Т. Р. ТЎЛАГАНОВ

УЧБУРЧАК ГЕОМЕТРИЯСИ

Ўзбекистон Республикаси Халқ таълими вазирлиги олий ва ўрта махсус билим юртлари учун ўқув қўлланма сифатида тавсия этган

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1997 й.

Т а қ р и з ч и л а р:

физика- математика фанлари доктори, проф. *Н. ҒАНИХЎЖАЕВ*,
физика - математика фанлари номзоди, доцентлар:
А. НОРМАТОВ; А. ТАСҚАРАЕВ

Т 96

Тўлаганов Т. Р.

Учбурчак геометрияси: / [Педагогика институтлари, билим юртлари, мактаб ўқитувчилари учун ўқув қўлл.] .— Т.: Ўқитувчи, 1997.—96 б.

ББҚ 22.15р

Т $\frac{4306010502-92}{353(04)\ 97}$ Ахб. хати — 96

ISBN 5 — 645 — 03049 — 4

Кириш

Мазкур ўқув қўлланма педагогика институтлари ва педагогика билим юртлари талабаларининг элементар геометриядан билимларини яна ҳам бойитиш мақсадида яратилди. Ундан умумтаълим мактабларининг, гимназия ва лицейларнинг ўқитувчилари фойдаланишлари мумкин. Китобда учбурчакларнинг айлана, доира билан биргаликда қаралиши, учбурчакларда метрик муносабатлар, чевианлар, учбурчак медианаси, трансверсали, симедианаси, учбурчакда антипараллеллар, изогонал тўғри чизиқлар ва изотомик нуқталар ўрганилади.

Мазкур қўлланмада қуйидаги белгилашлар қабул қилинган:

1) A, B, C — учбурчакнинг учлари, a, b, c эса унинг томонлари ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$);

2) $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ёки α, β, γ — учбурчакнинг бурчаклари, $p = \frac{a+b+c}{2}$ — ярим периметри;

3) h_a, h_b, h_c — учбурчакнинг баландликлари, m_a, m_b m_c — медианалари, l_a, l_b, l_c — биссектрисалари, s_a, s_b, s_c— — симедианалари, $a_н$, $b_н$, $c_н$ — ортомарказ учбурчакнинг томонлари, a_t, b_t, c_t — тангенциал учбурчакнинг томонлари;

4) R — ташқи чизилган, r —ички чизилган, r_a, r_b, r_c — — ташқи- ички чизилган айланаларнинг радиуслари, $R_н$ — ортомарказ учбурчакка ташқи чизилган, $r_н$ — ички чизилган айлананинг радиуси, R_t — тангенциал учбурчакка ташқи чизилган, r_t — ички чизилган айлананинг радиуси;

5) S — учбурчакнинг юзи; H — баландликларнинг, G — медианаларнинг кесишиш нуқталари;

6) ∂f — таърифга кўра, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\wedge$, $\vee$ — мантиқий белгилашлар.

Мазкур қўлланма муаллифнинг бир неча йиллик иш тажрибасига таянган ҳолда юзага келди. Бу қўлланмани тайёрлашда ўзларининг фойдали маслаҳатлари билан катта ёрдам берган Р. Юнусметов, М. Шерқўзиев, А. Тасқараев, А. Норматовларга муаллиф ўз миннатдорчилигини билдиради.

I боб. УЧБУРЧАК ВА УНИНГ БОШҚА ШАКЛЛАР БИЛАН БОҒЛИҚЛИГИ ҲАҚИДА СОДДА ТУШУНЧАЛАР

1- §. Учбурчак

Геометрияда тўғри чизиқ, нур тушунчалари билан бир қаторда кесма, синиқ чизиқ тушунчалари ҳам берилади.

1- таъриф. Тўғри чизиқнинг берилган икки нуқтаси орасида ётган ҳамма нуқталаридан иборат қисми ***кесма*** дейилади.

Берилган бу икки нуқта кесманинг ***охирлари*** дейилади.

Одатда кесма ўз охирларини кўрсатиш билан белгиланади: AB — охирлари A ва B нуқталардан иборат кесмани билдиради (1- расм).

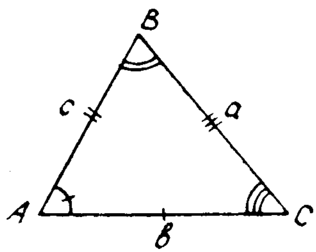
1- расм.

2- расм.

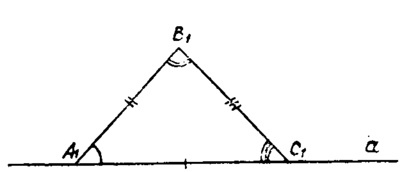
2- таъриф. Йўналишга эга бўлган кесма ***вектор*** дейилади ва $\overrightarrow{A\,B}$ ёки $\overrightarrow{AB}$ орқали белгиланади.

Агар берилган a тўғри чизиқда (2- расм), A, B, C нуқталар берилган бўлиб, AB, AC, BC кесмалар ва уларга мос $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ векторлар қаралаётган бўлса, улар йўналишдош векторлар дейилади ва $\overline{AB} = -\overline{BA}$ деб олинади.

3- таъриф. Бир тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқтадан ва шу нуқталарни туташтирувчи учта кесмадан иборат фигура ***учбурчак*** дейилади.



3- расм.

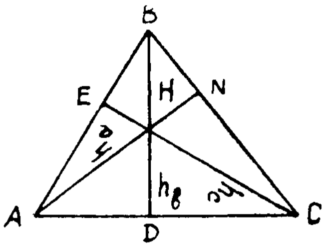


4- расм.

Нуқталар учбурчакнинг учлари, кесмалар эса унинг томонлари дейилади. 3- расмдаги учбурчак ΔABC кўринишда белгиланади, A, B, C — учбурчакнинг учлари, AB, BC, AC — унинг томонлари, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — унинг бурчаклари. Шу билан бирга $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ деб белгиланади. Исталган учбурчак учун унга тенг шундай учбурчак мавжудки, у берилган ярим тўғри чизиққа нисбатан берилган ҳолатда жойлашади (4- расм).

4- таъриф. Берилган учбурчакнинг бир бурчагидан чиқиб, шу бурчак қаршисидаги томонга перпендикуляр бўлиб тушувчи тўғри чизиқ кесмаси ***баландлик*** дейилади.

Учбурчакнинг a томонига тушган баландлик h_a, b томонига тушгани h_b, c томонига тушгани эса h_c орқали белгиланади (5- расм).



5- расм.

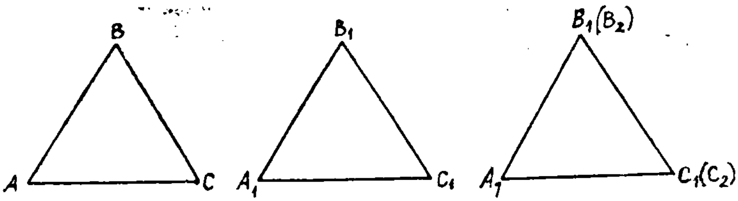
Худди шунга ўхшаш учбурчакнинг бир бурчагидан чиқиб, шу бурчак қаршисида ётган томонни тенг иккига бўлувчи тўғри чизиқ кесмасига учбурчак ***медианаси*** дейилади ва мос равишда m_a, m_b, m_c орқали белгиланади.

Учбурчакнинг бурчагини тенг иккига бўлувчи тўғри чизиқ кесмасига учбурчак ***биссектрисаси*** дейилади ва мос равишда l_a, l_b, l_c орқали белгиланади.

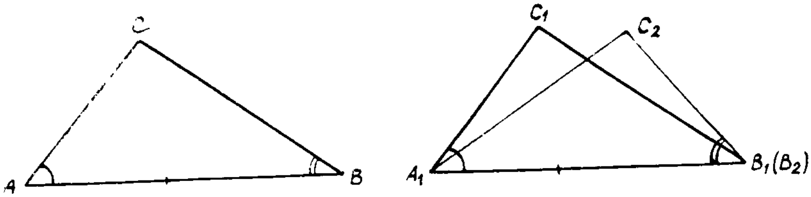
5- таъриф. Агар бир учбурчакнинг барча томонлари ва бурчаклари иккинчи учбурчакнинг мос томонлари ва бурчакларига тенг бўлса, бундай учбурчаклар ***тенг*** дейилади ва $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ кўринишда белгиланади.

1- теорема. *Агар бир учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчаги иккинчи учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчагига мос равишда тенг бўлса, бундай учбурчаклар тенг бўлади.* [9]

Исботи. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларда (6- расм) $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ бўлсин. $A_1B_2C_2$ учбурчакнинг B_2 учи A_1B_1 нурда ва C_2 учи A_1B_1 тўғри чизиққа нисбатан C_1 уч ётган ярим текисликдаги учбурчак бўлиб, ABC учбурчакка тенг бўлсин. $A_1B_1 = A_1B_2 \overset{df_5}{\Longrightarrow} B_2 = B_1$ ва $\angle B_1A_1C_1 = \angle Б_2A_1C_2 \overset{df_5}{\Longrightarrow} A_1C_2 = A_1C_1$. C_1 уч C_2



6- расм.



7- расм.

билан устма-уст тушади. Демак, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_1B_2C_2 = \Delta ABC$ бўлади.

2- теорема. *Агар бир учбурчакнинг бир томони ва унга ёпишган бурчаклари иккинчи учбурчакнинг мос томони ва унга ёпишган бурчакларига тенг бўлса, бундай учбурчаклар тенг бўлади.*

Исботи. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларда (7- расм) $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ ва $\angle B = \angle B_1$ бўлсин. $A_1B_2C_2$ учбурчак B_2 учи A_1B_1 нурда, C_2 учи A_1B_1 тўғри чизиққа нисбатан C_1 уч ётган ярим текисликдаги учбурчак бўлиб, ΔABC га тенг бўлсин. $A_1B_2 = A_1B_1$ бўлгани учун B_2 уч B_1 уч билан устма-уст тушади.

$\angle B_1A_1C_2 = \angle B_1A_1C_1$ ва $\angle A_1B_1C_2 = \angle A_1B_1C_1 \Rightarrow A_1C_2 = A_1C_1$ ва $B_1C_2 = B_1C_1$ бўлиб, бундан C_2 уч C_1 билан устма-уст тушади ва $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ бўлади.

3- теорема. *Агар бир учбурчакнинг учта томони иккинчи учбурчакнинг учта томонига мос равишда тенг бўлса, бундай учбурчаклар тенг бўлади.*

6- таъриф. Агар бир учбурчакнинг бурчаклари иккинчи учбурчакнинг мос бурчакларига тенг бўлиб, қолган элементлар мос ҳолда пропорционал бўлса, бундай учбурчаклар ***ўхшаш*** дейилади ва $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ кўринишда белгиланади.

4-теорема. *Агар бир учбурчакнинг икки томони иккинчи учбурчакнинг мос икки томонига пропорционал бўлиб, бу томонлар орасидаги бурчаклар тенг бўлса, бундай иккита учбурчак ўхшаш бўлади.* [9]

Исботи. $\triangle ABC$ ва $\triangle A_1B_1C_1$ да $\angle C = \angle C_1$ ва $AC = kA_1C_1$ ва $BC = kB_1C_1$ бўлиши теорема шартидан маълум. $\triangle A_1B_1C_1$ ни k ўхшашлик коэффициенти бўйича гомотетик $H_o^k(\triangle A_1B_1C_1) = \triangle A_2B_2C_2$ алмаштирамиз. Бунда буриш орқали $\triangle A_2B_2C_2$ ни $\triangle ABC$ устига тушириб, $AC = A_2C_2$, $AB = A_2B_2$, $BC = B_2C_2$ эканини ҳосил қиламиз. Натижада $A_2C_2 = kA_1C_1$, $B_2C_2 = kB_1C_1$ эканидан $\triangle ABC \overset{k}{\backsim} \triangle A_1B_1C_1$ экани келиб чиқади.

Шу билан теорема исбот қилинди.

5-теорема. *Агар бир учбурчакнинг иккита бурчаги иккинчи учбурчакнинг иккита бурчагига тенг бўлса, бундай иккита учбурчак ўхшаш бўлади.*

6-теорема. *Агар бир учбурчакнинг томонлари иккинчи учбурчакнинг томонларига пропорционал бўлса, бундай иккита учбурчак ўхшаш бўлади.*

Исботи. T_6 нинг шартига кўра $AB = kA_1B_1$, $AC = kA_1C_1$ ва $BC = kB_1C_1$ экани маълум. $\triangle A_1B_1C_1$ ни $H_o^k(\triangle A_1B_1C_1) = \triangle A_2B_2C_2$ алмаштиришни бажарсак, у ҳолда $A_2B_2 = kA_1B_1$; $A_2C_2 = kA_1C_1$ ва $B_2C_2 = kB_1C_1$ ни ҳосил қиламиз, сўнгра $\triangle A_2B_2C_2$ ни буриш ёрдамида $\triangle ABC = \triangle A_2B_2C_2$ эканини кўрсатамиз. Натижада $AB = kA_1B_1$; $AC = kA_1C_1$ ва $BC = kB_1C_1$ бўлиб, $\triangle ABC \overset{k}{\backsim} \triangle A_1B_1C_1$ бўлади. Шу билан T_6 исбот қилинди.

7-теорема. *Ўхшаш учбурчак периметрларининг нисбати мос томонлар нисбати кабидир.*

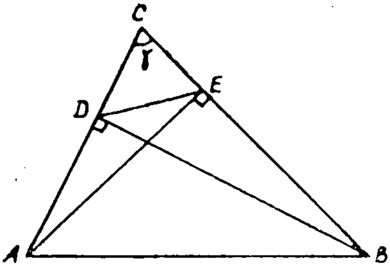
Исботи. T_7 нинг шартига кўра $\triangle ABC$ ва $\triangle A_1B_1C_1$ учун $\triangle ABC \overset{k}{\backsim} \triangle A_1B_1C_1$ экани маълум, df6 га асосан $AB = kA_1B_1$; $AC = kA_1C_1$ ва $BC = kB_1C_1$. T_6 га асосан

$$AB + BC + AC = k(A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1) \Rightarrow$$

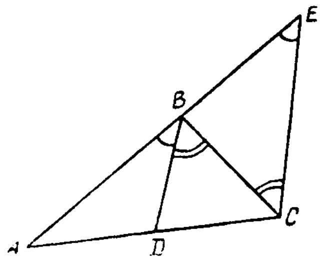
$$\Rightarrow \frac{AB + BC + AC}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = k = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} =$$

$$= \frac{p = AB + BC + AC}{p_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} \Rightarrow \frac{p}{p_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$$ бўлади. Шу билан теорема исботланди.

Масала. Агар $\triangle ABC$ да $\angle C < 90°$ бўлиб, $AE = h_a$



8- расм.



9- расм.

ва $BD = h_b$ бўлса, у ҳолда $\triangle ABC \backsim \triangle CED$ эканини исботланг.

Исботи. $\triangle ABC$ ва $\triangle CDE$ да $\angle C$ умумий ҳамда $EC = AC \cos C$ ва $DC = BC \cos C$ эканидан $\frac{EC}{DC} = \frac{AC}{BC}$ экани келиб чиқади (8- расм). T_4 га асосан $\triangle ABC \backsim \triangle CED$ бўлади.

8- теорема. *Учбурчакдаги исталган бурчакнинг биссектрисаси қаршисида ётган томонни қолган икки томонга пропорционал бўлакларга бўлади.*

Исботи. $\triangle ABC$ да BD биссектриса экани маълум. $AD : DC = AB : BC$ эканини кўрсатамиз (9- расм). Бунинг учун $\triangle ABC$ нинг C учидан $BD \parallel CE$ ни AB нинг давоми билан E нуқтада кесишгунча давом эттирамиз. Натижада $\triangle ABD \backsim \triangle AEC$ ҳосил бўлади. Бунда $BD \parallel CE$ бўлгани учун $\angle BCE = \angle DBC$ ва $\angle ABD = \angle BEC$ бўлиб, $\angle BEC = \angle BCE$ бўлади, яъни $BC = BE$ экани келиб чиқади. Демак, $AD : DC = AB : BE = AB : BC$ бўлади. Шу билан T_8 исбот қилинди.

Масала. Учбурчак ABC да BD биссектриса, $AB = 10$ см, $BC = 7$ см, $AC = 6$ см бўлса, у ҳолда AD ни топинг.

Ечиш. AD ни x орқали белгилаймиз, у ҳолда қолган кесмаларни x орқали ифодалаб, ушбу пропорцияни ёза оламиз, яъни:

$$x : (6 - x) = 10 : 7 \Leftrightarrow 7x = 60 - 10x \Leftrightarrow 17x = 60 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 60 : 17 \Rightarrow DC = 6 - x = 6 - \frac{60}{17} = 2\frac{8}{17} \text{ см.}$$

Демак, $AD = 3\frac{9}{17}$ см, $DC = 2\frac{8}{17}$ см экан.

Қуйидаги масалаларни ечинг:

1. $\triangle ABC$ да BD чизиқ B бурчак биссектрисаси:

а) $AB = 10$ м, $BC = 15$ м ва $AC = 20$ м бўлса, AD ва DC ни;

б) $AD:DC = 8:5$ ва $AB = 16$ м бўлса, BC ни;

в) $AB:BC = 2:7$ ва $DC - AD = 1$ м бўлса, AC ни топинг.

2. Учбурчакнинг 9 см ва 6 см ли томонлари орасидаги бурчаги тенг иккига бўлинган. Учинчи томондаги кесмалардан бири берилган томонлардан бирига тенг бўлса, учинчи томонни топинг.

3. ABC учбурчакнинг a, b ва c томонлари берилган. BD эса B бурчакнинг биссектрисаси; O нуқта BD билан C бурчак биссектрисасининг кесишиш нуқтаси бўлса, $OD:OB$ ни топинг.

4. ABC учбурчакда $AC = b$, $AB = BC = a$ ва AD, CN лар A ва C бурчак биссектрисалари бўлса, DN ни топинг.

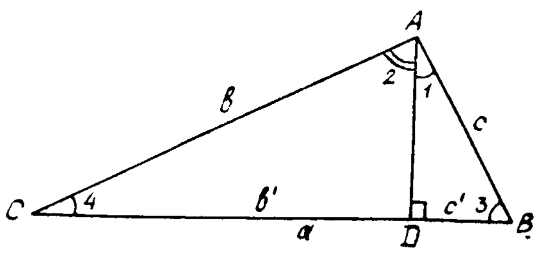
5. Агар иккита учбурчакнинг мос томонлари параллел бўлса, бундай учбурчаклар ўхшашлигини исботланг.

2-§. Учбурчакнинг ва у билан боғлиқ шаклларнинг элементлари орасидаги метрик муносабатлар

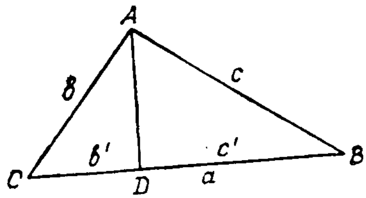
9-теорема. *Тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчаги учидан гипотенузасига туширилган перпендикуляр гипотенузанинг бу перпендикуляр билан бўлинган кесмалари орасида ўрта пропорционал миқдордир; ҳар бир катет эса бутун гипотенуза билан унинг шу катетга ёпишган кесмаси орасида ўрта пропорционалдир.*

Исботи. T_9 нинг шартига кўра $AD:DC = BD:AD$; $BC:AB = AB:BD$, $BC:AC = AC:DC$ эканини кўрсатиш керак (10-расм).

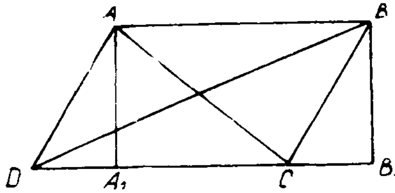
Бунинг учун $\triangle ABD$ ва $\triangle ADC$ ларни қараймиз; бу учбурчакларда $\angle 1 = \angle 4$ ва $\angle 2 = \angle 3$ бўлганлиги сабабли T_5 га асосан $\triangle ABD \sim \triangle ADC$ бўлади, бундан $AD:DC =$



10-расм.



11- расм.



12-расм.

$= BD : AD \Rightarrow AD^2 = BD \cdot DC$ бўлади. Энди $\triangle ABC$ ва $\triangle ABD$ ларни қараймиз: бу учбурчакларда $\angle B$ умумий, $\angle 1 = \angle 4$ бўлганлиги ҳамда T_4 ва T_5 га асосан $\triangle ABC \backsim \triangle ABD$ га кўра $BC : AB = AB : BD \Rightarrow AB^2 = BC \cdot BD$ бўлади. Теореманинг иккинчи қисми худди шунга ўхшаш $\triangle ABC \backsim \triangle ADC$ эканидан $AC^2 = BC \cdot DC$ экани келиб чиқиб, унинг тўлиқ исботини таъминлайди.

10- теорема. (Пифагор теоремаси). *Тўғри бурчакли учбурчакнинг томонлари бир хил бирлик билан ўлчанган бўлса, гипотенуза узунлигининг квадрати катетлар узунликлари квадратларининг йиғиндисига тенг.*

Исботи. T_{10} га кўра (10-расм) $a^2 = b^2 + c^2$ эканини кўрсатамиз. Бунинг учун T_9 дан $AB^2 = BC \cdot BD \Rightarrow c^2 = a \cdot b'$ ёки $AC^2 = BC \cdot DC \Rightarrow b^2 = a \cdot c'$ эканини ёзиб оламиз ҳамда $b' + c' = a$ ни эътиборга олсак, $AB^2 + AC^2 = BC \cdot BD + BC \cdot DC = BC(BD + DC) = BC \cdot BC = BC^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$ экани келиб чиқади.

11- теорема. *Ўткир бурчакли учбурчакнинг бир ўткир бурчаги қаршисида ётган томоннинг квадрати қолган икки томон узунликлари квадратлари йиғиндисидан шу томонларнинг бири билан шу томонга туширилган иккинчи томон проекциясининг иккиланган кўпайтмасининг айрилганига тенг.*

Исботи. Учбурчак ABC нинг A учидан AD перпендикуляр ўтказамиз (11- расм), натижада ACD ва ADB тўғрибурчакли учбурчак ҳосил бўлади. T_{10} га асосан $AB^2 = BD^2 + AD^2$ ва $AC^2 = CD^2 + AD^2$ ни ҳосил қиламиз. Бу тенгликларни ҳадлаб айириб, $BD = BC - CD$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD$ ни ҳосил қиламиз. Демак, $\angle C$ ўткир бўлганда $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD$; $\angle B$ ўткир бўлса, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \times BD$ бўлиши келиб чиқади. Агар $\angle C$ ўтмас бўлса, у ҳолда $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot DC$ бўлишига ишонч ҳосил қилиш мумкиндир.

12-теорема. *Исталган параллелограммда диагоналлар узунликлари квадратларининг йиғиндиси томонлар узунликлари квадратларининг йиғиндисига тенгдир.*

Исботи. $ABCD$ параллелограммнинг диагонали (12-расм) уни иккита тенг учбурчакка ажратади. Шунинг учун $\triangle ACD$ ва $\triangle BDC$ ларга T_{11} ни кетма-кет қўлласак ҳамда $BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2DC \cdot CB_1$ ва $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2DC \cdot DA_1$ эканини ва $CB_1 = DA_1$, $CD = AB$ ларни ҳисобга олсак, у ҳолда $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 2AB^2 + 2BC^2$ бўлади. Шу билан T_{12} исбот қилинди.

13-теорема. *Учбурчакнинг исталган томонининг квадрати қолган икки томони квадратлари йиғиндисидан шу икки томон билан улар орасидаги бурчак косинусининг иккиланган кўпайтмасини айириш натижасига тенг.*

Исботи. T_{11} га асосан учбурчак ўткир бурчакли бўлганда $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD$ экани маълум. Шу сабабли бу тенгликда қатнашаётган CD кесма узунлигини $\triangle ACD$ (11-расм) дан топсак, у ҳолда $\angle CDA = 90°$ бўлгани учун $CD = AC \cos C$ бўлади ва $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot AC \cos C$ деб ёза оламиз. Демак, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot AC \cos C$; $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A$; $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B$ экани келиб чиқади. Агар $\cos(180° - A) = -\cos A$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда ўтмас бурчак қаршисида ётган томон узунлигининг квадрати: $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \cdot BC \cos C$ (бунда $\angle C > 90°$) ҳосил бўлади. Шу билан T_{13} исбот қилинди.

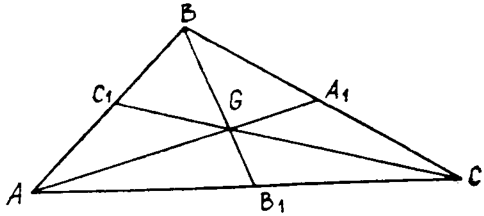
14-теорема. *Учбурчакнинг томонлари қаршисидаги бурчакларнинг синусларига пропорционал.*

Исботи. Учбурчак ABC да (11-расм) $AB : \sin C = BC : \sin A = AC : \sin B$ эканини кўрсатамиз. Бунинг учун $\triangle ABC$ нинг A учидан AD перпендикуляр ўтказсак, у ҳолда ADC ва ADB тўғри бурчакли учбурчакларни ҳосил қиламиз. $\triangle ACD$ дан: $AD : AC = \sin C$ ва $\triangle ADB$ дан: $AD : AB = \sin B$ бўлади, бундан $AD = AC \sin C$, $AD = AB \sin B \Rightarrow AC \sin C = AB \sin B \Rightarrow AC : \sin B = AB : \sin C$ ҳосил бўлади.

Худди шунга ўхшатиб, $AB : \sin C = BC : \sin A$ ни ҳосил қилсак, у ҳолда

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

бўлади.



13- расм.

Шу билан T_{14} исбот қилинди.

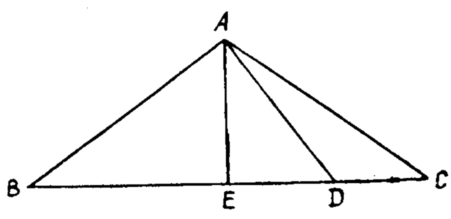
15- теорема. *Учбурчакнинг ихтиёрий томонига ўтказилган медиана узунлиги*

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2;$$
$$4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2;$$
$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

га тенг бўлади.

Исботи. Берилган учбурчак ABC ни параллелограммга тўлдирамиз (13- расм). Натижада унинг катта диагоналининг узунлиги $2AA_1$ га тенг бўлади. Агар $AA_1 = m_a$ эканини эътиборга олиб, T_{12} ни татбиқ этсак, у ҳолда $(2AA_1)^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2$ бўлади. Бундан AA_1 нинг ўрнига m_a ни қўйиб ҳисобласак, у ҳолда $4m_a^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2 \Rightarrow 4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$ бўлади. Худди шунга ўхшаш қолган муносабатларни келтириб чиқариш мумкин. Шу билан T_{15} исбот қилинди.

16- Стюарт теоремаси (T_c) . *Агар D нуқта ABC учбурчакнинг BC томонида ётиб, $BD = m$, $CD = n$ ва $AD = d$ бўлса, у ҳолда $d^2a = b^2m + c^2n - amn$ бўлади.*

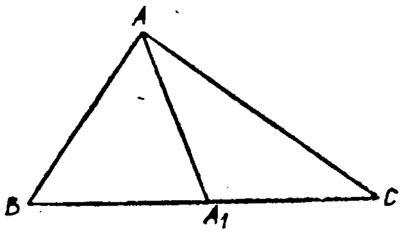


14- расм.

Исботи. Учбурчак ABC нинг A учидан (14- расм) AE баландлик туширамиз, натижада ҳосил бўлган ABD ва ADC учбурчакларга T_{11} ни татбиқ қилсак, $c^2 = d^2 + m^2 - 2mDE$ (1) ва $b^2 = d^2 + n^2 + 2nDE$ (2) ҳосил бўлади. (1)

ни n га, (2) ни m га кўпайтириб ҳадлаб қўшсак, $c^2n + b^2m = d^2(m+n) + mn(m+n)$ бўлади, бунда $m + n = a$ эканидан $d^2a = b^2m + c^2n - amn$ бўлади. Агар $BD : DC = p : q$ бўлса, у ҳолда

$$d^2a = \frac{b^2ap}{p+q} + \frac{c^2aq}{p+q} - \frac{a^3pq}{(p+q)^2},$$



15- расм.

$$d^2 = \frac{b^2p}{p+q} + \frac{c^2q}{p+q} - \frac{a^2pq}{(p+q)^2}$$

ҳосил бўлади. Шу билан T_c исбот қилинди.

1-масала. Учбурчак ABC да биссектриса узунликларини ҳисобланг.

Ечиш. Учбурчак ABC да (15- расм) $AA_1 = l_a$ ҳамда $BA_1 : A_1C = c : b$ экани маълум. Демак, $BA_1 + A_1C = a$ эканига асосан

$$BA_1 = \frac{ac}{b+c}; \; A_1C = \frac{ab}{b+c}$$

бўлади. T_c га асосан

$$l_a^2 a = \frac{ab^2c}{b+c} + \frac{abc^2}{b+c} - \frac{a^3bc}{(b+c)^2} \Rightarrow l_a^2 = bc\frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2};$$

$a + b + c = 2p$ га асосан

$$l_a^2 = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2} \Rightarrow l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)} \text{ ёки}$$

$$l_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$$

ёки

$$l_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$$

бўлади.

Шу билан масала ҳал қилинди.

2- масала. Учбурчакнинг томонлари узунликларига кўра унинг баландлигини ҳисобланг.

Ечиш. Учбурчак ABC нинг (11- расм) $BC = a$ томонига тушрилган баландлик h_a ни ҳисоблаймиз. Бунинг учун T_{11} дан фойдаланамиз, яъни: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac'$, бундан

$$c' = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

бўлади.

