МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

Хамедова Нилуфар Азимовна

Садыкова Альбина Венеровна

Лактаева Индира Шавкатовна

МАТЕМАТИКА

Рекомендовано министерством высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан в качестве учебного пособия для студентов гуманитарных факультетов педагогических ВУЗов

2007

Аннотация:

учебное пособие по краткому курсу высшей математики предназначено для студентов педагогических вузов, написано на основе Госстандарта и учебной программы. Оно включает в себя следующие разделы: элементы теории множеств и математической логики, элементы аналитической геометрии, элементы математического анализа, элементы теории вероятностей и математической статистики.

Рецензенты:

Доц. А.Х. Рахматуллаев, кафедра « Высшая математика», ТГЭУ;

Доц. К. Джуманиёзов, кафедра «Математика и методика её преподавания», ТГПУ имени Низами.

Предисловие.

Учебное пособие «Математика» предназначено для студентов гуманитарных факультетов педагогических вузов. В пособии излагается теоретический материал согласно требованиям Государственного стандарта и программе по математике для гуманитарных направлений. Материал разбит на четыре главы: «Элементы теории множеств и математической логики», «Элементы аналитической геометрии», «Элементы математического анализа», «Элементы теории вероятностей и математической статистики», главы разбиты на параграфы. Изложенный теоретический материал иллюстрируется чертежами и образцами решения наиболее типичных примеров и характерных заданий. В конце каждого параграфа приведены контрольные вопросы по теме и упражнения для закрепления. Это поможет преподавателю в организации работы в аудитории и домашней работы студентов вне аудитории. Следовательно, пособие может быть использовано как для работы под руководством преподавателя, так и для самостоятельного изучения курса математики на заочных отделениях вузов.

Так как это пособие издается впервые, авторы будут рады высказанным замечаниям и предложениям по улучшению его содержания и заранее благодарны.

Глава I.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ.

§ 1. Множества, элементы множеств.

1. Множество и его элементы. Множество – одно из основных математических понятий. В обыденной жизни его смысл выражается словами: совокупность, набор, класс, коллекция, команда, букет, экипаж, стадо, стая, табун и т.д.

Множества обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, а также с помощью фигурных скобок, внутри которых перечисляют все объекты, составляющие множество. Эти объекты называют элементами множества.

Например, запись $M = \{1;3;5;7;9\}$ означает, что M – множество, состоящее из чисел 1,3,5,7,9. Это множество можно записать иначе, изменив порядок расположения элементов в скобках: $M=\{1;9;5;7;3\}$

В записи множества с помощью фигурных скобок отражено его основное содержание: точно указано, какие предметы являются его элементами и какие не являются. Так, число 3 – элемент множества M. Пишут: $3\in M$. (Читается: «3 принадлежит множеству M»). Число 4 не является элементом M. Пишут: $4\notin M$ или $4 \bar{\in} M$. (Читается: «4 не принадлежит множеству M»).

Каждый элемент, входящий во множество, указывается в фигурных скобках лишь один раз.

2. Мощность множества, виды множеств. Множества могут содержать различное число элементов. Множества, содержащие конечное число элементов, называются *конечными*, множества, число элементов которых бесконечно, называются *бесконечными*.

Мощностью конечного множества называется число его элементов. Пусть в множестве M содержится 5 элементов. Мощность множества M равна пяти. Это обозначают так: $n(M) = 5$. Множество, не содержащее ни одного элемента, называют *пустым* множеством. Для его обозначения применяют знак Ø . Мощность пустого множества равна нулю, т.е. $n(\varnothing) = 0$.

Можно привести ряд примеров на конечные и бесконечные множества: множество дней недели - конечно, а множество точек на прямой – бесконечно; множество углов и сторон в многоугольнике – конечно, множество точек, отрезков, лучей, прямых на плоскости – бесконечно.

Бесконечными являются и такие множества, как множество натуральных чисел, множество целых чисел, множество рациональных чисел, множество действительных чисел.

Для этих множеств в математике приняты специальные обозначения: буквой N обозначают множество натуральных чисел, Z – множество целых чисел, Q – множество рациональных чисел, R – множество действительных чисел.

Множества бывают равными и равномощными. Множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. В этом случае пишут $A = B$. Множества A и B называются *равномощными*, если равны их мощности, т.е. равно число их элементов. В этом случае пишут

$$n(A) = n(B)$$

Пример 1: Пусть даны четыре множества : $A = \{21; 3; 28; 57; 26\}$, $B = \{5; 1; 3; 9; 7\}$, $C = \{1; 3; 5; 7; 9\}$, $D = \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$

$n(A) = 5$, $n(B) = 5$, $n(C) = 5$, $n(D) = 6$ – множества A, B и C равномощные, а множества B и C – равные, так как состоят из одних и тех же элементов.

3. Способы задания множества. Множество определяется своими элементами, то есть множество задано, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит.

Множество можно задать, перечислив все его элементы. Например, если мы скажем, что множество А состоит из чисел 3,4,5,6, то мы зададим это множество, поскольку все его элементы окажутся перечисленными. При этом возможна запись А={3,4,5,6}, в которой перечисляемые элементы заключаются в фигурные скобки.

Однако если множество бесконечно, то его элементы перечислить нельзя. Трудно задать таким способом и конечное множество с большим числом элементов. В таких случаях применяют другой способ задания множеств: указывают характеристическое свойство его элементов.

Характеристнческое свойство – это такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит.

Чтобы задать некоторое множество, достаточно либо перечислить все его элементы, либо указать характеристическое свойство его элементов. Второй способ более общий: он позволяет задавать и конечные и бесконечные множества в отличии от первого способа, который, как правило, может быть использован для задания конечных множеств с небольшим числом элементов. Хотя, иногда этот первый способ используется и для задания бесконечных множеств. Например, множество N натуральных чисел может быть задано, в виде N = {1, 2, 3, 4, 5, … }. Однако такой способ записи возможен лишь тогда, когда по записанной части множества ясно, что означает многоточие.

Следует заметить, что в ряде случаев одно и то же множество может быть задано и первым и вторым способом. Например, множество *В* натуральных чисел, меньших 7, можно задать посредством указания характеристического свойства его элементов $B = \{ a \mid a < 7, a \in N \}$, можно задать и так: $B=\{1,2,3,4,5,6\}$, то есть перечислив все его элементы.

4. Подмножество. Если любой элемент множества B принадлежит также множеству A, то множество B называется подмножеством множества A. Это записывается так: $B \subset A$ или $A \supset B$. В этом случае говорят, что множество B содержится в множестве A или множество A содержит множество B.

Если в множестве B найдётся хотя бы один элемент, не принадлежащий множеству A, то B не является подмножеством множества A: $B \not\subset A$.

Из определения подмножества следует, что любое множество является подмножеством самого себя, т.е. справедливо утверждение $A \subset A$.

Полагают также, что пустое множество является подмножеством любого множества. Это вполне естественно, так как пустое множество не содержит ни одного элемента и, следовательно, в нём нет элемента, который не принадлежал бы любому другому множеству.

Пример 2: Найти число подмножеств трёхэлементного множества.

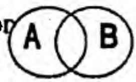
Решение: Рассмотрим произвольное множество, состоящее из трёх элементов, которые обозначим a, b и c, и найдём все его подмножества. Это пустое множество $\varnothing$; множества, содержащие по одному элементу: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$; множества, содержащие по два элемента: $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$; само множество $\{a, b, c\}$. Число всех этих подмножеств равно восьми. Таким образом, любое множество, состоящее из трёх элементов, имеет $8 = 2^3$ подмножеств.

Вообще, установлено, что если множество состоит из n элементов, то число всех его подмножеств равно 2^n.

5. Диаграммы Эйлера - Венна. Соотношения между двумя множествами. Множества и отношения между ними изображают при помощи особых чертежей, называемых кругами Эйлера или диаграммами Венна. Для этого множества, сколько бы они ни содержали элементов, представляют при помощи кругов, овалов или любых других геометрических фигур.

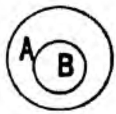
Соотношения между двумя множествами:

1. Множества A={a,b,c,d,e} и B= {b,d,k,e} пересекаются, но ни одно из них не является подмножеством другого.

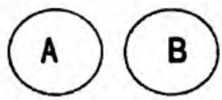
   

   Это можно представить так:

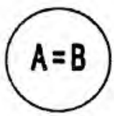
2. Отношение включения между множествами A={a,b,c,d,e} и B={c,d,e} можно представить при помощи кругов Эйлера так

3. Непересекающиеся множества A={a,b,c,d,e} и B={m,n,k,p} изображают при помощи двух кругов, не имеющих общих точек.

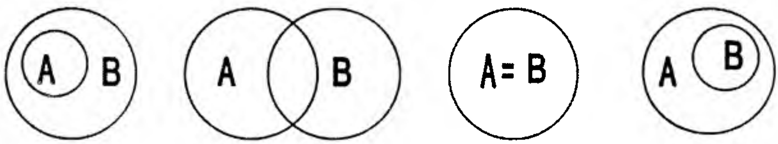
   

4. Равные множества A={a,b,c,d,e} и B={b,d,a,e,c} изображаются одним кругом

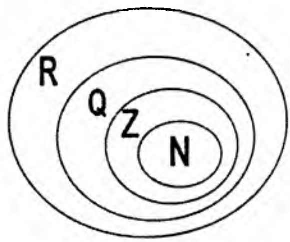
<u>Пример 3:</u> Выяснить, как связаны между собой множество A - четных чисел и множество B - чисел, кратных 4. В каком из случаев представленных на рисунке 1 - 4, отношение между данными множествами изображено, верно?

Решение: Проанализируем данные изображения. Из 1 рисунка следует, что все четные числа делятся на 4, что неверно (14, 26 и т.д.). Этот контрпример сразу делает невозможным равенство данных множеств, т.е. случай представленный на рисунке 3. Рисунок 2, говорит о том, что среди чисел, кратных 4, есть четные, но есть и такие, которые не делятся на 2, что также неверно (нетрудно доказать, что любое число кратное 4, четно.) Следовательно, множество чисел, кратных 4, является подмножеством множества четных чисел. Эта связь изображена на рисунке 4.



1 2 3 4

6. **Числовые множества.** Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми множествами.* Например, B={1,2,3,4,5,6} - числовое множество, A={1, 2, 9, *a*, *c*, *b*, *d*} – не числовое множество.



Основными . числовыми множествами являются: множество натуральных чисел, множество целых чисел, множество рациональных чисел, множество действительных чисел. Для этих множеств в математике приняты специальные обозначения: буквой N обозначают множество натуральных чисел, Z – множество целых чисел, Q – множество рациональных чисел, R – множество действительных чисел.

Эти числовые множества находятся между собой в отношении включения:

$N \subset Z \subset Q \subset R$, наглядно это можно показать на диаграмме Эйлера-Венна

Вопросы по теме:

1. Какие множества называются конечными, какие бесконечными?
2. Какое множество называется пустым?
3. Какие множества называются равными, какие равномощными?
4. Что такое подмножество?
5. Для чего нужны диаграммы Эйлера-Венна?
6. Какие множества называются числовыми? Приведите примеры.
7. Назовите основные числовые множества.

Упражнении.

1. Задайте множество $C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ при помощи характеристического свойства.
2. Задайте множества $A = \{a / 4 \le a \le 14, a \in N\}$, $B = \{b / 10 < b < 19, b \in N\}$ перечислением элементов.
3. Выделите в множестве $A = \{1,2,3,4,5\}$ трехэлементные подмножества.
4. Установите, в каком отношении находятся множества А и В и изобразите их при иомощи кругов Эйлера, если: а) А – множество четных чисел, В – множество чисел, кратных 7; б) А – множество четных чисел, В – множество чисел, кратных 4; в) А – множество четных чисел, В – множество чисел, кратных 2; г) А – множество четных чисел, В – множество нечетных чисел.
5. Изобразите при помощи кругов Эйлера множества Р и Q, если Р – множество равнобедренных треугольников, а Q – есть множество: а) остроугольных треугольников; б) прямоугольных треугольников; в) равносторонних треугольников.

6. Изобразите при помощи кругов Эйлера множества P, S, R и Q, если P – множество равносторонних треугольников, S – есть множество прямоугольников, R – есть множество квадратов, а Q – есть множество правильных многоугольников.

§ 2. Операции над множествами.

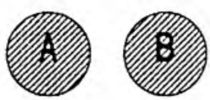
1. Объедннение множеств. *Объединением* множеств A и B называют множество, содержащее такие элементы, которые принадлежат множеству A или множеству B (т.е. хотя бы одному из множеств A или B).

Объединенне множеств A и B обозначают $A \cup B$.

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ или } x \in B \}$$

Если изобразить пересекающиеся множества A и B при помощи кругов Эйлера, то их объединение изображается заштрихованной областью.

Если множества A и B не пересекаются, то их объединение изображают так:



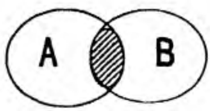
Операция, при помощи которой находят объединение множеств, называется также объединением.

Согласно определению объединения $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$. Если элементы множеств A и B перечислены, то чтобы, найти $A \cup B$, достаточно перечислить элементы принадлежащие А и добавить из В все элементы, которых нет в А. Так, если А={2,4,6,8}, В={5,6,7,8,9}, то $A \cup B$= {2,4,6,8,5,7,9}.

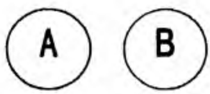
2. Пересечение множеств. *Пересечением* множеств А и В называется множество, содержащее только такие элементы, которые принадлежат множеству А и множеству В одновременно. Пересечение множеств А и В обозначают $A \cap B$.

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

Если изобразить множества А и В при помощи кругов Эйлера, то пересечение заданных множеств изобразится заштрихованной областью.



В том случае, когда множества А и В не имеют общих элементов, говорят, что множества не пересекаются, или их пересечение пусто, и пишут: $A \cap B = \varnothing$.



Операция, при помощи которой находят пересечение множеств, также называют пересечением. Согласно определению пересечения

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ и } x \in B$$

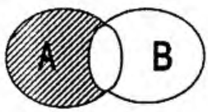
Если элементы множеств А и В перечислены, то, чтобы найти $A \cap B$, достаточно перечислить элементы, которые принадлежат А и В одновремено, т.е. их *общие* элементы.

<u>Например,</u> пусть даны 2 множества: А={2,4,6,8} и В={5,6,7,8,9} Образуем множество С, в которое включим общие элементы множеств А и В:

C ={6,8}. Так, полученное множество C называется пересечением множеств A и B: $C = A \cap B$.

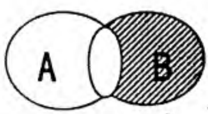
3. Разность множеств. Симметрическая разность. *Разностью* двух множеств A и B, называется множество, содержащее элементы множества A и не содержащее элементы множества B. Разность множеств A и B обозначается A\B.

$A \setminus B = \{ x \mid x \in A, x \notin B\}$. (Отмечено заштрихованной областью)



Разностью двух множеств B и A, называется множество, содержащее элементы множества B и не содержащее элементы множества A. Разность множеств B и A обозначается B\A.

$B \setminus A = \{ x \mid x \in B, x \notin A \}$. (Отмечено заштрихованной областью)



__Пример 1:__ Даны два множества A={1,2,3,5} и B={1,5,6,8,7}. Найти A\B.

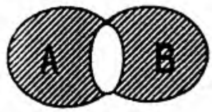
Решение: Надо перечислить элементы, принадлежащие A и не принадлежащие B.

$$A \setminus B = \{2,3\}$$

Симметрической разностью двух множеств A и B, называется множество, содержащее элементы или множества $A \setminus B$ или множества $B \setminus A$.

Симметрическая разность обозначается $A \Delta B$.

$A \Delta B = \{ x \mid x \in A \setminus B$ или $x \in B \setminus A \}$. (Отмечено заштрнхованной областью)



4. Дополнение. Дополнение до универсального множества.

Пусть $B \subset A$. (т.е. множество В является подмножеством множества А).

Дополнением множества В до множества А называется множество, содержащее только те элементы множества А, которые не принадлежат множеству В.

Дополнение множества В до множества А (при условии, что $B \subset A$) обозначают B'_A. Согласно определению дополнения $B'_A = A \setminus B = \{ x \mid x \in A, x \notin B \}$

Заштрихована та часть, которая осталась после удаления из множества А подмножества В. Эту часть называют дополнением множества В до множества А. Операция при помощи которой находят дополнение подмножества, называется разностью.

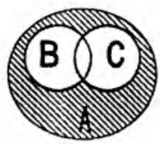
Пример 2: Найти B'_A, если $A=\{1,2,3,5\}$ и $B=\{1,5\}$.

Решение: Так как все элементы множества В принадлежат множеству А, то $B \subset A$. Теперь для того, чтобы найти дополнение, надо перечислить элементы, принадлежащие А и не принадлежащие В. $B'_A = A \setminus B = \{2,3\}$.

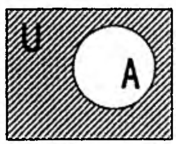
Пример 3: Заштриховать множество $A \setminus (B \cup C)$, если A – множество четных чисел, B- множество чисел кратных 4, C- множество чисел кратных 6.

Решение: Из задания видно, что B и C являются подмножествами множества A. Для начала нужно найти объединение множеств B и C, а затем полученное множество вычесть из множества A. Объединение множеств B и C состоит из чисел, кратных 4 или 6. Если удалить это объединение из множества A, то в нем останутся четные числа не кратные 4 и 6 (например, 2, 10, 14 и т.д.). При помощи кругов Эйлера данные множества изображаются так:

Дополнение объединения множеств B и C до множества A на рисунке изображено штриховкой.



Множество, содержащее в себе все рассматриваемые множества, называют *универсальным* множеством. Универсальное множество обозначается буквой U, а на диаграммах обозначается прямоугольником. Дополнение множества A до универсального обозначается так: A' ; $A' = U \setminus A$. (на рисунке заштрихованная область)



5. Свойства операций над множествами. *Переместительный закон* пересечения и объединения множеств. Из него следует, что для любых множеств A и B справедливы равенства $A \cap B = B \cap A$ и $A \cup B = B \cup A$.

Для пересечения и объединсния множеств справедлив также *сочетательный закон*: для любых множеств A, B и C выполняются равенства

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$, $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

Пересечение и объединение множеств связаны друг с другом распределительными законами. Для любых множеств A,B и C справедливы равенства

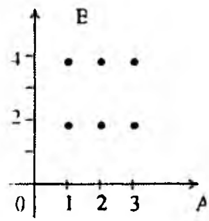
$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$, $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

Заметим, что если в выражении есть знаки пересечения и объединения, и нет скобок, то сначала выполняют пересечение, т.к. считают, что операция пересечения более «сильная», чем операция объединения.

6. Декартово произведение множеств. *Декартовым произведением* множества A и B называется множество пар, первая компонента которых принадлежит множеству A, а вторая компонента приидлежит множеству B. Декартово произведение обозначается $A\times B$

Декартово произведение не обладает переместительным свойством, т.е. существуют такие множества A н B, что $A\times B \neq B\times A$. Чтобы убедиться в этом, достаточно образовать декартово произведение $A\times B$ и $B\times A$, для таких, например, множеств: $A=\{1,2,3\}$ и $B=\{3,5\}$. Множество $A\times B$ таково: $\{(1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,3), (3,5)\}$, а множество $B\times A$ таково: $\{(3,1), (3,2), (3,3), (5,1), (5,2), (5,3)\}$. Нетрудно увидеть, что $A\times B \neq B\times A$, т.к. множества $A\times B$ и $B\times A$ состоят из различиых элементов.

Декартово произведение множеств не подчиняется и сочетательному закону, ио связано с операцией объединения множества распределительным свойством: для любых множеств A,B,C имеет место равенство $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$.



<u>Пример 4:</u> Изобразить на координатной плоскости декартово произведение множеств A×B, если A={1,2,3} и B={2,4}

Решение: Решением будут шесть точек:

(1,2), (1,4), (2,2), (2,4), (3,2), (3,4), - их абсциссы взяты из множества A, ординаты – из множества B.

Вопросы по теме:

1. Что называется объединением двух множеств?
2. Что называется пересечением двух множеств?
3. Что называется разностью двух множеств? Симметрической разностью?
4. Что называется дополнением множества? Когда оно существует?
5. Что называется универсальным множеством, дополнением до универсального?
6. Что называется декартовым произведением двух множеств?
7. Какими свойствами обладают операции над множествами?

