Topologik va metrik fazolarda to`plamning ichki, tashqi, chegaraviy, urinish va limit nuqtalari

1. $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ to`plam va $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$ topologiya bo`lsin. $A = \{a\}, B = \{b, c\}, C = \{a, c, d\}, D = \{b, d, e, f\}$ to`plamlarning har biri uchun quyidagi to`plamlarni toping:

1) $Int\ A, Int\ B, Int\ C, Int\ D$ (Bu yerda $Int\ A$ —bu A to`plamning ichi);

2) $ext\ A, ext\ B, ext\ C, ext\ D$ (Bu yerda $ext\ A$ —bu A to`plamning barcha tashqi nuqtalar to`plami);

3) $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}$ (Bu yerda $\overline{A}$ —bu A to`plamning yopig`i);

4) $\partial A, \partial B, \partial C, \partial D$ (Bu yerda ∂A —bu A to`plamning chegarasi);

5) A', B', C', D' (Bu yerda A' —bu A to`plamning hosila to`plami, ya`ni, barcha limit nuqtalardan iborat to`plam);

6) $A \cup A', B \cup B', C \cup C', D \cup D'$.

2. $X = R$ haqiqiy sonlar to`plami va $d(x, y) = |x - y|$ unda aniqlangan metrika bo`lsin. U holda $A = (a, b)$ interval uchun A' ni toping. Bu yerda A' —bu A to`plamning barcha limit nuqtalardan iborat to`plam va $a < b$.

3. $X = R$ haqiqiy sonlar to`plami va $d(x, y) = |x - y|$ unda aniqlangan metrika bo`lsin. U holda quyidagi to`plamlarning barcha limit nuqtalar to`plamini toping:

1) N natural sonlar to'plami 2) $E_2 = \{1/n : n = 1,2, \dots\}$

3) $E_3 = (0;1)$ 4) $E_4 = (0;1) \cap Q$

4. Ushbu $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in N\}$ to`plamning barcha urinish va limit nuqtalar to`plamini toping.

9. E to'plam R_2^2 tekislikdagi ratsional koordinatali nuqtalar to'plami bo'lsa, uning yopilmasini toping.

10. R_2^2 tekislikda faqat ikkita: $A(1,3), B(3,0)$ limit nuqtaga ega bo'lgan E to'plamgi misol keltiring.

3. Bizga (X, τ) topologik fazo va uning $A \subset (X, \tau)$ qism to'plami berilgan bo'lsin. U holda quyidagilar isbotlansin:

1) $\overline{A} = A \cup \partial A$;

2) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$;

3) $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$;

4) $\partial \overline{A} \subset \partial A$;

5) $\partial(X \setminus A) = \partial A$;

6) $\partial(\text{int}\ A) \subset \partial A$;

7) $\text{int}\ A = A \setminus \partial A$.

8) $\overline{A} = \text{int}\ A \cup \partial A$

2), 3), 4), 6) hollarning teskarisi o'rinli emasligiga misol keltiring.

4. $X=R$ haqiqiy sonlar to`plami va $d(x,y)=|x-y|$ unda aniqlangan metrika bo`lsin. U holda $A=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\dots,\frac{1}{n},\dots\right\}$, Z, I to`plamlar uchun $A\cup A',\ Z\cup Z',\ I\cup I'$ larni toping. Bu yerda $A'$ —bu $A$ to`plamning barcha limit nuqtalardan iborat to`plam va $Z$ barcha butun sonlar to`plami, I barcha irratsional sonlar to`plami.

5. Topologik fazoda $A\subset(X,\tau)$ to'plam berilgan bo'lsin. U holda, A to'plam yopiq bo'lishi uchun $\overline{A}=A$ munosabat o'rinli bo'lishi zarur va yetarligi isbotlansin.

6. Topologik fazoda to'plam yopig'ining yopiq to'plam ekanligi ko'rsatilsin.

7. Topologik fazoda $A, B\subset(X,\tau)$ to'plamlar berilgan bo'lsin. U holda, ushbu $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$ munosabatning bajarilishi ko'rsatilsin.

17. Topologik fazoda $A\subset(X,\tau)$ to'plam berilgan bo'lsin. U holda, quyidagi munosabatlarni isbotlang:

1) $\overline{X\setminus A}=X\setminus \operatorname{int} A$;

2) $X\setminus A=\overline{X\setminus A}$.