Энди ABD тўғри бурчакли учбурчакдан $h_a = \sqrt{c^2 - c'^2}$ ни ёза оламиз. Демак,

$$h_a = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{(2ac)^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{(a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)} =$$

$$= \frac{4}{2a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} =$$

$$= \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)};$$

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)};$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)};$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

бўлади.

Қуйидаги масалаларни ечинг:

1. Тенг томонли учбурчакнинг учлари учта параллел тўғри чизиқ устида ётади. Ўртадаги тўғри чизиқ қолган иккитасидан a ва b масофада ётади. Учбурчакнинг томонини топинг.

2. ABC учбурчакда A бурчак B бурчакдан икки марта катта. b ва c томонлари берилган бўлса, учинчи томонни топинг.

3. Учбурчак ABC да $(h_a + h_b + h_c)(h_a^{-1} + h_b^{-1} + h_c^{-1}) = (a + b + c)(a^{-1} + b^{-1} + c^{-1})$ ўринли эканини исботланг.

4. Учбурчак ABC нинг баландликлари асосини туташтириш натижасида ҳосил бўлган учбурчак $A_1B_1C_1$ нинг медианаси узунлигини топинг.

5. Учбурчакнинг томонлари 13 см, 14 см, 15 см бўлиб, катта томонига ўтказилган перпендикуляр унинг юзини тенг иккига бўлади. Тенг бўлувчи чизиқнинг учбурчак ичида қолган қисмини ва кичик бурчак учидан унгача бўлган масофани топинг.

6. Тўғри бурчакли ABC учбурчакда тўғри бурчак биссектрисаси гипотенузани p ва q кесмаларга бўлади. Учбурчакнинг катетларини, гипотенузага туширилган баландлигини, биссектриса узунлигини топинг.

7. Учбурчакнинг a томонига туширилган баландликнинг шу томонга тегишли медианадаги проекциясини топинг.

8. Учбурчакнинг оғирлик марказидан баландликка туширилган перпендикуляр 6 см ва учбурчакнинг асоси 20 см бўлса, баландлик ажратган кесмалар узунликларини топинг.

9. Учбурчакда $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, BC томонда D нуқта $BD = m$ ва $DC = n$ қилиб олинган бўлса, AD нинг узунлигини топинг.

10. Агар m_a нинг a томонга туширилган проекцияси n_a бўлса, у ҳолда $b^2 - c^2 = 2an_a$ бўлишини исботланг.

11. Агар ABC учбурчакда A ва B бурчакларнинг ички биссектрисалари AA_1 ва BB_1 бўлиб, улар Q нуқтада кесишса, у ҳолда $QA_1 = \frac{a}{2p} AA_1$ бўлишини исботланг.

12. Ўткир бурчакли учбурчакнинг H ортомаркази ва a, b, c томонлари маълум бўлса, у ҳолда $h_в \cdot HA + h_b \cdot HB + h_c \cdot HC$ ни ҳисобланг.

13. Учбурчак ABC да медианаларнинг йиғиндиси унинг ярим периметридан катта, тўлиқ периметридан кичик бўлишини исботланг.

14. Учбурчак медианаси уни ўртага олувчи томонлар йиғиндисининг ярмидан кичик ва шу томонлар йиғиндисининг ярмидан учинчи томон ярмини айрилмасидан катта канини исботланг.

3-§. Айлана ва доира

7-таъриф. Текисликнинг берилган нуқтадан бир хил узоқлашган ҳамма нуқталаридан иборат фигура ***айлана*** дейилади ва $l(0; R)$ кўринишда белгиланади.

Берилган нуқта айлананинг ***маркази*** дейилади.

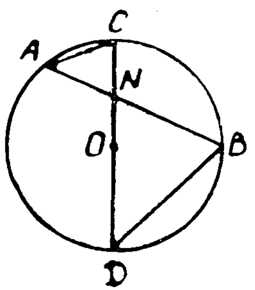
Текисликнинг айлана билан чегараланган ички бўлаги ***доира*** дейилади.

Айлана нуқталаридан унинг марказигача бўлган масофа айлананинг ***радиуси***, айлананинг ихтиёрий икки нуқтасини туташтирувчи тўғри чизиқ кесмаси ***ватар***, марказдан ўтувчи ватар ***диаметр*** дейилади.

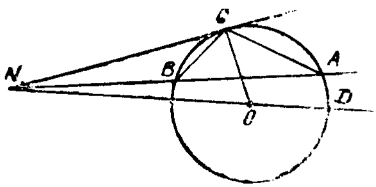
Маълумки, айланалар ўзаро маълум муносабатда бўладилар, яъни умумий марказга эга бўлган (концентрик) айланалар; ичкаридан ёки ташқаридан уринувчи айланалар; ўзаро умумий нуқтага эга бўлмаган айланалар.

17-теорема. *Доира ичида олинган нуқта орқали бирор ватар ва диаметр ўтказилса, ватар кесмаларининг кўпайтмаси диаметр кесмаларининг кўпайтмасига тенг.*

Исботи. T_{17} нинг шартига кўра AB ватар ва CD диаметр N нуқтада кесишади. Энди иккита ёрдамчи AC ва BD ватарлар ўтказсак (16-расм), ACN ва NBD учбурчаклар ҳосил бўлади. Бу учбурчакларда $\angle A = \angle D$ ва $\angle C = \angle B$ бўлади, битта ёйга тиралгани учун. Натижада T_4 ва T_5 га асосан $\triangle ACN \sim \triangle NBD$ эканидан $AN \cdot NB = CN \cdot ND$ экани келиб чиқади.



16-расм.



17-расм.

1-натижа. Доира ичида олинган нуқтадан бир нечта ватар ўтказилган бўлса, ҳар бир ватар кесмаларининг кўпайтмаси ҳамма ватарлар учун ўзгармас миқдордир.

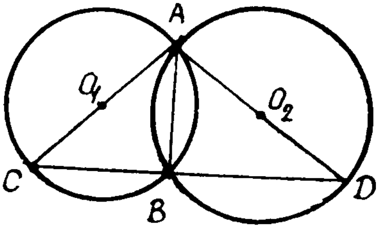
18-теорема. *Доирадан ташқарида олинган нуқтадан бирор кесувчи ва уринма ўтказилган бўлса, кесувчи билан унинг ташқи бўлагининг кўпайтмаси уринманинг квадратига тенгдир.*

Исботи. Доира ташқарисидаги N нуқтадан NC уринма ва NA кесувчи ўтказамиз (17-расм), сўнгра AC ва BC ёрдамчи ватарларни ўтказамиз, у ҳолда NAC ва NBC учбурчакларни ҳосил қиламиз. Бу учбурчакларда N бурчак умумий ва $\angle NCB = \angle CAB = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$ эканидан T_4 ва T_5 га асосан $\triangle NAC \backsim \triangle NBC$ бўлади. Бундан $NA:NC = NC::NB \Rightarrow NC^2 = NA \cdot NB$ бўлади. Шу билан T_{18} исбот қилинди.

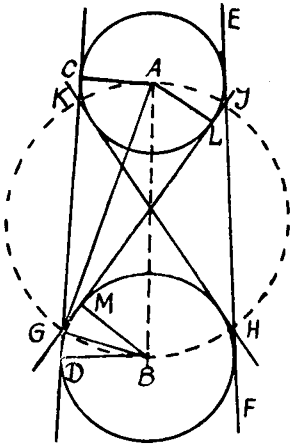
2-натижа. Доира ташқарисида ётган нуқтадан бир қанча кесувчилар ўтказилган бўлса, ҳар бир кесувчи билан унинг ташқи бўлагининг кўпайтмаси ҳамма кесувчилар учун ўзгармас миқдордир.

19-теорема. *Агар кесишувчи икки айлананинг кесишиш A нуқтасидан O_1 ва O_2 нуқталар орқали AC ва AD диаметрлар ўтказилса, у ҳолда CD тўғри чизиқ айланаларнинг иккинчи кесишиш B нуқтасидан ўтиб, $AB \perp CD$ бўлади.*

Исботи. $l_1(O_1;\ R_1)$ ва $l_2(O_2;\ R_2)$ берилган ва $l_1 \cap l_2 = \{A,\ B\}$. $AC = d_1$ ва $AD = d_2$ ҳамда 18-расм) $\triangle ACB$ ва $\triangle ABD$ лар диаметрга тиралгани учун $\angle ABC = \angle ABD = 90°$ эканидан $AB \perp CD$ келиб чиқади. Шу билан T_{19} исбот қилинди.



18-расм.



19-расм.

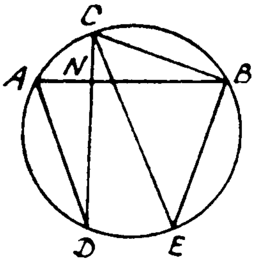
20-теорема. *Ўзаро кесишмайдиган* (19-расм) *айланаларнинг ички ва ташқи умумий уринмаларининг кесишишидан ҳосил бўлган G, K I, H нуқталар бу айланаларнинг марказлари орасидаги масофани диаметр қилиб ўтказилган айланада ётади.*

Исботи. $l_1(A;\ R_1)$ ва $l_2(B_1;\ R_2)$ айланаларнинг марказларини уриниш нуқталари C, L, D, M билан туташтириб, AG ва BG кесмалар ўтказилгандан кейин $\angle AGC = \angle AGL$ ва $\angle BGD = \angle BGM$ ларни ҳосил қиламиз. Натижада $\angle CGL + \angle DGM = 180°$, шунга ўхшаш $\angle AGL + \angle BGM = 90°$; $\angle AGB = 90°$. Бундан G нуқта AB диаметрли айланада ётади. Худди шунга ўхшаш қолган нуқталар ҳам кўрсатилади. Шу билан теорема исбот қилинди.

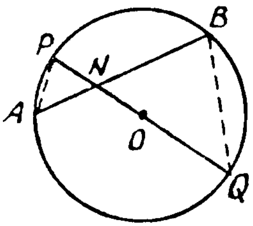
21-теорема. *Доирада олинган бирор N нуқта орқали ўзаро перпендикуляр бўлган AB ва CD ватарлар ўтказилса, у ҳолда улар бўлакларининг узунликлари квадратларининг йиғиндиси диаметр квадратига тенг бўлади,* яъни:

$$NA^2 + NB^2 + NC^2 + ND^2 = d^2.$$

Исботи. T_{21} нинг шартига кўра N нуқта ҳамда AB ва CD перпендикуляр ватарлар (20-расм) берилган. Энди CE диаметрни ва AD, CB, BE ватарларни ўтказамиз, натижада $\angle DAB = \angle DCB$; $\angle DCB + \angle ABC = 90°$ (1), $\angle CBA + \angle ABE = 90°$ (2) бўлади. (1) ва (2) дан $\angle DAB = \angle ABE \Rightarrow \smile AD = \smile BE$, бундан $AD = BE$ бўлади. $\triangle AND$, $\triangle CNB$ ва $\triangle CBE$ лардан $AN^2 + ND^2 = AD^2$ (3), $NC^2 + NB^2 = CB^2$ (4) ва $CB^2 + BE^2 = CE^2$ (5) ҳосил бўлади, сўнгра (3) ва (4) тенгликларни (5) га қўйсак, $NA^2 + ND^2 + NC^2 + NB^2 = CE^2 = d^2$ ҳосил бўлади. Шу билан теорема исбот қилинди.



20-расм.



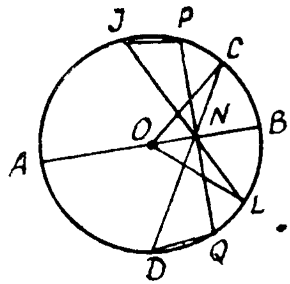
21-расм.

22-теорема. *Агар доиранинг ихтиёрий нуқтаси N орқали AB ватар ўтказилса, у ҳолда $AN \cdot NB$ кўпайтма радиус квадратидан N нуқтадан доира марказигача бўлган масофа квадратининг айирилганига тенг бўлади.*

Исботи. N нуқта ва O марказ орқали (21-расм) PQ диаметрни ўтказамиз. T_{17} га асосан $NA \cdot NB = PN \cdot NQ$ бўлади, лекин $PN = OP - ON$; $NQ = OQ + ON$ ва $OP = OQ = R$ эканидан $AN \cdot NB = PN \cdot NQ = (R - ON)(R +$

$+ ON) = R^2 - ON^2$. Демак $AN \cdot NB = R^2 - ON^2$ бўлади, шу билан T_{22} исбот бўлди.

23-теорема. *Агар айлананинг бирор P нуқтасидан AB диаметрга PN перпендикуляр тушириб* (22-расм), $\angle INP = \angle PNC$ *ясалса, у ҳолда PN перпендикуляр IN ва NC лар орасида ўрта пропорционал бўлади.*

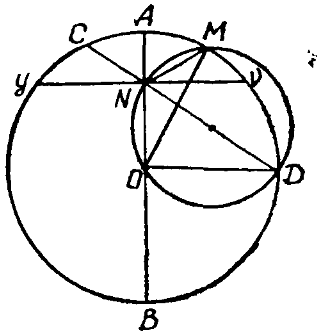


22-расм.

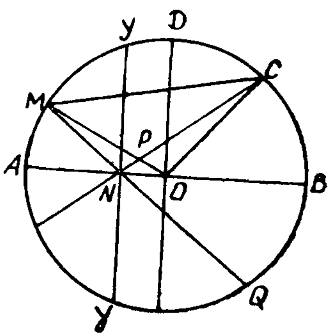
Исботи. T_{23} шартида берилган PN, IN, NC ларни $l(O; R)$ айлана билан кесишгунча давом эттирамиз, бунда NC кесма айланани D нуқтада, PN эса Q да, IN эса L нуқтада кесиб ўтади. Натижада $\angle INP = \angle PNC = \angle LNQ = \angle DNQ$ бўлиб, $\angle ONC = \angle ONL$ экани келиб чиқади. Бундан $\triangle OCN = \triangle ONL$ бўлиб, $NC = NL$ бўлади. $\triangle INP \backsim \triangle QNL$ эканидан $IN : NP = NQ : NL$ бўлади, бунда $PN = NQ$, $LN = NC$ эканидан $IN : PN = PN : NC \Rightarrow PN^2 = IN \cdot NC$ бўлади. Шу билан теорема исбот қилинди.

24-теорема. *Агар MOD секторнинг M, O, D нуқталари орқали айлана ўтказилиб* (23-расм), *у AB диаметрни N нуқтада кесиб ўтса, у ҳолда NY биссектриса NM ва ND ватарлари орасида ўрта пропорционал бўлади.*

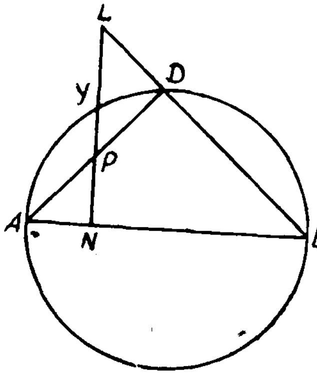
Исботи. N нуқта билан D нуқтани туташтириб давом эттирсак, доирани C нуқтада кесиб ўтади. Натижада



23-расм.



24-расм.



25- расм.

$\angle BND = \angle AOC = \angle ANM$ бўлади, шартга кўра $\angle DNY = \angle MNY$, бундан $\angle BNY = \angle ANY$ бўлиб, $NY \perp AB$ экани келиб чиқади. T_{23} га асосан $NY^2 = NM \cdot ND$ бўлади. Шу билан теорема исбот бўлди.

25-теорема. *Агар доирада олинган N нуқтадан ўтувчи диаметрга* (24- расм) *перпендикуляр ватар ўтказилган бўлиб, NM ва NC лар $\angle ANY$ ва $\angle YNB$ ларнинг биссектрисаси ва $OD \perp AB$ бўлса;*

1) $NM : NY = NY : NC$;

2) $\smile MYC = \smile AYD = 90°$;

3) $NM^2 + NC^2 = 2R^2 = 2AO^2$ *бўлади.*

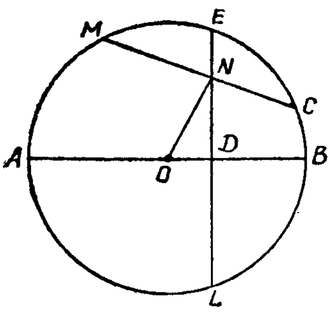
Исботи. T_{23} га асосан $NY^2 = NM \cdot NC$ экани маълум, бундан биринчи шарт исбот бўлади. Шартга кўра $\angle MNY = \angle YNC = 45°$, $\smile MYC = \smile MY + \smile YC = 90°$ ҳамда $OD \perp AB$ ва $OD \parallel NY$ эканидан $\smile MYC = \smile AYD = 90°$. Ҳақиқатан ҳам, $\angle MOC = 90°$ тўғри бурчак эканидан ва ΔMCO дан $MC^2 = OM^2 + OC^2 = 2AO^2$, ΔMNC да $\angle MNC = \angle MOC$ эканидан $MN^2 + NC^2 = MC^2 = 2R^2$ экани келиб чиқади. Шу билан теорема исбот бўлди.

26-теорема. *Агар AB диаметрнинг ихтиёрий N нуқтасидан* (25- расм) *ўтказилган перпендикуляр AB га ясалган тенг ёнли учбурчакнинг AD томонини P нуқтада ва BD томоннинг давомини L нуқтада кесиб ўтса, у ҳолда $NY^2 = NP \cdot NL$ бўлади.*

Исботи. Маълумки, $\Delta ANP \sim \Delta BNL$ эканидан $AN : NP = BN : LN$. Худди шунга ўхшаш $AN : NY = NY : NB$ ёки $AN : NY = NY : NL$ бўлади, бу ерда $AN = NP$ эканидан $NP : NY = NY : NL \Rightarrow NY^2 = NP \cdot NL$ бўлади. Шу билан теорема исбот қилинди.

Масала. Агар доира ичида олинган N нуқта орқали MC ватар ўтказиб ва ихтиёрий AB диаметрга шу нуқтадан перпендикуляр туширилса (26- расм), у ҳолда $MN \cdot NC = AD \times DB - ND^2$ бўлишини исботланг.

Исботи. ND перпендикулярни доира айланаси билан кесишгунча давом эттириб, E, L ларни топамиз. T_{17} га асосан $MN \cdot NC = NE \cdot NL$ бўлади, бу ерда $NE = DE - ND \times$ $\times NL = DL + ND = DE +$ $+ ND$ бўлганидан $NM \cdot NC =$ $= NE \cdot NL = (DE - ND)(DE +$ $+ ND) = DE^2 - ND^2$ бўлиб, T_{23} га асосан $DE^2 = AD \cdot DB$ эканлигидан $NM \cdot NC = DE^2 -$ $- ND^2 = AD \cdot DB - ND^2$ экани келиб чиқади.



26- расм.

Қуйидаги масалаларни ечинг:

1. Айлана ташқарисида олинган N нуқтадан ML ватар ўтказиб, ихтиёрий AB диаметрга ND перпендикуляр ўтказилса, у ҳолда $NM \cdot NL = DA \cdot DB + ND^2$ эканини исботланг.

2. Иккита кесишган ватарнинг бири 12 м ва 18 м ли бўлакларга бўлинган, иккинчиси 3:8 нисбатда бўлинган бўлса, иккинчи ватарнинг узунлигини топинг.

3. Уринма 20 см бўлиб, ўша нуқтадан ўтказилган энг катта кесувчи 50 см бўлса, доиранинг радиусини топинг.

4. Айлананинг N нуқтасидан ўтказилган тўғри чизиқ иккинчи концентрик айланани C ва D нуқталарда кесиб ўтса, у ҳолда $NC \cdot ND = R_1^2 - R_2^2$ $(R_1 > R_2)$ бўлишини исботланг.

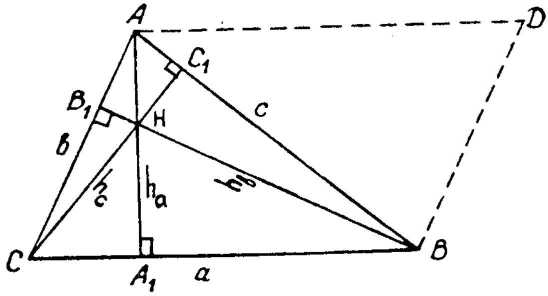
5. Берилган ёйнинг ватари a га, радиуси r га тенг. Иккиланган ёй ватарининг узунлигини аниқланг.

6. Ўзаро кесишган икки айлананинг умумий ватарини узайтириб, унинг давомида олинган бир нуқтадан шу айланаларга уринмалар ўтказилган. Шу уринмаларнинг тенг эканини исботланг.

4- §. Учбурчакнинг юзи. Учбурчакнинг доира билан ўзаро алоқаси

27-теорема. *Учбурчакнинг юзи унинг асоси билан баландлиги кўпайтмасининг ярмига тенг.*

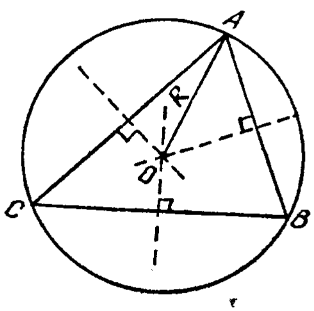
Исботи. Берилган учбурчак ABC ни (27- расм) $ADBC$ параллелограммгача тўлдирамиз, натижада параллелограммнинг юзи $S_{ADBC} = CB \cdot AA_1 = a \cdot h_a$ бўлади. $ADBC$ параллелограммнинг AB диагонали уни тенг иккита учбурчакка ажратади. Бундан $\Delta\, ABC$ нинг юзи $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\ S_{ADBC} =$



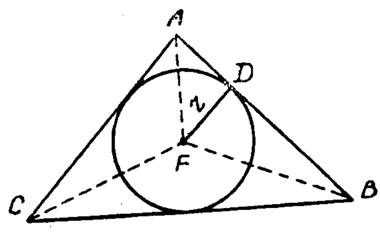
27- расм.

$=\frac{1}{2}a\cdot h_a$ бўлади. Демак, $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a\cdot h_a=\frac{1}{2}b\cdot h_b=$ $=\frac{1}{2}c\cdot h_c$ бўлади. Шу билан теорема исбот қилинди.

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\,a\cdot h_a$ формулада қатнашаётган h_a нинг ўрнига $h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$ ни қўйсак, у олда $S_{\Delta ABC}=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$ Герон формуласини ҳосил қиламиз. Агар $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\,a\cdot h_a$ формуладаги h_a нинг (27- расм) $\Delta\ AA_1B$ дан $h_a=c\sin B$ қийматни топиб ўрнига қўйсак, у ҳолда $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\,a\cdot c\sin B$ ни ҳосил қила-



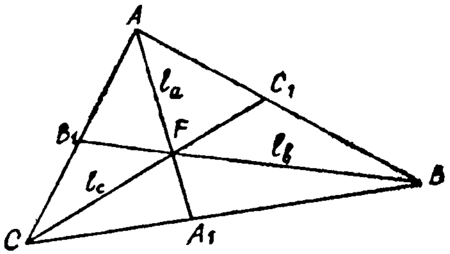
28- расм.



29- расм.

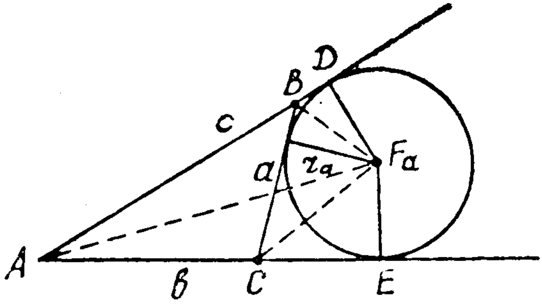
миз. Худди шунга ўхшаш $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a\cdot b\sin C=\frac{1}{2}b\cdot c\sin A$ ларни ёзиш мумкин.

Маълумки, ҳар қандай учбурчакка ички ва ташқи айлана чизиш мумкин. Ташқи чизилган айлана маркази (28-расм) учбурчакнинг томонларига ўтказилган ўрта перпендикулярнинг кесишган нуқтасида, ички чизилган айлананинг маркази (29-расм) эса биссектрисалар кесишган (30-расм) нуқта F да ётади. Ташқи чизилган айлананинг радиуси R, ичкисиники r орқали белгиланади. Юқорида кўриб ўтилган

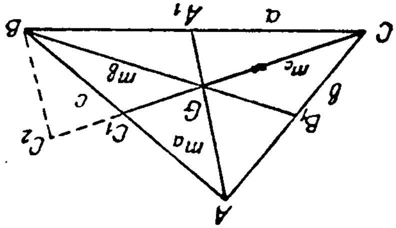


30- расм.

T_{14} га асосан, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ экани маълум. Демак, $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$ га $\sin A=\frac{a}{2R}$ ни қўйсак, у ҳолда $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{a}{2R}=\frac{abc}{4R}$; $S_{\Delta ABC}=\frac{abc}{4R}$ ҳосил бўлади. Агар $\Delta\ ABC$ га (30-расм) ички чизилган айлана радиусини эътиборга олсак, у ҳолда $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta AFB}+$ $+S_{\Delta BFC}+S_{\Delta CFA}$ эканидан $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot r+\frac{1}{2}BC\cdot r+$ $+\frac{1}{2}AC\cdot r=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r=p\cdot r$ бўлади, яъни $S_{\Delta ABC}=$ $=p\cdot r$ бўлади (бунда $p=\frac{a+b+c}{2}$). Берилган учбурчак ABC нинг ихтиёрий бир томонига ташқаридан, қолган томонларнинг эса давомига уриниб ўтувчи айлана учбурчакнинг шу томонига ташқи-ички чизилган айлана деб қаралади. Агар шу айлана учбурчак ABC нинг a томонига ташқи-ички чизилган бўлса (31-расм), унинг маркази $\angle BCE$ ва $\angle DBC$ ларнинг биссектрисалари кесишиш нуқтаси F_a да ётади ва унинг радиуси r_a орқали ифодаланади. Бундан келиб чиқа-



31- расм.



32- расм.

дики, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABF_a} + S_{\triangle AF_aC} - S_{\triangle BF_aC} = \frac{1}{2} c \cdot r_a + \frac{1}{2} b \cdot r_a - \frac{1}{2} \times \times a \cdot r_a = \frac{1}{2} r_a (b + c - a)$ бўлади, бу ерда $b + c - a = b + c + a - 2a = 2p - 2a = 2(p - a)$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда $S_{\triangle ABC} = (p - a) \cdot r_a$ бўлади. Худди шунга ўхшаш $S_{\triangle ABC} = (p - a) r_a = (p - b) r_b = (p - c) \cdot r_c$ эканини ёза оламиз. Энди учбурчак юзини унинг медианасига кўра топамиз. Учбурчакнинг медианалари кесишган (оғирлик маркази) нуқтаси G бўлсин, медиана учбурчак юзини тенг иккига бўлганидан (32- расм) $S_{\triangle AA_1B} = S_{\triangle ACA_1}$ бўлиб, бундан $S_{\triangle AGB} = S_{\triangle BGC} = S_{\triangle CGA}$ ва $S_{\triangle C_1C_2B} = S_{\triangle AGC_1}$ $(BC_2 || AG)$ бўлади. Бундан $BC_2 = \frac{2}{3} m_a$; $BG = \frac{2}{3} m_b$; $C_2G = \frac{2}{3} m_c$ эканлиги ҳамда $\triangle AGB = \triangle BGC_2$ эканидан $\triangle BGC_2$ нинг ярим периметри $p = \frac{2}{3} \cdot \frac{m_a + m_b + m_c}{2}$ ёки $T = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}$, $p = \frac{m_a + m_b + m_c}{3}$ десак, у ҳолда $p = \frac{2}{3}\ T$ бўлади. Демак,

$$S_{\triangle BGC_2} = \sqrt{\frac{2}{3} T (T - m_a)(T - m_b)(T - m_c) \cdot \frac{8}{27}} =$$

$= \frac{4}{9} \sqrt{T (T - m_a)(T - m_b)(T - m_c)}$ бўлади. Юқоридагига асосан $S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle BGC_1}=3\cdot\frac{4}{9}\sqrt{T(T-m_a)(T-m_b)(T-m_c)}=$ $=\frac{4}{3}\sqrt{T(T-m_a)(T-m_b)(T-m_c)}$; $S_{\triangle ABC}=$ $=\frac{4}{3}\sqrt{T(T-m_a)(T-m_b)(T-m_c)}$ бўлади. Агар $S_{\triangle ABC}$ ни унинг баландлиги орқали ифодаласак, у ҳолда $2S=$ $=ah_a=bh_b=ch_c$ га асосан $b=\frac{ah_a}{h_b}$; $c=\frac{ah_a}{h_c}$ бўлиб, $p=\frac{a+b+c}{2}=$ $=\frac{1}{2}\left(a+\frac{ah_a}{h_b}+\frac{ah_a}{h_c}\right)=\frac{1}{2}ah_a\,(h_a^{-1}+h_b^{-1}+h_c^{-1})$ бўлади, бу ерда $h_a^{-1}+h_b^{-1}+h_c^{-1}=2V$ десак, унда $p=Vah_a$ бўлиб, $p-a=Vah_a-a=ah_aV-\frac{ah_a}{h_a}=ah_a(V-h_a^{-1})$ бўлади. Худди шунга ўхшаш $p-b=ah_a(V-h_b^{-1})$; $p-c=ah_a(V-$ $-h_c^{-1})$, $S=a^2h_a^2\sqrt{V(V-h_a^{-1})(V-h_b^{-1})(V-h_c^{-1})}$ бўлиб, $2S=ah_a$ эканидан $\frac{1}{S}=4\sqrt{V(V-h_a^{-1})(V-h_b^{-1})(V-h_c^{-1})}$ экани келиб чиқади.

