O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

O‘RTA MAXSUS, KASB-HUNAR TA’LIMI MARKAZI

I. Isroilov, Z.Pashayev

GEOMETRIYA

I qism

Akademik litseylar uchun darslik

2-nashri

„O‘QITUVCHI“ NASHRIYOT-MATBAA IJODIY UYI
TOSHKENT — 2010

ББК 22.151я722
УДК:514.1(075)

Taqrizchilar: fizika-matematika fanlari doktori, professor **A.S. Soliyev**; SamDCHTI qoshidagi akademik litseyning matematika o'qituvchisi, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent **X. Nosirova;** pedagogika fanlari nomzodi, dotsent **O.L. Musurmonov.**

Ushbu darslik „Geometriya" fanidan akademik litseylar uchun amaldagi dastur asosida yozilgan bo'lib, unda „tekislikdagi geometriya" bo'yicha umumta'lim maktablarida amalda bo'lgan o'quv dasturlaridagi materiallarga qo'shimcha juda ko'p ma'lumotlar berilgan. Shu sababli, darslikdan umumta'lim maktablari o'qituvchilari hamda matematika chuqur o'qitiladigan maxsus maktab o'quvchilari ham foydalanishlari mumkin.

22.151
I-84

Isroilov I.
Geometriya [Text]: akademik litseylar uchun darslik / I. Isroilov, Z. Pashayev; O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta-maxsus ta'lim vazirligi, O'rta maxsus, kasb-hunar ta'limi markazi. 2-nashri. − Toshkent : „O'qituvchi" NMIU, 2010.
I qism. −224 b. −Б. ц.

I. Pashayev Z.

ББК 22.151я722
УДК:514.1(075)

I $\frac{\mathbf{4306020502-132}}{\mathbf{353(04)\text{-}2010}}$ **Qat'iy buyurtma − 2010**

ISBN 978-9943-02-359-8

SO‘ZBOSHI

O‘zbekiston Respublikasida qabul qilingan va hozirda amalda bo‘lgan „Ta’lim to‘g‘risida“gi Qonun va ,,Kadrlar tayyorlash Milliy dasturi“ uzluksiz ta’lim tizimini isloh qilishning yangi davrini ochganligi tabiiydir.

Uzluksiz ta’lim tizimi har bir bosqichining o‘ziga xos xususiyatlarini hisobga olgan holda, ular uchun o‘quv adabiyotlari yaratish zarurati tug‘ildi. Ana shu maqsadda respublikamizda uzluksiz ta’lim tizimi uchun o‘quv adabiyotlarining yangi avlodini yaratish konsepsiyasi ishlab chiqildi va hozirgi vaqtda amalga oshirilmoqda.

Uzluksiz ta’lim tizimining biz uchun yangi mazmun kasb etgan o‘rta maxsus, kasb-hunar ta’limi tizimida o‘quv adabiyotlari yaratish jadal bormoqda.

Kitob mazmunini imkoni boricha akademik litseylar uchun amaldagi „Geometriya“ fani dasturiga yaqinlashtirishga harakat qildik. Mazkur kitobni tayyorlashda biz umumta’lim maktablari o‘quvchilariga tanish bo‘lgan geometrik bilimlarning ko‘pchiligi turli kitoblarda berilganligini, o‘rta maktablar uchun geometriya fanidan 1995-yilgacha nashr qilingan darsliklar o‘rta bilimli o‘quvchiga mo‘ljallanganligini hisobga oldik. Hozirgi vaqtda akademik litseylarga chuqur bilimli, mazmunli mulohazalar qilish qobiliyati bo‘lgan o‘quvchilar kelayotganligini hisobga olib, har bir mavzu bo‘yicha bayon qilinayotgan masalalar doirasini ancha kengaytirib berishga qaror qildik.

Jumladan, kesmalarga bag‘ishlangan bobda ikkita kesmaning o‘rta geometrik miqdorini qurish bilan bog‘liq masalalar, to‘rtta nuqtaning garmonik nisbati ko‘rib chiqildi.

Uchburchaklarga bag‘ishlangan bobda esa uchburchak balandliklari, medianalari va bissektrisalarining kesishishi haqidagi teoremalar hamda Stuart, Ptolemey teoremalari va boshqalar yoritilgan.

„Aylana va doira“ bobida ichki chizilgan burchaklar, urinmalar va vatarlar hosil qilgan burchaklarning xossalari hamda aylanaga o‘tkazilgan vatarlar, kesuvchilar va urinmalarga oid metrik munosabatlar qaraldi.

To‘rtburchaklar haqidagi ma’lumotlar juda keng berilgan. Unda to‘g‘ri to‘rtburchakka oid yangi formulalar, doiraga ichki va tashqi chizilgan to‘rtburchaklarning xossalari ham berilgan.

Afsuski, oxirgi vaqtlarda yasashga doir masalalarga e’tibor ancha susaydi. Ana shuni hisobga olib, tekis shakllarni yasashga doir masalalarni alohida bobda qarab chiqishni ma’qul topdik.

Shuningdek, mazkur kitob „Vektorlar“ va „Shakllarni almashtirish“ kabi boblarni ham o‘z ichiga oldi. Demak, kitobda akademik litseylar uchun ,,tekislikdagi geometriya“ dasturi bo‘yicha barcha mavzular iqtidorli yoshlar bilan ishlashga mo‘ljallangan ma’lumotlar bilan to‘ldirilgan holda yoritildi.

Bundan tashqari, har bir bobda, imkoni boricha bizning ulug‘ ajdodlarimiz Abu Rayhon Beruniy, Ibn Sino, Al-Xorazmiy va boshqalarning geometriyaga oid ishlari bilan bog‘liq tarixiy ma’lumotlar hamda mustaqil yechish uchun qiyinlik darajasi har xil bo‘lgan masalalar keltirildi.

Geometriya fani mavzularini bayon qilishdagi harakatlarimiz mutaxassislar va keng kitobxonlar ommasini qiziqtiradi, deb umid bildiramiz hamda kitob mazmuni, bayon usuli bo‘yicha barcha fikr va takliflarni mamnuniyat bilan qabul qilamiz.

Mualliflar

I BOB GEOMETRIYANING RIVOJLANISH TARIXI

Misr, Bobil. Matematik bilimlarning, ma'lum bir turdagi elementar masalalarni yechish usullarining jamlanish jarayoni katta bir davrni o'z ichiga oladi, uning ibtidosi uzoq o'tmishga borib taqaladi.

Geometriyaning vatani Bobil va Misr hisoblanadi. Qadimgi Misr matematikasi haqidagi ma'lumotlar matematik mazmunli ikkita papirusga tasvirlangan. Uzunligi 5,5 m va eni 0,32 m bo'lgan Rind papirusi Londonda saqlanmoqda. Unda to'g'ri to'rtburchak, uchburchak, trapetsiya va doiraning $\left(S = \frac{8}{9}d\right)^2$ yuzlarini, parallelepiped va silindrning hajmlarini hamda piramidaning o'lchamlarini aniqlashga bag'ishlangan 84 ta masala o'z ifodasini topgan. Ikkinchi papirus Moskvada saqlanmoqda, unda 25 ta masalaning yechimi berilgan bo'lib, ular orasida asosi kvadratdan iborat kesik piramidaning hajmi va egri sirt — savat yon sirtining yuzi hisoblangan masalalar o'z ifodasini topgan.

Rind papirusida teng yonli uchburchakning yuzi asosning yon tomonining yarmiga ko'paytmasi kabi hisoblangan, doiraning yuzi esa tomoni diametrning 1/9 qismicha kam bo'lgan kvadratning yuziga teng ekanligi ko'rsatilgan, teng yonli trapetsiyaning yuzi esa uning asoslari yig'indisining yarmi bilan yon tomoni ko'paytmasi kabi hisoblangan. Unda yechilgan bir necha masaladan to'g'ri burchakli uchburchakning burchaklari uning katetlari nisbati orqali aniqlanishi kelib chiqadi.

Qadimgi bobilliklarning merosi bizning davrimizgacha loydan yasalgan jadvallar shaklida saqlanib qolgan bo'lib, ulardan qariyb 50 tasi matematik matnlar, 200 ga yaqini esa matnsiz matematik jadvallarni o'z ichiga oladi. Bobilliklarning geometriya bo'yicha bilimlari misrliklarnikidan ancha yuqori saviyada bo'lganligi ko'rinadi. 1945- yilda Neygebauer va Saks tomonidan AQSHning Kolumbiya universiteti kutubxonasida saqlanayotgan jadvalning tarjimasi nashr ettirildi. Unda ratsional tomonli, ya'ni tomonlari Pifagor sonlaridan iborat ($x^2 + y^2 = z^2$ shartni qanoatlantiradigan) to‘g‘ri burchakli uchburchaklar sanab o‘tilgan. Masalalar to‘g‘ri burchakli shakllar yuzlari va hajmlarini hisoblash bilan bog‘liq bo‘lganligi ham ko‘zga tashlanadi. Shuningdek, unda umumiy turdagi masalalardan tashqari, burchaklarni o‘lchash va trigonometrik munosabatlarni keltirib chiqarishga doir urinishlar ham uchraydi.

Aylanani 360° ga bo‘lish, to‘g‘ri burchak va parallel to‘g‘ri chiziqlar tushunchalari ham bobilliklarga mansubdir. Ular doiraga ichki chizilgan muntazam oltiburchakning tomoni uning radiusiga tengligini bilishgan va $\pi = 3$ deb hisoblashgan.

Miloddan avvalgi birinchi ming yillikning o‘rtalariga kelib, O‘rta Yer dengizi atrofida joylashgan qator mamlakatlarda matematikaning mustaqil fan sifatida shakllanishi uchun yetarli sharoitlar yuzaga keldi.

Qadimgi Yunoniston. Qadimgi Yunonistonda geometriya rivojlanishining boshlanishi miletlik Fales (miloddan avvalgi 639—548) nomi bilan bog‘langan. U Misr bo‘ylab ko‘p sayohatlar qilgan, misrliklar bilan muloqotda bo‘lib, ulardan ko‘p narsalarni o‘rgangan. Yunonistonga kelib, u Miletda joylashadi va tarixga Ioniya maktabi nomi bilan kirgan maktabga asos soldi. Fales haqli ravishda teng yonli uchburchak asosidagi burchaklarning tengligi haqidagi, vertikal burchaklarning tengligi haqidagi va h.k. kabi qator asosiy geometrik teoremalarni ochgan hisoblanadi. Fales maktabining asosiy xizmati shundan iboratki, u geometriyaga nazariya tusini berib, geometriyani tadqiqotlar manbayi sifatida qarash lozimligini ko‘rsatdi.

Fales, Pifagor, Gippokrat, Yevdoks va boshqalarning ishlarida geometriya bo‘yicha bilimlar e’tirofi va ularni tizimga tushirish amalga oshirildi. Geometriyaning o‘sha davrda shakllangan tizimini bayon qiluvchi asarlar nashr qilindi (masalan, xiosslik **Gippokratning** asarlari). Geometrik isbotlarning usullari takomillashtirildi va kengaytirildi. Ana shu davrda, xususan, Pifagor teoremasi, doira kvadraturasi haqidagi, burchakning triseksiyasi, kubni ikkilantirish va h.k. kabi masalalar ham qaralgan edi.

Miloddan avvalgi III asrga kelib, to‘plangan bilimlar hajmi shunday kengayib ketdiki, ularni tartibga solish zarurati va imkoniyati tug‘ildi. Bu vazifani IV va III asrlar orasida **Yevklid** o‘zining ,,Negizlar“ida uddaladi.

Miloddan avvalgi IV asr o‘rtalarida **Menexm** konik kesimlarni ochdi. Geometriyada metrikaning kiritilishi Arximed nomi bilan bog‘liq bo‘lib, Yevklid geometriyasida bu tushuncha yo‘q edi.

Miloddan avvalgi III asrning ikkinchi yarmida ijod qilgan **Apolloniyga** uning konus kesimlar haqidagi ishlari (sakkizta kitob) shuhrat keltirdi. Miloddan avvalgi III asrning oxirida **Gipparx**, **Menelay** va **Ptolemey** kabi buyuk astronomlar davri boshlandi. Gipparx (miloddan avvalgi II asr) va Ptolemey dunyoning haqiqiy kuzatishlar va hisoblashlarga asoslangan tizimini kiritdi. Ptolemeyning „Almagest“ nomi bilan mashhur bo‘lgan „Matematika qonuni“ olam tizimini tushunish uchun zarur bo‘lgan barcha matematik materialni o‘z ichiga olgan edi. Ana shu davrda to‘g‘ri chiziqli va sferik trigonometriyaga ham asos solindi, Gipparx sinuslar jadvalini tuzdi, Menelay sfera haqidagi ma’lumot — sferikani alohida ajratdi.

Yunon geometriyasining oxirgi davri **Geron, Papp** va **Prokl** nomlari bilan bevosita bog‘liq. Geronning „Metrika“(miloddan avvalgi II—I asrlar) nomli ishida geometrik shakllarning yuzlarini va jismlarning hajmlarini hisoblash qoidalari berilgan.

Papp o‘zining sakkizta kitobdan iborat katta ,,Matematik kolleksiyalar“ asari bilan mashhur. Hozirgi vaqtda Gyulden teoremasi nomi bilan mashhur teorema ham Papp tomonidan bayon qilingan.

Shunday qilib, Qadimgi Yunoniston matematikasi matematikaning fan sifatida shakllanishida ilk manbalardan hisoblanadi.

Qadimgi Xitoy va Hindiston. Xitoyliklar matematikasi juda qadim zamonlarga borib taqaladi. Geometrik bilimlardan, ular tomonidan masalalarni yechishda sirkul, chizg‘ich va go‘niyalardan foydalanilganligini e’tirof etish mumkin. Eng qadimgi matematik asar bo‘lib, miloddan avvalgi taxminan II asrda yozilgan „To‘qqiz bobli matematika“ hisoblanadi. Unda uchburchakning, doiraning, sektorning va segment halqasi yuzlarini hisoblashga oid amaliy xarakterdagi masalalar qaralgan. Bundan tashqari, to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi va ma’lum tomoni bo‘yicha uning ikkinchi tomonini topish haqidagi teskari masala ham yechilgan. Shuningdek, kubning hajmini, og‘irligini hisoblash masalalari ham qaralgan. Bu asarning amaliy asosini yetib bo‘lmaydigan masofalar va balandliklarni Pifagor teoremasi hamda o‘xshash uchburchaklar xossalari yordamida topish haqidagi masalalar tashkil qiladi.

Xitoy matematikasi o‘zining hisoblashlar — algoritmlarga yo‘nalganligini XIV asrning o‘rtalarigacha saqlab qoldi.

Hindiston matematikasi ham qadim tarixga ega. Qadimgi Hindistonda matematika boshqa ilmiy fanlar qatori sanskrit tilining qoidalari va stilistik shakllari hamda she’r (to‘qish) yozish qoidalariga rioya qilar edi. Shuni ta’kidlash kerakki, Hindistonda ko‘p ilmiy matnlar she’r shaklida yozilgan edi.

Hindlarning aksariyati geometr bo‘lmasdan, algebrachi bo‘lganligi tez-tez e’tirof qilinadi: **Ariabxata** (VI asr), **Braxmagupta** (VII asr), **Bxaskara** (XII asr) asarlariga sharhlar bo‘yicha shunday xulosa qilish mumkinki, geometriya arifmetika va algebra tatbiqlari uchun asosiy maydon vazifasini o‘tagan.

O‘rta Osiyo. O‘rta Sharq, O‘rta Osiyo hududlarida matematikaning rivoji ham boshqa joylardagi kabi jamiyatning rivojlanishi, qurilish sohasi, dengizda suzish, geografiya, harbiy ish kabilarning rivoji bilan uzviy bog‘liq bo‘lgan. Xalifa Ma’mun (813—833) hukmronlik qilgan davrda Bag‘dodda „Baytul-Hikma“ („Bilimlar uyi“) tashkil etilgan, unda observatoriya faoliyat ko‘rsatgan va boy kutubxona mavjud edi. ,,Bilimlar uyi“da dunyoning ko‘p davlatlaridan kelgan olimlar, jumladan, **Muhammad al-Xorazmiy, Ahmad Farg‘oniy, Abbos Javhariy** va boshqalar ijod qilishgan.

O‘sha zamonlarda Sharqda xalqlarning muloqot tili arab tili bo‘lgan. „Bilimlar uyi“da Qadimgi Misr, Yunoniston, Hindiston olimlari merosini arab tiliga tarjima qilish bo‘yicha keng ko‘lamda ishlar olib borilgan. Masalan, Yevklidning „Negizlar“i, Arximedning „Silindr va shar haqidagi kitob“i, „Aylanani o‘lchash“ asari, Ptolemeyning „Almagest“i va boshqalar tarjima qilingan. Shu ishlar natijasi o‘laroq, yunonlar va misrliklarning boshqa ko‘plab asarlari bizgacha faqat arabchaga tarjima shaklida yetib kelgan.

Afsuski, yaqin vaqtlargacha ham Sharqda arab olimlari faqat Yunonistonning va boshqa mamlakatlar olimlari asarlarini tarjima qilish bilan shug‘ullanganlar va o‘zlari birorta yangi ilmiy kashfiyotlar qilmaganlar, degan fikr hukmron edi. Balki bu fikr asosida sharq tillarini bilmaslik yoki yetarli darajada bilmaslik yotgan bo‘lishi mumkin.

Aslida, sharq olimlari ulardan avval o‘tgan olimlar asarlarini tarjima qilib, sharhlash bilan chegaralanmasdan, ko‘p ishlari bilan arifmetikani ham, algebrani ham, geometriyani ham, astronomiyani ham ancha rivojlantirishgan.

Arifmetika va kombinatorika sohasida, ular:

— o‘nli kasrlar ustida amallar;

— sondan ildiz chiqarish usullari;

— Nyuton binomi formulasidan ixtiyoriy natural ko‘rsatkich uchun foydalanish;

— musbat haqiqiy son tushunchasi kabilarni rivojlantirishgan.

Algebra sohasida, ular tomonidan quyidagi ishlar bajarilgan:

— algebraning mustaqil fan sifatidagi e’tirofi;

— kub tenglamalarni yechishda iteratsion usulning yaratilishi;

— kub tenglamalarni yechishning geometrik usullarini rivojlantirish.

Geometriya va trigonometriya sohasida, ular:

— Yevklid va sferik trigonometriyaga asos solish;

— trigonometrik funksiyalarning to‘la jadvalini tuzish;

— parallel to‘g‘ri chiziqlar nazariyasiga oid natijalarni keltirib chiqarish;

— yasashga doir masalalarni har xil usullar bilan yechish kabi bilimlarni rivojlantirishgan.

Matematika va uning tatbiqlariga ulkan hissa qo‘shgan olimlar: **Muhammad al-Xorazmiy** (783—850), **Abu Rayhon Beruniy** (973—1048), **Xo‘jandiy** (980—1037), **Abu Nasr Forobiy** (873—950), **Abu Ali ibn Sino, Mirzo Ulug‘bek** (1394—1449) va uning maktabida faoliyat ko‘rsatgan boshqa olimlar kabilardir.

Ular orasida o‘zining „Al-jabr val-Muqobala“ asari bilan algebra faniga asos solgan Muhammad al-Xorazmiy alohida hurmatga sazovordir.

Yevropa. V—XI asrlarda Yevropada geometrik bilimlarning saviyasi juda past bo‘lgan. Ravshanki, matematik bilimlarning yagona saqlovchilari bo‘lib, qadimgi olimlarning asarlarini tarjima qilish va ko‘chirish bilan shug‘ullangan kam sonli rohib olimlar hisoblangan.

XII—XIII asrlarda Yevropada birinchi universitetlar, Bolonyada, so‘ngra Oksfordda va Parijda (1167), Kembrijda (1209), Rimda (1303) va Pragada (1374) va boshqa shaharlarda paydo bo‘la boshladi. Tarjimalar bilan mashg‘ul bo‘lgan yevropaliklar Yevklidning „Negizlar“i, Ptolemeyning „Almagest“i, Markaziy Osiyo matematiklarining asarlari bilan tanishishga muyassar bo‘lishdi.

XIII asrda Yevropa matematikasida jonlanish paydo bo‘ladi. 1202- yilda **Leonardo Pizanskiy** tomonidan arifmetika va algebra masalalari qaralgan „Abak haqidagi kitob“ yozildi. U 1202- yilda „Amaliy geometriya“ nomli asarini yozib, unda, asosan, jismlarning hajmlarini hisoblash masalalarini yechishni qaragan.

XIV va XV asrlar, 1461- yilda **Iogann Myullerning** „Har xil uchburchaklar haqida besh kitob“ (retomontanus) asari paydo bo‘lgunga qadar, uncha muvaffaqiyatli bo‘lmadi. Bu asarda uchburchaklarni yechish, jumladan, sferik uchburchaklarni yechish masalalari qaralgan, trigonometrik funksiyalar jadvallarini tuzish ishlari davom ettirilgan.

O‘rta asrlarda Leonardo Pizanskiy, Tartalya, Kardano, Viyet kabi olimlarning sa’y-harakatlari algebraning rivojlanishida muhim rol o‘ynadi.

Geometriyaning rivojida XVII asr muhim o‘rin tutadi. **Dekart** va **Ferma** asarlarida geometrik jismlar shakllari, o‘lchamlari va xossalarini sonli bog‘lanishlar vositasida ifodalash usuli sifatida analitik geometriya shakllandi. **J. Dezarg** va **B. Paskal** risolalarida proyektiv geometriyaga asos solindi. Analitik geometriya bayonining hozirgi zamon shaklida bo‘lishiga **L. Eyler** katta hissa qo‘shgan.

Yevklidning „Negizlar“i. Miloddan avvalgi IV asrga kelib, asosan, geometriya bo‘yicha bilimlar to‘plash davri yakun topdi va ularni tartib bilan bayon qilishga urinishlar qilindi.

O‘sha davrda to‘plangan matematik bilimlar majmuyini o‘z ichiga olgan, Yevklid tomonidan yozilgan „Negizlar“ bilimlarning tizimga tushirilganligi bo‘yicha barchaga manzur bo‘ldi. Kitobdagi materialning mantiqiy qat’iyligi uning keyingi yigirma asr mobaynida asosiy darslik bo‘lib xizmat qilishini ta’minladi.

„Negizlar“ o‘n uchta kitobdan iborat bo‘lib, ularning har birida teoremalar ketma-ket bayon qilingan. Xususan, geometriyaga birinchi, to‘rtinchi, oltinchi, o‘n birinchi va o‘n ikkinchi kitoblar bag‘ishlangan.

Birinchi kitob ta’riflar, aksiomalar va postulatlarni o‘z ichiga oladi. Yevklid ular yordamida matematik tushunchalarni kiritgan tasdiqlar — ta’riflardir. Masalan, „Nuqta — qismlarga ega bo‘lmagan narsa“, „Chiziq — ensiz uzunlik“ va hokazo. Bu tasdiqlar ko‘p marta tanqid qilinganligiga qaramasdan, ulardan mukammal ta’riflar haligacha berilgan emas. Hozirgi vaqtda bu nazariya obyektlari va ularning xossalarini bayon qilish uchun aksiomalar sistemasi ishlatiladi.

Yevklid miqdorlarning tengligi yoki tengsizligi munosabatlarini kirituvchi tasdiqlarni aksiomalar deb ataydi. „Negizlar“da beshta aksioma berilgan.

1. Bitta narsaga teng bo‘lganlar o‘zaro tengdir.
2. Tenglarga tenglar qo‘shilsa, yana tenglar hosil bo‘ladi.
3. Tenglardan tenglar ayirilganda, qoldiqlar ham teng bo‘ladi.
4. O‘zaro bir-biriga joylashadiganlar o‘zaro tengdir.
5. Butun qismdan kattadir.

Yevklid geometrik qurishlar imkoniyati haqidagi beshta tasdiq — postulatlarni alohida ajratgan.

1. Ikki nuqtadan to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.
2. To‘g‘ri chiziq kesmasini cheksiz davom ettirish mumkin.
3. Ixtiyoriy nuqtadan istalgan radiusli aylana o‘tkazish mumkin.
4. To‘g‘ri burchaklar o‘zaro tengdir.
5. Agar bir tekislikda yotgan ikkita to‘g‘ri chiziq uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesishsa va ichki bir tomonli burchaklarning yig‘indisi 180° dan kichik bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziqlar ana shu tomondan kesishadi.

„Negizlar“ning birinchi kitobida asosiy yasashlar, kesmalar va burchaklar ustida amallar, uchburchaklar, to‘g‘ri to‘rtburchaklar va parallelogrammlarning xossalari qaralgan, bu shakllarning yuzlari taqqoslangan hamda Pifagor teoremasi va unga teskari teorema berilgan.

Ikkinchi kitobda to‘g‘ri to‘rtburchaklar va kvadratlarning yuzlari orasidagi munosabatlar qaralgan. Bu masalalar algebra masalalarini yechish uchun geometrik apparat hosil qiladi. Uchinchi kitob aylana va doira, markaziy va ichki chizilgan burchaklar, vatarlar va urinmalar xossalari bilan bog‘liq masalalarga bag‘ishlangan. To'rtinchi kitobda esa muntazam ko'pburchaklarning xossalari, ichki va tashqi chizilgan ko'pburchaklar hamda muntazam uchburchak, muntazam beshburchak, muntazam oltiburchak va muntazam o'n besh burchaklarni qurish qaralgan.

Beshinchi kitobda proporsiyalar qaralgan. Oltinchi kitob nisbatlar nazariyasining geometrik tatbiqlariga bag'ishlangan. Unda burchak tomonlarini ikki parallel to'g'ri chiziq bilan kesganda hosil bo'ladigan kesmalarning proporsionalligi haqidagi, umumiy balandlikka ega bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklar va parallelogrammlar yuzlarining nisbati haqidagi hamda o'xshash shakllar yuzlarining nisbati haqidagi teoremalar isbotlangan.

„Negizlar"ning o'n birinchi — o'n uchinchi kitoblari stereometriyaga bag'ishlangan. Ulardan birinchisi ta'riflardan boshlanadi. So'ngra fazoda to'g'ri chiziqlar va tekisliklarning o'zaro joylashuvi haqidagi qator teoremalar hamda ko'pyoqli burchaklar haqidagi teoremalar keltiriladi. Kitobning oxirida parallelepipedlar va prizmalar hajmlarining nisbati qaraladi. O'n ikkinchi kitob piramida, silindr, konus va sharning hajmlarini hisoblashga bag'ishlangan. O'n uchinchi kitobda sharlar hajmlarining nisbati hamda 5 ta muntazam ko'pyoq: tetraedr (to'rtyoq), geksaedr (oltiyoq), oktaedr (sakkizyoq), dodekaedr (o'n ikkiyoq), ikosaedr (yigirmayoq)larni qurish usullari qaralib, boshqa turdagi muntazam ko'pyoqlarning yo'qligi isbotlangan.

Bu qisqa tahlil shuni ko'rsatadiki, „Negizlar" uchun asosiy aniqlovchi omil matematika kursini qurishning aksiomatik xarakterda ekanligidan iboratdir.

Yevklidning beshinchi postulati. Beshinchi postulat Yevklid aksiomalari tizimida alohida o'rin tutadi. Beshinchi postulatning boshqa aksiomalar va postulatlardan farqi shundaki, u boshqalar kabi ko'rgazmalilik xususiyatidan xoli va dastlabki 28 ta teoremaning isbotida qo'llanilmaydi. Shu sababli, sharhlovchilar uni mustaqil teorema shaklida isbotlashga uringanlar.

Agar ikkita A va B tasdiqdan biri ikkinchisini keltirib chiqarsa, ular teng kuchli deyiladi.

Beshinchi postulatni isbotlashga urinishlar natijalari unga teng kuchli tasdiqlar ochilishiga sabab bo'ldi:

1. a to'g'ri chiziqdan tashqarida yotgan A nuqta orqali a to'g'ri chiziqni kesib o'tmaydigan yagona to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.

2. Bitta to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan perpendikular va og‘malar kesishadi.

3. Ixtiyoriy uchburchak ichki burchaklarining yig‘indisi ikkita to‘g‘ri burchakka teng.

4. Ikkita parallel to‘g‘ri chiziqdan birini kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq ularning ikkinchisini ham kesib o‘tadi.

5. Parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofa o‘zgarmasdir.

O‘rta asr Sharqida parallel chiziqlar nazariyasi. O‘rta asr Sharq olimlari parallel to‘g‘ri chiziqlar nazariyasiga alohida e’tibor berishgan.

Al-Abbos ibn Said al-Javhariy, Forob (hozirgi Qozog‘iston Respublikasi) shahri fuqarosi, Muhammad ibn Muso al-Xorazmiyning zamondoshi va ilmiy xodimi bo‘lgan. U boshqa olimlar qatorida Al-Ma’munning astronomik jadvallarini yaratishda ishtirok etgan. Al-Javhariy parallel chiziqlar nazariyasini o‘zining „Islohli kitob al-Usul“ („Negizlar“ kitobini takomillashtirish) nomli asarida bayon qilgan.

Al-Javhariy quyidagi teoremani isbotlagan: *„Agar HF to‘g‘ri chiziq AB va CD to‘g‘ri chiziqlarni ular bilan teng burchaklar hosil qilgan holda kesib o‘tsa, AB va CD to‘g‘ri chiziqlar paralleldir. Agar ular parallel bo‘lsa, CD to‘g‘ri chiziqning mos nuqtasidan AB to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasigacha bo‘lgan masofa o‘zgarmaydi“.*

Nosir ad-Din at-Tusiy teoremaning al-Javhariy tomonidan berilgan isbotiga qilgan sharhida bu teoremaning Yevklidning beshinchi postulatiga teng kuchli ekanligini e’tirof etadi.

Abu-l-Hasan Sobit ibn Qurra ibn Ma’van al-Xarroniy as-Sobiy (831—901), Xarron (Suriya) fuqarosi, Yevklidning „Negizlar“ini sharhlari bilan tarjima qilishdan tashqari, arifmetika, geometriya, mexanika, astronomiya, sferik trigonometriyaga oid qator asarlar yozgan. Uning parallel chiziqlar nazariyasi „Maqola fi burxon al-musodara al-mashhura min Auklidis“ („Yevklidning ma’lum postulati isboti haqidagi kitob“) nomli traktatida o‘z ifodasini topgan. Ibn Qurra ketma-ket quyidagi teoremalarni isbotlagan:

A. *EY* chiziq *AB* va *CD* chiziqlarga shunday tushganki, *AEY* va *EYD* burchaklar tengdir. U holda *AB* va *CD* chiziqlar na *AC* tomonga, na *BD* tomonga qarab uzoqlashmaydilar va yaqinlashmaydilar, deb aytaman.

B. Ikkita *AB* va *CD* chiziq hech bir tomonga qarab uzoqlashmaydi ham, yaqinlashmaydi ham va ularga *EY* chiziq o‘tkazilgan. Hosil bo‘lgan *AEY* va *EYD* ichki almashinuvchi burchaklar teng bo‘ladi, deb aytaman.

C. Ikkita *AB* va *CD* to‘g‘ri chiziq yaqinlashmaydi ham, uzoqlashmaydi ham. Ularning uchlari *AC* va *BD* chiziqlar bilan tutashtirilgan. Unda *AC* va *BD* o‘zaro teng va yaqinlashmaydi ham, uzoqlashmaydi ham, deb aytaman.

D. Ikkita *AB* va *CD* to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lib, ularga *EY* chiziq shunday tushirilganki, *BEY* va *DEY* burchaklarning yig‘indisi ikkita to‘g‘ri burchakdan kichik. Unda, *AB* va *CD* to‘g‘ri chiziqlar ularni *BD* tomonga davom ettirganda kesishadi, deb aytaman.

Abu Ali al-Hasan ibn al-Haysam (965—1039)ning beshinchi postulat va parallel chiziqlar nazariyasiga bag‘ishlangan asarida, agar berilgan uzunlikdagi kesma *AB* to‘g‘ri chiziq bo‘ylab, unga perpendikular ravishda harakat qilishi faraz qilinsa, kesmaning ikkinchi uchi berilgan *AB* to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziq chizishi faraz qilinadi.

Lekin parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofaning o‘zgarmas miqdor ekanligi haqidagi tasdiq beshinchi postulatga teng kuchli tasdiqdir.

Abu-l-Fath ibn Ibrohim al-Hayyom (1048—1122) ancha vaqt Buxoro va Samarqandda yashab, ijod qilgan. Al-Hayyom ikkita to‘g‘ri burchakli va yon tomonlari teng to‘rtburchakni qaraydi. So‘ngra, u yuqori asosdagi burchaklarning tengligini isbotlaydi va bu burchaklar faqat to‘g‘ri burchaklar bo‘lishi mumkin, degan xulosaga keladi.

Bu xulosa ham beshinchi postulatga teng kuchlidir.

Shuningdek, beshinchi postulatni boshqa olimlar, masalan, **Xo‘ja Muhammad ibn Muhammad Abu Jafar Nosir ad-Din at Tusiy** (1201—1274), **Shams ad-Din Muhammad ibn Ashrif al-Husayni as-Samarqandiy** (XIII asr oxiri — XIV asr boshi) kabilar ham isbotlashga uringanlar. Ular isbotlash jarayonida beshinchi postulatga teng kuchli yana bitta tasdiqqa, ya’ni uchburchak ichki burchaklarining yig‘indisi ikkita to‘g‘ri burchakka tengligiga kelishgan.

II BOB ASOSIY GEOMETRIK TUSHUNCHALAR

1- §. Geometriya — geometrik shakllarning xossalari haqidagi fan

Fazoning hamma tomonlaridan chegaralangan qismi *geometrik jism* deyiladi.

Geometrik jism uni qamrab olgan fazodan *sirt* vositasida ajralib turadi. Sirt haqida dastlabki tasavvurni qog'oz varag'i berishi mumkin. Varaq fazoning bir qismini ikkinchisidan ajratadi, lekin u qandaydir qalinlikka ega bo'lganligidan, sirt ham bo'ladi. Shu sababli sirt deganda, qalinligi doimo (cheksiz) kamayib boradigan qog'oz varag'i tushuniladi.

Sirtning ikkita qo'shni sohasining umumiy qismi *chiziq* deb ataladi. Shuningdek, chiziqni ikkita sirtning kesishishi deb ham aytish mumkin. Sirt holida bo'lgani kabi, bu chiziqlar ham qalinlikka ega bo'ladi, lekin geometrik chiziqlar qalinlikka ega emasligi ma'lum.

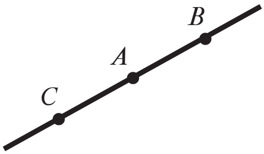
Chiziqning bir qismi qo'shni qismidan *nuqta* bilan ajraladi. Nuqtaning biron-bir o'lchovi yo'q. Nuqtalar, chiziqlar, sirtlar va jismlarning ixtiyoriy majmuasi *shakl* deb ataladi. Bunda birorta tanlab olingan nuqtaning holatlari majmuasi sifatida qaraladigan shakl *nuqtalarning geometik o'rni* deyiladi.

Geometrik shakllarni fazoda hech qanday o'zgartirmasdan (ularni qisish yoki cho'zishlarsiz) harakatlantirish (siljitish) mumkin. Agar ikkita shaklning barcha nuqtalari bir-birining ustiga tushsa, ular *teng shakllar* deyiladi.

Geometriya shakllarning xossalari va ular orasidagi munosabatlarni o'rganadi. O'rganish natijalari ma'lum bir *tasdiqlar* ko'rinishida ifodalanadi. Tasdiqlar geometriyada ikki qism: *shart* va *xulosadan* iborat bo'ladi. Shartda shakl haqida barcha berilgan *ma'lumotlar* keltirilgan bo'ladi, xulosada berilgan shartdan hosil qilinadigan *xossalar* keltiriladi.

Masalan, „Agar o'zaro tenglarga tenglar qo'shilsa, yana tenglarni olamiz" tasdig'ida „Agar o'zaro tenglarga tenglar qo'shilsa" qismi — shartdan, „yana tenglarni olamiz" qismi — xulosadan iborat.

Geometriyada tasdiqlar ikki xil ko'rinishda bo'ladi: *aksio-*



2.1- chizma.

malar va *teoremalar*. Isbotsiz qabul qilinadigan (o‘z-o‘zidan ravshan) tasdiqlar — aksiomalar, qolgan barcha tasdiqlar esa teoremalar deb ataladi va ular, albatta, *isbotlanishi shart*. Isbotlashning mohiyati — teorema shartlariga asoslangan holda xulosada keltirilgan xossalarni isbotlashdan iboratdir. Berilgan tasdiqqa *teskari tasdiq* deb, sharti berilgan tasdiqning xulosasi bilan ustma-ust tushadigan tasdiqqa aytiladi va aksincha.

Teoremadan bevosita kelib chiqadigan tasdiq *natija* deb aytiladi. *BC* to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy *A* nuqtasi uni ikkita *AC* va *AB* qismlarga bo‘ladi (2.1- chizma). To‘g‘ri chiziqning bir tomonidan chegaralangan qismi *nur* deb ataladi. Nurni chegaralovchi nuqta uning *boshi* deyiladi, boshi umumiy bo‘lgan va bir-birini to‘g‘ri chiziqqacha to‘ldiradigan nurlar *to‘ldiruvchi nurlar* deyiladi (1.2- chizmada *AC* va *AB* nurlar).

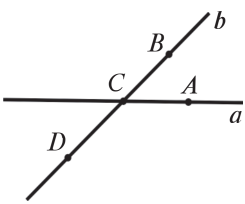
2- §. Nuqtalar va to‘g‘ri chiziqlar

Tekislikda nuqtalar va to‘g‘ri chiziqlar asosiy geometrik obyektlar hisoblanadi. To‘g‘ri chiziqlar *a, b, c*, ... kabi kichik lotin harflari bilan, nuqtalar esa *A, B, C*, ... kabi bosh lotin harflari bilan belgilanadi. 2.2- chizmada *A* va *C* nuqtalar *a* to‘g‘ri chiziqqa, *B*, *C, D* nuqtalar esa *b* to‘g‘ri chiziqqa tegishlidir. *C* nuqta esa ham *a* to‘g‘ri chiziqqa, ham *b* to‘g‘ri chiziqqa tegishlidir. Bu holda *a* va *b* to‘g‘ri chiziqlar *C* nuqtada *kesishadi* deyiladi, *C* nuqta esa *a* va *b* to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi bo‘ladi.

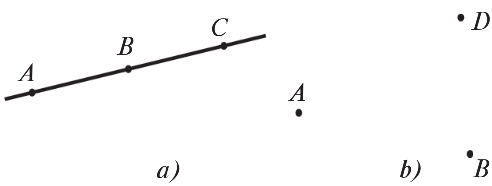
Nuqta va to‘g‘ri chiziqning asosiy tegishlilik xossalari aksiomalarda o‘z ifodasini topgan.

1 - a k s i o m a . *Istalgan to‘g‘ri chiziq uchun unga tegishli bo‘lgan nuqtalar ham, unga tegishli bo‘lmagan nuqtalar ham mavjud.*

2 - a k s i o m a . *Istalgan ikkita har xil nuqta qanday bo‘lishidan qat’i nazar, ulardan o‘tuvchi yagona to‘g‘ri chiziq mavjud.*



2.2- chizma.



2.3- chizma.

Berilgan ikkita A va B nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq AB kabi yoziladi.

Ikkita har xil to‘g‘ri chiziq bittadan ortiq umumiy nuqtalarga ega bo‘la olmaydi. Agar ikkita to‘g‘ri chiziq ikkita umumiy nuqtalarga ega bo‘lsa, ular ustma-ust tushadi.

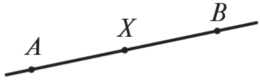
Berilgan uchta nuqtadan to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkinmi? Bu ishni hamma vaqt ham bajarib bo‘lmas ekan. Agar berilgan uchta nuqta 2.3- *a* chizmada ko‘rsatilganidek joylashgan bo‘lsa, A, B va C nuqtalardan to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin. Bu holda A, B va *C nuqtalar to‘g‘ri chiziqqa tegishli* deyiladi. Agar A, B, D nuqtalar 2.3- *b* chizmadagi kabi joylashgan bo‘lsa, ular orqali bitta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin emas. 2.3- *a* chizmadan A va C nuqtalar B nuqtaning turli tomonlarida yotganligi ma’lum. Bu holda, B nuqta A va C nuqtalar *orasida joylashgan* deb ham aytiladi.

3- a k s i o m a. *Berilgan to‘g‘ri chiziqning uchta har xil nuqtasidan biri qolgan ikkitasining orasida yotadi.*

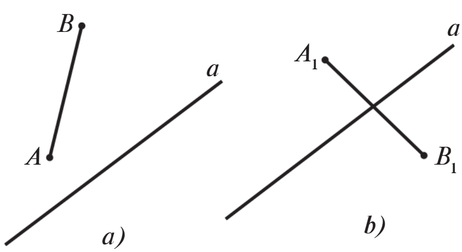
To‘g‘ri chiziqda A va B nuqtalar berilgan bo‘lsin. To‘g‘ri chiziqning A va B nuqtalar orasida yotgan barcha X nuqtalari to‘plami (unga A va B nuqtalar ham kiradi) *AB kesma* (2.4- chizma), A va B nuqtalar esa kesmaning *uchlari* (*oxirlari*) deyiladi.

Agar tekislikda AB kesma va a to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsa, a to‘g‘ri chiziq tekislikni ikkita α va β yarimtekislikka bo‘ladi. Agar A va B nuqtalar bitta yarimtekislikda yotsa, AB kesma to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydi (2.5- *a* chizma). Agar A_1B_1 kesmaning A_1 va B_1 uchlari har xil α va β yarimtekisliklarda yotsa, A_1B_1 kesma a to‘g‘ri chiziq bilan kesishadi (2.5- *b* chizma).

4- a k s i o m a. *To‘g‘ri chiziq tekislikni ikkita yarimtekislikka ajratadi. Agar kesmaning uchlari bitta yarimtekislikda yotsa, kesma bu to‘g‘ri chiziq bilan kesishmaydi. Agar kesmaning uchlari har xil yarimtekisliklarga tegishli bo‘lsa, kesma to‘g‘ri chiziq bilan kesishadi.*



2.4- chizma.



2.5- chizma.

3- §. Kesmalar ustida amallar

Bizga ikkita AB va A_1B_1 kesmalar berilgan bo‘lsin. Bu kesmalarning boshlang‘ich A va A_1 nuqtalarini ustma-ust qo‘yib, kesmalarni bitta to‘g‘ri chiziqda bir tomonga yo‘naltiramiz. Agar B_1 nuqta B nuqta bilan ustma-ust tushsa, AB va A_1B_1 kesmalar *teng* deyiladi (2.6- *a* chizma).

Agar B va B_1 nuqtalar o‘zaro ustma-ust tushmasa, quyidagi ikki hol bo‘lishi mumkin:

a) B_1 nuqta A va B nuqtalar orasida yotadi. Bu holda A_1B_1 kesma AB kesmadan *kichik* deyiladi va $A_1B_1 < AB$ kabi yoziladi (2.6- *b* chizma);

b) B nuqta $A = A_1$ va B_1 nuqtalar orasida yotadi. Bu holda A_1B_1 kesma AB kesmadan *katta* deyiladi va $A_1B_1 > AB$ kabi yoziladi (2.6- *d* chizma).

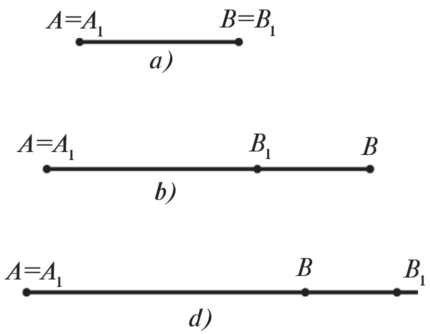
K e s m a l a r n i q o ‘ s h i s h . Agar ikkita AB va BC kesma bitta to‘g‘ri chiziqda 2.7- chizmada ko‘rsatilganidek joylashtirilgan bo‘lsa, AC kesma AB va BC kesmalarning *yig‘indisi* deyiladi va u $AC = AB + BC$ kabi yoziladi.

Bir nechta $AB, BC, CD, DE,...$ kesmalarning *yig‘indisi* deb, berilgan to‘g‘ri chiziqda bu kesmalarni ketma-ket joylashtirish natijasida hosil bo‘lgan AE kesmaga aytiladi (2.8- chizma) va u $AE = AB + BC + CD + DE...$ kabi yoziladi.

Kesmalarning yig‘indisi *o‘rin almashtirish* va *guruhlash xossalariga* ega, ya’ni

$$AB + CD = CD + AB,$$

$$AB + CD + EF = (AB + CD) + EF = AB + (CD + EF).$$



2.6- chizma.

2.7- chizma.

2.8- chizma.

2.9- chizma.

Berilgan ikkita AB va CD kesmaning *ayirmasi* deb, ularni bitta, masalan, A nuqtadan to‘g‘ri chiziqqa joylashtirilganda hosil bo‘ladigan DB (2.9- chizma) kesmaga aytiladi va u $DB = AB - CD$ kabi yoziladi.

K e s m a n i n g u z u n l i g i. Har bir kesmaga uning *uzunligi* deb ataladigan va quyidagi xossalarga ega bo‘lgan nomanfiy miqdor mos qilib qo‘yiladi:

1) teng kesmalar bir xil uzunliklarga ega. Katta kesma katta uzunlikka ega;

2) kesmalar uzunliklarining yig‘indisi qo‘shiluvchi kesmalar uzunliklari yig‘indisiga teng.

Kesmaning uzunligi uning uchlari orasidagi masofa deb ham aytiladi va AB yoki $|AB|$ kabi yoziladi.

Kesmalarni o‘lchash Arximed aksiomasi nomi bilan yuritiladigan quyidagi tasdiqqa asoslangan.

A r x i m e d a k s i o m a s i. Agar ikkita ixtiyoriy AB va CD ($AB > CD$) kesma berilgan bo‘lsa, AB to‘g‘ri chiziqdagi A nuqtadan boshlab CD kesmani shuncha marta joylashtirish mumkinki, buning natijasida yoki AB dan katta, yoki AB ga teng bo‘lgan AK kesma hosil bo‘ladi. Boshqacha aytganda, hamisha shunday natural n son topish mumkinki, $n \cdot CD \geq AB$, $(n—1) \cdot CD < AB$.

Agar a kesmani AB va CD kesmalarda butun son marta joylashtirish mumkin bo‘lsa, a kesma AB va CD kesmalar uchun umumiy o‘lchov deyiladi. Umumiy o‘lchovga ega bo‘lgan ikkita kesma *o‘lchovdosh* bo‘lgan kesmalar, aks holda esa *o‘lchovdoshmas* kesmalar deyiladi. Masalan, kvadratning tomoni bilan diagonali o‘lchovdosh emas.

Kesmani o‘lchash uchun o‘lchov birligi (ya’ni biror kesma uzunligini o‘lchov birligi sifatida) tanlanib, uni bu kesma uchlarining biridan boshlab joylashtiriladi. O‘lchash natijasida hosil qilingan son berilgan kesmaning uzunligini beradi. Kesmani o‘lchashda uzunlik birligini o‘zgartirish ham mumkin. Uzunlik o‘lchov birliklari: millimetr, santimetr, detsimetr, metr, kilometr va h.k.

4- §. Kesmalarning nisbati haqida

Berilgan ikkita kesmaning *nisbati* deb, ularning bitta uzunlik birligida o‘lchangan uzunliklarining nisbatiga aytiladi. Agar AB va CD kesmalarning uzunliklari mos ravishda, $AB = m$, $CD = n$ bo‘lsa, kesmalarning nisbati kabi yoziladi. Ikkita nisbatning o‘zaro tengligi *proporsiya* deyiladi.

Agar a, b va c, d kesmalar juftliklari berilgan bo‘lib, ularning nisbatlari teng, ya’ni

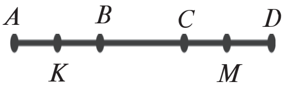
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

bo‘lsa, bu juftliklar *proporsional* deyiladi.

Agar a, b, c kesmalar uchun tenglik bajarilsa, a kesma b va c kesmalar uchun *o‘rta proporsional* deyiladi. Bundan $a^2 = bc$ va $a =$ bo‘lishi kelib chiqadi.

1 - m a s a l a . Berilgan $AD = 36$ sm kesma uchta teng bo‘lakka bo‘lingan. Uning birinchi va uchinchi bo‘laklari o‘rtalari orasidagi masofa topilsin.

Y e c h i l i s h i . AD kesmada yotuvchi B va C nuqtalar uni uchta teng bo‘lakka bo‘lsin (2.10- chizma), ya’ni $AB = BC = CD = 36 : 3 = 12$ sm.



2.10- chizma.

Kesmaning birinchi va uchinchi bo‘laklarining o‘rtalarini K va M orqali belgilaymiz, ya’ni $AK = 6$ sm, $MD = 6$ sm. U holda birinchi va uchinchi kesmalar o‘rtalarini tutashtiruvchi KM kesmaning uzunligi:

$KM = KB + BC + CM$ yoki $KM = 6$ sm $+12$ sm $+ 6$ sm $= 24$ sm.

J a v o b : 24 sm.

2 - m a s a l a . Uchta $a = 8$ sm, $b = 5$ sm, $c = 12$ sm kesma berilgan. Ularga proporsional bo‘lgan to‘rtinchi d kesma topilsin.

Y e c h i l i s h i . Ma’lumki, d kesma a, b, c kesmalarga proporsional bo‘lishi uchun munosabat bajarilishi kerak.

Demak, bundan

J a v o b : 7,5 sm.

3 - m a s a l a . Berilgan $b = 12$ sm va $c = 27$ sm kesmalarga o‘rta proporsional a kesma topilsin.

Y e c h i l i s h i . O‘rta proporsional miqdorning ta’rifidan ,

Demak,

J a v o b : 18 sm.

I z o h . Berilgan *b* va *c* kesmalarga o‘rta proporsional bo‘lgan *a* kesma, ba’zan *b* va *c* miqdorlar uchun *o‘rta geometrik miqdor* deb ham ataladi.

5- §. Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish

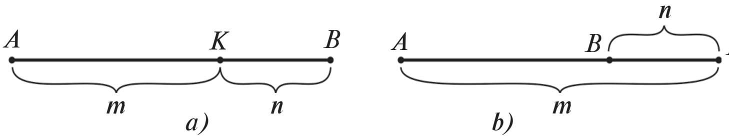
T a ’ r i f . Agar *AB* kesmaning *K* nuqtasida uni shunday bo‘lish amalga oshirilgan bo‘lsaki, bo‘lish natijasida hosil qilingan *AK* va *KB* kesmalarning nisbati berilgan nisbatga teng, ya’ni

$$\frac{AK}{KB} = \frac{m}{n}$$

bo‘lsa, bunday bo‘lish *AB* kesmani *berilgan nisbatda bo‘lish* deyiladi.

Agar *K* nuqta *A* va *B* nuqtalar orasida yotsa, kesmani berilgan nisbatda bo‘lish *ichki tarzda bo‘lish* deb ataladi (2.11- *a* chizma).

Agar *K* nuqta to‘g‘ri chiziqning *AB* kesmadan tashqaridagi qismida yotsa, kesmani berilgan nisbatda bo‘lish *tashqi tarzda bo‘lish* deb ataladi (2.11- *b* chizma).

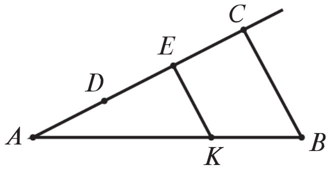


2.11- chizma.

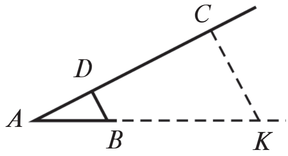
1- m a s a l a . Berilgan *AB* kesmani berilgan 2 : 1 nisbatda ichki tarzda bo‘ladigan nuqta topilsin.

Y e c h i l i s h i . *K* nuqta topilishi talab qilingan nuqta bo‘lsin. U holda *AK* kesmaning uzunligi *BK* kesmaning uzunligidan ikki marta katta bo‘ladi. Shuning uchun berilgan *AB* kesmani uchta teng bo‘lakka bo‘lamiz va *A* nuqtadan bu kesmalarning ikkitasini joylashtiramiz.

Y a s a s h . *AB* kesma berilgan bo‘lsin. $AK : KB = 2 : 1$ shartni qanoatlantiruvchi *K* nuqtani topish talab qilinadi. Buning uchun *AB* kesmaning *A* uchidan ixtiyoriy *AC* nur o‘tkazamiz (2.12- chizma). *AC* nurda *A* nuqtadan ixtiyoriy *AD* kesmani joylashtiramiz. Uning davomida $DE = EC = AD$ kesmalarni joylashtiramiz. So‘ngra *C* nuqtani *B* nuqta bilan birlashtiramiz va *E* nuqtadan $EK \parallel CB$ kesmani o‘tkazamiz. Ana shu *K* nuqta talab qilingan nuqta bo‘ladi:



2.12- chizma.



2.13- chizma.

(isbotlang!).

2- m a s a l a . Berilgan AB kesmani 3 : 2 nisbatda tashqi tarzda bo‘ladigan nuqta topilsin.

Y e c h i l i s h i . AB kesmaning A uchidan ixtiyoriy AC nurni o‘tkazamiz (2.13- chizma). Unda A nuqtadan $AC = 3a$ bo‘lgan kesmani joylashtiramiz, bunda a — ixtiyoriy kesma. So‘ngra C nuqtadan A nuqtaga qarab $CD = 2a$ bo‘lgan CD kesmani joylashtiramiz. Nihoyat, D va B nuqtalarni birlashtirib, $CK \parallel DB$ kesmani o‘tkazamiz. Hosil qilingan K nuqta talab qilingan nuqta bo‘ladi, chunki

6- §. Kesmani o‘rta va chetki nisbatlarda bo‘lish

Berilgan AB kesmani K nuqta bilan bo‘lish bajarilganda hosil qilingan AK, BK kesmalar (2.14- chizma) $AK : BK = AB : AK$,

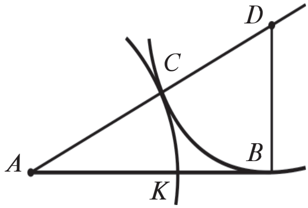
ya’ni tengliklarni qanoatlantirsa, bu bo‘lish kesmalarni *o‘rta* va *chetki nisbatda bo‘lish* deyiladi va bunda AK kesma BK va butun AB kesma orasida *o‘rta proporsional* deyiladi. Shartdan $AK^2 = AB \cdot BK$ yoki $AK^2 = AB\ (AB - AK)$ bo‘lishi kelib chiqadi. Endi AK kesmaning uzunligini topish uchun

$$AK^2 + AB \cdot BK - AB^2 = 0$$

kvadrat tenglamaga ega bo‘lamiz, undan

ifodani olamiz. $AK > 0$ bo‘lganligidan,

2.14- chizma.



2.15- chizma.

$$AK = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Kesmani o‘rta va chetki nisbatda bo‘lish *oltin kesim* deb ataladi va

$$\frac{AK}{BK} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618.$$

San’atda oltin kesimdan foydalanish shakllarning ko‘zga aniq, yengil va yoqimli qabul qilinishini ta’minlaydi. Musiqa nazariyasida torlar uzunliklarining $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ga teng nisbati garmonik akkord hosil qilishi tabiiy.

M a s a l a . Berilgan *AB* kesmani o‘rta va chetki nisbatda bo‘luvchi *K* nuqta yasalsin.

Y e c h i l i s h i . *AB* kesmaning *B* uchidan $BD \perp AB$ to‘g‘ri chiziq (2.15- chizma) o‘tkazamiz va unda $BD = \frac{AB}{2}$ kesmani joylashtiramiz hamda *D* nuqtadan *AD* nurni o‘tkazamiz. So‘ngra *D* nuqtani markaz deb olib, *BD* radiusli yoyni *AD* nurning *C* nuqtasida kesishguncha chizamiz. Nihoyat, *A* nuqtani markaz deb olib, *AC* radiusli yoyni *AB* kesma bilan *K* nuqtada kesishguncha chizamiz. Hosil qilingan *K* nuqta talab qilingan nuqta bo‘ladi.

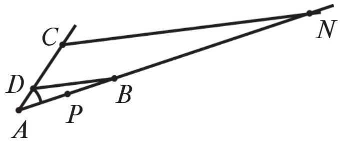
7- §. Nuqtalarning garmonik guruhi

Berilgan bitta to‘g‘ri chiziqda yotgan *A, K, B, N* nuqtalar uchlari bo‘lgan *AK, AN, BK* va *BN* kesmalar (2.16- chizma)

$$\frac{AK}{BK} = \frac{AN}{BN}$$

proporsiyani hosil qilsa, bu nuqtalar *nuqtalarning garmonik guruhini hosil qiladi*, deyiladi. Nuqtalarning garmonik guruhi ta’rifiga ko‘ra, *K* nuqta *AB* kesmani ichki tarzda bo‘lishi, *N* nuqta esa

2.16- chizma.



2.17- chizma.

uni tashqi tarzda bo‘lishi kelib chiqadi. AB kesmani ana shunday bo‘lish *garmonik tarzda bo‘lish* deb ham ataladi. K va N nuqtalar AB va KB kesmalarni garmonik tarzda bo‘lsa, A va B nuqtalar KB va KN kesmalarni ham garmonik tarzda bo‘ladi. Bunda K va N nuqtalar A va B nuqtalarga nisbatan *qo‘shma garmonik nuqtalar* deyiladi va aksincha.

M a s a l a . Bitta to‘g‘ri chiziqda yotgan A, B va P nuqtalar berilgan. A va B nuqtalarga nisbatan P nuqtaga qo‘shma garmonik nuqta yasalsin.

Y e c h i l i s h i . A nuqtadan ixtiyoriy nur o‘tkazamiz va unda $AC = AP$ kesmani joylashtiramiz (2.17- chizma). C nuqtadan A nuqta tomonga qarab $CD = PB$ kesmani joylashtiramiz. So‘ngra B va D nuqtalarni tutashtirib, $CN \parallel PB$ kesmani o‘tkazamiz. Natijada izlangan N nuqtani olamiz. Haqiqatan, $\triangle ACN$ $\triangle ADB$ va shuning uchun

,

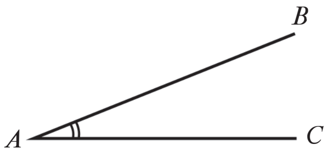
shunga o‘xshash,

hosila proporsiya ham o‘rinli. $AN - AB = BN$, $AC - AD = CD = BP$ bo‘lganligidan,

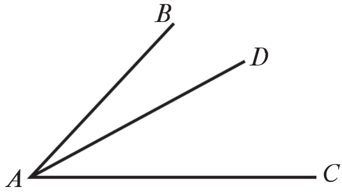
tenglikka ega bo‘lamiz, demak, N nuqta berilgan A va B nuqtalarga nisbatan P nuqtaga qo‘shma garmonik nuqta bo‘ladi.

8- §. Burchaklar

1. Burchakning ta’rifi va turlari. Tekislikning bitta nuqtadan chiqqan ikkita nur bilan chegaralangan qismi *burchak* deyiladi. Umumiy A nuqta (2.18-chizma) burchakning *uchi*, AB va AC



2.18- chizma.



2.19- chizma.

nurlar esa burchakning *tomonlari* deyiladi. Burchak yoki bitta harf bilan (A), yoki uchta harf bilan (BAC) belgilanib, unda $\angle$ belgisi qo‘yilib yoziladi ($\angle A$ yoki $\angle BAC$).

A nuqtadan chiquvchi AB va AC nurlar, ularni qo‘shganda butun tekislikni beradigan, ikkita burchak hosil qiladi. Shu sababli ulardan biri A uchdagi burchakning *ichki sohasi* $\angle BAC$, ikkinchisi esa — *tashqi sohasi* deyiladi.

Agar burchakning tomonlari to‘g‘ri chiziq hosil qilsa, burchak *yoyiq burchak* deyiladi. Tekislikning bitta to‘g‘ri chiziq bilan chegaralangan qismi *yarimtekislik* deyiladi. Ravshanki, to‘g‘ri chiziq tekislikni ikkita yarimtekislikka bo‘ladi.

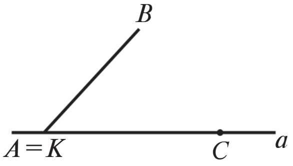
Burchakning kattaligini o‘lchash uchun o‘lchov birligi kiritiladi. O‘lchov birligi sifatida 1° (bir gradus)li burchak qabul qilinadi. Bir gradusli burchak — yoyiq burchakning $\frac{1}{180}$ ulushiga teng burchakdir. Burchaklarni o‘lchash transportir yordamida amalga oshiriladi.

$\angle BAC$ burchak AC va AB nurlar yordamida hosil qilingan bo‘lsin (2.19- chizma). Agar A nuqtadan chiqqan AD nur AC tomonga nisbatan AB nur bilan bitta yarimtekislikda va AB tomonga nisbatan AC nur bilan bitta yarimtekislikda yotsa, AD berilgan burchakning AB va AC tomonlari *orasidan o‘tadi*, deyiladi.

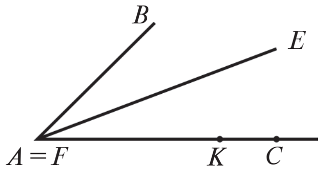
Ichki AD nur (2.19- chizma) berilgan $\angle BAC$ ni ikkita kichik $\angle BAD$ va $\angle DAC$ larga bo‘ladi, bunda $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC$, ya’ni burchaklar yig‘indisining kattaligi qo‘shiluvchi burchaklar kattaliklari yig‘indisiga tengdir.

2. Burchaklarni taqqoslash, teng burchaklar. Bunda biz shakllarning harakati (ko‘chishi) haqidagi aksiomadan foydalanamiz: shaklni *tekislikdagi bir joydan ikkinchi joyga uning nuqtalari orasidagi masofani o‘zgartirmasdan ko‘chirish mumkin.*

Endi burchaklarni bir-birining ustiga joylashtirish tushunchasini kiritamiz. Agar bizga a to‘g‘ri chiziq va uning ustida yotuvchi



2.20- chizma.



2.21- chizma.

K nuqta berilgan bo‘lsa (2.20- chizma), $\angle BAC$ ni a to‘g‘ri chiziq bilan aniqlanadigan yarimtekisliklarning bittasiga joylashtirish mumkin. Buning uchun:

1) A nuqtani K nuqta bilan ustma-ust qo‘yamiz;

2) $\angle BAC$ ning tomonlaridan birini, masalan, AC tomonni KC nur bo‘ylab yo‘naltiramiz;

3) berilgan $\angle BAC$ ning AB nurini yarimtekisliklardan biriga yo‘naltiramiz.

Agar ikkita burchak bir-biriga joylashtirilganda o‘zaro ustma-ust tushsa, ular *teng burchaklar* deyiladi. Agar burchaklarning tomonlari kesmalardan iborat bo‘lsa, burchaklar teng bo‘lganda tomonlar teng bo‘lmasligi ham mumkin. Bu yerdan, teng burchaklarning bir xil kattalikda bo‘lishi kelib chiqadi. Bizga ikkita $\angle BAC$ va $\angle EFK$ burchak berilgan bo‘lsin (2.21- chizma). Ularni A va F uchlar ustma-ust tushadigan qilib bir-biriga joylashtiramiz hamda AC nurni FK nur bo‘ylab yo‘naltiramiz. Agar FE nur $\angle BAC$ uchun ichki nur bo‘lsa, $\angle BAC > \angle EFK$ bo‘ladi. Bunda $\angle BAE$ burchak $\angle BAC$ va $\angle EFK$ ning *ayirmasi* deyiladi hamda $\angle BAE = \angle BAC - \angle EFK$ kabi yoziladi.

