$\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}=\frac{1}{(x^2+a^2)^n}-a^2\frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

каби ўзгартирилиши натижасида

$$I_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1}$$

тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликдан эса

$$I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{a^2}I_n$$

реккурент формула келиб чиқади. Бу реккурент формуладан ва $n=1$ бўлган ҳолдаги интеграл ҳисобга олиниб, $n\geqslant 2$ лар учун интеграллар топилади. Масалан:

$$I_2=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^2}I_1=$$

$$=\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

Мисол ва масалалар

Бўлаклаб интеграллаш усулидан фойдаланиб қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

26. $\int x\cdot\sin x\,dx.$
27. $\int x\cdot e^{-x}dx.$
28. $\int x^n\ln x\,dx\ (n\neq -1).$
29. $\int \arcsin x\,dx.$
30. $\int x^3e^{-x^2}dx.$
31. $\int\frac{\arcsin x}{x^2}\,dx.$
32. $\int \operatorname{arctg} x\,dx.$
33. $\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx.$
34. $\int\sin x\ln(\operatorname{tg}x)dx.$
35. $\int\cos(\ln x)\,dx.$
36. $\int e^{ax}\cdot\cos bx\,dx.$
37. $\int e^{ax}\cdot\sin bx\,dx.$
38. $\int\sqrt{x}\,\ln^2x\,dx.$
39. $\int e^{2x}\sin^2x\,dx.$
40. $\int x(\operatorname{arctg}x)^2\,dx.$
41. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx.$
42. $\int x^2\operatorname{sh}x\,dx.$
43. $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2dx.$
44. $\int\frac{x}{\cos^2x}\,dx.$
45. $\int\frac{\operatorname{arctg}(e^x)}{e^x}\,dx.$

3-§. РАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

$$\frac{A}{(x-a)^m},\quad\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m},\quad m=1,2,3,\ \dots \tag{1}$$

кўринишдаги касрлар *содда касрлар* деб аталади, бунда $A, B, C,\ a, p, q$ лар ўзгармас сонлар, x^2+px+q квадрат учҳад эса ҳақиқий илдизга эга эмас.

Ушбу

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_jx^j}\tag{2}$$

кўринишдаги каср рационал функция дейилади, бунда $a_0, \dots, a_n$ b ва $b_0, b_1, \dots, b_j$ ўзгармас сонлар, $n \in N$, $j \in N$. Агар $n<j$ бўлса, бу каср тўғри каср деб аталади.

Ҳар қандай тўғри каср содда касрлар орқали ифодаланади (Қ. Т. Азларов, Х. Мансуров. «Математик анализ«, I-жилд, 262-бет). Демак, (2) кўринишдаги рационал касрларни интеграллаш масаласи (1) кўринишдаги содда касрларни интеграллаш орқали ҳал қилинади.

1. $\frac{A}{x-a}$ содда касрнинг аниқмас интеграли:

$$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C.$$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^m}\,dx$ $(m>1)$ интеграл ҳам осон ҳисобланади:

$$\int \frac{A}{(x-a)^m}\,dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^m} = A\int (x-a)^{-m}\,d(x-a) =$$

$$= \frac{A}{1-m}\cdot\frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C.$$

3. $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ содда касрнинг интегралини ҳисоблаш учун x^2+px+q квадрат учҳадни

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

кўринишда ифодалаймиз (x^2+px+q квадрат учҳад ҳақиқий илдизга эга бўлмаганидан $q-\frac{p^2}{4}>0$). У ҳолда

$$I = \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2}\,dx;\quad a^2 = q-\frac{p^2}{4}$$

бўлади. Бу интегралда $x+\frac{p}{2}=t$ алмаштиришни бажарамиз:

$$I = B\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2} =$$

$$= \frac{B}{2}\ln(t^2+a^2) + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a} + C_1 =$$

$$= \frac{B}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2C-Bp}{2\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C_1.$$

Демак, $I = \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,dx =$

$$= \frac{B}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2(2C-Bp)}{4q-p^2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + 2C_1.$$

4. $\frac{Bx+c}{(x^2+px+q)^m}$ $(m>1)$ содда касрни интеграллаш учун худди 3-ҳолдаги каби ўзгарувчини алмаштиришдан фойдаланиб топамиз:

$$I_m = \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \frac{B}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m} +$$

$$+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} = \frac{B}{2}\,\frac{1}{1-m}\cdot\frac{1}{(t^2-a^2)^{m-1}} +$$

$$+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}.$$

Бу муносабатдаги $\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$ интеграл 10-мисолда келтирилган бўлиб, у реккурент формула орқали ҳисобланади.

11-мисол. Ушбу

$$I = \int \frac{x\,dx}{(x+1)(2x-1)(x^2+1)}$$

интегрални ҳисобланг.

$\frac{x}{(x+1)(2x-1)(x^2+1)}$ касрни содда касрларга ёйиш натижасида у қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{x}{(x+1)(2x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги касрларни умумий махражга келтириб, суратдаги кўпҳадларнинг тенглигидан фойдалансак, ушбу

$$\begin{cases} -A+B-D=0, \\ 2A+B-C+D=1, \\ -A+B+C+2D=0, \\ 2A+B+2C=0 \end{cases}$$

системага келамиз. Бу системани ечиб,

$$A=\frac{1}{6},\quad B=\frac{4}{15}, C=-\frac{3}{10}, D=\frac{1}{10}$$

эканини топамиз. Шундай қилиб,

$$I=\int\frac{xdx}{(x+1)(2x-1)(x^2+1)}=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{4}{15}\int\frac{dx}{2x-1}+$$

$$+\int\frac{-\frac{3}{10}x+\frac{1}{10}}{x^2+1}dx=\frac{1}{6}\ln|x+1|+\frac{4}{30}\ln|2x-1|-$$

$$-\frac{3}{20}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+\frac{1}{10}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{6}\ln|x+1|+$$

$$+\frac{4}{30}\ln|2x-1|-\frac{3}{20}\ln(x^2+1)+\frac{1}{10}\operatorname{arctg}x+C.$$

Бу мисолда рационал касрларни интеграллаш учун умумий бўлган, содда касрларга ёйиш усули етарлича мураккаб бўлган тенгламалар системасига олиб келишини кўрдик. Шунинг учун интеграл остидаги функция кўринишига қараб иложи борича соддароқ усуллар билан интеграллаш маъқулдир.

12- мисол. Ушбу

$$\int\frac{dx}{x^4+1}$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги ифода кўринишини ўзгартириш натижасида топамиз:

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}};\quad d\left(\frac{1}{x}+x\right)-d\left(x-\frac{1}{x}\right)=-\frac{2\,dx}{x^2}.$$

$$I=\int\frac{dx}{x^4+1}=\int\frac{\frac{dx}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)-d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^2+\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2-2},\quad z=x+\frac{1}{x}.$$

$\frac{1}{z^2-2}$ функцияни содда касрларга ёямиз:

$$\frac{1}{z^2-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{z-\sqrt{2}}-\frac{1}{z+\sqrt{2}}\right),$$

Натижада

$$\int\frac{dz}{z^2-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{dz}{z-\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{dz}{z+\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right|+C \text{ бўлади.}$$

Демак,

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right|+C.$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

46. $\int\frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

47. $\int\frac{xdx}{x^2-3x+2}$.

48. $\int\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2dx$.

49. $\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

50. $\int\frac{dx}{x^3+1}$.

51. $\int\frac{x}{x^3-1}dx$.

52. $\int\frac{xdx}{(x+1)(x^2+1)}$.

53. $\int\frac{dx}{x^4-1}$.

54. $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

55. $\int\frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}$.

56. $\int\frac{x^3}{(x-1)^{100}}dx$.

57. $\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx$.

58. $\int\frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx$.

59. $\int\frac{dx}{x^6+1}$.

60. $\int\frac{dx}{x^6-1}$.

Қуйидаги формулаларни исботланг:

1. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0).$

2. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (a \neq 0).$

3. $\int \frac{x}{a^2 \pm x^2} dx = \pm \frac{1}{2} \ln|a^2 \pm x^2| + C.$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C \quad (a > 0).$

6. $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C \quad (a > 0).$

7. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$

8. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \quad (a > 0).$

4-§. БАЪЗИ ИРРАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

1°. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ кўринишдаги интегрални қарайлик $\left(\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}\right)$, бунда $R(x, \varphi(x))$ x ва $\varphi(x)$ ларнинг рационал функциясидир.

Бу интегралда

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

алмаштиришни бажариб, рационал функцияни интеграллашга келамиз.

13-мисол. Ушбу

$$I_n = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} \quad (n \in N)$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функция кўринишини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} = \frac{1}{(x-a)(x-b)\sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}}}.$$

$\sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}} = t$ алмаштиришни бажарсак, у ҳолда $x = \frac{a-bt^n}{1-t^n}$, $dx = \frac{nt^{n-1}(a-b)}{(1-t^n)^2} dt$, $(x-a)(x-b) = \frac{(a-b)^2 t^n}{(1-t^n)^2}$ бўлади.

Натижада берилган интеграл учун

$$I_n = \int \frac{nt^{n-1}(a-b)(1-t^n)^2}{(1-t^n)^2\, t\, (a-b)^2\, t^n} dt =$$

$$= \frac{n}{a-b} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{n}{b-a} \cdot \frac{1}{t} + C = \frac{n}{b-a} \sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}} + C$$

эканини топамиз.

2°. Қуйидаги

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right) dx$$

интегрални қарайлик $\left(\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}\right)$; $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — рационал сонлар. Бу $r_1, r_2, \ldots, r_n$ рационал сонларнинг умумий махражини топамиз, у m га тенг бўлсин. Агар қаралаётган интегралда $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ алмаштириш бажарилса, интегрални ҳисоблаш рационал функцияни интеграллашга келади.

14-мисол. Ушбу

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегралда $t = \sqrt[6]{x}$ алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$I = 6\int \frac{t^3}{t+1} dt = 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}\right) dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) + C =$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} - \ln|\sqrt[6]{x} + 1|\right) + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C$$

эканлигини топамиз.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

61. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

62. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x+1}$.

63. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x}$.

64. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\, dx$.

65. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3 \sqrt{x}}$.

66. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\, dx$.

67. $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\, dx$.

68. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

69. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$ $(a>0)$.

70. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

3°. Қуйидаги

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

интегрални қарайлик, бунда a, b, c — ўзгармас сонлар, $ax^2 + bx + c$ квадрат учҳад тенг илдизларга эга эмас ($a \neq 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$).

а) Агар $ax^2 + bx + c$ квадрат учҳад ҳақиқий илдизларга эга бўлмаса, у ҳолда унинг ишораси билан a нинг ишораси бир хил бўлиши маълумдир. Шунинг учун $a > 0$ деб фараз қиламиз. Бу ҳолда қаралаётган интегралда

$$t = \sqrt{a}\, x + \sqrt{ax^2+bx+c} \qquad (1)$$

$$\left(\text{ёки } t = -\sqrt{a}\, x + \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$$

алмаштириш натижасида интеграл рационал функцияларни интеграллашга келтирилади.

б) Агар $ax^2 + bx + c$ квадрат учҳад ҳар хил x_1 ва x_2 ҳақиқий илдизларга эга бўлса, у ҳолда

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} \qquad \text{бўлиб,}$$

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t\,(x-x_1) \qquad (2)$$

алмаштириш натижасида интеграл остидаги функция t ўзгарувчининг рационал функциясига келтирилади.

Одатда (1) ва (2) алмаштиришлар Эйлер алмаштиришлари деб аталади.

15-мисол. Ушбу

$$\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\, dx$$

интегрални ҳисобланг.

Эйлер алмаштиришларидан фойдаланиб,

$$\sqrt{1+x+x^2} = tx + 1$$

десак, натижада

$$x = \frac{2t-1}{1-t^2}, \quad dx = 2 \cdot \frac{1-t+t^2}{(1-t^2)^2}\, dt,$$

$$\sqrt{1+x+x^2} = \frac{1-t+t^2}{1-t^2}, \quad t = \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$$

бўлади.

Топилган муносабатлардан фойдалансак,

$$\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\, dx = -\int \frac{2t\,dt}{1-t^2} =$$

$$= \ln|1-t^2| + C = \ln\left|1-\left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right)^2\right| + C$$

ҳосил бўлади.

Кўп ҳолларда Эйлер алмаштиришлари мураккаб ҳисоблашларга олиб келади. Қуйида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ интегрални ҳисоблашнинг яна бир усулини келтирамиз.

$R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ функцияни алгебраик алмаштиришлар ёрдамида ҳар доим қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин:

$$\frac{R_1(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + R_2(x),$$

бу ерда $R_1(x)$ ва $R_2(x)$ рационал касрлардир. Рационал касрларни интеграллаш масаласи юқорида кўрилганини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\int R_1(x) \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

интегрални ҳисоблашга келамиз. Маълумки, $R_1(x)$ рационал каср $P_n(x)$ кўпҳад ва элементар (содда) касрлар йиғиндиси кўринишида ифодаланади. Шундай қилиб,

$$\int \frac{P_n(x)\, dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (3)$$

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (4)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}, \ p^2-4q<0 \qquad (5)$$

интегралларга келтирамиз.

(3) интегрални ҳисоблаш учун

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + $$

$$+\lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad (6)$$

формуладан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Бу ерда λ бирор сон, $Q(x)$ тартиби $(n-1)$ дан катта бўлмаган кўпҳад. Охирги формулада тенгликнинг ҳар иккала томонидан ҳосила олиш ёрдамида ҳосил бўлган тенгликдан λ ва $Q(x)$ кўпҳаднинг коэффициентлари топилади.

$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ интеграл эса ўзгарувчини алмаштириш усули билан ҳисобланади.

(4) формула билан ифодаланган интегрални $t=\frac{1}{x-\alpha}$ алмаштириш ёрдамида (3) кўринишга келтириш мумкинлигини кўриш қийин эмас.

(5) кўринишдаги интегрални ҳисоблаш учун ax^2+bx+c, x^2+px+q квадрат учҳадларда $p=\frac{b}{a}$ бўлса, қаралаётган интегралларни

$$\int \frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^{\frac{2m+1}{2}}} \text{ ва } \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{\frac{2m-1}{2}}}$$

интеграллар йиғиндиси орқали ифодалаб, биринчи интегралда $u=x^2+px+q$, иккинчи интегралда эса

$$t=(\sqrt{x^2+px+q})' = \frac{2x+p}{2\sqrt{x^2+px+q}}$$

алмаштириш бажарилади (Абель алмаштириши).

Агар $p \neq \frac{b}{a}$ бўлса,

$$x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1}$$

алмаштириш ёрдамида (5) интеграл

$$\int \frac{P(t)\,dt}{(t^2+\lambda)^m \sqrt{st^2+r}}$$

кўринишга келтирилади, бу ерда $P(t)$, $(2m-1)$ — тартибли кўпҳад ва λ мусбат сондир. Юқоридаги алмаштиришда α ва β лар шундай танланадики, x^2+px+q ва ax^2+bx+c квадрат учҳадларда t нинг биринчи даражаси қатнашган ҳадлар йўқолади.

$\frac{P(t)}{(t^2+\lambda)^m}$ тўғри касрни содда касрларга ёйиш натижасида юқоридаги интеграл қуйидаги интегралларга келтирилади:

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+\lambda)^k \sqrt{st^2+r}}, \quad \int \frac{dt}{(t^2+\lambda)^k \sqrt{st^2+r}}.$$

Бу интегралларнинг биринчиси $u^2=st^2+r$, иккинчиси эса $v=(\sqrt{st^2+r})' = \frac{st}{\sqrt{st^2+r}}$ Абель алмаштиришлари ёрдамида ҳисобланади.

16-мисол. Ушбу

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}$$

интегрални ҳисобланг.

Абель алмаштиришидан фойдаланамиз. Натижада

$$v=(\sqrt{x^2+1})' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$v^2(x^2+1)=x^2, \ x^2+2=\frac{2-v^2}{1-v^2},$$

$$v\sqrt{x^2+1}=x, \ dv\sqrt{x^2+1}+v^2dx=dx,$$

$\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{dv}{1-v^2}$ муносабатлар ҳосил бўлади.

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dv}{2-v^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+v}{\sqrt{2}-v}+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{2}-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}+C=\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2x^2+2}+x}{\sqrt{2x^2+2}-x}+C.$$

17-мисол. Ушбу

$$I=\int\frac{dx}{(2x+1)^2\sqrt{4x^2+4x+5}}$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интегрални ҳисоблаш учун $2x+1=2\,\mathrm{sh}\,t$ алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$I=\frac{1}{8}\int\frac{dt}{\mathrm{sh}^2 t}=-\frac{1}{8}\,\mathrm{cth}\,t+C=$$

$$=-\frac{1}{8}\,\frac{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t}}{\mathrm{sh}\,t}+C=-\frac{1}{8}\,\frac{\sqrt{4x^2+4x+5}}{(2x+1)}+C$$

бўлади.

18-мисол. Ушбу

$$I=\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интеграл қуйидагича ҳисобланади:

$$I=\int x\sqrt{x^2-2x+2}dx=\int x\sqrt{(x-1)^2+1}dx=$$

$$=\int(x-1)\sqrt{(x-1)^2+1}dx+\int\sqrt{(x-1)^2+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int[(x-1)^2+1]^{\frac{1}{2}}\,d\,[(x-1)^2+1]+$$

$$+\int\sqrt{(x-1)^2+1}d\,(x-1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{[(x-1)^2+1]^{3/2}}{\frac{3}{2}}+$$

$$+\frac{x-1}{2}\sqrt{(x-1)^2+1}+\frac{1}{2}\ln|(x-1)+\sqrt{(x-1)^2+1}|+$$

$$+C=\frac{1}{3}(x^2-2x+2)^{3/2}+\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2}+$$

$$+\frac{1}{2}\ln|(x-1)+\sqrt{x^2-2x+2}|+C.$$

4°. Биномиал дифференциалларни интеграллаш

Ушбу

$$x^m\,(ax^n+b)^p\,dx$$

ифода *биномиал дифференциал* деб аталади.

Бу ерда a, b — ҳақиқий сонлар, m, n, p лар эса рационал сонлар бўлиб, $a\neq0$, $b\neq0$, $m\neq0$, $n\neq0$, $p\neq0$. Ушбу

$$\int x^m\,(ax^n+b)^p\,dx$$

интеграллар қуйидаги уч ҳолда рационал функцияларни интеграллашга келтирилади:

1) Агар p — бутун сон бўлса, $x=t^N$ алмаштириш бажарилади, бу ерда N, m ва n касрларнинг умумий махражидир.

2) Агар $\frac{m+1}{n}$ бутун сон бўлса, $ax^n+b=t^s$ алмаштириш бажарилади, бу ерда s p касрнинг махражидир.

3) Агар $\frac{m+1}{n}+p$ бутун сон бўлса, $a+bx^{-n}=t^s$ алмаштириш бажарилади, бу ерда ҳам s p касрнинг махражидир

19-мисол. Ушбу

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги ифода учун

$$a=b=1,\ m=0,\ n=4,\ p=-\frac{1}{4}\ \text{бўлиб},$$

$$\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0\ \text{бўлади}.$$

Демак, $1+x^{-4}=t^4$ алмаштиришни бажариш лозим. Натижада:

$$x=(t^4-1)^{-\frac{1}{4}},\quad\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\frac{(t^4-1)^{\frac{1}{4}}}{t},$$

$$dx=-t^3\,(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}\,dt.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=-\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{t^2-1}+\int\frac{dt}{t^2+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,t+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+4}{\sqrt[4]{1+x^4}-4}-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C.$$

20-мисол. Ушбу

$$\int x^3 (x^4-27)^{\frac{1}{9}}\, dx$$

интегрални ҳисобланг.

$$\int x^3 (x^4-27)^{\frac{1}{9}}\, dx = \frac{1}{4}\int (x^4-27)^{\frac{1}{9}}\, d(x^4-27) =$$

$$= \frac{9\,(x^4-27)^{\frac{10}{9}}}{40} + C.$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

71. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\, dx.$

72. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$

73. $\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1+x^2}}.$

74. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\, dx.$

75. $\int \frac{x\,dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}.$

76. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}.$

77. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$

78. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$

79. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\, dx.$

80. $\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}.$

81. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}.$

82. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

83. $\int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}.$

84. $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\, dx.$

85. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}.$

86. $\int \frac{(x+1)\, dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$

87. $\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}.$

88. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}.$

89. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}.$

90. $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx.$

91. $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\, dx.$

92. $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x(1+x)}\right)^2}.$

93. $\int \frac{x^6}{\sqrt{x^2+1}}\, dx.$

94. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}},\ x>0.$

95. $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$

96. $\int \frac{x^8\,dx}{\sqrt{x^2-1}}.$

97. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+2x+2x^2}}.$

98. $\int \frac{dx}{(x^2+4x+7)^{3/2}}.$

99. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^{5/2}}.$

100. $\int \frac{(x+1)}{(x^2+x+1)^{3/2}}\, dx.$

101. $\int \frac{x\,dx}{(2x^2+1)\sqrt{3x^2+5}}.$

102. $\int \frac{(x+3)\, dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$

103. $\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$

104. $\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}\, dx,$ $x>0.$

105. $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\, dx.$

106. $\int \left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right)^2 \times \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}.$

107. $\int x^{-\frac{1}{3}}(1-x^{\frac{1}{6}})^{-1}\, dx.$

108. $\int x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-2}\, dx.$

109. $\int x^{\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-3}\, dx.$

110. $\int x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{-10}\,dx.$

111. $\int x^2\sqrt[3]{(x+1)^2}\, dx.$

112. $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\, dx.$

113. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\, dx.$

114. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}\, dx.$

115. $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{x^6+1}}.$

116. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}.$

117. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(2+x^3)^5}}.$

118. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{2-x^3}}.$

119. $\int \sqrt[3]{x-x^2}\, dx.$

120. $I_n = \int \frac{x^n\, dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$ $a\neq 0,\ n\in N,\ n>1,$ интеграл учун

$$I_n = \frac{1}{na}\left(x^{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c} -\right.$$
$$\left. - \frac{b}{2}(2n-1)\cdot I_{n-1} - c(n-1)\,I_{n-2}\right)$$

реккурент формулани исботланг.

5-§. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

$R(\sin x, \cos x)$ орқали $\sin x$ ва $\cos x$ ларнинг рационал функцияси белгиланган бўлсин.

$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ интегрални қарайлик. Бу интегралда

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \quad (-\pi < x < \pi)$$

алмаштириш бажарилса, у ҳолда интеграл остидаги ифода t ўзгарувчининг рационал функциясига айланади:

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ алмаштириш тригонометрик функцияларни интеграллашда умумий алмаштириш бўлиб, ундан фойдаланиш кўп ҳолларда мураккаб ҳисоблашларга олиб келади. Шунинг учун интеграл остидаги функция кўринишига қараб (масалан, $t = \sin x$, $t = \cos x$ ва ҳ. к.) алмаштириш танлангани маъқулдир.

21-мисол. Ушбу

$$I = \int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x},$$

а) $0 < \varepsilon < 1$; б) $\varepsilon > 1$ интеграл ҳисоблансин.

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ алмаштириш натижасида

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\varepsilon\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1+\varepsilon+(1-\varepsilon)\,t^2}$$

ҳосил бўлади.

$1-\varepsilon$ ифоданинг ишораси ε га боғлиқ бўлиб, а) ҳол, яъни $0 < \varepsilon < 1$ да мусбат б) ҳол, яъни $\varepsilon > 1$ да эса манфий бўлади. Демак, $0 < \varepsilon < 1$ да

$$I = \frac{2}{1-\varepsilon}\int \frac{dt}{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}+t^2} = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\,t + C =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C$$

бўлади, $\varepsilon > 1$ бўлганда эса

$$I = \frac{2}{1-\varepsilon}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon-1}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon-1}} - t}{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon-1}} + t}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{1+\varepsilon+t^2(\varepsilon-1)-2t\sqrt{\varepsilon^2-1}}{1+\varepsilon-t^2(\varepsilon-1)}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\varepsilon+\cos x-\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{1+\varepsilon\cos x}\right| + C.$$

бўлади.

22-мисол. Ушбу

$$\int \cos^5 x\,dx$$

интегрални ҳисобланг.

Агар бу интеграл остидаги ифода учун $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ алмаштириш бажарсак натижада

$$\int \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^5 \frac{2dt}{1+t^2}$$

интеграл ҳосил бўлади. Интеграл остидаги функция t нинг рационал функцияси бўлса-да, уни интеграллаш мураккаб ҳисоблашлардан иборат эканини кўриш қийин эмас. Агар интеграл остидаги функция кўринишини қуйидагича ўзгартирсак:

$$\cos^5 x = \cos^4 x\cdot\cos x = (1-\sin^2 x)^2\cos x.$$

У ҳолда берилган интеграл осон ҳисобланади:

$$\int \cos^5 x\,dx = \int (1-\sin x^2 x)^2\,d(\sin x) =$$
$$= \int (1-2\sin^2 x+\sin^4 x)\,d(\sin x) =$$
$$= \sin x - 2\cdot\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

23-мисол. Ушбу

$$I=\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x+5}$$

интегрални ҳисобланг.

$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ алмаштириш натижасида:

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. Бу муносабатлардан фойдаланиб топамиз:

$$I=2\int\frac{dt}{6t+4(1-t^2)+5(1+t^2)}=2\int\frac{dt}{t^2+6t+9}=$$

$$=2\cdot\int(t+3)^{-2}\,dt=-\frac{2}{t+3}+C=-\frac{2}{3+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C.$$

24-мисол. Ушбу

$$\int\sin x\cdot\sin 3x\,dx.$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функция кўринишини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\sin x\ \sin 3x=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x).$$

Натижада

$$\int\sin x\cdot\sin 3x\,dx=\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx-\frac{1}{2}\int\cos 4x\,dx=$$

$$=\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin 4x}{8}+C$$

бўлади.

25-мисол. Ушбу

$$\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функциянинг кўринишини ўзгартирамиз:

$$\frac{1}{a\sin x+b\cos x}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \frac{1}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{1}{\sin(x+\gamma)}.$$

Бунда $\gamma=\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $a^2+b^2\neq 0$.

Демак, қаралаётган интеграл қуйидаги кўринишга келади:

$$\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\int\frac{dx}{\sin(x+\gamma)}=(t=x+\gamma)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[\int\frac{\sin\frac{t}{2}}{2\cos\frac{t}{2}}\,dt+\int\frac{\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\ln\left|\sin\frac{t}{2}\right|-\ln\left|\cos\frac{t}{2}\right|\right)+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\gamma}{2}\right|+C,$$

$$\gamma=\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

26-мисол. Ушбу

$I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^5x\cdot\cos x}}$ интегрални ҳисобланг.

$t=\sin x$ алмаштириш натижасида интеграл қуйидаги кўринишни олади:

$$I=\int t^{-\frac{5}{3}}(1-t^2)^{-\frac{2}{3}}\,dt.$$

Интеграл остидаги ифода биномиал дифференциал бўлиб, унда $\frac{m+1}{n}+p=\frac{-\frac{5}{3}+1}{2}-\frac{2}{3}=-1$. Бу ҳолда $-1+t^{-2}=u^3$ алмаштиришни бажариш лозимдир. Лекин қаралаётган интегрални $I=\int\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\sin^5x}{\cos^5x}}}\cdot\frac{dx}{\cos^2x}$ кўринишда ифодалаб, соддароқ $\operatorname{tg}x=t$ алмаштиришни бажарсак, у ҳолда

$$I=\int(\operatorname{tg}x)^{-\frac{5}{3}}d(\operatorname{tg}x)=-\frac{3}{2}(\operatorname{tg}x)^{-\frac{2}{3}}+C$$

бўлади.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

121. $\int \sin^6 x \cdot dx$.

122. $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \, dx$.

123. $\int \sin^5 x \cdot \cos^5 x \, dx$.

124. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^4 x} \, dx$.

125. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

126. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

127. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

128. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$.

129. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$.

130. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$.

131. $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^4 x}$.

132. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cdot \cos^5 x}}$.

133. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}$.

134. $\int \cos x \cdot \cos 4x dx$.

135. $\int \sin 2x \cdot \cos 4x \, dx$.

136. $\int \sin^2 x \cdot \cos(3x+1) dx$.

137. $\int \cos^2 2x \cdot \cos^2 3x \, dx$.

138. $\int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} 7x \, dx$.

139. $\int \frac{\cos 3x}{\sin^5 x} \, dx$.

140. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin 4x} \, dx$.

141. $\int \cos^8 x \, dx$.

142. $\int \cos^3 x \cdot \cos 2x \, dx$.

143. $\int \cos^5 2x \cdot \sin^7 2x \, dx$.

144. $\int \operatorname{sh}^3 x \cdot \operatorname{ch} 2x \, dx$.

145. $\int \frac{\sin x}{(3\cos x - 1)^3} dx$.

146. $\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} \, dx$.

147. $\int \frac{dx}{\sin x \, (1 + \cos x)}$.

148. $\int \frac{\sin 2x}{3 + 4\sin^2 x} \, dx$.

149. $\int \frac{\cos x - \cos 3x}{1 - \sin^4 x} \, dx$.

150. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 3} \, dx$.

151. $\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \, dx$.

152. $\int \frac{dx}{\cos 2x - \sin 2x}$.

153. $\int \frac{dx}{5 + \cos^2 x}, \; |x| < \frac{\pi}{2}$.

154. $\int \frac{dx}{2 + 3\sin 2x - 4\cos^2 x}$.

155. $\int \frac{dx}{4 + 3\operatorname{sh}^2 x}$.

156. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x}$.

157. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

158. $\int \frac{dx}{a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x}, \; b > 0$.

159. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$.

160. $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x} \, dx$.

161. $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$.

162. $\int \frac{dx}{(a\sin x + a\cos x)^2}$.

163. $\int \frac{dx}{7\cos x - 4\sin x + 8}$.

164. $\int \frac{\cos x + 2\sin x}{4\cos x + 3\sin x - 2} dx$.

165. $\int \frac{1 - \cos(x - a)}{1 - \cos(x + a)} dx$.

166. $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x + \sqrt{2}} \, dx$.

167. $\int \frac{2\cos x + \sin x - 3}{2\cos x - \sin x - 3} \, dx$.

168. $\int \frac{1 + \sin x}{\sin 2x + 2\sin x} \, dx$.

169. $\int \frac{dx}{\sin 2x + 4\sin x - 4\sin^2 x}$.

170. $\int \frac{dx}{(1 - \cos x + \sin x)^2}$.

171. $\int \sin^5 x \cdot \sqrt[3]{\cos x} \, dx$.

172. $\int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3}$.

173. $\int \frac{\sin x}{\cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}} dx$.

174. $\int \frac{dx}{(1 + \varepsilon \cos x)^2}$, $0 < \varepsilon < 1$.

175. $\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx$.

176. $\int \sin^n x dx$.

177. $\int \cos^n x dx$.

178. $\int \frac{dx}{\sin^n x}$.

179. $\int \frac{dx}{\cos^n x}$.

180. $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$, $m, n \in N$.

6-§. ТУРЛИ ХИЛДАГИ ИНТЕГРАЛЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

27-мисол. Ушбу

$$I = \int e^{x + e^x} \, dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функцияни $e^{x+e^x} = e^x \cdot e^{e^x}$ кўринишда ифодалаб $e^x = t$ алмаштиришни бажарамиз. Натижада

$$I = \int e^{e^x} \cdot e^x \, dx = \int e^t \cdot dt = e^t + c = e^{e^x} + C$$

бўлади.

28-мисол. Ушбу

$$I_1 = \int e^{ax} \cdot \cos bx \, dx,$$

$$I_2 = \int e^{ax} \cdot \sin bx \, dx$$

интегралларни ҳисобланг.