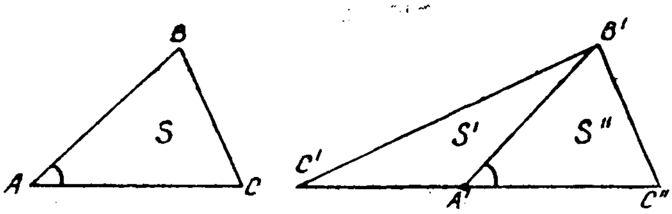
F' ва F'' ўхшаш содда шакллар бўлсин. Бу шаклларнинг юзлари қандай нисбатда бўлишини аниқлаймиз. Шакллар ўхшаш бўлгани учун F' ни F'' га ўтказадиган алмаштириш мавжуддир. F' шаклни учбурчакларга бўлиб чиқамиз: Δ_1', Δ_2', ..., Δ_k'. F' шаклнинг юзи шу учбурчаклар юзларининг йиғиндисига тенг. F' шаклни F'' шаклга ўтказувчи ўхшаш алмаштириш бу учбурчакларни F'' шаклнинг бўлинишидан ҳосил қилинган Δ_1'', Δ_1'', ..., $\bar{\Delta}_k''$ учбурчакларга ўтказади. F'' шаклнинг юзи шу учбурчак юзларининг йиғиндисига тенгдир. Демак, $S(\Delta_k'')=k^2S(\Delta_k')\Rightarrow S(F'')=$ $=k^2S(F')$ экани келиб чиқади.

28-теорема. *Ўхшаш учбурчак юзларининг нисбати мос чизиқли элементлар квадратларининг нисбати кабидир.*

Исботи. T_{28} шартига кўра $\triangle ABC\overset{k}{\sim}\triangle A_1B_1C_1$ берилган. Бундан $A_1B_1=k\,AB$; $A_1C_1=k\,AC$; $B_1C_1=k\,BC$ экани маълум. T_{27} га кўра $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$ бўлиб,

$S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}a_1h_{a_1}=\frac{1}{2}b_1h_{b_1}=\frac{1}{2}c_1h_{c_1}$ бўлиши берилган.

$S_{\triangle A_1B_1C_1}:S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a_1h_{a_1}:\frac{1}{2}ah_a=\frac{a_1}{a}\cdot\frac{h_{a_1}}{h_a}$ бўлиб, $\frac{a_1}{a}=\frac{h_{a_1}}{h_a}$



33- расм.

эканидан $S_{\triangle A_1B_1C_1} : S_{\triangle ABC} = \frac{a_1}{a} \cdot \frac{a_1}{a} = \frac{a_1^2}{a^2} = k^2$ бўлади. Бундан $S_{\triangle A_1B_1C_1} = k^2 S_{\triangle ABC}$ бўлади. Шу билан теорема исбот бўлди.

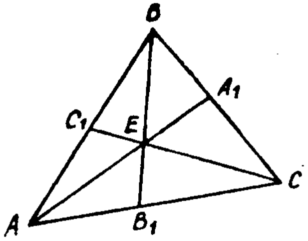
29-теорема. *Агар ABC учбурчакнинг A бурчаги $A'B'C'$ учбурчакнинг A' бурчагига тенг бўлса, бу учбурчаклар юзларининг нисбати тенг бурчакларни ташкил этган томонлар кўпайтмасининг нисбатига тенгдир, яъни $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle A'B'C'} = bc : b'c'$ бўлади.*

Агар ABC учбурчакнинг A бурчаги билан $A'B'C'$ учбурчакнинг A' бурчагининг йиғиндиси $180°$ га тенг бўлса (33- расм), *учбурчак юзларининг нисбати шу A ва A' бурчакларни ташкил этган томонлар кўпайтмасининг нисбатига тенгдир, яъни $S : S' = bc : b'c'$.*

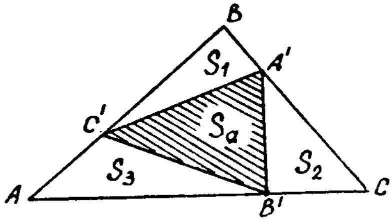
$A'B'C'$ учбурчакда $C'A'$ нинг давомида A' нуқтага нисбатан C' нуқтага симметрик қилиб C'' нуқта оламиз. $A'C'' = A'C' = b'$. Энди B' ва C'' нуқталарни туташтирамиз. Ҳосил бўлган $A'B'C''$ нинг юзини S'' билан белгилайлик, бунда $\angle B'A'C' = \angle A$ бўлганидан юқоридаги фикрга кўра $S : S'' = bc : b'c'$. Бу ерда $S_{\triangle C'A'B'} = S_{\triangle A'B'C''}$, чунки $C'A' = A'C''$ ҳамда баландликлар тенг. Демак, $S' = S''$ эканидан $S : S' = bc : b'c'$ бўлади.

30-теорема. *Агар ABC учбурчакнинг учларидан чиқувчи тўғри чизиқлар учбурчакнинг томонларини A_1, B_1, C_1 нуқталарда кесиб, улар биргина E* (34- расм) *нуқтада кесишса, у ҳолда $\frac{EA_1}{AA_1} + \frac{EB_1}{BB_1} + \frac{EC_1}{CC_1} = 1$ бўлишини исботланг.*

Исботи. Маълумки, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AEB} + S_{\triangle BEC} + S_{\triangle CEA}$ бўлиб, $\frac{S_{\triangle AEB}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{S_{\triangle BEC}}{S_{\triangle ABC}} + \frac{S_{\triangle CEA}}{S_{\triangle ABC}} = 1$ бўлади. Бунда



34- расм.



35- расм.

$$\frac{S_{\triangle AEB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{c \cdot EC_1}{c \cdot CC_1}; \quad \frac{S_{\triangle BEC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{a \cdot EA_1}{a \cdot AA_1}; \quad \frac{S_{\triangle CEA}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{b \cdot EB_1}{b \cdot BB_1}$$

эканидан $\frac{EA_1}{AA_1} + \frac{EB_1}{BB_1} + \frac{EC_1}{CC_1} = 1$ бўлади. Шу билан T_{30} исбот қилинди.

Масала. ABC учбурчакнинг томонларида мос равишда A', B', C' нуқталар $A'B = u \cdot A'C$; $B'C = v \cdot B'A$; $C'A = w \cdot C'A'$ шарти бўйича олинган бўлиб, унинг юзи S бўлса, $A'B'C'$ учбурчак юзини топинг.

Ечиш. Қисқалик учун $A'B = a_1$; $A'C = a_2$; $B'C = b_1$; $B'A = b_2$; $BC' = c_2$; $AC' = c_1$ деб олсак, у ҳолда (35- расм) $S_{\triangle A'BC'} = S_1$; $S_{\triangle A'B'C} = S_2$; $S_{\triangle AB'C'} = S_3$ кўринишда белгилаймиз. Юқоридагиларга таяниб ва T_{29} га асосан $S_1 : S = a_1c_2 : ac$; $S_2 : S = a_2b_1 : ab$; $S_3 : S = c_1b_2 : cb$ ни ёзамиз ва уларни ҳадма-ҳад қўшсак, у ҳолда $\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = \frac{a_1bc_2 + a_2b_1c + ab_2c_1}{abc}$ ёки $S_1 + S_2 + S_3 = S_k$ десак, $S = \frac{S_k abc}{a_1bc_2 + a_2b_1c + ab_2c_1}$ (1) ҳосил бўлади. Белгилашларга кўра

$$\begin{aligned} a &= a_1 + a_2 = a_2(1 + u), \\ b &= b_1 + b_2 = b_2(1 + v), \\ c &= c_1 + c_2 = c_2(1 + w). \end{aligned} \qquad 2)$$

Топилган натижаларни (1) га қўйиб, сўнгра тегишли соддалаштиришларни бажарсак, у ҳолда

$$\frac{S_k}{S} = \frac{u(1+v) + v(1+w) + w(1+u)}{(1+u)(1+v)(1+w)} \Rightarrow S_k = S \cdot \frac{u(1+v) + v(1+w) + w(1+u)}{(1+u)(1+v)(1+w)}$$

бўлиб, $S_a = S - S_k$

эканидан

$$S_a = S \cdot \frac{1 + u \cdot v \cdot w}{(1+u)(1+v)(1+w)}$$

ҳосил бўлади.

Маълумки, ABC учбурчак томонлари узунликлари йиғиндисининг ярмини $p = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow 2p = a + b + c$ деб белгилаган эдик.

1. $ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 2Rr$ эканини исботланг.

Исботи. Бунинг учун $a + b + c = 2p$; $r = \frac{S}{p}$; $R = \frac{abc}{4S}$ каби муносабатлардан фойдаланамиз. Булардан

$$p^2 + r^2 + 4Rr = p^2 + \frac{S^2}{p^2} + \frac{abc}{S} \cdot \frac{S}{p} =$$

$$= p^2 + \frac{(p-a)(p-b)(p-c) + abc}{p} =$$

$$= \frac{p^3 - p^2(a+b+c) + p(ab+ac+bc) - abc + abc}{p} + p^2 =$$

$$= p^2 - p^2 + ab + bc + ac = ab + ac + bc$$

экани келиб чиқади. Шу билан исбот бўлди.

2. Учбурчак ABC да $a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$ эканини исботланг.

Исботи. $a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc - 2(ab + ac + bc) = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = 4p^2 - 2(p^2 + r^2 + 4Rr) = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$.

3. Берилган: $\left(\frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c}\right)\left(\frac{a+b+c}{r_a + r_b + r_c}\right) = 4$; $a^2 = (r_a - r)(r_b + r_c)$ эканлигини исботланг.

Исботи. $\frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c} = \frac{ar_br_c + br_ar_c + cr_ar_b}{r_ar_br_c}$ деб ёзиб, сўнгра $S = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$ муносабатдан фойдаланиб, $\frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{S}\left[\frac{a}{(p-b)(p-c)} + \frac{b}{(p-a)(p-c)} + \frac{c}{(p-a)(p-b)}\right] = \frac{a(p-a) + b(p-b) + c(p-c)}{S} = \frac{p(a+b+c) - (a^2+b^2+c^2)}{S} = \frac{2p^2 - (2p^2 - 2r^2 - 8Rr)}{S} = \frac{2r^2 + 8Rr}{S} = \frac{2r}{S}(r + 4R)$ ни ҳосил қиламиз. Худди шунга ўхшаш $r_a + r_b + r_c = r + 4R$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда $\frac{a+b+c}{r_a+r_b+r_c} = \frac{2p}{r+4R}$ бўлиб, $\left(\frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c}\right)\left(\frac{a+b+c}{r_a+r_b+r_c}\right) = \frac{2r}{S}(r+4R)\cdot\frac{2p}{r+4R} =$

$$= \frac{4pr}{S} = 4\frac{S}{S} = 4$$

ҳосил бўлади.

Юқорида келтирилган формулалардан фойдаланиб, қуйидаги тенгликларнинг тўғрилигини текшириб кўринг:

1. $h_a + h_b + h_c = \frac{ab+bc+ac}{2R}$.
2. $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$.
3. $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$.
4. $p^2 r = r_a r_b r_c$.
5. $a^3 + b^3 + c^3 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr)$.
6. $(a+b)(b+c)(a+c) = 2p(p^2 + r^2 + 2Rr)$.
7. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{4R}\left(\frac{p}{r} + \frac{r}{p}\right) + \frac{1}{p}$.
8. $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = \frac{1}{2Rr}$.
9. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{p^2+4Rr+r^2}{4pRr}\right)^2 - \frac{1}{Rr}$.
10. $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} = \frac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr}$.
11. $(p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 = p^2 - 2r(4R+r)$.
12. $(p-a)^3 + (p-b)^3 + (p-c)^3 = p(p^2 - 12Rr)$.
13. $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} = \frac{4R+r}{pr}$.
14. $\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c} = \frac{4R-2r}{r}$.
15. $h_a h_b + h_b h_c + h_a h_c = \frac{2p^2 r}{R}$; $h_a h_b h_c = \frac{2p^2 r^2}{R}$.
16. $(h_a + h_b)(h_b + h_c)(h_a + h_c) = \frac{p^2 r}{R^2}(p^2 + r^2 + 2Rr)$.
17. $\frac{h_a+h_b}{h_c} + \frac{h_b+h_c}{h_a} + \frac{h_a+h_c}{h_b} = \frac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr}$.

18. $\frac{h_a+h_b}{a+b}\cdot\frac{h_b+h_c}{b+c}\cdot\frac{h_a+h_c}{a+c}=\frac{pr}{2R^2}$.

19. $\frac{h_a+h_b}{r_c}+\frac{h_b+h_c}{r_a}+\frac{h_a+h_c}{r_b}=6$.

20. $\frac{r_a r_b r_c}{h_a h_b h_c}=\frac{r_a r_b+r_a r_c+r_b r_c}{h_a h_b+h_a h_c+h_b h_c}$.

21. $S=\frac{r_a r_b r_c}{p}$.

22. $S=r\cdot r_a\sqrt{\frac{4R-r_a+r}{r_a-r}}$.

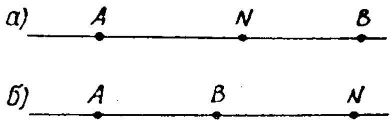
23. $S=\frac{a r_b r_c}{r_b+r_c}$.

24. $S=\frac{(a+b)\,r\cdot r_c}{r+r_c}$.

II боб. УЧБУРЧАКНИНГ АСОСИЙ НУҚТАЛАРИ, ЧИЗИҚЛАРИ ВА УЛАРДАН КЕЛИБ ЧИҚАДИГАН МУНОСАБАТЛАР

1-§. ЧЕВИАНЛАР

Юқорида келтирилган ∂f 2 дан мусбат ва манфий йўналиш тушунчаси маълум. Бизга берилган тўғри чизиқда (36-*а* расм) A ва B асосий нуқта ва қандайдир N нуқта берилган бўлсин. Бундай ҳолатда ҳосил бўлган кесмаларнинг ўзаро нисбатини AN: BN деб ёзсак, у ҳолда бу ёзув уч нуқтанинг оддий нисбати дейилиб, у (ABN) кўринишда белгиланади, яъни $(ABN)=AN:BN$. Энди (ABN) ни N нинг тўғри чизиқдаги ҳар хил ҳолатига қараб, ишораси ҳамда қийматини аниқлашга ҳаракат қилайлик:



36- расм.

1) Агар N нуқта A ва B нуқталар орасида бўлса, у ҳолда $d f 2$ га асосан AN ва BN лар қарама-қарши йўналишга эга бўлганлиги сабабли $(ABN)=AN:BN$ манфий бўлади.

2) Агар $A=N$ бўлса, у ҳолда $(ABA)=AA:BA=0$ бўлади.

3) $B=N$ бўлса, у ҳолда $(ABN)=(ABB)=\infty$ бўлади.

4) Агар $A\neq N$, $B\neq N$ бўлиб, N нуқта AB кесманинг давомида ётсин дейлик, у ҳолда $(ABN)>0$ бўлиб (36-*б* расм),

$$(ABN) = \frac{AN}{BN} = \frac{AB + BN}{BN} = \frac{AB}{BN} + 1$$

ҳосил бўлади.

Бунда N нуқта B нуқтадан чексиз узоқлашса, у ҳолда $\frac{AB}{BN}$ нисбат нолга интилади, (ABN) эса бирга интилади. Шунинг учун ҳам (ABN) да N нуқтанинг ҳар бир ўрни учун (ABN) нинг шунга мос қиймати мавжуддир. Агар берилган (ABN) ва (ABC) лар учун $(ABN) = (ABC)$ бўлса, у ҳолда $\frac{AN}{BN} = \frac{AC}{BC}$ бўлиб, $AN = AB + BN$; $AC = AB + BC$ эканидан

$$(ABN) = \frac{AB}{BN} + 1 = \frac{AB}{BC} + 1 = (ABC) \Rightarrow \frac{AB}{BN} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow N = C$$

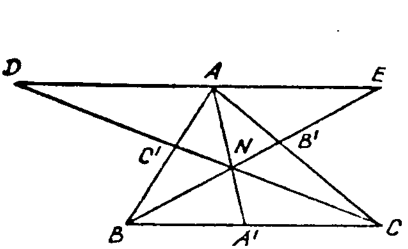
экани келиб чиқади. Демак, N ва C нуқталар устма-уст тушар экан.

8-таъриф. Агар тўғри чизиқлар учбурчак ABC нинг учларидан чиқиб, қаршисидаги томонни ёки унинг давомини A', B', C' нуқталарда кесиб, ўзлари бир нуқтада кесишса ёки параллел бўлса, у ҳолда бундай тўғри чизиқлар ***Чеви чизиқлари*** ёки ***чевианлар*** дейилади.

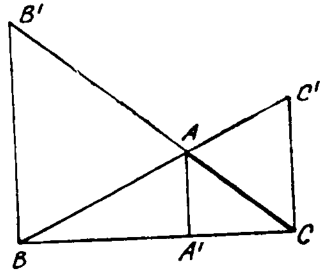
31-теорема. *Агар AA', BB', CC' тўғри чизиқлар учбурчак ABC нинг учларидан чиқиб, бир нуқтада кесишса ёки параллел бўлиб AB, BC, CA томонларни ёки уларнинг давомини C', A', B' нуқталарда кесиб ўтса, у ҳолда $\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1$ бўлади.*

Исботи. Учбурчак ABC нинг A учидан BC томонига параллел бўлган DE ни ўтказамиз (37-расм), натижада ADC' ва BCC' учбурчаклари ҳосил бўлади. T_4 га асосан $\triangle ADC' \backsim \triangle BCC'$ эканлигидан $\frac{DA}{BC} = \frac{AC'}{C'B}$ (1) бўлади. Худди шунга ўхшаш $\triangle AEB' \backsim \triangle CBB'$ га асосан $\frac{BC}{AE} = \frac{B'C}{AB'}$ (2) эканини ёза оламиз. Ҳосил қилинган ўхшаш учбурчаклардан бевосита

$$\frac{AE}{BA'} = \frac{AN}{NA'} = \frac{DA}{A'C} \text{ ёки } \frac{BA'}{A'C} = \frac{AE}{DA} \qquad (3)$$



37- расм.



38- расм.

келиб чиқади. Натижада (1), (2) ва (3) ларни ҳадлаб кўпайтирсак, $\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1$ экани келиб чиқади.

Агар $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ бўлса, у ҳолда (38-расм) $\triangle BAA' \backsim \triangle BC'C$ ёки $\triangle BCB' \backsim \triangle AA'C$ эканлигидан $\frac{AB'}{B'C}=\frac{A'B}{BC}$ (1); $\frac{BC'}{CA}=\frac{BC}{CA'}$ (2); $\frac{CA'}{A'B}=\frac{CA'}{A'B}$ (3) ҳосил қилиб, сўнгра уларни ҳадлаб кўпайтирсак, у ҳолда $\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{BC'}{C'A}\cdot\frac{CA'}{A'B}=1$ экани келиб чиқади. Шу билан теорема исбот қилинди.

32-**тескари теорема**. *Агар учбурчак ABC нинг учларидан чиқувчи AA', BB', CC' тўғри чизиқлар шу бурчак қаршисидаги томонни*

$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=1$$

муносабатда бўлса, у ҳолда бу тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишади ёки параллел бўлади.

(Исботи ўқувчига ҳавола)

Чеви теоремасидан қуйидаги натижалар келиб чиқади.

2-*натижа*. Учбурчакнинг медианалари бир нуқтада кесишади.

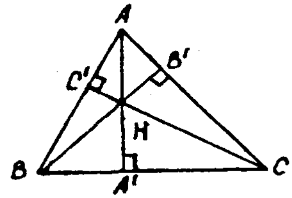
Ҳақиқатан ҳам (37-расм), медиана шартига кўра $AB' = B'C$ ва $BC' = C'A$ ҳамда $BA' = A'C$ бўлгани ва булардан ҳосил бўладиган $AB' : B'C = 1$ бўлгани учун Чеви теоремаси ўринлидир.

3-*натижа*. Учбурчакнинг ички бурчакларининг биссектрисалари бир нуқтада кесишади.

Ҳақиқатан ҳам (37-расм), AA', BB', CC' ларни биссектриса деб қарасак, у ҳолда биссектриса хоссасига кўра

$\frac{AB'}{B'C}=\frac{c}{a}$; $\frac{CA'}{A'B}=\frac{b}{c}$, $\frac{BC'}{C'A}=\frac{a}{b}$ эканидан $\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=$ $=\frac{c}{a}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{a}{b}=1$ экани келиб чиқади.

4-*натижа.* Учбурчакнинг баландликлари бир нуқтада кесишади ва бу нуқта учбурчакнинг ортомарказидир.



39- расм.

Ҳақиқатан ҳам (39- расм), ҳосил бўлган тўғри бурчакли учбурчаклардан мос ҳолда $AC'=b\cos A$; $BA'=c\cos B$; $CB'=a\cos C$; $C'B=a\cos B$; $A'C=b\cos C$; $B'A=c\cos A$ ларни топиб, Чеви теоремасига кўра

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1$$

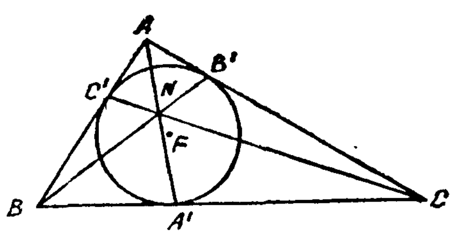
ни ҳосил қиламиз.

5-*натижа.* Учбурчакка ички чизилган айлананинг уриниш нуқталарини учбурчакнинг учлари билан туташтирувчи тўғри чизиқлар ***Жергон нуқтасида*** кесишади.

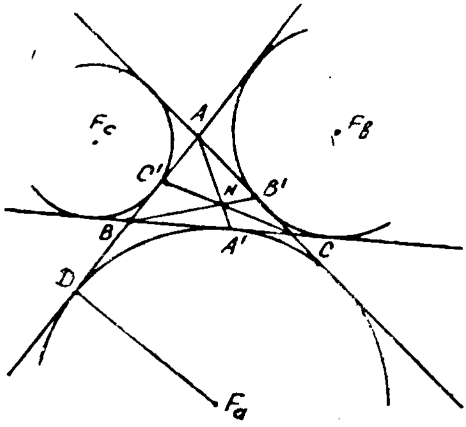
Ҳақиқатан ҳам (40-расм), A', B', C' нуқталар айлананинг учбурчак томонларига уриниш нуқтаси эканидан $BC'=$ $=BA'$; $AC'=AB'$ ва $CB'=CA'$ бўлиб, Чеви теоремасига кўра $\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=1$ бўлади. Шу билан H_2, H_3, H_4, H_5 лар исбот қилинди.

33-теорема. *Агар тўғри чизиқ учбурчакнинг учидан чиқиб, унинг қаршисидаги томонни шу томонга ёпишган бурчакларга пропорционал бўлса, у ҳолда бу тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишади.*

Исботи. Теореманинг шартига кўра (37-расм), AA', BB', CC' тўғри чизиқлар бурчак қаршисидаги томонни $\frac{AB'}{B'C}=$ $=\frac{\angle A}{\angle C}$; $\frac{CA'}{A'B}=\frac{\angle C}{\angle B}$; $\frac{BC'}{C'A}=\frac{\angle B}{\angle A}$ нисбатларда бўлиши берилган. Ҳосил бўлган тенгликларни ҳадлаб кў-



40- расм.



41-расм.

пайтирсак, у ҳолда $\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A}=\frac{\angle A}{\angle C}\cdot\frac{\angle C}{\angle B}\cdot\frac{\angle B}{\angle A}=1$ бўлади.

Шу билан теорема исбот қилинди.

9-таъриф. Учбурчакнинг томонларига ташқи-ички чизилган айланаларнинг уриниш нуқтасини шу томон қаршисидаги уч билан туташтиришдан ҳосил бўлган тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишса, шу нуқта ***Негел нуқтаси*** дейилади.

Учбурчак ABC да унинг ихтиёрий учидан ташқи-ички чизилган айлананинг уриниш нуқтасигача бўлган масофани топамиз, яъни $AD=AB+BD$ экани (41-расм) маълум. Айлана ташқарисидаги нуқтадан ўтказилган уринма хоссасига асосан $BD=BA'$ эканлигидан $AD=AB+BA'=c+BA'$ ёки $AD=AC+CA'=b+CA'$ бўлади, буларни ҳадлаб қўшсак, $2AD=a+b+c=2p$, бундан, $AD=p$ бўлади. $AD=$ $=c+BA'$ эканидан $BA'=p-c$ бўлади. Худди шунга ўхшаш қолганларни ҳам аниқлаш мумкин.

34-теорема. *Агар учбурчак ABC нинг томонларига ташқи-ички чизилган айланаларнинг уриниш нуқтасини учбурчакнинг учлари билан мос ҳолда туташтирсак, ҳосил бўлган тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишади.*

Исботи. Маълумки, T_{31} га асосан $\frac{AB'}{B'C}$; $\frac{CA'}{A'B}$; $\frac{BC'}{C'A}$ нисбатларни топамиз, яъни $BA'=p-c$ экани маълум

41 расм). Худди шунга ўхшаш $CA' = p - b$; $BC' = p - a$; $CB' = p - a$; $C'A = p - b$; $AB' = p - c$ ларни ҳосил қиламиз. Топилган натижаларни $\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A}$ га қўйилса, у ҳолда $\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = \frac{p-c}{p-a} \cdot \cdot \frac{p-b}{p-c} \cdot \frac{p-a}{p-b} = 1$.
Демак, бу тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишар экан. Шу билан теорема исбот қилинди.

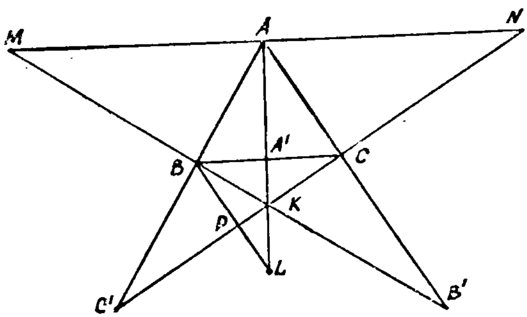
Демак, учбурчак ABC да Чеви тўғри чизиғи Негел нуқтаси орқали ўтса, унинг периметрини тенг иккига бўлар экан.

35- Ван- Обел теоремаси. *Учбурчакнинг ички қисмида кесишадиган Чеви тўғри чизиғининг ҳар бири учун* $\frac{AN}{A'N} = \frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B}$ *муносабати ўринлидир.*

Исботи. Учбурчак ABC нинг A учидан BC га параллел қилиб DE ни (37- расм) ўтказамиз. Натижада $\triangle DNE \backsim \triangle BNC$ дан бевосита $\frac{AN}{NA'} = \frac{DE}{BC} = \frac{DA + AE}{BC} = \frac{DA}{BC} + \frac{AE}{BC}$; $\triangle DAC' \backsim \triangle BC'C$ дан $\frac{DA}{BC} = \frac{AC'}{C'B}$ бўлади. $\triangle AEB' \backsim \backsim \triangle BB'C$ дан $\frac{AE}{BC} = \frac{AB'}{B'C}$ бўлади. Топилган натижаларни $\frac{AN}{NA'}$ га қўйсак, у ҳолда $\frac{AN}{NA'} = \frac{DA}{BC} + \frac{AE}{BC} = \frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C}$ бўлади. Шу билан T_{35} исбот қилинди.

Энди Чеви тўғри чизиқлари учбурчак текислигидан ташқарида кесишадиган бўлган ҳоли (42- расм) ни кўриб ўтамиз.

Учбурчак ABC да AA', CC', BB' тўғри чизиқлар учбур-



42- расм.

чак ташқарисида — K нуқтада кесишсин дейлик, у ҳолда $\triangle MKN \backsim \triangle BKC$ эканидан $\frac{AK}{KA'} = \frac{MN}{BC} = \frac{MA}{BC} + \frac{AN}{BC}$ бўлиб, $\triangle MAB' \backsim \triangle BCB'$ ҳамда $\triangle NAC' \backsim \triangle BCC'$ лардан бевосита $\frac{MA}{BC} = \frac{AB'}{B'C}$; $\frac{AN}{BC} = \frac{AC'}{C'B}$ эканини ёза оламиз. Бундан $\frac{AK}{KA'} = \frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B}$ бўлади. Агар кесмаларнинг йўналишини эътиборга олинса ҳам бу муносабат ўзгармайди.

Энди $\frac{BK}{KB'}$ ни аниқлаймиз. Бунинг учун B учидан $AC \parallel BL$ ни ўтказамиз. Натижада $\triangle KBL \backsim \triangle AKB'$ дан $\frac{BK}{KB'} = \frac{PL}{AC} = \frac{BL - BP}{AC} = \frac{BL}{AC} - \frac{BP}{AC} = \frac{BA'}{A'C} - \frac{BC'}{C'A}$ бўлади. Агар йўналиш тушунчасига кўра $\frac{BC'}{C'A} = -\frac{BC'}{AC'}$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда $\frac{BK}{KB'} = \frac{BA'}{A'C} + \frac{BC'}{AC'}$ келиб чиқади.

Шу билан T_{35} тўла ҳолда исбот қилинди. Бу T_{35} дан қуйидаги натижалар келиб чиқади.

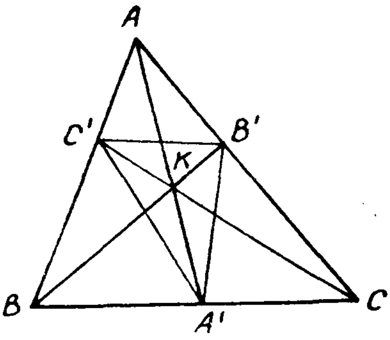
6-*натижа*. Учбурчакнинг медианалари кесишиш нуқтасида учбурчак учидан бошлаб $2:1$ нисбатда бўлинади, чунки $AK:KA' = 2:1 = 2$ экани маълум.