Agar AB nur AE va AC nurlar orasida yotsa, burchaklarning ayirmasi

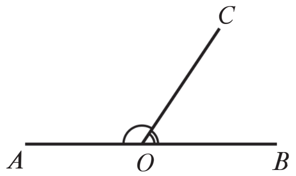
$$\angle EAB = \angle EAC - \angle BAC$$

kabi yoziladi.

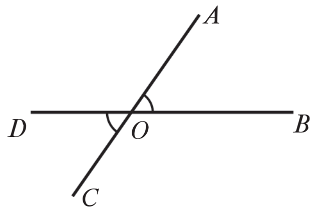
3. Qo‘shni va vertikal burchaklar. Agar ikkita burchakning tomonlaridan bittasi umumiy bo‘lib, qolgan ikkita tomonlardan biri ikkinchisining davomidan iborat bo‘lsa, ular qo‘shni burchaklar deyiladi. 2.22- chizmada $\angle BOC$ va $\angle AOC$ qo‘shni burchaklardir (bunda OC — umumiy tomon, OA va OB tomonlar esa AB to‘g‘ri chiziqda yotadi).

1- teorema. ***Qo‘shni burchaklarning yig‘indisi 180° ga teng*.**

Isboti. Haqiqatan, OA va OB nurlar bitta to‘g‘ri chiziqda yotib, 180° ga teng yoyiq burchak hosil qiladi.



2.22- chizma.



2.23- chizma.

O‘ziga qo‘shni burchakka teng burchak *to‘g‘ri burchak* deb ataladi. Shunday qilib, agar $\angle AOC = \angle COB$ bo‘lsa, $\angle AOC = \angle COB = 90°$. Bu holda OC to‘g‘ri chiziq AB to‘g‘ri chiziqqa *perpendikular* deyiladi va $OC \perp AB$ kabi belgilanadi.

Agar ikkita burchakdan birining tomonlari ikkinchisining tomonlari davomidan iborat bo‘lsa, ular vertikal burchaklar deyiladi. 2.23-chizmada $\angle AOB$ va $\angle COD$ *vertikal* burchaklardir, chunki $\angle COD$ ning OD va OC tomonlari $\angle AOB$ ning BO va AO tomonlarining davomidan iborat.

2- teorema. ***Vertikal burchaklar o‘zaro tengdir.***

Isboti. $\angle AOB$ va $\angle COD$ vertikal burchaklar bo‘lsin (2.23-chizma). Ularning har biri $\angle AOD$ ga qo‘shni burchaklardan iborat. Qo‘shni burchaklar haqidagi teoremaga ko‘ra,

$$\angle AOB + \angle AOD = 180°, \qquad \angle COD + \angle AOD = 180°.$$

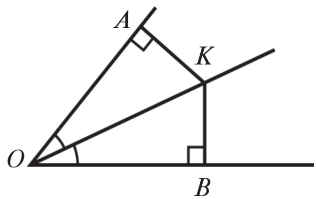
Bu tengliklarning chap tomonidagi ikkinchi qo‘shiluvchilar bir xil bo‘lganligidan, birinchi qo‘shiluvchilar ham teng bo‘lishi shart, ya’ni

$$\angle AOB = \angle COD.$$

4. Burchak bissektrisasi. Burchak uchidan chiqib, burchakni teng ikki bo‘lakka bo‘luvchi nur uning *bissektrisasi* deyiladi. Agar OK nur $\angle AOB$ ning bissektrisasi bo‘lsa (2.24-chizma), ta’rifga ko‘ra

$$\angle AOK = \angle KOB.$$

3- teorema. ***Burchak bissektrisasining nuqtalari burchak tomonlaridan bir xil uzoqlikda yotadi.***



2.24- chizma.

Isboti. Bissektrisaning ixtiyoriy K nuqtasidan burchakning tomonlariga AK va KB (2.24- chizma) perpendikularlar o‘tkazamiz. Buning natijasida gipotenuzasi OK va o‘tkir burchagi ($\angle AOK = \angle BOK$) bo‘yicha teng bo‘lgan ikkita to‘g‘ri burchakli $\triangle AOK$ va $\triangle BOK$ larni hosil qilamiz. Bundan $AK = KB$ bo‘lishi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Izoh. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan *masofa* sifatida shu nuqtadan mazkur to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan perpendikularning uzunligi qabul qilingan.

9- §. Parallel to‘g‘ri chiziqlar

Agar tekislikda berilgan a va b to‘g‘ri chiziqlar har qancha davom ettirilganda ham o‘zaro kesishmasa, ular *parallel to‘g‘ri chiziqlar* deyiladi va ularning parallelligi $a \parallel b$ kabi belgilanadi.

Parallel to‘g‘ri chiziqlarning mavjud bo‘lishi quyidagi teoremadan kelib chiqadi.

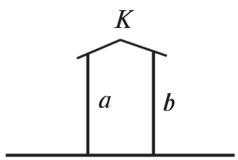
4- teorema. ***Bitta to‘g‘ri chiziqqa perpendikularlar har qancha davom ettirilganda ham kesishmaydi.***

Isboti. a va b to‘g‘ri chiziqlar uchinchi bir n to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘lsin (2.25- chizma). Agar a va b to‘g‘ri chiziqlar biror K nuqtada kesishadi, deb faraz qilsak, shu K nuqtadan bitta n to‘g‘ri chiziqqa ikkita perpendikular to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan bo‘ladi, lekin bunday bo‘lishi mumkin emas. Teorema isbotlandi.

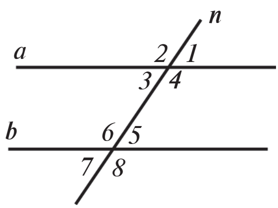
Endi ikkita a va b to‘g‘ri chiziq uchinchi n to‘g‘ri chiziq bilan kesishgan bo‘lsin (2.26- chizma). Buning natijasida *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8* kabi belgilangan burchaklar hosil bo‘ladi. Bu burchaklar quyidagicha ataladi:

3 va *5, 4* va *6 — ichki almashinuvchi burchaklar;*
2 va *8, 1* va *7 — tashqi almashinuvchi burchaklar;*
1 va *5, 2* va *6, 3* va *7, 4* va *8 — mos burchaklar;*
3 va *6, 4* va *5 — ichki bir tomonli burchaklar;*
1 va *8, 2* va *7 — tashqi bir tomonli burchaklar.*

5-teorema. ***Agar ikkita to‘g‘ri chiziq uchinchi to‘g‘ri chiziq bilan kesishganda: ichki almashinuvchi burchaklar teng, mos burchaklar teng yoki ichki bir tomonli burchaklarning yig‘indisi 180° bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘ladi.***

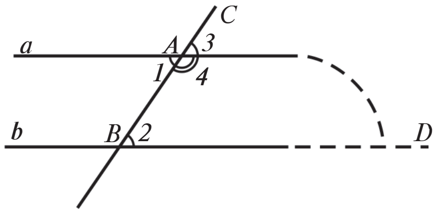


2.25- chizma.



2.26- chizma.

I s b o t i . 1. a va b to‘g‘ri chiziqlar c to‘g‘ri chiziq bilan kesishgan bo‘lib, bunda a c= $= A$, b c $= B$ va ichki almashinuvchi burchaklar teng, ya’ni $\angle 1 = \angle 2$ bo‘lsin (2.27-chizma), shu holda $a \parallel b$ bo‘lishini isbotlaymiz.



2.27- chizma.

a va b to‘g‘ri chiziqlar biror D nuqtada kesishadi deb, teskarisini faraz qilamiz. U holda $\triangle ABD$ ni hosil qilamiz. $\angle 1$ shu $\triangle ABD$ uchun tashqi burchakdan iborat va shuning uchun, $\angle 1 = \angle 2 + \angle ADB$. Shartga ko‘ra $\angle 1 = \angle 2$, $\angle ADB \neq 0$ bo‘lganligidan, qarama-qarshilikka kelamiz, ya’ni a va b to‘g‘ri chiziqlar davom ettirilganda kesisha olmasligi kelib chiqadi.

2. Endi mos burchaklar teng bo‘lgan, ya’ni $\angle 2 = \angle 3$ holni ko‘rib chiqamiz. $\angle 1$ va $\angle 3$ vertikal burchaklar bo‘lganligidan, $\angle 3 = \angle 1$ tenglik o‘rinli. Modomiki, $\angle 1$ va $\angle 2$ ichki almashinuvchi burchaklar ekan, yuqorida isbotlanganiga asosan, $a \parallel b$ bo‘lishi kelib chiqadi.

3. Nihoyat, ichki bir tomonli burchaklarning yig‘indisi 180° ga teng, ya’ni $\angle 2$ va $\angle 4$ — ichki bir tomonli burchaklar va $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$ bo‘lgan holni qaraymiz. Bu holda $\angle 1 = \angle 2$ bo‘ladi hamda ular ichki almashinuvchi burchaklar bo‘lganligidan, birinchi bandda isbotlanganiga ko‘ra, a va b to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro kesishishi mumkin emas.

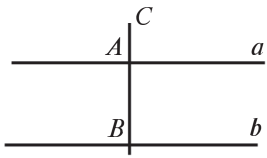
Endi to‘g‘ri chiziqlarning ular parallelligi va perpendikularligi bilan aloqador ba’zi xossalarini ko‘rib o‘tamiz.

1. *Bitta to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgqn ikkita perpendikular o‘zaro parallel bo‘ladi* (2.28- chizma).

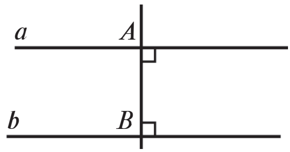
Haqiqatan, agar bu perpendikularlar biror P nuqtada kesishadi, deb faraz qilsak, P nuqtadan bitta to‘g‘ri chiziqqa ikkita perpendikular tushirilganligi kelib chiqadi, bunday bo‘lishi esa mumkin emas.

2. *Ikkita parallel to‘g‘ri chiziqdan biriga perpendikular bo‘lgan to‘g‘ri chiziq ularning ikkinchisiga ham perpendikular bo‘ladi.*

Haqiqatan ham, a va b to‘g‘ri chiziqlar parallel hamda $AB \perp a$, ya’ni $\angle aAC = 90^\circ$ bo‘lsin (2.28- chizma). AB to‘g‘ri chiziqda C va B nuqtalarni a to‘g‘ri chiziqdan turli tomonlarda yotadigan qilib olamiz. Modomiki, B nuqta va b to‘g‘ri chiziq a to‘g‘ri chiziqdan



2.28- chizma.



2.29- chizma.

bir tomonda yotar ekan, AB to‘g‘ri chiziq b to‘g‘ri chiziq bilan B nuqtada kesishadi.

$a \| b$ bo‘lganligidan, AB to‘g‘ri chiziq b to‘g‘ri chiziq bilan $90°$ li burchak hosil qiladi, ya’ni $AB \perp a$, shuni isbotlash talab qilingan edi.

3. *To‘g‘ri chiziqdan tashqarida yotgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan yagona to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.*

Haqiqatan, a — berilgan to‘g‘ri chiziq va A undan tashqarida yotgan nuqta bo‘lsin (2. 29- chizma). A nuqtadan a to‘g‘ri chiziqqa AB perpendikular o‘tkazamiz. a va b to‘g‘ri chiziqlar bitta AB to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan perpendikularlar sifatida, o‘zaro parallel bo‘ladi.

Endi shu to‘g‘ri chiziqning yagonaligini isbot qilish qoldi, xolos. Buning uchun, A nuqtadan o‘tuvchi, b to‘g‘ri chiziqdan boshqa ixtiyoriy to‘g‘ri chiziq a to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tishini isbotlash lozim. Ma’lumki, A nuqtadan o‘tuvchi b to‘g‘ri chiziq AB to‘g‘ri chiziqqa perpendikulardir. Shuning uchun, A nuqtadan o‘tadigan c to‘g‘ri chiziq AB bilan α o‘tkir burchak hosil qiladi.

Ana shu nurda kesmani joylashtiramiz va C nuqtadan $CD \perp AB$ o‘tkazamiz. U vaqtda to‘g‘ri burchakli $\triangle ACD$ dan $AD = AC \cdot \cos\alpha = AB$ bo‘lishini, ya’ni B va D nuqtalar ustma-ust tushishini ko‘ramiz. Demak, BC to‘g‘ri chiziq B nuqtadan o‘tadi va $BC \perp AB$, ya’ni BC to‘g‘ri chiziq a to‘g‘ri chiziq bilan ustma-ust tushadi. Demak, a va c to‘g‘ri chiziqlar C nuqtada kesishadi.

? *Takrorlash uchun savol va topshiriqlar*

1. Kesma deb nimaga aytiladi?
2. Nur deb nimaga aytiladi?
3. Ikki nuqtani nechta kesma tutashtiradi?
4. Berilgan AB kesmaning A va B nuqtalari orasida C nuqta olingan. Natijada chizmada nechta kesma hosil qilinadi?
5. AK nur AB kesmaning B nuqtadan tashqaridagi davomi bo‘lsin.

Shu kesma boshqa biror kesmaning davomi sifatida qaralishi mumkinmi?

6. Ikki to‘g‘ri chiziq *K* nuqtada kesishadi. Natijada nechta nur hosil bo‘ladi?
7. *a* to‘g‘ri chiziq berilgan. *A, B, C* nuqtalarni shunday belgilash talab qilinadiki, natijada *a* va *AB* to‘g‘ri chiziqlar *C* nuqtada o‘zaro kesishadigan bo‘lsin.
8. *A, B, C, D* nuqtalarni *AB* va *CD* to‘g‘ri chiziqlar kesishadigan, *AB* va *CD* nurlar esa kesishmaydigan qilib joylashtirish mumkinmi?
9. *A, B, C, D* nuqtalarni *AB* va *CD* nurlar kesishadigan, *AC* va *BD* nurlar esa kesishmaydigan qilib joylashtirish mumkinmi?
10. *a* to‘g‘ri chiziq hamda *A* va *B* nuqtalar berilgan. Qachon *AB* kesma *a* to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tadi?

Mustaqil yechish uchun masalalar

A GURUH

1. Agar:

a) $AB = 3{,}2$ sm, $BC = 4{,}6$ sm, $AC = 1{,}4$ sm;

b) $15 = 7{,}4$ sm, $BC = 12{,}6$ sm, $AC = 23{,}1$ sm bo‘lsa, *A*, *B*, *C* nuqtalar bitta to‘g‘ri chiziqda yotadimi?

J a v o b: a) yotadi, b) yotmaydi.

2. *C* nuqta *A* va *B* nuqtalar orasida yotadi. Agar $AB = 18{,}4$ sm va $BC = 4{,}8$ sm bo‘lsa, *AC* ning uzunligi topilsin.

J a v o b: 13,6 sm.

3. *M*, *N* va *P* nuqtalar bitta to‘g‘ri chiziqda yotadi. Agar $MN = 24{,}8$ sm, $NP = 8{,}3$ sm bo‘lsa, *M* va *P* nuqtalar orasidagi masofa topilsin.

J a v o b: 33,1 sm.

4. $\angle BAC = 15^\circ$, $\angle BAD = 46^\circ$ bo‘lib, *BA* nur *BC* va *BD* nurlar orasida yotadi. $\angle CAD$ ning kattaligi topilsin.

J a v o b: 61°.

5. Qo‘shni burchaklardan biri ikkinchisidan 20°ga katta. Qo‘shni burchaklardan kattasi topilsin.

J a v o b: 100°.

B GURUH

6. $AB = 12$ sm, $BC = 4$ sm, $CD = 10$ sm bo‘lgan kesmalar berilgan bo‘lsin. Unda: 1) *A* nuqtadan *BC* kesmaning o‘rtasigacha masofa; 2) *AB* va *CD* kesmalarning o‘rtalari orasidagi masofa topilsin.

J a v o b: 1) 14 sm, 2) 15 sm.

7. $AB = 34$ sm, $BC = 12$ sm kesmalar berilgan. Unda AC kesmaning uzunligi nimaga teng boʻlishi mumkin?

J a v o b : a) 46 sm, b) 22 sm.

8. $AB = a$ kesma berilgan. Bu kesmadan: a) ikki marta kichik boʻlgan; b) uch marta katta boʻlgan kesmalar (oʻlchovsiz chizgʻich va sirkul yordamida) yasalsin.

9. $AB = 60$ sm kesma berilgan va C nuqta uning oʻrtasi boʻlsin. AB toʻgʻri chiziqda C nuqtaning har xil tomonlarida P va Q nuqtalar olingan va $PC = 6$ sm, $QC = 18$ sm boʻlsa, AP va PQ kesmalarning uzunliklari topilsin.

J a v o b : a) 24 sm va 6 sm; b) 36 sm va 54 sm.

10. Qoʻshni burchaklarning kattaliklari 3 : 5 kabi nisbatda boʻlsa, ularning kichigi topilsin.

J a v o b : 22° 30'.

C GURUH

11. Yoyiq burchak uchta burchakka boʻlingan. Burchaklar kattaliklari 2 : 3 : 4 nisbatda boʻlsa, burchaklar kattaliklari topilsin.

J a v o b : 40°, 60°, 80°.

12. AB kesma C va D ichki nuqtalar bilan uchta boʻlakka boʻlingan. Oʻrtadagi kesma $CD = 10$ sm ga teng. AC va DB kesmalarning oʻrta nuqtalari E va F orasidagi masofa 24 sm ga teng. AC va DB kesmalar yigʻindisining uzunligi topilsin

J a v o b : 28 sm.

13. Toʻgʻri burchakli uchburchakda oʻtkir burchaklarning bissektrisalari oʻtkazilgan. Bissektrisalar orasidagi oʻtmas burchak topilsin.

J a v o b : 135°.

14. Muntazam uchburchakda ikkita ichki burchaklarning bissektrisalari oʻtkazilgan. Ular orasidagi oʻtmas burchak nimaga teng?

J a v o b : 120°.

15. Uchta kesma berilgan. $AB = 6 + 2a$, $AC = a + 1$, $CB = 3a - 1$. a ning qanday qiymatida $AB = AC + CB$ tenglik oʻrinli boʻladi?

J a v o b : $a = 3$.

III BOB TEKISLIKDA KOORDINATALAR SISTEMASI

1- §. To‘g‘ri chiziqda nuqtaning holatini aniqlash

To‘g‘ri chiziqda nuqtaning o‘rnini son yordamida aniqlash mumkin. Berilgan to‘g‘ri chiziqda biror O nuqtani sanoq boshi sifatida tanlab olamiz. Bunda O nuqta to‘g‘ri chiziqni ikkita nurga ajratadi va hosil qilingan nurlarning birortasida O nuqtadan *yo‘nalish* aniqlaymiz hamda uni *musbat yo‘nalish* deb ataymiz. Bu yo‘nalishga qarama-qarshi yo‘nalishni *manfiy yo‘nalish* deb ataymiz. Yo‘nalish aniqlangan to‘g‘ri chiziq *o‘q* deb ataladi.

Sonlar va nuqtalar orasida moslik o‘rnatish uchun *masshtab birligi* deb ataladigan PQ kesmani qaraymiz.

Berilgan o‘qda ixtiyoriy K nuqtani olamiz (3.1- chizma). K nuqtaga birorta sonni mos qo‘yish uchun masshtab birligini O nuqtadan A nuqtagacha joylashtirib chiqamiz. 3.1- chizmada PQ kesma musbat yo‘nalishda 3 marta joylashganligini ko‘ramiz. Shu sababli K nuqtaga 3 sonini mos qilib qo‘yamiz va uni nuqtaning *koordinatasi* deb ataymiz.

Shunga o‘xshash, o‘qning O nuqtadan manfiy yo‘nalishida yotgan R nuqtasining (3.1- chizma) koordinatasi -2 ga teng bo‘ladi.

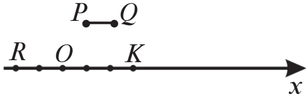
Bundan tashqari, OK kesmaning uzunligi 3, ya’ni $OK = 3$ va OR kesmaning uzunligi 2, ya’ni $OR = 2$ bo‘ladi.

Agar masshtab birligi OK kesmada butun son marta joylashmasa, unda masshtab birligini o‘zgartirish lozim.

Shunday qilib, to‘g‘ri chiziqda yotgan har bir nuqtaga biror x sonni quyidagi qoida bo‘yicha mos qo‘yish mumkin:

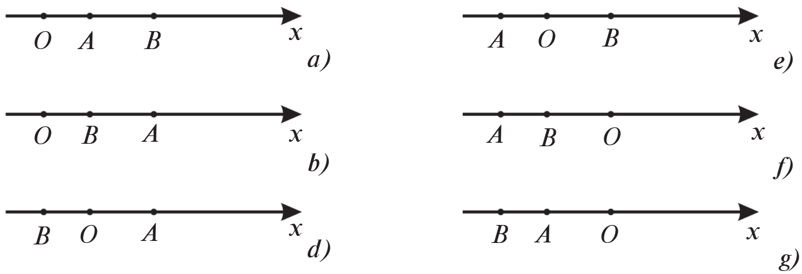
1) x sonning moduli OK kesmaning uzunligiga teng, $|x| = OK$;
2) K nuqta musbat yarim o‘qda yotganda $x > 0$;
   K nuqta manfiy yarim o‘qda yotganda $x < 0$;
   K va O nuqtalar ustma-ust tushganda $x = 0$ bo‘ladi.

Bunda x son K nuqtaning berilgan to‘g‘ri chiziqdagi *koordinatasi* deb ataladi.



3.1- chizma.

Endi to‘g‘ri chiziqda berilgan $A(x_1)$ va $B(x_2)$ nuqtalar orasidagi masofani



3.2- chizma.

aniqlaymiz. Buning uchun quyidagi hollarni ko‘rib chiqish zarur:

1. $A(x_1)$ va $B(x_2)$ nuqtalar O sanoq boshidan bir tomonda va musbat yo‘nalishda yotsin (3.2- *a* chizma). U holda $d = AB = OB - OA = x_2 - x_1 > 0$ bo‘ladi. Agar $A(x_1)$ va $B(x_2)$ nuqtalar 3.2- *b* chizmada ko‘rsatilganidek joylashsa, $d = AB = |OB - OA| = |x_2 - x_1| > 0$ bo‘ladi. Demak, berilgan $A(x_1)$ va $B(x_2)$ nuqtalar yuqorida keltirilgan hollarga mos joylashganda, ular orasidagi masofa

$$d = |x_2 - x_1|$$

bo‘ladi.

2. Endi $A(x_1)$ va $B(x_2)$ nuqtalar sanoq boshi O nuqtadan turli tomonda joylashgan bo‘lsin. Dastlab ular 3.2- *d* chizmada ko‘rsatilganidek joylashsin. Unda

$d = AB = OA + OB = |x_2| + |x_1| = -x_1 + x_2 = x_2 - x_1 > 0$ bo‘ladi va agar $A(x_1)$ va $B(x_2)$ nuqtalar 3.2- *e* chizmada ko‘rsatilganidek joylashgan bo‘lsa, ular orasidagi masofa

$$d = AB = OA + OB = |x_1| + |x_2| = x_2 - x_1$$

bo‘ladi, demak, bu holda ham $A(x_1)$ va $B(x_2)$ nuqtalar orasidagi masofa

$$d = |x_2 - x_1|$$

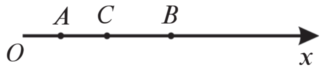
kabi bo‘ladi.

3. $A(x_1)$ va $B(x_2)$ nuqtalar O nuqtadan chapda manfiy yo‘nalishda joylashgan bo‘lsin (3.2- *f* chizma). U holda

$$d = AB = AO - OB = |x_1| - |x_2| = x_2 - x_1 > 0.$$

Agar $A(x_1)$ va $B(x_2)$ nuqtalar 3.2-g chizmadagi kabi joylashgan bo‘lsa, $d = AB = OB - OA = |x_2| - |x_1| = x_1 - x_2 > 0,$

ya'ni bu holda ham $A(x_1)$ va $B(x_2)$ nuqtalar orasidagi masofa



3.3- chizma.

$$d = |x_2 — x_1|$$

bo'ladi.

Shunday qilib, $A(x_1)$ va $B(x_2)$ nuqtalar to'g'ri chiziqda sanoq boshi O nuqtaga nisbatan qanday joylashganligidan qat'i nazar, ular orasidagi masofa

$$d = |x_2 - x_1| \qquad (1)$$

formula bo'yicha topiladi.

To'g'ri chiziqda AB kesma berilgan bo'lib, uning $A(x_1)$ va $B(x_2)$ uchlarining koordinatalari ma'lum bo'lsin.

T a ' r i f. Agar AB kesmada yotgan $C(x)$ nuqta uchun

munosabat bajarilsa, $C(x)$ nuqta AB kesmani λ *nisbatda* bo'ladi deyiladi.

$C(x)$ nuqtaning x koordinatasini kesmaning $A(x_1)$ va $B(x_2)$ uchlari koordinatalari va λ son orqali ifodalaymiz (3.3- chizma). Nuqtalar orasidagi masofa formulasidan $AC = |x - x_1|$, $CB = |x_2 - x|$.

$\lambda = \frac{AC \; x_1 + x_2 \; x - x_1}{CB \; 2 \; x_2 - x}$,

U holda bu yerdan x ni topamiz:

$$\lambda(x_2 - x) = x — x_1,\ x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2 \ \text{ va}$$

$$\lambda = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \qquad (2)$$

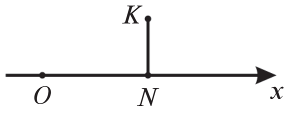
Agar λ=1 bo'lsa, C nuqta AB kesmaning o'rtasida yotadi va uning koordinatasi

(3)

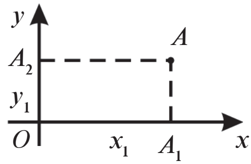
formula bo'yicha topiladi.

2- §. Tekislikda nuqtaning holatini aniqlash

Tekislikda Ox o'q va unda yotmaydigan K nuqta berilgan bo'lsin (3.4-chizma). K nuqtadan Ox o'qqa KN perpendikular o'tkazamiz. Ox o'qdagi N nuqtaning o'rnini bitta x koordinata bilan belgilash mumkin. K nuqtaning o'rnini belgilash uchun K nuqtaning Ox o'qdan chetlanishini ham ko'rsatish lozim.



3.4- chizma.



3.5- chizma.

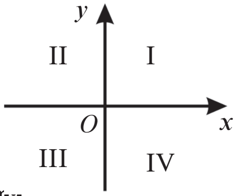
Endi tekislikda o'zaro perpendikular bo'lib, O nuqtada kesishadigan ikkita to'g'ri chiziqni o'tkazamiz va bu to'g'ri chiziqlarning har birida musbat yo'nalishni aniqlaymiz hamda o'lchov birligini beramiz (3.5- chizma).

Tekislikda A nuqta berilgan bo'lsin. A nuqtadan $AA_1 \perp Ox$ va $AA_2 \perp Oy$ to'g'ri chiziqlar (perpendikularlar) o'tkazamiz (3.5- chizma). U holda A_1 nuqtaga Ox o'qda x_1 koordinata, A_2 nuqtaga esa Oy o'qda y_1 koordinata mos keladi. Topilgan ikkita x_1 va y_1 sonlarni A nuqtaga mos qo'yamiz va A nuqtaning *koordinatalari* deb ataymiz hamda $A(x_1; y_1)$ kabi yozamiz.

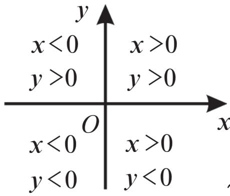
Yuqoridagi usulga o'xshash harakatlar bilan tekislikdagi har bir B nuqtaga $(x; y)$ sonlar juftini mos qo'yish mumkin. Buning aksi ham o'rinli: har bir sonlar juftiga tekislikda bitta nuqta mos keladi. Haqiqatan, agar $(x; y)$ sonlar jufti berilgan bo'lsa, Ox o'qda O nuqtadan, x ning ishorasiga bog'liq holda, musbat yoki manfiy yo'nalishda uzunligi $|x|$ bo'lgan OB_1 kesmani joylashtiramiz. Oy o'qda esa x koordinataga o'xshash, uzunligi $|y|$ bo'lgan OB_2 kesmani joylashtiramiz. So'ngra topilgan B_1 va B_2 nuqtalardan, mos ravishda, Ox va Oy o'qlarga perpendikularlar o'tkazamiz va ularning kesishish nuqtasi koordinatalari $(x; y)$ bo'lgan B nuqtadan iborat bo'ladi.

Bunda x koordinata B nuqtaning *abssissasi*, y koordinata esa *ordinatasi* deyiladi. Mos ravishda, Ox o'q — *abssissa o'qi*, Oy o'q esa *ordinata o'qi* deyiladi. Koordinata o'qlarining kesishish nuqtasi O — yasalgan to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasining *boshi* deyiladi. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi XVII asrda fransuz matematigi va faylasufi Rene Dekart tomonidan kiritilganligi sababli, u dekart koordinatalar sistemasi, $(x; y)$ lar esa nuqtaning *dekart koordinatalari* deyiladi.

Koordinatalar o'qlari tekislikni *choraklar* deb ataladigan to'rtta qismga bo'ladi. Choraklar soat mili harakati yo'nalishiga teskari tartibda raqamlanadi (3.6- chizma).



3.6- chizma.



3.7- chizma.

Nuqtaning koordinatalari ishoralari qanday bo‘lishini ko‘rib chiqamiz. Agar tekislikda berilgan B nuqta Ox o‘qda yotsa, uning koordinatalari $B(x;\, 0)$ kabi bo‘ladi, chunki bu holda Ox o‘qdan chetlanish yo‘q. Agar C nuqta Oy o‘qda yotsa, uning koordinatalari $C(0,\ y)$ kabi bo‘ladi, chunki bunda Oy o‘qdan chetlanish yo‘q. Nihoyat, koordinatalar boshi bo‘lgan O nuqtaning koordinatalari $O(0;\, 0)$ kabi bo‘ladi. 3.7- chizmada tekislikning nuqtalari qaysi choraklarda yotganligiga qarab, ular koordinatalarining ishoralari ko‘rsatilgan.

3- §. Tekislikdagi ikki nuqta orasidagi masofa

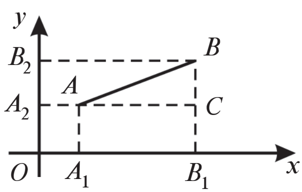
Tekislikda $A(x_1;\, y_1)$ va $B(x_2;\, y_2)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin. Bu A va B nuqtalarning har biridan $AA_1 \perp Ox$, $BB_1 \perp Ox$, $AA_2 \perp Oy$, $BB_2 \perp Oy$ perpendikularlar o‘tkazamiz (3.8- chizma). U holda

$$|OA_1| = |x_1|,\ |OB_1| = |x_2|,\ |OA_2| = |y_1|,\ |OB_2| = |y_2|,$$

$$|A_1B_1| = |x_2 - x_1|,\ |A_2B_2| = |y_2 - y_1|$$

Endi A nuqtadan BB_1 to‘g‘ri chiziqning C nuqtasida kesishadigan $AC \parallel Ox$ to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz va natijada $|AC| = |A_1B_1| = |x_2 - x_1|$ va $|BC| = |A_2B_2| = |y_2 - y_1|$ munosabatlar o‘rinli bo‘ladigan to‘g‘ri burchakli $\triangle ABC$ ni hosil qilamiz. Pifagor teoremasi bo‘yicha A va B nuqtalar orasidagi masofani aniqlaymiz (AB — gipotenuza, BC va AC — katetlar):

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



3.8- chizma.

Demak, ikkita $A(x_1;\ y_1)$ va $B(x_2;\ y_2)$ nuqta orasidagi d masofa A va B nuqtalarning mos koordinatalari ayirmalari kvadratlari yig‘indisidan olingan kvadrat ildizga tengdir:

(4)

4- §. Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish

Tekislikda AB kesma berilgan va uning $A\,(x_1;\, y_1)$ va $B(x_2;\, y_2)$ uchlari koordinatalari ma’lum hamda C nuqta AB kesmani λ nisbatda bo‘lsin, ya’ni

C nuqtaning koordinatalarini $(x;\, y)$ deb belgilaymiz va ularni berilgan A va B nuqtalarning koordinatalari hamda λ son orqali ifodalashga harakat qilamiz. Buning uchun A nuqtadan $AB_1 \parallel Ox$ to‘g‘ri chiziq, A, B, C nuqtalardan Ox o‘qqa perpendikularlar o‘tkazamiz. Perpendikularlarning AB_1 to‘g‘ri chiziq bilan kesishgan nuqtalarini B_1 va C_1 deb belgilaymiz (3.9- chizma). Fales teoremasiga ko‘ra, $\angle BAB_1$ uchun

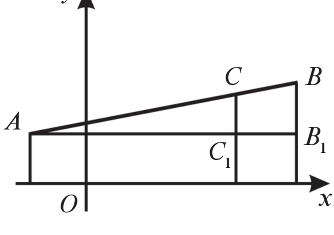
nisbatga ega bo‘lamiz. Modomiki, $AC_1 = x - x_1$, $C_1B_1 = x_2 - x$ ekan, yuqoridagi nisbat

ko‘rinishni oladi. Undan $\lambda x_2 - \lambda x = x - x_1$, $(1 + \lambda)x = x_1 + \lambda x_2$

va bo‘ladi. Shunga o‘xshash, y koordinata uchun

$$y = \frac{x + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

formulani olamiz.



3.9- chizma.

Shunday qilib, berilgan AB kesmani λ nisbatda bo‘luvchi C nuqtaning koordinatalari kesmaning $A(x_1;\, y_1)$ va $B\,(x_2;\, y_2)$ uchlari koordinatalari orqali quyidagi formulalar bo‘yicha topiladi:

$$x = \frac{x + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{x + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \tag{5}$$

(5) formulalar kesmani berilgan λ *nisbatda bo'lish formulalari* deyiladi.

Agar $\lambda=1$ bo'lsa, $AC = CB$, ya'ni C nuqta AB kesmaning o'rtasida yotadi va uning koordinatalari

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{6}$$

formuladan topiladi, (6) *kesmani teng ikkiga bo'lish formulalaridir*.

Takrorlash uchun savol va topshiriqlar

1. To'g'ri chiziqdagi nuqtaning koordinatasi nima? To'g'ri chiziqda ikki nuqta orasidagi masofa qanday aniqlanadi?
2. Tekislikdagi nuqtaning koordinatalari qanday aniqlanadi? Koordinatalarning ishoralari qanday topiladi?
3. Koordinatalaridan biri nolga teng bo'lgan nuqta tekislikda qanday joylashadi?
4. Ikki nuqta orasidagi masofa formulasini keltirib chiqarilsin.
5. Kesmani berilgan nisbatda bo'luvchi nuqta koordinatalari topilsin.

Mustaqil yechish uchun masalalar

A GURUH

1. Quyidagi nuqtalar yasalsin: $A(4;\ 2)$; $B(-3;\ 4)$; $C(0;\ -2)$; $D(3;\ 0)$; $E(-2;\ -2)$.

2. Berilgan: a) $M(-1;\ 4)$ va $N(2;\ 0)$; b) $P(2;\ 7)$ va $Q(-1;\ 3)$ nuqtalar orasidagi masofa topilsin.

Javob: a) 5; b) 5.

3. Uchlari $A(3;\ 2)$, $B(-1;\ -1)$, $C(-2;\ 2)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning perimetri topilsin.

Javob: $P = 10 + \sqrt{10}$.

4. Berilgan $C(3;\ 4)$ nuqtaga: a) Ox o'qqa nisbatan; b) Oy o'qqa nisbatan; d) koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik nuqtalarning koordinatalari yozilsin.

Javob: a) $(3;\ -4)$; b) $(-3;\ 4)$; d) $(-3;\ -4)$.

5. Berilgan $A(3; -2)$, $B(4; 1)$, $C(5; 0)$, $D(0; -5)$, $E(-4; 3)$ nuqtalarning qaysi biri koordinatalar boshiga yaqin joylashgan?

J a v o b: A.

6. AB kesma $A(-4; 3)$, $B(2; 1)$ uchlari bilan berilgan. AB kesmaning o‘rtasidagi nuqtaning koordinatalari yozilsin.

J a v o b: $K(-1; 2)$.

7. AB kesmada $A(-3; 1)$ uch va uning o‘rtasida yotuvchi $K(1; 3)$ nuqta ma’lum bo‘lsa, B nuqtaning koordinatalari yozilsin.

J a v o b: $B(5; 5)$.

B GURUH

8. Agar $\triangle ABC$ ning uchlari $A(1; 4)$, $B(5; 8)$, $C(3; 2)$ nuqtalar bo‘lsa, uning qanday uchburchak ekanligi topilsin.

J a v o b: To‘g‘ri burchakli.

9. $A(0; 1)$, $B(-1; -2)$, $C(2; 7)$ nuqtalar bitta to‘g‘ri chiziqda yotadimi?

J a v o b: Ha.

10. Ordinata o‘qida berilgan $A(-5; 1)$ va $B(3; 2)$ nuqtalardan bir xil uzoqlikda yotuvchi K nuqtaning koordinatalari topilsin.

J a v o b: $K(-6,5; 0)$.

11. Tekislikda $A(1; 2)$ va $B(6; 3)$ nuqtalar berilgan. Abssissa o‘qida shunday K nuqtani topish kerakki, $\angle AKB = 90°$ bo‘lsin.

J a v o b: $K_1(3; 0)$, $K_2(4; 0)$.

12. Uchlari $A(-2; 4)$, $B(3; 1)$, $C(5; -3)$ bo‘lgan $\triangle ABC$ uchburchakning AK medianasi uzunligi topilsin.

J a v o b: $\sqrt{61}$.

13. $ABCD$ parallelogrammning uchta $A(-4; 2)$, $B(2; 6)$, $C(0; -4)$ uchlari berilgan. Uning D uchining koordinatalari topilsin.

J a v o b: $D(-6; -8)$.

C GURUH

14. $\triangle ABC$ ning $A(-3; 1)$, $B(-2; -5)$, $C(2; 4)$ uchlari ma’lum bo‘lsa, uning og‘irlik markazi koordinatalari topilsin.

J a v o b: $K(-1; 0)$.

15. $\triangle ABC$ ning $A(-1;\ 3)$, $B(2;\ -1)$, $C(7;\ -3)$ uchlari berilgan. Uning AK bissektrisasi uzunligi topilsin.

J a v o b: .

16. $\triangle ABC$ ning $A(3;\ 8)$, $B(10;\ 2)$ uchlari va medianalarining kesishish nuqtasi $M(1;\ 1)$ berilganda uning uchinchi C uchi koordinatalari topilsin.

J a v o b: $C(-10;\ -7)$.

17. Uchlari $A(-3;\ 7)$, $B(5;\ 11)$ bo‘lgan AB kesma berilgan bo‘lib, M, N, P nuqtalar uni to‘rtta teng bo‘lakka bo‘lishi ma’lum bo‘lsa, M, N, P nuqtalarning koordinatalari topilsin.

J a v o b: $M(-1;\ 8)$, $N(1;\ 9)$, $P(3;\ 10)$.

18. Berilgan $A(1;\ 2)$, $B(9;\ 2)$, $C(2;\ -5)$ nuqtalardan bir xil uzoqlikda yotuvchi nuqta topilsin.

J a v o b: $(5;\ -1)$.

19. $A(2;\ 2)$ va $B(5;\ -2)$ nuqtalar berilgan. Abssissalar o‘qida shunday P nuqtani topish kerakki, $\angle APB$ to‘g‘ri burchak bo‘lsin.

$\frac{14\sqrt{2}}{3}$

J a v o b: $P_1(1;\ 0)$, $P_2(6;\ 0)$.

20. Kvadratning ikkita qarama-qarshi $A(3;\ 0)$ va $C(-4;\ 1)$ uchi berilgan. Kvadratning qolgan ikkita uchi topilsin.

J a v o b: $B(0;\ 4)$, $D(-1;\ -3)$.

IV BOB | TEKISLIKDAGI TO‘G‘RI CHIZIQ

1- §. To‘g‘ri chiziq tenglamalarining turlari

Tekislikda biror l to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin. Agar:

1) l to‘g‘ri chiziq ixtiyoriy nuqtasining koordinatalari

$$f(x; y) = 0$$

tenglamani qanoatlantirsa;

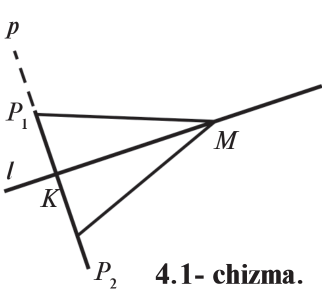
2) l to‘g‘ri chiziqda yotmagan nuqtaning koordinatalari $f(x; y) = 0$ tenglamani qanoatlantirmasa, l to‘g‘ri chiziq nuqtalarining x va y koordinatalari orasidagi

$$f(x; y) = 0$$

bog‘lanish uning *tenglamasi* deyiladi.

To‘g‘ri chiziqning tenglamasi berilganda uni yasash mumkin. Modomiki, to‘g‘ri chiziq ikkita nuqta vositasida aniqlanar ekan, to‘g‘ri chiziqni yasash uchun x ning o‘rniga biror x_1 va x_2 qiymatlar qo‘yib, to‘g‘ri chiziq tenglamasidan ularga mos y_1 va y_2 qiymatlarni topish yetarlidir.

1. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi. l to‘g‘ri chiziq tenglamasini topamiz. Buning uchun tekislikda l to‘g‘ri chiziqqa perpendikular ixtiyoriy p to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz va uning l to‘g‘ri chiziq bilan kesishgan nuqtasini K deb belgilaymiz (4.1-chizma). So‘ngra p to‘g‘ri chiziqda K nuqtadan har xil tomonda joylashgan ikkita $KP_1 = KP_2$ kesmani qo‘yamiz. M nuqta l to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. M nuqtani P_1 va P_2 nuqtalar bilan tutashtiramiz. U holda hosil bo‘lgan $\triangle KMP_1$ va $\triangle KMP_2$ uchburchaklarda KM katet — umumiy, yasashga ko‘ra $KP_1 = KP_2$ bo‘lganligidan, ular tengdir, ya’ni $\triangle KMP_1 = \triangle KMP_2$. Bundan $MP_1 = MP_2$ bo‘lishi, boshqacha aytganda, P_1P_2 kesmaning o‘rtasidan o‘tkazilgan KM perpendikularning nuqtalari kesmani P_1 va P_2 uchlaridan teng uzoqlikda yotishi kelib chiqadi. Ana shu shartni M, P_1 va P_2 nuqtalarning koordinatalari orqali ifodalaymiz.



4.1- chizma.

Bizga $P_1(x_1;\ y_1)$, $P_2(x_2;\ y_2)$ nuqtalarning koordinatalari ma’lum, l to‘g‘ri chiziq ixtiyoriy M nuqtasining koordinatalarini $M(x;\ y)$ deb belgilaymiz. So‘ngra M nuqtadan P_1 va P_2 nuqtalargacha bo‘lgan masofalarni topamiz:

Endi ularni tenglashtirib, l to‘g‘ri chiziqning

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

tenglamasini olamiz. Bu ifodani soddalashtirish uchun:

1) uning har ikkala tomonini kvadratga ko‘taramiz;

2) o‘xshash hadlarni ixchamlaymiz.

Natijada

$$x^2-2xx_1+x_1^2-y^2-2yy_1+y_1^2=x^2-2xx_2+x_2^2+y^2-2yy_2+y_2^2$$

yoki

munosabatni olamiz. Ushbu

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ Ax+By+C=0 \end{cases}$$

$$MP_1=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2},\quad MP_2=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}.$$

$$2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2=0$$

$$2(x_2-x_1)=a;\quad 2(y_2-y_1)=b;\quad x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2=c$$

belgilashlarni kiritamiz. Shunday qilib, biz l to‘g‘ri chiziq ixtiyoriy M nuqtasining x va y koordinatalari

$$ax+by+c=0 \tag{1}$$

chiziqli tenglamani qanoatlantirishini isbotladik.

T e o r e m a . ***Har bir ikki o‘zgaruvchili***

$$Ax+By+C=0 \tag{1'}$$

chiziqli tenglama tekislikda to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.

I s b o t i . Ikkita har xil $K_1(x_1;\ y_1)$ va $K_2(x_2;\ y_2)$ nuqtaning koordinatalari ma’lum bo‘lib, ular (1′) tenglamani qanoatlantirsin. Ikkinchi tomondan, K_1K_2 to‘g‘ri chiziqning tenglamasi (1) ko‘rinishida bo‘ladi. Shunday qilib, biz K_1 va K_2 nuqtalarning koordinatalari qanoatlantiradigan

(2)

tenglamalar sistemasini olamiz. Modomiki, K_1 va K_2 nuqtalar har xil ekan, hech bo‘lmaganda ularning koordinatalaridan bittasi har xil qiymat qabul qilishi, masalan, $x_1 \neq x_2$ bo‘lishi mumkin. Bu holda (2) sistemadagi birinchi tenglamani B ga, ikkinchisini b ga ko‘paytirib, birinchi tenglikdan ikkinchi tenglikni ayiramiz:

$$(aB—bA)x + (cB—bC) = 0. \tag{3}$$

(3) tenglama (2) sistema tenglamalarining har biriga teng kuchli bo‘lganligidan, x_1 ham, x_2 ham bu tenglamani qanoatlantiradi. Shartga ko‘ra, $x_1 \neq x_2$ bo‘lganligidan, bu faqat har ikkala koeffitsiyent nolga teng, ya’ni

$$\begin{cases} aB - bA = 0, \\ cB - bC = 0 \end{cases}$$

bo‘lganda bajariladi, xolos. Bundan,

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} \text{ va } \frac{b}{B} = \frac{c}{C},$$

ya’ni

bo‘lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, (1′) tenglama (1) tenglamadan faqat λ ko‘paytuvchi bilan farq qiladi. Shuning uchun, (1′) tenglama K_1K_2 to‘g‘ri chiziq tenglamasi bo‘ladi. Teorema isbotlandi.

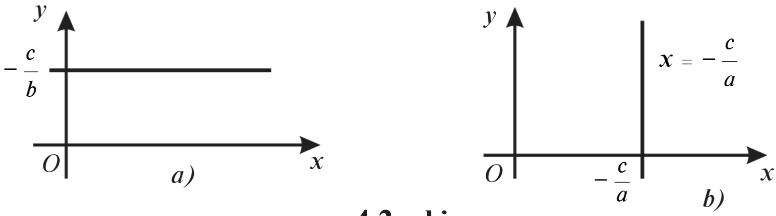
(1) tenglama *to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi* deb ataladi. Uning xususiy hollarini qarab chiqamiz.

1. Agar $a = 0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq tenglamasi

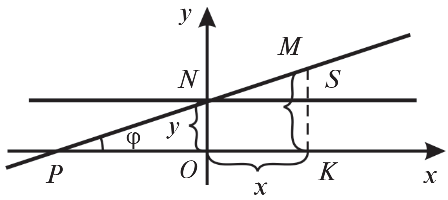
$$by + c = 0 \text{ yoki } y = -\frac{c}{b}$$

ko‘rinishda yoziladi. Bu to‘g‘ri chiziqning nuqtalari uchun y koordinata $-\frac{c}{b}$ o‘zgarmas qiymatga ega bo‘lib, x koordinata ixtiyoriy qiymatlar qabul qiladi (4.2- a chizma). Bu holda to‘g‘ri chiziq nuqtadan Ox o‘qqa parallel ravishda o‘tadi.

2. Agar $b = 0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq tenglamasi



4.2- chizma.



4.3- chizma.

$ax + c = 0$ yoki $x =$ ko‘rinishda yoziladi. Bu holda to‘g‘ri chiziqning nuqtalari uchun x koordinata o‘zgarmas qiymatni saqlaydi, y koordinata esa ixtiyoriy qiymatlar qabul qiladi (4.2- *b* chizma) hamda to‘g‘ri chiziq Oy o‘qqa parallel ravishda o‘tadi.

3. Agar $c = 0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$$ax + by = 0$$

$-\frac{c}{a}$ $\mathrm{tg}\varphi = \frac{MS}{NS} = \frac{y-b}{x}$

ko‘rinishda bo‘ladi va bu tenglamani koordinatalar sistemasi boshining koordinatalari ham qanoatlantiradi, demak, bu to‘g‘ri chiziq koordinatalar boshidan o‘tadi.

4. Agar $b = c = 0$ bo‘lsa, $ax = 0$ yoki $x = 0$ to‘g‘ri chiziq Oy o‘q bilan ustma-ust tushadi, $a = c = 0$ bo‘lganda esa $y = 0$ to‘g‘ri chiziq Ox o‘q bilan ustma-ust tushadi.

2. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi. To‘g‘ri chiziq Ox o‘qning musbat yo‘nalishi bilan φ burchak tashkil qilib, Oy o‘qdan ON kesmani kesib o‘tsin va $|ON| = b$ bo‘lsin (4.3- chizma). To‘g‘ri chiziqda biror $M(x; y)$ nuqtani olamiz va $OK = x$, $MK = y$ bo‘lsin. To‘g‘ri chiziqning Oy o‘q bilan kesishgan N nuqtasidan $NS \parallel Ox$ o‘tkazamiz. U holda $\angle MNS = \angle MPK = \varphi$. To‘g‘ri burchakli $\triangle MNS$ dan

ekanligini topamiz. So‘ngra, $\mathrm{tg}\varphi = k$ belgilashni kiritsak,

(4)

bo‘ladi. Bunda k = tgφ miqdor to‘g‘ri chiziqning *burchak koeffitsiyenti,* (4) tenglama esa to‘g‘ri chiziqning *burchak koeffitsiyentli tenglamasi* deyiladi.

Agar $b = 0$ bo‘lsa, $y = kx$ to‘g‘ri chiziq koordinatalar boshidan o‘tadi. $b > 0$ bo‘lganda esa to‘g‘ri chiziq $ON = b$ kesmani Oy o‘qning musbat yo‘nalishida kesib o‘tadi.

3. Berilgan nuqtadan berilgan yo‘nalishda o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi. Berilgan l to‘g‘ri chiziqning k burchak koeffitsiyenti va bitta $(x_0; y_0)$ nuqtasi ma’lum bo‘lsin. To‘g‘ri chiziqning tenglamasini (4)

$$y = kx + b$$

ko‘rinishda izlaymiz va berilgan nuqtaning koordinatalarini bu tenglamaga qo‘yamiz:

$$y_0 = kx_0 + b_0.$$

Bu tenglamalarning biridan ikkinchisini ayirib,

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

yoki

$$y = y_0 + k(x - x_0) \tag{5}$$

tenglamani olamiz. Ana shu (5) tenglama *berilgan nuqtadan berilgan yo‘nalishda o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi* deyiladi.

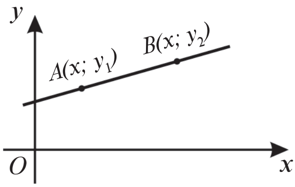
4. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi. Ikkita $A(x_1; y_1)$ va $B(x_2; y_2)$ nuqta berilgan bo‘lsin (4. 4- chizma). Unda yuqoridagi 3-bandga asosan, $A(x_1; y_1)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$$y_2 - y_1 = k(x - x_1)$$

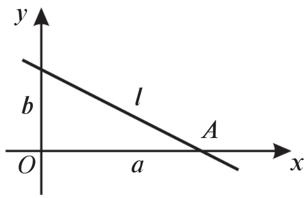
ko‘rinishda yoziladi. Bu tenglamada x va y lar o‘rniga B nuqtaning x_2, y_2 koordinatalarini qo‘yamiz:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Bu munosabatdan berilgan ikkita nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti uchun



4.4- chizma.



4.5- chizma.

formulani hosil qilamiz. Endi berilgan ikkita $A(x_1; y_1)$ va $B(x_2; y_2)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

yoki

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (6)$$

ko‘rinishni oladi.

5. To‘g‘ri chiziqning kesmalar bo‘yicha tenglamasi. Berilgan l to‘g‘ri chiziq koordinata o‘qlari bilan, mos ravishda, A va B nuqtalarda kesishib, koordinata o‘qlarida $OA = a$, $OB = b$ kesmalar ajratilgan bo‘lsin (4.5- chizma). U vaqtda A va B nuqtalarning koordinatalarini $A(a;\ 0)$, $B(0;\ b)$ kabi yozamiz. Endi l to‘g‘ri chiziq tenglamasini yuqorida ko‘rib o‘tilgan, berilgan A va B nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi (6) sifatida yozishimiz mumkin:

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}, \quad \frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1$$

yoki

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (7)$$

(7) tenglama *to‘g‘ri chiziqning kesmalar bo‘yicha tenglamasi* deyiladi, chunki a va b to‘g‘ri chiziqning Ox va Oy o‘qlarda kesgan kesmalari uzunliklariga tengdir.

2- §. To‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashishi

Tekislikda tenglamalari

$$a_1x + b_1y = c_1,$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad (8)$$

ko‘rinishda bo‘lgan ikkita to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin. Bu tenglamalarni sistema sifatida qarab, berilgan to‘g‘ri chiziqlarning umumiy nuqtasini topishga harakat qilamiz. Shu maqsadda, tenglamalardan birinchisini b_2 ga, ikkinchisini $-b_1$ ga ko‘paytiramiz va hosil qilingan ifodalarni qo‘shamiz:

$$\begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y = b_2c_1, \\ -b_1a_2x - b_1b_2y = -b_1c_2; \end{cases}$$

(9)

Endi tenglamalardan birinchisini a_2 ga, ikkinchisini esa $-a_1$ ga ko‘paytirib, ularni qo‘shamiz:

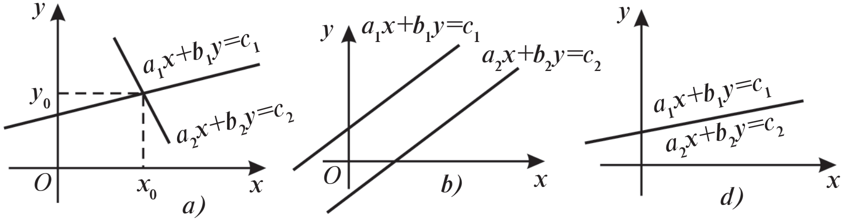
yoki

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1. \quad (10)$$

Olingan (9) va (10) munosabatlardagi koeffitsiyentlarga bog‘liq quyidagi hollarni ko‘rib chiqamiz:

a) $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ bo‘lganda, x va y lar yagona yo‘l bilan aniqlanadi. Demak, agar $a_1b_2 \neq a_2b_1$ yoki bo‘lsa, berilgan to‘g‘ri chiziqlar bitta nuqtada kesishadi. Bu shartni yoki $k_1 \neq k_2$ shaklda yozish ham mumkin, ya’ni *burchak koeffitsiyentlari har xil bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar kesishadi* (4.6- *a* chizma);

b) $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ bo‘lib, hech bo‘lmaganda $b_2c_1 - b_1c_2 \neq 0$ bo‘lsin. Bu shartlardan



4.6- chizma.

bo‘lganligidan, ya’ni to‘g‘ri chiziqlarning burchak koeffitsiyentlari o‘zaro teng bo‘ladi.

va $m \neq p$ bo‘lsin. U holda $a_1 = ma_2$, $b_1 = mb_2$ va $c_1 = pc_2$ bo‘ladi. Olingan ifodalarni (8) ning birinchi tenglamasiga keltirib qo‘yamiz:

$$\begin{cases} ma_2x + mb_2y = pc_2, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ma_2x + mb_2y = pc_2, \\ ma_2x + mb_2y = mc_2. \end{cases}$$

Bu ifodalarning chap tomonlari bir xil, o‘ng tomonlari har xil bo‘lganligidan, sistema yechimga ega emas, demak, berilgan *to‘g‘ri chiziqlar paralleldir* (4.6- b chizma);

d) endi $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ va $b_2c_1 - b_1c_2 = 0$ bo‘lgan holni qaraymiz. U vaqtda

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = m \quad \text{va} \quad a_1 = a_2m, \; b_1 = b_2m \; \text{ va } \; c_1 = c_2m.$$

Topilgan a_1, b_1, c_1 qiymatlarni (8) sistemaning birinchi tenglamasiga keltirib qo‘yib,

munosabatlarni olamiz, ya’ni berilgan *to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro ustma-ust tushadi* (4.6- d chizma).

3- §. Ikki noma’lumli tengsizliklar

Bizga quyidagi ikki o‘zgaruvchili chiziqli tengsizlik berilgan bo‘lsin:

$$a_1x + b_1y + c_1 > 0 \quad (a_1x + b_1y + c_1 < 0).$$

Tekislikda

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

tenglama to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi. Har qanday to‘g‘ri chiziq tekislikni ikkita yarimtekislikka ajratadi. Ikki o‘zgaruvchili tengsizlikni yechish yarimtekisliklardan birini aniqlashdan iboratdir. Chiziqli tengsizlik bilan aniqlangan nuqtalar to‘plami *tengsizlikning yechimlari fazosi yoki yechimlar yarimfazosi* deyiladi.

Quyidagi qat’iy tengsizlikni qanoatlantiruvchi yechimlar to‘plami yechimlarning *ochiq yarimfazosini* tashkil qiladi:

$$a_1x + b_1y + c_1 > 0 \quad (a_1x + b_1y + c_1 < 0).$$

Agar tengsizlik

$$a_1x + b_1y + c_1 \geq 0 \quad (a_1x + b_1y + c_1 \leq 0)$$

ko‘rinishda, ya’ni noqat’iy tengsizlik bo‘lsa, uning yechimlari to‘plami *yopiq yarimfazo* deyiladi.

1-misol. $2x - y - 4 < 0$ tengsizlikning yechimlari to‘plamini aniqlang.

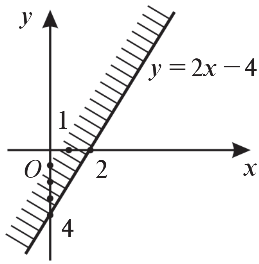
Yechilishi. $2x - y - 4 = 0$ tenglikdan $y = 2x - 4$ ekanligini olamiz va shu tenglama bilan aniqlanadigan to‘g‘ri chiziqni yasaymiz. Bu tenglamada x va y ning o‘rniga ixtiyoriy nuqtaning koordinatalarini, masalan, $x = 1$, $y = 0$ ni qo‘yamiz:

$$2 \cdot 1 - 0 - 4 = -2 < 0.$$

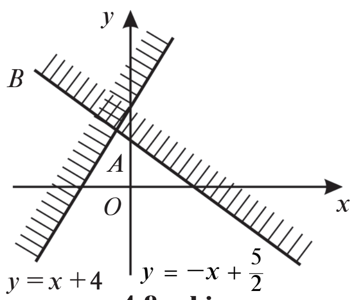
Demak, berilgan tengsizlikning yechimlari yarimfazosi tekislikning $y - 2x - 4$ to‘g‘ri chiziqdan yuqorida yotgan qismidan iborat ekan (4.7- chizma).

2-misol. $\begin{cases} x - y + 4 < 0, \\ 2x + 2y - 5 > 0 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasini yeching.

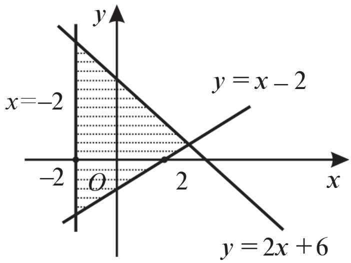
Yechilishi. Tengsizliklar sistemasining *yechimi* deb, birinchi va ikkinchi tengsizliklarning yechimlari to‘plamlari kesishmasiga aytiladi. Biz $y = x + 4$ va $y = -x + \frac{5}{2}$ to‘g‘ri chiziqlarni yasaymiz (4.8- chizma).



4.7- chizma.



4.8- chizma.



4.9- chizma.

$y > x + 4$ tengsizlikning yechimlari to‘plami $y = x + 4$ to‘g‘ri chiziqdan yuqorida yotgan yarimtekislikdan, $y > -x + \frac{5}{2}$ tengsizlikning yechimlari to‘plami esa $y = -x + 2{,}5$ to‘g‘ri chiziqdan yuqorida yotgan yarimtekislikdan iborat. Demak, berilgan tengsizliklar sistemasining yechimi $\angle BAC$ ning ichki qismida joylashgan nuqtalardan iborat ekan.

3- m i s o l . Ushbu tengsizliklar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x - y - 2 < 0, \\ 2x + y - 6 > 0, \\ x \geq -2. \end{cases}$$

Y e c h i l i s h i . Berilgan sistemadan, unga teng kuchli

$$\begin{cases} x > x - 2, \\ y > -2x + 6, \\ x \geq -2 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Bu sistemadagi har bir tengsizlikning yechimlari sohasini shtrixlab, tengsizliklar sistemasining yechimlari $y = x - 2$, $y = -2x + 6$ va $x = -2$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan uchburchakning ichidagi nuqtalardan tashkil topgan ekanligiga ishonch hosil qilamiz (4.9- chizma).

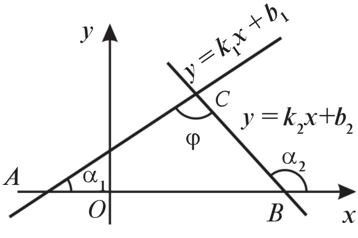
4- §. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak

Tekislikda tenglamalari $y = k_1x + b_1$ va $y = k_2x + b_2$ bo‘lgan ikkita to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqlarning k_1 va k_2 burchak koeffitsiyentlarini to‘g‘ri chiziqlarning Ox o‘q bilan tashkil etgan α_1 va α_2 burchaklari orqali ifodalasak, $k_1 = \mathrm{tg}\alpha_1$ va $k_2 = \mathrm{tg}\alpha_2$ bo‘ladi.

To‘g‘ri chiziqlar kesishganda φ burchak hosil qilishi ma’lum bo‘lsin. U vaqtda α_2 burchak $\triangle ABC$ uchun tashqi burchakdir, shuning uchun $\alpha_1 = \alpha_2 - \varphi$, bundan $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ bo‘ladi (4.10- chizma).

Natijada

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1),$$



4.10- chizma.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2}$$

yoki

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (11)$$

bo‘lishi kelib chiqadi. (11) *ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak formulasi* deyiladi.

Agar to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel bo‘lsa, $\alpha_1 = \alpha_2$ va u vaqtda

$$k_1 = k_2. \qquad (12)$$

Oxirgi tenglik ikki to‘g‘ri chiziqning o‘zaro *parallellik sharti* deyiladi.

Agar to‘g‘ri chiziqlar bir-biriga perpendikular bo‘lsa, aniqmas bo‘ladi. Bu shart

$$1 + k_1 k_2 = 0$$

yoki

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \qquad (13)$$

bo‘lganda bajariladi. (13) ikki to‘g‘ri chiziqning *perpendikularlik sharti* deyiladi.

Agar to‘g‘ri chiziq

$$ax + by + c = 0$$

umumiy tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa,

bo‘lib, uning burchak koeffitsiyenti

$$k = -\frac{a}{b}$$

formuladan topiladi.

Berilgan $A(x_0; y_0)$ nuqtadan $ax + by + c = 0$ *to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa*

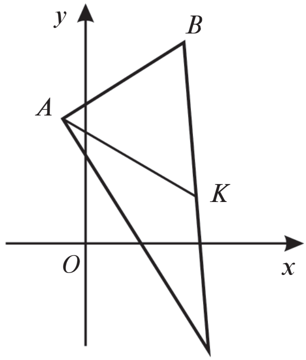
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (14)$$

formula bo‘yicha hisoblanadi. Bu masofani aniqlash uchun:

— berilgan to‘g‘ri chiziqqa A nuqtadan AK perpendikular o‘tkazish, ya’ni AK perpendikularning tenglamasini tuzish;

— berilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi va o‘tkazilgan perpendikular tenglamasidan tuzilgan sistemani yechib, to‘g‘ri chiziqlar kesishadigan K nuqtaning koordinatalarini topish;

— berilgan A nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqacha masofani ikkita A va K nuqta orasidagi masofa kabi aniqlash lozim.