Бу интегралларни ҳисоблаш учун I_2 ни $i=\sqrt{-1}$ га кўпайтириб I_1 га қўшамиз. Натижада $I_1+iI_2=\int e^{ax}\cdot e^{ibx}\,dx$ бўлади. Энди $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ формуладан фойдаланиб топамиз:

$$I_1+iI_2=\int e^{(a+ib)x}\,dx=\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib}+C=$$

$$=\frac{e^{ax}\cdot e^{ibx}}{a+ib}+C=\frac{e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)}{a^2+b^2}(a-ib)+C=$$

$$=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin b\,x+i(a\sin bx-b\cos bx))+C.$$

Комплекс сонларнинг тенглиги ҳақидаги тасдиққа кўра топамиз:

$$I_1=e^{ax}\cdot\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}+C,$$

$$I_2=e^{ax}\cdot\frac{a\sin b\,x-b\cos bx}{a^2+b^2}+C.$$

29-мисол. Ушбу

$$I=\int x^x(1+\ln x)\,dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функция учун $F(x)=x^x$ бошланғич функция эканини кўриш қийин эмас. $x^x=t$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда $x^x(1+\ln x)\,dx=dt$ бўлиб,

$$I=\int dt=t+C$$

бўлади.
Демак.

$$I=\int x^x(1+\ln x)dx=x^x+C.$$

30-мисол. Ушбу

$$I=\int x(1+x^3)^{-\frac{3}{2}}e^{\arctg x}\,dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги ифодани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}e^{\arctg x}dx=xe^{\arctg x}\,\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^3}}.$$

$\arctg x=t$ алмаштириш натижасида

$$x=\operatorname{tg}t,\quad \sqrt{1+x^2}=\frac{1}{\cos t},\ \frac{dx}{1+x^2}=dt$$

бўлиб,

$$I=\int \operatorname{tg}t\cdot e^t\,\frac{dt}{(\cos t)^{-1}}=\int e^t\sin t\,dt \text{ бўлади.}$$

Бу $\int e^t\sin t\,dt$ интеграл 28-мисолда ҳисобланган. Демак,

$$I=\int e^t\sin t\,dt=e^t\cdot\frac{\sin t-\cos t}{2}+C=$$

$$=e^{\arctg x}\cdot\frac{x-1}{2\sqrt{x^2+1}}+C.$$

31-мисол. Ушбу

$$I=\int x^3\arcsin x\,dx$$

интегрални ҳисобланг.

Бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланамиз:

$$u=\arcsin x,\ du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$x^3dx=dv,\quad v=\frac{1}{4}x^4.$$

$$I=\int x^3\arcsin x\,dx=\frac{x^4}{4}\cdot\arcsin x-\int\frac{x^4}{4}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{x^4}{4}\arcsin x-\frac{1}{4}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$I_1=\int\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}dx$ интегралда $x=\sin t$ алмаштиришни бажариб ҳисоблаймиз:

$$I_1=\int\sin^t t\,dt=\int(\sin^2 t)^2dt=\int\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt=\frac{1}{4}\Big(t-\sin 2t+$$

$$+\frac{1}{2}t+\frac{\sin 4t}{8}\Big)+C.$$

$t=\arcsin x$ эканини ҳисобга олган ҳолда

$$I=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3}{32}\right)\arcsin x+\frac{1}{32}(2x^3+3x)\sqrt{1-x^2}+C$$

эканини топамиз.

32-мисол. Ушбу

$$I=\int\frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+3x+1}}$$

интегрални ҳисобланг.

Аввало бу интегралда $t=\frac{1}{x-1}$ алмаштиришни бажарамиз. Натижада $dx=-\frac{1}{t^2}dt$ бўлиб, интеграл қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$I=-\int\frac{t^2dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}.$$

Бу интегрални ҳисоблаш учун (6) формуладан фойдаланамиз:

$$\int\frac{t^2dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}=(At+B)\cdot\sqrt{5t^2+5t+1}+\lambda\int\frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}.$$

Бу тенгликни дифференциаллаб, ҳосил бўлган касрларни умумий махражга келтириш натижасида t нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб топамиз:

$$A=\frac{1}{10},\qquad B=-\frac{3}{20},\qquad \lambda=\frac{11}{40}.$$

У ҳолда

$$I=-\left(\frac{1}{10}t-\frac{3}{20}\right)\sqrt{5t^2+5t+1}-\frac{11}{40}\int\frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}=$$

$$=-\left(\frac{1}{10}t-\frac{3}{20}\right)\cdot\sqrt{5t^2+5t+1}-\frac{11}{40\sqrt5}\int\frac{d\left(t+\frac12\right)}{\sqrt{\left(t+\frac12\right)^2-\frac1{20}}}=$$

$$=-\left(\frac{1}{10}t-\frac{3}{20}\right)\sqrt{5t^2+5t+1}-\frac{11}{40\sqrt5}\cdot\ln\left|t+\frac12+\sqrt{t^2+t+\frac15}\right|+C=\frac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1}-$$

$$-\frac{11}{40\sqrt5}\cdot\ln\left|\frac{(x+1)\sqrt5+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right|+C.$$

33-мисол. Ушбу

$$I=\int\frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}$$

интегрални ҳисобланг.

Аввал қуйидаги умумийроқ интегралларни қараймиз:

$$I_{m,n}=\int\frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n},\quad m,n\in N.$$

Бу интегралда $t=\frac{x+a}{x+b}$ алмаштиришни бажарсак, у ҳолда

$$dx=\frac{b-a}{(1-t)^2}dt,\quad x+a=\frac{t(b-a)}{1-t},\quad x+b=\frac{b-a}{1-t}$$

бўлади.

$$I_{m,n}=\int\frac{(1-t)^m(1-t)^n(b-a)}{(b-a)^{m+n}t^m(1-t)^2}dt=$$

$$=\frac{1}{(b-a)^{m+n-1}}\int\frac{(1-t)^{m+n-2}}{t^m}dt.$$

Юқорида қаралаётган интеграл учун

$$m=2,\ n=3,\ a=-2,\ b=3.$$

Демак,

$$I=\frac{1}{5^4}\int\frac{(1-t)^3}{t^2}dt=\frac{1}{625}\left(-\frac1t+3t-\frac{t^2}{2}-3\ln|t|\right)+$$

$$+C=\frac{1}{625}\left(-\frac{x+3}{x-2}+3\cdot\frac{x-2}{x+3}-\frac12\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2-\right.$$

$$\left.-3\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|\right)+C.$$

34-мисол. Ушбу

$$I=\int\frac{dx}{1+x^4+x^8}$$

интегрални ҳисобланг.

$1+x^4+x^8=(x^4+1)^2-x^4$ тенгликдан фойдаланиб, интеграл остидаги функция кўринишини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\frac{1}{1+x^4+x^8}=\frac{1}{(x^4+1)^2-x^4}=\frac{1}{(x^4+1+x^2)(x^4+1-x^2)}=$$

$$=\frac12\left(\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}+\frac{1-x^2}{x^4-x^2+1}\right).$$

У ҳолда

$$I=\frac12\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx+\frac12\int\frac{1-x^2}{x^4-x^2+1}dx=$$

$$=\frac12\int\frac{d\left(x-\frac1x\right)}{\left(x-\frac1x\right)^2+3}-\frac12\int\frac{d\left(x+\frac1x\right)}{\left(x+\frac1x\right)^2-3}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt3}+\frac{\pi}{4\sqrt3}\cdot\operatorname{sgn}x+\frac{1}{2^2\sqrt3}\cdot$$

$$\cdot\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt3+1}{x^2-x\sqrt3+1}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt3}\left(\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt3}+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}\right|+\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x\Big)+C.$$

35-мисол. Ушбу

$$I=\int|x|\,dx$$

интегрални ҳисобланг.

а) $x>0$ бўлсин. У ҳолда

$$I=\int|x|\,dx=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C_1;$$

б) $x<0$ да $\int|x|\,dx=-\int x\,dx=-\frac{x^2}{2}+C_2;$

$x=0$ да $C_2=C_1=C$ бўлгани учун

$$I=\int|x|\,dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{sgn}x+C \text{ бўлади.}$$

36-мисол. Ушбу

$$I=\int e^{-|x|}\,dx$$

интегрални ҳисобланг.

$$x\geqslant 0,\ x<0$$

ҳолларни худди 35-мисолга ўхшаш қараймиз:

$$x\geqslant 0 \text{ да } \int e^{-|x|}\,dx=\int e^{-x}\,dx=-e^{-x}+C_1.$$

$x<0$ да

$$\int e^{-|x|}\,dx=\int e^{x}\,dx=e^{x}+C_2.$$

$$x=0 \text{ да } -e^0+C_1=e^0+C_2$$

бўлгани учун $C_1=2+C_2$ бўлади.

Демак,

$$\int e^{-|x|}\,dx=\begin{cases}2-e^{-x}+C, & \text{агар } x\geqslant 0 \text{ бўлса,}\\ e^{x}+C, & \text{агар } x<0 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг.

181. $\int e^{ax}\sin^3 bx\,dx.$

182. $\int x^2e^x\cos^2 x\,dx.$

183. $\int\frac{dx}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}.$

184. $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}-2}.$

185. $\int\ln^n x\,dx.$

186. $\int\frac{\arccos x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx.$

187. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\cdot\ln(1+x^2)\,dx.$

188. $\int x\arccos\frac{1}{x}\,dx.$

189. $\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx.$

190. $\int x\ln(4+x^4)\,dx.$

191. $\int\frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

192. $\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^3-1}\,dx.$

193. $\int\frac{ax^2+b}{x^2-1}\cdot\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx.$

194. $\int\frac{x^3\cdot\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

195. $\int\frac{x^4\,\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}\,dx.$

196. $\int\sqrt{\mathrm{th}^2x+1}\,dx.$

197. $\int x|x|\,dx.$

198. $\int(x+|x|)^2\,dx.$

199. $\int\max(1,x^2)\,dx.$

200. $\int\{|1+x|-$
$-|1-x|\}\,dx.$

201. $\int\frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}.$

202. $\int\frac{dx}{\sqrt[6]{x^5}+4\sqrt{x}}.$

203. $\int\frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}.$

204. $\int\frac{dx}{(1-\sqrt{1-x^2})^2}.$

205. $\int\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^4-1}\,dx.$

206. $\int\frac{dx}{(1+x^4)\sqrt[4]{1+2x}}.$

207. $\int\left(\frac{\sin x}{e^x}\right)^2dx.$

208. $\int\frac{x\ln|x|}{(1-x^2)\sqrt{x^2-1}}\,dx.$

209. $\int\frac{dx}{x^{2n}-a^{2n}},\ n\in N,$
$a>0.$

210. $\int\frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{b^2-x^2}}.$
$a,b\neq 0.$

211. $\int\frac{dx}{1+2a\cos x+a^2}.$

212. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^n+a}},$
$a\neq 0,\ n\in N.$

213. $\int\frac{dx}{ae^x+be^{-x}},$
$a\cdot b\neq 0.$

214. $\int\frac{dx}{\sqrt{a+be^x}},\ a\cdot b\neq 0.$

215. $\int\ln|x^2+a|\,dx.$

216. $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x+a}}\,dx.$

217. $\int\frac{\ln|x+\sqrt{x^2+a}|}{x^2}\,dx.$

218. $\int x^{a-1}\ln^{b-1}x\,(a\ln x+$
$+b)\,dx.$

219. $\int\frac{\ln x\cdot\cos\ln x}{x}\,dx.$

220. $\int\cos\mathrm{arctg}\sin x\,dx.$

IX боб

АНИҚ ИНТЕГРАЛ

1-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛ ТАЪРИФЛАРИ

1. $[a, b]$ сегментнинг бўлиниши

Бирор $[a, b] \subset R$ сегмент берилган бўлсин. $[a, b]$ сегментнинг

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

муносабатда бўлган ихтиёрий чекли сондаги $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ нуқталар системаси $[a, b]$ сегментнинг *бўлиниши* деб аталади ва у $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ каби белгиланади.

Ҳар бир $x_k (k = 1, 2, 3, \ldots n)$ нуқта P бўлинишнинг *бўлувчи нуқтаси*, $[x_k, x_{k+1}]$ сегмент эса *бўлиниш оралиғи* дейилади.

P бўлиниш оралиқларининг узунлиги $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ нинг энг каттаси, яъни

$$\lambda_p = \max_{I<k<n} \left\{ \Delta x_k \right\} = \max \left\{ \Delta x_0, \Delta x_1, \ldots \Delta x_{n-1} \right\}$$

миқдор *P бўлинишнинг диаметри* деб аталади. Масалан, $[a, b] = [0, 1]$ бўлсин. Нуқталарнинг

$$0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \ldots, \frac{9}{10}, 1,$$

$$0, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{8}{10}, 1$$

системалари $[0, 1]$ сегментнинг

$$P_1 = \left\{ 0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{9}{10}, 1 \right\},$$

$$P_2 = \left\{ 0, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{6}{10}, \frac{8}{10}, 1 \right\}$$

бўлинишлари бўлиб, уларнинг диаметрлари мос равишда $\lambda_{P_1} = \frac{1}{10}$, $\lambda_{P_2} = \frac{1}{5}$ бўлади. $[a, b]$ сегмент берилган ҳолда унинг турли усуллар билан исталган сондаги бўлинишларини тузиш мумкин. Бу бўлинишлардан иборат тўплам $\mathscr{P}$ бўлсин: $\mathscr{P} = \{P\}$.

2. Интеграл йиғинди

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва чегараланган бўлсин. $[a, b]$ сегментнинг P бўлинишини қарайлик $(a < b)$, бу бўлинишга мос келувчи ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = \overline{0, n-1})$ оралиқда ихтиёрий $\xi_k (\xi_k \in [x_k, x_{k+1}])$ нуқта олиб, қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k, \ (x_{k+1} - x_k = \Delta x_k).$$

Одатда бу йиғинди $f(x)$ функциянинг *интеграл йиғиндиси* ёки *Риман йиғиндиси* деб аталади.

3. Аниқ интегралнинг таърифи

1-таъриф. *Агар $\forall \varepsilon > 0$ берилганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ мавжуд бўлсаки, диаметри $\lambda_p < \delta$ бўлган $[a, b]$ оралиғининг ҳар қандай P бўлинишда $(P \in \mathscr{P})$ ҳамда $[x_k, x_{k+1}]$ оралиқдан олинган ихтиёрий ξ_k $(\xi_k \in [x_k, x_{k+1}])$ нуқталарда*

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k - I \right| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда I сонини $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги аниқ интеграли деб аталади ва уни

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

каби белгиланади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = x$$

функциянинг $[a, b]$ сегментдаги интегралини ҳисобланг.

Маълумки, $f(x)$ функция учун $[a, b]$ сегментда интеграл йиғинди

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_h \Delta x_k$$

кўринишда бўлиб, бунда

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k,$$

$$x_k \leqslant \xi_k \leqslant x_{k+1}.$$

Бу тенгсизликдан, $\Delta x_k > 0$ бўлгани учун топамиз:

$$x_k \Delta x_k \leqslant \xi_k \Delta x_k \leqslant x_{k+1} \Delta x_k,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k\Delta x_k \leqslant \sigma \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}\Delta x_k.$$

Энди $\sum_{k=0}^{n-1} x_k\Delta x_k$ ва $\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}\Delta x_k$ йиғиндиларни қуйидагича ўзгартириб ёзиб оламиз:

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_k\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} x_k(x_{k+1}-x_k) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}^2 - x_k^2) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k^2 = \frac{b^2-a^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k^2.$$

Агар $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}\Delta x_k = \frac{b^2-a^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k^2$$

бўлади.

Демак,

$$\frac{b^2-a^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k^2 \leqslant \sigma \leqslant \frac{b^2-a^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k^2.$$

Бу муносабатдан

$$\left|\sigma - \frac{b^2-a^2}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k^2$$

тенгсизлик келиб чиқади. Сўнгра $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k^2$ учун

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k^2 \leqslant \lambda_p\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = \lambda_p\cdot\frac{b-a}{2}$$

($\lambda_p = \max\{\Delta x_k\}$) бўлишидан $\lambda_p \to 0$ да

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k^2 \to 0 \text{ бўлади.}$$

Демак,

$$\lim_{\lambda_p\to 0}\sigma = \frac{b^2-a^2}{2}, \text{ яъни } \int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

2-мисол. Ушбу

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

Дирихле функцияси учун $[0,1]$ сегментда интеграл мавжудликка текширинг.

Бу функция учун қаралаётган оралиқда интеграл йиғинди қуйидагича бўлади:

$$\sigma = \begin{cases} 1, & \text{агар барча } \xi_k \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар барча } \xi_k \text{ иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

Равшанки, $\lambda_p \to 0$ да σ йиғинди лимитга эга эмас.

Демак, Дирихле функцияси $[0, 1]$ сегментда интегралланувчи эмас.

4. Дарбу йиғиндилари. Аниқ интегралнинг бошқача таърифи.

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган бўлиб, чегараланган бўлсин. $[a, b]$ оралиқнинг бирор

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathscr{P}$$

бўлинишини олайлик. Тўпламнинг аниқ чегаралари ҳақидаги теоремага кўра

$$m_k = \inf\{f(x)\},\ x \in [x_k; x_{k+1}],$$

$$M_k = \sup\{f(x)\},\ x \in [x_k, x_{k+1}]\quad (k = \overline{0, n-1})$$

лар мавжуд ва ихтиёрий $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ учун

$$m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k$$

тенгсизликлар ўринлидир.

2-таъриф. *Ушбу*

$$s_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta x_k,\ S_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta x_k$$

йиғиндилар мос равишда Дарбунинг қуйи ҳамда юқори йиғиндилари деб аталади.

Дарбу йиғиндилари учун қуйидаги муносабатлар ўринлидир: (қ, [1], 279-бет).

1) $s_p(f) \leqslant \sigma_p(f) \leqslant S_p(f)$.

2) $m(b-a) \leqslant s_p(f) \leqslant S_p(f) \leqslant M(b-a)$.

$$M = \sup\{f(x)\},\ m = \inf\{f(x)\},\ x \in [a, b].$$

Демак, 2) муносабат Дарбу йиғиндилари тўпламларининг чегараланганлигини билдиради.

3-таъриф. *$\{s_p(f)\}$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги қуйи интеграли деб аталади ва*

$$\underline{I} = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

каби белгиланади.

$\{S_p(f)\}$ тўпламнинг аниқ қуйи чегараси $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги юқори интеграли деб аталади ва

$$\overline{I} = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

каби белгиланади.

4-таъриф. *Агар $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ оралиқдаги қуйи ва юқори интеграллари бир-бирига тенг бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи дейилади ва уларнинг умумий қиймати*

$$\underline{I} = \overline{I} = I$$

$f(x)$ функциянинг $[a, b]$ *оралиқдаги аниқ интеграли* **(*Риман интеграли*)** *дейилади ва у*

$$\int_a^b f(x)dx$$

каби белгиланади.

Демак,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Агар

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \neq \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ *оралиқда интегралланувчи эмас* дейилади.

3-мисол. Ушбу

$$f(x) = x$$

функция 4-таъриф ёрдамида $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи эканини кўрсатинг.

$[a, b]$ оралиқнинг ихтиёрий P бўлинишини оламиз ва $f(x) = x$ учун Дарбу йиғиндиларини тузамиз. Ҳар бир

$$[x_k, x_{k+1}] \ (k = \overline{0, n-1})$$

оралиқда $m_k = x_k$, $M_k = x_{k+1}$ эканини ҳисобга олсак,

$$s_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta x_k = \frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2,$$

$$S_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \cdot \Delta x_k = \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k^2$$

ифодаларни топамиз.

Бу муносабатлардан

$$\sup \{ s_p(f)\} = \frac{b^2 - a^2}{2},$$

$$\inf \{S_p(f)\} = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

эканини кўриш қийин эмас.

Демак,

$$\underline{\int_a^b} xdx = \frac{b^2 - a^2}{2}, \quad \overline{\int_a^b} xdx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

бўлиб, $f(x) = x$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи ва

$$\int_a^b xdx = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

4-мисол. Ушбу

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

Дирихле функциясини $[0, 1]$ оралиқда 4-таъриф ёрдамида интегралланувчиликка текширинг.

$[0, 1]$ оралиқнинг ихтиёрий p бўлинишини қараймиз ва унга нисбатан Дарбу йиғиндиларини тузамиз:

$$s_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = 0,$$

$$S_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = 1.$$

Бундан

$$\sup\{s_p(f)\} = 0,$$

$$\inf\{S_p(f)\} = 1$$

экани келиб чиқади. Демак, Дирихле функциясининг [0, 1] оралиқда қуйи ва юқори интеграллари мавжуд. Лекин

$$\underline{\int_0^1}\chi(x)\,dx \neq \overline{\int_0^1}\chi(x)dx$$

бўлгани сабабли у [0, 1] оралиқда интегралланувчи эмас.

Аниқ интегралнинг 1- ва 4-таърифлари ўзаро эквивалентдир.

2-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ МАВЖУДЛИГИ. ИНТЕГРАЛЛАНУВЧИ ФУНКЦИЯЛАР СИНФИ

1-теорема. **$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва чегараланган бўлсин. Бу функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиши учун $\forall\varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон топилиб, $[a, b]$ оралиқнинг диаметри $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай p бўлинишга нисбатан**

$$S_p(f) - s_p(f) < \varepsilon \tag{1}$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Агар аввалгидек $f(x)$ функциянинг $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = \overline{0, n-1})$ оралиқдаги тебранишини ω_k орқали белгиласак, у ҳолда (1) тенгсизлик

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k\Delta x_k < \varepsilon \tag{2}$$

кўринишга эга бўлади.

2-теорема. **$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, у шу оралиқда интегралланувчи бўлади.**

3-теорема. **$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда чегараланган ва монотон бўлса, функция шу оралиқда интегралланувчи бўлади.**

4-теорема. **$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда чегараланган ва бу оралиқнинг чекли сондаги нуқталарида узилишга эга бўлиб, қолган барча нуқталарида узлуксиз бўлса, функция шу оралиқда интегралланувчи бўлади.**

5-мисол. Ушбу

$$I = \int_a^b x^2dx$$

интегрални ҳисобланг.

$f(x) = x^2$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлгани учун 2-теоремага кўра у қаралаётган оралиқда интегралланувчи бўлади.

Демак, бу функциянинг $[a, b]$ оралиқ бўйича интегралини таърифга кўра ҳисоблашда $[a, b]$ оралиқнинг бўлинишини ҳамда ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ бўлакда ξ_k нуқталарини интеграл йиғинди ва унинг лимитини ҳисоблашга қулай қилиб олиш имкониятига эга бўламиз.

Шуни эътиборга олган ҳолда $[a, b]$ оралиқни n та тенг бўлакка бўлиб, ξ_k $(k = \overline{0, n-1})$ нуқталар сифатида $[x_k, x_{n+1}]$ сегментларнинг чап четки нуқталарини оламиз.

Натижада

$$\sigma_p(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(a + k\cdot\frac{b-a}{n}\right)^2 =$$

$$= \frac{b-a}{n}\Big[na^2 + \frac{2a(b-a)}{n}(1 + 2 + \ldots + (n-1)) +$$

$$+ \left(\frac{b-a}{n}\right)^2(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2)\Big] =$$

$$= \frac{b-a}{n}\Big[na^2 + \frac{2a(b-a)}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2} +$$

$$+ \frac{(b-a)^2}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\Big].$$

$\lambda_p \to 0$ $(n \to \infty)$ да лимитга ўтиб, топамиз:

$$\lim_{\lambda p\to 0}\sigma_p(f) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

Демак,

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

6-мисол. Ушбу

$$\int_0^1 a^x\,dx \quad (a > 0)$$

интегрални ҳисобланг.

Худди юқоридаги 5-мисолга ўхшаш [0,1] сегментни тенг n та бўлакка бўламиз ва ξ_k нуқталар сифатида $[x_k, x_{k+1}]$ $(k=\overline{0, n-1})$ сегментларнинг чап четки нуқталарини оламиз. Натижада

$$\sigma_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{a-1}{a^{1/n}-1}$$

бўлади.

$a>0$ эканини ҳисобга олган ҳолда $n\to\infty$ да лимитга ўтиб, топамиз:

$$\int_0^1 a^x dx = \lim_{n\to\infty}\frac{a-1}{\frac{a^{1/n}-1}{1/n}} = \frac{a-1}{\ln a}.$$

Хусусан $a=e$ бўлса, $\int_0^1 e^x\,dx$ интеграл $e-1$ га тенг бўлади.

7-мисол. Ушбу

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} \qquad (0<a<b)$$

интегрални ҳисобланг.

Фараз қилайлик, P $[a,b]$ сегментнинг ихтиёрий бўлиниши бўлсин. ξ_k нуқталар сифатида қуйидагиларни оламиз:

$$\xi_k = \sqrt{x_k x_{k+1}} \qquad (k=\overline{0, n-1}).$$

Натижада

$$\sigma_p(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Delta x_k}{x_k\, x_{k+1}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}}\right) = \frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$

ҳосил бўлади.

Демак,

$$\int_a^b \frac{b}{x^2} = \frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

8-мисол. Ушбу

$$\int_a^b x dx$$

интегрални $[a, b]$ сегментнинг иккита турлича бўлинишларида ва ξ_k нуқталарнинг ҳар хил танланишларида ҳисобланг.

а) $[a,b]$ сегментни $n+1$ та тенг бўлакка бўлиб, ξ_k нуқталар сифатида $[x_k, x_{k+1}]$ $(k=\overline{0, n})$ оралиқларнинг чап четки нуқталарини оламиз. Натижада

$$\sigma_p(f) = \frac{b-a}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n+1}\right) =$$

$$= \frac{b-a}{n+1}\left[(n+1)a+\frac{b-a}{n+1}(1+2+\ldots+n)\right] =$$

$$= \frac{b-a}{n+1}\left[(n+1)a+\frac{b-a}{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

ҳосил бўлади.

$n\to\infty$ да лимитга ўтиб топамиз:

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

б) $[a, b]$ сегментни n та тенг бўлакка бўлиб, ξ_k нуқталар сифатида ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ $(k=\overline{0, n-1})$ оралиқларнинг ўртасида ётувчи $\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$ нуқталарни оламиз. Натижада

$$\sigma_p(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x_k+x_{k+1}}{2} = \frac{b-a}{n}\left(\frac{x_0+x_1}{2}+\frac{x_1+x_2}{2}+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{x_{n-2}+x_{n-1}}{2}\right) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{x_0+x_n}{2}+x_1+\ldots+\right.$$

$$\left.+x_{n-1}\right) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{a+b}{2}+(n-1)a+\frac{b-a}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right)$$

бўлади.

$n\to\infty$ да лимитга ўтиб, топамиз:

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Мисол ва масалалар

1. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлса, унинг шу сегментда чегараланган эканлигини исботланг.

2. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлиши учун $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топилиб, диаметрлари δ дан кичик бўлган $[a, b]$ сегментнинг ихтиёрий P_1 ва P_2 бўлинишларида

$$|\sigma_{P_1}(f) - \sigma_{P_2}(f)| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли эканини исботланг.

3. Интеграл йиғиндининг лимити таърифини Гейне бўйича келтиринг.

4. Ушбу

$$\text{а)} \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx, \quad \text{б)} \int_a^b x^3 dx, \quad \text{в)} \int_a^b \sqrt{x}\, dx,$$

$$\text{г)} \int_a^b \frac{dx}{x}\ (0 < a < b), \ \text{д)} \int_a^b x^n dx, \ n \in z, \ n \neq -1$$

интегралларни таъриф ёрдамида ҳисобланг.

3-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ХОССАЛАРИ

1°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у исталган $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ оралиқда ҳам интегралланувчи бўлади.

2°. Агар $f(x)$ функция $[a, c]$ ва $[c, b]$ оралиқларда интегралланувчи бўлса, у ҳолда функция $[a, b]$ оралиқда ҳам интегралланувчи бўлади ва ушбу

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

формула ўринли бўлади.

3°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $C \cdot f(x)$ (C — const) ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади ва ушбу

$$\int_a^b Cf(x)\, dx = C \int_a^b f(x)\, dx$$

формула ўринли бўлади.

4°. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x) \pm g(x)$ функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади ва ушбу

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$$

формула ўринли бўлади.

1-натижа. **Агар $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда ушбу**

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_n f_n(x)\ (C_i = \text{const},\ i = \overline{1, n})$$

функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи ва

$$\int_a^b [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_n f_n(x)]\, dx =$$

$$= C_1 \int_a^b f_1(x)\, dx + \ldots + C_n \int_a^b f_n(x)\, dx$$

формула ўринли бўлади.

5°. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x) \cdot g(x)$ функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади.

2-натижа. **Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, $\forall n \in N$ учун $[f(x)]^n$ функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади.**

6°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ лар учун $f(x) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0 \qquad (a > b).$$

бўлади.

3-натижа. **Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ лар учун $f(x) \leqslant g(x)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда ушбу**

$$\int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b g(x)\, dx$$

тенгсизлик ҳам ўринли бўлади.

7°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $|f(x)|$ функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади ва

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда аниқланган ва чегараланган бўлсин. У ҳолда $[a, b]$ оралиқда $m = \inf\{f(x)\}$, $M = \sup\{f(x)\}$ мавжуд ва $\forall x \in [a, b]$ лар учун

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

8°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, у ҳолда шундай ўзгармас μ $(m \leqslant \mu \leqslant M)$ сон мавжудки, ушбу $\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$ тенглик ўринли бўлади. (Бу ўрта қиймат ҳақидаги теорема.)

4-натижа. **Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда бу оралиқда шундай $c\,(c \in [a, b])$ нуқта топиладики,**

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

тенглик ўринли бўлади.

9°. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиб, $g(x)$ функция шу оралиқда ўз ишорасини ўзгартирмаса, у ҳолда шундай ўзгармас μ $(m \leqslant \mu \leqslant M)$ сон мавжудки

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

тенглик ўринли бўлади.

5-натижа. **Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз булса, у ҳолда $[a, b]$ оралиқда шундай $c\,(c \in [a, b])$ нуқта топиладики,**

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

тенглик ўринли бўлади.

$f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлсин. У ҳолда аниқ интегралланг 1°-хоссасига кўра $f(x)$ функция исталган $[a, x] \subset [a, b]$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ оралиқда ҳам интегралланувчи бўлади. Равшанки,

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

интеграл x га боғлиқ бўлади. Уни $F(x)$ деб белгилаймиз:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

10°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлса, $F(x)$ функция шу оралиқда узлуксиз бўлади.

11°. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда интегралланувчи бўлиб, $x_0 \in (a, b)$ нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлади ва

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

тенглик ўринлидир.

6-натижа. **Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ оралиқда узлуксиз бўлса, у ҳолда $\forall x \in [a, b]$ лар учун**

$$F'(x) = f(x)$$

бўлади.

Энди юқорида келтирилган аниқ интегралнинг хоссаларидан баъзиларини таҳлил қиламиз.

4°-хоссага кўра $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x) \pm g(x)$ функция ҳам шу оралиқда интегралланувчи бўлади.

Фараз қилайлик, $f(x) \pm g(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлсин, у ҳолда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳар доим $[a, b]$ сегментда интегралланувчи экани келиб чиқадими?

Мисол сифатида ушбу

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса,} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

функцияларни қарайлик. Маълумки, бу функциялар $[a, b]$ сегментда интегралланувчи эмас, лекин $f(x) + g(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчидир. Агар $f(x)$ функция кўринишини ўзгартирмасдан $g(x)$ функция сифатида ушбу

$$g(x)=\begin{cases} 0, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ -1, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

функцияни қарасак $f(x)+g(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлмайди.

5°-хоссага кўра $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлса, у ҳолда $f(x)\cdot g(x)$ функция ҳам $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлади.

$f(x)\cdot g(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлишидан $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг $[a, b]$ сегментда ҳар доим интегралланувчи бўлиши келиб чиқадими, деган савол туғилади.

Мисол сифатида ушбу

$$f(x)=g(x)=\begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ -1, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

функцияларни қарасак, $f(x)\cdot g(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда интегралланувчи эканини кўриш қийин эмас, лекин $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлмайди.

Худди шу $f(x)$ функция ёрдамида 7°-хоссани ҳам таҳлил қилиш мумкин. Равшанки, $|f(x)|=1$ функция ҳар доим $[a, b]$ сегментда интегралланувчи, лекин $f(x)$ функция бу оралиқда интегралланувчи эмас.

4-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛЛАРНИ ҲИСОБЛАШ

1. Ньютон — Лейбниц формуласи.

5-теорема. **$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг ихтиёрий бошланғич функцияси $F(x)$ учун**

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

формула ўринлидир.

Одатда бу формула *Ньютон-Лейбниц формуласи* дейилади.

9-мисол. Ушбу

$$\int_{\mathrm{sh}\,1}^{\mathrm{sh}\,2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

интегрални ҳисобланг.

$$\int_{\mathrm{sh}\,1}^{\mathrm{sh}\,2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_{\mathrm{sh}\,1}^{\mathrm{sh}\,2} = \ln\frac{\mathrm{sh}\,2+\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 2}}{\mathrm{sh}\,1+\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 1}} =$$

$$= \ln\frac{\mathrm{sh}\,2+\mathrm{ch}\,2}{\mathrm{sh}\,1+\mathrm{ch}\,1} = \ln\frac{e^2+e^{-2}+e^2-e^{-2}}{e+e^{-1}+e-e^{-1}} = \ln e = 1.$$

2. Аниқ интегралларни ҳисоблаш усуллари

1°. Ўзгарувчини алмаштириш усули

Фараз қилайлик $\int_a^b f(x)\,dx$ интегралда ўзгарувчи x ушбу $x=\varphi(t)$ формула билан алмаштирилган бўлиб, қуйидаги шартлар бажарилсин:

а) $\varphi(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ оралиқда аниқланган ва узлуксиз, t ўзгарувчи $[\alpha, \beta]$ сегментда ўзгарганда функция қийматлари $[a, b]$ оралиқдан чиқмайди;

б) $\varphi(\alpha)=a, \quad \varphi(\beta)=b$,

в) $\varphi(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ оралиқда узлуксиз ҳосилага эга.

У ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

тенглик ўринли бўлади.

Одатда бу формула *ўзгарувчини алмаштириб интеграллаш формуласи* дейилади.

10-мисол. Ушбу

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

интегрални ҳисобланг.

$x=a\sin t$ алмаштириш натижасида

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^4\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cdot\cos^2 t\,dt =$$

$$=\frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt = \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4t}{2}\,dt =$$

$$=\frac{a^4}{8}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{16}$$

бўлади.

2°. Бўлаклаб интеграллаш усули

$u(x)$ ва $v(x)$ функцияларнинг ҳар бири $[a, b]$ оралиқда узлуксиз $u'(x)$, $v'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = (u(x)v(x))\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x)$$

формула ўринлидир.

Одатда бу формула аниқ интегрални *бўлаклаб интеграллаш формуласи* деб аталади.

11-мисол. Ушбу

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

интегрални ҳисобланг.

Бу интеграл $n = 0$, $n = 1$ да хусусий ҳолларда содда ҳисобланади:

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1.$$

$n \geqslant 2$ бўлганда берилган интегрални

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x d(-\cos x)$$

кўринишда ёзиб, бўлаклаб интеграллаш формуласини қўллаймиз. Натижада

$$I_n = (-\sin^{n-1} x \cos x)\Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x\, dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x(1 - \sin^2 x)\, dx = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx -$$

$$-(n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$$

бўлиб, ундан

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

реккурент формула келиб чиқади.

Бу формула ёрдамида $n = 2, 3, \ldots$ да берилган интегралнинг қийматларини кетма-кет ҳисоблаш мумкин.

$n = 2m$ жуфт сон бўлсин, у ҳолда

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-1} \cdot \ldots \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

бўлади.

$n = 2m + 1$ тоқ сон бўлсин, у ҳолда

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \ldots \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

бўлади.

12-мисол. Агар $f(x)$ функция $[0, 1]$ сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx$$

муносабатни исботланг.

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ лар учун } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

эканини ҳисобга олиб топамиз:

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx = \int_0^{\pi/2} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] dx = -\int_0^{\pi/2} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \int_0^{\pi/2} f(\sin t)\, dt \quad \left(t = \frac{\pi}{2} - x\right).$$

Демак,

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx.$$

Хусусан $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$ эканлигини топамиз.

13-мисол. $[-l, l]$ сегментда узлуксиз $f(x)$ функция учун

а) агар $f(x)$ жуфт функция бўлса,

$$\int_{-l}^{l} f(x)\, dx = 2 \cdot \int_0^l f(x)\, dx,$$

б) агар $f(x)$ тоқ функция бўлса,

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0$$

муносабатларни исботланг.

$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$ интегрални аниқ интегралнинг 1°, 2°-хоссаларидан фойдаланиб қуйидагича ёзамиз:

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int_{-l}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{l} f(x)\,dx.$$

$\int_{-l}^{0} f(x)\,dx$ интегралда $x = -t$ алмаштириш натижасида топамиз:

$$\int_{-l}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{l} f(-t)\,dt = \int_{0}^{l} f(-x)\,dx.$$

Шундай қилиб,

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int_{0}^{l} f(x)\,dx + \int_{0}^{l} f(-x)\,dx = \int_{0}^{l}\Big[f(x) + f(-x)\Big]\,dx.$$

Агар $f(x)$ жуфт бўлса, у ҳолда $f(x) = f(-x)$ бўлиб, $\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\cdot\int_{0}^{l} f(x)\,dx$ муносабатга эга бўламиз.

Агар $f(x)$ тоқ бўлса, у ҳолда $f(-x) = -f(x)$ бўлиб, $\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0$ муносабатга эга бўламиз.

14-мисол. Агар $f(x)$ функция $(-\infty, \infty)$ оралиқда аниқланган, узлуксиз, даврий бўлиб, унинг даври T га тенг бўлса,

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx, \quad \forall\, a \in R,$$

муносабатни исботланг.

Аниқ интегралнинг 1°, 2°-хоссаларидан фойдаланиб, $\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx$ интегрални қуйидагича ёзамиз:

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{a}^{T} f(x)\,dx + \int_{T}^{T+a} f(x)\,dx.$$

$f(x)$ функция учун $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$ эканлигини ҳисобга олиб, топамиз:

$$\int_{T}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{T}^{a+T} f(x-T)\,dx = \int_{T}^{a+T} f(x-T)\,d(x-T).$$

Энди

$$\int_{T}^{a+T} f(x-T)\,d(x-T)$$

интегралда $x - T = z$ алмаштиришни бажарамиз. Натижада $\int_{T}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(z)\,dz$ бўлади.

Демак,

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{a}^{T} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx +$$

$$+ \int_{a}^{T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx.$$

15-мисол. Ушбу

$$I = \int_{e^{-2\pi n}}^{1} \left|\left(\cos\ln\frac{1}{x}\right)'\right| dx, \quad n \in N,$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги ифода кўринишини қуйидагича ўзгартирамиз;

$$\left|\left(\cos\ln\frac{1}{x}\right)'\right| dx = |(\cos(\ln x))'|\,dx = \left|-\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\right| dx.$$

$-\ln x = t$ алмаштириш натижасида

$$I = \int_{0}^{2\pi n} |\sin t|\,dt = 2n\int_{0}^{\pi} \sin t\,dt = 4n$$

бўлади.

16-мисол. Ушбу

$$I=\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

интегрални ҳисобланг.

$$I=\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=-\int_{-2}^{-1}\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}=-\arcsin\frac{1}{x}\Big|_{-2}^{-1}=$$

$$=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}.$$

17-мисол. Ушбу

$$I=\int_1^e (x\ln x)^2\,dx$$

интегрални ҳисобланг.

Аниқ интегралда бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб, топамиз:

$$u=\ln^2 x,\ du=2\ln x\cdot\frac{dx}{x},\quad v=\frac{x^3}{3}.$$

$$I=\frac{x^3}{3}\ln^2 x\Big|_1^e-\frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln x\,dx=\frac{e^3}{3}-\frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln x\,dx$$

$I_1=\int_1^e x^2\ln x\,dx$ интегралга яна бўлаклаб интеграллаш формуласини қўллаш натижасида

$$I_1=\frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{3}\int_1^e x^2dx=\frac{e^3}{3}-\frac{x^3}{9}\Big|_1^e=$$

$$=\frac{e^3}{3}-\frac{e^3}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2e^3}{9}+\frac{1}{9}$$

бўлади.

Демак,

$$I=\frac{e^3}{3}-\frac{4e^3}{27}-\frac{2}{27}=\frac{5e^3-2}{27}.$$

18-мисол. Ушбу

$$I_n=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

интегрални ҳисобланг.

$x=\sin t$ алмаштириш натижасида

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^n t\cdot\cos t}{\cos t}dt=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt$$

бўлади. 11-мисолга кўра:

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt=\begin{cases}\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{агар } n=2k \text{ бўлса,}\\[2mm] \dfrac{(2k)!!}{(2k+1))!!}, & \text{агар } n=2k+1 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

19-мисол. Ушбу

$$I=\int_0^{1000}[x]\,dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграллануvчи функциялар синфига оид теоремага кўра $[x]$ функция $[0,1000]$ сегментда интеграллануvчидир, чунки у $[0,1000]$ сегментда чекли сондаги (999 та) нуқталардан бошқа барча нуқталарда узлуксиз. Аниқ интеграл хоссаларидан фойдаланиб, топамиз:

$$I=\int_0^{1000}[x]\,dx=\int_0^1[x]\,dx+\int_1^2[x]\,dx+\ldots+\int_{999}^{1000}[x]\,dx=$$

$$=1+2+\ldots+999=\frac{999\cdot 100}{2}=49950.$$

20-мисол. Ушбу

$$I=\int_0^6[x]\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функция $x=1, 2, 3, 4, 5, 6$ нуқталарда узилишга эга. Демак, қаралаётган интеграл мавжуд.

$$I=\int_0^1 [x]\sin\frac{\pi x}{6}dx+\int_1^2 [x]\sin\frac{\pi x}{6}dx+\int_2^3 [x]\sin\frac{\pi x}{6}dx+$$

$$+\int_3^4 [x]\sin\frac{\pi x}{6}dx+\int_4^5 [x]\sin\frac{\pi x}{6}dx+\int_5^6 [x]\sin\frac{\pi x}{6}dx=$$

$$=\frac{6}{\pi}\left[\left(\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{3}\right)+2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{2}\right)+3\left(\cos\frac{\pi}{2}-\right.\right.$$

$$\left.-\cos\frac{2\pi}{3}\right)+4\left(\cos\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{5\pi}{6}\right)+5\left(\cos\frac{5\pi}{6}-\right.$$

$$\left.\left.-\cos\pi\right)\right]=\frac{6}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{3}+2\cos\frac{\pi}{3}+3\cos\frac{\pi}{3}-\right.$$

$$\left.-4\cos\frac{\pi}{3}+4\cos\frac{\pi}{6}-5\cos\frac{\pi}{6}+5\right)=\frac{30}{\pi}.$$

21-мисол. Ушбу

$$I=\int_0^\pi x\,\mathrm{sgn}\,(\cos x)\,dx$$

интегрални ҳисобланг.

Интеграл остидаги функция $[0, \pi]$ оралиқда $\cos x=0$ бўладиган $\left(x=\frac{\pi}{2}\right)$ нуқтадан бошқа барча нуқталарда узлуксиз. Демак қаралаётган интеграл мавжуд.

$$I=\int_0^{\pi/2} x\,\mathrm{sgn}\,(\cos x)\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi} x\,\mathrm{sgn}\,(\cos x)\,dx=\int_0^{\pi/2} x\,dx-$$

$$-\int_{\pi/2}^{\pi} xdx=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{2}=-\frac{\pi^2}{4}.$$

22-мисол. $I_1=\int_0^{\pi/2}\sin^{10}x dx,\ I_2=\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx$ интеграллардан қайси бири катта эканини аниқланг.

Маълумки,

$$x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ лар учун } \sin^2 x>\sin^{10}x$$

тенгсизлик ўринли.

$$x=0,\ x=\frac{\pi}{2} \text{ нуқталарда } \sin^2 x=\sin^{10}x$$

тенглик бажарилиб, $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ларда $f(x)=\sin^2 x-\sin^{10}x>$ >0 бўлади. Аниқ интегралнинг 6° хоссасига кўра $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx>$ >0, яъни $I_2>I_1$ тенгсизлик ўринлидир.

23-мисол. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланиб

$$\int_a^b \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx,\quad (0<a<b)$$

интегрални баҳоланг.

Аниқ интегралнинг 9° хоссасига кўра

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}}\sin x\,dx=\frac{1}{\sqrt{\xi}}\int_a^b \sin x\,dx=\frac{1}{\sqrt{\xi}}(\cos a-\cos b)$$

бўлади. $0<a<b$ да $\frac{1}{\sqrt{\xi}}<\frac{1}{\sqrt{a}}$ ва $|\cos a-\cos b|\leqslant 2$ бўлишини ҳисобга олсак, у ҳолда берилган интеграл учун

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx\right|\leqslant\frac{2}{\sqrt{a}}$$

баҳога эга бўламиз.

24-мисол. Ушбу

$$\lim_{x\to+0}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\mathrm{tg}\,t}\,dt}{\int_0^{\mathrm{tg}\,x}\sqrt{\sin t}\,dt}$$

лимитни ҳисобланг.

$\sqrt{\mathrm{tg}\,x}$ ва $\sqrt{\sin x}$ функциялар қаралаётган оралиқларда узлуксиз бўлгани учун аниқ интегралнинг 11° хоссасига кўра $\int_0^{\sin x}\sqrt{\mathrm{tg}\,t}\,dt$ ва $\int_0^{\mathrm{tg}\,x}\sqrt{\sin t}\,dt$ интегралларни юқори чегаранинг функцияси сифатида дифференциаллаш мумкин. Қаралаётган ифода $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмаслик бўлиб, унга

Лопиталь қоидасини қўллаш мумкинлигини кўриш қийин эмас.

Демак,

$$\lim_{x\to+0}\frac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} t}\,dt}{\int\limits_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin t}\,dt}=\lim_{x\to+0}\frac{\cos x\cdot\sqrt{\operatorname{tg}(\sin x)}}{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\sqrt{\sin(\operatorname{tg} x)}}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\cos^3 x\sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\sin x)}{\sin(\operatorname{tg} x)}}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\cos^3 x\sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{\operatorname{tg} x}{\sin(\operatorname{tg} x)}}=1.$$

25-мисол. Ушбу

$$S_n=\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}\quad(p>0)$$

йиғинди лимитини аниқ интеграл ёрдамида ҳисобланг.

S_n йиғиндининг кўринишини қуйидагича ўзгартирамиз:

$$S_n=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^p+\left(\frac{2}{n}\right)^p+\ldots+\left(\frac{n}{n}\right)^p\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p.$$

Бу йиғинди $f(x)=x^p$ функция учун $[0,1]$ сегментда (бу сегментни тенг n та бўлакка бўлиш натижасида ҳосил бўлган) интеграл (Риман) йиғинди эканини кўриш осон.

Демак,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int\limits_0^1 x^p\,dx=\left.\frac{x^{p+1}}{p+1}\right|_0^1=\frac{1}{p+1}.$$

26-мисол. Ушбу

$$I=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$$

лимитни аниқ интеграл ёрдамида ҳисобланг.

Етарлича катта n лар учун $\sin\frac{\pi}{n}\sim\frac{\pi}{n}$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$$

бўлади.

Энди лимит остида турган ифода $f(x)=\frac{1}{2+\cos x}$ функция учун $[0,\pi]$ оралиқда (бу оралиқ тенг n та бўлакка бўлинган ҳолда тузилган) интеграл йиғинди экани равшандир. Демак,

$$I=\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{2+\cos x}=\int\limits_0^{\pi}\frac{\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}}{3+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=2\int\limits_0^{\pi}\frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{3+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left.\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)\right|_0^{\pi}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Мисол ва масалалар

5. Нуқтада узлуксиз ва бу нуқтани ўз ичига олувчи ҳар қандай сегментда интегралланувчи бўлмаган функцияга мисол келтиринг.

6. Бирор $[a, b]$ сегментда чегараланган $f(x)$ функция бу сегментда интегралланувчи бўлиши учун ихтиёрий $\varepsilon>0$ олинганда ҳам функциянинг барча узилиш нуқталарини ўз ичига олувчи чекли ёки саноқли сондаги интерваллар системаси мавжуд бўлиб, уларнинг узунликлари йиғиндиси ε дан кичик бўлиши зарур ва етарли эканини исботланг.

7. Ушбу

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса,}\\ \frac{1}{n}, & \text{агар } x=\frac{m}{n} \text{ бўлса}\end{cases}$$

$\left(m,\ n\in N,\ \frac{m}{n}\neq 0\text{ — қисқармайдиган каср}\right)$.

Риман функцияси ихтиёрий $[a, b]$ сегментда интегралланувчи эканини исботланг.

8. $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$ функциянинг $[0, 1]$ сегментда интегралланувчи эканини исботланг.

43. $\int\limits_0^{1/2} \arcsin x dx$.

44. $\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx$.

45. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sqrt[3]{\sin x}\, dx$.

46. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{x^2} \sin x dx$.

47. $\int\limits_{-1}^{1} \cos x \operatorname{th} x dx$.

48. $\int\limits_{-1}^{1} (e^x + e^{-x}) \operatorname{tg} x dx$.

49. $\int\limits_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2}\, dx$.

50. $\int\limits_0^2 e^{x^2} \cdot x dx$.

51. $\int\limits_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$.

52. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{x}\, dx$.

53. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

54. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{3+\cos x}$.

55. $\int\limits_1^9 x \sqrt[3]{1-x}\, dx$.

56. $\int\limits_0^1 x^{15} \sqrt{1+3x^8}\, dx$.

57. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x dx$.

58. $\int\limits_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx$.

59. $\int\limits_1^{n} x^n \ln x dx$.

60. $\int\limits_0^1 x (2-x^2)^{12} dx$.

61. $\int\limits_{1/e}^{e} |\ln x|\, dx$.

62. $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{a+b\cos x}$, $|b| < a$.

63. $\int\limits_{1/2}^{2} \left(1+x-\frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$.

64. $\int\limits_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$.

65. а) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \frac{dx}{a\cos^2 x + 2b\cos x \sin x + c\sin^2 x}$, $ac - b^2 > 0$.

б) $I_n = \int\limits_0^1 (1-x^2)^n dx$. в) $I_n = \int\limits_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{2n} x dx$.

г) $I_{m,n} = \int\limits_0^1 x^m (\ln x)^n dx$, $m, n \in N$.

д) $I_n = \int\limits_0^{\pi/4} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n+1} dx$.

66. $I_n = \int\limits_{-\ln n}^{\ln n} \operatorname{ch}^n x dx$.

Қуйидаги муносабатларни исботланг:

67. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x \cdot \cos^n x dx =$

$$= \begin{cases} \frac{(m-1)!!\,(n-1)!!}{(m+n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{агар } m, n \text{ жуфт бўлса,} \\ \frac{(m-1)!!\,(n-1)!!}{(m+n)!!}, & m \text{ ва } n \text{ тоқ бўлса.} \end{cases}$$

68. $\int\limits_0^a (a^2-x^2)^n\, dx = a^{2n+1} \frac{2n!!}{(2n+1)!!}$, $n \in N$.

69. $\int\limits_0^a (a^2-x^2)^{(2n-1)/2}\, dx = a^{2n} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$, $n \in N$.

70. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x \cdot \sin nx dx = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}$, $n \in N$.

71. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x \cdot \cos nx dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}$, $n \in N$.

72. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^m x \cos (m+2) x dx = 0$, $m \in N$.

73. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^m x \sin (m+2) x dx = \frac{1}{m+1}$, $m \in N$.

74. $\int_0^{\pi/2} \sin^m x\cdot\cos(m+2)\,xdx = -\dfrac{\sin\dfrac{m\pi}{2}}{m+1},\ m\in N.$

75. $\int_0^{\pi/2} \sin^m x\cdot\sin(m+2)\,xdx = \dfrac{1}{m+1}\cos\dfrac{m\pi}{2},\ m\in N.$

76. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ax}\cos^{2n+1} xdx =$

$$= 2\operatorname{ch}\frac{a\pi}{2}\cdot\frac{(n+1)!}{(a^2+1)\,(a^2+3^2)\ldots(a^2+(2n+1)^2)}.$$

77. $\int_0^{\pi/2}\dfrac{\sin nx}{\sin x}\,dx = \dfrac{\pi}{2} - 2\cos\dfrac{\pi n}{2}\cdot\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x^2}\,dx\ (n=0,1,\ldots).$

78. $\int_0^{\pi/2} f(\sin 2x)\cos x dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos^2 x)\cos x dx,\ f(x)\in C[0,\ 1].$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

79. $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)\,dx.$

80. $\int_0^2 [e^x]\,dx.$

81. $\int_0^1 \operatorname{sgn}(\sin(\ln x))\,dx.$

82. $\int_1^{n+1} \ln[x]\,dx.$

83. $f(x)$ функция $[a,\ b]$ сегментда интегралланувчи бўлсин. Агар $\forall x\in[a,\ b]$ лар учун $f(x)>0$ бўлса, у ҳолда шундай $[\alpha,\ \beta]\subset[a,\ b]$ топилиб, $\inf\limits_{[\alpha,\beta]} f(x)>0$ бўлишини исботланг.

84. $f(x)$ функция $[a,\ b]$ сегментда интегралланувчи бўлиб, $\forall x\in[a,\ b]$ лар учун $f(x)\geqslant 0$ бўлсин.

$$\int_a^b f(x)\,dx>0$$

бўлиши учун шундай $[\alpha,\ \beta]\subset[a,\ b]$ сегмент топилиб, $\forall x\in[\alpha,\ \beta]$ ларда $f(x)\neq 0$ муносабатнинг бажарилиши зарур ва етарлилигини исботланг.

85. $f(x)$ функция $[a,\ b]$ сегментда интегралланувчи бўлиб, $\int_a^b |f(x)|\,dx=0$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий $[\alpha,\ \beta]\subset[a,\ b]$ учун

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=0$$

бўлишини исботланг.

Аниқ интеграл ёрдамида қуйидаги лимитларни топинг:

86. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n+1}{n^2}\right).$

87. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^3}{n^4}+\dfrac{2^3}{n^4}+\ldots+\dfrac{(4n-1)^3}{n^4}\right).$

88. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{n+n}\right).$

89. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right).$

90. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right),$

91. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right).$

92. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\dfrac{n}{n}}\right).$

93. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$

94. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a+k\cdot\dfrac{b-a}{n}\right)\right]$

($f(x)$ функция $[a,\ b]$ сегментда интегралланувчи).

95. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\sin\dfrac{k\pi}{n^2}.$

96. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)},\ x>0.$

97. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^{k/n}}{n+\dfrac{1}{k}}$.

98. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^x \cos x^2\,dx}{x}$.

99. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int\limits_0^x (\operatorname{arctg} t)^2\,dt}{\sqrt{x^2+1}}$.

100. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}\,dt}$.

Қуйидаги интегралларнинг қайси бири катта эканини аниқланг:

101. $\int\limits_0^1 e^{-x}\,dx$ ёки $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

102. $\int\limits_0^{\pi} e^{x^2}\cos^2 x\,dx$ ёки $\int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$.

103. $\int\limits_0^{\pi/2}\dfrac{\sin x}{x}\,dx$ ёки $\int\limits_0^{\pi}\dfrac{\sin x}{x}\,dx$.

104. $\int\limits_{1/2}^{1}\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ ёки $\int\limits_{1/2}^{1}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

105. $\int\limits_0^1 e^{-x}\sin x\,dx$ ёки $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\sin x\,dx$.

106. $\int\limits_1^2\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ ёки $\int\limits_1^2\dfrac{dx}{x}$.

Қуйидаги функцияларнинг берилган оралиқдаги ўрта қийматларини топинг.

107. $f(x)=x^2,\quad x\in[0,1]$.

108. $f(x)=\sqrt{x},\ x\in[0,\ 100]$.

109. $f(x)=10+2\sin x+3\cos x,\ x\in[0,\ 2\pi]$.

110. $f(x)=\sin x\cdot\sin(x+\varphi),\ x\in[0,\ 2\pi]$.

Ўрта қиймат ҳақидаги теоремалардан фойдаланиб, қуйидаги интегралларни баҳоланг:

111. $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dx}{1+0{,}5\cos x}$.

112. $\int\limits_0^1\dfrac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

113. $\int\limits_0^{100}\dfrac{e^{-x}}{x+100}\,dx$.

114. $\int\limits_{100\pi}^{200\pi}\dfrac{\sin x}{x}\,dx$.

115. $\int\limits_a^b\dfrac{e^{-\alpha x}}{x}\sin x\,dx\ (0<a<b,\ \alpha\geqslant 0)$.

116. $\int\limits_a^b\sin x^2\,dx\ (o<a<b)$.

117. $\int\limits_1^e\dfrac{dx}{\ln x+2}$.

118. $\int\limits_1^2 2^{x^2}\,dx$.

119. $\int\limits_{1/2}^{2}\dfrac{4^x}{x}\,dx$.

120. $\int\limits_0^{\pi} x^2\sqrt{\sin x}\,dx$.

X боб

АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ БАЪЗИ ТАТБИҚЛАРИ

1-§. ЁЙ УЗУНЛИГИНИ ҲИСОБЛАШ

Маълумки, эгри чизиқ ёйининг узунлиги шу эгри чизиққа чизилган синиқ чизиқ периметрининг лимити сифатида таърифланади. Синиқ чизиқ периметри йиғиндига (интеграл йиғиндига) келади ва унинг лимити аниқ интегрални ифодалайди.

1°. Фараз қилайлик, $\breve{AB}$ ёй

$$y = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

тенглама билан аниқлансин. Бунда $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган узлуксиз ва узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин.

$\breve{AB}$ ёйнинг узунлиги

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx \tag{1}$$

бўлади.

1-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \quad (a > 0)$$

тенглама билан аниқланган чизиқнинг (занжир чизиқнинг) $[-a, a]$ оралиқдаги узунлигини топинг.

Бу эгри чизиқнинг узунлигини (1) формуладан фойдаланиб топамиз. Равшанки,

$$f'(x) = \left(\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)\right)' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Унда

$$1 + f'^2(x) = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2$$

бўлиб,

$$\sqrt{1 + f'^2(x)} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

бўлади. (1) формулага кўра:

$$l = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)\Big|_{-a}^{a} = a\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

Демак, берилган эгри чизиқнинг узунлиги

$$l = a\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

га тенг.

2-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{x^2}{2p}$$

параболанинг $[0, a]$ оралиқдаги қисмининг узунлигини топинг $(a > 0)$.

Аввал $f(x)$ функциянинг ҳосиласини ҳисоблаб

$$\sqrt{1 + f'^2(x)}$$

ни топамиз:

$$f'(x) = \frac{2x}{2p} = \frac{x}{p},$$

$$1 + f'^2(x) = 1 + \frac{x^2}{p^2} = \frac{p^2 + x^2}{p^2},$$

$$\sqrt{1 + f'^2(x)} = \sqrt{\frac{p^2 + x^2}{p^2}} = \frac{1}{p}\sqrt{x^2 + p^2}.$$

(1) формулага кўра қаралаётган эгри чизиқнинг узунлиги

$$l = \frac{1}{p}\int_0^a \sqrt{x^2 + p^2}\, dx$$

бўлади.

Энди ушбу

$$\int \sqrt{x^2 + p^2}\, dx$$

аниқмас интегрални ҳисоблаймиз. Агар

$$u = \sqrt{x^2 + p^2}, \quad dv = dx$$

дейилса, унда

$$du = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 + p^2}}, \quad v = x$$

бўлиб,

$$\int \sqrt{x^2+p^2}\,dx = x\sqrt{x^2+p^2} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+p^2}}$$

бўлади. Бу тенгламанинг ўнг томонидаги интеграл қуйидагича ҳисобланади:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+p^2}} = \int \frac{x^2+p^2-p^2}{\sqrt{x^2+p^2}}\,dx = \int \frac{x^2+p^2}{\sqrt{x^2+p^2}}\,dx -$$

$$-p^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+p^2}} = \int \sqrt{x^2+p^2}\,dx - p^2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+p^2}} =$$

$$= \int \sqrt{x^2+p^2}\,dx - p^2 \ln\left|x+\sqrt{x^2+p^2}\right|.$$

Демак,

$$\int \sqrt{x^2+p^2}\,dx = x\sqrt{x^2+p^2} - \int \sqrt{x^2+p^2}\,dx +$$

$$+ p^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+p^2}\right|.$$

Бу тенгликдан:

$$2\int \sqrt{x^2+p^2}\,dx = x\sqrt{x^2+p^2} + p^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+p^2}\right|,$$

бўлиб,

$$\int \sqrt{x^2+p^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+p^2} + \frac{1}{2}p^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+p^2}\right|$$

бўлиши келиб чиқади.

Натижада

$$l = \frac{1}{p}\int_0^a \sqrt{x^2+p^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{p}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+p^2} + \frac{1}{2}p^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+p^2}\right|\right]\Bigg|_0^a =$$

$$= \frac{1}{2p}a\sqrt{a^2+p^2} + \frac{p}{2}\ln\left|a+\sqrt{a^2+p^2}\right| - \frac{p}{2}\ln p$$

ни топамиз.

2°. Фараз қилайлик, $\breve{AB}$ ёй

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

тенгламалар системаси билан аниқлансин. (Бу ҳолда эгри чизиқ параметрик ҳолда берилган дейилади.) Бунда $x=x(t)$, $y=y(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да аниқланган, узлуксиз ва узлуксиз $x'(t)$, $y'(t)$ ҳосилаларга эга.

$\breve{AB}$ ёйнинг узунлиги

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt \qquad (2)$$

бўлади.

3-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant \pi)$$

тенгламалар системаси билан аниқланган эгри чизиқнинг (циклоиданинг) узунлигини топинг.

Аввал $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ функцияларнинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$x'(t) = a(1-\cos t), \quad y'(t) = a\sin t.$$

Унда

$$x'^2(t) + y'^2(t) = a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t = a^2\cdot 2(1-\cos t)$$

бўлиб,

$$\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} = a\sqrt{2(1-\cos t)}$$

бўлади.

(2) формулага кўра изланаётган эгри чизиқнинг узунлиги

$$l = \int_0^{2\pi} a\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_0^{2\pi} a\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\cdot\sin^2\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 4a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,d\left(\frac{t}{2}\right) =$$

$$= -4a\cdot\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = 8a.$$

Демак,

$$l = 8a.$$

3°. Фараз қилайлик, $\breve{AB}$ эгри чизиқ қутб координата системасида

$$\rho = \rho(\theta) \quad (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$$

функция билан берилган бўлсин. Бунда $\rho = \rho(\theta)$ функция $[\alpha, \beta]$ сегментда узлуксиз ва узлуксиз $\rho'(\theta)$ ҳосилага эга. Бу ҳолда $\breve{AB}$ эгри чизиқнинг узунлиги

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)}\, d\theta \tag{3}$$

бўлади.

5-мисол. Ушбу

$$\rho = a\cdot\theta \quad (a = \text{const},\ 0 \leqslant \theta \leqslant \alpha)$$

эгри чизиқ ёйининг узунлигини топинг.

Равшанки,

$$\sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)} = \sqrt{(a\cdot\theta)'^2 + (a\cdot\theta)^2} = a\sqrt{1+\theta^2}.$$

(3) формулага кўра изланаётган эгри чизиқнинг узунлиги

$$l = \int_0^{\alpha} a\sqrt{1+\theta^2}\, d\theta = a\int_0^{\alpha}\sqrt{1+\theta^2}\, d\theta = a\left[\frac{\theta}{2}\sqrt{1+\theta^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\ln\left(\theta + \sqrt{1+\theta^2}\right)\right]\Bigg|_0^{\alpha} = \frac{a}{2}\left[\alpha\sqrt{1+\alpha^2} + \ln\left(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}\right)\right]$$

бўлади. Демак,

$$l = \frac{a}{2}\,[\alpha\sqrt{1+\alpha^2} + \ln(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2})].$$

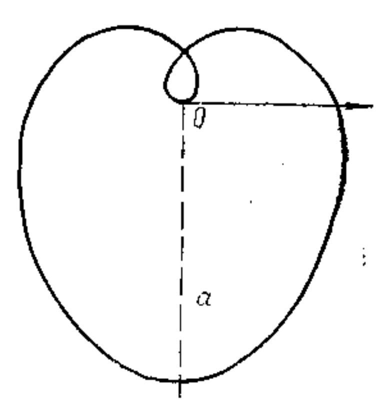
6-мисол. Ушбу

$$\rho = a\cdot\sin^3\frac{\varphi}{3} \quad (a > 0)$$

тенглама билан берилган ёпиқ эгри чизиқнинг узунлигини топинг.

Модомики, $\rho \geqslant 0$ бўлиши керак экан, унда $\sin\dfrac{\varphi}{3} \geqslant 0$ бўлади. Бундан эса $0 \leqslant \dfrac{\varphi}{3} \leqslant \pi$, яъни $0 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi$ бўлишини топамиз.

φ ўзгарувчи 0 дан $3\cdot\dfrac{\pi}{2}$ гача ўзгарганда ρ ўса бориб 0 дан a гача ўзгаради, φ ўзгарувчи $3\cdot\dfrac{\pi}{2}$ дан 3π гача ўзгарганда ρ камая бориб a дан 0 гача ўзгаради (4-чизма).



4-чизма.

