МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Ю.Н. Черемных

МИКРОЭКОНОМИКА
ПРОДВИНУТЫЙ УРОВЕНЬ

УЧЕБНИК

УДК 330(075.8)
ББК 65.012.2я73
Ч00 464

Ч00 **Черемных Ю.Н.** Микроэкономика. Продвинутый уровень: Учебник. – М.: ИНФРА-М, 2008. – 844 с. – (Учебники экономического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова).

ISBN 978-5-16-002041-9

Учебник включает темы курса «Микроэкономика. Продвинутый уровень», для анализа которых используется разнообразный математический аппарат. Главы учебника заканчиваются учебно-методическими материалами, включающими вопросы, упражнения и задачи для самоконтроля, а также вопросы и задачи, которые могут служить ориентирами при составлении преподавателями контрольных работ.

Для студентов бакалавриата, магистратуры и аспирантов экономических факультетов университетов и экономических вузов.

Подготовлено при содействии НФПК — Национального фонда подготовки кадров в рамках Программы «Совершенствование преподавания социально-экономических дисциплин в вузах» Инновационного проекта развития образования.

ББК 65.012.2я73

ISBN 978-5-16-002041-9

250-летию
Московского Государственного
Университета им. М.В. Ломоносова
посвящается

Уважаемый читатель!

Настоящий учебник выходит в рамках серии «Учебники экономического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова», венчающей многолетние усилия коллектива факультета по обновлению содержания и структуры университетского экономического образования.

Переход страны к рынку потребовал пересмотра профессии экономиста, освоения и применения невостребованных ранее знаний, известных, может быть, лишь ограниченному кругу критиков «буржуазной» экономической мысли.

Для обогащения содержания экономического образования путем включения в него новых экономических дисциплин и обновления ряда традиционных нужно было переобучить преподавателей и решить проблему учебников. Первые попытки включения в учебные планы новых дисциплин показали невозможность этого в рамках одной ступени, поэтому, обновляя содержание, пришлось попутно решать проблему перевода обучения на двухступенчатую систему.

Истекшие 10 с небольшим лет — это годы освоения технологии двухступенчатого образования «бакалавр–магистр», которое факультет осуществляет без параллельной подготовки специалистов. Присоединение страны к Болонскому процессу сделало этот переход необратимым.

Все эти годы велась переподготовка преподавательского корпуса: благодаря программам международного сотрудничества около 160 преподавателей факультета в среднем не меньше двух раз стажировались в лучших зарубежных университетах.

Что касается учебников, то первые годы приходилось использовать лучшие зарубежные учебники, многие из которых были переведены преподавателями на русский язык. Сейчас пришло время готовить качественные отечественные учебники. Преподавательский корпус имеет возможность создавать оригинальные учебники и учебные пособия, подготовленные с учетом опыта преподавания и дифференцированные по уровню подготовки слушателей (учебники для программ бакалавров и учебники для программ магистров).

Решению этой задачи способствовало и участие факультета в Инновационном проекте Министерства образования РФ, финансируемом Всемирным банком. Непосредственным исполнителем проекта стал Национальный фонд подготовки кадров.

Благодаря этому проекту факультет в течение трех лет осуществил свой проект «Совершенствование высшего экономического образования в МГУ», в результате чего преподаватели экономического факультета подготовили 74 учебника и учебных пособий по основным дисциплинам, формирующим профессии экономистов и менеджеров.

Мы считаем, что данные учебники в полной мере отражают наиболее важные достижения университетской экономической мысли, необходимые для полноценной подготовки экономистов и управленцев высшего звена.

Сейчас на экономическом факультете МГУ обучается более 3000 студентов, факультет располагает самой большой в стране магистратурой по экономике, наибольшим числом аспирантов по экономическим специальностям. Образовательное «поле» насчитывает более 300 общих дисциплин и специальных курсов. Часть общих курсов представлена в данной серии учебников.

Коллектив факультета с благодарностью примет замечания и предложения относительно улучшения предложенной серии учебников.

В.П. Колесов

декан экономического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова
профессор, доктор экономических наук

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий учебник «Микроэкономика. Продвинутый уровень» подготовлен на базе курса «Микроэкономика – 3», который автор читал более 10 лет студентам 1-го курса Школы магистров экономического факультета МГУ. При подготовке курса «Микроэкономика – 3» и учебника «Микроэкономика. Продвинутый уровень» автор использовал опыт преподавания курса «Экономико-математическое моделирование», который (под разными названиями) он читал более 20 лет студентам отделения «Планирование и экономическая кибернетика», а позже студентам отделения «Математическая экономика» экономического факультета МГУ, опыт преподавания западными авторами курса микроэкономики продвинутого уровня, который был аккумулирован в объемных томах с разными названиями – от микроэкономики до микроэкономической теории, результаты и методические приемы, локализованные в многочисленных позициях списков литературы к главам настоящего учебника.

Некоторые разделы (в частности, версии теорем об огибающих в теории потребления и производства) продвинутого курса по микроэкономике читались автором в курсе «Микроэкономика – 2» студентам Школы бакалавров экономического факультета МГУ. Эти разделы, естественно, были включены в настоящий учебник «Микроэкономика. Продвинутый уровень».

Автор выражает искреннюю и глубокую благодарность:

Национальному фонду подготовки кадров (НФПК) за предоставленную возможность для подготовки настоящего учебника «Микроэкономика. Продвинутый уровень»;

профессору В.П. Колесову – руководителю-координатору Проекта НФПК «Обновление университетского экономического образования» и доценту В.Х. Эченике – заместителю руководителя-координатора Проекта НФПК «Обновление университетского экономического образования» за постоянное внимание и помощь в преодолении принципиальных проблем, которые возникали в процессе подготовки учебника, и поддержку его автора; рецензенту НФПК за положительную оценку в целом учебника «Микроэкономика. Продвинутый уровень» и за глубокие критические замечания и корректно сформулированные рекомендации, учет которых позволил, по мнению автора, значительно поднять уровень подачи материала учебника для его читателей;

коллегам по кафедре «Математические методы анализа экономики» экономического факультета МГУ профессору М.В. Грачевой и доценту В.А. Чахоян за постоянную поддержку и понимание необходимости преодоления неизбежных организационных и профессиональных проблем;

сотрудникам группы реализации Проекта НФПК «Обновление университетского экономического образования»: менеджерам Проекта М.Е. Ульяновой, Е.Ю. Архиповой и секретарю Проекта О.Г. Корягиной за постоянное внимание и помощь в преодолении текущих проблем, которые возникали в процессе подготовки учебника;

директору издательства «ТЕИС» экономического факультета МГУ Т.А. Фомичевой за неоценимую помощь при решении технических проблем при подготовке материала настоящего учебника к печати;

Р.С. Хромченко, И.А. Алешковскому, М.Г. Башковой, С. Иванову, И.В. Сметаниной, Р.Д. Соломатиной, А.В. Федорец за большой труд по компьютерному набору рукописного материала учебника и его верстке;

О. Степановой, М. Ковалевой, И. Левиной, Н. Овчинниковой, Е. Голентовской, Б. Яценко – бывшим студентам экономического факультета МГУ за возможность использовать превосходно сделанные ими записи лекций автора по курсам «Микроэкономика – 2» и «Микроэкономика – 3»;

А. Андрияшину, Е. Авилову, А. Бланк, А. Бондареву, М. Додловой, Е. Ефремовой, О. Колобаевой, К. Лядской, А. Окатенко, А. Пановой, А. Панферову, А. Салимову, А. Тимошенкову, М. Худалову, А. Шишкину – бывшим студентам факультета экономики Государственного университета – Высшей школы экономики за возможность использовать подготовленные ими материалы докладов, которые ими были сделаны в рамках курса лекций «Современные микроэкономические проблемы»;

З.А. Басыровой – редактору Издательского Дома «ИНФРА-М» за ценные замечания, учет которых позволил существенно улучшить подачу материала читателям настоящей книги, и Л.С. Куликовой – корректору Издательского Дома «ИНФРА-М».

ВВЕДЕНИЕ

Во многих странах Запада и в России принято преподавать микроэкономику в виде комплекса трех учебных дисциплин: «Микроэкономика. Вводный уровень» (аналог: «Микроэкономика – 1»), «Микроэкономика. Промежуточный уровень» (аналог: «Микроэкономика – 2»), «Микроэкономика. Продвинутый уровень» (аналог: «Микроэкономика – 3).

На каждом уровне (кроме вводного) расширяется и углубляется поле содержательных областей предыдущего уровня, повышается интенсивность подачи материала, привлекается более сложный математический инструментарий. В связи с этим имеют место пересечения теоретических положений и практических приложений, хотя повышение интенсивности подачи материала может достаточно сильно деформировать тот или иной раздел микроэкономики так, что он станет мало похожим на себя в курсе предыдущего уровня.

Курсы микроэкономики вводного и промежуточного уровней являются фундаментальными составляющими системы экономических курсов для студентов-экономистов бакалавриата. В этих курсах часто даются только принципиальные ответы на вопросы экономической теории и хозяйственной практики и не всегда принципы доводятся до их реализации. Например, задача максимизации прибыли фирмы является теоретической моделью широкого класса задач рационального поведения реальной фирмы на рынке. Теория чистой конкуренции аналогична теории идеального газа в физике, благодаря которой реальные газы изучаются не столько сами по себе, а скорее с точки зрения того, насколько они похожи на идеальный газ. В микроэкономике различные рыночные структуры также часто рассматриваются с точки зрения степени их сходства или различия с чистой конкуренцией, а не сами по себе.

На курсы микроэкономики вводного и промежуточного уровней опираются такие более специальные дисциплины, как «Теория фирмы», «Теория отраслевых рынков», которые в свое время постепенно отпочковывались от дисциплины «Микроэкономика».

Курсы микроэкономики вводного и промежуточного уровней читаются раньше, чем теория игр и дифференциальные уравнения, которые используются для описания и анализа многих микроэкономических проблем.

Курс микроэкономики продвинутого уровня также является фундаментальной составляющей системы экономических курсов для студентов-экономистов магистратуры. В отличие от курсов микроэкономики вводного и промежуточного уровней курс микроэкономики продвинутого уровня читается после ряда более специальных экономических курсов («Теория фирмы», «Теория отраслевых рынков»), а также после теории игр и дифференциальных уравнений, читаемых в бакалавриате.

Отмеченные обстоятельства являются причиной необходимости корректировки содержательной проблематики курса микроэкономики продвинутого уровня за счет ее расширения и более широкого и глубокого привлечения математического инструментария.

Особенность курса «Микроэкономика. Продвинутый уровень» заключается прежде всего в достаточно высоком научном уровне подачи материала, наличии проблемных содержательных областей и привлечении серьезного математического аппарата – естественно, там, где он необходим.

В частности, интенсивность подачи материала теории потребления и теории производства повышается благодаря их расширению за счет использования версий теорем об огибающей, которые представляют собой выражения частных производных по параметрам оптимальных значений экстремальных задач рационального поведения потребителя и фирмы в условиях чистой конкуренции. В теории производственных функций на основании решения дифференциального уравнения демонстрируется появление производственной функции с постоянной эластичностью замены ресурсов – одной из важных производственных функций для теоретических построений и практических приложений и одной из тех производственных функций, которые были получены в результате теоретических построений, а не с помощью эмпирического «нащупывания», как это было, например, с производственной функцией Кобба – Дугласа. В теории экономического равновесия интенсивность подачи материала повышается за счет подробного описания производственной сферы и сферы потребления модели статического равновесия Эрроу – Дебре и за счет модели динамического равновесия.

Проблемные содержательные области в настоящем учебнике локализованы в главе 18 «Специальные микроэкономические проблемы».

Применяемый в учебнике математический аппарат отличается значительным разнообразием. Помимо результатов математического анализа (классические методы оптимизации, элементы теории устойчивости по Ляпунову решений систем дифференциальных уравнений), активно используются некоторые результаты выпуклого анализа, матричной алгебры, относящиеся к квадратным матрицам с неотрицательными элементами вне главной диагонали, теории биматричных игр, теории оптимального управления.

Подчеркнем, что первостепенной проблематикой в курсе микроэкономики продвинутого уровня является содержательная теоретическая (в основном) и прикладная проблематика. Математический аппарат (который может использоваться на достаточно высоком уровне) играет роль вспомогательного инструментария, предназначенного обслуживать «основное производство», т.е. содержательную проблематику. В связи с этим обстоятельством курс микроэкономики продвинутого уровня отличается от микроэкономического раздела курса математической экономики, в котором математические методы (наряду с содержательными задачами) представляют предмет самостоятельного исследования.

Под влиянием многих факторов (прежде всего такого, как научно-технологический прогресс) содержательные области микроэкономики активно меняются во времени, стимулируя корректировку и частичное элиминирование используемых и появление новых модельных построений. Так, в задачах долговременного и среднесрочного перспективного или ретроспективного анализа (в отличие от статических задач) понятие потребительского набора может оказаться малосодержательным в связи с быстрым обновлением потребительских характеристик продуктов, с интенсивным уходом с рынков одних продуктов и появлением других. Достаточно упомянуть персональные компьютеры, мобильные средства связи, потребительские характеристики которых активно растут параллельно со снижением их рыночных цен.

Аналогичным является положение с пониманием конфигурации ресурсов, характер поведения которых может сильно меняться во времени в связи с повышением, например, их производительности. В частности, много проблем возникает с описанием и анализом дистанционной формы организации труда, когда не работник перемещается в пространстве для соединения со своим рабочим местом, а рабочее место, например автоматизированное рабочее место на базе персонального компьютера, перемещается по месту жительства работника. Косвенным эффектом такого преобразования взаимосвязи между работником и его рабочим местом является, в частности, уменьшение нагрузки на общественный транспорт или на личный транспорт.

Востребованность математических методов и средств, используемых для решения микроэкономических задач, также меняется во времени. После Второй мировой войны для решения прикладных и теоретических задач активно использовалось линейное и выпуклое программирование. В настоящее время, особенно в области теоретических исследований, доля линейного программирования уменьшается, зато доля теории игр увеличивается.

Благодаря интенсивному развитию вычислительной техники резко возросла доля инструментальных методов эффективного решения экономических задач, что, в свою очередь, привело к повышению доли вычислимых микроэкономических моделей в общей массе всех математических моделей микроэкономики.

Глава 1

ТЕОРИЯ ПОВЕДЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЯ НА РЫНКЕ

1.1. Решение задачи максимизации функции полезности при бюджетном ограничении методом Лагранжа. Локальное рыночное равновесие потребителя. Функции спроса по Маршаллу (по Вальрасу), косвенная функция полезности и их свойства

1.1.1. Теория потребления изучает поведение потребителя на рынке. Потребитель характеризуется функцией полезности и доходом, который он готов потратить на приобретение продуктов, а рынок – потребительскими наборами и ценами (ценой на единицу каждого продукта). Все величины имеют одну и ту же временну́ю «привязку». Они постоянны в течение некоторого фиксированного периода времени (само время предполагается дискретным).

Потребитель ведет себя *рационально*, если он максимизирует функцию полезности при бюджетном ограничении. Поведение потребителя может быть описано в *вербальной* форме: максимизация полезности, если хватит содержимого кошелька; в виде задачи на условный максимум (Задача I) в *аналитической* форме:

$$U(x_1, x_2) \to (\max), \tag{1.1.1}$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 = M - \tag{1.1.2}$$

и в *геометрической* форме (рис. 1.1).

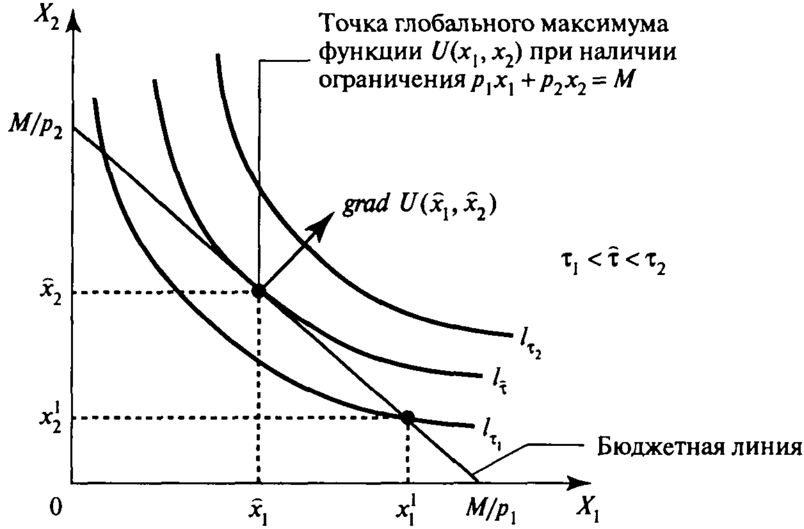


Рис. 1.1

Отметим, что здесь и далее под максимумом понимается глобальный максимум, если нет специальной оговорки.

Рассмотрим линии безразличия (например, линии l_{τ_1}, $l_{\hat{\tau}}$), которые имеют общие точки с бюджетной прямой. Двигаясь по линиям безразличия на «северо-восток» до упора, выбираем линию безразличия $l_{\hat{\tau}}$, которая имеет с бюджетной прямой точку касания $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Это означает, что потребитель выбирает потребительский набор $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, который называется ***локальным рыночным равновесием потребителя*** (ЛРРП). При этом его функция полезности $U(x_1, x_2)$ достигает своего условного максимума $\hat{\tau} = \hat{U}$. Рисунок 1.1 демонстрирует, что $U(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{\tau} > \tau_1 = U(x_1^1, x_2^1)$, где (x_1^1, x_2^1) – любая точка бюджетной прямой $p_1x_1 + p_2x_2 = M$, отличная от точки $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Картина взаимного расположения линий безразличия и бюджетной прямой на рис. 1.1 типична для задач экономической теории. Представленные на рис. 1.1 линии безразличия являются строго выпуклыми к точке О. В частности, если линия безразличия $l_{\hat{\tau}}$ строго выпукла, то точка $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ ее касания с бюджетной прямой является единственной. Если линия безразличия $l_{\hat{\tau}}$ выпукла, но не строго выпукла к точке О, точка $\hat{x}$ касания может быть не единственной.

1.1.2. Потребитель достиг определенного уровня полезности $U(x_1, x_2) = \breve{U}$. Как выйти на этот уровень полезности с наименьшими расходами? (*Вербальная* форма задачи минимизации расхода при фиксированном уровне полезности.) *Аналитическая* форма задачи минимизации расхода потребителя при фиксированном уровне полезности имеет вид задачи на условный минимум (Задача II):

$$p_1x_1 + p_2x_2 = M \to (\min), \tag{1.1.3}$$

$$U(x_1, x_2) = \breve{U}. \tag{1.1.4}$$

Геометрическая форма задачи минимизации расхода потребителя при фиксированном уровне полезности представлена на рис. 1.2. Отметим, что здесь и далее под минимумом понимается глобальный минимум, если нет специальной оговорки.

По бюджетным линиям следует идти на «юго-запад» до упора. Упор будет в точке касания $\breve{x} = (\breve{x}_1, \breve{x}_2)$ бюджетной прямой и линии безразличия $l_{\breve{U}}$.

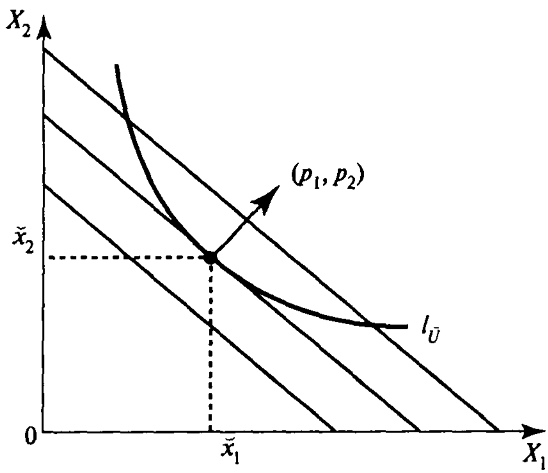


Рис. 1.2

Задачи I и II называют совместными. Их можно обобщить в виде пары задач:

Задача Ia:

$$U(x_1, x_2) \to (\max), \tag{1.1.5}$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 \le M, \tag{1.1.6}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0; \tag{1.1.7}$$

Задача IIa:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = M \to (\min), \tag{1.1.8}$$

$$U(x_1, x_2) \geq \breve{U}, \tag{1.1.9}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \tag{1.1.10}$$

Формально Задачи Ia и IIa – это задачи математического программирования. Задачи I и II, как уже отмечалось, – задачи на условный экстремум.

Задачи I и Ia, II и IIa разные, но ответы у них одинаковые (если $\hat{x}_1 > 0, \hat{x}_2 > 0, \breve{x}_1 > 0, \breve{x}_2 > 0$).

1.1.3. Для задачи (1.1.1), (1.1.2) на условный экстремум функция Лагранжа имеет следующий вид:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = U(x_1, x_2) + \lambda(M - p_1x_1 - p_2x_2).$$

Выпишем условия первого порядка локального экстремума функции (1.1.1) при наличии ограничения (1.1.2):

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = 0, \quad \text{т.е.}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0, \\ &\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0, \\ &M - p_1x_1 - p_2x_2 = 0. \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

Получили систему (1.1.11) из трех уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, λ. Решение системы (1.1.11) называется критической точкой функции Лагранжа

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{\lambda}) \tag{1.1.12}$$

Критическая точка $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{\lambda})$ называется длинной точкой. Критическая точка без последней координаты $\hat{\lambda}$, т.е. $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, называется короткой точкой. Точки локального условного экстремума задачи (1.1.1), (1.1.2) следует искать только среди коротких точек $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, в которых локальный условный экстремум может быть, а может его и не быть. В связи с тем что функция полезности – это функция, которая обладает рядом специальных свойств:

$$\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} \geq 0, \quad \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} \geq 0,$$

$$\frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} < 0,$$

у системы (1.1.11) существует обязательно единственное решение $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{\lambda})$, т.е. существует только одна критическая точка функции Лагранжа, а следовательно, только одна короткая точка $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, и эта точка – не только точка локального, а также глобального максимума функции (1.1.1) при наличии ограничения (1.1.2). Это можно доказать с помощью условий второго порядка локального экстремума функции (1.1.1) при наличии ограничения (1.1.2) и с использованием условия строгой выпуклости вверх функции (1.1.1).

Функции

$$\hat{x}_1 = D_1(p_1, p_2, M) \tag{1.1.13}$$

$$\hat{x}_2 = D_2(p_1, p_2, M) \tag{1.1.14}$$

называются *функциями* спроса *по Маршаллу* (*по Вальрасу*) на первый и второй продукты со стороны потребителя. Очевидно, что $\hat{\lambda} = D_3(p_1, p_2, M)$.

Функция $U(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = U[D_1(p_1, p_2, M), D_2(p_1, p_2, M)] = v(p_1, p_2, M)$ называется *косвенной (неявной) функцией полезности* параметров p_1, p_2, M; выражение $v(p_1, p_2, M)$ есть максимум функции полезности.

Функции спроса $D_i(p_1, p_2, M)$, $i = 1, 2$ однородны нулевой степени по всем переменным, т.е. для любого числа $\gamma > 0$

$$D_i(p_1, p_2, M) = D_i(\gamma \cdot p_1, \gamma \cdot p_2, \gamma \cdot M) = \hat{x}_i, \quad i = 1, 2.$$

Для доказательства перепишем задачу (1.1.1), (1.1.2) следующим образом:

$$U(x_1, x_2) \to (\max), \tag{1.1.1}$$

$$\gamma \cdot p_1 x_1, \gamma \cdot p_2 x_2 = \gamma \cdot M, \tag{1.1.15}$$

$$0 < \gamma \in E_1.$$

Задачи (1.1.1), (1.1.2) и (1.1.1), (1.1.15) одинаковы и имеют одно и то же решение $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Задача (1.1.1), (1.1.2) имеет ответ (1.1.13), (1.1.14), а задача (1.1.1), (1.1.15) имеет ответ $\hat{x}_1 = D_1(\gamma \cdot p_1, \gamma \cdot p_2, \gamma \cdot M)$, $\hat{x}_2 = D_2(\gamma \cdot p_1, \gamma \cdot p_2, \gamma \cdot M)M$.

Следовательно,

$$D_1(\gamma\cdot p_1, \gamma\cdot p_2, \gamma\cdot M) = D_1(p_1, p_2, M), \qquad (1.1.16)$$

$$D_2(\gamma\cdot p_1, \gamma\cdot p_2, \gamma\cdot M) = D_2(p_1, p_2, M), \qquad (1.1.17)$$

т.е. функции спроса $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ однородны нулевой степени по всем переменным p_1, p_2, M.

1.1.4. Свойства косвенной функции полезности $v(p_1, p_2, M)$

1. Косвенная функция полезности $v(p_1, p_2, M)$ является однородной функцией нулевой степени по всем переменным p_1, p_2, M:

$$v(\gamma\cdot p_1, \gamma\cdot p_2, \gamma\cdot M) = U[D_1(\gamma\cdot p_1, \gamma\cdot p_2, \gamma\cdot M), D_2(\gamma\cdot p_1, \gamma\cdot p_2, \gamma\cdot M)] =$$

$$= U[D_1(p_1, p_2, M), D_2(p_1, p_2, M)] = v(p_1, p_2, M).$$

2. $M \uparrow\uparrow \Rightarrow v(p_1, p_2, M) \uparrow\uparrow$ (рис. 1.3) ($\uparrow$ – символ возрастания, $\uparrow\uparrow$ – символ строгого возрастания).

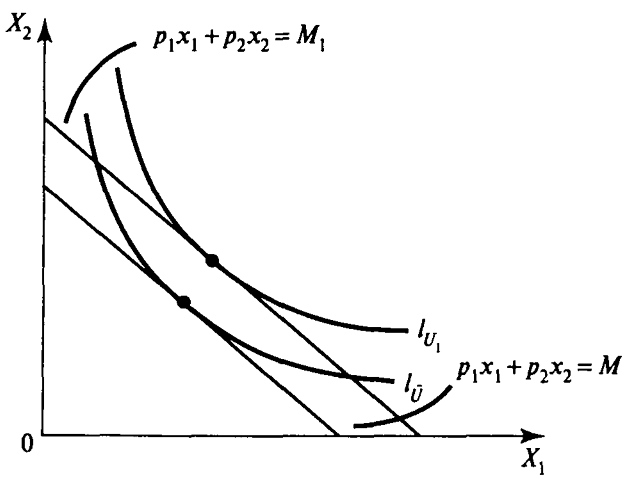


Рис. 1.3

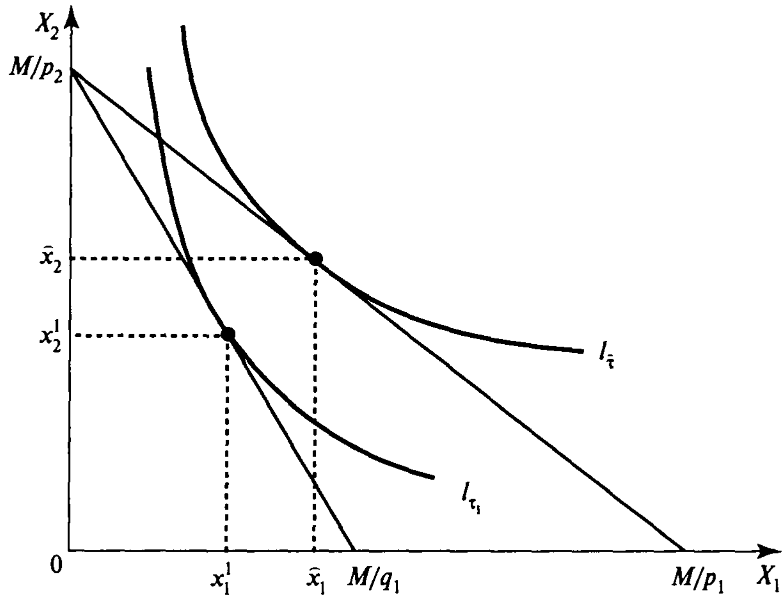


Рис. 1.4

Если $M_1 > M$, то $v(p_1, p_2, M) > v(p_1, p_2, M_1)$, ибо бюджетная прямая $p_1x_1 + p_2x_2 = M_1$ расположена северо-восточнее бюджетной прямой $p_1x_1 + p_2x_2 = M$, и следовательно, линия безразличия l_{U_1} расположена северо-восточнее линии безразличия $l_{\hat{U}}$, откуда вытекает неравенство $U(p_1, p_2, M) = U_1 > \hat{U} = U(p_1, p_2, M_1)$ (см. рис. 1.3). Строгое доказательство следует из утверждения 1.2.1 параграфа 1.2.

3. $p_1 \uparrow\uparrow \Rightarrow v(p_1, p_2, M) \downarrow\downarrow$ (рис. 1.4), $p_2 \uparrow\uparrow \Rightarrow v(p_1, p_2, M) \downarrow\downarrow$. Если $q_1 > p_1$, то $\tau_1 = v(q_1, p_2, M) < v(p_1, p_2, M) = \hat{\tau}$ ($\downarrow$ – символ убывания, $\downarrow\downarrow$ – символ строгого убывания).

Строгое доказательство следует из утверждения 1.2.2 параграфа 1.2.

4. Рассмотрим множество Q, которое обладает следующим свойством: $Q_\tau = \{(p_1, p_2) \mid v(p_1, p_2, M) \geq \tau\}$. Если множество Q_τ не пусто, то оно выпукло.

5. Если $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $M > 0$, то косвенная функция полезности $v(p_1, p_2, M)$ непрерывная по всем переменным (p_1, p_2, M). Доказательства свойств 4, 5 необязательны и поэтому не приводятся.

1.1.5. Все построение этого и остальных параграфов главы 1 естественным образом переносится на случай произвольного $n > 2$. В частности, Задачи I′ и II′ имеют следующие формулировки:

Задача I′:

$U(x_1, x_2, ..., x_n) \to (\max)$,

$p_1x_1 + ... + p_nx_n = M$;

Задача II′:

$p_1x_1 + ... + p_nx_n = M \to (\min)$,

$U(x_1, x_2, ..., x_n) = \breve{\tau}$.

Функции спроса по Маршаллу (Вальрасу) имеют вид

$$\hat{x}_1 = D_1(p_1, ..., p_n, M), ..., \hat{x}_n = D_n(p_1, ..., p_n, M).$$

1.2. Предельная полезность по доходу и предельная полезность по цене продукта (тождество Роя). Значение этих выражений для решения теоретических и прикладных задач потребительского поведения на рынке

1.2.1. Утверждение 1.2.1 (о предельной полезности по доходу)

Предельная полезность по доходу равна множителю $\hat{\lambda}$ Лагранжа:

$$\frac{\partial v(p_1, p_2, M)}{\partial M} = \hat{\lambda}. \tag{1.2.1}$$

Доказательство утверждения 1.2.1

Пусть $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{\lambda})$ – решение задачи Лагранжа, т.е.

$$\frac{\partial U(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{\partial \hat{x}_1} = \hat{\lambda} \cdot p_1, \tag{1.2.2}$$

$$\frac{\partial U(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{\partial \hat{x}_2} = \hat{\lambda} \cdot p_2. \tag{1.2.3}$$

Равенство

$$M = p_1 \cdot D_1(p_1, p_2, M) + p_2 \cdot D_2(p_1, p_2, M) \tag{1.2.4}$$

является тождеством по p_1, p_2, M, поэтому

$$1 = \frac{dM}{dM} = p_1 \cdot \frac{\partial D_1(p_1, p_2, M)}{\partial M} + p_2 \cdot \frac{\partial D_2(p_1, p_2, M)}{\partial M}. \tag{1.2.5}$$

Имеем

$$\frac{\partial v(p_1,p_2,M)}{\partial M}=\frac{\partial U[D_1(p_1,p_2,M),\,D_2(p_1,p_2,M)]}{\partial M}=$$

$$=\frac{\partial U(\hat{x}_1,\hat{x}_2)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial D_1(p_1,p_2,M)}{\partial M}+\frac{\partial U(\hat{x}_1,\hat{x}_2)}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial D_2(p_1,p_2,M)}{\partial M}=\xrightarrow{(1.2.2),(1.2.3)}$$

$$=\hat{\lambda}p_1\cdot\frac{\partial D_1(p_1,p_2,M)}{\partial M}+\hat{\lambda}p_2\cdot\frac{\partial D_2(p_1,p_2,M)}{\partial M}=\xrightarrow{(1.2.5)}=\hat{\lambda}\frac{\partial M}{\partial M}=\hat{\lambda}.$$

Утверждение 1.2.1 доказано.

Отметим, что $v(p_1,p_2,M)=U(\hat{x}_1,\hat{x}_2)=\max U(x_1,x_2)$ при наличии ограничения $p_1x_1+p_2x_2=M$, тогда на основании (1.2.1) имеем

$$\frac{\partial \max U(x_1,x_2)}{\partial M}=\hat{\lambda},$$

т.е. производная глобального максимума функции полезности по параметру M равна $\hat{\lambda}$.

Утверждение 1.2.1 позволяет оценить новый max $U(x_1,x_2)$ функции полезности, который получается при относительно малом ΔM изменении дохода (при этом новую задачу на условный максимум

$U(x_1,x_2)\to\max,$

$p_1x_1+p_2x_2=M+\Delta M$

решать не следует):

$$\hat{\lambda}=\frac{\partial U(p_1,p_2,M)}{\partial M}\approx\frac{v(p_1,p_2,M+\Delta M)-v(p_1,p_2,M)}{\Delta M},\text{ откуда}$$

$$v(p_1,p_2,M+\Delta M)\approx v(p_1,p_2,M)+\hat{\lambda}\cdot\Delta M,\text{ т.е.}$$

$$\max_{p_1x_1+p_2x_2=M+\Delta M}U(x_1,x_2)\approx\max_{p_1x_1+p_2x_2=M}U(x_1,x_2)+\hat{\lambda}\cdot\Delta M,$$

что важно с теоретической и практической точек зрения.

Если функция полезности $U(x_1,x_2)$ выпукла вверх, то множитель Лагранжа $\hat{\lambda}$ скорее мал (является «моськой»), чем велик (т.е. не «слон»). В связи с этим последнее приближенное равенство означает, что для заметного увеличения уровня полезности следует значительно увеличить объем расхода потребителя.

Косвенная функция полезности $v(p_1, p_2, M)$ по определению есть $\max U(x_1, x_2)$ при наличии ограничения $p_1x_1+p_2x_2=M$, т.е. косвенная функция полезности – это функция параметров p_1, p_2, M Задачи I на условный экстремум (см. в параграфе 1.1 Задачу (1.1.1) – (1.1.2)). Утверждение 1.2.1 – это утверждение о том, что частная производная условного максимума $v(p_1, p_2, M)$ целевой функции $U(x_1, x_2)$ по параметру M равна $\hat{\lambda}$.

В приведенных ниже утверждениях 1.2.2 (утверждениях 1.4.1, 1.4.2) также фигурируют частные производные условного максимума функции $U(x_1, x_2)$ (условного минимума функции $p_1x_1+p_2x_2$) по параметрам p_1, p_2, M (по параметрам p_1, p_2, $\breve{U}$).

Теоремы о частных производных экстремальных значений целевых функций различных экстремальных задач по параметрам этих задач называются *теоремами об огибающей*. Приведенное здесь утверждение 1.2.1 и приводимые далее утверждения 1.2.2, 1.4.1 и 1.4.2 представляют собой частные версии теорем об огибающей в случае, когда специальное ограничение или целевая функция являются линейными по переменным экстремальной задачи.

1.2.2. Утверждение 1.2.2 (тождество Роя)

$$\frac{\partial v(p_1, p_2, M)}{\partial p_i} = -\hat{x}_i \cdot \hat{\lambda}, \quad i=1, 2, \tag{1.2.6}$$

$$\left(\frac{\partial v(p_1, p_2, M)}{\partial p_i} = -\hat{x}_i \frac{\partial v(p_1, p_2, M)}{\partial M}\right). \tag{1.2.7}$$

Мерой изменения значения косвенной функции полезности в связи с изменением цены p_i является произведение $(-\hat{x}_i \cdot \hat{\lambda})$, $i=1, 2$.

Доказательство утверждения 1.2.2

Пусть $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{\lambda})$ – решение задачи Лагранжа, т.е.

$$\frac{\partial U(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{\partial x_1} = \hat{\lambda} \cdot p_1, \quad \frac{\partial U(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{\partial x_2} = \hat{\lambda} \cdot p_2.$$

Из тождества (1.2.4) следует, что

$$0=\frac{\partial M}{\partial p_1}=D_1(p_1, p_2, M)+p_1\cdot\frac{\partial D_1(p_1, p_2, M)}{\partial p_1}+p_2\cdot\frac{\partial D_2(p_1, p_2, M)}{\partial p_1}, \tag{1.2.8}$$

аналогично

$$0=\frac{\partial M}{\partial p_2}=D_2(p_1, p_2, M)+p_2\cdot\frac{\partial D_2(p_1, p_2, M)}{\partial p_2}+p_1\cdot\frac{\partial D_1(p_1, p_2, M)}{\partial p_2}. \tag{1.2.9}$$

Имеем

$$\frac{\partial v(p_1,p_2,M)}{\partial p_1}=\frac{\partial U[D_1(p_1,p_2,M),\, D_2(p_1,p_2,M)]}{\partial p_1}$$

$$=\frac{\partial U(\hat{x}_1,\hat{x}_2)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial D_1(p_1,p_2,M)}{\partial p_1}+\frac{\partial U(\hat{x}_1,\hat{x}_2)}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial D_2(p_1,p_2,M)}{\partial p_1}=\xrightarrow{(1.2.2),\,(1.2.3)}$$

$$=\hat{\lambda}\cdot\left[p_1\cdot\frac{\partial D_1(p_1,p_2,M)}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial D_2(p_1,p_2,M)}{\partial p_1}\right]=-\hat{\lambda}\cdot D_1(p_1,p_2,M)=-\hat{\lambda}\cdot x_1.$$

Аналогично

$$\frac{\partial v(p_1,p_2,M)}{\partial p_2}=-\hat{\lambda}\cdot x_2.$$

Отметим, что $\hat{\lambda}=\dfrac{\partial v(p_1,p_2,M)}{\partial M}$ (см. (1.2.1)).

Утверждение 1.2.2 доказано.

Поскольку $v(p_1,p_2,M)=U(\hat{x}_1,\hat{x}_2)=\max U(x_1,x_2)$ при наличии ограничения $p_1x_1+p_2x_2=M$, постольку имеем $\dfrac{\partial \max U(x_1,x_2)}{\partial p_1}=-\hat{\lambda}\cdot\hat{x}_1$, т.е. производная глобального максимума функции полезности по параметру p_1 равна $-\hat{\lambda}\cdot\hat{x}_1$.

Утверждение 1.2.2 позволяет оценить новый max $U(x_1, x_2)$ функции полезности, который получается при относительно малом Δp_1 изменении цены p_1 (при этом новую задачу на условный максимум

$$U(x_1, x_2)\to\max,$$

$$(p_1+\Delta p_1)\cdot x_1+p_2x_2=M$$

решать не следует):

$$-\hat{x}_1\cdot\hat{\lambda}=\frac{\partial v(p_1,p_2,M)}{\partial p_1}\approx\frac{v(p_1+\Delta p_1,p_2,M)-v(p_1,p_2,M)}{\Delta p_1},$$

откуда

$$v(p_1+\Delta p_1,p_2,M)\approx v(p_1,p_2,M)-\hat{x}_1\cdot\hat{\lambda}\cdot\Delta p_1,\ \text{т.е.}$$

$$\max_{(p_1+\Delta p_1)x_1+p_2x_2=M} U(x_1,x_2)\approx\max_{p_1x_1+p_2x_2=M} U(x_1,x_2)-\hat{x}_1\cdot\hat{\lambda}\cdot\Delta p_1,$$

что важно с теоретической и практической точек зрения.

1.2.3. Утверждения 1.2.1 и 1.2.2 при $n > 2$ имеют вид

$$\frac{\partial v(p_1, \ldots, p_n, M)}{\partial M} = \hat{\lambda},$$

$$\frac{\partial v(p_1, \ldots, p_n, M)}{\partial p_1} = -\hat{x}_1 \hat{\lambda},$$

....

$$\frac{\partial v(p_1, \ldots, p_n, M)}{\partial p_n} = -\hat{x}_n \hat{\lambda}.$$

1.3. Решение задачи минимизации расхода потребителя при фиксированном уровне полезности методом Лагранжа. Функции спроса по Хиксу (функции компенсированного спроса), функция расходов и их свойства

1.3.1. Решим задачу (1.1.3), (1.1.4) (см. параграф 1.1) методом Лагранжа:

Функция Лагранжа задачи (1.1.3), (1.1.4) имеет вид

$$L(x_1, x_2, \lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \lambda(\breve{U} - U(x_1, x_2)). \qquad (1.3.1)$$

Выписываем условия первого порядка для функции Лагранжа $L(x_1, x_2, \lambda)$:

$$p_1 - \lambda \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0, \qquad (1.3.2)$$

$$p_2 - \lambda \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0, \qquad (1.3.3)$$

$$\breve{U} - U(x_1, x_2) = 0. \qquad (1.3.4)$$

Получим систему трех уравнений (1.3.2), (1.3.3), (1.3.4) с тремя неизвестными x_1, x_2, λ. Решение системы (1.3.2), (1.3.3), (1.3.4) $(\breve{x}_1, \breve{x}_2, \breve{\lambda})$ называется критической точкой функции Лагранжа (1.3.1). Критическая точка $(\breve{x}_1, \breve{x}_2, \breve{\lambda})$ называется длинной точкой. Критическая точка без последней координаты $\breve{\lambda}$, т.е. $\breve{x} = (\breve{x}_1, \breve{x}_2)$, называется короткой точкой.

Если $U = U(x_1, x_2)$ – функция полезности, то система (1.3.2), (1.3.3), (1.3.4) имеет единственное решение $(\breve{x}_1, \breve{x}_2, \breve{\lambda})$ и точка $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$ есть точка глобального минимума задачи (1.1.3), (1.1.4) (см. параграф 1.1). Имеем ситуацию, аналогичную задаче (1.1.1), (1.1.2) (см. параграф 1.1).

Функции

$$\breve{x}_1 = H_1(p_1, p_2, \breve{U}), \tag{1.3.5}$$

$$\breve{x}_2 = H_2(p_1, p_2, \breve{U}) \tag{1.3.6}$$

называются *функциями спроса по Хиксу* (*функциями компенсированного спроса*) на первый и второй продукты со стороны потребителя. Очевидно, $\breve{\lambda} = H_3(p_1, p_2, \breve{U})$.

Функции спроса $\breve{x}_1 = H_1(p_1, p_2, \breve{U})$, $\breve{x}_2 = H_2(p_1, p_2, \breve{U})$ по Хиксу подставляем в целевую функцию $\breve{M} = m(p_1, p_2, \breve{U}) = p_1\breve{x}_1 + p_2\breve{x}_2 = p_1H_1(p_1, p_2, \breve{U}) + p_2H_2(p_1, p_2, \breve{U})$ и получим функцию $m(p_1, p_2, \breve{U})$, которая называется *функцией расходов*. Она зависит от $p_1, p_2, \breve{U}$ и явно не зависит от потребительского набора.

Функция спроса $H_i(p_1, p_2, \breve{U})$, $i = 1, 2$ однородна нулевой степени по переменным p_1 и p_2, т.е. для любого числа $\gamma > 0$

$$H_i(\gamma \cdot p_1, \gamma \cdot p_2, \breve{U}) = H_i(p_1, p_2, \breve{U}), \quad i = 1, 2.$$

Для доказательства перепишем задачу (1.1.3), (1.1.4) (см. параграф 1.1) следующим образом (число $\gamma > 0$):

$$\gamma \cdot p_1x_1 + \gamma \cdot p_2x_2 = \gamma \cdot M \to \min, \tag{1.3.7}$$

$$U(x_1, x_2) = \breve{U}. \tag{1.3.8}$$

Задачи (1.3.7), (1.3.8) и (1.1.3), (1.1.4) (см. параграф 1.1) одинаковые и имеют одно и то же решение $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$. Задача (1.1.3), (1.1.4) (см параграф 1.1) имеет ответ (1.3.5), (1.3.6). Задача (1.3.7), (1.3.8) имеет ответ $\breve{x}_1 = H_1(\gamma \cdot p_1, \gamma \cdot p_2, \breve{U})$, $\breve{x}_2 = H_2(\gamma \cdot p_1, \gamma \cdot p_2, \breve{U})$.

Следовательно,

$$H_1(\gamma \cdot p_1, \gamma \cdot p_2, \breve{U}) = H_1(p_1, p_2, \breve{U}), \tag{1.3.9}$$

$$H_2(\gamma \cdot p_1, \gamma \cdot p_2, \breve{U}) = H_2(p_1, p_2, \breve{U}). \tag{1.3.10}$$

т.е. функции спроса $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$ однородны нулевой степени по переменным p_1 и p_2.

1.3.2. Свойства функции расходов

1. Функция расходов $m(p_1, p_2, \breve{U})$ однородна первой степени по переменным p_1 и p_2.

Имеем

$$m(\gamma\cdot p_1, \gamma\cdot p_2, U) = \gamma\cdot p_1\cdot H_1(\gamma\cdot p_1, \gamma\cdot p_2, \breve{U}) + \gamma\cdot p_2\cdot H_2(\gamma\cdot p_1, \gamma\cdot p_2, \breve{U}) =$$
$$= \gamma\cdot[p_1\cdot H_1(p_1, p_2, \breve{U}) + p_2\cdot H_2(p_1, p_2, \breve{U})] = \gamma\cdot m(p_1, p_2, \breve{U}).$$

2. Если $\breve{U} \uparrow\uparrow \Rightarrow m(p_1, p_2, \breve{U}) \uparrow\uparrow$,

$p_1 \uparrow\uparrow \Rightarrow m(p_1, p_2, \breve{U}) \uparrow\uparrow$,

$p_2 \uparrow\uparrow \Rightarrow m(p_1, p_2, \breve{U}) \uparrow\uparrow$.

Доказательства следуют из утверждений 1.4.1 и 1.4.2 параграфа 1.4.

3. Функция расходов выпуклая вверх по переменным p_1 и p_2 (рис. 1.5):

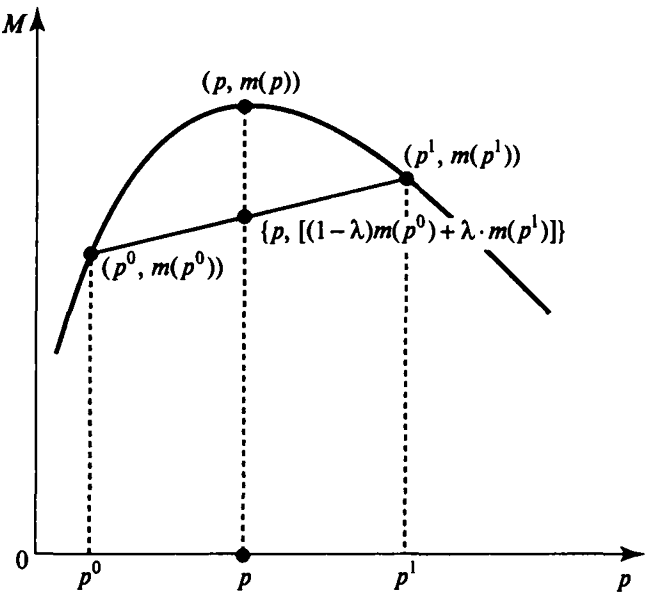


Рис. 1.5

$m[(1-\lambda)\cdot p^0 + \lambda\cdot p^1)] \geq (1-\lambda)m(p^0) + \lambda\cdot m(p^1)$ для любого числа $0 \leq \lambda \leq 1$ и любых векторов $p^0 \geq 0$, $p^1 \geq 0$.

4. $p_1 > 0, p_2 > 0, U > 0$ – функция спроса по Хиксу и функция расходов непрерывны.

Доказательство свойства 4 является необязательным и поэтому не приводится.

Докажем свойство 3.

Число λ удовлетворяет неравенствам $0 \le \lambda \le 1$, векторы $p^0 \ge 0$, $p^1 \ge 0$. Имеем $m(p_1^0, p_2^0, \breve{U}) = p_1^0 x_1^0 + p_2^0 x_2^0 = \min(p_1^0 x_1 + p_2^0 x_2)$ при условии, что $U(x_1, x_2, \breve{U}) = \breve{U}$. Аналогично $m(p_1^1, p_2^1, \breve{U}) = p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1 = \min(p_1^1 x_1 + p_2^1 x_2)$ при условии, что $U(x_1, x_2, \breve{U}) = \breve{U}$. Положим $\bar{p} = (1-\lambda)\cdot p^0 + \lambda \cdot p^1 \left[\bar{p}_1 = (1-\lambda)\cdot p_1^0 + \lambda \cdot p_1^1, \bar{p}_2 = (1-\lambda)\cdot p_2^0 + \lambda \cdot p_2^1\right]$. Имеем $M(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{U}) = \bar{p}_1\bar{x}_1 + \bar{p}_2\bar{x}_2 = \min(\bar{p}_1 x_1 + \bar{p}_2 x_2)$ при условии, что $U(x_1, x_2, \breve{U}) = \breve{U}$.

Имеем следующую цепочку равенств и неравенств:

$$m(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \breve{U}) = \bar{p}\cdot\bar{x} = \bar{p}_1\bar{x}_1 + \bar{p}_2\bar{x}_2 = ((1-\lambda)\cdot p_1^0 + \lambda\cdot p_1^1)\bar{x}_1 +$$
$$+(1-\lambda)\cdot p_2^0 + \lambda\cdot p_2^1)\bar{x}_2 = (1-\lambda)(p_1^0\bar{x}_1 + p_2^0\bar{x}_2) + \lambda(p_1^1\bar{x}_1 + p_2^1\bar{x}_2) =$$
$$= (1-\lambda)p^0\bar{x} + \lambda\cdot p^1\bar{x} \ge (1-\lambda)p^0x^0 + \lambda\cdot p^1x^1 =$$
$$= (1-\lambda)\cdot m(p_1^0, p_2^0, \breve{U}) + \lambda\cdot m(p_1^1, p_2^1, \breve{U}),$$

откуда следует, что функция расходов $m(p_1, p_2, \breve{U})$ выпукла вверх по переменным p_1 и p_2.

Свойство 3 доказано.

При $n > 2$ функции спроса по Хиксу имеют вид

$\breve{x}_1 = H_1(p_1, \ldots, p_n, U), \ldots, \breve{x}_n = H_n(p_1, \ldots, p_n, U)$.

1.4. Предельный расход по полезности и предельный расход по цене продукта (лемма Шепарда). Значение этих выражений для решения теоретических и прикладных задач потребительского выбора

1.4.1. Утверждение 1.4.1 (о предельном расходе по полезности)

Предельный расход по полезности равен множителю Лагранжа:

$$\frac{\partial m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial \breve{U}} = \breve{\lambda}. \qquad (1.4.1)$$

Доказательство утверждения 1.4.1

Пусть $(\breve{x}_1, \breve{x}_2, \breve{\lambda})$ – решение задачи (1.1.3), (1.1.4) на условный экстремум, тогда имеем тождества по $\breve{x}_1, \breve{x}_2, \breve{\lambda}$:

$$p_1 = \breve{\lambda} \cdot \frac{\partial U(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_1}, \tag{1.4.2}$$

$$p_2 = \breve{\lambda} \cdot \frac{\partial U(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_2}. \tag{1.4.3}$$

Равенство

$$\breve{U} = U[H_1(p_1, p_2, \breve{U}), H_2(p_1, p_2, \breve{U})] \tag{1.4.4}$$

является тождеством по $p_1, p_2, \breve{U}$, поэтому

$$1 = \frac{\partial \breve{U}}{\partial \breve{U}} = \frac{\partial U(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial \breve{U}} + \frac{\partial U(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial \breve{U}}. \tag{1.4.5}$$

Имеем

$$\frac{\partial m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial \breve{U}} = \frac{\partial}{\partial \breve{U}}(p_1 H_1(p_1, p_2, \breve{U}) + p_2 H_2(p_1, p_2, \breve{U})) =$$
$$= p_1 \cdot \frac{\partial H_1(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial \breve{U}} + p_2 \cdot \frac{\partial H_2(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial \breve{U}} = \xrightarrow{(1.4.2),\,(1.4.3)}$$
$$= \breve{\lambda} \cdot \left(\frac{\partial U(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial H_1(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial \breve{U}} + \frac{\partial U(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial H_2(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial \breve{U}} \right) =$$
$$= \xrightarrow{(1.4.5)} \breve{\lambda}.$$

Утверждение 1.4.1 доказано.

Отметим, что $m(p_1, p_2, \breve{U}) = p_1 \breve{x}_1 + p_2 \breve{x}_2 = \min\limits_{U(x_1, x_2) = \breve{U}} (p_1 x_1 + p_2 x_2)$, тогда на основании (1.4.1) имеем $\dfrac{\partial \min(p_1 x_1 + p_2 x_2)}{\partial \breve{U}} = \breve{\lambda}$, т.е. производная глобального минимального расхода по полезности $\breve{U}$ равна множителю Лагранжа $\breve{\lambda}$.

Утверждение 1.4.1 позволяет оценить новый $\min(p_1 x_1 + p_2 x_2)$ расхода, который получается при относительно малом $\Delta\breve{U}$ изменении уровня полезности (при этом новую задачу на условный минимум

$p_1 x_1 + p_2 x_2 \to (\min)$,

$U(x_1, x_2) = \breve{U}$

решать не следует):

$$\breve{\lambda} = \frac{\partial m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial \breve{U}} \approx \frac{m(p_1, p_2, \breve{U} + \Delta\breve{U}) - m(p_1, p_2, \breve{U})}{\Delta\breve{U}},$$

откуда вытекает, что

$$m(p_1, p_2, \breve{U} + \Delta\breve{U}) \approx m(p_1, p_2, \breve{U}) + \breve{\lambda} \cdot \Delta\breve{U}, \text{ т.е.}$$

$$\min_{U(x_1, x_2) = \breve{U} + \Delta\breve{U}} (p_1 x_1 + p_2 x_2) \approx \min_{U(x_1, x_2) = \breve{U}} (p_1 x_1 + p_2 x_2) + \breve{\lambda} \cdot \Delta\breve{U},$$

что важно с теоретической и прикладной точек зрения.

Если функция полезности $U(x_1, x_2)$ выпукла вверх, то множитель Лагранжа $\breve{\lambda}$ скорее велик (является «слоном») чем мал (т.е. не «моська»). В связи с этим последнее приближенное равенство содержательно означает, что при увеличении уровня полезности, скажем, на одну единицу, потребителю требуется значительно увеличить расход.

1.4.2. Утверждение 1.4.2 (лемма Шепарда)

$$\frac{\partial m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_1} = \breve{x}_1, \tag{1.4.6}$$

$$\frac{\partial m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_2} = \breve{x}_2. \tag{1.4.7}$$

Доказательство утверждения 1.4.2

Из (1.4.4) следует, что

$$0 = \frac{\partial \breve{U}}{\partial p_1} = \frac{\partial U(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial p_1} + \frac{\partial U(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial p_1}. \tag{1.4.8}$$

Имеем

$$\frac{\partial m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_1} = \frac{\partial}{\partial p_1}[p_1 \cdot H_1(p_1, p_2, \breve{U}) + p_2 \cdot H_2(p_1, p_2, \breve{U})] =$$

$$= H_1(p_1, p_2, \breve{U}) + p_1 \frac{\partial H_1(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial H_2(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_1} = \xrightarrow{(1.4.2),\,(1.4.3)}$$

$$= H_1(p_1, p_2, \breve{U}) + \breve{\lambda} \cdot \left(\frac{\partial U(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial p_1} + \frac{\partial U(\breve{x}_1, \breve{x}_2)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial p_2} \right) =$$

$$= \xrightarrow{(1.4.8)} H_1(p_1, p_2, \breve{U}) = \breve{x}_1.$$

Равенство (1.4.7) получается аналогично.

Утверждение 1.4.2 доказано.

Утверждение 1.4.2 позволяет оценить новый $\min(p_1x_1 + p_2x_2)$ расхода, который при относительно малом Δp_1 изменении цены p_1 (при этом новую задачу на условный минимум

$$(p_1 + \Delta p_1)x_1 + p_2x_2 \to (\min),$$
$$U(x_1, x_2) = \breve{U}$$

решать не следует) имеет вид

$$\breve{x}_1 = \frac{\partial m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_1} \approx \frac{m(p_1 + \Delta p_1, p_2, \breve{U}) - m(p_1, p_2, \breve{U})}{\Delta p_1},$$

откуда следует, что

$$m(p_1 + \Delta p_1, p_2, \breve{U}) \approx m(p_1, p_2, \breve{U}) + \breve{x}_1 \Delta p_1, \text{ т.е.}$$

$$\min_{U(x_1, x_2) = \breve{U}} [(p_1 + \Delta p_1)x_1 + p_2x_2] \approx \min_{U(x_1, x_2) = \breve{U}} [p_1x_1 + p_2x_2] + \breve{x}_1 \Delta p_1,$$

что важно с теоретической и практической точек зрения.

Утверждения 1.4.1 и 1.4.2. при $n > 2$ имеют вид

$$\frac{\partial m(p_1, \ldots, p_n, \breve{U})}{\partial \breve{U}} = \breve{\lambda},$$

$$\frac{\partial m(p_1, \ldots, p_n, \breve{U})}{\partial p_1} = \breve{x}_1, \ \ldots, \ \frac{\partial m(p_1, \ldots, p_n, \breve{U})}{\partial p_n} = \breve{x}_n.$$

1.5. Взаимосвязь между решением задач максимизации функции полезности и минимизации расходов. Вывод уравнений Слуцкого. Уравнения Слуцкого в эластичностях

1.5.1

Задача максимизации функции полезности имеет вид:	**Задача минимизации расходов:**
$U(x_1, x_2) \to (\max),$ (1.5.1)	$p_1x_1 + p_2x_2 = M \to (\min),$ (1.5.3)
$p_1x_1 + p_2x_2 = M.$ (1.5.2)	$\breve{U} = U(x_1, x_2).$ (1.5.4)
Вектор $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ – ее максимальное решение,	Вектор $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$ – ее минимальное решение,
$\hat{x}_1 = D_1(p_1, p_2, M),$	$\breve{x}_1 = H_1(p_1, p_2, \breve{U}),$
$\hat{x}_2 = D_2(p_1, p_2, M),$	$\breve{x}_2 = H_2(p_1, p_2, \breve{U}),$
$\hat{U} = U(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = v(p_1, p_2, M).$ (рис. 1.6)	$m(p_1, p_2, \breve{U}) = p_1\breve{x}_1 + p_2\breve{x}_2.$

Положим в (1.5.2) $M = m(p_1, p_2, \breve{U})$, тогда, очевидно,

$$D_1(p_1, p_2, m(p_1, p_2, \breve{U})) = H_1(p_1, p_2, \breve{U}), \tag{1.5.5}$$

$$D_2(p_1, p_2, m(p_1, p_2, \breve{U})) = H_2(p_1, p_2, \breve{U}), \tag{1.5.6}$$

$$\hat{U} = \breve{U}.$$

Использовав теорему о частных производных сложной функции, получим

$$\frac{\partial H_i(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_j} = \frac{\partial D_i(p_1, p_2, m(p_1, p_2, \breve{U}))}{\partial p_j} + \\ + \frac{\partial D_i(p_1, p_2, m(p_1, p_2, \breve{U}))}{\partial M} \cdot \frac{\partial m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_j} \tag{1.5.7}$$

(здесь $i, j = 1, 2$).

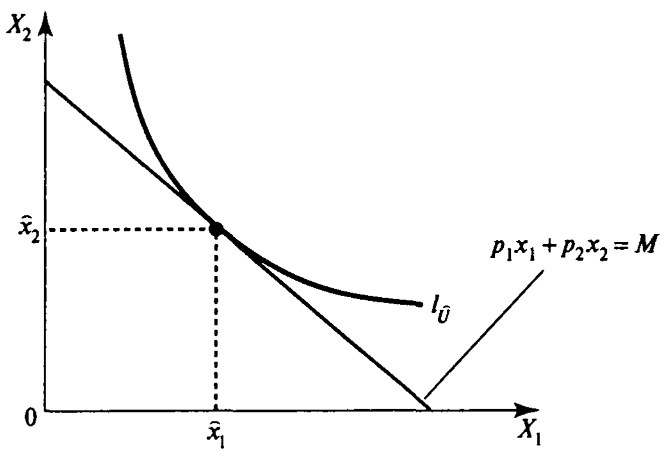


Рис. 1.6

Подставив в (1.5.7) $\frac{\partial m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_j} = H_j(p_1, p_2, \breve{U})$ (лемма Шепарда – см. параграф 1.4), получим уравнение (точнее, первую версию уравнений) Слуцкого:

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_j} = \frac{\partial D_i}{\partial p_j} + D_j \cdot \frac{\partial D_i}{\partial M}, \quad i, j = 1, 2$$

(в общем случае $i, j = 1, \ldots, n$). (1.5.8)

В уравнении (1.5.8) вместо H_j фигурирует D_j, ибо они равны (см. (1.5.5), (1.5.6)).

По лемме Шепарда (см. параграф 1.4)

$$\frac{\partial m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_i} = H_i(p_1, p_2, \breve{U}),\ i, j = 1,\ 2 \text{ (в общем случае } i, j = 1,\ \ldots,\ n),$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial^2 m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_j \partial p_i} = \frac{\partial H_i(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_j}.$$

В связи с тем, что

$$\frac{\partial^2 m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_j \partial p_i} = \frac{\partial^2 m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_i \partial p_j},$$

имеем

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_j} + D_j \frac{\partial D_i}{\partial M} = \frac{\partial H_i}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_j \partial p_i} = \frac{\partial^2 m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_i \partial p_j} =$$

$$= \frac{\partial H_j}{\partial p_i} = \frac{\partial D_j}{\partial p_i} + D_i \cdot \frac{\partial D_j}{\partial M}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_j} + D_j \frac{\partial D_i}{\partial M} = \frac{\partial D_j}{\partial p_i} + D_i \cdot \frac{\partial D_j}{\partial M}, \qquad (1.5.9)$$

$$i, j = 1,\ 2 \text{ (в общем случае } i, j = 1,\ \ldots,\ n).$$

Выражение (1.5.9) – это вторая версия уравнений Слуцкого.

1.5.2. Матрица из вторых частных производных $\frac{\partial^2 m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_j \partial p_i}$ называется матрицей Слуцкого.

Из математического анализа известно, что для выпуклости (вверх) функции $m(p_1, p_2, \breve{U})$ расходов необходимо и достаточно, чтобы матрица Слуцкого была неположительно определенной. Это эквивалентно тому, что квадратичная форма, соответствующая матрице Слуцкого, была неположительно определенной. Поскольку функция $m(p_1, p_2, \breve{U})$ расходов выпукла вверх по переменным p_1 и p_2 (см. параграф 1.3), постольку матрица Слуцкого неположительно определена, откуда следует, что все элементы ее главной диагонали неположительны:

$$\frac{\partial^2 m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial p_j^2} \le 0\ (<0), \quad j = 1, 2,$$

или

$$\frac{\partial H_i}{\partial p_i} \le 0\ (<0), \quad i = 1, 2 \text{ (в общем случае } i = 1, \ldots, n),$$

т.е. с точки зрения функций спроса по Хиксу все продукты обыкновенные и продуктов Гиффена у этих функций не бывает.

1.5.3. Уравнение Слуцкого

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_j} = \frac{\partial H_i}{\partial p_j} - D_j \cdot \frac{\partial D_i}{\partial M}$$

после деления на $D_i = H_i$ и умножения на p_j перепишется так:

$$\frac{p_j}{D_i} \cdot \frac{\partial D_i}{\partial p_j} = \frac{p_j}{H_i} \cdot \frac{\partial H_i}{\partial p_j} - \frac{p_j}{D_i} \cdot D_j \cdot \frac{\partial D_i}{\partial M}.$$

Преобразовав последнее слагаемое

$$\frac{p_j}{D_i} \cdot D_j \cdot \frac{\partial D_i}{\partial M} = \frac{M}{D_i} \cdot \frac{\partial D_i}{\partial M} \cdot \frac{p_j D_j}{M},$$

получим следующее уравнение:

$$\frac{p_j}{D_i} \cdot \frac{\partial D_i}{\partial p_j} = \frac{p_j}{H_i} \cdot \frac{\partial H_i}{\partial p_j} - \frac{M}{D_i} \cdot \frac{\partial D_i}{\partial M} \cdot \frac{p_j D_j}{M}, \tag{1.5.10}$$

где $\frac{p_j}{D_i} \cdot \frac{\partial D_i}{\partial p_j}$ — перекрестная эластичность $E_j(D_i)$ спроса (по Маршаллу) на i-й продукт по цене p_j j-го продукта (если $i = j$, получаем обычную эластичность спроса (по Маршаллу) на i-й продукт по цене p_i);

$\frac{p_j}{H_i} \cdot \frac{\partial H_i}{\partial p_j}$ — перекрестная эластичность $E_j(H_i)$ спроса (по Хиксу) на i-й продукт по цене p_j j-го продукта (если $i = j$, получаем обычную эластичность спроса (по Хиксу) на i-й продукт по цене p_i);

$\frac{M}{D_i} \cdot \frac{\partial D_i}{\partial M}$ — эластичность $E_M(D_i)$ спроса по доходу;

$\frac{p_j D_j}{M}$ — доля ρ_j дохода M потребителя, который он тратит на приобретение j-го продукта.

Таким образом, получено уравнение (точнее уравнения) Слуцкого в эластичностях:

$$E_j(D_i) = E_j(H_i) - E_M(D_i) \cdot \rho_j, \quad i, j = 1, 2 \qquad (1.5.11)$$

(в общем случае $i, j = 1, \ldots, n$)

1.6. Оценка изменения благосостояния потребителя. Эквивалентная и компенсирующая вариации дохода

1.6.1. Уравнение бюджетной плоскости $p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = M_1$ можно переписать так: $p_1x_1 + y = M_1$, где $y = p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$ – количество *композитного продукта* (товара). Первый продукт приобретается в количестве x_1 по цене p_1.

При цене p_1 на первый продукт потребитель выбирает набор $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, y^{(1)})$, т.е. потребитель тратит на приобретение первого продукта $p_1x_1^{(1)}$ руб. и $y^{(1)}$ руб. на приобретение остальных продуктов. $x^{(1)}$ – точка касания линии безразличия $l_{U^{(1)}}$ и бюджетной прямой I ($p_1x_1 + y = M_1$) (рис. 1.7).

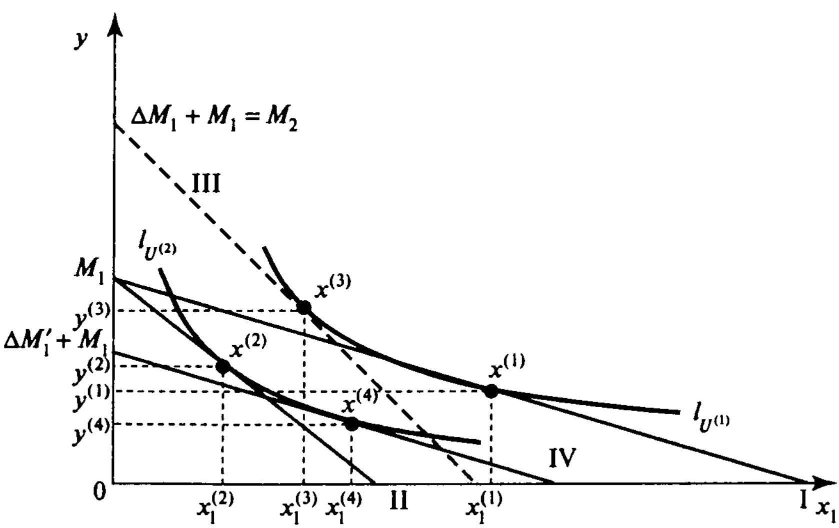


Рис. 1.7

Если цена p_1 на первый продукт выросла и стала равной q_1 ($q_1 > p_1$), бюджетная прямая I перейдет в бюджетную прямую II. В этом случае потребитель выберет набор $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, y^{(2)})$, который изображается точкой касания $x^{(2)}$ линии безразличия $l_{U^{(2)}}$ и бюджетной прямой II ($q_1x_1 + y = M_1$). Очевидно, $U^{(2)} < U^{(1)}$, т.е. уровень $U^{(1)}$ полезности потребителя (удовлетворение потребительских амбиций) снизится до уровня $U^{(2)}$.