7-*натижа*. Учбурчак ички бурчагининг биссектрисалари кесишиш нуқтасида $\frac{b+c}{a}$, $\frac{b+a}{c}$, $\frac{a+c}{b}$ каби нисбатларда бўлинади. Ҳақиқатан ҳам (37-расм), AA', BB', CC' ларни учбурчакнинг ички биссектрисалари десак, у ҳолда $\frac{AB'}{BC'} = \frac{c}{a}$; $\frac{AC'}{BC'} = \frac{b}{a}$ эканидан $\frac{AK}{KA'} = \frac{b+c}{a}$ экани келиб чиқади. Қолган нисбатларни ҳам шундай келтириб чиқариш мумкин.

8-*натижа*. Агар K нуқта Жергон нуқтаси бўлса, у ҳолда $\frac{AC'}{C'B} = \frac{p-a}{p-b}$; $\frac{AB'}{B'C} = \frac{p-a}{p-c}$ бўлиб, $\frac{AK}{KA'} = \frac{p-a}{p-b} + \frac{p-a}{p-c} = \frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}$; $\frac{BK}{KB'} = \frac{b(p-b)}{(p-a)(p-c)}$; $\frac{CK}{KC'} = \frac{c(p-c)}{(p-a)(p-b)}$ бўлади.

9-*натижа*. Агар K нуқта Негел нуқтаси бўлса, у ҳолда

$\frac{AC'}{C'B} = \frac{p-b}{p-a}; \quad \frac{AB'}{B'C} = \frac{p-c}{p-a}$ эканидан $\frac{AK}{KA'} = \frac{p-b}{p-a} + \frac{p-c}{p-a} = \frac{a}{p-a}$; $\frac{BK}{KB'} = \frac{b}{p-b}$; $\frac{CK}{KC'} = \frac{c}{p-c}$ бўлади.



43- расм.

Масала. Агар Чеви тўғри чизиқлари учбурчак ABC нинг ичида кесишса, у ҳолда учлари A', B', C' нуқталарда ётувчи учбурчакнинг юзи топилсин.

Ечиш. Изланаётган учбурчакнинг юзини $S' = S_{\triangle A'B'C'}$ (43- расм) орқали белгилайлик, у ҳолда $S = S - S_{\triangle AC'B'} - S_{\triangle BC'A'} - S_{\triangle CA'B'} = S\left(1 - \frac{S_{\triangle AC'B'}}{S} - \frac{S_{\triangle BC'A'}}{S} - \frac{S_{\triangle CA'B'}}{S}\right)$ бўлади ва T_{29} га асосан қуйидагиларни ёза оламиз:

$$\frac{S_{\triangle AC'B'}}{S} = \frac{AB' \cdot AC'}{AB \cdot AC}; \quad \frac{S_{\triangle BC'A'}}{S} = \frac{BC' \cdot BA'}{BC \cdot BA};$$

$$\frac{S_{\triangle CA'B'}}{S} = \frac{CA' \cdot CB'}{CA \cdot CB}.$$

$$BA' : CA' = \lambda_a; \; CA' : AB' = \lambda_b; \; AC' : BC' = \lambda_c$$

деб олсак, у ҳолда

$$\frac{AC'}{AB} = \frac{AC'}{AC' + C'B} = \frac{AC'}{AC' - BC'} = \frac{\frac{AC'}{BC'}}{\frac{AC'}{BC'} - 1} = -\frac{\lambda_c}{1 - \lambda_c};$$

$$\frac{AB'}{AC} = \frac{AB'}{AB' + B'C} = \frac{AB'}{AB' - CB'} = \frac{1}{1 - \frac{CB'}{AB'}} = \frac{1}{1 - \lambda_b};$$

$$\frac{BA'}{BC} = -\frac{\lambda_a}{1 - \lambda_a}; \quad \frac{BC'}{BA} = \frac{1}{1 - \lambda_c}; \quad \frac{CB'}{CA} = -\frac{\lambda_b}{1 - \lambda_b};$$

$$\frac{CA'}{CB} = \frac{1}{1 - \lambda_a}$$

бўлади. Бу топилган натижалардан

$$S' = S\left(1 + \frac{\lambda_a}{(1-\lambda_c)(1-\lambda_a)} + \frac{\lambda_b}{(1-\lambda_a)(1-\lambda_b)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda_c}{(1-\lambda_a)(1-\lambda_c)}\right) = \frac{2S}{(1-\lambda_a)(1-\lambda_b)(1-\lambda_c)}$$

ҳосил бўлади.

$$S' = \frac{2S}{(1-\lambda_a)(1-\lambda_b)(1-\lambda_c)}$$

дан қуйидаги хулосага эга бўламиз:

1) Агар Чеви тўғри чизиқлари биссектриса бўлса, у ҳолда $S' = \frac{2\,S\,abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}$ бўлади.

2) Агар Чеви тўғри чизиқлари медиана бўлса, у ҳолда

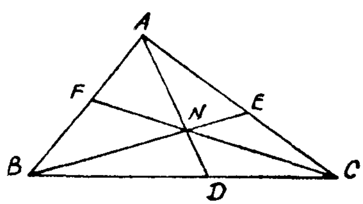
$$S' = \frac{2S}{8} = \frac{S}{4}$$

бўлади.

3) Агар чевианлар баландликлар бўлса, $S' = 2\,S\cos A\cos B\cos C$ бўлади.

4) Агар учбурчакка ички чизилган айлананинг уриниш нуқталаридан чевианлар ўтувчи бўлса, у ҳолда $S' = \frac{pr^2}{2R}$ бўлади.

5) Агар учбурчак ABC да $b^2 + c^2 = 5a^2$ муносабат ўринли бўлса, $m_b \perp m_c$ бўлади.



44- расм.

36- Жергон теоремаси. *Агар AD, BE, CF тўғри чизиқлар учбурчак учларидан чиқиб, учбурчак ичида кесишса, у ҳолда $\frac{ND}{AD} + \frac{NE}{BE} + \frac{NF}{CF} = 1$ ва $\frac{AN}{AD} + \frac{BN}{BE} + \frac{CN}{CF} = 2$ бўлади.*

Исботи. 1. Маълумки, T_{30} га асосан (44- расм) $\frac{S_{\triangle ANC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{NE}{BE}$; $\frac{S_{\triangle BNC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{ND}{AD}$; $\frac{S_{\triangle ANB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{NF}{CF}$. $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ANC} + S_{\triangle BNC} + S_{\triangle ANB}$ эканидан $\frac{ND}{AD} + \frac{NE}{BE} + \frac{NF}{CF} =$

$= 1$ келиб чиқади. Худди шунга ўхшаш $\frac{AN}{AD} = \frac{AD - ND}{AD} =$ $= 1 - \frac{ND}{AD}$; $\frac{BN}{BE} = 1 - \frac{NE}{BE}$; $\frac{CN}{CF} = 1 - \frac{NF}{CF}$ муносабатлардан бевосита

$$\frac{AN}{AD} + \frac{BN}{BE} + \frac{CN}{CF} = 3 - \left(\frac{ND}{AD} + \frac{NE}{BE} + \frac{NF}{CF}\right) = 3 - 1 = 2$$

экани келиб чиқади.

2. Берилган $\frac{AO}{AA_1} + \frac{BO}{BB_1} + \frac{CO}{CC_1} = 2$ (45-расм) муносабатнинг бошқача исботини келтирамиз, яъни $\triangle ABC$ нинг учта учидан чиқиб O нуқтада кесишиб, мос томонларни A_1, B_1, C_1 нуқталарда кесиб ўтиши $\triangle ABC$ нинг юзи мос ҳолда S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 ларга бўлинишини кўрсатади. Натижада T_{30} га асосан

$$\frac{AO}{AA_1} = \frac{S_1 + S_2}{S_1 + S_2 + S_3} \quad (1); \quad \frac{OC}{CC_1} = \frac{S_3 + S_4}{S_3 + S_4 + S_5} \quad (2);$$

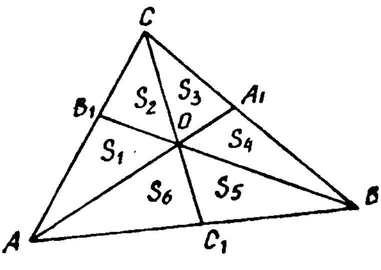
$$\frac{OB}{BB_1} = \frac{S_5 + S_6}{S_1 + S_5 + S_6} \quad (3); \quad \frac{AO}{AA_1} = \frac{S_5 + S_6}{S_4 + S_5 + S_6} \quad (4)$$

ни ёза оламиз. Энди (1) ва (4) ни ҳадлаб қўшсак, $(S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6)\frac{OA}{AA_1} = S_1 + S_2 + S_5 + S_6 = S - (S_3 + S_4)$ бўлади. Демак,

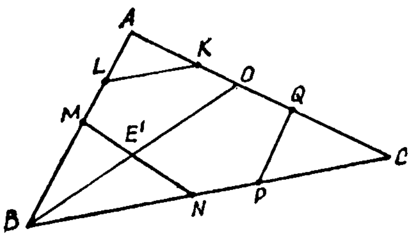
$$\frac{AO}{AA_1} \cdot S = S - (S_3 + S_4) \quad (5); \quad \frac{BO}{BB_1} \cdot S = S - (S_1 + S_2) \quad (6);$$

$$\frac{OC}{CC_1} \cdot S = S - (S_5 + S_6) \quad (7).$$

Натижада (5), (6) ва (7) ларни ҳадлаб қўшсак,



45-расм.



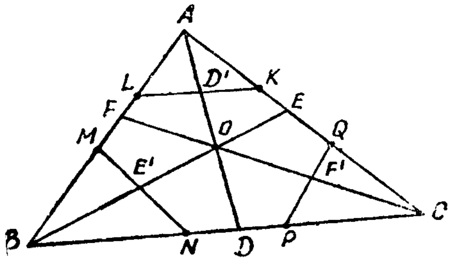
46-расм.

$$\frac{AO}{AA_1}+\frac{BO}{BB_1}+\frac{CO}{CC_1}=\frac{3S-(S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6)}{S}=$$

$$=\frac{3S-S}{S}=2$$

ни ҳосил қиламиз. Демак, $\frac{AO}{AA_1}+\frac{BO}{BB_1}+\frac{CO}{CC_1}=2$ бўлар экан.

Шу билан теорема исбот бўлди.



47- расм.

Агар нуқта учбурчакнинг томонида (46-расм) ётса ҳам $OC:AC+OA:CA=1$ бўлади, яъни теорема ўринли бўлади.

Бу теоремадан қуйидаги натижани аниқлаш мумкин.

10-*натижа*. Агар учбурчак ABC нинг учларидан унинг ичида ётувчи нуқтагача бўлган кесма ўртасидан учбурчакнинг шу учлар қаршисидаги томонига параллел тўғри чизиқлар ўтказилса, ҳосил бўлган учбурчаклар мос элементларининг йиғиндиси учбурчак мос элементига тенг бўлади.

Исботи. H_{10} нинг шартига кўра O нуқтани учбурчак ичида (47-расм) ёки томонида (46-расм) оламиз ва уни учбурчакнинг учлари билан туташтирамиз. Ҳосил бўлган AO, CO, BO кесмаларнинг ўрталарини мос ҳолда (47-расм) D', E', F' орқали белгилаб, бу нуқталар орқали BC, AC, AB томонларга параллел ўтказамиз. Натижада ҳосил бўлган LAK ва BAC; MBN ва ABC; PCQ ва BCA учбурчакларнинг чизиқли элементларини мос ҳолда $K_A=\frac{AD'}{AD}=\frac{1}{2}\frac{AO}{AD}$; $K_B=\frac{1}{2}\frac{BO}{BE}$; $K_C=\frac{1}{2}\frac{CO}{CF}$ деб олсак, у ҳолда

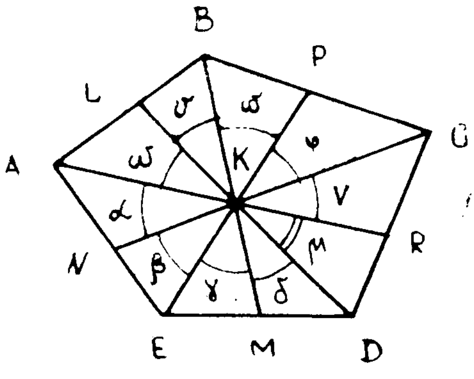
$$K_A+K_B+K_C=\frac{1}{2}\left(\frac{AO}{AD}+\frac{BO}{BE}+\frac{CO}{CF}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2=1$$

экани келиб чиқади. Демак, $K_A+K_B+K_C=1$ бўлади. Энди учбурчак ABC нинг чизиқли элементини d десак, у ҳолда $d=dK_A+dK_B+dK_C$ бўлиб, $dK_A=d_A$; $dK_B=$

$= d_B$; $dK_C = d_C$ десак, бундан $d_A + d_B + d_C = d$ келиб чиқади. Масалан, $d = r$ десак, у ҳолда шу учбурчакдан ички кесилган учбурчакларга ички чизилган айланалар радиусларининг йиғиндиси $r_A + r_B + r_C = r$ бўлади. Агар N нуқта учбурчак ташқарисида, масалан BC га нисбатан A учга қарама-қарши ярим текисликда ётган бўлса, у ҳолда $\frac{NF}{CF} + \frac{NE}{BE} - \frac{ND}{AD} = 1$ бўлишини кўриш мумкин.

37-Понсоле теоремаси. *Тоқ сондаги томонга эга бўлган текис кўпбурчакнинг учларини унинг ичида олинган қандайдир нуқта билан туташтирилиб ва унинг давоми ушбу бурчак қаршисидаги томондан кесмалар ажратса, у ҳолда ўзаро чекка умумийликка эга бўлмаган кесмалар кўпайтмаси ўзаро тенг бўлади,* яъни:

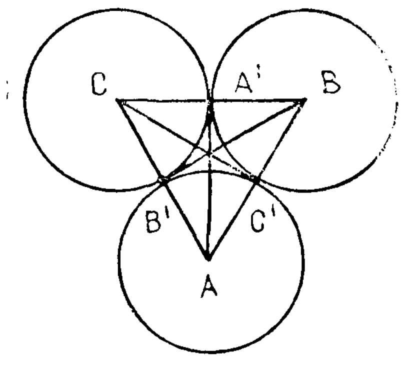
$$\frac{AN}{NE} \cdot \frac{EM}{MD} \cdot \frac{DR}{RC} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BL}{LA} = 1.$$



48-расм.

Исботи. Теорема шартида берилганларга кўра (48-расм) текис кўпбурчакни қараймиз ва унинг текислигида K нуқта оламиз, шу нуқтадан ўтувчи, кўпбурчакнинг учларидан чиқувчи тўғри чизиқлар қаршисидаги томондан кесмалар ажратади. Натижада ҳосил бўлган учбурчакларнинг K нуқтадаги учи ташкил этган бурчакларни α, β, γ, . . . , ω орқали белгилаймиз. Сўнгра $\triangle AKN$ ва $\triangle NKE$ учбурчак юзларининг нисбати T_{30} ва T_{36} га асосан $\frac{AN}{NE} = \frac{AK\sin\alpha}{KE\sin\beta}$; $\frac{EM}{MD} = \frac{KE\sin\gamma}{KD\sin\delta}$; $\frac{DR}{RC} = \frac{KD\sin\mu}{KC\sin\nu}$; $\frac{CP}{PB} = \frac{KC\sin\varphi}{KB\sin\omega}$; $\frac{BL}{LA} = \frac{KB\sin\upsilon}{KA\sin\omega}$ бўлиб, $\alpha = \nu$; $\beta = \varphi$; $\gamma = \omega$; $\delta = \nu$, $\mu = \omega$ эканини эътиборга олиб топилган нисбатларни ҳадлаб кўпайтирсак, у ҳолда $\frac{AN}{NE} \cdot \frac{EM}{MD} \cdot \frac{DR}{RC} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BL}{LA} = 1$ бўлади. Шу билан теорема исбот қилинди.

Масала. Марказлари A, B, C нуқталарда бўлган айланалар жуфт-жуфти билан ўзаро ташқи уринади (49-расм). Айлана марказларини ташқи уриниш нуқталари билан туташтирувчи тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишишини исботланг.



49-расм.

Исботи. Масала шартига кўра ABC учбурчак ҳосил қилиб, унда $AB' = AC'$; $BC' = BA'$; $CA' = CB'$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда T_{31} га асосан

$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{AB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$ экани келиб чиқади.

Шу билан исбот бўлди.

Қуйидаги масалаларни ечинг:

1. Учбурчак ABC да $AB = c$; $AC = b$; $BC = a$ бўлиб, BC томонда E нуқта $BE = m$ ва $EC = n$ бўладиган қилиб олинган бўлса, AE нинг узунлигини топинг.

2. Учбурчак ABC нинг текислигида N нуқта олиниб, унинг томонларига t_a, t_b, t_c перпендикуляр туширилган бўлса, у ҳолда $t_a : h_a + t_b : h_b + t_c : h_c = 1$ эканини исботланг.

3. Учбурчак ичида олинган нуқтадан учбурчакнинг томонларига параллел учта тўғри чизиқ ўтказилган. Бу тўғри чизиқлар учбурчакни олти бўлакка бўлади, булардан учтаси учбурчак бўлиб, уларнинг юзлари S_1; S_2; S_3 га тенг. Берилган учбурчакнинг юзини топинг.

4. Учбурчак ABC да AA_1, BB_1, CC_1 биссектрисалар ўтказилса, унда $AB_1 = \frac{bc}{a+c}$; $B_1C = \frac{ab}{a+c}$; $CA_1 = \frac{ab}{b+c}$;

$$A_1B = \frac{ac}{b+c};\ AC_1 = \frac{bc}{a+b};\ BC_1 = \frac{a\mathit{в}}{a+b}$$

бўлишини ва улар бир нуқтада кесишишини исботланг.

5. Учбурчакнинг ичидаги исталган нуқтадан унинг томонларига мос равишда параллел учта тўғри чизиқ ўтказилган. Бу тўғри чизиқларнинг учбурчак томонлари орасида қолган a', b', c' кесмалари $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} = 2$ шартни бажаришини кўрсатинг.

6. Агар N нуқта учбурчак текислигига тегишли бўлиб, AN, BN, CN лар учбурчакнинг томонларини A', B', C' нуқталарда кесса, $\frac{NA'}{AA'} + \frac{NB'}{BB'} + \frac{NC'}{CC'} = 1$ бўлишини исботланг.

7. Агар ABC ва A_1B_1C учбурчаклар учун $\angle A + \angle A_1 = 90°$ бўлса, $(S:bc)^2 + (S_1:b_1c_1)^2 = \frac{1}{4}$ эканини исботланг.

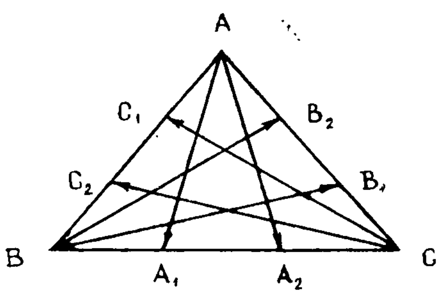
8. Агар A_1, B_1, C_1 нуқталар ABC учбурчак баландликларининг асоси бўлса, у ҳолда $AB \cdot AC_1 + BC \cdot BA_1 + CA \cdot CA_1 = AB \cdot BC_1 + BC \cdot CA_1 + CA \cdot AB_1 = (a^2 + b^2 + c^2):2$ бўлишини исботланг.

2-§. Учбурчакнинг недианаси

10-таъриф. Агар тўғри чизиқ учбурчак учидан чиқиб, шу бурчак қаршисидаги томондан $\frac{1}{n}$ бўлак ажратса, у ҳолда бу тўғри чизиқ (50-расм) учбурчакнинг ***недианаси*** дейилади.

Маълумки, $n \neq 1$ бўлиб, $n = 2$ бўлганда томонни тенг икки бўлакка бўлади — бу медианадир, $n = 3$ бўлса, томонни тенг уч бўлакка бўлади — бу терцианадир ва ҳоказо.

Шаклдан кўриниб турибдики, $n = 3$ бўлганда ҳар бир бурчакдан иккитадан недиана чиқиб, шу бурчак қаршисидаги томонни тенг уч бўлакка бўлади. Натижада $\overline{AA_1}$ $\overrightarrow{AA_2}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{BB_2}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{CC_2}$



50-расм.

векторларни қараш мумкин. Юқорида кўриб ўтилганига асосан учбурчак ABC учун $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$ бўлади. Шунинг учун ҳам ҳосил қилинган медианалар учбурчак ҳосил қилиш ёки қилмаслигини кўриб ўтамиз. Бунинг учун AA_1, BB_1, CC_1 ларни биринчи гуруҳ, AA_2, BB_2, CC_2 ларни иккинчи гуруҳ недианалари деб ажратсак, у ҳолда қуйидаги теоремани кўриб ўтамиз.

38-теорема. *Ҳар бир гуруҳ медианаларидан учбурчак ясаш мумкин.*

Исботи. Бунинг учун AA_1, BB_1, CC_1 гуруҳ недианаларини қарасак, у ҳолда

$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\frac{\overrightarrow{BC}}{n}, \tag{1}$$

$$\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BC}+\frac{\overrightarrow{CA}}{n}, \tag{2}$$

$$\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{CA}+\frac{\overrightarrow{AB}}{n}. \tag{3}$$

Топилган (1), (2) ва (3) ларни ҳадлаб қўшсак, у ҳолда

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=0$$

бўлиб, $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=0$ экани келиб чиқади. Демак, биринчи гуруҳ недианаларидан учбурчак ясаш мумкин эканлиги келиб чиқади. Бундан қолган гуруҳлардан ҳам учбурчак ҳосил қилиш мумкин эканлиги тасдиқланади. Шу билан T_{38} исботланди.

39-теорема. *Учбурчак ABC да биринчи гуруҳ недианалари квадратларининг йиғиндиси иккинчи гуруҳ недианалари квадратларининг йиғиндисига тенгдир.*

Исботи. Бунинг учун биринчи гуруҳ недианаларини T_{38} га асосан ёзсак, у ҳолда $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\frac{\overrightarrow{BC}}{n}$, бундан $\overrightarrow{AA_1^2}=\overrightarrow{AB^2}+\frac{\overrightarrow{BC^2}}{n^2}+\frac{2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{n}$ ёки $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BC}+\frac{\overrightarrow{CA}}{n}$, бундан $\overrightarrow{BB_1^2}=\overrightarrow{BC^2}+\frac{\overrightarrow{CA^2}}{n^2}+\frac{2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}}{n}$, ёки $\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{CA}+\frac{\overrightarrow{AB}}{n}$, бундан $\overrightarrow{CC_1^2}=\overrightarrow{CA^2}+\frac{\overrightarrow{AB^2}}{n^2}+\frac{2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}}{n}$ бўлиб, $\overrightarrow{AA_2}=\overrightarrow{AC}-\frac{\overrightarrow{BC}}{n}$, бундан $\overrightarrow{AA_2^2} = \overrightarrow{AC^2} + \frac{\overrightarrow{BC^2}}{n^2} - \frac{2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{n}$ эканидан $\overrightarrow{AA_1^2} - \overrightarrow{AA_2^2} =$ $= \overrightarrow{AB^2} - \overrightarrow{AC^2} + \frac{2\overrightarrow{BC}}{n}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ бўлади. Агар ҳосил қилинган $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ ифодани ўрнига қўйсак, у ҳолда

$$\overrightarrow{AA_1^2} - \overrightarrow{AA_2^2} = \overrightarrow{AB^2} - \overrightarrow{AC^2} + \frac{2}{n}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) =$$

$$= \overrightarrow{AB^2} - \overrightarrow{AC^2} + \frac{2}{n}(\overrightarrow{AC^2} - \overrightarrow{AB^2}) = \frac{n-2}{n}(\overrightarrow{AB^2} - \overrightarrow{AC^2}) =$$

$$= \frac{n-2}{n}(c^2 - b^2)$$

ҳосил бўлади. Агар $AA_1 = d_a$; $AA_2 = d'_a$; $BB_1 = d_b$; $BB_2 = d'_b$; $CC_1 = d_c$; $CC_2 = d'_c$ десак, у ҳолда

$$d_a^2 - d_a'^2 + d_b^2 - d_b'^2 + d_c^2 - d_c'^2 = \frac{n-2}{n}(c^2 - b^2 + a^2 - c^2 + b^2 - a^2) = 0$$

бўлиб, $d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = d_a'^2 + d_b'^2 + d_c'^2$ экани келиб чиқади. Шу билан T_{39} исбот қилинди.

40-теорема. *Учбурчак ABC да ҳар бир гуруҳ недианалар квадратларининг йиғиндиси* $\frac{n^2 - n + 1}{n^2}(a^2 + b^2 + c^2)$ *га тенгдир.*

Исботи. T_{39} га асосан

$$d_a^2 = \overrightarrow{AB^2} + \frac{\overrightarrow{BC^2}}{n^2} + \frac{2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{n} = \overrightarrow{AB^2} + \frac{\overrightarrow{BC^2}}{n^2} + \frac{2}{n}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos B = c^2 + \frac{a^2}{n^2} + \frac{2ac\cos B}{n};$$

$$d_b^2 = BC^2 + \frac{CA^2}{n^2} + \frac{2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}}{n} = a^2 + \frac{b^2}{n^2} + \frac{2ab\cos C}{n};$$

$$d_c^2 = CA^2 + \frac{AB^2}{n^2} + \frac{2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}}{n} = b^2 + \frac{c^2}{n^2} + \frac{2bc\cos A}{n}.$$

Энди топилган недианаларни ҳадма-ҳад қўшсак, у ҳолда

$$d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + \frac{1}{n^2}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{n}(a^2 +$$

$+ b^2 + c^2) = \frac{n^2 - n + 1}{n^2}(a^2 + b^2 + c^2)$ ҳосил бўлади, чунки $2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2$. Демак, шу билан теорема исбот қилинди.

41-теорема. *Учбурчак ABC нинг ҳар бир гуруҳ медианаларидан тузилган учбурчак юзининг ABC учбурчак юзига нисбати* $\frac{n^2 - n + 1}{n^2}$ *га тенгдир.*

Исботи. T_{39} га асосан $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{BC}}{n}$; $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + \frac{\overrightarrow{CA}}{n}$ эканидан $\overrightarrow{AA_1} \times \overrightarrow{BB_1} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{BC}}{n}\right)\left(\overrightarrow{BC} + \frac{\overrightarrow{CA}}{n}\right) = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} + \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CA}}{n} + \frac{\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CA}}{n^2} = \frac{n^2 - n + 1}{n^2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$;

$\overrightarrow{AA_1} \times \overrightarrow{BB_1} = 2S_n$.

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = 2S$ вектор кўпайтма юзни бергани учун $2S_n = \frac{n^2 - n + 1}{n^2} 2S \Rightarrow \frac{S_n}{S} = \frac{n^2 - n + 1}{n^2}$ экани келиб чиқади, бу ерда S_n медианалар ташкил қилган учбурчак юзи $S = S_{\triangle ABC}$ дир.

Шу билан T_{41} исбот қилинди.

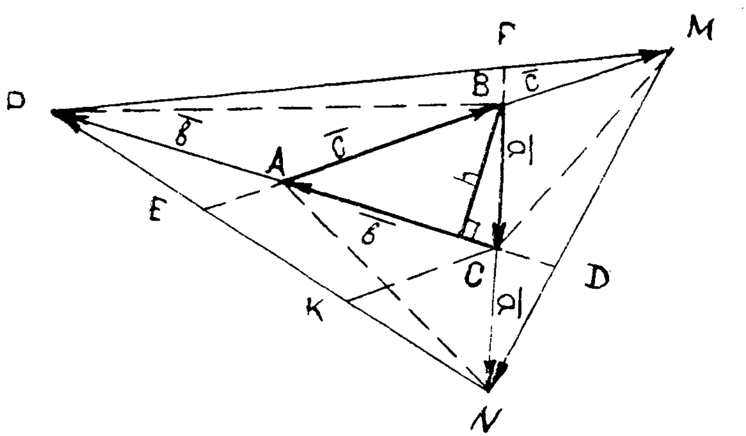
Демак, $\frac{S_n}{S} = \frac{d_a^2 + d_b^2 + d_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{n^2 - n + 1}{n^2}$ га нисбатан қуйидаги хулосаларни келтириш мумкин:

а) $n = 2$ бўлганда $\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}$ бўлади;

б) $n = 3$ бўлганда $\frac{t_a^2 + t_b^2 + t_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{7}{9}$ бўлади.

Масала. Учбурчак ABC нинг AB, BC, CA томонлари давомида мос ҳолда M, N, P нуқталар $BM = AB$; $CN = BC$; $AP = CA$ шарти бўйича танланган бўлса, MNP учбурчак томонлари квадратларининг йиғиндиси учбурчак ABC томонлари квадратлари йиғиндисидан етти марта катта бўлишини исботланг.

Исботи. Масала шартида кўрсатилганларга таянган ҳолда ҳосил бўлган M, N, P нуқталарни C, A, B нуқталар билан туташтирамиз, натижада MNP учбурчак еттита



51-расм.

(51-расм) тенгдош ABC, PAB, PBM, MBC, NCM, NCA, NAP учбурчакларга ажралади.