Берилган функциянинг ҳосиласи

$$\rho' = a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$$

бўлиб,

$$\sqrt{\rho'^2 + \rho^2} = \sqrt{a^2\cdot\sin^4\frac{\varphi}{3}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{3} + a^2\sin^6\frac{\varphi}{3}} = a\sin^2\frac{\varphi}{3}$$

бўлади. (3) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$l = \int_0^{3\pi} a\sin^2\frac{\varphi}{3}\, d\varphi = a\int_0^{3\pi}\frac{1}{2}\left(1 - \cos 2\frac{\varphi}{3}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{a}{2}\left[\int_0^{3\pi}\left(1 - \cos 2\frac{\varphi}{3}\right) d\varphi\right] = \frac{a}{2}\left(\varphi - \frac{3}{2}\sin 2\frac{\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{3\pi} =$$

$$= \frac{a}{2}\left(3\pi - \frac{3}{2}\sin\frac{2}{3}\cdot 3\pi\right) = \frac{3a\pi}{2}.$$

Демак, қаралаётган эгри чизиқнинг узунлиги

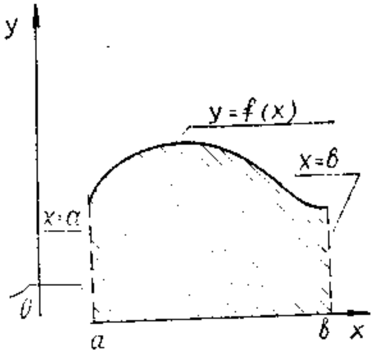
$$l = \frac{3a\pi}{2}$$

га тенг бўлади.

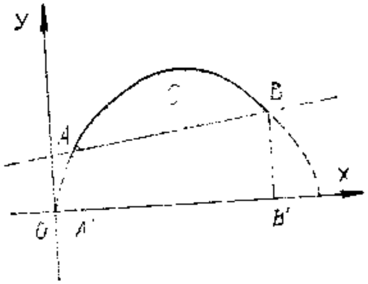
2-§. ТЕКИС ШАКЛНИНГ ЮЗИ

1. Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ да $f(x) \geqslant 0$ бўлсин.

Юқоридан $f(x)$ функция графиги, ён томонлардан $x = a$, $x = b$ вертикал чизиқлар, пастдан Ox абсциссалар ўқи билан чегараланган шаклнинг (одатда бундай шаклни эгри чизиқли



5- чизма.



6- чизма.

трапеция дейилади) юзи

$$S = \int\limits_a^b f(x)\, dx \qquad (4)$$

бўлади (5- чизма).

7- мисол. Ушбу

$$4y = 8x - x^2 \text{ ва } 4y = x + 6$$

чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини топинг.

Бу чизиқлардан бири парабола, иккинчиси тўғри чизиқ бўлиб, улар бир-бири билан $A\left(1;\ \frac{7}{4}\right)$ ва B (6; 3) нуқталарда кесишади (6- чизма).

Изланаётган шаклнинг юзи S, $A'ABB'$ эгри чизиқли трапециянинг юзи S_1 дан $A'ABB'$ трапециянинг юзи S_2 нинг айирмасига тенг:

$$S = S_1 - S_2.$$

$A'ABB'$ эгри чизиқли трапециянинг юзи (4) формулага кўра

$$S_1 = \frac{1}{4}\int\limits_1^6 (8x - x^2)\, dx = \frac{1}{4}\left(4x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^6 = \frac{205}{12}$$

бўлади.

$A'ABB'$ трапециянинг юзи эса

$$S_2 = \frac{A'A + B'B}{2} \cdot A' \cdot B' = \frac{\frac{7}{4} + 3}{2} \cdot 5 = \frac{95}{8}$$

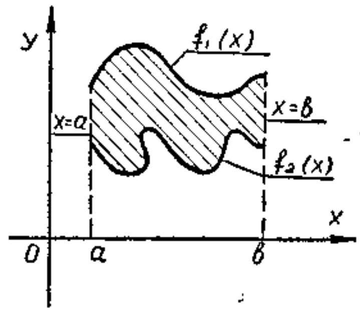
бўлади. Демак, қаралаётган шаклнинг юзи:

$$S = \frac{205}{12} - \frac{95}{8} = 5\ \frac{5}{24} \text{ кв. бир.}$$

Энди текисликда

$$y = f_1(x),\ y_2 = f_2(x),$$
$$x = a,\ x = b$$

чизиқлар билан чегараланган шаклни қарайлик. Бунда $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар $[a,\ b]$ да аниқланган узлуксиз ва $\forall\, x \in [a,\ b]$ учун $f_1(x) \geqslant f_2(x) \geqslant 0$ (7- чизма). Бундай шаклнинг юзи



7- чизма.

$$S = \int\limits_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\, dx \qquad (5)$$

бўлади.

8- мисол. Ушбу

$$(y - x)^2 = x^3,\ x = 1$$

чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзини топинг.

Берилган чизиқ тенгламаси $(y - x)^2 = x^3$ ни

$$y - x = \pm\sqrt{x^3} = \pm\, x\sqrt{x}$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бундан

$$y_1(x) = x + x\sqrt{x},\ y_2(x) = x - x\sqrt{x}$$

бўлиши келиб чиқади.

Равшанки, $x \geqslant 0$ да

$$y_1(x) \geqslant y_2(x)$$

бўлади.

Юқорида келтирилган (5) формулага кўра қаралаётган шаклнинг юзи

$$S = \int\limits_0^1 [y_1(x) - y_2(x)]\, dx$$

бўлади. Бу интегрални ҳисоблаб, топамиз:

$$S = \int\limits_0^1 [x + x\sqrt{x} - (x - x\sqrt{x})]\, dx = \int\limits_0^1 2x\sqrt{x}\, dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{4}{5}.$$

Демак, $S = \frac{4}{5}$ кв. бирлик.

Эслатма. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз бўлиб, унда ишора сақламаса, Ox ўқнинг юқорисидаги шаклнинг юзи мусбат ишора билан, Ox ўқининг пастидаги шаклнинг юзи манфий ишора билан олинади.

2. Айтайлик, текисликдаги шаклни ўраб турувчи эгри чизиқ

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин.

а) $x = x(t)$, $y = y(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз, $\forall t \in [\alpha, \beta]$ да $x(t) \geqslant 0$, $y(t) \geqslant 0$ ва $x(t)$ функция узлуксиз, манфий бўлмаган $x'(t)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда шаклнинг юзи

$$S = \int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t)\, dt \qquad (6)$$

бўлади.

б) $x = x(t)$, $y = y(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз, $\forall t \in [\alpha, \beta]$ да $x(t) \geqslant 0$, $y(t) \geqslant 0$ ва $y(t)$ функция узлуксиз манфий бўлмаган $y'(t)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда шаклнинг юзи

$$S = \int_\alpha^\beta x(t) \cdot y'(t)\, dt \qquad (7)$$

бўлади.

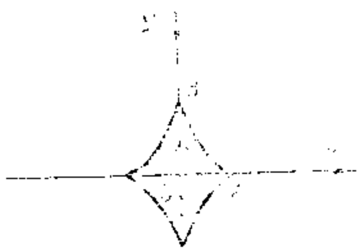
9-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = b\cos^3 t \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

чизиқ билан чегараланган шаклнинг юзини топинг.

Бу чизиқ билан чегараланган шакл 8-чизмада тасвирланган. Қаралаётган ёпиқ чизиқ Ox ва Oy координата ўқларига нисбатан симметрик. У чегаралаб турган шаклнинг юзи S тўртта AOB эгри чизиқли учбурчак юзи S_{AOB} га тенг бўлади:

$$S = 4S_{AOB}.$$



8-чизма.

Энди эгри чизиқли учбурчак юзи S_{AOB} ни (6) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$S_{AOB} = \int_0^{\pi/2} y(t) \cdot x'(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} y(t) \cdot dx(t) = y(t) \cdot x(t) \Big|_0^{\pi/2} -$$

$$- \int_0^{\pi/2} x(t) \cdot y'(t)\, dt = b\cos^3 t \cdot a\sin^3 t \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x(t) \cdot y'(t)\, dt =$$

$$= - \int_0^{\pi/2} x(t) \cdot y'(t)\, dt.$$

Шундай қилиб,

$$S_{AOB} = \int_0^{\pi/2} y(t) \cdot x'(t)\, dt,$$

$$S_{AOB} = -\int_0^{\pi/2} x(t) \cdot y'(t)\, dt$$

бўлишини топамиз. Бу тенгликларни ҳадлаб қўшиб,

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} [y(t) \cdot x'(t) - x(t) \cdot y'(t)]\, dt$$

тенгликка келамиз.

Энди интегрални ҳисоблаймиз:

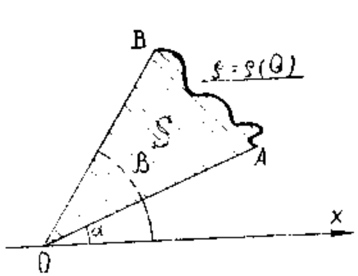
$$S_{AOB} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} [b\cos^3 t \cdot a \cdot 3\sin^2 t \cdot \cos t - a\sin^3 t \cdot b \cdot 3\cos^2 t\,(-\sin t)]dt =$$

$$= \frac{3ab}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cdot \cos^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t)\, dt =$$

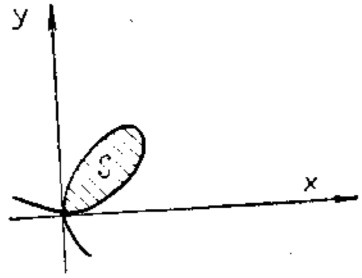
$$= \frac{3ab}{2}\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt = \frac{3ab}{2 \cdot 4}\int_0^{\pi/2} 4\sin^2 t\cos^2 t dt =$$

$$= \frac{3ab}{8}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \frac{3ab}{8}\int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4t}{2}\, dt =$$

$$= \frac{3ab}{16}\left[t - \frac{\sin 4t}{4}\right]\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3ab\pi}{32}.$$



9- чизма.



10- чизма.

Қаралаётган шаклнинг юзи

$$S = 4 \cdot S_{AOB} = 4 \cdot \frac{3ab\,\pi}{32} = \frac{3ab\,\pi}{8}$$

бўлади.

3. Қутб координаталар системасида

$$\rho = \rho\,(\theta) \quad (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$$

функция тасвирланган $\breve{AB}$ ёй ҳамда $\overline{OA}$ ва $\overline{OB}$ радиус-векторлар билан чегараланган шакл — эгри чизиқли секторни қарайлик (9-чизма).

Бунда $\rho = \rho\,(\theta)$ функция $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз ва ихтиёрий θ $(\theta \in [\alpha, \beta])$ да $\rho\,(\theta) \geqslant 0$ бўлсин.

Қаралаётган секторнинг юзи

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2\,(\theta)\,d\,\theta \qquad (8)$$

бўлади.

10-мисол. Ушбу

$$\rho = \frac{3a\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}, \ \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

чизиқ билан чегараланган шаклнинг юзини топинг. Одатда бу чизиқ декарт япроғи дейилади. Декарт япроғи ва у билан чегараланган шакл 10-чизмада тасвирланган.

Қаралаётган шаклнинг юзини (8) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left[\frac{3a\cos\varphi\cdot\sin\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}\right]^2 d\,\varphi = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi}{[\sin^3\varphi+\cos^3\varphi]^2}\,d\,\varphi.$$

Энди бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3\varphi\cdot\sin^2\varphi}{(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)^2}\,d\,\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{tg}^2\,\varphi}{(1+\mathrm{tg}^3\,\varphi)}\cdot\frac{d\,\varphi}{\cos^2\varphi} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{tg}^2\,\varphi}{(1+\mathrm{tg}^3\,\varphi)^2}\,d\,\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} (1+\mathrm{tg}^3\,\varphi)^{-2}\,d\,(1+\mathrm{tg}^3\,\varphi) =$$

$$= -\frac{1}{3}\,(1+\mathrm{tg}^3\,\varphi)^{-1}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$$

Демак,

$$S = \frac{9a^2}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3a^2}{2}.$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги чизиқларнинг берилган оралиқлардаги ёйи узунлигини ҳисобланг:

1. $y = a\cdot\ln\frac{a^2}{a^2-x^2}$, $(0 \leqslant x \leqslant b,\ a < b)$.
2. $y = \ln\cos x$, $\left((0 \leqslant x \leqslant a < \frac{\pi}{2}\right)$.
3. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, $(1 \leqslant y \leqslant e)$.
4. $x = a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}$, $(0 < b \leqslant y \leqslant a)$.
5. $y = \ln(x^2-1)$, $(2 \leqslant x \leqslant 5)$.
6. $y = 2\sqrt{1+e^{\frac{x}{2}}}$, $(\ln 9 \leqslant x \leqslant \ln 64)$.
7. $y = \arcsin e^x$, $(-\ln 7 \leqslant x \leqslant -\ln 2)$.
8. $y = \sqrt{x^2-32} + 8\ln(x+\sqrt{x^2-32})$, $(6 \leqslant x \leqslant 9)$.
9. $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$, $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{9}{16}\right)$.
10. $y = \sqrt{\frac{x}{3}}(1-x)$, $(0 \leqslant x_0 \leqslant x \leqslant 1)$.
11. $y = \frac{3}{2}\left(x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}}\right)$, $(1 \leqslant x \leqslant 8)$.
12. $y = \mathrm{sh}^2 x$, $(|x| \leqslant a)$.

13. $y = \ln \operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)$, $(0 < a \leqslant x \leqslant b)$.

14. $x = \frac{2}{3}\sqrt{(y-1)^3}$, $(0 \leqslant x \leqslant 2\sqrt{3})$.

15. $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

16. $x = a(\operatorname{sh} t - t)$, $y = a(\operatorname{ch} t - 1)$, $(0 \leqslant t \leqslant T)$.

17. $x = \operatorname{ch}^3 t$, $y = \operatorname{sh}^3 t$, $(0 \leqslant t \leqslant T)$.

18. $x = \frac{t}{\sqrt{a^2+1}}\cos(a\ln t)$, $y = \frac{t}{\sqrt{a^2+1}}\sin(a\ln t)$, $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$.

19. $x = t - \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t$, $y = 2\operatorname{ch} t$, $(0 \leqslant t \leqslant t_0)$.

20. $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)\right)$, $y = a\sin t$, $\left(0 < t_0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

21. $x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t$, $y = (t^2-2)\cos t - 2t\sin t$, $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$.

22. $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$, $\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

23. $x = \sin^4 t$, $y = \cos^2 t$, $\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

24. $x = a\cos^5 t$, $y = a\sin^5 t$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

25. $x = \int\limits_0^t \cos\varphi^2 d\varphi$, $y = \int\limits_0^t \sin\varphi^2 d\varphi$.

$(0 \leqslant t \leqslant t_0)$ (клотоида).

26. $x = \int\limits_1^t \frac{\sin\varphi}{\varphi}d\varphi$, $y = \int\limits_1^t \frac{\cos\varphi}{\varphi}d\varphi$, $(1 \leqslant t \leqslant t_0)$.

27. $r = a\cdot e^{m\varphi}$, $(m > 0)$, $(a > r > 0)$.

28. $r = \frac{\rho}{1+\cos\varphi}$, $\left(|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

29. $r = a\operatorname{th}\frac{\varphi}{2}$, $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$.

30. $\varphi = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$, $(1 \leqslant r \leqslant 3)$.

31. $\varphi = \sqrt{r}$, $(0 \leqslant r \leqslant 5)$.

32. $\varphi = \int\limits_0^r \frac{\operatorname{sh}\rho}{\rho}d\rho$, $(0 \leqslant r \leqslant R)$.

33. $r = 1 + \cos t$, $\varphi = t - \operatorname{tg}\frac{t}{2}$, $(0 \leqslant t \leqslant T < \pi)$.

34. $r = 2(1+\cos\varphi)$, $(r \leqslant 1)$.

35. $r = a(1-\sin\varphi)$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant -\frac{\pi}{6}\right)$.

36. $r = a\varphi^2$, $(0 \leqslant \varphi \leqslant 4)$.

37. $r = a\varphi^4$, $(0 \leqslant \varphi \leqslant 3)$.

38. $\varphi = \arccos\frac{r^2 + a\cdot b}{(a+b)r}$, $(a \leqslant r \leqslant b)$.

Қуйидаги чизиқларнинг ёй узунликларини ҳисобланг:

39. $x^2 = 5y^3$, $x^2 + y^2 = 6$.

40. $y^2 = \frac{16}{27}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$, $y^2 = x$.

41. $(y - \arcsin x)^2 = 1 - x^2$.

42. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

43. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

44. $x = t^2$, $y = t\left(\frac{1}{3} - t^2\right)$.

45. $x = 2t^3(1-t^2)$, $y = \sqrt{15}\,t^4$.

46. $x = a(t^2 - 1)$, $y = \frac{2a}{\sqrt{3}}\left(t^3 - \frac{t}{4}\right)$.

47. $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$.

48. $y = a\cos^3\left(\frac{\varphi}{3}\right)$.

49. $r = a\sin^4\left(\frac{\varphi}{4}\right)$.

50. $r = a\cos^5\left(\frac{\varphi}{5}\right)$.

51. $r = a\sin^n\left(\frac{\varphi}{n}\right)$, $n \in N$.

$1^\circ.\ n = 2k$. $2^\circ.\ n = 2k+1$.

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган шаклларнинг юзларини ҳисобланг.

52. $ax = y^2$, $ay = x^2$.

53. $y = 2x - x^2$, $x + y = 0$.

54. $y = 2^x$, $y = 2$, $x = 0$.

55. $y = (x+1)^2$, $x = \sin\pi y$, $y = 0$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$.

56. $y = x$, $y = x + \sin^2 x$, $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

57. $y = e^{-x}\cdot|\sin x|$, $y = 0$, $(x \geqslant 0)$.

58. $y = x - \frac{\pi}{2}$, $y = \cos x$, $x = 0$.

59. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

60. $y = \ln(1+x)$, $y = -xe^{-x}$, $x = 1$.

61. $y = x$, $y = \frac{\pi}{2}\sin x$, $x \geqslant 0$.

62. $y = \frac{6}{x+5}$, $y = |x|$, $x \geqslant -2$.

63. $y = |x|^3 e^{-x^2}$, $|x| = a$, $a > 0$.

64. $x^2 + y^2 = 2$, $y^2 = 2x - 1$, $x \geqslant \frac{1}{2}$.

65. $y = 2^{x-3} + 1$, $y = 2^{3-x} + 1$, $y = 1{,}5$.

66. $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{10}{3} - x$, $x \geqslant 1$.

67. $y = 4^{-x}$, $y = -\log_4 x$, $y = 0$, $x = 0$.

68. $2y = x^2$, $x^2 + y^2 = 4y$, $2y \geqslant x^2$.

69. $y = x^{\alpha}$, $y = x^{\frac{1}{\alpha}}$, $x \geqslant 0$, $\alpha > 1$.

70. $y = x^{\alpha}$, $y = x^{-\alpha}$, $y = 0$, $x = b$. $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, $b > 1$.

71. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, $y = 0$.

72. $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$.

73. $x = a\cos t$, $y = \frac{a\sin^2 t}{2 + \sin t}$.

74. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

75. $x = a(1 - \cos t)\cos t$, $y_1 = a(1 - \cos t)\sin t$.

76. $x = a\left(\frac{2}{\pi}t - \sin t\right)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$.

77. $x = a \sin 2t$, $y = a \sin t$, $a > 0$.

78. $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ (лемниската).

79. $r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$ (парабола), $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

80. $r = 3 + 2\cos\varphi$.

81. $r = \frac{1}{\varphi}$, $r = \frac{1}{\sin\varphi}$, $\left(0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

82. $r^2 + \varphi^2 = 1$.

83. $\varphi = \sin(\pi r)$, $(0 \leqslant r \leqslant 1)$.

84. $\varphi = r - \sin r$ $\varphi = \pi$.

85. $r = 2 - \cos\varphi$, $r = \cos\varphi$.

86. $r = a|\mathrm{tg}\,\varphi|$, $r = b|\cos\varphi|$, $0 < b < a$.

87. $r = b + a\cos\varphi$, $a \geqslant b > 0$.

88. $r = 2a\cos\varphi$, $r = a\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$, $\varphi = 0$.

89. $r = 2a\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}$, $r = \frac{2b}{\sin\varphi}$, $0 < b < a$.

90. $r^2 = a^2\cos 4\varphi$.

3-§. АЙЛАНМА СИРТНИНГ ЮЗИ

$y = f(x)$ функция $[a,b]$ да аниқланган ва узлуксиз ҳамда узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, $\forall x \in [a,b]$ учун $f(x) \geqslant 0$ бўлсин. Бу функция графигининг $(a, f(a))$ ва $(b, f(b))$ нуқталар орасидаги $\overset{\frown}{AB}$ ёйни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сиртнинг юзи

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx \tag{9}$$

бўлади.

11-мисол. Ушбу

$$f(x) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant a, \ (a > 0)$$

занжир чизиқни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланиш сиртининг юзини топинг.

Равшанки, берилган $f(x)$ функциянинг ҳосиласи

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

бўлади. (9) формуладан фойдаланиб, изланаётган айланиш сиртининг юзини топамиз:

$$S = 2\pi\int_a^b \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{\pi a}{2}\int_0^a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx = \frac{\pi a}{2}\int_0^a \left[e^{2\frac{x}{a}} + 2 + e^{-2\frac{x}{a}}\right]dx =$$

$$= \frac{\pi a}{2}\left[\frac{a}{2}e^{2\frac{x}{a}} + 2x - \frac{a}{2}e^{-2\frac{x}{a}}\right]_0^a = \frac{\pi a^2}{4}\left[e^2 - e^{-2} + 4\right].$$

Демак,

$$S = \frac{\pi a^2}{4}(e^2 - e^{-2} + 4),$$

$\overset{\smile}{AB}$ эгри чизиқ юқори яримтекисликда ($y \geqslant 0$) жойлашган бўлиб, у

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин. Бунда $x = x(t)$ ва $y = y(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз ва узлуксиз $x'(t)$, $y'(t)$ ҳосилаларга эга бўлсин. Бу эгри чизиқни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланиш сиртининг юзи

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt \qquad (10)$$

бўлади.

11-мисол. Ушбу

$$x^2 + (y-2)^2 = 1$$

айланани Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланиш сиртининг (тор) юзини топинг.

Берилган айлананинг тенгламасини

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2 + \sin t \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

параметрик формада ёзиб оламиз. Изланаётган айланиш сиртининг юзини (10) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} (2 + \sin t)\cdot\sqrt{(\cos t)'^2 + (2 + \sin t)'^2}\,dt =$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t}\cdot(2 + \sin t)\,dt =$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (2 + \sin t)\,dt = 2\pi(2t - \cos t)\Big|_0^{2\pi} = 8\pi^2.$$

Демак,

$$S = 8\pi^2.$$

4-§. АЙЛАНМА ЖИСМНИНГ ҲАЖМИ

1. Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция $[a, b]$ да аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $\forall\, x \in [a, b]$ да $f(x) \geqslant 0$ бўлсин.

Юқоридан $f(x)$ функция графиги, ён томонлардан $x = a$, $x = b$ вертикал чизиқлар, пастдан Ox ўқдаги $[a, b]$ сегмент билан чегараланган шаклни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx \qquad (11)$$

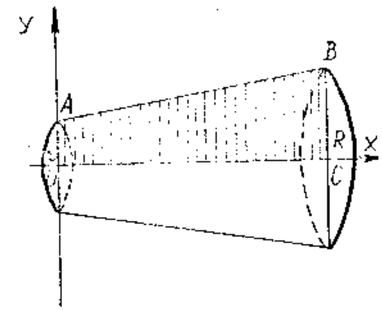
бўлади.

12-мисол. Асосларининг радиуси r ва R, баландлиги h бўлган кесик конуснинг ҳажмини топинг.

Масалада айтилган кесик конус юқоридан

$$f(x) = r + \frac{R-r}{h}x, \quad (0 \leqslant x \leqslant h)$$

функция графиги, ён томонлардан $x = 0$, $x = h$ вертикал тўғри чизиқлар, пастдан $[o, h]$ сегмент билан чегараланган $OABC$ трапециянинг Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм бўлади (11-чизма).



11-чизма.

(11) формуладан фойдаланиб кесик конуснинг ҳажмини топамиз:

$$V = \pi \int_0^h f^2(x)\,dx = \pi \int_0^h \left(r + \frac{R-r}{h}x\right)^2 dx =$$

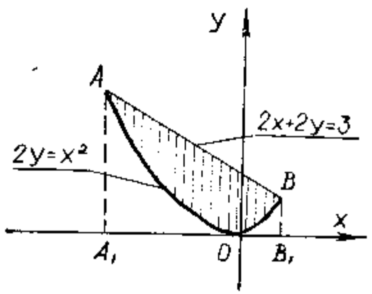
$$= \pi \int_0^h \left[r^2 + 2r\cdot\frac{R-r}{h}x + \left(\frac{R-r}{h}\right)^2 x^2\right] dx =$$

$$= \pi\left[r^2 x + 2r\cdot\frac{R-r}{h}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{(R-r)^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^h =$$

$$= \pi\left[r^2 h + r\cdot\frac{R-r}{h}\cdot h^2 + \left(\frac{R-r}{h}\right)^2\cdot\frac{h^3}{3}\right] =$$

$$= \pi h\left(r^2 + Rr - r^2 + \frac{1}{3}\left(R^2 - 2Rr + r^2\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right).$$



12- чизма.

Демак,

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right).$$

13-мисол. Ушбу

$$2y = x^2, \quad 2x + 2y = 3$$

чизиқлар билан чегараланган шаклни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланиш жисмининг ҳажмини топинг.

Аввало $2y = x^2$ парабола билан $2x + 2y - 3 = 0$ тўғри чизиқнинг кесишиш нуқталарини топамиз:

$$x^2 = 3 - 2x.$$

Бундан $x_1 = 1$, $x_2 = -3$ бўлиши келиб чиқади. Демак, чизиқларнинг кесишиш нуқталари $A\left(-3; \frac{9}{2}\right)$, $B\left(1; \frac{1}{2}\right)$ бўлиб, улар ҳосил қилган шакл 12-чизмада тасвирланган.

Изланаётган айланиш жисмининг ҳажми

$$V = V_1 - V_2$$

бўлади, бунда V_1 — A_1ABB_1 трапециянинг Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми, V_2 эса A_1AOBB_1 эгри чизиқли трапециянинг Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми. Бу жисмларнинг ҳажмини (11) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$V_1 = \pi\int_{-3}^{1}\left[\frac{1}{2}\left(3 - 2x\right)\right]^2 dx = \pi\int_{-3}^{1}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 d\left(x - \frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(x - \frac{3}{2}\right)^3\Big|_{-3}^{1} = \frac{91}{3}\pi.$$

$$V_2 = \pi\int_{-3}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_{-3}^{1} = \frac{\pi}{20}(1 + 243) = \frac{61}{5}\pi.$$

Демак,

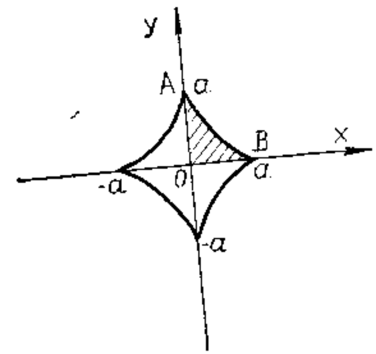
$$V = V_1 - V_2 = \frac{91\pi}{3} - \frac{61\pi}{5} = 18\frac{2}{15}\pi.$$

Фараз қилайлик, эгри чизиқ

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин. Бунда $x = x(t)$ функция узлуксиз ҳамда узлуксиз манфий бўлмаган $x'(t)$ ҳосилага эга, $y(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз ҳамда $\forall t \in [\alpha, \beta]$ да $y(t) \geqslant 0$.

Бундай чизиқ билан чегараланган шаклни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми



13- чизма.

$$V = \pi\int_{\alpha}^{\beta} y^2(t)\,x'(t)\,dt \qquad (12)$$

бўлади

15-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

параметрик тенгламалар билан аниқланган чизиқ (астроида) ҳосил қилган шаклнинг Ox ўқ атрофида айлантиришдан юзага келган жисмнинг ҳажмини топинг (13-чизма).

13-чизмада кўрсатилган OAB шаклни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми (12) формулага кўра топилади:

$$V_0 = \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y^2(t)\cdot x'(t)\,dt = -\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^6 t\cdot a\cdot 3\cos^2 t\,\cdot$$

$$\cdot(-\sin t)\,dt = -3\pi a^3\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1 - \cos^2 t)^3\cos^2 t\; d(\cos t) =$$

$$= -3\pi a^3\left[\frac{1}{3}\cos^3 t - \frac{3}{5}\cos^5 t + \frac{3}{7}\cos^7 t - \frac{1}{9}\cos^9 t\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16\pi a^3}{105}.$$

Демак, изланаётган жисмнинг ҳажми:

$$V = 2V_0 = \frac{32\pi a^3}{105}.$$

Мисол ва масалалар

Қуйидаги чизиқларни айлантиришдан ҳосил бўлган айланиш сиртларининг юзаларини ҳисобланг:

91. $y = a\cos\frac{\pi x}{2b}$, $(|x| \leqslant b)$, Ox ўқ атрофида.
92. $y = \operatorname{tg} x$, $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$, Ox ўқ атрофида.
93. $y = e^{-x}$, $(0 \leqslant x \leqslant a)$, Ox ўқ атрофида.
94. $2ay = a^2 + x^2$, $(0 \leqslant x \leqslant a)$, Ox ўқ атрофида.
95. $x = \ln(y - \sqrt{y^2 - 1})$, $\left(\frac{5}{4} \leqslant y \leqslant \frac{5}{3}\right)$, Oy ўқ атрофида.
96. $x = a \cdot \arcsin\sqrt{\frac{y}{a}} + \sqrt{y(a-y)}$, $\left(\frac{a}{4} \leqslant y \leqslant \frac{3a}{4}\right)$, Oy ўқ атрофида.
97. $4x + 2\ln y = y^2$, $(e^{-1} \leqslant y \leqslant e)$, Oy ўқ атрофида.
98. $y^2 = 2(x-1)$, $(0 \leqslant y \leqslant 1)$, Oy ўқ атрофида.
99. $y = (\arcsin x - x\sqrt{1-x^2})/2$, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Oy ўқ атрофида.
100. $y = a\ \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$, $(a \leqslant x \leqslant b)$, Oy ўқ атрофида.
101. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, 1) Ox ўқ, 2) Oy ўқ, 3) $y = 2a$ чизиқ атрофида.
102. $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$, Ox ўқ атрофида.
103. $x = 2\sqrt{3}\cos t$, $y = \sin 2t$, Ox ўқ атрофида.
104. $x = \frac{t^3}{3}$, $y = 4 - \frac{t^2}{2}$, $(|t| \leqslant 2\sqrt{2})$, Ox ўқ атрофида.

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган шаклларни Ox ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланиш жисмларининг ҳажмларини топинг:

105. $y^2 = 2px$, $y = 0$, $x = a$.
106. $xy = a^2$, $y = 0$, $x = a$, $x = 2a$.
107. $\frac{y}{b} = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$, $y = 0$, $x = a$, $(x \geqslant 0)$.
108. $y = \sin 2x$, $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, $y = 0$.
109. $y = \sqrt{x}\, e^{-x}$, $y = 0$, $x = a$.
110. $y = (\ln x)/x$, $(1 \leqslant x \leqslant e)$, $y = 0$, $x = e$.
111. $y = \sin\sqrt{x}$, $(0 \leqslant x \leqslant \pi^2)$, $y = 0$.
112. $y = e^{ax}\sin \pi x$, $(n-1 \leqslant x \leqslant n)$, $y = 0$, $n \in N$.
113. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
114. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, $|x| = h$.
115. $y^2 = 2x$, $y = 2$, $x = 0$.
116. $y = \sin^2 x$, $y = x\sin x$, $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$.
117. $2py = x^2$, $2qx = y^2$, $p > 0$, $q > 0$.
118. $y = e^{-x}\sqrt{\sin x}$, $(0 \leqslant x < +\infty)$.
119. $y = e^x + 6$, $y = e^{2x}$, $x = 0$.
120. $y = x$, $y = x + \sin^2 x$, $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$.
121. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $y = 0$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.
122. $x = 2t - t^2$, $y = 4t - t^3$.
123. $x = \frac{a}{t^2+1}$, $y = a\frac{t^3 - t}{t^2+1}$.
124. $x = a\operatorname{ch}^3 t$, $y = a \cdot \operatorname{sh}^3 t$, $x = 2\sqrt{2}\,a$.
125. $x = \frac{2at^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2at^3}{1+t^2}$, $x = a$.
126. $x = a(1 + \cos t)$, $y = a(\operatorname{tg} t + \sin t)$, $x = \frac{3a}{2}$.

5-§. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ МЕХАНИК МАСАЛАЛАРГА ТАТБИҚИ

1. Статик момент. Оғирлик маркази.