Определим величину ΔM_1, на которую следует увеличить номинальный доход M_1 потребителя, чтобы потребитель вернулся на прежний уровень $U^{(1)}$, т.е. прежний реальный доход по Хиксу.

Для этого следует переместить бюджетную прямую II параллельно самой себе на «северо-восток» так, чтобы она перешла в положение III. Бюджетная прямая III ($q_1x_1 + y = M_1 + \Delta M_1$, $\Delta M_1 > 0$, если цена p_1 растет) касается линии безразличия $l_{U^{(1)}}$ в точке $x^{(3)} = (x_1^{(3)}, y^{(2)})$ и параллельна бюджетной прямой II.

Величина ΔM_1 и есть *компенсирующая вариация дохода* (*CV*), ибо она показывает, на какую величину следует изменить (увеличить) номинальный доход M_1, чтобы компенсировать потерю реального дохода потребителя в связи с повышением цены p_1 на первый продукт.

Критерием того, что потребителю вернули его реальный доход, является то, что потребитель вернулся на прежний уровень $U^{(1)}$ полезности (уровень удовлетворения потребительских амбиций).

В связи с повышением цены p_1 на первый продукт переход из точки $x^{(1)}$ в точку $x^{(3)}$ отражает простой эффект (эффект замены – ЭЗ), вызванный изменением только одного параметра (цены p_1) и сохранением неизменным другого параметра (реального дохода потребителя). Переход из точки $x^{(3)}$ в точку $x^{(2)}$ отражает простой эффект (эффект дохода – ЭД), вызванный изменением только одного параметра (дохода, который изменяется с величины $M_1 + \Delta M_1$ до величины M_1) и сохранением неизменным другого параметра (цены p_1). Переход из точки $x^{(1)}$ в точку $x^{(2)}$ отражает сложный (составной) эффект (общий эффект – ОЭ), вызванный изменением двух параметров (цены p_1 и реального дохода потребителя), т.е. имеем для первого продукта (*прямые*) эффекты – общий (ОЭ), замены (ЭЗ) и дохода (ЭД):

$$ОЭ = ЭЗ + ЭД,$$

где $ОЭ = x_1^{(2)} - x_1^{(1)}$; $ЭЗ = x_1^{(3)} - x_1^{(1)}$; $ЭД = x_1^{(2)} - x_1^{(3)}$ (см. рис. 1.7).

Для другого продукта (в данном случае композитного) имеем (*перекрестные*) эффекты – общий (ОЭ′), замены (ЭЗ′) и дохода (ЭД′):

$$ОЭ' = ЭЗ' + ЭД',$$

где $ОЭ' = y^{(2)} - y^{(1)}$; $ЭЗ' = y^{(3)} - y^{(1)}$; $ЭД' = y^{(2)} - y^{(3)}$ (см. рис. 1.7).

Формула ОЭ = ЭЗ + ЭД наглядно интерпретирует уравнение Слуцкого

$$\underset{(ОЭ)}{\frac{\partial D_1}{\partial p_1}} = \underset{(ЭЗ)}{\frac{\partial H_1}{\partial p_1}} - \underset{(ЭД)}{D_1 \frac{\partial D_1}{\partial M}}.$$

Формула ОЭ′ = ЭЗ′ + ЭД′ наглядно интерпретирует уравнение Слуцкого

$$\underset{(ОЭ')}{\frac{\partial D_2}{\partial p_1}} = \underset{(ЭЗ')}{\frac{\partial H_2}{\partial p_1}} - \underset{(ЭД')}{D_1 \frac{\partial D_2}{\partial M}}.$$

Напомним (см. рис. 1.7), что если $x_1^{(2)} < x_1^{(3)}$, то первый продукт является нормальным; если $x_1^{(2)} > x_1^{(3)}$, то первый продукт – продукт низкого качества; если $x_1^{(2)} < x_1^{(1)}$, то первый продукт обыкновенный; если $x_1^{(2)} > x_1^{(1)}$, то первый продукт – продукт Гиффена.

1.6.2. При повышении цены p_1 снижается реальный доход потребителя. Определим величину $\Delta M_1'$, на которую снизится номинальный доход потребителя так, чтобы при неизменной цене p_1 потребитель остался на новом уровне $U^{(2)}$ полезности ($U^{(2)} < U^{(1)}$).

Для этого следует переместить бюджетную прямую I на «юго-запад» так, чтобы она перешла в положение IV. Бюджетная прямая IV ($p_1 x_1 + y = M_1 + \Delta M_1'$, $\Delta M_1' < 0$, если цена p_1 растет) касается линии безразличия $l_{U^{(2)}}$ в точке $x^{(4)} = (x_1^{(4)}, y^{(4)})$ и параллельна бюджетной прямой I.

Величина $\Delta M_1'$ – *эквивалентная вариация дохода* (*EV*), ибо она показывает, на какую величину следует изменить (уменьшить) номинальный доход M_1, чтобы потребитель остался на новом уровне $U^{(2)}$ полезности без повышения цены p_1.

1.7. Об использовании результатов социологических обследований для оценки параметров функций полезности социальных групп

В теории потребления один потребитель взаимодействует с рынком потребительских товаров. Потребитель оставляет на рынке свой доход в обмен на потребительский набор, который он выбирает. Выбираемый потребительский набор максимизирует функцию полезности. Если она есть, то задача выбора представляет собой достаточно простую задачу на условный максимум с линейным ограничением в виде равенства. Оценивать параметры полезности реального индивидуума практически невозможно.

Однако под потребителем не обязательно следует понимать конкретного индивидуума. Под потребителем можно понимать домашнее хозяйство и даже отдельную социальную группу (например, молодежь региона, пенсионеры региона, жители городов и поселков региона, сельские жители региона и т.п. В роли региона может выступать целая страна). Оценка параметров функций полезности отдельных социальных групп позволяет использовать эти функции в конкретных расчетах по оценке потребительского поведения этих групп.

Для оценки параметров функций полезности социальных групп можно использовать оценки сдвигов предпочтений этих групп. Для оценки сдвигов предпочтений можно использовать результаты социологических обследований представителей социальных групп на основании специально подготовленных анкет. После обработки на ПЭВМ результатов социологических обследований появляются данные о сдвигах групповых предпочтений. Оценки сдвигов групповых предпочтений позволяют провести операцию интегрирования этих сдвигов и получить явное выражение функции полезности социальной группы.

Таким образом, обработанные данные результатов социологических обследований могут быть использованы при формировании модельной информации. Следовательно, экономические задачи можно решать с использованием не только математических методов, но и методов прикладной социологии.

Вопросы для самоконтроля к главе 1

1. Как формулируется задача максимизации функции полезности потребителя при бюджетном ограничении (приведите три постановки) и ее обобщение в форме задачи математического программирования?
2. Как формулируется задача минимизации расхода потребителя при фиксированном уровне полезности (приведите три постановки) и ее обобщение в форме задачи математического программирования?
3. Что представляют собой метод Лагранжа решения задачи максимизации функции полезности потребителя при бюджетном ограничении, локальное рыночное равновесие потребителя (ЛРРП) и его геометрическая характеристика?
4. Что такое функция спроса по Маршаллу на продукт со стороны потребителя и косвенная функция полезности? Сформулируйте свойства этих функций.
5. Чему равна предельная полезность по доходу?
6. Чему равна предельная полезность по цене продукта (тождество Роя)?
7. Что представляет собой метод Лагранжа решения задачи минимизации расхода потребителя при фиксированном уровне полезности? Что такое геометрическая интерпретация этого решения?
8. Что такое функция спроса по Хиксу на продукт со стороны потребителя и его функция расходов? Сформулируйте свойства этих функций.
9. Чему равен предельный расход по полезности?
10. Чему равен предельный расход по цене продукта (лемма Шепарда)?
11. Как выглядит первая версия уравнений Слуцкого? Приведите вывод первой версии уравнений Слуцкого.
12. Что представляет собой наглядная геометрическая интерпретация первой версии уравнений Слуцкого?
13. Что такое матрица Слуцкого и вторая версия уравнений Слуцкого?
14. Как выписываются уравнения Слуцкого в эластичностях?
15. Что такое эквивалентная вариация дохода и ее геометрическая интерпретация?
16. Что такое компенсирующая вариация дохода и ее геометрическая интерпретация?

Задачи и упражнения для самоконтроля к главе 1

1. Функция полезности потребителя имеет вид $U(x_1, x_2) = x_1^{1/4} \cdot x_2^{1/4}$. Цены продуктов соответственно равны $p_1 = 8$, $p_2 = 2$, доход потребителя $M = 64$:
   а) найдите методом Лагранжа локальное рыночное равновесие потребителя (ЛРРП): $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ и множитель Лагранжа $\hat{\lambda}$;

б) постройте точку $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ на плоскости Ox_1x_2;
в) напишите уравнение и постройте (используя не менее трех точек) линию безразличия, содержащую точку $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$;
г) напишите уравнение и постройте данную бюджетную прямую;
д) найдите и постройте grad $U(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, выходящий из точки $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$;
е) постройте вектор цен (p_1, p_2), выходящий из точки $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$;
ж) дайте геометрическую интерпретацию множителю Лагранжа $\hat{\lambda}$.

2. Функция полезности потребителя имеет вид $U(x_1, x_2) = x_1^{1/2} \cdot x_2^{1/2}$. Цены продуктов соответственно равны $p_1 = 4, p_2 = 1$. Уровень полезности $\breve{U} = 8$:
а) найдите методом Лагранжа потребительский набор $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$, который минимизирует функцию расходов потребителя, а также множитель Лагранжа λ;
б) постройте на плоскости Ox_1x_2 точку $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$;
в) напишите уравнение и постройте, использовав не менее трех точек, линию безразличия потребителя, содержащую точку $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$;
г) напишите уравнение и постройте линию минимального расхода;
д) найдите и постройте grad $U(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$, выходящий из точки $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$;
е) постройте вектор цен (p_1, p_2), выходящий из точки $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$;
ж) дайте геометрическую интерпретацию множителю Лагранжа $\breve{\lambda}$.

3. Функция полезности потребителя имеет вид $U(x_1, x_2) = x_1^{1/3} \cdot x_2^{1/4}$. Найдите эластичность по p_1 максимума функции полезности $\hat{U}$ при заданном бюджетном ограничении $p_1x_1 + p_2x_2 = M$.

4. Функция полезности потребителя имеет вид $U(x_1, x_2) = x_1^{2/3} \cdot x_2^{1/4}$. Цены на продукты соответственно равны p_1 и p_2, доход потребителя равен M:
а) найдите функции спроса (по Маршаллу) на первый и второй продукты;
б) выпишите косвенную функцию полезности.

5. Функция полезности потребителя имеет вид $U(x_1, x_2) = x_1^{1/4} \cdot x_2^{2/3}$. Цены на продукты соответственно равны p_1 и p_2, уровень полезности потребителя равен $\breve{U}$:
а) найдите функции спроса (по Хиксу) на первый и второй продукты.
б) выпишите функцию расходов.

6. Косвенная функция полезности $v(p_1, p_2, M)$ имеет вид $v(p_1, p_2, M) = \dfrac{M^{13/15}}{p_1^{1/5} \cdot p_2^{2/3}}$. Выпишите функцию $\hat{x}_1 D_2(p_1, p_2, M)$ спроса на второй продукт.

7. Функция полезности потребителя имеет вид $U(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$. Цены на единицы первого и второго продукта соответственно равны $p_1 = 2$, $p_2 = 4$, доход равен $M = 24$. Цена на первый продукт повысилась и стала равной $q_1 = 8$. Найдите эквивалентную вариацию дохода.

8. $\left[\dfrac{\partial m(p_1, p_2, M)}{\partial p_i}\right]$ – предельный расход по цене p_i i-го продукта ($i = 1, 2$):
   а) равен множителю Лагранжа задачи минимизации расхода при фиксированном уровне $\breve{U}$ полезности;
   б) пропорционален предельному расходу по полезности;
   в) равен предельному расходу по полезности;
   г) равен величине $\breve{x}_i = \breve{x}_i(p_1, p_2, \breve{U})$ спроса по Хиксу на i-й продукт;
   д) ответы а)–г) не верны.

9. Функция расходов $m(p_1, p_2, \breve{U})$ как функция цен p_1 и p_2 на продукты и фиксированного уровня $\breve{U}$ полезности:
   а) однородна нулевой степени относительно вектора цен $p = (p_1, p_2)$;
   б) однородна первой степени относительно вектора цен $p = (p_1, p_2)$;
   в) однородна нулевой степени относительно всех переменных $p_1, p_2, \breve{U}$;
   г) не имеет однозначной характеристики относительно вектора цен $p = (p_1, p_2)$.

10. $\left[\dfrac{\partial v(p_1, p_2, M)}{\partial p_i}\right]$ – предельная полезность по цене p_i i-го продукта ($i = 1, 2$):
   а) равна значению $\hat{x}_i$ функции спроса по Маршаллу на i-й продукт;
   б) пропорциональна значению $\hat{x}_i$;
   в) равна значению $\breve{x}_i$ функции спроса по Хиксу на i-й продукт;
   г) пропорциональна значению $\breve{x}_i$ функции спроса по Хиксу на i-й продукт;
   д) ответы а)–г) не верны.

11. Косвенная функция полезности $v(p_1, p_2, M)$:
   а) однородна нулевой степени относительно вектора цен $p = (p_1, p_2)$ на продукты (при фиксированном доходе M);
   б) однородна первой степени относительно вектора цен $p = (p_1, p_2)$ на продукты (при фиксированном доходе M);
   в) однородна нулевой степени по всем переменным p_1, p_2, M;
   г) однородна первой степени по всем переменным p_1, p_2, M;
   д) ответы а)–г) не верны.

Вопросы, тесты и задачи для контрольных работ к главе 1

1. Укажите неверный ответ.

   Предельный расход по полезности $\left[\dfrac{\partial m(p_1, p_2, \breve{U})}{\partial \breve{U}}\right]$:

   а) равен множителю Лагранжа задачи максимизации полезности при бюджетном ограничении;

   б) равен множителю Лагранжа задачи минимизации расхода при фиксированном уровне полезности.

2. Функция спроса по Хиксу $\breve{x}_1 = \breve{x}_1(p_1, p_2, \breve{U})$ на первый продукт:

   а) однородна нулевой степени относительно всех переменных $p_1, p_2, \breve{U}$;

   б) однородна первой степени относительно всех переменных $p_1, p_2, \breve{U}$;

   в) однородна нулевой степени относительно вектора цен $p = (p_1, p_2)$ на продукты;

   г) однородна нулевой степени относительно вектора цен $p = (p_1, p_2)$ на продукты;

   д) не допускает однозначной характеристики относительно своих переменных.

3. Предельная полезность по доходу $\left[\dfrac{\partial v(p_1, p_2, M)}{\partial M}\right]$:

   а) равна отношению величины $\hat{x}_i$ спроса по Маршаллу на i-й продукт к предельной полезности по цене p_i i-го продукта;

   б) пропорциональна отношению величины $\hat{x}_i$ спроса по Маршаллу на i-й продукт к предельной полезности по цене p_i i-го продукта;

   в) равна отношению предельной полезности по цене p_i i-го продукта к величине $\hat{x}_i$ спроса по Маршаллу на i-й продукт;

   г) пропорциональна отношению предельной полезности по цене p_i i-го продукта к величине $\hat{x}_i$ спроса по Маршаллу на i-й продукт;

   д) ответы а)–г) не верны.

4. Функция $\hat{x}_1 = \hat{x}_1(p_1, p_2, M)$ спроса по Маршаллу на первый продукт:

   а) однородна нулевой степени относительно вектора цен $p = (p_1, p_2)$ на продукты (при фиксированном доходе M);

   б) однородна нулевой степени по всем переменным p_1, p_2, V;

   в) однородна первой степени относительно вектора цен $p = (p_1, p_2)$ на продукты (при фиксированном доходе M);

   г) однородна первой степени по всем переменным;

   д) ответы а)–г) не верны.

5. Функция полезности потребителя имеет вид $U(x_1, x_2) = x_1^{2/3} \cdot x_2^{1/4}$. Найдите эластичность по p_1 максимума функции полезности $\bar{U}$ при заданном бюджетном ограничении $p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$.

6. Функция полезности потребителя имеет вид $U(x_1, x_2) = x_1^{3/4} \cdot x_2^{1/5}$. Цены на продукты соответственно p_1 и p_2, доход потребителя равен M:
   а) выпишите функции спроса (по Маршаллу) на первый и второй продукты;
   б) выпишите косвенную функцию полезности.

7. Функция полезности потребителя имеет вид $U(x_1, x_2) = x_1^{2/3} \cdot x_2^{1/4}$. Цены на продукты соответственно равны p_1 и p_2, уровень полезности потребителя равен $\bar{U}$:
   а) выпишите функции спроса (по Хиксу) на первый и второй продукты;
   б) выпишите функцию расходов.

8. Косвенная функция полезности имеет вид $v(p_1, p_2, M) = \dfrac{M^{11/12}}{p_1^{1/4} \cdot p_1^{2/3}}$. Выпишите функцию спроса $\hat{x}_1 = \hat{x}_2(p_1, p_2, M)$ по Маршаллу на первый продукт.

9. Функция полезности потребителя имеет вид $U(x_1, x_2) = x_1^{1/2} \cdot x_2^{1/2}$. Цены на единицы первого и второго продуктов соответственно равны $p_1 = 9, p_2 = 4$, доход равен $M = 12$. Цена на первый продукт повысилась и стала равной $q_1 = 16$. Найдите компенсирующую вариацию дохода.

10. Постройте пример функции $f(x_1, x_2)$ такой, что ее линия уровня касается в единственной точке $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ бюджетной прямой $p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$ и эта точка не является точкой условного локального экстремума функции $f(x_1, x_2)$ при наличии ограничения $p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$. (Этот пример нетипичен для микроэкономики.)

11. Постройте пример функции $f(x_1, x_2)$ такой, что ее линия уровня касается в единственной точке $\breve{x} = (\breve{x}_1, \breve{x}_2)$ прямой и эта точка не является точкой условного локального экстремума функции $p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$ при наличии ограничения $f(x_1, x_2) = \breve{f}$. (Этот пример нетипичен для микроэкономики.)

Глава 2

ТЕОРИЯ ОТНОШЕНИЯ ПРЕДПОЧТЕНИЯ-БЕЗРАЗЛИЧИЯ

2.1. Понятие отношений предпочтения, безразличия и отношения предпочтения-безразличия

2.1.1. Если потребитель предпочитает потребительский набор $x^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1)$ потребительскому набору $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ (т.е. из двух *разных* предлагаемых потребителю наборов x^1 и x^0 он обязательно выберет набор x^1), то говорят, что на потребительских наборах x^1 и x^0 задано *отношение* (сильного) *предпочтения*, что записывается символически так: $x^1 \succ x^0$.

Очевидно, отношение предпочтения не обладает свойством рефлексивности: $x \succ x$.

Если из двух потребительских наборов x^1 и x^0 потребителю все равно, какой набор выбирать, то говорят, что на потребительских наборах x^1 и x^0 задано *отношение безразличия*, что записывается так: $x^1 \sim x^0$.

Очевидно, отношение безразличия есть *отношение эквивалентности*, т.е. бинарное отношение, обладающее свойствами *рефлексивности* ($x \sim x$), *симметричности* ($x^1 \sim x^0 \Rightarrow x^0 \sim x^1$) и *транзитивности* ($x^0 \sim x^1, x^1 \sim x^2 \Rightarrow x^0 \sim x^2$).

2.1.2. Если потребительский набор x^1 предпочитается или безразличен для потребительского набора x^0, то говорят, что на потребительских наборах x^1 и x^0 задано *отношение предпочтения-безразличия*, что символически записывается так: ($x^1 \succeq x^0$).

Отношение предпочтения-безразличия есть *отношение порядка*, т.е. такое бинарное отношение, которое обладает свойствами *рефлексивности* ($x \succeq x$), *антисимметричности* ($x^1 \succeq x^0, x^0 \succeq x^1 \Rightarrow x^1 \sim x^0$), *транзитивности* ($x^2 \succeq x^1, x^1 \succeq x^0 \Rightarrow x^2 \succeq x^0$).

Функция полезности задает отношение предпочтения-безразличия следующим образом: $U(x^1) \geq U(x^0) \Leftrightarrow x^1 \succeq x^0$. Более конкретно: $U(x^1) = U(x^0) \Leftrightarrow x^1 \sim x^0$, $U(x^1) > U(x^0) \Leftrightarrow x^1 \succ x^0$.

Карта линий безразличия индуцирует класс функций полезности, замкнутый относительно монотонного преобразования. Карта линий безразличия задает отношение предпочтения-безразличия следующим образом: если потребительский набор x^1 принадлежит поверхности (линии при $n = 2$) безразличия l^1, расположенной строго «северо-восточнее» поверхности (линии) безразличия l^0, которой принадлежит потребительский набор x^0, то естественно, что $x^1 \succ x^0$. Если потребительские наборы x^1 и x^0 принадлежат одной поверхности (линии) безразличия, то $x^1 \sim x^0$.

Ниже (см. параграф 2.4) будет показано, что есть пример отношения предпочтения-безразличия, для которого нельзя построить функцию полезности (карту линий безразличия), которая бы индуцировала это отношение предпочтения-безразличия.

Таким образом, теория отношения предпочтения-безразличия есть *третья теория* (после двух теорий – теории количественной полезности и теории порядковой полезности) предпочтения потребителя, и эта теория представляет собой более общую конструкцию по сравнению с теориями количественной полезности и теории порядковой полезности.

2.2. Свойства и предположения отношения предпочтения-безразличия

2.2.1. В параграфе 2.1 уже отмечалось, что отношения предпочтения-безразличия обладают свойствами:

1) *рефлексивности*;
2) *антисимметричности*;
3) *транзитивности*.

Отношение предпочтения-безразличия обладает еще рядом свойств. Следующие свойства – это:

4) *полнота* (для любой пары x^1 и x^0 потребительских наборов справедливо одно из двух отношений $x^1 \succeq x^0$, $x^0 \succeq x^1$ или оба вместе (последнее означает, что $x^1 \sim x^0$)).

Свойство полноты означает, что множество *всех* потребительских наборов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, таких, что $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$, является *вполне* упорядоченным множеством по отношению предпочтения-безразличия $\succeq$ (напомним, что по отношению $\geq$, которое для n-мерных векторов понимается покоординатно, множество потребительских наборов является только *частично* упорядоченным множеством).

2.2.2. Прежде чем переходить к другим свойствам отношения предпочтения-безразличия $\succeq$, определим три понятия.

Множество $B(x^0)$ всех потребительских наборов x ($x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$), предпочитаемых или безразличных набору x^0, называется *хорошим* множеством для набора x^0, т.е.

$$B(x^0) = \{x \mid x \succeq x^0\}.$$

Множество $W(x^0)$ всех потребительских наборов x, которым набор x^0 предпочитается или безразличен, называется *плохим* множеством для набора x^0, т.е.

$$W(x^0) = \{x \mid x^0 \succeq x\}.$$

Множество $I(x^0)$ всех потребительских наборов x, безразличных набору x^0, называется множеством *безразличия* для набора x^0, т.е.

$$L(x^0) = I(x^0) = \{x \mid x \sim x^0\}.$$

Неравенство $x_1 \geq x^0$ для n-мерных векторов x^1 и x^0 понимается покоординатно ($x_1^1 \geq x_1^0, \ldots, x_n^1 \geq x_n^0$), неравенство $x^1 \underset{(\neq)}{\geq} x^0$ означает, что справедливо неравенство $x^1 \geq x^0$ и хотя бы для одной координаты i_0 справедливо строгое неравенство $x_{i_0}^1 > x_{i_0}^0$;

5) *ненасыщаемость* (из $x^1 \underset{(\neq)}{\geq} x^0$ следует, что $x^1 \succ x^0$, рис. 2.1).

Обратное ($x^1 \succ x^0 \Rightarrow x^1 \geq x^0$), очевидно, не имеет места (см. рис. 2.1, на котором $\bar{x}^1 \succ \bar{x}^0$, однако неверно, что $\bar{x}^1 \geq \bar{x}^0$, ибо для них $\bar{x}_1^1 < x_1^0$, $\bar{x}_2^1 > \bar{x}_2^0$). На рис. 2.2 представлен фрагмент карты линий безразличия. Здесь $x^2 \succ x^1 \succ x^0$, однако $x^1 \underset{(\neq)}{\geq} x^2$ и $x^1 \underset{(\neq)}{\geq} x^0$. Рисунок 2.2 показывает, что свойство ненасыщаемости справедливо не всегда, поэтому далее предполагается, что свойство ненасыщаемости имеет место, и случаи, аналогичные представленному на рис. 2.2, не рассматриваются.

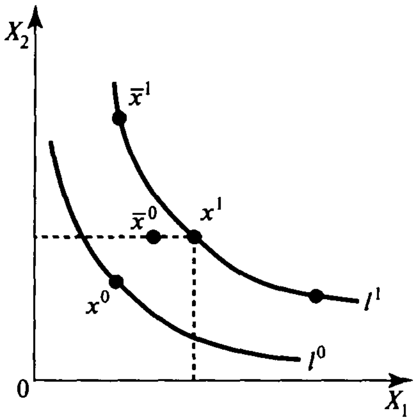


Рис. 2.1

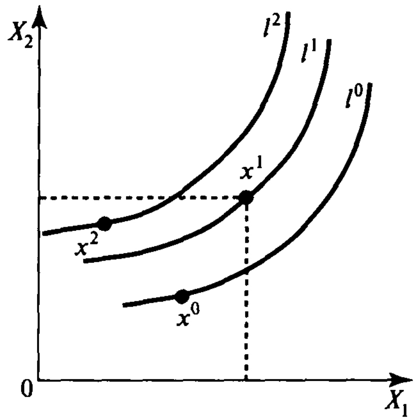


Рис. 2.2

2.2.3. Далее все рассуждения проводятся при условии, что справедливы свойства:

6) ***непрерывности*** множеств безразличия $I(x^0)$ (что эквивалентно предположению о замкнутости множеств $B(x^0)$ и $W(x^0)$ или открытости множеств $B^0(x^0) = \{x \mid x \succ x^0\}$, $W(x^0) = \{x \mid x^0 \succ x\}$);

7) ***строгой выпуклости*** (для любого потребительского набора x^0 множество $B(x^0)$ строго выпукло);

8) ***гладкости функции полезности***, если функция полезности включается в рассмотрение.

Отметим, что отношения предпочтения, безразличия и предпочтения-безразличия были определены исходя из наглядных экономических соображений (см. параграф 2.1). Тогда свойства 1)–5) выводятся из этих определений. Свойства 6)–7), по существу, являются дополнительными предположениями. Можно эту наивную схему обернуть, превратить ее в аксиоматическое определение отношения предпочтения-безразличия следующим образом: бинарное отношение на множестве потребительских наборов называется отношением предпочтения-безразличия, если для него имеют место аксиомы 1)–8). Отметим, что при таком подходе свойства 1)–8) берутся в качестве (исходных) аксиом – (исходных) предположений.

2.3. Взаимосвязь между отношением предпочтения-безразличия и функцией полезности

2.3.1. В параграфе 2.1 отмечалось, что функция полезности индуцирует отношение предпочтения-безразличия. Покажем, что отношение предпочтения-безразличия, для которого выполнены свойства 1)–6) (см. параграф 2.2), определяет однозначно функцию полезности $U(x_1, \ldots, x_n)$. В этом построении одним из основных является свойство 6) о непрерывности и свойство 5) о ненасыщаемости. Подробное построение проведем для случая $n = 2$.

Построим множество $I(x^0)$ безразличия потребительского набора x^0 (рис. 2.3).

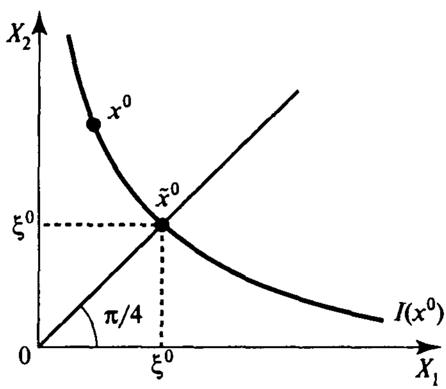


Рис. 2.3

Согласно свойству 6) множество $I(x^0)$ непрерывно (т.е. не имеет «дыр»), поэтому его обязательно пересечет в точке $\tilde{x}^0 = (\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0)$ $(\tilde{x}_1^0 = \tilde{x}_2^0 = \xi^0)$ прямая, которая выходит из точки O под углом $\pi/4$ (45°). Положим $U(x^0) = U(\tilde{x}^0) = \xi$, т.е. частное значение $U(x^0)$ функции полезности $U(x)$ на потребительском наборе x^0 определяется так: если $\xi e \sim x^0$ (вектор $e = (1,1)$), то $U(x^0) = \xi$.

2.3.2. Покажем, что определенная в разделе 2.3.1 функция $U(x)$ есть функция полезности, т.е. докажем, что она непрерывна и

$$U(x^1) \geq U(x^0) \Leftrightarrow x^1 \succeq x^0. \qquad (2.3.1)$$

Сначала докажем, что из $x^1 \succeq x^0$ следует $U(x^1) \geq U(x^0)$.

Пусть $x^1 \succeq x^0$ и $x^1 \sim \xi^1 e$, $x^0 \sim \xi^0 e$. По свойству транзитивности из $\xi^1 e \sim x^1$, $x^1 \succeq x^0$ следует, что $\xi^1 e \succeq x^0$; по свойству транзитивности из $\xi^1 e \succeq x^0$ и $x^0 \sim \xi^0 e$ следует, что $\xi^1 e \succeq \xi^0 e$, т.е. $\xi^1 \geq \xi^0$ (ибо $e = (1,1)$), откуда вытекает на основании определения функции $U(x)$, что $U(x^1) \geq U(x^0)$.

Докажем, что из $U(x^1) \geq U(x^0)$ следует $x^1 \succeq x^0$.

Пусть $x^0 \succ x^1$. Тогда по свойству транзитивности из $x^0 \succ x^1$ и $x^0 \sim \xi^0 e$ следует, что $\xi^0 e \succ x^1$. Аналогично по свойству транзитивности из $\xi^0 e \succ x^1$ и $x^1 \sim \xi^1 e$ следует, что $\xi^0 e \succ \xi^1 e$, т.е. $U(x^0) = \xi^0 > \xi^1 = U(x^1)$, а это противоречит условию, что $U(x^1) \geq U(x^0)$. Следовательно, $x^1 \succeq x^0$.

Для доказательства непрерывности функции $U(x)$ используем понятие *отделимых множеств*. Два множества M_1 и M_2 отделимы, если ни одна точка одного из множеств не является граничной точкой другого множества. Очевидно, множества $B^0(x^0)$ и $W^0(x^0)$ отделимы.

Для непрерывности функции $U(x)$ $(x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0)$ необходимо и достаточно, чтобы для каждой пары U_1, U_2 подмножеств значений функции $U(x)$ имела место отделимость их полных прообразов $M_1 = \{x \mid U(x) \in U_1\}$ и $M_2 = \{x \mid U(x) \in U_2\}$ в случае отделимости самих множеств U_1 и U_2.

Пусть x^0 – потребительский набор и $U(x^0)$ – частное значение функции полезности. Пусть $U_1 = [\breve{U}, U(x^0))$ и $U_2 = (U(x^0), \hat{U}]$, где числа $\breve{U} < U(x^0)$ и $U(x^0) < \hat{U}$ произвольны и достаточно близки к числу $U(x^0)$. Множества U_1 и U_2 отделимы. Множество $M_1 = \{x \mid U(x) \in U_1\} \subseteq W^0(x^0)$ и $M_2 = \{x \mid U(x) \in U_2\} \subseteq B^0(x^0)$. Множества $B^0(x^0)$ и $W^0(x^0)$ расположены по разные стороны от множества безразличия $I(x^0)$, поэтому они отделимы. Значит, отделимы множества M_1 и M_2. Поскольку потребительский набор x^0 был выбран произвольно, непрерывность функции $U(x)$ доказана.

В случае произвольного $n > 2$ функция $U(x)$ определяется чуть сложнее, а доказательства связки (2.3.1) и непрерывности функции $U(x)$ почти дословно повторяют только что приведенные доказательства.

Непрерывность функции полезности можно доказать, не используя свойство 5) о ненасыщаемости, с использованием неэлементарных математических средств (результат Ж. Дебре 50-х годов XX в.).

2.4. Лексикографическое упорядочение как пример отношения предпочтения-безразличия, для которого нельзя построить функцию полезности

2.4.1. Лексикографическое упорядочение (ЛГУ) n-мерных векторов аналогично упорядочению студентов (школьников) в группе по алфавиту: Александров, Афанасьев, Белоусов, Блинов, Васильев, Власов и т.д.

Если $x_1^1 > x_1^0$, то вектор $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ лексикографически предпочитается вектору $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, что символически записывается так: $x^1 \underset{(l)}{\succeq} x^0$.

Если $x_1^1 = x_1^0$ и $x_2^1 > x_2^0$, то $x^1 \underset{(l)}{\succeq} x^0$ и т.д.

ЛГУ обладает свойствами рефлексивности, антисимметричности, транзитивности, полноты, ненасыщаемости. Однако ЛГУ не удовлетворяет предположению 6) о непрерывности. Для этого покажем (достаточно рассмотреть случай $n = 2$), что множества $B(x^0)$ и $W(x^0)$ не являются замкнутыми.

На рис. 2.4 хорошее множество $B(x^0)$ есть подмножество первой четверти ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$) координатной плоскости Ox_1x_2, содержащее вертикальный луч с началом в точке $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$, множество точек оси Ox_1 таких, что $x_1 > x_1^0$, и полуплоскость $x_1 > x_1^0$ (см. рис. 2.4). Точки (x_1^0, x_2), $0 \leq x_2 < x_2^0$ не принадлежат множеству $B(x^0)$, т.е. множество $B(x^0)$ не является замкнутым. На рис 2.4 плохое множество $W(x^0)$ есть подмножество первой четверти ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$) координатной плоскости Ox_1x_2, содержащее отрезок $\{(x_1^0, x_2) \mid 0 \leq x_2 < x_2^0\}$, множество точек оси Ox_1 таких, что $0 \leq x_1 \leq x_1^0$, и полосу $\{(x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 < x_1^0, x_2 > 0\}$ т.е. множество $W(x^0)$ не является замкнутым.

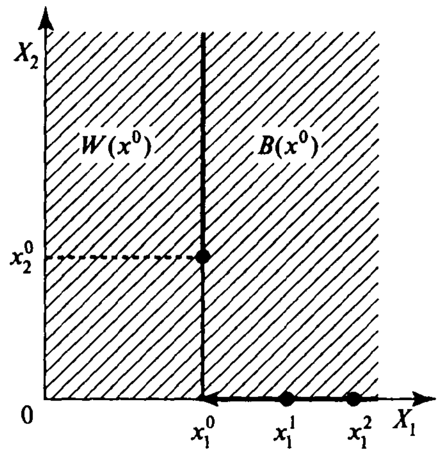


Рис. 2.4

2.4.2. Покажем, что для ЛГУ не существует функции полезности $U(x)$.

Достаточно рассмотреть случай $n = 2$. Предположим, что функция полезности $U(x_1, x_2)$ существует. Пусть функция $U(x_1, x_2)$ строго возрастает с ростом вектора $x = (x_1, x_2)$, т.е. из $x'' \underset{(\neq)}{\geq} x'$ следует, что $U(x'') > U(x')$. Очевидно, точка $(x_1^1, 0) \underset{(l)}{\succeq} (x_1^0, x_2^0)$, если $x_1^1 > x_1^0$. Функция $U(x_1^1, x_2)$ строго возрастает с ростом x_2. Из того, что $x_1^2 > x_1^1$, следует, что $U(x_1^2, 0) > U(x_1^1, x_2)$ для любого $x_2 \geq 0$. Поэтому с ростом x_2 график функции $U(x_1^1, x_2)$ ограничен сверху прямой $U = U(x_1^2, 0)$ и в силу своего строгого возрастания имеет горизонтальную асимптоту U_1^* (рис. 2.5). Таким образом, точке x_1^1 $(x_1^1 > x_1^0)$ ставится в соответствие полупромежуток $[(U(x_1^1, 0);\ U_1^*)$. Аналогично точке x_1^2 $(x_1^2 > x_1^1)$ ставится в соответствие другой полупромежуток $[(U(x_1^2, 0);\ U_2^*)$. Полупромежутки $[(U(x_1^1, 0);\ U_1^*)$, $[(U(x_1^2, 0);\ U_2^*)$ не имеют общих точек. Точек на полуоси $x_1 > x_1^0$ континуум, а попарно пересекающихся полупромежутков $[(U(x_1, 0);\ U^*)$ может быть не более чем счетное множество. Пришли к противоречию. Следовательно, функции $U(x_1, x_2)$ полезности для ЛГУ не существует.

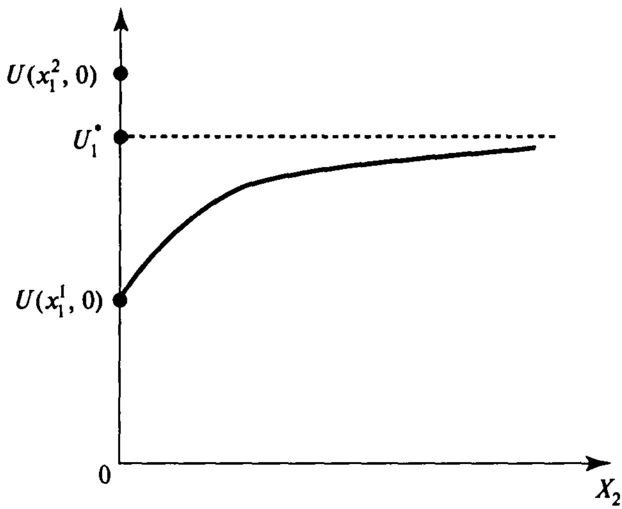


Рис. 2.5

Вопросы для самоконтроля к главе 2

1. Что представляет собой отношение предпочтения-безразличия, задаваемое функцией полезности?
2. Что представляет собой отношение предпочтения-безразличия, задаваемое картой поверхностей (линий) безразличия?
3. Что такое отношение эквивалентности, отношение порядка?
4. Как формулируются свойства отношения предпочтения-безразличия (рефлексивность, антисимметричность, транзитивность, полнота, ненасыщаемость, гладкость, непрерывность, выпуклость)?
5. Как формулируются определения «хорошего», «плохого» множеств, множества безразличия в пространстве потребительских наборов?
6. Что такое лексикографическое упорядочение (ЛГУ)? Показать, что ЛГУ – пример отношения предпочтения-безразличия. Что представляют собой множества безразличия, хорошие и плохие множества ЛГУ?
7. Как строится функция полезности для отношения предпочтения-безразличия, обладающего свойством непрерывности?
8. В каком отношении находятся понятия ЛГУ и функции полезности?

Задачи и упражнения для самоконтроля к главе 2

1. Докажите, что отношение безразличия есть отношение эквивалентности.
2. Докажите, что отношение предпочтения-безразличия есть отношение порядка.

3. Приведите аналитический пример функции полезности, для которой не выполнено свойство ненасыщаемости.
4. Приведите аналитический пример функции полезности, для которой существует хорошее множество, не являющееся строго выпуклым.

Вопросы, тесты и задачи для контрольных работ к главе 2

1. Теории количественной полезности (ТКП), порядковой полезности (ТПП), отношения предпочтения-безразличия (ТОПБ) по уровню общности (в порядке возрастания) следует расположить следующим образом:
   а) ТОПБ, ТКП, ТПП;
   б) ТОПБ, ТПП, ТКП;
   в) ТКП, ТОПБ, ТПП;
   г) ТКП, ТПП, ТОПБ;
   д) ТПП, ТКП, ТОПБ.
2. Отношение предпочтения обладает свойством:
   а) рефлексивности;
   б) антисимметричности;
   в) транзитивности;
   г) ненасыщаемости;
   д) полноты.
3. Отношение безразличия обладает свойством:
   а) полноты;
   б) ненасыщаемости;
   в) антисимметричности;
   г) рефлексивности;
   д) ответы а)–б) не верны.
4. Множество безразличия:
   а) представляет собой собственное подмножество границы хорошего множества;
   б) содержит в качестве собственного подмножества границу хорошего множества;
   в) представляет собой общую границу хорошего и плохого множеств;
   г) представляет собой собственное подмножество границы плохого множества;
   д) ответы а)–г) не верны.
5. Множество безразличия ЛГУ ($n = 2$) представляет собой:
   а) линию на плоскости Ox_1x_2;
   б) точку на плоскости Ox_1x_2;

в) двумерное множество на плоскости Ox_1x_2;
г) не существует понятия множества безразличия для ЛГУ;
д) ответы а)–г) не верны.

6. Для ЛГУ выпишите уравнение функции спроса на первый продукт ($n = 2$) или докажите, что такой функции не существует.

7. Докажите, что в предположении о непрерывности множества безразличия при ($n = 2$) прямая $x_2 = k \cdot x_1$ обязательно пересечет множество безразличия ($0 < k < \infty$).

Глава 3

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЫЯВЛЕННЫХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ

3.1. Предпосылки теории выявленных предпочтений

3.1.1. В связи с тем что не вполне ясны экономические основы понятия полезности и функции полезности, в экономической теории неоднократно предпринимались попытки уточнить эти понятия именно с экономической точки зрения. Так, после теории количественной полезности, в которой основным понятием является функция полезности, была предложена теория порядковой полезности, в которой, по существу, основное понятие – это карта поверхностей (линий) безразличия, на основании которой функция полезности восстанавливается с точностью до монотонного преобразования. Эти две теории обобщает теория отношения предпочтения-безразличия, в которой был построен пример лексикографического упорядочения, для которого не существует функции полезности.

В этих трех теориях существенным является то обстоятельство, что отношение предпочтения задается независимо от *рыночной ситуации*, т.е. независимо от рыночных цен $p_1, ..., p_n$ на продукты и от дохода M, с которым потребитель выходит на рынок.

В теории выявленных предпочтений отношение предпочтения уже связано с рыночными ценами $p_1, ..., p_n$ на продукты и зависит от них.

Теория выявленных предпочтений опирается на следующие предпосылки.

1. Потребитель, приобретая на рынке потребительский набор $x^1 = (x_1^1, ..., x_n^1)$, обязательно тратит весь свой доход, т.е. $p^1x^1 = M^1$

(пара, состоящая из вектора цен $p^1 = (p_1^1, ..., p_n^1)$ и дохода M^1, как уже отмечалось выше, называется рыночной ситуацией).

2. Выбор потребителя является единственным, т.е. $x^1 = (x_1^1, ..., x_n^1)$ – единственный потребительский набор такой, что $p^1x^1 = M^1$ (предпосылка о строгой выпуклости предпочтений потребителя).

3. Если выбран потребительский набор x^1, то он определяет единственным образом (с точностью до положительного множителя) рыночную ситуацию, т.е. $x^1 \Rightarrow (\gamma \cdot p^1, \gamma \cdot M^1)$ так, что $\gamma \cdot p^1x^1 = \gamma \cdot M^1$.

Предпосылка 2 может быть ослаблена (это ослабление далее специально оговаривается), что означает возможность использования нестрого выпуклых предпочтений потребителя.

3.1.2. Говорят, что потребительский набор $x^1 = (x_1^1, ..., x_n^1)$ ***прямо выявленно*** (т.е. ***явно***) ***предпочитается*** потребительскому набору $x^2 = (x_1^2, ..., x_n^2)$, если $p^1x^1 \geq p^1x^2$, где $p^1x^1 = M^1$ и (p^1, M^1) – некоторая (вполне определенная) рыночная ситуация. Символика $x^1 \succ^* x^2$.

Содержательно прямое выявленное предпочтение набора x^1 набору x^2 означает, что из двух потребительских наборов x^1 и x^2 потребитель выбрал именно набор x^1, а набор x^2 не выбрал, т.е. потребитель выбирает самый дорогой потребительский набор x^1, а среди самых дорогих единственный (рис. 3.1, на котором потребительский набор x^1 обязательно расположен на северо-восточной границе AB бюджетного множества OAB, которое соответствует рыночной ситуации p^1, M^1, а потребительские наборы x^2, которым прямо выявленно предпочитается потребительский набор x^1, могут располагаться на северо-восточной границе AB бюджетного множества OAB или внутри него).

Обратим внимание на то, что прямое выявленное предпочтение $x^1 \succ^* x^2$ означает, что потребительские наборы x^1 и x^2 сопоставляются в ценах p^1 рыночной ситуации (p^1, M^1), соответствующей набору x^1, и что сопоставляются только доступные потребителю наборы x^1 и x^2. Если один из двух потребительских наборов потребителю недоступен, то он может быть как более, так и менее предпочтительным потребителю, чем доступный потребительский набор. В связи с возможностью неоднозначного ответа такие пары потребительских наборов не сопоставляются. Далее отношение прямого выявленного предпочтения обобщается на совокупности, содержащие более двух потребительских наборов.

В случае трех потребительских наборов x^1, x^2, x^3 (рис. 3.2) пусть потребительский набор x^1 расположен на северо-восточной границе AB бюджетного множества OAB, соответствующего рыночной ситуации p^1, M^1; потребительский набор x^2 принадлежит бюджетному множеству OAB, а потребительский набор x^3 принадлежит бюджетному множеству ODF, соответствующему рыночной ситуации p^2, $M^2 = p^2x^2$.

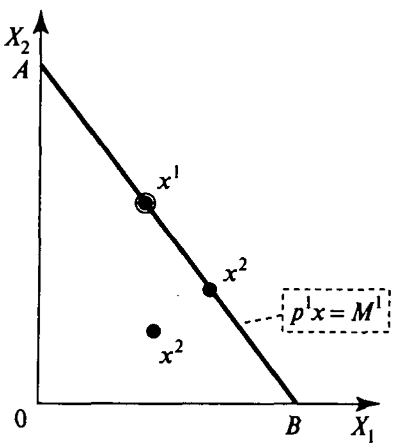


Рис. 3.1

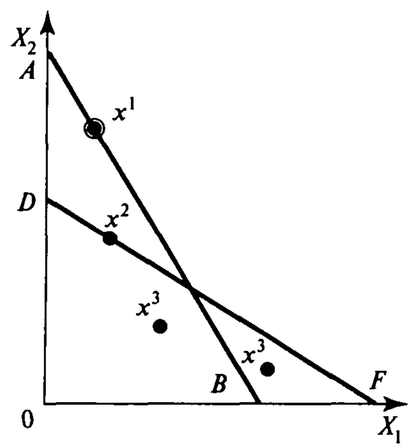


Рис. 3.2

Очевидно,

$p^1x^1 \geq p^1x^2$, $p^2x^2 \geq p^2x^3$, т.е.

$x^1 \succ^* x^2$, $x^2 \succ^* x^3$.

Если потребительский набор x^3 принадлежит бюджетному множеству OAB, то $x^1 \succ^* x^3$ (т.е. потребительский набор x^1 прямо выявленно предпочитается потребительскому набору x^3), если же потребительский набор x^3 не принадлежит бюджетному множеству OAB, то, строго говоря, нельзя писать, что $x^1 \succ^* x^3$. Следовательно, отношение прямого выявленного предпочтения не обладает свойством транзитивности.

3.1.3. Говорят, что потребительский набор x^1 *косвенно выявленно предпочитается* потребительскому набору x^3, если $p^1x^1 \geq p^1x^2$, $p^2x^2 \geq p^2x^3$ и если потребительский набор x^3 не принадлежит бюджетному множеству, соответствующему рыночной ситуации $(p^1, M^1 = p^1x^1)$.

Однако приведенное разделение выявленного предпочтения потребительского набора x^1 потребительскому набору x^3 на прямое и косвенное не вполне конструктивно, ибо часто бывает не ясно, принадлежит потребительский набор x^3 бюджетному множеству, соответствующему рыночной ситуации $(p^1, M^1 = p^1x^1)$, или не принадлежит. В некоторых случаях приходится специально оговаривать, о каком конкретно выявленном предпочтении идет речь (прямом или косвенном).

В дальнейшем вне зависимости от того, принадлежит потребительский набор x^3 бюджетному множеству, соответствующему рыночной ситуации $(p^1, M^1 = p^1x^1)$, или не принадлежит, используется терминология: потребительский набор x^1 выявленно предпочитается потребительскому набору x^3, если $p^1x^1 \geq p^1x^2$, $p^2x^2 \geq p^2x^3$. Символика: $x^1 \succ^* x^3$.

В случае цепочки $x^1, x^2, \ldots, x^k$, содержащей четыре и более потребительских наборов, будем говорить о выявленном предпочтении потребительского набора x^1 потребительскому набору x^k и использовать символику $x^1 \succ^* x^k$.

В случае двух потребительских наборов x^1 и x^2 во фразе «потребительский набор x^1 прямо выявленно предпочитается потребительскому набору x^2» слово «прямо» также будет опускаться.

3.2. Связь теории выявленных предпочтений с теорией линий (поверхностей) безразличия

3.2.1. В теории выявленных предпочтений нет функции полезности и нет линий (поверхностей) безразличия. Однако по результатам наблюдений за поведением потребителя на рынке можно дать качественную оценку характеру поведения линий (поверхностей) безразличия потребителя. Под результатом наблюдения за поведением потребителя на рынке понимается пара, состоящая из вектора цен p и потребительского набора x, который был выбран потребителем при этом векторе цен.

Если при векторе цен p^1 потребитель выбрал набор x^1, а при векторе цен p^2 потребитель выбрал набор x^2, то можно построить объединение $OAGF$ бюджетных множеств Q^1 (OAB) и Q^2 (ODF), соответствующих рыночным ситуациям (p^1, $M^1 = p^1x^1$) и (p^2, $M^2 = p^2x^2$) (рис. 3.3). Поскольку $p^1x^1 \geq p^1x$ (здесь x «пробегает» множество Q^1) и $p^2x^2 \geq p^2x$ (здесь x «пробегает» множество Q^2), постольку $x^1 \succ^* x^2$, $x^2 \succ^* x^3$ и, следовательно, $x^1 \succ^* x$ для всех x из объединения $OAGF$ бюджетных множеств Q^1 и Q^2.

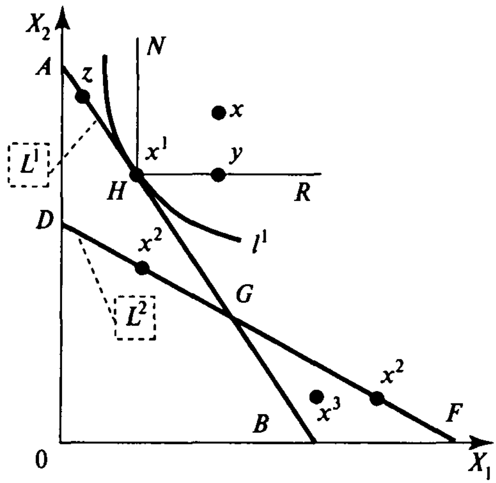


Рис. 3.3

При любом векторе цен p для потребительского набора x из угла x^1NR справедливо неравенство $px \geq px^1$, т.е. для любого потребительского набора x из угла x^1NR справедливо отношение $x \succ^* x^1$.

Из сказанного следует, что если линия безразличия l^1, содержащая потребительский набор x^1, существует, то она должна быть расположена во множествах Ax^1N и FGx^1R, т.е. вне множеств $OAGF$ и x^1NR (см. рис. 3.3). Если бы линия безразличия l^1 имела общую точку, скажем z, со множеством $OAGF$, отличную от точки x^1, то это бы противоречило отношению $x^1 \succ^* z$, ибо на линии безразличия не могут находиться точки, одна из которых предпочитается другой. Аналогичные рассуждения следует провести для точки y множества x^1NR.

3.2.2. Если при изменении цен число наблюдений о выборе потребителя растет, то можно сузить множество, которому принадлежит линия безразличия l^1 индивидуума, содержащая потребительский набор x^1.

Пусть при векторе цен p^4 потребитель выбрал набор x^4 и пусть бюджетная прямая L^4, имеющая уравнение $p^4x = p^4x^4$, содержит потребительский набор x^1 (рис. 3.4). Тогда очевидно, что $p^4x^4 = p^4x^1$ и, следовательно, $x^4 \succ^* x^1$.

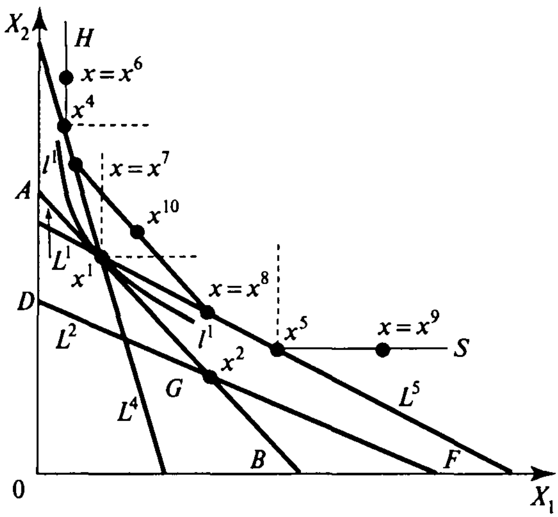


Рис. 3.4

Пусть при векторе цен p^5 потребитель выбрал набор x^5 и пусть бюджетная прямая L^5, имеющая уравнение $p^5x = p^5x^5$, содержит потребительский набор x^1 (см. рис. 3.4). Тогда очевидно, что $p^5x^5 = p^5x^1$ и $x^5 \succ^* x^1$.

Любой потребительский набор x, принадлежащий периферии $Hx^4x^1x^5S$ (см. рис. 3.4), выявленно предпочитается потребительскому набору x^1.

Действительно, если потребительский набор $x = x^6$ расположен на вертикальном луче x^4H, то очевидно, что $p^4x > p^4x^4 = p^4x^1$, откуда вытекает, что $x = x^6 \succ^* x^1$. Если потребительский набор $x = x^7$ находится на отрезке $[x^1; x^4]$ между точками x^1 и x^4, то $x = (1 - \lambda)x^1 + \lambda x^4$, где число $0 < \lambda < 1$. В этом случае $p^4x = (1 - \lambda)p^4x^1 + \lambda p^4x^4 = (1 - \lambda)p^4x^1 + \lambda p^4x^1 = p^4x^1$, откуда следует, что $x = x^7 \succ^* x^1$.

Для потребительских наборов x, расположенных на отрезке $[x^1; x^5]$ и на горизонтальном луче x^5S, рассуждения аналогичны только что проведенным.

Любой потребительский набор $x = x^{10}$, принадлежащий множеству $Hx^4x^1x^5S$, выявленно предпочитается потребительскому набору x^1, т.е. $x^{10} \succ^* x^1$.

Действительно, потребительский набор x^{10} можно представлять в виде выпуклой комбинации двух потребительских наборов, принадлежащих периферии $Hx^4x^1x^5S$.

На рис. 3.4 потребительский набор x^{10} есть выпуклая комбинация потребительских наборов x^7 и x^8, т.е. $x^{10} = (1-\lambda)x^7 + \lambda x^8$, где число $0 < \lambda < 1$. Имеем $p^4x^{10} = (1-\lambda)p^4x^7 + \lambda p^4x^7 > (1-\lambda)p^4x^1 + \lambda p^4x^1 =$ $= p^4x^1$, т.е. $x^{10} \succ^* x^1$.

Таким образом, в рассматриваемом случае по результатам четырех наблюдений о выборе потребителем наборов x^1, x^2, x^4, x^5 получаем, что если линия безразличия l^1, содержащая потребительский набор x^1, существует, то она должна быть расположена вне множеств $OAGF$ и $Hx^4x^1x^5S$ (см. рис. 3.4).

Приведенные рассуждения показали, что предпочтения потребителя обладают свойством выпуклости.

Если $x^1 \succ^* x^2$ и если существует карта линий безразличия, то $x^1 \succeq x^2$ (рис. 3.5). Если существует карта линий безразличия, то из $x^1 \succeq x^2$ не следует, вообще говоря, что $x^1 \succ^* x^2$ (рис. 3.6).

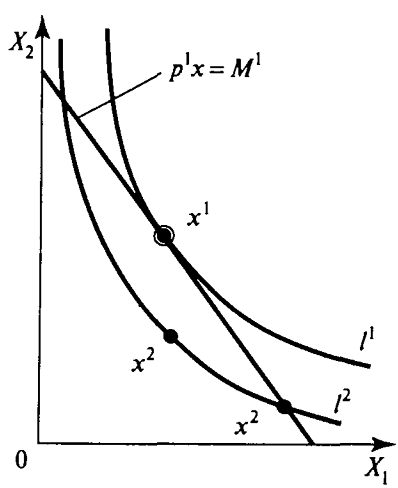


Рис. 3.5

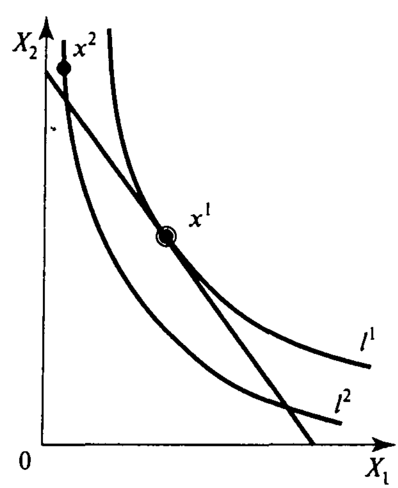


Рис. 3.6

3.3. Слабая и сильная аксиомы выявленных предпочтений

3.3.1. ***Слабая аксиома выявленных предпочтений*** (СлАВП) формулируется так: если $x^1 \succ^* x^2$ и $x^1 \neq x^2$, то неверно, что $x^2 \succ^* x^1$.

Другими словами, если $p^1x^1 \geq p^1x^2$, то $p^2x^2 < p^2x^1$ ($p^2x^2 = M^2$, p^2, M^2 – рыночная ситуация, соответствующая потребительскому набору x^2, если он был бы выбран). Неравенство $p^1x^1 \geq p^1x^2$ (в котором единица в качестве индекса фигурирует 3 раза и левая часть p^1x^1 больше или равна правой p^1x^2) означает, что потребителю доступны оба потребительских набора x^1 и x^2 и из этих наборов потребитель выбирает набор x^1. Неравенство $p^2x^2 < p^2x^1$ означает, что при ценах p^2 потребитель выбрал набор x^2, а набор x^1 потребителю недоступен.

Если СлАВП имеет место, то отношение выявленного предпочтения не обладает свойством симметричности: если $x^1 \succ^* x^2$, то неверно, что $x^2 \succ^* x^1$. Если СлАВП не имеет места, т.е. если существуют одновременно два отношения: $x^1 \succ^* x^2$ и $x^2 \succ^* x^1$, то отношение выявленного предпочтения обладает свойством симметричности.

Рисунок 3.7 иллюстрирует выполнение СлАВП, рис. 3.8 – ситуацию, когда СлАВП не имеет места.

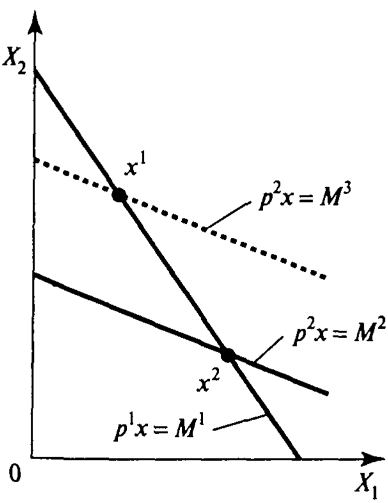


Рис. 3.7

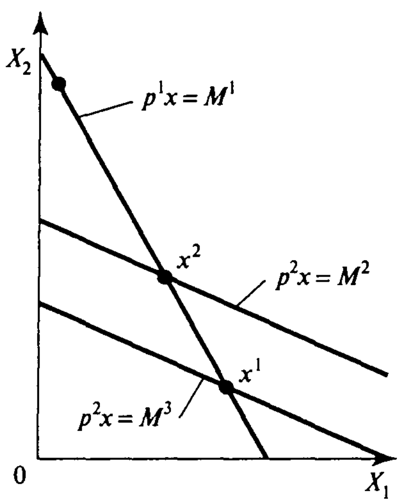


Рис. 3.8

На рис. 3.7 $p^1x^1 = p^1x^2$, т.е. $x^1 \succ^* x^2$, но $M^3 > M^2$, где $M^3 = p^2x^1$, $M^2 = p^2x^2$, т.е. $p^2x^2 < p^2x^1$; таким образом, СлАВП имеет место. На рис. 3.8 $p^1x^1 = p^1x^2$, т.е. $x^1 \succ^* x^2$, но $M^3 < M^2$, где $M^3 = p^2x^1$, $M^2 = p^2x^2$, т.е. $p^2x^2 > p^2x^1$, $x^2 \succ^* x^1$; таким образом, СлАВП не имеет места.

3.3.2. Если существует функция полезности $U(x_1, x_2)$, то потребительский набор $x^1 = (x_1^1; x_2^1)$ – точка касания бюджетной прямой $p^1x = M^1$ ($M^1 = p^1x^1$) и линии безразличия l^1, содержащей точку x^1 (рис. 3.9, на котором представлена ситуация, когда СлАВП имеет место). Линия безразличия l^2, содержащая точку $x^2 = (x_1^2; x_2^2)$, касается бюджетной прямой $p^2x = M^2$ ($M^2 = p^2x^2$). Линия безразличия l^2 расположена «юго-западнее» линии безразличия l^1, что, естественно, согласуется с тем, что $x^1 \succ^* x^2$.

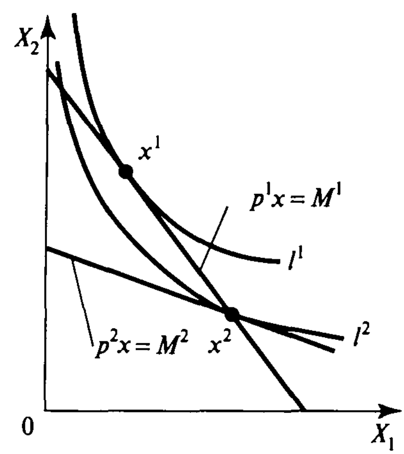


Рис. 3.9

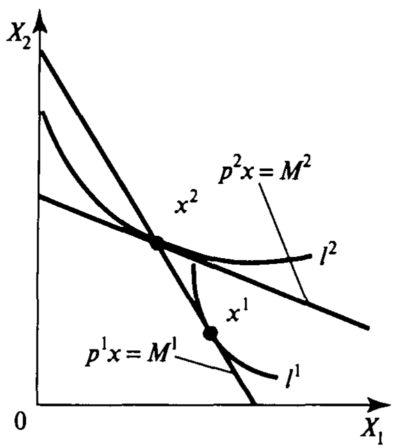


Рис. 3.10

На рис. 3.10, на котором представлена ситуация, когда СлАВП не имеет места, ситуация иная. Здесь, так же как и на рис. 3.9, линия безразличия l^1 касается бюджетной прямой $p^1x = M^1$ в точке x^1, а линия безразличия l^2 касается бюджетной прямой $p^2x = M^2$ в точке x^2. Взаимное расположение линий безразличия l^2 и l^1 свидетельствует о том, что они должны пересечься, а это принципиально невозможно, если, конечно, речь идет о линиях безразличия l^1 и l^2 *одной и той же функции полезности*. Если же линия безразличия l^1 является линией, соответствующей одной функции полезности, а линия безразличия l^2 является линией, соответствующей другой функции полезности, то пересечение таких линий вполне возможно. Следовательно, в случае невыполнения СлАВП единая (для двух наборов x^1 и x^2) функция полезности существовать не может. Остается принять, что переход потребителя от набора x^1 к набору x^2 продиктован изменением его функции полезности. Таким образом, невыполнение СлАВП свидетельствует либо о смене предпочтений потребителя (что выражается формально в изменении его функции полезности), либо в отрицании того факта, что на рынке потребитель ведет себя рационально.

Таким образом, СлАВП является вполне естественной с содержательной экономической точки зрения.

3.3.3. Результаты наблюдений за поведением потребителя на рынке позволяют получить ответ на вопрос, соответствует поведение потребителя на рынке СлАВП или не соответствует. Так, i-е наблюдение за поведением потребителя на рынке фиксирует вектор цен $p^i = (p_1^i, p_2^i)$ и выбранный потребителем набор $x^i = (x_1^i, x_2^i)$. Результаты, скажем, k наблюдений можно представить в виде табл. 3.1.

Таблица 3.1

Номер наблюдения	Цены		Выбираемые потребительские наборы	
	p_1	p_2	x_1	x_2
1	p_1^1	p_2^1	x_1^1	x_2^1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	p_1^i	p_2^i	x_1^i	x_2^i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	p_1^k	p_2^k	x_1^k	x_2^k

Положим $a_{ij} = p_1^i x_1^j + p_2^i x_2^j = p^i x^j$, $i, j = 1, \ldots, k$, т.е. a_{ij} – расход потребителя, если он по ценам $p^i = (p_1^i, p_2^i)$ приобретает набор $x^j = (x_1^j, x_2^j)$.

Элементы a_{ij} табл. 3.2 образуют квадратную матрицу A.

Таблица 3.2

	x^1	$\cdots$	x^i	$\cdots$	x^j	$\cdots$	x^k
p^1	a_{11}	$\cdots$	a_{1i}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1k}
$\vdots$	$\vdots$	...	...	...	...	...	...
p^i	a_{i1}	$\cdots$	a_{ii}	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$	a_{ik}
$\vdots$	$\vdots$	...	...	...	...	...	...
p^j	a_{j1}	$\cdots$	a_{ji}	$\cdots$	a_{jj}	$\cdots$	a_{jk}
$\vdots$	$\vdots$	...	...	...	...	...	...
p^k	a_{k1}	$\cdots$	a_{ki}	$\cdots$	a_{kj}	$\cdots$	a_{kk}

Элементы i-й строки, $i = 1, \ldots, k$, матрицы A показывают расходы потребителя, которые он имел бы, если бы по ценам $p^i = (p_1^i, p_2^i)$ приобретал последовательно все потребительские наборы $x^1 = (x_1^1, x_2^1), \ldots, x^k = (x_1^k, x_2^k)$, кроме набора $x^i = (x_1^i, x_2^i)$, который был реально выбран потребителем по ценам $p^i = (p_1^i, p_2^i)$. Таким образом, элементы главной диагонали показывают реальные расходы потребителя, который приобретал наборы $x^1 = (x_1^1, x_2^1), \ldots, x^k = (x_1^k, x_2^k)$ соответственно по ценам $p^1 = (p_1^1, p_2^1), \ldots, p^k = (p_1^k, p_2^k)$. Остальные (внедиагональные) элементы показывают гипотетические расходы потребителя, которые он бы имел, приобретая по ценам $p^i = (p_1^i, p_2^i)$ другие наборы $x^j = (x_1^j, x_2^j)$, отличные от выбранного им набора $x^i = (x_1^i, x_2^i)$, т.е. $i \neq j$.

Если $a_{ii} = p_1^i x_1^i + p_2^i x_2^i \geq p_1^i x_1^j + p_2^i x_2^j = a_{ij}$, $j = 1, \ldots, k$, $j \neq i$, то это означает, что набор $x^j = (x_1^j, x_2^j)$, $j = 1, \ldots, k$, $j \neq i$, доступен потребителю, когда он приобретал набор $x^i = (x_1^i, x_2^i)$, и набор $x^i = (x_1^i, x_2^i)$ выявленно предпочитается потребительскому набору $x^j = (x_1^j, x_2^j)$, $j = 1, \ldots, k$, $j \neq i$.