51-расмда кўрсатилган векторларни қараймиз, яъни $\bar a+\bar b+\bar c=0$ эканидан $(\bar a+\bar b+\bar c)^2=a^2+b^2+c^2+2\bar a\bar b+2\bar a\bar c+2\bar b\bar c=0\Rightarrow a^2+b^2+c^2=-2(\bar a\bar b+\bar a\bar c+\bar b\bar c)$ (1) ҳосил бўлади. Энди MNP учбурчакдан $\bar m=2\bar b-\bar a$, $\bar n=2\bar c-\bar b$, $\bar p=2\bar a-\bar c$ эканини билган ҳолда

$$m^2+n^2+p^2=(2\bar b-\bar a)^2+(2\bar c-\bar b)^2+(2\bar a-\bar c)^2=5(a^2+b^2+c^2)-4(\bar a\bar b+\bar a\bar c+\bar b\bar c)$$

ҳосил бўлади. Энди (1) га асосан $m^2+n^2+p^2=5(a^2+b^2+c^2)+2(a^2+b^2+c^2)=7(a^2+b^2+c^2)$ бўлади, бундан $(m^2+n^2+p^2):(a^2+b^2+c^2)=7$ экани келиб чиқади. Шу билан масала ҳал бўлди.

42-теорема. *Агар икки учбурчакнинг томонлари квадратларининг йиғиндилари нисбати улар юзларининг нисбатига пропорционал бўлса, у ҳолда улар томонларининг биквадратлари йиғиндиси нисбати уларнинг юзлари квадратлари нисбатига пропорционал бўлади.*

Исботи. T_{42} нинг шартига кўра $\frac{a^2+b^2+c^2}{a_1^2+b_1^2+c_1^2}=\frac{S}{S_1}\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{a^4+b^4+c^4}{a_1^4+b_1^4+c_1^4}=\dfrac{S^2}{S_1^2}$ бўлишини кўрсатамиз. Бунинг учун Герон формуласига кўра

$$S=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}} \text{ дан}$$

$$16S^2=[(b+c)^2-a^2][a^2-(c-b)^2]=2b^2c^2+$$
$$+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4. \qquad (1)$$

$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a_1^2+b_1^2+c_1^2}=\dfrac{S}{S_1}$ нинг иккала томонини квадратга ошириб, (1) ни ва $\dfrac{x}{y}=\dfrac{a}{b}\Rightarrow\dfrac{x-a}{y-b}=\dfrac{a}{b}$ ни татбиқ қилиб, $\dfrac{2a^4+2b^4+2c^4}{2a_1^4+2b_1^4+2c_1^4}=\dfrac{S^2}{S_1^2}$ ни ҳосил қиламиз, бундан $(a^4+b^4+c^4):(a_1^4+b_1^4+c_1^4)=S^2:S_1^2$ бўлади. Шу билан T_{42} исбот бўлди. Бундан қуйидаги натижаларни олиш мумкин:

11-*натижа.* $\triangle ABC$ учун: $\dfrac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow$

$\Rightarrow\dfrac{m_a^4+m_b^4+m_c^4}{a^4+b^4+c^4}=\dfrac{9}{16}$ бўлади.

12-*натижа.* $\triangle ABC$ да $\dfrac{t_a^2+t_b^2+t_c^2}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{7}{9}\Rightarrow\dfrac{t_a^4+t_b^4+t_c^4}{a^4+b^4+c^4}=$
$=\dfrac{49}{81}.$

13-*натижа.* $\triangle ABC$ да $\dfrac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{t_a^2+t_b^2+t_c^2}=\dfrac{27}{28}\Rightarrow$

$\Rightarrow\dfrac{m_a^4+m_b^4+m_c^4}{t_a^4+t_b^4+t_c^4}=\dfrac{729}{784}.$

14-*натижа.* $\triangle ABC$ да α, β, γ бурчаклар бўлиб, учбурчак MNP унинг недианаларидан ташкил топган бўлса, у ҳолда $\operatorname{ctg} M+\operatorname{ctg} N+\operatorname{ctg} P=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma$ бўлади.

Исботи. Ҳақиқатан ҳам

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\sin\alpha}=\frac{b^2+c^2-a^2}{4S};$$

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2\,ca\sin\beta} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4\,S};$$
$$\operatorname{ctg}\gamma = \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab\sin\gamma} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4\,S}$$
бўлиб, $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\,S}$ бўлади. Худди шунга ўхшатиб
$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}M + \operatorname{ctg}N + \operatorname{ctg}P$$
эканини келтириб чиқарамиз. Агар учбурчак бурчаклари учун
$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma = 1$$
эканини эътиборга олсак, у ҳолда бевосита $\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\gamma = \operatorname{ctg}^2 M + \operatorname{ctg}^2 N + \operatorname{ctg}^2 P$ экани ҳосил бўлади.

Қуйидаги масалаларни ечинг:

1. Тенг ёнли ABC учбурчакда $AB = BC$ бўлиб, AB ва BC томонларда $BN = BP = \frac{1}{3}AB$ кесмалар қўйилган. AP ва CN кесмалар D нуқтада кесишади. $BNDP$ тўртбурчакнинг юзини учбурчакнинг юзи орқали топинг.

2. ABC учбурчакнинг AB, BC ва AC томонларида мос равишда C_1, A_1, B_1 нуқталар шундай олинганки,
$$AC_1 = \frac{1}{5}AB,\ BA_1 = \frac{1}{5}BC,\ CB_1 = \frac{1}{5}AC.$$
A_1, B_1, C_1 нуқталар кесмалар билан туташтирилган.

а) агар $S = S_{\triangle ABC}$ бўлса, $S_{\triangle A_1B_1C_1}$ ни топинг.

б) AA_1, BB_1 ва CC_1 тўғри чизиқларнинг кесишишидан ҳосил бўлган учбурчакнинг юзини топинг.

3. ABC учбурчакнинг томонлари бир хил йўналишда A_1, B_1, C_1 нуқталар қадар шундай давом эттирилганки, $AA_1 = 3\,AB$, $BB_1 = 3\,BC$, $CC_1 = 3\,CA$ бўлса, у ҳолда $S_{\triangle A_1B_1C_1} : S_{\triangle ABC}$ ни топинг.

4. ABC учбурчакда $\angle B - \angle C = 90^\circ$ бўлса, у ҳолда $\frac{2}{a^2} = \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(b-c)^2}$ бўлишини исботланг.

III боб. УЧБУРЧАКНИНГ ТРАНСВЕРСАЛИ ВА УЧБУРЧАКНИНГ МУҲИМ НУҚТАЛАРИ ОРАСИДАГИ МАСОФА

1-§. Учбурчакнинг ва кўпбурчакнинг трансверсали

Геометрияда шакллар устида айрим муносабатларни аниқлашда ёки ўлчаш ишларини олиб боришда шу шаклни кесувчи (трансверсал) билан кесиб, сўнгра қўйилган мақсад амалга оширилиши мумкин.

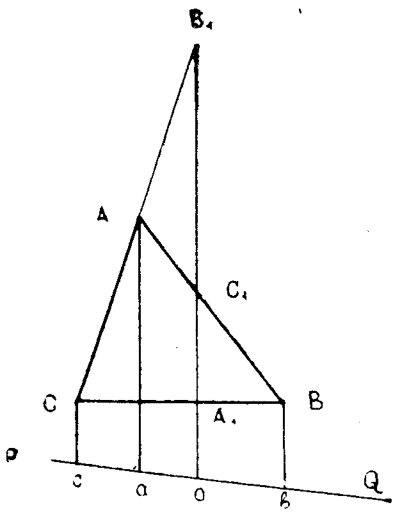
11-таъриф. Берилган F шаклни кесиб ўтувчи тўғри чизиққа шу шаклнинг ***кесувчиси (трансверсали)*** дейилади.

Агар шакл кўпбурчакдан иборат бўлса, кесувчи на фақат шаклни, балки унинг томонлари давомини кесиб ўтиши мумкиндир.

43-Манелай теоремаси ($T_м$). *Агар тўғри чизиқ учбурчак ABC нинг AB, BC, CA томонларини ёки унинг давомини мос ҳолда C_1, B_1, A_1 нуқталарда кесиб ўтса, у ҳолда*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = -1 \qquad (1)$$

бўлади.

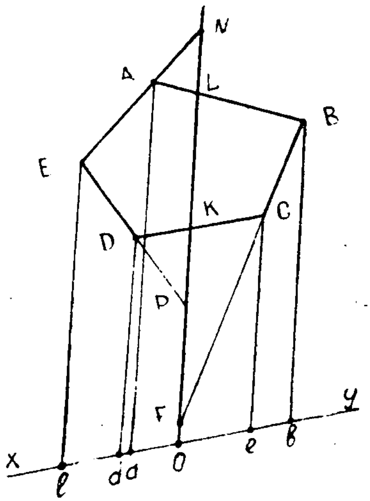


52-расм.

Исботи. Берилган учбурчак ABC нинг томонини ёки уни давомини C_1A_1 кесувчи кесиб ўтган бўлсин, у ҳолда учбурчакнинг ташқарисида кесувчи билан умумий нуқтага эга бўлган ихтиёрий PQ тўғри чизиқни ўтказамиз (52-расм). Сўнгра учбурчакнинг учларидан C_1A_1 га параллел тўғри чизиқлар ўтказсак, улар PQ тўғри чизиқни c, a, b нуқталарда кесиб ўтади. Натижада Фалес теоремасига кўра ҳамда $ABba$ ва $BCcb$; $CBoc$ трапециялардан бевосита $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{aO}{ob}$ (2); $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{bo}{oc}$ (3); $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{co}{ao}$ (4) ларни ҳосил қиламиз. Натижада (2), (3) ва (4) ларни ҳадлаб кўпайтириб, йўналишни эътиборга олсак, у ҳолда (1) ҳосил бўлади. Буни юқорида келтирилганларга таяниб, T_{43} ни қисқалик учун учта нуқтанинг оддий нисбатига таянган ҳолда $(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = 1$ кўринишида ёзиш мумкин.

44- Манелайнинг тескари теоремаси. *Агар C_1, A_1, B_1 нуқталар учбурчакнинг томонида ёки унинг давомида ётиб, $(ABC_1)\times\times(BCA_1)\cdot(CAB_1)=1$ бўлса, у ҳолда бу нуқталар бир тўғри чизиқда ётади.*

Исботи. Фараз қилайлик, A_1C_1 тўғри чизиқ учбурчак ABC нинг CA томонини B_1 нуқтада эмас D нуқтада кесиб ўтади дейлик (52- расм), у ҳолда T_{43} га асосан $(ABC_1)\cdot(BCA_1)\times\times(CAD)=1$ бўлади. Демак, бундан $(CAD):(CAB_1)=1$ бўлиб, $D=B_1$ бўлади. Яъни D билан B_1 устма-уст тушади. Шу билан T_{44} исбот бўлди.



53- расм.

45- Карно теоремаси. *Агар текис кўпбурчакнинг томонларини ёки унинг давомини тўғри чизиқ билан кесилса, у ҳолда умумий учга эга бўлмаган кесмалар кўпайтмалари ўзаро тенг бўлади, яъни:*

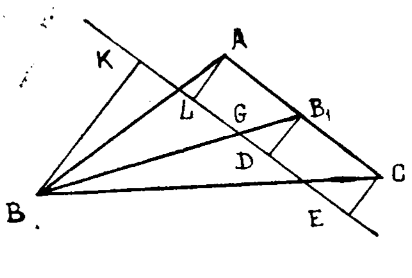
$$\frac{BF}{FC}\cdot\frac{KC}{DK}\cdot\frac{DP}{EP}\cdot\frac{EN}{AN}\cdot\frac{AL}{LB}=1.$$

Исботи. Юқорида кўриб ўтилган T_{43} га кўра ва 53-расмдан

$\frac{BF}{FC}=\frac{bo}{co}$ (2); $\frac{KC}{DK}=\frac{co}{do}$ (3); $\frac{DP}{EP}=\frac{do}{lo}$ (4); $\frac{EN}{AN}=\frac{co}{ao}$ (5); $\frac{AL}{LB}=$ $=\frac{ao}{bo}$ (6) ларни ҳосил қилиб, сўнгра (2), (3), (4), (5) ва (6) ларни ҳадлаб кўпайтирсак, (1)ни ҳосил қиламиз. Шу билан T_{45} исботланди.

46- теорема. *Агар кесувчи тўғри чизиқ учбурчак ABC нинг оғирлик марказидан ўтса, у ҳолда ундан бир томонда ётувчи учларгача бўлган масофалар йиғиндиси учинчи учгача бўлган масофага тенг бўлади.*

Исботи. G нуқта учбурчак ABC нинг оғирлик маркази; K, L, D, E нуқталар G дан ўтувчи трансверсалдаги учбурчак учларидан туширилган перпендикуляр асоси бўлсин (54-

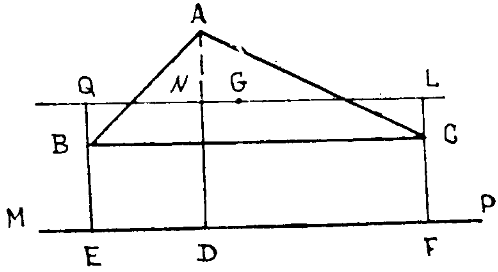


54- расм.

расм), у ҳолда ∇BKG ва ΔGB_1D ларнинг ўхшашлигидан $\frac{BK}{B_1D} = \frac{BG}{GB_1} = 2$ ва $ALEC$ трапециядан $2B_1D = AL + EC$ ҳамда $BK = 2B_1D$ эканидан $BK = 2B_1D = AL + EC$ бўлади. Энди B ҳамда A ва C нуқталар KE кесувчидан турли томонда ётганини эътиборга олсак, $BK = -AL - CE$ бўлиб, $AL + BK + LE = 0$ бўлади. Демак, $BK = LA + EC$ бўлиб, T_{46} исбот бўлди.

15-*натижа*. Учбурчак ABC нинг учларидан ихтиёрий тўғри чизиққача бўлган масофалар йиғиндисининг абсолют қиймати унинг оғирлик марказидан шу тўғри чизиққача бўлган масофанинг уч баробарига тенгдир.

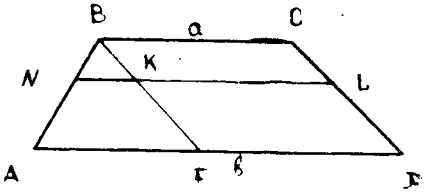
Исботи. Учбурчак ABC нинг оғирлик марказидан (55-расм) QL ни ўтказамиз, сўнгра унга параллел қилиб MP ни учбурчак ташқарисидан ўтказамиз. ABC нинг учларидан



55- расм.

MP га перпендикулярлар ўтказиб, $AD = d_A$, $BE = d_B$, $CF = d_C$ деб белгиласак, у ҳолда $LF = l$ бўлади. Агар учбурчак ABC нинг учларидан QL гача бўлган масофаларни мос ҳолда $AN = d'_A$, $BQ = d'_B$, $CL = d'_C$ деб, кесмаларнинг йўналишини эътиборга олсак, у ҳолда $AD = AN + ND$, $BE = BQ + QE$, $CF = CL + LF$ эканидан $AD + BE + CF = AN + ND + BQ + QE + CL + LF$ бўлиб, бундан $d_A + d_B + d_C = d'_A + l + d'_B + l + d'_C + l$ бўлади. Агар $d'_A =$

$= d'_B + d'_C$ экани эътиборга олинса, $d'_A + d'_B + d'_C = 0$ бўлиб, $d_A + d_B + d_C = 3l$ бўлади.



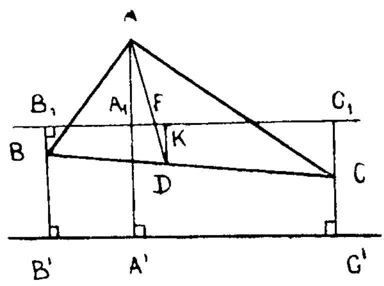
56- расм.

16- *натижа*. Агар трапециянинг ён томонида ётувчи N нуқта, a асосидан ҳисоблаганда, уни $m:n$ нисбатда бўлса, у ҳолда шу нуқтадан асосига параллел бўлиб ўтувчи тўғри чизиқнинг ён томонлар орасидаги қисми $(na + mb):(m + n)$ га тенг бўлади.

Исботи. $ABCD$ трапецияда $AD = b$, $BC = a$ бўлиб, $BN:NA = m:n$ экани маълум. Биз $BF \parallel CD$ ни, ҳамда $ML \parallel AD$ ни ўтказамиз. Натижада (56-расм) $\triangle ABF \backsim \triangle BNK$ ҳосил бўлади. $NK = \frac{m}{m+n} AF = \frac{m}{m+n}(b-a) = \frac{mb-ma}{m+n}$ бўлиб, $NL = NK + LK = a + \frac{mb-ma}{m+n} = \frac{an+mb}{m+n}$ бўлади. Демак, $NL = (an + mb):(m + n)$ бўлар экан.

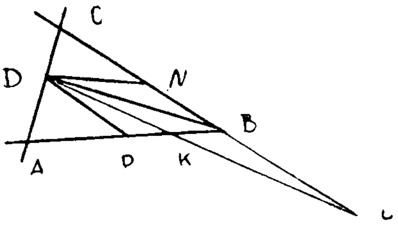
1- масала. Агар учбурчакка ички чизилган айлана марказидан трансверсал ўтиб ва унга учбурчак учларидан перпендикуляр d_A, d_B, d_C туширилиб, йўналиш эътиборга олинса, у ҳолда $ad_A + bd_B + cd_C = 0$ бўлишини исботланг.

Исботи. Маълумки, H_{15} га асосан (57-расм) $AA_1 = d_A$, $BB_1 = d_B$, $CC_1 = d_C$. Ван-Обел теоремасига асосан $\triangle AA_1F \backsim \triangle FDK$ дан $AA_1 : KD = (b + c):a \Leftrightarrow \Rightarrow aAA_1 = (b + c)KD$. H_{16} га асосан $KD = \frac{bBB_1 + cCC_1}{b+c}$ бўлиб, $aAA_1 = bBB_1 + cCC_1$ бўлади. Агар йўналишни эътиборга олсак, у ҳолда $aAA_1 = -bBB_1 - cCC_1$ бўлиб, $ad_A + bd_B + cd_C = 0$ бўлади.



57- расм.

2- масала. Бурчак биссектрисасида олинган нуқтадан ўтувчи ва бурчак томонини ёки унинг давомини кесиб ўтувчининг



58- расм.

ажратган кесмаларининг тескари қийматининг алгебраик йиғиндиси шу нуқта учун ўзгармас эканини кўрсатинг.

Ечиш. Бурчак ABC нинг (58- расм) томонларини A ва C нуқтада кесиб, биссектрисасининг D нуқтасидан ўтувчи чизиқни қараймиз. D нуқтадан AB ва BC томонларга DN ва DP параллел чизикларни ўтказсак, у ҳолда $PB = BN = = DN = DP = \frac{BD}{2\cos\frac{B}{2}}$ бўлади.

$\triangle APD$ ва $\triangle ABC$ ларнинг ўхшашлигидан бевосита

$$\frac{AP}{AB} = \frac{DP}{BC} \Rightarrow \frac{AB-PB}{AB} = \frac{DP}{BC} \Rightarrow 1 - \frac{PB}{AB} = \frac{DP}{BC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{BD}{2AB\cos\frac{B}{2}} = \frac{BD}{2BC\cos\frac{B}{2}} \Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} = \frac{2\cos\frac{B}{2}}{BD}$$

ҳосил бўлади. Энди D нуқтадан ўтувчи бурчак томонларини K ва L нуқталарда кесиб ўтувчи трансверсални қарасак, у ҳолда

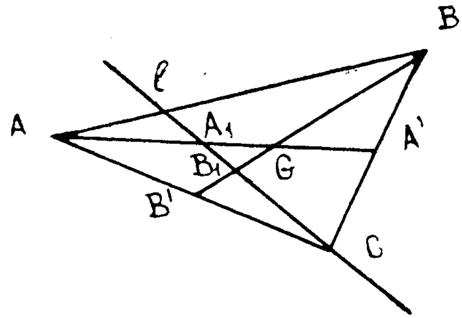
$$\frac{DN}{KB} = \frac{NL}{BL} \Rightarrow \frac{BD}{2KB\cos\frac{B}{2}} = 1 + \frac{NB}{BL} = 1 + \frac{BD}{2BL\cos\frac{B}{2}}$$ бўлиб,

$$\frac{1}{KB} - \frac{1}{BL} = \left(\frac{BD}{2\cos\frac{B}{2}}\right)^{-1}$$ дан $$\frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} = \frac{1}{KB} - \frac{1}{BL} = \frac{2\cos\frac{B}{2}}{BD}$$

экани келиб чиқади. Шу билан масала ҳал қилинди.

3- масала. Агар l тўғри чизиқ учбурчак ABC нинг C учидан чиқиб, m_a ва m_b медианаларни (59- расм) A_1 ва B_1 нуқталарда кесиб ўтса, у ҳолда $AG:GA_1 + BG:GB_1 = 1$ $(G \notin l)$ бўлишини исботланг.

Исботи. $T_м$ (Манелай теоремаси) га кўра ва кесмаларнинг йўналишини эътиборга олсак, $\triangle AA_1C$ ҳамда BB_1 кесувчи учун $(AG:GA_1)(A_1B_1 : B_1C) = -1$ бўлиб ҳамда $\triangle BB_1C$ ва AA_1 учун ҳам $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{B_1A_1} = -\overrightarrow{GB_1}\cdot\overrightarrow{A_1C}$ деб ёза ола-



59- расм.

миз. Ҳосил қилинган натижалардан $\frac{AG}{GA_1} = \frac{CB_1}{A_1B_1}$ (1), $\frac{BG}{GB_1} = \frac{A_1C}{A_1B_1}$ (2) бўлади. (1) ва (2) ни ҳадлаб қўшсак, у ҳолда

$$\frac{AG}{GA_1} + \frac{BG}{GB_1} = \frac{CB_1}{A_1B_1} + \frac{A_1C}{A_1B_1} = \frac{A_1C + CB_1}{A_1B_1} = \frac{A_1B_1}{A_1B_1} = 1$$

бўлади. Демак, $AG:GA_1 + BG:GB_1 = 1$ бўлар экан.

Юқорида келтирилган маълумотларга таяниб, қуйидаги масалаларни ечинг:

1. Учбурчакнинг томонлари 13, 20 ва 21 см. Катта бурчакнинг биссектрисасига параллел қилиб ўтказилган тўғри чизиқ учбурчакни икки тенгдош бўлакка бўлади. Учбурчакнинг катта томонидан бу тўғри чизиқ билан ажратилган кесмаларнинг узунликларини топинг.

2. Учбурчакнинг асосини $m:n$ нисбатда бўлувчи D нуқтадан унинг бошқа икки томонига параллел қилиб тўғри чизиқлар ўтказилган. Учбурчакнинг юзи S бўлса, учбурчакдан ажратилган бўлакларнинг юзларини топинг.

3. ABC учбурчакнинг AB томонидаги K нуқтадан AC томонға параллел KP ва CB томонга параллел KN тўғри чизиқлар ўтказилиб, улар AC ва CB томонлар билан кесишгунча давом эттирилган. Натижада ND тўғри чизиқ AB га параллел бўлган. Агар ABC нинг томонлари 13, 14 ва 15 бўлса, KNP нинг юзини топинг.

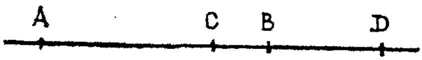
4. ABC учбурчакнинг BC асосида P нуқта олинган. Агар $AB^2 + AC^2 = 2AP^2 + BP^2 + CP^2$ бўлса, P нуқтанинг ҳолатини аниқланг.

5. Учбурчак ичида олинган P нуқтадан унинг уч томонига параллел тўғри чизиқлар ўтказилган. Учбурчак томон-

ларининг бу параллеллар орасида қолган кесмалари ўзаро тенг. Параллелларнинг узунликларини топинг.

2-§. Кесманинг гармоник бўлинмаси

Геометрияда учбурчакнинг трансверсали тушунчаси бевосита кесманинг гармоник бўлинмаси билан боғлиқдир. Берилган бирор (60-расм) тўғри чизиқда AB кесмани қарайлик ва AB кесма ичида бирор C нуқта олиб, $AC:BC$ нисбатни қараймиз. Агар бу нисбатга йўналиш тушунчасини тадбиқ қилсак, у ҳолда $AC:BC=-k$ эканига ишонч ҳосил қиламиз. Энди AB кесма давомида шундай D нуқтани ҳосил қилиш мумкинки, у $AD:BD=k$ муносабатни қаноатлантиради.



60-расм.

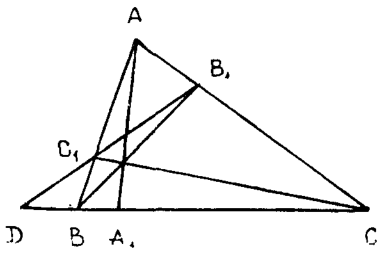
12-таъриф. Агар қаралаётган тўғри чизиқда олинган AB кесмани C ва D нуқталар $AC:BC=-(AD:BD)$ ёки $(ABC):(ABD)=-1$ нисбатда бўлса, у ҳолда AB кесма C ва D нуқталар билан ***гармоник бўлинган*** дейилади. C ва D нуқталар A ва B нуқталарга нисбатан ***қўш нуқталар*** дейилади. Агар $(ABCD)=-1$ бўлса, А, B, C, D нуқталар ***гармоник жойлашган*** дейилади ва $A,\ B \div C,\ D$ ёки $AB \overset{h}{-} CD$ кўринишларда белгиланади.

Нуқталарнинг гармоник тўртлиги қуйидаги хоссаларга эга:

1) $AB \overset{h}{-} CD \Rightarrow CD \overset{h}{-} AB$ df_{12} га асосан ҳосил бўлади;

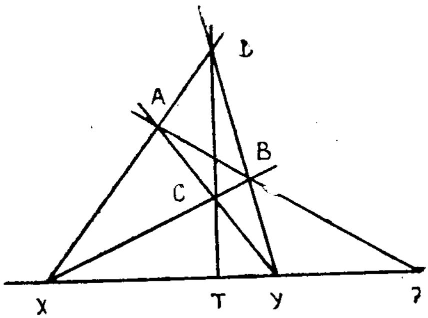
2) агар A, B, C, D гармоник нуқталар $AB \overset{h}{-} CD$ бўлса, у ҳолда $(BACD)=(ABDC)=(CDAB)=(DCAB)=(CDBA)=$ $=(DCBA)=-1$ бўлади.

47-теорема. *Учбурчак ABC нинг икки учидан чиқувчи чевианлар асосларини туташтирувчи тўғри чизиқ ва учинчи учдан чиқувчи чевиан шу уч қаршисидаги томонни гармоник бўлади* (*61-расм*).



61-расм.

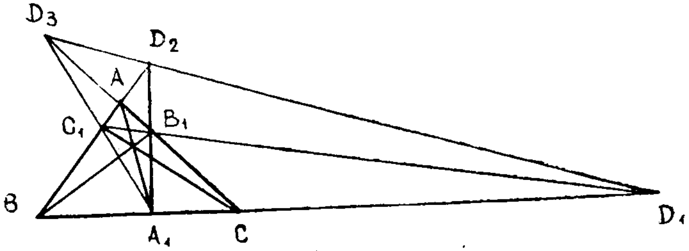
Исботи. Учбурчак ABC нинг учларидан AA_1, BB_1, CC_1 чевианларни ўтказамиз. Улар $T_ч$ га асосан бир нуқтада кесилади. T_{47} га асосан B_1 ва C_1 нукталарни туташтириб, давом эттирсак, у BC нинг давомини D нуқтада кесиб ўтади. $T_г$ га асосан $(ACB_1)(BAC_1)(CBA_1) = -1$ ва $T_м$ га асосан $(ACB_1)(BAC_1)(CBD) = 1$ бўлади. Ҳосил қилинган натижаларни ҳадлаб бўлсак, у ҳолда $(CBA_1) : (CBD) = -1$ бўлади. df_{12} га асосан ҳосил қилинган нуқталар гармоник жойлашади. Шу билан T_{47} исбот қилинди.



62- расм.

1- масала. Берилган X, Y ва Z нуқталарга гармоник бўлган T нуқтани топинг.

Ечиш. Бунинг учун бирор тўғри чизиқда $(XYZ) = k > 0$ бўлган X, Y, Z нуқталарни ясаймиз. Сўнгра X нуқта орқали (62- расм) иккита ихтиёрий тўғри чизиқ ва Z нуқта орқали битта тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқлар мос ҳолда A, B нуқталарда кесишади. Сўнгра A нуқтани Y билан ҳамда B нуқтани Y билан туташтирувчи тўғри чизиқларни ўтказсак, у ҳолда бу тўғри чизиқлар XB ни C нуқтада, XA ни D нуқтада кесиб ўтади. Бу топилган C ва D нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ XZ ни T нуқтада кесиб ўтиб, $T_ч$ га асосан $(XУT) = -k$ бўлади. T_{47} га асосан $(XYZ) : (XYT) = -1$ экани келиб чиқади. Шу билан масала ҳал бўлди.

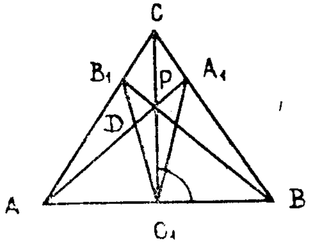


63- расм.