4.11- chizma.

1- m a s a l a . Agar $\triangle ABC$ va uning $A(-1;\ 3)$, $B(2;\ 6)$, $C(4;\ -2)$ uchlari ma’lum bo‘lsa, uchburchakning AK medianasi tenglamasi tuzilsin.

Y e c h i l i s h i . Ta’rifga ko‘ra, AK mediana BC tomonni teng ikkiga bo‘ladi. BC kesmaning o‘rtasidagi K nuqtaning koordinatalarini (4.11- chizma)

$$x=\frac{x_B+x_C}{2}, \quad y=\frac{y_B+y_C}{2}$$

formulalar bo‘yicha topamiz:

$$x=\frac{2+4}{2}=3, \quad y=\frac{6-2}{2}=2.$$

Endi AK mediana tenglamasini ikkita ma’lum A va K nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq (1- § ga q.) tenglamasi kabi tuzamiz:

$$\frac{x-x_A}{x_K-x_A}=\frac{y-y_A}{y_K-y_A}, \quad \frac{x+1}{3+1}=\frac{y-3}{2-3},$$

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y-3}{-1}$$

yoki

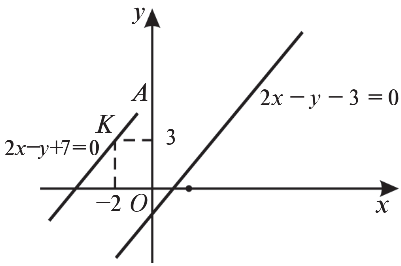
$$-x-1=4y-12, \qquad x+4y-11=0.$$

Demak, mediana tenglamasi

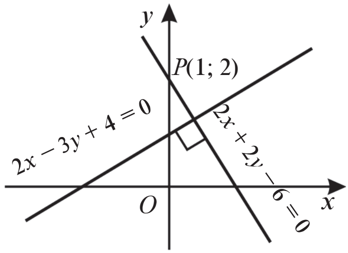
$$x+4y-11=0$$

ko‘rinishda bo‘lar ekan.

2- m a s a l a . Berilgan $2x-y-3=0$ to‘g‘ri chiziqqa parallel ravishda, $K(-2;\ 3)$ nuqta orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi tuzilsin.



4.12- chizma.



4.13- chizma.

Y e c h i l i s h i. To‘g‘ri chiziqning izlanayotgan tenglamasini berilgan $(x_0;\ y_0)$ nuqtadan berilgan k yo‘nalishda o‘tadigan to‘g‘ri chiziq tenglamasi (4.12- chizma)

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

sifatida izlaymiz. Bu to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentini to‘g‘ri chiziqlarning parallellik shartidan, ya’ni $k = k_1$ shartdan aniqlaymiz, bunda k_1 — berilgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentidir.

Berilgan to‘g‘ri chiziqning $2x - y - 3 = 0$ tenglamasidan $k_1 = \frac{-A}{B} = -\frac{2}{-1} = 2$ bo‘ladi va $k = k_1 = 2$. To‘g‘ri chiziq tenglamasiga $x_0 = -2$, $y_0 = 3$, $k = 2$ qiymatlarni keltirib qo‘yamiz va natijada $y - 3 = 2(x + 2)$, $y = 2x + 7$ bo‘lishini ko‘ramiz. Demak,

$$2x - y + 1 = 0$$

talab qilingan to‘g‘ri chiziq tenglamasi bo‘lar ekan.

3- m a s a l a. Berilgan $3x + 2y - 6 = 0$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikular ravishda $P(1;\ 2)$ nuqta orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

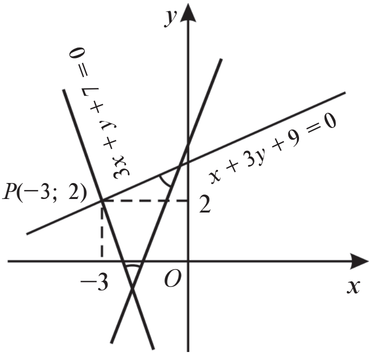
Y e c h i l i s h i. Bu holda ham, yuqoridagi kabi, to‘g‘ri chiziq tenglamasini (4.13- chizma)

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

ko‘rinishda izlaymiz. To‘g‘ri chiziq P nuqtadan o‘tganligidan, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Berilgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentini k_1 deb belgilab, izlanayotgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentini ikki to‘g‘ri chiziqning perpendikularlik sharti bo‘lgan

$$k \cdot k_1 = -1$$

munosabatdan topamiz. Berilgan to‘g‘ri chiziq uchun yoki U vaqtda $k = -\frac{1}{k_1} = = \frac{2}{3}$. Demak, berilgan to‘g‘ri chiziqqa P nuqtada o‘tkazilgan perpendikularning tenglamasi $y-2 = \frac{2}{3}(x-1)$, $3y - 6 = 2x - 2$, $2x - 3y + 4 = 0$ ko‘rinishda bo‘lar ekan.



4.14- chizma.

4- m a s a l a. Berilgan $P(-3; 2)$ nuqta orqali o‘tib, berilgan $y = 2x + 4$ to‘g‘ri chiziq bilan 45° li burchak hosil qiluvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

Y e c h i l i s h i. Bu holda ham berilgan $P(x_p; y_p)$ nuqtadan k yo‘nalishda o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning (4.14- chizma)

$$y - y_P = k(x - x_P)$$

tenglamasidan foydalanamiz. Burchak koeffitsiyenti k ni aniqlash uchun ikkita $y = kx + b$ va $y = k_1x + bx$ to‘g‘ri chiziq orasidagi burchakni topish formulasi (11) dan, ya’ni

$k_1 = \frac{k-2}{1+2k}$, $2k+1 = k-2$, $k = -3$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k-k_1}{1+kk_1}$$

formuladan foydalanamiz. Berilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasidan $k_1 = 2$ bo‘lishini topamiz. Modomiki, tg45° = 1 ekan,

bo‘lishi kelib chiqadi. U vaqtda izlanayotgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$$y - 2 = -3(x + 3), \quad y - 3 = -3x - 9, \quad 3x + y + 7 = 0$$

bo‘ladi.

Ikkinchi yechimni k va k_1 ning o‘rnini almashtirib topamiz:

$$\frac{2-k}{1+2k} = 1, \quad 2 - k = 1 + 2k, \quad k = \frac{1}{3}.$$

Demak, ikkinchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi $y - 2 = \frac{1}{3}(x+3)$, $3 - y \quad 6 = x + 3$ yoki

$$x - 3y + 9 = 0$$

bo‘ladi.

5 - m a s a l a . Parallel $3x - 4y - 20 = 0$ va $3x - 4y + 10 = 0$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofa topilsin.

Y e c h i l i s h i . Bizga berilgan $(x_0;\ y_0)$ nuqtadan berilgan $Ax + By + C = 0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa formulasi

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ma’lum. Berilgan $3x - 4y + 10 = 0$ to‘g‘ri chiziqda ixtiyoriy nuqtani olamiz va undan ikkinchi to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani topamiz. $x_0 = 2$ bo‘lsin. U vaqtda $3 \cdot 2 - 4y + 10 = 0$, $y_0 = 4$ bo‘ladi va $(x_0 = 2,\ y_0 = 4)$ nuqtadan $3x - 4y + 20 = 0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa

$$d = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 4 - 20|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{30}{5} = 6$$

bo‘ladi.

? *Takrorlash uchun savol va topshiriqlar*

1. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi keltirib chiqarilsin.
2. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi keltirib chiqarilsin.
3. To‘g‘ri chiziqning kesmalar bo‘yicha tenglamasi keltirib chiqarilsin.
4. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi keltirib chiqarilsin.
5. Berilgan nuqtadan berilgan yo‘nalishda o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi keltirib chiqarilsin.
6. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchakni topish formulasi yozilsin.
7. To‘g‘ri chiziqlarning parallellik va perpendikularlik shartlari keltirib chiqarilsin.
8. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa qanday aniqlanadi?
9. Nuqtani *Oy* o‘qqa nisbatan simmetrik ravishda akslantirganda uning koordinatalari qanday o‘zgaradi?
10. Nuqtani *Oy* o‘qqa nisbatan simmetrik ravishda akslantirganda uning koordinatalari qanday o‘zgaradi?

11. Nuqtani koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik ravishda akslantirganda uning koordinatalari qanday o‘zgarishi tushuntirilsin.
12. Koordinatalar boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi qanday yoziladi?
13. *Ox* o‘qqa parallel ravishda o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi yozilsin.
14. *Oy* o‘qqa parallel ravishda o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi yozilsin.
15. $k > 0$, $b > 0$ bo‘lganda $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziq qaysi choraklarda yotishi ko‘rsatilsin.
16. $k > 0$, $b < 0$ bo‘lganda $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziq qaysi choraklarda yotishi ko‘rsatilsin.
17. $k < 0$, $b < 0$ bo‘lganda $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziq qaysi choraklarda yotishi ko‘rsatilsin.
18. $k < 0$, $b > 0$ bo‘lganda $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziq qaysi choraklarda yotishi ko‘rsatilsin.
19. To‘g‘ri chiziqning $ax + by + c = 0$ umumiy tenglamasidagi a va b koeffitsiyentlarning geometrik ma’nosi izohlansin.
20. Ikki o‘zgaruvchili ikkita chiziqli tenglama sistemasi yechimining geometrik ma’nosi tushuntirilsin.
21. Ikki o‘zgaruvchili ikkita chiziqli tengsizlik sistemasi yechimining geometrik ma’nosi izohlansin.

Mustaqil yechish uchun masalalar

A GURUH

1. Berilgan $A(-1;\ 1)$, $B(0;\ 2)$, $C(3;\ -2)$, $D(1;\ 4)$ nuqtalardan qaysilari $2x - y - 8 = 0$ to‘g‘ri chiziqda yotadi?

J a v o b: C.

2. $x + ay - 6 = 0$ to‘g‘ri chiziq $K(-2;\ 4)$ nuqtadan o‘tishi ma’lum bo‘lsa, a ning qiymati topilsin.

J a v o b: $a = 2$.

3. *a)* $y = 2x + 1$; *b)* $x + 2y - 4 = 0$ to‘g‘ri chiziqlar yasalsin.

4. $y = x - 2$ va $3x - 2y = 9$ to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro kesishish nuqtasi topilsin.

J a v o b: $(5;\ 3)$.

5. $2x - 3y = 8$ va $7x - 5y + 5 = 0$ to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro kesishish nuqtasi topilsin.

J a v o b: $(-5;\ -6)$.

6. $A(2;\ -1)$ va $B(-3;\ 2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi yozilsin.

J a v o b: $3x + 5y - 1 = 0$.

7. $y = 3x - 2$ to‘g‘ri chiziq Oy o‘qda kesadigan kesmaning uzunligi topilsin.

J a v o b: 2.

B GURUH

8. Uchlari $A(2;\ -2)$, $B(4;\ 2)$, $C(5;\ 1)$ bo‘lgan $\triangle ABC$ berilgan. Uning CK medianasi tenglamasi yozilsin.

J a v o b: $x - 2y - 3 = 0$.

9. Koordinatalar o‘qlari hamda $2x - 3y - 6 = 0$ to‘g‘ri chiziq bilan chegaralangan uchburchakning yuzi hisoblansin.

J a v o b: $S_{\triangle ABC} = 3$.

10. $(a - 2)x + 3y + a^2 - 5a + 6 = 0$ to‘g‘ri chiziq a ning qanday qiymatlarida koordinatalar boshidan o‘tadi?

J a v o b: $a = 2$ va $a = 3$.

11. $3x + by - 4 = 0$ va $y = 6x - 2$ to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro parallelligi ma’lum bo‘lsa, b ning qiymati topilsin.

J a v o b: $-1/2$.

12. $y = 2x + 3$ va $3x + y - 4 = 0$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi o‘tkir burchak topilsin.

J a v o b: $\varphi = 45^\circ$.

13. $2x - 3y - 7 = 0$ to‘g‘ri chiziqqa parallel va $A(-1;\ 2)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

J a v o b: $2x - 3y + 8 = 0$.

14. $y = 2x - 6$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikular va $K(3;\ 1)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

J a v o b: $x + 2y - 5 = 0$.

15. $A(3;\ 2)$ nuqtadan $3x - 4y + 19 = 0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa topilsin.

J a v o b: $d = 4$.

C GURUH

16. Uchlari $A(1{,}5;\ 1)$, $B(1;\quad)$, $C(3;\ 3)$ nuqtalar bo‘lgan $\triangle ABC$ berilgan. Uning CD balandligining uzunligi topilsin.

J a v o b: 2,4.

17. Uchlari $A(2;\ 2)$, $B(-2;\ -8)$, $C(-6;\ -2)$ nuqtalarda bo‘lgan $\triangle ABC$ berilgan. Uning AK medianasi tenglamasi tuzilsin.

J a v o b: $7x - 6y - 2 = 0$.

18. Uchlari $A(1;\ 2)$, $B\{-1;\ -1)$, $C(2;\ 1)$ nuqtalar bo‘lgan $\triangle ABC$ berilgan. Uning BM bissektrisasi tenglamasi tuzilsin.

J a v o b: $x - y = 0$.

19. $x - y - 1 = 0$ va $x + 2y - 2 = 0$ to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro kesishish nuqtasi hamda berilgan $(-1;\ 1)$ nuqta orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

J a v o b: $2x + 7y - 5 = 0$.

20. $A(2;\ -5)$ nuqta tomonlaridan biri $x - 2y - 7 = 0$ to‘g‘ri chiziqda yotgan kvadratning uchidan iborat. Shu kvadrat-
$1\frac{2}{3}$ ning yuzi hisoblansin.

J a v o b: 5.

21. $A(3;\ -4)$ va $B(-1;\ -2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqqa nisbatan $M_2(8;\ -9)$ nuqtaga simmetrik bo‘lgan M_1 nuqta topilsin.

J a v o b: $(10;\ -5)$.

22. Berilgan $B(2;\ 2)$ nuqtadan o‘tib, koordinatalar burchagidan yuzi 9 kvadrat birlikka teng bo‘lgan uchburchak ajratuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

J a v o b: $2x + y = 6$.

V BOB | AYLANA VA DOIRA

1- §. Aylana va uning asosiy elementlari

1- t a ’ r i f. Tekislikning berilgan nuqtadan bir xil uzoqlikda yotgan nuqtalari to‘plami *aylana* deb ataladi.

Berilgan nuqta aylananing *markazi* deyiladi. Markazni aylananing biror nuqtasi bilan birlashtiruvchi kesma aylananing *radiusi* deyiladi. Bu kesmaning uzunligi ham *radius* deb ataladi va aylananing nuqtalari uning markazidan qanday masofada joylashganligini ko‘rsatadi.

Aylananing ikkita A, B nuqtasini tutashtiruvchi AB kesma aylananing *vatari* deyiladi (5.1- chizma). Aylananing markazidan o‘tuvchi AC vatar *diametr* deyiladi.

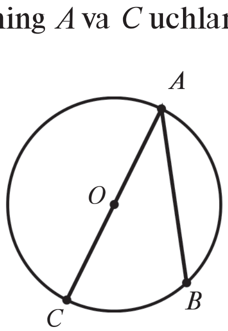
Aylana o‘zi joylashgan tekislikni ikkita — ichki va tashqi sohalarga ajratadi. Agar R — aylananing radiusi bo‘lsa, tashqi sohadagi ixtiyoriy K nuqta uchun $OK > R$ tengsizlik, agar F ichki sohaning nuqtasi bo‘lsa, $OF < R$ tengsizlik bajariladi.

2-t a ’ r i f. Tekislikning berilgan O nuqtadan berilgan R sondan katta bo‘lmagan masofada joylashgan nuqtalari to‘plami R radiusli *doira* deyiladi.

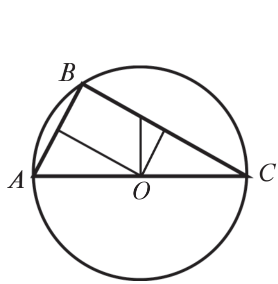
R radiusli doiraning ixtiyoriy F nuqtasi uchun $OF \leq R$ tengsizlik bajariladi. Bundan R radiusli aylana doiraning chegarasidan iborat ekanligi kelib chiqadi.

1- t e o r e m a. ***Bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta nuqtadan yagona aylana o‘tkazish mumkin.***

I s b o t i. A, B, C nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotmasin. AC kesmaning A va C uchlaridan teng uzoqlikda joylashgan nuqtalar



5.1- chizma.



5.2- chizma.

to‘plami *AC* kesmaga o‘tkazilgan o‘rta perpendikularda yotadi (5.2-chizma).

Shunga o‘xshash, *A* va *B* nuqtalardan teng uzoqlikda joylashgan nuqtalar *AB* kesmaga o‘rta perpendikularda yotadi, *B* va *C* nuqtalardan teng uzoqlikda joylashgan nuqtalar *BC* kesmaga o‘rta perpendikularda yotadi. U vaqtda bu o‘rta perpendikularlar kesishadigan *O* nuqta *A*, *B* va *C* nuqtalarning barchasidan teng uzoqlikda joylashgandir va, demak, ulardan o‘tuvchi aylananing markazidan iborat.

Barcha o‘rta perpendikularlar bitta nuqtada kesishganligidan, aylana yagona bo‘ladi.

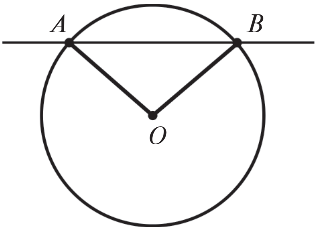
2- §. Markaziy va ichki chizilgan burchaklar

1. Markaziy burchaklar. Berilgan aylananing ikkita *A* va *B* nuqtasidan *AB* to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz (5.3- chizma). Bu to‘g‘ri chiziq tekislikni ikkita yarimtekislikka ajratadi. Aylananing bu yarimtekisliklarda yotuvchi qismlari uning *yoylari* deyiladi. Agar *AB* diametrdan iborat bo‘lsa, aylananing yoylari *yarimaylanalar* deyiladi.

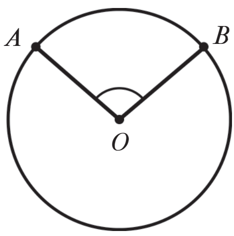
Agar *AB* diametr bo‘lmasa, aylananing markazi yarimtekisliklardan biriga tegishli bo‘ladi. Aylananing ana shu yarimtekislikka tegishli yoyi *yarimaylanadan katta yoy* deb ataladi. Boshqa yoy esa *yarimaylanadan kichik yoy* deyiladi. Agar aylananing *O* markazini kichik yoyning nuqtalari bilan tutashtirsak, bu radiuslar *AB* vatarni kesib o‘tadi. Agar *O* markazni katta yoyning nuqtalari bilan tutashtirsak, bu radiuslar *AB* vatar bilan kesishmaydi.

3- t a ’ r i f . Uchi aylananing markazida yotgan burchak uning *markaziy burchagi* deyiladi.

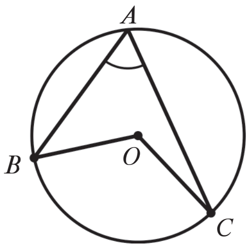
Ravshanki, aylanada olingan ikkita *A* va *B* nuqta aylananing *O* markazi bilan birga ikkita markaziy burchakni aniqlaydi. Agar



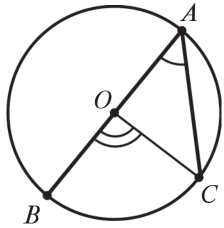
5.3- chizma.



5.4- chizma.



5.5- chizma.



5.6- chizma.

$\angle AOB$ yoyiq burchak bo‘lmasa, yoylardan biri yarimaylanadan kichik, boshqasi esa yarimaylanadan katta bo‘ladi (5.4- chizma). Agar $\breve{AB}$ yoy yarimaylanadan kichik bo‘lsa, uning gradus o‘lchovi markaziy AOB burchakning gradus o‘lchoviga teng deb hisoblanadi. Agar $\breve{AB}$ yoy yarimaylanadan katta bo‘lsa, uning gradus o‘lchovi $360^\circ - \angle AOB$, bunda $\angle AOB < 180^\circ$ ifodaga teng deb hisoblanadi. Bu yerdan aylananing umumiy uchlarga ega bo‘lgan ikkita yoyining gradus o‘lchovlari yig‘indisi 360° ga teng bo‘lishi kelib chiqadi.

2. Ichki chizilgan burchaklar.

4- t a ’ r i f. Agar BAC burchakning A uchi aylanada yotib, uning AB va AC tomonlari esa aylananing vatarlaridan iborat bo‘lsa (5.5- chizma), burchak aylanaga *ichki chizilgan* deyiladi.

Burchakning tomonlari orasida joylashgan $\breve{BC}$ berilgan *ichki chizilgan burchakka mos yoy* deyiladi. Agar B va C nuqtalarni aylananing markazi O nuqta bilan tutashtirsak, BOC markaziy burchak berilgan *BAC ichki chizilgan burchakka mos burchak* deyiladi.

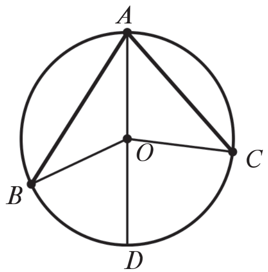
2 - t e o r e m a . ***Aylanaga ichki chizilgan burchak o‘zi tortib turgan yoyning yarmi bilan o‘lchanadi.***

I s b o t i . Uch hol bo‘lishi mumkin.

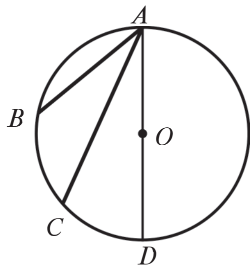
1- hol. Aylanaga ichki chizilgan ABC burchakning tomonlaridan biri, masalan, AB tomoni aylananing diametridan iborat bo‘lsin (5.6- chizma). Aylananing O markazini C nuqta bilan birlashtirib, teng yonli $\triangle AOC$ ni hosil qilamiz, unda $OA = OC$. Natijada hosil qilingan markaziy BOC burchak $\triangle AOC$ uchun tashqi burchak bo‘ladi va burchak tashqi burchagining xossasiga ko‘ra

$$\triangle BOC = \angle OAC + \angle OCA = 2\angle OAC.$$

Bundan, talab qilingan munosabatni olamiz.



5.7- chizma.



5.8- chizma.

2- hol. Aylananing O markazi ichki chizilgan BAC burchakning AB va AC tomonlari orasida yotsin (5.7- chizma). Aylanada AD diametr o‘tkazamiz.

U vaqtda $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC$. Bundan oldingi holdagi natijani qo‘llab,

$$\angle BAC = \frac{1}{2}\smile{BD} + \frac{1}{2}\smile{DC} = \frac{1}{2}(\smile{BD} + \smile{DC})$$

deb yozish mumkin. Oxirgi munosabatdan, talab qilingan $\angle BAC = \frac{1}{2}\smile{BC}$ tenglik kelib chiqadi.

3- hol. Nihoyat, aylananing O markazi ichki chizilgan burchakdan tashqarida yotgan holni qaraymiz (5.8- chizma). Bu holda ham AD diametr o‘tkazamiz va

$$\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD = \frac{1}{2}\smile{BD} - \frac{1}{2}\smile{CD} = \frac{1}{2}(\smile{BD} - \smile{DC}) = \frac{1}{2}\smile{BC}$$

ekanligini topamiz, ya’ni bu holda ham, talab qilingan

$$\angle BAC = \frac{1}{2}\smile{BC}$$

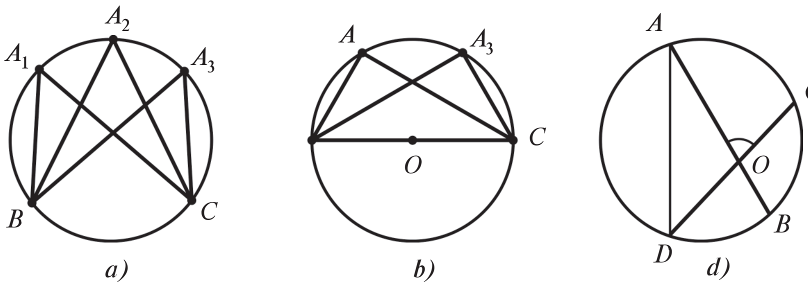
munosabat o‘rinli. Teorema isbotlandi.

1- natija. *Bitta yoyga tiralgan ichki chizilgan burchaklar o‘zaro teng* (5.9- *a* chizma), ya’ni

$$\angle BA_1C = \angle BA_2C = \angle BA_3C.$$

2- natija. *Diametrga tiralgan ichki chizilgan burchaklar to‘g‘ri burchakdan iborat* (5.9- *b* chizma), ya’ni

$$\angle BA_1C = \angle BA_2C = 90^\circ.$$



5.9- chizma.

3-teorema. ***Ikkita o'zaro kesishadigan vatar hosil qilgan burchak vatarlarning uchlari orasida joylashgan yoylar yig'indisining yarmiga teng, ya'ni agar AB va CD vatarlar O nuqtada kesishsa*** (5.9- *d* chizma),

$$\angle AOC = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AC} + \overset{\smile}{BD}).$$

Isboti. Aylanadagi A va D nuqtalarni tutashtirib, $\angle AOD$ ni hosil qilamiz. AOC burchak $\triangle AOD$ uchun tashqi burchak bo'ladi va shuning uchun

$$\angle AOC = \angle OAD + \angle ADO.$$

Lekin $\angle OAD = \angle BAD$ aylanaga ichki chizilgan burchakdan iborat va isbotlanganiga ko'ra

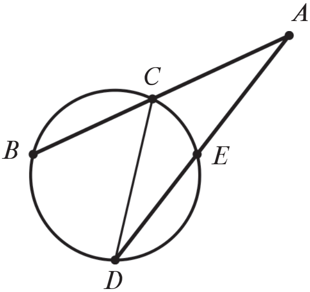
Xuddi shunga o'xshash, ichki chizilgan $\angle ADO$ uchun

bo'ladi.

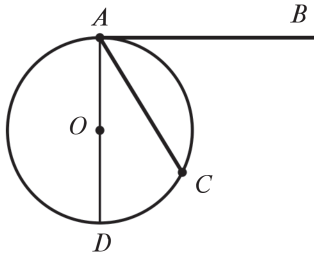
Shunday qilib, isbotlanishi talab qilingan,

munosabatni olamiz. Teorema isbotlandi.

4- teorema. ***Aylanaga o'tkazilgan ikkita kesuvchi orasidagi burchak aylananing berilgan kesuvchilar orasida yotgan yoylari ayirmasining yarmiga teng, ya'ni agar AB va AD kesuvchilar aylanani B, C va E, D nuqtalarda kesib o'tsa*** (5.10- chizma),



5.10- chizma.



5.11- chizma.

I s b o t i . Aylanadagi C va D nuqtalarni tutashtirib, $\triangle ACD$ ni hosil qilamiz. BCD burchak $\triangle ACD$ uchun tashqi burchak bo‘ladi va shuning uchun, $\angle BCD = \angle CAD + \angle CDA$, bundan $\angle BAD = \angle CAD = \angle BCD - \angle CDA$ munosabatni hosil qilamiz. Lekin BCD va CDE burchaklar ichki chizilgan burchaklardir va shu sababli, isbotlanganiga ko‘ra,

bo‘ladi. Oxirgi munosabatlardan talab qilingan

$$\angle BAD = \ldots = \frac{1}{2}\,\overset{\smile}{DA} - \frac{1}{2}\,\overset{\smile}{DC}$$

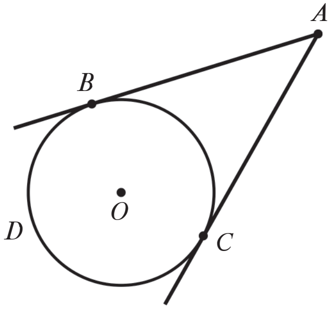
tenglikni olamiz. Teorema isbotlandi.

5 - t e o r e m a . ***Aylanaga o‘tkazilgan urinma va vatar orasidagi burchak, ular orasidagi yoyning yarmiga teng, ya’ni agar AB — aylanaga urinma, AC — uning vatari bo‘lsa*** (5.11- chizma),

I s b o t i . Aylanada AD diametr o‘tkazamiz. Urinish nuqtasiga o‘tkazilgan radiusning xossasidan $\angle BAD = 90°$ bo‘lishi kelib chiqadi. DAC burchak aylanaga ichki chizilgan bo‘lganligidan,

U holda

bo‘ladi va talab qilingan



4.12- chizma.

munosabatga ega bo‘lamiz. Teorema isbotlandi.

4- t a ’ r i f. Berilgan bitta nuqtadan aylanaga o‘tkazilgan ikkita urinma tashkil etgan burchak aylanaga *tashqi chizilgan burchak* deyiladi.

6- t e o r e m a. ***Tashqi chizilgan burchak urinish nuqtalari orasida joylashgan yoylar ayirmalarining yarmiga teng, ya’ni agar AB va AC aylanaga A nuqtadan o‘tkazilgan urinmalar bo‘lsa*** (5.12- chizma),

Teoremaning isboti yuqorida isbot qilingan teoremalardan kelib chiqadi.

3- §. Doiradagi metrik munosabatlar

7- t e o r e m a. ***Doira ichidagi nuqtadan o‘tkazilgan hamma vatarlar uchun, har bir vatar kesmalarining ko‘paytmasi o‘zgarmas miqdordir.***

I s b o t i. Aylananing AB va CD vatarlari K nuqtada kesishgan bo‘lsin (5.13- chizma). A va C, B va D nuqtalarni tutashtirib, ikkita, $\triangle ACK$ va $\triangle BDK$ ni hosil qilamiz. Bu uchburchaklarda vertikal burchaklar sifatida

$$\angle AKC = \angle BDK$$

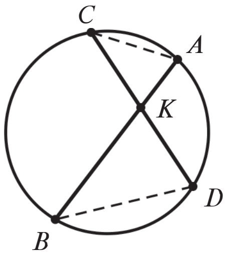
hamda bitta AD yoyga tiralgan ichki chizilgan burchaklar sifatida

$$\angle ACK = \angle KBD \text{ yoki } \angle ACD = \angle ABD$$

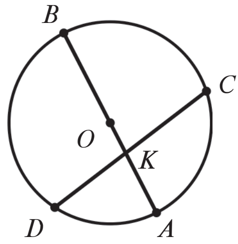
bo‘ladi.

Demak, ikkita teng burchagi bo‘yicha $\triangle ACK \backsim \triangle BDK$. Bu uchburchaklar mos tomonlarining nisbatini tuzamiz:

bu yerdan $AK \cdot BK = CK \cdot KD$, talab qilingan tenglik olindi. Teorema isbotlandi.



5.13- chizma.



5.14- chizma.

3- natija. *Agar doira ichidagi nuqtadan vatar va diametr o‘tkazilgan bo‘lsa, vatar kesmalarining ko‘paytmasi diametr kesmalarining ko‘paytmasiga teng bo‘ladi, ya’ni agar AB diametr va CD vatar K nuqtada kesishgan bo‘lsa* (5.14-chizma),

$$AK \cdot KB = CK \cdot KD$$

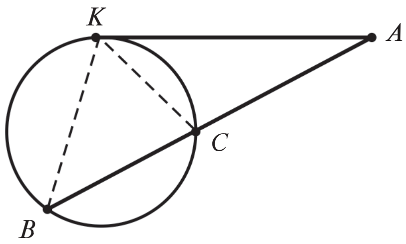
tenglik o‘rinli.

8- teorema. ***Aylanadan tashqarida yotgan nuqtadan aylanaga kesuvchi va urinma o‘tkazilgan bo‘lsa, urinma kesmasining kvadrati kesuvchining uning tashqi qismiga ko‘paytmasiga teng, ya’ni agar AK — aylanaga urinmaning kesmasi va AB — shu aylananing kesuvchisi bo‘lsa*** (5.15- chizma),

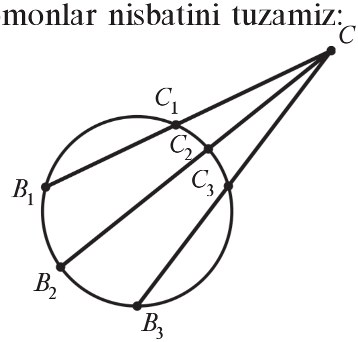
1/2

$$AK^2 = AB \cdot AC.$$

Isboti. Berilgan A nuqtadan aylanaga urinish nuqtasi K gacha bo‘lgan kesma AK, AB aylanani kesuvchi, AC esa kesuvchining tashqi qismi bo‘lsin. K va C, K va B nuqtalarni tutashtirib, $\triangle AKC$ va $\triangle AKB$ ni hosil qilamiz. Bu uchburchaklar o‘xshash uchburchaklardir, $\triangle AKC \sim \triangle AKB$, chunki $\angle A$ — ularning har ikkisi uchun umumiy hamda $\angle AKC = \angle ABK = \overset{\smile}{KC}$. O‘xshash uchburchaklarda mos tomonlar nisbatini tuzamiz:



5.15- chizma.



5.16- chizma.

Oxirgi tenglikdan, talab qilingan,

$$AK^2 = AB \cdot AC$$

munosabat kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

4- natija. ***Agar aylanadan tashqarida yotgan nuqtadan unga kesuvchilar o'tkazilgan bo'lsa, har bir kesuvchi uzunligining uning tashqi qismi uzunligiga ko'paytmasi berilgan aylana uchun o'zgarmas miqdordan iborat*** (5.16- chizma):

$$AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2 = AB_3 \cdot AC_3.$$

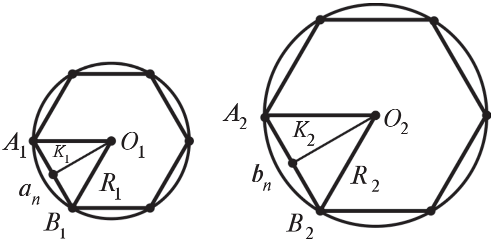
4-§. Aylana uzunligi

Aylananing uzunligini chizg'ich yordamida kesmaning uzunligi kabi o'lchashimiz mumkin emas. Uni, sirkul yordamida, qismlarini ketma-ket o'lchashlar bajarib, o'lchash mumkin. Bu jarayonning har bir qadamida egri chiziq uzunligi aylana uzunligining taqribiy qiymatini beradigan siniq chiziq bilan almashtiriladi. Aylana uzunligini o'lchash qozonlar, porshenlar, quvurlarni yasash va h.k. bilan bog'liq ko'plab amaliy masalalarda uchraydi. Shu sababli, aylana uzunligini hisoblash uchun formulani keltirib chiqarishga harakat qilamiz.

Avvalo berilgan aylanaga muntazam o'nburchakni, so'ngra muntazam yigirmaburchakni, qirqburchakni va h.k. ichki chizamiz. Ravshanki, bu ko'pburchaklarning tomonlari soni qancha ko'p bo'lsa, ularning P_{10}, P_{20}, P_{40},... perimetrlari aylana uzunligiga shuncha yaqinroq bo'ladi. Shu sababli, *aylana uzunligi aylanaga ichki chizilgan muntazam ko'pburchaklarning perimetrlari, ularning tomonlari soni cheksiz ortganda, intiladigan limitga teng deb qabul qilingan*.

9- teorema. ***Aylana uzunligining uning diametriga nisbati aylana diametriga bog'liq emas.***

Isboti. Radiuslari R_1 va R_2, uzunliklari C_1 va C_2 bo'lgan ikkita aylana berilgan bo'lsin (5.17-chizma). Bu aylanalarga tomonlari soni bir xil — n ta bo'lgan muntazam n- burchaklarni ichki chizamiz. Ichki chizilgan muntazam n- burchaklarning tomonlari, mos ravishda, a_n va b_n, ularning perimetrlari esa P_n va P'_n bo'lsin. Dastlab a_n ni topish formulasini keltirib chiqaramiz. Agar O_1 birinchi aylananing markazi, $A_1B_1 = a_n$ uning tomoni bo‘lsa, $\triangle A_1O_1B_1$ da $\angle A_1O_1B_1$ markaziy burchak bo‘ladi va uning kattaligi $\frac{360^\circ}{n}$ ga teng, ya’ni $\angle A_1O_1B_1 =$. Teng yonli $\triangle A_1O_1B_1$ ning O_1K_1 balandligini o‘tkazamiz. U holda



5.17- chizma.

To‘g‘ri burchakli $\triangle A_1O_1K_1$ dan

$$\frac{a_n}{2} = R_1 \sin\frac{180^\circ}{n} \quad \text{va} \quad a_n = 2R_1 \sin\frac{180^\circ}{n}$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Shunga o‘xshash, ikkinchi aylanaga ichki chizilgan muntazam n- burchakning tomoni uchun

$$b_n = 2R_2 \sin\frac{180^\circ}{n}$$

$\frac{360^\circ}{n}$ $\angle A_1O_1K_1 = \frac{1}{2}\angle A_1O_1B_1 = \frac{180^\circ}{n}$.

bo‘lishini olamiz. Endi ko‘pburchaklar perimetrlarini hisoblaymiz:

$$P_n = n\cdot a_n = n\cdot 2R_1 \sin\frac{180^\circ}{n},$$

$$P_n' = n\cdot b_n = n\cdot 2R_2 \sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Ma’lumki, o‘xshash muntazam ko‘pburchaklar perimetrlarining nisbati ular o‘xshash tomonlarining nisbati kabi bo‘ladi. Shuning uchun d_1 va d_2 — berilgan aylanalarning diametrlari bo‘lganda,

$$\frac{P_n}{P_n'} = \frac{2R_1}{2R_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

deb yozish mumkin.

Agar n sonni cheksiz orttirib borsak, ichki chizilgan muntazam ko‘pburchaklarning P_n va perimetrlari mos aylanalarning C_1 va C_2 uzunliklariga intiladi. Shunday qilib, bundan talab qilingan tenglik kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Aylana uzunligining uning diametriga nisbati yunoncha π(„pi“) harfi bilan belgilanadi. π soni irratsional son bo‘lib, $\pi \approx 3,1416...$ ga teng.

Shunday qilib, agar C — aylana uzunligi, R uning radiusi bo‘lsa,

bundan

$$C = 2\pi R$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, *aylananing uzunligi uning radiusiga proporsional ekan.*

Aylana yoyining uzunligi bu yoy o‘lchoviga, ya’ni unga mos markaziy burchakning o‘lchoviga proporsionaldir. Agar $2\pi R$ ni $360°$ ga bo‘lsak, $1°$ li yoyning uzunligini topamiz. Demak, α gradusli yoyning L uzunligi

$$L = \frac{2\pi R}{360°}\alpha = \frac{\pi R}{180°}\alpha$$

bo‘ladi.

Tarixiy ma’lumotlar. Axmes papirusida (miloddan avvalgi 1700 yil atrofi) π soni uchun quyidagi qiymat berilgan: $\pi \approx 3,1605$.

Arximed (miloddan avvalgi 287—212- yillar) π soni uchun $\pi \approx 3\frac{1}{7} \approx 3,14$ qiymatni ishlatgan.

Hind matematigi va astronomi Ariabxata (475- yillar atrofi) $\pi \approx 3,146$ qiymat bilan ish ko‘rgan.

Ulug‘bek observatoriyasida ish olib borgan Jamshid G‘iyosiddin al-Koshiy 1424- yilda o‘zining „Aylana uzunligi haqidagi kitob“ ida π soni uchun 16 ta raqam aniqligida qiymatni beradi: $\pi \approx 3,1415826535897932$.

Yevropada al-Koshiyning ishi ma’lum bo‘lmagan. Faqat XVI asrda (1597- y.) Van Romen π ning qiymatlarini 17 ta raqam aniqligida topgan. π belgining o‘zini XVIII asrda buyuk matematik Leonard Eyler (1707—1783- yillar) kiritgan bo‘lib, u π son uchun 153 ta to‘g‘ri raqamli yaqinlashishni bergan.

5- §. Doira va uning qismlari yuzi

Doira aylana bilan, ya'ni egri chiziq bilan chegaralangan. Shu sababli doira yuzini hisoblash uchun aylana uzunligini topishda foydalanilgan usulni qo'llaymiz. Avvalo doiraga muntazam ichki n burchakni chizamiz, so'ngra ko'pburchak tomonlarini ketma-ket ikkilantirib boramiz. Ko'pburchaklar ichki chizilgan bo'lganligidan, ularning yuzlari doira yuzidan kichik bo'ladi.

Lekin ko'pburchak tomonlari sonining ortib borishi bilan uning S_k yuzi doiraning S_d yuziga intiladi.

4- t a ' r i f. *Doiraning yuzi deb*, berilgan aylanaga ichki chizilgan muntazam ko'pburchak tomonlari sonini cheksiz orttirilganda, ko'pburchak yuzining limiti bo'lgan miqdorga aytiladi.

10- t e o r e m a. ***R radiusli doiraning yuzi*** $S = \pi R^2$ ***formula bo'yicha hisoblanadi, bunda*** π ***— aylana uzunligining uning diametriga nisbatidir.***

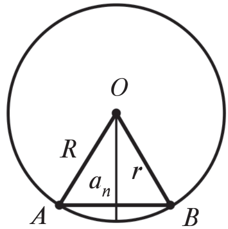
I s b o t i. $AB = a_n$ aylanaga ichki chizilgan muntazam n-burchakning tomoni bo'lsin (5.18- chizma). Tomonning A va B uchlarini aylananing O markazi bilan tutashtirib, teng yonli $\triangle AOB$ ni hosil qilamiz. Bu uchburchakning O uchidan tushirilgan balandligini r deb belgilaymiz. U vaqtda $\triangle AOB$ ning yuzi

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} a_n r, \quad S_k = n \cdot \frac{1}{2} a_n r = \frac{1}{2} P_k a_n$$

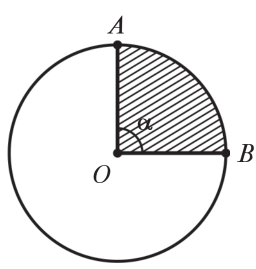
ichki chizilgan muntazam ko'pburchakning (n-burchakning) yuzi esa

bo'ladi. Ichki chizilgan ko'pburchak tomonlari sonini cheksiz orttirilganda uning P_k perimetri chegaralovchi aylananing

$C = 2\pi R$



5.18- chizma.



5.19- chizma.

uzunligiga, uchburchakning r balandligi esa aylananing R radiusiga intiladi. Shuning uchun doiraning yuzini hisoblash formulasi

yoki

$$S = \pi R^2$$

bo‘ladi. Teorema isbotlandi.

Endi burchagining kattaligi α bo‘lgan AOB doiraviy sektorning yuzini topamiz (5.19- chizma). Doiraning yuzini 360° ga bo‘lib, burchak kattaligi 1° bo‘lgan sektorning yuzini topamiz. U vaqtda burchak kattaligi α gradus bo‘lgan sektorning yuzi

$$S_{\text{sek}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ}\alpha$$

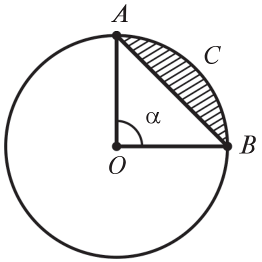
formula bo‘yicha hisoblanadi.

Nihoyat, ACB doiraviy segment yuzini hisoblash uchun (5.20- chizma), AOB doiraviy sektorning yuzini hisoblash va bu miqdordan teng yonli $\triangle AOB$ yuzini ayirish yetarli. Doiraning radiusi R, markaziy $\angle AOB$ ning kattaligi α bo‘lsin. U holda doiraviy segmentning yuzini hisoblash formulasi

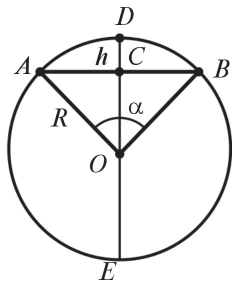
$$S_{\text{segm}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ}\alpha - \frac{1}{2}R^2 \sin\alpha$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Tarixiy ma’lumot. Segmentning yuzini hisoblashda Muhammad al-Xorazmiy tomonidan qanday ish ko‘rilganligini qarab chiqamiz. Markazi O nuqtada, radiusi R ga teng aylanada AB vatar o‘tkazilgan bo‘lib, uning markaziy burchagi (5.21-chizma)



5.20- chizma.



5.21- chizma.

$$\angle AOB = \alpha < \pi$$

bo‘lsin. U holda $\overset{\smile}{ADB}$ yoy va $OA = OB = R$ radiuslar bilan chegaralangan, balandligi $DC = h$ bo‘lgan doiraviy segmentlarning yuzi

$$S_{\text{segm}} = \left(\frac{DE}{2}\right)^2 \frac{\alpha}{2} - \left(\frac{DE}{2} - DC\right)\frac{AB}{2}$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.

Agar markaziy burchakning kattaligi $\alpha > \pi$ bo‘lsa, doiraviy segmentlarning yuzi

$$S_{\text{segm}} = \left(\frac{DE}{2}\right)^2 \frac{\alpha}{2} - \left(CE - \frac{DE}{2}\right)\frac{AB}{2}$$

yoki

$$S_{\text{segm}} = R^2 \frac{\alpha}{2} + (h - R)\frac{\alpha}{2}$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.

6- §. Aylana tenglamasi

Tekislikda to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi berilgan bo‘lsin. Aylana tenglamasini: 1) aylananing markazi $A(a; b)$ nuqtada, 2) aylananing radiusi R ekanligi ma’lum bo‘lganda, tuzamiz (5.22- chizma).

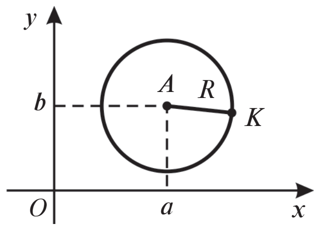
Aylanada ixtiyoriy K nuqtani olamiz va uning koordinatalarini $(x; y)$ deb belgilaymiz. Aylananing ta’rifiga ko‘ra, aylananing ixtiyoriy $K(x; y)$ nuqtasi uchun $AK = R$ tenglik bajariladi. A va K nuqtalar orasidagi masofani ularning koordinatalari orqali ifodalasak, aylananing tenglamasini

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

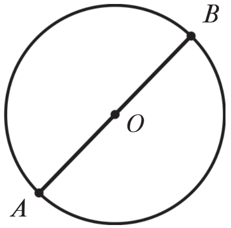
ko‘rinishda olamiz. Bu tenglikning har ikki tomonini kvadratga ko‘tarib, aylana tenglamasini

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \qquad (1)$$

ko‘rinishda yozamiz. (1) tenglama *aylananing kanonik tenglamasi* deyiladi.



5.22- chizma.



5.23- chizma.

Agar aylananing markazi koordinatalar sistemasining boshi bilan ustma-ust tushsa, (1) tenglama

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (2)$$

ko‘rinishni oladi.

1 - m a s a l a . Agar aylana diametri AB ning uchlari koordinatalari $A(-4;\ 2)$, $B(6;\ 8)$ bo‘lsa, aylana tenglamasi tuzilsin (5.23-chizma).

Y e c h i l i s h i. Kesmani teng ikkiga bo‘lish formulalaridan aylana markazining koordinatalarini topamiz:

So‘ngra aylananing radiusini topamiz:

$$R = \sqrt{(6-1)^2+(8-5)^2} = \sqrt{34}.$$

Demak, bu holda aylana uchun (1) tenglama

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 34$$

ko‘rinishni oladi.

7- §. To‘g‘ri chiziq va aylana

Bizga kanonik tenglamasi

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (1)$$

ko‘rinishda bo‘lgan aylana va umumiy tenglamasi

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad (2)$$

ko‘rinishda bo‘lgan to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin.

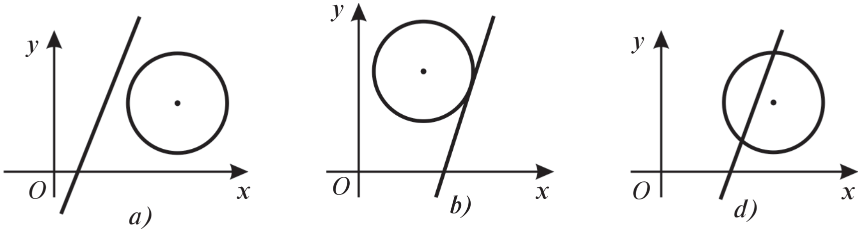
To‘g‘ri chiziq va aylananing o‘zaro joylashuvini o‘rganish uchun ularning (1) va (2) tenglamalarini birgalikda qarash, ya’ni

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2, \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

tenglamalar sistemasini yechish zarur.

Aylananing hech qanday uchta nuqtasi bir to‘g‘ri chiziqda yotmasligidan, quyidagi hollar bo‘lishi mumkin:

a) to‘g‘ri chiziq va aylana umumiy nuqtaga ega emas (5.24-*a* chizma);



5.24- chizma.

b) to‘g‘ri chiziq va aylana bitta umumiy nuqtaga ega, ya’ni to‘g‘ri chiziq aylanaga urinadi (5.24- *b* chizma);

d) to‘g‘ri chiziq va aylana ikkita umumiy nuqtaga ega, ya’ni ular ikkita nuqtada kesishadi (5.24- *d* chizma).

Aylananing markazi koordinatalar boshida bo‘lgan, ya’ni uning tenglamasi

$$x^2 + y^2 = R^2, \tag{4}$$

to‘g‘ri chiziq esa

$$y = kx + b \tag{5}$$

burchak koeffitsiyentli tenglama bilan berilgan holda, to‘g‘ri chiziqning aylanaga urinish shartini topamiz.

Shu maqsadda yuqorida aytib o‘tilganiga ko‘ra

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ y = kx = 0 \end{cases} \tag{6}$$

tenglamalar sistemasini tuzamiz va bu sistemani o‘rniga qo‘yish usulidan foydalanib, yechamiz:

$$x^2 + (kx + b)^2 = R^2,$$

$$(1 + k^2)x^2 + 2bkx + b^2 = R^2,$$

$$(1 + k^2)x^2 + 2bkx + b^2 - R^2 = 0. \tag{7}$$

Hosil qilingan (7) kvadrat tenglama uning diskriminanti nolga teng bo‘lganda yagona yechimga ega bo‘ladi. Bu shartni yozsak,

$$D = 4b^2k^2 - 4(1 + k^2)(b^2 - R^2) = 0$$

yoki

$$4b^2k^2 - 4b^2 - 4b^2k^2 + 4R^2 + 4k^2R^2 = 0,$$

$$R^2 + k^2R^2 - b^2 = 0 \qquad (8)$$

shart kelib chiqadi. Olingan (8) shartning o‘zi to‘g‘ri chiziqning aylana bilan kesishish shartidan iborat.

Endi tenglamasi (4) ko‘rinishda berilgan aylana va tenglamasi

$$y = kx \qquad (9)$$

ko‘rinishda berilgan to‘g‘ri chiziqning o‘zaro joylashuvini qarab chiqamiz. Buning uchun, (6) ga o‘xshash tenglamalar sistemasini tuzib, yechamiz:

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2, \\ y=kx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+k^2)x^2=R^2, \\ y=kx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\dfrac{R}{\sqrt{1+k^2}}. \\ y=kx. \end{cases}$$

Ixtiyoriy k uchun $1 + k^2 > 0$ bo‘lganligidan, berilgan aylana koordinatalar boshidan o‘tuvchi (9) to‘g‘ri chiziq bilan koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo‘lgan ikkita nuqtada kesishadi.

Nihoyat, to‘g‘ri chiziq koordinatalar boshidan o‘tmagan holni, ya’ni uning tenglamasi (5) ko‘rinishda bo‘lgan holni qarab chiqamiz. (6) ga o‘xshash tenglamalar sistemasini yechamiz:

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2, \\ y=kx+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2(kx+b)^2=R^2, \\ y=kx+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+k^2)x^2+2bkx+b^2-R^2=0, \\ y=kx+b. \end{cases}$$

Oxirgi sistemadagi kvadrat tenglamaning diskriminantini hisoblaymiz:

$$D = 4b^2k^2 - 4(1 + k^2)(b^2 - R^2) = 4b^2k^2 - 4b^2k^2 + 4(1 + k^2)R^2 - \\ -4b^2 = 4((1 + k^2)R^2 - b^2).$$

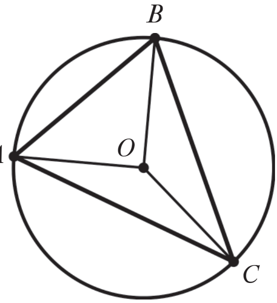
Agar $D > 0$, ya’ni $R^2 > \dfrac{b^2}{1+k^2}$ bo‘lsa, kvadrat tenglama ikkita ildizga ega bo‘ladi va, demak, to‘g‘ri chiziq aylana bilan ikkita nuqtada kesishadi.

Agar $D = 0$, ya’ni $R^2 = \dfrac{b^2}{1+k^2}$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq aylanaga urinadi.

Agar $D < 0$, ya’ni $R^2 < \dfrac{b^2}{1+k^2}$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq aylana bilan umumiy nuqtaga ega bo‘lmaydi.

2-masala. Aylana 3 : 7 : 8 kabi nisbatdagi qismlarga bo‘lingan. Bo‘linish nuqtalaridan o‘tkazilgan vatarlar hosil qilgan burchaklar topilsin.

Berilgan: $(O,\ R)$ – aylana, $AB : BC : AC = 3 : 7 : 8$. $\angle ABC$, $\angle BCA$, $\angle BAC$ topilsin (5.25- chizma).



5.25- chizma.

Yechilishi. Bo‘lish natijasida hosil bo‘lgan yoylarning umumiy o‘lchovini x deb qabul qilsak, $AB = 3x$, $BC = 7x$, $AC = 8x$. AC, BC, AC yoylar birgalikda aylanani qoplaganligidan

$$3x + 7x + 8x = 360^\circ$$

tenglamani tuzamiz, undan

$$18x = 360^\circ, \qquad x = 20^\circ$$

bo‘lishini olamiz. U holda,

$$\smile{AB} = 60^\circ, \quad \smile{BC} = 140^\circ, \quad \smile{AC} = 160^\circ.$$

Izlanayotgan $\angle ABC$, $\angle BCA$, $\angle BAC$ ichki chizilgan bo‘lganligidan,

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\smile{AC} = \frac{1}{2}160^\circ = 80^\circ,$$

$$\angle BCA = \frac{1}{2}\smile{AB} = \frac{1}{2}60^\circ = 30^\circ,$$

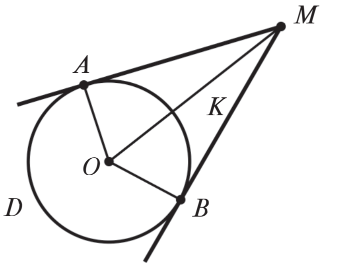
$$\angle BAC = \frac{1}{2}\smile{BC} = \frac{1}{2}140^\circ = 70^\circ$$

bo‘ladi.

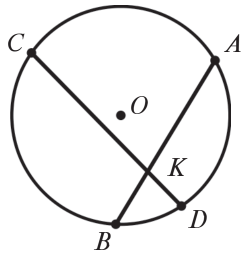
3-masala. Aylanadan tashqarida yotgan M nuqtadan MA va MB urinmalar o‘tkazilgan. Agar $\angle BMA = 45^\circ$ bo‘lsa, urinish nuqtalari orasidagi yoylar topilsin.

Berilgan: (O, R) — aylana, MA, MB — urinmalar, $\angle BMA = 45^\circ$. $\smile{AKB}$, $\smile{ADB}$ topilsin (5.26- chizma).

Yechilishi. Urinish nuqtalariga OA va OB radiuslarni o‘tkazamiz. Urinish nuqtasiga o‘tkazilgan radiusning xossasiga ko‘ra,



5.26- chizma.



5.27- chizma.

$$\angle MOA = 90^\circ, \ \angle MBO = 90^\circ.$$

M nuqtani aylana markazi bo‘lgan O nuqta bilan tutashtiramiz. U holda MO ning nuqtalari BMA burchakning tomonlaridan teng uzoqlikda yotishi kerak. Demak, MO kesma $\angle BMA$ burchakning bissektrisasi va shu sababli

To‘g‘ri burchakli $\triangle OMA$ dan

$$\angle MOA = 90^\circ - 22^\circ 30' = 67^\circ 30'$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Endi $\angle MOB = \angle MOA$ bo‘lganligidan, $\angle AOB = 2 \cdot \angle MOA = 2 \cdot 67^\circ 30' = 135^\circ$. Lekin $\angle AOB$ — markaziy burchakdir, shuning uchun $\overset{\smile}{AKB} = 135^\circ$. Undan $\overset{\smile}{ABD} = 360^\circ - 135^\circ = 225^\circ$ ekanligini olamiz.

4- m a s a l a. Uzunligi a va b bo‘lgan ikkita vatar o‘zaro kesishadi. Agar kesishish nuqtasida ikkinchi vatar $m : n$ kabi kesmalarga bo‘linsa, birinchi vatarning kesmalari uzunliklari topilsin.

B e r i l g a n: (O, R) — aylana, AB, CD — vatarlar, $AB \quad CD = K$, $CK : KD = m : n$, $AB = a$, $CD = b$. AK, BK topilsin (5.27- chizma).

Y e c h i l i s h i. Aylananing o‘zaro kesishuvchi vatarlari xossasiga ko‘ra, $AK \cdot KB = CK \cdot CD$. CD vatar kesmalari uchun o‘lchov birligini x deb, ular uchun $CK = mx$, $KD = nx$ qiymatlarni olamiz.

Shartga ko‘ra, $CK + KD = b$. Bundan

$$x = \frac{b}{m+n}, \quad CK = \frac{bm}{m+n}, \quad KD = \frac{bn}{m+n}$$

munosabatlarni hosil qilamiz.

AK va *KB* kesmalar uzunligini topish uchun

$$\begin{cases} AK \cdot KB = \dfrac{b^2 \cdot m \cdot n}{(m+n)^2}, \\ AK + KB = a \end{cases}$$

ikki noma'lumli ikkita tenglamalar sistemasini tuzamiz.

Modomiki, *AK* va *KB* kesmalarning yig'indisi va ko'paytmasi ma'lum ekan, ularning uzunliklari

$$t^2 - at + \frac{b^2 \cdot mn}{(m+n)^2} = 0$$

kvadrat tenglamaning ildizlaridan iborat bo'ladi. Kvadrat tenglamaning diskriminantini topamiz:

$$D = a^2 - \frac{4b^2mn}{(m+n)^2} = \frac{a^2(m+n)^2 - 4b^2mn}{(m+n)^2}.$$

U holda,

$$t_{1,2} = \frac{a + \sqrt{\dfrac{a^2(m+n)^2 - 4b^2mn}{(m+n)^2}}}{2} = \frac{a(m+n) \pm \sqrt{a^2(m+n)^2 - 4b^2mn}}{2(m+n)}.$$

Shunday qilib, *AK* va *BK* kesmalar, mos ravishda,

$$\frac{a}{2} + \frac{a + \sqrt{a^2(m+n)^2 - 4b^2mn}}{m+n}, \quad \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2(m+n^2) - 4b^2mn}}{m+n}$$

uzunlikka ega bo'ladi, bunda $a \geq \dfrac{2b\sqrt{mn}}{m+n}$ shart bajariladi.

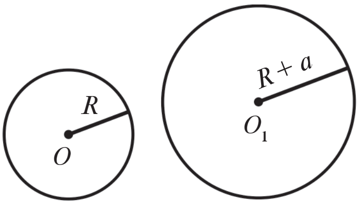
5 - m a s a l a . Agar *R* radiusli aylananing radiusi *a* miqdorga orttirilsa, aylana uzunligi qanday o'zgaradi?

B e r i l g a n : (O, R), $(O_1, R + a)$ — aylanalar, $C_2 - C_1$ topilsin.

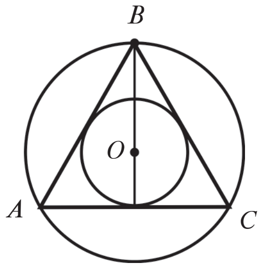
Y e c h i l i s h i . Berilgan birinchi aylananing uzunligi (5.28-chizma)

$$C_1 = 2\pi R,$$

ikkinchisining uzunligi esa $C_2 = 2\pi(R + a)$ bo'ladi. U holda



5.28- chizma.



5.29- chizma.

$$C_2 - C_1 = 2\pi(R + a) - 2\pi R = 2\pi R + 2\pi a - 2\pi R = 2\pi a,$$

ya'ni aylana radiusi a miqdorga orttirilganda, aylana uzunligi $2\pi a$ miqdorga ortadi.

6 - m a s a l a . Aylanaga yuzi Q ga teng bo'lgan muntazam uchburchak ichki chizilgan, bu uchburchakka esa aylana ichki chizilgan. Hosil bo'lgan halqaning yuzi hisoblansin.

B e r i l g a n : muntazam $\triangle ABC$, $S_{\triangle ABC} = Q$, (O, R) aylana $\triangle ABC$ ga tashqi chizilgan. (O, r) aylana $\triangle ABC$ ga ichki chizilgan. S_{halqa} topilsin (5.29- chizma).

Y e c h i l i s h i . R — tashqi chizilgan aylana radiusi, r — ichki chizilgan aylana radiusi bo'lganda, halqaning yuzi

$$S_{\text{halqa}} = \pi R^2 - \pi r^2$$

bo'ladi.

Muntazam $\triangle ABC$ ning tomoni $AB = a$ bo'lsin. $\triangle ABC$ ning yuzi

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

bo'ladi. Uchburchakning tomonini berilgandan foydalanib topamiz:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = Q, \quad a^2 = \frac{4Q}{\sqrt{3}}, \quad a = \sqrt{\frac{4Q}{\sqrt{3}}}.$$

$\triangle ABC$ muntazam bo'lganligidan, $R + r = h$ bo'ladi, bunda h — uchburchakning balandligi va $R = 2r$. So'ngra,

$$h = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \;\; 2r + r = h, \;\; r = \frac{h}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \;\; R = 2r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

bo'lishini topamiz. Demak, halqaning yuzi

$$S_{\text{halqa}} = \pi\left(\frac{3a^2}{9} - \frac{3a^2}{36}\right) = \frac{9a^2\pi}{36} = \frac{a^2\pi}{4}$$

yoki

$$S_{\text{halqa}} = \frac{4\pi Q}{\sqrt{3}\cdot 4} = \frac{\pi Q}{\sqrt{3}}$$

bo‘lar ekan.

Takrorlash uchun savol va topshiriqlar

1. Aylana deb nimaga aytiladi?
2. Aylananing radiusi, vatari, diametri nima?
3. Markaziy burchak deb nimaga aytiladi?
4. Markaziy burchak qanday o‘lchanadi?
5. Qanday burchak aylanaga ichki chizilgan deyiladi?
6. Ichki chizilgan burchaklar qanday o‘lchanadi?
7. Ikkita o‘zaro kesishuvchi vatar orasidagi burchak qanday o‘lchanadi?
8. Umumiy (bitta) nuqtadan o‘tuvchi urinma va kesuvchi tashkil etgan burchak qanday o‘lchanadi?
9. Aylanada o‘zaro kesishadigan vatarlarning xossasi.
10. Aylanaga umumiy (bitta) nuqtadan o‘tuvchi kesuvchilarning xossasi.
11. Umumiy (bitta) nuqtadan aylanaga o‘tkazilgan urinma va kesuvchining xossasi.
12. Aylana uzunligi deb nima qabul qilingan?
13 Doiraning yuzi deb nima qabul qilingan?
14. Aylana uzunligini topish formulasi.
15. Doiraning yuzini hisoblash formulasi.
16. Aylana yoyining uzunligini topish formulasi.
17. Sektorning yuzini hisoblash formulasi.
18. Segmentning yuzini hisoblash formulasi
19. Qanday aylanalar konsentrik aylanalar deyiladi?
20. Doiraviy halqaning yuzini qanday hisoblash mumkin?
21. Aylana tenglamasi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

A GURUH

1. Aylanadagi AC yoyning o‘lchovi 230°. Ana shu yoyga tiralgan, aylanaga ichki chizilgan ABC burchakning kattaligi aniqlansin.