Пометим такой элемент a_{ij} $(a_{ij} \leq a_{ii})$, например, звездочкой и назовем его меченым.

Если $a_{ii} = p_1^i x_1^i + p_2^i x_2^i < p_1^i x_1^j + p_2^i x_2^j = a_{ij}$, $j = 1, \ldots, k$, $j \neq i$, то это означает, что набор $x^j = (x_1^j, x_2^j)$, $j = 1, \ldots, k$, $j \neq i$ недоступен потребителю, когда он приобретал набор $x^i = (x_1^i, x_2^i)$. Поэтому в данном случае ничего нельзя сказать о выявленном предпочтении одного потребительского набора другому (речь идет о наборах x^i и x^j и ценах $p^i = (p_1^i, p_2^i)$).

Используя матрицу A, можно проверить, есть ли нарушения СлАВП, когда рассматриваются пары потребительских наборов, или таких нарушений нет.

Если в матрице A мечеными являются ее элементы a_{ij} и a_{ji}, $i \neq j$, то это означает, что для потребительских наборов x^i и x^j СлАВП не выполняется.

Действительно, поскольку элемент a_{ij} матрицы A меченый, постольку $a_{ii} \geq a_{ij}$, т.е. $p^i x^i \geq p^i x^j$ и, следовательно, $x^i \succ^* x^j$. Поскольку элемент a_{ji} матрицы A меченый, постольку $a_{jj} \geq a_{ji}$, т.е. $p^j x^j \geq p^j x^i$ и, следовательно, $x^j \succ^* x^i$. Одновременное наличие выявленных предпочтений $x^i \succ^* x^j$ и $x^j \succ^* x^i$ означает, что для потребительских наборов x^i и x^j СлАВП не выполняется.

3.3.4. Пример 3.3.1

Результаты трех наблюдений за поведением потребителя на рынке представлены в табл. 3.3 (все числа условные).

Таблица 3.3

Номер наблюдения	Цены		Выбираемые потребительские наборы	
	p_1	p_2	x_1	x_2
1	1	1	2	3
2	3	1	3	1
3	1	2	1	3

В рассматриваемом примере

$a_{11} = p^1 x^1 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 5$, $a_{12} = p^1 x^2 = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 4$, $a_{13} = p^1 x^3 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 4$,

$a_{21} = p^2 x^1 = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 9$, $a_{22} = p^2 x^2 = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 10$, $a_{23} = p^2 x^3 = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 6$,

$a_{31} = p^3 x^1 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8$, $a_{32} = p^3 x^2 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5$, $a_{33} = p^3 x^3 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 7$

и матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4^* & 4^* \\ 9^* & 10 & 6^* \\ 8 & 5^* & 7 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$a_{11} = p^1x^1 > p^1x^2 = a_{12} \Rightarrow x^1 \succ^* x^2,$$
$$a_{22} = p^2x^2 > p^2x^1 = a_{21} \Rightarrow x^2 \succ^* x^1,$$
$$a_{22} = p^2x^2 > p^2x^3 = a_{23} \Rightarrow x^2 \succ^* x^3,$$
$$a_{33} = p^3x^3 > p^3x^2 = a_{32} \Rightarrow x^3 \succ^* x^2.$$

Таким образом, в рассматриваемом примере СлАВП не выполняется на двух парах потребительских наборов: на паре x^1 и x^2, а также на паре x^2 и x^3. Отсюда следует, что результаты наблюдений за выбором потребителя наборов x^1 и x^2 на рынке не отражают его поведения с устойчивыми предпочтениями, т.е. поведения, когда потребитель выбирает из того, что может себе позволить. Аналогичный вывод справедлив и для пары наборов x^2 и x^3.

На рис. 3.11 представлена геометрическая интерпретация результатов трех наблюдений примера 3.3.1: построены потребительские наборы x^1, x^2, x^3 в виде точек $x^1 = (2, 3)$, $x^2 = (3, 1)$ и $x^3 = (1, 3)$, а также бюджетные прямые $p^1x = M^1 (x_1 + x_2 = 5)$, $p^2x = M^2 (3x_1 + x_2 = 10)$ и $p^3x = M^3 (x_1 + 2x_2 = 7)$.

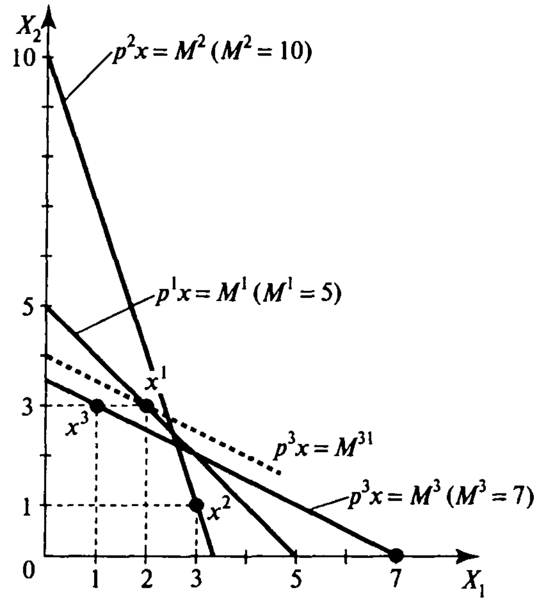


Рис. 3.11

Рисунок 3.11 показывает, что $p^1x^1 > p^1x^2$, т.е. $x^1 \succ^* x^2$, и $p^2x^2 > p^2x^1$, т.е. $x^2 \succ^* x^1$. Рисунок 3.11 геометрически подтверждает полученный ранее аналитический факт ($a_{11} > a_{12}$, $a_{22} > a_{21}$), что для наборов x^1 и x^2 СлАВП не выполняется.

Аналогично рис. 3.11 геометрически подтверждает полученный ранее аналитический факт ($a_{22} > a_{23}$, $a_{33} > a_{32}$), что для наборов x^2 и x^3 СлАВП не выполняется.

3.3.5. ***Сильная аксиома выявленных предпочтений*** **(СиАВП)** ***формулируется так***: если $x^1 \succ^* x^2$, $x^2 \succ^* x^3$, …, $x^{k-1} \succ^* x^k$ и $x^1 \neq x^k$, то неверно, что $x^k \succ^* x^1$.

Другими словами, если $p^1x^1 \geq p^1x^2, p^2x^2 \geq p^2x^3, \ldots, p^{k-1}x^{k-1} \geq p^{k-1}x^k$, то $p^kx^k < p^kx^1$. СиАВП включает СлАВП (при $k \neq 2$).

Рисунок 3.11 иллюстрирует выполнение СиАВП (при $k = 3$), рис. 3.12 – ситуацию, когда СиАВП (при $k = 3$) не имеет места. На рис. 3.11 имеем $p^1x^1 > p^1x^2, p^2x^2 > p^2x^3$ и $p^3x^3 = M^3 < M^{31} = p^3x^1$. На рис. 3.12 имеем $p^1x^1 = p^1x^2, p^2x^2 = p^2x^3$ и $p^3x^3 = M^3 > M^{31} = p^3x^1$. Как уже отмечалось в примере 3.3.1, на рис. 3.11 видно, что для двух пар потребительских наборов x^1, x^2 и x^2, x^3 не имеет места СлАВП. На рис. 3.12 видно, что $p^2x^2 < p^2x^1$ и $p^3x^3 > p^3x^2$, т.е. для пары потребительских наборов x^1, x^2 имеет место СлАВП, а для пары потребительских наборов x_2 и x_3 СлАВП места не имеет.

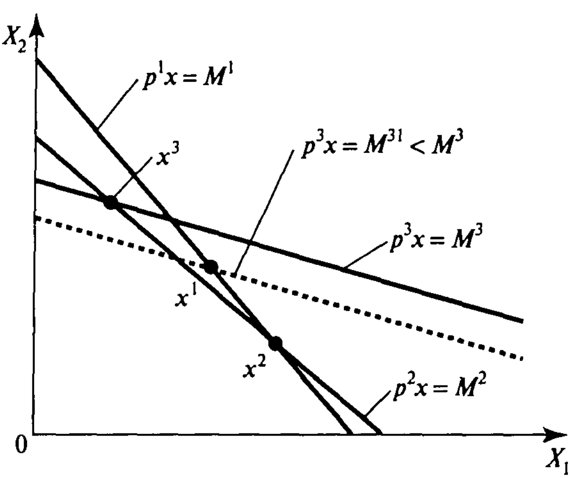


Рис. 3.12

Рисунок 3.13 иллюстрирует выполнение СиАВП и выполнение СлАВП для двух пар потребительских наборов: x^1, x^2 и x^2, x^3. Имеем $p^1x^1 = p^1x^2$, $p^2x^2 = p^2x^3$ и $p^3x^3 = M^3 < M^{31} = p^3x^1$, т.е. для потребительских наборов x^1, x^2, x^3 СиАВП выполняется.

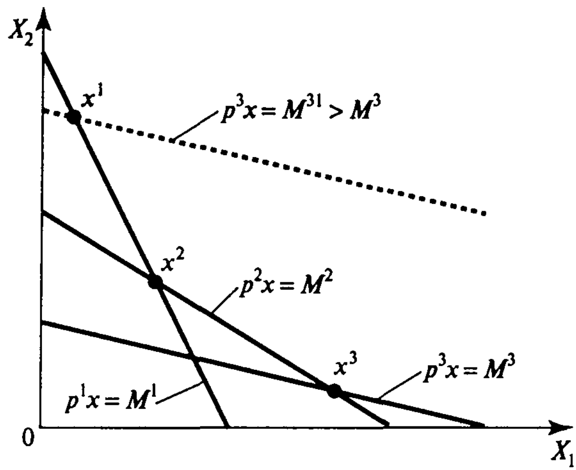


Рис. 3.13

Далее имеем $p^1x^1 = p^2x^2$ и $p^2x^2 < p^2x^1$, т.е. СлАВП для пары потребительских наборов x^1 и x^2 выполняется. Имеем также $p^2x^2 = p^2x^3$ и $p^3x^3 < p^3x^2$, т.е. для пары потребительских наборов x^2 и x^3 СлАВП выполняется.

Рисунок 3.14 иллюстрирует выполнение СлАВП для двух пар потребительских наборов – x^1, x^2 и x^2, x^3 и невыполнение СиАВП для потребительских наборов x^1, x^2, x^3. Имеем $p^1x^1 = p^1x^2$, $p^2x^2 > p^2x^3$ и $p^3x^3 > p^3x^1 = M^{31}$, т.е. СиАВП для потребительских наборов x^1, x^2, x^3 места не имеет. Далее $p^1x^1 = p^1x^2$ и $p^2x^2 < p^2x^1$, т.е. для пары потребительских наборов x^1, x^2 СлАВП выполняется. Для потребительских наборов x_2 и x_3 имеем $p^2x^2 > p^2x^3$ и $p^3x^3 < p^3x^2$, т.е. для них СлАВП выполняется.

Рисунок 3.15 иллюстрирует невыполнение СиАВП для потребительских наборов x^1, x^2, x^3 и невыполнение СлАВП для обеих пар потребительских наборов: x^1, x^2 и x^2, x^3. Имеем $p^1x^1 = p^1x^2$, $p^2x^2 = p^2x^3$, $p^3x^2 > p^3x^1$, $p^2x^2 > p^2x^1$, $p^3x^3 > p^3x^2$.

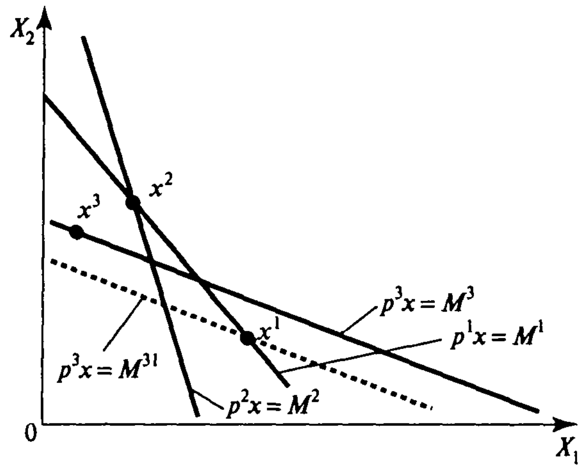


Рис. 3.14

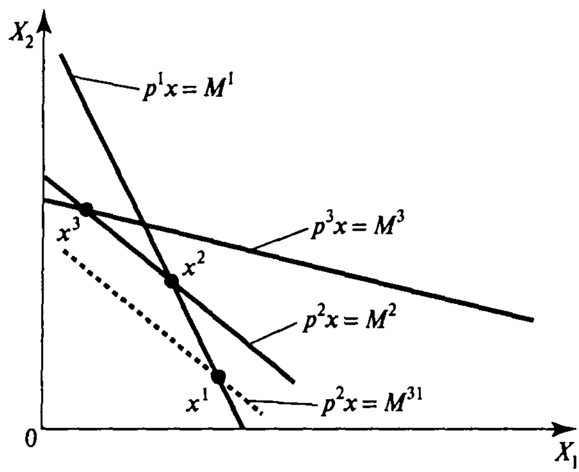


Рис. 3.15

Пример, приведенный на рис. 3.11, показывает, что формально СиАВП имеет место для полного набора векторов x^1, x^2, x^3, однако для поднаборов x^1, x^2 и x^2, x^3 она не имеет места. Если СиАВП не имеет места хотя бы для одного упорядоченного поднабора полного набора векторов x^1, x^2, ..., x^k, считается, что СиАВП не имеет места и для полного набора векторов.

3.3.6. Поясним на примере, как с помощью матрицы A, которая построена по результатам наблюдений, определить, выполняется СиАВП для всей совокупности наблюдений или не выполняется.

Пример 3.3.2

Пусть матрица A имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 30 & 20^* & 40^{(*)} \\ 31 & 25 & 10^* \\ 10^* & 20 & 15 \end{pmatrix}.$$

В связи с тем что $a_{11}=p^1x^1=30>20=p^1x^2=a_{12}, x^1 \succ^* x^2$. Поэтому элемент 20, расположенный в первой строке и втором столбце, является меченым, что показано символом *. Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что мечеными являются также элементы 10 (вторая строка и третий столбец) и 10 (третья строка и первый столбец).

В примере 3.3.1 и до сих пор в этом примере 3.3.2 метились только те элементы матрицы A, которые были не больше элементов соответствующих строк, расположенных на главной диагонали матрицы A, что содержательно означало, что речь шла о прямых выявленных предпочтениях. Меченые элементы 20 (первая строка, второй столбец матрицы A) и 10 (вторая строка и третий столбец) означают, что первый набор x^1 косвенно выявленно предпочитается набору x^3, поэтому теперь следует пометить звездочкой (в скобках) элемент 40 (первая строка и третий столбец). Далее сопоставляются между собой любые меченые элементы, причем не важно, есть у звездочек скобки или их нет.

В рассматриваемом примере $x^1 \succ^* x^2$ (20^*), $x^2 \succ^* x^3$ (10^*), т.е. $x^1 \succ^* x^3$ (40^*), а также $x^3 \succ^* x^1$ (10^*).

Если бы для потребительских наборов x^1, x^2, x^3 была выполнена СиАВП, то мы должны были иметь отношения $x^1 \succ^* x^2, x^2 \succ^* x^3$ и отрицание отношения $x^3 \succ^* x^1$. Однако, как только что мы видели, отношение $x^3 \succ^* x^1$ в рассматриваемом примере выполняется, а это означает, что результаты наблюдений за поведением потребителя на рынке несовместимы с основными положениями экономической теории, т.е. мы здесь должны получить вывод, аналогичный выводу примера 3.3.1.

На основе построенной матрицы A прямые выявленные предпочтения одних потребительских наборов другим вычленяются непосредственно, т.е. непосредственно метятся звездочками элементы матрицы A. Вычленение косвенных выявленных предпочтений опирается на вычленение цепочек разной длины, что совсем не просто, если анализируются результаты большого числа наблюдений, т.е. если порядок матрицы A является достаточно большим. На этот счет существуют компьютерные программы, которые вычленяют цепочки, описывающие косвенные выявленные предпочтения на основе прямых выявленных предпочтений.

Если наблюдения за поведением потребителя на рынке осуществлялись на продолжительном временнóм промежутке, то, скорее всего, СиАВП не будет выполняться, ибо потребитель может перейти на другую шкалу предпочтений.

В связи с тем что цепочку, состоящую из k звеньев прямых выявленных предпочтений

$$x^1 \succ^* x^2, x^2 \succ^* x^3, \ldots, x^{k-1} \succ^* x^k,$$

можно заменить на цепочку, состоящую из одного звена косвенных выявленных предпочтений

$$x^1 \succ^* x^k,$$

СиАВП можно перефразировать так: если $x^1 \succ^* x^k$ (прямо или косвенно), то неверно, что $x^k \succ^* x^1$.

3.3.7. Отметим, что до этого момента явно или неявно использовалась предпосылка о строгой выпуклости предпочтений потребителя, что означает в случае наличия линий безразличия их строгую выпуклость к точке O и, следовательно, касание бюджетной прямой только в одной точке.

Если отказаться от предпосылки о строгой выпуклости предпочтений потребителя, оставив предпосылку о выпуклости предпочтений потребителя, то от СиАВП можно перейти к *обобщенной аксиоме выявленных предпочтений* (*ОбАВП*), которая формулируется так: если $x^1 \succ^* x^k$ (прямо или косвенно) и $x^1 \neq x^k$, то неверно, что $x^k \succ^* x^1$.

Отношение $x^1 \succ^* x^k$ рассматривается при предпосылке о выпуклости предпочтений потребителя, а отношение $x^k \succ^* x^1$ – при предпосылке о строгой выпуклости предпочтений потребителя.

Имеет место теорема Эфриата.

Теорема Эфриата

Для того чтобы данные о потребительском поведении индивидуума соответствовали ОбАВП, необходимо и достаточно, чтобы в основе потребительского поведения лежали рациональные предпочтения.

Приведем формулировку ослабленной версии теоремы Эфриата:

Пусть потребительские предпочтения индивидуума строго выпуклы, тогда для того, чтобы данные о потребительском поведении индивидуума соответствовали СиАВП, необходимо, чтобы в основе потребительского поведения лежали рациональные предпочтения.

Доказательства этих двух теорем достаточно сложны и поэтому являются необязательными.

Обратная задача теории потребительского спроса и теоремы Эфриата подробно представлены в главе 5 монографии В.К. Горбунова (2004).

3.4. Связь между теорией выявленных предпочтений и индексами цен

3.4.1. Для анализа динамики благосостояния используются индексы цен и дохода, а также индексы объемов. В теории индексов принято сопоставлять величины двух периодов: текущего и базового (базисного). Величины, привязанные к базовому периоду, имеют индекс 0 (или b), величины, привязанные к текущему периоду, – индекс 1 (или t). Базовый и текущий периоды могут быть, а могут не быть соседними. Обычно в качестве периода берут один год.

Вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ представляет собой потребительский набор (потребительскую корзину), вектор $p = (p_1, \ldots, p_n)$ – это вектор цен. Далее элементы теории индексов описываются для случая $n = 2$. Общий случай $n \geq 2$ по существу не отличается от случая $n = 2$.

Индекс (номинального) дохода определяется так:

$$I = \frac{p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1}{p_1^0 x_1^0 + p_2^0 x_2^0}.$$

Он показывает, во сколько раз вырос (если $I > 1$) или снизился (если $I < 1$) номинальный доход потребителя в текущем периоде по сравнению с базовым периодом. Индекс номинального дохода сам по себе не может служить показателем динамики реального благосостояния потребителя, ибо номинальный доход может вырасти за счет, например, роста цен.

В индексе цен

$$I_p = \frac{p_1^1 x_1 + p_2^1 x_2}{p_1^0 x_1 + p_2^0 x_2}$$

цены меняются от базового периода к текущему периоду, а потребительский набор $x = (x_1, x_2)$ остается неизменным.

Если потребительский набор берется в базовом периоде, т.е. $x^0 = (x_1^0; x_2^0)$, то имеем *индекс цен Ласпейреса*

$$I_p^{(L)} = \frac{p_1^1 x_1^0 + p_2^1 x_2^0}{p_1^0 x_1^0 + p_2^0 x_2^0};$$

если потребительский набор берется в текущем периоде, т.е. $x^1 = (x_1^1; x_2^1)$, то имеем *индекс цен Пааше*

$$I_p^{(P)} = \frac{p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1}{p_1^0 x_1^1 + p_2^0 x_2^1}.$$

Индекс цен Ласпейреса показывает, во сколько раз выросла стоимость $p_1^1 x_1^0 + p_2^1 x_2^0 = p^1 x^0$ потребительского набора x^0 базового периода в текущих ценах относительно стоимости $p^0 x^0$ этого же потребительского набора x^0 в базовых ценах p^0. Индекс цен Пааше показывает, во сколько раз выросла стоимость $p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1 = p^1 x^1$ потребительского набора x^1 текущего периода в текущих ценах относительно стоимости $p^0 x^1$ этого потребительского набора x^1 в базовых ценах p^0. Индексы цен Ласпейреса и Пааше сами по себе не могут служить показателями динамики реального благосостояния, ибо они не привязаны к динамике дохода потребителя. Индексы цен Ласпейреса и Пааше характеризуют динамику цен. Однако оба индекса цен не дают верного представления об изменении цен, ибо не учитывают влияния этого изменения на структуру потребления. Например, если $p_1^1 > p_1^0$, то $x_1^1 < x_1^0$, и наоборот, если $p_1^1 < p_1^0$, то $x_1^1 > x_1^0$. Поэтому индекс цена Ласпейреса $I_p^{(L)}$, в котором в качестве весов фигурируют координаты (x_1^0, x_2^0) потребительского набора x^0, дает преувеличенное представление об изменении цен (от $p^0 = (p_1^0, p_2^0)$ к $p_1 = (p_1^1, p_2^1)$) в случае их роста и преуменьшенное – в случае их снижения. Индекс цен Пааше $I_p^{(P)}$, в котором в качестве весов фигурируют координаты (x_1^1, x_2^1) потребительского набора x^1, дает преуменьшенное представление об изменении цен в случае их роста и преувеличенное – в случае их снижения.

В *индексе уровня жизни* (*индексе объемов*)

$$I_x = \frac{p_1 x_1^1 + p_2 x_2^1}{p_1 x_1^0 + p_2 x_2^0}$$

объемы x_1 и x_2 меняются от базового периода к текущему периоду, а цены p_1 и p_2 остаются неизменными.

Если используются цены $p^0 = (p_1^0, p_2^0)$ базового периода, то имеем *индекс уровня жизни* (*индекс объемов*) *Ласпейреса*

$$I_x^{(L)} = \frac{p_1^0 x_1^1 + p_2^0 x_2^1}{p_1^0 x_1^0 + p_2^0 x_2^0};$$

если используются цены $p^1 = (p_1^1, p_2^1)$ текущего периода, имеем *индекс уровня жизни* (*индекс объемов*) *Пааше*

$$I_x^{(P)} = \frac{p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1}{p_1^1 x_1^0 + p_2^1 x_2^0}.$$

Индексы уровня жизни (индексы объемов) Ласпейреса и Пааше являются индексами реального дохода потребителя, ибо в этих индексах цены неизменные.

3.4.2. Используем теорию выявленных предпочтений и теорию индексов для оценки динамики благосостояния потребителя при переходе от базового периода к текущему. Если $I_x^{(L)} \le 1$, то $p_1^0 x_1^1 + p_2^0 x_2^1 \le p_1^0 x_1^0 + p_2^0 x_2^0$, что означает, что $x^0 \succ^* x^1$, т.е. потребительский набор x^0 базового периода выявленно предпочитается потребительскому набору x^1 текущего периода, откуда следует, что в базовом периоде благосостояние потребителя лучше, чем в текущем периоде.

Таким образом, неравенство $I_x^{(L)} \le 1$ означает, что при переходе от базового периода к текущему благосостояние потребителя снизилось.

Если $I_x^{(L)} > 1$, то $p_1^0 x_1^1 + p_2^0 x_2^1 > p_1^0 x_1^0 + p_2^0 x_2^0$. Это означает, что в базовом периоде текущий потребительский набор $x^1 = (x_1^1, x_2^1)$ потребителю недоступен. В теории выявленных предпочтений сопоставляются только доступные потребителю пары наборов. Если среди пары наборов есть недоступный потребителю набор, то эти наборы не сопоставляются, ибо недоступный потребителю набор может быть для потребителя более или менее предпочтительным, чем доступный потребительский набор.

Следовательно, неравенство $I_x^{(L)} > 1$ не дает однозначного ответа о росте или снижении благосостояния при переходе от базового периода к текущему.

Если $I_x^{(P)} \geq 1$, то

$$p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1 \geq p_1^1 x_1^0 + p_2^1 x_2^0.$$

Это означает, что $x^1 \succ^* x^0$, т.е. потребительский набор x^1 текущего периода выявленно предпочитается потребительскому набору x^0 базового периода, откуда следует, что в текущем периоде благосостояние потребителя лучше, чем в базовом периоде.

Таким образом, неравенство $I_x^{(P)} \geq 1$ означает, что при переходе от базового периода к текущему благосостояние потребителя выросло.

Если $I_x^{(P)} < 1$, то $p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1 < p_1^1 x_1^0 + p_2^1 x_2^0$.

Этот случай аналогичен случаю $I_x^{(L)} > 1$. Здесь нет однозначного ответа о росте или снижении благосостояния потребителя при переходе от базового периода к текущему периоду.

3.4.3. Сопоставим между собой индексы (номинального) дохода и индексы цен Ласпейреса и Пааше.

Если $I \geq I_p^{(L)}$, то $\dfrac{p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1}{p_1^0 x_1^0 + p_2^0 x_2^0} \geq \dfrac{p_1^1 x_1^0 + p_2^1 x_2^0}{p_1^0 x_1^0 + p_2^0 x_2^0}$.

После сокращения на общий знаменатель получаем, что $p_1^1 x_1^1 + p_2^1 x_2^1 \geq p_1^1 x_1^0 + p_2^1 x_2^0$. Этот случай уже разобран выше (см. $I_x^{(P)} \geq 1$). Здесь мы имеем $x^1 \succ^* x^0$, т.е. при переходе от базового периода к текущему благосостояние потребителя выросло.

Случай $I < I_p^{(L)}$ сводится к случаю $I_x^{(P)} < 1$, так что здесь нет однозначного ответа о росте или снижении благосостояния потребителя при переходе от базового периода к текущему.

Случаи $I \leq I_p^{(P)}$ и $I > I_p^{(P)}$ вполне аналогичны случаям $I_x^{(L)} \leq 1$ и $I_x^{(L)} > 1$. В случае $I \leq I_p^{(P)}$ благосостояние потребителя в базовом периоде лучше, чем в текущем периоде. В случае $I > I_p^{(P)}$ нет однозначного ответа о росте или снижении благосостояния при переходе от базового периода к текущему.

На практике индексы цен и дохода формируются для страны в целом или для отдельных регионов, поэтому в качестве потребителя должен фигурировать средний потребитель страны или отдельного региона. Потребительский набор среднего потребителя есть потребительская корзина всего населения страны или отдельного региона, поделенная на численность населения страны или отдельного региона.

Вопросы для самоконтроля к главе 3

1. Сформулируйте основные предпосылки теории выявленных предпочтений.
2. Сформулируйте определение выявленного предпочтения (прямого и косвенного).
3. В чем отличие теории выявленных предпочтений от трех других теорий потребительского предпочтения (теории количественной полезности, теории порядковой полезности, теории отношения предпочтения-безразличия)?
4. Что следует понимать под результатом наблюдения за поведением потребителя на рынке?
5. Что представляет собой качественная характеристика линии безразличия с точки зрения теории выявленных предпочтений?
6. Приведите формулировку слабой аксиомы выявленных предпочтений (СлАВП) и ее экономическую и геометрическую интерпретации.
7. Опишите ситуацию, когда СлАВП не имеет места, а также экономическую и геометрическую интерпретации этой ситуации.
8. В чем суть проверки поведения потребителя на рынке на соответствие СлАВП?
9. Приведите формулировку сильной аксиомы выявленных предпочтений (СиАВП) и ее экономическую и геометрическую интерпретации.
10. Опишите ситуацию, когда СиАВП не имеет места, а также экономическую и геометрическую интерпретации.
11. В чем суть проверки поведения потребителя на рынке на соответствие СиАВП?
12. Приведите вторую формулировку сильной аксиомы выявленных предпочтений.
13. Приведите формулировку обобщенной аксиомы выявленных предпочтений.
14. Приведите формулировку теоремы Эфриата и формулировку ее ослабленной версии.
15. Выпишите выражение индекса дохода и дайте ему экономическое толкование.
16. Выпишите выражение индекса цен Ласпейреса и дайте ему экономическое толкование.

17. Выпишите выражение индекса цен Пааше и дайте ему экономическое толкование.
18. Выпишите выражение индекса объемов Ласпейреса и дайте ему экономическое толкование.
19. Выпишите выражение индекса уровня жизни (индекса объемов Пааше) и дайте ему экономическое толкование.
20. Опишите связь теории индексов цен, уровня жизни (объемов) и теории выявленных предпочтений.
21. Опишите связь теории индексов цен и дохода и теории выявленных предпочтений.

Задачи и упражнения для самоконтроля к главе 3

1. Приведите геометрический пример ситуации ($n = 2$), когда цена на первый продукт растет ($p_1^2 > p_1^1, p_2^2 = p_2^1$) и имеет место СлАВП.
2. Приведите геометрический пример ситуации ($n = 2$), когда цены на первый продукт растут ($p_1^3 > p_1^2 > p_1^1, p_2^3 = p_2^2 = p_2^1$) и имеет место СиАВП.
3. Результаты трех наблюдений за поведением потребителя на рынке представлены в табл. 3.4 (все числа условные):

Таблица 3.4

Номер наблюдения	Цены		Выбираемые потребительские наборы	
	p_1	p_2	x_1	x_2
1	2	2	3	4
2	4	1	4	2
3	1	3	2	4

   а) постройте матрицу A;
   б) проверьте выполнение СлАВП на двух парах потребительских наборов x^1 и x^2, а также x^2 и x^3;
   в) проверьте выполнение СиАВП на полном наборе x^1, x^2, x^3;
   г) дайте геометрическую интерпретацию результатам трех наблюдений;
   д) сопоставьте результаты аналитической и геометрической проверок выполнения СлАВП и СиАВП.
4. Постройте три потребительских набора x^1, x^2 и x^3, такие, что СлАВП для наборов x^1, x^2 не имеет места, СлАВП для наборов x^2, x^3 имеет место, СиАВП для всей совокупности потребительских наборов x^1, x^2, x^3 имеет место (не имеет места).

5. Потребитель расходует весь свой доход на приобретение трех продуктов: G_1, G_2, G_3. В таблице содержатся данные о ценах и объемах потребления каждого продукта в периодах 1, 2, 3.

Период	**Объемы продуктов**			**Цены**		
	x_1	x_2	x_3	p_1	p_2	p_3
1	5	6	7	10	25	30
2	6	5	6	20	50	70
3	6	5	7	30	80	90

Оцените изменения благосостояния потребителя:

а) в период 2 по сравнению с периодом 1;

б) в период 3 по сравнению с периодом 2;

в) в период 3 по сравнению с периодом 1.

Ответы обоснуйте.

6. Функция полезности потребителя имеет вид $U(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^{1/3} \cdot x_2^{2/3}$, где x_1 и x_2 — количества потребляемых продуктов. В базовом периоде потребитель, располагающий доходом $M^0 = 32$ денежных единицы, приобрел $x_2^0 = 10$ при $p_1^0 = 1$. В текущем периоде номинальный доход вырос до $M^1 = 94$ денежных единицы, $x_2^1 = x_2^0 = 10$, $p_1^1 = 2$. Вычислите индекс цен Ласпейреса.

Вопросы, тесты и задачи для контрольных работ к главе 3

1. Приведите геометрический пример ситуации ($n = 2$), когда цена на первый продукт растет ($p_1^2 > p_1^1, p_2^2 = p_2^1$) и СлАВП не имеет места.
2. Приведите геометрический пример ситуации ($n = 2$), когда цены на первый продукт растут ($p_1^3 > p_1^2 > p_1^1$, $p_2^3 = p_2^2 = p_2^1$) и СлАВП не имеет места.
3. Потребитель расходует весь свой доход на приобретение трех продуктов: G_1, G_2, G_3. В таблице содержатся данные о ценах и объемах потребления каждого продукта в периодах 1, 2, 3.

Период	**Объемы продуктов**			**Цены**		
	x_1	x_2	x_3	p_1	p_2	p_3
1	5	6	7	12	5	15
2	6	7	8	28	15	40
3	8	9	6	25	12	35

Оцените изменения благосостояния потребителя:

а) в период 2 по сравнению с периодом 1;

б) в период 3 по сравнению с периодом 2;

в) в период 3 по сравнению с периодом 1.

Ответы обоснуйте.

Функция полезности потребителя имеет вид $U(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^{1/3} \cdot x_2^{2/3}$, где x_1 и x_2 – количества потребляемых продуктов. В базовом периоде потребитель, располагающий доходом $M^0 = 64$ денежных единицы, приобрел $x_2^0 = 20$ при $p_1^0 = 1$. В текущем периоде номинальный доход вырос до $M^1 = 136$ денежных единиц, $x_1^1 = 2$, $x_2^1 = 22$. Вычислите индекс объемов Пааше.

Глава 4

УЧЕТ СВОЙСТВ ПРОДУКТОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ПОВЕДЕНИЯ (ТЕОРИЯ ТЕХНОЛОГИИ ПОТРЕБЛЕНИЯ)

4.1. Продукты и их свойства. Предпосылки о квантифицируемости, аддитивности и однородности свойств

4.1.1. Потребитель выбирает потребительский набор $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ для удовлетворения своих потребительских амбиций. Однако часто потребителя интересуют не столько сами продукты (товары), сколько их свойства (их характеристики), носителями которых являются эти товары. Например, потребитель приобретает телевизор не столько для мебели (хотя и не без этого), сколько для того, чтобы с его помощью получать видео- и аудиоинформацию. Здесь телевизор – это продукт (товар), а информация и мебель – его свойства (его характеристики).

Покупая билет на самолет, потребитель арендует это транспортное средство (наряду с другими пассажирами) для того, чтобы преодолеть определенное расстояние. Здесь самолет – продукт (товар), а преодоление расстояния между городами – свойство (характеристика) данного (и других) транспортного средства.

Свойства (характеристики) продуктов (товаров) более консервативны во времени, чем сами продукты (товары). Информацию в разные эпохи передавали с использованием костров, голубей, радиоприемников, телевизоров. Перемещение в пространстве осуществлялось с помощью лошадей, автомобилей, самолетов и т.п.

Таким образом, естественно рассматривать не только потребительские наборы, но и наборы их свойств (характеристик). Для того чтобы рассматривать наборы свойств, необходимо эти свойства квантифицировать, т.е выявлять. Если свойство (характеристика) не выявляется, оно (она) для моделирования не существует. Таким образом, свойства (характеристики) предметов должны удовлетворять следующим предпосылкам.

1. Свойства (характеристики) квантифицируются, т.е. они выявлены и могут быть описаны не только качественно, но и количественно. Например, в одной единице продукта G_1 содержится α_{11} единиц свойства A_1, α_{21} единиц свойства A_2, ..., α_{m1} свойства A_m.

2. Имеет место однородность: если одна единица продукта G_j содержит α_{ij} единиц свойства A_i, то x_j единицы продукта G_j содержат $\alpha_{ij}x_j$ единиц свойства A_i.

3. Имеет место аддитивность: если x_j единиц продукта G_j содержат $\alpha_{ij}x_j$ единиц свойства A_i, а x_k единиц продукта G_k содержат $\alpha_{ik}x_k$ единиц свойства A_i, то x_i единиц продукта G_j и x_k единиц продукта G_k содержат $\alpha_{ij}x_j + \alpha_{ik}x_k$ единиц свойства A_i.

4.1.2. На основании приведенных предпосылок получаем *модель технологии потребления*

$$a_1 = \alpha_{11}x_1 + \quad + \alpha_{1n}x_n, \tag{4.1.1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_m = \alpha_{m1}x_1 + \quad + \alpha_{mn}x_n, \tag{4.1.m}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – потребительский набор, а a_1 – количество свойства A_1 в потребительском наборе x; ... a_m – количество свойства A_m в потребительском наборе x. По экономическому смыслу все коэффициенты $\alpha_{ij} \geq 0$, все $x_j \geq 0$, все $a_j \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. На основании предпосылок 2 и 3 модель технологии потребления является *линейной*.

Аналогом модели технологии потребления является известная задача о диете, в которой речь идет о потребительском наборе $x = (x_1, \ldots, x_n)$ из продуктов $G_1, \ldots, G_n$, которые содержат m питательных веществ $A_1, \ldots, A_m$. Требуется найти такую диету, которая обеспечивала бы нормы $a_1, \ldots, a_m$ питательных веществ $A_1, \ldots, A_m$ и которая была бы самой дешевой:

$$\gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_n x_n \to (\min),$$
$$\alpha_{11} x_1 + \ldots + \alpha_{1n} x_n \geq a_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{m1} x_1 + \ldots + \alpha_{mn} x_n \geq a_m,$$
$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0,$$

где γ_j — цены одной единицы продукта G_j, $j = 1, \ldots, n$;

α_{ij} — количество питательного вещества A_i в одной единице продукта G_j, $i = 1, \ldots, n$.

В задаче о диете питательные вещества являются аналогами свойств в модели технологии потребления.

4.2. Пространство продуктов и их свойств. Свойства продуктов как объект потребительского выбора

4.2.1. Пространство продуктов (потребительских наборов) — это неотрицательный ортант $E_n^+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\}$ n-мерного пространства E_n. Пространство свойств — это неотрицательный ортант $E_m^+ = \{(a_1, \ldots, a_m) \mid a_1 \geq 0, \ldots, a_m \geq 0\}$ m-мерного пространства E_m.

Выражения (4.1.1)–(4.1.m) переводят неотрицательный ортант E_n^+ в конус C, расположенный в неотрицательном ортанте E_m^+. Например, ось $\mathrm{O}x_1 = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \geq 0, x_2 = \ldots = x_n = 0\}$ переходит в луч $\mathrm{O}L_1 = \{(a_1, \ldots, a_m) \mid a_1 = \alpha_{11} x_1, \ldots, a_m = \alpha_{m1} x_1, x_1 \geq 0\}$ неотрицательного ортанта E_m^+, а ось $\mathrm{O}x_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 = \ldots = x_{n-1} = 0, x_n \geq 0\}$ — в луч $\mathrm{O}L_n = \{(a_1, \ldots, a_m) \mid a_1 = \alpha_{1n} x_n, \ldots, a_m = \alpha_{mn} x_n, x_n \geq 0\}$. Точка $B_1 = (M/p_1, 0, \ldots, 0)$ бюджетной плоскости $p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n = M$ переходит в точку $Q_1 = (\alpha_{11} M/p_1, \ldots, \alpha_{m1} M/p_1)$ луча $\mathrm{O}L_1$, ..., точка $B_n = (M/p_n, 0, \ldots, 0)$ переходит в точку $Q_n = (\alpha_{1n} M/p_n, \ldots, \alpha_{mn} M/p_n)$ луча $\mathrm{O}L_n$. Поскольку модель технологии потребления (4.1.1)–(4.1.m) с математической точки зрения есть линейное отображение неотрицательного ортанта E_n^+ в неотрицательный ортант, постольку образом бюджетной плоскости $p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n = M$ $(x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0)$ является выпуклая комбинация точек $B_1, \ldots, B_n$ в неотрицательном ортанте E_m^+. Проиллюстрируем переход из пространства продуктов в пространство свойств на примере 4.2.1.

Пример 4.2.1

Цена p_1 одной единицы продукта G_1 равна $p_1 = 4$, цена $p_2 = 3$, цена $p_3 = 7$, доход потребителя равен $M = 12$. В одной единице продукта G_1 имеется 0,4 единицы свойства A_1 и 0,3 единицы свойства A_2, т.е. $\alpha_{11} = 0{,}4$; $\alpha_{21} = 0{,}3$; в одной единице продукта G_2 имеется 0,6 единицы свойства A_1 и 0,8 единицы свойства A_2, т.е. $\alpha_{12} = 0{,}6$; $\alpha_{22} = 0{,}8$; в одной единице продукта G_3 имеется 0,7 единицы свойства A_1 и 0,7 единицы свойства A_2, т.е. $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 0{,}7$.

Координаты точек B_1, B_2, B_3 в пространстве продуктов соответственно равны $B_1 = (M/p_1;\ 0;\ 0) = (3;\ 0;\ 0)$, $B_2 = (0;\ M/p_2;\ 0) = (0;\ 4;\ 0)$, $B_3 = (0;\ 0;\ M/p_3) = (0;\ 0;\ {}^{12}/_7)$ (рис. 4.1, на котором бюджетная плоскость $4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 12$ изображается треугольником $B_1B_2B_3$).

Модель технологии потребления (4.1.1)–(4.1.m) в этом примере имеет вид ($n = 3$, $m = 2$)

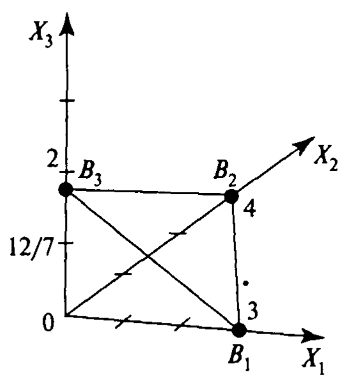


Рис. 4.1

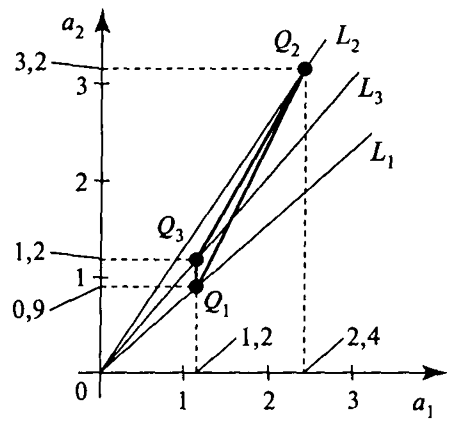


Рис. 4.2

$$a_1 = 0{,}4x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}7x_3,$$

$$a_2 = 0{,}3x_1 + 0{,}8x_2 + 0{,}7x_3.$$

Образом точки $B_1 = (3;\ 0;\ 0)$ является точка $Q_1 = (\alpha_{11}M/p_1,\ \alpha_{21}M/p_1) = (0{,}4\cdot 3;\ 0{,}3\cdot 3) = (1{,}2;\ 0{,}9)$, образом точки $B_2 = (0;\ 4;\ 0)$ – точка $Q_2 = (\alpha_{12}M/p_2,\ \alpha_{22}M/p_2) = (0{,}6\cdot 4;\ 0{,}8\cdot 4) = (2{,}4;\ 3{,}2)$, образом точки $B_3 = (0;\ 0;\ {}^{12}/_7)$ является точка $Q_3 = (\alpha_{13}M/p_3,\ \alpha_{23}M/p_3) =$

$= (0{,}7 \cdot {}^{12}/_7; 0{,}7 \cdot {}^{12}/_7) = (1{,}2; 1{,}2)$ (рис. 4.2, на котором также показаны лучи OL_1, OL_2, OL_3, которые являются образами в пространстве свойств осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 пространства продуктов). Образом бюджетной плоскости $B_1B_2B_3$ в пространстве продуктов является треугольник $Q_1Q_2Q_3$ в пространстве свойств.

Образом бюджетного множества $4x_1 + 3x_2 + 7x_3 \le 12, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$ (множества $OB_1B_2B_3$ – см. рис. 4.1) в пространстве продуктов является выпуклая оболочка точек O, Q_1, Q_2, Q_3 (см. рис. 4.2).

4.2.2. По аналогии с задачей рационального поведения потребителя на рынке

$$U(x_1, \ldots, x_n) \to \max \tag{4.2.1}$$

при наличии ограничения

$$p_1x_1 + \ldots + p_nx_n \le M, \tag{4.2.2}$$

$$x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \tag{4.2.3}$$

ставится задача выбора оптимальной комбинации свойств $(a_1, \ldots, a_m)$ в следующей постановке:

$$W(a_1, \ldots, a_m) \to \max \tag{4.2.4}$$

при наличии ограничений (4.1.1)–(4.1.m), а также ограничений (4.2.2) и (4.2.3). Задача выбора оптимальной комбинации свойств сводится к следующей задаче рационального поведения потребителя на рынке (4.2.1)–(4.2.3), в которой

$$\begin{gathered} U(x_1, \ldots, x_n) = \\ = W(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + \ldots + a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n). \end{gathered} \tag{4.2.5}$$

Решив задачу (4.2.1)–(4.2.3), в которой целевая функция $U(x_1, \ldots, x_n)$ имеет представление (4.2.5), получим набор $\hat{x} = (\hat{x}, \ldots, \hat{x}_n)$, который выбирает потребитель, и по формулам (4.1.1)–(4.1.m) найдем оптимальную комбинацию $(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_m)$ свойств.

4.3. Неявные цены свойств и уравнения для их определения

4.3.1. Каждый продукт $G_1, \ldots, G_n$ имеет свою цену $p_1, \ldots, p_n$. У свойств $A_1, \ldots, A_m$ цен нет. Можно поставить вопрос об определении неявных цен $v_1, \ldots, v_m$ свойств, которые были бы аналогичны ценам $p_1, \ldots, p_m$.

Неявные цены $v_1, \ldots, v_m$ свойств $A_1, \ldots, A_m$ можно определить, используя следующие соображения.

Если $a = (a_1, \ldots, a_m)$, набор свойств потребительского набора $x = (x_1, \ldots, x_n)$, то естественным должно быть равенство

$$v_1 a_1 + \ldots + v_m a_m = M = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n, \tag{4.3.1}$$

т.е. общая «стоимость» набора свойств $a = (a_1, \ldots, a_m)$ в неявных ценах $v_1, \ldots, v_m$ должна равняться общей стоимости потребительского набора $x = (x_1, \ldots, x_n)$ в ценах $p_1, \ldots, p_n$, т.е. числу M.

Одна единица первого продукта G_1 имеет представление в виде вектора $(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{m1})$, координаты которого равны количествам свойств $(A_1, \ldots, A_m)$, содержащимся в этой единице продукта G_1. Поскольку единица продукта покупается ради приобретения количеств составляющих ее свойств, то естественным должно быть равенство

$$p_1 = v_1 \alpha_{11} + \ldots + v_m \alpha_{m1}. \tag{4.3.2}$$

Аналогично выписываются равенства

$$\begin{aligned} p_2 &= v_1 \alpha_{12} + \ldots + v_m \alpha_{m2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= v_1 \alpha_{1n} + \ldots + v_m \alpha_{mn}. \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Система уравнений (4.3.1), (4.3.2), (4.3.3) для определения неявных цен $v_1, \ldots, v_m$ свойств $A_1, \ldots, A_m$ выписывается как *двойственная* (*сопряженная*) система к системе уравнений

$$\begin{array}{c|l} v_1 & a_1 = \alpha_{11} x_1 + \ldots + \alpha_{1n} x_n, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_m & a_m = \alpha_{m1} x_1 + \ldots + \alpha_{mn} x_n, \\ & M = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n \end{array}$$

аналогично тому, как выписывается двойственная (сопряженная) задача к задаче линейного программирования.

Вообще говоря, для системы (4.3.2), (4.3.3) линейных алгебраических уравнений возможны три варианта ее разрешимости: существование единственного решения, существование бесконечного множества решений, полное отсутствие решений. С экономической точки зрения представляет интерес первый вариант, из которого следует наличие единственной системы неявных цен свойств. В случае выполнения третьего варианта система неявных цен свойств не существует. Этот вариант возможен, если цены $p_1, \dots, p_n$ на продукты не соответствуют распределению свойств по продуктам.

4.3.2. Рассмотрим ряд примеров.

Пример 4.3.1

Модель технологии потребления имеет вид

$$v_1 \;\Big|\; a_1 = 0{,}3x_1 + 0{,}3x_2, \tag{4.3.4}$$

$$v_2 \;\Big|\; a_2 = 0{,}4x_1 + 0{,}4x_2, \tag{4.3.5}$$

цены на продукты G_1 и G_2 соответственно равны $p_1 = 12$, $p_2 = 24$, доход потребителя равен $M = 720$. В рассматриваемом примере система уравнений (4.3.2), (4.3.3) имеет вид

$$0{,}3v_1 + 0{,}4v_2 = 12,$$

$$0{,}3v_1 + 0{,}4v_2 = 24.$$

Ее несовместность очевидна.

Отображение (4.3.4), (4.3.5) переводит бюджетную прямую B_1B_2 пространства продуктов (рис. 4.3) в отрезок Q_1Q_2 пространства свойств (рис. 4.4):

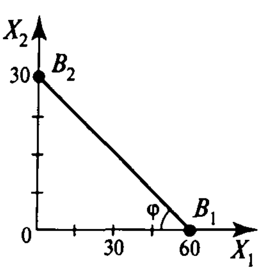
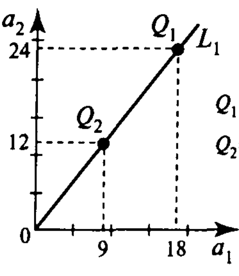


Рис. 4.3



$Q_1 = (a_1, a_2) = (0{,}3 \cdot 60;\ 0{,}4 \cdot 60) = (18;\ 24)$

$Q_2 = (a_1, a_2) = (0{,}3 \cdot 30;\ 0{,}4 \cdot 30) = (9;\ 12)$

Рис. 4.4

В отличие от цен $p_1, \dots, p_n$ на продукты $G_1, \dots, G_n$, которые всегда положительны, неявные цены $v_1, \dots, v_m$ свойств $A_1, \dots, A_m$ могут быть и отрицательными. Отрицательная цена v_i свойства A_i свидетельствует о том, что свойство является нежелательным для потребителя (например, наличие никотина в сигарете).

Таким образом, неявные цены свойств (если они существуют) выступают в качестве индикаторов полезности свойств.

Пример 4.3.2

Модель технологии потребления имеет вид

$$v_1 \;\Big|\; a_1 = 0{,}4x_1 + 0{,}6x_2, \qquad (4.3.6)$$

$$v_2 \;\Big|\; a_2 = 0{,}3x_1 + 0{,}5x_2, \qquad (4.3.7)$$

цены на продукты G_1 и G_2 соответственно равны $p_1 = 4$, $p_2 = 3$, доход потребителя равен $M = 12$. В рассматриваемом примере система уравнений (4.3.2), (4.3.3) для определения неявных цен v_1, v_2 свойств A_1 и A_2 имеет вид

$$0{,}4v_1 + 0{,}3v_2 = 4,$$

$$0{,}6v_1 + 0{,}5v_2 = 3.$$

Непосредственно проверяется, что единственное решение $v^0 = (v_1^0; v_2^0)$ этой системы имеет вид $v^0 = (55; -60)$.

Отображение переводит бюджетную прямую B_1B_2 пространства продуктов (рис. 4.5) в отрезок Q_1Q_2 пространства свойств (рис. 4.6).

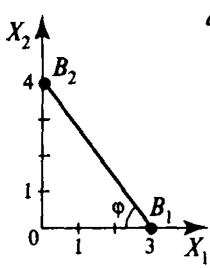
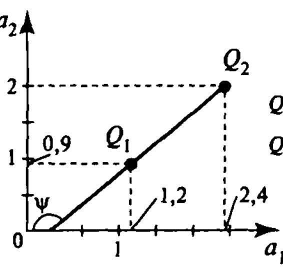


Рис. 4.5



$Q_1 = (a_1, a_2) = (0{,}4 \cdot 3;\ 0{,}3 \cdot 3) = (1{,}2;\ 0{,}9);$

$Q_2 = (a_1, a_2) = (0{,}6 \cdot 4;\ 0{,}5 \cdot 4) = (2{,}4;\ 2)$

Рис. 4.6

При $n = 2$ и $m = 2$ в примере 4.3.3 проиллюстрируем еще одну характеристику неявных цен признаков.

Пример 4.3.3

Продукты G_1 и G_2 имеют цены $p_1 = 3$, $p_2 = 4$, доход $M = 12$, модель технологии потребления имеет вид

$$v_1 \;\Big|\; a_1 = 0{,}3x_1 + 0{,}5x_2, \qquad (4.3.8)$$

$$v_2 \;\Big|\; a_2 = 0{,}5x_1 + 0{,}2x_2. \qquad (4.3.9)$$

В рассматриваемом примере система уравнений (4.3.2), (4.3.3) имеет вид

$$0{,}3v_1 + 0{,}5v_2 = 3,$$
$$0{,}5v_1 + 0{,}2v_2 = 4.$$

Непосредственно проверяется, что единственное решение $v^0 = (v_1^0; v_2^0)$ этой системы имеет вид $v_0 = ({}^{140}/_{19}; {}^{30}/_{19})$.

Отображение переводит бюджетную прямую B_1B_2 пространства продуктов (рис. 4.7) в отрезок Q_1Q_2 пространства свойств (рис. 4.8):

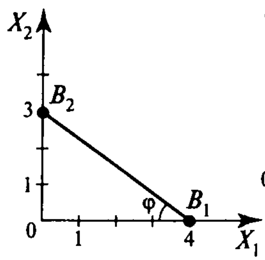
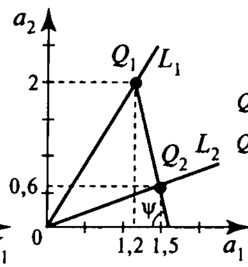


Рис. 4.7



$Q_1 = (a_1, a_2) = (0{,}3 \cdot 4;\ 0{,}5 \cdot 4) = (1{,}2;\ 2)$

$Q_2 = (a_1, a_2) = (0{,}5 \cdot 3;\ 0{,}2 \cdot 3) = (1{,}5;\ 0{,}6)$

Рис. 4.8

Очевидно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{4} = \frac{\frac{M}{p_2}}{\frac{M}{p_1}} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Имеем

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{2-0{,}6}{1{,}5-1{,}2} = \frac{1{,}4}{0{,}3} = \frac{14}{3} = \frac{v_1^0}{v_2^0}.$$

Формула $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{v_1}{v_2}$ имеет место в общем случае, если неявные цены $(v_1^0; v_2^0)$ свойств существует. В частности, в примере 4.3.2

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{2-0{,}9}{2{,}4-1{,}2} = -\frac{1{,}1}{1{,}2} = \frac{55}{-60} = \frac{v_1^0}{v_2^0}.$$

Равенство $\operatorname{tg}\psi = \frac{v_1^0}{v_2^0}$ свидетельствует о том, что неявные цены действительно похожи на рыночные цены продуктов (товаров).

4.4. Оценка рыночной перспективы нового продукта

4.4.1. Неявные цены свойств (если они существуют) могут использоваться для оценки рыночной перспективы нового продукта. Проиллюстрируем это использование для случая $n = m = 2$.

Пусть модель технологии потребления имеет вид

$$a_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2,$$

$$a_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2.$$

Цены продуктов G_1 и G_2 соответственно равны p_1 и p_2,доход потребителя равен M. Пусть появляется продукт G_3, в одной единице которого содержится свойство A_1 в количестве α_{13} единиц, а свойство A_2 – в количестве α_{23} единиц. Рыночная цена единицы продукта G_3 предполагается равной p_3.

Требуется оценить рыночную перспективу продукта G_3.

С появлением продукта G_3 модель технологии потребления приобретает вид

$$\begin{array}{c|l} v_1 & a_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3, \\ v_2 & a_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3, \end{array}$$

а бюджетное ограничение $M = p_1x_1 + p_2x_2$ преобразуется в выражение $M = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$.

С появлением нового продукта G_3 новые свойства не появляются. Для определения неявных цен свойств выписываем систему линейных алгебраических уравнений

$$v_1\alpha_{11} + v_2\alpha_{21} = p_1,$$

$$v_1\alpha_{12} + v_2\alpha_{22} = p_2,$$

$$v_1\alpha_{13} + v_2\alpha_{23} = p_3.$$

Если система из первых двух уравнений имеет решение $v^0 = (v_1^0; v_2^0)$, то полагаем $p_3^0 = v_1^0\alpha_{13} + v_2^0\alpha_{23}$. Если $p_3 > p_3^0$, то продукт G_3 не имеет рыночной перспективы, ибо его цена p_3 слишком высока. Если $p_3 \le p_3^0$, то продукт G_3 имеет рыночную перспективу.

Таким образом, неявные цены свойств позволяют оценить пороговую величину p_3^0 цены продукта G_3.

4.4.2. Пример 4.4.1

Пусть новый продукт G_3 имеет цену $p_3 = 7$ и в одной единице продукта G_3 содержится $\alpha_{13} = 0{,}8$ единицы свойства A_1 и $\alpha_{23} = 0{,}6$ единицы свойства A_2. Оценим рыночную перспективу продукта G_3.

В примере 4.3.2 были найдены неявные цены $v_1^0 = 55$; $v_2^0 = -60$ свойств A_1 и A_2. Найдем пороговую величину

$$p_3^0 = \alpha_{13}v_1^0 + \alpha_{23}v_2^0 = 0{,}8 \cdot 55 - 0{,}6 \cdot 60 = 44 - 36 = 8 > 7 = p_3;$$

из последней цепочки следует, что продукт G_3 имеет рыночную перспективу. Если бы $p_3 = 9$, то тогда продукт G_3 не имел бы рыночной перспективы.

Вопросы для самоконтроля к главе 4

1. Как формулируются предпосылки модели технологии потребления?
2. Представьте модель технологии потребления в аналитической форме. Дайте геометрическую интерпретацию пространства продуктов и пространства свойств.
3. В чем сходство и различие модели технологии потребления и задачи о диете?
4. Как взаимосвязываются продукты, их свойства и фактор времени?
5. Что такое неявная цена свойства (продукта)? Как определяются новые цены свойств продуктов?
6. В чем сходство и различие рыночных цен на продукты (товары) и неявных цен признаков?
7. Как выразить доход потребителя, используя неявные цены свойств?
8. Как используются неявные цены для оценки рыночной перспективы новых продуктов?
9. Какими полезными качествами обладают неявные цены свойств?

Задачи и упражнения для самоконтроля к главе 4

1. Цена p_1 одной единицы продукта G_1 равна $p_1 = 10$, цена p_2 одной единицы продукта G_3 равна $p_2 = 15$. Доход потребителя равен $M = 300$. В одной единице продукта G_1 содержится 0,4 единицы свойства A_1 и 0,3 единицы свойства A_2 (т.е. $\alpha_{11} = 0{,}4$; $\alpha_{21} = 0{,}3$). В одной единице продукта G_2 содержится 0,2 единицы свойства A_1 и 0,6 единицы свойства A_2 (т.е. $\alpha_{12} = 0{,}2$; $\alpha_{22} = 0{,}6$):

а) выпишите модель технологии потребления;

б) постройте в пространстве продуктов бюджетную прямую $10x_1 + 15x_2 = 300$ и ее образ в пространстве свойств. Постройте в пространстве свойств образ бюджетного множества $10x_1 + 15x_2 \leq \leq 300, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$;

в) найдите неявные цены v_1^0 и v_2^0 свойств A_1 и A_2;

г) найдите $\operatorname{tg}\varphi$ в пространстве продуктов и $\operatorname{tg}\psi$ в пространстве свойств (см. рис. 4.7 и рис. 4.8);

д) оцените рыночную перспективу продукта G_3, если $\alpha_{13} = 0{,}5$; $\alpha_{23} = 0{,}4$; и $p_3 = 13$ ($p_3 = 12$).

2. Приведите пример модели технологии потребления ($n = 2$; $m = 2$), в которой свойства не имеют неявных цен. Дайте геометрическую интерпретацию образа бюджетной прямой в пространстве свойств.

3. Приведите примеры модели технологии потребления ($n = 2$; $m = 2$; $n = 3$; $m = 2$), в которых неявные цены свойств не являются однозначными. Дайте геометрическую интерпретацию образа бюджетного множества в пространстве свойств.

Вопросы, тесты и задачи для контрольных работ к главе 4

1. Модель технологии потребления позволяет определить (выберите один вариант):

а) величины свойств, содержащихся в заданном потребительском наборе;

б) потребительский набор, который содержит заданную конфигурацию свойств;

в) неявные цены свойств, если известны рыночные цены товаров;

г) ответы а)–в) не верны.

2. Неявные цены свойств:

а) существуют и определяются единственным образом по рыночным ценам продуктов;

б) существуют и определяются не единственным образом по заданным ценам продуктов;

в) не существуют при заданных ценах продуктов;

г) возможен только один из трех вышеперечисленных вариантов.

3. Неявные цены свойств всегда позволяют (укажите неверный ответ):

а) определить рыночные цены продуктов (товаров);

б) оценить уровень полезности свойства для потребителя;

в) определить пороговый уровень цены нового продукта;

г) их использовать в качестве анализа рыночных цен продуктов (товаров) на воображаемом рынке свойств продуктов.

4. Цена p_1 одной единицы продукта G_1 равна $p_1 = 12$, цена p_2 одной единицы продукта G_3 равна $p_2 = 16$. Доход потребителя равен $M = 480$. В одной единице продукта G_1 содержится 0,5 единицы свойства A_1 и 0,2 единицы свойства A_2 (т.е. $\alpha_{11} = 0{,}5$; $\alpha_{21} = 0{,}2$). В одной единице продукта G_2 содержится 0,4 единицы свойства A_1 и 0,3 единицы свойства A_2 (т.е. $\alpha_{12} = 0{,}4$; $\alpha_{22} = 0{,}3$):
   а) выпишите модель технологии потребления;
   б) постройте в пространстве продуктов бюджетную прямую $12x_1 + 16x_2 = 480$ и ее образ в пространстве свойств. Постройте в пространстве свойств образ бюджетного множества $12x_1 + 16x_2 \leq$ ≤ 480, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$;
   в) найдите неявные цены v_1^0 и v_2^0 свойств A_1 и A_2;
   г) найдите $\operatorname{tg}\varphi$ в пространстве продуктов и $\operatorname{tg}\psi$ в пространстве свойств (см. рис. 4.7 и рис. 4.8). Сопоставьте тангенсы с рыночными ценами продуктов (товаров) и с неявными ценами свойств;
   д) при $\alpha_{13} = 0{,}4$; $\alpha_{23} = 0{,}6$ и $p_3 = 15$ постройте в пространстве продуктов бюджетную плоскость $12x_1 + 16x_2 + 15x_3 = 480$ и ее образ в пространстве свойств. Постройте в пространстве свойств образ бюджетного множества $12x_1 + 16x_2 + 15x_3 = 480 \leq 480$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$;
   е) найдите пороговое значение p_3^0 цены нового продукта G_3 и оцените рыночную перспективу этого продукта, используя данные пункта д).

Глава 5

ВЫБОР В УСЛОВИЯХ РИСКА И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

5.1. Понятия риска и неопределенности

5.1.1. Экономический субъект (индивидуум), принимая то или иное решение, не всегда может одинаково оценить его последствия. Например, приобретая акции некоторой фирмы, индивидуум рассчитывает на получение дивидендов в определенном объеме, исходя из картины текущей экономической конъюнктуры. Однако в будущем конъюнктура может измениться далеко не в лучшую сторону для фирмы, которая вынуждена будет перейти на выплату дивидендов в гораздо меньшем объеме. Не исключен вариант и банкротства фирмы в будущем.

Список примеров, когда экономические субъекты (индивидуумы) должны принимать решения в условиях неопределенности, можно продолжать до бесконечности.

Понятие неопределенности является неоднозначным. Принято говорить собственно о *неопределенности*, если множество вариантов возможных исходов (последствий) принимаемого решения известно, но ни одному из этих вариантов нельзя приписать какую-либо вероятность его появления или хотя бы оценить ее. Если варианты возможных исходов (последствий) характеризуются вероятностями их появления, то говорят о ситуации *риска*.

Здесь приведен один из ранних и простейших вариантов толкования связанных между собой понятий риска и неопределенности, на который далее опирается излагаемый материал. Другие, более продвинутые варианты толкования понятий неопределенности и риска широко представлены в специальной литературе и в этой книге не рассматриваются.

Индивидуум (субъект), который выбирает из нескольких альтернатив, может опираться на объективные вероятности последствий принимаемого решения. Объективные вероятности могут основываться, например, на проведенных статистических исследованиях.

Вероятности могут быть субъективными. Возможна ситуация, когда при подготовке и принятии решения индивидууму приходится учитывать как объективные, так и субъективные вероятности. В дальнейшем под термином «риск» понимается в основном *экономический риск*.

Наиболее важные решения, принимаемые индивидуумом в условиях риска, связаны не столько с покупкой тех или иных потребительских благ (хотя покупка потребительских благ бывает связана с риском, например покупка автомобилей, дорогой бытовой техники, недвижимости), сколько с разумными финансовыми операциями (страхование, покупка и продажа ценных бумаг, выбор пенсионного фонда, выбор валюты для сбережения денег и т.п.). Поэтому в дальнейшем уровень u полезности потребителя будет увязан с его доходом w, который является случайной величиной, т.е. функция $u = u(w)$ полезности потребителя будет функцией только его дохода, а не потребительского набора, как это обычно принято в теории потребления. Вопросы дисконтирования уровня полезности во времени рассматриваться не будут.

Экономический риск представляет собой опасность возникновения неожиданных потерь ожидаемой прибыли или дохода в связи со случайным изменением экономической конъюнктуры. Риск возникает, когда экономическая деятельность осуществляется в ситуации неопределенности из-за информационного дефицита, и по этой причине достижение ожидаемого результата не гарантируется.

Природа риска может быть объективной, субъективной и субъективно-объективной.

Субъективная природа риска проявляется в том, что риск может быть связан с использованием субъективных вероятных оценок выбираемых альтернатив, а также с тем, что разные индивидуумы по-разному относятся к риску. Есть рискофобы (индивидуумы, которые относятся к риску отрицательно, и таких индивидуумов, в том числе среди предпринимателей, большинство), рискофилы (индивидуумы, которые относятся к риску положительно, т.е. любят рисковать) и рисконейтралы (индивидуумы, которые относятся к риску безразлично).

Объективная природа риска проявляется в том, что объективно существует вероятностная сущность многих природных, социальных, технологических явлений, многовариантность материальных и нематериальных отношений между индивидуумами. Ситуация риска часто существует объективно, независимо от того, учитывают ее при принятии решений или не учитывают.

Субъективно-объективная природа риска проявляется в том, что ситуация риска может возникать в результате функционирования процессов субъективного и объективного характера, сочетание которых может быть как управляемым, так и неуправляемым. В качестве примера ситуации субъективно-объективной природы риска можно указать ситуацию использования авиационной техники в условиях джунглей, когда к традиционным объективным факторам риска добавляются субъективные, которые проявляются в том, что крысы могут прогрызть изоляцию проводов, а у пилотов замедляется реакция на те или иные штатные и нештатные ситуации во время взлета или посадки самолета.

5.1.2. В качестве основных причин неопределенности и риска можно отметить следующие.

1. Стихийные бедствия (землетрясения, ураганы, бури, наводнения), а также некоторые природные явления (грозы, град, поздние и ранние заморозки, засуха) могут оказать серьезное отрицательное влияние на результаты предпринимательской или иной деятельности, стать источником неожиданных издержек.

2. Элементы случайности имеют место, когда в условиях, которые мало отличаются друг от друга, одни и те же процессы протекают неодинаково. Из-за этого бывает невозможно однозначно предвидеть появление предполагаемого результата.

Например, невозможно точно предсказать, сколько человек купит билеты на премьеру нового кинофильма. Отмеченное обстоятельство может оказать существенное влияние на принятие решения о выборе того или иного кинотеатра для демонстрации этого фильма.

Не всегда предсказуемое влияние на результаты предпринимательской деятельности оказывают аварии (пожары, взрывы, ядовитые выбросы), выход из строя оборудования, несчастные случаи на производстве и т.п.

Перечисленные случайные события, к сожалению, вполне возможны, несмотря на высокие реальные достижения по их предупреждению.