48-теорема. *Агар учбурчак ABC да чевиан асосларидаги нуқта ва қолган икки нуқтасини туташтирувчи тўғри чизиқ билан учбурчак томонининг давомида ҳосил қилган нуқта мос томон учларидаги нуқталарга нисбатан гармоник қўш нуқталар бўлса, у ҳолда улар бир тўғри чизиқда ётади.*

Исботи. T_{48} нинг шартига кўра AA_1, BB_1, CC_1 чевианлар эканига асосан ҳамда T_{47} га ва юқорида келтирилган масалага асосан (63-расм) $CA \overset{h}{-} B_1D_3$ ва $BA \overset{h}{-} C_1D_2$, $BC \overset{h}{-} A_1D_1$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда $(ABD_2)(BCD_1)(CAD_3) = 1$ эканидан D_1, D_2, D_3 нуқталарнинг бир тўғри чизиқда ётиши келиб чиқади. Шу билан T_{48} исбот қилинди.

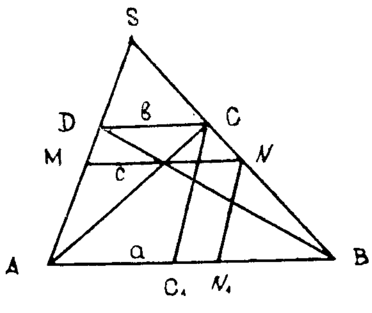
2-масала. Учбурчак ABC нинг CC_1 баландлигида олинган P нуқта орқали ўтган AP, BP тўғри чизиқлар BC ва AC томонларни мос ҳолда A_1 ва B_1 нуқталарда кесиб ўтса, у ҳолда PC_1 нур бурчак $A_1C_1B_1$ нинг биссектрисаси эканини исботланг.



64-расм.

Исботи. Масала шартига кўра ҳосил бўлган BCB_1C_1 (64-расм) тўртбурчакни қараймиз. Агар AA_1 тўғри чизиқ B_1C_1 ни D нуқтада кесиб ўтса, у ҳолда $AP \overset{h}{-} DA_1$ бўлади. У ҳолда $(C_1A, C_1P) \overset{h}{-} (C_1D, C_1A_1)$ бўлади. Агар гармоник тўртликдаги икки қўш тўғри чизиқ перпендикуляр бўлса, улар қолган иккитасига симметрия ўқлари бўладилар. Демак, C_1P нур $B_1C_1A_1$ бурчак биссектрисаси бўлади.

3-масала. Асослари a ва $b\,(a > b)$ бўлган $ABCD$ трапециянинг диагоналлари кесишиш нуқтаси орқали асосларига параллел қилиб $MN = c$ ўтказилган бўлса, $\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ бўлишини исботланг.

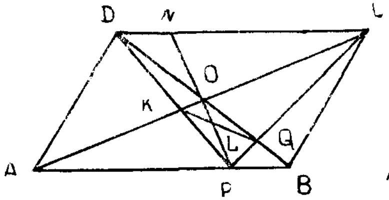


65-расм.

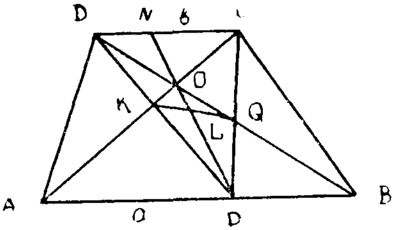
Исботи. $ABCD$ трапецияни SAB учбурчакка

(65- расм) тўлдирамиз, сўнгра C ва N нуқталар орқали AD ён томонига параллел CC_1 ва NN_1 ларни ўтказамиз. Натижада T_{47} ва T_{48} га асосан $SN \overset{h}{—} BC$ дан $AN_1 \overset{h}{—} C_1B$ бўлиб, гармоник тўртликка асосан $\frac{1}{AN_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AC_1} + \frac{1}{AB}\right)$ ни ҳосил қиламиз, бундан $\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ бўлади.

4- масала. $ABCD$ параллелограммнинг AB томонида ихтиёрий P нуқта берилган бўлиб, PD ва PC лар унинг диагоналларини мос ҳолда (66- расм) K ва Q нуқталарда кесади. $S_{\triangle KPQ} = 2S_{\triangle KOQ}$ эканини исботланг (O диагоналлар кесишиш нуқтаси).



66- расм.



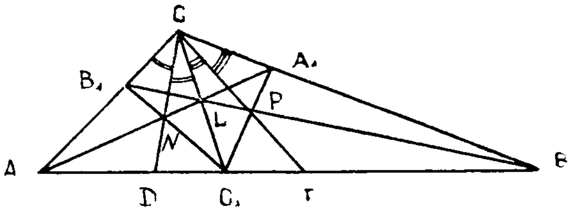
67- расм.

Исботи. Масаланинг шартига кўра PO кесма KQ ни L нуқтада, DC ни N нуқтада кесиб ўтади. T_{47} ва $\partial/12$ га асосан $PO \overset{h}{—} LN$ ёки $\frac{PL}{LO} = \frac{PN}{ON} = 2$ бўлиб, $PL = 2LO$ дан бевосита $S_{\triangle KPQ} = 2S_{\triangle KOQ}$ келиб чиқади.

5- масала. Асослари a ва b ($a > b$) бўлган $ABCD$ трапециянинг AB томонида ихтиёрий P нуқта берилган бўлиб, PD ва PC тўғри чизиқлари унинг диагоналларини (67- расм) K ва Q нуқталарда кесади. Агар диагоналлар кесишиш нуқтаси O бўлса, $S_{PQK} = \frac{a+b}{b} S_{KOQ}$ эканини исботланг.

Исботи. Агар PO кесма KQ ни L нуқтада, DC ни N нуқтада кесиб ўтса, 4- масалага асосан $PO \overset{h}{—} LN$, $\frac{PL}{LO} = \frac{PN}{ON} = \frac{a+b}{b}$ бўлиб, бундан $S_{PQK} = \frac{a+b}{b} S_{KQO}$.

6- масала. Берилган учбурчакда A_1, B_1, C_1 нуқталар ABC учбурчак биссектрисаларининг асослари ва $\angle A_1C_1B_1 = 90°$. C бурчакни топинг.



68- расм.

Ечиш. Учбурчак ABC да AA_1 биссектриса (68-расм) B_1C_1 ва CC_1 ни мос ҳолда N ва L нуқталарда кесиб ўтсин. T_{47}, T_{48}, $df12$ га ва $AL \overset{h}{—} NA_1$ га асосан $(C_1A,\ C_1L) \overset{h}{—} (C_1N,\ C_1A_1)$ бўлади. $B_1C_1 \perp C_1A_1$ эканлигидан C_1B_1 тўғри чизиқ AC_1C бурчакнинг, C_1A_1 эса BC_1C бурчакнинг биссектрисаси эканлиги, CN эса ACC_1 бурчакнинг, CP эса C_1CB бурчакнинг биссектрисаси экани келиб чиқади. $AL \overset{h}{—} NA_1$ га асосан, CN эса ACL нинг биссектрисалигига асосан $\angle NCB = 90°$. Худди шунга ўхшаш $\angle ACP = 90°$ бўлиб, булардан $\angle ACN = \angle NCL = \angle LCP = \angle PCB = 30°$ бўлиб, $\angle C = 120°$ бўлади.

Қуйидаги масалаларни ечинг:

1. Учбурчак ABC нинг C учидан чиққан CC_1 баландлик ва CN медиана шу бурчакни тенг уч бўлакка бўлса, у ҳолда $\angle C = 90°$ эканини исботланг.

2. $ABCD$ параллелограммнинг BC тўғри чизиғида ўзаро тенг $\overrightarrow{BK}$ ва $\overrightarrow{CN}$ векторлар қўйилган Агар AK ва AN тўғри чизиқлари CD тўғри чизиқни R ва P нуқталарда кесиб ўтса, $DP^2 = PC \cdot PR$ эканини исботланг.

3. Берилган $ABCD$ тўртбурчакнинг D учи хосмас нуқта бўлса, у ҳолда бу тўртбурчакнинг диагоналлари кесишган нуқтани топинг.

4. Агар айлана диаметри AB учун $AB \overset{h}{—} CD$ бўлса, у ҳолда шу айланада ётувчи ихтиёрий P нуқта учун $PC : PD$ ўзгармас эканини исботланг.

5. Берилган айлана диаметрига перпендикуляр бўлган ватар учларини айлананинг ихтиёрий нуқтаси билан туташтирувчи тўғри чизиқлар диаметрни гармоник бўлишини исботланг.

6. Агар AB кесмани C_1 нуқта $AC_1 : C_1B = k$ нисбатда

бўлса, у ҳолда шу AB кесмани $k^2, k^4, \ldots, k^{2n}$ нисбатларда бўлувчи нуқталарни топинг.

7. Берилган a тўғри чизиқда A ва B нуқталар берилган бўлса, $PP_1 = s$ масофага эга бўлган ва AB ни гармоник бўлувчи P ва P_1 нуқталарни топинг.

8. Агар A, B, C, D нуқталар айланадаги гармоник тўртлик бўлиб, P ихтиёрий нуқта бўлса, у ҳолда $(PA, PB) \overset{h}{—} (PD, PC)$ бўлишини исботланг.

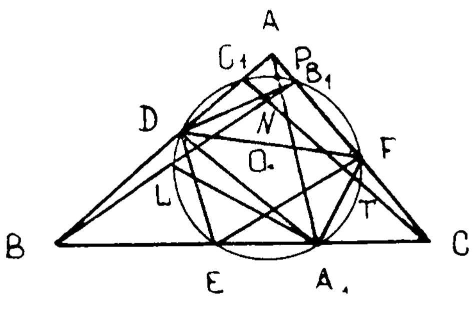
3-§. Эйлер айланаси ва учбурчакдаги муҳим нуқталар орасидаги масофа

Юқорида учбурчак баландликларининг кесишиш нуқтасини ортомарказ деб қабул қилган эдик.

13-таъриф. Учбурчак ортомарказидан унинг учигача бўлган масофаларнинг ўрталари ***Эйлер нуқталари*** дейилади.

49-теорема. *Берилган учбурчакда медиана, баландлик асослари ва Эйлер нуқталари биргина айланада ётади.*

Исботи. Учбурчак ABC да D, E, F нуқталар унинг томонларининг ўрталари бўлсин. AA_1, BB_1, CC_1 учбурчак баландликлари бўлиб, H уларнинг кесишган нуқтаси — ортомаркази бўлсин. Энди D, E, F нуқталардан ўтувчи айлана чизамиз (69-расм) ва A, L нуқталарнинг (L нуқта BH нинг ўртаси) шу айланада ётишини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, DA_1 учбурчак BA_1A нинг медианаси ва $\angle BA_1A = 90°$ бўлгани учун $DA_1 = \frac{AB}{2} = EF$ эканидан $DA_1 = EF$ бўлади. Шундай қилиб, DEA_1F тенг ёнли трапеция бўлгани учун A_1 нуқтанинг ҳам шу айланада ётиши келиб чиқади. Энди L



69-расм.

нуқтани D билан туташтирамиз, натижада $DL \parallel AA_1$ ва $DF \parallel$ $\parallel BC$ бўлганлиги ҳамда $AA_1 \perp BC$ га асосан $\angle LDF = 90°$, $LE \parallel CH$ га асосан $\angle LEF = 90°$ бўлади. Шундай қилиб, $\angle LDF + \angle LEF = 180°$ ва $\angle DLE + \angle DFE = 180°$ эканидан L нуқта ҳам шу айланада ётади. Худди шундай қолган P, B_1, C_1, T нуқталарнинг ҳам шу айланада ётишини кўрсатиш мумкин. Бу тўққизта A_1, T, F, B_1, P, C_1, D, L, E нуқтадан ўтувчи айлана ***Эйлер айланаси*** дейилади, бу ўзининг масалалар ечишда муҳимлиги билан ажралиб туради.

17-*натижа*. Эйлер айланасининг маркази учбурчак ABC га ташқи чизилган айлана маркази билан ортомарказ орасидаги масофанинг ўртасига жойлашган бўлади.

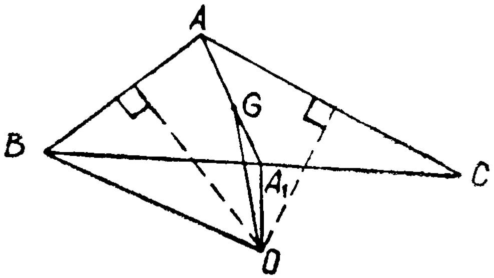
18-*натижа*. Эйлер айланасининг радиуси учбурчак ABC га ташқи чизилган айлана радиусининг ярмига тенгдир.

19-*натижа*. Учбурчак ABC нинг A учидан унинг ортомарказигача бўлган масофа шу учбурчакка ташқи чизилган айлана марказидан a томонгача бўлган масофанинг икки баробарига тенгдир.

14-таъриф. Учбурчак ABC нинг ортомаркази ва унга ташқи чизилган айлана маркази орқали ўтувчи тўғри чизиқ ***Эйлер тўғри чизиғи*** дейилади.

1-масала. Учбурчак ABC нинг оғирлик маркази билан ташқи чизилган айлана маркази орасидаги масофа $d = \sqrt{R^2 - (a^2 + b^2 + c^2):9}$ эканини исботланг.

Исботи. Ташқи чизилган айлана маркази учбурчак томонларининг ўрта перпендикулярлари кесишган нуқтаси бўлгани учун (70-расм) AA_1 медиана ўтказамиз, сўнгра G оғирлик марказини аниқлаймиз. OA_1 эса ташқи чизилган айлана марказидан BC томонигача бўлган масофа ва $OA = R$; $BC = a$ эканига асосан $BA_1 = \frac{a}{2}$ дан



70-расм.

$$OA_1 = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2} \text{ бўлиб, } AA_1 =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

эканлигини биламиз. $OG = d$ эканини эътиборга олиб, T_{16} га асосан

$OA^2 \cdot GA_1 + OA_1^2 \cdot AG - OG^2 \cdot AA_1 = AG \cdot CA_1 \cdot A_1A$; $AG = 2A_1G$ бўлгани учун $AG = \frac{2}{3}AA_1$; $GA_1 = \frac{1}{3}AA_1$ дан

$$d^2 = \frac{R^2}{3} + \frac{4R^2 - a^2}{6} - \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{18} = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$$

бўлиб, $d = \frac{1}{3}\sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}$ ҳосил бўлади.

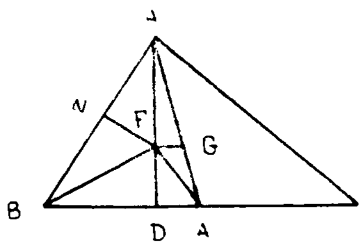
20-*натижа.* Ҳар қандай учбурчакда $9R^2 \geqslant a^2 + b^2 + c^2$ бўлади.

21-*натижа.* Ҳар қандай учбурчакда (69-расм) $LE \parallel CC_1$ ва LF Эйлер айланаси марказидан ўтади.

2-масала. Эйлер айланасининг маркази O_9 ва учбурчак оғирлик маркази орасидаги масофа $\frac{1}{6}\sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}$ га, ташқи чизилган айлана маркази билан ортомарказ орасидаги масофа $\sqrt{9R^2 - a^2 - b^2 - c^2}$ га тенг эканини исботланг.

Исботи. T_{49} га асосан $OG = 2O_9G$ экани ва 1-масалага асосан $OG = \frac{1}{3}\sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}$ бўлгани учун $O_9G = \frac{1}{6}\sqrt{9R^2 - a^2 - b^2 - c^2}$ бўлади.

Демак, T_{49} га асосан $HG = 2GO$ эканидан $\frac{HG}{GO} = 2 \Leftrightarrow \frac{HG}{GO} + 1 = 3 \Leftrightarrow \frac{HG + GO}{GO} = \frac{HO}{GO} = 3 \Rightarrow HO = 3GO$ бўлади. Шу билан масала ҳал қилинди.



71-расм.

3-масала. Учбурчак ABC нинг оғирлик марказидан унга ички чизилган айлана марказигача бўлган масофа

$\frac{1}{3}\cdot\sqrt{9r^2-3p^2+2(a^2+b^2+c^2)}$ га тенглигини исботланг.

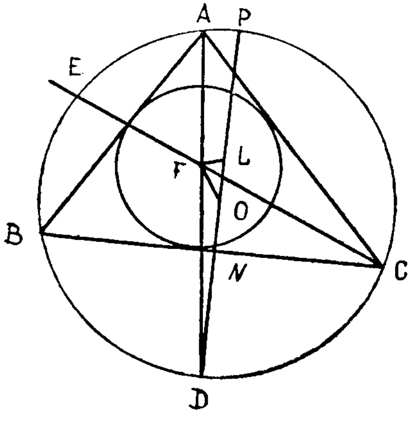
Исботи. Учбурчак ABC да F ички чизилган айлана маркази ёки унинг биссектрисаларининг кесишган нуқтаси (71-расм). AA_1 медиана бўлгани учун $AA_1=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$; $DA_1=\frac{a}{2}-(p-b)=\frac{b-c}{2}$, FDA_1 тўғри бурчакли учбурчакдан $FA_1=\sqrt{r^2+DA_1^2}=\sqrt{r^2+\frac{(b-c)^2}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+(b-c)^2}$ бўлиб, $FA=\sqrt{r^2+(p-a)^2}$ бўлади. Учбурчак медианасининг хоссаси ва T_{16} га асосан

$FA^2\cdot GA_1+FA_1^2\cdot AG-FG^2\cdot AA_1=AG\cdot GA_1\cdot AA_1$ бўлади ва

$$FG^2=d^2=\frac{FA^2\cdot GA_1}{AA_1}+\frac{FA_1^2\cdot AG}{AA_1}-AG\cdot GA_1=\frac{r^2+(p-a)^2}{3}+$$
$$+\frac{4r^2+(b-c)^2}{6}-\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{18}=r^2+$$
$$+\frac{6p^2-12ap+6a^2+3b^2+3c^2-6bc}{18}-\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{18}=r^2+$$
$$+\frac{6p^2-12p^2+4(a^2+b^2+c^2)}{18}=\frac{9r^2-3p^2+2(a^2+b^2+c^2)}{9};$$

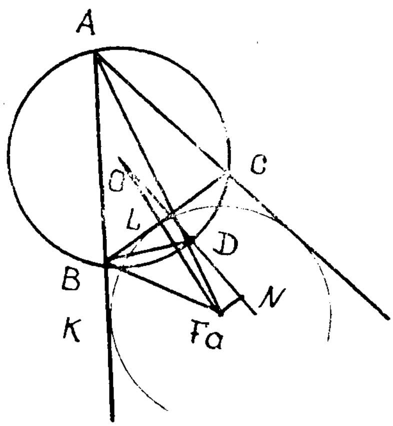
$FG=\frac{1}{3}\sqrt{9r^2-3p^2+2(a^2+b^2+c^2)}$ дан иборат бўлади. Шу билан масала ҳал қилинди.

50- Эйлер теоремаси. *Агар учбурчак ABC да R — ташқи, r — ички чизилган айлана радиуслари бўлса, у ҳолда улар марказлари орасидаги масофа $\sqrt{R^2-2Rr}$ га тенг бўлади.*



72- расм.

Исботи. Учбурчак ABC да R — ташқи чизилган, r — ички чизилган айлана радиуслари ва F ички, O ташқи чизилган айлана марказлари бўлсин (72-расм). AD ва CE биссектрисалар-нинг давомлари $l(R;\ O)$ айланани D ва E нуқталарда кесади. Энди D нуқтадан BC томонга перпендикуляр DP диаметрни ўтказамиз, сўнгра $FL \perp DP$ туширамиз, натижада $\angle DFC = \frac{\smile DC + \smile AE}{2}$, бу ерда $\smile AE = \smile EB$ ва $\smile DC = \smile BD$ эканига асосан $\angle DFC = \frac{\smile DC + \smile AE}{2} = \frac{\smile BD + \smile BE}{2} = \frac{\smile DE}{2}$,

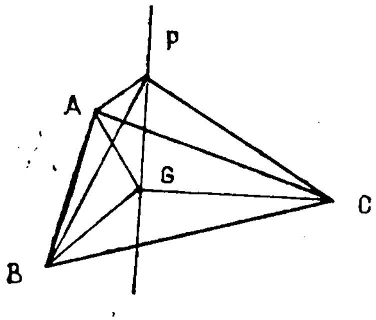


73- расм.

бундан $\angle DCF = \frac{\smile DE}{2}$ бўлиб, $\angle DFC = \angle FCD$ эканидан $FD = DE$ бўлади. Демак, учбурчак FDC тенг ёнли бўлади. Энди учбурчак DFO га T_{11} ни қўлласак, у ҳолда $FO^2 = d^2 = OD^2 + DF^2 - 2OD \cdot DF = R^2 + DF^2 - 2R \cdot DF = R^2 + 2RDN - 2R \cdot DL = R^2 - 2R(DL - DN) = R^2 - 2Rr$ бўлиб, $FO = d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$ бўлади. Шу билан T_{50} исботланди.

4-масала. Учбурчак ABC га ташқи чизилган $l(R;\ O)$ айлана марказидан унинг $a = BC$ томонига уринувчи ташқи-ички чизилган $l_1(r_a;\ F_a)$ айлана марказлари орасидаги масофа $d_a = \sqrt{R^2 + 2Rr_a}$ эканини исботланг.

Исботи. Учбурчак ABC га ташқи $l(R;\ O)$ айланани чизамиз (73- расм) ва BC томонига ташқи-ички уринувчи $l_1(r_a;\ F_a)$ айланани чизамиз. F_a эса B ва C бурчаклар ташқи бурчаги биссектрисаларининг кесишиш нуқтаси. Натижада O ва F_a нуқталарни ҳамда A ва F_a нуқталарни туташтирсак, у ҳолда учбурчак ABF_aда $\angle BF_aD = \angle KBF_a - \angle KAF_a$; $\angle DBF_a = \angle F_aBC - \angle CBD$ бўлади. Бу ерда AF_a, BF_a лар мос ҳолда $\angle KAC$ ва $\angle KBC$ бурчакларнинг биссектрисалари эканлигига асосан $\angle KAF_a = \angle F_aAC = \angle CBD$ эканидан $\angle KBF_a = \angle F_aBC$ ва $\angle DBF_a = \angle BF_aD$ бўлиб, учбурчак BDF_a тенг ёнли $(BD = F_aD)$ экани келиб чиқади. Энди $ON \perp BC$ ни ўтказиб, F_a нуқтадан ON га $ON \perp F_aN$ туширамиз, натижада учбурчак OF_aD да $\angle ODF_c$ ўтмас бўлгани учун



74- расм.

$OF_a^2 = d_a^2 = OD^2 + DF_a^2 + 2OD \cdot DN$; $BD = DF_a$; $BD^2 = 2R \cdot LD$ эканидан $d_a^2 = R^2 + 2R \cdot LD + 2R \cdot DN = R^2 + 2R(LD + ND) = R^2 + 2Rr_a$ экани келиб чиқади. Шу билан масала ҳал бўлди.

51- Лейбниц теоремаси. *Учбурчак ABC текислигида ёки унинг ташқарисида олинган нуқтадан учбурчакнинг учларигача бўлган масофалар квадратларининг йиғиндиси шу учбурчакнинг оғирлик марказидан учбурчак учларигача (74- расм) бўлган масофалар квадратларининг йиғиндисига шу нуқтадан оғирлик марказигача бўлган масофа квадратининг уч баробарини қўшилганига тенг, яъни:*

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3PG^2.$$

5- масала. Учбурчак ABC текислигида олинган нуқтадан унинг учларигача бўлган масофалар квадратлари йиғиндиси энг кичик бўлган нуқтани топинг.

Ечиш. Изланаётган нуқта P бўлсин, у ҳолда T_{51} га асосан $PA^2 + PB^2 + PC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3PG^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) + 3PG^2 = 3PG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ бўлади. $PA^2 + PB^2 + PC^2$ энг кичик бўлиши учун P нуқта G билан устма-уст тушиши керак, у ҳолда изланган нуқта оғирлик марказидан иборат экан.

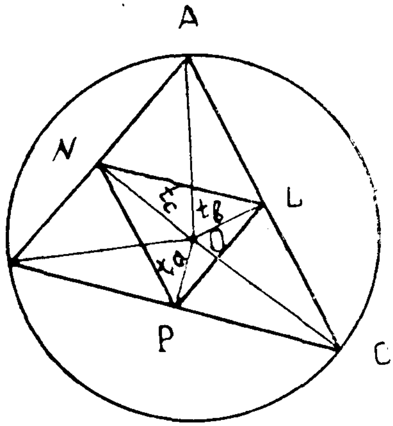
52- Карно теоремаси. *Ихтиёрий учбурчакка ташқи чизилган айлана марказидан учбурчак томонигача бўлган масофалар йиғиндиси шу учбурчакка ички ва ташқи чизилган айланалар радиусларининг йиғиндисига тенг.*

Исботи. Учбурчак ABC да O ташқи чизилган айлана маркази (75- расм), $OP = t_a$ — учбурчак томонигача бўлган масофа (худди шунга ўхшаш t_b, t_c ларни белгилаймиз) бўлсин, у ҳолда (Птоломей теоремаси) $T_П$ га асосан $ANOL$ тўртбурчакдан:

$$AO \cdot NL = ON \cdot AL + OL \cdot AN \text{ ёки } R \cdot \frac{a}{2} = t_c \cdot \frac{b}{2} + t_b \cdot \frac{c}{2}. \quad (1)$$

Худди шунга ўхшаш $BNOP$ ва $CLOP$ лардан

$$R\cdot\frac{b}{2}=t_a\cdot\frac{c}{2}+$$
$$+t_c\cdot\frac{a}{2}; \qquad (2)$$
$$R\cdot\frac{c}{2}=t_b\cdot\frac{a}{2}+$$
$$+t_a\cdot\frac{b}{2}. \qquad (3)$$



75- расм.

Топилган (1), (2), (3) ларни ҳадлаб қўшсак,

$$R\left(\frac{a+b+c}{2}\right)=$$
$$=t_a\cdot\frac{b+c}{2}+t_b\cdot\frac{a+c}{2}+$$
$+t_c\frac{a+b}{2}$ бўлади, бундан

$R\cdot p=(t_a+t_b+t_c)\cdot p-S=(t_a+t_b+t_c)\ p-pr$ бўлиб $R=t_a+t_b+t_c-r\Leftrightarrow t_a+t_b+t_c=R+r$ бўлади. Шу билан Қарно масаласи ҳал бўлди.

Қуйидаги масалаларни ечинг:

1. Учбурчак ABC да $d=OF$ ва $d_a=OF_a$; $d_b=OF_b$; $d_c=OF_c$ бўлса, $\frac{1}{R^2-d^2}=\frac{1}{d_a^2-R^2}+\frac{1}{d_b^2-R^2}+\frac{1}{d_c^2-R^2}$ бўлишини исботланг.

2. Агар учбурчак медианаларининг кесишиш нуқтаси ички чизилган айланада ётса, у ҳолда томонлари орасидаги муносабатни топинг.

3. Учбурчак ABC да $HG=\frac{2}{3}\sqrt{9R^2-(a^2+b^2+c^2)}$ муносабат ўринли эканини кўрсатинг.

4. Учбурчак ABC да $a^2+HA^2=b^2+HB^2=c^2+HC^2=4R^2$ бўлса, $HA^2+HB^2+HC^2=12R^2-(a^2+b^2+c^2)$ эканини кўрсатинг.

5. Ҳар қандай учбурчакда $O_9A^2+O_9B^2+O_9C^2=\frac{1}{4}(3R^2+a^2+b^2+c^2)$ бўлишини исботланг.

6. Учбурчак ABC да $AH+BH+CH=2(R+r)$ бўл-

са, у ҳолда $AH \cdot BH + AH \cdot CH + BH \cdot CH = a^2 + b^2 + c^2 + 4r^2 - 8R^2$ бўлади. Шуни исботланг.

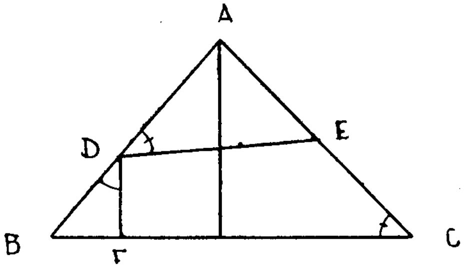
7. Ҳар қандай учбурчакда $d^2 + d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 = 12R^2$ бўлади. Шуни исботланг.

8. Учбурчак ABC учун $a(b-c) = (r_b - r_c)(4R - r_b - r_c)$ бўлишини исботланг.

IV боб. УЧБУРЧАККА ИЧКИ ВА ТАШҚИ ЧИЗИЛГАН УЧБУРЧАКЛАР. УЧБУРЧАКЛАРДАГИ АСОСИЙ МУНОСАБАТЛАР

1-§. Учбурчакда антипараллеллар. Ортомарказ ва тангенциал учбурчаклар. Учбурчакнинг изогонал тўғри чизиғи ва изотомик нуқтаси

15- таъриф. Агар учбурчак ABC нинг AB томонида ихтиёрий D нуқта олиб, $\angle ADE = \angle C$ шарти бўйича DE ўтказилса, у ҳолда DE чизиғи BC томонига ***антипараллел*** деб айтилади (76- расм).

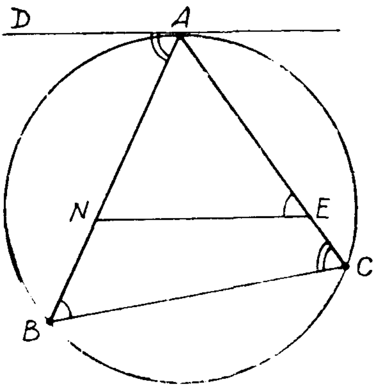


76- расм.

Маълумки, шу олинган ихтиёрий D нуқта орқали ўтган DE тўғри чизиқ учбурчак ABC нинг BC томонига антипараллел бўлса, DF эса AC томонига антипараллел бўлади. Худди шунга ўхшаш тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузасида олинган ихтиёрий нуқтадан перпендикуляр ўтказилса, у шу учбурчакнинг катетларига антипараллел бўлади.