Упражнения.

1. Выполните все операции над множествами, если A={*a; b; c; d; e; f*}, B={*b; c; f; n; m*}.
2. Выполните все операции над множествами, если A={2; 5; 7; 9}, B={2; 4; 7}.
3. Выполните все операции над множествами, если $A = \{a / 4 \le a \le 14, a \in N\}$, $B = \{b / 10 < b < 19, b \in N\}$.
4. Выполните все операции над множествами, если A=[-3,5; - 2,5] B= (-3; 0).
5. Выполните все операции над множествами, если A= [-2; -1] B= (0;2).

6. Выполните все операции над множествами, если А=[-5;0) В=[-3;-1).
7. Выполните все операции над множествами, если А=[$-\frac{3}{4};\frac{2}{3}$] В= [-2;2].
8. Найдите декартово произведение $A \times B$ множеств, если $A = \{2,3\}$, $B = \{a,b,c\}$
9. Найдите декартово произведение $A \times B$ множеств, если А= {1,2,3}, В= {4,5,6,7}(Ответ записать в виде двузначных чисел).
10. Выполните все операции над множествами, если A – множество всех четных чисел A $\{a / a = 2n,\ n \in N\}$, B – множество всех нечетных чисел $B=\{b / b = 2n-1,\ n \in N\}$

§ 3. Множество комплексных чисел.

1. Понятие комплексного числа. При решении квадратных уравнений и уравнений высших порядков мы часто сталкиваемся с ситуацией, когда нет действительных корней уравнений. Если нет действительных, то, может быть, существуют другие, не действительные, мнимые корни. Введение комплексных чисел также было связано с открытием решения кубического уравнения. Комплексные числа в реальности не существуют, но основываясь на них, были сформулированы и доказаны многие теоремы алгебры и теории чисел, в частности, теорема о числе корней уравнения n-й степени.

Определение. *Комплексным числом* называется число вида $z = x + y \cdot i$, где x и y – некоторые действительные числа, а i – мнимая единица, квадрат которой равен -1,

$$i^2 = -1.$$

Здесь x – действительная часть, а y – мнимая часть комплексного числа.

$$z = x + y \cdot i$$

$Re(z) = x$ - действительная часть комплексного числа,

$Im(z) = y$ - мнимая часть комплексного числа.

Например, числа $2+3i$, $-5+2i$, $8-i$, $-2-14i$ – являются комплексными числами.

Но и числа $5i$, $-3i$, 0, 5, –3 - также являются комплексными числами, потому что

$5i = 0+5i$

$-3i = 0+(-3)i$

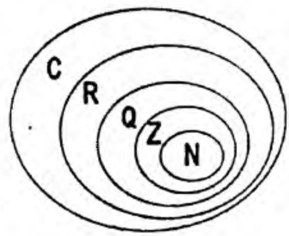
$0 = 0+0i$

$5 = 5+0i$

$-3 = -3+0i$.

Числа $5i$, $-3i$ и т.д. называются чисто мнимыми комплексными числами, а числа $2+3i$, $-5+2i$, $8-i$, $-2-14i$ – называются смешанными комплексными числами.

Множество комплексных чисел обозначается буквой C.



Из примеров видно, что действительные числа также являются и комплексными числами, их мнимая часть равна нулю. Отсюда следует, что множество комплексных чисел включает в себя множество действительных чисел. (см.рис.)

2. Равенство комплексных чисел. Сопряженные комплексные числа.

Два комплексных числа называются равными, если равны их соответствующие действительные и мнимые части.

$$z_1 = x_1 + y_1 \cdot i\,, \qquad z_2 = x_2 + y_2 \cdot i$$

$$z_1 = z_2 \qquad \text{если} \qquad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

Два комплексных числа называются сопряженными, если они различаются только знаком мнимой части. Т.е. если равны их соответствующие действительные части, а мнимые части являются противоположными числами.

Сопряженные комплексные числа обозначаются z и $\bar{z}$

$$z = x + y \cdot i \quad , \quad \bar{z} = x - y \cdot i$$

Сумма сопряженных комплексных чисел равна действительному числу:

$$z + \bar{z} = (x + y \cdot i) + (x - y \cdot i) = 2x$$

3. Арифметические действия над комплексными числами. Над комплексными числами можно производить все арифметические действия – сложение, вычитание, умножение и деление.

Чтобы сложить два комплексных числа, надо сложить соответственно их действительные и мнимые части.

$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

Чтобы вычесть из одного комплексного числа другое, надо вычесть соответственно их действительные и мнимые части.

$(a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$

Чтобы умножить два комплексных числа, надо перемножить их, раскрывая скобки как при умножении буквенных выражений и привести подобные, учитывая, что $i^2 = -1$.

$(a+bi)(c+di) = (ac - bd) + (ad+bc)i$

т.к. $(a+bi)(c+di) = ac+bci+adi+bdi^2 = ac+bci+adi - bd = (ac - bd)+(ad+bc)i$

Чтобы поделить одно комплексное число на другое, надо домножить числитель и знаменатель на сопряженное знаменателя и раскрыть скобки как при умножении.

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

так как:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bci-adi-bdi^2}{c^2-d^2i^2}=\frac{ac+bci-adi+bd}{c^2+d^2}=$$

$$=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Пример 1. Произвести все арифметические действия с комплексными числами:

$$z_1=5+3i,\qquad z_2=2-i$$

Решение:

1). $z_1+z_2=(5+3i)+(2-i)=5+3i+2-i=7+2i$

2). $z_1-z_2=(5+3i)-(2-i)=5+3i-2+i=3+4i$

3). $z_1\cdot z_2=(5+3i)\cdot(2-i)=10+6i-5i-3i^2=13+i$

4).

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{5+3i}{2-i}=\frac{(5+3i)\cdot(2+i)}{(2-i)\cdot(2+i)}=\frac{10+6i+5i+3i^2}{4-i^2}=\frac{10+11i-3}{4+1}=\frac{7+11i}{5}=\frac{7}{5}+\frac{11}{5}i$$

Вопросы по теме:

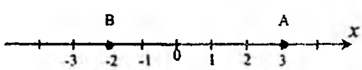
1. Что называется комплексным числом?
2. Что называется действительной частью и мнимой частью комплексного числа?
3. Какие комплексные числа называются равными?
4. Какие комплексные числа называются сопряженными?
5. Какие арифметические действия над комплексными числами можно производить, и по каким правилам?

Упражнения.

1. Найдите сопряженные числа следующим комплексным числам: $5+3i$, $1-2i$, 18, $30i$, $6i^2$, 0.
2. Выполните все арифметические операции над комплексными числами $z_1=-5+8i$, $z_2=12+i$.
3. Выполните все арифметические операции над комплексными числами $z_1=-5\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i$, $z_2=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}i$.
4. Выполните все арифметические действия над комплексными числами $z_1=-1{,}2+8{,}3i$, $z_2=10{,}1+5{,}6i$.
5. Вычислите: $1+i\cdot(15-12i)-(10i+12)$
6. Вычислите: $\dfrac{1+2i}{3i-5}+\dfrac{(3+i)^2}{6+2i}$
7. Вычислите: i^2, i^3, i^4, i^5. Найдите закономерность и вычислите i^{100}, i^{2006}.
8. Вычислите: $(1+i)^6$.
9. Вычислите: $5i\cdot\mathrm{Re}(8-19i)+2\cdot\mathrm{Im}(29+3i)\cdot i-6$
10. Вычислите: $9\cdot\mathrm{Re}(7i^2+19i)\cdot i-10\cdot\mathrm{Im}(2{,}5+3{,}5i)-15i^4$

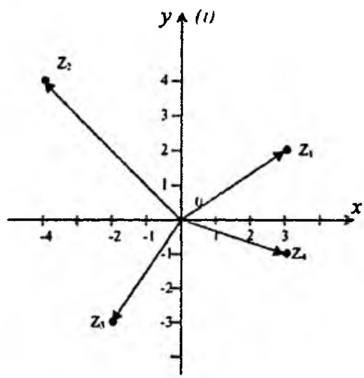
§ 4. Геометрический смысл комплексного числа и его тригонометрическая форма.

1. Геометрический смысл комплексного числа.



Действительное число геометрически изображается точкой на числовой оси или вектором, исходящим из начала координат и оканчивающимися в соответствующей точке числовой оси.

Комплексное число $z = x + y \cdot i$ также можно изобразить, но не на координатной прямой, а на координатной плоскости, точкой $(x; y)$ или вектором, исходящим из начала координат и оканчивающимся в соответствующей точке координатной плоскости.



Геометрический смысл комплексного числа состоит в том, что каждому комплексному числу соответствует единственная точка на комплексной плоскости, и обратно, каждой точке комплексной плоскости соответствует одно комплексное число.

Комплексной плоскостью называется координатная плоскость, где по горизонтальной оси откладывается действительная часть комплексного числа, а по вертикальной – мнимая часть.

Например, на чертеже изображены четыре комплексных числа z_1, z_2, z_3, z_4.

$z_1 = 3+2i$, $z_2 = -4+4i$,

$z_3 = -2-3i$, $z_4 = 3 - i$.

2. Модуль комплексного числа. Модулем действительного числа называется расстояние от нуля до точки, изображающей это число на действительной оси. По аналогии, *модулем комплексного числа* называется длина вектора, изображающего это комплексное число. Модуль всякого комплексного числа, не равного нулю, есть положительное число.

Пусть $z = x + y \cdot i$, тогда $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Модулем комплексного числа называется корень квадратный из суммы квадратов действительной и мнимой частей комплексного числа.

Примеры: 1). Модуль комплексного числа $3 + 4i$ равен $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

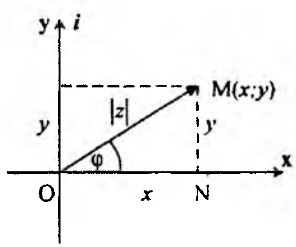
2). $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$

3). $|-7| = |-7+0i| = \sqrt{(-7)^2+0^2} = \sqrt{49} = 7$

4). $|-4i| = |0-4i| = \sqrt{0^2+(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$

3. Тригонометрическая форма комплексного числа. Вообше, любую точку на плоскости можно однозначно определить либо её координатами, либо радиус-вектором, т.е. длиной и направлением вектора, исходящего из начала координат и оканчивающегося в данной точке.

На рисунке комплексное число $z = x + y \cdot i$ изображено точкой М с координатами x и y, но его можно задать и вектором $\overline{OM}$, т.е. длиной отрезка ОМ и углом φ.



Угол φ между осью абсцисс и вектором OM называется *аргументом* комплексного числа.

Каждое не равное нулю комплексное число имеет бесчисленное множество аргументов, отличающихся друг от друга на целое число полных оборотов (т.е. на $360°\cdot k$). При этом *главным аргументом* называется угол φ, находящийся в пределах $-180° < \varphi \le 180°$. Для числа 0 аргумент остается совершенно неопределенным.

Пусть дано комплексное число $z = x + y \cdot i$. (1)

Найдем его модуль $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Это и есть длина вектора ОМ. Теперь найдем угол φ. Из прямоугольного треугольника ONM :

$$\sin\varphi = \frac{y}{|z|}\ , \ \cos\varphi = \frac{x}{|z|}\ . \ (2)$$

Из этих соотношений выразим x и y: $x = |z|\cos\varphi,\ y = |z|\sin\varphi$. **(3)**

Подставив в формулу (1) значения x и y из формулы (3), получим новую форму записи комплексного числа, которая называется *тригонометрической формой*:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) \qquad (4)$$

В противоположность тригонометрической форме формула **(1)** $z = x + y\cdot i$ называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Пример 5. Представить комплексное число $z = 2 - 2\,i$ в тригонометрической форме.

Решение: $x = 2\,,\ y = -2$

Найдем модуль $|z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

По формулам (2), имеем : $\sin\varphi = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Теперь, исходя из значений синуса и косинуса, определяем, что φ = –45°, подставляя в формулу (4), получим $z = 2\sqrt{2}\cdot[\cos(-45^\circ) + i\cdot\sin(-45^\circ)]$.

Пример 6. Представить комплексное число $z = 6\cdot(\cos 30^\circ + i\cdot\sin 30^\circ)$ в алгебраической форме.

Решение: Здесь достаточно найти значения синуса и косинуса и раскрыть скобки.

$$z = 6\cdot(\cos 30^\circ + i\cdot\sin 30^\circ) = 6\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right) = 3\sqrt{3} + 3\cdot i$$

4. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Пусть даны два комплексных числа в тригонометрической форме:

$$z = |z|\,(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha)\ \ ,\ \ w = |w|\,(\cos\beta + i\cdot\sin\beta)$$

Над комплексными числами в тригонометрической форме удобно производить умножение, деление, возведение в степень по следующим правилам:

1). При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| (\cos(\alpha + \beta) + i \cdot \sin(\alpha + \beta))$$

2). При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} (\cos(\alpha - \beta) + i \cdot \sin(\alpha - \beta))$$

3). При возведении комплексного числа в степень модуль возводится в ту же степень, а аргумент умножается на показатель степени

$$z^n = |z|^n (\cos n\alpha + i \cdot \sin n\alpha).$$

4). Извлечение корня есть действие, обратное возведению в степень. Поэтому модуль корня из комплексного числа получается извлечением корня той же степени из модуля подкоренного числа, а аргумент – делением аргумента на показатель корня.

При извлечении корня n-й степени из комплексного числа получается ровно n результатов

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right), \quad \textit{где } k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Здесь k меняется от 0 до n-1, при этом получается ровно n корней.

Вопросы по теме:

1. В чем состоит геометрический смысл комплексного числа?
2. Что называется модулем комплексного числа?
3. Что называется аргументом комплексного числа?
4. Чем отличаются алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа?

5. Какие действия можно производить над комплексными числами в тригонометрической форме?

Упражнения.

1. Найти модули следующих комплексных чисел $5+3i$, $1-2i$, 18, $30i$, $6i-5$, 0.
2. Изобразить следующие комплексные числа на комплексной плоскости
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа и изобразить его на комплексной плоскости, если $z = 2\sqrt{3} - 2i$
4. Привести комплексное число $z = -3 + 3i$ к тригонометрическому виду.
5. Привести комплексное число $z = -5 - 3i$ к тригонометрическому виду.
6. Найти алгебраический вид комплексного числа, если $|z| = 15$, $\varphi = 225°$
7. Найти алгебраический вид комплексного числа, если $|z| = 6$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$
8. Найти $z \cdot w$, $\frac{z}{w}$, z^3, w^6, если известно, что $|z| = 3$, $\alpha = -\frac{\pi}{3}$; $|w| = 2$, $\beta = \frac{\pi}{2}$
9. Произвести умножение, деление, возведение во 2-ю и в 3-ю степень, если дано

$$z = 2(\cos 30° + i\sin 30°), \qquad w = 5(\cos(-45°) + i\sin(-45°))$$

10. Найти $\sqrt[3]{z}$, $\sqrt[5]{z}$, если $z = 64\,(\cos\pi + i\cdot\sin\pi)$

§ 5. Высказывания. Операции над высказываниями.

1. Понятие высказывания. Повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно, называется *высказыванием*.

Например, предложение «Число 6 четно» есть истинное высказывание, а предложение «2+4=7»-ложное высказывание.

Выказывания обозначаются большими буквами латинского алфавита. Существуют *простые* (*элементарные*) и *составные* высказывания. *Простые* – это те высказывания, которые не состоят из других высказываний.

Составные высказывания состоят из элементарных высказываний, соединенных союзами или словами: или; и; если ... то; неверно что ...; тогда и только тогда – эти слова будут называться логическими союзами.

Например: Высказывание «Число 28 делится на 7» элементарное. Примеры составных высказываний-«Число 28 четно и делится на 7», «Число 12 меньше или равно 8», «Если треугольник равнобедренный, то углы в нем при основании равны», «Число 14 не делится на 4».

Вообще, каждому высказыванию приписывают одно из двух значений: И (истина), если оно истинно, и Л (ложь), если оно ложно. Значения И и Л называют *значениями истинности* высказывания. Если высказывание элементарное, то его значение истинности определяют по содержанию, опираясь на известные знания. Для высказываний можно составлять *таблицы истинности*, в которых рассматриваются все возможные значения истинности данных высказываний.

2. Отрицание высказывания. Часто в математике приходится строить высказывания, в которых что-либо отрицается. Например, дано высказывание «Число 12 простое». Это ложное высказывание, так как число 12 делится не только на себя и на 1, но и на другие числа. Построим его отрицание: «Неверно, что число 12 простое». Получили истинное высказывание. Можно построить отрицание того же высказывания иначе: «Число 12 не является простым». Это тоже истинное высказывание. Отрицание высказывания А обозначают $\overline{A}$. Символ $\overline{A}$ читают: «Не А» или «Неверно, что А».

Вообще, *отрицанием* высказывания А называется высказывание $\bar{A}$, которое истинно, если высказывание А ложно, и ложно, когда А истинно.
Таблица истинности для отрицания.

A	$\bar{A}$
И	Л
Л	И

3. Конъюнкция высказываний. *Конъюнкцией* двух высказываний А и В, называется новое высказывание, полученное из двух элементарных, соединенных союзом «и». Конъюнкцию высказываний А и В обозначают - $A \wedge B$ или А & В, читают «А и В».

Конъюнкция двух высказывании истинна, если истинны оба высказывания входящие в конъюнкцию. Если же хотя бы одно из них ложно, то высказывание «А и В» ложно.

Таблица истинности для конъюнкции:

A	**B**	**$A \wedge B$**
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Свойства конъюнкции:

1. Коммутативность $A \wedge B = B \wedge A$
2. Ассоциативность $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) = A \wedge B \wedge C$
3. $A \wedge \bar{A}$ = Л

<u>Пример 1</u>: Установить, истинно или ложно высказывание: 1) «число 102 четно и делится на 9»; 2) «3<6<7»

Решение: В случае 1) составное высказывание имеет форму «А и

В», где А – «число 102 четное», а В – «число 102 делится на 9». Легко видеть, что высказывание А истинное, а высказывание В ложное (число 102 не делится на 9, так как на 9 не делится сумма цифр в записи этого числа). Следовательно, и все предложение ложное.

В случае 2) мы также имеем составное высказывание «3<6 и 6<7». Оно истинно, так как образовано из двух элементарных истинных высказываний с помощью союза «и».

4. **Дизъюнкция высказываний.** *Дизъюнкцией* двух высказываний А и В, называется новое высказывание, полученное из двух элементарных, соединенных союзом «или». Дизъюнкция обозначается $A \vee B$, читается «А или В». Дизъюнкция двух высказываний «А или В» истинна, если истинно хотя бы одно из высказываний А или В, и она ложна, когда ложны оба высказывания А и В.

Таблица истинности для дизъюнкции:

А	**В**	**$A \vee B$**
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Свойства дизъюнкции:

1. Коммутативность $A \vee B = B \vee A$
2. Ассоциативность $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C) = A \vee B \vee C$
3. $A \vee \bar{A} = И$

4. Дистрибутивный закон конъюнкции относительно дизъюнкции

$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

5. Дистрибутивный закон дизъюнкции относительно конъюнкции

$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

6. Законы Моргана $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$; $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$

5. Импликация высказываний.

Импликацией двух высказываний А и В называется новое высказывание, полученное из двух элементарных, соединенных словами «если ... , то ...». Импликацию высказываний А и В обозначают - $A \Rightarrow B$, читают «если А, то В», или «из А следует В».

Импликация двух высказываний ложна, если из истины следует ложь, а в остальных случаях - истинна. Таблица истинности для импликации:

А	В	$A \Rightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

6. **Эквиваленция высказываний.** *Эквиваленцией* двух высказываний А и В, называется новое высказывание, полученное из двух элементарных, соединенных словами «... тогда и только тогда, когда ...», «... в том и только в том случае, если ...», «для того, чтобы ... , необходимо и достаточно ...». Эквиваленцию высказываний А и В обозначают - $A \Leftrightarrow B$, читают «А тогда и только тогда, когда В», или «для А, необходимо и достаточно В».

Эквиваленция двух высказываний истинна, если оба высказывания принимают одинаковые истинностные значения, и ложна при разных значениях. Таблица истинности для эквиваленции:

A	B	A⇔ B
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Вопросы по теме:

1. Что называется высказыванием?
2. Какие виды высказываний бывают?
3. Что называется отрицанием высказывания?
4. Что называется конъюнкцией двух высказываний?
5. Что называется дизъюнкцией двух высказываний?
6. Что называется импликацией двух высказываний?
7. Что называется эквиваленцией двух высказываний?