3. Столкновения противоречивых интересов проявляются на широком поле деятельности индивидуумов: от локальных и глобальных войн до элементарного выяснения отношений между индивидуумами. В результате объявления войны предприниматель может столкнуться с запретом на совершение сделок или экспроприацией активов либо доходов за рубежом.

В конкурентной борьбе могут появиться (проявиться) элементы недобросовестной конкуренции, когда используются такие недозволенные средства, как подкуп должностных лиц, дискредитация конкурента, организация процедуры банкротства конкурента.

В инновационном процессе его разные участники могут занимать различные и даже противоположные позиции. Обычно позицию инициативы занимают разработчики, позицию содействия – проектировщики, позицию бездействия – пользователи. В связи с неизбежной перестройкой технологических процессов, требуемой инновациями, возникают новые организационно-технологические проблемы.

Таким образом, наличие противоборствующих сторон в общественно-экономическом развитии страны вносит в социально-экономическую жизнь элементы неопределенности.

4. Вероятностный характер научно-технологического прогресса (НТП) является очередной причиной появления неопределенности и риска. Заранее трудно, а то и невозможно предсказать с большой точностью появление того или иного открытия, заранее определить конкретные его последствия. Вложения в НТП всегда характеризовались как крайне рискованные. Это с одной стороны. С другой стороны, без этих вложений не были бы реализованы такие достижения НТП, как телекоммуникационные системы, вычислительные системы и т.п.

5. Неполнота, недостаточность информации о том или ином явлении или процессе – следующая причина возникновения неопределенности и риска.

Наличие достаточно полной и правильной информации необходимо для подготовки и принятия решения. Такая информация предполагает осведомленность о наличии и величине спроса на товары и услуги, на капитал, о финансовой устойчивости и платежеспособности будущих партнеров, конкурентов, клиентов, о ценах, курсах, тарифах, о характеристиках оборудования и новой техники и т.п. На практике такая информация бывает разноплановой, подготовленной по не вполне ясным методикам.

Информация может быть искаженной, сфальсифицированной (например, фирма «Майкрософт» в ранний период ее функционирования).

Известны случаи, когда фирмы-лидеры делали объявления о перспективных, но достаточно дорогостоящих проектах, а фирмы-последователи в рамках подражательного поведения вкладывали в эти проекты большие средства, после чего фирмы-лидеры объявляли об ошибочности этих проектов, что приводило к существенному ухудшению положения конкурентов или их разорению.

Таким образом, чем ниже качество информации (независимо от источника ее поступления), необходимой для принятия решений, тем выше риск появления отрицательных последствий такого решения.

Список причин неопределенности и риска можно дополнить такими позициями.

6. Ограниченность ресурсов, необходимых для принятия и реализации решений.

7. Невозможность однозначного понимания объекта, относительно которого должно быть принято решение.

8. Относительная ограниченность сознательной деятельности индивидуумов, наличие существенных различий в социально-психологических установках, стереотипах поведения.

9. Частичное или полное функционирование фирмы в рамках теневого сектора, что приводит к расширению поля ее факторов риска.

10. Необходимость использования новых средств и методов для решения производственных задач при смене модели хозяйствования.

11. Наличие несбалансированности основных компонентов хозяйственного механизма: планирования (стратегического), ценообразования, материально-технического снабжения, денежно-кредитных отношений.

В экономической теории риска анализируются ситуации, связанные с риском, исследуются вопросы количественного измерения риска, формулируются принципы принятия решений в условиях риска. С математической точки зрения многие задачи экономической теории риска сводятся к описанию правил сравнения случайных величин будущих благ (в частности, дохода). При сравнении вероятности распределений необходимо одновременно учитывать как средние значения случайной величины (понимаемые в разных смыслах), так и характеристики разброса (дисперсии, среднеквадратичные отклонения и др.) значений случайных величин относительно средних значений.

5.2. Общие принципы классификации рисков

5.2.1. В экономической литературе нет общепринятой системы классификации рисков и, в частности, хозяйственных рисков. Рассматриваемая ниже классификация рисков охватывает следующие важные элементы: время возникновения рисков, основные факторы возникновения рисков, характер учета рисков, характер последствий, сфера возникновения рисков.

По *времени возникновения* риски распределяются на ретроспективные, текущие и перспективные. Результаты анализа ретроспективных рисков могут помочь в более точном прогнозировании текущих и перспективных рисков.

По *основным факторам возникновения* риски подразделяются на политические и экономические (коммерческие).

Политические риски – риски, появление которых обусловлено теми или иными политическими решениями, оказывающими существенное влияние на экономическую деятельность (повышение пошлин и понижение квот на ввозимые продукты (товары), например актуальное для автопрома современной России значительное повышение пошлин на ввозимые подержанные иномарки, начало военных действий в отдельных регионах страны (Чечня, Югославия, Ирак) и т.п.).

Экономические риски – риски, появление которых обусловлено неблагоприятными изменениями в мировой, национальной или региональной экономиках, в деятельности фирм. В частности, имеются в виду резкие колебания мировых цен на нефть и другие изменения в конъюнктуре рынков товаров, ресурсов, ценных бумаг, несбалансированная ликвидность, когда нет возможности своевременно выполнить платежные обязательства.

Политические и экономические риски на практике могут быть трудноразличимыми. Например, резкие колебания мировых цен на нефть могут быть отнесены к факторам политических и экономических рисков.

По *характеру учета* риски делятся на связанные с деятельностью экономического субъекта (в частности, фирмы). К факторам внешних рисков, естественно, относятся факторы политические, глобальные и макроэкономические, демографические, социальные и т.п.

К внутренним относятся риски, появление которых обусловлено деятельностью самого экономического субъекта (фирмы). На уровень внутренних рисков оказывают влияние уровень управления экономическим субъектом, его экономический потенциал, уровень специализации, техника безопасности.

По *характеру последствий* риски подразделяются на чистые и спекулятивные.

Чистые риски (простые, статические риски) характеризуются тем, что их появление означает потери для хозяйственной деятельности. Причинами чистых рисков могут быть стихийные бедствия, войны, несчастные случаи, преступные действия и т.п.

Спекулятивные риски (коммерческие, динамические риски) характеризуются тем, что их проявление означает не только потери для хозяйственной деятельности, но и дополнительную прибыль к ожидаемому результату. Причинами спекулятивных рисков могут быть изменения валютных курсов, налогового законодательства и т.п.

5.2.2. *Сфера возникновения* рисков – это важный элемент классификации рисков, в основу которого положены сферы экономической деятельности.

Экономическая деятельность охватывает производственную, коммерческую, финансовую, посредническую деятельность и страхование.

В производственной деятельности используются факторы производства (капитал, труд, материалы) и фирмой производится готовая продукция в виде товаров, услуг, информации для продажи на рынке товаров и услуг.

В коммерческой деятельности продаются потребителям готовые товары и услуги, приобретенные у других лиц. Прибыль коммерческой фирмы образуется за счет разницы в ценах продажи и приобретения.

В финансовой деятельности в качестве предмета купли-продажи предпринимателя выступают деньги и ценные бумаги, продаваемые покупателям или предоставляемые ему в кредит.

В посреднической деятельности предприниматель (фирма) не производит и не продает товар, а выступает в роли связующего звена в процессе товарного обмена и в товарно-денежных операциях. За оказание посреднической услуги, которая заключается в сведении заинтересованных в сделке сторон, предприниматель (фирма) получает доход.

Суть страхования в том, что предприниматель (фирма), который называется страховщиком, за определенную сумму, называемую страховым взносом, гарантирует потребителю, называемому страхователем, компенсацию возможной потери (полной или частичной) имущества, ценностей, жизни в результате наличия определенных обстоятельств, т.е. в результате наступления так называемого страхового случая. В связи с тем что вероятность наступления страхового случая относительно мала, оставшаяся часть страховых взносов образует доход страховщика.

В связи с только что описанными сферами экономической деятельности выделяют следующие риски: производственный, коммерческий, финансовый, посреднический и страхования.

Производственный риск связан с невыполнением фирмой своих обязательств по производству товаров и услуг, с нерациональным использованием новых технологий, основного и оборотного производственного капитала, рабочего времени. Причины вышеназванных проблем: снижение объемов производства, например в связи с ростом издержек, низкой дисциплиной поставок, ростом налоговых отчислений.

Коммерческий риск связан с проблемами, возникающими в процессе реализации товаров и услуг, произведенных или закупленных фирмой (предпринимателем). Причинами возникновения таких проблем являются снижение объема реализации в связи с изменением рыночной конъюнктуры, повышение закупочных цен на товары, потери в процессе обращения, повышение издержек обращения и т.п.

Финансовый риск связан с возможностью невыполнения фирмой своих финансовых обязательств. К причинам невыполнения фирмой своих финансовых обязательств относятся: изменение курса национальной валюты и обесценение вследствие этого инвестиционного портфеля фирмы, введение военного положения, возникновение беспорядков и т.п.

Посреднический риск связан с возможностью невыполнения фирмой посреднической услуги, в результате чего посредническая фирма может нести большие потери в связи с неполучением дохода за успешную посредническую услугу. Причины посреднического риска связаны прежде всего с изменением экономической конъюнктуры, когда для одного или сразу для двух сделка может оказаться невыгодной.

Риск страхования – риск наступления страхового случая, когда страховщик обязан выплатить страхователю всю (или часть) страховой суммы. Результатом этого риска являются убытки, вызванные недостаточно квалифицированной страховой деятельностью как на этапе, предшествующем заключению договора страхования, так и на последующих этапах – перестрахование, формирование страховых резервов. Основными причинами риска страхования являются: ошибочно определенные страховые взносы и страховые суммы, войны, стихийные бедствия, беспорядки, которые не были учтены при заключении страхового договора.

5.3. Предпринимательские риски

5.3.1. Структура предпринимательских рисков представлена на рис. 5.1.

Страновые риски связаны с участием предпринимателей (фирм) во внешнеэкономической деятельности. На эти риски влияет политико-экономическая стабильность стран – импортеров и экспортеров. Причинами странового риска могут быть неэффективность государственной и экономической политики, особенности государственного и регионального законодательства, региональные проблемы, поляризация различных социальных групп. На функционирование фирм оказывают влияние (в разной степени) глобальные экономические процессы, торговое и валютное регулирование, квотирование, лицензирование, таможенные пошлины и т.п.

Одним из наиболее авторитетных показателей уровня странового риска является индекс БЕРИ, регулярно публикуемый германской фирмой «БЕРИ» и определяемый группой численностью около 100 экспертов с помощью различных методов экспертных

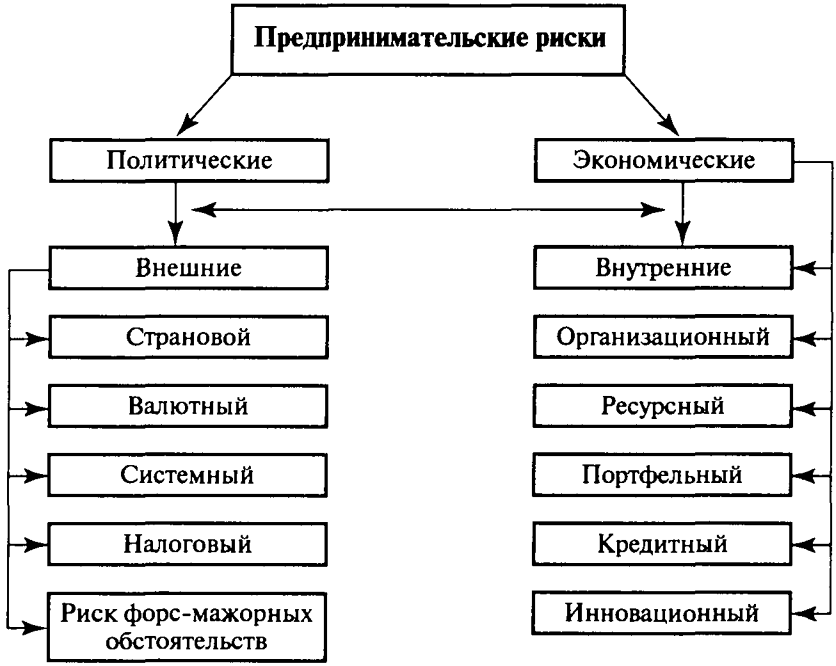


Рис. 5.1

оценок 4 раза в год. В состав анализируемых экспертами частных показателей входят:

1) эффективность национальной экономики, определяемая на основе прогнозируемого среднегодового изменения валового национального продукта (ВНП) страны;

2) уровень политического риска;

3) уровень задолженности, рассчитываемой по данным Мирового банка реконструкции и развития с учетом размера задолженности, качества обслуживания задолженности, объема экспорта, баланса внешнеторгового оборота;

4) доступность банковских кредитов;

5) доступность краткосрочного финансирования;

6) доступность долгосрочного ссудного капитала;

7) вероятность возникновения форс-мажорных обстоятельств;

8) уровень кредитоспособности страны;

9) сумма невыполненных обязательств по выплате внешнего долга.

Результаты проведенного анализа уровня странового риска представляются в виде базы данных, характеризующих оценку степени риска инвестирования и надежности деловых связей различных стран, представленной в виде ранжированного перечня стран с интегральными балльными и частными оценками риска.

Валютные риски связаны с колебанием валютных курсов. Величина валютного риска зависит от потери покупательной способности валюты и поэтому находится в прямой зависимости от продолжительности временнóго промежутка между моментом заключения сделки и моментом платежа. Экспортеры страны несут убытки, если они заключали контракты до падения курса национальной валюты, ибо после падения курса национальной валюты за одну единицу свободно конвертируемой валюты экспортер получает больше единиц национальной валюты, чем до ее падения. С импортерами страны обратная ситуация. Импортеры несут убытки, если они заключали контракты до повышения курса национальной валюты, ибо до повышения курса национальной валюты за одну единицу свободно конвертируемой валюты импортер должен заплатить больше единиц национальной валюты, чем после ее повышения.

Системные риски связаны с тем, в какой сфере функционирует фирма: в сфере белого (прозрачного) бизнеса, в сфере серого (теневого) бизнеса или в сфере черного (криминального) бизнеса.

Если фирма функционирует в сфере белого бизнеса, ее системный риск равен нулю, однако из-за высокого уровня налогового бремени функционирование фирмы становится весьма рискованным предприятием. Если фирма функционирует в сфере серого бизнеса, то она имеет системный риск, величина которого равна вероятности того, что ее теневая деятельность может быть обнаружена. Но зато фирма при этом может получить значительные «налоговые льготы», ибо она уклоняется от уплаты части налогов. Если фирма функционирует в сфере черного бизнеса, то ее положение аналогично фирме, функционирующей в сфере серого бизнеса. Отличие лишь в том, что в последнем случае резко возрастает системный риск и, возможно, фирма будет иметь еще более значительные «налоговые льготы».

Риск форс-мажорных обстоятельств – это риск, связанный со стихийными бедствиями (наводнение, землетрясение, извержение вулканов, ураганы), социально-экономическими потрясениями, вызванными революциями, забастовками, которые препятствуют нормальному функционированию фирм.

В случае форс-мажорных обстоятельств стороны, заключившие сделку до этих обстоятельств, освобождаются от взаимных обязательств по такой сделке согласно статье 79 Конвенции ООН о договорах купли-продажи.

Возмещение потерь, вызванных форс-мажорными обстоятельствами, осуществляют специализированные страховые компании.

5.3.2. В отличие от внешних рисков, которые не зависят от самого предпринимателя (фирмы), внутренние риски в значительной степени зависят от ошибочных решений, принимаемых предпринимателями (руководителями фирм) вследствие их некомпетентности или иных, зависящих от предпринимателей обстоятельств (в качестве примера можно указать привлечение на ответственные должности родственников или знакомых, которые могут на своих рабочих местах пренебрегать интересами фирм, где они работают).

Отметим ряд конкретных причин внутренних рисков фирм: несоответствие уровня профессиональной подготовки руководящего состава фирмы требованиям рабочего места, которое проявляется в принятии ошибочных решений по рациональному распределению ресурсов, по проведению маркетинговой политики, по регулированию финансовых и информационных потоков фирмы, по своевременному адаптированию фирмы к переменам в окружающей рыночной среде.

Рассмотрим более подробно внутренние риски фирмы.

Организационный риск обусловлен недостатками в организации работы фирмы. К причинам организационного риска фирмы относятся:

1) низкий уровень организации:

1.1) ошибки планирования и проектирования;

1.2) недостаток координации работ;

1.3) слабое регулирование;

1.4) нерациональное распределение ограниченных ресурсов;

2) недостатки в организации маркетинговой деятельности:

2.1) неправильный выбор выпускаемой продукции, а это приводит к тому, что продукция не пользуется спросом;

2.2) неправильный выбор рынка сбыта;

2.3) неверное определение емкости рынка;

2.4) неправильная ценовая политика;

3) неустойчивое финансовое положение.

Ресурсный риск имеет следующие причины:

1) отсутствие необходимых резервов по ресурсам в случае изменения рыночной ситуации;

2) дефицит рабочей силы и материалов;

3) срывы поставок;

4) нехватка выпускаемой фирмой продукции.

Портфельный риск состоит в том, что фирма имеет потери по отдельным типам ценных бумаг, а также по всей категории ссуд.

Если у предпринимателя (фирмы) имеются свободные денежные средства, он на эти средства может приобрести различные ценные бумаги, совокупность которых называется портфелем ценных бумаг, или инвестиционным портфелем.

Задача оптимизации инвестиционного портфеля анализируется в параграфе 5.8. Решение этой задачи снижает портфельный риск фирмы до оптимальной величины.

Кредитный риск представляет собой риск невозврата долга, т.е. риск неуплаты заемщиком кредитору основного долга и/или процентов по нему в сроки, установленные кредитным договором.

Причинами кредитного риска являются: недобросовестность заемщика с его попытками намеренного банкротства или другими попытками уклонения от выполнения обязательств по выплате долга, а также с опасностью невольного банкротства из-за того, что расчеты заемщика на получение необходимого дохода не оправдались.

Причинами невольного банкротства могут быть:

1) спад производства и/или спроса на продукцию определенного вида;

2) невыполнение договорных отношений;

3) форс-мажорные обстоятельства.

Кредитный риск зависит от вида предоставляемого кредита, и кредиты различаются:

1) по срокам – кратко-, средне- и долгосрочные;

2) видам обеспечения – обеспеченные, необеспеченные;

3) виду дебитора – промышленные и персональные;

4) направлению использования – промышленные, инвестиционные, на формирование оборотного капитала, сезонные, на

устранение временных трудностей, на операции с ценными бумагами и др.;

5) размеру – мелкие, средние и крупные.

Инновационный риск связан с финансированием и использованием научно-технологического прогресса (НТП). Затраты и результаты НТП растянуты во времени, но их можно предвидеть.

Мировой опыт свидетельствует, что доля получения предполагаемых результатов на стадии фундаментальных исследований не превышает 10%. Доля прикладных научных разработок составляет 80%. В наиболее развитых странах допускается, что при жестком отборе, в ходе которого отвергается 80–90% предложений, из оставшихся проектов, получивших финансирование из инновационных фондов, 15–30% может закончиться неудачей.

Создатели новых технологий и новых видов техники могут двигаться по первому пути медленно и осторожно, с минимальным риском, частично модернизируя действующие технологию и конструкции. С современной точки зрения такой путь бесперспективен, ибо вгоняет экономику в неэффективные расходы.

Создатели новых технологий и новых видов техники могут идти по второму пути, с большим риском, ориентируясь на мировой рынок. Второй путь ведет к созданию принципиально новых технологий.

Вследствие неизбежности инновационного риска на Западе приняты практика безвозмездных пожертвований научно-исследовательским организациям, значительные налоговые льготы и предоставление государственной помощи венчурным фирмам, которые с большим риском занимаются практическим освоением новых технологий.

5.4. Элементы теории полезности Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна

5.4.1. Рассмотрим ряд положений теории полезности Неймана–Моргенштерна. Одним из основных понятий этой теории является лотерея, которая определена ниже.

Пусть имеется два множества символов: множество $x_1, \ldots, x_k$ и множество $p_1, \ldots, p_k$. Символы $x_1, \ldots, x_k$ могут интерпретироваться как некоторые исходы, например выигрыши (доходы) некоторого индивидуума (потребителя) или потребительские наборы, которые может получить (выиграть) индивидуум. Символы $p_1, \ldots, p_k$ интерпретируются как вероятности, так что $p_1 \geq 0, \ldots, p_k \geq 0$ и $p_1 + \ldots + p_k = 1$.

Лотерея L представляет собой вектор (точнее, кортеж), такой, что

$$L = (p_1, x_1;\ \ p_2, x_2;\ \ \ldots;\ \ p_k, x_k),$$

или

$$L = (x_1, \ldots, x_k;\ \ p_1, \ldots, p_k),$$

где p_1 – вероятность наступления исхода x_1, ..., p_k – вероятность наступления исхода x_k. Символы x_1, ..., x_k, p_1, ..., p_k называются параметрами лотереи L.

Далее для определенности используется термин «потребительский набор», а не термин «исход».

В частности, символ

$$(1, x_1;\ \ 0, x_2;\ \ \ldots;\ \ 0, x_k) = (1, x_1)$$

представляет собой лотерею, в которой индивидуум получает (выигрывает) набор x_1 с вероятностью единица, т.е. получает набор x_1 наверняка, а символ

$$(p_1, x_1;\ \ (1-p), x_2)$$

означает лотерею, в которой индивидуум получает набор x_1 с вероятностью p, а набор x_2 – с вероятностью $(1-p)$, где $0 \leq p \leq 1$.

Предполагается, что у индивидуума на множестве возможных лотерей есть отношение $\succeq$ предпочтения-безразличия, которое удовлетворяет следующим аксиомам:

1) аксиома полноты – для любых двух лотерей L_1 и L_2 индивидуум может указать, какое одно из следующих трех отношений выполняется: $L_1 \succ L_2$ (символ $L_1 \succ L_2$ означает, что лотерея L_1 предпочитается лотерее L_2 и лотереи L_1 и L_2 не эквивалентны, т.е. не находятся в отношении безразличия), $L_2 \succ L_1$ (лотерея L_2 предпочитается лотерее L_1 и лотереи L_2 и L_1 не эквивалентны), $L_1 \sim L_2$ (лотереи L_1 и L_2 эквивалентны, т.е. находятся в отношении безразличия. Лотереи L_1 и L_2 находятся по определению в отношении безразличия, если им соответствует одинаковое распределение вероятностей);

2) аксиома рефлексивности – для любой лотереи $L \succeq L$;

3) аксиома транзитивности – для любых лотерей L_1, L_2, L_3 справедлива импликация: если $L_1 \succ L_2$, $L_2 \succ L_3$, то $L_1 \succ L_3$;

4) аксиома монотонности – для любых двух наборов x_1 и x_2, таких, что $x_1 \succ x_2$, имеет место отношение предпочтения

$$(p_1', x_1; (1-p'), x_2) \succ (p_1, x_1; (1-p), x_2)$$

тогда и только тогда, когда $p' > p$. Это содержательно означает, что индивидуум предпочитает с большей вероятностью получить предпочитаемый набор x_1. В частности, $x_1 \succ (p, x_1, (1-p), x_2)$ для всех вероятностей p, $0 < p < 1$, т.е. набор x_1, который индивидуум получает наверняка, предпочитается им любой лотерее, содержащей набор x_1 и набор x_2, который является для индивидуума менее предпочитаемым;

5) аксиома непрерывности – для любых трех наборов x_1, x_2, x_3, таких, что $x_1 \succ x_2 \succ x_3$, существует вероятность p, $0 < p < 1$, для которой

$$(p, x_1; (1-p), x_3) \sim x_2,$$

что содержательно интерпретируется так: индивидуум не делает различий между лотереей $(p, x_1; (1-p), x_3)$, содержащей наиболее предпочтительный набор x_1 и наименее предпочтительный набор x_3, и определенностью получения набора x_2, занимающего промежуточное положение между наборами x_1 и x_2;

6) аксиома о независимости не связанных между собой альтернатив – для любых двух наборов x_1 и x_2, таких, что $x_1 \sim x_2$, и любого третьего набора x_3 справедливо следующее отношение безразличия:

$$(p, x_1; (1-p), x_3) \sim (p, x_2; (1-p), x_3)$$

для любых p, $0 < p < 1$, что содержательно интерпретируется так: присутствие третьего набора x_3 не нарушает отношение безразличия.

Прежде чем формулировать последнюю (седьмую) аксиому, дадим определение сложной лотереи.

Пусть имеется m (шт.) лотерей

$$L_i = (p_{i1}, x_1;\ p_{i2}, x_2;\ \ldots,\ p_{ik}, x_k),\quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Сложная лотерея – это такая лотерея

$$L = (q_1, L_1;\ q_2, L_2;\ \ldots;\ q_m, L_m),$$

в которой в качестве исходов (наборов) выступают лотереи $L_1, \ldots, L_m$, в качестве $q_1, \ldots, q_m$ выступают вероятности, где $q_i = 1, \ldots, m$ – вероятность получения индивидуумом лотереи L_i, $q_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $q_1 + \ldots + q_m = 1$;

7) аксиома о приведении сложных лотерей — сложная лотерея L может быть приведена к лотерее с соответствующими вероятностями $r_1, \ldots, r_k$, $r_1 \geq 0, \ldots, r_k \geq 0$, $r_1 + \ldots + r_k = 1$,

$$L \sim L' = (r_1, x_1;\ r_2, x_2;\ \ldots;\ r_k, x_k),$$

$$r_1 = q_1 p_{11} + \ldots + q_m p_{m1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_k = q_1 p_{1k} + \ldots + q_m p_{mk}.$$

Теория полезности Неймана–Моргенштерна исследует предпочтения на множестве лотерей, удовлетворяющих приведенным выше аксиомам.

5.4.2. Согласно основной теореме теории полезности Неймана–Моргенштерна (при соблюдении всех приведенных аксиом) существует функция полезности, определенная на всех лотереях, которая является однозначной с точностью до монотонного строго возрастающего *линейного* преобразования.

В связи с тем что набор $x = (1, x)$ есть лотерея, функция полезность определена на всех наборах и

$$U(x) > U(y) \Leftrightarrow x \succ y.$$

В общем виде имеем

$$U(p_1, x_1;\ p_2, x_2;\ \ldots;\ p_k, x_k) = p_1 U(x_1) + \ldots + p_k U(x_k),$$

т.е. полезность лотереи $L = (p_1, x_1;\ \ldots;\ p_k, x_k)$ есть математическое ожидание полезности (т.е. ожидаемая полезность), равное взвешенной сумме полезностей $U(x_1), \ldots, U(x_k)$ наборов $x_1, \ldots, x_k$, где в качестве весов выступают вероятности $p_1, \ldots, p_k$ получения индивидуумом этих наборов.

Функция $U(x)$ полезности Неймана–Моргенштерна определяется однозначно с точностью до монотонного строго возрастающего *линейного преобразования*, т.е. функция $aU(x) + b$, $a > 0$ — также функция полезности Неймана–Моргенштерна. Напомним, что классическая функция полезности определяется однозначно с точностью до монотонного строго возрастающего (линейного, а также *нелинейного*) преобразования.

Функцию $U(x)$ полезности Неймана–Моргенштерна можно построить, выбрав произвольным образом числовые значения для двух уровней полезности. Полезности других наборов оцениваются соответствующим взвешиванием вероятностями. Продемонстрируем это. Пусть, например, $x_1 \succ x_2$ и пусть числа $U(x_1)$ и $U(x_2)$ таковые, что $U(x_1) > U(x_2)$ и в остальном произвольны. Для построения значения $U(x_3)$ функции полезности для любого другого набора x_3 взвесим значения полезностей $U(x_1)$ и $U(x_2)$ наборов x_1 и x_2 с помощью вероятностей. Если, например, имеет место цепочка $x_1 \succ x_2 \succ x_3$, то по аксиоме 5 непрерывности существует вероятность p, такая, что

$$(p, x_1; (1-p), x_2) \sim x_3,$$

поэтому

$$U(x_3) = U(p, x_1; (1-p), x_2) = pU(x_1) + (1-p)U(x_2),$$

ибо, во-первых, значения функции полезности на лотереях, которые находятся в отношении безразличия, являются равными и, во-вторых, полезность лотереи есть математическое ожидание ее полезности.

Если $x_3 \succ x_1$ ($\succ x_2$), то по аксиоме 5 непрерывности существует вероятность p, такая, что

$$x_1 \sim (p, x_3; (1-p), x_2),$$

откуда

$$U(x_1) = pU(x_3) + (1-p)U(x_2),$$

или

$$U(x_3) = \frac{1}{p}U(x_1) - \frac{(1-p)}{p}U(x_2).$$

Таким образом, выбрав два произвольных числа $U(x_1)$ и $U(x_2)$, мы получим значения $U(x)$ функции полезности Неймана–Моргенштерна для любых наборов x.

На базе основной теоремы теории полезности Неймана–Моргенштерна (теоремы об ожидаемой полезности) формируется правило рационального поведения индивидуума в процессе принятия решения в условиях риска, суть которого (правила) в следующем.

Пусть индивидуум, принимающий решение, должен выбрать одну из m (шт.) стратегий $s_1, \ldots, s_m$, где исходом стратегии s_i является лотерея

$$L_i = (p_{i1}, x_1;\ p_{i2}, x_2;\ \ldots,\ p_{ik}, x_k),\quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

В связи с тем что полезность лотереи L_i оценивается величиной

$$U(L_i) = p_{i1}U(x_{i1}) + \ldots + p_{ik}U(x_{ik}),$$

индивидуум, принимающий решение на основании максимизации полезности, выберет стратегию, которая обеспечивает максимальное значение ожидаемой полезности

$$\max_{s_i} U(L_i) = \max_{s_i}(p_{i1}U(x_{i1}) + \ldots + p_{ik}U(x_{ik})).$$

Если, например, $m = 3$, а $k = 2$, то искомый максимум равен

$$\max_{s_i} U(L_i) =$$

$$= \max(p_{11}U(x_{11}) + p_{12}U(x_{12}), p_{21}U(x_{21}) + p_{22}U(x_{22}), p_{31}U(x_{31}) + p_{32}U(x_{32})),$$

где каждая (из трех) сумма, стоящая в круглых скобках, есть элемент главной диагонали произведения матриц

$$\begin{pmatrix} U(x_{11}) & U(x_{12}) \\ U(x_{21}) & U(x_{22}) \\ U(x_{31}) & U(x_{32}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \end{pmatrix}.$$

5.5. Отношение к риску. Количественные оценки риска

5.5.1. Для описания поведения индивидуума в условиях риска и отношения индивидуума к риску используются понятия ожидаемого дохода и ожидаемой полезности индивидуума.

Пусть индивидуум имеет функцию полезности $u(w)$, где w – величина дохода, а $u(w)$ – уровень полезности индивидуума, если его доход равен w. Пусть p_1 – вероятность реализации варианта $u(w_1)$ (в этом варианте доход величиной w_1 имеет для индивидуума уровень полезности $u(w_1)$), p_2 – вероятность реализации варианта $u(w_2)$, ..., p_k – вероятность реализации варианта $u(w_k)$ ($p_1 + \ldots + p_k = 1$, $p_1 \geq 0$, ..., $p_k \geq 0$), тогда выражение

$$M[u(w)] = p_1u(w_1) + \ldots + p_ku(w_k) \qquad (5.5.1)$$

представляет собой ожидаемую полезность (среднюю полезность) рассмотренных вариантов. Выписанная сумма представляет собой *функцию ожидаемой полезности*, или функцию полезности Неймана–Моргенштерна (см. раздел 5.4.2). Здесь и далее M –

символ математического ожидания случайной величины $u(w)$, имеющей следующее распределение вероятностей $p_1, ..., p_k$:

$$\begin{array}{c|c|c} u(w_1) & \cdots & u(w_k) \\ \hline p_1 & \cdots & p_k \end{array}.$$

Величина $w = p_1w_1 + \ldots + p_kw_k$ представляет собой ожидаемый доход, т.е. математическое ожидание величины w, имеющей распределение вероятностей $p_1, ..., p_k$:

$$\begin{array}{c|c|c} w_1 & \cdots & w_k \\ \hline p_1 & \cdots & p_k \end{array}.$$

Таким образом, ожидаемая полезность есть математическое ожидание $M[u(w)]$ (случайной) полезности $u(w)$, а ожидаемый доход есть математическое ожидание $M[w]$ случайного дохода w.

5.5.2. Рассмотрим функцию полезности $v(w) = a + bu(w)$, где a и $b > 0$ – скалярные параметры. На основании свойства линейности математического ожидания имеем $M[v(w)] = a + bM[u(w)]$, т.е. обе функции полезности $u(w)$ и $v(w)$ представляют одно и то же отношение предпочтения в условиях риска.

Если функция полезности $u(w)$ выпукла вверх, то при $k = 2$ справедливо неравенство

$$u(p_1w_1 + p_2w_2) \geq p_1u(w_1) + p_2u(w_2) \qquad (5.5.2)$$

(при $k > 2$ имеем $u(p_1w_1 + \ldots + p_kw_k) \geq p_1u(w_1) + \ldots + p_ku(w_k)$).

Левая часть неравенства (5.5.2), очевидно, равна

$$u(p_1w_1 + p_2w_2) = u(M[w]), \qquad (5.5.3)$$

где $M[w]$ – математическое ожидание дохода $w = p_1w_1 + p_2w_2$: $M[w] = M[p_1w_1 + p_2w_2]$.

Правая часть равенства (5.5.2) есть математическое ожидание $M[u(w)] = p_1u(w_1) + p_2u(w_2)$ полезности $u(w)$.

Используя равенства (5.5.1), (5.5.3), перепишем неравенство (5.5.2) следующим образом:

$$M[u(w)] \leq u(M[w]). \qquad (5.5.4)$$

Неравенство (5.5.4) показывает, что математическое ожидание $M[u(w)]$ (случайной) полезности $u(w)$ дохода $w = p_1w_1 + p_2w_2$ (т.е. полезности в условиях риска) не больше полезности $u(M[w])$ математического ожидания $M[w]$ случайного дохода, которое (математическое ожидание $M[w]$) равно безрисковому доходу w, т.е. $w = M[w] = M[p_1w_1 + p_2w_2]$ (рис. 5.2).

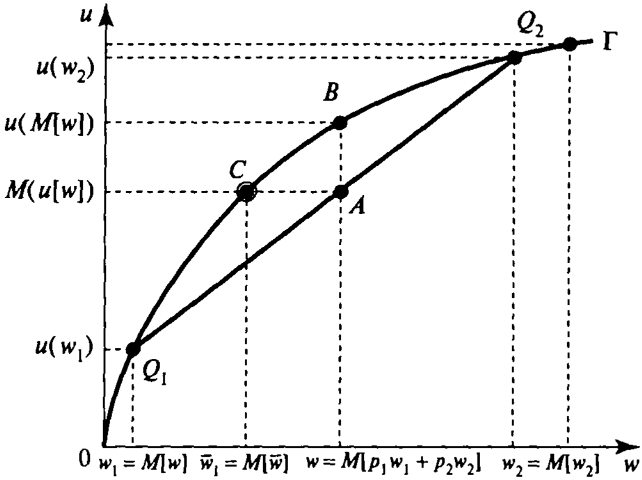


Рис. 5.2

На рис. 5.2 точка $B = (w, u(M[w]) = (M[w], u(M[w])$ изображает полезность безрискового дохода w, равного математическому ожиданию $w = M[p_1w_1 + p_2w_2]$ случайного дохода $p_1w_1 + p_2w_2$, точка $A = (w, M[u(w)])$ изображает ожидаемую полезность (т.е. полезность в условиях риска), если вероятность дохода w_1 индивидуума равна p_1, вероятность дохода w_2 индивидуума равна p_2, а ожидаемый доход $p_1w_1 + p_2w_2$ также равен w.

Таким образом, в условиях риска ожидаемая полезность $M[u(w)]$ индивидуума строго меньше полезности $u(M[w])$ индивидуума в условиях отсутствия риска. Откуда следует, что представленная на рис. 5.2 линия есть график функции полезности индивидуума, *не склонного* к риску (т.е. рискофоба).

На рис. 5.2 также видно, что в условиях отсутствия риска полезность u, равная ожидаемой полезности, т.е. $u = M[u(w)]$, достигается при доходе w, равном $w = \bar{w}$. Содержательно это означает, что индивидуум готов потерять часть своего дохода в размере $w - \bar{w} > 0$ для того, чтобы безрисковая ситуация, изображаемая точкой $C = (\bar{w}, M[u(w)])$, была эквивалентна ситуации в условиях риска, изображаемой точкой $A = (w, M[u(w)])$. Отметим, что в обоих случаях полезность одна и та же и равна $M[u(w)]$. Разность $w - \bar{w}$ (равную длине $|CA|_1$ отрезка CA) принято называть ***премией за риск***. В случае индивидуума, который не склонен к риску, премия за риск положительна.

Если график Г функции полезности больше похож на прямую (т.е. радиус ее кривизны относительно велик), то премия за риск будет меньше. Если же график Г функции полезности имеет сильное искривление (радиус кривизны относительно мал), то премия за риск будет больше при той же разности $u(M[w]) - M[u(w)]$. Таким образом, степень искривления графика функции полезности характеризует степень неприятия риска индивидуумом.

5.5.3. Если функция полезности $u(w)$ выпукла вниз, то при $k = 2$ справедливо неравенство

$$u(p_1w_1 + p_2w_2) \le p_1u(w_1) + p_2u(w_2)$$

(при $k > 2$ $u(p_1w_1 + \ldots + p_kw_k) \le p_1u(w_1) + \ldots + p_ku(w_k)$).

По аналогии с предыдущим случаем имеем неравенство

$$M[u(w)] \ge u(M[w]),$$

которое означает, что математическое ожидание $M[u(w)]$ полезности $u(w)$ не меньше полезности $u(M[w])$ математического ожидания $M[w]$ случайного дохода w, которое (математическое ожидание $M[w]$) равно безрисковому доходу w, т.е. $w = M[w] = M[p_1w_1 + p_2w_2]$ (рис. 5.3), т.е. представленная на рис. 5.3 линия есть график функции полезности индивидуума, который *склонен* к риску (т.е. рискофила). В этом случае в условиях риска уровень ожидаемой полезности $M[u(w)]$ индивидуума строго выше уровня полезности

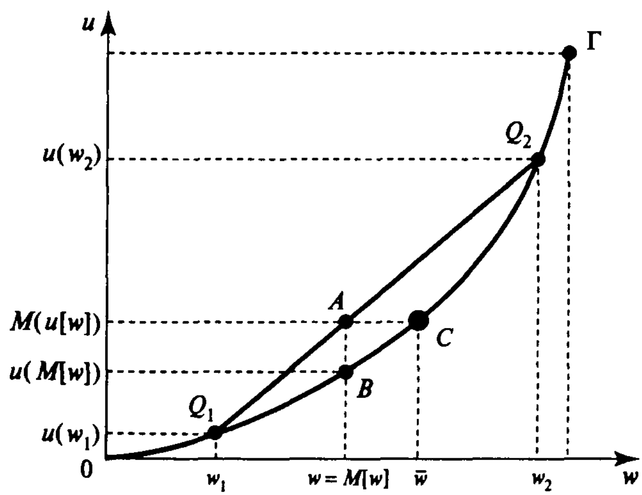


Рис. 5.3

$u(M[w])$ в условиях отсутствия риска (точка A расположена выше точки B, этим точкам соответствует один и тот же доход w). В данном случае премия за риск отрицательна и равна длине $|AC|_1$ отрезка AC, взятой со знаком минус, что содержательно означает, что индивидуум приобретает дополнительный доход в размере $\bar{w} - w > 0$ для того, чтобы для него безрисковая ситуация, изображенная точкой $C = (\bar{w},\ M[u(w)])$, была эквивалентна ситуации в условиях риска, изображаемой точкой $A = (w,\ M[u(w)])$.

5.5.4. Если функция полезности $u(w)$ индивидуума выпукла вверх и вниз (т.е. график есть прямая линия), то при $k = 2$ справедливо равенство

$$u(p_1 w_1 + p_2 w_2) = p_1 u(w_1) + p_2 u(w_2)$$

(при $k \geq 2$ $u(p_1 w_1 + \ldots + p_k w_k) = p_1 u(w_1) + \ldots + p_k u(w_k)$).

В этом случае имеем равенство

$$M[u(w)] = u(M[w]),$$

которое означает, что математическое ожидание $M[u(w)]$ полезности $u(w)$ равно полезности $u(M[w])$ математического ожидания $M[w]$ случайного дохода w, которое (математическое ожидание $M[w]$) равно безрисковому доходу w, т.е. $w = M[w] = M[p_1 w_1 + p_2 w_2]$ (рис. 5.4). Таким образом, представленная на рис. 5.4 линия есть

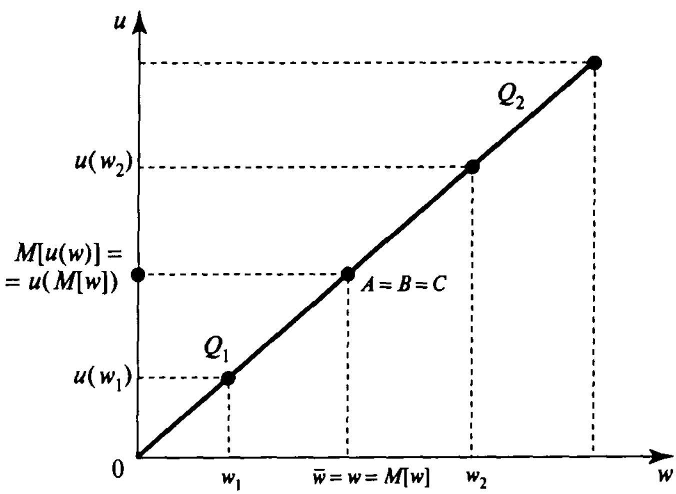


Рис. 5.4

график функции полезности индивидуума, нейтрального к риску (т.е. рисконейтрала). В этом случае, очевидно, премия за риск

$$\bar{w} - w = 0.$$

Для индивидуума, который не склонен к риску (т.е. является рискофобом), функция полезности $u(w)$ от его дохода выпукла вверх (см. рис. 5.2). Для такой функции $u(w)$ ее производные $u'(w) > 0$ и $u''(w) < 0$. Это означает, что предельная полезность $u'(w)$ дохода w индивидуума убывает с ростом такого дохода. Интуитивно ясно, что чем график функции $u(w)$ полезности больше похож на отрезок прямой, тем меньше степень неприятия риска со стороны индивидуума. Наоборот, чем сильнее искривлен график функции полезности, тем выше степень неприятия индивидуума к риску. Степень искривления графика функции определяет вторая производная этой функции.

5.5.5. Для построения показателя степени неприятия риска со стороны индивидуума используются меры Эрроу–Пратта, которые определяются так.

Абсолютная и *относительная меры Эрроу–Пратта* для функции полезности $u(w)$ имеют вид

$$AP_a(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}, \quad AP_r(w) = wAP_a(w) = -w\frac{u''(w)}{u'(w)}.$$

В связи с тем, что $v'(w) = bu'(w)$, $v''(w) = bu''(w)$ $(v(w) = a + bu(w))$, абсолютная и относительная меры Эрроу–Пратта одни и те же для целого класса функций полезности $v(w) = a + bu(w)$, поэтому эти меры выражают свойства предпочтений индивидуума, а не только описывающих их функций полезности.

Если считать, что уровень полезности $u(w)$ измеряется в ютилях (ю), а доход – в денежных единицах (д.е.), то размерность первой производной $u'(w)$ имеет вид ю/д.е., размерность второй производной $u''(w)$ имеет вид ю/(д.е.)^2, поэтому абсолютная мера Эрроу–Пратта имеет размерность вида 1/д.е., а относительная мера Эрроу–Пратта – безразмерная величина.

Имеем

$$AP_r(w) = -w\frac{u''(w)}{u'(w)} = -\frac{(u'(w))'}{u'(w)} = -\frac{w}{u'} \cdot \frac{du'}{dw} = -E_w(u'),$$

где $E_w(u')$ – эластичность предельной полезности $u'(w)$ по доходу w.

Если индивидуум склонен к риску, то $u''(w) \geq 0$, и если $u'(w) > 0$, то

$$AP_a(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} \leq 0, \quad AP_r(w) = -w\frac{u''(w)}{u'(w)} \leq 0. \qquad (5.5.5)$$

Точнее, если $u''(w) \geq 0$ и $u'(w) > 0$, то справедливы неравенства (5.5.5).

Если $u''(w) \leq 0$ (означает, что индивидуум не склонен к риску) и если $u'(w) > 0$, то

$$AP_a(w) \geq 0, \quad AP_r(w) \geq 0.$$

Если $u''(w) = 0$, это эквивалентно тому, что индивидуум нейтрален к риску, и если $u'(w) > 0$, то

$$AP_a(w) = 0, \quad AP_r(w) = 0.$$

Меры $AP_a(w)$ и $AP_r(w)$ обладают следующими свойствами.

1. Пусть мера $AP_a(w)$ растет с ростом w, тогда с ростом w безрисковый эквивалент случайного выигрыша убывает, и наоборот.

2. Пусть мера $AP_a(w)$ возрастает с ростом w, тогда с ростом w спрос на рисковый актив убывает (т.е. рисковый актив – товар низкого качества).

Пусть мера $AP_a(w)$ убывает с ростом w, тогда с ростом w спрос на рисковый продукт возрастает (т.е. рисковый актив-товар нормальный).

3. Пусть $AP_a(w)$ убывает, а $AP_r(w)$ возрастает, тогда эластичность спроса на рисковый актив по доходу меньше единицы, т.е. рисковый актив – продукт первой необходимости. Пусть $AP_r(w)$ убывает, тогда эластичность больше единицы (т.е. рисковый актив – предмет роскоши).

Для описания функций полезности $u(w)$, для которых абсолютная и относительная меры $AP_a(w)$ и $AP_r(w)$ постоянны, следует решить обыкновенные дифференциальные уравнения

$$AP_a(w) = \alpha, \quad AP_r(w) = \beta,$$

где α и β – постоянные положительные параметры.

Эти уравнения путем понижения их порядка сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными, которые легко интегрируются.

Общее решение дифференциального уравнения

$$-\frac{u''(w)}{u'(w)} = \alpha$$

имеет вид $u(w) = -C_1 e^{-\alpha w} + C_2$ (проверяется непосредственно). При фиксированных постоянных $\tilde{N}_1$ $(C_1 > 0)$ и C_2 функция $u(w)$ строго возрастает и выпукла вверх. Это означает, что индивидуум с функцией полезности $u(w)$ не склонен к риску.

Общее решение дифференциального уравнения

$$-w\frac{u''(w)}{u'(w)} = \beta$$

имеет вид

$$u(w) = C\frac{w^{1-\beta}}{1-\beta} + C_1 \quad (\beta \neq 1),$$

$$u_1(w) = C \ln C_1 w \quad (\beta = 1)$$

(проверяется непосредственно).

При фиксированных положительных постоянных C и $\tilde{N}_1$ функции $u(w)$ и $u_1(w)$ строго возрастают и выпуклы вверх, что означает, что индивидуумы с функциями полезности $u(w)$ и $u_1(w)$ не склонны к риску.

5.5.6. Пример.

Пусть функция полезности индивидуума имеет вид

$$u = a\left(\frac{w}{b}\right)^a,$$

где w — доход индивидуума;

u — уровень полезности индивидуума, которого он достигает, приобретая потребительский набор на сумму, равную его доходу w.

Для этой функции абсолютная и условная меры Эрроу–Пратта имеют вид (проверяется непосредственно)

$$AP_a(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} = \frac{1-\alpha}{w}, \quad AP_r(w) = -w\frac{u''(w)}{u'(w)} = 1-\alpha.$$

При $0 < \alpha < 1$ имеем случай, когда индивидуум не склонен к риску. Очевидно, при этом $AP_a(w) > 0$, $AP_r(w) > 0$. Чем меньше α (т.е. чем ближе степень α к нулю), тем больше индивидуум не склонен к риску.

Рассматриваемый случай степенной функции полезности наглядно демонстрирует зависимость между отрицательным отношением к риску и относительной мерой Эрроу–Пратта: чем больше индивидуум не склонен к риску, тем ближе к единице относительная мера Эрроу–Пратта.

В частности, при $\alpha = {}^1/_2$ меры Эрроу–Пратта соответственно равны $AP_a(w) = 0{,}5/w$, $AP_r(w) = 0{,}5$, а при $\alpha = {}^1/_6$ они равны $AP_a(w) = 5/6w$, $AP_r(w) = 5/6$.

При $\alpha > 1$ имеем случай, когда индивидуум склонен к риску, при $\alpha = 1$ он к риску нейтрален. При $\alpha > 1$ $AP_a(w) < 0$, $AP_r(w) < 0$, при $\alpha = 1$ $AP_a(w) = 0$, $AP_r(w) = 0$.

Пусть $\alpha = 1/2$, $a = 10$, $b = 60$, $w_1 = 10$, $w_2 = 50$, $p_1 = p_2 = 0{,}5$.

Тогда при безрисковом уровне дохода $w_1 = 10$ ($w_2 = 50$) уровень полезности индивидуума равен

$$u_1 = u(w_1) = 10\left(\frac{10}{60}\right)^{1/2} \cong 4{,}08 \quad \left(u_2 = u(w_2) = 10\left(\frac{50}{60}\right)^{1/2} \cong 9{,}13\right).$$

Равенство $p_1 = p_2 = 0{,}5$ эквивалентно тому, что индивидуум с равными вероятностями выбирает доход $w_1 = 10$ или доход $w_2 = 50$, откуда вытекает, что математическое ожидание дохода индивидуума равно $M[w] = p_1w_1 + p_2w_2 = 0{,}5 \cdot 10 + 0{,}5 \cdot 50 = 30$.

Полезность математического ожидания дохода $M[w] = 30$ равна

$$u_1 = u(M[w]) = 10\left(\frac{30}{60}\right)^{1/2} \cong 7{,}07,$$

а ожидаемая полезность индивидуума (математическое ожидание полезности) равна

$$M[w] = p_1u(w_1) + p_2u(w_2) = 0{,}5u_1 + 0{,}5u_2 \cong 30.$$

Определим безрисковый уровень $\bar{w}$ дохода, при котором полезность равна ожидаемой полезности $M[w]$, из следующего уравнения:

$$M[u] = 10\left(\frac{\bar{w}}{60}\right)^{1/2},$$

откуда получаем, что

$$\bar{w} = 60\left(\frac{M[u]}{10}\right)^2 \cong 26{,}18.$$

Премия за риск в рассматриваемом случае равна

$$M[w] - \bar{w} \cong 30 - 26{,}18 = 3{,}82.$$

т.е. безрисковый доход $\bar{w} \cong 26{,}18$ дает индивидууму полезность, равную ожидаемой полезности $M[u] = p_1u(w_1) + p_2u(w_2) \cong 6{,}61$ индивидуума при его случайном доходе с математическим ожиданием $M[w] = p_1 w_1 + p_2 w_2 = 30$. Другими словами, премия за риск равна той части дохода индивидуума, от которой он должен отказаться для того, чтобы ситуация определенности для него была эквивалентна ситуации неопределенности: $M[u] = u(\bar{w})$ (рис. 5.5), на котором представлен случай, когда $\alpha = {}^1/_2$. Линия $OA_1A_5A_3A_2C$ есть график функции полезности $u(w) = 10(w/60)^{1/2}$, точки $A_1 = (w_1, u_1)$, $A_2 = (w_2, u_2)$, $A_3 = (M[w], uM[w])) = (30; 7{,}07)$, $A_4 = (M[w], M[u]) = (30; 6{,}61)$, $A_5 = (\bar{w}, M[u]) = (26{,}18; 6{,}61)$. Длина отрезка A_5A_4, взятая со знаком плюс, равна премии за риск $M[w] - \bar{w} = 30 - 28{,}18 = 3{,}82$).

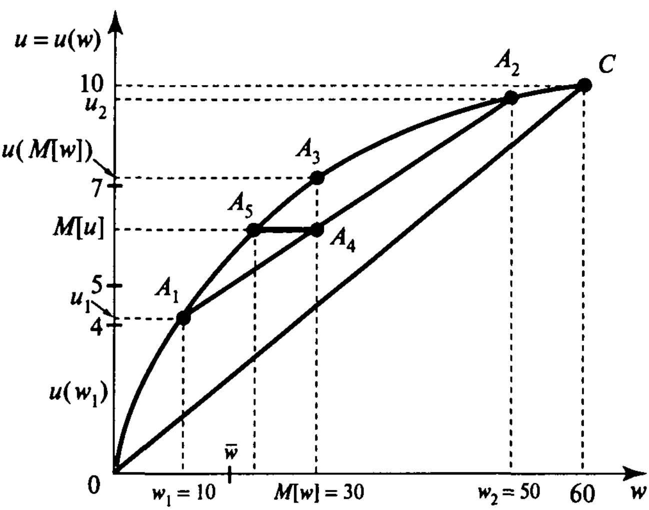


Рис. 5.5

Пусть теперь $\alpha = {}^1/_6$, а остальные величины a, b, w_1, w_2, p_1, p_2 такие же, как в случае, когда $\alpha = {}^1/_2$. В рассматриваемом варианте имеем

$$u_1 = u(w_1) = 10\left(\frac{10}{60}\right)^{1/6} \cong 7{,}42 \quad u_2 = u(w_2) = 10\left(\frac{50}{60}\right)^{1/6} \cong 9{,}7,$$

$$M[w] = p_1 w_1 + p_2 w_2 = 0{,}5 \cdot 10 + 0{,}5 \cdot 50 = 30,$$

$$u = u(M[w]) = 10 \cdot \left(\frac{30}{60}\right)^{1/6} \cong 8{,}9,$$

$$M[w] = p_1 u(w_1) + p_2 u(w_2) = 0{,}5u_1 + 0{,}5u_2 \cong 8{,}56,$$

$$\bar{w} = 60\left(\frac{M(u)}{10}\right)^6 \cong 60\left(\frac{8{,}56}{10}\right)^6 = 23{,}59,$$

$$M[w] - \bar{w} \cong 30 - 23{,}59 = 6{,}41.$$

Мы видим, что во втором случае ($\alpha = {}^1/_6$), в котором уровень (степень) неприятия риска индивидуумом значительно выше, чем в первом случае ($\alpha = {}^1/_2$), премия за риск также значительно больше, чем в первом случае (рис. 5.6, на котором линии $OA_1A_5A_3A_2C$ и $OB_1B_5B_3B_2C$ суть графики функций полезности $u(w) = 10(w/60)^{1/2}$ и $u(w) = 10(w/60)^{1/6}$ соответственно). Длины отрезков A_5A_4 и B_5B_4, взятые со знаком плюс, равны соответственно премиям за риск в первом случае ($\alpha = {}^1/_2$) и во втором случае ($\alpha = {}^1/_6$) $|A_5A_4| = 3{,}82$ и $|B_5B_4| = 6{,}41$).

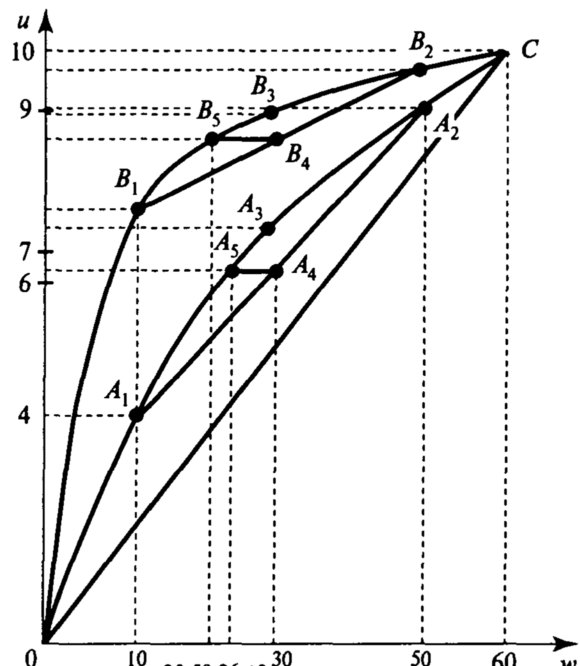


Рис. 5.6

5.6. Шкалы уровней риска

5.6.1. К настоящему времени еще не появились конкретные рекомендации по определению того, насколько «приемлем» тот или иной уровень риска в той или иной конкретной ситуации. В качестве ориентира для выработки таких рекомендаций могут быть использованы шкалы уровней риска, позволяющие классифицировать поведение лиц, которые идут на хозяйственный риск. В литературе отсутствует единый подход к формулировке и критериям оценки шкал риска.

Приведем ряд шкал уровня риска, которые содержатся в учебном пособии В.М. Гранатурова (1999; 2002). Начнем с эмпирической шкалы уровня риска (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Эмпирическая шкала уровней риска

№ п/п	Величина (уровень) риска (вероятность нежелательного результата принятого решения)	Градация риска
1	0,0–0,1	Минимальный риск
2	0,1–0,3	Малый риск
3	0,3–0,4	Средний риск
4	0,4–0,6	Высокий риск
5	0,6–0,8	Максимальный риск
6	0,8–1,0	Критический риск

Первые три градации вероятностей нежелательного результата принятого решения относятся к «нормальному», «разумному» риску, при котором можно принимать обычные хозяйственные (предпринимательские) решения. Принятие хозяйственного решения с большим уровнем риска зависит от склонности к риску лица, принимающего решение (ЛПР).

Рассмотрим еще одну шкалу, в которой величина (уровень) риска определяется на основании коэффициента вариации $V = \sigma/M(x)$, где $M(x)$ – математическое ожидание случайной величины, а σ – ее квадратичное отклонение (σ^2 – дисперсия случайной величины) (табл. 5.2).

Таблица 5.2

Шкала уровней риска

№ п/п	Величина (уровень) риска (вероятность нежелательного результата принятого решения)	Градация риска
1	До 0,1	Слабый риск
2	От 0,1 до 0,25	Умеренный риск
3	Свыше 0,25	Высокий риск

Для оценки коэффициента вариации, определяющего риск банкротства, существуют разные точки зрения. Одни авторы считают, что оптимальным является коэффициент вариации, равный 0,3, а коэффициент вариации 0,7 и выше соответствует уровню риска, который ведет к банкротству. Промежуток от 0,3 до 0,7 представляет собой зону повышенного риска. Принятие решения о реализации рискового мероприятия в зоне повышенного риска (от 0,3 до 0,7) определяется величиной возможного выигрыша в случае, если рисковое событие не произойдет, и склонностью к риску ЛПР.

5.6.2. Безотносительно к величине (уровню) риска существуют относительные характеристики шкал риска по величине ожидаемых потерь. Эти шкалы можно рекомендовать для оценки приемлемости рискового решения. Опишем одну из таких шкал.

1. Промежуток (зона) приемлемого (минимального) риска характеризуется уровнем потерь, которые не превышают величину чистой прибыли фирмы.

2. Промежуток допустимого (повышенного) риска характеризуется уровнем потерь, которые не превышают величину расчетной прибыли фирмы.

3. Промежуток критического риска характеризуется тем, что в этом промежутке возможны потери, объем которых превышает величину расчетной прибыли, но не превышает величины ожидаемого дохода.

4. Промежуток катастрофического (недопустимого) риска характеризуется тем, что в его границах ожидаемые потери могут быть больше ожидаемых доходов и достичь величины, равной всему имущественному состоянию предпринимателя (фирмы). К катастрофическому риску следует отнести (вне зависимости от величины денежного и имущественного ущерба) такой риск, который связан с возникновением непосредственной опасности для жизни или экономических катастроф.

5.7. Методы предупреждения и снижения риска

5.7.1. В этом параграфе рассматриваются универсальные методы предупреждения и снижения риска. Эти методы имеют широкую область эффективного применения. Методы предупреждения и снижения риска в специфических условиях описаны и проанализированы в специальной литературе, посвященной проблемам риска.

К универсальным методам предупреждения риска принято относить методы:

1) страхования;
2) резервирования средств;
3) диверсификации;
4) лимитирования;
5) повышения уровня достоверности информации.

Страхование – один из наиболее распространенных методов предупреждения и снижения рисков. Страхование – это соглашение между страховой компанией, называемой страховщиком, и страхователем (т.е. индивидуумом или фирмой). Согласно этому соглашению страхователь выплачивает страховщику страховую премию, а страховщик обязуется возместить страхователю убытки (полностью или частично, в зависимости от договоренности) в случае наступления так называемого страхового случая. Например, индивидуум (страхователь), приобретая недвижимость, может иметь убытки, в частности в связи со стихийным бедствием. Вероятность p того, что индивидуум будет иметь убыток, равный сумме a руб., может иметь субъективную и объективную оценки. Математическое ожидание возможных потерь индивидуума, очевидно, равно $p \cdot a$ руб. Если индивидуум приобретает страховой полис, уплачивая страховщику страховую премию в размере $p \cdot a$ руб., то в случае наступления страхового случая страховщик возмещает индивидууму сумму не в $p \cdot a$ руб., а в размере a руб.

Сущность страхования состоит в том, что страхователь за определенную плату, равную страховой премии, передает риск (ответственность за негативные последствия принятого решения) страховщику, т.е. страховая премия есть премия за риск индивидуума, не склонного к риску (см. параграф 5.5).

Существуют три вида страхования: личное страхование, имущественное страхование и страхование ответственности.

В *имущественном страховании* объектом страховых соглашений выступают движимое и недвижимое имущество, а также имущественные интересы. Часто имущество страхуется на случай повреждения или его утраты в результате стихийных бедствий, несчастных случаев и т.п. Имущественные интересы страхуются на случай недополучения прибыли или доходов (т.е. упущенной выгоды), неплатежа по счетам продавца продукции, простоя оборудования, изменения валютных курсов.

Специфической формой страхования имущественных интересов является *хеджирование*, которое представляет собой систему мер, позволяющих исключить или ограничить риски финансовых операций в связи с неблагоприятным изменением валютных курсов, цен на товары, процентных ставок и т.п. в будущем. Такими мерами являются форвардные операции, опционы и др. В частности, хеджирование с помощью опционов предусматривает право (но не обязанность) страхователя за определенную плату (опционную премию) купить заранее оговоренное количество валюты по фиксированному курсу в определенный момент (в случае европейского опциона) и в течение фиксированного временнóго промежутка (в случае американского опциона). Опционная премия представляет собой аналог страхового взноса.

Хеджирование является, по сути, передачей риска одним лицом другому лицу, однако в отличие от других традиционных договоров страхования хеджирование не всегда предусматривает выплату страхователем страховых взносов, т.е. страховой премии. Например, в случае форвардных операций, предусматривающих куплю-продажу валюты в заранее согласованный день (в будущем) по фиксированному курсу, страхователь не несет никаких предварительных затрат. В качестве страхователя здесь выступает спекулянт, который принимает на себя риск, рассчитывая получить прибыль.

Страхование ответственности – это такой вид страхования, в котором объектом выступает ответственность страховщика перед третьими лицами за причиненный им ущерб вследствие какого-либо действия или бездействия страхователя (непогашение кредитов, нанесение ущерба окружающей среде и т.п).

Страхование риска имеет две разновидности: сострахование и перестрахование. Форма сострахования используется тогда, когда страховщик может выплатить только часть страховой суммы в страховом случае. Поэтому страхователь в случае наступления страхового случая должен получить оставшуюся часть страховой суммы у другого (других) страховщика(ов), с которым (с которыми) страхователь заключает отдельный договор, возможно на других условиях. Форма перестрахования свободна от недостатков сострахования, ибо в случае перестрахования страхователь делегирует (за определенную сумму) весь свой риск страховщику, который в случае необходимости уже от своего имени обращается к другому страховщику (страховщикам) с предложением о передаче ему части уже своего риска за определенную плату.

5.7.2. В случае резервирования средств как метода предупреждения и снижения отрицательных последствий наступления рисковых событий предприниматель (фирма) создает специальные фонды возмещения убытков за счет части собственного оборотного капитала. Резервирование средств целесообразно, если издержки резервирования меньше величины страховых взносов (страховых премий) в случае страхования. В связи с тем что резервные (т.е. страховые) фонды создаются на самом хозяйствующем субъекте, резервирование средств на покрытие убытков называют самострахованием.

Резервные фонды могут создаваться в натуральной или денежной форме. Например, субъекты сельскохозяйственного производства для предотвращения или возмещения потерь, вызываемых неблагоприятными природными условиями, создают натуральные резервные фонды (например, семенной фонд). В промышленном производстве, торговле создаются резервные запасы сырья, материалов на случай срыва поставок. Резервные денежные фонды создаются на случай непредвиденных расходов, которые могут появиться в связи с изменением тарифов, цен, оплатой исков и т.п.

В процессе оценки эффективности, выбора и обоснования вариантов снижения риска путем резервирования средств необходимо определить оптимальный объем этих резервируемых средств, т.е. оптимальный размер запасов. Для определения оптимальных размеров запасов в различных конкретных ситуациях построено большое число специальных экономико-математических моделей, совокупность которых составляет *теорию управления запасами*.

В связи с тем что задачи теории управления запасами могут быть сложными, используют на практике различные упрощенные критерии для определения требуемого размера резервных (страховых) фондов. За рубежом одни фирмы формируют страховые фонды в размере 1–5% от объема продаж, другие – 3–5% от годового фонда выплат акционерам. В Российской Федерации фирмам разрешено создавать свои страховые фонды за счет издержек в размере не более 1% реализованной продукции (товаров, услуг). Источником возмещения потерь при наступлении рискового случая служит прибыль.

5.7.3. В системе методов предупреждения и снижения риска важную роль играет *диверсификация*. Она представляет собой процесс распределения инвестируемых средств между различными объектами вложения, которые непосредственно не связаны между собой.

Диверсификация – эффективный метод снижения рисков в процессе управления портфелем ценных бумаг (см. параграф 5.8). Помимо этой важной области диверсификация широко применяется в промышленном производстве, торговле и в других областях предпринимательской деятельности. В частности, для снижения риска потерь, связанных с падением спроса на определенный вид продукции, фирма должна осваивать выпуск других видов продукции.

В страховом бизнесе диверсификация имеет форму расширения страхового поля, которое уменьшает вероятность одновременного наступления ряда страховых событий. В то же время страхование урожая, строений только на небольшом пространстве в случае стихийного бедствия может привести к необходимости одновременной выплаты значительных сумм.

Приведем примеры диверсификации в целях снижения банковских рисков:

1) при сохранении общего объема кредитования целесообразно предоставлять кредиты относительно мелкими суммами возможно большему числу клиентов;

2) образование валютных резервов в разной валюте в целях уменьшения потерь в случае падения курса одной из валют;

3) привлечение депозитных вкладов, ценных бумаг более мелкими суммами от большего числа вкладчиков и т.п.

Диверсификация акций, клиентов, услуг эффективна в случае независимости объектов вложения капитала друг от друга. В случае зависимости диверсификация неэффективна. Если, скажем, средства вложены в автопром, прокат тонких листов и в производство шин, т.е. формально достаточно диверсифицированы, то, по сути, такая диверсификация неэффективна, ибо эти производства зависят друг от друга.

Наиболее эффективна диверсификация в случае, когда выбираемые производства таковы, что спрос на их продукцию меняется в противоположных направлениях, т.е. корреляция между показателями этих производств отрицательна.

Диверсификация не может уменьшить систематический риск, который обусловлен общей экономической конъюнктурой и связан с войнами, инфляцией, глобальными изменениями налогообложения, изменениями денежной политики.

5.7.4. *Лимитирование* представляет собой установление нижних и верхних пределов в целях уменьшения риска. В частности, ограничение размеров кредитов, выдаваемых одному заемщику, позволяет уменьшить потери банка в случае невозврата кредита и процентов по кредиту. Превышение этой суммы может повлечь за собой отказ от страхования или использования перестрахования.

Приведем еще ряд примеров лимитирования. Применяются ограничения по срокам (заемных средств, инвестиций), по структуре (доле отдельных затрат в общем объеме, доле каждого вида ценных бумаг в общей стоимости портфеля), по уровню отдачи (установление нижнего уровня доходности проекта) и т.п.