Маълумки, эгри чизиқнинг Ox ва Oy ўқларига нисбатан статик моментлари қуйидаги формулалар билан ифодаланади:

$$K_x = \int_0^s y\,ds, \qquad K_y = \int_0^s x\,ds,$$

Бу ерда $S=\int_a^b y(x)\,dx$ геометрик фигуранинг юзи.

18-мисол. $y=a-x,\ y=0,\ x=0$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг Ox, Oy ўқларига нисбатан статик моментлари ва оғирлик марказининг координаталарини топинг.

Юқорида келтирилган формулаларга асосан:

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^a y^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^a (a-x)^2\,dx=-\frac{1}{2\cdot 3}(a-x)^3\Big|_0^a=\frac{a^3}{6};$$

$$M_y=\int_0^a (a-x)x\,dx=\int_0^a ax\,dx-\int_0^a x^2dx=$$

$$=a\cdot\frac{a^2}{2}-\frac{a^3}{3}=\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{2}=\frac{a^3}{6};$$

$$S=\int_0^a (a-x)\,dx=\int_0^a a\,dx-\int_0^a x\,dx=a^2-\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2};$$

$$(\bar{x},\ \bar{y})=\left(\frac{M_y}{S},\ \frac{M_x}{S}\right)=\left(\frac{a}{3},\ \frac{a}{3}\right).$$

19-мисол. $x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$ циклоиданинг бир тармоғи ва Ox ўқ билан чегараланган фигуранинг оғирлик марказини топинг.

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} y^2\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,dx=$$

$$=\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt=\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-3\cos^3 t)\,dt=$$

$$=\frac{a^3}{2}\cdot 2\pi+\frac{3a^3}{4}\cdot 2\pi=\pi a^3+3\cdot\frac{1}{2}\pi a^3=\frac{5\pi a^3}{2}.$$

$$M_y=\int_0^{2\pi} xy\,dx=\int_0^{2\pi} a(t-\sin t)\,a^2(1-\cos t)^2\,dt=$$

$$=a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2\,dt=3\pi^2a^3.$$

$$S=\int_0^{2\pi} y\,dx=\int_0^{2\pi} y(t)\,x'_t dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=3\pi a^2,$$

$$(\bar{x},\ \bar{y})=\left(\frac{M_y}{S},\ \frac{M_x}{S}\right)=\left(\pi a,\ \frac{5a}{6}\right).$$

3. Кучнинг бажарган иши.

Агар ўзгарувчи $F(x)$ куч Ox ўқ бўйлаб таъсир этаётган бўлса, у ҳолда бу кучнинг $[a,\ b]$ сегментда бажарган иши $A=\int_a^b F(x)\,dx$ формула орқали ифодаланади.

20-мисол. Агар $5\,\kappa\Gamma$ куч пружинани 25 см га чўзса, у ҳолда пружинани 60 *см* га чўзиш учун қандай иш бажариш керак?

Гук қонунига биноан:

$$F(x)=k\cdot x,\ \ 5\,\kappa\Gamma=k\cdot 0{,}25\ \text{м}\Rightarrow k=20\Rightarrow F=20\cdot x.$$

$$A=\int_0^{0.6} 20\,x\,dx=\frac{20\cdot x^2}{2}\Big|_0^{0.6}=10\cdot 0{,}36=3{,}6\ \text{кг}\cdot\text{м}.$$

21-мисол. Цилиндрда диаметри 20 см ва узунлиги 80 см бўлган поршень ҳаракат қилади. Бу цилиндр $P_0=10$ *кг/см²* босим остида буғ билан тўлдирилган бўлса, температурани ўзгартмай қандай иш бажарилганда, буғнинг ҳажми икки баробар камаяди?

Жараён изотермиклиги сабабли, Бойль-Марриот қонунига биноан: $P\cdot V=P_0\cdot V_0$ бўлиб,

$$A=\int_{v_0}^{2v_0} P\,dv=\int_{v_0}^{2v_0}\frac{P_0\cdot v_0}{v}\,dv=P_0v_0\ln 2.$$

Бундан: $v_0=10^2\pi\cdot 80=8000\,\pi$ см² ва $P_0=10$ кг/см² сабабли,

$$A=80000\,\pi\cdot\ln 2\ \text{кг}\cdot\text{см}=800\,\pi\ln 2\ \text{кг}\cdot\text{м}$$

бўлади.

XI боб
СОНЛИ ҚАТОРЛАР

1-§. АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР. СОДДА ТЕОРЕМАЛАР

Бирор

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги берилган бўлсин.

1-таъриф. *Қуйидаги*

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$$

ифода қатор (сонли қатор) деб аталади. Уни қисқача $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *каби белгиланади:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots . \qquad (1)$$

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ лар (1) қаторнинг *ҳадлари,* a_n *эса қаторнинг умумий ҳади дейилади.*

Ушбу

$$\begin{gathered} A_1 = a_1, \\ A_2 = a_1 + a_2, \\ A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\ \cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

йиғиндилар (1) қаторнинг *қисмий йиғиндилари* дейилади. Бу қисмий йиғиндилардан иборат

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$$

кетма-кетликни қараймиз.

2-таъриф. *Агар* $n \to \infty$ *да* $\{A_n\}$ *кетма-кетлик чекли лимитга эга,* яъни

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A$$

бўлса, у ҳолда (1) *қатор яқинлашувчи дейилади, A сон шу қаторнинг йиғиндиси дейилади.*

Бу ҳолда

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

каби ёзилади.

Агар $n \to \infty$ да $\{A_n\}$ кетма-кетликнинг лимити чексиз бўлса, ёки бу лимит мавжуд бўлмаса, у ҳолда (1) қатор *узоқлашувчи* дейилади.

Шундай қилиб, таърифга кўра $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлишини аниқлаш учун унинг қисмий йиғиндилар кетма-кетлигини $\{A_n\}$ нинг лимитини қараш керак экан. Қисмий йиғинди A_n нинг лимитини топишда унинг ифодасини қулайроқ шаклда ёзиб олиш лозим. Кўпгина ҳолларда қуйида келтириладиган формулалардан фойдаланиш мақсадга мувофиқ бўлади:

$$B_n(x) = x + \ldots + x^n = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} - \dfrac{x^n}{1-x}, & \text{агар } x \neq 1 \text{ бўлса}, \\ n, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса}, \end{cases}$$

$$C_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + n x^{n-1} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{(n-1)x^n - nx^{n-1}}{(1-x^2)^2}, & \text{агар } x \neq 1 \text{ бўлса}, \\ \dfrac{n(n+1)}{2}, & \text{агар } x = 1 \text{ бўлса}. \end{cases} \qquad (2)$$

$$D_n(x) = x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2n-1} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x}{1-x^2} - \dfrac{x^{2n-1}}{1-x^2}, & \text{агар } x \neq \pm 1 \text{ бўлса}, \\ \pm n, & \text{агар } x = \pm 1 \text{ бўлса}. \end{cases}$$

$$E_n(x) = 1 + 3x^2 + 5x^4 + \ldots + (2n-1)x^{2n-2} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \dfrac{(2n+1)x^{2n+2} - (2n-1)^{2n}}{(1-x^2)^2}, & \text{агар } x \neq \pm 1, \\ \pm n^2, & \text{агар } x = \pm 1. \end{cases}$$

Бу формулаларни келтириб чиқариш қийин эмас. Биз улардан бирини, масалан, учинчисининг тўғрилигини кўрсатамиз.

Равшанки, $x = \pm 1$ бўлганда

$$D_n(1) = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n, \quad D_n(-1) =$$
$$= -1 - 1 - 1 - \ldots - 1 = -n$$

бўлади.

Энди $x \neq \pm 1$ бўлсин. Бу ҳолда тенгликнинг ҳар икки томонини x га кўпайтириб, топамиз:

$$x \cdot D_n(x) = x(x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2n-1}) =$$
$$= x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n}.$$

Агар

$$x^2+x^4+x^6+\ldots+x^{2n}=x^2+(x^2)^2+\ldots+(x^2)^n=$$

$$=x^2\frac{1-(x^2)^n}{1-x^2}=x^2\,\frac{1-x^{2n}}{1-x^2}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда ушбу

$$x\cdot D_n(x)=x^2\,\frac{1-x^{2n}}{1-x^2}$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан эса

$$D_n(x)=\frac{x-x^{2n+1}}{1-x^2}=\frac{x}{1-x^2}-\frac{x^{2n+1}}{1-x^2}$$

бўлиши келиб чиқади.

1-мисол. Ушбу

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Берилган қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$A_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$$

бўлади. Бу A_n ни юқорида келтирилган (2) формуладан фойдаланиб бундай ёзиб оламиз:

$$A_n=1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=$$

$$=\frac{1}{\frac{2}{3}}+\left[\frac{-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right]=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}-$$

$$-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

$n\to\infty$ да лимитга ўтиб, топамиз:

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]=\frac{2}{3}.$$

Демак, берилган қатор яқинлашувчи, унинг йиғиндиси $A=\frac{2}{3}$.

2-мисол. Ушбу

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг. Бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$A_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}=\frac{1}{2}\left(1+3\cdot\frac{1}{2}+\right.$$

$$\left.+5\cdot\frac{1}{2^2}+\ldots+(2n-1)\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

бўлади. Уни (2) формуладан фойдаланиб, бундай ёзиб оламиз:

$$A_n=\frac{1}{2}\left[1+3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+5\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4+\ldots+\right.$$

$$\left.+(2n-1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1+\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(2n+1)\frac{1}{2^{n+2}}-(2n+1)\cdot\frac{1}{2^n}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\right]=\frac{1}{2}\left(6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}\right).$$

Натижада

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}\right)=3$$

бўлишини топамиз. Демак, қатор яқинлашувчи, унинг йиғиндиси

$$A=3.$$

3-мисол. Ушбу

$$\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$$

қаторни яқинлашишга текширинг. Бу қаторнинг қисмий йиғиндисини ҳисоблаб, унинг лимитини топамиз:

$$A_n=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-+\ldots+\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right), \lim_{n\to 8} A_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}.$$

Демак, берилган қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $A=\frac{1}{3}$

4-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг. Бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$A_n=(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{1})+(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2})+$$
$$+\ldots+(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$$

бўлади. Уни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$A_n\doteq[(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{1}-\sqrt{2})]+[(\sqrt{4}-\sqrt{3})+$$
$$+(\sqrt{2}-\sqrt{3})]+[(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{3}-\sqrt{4})]+$$
$$+\ldots+[(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})+(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})]=$$
$$=[(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})]+[(\sqrt{4}-\sqrt{3})-$$
$$(\sqrt{3}-\sqrt{2})]+[(\sqrt{5}-\sqrt{4})-(\sqrt{4}-\sqrt{3})]+\ldots+$$
$$+[(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})]=1-\sqrt{2}+$$
$$+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}.$$

Натижада

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\right)=1-\sqrt{2}.$$

бўлишини топамиз. Демак, қатор яқинлашувчи, унинг йиғиндиси $A=1-\sqrt{2}$.

5-мисол. Ушбу

$$1-2+3-4+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n+\ldots$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг. Бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$A_n=1-2+3-4+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n$$

бўлади. Юқорида келтирилган (2) формуладан фойдаланиб (бу формулада $x=-1$ деб) A_n ни ҳисоблаймиз:

$$A_n=\frac{1}{[1-(-1)]^2}+\frac{(n-1)(-1)^n-n(-1)^{n-1}}{[1-(-1)]^2}=$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{(n-1)(-1)^n-n(-1)^{n-1}}{4}=\frac{1}{4}[1+$$
$$+2n(-1)^n+(-1)^{n+1}].$$

Агар $n=2k$ бўлса,

$$A_{2k}=\frac{1}{4}(1+4k-1)=k,$$

агар $n=2k-1$ бўлса,

$$A_{2k-1}=\frac{1}{4}(1-2(2k-1)+1)=\frac{1}{4}(4-4k)=1-k$$

бўлади.

Бундан эса

$$\lim_{k\to\infty}A_{2k}=+\infty, \lim_{k\to\infty}A_{2k-1}=-\infty$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, қатор узоқлашувчи.

Содда теоремалар

Бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \quad (1)$$

қатор берилган бўлсин. Бу қаторнинг дастлабки m та ҳадини ташлаш натижасида юзага келган

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n=a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots \quad (6)$$

қатор (1) қаторнинг *қолдиғи* дейилади.

1-теорема. **Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлса, унинг исталган (6) қолдиғи ҳам яқинлашувчи бўлади ва, аксинча, (6) қолдиқнинг яқинлашувчи бўлишидан берилган (1) қаторнинг яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади.**

2-теорема. **Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси A га тенг бўлса, у ҳолда**

$$\sum_{n=1}^{\infty}c\cdot a_n=ca_1+ca_2+ca_3+\ldots+ca_n+\ldots$$

қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $c \cdot A$ га тенг бўлади ($c \neq 0$ ўзгармас сон).

3-теорема. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots$$

қаторлар яқинлашувчи бўлиб, уларнинг йиғиндиси мос равишда A ва B га тенг бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots$$

қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $A + B$ га тенг бўлади.

4-теорема. **Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлса, $n \to \infty$ да қаторнинг умумий ҳади a_n нолга интилади.** (Бу теорема қатор яқинлашувчи бўлишининг зарурий шартини ифодалайди.)

6-мисол. Ушбу

$$0{,}001 + \sqrt{0{,}001} + \sqrt[3]{0{,}001} + \ldots + \sqrt[n]{0{,}001} + \ldots$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Берилган қаторнинг умумий ҳади $a_n = \sqrt[n]{0{,}001}$ бўлади. Агар

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{0{,}001} = 1 \neq 0$$

бўлишини эътиборга олсак, унда берилган қатор учун қатор яқинлашишининг зарурий шартининг бажарилмаслигини кўрамиз. Демак, берилган қатор узоқлашувчи.

7-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$$

қатор яқинлашувчи бўладими?

Бу қаторнинг умумий ҳади учун

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} = \frac{1}{(\ln n)^{1/n}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{n}\ln\ln n}} = \frac{1}{e^{\frac{\ln\ln n}{n}}} \to 1$$

бўлганлиги сабабли қатор узоқлашувчи бўлади.

2-§. МУСБАТ ҲАДЛИ ҚАТОРЛАР. СОЛИШТИРИШ ТЕОРЕМАЛАРИ

Бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

қатор берилган бўлсин.

Агар (1) қаторда $a_n \geqslant 0$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) бўлса, у ҳолда (1) қатор *мусбат ҳадли қатор* ёки қисқача *мусбат қатор* деб аталади.

5-теорема. **Мусбат қатор $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ нинг яқинлашувчи бўлиши учун унинг қисмий йиғиндилари кетма-кетлиги $\{A_n\}$ нинг юқоридан чегараланган бўлиши зарур ва етарли.**

8-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \ldots \qquad (\alpha > 1)$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$A_n = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha}}$$

бўлади. Равшанки, $\{A_n\}$ — ўсувчи кетма-кетликдир. Иккинчи томондан,

$$A_{2n+1} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^{\alpha}} =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{(2n)^{\alpha}} + \frac{1}{(2n+1)^{\alpha}}\right) <$$

$$< 1 + \frac{2}{2^{\alpha}} + \frac{2}{4^{\alpha}} + \ldots + \frac{2}{(2n)^{\alpha}} =$$

шидан $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг ҳам узоқлашувчи бўлиши келиб чиқади.

Натижа. Агар

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$$

лимит ўринли бўлиб, $0 < k < \infty$ бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторлар бир вақтда ёки яқинлашувчи, ёки узоқлашувчи бўлади.

8-теорема. **Агар n нинг бирор n_0 қийматидан бошлаб барча $n \geqslant n_0$ лар учун**

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлишидан $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг ҳам яқинлашувчи бўлиши ёки $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг узоқлашувчи бўлишидан $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қаторнинг ҳам узоқлашувчи бўлиши келиб чиқади.

10-мисол. Ушбу

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

қаторнинг яқинлашувчилигини кўрсатинг.

Математик индукция усули билан кўрсатиш мумкинки,

$$\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}, \quad (n \geqslant 1)$$

бўлади. Маълумки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

геометрик қатор $\left(q = \frac{1}{2} < 1\right)$ яқинлашувчи. Демак, 6-теоремага кўра берилган қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

11-мисол. Ушбу

$$\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \ldots + \frac{1}{1000 \cdot n + 1} + \ldots$$

қаторнинг узоқлашувчи эканлигини кўрсатинг.

Равшанки,

$$1000 \cdot n + 1 < 1000\, n + 1000 = 1000(n+1).$$

Бундан эса

$$\frac{1}{1000\,(n+1)} < \frac{1}{1000\, n + 1} \left(\frac{1}{n+1} < \frac{1000}{1000\, n + 1}\right)$$

бўлиши келиб чиқади.

Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

қаторнинг узоқлашувчи эканини эътиборга олсак, унда 6-теоремага кўра берилган қаторнинг узоқлашувчи бўлишини аниқлаймиз.

12-мисол. Ушбу

$$\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)\,(2n+1)}} + \ldots$$

қаторнинг узоқлашувчи бўлишини кўрсатинг.

Энг олдин қуйидаги тенгсизликни ҳосил қиламиз:

$$(2n-1)(2n+1) < (2n+1)\,(2n+1) < (2n+2)(2n+2) = \\ = 4(n+1)^2,$$

$$\frac{1}{2(n+1)} > \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2\,n+1)}}.$$

Маълумки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

қатор узоқлашувчи. Демак, 6-теоремага кўра, берилган қатор узоқлашувчи бўлади.

13-мисол. Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \;\; (a_n \geqslant 0;\; n = 1, 2, 3, \ldots)$$

қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлишини кўрсатинг.

Қатор яқинлашишининг зарурий шартидан

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

бўлади. Демак, шундай $n_0 \in N$ сонни топиш мумкинки, барча $n > n_0$ лар учун

$$0 \leqslant a_n < 1$$

бўлади. Унда $n > n_0$ учун

$$a_n^2 \leqslant a_n$$

бўлади. 6-теоремадан фойдаланиб берилган қаторнинг яқинлашувчи бўлишини топамиз.

14-мисол. Агар $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ бўлиб

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$$

бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$$

қаторлар ҳақида нима дейиш мумкин?

Равшанки,

$$\max(a_n, b_n) \geqslant a_n,$$
$$\max(a_n, b_n) \geqslant b_n.$$

Шу сабабли $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ қатор ҳаммавақт узоқлашувчи бўлади.

Аммо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$$

қатор яқинлашувчи бўлиши мумкин.

Масалан,

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & \text{агар } n \text{ жуфт сон бўлса,} \\ \frac{1}{n}, & \text{агар } n \text{ тоқ сон бўлса,} \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{агар } n \text{ жуфт сон бўлса,} \\ \frac{1}{n^2}, & \text{агар } n \text{ тоқ сон бўлса} \end{cases}$$

бўлганда

$$\min(a_n, b_n) = \frac{1}{n^2}$$

бўлади.

Равшанки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

қатор яқинлашувчи.

15-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

Бу қаторни гармоник қатор $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ билан солиштирамиз. Равшанки, бу икки қатор умумий ҳадлари нисбатининг лимити

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

бўлади. Юқорида келтирилган натижага кўра берилган қатор узоқлашувчи бўлади.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашувчилигини кўрсатинг ва йиғиндиларини топинг:

1. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \ldots$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)(n+3)}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2-n}{n(n+1)(n+3)}$.

8. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$.

9. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

10. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\alpha}{2^{n+1}}\cdot\sin\frac{3\alpha}{2^{n+1}}$.

12. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,(n+2)}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{2^n}\cdot\cos\frac{3}{2^n}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$.

Қуйидаги қаторлар учун қатор яқинлашувчилигининг зарурий шарти бажарилмаслигини кўрсатинг:

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0{,}02}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^m$.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^3-2}{3n^3+4}\right)^{n^2}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\ln^2(n+1)}$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2+2)\ln\frac{n^2+1}{n^2}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)\operatorname{arctg}\frac{1}{n+2}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{n+1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2+9)\arcsin\frac{1}{n^2+5}$.

Солиштириш (таққослаш) аломатларидан фойдаланиб қуйидаги қаторларни яқинлашишга текширинг: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

25. $a_n = \frac{\sin^2 3n}{n\sqrt{n}}$.

26. $a_n = \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$.

27. $a_n = \frac{\cos\frac{\pi}{4n}}{\sqrt[5]{2n^5-1}}$.

28. $a_n = \frac{\ln n + \sin n}{n^2 + 2\ln n}$.

29. $a_n = \frac{\arcsin\frac{n-1}{n+1}}{n\sqrt{\ln(n+1)}}$.

30. $a_n = \frac{\operatorname{arctg}(n^2+2n)}{3^n + n^2}$.

31. $a_n = \frac{n^2}{e^n}$.

32. $a_n = (3n + n^3)e^{-\sqrt{n}} \cdot \ln n$.

33. $a_n = \frac{\left(3 - 2\cos^2\frac{\pi n}{3}\right)\cdot e^n}{n^2 \cdot 2^n}$.

34. $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right)$.

35. $a_n = \left(e^{-\frac{1}{n}} - 1\right)\cdot \sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

36. $a_n \geqslant$ бўлиб, $\{n\,a_n\}$ кетма-кетлик чегараланган бўлса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ қатор яқинлашувчилигини исботланг.

3-§. МУСБАТ ҚАТОРЛАР УЧУН ЯҚИНЛАШУВЧИЛИК АЛЮОМАТЛАРИ

Бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$

мусбат қатор берилган бўлсин.

1°. **Коши аломати.** Агар (1) қаторда $n \in N$ нинг бирор $n_0 (n_0 \geqslant 1)$ қийматидан бошлаб барча $n \geqslant n_0$ қийматлари учун

$$\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1 \quad \left(\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1\right)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, (1) қатор яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлади.

Агар (1) қатор учун

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

лимит мавжуд бўлиб, $k < 1$ бўлса, у ҳолда (1) қатор яқинлашувчи, $k > 1$ бўлса, (1) қатор узоқлашувчи бўлади.

2°. **Даламбер аломати.** Агар (1) қаторда $n \in N$ нинг бирор $n_0 (n_0 \geqslant 1)$ қийматларидан бошлаб барча $n \geqslant n_0$ қийматлари учун

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1 \qquad \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1\right)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, (1) қатор яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлади.

Агар (1) қатор учун

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

лимит мавжуд бўлиб, $d < 1$ бўлса, у ҳолда (1) қатор яқинлашувчи, $d > 1$ бўлса, (1) қатор узоқлашувчи бўлади.

3°. **Раабе аломати.** Агар (1) қаторда $n \in N$ нинг бирор $n_0 (n_0 \geqslant 1)$ қийматларидан бошлаб барча $n \geqslant n_0$ қийматлари учун

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geqslant r > 1 \quad \left(n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1\right)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, (1) қатор яқинлашувчи (узоқлашувчи) бўлади.

Агар (1) қатор учун

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \rho \qquad (\rho = \text{const})$$

лимит мавжуд бўлиб, $\rho > 1$ бўлса, у ҳолда (1) қатор яқинлашувчи, $\rho < 1$ бўлса, (1) қатор узоқлашувчи бўлади.

4°. **Кошининг интеграл аломати.** Агар $f(x)$ функция $[1, +\infty]$ да аниқланган, узлуксиз ва ўсмайдиган бўлиб, $F(x)=\int\limits_1^x f(t)dt$ шу функция учун бошланғич функция ва

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(x)$$

бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \int\limits_1^x f(t)dt$$

лимит мавжуд ва чекли бўлганда (1) қатор яқинлашувчи, бу лимит мавжуд бўлмаганда ёки чексиз бўлганда (1) қатор узоқлашувчи бўлади.

5°. Гаусс аломати. Агар (1) қатор учун

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}} \quad (|\theta_n| < c,\ \varepsilon > 0)$$

бўлса у ҳолда:

а) $\lambda > 1$ бўлганда (1) қатор яқинлашувчи,

б) $\lambda < 1$ бўлганда (1) қатор узоқлашувчи,

в) $\lambda = 1$ бўлиб, $\mu > 1$ бўлганда (1) қатор яқинлашувчи,

г) $\lambda = 1$ бўлиб, $\mu \leqslant 1$ бўлганда (1) қатор узоқлашувчи бўлади.

16-мисол. Ушбу

$$\frac{4}{2} + \frac{4\cdot 7}{2\cdot 6} + \frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10} + \ldots + \frac{4\cdot 7\cdot 10\ \ldots\ (3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\ \ldots\ (4n-2)} + \ldots$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Бу қаторни текширишда Даламбер аломатидан фойдаланамиз.

Равшанки,

$$a_n = \frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot \ldots \cdot (3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot \ldots \cdot (4n-2)},$$

$$a_{n+1} = \frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot \ldots \cdot (3n+1)(3n+4)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot \ldots \cdot (4n-2)(4n+2)},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3n+4}{4n+2}.$$

Кейинги тенгликда $n\to\infty$ да лимитга ўтиб, топамиз:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4} < 1.$$

Демак, берилган қатор яқинлашувчи.

17-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Берилган қатор учун:

$$a_n = \frac{n^5}{2^n + 3^n}, \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)^5}{2^{n+1} + 3^{n+1}}.$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^5}{2^{n+1}+3^{n+1}} \cdot \frac{2^n+3^n}{n^5} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^5 \cdot \frac{3^n\left[1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{3^{n+1}\left[1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 \frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 \cdot \frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} = \frac{1}{3} < 1$$

бўлганлиги сабабли, Даламбер аломатига кўра, берилган қатор яқинлашувчи

18-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{2})^n}$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Агар

$$a_n = \frac{1}{n(\sqrt{2})^n},$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

бўлишини эътиборга олсак, унда Коши аломатига кўра, берилган қаторнинг яқинлашувчи бўлишини топамиз.

19-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$$

қаторни яқинлашувчиликка текширинг.

Равшанки,

$$a_n=\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}},\qquad a_{n+1}=\frac{3+(-1)^{n+1}}{2^{n+2}},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3+(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}\cdot\frac{2^{n+1}}{3+(-1)^n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3+(-1)^{n+1}}{3+(-1)^n}.$$

Агар $n=2k$ бўлса,

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3-1}{3+1}=\frac{1}{4}.$$

агар $n=2k-1$ бўлса,

$$\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3+1}{3-1}=1$$

бўлади. Демак, $n\to\infty$ да $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ нинг лимити мавжуд эмас. Бинобарин, Даламбер аломатига кўра берилган қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлиши тўғрисида бирор қарорга келиб бўлмайди.

Аммо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{2}}=\frac{1}{2}<1.$$

Демак, Коши аломатига кўра берилган қатор яқинлашувчи бўлади.

20-мисол. Ушбу $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,

$$a_n=\left(2-\sqrt{a}\right)\left(2-\sqrt[3]{a}\right)\ldots\left(2-\sqrt[n]{a}\right),\ a>0$$

қаторни яқинлашишга текширинг.

$\frac{a_n}{a_{n+1}}$ нисбатни қарайлик. Бунда $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{2-\sqrt[n]{a}}$ эканини кўриш қийин эмас.

$$\sqrt[n+1]{a}=e^{\ln a/n+1}=1+\frac{\ln a}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{\ln^2 n}{2n^2}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$
$$=1+\frac{\ln a}{n}+\frac{\gamma_n}{n^2},\quad |\gamma_n|<C$$

муносабатдан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{1-\frac{\ln a}{n}-\frac{\gamma_n}{n^2}}=1+\frac{\ln a}{n}+\frac{\gamma^*_n}{n^2},$$

бу ерда $|\gamma^*_n|<M$.

Гаусс аломатига кўра $\ln a>1$, яъни $a>e$ бўлганда қатор яқинлашувчи, $\ln a\leqslant 1$, яъни $a\leqslant e$ бўлганда эса узоқлашувчи бўлади.

Агар қаралаётган мисолда Даламбер аломатидан фойдаланадиган бўлсак, у ҳолда қатор яқинлашувчилиги ёки узоқлашувчилиги ҳақида бирор қарорга келиб бўлмайди, чунки:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1.$$

Бундан ташқари яқинлашувчи $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ва узоқлашувчи $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ қаторларга нисбатан $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ эканини кўриш қийин эмас.

Мисол ва масалалар

Коши ва Даламбер аломатларидан фойдаланиб қуйидаги қаторларни яқинлашишга текширинг:

37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$.

38. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

39. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$.

40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an}{n+2}\right)^n,\ a>0$.

41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{n+1}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$.

42. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2+4n+5}$.

43. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(3n^2+2n+1)^{(n+3)/2}}$.

44. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n^{3/2}}$.

45. $\sum_{n=1}^{\infty}3^{-n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

46. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$, $a>0$.

47. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,a^n}{n^n}$, $a\neq e$, $a>0$.

48. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

49. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{(3n+4)\,3^n}$.

50. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{3^n\cdot n!}$.

51. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 6\cdots(3n)}{(n+1)!}\arcsin\frac{1}{2^n}$.

52. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{n!}\operatorname{arctg}\frac{1}{3^n}$.

Раабе ва Гаусс аломатларидан фойдаланиб қуйидаги қаторларни яқинлашишга текширинг:

53. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right]^p\frac{1}{n^q}$.

54. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,e^n}{n^{n+p}}$.

55. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

56. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2\cdot\ln 3\cdots\ln(n+1)}{\ln(2+a)\,\ln(3+a)\cdots\ln(n+1+a)}$, $a>0$.

57. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{2})\,(a+\sqrt{3})\cdots(a+\sqrt{n+1})}$, $a>0$.

58. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p\,(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}$.

59. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{p\,(p+1)\cdots(p+n-1)}{q\,(q+1)\cdots(q+n-1)}\right]^{\alpha}$ $(p>0,\ q>0)$.

Қуйидаги қаторларни яқинлашишга текширинг ($\sum_{n=1}^{\infty}a_n$):

60. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$.

61. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\,(\ln n)^p\,(\ln\ln n)^q}$.

62. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}$.

63. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$,

64. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$.

65. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$

66. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot e^{-\sqrt[3]{n}}$

67. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right).$

68. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{n^{\alpha}}-1\right).$

69. $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin\frac{\pi}{n}.$

70. $a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$

71. $a_n=e^{\sqrt{n}/(n^2+1)}-1.$

72. $a_n=\operatorname{tg}\frac{1}{n}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n}.$

73. $a_n=\frac{n^n}{(n!)^2}.$

74. $a_n=\frac{(2n+2)!}{\pi^n\,(n!)^2}.$

75. $a_n=\frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}.$

76. $a_n=\frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}.$

77. $a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^3 x}{x}\,dx.$

78. $a_n=\int_0^{1/n}\frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4}\,dx.$

79. $a_n=\frac{1}{\int_0^n\sqrt{1+x^4}\,dx}.$

80. $a_n=\int_n^{n+2}e^{-\sqrt[4]{x}}\,dx.$

81. $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{x\sin^5 x}{1+x^2}\,dx.$

82. $a_n=\frac{1!+2!+\ldots+n!}{(2n)!}.$

83. Агар $\lim_{n\to\infty} na_n=a$ бўлиб, $a\neq 0$ бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ қатор узоқлашувчи бўлишини исботланг.

84. Агар $a_n>0$, $\forall\, n\in N$ ларда $a_{n+1}\leqslant a_n$ бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ қатор яқинлашувчи бўлса, $\lim_{n\to\infty} na_n=0$ эканини исботланг.

85. Агар $a_n\geqslant 0$ бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ қатор хусусий йиғиндилари кетма-кетлигининг бирорта қисмий кетма-кетлиги юқоридан чекланган бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ қаторнинг яқинлашувчилигини исботланг.

86. Агар $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ қаторлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n b_n|,\quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$$

қаторлар ҳам яқинлашувчи бўлишини исботланг.

87. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ қатор $(a_n\geqslant 0)$ берилган бўлиб, $n\geqslant n_0$ ларда $(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}\geqslant p>1$ бўлса, берилган қатор яқинлашувчи,

$n \geqslant n_0$ ларда $\left(1-\sqrt[n]{a_n}\right)\frac{n}{\ln n} \leqslant 1$ бўлса узоқлашувчи эканини исботланг.

88. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор ($a_n > 0$) берилган бўлсин. Шундай $\alpha > 0$ мавжуд бўлиб, $n \geqslant n_0$ ларда $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geqslant 1+\alpha$ бўлса, қатор яқинлашувчи, $n \geqslant n_0$ ларда $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leqslant 1$ бўлса, қатор узоқлашувчи эканини исботланг. (Логарифмик аломат.)

4-§. ИХТИЁРИЙ ҲАДЛИ ҚАТОРЛАР, КОШИ ТЕОРЕМАСИ. АБСОЛЮТ ВА ШАРТЛИ ЯҚИНЛАШУВЧИ ҚАТОРЛАР

Бирор $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ қатор берилган бўлсин.