J a v o b: 115°.

2. Aylananing A nuqtasidan unga AB urinma va AC vatar o‘tkazilgan. Agar $\angle BAC$ dan tashqaridagi yoyning o‘lchovi 220° ga teng ekanligi ma’lum bo‘lsa, $\angle BAC$ ning kattaligi topilsin.

J a v o b: 70°.

3. Aylananing ikkita AB va CD vatari K nuqtada kesishadi. Agar $BK = 8$ sm, $CK = 12$ sm, $KD = 6$ sm bo‘lsa, AK kesmaning uzunligi topilsin.

J a v o b: 9 sm.

4. Aylananing diametri 16 sm bo‘lsa, aylananing uzunligi topilsin.

J a v o b: 16 π.

5. Aylananing uzunligi 8π sm. Bu aylana bilan chegaralangan doiraning yuzi hisoblansin.

J a v o b: 16 π sm^2.

6. Aylanadan tashqaridagi A nuqtadan unga AK urinma va ABC kesuvchi o‘tkazilgan. Agar $AC = 20$ sm, $AB = 5$ sm bo‘lsa, urinma kesmasining uzunligi topilsin.

J a v o b: 10 sm.

7. Aylanadan tashqaridagi K nuqtadan unga ikkita KAB va KCD kesuvchi o‘tkazilgan. Agar $KB = 18$ sm, $KA = 3$ sm, $KC =$ $= 6$ sm bo‘lsa, KD kesma uzunligi topilsin.

J a v o b: 9 sm.

B GURUH

8. Aylanaga ABC burchak ichki chizilgan. A va C nuqtalar aylananing markazi O nuqta bilan tutashtirilganda hosil qilingan burchaklar ma’lum: $\angle BAO = 50°$, $\angle BCO = 30°$ bo‘lsa, $\angle ABC$ ning kattaligi aniqlansin.

J a v o b: 80°.

9. Berilgan A, B, C nuqtalar aylanani 5 : 6 : 7 nisbatda bo‘lishi ma’lum bo‘lsa, $\angle ABC$ ning kattaligi aniqlansin.

J a v o b: 70°.

10. Aylananing AB vatari 120° li yoyni tortib turadi. Agar $AB = 10\sqrt{3}$ sm bo‘lsa, aylana markazi O nuqtadan vatargacha bo‘lgan masofa topilsin.

J a v o b: 5 sm.

11. Aylananing A nuqtasidan $AK = 8$ sm urinma va aylananing markazidan o‘tadigan ABC kesuvchi o‘tkazilgan. Agar kesuvchining tashqi qismi $AB = 4$ sm bo‘lsa, aylananing radiusi topilsin.

J a v o b: 6 sm.

12. Aylananing AB va CD vatarlari K nuqtada kesishadi. Agar $CK = 3$ sm, $DK = 8$ sm, $AB = 10$ sm bo‘lsa, AB vatar qanday uzunlikdagi kesmalarga bo‘linadi?

J a v o b : 4 sm, 6 sm.

13. Aylanadan tashqaridagi A nuqtadan aylanaga ikkita ABC va AKN kesuvchi o‘tkazilgan. Agar $AK = 4$ sm, $AN = 15$ sm va $AC : AB = 5 : 3$ kabi bo‘lsa, BC vatarning uzunligi topilsin.

J a v o b : 4 sm.

14. Markazi $O(-3; 2)$ nuqtada, radiusi esa 4 sm ga teng bo‘lgan aylana tenglamasi yozilsin.

J a v o b : $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$.

C GURUH

15. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$ va $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ aylanalar tashkil qilgan doiraviy halqaning yuzi hisoblansin.

J a v o b : 9π kv.birl.

16. $x^2 + y^2 + 8x - 2y - 8 = 0$ aylana va $x + y = 4$ to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtalari topilsin.

J a v o b : $(0; 4)$, $(-1; 5)$.

17. k ning qanday qiymatida $y = kx - 1$ to‘g‘ri chiziq $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 0$ aylanaga urinadi?

$$\frac{Rr}{R+r+2\sqrt{Rr}}.$$

J a v o b : $k = 1$.

18. Berilgan $A(3; 9)$ nuqtadan $x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0$ aylanagacha bo‘lgan masofa topilsin.

J a v o b : 17.

19. Ikkita aylananing radiuslari, mos ravishda, 26 sm va 54 sm, ularning markazlari orasidagi masofa 1 m. Berilgan aylanalar uchun umumiy urinmalarning uzunliklari topilsin.

J a v o b : 80; $2\sqrt{1771}$.

20. Radiusi R va r bo‘lgan doiralar o‘zaro tashqi ravishda urinadi. Ularga va ularning urinmasiga urinma aylananing radiusi topilsin.

J a v o b :

21. Berilgan kesmada va uning ikki teng qismida bir tomonga qarab yarimdoiralar yasalgan. Kichik yarimdoiralarning R radiusi ma’lum bo‘lsa, uchta yarimdoiralarning har biriga urinib o‘tadigan doiraning radiusi topilsin.

J a v o b : $\frac{2}{3}R$.

VI BOB | TRIGONOMETRIK FUNKSIYALAR

1- §. To‘g‘ri burchakli uchburchakda trigonometrik funksiyalar

Berilgan to‘g‘ri burchakli *ABC* uchburchakning gipotenuzasi $AB = c$, katetlari $AC = b$, $BC = a$ va o‘tkir burchaklaridan biri *a* ga teng, ya’ni $\angle A = \alpha$ (6.1- chizma) bo‘lsin.

1- t a ’ r i f. To‘g‘ri burchakli uchburchakdagi α o‘tkir *burchakning sinusi* deb, α burchak qarshisidagi *a* katetning *c* gipotenuzaga nisbatiga aytiladi:

(1)

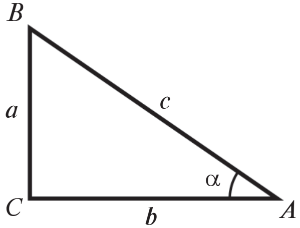
2- t a ’ r i f. To‘g‘ri burchakli uchburchakdagi α *o‘tkir burchakning kosinusi* deb, α burchakka yopishgan *b* katetning *c* gipotenuzaga nisbatiga aytiladi:

(2)

3- t a ’ r i f. To‘g‘ri burchakli uchburchakdagi α *o‘tkir burchakning tangensi* (kotangensi) deb, α burchak qarshisidagi (unga yopishgan) katetning yopishgan (qarshisidagi) katetga nisbatiga aytiladi:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}\left(\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}\right). \qquad (3)$$

Endi $\frac{a}{b}$ kasrning suratini ham, maxrajini ham *c* ga bo‘lamiz, bunda kasrning xossasiga ko‘ra uning qiymati o‘zgarmaydi. Natijada,



6.1- chizma.

(4)

bo‘lishi kelib chiqadi.

Ma’lumki, Pifagor teoremasiga ko‘ra, to‘g‘ri burchakli *ABC* uchburchakning *a*, *b*, *c* tomonlari

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (5)$$

tenglik orqali bog‘langandir. (5) tenglikning har ikki tomonini c^2 ga bo‘lib,

tengliklarni olamiz. Bu tenglik

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (6)$$

kabi yoziladi. Nihoyat, tg α va ctg α lar uchun olingan (3) ifodalarni taqqoslab, bitta α o‘tkir burchakning trigonometrik funksiyalarini bog‘lovchi, yana bitta,

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \qquad (7)$$

tenglikni ham yozish mumkin.

To‘g‘ri burchakli ABC uchburchakda $\angle B = \beta$ belgilash kiritamiz. U vaqtda

bo‘ladi. sin α va cos β ning qiymatlarini taqqoslab, agar ikki burchakning yig‘indisi 90° ga teng bo‘lsa, bu burchaklardan birining sinusi ikkinchisining kosinusiga tengligini olamiz:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \quad \text{yoki} \quad \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$$\alpha + \beta = 90°, \quad \sin\beta = \frac{b}{c}, \quad \cos\beta = \frac{a}{c}$$

$$\sin\alpha = \cos\beta \quad \text{yoki} \quad \sin\alpha = \cos(90° - \alpha),$$

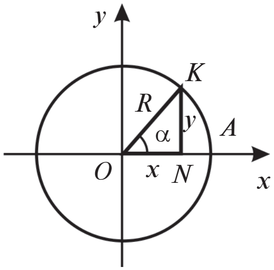
$$\cos\alpha = \sin\beta \quad \text{yoki} \quad \cos\alpha = \sin(90° - \alpha).$$

2- §. Ixtiyoriy burchakning trigonometrik funksiyalari ta’riflari

Matematikada „sinus“, „kosinus“, „tangens“, „kotangens“ tushunchalari muhim rol o‘ynaydi. Ular bilan tanishib chiqamiz.

Tekislikda to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi berilgan bo‘lsin. Markazi koordinatalar boshida bo‘lib, radiusi $R = 1$ bo‘lgan aylana chizamiz (6.2- chizma). Aylananing Ox o‘qning musbat yo‘nalishi bilan kesishgan nuqtasini A bilan belgilaymiz. OA nurdan burchakni soat mili harakatiga teskari yo‘nalishda hisoblaymiz. OK nurning aylana bilan kesishish nuqtasi $K(x; y)$, $\angle AOK = \alpha$ bo‘lsin.

4- ta’rif. K nuqtaning y ordinatasi α burchakning *sinusi*, uning x abssissasi esa α burchakning *kosinusi* deb ataladi, ya’ni



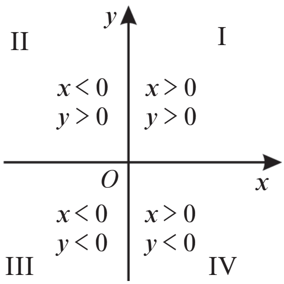
6.2- chizma.

$$\sin\alpha = y, \quad \cos\alpha = x. \qquad (8)$$

5- t a ' r i f. α burchak sinusining shu burchak kosinusiga nisbati α burchakning *tangensi* deb, unga teskari nisbat α burchakning *kotangensi* deb ataladi, ya'ni

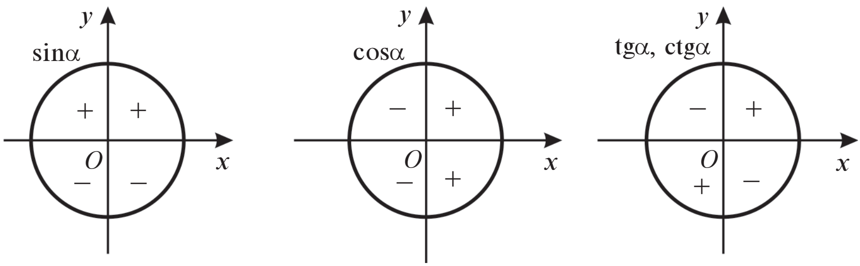
(9)

3- §. Trigonometrik funksiyalarning ishoralari



6.3- chizma.

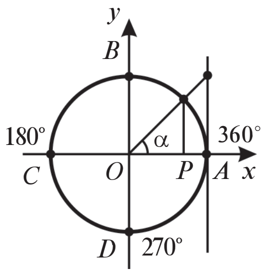
To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasining *Ox* va *Oy* koordinatalar o'qlari tekislikni *choraklar* deb ataladigan to'rtta qismga bo'ladi (6.3- chizma). Bu choraklarni soat miliga teskari yo'nalishda, ya'ni *OK* nurning burilishi yo'nalishida raqamlab chiqamiz. U vaqtda I chorakda nuqtaning koordinatalari ishoralari $x > 0$, $y > 0$; II chorakda $x < 0$, $y > 0$; III chorakda $x < 0$, $y < 0$; IV chorakda $x > 0$, $y < 0$ bo'ladi. Trigonometrik funksiyalarning ta'riflari va kasr ishorasining qoidasiga ko'ra, ishoralarning quyidagi jadvallarini yozishimiz mumkin (6.4-chizma):



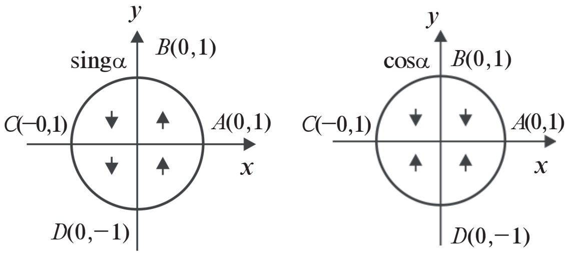
6.4- chizma.

4- §. Trigonometrik funksiyalarning o'zgarishi

Tekislikda markazi koordinatalar boshida bo'lgan $R = 1$ radiusli doira chizilgan bo'lsin (6.5- chizma). Doira aylanasidagi *A*, *B*, *C*, *D* nuqtalarning koordinatalarini yozamiz: $A(1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$,



6.5- chizma.

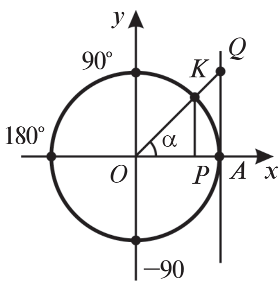


6.6- chizma.

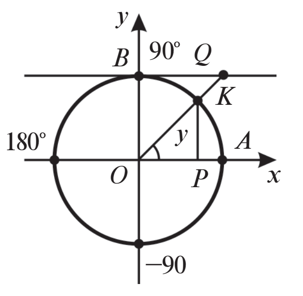
$C(-1;\ 0)$, $D(0;\ -1)$. Birinchi chorakda $\alpha=\angle AOK$ burchak 0° dan 90° gacha, ikkinchi chorakda 90° dan 180° gacha, uchinchi chorakda 180° dan 270° gacha, to‘rtinchi chorakda esa 270° dan 360° gacha o‘zgaradi. Birinchi chorakda α burchak 0° dan 90° gacha ortganda K nuqtaning ordinatasi 0 dan 1 gacha ortadi. Ikkinchi chorakda burchak ortadi, lekin K nuqtaning ordinatasi 1 dan 0 gacha kamayadi va u bilan birga α burchakning sinusi kamayadi. Uchinchi chorakda K nuqtaning ordinatasi 0 dan -1 gacha kamayadi, ya’ni α burchakning sinusi 0 dan -1 gacha kamayadi. To‘rtinchi chorakda K nuqtaning ordinatasi va u bilan birga α burchakning sinusi ham -1 dan 0 gacha ortadi.

Yuqoridagiga o‘xshash fikr yuritib, kosinus birinchi chorakda 1 dan 0 gacha kamayishini, ikkinchi chorakda 0 dan -1 gacha kamayishini, uchinchi chorakda -1 dan 0 gacha o‘sishini va, nihoyat, to‘rtinchi chorakda 0 dan 1 gacha o‘sishini olamiz (6.6- chizma).

A nuqtadan Ox o‘qqa perpendikular ravishda o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq (6.7- chizma) *tangenslar o‘qi* deb ataladi.



6.7- chizma.



6.8- chizma.

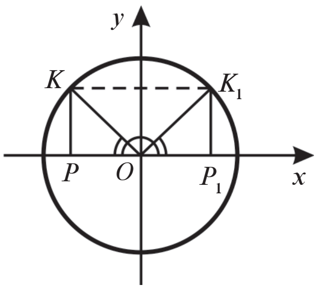
$\angle AOK = \alpha$. OK nurni tangenslar o'qi bilan Q nuqtada kesishguncha davom ettiramiz. K nuqtaning koordinatalarini yasab, ikkita o'xshash, $\triangle OKP$ va $\triangle OQA$ larni olamiz. Bunda

$\text{tg}\,\alpha = \frac{y}{x} = \frac{QA}{OA} = QA$, chunki burchaklar

uchun ham yuqoridagiga o'xshash yasashlarni amalga oshirib, biz α burchak -90° dan 90° gacha o'zgarganda tg α funksiyaning o'sishiga ishonch hosil qilamiz.

B nuqtadan Ox o'qqa parallel ravishda o'tkazilgan to'g'ri chiziq (6.8- chizma) *kotangenslar o'qi* deb ataladi. Yuqoridagiga o'xshash mulohazalar yuritib, ctgα funksiya o'zining aniqlanish sohasida kamayishiga ishonch hosil qilish mumkin.

5- §. $180^\circ - \alpha$ burchakning trigonometrik funksiyalari



6.9- chizma.

Endi $\angle AOK = 180^\circ - \alpha$, ya'ni $\angle POK = \alpha$ (6.9- chizma) bo'lgan holni qaraymiz. OA nurdan $\angle AOK_1$ ni yasaymiz va K_1 nuqtaning koordinatalarini topamiz.

Sinusning ta'rifiga ko'ra $K_1P_1 = \sin\alpha$ va $KP = \sin\,(180^\circ - \alpha)$, kosinusning ta'rifiga ko'ra, $OP_1 = \cos\alpha$ va $OP = \cos\,(180^\circ - \alpha)$ ifodalarni olamiz. Lekin gipotenuzasi va o'tkir burchaklari bo'yicha $\triangle OKP = \triangle OK_1P_1$. Bundan $|PK| = |P_1K_1|$ lar bitta $y \geq 0$ yarimtekislikda yotganligidan, $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$. OP va OP_1 kesmalar Ox o'qning qarama-qarshi yo'nalishlarida bo'lgani uchun $\cos\,(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$. U holda

$$\text{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\text{tg}\alpha,$$

$$\text{ctg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\cos(180^\circ - \alpha)}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\text{ctg}\alpha$$

bo'lishi kelib chiqadi.

6- §. Ba'zi burchaklarning trigonometrik funksiyalari

$\angle POK = \alpha = 45^\circ$ bo'lsin (6.10- chizma). U holda $\triangle KOP$ teng yonli bo'ladi va $x = y$. Modomiki, $OK = 1$ ekan, Pifagor teoremasiga ko'ra, $2x^2 = 1$, ekanligini olamiz.

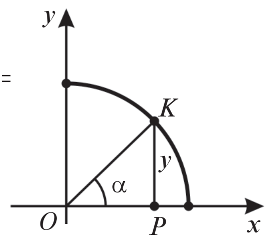
Shunday qilib,

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

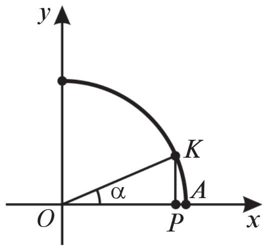
$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 1, \quad \operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ} = 1$$

ifodalarni keltirib chiqardik.

Endi $\angle POK = \alpha = 30^\circ$ bo'lgan holni qaraymiz (6.11-chizma). $OK = 1$ va 30° li burchak qarshisidagi katet gipotenuzaning



6.10- chizma.



6.11- chizma.

yarmiga teng bo'lganligidan, , ya'ni sin bo'lishi kelib chiqadi. Pifagor teoremasidan, $\cos^2 30^\circ = x^2 = 1 - \sin^2 30^\circ =$ $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ va $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ bo'lishi kelib chiqadi, u vaqtda

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

qiymatlarni olamiz.

Pirovardida, ba'zi burchaklar trigonometrik funksiyalarining qiymatlari jadvalini keltiramiz:

Ba'zi burchaklar trigonometrik funksiyalarining qiymatlari

α, gradus	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
α, radian	0								π
$\sin\alpha$	0				1				0
$\cos\alpha$	1				0				-1
$\mathrm{tg}\alpha$	0		1		–		-1		0
$\mathrm{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1		0		-1		–

7- §. Bitta burchakning trigonometrik funksiyalari orasidagi asosiy algebraik munosabatlar

Ma'lumki, birlik aylananing ixtiyoriy $K(x;\ y)$ nuqtasining koordinatalari shu aylananing

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad (1)$$

tenglamasini qanoatlantiradi. Trigonometrik funksiyalarning ta'rifidan, α shu K nuqtaga mos burchakning kattaligi bo'lganda

$$x = \cos\alpha, \quad y = \sin\alpha$$

bo'lishi kelib chiqadi. Shunday qilib, ixtiyoriy α burchak uchun

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (2)$$

tenglik bajarilar ekan.

$\sin\alpha$ yoki $\cos\alpha$ funksiyalardan birining qiymatini bilgan holda (2) formuladan foydalanib, boshqa funksiyaning qiymatini aniqlash mumkin, masalan,

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \text{ yoki } \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}. \qquad (3)$$

$\mathrm{tg}\,\alpha$ va $\mathrm{ctg}\,\alpha$ funksiyalar esa

$$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1 \qquad (4)$$

munosabat orqali o'zaro bog'langandir.

Bitta α burchakning funksiyalari, shuningdek,

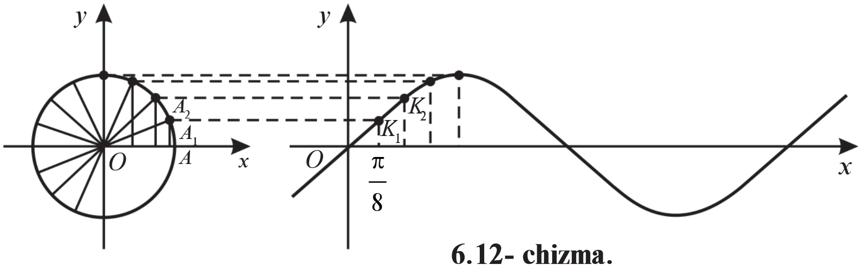
$$1+\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \text{ va } 1+\mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad (5)$$

tengliklarni ham qanoatlantiradi.

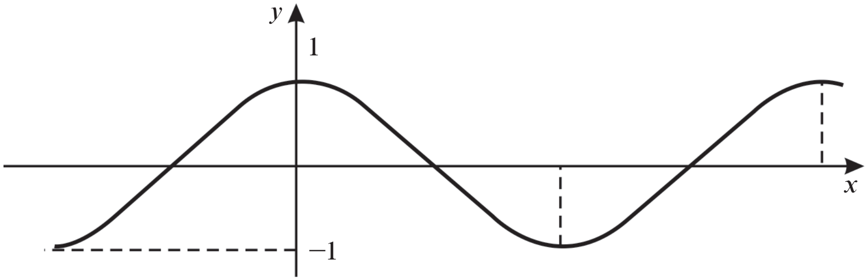
Odatda (2), (4) munosabatlar *asosiy trigonometrik ayniyatlar* deb ham aytiladi.

8- §. Trigonometrik funksiyalarning grafiklarini yasash

1. $y = \sin x$ funksiyaning grafigi. Tekislikda to'g'ri chiziqli koordinatalar sistemasini va markazi koordinatalar boshida bo'lgan trigonometrik doira yasaymiz. Boshlang'ich vektor sifatida Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan ustma-ust tushadigan $\overrightarrow{OA}$ birlik vektorni qabul qilamiz (6.12- chizma). Birinchi chorakda to'g'ri



6.12- chizma.



6.13- chizma.

burchakni to‘rtta teng burchakka bo‘lib, hosil qilingan vektorlar uchlarining koordinatalarini yasaymiz. Bunda A_1 nuqta ordinataga ega bo‘ladi (6.12- chizma).

Ox o‘qda $\frac{\pi}{8}$ nuqtani belgilaymiz va nuqtaga o‘tkazamiz. Shunga o‘xshash, $\left(\frac{\pi}{4};\ A_2K_2\right), \left(\frac{3}{8}\pi;\ A_3\,K_3\right)$ nuqtalarni ham yasaymiz.

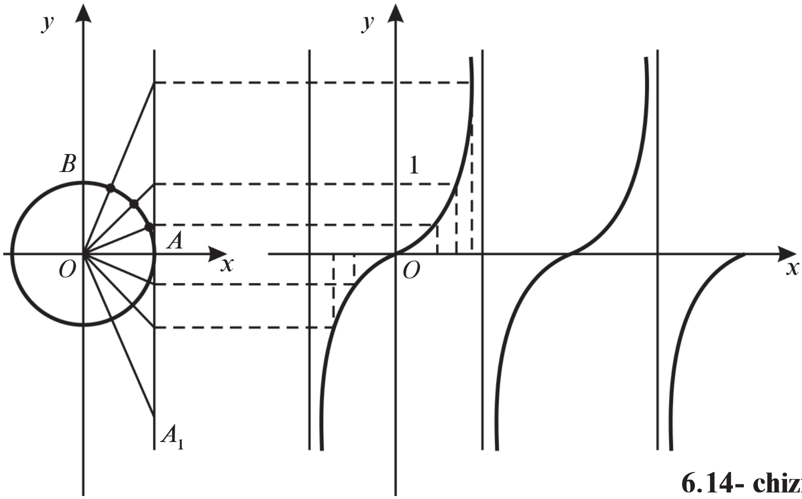
A nuqtaning koordinatalari (0; 1), B nuqtaning koordinatalari

ekanligi ma’lum.

Ikkinchi, uchinchi va to‘rtinchi choraklarda ham shunga o‘xshash ish ko‘ramiz, ya’ni ularning har birini to‘rtta teng bo‘lakka bo‘lib, mos burchaklarni Ox o‘qda belgilaymiz va mos ordinatalarni olingan nuqtalarga o‘tkazamiz.

Natijada, $y = \sin x$ funksiyaning $[0;\ 2\pi]$ oraliqdagi grafigini olamiz. Hosil qilingan grafikni chapga va o‘ngga $2\pi n$ ga siljitib, aniqlanish sohasining barcha nuqtalarida funksiya grafigini olamiz.

$y = \sin x$ funksiya grafigini ifodalovchi egri chiziq *sinusoida* deyiladi.



6.14- chizma.

2. $y = \cos x$ funksiyaning grafigi. Yuqorida ko‘rib o‘tilgan munosabatlardan (jadvalga q.)

bo‘lishi kelib chiqadi. Shuning uchun, kosinus funksiyaning grafigi, $y = \sin x$ funksiyaning grafigini chapga miqdorga siljitish natijasida olinadi (6.13- chizma).

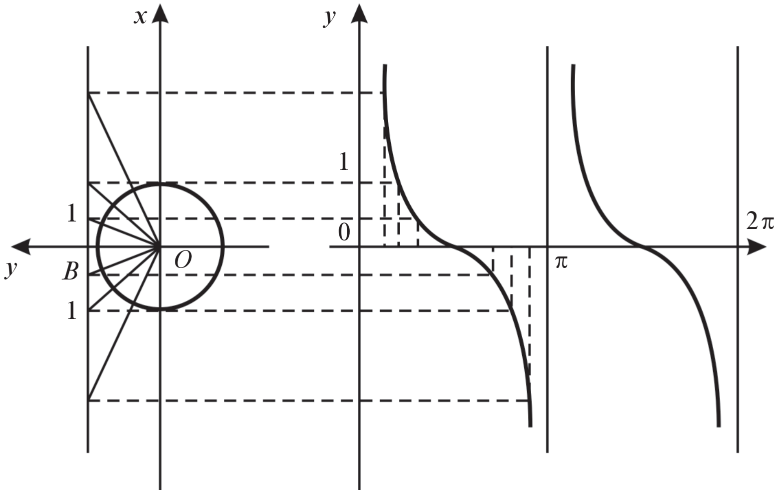
$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ $\frac{\pi}{2}$

3. $y = \operatorname{tg} x$ funksiyaning grafigi. Tekislikda berilgan to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida trigonometrik doira yasaymiz. Doiraning Ox o‘q bilan kesishish nuqtasi bo‘lgan A nuqtadan Ox o‘qqa perpendikular AA_1 to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz, u *tangenslar o‘qi* deyiladi.

Har bir chorakni to‘rtta teng qismga bo‘lamiz va har bir burchakning ikkinchi tomonini tangenslar o‘qi bilan kesishguncha davom ettiramiz (6.14-chizma).

A nuqtadan K_1 kesishish nuqtasigacha bo‘lgan kesmaning uzunligi qaralayotgan burchakning tangensi kattaligini beradi. Hosil qilingan kesmalarni Oxy sistemada x ning mos qiymatlariga o‘tkazamiz va $y = \operatorname{tg} x$ funksiya grafigini yasaymiz, u egri chiziq *tangensoida* deb ataladi.

4. $y = \operatorname{ctg} x$ funksiyaning grafigi. Yuqorida ko‘rib o‘tilganiga ko‘ra,



6.15- chizma.

bo‘lganligidan, koordinatalar sistemasini soat mili harakatiga teskari yo‘nalishda 90° ga buramiz hamda kotangenslar o‘qi deb atalgan BB_1 to‘g‘ri chiziqni Oy o‘qqa perpendikular ravishda o‘tkazamiz. So‘ngra $y = \mathrm{ctg}x$ funksiyaning grafigini $y = \mathrm{tg}x$ funksiyaning grafigi kabi yasaymiz (6.15- chizma).

? *Takrorlash uchun savol va topshiriqlar*

1. Berilgan α burchakning sinusi deb nimaga aytiladi?
2. Berilgan α burchakning kosinusi deb nimaga aytiladi?
3. Berilgan α burchakning tangensi deb nimaga aytiladi?
4. Berilgan α burchakning kotangensi deb nimaga aytiladi?
5. Qaysi trigonometrik funksiyalar birinchi chorakda o‘sadi?
6. Qaysi trigonometrik funksiyalar birinchi chorakda kamayadi?
7. Trigonometrik funksiyalarning ishoralari haqida nima bilasiz?
8. Qanday to‘g‘ri chiziq tangenslar o‘qi deyiladi?
9. Qanday to‘g‘ri chiziq kotangenslar o‘qi deyiladi?
10. 30° li, 60° li burchaklar trigonometrik funksiyalarining qiymatlarini yozing.
11. 45° li, 90° li burchaklar trigonometrik funksiyalarining qiymatlarini yozing.
12. Sinus va kosinuslarning qiymatlari qanday o‘zgaradi?
13. Tangens va kotangenslar qiymatlarining o‘zgarishi izohlansin.
14. Bitta burchakning trigonometrik funksiyalari orasidagi asosiy algebraik munosabatlar yozilsin.

15. Agar $\cos\alpha = a$, $|a|$ 1 qiymat berilgan bo‘lsa, $\text{tg}\alpha$ ning qiymati qanday topiladi?
16. $\text{tg}\alpha = m$ qiymat berilgan bo‘lsa, $\cos\alpha$ ning qiymati qanday topiladi?
17. $\sin\alpha = a$, $|a|$ 1 qiymat berilgan bo‘lsa, $\text{ctg}\alpha$ ning qiymati qanday topiladi?
18. $\text{ctg}\alpha = p$ qiymat berilganda, $\sin\alpha$ ning qiymati qanday topiladi?
19. To‘g‘ri burchakli uchburchakning tomonlari va burchaklari orasidagi bog‘lanish nimalardan iborat?
20. $180° - \alpha$ burchak trigonometrik funksiyalari qiymatlari yozilsin.

Mustaqil yechish uchun masalalar

A GURUH

1. Hisoblansin:

a) $\sin 45° + \cos 60° - \cos 45° + \sin 30°$.

J a v o b: 1.

b) $2\cos 60° - \text{tg}^2 60° + \text{tg}35°\text{ctg}35°$.

J a v o b: –1.

$\leq$ $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{3}$.

2. Hisoblansin:

a) $4\sin^2 30° - \cos^2 30° + 4\sin^2 60°\cos^2 60°$.

J a v o b: 1.

b) $8\sin^2 30°\cos^2 30° + \sin^2 45° - 3\text{tg}30°\text{ctg}30°$.

J a v o b: –1.

3. $90° < \alpha < 180°$ berilgan. $\cos\alpha$, $\text{tg}\alpha$, $\text{ctg}\alpha$ ning qiymatlari hisoblansin.

J a v o b: $-\frac{12}{13}, -\frac{5}{12}, -\frac{12}{5}$.

4. $\text{tg}\alpha = 3$, $180° < \alpha < 270°$ berilgan. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{ctg}\alpha$ ning qiymatlari hisoblansin.

J a v o b:

5. Soddalashtirilsin: $1 - (\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin\alpha - \cos\alpha)$

J a v o b: $2\cos^2\alpha$.

6. Soddalashtirilsin:

$$\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha.$$

J a v o b: 1.

7. Tenglik isbotlansin: $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = 1.$

B GURUH

8. Hisoblansin:

a) $2\sin(-30^\circ) - 4\mathrm{tg}(-45^\circ) + 6\cos(-60^\circ),$

b) $(2\sin(-\frac{\pi}{2}))^2 - (3\mathrm{tg}\frac{\pi}{6})^2 + (2\cos\frac{\pi}{6})^2 \cdot (2\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4})^2.$

9. Agar qiymati hisoblansin.

J a v o b:

10. Soddalashtirilsin: $(\cos\alpha - \sin\alpha)^2 + (\cos\alpha + \sin\alpha)^2.$

J a v o b: 2.

11. Soddalashtirilsin:

J a v o b: $2\mathrm{tg}^2\alpha.$

12. Ayniyat isbotlansin: $\mathrm{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \mathrm{tg}^2\alpha \ \sin^2\alpha.$

13. Ayniyat isbotlansin:

14. Soddalashtirilsin.

J a v o b: 1.

C GURUH

15. Agar $\sin\alpha + \cos\alpha = m$ bo‘lsa, $\sin\alpha \cos\alpha$ ifodaning qiymati hisoblansin.

J a v o b:

16. Agar $\operatorname{tg}\alpha = 2$ bo‘lsa, $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ ifodaning qiymati hisoblansin.

J a v o b: .

17. Agar $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = p$ bo‘lsa, $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$ ifodaning qiymati hisoblansin.

J a v o b: $p^2 - 2$.

18. Teng yonli uchburchakning asosidagi burchagi α ga, uchidagi burchagi β ga teng bo‘lganda $2\cos^2\alpha + \cos\beta = 1$ munosabat o‘rinli bo‘lishi isbotlansin.

19. Ayniyat isbotlansin: $\sin 3\alpha - \operatorname{tg}\alpha \cos 3\alpha = 2\sin\alpha$.

20. Soddalashtirilsin:

$$\frac{1-2\cos 2t}{\sin 2t + 2\sin^2 t}\cdot\operatorname{ctg}(\pi - t)$$

J a v o b: -1.

21. Hisoblansin:

$$\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\cdot\cos\frac{\pi}{32}\cdot\sin\frac{\pi}{32}.$$

J a v o b: $\frac{1}{8}$

VII BOB UCHBURCHAKLAR

1- §. Uchburchaklarning turlari. Asosiy elementlar

Bir to'g'ri chiziqda yotmagan uchta A, B, C nuqta berilgan bo'lsin. Bu nuqtalarni ketma-ket kesmalar orqali tutashtirib, *uchburchak* deb atalgan va $\triangle ABC$ kabi belgilanadigan shaklni hosil qilamiz. A, B, C nuqtalar uchburchakning *uchlari*, AB, BC, CA kesmalar uning *tomonlari* deyiladi (7.1- chizma).

AB, BC, CA kesmalar yopiq siniq chiziq hosil qiladi va shu sababli uchburchakning ta'rifini quyidagicha berish mumkin: tekislikning uch bo'g'indan iborat yopiq siniq chiziq bilan chegaralangan qismi *uchburchak* deyiladi. $\angle CAB$, $\angle CBA$, $\angle ACB$ burchaklar ABC uchburchakning *ichki burchaklari* deyiladi, ular ba'zan bitta harf orqali belgilanadi: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Uchburchakning AC tomonini C nuqtadan o'ngga davom ettiramiz. Natijada hosil qilingan $\angle BCD$ burchak ABC uchburchakning *tashqi burchagi* deyiladi.

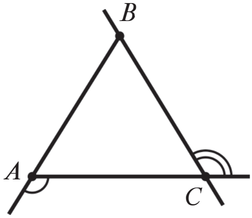
Tomonlariga ko'ra uchburchaklar uch turga: *teng yonli, teng tomonli yoki muntazam, turli tomonli uchburchaklarga* bo'linadi.

Ikki tomoni bir-biriga teng bo'lgan uchburchak *teng yonli* deyiladi.

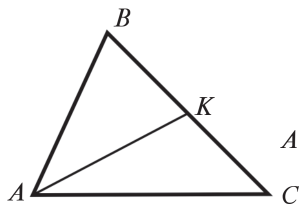
Uchta tomoni o'zaro teng bo'lgan uchburchak *teng tomonli* yoki *muntazam* deyiladi.

Tomonlari har xil uzunliklarga ega bo'lgan uchburchak *turli tomonli* deyiladi.

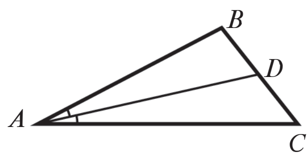
Burchaklariga ko'ra uchburchaklar uch xil bo'ladi. Barcha ichki burchaklari o'tkir bo'lgan uchburchak *o'tkir burchakli* deyiladi. Bitta ichki burchagi o'tmas bo'lgan uchburchak *o'tmas burchakli*



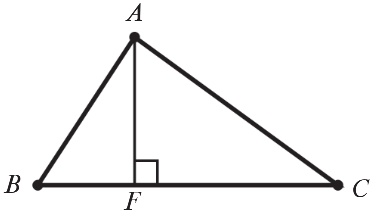
7.1- chizma.



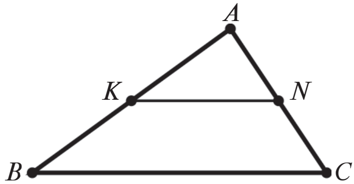
7.2- chizma.



7.3- chizma.



7.4- chizma.



7.5- chizma.

deyiladi. Bitta ichki burchagi 90° ga teng bo‘lgan uchburchak *to‘g‘ri burchakli* deyiladi.

T a ’ r i f. Uchburchakning A uchini uning qarshisidagi BC tomonning o‘rtasi K bilan tutashtiruvchi AK kesma uchburchakning medianasi deyiladi (7.2- chizma).

Ta’rifdan korinadiki, $\triangle ABC$ da uchta mediana o‘tkazish mumkin.

AD nur $\triangle ABC$ dagi $\angle BAC$ ni teng ikkiga bo‘lsin, ya’ni $\angle BAD = \angle DAC$ hamda AD nurning uchburchak BC tomoni bilan kesishish nuqtasi D bo‘lsin. U vaqtda AD kesma ABC uchburchak A burchagining *bissektrisasi* deyiladi (7.3-chizma). Ravshanki, uchburchakda uchta bissektrisa o‘tkazish mumkin.

ABC uchburchakning A uchidan BC to‘g‘ri chiziqqa per-

$KN \parallel BC$ va $KN = \frac{1}{2} BC$.

pendikular tushiramiz va F ularning kesishish nuqtasi bo‘lsin. U vaqtda AF kesma uchburchakning *balandligi* deyiladi (7.4-chizma). Uchburchakda uchta balandlik o‘tkazish mumkin.

ABC uchburchakning AB va AC tomonlari o‘rtalari K va N nuqtalarni tutashtiruvchi kesma uchburchakning *o‘rta chizig‘i* deyiladi (7.5- chizma). Uchburchakda uchta o‘rta chiziq o‘tkazish mumkin.

2- §. Uchburchaklarning umumiy xossalari

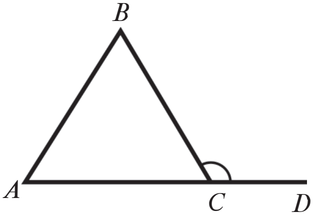
1 - t e o r e m a . ***Uchburchakning o‘rta chizig‘i uning asosiga parallel va asosi uzunligining yarmiga teng:***

(1)

2 - t e o r e m a . ***Uchburchak ichki burchaklarining yig‘indisi 180° ga teng.***

3 - t e o r e m a . ***Uchburchakning tashqi burchagi unga qo‘shni bo‘lmagan ichki burchaklar yig‘indisiga teng*** (7.6- chizma):

$$\angle BCD = \angle BAC + \angle ABC. \quad (2)$$



7.6- chizma.

I s b o t i . Ikkita shartdan foydalanamiz: birinchidan, uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi 180°ga teng; ikkinchidan, uchburchakning tashqi burchagi bilan uchburchakning unga qo'shni bo'lgan burchagi yig'indisi ham 180° ga teng. Bulardan (7.6- chizma)

bo'ladi. Bu tengliklarning birinchisidan ikkinchisini ayiramiz: $\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB-\angle ACB-\angle BCD=0$. U vaqtda $\angle BCD=\angle BAC+\angle ABC$, teorema isbotlandi.

3- §. Uchburchaklarning tengligi

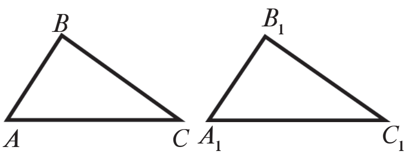
Ikkita ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchak berilgan bo'lib, ularning birini ikkinchisining ustiga qo'yganda mos tomonlari va mos uchlari bir-biri bilan ustma-ust tushsa, ya'ni $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$ va $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$ bo'lsa, uchburchaklar *o'zaro teng* deyiladi (7.7-chizma).

Uchburchaklarning tengligi alomatlari.

1. ***Agar bir uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi burchagi, mos ravishda, ikkinchi uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi burchagiga teng bo'lsa, bu uchburchaklar teng bo'ladi***, ya'ni agar $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, va $\angle A=\angle A_1$ bo'lsa (7.7- chizma), $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ bo'ladi.

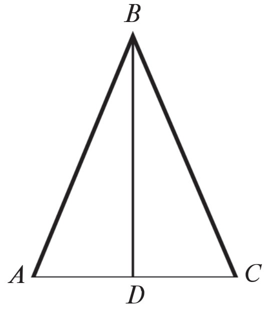
2. ***Agar bir uchburchakning bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagi, mos ravishda, ikkinchi uchburchakning bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagiga teng bo'lsa, bu uchburchaklar teng bo'ladi,*** ya'ni agar $AB=A_1B_1$ va $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$ bo'lsa (7.7-chizma), $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ bo'ladi.

3. ***Agar bir uchburchakning uchta tomoni, mos ravishda, ikkinchi uchburchakning uchta tomoniga teng bo'lsa, bu uchburchaklar teng bo'ladi,*** ya'ni agar $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=$ $=A_1C_1$ bo'lsa(7.7- chizma), $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ bo'ladi.



7.7- chizma.

4- §. Teng yonli uchburchak va uning xossalari



7.8- chizma.

$\triangle ABC$ berilgan bo‘lib, unda $AB = BC$, ya’ni u teng yonli bo‘lsin. Bu uchburchak quyidagi xossalarga ega.

1. ***Teng yonli uchburchakning uchidan uning asosiga o‘tkazilgan bissektrisa ham mediana, ham balandlik bo‘ladi.***

Boshqacha aytganda, agar $\triangle ABC$ da $AB = BC$ va $\angle ABD = \angle DBC$ bo‘lsa (7.8- chizma), u vaqtda $BD \perp AC$ va $AD = DC$ bo‘ladi.

2. ***Teng yonli uchburchakning asosidagi burchaklar o‘zaro teng,*** ya’ni agar $\triangle ABC$ da $AB = BC$ bo‘lsa (7.8- chizma), $\angle A = \angle C$ bo‘ladi.

I s b o t i. Teng yonli $\triangle ABC$ da ($AB = BC$) B uchining BD bissektrisasini o‘tkazamiz, ya’ni $\angle ABD = \angle DBC$. 1-xossaga muvofiq, $BD \perp AC$ va $AD = DC$.

Endi $\triangle ABD$ ni $\triangle ABC$ ning BD medianasi bo‘yicha buramiz. Modomiki, $\angle DBC = \angle DBA$ ekan, $\triangle ABD$ ni $\triangle BDC$ ustiga qo‘yganda, BA tomon BC tomon bo‘ylab boradi. $DC = DA$ bo‘lganligidan, A nuqta C nuqta bilan ustma-ust tushadi hamda BA va BC tomonlar ham ustma-ust tushadi, $BA = BC$. Endi $BC = BA$ va $CD = DA$ bo‘lganligidan, ular orasidagi burchaklar ham o‘zaro teng bo‘ladi, ya’ni $\angle BAD = \angle BCD$. Xossa isbotlandi.

Teng yonli uchburchakda yon tomonlarga o‘tkazilgan: a) balandliklar; b) medianalar; d) bissektrisalar, mos ravishda, o‘zaro teng bo‘ladi.

Teng tomonli uchburchakning ixtiyoriy uchidan o‘tkazilgan balandlik, mediana va bissektrisa ustma-ust tushadi.

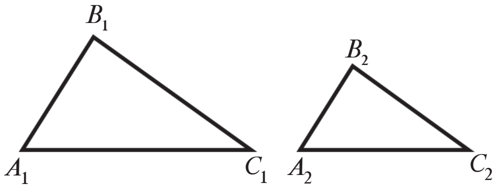
5- §. Uchburchaklarning o‘xshashligi

Agar ikkita $A_1B_1C_1$ va $A_2B_2C_2$ uchburchak berilgan bo‘lib (7.9- chizma):

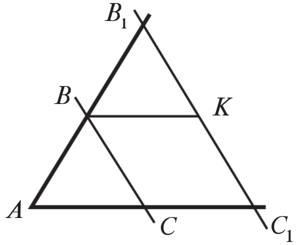
1) ularning mos tomonlari o‘zaro proporsional, ya’ni

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2};$$

2) ularning mos burchaklari o‘zaro teng, ya’ni $\angle A_1 = \angle A_2$. $\angle B_1 = \angle B_2$, $\angle C_1 = \angle C_2$ bo‘lsa, bu uchburchaklar *o‘xshash* deyiladi.



7.9- chizma.



7.10- chizma.

O‘xshash uchburchaklar mos tomonlarining nisbati bu uchburchaklarning *o‘xshashlik koeffitsiyenti* deb ataladi: $\dfrac{A_1B_1}{A_2B_2} = k.$

Uchburchaklarning *o‘xshashligi* $\triangle A_1B_1C_1 \quad A_2B_2C_2$ kabi yoziladi.

O‘xshash, lekin bir-biriga teng bo‘lmagan uchburchaklarning mavjud bo‘lishini isbotlaymiz.

1-teorema. ***Agar burchakning tomonlari parallel to‘g‘ri chiziqlar bilan kesilsa, hosil qilingan uchburchaklar o‘xshash bo‘ladi.***

Isboti. Bizga $\angle BAC$ berilgan bo‘lib, uning tomonlari o‘zaro parallel BC va B_1C_1 to‘g‘ri chiziqlar bilan kesilgan (7.10-chizma), ya’ni $BC \| B_1C_1$ bo‘lsin. Buning natijasida hosil qilingan $\triangle ABC$ va $\triangle A_1B_1C_1$ ning o‘xshashligini isbotlaymiz.

Ularda $\angle A$ — umumiy va o‘zaro parallel BC va B_1C_1 to‘g‘ri chiziqlar va BB_1 kesuvchi hosil qilgan $\angle ABC$ hamda $\angle AB_1C_1$ mos burchaklar sifatida bir-biriga tengdir, $\angle ABC = \angle AB_1C_1$. Bundan esa uchburchaklarning uchinchi burchaklari ham o‘zaro tengligi kelib chiqadi: $\angle ACB = \angle AC_1B_1$.

Endi uchburchaklarning mos tomonlari proporsionalligini ko‘rsatamiz. $\angle BAC$ ning tomonlari o‘zaro parallel BC va B_1C_1 to‘g‘ri chiziqlar bilan kesilganligidan, Fales teoremasiga ko‘ra

bo‘ladi. Bu tenglikning har ikkala tomoniga 1 ni qo‘shib, umumiy maxrajga keltiramiz:

$$\frac{BB_1}{AB} + 1 = \frac{CC_1}{AC} + 1, \quad \frac{BB_1 + AB}{AB} = \frac{CC_1 + AC}{AC}, \quad \frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}.$$

Uchinchi tomonlarning ham proporsionalligini ko‘rsatamiz.

B nuqtadan $BK \parallel AC$ to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz (7.10-chizma). $BC \parallel B_1C_1$, $BK \parallel CC_1$ bo‘lganligidan $KC_1 = BC$ bo‘ladi. Shunday qilib, $\angle AB_1C_1$ burchakning tomonlari o‘zaro parallel BK va AC_1 to‘g‘ri chiziqlar bilan kesilgan, ya’ni $BK \parallel AC_1$. Endi, yuqoridagiga o‘xshash, Fales teoremasidan foydalanib,

$$\frac{B_1C_1}{KC_1} = \frac{AB_1}{AB}$$

yoki $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AB_1}{AB}$ ekanligini isbotlaymiz. Shunday qilib, $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$ bo‘ladi.

Endi uchburchaklarning o‘xshashlik alomatlarini qaraymiz.

2-teorema (uchburchaklar o‘xshashligining birinchi alomati). ***Agar bir uchburchakning ikki burchagi ikkinchi uchburchakning, mos ravishda, ikki burchagiga teng bo‘lsa, bu uchburchaklar o‘xshash bo‘ladi.***

Isboti. Teoremaning sharti bo‘yicha, $\triangle ABC$ va $\triangle A_1B_1C_1$ lar uchun $A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ tengliklar bajariladi (7.11-chizma). Endi $\angle C$ va $\angle C_1$ ning o‘zaro tengligi va uchburchaklar mos tomonlarining proporsionalligini ko‘rsatish qoldi, xolos.

Uchburchak ichki burchaklarining yig‘indisi formulasidan,

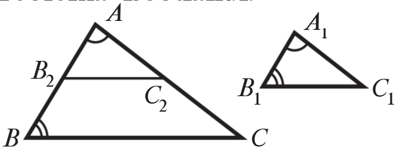
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

$\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 80° - (\angle A_1 + \angle B_1) = \angle C_1$.

AB tomonda A nuqtadan boshlab $AB_2 = A_1B_1$ kesmani ajratamiz va B_2 nuqta orqali $B_2C_2 \parallel BC$ to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. 1- teoremaga ko‘ra, $\triangle AB_2C_2$ $\triangle ABC$. Endi $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ tenglikni isbotlash qoldi. Yasashga ko‘ra $AB_2 = A_1B_1$, shartga ko‘ra, $\angle A = \angle A_1$. Modomiki, $B_2C_2 \parallel BC$ ekan, mos burchaklar sifatida $\angle AB_2C_2 = \angle ABC$ bo‘ladi. Lekin shartga ko‘ra $\angle B = \angle B_1$ va shuning uchun $\angle AB_2C_2 = \angle A_1B_1C_1$.

Uchburchaklar tengligining ikkinchi alomatiga ko‘ra $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle AB_2C_2$. Modomiki, $\triangle AB_2C_2$ $\triangle ABC$ ekan, $\triangle A_1B_1C_1$ $\triangle ABC$,

ya’ni: bo‘ladi. Teorema isbotlandi.



7.11- chizma.

3-teorema (uchburchaklar o‘xshashligining ikkinchi alomati). ***Agar bir uchburchakning ikki tomoni ikkinchi uchburchakning***

mos tomonlariga proporsional bo‘lib, ular orasidagi burchaklar o‘zaro teng bo‘lsa, uchburchaklar o‘xshash bo‘ladi.

I s b o t i . Teoremaning shartiga ko‘ra va

$\angle A = \angle A_1$ (7.12-chizma). AB tomonda A uchdan boshlab, $AB_2 = A_1B_1$ kesma ajratamiz va B_2 nuqtadan $B_2C_2 \| B_1C_1$ to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. U vaqtda $\triangle AB_2C_2 \backsim \triangle ABC$ va

bo‘ladi. Yasash bo‘yicha $AB_2 = A_1B_1$ bo‘lganligidan, hosil qilingan proporsiyalarni (nisbatlarni) taqqoslaymiz. Proporsiyalarning chap tomonlari teng bo‘lganligidan ularning o‘ng tomonlari ham teng bo‘lishi kerak:

.

Bundan $AC_2 = A_1C_1$ bo‘lishi kelib chiqadi. U vaqtda ikki tomoni va ular orasidagi burchagi teng bo‘lgan $\triangle A_1B_1C_1$ va $\triangle AB_2C_2$ o‘zaro teng, ya’ni $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle AB_2C_2$ bo‘ladi. Demak, $\triangle A_1B_1C_1$ $\triangle ABC$, teorema isbotlandi.

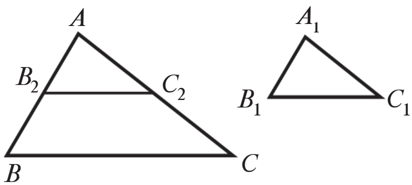
4 - t e o r e m a (uchburchaklar o‘xshashligining uchinchi alomati). ***Agar bir uchburchakning uchta tomoni ikkinchi uchburchakning uchta mos tomonlariga proporsional bo‘lsa, bu uchburchaklar o‘xshash bo‘ladi.***

I s b o t i . Shartga ko‘ra . Biz $\angle A = \angle A_1$,

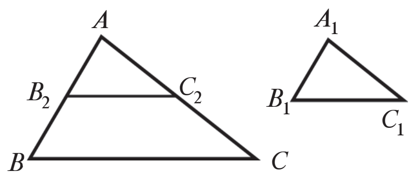
$\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ bo‘lishini isbotlashimiz kerak (7.13- chizma). $\triangle ABC$ ning A uchidan $AB_2 = A_1B_1$, $AC_2 = A_1C_1$ kesmalarni ajratamiz. O‘xshashlikning yuqorida isbotlangan birinchi alomatiga

binoan $\triangle AB_2C_2$ $\triangle ABC$ va bo‘ladi. $AC_2 = A_1C_1$

bo‘lganligidan, yuqorida yozilgan proporsiyalardan $B_2C_2 = B_1C_1$

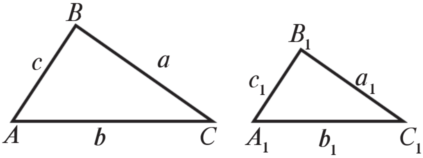


7.12- chizma.



7.13- chizma.

bo‘lishi kelib chiqadi. U vaqtda uchburchaklar tengligining uchinchi alomati bo‘yicha $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ bo‘ladi. Yasashga ko‘ra $AB_2 = A_1B_2$, $AC_2 = A_1C_1$ hamda isbotlanganiga asosan $B_2C_2 = B_1C_1$ bo‘ladi. Modomiki, $\triangle ABC \backsim \triangle AB_2C_2$ va $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ ekan, $\triangle ABC \quad \triangle A_1B_1C_1$.



7.14- chizma.

O‘xshash uchburchaklarning qo‘shimcha xossalarini ham qarab chiqamiz.

5 - t e o r e m a . ***O‘xshash uchburchaklarning perimetrlari ularning o‘xshash tomonlari kabi nisbatda bo‘ladi.***

I s b o t i . $\triangle ABC$ da P—perimetr, a, b, c — uning tomonlari, $\triangle A_1B_1C_1$ da esa, P_1 — perimetr, a_1, b_1, c_1 — uning tomonlari bo‘lsin va shartga ko‘ra, $\triangle ABC \quad A_1B_1C_1$ (7.14- chizma). O‘xshash uchburchaklarning aniqlanishidan, ularning o‘xshash tomonlari proporsional bo‘ladi: Bundan $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$ tenglikni $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$ ko‘rinishda yozib olamiz. Oxirgi tenglikning har ikki (7.14- chizma) tomoniga 1 ni qo‘shamiz: $\frac{a}{b} + 1 = \frac{a_1}{b_1} + 1$ yoki $\frac{a+b}{b} = \frac{a_1+b_1}{b_1}$, $\frac{a+b}{a_1+b_1} = \frac{b}{b_1}$.

Shunga o‘xshash:

$\frac{b+c}{b_1+c_1} = \frac{c}{c_1}$ deb yozish mumkin. U holda munosabatni olamiz. Uning uchun ham yuqoridagi almashtirishlarni takrorlaymiz:

Bundan

$$\frac{a+b+c}{c} = \frac{a_1+b_1+c_1}{c_1}, \quad \frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1} = \frac{c}{c_1}$$

bo‘ladi. Berilishiga ko‘ra $P = a + b + c$, $P_1 = a_1 + b_1 + c_1$ bo‘lganligidan, talab qilingan munosabatni olamiz. Teorema isbotlandi.

6 - t e o r e m a . ***O'xshash uchburchaklarning yuzlari ularning o'xshash tomonlari kvadratlari kabi nisbatda bo'ladi***, ya'ni S — $\triangle ABC$ ning yuzi, S_1 — $\triangle A_1B_1C_1$ ning yuzi, a va a_1, b va b_1, mos ravishda, ularning o'xshash tomonlari bo'lsa (7.14- chizma),

I s b o t i . O'xshash $\triangle ABC$ va $\triangle A_1B_1C_1$ da $\angle ACB = A_1C_1B_1 = \gamma$ bo'lsin. Unda ularning yuzlari, mos ravishda, $S = \frac{1}{2}\ ab \sin\gamma$ va $S_1 = \frac{1}{2} a_1b_1 \sin\ \gamma$ bo'ladi. S ni S_1 ga bo'lamiz:

.

$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ bo'lganligidan, yuqorida isbotlanganiga asosan,

Shu sababli,

va teorema isbotlandi.

I z o h . Agar o'xshash uchburchaklarning perimetrlari, mos ravishda, P va P_1 bo'lsa, 5-teoremada isbotlangani bo'yicha, o'xshash uchburchaklar yuzlarining nisbati uchun

munosabat o'rinli bo'ladi.

6- §. To'g'ri burchakli uchburchak

T a ' r i f . Bitta ichki burchagi 90° bo'lgan uchburchak *to'g'ri burchakli* deyiladi (7.15- chizmada $\angle C = 90°$). Uchburchakning to'g'ri burchak hosil qiluvchi AC va BC tomonlari uning *katetlari,* to'g'ri burchak qarshisida yotgan AB tomoni uning *gipotenuzasi* deyiladi.

Endi to‘g‘ri burchakli uchburchakning xossalarini ko‘rib o‘tamiz.

1- teorema. ***Agar to‘g‘ri burchakli uchburchakning to‘g‘ri burchagi uchidan gipotenuzaga balandlik o‘tkazilgan bo‘lsa:***

1) ***balandlik gipotenuzada u hosil qilgan kesmalar orasida o‘rta proporsional miqdordir*;**

2) ***har bir katet gipotenuza va bu katetning gipotenuzaga proyeksiyasi orasida o‘rta proporsional miqdordir*.**

Isboti. Berilgan uchburchakning katetlari va gipotenuzasini, $AC=b$, $BC=a$, $AB=c$ deb, katetlarning gipotenuzaga proyeksiyalarini $AD=b_1$, $DB=a_1$ deb belgilaymiz (7.15- chizma).

1. $CD=h$ balandlik tushirish natijasida hosil qilingan $\triangle ACD$ va $\triangle BCD$ to‘g‘ri burchakli bo‘ladi, chunki $CD \perp AB$. Endi $\angle CAD = \alpha$ bo‘lsin. To‘g‘ri burchakli uchburchak o‘tkir burchaklarining yig‘indisi 90° ga teng bo‘lganligidan $\angle ACD = 90° - \alpha$ bo‘ladi. U vaqtda $\angle DCB = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$, ya’ni $\angle DCB = \angle CAD$. Endi $\triangle ACD$ va $\triangle BCD$ ning ikkita burchaklari o‘zaro teng bo‘lganligidan, $\triangle ACD \backsim \triangle BCD$ bo‘lishi kelib chiqadi. Bu uchburchaklarda mos tomonlarining nisbatini tuzamiz:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{DC}{DB} \text{ yoki } \frac{b_1}{h} = \frac{h}{a_1},$$

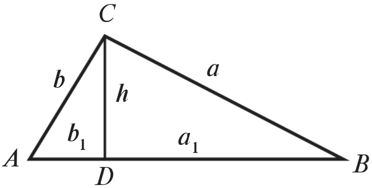
$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \text{ yoki } \frac{b_1}{b} = \frac{b}{c}$$

bundan talab qilingan, $h^2 = a_1 \cdot b_1$ tenglik kelib chiqadi.

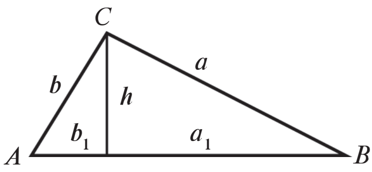
2. $\triangle ABC$ va $\triangle ACD$ lar o‘xshash bo‘ladi, chunki ularning har ikkalasi ham to‘g‘ri burchakli va ularda $\angle A$ umumiydir, ya’ni $\triangle ABC$ $\triangle ACD$. Bu uchburchaklarda mos tomonlarning nisbati

bo‘ladi, bundan $b^2 = b_1 - c$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Endi $\triangle ABC$ va $\triangle BDC$ ning o‘xshashligidan (ularning har ikkalasi ham to‘g‘ri burchakli va ularda $\angle B$ umumiydir), talab qilingan ikkinchi $a^2 = a_1 \cdot c$ tenglik kelib chiqadi.



7.15- chizma.



7.16- chizma.

2- t e o r e m a (Pifagor). ***To‘g‘ri burchakli uchburchakda gipotenuza uzunligining kvadrati katetlar uzunliklarining kvadratlari yig‘indisiga teng.***

I s b o t i. Agar $\triangle ABC$ da $AB = c$ — gipotenuza, $BC = a$ va $AC = b$ — katetlar bo‘lsa, Pifagor teoremasi $c^2 = a^2 + b^2$ ko‘rinishda yoziladi (7.16-chizma). $\triangle ABC$ da $CD \perp AB$ balandlik o‘tkazamiz va katetlarning gipotenuzaga proyeksiyalarini $AD = b_1$ va $DB = a_1$ kabi belgilaymiz. 1- teoremaga asoslanib, AC va BC katetlar uchun $b^2 = b_1 \cdot c$ va $a^2 = a_1 \cdot c$ munosabatlarni olamiz va ularni hadma-had qo‘shamiz: $b^2 + a^2 = b_1c + a_1c = c(b_1 + a_1) = c \cdot c$, ya’ni $b^2 + a^2 = c^2$. Teorema isbotlandi.

7-§. Aylana va uchburchak

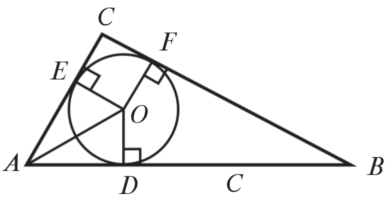
T a ’ r i f. Agar uchburchakning tomonlari aylanaga urinsa, bu *aylana uchburchakka ichki chizilgan* deyiladi.

1- t e o r e m a. ***Uchburchakka ichki chizilgan aylananing markazi uchburchak bissektrisalarining kesishish nuqtasi bo‘ladi.***

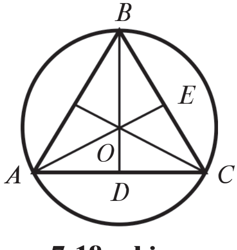
I s b o t i. $\triangle ABC$ — berilgan uchburchak bo‘lsin (7.17- chizma). Agar D, E, F uchburchakning tomonlari aylanaga urinadigan nuqtalar bo‘lsa, $OE = OF = OD$ va $OD \perp AB$, $OE \perp AC$, $OF \perp BC$ bo‘ladi. Shunday qilib, O nuqta uchburchak tomonlaridan baravar uzoqlikda joylashgan bo‘ladi. $OE = OD$ bo‘lganligidan, O nuqta uchburchakning ichki A burchagi bissektrisasida yotadi. Shunga o‘xshash, $OE = OD$ bo‘lganligidan, O nuqta C burchakning bissektrisasida yotadi va shuningdek, B burchakning bissektrisasida ham yotadi, ya’ni O — uchburchak bissektrisalarining kesishish nuqtasidir.

2- t a ’ r i f. Uchburchakning hamma uchlaridan o‘tuvchi *aylana uchburchakka tashqi chizilgan* deyiladi.