Упражнения.

1. Среди следующих предложений укажите составные, выделите в них элементарные высказывания и выявите логическую структуру:
   a) Противоположные стороны параллелограмма параллельны и равны;
   b) Число 2853 делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр в его десятичной записи делится на 3;
   c) Число 13 простое и не делится на 2;
   d) Число 12 двузначное и кратно 2 или 3
   e) Если число 126 делится на 6, то оно делится на 2.
2. Найдите значения истинности высказываний из примера 1.
3. Даны высказывания: A: «Сегодня температура воздуха ниже 0°С», B: «Сегодня ясно», C: «Я пойду кататься на лыжах», D: «Я пойду кататься

на коньках». Сформулируйте высказывания имеющие структуру:

a) $A \wedge B$

b) $A \wedge D$

c) $C \vee D$

d) $A \Rightarrow (C \vee D)$

e) $A \wedge B \wedge (C \vee D)$

4. Составьте таблицу истинности следующих высказываний:

a) $A \wedge \overline{B}$

b) $A \Rightarrow (C \vee A)$

c) $A \wedge (\overline{C} \vee \overline{D})$

d) $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow (C \vee B)$

e) $\overline{A} \vee B \wedge (C \vee D)$

5. Придумайте высказывания A, B, C и D и запишите составные высказывания используя логическую структуру из примера 4.

6. Докажите:

a) $A \wedge B = B \wedge A$

b) $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) = A \wedge B \wedge C$

c) $A \wedge \overline{A} = Л$

d) $A \vee B = B \vee A$

e) $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C) = A \vee B \vee C$

f) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

g) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

h) $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$; $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$

§ 6. Предикаты. Операции над предикатами. Кванторы.

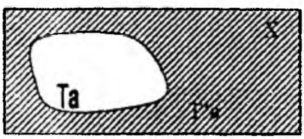
1. Понятие предиката. *Предикатом* называется предложение, которое содержит одну или несколько переменных, при подстановке вместо которых некоторых значений, обращается в высказывание. Например, «Поэт X написал поэму «Евгений Онегин»». Если вместо переменной X подставить значение «А.С. Пушкин», то получится истинное высказывание, если другое значение – то ложное.

Если в предложении одно неизвестное, то предикат называется одноместным, если неизвестных два - двуместным и т.д.

Все значения неизвестного, при котором предикат обращается в истинное высказывание, называются множеством истинности предиката.

Предикаты обозначаются как A(x), где x∈X ; B(y), где y∈У; C(x,y), где x∈X, y∈У; и т.д., а множества истинности обозначаются T_A, T_B, T_C. Для предикатов выполняются все операции, которые выполняются над высказываниями.

2. Отрицание предиката. Если дан предикат A(x), где x∈ X , то «не A(x)», x∈ X является его отрицанием и обозначается $\overline{A(x)}$. Множество истинности отрицания A(x) есть дополнение множества истинности A(x) до множества X.



Т.е. отрицанием называют предикат $\overline{A(x)}$, определенный на том же множестве X, причем предикат $\overline{A(x)}$, истинен при тех значениях x из множества X, при которых предикат A(x) ложен, и наоборот.

Например, пусть на множестве X= {10,15,20,25,30} дан предикат A(x): «число x оканчивается цифрой 5». Его отрицанием будет такой предикат $\overline{A(x)}$: «Неверно, что число x оканчивается цифрой 5».

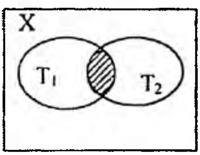
Легко видеть, что множеством истинности предиката A(x), в данном примере является {15,25}, а множеством истинности предиката $\overline{A(x)}$ - {10,20,30}, т.е. второе множество- дополнение к первому в X.

3. Дизъюнкция и конъюнкция предикатов. Пусть на множестве X заданы два предиката: A(x) и B(x). Тогда их конъюнкцией будет предикат $A(x) \wedge B(x)$. Он истинен при тех значениях x из множества X, при котором истины оба предиката A(x) и B(x).

Так, если на множестве X={10,15,16,20,35} заданы предикаты: A(x) – «число x четное»; B(x) – «число x кратно 5», то их конъюнкцией является предикат $A(x) \wedge B(x)$: «число x четно и кратно 5».

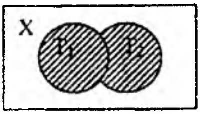
Множеством истинности предиката A(x) в данном случае является {10,16,20}, а множеством истинности предиката B(x) {10,15,20,35}. Предикат «число x четно и кратно 5» обращается в истинное высказывание только тогда, когда x=10 и x=20. Множеством истинности {10,20} этого предиката является пересечение множеств истинности предикатов A(x) и B(x).

Вообще, если T_1- множество истинности предиката A(x), $x \in X$, а T_2- множество истинности предиката B(x), $x \in X$, то множество истинности T предиката $A(x) \wedge B(x)$, $x \in X$ будет пересечение множеств истинности предикатов A(x) и B(x), т.е. $T = T_1 \cap T_2$



Предикат $A(x) \vee B(x)$, $x \in X$ называется дизъюнкцией предикатов A(x) и B(x), $x \in X$. Он истинен при тех значениях из множества X, при которых истинен хоть один из предикатов A(x), B(x)

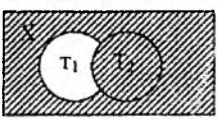
Множеством истинности предиката $A(x) \vee B(x)$, $x \in X$, является $T = T_1 \cup T_2$



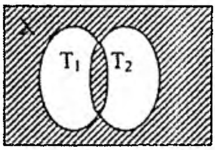
Рассмотрим, например, на множестве x студентов некоторого института два предиката: A(x)- студент x спортсмен и B(x)- студент x-первокурсник. Дизъюнкцией этих предикатов является предикат $A(x) \vee B(x)$: студент x – спортсмен или первокурсник. Множество истинности дизъюнкции данных предикатов представляет собой объединение множеств истинности предикатов A(x) и B(x), т.е. множество, характеристическое свойство элементов которого может быть сформулировано так: быть спортсменом или первокурсником данного института.

4. Импликация и эквиваленция предикатов. Из предикатов A(x) и B(x), заданных на одном и том же множестве X, можно составить предикат $A(x) \Rightarrow B(x)$. Его называют импликацией этих предикатов и читают: «если A(x), то B(x)». Предикат $A(x) \Rightarrow B(x)$ превращается в ложное высказывание лишь при подстановке вместо x таких значений *a*, для которых $A(a)$ истинно, а $B(a)$ ложно. Иными словами, если обозначить через T_1 множество истинности предиката A(x), а через T_2- множество истинности предиката B(x), то $A(x) \Rightarrow B(x)$ ложно на множестве $T_1 \cap T_2$

Значит, множеством истинности предиката $A(x) \Rightarrow B(x)$ является объединение множества T_2 истинности предиката B(x) и дополнения к множеству T_1 истинности предиката A(x)



Если предикаты $A(x)$ и $B(x)$, заданные на множестве X, эквивалентны, т.е. если множества их истинности T_1 и T_2 совпадают, $T_1=T_2$, то для всех $x \in X$ истинна эквиваленция. $A(x) \Leftrightarrow B(x)$. Например, в случае предикатов $A(x)$: «Натуральное число x делится на 10 и $B(x)$: «Десятичная запись натурального числа кончается цифрой 0» для всех натуральных чисел истинна эквиваленция $A(x) \Leftrightarrow B(x)$, например, для $x = 140$ она истинна, потому, что 140 делится на 10, а последняя цифра этого числа равна 0, а при $x=12$ эта эквиваленция истинна, поскольку оба высказывания ложны.



Если предикаты $A(x)$ и $B(x)$ на множестве X эквивалентны, то каждый из них называют необходимым и достаточным условием для второго, например для того чтобы натуральное число x делилось на 10, необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра в десятичной записи этого числа была равны 0.

5. **Кванторы.** Слова «все» и «некоторые» называют *кванторами*. Слово «квантор» с латинского означает «столько», т.е. показывает, о скольких объектах говорится в том или ином предложении. Различают кванторы общности и существования.

Квантор *общности* - это слова «любой», «всякий», «каждый», «все». Квантор общности обозначается знаком $\forall$.

Квантор *существования* – это слова «существует», «некоторые», «найдется», «хотя бы один». Квантор существования обозначается знаком $\exists$. Есть также квантор существования единственного $\exists!$ - «существует единственный такой элемент, что ...»

Кванторы обращают предикат в высказывание без подстановки конкретных значений. Например, предикат А(х): «Число х делится на 3» можно обратить в высказывание –

$(\forall x)A(x)$: «Любое число делится на 3» - ложное высказывание.

$(\exists x)A(x)$: «Существует число, которое делится на 3» - истинное высказывание.

$(\exists !x)A(x)$: «Существует единственное число, которое делится на 3» - ложное высказывание.

Истинность высказываний с квантором общности устанавливается путем доказательств. Чтобы убедиться в ложности таких высказываний, достаточно привести контрпример.

Истинность высказывания с квантором существования устанавливается при помощи конкретного примера. Чтобы убедиться в ложности такого высказывания, необходимо провести доказательство.

Отрицание высказывания с квантором (общности или существования) может быть построено двумя способами:

1. перед данным высказыванием ставятся слова «неверно, что»
2. квантор общности (существования) заменяется квантором существования (общности), а предложение, стоящее после квантора, заменяется его отрицанием.

Вопросы по теме:

1. Что называется предикатом?
2. Что называется множеством истинности предиката?
3. Как производятся операции над предикатами?
4. Что называется квантором?
5. Как производится отрицание высказывания с квантором?

Упражнения.

1. Среди следующих предложений укажите высказывания и предикаты и поясните свой ответ:

   a) 2 – натуральное число;

   b) $x = 11$ является решением неравенства $2x - 1 > 15$;

   c) разность чисел x и 3 равна 7;

   d) $3x + 13 = 5$;

   e) график функции $y = x^2$ симметричен относительно оси ординат;

   f) $3y + 5 > 21$.

2. На множестве N задан предикат $C(x)$: «число x – делитель 12».Сформулируйте высказывания C(2), C(4), C(5), C(8) и найдите их значения истинности.

3. Найдите множества истинности следующих предикатов:

   a) $A(x)$: «$x < 7$», $x \in N$

   b) $B(x)$: «$y^2 > 0$», $y \in R$

   c) $E(x)$: «$7 < x < 8$», $x \in N$

   d) $F(x,y)$: «$x \cdot y = 6$», $x, y \in Z$

4. Заштриховать область истинности следующих предикатов:

   a) $\overline{A(x)} \wedge B(x)$

   b) $\overline{A(x) \Rightarrow B(x)}$

   c) $A(x) \wedge (\overline{C(x)} \vee \overline{D(x)})$

   d) $\overline{A(x) \wedge B(x)} \Leftrightarrow C(x)$

   e) $\overline{A(x)} \Rightarrow (B(x) \wedge C(x))$

5. Какие из следующих высказываний содержат квантор общности, а какие – квантор существования?

a) Все кустарники являются растениями;

b) существуют числа, кратные 5;

c) каждое натуральное число является целым;

d) найдется такое натуральное число x, что $x < 3$;

e) некоторые натуральные числа - однозначные.

6. Произведите отрицание высказываний из 5-го упражнения.

Глава II.

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.

§ 1. Афинная и прямоугольная система координат на плоскости. Основные метрические формулы.

1. Декартова прямоугольная система координат. Выберем на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy с указанными на них положительными направлениями. Прямые Ox и Oy называются координатными осями, точка их пересечения O – началом координат. Обычно полагают, что ось Ox горизонтальна, а ось Oy вертикальна относительно наблюдателя; положительное направление на Ox слева направо, на Oy – снизу вверх.

Возьмём теперь некоторую единицу масштаба, с помощью которой будут производиться все измерения на плоскости xOy.

Совокупность координатных осей Ox, Oy и выбранной единицы масштаба называется декартовой прямоугольной системой координат на плоскости.

Произвольной точки M плоскости поставим соответствии два числа:

а) абсциссу x, равную расстоянию точки M от оси Oy, взятую со знаком «+», если M лежит правее Oy, и со знаком «-», если M лежит левее Oy;

б) ординату y, равную расстоянию точки M от оси Ox, взятому со знаком «+», если M лежит выше Ox, и со знаком «-», если M лежит ниже Ox.

Абсцисса x и ордината y называются декартовыми прямоугольными (или кратко прямоугольными) координатами точки M.

Отметим, что *каждой точке плоскости соответствует одна пара действительных чисел* x *и* y. Верно и обратное: *каждой паре действительных чисел* x *и* y *соответствует одна точка плоскости*. Это значит, что на плоскости положение произвольной точки M полностью определяется ее координатами x и y.

2. Аффинная система координат. Если на плоскости взять две любые пересекающиеся, но не совпадающие прямые, задать на них положительные направления, выбрать единичные отрезки, то говорят, что этим задана аффинная система координат. Чтобы найти координаты точки в этой системе координат, надо найти проекции этой точки на координатные оси и соотнести длины полученных отрезков с длинами единичных отрезков осей координат. Полученные числа и будут координатами данной точки.

В любой аффинной системе координат *каждой точке плоскости соответствует одна пара действительных чисел x и y*, и обратно: *каждой паре действительных чисел x и y соответствует одна точка плоскости.*

В дальнейшем будем рассматривать только Декартову прямоугольную систему координат.

3. Расстояние между двумя точками. Найдем расстояние d между двумя данными точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.

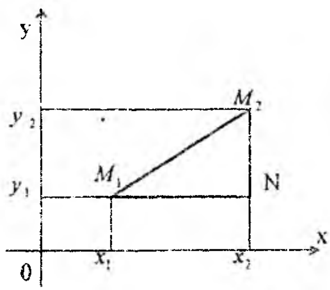


рис.1

Из прямоугольного треугольника M_1NM_2 по теореме Пифагора имеем:

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{|M_1N|^2 + |M_2N|^2}.$$

Так как $|M_1N| = |x_2 - x_1|$ и $|M_2N| = |y_2 - y_1|$, подставляя, получим:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (1)$$

Пример 1: Найти расстояние между точками M(5;6) и N(-3: 0).

Решение: По формуле (1) получим

$$|MN| = \sqrt{(-3-5)^2 + (0-6)^2} = 10.$$

4. Деление отрезка в данном отношении. Пусть даны точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$. Требуется найти точку $M(x ; y)$, лежащую на отрезке M_1M_2 и делящую его в данном отношении

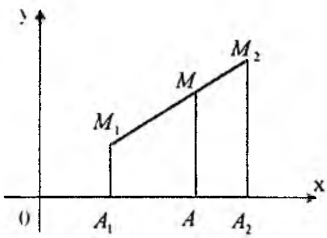


рис.2

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda \qquad (2)$$

Опустим из точек M_1, M_2, M перпендикуляры на ось Ox, проекции обозначим соответственно A_1, A_2, A. По теореме о пересечении сторон угла параллельными прямыми получим:

$\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \frac{|A_1A|}{|AA_2|}$. И так как $|A_1A| = x - x_1$, $|AA_2| = x_2 - x$, то заданное отношение (2) примет вид: $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$,

откуда упрощая, найдем x: $$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}. \qquad (3)$$

Аналогично можно найти y: $$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \qquad (4)$$

В частности, если $\lambda = 1$, т.е. если M – **середина** отрезка M_1M_2, то координаты точки M вычисляются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

П р и м е ч а н и е : Формулы (3) и (4) верны при любом расположении точек M_1 и M_2.

Пример 2: Вычислить координаты точки С(x; y), делящей отрезок АВ в отношении 2 / 1 , считая от точки А, если А(1; -1), В(4; -7).

Решение: Разделить отрезок АВ в отношении $2/1$, считая от точки А, это значит, что

$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{2}{1} = 2$, а это значит, что $\lambda = 2$. По формулам (3) и (4) имеем:

$$x = \frac{1+2\cdot 4}{1+2} = \frac{9}{3} = 3, \qquad y = \frac{-1+2\cdot(-7)}{1+2} = \frac{-15}{3} = -5.$$

Вопросы по теме:

1. Что называется Декартовой системой координат?
2. Что называется аффинной системой координат?
3. Как найти расстояние между двумя точками?
4. Как найти середину отрезка?
5. Как разделить отрезок в данном отношении?

Упражнения.

1. Найдите расстояние между двумя точками $A(-2;2)$ и $B(6;4)$.
2. Найдите расстояние между двумя точками:
   a) A(1;2) и B(5; -4);
   b) A(3;8) и B(0;12);
   c) A(2;5) и B(-10;7)
3. Найдите координаты точки A, лежащей на оси Ох, если она удалена от точки $B(-5;6)$ на расстояние, равное 10.
4. Даны точки $A(-2;3)$ и $B(6;-9)$. Найти координаты точки С – середины отрезка АВ.
5. Найдите координаты точки В, если С – середина отрезка АВ и $A(-3;-5)$ $C(3;-2)$.

6. Найдите координаты точки $C(x;y)$, которая делит отрезок AB в отношении $\lambda = 0{,}2$, если $A(-2;2)$ и $B(6;4)$

7. Даны вершины треугольника A(-2;4), B(0;-1) и C(3;2). Найти координаты середин всех сторон треугольника.

8. Выведите формулу для координат точки пересечения медиан треугольника.

9. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC, если даны координаты его вершин A(-3;1), B(1;-6) и C(2;2).

10. Даны две противоположные вершины квадрата A(3;5) и C(1;-3). Вычислить сторону и площадь квадрата.

§ 2. Уравнения прямых на плоскости. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

1. Геометрическое истолкование уравнения с двумя переменными. Системы координат позволяют задавать различные линии на плоскости их уравнениями.

Определение. Уравнением линии на плоскости в прямоугольной системе координат называется уравнение $f(x, y) = 0$ с переменными x и y, которому удовлетворяют координаты каждой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой точки плоскости, не лежащей на этой линии.

Переменные x и y уравнения линии называются *текущими координатами*.

Например, уравнение $x - y = 0$ или $x = y$ является уравнением биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов.

Надо отметить, что геометрическим образом данного заранее уравнения не всегда будет линия. Например, уравнению $x^2 + y^2 = 0$ на плоскости соответствует только одна точка (0;0), а уравнению $x^2 + y^2 + 2 = 0$ не соответствует на плоскости ни одной точки.

Уравнение с двумя переменными первой степени называется *линейным*, графиком линейного уравнения является прямая линия. Например, 2x + 3y + 5 = 0 – уравнение прямой. Ниже рассмотрим основные виды уравнений прямой.

2. Общее уравнение прямой. Оказывается, любую прямую без каких-либо ограничений можно задать уравнением первой степени

$$A\,x + B\,y + C = 0, \qquad (1)$$

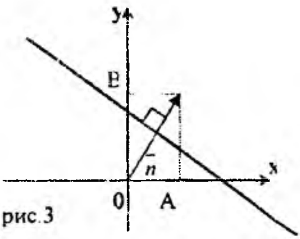


рис.3

в котором коэффициенты A и B одновременно не равны нулю. Уравнение (1) называется *общим уравнением прямой*.

В общем уравнении прямой коэффициенты A и B являются координатами нормали $\bar{n}(A;B)$ – вектора, перпендикулярного данной прямой. (рис.3)

Т е о р е м а : Каждая прямая на плоскости с прямоугольной декартовой системой координат определяется уравнением первой степени, и наоборот, каждое уравнение первой степени определяет некоторую прямую на плоскости.

Исследуем общее уравнение прямой:

1). C = 0, A ≠ 0, B ≠ 0: $A\,x + B\,y = 0$, – прямая проходит через начало координат (будем рассматривать этот вид ниже, как уравнение прямой с угловым коэффициентом);

2). B = 0, A ≠ 0, C ≠ 0: $Ax + C = 0$, или $x = -\frac{C}{A}$. прямая параллельна оси Oy и находится на расстоянии *d*, равном

$$d = \left|-\frac{C}{A}\right| \text{ (рис.4).}$$

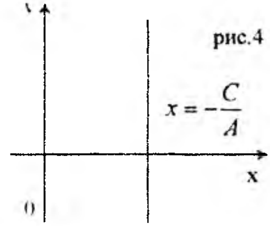


рис.4

Уравнения прямых параллельных оси Oy не содержат переменную y.