8-теорема (Коши теоремаси). **Ихтиёрий $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам шундай $n_0 \in N$ сон мавжуд бўлиб, барча $n > n_0$ ва $m = 1, 2, 3, \ldots$, лар учун**

$$|A_{n+m} - A_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Ихтиёрий $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор билан бирга бу қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қаторни қарайлик.

9-теорема. **Агар $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.**

3-таъриф. *Агар $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор яқинлашувчи бўлса, у*

ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор абсолют яқинлашувчи қатор деб аталади.

4-таъриф. *Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ қатор узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор шартли яқинлашувчи қатор дейилади.*

21-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$$

қаторнинг яқинлашувчилигини Коши критерийси ёрдамида кўрсатинг.

$|A_{n+m} - A_n|$ ифодани қарайлик.

$$|A_{n+m} - A_n| = \left|\sum_{k=m+1}^{n+m} \frac{\sin kx}{k(k+1)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{m+n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+m} < \frac{1}{n+1}.$$

Демак, $\forall n \in N$ ва $\forall m \in N$ ларда

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+m}| < \frac{1}{n+1}$$

тенгсизлик ўринли.

Энди $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ эканини ҳисобга олган ҳолда, $\forall \varepsilon > 0$ га кўра, шундай $n_0 \in N$ мавжуд бўлиб, барча $n > n_0$ ва $\forall m \in N$ лар учун $|A_{n+m} - A_n| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли эканини кўрамиз. Бундан эса $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ қаторнинг яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади.

22-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

гармоник қатор узоқлашувчилигини Коши теоремаси ёрдамида кўрсатинг.

$|A_{n+m}-A_n|$ муносабатда $\forall k \in N$ учун $n=k$, $m=k$ деб олсак,

$$|A_{n+m}-A_n|=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{k+k}>$$

$$>k\cdot\frac{1}{2\cdot k}=\frac{1}{2}.$$

Бундан кўринадики, $|A_{n+m}-A_n|<\varepsilon$ тенгсизлик $\varepsilon<\frac{1}{2}$ учун бажарилмайди. Демак, қаралаётган қатор узоқлашувчи.

23-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \operatorname{arctg} \frac{\cos^3 n}{\sqrt[3]{n}}$$

каторнинг абсолют яқинлашувчилиги кўрсатилсин.

Маълумки, $x \geqslant 0$ ларда $0 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ тенгсизлик, $x \in R$ ларда $|\operatorname{arctg} x| \leqslant |x|$ тенгсизлик ўринли. У ҳолда

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{n}\left|\frac{\cos^3 n}{\sqrt[3]{n}}\right| \leqslant \frac{1}{n^{4/3}}$$

бўлиб, бу $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг абсолют яқинлашувчилигини билдиради.

Қуйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n=a_1-a_2+\ldots+(-1)^{n-1} a_n+\ldots,$$

$$(a_n \geqslant 0 \text{ ёки } a_n \leqslant 0)$$

қатор *ҳадларининг ишоралари навбат билан ўзгариб келадиган қатор* деб аталади.

Лейбниц аломати. Агар

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0$$

бўлиб, $\forall n \in N$ ларда $0<a_{n+1}\leqslant a_n$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n \text{ қатор яқинлашувчи бўлади.}$$

Ушбу $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ қатор Лейбниц аломатларининг барча шартларини қаноатлантиради, яъни $a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ монотон камайиб нолга интилади. Демак, қатор яқинлашувчидир.

Айни вақтда $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ қатор узоқлашувчи, чунки $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ қатор узоқлашувчи.

Шундай қилиб, қаралаётган қатор шартли яқинлашувчидир.

Мисол ва масалалар

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашувчилигини Коши теоремаси ёрдамида исботланг:

89. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n}$.

90. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos x^n}{n^2}$.

91. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}$.

92. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{10^n}$ $(|C_n|<10)$.

93. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^3 nx}{(n+1)(n+3)}$.

Қуйидаги қаторларнинг узоқлашувчилигини Коши теоремаси ёрдамида исботланг:

95. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$.

96. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

97. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+4}$.

98. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

99. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$.

Қуйидаги қаторларнинг абсолют яқинлашувчилигини исботланг:

100. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(2n+\frac{\pi}{4}\right)}{n\sqrt[3]{n+2}}$.

101. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(-n)^n}{\sqrt[4]{2n^6+3n+1}}$.

102. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln^2 n}{2^n}$.

103. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}}\arcsin\frac{\pi}{4n}$.

104. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos^3 n\cdot\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n^3+2}$.

105. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\cdot\sin n e^{-\sqrt{n}}$.

106. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^n}{(2n)!}$.

107. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln^3(n+1)}{n\sqrt{n+1}}$.

108. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!!}{(n+1)^n}$.

109. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n+1)/2}\frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}$.

110. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\sin\frac{1}{n}}-\cos\frac{1}{n}\right)\cos\pi n$.

Қуйидаги қаторларни яқинлашишга текширинг:

111. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$.

112. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{\sqrt{n}}$.

113. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$.

114. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[n]{n^3+1}}$.

115. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{\sqrt{n^2+4}}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\sqrt{n}}$.

116. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{\pi}{4}\right)}{\ln^2(n+1)}$.

117. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}}$.

118. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt[5]{n+1}}$.

119. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{n}} \cdot \sin 2n$.

120. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$.

121. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}+\sin n}$.

122. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)$.

123. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

124. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln\ln(n+1)}$.

125. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n^2$.

126. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$.

127. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}$.

Қуйидаги қаторларни абсолют ва шартли яқинлашишга текширинг:

128. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.

129. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$.

130. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]$.

131. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n}$.

132. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$.

133. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

134. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n^{100}}{2^n}$.

135. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$.

136. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}\right]^p$.

137. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$.

ЖАВОБЛАР ВА ҚЎРСАТМАЛАР

I боб

1, 2, 3, 4-мисолларда тенгликнинг чап томонидаги тўпламнинг ихтиёрий элементи ўнг томондаги тўпламга тегишли ва аксинчасини кўрсатиш керак. 5. $A\setminus(B\cap C) = A\cap\overline{(B\cap C)}$ ва $(\overline{A\cap C}) = (\overline{B}\cup\overline{C})$ муносабатлардан фойдаланинг. 6. $A\setminus(B\cup C) = A\cap(\overline{B\cup C})$ ва $(\overline{B\cup C}) = (\overline{B}\cap\overline{C})$ муносабатлардан фойдаланинг. 7. 4-мисолдан ва $A\cup\overline{A} = U$ ва $U\cap X = X$ муносабатлардан фойдаланинг. 8. $A\setminus(B\setminus C) = A\cap\cap(\overline{B\setminus C}) = A\cap(\overline{B\cap \overline{C}}) = A\cap(\overline{B}\cup\overline{C}) = (A\cap\overline{B})\cup(A\cap C) = (A\setminus B)\cup\cup(A\cap C)$. 27. $\sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$ эканини кўрсатайлик. Фараз қилайлик, $\sup\{x\} = a$ $\sup\{y\} = b$ бўлсин. У ҳолда $\forall x\in\{x\}$, $\forall y\in\{y\}$ учун $x\leqslant a$ ва $y\leqslant b$ бўлади. Бундан $x+y\leqslant\leqslant a+b$ га эга бўламиз. Иккинчидан, $\forall\varepsilon>0$, $\exists x'_\varepsilon\in\{x\}$, $\exists y'_\varepsilon\in\{y\}$ топилиб, $x'_\varepsilon > a-\frac{\varepsilon}{2}$ $y'_\varepsilon > b-\frac{\varepsilon}{2}$ бўлади. Бундан $x'_\varepsilon + y'_\varepsilon > a+b-\varepsilon$ га эга бўламиз. Аммо $x'_\varepsilon + y'_\varepsilon\in\{x+y\}$ Демак, $\sup\{x+y\} = a+b = \sup\{x\}+\sup\{y\}$ экан. 28, 29-машқлар ҳам юқоридагига ўхшаш исботланади. 30. $m<n$ ва $m, n\in N$ бўлгани сабабли $0<\frac{m}{n}<1$. Энди $\sup\left\{\frac{m}{n}\right\} = 1$, $\inf\left\{\frac{m}{n}\right\} = 0$ эканини кўрсатиш қийин эмас.

II боб

1-§. 19. $x_n = n$, $y_n = -n$ $x_n + y_n$ чегараланган. $x_n = \sqrt{n+1}$, $y_n = \sqrt{n}$, $x_n - y_n$ чегараланган. Аммо $\{x_n\cdot y_n\}$ чегараланмаган бўлади. Ҳақиқатан, $\forall E>0)$ $\exists n'_E\in N$ $|x'_{n_E}|>\sqrt{E}$ ва $n''_E\in N$ $|y'_{n_E}|>\sqrt{E}$. Агар $n_E = \max\{n'_E, n''_E\}$ деб олсак, у ҳолда $(\forall E>0)$ $\exists n_E\in N$ топилиб $|x_{n_E}\cdot y_{n_E}|>E$ бўлади. 21. Шарт эмас. $x_n = (-1)^n\sqrt{n}$. 22. Фараз қилайлик, барча $n\in N$ лар учун $|x_n|\leqslant M$ бўлсин. У ҳолда $|y_n| = \left|\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right|\leqslant\frac{|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|}{n}\leqslant\frac{M+M+\ldots+M}{n} = \frac{n\cdot M}{n} = M$. Тескариси ҳар доим ўринли эмас. Масалан, $x_n = \begin{cases}\sqrt[3]{n}, & n = k^3\\ 0, & n\neq k^3\end{cases}$ бўлса, у ҳолда $(\forall k)\in N$ $k^3\leqslant n\leqslant(k+1)^3$ лар учун $y_n = \frac{1+2+\ldots+k}{n}$; $n\geqslant k^3$ бўлгани сабабли $\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{k^3}$. У ҳолда $y_n\leqslant\frac{1+2+\ldots+k}{k^3} = \frac{k(k+1)}{2k^3}\leqslant 1$. Аммо биз биламизки, x_n чегараланган эмас. 40. 2. 41. $\frac{1}{2}$; 42. $\frac{1}{2}$; 43. 1; 44. 1; 45. $0\leqslant a\leqslant 1$ бўлса, 0: $a>1$ бўлса, 1; $a=1$ бўлса, $\frac{1}{2}$ 46. Агар $a=b$ бўлса, $\frac{1}{3}$; $a>b$ бўлса, $1/_6$; $a<b$ бўлса, $\frac{3}{7}$. 47. 1. 48. $\frac{1}{2}$. Кўрсатма. $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$ 49. $\frac{1}{3}$. Кўрсатма. $1\cdot2+2\cdot3+\ldots+n(n+1) = 1^2+2^2+\ldots+n^2+(1+2+3+\ldots+n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$. 50. $\frac{\sin x}{x}$. Кўрсатма. $2^n\cdot\sin\frac{x}{2^n}$ $S_n = \sin x$, $S_n = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}$. 51. $\frac{1}{a(a-1)}$; 52. 1. Кўрсатма. $1<\sqrt[n]{n^3+n+1}<\sqrt[n]{3n^3} = \sqrt[n]{3}\cdot(\sqrt[n]{n})^3$. 53. 5. Кўрсатма. $5<\sqrt[n]{2^n+5^n}<5\sqrt[n]{2}$. 54. 3. Кўрсатма. $3<\sqrt[n]{2^n3^0+\ldots+2^03^n}<3\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)+1}<3\sqrt[n]{n}$. 55. 1. Кўрсатма. $1<\sqrt[n]{1^\pi+\ldots+n^\pi}<\sqrt[n]{n^\pi+n^\pi+\ldots n^\pi} = (\sqrt[n]{n})^{\pi+1}$. 56. 1. 57. 1. 59. $|x_{n+m}-x_n|<\frac{1}{n(n+1)}+\ldots+\frac{1}{(n+m)(n+m-1)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+m}<\frac{1}{n}$; $N(\varepsilon) = \begin{cases}1, & \varepsilon\geqslant 1\\ \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1, & 0<\varepsilon<1\end{cases}$ деб олсак, у ҳолда $\forall\varepsilon>0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ $(\forall n)$ $(n>N(\varepsilon))$ ва $(\forall m)\in N$, $|x_{n+m}-x_n|<\varepsilon$, 61. Агар $\alpha>1$ бўлса, барча натурал $n>1$ учун $\frac{1}{n^\alpha}<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}$ бўлади. Фараз қилайлик, $\alpha\leqslant 1$ бўлсин. У ҳолда

$\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0$, ихтиёрий натурал N учун $\exists n_N = N+1 > N$ ва $\exists m_N = N+1$ топиладики, улар учун $|x_{n_N+m_N} - x_{n_N}| \geq \frac{1}{2}$ бўлади. Ҳақиқатан, $|x_{n+m} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(n+m)^\alpha} > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+m} > \frac{m}{n+m}$. Хусусан, $|x_{n_N+m_N} - x_{n_N}| > \frac{N+1}{(n_N+1)+(N+1)} = \frac{1}{2}$. 62. $|x_{n+m}^2 - x_n^2| = |x_{n+m} - x_n||x_{n+m}+x_n| \leq |x_{n+m} - x_n|(|x_{n+m}| + |x_n|) \leq 2c|x_{n+m} - x_n|$, чунки $\forall n \in N$ учун $|x_n| \leq c$. $\sqrt{|x_{n+m}|} - \sqrt{|x_n|} = \frac{|x_{n+m}| - |x_n|}{\sqrt{|x_{n+m}|}+\sqrt{|x_n|}} \geq \frac{|x_{n+m} - x_n|}{\sqrt{|x_{n+m}|}+\sqrt{|x_n|}}$.

65. 1; 0. 66. $+\infty$; 0. 67. 1; 0; 70. 1; $-\frac{1}{2}$. 71. $-\infty$. 72. $e+1$; $-\left(e+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 73. 2; 1. 74. 1; 0.

III боб

1. $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$. 2. $(-1, 1)$. 3. R. 4. $(0, 1)$. 5. R. 6. $\{x \in [-4, 4], x \neq \pm\sqrt{16 - \frac{\pi^2}{4}}\}$. 7. $n \in \{-1, 0, 1\}$ бўлганда $x = \varnothing$; $n > 1$ бўлганда $X = \left(\frac{1}{n}; 1\right]$; $n < -1$ бўлса, $X = \left[-1, \frac{1}{n}\right)$. 8. R. 9. $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$. 10. $\left\{x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) n \in Z\right\}$ 11. $\left\{x \in \left[2\pi n - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in Z\right)$ 12. $\left\{x \in \left(2\pi n - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right), n \in Z\right\}$. 13. $[2, 4]$. 14. $R \setminus \{-1; 1\}$. 15. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. 16. $(-1; 0) \cup (0; 1) \cup (2; +\infty)$. 17. $f(x) = \sqrt{-x^2}$, $x = \{0\}$ ёки $g(x) = e^{\sqrt{x-4}} \cdot \sqrt{4-x}$, $x = \{4\}$. 20. $x = \{2\pi k, k \in Z\}$, $J = \{4\}$. 21. $X = (-\infty, 0) \cup (0; +\infty)$; $Y = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. 22. $X = (0, +\infty)$, $Y = (0, +\infty)$. 23. $X = R$, $Y = [-1, +\infty)$. 24. $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $Y = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. 25. $X = R$, $Y = [0; 1)$. 26. $X = [-100, +\infty)$, $Y = [-1; 1]$. 27. $x = R \setminus \left\{\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z\right\} \cup \{\pi k, k \in Z\}\right\}$, $Y = \{1\}$ 28. $X = R$, $y = [-2; 2]$. 49. R да ўсувчи. 50. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ тўпламда камаювчи, $[-1; 0) \cup [1; +\infty)$ тўпламда ўсувчи. 51. $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$

да камаювчи, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ да ўсувчи. 55. R да камаювчи. 57. $(-\infty; -1]$ да ўсувчи; $[1, +\infty)$ да камаювчи. 58. $\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ да камаювчи; $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ да ўсувчи. 59. $(-\infty; -1]$ да ўсувчи; $[-1; +\infty)$ да камаювчи. 60. K да ўсувчи. 79. Тоқ. 80. Тоқ. 81. Тоқ. 82. Жуфт. 83. Жуфт. 84. Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас. 85. Жуфт. 86. Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас. 87. Жуфт. 88. Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас. 89. Жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас. 90. Жуфт. 100. $y = \sqrt{1 - 2\ln(-x)}$, $x \in [-\sqrt{e}; 0)$. 101. $y = \ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$, $x \in (0; +\infty)$. 102. $y = \sin x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. 103. $y = 1 - \sqrt{\log_2 2x}$, $x \geq 1/2$. 104. $a = 1$, $b = 0$ ва $a = -1$, $b = 0$. 105. $\alpha = \pm 1$. 106. $f(x) \circ g(x) = x$, $x \geq 0$ $g \circ f(x) = |x|$, $x \in R$. 107. $f \circ g(x) = g \circ f(x) = |x|$, $x \in [-1; 1]$. 108. $f \circ g(x) = (x+5)^5$, $x \in R$ $g \circ f(x) = x^5 + 5$, $x \in R$. 109. $f \circ g(x) = x$, $g \circ f(x) = x$. 110 $f \circ g(x) = 1$, $g \circ f(x) = 1 + (\operatorname{sgn} x)^2$. 111. $f \circ g(x) = 1$, $g \circ f(x) = 1$ 112. $f \circ g(x) = \ln \sin^2 x$, $x \pm \pi n$, $n \in Z$, $g \circ f(x) = \sin \ln x^2$, $x \neq 0$. 113. $f \circ g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, +\infty), \\ x^2, & x \in (-\infty, 0), \end{cases}$ $g \circ f(x) = 0$ $x \in R$.

114. Агар $a^2 \neq 1$ бўлса, $f(f(\ldots f(x))\ldots) = \frac{x}{\sqrt{a^{2n} + \frac{a^{2n}-1}{a^2-1}x^2}}$,

агар $a^2 = 1$ бўлса, $f(f(\ldots f(x))\ldots) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. 149. Мавжуд эмас. 150. 1; -1. 151. 1; 1. 152. 0; 0. 153. -1; 1. 154. $\frac{1}{3}$; 0. 155. $+\infty$; 1. 156. 110; 109. 159. $2\sqrt{a}$. 160. 0. 161. 3. 162. $\frac{n}{m}$. 163. $\frac{n}{m}$. 164. $\frac{n-m}{2}$. 165. 3. 166. $\frac{7}{12}$. 167. $\frac{mn}{am+bn}$. 168. $2n$. 169. 1. 170. $\frac{n(n+1)}{2}$. 171. $\frac{m}{n}$. 172. 1. 173. -1. 174. $-\frac{9}{128}$. 175. $\cos a$. 176. $\frac{1}{2}$. 177. $\frac{1}{2\pi}$. 179. 5. 180. $-\frac{7}{2}$. 181. 4. 182. 1. 183. 18. 184. $\frac{1}{2}$. 185. $\frac{1}{e^{2a\,\mathrm{tg}\,\alpha}}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$. 186. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 187. 1. 188. $\sqrt{e}$. 189. $\ln 3$. 190. 5. 191. $e^{3/2}$. 192. $\sqrt{ab}$. 193. 0. 194. $\sqrt{2}$. 203. $\frac{\sin x}{x}$. 205. $\alpha =$

$-\dfrac{\arccos x}{x^2}$, $(0<|x|<1)$. **84.** $y'=\dfrac{x\ln x}{(x^2-1)^{3/2}}$ $(x>1)$. **85.** $y'=$ $=\dfrac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$, $(|x|<1)$. **86.** $y'=\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$. **87.** $y'=\dfrac{1}{2(1+x^2)}$.

88. $y'=(\sin x)^{1+\cos x}(\operatorname{ctg}^2 x-\ln(\sin x))$. $(2k\pi<x<(2k+1)\pi,\ k\in Z)$

89. $y'=\dfrac{\operatorname{ch}(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x}$. **90.** $y'=-\dfrac{\sin x}{\operatorname{ch}^2(\cos x)}$. **91.** $y'=\operatorname{cth} x$. **92.** $y'=$ $=\dfrac{\operatorname{th} x}{\ln 10}$. **93.** $y'=\dfrac{1}{\operatorname{ch} 2x}$. **94.** $f'(0)=1000!$ **109.** Ҳар доим ўринли эмас.

110. а) $\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$;

б) $\dfrac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}$;

в) $\dfrac{\sin\dfrac{nx}{2}\sin\dfrac{n+1}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}$; г) $\dfrac{\sin\dfrac{nx}{2}\cos\dfrac{n+1}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}$.

111. 1) $y'=2/3\sin 2x|\sin x|$; 2) $y'=\pi[x]\sin 2\pi x$. **112.** $\delta=\varepsilon/м$.
114. $A=(0,-1)$; $B(4,3)$. **115.** $x=2k\pi$ да $\varphi=45°$, $k\in Z$; $x=$
$=(2k+1)\pi$ да $\varphi=135°$. $k\in Z$. **116.** $(1,2e)$; $(-3,-6e^{-3})$. **117.**
$(-1,14)$; $(2,-13)$. **118.** $(3,0)$; $(9/2,27/16)$. **119.** $(1+\sqrt{2},-\sqrt{2})$;
$(1-\sqrt{2},\sqrt{2})$. **120.** $(1,-3)$. **121.** $(5/4,\ \ln 4)$. **122.** $(1/3(\pi/3-$
$-2k\pi),1/\sqrt{3})$, $(1/3(-2\pi/3-2m\pi),-1/\sqrt{3})$, $k,m\in Z$. **123.** $\varnothing$.
124. $(\pi/2+k\pi,1)$, $(k\in Z)$. **125.** $(1/2,-\ln 2)$. **126.** $(k\pi,0)$, $(k\in Z)$.
127. $(1/8,-1/16)$. **128.** $x+2y-5=0$. **129.** $2x-y=0$. **130.** $y+$
$+3x=0$. **131.** $3x+y-\dfrac{3\pi}{2}=0$. **132.** $29x-12y-54=0$. **133.**
$ex-y=0$. **134.** $(\pi/4+k\pi,(-1)^k)$, $(k\in Z)$, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$. **135.** $(1,1)$;
$\varphi=\operatorname{arctg}3$. **136.** $(\sqrt{e},1/2)$, $\varphi=0$, **137.** $(1,1)$; $\varphi=\dfrac{5\pi}{4}$. **138.** $(0,0)$;
$\varphi=\pi/2$. $(1,1)$; $\varphi=\operatorname{arctg}3/4$. **139.** $\varphi=\pi/2$. **140.** $\varphi=2\pi/3$. **141.**
$\varphi=\operatorname{arctg}3/4$. **142.** $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$. **144.** $\varphi=2\operatorname{arctg}(1/|a|)$. **145.** $n>57{,}3$.

147. Дифференциалланувчи. **148.** Дифференциалланувчи. **149.** Дифферен-
циалланувчи эмас. **150.** Дифференциалланувчи. **151.** Дифференциаллану-
чи. **152.** Дифференциалланувчи. **153.** Дифференциалланувчи. **154.** $x_0=1$,
$x_1=-1$ да дифференциалланувчи; $x_0=0$ да дифференциалланувчи эмас.
155. Дифференциалланувчи. **156.** Дифференциалланувчи. **157.** Дифферен-
циалланувчи. **158.** Дифференциалланувчи эмас. **159.** Дифференциалланувчи.
160. Дифференциалланувчи. **161.** Дифференциалланувчи **162.** Дифферен-
циалланувчи. **163.** Дифференциалланувчи. **164.** $\dfrac{dx}{x\ln(x/2)}$, $x>2$.

165. $\dfrac{\sin(1/\log_2 x)}{(x\log_2^2 x)\ln 2}dx$. **166.** $\dfrac{(\ln x-1)\ln 10}{\ln x\log_3 x}\cdot 10^{\log_3 x}dx$. **167.** $-\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$ $e^{\sqrt{(1-x)/(1+x)}}dx$. **168.** $2\sqrt{6}\dfrac{\sin x}{(3-2\cos^2 x)}dx$. **169.** $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{e^{x/2}-1}{e^x+1}dx$.

170. $x^{1+x^2}(1+2\ln x)\,dx$. **171.** $e^x x^{e^x}(1/x+\ln x)\,dx$. **172.** $(\ln 5)$ $5^{x^x}x^x(1+\ln x)dx$. **173.** $|\sin x|^{\cos x}(\cos x\operatorname{ctg} x-\sin x\ln|\sin x|)\,dx$. **174.** $x^{1/(x-2)}(1-\ln x)\,dx$. **175.** $[x^{a-1}x^{x^a}(1+a\ln x)+a^x x^{a^x}(1/x+\ln a\ln x)+x^x a^{x^x}\ln a(1+\ln x)]\,dx$. **176.** $-\dfrac{1}{ex}(\log_x e)^2dx$.

177. $\dfrac{2^{1+\sqrt[3]{x}}\ln 2\quad\sin(2^{\sqrt[3]{x}})\ln(\sec 2^{\sqrt[3]{x}})}{3\sqrt[3]{x^2}\cos^2 2^{\sqrt[3]{x}}}dx$.

178. $-\dfrac{\sin 2x}{\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}}\left(1-\dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}\right)dx$.

179. $\dfrac{2\,dx}{\sqrt{\sin x}\cos x}$. **180.** $\dfrac{2e^2\,dx}{e^2+1}$; 0. **181.** $-(1/2)\,dx$.

182. $(2+\ln 4)\,dx$; 0. **183.** Мавжуд эмас. **184.** 4,0208; 5,00177. **185.** 0,485; $-0{,}017$. **186.** 0,9942. **187.** 0,079; **188.** 0,925; **189.** $-0{,}8747$; **190.** 1,043. **191.** $\dfrac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}$. **192.** $\dfrac{3x}{(1-x^2)^2}+\dfrac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{5/2}}$,

$(|x|<1)$. **193.** $1/x$ $(x>0)$. **194.** $2e^{-x^2}(2x^2-1)$. **195.** $\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$ $\left(x\neq\right.$ $\left.\neq\dfrac{2k+1}{2}\pi,\ k\in Z\right)$. **196.** $-\dfrac{2}{x^2}\cos(\ln x)$, $(x>0)$. **197.** $\dfrac{2x}{1+x^2}+$ $+2\operatorname{arctg}x$. **200.** $-2\cos 2x$. **201.** $4\operatorname{ch}2x$. **202.** $(x(1+\ln x)^2+$ $+1)x^{x-1}$. **203.** $-(2\sin(\ln x))/x$. **204.** $a^n n!$ **205.** $4^{n-1}\cos\left(4x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

206. $\dfrac{(a-b)^n}{2}\sin\left[(a-b)x+\dfrac{n\pi}{2}\right]+\dfrac{(a+b)^n}{2}\sin\left[(a+b)x+\right.$ $\left.+\dfrac{n\pi}{2}\right]$. **207.** $n!\ ((1-x)^{-n-1}+(-1)^n(1+x)^{-n-1})$. **208.** $(\ln^{n-1}2)\,2^{x-1}(\ln 2)(x-1)+n)$. **209.** $(-1)^n 2(n-2)!\,(x-n)(x-1)^{-n}$, $(n>1)$. **210.** $(n-2)!\,((3n-x)(3-x)^{-n}+(-1)^n(3n+x)(3+x)^{-n})$, $n>1$. **211.** $f'(x)=\cos^2 x-x\sin 2x$. 1) $n=4k-3$, $k=2,3,4,\ldots$ $f^{(n)}(x)=-2^{n-1}x\sin 2x+2^{n-2}n\cos 2x$; 2) $n=4k-2$ $k=1,2,3,\ldots$ $f^{(n)}(x)=-2^{n-1}x\cos 2x-2^{n-2}n\sin 2x$; 3) $n=4k-1$, $k=1,2,3,\ldots$, $f^{(n)}(x)=2^{n-1}x\sin 2x-2^{n-2}n\cos 2x$; 4) $n=4k$, $k=1,2,3,\ldots$ $f^{(n)}(x)=2^{n-1}x\cos 2x+2^{n-2}n\sin 2x$. **212.** $\dfrac{5^{n-1}(2n-3)!!}{2^n}$ $(2n-5x)(1-5x)^{-(2n+1)/2}$, $(n>1)$. **213.** $(2n-5)!!\,(3x^2-2nx+$

$+n^3-n)(1-2x)^{-(2n+1)/2}$ $(n>2)$. **214.** $e^{ax}(a^2+b^2)^{n/2}\cos(bx+c+n\varphi)$. $\cos\varphi=a/\sqrt{a^2+b^2}$; $\sin\varphi=b/\sqrt{a^2+b^2}$. **215.** $(-1)^n x^{-n-1}e^{1/x}$. **216.** $(n-1)!/x$. **217.** $(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x^2)^{-n/2}\sin(n\operatorname{arctg}x)$. **218.** $-\frac{\pi}{2}(1+3^{100})$. **219.** $\left(16-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{2}$. **220.** $(a^2+b^2)^{n/2}\left(\operatorname{ch}ax\cos\left(n\varphi-\frac{\pi n}{2}\right)\sin\left(bx+\frac{\pi n}{2}\right)+\operatorname{sh}ax\sin\left(n\varphi-\frac{\pi n}{2}\right)\cos bx+\frac{\pi n}{2}\right)\Big)\cos\varphi=a/\sqrt{a^2+b^2}$; $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **221.** $f'(0)=0$; $f''(0)$ — мавжуд эмас. **222.** $f'(0)=2$; $f''(0)=0$; $f'''(0)$ — мавжуд эмас. **223.** $f'(0)=0$; $f''(0)$ — мавжуд эмас. **224.** $f^{(n)}(0)=0$, $n\leqslant 50$, $f^{(51)}_{(0)}$ мавжуд эмас. **225.** $f^{(n)}(0)=0$, $n\in N$. **228.** $(-1)^n m^n n!$ **229.** e^{uv} $u^v\left(\frac{v}{u}du^2+\ln u d^2v+\left\{2\cdot\left(u^{v-1}+\frac{1}{u}\right)v\ln u+\frac{2}{4}\right)\right\}dudv+(u^v v+v-1)\frac{v}{u^2}du^2+(u^v+1)\ln^2 u\,dv^2$. **230.** $\frac{1}{u^3}(u^2d^2v-uvd^2u-2u\,du\,dv+2v\,du^2)$.

231. $\frac{(u^2+v^2)(ud^2v-vd^2u)+2uv\,du^2}{(u^2+u^2)^2}+\frac{2(v^2-u^2)du\,dv-2uv\,dv^2}{(u^2+v^2)^2}$.

232. $\frac{1}{(u^2+v^2)^2}((u^2+v^2)(u\,d^2u+v\,d^2v)+(v^2-u^2)du^2-4uv\,du\,dv+(u^2-v^2)dv^2$. **233.** $(v+2)d^2u+2\,du\,dv+ud^2v$. **234.** $\ln v d^2u+\frac{2}{v}du\,dv+\frac{u}{v}d^2v-\frac{u}{v^2}dv^2$. **235.** $u^v\left(\frac{v}{u}d^2u+\ln u d^2v+\frac{v(v-1)}{u^2}du+\frac{2(v\ln u+1)}{u}du\,dv+\ln^2 u\,dv^2\right)$. **236.** $\frac{v\,d^2u-u\,d^2v}{v^2}-\frac{2dv(v\,du-u\,dv)}{v^3}$. **237.** $\frac{1}{(u^2+v^2)^{3/2}}((u^2-v^2)(u\,d^2u+v\,dv)+(v\,du-u\,dv)^2)$.
238. $u^{98}v^{99}\{[9900\,v^2du^2+20200\,uv\,dudv+10100\,u^2dv^2]+uv(100\,vd^2u+101\,ud^2v)\}$

VI боб

2. $x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$ **4.** Ролль теоремасининг шартлари етарли, лекин зарур эмас. Масалан, $(a,b)=(0,2)$, $f(x)=x^3-3x$ функция учун $f'(1)=0$, лекин Ролль теоремасининг шартлари бажарилмайди. **5.** Йўқ, чунки $f'(0)$ мавжуд эмас. **12.** Йўқ, чунки $g'(0)=0$. **13.** Функция лимитининг Гейне таърифи ва Лагранж теоремасидан фойдаланинг. **14.** $\frac{f(x)}{x}$ ва $\frac{1}{x}$ функцияларга Коши теоремасини қўлланг. **15.** Лагранж теоремасидан

фойдаланинг. Тескари тасдиқ тўғри эмас, яъни функция ҳосиласининг чегараланмаганлигидан ҳар доим ҳам функциянинг чегараланмаганлиги келиб чиқавермайди. Масалан, $f(x)=\sqrt{x}$, $0<x<a$. **17.** $1+x+\frac{1}{2}x^2+0(x^2)$. **18.** $e+ex+0(x^2)$. **19.** $-\frac{x^2}{2}+0(x^2)$. **20.** $e-\frac{e}{2}x+\frac{11}{24}ex^2-\frac{7e}{16}x^3+0(x^3)$. **21.** $1+x-x^2+\frac{3}{2}x^3+0(x^3)$. **22.** $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+0(x^2)$. **23.** $x-\frac{1}{2}x^3+0(x^3)$. **24.** $\sum_{k=0}^{n}\frac{5^k}{e\cdot k!}x^k+0(x^n)$.