2- t e o r e m a. ***Uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazi uchburchak tomonlarining o‘rtalaridan o‘tkazilgan perpendikularlarning kesishish nuqtasidan iborat.***

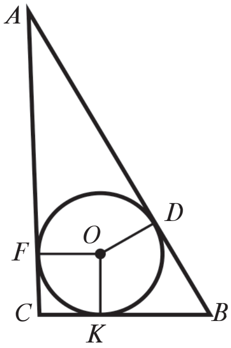


7.17- chizma.



7.18- chizma.

I s b o t i. Bizga $\triangle ABC$ va unga tashqi chizilgan aylananing markazi O nuqta berilgan bo‘lsin (7.18-chizma). O nuqtani uchburchakning A, B, C uchlari bilan tutashtiramiz. Unda hosil qilingan $\triangle AOC$ teng yonli bo‘ladi, chunki $OA = OC = R$, bunda R— tashqi chizilgan aylananing radiusi. Shuningdek, uchburchakning OD medianasi bir vaqtning o‘zida balandlik ham bo‘ladi, ya’ni $OD \perp AC$. Shunday qilib, $\triangle ABC$ uchburchakka tashqi chizilgan aylananing O markazi AC tomonga uning o‘rtasi D nuqtadan o‘tkazilgan perpendikularda yotadi. Yuqoridagiga o‘xshash, $BO = AO = R$ va $BO = OC = R$ bo‘lganligidan, $\triangle BOC$ va $\triangle AOB$ lar ham teng yonli bo‘ladi va O nuqta AB va BC tomonlarning o‘rtalaridan o‘tkazilgan perpendikularlarda yotadi. Teorema isbotlandi.



7.19- chizma.

1- n a t i j a. *Har qanday uchburchakka ichki aylana chizish mumkin.*

2- n a t i j a. *Har qanday uchburchak atrofida unga tashqi aylana chizish mumkin.*

3- n a t i j a. Agar to‘g‘ri burchakli uchburchakning tomonlari $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ bo‘lib (7.19-chizma), r — unga *ichki chizilgan aylananing radiusi, R — tashqi chizilgan aylananing radiusi bo‘lsa, ular*

$$r = \frac{a+b-c}{2}, \quad R = \frac{c}{2}$$

formulalar orqali hisoblanadi.

Haqiqatan,

$$\begin{cases} AF + BK = c \\ FC + CK = 2r \end{cases} \Rightarrow AF + FC + BK + KC = 2r + c,$$

$$a + b = 2r + c, \quad r = \frac{a+b-c}{2}.$$

Ma’lumki, diametrga tiralgan ichki burchak 90° ga teng. Shunday qilib, $AB = c = 2R$ va bundan $R = \frac{c}{2}$ bo‘lishi kelib chiqadi.

8- §. Kosinuslar teoremasi

T e o r e m a . ***Uchburchak istalgan tomonining kvadrati qolgan ikki tomon kvadratlari yig‘indisidan, shu ikki tomon bilan ular orasidagi burchak kosinusining ikkilangan ko‘paytmasini ayirish natijasiga teng:***

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

I s b o t i . Uchta holni qarab chiqamiz. 1- hol. a) $\angle A$ o‘tkir, ya’ni $\angle A < 90°$ va $\angle B$ o‘tkir burchak bo‘lsin. Uchburchakning C uchidan $CD \perp AB$ o‘tkazamiz (7.20- *a* chizma). U vaqtda $AD = b_c$ va $DB = a_c$ lar $AC = b$ va $BC = a$ tomonlarning $AB = c$ tomonga proyeksiyasidan iborat bo‘ladi. $CD = h_c$ deb belgilaymiz. To‘g‘ri burchakli $\triangle BCD$ va $\triangle ACD$ lardan, Pifagor teoremasiga ko‘ra,

$$\begin{cases} a^2 = h_c^2 + a_c^2, \\ h_c^2 = b^2 - b_c^2 \end{cases}$$

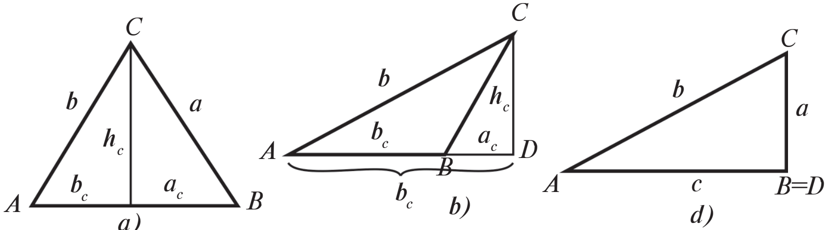
munosabatlarni olamiz. h_c ning qiymatini birinchi ifodaga qo‘yib, $a_c = c - b_c$ munosabatdan foydalangan holda,

ifodani olamiz yoki

bo‘ladi. $\triangle ACD$ da b_c kesma $\angle A$ ga yopishgan katet bo‘lganligidan $b_c = b \cdot \cos A$. Olingan qiymatni a^2 ning ifodasiga keltirib qo‘ysak, talab qilingan $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$ tenglikni olamiz.

b) $\angle A$ — o‘tkir, $\angle B$ — o‘tmas burchak bo‘lgan holni qaraymiz. Bu holda $b_c = AD = c + a_c$, $a_c = BD$ bo‘ladi (7.20- *b* chizma). To‘g‘ri burchakli $\triangle BCD$ va $\triangle ACD$ lardan, Pifagor teoremasiga

ko‘ra munosabatlarni olamiz. Bundan



7.20- chizma.

$a^2 = b^2 - (c + a_c)^2 + a_c^2 = b^2 - c^2 - 2 \cdot c \cdot a_c$ bo‘ladi. To‘g‘ri burchakli $\triangle ACD$ dan $AD = b \cdot \cos A$ yoki $c + a_c = b \cdot \cos A$ bo‘lishi kelib chiqadi. U vaqtda $a_c = b \cdot \cos A - c$ bo‘ladi va a^2 uchun olingan ifodaga keltirib qo‘ysak, $a^2 = b^2 - c^2 - 2c(b \cdot \cos \angle A - c) = b^2 - c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos A + 2c^2$ va $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ bo‘ladi.

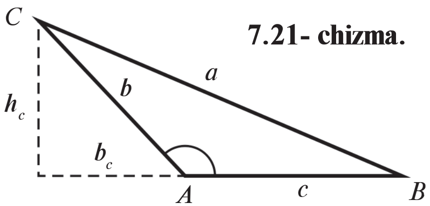
d) $\angle A$ – o‘tkir, $\angle B$ – to‘g‘ri burchak bo‘lgan holni qaraymiz. Bu holda CB va CD kesmalar bir-biriga teng bo‘ladi va $a_c = 0$ (7.20-*d* chizma). To‘g‘ri burchakli $\triangle ABC$ dan Pifagor teoremasiga ko‘ra $a^2 = b^2 - c^2$ bo‘ladi. Bu ifodani quyidagicha yozamiz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2c^2$. c katet $\angle A$ ga yopishganligini hisobga olsak, $c = b \cdot \cos A$ bo‘ladi va natijada talab qilingan, $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot bc \cos A$ tenglikka ega bo‘lamiz. Shunday qilib, bu holda ham kosinuslar teoremasi o‘rinli bo‘lar ekan.

2- hol. $\angle A$ — o‘tmas burchak, ya’ni $\angle A > 90°$ bo‘lgan holni qaraymiz. $CD \perp AB$ to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz va $BD = a_c$, $AD - b_c$ deb belgilaymiz (7.21- chizma). To‘g‘ri burchakli $\triangle ACD$ va $\triangle BCD$ dan Pifagor teoremasiga ko‘ra
$-(c + b_c)^2$ munosabatlarni olamiz. Olingan tengliklarning o‘ng tomonlarini tenglashtirib,

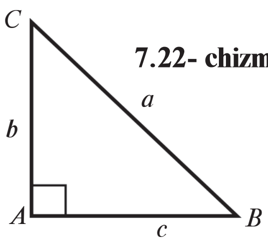
$$h_c^2 = b - b_c^2,\ h_c^2 = a^2 = \qquad b^2 - bc^2 = a^2 - (c + bc)^2, \qquad b^2 - bc^2 = a^2 - c^2 - 2cbc - bc^2$$

ifodalarga ega bo‘lamiz. Ulardan $a^2 = b^2 + c^2 + 2cb_c$ ifoda kelib chiqadi. To‘g‘ri burchakli $\triangle ACD$ ni qaraymiz. $\angle CAD = 180° - \angle A$ va $\cos(180° - \angle A) = -\cos \angle A$ munosabat $\angle A > 90°$ bo‘lganda bajarilganligidan $b_c = b \cdot \cos(180° - \angle A) = -b \cdot \cos \angle A$ bo‘ladi. Shunday qilib, $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot \cos \angle A$.

3- hol. $\angle A$ to‘g‘ri burchak, ya’ni $\angle A = 90°$ bo‘lgan holni qaraymiz (7.22-chizma). $\angle A = 90°$ bo‘lganligidan, $BC = a$ tomon $\triangle ABC$ ning gipotenuzasidir va Pifagor teoremasiga ko‘ra, $a^2 = b^2 + c^2$ bo‘ladi. $\cos 90° = 0$ ekanligini hisobga olib, oxirgi ifodani $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A$ ko‘rinishda yozish mumkin. Teorema to‘la isbotlandi.



7.21- chizma.



7.22- chizma.

9- §. Sinuslar teoremasi

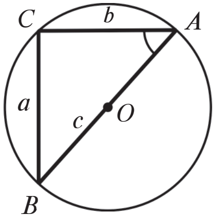
T e o r e m a . ***Har qanday uchburchakning tomonlari ular qarshisidagi burchaklarning sinuslariga proporsionaldir:***

I s b o t i . a) $\triangle ABC$ ning bitta tomoni unga tashqi chizilgan aylananing markazidan o‘tadi, ya’ni $AB = 2R$ deb olamiz (7.23- chizma), bunda R — tashqi chizilgan aylananing radiusi. $\angle ACB$ diametrga tiralganligidan $\angle ACB = 90°$. Sinusning ta’rifiga ko‘ra bo‘ladi.

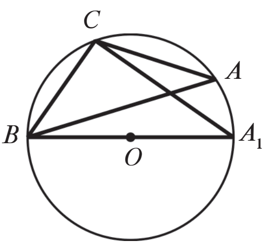
Xuddi shunga o‘xshash, ekanligini ham ko‘rsatish mumkin. $\sin 90° = 1$ ekanligini hisobga olib, $AB = c$ gipotenuza uchun $\frac{c}{\sin C} = 2R$ deb yozish mumkin. Hosil qilingan ifodalarni taqqoslab, munosabatlarga ega bo‘lamiz.

b) $\triangle ABC$ ning barcha tomonlari unga tashqi chizilgan aylananing O markazidan bir tomonda yotgan bo‘lsin. Uchburchakning B uchidan aylananing BA_1 diametrini o‘tkazamiz (7.24- chizma). U vaqtda $\triangle A_1BC$ to‘g‘ri burchakli bo‘ladi va $A_1B = 2R$. $\triangle A_1BC$ dan $BC = 2R \sin \angle BA_1C$ bo‘lishini topamiz. Lekin $\angle BA_1C$ va $\angle BAC$ lar aylanaga ichki chizilgan va BC tomonga tiralgan bo‘lganligi uchun o‘zaro teng, ya’ni $\angle BA_1C = \angle BAC$. Demak, $BC = 2R \sin A$ va

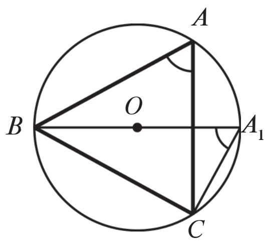
Qolgan tengliklar ham shunga o‘xshash isbotlanadi.



7.23- chizma.



7.24- chizma.



7.25- chizma.

d) $\triangle ABC$ ga tashqi chizilgan aylananing O markazi $\triangle ABC$ ning ichida yotgan holni qaraymiz (7.25- chizma). Uchburchakning B uchidan aylananing BA_1 diametrini o‘tkazamiz hamda A_1 va C nuqtalarni tutashtiramiz. $A_1B = 2R$ bo‘lganligidan, $\triangle A_1BC$ — to‘g‘ri burchakli bo‘ladi va aylanaga ichki chizilgan burchaklar sifatida $\angle BA_1C = \angle BAC$ bo‘ladi. $\triangle A_1BC$ dan $BC = A_1B \sin A$ yoki $BC = 2R \sin A$ bo‘ladi. Demak, $\frac{a}{\sin A} = 2R.$

Qolgan, tengliklar ham shunga o‘xshash isbotlanadi.

N a t i j a . *Ixtiyoriy uchburchak tomonining shu tomon qarshisidagi burchak sinusiga nisbati bu uchburchakka tashqi aylana diametriga teng:*

10-§. Tangenslar teoremasi

T e o r e m a . ***Ixtiyoriy uchburchak ikki tomoni ayirmasining ular yig‘indisiga nisbati shu tomonlar qarshisidagi burchaklar ayirmasi yarmi tangensining shu burchaklar yig‘indisi yarmining tangensiga nisbati kabidir:***

I s b o t i . Yuqorida isbotlangan sinuslar teoremasiga ko‘ra $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ yoki . Oxirgi tenglikning ikki tomoniga 1 va -1 ni qo‘shamiz:

Natijada $\frac{a+b}{b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin B}$, $\frac{a-b}{b} - 1 = \frac{\sin A - \sin B}{\sin B}$ ifodalarni olamiz. So‘ngra ikkinchi tenglikni birinchisiga bo‘lamiz:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cdot\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}.$$

Teorema isbotlandi.

11- §. Uchburchakdagi metrik munosabatlar

1- teorema. ***Ixtiyoriy uchburchak ikki tomoni kvadratlari ayirmasi bu tomonlarning uchburchakning uchinchi tomoniga mos proyeksiyalari kvadratlari ayirmasiga teng.***

Isboti. $\triangle ABC$ ning B uchidan $BD \perp AC$ to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz (7.26- chizma). U vaqtda AB tomonning AC tomonga proyeksiyasi AD kesmadan, BC tomonning AC tomonga proyeksiyasi DC kesmadan iborat bo‘ladi. Demak, $BC^2-AB^2=$ $=DC^2-AD^2$ bo‘lishini isbotlash kerak bo‘ladi. Balandlik o‘tkazish natijasida hosil bo‘lgan to‘g‘ri burchakli $\triangle ABD$ va $\triangle DBC$ ni qaraymiz. Pifagor teoremasiga ko‘ra mos ravishda

$$AB^2 = AD^2 + BD^2,$$
$$BC^2 = BD^2 + DC^2$$

munosabatlarni olamiz. Ularning ikkinchisidan birinchisini ayirib, talab qilingan

$$BC^2 - AB^2 = DC^2 - AD^2$$

tenglikni olamiz. Teorema isbotlandi.

2- teorema (Stuart). ***Agar ABC uchburchakning BC tomonida ichki D nuqta olingan bo‘lsa,***

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot BD \cdot DC$$

tenglik bajariladi.

Isboti. $\triangle ABC$ ning A uchidan $AK \perp BC$ to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz (7.27- chizma). K nuqta D va C nuqtalar orasida yotadi, deb faraz qilamiz. Ikkita to‘g‘ri burchakli $\triangle AKC$ va $\triangle ADK$ ni qaraymiz va Pifagor teoremasiga ko‘ra $\triangle AKC$ dan $AC^2 = AK^2+$ $+KC^2$; $\triangle ADK$ dan $AK^2 = AD^2 - DK^2$ munosabatlarni olamiz. Ulardan

$$AC^2 = AD^2 + KC^2 - DK^2 = AD^2 + (KC + DK)(KC - DK)$$

yoki

7.26- chizma.

7.27- chizma.

$$AC^2 = AD^2 + DC(KC - DK) = AD^2 + DC(DC - 2DK),$$
$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2DC \cdot DK$$
bo‘ladi.

To‘g‘ri burchakli $\triangle ABK$ va $\triangle ADK$ dan $AB^2 = AK^2 + BK^2$ va $AK^2 = AD^2 - DK^2$ munosabatlarni olamiz. Ulardan, $AB^2 = AD^2 + BK^2 - DK^2 = AD^2 + (BK - DK)(BK + DK)$ bo‘lishi kelib chiqadi. $BK - DK = BD$, $BK = BD + DA$ ekanligini hisobga olsak,

$$AB^2 = AD^2 + BD(BD + DK) = AD^2 + BD^2 + 2BD \cdot DK$$

bo‘ladi. Endi AC^2 uchun hosil qilingan ifodani BD ga, AB^2 uchun olingan ifodani DC ga ko‘paytirib, hosil qilingan ifodalarni qo‘shamiz:

$$AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot DC = AD^2(BD + DC) + DC^2 \cdot BD + BD^2 \cdot DC =$$
$$= AD^2 \cdot BC + DC^2 \cdot BD + BD^2 \cdot DC = AD^2 \cdot BC +$$
$$+ DC \cdot BD \ (DC + BD) = AD^2 \cdot BC + BD \cdot DC \cdot BC,$$

ya’ni bundan talab qilingan tenglik olinadi.

Stuart teoremasidan foydalanib, uchburchak medianasi, balandligi, bissektrisasi uzunliklarini hisoblaymiz.

12- §. Uchburchakning medianasi

$\triangle ABC$ da AD mediana va AK balandlik o‘tkazilgan bo‘lsin (7.28-chizma). Kesmalar uzunliklari uchun quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $AD = m_a$. AD mediana bo‘lganligidan $BD = DC = \frac{a}{2}$.

Endi $\triangle ABC$ uchun Stuart teoremasini yozamiz:

$$AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot DC = AD^2 \cdot BC + DC \cdot BD \cdot BC$$

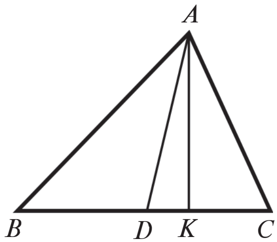
yoki

$$b^2 \cdot \frac{a}{2} + c^2 \cdot \frac{a}{2} = m_a^2 \cdot a + \frac{a^2}{4} \cdot a.$$

Bu tenglikning ikkala tomonini a ga qisqartiramiz: $\frac{b^2 + c^2}{2} = m_a^2 + \frac{a^2}{4}$. Bundan

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}, \quad m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

ifodani olamiz.



7.28- chizma.

Yuqoridagiga o‘xshash, m_b, m_c medianalar uchun ushbu ifodalarni olamiz:

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}, \quad m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.$$

13- §. Uchburchakning balandligi

Berilgan $\triangle ABC$ ning tomonlari $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ bo‘lsin (7.29-chizma). Unda $AK \perp BC$ balandlik o‘tkazamiz. Agar $\angle B < 90^\circ$ bo‘lsa, to‘g‘ri burchakli ABK va ACK uchburchaklardan $b^2 = AK^2+KC^2$, $AK^2 = c^2 - BK^2$ ifodalarni topamiz. Ulardan $b^2 = c^2 - BK^2 + (a - BK)^2 = c^2 - BK^2 + a^2 - 2a \cdot BK + BK^2$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot BK$ bo‘ladi. Bundan $BK = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$ kelib chiqadi. Olingan ifodani AK uchun yuqorida olingan ifodaga keltirib qo‘yamiz:

$$AK^2 = c^2 - BK^2 = c^2 - \frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2} = \left(c - \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\left(c + \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right) =$$

$$= \frac{\left(2ac-a^2-c^2+b^2\right)\left(2ac+a^2+c^2-b^2\right)}{4a^2} = \frac{\left(b^2-(a-c)^2\right)\left((a+c)^2-b^2\right)}{4a^2}.$$

Bundan, $AK^2 = \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+b+c)}{4a^2}$ bo‘ladi.

$a + b + c = 2p$ deb belgilab, qolgan ko‘paytuvchilarni p orqali ifodalaymiz:

$$b + c - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a),$$

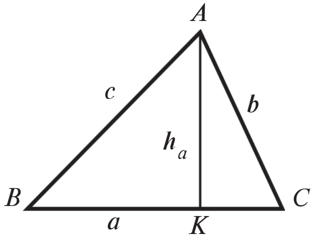
$$a + c - b = 2(p - b), \quad a + b - c = 2(p - c).$$

Natijada AK balandlik uchun $AK^2 = \frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4a^2}$ va

$AK = h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ifodani olamiz.

Qolgan h_b va h_c balandliklar uchun ham, yuqoridagiga o‘xshash,

formulalarni hosil qilamiz.



7.29- chizma.

14- §. Uchburchakning bissektrisasi

Uchburchak burchagi bissektrisasining ba’zi xossalarini ko‘rib o‘tamiz.

1-teorema. ***Burchak bissektrisasining nuqtalari burchak tomonlaridan teng uzoqlikda yotadi.***

Isboti. AD to‘g‘ri chiziq BAC burchakning bissektrisasi, ya’ni $\angle BAD = \angle DAC$ bo‘lsin (7.30-chizma). AD bissektrisada ixtiyoriy K nuqtani olib, bu nuqtadan burchakning tomonlariga $KN \perp AC$, $KM \perp AB$ perpendikularlar tushiramiz. Hosil qilingan to‘g‘ri burchakli AKM va AKN uchburchaklarda gipotenuza umumiy va $\angle MAK$, $\angle KAN$ o‘tkir burchaklar teng bo‘lgani uchun, ular o‘zaro teng bo‘ladi: $\triangle KMA = \triangle KNA$. Teng uchburchaklarda teng burchaklar qarshisida teng tomonlar yotadi. Shuning uchun, $KM = KN$. Teorema isbotlandi.

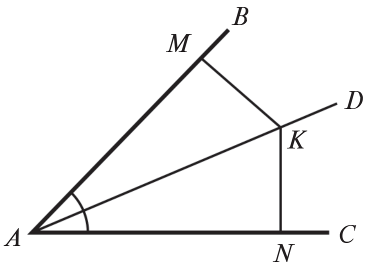
2-teorema. ***Uchburchak ichki burchagining bissektrisasi qarshisidagi tomonni unga yopishgan tomonlarga proporsional qismlarga bo‘ladi.***

Isboti. AD kesma $\triangle ABC$ ichki $\angle A = \alpha$ burchagining bissektrisasi bo‘lsin, ya’ni $\angle BAD = \angle DAC =$ (7.31-chizma).

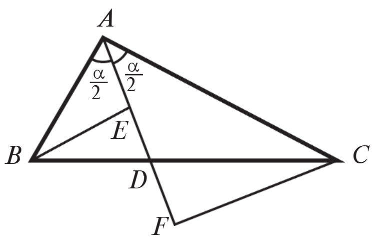
$\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}$ bo‘lishini isbotlash kerak. Uchburchakning B va C uchlaridan AD to‘g‘ri chiziqqa perpendikularlar tushiramiz: $BE \perp AD$, $CF \perp AD$. U vaqtda $\triangle ABE$ va $\triangle ACF$lar to‘g‘ri burchakli va ularda $\angle BAF = \angle CAF$ bo‘lganligidan, ular o‘xshash bo‘ladi, ya’ni $\triangle ABE$ $\triangle ACF$. Bundan

(*a*)

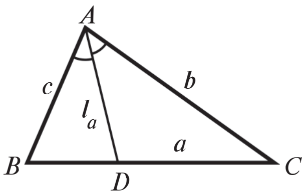
kelib chiqadi.



7.30- chizma.



7.31- chizma.



7.32- chizma.

Ikkinchi tomondan, $\triangle CFD$ va $\triangle BDE$ lar to‘g‘ri burchakli va vertikal burchaklar bo‘lgani uchun $\angle BDE = \angle CDF$ tenglik o‘rinli, demak, uchburchaklar o‘xshashdir, ya’ni $\triangle CFD$ $\triangle BDE$. Bundan

yoki

(b)

kelib chiqadi.

Hosil qilingan (a), (b) tengliklarni taqqoslab, talab qilingan

tenglikni hosil qilamiz. Teorema isbotlandi.

Endi uchburchak bissektrisalarini hisoblash formulalarini keltirib chiqaramiz. Tomonlari $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ bo‘lgan $\triangle ABC$ da AD bissektrisani o‘tkazamiz (7.32-chizma) va uning l_a uzunligini a, b, c orqali ifodalaymiz. Uchburchak ichki burchagi bissektrisasining xossasiga ko‘ra

yoki va

munosabatlarni olamiz. Bu qiymatlarni Stuart teoremasidagi

$$AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot DC = BD \cdot DC \cdot BC + AD^2 \cdot BC$$

ifodaga keltirib qo‘yamiz:

Oxirgi ifodani a ga qisqartirib,

$$l_a^2 = \frac{bc(b+c)}{b+c} - \frac{a^2 \cdot b \cdot c}{(b+c)^2} = \frac{bc((b+c)^2 - a^2)}{(b+c)^2}$$

yoki

$$l_a = \frac{\sqrt{bc((b+c)^2 - a^2)}}{b+c}$$

ifodaga ega bo‘lamiz. Agar yuqoridagi kabi, $a + b + c = 2p$ deb belgilasak, $b + c - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a)$ bo‘ladi.

U holda oxirgi formula

$$l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}$$

ko‘rinishni oladi.

Yuqoridagiga o‘xshash amallar bajarib,

$$l_b = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{p(p-b)} \text{ va } l_c = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{p(p-c)}$$

formulalarni ham isbotlash mumkin.

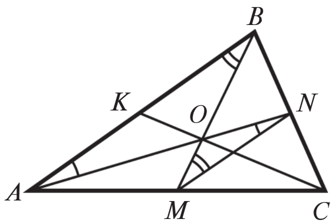
15- §. Uchburchakdagi ajoyib nuqtalar

1- teorema. ***Uchburchakning medianalari bitta nuqtada kesishadi va kesishish nuqtasida uchdan hisoblaganda 2:1 kabi nisbatda bo‘linadi.***

Isboti. M nuqta AC tomonning o‘rtasi, N nuqta BC tomonning o‘rtasi bo‘lsin deb faraz qilamiz, ya’ni $MA = MC$, $NB = NC$ (7.33-chizma). N nuqta B va C nuqtalar orasida yotganligidan, B va C nuqtalar AN to‘g‘ri chiziqdan turli tomonlarda yotadi. AN va AC to‘g‘ri chiziqlar uchun A nuqta umumiy, demak, ularning boshqa umumiy nuqtalari bo‘lishi mumkin emas. Shuning uchun AC to‘g‘ri chiziqda yotuvchi M nuqta va B nuqta AN to‘g‘ri chiziqdan turli tomonlarda yotadi. Natijada AN va BM medianalar biror O nuqtada kesishadi.

Modomiki, M va N, mos ravishda, AC va BC tomonlarning o‘rtalaridan iborat ekan, MN kesma $\triangle ABC$ ning o‘rta chizig‘i bo‘ladi va $MN \parallel AB$, $MN = \frac{AB}{2}$. Ikkita o‘zaro parallel AB va MN to‘g‘ri chiziqlar AN va BM to‘g‘ri chiziqlar bilan kesilgan. U vaqtda hosil bo‘lgan ichki almashinuvchi burchaklar o‘zaro teng: $\angle BAN = \angle ANM$, $\angle ABM = \angle BMN$. Endi $\triangle ABO$ da ikkita burchak $\triangle MON$ ning mos burchaklariga tengligidan, ular o‘xshash bo‘ladi, ya’ni $\triangle ABO \sim \triangle MON$, ularning mos tomonlari proporsional:

$$\frac{AO}{ON} = \frac{BO}{MO} = \frac{AB}{MN} = 2.$$



7.33- chizma.

Shunday qilib, AN va BM medianalar kesishish nuqtasi O da

$$\frac{AO}{ON} = \frac{BO}{MO} = \frac{2}{1}$$

nisbatda bo‘linadi.

BO va CO bissektrisalarni qarab chiqib, ular ham O kesishish nuqtasida

$$\frac{BO}{MO} = \frac{CO}{KO} = \frac{2}{1}$$

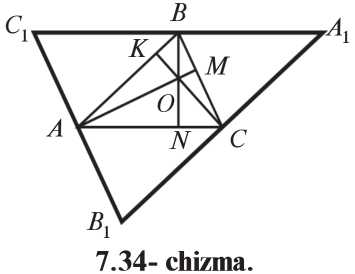
nisbatda bo‘linishini olamiz. Teorema isbotlandi.

2- teorema. ***Uchburchakning hamma balandliklari bitta nuqtada kesishadi.***

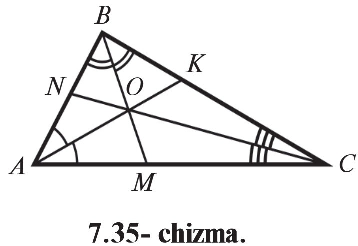
Isboti. Berilgan uchburchakning A, B, C uchlaridan uning qarama-qarshi tomonlariga parallel $A_1C_1 \parallel AC$, $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$ to‘g‘ri chiziqlarni o‘tkazamiz. Bu to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro kesishishi natijasida $\triangle A_1B_1C_1$ hosil bo‘ladi (7.34- chizma). Yasashga ko‘ra $C_1B \parallel AC$, $C_1A \parallel BC$, $A_1C \parallel AB$, $BA_1 \parallel AC$.

Shunday qilib, AC_1BC va ABA_1C to‘rtburchaklar parallelogramm va $C_1B = AC$, $BA_1 = AC$, $BA_1 \parallel AC$. Bundan $C_1B = BA_1$ bo‘lishini, ya’ni B nuqta A_1C_1 kesmaning o‘rtasi ekanligini olamiz. Shunga o‘xshash, A va C nuqtalar, mos ravishda, B_1C_1 va A_1B_1 tomonlarning o‘rtalari bo‘lishini ko‘rsatish mumkin. ABC uchburchakning B uchidan BN balandlik o‘tkazamiz. Lekin $\triangle A_1B_1C_1$ da BN balandlik uning A_1C_1 tomoniga o‘tkazilgan o‘rta perpendikulardir. Shunga o‘xshash, CK va MA balandliklar, mos ravishda, A_1B_1 va B_1C_1 tomonlarga o‘rta perpendikularlardan iborat. Har qanday uchburchakda o‘rta perpendikularlar bitta nuqtada kesishganligidan, MA, NB va KC balandliklarning bitta O nuqtada kesishishi kelib chiqadi.

1-ta’rif. Uchburchak balandliklarining kesishish nuqtasi O *uchburchakning ortomarkazi* deyiladi.



7.34- chizma.



7.35- chizma.

3 - t e o r e m a . ***Uchburchakning uchta bissektrisasi bitta nuqtada kesishadi.***

I s b o t i : $\triangle ABC$ ichki burchaklarining AK, BM va CN bissektrisalarini o‘tkazamiz (7.35-chizma). Modomiki, K nuqta BC kesmaning ichki nuqtasi bo‘lib, M nuqta AC tomonda yotar ekan, B va M nuqtalar AK bissektrisadan turli tomonlarda yotadi. Demak, AK va BM bissektrisalar bitta O nuqtada kesishadi. Burchak bissektrisasining xossasiga ko‘ra, O nuqta ichki A burchakning AC va AB tomonlaridan, shuningdek, B burchakning AB va BC tomonlaridan baravar uzoqlikda joylashgandir. Demak, O nuqta ichki C burchakning AC va BC tomonlaridan baravar uzoqlikda joylashgan, ya’ni O nuqta C burchakning CO bissektrisasida yotar ekan. Teorema isbotlandi.

2 - t a ’ r i f . Uchburchak burchaklari bissektrisalarining kesishish nuqtasi *uchburchakning inmarkazi* deyiladi.

16- §. Uchburchakning yuzi

Har bir geometrik shakl (uchburchak, ko‘pburchak va h.k) tekislikning ma’lum bir qismini egallaydi. Ularni taqqoslash imkoniyati bo‘lishi uchun „yuz“ tushunchasi kiritilgan. ,,Shaklning yuzi“ tushunchasi uchun quyidagi xossalar bajariladi (o‘rinli):

1. *Har bir shakl (ko‘pburchak, uchburchak) musbat son bilan ifodalangan yuzga ega.*

2. *Teng shakllar (uchburchak, ko‘pburchaklar) teng yuzga ega bo‘ladi.*

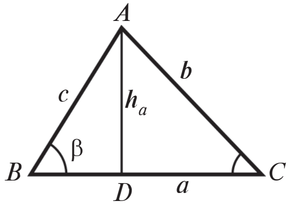
3. *Agar shakl (uchburchak, ko‘pburchak) bir necha qismlarga bo‘lingan bo‘lsa, uning yuzi uni tashkil qiluvchi qismlar yuzlarining yig‘indisiga teng.*

Bizga tomonlari $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ bo‘lgan $\triangle ABC$ berilgan bo‘lsin (7.36-chizma). Uchburchakning A uchidan $AD \perp BC$ balandlik o‘tkazamiz va uning uzunligini $AD = h_a$ deb belgilaymiz.

1. Agar $\triangle ABC$ da $BC = a$ asos va $AD = h_a$ balandlik ma’lum bo‘lsa, uchburchakning yuzi

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a \qquad (1)$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.



7.36- chizma.

2. $\triangle ABC$ da ikkita $BC = a$, $AB = c$ tomon va ular orasidagi $\angle B = \beta$ ma'lum bo‘lsin. Agar $AD = h_a$ uchburchakning balandligi bo‘lsa, to‘g‘ri burchakli $\triangle ABD$ dan

$$h_a = c \cdot \sin\beta$$

ekanligi kelib chiqadi. Natijada uchburchak yuzini hisoblash formulasi

(2)

ko‘rinishni oladi.

3. Agar $\triangle ABC$ ning uchta tomoni ham ma'lum, ya'ni $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ bo‘lsa, uchburchakning yuzi

$$S\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (3)$$

formula bo‘yicha hisoblanadi, bunda uchburchakning yarim perimetri.

(3) uchburchakning yuzi uchun *Geron formulasi* deyiladi.

Bu formulani keltirib chiqarish uchun kosinuslar teoremasidan foydalanamiz. Unga ko‘ra, , bundan

$$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{(2ac)^2}} = \frac{1}{2ac}\sqrt{(2ac)^2-(a^2+c^2-b^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2ac}\sqrt{(2ac-a^2-c^2+b^2)(2ac+a^2+c^2-b^2)} =$$

$$= \frac{1}{2ac}\sqrt{(b^2-(a-c)^2)((a+c)^2-b^2)} =$$

$$= \frac{1}{2ac}\sqrt{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}$$

bo‘ladi. Endi $a + b + c = 2p$ deb olib,

$$a + c - b = a + b + c - 2p = 2p - 2b = 2(p - b),$$
$$a + b - c = 2(p - c), \quad b + c - a = 2(p - a)$$

munosabatlarni olamiz. Natijada

bo‘ladi va uchburchakning yuzi formulasi talab qilingan

ko‘rinishni oladi.

4. Tomonlari $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ bo‘lgan $\triangle ABC$ ga r radiusli aylana ichki chizilgan bo‘lsin (7.37- chizma). Ichki chizilgan aylananing O markazini uchburchakning uchlari bilan tutashtiramiz va aylananing uchburchakka urinish nuqtalaridan aylananing radiuslarini o‘tkazamiz. Natijada $OD \perp AC$, $OE \perp AB$, $OF \perp BC$ bo‘ladi va $\triangle ABC$ uchta $\triangle OAC$, $\triangle OAB$, $\triangle OBC$ ga bo‘linadi. $\triangle ABC$ ning yuzi shu uchburchaklar yuzlarining yig‘indisiga teng bo‘ladi:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAC}.$$

Modomiki, $OD = OE = OF = r$ ekan, , $S_{\triangle OAC} =$

bo‘ladi va

ya’ni

$$S_{\triangle ABC} = p \cdot r, \tag{4}$$

bunda p — uchburchakning yarim perimetri, r — uchburchakka ichki chizilgan aylananing radiusi.

5. $\triangle ABC$ ga R radiusli aylana tashqi chizilgan bo‘lsin. 2-banddagi (2) formulaga asosan, uchburchakning yuzi

$$\ldots) = \frac{1}{2} r \cdot 2p = p \cdot r,$$

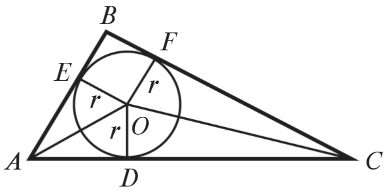
Sinuslar teoremasiga ko‘ra, $\frac{b}{\sin\beta} = 2R,$ bundan

U vaqtda $\triangle ABC$ ning yuzi unga tashqi chizilgan aylananing radiusi bilan

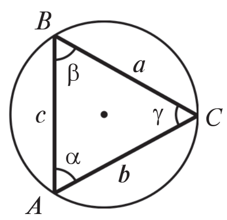
(5)

formula bo‘yicha bog‘langandir.

6. $\triangle ABC$ da tomonlar $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ bo‘lib, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ bo‘lsin (7.38-chizma). 2- banddagi formulaga ko‘ra, $S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\gamma$. Sinuslar teoremasidan,



7.37- chizma.



7.38- chizma.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \quad \text{va} \quad b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}.$$

b ning topilgan qiymatini (2) formulaga qo‘yamiz, natijada uchburchakning yuzini hisoblash formulasi

$$S = \frac{a^2 \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2\sin\alpha} \tag{6}$$

ko‘rinishni oladi.

7. Uchburchakning yuzini unga tashqi chizilgan aylananing radiusi va uchburchakning burchaklari orqali ifodalash ham mumkin. Sinuslar teoremasidan

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

bo‘lganligidan, $a = 2R \sin\alpha$, $b = 2R \sin\beta$, $c = 2R \sin\gamma$. Hosil qilingan ifodalarni 5-banddagi (5) formulaga qo‘ysak, uchburchakning yuzini hisoblash uchun yangi

(7)

formulani olamiz.

17- §. Qo‘shimcha ma’lumotlar

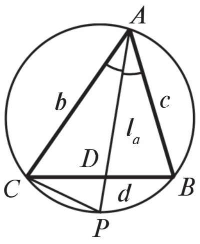
1-teorema. ***Agar $\triangle ABC$ da $AB = c$, $AC = b$ bo‘lib, AD bissektrisa BC tomonni $BD = n$, $DC = m$*** (7.39- chizma) ***kesmalarga ajratsa, uchburchakning $AD = l_a$ bissektrisasi uchun***

$$l_a^2 = b \cdot c - m \cdot n$$

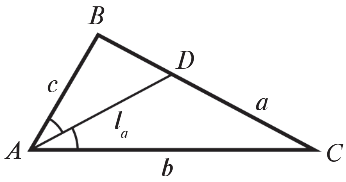
tenglik bajariladi.

Isboti. $\triangle ABC$ ga tashqi aylana chizamiz va AD bissektrisani aylana bilan P nuqtada kesishguncha davom ettiramiz. $PD = d$ deb belgilaymiz. Aylananing kesishuvchi vatarlari xossasidan $CD \cdot DB = AD \cdot DP$ yoki $m \cdot n = l_a \cdot d$ bo‘ladi. C va P nuqtalarni tutashtiramiz. U holda AC yoyga tiralgan burchaklar sifatida $\angle CAP = \angle DAB$, $\angle APC = \angle ABD$ bo‘lganligidan, $\triangle ACP \quad \triangle ABD$. Natijada

bo‘ladi. Bundan



7.39- chizma.



7.40- chizma.

ya'ni teorema isbotlandi.

2-teorema. ***Agar berilgan*** $\triangle ABC$ ***da*** $AB = c$, $AC = b$ ***tomonlar va ular orasidagi*** $\angle A = \alpha$ ***ma'lum bo'lsa, A burchakning*** $AD = l_a$ ***bissektrisasi*** (7.40-chizma)

formula bo'yicha topiladi.

* Isboti. $\triangle ABC$ ning yuzini ikki usul bilan hisoblaymiz:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha;$$

$$l_a^2 + l_a d = bc, \quad l_a^2 = bc - l_a \cdot d = bc - mn,$$

$$l_a = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CAD} = \frac{1}{2} c \cdot l_a \cdot \sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} b \cdot l_a \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(b+c) \cdot l_a \cdot \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Bu ifodalarning o'ng tomonlarini tenglashtiramiz:

$$\frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}(b+c) \cdot l_a \cdot \sin\frac{\alpha}{2},$$

$$b \cdot c \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = (b+c) \cdot l_a \cdot \sin\frac{\alpha}{2},$$

bu yerdan talab qilingan

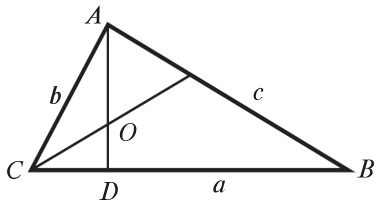
$$l_a = \frac{2bc \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}$$

formulani hosil qilamiz. Teorema isbotlandi.

Yuqoridagiga o'xshash yo'l bilan

$$l_a = \frac{2ac \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{a+c}, \quad l_c = \frac{2ab \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$$

formulalarni ham isbotlash mumkin.



7.41- chizma.

3-teorema. ***$\triangle ABC$ da $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$*** (7.41-chizma) ***va O uchburchakning inmarkazi bo'lsin. U holda O inmarkazdan uchburchakning uchlarigacha bo'lgan masofalar***

$$AO = \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}; \quad BO = \sqrt{\frac{ac(p-b)}{p}}; \quad CO = \sqrt{\frac{ab(p-c)}{p}}$$

formulalar bo'yicha topiladi.

Isboti. AO va CO uchburchakning O nuqtada kesishadigan bissektrisalari bo'lsin. Yuqorida isbotlanganiga ko'ra $CD = \frac{ab}{b+c}$. CO kesma $\triangle ADC$ ning bissektrisasi bo'lganligidan, bissektrisaning yuqorida isbotlangan asosiy xossasiga ko'ra

$$\frac{DO}{OA} = \frac{DC}{AC} = \frac{ab}{b(b+c)} = \frac{a}{b+c}.$$

U holda shunday $x > 0$ topiladiki, $OD = a \cdot x$, $AO = (b + c)\,x$ bo'ladi.

Bissektrisani hisoblash formulasidan foydalanib,

$$AD = AO + OD = ax + (b + c)\,x;$$

bo'lishini ko'ramiz. Bu yerdan

chunki $a + b + c = 2p$.

Endi $AO = (b + c)x$ bo'lganligidan, x ning qiymatiga qo'ysak, talab qilingan

formulani hosil qilamiz. BO va CO lar uchun mos formulalar shunga o'xshash isbotlanadi.

Tarixiy ma'lumotlar

Uchburchak bilan bog'liq bo'lgan masalalar O'rta Osiyoning ko'pchilik olimlari tomonidan qaralgan.

Muhammad al-Xorazmiy „Al-jabr val-muqobala" kitobining ikkinchi qismi geometriyaga bag'ishlangan. U uchburchakning turini aniqlash uchun uning tomonlari kvadratlarini qaragan. Agar katta tomonning kvadrati kichik tomonlar kvadratlari yig'indisiga teng bo'lsa, u to'g'ri burchakli bo'ladi; o'tkir burchakli uchburchakda kichik tomonlar kvadratlarining yig'indisi uchinchi tomon kvadratidan katta, o'tmas burchakli uchburchakda esa kichik bo'ladi, degan xulosa berilgan. Al-Xorazmiy Pifagor teoremasini teng yonli to'g'ri burchakli uchburchak uchun isbot qilgan. U tomonlari $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$ bo'lgan uchburchakning yuzini $S = \frac{1}{2} c \cdot h_c$ formula bo'yicha hisoblagan, u shuningdek, yer maydonlari yuzini ham hisoblashlarni bajargan.

Ibn Sino o'zining „Donishnoma" asarida uchburchaklarning tomonlari va burchaklari orasidagi bog'lanishlarni, uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi haqidagi teoremani, uchburchaklarning tengligi alomatlarini va nihoyat, quyidagi: agar uchburchaklar umumiy asosga ega bo'lib, ularning uchlari asosga parallel to'g'ri chiziqda yotsa, ular teng yuzli bo'ladi, degan teoremani ham qaragan.

Shakllar xossalari haqidagi bilimlarning yetarli emasligi, ko'p masalalar bayonini qiyinlashtirgan.

? *Takrorlash uchun savol va topshiriqlar*

1. Uchburchak deb nimaga aytiladi?
2. Qanday shart bajarilganda berilgan uchta *a*, *b*, *c* kesmadan uchburchak yasash mumkin?
3. Uchburchakning medianasi deb nimaga aytiladi?
4. Uchburchakning bissektrisasi deb nimaga aytiladi?
5. Uchburchakning balandligi deb nimaga aytiladi?
6. Uchburchakning perimetri deb nimaga aytiladi?
7. Muntazam uchburchakning ta'rifi berilsin.
8. To'g'ri burchakli uchburchakning ta'rifi berilsin.
9. Qanday uchburchaklar teng deyiladi?

10. Uchburchaklar tengligining alomatlari ta'riflansin.
11. Teng yonli uchburchakning xossasi ta'riflansin.
12. Qanday uchburchakda medianalar, balandliklar va bissektrisalarning kesishish nuqtalari ustma-ust tushadi?
13. To‘g‘ri burchakli uchburchakning balandliklari qaysi nuqtada kesishadi?
14. Teng yonli uchburchak deb nimaga aytiladi?
15. Uchburchakka ichki chizilgan aylananing markazi qanday topiladi?
16. Uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazi qanday topiladi?
17. Kosinuslar teoremasi.
18. Sinuslar teoremasi.
19. Tangenslar teoremasi.
20. Uchburchak yuzini hisoblash formulalari.
21. Uchburchakka tashqi chizilgan aylananing radiusini topish formulasi.
22. Uchburchakka ichki chizilgan aylananing radiusini topish formulasi.
23. To‘g‘ri burchakli uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazi qayerda joylashgan bo‘ladi?
24. Uchburchakning og‘irlik markazi, ortomarkazi va inmarkazi qanday topiladi?
25. Qanday uchburchaklar o‘xshash deyiladi?
26. Uchburchaklarning o‘xshashlik alomatlari.
27. Uchburchak bissektrisasining xossasi.
28. Uchburchak medianalarini topish formulalari.
29. Uchburchak balandliklarini topish formulalari.
30. Uchburchak bissektrisalarini topish formulalari.
31. To‘g‘ri burchakli uchburchak katetlarining xossalari.
32. Pifagor teoremasi.
33. To‘g‘ri burchakli uchburchakning gipotenuzasiga o‘tkazilgan balandligi xossasi.
34. Uchburchakning o‘rta chizig‘i va uning xossalari.
35. Uchburchakning tashqi burchagi va uning xossalari.
36. Uchburchakdagi qanday nuqtalar uning ajoyib nuqtalari deyiladi?
37. To‘g‘ri burchakli uchburchakka ichki chizilgan aylana radiusini uchburchak tomonlari orqali ifodalash.
38. Stuart teoremasi.
39. O‘xshash uchburchaklarning yuzlari qanday nisbatda bo‘ladi?
40. O‘xshash uchburchaklarning perimetrlari qanday nisbatda bo‘ladi?

Mustaqil yechish uchun masalalar

A GURUH

1. Uchburchakning tomonlari 18, 24 va 32 sm bo‘lib, bu uchburchakning o‘rta chiziqlari o‘tkazilgan. Yangi uchburchak perimetri topilsin.

J a v o b: 37 sm.

2. Uchburchak burchaklaridan biri 40°, ikkinchisi undan 30° ortiq bo‘lsa, uchburchakning uchinchi burchagi topilsin va turi aniqlansin.

J a v o b: 70°, teng yonli.

3. Teng yonli uchburchakning uchidagi burchagi 70°. Asosidagi burchaklarning bissektrisalari o‘tkazilgan. Shu bissektrisalar orasidagi uchburchakning asosiga qaragan burchak topilsin.

J a v o b: 125°.

4. Teng yonli uchburchakning yon tomoni 10 sm, perimetri 36 sm bo‘lsa, uchburchakning asosiga o‘tkazilgan balandlik topilsin.

J a v o b: 6 sm.

5. Uchburchakning ikki tomoni 7 va 8 sm, ular orasidagi burchak 120° bo‘lsa, uchburchakning uchinchi tomoni topilsin.

J a v o b: 13 sm.

6. To‘g‘ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi 5 dm, katetlaridan biri 30 sm. Shu katetning gipotenuzaga proyeksiyasi topilsin.

J a v o b: 18 sm.

7. Agar berilgan $\triangle ABC$ va $\triangle A_1B_1C_1$ da $AB = 4$ sm, $BC = 6$ sm, $AC = 8$ sm, $A_1B_1 = 6$ sm, $B_1C_1 = 9$ sm va $A_1C_1 = 12$ sm bo‘lsa, bu uchburchaklar o‘xshash bo‘ladimi?

J a v o b: Ha.

B GURUH

8. Uchburchakning bir tomoni 16 sm, ikkinchi tomoni undan 1,5 marta katta. Uning uchinchi tomoni ikkita tomon yig‘indisining 30 % ini tashkil etadi. Uchburchakning perimetri topilsin.

J a v o b: 52 sm.

9. O‘xshash $\triangle ABC$ va $\triangle A_1B_1C_1$ berilgan. $\triangle ABC$ning eng katta tomoni 18 sm, perimetri 39 sm, $\triangle A_1B_1C_1$ ning eng kichik tomoni esa 3 sm bo‘lsin. Agar o‘xshashlik koeffitsiyenti 3 ga teng bo‘lsa, $\triangle A_1B_1C_1$ ning o‘rta tomoni topilsin.

J a v o b : 4 sm.

10. To‘g‘ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi 122 sm, katetlari esa 5 : 6 kabi nisbatda. Uchburchak katetlarining gipotenuzaga proyeksiyalari topilsin.

J a v o b : 50 va 72 sm.

11. Teng yonli uchburchakning asosi sm, yon tomonining medianasi 5 sm bo‘lsa, uchburchakning yon tomoni topilsin.

J a v o b : 6 sm.

12. Uchburchakning ikkita tomoni uzunliklari 6 va 3 sm. Agar berilgan tomonlarga o‘tkazilgan balandliklar yig‘indisining yarmi uchburchakning uchinchi balandligiga teng bo‘lsa, uning uchinchi tomoni uzunligi topilsin.

J a v o b : 4 sm.

13. To‘g‘ri burchakli uchburchakka ichki chizilgan aylananing markazidan AB gipotenuzaning uchlarigacha bo‘lgan masofalar va . AB gipotenuzaning uzunligi topilsin.

J a v o b : 5.

14. Uchburchak o‘tkir burchaklarining sinuslari mos ravishda va , tashqi chizilgan aylananing radiusi esa 32,5 sm ga teng. Uchburchakning tomonlari topilsin va uning yuzi hisoblansin.

J a v o b : 25, 39, 56 sm, 420 sm^2.

C GURUH

15. To‘g‘ri burchakli uchburchakning katetlari 15 va 20 sm. To‘g‘ri burchakning uchidan balandlik va bissektrisa o‘tkazilganda gipotenuza qanday kesmalarga bo‘linadi?

J a v o b i :

16. Uchburchakning tomonlari 13, 14 va 15 sm. Markazi o‘rta tomonida bo‘lib, uchburchakning qolgan ikki tomoniga uringan yarimaylananing uzunligi topilsin.

J a v o b: 6π.

17. To‘g‘ri burchakli $\triangle ABC$ ning AB gipotenuzasiga C uchdan o‘tkazilgan CO mediana va CE balandliklar nisbatini $BO : BE = 5 : 1$ kabi bo‘lganda aniqlang.

J a v o b:

18. Agar uchburchak medianalarining uzunliklari $m_a = 3$, $m_b = 4$, $m_c = 5$ sm bo‘lsa, uchburchakning yuzi hisoblansin.

J a v o b: 8 sm^2.

19. Teng yonli uchburchakning uchidagi burchagi α ga teng. Uchburchakka ichki chizilgan va tashqi chizilgan doiralar radiuslari nisbati topilsin.

J a v o b:

20. $\triangle ABC$ ning A, B, C burchaklari va $AK = m$ medianasi ma’lum bo‘lsa, uning yuzi hisoblansin.

J a v o b: $\dfrac{2m^2 \sin A \sin B \sin C}{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}$.

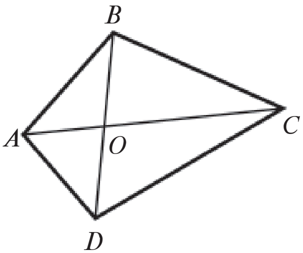
21. Teng yonli uchburchakning asosi b, asosidagi burchagi α ga teng bo‘lganda uning perimetri topilsin.

J a v o b:

VIII BOB TO‘RTBURCHAKLAR

1- §.Ta’riflar, umumiy xossalar

T a ’ r i f . *To‘rtburchak* deb, ixtiyoriy uchtasi bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan to‘rtta *A, B, C, D* nuqta va ularni ketma-ket tutashtiruvchi *AB, BC, CD, AD* kesmalardan tashkil topgan shaklga aytiladi.



8.1- chizma.

Bunda *A, B, C, D* nuqtalar to‘rtburchakning *uchlari, AB, BC, CD, AD* kesmalar esa uning *tomonlari* deyiladi (8.1- chizma).

To‘rtburchakning qarama-qarshi uchlarini tutashtiruvchi *AC* va *BD* kesmalar to‘rtburchakning *diagonallari* deyiladi. To‘rtburchak barcha tomonlarining uzunliklari yig‘indisi uning *perimetri* deyiladi.

To‘rtburchakning tomonlaridan birini, masalan, *DC* tomonni davom ettiramiz. Faraz qilaylik, bunda *ABCD* to‘rtburchak *DC* to‘g‘ri chiziqdan bir tomonda yotsin. Agar to‘rtburchak o‘z tomonlarining har biriga nisbatan ana shunday xossaga ega bo‘lsa, u *qavariq* deb ataladi.

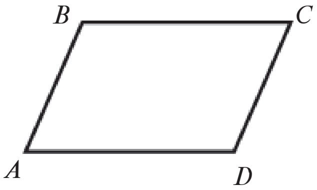
1 - t e o r e m a . ***Qavariq to‘rtburchakning diagonallari kesishadi.***

I s b o t i . *ABCD* to‘rtburchak qavariq bo‘lganligidan, uning *A* va *B* uchlari hamda *CA* va *CB* nurlar *CD* to‘g‘ri chiziqdan bir tomonda yotadi. Shunga o‘xshash, *CA* va *DA* nurlar ham *CD* to‘g‘ri chiziqdan bir tomonda yotadi. Demak, *AC* nur $\angle BAD$ ning tomonlari orasida yotadi. Bunda *AC* to‘g‘ri chiziq *B* va *D* nuqtalarni ajratadi, ya’ni *BD* kesmani va u bilan birga *BD* to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tadi. *AC* va *BD* to‘g‘ri chiziqlar faqat bitta nuqtada kesishadi. Shunday qilib, *AC* va *BD* diagonallar kesishadi. Teorema isbotlandi.

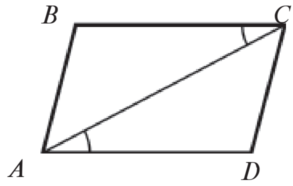
2- §. Parallelogramm

T a ’ r i f . Qarama-qarshi tomonlari juft-juft parallel bo‘lgan to‘rtburchak *parallelogramm* deyiladi.

Ta’rifga ko‘ra *ABCD* parallelogramm bo‘lsa, $AB \parallel CD$ va $BC \parallel AD$ (8.2- chizma).



8.2- chizma.



8.3- chizma.

Parallelogrammning quyidagi alomatlari muhimdir.

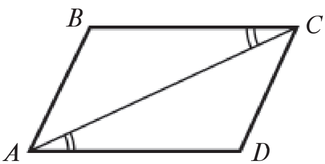
1 - t e o r e m a (birinchi alomat). ***Agar to'rtburchakning qarama-qarshi tomonlari juft-juft o'zaro teng bo'lsa, bu to'rtburchak parallelogrammdan iborat.***

Teoremada $ABCD$ to'rtburchak uchun $AB = CD$, $BC = AD$ (8.3-chizma) bo'lsa, $AB \parallel CD$ va $BC \parallel AD$ ekanligini isbotlash talab qilinadi.

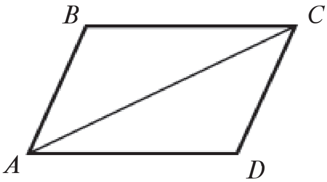
I s b o t i. $ABCD$ to'rtburchakning AC diagonalini o'tkazamiz, natijada to'rtburchak uchta tomoni bo'yicha o'zaro teng bo'lgan ikkita $\triangle ABC$ va $\triangle ACD$ ga ajraladi, ya'ni $\triangle ABC = \triangle ACD$. Ma'lumki, teng uchburchaklarda teng tomonlar qarshisida teng burchaklar yotadi, shuning uchun, $\angle CAD = \angle BCA$. Lekin bu burchaklar AD va BC to'g'ri chiziqning uchinchi AC to'g'ri chiziq bilan kesishishi natijasida hosil qilingan. Demak, ular ichki almashinuvchi burchaklardir, shu sababli, $BC \parallel AD$. Ikkinchi tomondan, $\angle BAC = \angle ACD$ va ular AB va CD to'g'ri chiziqlarning AC kesuvchi bilan kesishishi natijasida hosil qilingan ichki almashinuvchi burchaklardir. Bundan $AB \parallel CD$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $ABCD$ — parallelogrammdir.

2 - t e o r e m a (ikkinchi alomat). ***Agar to'rtburchakning ikkita qarama-qarshi tomoni o'zaro teng va parallel bo'lsa, berilgan to'rtburchak parallelogrammdir.***

I s b o t i. Berilgan $ABCD$ to'rtburchakda $BC = AD$ va $BC \parallel AD$ (8.4-chizma) bo'lganda $AB \parallel CD$ ekanligini isbotlash talab qilinadi. To'rtburchakda AC diagonal o'tkazamiz. U vaqtda ikkita parallel BC va AD to'g'ri chiziqlarni AC kesuvchi kesganda hosil bo'lgan ichki almashinuvchi burchaklar o'zaro tengdir, ya'ni $\angle BCA = \angle CAD$.



8.4- chizma.



8.5- chizma.

Shartga ko‘ra, $BC = AD$ va AC umumiy tomon bo‘lganligidan $\triangle ABC = \triangle ACD$ bo‘ladi va bunda $\angle BAC = \angle ACD$. Lekin bu burchaklar ikkita AB va CD to‘g‘ri chiziqni uchinchi AC kesuvchi kesib o‘tganda hosil qilingan ichki almashinuvchi burchaklardir. Shu sababli, $AB \parallel CD$, demak, $ABCD$ parallelogrammdan iborat.

Paralellogrammning xossalarini ko‘rib chiqamiz.

3-teorema. ***Parallelogrammda: a) qarama-qarshi burchaklar o‘zaro teng, b) qarama-qarshi tomonlar o‘zaro teng.***

$ABCD$ parallelogrammda $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, $AB = CD$, $BC = AD$ bo‘lishini isbotlash talab qilinadi.

Isboti. Parallelogrammning ta’rifiga ko‘ra $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Unda AC diagonalni o‘tkazamiz (8.5- chizma). Natijada $\angle BAC = \angle ACD$ va $\angle BCA = \angle CAD$ bo‘ladi.

Demak, bitta AC tomon va unga yopishgan ikkita teng burchaklariga ko‘ra, $\triangle ABC = \triangle ADC$ bo‘ladi. Bundan,

$$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = \angle ACD + \angle BCA = \angle BCD,$$

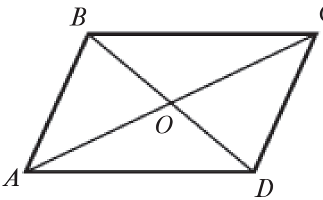
bo‘ladi. Shunday qilib, biz parallelogrammning qarama-qarshi burchaklari o‘zaro tengligini isbotladik.

Ma’lumki, teng ABC va ADC uchburchaklarda teng burchaklar qarshisida teng tomonlar yotadi. Shu sababli $AB = CD$ va $BC = AD$, ya’ni qarama-qarshi tomonlarning ham o‘zaro teng ekanligi isbotlandi.

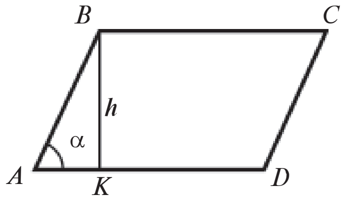
4-teorema. ***Parallelogrammning diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi.***

$ABCD$ parallelogrammda AC, BD diagonallar berilgan, $AC \quad BD = O$ (8.6- chizma); $AO = OC$, $BO = OD$ bo‘lishini isbotlash talab qilinadi.

Isboti. $ABCD$ parallelogramm bo‘lganligidan, $BC = AD$, $AB = CD$, $BC \parallel AD$, $AB \parallel CD$. U holda BC va AD parallel to‘g‘ri chiziqlar va AC kesuvchi vositasida hosil bo‘lgan ichki almashinuvchi burchaklar sifatida $\angle BCA = \angle CAD$ bo‘ladi. Shunga



8.6- chizma.



8.7- chizma.

o‘xshash, $\angle CBD = \angle ADB$ (chunki $BC \parallel AD$, BD — kesuvchi). Natijada bitta tomoni va unga yopishgan ikkita burchagi bo‘yicha $\triangle BOC = \triangle AOD$. Ma’lumki, teng uchburchaklarda teng burchaklar qarshisida teng tomonlar yotadi, shuning uchun $AO = OC$ va $BO = OD$, ya’ni xossa isbotlandi.

5-teorema. ***Parallelogrammning bitta tomoniga yopishgan burchaklarining yig‘indisi 180° ga teng.***

Isboti. Haqiqatan, $BC \parallel AD$ va AB kesuvchi bo‘lganligidan (8.6- chizma), ichki bir tomonli burchaklarning yig‘indisi sifatida $\angle BAD + \angle ABC = 180°$, ya’ni xossa isbotlandi.

Parallelogrammning yuzi. $ABCD$ parallelogrammda:

$S = a \cdot b \cdot \sin\alpha$

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\gamma$

a) AD asos a ga, $BK \perp AD$ balandlik esa h ga teng (8.7-chizma), ya’ni $AD = a$, $BK = h$ bolsin. U holda, ma’lumki, parallelogrammning yuzi

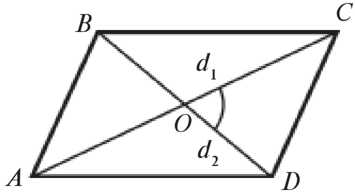
$$S = a \cdot h$$

formula orqali hisoblanadi;

b) agar parallelogrammning ikkita qo‘shni $AD = a$, $BA = b$ tomoni va ular orasidagi $\angle BAD = \alpha$ ma’lum bo‘lsa (8.7- chizma), uning yuzi

formula orqali hisoblanadi;

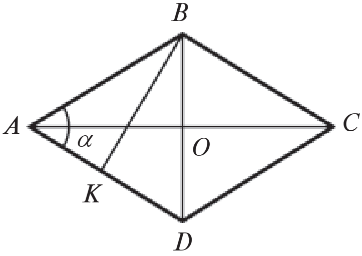
d) agar parallelogrammning diagonallari $AC = d_1$, $BD = d_2$ va ular orasidagi burchak $\angle COD = \gamma$ bo‘lsa (8.8-chizma), parallelogrammning yuzi



8.8- chizma.

formula orqali hisoblanadi.

3- §. Romb



8.9- chizma.

T a ’ r i f. Barcha tomonlari teng bo‘lgan parallelogramm *romb* deyiladi.

Ta’rifdan rombning parallelogrammga xos barcha xossalarga ega ekanligi kelib chiqadi.

Rombning faqat o‘ziga xos bo‘lgan xossalarini qarab chiqamiz. Buning uchun $ABCD$ rombda (8.9- chizma) AC va BD diagonallarni o‘tkazamiz. $AB = CD$ bo‘lganligidan, $\triangle ABC$ teng yonlidir, ya’ni $\angle BAC = \angle BCA$ va OB mediana bu uchburchakda ham bissektrisa, ham balandlik bo‘ladi. $\angle ABO = \angle OBC$, $OB \perp AC$.