5.7.5. *Повышение уровня достоверности информации* представляет собой важный метод предупреждения и снижения риска. Если индивидууму (потребителю, предпринимателю) информация более доступна, он может сделать лучший прогноз и уменьшить риск. Информация – это ценный товар, за который индивидуумы готовы платить и достаточно хорошо. *Ценность полной информации* равна разности между ожидаемой ценностью выбора при наличии полной информации и ожидаемой ценностью, когда информация неполная. Заплатив эту разность, можно получить значение ожидаемой ценности выбора при наличии полной информации и уменьшить риск.

Проведенный анализ методов предупреждения и снижения рисков показал, что любое мероприятие, направленное на предупреждение и снижение риска, имеет свою цену.

При страховании имущества или ответственности такой ценой является величина страховой премии (страховых взносов). При страховании посредством распределения риска за счет партнеров и инвесторов платой фирмы за снижение риска является отказ от части ее доходов в пользу других участников проекта, которые приняли на себя ответственность за часть риска.

При хеджировании с помощью опционов платой за снижение риска является опционная премия (которая аналогична страховой премии).

При резервировании платой за снижение риска являются издержки по созданию резервных фондов, а также уменьшению оборачиваемости оборотного производственного капитала, возможное ухудшение использования основного производственного капитала, что приводит к снижению прибыли фирмы.

Уменьшение риска путем диверсификации приводит к снижению ожидаемой отдачи (дивидендов, доходов, прибыли), ибо расширение области вложения средств, как правило, сопряжено с привлечением менее доходных областей вложения средств.

При лимитировании в качестве платы за снижение риска выступает снижение отдачи как следствие принятых дополнительных ограничений и исключения из рассмотрения возможных привлекательных вариантов.

На основании сказанного следует сравнивать получаемые результаты с целью и степенью их достижения и делать выводы об экономической целесообразности использования в каждом конкретном случае конкретных методов предупреждения и снижения риска.

В конкретных прикладных случаях целесообразно комплексно использовать различные методы предупреждения и снижения риска, комбинируя которые следует стремиться к оптимальному сочетанию уровня достигаемого снижения риска и необходимых для этого затрат.

5.8. Спрос на рисковые активы. Задача оптимизации инвестиционного портфеля

5.8.1. *Актив* – источник, обеспечивающий денежные поступления его владельцу. В частном жилом доме квартиры могут быть сданы в аренду, обеспечивая рентный доход его владельцу. Если индивидуум имеет срочный счет в банке, то банк ему выплачивает проценты (обычно ежегодно или ежемесячно), которые вновь поступают на тот же счет.

Рисковый актив дает денежные поступления, которые частично зависят от случая, т.е. предстоящие поступления неопределенны. Примером рискового актива является акция «Дженерал моторс» (ДМ), ибо владелец акции не знает, поднимется или упадет ее курс со временем, даже не может быть уверен, что ДМ будет продолжать выплачивать тот же дивиденд за акцию. Даже долгосрочные государственные облигации США (которые подлежат погашению через 10 или 20 лет) имеют элемент риска. Маловероятно, что федеральное правительство станет банкротом, но темпы инфляции могут неожиданно вырасти и обесценить выплаты по процентам и погашению номинала в реальном выражении и тем самым снизить стоимость облигаций.

Безрисковый (свободный от риска) актив обеспечивает денежные поступления в заранее установленном размере. Например, казначейские векселя США (краткосрочные государственные облигации США) погашаются через несколько месяцев, поэтому они являются почти безрисковыми активами.

Доходность актива – отношение общего объема денежных поступлений от актива к его цене. Если, скажем, цена дома, квартиры которого сдаются в аренду, выросла за год с 10 млн до 11 млн д. е., в течение года дом обеспечил чистый рентный доход в размере 0,5 млн д. е. Тогда $(11 - 10) + 0{,}5 = 1{,}5$ и $1{,}5/10 = 0{,}15 = 15\%$ – доходность актива.

Реальная доходность актива (с поправкой на инфляцию) равна номинальной доходности актива минус темп инфляции.

Ожидаемая доходность – это математическое ожидание его доходности, т.е. доходность, которую актив принес в среднем. Ожидаемая доходность близка к средней действительной доходности на длительном временно́м промежутке.

Различные активы имеют разные ожидаемые доходности. Например, табл. 5.3 показывает, что ожидаемая реальная доходность по казначейским векселям США была ниже 1%, в то время как доходность типичной акции на Нью-Йоркской фондовой бирже составляла почти 9%. Однако типичная акция в отличие от казначейского векселя США является более рисковым активом. Величина риска, измеряемого в показателях среднего квадратичного отклонения реальной доходности, равна 21,2 для обычной акции, 8,5% – для долгосрочных корпоративных облигаций и 3,4% – для казначейских билетов США. В табл. 5.3 наблюдается следующая закономерность: чем выше доход от инвестиций, тем больше связанный с этим риск. Следовательно, не склонный к риску вкладчик должен соизмерить ожидаемую доходность с величиной риска. Таким образом, спрос на активы зависит не только от их ожидаемой доходности, но и от риска.

Таблица 5.3

Инвестиции – риск и прибыль в США (1926–1991)

Ценные бумаги	Ожидаемая реальная доходность (%)	Величина риска (среднее отклонение) (%)
Обычные акции	8,3	21,2
Долгосрочные промышленные облигации	0,9	8,5
Казначейские векселя	0,15	3,4

5.8.2. Предположим, что индивидуум (далее – инвестор) вкладывает свои сбережения в активы двух видов: в казначейские векселя, которые почти не сопряжены с риском, и в акции, которые являются рисковым активом. Инвестор должен определиться с тем, какую часть своих сбережений ему следует вложить в казначейские билеты, а какую часть – в акции.

Пусть R_f – свободная от риска доходность (скажем, от казначейских векселей), R_m – ожидаемая доходность от акций, куплен-ных на фондовой бирже, r_m – реальная доходность (она связана с риском).

Ожидаемая (R_m) и реальная (r_m) доходности связаны между собой так: $R_m = M[r_m]$, где символом M обозначено математическое ожидание реальной доходности, которая является случайной величиной. Отметим, что $M[R_f] = R_f$, ибо R_f – детерминированная, а не случайная величина.

У рисковых активов ожидаемая доходность выше, чем у безрисковых, т.е. $R_m > R_f$. Если бы это было не так, то рискофобы приобретали только казначейские билеты, а акции не покупали бы.

Пусть b – доля средств инвестора, размещенных на фондовой бирже, $(1 - b)$ – доля средств инвестора, используемая для покупки казначейских векселей.

Ожидаемая доходность (математическое ожидание доходности) R_p всего набора ценных бумаг равна средневзвешенным значениям ожидаемых доходностей (математических ожиданий доходностей) двух активов

$$R_p = bR_m + (1 - b)R_f, \tag{5.8.1}$$

ибо математическое ожидание $M[bR_m + (1 - b)R_f]$ суммы двух случайных величин $bR_m + (1 - b)R_f$ равно сумме их математических ожиданий:

$$M[bR_m + (1-b)R_f] = M[br_m] + M[(1-b)R_f] =$$
$$= bM[r_m] + (1-b)M[R_f] = bR_m + (1-b)R_f.$$

Риск от такого набора (портфеля) ценных бумаг ($(1 - b)$, b) определяется с помощью дисперсии (квадратичного отклонения) общей доходности R_p всего набора ценных бумаг.

Пусть σ_m^2 – дисперсия (σ_m – среднее квадратичное отклонение) доходности от вклада в фондовую биржу.

Дисперсия σ_p^2 доходности набора (портфеля) ценных бумаг по определению дисперсии

$$\sigma_p^2 = M[br_m + (1-b)R_f - R_p]^2 =$$
$$= M[bR_m + (1-b)R_f - M(br_m + (1-b)R_f)]^2,$$

откуда следует, что

$$\sigma_p^2 \overset{(5.8.1)}{=} M[br_m + (1-b)R_f - bR_m - (1-b)R_f]^2 = M[b(r_m - R_m)]^2 = b^2\sigma_m^2,$$

т.е.

$$\sigma_p = b\sigma_m. \tag{5.8.2}$$

Имеем

$$R_p \overset{(5.8.1)}{=} bR_m+(1-b)R_f = R_f + b(R_m - R_f) \overset{(5.8.2)}{=} R_f + \frac{(R_m - R_f)}{\sigma_m}\sigma_p,$$

откуда вытекает, что ожидаемая доходность R_p имеет вид

$$R_p = R_f + \frac{(R_m - R_f)}{\sigma_m}\sigma_p. \tag{5.8.3}$$

Выражение (5.8.3) с содержательной точки зрения описывает взаимосвязь между риском (σ_p) и ожидаемым доходом (математическим ожиданием доходности) R_p; с формальной точки зрения уравнение (5.8.3) – это уравнение бюджетной прямой L в плоскости σ_p и R_p. Здесь R_f, R_m, σ_m – параметры, а

$$\frac{R_m - R_f}{\sigma_m} \text{ –} \tag{5.8.4}$$

угловой коэффициент прямой (5.8.3) (рис. 5.7).

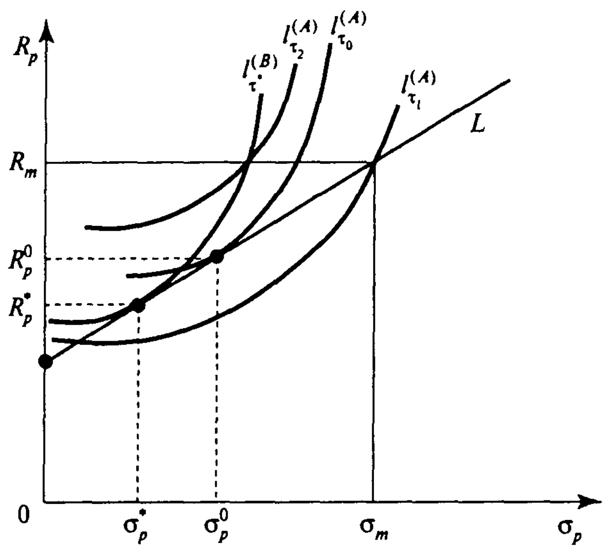


Рис. 5.7

С содержательной точки зрения дробь (5.8.4) есть цена риска, ибо ее обратная величина $\dfrac{\sigma_m}{R_m - R_f}$ показывает, насколько возрастет риск инвестора, если он намерен получить дополнительную единицу ожидаемой доходности

$$R_p = R_f + \frac{(R_m - R_f)}{\sigma_m}\sigma_p.$$

Линия безразличия инвестора показывает сочетание размеров риска и ожидаемой доходности, она идет с юго-запада на северо-восток, ибо рост размера риска следует компенсировать повышением ожидаемой доходности (рост ожидаемой доходности означает рост риска).

Фрагмент карт линий безразличия инвестора A содержит три линии безразличия $l_{\tau_1}^{(A)}$, $l_{\tau_0}^{(A)}$ и $l_{\tau_2}^{(A)}$ ($\tau_1 < \tau_0 < \tau_2$). Линия $l_{\tau_0}^{(A)}$ касается бюджетной прямой L в точке с координатами (σ^0, R^0), что содержательно означает, что ожидаемая доходность инвестора A равна R^0, а риск равен σ_p^0, откуда $b = \sigma_p^0/\sigma_m$. Следовательно, оптимальный инвестиционный портфель инвестора A имеет вид $(1 - \sigma_p^0/\sigma_m$, $\sigma_p^0/\sigma_m)$. Точка касания линии безразличия $l_{\tau^*}^{(B)}$ инвестора B с бюджетной прямой имеет координаты (σ_p^*, R_p^*). Поскольку $\sigma_p^* < \sigma_p^0$, то инвестор A более склонен к риску, инвестор B менее склонен к риску.

5.9. Принятие решений в условиях неопределенности

5.9.1. В условиях неопределенности вероятности результатов принятых решений неизвестны или не имеют оценок. В условиях риска вероятности результатов принятых решений известны или для них могут быть получены оценки.

Для постановки и решения задачи оптимизации принимаемых решений используем табл. 5.4, называемую таблицей эффективностей.

В табл. 5.4 представлено конечное число (n) ситуаций и конечное число (m) принимаемых решений. Если решение B_i принимается в ситуации A_j, то результат (эффективность) этого решения характеризуется показателем a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Таблица 5.4

Таблица эффективностей

		Ситуации					
		A_1	A_2	...	A_j	...	A_n
Решения	B_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
	B_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
	...	...	...	...	...	...	...
	B_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
	...	...	...	...	...	...	...
	B_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

В ситуации A_j, $j = 1, \ldots, n$, наиболее эффективным является решение B_k, тогда $a_{kj} \geq a_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$. Если в ситуации A_j, $j = 1, \ldots, n$, принимается решение B_i, $i = 1, \ldots, m$, такое, что $a_{ij} \leq a_{kj}$, то потери h_{ij}, которые появляются в связи с принятием этого решения B_i, очевидно, равны $h_{ij} = a_{kj} - a_{ij}$.

Теперь можно построить новую таблицу потерь (табл. 5.5), в которой вместо показателей эффективности a_{ij} помещаются потери h_{ij}.

Таблица 5.5

Таблица потерь

		Ситуации					
		A_1	A_2	...	A_j	...	A_n
Решения	B_1	h_{11}	h_{12}	...	h_{1j}	...	h_{1n}
	B_2	h_{21}	h_{22}	...	h_{2j}	...	h_{2n}
	...	...	...	...	...	...	...
	B_i	h_{i1}	h_{i2}	...	h_{ij}	...	h_{in}
	...	...	...	...	...	...	...
	B_m	h_{m1}	h_{m2}	...	h_{mj}	...	h_{mn}

Если ситуация A_1 появляется с вероятностью p_1, ситуация A_2 – с вероятностью p_2, ..., ситуация A_n – с вероятностью A_n, то решение принимается в условиях риска. В этом случае средние потери первого варианта B_1 принимаемых решений равны

$$R_1 = h_{11}p_1 + \ldots + h_{1n}p_n,$$

второго варианта B_2 равны

$$R_1 = h_{11}p_1 + \ldots + h_{1n}p_n, \ldots,$$

варианта B_m равны

$$R_m = h_{m1}p_1 + \ldots + h_{mn}p_n.$$

Предпочтение отдается тому решению B_g, для которого средние потери минимальны.

Средние потери R_i решения B_i, $i = 1, \ldots, m$, естественно интерпретировать в качестве средневзвешенного показателя риска решения B_i, тогда решение B_g с минимальным средневзвешенным риском должно предпочитаться остальным решениям B_i, $i = 1, \ldots, m$, $i \neq g$. Решение, предпочитаемое остальным решениям, называется оптимальным.

5.9.2. Если вероятности появления ситуаций неизвестны или для них невозможно получить какие-либо удовлетворительные оценки, приходится принимать решение в условиях неопределенности.

Классическими критериями принятия решения в условиях неопределенности являются:

1) принцип недостаточного обоснования Лапласа;
2) максиминный критерий Вальда;
3) минимаксный критерий Сэвиджа;
4) критерий обобщенного максимина (пессимизма – оптимизма) Гурвица.

Принцип недостаточного обоснования Лапласа применяется, если можно предположить, что все ситуации равновероятны. В этом случае выбирается то решение B_g, у которого средневзвешенный показатель риска минимален, т.е.

$$R_g = \min\{R_1, \ldots, R_m\},$$

при условии, что $p_1 = \ldots = p_n = \dfrac{1}{n}$.

Выбираемое решение называется оптимальным по принципу недостаточного обоснования Лапласа.

Максиминный критерий Вальда используется, когда показатель эффективности в любой ситуации должен быть не меньше, чем наибольший показатель эффективности из возможных наихудших показателей. Формально максиминный критерий Вальда имеет вид

$$\max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij},$$

т.е. следует в каждой строке табл. 5.4 выбрать минимальный элемент a_{ij}, а потом из этих минимумов выбрать максимальный элемент. Пусть это будет элемент a_{i0j0}, тогда решение B_{i0} должно предпочитаться всем остальным решениям.

Решение B_{i0}, предпочитаемое остальным решениям, называется оптимальным по максиминному критерию Вальда..

Максиминный критерий Вальда ориентирует ЛПР на слишком осторожную стратегию поведения, поэтому этот критерий используется, когда необходимо обеспечить успех при любых возможных условиях.

Минимаксный критерий Сэвиджа используется, когда требуется при любых условиях избежать большого риска.

Формально минимаксный критерий Сэвиджа имеет вид

$$\min_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} h_{ij},$$

т.е. следует в каждой строке табл. 5.5 выбрать максимальный элемент h_{ij}, а потом из этих максимумов выбрать минимальный элемент h_{i0j0}. Тогда решение B_{i0} должно предпочитаться всем остальным решениям.

Решение B_{i0}, предпочитаемое остальным решениям, называется оптимальным по минимаксному критерию Сэвиджа.

Этот критерий также ориентирует ЛПР на слишком осторожную стратегию поведения, только в отличие от критерия Вальда получения гарантированной эффективности критерий Сэвиджа минимизирует возможные потери. Это особенно важно, если конкуренты уже успели реализовать все свои преимущества.

Критерий обобщенного максимина (пессимизма – оптимизма) Гурвица используется, если требуется выбирать что-то промежуточное между двумя крайними стратегиями – стратегией, рассчитанной на получение худшего, и стратегией, рассчитанной на получение лучшего.

Формально критерий обобщенного максимина Гурвица имеет вид

$$\max_{1 \le i \le m} H_i,$$

где $H_i = \lambda \min_{1 \le j \le n} a_{ij} + (1-\lambda) \max_{1 \le j \le n} a_{ij}$, где скалярный множитель $\lambda \in [0, 1]$ фиксирован.

Пусть $\max_{1 \le i \le m} H_i = H_{i0}$, тогда решение B_{i0} должно предпочитаться всем остальным решениям. Решение B_{i0}, предпочитаемое остальным решениям, называется оптимальным по критерию обобщенного максимина Гурвица.

Если скалярный множитель λ изменить, то может появиться новое оптимальное решение.

При $\lambda = 1$ критерий обобщенного максимина совпадает с критерием максимина Вальда. При $\lambda = 0$ мы имеем максимаксный критерий

$$\max_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} a_{ij},$$

ориентированный на максимальную эффективность, которая, как правило, сопряжена с большим риском. Значения параметра λ между 0 и 1 являются промежуточными между осторожностью ($\lambda = 0$) и большим риском ($\lambda = 1$) и выбираются в зависимости от конкретной ситуации и склонности к риску ЛПР.

Приведенные здесь классические методы решения задачи в условиях неопределенности не исчерпывают всех существующих методов, рассмотрение которых выходит за рамки данного учебника.

5.9.3. Пример

Пусть таблица эффективностей имеет следующий вид (табл. 5.6).

Таблица 5.6

		Ситуации		
		A_1	A_2	A_3
Решения	B_1	0,3	0,4	0,6
	B_2	0,7	0,25	0,45
	B_3	0,4	0,9	0,15
	B_4	0,85	0,2	0,5

Здесь каждый показатель эффективности представляет собой относительную величину, например, удельную прибыль, удельный доход, т.е. прибыль, доход на единицу выпускаемой продукции.

Таблица потерь, построенная на основе таблицы эффективностей (см. табл. 5.6), имеет, очевидно, вид

Таблица 5.7

		Ситуации		
		A_1	A_2	A_3
Решения	B_1	0,55	0,5	0
	B_2	0,15	0,65	0,15
	B_3	0,45	0	0,45
	B_4	0	0,7	0,1

Пусть вероятности p_1, p_2, p_3 появления ситуаций A_1, A_2, A_3 соответственно равны $p_1 = 0{,}3$; $p_2 = 0{,}6$; $p_3 = 0{,}1$.

Тогда

$$R_1 = 0{,}55 \cdot 0{,}3 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0 \cdot 0{,}1 = 0{,}465,$$

$$R_2 = 0{,}15 \cdot 0{,}3 + 0{,}65 \cdot 0{,}6 + 0{,}15 \cdot 0{,}1 = 0{,}45,$$

$$R_3 = 0{,}45 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}6 + 0{,}45 \cdot 0{,}1 = 0{,}18,$$

$$R_4 = 0 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}6 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}43.$$

Поскольку средние потери R_3 минимальны, постольку решение B_3 является наименее рискованным.

Используя принцип недостаточного обоснования Лапласа, положим $p_1 = p_2 = p_3 = {}^1/_3 = 0{,}33$.

Тогда

$$R_1 = (0{,}55 + 0{,}5 + 0) \cdot 0{,}33 = 0{,}35,$$

$$R_2 = (0{,}15 + 0{,}65 + 0{,}15) \cdot 0{,}33 = 0{,}31,$$

$$R_3 = (0{,}45 + 0 + 0{,}45) \cdot 0{,}33 = 0{,}3,$$

$$R_4 = (0 + 0{,}7 + 0{,}1) \cdot 0{,}33 = 0{,}26.$$

Поскольку средние потери R_1 минимальны, постольку следует в качестве оптимального выбрать решение B_1.

Используя максиминный критерий Вальда, будем иметь для табл. 5.6 (эффективностей)

	A_1	A_2	A_3	
B_1	0,3	0,4	0,6	0,3
B_2	0,7	0,25	0,45	0,25
B_3	0,4	0,9	0,15	0,15
B_4	0,85	0,2	0,5	0,2
				0,3

(в правом крайнем столбце выписаны минимальные элементы всех строк, самый нижний элемент крайнего правого столбца есть максимальный среди всех элементов правого столбца), т.е.

$$\max_{1 \le i \le 4} \min_{1 \le j \le 3} a_{ij} = 0{,}3,$$

откуда следует, что в качестве оптимального следует выбрать решение B_1.

Используя минимаксный критерий Сэвиджа, будем иметь для табл. 5.7 потерь

	A_1	A_2	A_3	
B_1	0,55	0,5	0	0,55
B_2	0,15	0,65	0,15	0,65
B_3	0,45	0	0,45	0,45
B_4	0	0,7	0,1	0,7
				0,45

(в правом крайнем столбце выписаны максимальные элементы всех строк, самый нижний элемент крайнего правого столбца есть минимальный элемент среди всех элементов правого столбца), т.е.

$$\min_{1 \le i \le 4} \max_{1 \le j \le 3} h_{ij} = 0{,}45,$$

откуда следует, что в качестве оптимального следует выбрать решение B_3.

Используя критерий обобщенного максимума Гурвица, будем иметь при $\lambda = 1$ случай максиминного критерия Вальда с оптимальным решением B_1.

При $\lambda = 0{,}67$ имеем для табл. 5.6 эффективностей

$$\boxed{0{,}67}\begin{array}{|c|}\hline 0{,}3\\\hline 0{,}25\\\hline 0{,}15\\\hline 0{,}2\\\hline\end{array} + 0{,}33\begin{array}{|c|}\hline 0{,}6\\\hline 0{,}7\\\hline 0{,}9\\\hline 0{,}85\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 0{,}42\\\hline 0{,}4\\\hline 0{,}4\\\hline 0{,}41\\\hline 0{,}42\\\hline\end{array}.$$

Здесь в левом столбце расположены минимальные элементы всех строк табл. 5.6, во втором столбце – максимальные элементы всех строк, третий столбец есть выпуклая комбинация первых двух столбцов. Самый нижний элемент последнего столбца – это максимальный элемент последнего столбца. Следовательно, при $\lambda = 0{,}67$ B_1 – оптимальное решение.

При $\lambda = 0{,}33$ имеем для табл. 5.6 эффективностей

$$\boxed{0{,}33}\begin{array}{|c|}\hline 0{,}3\\\hline 0{,}25\\\hline 0{,}15\\\hline 0{,}2\\\hline\end{array} + 0{,}67\begin{array}{|c|}\hline 0{,}6\\\hline 0{,}7\\\hline 0{,}9\\\hline 0{,}85\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 0{,}5\\\hline 0{,}55\\\hline 0{,}52\\\hline 0{,}64\\\hline 0{,}64\\\hline\end{array},$$

т.е. при $\lambda = 0{,}33$ B_4 – оптимальное решение.

При $\lambda = 0$ имеем для табл. 5.6 эффективностей

$$\begin{array}{|c|}\hline 0{,}6\\\hline 0{,}7\\\hline 0{,}9\\\hline 0{,}85\\\hline 0{,}9\\\hline\end{array},$$

т.е. при $\lambda = 0$ B_3 – оптимальное решение.

В рассматриваемом примере в условиях риска ($p_1 = 0,3$; $p_2 = 0,6$; $p_3 = 0,1$) наименее рискованным является решение B_3.

Оптимальным решением по критерию Лапласа является решение B_1.

Оптимальным решением по критерию Вальда является решение B_1.

Оптимальным решением по критерию Сэвиджа является решение B_3.

Оптимальным решением по критерию Гурвица при $\lambda = 1$ является решение B_1, при $\lambda = 0,67$ – решение B_1, при $\lambda = 0,33$ – решение B_4, при $\lambda = 0$ – решение B_3.

Таким образом, из всех четырех решений B_1, B_2, B_3, B_4 в рассмотренном примере решения B_1 и B_3 являются самыми осторожными, а максимальным (т.е. самым рисковым) опять получилось решение B_3.

Вопросы для самоконтроля к главе 5

1. Что представляют собой понятия неопределенности и риска? В чем сходство и различие этих понятий?
2. В чем проявляется объективная природа риска?
3. В чем проявляется субъективно-объективная природа риска?
4. Какие основные причины неопределенности и риска?
5. Чем занимается экономическая теории риска?
6. Какие важные элементы охватывает классификация рисков?
7. Что такое производственный риск? Назовите причины возникновения производственного риска.
8. Что такое коммерческий риск? Перечислите причины возникновения коммерческого риска.
9. Что такое финансовый риск? Раскройте причины возникновения финансового риска.
10. Что такое посреднический риск? Назовите причины возникновения посреднического риска.
11. Что такое риск страхования? Перечислите причины возникновения риска страхования.
12. Что представляет собой структура предпринимательских рисков?
13. Что представляют собой внешние риски?
14. Что такое страновой риск?
15. Что такое валютный риск?
16. Что такое системный риск?
17. Что такое налоговый риск?
18. Что такое риск форс-мажорных обстоятельств?

19. Что представляют собой внутренние риски?
20. Что такое организационный риск?
21. Что такое портфельный риск?
22. Что такое кредитный риск?
23. Что такое инновационный риск?
24. Что такое ожидаемый доход?
25. Что такое ожидаемая полезность?
26. Как связаны между собой математическое ожидание (случайной) полезности и полезность математического ожидания (случайного) дохода, равного безрисковому доходу, если индивидуум рискофоб? Приведите графическую иллюстрацию.
27. Как связаны между собой математическое ожидание (случайной) полезности и полезность математического ожидания (случайного) дохода, равного безрисковому доходу, если индивидуум рискофил? Приведите графическую иллюстрацию.
28. Как связаны между собой математическое ожидание (случайной) полезности и полезность математического ожидания (случайного) дохода, равного безрисковому доходу, если индивидуум рисконейтрал? Приведите геометрическую интерпретацию.
29. Что такое премия за риск? Чему равна премия за риск, если индивидуум рискофоб? рискофил? рисконейтрал? Дайте геометрическую интерпретацию для всех трех случаев.
30. Как определяется абсолютная мера Эрроу – Пратта? Какую она имеет размерность?
31. Как определяется относительная мера Эрроу – Пратта? Какую она имеет размерность? Как она связана с эластичностью предельной полезности по доходу?
32. Каковы свойства абсолютной и относительной мер Эрроу – Пратта?
33. Для каких функций полезности абсолютная мера Эрроу – Пратта постоянна?
34. Для каких функций полезности относительная мера Эрроу – Пратта постоянна?
35. Что представляет собой шкала уровней риска? Приведите практические значения шкал уровней риска.
36. Каковы универсальные методы предупреждения и снижения риска?
37. В чем суть страхования как метода предупреждения и снижения риска?
38. Что такое хеджирование?
39. В чем суть резервирования средств как метода предупреждения и снижения риска?
40. В чем суть диверсификации как метода предупреждения и снижения риска?
41. В чем суть лимитирования как метода предупреждения и снижения риска?

42. В чем суть повышения уровня достоверности информации как метода предупреждения и снижения риска?
43. Что представляет собой таблица решений по снижению риска? Приведите практическое значение таблицы решений.
44. Что представляют собой актив, рисковый актив, безрисковый актив?
45. Что представляют собой доходность актива, реальная доходность актива, ожидаемая доходность актива?
46. Что представляет собой ожидаемая доходность инвестиционного портфеля?
47. Что представляет собой содержательная интерпретация углового коэффициента бюджетной прямой?
48. Как объяснить, что линии безразличия функции полезности инвестора имеют положительный наклон?
49. Как строятся таблицы эффективностей и таблицы потерь?
50. Как с помощью таблицы потерь выявляется оптимальное решение в условиях риска?
51. Как формулируется принцип недостаточного обоснования Лапласа?
52. Какое решение называется оптимальным по принципу недостаточного обоснования Лапласа?
53. Как формулируется максиминный критерий Вальда?
54. Какое решение называется оптимальным по максиминному критерию Вальда?
55. Как формулируется минимаксный критерий Сэвиджа?
56. Какое решение называется оптимальным по минимаксному критерию Сэвиджа?
57. Как формулируется критерий обобщенного максимина Гурвица?
58. Какое решение является оптимальным по критерию обобщенного максимина Гурвица?

Задачи и упражнения для самоконтроля к главе 5

1. В лотерею можно ничего не выиграть с вероятностью $p_1 = 0{,}5$, выиграть 10 руб. с вероятностью $p_2 = 0{,}3$, выиграть 50 руб. с вероятностью $p_3 = 0{,}07$, выиграть 100 руб. с вероятностью $p_4 = 0{,}03$:
   а) найдите математическое ожидание участника лотереи;
   б) найдите дисперсию всех исходов лотереи, а также среднее квадратичное отклонение и вариацию;
   в) сколько готов заплатить рисконейтрал, чтобы принять участие в лотерее?
   г) сколько готов заплатить рискофоб, чтобы принять участие в лотерее?

2. Вложение в бизнес имеет три возможных исхода: получение прибыли 1000 д.е. с вероятностью $p_1 = 0,2$, получение прибыли 500 д.е. с вероятностью $p_2 = 0,5$, получение убытка – 200 д.е. с вероятностью $p_3 = 0,3$:
   а) найдите математическое ожидание этого неопределенного вложения в бизнес;
   б) найдите дисперсию всех возможных исходов, а также среднее квадратичное отклонение и вариацию.
3. Фермер может оказаться в одной из двух ситуаций: дождливое лето, засушливое лето. Вероятность дождливого лета равна $p_1 = 0,4$, вероятность засушливого лета равна 0,6. У фермера два варианта решений – вносить удобрения, не вносить удобрения. Сведем все эти данные в платежную таблицу, содержащую информацию о возможных доходах (в д.е.) фермера:

		Ситуации	
		Дождливое лето	Засушливое лето
Решения	Не удобрять	100 д.е.	10 д.е.
	Удобрять	60 д.е.	30 д.е.
	Вероятности	0,4	0,6

   а) какое решение примет рискофоб, рисконейтрал, рискофил?
   б) дайте геометрическую интерпретацию всех трех случаев.
4. Функция полезности индивидуума имеет вид $u = w^{\alpha}$, где w – доход индивидуума, а параметр $0 < \alpha < 1$ (все расчеты проводить при $\alpha_1 = {}^1/_3$ и $\alpha_2 = {}^1/_7$):
   а) является ли индивидуум рискофобом, рисконейтралом или рискофилом? Ответ обоснуйте. Дайте геометрическую интерпретацию;
   б) доход индивидуума равен 20 д.е. Индивидууму предлагают новые условия, в которых с вероятностями 0,5 его доход может вырасти на 10 д.е., но может и упасть на 15 д.е. Примет ли индивидуум новые условия?
   в) определите абсолютную и относительную меры Эрроу – Пратта для данной функции полезности;
   г) выполните пункты а), б), в) и г) при $\alpha_3 = 2$ и $\alpha_4 = 6$.
5. Приведите в графической и аналитической формах пример функции полезности $u = u(w)$ индивидуума (w – его доход), который при низком доходе является рискофилом, а при высоком доходе – рискофобом.

6. Таблица эффективностей имеет вид:

		Ситуации			
		A_1	A_2	A_3	A_4
Решения	B_1	0,5	0,6	0,6	0,7
	B_2	0,4	0,3	0,5	0,15
	B_3	0,7	0,8	0,2	0,3
	B_4	0,9	0,2	0,3	0,1

а) постройте таблицу потерь;

б) найдите оптимальное решение в условиях риска, если вероятность появления ситуации A_1 равна $p_1 = 0{,}1$, ситуации A_2 – 0,3, ситуации A_3 – 0,4, ситуации A_4 – 0,2;

в) найдите решение, оптимальное по принципу недостаточного обоснования Лапласа;

г) найдите решение, оптимальное по максиминному критерию Вальда;

д) найдите решение, оптимальное по минимаксному критерию Сэвиджа;

е) найдите решение, оптимальное по критерию обобщенного максимина Гурвица (рассмотрите $\lambda = 1$, $\lambda = 0{,}8$, $\lambda = 0{,}6$, $\lambda = 0{,}4$, $\lambda = 0{,}2$, $\lambda = 0$).

Вопросы и тесты для контрольных работ к главе 5

1. Риск – это:
   а) возможность опасности;
   б) действие на удачу;
   в) вероятность возникновения убытков;
   г) ответы а)–в) не верны;
   д) ответы а)–в) верны.
2. Основные причины неопределенности:
   а) случайность;
   б) столкновение противоречивых интересов;
   в) вероятностный характер НТП;
   г) все ответы а)–в) верны;
   д) ни один из ответов а), б), в) не является верным.
3. Основные причины неопределенности и риска:
   а) ограниченность ресурсов при принятии решения;
   б) невозможность выйти на такой уровень познания объекта, который был бы достаточным для принятия верного решения;

в) относительная ограниченность сознательной деятельности ЛПР;
г) все ответы а)–в) верны;
д) все ответы а)–в) не верны.

4. По времени возникновения риски распределяются на:
а) внешние;
б) текущие;
в) политические;
г) чистые;
д) внутренние.

5. По характеру учета риски делятся на:
а) перспективные;
б) политические;
в) коммерческие;
г) внутренние;
д) ретроспективные.

6. К внешним предпринимательским рискам необходимо отнести следующий риск:
а) организационный;
б) системный;
в) кредитный;
г) ресурсный;
д) инновационный.

7. К внутренним предпринимательским рискам необходимо отнести следующий риск:
а) валютный;
б) налоговый;
в) системный;
г) кредитный;
д) все ответы а)–г) не верны.

8. Для рискофоба:
а) ожидаемая полезность строго больше полезности в условиях отсутствия риска;
б) ожидаемая полезность равна полезности в условиях отсутствия риска;
в) ожидаемая полезность строго меньше полезности в условиях отсутствия риска;
г) нет однозначного ответа о взаимосвязи между ожидаемой полезностью и полезностью в условиях отсутствия риска;
д) все ответы а)–г) не верны.

9. Для рискофоба премия за риск:
а) положительна;
б) отрицательна;
в) равна нулю;

г) нет однозначного ответа;
д) все ответы а)–г) не верны.

10. В случае перестрахования:
    а) страхователь перекладывает риск за определенную плату одновременно на двух (и более) страховщиков;
    б) страховщик перекладывает часть своего риска за определенную плату на другого страховщика;
    в) страховщик заключает со страхователем договор на часть общей суммы страхового договора;
    г) перестрахование – теоретическое понятие, которое не имеет аналогов в практике страхования.
    д) все ответы а)–г) не верны.
11. Диверсификация в целях снижения банковских рисков представляет собой:
    а) уменьшение кредитуемых вкладчикам сумм;
    б) расширение числа клиентов при сохранении или уменьшении общей суммы, выделяемой для их кредитования;
    в) образование резервов в разных валютах;
    г) привлечение депозитных вкладов более мелкими суммами от большего числа вкладчиков;
    д) все ответы а)–г) верны.
12. Применяемый принцип недостаточного обоснования Лапласа – это:
    а) частный вариант выбора оптимального решения в условиях риска;
    б) обобщение максиминного критерия Вальда;
    в) обобщение минимаксного критерия Сэвиджа;
    г) обобщение критерия Гурвица;
    д) все ответы а)–г) не верны.
13. Оптимальное по критерию Вальда решение:
    а) минимизирует возможные потери;
    б) обеспечивает успех при любых возможных условиях;
    в) может быть получено при условии наличия равновероятных ситуаций;
    г) совпадает с максимальным решением Гурвица;
    д) все ответы а)–г) верны.
14. Оптимальное по критерию Сэвиджа решение:
    а) минимизирует возможные потери;
    б) обеспечивает успех при любых возможных условиях;
    в) может быть получено только при условии наличия равновероятных ситуаций;
    г) совпадает с максиминным решением Вальда;
    д) все ответы неверны.

Задачи для контрольных работ к главе 5

1. В лотерею можно ничего не выиграть с вероятностью $p_1 = 0,7$, выиграть 10 руб. с вероятностью $p_2 = 0,2$, выиграть 50 руб. с вероятностью $p_3 = 0,08$, выиграть 100 руб. с вероятностью $p_4 = 0,02$:
   а) найдите математическое ожидание участника лотереи;
   б) найдите дисперсию всех исходов лотереи, а также квадратичное отклонение и вариацию;
   в) найдите премию за риск для участника лотереи, если участник рискофоб, рисконейтрал, рискофил.
2. Вложение в бизнес имеет три возможных исхода: получение прибыли 2000 д.е. с вероятностью $p_1 = 0,1$, получение прибыли 800 д.е. с вероятностью $p_2 = 0,4$, получение убытка 300 д.е. с вероятностью $p_3 = 0,5$:
   а) найдите математическое ожидание этого неопределенного вложения в бизнес;
   б) найдите дисперсию всех возможных исходов, а также среднее квадратичное отклонение и вариацию.
3. Ближайшее для студента лето может оказаться дождливым или засушливым. Вероятность дождливого лета равна $p_1 = 0,3$, вероятность сухого лета – 0,7. У студента два варианта решений – подрядиться на работу или отдохнуть. Сведем все эти данные в платежную таблицу, содержащую информацию о возможных доходах (в д.е.) студента:

		Ситуации	
		Дождливое лето	Засушливое лето
Решения	Работать	1000	1500
	Отдыхать	–500	–800
	Вероятности	0,3	0,7

   а) какое решение примет рискофоб, рисконейтрал, рискофил?
   б) дайте геометрическую интерпретацию всех трех случаев.
4. Таблица эффективностей имеет следующий вид:

		Ситуации			
		A_1	A_2	A_3	A_4
Решения	B_1	0,9	0,5	0,4	0,3
	B_2	0,4	0,2	0,7	0,5
	B_3	0,5	0,8	0,5	0,2
	B_4	0,3	0,6	0,3	0,6

а) постройте таблицу потерь;

б) найдите оптимальное решение в условиях риска, если вероятность появления ситуации A_1 равна $p_1 = 0{,}4$, ситуации A_2 – 0,3, ситуации A_3 – 0,1, ситуации A_4 – 0,2;

в) найдите решение, оптимальное по принципу недостаточного обоснования Лапласа;

г) найдите решение, оптимальное по максиминному критерию Вальда;

д) найдите решение, оптимальное по минимаксному критерию Сэвиджа;

е) найдите решение, оптимальное по критерию обобщенного максимина Гурвица (рассмотрите $\lambda = 1$, $\lambda = 0{,}75$, $\lambda = 0{,}5$, $\lambda = 0{,}25$, $\lambda = 0$).

5. Функция полезности индивидуума имеет вид $u = w^{\alpha}$, где w – доход индивидуума, а параметр $0 < \alpha < 1$ (все расчеты проводите при $\alpha_1 = {}^1/_4$ и $\alpha_2 = {}^1/_9$):

   а) доход индивидуума равен 40 е.д. Индивидууму предлагают новые условия, в которых равновероятно его доход может вырасти на 30 д.е., но может и упасть на 20 д.е. Примет ли индивидуум новые условия?

   б) определите, сколько будет стоить страховка индивидуума, приобретаемая в целях элиминирования неопределенности, связанной с новыми условиями;

   в) выполните пункты а) и б) при $\alpha_3 = 3$ и $\alpha_4 = 7$.

6. Приведите в графической и аналитической формах пример функции полезности $u = u(w)$ индивидуума (w – его доход), который при низком доходе является рискофобом, а при высоком доходе – рискофилом.

Глава 6

ТЕОРИЯ ФИРМЫ, ФУНКЦИОНИРУЮЩЕЙ В УСЛОВИЯХ ЧИСТОЙ КОНКУРЕНЦИИ

6.1. Задача максимизации прибыли фирмы в долговременном и краткосрочном промежутках. Локальное рыночиое равновесие фирмы. Функции спроса на ресурсы со стороны фирмы и функция предложения фирмы. Аргументы «за» и «протнв» максимизацни прибыли. Понятие «разумиой прибыли»

6.1.1. Согласно теории микроэкономики и соображениям многих практиков задача максимизации прибыли является основной целью функционирования фирмы в условиях конкуренции. Это положение кажется бесспорным, если рассматривать фирму как исходный элемент (атом) системы производства.

Суть проблемы максимизации прибыли фирмы усложняется, если фирму рассматривать самостоятельно в качестве сложной системы.

Приведем ряд аргументов «за» и «против» максимизации прибыли фирмы. Ряд аргументов наиболее убедителен «в случае атома», другой ряд – «в случае сложной системы».

Сначала аргументы «за»:

- мотив прибыли – самая универсальная и устойчивая сила, направляющая деловое поведение фирмы, в связи с тем, что влияние других целей фирмы на ее поведение относительно невелико, ибо их учет не способствует лучшему объяснению и прогнозированию поведения фирмы, но значительно усложняет анализ;

- конкуренция заставляет фирмы преследовать цель максимизации прибыли, ибо если фирма в конкурентной борьбе имеет шанс заработать хоть какую-то прибыль, то она должна стремиться ее максимизировать;
- допущение о максимизации прибыли фирмы позволяет точно предсказать ее поведение, ибо экономисты успешно применяли это допущение в качестве основы для прогнозирования поведения во времени цен и объемов производства фирм;
- допущение о максимизации прибыли фирмы полезно для общего понимания и объяснения ее поведения.

Приведем аргументы «против»:

- цель максимизации прибыли фирмы бессмысленна в качестве основы для принятия решений о поведении фирмы, ибо в условиях неопределенности невозможно установить, какое из направлений деятельности фирмы приведет к максимизации прибыли. Лучшее решение в одной ситуации не обязательно будет таковым в другой;
- отделение управления от собственности дает менеджерам свободу преследовать другие, отличные от максимизации прибыли цели;
- существует много примеров того, что практическая деятельность фирмы не связана с максимизацией ее прибыли;
- фирма находит выгодным для себя избегать получения максимально возможной прибыли, ибо максимальная прибыль может привлечь новых конкурентов, спровоцировать антитрестовские акции, требования профсоюза повысить заработную плату;
- максимизация прибыли – дело трудное, малореалистичное и даже аморальное, ибо может спровоцировать бизнесменов на торгашеские уловки (понижение зарплаты, повышение цен, снижение качества производимого продукта, давление на поставщиков, чтобы они снизили цены). Мотив максимизации прибыли может быть решающим для повышения уровня деградации окружающей среды за счет роста общественных издержек в связи с сокращением затрат на охрану окружающей среды и борьбу с загрязнениями.

Если фирму рассматривать как сложную систему, основными элементами которой являются собственники (акционеры), менеджеры (управляющие) и наемная рабочая сила, то сразу в поле зрения появляются по меньшей мере три целевые функции: максимизация прибыли (целевая функция собственников, которые получают дивиденды из прибыли), долговременный устойчивый рост (целевая функция менеджеров) и максимизация заработной платы (целевая функция наемных работников). К числу системных целевых элементов следует отнести также минимизацию степени риска, с учетом которого прибыль фирмы может оказаться недостаточной для ее дальнейшего развития. Таким образом, речь идет о векторной целевой функции оптимального функционирования фирмы в условиях конкуренции. Векторная целевая функция путем свертки ее координат с определенными весами может быть превращена в скалярную целевую функцию.

Если фирма имеет сильный профсоюз, то это обстоятельство должно быть отражено в повышении относительного веса той координаты векторной целевой функции, которая показывает уровень заработной платы наемных работников. Если на фирме сформировался крепкий и влиятельный корпус менеджеров, относительно больший вес получает та координата векторной целевой функции, которая характеризует темп долговременного устойчивого роста фирмы. Если на фирме большим влиянием пользуется совет директоров (совет акционеров) (заметим, что для конкретной реальной фирмы это может и не иметь места), то относительно больший вес получает та координата векторной целевой функции, которая равна собственно прибыли фирмы.

В связи со сказанным актуальным становится понятие «разумной» прибыли, которое разными руководителями высшего звена управления фирмы толкуется совершенно по-разному:

- «разумная» прибыль позволяет фирме выполнять свои обязательства перед акционерами и приобретать средства, необходимые для производства в будущем товаров, услуг и создания рабочих мест;
- прибыль «разумная», если она позволяет фирме выживать;
- «разумная» прибыль фирмы должна несколько превышать уровень, необходимый для привлечения инвесторов в другие аналогичные фирмы, которые характеризуются той же степенью риска;

- в связи с тем что «высокая» (по сравнению с неким средним уровнем) прибыль с учетом риска может оказаться недостаточной для дальнейшего развития фирмы, такие описательные ярлыки, как «справедливая прибыль», «разумная прибыль», имеют мало смысла.

Для анализа и прогнозирования поведения фирмы, функционирующей в условиях конкуренции, одних качественных рассуждений недостаточно, ибо необходимо получение конкретных величин, характеризующих рациональное поведение фирмы.

Далее будут рассмотрены и проанализированы три классические модели оптимального функционирования фирмы, в которых четко разграничиваются экзогенные и эндогенные переменные, отражающие рыночную ситуацию и характеризующие оптимальное состояние фирмы. Развитие этих моделей путем перехода к векторной оптимизации и путем учета рисков и неопределенности в этой книге не рассматривается.

6.1.2. Задача максимизации прибыли фирмы и две ее версии (задача максимизации выпуска при лимите на ресурсы и задача минимизации издержек при фиксированном объеме выпускаемой продукции) будут рассмотрены в случаях долговременного и краткосрочного промежутков.

В случае долговременного промежутка задача максимизации прибыли имеет вид (в случае двух ресурсов – капитала и труда)

$$PR(x_1, x_2) = p_0 \cdot f(x_1, x_2) - p_1 x_1 - p_2 x_2 \to (\max), \qquad (6.1.1)$$

где $f(x_1, x_2)$ – производственная функция (ПФ) фирмы;
p_0 – цена выпускаемой фирмой продукции (например, валенок);
p_1 и p_2 – цена на капитал и труд;
x_1 – количество капитала;
x_2 – количество труда.

Данными (экзогенными) величинами являются цены p_0, p_1, p_2, искомыми (эндогенными) величинами – количества x_1 и x_2 капитала и труда. Все величины p_0, p_1, p_2, x_1 и x_2, а также производственная функция $f(x_1, x_2)$ привязаны к текущему периоду (атому времени) t (номер t в модели явно не показывается). Число периодов между базовым (нулевым) периодом и текущим периодом такое, что они составляют долговременный промежуток, в течение которого фирма может свободно распоряжаться как капиталом, так и трудом.

Таким образом, если в базовом периоде фирме известны цены p_0, p_1, p_2 текущего периода, то, решив задачу (6.1.1), фирма будет знать, какое количество капитала x_1^0 и какое количество труда x_2^0 фирма должна приобрести в текущем периоде, чтобы в этом периоде максимизировать свою прибыль.

Особо отметим, что необходимый расчет фирма производит заранее, чтобы в течение долговременного промежутка подготовить к функционированию требуемое количество капитала x_1^0 и требуемое количество труда x_2^0. Фиксированные цены p_0, p_1, p_2 означают, что фирма на эти цены влиять не может, т.е. принимается важная предпосылка, что фирма является конкурентной, т.е. на рынке готовой продукции (например, валенок) и на рынке ресурсов фирма функционирует в условиях чистой конкуренции.

6.1.3. Для решения задачи (6.1.1) следует выписать условия первого порядка, т.е. систему двух уравнений с двумя переменными

$$\frac{\partial PR}{\partial x_1} = p_0 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} - p_1 = 0,$$

$$\frac{\partial PR}{\partial x_2} = p_0 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} - p_2 = 0 \qquad (6.1.2)$$

и решить эту систему.

Решение (x_1^0, x_2^0) системы (6.1.2) является глобальным максимумом прибыли $PR(x_1, x_2)$, ибо производственная функция $f(x_1, x_2)$ обладает рядом специфических свойств (в частности, ее изокванты, как правило, суть линии строго выпуклые к точке $O = (0, 0)$).

Решение (x_1^0, x_2^0) системы (6.1.2) называется локальным рыночным равновесием фирмы. Термин «локальный» означает, что на рынке готовой продукции (например, валенок) и на рынках ресурсов (капитала и труда) функционирует одна (а не несколько) фирма. В связи с тем что решение (x_1^0, x_2^0) зависит от экзогенных переменных p_0, p_1, p_2, получаются две функции спроса со стороны фирмы на рынке ресурсов: функция спроса $x_1^0 = g_1(p_0, p_1, p_2)$ на капитал и функция спроса на труд $x_2^0 = g_2(p_0, p_1, p_2)$.

Функция $y^0 = h(p_0, p_1, p_2) = f(x_1^0, x_2^0)$ есть функция предложения фирмой своей продукции на рынке продукции.

Хорошо известно, что все три функции $x_1^0 = g_1(p_0, p_1, p_2)$, $x_2^0 = g_2(p_0, p_1, p_2)$, $y^0 = h(p_0, p_1, p_2)$ однородны нулевой степени по Эйлеру. Это означает, что при изменении масштаба цен значения x_1^0, x_2^0, y^0 не меняются.

6.1.4. В случае краткосрочного промежутка задача максимизации прибыли имеет вид (6.1.1) с дополнительным условием

$$x_1 = \bar{x}_1, \tag{6.1.3}$$

т.е. в математическом отношении это задача на абсолютный максимум одной переменной

$$PR(\bar{x}_1, x_2) = p_0 f(x_1, x_2) - p_1 \bar{x}_1 - p_2 x_2.$$

Здесь фиксированное количество $\bar{x}_1$ капитала означает, что в течение краткосрочного промежутка между базовым и текущим периодами фирма не имеет возможности скорректировать количество $\bar{x}_1$ капитала.

Здесь и далее вместо условия вида (6.1.3) может фигурировать более общее условие $g(x_1, x_2) \le 0$.

6.1.5. Приведем решение задачи (глобальной) максимизации прибыли фирмы в случае, когда ПФ $f(x_1, x_2)$ фирмы есть ПФ Кобба – Дугласа.

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \quad (\alpha_1 \ge 0, \alpha_2 \ge 0, \alpha_1 + \alpha_2 < 1).$$

В рассматриваемом случае имеем

$$PR = p_0 a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} - p_1 x_1 - p_2 x_2.$$

Условия первого порядка имеют вид

$$\frac{\partial PR}{\partial x_1} = p_0 a_0 \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2} - p_1 = 0,$$

$$\frac{\partial PR}{\partial x_2} = p_0 a_0 \alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1} - p_2 = 0.$$

После деления первого уравнения на второе и сокращений

$$\frac{p_0 a_0 \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2}}{p_0 a_0 \alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1}} = \frac{p_1}{p_2}, \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2}$$

получим выражение для x_2

$$x_2 = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} x_1.$$

Подставив его в первое из двух уравнений, будем иметь

$$p_0 a_0 \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1}\left(\frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2}\right)^{\alpha_2} x_1^{\alpha_2} - p_1 = 0,$$

откуда после ряда элементарных преобразований выражения

$$x_1^{\alpha_1+\alpha_2-1} = \frac{p_1}{\alpha_1 a_0 p_0\left(\frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2}\right)^{\alpha_2}}$$

получим

$$x_1^0 = (a_0 p_0)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}}.$$

Объединяя первое и последнее звенья цепочки

$$x_2^0 = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} x_1^0 = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2}(a_0 p_0)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}} =$$

$$= (a_0 p_0)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}},$$

будем иметь

$$x_2^0 = (a_0 p_0)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}.$$

Точка (x_1^0, x_2^0) – критическая точка прибыли $PR(x_1, x_2)$, ибо обращает в нуль частные производные прибыли.

Выше отмечалось, что в экономических задачах весьма часто критическая точка является точкой не только локального, но и глобального максимума.

Проверим в рассматриваемом случае выполнение условий второго порядка:

$$\frac{\partial^2 PR}{\partial x_1^2} = p_0 a_0 \alpha_1(\alpha_1 - 1)x_1^{\alpha_1-2}x_2^{\alpha_2} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 PR}{\partial x_2^2} = p_0 a_0 \alpha_2 (\alpha_2 - 1) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 2},$$

$$\frac{\partial^2 PR}{\partial x_1 \partial x_2} = p_0 a_0 \alpha_1 \alpha_2 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2 - 1},$$

$$\frac{\partial^2 PR}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 PR}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 PR}{\partial x_1 \partial x_2} =$$

$$= (p_0 a_0)^2 \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) x_1^{2\alpha_1 - 2} x_2^{2\alpha_2 - 2} - (p_0 a_0)^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 x_1^{2(\alpha_1 - 1)} x_2^{2(\alpha_2 - 1)} =$$

$$= (p_0 a_0)^2 x_1^{2(\alpha_1 - 1)} x_2^{2(\alpha_2 - 1)} (\alpha_1(\alpha_1 - 1)\alpha_2(\alpha_2 - 1) - \alpha_1^2 \alpha_2^2) =$$

$$= (p_0 a_0)^2 x_1^{2(\alpha_1 - 1)} x_2^{2(\alpha_2 - 1)} ((\alpha_1^2 - \alpha_1)(\alpha_2^2 - \alpha_2) - \alpha_1^2 \alpha_2^2) =$$

$$= (p_0 a_0)^2 x_1^{2(\alpha_1 - 1)} x_2^{2(\alpha_2 - 1)} (\alpha_1^2 \alpha_2^2 - \alpha_1 \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1^2 \alpha_2^2) =$$

$$= (p_0 a_0)^2 x_1^{2(\alpha_1 - 1)} x_2^{2(\alpha_2 - 1)} (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)) =$$

$$= (p_0 a_0)^2 x_1^{2(\alpha_1 - 1)} x_2^{2(\alpha_2 - 1)} (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \alpha_1 \alpha_2 > 0.$$

Поскольку

$$\frac{\partial^2 PR(x_1^0; x_2^0)}{\partial x_1^2} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 PR(x_1^0; x_2^0)}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 PR(x_1^0; x_2^0)}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 PR(x_1^0; x_2^0)}{\partial x_1 \partial x_2} > 0,$$

на основании условий второго порядка критическая точка (x_1^0, x_2^0) есть точка локального максимума функции $PR(x_1, x_2)$.

Поскольку функция $y = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ $(\alpha_1 \geq 0,\ \alpha_2 \geq 0;\ 0 < \alpha_1 + \alpha_2 < 1)$ выпукла вверх для всех $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, постольку локальный максимум является глобальным.

Таким образом, при конфигурации ресурсов (x_1^0, x_2^0) фирма будет иметь максимальную прибыль:

$$PR^0 = p_0 a_0 (x_1^0)^{\alpha_1} (x_2^0)^{\alpha_2} - p_1 x_1^0 - p_2 x_2^0 =$$

$$= (p_0 a_0)(a_0 p_0)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}\alpha_1} \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}\alpha_1} \cdot (a_0 p_0)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}\alpha_2} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}\alpha_1} \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}\alpha_2} - p_1 (a_0 p_0)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}} -$$

$$- p_2 (a_0 p_0)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} =$$

$$= (a_0 p_0)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \cdot$$

$$\left[\left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} - p_1 \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}} - \right.$$

$$\left. - p_2 \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \right] =$$

$$= (a_0 p_0)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \cdot$$

$$\left[\left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}} - \alpha_1 \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}} - \right.$$

$$\left. - \alpha_2 \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \right] =$$

$$= (a_0 p_0)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}} (1 - \alpha_1 - \alpha_2).$$

Задача (глобальной) максимизации прибыли фирмы в случае ПФ Кобба – Дугласа ($\alpha_1 + \alpha_2 < 1$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$)) решена.

Если $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, прибыль $PR(x_1, x_2)$ имеет вид

$$PR = a_0 p_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{1-\alpha_1} - p_1 x_1 - p_2 x_2.$$

Если, например, $x_2 = kx_1$, то

$$PR = a_0 p_0 x_1^{\alpha_1} (kx_1)^{1-\alpha_1} - p_1 x_1 - p_2 k x_1 =$$

$$= a_0 p_0 k^{1-\alpha_1} x_1 - (p_1 + p_2 k) x_1 = (a_0 p_0 k^{1-\alpha_1} - p_1 - p_2 k) x_1,$$

Отсюда вытекает, что если в последнем звене круглая скобка равна нулю, то максимальная $PR = 0$. Если круглая скобка положительна, то максимальная $PR \to +\infty$ при $x_1 \to +\infty$. Если круглая скобка отрицательна, то максимальная $PR = 0$. При $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$ и при $x_2 = kx_1$ $PR \to +\infty$ при $x_1 \to +\infty$. То есть в случае $\alpha_1 + \alpha_2 \geq 1$ и $x_2 = kx_1$ задача максимизации PR либо имеет тривиальное решение $x_1^0 = x_2^0 = 0$ и $PR^0 = 0$, либо решения не имеет.

6.2. Задача максимизации выпуска фирмы при лимите на используемые ею ресурсы в долговременном и краткосрочном промежутках. Функции условного спроса по Маршаллу (по Вальрасу) на ресурсы со стороны фирмы и функция условного выпуска фирмы

6.2.1. Задача максимизации выпуска фирмы при лимите на ресурсы – первая версия задачи максимизации прибыли фирмы. Второй версией задачи максимизации прибыли фирмы является задача минимизации издержек при фиксированном объеме выпускаемой продукции, которая анализируется в параграфе 6.4.

Если фирма имеет лимит на ресурсы, равный V, т.е.

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = V, \tag{6.2.1}$$

то задача (6.1.1) максимизации прибыли фирмы в долговременном промежутке приобретает вид $PR = p_0 f(x_1, x_2) - V \to \max$, что эквивалентно задаче

$$f(x_1, x_2) \to \max \tag{6.2.2}$$

при наличии ограничения (6.2.1) на условный экстремум.

Хорошо известно, что задачу (6.2.2), (6.2.1) следует решать методом Лагранжа: составить функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda(V - p_1x_1 - p_2x_2) \tag{6.2.3}$$

и решить систему трех уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, λ:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0, \\ &\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0, \\ &\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = V - p_1x_1 - p_2x_2 = 0, \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

которые представляют собой условия первого порядка.

В связи с тем что ПФ $f(x_1, x_2)$ обладает рядом специфических свойств, одним из которых является строгая выпуклость изоквант к точке О, короткая точка $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ есть точка глобального максимума целевой функции (6.2.2) при наличии ограничения (6.2.1). Напомним, что длинная точка $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{\lambda})$ является единственным решением системы (6.2.4).

В связи с тем что формальная задача (6.2.2), (6.2.1) максимизации выпуска фирмы при лимите на ресурсы не отличается от задачи максимизации функции полезности потребителя при бюджетном ограничении (см. параграф 1.1), мы воспользуемся формальными результатами параграфа 1.1.

Функции $\hat{x}_1 = \varphi_1(p_1, p_2, V)$, $\hat{x}_2 = \varphi_2(p_1, p_2, V)$ называются функциями условного спроса по Маршаллу (по Вальрасу) на ресурсы со стороны фирмы на рынках ресурсов (капитала и труда). Функция $\hat{y} = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = f(\varphi_1(p_1, p_2, V), \varphi_2(p_1, p_2, V)) = \theta(p_1, p_2, V)$ называется функцией условного предложения фирмы на рынке продукции (например, на рынке валенок), $\hat{\lambda} = \varphi_3(p_1, p_2, V)$.

Подставив длинную точку $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{\lambda})$ в первые два уравнения системы (6.2.4), получим равенство

$$\operatorname{grad} f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{\lambda} \cdot (p_1, p_2), \tag{6.2.5}$$

откуда следует, что множитель Лагранжа $\hat{\lambda}$, как правило, получается достаточно малым, ибо цены p_1 и p_2 на ресурсы относительно велики, а предельные производительности ресурсов

$$\frac{\partial f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)}{\partial x_2}$$

при значительных количествах $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$ расходуемых ресурсов относительно малы.

Все функции $\varphi_1(p_1, p_2, V)$, $\varphi_2(p_1, p_2, V)$ и $\theta(p_1, p_2, V)$ однородны нулевой степени относительно всех трех переменных p_1, p_2, V.

С изменением лимита V от нуля до $+\infty$ и при фиксированных ценах p_1 и p_2 на ресурсы точка $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (\varphi_1(p_1, p_2, V), \varphi_2(p_1, p_2, V))$ заметает (от слова «метла») на плоскости Ox_1x_2 линию L, которая называется *линией развития фирмы в долговременном промежутке*. Линия L развития фирмы аналогична линии доход–потребление в теории поведения потребителя на рынке (рис. 6.1, на котором лимит принимает два значения V_1 и V_2 и на котором также показано локальное рыночное равновесие (x_1^0, x_2^0) фирмы, т.е. решение задачи 6.1.1).

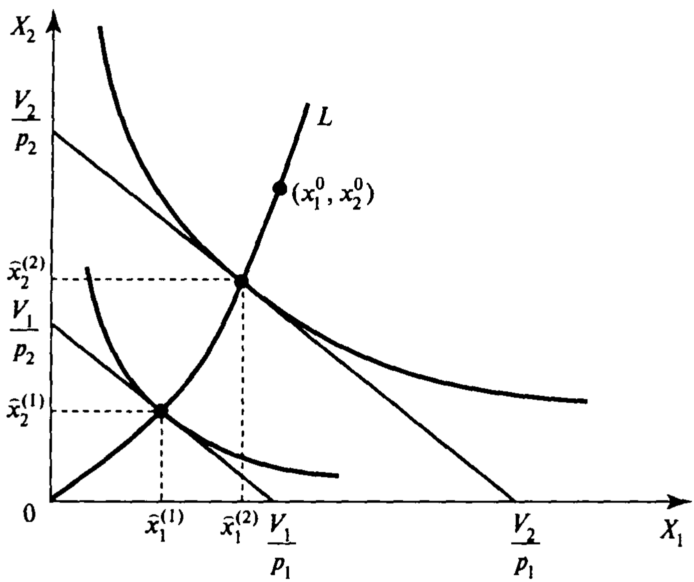


Рис. 6.1

6.2.2. Задача максимизации выпуска фирмы при лимите на ресурсы в краткосрочном промежутке есть задача (6.2.2), (6.2.1) при дополнительном ограничении

$$x_1 = \bar{x}_1, \tag{6.2.6}$$

Приведем геометрическое решение этой задачи (на рис. 6.2 – конфигурация ресурсов $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$). На рис. 6.2 для сравнения показано решение задачи (6.2.2), (6.2.1) в долговременном промежутке (см. конфигурацию ресурсов $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ на рис. 6.2). Рисунок 6.2 иллюстрирует важное положение: при одном и том же лимите V на ресурсы в случае долговременного промежутка объем выпуска $\hat{y}$ фирмы больше (не меньше) объема выпуска $\bar{y}(\hat{y} \geq \bar{y})$ в случае краткосрочного промежутка.

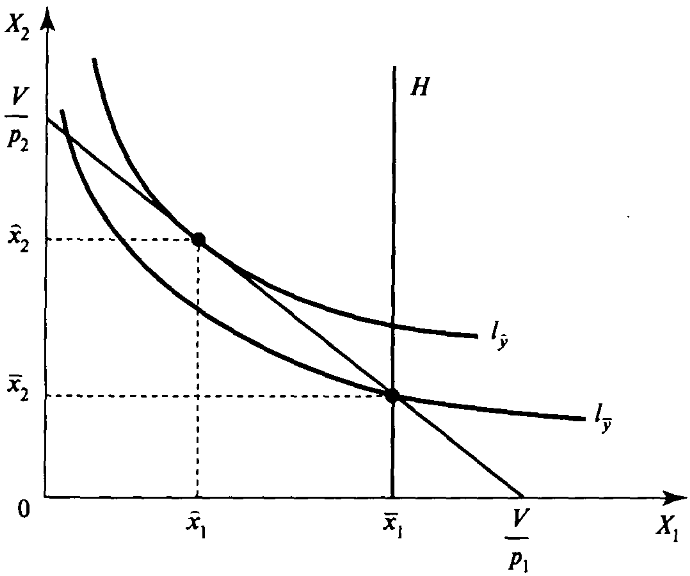


Рис. 6.2

При вариации лимита V на ресурсы конфигурация $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ ресурсов будет перемещаться по линии H, которая, следовательно, есть *линия развития фирмы в краткосрочном промежутке.*

6.2.3. Приведем решение задачи максимизации выпуска фирмы при наличии лимита C на ресурсы в случае, когда производственная функция $f(x_1, x_2)$ фирмы есть функция Кобба – Дугласа $y = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$:

$$f(x_1, x_2) = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \to \max,$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = C.$$

Здесь p_1 и p_2 – рыночные цены на ресурсы. Искомыми переменными являются объемы x_1 и x_2 первого и второго ресурсов.

Составим функцию Лагранжа

$$L = a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} + \lambda(C - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

и выпишем для нее условия первого порядка

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = a_0 \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2} - \lambda p_1 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = a_0 \alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1} - \lambda p_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = C - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0,$$

откуда получаем равенство дробей

$$\frac{a_0 \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2}}{a_0 \alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1}} = \frac{p_1}{p_2}.$$

После элементарных преобразований имеем

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2}, \quad \text{или} \quad x_2 = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} x_1.$$

Подставив выражение для x_2 в ограничение $C = p_1 x_1 + p_2 x_2$, получим

$$C - p_1 x_1 - p_2 \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} x_1 = 0, \quad \text{или} \quad C\alpha_1 = (\alpha_1 + \alpha_2) p_1 x_1,$$

откуда

$$\hat{x} = \varphi_1(p_1, p_2, C) = \frac{\alpha_1 C}{(\alpha_1 + \alpha_2) p_1}$$

(функция условного спроса (по Маршаллу) на первый ресурс со стороны фирмы на рынке).

Для x_2 имеем

$$\hat{x}_2 = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} \hat{x}_1 = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} \cdot \frac{\alpha_1 c}{(\alpha_1 + \alpha_2) p_1} = \frac{\alpha_2 c}{(\alpha_1 + \alpha_2) p_2},$$

$$\hat{x}_2 = \frac{\alpha_2 C}{(\alpha_1 + \alpha_2) p_2} = \varphi_2(p_1, p_2, C)$$

(функция условного спроса (по Маршаллу) на второй ресурс со стороны фирмы на рынке).

Имеем

$$f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = a_0(\hat{x}_1)^{\alpha_1}(\hat{x}_2)^{\alpha_2} = \alpha_0\left(\frac{\alpha_1 C}{(\alpha_1+\alpha_2)p_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\alpha_2 C}{(\alpha_1+\alpha_2)p_2}\right)^{\alpha_2} =$$

$$= a_0\left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\alpha_2}\frac{C^{\alpha_1+\alpha_2}}{(\alpha_1+\alpha_2)^{\alpha_1+\alpha_2}} = \theta(p_1, p_2, C)$$

или

$$\theta(p_1, p_2, C) = a_0\left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\alpha_2}{p_2}\right)^{\alpha_2}\frac{C^{\alpha_1+\alpha_2}}{(\alpha_1+\alpha_2)^{\alpha_1+\alpha_2}}$$

(функция условного предложения выпуска фирмы на рынке).