3). A = 0, B ≠ 0, C≠0: $By + C = 0$, или $y = -\frac{C}{B}$. прямая параллельна оси Ox и находится на расстоянии *d*, равном

$$d = \left|-\frac{C}{B}\right| \text{ (рис.5).}$$

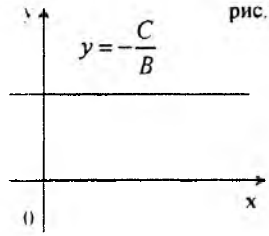


рис.5

Уравнения прямых, параллельных оси Ox не содержат переменную x.

4). Если B = 0, C = 0, A ≠ 0, то $Ax = 0$ – прямая совпадает с осью Oy, т.е.

$$x = 0 \text{ есть уравнение оси } Oy. \qquad (2)$$

5. Если A = 0, C = 0, B ≠ 0, то $By = 0$ – прямая совпадает с осью Ox, т.е.

$$y = 0 \text{ есть уравнение оси } Ox. \qquad (3)$$

3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Пусть прямая l не параллельна оси Oy (рис. 6). Обозначим точку пересечения l с осью Oy через $B(0; b)$, а угол между положительным направлением оси Ox и l через φ. Угол φ, отсчитываемый от оси Ox против часовой стрелки ($0 \le \varphi < \pi$), называется углом наклона прямой l к оси Ox.

Найдем уравнение прямой l.

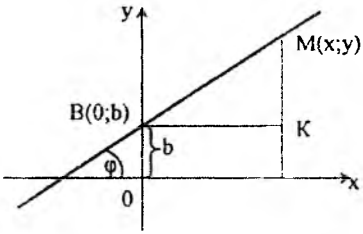


рис.6

Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка прямой l с текущими координатами x и y. Из прямоугольного треугольника ВКМ имеем:

$$tg\varphi = \frac{y-b}{x}.$$

Эта величина называется угловым коэффициентом прямой и обозначается через k: $k = tg\,\varphi$. Подставляя, получим: $k = \frac{y-b}{x}$, или

$$y = kx + b. \qquad (4)$$

Уравнение (4) называется уравнением прямой с *угловым коэффициентом*; число b называется начальной ординатой.

Пример 1: Составить уравнение прямой с углом наклона 135° и начальной ординатой $b = 2$.

Решение: Угловой коэффициент прямой $k = tg\,135° = -1$, подставляя в (4), получим:

$$y = -x + 2.$$

Уравнением прямой с угловым коэффициентом нельзя задать прямую, параллельную оси ординат, так как $tg\,90° \to \infty$.

Пример 2: Составить уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = 2$, проходящей через точку $M(-4; 3)$.

Решение: Выведем уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1; y_1)$ и имеющей данный угловой коэффициент k. Уравнение этой прямой имеет вид:

$y = kx + b$

Так как искомая прямая проходит через точку M_1, то

$y_1 = kx_1 + b$

Вычитая из первого равенства второе, получим:

$$y - y_1 = k\,(x - x_1) \qquad (5)$$

Согласно формуле (5) $y - 3 = 2\,(x - (-4))$, или $y - 3 = 2x + 8$,

или $2x - y + 11 = 0$

4. Каноническое уравнение прямой. Уравнение прямой, проходящей через две точки. *Каноническое уравнение* – это уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0;y_0)$ параллельно вектору $\overline{m}(a;b)$ (рис.7).

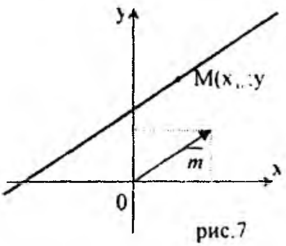


рис.7

Оно выглядит так:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \qquad (6)$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ выводится из канонического уравнения прямой, если за направляющий вектор взять сам вектор M_1M_2, а за точку M – любую из точек M_1 или M_2. Координаты вектора $\overline{M_1M_2}$ есть $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, подставляя их в формулу (6) вместо координат вектора $\overline{m}(a;b)$, а вместо точки $M(x_0;y_0)$ - точку $M_1(x_1;y_1)$, получим:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (7)$$

5. Уравнение прямой в отрезках. Предположим, что в общем уравнении прямой

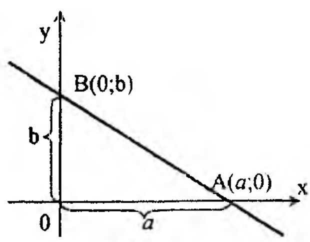


рис.8

$A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$. Перенеся C в правую часть и разделив почленно обе части полученного уравнения на C, получим:

$$\frac{A}{-C}x+\frac{B}{-C}y=1$$

Или $$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1.$$

Отсюда, вводя обозначения $-\frac{C}{A}=a,\ -\frac{C}{B}=b,$ приходим к уравнению

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad \textbf{(8)}$$

Уравнение (8) называется *уравнением прямой в отрезках*. Это название объясняется тем, что числа a и b определяются отрезками, которые прямая отсекает на осях координат. Такой вид уравнения удобен для построения прямой.

Заметим, что прямые, параллельные осям координат, и прямые, проходящие через начало координат, не могут быть записаны уравнениями в отрезках.

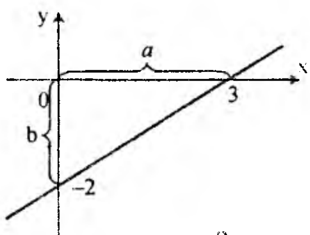


рис.9

Пример 3: Записать уравнение прямой $2x-3y-6=0$ в отрезках и построить эту прямую.

Решение: Перепишем уравнение в виде

$2x-3y=6$, откуда $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$,

или $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$, а из этого уравнения видно, что $a=3,\ b=-2$.

На оси Ox откладываем отрезок $a=3$, на оси Oy откладываем отрезок $b=-2$, (минус означает, что отрезок надо отложить по оси в отрицательную сторону, т.е. вниз). Через концы отрезков проводим прямую. (рис. 9)

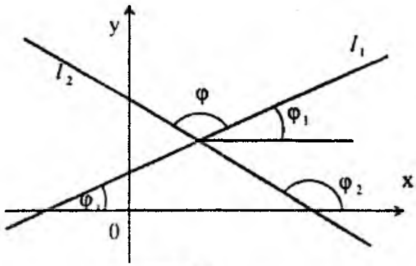


рис.10

7. Угол между двумя прямыми. Рассмотрим на плоскости две прямые l_1: $y = k_1x + b_1$ и l_2: $y = k_2x + b_2$ с углами наклона к оси Ox соответственно φ_1 и φ_2. Углом между прямыми l_1 и l_2 будем называть угол φ – наименьший угол, на который надо повернуть первую прямую против часовой стрелки вокруг точки пересечения этих прямых, до совпадения её со второй прямой $(0 \le \varphi < \pi)$.

Из рисунка 10 видио, что $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Поэтому

$$tg\varphi = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 \cdot tg\varphi_2} \quad \text{или}$$

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \qquad (9)$$

Формула (9) даёт выражение тангенса угла между двумя прямыми через угловые коэффициенты этих прямых.

8. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых. Если прямые параллельны, то $\varphi_1 = \varphi_2$ и, следовательно, $\underline{k_1 = k_2}$, т.е. *параллельные прямые имеют равные угловые коэффициенты.*

Пусть $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т.е. l_1 и l_2 взаимно перпендикулярны. В этом случае $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$, откуда $tg\varphi_2 = tg\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -ctg\varphi_1 = -\frac{1}{tg\varphi_1}$ или $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, т.е. *угловые коэффициенты взаимно перпендикулярных прямых обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку.*

9. Расстояние от точки до прямой. Расстоянием d от точки $M(x_0;y_0)$ до прямой $l:\ Ax+By+C=0$ называется длина перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую l. Это расстояние вычисляется по формуле:

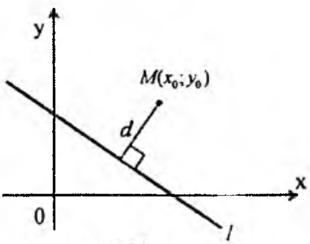


рис.11

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (10)$$

<u>Пример 4.</u> Найти расстояние от точки M(-2;-3) до прямой $2x+y+1=0$.

Решение: Пользуясь формулой (10), получаем:

$$d=\frac{|2\cdot(-2)+1\cdot(-3)+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

Вопросы по теме:

1. Что называется уравнением линии на плоскости?
2. Что называется текущими координатами?
3. Что называется уравнеием прямой?
4. Какие виды уравнений прямой существуют и чем они отличаются?
5. Как найти угол между прямыми?
6. Как определить параллельность двух прямых по их уравнениям?
7. Как определить перпендикулярность двух прямых по их уравнениям?
8. Как найти расстояние от точки до прямой?

Упражнения.

1. Определить, какие из точек A(2; 4), B(0; -1) и C(3; 7) лежат на прямой $y = 3x - 2$.
2. Найдите координаты точек пересечения прямой $y = 3x - 6$ с осями координат.
3. Составить уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = -5$, проходящей через точку F (2; – 6).
4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (– 1; 1), параллельно вектору n (5; – 3)
5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (– 1; 1), перпендикулярно вектору n (5; – 3)
6. Привести к виду уравнения прямой в отрезках осей координат и построить прямую $5y - 3x - 15 = 0$.
7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (2; 3), параллельно прямой $5x + 3y - 7 = 0$
8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (– 2; 6), перпендикулярно прямой $3x + 2y - 1 = 0$
9. Найти угол между прямыми $y = 3x - 5$ и $y = -x + 6$
10. Найти расстояние от точки A(2;5) до прямой $6x + 8y - 5 = 0$

§ 3. Системы линейных уравнений. Формулы Крамера. Определители 2- и 3-го порядка и их свойства.

1. Системы линейных уравнений. Пусть даны уравнения прямых l_1 и l_2 в общем виде:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \qquad (1)$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0, \qquad (2)$$

Если прямые l_1 и l_2 пересекаются в некоторой точке M $(x;\ y)$, то координаты этой точки должны удовлетворять одновременно двум уравнениям (1) и (2). Следовательно, чтобы найти координаты точки пересечения прямых l_1 и l_2, надо решить систему уравнений (1) и (2). Если эта система имеет единственное решение, то прямые пересекаются в одной точке. Если указанная система не имеет решения или имеет бесконечно много решений, то прямые соответственно параллельны или совпадают.

1). Если выполняется условие: $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, то система имеет единственное решение (прямые пересекаются в одной точке);

2). Если выполняется условие: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, то система не имеет решений (прямые параллельны);

3). Если выполняется условие: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, то система имеет бесконечно много решений (прямые совпадают).

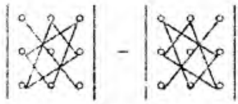
2. **Определители 2- и 3-го порядка и их свойства.** Таблицей, или *матрицей*, второго порядка называется таблица, составленная из двух строк и двух столбцов: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где a, b, c, d – некоторые числа. *Определителем* такой матрицы (таблицы) второго порядка называется число, полученное вычислением выражения $(ad - bc)$. Определитель обозначается так:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Определителем третьего порядка называется число, полученное определенными вычислениями из элементов таблицы третьего порядка (составленной из трех строк и трех столбцов).

I способ вычисления определителя **3-го** порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$



$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

II способ вычисления определителя 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 + a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) =$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1$$

Получается то же самое число. Этот способ называется разложением по элементам первой строки, также можно раскладывать по первому столбцу.

Определители второго и третьего порядка обладают следующими свойствами:

1. Величина определителя не изменится, если строки и столбцы этого определителя поменять местами.
2. Перестановка двух строк или столбцов определителя меняет его знак на противоположный.
3. Если определитель имеет две одинаковые строки или столбца, то он равен нулю.
4. Умножение всех элементов некоторой строки (или некоторого столбца) определителя на число k равносильно умножению определителя на это число.
5. Если все элементы некоторой строки (или некоторого столбца) равны нулю, то и сам определитель равен нулю.
6. Если все элементы двух строк (или столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

3. Формулы Крамера. Кроме известных методов решения систем линейных уравнений – метода подстановки и метода сложения, существует ещё один метод – метод Крамера. Опишем его. Пусть дана система линейных уравнений, перепишем её в таком виде:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$ т.е. свободные члены перенесём вправо.

Главным *определителем* этой системы, обозначается Δ, называется выражение $a_1b_2 - a_2b_1$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Определитель по переменной x, обозначается Δ_x, вычисляется подстановкой вместо столбца коэффициентов переменной x – столбца свободных членов.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1.$$

Определитель по переменной y, обозначается Δ_y, вычисляется подстановкой вместо столбца коэффициентов переменной y – столбца свободных членов.

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1.$$

После того, как найдены все три определителя, находим значения переменных x и y по формулам: $$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad (3)$$

Формулы (3) называются *формулами Крамера.*

Вопросы по теме:

1. Что называется системой линейных уравнений?
2. Что называется матрицей?
3. Что называется определителем?

4. Какими свойствами обладают определители?
5. Какими методами решаются СЛУ?
6. В чем состоит метод Крамера?

Упражнения.

1. Вычислить определитель второго порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить определитель второго порядка $\Delta = \begin{vmatrix} -7 & 12 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}$.

3. Вычислить определитель третьего порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ -5 & 1 & -5 \\ 8 & 5 & -2 \end{vmatrix}$.

4. Вычислить определитель третьего порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix}$.

5. Составить и вычислить главный определитель системы

$$\begin{cases} 2x + 7y = -13 \\ -3x + 5y = 1 \end{cases}$$

6. Решить системы уравнений по формулам Крамера.

а) $\begin{cases} x - 2y = -10 \\ 5x - 6y = 12 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x + y = -5 \\ x - y = 2 \end{cases}$

7. Решить систему уравнений различными методами.

$$\begin{cases} 3x+2y-12=0 \\ 5x+6y+7=0 \end{cases}$$

8. Решить систему уравнений по формулам Крамера.

а) $\begin{cases} 2x-3y+z=-1 \\ x+4y-2z=3 \\ 3x-y+z=4 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x+3y+7z=-2 \\ 8x+y-3z=9 \\ 10x+y-z=6 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+3y-z-2=0 \\ 2x+6y-2z+3=0 \\ 5x-2y+z-5=0 \end{cases}$

9. Решить систему уравнений различными методами.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ 4x-3y+z=3 \end{cases}$$

Глава III.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.

§ 1. Функция и её свойства.

1. Понятие функции.

Одним из основных математических понятий является понятие функции. В этом понятии находит отражение тесная связь математики с различными явлениями реальной действительности. Понятие функции связано с установлением зависимости между элементами двух множеств.

Определение. Если каждому элементу x множества A по правилу f соответствует единственный элемент y множества B, то говорят, что на множестве A задана функция $f(x)$, и пишут $y=f(x),\ x\in A$.

x - называется аргументом,

y - значением функции,

множество A - область определения функции,

B - множество значений функции. Ещё функции обозначают как $f:\ A\to B$.

2.Числовые функции. Пусть задана функция $f:\ A\to B$. Если элементами множеств A и B являются действительные числа, т.е. $A\subset R$ и $B\subset R$, то функцию f называют числовой функцией.

Мы будем в дальнейшем говорить только о числовых функциях, для краткости будем называть их просто функциями.

3.Способы задания функции. Функция будет задана, если заданы множества A и B и указано правило f, по которому для произвольного $x\in A$

можно найти (вычислить) соответствующее ему число $y \in B$. Часто это правило задают формулой

Например: $y = 2x + 5$.

Существуют следующие способы задания функции:

1) аналитический (функция задается при помощи формулы)
2) графический (функция задается при помощи графика)
3) табличный (таблица, в которой для значения аргумента, указывается соответствующее значение функции)

Числовая функция $f(x)$, $x \in A$ полностью определяется заданием множества точек $M\ (x; f(x))$, $x \in A$ на числовой (координатной) плоскости. Это множество точек называется графиком данной функции f. Задать функцию графически – значит задать (изобразить) её график.

4.Свойства функции:

1°. *Ограниченность.*

Функция $y = f(x)$, $x \in A$ называется ограниченной, если существует такое число M, что для каждого $x \in A$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$. График ограниченной функции размещается на координатной плоскости в горизонтальной полосе $-M \le y \le M$.

Например: Пусть $y = x - [x]$, $x \in R$, график этой функции расположен в горизонтальной полосе $0 \le y \le 1$ (рис.1). На рис.2 показан график неограниченной функции.

рис.1

$y = x - [x]$

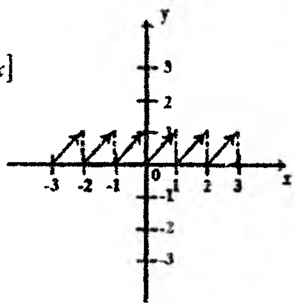
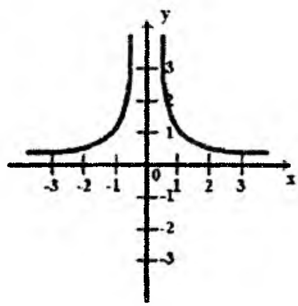


рис.2

$y = \frac{1}{x^2}$



2°. *Монотонность.*

Функция $f(x)$, $x \in A$ называется возрастающей , если для любых x_1 и x_2 из A таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$

Если $f(x_1) < f(x_2)$, то функция строго возрастающая.

Функция $f(x)$, $x \in A$ называется убывающей, если для $\forall x_1$ и x_2 из A таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \ge f(x_2)$.

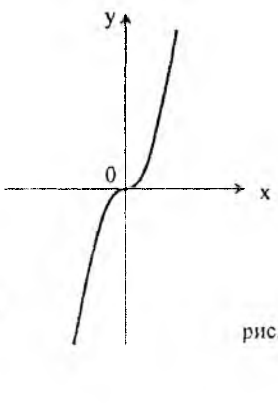
Если $f(x_1) > f(x_2)$, то функция строго убывающая.

Все рассмотренные выше функции называются монотонными функциями. Строго убывающие и строго возрастающие функции называются строго монотонными.

3°. *Чётность, нечетность.*

Функция $f(x)$, $x \in A$ называется чётной, если для $\forall x \in A$, $\exists(-x) \in A$, такой, что выполняется равенство $f(-x) = f(x)$..

Функция $f(x), x \in A$ называется нечётной, если для $\forall x \in A$, $\exists(-x) \in A$, такой, что выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.



Ф

рис.3

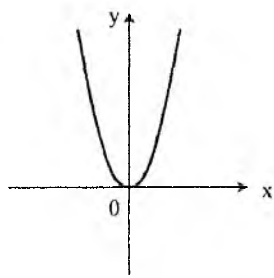


рис.4

ункция $y = x^3$ (кубическая парабола), показанная на рис.3 является нечетной.

Функция $y = x^2$ (квадратическая парабола), показанная на рис.4, а также функция $y = \frac{1}{x^2}$ (гипербола), показанная на рис. 2, являются четными.

Функция, показанная на рис.1 - не четная и не нечетная.

Так как $f(-x) = f(x)$, $(f(-x) = -f(x))$, то график четной функции будет симметричным относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат. Поэтому достаточно построить их график лишь для $x \geq 0$ и затем отразить его симметрично оси ординат или начала координат.

4°. *Периодичность.*

Функция $y = f(x)$, $x \in A$ называется периодической, если существует число $T>0$ такое, что для $\forall\, x \in A$ выполняется равенство $f(x+T)=f(x)$. Число T называется периодом функции f. Выполняется также $f(x-T)=f(x)$, $f(x+kT)=f(x)$, где $k \in Z$.

Все тригонометрические функции являются периодическими. Существуют также периодические, но не тригонометрические функции.

Например, функция $y = x - [x]$, показанная на рис.1 является периодической. Ее период равен единице.

5. Сложная функция. Алгебраические, трансцендентные функции.

Пусть заданы две функции $y = g(x)$, $x \in X$, и $z = \varphi(y)$, $y \in Y$, причём область определения функции φ содержит множество значений функции g. В этом случае функция Z называется сложной функцией, составленной из функций g и φ или суперпозицией функций g и φ.

Например: функция $Z = \ln(1+x^3)$ – является сложной функцией. она состоит из простых функций $y = 1 + x^3$ и $z = \ln y$.

Существуют сложные функции, являющиеся суперпозицией более чем двух функций.

Алгебраические функции. Трансцендентные функции.

Определение. Если в формуле, определяющей функцию, над аргументом x производятся только алгебраические операции (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень), то такую функцию называют алгебраической.

Алгебраическая функция, в которую входят радикалы (корни) является иррациональной. Многочлены и рациональные функции являются алгебраическими.