Shunga o‘xshash, qolgan $\triangle ADC$, $\triangle ABD$, $\triangle BDC$ larni ham qarab chiqib, rombning quyidagi xossalariga ega bo‘lamiz.

1. *Rombning diagonallari uning burchaklarini teng ikkiga bo‘ladi, ya’ni ular romb ichki burchaklarining bissektrisalaridan iborat.*

2. *Rombning diagonallari o‘zaro perpendikulardir.*

3. *Agar rombning tomoni uzunligi* $AD = a$, *balandligi* $BK = h$ *ma’lum bo‘lsa (8.9-chizma), rombning yuzi*

$$S = a \cdot h$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.

4. *Agar rombning burchaklaridan biri* $\angle BAD = \alpha$ *ma’lum bo‘lsa* (8.9- chizma), *uning yuzi*

$$S = a^2 \cdot \sin\alpha$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.

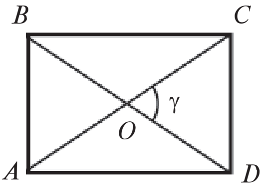
5. *Rombning diagonallari uzunliklari* $AC = d_1$, $BD = d_2$ *ma’lum bo‘lsa, romb yuzining formulasi*

ko‘rinishni oladi.

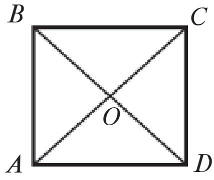
4- §. To‘g‘ri to‘rtburchak. Kvadrat

T a ’ r i f. Barcha burchaklari to‘g‘ri burchaklardan iborat parallelogramm *to‘g‘ri to‘rtburchak* deyiladi.

Ta’rifga ko‘ra, to‘g‘ri to‘rtburchak ham parallelogrammning



8.10-chizma.



8.11-chizma.

barcha xossalariga ega. *ABCD* to‘g‘ri to‘rtburchakning *AC* va *BD* diagonallarini o‘tkazamiz (8.10- chizma). Natijada hosil bo‘lgan *ABD* va *ACD* uchburchaklar to‘g‘ri burchakli bo‘lib, ikkita katet bo‘yicha $\triangle ABD = \triangle ACD$. Demak, ularning gipotenuzalari ham teng, $AC = BD$, ya’ni to‘g‘ri to‘rtburchakning diagonallari o‘zaro tengdir.

Agar to‘g‘ri to‘rtburchakda $AD = a$, $AB = b$ tomonlar (uzunliklari) ma’lum bo‘lsa, uning yuzi

$$S = a \cdot b$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.

Agar to‘g‘ri to‘rtburchakda diagonallari uzunligi va ular orasidagi burchak γ ma’lum bo‘lsa, uning yuzi

$$S = a^2 \text{ yoki } S = \frac{1}{2} d^2$$

$$S = \frac{1}{2} d^2 \sin \gamma$$

formula bo‘yicha hisoblanadi (8.10- chizma).

2-t a ’ r i f. Barcha tomonlari o‘zaro teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak *kvadrat* deb aytiladi.

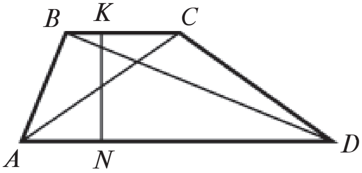
Ta’rifga ko‘ra kvadrat parallelogramm, romb va to‘g‘ri to‘rtburchakning xossalariga ega:

1. *Kvadratning diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi* (8.11- rasm): $OA = OC$, $BO = OD$.
2. *Kvadratning diagonallari uning simmetriya o‘qlaridir.*
3. *Kvadratning diagonallari o‘zaro perpendikulardir.*

Agar kvadratning $AB = a$ tomoni yoki $AC = d$ diagonali ma’lum bo‘lsa, kvadratning yuzi

formula bo‘yicha hisoblanadi.

5- §. Trapetsiya



8.12- chizma.

T a ' r i f. Ikkita tomoni o'zaro parallel bo'lib, qolgan ikkita tomoni o'zaro parallel bo'lmagan to'rtburchak *trapetsiya* deyiladi.

Trapetsiyaning o'zaro parallel ikki tomoni uning *asoslari* deyiladi. Qolgan ikkita tomoni uning *yon tomonlari* deyiladi.

Trapetsiyaning qo'shni juft-juft uchlarini tutashtiruvchi AC va BD kesmalar uning *diagonallari* deyiladi (8.12- chizma).

Trapetsiya yuqori asosining ixtiyoriy K nuqtasidan AD pastki asosga perpendikular ravishda o'tkazilgan KN kesma trapetsiyaning *balandligi* deyiladi. Odatda, trapetsiyaning balandligi yoki B uchdan, yoki C uchdan o'tkaziladi.

Trapetsiya yon tomonlarining o'rtalari bo'lgan M va N nuqtalarni tutashtiruvchi MN kesma uning *o'rta chizig'i* deyiladi (8.13-chizma).

Yon tomonlari o'zaro teng bo'lgan trapetsiya *teng yonli* deyiladi.

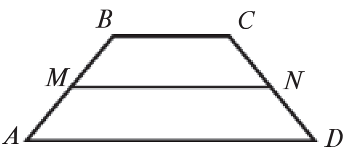
Agar trapetsiyaning bitta yon tomoni uning asoslariga perpendikular bo'lsa, u *to'g'ri burchakli* deyiladi (8.14- chizma).

Bundan buyon $ABCD$ trapetsiyaning asoslarini $AD = a,\ BC = b$ bilan, yon tomonlarini $AB = l_1$, $CD = l_2$ bilan, balandligini h bilan belgilaymiz.

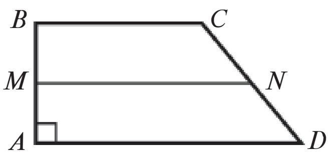
1 - t e o r e m a . ***Trapetsiyaning o'rta chizig'i uning asoslariga parallel va asoslari yig'indisining yarmiga teng.***

MN — trapetsiyaning o'rta chizig'i, ya'ni $MA = MB$ va $DN = NC$ bo'lsin, u holda $MN \parallel AD$ va $MN = \frac{AD + BC}{2}$ bo'lishini isbotlash talab qilinadi.

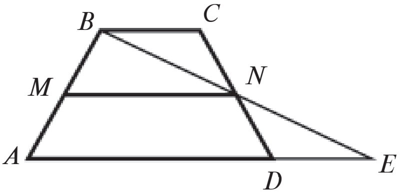
I s b o t i . B va N nuqtalardan BN to'g'ri chiziq o'tkazamiz va uni trapetsiya AD tomonining davomi bilan E nuqtada kesishguncha davom ettiramiz. Natijada ikkita BNC va DNE



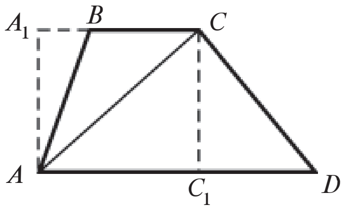
8.13- chizma.



8.14- chizma.



8.15- chizma.



8.16- chizma.

uchburchakni hosil qilamiz (8.15- chizma). Shartga ko‘ra $CN =$ $= ND$, vertikal burchaklar sifatida $\angle BNC = \angle DNE$ bo‘lganligidan hamda ikkita parallel BC va DE to‘g‘ri chiziq va ularni CD to‘g‘ri chiziq bilan kesganda hosil bo‘lgan burchaklar sifatida $\angle BCN =$ $= \angle NDE$ bo‘lganligidan, $\triangle BNC = \triangle NDE$. Uchburchaklarning tengligidan, $BN = NE$ va $BC = DE$ bo‘ladi.

Demak, MN kesma $\triangle ABE$ ning o‘rta chizig‘idir. Uchburchak o‘rta chizig‘ining xossasiga ko‘ra $MN \parallel AE$ va $MN =$ $AE =$ $=$ $(AD + DE) =$ $(AD + BC)$. Teorema isbotlandi.

2 - t e o r e m a . ***Trapetsiyaning yuzi uning asoslari yig‘indi-sining yarmi bilan balandligining ko‘paytmasiga teng.***

$\frac{1}{2}$ $S = \frac{a+b}{2}h$

Agar $ABCD$ trapetsiyaning asoslari $AD = a$, $BC = b$, balandligi $CC_1 = AA_1 = h$ bo‘lsa (8.16- chizma), trapetsiyaning yuzi

formula bo‘yicha hisoblanishini isbotlash talab qilinadi.

I s b o t i . Trapetsiyaning AC diagonalini o‘tkazamiz, natijada trapetsiya ikkita, ACD va ABC uchburchakka ajraladi. A va C nuqtalardan $AA_1 \perp BC$ va $CC_1 \perp AD$ balandliklar o‘tkazamiz. $AD \parallel BC$ bo‘lganligidan, $CC_1 = AA_1 = h$ bo‘ladi. Shu sababli, ACD va ABC uchburchaklarning yuzlari

$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}ah; \;\; S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bh$$

formulalar bo‘yicha hisoblanadi. Trapetsiyaning yuzi esa

$$S = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ABC}, \text{ ya'ni } S = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{a+b}{2}h$$

bo‘ladi. Teorema isbotlandi.

6- §. To‘rtburchakning yuzi

1-teorema. ***Qavariq to‘rtburchakning yuzi uning diagonallari ko‘paytmasining yarmi bilan ular orasidagi burchak sinusining ko‘paytmasiga teng.***

ABCD qavariq to‘rtburchakda $AC = d_1$, $BD = d_2$ diagonallari va ular orasidagi $\angle COD = \alpha$ burchak ma’lum bo‘lsin. U holda to‘rtburchakning yuzi

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$$

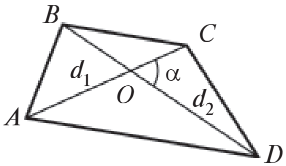
formula bo‘yicha hisoblanishini isbotlash kerak.

Isboti. Qavariq *ABCD* to‘rtburchakning *AC, BD* diagonallari (8.17-chizma) to‘rtburchakni to‘rtta *AOB*, *BOC*, *COD*, *AOD* uchburchakka bo‘ladi. Ma’lumki, $\angle AOB = \angle COD = \alpha$, $\angle BOC = \angle AOD = 180° - \alpha$, u holda

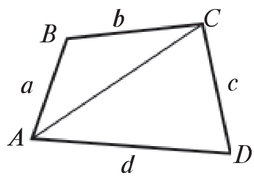
$$S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} CO \cdot OD \cdot \sin\alpha, \quad S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} AO \cdot OD \cdot \sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2} AO \cdot OD \cdot \sin\alpha.$$

Demak, *ABCD* to‘rtburchakning yuzi

bo‘ladi.



8.17- chizma.



8.18- chizma.

Shartga ko‘ra, $AC = d_1$, $BD = d_2$ bo‘lganligidan talab qilingan

munosabatni olamiz.

Faraz qilaylik, *a, b, c, d* — to‘rtburchakning tomonlari va

uning yarimperimetri bo‘lsin.

2-teorema. ***Tomonlari a, b, c, d bo‘lgan ABCD to‘rtburchakning yuzi***

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{\angle B + \angle D}{2}}$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.

Isboti. To‘rtburchakning AC diagonalini o‘tkazamiz (8.18-chizma). U holda to‘rtburchakning yuzi uchun $S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}(ab \sin\angle B + cd \sin\angle D)$ formula o‘rinli bo‘ladi. Bu ifodani ikkiga ko‘paytirib, kvadratga ko‘taramiz:

$$4S^2 = a^2b^2\sin^2\angle B + 2abcd\sin\angle B\sin\angle D + c^2d^2\sin^2\angle D =$$
$$= a^2b^2 - a^2b^2\cos^2\angle B + c^2d^2 - c^2d^2\cos^2\angle D + 2abcd\sin\angle B\sin\angle D.$$

$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$ $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ Bu yerdan

$$a^2b^2\cos^2\angle B + c^2d^2\cos\angle D = a^2b^2 + c^2d^2 +$$
$$+2abcd\sin\angle B\sin\angle D - 4S^2. \qquad (*)$$

Ikkinchi tomondan, kosinuslar teoremasiga ko‘ra, $\triangle ABC$ va $\triangle ACD$ lardan

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle B = c^2 + d^2 - 2cd\cos\angle D$$

bo‘lishini olamiz. Bundan

$$2(ab\cos\angle B - cd\cos\angle D) = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$$

bo‘ladi. Bu tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko‘taramiz:

$$4(a^2b^2\cos^2\angle B - 2abcd\cos\angle B\cos\angle D + c^2d^2\cos^2\angle D) =$$
$$= (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2,$$

u holda (*) ifodadan foydalansak,

$$4(a^2b^2 + c^2d^2 - 4S^2 + 2abcd\sin\angle B\sin\angle D -$$
$$-2abcd\cos\angle B\cos\angle D) = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$

bo‘ladi.

Bundan

$$16S^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 8abcd\,(\sin\angle B \sin\angle D - \\ - \cos\angle B \cos\angle D) = 4a^2b^2 + 8abcd + 4c^2d^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - \\ - 8abcd - 8abcd\cos(\angle B + \angle D) = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - \\ - d^2)^2 - 8abcd\cos(1 + \cos(\angle B + \angle D)) = (2ab + 2cd - a^2 - \\ - b^2 + c^2 + d^2)(2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2) - 16abcd\cos^2$$

$$((a + b)^2 - (c - d)^2) - 16abcd\cos^2$$

$$= (2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c)(2p - 2d) - 16abcd\cos^2$$

$$=$$

Natijada

formulani hosil qilamiz.

7- §. Aylanaga ichki va tashqi chizilgan to‘rtburchaklar

Agar to‘rtburchakning uchlari aylanada yotsa, u *aylanaga ichki chizilgan to‘rtburchak* deyiladi.

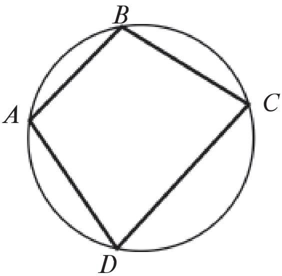
1 - t e o r e m a . ***Aylanaga ichki chizilgan to‘rtburchakning qarama-qarshi burchaklari yig‘indisi 180° ga teng.***

I s b o t i . *ABCD* to‘rtburchak aylanaga ichki chizilgan bo‘lsin (8.19- chizma). U holda to‘rtburchakning har bir burchagi aylanaga ichki chizilgan bo‘ladi va o‘zi tiralgan yoyning yarmi bilan o‘lchanadi:

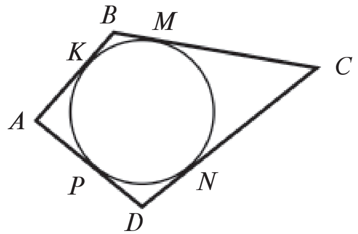
$$\angle A = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD},\ \angle B = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ADC},\ \angle C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD},\ \angle D = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ABC}.$$

U holda

Teorema isbotlandi.



8.19- chizma.



8.20- chizma.

2- teorema (teskari teorema). ***Agar to'rtburchakning qarama-qarshi burchaklari yig'indisi 180° ga teng bo'lsa, bu to'rtburchakka tashqi aylana chizish mumkin.***

Isboti. Haqiqatan, agar *ABCD* to'rtburchakda (8.19-chizma) $\angle A+\angle C=180^\circ$, $\angle B+\angle D=180^\circ$ tengliklar o'rinli bo'l-sa, $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=180^\circ+180^\circ=360^\circ$, ya'ni aylana kattaligini beradi.

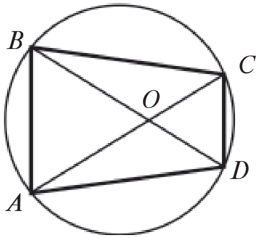
3-teorema. ***Aylanaga tashqi chizilgan to'rtburchakning qarama-qarshi tomonlari uzunliklari yig'indilari o'zaro teng.***

Isboti. *ABCD* to'rtburchakka aylana ichki chizilgan bo'lsin (8.20- chizma). Aylananing to'rtburchak tomonlari bilan urinish $\frac{OA}{OB}=\frac{AD}{BC}=\frac{OD}{OC}$ nuqtalarini ketma-ket *K, M, N, P* lar bilan belgilaymiz. Bitta nuqtadan o'tkazilgan urinmalarning kesmalari teng bo'lganligidan, $AK=AP$, $BK=BM$, $CM=CN$, $DN=DP$ bo'ladi. Endi qarama-qarshi tomonlarning uzunliklari yig'indisini qaraymiz: $AB+CD=AK+KB+CN+ND=AP+BM+CM+DP=AD+BC.$

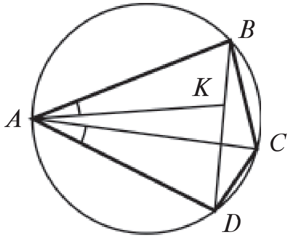
Teorema isbotlandi.

4-teorema. ***Aylanaga ichki chizilgan to'rtburchak diagonallari uzunliklarining nisbati diagonallar uchida tutashadigan tomonlar uzunliklari ko'paytmasi yig'indilarining nisbati kabi bo'ladi.***

Isboti. *ABCD* ichki chizilgan to'rtburchak bo'lib, uning diagonallari *O* nuqtada kesishsin (8.21-chizma). Ravshanki, $\triangle$ $\triangle$ chunki vertikal burchaklar sifatida $\angle OAD=\angle BOC$ hamda $\angle DAO=\angle OBC=\frac{1}{2}\overset{\smile}{DC}$. U holda o'xshash uchburchaklarda Bu munosabatlardan $\frac{OA}{AB\cdot AD}=\frac{OB}{AB\cdot BC}$, $\frac{OC}{BC\cdot CD}=\frac{OD}{AD\cdot CD}$ tengliklarni yozish mumkin.



8.21- chizma.



8.22- chizma.

Bundan tashqari, $\triangle$ $\triangle$ bo‘lishi yuqoridagiga o‘xshash isbotlanadi. Bundan

$$\frac{OA}{OD}=\frac{AB}{CD} \text{ va } \frac{OA}{AB\cdot AD}=\frac{OD}{AD\cdot CD}$$

tengliklarni olamiz. Olingan munosabatlarni taqqoslab,

kabi yozish mumkin. Endi birinchi va uchinchi nisbatlar dastlab-ki hadlari yig‘indisining keyingilari yig‘indisiga nisbatini tuzamiz, ikkinchi va to‘rtinchi nisbatlar bilan ham xuddi shunday amallar bajarib, talab qilingan

ifodani hosil qilamiz. Teorema isbotlandi.

5-teorema (Ptolemey). ***Aylanaga ichki chizilgan to‘rtburchak diagonallarining ko‘paytmasi to‘rtburchak qarama-qarshi tomonlari ko‘paytmalari yig‘indisiga teng*** (8.22- chizma):

(*)

Isboti. To‘rtburchakning A uchidan AK nurni shunday o‘tkazamizki, $\angle BAK = \angle CAD$ bo‘lsin, bunda K nuqta AK nurning to‘rtburchak BD diagonali bilan kesishish nuqtasi. Ikkita $\triangle BAK$ va $\triangle CAD$ ni qaraymiz. Yasashga ko‘ra, $\angle BAK = \angle CAD$ va

$\angle ABK = \angle ACD =$ Demak, ular o‘xshash, ya’ni $\triangle$

$\triangle$ O‘xshash uchburchaklarda mos tomonlar nisbatini tuzamiz:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BK}.$$

Bundan

$$AC \cdot BK = AB \cdot CD \qquad (1)$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Endi $\triangle AKD$ va $\triangle ABC$ ni qaraymiz. Ularda teng burchaklardan hosil qilingan burchaklar sifatida, $\angle ADK = \angle ABC$, $\angle BAC = \angle DAK$. Shu sababli, $\triangle$ $\triangle$ bo‘ladi va ularning mos tomonlari nisbatlari

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DK} \text{ va } AC \cdot DK = AD \cdot BC \qquad (2)$$

kabi bo‘ladi. (1) va (2) tengliklarni hadma-had qo‘shamiz:
$AC \cdot BK + AC \cdot DK = AB \cdot CD + AD \cdot BC \Rightarrow AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$, ya’ni talab qilingan (*) tenglikni olamiz.

1 - n a t i j a . *Aylanaga ichki chizilgan to‘rtburchakning yuzi*

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{\angle B + \angle D}{2}}$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.

$AKD \backsim \quad ABC$

2 - n a t i j a . *Aylanaga tashqi chizilgan to‘rtburchakning yuzi*

$$S^2 = abcd\sin^2\frac{\angle B + \angle D}{2}$$

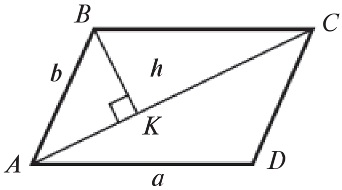
formula bo‘yicha hisoblanadi.

Masala yechish namunalari

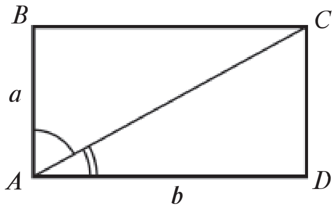
1 - m a s a l a . Parallelogrammning uchidan uning diagonaliga o‘tkazilgan perpendikular diagonalni uzunliklari 6 va 15 sm bo‘lgan kesmalarga bo‘ladi. Agar parallelogramm tomonlarining ayirmasi 7 sm bo‘lsa, parallelogrammning tomonlari va diagonallari topilsin.

Y e c h i l i s h i . Shartga ko‘ra, $BK \perp AC$, $AK = 6$ sm, $KC = 15$ sm, $AD - AB = 7$ sm (8.23-chizma). $AD = a$, $AB = b$, $BK = h$ belgilashlarni kiritamiz. To‘g‘ri burchakli $\triangle ABK$ va $\triangle BKC$ lardan Pifagor teoremasi bo‘yicha quyidagi sistemani olamiz:

$$\begin{cases} h^2 = b^2 - 6^2, \\ h^2 = a^2 - 15^2, \\ a - b = 7. \end{cases}$$



8.23- chizma.



8.24- chizma.

Bu sistema tenglamalarida h noma’lumni yo‘qotib,

$$\begin{cases} a^2 - 225 = b^2 - 36, \\ a - b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 189, \\ a - b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b)(a-b) = 189, \\ a - b = 7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7(a+b) = 189, \\ a - b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 27, \\ a - b = 7 \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasini olamiz. Natijada parallelogrammning tomonlari uchun $2a = 34$, $2b = 20$ va $a = 17$, $b = 10$ qiymatlarni olamiz.

Parallelogramm diagonallari kvadratlarining yig‘indisi uning barcha tomonlari kvadratlarining yig‘indisiga teng:

$$AC^2 + BD^2 = 2(AD^2 + AB^2).$$

Bu munosabatdan,

$$BD^2 = 2(17^2 + 10^2 = 2(289 + 100) - 144 = 337, \; BD = \sqrt{337}$$

qiymatlarni hosil qilamiz.

J a v o b: 17, 10, 21, $\sqrt{337}$.

2 - m a s a l a . To‘g‘ri to‘rtburchakning diagonali uning burchagini $m : n$ kabi nisbatda bo‘ladi. To‘g‘ri to‘rtburchak perimetrining uning diagonaliga nisbati topilsin.

Y e c h i l i s h i . $ABCD$ to‘g‘ri to‘rtburchakda $AD = b$, $AB = a$ bo‘lsin. Unda AC diagonalni o‘tkazamiz (8.24- chizma). U holda burchak o‘lchovini x bilan belgilasak, $\angle BAC = mx$, $\angle CAD = nx$ deb yozish mumkin. Burchak o‘lchovi x ni

$$mx + nx = 90^\circ$$

tenglamadan topamiz: Shuning uchun

$AC = d$ bo‘lsa, to‘g‘ri burchakli $\triangle\ ABC$ dan:

$$a = d\cos\angle BAC,\quad b = d\sin\angle BAC$$

yoki

$$a = d\cos\frac{\pi m}{2(m+n)},\quad b = d\sin\frac{\pi m}{2(m+n)};$$

$$p = 2\left(\cos\frac{\pi m}{2(m+n)} + \sin\frac{\pi m}{2(m+n)}\right)d.$$

Bu tenglikning har ikki tomonini ga ham ko‘paytirib, ham bo‘lamiz:

$$= 2\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi m}{2(m+n)} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi m}{2(m+n)}\right] =$$

$$= 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi m}{2(m+n)}\right) = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi(m+n-2m)}{4(m+n)} =$$

$$= 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi(m-n)}{4(m+n)}$$

yoki

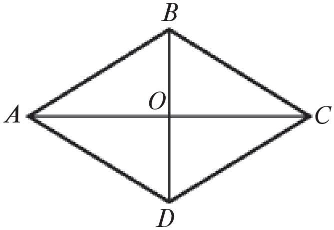
[illegible] $\angle BAO = \alpha$ [illegible] $d_1 = 2a\cos\alpha,\ d_2 = 2a\sin\alpha$

Javob:

3 - m a s a l a . Romb perimetrining uning diagonallari yig‘indisiga nisbati k ga teng bo‘lsa, rombning burchaklari topilsin.

Y e c h i l i s h i . Rombning tomoni $AB = a,$ diagonallari $AC = d_1$ $BD = d_2$ (8.25-chizma) bo‘lsin. U holda $p = 4a$ va deb belgilaymiz. To‘g‘ri burchakli $\triangle AOB$ dan

ekanligini olamiz. Ulardan foydalanib, shartga ko‘ra, $\dfrac{4a}{2a\cos\alpha + 2a\sin\alpha,} = k,$ tenglamani olamiz. Oxirgi tenglamaning har ikki tomonini kvadratga ko‘taramiz:



8.25-chizma.

$$\sin^2 2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{4}{k^2},\ \sin 2\alpha = \frac{4}{k^2} - 1,\ \sin 2\alpha = \frac{4-k^2}{k^2}.$$

$$-1 \le \frac{4-k^2}{k^2} \le 1, \qquad -k^2 \le 4 - k^2 \le k^2.$$

Shunday qilib, rombning burchaklari

bunda $k > \sqrt{2}$ bo‘ladi.

J a v o b: $\arcsin\dfrac{4-k^2}{k^2},\ \pi - 2\alpha = \pi - \arcsin\dfrac{4-k^2}{k^2}.$

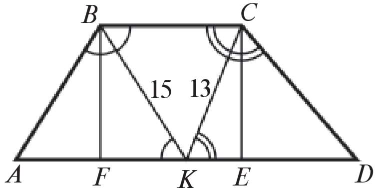
4 - m a s a l a. Trapetsiyaning asosidagi o‘tmas burchaklarning bissektrisalari uning ikkinchi asosida kesishadi va 13, 15 sm ga teng. Agar trapetsiyaning balandligi 12 sm bo‘lsa, uning tomonlari topilsin.

Y e c h i l i s h i. Shartga ko‘ra $BC \parallel AD$ ekan (8.26- chizma), $\angle CBK = \angle AKB,\ \angle BCK = \angle CKD$ bo‘ladi. $\triangle AKB$ da $\angle CBK = \angle ABK = \angle AKB$ va shuning uchun $AB = AK$ bo‘ladi. $\triangle CKD$ da $\angle BCK = \angle KCD = \angle CDK$ va shuning uchun $KC = KD$ bo‘ladi. Demak, $KD = 13$ sm, $AK = 15$ sm. U holda $AD = AK + KD = 15 + 13 = 28$ sm. Trapetsiyaning B va C uchlaridan BF va CE balandliklarni o‘tkazamiz. Natijada hosil qilingan to‘g‘ri burchakli $\triangle BFK$ va $\triangle KCE$ lardan: $FE = FK + KE = 9 + 5 = 14$ sm. U holda $AF = 15 - 9 = 6$ sm. Endi trapetsiyaning tomonlarini topamiz:

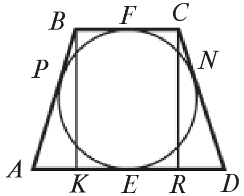
$$AB^2 = AF^2 + BF^2 = 6^2 + 12^2 = 144 + 36 = 180,\ AB = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}.$$

J a v o b: 26, 14, $6\sqrt{5}$ sm.

5 - m a s a l a. Trapetsiyaning asoslaridan biri 7 sm. Trapetsiyaga ichki chizilgan aylana uning yon tomonlaridan birini 4 va



8.26- chizma.



8.27- chizma.

9 sm uzunlikdagi kesmalarga bo‘ladi. Trapetsiyaning yuzi hisoblansin.

Y e c h i l i s h i . Shartga ko‘ra $BC = 7$ sm, $BP = 4$ sm, $AP = 9$ sm (8.27-chizma). BC, CD va AD tomonlarning aylana bilan urinish nuqtalarini, mos ravishda, F, N, E bilan belgilaymiz. Berilgan nuqtadan aylanaga o‘tkazilgan urinmalarning xossasidan, $BF = BP = 4$ sm, $AE = AP = 9$ sm, $CF = CN$, $DN = DE$, $CF = 7 - 4 = 3$ sm bo‘lishi kelib chiqadi.

Endi $DN = DE = x$ deb belgilaymiz. U vaqtda to‘g‘ri burchakli $\triangle CRD$ dan Pifagor teoremasiga asosan,

$$CD^2 = CR^2 + RD^2$$

yoki

$$(x+3)^2 = 12^2 + (x-3)^2, \quad x^2 + 6x + 9 = 144 + x^2 - 6x + 9,$$

Bundan trapetsiyaning pastki asosi

$$AD = AE + ED = 9 + 12 = 21 \text{ sm}$$

bo‘ladi. Nihoyat, trapetsiyaning yuzi

$$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BK, \quad S = \frac{21 + 7}{2} \cdot 12 = 168.$$

J a v o b : 168 sm^2.

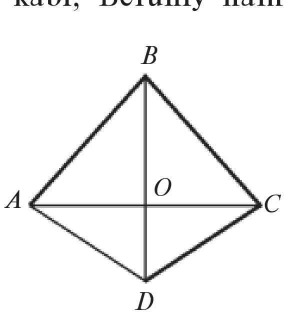
Tarixiy ma’lumotlar

To‘rtburchaklar ulug‘ qomusiy olim Abu Rayhon Beruniy tomonidan batafsil qaralgan. U to‘rtburchaklarni quyidagi turlarga bo‘ladi: *kvadrat (murabba’), to‘g‘ri to‘rtburchak (mustatil), romb (muayyan), trapetsiya (muxarrif)*. Evklid kabi, Beruniy ham parallelogrammni to‘rtburchaklar soniga kiritmaydi va uni alohida qarab chiqadi.

Abu Ali ibn Sino to‘rtburchaklarni qarab chiqib, quyidagi teoremalarni isbotlagan:

1. Agar to‘rtburchaklarning qarama-qarshi tomonlari parallel va teng bo‘lsa, uning diagonali to‘rtburchakni teng bo‘ladi.

2. Uchlari parallel to‘g‘ri chiziqlarda



8.28- chizma.

yotgan, qarama-qarshi tomonlari parallel va umumiy asosga ega to'rtburchaklar bir xil kattalikda bo'ladi.

G'iyosiddin Jamshid al-Koshiy $ABCD$ to'rtburchakning yuzini $BD = BC$, $AD = DC$ hamda $AC = a$ va $BD = b$ diagonallar o'zaro perpendikular bo'lgan holda hisoblagan.

Al-Koshiy yechimi quyidagicha: $ABCD$ to'rtburchakning BD katta diagonali O kesishish nuqtasida $BO = b_1$, $OD = b_2$ qismlarga bo'lingan bo'lsin. U vaqtda to'rtburchakning tomonlari

$$AB = BC = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b_1^2}\,,\; AD = DC = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b_2^2}$$

kabi hisoblanadi. Berilgan $ABCD$ to'rtburchakning yuzi uni tashkil qiluvchi shakllar $\triangle ABC$ va $\triangle ADC$ yuzlarining yig'indisi deb qaraladi:

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC}\,,$$

lekin

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BO,\;\; S_{\triangle ADC} + \frac{1}{2} AC \cdot OD$$

bo'lgani uchun,

Al-Xorazmiy yuzni hisoblash formulasi ni bilgan, bunda, d_1, d_2 — rombning diagonallari.

? *Takrorlash uchun savol va topshiriqlar*

1. Parallelogramm deb nimaga aytiladi?
2. To'g'ri to'rtburchak, kvadrat nima?
3. Romb deb nimaga aytiladi?
4. Trapetsiyaning ta'rifi berilsin.
5. To'rtburchakning diagonali deb nimaga aytiladi?
6. Qanday to'rtburchaklarning diagonallari teng?
7. Qanday to'rtburchaklar simmetriya o'qlariga ega va ularning soni nechta?
8. To'rtburchakning simmetriya markazi nima?
9. Parallelogramm diagonallarining xossalari.

10. Parallelogramm diagonallari va tomonlari orasidagi bog'lanishni ifodalovchi tenglik yozilsin.
11. Qanday to'rtburchaklarning diagonallari to'g'ri burchak ostida kesishadi?
12. Qanday to'rtburchakka ichki aylana chizish mumkin?
13. Qanday shartlarda to'rtburchakka ichki aylana chizish mumkin?
14. Qanday shartlarda to'rtburchakka tashqi aylana chizish mumkin?
15. Trapetsiyaning o'rta chizig'i xossasi isbotlansin.
16. Trapetsiyaning diagonallari qachon o'zaro teng bo'ladi?
17. Parallelogrammning yuzi.
18. To'g'ri to'rtburchak, kvadratning yuzi.
19. Rombning yuzi.
20. Trapetsiyaning yuzi qanday hisoblanadi?
21. Qavariq to'rtburchakning yuzi uning diagonali orqali qanday ifodalanadi?

Mustaqil yechish uchun masalalar

A GURUH

1. To'g'ri to'rtburchakning bo'yi 32 sm, uning eni esa bo'yidan 2 marta kichik. To'g'ri to'rtburchakning perimetri topilsin.

J a v o b : 96 sm.

2. To'g'ri to'rtburchakning tomonlari $3+2a$ va $9+a$ bo'lsin. a ning qanday qiymatlarida to'g'ri to'rtburchak kvadratga aylanadi?

J a v o b : 6.

3. Rombning diagonallari 12 va 16 sm. Rombning perimetri topilsin.

J a v o b : 40 sm.

4. Kvadratning diagonali 12 sm bo'lsa, uning yuzi hisoblansin.

J a v o b : 72 sm^2.

5. Rombning diagonali uning tomoni bilan $35°$ li burchak tashkil qiladi. Rombning burchaklari topilsin.

J a v o b : $70°$; $110°$.

6. Parallelogrammning tomonlari 12 va 10 sm, uning yuzi esa 60 sm^2 bo'lsa, parallelogrammning katta balandligi topilsin.

J a v o b : 6 sm.

7. Teng yonli trapetsiyaning asoslari 16 va 10 sm, yon tomoni esa 5 sm bo'lsa, trapetsiyaning yuzi hisoblansin.

J a v o b : 52 sm^2.

B GURUH

8. Parallelogrammning katta tomoni 12 sm, parallelogramm o'tkir burchagining bissektrisasi uning qarama-qarshi tomonida 8 sm kesma kesib o'tadi. Parallelogrammning perimetri topilsin.

J a v o b : 40 sm.

9. To'g'ri to'rtburchak tomonlari 8 va 12 sm. Agar uning har bir tomoni 25% ga orttirilsa, to'g'ri to'rtburchakning yuzi qanday o'zgaradi?

J a v o b : 54 sm^2 ga ortadi.

10. Agar kvadratning tomonlari 3 marta orttirilsa, uning yuzi qanday o'zgaradi?

J a v o b : 9 marta ortadi.

11. Kvadrat tomonlarining o'rtalari tutashtirilgan. Berilgan va yangi hosil qilingan to'rtburchaklar yuzlarining nisbati topilsin.

J a v o b : 2.

12. O'tkir burchagi 30° bo'lgan rombga yuzi Q ga teng bo'lgan doira ichki chizilgan. Rombning yuzi hisoblansin.

J a v o b :

13. Rombning yuzi S, diagonallarining nisbati $m : n$ kabi bo'lsa, uning perimetri hisoblansin.

J a v o b :

14. Yuzi 169π sm^2 bo‘lgan doiraga to‘g‘ri to‘rtburchak ichki chizilgan. To‘g‘ri to‘rtburchakning tomonlaridan biri 24 sm bo‘lsa, uning ikkinchi tomoni topilsin.

J a v o b: 10 sm.

C GURUH

15. Teng yonli trapetsiyaning yon tomoni 15 sm, diagonali esa yon tomonga perpendikular va 20 sm. Trapetsiyaning yuzi hisoblansin.

J a v o b: 192 sm^2.

16. Teng yonli trapetsiyaning balandligi h bo‘lib, diagonallari esa o‘zaro perpendikular. Agar unga ichki aylana chizish mumkin bo‘lsa, trapetsiyaning o‘rta chizig‘i topilsin.

J a v o b: $\frac{3\sqrt{2}}{4}h$

17. $ABCD$ parallelogrammning AD va CD tomonlarida, mos ravishda, shunday K va M nuqtalar tanlanganki, $DK : MC = 1 : 1$ kabidir. Hosil bo‘lgan $\triangle DKM$ yuzining $BCDK$ to‘rtburchakning yuziga nisbati topilsin.

J a v o b: 1:5 kabi.

18. $ABCD$ trapetsiyaning asosi $AD = 16$ m, O nuqta AC va BD diagonallarning kesishish nuqtasi bo‘lib, $S_{\triangle ABO} : S_{\triangle BOC} = 2$ bo‘lsin. Agar trapetsiyaning balandligi $h = 12$ m bo‘lsa, uning yuzi hisoblansin.

J a v o b: 126 m^2.

19. Teng yonli trapetsiyaga R radiusli aylana ichki chizilgan. Agar trapetsiyaning yuqori asosi uning balandligidan ikki marta kichik bo‘lsa, trapetsiyaning yuzi hisoblansin.

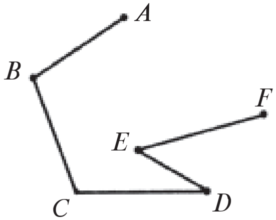
J a v o b: $5R^2$.

20. $ABCD$ rombda $AB = 2$ sm, $\angle A = 60°$ bo‘lsin. AB tomonni diametr qilib doira yasalgan. Rombning ana shu doiradan tashqaridagi qismining yuzi hisoblansin.

J a v o b: $\left(\frac{7}{4}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$sm^2.

IX BOB | KO‘PBURCHAKLAR

1- §. Asosiy ta’riflar va xossalar



9.1- chizma.

1-t a ’r i f. Birining uchi ikkinchisining oxiri bilan ketma-ket tutashtirilgan *AB, BC, CD, DE, EF* kesmalardan tuzilgan shakl *ABCDEF siniq chiziq* deyiladi (9.1-chizma).

Bunda *A, B, C, D, E, F* nuqtalar siniq chiziqning *uchlari, AB, BC, CD, DE, EF* kesmalar uning *bo‘g‘inlari, A* va *F* nuqtalar esa siniq chiziqning *oxirlari* deyiladi.

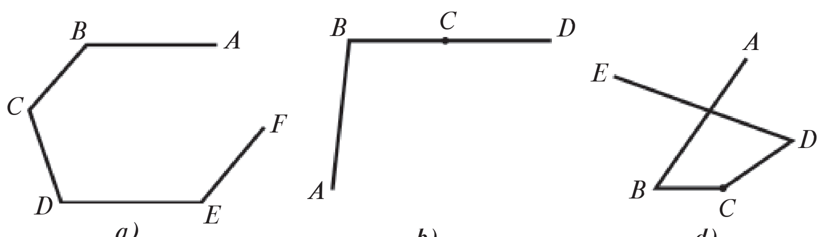
Agar siniq chiziqning hech qanday uchta nuqtasi to‘g‘ri chiziqda yotmasa va uning hech qanday bo‘g‘inlari ichki nuqtalarda kesishmasa, u *sodda siniq chiziq* deyiladi (9.2- *a* chizma).

Siniq chiziqning bo‘g‘inlari uzunliklarining yig‘indisi uning *perimetri* deyiladi. Ravshanki, *ABCDE* siniq chiziqning perimetri uning oxirlari orasidagi *AE* masofadan kichik emas (9.3-chizma).

Haqiqatan, siniq chiziqning bitta uchini uning qarshisidagi bo‘g‘inlari bilan tutashtirib, $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ va $\triangle ADE$ ni hosil qilamiz. Bu uchburchaklarning har biri uchun uchburchak tengsizligini qo‘llab, $AB + BO > AC$, $AC + CD > AD$, $AD + DE > AE$ munosabatlarni olamiz. Hosil bo‘lgan tengsizliklar bir tipli bo‘lganligidan, ularni hadma-had qo‘shish mumkin:

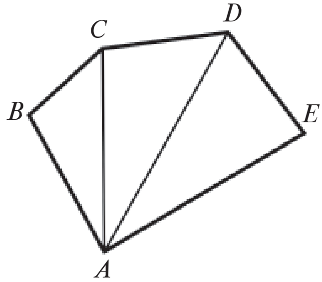
$$AB + BC + AC + CD + AD + DE > AC + AD + AE.$$

O‘xshash hadlarni ixchamlab, talab qilingan



9.2- chizma.

$$AB + BC + CD + DE > AE$$



9.3- chizma.

tengsizlikni hosil qilamiz.

Agar siniq chiziqning oxirlari ustma-ust tushsa, u *yopiq siniq chiziq* deyiladi.

2 - t a ' r i f. Tekislikning sodda yopiq siniq chiziq bilan chegaralangan qismi *ko'pburchak* deyiladi.

Siniq chiziqning uchlari va bo'g'inlari, mos ravishda, ko'pburchakning *uchlari* va *tomonlari* deyiladi. Tomonlari soni eng kam bo'lgan ko'pburchak uchburchakdan iborat. Ko'pburchakning nomi uning tomonlari soniga bog'liq ravishda aytiladi.

3 - t a ' r i f. Ko'pburchakning bitta tomonida yotmagan ikkita uchini tutashtiruvchi kesma uning *diagonali* deyiladi.

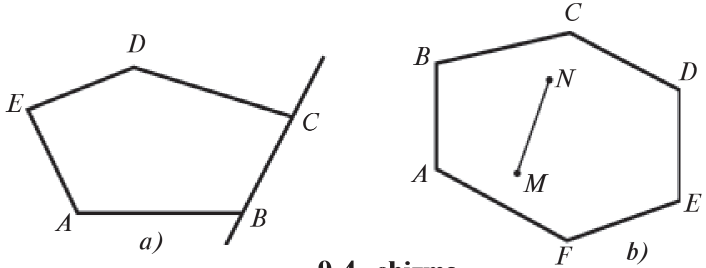
Uchburchakning diagonallari yo'q, to'rtburchak esa ikkita diagonalga ega.

4 - t a ' r i f. Ko'pburchak barcha tomonlari uzunliklarining yig'indisi uning *perimetri* deyiladi.

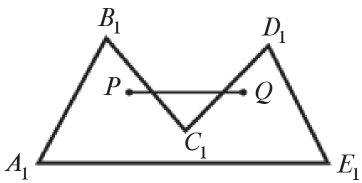
Har qanday ko'pburchak tekislikni ikki qismga bo'ladi: ko'pburchak tomonlari bilan chegaralangan qism ko'pburchakning *ichki sohasi,* ko'pburchakdan tashqarida yotgan qism uning *tashqi sohasidir.*

Bizga $ABCDE$ ko'pburchak berilgan bo'lsin. Uning tomonlaridan istalgan bittasini, masalan, BC ni davom ettiramiz (9.4- *a* chizma). Agar ko'pburchak shu BC to'g'ri chiziqning bir tomonida yotsa, u *qavariq ko'pburchak* deyiladi.

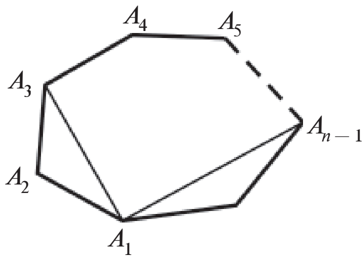
Qavariq ko'pburchakda uning ichki sohasidagi istalgan ikkita M va N nuqtani tutashtiruvchi MN kesma shu sohada to'liq yotadi (9.4- *b* chizma). 9.5-chizmadagi ko'pburchakda esa uning ichki P va Q nuqtalarini tutashtiruvchi PQ kesma ko'pburchak-



9.4- chizma.



9.5- chizma.



9.6- chizma.

ning ichki sohasida ham, tashqi sohasida ham yotadi. Shu sababli $A_1B_1C_1D_1E_1$ *qavariq bo'lmagan* ko'pburchak deyiladi. Agar, masalan, qavariq bo'lmagan $A_1B_1C_1D_1E_1$ ko'pburchakning C_1D_1 tomonini davom ettirsak, u C_1D_1 to'g'ri chiziqdan turli tomonlarda joylashgan ikkita ko'pburchakka ajraladi.

1-teorema. ***Qavariq n burchak ichki burchaklarining yig'indisi* 180° (*n* – 2) *ga teng.***

Isboti. Faraz qilaylik, $A_1 A_2 \ldots A_n$ qavariq n burchak berilgan bo'lsin. Uning uchlaridan birini, masalan, A_1 nuqtani qolgan uchlari bilan tutashtiramiz va uchburchaklar hosil qilamiz (9.6-chizma). Hosil qilingan $A_1 A_2 A_3$ va $A_1 A_{n-1} A_n$ uchburchaklarning har biri berilgan ko'pburchakning ikkitadan tomoni orqali ifodalansa, qolgan uchburchaklarning har biriga ko'pburchakning bitta tomoni kiradi, xolos. Shuning uchun hosil qilingan uchburchaklarning soni $n-2$ ta bo'ladi. Uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi 180° ga teng bo'lganligidan, qavariq n burchak ichki burchaklarining yig'indisi $180°\ (n-2)$ ga teng bo'ladi. Teorema isbotlandi.

2- §. Muntazam ko'pburchaklar

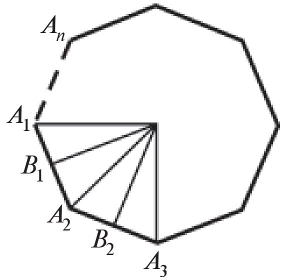
5-ta'rif. Agar qavariq ko'pburchakning: a) barcha tomonlari; b) barcha ichki burchaklari o'zaro teng bo'lsa, u *muntazam ko'pburchak* deyiladi.

Yuqorida ko'pburchak ichki burchaklarning yig'indisi $180°(n-2)$ ga teng ekanligini isbotladik. Unda muntazam ko'pburchakning ichki burchagi

$$\frac{180°(n-2)}{n}$$

ga teng bo'lishi kelib chiqadi, bunda n — ko'pburchak tomonlarining soni.

2- t e o r e m a . ***Muntazam n burchakka ichki aylana chizish mumkin* va *uning atrofida tashqi aylana chizish ham mumkin.***



9.7- chizma.

I s b o t i . Bizga $A_1A_2A_3...A_n$ muntazam ko'pburchak berilgan bo'lsin. Ko'pburchakning ikki qo'shni A_1 va A_2 uchlaridan ko'pburchak ichki burchaklarining bissektrisalarini o'tkazamiz (9.7- chizma). Ular O nuqtada kesishgan bo'lsin. Agar ko'pburchakning ichki burchagi α ga teng bo'lsa, $\angle OA_1A_2 = =\angle A_1A_2O = \angle OA_2A_3 = \frac{\alpha}{2}$ bo'ladi, bundan $\triangle OA_1A_2$ ning teng yonli ekanligi kelib chiqadi va demak, $OA_1 = OA_2$. Endi O nuqtani A_3 uch bilan tutashtiramiz. Natijada hosil qilingan $\triangle OA_1A_2$ va $\triangle OA_2A_3$ ikkitadan tomonlari va ular orasidagi burchagi bo'yicha o'zaro teng bo'ladi: OA_2 – umumiy tomon, $A_1A_2 = A_2A_3$ va $\angle A_1A_2O = \angle OA_2A_3 =$. Bundan $OA_3 = OA_2$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $\triangle OA_2A_3$ teng yonli va $\angle A_1A_2O = \angle OA_2A_3 =$, ya'ni OA_3 kesma $\angle A_2$ ichki burchakning

$\frac{\alpha}{2}$ bissektrisasidir. Keyingi ketma-ket OA_3A_4, OA_4A_5,..., $OA_{n-1}A_n$ uchburchaklarning ham teng yonli bo'lishi yuqoridagiga o'xshash isbotlanadi va $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$ bo'lishi kelib chiqadi. Shunday qilib, ko'pburchaklarning A_1, A_2, ..., A_n uchlari O nuqtadan bir xil uzoqlikda joylashgan ekan, ya'ni O nuqta A_1A_2 ... A_n ko'pburchakka tashqi chizilgan aylananing markazidan iborat.

Modomiki, $\triangle OA_1A_2 = \triangle OA_2A_3 = \triangle OA_{n-1}A_n$ ekan, uchburchaklarning balandliklari ham o'zaro teng bo'ladi, demak, B_1, B_2, ..., B_n nuqtalar O nuqtadan bir xil uzoqlikda joylashgan va O nuqta berilgan muntazam $A_1A_2 ...A_n$ ko'pburchakka ichki chizilgan aylananing markazi bo'ladi. Teorema isbotlandi.

3- §. Muntazam ko'pburchaklarning tomonini topish

6 - t a ' r i f . Muntazam ko'pburchakka ichki chizilgan aylananing radiusi ko'pburchakning *apofemasi* deyiladi.

Endi muntazam ko'pburchak tomonlari uzunliklarini unga tashqi va ichki chizilgan aylana radiuslari orqali ifodalash formulalarini keltirib chiqaramiz.

Faraz qilaylik, $AB = a_n$ muntazam ko‘pburchakning tomoni, R – unga tashqi chizilgan aylananing radiusi, r – ko‘pburchakka ichki chizilgan aylananing radiusi bo‘lsin (9.8- chizma). $OD \perp AB$ o‘tkazamiz, u vaqtda $OD = r$ bo‘lib, $OA = OB = R$ va

$\angle AOB =$; $\angle AOD =$. $\triangle OAB$ – teng yonlidir, chunki

$OA = OB = R,\ \angle AOD = \angle BOD =$. To‘g‘ri burchakli $\triangle AOD$

dan $AD = R \cdot \sin$ va $AD = r \cdot \mathrm{tg}$ ifodani yozamiz. Modomiki, $AB = 2AD$ ekan, muntazam ko‘pburchak tomoni uzunligi uchun R va r radiuslar orqali ifodalangan

va

formulalarga ega bo‘lamiz.

Xususiy holda ko‘pburchakka tashqi chizilgan aylana radiusi orqali:

a) muntazam uchburchak tomoni uchun

b) muntazam to‘rtburchak tomoni uchun

$$n = 4,\ a_4 = 2R \cdot \sin 45^\circ = 2R\frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2};$$

d) muntazam oltiburchak tomoni uchun

$$n = 6,\ a_6 = 2R \cdot \sin 30^\circ = 2R\frac{1}{2} = R$$

formulalarni hosil qilamiz.

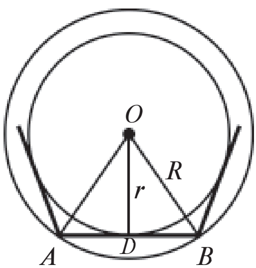
Shunga o‘xshash, ko‘pburchakka ichki chizilgan aylana radiusi r orqali muntazam uchburchakning tomoni

$$a_3 = r\sqrt{3}$$

formula bo‘yicha, muntazam to‘rtburchakning tomoni

$$a_4 = 2r$$

formula bo‘yicha, muntazam oltiburchakning tomoni esa



9.8- chizma.

formula bo‘yicha hisoblanishini olamiz.

4- §. Ko‘pburchakning yuzi. O‘xshash ko‘pburchaklar

Qavariq ko‘pburchakning yuzini, uni uchburchaklarga bo‘lib, hisoblash mumkin. Agar ko‘pburchak muntazam n burchak bo‘lsa, uning markazini uchlari bilan tutashtirib, n ta teng uchburchak olamiz. S_1 — bitta uchburchakning yuzi bo‘lsa, ko‘pburchakning yuzi

$$S = n \cdot S_1$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.

7 - t a ’ r i f. Agar ikkita ko‘pburchakning: 1) mos burchaklari teng; 2) o‘xshash tomonlari proporsional bo‘lsa, ular *o‘xshash* deyiladi.

3 - t e o r e m a. ***O‘xshash ko‘pburchaklarning perimetrlari ularning o‘xshash tomonlari kabi nisbatda bo‘ladi.***

I s b o t i. Berilgan $ABCDE$ va $A_1B_1C_1D_1E_1$ o‘xshash ko‘pburchaklarning ta’riflaridan (9.9- chizma):

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}.$$

$$p = AB + BC + CD + DE + EA,$$

$$p_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1 + E_1A_1$$

$$\frac{AB + BC + CD + DE + EA}{A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1 + E_1A_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \ldots = \frac{EA}{E_1A_1},$$

Proporsiyalarning xossalaridan, bizga bir necha teng nisbatlar berilganda, barcha oldingi hadlar yig‘indisining barcha keyingi hadlar yig‘indisiga nisbati oldingi biror hadning o‘ziga mos keyingi hadga nisbati kabi bo‘ladi, ya’ni

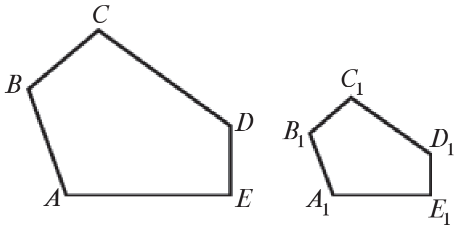
yoki perimetrlar uchun, mos ravishda,

hamda o‘xshash tomonlar uchun, mos ravishda,

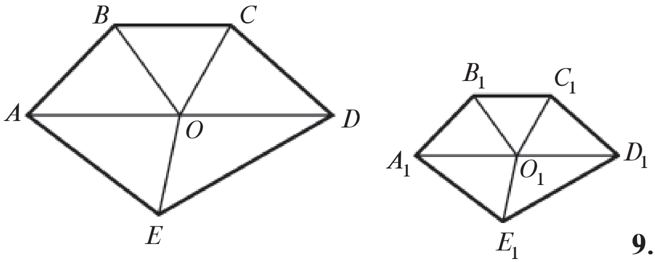
$a, b, \ldots, m;$

$a_1, b_1, \ldots, m_1$

belgilashlarni kiritib, talab qilingan



9.9- chizma.



9.10-chizma.

munosabatlarni hosil qilamiz.

O‘xshash ko‘pburchaklarning o‘xshash tomonlari nisbati bu ko‘pburchaklarning *o‘xshashlik koeffitsiyenti* deyiladi va

$$k=\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}==...=\frac{p}{p_1}$$

kabi belgilanadi, bunda a va a_1 — o‘xshash tomonlar, p va p_1— ko‘pburchaklarning perimetrlaridir.

4-teorema. ***O‘xshash ko‘pburchaklarni bir xil sondagi o‘xshash va bir xil joylashgan uchburchaklarga ajratish mumkin.***

Isboti. Bizga ikkita o‘xshash $ABCDE$ va $A_1B_1C_1D_1E_1$ ko‘pburchak berilgan bo‘lsin. Ulardan birinchisi $ABCDE$ ning ichida ixtiyoriy O nuqtani olib, uni ko‘pburchakning A, B, C, D, E uchlari bilan tutashtiramiz. Buning natijasida ko‘pburchak tomonlari soni qancha bo‘lsa, shuncha uchburchakka ajraladi (9.10- chizma). $A_1B_1C_1D_1E_1$ ko‘pburchakning A_1E_1 tomonida ikkita: $\angle O_1A_1E_1 = \angle OAE$ va $\angle O_1E_1A_1 = \angle OEA$ burchaklarni yasaymiz. Ravshanki, $O_1E_1 \quad O_1A_1 = O_1$. U holda yasashga ko‘ra $\triangle AOE \sim \triangle A_1O_1E_1$.

Endi $\triangle ABO$ va $\triangle A_1B_1O_1$ ning o‘xshashligini isbotlaymiz.

Ko‘pburchaklarning o‘xshashligidan

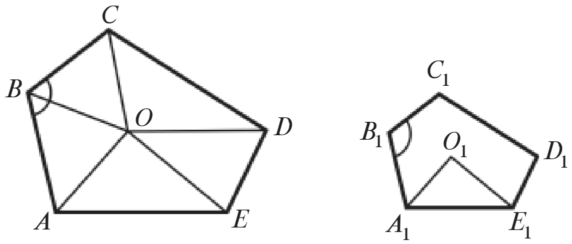
$$\angle BAE=\angle B_1A_1E_1 \quad \text{va} \quad \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AE}{A_1E_1} \qquad (1)$$

bo‘lishi kelib chiqadi. $\triangle AOE \sim \triangle A_1O_1E_1$ bo‘lganligidan, $\angle OAE =$

va

(2)

bo‘ladi. (1) va (2) tengliklardan



9.11- chizma.

$\angle BAO = \angle B_1A_1O_1$ va $\dfrac{BA}{B_1A_1} = \dfrac{AO}{A_1O_1}$ munosabatlarni hosil qilamiz.

Demak, $\triangle ABO \sim \triangle A_1B_1O_1$. Shunga o‘xshash $\triangle COD \sim \triangle C_1O_1D_1$ va h.k. larni ham isbotlash mumkin. Bunda, ravshanki, o‘xshash uchburchaklar bir xil joylashgan bo‘ladi.

5 - t e o r e m a . ***O‘xshash ko‘pburchaklarning yuzlari nisbati ularning o‘xshash tomonlari kvadratlarining nisbati kabidir.***

I s b o t i . $ABCDE$ va $A_1B_1C_1\ D_1E_1$ ikkita o‘xshash ko‘pburchak bo‘lsin (9.11- chizma). Yuqorida isbotlangan teoremaga asosan ularni bir xil sondagi va bir xil joylashgan o‘xshash uchburchaklarga ajratish mumkin.

Ko‘pburchaklarni bo‘lish natijasida hosil qilingan mos uchburchaklar juftlari $\triangle AOB$ va $\triangle A_1O_1B_1$, $\triangle BOC$ va $\triangle B_1O_1C_1$ va h.k.larni qarab,

$$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle A_1O_1B_1}} = \frac{AB^2}{A_1B_1^{\,2}} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2, \quad \frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle B_1O_1C_1}} = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2$$

deb yozish mumkin. Ko‘pburchaklarning o‘xshashligi ta’rifidan,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \ldots$$

va shuning uchun

$$\left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2 = \ldots,$$

bundan

$$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle A_1O_1B_1}} = \frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle B_1O_1C_1}} = \frac{S_{\triangle COD}}{S_{\triangle C_1O_1D_1}} = \ldots$$

munosabatlarni olamiz. Teng nisbatlarning xossalaridan foydalansak,

$$\frac{S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle COD}+\ldots}{S_{\triangle A_1O_1B_1}+S_{\triangle B_1O_1C_1}+S_{\triangle C_1O_1D_1}+\ldots}=\frac{AB^2}{A_1B_1^{\,2}}$$

deb yozish mumkin. Teorema isbotlandi.

N a t i j a . *Bir xil nomdagi muntazam ko‘pburchaklarning yuzlari nisbati ularga tashqi chizilgan aylanalar radiuslari kvadratlari yoki ko‘pburchaklar apofemalari kvadratlari nisbati kabi bo‘ladi.*

Masala yechish namunalari

1 - m a s a l a . Qavariq 18 burchakning diagonallari soni aniqlansin.

Y e c h i l i s h i . Qavariq n burchakning diagonallari soni $\frac{n(n-3)}{2}$ formula bo‘yicha hisoblanishi ma’lum. Bu formulada $n = 18$ deb olib, $= 9 \cdot 15 = 135$ bo‘lishini topamiz.

J a v o b : Diagonallar soni 135 ta.

2 - m a s a l a . Muntazam 12 burchakning ichki burchagi hisoblansin.

Y e c h i l i s h i . Qavariq muntazam n burchakning ichki burchaklari yig‘indisi $180°(n-2)$ ga teng. Shu sababli uning har bir burchagining kattaligi bo‘ladi. Berilgan 12 burchakning burchagi kattaligi

J a v o b : 150°.

Tarixiy ma’lumotlar

O‘rta Osiyoda matematiklar ko‘pburchak tomonlari va unga ichki chizilgan yoki tashqi chizilgan aylanalarning radiuslari orasidagi bog‘lanishlar bilan ko‘p shug‘ullanishgan.

Abu Rayhon Beruniy o‘zining „Qonuni Mas’udiy“ asarida muntazam uch-, to‘rt-, besh-, olti-, sakkiz-, to‘qqiz-, o‘nburchaklarning tomonlarini ularga tashqi chizilgan aylana radiusi orqali ifodalashni qaragan. Masalan, uchburchak uchun u quyidagini yozadi: agar aylananing uchdan biriga teng vatarni topish talab qilinsa, aylananing diametrini diametr va uning yarmi yig‘indisiga ko‘paytirib, hosil qilingan ifodadan kvadrat ildiz chiqarish lozim. Yoki aylananing diametrini diametrning $\frac{3}{4}$ qismiga ko‘paytirib va undan kvadrat ildiz chiqarsak, aylananing uchdan biriga mos vatarni olamiz.

Agar aylananing diametri $2R$ deb olsak, Beruniy qoidalari bo‘yicha aylanaga ichki chizilgan muntazam uchburchakning tomoni uchun

$$a_3 = \sqrt{2R\cdot\frac{2R+R}{2}} = \sqrt{3R^2} = R\sqrt{3};\quad a_3 = \sqrt{2R\cdot\frac{3}{4}\cdot 2R} = R\sqrt{3}$$

ifodani olamiz.

Shunga o‘xshash, aylanaga ichki chizilgan muntazam beshburchakning tomoni

$$a_5 = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}};$$

muntazam sakkizburchakning tomoni

$$a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}};$$

muntazam o‘nburchakning tomoni esa

$$a_{10} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$$

qiymatlarga tengligi kelib chiqadi.

? *Takrorlash uchun savol va topshiriqlar*

1. Qanday ko‘pburchak qavariq deyiladi?
2. Qanday ko‘pburchak muntazam deyiladi?
3. Qavariq ko‘pburchak ichki burchaklarining yig‘indisi nimaga teng?
4. Qavariq ko‘pburchakning tashqi burchaklari yig‘indisi nimaga teng?
5. Qavariq ko‘pburchakning diagonallari soni qanday topiladi?
6. Muntazam ko‘pburchakning tomonini unga tashqi chizilgan aylana radiusi orqali ifodalash formulalari *(a_3, a_4, a_6)*.
7. Muntazam ko‘pburchakning tomonini unga ichki chizilgan aylana radiusi orqali ifodalash formulalari *(b_3, b_4, b_6)*.

8. Qavariq ko‘pburchakning yuzi qanday hisoblanadi?
9. Muntazam ko‘pburchakning yuzi qanday hisoblanadi?
10. Muntazam ko‘pburchakning yuzini unga tashqi chizilgan aylana radiusi orqali ifodalash.
11. Muntazam ko‘pburchakning yuzini unga ichki chizilgan aylana radiusi orqali ifodalash.
12. Qanday ko‘pburchaklar o‘xshash deyiladi?
13. O‘xshash ko‘pburchaklarning perimetrlari va tomonlari orasidagi bog‘lanish.
14. O‘xshash ko‘pburchaklarning yuzlari va tomonlari orasidagi bog‘lanish.

Mustaqil yechish uchun masalalar

A GURUH

1. Muntazam 12 burchakning ichki burchaklari yig‘indisi topilsin.

J a v o b: 180°.

2. Muntazam 10 burchakning har bir ichki burchagi necha gradusga teng?

J a v o b: 144°.

3. Muntazam uchburchakning tomoni 9 sm. Uchburchakka tashqi chizilgan aylananing radiusi topilsin.

J a v o b: sm.