53- теорема. *Учбурчак ABC нинг икки учидан ўтувчи айлана унинг томонларини N ва E нуқталарда кесиб ўтса* (77- расм), *у ҳолда NE кесма учинчи томонига антипараллел бўлади.*

Исботи. T_{53} нинг шартига кўра учбурчак ABC нинг B ва C учларидан ўтувчи айлана чизамиз. У ҳолда бу айлана учбурчакнинг AB томонини N нуқтада, AC ни E нуқтада кесиб ўтади. Натижада $BNEC$ тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкинлигига асосан $\angle NBC + \angle NEC = 2d, \angle CEN + \angle NEA = 2d$ бўлиб, $\angle NEA = \angle B$ бўлади. df 15 га асосан NE антипараллел BC экани келиб чиқади. Шу билан T_{53} исботланди.

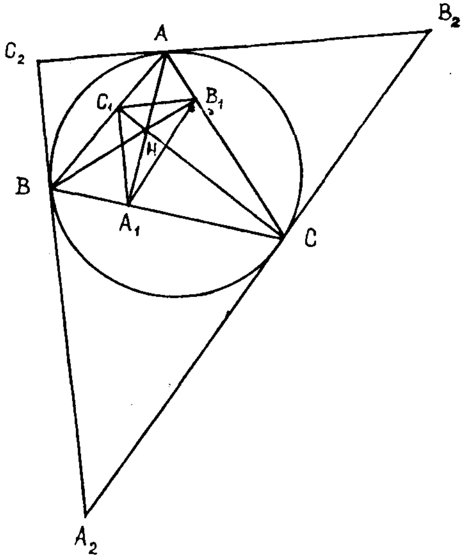


77- расм.

1- масала. Учбурчак ABC га ташқи чизилган айлананинг A нуқтасига ўтказилган уринма шу учбурчакнинг BC томонига антипараллел бўлишини исботланг.

Исботи. Масала шартига кўра учбурчакнинг A учидан ташқи чизилган айланага уринма ўтказамиз (77- расм), натижада ҳосил бўлган бурчак $\angle DAB = \frac{\smile AB}{2}$ бўлади. $\angle C = \frac{\smile AB}{2}$ бўлгани учун $\angle DAB = \angle C$ бўлиб, df 15 га асосан AD антипараллел BC бўлади.

16- таъриф. Учбурчак ABC нинг баландликлари асосларини тўғри чизиқ кесмаси билан туташтириш натижасида ҳосил бўлган учбурчакка ***ортомарказ учбурчаги*** дейилади.



78- расм.

54- теорема. *Учбурчак ABC нинг ортомарказ $A_1B_1C_1$ учбурчагининг томонлари мос равишда антипараллелдир.*

Исботи. Учбурчак ABC нинг ортомарказ учбурчаги $A_1B_1C_1$ бўлсин (78- расм), у ҳолда $\angle AB_1B = \angle AA_1B = \frac{\pi}{2}$ бўлганлиги ва бу бурчаклар қаршисида умумий томон AB ётганлигини эътиборга олсак, у ҳолда AB томонни диаметр қилиб чизилган айлана A_1 ва B_1 нуқталарда учбурчак ABC нинг BC ва AC томонларини кесиб ўтади. Натижада T_{53} га асосан A_1B_1 томон AB га антипараллел бўлади. Худди шунга ўхшаш қолган томонларнинг ҳам антипараллел эканини кўрсатиш мумкин. Шу билан T_{54} исбот бўлди.

55- теорема. *Учбурчак ABC нинг баландликлари унинг ортомарказ учбурчаги ички бурчагининг биссектрисаси бўлади.*

Исботи. Учбурчак ABC нинг баландликларини ўтказамиз, натижада (78- расм) $\triangle AA_1B \sim \triangle CC_1B$ дан $AB : BC = A_1B : C_1B$ бўлади. Ҳақиқатан ҳам, T_{53} ва df_{15} га асосан $\triangle BC_1A_1 \sim \triangle ABC$ бўлганлиги учун $\angle AA_1C_1 = \frac{\pi}{2} - \angle C_1A_1B = \frac{\pi}{2} - \angle A$. Худди шунга ўхшаш $\angle CC_1A_1 = \frac{\pi}{2} - \angle C$; $\angle BB_1A_1 = \frac{\pi}{2} - \angle B$; $\angle CC_1B_1 = \frac{\pi}{2} - \angle C$; $\angle AA_1B_1 = \frac{\pi}{2} - \angle A$; $\angle BB_1C_1 = \frac{\pi}{2} - \angle B$ ларни ёзамиз. Натижада $\angle AA_1C_1 = \frac{\pi}{2} - \angle A = \angle AA_1B_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle AA_1C_1 = \angle AA_1B_1$ бўлиб, AA_1 учбурчак баландлиги $\angle C_1A_1B_1$ нинг биссектрисаси бўлади. Шу билан T_{55} исботланди.

17- таъриф. Учбурчак ABC га ташқи чизилган айланага A, B ва C учлардан ўтказилган уринмалар ташкил қилган (78- расм) $A_2B_2C_2$ учбурчакка ***тангенциал учбурчак*** дейилади.

56- теорема. *Ўткир бурчакли ABC учбурчакнинг юзи унга чизилган ортомарказ ва тангенциал учбурчаклар юзлари орасида ўрта геометрик миқдордир.*

Исботи. Учбурчак ABC нинг томонлари узунликлари a, b, c бўлгани учун ортомарказ учбурчак $A_1B_1C_1$ нинг томонлари узунликларини мос ҳолда $a_н$, $b_н$, $c_н$ деб белгиласак, у ҳолда тангенциал учбурчакники a_t, b_t, c_t бўлади. Бундан (78- расм) учбурчак $A_2B_2C_2$ нинг юзи $S_t = S_{\triangle A_2OB_2} + S_{\triangle B_2OC_2} + S_{\triangle A_2OC_2} = \frac{1}{2}Rc_t + \frac{1}{2}Ra_t + \frac{1}{2}Rb_t = Rp_t$

$\left(p_t = \frac{1}{2}\left(a_t + b_t + c_t\right)\right)$ ни ҳосил қиламиз. Худди шунга ўхшаш $S_{\triangle ABC}$ нинг юзи $S_{\triangle B_1OC_1} + S_{A_1OB_1C} + S_{A_1OC_1B}$ га тенг эканидан ва $AO \perp C_1B_1$ ҳамда $C_1B_1 \parallel C_2B_2$ эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(R\cdot A_1C_1 + R\cdot A_1B_1 + R\cdot C_1B_1) = R\cdot P_н$$

бўлиб, $S_t : S = p_t : p_н$ бўлади. Бундан $S_t : S_н = p_t^2 : p_н^2$ эканига аҳамият берилса,

$$\frac{S_t^2}{S^2} = \frac{p_t^2}{p_н^2} = \frac{S_t}{S_н}$$

бўлиб, $S^2 = S_t \cdot S_н$ ва $S = \sqrt{S_t \cdot S_н}$ бўлади. Бу юқорида келтирилган маълумотларга таянган ҳолда

$$2p_н = P_н = \frac{2S}{R} = \frac{2S}{\frac{abc}{4S}} = \frac{8S^2}{abc} \Rightarrow p_н = \frac{4S^2}{abc}$$

эканини ҳосил қиламиз. Шу билан T_{56} исбот қилинди.

2- масала. Агар учбурчак ABC нинг томонлари ва бурчаклари маълум бўлса, у ҳолда $S_н$ ва S_t ларни ҳисобланг.

Ечиш. Учбурчак ABC да $\triangle C_1AB_1 \sim \triangle ABC$ эканидан $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AC_1}{AC}$ бўлиб, $\triangle ABC$ да $AC_1 : AC = \cos A$ ни эътиборга олсак, у ҳолда

$$\frac{a_н}{a} = \cos A \Rightarrow a_н = a\cos A.$$

Худди шунга ўхшаш $b_н = b\cos B$; $c_н = c\cos C$ ларни ёза оламиз. Бундан

$$S_н = \frac{1}{2}a_н b_н \sin C_1 = \frac{1}{2}ab\cos A\cos B\sin C_1$$

бўлади. Агар $\sin C_1 = \sin 2C$ бўлишини ҳисобга олсак, у ҳолда

$$S_н = \frac{1}{2}ab\cos A\cos B\sin C_1 = \frac{1}{2}ab\cos A\cos B\sin 2C =$$

$$= ab\cos A\cos B\cos C\sin C = 2S\cos A\cos B\cos C$$

ҳосил бўлади. Бундан $S_н = 2S\cos A\cos B\cos C$ бўлганидан

$$S_t = \frac{S^2}{S_н} = \frac{S^2}{2S\cos A\cos B\cos C} = \frac{S}{2\cos A\cos B\cos C}$$

бўлиб, $S_t : S_н = \frac{1}{4}\sec^2 A\sec^2 B\sec^2 C$ бўлади. Демак,

$$S_н = 2S\cos A\cos B\cos C;$$

$$S_t = \frac{S}{2\cos A\cos B\cos C}$$

бўлар экан. Шу билан масала ҳал бўлди.

Бу юқоридаги теоремалардан ва 2- масаладан қуйидаги натижа келиб чиқади.

22- *натижа.* Агар R_t, $R_н$ лар тангенциал ва ортомарказ учбурчакларга ташқи чизилган, r_t, $r_н$ лар ички чизилган айлана радиуслари бўлса, у ҳолда

$$r_t = R;\ r_н = 2R\cos A\cos B\cos C,$$

$$R_н = \frac{1}{2}R;\ R_t = \frac{R}{4}\sec A\sec B\sec C$$

бўлишини исботланг.

Исботи. R учбурчак ABC га ташқи чизилган айлана радиуси бўлгани ҳамда 2- масалага кўра:

$$S_t : S_н = \frac{1}{4}\sec^2 A\sec^2 B\sec^2 C = k^2$$

эканлигидан $r_t : r_н = k$ бўлади. $r_t = R$, чунки df 17 га кўра

$$k = \sqrt{\frac{1}{4}\sec^2 A\sec^2 B\sec^2 C} = \frac{1}{2}\sec A\sec B\sec C$$

бўлади. Бундан $r_н = r_t : k = 2R\cos A\cos B\cos C$ бўлиб,

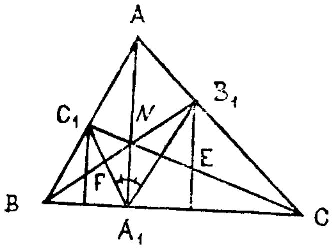
$$\frac{a_н}{\sin A_1} = \frac{b_н}{\sin B_1} = \frac{c_н}{\sin C} = 2R_н$$

га асосан

$$a_н = 2R_н\sin A_1 = 2R_н\sin 2A = 4R_н\sin A\cos A$$

ёки $a_н = a\cos A = 2R\sin A\cos A$ эканини эътиборга олсак, $R_н = \frac{1}{2}R$ ҳосил бўлади. Ҳамда $\frac{R_t}{R_н} = k$ га кўра $R_t = kR_н = \frac{R}{4}\sec A\sec B\sec C$ ҳосил бўлади. Шу билан H_{22} исбот қилинди.

23- *натижа*. Агар учбурчак ABC га ички ва ташқи чизилган учбурчаклар томонлари ўзаро параллел бўлса, у ҳолда унинг юзи ички ва ташқи чизилган учбурчаклар юзларининг ўрта геометрик қийматига тенг бўлади.



79- расм.

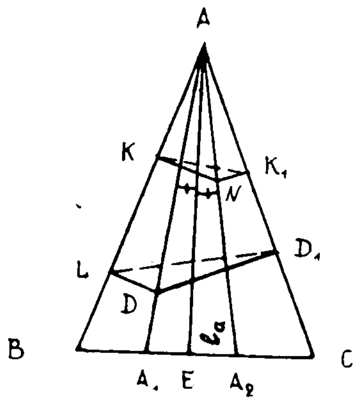
24- *натижа*. Агар учбурчак ABC нинг B ва C учидан чиқувчи тўғри чизиқлар A учидан чиқувчи баландликдаги нуқтада кесишса, у ҳолда AA_1 баландлик (79- расм) бурчак $C_1A_1B_1$ нинг биссектрисаси бўлади.

25- *натижа*. Учбурчак ABC га ички чизилган учбурчаклар ичида ортомарказ учбурчаги энг кичик периметрга эга бўлади. (Бу фикр Фейер исботи билан машҳурдир.)

26- *натижа*. Учбурчак ABC нинг учидан ортомарказгача бўлган масофанинг квадрати билан шу уч қаршисидаги томон квадратининг йиғиндиси учбурчакка ташқи чизилган айлана диаметрининг квадратига тенгдир.

18- таъриф. Агар икки тўғри чизиқ учбурчакнинг бирор учидан чиқиб, шу бурчак биссектрисаси билан тенг бўрчаклар ҳосил қилса, у ҳолда бундай тўғри чизиқларга шу учбурчакнинг томонларига ***изогонал тўғри чизиқлар*** дейилади ёки учбурчак бурчагининг ***изогонали*** дейилади.

57- теорема. *Агар ABC учбурчакнинг ихтиёрий бурчагининг иккита изогонал тўғри чизиғида иккита ихтиёрий нуқта олинган бўлса, у ҳолда бу нуқталардан шу бурчакни ташкил қилувчи бир томонгача бўлган масофалар кўпайтмаси ўзаро тенг бўлади.*



80- расм.

Исботи. Учбурчак ABC нинг A бурчагининг AA_1, AA_2 изогоналини ўтказамиз ва AA_1 да D нуқтани, AA_2 да N нуқтани олиб, бу нуқталардан учбурчакнинг AB ва AC томонларига перпендикуляр туширамиз. Натижада ўхшаш $\triangle ALD$; $\triangle ANK_1$; $\triangle AKN$; $\triangle ADD_1$ учбурчаклар ҳосил бўлади. Булардан (80- расм)

$$\frac{DL}{NK_1}=\frac{AD}{AN}=\frac{DD_1}{NK};$$

$$\frac{AL}{AK_1}=\frac{AD}{AN}=\frac{AD_1}{AK}$$

ларни ҳосил қиламиз. Натижада $DL\cdot NK=DD_1\cdot NK_1$; $AL\cdot AK=AD_1\cdot AK_1$ ҳосил бўлади. Шу билан T_{57} исбот қилинди.

T_{57} дан қуйидаги натижаларни ҳосил қилиш мумкин.

27- *натижа.* Бурчак изогонал тўғри чизиғида ётувчи нуқтанинг учбурчак томонларидаги проекциялари битта айланада ётади.

28- *натижа.* Бурчак изогоналларининг биридаги нуқтани бурчак томонларидаги проекцияси билан туташтирувчи тўғри чизиқ иккинчи изогоналга перпендикуляр бўлади.

29- *натижа.* Учбурчак ABC га ташқи чизилган доиранинг ихтиёрий учи билан туташтирилган радиуси шу учдан чиқувчи учбурчак баландлигига изогонал бўлади.

58- Штейнер теоремаси. *Учбурчак ABC нинг бир учидан чиққан изогоналларнинг асосларигача бўлган узунликлар кўпайтмасининг шу учбурчакнинг иккинчи учидан чиқувчи изогоналлар асосларигача бўлган узунликлар кўпайтмасига нисбати шу учларга ёпишган ён томонлар узунликлари квадратларининг нисбати кабидир.*

Исботи. Учбурчак ABC да AA_1, AA_2 изогоналлар бўлиб, $\angle BAA_1=\angle A_2AC$ бўлгани учун

$$\frac{S_{ABA_1}}{S_{A_2AC}}=\frac{AB\cdot AA_1}{AA_2\cdot AC}$$

ни ёза оламиз (80- расм) ёки

$$S_{ABA_1}:S_{A_2AC}=\frac{BA_1}{A_2C}\Rightarrow\frac{BA_1}{A_2C}=\frac{AB\cdot AA_1}{AA_2\cdot AC} \qquad (1)$$

бўлади. Худди шунга ўхшаш

$$S_{BAA_2}:S_{A_1AC}=\frac{AB\cdot AA_2}{AA_1\cdot AC}$$

ёки

$$\frac{S_{BAA_2}}{S_{A_1AC}}=\frac{BA_2}{A_1C}$$

бўлиб, бундан

$$\frac{BA_2}{A_1C} = \frac{AB \cdot AA_2}{A_1A \cdot AC} \tag{2}$$

ҳосил бўлади.

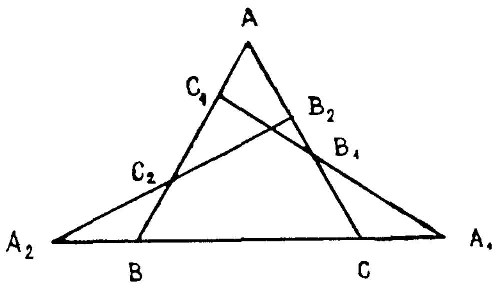
Энди (1) ва (2) ни ҳадлаб кўпайтирсак, у ҳолда

$$\frac{BA_1}{A_2C} \cdot \frac{BA_2}{A_1C} = \frac{AB \cdot AA_1}{AA_2 \cdot AC} \cdot \frac{AB \cdot AA_2}{AA_1 \cdot AC} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Демак,

$$\frac{BA_1}{A_2C} \cdot \frac{BA_2}{A_1C} = \frac{c^2}{b^2}$$

бўлиб, T_{58} исботланди.



81- расм.

30- *натижа*. Учбурчак ABC да AB ва CA ларни (80-расм) учбурчак A_1AA_2 учун изогоналлар деб қарасак, у ҳолда $(A_1A_2B) \times (A_1A_2C) = AA_1^2 : AA_2^2$ бўлади.

19- таъриф. Агар икки нуқта учбурчак томонининг ўртасидан бир хил узоқлашган бўлса, у ҳолда бундай нуқталар ***изотомик нуқталар***, агар бу нуқталарни шу томон қаршисидаги уч билан туташтирилган бўлса, бундай тўғри чизиқлар ***изотомик тўғри чизиқлар*** дейилади.

59- теорема. *Агар учбурчак ABC нинг трансверсали унинг томонларини* (81- расм), C_1, A_1, B_1 *нуқталарда кесиб ўтса, у ҳолда бу нуқталарга изотомик бўлган* C_2, A_2, B_2 *нуқталар ҳам бир тўғри чизиқда ётади.*

Исботи. T_{59} нинг шартига кўра C_2, A_2, B_2 нуқталар C_1, A_1, B_1 нуқталарга изотомик бўлгани учун ва кесмаларнинг йўналишини эътиборга олсак, у ҳолда $AC_1 = -BC_2$; $BA_1 = -CA_2$; $CB_1 = -AB_2$, $C_1B = -C_2A$; $A_1C = -A_2B$; $B_1A = -B_2C$ бўлади.

Энди топилган натижаларни эътиборга олиб, T_{43} ($T_м$) ни қўлласак, у ҳолда

$$\frac{AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1}{C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A} = \frac{BC_2 \cdot CA_2 \cdot AB_2}{C_2A \cdot A_2B \cdot B_2C} = -1$$

эканидан C_2, A_2, B_2 нуқталарнинг бир тўғри чизиқда ётиши келиб чиқади. Шу билан T_{59} исбот қилинди.

Қуйидаги масалаларни ечинг.

1. Учбурчак ABC да $A_1B_1C_1$ унинг ортомарказ учбурчаги бўлса, у ҳолда

$$P_н = \frac{h_a h_b h_c}{2S}$$

бўлишини исботланг.

2. Учбурчак ABC нинг бурчаклари ва унга ташқи чизилган айлана радиуси R берилган. Ортомарказ учбурчакнинг периметри $P_н = 2R \sin A \sin B \sin C$ бўлишини исботланг.

3. Агар учбурчак ABC нинг учларидан чиққан тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишса, у ҳолда уларга изогонал тўғри чизиқлар ҳам бир нуқтада кесишади.

4. Учбурчак ABC нинг учларидан чиқувчи чевианлар бир нуқтада кесишса, у ҳолда уларга изотомик тўғри чизиқлар ҳам бир нуқтада кесишади.

5. Агар учбурчак ABC нинг томонларида A_1 ва A_2, B_1 ва B_2, C_1 ва C_2 изотомик нуқталар олинган бўлса, у ҳолда $A_1B_1C_1$ ва $A_2B_2C_2$ учбурчаклар тенгдош эканини исботланг.

6. Учбурчак ABC нинг изогоналларида ётувчи нуқталарнинг ён томонларидаги проекцияси бир айланада ётишини исботланг.

7. Учбурчак ABC нинг учидан ортомарказгача ва ундан томонгача бўлган кесмаларнинг кўпайтмаси $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1 = CH \cdot HC_1 = k$ ўзгармас миқдордир.

8. Учбурчак ABC да унинг икки томонининг квадратларининг айирмаси уларни учинчи томондаги проекцияларининг квадратларининг айирмасига тенглигини исботланг.

9. Агар учбурчак ABC да m_a нинг узунлиги b ва c томонларга ўрта пропорционал бўлса, у ҳолда уларнинг айирмасидан тузилган квадратнинг диагонали учбурчакнинг учинчи томонига тенглигини исботланг.

10. Учбурчак медианалари квадратлари йиғиндисининг унинг томонлари квадратларининг йиғиндисига нисбати билан шу учбурчак юзининг ортомарказ учбурчак юзига нисбати орасидаги фарқни ҳисобланг.

2- §. Учбурчакнинг симедианаси

20- таъриф. Учбурчак ABC да исталган бурчакнинг медианасига изогонал бўлган тўғри чизиқ шу бурчакнинг ***симедианаси*** дейилади.

Бу келтирилган df 20 дан кўриниб турибдики, учбурчакнинг ихтиёрий бурчагидан чиқувчи биссектрисасига нисбатан шу бурчакдан чиқувчи медианага симметрик бўлган тўғри чизиқ симедиана бўлиши келиб чиқади. Агар қаралаётган учбурчагимиз тенг томонли бўлса, у ҳолда унинг медианаси, баландлиги, биссектрисаси, симедианаси устма- уст тушиши табиийдир. Маълумки, учбурчак устида қараладиган тушунчалар сони ўрта мактаб геометрия курсида бўлганлиги ва бу гео метрик масалаларни ечишда муҳим аҳамиятга эга эканлиги ҳақида аниқ фикрга келиш мумкин.

60- теорема. *Учбурчак ABC нинг исталган бурчагининг симедианаси шу бурчак қаршисидаги томонни қолган икки томон узунликлари квадратларининг нисбати каби бўлакларга бўлади.*

Исботи. Учбурчак ABC нинг A бурчак медианаси $\angle AA_1$ бўлиб, df 20 га кўра AT симедиана бўлгани учун $\angle BAT = \angle A_1AC$ эканлигини қайд (82- расм) қилиш мумкин.

$T_{.58}$ га асосан:

$$\frac{S_{BAT}}{S_{A_1AC}} = \frac{BT}{A_1C} = \frac{AB \cdot AT}{AA_1 \cdot AC}. \qquad (1)$$

Худди шунга ўхшаш:

$$\frac{S_{TAC}}{S_{BAA_1}} = \frac{TC}{BA_1} = \frac{AT \cdot AC}{AB \cdot AA_1}. \qquad (2)$$

Ҳосил қилинган (1) ва (2) тенгликларни ҳадлаб бўлсак, у ҳолда

$$\frac{BT}{A_1C} \cdot \frac{BA_1}{TC} = \frac{AB \cdot AT}{AA_1 \cdot AC} \cdot \frac{AA_1 \cdot AB}{AT \cdot AC} = \frac{AB^2}{AC^2} \qquad (3)$$

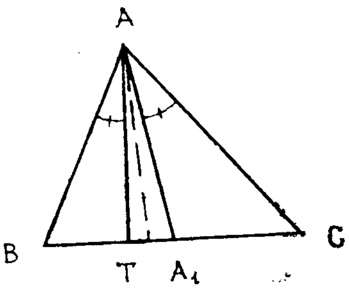
ҳосил бўлади. Бу ерда $BA_1 = A_1C$ эканидан

$$\frac{BT}{TC} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{c^2}{b^2}$$

ёки

$$\frac{BT}{CT} = -\frac{BT}{TC} = -\frac{c^2}{b^2}$$

ҳосил бўлади. Шу билан теорема исбот қилинди.



82- расм.

61- теорема. *Учбурчак ABC нинг ихтиёрий бурчагидан чиқувчи медиананинг шу бурчак симедианасига нисбати шу бурчакка ёпишган томонлар узунликлари кўпайтмасининг икки баробарини улар квадратлари йиғиндисига нисбати кабидир.*

Исботи. T_{61} нинг шартига кўра учбурчак ABC да AA_1 — медиана, AT — симедиана (82- расм) бўлганлиги ҳамда T_{60} га асосан $BT:TC = c^2:b^2$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\frac{AT}{AA_1} = \frac{BT \cdot AC}{CA_1 \cdot AB}$$

экани маълум.

$$\frac{BT}{TC} = \frac{c^2}{b^2}; \quad \frac{BC}{BT} = \frac{b^2 + c^2}{c^2}$$

ни ёза оламиз, бундан

$$BT = \frac{ac^2}{b^2 + c^2}$$

бўлиб,

$$CA_1 = \frac{a}{2}, \quad AB = c; \quad AC = b$$

эканлигидан

$$\frac{AT}{AA_1} = \frac{BT \cdot AC}{CA_1 \cdot AB} = \frac{2\,ac^2b}{(b^2 + c^2)\,ac} = \frac{2\,bc}{b^2 + c^2}$$

эканлиги келиб чиқади.

Демак,

$$\frac{AT}{AA_1} = \frac{2\,bc}{b^2 + c^2}$$

бўлар экан.

1- масала. Учбурчак ABC да $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$ бўлса, у ҳолда AT симедианани ҳисобланг.

Ечиш. Маълумки, T_{61} га асосан

$$AT : AA_1 = \frac{2bc}{b^2 + c^2}$$

экани ҳамда

$$AA_1 = m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

экани маълум.

Бу маълумотларни

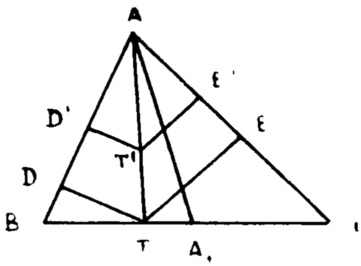
$$AT = AA_1 \cdot \frac{2bc}{b^2 + c^2}$$

га қўйсак,

$$AT = \frac{bc}{b^2 + c^2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

экани келиб чиқади.

62-теорема. *Учбурчак ABC да симедиана шундай нуқталарнинг геометрик ўрники, у нуқталардан учбурчак томонларигача бўлган масофалар нисбати шу бурчакка ёпишган томонлар нисбати каби бўлади.*



83-расм.

Исботи. Учбурчак ABC да AT симедиана бўлсин (83-расм), у ҳолда T нуқтадан AB ва AC томонларга мос ҳолда TD ва TE перпендикулярларни туширамиз, натижада

$$\frac{S_{BAT}}{S_{TAC}} = \frac{AB \cdot DT}{AC \cdot TE}. \tag{1}$$

T_{60} га асосан

$$\frac{S_{BAT}}{S_{TAC}} = \frac{BT}{TC} \tag{2}$$

эканлигидан ҳамда

$$\frac{BT}{TC} = \frac{AB^2}{AC^2} \tag{3}$$

дан бевосита

$$\frac{AB}{AC} \cdot \frac{DT}{TE} = \frac{AB^2}{AC^2} \ (4) \Rightarrow \frac{DT}{TE} = \frac{AB}{AC} \tag{5}$$

бўлиб, AT симедиана (5) шартни бажарувчи нуқталарнинг геометрик ўрни экани келиб чиқади. Шу билан T_{62} исбот қилинди.

63- **теорема.** *Учбурчак ABC нинг симедианалари бир нуқтада кесишади.*

Исботи. Учбурчак ABC нинг A бурчагидан чиққан симедиана s_a, B бурчагидан чиққани s_b ва C дан чиққани s_c бўлсин. s_a ва s_b лар $Л$ нуқтада кесишсин дейлик ва бу нуқтадан учбурчак томонларигача бўлган масофани мос ҳолда y_a, y_b, y_c деб белгилайлик, у ҳолда T_{62} га асосан

$$\frac{y_a}{y_c} = \frac{a}{c}, \tag{1}$$

$$\frac{y_b}{y_c} = \frac{b}{c} \tag{2}$$

лардан s_a ва s_b ларни $Л$ нуқтада кесишиши келиб чиқади. Энди s_c нинг ҳам $Л$ нуқтадан ўтишини кўрсатамиз, бунинг учун (1) ва (2) муносабатларни ҳадлаб бўлсак, у ҳолда

$$\frac{y_b}{y_a} = \frac{b}{a}$$

нисбат келиб чиқади, бундан s_c нинг ҳам $Л$ дан ўтиши келиб чиқади. Шу билан T_{63} исбот қилинди.

Учбурчак симедианаларининг кесишиш $Л$ нуқтаси ***Лемуан нуқтаси*** дейилади.

2- **масала.** Учбурчакдаги Лемуан нуқтасидан унинг томонларигача бўлган масофалар узунликлари топилсин.

Ечиш. Маълумки, T_{61}, T_{62}, T_{63} ларга асосан

$$\frac{y_a}{a} = \frac{y_b}{b} = \frac{y_c}{c} = \frac{ay_a}{a^2} = \frac{by_b}{b^2} = \frac{cy_c}{c^2}$$

эканидан бевосита

$$\frac{ay_a + by_b + cy_c}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{ay_a}{a^2} = \frac{y_a}{a}$$

бўлиб,

$$ay_a + by_b + cy_c = 2S_{ABC} \text{ га}$$

асосан

$$y_a = \frac{2aS}{a^2+b^2+c^2} = \frac{a^2h_a}{a^2 + b^2 + c^2}$$

эканини ҳосил қиламиз. Худди шунга ўхшаш

$$y_b = \frac{b^2 h_b}{a^2 + b^2 + c^2};$$

$$y_c = \frac{c^2 h_c}{a^2 + b^2 + c^2}$$

ларни ёза оламиз.