25. $\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k\sin\left(3+k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}+0(x^n)$. **26.** $\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos\left(2+k\frac{\pi}{2}\right)}{2^k\cdot k!}x^k+0(x^n)$.

27. $\ln 2+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{e}{2}\right)^k x^k+0(x^n)$. **28.** $\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k+0(x^n)$.

29. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{9(\ln 3)^k}{k!}x^k+0(x^n)$. **30.** $-x+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k k}{(k-1)!}x^k+0(x^n)$. **31.** $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}2^k+1}{k}x^k+0(x^n)$. **32.** $\ln 2+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}-2^{-k}}{k}x^k+0(x^n)$. **33.** $3+\sum_{x=1}^{n}[3+k(k-1)2^{k-2}]\frac{(-1)^k}{k!}x^k+0(x^n)$. **34.** $-\sum_{k=3}^{n}x^k+0(x^n)$. **35.** $-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}x-\frac{13}{12}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k\cdot x^k+0(x^n)$. **36.** $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}-7\cdot 2^{-(k+1)}}{3}x^k+0(x^n)$. **37.** $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(x-2)^k+0((x-2)^n)$.

38. $\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k\sin\left(\frac{k\pi}{2}-1\right)}{k!}(x-1)^k+0((x-1)^n)$. **39.** $-e^{-2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-2}2^{k-1}(k-2)}{k!}(x+1)^k+0((x+1)^n)$.

40. $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k e^2\, 2^{k-2}}{k!}(k^2+3k+4)(x+1)^k+0((x+1^n))$.

41. $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{e^{-2}\, 2^{k-2}(k-5)}{(k-1)!}(x+1)^k+0((x+1)^n)$. 42. $\sum\limits_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^{k-1}\cos 1\cdot 2^{2k-1}}{(2k)!}(x+1)^{2k}+\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{\sin 1\,(-1)^k\, 2^{2k}}{(2k+1)!}(x+1)^{2k+1}+0((x+1)^n)$. 43. $\ln 2+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(-1)^{k-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^k+0\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\right)$. 44. $\frac{\ln 5}{3}+\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\frac{7}{5}\right)^k-\frac{(x-1)^k}{3k}+0((x-1)^n)$. 45. $3+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(k-2)}{k(k+1)}(x-1)^k+0((x-1)^n)$. 46. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}(1+1/3^{k+1})(x-2)^k+0((x-2)^n)$. 47. $-1/2$. 48. $1/2$. 49. $1/24$. 50. $1/2$. 51. 0. 52. -2. 53. $-e/2$. 54. 1. 55. $1/2$. 56. $1/2$. 57. $-1/2$. 58. 1. 59. $1/3$. 60. $17/21$. 61. $-\pi$. 62. $-\pi$. 63. $2+\ln 2$. 64. $1/3$. 65. $-4/3$.

VII боб

1. Функция $-\infty<x<-1$ да камаювчи, $-1<x<1$ да ўсувчи, $1<x<\infty$ да камаювчи. 2. Функция $-\infty<x<-1$ да камаювчи, $-1<x<1$ да ўсувчи; $1<x<\infty$ да камаювчи. 3. Функция ўсувчи. 4. $(-\infty, 6)$да $\nearrow$, $(6,+\infty)$да$\searrow$. 5. $(-\infty,-3/2)\cup(-1/2,+\infty)$да$\nearrow$, $(-3/2,-1/2)$да$\searrow$. 6. $(-\infty, 1/3)$да$\nearrow$, $(1/3,+\infty)$да$\searrow$. 7. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ да$\nearrow$. $(-1,0)\cup(1+\infty)$да$\searrow$ 8. $\left(\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ да $\nearrow$, $\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$ да $\searrow$ $(k=0;\pm 1,\pm 2,\ldots)$. 9. $\left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right)\cup\left(-\frac{1}{2k+1}, -\frac{1}{2k+2}\right)$ да $\nearrow$, $\left(\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1}\right)\cup\left(-\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k+1}\right)$ да $\searrow$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$. 10. $(0, 1/\sqrt{e})$ да $\searrow$, $(1/\sqrt{a}, +\infty)$ да $\nearrow$. 11. $(2k-3/4,\ 2k+\frac{1}{4})$ да $\nearrow$, $(2k+1/4,\ 2k+5/4)$ да $\searrow$ $(k\in Z)$. 12. $(-\infty, 0)\cup(2/\ln 2, +\infty)$ да $\searrow$, $(0, 2/\ln 2)$ да $\nearrow$. 13. $(-\infty,-1)\cup(0, 1)$

да $\searrow$, $(-1, 0)\cup(1,+\infty)$ да $\nearrow$. 14. $(0, n)$ да $\nearrow$, $(n, +\infty)$ да $\searrow$. 15. $(e^{-\frac{7\pi}{12}+2k\pi}, e^{\frac{13\pi}{12}+2k\pi}$ да $\nearrow$ $e^{\frac{17\pi}{12}+2k\pi}, \frac{13\pi}{12}+2k\pi)$ да $\searrow$, $(k\in Z)$. 16. $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ да $\nearrow$. 17. $(-1, -2/3)$ да $\searrow$, $(-2/5, +\infty)$ да $\nearrow$. 18. $(0, +\infty)$ да $\searrow$. 19. $(-\infty, 3)\cup(3, +\infty)$ да $\searrow$. 20. $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ да $\nearrow$, $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$ да $\searrow$, $(k\in Z)$. 21. $f'(x)$ функция (a, b) да ўсувчи бўлиши шарт эмас. Масалан, $f(x)=x+\sin x$ функция $x\in R$ да ўсувчи, лекин $f'(x)=\cos x$ ўсувчи эмас. 40. $x=0$ да $\min y=0$; $x=\pm 1$ да $\max y=1$. 41. $x=2$ да $\max y=1$; $x=1$ ва $x=3$ а $\min y=3/4$. 42. $x=0$ да $\max y=2$. 43. $x=1$ да $\max y=e^{-1}\approx 0{,}368$. 44. $x=1$ да $\min y=0$; $x=e^2\approx\approx 7{,}389$ да $\max y=\frac{4}{e^2}\approx 0{,}541$. 45. $x=1/2$ да $\max y=-4$. 46. $x=-1$ да $\max y=-2$; $x=1$ да $\min y=2$. 47. $x=+\frac{\pi}{4}+2k\pi$ да $\min y=\frac{-\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4+2k\pi}$. $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ да $\max y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}$ $k\in Z$. 48. $x=-1$ да $\max y=e^{-2}\approx 0{,}135$, $x=0$ да $\min y=0$; $x=1$ да $\max y=1$. 49. $x=\pm(1-\sqrt{2})$ да $\max y=2(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}-1}$, $x=\pm 1$ да $\min y=0$. 50. $x=\pm(1+\sqrt{5})$ да $\max y=2(\sqrt{5}+1)e^{-1-\sqrt{5}}$, $x=0$ да $\max y=4$, $x=\pm 2$ да $\min y=0$. 51. $x=1$ да $\max y=1/2$; $x=0$ да $\min y=1/e$. 52. $x=\frac{11}{4}$ да $\max y=\frac{13}{4}$; $x=3$ да бир томонли $\min y=3$. 53. $x=1$ да $\max y=\frac{\pi}{4}-1/2\ln 2\approx 0{,}439$. 54. $x=2k\pi$ да $\max y=-1$ $(k\in Z)$. 55. $x=e$ да $\min y=e^{\frac{1}{e}}$. 56. $x=e$ да $\max y=e^{\frac{1}{e}}$. 57. $x=9/2$ да $\max y=\frac{27}{16}$; $x=5$ да $\min y=0$. 58. $x=4/3$ да $\max y=\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$; $x=0$ ва $x=2$ да $\min y=0$. 59. $x=\frac{6-\pi}{4}$ да $\max y=2\sin\frac{\pi+6}{4}$; $x=3$ да $\min y=\cos 3$. 60. $x=\frac{1}{e}$ да $y=e^{\frac{1}{e^2}}$; $x=1$ да $\min y=1$. 61. Ботиқ. 62. Ботиқ. 63. Ботиқ. 64. $(-\infty, 1)$ да қавариқ; $(1, +\infty)$ да ботиқ 65. $(-\infty,$

— 1) ва $(1, +\infty)$ да қавариқ; $(-1, 1)$ да ботиқ. **66.** $\left(0, \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$ да қавариқ; $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ да ботиқ. **67.** $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ва $(1/\sqrt{2}, +\infty)$ да ботиқ; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ да қавариқ. **68.** $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ да қавариқ; $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$ да ботиқ, $k\in Z$. **69.** $\left(e^{\frac{\pi(8k-3)}{4}}, e^{\frac{\pi(8k+1)}{4}}\right)$ да ботиқ, $\left(e^{\frac{\pi(8k+1)}{4}}, e^{\frac{\pi(8k+5)}{4}}\right)$ да қавариқ **70.** $(-\infty, 1/2)$ да ботиқ; $(1/2, +\infty)$ да қавариқ. **71.** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in Z)$. **72.** $x=0$, $x=\pm 3$. **73.** $x=-1/2$. **74.** $x=\pm 1$, $x=\pm 1/\sqrt{5}$. **75.** $x=\frac{-\sqrt[3]{2}}{2}$ **76.** $x=3$. **77.** $x=2k\pi\pm\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $k\in Z$. **78.** $x=e^{8/3}$. **79.** $x=1/\sqrt{3}$; $x=-1/\sqrt{3}$. **80.** $x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$. **81.** $x=1/2$. **82.** $x=\frac{(6k+(-1)^k)\pi}{12}$ $k\in Z$. **83.** $x=0$, $x=\pm b\sqrt{3}$ **84.** Эгилиш нуқталари йўқ. **85.** $x=0$; $x=1$. **86.** Координата бошига нисбатан симметрик. Функциянинг ноллари: $x=0$ ва $x=\pm\sqrt{3}\approx 1,73$, $x=-1$ да $\min y=-2$; $x=1$ да $\max y=2$ $x=0$, $y=0$ эгилиш нуқтаси. **87.** Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(1, 0)$, $\left(\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}, 0\right)$, $(0, -3)$, $x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ да $\min y=-\frac{16\sqrt{3}}{9}-3$; $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ да $\max y=\frac{16\sqrt{3}}{9}-3$; $(0, -3)$ эгилиш нуқтаси. **88.** Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(0; 0)$, $(1; 0)$; $x=\frac{1}{4}$ да $\min y=-\frac{27}{256}$. Эгилиш нуқталари: $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{16}\right)$, $(1, 0)$. **89.** Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари. $(-2; 0)$, $(1, 0)$, $(0, 4)$; $x=-2$ ва $x=1$ да $\min y=0$; $x=-\frac{1}{2}$ да $\max y=\frac{81}{16}$. Эгилиш нуқталари: $(0, 4)$, $(-1, 4)$. **90.** Аниқланиш соҳаси: $x\neq 1$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(0, 0)$. Асимптоталари: $y=0$ ва $x=1$. $x=0$ да $\max y=0$; $x=-2$ да $\min y=-\frac{80}{27}$. Эгилиш нуқталари: $x=-2\pm\sqrt{3}$. **91.** Аниқланиш соҳаси: $x\neq 1$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(0, 0)$. Асимптота: $x=1$; $x=3/2$

да $\max y=\frac{27}{4}$. Эгилиш нуқталари: $(0, 0)$. **92.** Аниқланиш соҳаси: $x\neq -1$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(1; 0)$, $(0; 1)$. Асимптоталари: $y=0$ ва $x=-1$. $x=1$ да $\min y=0$; $x=5$ да $\max y=\frac{2}{27}$. Эгилиш нуқталари: $x=5\pm 2\sqrt{3}$. **93.** Аниқланиш соҳаси $x\neq -1$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқтаси $(0; 0)$. Асимптоталари: $y=x-3$ ва $x=-1$. $x=0$ да $\min y=0$; $x=-4$ да $\max y=-\frac{256}{27}$. **94.** Аниқланиш соҳаси: $x\neq 1$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(-1; 0)$, $(0; 1)$. Асимптоталари: $y=1$ ва $x=1$. $x=-1$ да $\min y=0$. Эгилиш нуқтаси: $\left(-4; \frac{81}{625}\right)$. **95.** Аниқланиш соҳаси: $x\neq 0$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(\sqrt[5]{8}; 0)\approx(1,52; 0)$. Асимптотаси $y=x$. $x=-2$ да $\min y=-2,5$. **96.** Координата бошига нисбатан симметрик. Экстремум йўқ. Эгилиш нуқтаси: $(0, 0)$. Асимптоталари: $x=-1$, $x=1$ ва $y=0$. **97.** Аниқланиш соҳаси: $x\neq 2$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(1; 0)$; $\left(0; -\frac{1}{16}\right)$. Асимптоталари: $y=x+3$, $x=2$. $x=6$ да $\min y=\frac{55}{44}$. Эгилиш нуқтаси $(1; 0)$. **98.** Аниқланиш соҳаси: $x\geqslant 0$. Ноллари: $x=0$ ва $x=3$. $x=1$ да $\max y=-2$; $x=0$ да чегаравий $\max y=0$. Қаварик. **99.** Функциянинг ноли $x=2$. $x=-0,5$ да $\min y=-\sqrt{5}\approx -2,24$. Эгилиш нуқталари: $x=-\frac{3\pm\sqrt{41}}{8}$. Асимптоталари: $x\to-\infty$ да $y=-1$ ва $x\to+\infty$ да $y=1$. **100.** Аниқланиш соҳаси: $x\geqslant -1$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(-1; 0)$ ва $(0; 0)$, $x=-1$; $x=0$ да $\min y=0$. $x=-\frac{4}{5}$ да $\max y=\frac{16}{25\sqrt{5}}\approx 0,29$. Эгилиш нуқтаси: $x=\frac{\sqrt{5}-5}{5}\approx -0,55$, $y=\frac{6-2\sqrt{5}}{5\sqrt[4]{5}}\approx 0,21$ **101.** Аниқланиш соҳаси: $x\geqslant -1$. $x=2/5$ да $\min y\approx\frac{-6\sqrt{15}}{125}\approx -0,19$. Эгилиш нуқтаси: $(-4/5; -4/25\sqrt{5})$. **102.** Аниқланиш соҳаси: $|x|>2$. Координата бошига нисбатан симметрик. Асимптоталари: $y=8$, $x=\pm 2$, $(-\infty, -2)$ ва $(2, +\infty)$ оралиқларда функция қатъий камаювчи. **103.** Аниқланиш соҳаси: R $(0; 0)$ — симметрия маркази. Асимптоталари: $x\to-\infty$ да $y=-\frac{x+8}{2}$ ва $x\to+\infty$ да $y=-\frac{x-8}{2}$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(0, 0)$; $(0, \pm 3\sqrt{7})$, $x=-\sqrt{3}$

да $\min y = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$; $x = \sqrt{3}$ да $\max y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Эгилиш нуқтаси: $(0, 0)$. **104**. Аниқланиш соҳаси R. $x = -4$ тўғри чизиқ симметрия ўқи. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(-6; 0)$; $(-2; 0)$; $(0; 2\cdot\sqrt[3]{18})$. $x = -6$ ва $x = -2$ да $\min y = 0$; $x = -4$ да $\max y = 2\sqrt[3]{2} \approx 2,5$. Эгилиш нуқталари: $x_{1,2} = -4 \pm 2\sqrt{3}$, $y(x_1) = y(x_2) = 4$. Функция $(x_1; -6)$; $(-6; -2)$; $(-2; x_2)$ оралиқда қаварик. **105**. Аниқланиш соҳаси: $|x| \leqslant 1$. Ординаталар ўқига нисбатан симметрик. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(-1; 0)$, $(0; 0)$, $(1; 0)$; $x = 0$ да $\min y = 0$; $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ да $\max y = 1/2$. **106**. Аниқланиш соҳаси: $x > 0$, $x = 1/2$ да $\min y = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2,60$. Қаварик Асимптоталари: $y = x + \frac{3}{2}$ ва $x = 0$. **107**. Асимптотаси: $x \to -\infty$ да $y = -x$; $x = 0$ $\min y = 1$. Ботиқ. **108**. Координата ўқлари билан кесишиш нуқтаси: $(0; 0)$. Асимптотаси: $x \to +\infty$ да $y = 0$; $x = 0,5$ да $\max y = \frac{1}{2e} \approx 0,2$. Эгилиш нуқтаси: $(1, e^{-2})$. **109**. Аниқланиш соҳаси: R. Асимптотаси: $x \to +\infty$ да $y = 0$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқтаси: $(0; 0)$. $x = 0$ да $\min y = 0$; $x = 2$ да $\max y = 4\cdot e^{-2} \approx 0,54$. Эгилиш нуқталари: $x_1 = \sqrt{3} - 1$, $y(x_1) = 0,3$; $x_2 = \sqrt{3} + 1$. $y(x_2) \approx 0,47$. (x_1, x_2) оралиқда қаварик. **110**. Аниқланиш соҳаси: $x \neq 1$. Асимптоталари: $x = 1$ ва $x \to +\infty$ да $y = 0$. $x = 0$ да $\max y = 1$. $x > 1$ да қаварик; $x < 1$ да ботиқ **111**. Аниқланиш соҳаси: $x > 0$. Асимптотаси: $x \to +0$ да $x = 0$. $x = 1$ да $\max y = 0$. Қаварик. **112**. Аниқланиш соҳаси: $x > 0$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқтаси $(1; 0)$. Асимптоталари: $x \to +\infty$ да $y = 0$ ва $x \to +0$ да $x = 0$; $x = e$ да $\max y = \frac{1}{e}$. Эгилиш нуқтаси: $(e^{3/2}; 1.5\, e^{-3/2})$. **113**. Аниқланиш соҳаси: $x > 0$; $y(+0) = 0$, $y'(+0) = 0$, координата ўқлари билан кесишиш нуқтаси $(1, 0)$ $x = \sqrt{e}$ да $\min y = -e \ln 2$. Эгилиш нуқтаси $\left(e^{-3/2}, -\frac{3}{2e^3}\right)$. **114**. Аниқланиш соҳаси: $x > 0$. $y(+0) = 0$. $y'(+0) = +\infty$. $x = \frac{1}{e^2}$ да $\max y = \frac{4}{e^2}$, ва $x = 1$ да $\min y = 0$. Эгилиш нуқтаси: $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$. **115**. Аниқланиш соҳаси: $x \neq \pm 1$. Асимптоталари: $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(\approx 0,9; 0)$; $(\approx 1.2; 0)$; $(0; 6)$, $x = 2$ да $\max y = 2 - \ln 3$. Эгилиш нуқталари: $(0.5; 4 - \ln 3)$. $(3; 1,5 - \ln 2)$. **116**. Аниқланиш соҳаси: $x \leqslant 0$

ва $x \geqslant 2$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқтаси: $(0, 0)$. Асимптоталари: $x \to +\infty$ да $y = 1$ ва $x \to -\infty$ да $y = 2x - 1$, $x \leqslant 0$ да функция $\nearrow$ ва $x \geqslant 2$ да $\searrow$. Ботиқ. **117**. Аниқланиш соҳаси: $x > 0$. Асимптотаси: $x = 0$; $(y \to +\infty)$ $x = 1$ да $\min y = 1$. Ботиқ. **118**. Функциянинг даври 2π га тенг ва координата ўқлари билан кесишиш нуқталари: $(0; 1)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$. $x = \frac{\pi}{6}$ да $\max y = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ва $x = \frac{5\pi}{6}$ да $\min y = \frac{-3\sqrt{3}}{4}$. Эгилиш нуқталари: $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$; $\left(\pi + \arcsin 1/4, \frac{-3\sqrt{15}}{16}\right)$; $\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$ $\left(2\pi - \arcsin 1/4, \frac{3\sqrt{15}}{16}\right)$. **119**. Функциянинг даври 2π га тенг, графиги координата бошига нисбатан симметрик. $x = \frac{\pi}{3}$ да $\max y = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ва $x = -\frac{\pi}{3}$ да $\min y = \frac{-3\sqrt{3}}{4}$. Эгилиш нуқталари: $(-\pi; 0)$, $\left(-\pi + \arccos\frac{1}{4}, \frac{-3\sqrt{15}}{16}\right)$, $(0, 0)$, $\left(\pi - \arccos 1/4, \frac{3\sqrt{15}}{16}\right)$, $(\pi, 0)$. **120**. Функциянинг даври 2π га тенг; $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y(\pi) = 0$ $x = \frac{\pi}{6}$ ва $x = \frac{5}{6}\pi$ да $\max y = \frac{1}{4}$; $x = \frac{\pi}{2}$ да $\min y = 0$. $x = \frac{3}{2}\pi$ да $y = -2$. Эгилиш нуқталари: $x = \arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}$, $x = \pi + \arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}$, $x = \pi - \arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8}$, $x = 2\pi - \arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8}$. **121**. Аниқланиш соҳаси: $x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$ Даври 2π га тенг. Асимптоталари: $y = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right)$ оралиқда $x = 0$ нуқтада $\max y = 1$, $x = \pi$ да $\min y = -1$. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ва $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ да $\searrow$; $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ ва $\left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$ да $\nearrow$. **122**. Координата бошига нисбатан симметрик. Асимптоталари: $y = \frac{x - \pi}{2}$, агар $x \to +\infty$ бўлса ва $y = \frac{x + \pi}{2}$ агар $x \to -\infty$ бўлса, $x = \frac{2 - \pi}{4}$ да $\max y = 1$ ва $x = \frac{\pi - 2}{4}$ да $\min y = -1$, Эгилиш нуқтаси: (0; 0). 123. Аниқланиш соҳаси: $|x|\geqslant 1$; $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ — симметрия маркази. Асимптотаси: $x\to\infty$ да $y=\frac{3x-\pi}{2}$ $x=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$ да $\max y = \frac{-6\sqrt{3}-5\pi}{6}\approx -4{,}4$ $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ да $\min y = \frac{6\sqrt{3}-\pi}{6}\approx 1{,}2$; $(-\infty, -1)$ оралиқда қавариқ. 124. Аниқланиш соҳаси R; графиги ординаталар ўқига нисбатан симметрик. Асимптотаси: $y=\pi$. $x>0$ да ↗. $y'(+0)=2$. 125. Аниқланиш соҳаси: R. Асимптоталари: $x\to-\infty$ да $y=\frac{1}{\pi}$ ва $x\to+\infty$ да $y=x$. Координата ўқлари билан кесишиш нуқтаси $\left(0; \frac{2}{\pi}\right)$. Ботиқ. 126. Аниқланиш соҳаси R; координаталар бошига нисбатан симметрик. Асимптотаси: $y=0$, $x=1$ да $\max y=\frac{\pi}{2}$; $x=-1$ да $\min y=-\frac{\pi}{2}$; $y'(1-0)=1$ $y'(1+0)=-1$. Эгилиш нуқтаси: (0; 0). 127. Даври 2π; ординаталар ўқига нисбатан симметрик. $x=0$ да $\max y=e$ ва $x=\pi$ да $\min y=\frac{1}{e}$. Эгилиш нуқталари: $x=\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ва $x=2\pi-\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 128. Асимптоталари: $x\to-\infty$ да $y=e^{\pi/2}\ x$ ва $x\to+\infty$ да $y=e^{-\pi/2}$. Функция ↘. Эгилиш нуқтаси: $\left(-\frac{1}{2}, e^{\operatorname{arctg}1/2}\right)$. 129. Аниқланиш соҳаси: $2k\pi<x<(2k+1)\pi$, $k\in Z$. Даври 2π. Асимптоталари: $x=k\pi$. $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ да $\min y=1$, $k\in Z$. 130. Аниқланиш соҳаси: $x>-1$; $x\neq 0$; $y(-0)=y(+0)=e$. Асимптоталари: $x=-1$, $y=1$ Ботиқ. 131. $-\frac{1}{3}$. 132. -2. 133. 1/3. 134. 1/6. 135. 1/2. 136. $1/6\cdot\ln a$. 137. 1. 138. 0. 139. α/β. 140. 1. 141. $\frac{(-1)^{m-n}(2m+1)}{2n+1}$. 142. 1/2. 143. 1. 144. α, β ∀, $\gamma>0$ бўлса, 0; ($\alpha<0$, β ∀, $\alpha=0$, $\beta<0$) бўлиб, $\gamma=0$ бўлса, 0; $+\infty$, агар $\gamma<0$ (α, β — ∀) ёки $\gamma=0$ ($\alpha>0$, β — ∀; $\alpha=0$, $\beta>0$) бўлса. $+\infty$; агар $\alpha=\beta=\gamma=0$ бўлса. 1. 145. Агар $a>1$ ёки $\alpha=1$, $\beta>-1$ бўлса. 0; агар $\alpha=1$, $\beta=-1$ бўлса, 1; агар $\alpha<1$ ёки $\alpha=1$, $\beta<-1$ бўлса. $+\infty$. 146. 0. 147. 0. 148. 0. 149. $\frac{\alpha-\beta}{2}$. 150. e.

151. $e^{-2/\pi}$. 152. 1. 153. 1. 154. 1. 155. 1. 156. -1. 157. $1/a$. 158. 1 159. $e^{1/3}$. 160. 0. 161. $-\frac{e}{2}$. 162. e. 163. 1. 164. 1. 165. $e^{-2/\pi}$. 166. 0. 167. $+\infty$. 168. $\frac{-2}{\pi}$. 169. 1/3. 170. 0. Агар $0<a<1$ (α — ∀) бўлса, 0; агар $a>1$ (α — ∀) бўлса. $+\infty$.

VIII боб

1. $-\sqrt{1-x^2}$. 2. $-\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}$. 3. $\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2$. 4. $\ln|\ln(\ln x)|$. 5. $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. 6. $-\arcsin\frac{1}{|x|}$ 7. $-x-2e^{-x/2}+2\ln(1+e^{x/2})$. 8. Агар $x>1$ бўлса, $\sqrt{x^2-1}-2\ln(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})$ агар $x<-1$ бўлса, $-\sqrt{x^2-1}+2\ln(\sqrt{-x+1}+\sqrt{-x-1})$. 9. $\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\sin^2x+\frac{2}{11}\sin^4x\right)\sqrt{\sin^3x}$. 10. $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ 11. $2\operatorname{sgn}x\times\ln(\sqrt{|x|}+\sqrt{|1+x|})$, $(x(x+1)>0)$. 12. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$ 13. $\frac{\ln^{101}x}{101}$. 14. $\frac{3}{2}\sqrt{1-\sin 2x}$. 15. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)$. 16. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. 17. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$ 18. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}$. 19. $\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|$. 20. $2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$. 21. $2\operatorname{arctg}e^x$. 22. $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$. 23. $-\sqrt{1+x^2}+\arcsin x$. 24. $-\frac{1}{2}\cos^2x+\frac{1}{2}\ln(1+\cos^2x)$. 25. $(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2$. 26. $-x\cos x+\sin x$. 27. $-(x+1)e^{-x}$. 28. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)(n\neq-1)$. 29. $x\arcsin x+\sqrt{1+x^2}$. 30. $-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}$. 31. $-\frac{\arcsin x}{x}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|$. 32. $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. 33. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$. 34. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\cos x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)$. 35. $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$. 36. $\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}\times$

$\times e^{ax}$. **37.** $\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}$. **38.** $\frac{2}{3}x^{3/2}\left(\ln^2 x - \frac{4}{3}\ln x + \frac{8}{9}\right)$. **39.** $\frac{e^{2x}}{8}(2 - \sin 2x - \cos 2x)$. **40.** $\frac{1+x^2}{2}(\mathrm{arctg}\,x)^2 - x\,\mathrm{arctg}\,x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. **41.** $x - \frac{1-x^2}{2}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}$. **42.** $(x^2+2)\,\mathrm{ch}\,x - 2x\,\mathrm{sh}\,x$. **43.** $-\frac{1}{2x^2}(\ln^3 x + 3/2\ln^2 x + 3/2\ln x + 3/4)$. **44.** $x\,\mathrm{tg}\,x + \ln|\cos x|$. **45.** $-x + \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) - e^{-x}\,\mathrm{arcctg}\,e^x$. **46.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right|$. **47.** $-\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$. **48.** $-\frac{5x+6}{x^2-3x+2} + 4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|$. **49.** $\frac{1}{2}\mathrm{arcctg}\,x + \frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$. **50.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **51.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. **52.** $\frac{1}{2}\mathrm{arcctg}\,x - 1/4\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$. **53.** $1/4\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x$ **54.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}$. **55.** $-\frac{1}{6(1+x)} + \frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **56.** $-\frac{1}{96(x-1)^{96}} - \frac{3}{97(x-1)^{97}} - \frac{3}{98(x-1)^{98}} - \frac{1}{99(x-1)^{99}}$. **57.** $\frac{1}{7}\ln\frac{|x^7|}{(1+x^7)^2}$. **58.** $\frac{x^4}{4} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^4+1}{(x^4+2)^4}$. **59.** $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x + \frac{1}{6}\mathrm{arctg}\,x^3$. **60.** $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]$.

61. $2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x})$. **64.** $6t - 3t^2 - 2t^3 + \frac{3}{2}t^4 + \frac{6}{5}t^5 - \frac{6}{7}t^7 + 3\ln(1+t^2) - 6\,\mathrm{arctg}\,t$, бунда $t = \sqrt[6]{x+1}$ **65.** $\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2} - \frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}$. **66.** $\frac{x^2}{2} - \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$. **67.** $\frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 - 3/4\ln|t-1| + \frac{15}{8}\ln(t^2+t+2) - \frac{27}{8\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}}$, бунда $t = \sqrt[3]{2+x}$. **68.** $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$. **69.** $-\frac{at^3}{1+t^4} + \frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{1+t\sqrt{2}+t^2}{1-t\sqrt{2}+t^2} + \frac{a}{2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{1-t^2}{t\sqrt{2}}$, бунда $t = \sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}$. **70.** $\frac{x}{2} + \sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{(x(1+x))} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x})$. **71.** $-\frac{3-2x}{4}\sqrt{1+x+x^2} - \frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{2} + x + \sqrt{1+x+x^2}\right)$. **72.** $-\ln\left|\frac{2-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|$. **73.** $\frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2}$. **74.** $R + \ln(x+1+R) - \sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2}R}{x}\right|$, бунда $R = \sqrt{x^2+2x+2}$. **75.** $\arcsin\frac{1+2x}{\sqrt{5}} + \ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|$. **76.** $-\frac{1}{2x^2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}\right)$. **77.** $-\frac{19+5x+2x^2}{6}\times\sqrt{1+2x-x^2} - 4\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}}$. **78.** $\frac{2x^2+1}{3x^3}\cdot\sqrt{x^2-1}$. **79.** $\left(\frac{x^2}{3} - \frac{14x}{3} + 37\right)\cdot\sqrt{x^2+4x+3} - 66\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}|$. **80.** $\frac{3x+5}{8(x+1)^2}\cdot\sqrt{x^2+2x} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|}$, бунда $x < -2$ ёки $x > 0$. **81.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-3}{|x-1|\cdot\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|$. **82.** $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$. **83.** $\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|$. **84.** $\ln(x+\sqrt{x^2+2}) - \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$. **85.** $\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right|$. **86.** $\frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}$. **87.** $\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(x+1)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(x+1)} - \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}$. **88.** $\frac{3}{2(2z+1)} + \frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|2z+1|^3}$, бунда $z = x+\sqrt{x^2+x+1}$. **89.** $\ln\left|\frac{z-1}{z}\right| - 2\,\mathrm{arctg}\,z$, бунда $z = \frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$. **90.** $-\frac{5}{18(z+1)} - \frac{1}{6(z+1)^2} + \frac{3}{4}\ln|z-1| - \frac{16}{27}\ln|z-2| - \frac{17}{108}\ln|z+1|$, бунда $z = \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$. **91.** $\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{3}[(z-1)^3 + (z-1)^{-3}] + [(z-1)^2 - (z-1)^{-2}] + [(z-1) + (z-1)^{-1}]\right\} + \frac{1}{2}\ln|z-1|$, бунда $z = x + \sqrt{x^2-2x+2}$. **92.** $\frac{2(3-4z)}{5(1-z-z^2)} + \frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1+2z}{\sqrt{5}-1-2z}\right|$, бунда $z = -x+\sqrt{x(1+x)}$. **93.** $\left(\frac{x^5}{6} - \frac{5x^3}{24} + \frac{5x}{16}\right)\sqrt{x^2+1} - \frac{5}{16}\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. **94.** $\ln\frac{x}{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}$.