Всякую неалгебраическую функцию называют трансцендентной. Это функции a^x, $\log_a x$, $\sin x$ и т.д.

Вопросы по теме:

1. Дайте определение функции
2. Какая функция называется числовой?
3. Перечислите способы задания функции
4. Какая функция называется ограниченной?
5. Что такое монотонность функции?
6. Дайте определения чётной и нечётной функций.
7. Что такое периодическая функция, период функции?
8. Дайте определение сложной функции.
9. Какие функции называются алгебраическими?
10. Какие функции называются трансцендентными?

Упражнения.

1. Найти область определения функций:

а). $y=\sqrt{x-5}$, б). $y=\frac{1}{x-3}$, в). $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-16}}$,

г). $y=\frac{\sqrt{x^2-9}+2x}{x+2}$, д). $y=\frac{4+\sqrt{49-x^2}}{\sqrt{x^2-4}}$. е). $y=\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{7-x}}$.

2. Дана функция $y=3x^2+1$, найти значения функции в точке $x=2a$.

3. Показать, что для функции $y=3x^4-2x^2+1$ выполняется равенство $f(-3)=-f(3)$.

4. Показать, что для функции $f(x)=x^3-x$ выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$.

5. Найти промежутки убывания и возрастания функции $y=x^2$.

§ 2. Предел функции. Непрерывность функции в точке.

1. Предел числовой последовательности.

Определение. Бесконечной числовой последовательностью называется функция $a_n=f_n$, определенная на множестве всех натуральных чисел *1 ,2,... n,...* Значения последовательности $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ называют её членами.

Обозначают как: $\{a_n\}$ - это последовательность с общим членом a_n.

Например. Членами последовательности $\{3n+1\}$ являются числа 4,7,10,...

График любой числовой последовательности состоит из отдельных точек, расположенных справа от оси OY.

Определение. Число **a** называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такой номер $N=N(\varepsilon)$, зависящей от ε, что для всех $n>N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Это обозначают как : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$

Пример. Доказать, что

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$;

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Тогда $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$,

Если $n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$ в качестве номера N можно взять целую часть числа $\frac{1}{\varepsilon}$

т.е. $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. **Итак,** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2. Бесконечно малые и бесконечно большие величины.

При изучении свойств пределов функции особую роль играют функции, предел которых при стремление аргумента к какой-либо точке равен нулю.

Определение. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно малой если её предел равен нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Например: последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{(-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right\}$ имеют нулевой предел при $n \to \infty$.

Понятие бесконечно малой последовательности можно также перенести на произвольные функции.

Определение. Функция $a(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

Т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Бесконечно малую функцию называют также бесконечно малой величнной или просто бесконечно малой.

Пример. Показать, что функция $y = x^2 - 1$ является бесконечно малой при $x \to 1$.

Пусть ε – произвольное положительное число. Найдем такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-1| < \delta$, выполняется неравенство $|x^2 - 1| < \varepsilon$.

Если $0 < |x-1| < \delta$, то

$|x+1| = |(x-1)+2| \le |x-1| + 2 < \delta + 2 \Rightarrow |x^2-1| = |x-1||x+1| < \delta(\delta+2)$

Для выполнения неравенства $|x^2-1| < \varepsilon$ достаточно потребовать, чтобы $\delta(\delta+2) = \varepsilon$, т.е. чтобы $\delta^2 + 2\delta - \varepsilon = 0 \Rightarrow \delta = -1 + \sqrt{1+\varepsilon}$ (второй корень $-1-\sqrt{1+\varepsilon}$ отбрасываем, т.к. $\delta > 0$). По определению предела функции $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$.

Свойства бесконечно малых величини.

1^0 Если функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ являются бесконечно малыми, то функция $\alpha_1(x)$ + $\alpha_2(x)$ - также бесконечно малая функция.

2^0 Произведение ограниченной при $x \to a$ функции на бесконечно малую есть функция бесконечно малая.

3^0 Произведение постоянной на бесконечно малую есть бесконечно малая.

4^0 Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая.

Определение. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого положительного числа M найдется такое натуральное число N, что для $n > N$ выполняется неравенство $|a_n| > M$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, т.е. предел бесконечно большой последовательности равен бесконечности.

Например: последовательности $\{n\}$, $\{(-1)^n \cdot n\}$ являются бесконечно большими.

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если для любого числа $M > 0$ существует такое число $\delta > 0$ *что* $|f(x)| > M$ для всех x удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$ $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.

Бесконечно большая и бесконечно малая величины тесно связаны:

1. Если функция $f(x)$ бесконечно большая и не обращается в нуль, то $\dfrac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая.
2. Если функция $\alpha(x)$ бесконечно малая и не обращается в нуль, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно большая.

Основные теоремы о пределах.

Теорема 1. Для того, чтобы число A было пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы это функция была представлена в виде: $f(x) = A + \alpha(x)$ где $\alpha(x)$ - бесконечно малая.

Доказательство. По условию теоремы $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N=N(\varepsilon)$ такой, что $|A_n - A| < \varepsilon$ для всех $n>N$. Пусть $\alpha(x) = f(x) - A$, тогда $\alpha(x) < \varepsilon$ для всех $n>N$, откуда следует что $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

Итак, если число A - предел функции $f(x)$, то $f(x)=A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая последовательность.

Теорема 2. Предел постоянной величины равен самой постоянной.

Теорема 3. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют пределы при $x \to a$, то при $x \to a$ имеют предел также их сумма, произведение, а также при условии, что $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) \neq 0$ и их частное.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x \to 1}(2x^2+1)$.

$$\lim_{x \to 1}(2x^2+1) = \lim_{x \to 1} 2x^2 + \lim_{x \to 1} 1 = 2\lim_{x \to 1} x^2 + 1 = 2+1 = 3.$$

4. Замечательные пределы.

Указанные ниже пределы 1 и 2 принято называть замечательными пределами в виду того, что их можно использовать при решении примеров.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

2. $\lim\limits_{x \to \infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$ или $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Предел 1 называется первым замечательным пределом. С его помощью можно вычислять пределы различных функций, содержащих тригонометрические функции и степени x.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$.

Положим $y=2x$. Тогда по формуле замены переменной под знаком предела имеем: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{2\sin y}{y} = 2\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\sin y}{y} = 2 \cdot 1 = 2$.

Предел 2 называется вторым замечательным пределом. Рассмотрим числовую последовательность

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}.$$

Ее членами являются: $2,\ 2\frac{1}{4},\ 2\frac{10}{27},\ 2\frac{113}{256},\ \ldots$

Эта последовательность как возрастающая и ограниченная сверху, имеет предел. Этот предел принято обозначать буквой *e* (так называемый второй замечательный предел).

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Число *e* является иррациональным и приблизительно равно 2,71828 (e = 2,71828182…).

Число *e* встречается при изучении целого ряда процессов, таких как: охлаждение тел, размножение бактерий и т.п. Отсюда ясно, какую важную роль играет число *e* в математическом анализе и его приложениях.

3. Непрерывность функций.

Графиками последовательностей являются множества точек, эти точки на расстоянии друг от друга (дискретное множество точек). Графиком же, например, степенной функции является кривая, которая похожа на росчерк пера, на «сплошную», «непрерывную» линию. Рассмотрим понятие непрерывности.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некотором интервале, x_0 и x - два произвольных значения аргумента из этого интервала. Обозначим $x-x_0=\Delta x \Rightarrow x=x_0+\Delta x$. Говорят, что первоначальному значению аргумента x_0 дано приращение Δx.

Приращением Δy функции $y=f(x)$, соответствующим приращению Δx аргумента x в точке x_0 называется разность $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению Δx аргумента x в точке x_0 соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, *т.е.* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$

Другими словами, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, т.е. предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке.

Непрерывность элементарных функций.

<u>Теорема 1.</u> Если функции $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ непрерывны в т. x_0 то непрерывна в этой точке также их алгебраическая сумма, произведение и частное $f_1(x) \pm f_2(x)$, $f_1(x) \cdot f_2(x)$ *и* $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ (*при* $f_2(x) \neq 0$)

<u>Теорема 2.</u> Все основные элементарные функции непрерывны там, где они определены.

Доказательство. Т.к. функция $y = x$ непрерывна при $\forall x$, то согласно теореме 1 степенная функция $y = x^n$ *где* $n \in N$ также непрерывна при $\forall x$,

<u>Пример 1</u>. Функция $y = x$ непрерывна при любом значении $x = x_0$

$\Delta y = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$

Целая рациональная функция непрерывна при любых x, что следует из теоремы 1. Дробно рациональная функция непрерывна всюду, где её знаменатель не обращается в нуль.

Непрерывность тригонометрических функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ имеет место всюду при

$x = x_0$, $\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0) = 2\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} = \cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \Delta x \Rightarrow \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta$

$= \cos x_0 \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$

Аналогично доказывается непрерывность функции y=cos x, y= tg x и y=ctg x непрерывны всюду, где они определены как отношения двух непрерывных функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

Если функция $f(x)$ не является непрерывной в т. x_0, то в т. x_0 функция $f(x)$ разрывна, а т. x_0 - точка разрыва функции $f(x)$.

Вопросы по теме:

1. Что такое бесконечная числовая последовательность?
2. Дайте определение предела числовой последовательности
3. Что такое бесконечно-малая последовательность?
4. Что такое бесконечно-большая последовательность?
5. Какова связь между бесконечно малой и бесконечно большой величинами?
6. Какая функция является непрерывной в точке?

Упражнения.

1. Изобразить точками на плоскости последовательности, заданные общими членами

$$a_n = \frac{1}{n} + 1; \; a_n = \frac{1}{n^2}$$

2. Доказать по определению: а). $\lim\limits_{n \to +\infty} (-1)\frac{1}{n} = 0$, б). $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n-1}{n} = 1$.

в). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}$.

3. Вычислить пределы: а). $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+6x+8)$, б). $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3x+\dfrac{2}{x}-1)$,

в). $\lim\limits_{x\to 0}(2x^3-3x^2-\dfrac{x}{7x})$, г). $\lim\limits_{x\to 1}(x^4-\dfrac{1}{x^2}-1)$, д). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$,

е). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$, ж). $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-7x+12}$, з). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-3x+12}{x^2+2x+2}$,

и). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$, к). $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$, л). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x}$.

§ 3. Производная функции. Дифференциал.

1. **Понятие производной функции.** Рассмотрим функцию $y=f(x)$, заданную на интервале (a,b). Пусть x - любая фиксированная точка интервала (a,b), а Δx - произвольное число, настолько малое, что значение $x+\Delta x$ также находится на интервале (a,b). Это число Δx называют приращением аргумента.

Приращением функции $y=f(x)$ в точке x, отвечающим приращению аргумента Δx будем называть число $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

Считая, что $\Delta x\neq 0$, составим в данной фиксированной точке x отношения приращения Δy функции $y=f(x)$ в этой точке к соответствующему приращению аргумента Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

которое называется разностным отношением.

Определение. Производной функции $y=f(x)$ в данной точке x

называется предел при $\Delta x \to 0$ разностного отношения (при условии, что этот предел существует).

Производную функции $y = f(x)$ в данной точке x будем обозначать символом $f'(x)$ или $y'(x)$ или кратким символом y'.

Итак, по определению

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

<u>Пример</u>. Найти производную функции $f(x) = x$ по определению. Для этой функции разностное отношение равно

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Отсюда следует, что и производная указанной функции равна единице в любой точке x бесконечной прямой.

Геометрический и механический смысл производной.

Рассмотрим *геометрический смысл* производной функции в точке. Пусть дана некоторая линия L и на ней точка M (рис. 1) . Возьмём на линии L некоторую точку N, не совпадающую с точкой M. Прямую MN называют секущей для линии L. Пусть теперь точка N приближается к точке M, оставаясь на линии L . Тогда каждому положению точки N будет соответствовать своя секущая, и все эти секущие будут проходить через точку M.

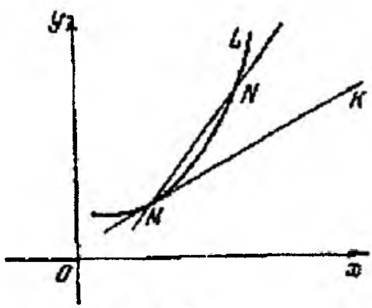


Рис. 1.

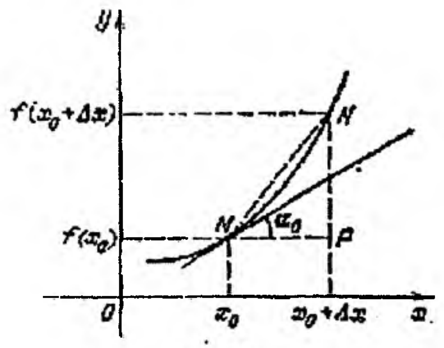


Рис. 2.

Касательной к линии L в точке M называется предельное положение MK секущей MN при стремлении точки N к точке M.

Пусть $y = f(x)$ - некоторая функция, дифференцируемая в точке x_0. В декартовой системе координат точка М, лежащая на границе функции $y = f(x)$и имеющая абсциссу x_0, имеет координаты $(x_0;\ f(x_0))$, функции (рис.2) имеет координаты $(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$. Проведём через точку M прямую, параллельную оси O_x, и обозначим точку пересечения этой прямой и прямой $x_0 + \Delta x$ через P. Рассмотрим прямоугольный треугольник MNP.

Отношение

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = tg\alpha$$

равно тангенсу угла наклона секущей MN к положительному направлению оси Ox.

Если устремить приращение Δx к нулю, то геометрически это будет означать что точка $N\ (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ будет двигаться по графику функции $y = f(x)$, приближаясь к точке M, а угол α будет стремиться к углу α_0- углу наклона касательной к положительному направлению оси Ox.

Так как

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0),\ \text{а}\ \lim_{\Delta x\to 0}tg\alpha=tg\alpha_0,\ \text{то}\ f'(x_0)=tg\alpha_0$$

т.е. значение функции $f'(x)$ в точке хо равно тангенсу угла наклона касательной.

А теперь рассмотрим *механический смысл* производной функции в точке.

Пусть материальная точка движется по прямой под действием некоторых сил. Выберем какой-либо момент времени t_0 и рассмотрим промежуток времени Δt от момента t_0 до момента $t=t_0+\Delta t$. За этот промежуток времени точка пройдет некоторый путь, который обозначим $\Delta S(t_0)$. Этот путь есть функция от Δt. По известному из физики определению отношение

$$\frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t}$$

есть средняя скорость движения точки за время Δt. Будем рассматривать все меньшие и меньшие промежутки времени, устремляя Δt к нулю. Предел

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S(t_0)}{\Delta t}=S'(t_0)=v(t_0)$$

называется мгновенной скоростью точки в момент времени t_0.

Таким образом, мы можем сказать, что производная функции в точке, то есть при данном значении x - это скорость изменения функции в данный момент времени или мгновенная скорость.

2. Производные основных элементарных функций.

1. $(c)' = 0$
2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
3. $(a^x)' = a^x \ln a$
4. $(e^x)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
10. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
14. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

3. Правила дифференцирования.

1. Для $y = c \cdot f(x), y' = c \cdot f'(x)$, производная произведения постоянной величины на функцию равна произведению постоянной величины на производную этой функции.

2. Для $y = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$, $y' = f'_1(x) + f'_2(x) + f'_3(x)$

Производная суммы конечного числа дифференцируемых функций, равна сумме производных этих функций.

3. Производная произведения двух функций находится по формуле $(u \cdot v)' = u'v + u \cdot v'$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ - функции.

4. Производная частного двух функций находится по формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$$

5. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $z = g(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x)$, то и сложная функция $z = g(f(x))$ имеет производную в точке x_0, причём $(g(f(x)))_{x=x_0} = g'_y(y_0) \cdot f'_x(x_0)$, где индексы y и x у производных указывают, по какому аргументу вычисляются производные.

4. **Понятие дифференциала.** Пусть $y = f(x)$ имеет произодную на отрезке $[a;b]$, тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha \text{, где } \alpha \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0,$$

откуда $\Delta y = f(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

1. $f'(x) \cdot \Delta x$ - бесконечно малая первого порядка, относительно Δx
2. $\alpha \cdot \Delta x$ - бесконечно малая высшего порядка относительно Δx, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} = 0$$

$f'(x) \cdot \Delta x$-главная часть приращения фуикции (линейная относительно Δx). Это и есть дифференциал функции.

Дифференциал обозначают как $dy, df(x)$.

Таким образом, имеем $df(x) = f'(x) \cdot \Delta x$.

Если обозначить $\Delta x = dx$, то $df(x) = f'(x) \cdot dx \Rightarrow f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$.

Производные и дифференциалы высшего порядка обозначаются:

$y'; dy$ - первого порядка

y'', $d^2 y$ - второго порядка

y''', $d^3 y$ -третьего порядка и т.д.

Пример. Для функции $y = 3x^4 + 5x^2 + 7x$ найдём производные и дифференциалы.

$y' = 12x^3 + 10x + 7$

$y'' = (y')' = 36x^2 + 10$

$y''' = (y'')' = 72x$

$y^{IV} = (y^{III})' = 72$

$y^{V} = (y^{IV})' = 0$

$dy = (12x^3 + 10x + 7)dx$

$d^2y = (36x^2 + 10)dx$

$d^3y = 72xdx$

$d^{IV}y = 72dx$

$d^{V}y = 0$

Вопросы по теме:

1. Дайте определение производной функции в точке.
2. В чём заключается геометрический смысл производной функции в точке?
3. В чём заключается механический смысл производной функции в точке?
4. Перечислите основные правила нахождения производной.
5. Что такое дифференциал?

Упражнения.

1. Найти производную функции $y = x^2$ в произвольной точке x_0 по определению.
2. Найти производную функции $y = (x^2 + 1) * (2x + 3)$ как производную произведения двух функций.
3. Найти y', если: а). $y = x^2 + x - \frac{3}{2x}$, б). $y = \cos(1 + \frac{1}{x})$, в). $y = \ln(2x+1)$,

г). $y = \sqrt{x} + \sqrt{x^3 - 8x^2}$, д). $y = tg5x - 3ctgx$, е). $y = x^8 \cdot \cos x$,

ж). $y = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}$, з). $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$.

§ 4. Первообразная функции. Неопределённый интеграл и его свойства. Таблица интегралов.

Понятия первообразной и неопределённого интеграла.

При решении ряда задач механики и физики необходимо восстанавливать функцию по сё известной производной. Так, если материальная точка движется по прямой, не меняя направления своего движения и расстояние, пройденное точкой - функция времени $S(t)$, то мгновенная скорость точки вычисляется как производная пройденного пути:

$$V = S'(t)$$

Пусть теперь нам известен закон изменения скорость точки, т.е. задача функции $v(t)$, и требуется найти расстояние, которое прошла материальная точка за некоторый промежуток времен Т. Для того, чтобы решить сформулированную задачу, необходимо по известной производной (в нашем случае скорости v (t)) восстановить саму функцию (в нашем случае S (t)).

Восстановление функции по известной её производной составляет одну из основных задач интегрального исчисления. Эта задача является обратной основной задаче дифференциального исчисления, которая состояла в нахождении производной данной функции.

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функцией (или просто первообразной) для функции $f(x)$ на некотором промежутке числовой оси, если для всех значений x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Другими словами можно сказать, что производная первообразной функции равна самой функции.

Пример. Функция $f(x) = \frac{x^3}{3}$ есть первообразная для функции $f(x) = x^2$ на интервале $(-\infty;\infty)$, так как

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2 = f(x) \text{ для всех } x \in (-\infty;\infty)$$

Легко заметить, что $\frac{x3}{3}+7$ имеет ту же самую производную x^2 и поэтому также является первообразной для x^2 на R. Ясно, что вместо числа 7 можно поставить любую постоянную. Таким образом, мы видим, что задача нахождения первообразной имеет бесконечно много решений.

Основное свойство первообразных: если функция $F(x)$ - первообразная функция для $f(x)$, то и функция $F(x)+C$, где C – любая постоянная, также первообразная для функции $f(x)$.

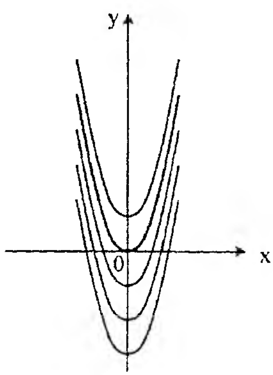
Таким образом, для того, чтобы найти все первообразные данной функции $f(x)$, достаточно найти лишь одну первообразную $F(x)$. Все остальные первообразные будут получаться из найденной первообразной добавлением постоянного слагаемого.