6.3. Предельный условный выпуск по лимиту и предельный условный выпуск по цене ресурса (тождество Роя)

6.3.1. Предельный условный выпуск по лимиту равен множителю Лагранжа $\hat{\lambda}$

$$\frac{\partial\theta(p_1, p_2, V)}{\partial V} = \hat{\lambda}. \qquad (6.3.1)$$

Предельный условный выпуск по цене p_i ресурса вида i ($i = 1, 2$) равен $-\hat{x}_i\hat{\lambda}$, т.е.

$$\frac{\partial\theta(p_1, p_2, V)}{\partial p_i} = -\hat{x}_i\hat{\lambda}, \quad i = 1, 2. \qquad (6.3.2)$$

Формально эти результаты ничем не отличаются соответственно от предельной полезности по доходу и предельной полезности по цене p_i продукта G_i ($i = 1, 2$) в теории потребления (см. параграф 1.2).

6.3.2. Выражения (6.3.1) и (6.3.2) принято называть утверждениями (теоремами) о маргинальных значениях. Эти выражения позволяют проводить анализ чувствительности условного выпуска относительно изменения лимита на ресурсы и цен на ресурсы.

Формула (6.3.1) показывает, что при росте на ΔV (относительно малых) единиц лимита на ресурсы условное предложение фирмы $\theta(p_1, p_2, V)$ увеличится приблизительно на $\hat{\lambda}\Delta V$ единиц. Учитывая достаточную малость множителя Лагранжа $\hat{\lambda}$, получили важный качественный результат, основанный на использовании формулы (6.3.1):

$$\theta(p_1, p_2, V + \Delta V) \cong \theta(p_1, p_2, V) + \hat{\lambda}\Delta V.$$

Аналогично формула (6.3.2) показывает, что при росте на Δp_i (относительно малых) единиц цены p_i на ресурс вида i ($i = 1, 2$) условное предложение фирмы $\theta(p_1, p_2, V)$ уменьшается приблизительно на $\hat{\lambda}\Delta p_i$ единиц. Учитывая достаточную малость множителя Лагранжа $\hat{\lambda}$, получим важный качественный результат, основанный на использовании формулы (6.3.2):

$$\theta(p_1 + \Delta p_1, p_2, V) \cong \theta(p_1, p_2, V) - \hat{\lambda} \cdot \hat{x}_1 \Delta p_1.$$

Для цены p_2 на второй ресурс получим аналогичное выражение:

$$\theta(p_1, p_2 + \Delta p_2, V) \cong \theta(p_1, p_2, V) - \hat{x}_2 \cdot \hat{\lambda}.$$

6.4. Задача минимизации издержек фирмы при фиксированном выпуске фирмы в долговременном и краткосрочном промежутках. Функции условиого спроса по Хиксу на ресурсы со стороиы фирмы и функция условных издержек фирмы

6.4.1. Вторая версия задачи максимизации прибыли фирмы есть задача минимизации издержек при фиксированном объеме $\breve{y}$ выпускаемой фирмой продукции.

Если фирма имеет фиксированный выпуск $\breve{y} = f(x_1, x_2)$, т.е.

$$\breve{y} = f(x_1, x_2), \tag{6.4.1}$$

то задача (6.1.1) максимизации прибыли фирмы в долговременном промежутке приобретает вид $PR = p_0\breve{y} - p_1x_1 - p_2x_2 \to \max$, что эквивалентно задаче

$$p_1x_1 + p_2x_2 \to \min \tag{6.4.2}$$

при наличии ограничения (6.4.1) на условный экстремум. Для решения задачи (6.4.2) и (6.4.1) составим функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \breve{y}) = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda(\breve{y} - f(x_1, x_2)) \tag{6.4.3}$$

и затем выпишем условия первого порядка

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = p_1 - \lambda \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial \lambda} = 0,$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = p_2 - \lambda \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial \lambda} = 0, \qquad (6.4.4)$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = \breve{y} - f(x_1, x_2) = 0.$$

Аналогично системе (6.2.4) система (6.4.4), в которой фигурирует ПФ со своей спецификой, имеет единственное решение $(\breve{x}_1, \breve{x}_2, \breve{\lambda})$ (длинная точка). Короткая точка $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$ есть точка глобального минимума задачи (6.4.2), (6.4.1), которая формально ничем не отличается от задачи минимизации расхода при фиксированном уровне полезности (см. параграф 1.3).

Функции $\breve{x}_1 = \psi_1(p_1, p_2, \breve{y})$, $\breve{x}_2 = \psi_2(p_1, p_2, \breve{y})$ называются функциями условного спроса по Хиксу на ресурсы со стороны фирмы на рынках ресурсов (капитала и труда), $\breve{\lambda} = \psi_3(p_1, p_2, \breve{y})$.

Функция $\breve{C} = p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 \psi_1(p_1, p_2, \breve{y}) + p_2 \psi_2(p_1, p_2, \breve{y}) = C(p_1, p_2, \breve{y})$ называется функцией условных издержек фирмы.

Подставив длинную точку $(\breve{x}_1, \breve{x}_2, \breve{\lambda})$ в первые два уравнения системы (6.4.4), получим равенство

$$(p_1, p_2) = \breve{\lambda} \cdot grad\, f(\breve{x}_1, \breve{x}_2), \qquad (6.4.5)$$

откуда следует, что множитель Лагранжа $\breve{\lambda}$, как правило, получается достаточно большим, ибо цены p_1 и p_2 на ресурсы относительно велики, а предельные производительности ресурсов относительно малы.

Функции $\psi_1(p_1, p_2, \breve{y})$, $\psi_2(p_1, p_2, \breve{y})$ однородны нулевой степени по переменным p_1 и p_2, а функция $C(p_1, p_2, \breve{y})$ однородна первой степени по переменным p_1 и p_2.

С изменением объема $\breve{y}$ от нуля до $+\infty$ и при фиксированных ценах p_1 и p_2 на ресурсы конфигурация ресурсов $(\breve{x}_1, \breve{x}_2) = (\psi_1(p_1, p_2, \breve{y}), \psi_2(p_1, p_2, \breve{y}))$ заметает на плоскости Ox_1x_2 линию развития фирмы L (см. параграф 6.2, рис. 6.1 и рис. 6.3). На рис. 6.3 фиксированный выпуск $\breve{y}$ принимает два значения – $\breve{y}_1$ и $\breve{y}_2$ $(\breve{y}_2 > \breve{y}_1)$. На рис. 6.3 также показано локальное рыночное равновесие (x_1^0, x_2^0) (см. параграф 6.1).

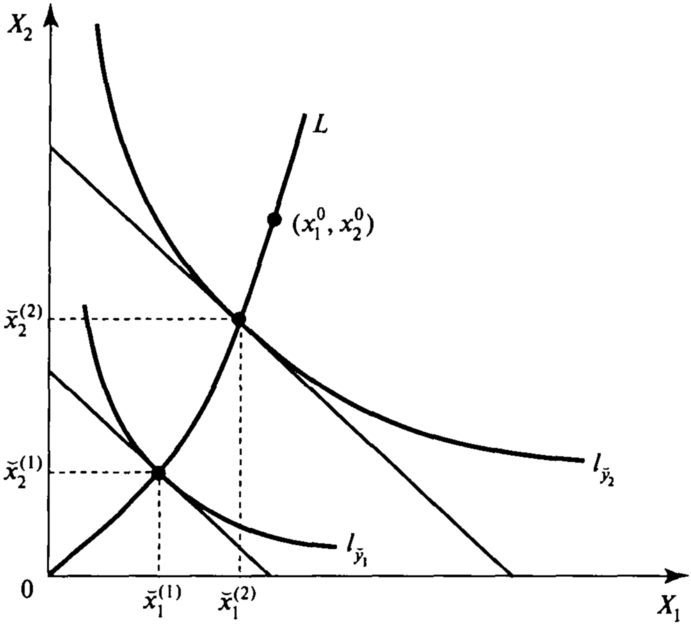


Рис. 6.3

6.4.2. Задача минимизации издержек фирмы при фиксированном объеме $\breve{y}$ выпускаемой продукции в краткосрочном промежутке является задачей (6.4.2), (6.4.1) при дополнительном ограничении

$$x_1 = \bar{x}_1. \tag{6.4.6}$$

Приведем геометрическое решение этой задачи (см. конфигурацию ресурсов $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ на рис. 6.4). На рис. 6.4 для сравнения показано решение задачи (6.4.2), (6.4.1) в долговременном промежутке (см. конфигурацию ресурсов $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$ на рис. 6.4). Рисунок 6.4 иллюстрирует важное положение: при одном и том же объеме $\breve{y}$ выпускаемой продукции в случае долговременного промежутка минимальные издержки фирмы $\breve{C}$ меньше (не больше) условных издержек $\bar{C}$ в случае краткосрочного промежутка. В случае долговременного промежутка у фирмы больше возможностей для снижения издержек, чем в случае краткосрочного промежутка.

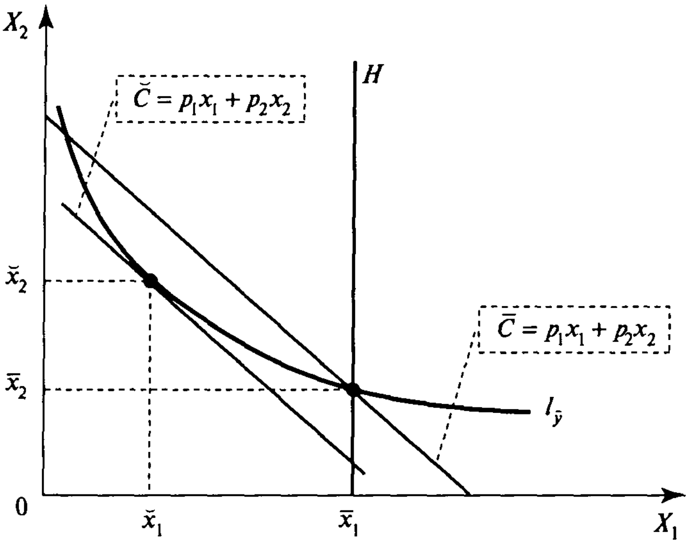


Рис. 6.4

При вариации объема $\breve{y}$ выпускаемой фирмой продукции конфигурация $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ ресурсов будет перемещаться по прямой H, которая, следовательно, есть линия развития фирмы в краткосрочном промежутке.

6.4.3. Приведем решение задачи минимизации издержек фирмы при фиксированном объеме $\breve{y}$ выпускаемой продукции в случае, когда ПФ $f(x_1, x_2)$ фирмы есть функция Кобба–Дугласа:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = C\,(\min),$$
$$\breve{y} = a_0x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2},$$

где p_1 и p_2 – рыночные цены на ресурсы. Искомыми переменными являются объемы x_1 и x_2 первого и второго ресурсов.

Составим функцию Лагранжа

$$L = p_1x_1 + p_2x_2 + \mu(\breve{y} - f(x_1, x_2)).$$

Имеем условия первого порядка

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 - \mu a_0\alpha_1x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 - \mu a_0\alpha_2x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2-1} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \breve{y} - f(x_1, x_2) = 0,$$

откуда получаем равенство дробей

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\mu a_0 \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2}}{\mu a_0 \alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1}}.$$

После элементарных преобразований получим

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha_1 x_2}{\alpha_2 x_1}, \text{ или } x_2 = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} x_1.$$

Подставив выражение для x_2 в ограничение $\breve{y} = f(x_1, x_2)$, получим

$$\breve{y} = a_0 x_1^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} \cdot x_1 \right)^{\alpha_2} \quad \text{или} \quad \frac{\breve{y}}{a_0} = x_1^{\alpha_1 + \alpha_2} \left(\frac{p_1}{\alpha_1} \right)^{\alpha_2} \left(\frac{\alpha_2}{p_2} \right)^{\alpha_2},$$

откуда

$$\left(\frac{\breve{y}}{a_0} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(\frac{\alpha_1}{p_1} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(\frac{p_2}{\alpha_2} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} = \breve{x}_1 = \psi_1(p_1, p_2, \breve{y})$$

(функция условного спроса (по Хиксу) на первый ресурс со стороны фирмы на рынке).

Объединяя первое и последнее звенья цепочки

$$\breve{x}_2 = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} \breve{x}_1 = \frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} \left(\frac{\breve{y}}{a_0} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(\frac{\alpha_1}{p_1} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(\frac{p_2}{\alpha_2} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} =$$

$$= \left(\frac{\breve{y}}{a_0} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} \right) \left(\frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} = \left(\frac{\breve{y}}{a_0} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2 p_1}{\alpha_1 p_2} \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}} =$$

$$= \left(\frac{\breve{y}}{a_0} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2}{p_2} \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(\frac{p_1}{\alpha_1} \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}} = \psi_2(p_1, p_2, \breve{y}),$$

получим

$$\breve{x}_2 = \psi_2(p_1, p_2, \breve{y}) = \left(\frac{\breve{y}}{a_0} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2}{p_2} \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}} \left(\frac{p_1}{\alpha_1} \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}}$$

(функция условного спроса (по Хиксу) на второй ресурс со стороны фирмы на рынке).

Имеем

$$\breve{C} = C(p_1, p_2, \breve{y}) = p_1\breve{x}_1 + p_2\breve{x}_2 =$$

$$= p_1\left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{p_2}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}} + p_1\left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1}{p_1}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{p_2}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}} =$$

$$= \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}\left[p_1\frac{\alpha_1^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}}{p_1^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}}\cdot\frac{p_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}}{\alpha_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}} + p_2\frac{\alpha_2^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}}{p_2^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}}\cdot\frac{p_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}}{\alpha_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}}\right] =$$

$$= \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}\left[\alpha_1^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}} p_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}\cdot\frac{p_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}}{\alpha_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}} + \alpha_2^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}} p_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}\cdot\frac{p_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}}{\alpha_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}}\right] =$$

$$= \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} p_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}} p_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}\left[\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}} + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}\right] =$$

$$= \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} \cdot p_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}} p_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}\left[1 + \frac{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}}{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}}\right] =$$

$$= \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} p_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}} p_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}\left[1 + \frac{(\alpha_2)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}}{(\alpha_1)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}}\right] =$$

$$= \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} p_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}} p_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) =$$

$$= \left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} p_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}} p_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1} =$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2)\left(\frac{\breve{y}}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{p_2}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}},$$

т.е.

$$\breve{C} = C(p_1, p_2, \breve{y}) = (\alpha_1 + \alpha_2)\left(\frac{u}{a_0}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}}\left(\frac{p_2}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}$$

(функция условных издержек фирмы при фиксированном объеме $\breve{y}$ выпускаемой продукции).

6.5. Предельные условные издержки по объему выпуска и предельные условные издержки по цене ресурса (лемма Шепарда)

6.5.1. Предельные условные издержки по объему выпуска равны множителю Лагранжа

$$\frac{\partial C(p_1, p_2, \breve{y})}{\partial \breve{y}} = \breve{\lambda}. \tag{6.5.1}$$

Предельные условные издержки по цене p_i ресурса вида i ($i = 1, 2$) равны $\breve{x}_i$, т.е.

$$\frac{\partial C(p_1, p_2, \breve{y})}{\partial p_i} = \breve{x}_i. \tag{6.5.2}$$

Формально эти равенства ничем не отличаются соответственно от предельного расхода по полезности и предельного расхода по цене p_i продукта G_i ($i = 1, 2$) в теории потребления (см. параграф 1.4).

6.5.2. Выражения, называемые утверждениями о маргинальных значениях, позволяют проводить анализ чувствительности условных издержек относительно изменения выпуска $\breve{y}$ фирмы и цен на ресурсы.

Формула (6.5.1) показывает, что при достаточно малом увеличении (уменьшении) выпуска на величину $\Delta\breve{y}$ условные издержки растут (падают) приблизительно на величину $\breve{\lambda}\cdot\Delta\breve{y}$. Напомним, что множитель Лагранжа $\breve{\lambda}$ может быть достаточно большим, так что условные издержки фирмы могут измениться на весьма значительную величину. Из формулы (6.5.1) следует приближенное равенство при относительно малой величине $\Delta\breve{y}$:

$$C(p_1, p_2, \breve{y} + \Delta y) \cong C(p_1, p_2, \breve{y}) + \breve{\lambda} \cdot \Delta \breve{y}.$$

Аналогично формула (6.5.2) показывает, что при росте цены p_i i-го ресурса на относительно малую величину Δp_i ($i = 1, 2$) условные издержки увеличиваются приблизительно на величину $\breve{x}_i$. В связи с тем что множитель Лагранжа $\breve{\lambda}$ может быть достаточно большим, условные издержки фирмы могут измениться на весьма значительную величину. Из формулы (6.5.2) следуют приближенные равенства при относительно малых величинах Δp_1 и Δp_2

$$C(p_1 + \Delta p_1, p_2, \breve{y}) \cong C(p_1, p_2, \breve{y}) + \breve{x}_1 \Delta p_1,$$

$$C(p_1, p_2 + \Delta p_2, \breve{y}) \cong C(p_1, p_2, \breve{y}) + \breve{x}_2 \Delta p_2.$$

6.6. Альтернативы максимизации прибыли фирмы и многообразие целей фирмы

6.6.1. Этот параграф продолжает и развивает ряд положений параграфа 6.1.

Неудовлетворенность максимизацией прибыли как единственным фактором, управляющим решениями, принимаемыми на рынке, вызвала к жизни несколько альтернативных критериев «наилучших» действий.

Одной из широко дискутируемых альтернатив максимизации прибыли является положение о том, что фирмы стремятся к «удовлетворительной», а не «максимальной» прибыли. Другими словами, фирмы скорее жертвуют прибылями, нежели максимизируют их. Суть заключается в том, что принимающие решения руководители довольствуются выполнимыми или удовлетворительными решениями и действиями и не берут на себя хлопоты по вычислению самых лучших вариантов деятельности.

Вкратце: сторонники концепции стремления получить удовлетворение рассматривают предприятия как стремящиеся заработать в будущем по крайней мере не меньше, а может быть и больше нынешней прибыли. Принятие решений, связанных с прибылью, они связывают с опорой менеджеров на прошлый опыт, правила принятия решений и информацию, позволяющую выбрать ту из известных альтернатив, от которой ожидается удовлетворительная прибыль. Утверждается, что обычно руководители не стремятся тщательно изучать каждую возможность в поиске самой прибыльной альтернативы, так как процесс поиска максимизирующей альтернативы может оказаться дороже, чем он того стоит, и отнять слишком много времени с учетом рыночной неопределенности, неточной информации относительно спроса, издержек, реакции конкурентов и будущих экономических условий.

Существует еще одно логическое обоснование стремления получить удовлетворительную прибыль. Современная теория корпорации рассматривает руководителей высшего звена как попечителей организации, несущих ответственность не только перед акционерами, но и перед сотрудниками, покупателями, кредиторами, поставщиками, общественностью, государством и обществом в целом. Руководитель корпорации должен искусно балансировать между заинтересованностью акционеров в высоких прибылях, требованиями сотрудников более высоких зарплат и большей экономической безопасности, стремлением покупателей получить качественные товары по низким ценам, желанием розничных продавцов получать приличную прибыль, склонностью поставщиков к стабильным условиям поставок и требованиями общественности к чистоте окружающей среды – и все это в конструктивных и общественно приемлемых рамках. Согласно теоретикам удовлетворительной прибыли, эти соображения заставляют руководителей занимать такую позицию, с которой они могут разрешать организационные конфликты и на которой возможно повышать благосостояние всех групп, заинтересованных в том, как организация делает свой бизнес.

Более того, многие управленцы среднего и высшего звеньев занимают ключевые для принятия решений и выработки политики позиции. Многие из них заинтересованы в увеличении бюджета собственных отделов, в более высоких зарплатах и пенсиях; в увеличении численности сотрудников, занятых выполнением их проектов, уютных кабинетах, собственной значительности, власти и полномочиях принятия важных решений; большей финансовой ликвидности, технологическом превосходстве и т.д. В целях удовлетворения таких интересов могут формироваться коалиции, что приводит к отказу предприятия от курса максимизации прибыли.

Вследствие этого крупные корпорации имеют много центров власти различных уровней, над которыми «парит» высшее руководство (топ-менеджеры). Согласно теоретикам удовлетворительной прибыли, результатом этого является принижение целей и решений корпорации до уровня политиканства, компромиссов и уступок. В такой среде невозможна забота о максимизации денежного благосостояния акционеров, так как преследование цели извлечения прибыли ограничивается требованием удовлетворить, по крайней мере минимально, конкурирующие вожделения. Ни один центр силы, за исключением акционеров, не имеет организационной поддержки, необходимой для достижения общей цели и, следовательно, для ее достижения в максимальной степени. В результате этого поведение, характеризующееся стремлением получить удовлетворение, становится скорее правилом, нежели исключением, и является примером стандарта деятельности, направленной на получение «удовлетворительной прибыли», взимание «справедливых цен», завоевание «удовлетворительной доли рынка» – деятельности, растущей «в приемлемой степени».

6.6.2. Второй часто упоминающейся альтернативой максимизации прибыли является ограниченная максимизация выручки.

Согласно этой альтернативе, когда прибыль достигает приемлемого уровня, некоторые фирмы склонны ставить во главу угла объем выручки, а не прибыль. Они делают это якобы потому, что рост выручки является важным показателем деятельности фирмы. Выручка от продаж отражает положительное отношение покупателей к продукции фирмы, конкурентную позицию фирмы на рынке и ее рост, а все эти показатели свидетельствуют о жизнеспособности фирмы. Если объем продаж падает, то любое преимущество, которым обладает фирма, подрывается, а ее конкурентоспособность ослабевает. Кроме того, в повышении объема продаж заинтересованы руководители фирмы, поскольку есть много свидетельств тому, что их заработная плата имеет более тесную связь с масштабом операций фирмы, чем с ее прибыльностью.

Тем не менее максимизация выручки не означает, что из виду упускается прибыль. Для удовлетворения акционеров и получения новых инвестиций прибыль должна быть довольно высокой. То есть, стараясь максимизировать выручку, руководители могут действовать лишь в ограниченных рамках, в степени, которая не позволяет прибыли упасть настолько низко, что фирма окажется без средств для роста и расширения рынков сбыта.

6.6.3. Многие фирмы преследуют цели, связанные с увеличением объемов продаж и долей рынка. Ясно, что большая доля рынка есть ценный актив, в частности потому, что она отражает способность фирмы эффективно конкурировать, извлекать выгоду от масштаба производства и быть признанным лидером рынка. Однако завоевание большей доли рынка совсем не обязательно способствует повышению прибыльности и не означает более крепких экономических позиций. По этой причине доля рынка, по всей вероятности, не является действительно принципиальной целью фирмы. На деле агрессивная борьба за долю рынка посредством урезания цен и завоевания потребителей «любой ценой» может создать опасность для прибыльности. Успешное завоевание большой доли рынка может привести к доминированию на рынке, что приведет к принятию антитрестовских мер.

Некоторые экономисты считают, что фирмам, как большинству других организаций и индивидуумов, присущ инстинкт выживания. Стремление выжить есть мотив более фундаментальный, нежели прибыль. То есть утверждается, что цель выживания доминирует над другими целями, особенно в стрессовых ситуациях.

Важность выживания в долговременном промежутке очевидна. Но как цель выживание не помогает объяснить и предсказать поведение фирмы. Путей выживания всегда много, и выбор одного из них зависит от тех или иных факторов. И если уж выживание в ближней перспективе обеспечено, то на управленческие решения наверняка будут влиять другие цели. Основное значение цели выживания состоит в том, что она является *предпосылкой* для достижения других целей. Ее отношение к объяснению поведения ограничено только теми случаями, когда фирма попадает в такую тяжелую ситуацию, что все ее усилия должны быть направлены на то, чтобы пережить плохие времена.

6.6.4. В последние годы много говорится и пишется о необходимости «социально ответственного» поведения фирм, особенно крупных корпораций. Социальная ответственность означает многое: представительство в управленческой структуре корпорации и ее властно распоряжающемся руководстве групп с различными интересами; соответствие деятельности всей фирмы изменяющимся потребностям общества; сбалансированность интересов акционеров с интересами общества в целом; построение политики и практической деятельности фирмы таким образом, чтобы увеличивать общественное достояние; стремление фирм лечить социальные болезни общества одновременно со своей основной деятельностью.

В сущности, возложение на фирмы социальной ответственности направлено на формирование некой *корпоративной совести.*

Лежащая в основе цели социальной ответственности философия говорит о том, что интересы акционеров в долговременном промежутке лучше всего удовлетворяет политика фирм, вносящая вклад в построение такого рода общества, в котором фирмы могут прибыльно развиваться. То есть преследование цели извлечения прибыли и преследование социальных целей полагаются взаимоусиливающими процессами. Прибыли могут быть получены посредством выполнения функций, которые влекут за собой большие или малые социальные выгоды. В то же время социальные цели могут быть эффективнее и быстрее достигнуты, если фирмы могут получать прибыль за общественно позитивную деятельность и наказание за деятельность общественно негативную.

Достижение целей социальной ответственности может снизить уровень прибыли фирмы. Фирма, которая в области снижения вредных выбросов в атмосферу делает больше того, что требуется законом, возможно, делает это за счет своей прибыли. Фирма, которая содержит неэффективное производство ради сохранения рабочих мест в районе, возможно, поступает так за счет прибыли. Весьма вероятно, что усилия фирмы демонстрировать социальную ответственность приводят к использованию ею привлекательных методов управления. Но социальная ответственность ни в коей мере не означает, что прибыльность отходит на второй план. Адекватная прибыль является предпосылкой организационной способности и финансовой возможности фирмы решать социальные задачи.

Призывы к фирмам быть социально ответственными встречают глухое сопротивление со стороны некоторых руководителей и общественных групп. Возможно, справедливо высказывание, что «бизнес бизнеса есть бизнес». Утверждается, что руководители корпораций не готовы решать социальные задачи и не могут пренебрегать интересами акционеров. Дело в том, что во многих ситуациях ответ на вопрос о соответствии общественным интересам дается по отношению к индивидуальным ценностям, а не по отношению к ясному подходу: «это лучше всего соответствует интересам всех». Однако появляется все больше фирм, которые пристально следят за влиянием корпоративной политики и стратегии на общество, и они определенно озабочены тем, чтобы избежать обвинений в «бесчувственности» и «отсутствии гражданской позиции».

6.6.5. Сегодняшние достоинства фирмы могут обесцениться завтра, когда изменятся вкусы потребителей, появятся новые товары, усилится конкуренция со стороны отечественных производителей и импортеров и вырастет сила поставщиков и потребителей. Компания, которая не развивается и не занимается инновационной деятельностью, может в конце концов обнаружить, что она производит никому не нужную продукцию. Немногие фирмы предпочитают «плыть по течению» – в мире бизнеса хуже сохранения статус-кво может быть только ведущая к закату ловушка стагнации.

Существуют несколько причин, по которым фирмы выбирают цели роста и диверсификации. Первое: рост – хорошая защита от несчастий. Рост посредством расширения рынков ставит фирму в более прочное, более безопасное положение на рынке по сравнению с конкурентами, поставщиками и покупателями. В той степени, в которой фирма может догнать или опередить конкурентов, она имеет бо́льшую свободу маневра и большее влияние на принятие важных отраслевых решений. Рост путем диверсификации, расширения номенклатуры продукции освобождает фирмы от чрезмерной зависимости от узкого круга продуктов и услуг. Если один из продуктов начинает приносить убытки, фирма может не только продолжать существовать, но и набирать силу в других сферах деятельности.

Второе: рост в долговременном промежутке (например, рост объема продаж, повышение объема производства, увеличение прибыли) почти повсеместно признается лучшим измерителем делового успеха. Тема роста и диверсификации проходит красной нитью через годовые отчеты процветающих компаний и постоянно акцентируется на страницах журналов, посвященных проблемам финансов бизнеса. Инвесторы и аналитики оценивают предприятие не только по текущим прибылям, но и по потенциалу роста. Почти всегда упор делается не на абсолютный объем продаж и прибылей, а на величину их роста. Следовательно, фирмы имеют мотив повышения степени роста, они почти всегда стремятся проникнуть на живой рынок, а когда они на него попадают, то, за редким исключением, не желают занимать иного места, кроме первого.

Наконец, рост и диверсификация представляют собой эффективные средства преследования других корпоративных целей. Они могут быть совместимы с получением повышенных прибылей, увеличением продаж, защитой и укреплением конкурентных позиций фирмы, выплатой высоких дивидендов акционерам, повышением курса акций, созданием здорового корпоративного имиджа и т.д. Рост и диверсификация фирмы, как показывает устойчивая тенденция, дополняют и поддерживают ее деятельность по достижению других целей. Уже одно это делает их приоритетными.

6.6.6. Из предыдущих рассуждений ясно, что у фирм может быть множество целей и извлечение прибыли – лишь одна из них. Заявления руководителей и стратегические планы фирм подтверждают, что фирмы обычно одновременно преследуют несколько целей, что ведет к конфликтам и компромиссам.

Например, перед фирмой существует выбор из следующих вариантов.

- Упор на краткосрочные или долгосрочные прибыли.
- Увеличение маржи прибыли или увеличение доли рынка.
- Расширение деятельности на данных рынках или выход на новые рынки.
- Диверсификация на основе родственной или чужеродной продукции.
- Конкуренция в среде низкого уровня риска или на высокорисковых рынках.
- Преследование целей извлечения прибыли или неприбыльных целей.
- Поиск возможностей быстрого развития в новых сферах рынка или удовлетворенность улучшением текущих операций.

Современная теория реальной фирмы принимает в расчет многообразные цели. Она расширяет модель максимизации прибыли и признает ценность других направлений деятельности фирмы, в том числе многообразие целей, преследуемых в рамках максимизации полезности. Например, помимо прибыли, она может преследовать цели увеличения доли рынка и роста. Когда одна цель фирмы начинает конфликтовать с другой целью, что может легко произойти при наличии многих целей, руководитель фирмы ищет компромисс между целями и выбирает лучшую комбинацию прибыли, выручки и роста. Лицо, принимающее решения, обычно имеет некоторую свободу действий, и малые фирмы отличаются от больших в образе действий по ранжированию целей и поиску компромисса. В разное время фирмы приходят к разным компромиссам. Выбор может быть очень жестким. Например, фирма, чья прибыль падает, может поддаться соблазну ликвидировать расходы на НИОКР, рекламу и стимулирование сбыта; прекратить инвестиции в новые виды деятельности, здания и оборудование или новые продукты, т.е. в то, от чего зависят долгосрочные прибыли и рост. Имеются данные, свидетельствующие об обратном соотношении между прибылью и маржей прибыли, с одной стороны, и ростом и долей рынка – с другой. Компромиссы между иными целями могут быть достаточно серьезными. В итоге многообразие целей в совокупности с изменяющейся динамикой рынка затрудняет прогнозирование поведения фирм.

При наличии нескольких целей ключевые руководители ищут компромисс и баланс между конфликтующими целями. Разумно ожидать, что если руководители имеют свободу выбора из нескольких альтернатив, то они выберут наиболее благоприятную для себя альтернативу. Фактически, даже если хозяева корпорации (акционеры) признают только цель максимизации прибыли, отделение владения от управления в крупных корпорациях предоставляет руководителям возможность преследовать личные цели, отличающиеся от целей хозяев, посредством чего формируется многоцелевая среда.

Например, исполнительный директор корпорации, в которой владение (собственность) отделено от управления, может добиваться славы ведущего производителя в отрасли, удовлетворять личное тщеславие, испытывать гордость от того, что он стоит во главе крупной империи бизнеса; добиваться профессионального признания в кругу себе подобных, стремиться занимать роскошные апартаменты и добиваться для себя большого размера материальной компенсации. Все это может отвлечь его от цели чистой максимизации прибыли в интересах акционеров. Стремление руководителей к спокойной, легкой жизни, бóльшему свободному времени также не способствует максимизации прибыли, поскольку руководители с «нормальными» предпочтениями не будут отдавать всю свою энергию максимизации прибыли. Таким же образом стремление создать устойчивый интерес к техническим трюкам и продемонстрировать профессиональное превосходство может привести действия руководителей к конфликту с максимально возможной прибылью. Стремление, вопреки прибыли, к достижению технологического превосходства и передовых позиций в разработке продукции, как утверждается, характерно для руководителей с научным или техническим образованием и для отраслей высоких технологий. Поскольку техническое мастерство дает возможность техническим специалистам удовлетворять собственный интерес, а также повышать квалификацию с целью продвижения, получения более высокой заработной платы и поиска работы, оно хорошо подходит тем сотрудникам фирмы (инженерам, техническим специалистам, исследователям), которые занимаются удержанием фирмы на передовых позициях науки и техники, а также обеспечивают производство передовой продукции.

Общее правило состоит в том, что если руководители фирмы имеют свободу преследовать свои собственные цели, то можно ожидать, что они будут их преследовать и наличие многоцелевой среды весьма вероятно. Вопрос в том, будут ли руководители корпораций преследовать свои личные цели в долговременном промежутке, когда они вступят в противоречие с долгосрочными интересами владельцев фирмы. Это сложный вопрос, и ответ на него включает решение проблемы принципала–агента. Он включает также тонкую посылку относительно рынка управленцев и не столь тонкую – относительно контроля рынка над фирмами. Переходим к обсуждению этой важной проблемы.

6.6.7. Принимающие решения ответственные лица (принципалы) зачастую полагают полезным нанять агентов, обладающих соответствующими квалификациями, способностями и информацией, которые могут быть использованы на благо ответственного лица. Проблема между принципалом и агентом возникает, когда последний обладает большей информацией и знаниями и использует их к собственной выгоде за счет принципала. Спортивная «звезда» (принципал) нанимает агента для заключения контракта с профессиональной спортивной командой. Если заключенный агентом контракт приносит максимальную пользу не спортсмену, а агенту (скажем, агент получает от спортивной команды гонорар), то это пример проблемы между принципалом и агентом.

Конфликты между принципалом и агентом могут возникнуть по самым разным поводам; и для крупных корпораций, в которых владение отделено от управления, такие конфликты являются обычным делом. Акционеры корпорации выступают в качестве принципалов, а высокопоставленные исполнительные руководители (топ-менеджеры) – в качестве агентов. Обычно агенты более информированы о положении дел и перспективах фирмы, чем акционеры. Информационная асимметрия позволяет агентам преследовать личные цели, в результате чего стоимость фирмы падает, а принципалы попадают в положение, худшее, чем то, в котором бы они находились, если бы агенты действовали исключительно в их интересах. Несмотря на то, что деятельность высших исполнительных руководителей контролируется советом директоров корпорации, последний не способен выявить истинную подоплеку всех действий первых. Совет директоров не обладает всей полнотой информации, и у большинства его членов есть другие обязанности.

Для того чтобы избежать необходимости мониторинга за поведением руководителей (топ-менеджеров), совет директоров может выплачивать им специальное вознаграждение за деятельность в соответствии со сформулированными советом целями фирмы. Такое вознаграждение может, например, принимать форму участия в прибылях или получения пакета акций и способствовать обогащению руководителей. Но руководители смогут получить доступ к материальным благам тогда и только тогда, когда прибыль корпорации высока и достигаются другие необходимые показатели. Такие вознаграждения способствуют предотвращению конфликтов между принципалами и агентами. Однако советы директоров далеко не всегда способны ликвидировать проблему принципала–агента и направить исполнительных руководителей на достижение целей фактических владельцев фирмы. Основная причина этого в том, что в крупных корпорациях, в которых владение отделено от управления, советы директоров могут рассматриваться в качестве агентов акционеров и проблема принципала–агента может возникнуть между советом директоров и акционерами. Советы директоров могут находиться в зависимости от исполнительных руководителей (топ-менеджеров) корпораций, поскольку они подчас выдвигают кандидатуры в совет и предлагают их на суд акционеров. То есть действия советов директоров крупных корпораций, большинство акций которых принадлежит сторонним инвесторам, не обязательно ликвидируют проблему принципала–агента.

Следствием названной проблемы является снижение прибылей, повышение издержек и отклонение от целей, совпадающих с интересами акционеров. Существо дела заключается в том, что руководители могут извлекать собственную выгоду за счет акционеров. Это снижает прибыль по сравнению с той, которая могла бы быть достигнута, если бы не существовало проблемы между принципалами и агентами.

6.6.8. Хотя между принципалами и агентами возникают конфликты, они не всегда столь серьезны, как об этом можно подумать на основании предыдущего раздела 6.6.7. Существуют ограничивающие факторы, которые в крупных фирмах снижают остроту проблемы принципала-агента и поощряют руководителей (топ-менеджеров) действовать в интересах владельцев. Эти факторы относятся к рыночной конкуренции.

Жесткая конкуренция заставляет фирму действовать в направлении извлечения прибыли. Прибыль увеличивает стоимость фирмы, повышает курс ее акций и благосостояние акционеров. Чем жестче конкуренция на рынке, на котором действует фирма, тем выше уровень ее дисциплины и выше вероятность ее вовлечения в деятельность по максимизации прибыли. На рынках с наивысшей конкуренцией проблема принципала–агента отодвигается далеко на задний план, так как выживание фирмы обусловлено максимизацией прибыли. На таких рынках выживают самые приспособленные, среди которых трудно найти фирмы, погрязшие в конфликтах между руководителями и фактическими владельцами.

Рынок трудовых ресурсов хорошо развит, и если руководитель заботится о собственном благе, то он старается сохранить свою рыночную конкурентоспособность. При высоком спросе на хорошо зарекомендовавших себя с точки зрения увеличения прибыли исполнительных руководителей дисциплина рынка заставит последних проводить политику повышения прибылей, максимизации курса акций и повышения благосостояния акционеров. То есть рынок управленческих ресурсов снижает внутрифирменные конфликты между принципалами и агентами. Когда же конфликты приводят к падению уровня руководства и понижению курса акций, тогда возникает вероятность смены контроля над фирмой. Это главный способ избавления фирмы от негодных руководителей. Ясно, что у руководителей есть возможность избежать такой ситуации, управляя корпорацией так, как того желают акционеры, и делая это наиболее эффективно.

6.6.9. Лишь немногие экономические концепции могут сравниться с концепцией прибыли по числу сбивающих с толку определений. Мало того, что существуют бухгалтерская прибыль, нормальная прибыль и экономическая прибыль, так каждая из них может еще и по-разному измеряться в зависимости от принятой бухгалтерской практики или от того, измеряется ли прибыль в долларах или как степень дохода на вложенный капитал. В основе бухгалтерской прибыли лежат доходы фирмы, и она определяется как превышение доходов над расходами прошлого периода после уплаты налогов. Нормальная прибыль есть прибыль (или доход на вложенный капитал), минимально достаточная для удержания фирмы на плаву в долговременном промежутке. Экономисты расценивают нормальную прибыль как часть совокупных издержек. Экономическая прибыль есть доход сверх минимальной прибыли. Фирмы стремятся к извлечению именно экономической прибыли, и именно эта прибыль определяет их поведение.

Прибыль (как нормальная, так и экономическая) есть результирующая различных факторов влияния, включая деловую хватку, успешное выполнение предпринимательской функции, предоставление покупателям качественных услуг, умелое обращение с неопределенностью, быстрое реагирование на возникающий на рынке дисбаланс, получение конкурентных преимуществ, технологическое превосходство, разработку и производство инновационной продукции.

Взгляды экономистов на максимизацию прибыли со временем изменились. Вот уже несколько лет существуют разногласия относительно того, действуют ли фирмы, особенно крупные корпорации, так, как если бы они стремились максимизировать прибыль. Ныне широко признается, что фирмы не обязательно стремятся максимизировать прибыль; и внимание экономистов сосредоточено на том, чтобы теория фирмы рассматривала и другие цели и задачи. Современная теория фирмы выявляет причины, по которым фирма стремится к извлечению максимальной прибыли, условия, в которых фирма стремится к извлечению максимальной прибыли, а также условия, при которых фирма преследует и другие цели. Полагают, что к достижению других целей, помимо цели максимизации прибыли, фирму подталкивают распыленные между многочисленными акционерами права собственности, неопределенность, проблема принципала–агента и изоляция от жесткой конкуренции. Наиболее известными альтернативами максимизации прибыли являются, как уже говорилось в разделах 6.6.1–6.6.3, стремление получить удовлетворение, максимизация выручки и рост посредством диверсификации. Менее важные цели и (или) цели, вытекающие из основных, включают увеличение доли рынка, выживание в долговременном плане, удовлетворительный уровень прибылей, увеличение размера дивидендов, финансовую ликвидность, технологическое лидерство, приобретение хорошего имиджа, социально ответственное поведение, занятие сильной конкурентной позиции и достижение личных целей руководителей высшего звена (власть, престиж, чувство самоудовлетворения, профессиональное признание и высокие премии). Эффективным средством одновременного достижения многих из этих целей является стратегия агрессивного роста и диверсификации.

Несомненно, что благодаря уже просто многочисленным оттенкам поведения и серьезным ограничениям, накладываемым на принимаемые решения, не существует единственной цели, которая охватывала бы все аспекты делового поведения. Более того, разнообразие целей и мотивов является естественным результатом рыночной экономики, состоящей из самых мелких, индивидуальных фирм и гигантских многономенклатурных корпораций. Весьма маловероятно, что все фирмы будут с той же интенсивностью и приоритетностью преследовать одинаковые цели, поскольку фирмы различаются по занимаемой на рынке позиции, формам собственности и контроля, величине конкуренции, неопределенности, технологическим возможностям, прибыльности, потенциалу прибыльности, личностным качествам владельцев и руководителей.

Но несмотря на это, мотив прибыли глубоко внедрен в сознание и фольклор современного бизнеса. И совершенно справедливо. Высококонкурентные рынки продуктов и ресурсов, существование рынков управленческих ресурсов и контроля над корпорациями дисциплинируют поведение управленцев и фирм и заставляют их настойчиво преследовать цель извлечения прибыли. Вследствие этого императив извлечения прибыли является распространенным и сильным. Конечно же прибыль стоит во главе иерархии целей большинства фирм; и если бы пришлось назвать только одну цель, характеризующую деловое поведение, то выбор пал бы на максимизацию прибыли в долговременном промежутке.

Вопросы для самоконтроля к главе 6

1. Какие целевые функции имеет фирма в условиях конкуренции?
2. Какие аргументы приводятся за максимизацию прибыли?
3. Какие аргументы приводятся против максимизации прибыли?
4. Что понимается под «разумной» прибылью?
5. Существует ли в реальности «разумная» прибыль?
6. В чем состоит различие между временны́м периодом и временны́м промежутком?
7. Какие характерные черты имеет долговременный промежуток?
8. Какие характерные черты имеет краткосрочный промежуток?
9. Что такое локальное рыночное равновесие фирмы, функционирующей в долговременном промежутке?
10. Что такое локальное рыночное равновесие фирмы, функционирующей в краткосрочном промежутке?
11. Какими формальными свойствами обладает локальное рыночное равновесие фирмы, функционирующей в долговременном промежутке?
12. Что такое первая версия задачи максимизации прибыли фирмы?
13. Как определяются функции условного спроса по Маршаллу (по Вальрасу) со стороны фирмы на ресурсы?
14. Какими формальными свойствами обладают функции условного спроса по Маршаллу?
15. Как определяется функция условного предложения фирмы на рынке готовой продукции?
16. Какими формальными свойствами обладает функция условного предложения фирмы?
17. В чем состоит теоретическое значение утверждений о маргинальных значениях функции условного предложения фирмы?
18. В чем состоит практическое значение утверждений о маргинальных значениях функции условного предложения фирмы?

19. Что такое вторая версия задачи максимизации прибыли фирмы?
20. Как определяются функции условного спроса по Хиксу со стороны фирмы на ресурсы?
21. Какими формальными свойствами обладают функции условного спроса по Хиксу?
22. Как определяется функция условных (минимальных) издержек фирмы?
23. Какими формальными свойствами обладает функция условных (минимальных) издержек?
24. В чем состоит теоретическое утверждение о маргинальных значениях функции условных (минимальных) издержек фирмы?
25. В чем состоит практическое утверждение о маргинальных значениях функции условных (минимальных) издержек фирмы?
26. Каковы альтернативы максимизации прибыли фирмы?

Задачи и упражнения для самоконтроля к главе 6

1. ПФ конкурентной фирмы имеет вид $f(x_1, x_2) = x^{2/3} \cdot x^{1/4}$ (x_1 – количество капитала, x_2 – количество труда). Цены на выпускаемую фирмой продукцию и на ресурсы соответственно равны p_0, p_1, p_2. Найдите:
   а) локальное рыночное равновесие фирмы (x_1^0, x_2^0);
   б) доход $R^0 = p^0 f(x_1^0, x_2^0)$, издержки $C^0 = p_1 x_1^0 + p_2 x_2^0$ и максимальную прибыль $PR^0 = R^0 - C^0$.
2. Конкурентная фирма производит единственный продукт, реализуемый на рынке по цене p_0. Цены капитала и труда соответственно равны p_1 и p_2. ПФ фирмы имеет вид $y = x^{1/3} \cdot x^{1/2}$ (x_1 – количество капитала, x_2 – количество труда). Определите эластичность функции спроса на труда по ценам p_0, p_1, p_2.
3. ПФ конкурентной фирмы имеет вид $f(x_1, x_2) = x_1^{1/4} \cdot x_2^{1/2}$ (x_1 – количество капитала, x_2 – количество труда). Цены капитала и труда соответственно равны $p_1 = 4$ и $p_2 = 5$. Лимит на ресурсы равен $V = 120$:
   а) определите конфигурацию ресурсов $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, максимизирующую выпуск фирмы при лимите на ресурсы;
   б) определите объем максимального выпуска $f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$;
   в) напишите уравнение изокванты, содержащей точку $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$;
   г) постройте точку $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Постройте по трем точкам (одна из которых есть точка $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$) изокосту;
   д) постройте по трем точкам (одна из которых есть точка $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$) изокванту.
4. ПФ конкурентной фирмы имеет вид $f(x_1, x_2) = x_1^{1/4} \cdot x_2^{1/4}$ (x_1 – количество капитала, x_2 – количество труда). Фиксированный выпуск фирмы $\breve{y} = 4$. Цены на капитал и труд соответственно равны $p_1 = 16$, $p_2 = 4$:

а) определите конфигурацию ресурсов $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, минимизирующую издержки фирмы при фиксированном объеме $\breve{y} = 4$ выпускаемой фирмой продукции;
б) определите минимальные издержки фирмы $\breve{C} = p_1\breve{x}_1 + p_2\breve{x}_2$;
в) напишите уравнение изокосты $\breve{C} = p_1x_1 + p_2x_2$;
г) постройте точку $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$. Постройте изокосту по трем точкам (одна из которых есть точка $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$);
д) постройте изокванту по трем точкам (одна из которых есть точка $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$).

Вопросы, тесты и задачи для контрольных работ к главе 6

1. Координаты рыночного равновесия (x_1^0, x_2^0) конкурентной фирмы есть однородные функции:
а) первой степени по всем переменным p_0, p_1, p_2;
б) нулевой степени по всем переменным p_0, p_1, p_2;
в) первой степени по переменным p_1, p_2 при фиксированной переменной p_0;
г) нулевой степени по переменным p_1, p_2 при фиксированной переменной p_0;
д) среди всех ответов а)–г) нет ни одного верного.

2. Координаты конфигурации ресурсов $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, максимизирующей выпуск фирмы при лимите V на ресурсы, есть однородные функции:
а) первой степени по ценам p_1, p_2 при фиксированном лимите;
б) нулевой степени по ценам p_1 и p_2 при фиксированном лимите;
в) первой степени по всем переменным p_1, p_2, V;
г) нулевой степени по всем переменным p_1, p_2, V;
д) для полного ответа условий недостаточно.

3. Координаты конфигурации ресурсов $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$, минимизирующей издержки фирмы при фиксированном объеме $\breve{y}$ выпускаемой фирмой продукции, есть однородные функции:
а) нулевой степени по всем переменным p_1, p_2, $\breve{y}$;
б) первой степени по всем переменным p_1, p_2, $\breve{y}$;
в) нулевой степени по переменным p_1, p_2;
г) первой степени по переменным p_1, p_2;
д) среди всех ответов а)–г) нет ни одного верного.

4. Предельный выпуск $\left(\dfrac{\partial h(p_1, p_2, V)}{\partial p_i}\right)$ по цене p_i i-го ресурса ($i = 1, 2$):
а) противоположен по знаку множителю $\hat{\lambda}$ Лагранжа;
б) равен значению $\hat{x}_i$ функции условного спроса по Маршаллу на i-й ресурс;

в) пропорционален значению $\breve{x}_i$ функции условного спроса по Хиксу на i-й ресурс;
г) равен значению $\breve{x}_i$ функции условного спроса по Хиксу на i-й ресурс;
д) среди всех ответов а)–г) нет ни одного верного.

5. Предельные издержки $\left(\dfrac{\partial C(p_1, p_2, \breve{y})}{\partial p_i}\right)$ по цене p_i i-го ресурса ($i = 1, 2$):
а) пропорциональны (с коэффициентом пропорциональности, не равном единице) значению $\breve{x}_i$ функции условного спроса по Хиксу на i-й ресурс;
б) равны значению $\breve{x}_i$ функции условного спроса по Хиксу на i-й ресурс;
в) пропорциональны значению $\hat{x}_i$ функции условного спроса по Маршаллу на i-й ресурс;
г) равны значению $\hat{x}_i$ функции условного спроса по Маршаллу на i-й ресурс;
д) среди всех ответов а)–г) нет ни одного верного.

6. Конкурентная фирма производит единственный продукт, реализуемый на рынке по цене p_0. Цены капитала и труда соответственно равны p_1 и p_2. Производственная функция фирмы имеет вид $y = x_1^{1/4} \cdot x_2^{2/3}$ (x_1 – количество капитала, x_2 – количество труда). Определите эластичность функция спроса на капитал по ценам p_0, p_1, p_2.

7. Производственная функция конкурентной фирмы имеет вид $f(x_1, x_2) = x_1^{1/4} \cdot x_2^{2/3}$ (x_1 – количество капитала, x_2 – количество труда). Цены капитала и труда соответственно равны $p_1 = 1$ и $p_2 = 4$. Лимит на ресурсы равен $V = 11$:
а) определите конфигурацию ресурсов $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, максимизирующую выпуск фирмы при лимите на ресурсы;
б) определите объем максимального выпуска $f(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$;
в) напишите уравнение изокванты, содержащей точку $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$;
г) постройте точку $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Затем постройте по трем точкам (одна из которых есть точка $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$) изокосту;
д) постройте по трем точкам (одна из которых есть точка $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$) изокванту.

8. Производственная функция конкурентной фирмы имеет вид $f(x_1, x_2) = x_1^{2/3} \cdot x_2^{1/4}$ (x_1 – количество капитала, x_2 – количество труда). Фиксированный выпуск фирмы $\breve{y} = 6912$. Цены на капитал и труд соответственно равны $p_1 = 4$, $p_2 = 1$:
а) определите конфигурацию ресурсов $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$, минимизирующую издержки фирмы при фиксированном объеме $\breve{y} = 4$ выпускаемой фирмой продукции;

б) определите минимальные издержки фирмы $\breve{C} = p_1\breve{x}_1 + p_2\breve{x}_2$;

в) напишите уравнение изокосты $\breve{C} = p_1x_1 + p_2x_2$;

г) постройте точку $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$. Постройте по трем точкам (одна из которых есть точка $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$) изокосту;

д) постройте изокванту по трем точкам (одна из которых есть точка $(\breve{x}_1, \breve{x}_2)$).

Глава 7

ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ И НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ПРОГРЕСС

7.1. Производственные функции, используемые в экономическом анализе и прогнозировании, и их свойства

7.1.1. Понятие производственной функции (ПФ) хорошо известно из курса «Микроэкономика. Промежуточный уровень»: ПФ $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ – это функция, независимые переменные $(x_1, \ldots, x_n)$ которой принимают значения объемов затрачиваемых или используемых ресурсов (число n переменных равно числу ресурсов), а значение y функции равно объему выпускаемой продукции. Вектор $(x_1, \ldots, x_n)$ называется конфигурацией ресурсов. ПФ зависит от параметров (одного или нескольких).

ПФ, используемые для описания функционирования фирмы или отрасли, называются *микроэкономическими*. ПФ, используемые для описания функционирования региона или национальной экономики, называются *макроэкономическими*.

Результаты теории ПФ используются и для микро-, и для макроэкономических ПФ. Элементы теории ПФ рассмотрим в основном для случая $n = 2$ по следующим двум причинам:

1) при $n = 2$ многие построения допускают наглядную геометрическую интерпретацию;

2) принципиальные результаты при $n > 2$ ничем не отличаются от результатов при $n = 2$. При $n = 2$ $x_1 = K$, $x_2 = L$ (K – количество

(основного) капитала, L – количество труда). ПФ определена при $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$).

7.1.2. Рассмотрим примеры ПФ (при $n = 2$).

1. ПФ Кобба–Дугласа (ПФКД): $y = a_0 \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$.

2. Линейная ПФ (ЛПФ): $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ и ПФ с линейными изоквантами (ПФЛИ): $y = (b_0 + b_1x_1 + b_2x_2)^h$.

3. ПФ Леонтьева (ПФЛ) (ПФ затраты – выпуск – ПФЗВ): $y = \min(c_1x_1; c_2x_2)$.

4. Классическая ПФ с постоянной эластичностью замены ресурсов (ПФ ПЭЗР): $y = a_0 \cdot (a_1x_1^{-\alpha} + a_2x_2^{-\alpha})^{-h/\alpha}$.

В этих примерах постоянные a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, h, α, c_1, c_2 играют роль параметров, которые являются обычно положительными величинами.

Примеры ПФ (при $n > 2$):

1′. ПФКД:

$y = a_0x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$.

2′. ЛПФ:

$y = b_0 + b_1x_1 + \ldots + b_nx_n$

и ПФ с плоскими изоквантами (ПФПИ):

$y = (b_0 + b_1x_1 + \ldots + b_nx_n)^h$.

3′. ПФЛ (ПФЗВ):

$y = \min(c_1x_1; \ldots; c_nx_n)$.

4′. Классическая ПФ с постоянной эластичностью замены ресурсов:

$y = a_0(a_1x_1^{-\alpha} + \ldots + a_nx_n^{-\alpha})^{-h/\alpha}$.

В этих примерах величины $a_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, b_0, b_1, \ldots, b_n, h, c_1, \ldots, c_n, \alpha,$ $a_1, \ldots, a_n$ играют роль параметров, которые обычно положительны.

ПФКД – пример ПФ, задаваемой в *мультипликативной форме*, ЛПФ – пример ПФ, задаваемой в *аддитивной форме*. Переход от мультипликативной формы к аддитивной осуществляется с помощью операции логарифмирования: $\ln y = \ln a_0 + \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2$. Полагая $\ln y = w$, $\ln x_1 = v_1$, $\ln x_2 = v_2$, получим ПФ в аддитивной форме: $w = \ln a_0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. Переход от аддитивной формы к мультипликативной осуществляется с помощью операции потенцирования: полагая $b_0 = \ln a_0$, $x_1 = \ln v_1$, $x_2 = \ln v_2$, $y = \ln w$, получим $\ln w = \ln a_0 + b_1 \ln v_1 + b_2 \ln v_2$, откуда следует, что $w = a_0 v_1^{b_1} v_2^{b_2}$, т.е. ПФ в мультипликативной форме.

Фрагменты карт изоквант ПФ 1–4 приведены на рис. 7.1–7.4.

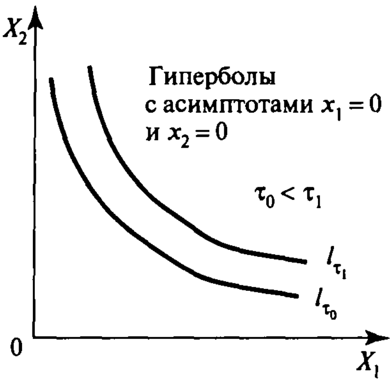


Рис. 7.1. Фрагмент карты изоквант ПФКД

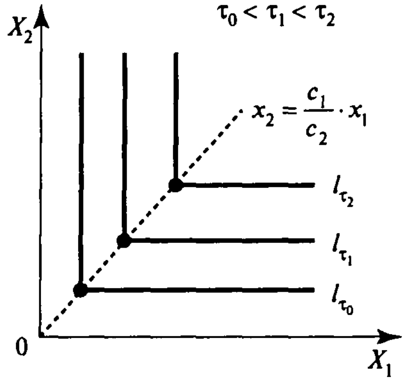


Рис. 7.2. Фрагмент карты изоквант ПФЛ

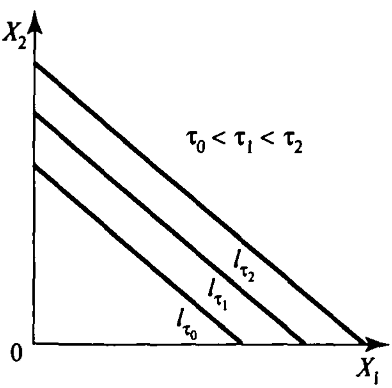


Рис. 7.3 Фрагмент карты изоквант ПД с линейными изоквантами

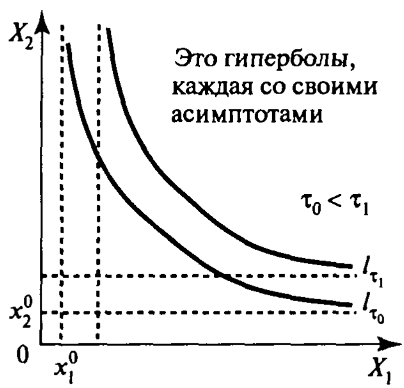


Рис. 7.4. Фрагмент карты изоквант ПФ ПЭЗР

Рисунки 7.1 и 7.4 наглядно демонстрируют, что ПФ ПЭЗР более адекватна реальности, чем ПФКД, ибо не бывает ситуации, когда капитал есть и практически нет работников или много работников и практически нет капитала. То есть ПФКД можно рассматривать только в конечной части первой четверти плоскости Ox_1x_2. В случае ПФ ПЭЗР для выпуска продукции в объеме, скажем, τ_0 каждый ресурс требуется в количестве не менее чем x_1^0 (первый ресурс) и x_2^0 (второй ресурс), что естественно с содержательной экономической точки зрения.

7.1.3. Напомним свойства ПФ (при $n = 2$) (для конкретной ПФ не обязаны выполняться все свойства):

1) $f(0, 0) = 0$ (нет ресурсов, значит, нет выпускаемой продукции);

$f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0$;

2) $\tilde{x} \geq x$ $(\tilde{x} \neq x) \Rightarrow f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) > f(x_1, x_2)$ (свойство монотонности).

При $x = (x_1, x_2) > 0$ $\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} > 0$ (≥ 0), $\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} > 0$ (≥ 0),

т.е. если затраты одного ресурса увеличиваются, а затраты другого ресурса остаются неизменными, то объем выпускаемой продукции растет (точнее, не убывает);

3) при $x = (x_1, x_2) > 0$ $\dfrac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} < 0$ (≤ 0), $\dfrac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} < 0$ (≤ 0),

т.е. имеет место падение эффективности производства с ростом объема затрат одного из ресурсов и сохранением затрат другого ресурса неизменными;

4) существует число $\rho > 0$, такое, что для любого числа $\gamma > 0$ и любого вектора $x = (x_1, x_2) \geq 0$ справедливо равенство

$f(\gamma \cdot x_1; \gamma \cdot x_2) = \gamma^\rho \cdot f(x_1, x_2)$ – *свойство однородности* ПФ.

Свойства ПФ (при $n > 2$):

1′) $f(0, \ldots, 0) = 0$, $f(0, x_2, \ldots, x_n) = \ldots = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = 0$;

2′) $\tilde{x} \geq x$ $(\tilde{x} \neq x) \Rightarrow f(\tilde{x}) > f(x)$ (более детально $f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) >$ $> f(x_1, \ldots, x_n))$, при $x > 0$ $\dfrac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} > 0$ (≥ 0), …, $\dfrac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} > 0$ (≥ 0);

3′) при $x > 0$ $\dfrac{\partial^2 f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^2} < 0$ (≤ 0), …, $\dfrac{\partial^2 f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n^2} < 0$ (≤ 0);

4′) существует число $\rho > 0$, такое, что для любого вектора $x \geq 0$ справедливо равенство $f(\gamma x_1, \ldots, \gamma x_n) = \gamma^\rho f(x_1, \ldots, x_n)$ – свойство однородности ПФ.

7.1.4. Проверим выполнение свойств 1–4 для ПФ 1–4.

Для ПФКД свойства 1, 2, 4 выполняются, а свойство 3 выполняется, если $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 < 1$ и число $\rho = \alpha_1 + \alpha_2$: $f(\gamma x_1, \gamma x_2) =$ $= a_0(\gamma x_1)^{\alpha_1}(\gamma x_2)^{\alpha_2} = \gamma^{\alpha_1+\alpha_2} a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} = \gamma^{\alpha_1+\alpha_2} f(x_1, x_2)$.

Для ЛПФ при $b_0 \neq 0$ свойства 1 и 4 не выполняются, при $b_0 = 0$ свойства 1 $f(0, 0) = 0$ и 4 выполняются, свойство 2 выполняется при $b_1 > 0$ и $b_2 > 0$, вторые частные производные равны нулю.

Для ПФЛ свойство 1) выполняется. Для свойств 2) и 3) имеем при $x_1 > \frac{C_2}{C_1}x_2$ $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = 0$, при $0 < x_1 < \frac{C_2}{C_1}x_2$ $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} > 0, \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} = 0$. Аналогично, при $x_2 > \frac{C_1}{C_2}x_1$ $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = 0$, при $0 < x_2 < \frac{C_1}{C_2}x_1$ $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} > 0$, $\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = 0$. Свойство 4 выполняется.

Для ПФ ПЭЗР при $\alpha > 0$ и $h > 0$ $f(0, 0), f(0, x_2), f(x_1, 0)$ равны 0, при $0 > \alpha > -1$ $f(0, 0) = 0, f(0, x_2) \neq 0, f(x_1, 0) \neq 0$. При $h > 0$ $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} > 0$ и $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} > 0$, т.е. свойство 2) выполнено. При $h \leq 1$ и $\alpha + 1 > 0$ $\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} < 0$ и $\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} < 0$, при $h > 1$ и $\alpha + 1 > 0$ вторые (чистые) частные производные отрицательны, если $\frac{x_1}{x_2} > \left(\frac{a_1(h-1)}{a_2(\alpha+1)}\right)^{1/\alpha}$ и $\frac{x_2}{x_1} > \left(\frac{a_2(h-1)}{a_1(\alpha+1)}\right)^{1/\alpha}$, т.е. свойство 3) выполняется. Свойство 4) выполняется при $\rho = h$.

7.1.5. Рассмотрим геометрическую и экономическую интерпретации свойств ПФ.

Если увеличиваем количество капитала на единицу, то объем производства вырастет на $\frac{\partial f}{\partial x_1}$:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \approx \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1}, \quad \Delta x_1 \to 0.$$

Проведем вертикальные плоскости через точки $(x_1^0, x_2^0, f(x_1^0, x_2^0))$, $(x_1^0, 0)$, $(0, x_2^0)$. Они пересекают график ПФ $y = f(x_1, x_2)$ по плоским линиям L_1^0 и L_2^0 (рис. 7.5). Далее проводим касательные K_1^0 и K_2^0 к линиям L_1^0 и L_2^0 в точке $(x_1^0, x_2^0, f(x_1^0, x_2^0))$.

Имеем $\operatorname{tg}\varphi_1^0 = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} > 0$, $\operatorname{tg}\varphi_2^0 = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} > 0$ (свойство 2).

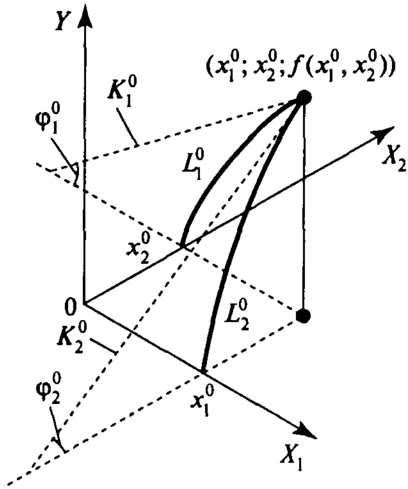


Рис. 7.5

Неравенство $\dfrac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} < 0$ (свойство 3)) означает, что предельная производительность труда $\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}$ убывает с ростом затрат труда x_2 (рис. 7.6). Аналогичное справедливо для предельной производительности капитала $\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}$.

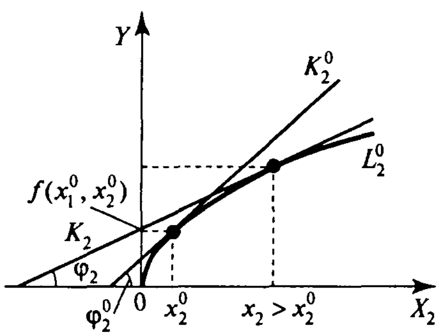


Рис. 7.6

Пример, когда в свойстве 2 может быть равенство нулю, дает ПФЛ.

При $\gamma > 1$ рост масштаба производства (увеличение затрат капитала и труда в γ раз) увеличивает объем выпуска в γ^ρ раз (при $\rho > 0$).

Если при этом $\rho > 1$, то растет эффективность производства (случай возрастающей эффективности с ростом масштаба производства). Если, например, $\rho = 2$ и $\gamma = 3$, то свойство 4) означает, что при росте объема капитала и труда в 3 раза объем выпуска растет в $\gamma^\rho = 9$ раз.

Если $\rho = 1$, то $f(\gamma \cdot x_1; \gamma \cdot x_2) = \gamma \cdot f(x_1, x_2)$ (случай постоянной эффективности с ростом масштаба производства). Если, например, $\gamma = 3$, то свойство 4) означает, что при росте объема капитала и труда в 3 раза объем выпуска растет также в $\gamma^\rho = 3$ раза.

Если $\rho < 1$, то имеем убывающую эффективность с ростом масштаба производства. Если, например, $\rho = 1/2$ и $\gamma = 3$, то свойство 4) означает, что при росте объема капитала и труда в 3 раза объем выпуска растет в $\gamma^\rho = \sqrt{3} \cong 1{,}7$ раза.

7.1.6. Приведем понятийный аппарат теории ПФ ($n = 2$).

При $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ дробь x_1/x_2 называется *капиталовооруженностью труда*, дробь $\dfrac{f(x_1, x_2)}{x_1}$ – *средней производительностью капитала*, дробь $\dfrac{f(x_1, x_2)}{x_2}$ – *средней производительностью труда*.

Средние производительности капитала и труда – это относительные величины (первого порядка), ибо они равны отношениям абсолютных величин (количества выпуска на количество соответствующего ресурса). Предельные производительности капитала и труда $\dfrac{f(x_1, x_2)}{x_1}$ и $\dfrac{f(x_1, x_2)}{x_2}$ – также относительные величины.

Дробь $\dfrac{\partial f(x_1, x_2) / \partial x_1}{f(x_1, x_2) / x_1} = E_1(f(x_1, x_2))$ называется (*частной*) *эластичностью выпуска по первому ресурсу* (*капиталу*), дробь $\dfrac{\partial f(x_1, x_2) / \partial x_2}{f(x_1, x_2) / x_2} = E_2(f(x_1, x_2))$ называется (*частной*) *эластичностью выпуска по второму ресурсу* (*труду*). Эти эластичности называются *точечными* (*предельными*).

Точечные (предельные) частные эластичности – это относительные величины (второго порядка), ибо они равны отношениям относительных величин (первого порядка). Сумма $E(f(x_1, x_2)) = E_1(f(x_1, x_2)) + E_2(f(x_1, x_2))$ называется *эластичностью производства*.

Имеем

$$E_1(f(x_1,x_2)) \cong \frac{\dfrac{f(\tilde{x}_1,x_2)-f(x_1,x_2)}{\tilde{x}_1-x_1}}{\dfrac{f(x_1,x_2)}{x_1}} = \frac{\dfrac{f(\tilde{x}_1,x_2)-f(x_1,x_2)}{f(x_1,x_2)}\cdot 100\%}{\dfrac{\tilde{x}_1-x_1}{x_1}\cdot 100\%}.$$

Обе дроби после знака $\cong$ (приближенного равенства) называются *конечной (процентной) частной эластичностью* выпуска по первому ресурсу, т.е. справедливо приближенное равенство

Точечная (предельная) эластичность (по первому ресурсу) $\cong$
$\cong$ Конечная (процентная) эластичность (по первому ресурсу).