95. $\left(\frac{x^3}{4}-\frac{7x^2}{6}+\frac{95x}{24}-\frac{145}{12}\right)\sqrt{x^2+4x+5}-\frac{5}{16}\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. 96. $\frac{1}{8}\left(x^7+\frac{7x^5}{6}+\frac{35x^3}{24}+\frac{35}{16}x\right)\sqrt{x^2-1}+\frac{35}{128}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$. 97. $\frac{3x-1}{2x^2}\sqrt{2x^2+2x+1}-\frac{1}{2}\ln\frac{x+1+\sqrt{2x^2+2x+1}}{x}$. 9 . $\frac{x+2}{3\sqrt{x^2+4x+7}}$.

99. $\frac{8(2x+1)}{9\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{2}{27}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)^3$. 100. $\frac{1}{\sqrt{14}}\ln\frac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{6x^2+10}+\sqrt{7}}$.

101. $\frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}$. 102. $2\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2(x^2+x+1)}}{1-x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+x+\sqrt{2(x^2+x+1)}}{1+x-\sqrt{2(x^2+x+1)}}\right|$. 103. $\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3(x^2+x+1)}-\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{x^2-x+1}}\right|+\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{2}(1-x)}$. 104. $\sqrt{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right)-\ln\frac{2-x+2\sqrt{x^2-x+1}}{x}$. 105. $\sqrt{1+x+x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2}$. 106. $2\cdot\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x}+\ln|2\sqrt{1+x+x^2}+1+2x|$. 107. $6x^{1/6}+3x^{1/3}+2x^{1/2}+6\ln|x^{1/6}-1|$.

108. $6/5\,x^{5/6}-4x^{1/2}+18x^{1/6}+3x^{1/6}(1+x^{1/3})^{-1}-21\,\mathrm{arctg}\,(x^{1/6})$.

109. $-\frac{3}{2}(1+x^{1/3})^{-2}$. 110. $\frac{4}{9}(1+x^{1/4})^{-9}$. 111. $\frac{3}{11}(x+1)^{11/3}-3/4\cdot(x+1)^{1/3}+\frac{3}{5}(x+1)^{5/3}$. 112. $\frac{12}{13}(1+x^{1/4})^{13/3}-\frac{18}{5}(1+x^{1/4})^{10/3}+\frac{36}{7}(1+x^{1/4})^{7/3}-3(1+x^{1/4})^{4/3}$. 113. $\frac{12}{7}(1+x^{1/4})^{7/3}-3(1+x^{1/4})^{4/3}$. 114. $\frac{6}{7}(1+x^{1/3})^{7/2}-\frac{18}{5}(1+x^{1/3})^{5/2}+6x^{1/3}(1+x^{1/3})^{1/2}$. 115. $\frac{1}{6}\ln\frac{t-1}{t+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{t^2-t+1}{t^2+t+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$, бунда $t=\sqrt[6]{x^6+1}$. 116. $\frac{3}{5}(1+x^{2/3})^{5/2}+(1-2x^{2/3})(1+x^{2/3})^{1/2}$. 117. $-\frac{3x^3+4}{8x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}$. 118. $-\frac{\sqrt[3]{(2-x^3)^2}}{4x^2}$. 119. $\frac{t}{2(t^3+1)}-\frac{1}{12}\ln\frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$, бунда $t=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}$.

121. $\frac{5}{16}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x$. 122. $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}$.

123. $-\frac{\cos 2x}{64}+\frac{\cos^3 2x}{96}-\frac{\cos^5 2x}{320}$. 124. $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}$. 125. $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. 126. $-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right|$. 127. $\mathrm{tg}\,x-\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3}$. 128. $-\frac{\mathrm{ctg}^3 x}{3}-\mathrm{ctg}\,x$. 129. $-8\,\mathrm{ctg}\,2x-\frac{8}{3}\mathrm{ctg}^3\,2x$. 130. $\frac{\mathrm{tg}^4 x}{4}+\frac{3\mathrm{tg}^2 x}{2}-\frac{\mathrm{ctg}^2 x}{2}+3\ln|\mathrm{tg}\,x|$. 131. $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3\cos^3 x}+\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|$.

132. $-2\sqrt{\mathrm{ctg}\,x}+\frac{2}{3}\sqrt{\mathrm{tg}^3 x}$. 133. $\frac{1}{4}\ln\frac{(z^2+1)^2}{z^4-z^2+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{arctg}\frac{2z^2-1}{\sqrt{3}}$, бунда $z=\sqrt[3]{\mathrm{tg}x}$. 134. $\frac{\sin 5x}{10}+\frac{\sin 3x}{6}$. 135. $\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 6x}{12}$. 136. $-\frac{\sin(x+1)}{4}+\frac{\sin(3x+1)}{6}-\frac{\sin(5x+1)}{20}$. 137. $\frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{16}+\frac{\sin 4x}{16}+\frac{\sin 6x}{24}+\frac{\sin 10x}{80}$. 138. $\frac{\mathrm{sh}\,8x}{16}-\frac{\mathrm{sh}\,6x}{12}$. 139. $\frac{2}{\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^4 x}$.

140. $\frac{1}{8}\ln(\mathrm{tg}\,x\cdot\mathrm{tg}\,2x)$. 141. $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}$. 142. $\sin x\cdot\cos^2 x+\frac{2\sin^5 x}{5}$. 143. $\frac{\sin^8 2x}{16}-\frac{\sin^{10} 2x}{10}+\frac{\sin^{12} 2x}{24}$. 144. $\frac{2}{5}\mathrm{ch}^5 x-\mathrm{ch}^3 x+\mathrm{ch}\,x$. 145. $\frac{1}{6(3\cos x-1)^2}$.

146. $\frac{\cos x}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{1-\sqrt{2}\cos x}{1+\sqrt{2}\cos x}\right|$. 147. $\frac{1}{4}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+\frac{1}{2(1+\cos x)}$.

148. $\frac{1}{4}\ln(3+4\sin^2 x)$. 149. $\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}-2\,\mathrm{arctg}(\sin x)$. 150. $\frac{x+3\ln|\sin x-3\cos x|}{10}$. 151. $\ln|\sin x+\cos x|$. 152. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}x+1+\sqrt{2}}{\mathrm{tg}x+1-\sqrt{2}}\right|$.

153. $\frac{1}{\sqrt{30}}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\mathrm{tg}\,x\right)$. 154. $\frac{1}{2\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\mathrm{tg}x+3-\sqrt{13}}{2\mathrm{tg}x+3+\sqrt{13}}\right|$.

155. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\mathrm{th}\,x-2}{\mathrm{th}\,x+2}\right|$. 156. $\frac{1}{68}(17\ln|\sin x|-\ln|\sin x+4\cos x|-4x)$.

157. $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,2x}{\sqrt{2}}\right)$. 159. $\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\left(\frac{3\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}\right)$. 160. $-\frac{1}{5}(2\sin x+\cos x)+\frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\mathrm{arctg}\,2}{2}\right)\right|$. 161. $\frac{1}{ab}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{a\,\mathrm{tg}\,x}{b}\right)$.

162. $-\dfrac{\cos x}{a(a\sin x+b\cos x)}$. 163. $\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-5}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-3}\right|$. 164. $\dfrac{2}{5}x-\dfrac{1}{5}\ln|4\cos x+3\sin x-2|+\dfrac{4}{5\sqrt{21}}\ln\left|\dfrac{2\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{3}-\sqrt{7}}\right|$. 165. $(\cos 2a)\cdot x-2(\sin 2a)\cdot\ln\left|\sin\left(\dfrac{x+a}{2}\right)\right|-2(\sin^2 a)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{x+a}{2}\right)$. 166. $\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\ln(\cos x+\sin x+\sqrt{2})-\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)$. 167. $\dfrac{3}{5}x-\dfrac{4}{5}\ln|2\cos x-\sin x-3|+\dfrac{6}{5}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{5\operatorname{tg}(x/2)+1}{2}\right)$. 168. $\dfrac{1}{8}\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|$. 169. $\dfrac{1}{6}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|+\dfrac{5}{6}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)-3\right|-\dfrac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)-1\right|$. 170. $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}(x/2)}+\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}(x/2)}\right|$. 171. $-\dfrac{3}{80}(\cos x)^{4/3}\cdot(20-16\cos^2 x+5\cos^4 x)$. 172. $\dfrac{2\sin x-\cos x}{10(\sin x+2\cos x)^2}+\dfrac{1}{10\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\operatorname{arctg}2}{2}\right)\right|$. 173. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin^2 x}}{|\cos x|}\right)$. 174. $-\dfrac{\varepsilon\sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos x)}+\dfrac{2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$. 175. $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\cos x}{\sqrt{3}}\right)-\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{2+\sin x}{2-\sin x}\right)$. 176. $J_n=\dfrac{\cos x(\sin x)^{n-1}}{n}+\dfrac{n-1}{n}J_{n-2}$. 177. $K_n=\dfrac{\sin x(\cos x)^{n-1}}{n}+\dfrac{n-1}{n}K_{n-2}$. 178. $J_n=-\dfrac{\cos x}{(n-1)(\sin x)^{n-1}}+\dfrac{n-2}{n-1}J_{n-2}$. 179. $K_n=\dfrac{\sin x}{(n-1)(\cos x)^{n-1}}+\dfrac{n-2}{n-1}K_{n-2}$. 180. $J_{n,m}=\dfrac{(\sin x)^{n+1}(\cos x)^{m-1}}{n+m}+\dfrac{m-1}{n+m}J_{n,m-2}$. 181. $\dfrac{e^{ax}}{4}\left[\dfrac{3(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}-\dfrac{a\sin 3bx-3b\cos bx}{a^2+9b^2}\right]$. 182. $\dfrac{e^x}{2}[x^2\cdot(\sin x+\cos x)-2x\sin x+(\sin x-\cos x)]$. 183. $x-3\ln\{(1+e^{x/6})\sqrt{1+e^{x/3}}\}-3\operatorname{arctg}e^{x/6}$. 184. $\ln(e^x-1)$. 185. $x[\ln^n x-n\ln^{n-1}x+(n-1)n\ln^{n-2}x+\ldots+(-1)^{n-1}n(n-1)\ldots2\ln x+(-1)^n n!]$. 186. $\dfrac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}-\ln\sqrt{1-x^2}$.

187. $x-\operatorname{arctg}x+\left(\dfrac{1+x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\dfrac{x}{2}\right)\cdot[\ln(1+x^2)-1]$. 188. $-\dfrac{\operatorname{sgn}x}{2}\sqrt{x^2-1}+\dfrac{x^2}{2}\arccos\dfrac{1}{x}$. 189. $-\ln\sqrt{1+x^2}+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. 190. $-x^2+\dfrac{x^2}{2}\ln(4+x^4)+2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$. 191. $-\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\dfrac{1}{2}(\arcsin x)^2+\ln|x|$ $(0<|x|<1)$. 192. $-\dfrac{x^2+7}{9}\sqrt{x^2+1}+\dfrac{(x^2+1)^{3/2}}{3}\cdot\ln\sqrt{x^2-1}-\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$; $(|x|>1)$. 193. $a(x\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|-\ln|x^2-1|)+\dfrac{a+b}{4}\cdot\ln^2\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|$. 194. $-\dfrac{6x+x^3}{9}-\dfrac{2+x^2}{9}\cdot\sqrt{1-x^2}\arccos x$, $(|x|<1)$. 195. $-\dfrac{x^2}{6}-\left(x-\dfrac{x^3}{3}\right)\operatorname{arctg}x+\dfrac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+\dfrac{2}{3}\ln(1+x^2)$. 196. $-2\ln(\operatorname{th}x+\sqrt{1+\operatorname{th}^2x})+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\ln\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{th}^2x}+\sqrt{2}\operatorname{th}x}{\sqrt{1+\operatorname{th}^2x}-\sqrt{2}\operatorname{th}x}$. 197. $\dfrac{x^2|x|}{3}$. 198. $\dfrac{2x^2}{3}(x+|x|)$. 199. Агар $|x|\leqslant 1$ бўлса, x, агар $|x|>1$ бўлса, $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{3}\operatorname{sgn}x$. 200. $\dfrac{(1+x)|1+x|}{2}+\dfrac{(1-x)|1-x|}{2}$. 201. $\dfrac{3x+5}{8(x+1)^2}\cdot\sqrt{x^2+2x}-\dfrac{3}{8}\arcsin\dfrac{1}{|x+1|}$, бунда $x<-2$ ёки $x>0$. 202. $6\sqrt[6]{x}-12\operatorname{arctg}(\sqrt[6]{x}/2)$. 203. $\dfrac{x}{2\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|$. 204. $(3t^2-1)/(6t^3)$, бунда $t=(1-\sqrt{1-x^2})/x$. 205. $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{2}x}{\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{2}x}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x^4+1}{2x^2}}$. 206. $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt[4]{1+2x^4}+x}{\sqrt[4]{1+2x^4}-x}-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt[4]{1+2x^4}}{x}$. 207. $\dfrac{1}{8}(\cos 2x-\sin 2x-2)e^{-2x}$. 208. $\ln|x|/\sqrt{x^2-1})+\arcsin(1/x)$. 209. $\dfrac{1}{2na^{2n-1}}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+$

$$\sum_{k=1}^{n-2}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}\ln\left(x^2-2ax\cos\frac{k\pi}{n}+a^2\right)-2\sin\frac{k\pi}{n}\operatorname{arctg}\frac{x-a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{a\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right).$$

210. Агар $a^2<b^2$ бўлса, $\frac{1}{|a|\sqrt{b^2-a^2}}\cdot\ln\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{|\sqrt{b^2-a^2}\cdot x+|a|\sqrt{b^2-x^2}|}$; агар $a^2=b^2$ бўлса, $-\frac{x}{b^2\sqrt{b^2-x^2}}$, агар $a^2>b^2$ бўлса, $\frac{1}{|a|\sqrt{a^2-b^2}}\arccos\frac{\sqrt{a^2-b^2}\,x}{|b|\sqrt{a^2-x^2}}$. 211. Агар $a\neq\pm1$ бўлса, $\frac{2}{a^2-1}\operatorname{arctg}\left(\frac{a-1}{a+1}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$ $a=1$, $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. агар $a=-1$; $|x|<\pi$ бўлса, $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. 213. Агар $ab>0$ бўлса, $\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}e^x\right)$; агар $ab<0$ бўлса, $\frac{1}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{b+\sqrt{-ab}e^x}{b-\sqrt{-ab}e^x}\right|$. 214. Агар $a>0$ бўлса, $\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{\sqrt{a+be^x}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+be^x}+\sqrt{a}}$ агар $a<0$ бўлса, $\frac{2}{\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a+be^x}}{\sqrt{-a}}$. 215. Агар $a>0$ бўлса, $x\ln|x^2+a|-2x+2\sqrt{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{a}}$, агар $a\leqslant 0$ бўлса, $x\ln|x^2+a|-2x+\sqrt{-a}\ln\left|\frac{x+\sqrt{-a}}{x-\sqrt{-a}}\right|$. 216. $2(\ln x-2)\sqrt{x+a}+2\sqrt{a}\ln\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}$, $a\geqslant 0$. $2(\ln x-2)\sqrt{x+a}+4\sqrt{-a}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{-a}}$, $a<0$. 217. $-\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+a})}{x}+\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{a}}{|x|}$, $a>0$. $\frac{-\ln|x+\sqrt{x^2+a}|}{x}+\frac{1}{\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{-a}}$ $a<0$; $-\frac{1+\ln(2x)}{x}$; $a=0$. 218. $x^a\ln^b x$. 219. $(\ln x)\sin(\ln x)+\cos(\ln x)$. 220. $(\sin x)\operatorname{arctg}(\sin x)-\frac{1}{2}\ln(1+\sin^2 x)$.

IX боб

4. а) 1; б) $\frac{b^4-a^4}{4}$; в) $\frac{2}{3}(b^{3/2}-a^{3/2})$; г) $\ln\frac{b}{a}$; д) $\frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1})$. 11. $g(x)$ — функция сифатида 7-мисолдаги Риман функцияси, $f(x)$ функция сифатида эса $f(x)=\begin{cases}\text{агар } x=0 \text{ бўлса, } 0,\\ \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса, } 1\end{cases}$ функция қаралсин. 16. $\frac{\pi}{3}$. 17. $\frac{\pi}{6}$. 18. 1. 19. $\frac{\pi}{2\sin\alpha}$. 20. 1. 21. 45/4. 22. $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$. 23. $\frac{\pi}{2|ab|}$. 24. $\frac{\pi}{12}$. 25. $\ln\frac{3}{2}$. 26. π. 27. $\frac{1}{3}(2-3\operatorname{ch}2+\operatorname{ch}^3 2)$.

28. $\frac{1}{6}\ln\left(\frac{2}{5}\right)$. 29. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 30. $\frac{1}{2}(e-e^{1/4})$. 31. $\frac{\pi}{4}$. 32. $\operatorname{arctg}e-\frac{\pi}{4}$. 33. $\frac{\pi}{6}+\frac{8\sqrt{3}}{27}$. 34. $2\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$. 35. $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$. 36. $4-2\ln 3$. 37. $\sin 1$. 38. $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$. 39. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 40. $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}$. 41. $2\ln 2-\frac{3}{4}$. 42. $\frac{e(\sin 1-\cos 1)}{2}$. 43. $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$. 44. $\frac{(e^{\pi}-2)}{5}$. 45. 0. 46. 0. 47. 0. 48. 0. 49. $\frac{\pi}{16}$. 50. $\frac{e^4-1}{2}$. 51. 4π. 52. $\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}+1$. 53. $2(\sqrt{2}-1)$. 54. $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{6}}\right)/\sqrt{2}$. 55. $-\frac{468}{7}$. 56. $\frac{29}{270}$. 57. 1/6. 58. $\frac{3}{5}(e^{\pi}-1)$. 59. $\frac{n^{n+1}}{n+1}\ln n-\frac{n^{n+1}-1}{(n+1)^2}$. 60. $\frac{8191}{26}$. 61. $2(1-e^{-1})$. 62. $\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$. 63. $\frac{3}{2}e^{5/2}$. 64. $200\sqrt{2}$. 65. $(-1)^n\left[\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)\right]$. 66. $I_n=\frac{1}{2^{n-1}}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n-1}+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)I_{n-2}$, $n>2$. 79. -1. 80. $14-\ln(7!)$. 81. $-\operatorname{th}\frac{\pi}{2}$. 82. $\ln(n!)$. 86. 1/2. 87. 16. 83. ln 2. 89. $\pi/4$. 50. $\frac{2}{\pi}$. 91. $\frac{\pi}{6}$ 92. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$. 93. $1/e$. 94. $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. 95. $\frac{5}{6}\pi$. 96. $x+\frac{1}{2}$. 97. $\frac{1}{\ln 2}$. 98. 1. 99. $\frac{\pi^2}{4}$. 100. 0. 101. Иккинчиси. 102. Биринчиси. 103. Иккинчиси. 104. Биринчиси. 105. Биринчиси. 106. Иккинчиси. 107. 1/3. 108. $6\frac{2}{3}$. 109. 10. 110. $\frac{1}{2}\cos\varphi$.

X боб

1. $a\ln\frac{a+b}{a-b}-b$. 2. $\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)$. 3. $\frac{e^2+1}{4}$. 4. $a\ln\frac{a}{b}$. 5. $2(1+\ln 1{,}5)$. 6. ln 3. 7. $\ln(2+\sqrt{3})$. 8. $a\ln(a/x_0)$. 9. $1/\sqrt{2}$. 10. $\sqrt{3}(2-\sqrt{x_0}-\sqrt{x_0^3})$. 11. 10,8. 12. sh 2a. 13. $\ln\left(\frac{\operatorname{sh}b}{\operatorname{sh}a}\right)$. 14. 14,3. 15. $2\pi^2 a$. 16. $2\left(\operatorname{ch}\frac{T}{2}\sqrt{\operatorname{ch}T}-1\right)-\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{T}{2}+\sqrt{\operatorname{ch}T}}{1+\sqrt{2}}$. 17. $\frac{1}{2}(\operatorname{ch}^{3/2}2T-1)$.

18. t_2-t_1. **19.** $\mathrm{sh}^2 t_0$. **20.** $-a\ln\sin t_0$. **21.** $\frac{\pi^3}{3}$. **22.** $1+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})$. **23.** $(2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5}))/4$. **24.** $2a\left(5+\frac{5}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right)$. **25.** t_0. **26.** $\ln t_0$. **27.** $a\sqrt{1+m^2}/m$. **28.** $p[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. **29.** $a(2\pi-\mathrm{th}\,\pi)$. **30.** $2+\frac{1}{2}\ln 3$. **31.** $6\frac{1}{3}$. **32.** $\mathrm{sh}\,R$. **33.** T. **34.** $8(2-\sqrt{3})$. **35.** $2a$. **36.** $8a(5\sqrt{5}-1)/3$. **37.** $1423\,a/15$. **38.** $\pi(b-a)/2$. **39.** $134/27$. **40.** $(3\sqrt{3}-1)$. **41.** 8. **42.** $\frac{a}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)+a$. **43.** $4aE\left(\frac{\pi}{2},\ e\right)=4a\,E(e)$, $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, бу ерда E эллиптик интеграл. **44.** $4/3\sqrt{3}$. **45.** 8. **46.** $a/\sqrt{3}$. **47.** $1+\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$. **48.** $3\pi a/2$. **49.** $16a/3$. **50.** $15\pi a/8$. **51.** 1) $2a\cdot\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}$, $n=2k$. 2) $\pi a\cdot\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}$, $n=2k+1$. **52.** $a^2/3$. **53.** 4,5. **54.** $2-\frac{1}{\ln 2}\approx 0{,}56$. **55.** $\frac{1}{3}+\frac{2}{\pi}\approx 0{,}97$. **56.** $\pi/2$. **57.** $\frac{1}{2}\,\mathrm{cth}\,\frac{\pi}{2}\approx 0{,}546$. **58.** $1+\frac{\pi^2}{8}$. **59.** $\sqrt{2}-1$. **60.** $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{8}$. **61.** $\ln 4-2e^{-1}$. **62.** $6\ln 2-2{,}5$. **63.** $1-e^{-a^2}(1+a^2)$. **64.** $\pi/2-\frac{1}{3}$. **65.** $(1-\ln 2)/\ln 2$. **66.** $\frac{20}{9}-\ln 3$. **67.** $\log_4 e-1/4$. **68.** $\frac{16}{3}+2\pi$. **69.** $(\alpha-1)/(\alpha+1)$ **70.** $\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}+\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. **71.** $\frac{a^2}{3}(4\pi^2+3\pi)$. **72.** $8/15$. **73.** $\pi a^2\left(\frac{16}{\sqrt{3}}-9\right)$. **74.** πab. **75.** $3\pi a^2/2$. **76.** $a^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\right)$. **77.** $4a^2/3$. **78.** a^2. **75.** $\frac{p^2}{6}(3+4\sqrt{2})$. **80.** 11π. **81.** $1/\pi$. **82.** $2/3$. **83.** $1/\pi$. **84.** $\pi\left(1+\frac{\pi^2}{6}\right)$. **85.** $17\pi/4$. **86.** $a^2\arcsin\frac{b}{a}-b\sqrt{a^2-b^2}$. **87.** $\pi(a^2+2b^2)/2$. **88.** $a^2(3\pi+4)/12$. **89.** $6a^2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{b}{a-b}}-2(2b+3a)\sqrt{b(a-b)}$. **90.** a^2. **91.** $2a\sqrt{\pi^2a^2+4b^2}+\frac{8b^2}{\pi}\ln\frac{\pi a+\sqrt{\pi^2a^2+4b^2}}{2b}$. **92.** $\pi\left[(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\ln\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\right]$. **93.** $\pi\left(\sqrt{2}-e^{-a}\sqrt{1+e^{-2a}}-\ln\frac{e^{-a}+\sqrt{1+e^{-2a}}}{1+\sqrt{2}}\right)$. **94.** $\left(\frac{\pi a^2}{8}\right)\cdot\left(3\ln(\sqrt{2}+1)+7\sqrt{2}\right)$. **95.** $\pi(-5-9\ln 2+16\ln 3)/6$. **96.** $\frac{\pi a^2}{6}(11-a\sqrt{3}+2\pi(2\sqrt{3}-1))$. **97.** $\pi(\mathrm{sh}\,4-4e^{-2})/8$. **98.** $\pi(11\sqrt{2}+7\ln(\sqrt{2}+1))/8$. **99.** $2\pi(2\sqrt{2}-1)/3$. **100.** $2\pi a\left(a+b\,\mathrm{sh}\,\frac{b}{a}-a\,\mathrm{ch}\,\frac{b}{a}\right)$. **101.** 1) $\frac{64}{3}\pi a^2$; 2) $16\pi^2a^2$; 3) $\frac{32}{3}\pi a^2$. **102.** $128\pi a^2/5$. **103.** $\frac{15\pi}{8}(4+\ln 5)$. **104.** $59{,}2\,\pi$. **105.** πpa^2. **106.** $\pi a^3/2$. **107.** $3\pi ab^2/7$. **108.** $\pi^2/4$. **109.** $\frac{\pi}{4}(1-e^{-2a}(1+2a))$. **110.** $\pi(2-5/e)$. **111.** $\frac{\pi^3}{2}$. **112.** $\frac{\pi^3\,\mathrm{sh}\,a}{2a(\pi^2+a^2)}e^{(2n-1)a}$. **113.** $4/3\,\pi ab^2$. **114.** $(2\pi b^2/3a^2)n(n^2+3a^2)$. **115.** 4π. **116.** $\pi^2(4\pi^2-15)/24$. **117.** $\frac{12\pi pq}{5}\sqrt[3]{pq^2}$. **118.** $\pi/(5(1-e^{-2\pi}))$. **119.** $4\pi(2+9\ln 3)$. **120.** $\frac{\pi^3}{2}+\frac{3\pi^2}{8}$. **121.** $5\pi^2a^3$. **122.** $\frac{32}{105}\pi ab^2$. **123.** $\pi a^3(6\ln 2-4)/3$. **124.** $(26\sqrt{2}+16)\pi a^3/105$. **125.** $8\pi a^2(3\ln 2-2)/3$. **126.** $(\pi a^3/24)(24\ln 4-1)$.

XI боб

1. 3/2. **2.** 1. **3.** 1/4. **4.** 1/18. **5.** 1/60. **6.** 5/36. **7.** $-1/36$. **8.** $-\ln 3$. **9.** $\ln 2/3$. **10.** 3/4. **11.** $\sin^2\frac{\alpha}{2}$. **12.** 1. **13.** $1/2\sin 2$. **14.** $\pi/4$. **15.** 1/8.

25. Яқинлашувчи. **26.** Яқинлашувчи. **27.** Узоқлашувчи. **28.** Яқинлашувчи. **29.** Узоқлашувчи. **30.** Яқинлашувчи. **31.** Яқинлашувчи. **32.** Яқинлашувчи. **33.** Узоқлашувчи. **34.** Яқинлашувчи. **35.** Яқинлашувчи. **37.** Яқинлашувчи. **38.** Яқинлашувчи. **39.** Яқинлашувчи. **40.** $0<a<1$ да яқинлашувчи, $a\geqslant 1$ да узоқлашувчи. **41.** Узоқлашувчи. **42.** Яқинлашувчи. **43.** Яқинлашувчи. **44.** Яқинлашувчи. **45.** Яқинлашувчи. **46.** Яқинлашувчи. **47.** $a<e$ да яқинлашувчи, $a>e$ да узоқлашувчи. **48.** Узоқлашувчи. **49.** Узоқлашувчи. **50.** Яқинлашувчи. **51.** Узоқлашувчи. **52.** Яқинлашувчи. **53.** $\frac{p}{2}+q>1$ да яқинлашувчи. **54.** $p>3/2$ да яқинлашувчи. **55.** Узоқлашувчи. **56.** Узоқлашувчи. **57.** Яқинлашувчи. **58.** $q>p$ да яқинлашувчи. **59.** $\alpha(q-p)>1$ да яқинлашувчи. **60.** $p>1$ да яқинлашувчи. **61.** $\div q$, $p>1$ да яқинлашувчи, $p=1$, $q>1$ да яқинлашувчи. **62.** $\alpha>\frac{1}{2}$ да яқинлашувчи. **63.** Узоқлашувчи. **64.** Узоқлашувчи. **65.** Яқинлашувчи. **66.** Яқинлашувчи. **67.** Яқинлашувчи. **68.** $\alpha<-1$ да яқинлашувчи. **69.** Яқинлашувчи. **70.** Узоқлашувчи. **71.** Яқинлашувчи. **72.** Яқинлашувчи. **73.** Яқинлашувчи. **74.** Яқинлашувчи. **75.** Узоқлашувчи. **76.** $\alpha>2$ да яқинлашувчи. $\alpha\leqslant 2$ да узоқлашувчи. **77.** Узоқлашувчи. **78.** Яқинлашувчи. **79.** Яқинлашувчи. **80.** Яқинлашувчи. **81.** Яқинлашувчи. **82.** Яқинлашувчи. **111.** Яқинлашувчи. 112. Яқинлашувчи. 113. Яқинлашувчи. 114. Узоқлашувчи. 115. Яқинлашувчи. 116. Яқинлашувчи. 117. Яқинлашувчи. 118. Яқинлашувчи. 119. Яқинлашувчи. 120. Яқинлашувчи. 121. Узоқлашувчи. 122. Яқинлашувчи. 123. Яқинлашувчи. 124. Яқинлашувчи. 125. Узоқлашувчи. 126. Узоқлашувчи. 127. Яқинлашувчи. 128. $p > 1$ да абсолют яқинлашувчи, $0 < p \leqslant 1$ да шартли яқинлашувчи. 129. $p > 1$ да абсолют яқинлашувчи, $0 < p \leqslant 1$ да шартли яқинлашувчи. 130. $p > 1$ да абсолют яқинлашувчи, $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$ да шартли яқинлашувчи. 131. $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$ да абсолют яқинлашувчи. $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ да шартли яқинлашувчи. 132. $p > 1$ да абсолют яқинлашувчи, $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$ да шартли яқинлашувчи. 133. Шартли яқинлашувчи. 134. Абсолют яқинлашувчи. 135. Узоқлашувчи. 136. $p > 2$ да абсолют яқинлашувчи, $0 < p \leqslant 2$ да шартли яқинлашувчи. 137. Шартли яқинлашувчи.

АДАБИЁТЛАР

1. Азларов Т. А., Мансуров Х. Математик анализ, I-қисм,— Т., «Ўқитувчи», 1986.

2. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.— М.: Наука, 1977 ва бошқа йиллардаги нашрлари.

3. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. Л. Д. Кудрявцев таҳрири остида.— М.: Наука, 1984.

4. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Интегралы. Ряды. Л. Д. Кудрявцев таҳрири остида.— М., Наука, 1986.

5. Ю. С. Богданов, О. А. Кастрица. Начала анализа в задачах и упражнениях. Минск. Высшая школа. 1988.

6. Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. Задачи по математике. Начала анализа.— М.: Наука, 1990.

МУНДАРИЖА

3 Minnizeh. Neko you sha,
Sen crane, pe cek
Shall cum in mink.
II Wai ist lokind ft him
peter ~~Ott~~ sit
~~B~~tiny

На узбекском языке

Азимбой Саъдуллаев, Ҳожиакбар Мансуров,
Гулмирза Худойберганов, Азизжон Ворисов, Рустам Ғуломов

СБОРНИК ПРИМЕРОВ И ЗАДАЧ ПО КУРСУ «МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА»

I

Учебное пособие для студентов университетов

Издательство «Ўзбекистон»—1993, 700129, Ташкент, Навоий, 30

Муҳаррир *И. Аҳмаджонов*
Муқова рассоми *Д. Собирова*
Бадиий муҳаррир *И. Кученкова*
Техн. муҳаррир *А. Бахтияров*
Мусаҳҳиҳ *М. Раҳимбекова*

Теришга берилди 17.11.92. Босишга руҳсат этилди 16.09.93. Формати $84\times108/_{32}$. Босма қоғозига «Литературная» гарнитурада юқори босма усулида босилди. Шартли б. т. 16,8. Нашр т. 17.06. Нусхаси 15000. Буюртма № 438. Баҳоси шартнома асосида

«Ўзбекистон» нашриёти. 700129. Тошкент, Навоий, 30. Шартнома № 126—92.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитаси ижарадаги Тошкент матбаа комбинатида босилди. 700129. Тошкент, Навоий кўчаси, 30.