Қуйидаги масалаларни ечинг:

1. Чеви теоремасидан фойдаланиб, симедианалар бир нуқтада кесишишини исботланг.

2. Стюарт теоремасидан фойдаланиб, симедиана узунлигини ҳисобланг.

3. Агар учбурчак ABC га ташқи чизилган айлананинг A нуқтасига ўтказилган уринма унинг BC томонининг давоми билан D нуқтада кесишса, у ҳолда $CD : BD = b^2 : c^2$ эканини исботланг. Бунда AD учбурчак ABC нинг ташқи симедианаси дейилади.

4. Агар 3- масаладаги шарт бажарилса, у ҳолда

$$AD = \frac{abc}{b^2 - c^2}$$

бўлишини исботланг.

5. Агар учбурчак симедианалари $Л$ нуқтада кесишса, у ҳолда

$$a^2 \cdot AЛ + b^2 \cdot BЛ + c^2 \cdot CЛ = \frac{a^2 b^2 c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

бўлишини исботланг.

6. Агар m_a, m_b, m_c учбурчакнинг медианалари бўлса ва $Л$ Лемуан нуқтаси бўлса, у ҳолда $(a \cdot AЛ) : (b \cdot BЛ) : (c \cdot CЛ) = m_a : m_b : m_c$ бўлишини исботланг.

7. Тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчагидан туширилган баландликнинг ўртаси Лемуан нуқтаси бўлишини кўрсатинг.

8. Агар учбурчак ABC да y_a, y_b, y_c лар Лемуан нуқтасидан учбурчакнинг мос ҳолда a, b, c томонларигача бўлган масофалар бўлса, у ҳолда $y_a h_a = y_b h_b = y_c h_c$ бўлишини исботланг.

3-§. Учбурчакнинг элементларини ҳисоблашда тригонометриянинг татбиқи

Учбурчаклар устида айрим ўлчаш, исботлаш, ҳисоблашларни олиб боришда бевосита тригонометрик функциялар ва уларнинг учбурчак элементлари билан боғланишлари ҳақидаги маълумотларни келтиришга ёки излаб топишга аҳамият берилади. Шу боис аввал маълумотларни эслаб кўрайлик:

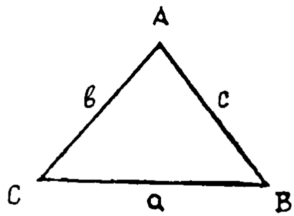
1. **Синуслар** ***теоремаси***;

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}, \\ A + B + C = \pi. \end{cases} \qquad \text{I}$$

2. **64-проекция теоремаси.** *Ҳар қандай учбурчакда*

$$\begin{cases} a = b \cos C + c \cos B, \\ b = c \cos A + a \cos C, \\ c = a \cos B + b \cos A, \\ A + B + C = \pi \end{cases} \qquad \text{II}$$

муносабатлар бирлашмаси ўринлидир.



84-расм.

Исботи. Ҳақиқатан ҳам учбурчак ABC да CAB синиқ чизиқнинг CB томонидаги проекциясини (84-расм) қуйидагича пр $CAB =$ пр $CA +$ пр $AB = b \cos C + c \cos B = a$ аниқлаш мумкин. Шу жараённи ҳар бир томон учун қўлласак, у ҳолда талаб қилинган натижа ҳосил қилинади.

3. **Косинуслар теоремаси;**

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \\ A + B + C = \pi. \end{cases} \qquad \text{III}$$

4. Учбурчак ABC да $A + B + C = \pi$ бўлганлиги сабабли $A = \pi - (B + C)$ ёки $A + B = \pi - C$ шартларидан, ёки $\frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{2}$ дан $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ алмаштиришларни қўллаб, бевосита

$$\sin A = \sin [\pi - (B + C)] = \sin (B + C);$$

$$\cos A = -\cos (B + C); \ \operatorname{tg} A = -\operatorname{tg} (B + C)$$

ларни ҳосил қилиш билан бирга $\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B+C}{2}$; $\cos\frac{A}{2}=$ $=\sin\frac{B+C}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\operatorname{ctg}\frac{B+C}{2}$ ларни ҳосил қилиш имкониятига ҳам эгамиз.

5. Агар $\angle A=\alpha$; $\angle B=\beta$; $\angle C=\gamma$ десак ва синуслар теоремасини учбурчакка ташқи чизилган айлана радиуси орқали боғласак, у ҳолда $a=2R\sin\alpha$; $b=2R\sin\beta$; $c=2R\sin\gamma$ эканидан $p=\frac{a+b+c}{2}=R(\sin\alpha+\sin\beta+$ $+\sin\gamma)$ бўлиб, бундан бевосита $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\frac{p}{R}$ экани ёки $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\frac{pr}{2R^2}$, $\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+$ $+\sin\alpha\sin\gamma=\frac{1}{4R^2}(p^2+r^2+4Rr)$ эканини оламиз.

6. Агар $a=2R\sin\alpha$ ва $p-a=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ ларни ҳадма-ҳад қўшиб ҳамда $\sin\alpha$, $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ ларни $\cos\alpha$ орқали ифодалаб, $2R\sqrt{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}+$ $+r\sqrt{(1+\cos\alpha):(1-\cos\alpha)}=p$ нинг иккала томонини квадратга ошириб ва ихчамлаб, [5]

$$4R^2\cos^3\alpha-4R(R+r)\cos^2\alpha+(p^2+r^2-$$
$$-4R^2)\cos\alpha+(2R+r)^2-p^2=0$$

тенгликка эга бўламиз. Сўнгра бу тенгликни умумийлаштириб,

$$4R^2x^3-4R(R+r)x^2+(p^2+r^2-4R^2)x+$$
$$+(2R+r)^2-p^2=0\ [5]$$

кўринишга келтирамиз. Бу тенгламанинг илдизларини мос ҳолда $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ десак, у ҳолда

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\frac{R+r}{R}$$

ҳамда

$$\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cos\gamma+\cos\beta\cos\gamma=\frac{p^2+r^2-4R^2}{4R^2},$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\frac{1}{4R^2}(p^2-(2R+r^2)$$

ларни ҳосил қиламиз.

1- мисол. Агар $A+B+C=\pi$ бўлса, $\sin A+\sin B+$ $+\sin C=4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{B+C}{2}$ бўлишини исботланг.

Исботи. $\sin A+\sin B+\sin C=\sin A+\sin B+\sin(A+$ $+B)=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}=$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)=$$

$$=4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{B+C}{2}.$$

2- мисол. Агар $A+B+C=\pi$ бўлса, у ҳолда

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1$$

бўлишини исботланг.

Исботи. Шартга кўра $A+B+C=\pi$; $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+$ $+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}$ эканидан

$$\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\left(1-\right.$$

$$\left.-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}-\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)=0$$

бўлади. Бундан $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=1$ экани келиб чиқади.

Юқорида келтирилган маълумотларга ҳамда $\alpha+\beta+$ $+\gamma=\pi$ эканидан фойдаланиб, қуйидагиларни исботланг:

1. Ўтмас бурчакли учбурчак учун:
$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$ бўлишини исботланг.

2. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

3. $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

4. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$.

5. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\frac{1}{4R^2}(p^2-r^2-4Rr)$.

6. $\sin^3\alpha+\sin^3\beta+\sin^3\gamma=\frac{1}{4R^3}(p^3-3r^2-6Rr)$.

7. $\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\sin\beta}+\dfrac{1}{\sin\gamma}=\dfrac{p^2+r^2+4Rr}{2pr}.$

8. $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\gamma}+\dfrac{\sin\beta+\sin\gamma}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha+\sin\gamma}{\sin\beta}=$

$=\dfrac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr}.$

9. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\dfrac{1}{2R^2}(2Rr+6R^2+r^2-p^2).$

10. $\cos^3\alpha+\cos^3\beta+\cos^3\gamma=\dfrac{1}{4R^3}[(2R+r)^3-3p^2r]-1.$

11. $\dfrac{1}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\cos\beta}+\dfrac{1}{\cos\gamma}=\dfrac{p^2+r^2-4R^2}{p^2-(2R+r)^2}.$

12. $\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos\gamma}+\dfrac{\cos\beta+\cos\gamma}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha+\cos\gamma}{\cos\beta}=$

$=\dfrac{(R+r)(p^2+r^2-4R^2)}{R[p^2-(2R+r)^2]}-3.$

13. $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}\cdot\dfrac{\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\beta+\cos\gamma}\cdot\dfrac{\sin\alpha+\sin\gamma}{\cos\alpha+\cos\gamma}=\dfrac{p}{r}.$

14. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\dfrac{2pr}{p^2-(2R+r)^2}.$

15. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=\dfrac{p^2-r^2-4Rr}{p^2-(2R+r)^2}.$

16. $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta}+\dfrac{1}{\operatorname{tg}\gamma}=\dfrac{p^2-r^2-4Rr}{4pr}.$

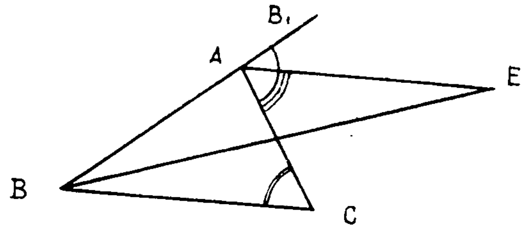
17. $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=S\left(\dfrac{1}{h_a^2}+\dfrac{1}{h_b^2}+\dfrac{1}{h_c^2}\right).$

18. $\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta+\operatorname{ctg}^2\gamma=\dfrac{1}{4S^2}(p^2-r^2-4Rr)^2-2.$

4-§. Учбурчакда тенгсизлик

Учбурчакнинг томони, бурчаги, ички ва ташқи чизилган айлана радиуси ва бошқа элементларига кўра тенглик тушунчаси қатори тенгсизлик тушунчаси ҳам муҳим бўлиб, бу тушунча учбурчакнинг бирор қонунияти мазмунини очиб беради.

65-теорема. *Учбурчак ABC нинг ихтиёрий ташқи*

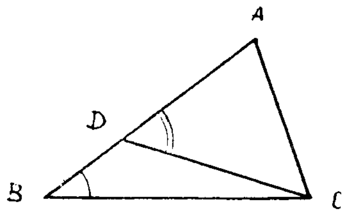


85- расм.

бурчаги ўзига қўшни бўлмаган ички бурчакларининг ҳар биридан каттадир.

Исботи. Учбурчак ABC нинг BD медианасини (85-расм) ўтказиб, уни шунча узунликка давом эттирамиз ва E нуқтани A нуқта билан туташтирсак, у ҳолда DAE ва DBC учбурчаклар ҳосил бўлиб, унда $\angle DAE = \angle BCD$ ва E нуқта $\angle CAB_1$ ни ичида ётганлиги учун $\angle BCD < \angle CAB_1$ бўлади. $\angle CAB_1 = \angle B + \angle C$ эканидан $\angle CAB_1 > \angle B$ экани келиб чиқади. Шу билан теорема исбот қилинди.

66-теорема. *Учбурчак ABC да катта томон қаршисида катта бурчак ётади ва аксинча.*



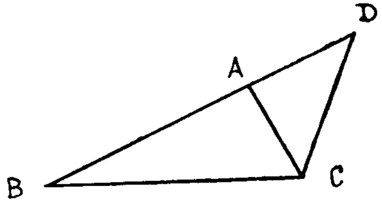
86- расм.

Исботи. Учбурчак ABC да (86-расм) $AB > AC$ бўлса, $\angle C > \angle B$ эканини кўрсатамиз. Бунинг учун AB томонидан $AC = AD$ кесмани ажратамиз ва уни C уч билан туташтирамиз. DC кесма C бурчакнинг ички қисмига жойлашгани учун ACD бурчак C бурчакдан кичик бўлганлигини ёки ΔADC да $AD = AC$ бўлганлигидан $\angle ACD = \angle ADC$ бўлади. T_{65} га асосан $\angle ADC > \angle B$ бўлиб, бундан $\angle C > \angle B$ экани келиб чиқади. Шу билан T_{66} исбот бўлди.

67-теорема. *Учбурчак ABC нинг исталган томони қолган икки томон йиғиндисидан кичик бўлади.*

Исботи. Учбурчак ABC да (87-расм) BA нинг давомига $AC = AD$ ни қўямиз, натижада D бурчаги ACD бурчакка тенг бўлади, бундан $\angle BCD > \angle D$ ва $\angle BCD > \angle BAC$ экани келиб чиқади. Демак, T_{66} га асосан $AD >$

$> BC$ бўлиб, бундан $BA + AC > BC$ экани келиб чиқади. Шу билан T_{67} исбот қилинди.



87- расм.

31-*натижа.* Ихтиёрий учбурчакнинг исталган икки томони узунликларининг айирмаси учинчи томон узунлигидан кичик бўлади.

32-*натижа.* Учта нуқта A, B, C лар қандай бўлмасин текисликда $BC - AC \leqslant AB \leqslant BC + CA$ бўлиб, тенглик бу нуқталар бир тўғри чизиқда ётганда ўринли бўлади.

1-масала. Агар a, b, c — учбурчакнинг томонлари, $p = a + b + c$ бўлса, у ҳолда $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{p}$ бўлишини исботланг.

Исботи. Шартга кўра a, b, c — учбурчакнинг томонлари, $p = a + b + c$ эканлигидан $(ab + ac + bc)(a + b + c)$ кўпайтмани қараймиз, яъни

$$(ab + ac + bc)(a + b + c) = a^2b + b^2a + c^2a + a^2c + b^2c + c^2b + 3abc$$

бўлиб, $a^2b + c^2a + b^2c \geqslant 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 3abc$ эканидан $b^2a + a^2c + c^2b \geqslant 3abc$ келиб чиқади. Демак, $(ab + ac + bc)(a + b + c) \geqslant 3abc + 3abc + 3abc$, бундан $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a + b + c) \geqslant 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{p}$ бўлади. Шу билан исбот қилинди.

2-масала. Ҳар қандай учбурчакда $p^2 \geqslant 12\sqrt{3}\,S$ эканини исботланг.

Исботи. Шартга кўра $p = a + b + c$ дан $\frac{p}{2} + \frac{a+b+c}{2}$ бўлиб,

$$27\,S^2 = 27\,\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right) \leqslant$$

$$\leqslant 27\,\frac{p}{2}\left(\frac{\frac{p}{2} - a + \frac{p}{2} - b + \frac{p}{2} - c}{3}\right)^3 =$$

$$= 27\frac{p}{2}\left(\frac{\frac{3p}{2}-p}{3}\right)^3 = \frac{p^4}{16}$$

бўлади, бундан $p^4 \geqslant 16\cdot 27S^2$ ёки $p^2 \geqslant 12\sqrt{3}S$ бўлади. Шу билан исбот қилинди.

3-масала. Учбурчак ABC нинг бурчаклари α, β, γ бўлса, у ҳолда $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8}$ эканини исботланг.

Исботи. $t = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \right.$ $\left.-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}$

бўлади. Агар $x = \sin\frac{\gamma}{2}$ десак, у ҳолда $x^2 - x\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2t = 0$ тенглама ҳосил бўлади.

$$D = \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 8t \geqslant 0 \Leftrightarrow t \leqslant \frac{1}{8}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{8} \Rightarrow t \leqslant \frac{1}{8}.$$

Шу билан масала исбот бўлди.

4-масала. Учбурчак ABC нинг бурчаклари мос ҳолда α, β, γ бўлса, $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} \geqslant 1$ бўлишини исботланг.

Исботи. $1 = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ экани ва бунга Буняковский тенгсизлигини татбиқ этсак, у ҳолда

$$1 = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}} \times$$
$$\times \sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}} =$$
$$= \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}$$

ҳосил бўлади. Демак, $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} \geqslant 1$ бўлар экан.

5-масала. Учбурчак ABC ўткир бурчакли бўлганда $p > 2R + r$ бўлишини, тўғри бурчакли бўлганда $p = 2R + r$ бўлишини ва ўтмас бурчакли бўлганда $p < 2R + r$ бўлишини исботланг $\left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$.

Исботи. Олдинги параграфда $p^2 - (2R + r)^2 = 4R^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$ муносабатини ҳосил қилган эдик. Демак, α, β, γ лар ўткир бурчак бўлганда $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$; $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ бўлгани учун уларнинг косинуслари мусбат. Демак,

$$p^2 - (2k + r)^2 > 0 \Rightarrow p^2 > (2R + r)^2 \Rightarrow p > 2R + r$$

$$\left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$$

бўлиб, тўғри бурчакли учбурчакда $\gamma = \frac{\pi}{2}$ бўлгани учун $\cos\gamma = 0$ эканидан $p^2 - (2R + r)^2 = 0 \Rightarrow p = 2R + r$ ҳамда $\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$ эканидан $\cos\gamma < 0$ бўлиб, $p^2 - (2R + r)^2 < 0 \Rightarrow p < 2R + r$ экани келиб чиқади. Шу билан исбот бўлди.

Шу келтирилган масалаларга таянган ҳолда бошланғич маълумотлар сифатида қуйидаги тенгсизликларни тавсия этиш мумкин, яъни:

а) Агар $R \geqslant 2r$ бўлса, $27r^2 \leqslant 16Rr - 5r^2 \Rightarrow 27r \leqslant 16R - 5r$ ва $4R^2 + 4Rr + 3r^2 \leqslant \frac{27}{4}R^2$ ёки $3\sqrt{3}\, r \leqslant p \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}R$ (бу ерда $p = \frac{a+b+c}{2}$) бўлади. Бундан $36r^2 \leqslant ab + bc + ac \leqslant 9R^2$ ёки $12\sqrt{3}\, Rr^2 \leqslant abc \leqslant 6\sqrt{3}\, R^2 r$ ларни келтириш мумкин.

Қуйидаги масалаларни ечинг:

1. Агар учбурчак ABC да $a > b$ бўлса, $a + h_a \geqslant b + h_b$ эканини исботланг.

2. Агар учбурчак ABC да $p = a + b + c$ ва S учбурчак юзи бўлса, у ҳолда:

а) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{p^2}{3}$; б) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\, S$;

в) $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant \frac{p^3}{9}$; г) $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant \frac{4\sqrt{3}}{3} Sp$;

д) $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant 16 S^2$ бўлишини исботланг.

3. Агар $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ бўлса, $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \leqslant \frac{3}{2}$ бўлишини исботланг.

4. Агар $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ бўлса, $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqslant \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$ бўлади. Исботланг.

5. Агар $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ бўлса, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{3\sqrt{3}}$ бўлишини исботланг.

6. Агар $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ бўлса;

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \begin{cases} > 2, \text{ агар } 0 < \alpha,\ \beta,\ \gamma < \frac{\pi}{2}; \\ < 2, \text{ агар } 0 < \alpha,\ \beta < \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2} < \gamma < \pi; \\ = 2, \text{ агар } \gamma = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

бўлишини исботланг.

7. Учбурчак ичида олинган ихтиёрий K нуқта учун ва $p = \frac{a+b+c}{2}$ да $KA\cos\frac{\alpha}{2} + KB\cos\frac{\beta}{2} + KC\cos\frac{\gamma}{2} \geqslant p$ бўлишини исботланг (бу ерда $\angle A = \alpha$; $\angle B = \beta$; $\angle C = \gamma$).

8. Агар $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ бўлса, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geqslant \geqslant \frac{3}{4}$ бўлишини исботланг.

9. Ўтмас бўлмаган учбурчаклар учун $\sin\alpha + \sin\beta + + \sin\gamma > \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$ бўлишини исботланг.

Учбурчак ABC да r — ички чизилган, R — ташқи чизилган, r_a a томонига ташқи-ички чизилган айлана радиуси бўлса, $p = \frac{a+b+c}{2}$ бўлганда қуйидаги муносабатларни исботланг:

10. $\frac{\sqrt{3}}{R} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqslant \frac{\sqrt{3}R}{4r^2}$.

11. $\frac{1}{R^2} \leqslant \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \leqslant \frac{1}{4r^2}$.

12. $9r^2 \leqslant (p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p- -a) \leqslant \frac{9}{4}R^2$.

13. $\frac{2\sqrt{3}}{R} \leqslant \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \leqslant \frac{3R}{2\sqrt{3}\, r^2}$.

14. $9r \leqslant h_a + h_b + h_c \leqslant \frac{9}{2}R$.

15. $27r^2 \leqslant h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c \leqslant \frac{27}{4}R^2$.

16. $27r^2 \leqslant h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \leqslant p^2 \leqslant \frac{27}{4}R^2$.

17. $9r \leqslant r_a + r_b + r_c \leqslant \frac{9}{2}R$.

18. $\frac{r_a + r_b}{r_c} + \frac{r_b + r_c}{r_a} + \frac{r_a + r_c}{r_b} \geqslant 6$.

19. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geqslant 3\sqrt{3}\,\frac{r}{R}$.

20. $6 \leqslant \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\gamma} + \frac{\sin\alpha + \sin\gamma}{\sin\beta} + \frac{\sin\beta + \sin\gamma}{\sin\alpha} \leqslant$
$\leqslant \frac{3R}{r}$.

21. $4 \leqslant \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta} + \frac{1}{\sin\beta\sin\gamma} + \frac{1}{\sin\alpha\sin\gamma} \leqslant \frac{2R}{r}$.

22. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \geqslant \frac{3r}{R}$.

23. $\frac{3}{8} \leqslant \cos^3\alpha + \cos^3\beta + \cos^3\gamma \leqslant \frac{1}{4R^2}(4R^2 + 12Rr -$
$- 34r^2)$.

24. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \geqslant \frac{2r}{3\sqrt{3}\,R}$.

25. $2\sqrt{3}\,\frac{r}{R} \leqslant \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{\sqrt{3}\,R}{2r}$.

26. $\frac{4r^2}{R^2} \leqslant (\cos\alpha + \cos\beta)(\cos\beta + \cos\gamma)(\cos\alpha +$
$+ \cos\gamma) \leqslant 1$.

27. $\frac{8}{3\sqrt{3}} \leqslant (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)(\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma)(\operatorname{ctg}\alpha +$
$+ \operatorname{ctg}\gamma) \leqslant \frac{2R^2}{3\sqrt{3}\,r^2}$.

28. $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \geqslant \frac{3\sqrt{3}\,r^2}{2R^2}$.

ИЛОВА

УЧБУРЧАКЛАРГА ОИД АСОСИЙ ФОРМУЛАЛАР

Ихтиёрий учбурчак

1. Периметр

$P = a + b + c;$

$p = \frac{1}{2}(a + b + c).$

P — периметри; a, b, c — томонларининг узунлиги;
p — ярим периметр.

2. Ички бурчаклар йиғиндиси

$A + B + C = 180°,$

A, B, C, — бурчак катталиклари.

3. Косинуслар теоремаси

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B;$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$

a. b, c — томонларининг узунликлари;
A, B, C — бурчак катталиклари.

4. Синуслар теоремаси

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C};$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R,$$

a, b, c — томонларининг узунликлари;
A, B. C — бурчак катталиклари;
R — ташқи чизилган айлананинг радиуси.

5. Юз (S)

$$S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c;$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B;$$

$$S = pr,$$

a, b, c — томонларининг узунликлари;
A, B, C — бурчак катталиклари;
h_a, h_b, h_c — баландликлар;
r — ички чизилган айлана радиуси.

6. Герон формуласи

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)},$$

p — ярим периметр.

7. Баландликлар

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r},$$

h_a, h_b, h_c — баландликлар,
r — ички чизилган айлана радиуси.

8. Медиана

$$\frac{b}{c}=\frac{m_a}{n},$$

a, b, c — томонларининг узунликлари;
m_a — a томонга ўтказилган медиана.

9. Биссектрисанинг хоссалари

$$\frac{b}{c}=\frac{m}{n},$$

b, c — томонларининг узунликлари;
m, n — a томонга туширилган A бурчак биссектрисаси ажратган кесмаларнинг узунликлари.

10. Ташқи чизилган айлананинг радиуси (R)

$$R=\frac{abc}{4S};\quad R=\frac{a}{2\sin A},$$

a, b, c — томонларининг узунликлари;
S — юзи;
A — A бурчак катталиги.

Тўғри бурчакли учбурчак

11. Пифагор теоремаси

$$c^2=b^2+a^2,$$

a, b — катетлар узунликлари;
c — гипотенуза узунлиги;

12. Метрик муносабатлар

$$h_c^2=a_1b_1;$$
$$a^2=c\cdot a_1;\quad b^2=c\cdot b_1,$$

h_c — баландлик;
a_1, b_1 — катетларнинг гипотенузадаги проекциялари.

13. Ўткир бурчаклари йиғиндиси

$$A+B=90°;$$

A, B — ўткир бурчаклари.

14. Томонлари билан бурчаклари орасидаги боғланишлар

$$a=c\cdot\sin A;$$
$$a=c\cdot\cos B;$$
$$a=b\cdot\operatorname{tg} A,$$

a, b — катетлар узунликлари;
c — гипотенуза узунлиги;
A, B — ўткир бурчаклар катталиклари.

15. Юз (S)

$$S=\frac{1}{2}ab,$$

a, b — катетлар узунлиги.

16. Ташқи чизилган айлана радиуси (R)

$$R=\frac{c}{2},$$

c — гипотенуза узунлиги.

17. Ички чизилган айлана радиуси (r)

$$r=\frac{a+b-c}{2},$$

a, b — катетлар узунликлари;
c — гипотенуза узунлиги.

Мунтазам учбурчак

18. Периметр (P)

$P = 3a$, a — томонлар узунлиги

19. Бурчак катталиги

$A = B = C = 60°$, A, B, C — бурчаклар катталиги

20. Баландлик (h)

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, a — томонлар узунлиги

21. Ички чизилган айлана радиуси (R)

$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $R = 2r$, a — томонлар узунлиги.

22. Ташқи чизилган айлана радиуси (r)

$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, a — томонлар узунлиги.

23. Юз (S)

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, a — томонлар узунлиги.

АДАБИЕТ

1. Д. Ефремов. Новая геометрия треугольника. Издание «Вестника опытной физики и элементарной математики», Одесса, 1903.

2. Ж. Адамар. Элементарная геометрия, ч. I. Учпедгиз. 1936.

3. Н. Ф. Четверухин. Введение в высшую геометрию. Учпедгиз. 1934.

4. С. И. Зетель. Новая геометрия треугольника. Учпедгиз. 1962.

5. В. П. Солтан, С. И. Мейдман. Тождества и неравенства в треугольнике. Кишинев, «Штиинца», 1982.

6. А. Кисилев. Геометрия (планиметрия). М. 1965.

7. М. Попруженко. Сборник геометрических задач. Планиметрия. Учпедгиз. 1936.

8. Б. Делоне и О. Житомирский. Геометрия и тригонометрия, задачи с решениями. Научное книгоиздательство. 1929.

9. А. В. Погорелов. Геометрия. 7—11, «Ўқитувчи» Т., 1991.

МУНДАРИЖА

Кириш 3

I боб. **Учбурчак ва унинг бошқа шакллар билан боғлиқлиги ҳақида содда тушунчалар**

1-§. Учбурчак 4
2-§. Учбурчакнинг ва у билан боғлиқ шаклларнинг элементлари орасидаги метрик муносабатлар 9
3-§. Айлана ва доира 15
4-§. Учбурчакнинг юзи. Учбурчакнинг доира билан ўзаро алоқаси 21

II боб. **Учбурчакнинг асосий нуқталари, чизиқлари ва улардан келиб чиқадиган муносабатлар**

1-§. Чевианлар 30
2-§. Учбурчакнинг недианаси 43

III боб. **Учбурчакнинг трансверсали ва учбурчакнинг муҳим нуқталари орасидаги масофа**

1-§. Учбурчакнинг ва кўпбурчакнинг трансверсали 49
2-§. Кесманинг гармоник бўлинмаси 56
3-§. Эйлер айланаси ва учбурчакдаги муҳим нуқталар орасидаги масофа 61

IV боб. **Учбурчакка ички ва ташқи чизилган учбурчаклар. Учбурчакдаги асосий муносабатлар**

1-§. Учбурчакда антипараллеллар. Ортомарказ ва тангенциал учбурчаклар. Учбурчакнинг изогонал тўғри чизиғи ва изотомик нуқтаси 68
2-§. Учбурчакнинг симедианаси 77
3-§. Учбурчакнинг элементларини ҳисоблашда тригонометриянинг татбиқи 82
4-§. Учбурчакда тенгсизлик 85

Илова 92

Адабиёт 94

Тўлаганов Турғун Рихсиевич

УЧБУРЧАК ГЕОМЕТРИЯСИ

Педагогика институтлари, билим юртлари, мактаб ўқитувчилари учун ўқув қўлланма

Тошкент «Ўқитувчи» 1997

Таҳририят мудири М. *Пўлатов*
Муҳаррир С. *Бекбоева*
Расмлар муҳаррири М. *Кудряшова*
Техник муҳаррир С. *Турсунова*
Мусаҳҳиҳ З. *Содиқова*

ИБ 7221

Теришга берилди 21.02.97. Босишга рухсат этилди 27.05.97. Бичими $84 \times 108/_{32}$ Тип. қоғози. Кегли 10 шпонсиз. Литературная гарнитураси. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. т. 5,04. Шартли кр-отт 5.25. Нашр. т. 5,00. 1000 нусхада. Буюртма №2898

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент, 129. Навоий кўчаси, 30. Шартнома 09—167—96

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот комитетининг Тошполиграфкомбинати. Тошкент. Навоий кўчаси, 30. 1997.