4. To‘g‘ri burchakli uchburchakning katetlari 6 va 8 sm. Uchburchakka tashqi chizilgan aylananing radiusi topilsin.

J a v o b: 5 sm.

5. Muntazam oltiburchakka tashqi chizilgan aylananing radiusi 10 sm. Oltiburchakning perimetri topilsin.

J a v o b: 60 sm.

6. Kvadratga tashqi chizilgan aylananing diametri sm bo‘lsa, kvadratning yuzi hisoblansin.

J a v o b: 144 sm^2.

7. Aylananing uzunligi 16π. Aylanaga ichki chizilgan kvadratning perimetri topilsin.

J a v o b:

B GURUH

8. Agar muntazam oltiburchakka tashqi chizilgan aylananing radiusi R bo‘lsa, uning diagonallari uzunliklari topilsin.

J a v o b:

9. Muntazam oltiburchakning parallel tomonlari orasidagi masofa d ga teng. Oltiburchakning tomoni uzunligi topilsin.

J a v o b: $\frac{d\sqrt{3}}{3}$.

10. Ichki burchagi 135° bo‘lgan muntazam ko‘pburchakning tomonlari soni topilsin.

J a v o b: 8 ta.

11. Muntazam sakkizburchakning tomoni unga tashqi chizilgan aylana radiusi R orqali ifodalansin.

J a v o b: $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

12. Qavariq ko‘pburchakning ichki burchaklari va bitta tashqi burchagi yig‘indisi $\frac{23\pi}{2}$ bo‘lsa, ko‘pburchakning tomonlari soni topilsin.

J a v o b: 13 ta.

13. Rombning tomoni 16 sm, o‘tkir burchagi 30° bo‘lsa, unga ichki chizilgan aylana uzunligi topilsin.

J a v o b: 8 π.

14. Muntazam uchburchakka tashqi chizilgan aylananing radiusi 24 sm bo‘lsa, uchburchakning yuzi hisoblansin.

J a v o b: .

C GURUH

15. To‘g‘ri burchakli uchburchak katetlarining yig‘indisi uning gipotenuzasidan 10 sm katta. Uchburchakka ichki chizilgan doiraning yuzi hisoblansin.

J a v o b: 25 π sm^2

16. Aylananing radiusi R berilgan bo‘lsa, unga ichki chizilgan muntazam n burchakning yuzi hisoblansin.

J a v o b :

17. Muntazam oltiburchakka R radiusli aylana tashqi chizilgan va unga yana bitta aylana ichki chizilgan. Bu aylanalar hosil qilgan halqaning yuzi hisoblansin.

J a v o b :

18. Aylanaga tomonlaridan biri aylananing radiusiga teng, qolgan tomonlari o‘zaro teng bo‘lgan beshburchak ichki chizilgan. Beshburchakning burchaklari topilsin.

J a v o b : 3 ta burchak 165° dan va 2 tasi 112,5° dan yoki 3 ta burchak 165° dan va 2 tasi 22,5° dan.

19. Agar muntazam sakkizburchakka tashqi chizilgan aylananing radiusi R bo‘lsa, sakkizburchakka ichki chizilgan doiraning yuzi hisoblansin.

J a v o b :

20. Radiusi 12 sm bo‘lgan aylanaga muntazam oltiburchak ichki chizilgan. Oltiburchakning tomonida kvadrat ichki chizilgan va uning atrofida tashqi aylana chizilgan. Shu aylanaga tashqi chizilgan muntazam uchburchakning yuzi hisoblansin.

J a v o b :

21. Tomonlari 1 bo‘lgan ikkita teng kvadratlar bir-birining ustida yotadi. Ulardan biri o‘zining simmetriya markazi atrofida 45°ga burilganda hosil bo‘lgan shaklning perimetri topilsin.

J a v o b :

X BOB | SHAKLLARNI ALMASHTIRISH

1- §. Shakllarning harakati, umumiy xossalari

Geometriyaning asosiy masalalaridan biri xossalari berilgan shakllarni yasash hisoblanadi. Odatda, berilgan shaklga teng shaklni yoki unga o'xshash shakl yasash talab qilinadi. Demak, maqsad berilgan shakllardan boshqalariga o'tish qoidalarini berishdir.

Bizga biror F shakl berilgan bo'lsin. F shaklning har bir K nuqtasiga biror P nuqta mos qo'yiladi. F shaklning K nuqtalariga mos P nuqtalar to'plami F_1 shaklni hosil qiladi.

Agar F va F_1 shakllarning nuqtalari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan bo'lsa, F_1 shakl F shaklni *almashtirish* natijasida hosil qilingan deyiladi yoki F_1 shakl berilgan almashtirishda F shaklning *aksi* ham deyiladi.

Almashtirishlardan eng muhimlari — shakllarning barcha geometrik xususiyatlarini, avvalo, nuqtalar orasidagi masofalarni, burchaklarni, yuzlarni, kesmalarning parallelligini va h.k. saqlovchi almashtirishlar hisoblanadi.

1-ta'rif. F shaklni nuqtalar orasidagi masofani saqlagan holda F_1 shaklga almashtirish *harakat (ko'chish)* deyiladi.

Boshqacha aytganda, agar X va Y lar F shaklning nuqtalari, X_1 va Y_1 nuqtalar F_1 shaklning ularga mos nuqtalari bo'lsa, harakatda ular orasidagi masofalar teng bo'ladi:

$$XY = X_1Y_1.$$

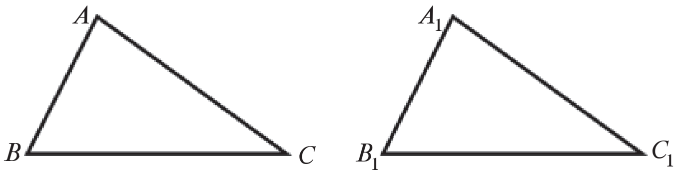
Harakatda nuqtalar orasidagi masofalar saqlanganligidan, ular bilan aniqlanadigan hamma xossalar saqlanishi kelib chiqadi. Harakatning asosiy xossalarini ko'rib o'tamiz.

1-xossa. *Harakatda bitta to'g'ri chiziqda yotgan uchta nuqta yana bitta to'g'ri chiziqda yotuvchi uchta nuqtaga o'tadi. Agar bunda B nuqta A va C nuqtalar orasida yotsa, B_1 nuqta A_1 va C_1 nuqtalar orasida yotadi.*

Isboti. A, B, C nuqtalar bitta to'g'ri chiziqda yotsin. U holda ulardan biri qolgan ikkitasining orasida yotadi. B nuqta A va C nuqtalar orasida yotsin, ya'ni

$$AB + BC = AC$$

munosabat bajarilsin.



10.1- chizma.

Harakatning ta'rifidan, A nuqtaga A_1 nuqta, B nuqtaga B_1 nuqta va nihoyat, C nuqtaga C_1 nuqta mos qo'yilgan bo'lsin. Harakatda masofalar o'zgarmaganligidan,

$$A_1B_1 = AB, \quad A_1C_1 = AC \quad \text{va} \quad B_1C_1 = BC$$

bo'ladi va, demak,

$$A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$$

bajariladi. Oxirgi tenglik esa B_1 nuqtaning A_1 va C_1 nuqtalar orasida yotishini anglatadi.

2 - x o s s a . *AB kesmaning harakatida A va B nuqtalarga A_1 va B_1 nuqtalar mos keladi.*

I s b o t i. 1 - xossada isbotlanganiga o'xshash, harakatda AB kesmaning ixtiyoriy X nuqtasiga A_1B_1 kesmaning X_1 nuqtasi mos kelishi va bunda nuqtalarning tartibi saqlanishiga ishonch hosil qilish mumkin. Shuningdek, harakatda A_1B_1 kesmaning ixtiyoriy Y_1 nuqtasiga AB kesmaning shunday Y nuqtasi mos kelib, unda $A_1Y_1 = AY$ tenglik bajarilishini ko'rsatish mumkin. Demak, harakatda AB kesma A_1B_1 kesmaga o'tar ekan.

3 - x o s s a . *Harakatda uchburchak yana uchburchakka o'tadi.*

I s b o t i. Yuqorida isbotlanganiga muvofiq, harakatda A nuqta A_1 nuqtaga, BC kesma B_1C_1 kesmaga hamda AB va AC kesmalar, mos ravishda, A_1B_1 va A_1C_1 kesmalarga o'tadi (10.1-chizma). $\triangle ABC$ ning A uchini BC tomonning ichki X nuqtasi bilan tutashtiruvchi kesmalar bilan to'ldiriladi. Isbot qilinganiga ko'ra, harakatda AX kesma A_1X_1 kesmaga o'tadi, bunda X_1 shu B_1C_1 kesmaning ichki nuqtasidan iborat. Barcha A_1X_1 kesmalar $\triangle A_1B_1C_1$ ni to'ldiradi. $\triangle A_1B_1C_1$ berilgan harakatda $\triangle ABC$ o'tgan uchburchakdir.

4 - x o s s a . *Harakatda burchaklarning kattaliklari saqlanadi.*

I s b o t i . Burchak A nuqtadan chiqqan AB va AC nurlardan hosil qilingan bo'lsin. Agar harakatda A, B, C nuqtalar, mos ravishda, A_1, B_1, C_1 nuqtalarga o'tsa, $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$ bo'lishini isbotlash talab qilinadi.

Agar A, B, C nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotmasa, mos tomonlari o‘zaro teng bo‘lgan $\triangle ABC$ va $\triangle A_1B_1C_1$ larni olamiz, ya’ni $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, demak, ularning mos burchaklari ham o‘zaro teng bo‘ladi, ya’ni $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$.

Agar A, B, C nuqtalar bitta to‘g‘ri chiziqda yotsa, A_1, B_1, C_1 nuqtalar ham (harakatda) bitta to‘g‘ri chiziqda yotadi. Agar A nuqta BC kesmada yotsa, A_1 nuqta B_1C_1 kesmada yotadi va $\angle A = \angle A_1 = 180°$.

Agar A nuqta BC kesmaning davomida yotsa, A_1 nuqta ham B_1C_1 kesmaning davomida yotadi va bu holda $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC = 0°$.

5-xossa. *Ketma-ket bajarilgan ikkita harakat yana harakatdan iborat bo‘ladi.*

Isboti. Birinchi harakat F shaklni F_1 shaklga, ikkinchi harakat esa F_1 shaklni F_2 shaklga o‘tkazsin, deb faraz qilamiz. Bundan tashqari, birinchi harakatda F shaklning K nuqtasi F_1 shaklning K_1 nuqtasiga, ikkinchi harakatda esa F_1 shaklning K_1 nuqtasi F_2 shaklning K_2 nuqtasiga o‘tsin. Harakatda KK_1 va K_1K_2 masofalar saqlanganligidan, KK_2 masofa ham saqlanadi. Shunday qilib, K nuqtaning K_2 nuqtaga o‘tishi ham harakat bo‘ladi.

Harakatda K nuqta K_1 nuqtaga o‘tsin, deb faraz qilaylik. K_1 nuqtani yana K nuqtaga o‘tkazadigan harakat, boshlang‘ich harakatga *teskari harakat* deyiladi.

6-xossa. *Harakatga teskari harakat yana harakatdan iborat.*

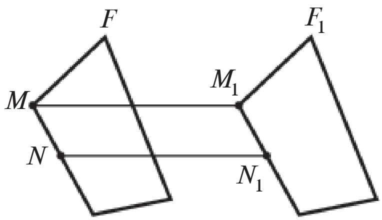
Isboti. Harakat nuqtalar orasidagi masofalarni saqlab, turli nuqtalarni turli nuqtalarga o‘tkazadi. Shu sababli, teskari almashtirish mavjud bo‘ladi. U, nuqtalar orasidagi masofalarni saqlaganligidan, yana harakatdan iborat.

2- §. Parallel ko‘chirish

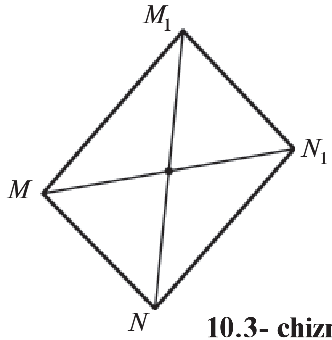
2-ta’rif. *Agar almashtirish bajarilganda nuqtalar parallel to‘g‘ri chiziqlar bo‘yicha o‘zgarmas masofaga siljisa, bunday almashtirish parallel ko‘chirish deyiladi.*

Parallel ko‘chirishda F shaklning M va N nuqtalari F_1 shaklning M_1 va N_1 nuqtalariga o‘tsin. U holda MM_1 va NN_1 to‘g‘ri chiziqlar kesmalari o‘zaro tengdir (10.2- chizma).

Tekislikda xOy to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi yasalgan bo‘lsin. M nuqtaning koordinatalarini $(x;\ y)$, M_1



10.2- chizma.



10.3- chizma.

nuqtaning koordinatalarini $(x_1;\ y_1)$ orqali belgilaymiz. U holda parallel ko‘chirish

$$\begin{cases} x_1 = x + a, \\ y_1 = y + b \end{cases} \qquad (1)$$

formulalar orqali ifodalanadi, bunda $a,\ b$ — o‘zgarmas sonlar.

Haqiqatan, agar $N(x_0,\ y_0)$ nuqta parallel ko‘chirishda N_1 nuqtaga o‘tsa, N_1 nuqtaning koordinatalari

bo‘ladi. Endi MN va M_1N_1 kesmalarning uzunliklarini taqqoslaymiz:

ya’ni $MN = M_1N_1$ bo‘ladi.

Shunday qilib, (1) formulalar nuqtalar orasidagi masofani saqlar ekan.

Endi MM_1N_1N to‘rtburchak MN_1 va NM_1 diagonallarining o‘rtalarini topamiz (10.3- chizma). Ularning ikkalasi ham bir xil

koordinatalarga ega bo‘ladi. Demak,

MM_1N_1N to‘rtburchak parallelogrammdan iborat va $MM_1 \| N_1N$, ya’ni (1) formulalar haqiqatan ham parallel ko‘chirishni aniqlaydi.

Parallel ko‘chirishning quyidagi xossalarini e’tirof etish foydadan xoli bo‘lmaydi.

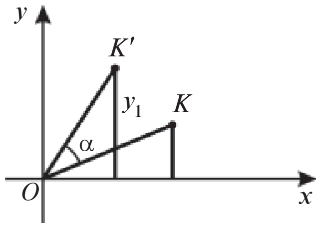
1-xossa. *$A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar qanday bo'lishidan qat'i nazar A nuqta B nuqtaga o'tadigan yagona parallel ko'chirish mavjud.*

2-xossa. *Ikkita ketma-ket parallel ko'chirish yangi parallel ko'chirishni beradi.*

3-xossa. *Parallel ko'chirishga teskari almashtirish parallel ko'chirishdan iborat.*

3- §. Burish

3-ta'rif. *O nuqta atrofida* α *burchakka burish* deb, unda *O* qo'zg'almas ravishda qolib, *O* nuqtadan chiqadigan har bir nur α burchakka buriladigan harakatga aytiladi.



10.4-chizma.

OK nurning *K* nuqtasi (10.4-chizma) α burchakka burishda shunday *K'* nuqtaga o'tadiki, unda

$$OK' = OK$$

munosabat bajariladi. *O* nuqtani to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasining boshi deb olib, quyidagi teoremani isbotlaymiz.

1-teorema. ***Berilgan K(x, y) nuqtaning koordinatalari***

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

$$K_2'(x_2', y_2')$$

$$|K_1K_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

$$|K_1'K_2'|^2 = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2,$$

ko'rinishda berilgan K'(x', y') nuqtaga o'tkazadigan almashtirish α ***burchakka burishdan iborat.***

Isboti. Bu almashtirishda nuqtalar orasidagi masofa o'zgarmas, avvalgi holida qolishini ko'rsatish zarur. *F* shaklning ikkita $K_1(x_1, y_1)$ va $K_2(x_2, y_2)$ nuqtalarini olamiz. Bu nuqtalar, mos ravishda, $K_1'(x_1', y_1')$ va nuqtalarga o'tgan bo'lsin. Mos nuqtalar orasidagi masofalarni aniqlaymiz:

ya'ni $K_1'K_2' = K_1K_2$. Shunday qilib, burish harakatdan iborat va shu sababli, u harakatning barcha xossalariga ega.

4- §. Nuqtaga nisbatan simmetriya

Aytaylik, F shakl va O nuqta berilgan bo‘lsin. F shaklning har bir nuqtasiga yangi nuqtani quyidagi qoidalar bo‘yicha mos qo‘yamiz:

1. F shaklning A nuqtasidan va berilgan O nuqtadan to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz.

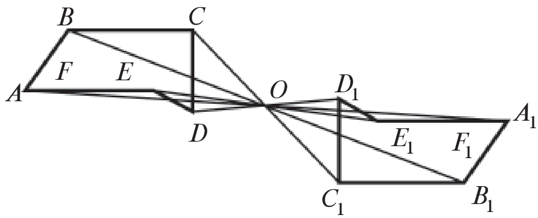
2. Shu to‘g‘ri chiziqda A nuqtadan ikkinchi tomonga $OA_1 = OA$ kesmani joylashtiramiz (10.5- chizma).

Bu A_1 nuqta A nuqtaga O nuqtaga nisbatan *simmetrik nuqta, O* nuqta *simmetriya markazi* deyiladi.

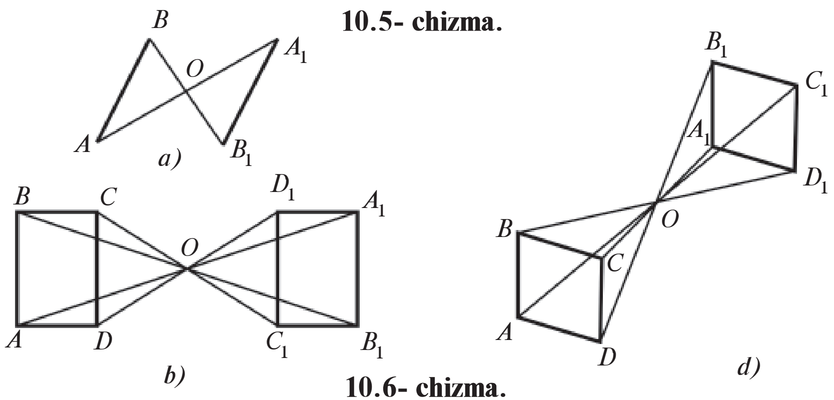
Berilgan $ABCDE$ shaklning barcha nuqtalariga O nuqtaga nisbatan simmetrik nuqtalarni yasab, $A_1B_1C_1D_1E_1$ shaklni hosil qilamiz. $ABCDE$ va $A_1B_1C_1D_1E_1$ bir-biriga O nuqtaga nisbatan *simmetrik shakllar* deyiladi.

M a s a l a l a r. Agar a) AB kesma; b) $ABCD$ to‘g‘ri to‘rtburchak; d) $ABCD$ romb berilgan bo‘lsa, ularga O nuqtaga nisbatan simmetrik bo‘lgan shakllar yasalsin (10.6- chizma).

Ko‘rinib turibdiki, nuqtaga nisbatan simmetriyada kesma kesmaga, to‘g‘ri to‘rtburchak to‘g‘ri to‘rtburchakka, romb esa rombga o‘tar ekan.



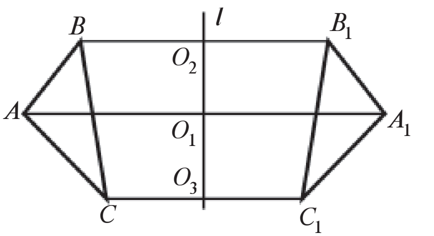
10.5- chizma.



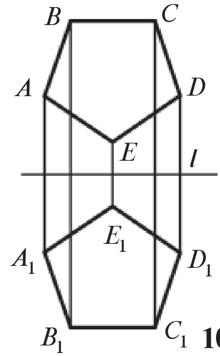
10.6- chizma.

5- §. To‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetriya

Bizga $\triangle ABC$ va l to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin. Uchburchakning A, B, C uchlaridan l to‘g‘ri chiziqqa AO_1, BO_2 va CO_3 perpendikularlar tushiramiz va har bir perpendikularning davomida $O_1A_1 = O_1A$, $O_2B_1 = O_2B$, $O_3C_1 = O_3C$ kesmalarni joylashtiramiz (10.7- chizma). Hosil qilingan A_1, B_1, C_1 nuqtalar A, B, C nuqtalarga l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan *simmetrik nuqtalar* deyiladi. Shunga o‘xshash, $\triangle ABC$ ning qolgan nuqtalariga l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo‘lgan nuqtalarni yasab, $\triangle ABC$ ga l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik $\triangle A_1B_1C_1$ ni olamiz, l to‘g‘ri chiziq *simmetriya o‘qi* deyiladi.



10.7- chizma.



10.8- chizma.

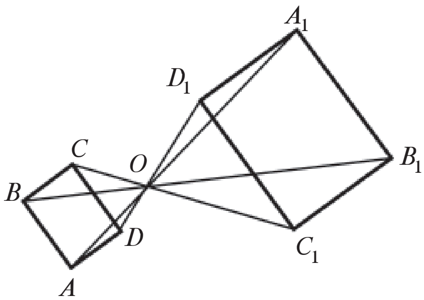
F shaklga l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo‘lgan F_1 shakl yuqoridagiga o‘xshash yasaladi. To‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetriya almashtirishida kesma yana kesmaga, uchburchak yana uchburchakka o‘tadi va h.k. (10.8- chizma).

6- §. Nuqtaga nisbatan gomotetiya

Bizga $ABCD$ parallelogramm va O nuqta berilgan bo‘lsin (10.9-rasm). Parallelogrammning A, B, C, D uchlarini O nuqta bilan tutashtiramiz. OA to‘g‘ri chiziqning ikkinchi tomonida (yoki o‘sha tomonning o‘zida) uzunligi $OA_1 = 2 \cdot OA$ (yoki $OA_2 = 2 \cdot OA$) bo‘lgan OA_1 kesmani joylashtiramiz. Shunga o‘xshash, $B_1(B_2)$, $C_1(C_2)$, $D_1(D_2)$ nuqtalarni yasaymiz, ya’ni

$$OC_1 = OC_2 = 2 \cdot OC, \quad OB_1 = OB_2 = 2 \cdot OB,$$
$$OD_1 = OD_2 = 2 \cdot OD.$$

Agar parallelogrammning barcha nuqtalari uchun o‘xshash nuqtalar yasalgan bo‘lsa, $ABCD$ va $A_1B_1C_1D_1$ $(A_2B_2C_2D_2$ (buni



10.9- chizma.

mustaqil yasang)) shakllar O nuqtaga nisbatan gomotetik deyiladi. Bunda 2 soni gomotetiya koeffitsiyenti, O nuqta esa gomotetiya markazi deyiladi.

Aytaylik, F shakl va O nuqta berilgan bo‘lsin. F shaklning ixtiyoriy P nuqtasini olib, OP nurni o‘tkazamiz va unda $OP_1 = k \cdot OP$ kesmani joylashtiramiz, bunda k— berilgan son. F shaklning qolgan barcha nuqtalari uchun mos nuqtalarni shunga o‘xshash yasaymiz. U vaqtda F shakl va hosil bo‘lgan F_1 shakl *gomotetik* deyiladi.

F shaklni F_1 shaklga, F shaklning har bir P nuqtasini OP nurda yotuvchi va $OP_1 = k \cdot OP$ shartni qanoatlantiruvchi P_1 nuqtaga o‘tkazadigan almashtirish *O nuqtaga nisbatan gomotetiya* deyiladi.

Gomotetiya almashtirishida F shaklning P va M nuqtalari orasidagi masofa „k“ marta o‘zgaradi:

$$PM = k \cdot P_1M_1.$$

Agar $PM = k \cdot P_1M_1$ tenglik F va F_1 shakllarning barcha nuqtalari uchun o‘rinli bo‘lsa, F va F_1 shakllar *o‘xshash,* ,,k“ son esa *o‘xshashlik koeffitsiyenti* deyiladi.

Eslatib o‘tamizki, agar $\triangle ABC$ va $\triangle A_1B_1C_1$ larda:

1) mos burchaklar teng, ya’ni $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$,

2) mos tomonlar proporsional, ya’ni

bo‘lsa, ular o‘xshash deyiladi.

? *Takrorlash uchun savol va topshiriqlar*

1. Berilgan F shaklni F_1 shaklga almashtirish deb nimaga aytiladi?
2. Qanday almashtirish harakat deyiladi?
3. Harakatning asosiy xossalarini ayting.

4. Qanday almashtirish parallel ko‘chirish deyiladi?
5. Parallel ko‘chirish formulalari qanday yoziladi?
6. Qanday almashtirish α burchakka burish deyiladi?
7. Qanday nuqtalar nuqtaga nisbatan simmetrik deyiladi?
8. Qanday nuqtalar to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik deyiladi?
9. Berilgan F shaklga berilgan O nuqtaga nisbatan simmetrik F_1 shakl yasalsin.
10. Berilgan F shaklga berilgan l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik F_1 shakl yasalsin.
11. Qanday shakllar O nuqtaga nisbatan gomotetik deyiladi (bo‘ladi)?
12. Gomotetiya koeffitsiyenti deb nimaga aytiladi?

Mustaqil yechish uchun masalalar

A GURUH

1. A va K nuqtalar berilgan. A nuqtaga K nuqtaga nisbatan simmetrik bo‘lgan A_1 nuqta yasalsin.

2. AB kesma va l to‘g‘ri chiziq berilgan. AB kesmaga l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo‘lgan A_1B_1 kesma yasalsin.

3. AB kesma va unda yotmagan K nuqta berilgan. AB kesmani parallel ko‘chirish natijasida shunday kesmani yasash kerakki, unda A nuqta K nuqtaga o‘tsin.

4. A(3; 5) va $B(-2; 4)$ nuqtalar berilgan. A va B nuqtalarga koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo‘lgan A_1 va B_1 nuqtalarning koordinatalari topilsin.

5. A(4; 0) nuqta berilgan. Shu nuqtani soat mili harakatiga qarama-qarshi yo‘nalishda 90° burchakka burishdan hosil bo‘lgan A_1 nuqtaning koordinatalari topilsin.

6. $K(-2; 2)$ nuqta berilgan. Shu nuqtani soat mili harakatiga qarama-qarshi yo‘nalishda 90° burchakka burishdan hosil bo‘lgan K_1 nuqtaning koordinatalari topilsin.

7. $A(-1; 2)$ va B(2; 6) nuqtalar berilgan. AB kesmani parallel ko‘chirish natijasida hosil bo‘lgan A_1B_1 kesmaning uzunligi topilsin.

B GURUH

8. *ABCD* parallelogramm berilgan. Berilgan parallelogrammga *D* nuqtaga nisbatan simmetrik bo‘lgan shakl yasalsin.

9. O‘qqa nisbatan simmetrik ikkita shakl o‘zaro teng bo‘ladi, degan tasdiq o‘rinlimi?

10. Ikkita o‘zaro teng bo‘lgan shakllar biror o‘qqa nisbatan simmetrik bo‘ladi, degan tasdiq o‘rinlimi?

11. *AB* kesma va unda yotmaydigan *P* nuqta berilgan. Agar o‘xshashlik koeffitsiyenti $k = 2$ bo‘lsa, berilgan kesmaga o‘xshash (gomotetik) kesma yasalsin.

12. l to‘g‘ri chiziq va *ABCD* romb berilgan bo‘lib, $AB \neq l$, $BC \neq l$. *ABCD* rombga l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik shakl yasalsin.

13. $A(-3;\ 0)$, $B(3;\ 4)$, $C(1;\ 5)$ nuqtalar berilgan. *OA, OB, OC* to‘g‘ri chiziqlar soat mili harakatiga qarama-qarshi yo‘nalish da 30°C burchakka burilganda hosil bo‘lgan A_1, B_1, C_1 nuqtalarning koordinatalari topilsin.

J a v o b:

14. Parallel ko‘chirish natijasida $A(1;\ 2)$ nuqta $A(3;\ 5)$ nuqtaga o‘tadi. Parallel ko‘chirishning a va b parametrlari topilsin.

J a v o b: $a = 2$, $b = 3$.

C GURUH

15. Parallel ko‘chirishda $A(-2;\ 1)$ nuqta $A_1(4;\ 3)$ nuqtaga o‘tadi. $B(2;\ 4)$ nuqta qanday nuqtaga o‘tishi aniqlansin.

J a v o b: $B_1(8;\ 6)$

16. *ABCD* kvadrat o‘zining markazi *O* nuqtada 45° ga burilgan. Agar kvadratning tomoni 1 ga teng bo‘lsa, hosil qilingan yulduzsimon shaklning yuzi hisoblansin.

J a v o b: $4 - 2\sqrt{2}$ kv.birl.

17. AB kesma A nuqta atrofida 60° ga burilganda AB_1 kesmaga akslantiriladi. Agar $AB = a$ bo‘lsa, BB_1 masofa topilsin.

J a v o b: a.

18. A va B nuqtalar l to‘g‘ri chiziqdan bir tomonda yotadi. Shu to‘g‘ri chiziqda shunday K nuqtani topish kerakki, $AK + KB$ yig‘indi eng kichik qiymat qabul qilsin.

J a v o b: 5.

19. Tomonlari uzunliklari $a = 24$, $b = 16$, $c = 20$ bo‘lgan $\triangle ABC$ berilgan. Agar o‘xshashlik koeffitsiyenti $k = \frac{1}{4}$ bo‘lsa, berilgan uchburchakka o‘xshash $\triangle A_1B_1C_1$ ning tomonlari uzunliklari topilsin.

J a v o b: $a_1 = 6$, $b_1 = 4$, $c_1 = 5$.

20. Parallelogrammning simmetriya markazi $O(3; 2)$ va ikkita $B(-1; 2)$, $C(4; 6)$ uchlari koordinatalari berilgan bo‘lsa, uning qolgan uchlari koordinatalari topilsin.

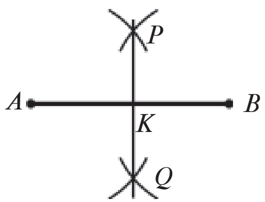
J a v o b: $A(2; -2)$, $D(7; 2)$.

21. $A(-2; 5)$, $C(-4; -1)$ nuqtalar berilgan. A va B nuqtalarga ordinatalar o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘lgan A_1 va B_1 nuqtalar yasalsin. Hosil bo‘lgan ABB_1A_1 shaklning yuzi hisoblansin.

J a v o b: 36.

XI BOB TEKISLIKDA YASASHGA DOIR MASALALAR

Shakllarni yasashga doir masalalar geometriya fanida muhim rol o‘ynaydi. Bunday masalalarni yechish tamoyillarini chuqurroq his etish uchun biz sodda masalalarni qarab chiqishdan boshlashni ma’qul topdik va bu bob materiallari, boshqa boblardan farqli o‘laroq, paragraflarga ajratilmagan holda berilmoqda.



11.1- chizma.

1. Kesmani teng ikkiga bo‘lish. Berilgan AB kesmani chizg‘ich yordamida (bo‘lmasdan) teng ikkiga bo‘lish talab qilinadi.

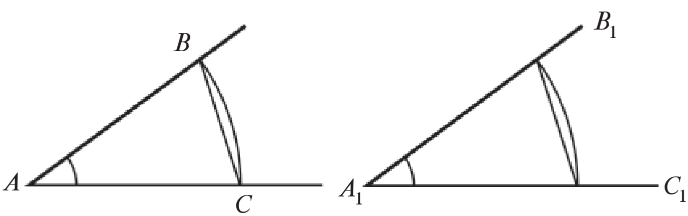
Y a s a s h . Bu masalani yechish uchun AB kesmaning yarmidan katta bo‘lgan radiusni tanlaymiz. So‘ngra A va B nuqtalarni markaz qilib, tanlangan radiusli yoylarni chizamiz, ular P va Q nuqtalarda kesishadi (11.1- chizma). P va Q nuqtalardan PQ to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. AB va PQ to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi K berilgan AB kesmaning o‘rtasi bo‘ladi: $AK = KB$. (Buning isboti maktab geometriya kursida ham keltirilgan.)

2. Berilgan burchakka teng burchak yasash. $\angle BAC$ berilgan. Unga teng bo‘lgan $\angle B_1A_1C_1$ ni yasash talab qilinadi (11.2- chizma).

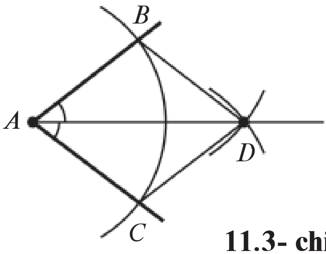
Y a s a s h . AC va A_1C_1 nurlar berilgan bo‘lsin. Sirkulning oyog‘ini A nuqtaga qo‘yib, ixtiyoriy radiusli BC yoyni chizamiz.

So‘ngra, radiusni o‘zgartirmasdan, sirkulning oyog‘ini A_1 nuqtaga qo‘yib, A_1C_1 nurni C_1 nuqtada kesib o‘tadigan yoyni chizamiz.

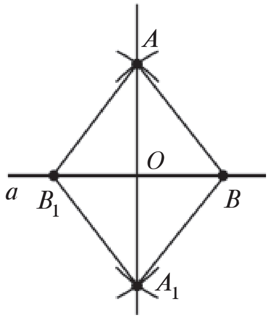
Sirkul yordamida C va B nuqtalar orasidagi masofani o‘lchaymiz. Sirkul yoyilmasini o‘zgartirmasdan, uning oyog‘ini C_1 nuqtaga qo‘yamiz va C_1B_1 yoyda B_1 nuqtani shunday



11.2- chizma.



11.3- chizma.



11.4- chizma.

belgilaymizki, unda $C_1B_1 = CB$ tenglik o‘rinli bo‘lsin. Nihoyat, A_1 va B_1 nuqtalardan $\angle B_1A_1C_1$ ning ikkinchi tomonidan iborat bo‘lgan A_1B_1 nurni o‘tkazamiz. Bunda $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$ bo‘ladi. Bu burchaklarning tengligi $\triangle ABC$ va $\triangle A_1B_1C_1$ ning tengligidan kelib chiqadi (ular uchta tomonlari bo‘yicha teng uchburchaklardir).

3. Berilgan burchakni teng ikkiga bo‘lish. $\angle BAC$ berilgan va uni teng ikkiga bo‘lish, boshqacha aytganda, burchakning bissektrisasini yasash talab qilinadi.

Y a s a s h . Sirkulning oyog‘ini A nuqtaga qo‘yib, burchakning tomonlarini C va B nuqtalarda kesib o‘tadigan, ixtiyoriy radiusli BC yoyni chizamiz (11.3- chizma). So‘ngra sirkulning oyog‘ini B nuqtaga qo‘yamiz. C va B nuqtalar orasidagi masofaning yarmidan kattaroq radiusni tanlab, BC yoyning har xil tomonlarida belgi qo‘yamiz. Sirkul yoyilmasini o‘zgartirmasdan (ya’ni radiusni o‘zgarmas qoldirib), uning oyog‘ini B nuqtaga qo‘yamiz va belgini shunday qo‘yamizki, har ikkala belgi ham D nuqtada kesishsin. Nihoyat, A va D nuqtalarni tutashtirib, $\angle BAC$ ni teng ikkiga bo‘luvchi AD nurni, ya’ni bissektrisani hosil qilamiz.

T e k s h i r i s h . Haqiqatan, B va C nuqtalarni D nuqta bilan tutashtiramiz. U holda ikkita $\triangle ABD$ va $\triangle ACD$ hosil bo‘ladi va ular o‘zaro teng, chunki AD — umumiy tomon, yasashga ko‘ra $AB = AC$, $BD = DC$. Bundan $\triangle BAD = \triangle CAD$ bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, AD nur $\angle BAC$ ning bissektrisasidan iborat.

4. Berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikular tushirish. Masalada berilgan A nuqtadan berilgan a to‘g‘ri chiziqqa perpendikular tushirish talab qilinadi (11.4- chizma).

Y a s a s h . A nuqta berilgan a to‘g‘ri chiziqda (uni B_1B deb belgilaymiz) yotmasin. Sirkulning oyog‘ini A nuqtaga qo‘yib,

A nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofadan kattaroq radiusli yoy chizamiz. Bu yoy berilgan a to‘g‘ri chiziq bilan ikkita B_1 va B nuqtada kesishadi. Sirkulning oyog‘ini B nuqtaga qo‘yib, BA kesmaning uzunligiga teng radiusli yoy chizamiz va berilgan B_1B to‘g‘ri chiziqning har ikkala tomonlaridan ikkita belgilar qo‘yamiz. Radiusni o‘zgartirmasdan, sirkulning oyog‘ini B_1 nuqtaga qo‘yamiz va yuqoridagi kabi berilgan to‘g‘ri chiziqning har xil tomonlarida ikkita belgilarni qo‘yamiz. Ravshanki, belgilar A va A_1 nuqtalarda kesishadi. So‘ngra AA_1 to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz va u izlanayotgan perpendikular bo‘ladi.

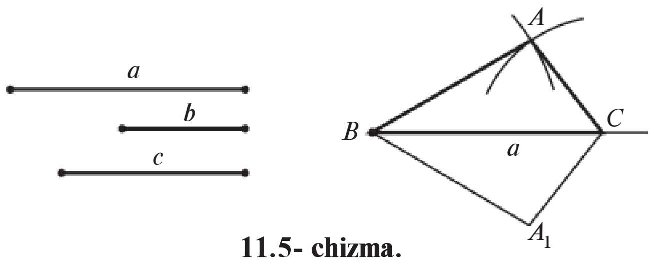
T e k s h i r i s h . Haqiqatan, yasalishiga ko‘ra, $AB_1 = AB$, $AB_1 = A_1B_1$, $A_1B_1 = A_1B$, $A_1B = AB$. Demak, ABA_1B_1 to‘rtburchak rombdan iborat. Rombning diagonallari (chizmada AA_1 va BB_1) xossasidan ularning o‘zaro perpendikular bo‘lishi va O kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linishi ma’lum. Demak, talab qilingan $AO \perp BB_1$ shart olinadi.

5. Berilgan uchta tomoni bo‘yicha uchburchak yasash. Uchburchakning uchta a, b, c tomoni berilgan, uni yasash talab qilinadi.

Y a s a s h . Biror nur olib, uning B nuqtasidan uzunligi a ga teng bo‘lgan BC kesmani, ya’ni $BC = a$ kesmani qo‘yamiz (11.5-chizma). B nuqtani markaz qilib, sirkul bilan c radiusli, C nuqtani markaz qilib esa b radiusli aylanalar chizamiz. Shu aylanalar yoylarining kesishgan nuqtasi uchburchakning A nuqtasidan iborat bo‘ladi. A nuqtani B va C nuqtalar bilan tutashtirib, talab qilingan $\triangle ABC$ ni hosil qilamiz.

T e k s h i r i s h . Masala uchburchakning barcha tomonlari uchun uchburchak tengsizligi bajarilgandagina yechimga ega bo‘ladi.

Yasashni BC tomonning har ikkala tomoni bo‘ylab bajarish ham mumkin, lekin bu holda ham $\triangle A_1BC = \triangle ABC$



11.5- chizma.

(11.5- chizma) bo‘lganligidan, ular har xil yechim hisoblanmaydi, ya’ni uchburchak tengsizligi bajarilganda masala yagona yechimga ega bo‘ladi.

6. Bir tomoni va unga yopishgan burchaklari bo‘yicha uchburchak yasash. Uchburchakning a tomoni va ikkita, unga yopishgan $\angle B = \beta$ va $\angle C = \gamma$ burchaklari berilgan, uni yasash talab qilinadi (11.6- chizma).

Y a s a s h . Biror to‘g‘ri chiziq olib, uning B nuqtasidan uzunligi a ga teng $BC = a$ kesmani qo‘yamiz. BC nurda uchi B nuqtada bo‘lgan $\angle ABC = \beta$ burchakni sirkul (yoki transportir) yordamida yasaymiz. Shunga o‘xshash, CB nurda uchi C nuqtada bo‘lgan $\angle ACB = \gamma$ yasaymiz. Yasalgan AB va CA nurlar kesishib, uchburchakning A uchini beradi.

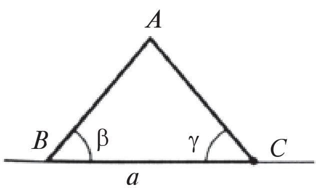
T e k s h i r i s h . Uchi berilgan nuqtada bo‘lib, berilgan yo‘nalishdagi burchakni yagona yo‘l bilan yasash mumkin bo‘lganligidan, masala yagona yechimga ega bo‘ladi.

7. Ikkita tomoni va ular orasidagi burchagi bo‘yicha uchburchak yasash. Uchburchakning $BA = c$, $BC = a$ tomonlari va ular orasidagi β burchak berilgan. Bu uchburchakni yasash talab qilinadi.

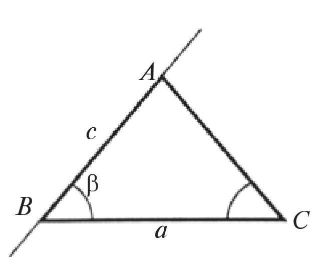
Y a s a s h . Biror to‘g‘ri chiziqqa $BA = c$ kesmani qo‘yamiz (11.7- chizma). BC nurda sirkul yordamida uchi B nuqtada bo‘lgan $\angle ABC = \beta$ ni yasaymiz. So‘ngra, BC nurda $BC = a$ kesmani qo‘yamiz va A nuqtani C nuqta bilan tutashtirib, talab qilingan $\triangle ABC$ ni olamiz.

8. Gipotenuzasi va kateti bo‘yicha to‘g‘ri burchakli uchburchak yasash. Uchburchakning c gipotenuzasi va a kateti berilgan, uni yasash talab qilinadi.

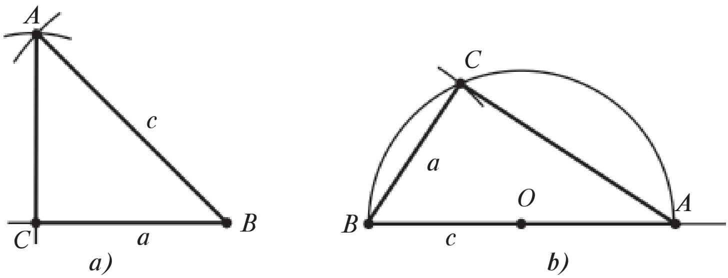
Y a s a s h . 1 - u s u l . C nuqtada kesishuvchi ikkita o‘zaro perpendikular to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz (11.8- a chizma). Ularning



11.6- chizma.



11.7- chizma.



11.8- chizma.

birida C uchdan $CB=a$ kesmani qo‘yamiz. B nuqtadan $R=c$ radiusli yoy chizamiz. Yoyning to‘g‘ri burchakning ikkinchi tomoni bilan kesishish nuqtasi to‘g‘ri burchakli uchburchakning A uchidan iborat bo‘ladi.

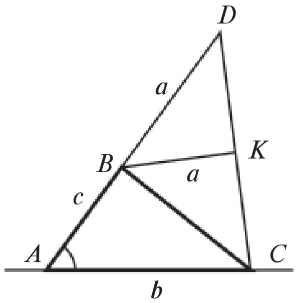
2-usul. Biror to‘g‘ri chiziqda $BA=c$ kesmani qo‘yamiz (11.8- b chizma). Kesmani teng ikkiga bo‘lamiz va uning O o‘rtasini belgilaymiz: $OA=OB$. Markazi O nuqtada va radiusi

bo‘lgan yarimaylana chizamiz. So‘ngra B (yoki A) nuqtani markaz qilib, yasalgan yarimaylana bilan kesishadigan $r=a$ radiusli yoyni chizamiz. Ularning kesishish nuqtasi uchburchakning C nuqtasidan iborat bo‘ladi. C nuqtani A va B nuqtalar bilan tutashtirib, talab qilingan $\triangle ABC$ ni olamiz. Bu uchburchakda $\angle ACB=90°$, chunki u diametrga tiralgan markaziy burchakdan iborat, $AB=c$ gipotenuza, $BC=a$ katetdir.

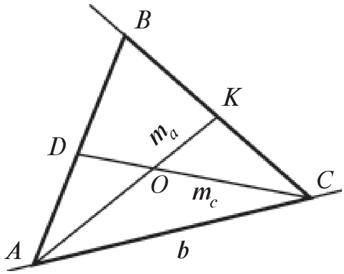
9. Tomoni, burchagi va qolgan ikki tomoni yig‘indisi berilgan uchburchakni yasash. Uchburchakning b tomoni, A burchagi va qolgan ikki tomonining $a+c$ yig‘indisi berilgan, uni yasash talab qilinadi.

Tahlil. 7- bandda ko‘rib o‘tilganiga muvofiq, ikkita $AC=b$ va $AD=a+c$ tomonlar va ular orasidagi $\angle A$ bo‘yicha $\triangle ADC$ ni yasash mumkin (11.9-chizma). Agar B izlanayotgan uchburchakning uchidan iborat bo‘lsa, $\triangle BCD$ teng yonli bo‘ladi va DC tomonga o‘tkazilgan BK balandlik mediana ham bo‘ladi. Demak, $\triangle ABC$ izlanayotgan uchburchak bo‘ladi.

Yasash. Biror to‘g‘ri chiziqda A nuqtani tanlab olamiz va unda $AC=b$ kesmani joylashtiramiz. AC to‘g‘ri chiziqda uchi A nuqtada bo‘lgan $\angle CAD$ ni yasaymiz (2- bandga q.). Bu burchakning AD tomonida $AD=a+c$ kesmani joylashtiramiz. So‘ngra DC kesmaning o‘rtasi K ni topamiz (1- bandga q.) va u orqali $KB \perp DC$



11.9- chizma.



11.10- chizma.

o‘tkazamiz. AD tomon va KB perpendikularning kesishish nuqtasi $\triangle ABC$ ning uchinchi B uchidan iborat bo‘ladi.

I s b o t i . $\triangle ABC$ da yasalishi bo‘yicha $AC = b$ va $\angle A$ berilgan. $\triangle BCD$ esa teng yonli: $BC = BD = a$, ya’ni $AB + BC = AB + BD =$ $= c + a$. Demak, $\triangle ABC$ masalaning barcha shartlarini qanoatlantiradi.

T e k s h i r i s h . Masala, uchburchak tengsizligiga muvofiq, $a + c > b$ bo‘lganda yechimga ega bo‘ladi.

10. Asosi va ikkita yon tomoniga o‘tkazilgan medianalari bo‘yicha uchburchak yasash. Uchburchakning asosi $AC = b$ va yon tomonlariga o‘tkazilgan m_a, m_c medianalari berilgan. Uchburchakni yasash talab qilinadi (11.10- chizma).

$AO = \frac{2}{3} m_a$

T a h l i l . $\triangle ABC$ yasalgan va unda $AC = b$, $AK = m_a$, $CD = m_c$ deb faraz qilamiz. AK va CD medianalar O nuqtada kesishadi va kesishish nuqtasida uchburchakning uchidan hisoblaganda, 2:1 kabi nisbatda bo‘linadi (7-bob, 15- §, 1-teorema), ya’ni

Shunday qilib, $\triangle AOC$ ning uchta tomoni ham ma’lum va uni yasash mumkin (5- bandga q.).

Y a s a s h . Uchta tomoni bo‘yicha $\triangle AOC$ ni yasaymiz. Biror to‘g‘ri chiziqda $AC = b$ kesmani joylashtiramiz. Radiusi

va markazi A nuqtada hamda radiusi $CO = \frac{2}{3} m_c$ va markazi C nuqtada bo‘lgan yoylarni chizamiz. Bu yoylar O nuqtada kesishadi. AO kesmaning davomida $OK = \frac{1}{3} m_a$ kesmani, CO kesmaning davomida esa $OD = \frac{1}{3} m_c$ kesmani joylashtiramiz. Hosil qilingan K

va D nuqtalar, mos ravishda, BC va AB tomonlarning o‘rtalari bo‘ladi. So‘ngra, AD va CK to‘g‘ri chiziqlarni davom ettirib, ularning kesishish nuqtasida $\triangle ABC$ ning B nuqtasini olamiz.

I s b o t i . Yasashga ko‘ra, $AC = b$, $AK = m_a$, $CD = m_c$, $AD = DB$, $KC = KB$. Demak, talab qilingan $\triangle ABC$ uchburchak yasaldi.

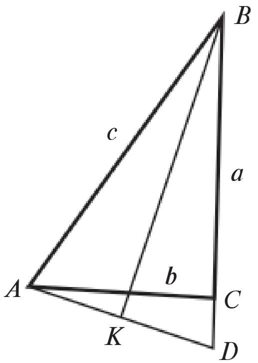
T e k s h i r i s h . Masala uchburchak tengsizligi, ya’ni bu holda $\frac{2}{3}(m_a + m_c) > b$ tengsizlik bajarilgandagina, yagona yechimga ega. Aks holda uning yechimi mavjud emas.

11. Kateti va gipotenuzasi bilan ikkinchi kateti ayirmasi bo‘yicha to‘g‘ri burchakli uchburchak yasash. Uchburchakning $AC = b$ kateti hamda $AB = c$ gipotenuza va ikkinchi katet $BC = a$ orasidagi ayirma berilgan. Uni yasash talab qilinadi (11.11-chizma).

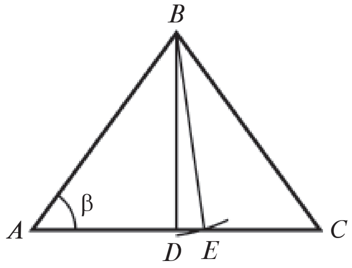
T a h l i l . $\triangle ADC$ izlanayotgan to‘g‘ri burchakli uchburchak bo‘lsin. Shartga ko‘ra $AC = b$ katet hamda, $AB = c$ gipotenuza va $BC = a$ ikkinchi katet orasidagi $c - a$ ayirma berilgan. $c - a$ ayirmani chizmada ko‘rsatish uchun BC katetni BA gipotenuzada B uchdan joylashtirish mumkin. Biz teskarisini amalga oshiramiz, ya’ni BA gipotenuzani BC nurda B uchdan joylashtiramiz va $BD = c$ kesmani hosil qilamiz. U vaqtda $CD = BD - BC = c - a$ bo‘ladi.

A va D nuqtalarni tutashtirib, ikkita $AC = b$ va $CD = c - a$ kateti ma’lum bo‘lgan to‘g‘ri burchakli $\triangle ACD$ ni hosil qilamiz. Shuning uchun $\triangle ACD$ ni yasash mumkin.

B uch qanday topiladi? Ravshanki, $\triangle ABD$ – teng yonli (chunki $AB = BD$) va shuning uchun BK balandlik mediana ham bo‘ladi.



11.11- chizma.



11.12- chizma.

Y a s a s h . Ikkita kateti bo‘yicha to‘g‘ri burchakli $\triangle ABD$ ni yasaymiz va $CD = c - a$ katetni DC yo‘nalishda AC tomondan boshqa tomonga davom ettiramiz. To‘g‘ri burchakli $\triangle ACD$ ning AD gipotenuzasi o‘rtasi bo‘lgan K nuqtadan $KB \perp AD$ to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. Unda B nuqta KB va DC to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi bo‘ladi. So‘ngra B nuqtani A nuqta bilan tutashtirib, izlangan to‘g‘ri burchakli $\triangle ABC$ ni olamiz.

I s b o t i . Yasalgan $\triangle ABC$ masalaning shartlarini qanoatlantiradi, chunki $AB = BD$ va $BD - BC = AB - BC = CD$.

T e k s h i r i s h . Masala uchburchakning ikki tomoni uzunliklari ayirmasi uchinchi tomoni uzunligidan kichik bo‘lganda, ya’ni $c - a < b$ bo‘lganda yechimga ega bo‘ladi va u yagonadir.

12. Asosi, balandligi va medianasi bo‘yicha uchburchak yasash. Uchburchakning $AC = b$ asosi, $BD = h$ balandligi va $BE = m_b$ medianasi berilgan, uni yasash talab qilinadi (11.12- chizma).

T a h l i l . Asosi $AC = b$ bo‘lgan $\triangle ABC$ yasalgan bo‘lsin. Unda $BD = h$ balandlik, $BE = m_b$ mediana o‘tkazamiz. U holda $\triangle BDE$ to‘g‘ri burchakli bo‘ladi hamda uning BD kateti va BE gipotenuzasi ma’lum bo‘lib, E nuqta $\triangle ABC$ asosining o‘rtasi

$EA = EC = \frac{b}{2}$ bo‘lganligidan $AE = EC = \frac{b}{2}$.

Y a s a s h . To‘g‘ri $\angle BDE$ ni yasaymiz va to‘g‘ri burchakning tomonlaridan birida to‘g‘ri burchakning D uchidan $BD = h$ kesmani joylashtiramiz va $\triangle ABC$ ning B uchini hosil qilamiz. B nuqtani markaz deb olib, $BE = m_b$ radiusli yoyni to‘g‘ri burchakning DE tomoni bilan kesishguncha chizamiz. So‘ngra DE

to‘g‘ri chiziqdagi E nuqtadan kesmalarni qo‘yamiz. Shuning bilan, $\triangle ABC$ yasaldi.

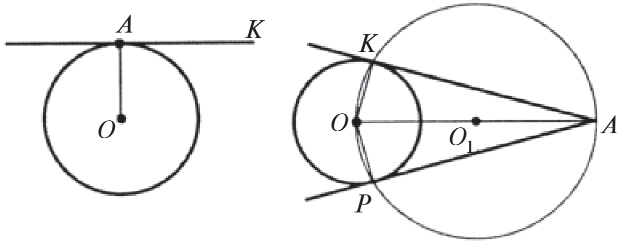
I s b o t i . Yasashga ko‘ra, $AC = EA + EC = \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b,$

$BD = h,$ $BE = m_b$ hamda $BD \perp AC,$ shu sababli, $\triangle ABC$ izlanayotgan uchburchakdan iborat.

T e k s h i r i s h . Agar $m_b > h$ bo‘lsa, masalaning yechimi mavjud va yagonadir.

13. Berilgan nuqtadan berilgan aylanaga urinma to‘g‘ri chiziq o‘tkazish.

T a h l i l . Agar berilgan A nuqta aylanada yotsa (11.13-



11.13- chizma.

chizma), aylananing urinish nuqtasiga o‘tkazilgan radiusi urinmaga perpendikular bo‘ladi.

Agar A nuqta aylanadan tashqarida yotsa, urinmaning va urinish nuqtasida o‘tkazilgan radiusning xossasiga ko‘ra, to‘g‘ri burchakli $\triangle OAK$ ni yasash zarur. Bunda ichki chizilgan $\angle AKO$, agar u diametrga tiralgan bo‘lsa, to‘g‘ri burchakdan iborat.

Y a s a s h . Agar A nuqta aylanada yotsa, bu nuqtaga aylananing radiusini o‘tkazamiz. So‘ngra A nuqta orqali o‘tkazilgan radiusga perpendikular to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz.

Agar A nuqta aylanadan tashqarida yotsa, A nuqtani O markaz bilan tutashtiramiz. AO kesmani diametr deb olib, berilgan aylana bilan K va P nuqtalarda kesishadigan aylana yasaymiz. So‘ngra izlanayotgan urinmalardan iborat AK va AP to‘g‘ri chiziqlarni o‘tkazamiz.

I s b o t i . Agar A nuqta aylanaga tegishli bo‘lsa, AK to‘g‘ri chiziqning OA radiusga perpendikularligidan, aylana va AK to‘g‘-ri chiziq A nuqtadan boshqa umumiy nuqtalarga ega bo‘lmasligi kelib chiqadi.

Agar A nuqta aylanadan tashqarida yotsa, OK va OP radiuslarni o‘tkazib, biz ikkita to‘g‘ri burchakli $\triangle AOK$ va $\triangle AOP$ ni olamiz, chunki AO diametrga tiralgan yoylar bo‘lgani uchun

$\angle AKO = \angle APO =$. Modomiki, $AK \perp OK, AP \perp OP$ ekan, AK va AP to‘g‘ri chiziqlar berilgan aylana bilan bittadan umumiy K va P nuqtalarga ega bo‘ladi.

T e k s h i r i s h . Agar A nuqta aylanaga tegishli bo‘lsa, masala yagona yechimga ega bo‘ladi.

Agar A nuqta aylanadan tashqarida yotsa, masala ikkita yechimga ega, ya’ni ikkita AK va AP urinmani o‘tkazish mumkin bo‘ladi.

Agar A nuqta aylana bilan chegaralangan doirada yotsa, masala yechimga ega emas.

14. Ikki tomoni va ulardan birining qarshisidagi burchak bo‘yicha uchburchak yasash. Uchburchakning a, b tomonlari va a tomoni qarshisidagi α burchak berilgan. Uchburchakni yasash talab qilinadi.

T a h l i l . $\triangle ABC$ yasalgan va $AC = b$, $CB = a$, $\angle A = \alpha$ bo‘lsin (11.14- chizma). α burchakni yasash mumkin. C nuqtaning holati ma’lum. U holda B nuqta markazi C nuqtada bo‘lib, radiusi $CB = a$ bo‘lgan aylanaga tegishli bo‘ladi.

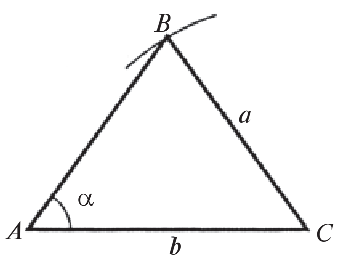
Y a s a s h . Biror to‘g‘ ri chiziqda $AB = b$ kesmani joylashtiramiz. Uchi A nuqtada bo‘lgan AC tomonda $\angle BAC = \alpha$ ni yasaymiz. C uchni markaz qilib, $CB = a$ radiusli aylana chizamiz. Aylana yoyining α burchakning AB tomoni bilan kesishish nuqtasi $\triangle ABC$ ning B uchidan iborat bo‘ladi.

I s b o t i . $\triangle ABC$ — izlangan uchburchak bo‘ladi, chunki yasalishiga ko‘ra, $AC = b$, $\angle BAC = \alpha$ va $CB = a$ tomon α burchak qarshisida yotadi.

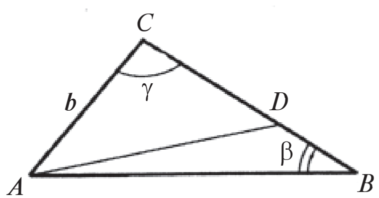
T e k s h i r i s h . α burchak va berilgan kesmalarni yagona ravishda yasash mumkin bo‘lganligidan masala yagona yechimga ega.

15. Ikkita burchagi va tomonlari ayirmasi bo‘yicha uchburchak yasash. Uchburchakning ikkita $\angle B = \beta$ va $\angle C = \gamma$ burchagi hamda a va b tomonlarining $a - b$ ayirmasi berilgan, uni yasash talab qilinadi (11.15- chizma).

T a h l i l . $\triangle ABC$ — izlangan uchburchak bo‘lsin. Uning BC tomonida B uchidan boshlab $BD = a - b$ kesmani joylashtiramiz hamda A va D nuqtalarni tutashtiramiz. Modomiki, $BC = a$ ekan, $CD = a - (a - b)$, ya’ni $AC = CD$ bo‘ladi. Demak, $\triangle ACD$ teng yonli va



11.14- chizma.



11.15- chizma.

$\angle CAD = \angle CDA =$ $= 90° - \frac{\gamma}{2}$ va $\angle ADB = 180° - \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) =$
$= 90° - \frac{\gamma}{2}$.

Shunday qilib, $\triangle ABD$ da BD tomoni va unga yopishgan ikkita burchak ma'lum, shuning uchun uni yasash mumkin.

Y a s a s h . Biror to‘g‘ri chiziqda $BD = a - b$ kesmani joylashtiramiz va BC tomondagi B nuqtada $\angle DBA = \beta$ ni, D nuqtada esa $\angle ADB = 90° + \frac{\gamma}{2}$ ni yasaymiz. U holda DA va BA lar A nuqtada kesishadi. DA tomonda uchi A nuqtada bo‘lgan $\angle CAD = 90° -$ ni yasaymiz. So‘ngra BD ni davom ettiramiz va u holda C uch AC va BC to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi bo‘ladi: AD $DC =$ $= C$, $\triangle ABC$ esa izlangan uchburchakdir.

I s b o t i . Yasalishiga ko‘ra, $\angle CBA = \beta$, $\angle ADB = 90° +$.
U holda $\angle ADB = 180° - \gamma -$ bo‘ladi. Shuningdek, yasalishiga ko‘ra, $\angle CAD = 90° - \frac{\gamma}{2}$. Endi $\angle ADC$ ning kattaligini $\triangle ADB$ ning tashqi burchagi kabi aniqlaymiz:

$$\angle ADC = \angle DAB + \angle ABD = 90° - \quad .$$

Modomiki, $\angle CAD = \angle ADC = 90° -$ ekan, $\angle ADC$ teng yonli va $\angle ADC = 180° - 2$ $= \gamma$. Shunday qilib, $\triangle ABC$ izlangan uchburchakdan iborat.

T e k sh i r i sh. Kesma va burchaklar yagona ravishda yasalishi mumkinligidan, masala yagona yechimga ega.

16. Ikki burchagi va ikki tomoni yig‘indisi bo‘yicha uchburchak yasash. Uchburchakning ikkita A va B burchagi hamda uning ikkita b va c tomoni uzunliklari yig‘indisi $b + c$ berilgan, uni yasash talab qilinadi (11.16 - chizma).

T a h l i l. Masala yechilgan bo‘lsin. AB tomonning davomida $AD = AC$ kesmani joylashtiramiz hamda D va C nuqtalarni tutashtiramiz. Hosil bo‘lgan $\triangle ACD$ teng yonli bo‘ladi va uning tashqi burchagidan iborat va shuning uchun, $\angle ACD = \angle ADC =$

$= \frac{\angle A}{2}$. $\triangle BCD$ da $BD = b + c$ tomon va ikkita unga yopishgan

$\angle CBD = \angle B$, $\angle CBD = \frac{1}{2}\angle A$ ma'lum.

Y a s a s h . Biror to'g'ri chiziqda $BD = b + c$ kesmani qo'yamiz. Uchlari B va D nuqtalarda bo'lgan $\angle CBD = \angle B$ va $\angle CDB =$ $\angle A$ burchaklarni yasaymiz. Bu burchaklarning BC va DC tomonlari C nuqtada kesishadi. CD nurda uchi C nuqtada bo'lgan $\angle DCA =$ $\angle A$ burchakni yasaymiz. Bu burchakning CA tomoni BD tomon bilan kesishishi natijasida $\triangle ABC$ ning A uchini beradi.

I s b o t i . Yasalishiga ko'ra $\angle CAB = \angle B$, $BD = b + c$. Modomiki, $\angle CDA = \angle DCA =$ $\angle A$ ekan, $\triangle ACD$ teng yonli bo'ladi va $AD = AC$.

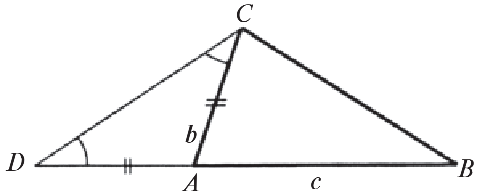
U holda $AC + AB = b + c$ va $\angle CAB = 2\angle ACD = \angle A$. Demak, $\triangle ABC$ izlangan uchburchakdir.

T e k s h i r i s h . Agar $\angle A + \angle B < 180°$ bo'lsa, berilgan nurda
$\frac{1}{2}$ berilgan burchakni yagona tarzda yasash mumkin bo'lganligidan, masala yagona yechimga ega bo'ladi.