18. Topologik fazoda berilgan ixtiyoriy $A, B\subset(X,\tau)$ to'plamlar uchun quyidagi munosabatlar o'rinli ekanligi isbotlansin:

1) $\overline{A\bigcap B}\subset\overline{A}\bigcap\overline{B}$;

2) $\overline{A}\setminus\overline{B}\subset\overline{A\setminus B}$.

Aksincha, 1) $\overline{A\bigcap B}\supset\overline{A}\bigcap\overline{B}$ va 2) $\overline{A}\setminus\overline{B}\supset\overline{A\setminus B}$ munosabatlar bajarilmasligiga misol keltiring.

4. $C[a;b]$ fazoda $E=\{f\,|\,A<f(x)<B\}$ to'plamning ochiq to'plam ekanligini ko'rsating.

5. Quyidagi $\begin{cases} x+y>3, \\ x^2+y^2<100 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasi bilan aniqlangan A to'plamning R_2^2 fazoda ochiq to'plam ekanligini isbotlang.

6. Quyidagi $\begin{cases} x+3y-2z\le 6, \\ x^2+y^2+z^2\ge 25 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasi bilan aniqlangan A to'plamning R_2^3 fazoda yopiq to'plam ekanligini isbotlang.

7. Quyidagi $\begin{cases} y\ge x^2+1, \\ x^2+y^2<64 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasi bilan aniqlangan A to'plamning R_2^2 fazoda ochiq ham, yopiq ham emasligini isbotlang.

8. $C[a,b]$ fazodagi ko'phadlar to'plami ochiq ham, yopiq ham emasligini isbotlang.

1. Metrik fazoda yopiq sharning yopiq to‘plam ekanligini isbotlang.

2. Metrik fazoda ochiq sharning ochiq to‘plam ekanligini isbotlang.

3. Tekislikda musbat koordinatali nuqtalar to‘plami ochiq to‘plam bo‘ladimi? Javobingizni asoslang.

Misol. $x_n(t) = t^n$ funksiyalar ketma-ketligi $C_1[0;1]$ fazoda $\theta(t)\equiv 0$ funksiyaga yaqinlashadi.

Haqiqatdan ham, bu fazoda $\rho(x_n, \theta) = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{1+n}$, demak $n \to \infty$ da $\rho(x_n, \theta) \to 0$ bo‘lishi ravshan.

Funksiyalarning ushbu ketma-ketligi $C[0;1]$ fazoda $\theta(t) \equiv 0$ funksiyaga yaqinlashmaydi, chunki bu holda $\rho(x_n, \theta) = \max\limits_{1\le t\le 1} t^n = 1$ bo‘ladi, ya’ni $\rho(x_n, \theta) \nrightarrow 0$.

1. Agar $x_n \to a$ va $\rho(x_n, y_n) \to 0$ bo‘lsa, u holda $y_n \to a$ ekanligini isbotlang.

2. Quyidagi funksiyalar ketma-ketligi ko‘rsatilgan fazoda $f(x)\equiv 0$ funksiyaga yaqinlashadimi?

1) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, a) $C[0,1]$; b) $C_1[a,b]$.

2) $f_n(x) = xe^{-nx}$, a) $C[0;10]$; b) $C_1[0;10]$.

3) $f_n(x) = n^{-\frac{1}{8}}\sqrt{2nx}e^{-\frac{1}{2}nx^2}$, a) $C[0,1]$; b) $C_2[0;2]$.

4) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$, a) $C[-\pi;\pi]$; b) $C_1[-\pi;\pi]$;

3. R_2^n, R_1^n, R_∞^n fazolarda metrikaga nisbatan yaqinlashish bilan birgalikda koordinatalari bo‘yicha yaqinlashish tushunchasi ham qaraladi.

Agar $\forall m \in \{1, 2, \dots, n\}$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty} x_m^{(k)} = x_m$ bo‘lsa, u holda $\{x^{(k)}\} = \{(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\}$ nuqtalar ketma-ketligi $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqtaga koordinatalar bo‘yicha yaqinlashadi deyiladi.

$M_n = \left(\frac{n-1}{n}, \frac{2n}{n+1}\right)$ nuqtalar ketma-ketligi koordinatalar bo‘yicha qanday nuqtaga yaqinlashadi? Bu ketma-ketlik R_2^n, R_1^n, R_∞^n fazolarda shu nuqtaga yaqinlashadimi?