Определение. Выражение вида $F(x)+C$, где $F(x)$ – некоторая первообразная функция для $f(x)$ и C – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

Произведение $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением, а $f(x)$- подынтегральной функцией.

Неопределенный интеграл функции $f(x)$ является совокупностью всех её первообразных.



Нахождение множества всех первообразных функции $f(x)$ называется интегрированием этой функции.

Пример. Для первообразных неопределенного интеграла $\int 2xdx = x^2 + c$ графики функции будут расположены вдоль оси с вершинами в точках $y = c$, на данном рисунке при $c = -2,\ c = -1,\ c = 0,\ c = 1,\ c = 2$.

С геометрической точки зрения мы получили множество интегральных кривых (в нашем примере парабол).

Свойства неопределенного интеграла.

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$

2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$

3. $\int dF(x) = F(x) + c$

4. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$ постоянный множитель выносится из под знака интеграла.

5. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ интеграл суммы двух функций равен сумме интегралов этих функций.

Таблица интегралов.

1. $\int 0 \cdot dx = C$

2. $\int 1 \cdot dx = x + C$

3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$

4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

5. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + c$

6. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

9. $\int \cos x dx = \sin x + c$

10. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$

11. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + c$

Пример. Вычислить неопределенный интеграл $\int(6x^3+x-1)dx$, используя свойства и таблицу интегралов.

$$\int(6x^3+x-1)dx = 6\int x^3dx + \int xdx - \int 1\cdot dx = \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{2x^2} - x + C.$$

4.Основные методы интегрирования.

1. *Непосредственное интегрирование* выполняется с помощью основных правил и преобразований функций, при этом интеграл приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

2. *Интегрирование по частям*

По известному правилу дифференцирования имеем:

$$d(uv) = vdu + udv,$$

откуда

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Если производные (или, что тоже, дифференциалы) двух функций равны, то их неопределенные интегралы совпадают. Поэтому

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu,$$

и следовательно,

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (1)$$

Эта формула называется формулой интегрирования по частям. Ее целесообразно применять в тех случаях, когда интеграл $\int vdu$ вычислить легче, чем исходный интеграл $\int udv$.

Пример. Вычислить интеграл $\int xe^x dx$.

Так как $e^x dx = de^x$, то

$$\int xe^x dx = \int xde^x.$$

Применяя формулу (1), находим:

$$\int xde^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C .$$

3. *Интегрирование методом замены переменной (метод подстановки).*

Интеграл $\int f(x)dx$ часто можно упростить, если вместо x ввести новую переменную интегрирования t, положив $x = \varphi(t)$.

Тогда $\quad f(x) = f(\varphi(t)),\quad dx = \varphi'(t)dt \quad$ и

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big|_{t = \varphi^{-1}(x)}$$

(1)

где в окончательном результате возвращаемся к переменной x по формуле $t = \varphi^{-1}(x)$. Формула (1) называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x+5}$.

Так как $dx = d(x+5)$, то вводя новую переменную $t = x+5$, находим:

$$\int \frac{dx}{x+5} = \int \frac{d(x+5)}{x+5} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+5| + C .$$

Вопросы по теме:

1.Что такое первообразная функции?

2. Дайте определение неопределенного интеграла

3. Как интерпретируется с точки зрения геометрии неопределенный интеграл?

4. Перечислите основные правила интегрирования.

5.Назовите основные методы интегрирования.

Упражнения.

Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int(5x^2+3x-4)dx$

2. $\int x(x^2-\frac{2}{x})dx$

3. $\int(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})dx$

4. $\int\frac{x^2+2}{x^2+1}dx$

5. $\int\sin 3x dx$

6. $\int\frac{dx}{3x-5}$

7. $\int\frac{dx}{x\ln x}$

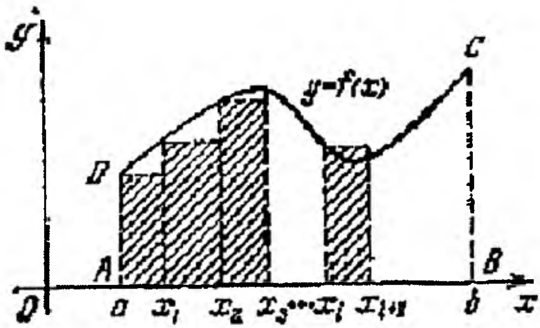
8. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

9. $\int\ln x dx$

10. $\int e^{-3x}dx$

§ 5. Определённый интеграл и его свойства.

1. **Задача о вычислении площади плоской фигуры.** Пусть на некотором промежутке $[a;b]$ задана непрерывная функция $f(x)$, принимающая лишь положительные (неотрицательные) значения.



Построим график функции $y=f(x)$ в прямоугольной системе координат OXY.

Рассмотрим фигуру $ABCD$, ограниченную графиком функции $y=f(x)$, двумя прямыми, задаваемыми уравнениями $x=a$, $x=b$ и осью Ox. Эту фигуру называют криволинейной трапецией.

Разделим основание трапеции AB на n отрезков с концами

$x_0 = a, x_1, x_2, x_3 ... x_{n-1}, x_n = b$ и через точки $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ проведём вертикальные прямые , которые разобьют криволинейную трапецию на *n* полосок .

Для каждой полоски построим прямоугольник, основание которого тоже, что и у полоски, а высота совпадает с одной из боковых сторон полоски (эти прямоугольники заштрихованы).

Основание i-го прямоугольника $i = 0,2,3,...,n-1$ равно разности $x_{i+1} - x_i$, которую обозначим Δx_i , а высота, согласно принятому выше допущению, равна $y_i = f(x_i)$ Площадь i-го прямоугольника равна $y_i \Delta x_i = f(x_i)\Delta x_i$. Сумма площадей Sn всех прямоугольников равна

$$Sn = f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + ...f(x_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$$

Площадь Sn называют приближённым значением площади криволинейной трапеции $ABCD$.

Точное значение площади S получится как предел

$$S = \lim \sum f(x_i)\Delta x_i = \lim \sum y_i \Delta x_i$$

в предположении, что все длины Δx_i одновременно стремятся к нулю, при неограниченном увеличении числа точек разбиения отрезка AB.

Для обозначения предельного значения суммы Лейбниц ввел символ $\int y dx$, где ydx - вид слагаемых суммы, а $\int$ - стилизованная буква S - начальная буква латинского слова *Summa*.

Вычисляя площадь криволинейной трапеции $ABCD$, мы не касались вопроса о том, каждая ли геометрическая фигура имеет площадь. В математическом анализе построены примеры фигур, не имеющих площади.

2. Понятие определенного интеграла.

Понятие площади криволинейной трапеции, например для ограниченных функций, имеющих на промежутке $[a;b]$ конечное число точек разрыва, вводится с помощью определенного интеграла.

Пусть ограниченная функция $f(x)$ задана на некотором промежутке $[a;b]$. Разобьем этот промежуток произвольным образом на n частей, вставив между точками a и $в$ точки деления $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$, причём

$a = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_i < x_{i+1} < ... < x_n = b$

Наибольшую из разностей $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0,1,2,...n-1)$ обозначим через λ.

Возьмём в каждом из промежутков $[x_i, x_{i+1}]$ произвольные точки $\xi_i : x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$ и составим сумму, называемую интегральной суммой:

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i \qquad (1).$$

соответствующей данному разбиению отрезка $[a;b]$. Сумма (1) зависит и от выбора точек разбиения x_i отрезка $[a;b]$ и от выбора точек ξ_i

Говорят, что сумма σ_n имеет предел I при λ, стремящемся к нулю, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число δ > 0, что неравенство

$$|\sigma_n - I| < \varepsilon$$

выполняется при любом λ < δ независимо от выбора чисел ξ_i (т.е. для любого разбиения промежутка $[a;b]$ на части, меньше чем δ и при любом выборе точек ξ_i).

Конечный предел I суммы *бn* при λ стремящееся к нулю, называется определённым интегралом функции $f(x)$ на промежутке от a до $в$ и обозначается на промежутке от a до b и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

Если такой предел существует, то говорят, что функция $f(x)$

интегрируема на промежутке $[a;b]$.

В записи (2) функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ - подынтегральным выражением, а числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интеграла.

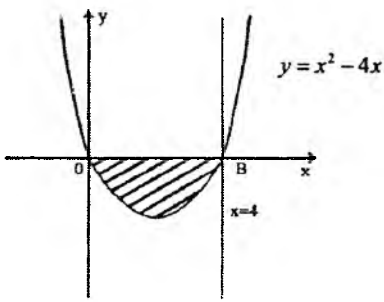
3. Формула Ньютона - Лейбница

Определённый интеграл вычисляется по формуле Ньютона - Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Пример. Найти площадь фигуры, заключенной между осью Ox и кривой $y = x^2 - 4x$.

Решение: изобразим на координатной плоскости график данной кривой.



Точки O и B -точки пересечения параболы с осью Ox имеют абсциссы равные 0 и 4. Заданная функция – отрицательная в промежутке значений от 0 до 4. Поэтому площадь вычисляем по формуле

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_0^4 (x^2 - 4x)dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2}\right)\Big|_0^4\right| = \left|\frac{4^3}{3} - 2\cdot 16\right| = \left|\frac{64}{3} - 32\right| = \left|-\frac{32}{3}\right| = 10\frac{2}{3}$$

4. Приложение определённого интеграла в механике.

Путь S, пройденный телом за время t в прямолинейном движении с постоянной скоростью определяется по формуле $S = v \cdot t$.

Если тело движется неравномерно, то скорость его меняется в зависимости от времени t и расстояния находится по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$

<u>Пример</u>. Скорость движения тела $v = (2t^2 + t)\frac{cm}{c}$, найти путь, пройденный им за 6 секунд от начала движения

$$S = \int_0^6 (2t^2 + t)dt = (\frac{2t^3}{3} + \frac{t^2}{2})\Big|_0^6 = 2\cdot\frac{6^3}{3} + \frac{6^2}{2} = 162(cm)$$

Вопросы по теме:

1.Как составляется интегральная сумма?

2.Что такое определенный интеграл?

3.В чём заключается геометрический смысл определённого интеграла?

4.По какой формуле вычисляется определённый интеграл?

5.Как применяется определенный интеграл в механике?

Упражнения.

1. Вычислить: а). $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^3 dx$, б). $\int_{-1}^{1} (5x^2 + 3x - 4)dx$

в). $\int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})dx$ г). $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin 3x dx$

д). $\int_2^5 e^{-3x} dx$

2. Найти: а). $\int_{-1}^{2}(3x+1)dx$, б). $\int_{1}^{2}(5x^2+3x-4)dx$,

в). $\int_{2}^{3}(\sqrt{x}+2x-1)dx$, г). $\int_{1}^{3}\frac{2x^2+1}{x}dx$,

д). $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin 2x+2)dx$.

3. Найти площадь фигуры, заключенной между кривой $y=x^3$, прямыми $x=-1$, $x=2$ и осью Ox.

4. Вычислить:

а). $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 4x dx$,

б). $\int_{0}^{\pi}\cos 2x dx$,

в). $\int_{0}^{1}tg3x dx$,

г). $\int_{1}^{2}(x+1)^2 dx$,

д). $\int_{-1}^{1}x(2-x^2)dx$.

Глава IV.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТИОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.

Закономерности, которым подчиняются случайные события, изучаются в разделах математики, которые называются теорией вероятностей и математической статистикой. Точнее, теория вероятностей и математическая статистика изучают закономерности однородных массовых случайных явлений.

Методы теории вероятностей и математической статистики широко применяются в естествознании, технике, экономике.

§ 1. Элементы комбинаторики. Основные определения и теоремы теории вероятностей.

1. Основные формулы комбинаторики.

Определение. *Комбинаторика* — раздел математики, изучающий вопросы о том, сколько комбинаций определенного типа можно составить из данных предметов (элементов).

При решении задач на нахождение вероятности события, нам понадобятся некоторые формулы комбинаторики. Приведем наиболее употребительные из них.

Размещениями из n различных элементов по m элементов (A_n^m) называются комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые отличаются либо составом, либо порядком своих элементов.

Так, размещениями являются трехзначные числа, составленные из первых девяти цифр.

Число различных размещений из n элементов по m элементов определяется с помощью формулы $A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$

Поэтому количество всех трехзначных чисел, состоящих из цифр 1, 2, ... , 9 составляет

$$A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$

Перестановками из n различных элементов называются всевозможные комбинации из этих n элементов.

Так, перестановками являются различные расположения четырех человек, сидящих на четырехместной скамье.

Количество всех перестановок из n элементов обозначается символом P_n и определяется числом размещений из всех n элементов по формуле

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)n = n!$$

Четыре человека на четырехместной скамье могут расположиться 24 способами, так как $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

Сочетаниями из n различных элементов по m элементов называются комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые различаются только составом своих элементов.

Отметим разницу между размещениями и сочетаниями: в сочетаниях не учитывается порядок элементов.

Число сочетаний из n элементов по m элементов вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Отметим свойство сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

Этой особенностью удобно пользоваться, когда $m > n/2$.

Пример. Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика. содержащего 10 деталей? Искомое число способов

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$$

2. Основные определения теории вероятностей. Опыт, эксперимент, наблюдение явления называется испытанием. Испытаниями, например, являются: бросание монеты, выстрел из винтовки, бросание игральной кости (кубика с нанесенными на каждую грань числом очков — от одного до шести).

Результат, исход испытания называется ***событием***. Событиями являются: выпадение герба или цифры, попадание в цель или промах, появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости.

Для обозначения событий используются большие буквы латинского алфавита: A, B, C и т. д.

Два события называются ***совместимыми***, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Два события называются ***несовместимыми***, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

Пример 1. Испытание: однократное бросание игральной кости. Событие A — появление четырех очков. Событие B— появление четного числа очков. События A и B совместимые.

Пример 2. Испытание: однократное бросание монеты. Событие A — выпадение герба, событие B — выпадение цифры. Эти события несовместимы, так как появление одного из них исключает появление другого.

Два события A и B называются ***противоположными***, если в данном испытании они несовместимы и одно из них обязательно происходит.

Событие, противоположное событию A, обозначают через $\overline{A}$.

<u>Пример.</u> Испытание: бросание монеты. Событие A — выпадение герба, событие B — выпадение цифры. Эти события противоположны, так как исходами бросания могут быть лишь они, и появление одного из них исключает появление другого, т. е. $A = \overline{B}$ или $\overline{A} = B$.

Событие называется ***достоверным***, если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом, и ***невозможным***, если в данном испытании оно заведомо не может произойти.

<u>Пример.</u> Испытание: извлечение шара из урны, в которой все шары белые. Событие A — вынут белый шар — достоверное событие; событие B — вынут черный шар — невозможное событие.

Событие A называется ***случайным***, если оно объективно может наступить или не наступить в данном испытании.

<u>Пример.</u> Событие A_6 — выпадение шести очков при бросании игральной кости — случайное. Оно может наступить, но может и не наступить в данном испытании.

<u>Пример.</u> Событие A_{98} — прорастание девяноста восьми зерен пшеницы из ста — случайное. Это событие может наступить, но, может быть, прорастет зерен больше или меньше.

Можно ли как-то измерить возможность появления некоторого случайного события? Другими словами, можно ли охарактеризовать эту возможность некоторым числом?

Определение (классическое определение вероятности).

Вероятностью $P(A)$ события A называется отношение числа исходов, благоприятствующих событию A, к числу всех возможных исходов.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Здесь m – число исходов, благоприятствующих событию A, n – число всех возможных исходов.

Пример 3. Найти вероятность того. что при бросании игральной кости выпадет число очков, делящееся на 2 (событие А).

Число исходов здесь 6. Число благоприятствующих исходов равно 3 (выпадение 2, 4 и 6). Поэтому

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Из приведенного классического определения вероятности вытекают следующие ее свойства.

1. *Вероятность достоверного события равна единице.* Действительно, достоверному событию должны благоприятствовать все n исходов, т. е. $m = n$ и, следовательно,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

2. *Вероятность невозможного события равна нулю.*

В самом деле, невозможному событию не может благоприятствовать ни один из исходов, т. е. $m = 0$, откуда:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

3. *Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.*

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа исходов. Поэтому в этом случае $0 < m < n$ и, значит, $0 < \frac{m}{n} <$ 1.

Следовательно, $0 < P(A) < 1$.

Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

3. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Теорема сложения вероятностей несовместимых событий: Вероятность наступления по крайней мере одного из двух несовместимых событий A или B равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \qquad (1)$$

Доказательство. Используем классическое определение вероятности. Предположим, что в данном испытании число всех элементарных событий равно n, событию A благоприятствуют k элементарных событий, событию B — l элементарных событий. Так как A и B — несовместимые события, то ни одно из элементарных событий U_1, U_2, ..., U_n не может одновременно благоприятствовать и событию A и событию B. Следовательно, событию A или B будет благоприятствовать $k + l$ элементарных событий. По определению вероятности имеем:

$$P(A) = \frac{k}{n}, \quad P(B) = \frac{l}{n}, \quad P(A+B) = \frac{k+l}{n},$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Совершенно так же теорема формулируется и доказывается для любого конечного числа попарно несовместимых событий.

Следствие. Сумма вероятностей противоположных событий A и $\bar{A}$ равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \qquad (2)$$

Пример 4. На клумбе растут 20 красных, 30 синих и 40 белых астр. Какова вероятность сорвать в темноте окрашенную астру, если рвется одна астра? Искомая вероятность равна сумме вероятностей сорвать красную или синюю астру, т. е.

$$p = \frac{20}{90} + \frac{30}{90} = \frac{50}{90} = \frac{5}{9}$$

Теорема умножения вероятностей.

Определение. Два события A и B называются *независимыми*, если вероятность появления каждого из них не зависит от того, появилось другое событие или нет. В противном случае события A и B называют *зависимыми*.

Пример 5. Пусть в урне находятся 2 белых и 2 черных шара. Пусть событие A — вынут белый шар. Очевидно, $P(A) = 2/4$.

После первого испытания вынутый шар кладется обратно в урну, шары перемешиваются и снова вынимается шар. Событие B — во втором испытании вынут белый шар — также имеет вероятность $P(B) = 2/4$, т. е. события A и B — независимые.

Предположим теперь, что вынутый шар в первом испытании не кладется обратно в урну. Тогда если произошло событие A, т. е. в первом испытании вынут белый шар, то вероятность события B уменьшается $P(B) = 1/3$; если в первом испытании был вынут черный шар, то вероятность события B увеличивается $P(B) = 2/3$. Итак, вероятность события B существенно зависит от того, произошло или не произошло событие A; в таких случаях события A и B — зависимые.

Определение. Пусть A и B — зависимые события. Условной вероятностью $P_A(B)$ события B называется вероятность события B, найденная в предположении, что событие A уже наступило.

Теорема 1. Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A)\, P_A(B). \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть из всего числа n элементарных событий k благоприятствуют событию A и пусть из этих k событий l благоприятствуют событию B, а значит, и событию AB. Тогда:

$$P(AB) = \frac{l}{n} = \frac{k}{n} \cdot \frac{l}{k} = P(A)P_A(B),$$

что и доказывает искомое равенство (3).

Пример 6. В условиях примера 5 берем тот случай, когда вынутый шар в первом испытании «не кладется обратно в урну». Поставим следующий вопрос: какова вероятность вынуть первый и второй раз белые шары? По формуле (3) имеем:

$$P(AB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Теорема 2. Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \qquad (5)$$

Пример 7. Найти вероятность одновременного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие A) равна 0,8, а вторым (событие B) —0,7.

События A и B независимы, поэтому по теореме 2 искомая вероятность

$P(AB) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$

Теорема сложения вероятностей совместимых событий.

Теорема. Вероятность суммы двух совместимых событий A и B равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (6)$$

Доказательство. Пусть из всего числа n элементарных событий k благоприятствуют событию A, l — событию B и m — одновременно событиям A и B. Отсюда событию $A + B$ благоприятствуют $k + l - m$ элементарных событий. Тогда:

$$P(A+B)=\frac{k+l-m}{n}=\frac{k}{n}+\frac{l}{n}-\frac{m}{n}=$$
$$=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Замечание. Если события A и B несовместимы, то их произведение AB есть невозможное событие и, следовательно, $P(AB) = 0$, т. е. формула (1) является частным случаем формулы (6).