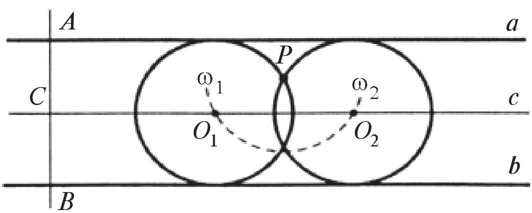
17. Berilgan nuqtadan ikkita parallel to'g'ri chiziqqa uringan holda o'tuvchi aylana yasash.

T a h l i l . a va b parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa d bo'lsin (11.17- chizma). U holda izlanayotgan aylananing

11. 16- chizma.



11. 17- chizma.



radiusi bo‘lishi shart. Aylananing markazi quyidagi ikki shartni qanoatlantirishi zarur: 1) u *a* va *b* to‘g‘ri chiziqlarning har biridan teng uzoqlikda joylashishi; 2) aylananing markazi berilgan *P* nuqtadan masofada joylashishi.

Y a s a s h . *a* to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy *A* nuqtasidan *b* to‘g‘ri chiziqqa *AB* perpendikular o‘tkazamiz, ya’ni *AB* $b = B$. *AB* kesmaning o‘rtasi *C* ni topamiz va *C* nuqtadan *AB* kesmaga perpendikular *c* to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. So‘ngra *P* nuqtadan radiusi bo‘lgan aylana o‘tkazamiz. Bu aylananing *c* to‘g‘ri chiziq bilan kesishish nuqtasi O_1 (va O_2) izlanayotgan (O_1;) aylananing markazi bo‘ladi.

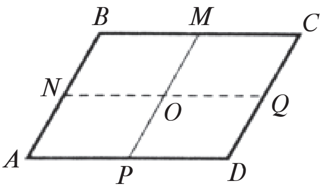
I s b o t i . Modomiki, to‘g‘ri chiziq berilgan *a* va *b* to‘g‘ri chiziqlardan masofada joylashgan ekan, (O_1;) aylana ham *a* to‘g‘ri chiziqqa, ham *b* to‘g‘ri chiziqqa urinadi. Yasashga ko‘ra, $PO_1 =$ bo‘lganligidan, yasalgan aylana *P* nuqtadan o‘tadi.

T e k s h i r i s h . Agar *P* nuqta *a* va *b* to‘g‘ri chiziqlar orasida yotsa, masala ikkita (O_1;) va (O_2;) yechimga ega bo‘ladi. Agar *P* nuqta *a* yoki *b* to‘g‘ri chiziqda yotsa, masala yagona yechimga ega bo‘ladi.

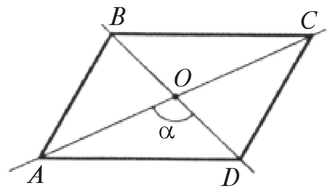
18. Uchta tomonining o‘rtalari bo‘yicha parallelogramm yasash. Parallelogramm uchta tomonining o‘rtalari berilgan, uni yasash talab qilinadi.

T a h l i l . *ABCD* parallelogrammdagi *M, N* va *P* nuqtalar, mos ravishda, *BC, AB* va *AD* tomonlarning o‘rtalari bo‘lsin (11.18-chizma). U holda *MP* to‘g‘ri chiziq *AB* va *CD* tomonlarga parallel bo‘ladi. Agar *O* nuqta *MP* kesmaning o‘rtasi bo‘lsa, *ON* to‘g‘ri chiziq parallelogrammning *AD* va *BC* tomonlariga parallel bo‘ladi. *A, B, C, D* uchlarni parallelogramm tomonlarining kesishish nuqtalari sifatida olamiz.

Y a s a s h . Uchta *M, N, P* nuqta berilgan. *M* va *P* nuqtalarni tutashtiramiz va hosil qilingan *MP* kesmaning *O* o‘rtasini topamiz. So‘ngra *N* va *O* nuqtalardan *NO* to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz.



11.18- chizma.



11.19- chizma.

NO to‘g‘ri chiziqda *N* nuqtadan boshqa tomonga qarab $OQ = ON$ kesmani joylashtiramiz. Natijada parallelogramm to‘rtta tomonining o‘rtalarini hosil qilamiz.

Nihoyat, *M* va *P* nuqtalardan *NO* to‘g‘ri chiziqqa parallel *MC* va *DP* to‘g‘ri chiziqlar, *N* va *Q* nuqtalardan esa *MP* to‘g‘ri chiziqqa parallel *NB* va *QC* to‘g‘ri chiziqlarni o‘tkazamiz. U holda, mos ravishda, $A = AB \quad AD$, $B = AB \quad BC$, $C = BC \quad CD$, $D = AD \quad CD$ nuqtalarni olamiz.

I s b o t i. Modomiki, $BM \parallel NO$, $AP \parallel NO$ ekan, $BM \parallel AP$; $BC \parallel AD$ bo‘ladi, $NB \parallel MP$, $QC \parallel MP$ bo‘lganligi uchun $AB \parallel DC$ bo‘ladi. Hosil qilingan to‘rtburchakda $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, ya’ni *ABCD* parallelogrammdan iborat.

T e k s h i r i s h. Modomiki, *MP* kesmaning o‘rtasi yagona va to‘g‘ri chiziqdan tashqaridagi nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqa yagona parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin ekan, masala yagona yechimga ega bo‘ladi.

19. Diagonallari va ular orasidagi burchagi bo‘yicha parallelogramm yasash.

T a h l i l. Agar diagonallarning uzunliklarini $AC = d_1$, $BD = d_2$, ular orasidagi burchakni $\angle AOD = \alpha$ deb belgilasak (11.19- chizma), $\triangle AOD$ da ikkita $AO = \quad d_1$, $OD = \quad d_2$ tomon va ular orasidagi α burchak ma’lum. Demak, yuqorida ko‘rib chiqilganlarga asosan, $\angle AOD$ ni yasash mumkin. *A* va *C*, *B* va *D* nuqtalar *O* nuqtaga nisbatan simmetrik nuqtalar bo‘lganligidan, $\angle AOD$ yordamida *ABCD* parallelogrammni yasash mumkin.

Y a s a s h. *OA* nurdagi ixtiyoriy *O* nuqtada $\angle AOD = \alpha$ ni yasaymiz. Bu burchakning *OA* va *OD* tomonlarida $AO = \quad d_1$, $OD = \quad d_2$ kesmalarni qo‘yamiz. Bu tomonlarning *O* nuqtasidan boshqa tomonga qarab $OC = OA$ va $OB = OD$ kesmalarni joylashtiramiz. So'ngra, hosil qilingan A, B, C, D nuqtalarni ketma-ket tutashtirib, $ABCD$ parallelogrammni olamiz.

I s b o t i. $OB = OD, OA = OC$ bo'lganligidan, AC va BD kesmalar O nuqtada teng ikkiga bo'linadi. OB va OC kesmalar OD va OA kesmalarning davomida joylanganligidan, vertikal burchaklar bo'lgani uchun $\angle BOC = \angle AOD$ bo'ladi. U holda ikki tomoni va ular orasidagi burchagi bo'yicha $\triangle AOD = \triangle BOC$. Bundan, $BC = AD$ va $\angle CBO = \angle ADO$ bo'lishi kelib chiqadi. AD va BC to'g'ri chiziqlar BD to'g'ri chiziq tomonidan shunday kesilganki, unda hosil bo'lgan ichki almashinuvchi burchaklar o'zaro tengdir. U holda to'g'ri chiziqlarning parallellik alomatiga ko'ra $AD \parallel BC$ bo'ladi.

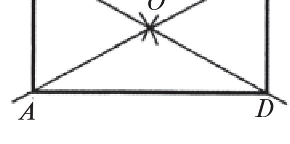
Nihoyat, $AD \parallel BC$ va $AD = BC$ bo'lganligidan, $ABCD$ to'rtburchak parallelogrammdan iborat.

T e k s h i r i s h. To'g'ri chiziqda kesmalar va burchaklar yagona ravishda yasalganligidan, masala yagona yechimga ega bo'ladi.

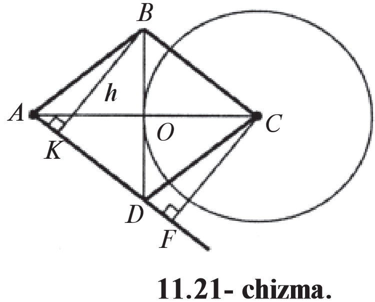
20. Tomoni va diagonallarining yig'indisi bo'yicha to'g'ri to'rtburchak yasash.

T a h l i l. AD ma'lum tomon bo'lsin. To'g'ri to'rtburchakning diagonallari teng ekanligi va O kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linishi ma'lum bo'lganligidan, teng yonli $\triangle AOD$ da (11.20-chizma) AD asos va teng yon tomonlar yig'indisi ma'lum. Shuning uchun $\triangle AOD$ ni yasaymiz va so'ngra uni to'g'ri to'rtburchakkacha to'ldiramiz.

Y a s a s h. To'g'ri chiziqda A uchdan AD kesmani joylashtiramiz. Uzunligi to'g'ri to'rtburchak diagonallari yig'indisiga teng bo'lgan kesmani to'rtta teng bo'lakka (qismga) bo'lamiz.



11.20- chizma.



11.21- chizma.

Yoyilmasi berilgan kesmaning   qismiga teng bo‘lgan sirkul bilan markazlari A va D nuqtalarda bo‘lgan yoylarni chizamiz. Ular kesishadigan O nuqta $\triangle AOD$ ning uchini beradi. So‘ngra AO va DO tomonlarning davomida $OC = OA$ va $OB = OD$ kesmalarni joylashtiramiz. Hosil bo‘lgan A, B, C, D nuqtalarni ketma-ket tutashtirib, $ABCD$ to‘g‘ri to‘rtburchakni olamiz.

Isboti va tekshirishni mustaqil bajarish tavsiya qilinadi.

21. Balandligi va diagonallaridan biri bo‘yicha romb yasash.

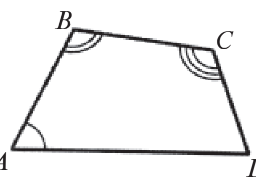
Tahlil. Rombda $AC = d$ berilgan diagonal va $BK = h$ berilgan balandlik bo‘lsin (11.21- chizma). Rombning B uchi noma’lum bo‘lgani uchun, CF AD o‘tkazamiz. F nuqta AD to‘g‘ri chiziq bo‘ylab shunday harakat qilsinki, kesma o‘z o‘qiga, ya’ni CF ga parallel bo‘lib qolsin. Bu parallel ko‘chirishda kesma BO bilan rombning B uchida kesishadi. D nuqta B nuqtaga AC kesmaga nisbatan simmetrik bo‘ladi.

Yasash. Berilgan AC kesmaning o‘rtasini topamiz va OB AC to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. C nuqtani markaz qilib, $CF = h$ radiusli aylana chizamiz. Berilgan A nuqtadan shu aylanaga AF urinma o‘tkazamiz (13- masala). CF kesmani o‘z-o‘ziga parallel
$\frac{1}{4}$ ravishda AF kesma bo‘ylab A nuqtaga tomon harakat qildiramiz. Bu harakatda kesma BO to‘g‘ri chiziq bilan B nuqtada kesishadi. OB ning ikkinchi tomonida O nuqtadan $OD = OB$ kesmani joylashtirib, rombning to‘rtinchi uchini olamiz.

Isboti va tekshirishni mustaqil bajarish tavsiya qilinadi.

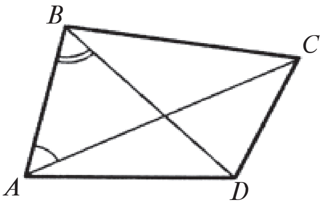
22. Uchta burchagi va ikki tomoni bo‘yicha to‘rtburchak yasash. To‘rtburchakning uchta A, B, C burchagi va ikkita AB va AD tomoni berilgan, uni yasash talab qilinadi.

Tahlil. $ABCD$ talab qilingan to‘rtburchak bo‘lib, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ uning ketma-ket ma’lum burchaklari hamda AB va AD uning ma’lum tomonlari bo‘lsin (11.22- chizma). Demak, ikkita AB, AD tomoni va ular orasidagi $\angle BAD$ bo‘yicha $\triangle ABD$ ni yasash mumkin(7- masala). So‘ngra BA nurdagi B nuqtada $\angle ABC$ ni yasaymiz (2-masala) va $\angle ADC = 360° -$ $- (\angle A + \angle B + \angle C)$ bo‘lishini topamiz.



11.22-chizma.

Yasash. $\angle BAD$ ni yasaymiz va uning tomonlarida A nuqtadan AB va



11.23- chizma.

AD kesmalarni qo‘yamiz. BA nurda B uchli $\angle ABC$ ni yasaymiz, AD nurda esa D uchli $\angle ADC = 360^\circ - (\angle A + \angle B + \angle C)$ ni yasaymiz. BC va DC nurlarning kesishish nuqtasi C uchni beradi.

Isboti va tekshirishni mustaqil bajarish tavsiya qilinadi.

23. Ikkita burchagi va uchta tomoni bo‘yicha to‘rtburchak yasash. $ABCD$ to‘rtburchakning ikkita $\angle CAB$, $\angle ADB$ burchagi va uchta AB, AC, AD tomoni berilgan, uni yasash talab qilinadi (11.23- chizma).

Tahlil. $ABCD$ izlanayotgan to‘rtburchak bo‘lsin. U holda $\triangle ABC$ da ikkita AB va AC tomonlar va ular orasidagi $\angle BAC$ ma’lum. $\angle ABD$ esa BA nurda yasalgan. U holda $\triangle ABD$ da AB va AD tomonlar va AD tomon qarshisidagi $\angle ABD$ ma’lum bo‘ladi.

Yasash. $\angle BAC$ ni yasaymiz va uning tomonlari bo‘lgan AB va AC kesmalarni joylashtiramiz.

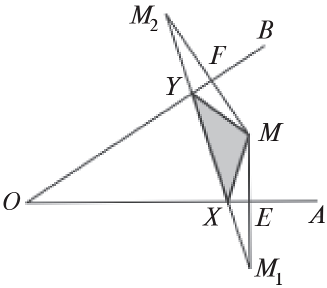
Shunday qilib, to‘rtburchakning uchta A, B, C uchlari yasaldi, BA nurda B uchi berilgan ikkinchi $\angle ABD$ ni yasaymiz. So‘ngra markazi A nuqtada va radiusi AD bo‘lgan aylana chizamiz. Bu aylananing BD nur bilan kesishish nuqtasi to‘rtburchakning to‘rtinchi D uchini beradi. Hosil qilingan B, C, D, A nuqtalarni tutashtirib, talab qilingan $ABCD$ to‘rtburchakni olamiz.

Isboti. Berilgan nuqtada berilgan kesmani joylashtirish yoki berilgan nurda burchakni yasash yagona ravishda amalga oshirilganligidan, masala yagona yechimga ega bo‘ladi.

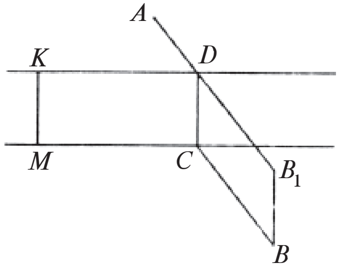
Endi yasashga doir masalalarning maxsus talablar qo‘yilganlaridan ba’zilarini keltiramiz.

24. O‘tkir burchak va uning ichidagi nuqta bo‘yicha tomonlardagi nuqtalarni topish. O‘tkir $\angle AOB$ burchak va uning ichida M nuqta berilgan. Burchakning tomonlarida shunday X va Y larni topish kerakki, $\triangle MXY$ ning perimetri eng kichik bo‘lsin (11.24- chizma).

Tahlil. $\triangle MXY$ izlanayotgan uchburchak, X, Y uchburchakning berilgan burchak tomonlarida yotuvchi uchlari bo‘lsin. Uchburchakning perimetri $p = MX + MY + XY$ bo‘ladi. M nuqtaga berilgan burchakning OA va OB tomonlariga nisbatan simmetrik M_1 va M_2 nuqtalarni yasaymiz.



11.24- chizma.



11.25- chizma.

U holda p perimetr M_1, X, Y, M_2 nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotgandagina, eng kichik qiymat qabul qiladi.

Y a s a s h . M nuqtaga berilgan $\angle AOB$ ning OA va OB tomonlariga nisbatan simmetrik bo‘lgan M_1 va M_2 nuqtalarni yasaymiz va ular orqali to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Bu to‘g‘ri chiziq $\angle AOB$ ning OA va OB tomonlari bilan kesishgan X va Y nuqtalar uchburchakning uchlaridan iborat bo‘ladi.

I s b o t i . M_1, X, Y, M_2 nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotganligidan, M_1M_2 shu M_1 va M_2 nuqtalar orasidagi eng qisqa masofa bo‘ladi. $\triangle MM_1X$ da $MM_1 \perp XA$ va $ME = M_1E$ bo‘lganligidan, u teng yonli uchburchakdan iborat. U holda $MX \perp M_1X$. Shunga o‘xshash, $\triangle MYM_2$ da $YM = YM_2$ bo‘ladi. Demak, bundan $p = MX + MY + XY$ ning M_1M_2 kesmaning uzunligiga tengligi kelib chiqadi, ya’ni bu qiymat perimetrning eng kichik qiymati bo‘ladi.

T e k s h i r i s h . Ikkita M_1 va M_2 nuqtadan yagona to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkinligidan, masala yagona yechimga ega.

25. Yer ustida ikki nuqta orasidagi masofani topish. A va B punktlar eni ma’lum bo‘lib, qirg‘oqlari to‘g‘ri chiziqli bo‘lgan daryoning turli tomonlarida joylashgan bo‘lsin. Daryo ustida ko‘prikni shunday qurish kerakki, A dan B gacha bo‘lgan yo‘l eng qisqa bo‘lsin.

T a h l i l . Ko‘prik D nuqtada qurilgan bo‘lsin (11.25- chizma). Ko‘prikni hisobga olganda, yo‘lning uzunligi, B nuqta CD masofaga ko‘chirilganda, eng qisqa bo‘ladi va u holda A, D va B_1 nuqtalar bitta to‘g‘ri chiziqda yotadi.

Y a s a s h . KM daryoning eni bo‘lsin. B nuqtani KM ga parallel ravishda, daryo eniga teng masofaga ko‘chirib, B_1 nuqtani olamiz. A va B_1 nuqtalar orqali AB_1 to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. U holda AB_1 va KD to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi D dan iborat bo‘ladi. Endi D nuqtadan DC KD to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz hamda C va B nuqtalarni tutashtiramiz. Hosil bo‘lgan $ADCB$ siniq chiziq eng qisqa uzunlikka egadir.

I s b o t i. CDB_1B to‘rtburchakda $CD \parallel BB_1$ va $CD = BB_1$ munosabatlar o‘rinli. Shuning uchun CDB_1B parallelogramm bo‘ladi va u holda $CB = DB_1$. Modomiki, A, D, B_1 nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotar ekan, $ADCB$ siniq chiziq mumkin bo‘lgan eng kichik uzunlikka ega bo‘ladi.

T e k s h i r i s h. A va B_1 nuqtalardan yagona to‘g‘ri chiziq o‘tkazish, DB_1 va KM kesmalar yordamida yagona parallelogramm yasash mumkin bo‘lganligidan, masala yagona yechimga egadir.

Mustaqil yechish uchun masalalar

A GURUH

1. Asosi b va unga yopishgan α burchagi bo‘yicha teng yonli uchburchak yasalsin.

2. Asosi b va asosga o‘tkazilgan h_b balandligi bo‘yicha teng yonli uchburchak yasalsin.

3. Ikkita tomoni va uchinchi tomoniga o‘tkazilgan balandlik bo‘yicha uchburchak yasalsin.

4. Kateti a va unga yopishgan β burchagi bo‘yicha to‘g‘ri burchakli uchburchak yasalsin.

5. Diagonallari bo‘yicha romb yasalsin.

6. Tomoni va ikkita diagonallari bo‘yicha parallelogramm yasalsin.

7. Tomoni a, unga yopishgan burchagi α va berilgan tomonga o‘tkazilgan balandligi h_a bo‘yicha parallelogramm yasalsin.

B GURUH

8. Ikkita tomoni va ulardan biriga o‘tkazilgan mediana bo‘yicha uchburchak yasalsin.

9. Ikkita tomoni va ulardan biriga o‘tkazilgan balandlik bo‘yicha uchburchak yasalsin.

10. Kateti b va boshqa katetning gipotenuza bilan yig‘indisi $a + c$ bo‘yicha to‘g‘ri burchakli uchburchak yasalsin.

11. $ABCD$ kvadratga shunday yangi ichki kvadrat chizilsinki, uning bitta uchi AD tomonda berilgan nuqtada yotsin.

12. Berilgan tomoni va u bilan ikkita diagonali orasidagi burchaklar bo‘yicha parallelogramm yasalsin.

13. Tomoni va balandligi bo‘yicha romb yasalsin.

14. Gipotenuzasi c va gipotenuzaga o‘tkazilgan h_c balandligi bo‘yicha to‘g‘ri burchakli uchburchak yasalsin.

C GURUH

15. Gipotenuzasi va unga o‘tkazilgan balandligining yig‘indisi bo‘yicha teng yonli, to‘g‘ri burchakli uchburchak yasalsin.

16. Ikkita qo‘shni tomoni a va b va diagonallari orasidagi α burchak bo‘yicha parallelogramm yasalsin.

17. Asosi a, balandligi h va diagonallari orasidagi α burchagi bo‘yicha parallelogramm yasalsin.

18. Uchta tomoni va ikkita burchagi bo‘yicha to‘rtburchak yasalsin.

19. Ikkita tomoni va bitta diagonali bo‘yicha (2 ta hol) parallelogramm yasalsin.

20. Tomoni va unga ichki chizilgan aylananing markazi bo‘yicha romb yasalsin.

21. Ikkita tomoni va uchinchi tomoniga o‘tkazilgan balandlik bo‘yicha uchburchak yasalsin.

XII BOB | VEKTORLAR

1- §. Asosiy tushunchalar

Tabiatda, asosan, ikki xil miqdorlar: skalar va vektor miqdorlarni bir-biridan ajratishadi.

1- t a ’ r i f. Faqat son qiymatlari bo‘yicha tavsiflanadigan miqdorlar *skalar miqdorlar* yoki *skalarlar* deyiladi. Masalan, uzunlik, massa, yuz, temperatura va h.k.

2- t a ’ r i f. Agar miqdor: 1) son qiymati; 2) yo‘nalishi bo‘yicha tavsiflanadigan bo‘lsa, u *vektor miqdor* yoki *vektor* deyiladi.

Masalan, tezlik, kuch va h. k.

Vektorlar kichik lotin harflari ustiga strelka yozish yordamida belgilanadi, masalan, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Agar vektor ikkita *A* va *B* nuqta orqali aniqlansa, u kabi belgilanadi, ya’ni vektor yo‘nalishi strelka bilan ko‘rsatilgan kesma kabi tasvirlanadi.

3- t a ’ r i f. Vektorning son qiymati uning *moduli* yoki *uzunligi* deyiladi va , *a* yoki , *AB* kabi yoziladi.

Ikkita *A* va *B* nuqta berilgan bo‘lsin. *A* nuqtadan *B* nuqtaga siljish (ko‘chish) vektorga eng sodda misol bo‘la oladi. Bu ko‘chish masofa va yo‘nalish bilan aniqlanadi. Ikkita *A* va *B* nuqta ikkita va vektorni aniqlaydi. Shuning uchun vektor yo‘nalgan kesma bilan tasvirlanadi. vektor uchun *A* nuqta uning *boshi*, *B* nuqta vektorning *oxiri* deyiladi.

Agar yo‘nalgan kesma vektorni ifodalasa, = kabi yozamiz.

4- t a ’ r i f. Agar ikkita va vektor bitta to‘g‘ri chiziqda yoki parallel to‘g‘ri chiziqlarda yotsa, ular *o‘zaro parallel vektorlar* deyiladi. va vektorlarning parallelligi || kabi yoziladi.

5- t a ’ r i f. Agar ikkita va vektor o‘zaro parallel va bir xil yo‘nalishga ega bo‘lsa, ular *yo‘nalishdosh vektorlar* deyiladi. va vektorlar yo‘nalishdosh bo‘lsa, u kabi yoziladi.

6- t a ’ r i f. Agar vektorlar parallel bo‘lib, ularning yo‘nalishlari bir-biriga qarama-qarshi bo‘lsa, bu vektorlar *qarama-qarshi yo‘nalgan vektorlar* deyiladi va kabi belgilanadi.

7- t a ’r i f . Agar ikkita va vektor: 1) yo‘nalishdosh; 2) bir xil uzunliklarga ega bo‘lsa, ya’ni , bo‘lsa, ular *teng* deyiladi.

8- t a ’r i f . Agar vektorning boshi *A* va oxiri *B* ustma-ust tushsa, *nol vektor* deyiladi.

Nol vektorning uzunligi nolga teng, yo‘nalishi esa aniqlanmagan bo‘lib, u kabi belgilanadi.

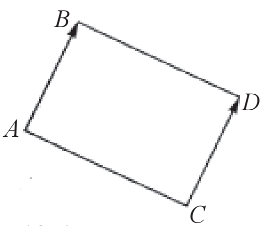
vektor va *C* nuqta berilgan bo‘lsin. *CD* nurda vektorga teng bo‘lgan vektor yasaymiz. Buning uchun *A* va *C* nuqtalarni tutashtiramiz.

B nuqtadan *BD* ‖ *AC* nur o‘tkazamiz. *C* nuqtadan *BD* ning *CD* nur bilan kesishish nuqtasi *D* gacha *CD* nur o‘tkazamiz. U holda (12.1-chizma) = bo‘ladi. Bu munosabat *ABCD* to‘rtburchak parallelogramm ekanligi va yasalishiga ko‘ra $\overrightarrow{AB}$ ekanligidan kelib chiqadi.

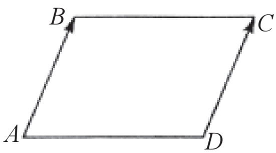
Berilgan vektorga teng bo‘lgan vektorni yasash *vektorni nuqtadan boshlab qo‘yish* deyiladi.

1- m a s a l a . Agar va teng vektorlar bir to‘g‘ri chiziqda yotmasa, *ABCD* to‘rtburchakning parallelogramm bo‘lishi isbotlansin (12.2- chizma).

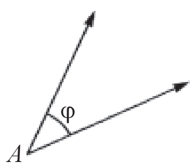
I s b o t i . Modomiki, = ekan, = va $\overrightarrow{DC}$ bo‘ladi. Shunday qilib, to‘rtburchakning ikkita qarama-qarshi *AB* va *CD* tomonlari teng va o‘zaro paralleldir. Parallelogrammning alomatiga ko‘ra, *ABCD* to‘rtburchak parallelogrammdan iborat.



12.1- chizma.



12.2- chizma.



12.3- chizma.

9- t a’r i f. va vektorlar bitta nuqtadan boshlab qo‘yilganda ular tashkil etgan φ burchak (12.3- chizma) nol bo‘lmagan va *vektorlar orasidagi burchak* deyiladi. Vektorni *A* nuqtadan boshlab qo‘yish, ba’zan *vektorni A nuqtaga keltirish* deb ham ataladi.

2- §. Vektorlar ustida amallar

1. Vektorlarni qo‘shish. Ta’rifga ko‘ra = vektor *A* nuqtadan *B* nuqtaga siljishdan (ko‘chish), = vektor esa *B* nuqtadan *C* nuqtaga siljishdan iborat (12.4- chizma). U holda *A* nuqtadan bevosita *C* nuqtaga siljishni berilgan va *vektorlarning yig‘indisi* deb atash tabiiydir. Vektorlarni qo‘shish amali,

$$+ \quad =$$

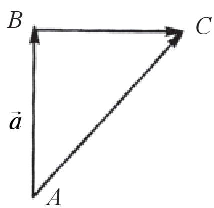
kabi yoziladi.

Ikkita va vektorni qo‘shish uchun quyidagi qoidaga amal qilinadi:

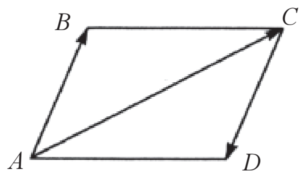
Ikkita va vektorni qo‘shish uchun vektorni *A* nuqtaga keltiramiz va uning oxirgi nuqtasini *B* deb belgilaymiz. So‘ngra vektorning *B* oxirgi nuqtasidan = vektorni qo‘yamiz.

Unda birinchi vektorning boshi bo‘lgan *A* nuqtani ikkinchi vektorning oxiri bo‘lgan *C* nuqta bilan tutashtiruvchi vektor va vektorlarning yig‘indisi bo‘ladi. Vektorlarni qo‘shishning bu qoidasi *uchburchak qoidasi* deyiladi.

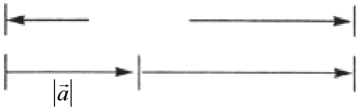
Endi vektorlarni qo‘shishning yana bir qoidasi bilan tanishamiz. Berilgan va vektorlarni *A* nuqtaga keltiramiz (12.5-chizma). = va = bo‘lsin. *B* nuqtadan $BC \parallel AD$, *D* nuqtadan $DC \parallel AB$ kesmalarni o‘tkazamiz. *C* nuqta *ABCD* parallelogramm *BC* va *CD* tomonlarining kesishish nuqtasi bo‘lsin. *A* nuqtadan o‘tkazilgan va *AC* diagonalda yotuvchi vektor



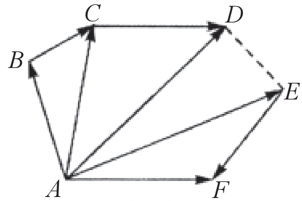
12.4- chizma.



12.5- chizma.



12.6- chizma.



12.7- chizma.

berilgan $\vec{a}$ va vektorlarning yig'indisidan iborat:

$$= \quad + \quad .$$

(isboti parallelogramm xossalaridan kelib chiqadi).

Ikki vektorni qo'shishning bu qoidasi *parallelogramm qoidasi* deyiladi.

Vektorlarni qo'shish amali quyidagi xossalarga ega:

1. + = + — qo'shishning o'rin almashtirish xossasi.

2. + (−) = 0.

3. (bu munosabat uchburchak tengsizligidan kelib chiqadi), tenglik va vektorlar yo'nalishdosh bo'lganda-gina (12.6- chizma) bajariladi.

4. + = .

Bir nechta , , ,..., vektorni qo'shish uchun (12.7-chizma) ularni uchburchak qoidasi bo'yicha ketma-ket qo'yamiz:

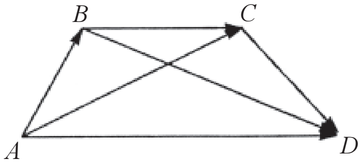
$$+ \quad = \quad , \quad + \quad = \quad \ldots$$

$$+ \quad = \quad .$$

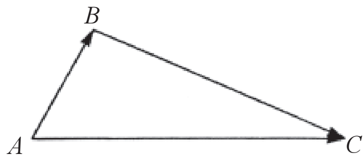
Qoida. Bir nechta , , , ..., vektorni qo'shish uchun oldingi vektorning oxiriga navbatdagi vektorning boshini ketma-ket ravishda, to oxirgi vektorgacha keltiramiz. U holda = vektorning A boshini oxirgi qo'shiluvchi = vektorning F oxiri bilan tutashtiruvchi vektor berilgan , , , ..., vektorlarning yig'indisi bo'ladi.

Bir nechta vektorning yig'indisi yuqorida keltirilgan xossalarga qo'shimcha ravishda guruhlash xossasiga ega (12.8-chizma):

$$+ \; + \; = \; + \quad = \quad + \; .$$



12.8- chizma.



12.9- chizma.

Haqiqatan ham,

$$+ \quad + \quad = \qquad , \quad + \quad = \qquad ,$$

$$= \qquad + \qquad = \qquad ,$$

$$+ \quad = \qquad , \qquad\qquad = \qquad + \quad = \qquad .$$

Bu ifodalarni taqqoslab, talab qilingan natijani olamiz.

2. Vektorlarni ayirish. va vektorlarning *ayirmasi* deb, shartni qanoatlantiradigan vektorga aytiladi. Bundan bo'ladi (12.9-chizma).

Ikkita $\vec{a}$ va vektorning ayirmasini ko'rinishda ham yozish mumkin.

Ikkita va vektorning ayirmasini topish masalasini geometrik usul bilan yechish uchun ularni umumiy A boshlang'ich nuqtaga keltiramiz: $=$, $=$ (12.10-chizma). B va D nuqtalardan $BD \parallel AD$, $DC \parallel AB$ nurlarni o'tkazamiz, ular C nuqtada kesishadi. Hosil bo'lgan $ABCD$ to'rtburchak parallelogrammdan iborat.

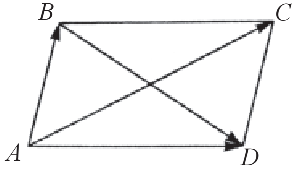
Ikkita vektorni qo'shish va ayirish qoidalariga asosan, parallelogrammning diagonallarida $AC =$ va vektorlar yotadi.

3. Vektorni songa ko'paytirish. Berilgan vektorning berilgan m songa *ko'paytmasi* deb:

1. Moduli bo'lgan;

2. $m > 0$ bo'lganda va $m < 0$ bo'lganda

shartlarni qanoatlantiruvchi vektorga aytiladi va u kabi yoziladi. Ta'rifdan, agar bitta vektor boshqasini biror songa ko'paytirish natijasida hosil qilingan bo'lsa, bu vektorlarning parallel bo'lishi kelib chiqadi. O'zaro parallel vektorlar *kollinear* deb ham ataladi.



12.10- chizma.

Shunday qilib, agar va vektorlar kollinear bo‘lsa (bunda λ — biror son) kabi yozish mumkin.

Vektorning songa ko‘paytmasi quyidagi xossalarga ega.

1. Guruhlash qonuni:

.

2. Sonlarning yig‘indisiga nisbatan taqsimot qonuni:

. (*)

3. Vektorlarning yig‘indisiga nisbatan taqsimot qonuni:

.

Bu xossalardan ikkinchisini isbotlaymiz. Agar $x = 0$, $y = 0$, $= 0$ shartlardan birortasi bajarilsa, (*) formulaning o‘rinliligi ravshan. Shu sababli , $y \neq 0$, $\vec{a} \neq 0$ deb faraz qilamiz.

Dastlab, x va y bir xil ishorali bo‘lgan holni qaraymiz. U holda $x\vec{a}$, va vektorlar yo‘nalishdosh bo‘ladi. Ularning uzunliklari

$$|x\vec{a}| + |y\vec{a}| = |x| \cdot |\vec{a}| + |y| \cdot |\vec{a}|,$$

$$|(x+y)\vec{a}| = |x+y| \cdot |\vec{a}| = (|x| + |y|) \cdot |\vec{a}| = |x| \cdot |\vec{a}| + |y| \cdot |\vec{a}|$$

bo‘ladi. Shunday qilib, x va y lar bir xil ishorali bo‘lganda (*) tenglik isbotlandi.

Endi x va y lar har xil ishorali bo‘lsin. Agar $= 0$, ya‘ni bo‘lsa, va bo‘ladi va (*) tenglik o‘rinli.

$x + y \neq 0$ bo‘lsin. U holda $x + y$ yig‘indi yoki son bilan bir xil ishorali bo‘ladi. ning ishorasi ning ishorasi bilan bir xil bo‘lsin. Unda

tenglikni yozish mumkin. Modomiki, $x +$ va bir xil ishorali ekan, yuqorida bayon qilinganiga ko‘ra deb yozish mumkin. Undan, talab qilingan,

tenglikni hosil qilamiz.

ning ishorasi ning ishorasi bilan bir xil bo‘lgan holda ham tenglik shunga o‘xshash isbotlanadi.

Qolgan xossalarni ham shunga o‘xshash isbotlash mumkin.

3- §. Vektorning o‘qqa proyeksiyasi

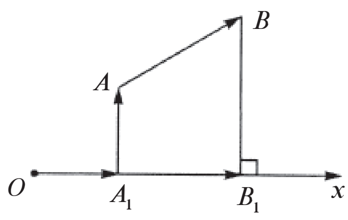
x o‘q berilgan bo‘lsin. Bu o‘qdagi ixtiyoriy O nuqtada birlik (ya’ni uzunligi bo‘lgan) vektorni yasaymiz. Shuningdek, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektor ham berilgan bo‘lsin (12.11 -chizma). vektorning A va B oxirlaridan x o‘qqa AA_1 va BB_1 perpendikularlar o‘tkazamiz. U holda va vektorlar bitta to‘g‘ri chiziqda yotadi. Ikkita vektorning parallellik shartlari bo‘yicha,

T a ’ r i f. Ushbu son vektorning x o‘qqa *proyeksiyasi* deyiladi.

vektorning o‘qqa proyeksiyasi A_1B_1 kesmaning, bo‘lganda musbat ishora bilan olingan, bo‘lganda esa manfiy ishora bilan olingan uzunligidan iborat.

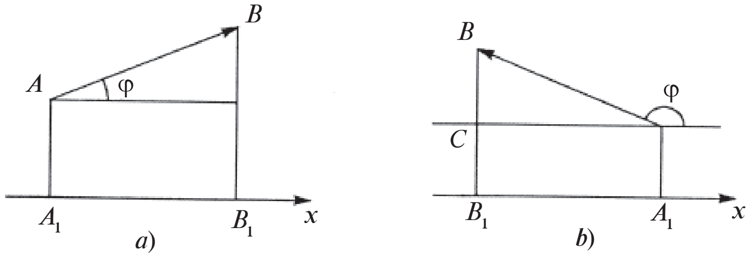
Agar vektorning uzunligi va uning berilgan o‘q bilan tashkil etgan burchagi ma’lum bo‘lsa, vektorning o‘qqa proyeksiyasini topish mumkin.

1- t e o r e m a. ***Vektorning o‘qqa proyeksiyasi vektor uzunligining vektor va o‘q orasidagi burchak kosinusiga ko‘paytmasiga teng.***



12.11- chizma.

I s b o t i. Berilgan vektorning o‘q bilan tashkil etgan burchagi o‘tkir, o‘tmas va to‘g‘ri burchak bo‘lgan hollarning har birini alohida qarab chiqamiz.



12.12- chizma.

1. vektor x o‘q bilan φ o‘tkir burchak tashkil etgan bo‘lsin (12.12- *a* chizma).

A nuqtadan x o‘qqa parallel AC to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz va to‘g‘ri burchakli $\triangle ABC$ ni hosil qilamiz. Olingan $\triangle ABC$ dan

munosabatni olamiz.

2. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektor x o‘q bilan φ o‘tmas burchak tashkil etsin (12.12- *b* chizma). U holda to‘g‘ri burchakli $\triangle ABC$ da $BAC =$ $= 180^\circ - \varphi$ bo‘ladi va

$$AC = A_1B_1 \quad AB\cos\varphi = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$$

$$AC = A_1B_1 = -|\overrightarrow{AB}|\cos(180^\circ - \varphi) = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\varphi$$

munosabatni olamiz.

Teorema to‘liq isbotlandi.

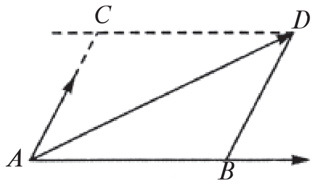
Vektorning o‘qqa proyeksiyasi quyidagi xossalarga ega:

1. *Teng vektorlar teng proyeksiyalarga ega.*
2. *Vektorlar yig‘indisining proyeksiyasi qo‘shiluvchilar proyeksiyalarining yig‘indisiga teng.*
3. *Vektorni songa ko‘paytirganda uning proyeksiyasi ham o‘sha songa ko‘paytiriladi.*

4- §. Vektorni yoyish

2- teorema. ***Ikkita kollinear bo‘lmagan $\vec{b}$ va vektorlar berilgan bo‘lsa, istalgan vektorni va vektorlarning algebraik yig‘indisi kabi ifodalash mumkin.***

Isboti. Uchta , , vektorni umumiy A nuqtaga keltiramiz (12.13-chizma). va vektorlar kollinear bo‘lmaganligidan, ular BAC ni tashkil etadi. vektor BAC ning



12.13-chizma.

ichidan o‘tgan bo‘lsin. vek-torning oxiri bo‘lgan D nuqtadan $DC \parallel AB$ va $DB \parallel AC$ to‘g‘ri chiziq-lar o‘tkazamiz. Buning natijasida $ABDC$ parallelogrammni hosil qila-miz. Parallelogramm qoidasi bo‘yicha, ikki vektorning yig‘indisi,

(1)

kabi yoziladi.

va , va vektorlar yo‘nalishdosh, ya’ni $\parallel$, $\parallel$ bo‘lganligidan, bu vektorlarning kollinearlik shartidan foydalanib, va deb yozish mumkin, bunda x va y — biror sonlar. Olingan qiymatlarni (1) ga keltirib qo‘yib, talab qilingan

(2)

munosabatni hosil qilamiz. Teorema isbotlandi.

(2) ifodadagi kabi, vektorni kollinear bo‘lmagan va vektorlar bo‘yicha yoyish mumkin bo‘lsa, va vektorlar *bazis tashkil qiladi* deyiladi va u (;) kabi belgilanadi.

(2) yoyilmadagi x va y koeffitsiyentlar vektorning (;) bazisdagi *koordinatalari* deb ataladi va vektor $(x\,;\,y)$ ko‘rinishda yoziladi.

(2) yoyilmaning yagonaligini isbotlaymiz. vektor berilgan va vektorlar orqali boshqa x_1, y_1 (bunda hech bo‘lmaganda shartlardan birortasi bajarilsin) koeffitsiyentlar bilan ifodalangan bo‘lsin:

$$\vec{a} = x_1\vec{b} + y_1\vec{c}. \qquad (3)$$

(2) tenglikdan (3) tenglikni hadma-had ayirib,

(4)

munosabatni olamiz.

$x \neq x_1$ bo‘lsin. U holda oxirgi tenglikdan vektorni orqali ko‘rinishda ifodalash mumkin. Endi deb belgilab, uni

$\vec{b} = \lambda\vec{c}$ ko‘rinishda yozish mumkin. Bundan, qo‘yilgan masalaning shartlariga zid ravishda, va vektorlarning kollinearligini olamiz. Olingan qarama-qarshilikdan, (4) shart faqat

bo‘lgandagina o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi, bundan

bo‘lishini olamiz.

Shunday qilib, tekislikda har qanday $\vec{a}$ vektorni ikkita kollinear bo‘lmagan va vektor bo‘yicha yagona ravishda yoyish mumkin.

5- §. Vektorning to‘g‘ri burchakli koordinatalari

Tekislikda to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi berilgan bo‘lsin. *Ox* abssissalar o‘qida birlik vektorni, *Oy* ordinatalar o‘qida esa, birlik vektorni kiritamiz. Unda, nuqta uchun bo‘lgani kabi, har bir vektorga ikkita son — vektorning *koordinatalarini* mos qo‘yish mumkin.

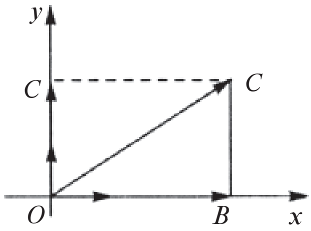
Ikki holni qarab o‘tamiz.

1. Vektor ko‘rinishda bo‘lsin, bunda *O* — koordinatalar boshi. *Oxy* to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida $A(x_1;\ y_1)$ nuqta berilgan bo‘lsin. Koordinatalar boshi bo‘lgan *O* nuqtani *A* nuqta bilan tutashtirib vektorni yasaymiz va uning koordinatalarini topamiz. $\triangle AOB$ dan (12.14-chizma):

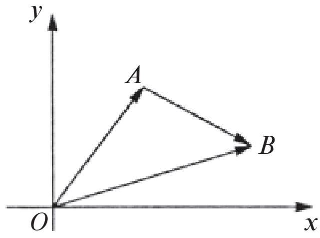
(1)

kabi yozish mumkin. vektorning boshi *Ox* o‘qda yotganligidan, bo‘ladi.

Ox o‘qda musbat yo‘nalish $\vec{i}$ birlik vektor orqali, *Oy* o‘qda



12.14- chizma.



12.15- chizma.

esa birlik vektor orqali aniqlangan bo‘lsin. va hamda va vektorlarning kollinearligidan foydalanib,

(2)

munosabatlarni yozish mumkin. (2) dagi qiymatlarni (1) ga keltirib qo‘ysak,

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} \tag{3}$$

ifodani hosil qilamiz.

Shunday qilib, boshlang‘ich nuqtasi koordinatalar boshi bo‘lgan vektorning koordinatalari uning oxiri, ya’ni $A(x_1;\ y_1)$ nuqtaning koordinatalari bilan ustma-ust tushadi.

2. Vektor ko‘rinishda bo‘lib, $A(x_1;\ y_1)$ va $B(x_2; y_2)$ nuqtalarning koordinatalari ma’lum bo‘lsin (12.15- chizma).

Koordinatalar boshi bo‘lgan O nuqtani A va B nuqtalar bilan tutashtiramiz. Vektorlar yordamida hosil qilingan $\triangle AOB$ da

(4)

deb yozish mumkin, bundan

(5)

tenglikni hosil qilamiz. (5) ifodadagi va vektorlarning yoyilmalari, yuqoridagiga asosan, ma’lum:

(6)

vektorning koordinatalarini x va y deb belgilab, vektorning yoyilmasini

(7)

ko‘rinishda yozish mumkin. Endi (6), (7) dagi qiymatlarni (5) ga keltirib qo‘yamiz:

(8)

Teng vektorlar mos o‘qlarda teng proyeksiyalarga ega bo‘lganligidan

(9)

bo‘lishi kelib chiqadi.

Shunday qilib, agar vektor uchlarining koordinatalari ma’lum bo‘lsa, vektorning koordinatalari uning oxiri va boshi mos koordinatalarining ayirmasiga teng bo‘lar ekan:

Endi koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida bajariladigan amallar haqida to‘xtalamiz.

Bizga va vektorlar berilgan bo‘lib, ularning koordinatalari ma’lum, ya’ni va $\vec{b}\left(x_2;\ y_2\right)$ bo‘lsin. Ta’rifga ko‘ra, vektorning koordinatalari uning mos o‘qlarga proyeksiyalarining algebraik qiymatlaridan iborat. Vektorlar yig‘indisi va ayirmasining proyeksiyalari xossalaridan foydalanib, vektor koordinatalarining quyidagi xossalarini ifodalash mumkin.

1. *Vektorlarni qo‘shishda ularning mos koordinatalari qo‘shiladi.* va vektorlar berilgan bo‘lsin. Unda ular yig‘indisining koordinatalari ko‘rinishda bo‘ladi.

2. Vektorlarni ayirishda ularning mos koordinatalari quyida ko‘rsatilgan tartibda ayiriladi, ya’ni va *vektorlar ayirmasining koordinatalari* ko‘rinishda bo‘ladi.

3. *Berilgan vektorni m songa ko ‘paytirishda uning har bir koordinatasi shu m songa ko‘paytiriladi, ya’ni*

.

, , bo‘lsin. U holda va vektorlarning mos koordinatalari o‘zaro teng, ya’ni bo‘lishi shart. Bu munosabatlardan

(10)

bo‘ladi.

$\vec{b}$ vektorni m songa ko‘paytirganda vektorga kollinear vektor hosil bo‘lgani uchun (10) tenglik ikkita va vektorning *kollinearlik sharti* deyiladi. Shunday qilib, *agar* va *vektorlar kollinear bo‘lsa, ularning mos koordinatalari proporsionaldir.*

6- §. Vektorlarning skalar ko‘paytmasi

1. Asosiy ta‘riflar va xossalar. Ikkita va vektorning *skalar ko‘paytmasi* deb, bu vektorlar uzunliklarining ular orasidagi burchak kosinusiga ko‘paytmasiga aytiladi va u

(1)

ko‘rinishda yoziladi.

Vektorning o‘qqa proyeksiyasi formulalaridan foydalanib, (1) formulani

(2)

yoki

(3)

ko‘rinishda ham yozish mumkin.

Demak, vektorlarning skalar ko‘paytmasi natijasi skalar miqdordan iborat ekan.

Jismni o‘zgarmas kuch yordamida ga ko‘chirishda bajarilgan *A* mexanik ish shu tarzda aniqlanadi:

.

Endi skalar ko‘paytmaning xossalarini ko‘rib o‘tamiz.

1. *O‘rin almashtirish xossasi:*

.

Bu xossaning o‘rinliligi, sonlar ko‘paytmasining shunga o‘xshash xossasi va kosinus funksiyasining juftligidan, ya’ni shartning bajarilishidan kelib chiqadi.

2. *Songa ko'paytirishga nisbatan guruhlash xossasi:*

(4)

Bu xossani isbotlashda ikkita holni alohida qarab chiqish lozim. Biz, avvalo, $m > 0$ bo'lgan holni qaraymiz. Vektorni songa ko'paytirish qoidasi bo'yicha, , bo'ladi, shu sababli $m > 0$ bo'lganda o'zaro teng burchaklarni hosil qilamiz: belgilashni kiritamiz va (4) dagi skalar ko'paytmalarning har birini, ta'rif bo'yicha yozib chiqamiz:

$$m\left(\vec{a}\vec{b}\right) = m\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi,$$

$$\left(\left(m\left|\vec{a}\right|\right)\left|\vec{b}\right|\right) = m\vec{a}\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi = m\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi = m\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi,$$

[illegible] $\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi.$

Bu ifodalarni taqqoslab, talab qilingan (4) tenglik o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

$m < 0$ bo'lgan holda ham xossa shunga o'xshash isbotlanadi.

3. *Taqsimot xossasi:*

$$\left(\vec{a}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)\right) = \left(\vec{a}\vec{b}\right) + \left(\vec{a}\vec{c}\right). \tag{5}$$

Bu xossa (2), (3) formulalardan foydalangan holda isbotlanadi:

4. *Nol bo'lmagan o'zaro perpendikular va vektorlarning skalar ko'paytmasi nolga teng, ya'ni* bo'lsa:

$$\left(\vec{a}\vec{b}\right) \perp 0. \tag{6}$$

Xossaning isboti (1) formuladan kelib chiqadi.

5. $\vec{a} = \vec{b}$ *bo'lsin. Bunda vektorning o'ziga skalar ko'paytmasi uning skalar kvadrati deb ataladi:*

(7)

chunki vektor o‘zi bilan 0° li burchak tashkil etadi.

Oxirgi tenglikdan vektorning uzunligini hisoblash formulasini olamiz:

(8)

ya’ni *vektorning uzunligi vektorning skalar kvadratidan olingan kvadrat ildizga teng.*

6. *Ikkita va vektor orasidagi burchak*

(9)

formula orqali topiladi.

2. Skalar ko‘paytmani koordinatalar orqali ifodalash. Tekislikda to‘g‘ri burchakli *Oxy* koordinatalar sistemasi berilgan va $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ vektorlarning koordinatalari ma‘lum bo‘lsin.

Agar va lar bu sistema bazisining birlik vektorlari bo‘lsa, va vektorlarning yoyilmasini

ko‘rinishda yozish mumkin. Bu vektorlarning skalar ko‘paytmasi esa

(10)

ifoda ko‘rinishini oladi. Bu ifodani skalar ko‘paytmaning xossalaridan foydalanib, soddalashtiramiz. va birlik vektorlarning skalar ko‘paytmasi uchun

munosabatlar o‘rinli, chunki $\vec{i} \perp \vec{j}$. U holda

yoki

(11)

tenglikni olamiz.

Demak, *ikki vektorning skalar ko‘paytmasi ularning bir xil nomli koordinatalari ko‘paytmasining yig‘indisiga teng.*

vektorning skalar kvadrati

ko‘rinishda yoziladi va undan vektorning uzunligini hisoblash uchun

(12)

formulani olamiz.

(11) dan foydalanib, ikkita, va vektor orasidagi burchakni topish formulasi (9) ni

(13)

ko‘rinishda yozish mumkin.

Ikkita $\vec{a}$ va vektorning perpendikularlik sharti

ularning koordinatalari orqali yozilganda

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD} \qquad \sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

(14)

ko‘rinishini oladi.

Masala yechish namunalari

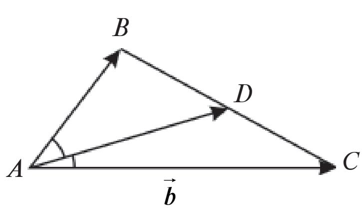
1 - m a s a l a . $\triangle ABC$ = va = vektorlarda yasalgan. Uchburchakning ichki A burchagi AD bissektrisasida yotuvchi vektor va orqali ifodalansin.

Y e c h i l i s h i . AD bissektrisani o‘tkazib, $\triangle ABD$ ni olamiz (12.16- chizma). Ikkita vektorni qo‘shishning uchburchak qoidasi bo‘yicha

ifodani olamiz. $\triangle ABC$ dan esa, bissektrisaning xossasiga ko‘ra

$$BD : DC = AB : BC$$

bo‘ladi, bundan $BD = \frac{c}{b} DC$ va vek-



12.16-chizma.

torlar uchun munosabatni olamiz.

Ikkinchi tomondan, $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$. U holda

$$\frac{c}{b}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}=\vec{b}-\vec{c},\ \left(\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{b+c}(\vec{b}-\vec{c})\right)=\frac{c(\vec{b}-\vec{c})}{b+c}$$

bo‘ladi.

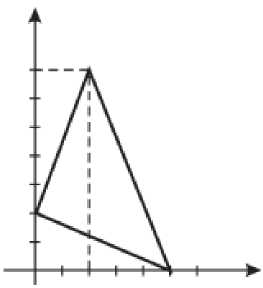
Endi bissektrisaning $\overrightarrow{AD}$ vektori uchun

yoki

$$\overrightarrow{AD}=\frac{b\vec{c}+c\vec{b}}{b+c}$$

qiymatni hosil qilamiz.

J a v o b: .



12.17-chizma.

2 - m a s a l a . $A(5;\ 0)$, $B(0;\ 2)$, $C(2;\ 7)$ nuqtalar to‘g‘ri burchakli uchburchakning uchlari bo‘lishi isbotlansin va uchburchakning yuzi hisoblansin.

Y e c h i l i s h i . va vektorning koordinatalarini hisoblaymiz (12.17-chizma):

Unda $\overrightarrow{BC}$ va vektorlarning skalar ko‘paytmasi

bo‘ladi, bu esa, $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BC}$ bo‘lishini ko‘rsatadi. $\triangle ABC$ dagi BA va BC katetlarning uzunliklarini topamiz:

To‘g‘ri burchakli uchburchakning yuzi uning katetlari ko‘paytmasining yarmiga teng:

$$S = \frac{1}{2}\,|\,\overrightarrow{BA}\,|\cdot|\,\overrightarrow{BC}\,| = \frac{1}{2}\left(\sqrt{29}\right)^2 = \frac{29}{2} = 14{,}5\,.$$

J a v o b . 14,5 kv.b.

3 - m a s a l a . $\vec{a}$ va vektorlar o‘zaro burchak tashkil qiladi. $|\,\vec{a}\,| = 2,\ \ |\,\vec{b}\,| = 3$ ekanligi ma’lum bo‘lsa, ifoda hisoblansin.

Y e c h i l i s h i.

$$\left(2\vec{a} - \vec{b}\right)\left(\vec{a} + 4\vec{b}\right) = 2\vec{a}^{\,2} + 8\vec{a}\vec{b} - \vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}^{\,2} = 2\vec{a}^{\,2} + 7\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}^{\,2} =$$

$$= 2\,|\,\vec{a}\,|^2 + 7\,|\,\vec{a}\,|\,|\,\vec{b}\,|\cos\varphi - 4\,|\,\vec{b}\,|^2 = 2\cdot 2^2 + 7\cdot 2\cdot 3\cos\frac{2\pi}{3} - 4\cdot 3^2 =$$

$$= 8 - 7\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2} - 36 = 8 - 21 - 36 = -49.$$

J a v o b . −49.

? *Takrorlash uchun savol va topshiriqlar*

1. Vektor va skalarning farqi nimadan iborat?
2. Qanday miqdorlar vektor deyiladi?
3. Vektorlarni qo‘shishning uchburchak qoidasi.
4. Vektorlarni qo‘shishning parallelogramm qoidasi.
5. Bir necha vektorlar yig‘indisi qanday topiladi?
6. Ikki vektorning ayirmasi qanday topiladi?
7. Qanday vektorlar teng deyiladi?
8. Qanday vektorlar kollinear deyiladi?
9. Ikki vektorning kollinearlik sharti nimadan iborat?
10. Ikki vektorning skalar ko‘paytmasini topish.
11. Vektorning o‘qqa proyeksiyasi deb nimaga aytiladi?
12. Vektorni songa ko‘paytirish qoidalari.
13. Nechta vektor ikkita nuqtani ifodalaydi?
14. Vektorning koordinatalari deb nimaga aytiladi?
15. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarni qo‘shish.
16. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarni ayirish.
17. Koordinatalari bilan berilgan vektorni songa ko‘paytirish.
18. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning kollinearlik sharti.
19. Tekislikda vektorni kollinear bo‘lmagan vektorlar bo‘yicha yoyish.
20. Bazis deb nimaga aytiladi?

21. Skalar ko‘paytmani vektorlarning koordinatalari orqali ifodalash.
22. Ikki vektorning o‘zaro perpendikularlik sharti.
23. Vektorning uzunligi qanday topiladi?
24. Vektorning yo‘nalishi qanday topiladi?
25. Ikki vektor orasidagi burchak qanday topiladi?

Mustaqil yechish uchun masalalar

A GURUH

1. $\vec{a}$ vektor berilganda: a) ; b) ; d) vektorlarning uzunliklari ning uzunligidan qanday farq qiladi?

J a v o b : a) 2 marta kichik; b) 3 marta katta; d) 2 marta katta.

2. *ABC* uchburchak = , vektorlarda yasalgan. Uchburchakning medianasi bilan ustma-ust tushadigan vektor vektorlar orqali ifodalansin.

J a v o b : .

3. *ABCD* parallelogramm = va vektorlarda yasalgan.

O parallelogramm diagonallarining kesishish nuqtasi bo‘lsin. vektorlar va vektorlar orqali ifodalansin.

J a v o b :

4. vektorlar berilgan bo‘lsa, vektorning koordinatalari topilsin.

J a v o b : (−1; 0).

5. vektorlar berilgan bo‘lsa, $\vec{a}+\vec{b}$ va vektorlarning koordinatalari topilsin.

J a v o b . (2; 1), (−4; 5).

6. Berilgan vektorning uzunligi topilsin.

J a v o b : 5.

7. $A(-1; 2)$ va $B(3; 5)$ nuqtalar berilganda, vektorning koordinatalari topilsin.

J a v o b: (4; 3).

B GURUH

8. AB uchburchak vektorlarda yasalgan.

Uchburchakning medianalarida yotuvchi vektorlar va orqali ifodalansin.

J a v o b:

9. $A(-2; 3)$, $B(2; 1)$, $C(1; 4)$ va $D(x; -4)$ nuqtalar berilgan. Agar vektorlar kollinear bo‘lsa, x topilsin.

J a v o b: -13.

10. $ABCD$ parallelogrammning $A(1; -2)$, $B(1; 3)$, $C(4; 3)$, $D(4; -1)$ uchlari berilgan. Uning AC va BD diagonallari orasidagi burchak topilsin.

J a v o b:

11. $\vec{a}(-3; 2)$ va $(x; 6)$ vektorlarning o‘zaro perpendikular ekanligi ma‘lum bo‘lsa, x topilsin.

J a v o b: 4.

12. hamda va vektorlar orasidagi burchak $60°$ ekanligi ma’lum bo‘lsa, skalar ko‘paytma topilsin.

J a v o b: -5.

13. Agar ekanligi ma’lum bo‘lsa, vektorning uzunligi topilsin.

J a v o b: 5.

14. $A(-1; 3)$, $B(2; 3)$, $C(4; -1)$ nuqtalar berilgan bo‘lsa, hisoblansin.

J a v o b: 40.

C GURUH

15. $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $(\vec{a} \,\hat{}\, \vec{b}) = 60^\circ$ berilgan bo‘lsa, vektorlar orasidagi burchak kosinusi topilsin.

J a v o b:

16. Uchlari $A(-6;\ 1)$, $B(4;\ -3)$, $C(-1;\ -4)$ bo‘lgan $\triangle ABC$ berilgan. Uchburchak medianasi CK da yotgan $\overrightarrow{CK}$ vektorning koordinatalari topilsin.

J a v o b: (0; 3).

17. vektorga kollinear bo‘lgan va shartni qanoatlantiruvchi vektor topilsin.

J a v o b: .

18. $\vec{a}(2;\ 3)$ va (1; −2) vektorlar berilgan bo‘lsa,

shartlarni qanoatlantiruvchi vektor topilsin.

J a v o b: (5; 2).

19. Uchta vektorlar berilgan bo‘lsa, vektorning va vektorlar bo‘yicha yoyilmasi topilsin.

J a v o b: .

20. Uchta vektor berilgan bo‘lsa, topilsin.

J a v o b:

21. ABC uchburchakning $A(1;\ 2)$, $B(1;\ 3)$, $C(4;\ 2)$ uchlari berilgan bo‘lsa, A uchdan o‘tkazilgan bissektrisaning uzunligi hisoblansin.

J a v o b:

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. *L. S. Atanasyan va boshq*. Geometriya. O‘rta maktabning 7—9-sinflari uchun darslik. T., „O‘qituvchi“, 1993.

2. *В. А. Гусев, А.И. Медяник*. Задачи по геометрии для 8 класса (дидактические материалы). М., „Просвещение“, 1987.

3. *Н.Н. Никитин.* Геометрия. Учебник для 6—8 классов. М., „Учпедгиз“1964.

4. *A.V. Pogorelov*. Geometriya. O‘rta maktabning 7—11- sinflari uchun darslik. T., „O‘qituvchi“, 1995.

5. *N. G‘aybullayev, A. Ortiqboyev*. Geometriya.7-sinf uchun o‘quv qo‘llanma, T., „O‘qituvchi“, 1997.

6. *N. G‘aybullayev, A. Ortiqboyev*. Geometriya. 8- sinf uchun o‘quv qo‘llanma, T., „O‘qituvchi“,1999.

7. Сборник задач по математике. Под редакцией М.И. Сканави. М., „Высшая школа“, 1980.

8. *А.Д. Александров и др*. Геометрия для 8—9 классов (с углубл.изуч.математики). М., „Просвещение“, 1991.

9. *В.Г. Болтянский*. Элементарная геометрия. Пособие для учителя. М., „Просвещение“, 1985.

10. *I. Isroilov , Z. Pashayev*. Geometriyadan masalalar to‘plami. T., „O‘qituvchi“. 2001-y., 2003-y.

11. *М.В. Лурьев, Б.И. Александров*. Пособие по геометрии. М., МГУ, 1984.

MUNDARIJA

ISROILOV ISMOIL
PASHAYEV ZUBEIR ABDURAHMANOVICH

GEOMETRIYA

I qism

Akademik litseylar uchun darslik

2-nashri

„O'qituvchi" *nashriyot-matbaa ijodiy uyi*
Toshkent — 2010

Muharrir *N. G'oipov*
Badiiy muharrir *Sh. Xo'jayev*
Texn. muharrir *T. Greshnikova*
Kompyuterda sahifalovchi *S. Musajonova*
Musahhih *A. Ibrohimov*

Original-maketdan bosishga ruxsat etildi 15.11.2010. Bichimi $60\times90^1/_{16}$.
Kegli 11 shponli. Tayms garn. Ofset bosma usulida bosildi. Shartli b.t. 14,0.
Nashr t. 14,0. 2408 nusxada bosildi. Buyurtma №

„O'zbekiston Matbuot va axborot agentligining „O'qituvchi" nashriyot-matbaa ijodiy uyi. Toshkent – 129, Navoiy ko'chasi, 30-uy. // Toshkent, Yunusobod dahasi, Yangishahar ko'chasi, 1-uy. Shartnoma № 07–109–10.