Конечная (процентная) эластичность выпуска по первому ресурсу (капиталу) показывает, на сколько процентов изменится выпуск, если объем затрачиваемого первого ресурса (капитала) изменится на 1%. Аналогично поясняется (частная) эластичность выпуска по второму ресурсу (труду) $E_2(f(x_1, x_2))$.

Если нет особой оговорки, то под термином «частная эластичность» следует понимать точечную (предельную) эластичность.

Частные эластичности для ПФКД имеют вид

$$E_1(f(x_1,x_2)) = \frac{x_1}{f(x_1,x_2)}\cdot\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1},$$

$$E_1(a_0x_1^{\alpha_1},x_2^{\alpha_2}) = \frac{x_1}{a_0x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}}\cdot a_0\alpha_1x_1^{\alpha_1-1}\cdot x_2^{\alpha_2} = \alpha_1,$$

$$E_1(a_0x_1^{\alpha_1},x_2^{\alpha_2}) = \alpha_2 \quad (\text{обычно } \alpha_1,\ \alpha_2 < 1).$$

Частные эластичности для ПФ ПЭЗР имеют вид

$$E_1(f(x_1,x_2)) = \frac{-\dfrac{h}{\alpha}x_1a_0\left(a_1x_1^{-\alpha}+a_2x_2^{-\alpha}\right)^{\left(-\frac{h}{\alpha}-1\right)}}{a_0\left(a_1x_1^{-\alpha}+a_2x_2^{-\alpha}\right)^{-\frac{h}{\alpha}}}\cdot a_1(-\alpha_1)x_1^{-\alpha-1} =$$

$$= \frac{ha_1x_1^{-\alpha}}{a_1x_1^{-\alpha}+a_2x_2^{-\alpha}},$$

$$E_2(f(x_1,x_2)) = \frac{ha_2x_2^{-\alpha}}{a_1x_1^{-\alpha}+a_2x_2^{-\alpha}}.$$

Эластичность производства

$E(f(x_1, x_2)) = E_1 + E_2$ для ПФКД и для ПФ ПЭЗР имеет соответственно вид $E = \alpha_1 + \alpha_2$, $E = h$.

Напомним важное понятие предельной нормы технологической замены одного ресурса другим.

Если точка x^2 расположена левее точки x^1, то дробь $RTS_{12} = -\dfrac{x_2^2 - x_2^1}{x_1^2 - x_1^1}$ – это норма технологической замены первого ресурса вторым (рис. 7.7), ибо количество x_1^1 первого ресурса уменьшается, а количество x_2^1 второго ресурса растет.

Если точка x^2 расположена правее точки x^1, то дробь $RTS_{21} = -\dfrac{x_2^2 - x_2^1}{x_1^2 - x_1^1}$ – это норма технологической замены второго ресурса первым (см. рис. 7.7), ибо количество x_1^1 первого ресурса растет, а количество x_2^1 второго ресурса уменьшается.

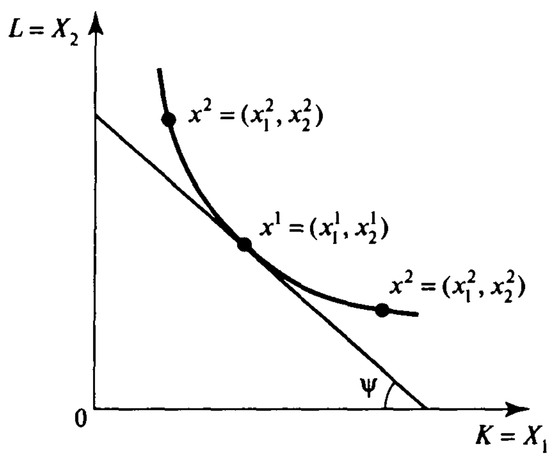


Рис. 7.7

При $x_1^2 \to x_1^1$ имеем

$$RTS_{12} \to -\frac{dx_2(x_1^1)}{dx_1} = MRTS_{12},$$

$$RTS_{21} \to -\frac{dx_2(x_1^1)}{dx_1} = MRTS_{21}.$$

«Идем» к точке x^1 с разных сторон, а получаем один и тот же результат $-\dfrac{dx_2(x_1^1)}{dx_1}$, который следует интерпретировать по-разному (как предельную норму технологической замены первого ресурса вторым $MRTS_{12}$, если к точке x^1 идем слева, и как предельную норму технологической замены второго ресурса первым $MRTS_{21}$, если к точке x^1 идем справа. Поскольку по выражению $-\dfrac{dx_2(x_1^1)}{dx_1}$ нельзя определить, как оно было получено, постольку подойдем к определению предельной нормы технологической замены одного ресурса другим чисто формально:

$$MRTS_{12} = -\frac{dx_2(x_1^1)}{dx_1}.$$

Снизу находится тот ресурс, который заменяют, сверху находится тот ресурс, который заменяет, т.е. $MRTS_{12}$ – это *предельная норма технологической замены* первого ресурса вторым, а $MRTS_{21} = -\dfrac{dx_1(x_2)}{dx_2}$ – это предельная норма технологической замены второго ресурса первым.

Имеем $\lim\limits_{x_1^2 \to x_1^1} -\dfrac{(x_2^2 - x_2^1)}{x_1^2 - x_1^1} = -\dfrac{dx_2(x_1)}{dx_1} \cong -\dfrac{x_2^2 - x_2^1}{x_1^2 - x_1^1}$.

Уравнение $f(x_1, x_2) = \tau$ описывает изокванту – линию постоянного объема выпускаемой продукции. Это уравнение задает неявную функцию $x_2 = x_2(x_1)$. По теореме о неявной функции

$$-\frac{dx_2(x_1)}{dx_1} = \frac{\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}},$$

т.е.

$$\frac{\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}} = MRTS_{12}.$$

Таким образом, получили, что предельная норма технологической замены первого ресурса вторым есть отношение предельной производительности первого ресурса к предельной производительности второго ресурса. Имеем $MRTS_{12} = \operatorname{tg} \psi$ (рис. 7.8). Если угол ψ_1 мал, тогда его тангенс $\operatorname{tg} \psi_1$ также мал. Это означает, что для замены одной единицы капитала ($K = x_1$) в конфигурации ресурсов $x^1 = (x_1^1, x_2^1)$ требуется мало единиц труда ($L = x_2$). Если угол ψ_2 велик, то $\operatorname{tg} \psi_2$ также велик, что означает, что для замены одной единицы капитала ($K = x_1$) в конфигурации ресурсов $x^2 = (x_1^2, x_2^2)$ требуется много единиц труда ($L = x_2$).

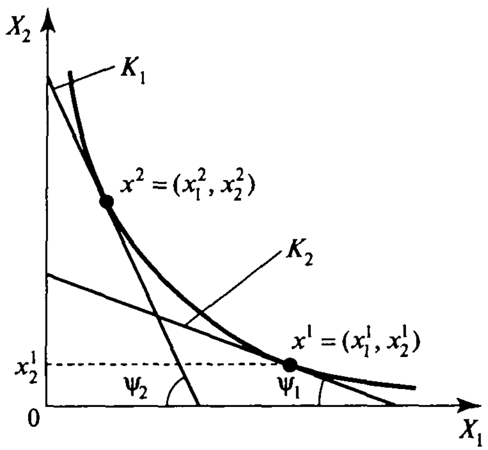


Рис. 7.8

В точке (x_1^0, x_2^0) *локального рыночного равновесия фирмы* (ЛРРФ), т.е. в точке (x_1^0, x_2^0), максимизирующей прибыль $PR(x_1, x_2) = p_0 f(x_1, x_2) - p_1 x_1 - p_2 x_2$ фирмы, имеем (рис. 7.9):

$$p_0 \cdot \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} = p_1,$$

$$p_0 \cdot \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} = p_2.$$

(p_0 – цена единицы выпускаемой продукции, p_1 – цена единицы капитала, p_2 – цена единицы труда), а тогда $MRTS_{12} = \dfrac{\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}} = \dfrac{p_1}{p_2}$.

Таким образом, в точке ЛРРФ $MRTS_{12} = \frac{p_1}{p_2}$, что является важным результатом.

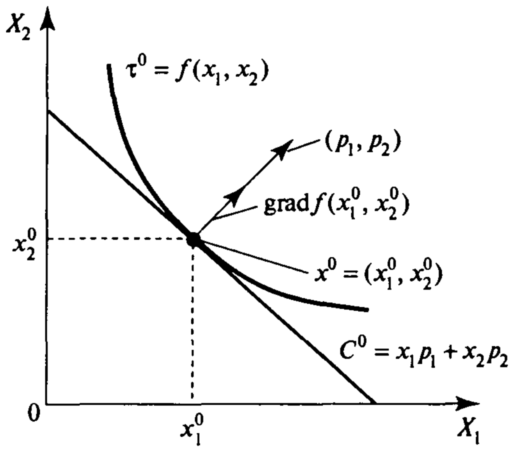


Рис. 7.9

Если p_1 относительно велика, а p_2 относительно мала, то $MRTS_{12}$ велика. Это означает, что в ЛРРФ (x_1^0, x_2^0) координата x_2^0 относительно велика, а координата x_1^0 относительно мала, что очевидно с содержательной точки зрения: дорогой ресурс фирма приобретает в относительно скромном объеме, а дешевый – в относительно большом объеме. На изокванте l_{y^0} $(y^0 = f(x_1^0, x_2^0))$ ЛРРФ (x_1^0, x_2^0) изображается точкой с большим количеством труда x_2^0 и относительно малым количеством капитала x_1^0. Случай, когда цена p_1 относительно мала, а цена p_2 относительно велика, аналогичен только что рассматриваемому. Здесь уже координата x_2^0 относительно мала, а координата x_1^0 – относительно велика.

Если параметры рассматриваемых ПФ и сами ПФ не зависят от времени t, то такие ПФ называются *статическими*. Объемы ресурсов и объем выпуска могут зависеть от времени t, т.е. могут иметь представление в виде *временных рядов* $x_1(0), x_1(1), \ldots, x_1(T)$; $x_2(0), x_2(1), \ldots, x_2(T)$; $y(0), y(1), \ldots, y(T)$; $y(t) = f(x_1(t), x_2(t))$. Здесь время *дискретное*, t – номер года, $t = 0, 1, \ldots, T$; $t = 0$ – базовый год временного промежутка, охватывающего годы $1, 2, \ldots, T$. ПФ, используемые для решения прикладных задач, имеют, как правило, дискретное время. ПФ для решения теоретических задач могут иметь как дискретное, так и непрерывное время.

ПФ называется *динамической*, если: 1) время t фигурирует в качестве самостоятельной переменной величины (как бы самостоятельного ресурса – фактора производства), влияющей на объем выпускаемой продукции; 2) параметры ПФ и она сама зависят от времени: $y(t) = f(t, x_1(t), x_2(t))$.

Простейший пример динамической ПФ дает ПФ вида $y(t) = e^{\lambda t} f(x_1(t), x_2(t))$, где число λ характеризует темп прироста (если $\lambda > 0$) или темп падения (если $\lambda < 0$) выпуска под влиянием фактора времени, который учитывает всю совокупность факторов (научно-технологический прогресс (НТП), сезонные колебания, природные факторы и т.д.), которые отличны от труда и капитала. Из всей совокупности факторов, отличных от труда и капитала, одним из самых значимых является фактор НТП. Вопросы учета НТП в ПФ рассматриваются в параграфе 7.4 этой главы.

7.1.7. Приведенные понятия естественным образом переносятся на случай $n > 2$.

Дробь $\dfrac{f(x_1, \ldots, x_n)}{x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, называется *средней производительностью* i-го ресурса, частная производная $\dfrac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, называется *предельной производительностью* i-го ресурса, дробь $\dfrac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \Big/ \dfrac{f(x_1, \ldots, x_n)}{x_i} = E_i(f(x_1, \ldots, x_n))$ называется *частной эластичностью выпуска* по i-му ресурсу, сумма $E(f(x_1, \ldots, x_n)) = E_1(f(x_1, \ldots, x_n)) + \ldots + E_n(f(x_1, \ldots, x_n))$ называется *эластичностью производства*.

Предельная норма технологической замены i-го ресурса j-м (при сохранении неизменным объема выпускаемой продукции и объемов x_k остальных ресурсов $k \neq i$, $k \neq j$) определяются так:

$$MRTS_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i}.$$

По теореме о неявной функции имеем

$$MRTS_{ij} = \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)/\partial x_i}{\partial f(x_1, \ldots, x_n)/\partial x_j}.$$

В точке $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *локального рыночного равновесия фирмы* (ЛРРФ) имеем

$$p_0 \frac{\partial f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_1} = p_1, \ldots, p_0 \frac{\partial f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_n} = p_n$$

(p_0 – цена выпускаемой фирмой продукции, p_i – цена i-го ресурса), а тогда

$$MRTS_{ij} = \frac{\partial f(x_1^0, \ldots, x_n^0)/\partial x_i}{\partial f(x_1^0, \ldots, x_n^0)/\partial x_j} = \frac{p_i}{p_j}.$$

7.2. Эластичность замены одного ресурса другим, ее логарифмическое представление и геометрическая интерпретация. Вывод ПФ с постоянной эластичностью замены ресурсов

7.2.1. Приведем важное понятие эластичности замены одного ресурса другим.

Эластичность переменной x по переменной y имеет вид

$$E_y x = \frac{y}{x} \cdot \frac{dx}{dy}.$$

Если в приведенном выражении $E_y x$ положить чисто формально

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \quad y = MRTS_{12} = \frac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2}$$

и добавить знак минус, то получим *эластичность замены первого ресурса вторым* (ЭЗ ПРВ):

$$E_{12} = -\frac{MRTS_{12}}{\frac{x_1}{x_2}} \cdot \frac{d\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{dMRTS_{12}}.$$

Заменив в выражении E_{12} предельную норму технологической замены первого ресурса вторым $MRTS_{12}$ на отношение предельных производительностей, получим

$$E_{12} = -\frac{\dfrac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2}}{\dfrac{x_1}{x_2}} \cdot \frac{d\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)}{d\left(\dfrac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2}\right)} =$$

$$= -\frac{d\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) \Big/ \dfrac{x_1}{x_2}}{d\left(\dfrac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2}\right) \Big/ \dfrac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2}} =$$

$$= -\frac{d\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{d\ln\left(\dfrac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2}\right)}.$$

Получили представление ЭЗ ПРВ в форме логарифмической производной капиталовооруженности труда $\dfrac{x_1}{x_2}$ по предельной норме технологической замены $MRTS_{12}$ первого ресурса вторым.

Если в последнем выражении под знаком обоих логарифмов поменять местами числитель и знаменатель, то, очевидно, «шестиэтажная» дробь не изменится, поэтому получим, что

$$E_{12} = -\frac{d\ln\dfrac{x_2}{x_1}}{d\ln\dfrac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}} = E_{21},$$

т.е. получим *эластичность замены второго ресурса первым.*

Таким образом, $E_{12} = E_{21}$ (т.е. «эластичности все равно, кто кого заменяет»). Поэтому естественно далее использовать термин *эластичность замены одного ресурса другим* (ЭЗ ОРД).

7.2.2. Найдем эластичность замены одного ресурса другим для некоторых основных ПФ.

Для ПФ ПЭЗР $y = a_0(a_1x_1^{-\alpha} + a_2x_2^{-\alpha})^{-\frac{h}{\alpha}}$ имеем

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2} = \frac{\left(-\frac{h}{\alpha}\right)a_0(a_1x_1^{-\alpha} + a_2x_2^{-\alpha})^{-\frac{h}{\alpha}-1} \cdot a_1(-\alpha)x_1^{-\alpha-1}}{\left(-\frac{h}{\alpha}\right)a_0(a_1x_1^{-\alpha} + a_2x_2^{-\alpha})^{-\frac{h}{\alpha}-1} \cdot a_2(-\alpha)x_2^{-\alpha-1}} = \frac{a_1x_1^{-\alpha-1}}{a_2x_2^{-\alpha-1}},$$

$$E_{12} = -\frac{d\left(\ln\frac{x_1}{x_2}\right)}{d\ln\frac{a_1}{a_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{-\alpha-1}} = \frac{1}{1+\alpha}.$$

Для ПФ КД $y = a_0x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}$ имеем

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2} = \frac{a_0\alpha_1x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2}}{a_0\alpha_2x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2-1}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot\frac{x_2}{x_1},$$

$$E_{12} = -\frac{d\left(\ln\frac{x_1}{x_2}\right)}{d\ln\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{x_2}{x_1}\right)} = \frac{d\ln\frac{x_1}{x_2}}{d\ln\frac{x_1}{x_2}} = 1.$$

Для ПФ с линейными изоквантами $y = (b_0 + b_1x_1 + b_2x_2)^h$ имеем

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2} = \frac{h(b_0 + b_1x_1 + b_2x_2)^{h-1}\cdot b_1}{h(b_0 + b_1x_1 + b_2x_2)^{h-1}\cdot b_2} = \frac{b_1}{b_2},$$

$$E_{12} = -\frac{d\left(\ln\frac{x_1}{x_2}\right)}{d\ln\left(\frac{b_1}{b_2}\right)} = -\frac{d\ln\frac{x_1}{x_2}}{0} = \infty.$$

Для ПФЛ (ПФЗВ) $y = \min(C_1x_1, C_2x_2)$ имеем $E_{12} = 0$.

7.2.3. Рассмотрим геометрическую интерпретацию эластичности замены одного ресурса другим.

Поменяв в числителе выражения E_{12} местами x_1 и x_2 (в результате чего перед дробью исчезнет знак «минус») и использовав формулу производной неявной функции $\frac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2} = -\frac{dx_2}{dx_1}$, будем иметь следующую цепочку равенств:

$$E_{12} = -\frac{\dfrac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2}}{\dfrac{x_1}{x_2}} \cdot \frac{d\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)}{d\left(\dfrac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2}\right)} =$$

$$= \frac{\dfrac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2}}{\dfrac{x_2}{x_1}} \cdot \frac{d\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)}{d\left(\dfrac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2}\right)} =$$

$$= \frac{-\dfrac{dx_2}{dx_1}}{\dfrac{x_2}{x_1}} \cdot \frac{d\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)}{d\left(-\dfrac{dx_2}{dx_1}\right)} \cong \left.\frac{-\dfrac{dx_2}{dx_1}}{\dfrac{x_2}{x_1}}\right|_{P = (x_1, x_2)} \frac{\Delta\dfrac{x_2}{x_1}}{\Delta\left(-\dfrac{dx_2}{dx_1}\right)} =$$

$$= \left.\frac{-\dfrac{dx_2}{dx_1}}{\dfrac{x_2}{x_1}}\right|_{P = (x_1, x_2)} \frac{\left.\dfrac{x_2}{x_1}\right|_{P'} - \left.\dfrac{x_2}{x_1}\right|_{P}}{\left.-\dfrac{dx_2}{dx_1}\right|_{P'} - \left.\left(-\dfrac{dx_2}{dx_1}\right)\right|_{P}} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha' - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\varphi' - \operatorname{tg}\varphi},$$

где

$$\left.-\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{P} = \operatorname{tg}\varphi; \quad \left.\frac{x_2}{x_1}\right|_{P} = \operatorname{tg}\alpha; \quad \left.\frac{x_2}{x_1}\right|_{P'} = \operatorname{tg}\alpha'; \quad \left.-\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{P'} = \operatorname{tg}\varphi' \text{ (рис. 7.10).}$$

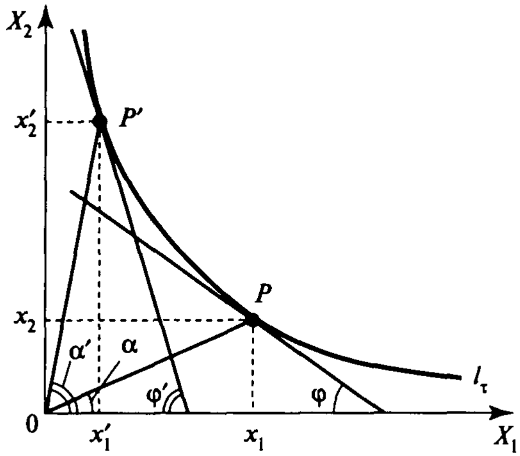


Рис. 7.10

Если изокванта – прямая, тогда $E_{12} = \infty$ ($\operatorname{tg}\alpha' \neq \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{tg}\varphi$) (рис. 7.11). Если радиус R кривизны изокванты в точке P уменьшается, то $E_{12} \to 0$. (рис. 7.12).Если $R \to 0$, то в пределе получим «угол» (рис. 7.13).

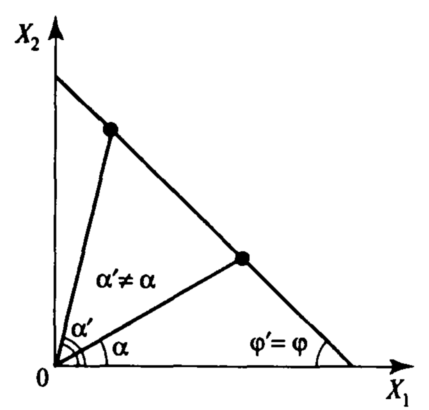


Рис. 7.11

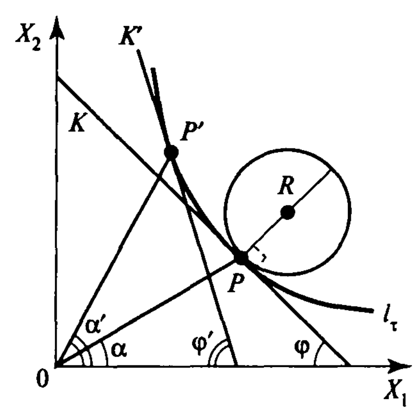


Рис. 7.12

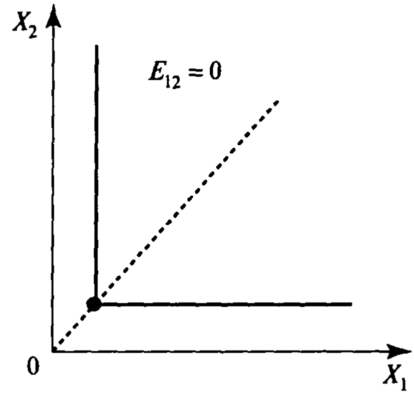


Рис. 7.13

7.2.4. Приводимый ниже вывод ПФ с постоянной эластичностью замены ресурсов следует статье К.В. Аршакуни (2001).

Если эластичность замены одного ресурса другим постоянна ($E_{12} = \sigma$), то получаем *дифференциальное уравнение* второго порядка с частными производными (в уравнении фигурируют частные производные $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}$ и дифференциал от логарифма их отношения):

$$-\frac{d\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{d\ln\left(\frac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2}\right)} = \sigma,$$

откуда следует, что

$$-\frac{1}{\sigma} d\ln\frac{x_1}{x_2} = d\ln\left(\frac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2}\right). \qquad (7.2.1)$$

Дальше можно рассуждать так. Уравнение $f(x_1, x_2) = \tau$ определяет неявную функцию $x_2 = h(x_1, \tau)$ (или $x_1 = g(x_2, \tau)$), графиком которой является изокванта. Полагая в (7.2.1) в последнем выражении $x_2 = h(x_1, \tau)$, проинтегрируем его левую и правую части как функции одной переменной:

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} = \ln C_1\left(\frac{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)/\partial x_2}\right), \qquad (7.2.2)$$

где $C_1 \geq 0$ – произвольная постоянная. Освободившись от логарифмов в (7.2.2), получим

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{-\frac{1}{\sigma}} = C_1\left(\frac{\partial f(x_1, x_2)\big/\partial x_1}{\partial f(x_1, x_2)\big/\partial x_2}\right),$$

откуда следует, что

$$x_1^{-\frac{1}{\sigma}} \cdot \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} - C_1 x_2^{-\frac{1}{\sigma}} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0. \qquad (7.2.3)$$

Формально (7.2.3) – это дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка. При $\sigma \neq 1$ будем искать решение $f(x_1, x_2)$ уравнения (7.2.3) в виде $f(x_1, x_2) = F(u) = F\left(C_2 x_1^{1-\frac{1}{\sigma}} + C_3 x_2^{1-\frac{1}{\sigma}}\right)$.

Выпишем частные производные первого порядка этой функции:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = F_u'\left(C_2 x_1^{1-\frac{1}{\sigma}} + C_3 x_2^{1-\frac{1}{\sigma}}\right) \cdot \frac{\sigma - 1}{\sigma} C_2 x_1^{-\frac{1}{\sigma}}, \qquad (7.2.4)$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = F_u'\left(C_2 x_1^{1-\frac{1}{\sigma}} + C_3 x_2^{1-\frac{1}{\sigma}}\right) \cdot \frac{\sigma - 1}{\sigma} C_3 x_2^{-\frac{1}{\sigma}}. \qquad (7.2.5)$$

Подставив (7.2.4) и (7.2.5) в (7.2.3), получим

$$0 = C_3 x_1^{-\frac{1}{\sigma}} \cdot F_u'\left(C_2 x_1^{1-\frac{1}{\sigma}} + C_3 x_2^{1-\frac{1}{\sigma}}\right) \frac{\sigma - 1}{\sigma} x_2^{-\frac{1}{\sigma}} -$$

$$- C_1 C_2 x_2^{-\frac{1}{\sigma}} \cdot F_u'\left(C_2 x_1^{1-\frac{1}{\sigma}} + C_3 x_2^{1-\frac{1}{\sigma}}\right) \frac{\sigma - 1}{\sigma} x_1^{-\frac{1}{\sigma}},$$

откуда следует, что

$$F'_u\left(C_2x_1^{1-\frac{1}{\sigma}}+C_3x_2^{1-\frac{1}{\sigma}}\right)\frac{\sigma-1}{\sigma}(x_1x_2)^{-\frac{1}{\sigma}}(C_3-C_1C_2)=0, \text{ если } C_3=C_1C_2,$$

т.е. функция $f(x_1,x_2)=F\left(C_2x_1^{1-\frac{1}{\sigma}}+C_3x_2^{1-\frac{1}{\sigma}}\right)$ при $C_3=C_1C_2$ есть решение уравнения (7.2.3) и, следовательно, уравнения (7.2.1).

Является ли функция $f(x_1,x_2)=F\left(C_2x_1^{1-\frac{1}{\sigma}}+C_3x_2^{1-\frac{1}{\sigma}}\right)$ общим решением уравнения (7.2.1), мы анализировать не будем.

Если положить $\frac{\sigma-1}{\sigma}=\beta$; $-\beta=\frac{1}{\sigma}-1$, т.е. $\frac{1}{\sigma}=1-\beta$ $\left(\sigma=\frac{1}{1-\beta}\right)$, то функция $f(x_1, x_2)$ перепишется так:

$$f(x_1,x_2)=F(C_2x_1^{\beta}+C_3x_2^{\beta}). \tag{7.2.6}$$

Если $0<\sigma<1$, то $\beta=-\alpha$ и $\alpha>0$. В этом случае решение $f(x_1, x_2)$ имеет вид

$$f(x_1,x_2)=F(C_2x_1^{-\alpha}+C_3x_2^{-\alpha}). \tag{7.2.7}$$

Полагая $F(u)=a_0u^{-h/\alpha}$, получим (классическую) ПФ ПЭЗР в виде

$$f(x_1,x_2)=a_0(a_1x_1^{-\alpha}+a_2x_2^{-\alpha})^{-h/\alpha}. \tag{7.2.8}$$

В качестве функции $F(u)$ можно взять любую функцию, такую, что $F'(u)<0$.

Если $\sigma>1$, то $1>\beta>0$. В этом случае решение $f(x_1, x_2)$ имеет вид (7.2.6). Полагая $F(u)=a_0u^{h/\beta}$, получим (классическую) ПФ ПЭЗР в виде

$$f(x_1,x_2)=a_0(a_1x_1^{\beta}+a_2x_2^{\beta})^{h/\beta}. \tag{7.2.9}$$

Таким образом, функции (7.2.6) и (7.2.7) представляют собой более общие ПФ, чем (классические) ПФ с постоянной эластичностью замены ресурсов вида (7.2.8) и (7.2.9).

В качестве функции $F(u)$ можно взять любую функцию, такую, что $F'(u)>0$.

Функции (7.2.8) и (7.2.9) однородны степени h.

При $\sigma = 1$ будем искать решение $f(x_1, x_2)$ уравнение (7.2.3) в виде $f(x_1, x_2) = F(u) = F(a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2})$.

Выпишем частные производные первого порядка и этой функции:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = F_u'(a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}) \cdot a_0 \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1}, \qquad (7.2.10)$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = F_u'(a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}) \cdot a_0 \alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1}. \qquad (7.2.11)$$

Подставив (7.2.10) и (7.2.11) в (7.2.3) (при $\sigma = 1$), получим

$$x_1^{-1} F_u'(a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}) a_0 \alpha_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1} - C_1 x_2^{-1} F_u'(a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}) a_0 \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2} = 0,$$

откуда следует, что

$$a_0 F_u'(a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}) \cdot (x_1 x_2)^{-1} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} (\alpha_2 - C_1 \alpha_1) = 0,$$

если $\alpha_2 - C_1\alpha_1 = 0$, т.е. $C_1 = \alpha_2 / \alpha_1$, т.е. функция $f(x_1, x_2) = F(a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2})$ при $C_1 = \alpha_2 / \alpha_1$ есть решение уравнения (7.2.3) (при $\sigma = 1$) и, следовательно, уравнения (7.2.1).

Не будем анализировать, является ли функция $f(x_1, x_2) = F(a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2})$ общим решением уравнения (7.2.1).

Если $F(u) = U$ или $F(u) = U^{\gamma}$ (число $\gamma > 1$), то функция $f(x_1, x_2) = F(a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2})$ есть (классическая) ПФ КД.

В качестве функции $F(u)$ можно взять любую функцию, такую, что $F_u'(u) > 0$.

Таким образом, $f(x_1, x_2) = F(a_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2})$ представляет собой ПФ, более общую, чем (классическая) ПФ Кобба–Дугласа.

При $n > 2$ понятие эластичности замены i-го ресурса j-м ресурсом (при фиксированном объеме выпуска и объемах x_k остальных ресурсов $k \neq i$, $k \neq j$) можно определить так:

$$E_{ij} = -\left(\frac{\partial MRTS_{ij}}{\partial\left(\dfrac{x_i}{x_j}\right)} \cdot \frac{\dfrac{x_i}{x_j}}{MRTS_{ij}} \right) = -\frac{\dfrac{\partial f(x)/\partial x_i}{\partial f(x)/\partial x_j}}{\dfrac{x_i}{x_j}} \cdot \frac{\partial\left(\dfrac{x_i}{x_j}\right)}{\partial\left(\dfrac{\partial f(x)/\partial x_i}{\partial f(x)/\partial x_j}\right)},$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $MRTS_{ij} = \dfrac{\partial f(x)/\partial x_i}{\partial f(x)/\partial x_j}$.

7.3. ПФ с постоянной эластичностью замены ресурсов и ее связь с ПФ Кобба–Дугласа, линейной и ПФ Леонтьева

7.3.1. Покажем, что ПФКД, ПФЛ и ЛПФ – это асимптотические версии ПФ ПЭЗР:

1) при $\alpha \to 0$ ПФ ПЭЗР $\to$ ПФКД;
2) при $\alpha \to +\infty$ ПФ ПЭЗР $\to$ ПФЛ;
3) при $\alpha \to -1$ ПФ ПЭЗР $\to$ ПФЛИ (это тривиально).

7.3.2. Докажем сначала пункт 3.

Имеем при $\alpha = -1$ $f(x_1, x_2) = a_0(a_1x_1 + a_2x_2)^h$. При $h = 1$ получим частную версию ЛПФ $y = b_1x_1 + b_2x_2$, при $h \neq 1$ получаем ПФЛИ $y = a_0(a_1x_1 + a_2x_2)^h$.

Докажем пункт 1).

Перепишем ПФ ПЭЗР в развернутом виде:

$$f(x_1, x_2) = a_0(a_1x_1^{-\alpha} + a_2x_2^{-\alpha})^{-\frac{h}{\alpha}} =$$

$$= \frac{a_0}{\left(\dfrac{a_1}{x_1^{\alpha}} + \dfrac{a_2}{x_2^{\alpha}}\right)^{\frac{h}{\alpha}}} = \frac{a_0x_2^h}{\left(\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha} a_1 + a_2\right)^{\frac{h}{\alpha}}}. \qquad (7.3.1)$$

Если $a_1 + a_2 > 1$, $h > 0$, то при $\alpha \to 0$

$$\left(\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha} a_1 + a_2\right)^{\frac{h}{\alpha}} \to (a_1 + a_2)^{\infty} = \infty \Rightarrow y = 0.$$

Если $a_1 + a_2 < 1$, $h > 0$, то при $\alpha \to 0$

$$\left(\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha} a_1 + a_2\right)^{\frac{h}{\alpha}} \to 0 \Rightarrow y = \infty.$$

Если $a_1 + a_2 = 1$, то

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha} a_1 + a_2\right)^{\frac{h}{\alpha}} = (1^{\infty}) \overset{(e)}{=} \lim_{\alpha\to 0} e^{\ln\left(\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha} a_1+a_2\right)^{\frac{h}{\alpha}}} = e^{\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{h\cdot\ln\left(\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha} a_1+a_2\right)}{\alpha}} =$$

$$= e^{\left(\frac{0}{0}\right)} \overset{(л)}{=} e^{h\cdot\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\frac{a\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha}\cdot\ln\frac{x_2}{x_1}}{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha} a_1+a_2}\right)} = e^{\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{ha_1}} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{ha_1},$$

откуда вытекает, что

$$\lim_{\alpha\to 0} a_0(a_1x_1^{-\alpha} + a_2x_2^{-\alpha})^{-\frac{h}{\alpha}} = \frac{a_0x_2^h}{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{ha_1}} \overset{(*)}{=} a_0x_1^{a_1h}x_2^{(h-a_1h)} \overset{(**)}{=} a_0x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}.$$

(*) Используем здесь, что $a_1 + a_2 = 1$.
(**) Полагаем $\alpha_1 = a_1h$, $\alpha_2 = h - a_1h$.

7.3.3. Докажем пункт 2).

Если $x_2 > x_1$ ($a_1 > 0$), то (см. (7.3.1))

$$\lim_{\alpha\to +\infty}\left(\left(\frac{x_2}{x_2}\right)^{\alpha} a_1 + a_2\right)^{\frac{h}{\alpha}} = (\infty^0) \overset{(e)}{=} \lim_{\alpha\to +\infty} e^{\frac{h}{\alpha}\ln\left(\left(\frac{x_2}{x_2}\right)^{\alpha} a_1+a_2\right)} = e^{h\lim\limits_{\alpha\to +\infty}\frac{\ln\left(\left(\frac{x_2}{x_2}\right)^{\alpha} a_1+a_2\right)}{\alpha}}$$

$$= e^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \overset{(л)}{=} e^{h\cdot\lim\limits_{\alpha\to +\infty}\frac{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha}\ln\frac{x_2}{x_1}a_1}{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha} a_1+a_2}} = e^{h\ln\frac{x_2}{x_1}} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{h},$$

откуда вытекает при $x_2 > x_1$ ($a_1 > 0$)

$$\lim_{\alpha\to +\infty} a_0(a_1x_1^{-\alpha} + a_2x_2^{-\alpha})^{-\frac{h}{\alpha}} = \frac{a_0x_2^h}{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{h}} = a_0x_1^h = a_0\min(x_1^h;\, x_2^h).$$

Аналогично при $x_2 < x_1$ ($a_1 > 0$)

$$\lim_{\alpha\to+\infty} a_0(a_1x_1^{-\alpha}+a_2x_2^{-\alpha})^{-\frac{h}{\alpha}} = a_0x_2^h = a_0\min(x_1^h;\, x_2^h).$$

При $x_1 = x_2$ (см. (7.3.1))

$$a_0(a_1x_1^{-\alpha}+a_2x_2^{-\alpha})^{-\frac{h}{\alpha}} = a_0(a_1+a_2)^{-\frac{h}{\alpha}}(x_1^{-\alpha})^{-\frac{h}{\alpha}} = \frac{a_0}{(a_1+a_2)^{\frac{h}{\alpha}}}\cdot x_1^h.$$

При $a_1 + a_2 \gtreqless 1$ имеем

$$\lim_{\alpha\to+\infty} a_0(a_1x_1^{-\alpha}+a_2x_2^{-\alpha})^{-\frac{h}{\alpha}} = a_0x_1^h = a_0\min(x_1^h;\, x_2^h).$$

Таким образом,

$$\lim_{\alpha\to+\infty} a_0(a_1x_1^{-\alpha}+a_2x_2^{-\alpha})^{-\frac{h}{\alpha}} = a_0\min(x_1^h;\, x_2^h).$$

При $h = 1$ получаем ПФЛ $y = a_0\min(x_1, x_2)$.

7.4. Учет в ПФ НТП в экзогенной и эндогенной формах

7.4.1. В экономико-математическом моделировании под НТП понимают совокупность всех факторов, которые обеспечивают выпуск без увеличения количества используемого труда и капитала. В этой совокупности факторов собственно НТП играет, конечно, первостепенную роль.

Простейшим способом учета НТП в ПФ $f(x_1(t), x_2(t))$ является ее умножение на экспоненциальный множитель $e^{\lambda_0 t}$: $y(t) = e^{\lambda_0 t}f(x_1(t), x_2(t))$. Темп прироста ($\lambda_0 > 0$) и темп прироста с обратным знаком ($\lambda_0 < 0$) выпуска $f(x_1(t), x_2(t))$ обусловлены НТП. Параметр λ_0 задается извне (т.е. экзогенно), например оценивается статистически. Отсюда и термин «экзогенная форма НТП». Эта форма позволяет оценить вклад НТП в экономическое развитие моделируемой системы (фирмы, отрасли, региона, национальной экономики). Однако экзогенная форма не объясняет мотивацию НТП и воздействия региона, национальной экономики на экономическое развитие. Для этого следует использовать эндогенную (внутреннюю) форму учета НТП в ПФ.

В литературе было предложено достаточно много подходов к описанию воздействия НТП на объем выпускаемой продукции. Остановимся на одном из самых простых и самых конструктивных походов. Этот подход основан на автономном экзогенном учете НТП, суть которого в том, что динамическая ПФ представляется в одном из следующих видов (фигурирующая ниже функция $\psi(t) > 1$ и представляет собой индекс НТП, она строго возрастает во времени):

$$y(t) = \psi(t) f(x_1(t), x_2(t))$$

(продуктоувеличивающий НТП, нейтральный по Хиксу),

$$y(t) = f(\psi(t) x_1(t), x_2(t))$$

(капиталосберегающий НТП, нейтральный по Солоу),

$$y(t) = f(x_1(t), \psi(t) x_2(t))$$

(трудосберегающий НТП, нейтральный по Харроду),

$$y(t) = f(\psi_1(t) x_1(t), \psi_2(t) x_2(t))$$

(случай капитало- и трудосберегающего НТП). Анализ различных способов учета в ПФ НТП широко представлен в учебной и монографической литературе (см., например, А.В. Лотов (1984), Г.Б. Клейнер (1986), О.Б. Голиченко (1999)).

7.4.2. Как уже отмечалось выше, простейшим и наиболее часто применяемым способом учета НТП является использование в качестве функции $\psi(t)$ экспоненты $e^{\lambda_0 t}$, т.е. $\psi(t) = e^{\lambda_0 t}$.

Этот вариант выбора содержит важную предпосылку о строгой монотонности экономического роста и априори исключает наличие колебаний во времени объемов выпускаемой продукции, что, конечно, противоречит экономической реальности, которая часто демонстрирует наличие колебаний и отсутствие строгой монотонности.

Модель, учитывающая колебания во времени факторов производства, отличных от труда и капитала, более адекватна экономической реальности. Она представляет собой динамическую ПФ вида

$$y(t) = f(x_1(t), x_2(t)) e^{\lambda_0 t + \lambda_1 \sin(\omega t + \theta)},$$

предложенную А.К. Смирновой (2001), которая также разработала метод оценки параметров этой динамической ПФ.

Параметр λ_0 описывает тенденцию роста и падения выпуска в зависимости от знака параметра λ_0. Параметр λ_1 измеряет амплитуду циклических колебаний объемов выпускаемой продукции. Значение параметра λ_1 равно максимальному отклонению (вверх и вниз) выпуска от тренда $e^{\lambda_0 t}$. Параметр ω описывает фазовую частоту циклических колебаний объемов выпускаемой продукции. Период T циклических колебаний объемов выпускаемой продукции дается формулой $T = 2\pi/\omega$. Наконец, параметр θ определяет величину $e^{\lambda_1 \sin\theta}$ отклонения от тренда в начальный момент времени $t = 0$.

Содержательными областями приведенных ПФ и динамических моделей, в которых будут фигурировать ПФ, могут быть как макро-, так и микроэкономические объекты.

7.4.3. Начиная со второй половины XX в. наряду с трудом и капиталом все возрастающую роль среди факторов экономического роста стали играть аккумулирование человеческого капитала, продукция сектора НИОКР, а также экологический фактор. Отсюда вытекает, что все эти три фактора (аккумулирование человеческого капитала, продукцию сектора НИОКР и экологический фактор) следует выделять особо и рассматривать их наряду с трудом и капиталом. Далее речь пойдет о первых двух из трех названных факторах, которые дополняют труд и капитал.

Рассмотрим одну из первых двухсекторных моделей (назовем ее Модель 1), в которой в явном виде представлен не только производственный сектор, но и сектор НИОКР (см.: А.В. Лотов (1984, с. 255–256)).

Производственный сектор рассматриваемой динамической модели (с непрерывным временем) описывается ПФ

$$y(t) = \psi(t) f(x_1(t), x_2(t)),$$

где $y(t)$ – объем выпускаемой продукции (например, ВНП страны или выпуск большой фирмы, которая сама финансирует НИОКР);

$\psi(t)$ – индекс НТП, который увеличивает выпуск;

$x_1(t)$ – количество капитала;

$x_2(t)$ – количество труда.

Сектор НИОКР описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{\psi}(t) = f_2(\psi(t), \phi(t)),$$

где $\phi(t)$ – объем вложений в НИОКР.

Полное описание модели имеет следующий вид:

$$y(t)=\psi(t)f(x_1(t),x_2(t)),\quad \dot{\psi}(t)=f_2(\psi(t),\phi(t)),\quad I(t)=s_1(t)y(t),$$

$$\phi(t))=s_2(t)y(t),\quad \dot{x}_1(t)=I(t)-\xi(t)x_1(t),\quad \dot{x}_2(t)=\zeta(t)\,x_1(t),$$

$$x_1(0)=x_1^0,\quad x_2=x_2^0,\quad \psi(0)=\psi^0,$$

где $s_1(t)$ – доля выпуска $y(t)$, которая инвестируется в производственный сектор;

$s_2(t)$ – доля выпуска $y(t)$, которая инвестируется в сектор НИОКР;

$\xi(t)$ – норма выбытия основного производственного капитала;

$\zeta(t)$ – темп прироста рабочей силы.

Очевидно, $s_1(t)\geq 0$, $s_2(t)\geq 0$, $s_1(t)+s_2(t)<1$.

Представленную модель можно дополнить целевым функционалом

$$\int_0^T e^{-\delta t}u\left[(1-s_1(t)-s_2(t))y(t)\right]dt(\max)$$

и получить задачу оптимального управления с параметрами управления $s_1(t)$ и $s_2(t)$.

Целевой функционал в случае, когда содержательная область модели рассматривается на макроэкономическом уровне, т.е. моделируется, например динамика национальной экономики, следует толковать как дисконтированный суммарный эффект от текущего потребления населения. Если целевой функционал имеет вид

$$\int_0^T e^{-\delta t}\left[(1-s_1(t)-s_2(t))y(t)\right]dt(\max),$$

он интерпретируется как дисконтированный суммарный объем потребления населения.

Если содержательная область модели рассматривается на микроэкономическом уровне, т.е. моделируется экономика (крупной) фирмы, то последний целевой функционал можно интерпретировать как дисконтированный суммарный доход трудового коллектива фирмы – естественно, за вычетом инвестиций в производственный сектор и в сектор НИОКР.

7.4.4. Рассмотрим другую модель (Модель 2), также состоящую из двух секторов: производственного и НИОКР (см.: Е.В. Антипов (2002)). Символы, которые не комментируются в Модели 2, взяты из Модели 1.

Производственный сектор Модели 2 описывается ПФ

$$y(t) = A(\phi(t))f(x_1(t), x_2(t)),$$

где $\phi(t)$ – объем инвестиций в сектор НИОКР;

$A(\phi(t))$ – мультипликатор, описывающий эффективность инвестиций в НИОКР.

Выражение для инвестиций в производственный сектор имеет вид

$$\dot{x}_1(t) = s_1(t)y(t) - \xi(t)x_1(t),$$

где $s_1(t)$ – доля выпуска $y(t)$, которая инвестируется в производственный сектор;

$\xi(t)$ – норма выбытия основного производственного капитала.

Сектор НИОКР Модели 2 описывается так:

$$\dot{\phi}(t) = s_2(t)y(t).$$

Выпишем остальные условия Модели 2:

$$\dot{x}_2(t) = g(x_2(t)), \;\; x_1(0) = x_1^0, \;\; \phi(0) = \phi^0, \;\; x_2(0) = x_2^0.$$

Положим $x_1(T) = \hat{x}_1$, где $\hat{x}_1$ – заданный объем основного производственного капитала, который должен быть достигнут за кратчайшее время T, т.е. $T(\min)$, и мы получили Модель 2 в форме задачи на быстродействие.

По экономическому смыслу $s_1(t) > 0$, $s_2(t) > 0$, $s_1(t) + s_2(t) < 1$.

В работе Е.В. Антипова (2002) задача оптимального управления на быстродействие была решена с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина при следующих предположениях о ПФ $f(x_1(t), x_2(t))$ и мультипликаторе $A(\phi(t))$:

$$f(x_1, x_2) = f^{(1)}(x_1)f^{(2)}(x_2), \;\; f(\gamma x_1, \gamma x_2) = \gamma f(x_1, x_2),$$

$$k = x_1/x_2,$$

$$z = y/x_2 = {f(x_1, x_2)}\Big/{x_2} = f\left(\frac{x_1}{x_2}, 1\right) = f(k, 1) = h(k),$$

$$h'(k) > 0, \; h''(k) < 0, \; h(0) = 0, \; \lim_{h \to 0} h'(k) = \infty, \;\; \lim_{h \to +\infty} h'(k) = 0,$$

$$A(0)=1,\quad \lim_{\phi\to\infty} A(\phi)=\infty,\quad A'(\phi)>0 \text{ при } \phi>0,\quad A'(0)=0,$$

$$\lim_{\phi\to a} A'(\phi)=\infty,\quad \lim_{\phi\to\infty} A'(\phi)=0,$$

$$A''(\phi)>0 \text{ при } \phi<a,\quad A''(\phi)<0 \text{ при } \phi>a.$$

Здесь $a>0$ – некоторое число (пороговая величина инвестиций в НИОКР, которую следует оценить для каждого конкретного случая специально).

Графиком мультипликатора $A(\phi)$ является s-образная линия, поэтому этот мультипликатор и был назван s-образным. По мнению Е.В. Антипова (2002), s-образный мультипликатор более адекватен реальности, чем классический мультипликатор, который удовлетворяет условиям: $A'(\phi)>0$, $A''(\phi)<0$, $A(0)=1$, $\lim_{\phi\to\infty} A(\phi)=\infty$, $\lim_{\phi\to\infty} A'(\phi)=0$, $\lim_{\phi\to 0} A'(\phi)=\infty$.

Неоклассический мультипликатор мал, если объем ϕ инвестиций в НИОКР также мал. Для качественного изменения технологического уровня (национальной экономики или большой фирмы) требуется достаточно высокий объем инвестиций в НИОКР. S-образный мультипликатор описывает резкий скачок инвестиций в НИОКР вблизи порогового значения a инвестиций в НИОКР, что более адекватно реальности, ибо если национальная экономика (или крупная фирма) еще не достигла порогового уровня (a) инвестиций в НИОКР, отдача этих инвестиций будет относительно мала. Если национальная экономика (или крупная фирма) перешла пороговый уровень (a) инвестиций в НИОКР, отдача от этих инвестиций будет относительно велика.

7.4.5. Трехсекторная модель (Модель 3), предложенная А.Н. Моисеевым (2004), включает секторы производственный, НИОКР и образования. Модель 3 была преобразована А.Н. Моисеевым (2002) в двухсекторную модель НТП с закупкой технологии. Модель 3 обобщает трехсекторную модель Бакси (Bucci A. (2001)), двухсекторные модели Муллигано–Ребелло, П. Ромера, Узавы–Лукаса и классическую односекторную модель Солоу–Свена.

Модель 3 может использоваться для описания как макро-, так и микроэкономических содержательных областей.

Производственный сектор Модели 3 описывается следующим выражением:

$$y(t)=\psi(t)f_1((1-\alpha_1(t))x_1(t),\,x_2(t)), \tag{7.4.1}$$

где $y(t)$ – выпуск модели (в макроэкономическом случае $y(t)$ может равняться ВНП, в микроэкономическом случае $y(t)$ равен выпуску (большой) фирмы);

$\psi(t)$ – индекс НТП, который увеличивает эффективность использования капитала и труда;

$x_1(t)$ – количество капитала;

$x_2(t)$ – количество труда;

$\alpha_1(t)$ – доля (физического) капитала, которая направляется в сектор НИОКР ($0 \le \alpha_1 \le 1$), $f_1(x_1, x_2)$ – ПФ.

Сектор НИОКР Модели 3 описывается следующим выражением:

$$\dot{k}(t) = f_2(k(t), \alpha_2(t)m(t), \alpha_1(t)x_1(t)) - \delta_k(t)k(t), \qquad (7.4.2)$$

где $\dot{k}(t)$ – прирост знаний (новые технологии);

$k(t)$ – уровень (запас) знаний;

$m(t)$ – человеческий капитал (число квалифицированных работников, умноженное на качество (квалификацию) среднего работника);

$\alpha_2(t)$ – доля человеческого капитала, которая направляется в сектор НИОКР ($0 \le \alpha_2(t) \le 1$);

$\delta_k(t)$ – норма выбытия знаний (т.е. используются только актуальные, востребованные знания);

$f_2(k, m, x_1)$ – функция, которая показывает, как запас знаний, человеческий капитал и основной производственный капитал определяют новые технологии.

Сектор образования Модели 3 описывается следующим выражением:

$$\dot{m}(t) = f_3(k(t), \alpha_3(t)m(t)) - \delta_m(t)m(t), \qquad (7.4.3)$$

где $\alpha_3(t)$ – доля человеческого капитала, направляемая в сектор образования ($0 \le \alpha_3 \le 1$), $\alpha_2(t) + \alpha_3(t) \le 1$;

$\delta_m(t)$ – норма выбытия человеческого капитала (уход на пенсию, потеря работоспособности, смерть и т.п.);

$f_3(k(t), m(t))$ – функция, которая показывает, как запас знаний и человеческий капитал определяют прирост человеческого капитала.

В секторе образования рост числа квалифицированных работников моделируется эндогенно, а рост числа неквалифицированных работников моделируется экзогенно в классической форме в виде $\dot{x}_2(t) = nx_2(t)$, где $n > 0$ – темп прироста числа неквалифицированных работников. Отметим также, что фундаментальные исследования, которые ведутся в секторе образования, относятся к сектору НИОКР.

Модель индекса НТП в Модели 3 описывается следующим выражением:

$$\dot{\psi}(t) = f_4(\dot{k}(t) + \delta_k(t)k(t), \dot{m}(t) + \delta_m(t)m(t)) - \delta_\psi \psi(t), \qquad (7.4.4)$$

где $\delta_\psi(t)$ – норма выбытия (в силу устаревания) технологий из производства. Зависимость прироста $\dot{\psi}(t)$ индекса НТП от прироста знаний (новых технологий) $\dot{k}(t)$ и от прироста человеческого капитала $\dot{m}(t)$ содержательно означает, что новые знания (новые технологии), полученные в секторе НИОКР, поступают в производственный сектор, лишь будучи обеспеченными соответствующими количеством и уровнем квалификации работников.

Модель основного производственного капитала в Модели 3 имеет вид

$$\dot{x}_1(t) = s(t)y(t) - \delta(t)x_1(t), \qquad (7.4.5)$$

где $s(t)$ $(0 \le s(t) \le 1)$ – норма накопления, которая показывает ту долю выпуска, которая инвестируется в основной производственный капитал, а $\delta(t)$ $(0 \le \delta(t) \le 1)$ – норма выбытия основного производственного капитала производственного сектора Модели 3.

Наличие трех секторов (производственного, НИОКР и образования) является естественным для национальной экономики развитой страны. Для крупной фирмы наличие этих трех секторов также вполне естественно. В качестве примера крупной фирмы можно привести автомобилестроительную фирму. По оценкам экспертов последних лет XX в., необходимым условием позитивной долговременной рыночной перспективы автомобилестроительных фирм является объем их ежегодного выпуска, равный примерно 2,5–3 млн автомобилей.

При таком объеме выпуска фирма имеет возможность полноценно финансировать и обновлять не только основное производство, но и секторы НИОКР и образовательный и за счет этого получать конкурентные преимущества, снижая издержки на востребованные рынком автомобили (в свое время в течение 20 лет после окончания Второй мировой войны фирма «Фольксваген» не корректировала модель знаменитого «жука», что позволило ей довести его рыночную цену до величины, практически равной цене мотоцикла), а также дифференцируя продукцию (за счет, например, «наворотов» в электронной начинке автомобилей).

Перепишем Модель 3 в виде нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x}_1(t) + \delta(t)x_1(t) = s(t)\psi(t)f_1((1-\alpha_1(t)x_1(t), x_2(t)), \qquad (7.4.6)$$

$$\dot{\psi}(t) + \delta_\psi(t)\psi(t) = f_4(\dot{k}(t) + \delta_k(t)k(t), \dot{m}(t) + \delta_m(t)m(t)), \qquad (7.4.7)$$

$$\dot{k}(t) + \delta_k(t)k(t) = f_2(k(t), \alpha_2(t)m(t), \alpha_1(t)x_1(t)) \qquad (7.4.8)$$

$$\dot{m}(t) + \delta_m(t)m(t) = f_3(k(t), \alpha_3(t)m(t)), \qquad (7.4.9)$$

$$\dot{x}_2(t) = nx_2(t). \qquad (7.4.10)$$

При заданных долях и нормах $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$, $s(t)$, $\delta_k(t)$, $\delta_m(t)$, $\delta_\psi(t)$, $\delta(t)$ и заданных начальных значениях $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$, $\psi(0) = \psi^0$, $k(0) = k^0$, $m(0) = m^0$ Модель 3 приобретает вид задачи Коши для системы (7.4.6)–(7.4.10), у которой при достаточно гладких функциях f_1, f_2, f_3, f_4 существует единственное решение $(x_1(t), x_2(t), \psi(t), k(t), m(t))$. Гладкость функций f_1, f_2, f_3, f_4 имеет место на основании содержательных соображений.

Все доли и нормы $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\alpha_3(t)$, $s(t)$, $\delta_k(t)$, $\delta_m(t)$, $\delta_\psi(t)$, $\delta(t)$ (или их часть) могут быть параметрами управления, и тогда Модель 3 приобретает вид задачи оптимального управления, в качестве целевого функционала которой может фигурировать, например, дисконтированный суммарный доход трудового коллектива (крупной) фирмы (в случае, если содержательная область Модели 3 рассматривается на микроэкономическом уровне) и дисконтированный суммарный объем потребления населения (в случае, если содержательная область Модели 3 рассматривается на макроэкономическом уровне).

Функции f_1, f_2, f_3, f_4 могут быть выбранными так, чтобы они имели, например, мультипликативную форму (которую имеет ПФ Кобба–Дугласа):

$$\begin{aligned} &f_1((1-\alpha_1(t))x_1(t), x_2(t)) = \\ &= \dot{b}_1((1-\alpha_1(t))x_1(t), x_2(t))^{\beta_1} x_2^{\beta_2}(t), \end{aligned} \qquad (7.4.11)$$

$$\begin{aligned} &f_2(k(t), \alpha_2(t)m(t), \alpha_1(t)x_1(t)) = \\ &= \dot{b}_2(k(t)^{\gamma_1}(\alpha_2(t)m(t))^{\gamma_2}(\alpha_1(t)x_1(t))^{\gamma_3}, \end{aligned} \qquad (7.4.12)$$

$$f_3(k(t), \alpha_3(t)m(t)) = \dot{b}_3(k(t)^{\eta_1}(\alpha_3(t)m(t))^{\eta_2}, \qquad (7.4.13)$$

$$\begin{aligned} &f_4(\dot{k}(t) + \delta_k(t)k(t), \dot{m}(t) + \delta_m(t)m(t)) = \\ &\dot{b}_4(\dot{k}(t) + \delta_k(t)k(t))^{\theta_1}(\dot{m}(t) + \delta_m(t)m(t))^{\theta_2}, \end{aligned} \qquad (7.4.14)$$

где $b_1, b_2, b_3, b_4, \beta_1, \beta_2$ $(0 \le \beta_1 \le 1, 0 \le \beta_2 \le 1)$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ $(0 \le \gamma_1 \le 1, 0 \le \gamma_2 \le 1, 0 \le \gamma_3 \le 1)$, η_1, η_2 $(0 \le \eta_1 \le 1, 0 \le \eta_2 \le 1)$, θ_1, θ_2 $(0 \le \theta_1 \le 1, 0 \le \theta_2 \le 1)$ – постоянные параметры, оценки которых получаются методом наименьших квадратов.

Задачу Коши или задачу оптимального управления, которые представляют собой версии Модели 3, при наличии оценок постоянных параметров можно решать с помощью ЭВМ и содержательно анализировать полученные решения.

7.4.6. Задачу Коши и задачу оптимального управления на основе системы (7.4.6)–(7.4.10) можно исследовать качественно, выявляя характерные свойства их решений без явного знания этих решений. В частности, большой интерес представляют траектории постоянного пропорционального роста, т.е. такие траектории, у которых постоянные темпы прироста $\dot{x}_1(t)/x_1(t) = n_{x_1}$, $\dot{\psi}(t)/\psi(t) = n_\psi$, $\dot{k}(t)/k(t) = n_k$, $\dot{m}(t)/m(t) = n_m$, $\dot{x}_2(t)/x_2(t) = n$, среди которых темп прироста (неквалифицированной) рабочей силы определяется экзогенно, а остальные темпы прироста n_{x_1}, n_ψ, n_k, n_m определяются эндогенно из уравнений (7.4.6)–(7.4.10), правые части которых имеют мультипликативную форму (7.4.11)–(7.4.14). Эндогенно определяемый темп прироста конечного выпуска $y(t)$ может быть выше, чем экзогенно заданный темп прироста (неквалифицированной) рабочей силы, а может равняться ему или быть ниже. Первый из названных трех случаев отражает ситуацию темпа прироста, источником которого является истинно эндогенный НТП.

Работы, посвященные оценкам параметров двух- и трехсекторных моделей, практически отсутствуют в связи с тем, что, во-первых, вычислимые версии этих моделей были предложены сравнительно недавно и, во-вторых, серьезную проблему представляет наличие (точнее, отсутствие) данных, необходимых для формирования модельной информации, например, с помощью использования регрессионного анализа.

Анализируя разнообразные данные, характеризующие состояние национальной экономики Соединенных Штатов Америки с 1980 по 1997 г., А.Н. Моисеев (2004) с помощью метода наименьших квадратов оценил параметры Модели 3 и построил оптимальную траекторию и траекторию постоянного пропорционального роста для национальной экономики США, темп прироста которых превосходит аналогичный реальный показатель. А.Н. Моисеев выявил резервы более высоких расчетных (по сравнению с реальными) темпов прироста. Полученные А.Н. Моисеевым (2004) результаты интересны также тем, что продемонстрировали полезность Модели 3 как средства для оценки потенциала экономического роста национальной экономики США.

На микроэкономическом уровне для проведения прикладных или экспериментальных расчетов версии Модели 3 (а также трехсекторная модель Бакси и многие двухсекторные модели) не использовались.

Вопросы для самоконтроля к главе 7

1. Что такое производственная функция? Что представляют собой ее структурные элементы?
2. Как формулируются основные свойства ПФКД?
3. Как формулируются основные свойства ЛПФ и ПФЛИ?
4. Как формулируются основные свойства ПФЛ?
5. Как формулируются основные свойства ПФ ПЭЗР?
6. Как геометрически интерпретируются предельные производительности капитала и труда?
7. Как геометрически интерпретируются средние производительности капитала и труда?
8. Что такое возрастающая эффективность с ростом масштабов производства? Приведите примеры и дайте обоснование.
9. Что такое постоянная эффективность с ростом масштабов производства? Приведите примеры и дайте обоснование.
10. Что такое убывающая эффективность с ростом масштабов производства? Приведите примеры и дайте обоснование.
11. Как определяется точечная (предельная) эластичность выпуска по первому (второму) ресурсу? Выпишите точечные (предельные) частные эластичности выпуска по первому (второму) ресурсу для ПФКД, ЛПФ, ПФ ПЭЗР.
12. Как определяется конечная (процентная) частная эластичность по первому (второму) ресурсу?
13. Как определяется эластичность производства? Выписать эластичность производства для ПФКД и ПФ ПЭЗР.
14. Что такое норма технологической замены одного ресурса другим и предельная норма технологической замены одного ресурса другим?
15. Как связаны между собой предельные производительности ресурсов и предельная норма замены одного ресурса другим? Как выглядит предельная норма замены одного ресурса другим в точке ЛРРФ?
16. Как определяются статическая и динамическая ПФ? Приведите пример простейшей динамической ПФ.

17. Как определяется эластичность замены одного ресурса другим в случае $n = 2$?
18. Как геометрически интерпретируется эластичность замены одного ресурса другим?
19. Как выводится ПФ с постоянной эластичностью замены одного ресурса другим?
20. Что представляют собой асимптотические версии ПФ ПЭЗР?
21. Как в ПФ формально учитывается продуктоувеличивающий НТП, нейтральный по Хиксу?
22. Как в ПФ формально учитывается капиталосберегающий НТП, нейтральный по Солоу?
23. Как в ПФ формально учитывается трудосберегающий НТП, нейтральный по Харроду?
24. Как выглядит динамическая ПФ, которая учитывает колебания во времени факторов производства, отличных от труда и капитала?
25. Что представляет собой Модель 1, охватывающая производственный сектор и сектор НИОКР? Дайте содержательную интерпретацию модели на макро- и микроэкономическом уровнях.
26. Что представляет собой Модель 2, охватывающая производственный сектор и сектор НИОКР?
27. Что такое s-образный мультипликатор и в чем его отличие от классического мультипликатора?
28. Что представляет собой Модель 3, охватывающая секторы производственный, НИОКР и образования?
29. Что собою представляет Модель 3 в виде задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка?

Задачи и упражнения для самоконтроля к главе 7

1. Выпишите уравнение изокванты ПФКД, значение которой равно y^0.
2. Выпишите уравнение изокванты ПФЛ, значение которой равно y^0.
3. Выпишите уравнение изокванты ПФ ПЭЗР, значение которой равно y^0.
4. Выпишите уравнение асимптот изокванты ПФ ПЭЗР, значение которой равно y^0.
5. Найдите предельную норму замены одного ресурса другим и эластичность замены одного ресурса другим для ПФ с линейной эластичностью замены ресурсов, которая имеет вид
$y = a_0 x_1^{\alpha}(\beta x_1 + x_2^{1-\alpha})$.
В выражении для эластичности замены одного ресурса другим используйте капиталовооруженность труда x_1/x_2.

6. Найдите предельную норму замены одного ресурса другим и эластичность замены одного ресурса другим для ПФ с линейной эластичностью замены ресурсов, которая имеет вид
$y = a_0(1 - e^{-\alpha x_1/x_2})x_2$.
7. Выпишите решение Модели 1 с использованием принципа максимума Понтрягина.

Вопросы для контрольных работ к главе 7

1. Чему равна предельная норма замены одного ресурса другим для ПФКД?
2. Чему равна предельная норма замены одного ресурса другим для ПФЛИ?
3. Чему равна предельная норма замены одного ресурса другим для ПФ ПЭЗР?
4. Как выводится ПФ с постоянной эластичностью замены одного ресурса другим, равной единице ($n = 2$)?
5. Как определяется эластичность замены одного ресурса другим в случае $n > 2$?

Задачи и упражнения для контрольных работ к главе 7

1. Найдите предельную норму замены одного ресурса другим и эластичность замены одного ресурса другим для ПФ, которая имеет вид
$$y = \left(1 - \left(1 - \frac{\alpha_1 x_1}{x_2}\right)^{-\alpha_2}\right)x_2.$$
2. Найдите предельную норму замены одного ресурса другим и эластичность замены одного ресурса другим для ПФ, которая имеет вид
$$y = a_0(a_1 x_1^{-\alpha} + (1 - a_1)x_2^{-\alpha})^{-\frac{h_1}{\alpha}}(a_2 x_1^{-\alpha} + (1 - a_2)x_2^{-\alpha})^{-\frac{h_2}{\alpha}}.$$
3. Найдите предельную норму замены одного ресурса другим и эластичность замены одного ресурса другим для ПФ, которая имеет вид
$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2 + a_4 x_1^2 + a_5 x_2^2.$$
4. Найдите предельную норму замены одного ресурса другим и эластичность замены одного ресурса другим для ПФ Солоу, которую также называют ПФ Хилхорста:
$$y = a_0(a_1 x_1^{-\alpha_1} + (1 - a_1)x_2^{-\alpha_2})^{-\frac{1}{\alpha_3}}.$$
5. Выпишите решение Модели 2 с использованием принципа максимума Понтрягина.

Глава 8

РЫНОЧНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СЛУЧАЕ НЕСОВЕРШЕННОЙ КОНКУРЕНЦИИ

8.1. Максимизация прибыли монополии в краткосрочном и долговременном промежутках, монопольная цена и монопольный выпуск

8.1.1. В условиях функционирования чистой монополии фирма одна, поэтому линия рыночного спроса $AR(y)$ есть линия спроса на продукцию этой фирмы. Таким образом, в модели чистой монополии линия спроса $AR(y)$ характеризует рынок, а линии издержек (предельных $MC(y)$ и средних $AC(y)$) – технологию и размеры фирмы.

В рассматриваемой ситуации прибыль фирмы $PR(y)$ традиционно представлена в виде разности дохода (выручки) $R(y)$ фирмы и ее издержек $C(y)$ (здесь y – объем выпускаемой фирмой продукции: $PR(y) = R(y) - C(y)$). Для определения объема $y^{(m)}$ выпуска фирмы, который (глобально) максимизирует ее прибыль $PR(y)$ (т.е. для определения *монопольного выпуска* $y^{(m)}$), следует использовать условия первого и второго порядков. Из условия первого порядка (необходимого условия максимума прибыли)

$$\frac{dPR(y)}{dy} = 0 \qquad (8.1.1)$$

определяется объем $y^{(m)}$. С помощью знака второй производной

$$\frac{d^2PR(y^{(m)})}{dy^2} \qquad (8.1.2)$$

проверяется, действительно ли объем $y^{(m)}$ максимизирует прибыль $PR(y)$. Если

$$\frac{d^2 PR(y^{(m)})}{dy^2} < 0 \qquad (8.1.3)$$

(условие второго порядка), то объем $y^{(m)}$ максимизирует прибыль $PR(y)$ (т.е. неравенство (8.1.3) – достаточное условие максимума $PR(y^{(m)})$ – обычно не только локального, но и глобального – прибыли $PR(y)$); если вторая производная (8.1.2) равна нулю, требуется дополнительное исследование. Если $y^{(m)}$ – монопольный выпуск, то $p^{(m)} = AR(y^{(m)})$ – *монопольная цена.*

Подставив в уравнение (8.1.1) его решение $y = y^{(m)}$, получим

$$0 = \frac{dPR(y^{(m)})}{dy} = \frac{dR(y^{(m)})}{dy} - \frac{dC(y^{(m)})}{dy} = MR(y^{(m)}) - MC(y^{(m)}),$$

откуда следует хорошо известное равенство

$$MR(y^{(m)}) = MC(y^{(m)}).$$

Расписав подробно левую часть неравенства (8.1.3), получим

$$\frac{d^2 R(y^{(m)})}{dy^2} - \frac{d^2 C(y^{(m)})}{dy^2} < 0,$$

что эквивалентно неравенству

$$\frac{dMR(y^{(m)})}{dy} < \frac{dMC(y^{(m)})}{dy},$$

откуда следует, что если в точке $y^{(m)}$ (такой, что $MR(y^{(m)}) = MC(y^{(m)})$) угол наклона линии $MC(y^{(m)})$ строго больше, чем угол наклона линии $MR(y^{(m)})$, то в точке $y^{(m)}$ прибыль $PR(y)$ достигает своего максимума (на рис. 8.1 в точке $\breve{y}^{(m)}$ прибыль $PR(y)$ минимальна, а в точке $\hat{y}^{(m)}$ прибыль максимальна, т.е. $\hat{y}^{(m)}$ – монопольный выпуск, а $\hat{p}^{(m)}$ – монопольная цена). Для определения величины максимальной прибыли $PR(y^{(m)})$ требуется линия средних издержек $AC(y)$.