Пример. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: $P(A) = 0{,}7$ и $P(B) = 0{,}8$. Найти вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.

Очевидно, события A и B совместимы и независимы. Поэтому

$P(A+B)$ $P(A)+P(B) - P(AB) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 1{,}5 - 0{,}56 = 0{,}94$.

Вопросы по теме:

1. Что называется событием? Что называется испытанием?
2. Какое событие называется совместимым событием, и несовместимым событием?
3. Какое событие называется противоположным событием?
4. Какое событие называется достоверным событием?
5. Какое событие называется невозможным событием?
6. Какое событие называется случайным событием?
7. Какое событие называется зависимым событием?
8. Какое событие называется независимым событием?
9. Что такое вероятность события?
10. О чем говорит теорема сложения несовместимых событий?

11.Что такое условная вероятность события?

12.О чем говорит обобщенная теорема сложения?

13.О чем говорит теорема умножения?

Упражнения

1. В ящике имеется 100 деталей, из них 17 некачественных. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что вынутая деталь некачественная.
2. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет нечетное число очков.
3. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.
4. Набирая номер телефона, абонент забыл последнюю цифру и набрал ее наудачу. Какова вероятность того, что номер набран правильно?
5. В урне 30 шаров: 15 белых, 10 красных и 5 синих. Какова вероятность вынуть цветной шар, если вынимается один шар?
6. В денежно-вещевой лотерее на серию в 1000 билетов приходится 120 денежных и 80 вещевых выигрышей. Какова вероятность какого-либо выигрыша на один лотерейный билет?
7. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании, если при первом испытании был извлечен черный шар.
8. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.
9. Найти вероятность одновременного появления герба при одном бросании двух монет.

10. Какова вероятность того, что из колоды в 36 карт будут вынуты подряд два туза?

11. Два стрелка стреляют по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, вторым стрелком — 0,7. Найти вероятность поражения цели двумя пулями в одном залпе.

12. Имеется два ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все две вынутые детали окажутся стандартными.

13. В семье двое детей. Принимая события, состоящие в рождении мальчика и девочки равновероятными, найти вероятность того, что в семье: а) все девочки; б) дети одного пола.

14. Пусть всхожесть семян оценивается вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что из двух посеянных семян взойдет какое-либо одно?

15. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго — 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) — стандартная.

16. В первой коробке содержится 20 радиоламп, из них 18 стандартных; во второй коробке — 10 ламп, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.

17. На трех карточках написаны буквы И, М, Р . После тщательного перемешивания берут по одной карточке и кладут последовательно рядом. Какова вероятность того, что получится слово «МИР»?

§ 2. Случайная величина и ее числовые характеристики. Математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.

1. Понятие случайной величины. *Случайной величиной* называется переменная величина, которая в зависимости от исхода испытания случайно принимает одно значение из множества возможных значений.

Примеры. 1) Число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости, есть случайная величина, она может принять одно из значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6;

2) прирост веса домашнего животного за месяц есть случайная величина, которая может принять значение из некоторого числового промежутка;

3) число родившихся мальчиков среди пяти новорожденных есть случайная величина, которая может принять значения 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Случайные величины будем обозначать прописными буквами X, Y, Z, а их возможные значения — соответствующими строчными буквами x, y, z.

Определение. Случайная величина, принимающая различные значения, которые можно записать в виде конечной или бесконечной последовательности, называется *дискретной* случайной величиной.

Ниже рассматриваются дискретные случайные величины, множество допустимых значений которых конечно.

Случайные величины из примеров 1) и 3) дискретные.

Определение. Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого числового промежутка, называется *непрерывной* случайной величиной.

Случайная величина из примера 2) является непрерывной.

2. Законы распределения дискретных случайных величин. Рассмотрим дискретную случайную величину X с конечным множеством возможных значений. Величина X считается заданной, если перечислены все ее возможные значения, а также вероятности, с которыми величина X может принять эти значения. Указанный перечень возможных значений и их вероятностей называется законом распределения дискретной случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан с помощью таблицы:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_{n-1}	p_n

В верхней строке выписываются все возможные значения x_1, x_2, x_3, ... , x_n величины X, в нижней строке выписываются вероятности значений p_1, p_2, p_3, ..., p_n. Читается таблица следующим образом: случайная величина X может принять значение x_i с вероятностью p_i $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$.

Так как в результате испытания величина X всегда примет одно из значений x_1, x_2, ..., x_n, то

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$$

Пример 1. В денежной лотерее разыгрывается 1 выигрыш в 1000 р., 10 выигрышей по 100 р. и 100 выигрышей по 1 р. при общем числе билетов 10 000. Найти закон распределения случайного выигрыша X для владельца одного лотерейного билета.

Решение: Здесь возможные значения для X есть: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = = 100$, $x_4 = 1000$. Вероятности их будут: $p_2 = 0{,}01$, $p_3 = 0{,}001$, $p_4 = 0{,}0001$, $p_1 = 1 — 0{,}01 — 0{,}001 — 0{,}0001 = 0{,}9889$. Следовательно, закон распределения выигрыша X может быть задан таблицей:

X	0	1	100	1000
p	0,9889	0,01	0,001	0,0001

3. Понятие математического ожидания. Закон распределения полностью задает дискретную случайную величину. Однако часто встречаются случаи, когда закон распределения случайной величины неизвестен. В таких случаях случайную величину изучают по ее числовым характеристикам. Одной из таких характеристик является *математическое ожидание.*

Пусть некоторая дискретная случайная величина X с конечным числом своих значений задана законом распределения:

x_i	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_{n-1}	p_n

Определение. Математическим ожиданием $M\ (X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех возможных значений величины X на соответствующие вероятности:

$$M\ (X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n. \qquad (1)$$

Пример 2. Найти математическое ожидание выигрыша X в примере 1 (пункт 2).

Решение: Используя полученную там таблицу, имеем:

$M\ (X) = 0 \cdot 0{,}9889 + 1 \cdot 0{,}01 + 100 \cdot 0{,}001 + 1000 \cdot 0{,}0001 = 0{,}21$ руб. = 21 коп.

Очевидно, $M\ (X) = 21$ коп. есть справедливая цена одного лотерейного билета.

Примечание. Математическое ожидание случайной величины называют также *средним значением.*

Свойства математического ожидания дискретной случайной величины:

1. Математическое ожидание постоянной величины C равно этой величине.

Постоянную C можно рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую лишь одно значение C с вероятностью Р = 1. Поэтому $M(C) = C \cdot 1 = C$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т. е.

$M(CX) = CM(X)$.

Используя соотношение (1), имеем:

$$M(CX) = Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + \ldots + Cx_nn_n = \\ = C(x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n) = CM(X).$$

Следующие два (3 и 4) свойства примем без доказательства.

3. MO суммы двух случайных величин X и Y равно сумме их MO

$M(X + Y) = M(X) + M(Y)$.

Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое возможное значение приняла другая величина.

Примером двух независимых случайных величин могут служить суммы выигрышей по каждому из двух билетов по двум различным денежно-вещевым лотереям. Здесь ставший известным размер выигрыша по билету одной лотереи не влияет на ожидаемый размер выигрыша и соответствующую ему вероятность по билету другой лотереи.

Несколько случайных величин называются независимыми, если закон распределения любой из них не зависит от того, какие возможные значения приняли остальные случайные величины.

4. МО произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

Следствием свойств 2 и 3 является свойство 5.

5. Математическое ожидание разности двух случайных величин X и Y равно разности их математических ожиданий:

$$M(X - Y) = M(X) - M(Y).$$

Примечание. Свойства 3 и 4 имеют место и для любого конечного числа случайных величин.

Пример 3. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = X + 2Y$, если известны математические ожидания случайных величин X и Y: $M(X) = 5$, $M(Y) = 3$.

Используя свойства 3 и 2 математического ожидания, получим:

$$M(Z) = M(X + 2Y) = M(X) + M(2Y) = M(X) + 2M(Y) = 5 + 2 \cdot 3 = 11.$$

Пример 4. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = 2X - Y$, если даны математические ожидания случайных величин X и Y: $M(X) = 4$, $M(Y) = 6$.

Используя свойства 5 и 2 математического ожидания, получаем:

$$M(Z) = M(2X - Y) = M(2X) - M(Y) = 2M(X) - M(Y) = 2 \cdot 4 - 6 = 2.$$

Пример 5. Независимые случайные величины заданы законами распределения

X	1	2
p	0,2	0,8

Y	0,5	1
p	0,3	0,7

Найти математическое ожидание случайной величины XY.

Найдем математические ожидания каждой из данных величин:

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}8 = 1{,}8.$$

$$M(Y) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}7 = 0{,}15 + 0{,}7 = 0{,}85.$$

Случайные величины X и Y независимы, поэтому искомое математическое ожидание

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y) = 1{,}8 \cdot 0{,}85 = 1{,}53.$$

4. Понятие дисперсии. МО не даст полной характеристики закона распределения случайной величины. Покажем это на примере. При одинаково средней величине годовых осадков одна местность может быть засушливой и неблагоприятной для сельскохозяйственных работ (нет дождей весной и летом), а другая — благоприятной для ведения сельского хозяйства. МО случайных величин могут быть одинаковы, а возможные значения величин «разбросаны» или «рассеяны» около своих МО по-разному: возможные значения одной величины расположены гораздо ближе к своему МО, чем значения другой величины.

Из сказанного вытекает необходимость введения новой числовой характеристики случайной величины, по которой можно судить о «рассеянии» возможных значений этой случайной величины.

Пусть задана дискретная случайная величина X:

x_i	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_{n-1}	p_n

Определение. *Дисперсией* $D(X)$ дискретной случайной величины X называется МО квадрата отклонения случайной величины X от ее МО:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

Из закона распределения величины $[X - M(X)]^2$ следует, что

$$D(X) = [x_1 - M(X)]^2 \cdot p_1 + [x_2 - M(X)]^2 \cdot p_2 + \ldots + [x_n - M(X)]^2 \cdot p_n$$

<u>Пример 6</u>. Случайная величина X задана своим законом распределения:

X	1	3	6	7	9
P	0,2	0,2	0,3	0,1	0,2

Найти D(X). Имеем:

$M(X) = 1 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}3 + 7 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}2 = 5{,}1$

$[x_1 - M(X)]^2 = [1 - 5{,}1]^2 = 16{,}81$; $[x_2 - M(X)]^2 == [3 - 5{,}1]^2 = 4{,}41$;

$[x_3 - M(X)]^2 = [6 - 5,1]^2 = 0,81$; $[x_4 - M(X)]^2 = [7 - 5,1]^2 = 3,61$;

$[x_5 - M(X)]^2 = [9 - 5,1]^2 = 15,21$.

Таким образом, закон распределения случайной величины $[X - M(X)]^2$ выразится таблицей:

$[X-M(X)]^2$	16,81	4,41	0,81	3,61	15,21
p	0,2	0,2	0,3	0,1	0,2

Отсюда:

$D(X) = 16,81 \cdot 0,2 + 4,41 \cdot 0,2 + 0,81 \cdot 0,3 + 3,61 \cdot 0,1 + 15,21 \cdot 0,2 = 7,89$.

Свойства дисперсии дискретной случайной величины.

1°. Дисперсия дискретной случайной величины X равна разности между *МО* квадрата величины X и квадратом ее МО:

$D(X) = M(X^2) - M^2(X)$. Действительно, используя свойства МО, имеем:

$$D(X) = M[(X - M(X))^2] = M[X^2 - 2XM(X) + M^2(X)] = M(X^2) - 2M(X) \cdot M(X) + M^2(X) = M(X^2) - 2M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

С помощью этого свойства и свойств МО устанавливаются следующие свойства.

2°. Дисперсия постоянной величины C равна нулю. Действительно,

$D(C) = M(C^2) - M^2(C) = C^2 - C^2 = 0$.

3°. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$D(CX) = C^2 D(X)$. В самом деле,

$D(CX) = M(C^2X^2) - M^2(CX) = C^2 M(X^2) - C^2 M^2(X) = C^2 [M(X^2) - M^2(X)] = C^2 D(X)$.

4°. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

Действительно,

$$D(X+Y) = M[(X+Y)^2] - M^2(X+Y) =$$
$$= M(X^2+2XY+Y^2) - [M(X)+M(Y)]^2 =$$
$$= M(X^2) + 2M(X)M(Y) + M(Y^2) - M^2(X) - 2M(X)M(Y) -$$
$$- M^2(Y) = [M(X^2) - M^2(X)] + [M(Y^2) - M^2(Y)] =$$
$$= D(X) + D(Y).$$

Методом математической индукции это свойство распространяется и на случай любого конечного числа слагаемых. Следствием свойств 3 и 4 является свойство 5.

5°. Дисперсия разности двух независимых случайных величин X и У равна сумме их дисперсий:

$D(X-Y) = D(X) + D(Y).$

<u>Пример 7</u>. Используя свойство 1 дисперсии, найти дисперсию случайной величины X, имеющей следующий закон распределения:

X	1	2	3	4	5
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Находим математические ожидания случайной величины X и квадрата ее:

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}1 =$$
$$= 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}9 + 1{,}2 + 0{,}5 = 3{,}1;$$
$$M(X^2) = 1^2 \cdot 0{,}1 + 2^2 \cdot 0{,}2 + 3^2 \cdot 0{,}3 + 4^2 \cdot 0{,}3 + 5^2 \cdot 0{,}1 =$$
$$= 0{,}1 + 0{,}8 + 2{,}7 + 4{,}8 + 2{,}5 = 10{,}9$$

Отсюда, в силу свойства 1 дисперсии,

$D(X) = 10{,}9 - (3{,}1)^2 = 10{,}9 - 9{,}61 = 1{,}29.$

<u>Пример 8.</u> Дисперсия случайной величины X равна 3. Найти дисперсию следующих величин: а) $-3X$; б) $AX + 3$. Согласно свойствам 2, 3 и 4 дисперсии имеем:

а) $D(-3X) = 9D(X) = 9 \cdot 3 = 27;$

б) $D(4X+3) = D(4X) + D(3) = 16\,D(X) + 0 = 16 \cdot 3 = 48.$

5. Среднее квадратическое отклонение.

Определение. *Средним квадратическим отклонением* $\sigma(X)$ случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Введение среднего квадратического отклонения объясняется тем, что дисперсия измеряется в квадратных единицах относительно размерности самой случайной величины. Например, если возможные значения некоторой случайной величины измеряются в метрах, то ее дисперсия измеряется в квадратных метрах. В тех случаях, когда нужно иметь числовую характеристику рассеяния возможных значений в той же размерности, что и сама случайная величина, и используется среднее квадратическое отклонение.

Пример 9. Случайная величина X — число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости. Определить $\sigma(X)$. Имеем:

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5;$$

$$D(X) = (1-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} +$$

$$+ (4-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (5-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (6-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{12};$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1{,}71.$$

Вопросы по теме:

1. Что называется случайной величиной?
2. Что называется распределением случайной величины?
3. Что называется математическим ожиданием случайной величины?
4. Что называется дисперсией случайной величины?

5. Что называется средне квадратическим отклонением случайной величины?

Упражнения

1. Пусть случайная величина X – число очков, выпавших при подбрасывании игральной кости. Составьте закон распределения случайной величины X
2. Проводится беспроигрышная лотерея на 200 выигрышей, из которых 1 выигрыш составляет 100 тысяч сум, 5 выигрышей по 20 тысяч сум, 10 выигрышей по 5 тысяч сум и 184 выигрыша по 2 тысячи сум. Определить справедливую цену одного билета, рассчитанную так, чтобы сумма выплаченных выигрышей равнялась сумме, вырученной за продажу билетов.
3. По таблице распределения случайной величины

X	1	2	3
p	0,3	0,2	0,5

определить ее математическое ожидание.

4. По таблице распределения случайной величины

X	2	3	5
p	0,3	0,1	0,6

определить ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

5. По таблице распределения случайной величины

X	7	9
p	0,4	0,6

определить ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

6. По таблице распределения случайной величины

X	2	4	5
p	0,1	0,3	0,6

определить ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

7. По таблице распределения случайной величины

X	0	1	2	3	4
p	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

определить ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

ТЕСТЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ.

1. Найдите верное равенство, если $A=\{2; 5; 7; 9\}$, $B=\{2; 4; 7\}$

а) $A \cap B = \{2; 7\}$

б) $A \cap B = \varnothing$

в) $A \cap B = \{5; 9\}$

2. Найдите верное равенство, если $A=\{2; 5; 7; 9\}$, $B=\{2; 4; 7\}$

а) $A \cup B = \{2; 5; 7; 9\}$

б) $A \cup B = \{2; 4; 5; 7; 9\}$

в) $A \cup B = \varnothing$

3. Найдите верное равенство, если $A=\{2; 5; 7; 9\}$, $B=\{2; 4; 7\}$

а) $A \setminus B = \{5; 9\}$

б) $A \setminus B = \{1; 2\}$

в) $A \setminus B = \varnothing$

4. Найдите верное равенство, если $A=\{1; 2; 3; 4\}$, $B=\{1; 2\}$

а) $A \setminus B = \{3; 4\}$

б) $A \setminus B = \{1; 2\}$

в) $A \setminus B = \varnothing$

5. Найдите верное равенство, если $A=\{1; 2; 3\}$, $B=\{3; 4; 5; 6\}$

а) $A \setminus B = \{1; 2\}$

б) $A \setminus B = \{1; 2; 3\}$

в) $A \setminus B = \{3; 4\}$

6. Найдите верное равенство, если $A=\{1; 2; 5\}$, $B=\{3; 4\}$

а) A\B = $\varnothing$

б) A\B = {1; 2; 5}

в) A\B = {3; 4}

7. Найдите верное равенство, если A={1; 2}, B={1; 2; 3}

а) A\B = {1; 2}

б) A\B = $\varnothing$

в) A\B = {1; 2; 3}

8. Найдите верное равенство, если A={2; 5; 7; 9}, B={2; 4; 7}

а) A\B = $\varnothing$

б) A\B = {1; 2; 3}

в) правильного ответа нет

9. Какое из равенств верно, если A – множество всех четных чисел $A=\{a / a = 2n, n \in N\}$

B – множество всех нечетных чисел $B=\{b / b = 2n-1, n \in N\}$

а) $A \cup B = N$

б) $A \cup B = Q$

в) $A \cup B = R$

г) $A \cup B = Z$

10. Какое из равенств верно, если $A = \{a / 4 \leq a \leq 14, a \in N\}$, $B = \{b / 10 < b < 19, b \in N\}$

а) $A \cap B = \{x / 11 \leq x \leq 14, x \in N\}$

б) $A \cap B = \{x / 4 < x < 19, x \in N\}$

в) $A \cap B = \{x / 10 < x < 14, x \in N\}$

г) $A \cap B = \{x \mid 11 \leq x \leq 19,\ x \in N\}$

11. Какое из равенств верно , если $A = \{a / |a| < 4, a \in R\}$,

$B = \{b / |b| \leq 2, b \in R\}$

а) $A \setminus B = \{x \mid -4 < x < -2 \cup 2 < x < 4\}$

б) $A \setminus B = \{x \mid -4 < x < -2\}$

в) $A \setminus B = \{x \mid 2 < x < 4\}$

г) $A \setminus B = \{x \mid -4 < x < 4\}$

12. Найдите верное равенство, если $A = \{2{,}3\}$, $B = \{a, b, c\}$

а) $A \times B = \{(2;a),(2;b),(2;c),(3;a),(3;b),(3;c)\}$

б) $A \times B = \{(2;b)(2;a),(3;a)(c;2)(c;3)\}$

в) $A \times B = \{(a;3),(a;2),(b;3),(b;2),(c;3),(c;2)\}$

г) $A \times B = \{(2;c),(2;b),(3;a)(3;b)(3;c)\}$

13. Задайте множество $C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ при помощи характеристического свойства.

а) $C = \{c / c \leq 9,\ c \in N\}$

б) $C = \{c / c \leq 10,\ c \in N\}$

в) $C = \{c / c > 10, C \in R\}$

г) $C = \{c / c \geq 9, C \in N\}$

14. Задайте множество $B = \{-2;-1;1;2;3;4;5;6\}$ при помощи характеристического свойства.

а) $B = \{x / -2 \leq x \leq 6, x \in Z\}$

б) $B = \{x / -2 < x \leq 6, x \in N\}$

в) $B = \{x / -2 \leq x < 0$ *или* $0 < x \leq 6, x \in Z\}$

г) $B = \{x / -1 < x < 10, x \in R\}$

15. Определите формулу расстояния между двумя точками.

а) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

б) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$

в) $d = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - (y_2 + y_1)^2}$

г) $d = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}$

16. Определите формулу координат точки делящей отрезок в данном отношении

а) $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$

б) $x = \dfrac{x_2 - \lambda x_1}{1 + \lambda} \quad y = \dfrac{y_2 - \lambda x_1}{1 + \lambda}$

в) $x = \dfrac{x_1 - \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad y = \dfrac{y_1 - \lambda y_2}{1 + \lambda}$

г) $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 - \lambda} \quad y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 - \lambda}$

17. Найдите координаты точки $C(x; y)$, которая делит отрезок АВ в отношении $\lambda = 0{,}2$, если $A(-2;2)$ и $B = (6;4)$

а) $C\left(-\dfrac{2}{3}; \dfrac{7}{3}\right)$

б) $C(2;7)$

в) $C(-3;3)$

г) $C\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{5}\right)$

18. Какое из равенств верно, если $A \subset B$ и $B \subset A$

а) $A \neq B$

б) $A = B$

в) $A > B$

г) $A < B$

19. Какое из равенств верно для множеств A, B и C?

а) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

б) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cup C)$

в) $(A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (B \cap C)$

г) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

20. Какое из равенств верно, если $A = \{1,2,3,5\}$, $B = \{1;5\}$

а) $A / B = \{2,3\}$

б) $A / B = \{1,5\}$

в) $A / B = \{1,2\}$

г) $A / B = \{3,5\}$

21. Найдите координаты точки А, лежащей на оси Ох, если она удалена от точки $B(-5;6)$ на расстояние, равное 10.

а) $A_1(-13;0)$ $A_2(3;0)$

б) $A_1(10;0)$ $A_2(0;3)$

в) $A_1(0;-13)$ $A_2(2;3)$

г) $A_1(-13;9)$ $A_2(-3;9)$

22. Найдите координаты точки В, если С – середина отрезка АВ и $A(-3;-5)$ $C(3;-2)$

а) $X_B = 9; \quad Y_B = 1$

б) $X_B = 3; \quad Y_B = -1$

в) $X_B = -9; \quad Y_B = -1$

г) $X_B = -3; \quad Y_B = -9$

23. Даны точки $A(-2;3)$ и $B(6;-9)$. Найти координаты точки С – середины отрезка АВ.

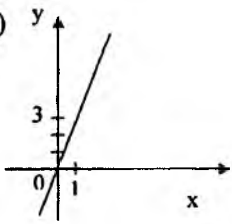
а) $C(2;-3)$

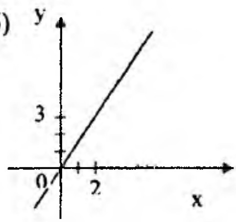
б) $C(-3;2)$

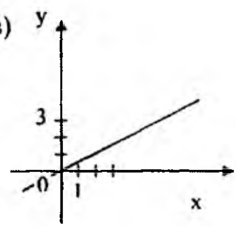
в) $C(-3;-2)$

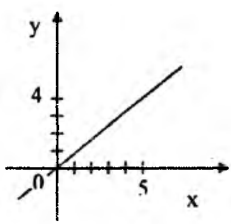
г) $C(-2;-3)$

24. На каком из ответов представлен график функции $y = 3x$?

а)


б)


в)


г)


25. Найдите координаты точек пересечения прямой $y = 3x - 6$ с осями координат.

а) $A(2;0)$ $B(0;-6)$

б) $A(0;2)$ $B(-6;0)$

в) $A(0;6)$ $B(0;2)$

г) $A(-2;0)$ $B(0;6)$

26. В каком из ответов представлено общее уравнение прямой.

а) $Ax + By + C = 0$

б) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

в) $y = kx + b$

г) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - \rho = 0$

27. Вычислить определитель третьего порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix}$.

а) $\Delta = 90$

б) $\Delta = 86$

в) $\Delta = 91$

г) $\Delta = 89$

28. Решить систему уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 2x + 7y - 4z = -13 \\ 5x + 10y - z = -7 \\ 4x - 6y + z = 12 \end{cases}$$

а) $(1,1,1)$

б) $(1,-1,2)$

в) $(1,2,-1)$

г) $(2,-1,1)$

д) $(2,1,2)$

29. Решить систему уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 2x-3y+z=-1 \\ x+4y-2z=3 \\ 3x-y+z=4 \end{cases}$$

а) $(1,2,3)$

б) $(2,1,3)$

в) $(3,1,2)$

г) $(2,3,1)$

д) $(1,2,1)$

30. Решить систему уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 2x-3y+z=-1 \\ x+y-z=2 \\ 3x-y+z=4 \end{cases}$$

а) (2,5; 1,75; 1,5)

б) (1,5; 1,75; 2,5)

в) (1,5; 2,5; 3)

г) (2,5; 1,7; 3)

д) (2; 3,5; 1)

31. Решить систему уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ 4x-3y+z=3 \end{cases}$$

а) $(1;\ \frac{1}{2};\ 2)$

б) $(2;\ 1;\ \frac{1}{2})$

в) $(1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2})$

г) $(\frac{1}{2};\ 1;\ 2)$

д) $(1;\ 0;\ 2)$

32. Решить систему уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases} x-y+z=2 \\ 5x+y-z=3 \\ -x+y+z=5 \end{cases}$$

а) (0,8; 2,8; 3,6)

б) (1; 1,5; 2,5)

в) (1,8; 0; 2,5)

г) (1; 2; 5)

д) (2,5; 3; 5)

33. Как называется высказывание, истинное, когда данное ложно, и ложное, когда данное истинио?

а) элементарное высказывание

б) отрицание высказывания

в) теорема

г) конъюнкция высказывания

д) аксиома

34. Как называются повествовательные предложения, о которых можно судить истинны они или ложны?

а) определение

б) теорема

в) высказывание

г) понятие

д) признак

35. Как называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B истинны?

а) дизъюнкция

б) импликация

в) конъюнкция

г) эквиваленциягг

36. Как называется высказывание, истиное тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний A или B истинно?

а) импликация

б) дизъюнкция

в) конъюнкция

г) эквиваленция

37. Как называется высказывание, ложное когда высказывание A истинно, а B ложно, и истинное в остальных случаях?

а) дизъюнкция

б) конъюнкция

в) эквиваленция

г) импликация

38. Как называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B принимают одинаковые истинностные значения?

а) эквиваленция

б) импликация

в) дизъюнкция

г) конъюнкция

39. Как называется предложение, содержащее переменную?

а) высказывание

б) аксиома

в) уравнение

г) предикат

д) теорема

40. Определите конъюнкцию предикатов.

а) $A(x) \vee B(x)$

б) $A(x) \wedge B(x)$

в) $A(x) \Rightarrow B(x)$

г) $A(x) \Leftrightarrow B(x)$

41. Как называется предикат, истинный тогда и только тогда, когда хотя бы один из предикатов $A(x)$ и $B(x)$ истинен?

а) конъюнкция

б) дизъюнкция

в) импликация

г) эквиваленция

42. Какое отношение задано, если предикаты $A(x)$ и $B(x)$ являются друг для друга необходимым и достаточным условием?

а) коммуникативности

б) дистрибутивности

в) равносильности

г) аддитивности

д) импликация

43. При помощи чего предикат обращается в высказывание?

а) Контрапозиция

б) Импликация

в) Кванторы

г) Эквиваленция

44. Найдите квантор общности.

а) $\Rightarrow$

б) $||$

в) $\perp$

г) $\exists$

д) $\forall$

45. Найдите квантор существования.

а) $||$

б) $\Leftrightarrow$

в) $\exists$

г) $\wedge$

д) $\forall$

46. Найдите противоположную импликацию, если задана импликация $A \Rightarrow B$.

а) $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$

б) $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$

в) $B \Rightarrow A$

г) $B \wedge A$

д) $A \Rightarrow \overline{B}$

47. В каком ответе указана дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции.

а) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

б) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

в) $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C) = A \vee B \vee C$

г) $A \vee B = B \vee C$

Вычислите пределы 48 - 59:

48. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9}$

а) $\dfrac{1}{5}$

б) $\dfrac{1}{3}$

в) 6^{-1}

г) 0

д) $\dfrac{1}{6}$

49. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$

а) 0

б) $\dfrac{1}{16}$

в) $\dfrac{2}{15}$

г) $\dfrac{9}{16}$

д) 16

50. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$

а) $\dfrac{1}{3}$

б) $\dfrac{2}{3}$

в) $-\dfrac{2}{3}$

г) 3^{-1}

д) $\dfrac{3}{2}$

51. Функция обозначается:

Статья I.	а)$y = f(x),\ y \in A$
Статья II.	б)$y = f(x),\ x \in A$
Статья III.	в)$y = x,\ x \in A$
Статья IV.	г)$y = f(A)$
Статья V.	д)$y = f(x)$

52. Способы задания функции:

а)Аналитический, табличный, алгебраический

б)Аналитический, алгебраический, графический

в)Алгебраический, табличный

г)Табличный, графический, аналитический

д)Табличный, аналитический

53. Монотонность-это…

а)Определение функции

б)Свойство функции

в)Способ задания функции

г)Вид функции

д)Область определения функции

54. Какая функция является алгебраической?

а) $y = x^4 + 2x - 5$

б) $y = \sin x$

в) $y = e^x + 1$

г) $y = e^x - 5x^2$

д) $y = x^3 - tgx$

55. Функция является чётной, когда…

а) $f(x) = -f(x)$

б) $f(-x) = f(-x)$

в) $f(-x) = -f(x)$

г) $f(-x) = f(x)$

д) $f(x) = -f(x)$

56. Найти область определения функции $y = \sqrt{5 - x}$

а)(- ∞; 5)

б)(-∞ ; 5]

в)(-5 ; + ∞)

г)[-5; 5]

д)[5; +∞)

57. Какая функция является чётной?

а) x

б) $x^3 + 1$

в) x^7

г) x^6

д) $x^{\cdot}$

58.Какая функция является периодичной?

а) $x + 4$

б) $\sqrt{x}$

в) x^2

г) $\sin x$

д) $x^3 + 2$

59. Какая функция является сложной?

а) $\sqrt{x} + 5x^3 - 1$

б) $x^4 + 1$

в) $\sin x$

г) $\ln x$

д) $\sin(2x^2 - 4)$

60. Найти область определения функции $y = \frac{1}{x-6}$

а) $(-\infty;6) \cup [6;+\infty)$

б) $(-\infty;6) \cup (6;+\infty)$

в) $(-\infty;6)$

г) $(-\infty;6] \cup [6;+\infty)$

д) $(6;+\infty)$

61. Числовая последовательность называется бесконечно малой, если её предел равен

а) ∞

б) 1

в) $-\infty$

г) -1

д)0

62. Числовая последовательность называется бесконечно большой, если её предел равен

а)0

б)-∞

в)-1

г)∞

д)1

63. какая последовательность является бесконечно малой?

а)$\{\frac{2}{n}+1\}$

б)$\{n+1\}$

в)$\{n^2\}$

г)$\{2n\}$

д)$\{\frac{2n}{9}\}$

64. если функция $\lambda(x)$ является бесконечно малой, то функция $\frac{1}{\lambda(x)}$ является

а)числовой

б)бесконечно большой

в)бесконечной

г)бесконечно малой

д)бесконечно средней

65. какие функции непрерывны там, где они определены

а)сложные

б)алгебраические

в)элементарные

г)трансцендентные

д)периодичные

66. Членами последовательности $\{2n+3\}$ являются

а)2, 4, 6, 8, 10, …

б)5, 7, 9, 11, 13, …

в)1, 2, 4, 5, 7, …

г)5, 6, 7, 8, 9, …

д)6, 8, 10, 12, 14, …

67. $\lim\limits_{x\to 5}\left(x^2+4\right)=$

а)28

б)12

в)18

г)14

д)29

68. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3}{2x-6}$

а)0

б)1

в)3

г)∞

д)6

69. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5}{3x+2}$

а) 1

б) 0

в) ∞

г) 5

д) 1/5

70. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$

а) 1

б) ∞

в) 5

г) 0

д) -5

71. Выражение вида $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ обозначает

а) предел функции

б) предел числовой последовательности

в) производная функция

г) дифференциал функции

д) первообразная функция

72. Если $y = c$, *то* $y' =$

а) 1

б) 0

в) 2

г) с

д) –с

73. Дифференциал функции

а) $dy = f'(x)dx$

б) $dy = f(x)dx$

в) $dy = f'(x)$

г) $dy = f(x)x$

д) $dy = ydx$

74. Производная частного находится по формуле

а) $u' \cdot v + u \cdot v'$

б) $u' \cdot v - u \cdot v'$

в) $\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

г) $\frac{u \cdot v - u' \cdot v}{v}$

д) $\dfrac{u'\cdot v+u\cdot v'}{v^2}$

75. $y = 3x^3 - 4x + 5,\quad y' =$

а) $3x^3 + 4$

б) $9x^2 - 4x$

в) $6x - 4$

г) $9x + 5$

д) $9x^2 - 4$

76. $y = \sin 5x$, $y' =$

а) $5\cos 5x$

б) $5\sin 5x$

в) $\dfrac{1}{5\cos x}$

г) $5\cos x$

д) $\dfrac{1}{5\sin x}$

77. $y = 2e^x - \sin x$, $y' =$

а) $2 + \cos x$

б) $e^x - \cos x$

в) $2e^x + \sin x$

г) $2e^x - \cos x$

д) $e^x - \sin x$

78. $y = \ln(3x^2 + 2)$, $y' =$

а) $6x(3x^2 + 2)$

б) $\dfrac{6x}{3x^2+2}$

в) $\dfrac{3x}{3x^2+2}$

г) $\dfrac{3}{3x^2+2}$

д) $6(3x^2 + 2)$

79. $y = \sqrt{x}$, $y' =$

а) $\sqrt{x}$

б) x

в) 0

г) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

д) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

80. $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y' =$

а) $\dfrac{2}{x^3}$ б) x^{-3} в) $2x^2$ г) $-\dfrac{2}{x^3}$ д) $-2x^3$

81. Неопределённым интегралом называется выражение вида

а) $f(x)dx$ б) $F(x)dx$ в) $F(x)$ г) $F(x)+c$ д) $F(x)+c$

82. $\int cf(x)dx=$

а) $\int cf(x)dx$

б) cdx

в) $cf(x)dx$

г) $c\int f(x)x$

д) $c\int f(x)dx$

83. $\left(\int f(xdx)\right)' =$

а) $F(x)$

б) $F(x)+c$

в) $f(x)$

г) $f(x)+c$

д) $f(x)\,dx$

84. $\int\frac{dx}{x} =$

а) x^2+c

б) $\frac{1}{x^2}$

в) $lnx+c$

г) $ln|x|+c$

д) $ln|x|$

85.Действие, обратное интегрированию называется…

а) возведение в степень

б) объединение

в) дифференцирование

г) частное

д) рационализирование

86. $\int 3e^x dx =$

а) $3e^x+c$

б) $3e^{x}$

в) $e^{x} + c$

г) $3e + c$

д) $3e$

87. $\int (3x+1)\, dx =$

а) $3x^2 + 1$

б) $2x^2 + x$

в) $x^3 + x + c$

г) $\frac{3x^2}{2} + x + c$

д) $\frac{3x^2}{2} + c$

88. $\int sin3xdx =$

а) $\frac{1}{3}\cos 3x$

б) $-\frac{1}{3}\cos 3x + c$

в) $3sin3x+c$

г) $3cosx$

д) $-\frac{1}{3}\cos x + c$

89. $\int \frac{dx}{x \ln x} =$

а) $lnx + c$

б) $ln|x|$

в) $xlnx + c$

г) $\frac{x}{\ln x} + c$

д) $ln|lnx| + c$

90. $\int dx =$

а) 0

б) с

в) $x+c$

г) 1

д) x

91.Геометрически определённый интеграл представляет собой

а) площадь криволинейной трапеции

б) криволинейную трапецию

в) множество интегральных кривых

г) интегральную кривую

д) площадь фигуры

92. $\int_0^1 x dx =$

а) 2

б) 1

в) 0

г) $-\frac{1}{2}$

д) $\frac{1}{2}$

93. $\int_0^{\pi} \sin x dx$

а) -2

б) 1

в) 2

г) 0

д) -1

94 . $\int_0^3 x^2 dx$

а) 1

б) 3

в) 0

г) 9

д) -1

95. $\int_0^2 dx =$

а) 1

б) -2

в) 0

г) -1

д) 2

96.Классическое определение вероятности появления события А

а) $P(A) = \frac{n}{m}$ б) $P(A) = \frac{m}{n}$ в) $P(A) = m \cdot n$

г) $P(A) = m + n$ д) $P(A) = m - n$

97. 5!

а) 12

б) 100

в) 120

г) 24

д) 60

98. $\int 3dx$

а) 1

б) 2

в) -3

г) 0

д) 3

99. $\int_{1}^{2}(x+1)dx =$

а) $2\frac{1}{2}$

б) 2

в) 1

г) $3\frac{1}{2}$

д) 3

100. $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}dx =$

а) 0

б) 1

в) 2

г) -1

д) ½

СПИСОК ТЕМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ

1. Основные этапы развития математики. (2 ч)
2. Множества N- натуральных, Z- целых, Q-рациональных, R-действительных чисел. (6 ч)
3. История появления и развития геометрии. (2 ч)
4. Сведения о Евклиде и его «Началах». (2 ч)
5. Сведения о Декарте и о прямоугольной системе координат. (2 ч)
6. Решение систем линейных уравнений методом сложения, подстановки и графически. (4 ч)
7. История появления и развития математического анализа. (2 ч)
8. Исследование функций и их графиков $y = kx$, $y = kx + b$, $y = \frac{k}{x}$, $y = ax^2 + bx + c$. (4 ч)
9. Геометрический и механический смысл производной. (2 ч)
10. Исследование функций при помощи производной. (6 ч)
11. Приложения определенного интеграла. (4 ч)
12. История развития комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики. (4 ч)
13. Вклад в развитие математики ученых Кори-Ниязи, С.Х.Сирожиддинова, Саримсакова. (4 ч)
14. Роль математики в жизни: а) в быту; б) в экономике; в) в предпринимательстве. (2 ч)

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Аманов А.К., Саидаматов Э.М., Юнусов А.С., С.С.Ходжабагян «Алгебра и основы математического анализа». Часть 2. Т. 2006. Типография «Политехник» г. Джизак, улица. Халклар Дустлиги, Джизакский Политехнический институт.
2. Баврин И. И. «Высшая математика», М, Просвещение. 1980
3. Виленкин Н.Я. «Математика» М.,1977.
4. Выгодский.М.Я. «Справочник по элементарной математике», «Наука», М., 1985г.
5. Демидович Б.П. «Сборник задач и упражнений по математическому анализу» :Учебное пособие для вузов. М: 000 «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ». 2003.
6. Лаврова Н.Н., Стойлова Л.П. «Задачник - практикум по математике» М., 1985
7. Латипов Х.Р., Абзалимов Р.Р., Уразбаева И.К. «Олий математика» Т.- «Алокачи» 2005.
8. Луканкин Г.Л. и др. «Высшая математика», М. Просвещение, 1988.
9. Пантелеев А.В., Якимов А.С. «Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах». Учебное пособие. М.: Высшая школа 2001.
10. Под ред. Г.Н. Яковлева «Пособие по математике для поступающих в вузы», М., «Наука», 1982
11. Пышкало А.М. и др. «Сборник задач по математике», М., 1979.
12. Стойлова Л.П., Пышкало А.М. «Основы начального курса математики» Укитувчи, 1991.
13. Юнусов А.С. «Математик мантик ва алгоритмлар назарияси элементлари» «Янги аср авлоди», 2006.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Хамедова Н. А., Садыкова А. В., Лактаева И. Ш.
Математика. Учебное пособие для студентов гуманитарных факультетов педагогических ВУЗов. – Т.: ООО « Жахон - Принт», 2007. – 140 стр.

Редактор: Н.А.Хамедова

Компьютерная верстка: А.В.Садыкова, И.Ш.Лактаева

Рекомендовано министерством высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан в качестве учебного пособия для студентов гуманитарных факультетов педагогических ВУЗов. Сертификат № 1013 от 1 июня 2007г.

Подписано в печать с оригинала макета 30.08.07. Усл.п.л.8,8.

Изд.л. 10. Тираж 1000. Заказ № 21