Если линия средних издержек $AC(y)$ имеет точки, которые расположены ниже линии среднего дохода $AR(y)$, то максимальная прибыль $PR(y^{(m)})$ фирмы-монополиста будет скорее положительным числом (рис. 8.2, на котором площадь $\left|O\hat{p}^{(m)}F\hat{y}^{(m)}\right|_2$ четырехугольника $O\hat{p}^{(m)}F\hat{y}^{(m)}$ равна доходу $R(\hat{y}^{(m)}) = \hat{p}^{(m)}\hat{y}^{(m)}$ фирмы-монополиста, площадь $\left|OHG\hat{y}^{(m)}\right|_2$ четырехугольника $OHG\hat{y}^{(m)}$ равна издержкам $C(\hat{y}^{(m)}) = \hat{y}^{(m)}AC(\hat{y}^{(m)}) = \hat{y}^{(m)}C(\hat{y}^{(m)})/\hat{y}^{(m)}$ ($AC(\hat{y}^{(m)})$ равна длине $\left|\hat{y}^{(m)}G\right|_1$ отрезка $\hat{y}^{(m)}G$) фирмы-монополиста, а площадь $\left|H\hat{p}^{(m)}FG\right|_2$ (положительное число) четырехугольника $H\hat{p}^{(m)}FG$ равна максимальной прибыли $PR(\hat{y}^{(m)})$ фирмы-монополиста).

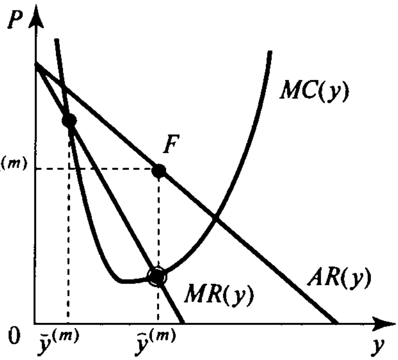


Рис. 8.1

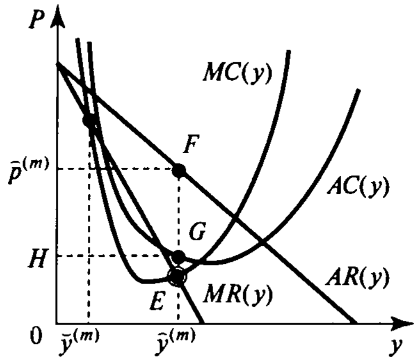


Рис. 8.2

Если линия средних издержек $AC(y)$ касается извне линии среднего дохода $AR(y)$, то максимальная прибыль $PR(y^{(m)})$ фирмы-монополиста будет нулевой или отрицательной (рис. 8.3, на котором площадь $\left|Op^{(m)}Fy^{(m)}\right|_2$ четырехугольника $Op^{(m)}Fy^{(m)}$ равна доходу $R(y^{(m)}) = p^{(m)}y^{(m)}$ и издержкам $C(y^{(m)}) = y^{(m)}AC(y^{(m)})$ фирмы-монополиста, т.е. нулевая площадь $\left|p^{(m)}F\right|_2$ отрезка $p^{(m)}F$ равна максимальной прибыли $PR(y^{(m)})$ фирмы-монополиста).

Если линия средних издержек $AC(y)$ расположена выше линии среднего дохода $AC(y)$, то максимальная прибыль $PR(y^{(m)})$ фирмы-монополиста будет обязательно отрицательной (рис. 8.4, на котором площадь $\left|Op^{(m)}Fy^{(m)}\right|_2$ четырехугольника $Op^{(m)}Fy^{(m)}$ равна доходу $R(y^{(m)}) = p^{(m)}y^{(m)}$ фирмы-монополиста, площадь $\left|OHGy^{(m)}\right|_2$ четырехугольника $OHGy^{(m)}$ равна издержкам $C(y^{(m)}) = y^{(m)}AC(y^{(m)})$ фирмы-монополиста, а площадь (со знаком минус) $\left|p^{(m)}HGF\right|_2$ четырехугольника $p^{(m)}HGF$ равна максимальной прибыли (минимальному убытку) $PR(y^{(m)})$ фирмы-монополиста). На рис. 8.4 длина $\left|y^{(m)}G\right|_1$ отрезка $y^{(m)}G$ равна $AC(y^{(m)})$ и, следовательно, площадь $\left|OHGy^{(m)}\right|_2$ четырехугольника $OHGy^{(m)}$ равна издержкам $C(y^{(m)}) =$ $= \left|Oy^{(m)}\right|_1 \cdot \left|y^{(m)}G\right|_1 = y^{(m)}AC(y^{(m)})$.

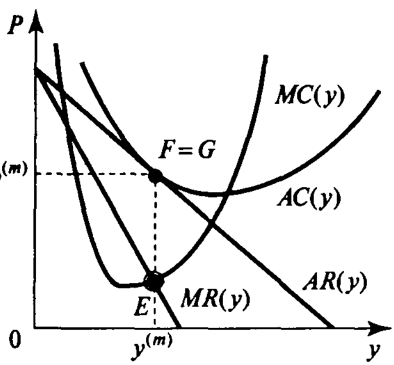


Рис. 8.3

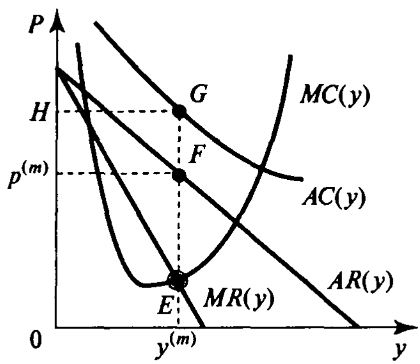


Рис. 8.4

В рассмотренных трех примерах линии среднего $AR(y)$ и предельного $MR(y)$ доходов были неизменными, что свидетельствует о неизменности рыночной конъюнктуры, а технология фирмы-монополиста менялась, причем в сторону роста средних издержек.

8.1.2. В рассмотренных в разделе 8.1.1 трех примерах время явно не фигурировало.

Предположим, что время дискретно и «атомом» времени является производственный период (для краткости – период), которому в экономической реальности может соответствовать, например, один год (или, скажем, один месяц). Фирма-монополист решает задачу максимизации прибыли в течение периода, т.е. в задаче максимизации прибыли фирмы (см., например, рис. 8.2) величины средних и предельных издержек, объем $y^{(m)}$ выпускаемой фирмой продукции и цена $p^{(m)}$ «привязаны» к одному периоду. То же самое справедливо для среднего и предельного дохода. Упорядоченная совокупность производственных периодов называется временны́м промежутком. Временной промежуток – это упорядоченная совокупность между *базовым* периодом и *текущим* периодом. Если в течение этого промежутка фирма-монополист не имеет возможности изменить свои постоянные издержки, то промежуток называется *краткосрочным*, если имеет возможность изменить свои постоянные издержки, т.е. все издержки становятся переменными, то промежуток называется *долговременным*.

Сначала рассмотрим случай, когда в базовом периоде фирма-монополист решает задачу максимизации своей прибыли в текущем периоде, который от базового периода отделяется краткосрочным промежутком.

Если у фирмы-монополиста прибыль положительная или нулевая, фирма с рынка не уйдет. Возникает вопрос, обязательно ли она уйдет с рынка в случае отрицательной прибыли.

Максимальная прибыль фирмы-монополиста $PR(y^{(m)}) = p^{(m)}y^{(m)} - C(y^{(m)})$ (< 0) в случае краткосрочного промежутка имеет следующее детальное представление $(C(y^{(m)})) = VC(y^{(m)}) + FC(y^{(m)})$:

$$PR(y^{(m)}) = p^{(m)}y^{(m)} - y^{(m)}AVC(y^{(m)}) - y^{(m)}AFC(y^{(m)}) \ (< 0).$$

На рис. 8.5 площадь $\left|Op^{(m)}Fy^{(m)}\right|_2$ прямоугольника $Op^{(m)}Fy^{(m)}$ равна доходу $R(y^{(m)})$ фирмы-монополиста. Площадь $\left|ONKy^{(m)}\right|_2$ прямоугольника $ONKy^{(m)}$ равна переменным издержкам $VC(y^{(m)}) = y^{(m)}AVC(y^{(m)})$ фирмы-монополиста, ибо длина $\left|y^{(m)}K\right|_1$ отрезка $y^{(m)}K$ равна $AVC(y^{(m)})$, а длина $\left|Oy^{(m)}\right|_1$ отрезка равна $y^{(m)}$, и поэтому $VC(y^{(m)}) = \left|ONKy^{(m)}\right|_2 = \left|Oy^{(m)}\right|_1 \left|y^{(m)}K\right|_1 = y^{(m)}AVC(y^{(m)})$. Площадь $\left|NHGK\right|_2$ прямоугольника $NHGK$ равна постоянным издержкам $FC(y^{(m)}) = y^{(m)}AFC(y^{(m)})$ фирмы-монополиста, ибо длина отрезка $\left|KG\right|_1 = \left|y^{(m)}G\right|_1 - \left|y^{(m)}K\right|_1 = AC(y^{(m)}) - AVC(y^{(m)}) = AFC(y^{(m)})$, а площадь $\left|NHGK\right|_2 = \left|Oy^{(m)}\right|_1 \cdot \left|KG\right|_1 = y^{(m)}\, AFC(y^{(m)}) = FC(y^{(m)})$. В рассматриваемом случае дохода $y^{(m)}p^{(m)} = \left|Op^{(m)}Fy^{(m)}\right|_2$ фирмы хватит, чтобы компенсировать полностью переменные издержки и частично постоянные издержки, ибо прямоугольник $Op^{(m)}Fy^{(m)}$ полностью покрывает четырехугольник $ONKy^{(m)}$, площадь которого равна $\left|ONKy^{(m)}\right|_2 = \left|Oy^{(m)}\right|_1 \cdot \left|y^{(m)}F\right|_1 = y^{(m)}AVC(y^{(m)}) = VC(y^{(m)})$ – переменным издержкам, и частично четырехугольник $NHGK$, площадь которого равна постоянным издержкам $FC(y^{(m)})$. Поэтому в рассматриваемом варианте, когда $p^{(m)} > AVC(y^{(m)})$, в случае краткосрочного промежутка фирма-монополист с рынка не уйдет.

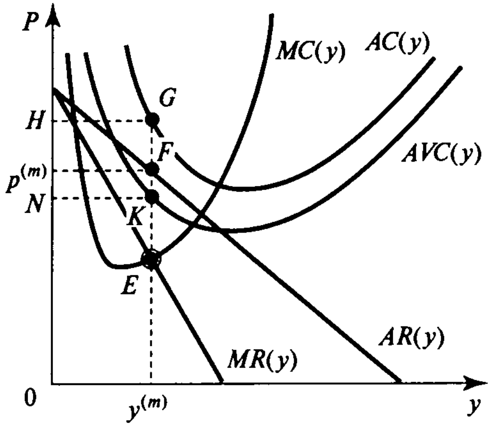


Рис. 8.5

На рис. 8.6 $p^{(m)} < AVC(y^{(m)})$ и дохода $p^{(m)}y^{(m)}$ фирмы-монополиста не хватит, чтобы компенсировать даже переменные издержки $VC(y^{(m)})$, ибо $p^{(m)}y^{(m)} = \left|Op^{(m)}Fy^{(m)}\right|_2 < \left|ONKy^{(m)}\right|_2 = VC(y^{(m)})$. В этом случае (т.е. когда $p^{(m)} < AVC(y^{(m)})$) фирма-монополист должна уйти с рынка в случае краткосрочного промежутка. Случай $p^{(m)} < AVC(y^{(m)})$ означает либо низкий уровень рыночного спроса, либо высокие средние переменные издержки.

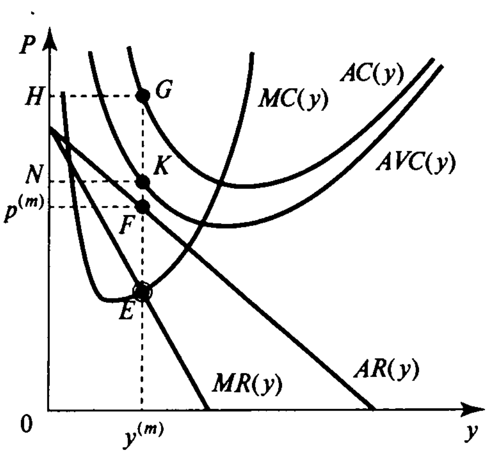


Рис. 8.6

8.1.3. Рассмотрим случай, когда в базовом периоде фирма-монополист решает задачу максимизации своей прибыли в текущем периоде, который от базового периода отделяется *долговременным* промежутком.

Сначала рассмотрим вариант, когда объем выпускаемой фирмой продукции $y_1^{(m)}$ достаточно мал и когда средние и предельные издержки фирмы являются достаточно высокими (рис. 8.7, на котором этот вариант представлен линиями $(sr)AC_1(y)$, $(sr)MC_1(y)$, которые отражают размер и технологию фирмы, обеспечивающей выпуск своей продукции в достаточно малом объеме $y_1^{(m)}$). Поскольку речь идет о конкретном размере и технологии фирмы, постольку ее портретом являются функции издержек $(sr)AC_1(y)$ и $(sr)MC_1(y)$ для текущего периода в случае краткосрочного промежутка.

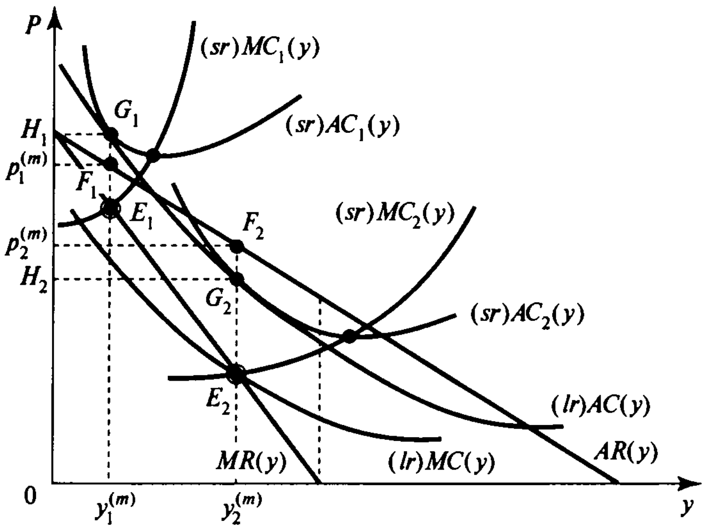


Рис. 8.7

Рассмотрим теперь вариант, когда объем выпускаемой фирмой продукции $y_2^{(m)}$ больше объема $y_1^{(m)}$ и когда средние и предельные издержки фирмы являются относительно низкими (см. рис. 8.7, на котором этот вариант представлен линиями $(sr)AC_2(y)$, $(sr)MC_2(y)$, которые описывают размер и технологию фирмы, обеспечивающей выпуск своей продукции в объеме $y_2^{(m)}$, который больше объема $y_1^{(m)}$). Здесь, как и в предыдущем варианте, речь идет о конкретных размере и технологии фирмы, поэтому ее портретом являются ее функции (линии) издержек $(sr)AC_2(y)$ и $(sr)MC_2(y)$ для текущего периода в случае краткосрочного промежутка.

Если в базовом периоде размер и технология фирмы характеризуются линиями $(sr)AC_1(y)$ и $(sr)MC_1(y)$, то в случае краткосрочного промежутка в текущем периоде фирма максимизирует свою прибыль по первому варианту и имеет объем выпускаемой продукции, равный $y_1^{(m)}$, и цену $p_1^{(m)}$ (см. рис. 8.7).

Если в базовом периоде размер и технология фирмы характеризуются линиями $(sr)AC_2(y)$ и $(sr)MC_2(y)$, то в случае краткосрочного промежутка в текущем периоде фирма максимизирует свою прибыль по второму варианту и имеет объем выпускаемой продукции, равный $y_2^{(m)}$, и цену $p_2^{(m)}$ (см. рис. 8.7).

Если в базовом периоде размер и технология фирмы характеризуются линиями $(sr)AC_1(y)$ и $(sr)MC_1(y)$, а в текущем периоде – линиями $(sr)AC_2(y)$ и $(sr)MC_2(y)$, то требуется долговременный промежуток для того, чтобы фирма могла от первого варианта с $(sr)AC_1(y)$ и $(sr)MC_1(y)$ перейти ко второму варианту с $(sr)AC_2(y)$ и $(sr)MC_2(y)$.

Поскольку фирма-монополист может в базовом периоде точно не знать, какой конкретно вариант функционирования ей следует выбрать в текущем периоде, фирме необходимо рассмотреть все возможные варианты $(sr)AC(y)$ и построить линию $(lr)AC(y)$ в виде огибающей семейства всех линий $(sr)AC(y)$ (на рис. 8.7 показаны два представителя $(sr)AC_1(y)$ и $(sr)AC_2(y)$ семейства всех линий $(sr)AC(y)$ и огибающая $(lr)AC(y)$ этого семейства). На рис. 8.7 также представлена линия $(lr)MC(y)$, которая из линии $(lr)AC(y)$ получается естественным образом: $(lr)MC(y) = (y(lr)AC(y))'_y = (lr)AC(y) + y((lr)AC(y))'_y$.

Задача выбора фирмой «оптимального» варианта функционирования в текущем периоде в случае долговременного промежутка решается так. При этом предполагается, что в текущем периоде известна линия спроса AR на продукцию фирмы-монополиста и, следовательно, линия предельного дохода MR. Отыскивается огибающая $(lr)AC(y)$ семейства линий $(sr)AC(y)$ и функция (линия) $(lr)MC(y)$. Строятся эти линии (см. рис. 8.7). Отыскивается точка E_2 пересечения линий $MR(y)$ и $(lr)MC(y)$, т.е. решается уравнение $MR(y) = (lr)MC(y)$, которое в рассматриваемом на рис. 8.7 случае дает $y = y_2^{(m)}$. С помощью функции (линии) $AR(y)$ находим $p = p_2^{(m)}$. Линии $(sr)MC_2(y)$ и $(sr)AC_2(y)$ «оптимального» варианта функционирования фирмы в текущем периоде выбираются следующим образом. Из семейства всех линий $(sr)MC(y)$ выбирается та, которая проходит через точку E_2. Поскольку линии $(sr)AC(y)$ и $(sr)MC(y)$ образуют пары, постольку после выбора линии $(sr)MC_2(y)$ однозначно выбирается линия $(sr)AC_2(y)$ (она должна касаться линии $(lr)AC(y)$). Выбор функции (линии) $(sr)AC_2(y)$ можно осуществлять непосредственно из однопараметрического семейства функций (линий)

$$(sr)AC_2(y) = \frac{(sr)C_2(y)}{y} = \frac{1}{y}\int\limits_{y_2^{(m)}}^{y}(sr)MC_2(y)dy + \frac{1}{y}D$$

(здесь D – произвольная постоянная). Из однопараметрического семейства линий в качестве $(sr)AC_2(y)$ выбирается та, которая касается линии $(lr)AC(y)$.

На рис. 8.7 площадь $\left|p_1^{(m)}H_1G_1F_1\right|_2$ прямоугольника $p_1^{(m)}H_1G_1F_1$, взятая со знаком минус, равна максимальной прибыли, т.е. минимальному убытку фирмы в первом варианте $(sr)AC_1(y)$ и $(sr)MC_1(y)$.

На рис. 8.7 площадь $\left|H_2p_2^{(m)}F_2G_2\right|_2$ прямоугольника $H_2p_2^{(m)}F_2G_2$ равна максимальной прибыли фирмы во втором варианте с $(sr)AC_2(y)$ и $(sr)MC_2(y)$.

Рисунок 8.7 иллюстрирует ситуацию развития фирмы-монополиста в целях повышения эффективности ее функционирования (фирма из убыточной за счет наращивания производства и снижения издержек становится прибыльной). Приведенный пример показывает, что в случае долговременного промежутка фирма-монополист может иметь положительную прибыль в отличие от конкурентной фирмы, которая в случае долговременного промежутка может иметь только нулевую прибыль. Если линия $(lr)AC(y)$ располагается строго выше линии $AR(y)$ среднего дохода, то, очевидно, фирма-монополист будет иметь отрицательную прибыль и поэтому обязательно покинет данный рынок.

8.2. Монопольная власть и ее источники, индекс монопольной власти

8.2.1. Функция (линия) спроса на *продукцию* фирмы-монополиста есть функция *рыночного спроса*. Согласно закону спроса эта функция убывает с ростом объема y выпуска фирмы-монополиста. Отсюда следует, что, варьируя объем выпускаемой продукции, фирма-монополист может корректировать цену предлагаемого ею продукта. Когда фирма путем варьирования объема выпускаемой ею продукции корректирует цену предлагаемого ею продукта, говорят, что фирма обладает *монопольной* (или *рыночной*) *властью*. Монопольная власть характеризуется индексом монопольной власти, предложенным Лернером:

$$L = \frac{p - MC}{p} = \frac{-1}{E_d}\left(= \frac{1}{|E_d|}\right), \qquad (8.2.1)$$

т.е. индекс монопольной власти есть обратная величина (со знаком минус) эластичности спроса на продукцию фирмы-монополиста по цене.

Для вывода формулы (8.2.1) выпишем представление дохода R фирмы-монополиста

$$R(y) = p(y)y.$$

Предельный доход $MR(y)$ имеет вид

$$MR(y) = \frac{dp(y)}{dy}y + p(y),$$

откуда следует, что

$$MR(y) = p(y)\left(\frac{dp(y)}{dy}\cdot\frac{y}{p(y)} + 1\right) = p(y)\left(\frac{1}{\frac{p}{y}\frac{dy}{dp}} + 1\right) = p(y)\left(1 + \frac{1}{E_d}\right),$$

т.е.

$$p(y) - MR(y) = -\frac{p(y)}{E_d},$$

или

$$\frac{p(y) - MR(y)}{p(y)} = -\frac{1}{E_d}.$$

В точке $y^{(m)}$ максимизации прибыли фирмы-монополиста $MR(y^{(m)}) = MC(y^{(m)})$, поэтому имеем

$$\frac{p(y^{(m)}) - MC(y^{(m)})}{p(y^{(m)})} = -\frac{1}{E_d(y^{(m)})}.$$

Левая часть последнего равенства и есть индекс Лернера по определению.

Формула (8.2.1) может быть выписана не только для фирмы-монополиста, но и для любой фирмы, имеющей убывающую (но не горизонтальную!) функцию (линию) спроса $AR(y)$. Следует здесь специально отметить, что в индексе Лернера для фирмы, которая не является чистым монополистом, фигурирует эластичность спроса по цене на продукцию, производимую фирмой, а не эластичность рыночного спроса.

Если эластичность спроса на продукцию фирмы $E_d = -\infty$ (случай чистой конкуренции), то $p = MC$, и следовательно, индекс Лернера равен нулю. Верно и обратное. Если $L = 0$, то $p = MC$ и $E_d = -\infty$.

Если эластичность спроса на продукцию фирмы E_d приближается к числу, равному 1, то, очевидно, индекс Лернера $L \to 1$. Поскольку в случае линейной функции спроса пара $(y^{(m)}, p^{(m)})$ принадлежит эластичному (верхнему) участку линии спроса, т.е. участку, где $|E_d| > 1$, постольку в случае линейной функции спроса индекс Лернера не может быть больше единицы.

Чем больше (по модулю) эластичность E_d спроса по цене (т.е. чем ближе линия спроса на продукцию фирмы к совершенно эластичной линии спроса), тем ближе к нулю индекс Лернера, т.е. монопольная власть фирмы мала (рис. 8.8). Если, например, эластичность спроса по цене равна $E_d = -10$, то индекс Лернера принимает значение равное $L = 0{,}1$, что означает, что $p^{(m)} - MC(y^{(m)}) = 0{,}1p^{(m)}$, т.е. к предельным издержкам $MC(y^{(m)})$ добавляется всего 10% от цены $p^{(m)}$.

Чем ближе к -1 эластичность спроса на продукцию фирмы по цене, тем ближе к единице индекс Лернера, т.е. монопольная власть фирмы велика (рис. 8.9). Если эластичность спроса по цене равна $E_d = -1{,}5$, то индекс Лернера принимает значение, равное $L = 2/3 \cong 0{,}67$, что означает, что $p^{(m)} - MC(y^{(m)}) = 0{,}67p^{(m)}$, т.е. ценовая добавка к предельным издержкам равна 67% от цены $p^{(m)}$.

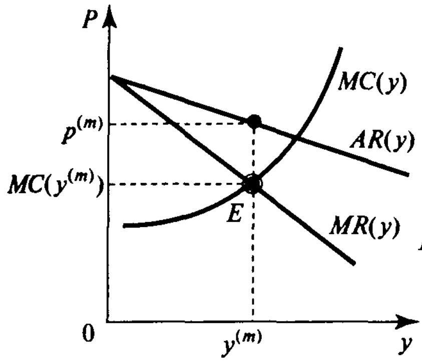


Рис. 8.8

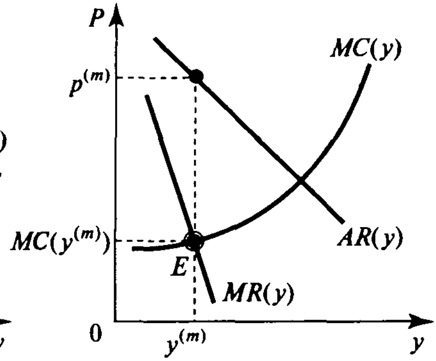


Рис. 8.9

Отметим, что индекс монопольной власти и величина максимальной прибыли фирмы мало связаны между собой: при большой рыночной власти фирма может иметь максимальную прибыль любого знака (положительную, нулевую, отрицательную) (рис. 8.10, на котором разность $p^{(m)} - MC(y^{(m)}) = \left|EF\right|_1$ равна длине $\left|EF\right|_1$ отрезка EF, а площадь $\left|p^{(m)}HGF\right|_2$ четырехугольника $p^{(m)}HGF$, взятая со знаком минус, равна максимальной прибыли фирмы, т.е. минимальному убытку фирмы). Причина того, что при высокой монопольной власти фирма-монополист может иметь отрицательную максимальную прибыль, в том, что в формировании индекса монопольной власти не фигурируют средние издержки, а в определении максимальной прибыли они фигурируют.

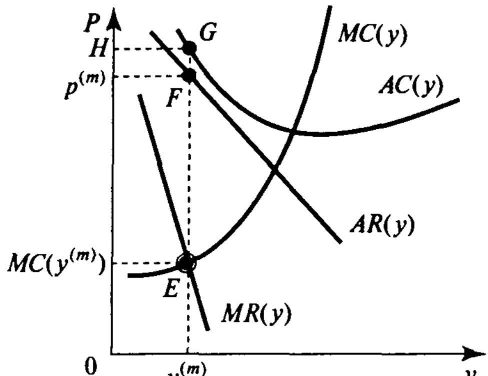


Рис. 8.10

Формула (8.2.1) может быть переписана так:

$$p = \frac{MC}{1 + \frac{1}{E_d}}. \tag{8.2.2}$$

Если фирма (не обязательно монополист) может оценить эластичность спроса на *свою* продукцию и свои предельные издержки, то формула (8.2.2) позволяет получить оценку цены на производимую фирмой продукцию, т.е. формула (8.2.2) дает простое правило ценообразования для такой фирмы.

Если $MC = AC$, то индекс Лернера будет выглядеть так: $L = \frac{p^{(m)} - AC(y^{(m)})}{p^{(m)}}$. Умножив числитель и знаменатель на $y^{(m)}$, будем иметь

$$L = \frac{p^{(m)}y^{(m)} - y^{(m)}AC(y^{(m)})}{p^{(m)}y^{(m)}} = \frac{PR(y^{(m)})}{Ry^{(m)}}, \tag{8.2.3}$$

т.е. индекс Лернера становится равным отношению максимальной прибыли фирмы-монополиста к ее доходу, т.е. ***норме прибыли***. Получается, что чем выше норма прибыли фирмы, тем выше ее монопольная власть. Если в правой части формулы (8.2.3) числитель и знаменатель поделим на $y^{(m)}$, то получим следующую дробь: $L = \frac{PR(y^{(m)})/y^{(m)}}{p^{(m)}}$, которая означает, что индекс Лернера равен также отношению средней прибыли к цене $p^{(m)}$.

8.2.2. *Источниками* монопольной власти являются: ***эластичность рыночного спроса***, ***число фирм на рынке*** и такое важное обстоятельство, как ***взаимодействие фирм***. Эти источники представляют интерес, когда на рынке действуют несколько фирм, а не одна, как это имеет место в случае чистой монополии. Поэтому сейчас мы ограничимся краткими замечаниями, а более подробный анализ проведем позже, когда будем рассматривать монополистическую конкуренцию и олигополию.

Первым источником монопольной власти является эластичность рыночного спроса. Если речь идет о фирме-монополисте, то рыночный и индивидуальный спрос в этом случае совпадают и индекс монопольной власти определяется на основании эластичности рыночного спроса. Если фирма не является фирмой-монополистом, то эластичность спроса E_d на ее продукт больше (точнее, не меньше) по модулю эластичности E_{dm} рыночного спроса $|E_d| \geq |E_{dm}|$, откуда следует, что

$$\frac{1}{|E_{dm}|} \geq \frac{1}{|E_d|},$$

т.е. эластичность рыночного спроса позволяет получить оценку сверху для индекса монопольной власти (8.2.1) отдельной фирмы.

В связи с тем что в случае краткосрочного промежутка спрос часто бывает неэластичным по цене, а в случае долговременного промежутка спрос является более эластичным по цене, монопольная власть в случае краткосрочного промежутка может быть большой, а в случае долговременного промежутка – значительно меньшей.

Вторым источником монопольной власти является число фирм на рынке. Говоря точнее, число фирм на рынке и соотношение между объемами выпусков этих фирм, т.е. *концентрация* фирм на рынке. Последние десятилетия одним из популярных индексов концентрации является индекс Хиршмана–Херфиндаля (*HHI*), который определяется так:

$$HHI = s_1^2 + \ldots + s_n^2, \tag{8.2.4}$$

где n – число фирм на рассматриваемом рынке; $s_i = y_i/(y_1 + \ldots + y_n)$, $i = 1, \ldots, n$ – рыночная доля i-й фирм: y_i – объем ее выпуска, а $y_1 + \ldots + y_n$ – суммарный объем выпусков всех фирм, которые действуют на рассматриваемом рынке. В приведенном представлении максимальное значение индекса *HHI* равно единице. Это возможно только в случае фирмы-монополиста, которая одна представлена на рынке. Здесь $n = 1$ и $s_1 = y_1/y_1 = 1$.

Если, например, $n = 2$ и $s_1 = s_2 = 0{,}5$, то $HHI = 0{,}5^2 + 0{,}5^2 = 0{,}5$. При $n = 3$, $s_1 = s_2 = 0{,}4$, $s_3 = 0{,}2$ имеем $HHI = 0{,}4^2 + 0{,}4^2 + 0{,}2^2 = 0{,}16 + 0{,}16 + 0{,}04 = 0{,}36$.

Если $s_1 = s_2 = \ldots = s_n = \frac{1}{n}$, т.е. доли рынка у всех n фирм одинаковы, то

$$HHI = \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 = n\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}$$

и с ростом числа фирм на рассматриваемом рынке, т.е. при $n \to \infty$, индекс $HHI \to 0$.

Индекс Хиршмана–Херфиндаля (*HHI*) используется и в таком виде:

$$HHI = (s_1^2 + \ldots + s_n^2) \cdot 10\,000,$$

где выражение $s_i \cdot 100$, $i = 1, \ldots, n$ – рыночная доля i-й фирмы в *процентах*. В этом случае максимальное значение *HHI* равно 10 000, а минимальное значение может быть сколь угодно малым, если число фирм неограниченно растет.

Индекс *HHI* используется правительственными органами в качестве основного ориентира для принятия решений в антимонопольной (антитрестовской) политике. С 1982 г. *HHI* в США стал основным ориентиром при оценке разного рода слияний различных фирм на предмет допустимости таких слияний. Если $HHI < 1000$, то рынок оценивается как неконцентрированный («достаточно многочисленный») и слияние фирм, как правило, допускается без каких-либо ограничений. Если $1000 < HHI < 1800$, то рынок оценивается как «умеренно концентрированный», однако при $HHI > 1400$ рынок оценивается «как угрожающе немногочисленный». Это обстоятельство может служить поводом для дополнительной проверки допустимости слияния со стороны Департамента юстиции США. При $HHI > 1800$ рынок оценивается как высококонцентрированный (или «немногочисленный»). В этом последнем случае если в результате слияния *HHI* увеличивается более чем на 100 пунктов, то оно не разрешается. Если рост *HHI* находится в пределах 51–100 пунктов, то существует основание для дополнительного анализа слияния на предмет его допустимости или недопустимости.

Взаимосвязь между индексом Лернера и *HHI* будет проанализирована в параграфе 8.7, посвященном дуополии и олигополии.

Третьим источником монопольной власти является взаимодействие фирм на рынке, которое также будет проанализировано в параграфе 8.7. Здесь в качестве предварительного положения отметим, что в случае агрессивной конкуренции фирм на рынке монопольная власть уменьшается, а в случае сотрудничества фирм монопольная власть увеличивается.

8.3. Естественные монополии и их регулирование

8.3.1. Фирма является естественной монополией, если убывание ее средних и предельных издержек наблюдается на всем промежутке ее объемов производства (рис. 8.11). В связи с убыванием средних издержек $AC(y)$ предельные издержки $MC(y)$ будут ниже средних издержек. Термин *естественная* монополия отражает тот факт, что экономия от масштаба производства позволяет одной фирме удовлетворять весь рыночный спрос до того, как отдача от масштаба начнет снижаться, т.е. когда линия средних издержек $AC(y)$ пойдет вверх. Поэтому в данной ситуации входные барьеры в отрасль обусловливаются технологией фирмы, а не правами собственности или, скажем, лицензиями. Замена одной большой фирмы несколькими меньших размеров (в целях создания конкурентного климата) приведет к росту издержек. В качестве примеров можно отметить нецелесообразность наличия в городе нескольких водопроводных, канализационных сетей или сетей централизованного теплоснабжения.

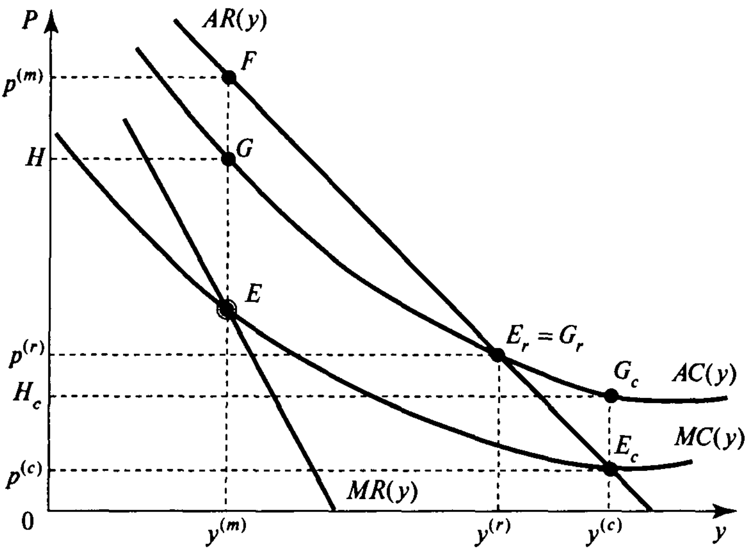


Рис. 8.11

Задача рационального функционирования естественной монополии (как и всякой монополии) состоит в максимизации ее прибыли в течение некоторого фиксированного периода (например, в течение года). Оптимальный выпуск $y^{(m)}$ естественной монополии есть абсцисса точки E пересечения линий $MC(y)$ и $MR(y)$, цена одной $p^{(m)}$ единицы продукции естественной монополии есть ордината $p^{(m)}$ точки F, максимальная прибыль $PR^{(m)}$ естественной монополии равна площади $\left|Hp^{(m)}FG\right|_2$ прямоугольника $Hp^{(m)}FG$ (см. рис. 8.11). В связи с высокими средними издержками $AC(y^{(m)})$ и относительно небольшим выпуском $y^{(m)}$ максимальная прибыль $PR^{(m)}$ естественной монополии (даже при наличии высокой монопольной цены $p^{(m)}$) относительно невелика.

Если естественная монополия выпускает продукцию, востребованную обществом, то ее относительно малый выпуск $y^{(m)}$ (при относительно высокой цене $p^{(m)}$), который максимизирует ее прибыль $PR^{(m)}$ и является для монополии наилучшим решением, может оказаться неприемлемым для общества. Отсюда вытекает необходимость регулирования функционирования естественной монополии. Для этого следует рассмотреть возможные варианты регулирования.

8.3.2. Регулирующий орган может установить за единицу продукции естественной монополии цену $p^{(c)}$, которая аналогична цене, появляющейся в условиях чистой конкуренции, ибо $p^{(c)}$ (см. рис. 8.11) – ордината точки E_c пересечения линий $MC(y)$ и $AR(y)$. Установление цены $p^{(c)}$ на уровне $MC(y)$ называют также предельным ценообразованием. В связи с тем что цена $p^{(c)}$ аналогична цене в условиях чистой конкуренции, данное решение о регулировании функционирования естественной монополии называется *первым наилучшим решением*. Однако это решение (относительно высокий выпуск $y^{(c)}$ и относительно низкая цена $p^{(c)}$, которая является таковой из-за низких предельных издержек $MC(y)$) наилучшим является для общества, но не для естественной монополии, ибо при таких цене $p^{(c)}$ и выпуске она будет иметь *отрицательную прибыль* $PR^{(c)}$ (равную площади $\left|p^{(c)}H_cG_cE_c\right|_2$ прямоугольника $p^{(c)}H_cG_cE_c$, взятую со знаком минус, – см. рис. 8.11) в случае как краткосрочного, так и долговременного промежутка и поэтому уйдет с рынка. Чтобы этого не произошло, естественной монополии следует предоставить дотацию в размере, по крайней мере необходимом для компенсации отрицательной прибыли. Однако практическое решение о размере дотации может оказаться достаточно сложным в связи трудностями получения оценок высоких постоянных издержек и возможной неэффективности технологии и управления естественной монополии. Тем не менее в ряде социально значимых случаев государство (а чаще муниципальная власть), являясь владельцем естественной монополии или сдавая ее в аренду, предоставляют ей дотации, обеспечивая тем самым ее приемлемое функционирование. В качестве примеров можно отметить наземный городской транспорт, подземный городской транспорт, которые нормально функционируют благодаря тому, что получают значительные дотации.

8.3.3. Компромиссным решением для регулирования естественной монополии можно считать установление цены $p^{(r)}$ за единицу продукции естественной монополии (см. рис. 8.11). Такое решение принято называть ***вторым наилучшим решением***. Здесь цена $p^{(r)}$ равна ординате точки E_r ($= G_r$) пересечения линий $AC(y)$ и $AR(y)$, а прибыль $PR^{(r)}$ естественной монополии равна нулю (см. рис. 8.11, на котором доход $R^{(r)}$ и издержки $C^{(r)}$ равны площади $\left|\mathrm{O}p^{(r)}E_r y^{(r)}\right|_2$ прямоугольника $\mathrm{O}p^{(r)}E_r y^{(r)}$. При нулевой прибыли естественная монополия может функционировать как в краткосрочном, так и в долговременном промежутке.

Более детально проблемы регулирования естественных монополий анализируются в дисциплине «Экономика отраслевых рынков».

В заключение кратко рассмотрим еще один вариант регулирования естественной монополии. Поскольку на рынке монополии (не обязательно естественной) нет конкуренции (она там невозможна в принципе или обременительна из-за высоких издержек), конкуренция может иметь место в борьбе *за рынок*. Регулирующий орган может провести аукцион и по его результатам передать рынок той фирме, которая обязуется вносить в бюджет, скажем, наибольшую сумму. Конкуренцию за рынок принято называть конкуренцией по Демзетцу, который ее впервые описал. Фирма, победившая на аукционе, скорее всего, обеспечит выпуск продукции в объеме $y^{(m)}$ по цене $p^{(m)}$, однако часть (возможно, значительную) своей максимальной прибыли $PR^{(m)}$ фирма будет перечислять в бюджет в качестве оплаты за право обслуживать рынок. Относительно малый объем $y^{(m)}$ выпуска фирмы является одним из недостатков такого способа регулирования естественной монополии.

8.4. Монополистическая ценовая дискриминация первого, второго и третьего рода

8.4.1. Фирма-монополист проводит *ценовую дискриминацию первого рода*, если цена каждой своей единицы продукции фирма устанавливает на уровне цены рыночного спроса именно на эту единицу. Продукция фирмы может иметь форму продукта или услуги.

Сначала проанализируем ценовую дискриминацию первого рода на вербальном уровне, а затем на более детальном уровне с использованием формальных построений.

При отсутствии ценовой дискриминации фирма определяет свой выпуск $y^{(m)}$ (и свою монопольную цену $p^{(m)}$) как решение уравнения $MR(y) = MC(y)$. В случае когда предельные издержки постоянные $MC = C$ (рис. 8.12), максимальная прибыль фирмы-монополиста равна $PR^{(m)} = (p^{(m)} - MC)y^{(m)} = \left|Hp^{(m)}FE\right|_2$, где $\left|Hp^{(m)}FE\right|_2$ – площадь прямоугольника $Hp^{(m)}FE$. (см. рис. 8.12).

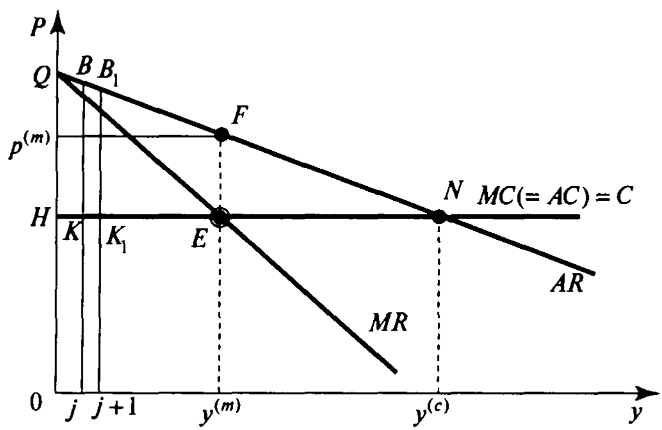


Рис. 8.12

Максимальная прибыль $PR^{(m)}$ фирмы-монополиста может быть рассчитана по формуле $PR^{(m)} = \int\limits_0^{y^{(m)}} MPR(y)dy = \int\limits_0^{y^{(m)}} MR(y)dy -$

$-\int\limits_0^{y^{(m)}} MC(y)dy$, где символом $MPR(y)$ обозначена предельная прибыль.

В этом случае максимальная прибыль $PR^{(m)}$ равна площади $|HQE|_2$ треугольника HQE, которая, естественно, равна площади прямоугольника $Hp^{(m)}FE$.

При проведении ценовой дискриминации первого рода в случае постоянных предельных издержек при реализации одной j-й единицы продукции фирма-монополист получает прибыль, приближенно равную площади полоски KBB_1K_1, ибо цена этой j-й единицы продукции равна ординате точки B. Следовательно, при реализации $y^{(m)}$ единиц своей продукции, когда каждая единица продукции реализуется по цене ее рыночного спроса, фирма-монополист получает прибыль, равную площади $|HQFE|_2$ четырехугольника $HQEF$, которая больше площади $\left|Hp^{(m)}FE\right|_2$ четырехугольника $Hp^{(m)}FE$ (площади $|HQFE|_2$ треугольника HQE). Фирма-монополист может продолжить (после объема $y^{(m)}$) реализацию каждой своей единицы продукции по цене этой единицы вплоть до объема $y^{(c)}$ и получить дополнительную прибыль, равную площади $|EFN|_2$ треугольника EFN.

Таким образом, при проведении ценовой дискриминации первого рода фирма-монополист получает дополнительную прибыль, равную сумме площадей $\left|p^{(m)}QF\right|_2$ и $|EFN|_2$ двух треугольников $p^{(m)}QF$ и EFN.

В рассмотренном случае потребительский излишек равен площади $|HQN|_2$ треугольника HQN. В случае отсутствия ценовой дискриминации прибыль фирмы-монополиста, равная площади $\left|Hp^{(m)}FE\right|_2$ прямоугольника $Hp^{(m)}FE$, составляет часть потребительского излишка. При использовании ценовой дискриминации первого рода фирма-монополист получает весь потребительский излишек $|HQN|_2$, равный ее максимальной прибыли. Таким образом, используя ценовую дискриминацию первого рода, фирма-монополист понижает уровень общественного благосостояния. Решение задачи максимизации прибыли фирмы-монополиста в условиях ценовой дискриминации первого рода Парето-эффективно, ибо не существует способа увеличить прибыль фирмы-монополиста и повышать благосостояние потребителей: прибыль фирмы-монополиста максимальна, а излишек потребителей нельзя увеличить, не уменьшая прибыль фирмы-монополиста.

Предпосылка о том, что предельные издержки *MC* постоянны, означает, что издержки *C* есть линейная функция выпуска фирмы. Эта предпосылка справедлива во многих ситуациях экономической реальности.

Более сложным является вопрос о принятой предпосылке, что фирма-монополист знает (или умеет оценивать) координаты точек линии спроса на свою продукцию. Как правило, эта предпосылка далека от реальности. Однако можно отметить ряд ситуаций, в которых данная предпосылка может быть использована. Например, успешно практикующий врач обычно хорошо знает своих пациентов и поэтому может дифференцировать размер своего гонорара, исходя из их материального положения.

Другой пример реального использования предпосылки о знании линии спроса дает практика дифференцированной оплаты за учебу, принятая в ряде отечественных и зарубежных вузов: успешно успевающие студенты платят за учебу меньше (или вообще от нее освобождаются), не вполне успевающие – платят больше.

В общем случае, когда предельные издержки *MC* не являются постоянными, в случае отсутствия ценовой дискриминации первого рода максимальная прибыль $PR^{(m)}$ фирмы-монополиста

$$\int_0^{y^{(m)}} MPR(y)dy = \int_0^{y^{(m)}} MR(y)dy - \int_0^{y^{(m)}} MC(y)dy$$

(рис. 8.13) равна площади $|NQE|_2$ криволинейного треугольника NQE. В случае наличия ценовой дискриминации первого рода максимальная прибыль фирмы-монополиста

$$\int_0^{y^{(c)}} MPR(y)dy = \int_0^{y^{(c)}} AR(y)dy - \int_0^{y^{(c)}} MC(y)dy$$

равна площади $|NQG|_2$ криволинейного треугольника NQG, которая больше площади $|NQE|_2$ криволинейного треугольника NQE. То есть при проведении ценовой дискриминации первого рода фирма-монополист улучшает свое положение за счет увеличения максимальной прибыли. Переход от $MR(y)$ к $AR(y)$ связан с тем, что в случае ценовой дискриминации первого рода цена каждой единицы продукции фирмы устанавливается на уровне цены рыночного спроса именно этой единицы, т.е. линия $MR(y)$ переходит в $AR(y)$, как это имеет место в случае чистой конкуренции (когда $AR = MR$).

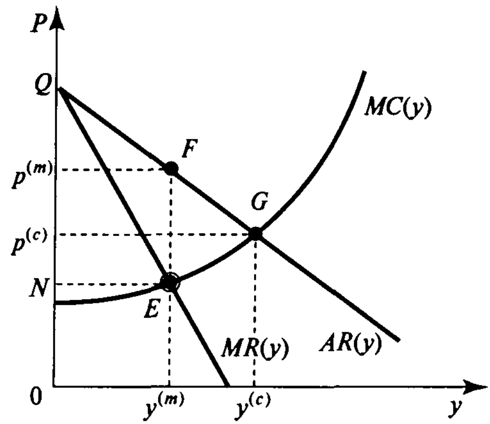


Рис. 8.13

8.4.2. Переходим к более детальному анализу ценовой дискриминации первого рода. Применяя ценовую дискриминацию первого рода, фирма-монополист, по существу, с каждым потребителем работает индивидуально и может назначать разные цены в зависимости от того, кому и какое количество выпускаемой продукции она продает.

В рамках ценовой дискриминации первого рода рассматривается имеющая преимущественно теоретическое значение *идеальная (совершенная) ценовая дискриминация*, при которой фирма-монополист выбирает оптимальную для себя схему ценообразования в условиях, когда: 1) она знает функцию спроса каждого потребителя; 2) она может отличать потребителей; 3) невозможен *арбитраж*, т.е. перепродажа продукта одним потребителем другому.

Пусть предпочтения каждого потребителя C_i, $i = 1, \ldots, k$, описываются квазилинейной функцией полезности $u_i(y_i, z_i) = V_i(y_i) + z_i$, где y_i – количество продукции, выпускаемой фирмой-монополистом, которое приобретает на рынке потребитель C_i, а z_i интерпретируется как количество денег, которое расходует потребитель на приобретение других продуктов. Каждый потребитель C_i, $i = 1, \ldots, k$, обладает фиксированным доходом в размере ω_i. Далее функция $V_i(y_i)$ также называется функцией полезности.

Функция $V_i(y_i)$ определена при $y_i \geq 0$, имеет конечную положительную производную V_i' и отрицательную вторую производную $V_i''(y_i)$ при $y_i \geq 0$. Функция издержек $C(y)$ фирмы-монополиста выпукла вниз, имеет положительную конечную производную $C'(y)$ при $y \geq 0$ (здесь y — объем выпускаемой фирмой-монополистом продукции). Символом t_i, $t_i \geq 0$, обозначим денежную сумму, которую платит потребитель C_i фирме-монополисту за приобретаемое им (потребителем) количество y_i выпускаемой фирмой-монополистом продукции. Пара (y_i, t_i) называется *контрактом* между фирмой-монополистом и потребителем C_i, $i = 1, \ldots, k$.

Пусть функция $V_i(y_i)$, $i = 1, \ldots, k$, полезности нормирована так, что $V_i(0) = 0$ и что ее частные значения имеют денежную размерность.

Неравенство

$$V_i(y_i) \geq t_i, \; i = 1, \ldots, k$$

называется *условием участия* потребителя C_i в рыночной ситуации, которое содержательно означает, что уровень $V_i(y_i)$ полезности потребителя C_i после приобретения им продукта в объеме y_i должен быть не меньше денежной суммы t_i, потраченной потребителем C_i на приобретение продукта в объеме y_i. Неравенство $V_i(y_i) < t_i$ означает, что потребителю C_i выгоднее уйти с рынка.

Очевидно, фирма-монополист заинтересована в максимизации функции

$$PR = t_1 + \ldots + t_k - C(y_1 + \ldots + y_k),$$

которая равна ее прибыли (разности выручки $t_1 + \ldots + t_k$ и издержек $C(y_1 + \ldots + y_k)$) при выполнении условия участия каждого потребителя C_i, $i = 1, \ldots, k$, т.е. фирма-монополист решает задачу максимизации

$$PR = t_1 + \ldots + t_k - c(y_1 + \ldots + y_k) \quad (\max)$$

при наличии ограничений (условий участия)

$$V(y_i) \geq t_i, \; i = 1, \ldots, k.$$

Это содержательно означает, что фирма-монополист имеет дело только с потребителями, которые участвуют в рыночной ситуации.

Если в точке (y_i^*, t_i^*), $i = 1, \dots, k$, максимального решения хотя бы одно ограничение является строгим неравенством $V(y_{i0}^*) \geq t_{i0}^*$, то существует положительное число ε_0, такое, что $V(y_{i0}^*) \geq t_{i0}^* + \varepsilon_{i0}$. Это означает, что существует допустимое решение (y_1^*, t_1^*), ..., $(y_{i0}^*, t_{i0}^* + \varepsilon_0)$, ..., (y_k^*, t_k^*) задачи максимизации, на котором значение целевой функции

$$t_1^* + \dots + t_{i0}^* + \varepsilon_0 + \dots + t_k^* - c(y_1^* + \dots + y_k^*)$$

строго больше максимального значения

$$t_1^* + \dots + t_{i0}^* + \dots + t_k^* - c(y_1^* + \dots + y_k^*)$$

этой целевой функции.

Полученное противоречие означает, что допущение о наличии хотя бы одного строгого неравенства $V(y_{i0}^*) \geq t_{i0}^*$ является ошибочным.

Следовательно, в точке (y_i^*, t_i^*), $i = 1, \dots, k$, оптимума приведенной задачи максимизации ограничения в виде неравенств превращаются в равенства

$$V_i(y_i^*) = t_i^*, \;\; i = 1, \dots, k.$$

Поэтому задача максимизации прибыли фирмы-монополиста может быть переписана в эквивалентной ей форме

$$PR(y_1, \dots, y_k) =$$
$$= V_1(y_1) + \dots + V_k(y_k) - C(y_1 + \dots + y_k) \;\; (\max), \qquad (8.4.1)$$

которая разрешима, например, при постоянных предельных издержках и при $V_i'(y_i) \to 0$, при $y_i \to +\infty$, $i = 1, \dots, k$.

Оптимальное решение (y_i^*, t_i^*), $i = 1, \dots, k$, задачи максимизации (8.4.1) называется *идеальным* (*совершенным*), ибо рассматривается идеальная (совершенная) ценовая дискриминация.

Предположим, что задача максимизации (8.4.1) имеет внутреннее решение $y_i^* > 0$, $i = 1, \dots, k$. Предположение выполняется в случае, если, например, предельные издержки $C'(y_1 + \dots + y_k)$ постоянны. Тогда внутреннее решение удовлетворяет условиям первого порядка

$$V_i'(y_i) - C'(y_1 + \dots + y_k) = 0, \;\; i = 1, \dots, k, \qquad (8.4.2)$$

откуда следуют равенства

$$V_i'(y_1^*) = \dots V_k'(y_k^*) = C'(y_1^* + \dots + y_k^*),$$

которые показывают, что предельная полезность $V_i'(y_i)$ каждого потребителя C_i, $i = 1, \dots, k$, равна предельным издержкам фирмы-монополиста, т.е. ситуация с производством продукта такая же, как и в случае совершенной конкуренции.

Если при любом $y > 0$ $V_i'(y) > V_j'(y)$, $i \neq j$, то $y_i^* > y_j^*$.

Оптимальная плата t_i^* потребителя C_i за количество y_i^* приобретаемого им продукта, выпускаемого фирмой-монополистом, очевидно, равна

$$t_i^* = V_i(y_i^*) = \int_0^{y_i^*} V_i'(\tau)d\tau, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Пара (y_i^*, t_i^*), $i = 1, \ldots, m$, называется *оптимальным контрактом* между фирмой-монополистом и потребителем C_i.

Положим $PR^* = V_1(y_1^*) + \ldots + V_k(y_k^*) - C(y_1^* + \ldots + y_k^*)$.

На рис. 8.14 дана геометрическая интерпретация отыскания фирмой-монополистом «идеальной» пары (y_i^*, t_i^*). Для этого фирме-монополисту следует найти точку y_i^*, в которой линии $V_i(y_i)$ и $C(y_i + y_{-i})$ имеют параллельные касательные K_1 и K_2. Здесь

$$y_{-i} = y_1 + \ldots + y_{i-1} + y_{i+1} + \ldots + y_k.$$

На основании условия второго порядка (которое здесь не приводится) расстояние по вертикали между точками касания будет больше, чем расстояние по вертикали между любыми другими точками на линиях $V_i(y_i)$ и $C(y_i + y_{-i})$ в пределах точек A и B (см. рис. 8.14).

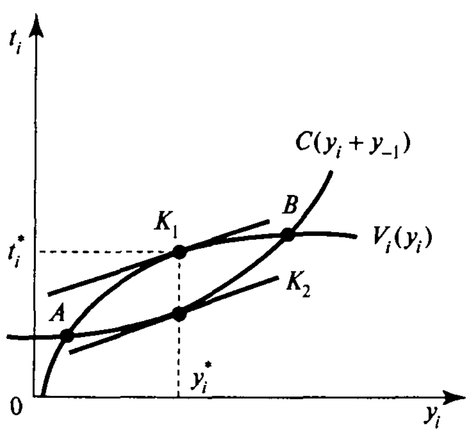


Рис. 8.14

Пример 8.4.1. Этот пример иллюстрирует случай идеальной ценовой дискриминации. Функция полезности потребителя C_i имеет вид $u_i(y_i, z_i) = V_i(y_i) + z_i$, $V_i(y_i) = \sqrt{y_i}$, $i = 1, \ldots, k$, $C(y) = Cy = C(y_1 + \ldots + y_k)$ (C — скалярный параметр).

В этом случае уравнение (8.4.2) имеет вид

$$\left(\sqrt{y_i}\right)'_{y_i} - C(y_1 + \ldots + y_k)'_{y_i} = 0,$$

т.е.

$$\frac{1}{2\sqrt{y_i}} = C,$$

откуда

$$y_i^* = \frac{1}{4C^2} \quad \text{и} \quad t_i^* = \sqrt{y_i^*} = \frac{1}{2C}.$$

8.4.3. Фирма-монополист может предложить каждому потребителю C_i, $i = 1, \ldots, k$, некоторую схему оплаты приобретаемого потребителем количества y_i продукта, т.е. *схему ценообразования* (*тариф*), в виде размера $t_i(y_i)$ денежной оплаты потребителя C_i фирме-монополисту как функцию количества y_i приобретаемого им у фирмы-монополиста продукта.

При выбранной фирмой-монополистом схеме ценообразования $t_i(y_i)$ потребитель C_i, $i = 1, \ldots, k$, если он не уходит с рынка, решает задачу максимизации своей функции полезности $u_i(y_i, z_i)$ при бюджетном ограничении $t_i(y_i) + z_i \le \omega_i$, $i = 1, \ldots, k$.

То есть

$$u_i(y_i, z_i) = V_i(y_i) + z_i \quad (\max),$$
$$t_i(y_i) + z_i = \omega_i.$$

Условия первого порядка для функции Лагранжа $L(y_i, z_i) = V_i(y_i) + z_i + \lambda(\omega_i - t_i(y_i) - z_i)$ имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = V_i'(y_i) - \lambda t_i'(y_i) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial z_i} = 1 - \lambda = 0,$$

откуда следует равенство

$$V_i'(x_i) - t_i'(x_i) = 0,$$

которое есть условие первого порядка для максимизируемой функции

$$V_i(x_i) - t_i(x_i).$$

Следовательно, задачу максимизации потребителем C_i своей функции полезности $u_i(y_i, z_i)$ можно представить в эквивалентной форме

$$V_i(y_i) - t_i(y_i)\ (\max). \tag{8.4.3}$$

Если при оптимальном решении y_i^0 этой задачи $V_i(y_i^0) - t_i(y_i^0) < 0$, то это означает, что не выполнено условие участия и потребителю C_i выгоднее уйти с рынка. Отметим, что прибыль монополиста будет одна и та же как в случае, если потребитель C_i уйдет с рынка, так и в случае, если он останется на рынке и приобретет нулевой объем y_i с нулевой оплатой $t_i(y_i) = 0$.

Линейная схема ценообразования (*линейный тариф*) имеет вид $t_i(y_i) = Py_i$ (цена P – единая для всех потребителей). *Нелинейная схема ценообразования* (*нелинейный тариф*) имеет вид $t_i(y_i) = A + Py_i$ (параметры P и A – единые для всех потребителей). Вообще, нелинейной схемой ценообразования называется любая схема, отличная от линейной схемы. Рассмотрим схемы ценообразования, которые позволяют реализовать оптимальный контракт (y_i^*, t_i^*) между потребителем C_i, $i = 1, \ldots, k$, и фирмой-монополистом.

В схеме 1 («не хочешь – не бери») функция $t_i(y_i)$ имеет вид

$$t_i(y_i) = \begin{cases} t_i^*, & \text{если } y_i \le y_i^*, \\ +\infty, & \text{если } y_i > y_i^*. \end{cases}$$

Очевидно, в этом случае оптимальным решением задачи $V_i(y_i) - t_i(y_i) = V_i(y_i) - t_i^*(\max)$ будет объем y_i^*, ибо при $0 \le y_i < y_i^*$ $V_i(y_i) - t_i^* < 0$, а при $y_i = y_i^*$ $V_i(y_i) - t_i^* = 0$ (рис. 8.15).

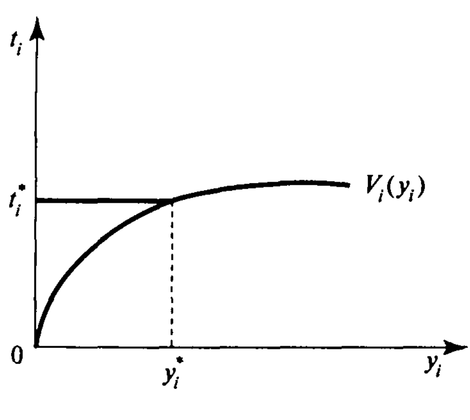


Рис. 8.15

В схеме 2 (двухкомпонентный тариф) функция $t_i(y_i)$ имеет вид $t_i(y_i) = A + Py_i$. Двухкомпонентный тариф можно интерпретировать как описание практики двойной оплаты, используемой, например, в парках культуры и отдыха: отдельная плата A с потребителя C_i, $i = 1, \ldots, k$, за вход и отдельная плата за каждый аттракцион. В случае схемы 2 задача максимизации для потребителя C_i, $i = 1, \ldots, k$, имеет вид

$$V_i(y_i) - Py_i - A \text{ (max)}. \qquad (8.4.3.1)$$

Выпишем для этой задачи условие первого порядка $V_i'(y_i) - P = 0$.

Пусть y_i^* – решение этого уравнения. Тогда объем y_i^* удовлетворяет равенству $V_i'(y_i^*) = P$, т.е. параметр A не влияет на оптимальный выбор y_i^* потребителя C_i. Отметим, что на основании равенства $P = V_i'(y_i^*)$ функцию $V_i'(y_i)$ следует интерпретировать как обратную функцию спроса потребителя C_i, $i = 1, \ldots, k$, на продукцию, выпускаемую фирмой-монополистом. Положим $A = V_i(y_i^*) - Py_i^*$.

При схеме 2 потребитель C_i, $i = 1, \ldots, k$, выберет объем y_i^* (рис. 8.16).

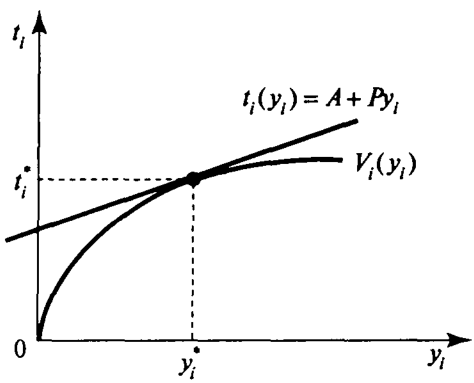


Рис. 8.16

Схема 2 (двухкомпонентный тариф) подсказывает, что в общем случае нелинейная схема ценообразования $t_i = t_i(y_i)$ в условиях идеальной ценовой дискриминации должна быть такой, чтобы график функции $t_i = t_i(y_i)$ был расположен строго выше графика функции полезности $V_i(y_i)$ потребителя C_i, $i = 1, \ldots, k$, при $y_i \neq y_i^*$

и чтобы графики функций $t_i = t_i(y_i)$ и $V_i(y_i)$ касались в точке y_i^* (на рис 8.17 касательные K_1 и K_2 параллельны). Эти два требования означают, что функция $V_i(y_i) - t_i(y_i)$ в точке y_i^* имеет сильный локальный максимум (рис. 8.18). Это содержательно означает, что, во-первых, потребитель C_i, $i = 1, \ldots, k$, вообще не будет оплачивать покупку, объем y_i которой не равен объему y_i^* (ибо размер оплаты $t_i(y_i)$ этой покупки строго больше значения $V_i(y_i)$ его функции полезности) и, во-вторых, при $y_i \neq y_i^*$ $V_i(y_i) - t_i(y_i) < 0$, т.е. не выполнено условие его участия в рыночной ситуации.

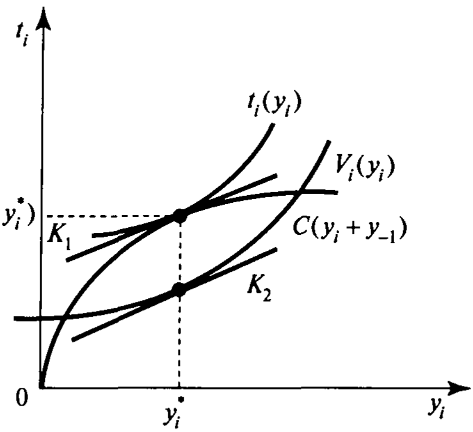


Рис. 8.17

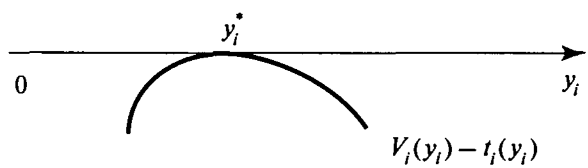


Рис. 8.18

Рассмотренная идеальная ценовая дискриминация эффективна как политика ценообразования при выполнении ряда достаточно жестких предпосылок, которые были перечислены выше и которые не обязательно могут выполняться в реальных условиях. Тем не менее концепция идеальной ценовой дискриминации полезна в качестве крайней точки зрения, в частности как ориентир для понимания возможных вариантов политики ценообразования в целях их использования в теоретических построениях и на практике.

8.4.4. Переходим к анализу *ценовой дискриминации второго рода*, суть которой в том, что фирма-монополист назначает разные цены за различные объемы выпускаемой ею продукции. Фирма не может (не умеет) различать потребителей.

В экономической реальности ценовая дискриминация второго рода часто принимает форму разного рода *скидок*.

Например, чем больше объем поставки, тем больше скидка к цене продаж. Сезонный железнодорожный билет значительно дешевле суммы разовых билетов. Аналогичная ситуация имеет место с единым проездным билетом, цена которого меньше суммы цен всех разовых билетов.

При ценовой дискриминации второго рода фирма-монополист предлагает всем потребителям единую систему ценообразования и объемов своей продукции. Потребитель сам выбирает элемент (элементы) этой системы, т.е. сочетание (y_i, t_i) объема y_i продукции и размера оплаты t_i, которое называется *пакетом*.

Рассмотрим сначала (как и в случае ценовой дискриминации первого рода) ситуацию на вербальном уровне. Пусть предельные издержки MC фирмы-монополиста постоянны, т.е. $MC = AC = C$. Тогда задача максимизации прибыли фирмы-монополиста имеет решение $y^{(m)}$, которое получается из уравнения $MR(y) = C$ (рис. 8.19). Цена $p^{(m)}$ определяется с помощью функции спроса $p^{(m)} = AR(y^{(m)})$. В рассматриваемом варианте максимальная прибыль фирмы-монополиста равна

$$PR^{(m)} = (p^{(m)} - MC)y^{(m)} = \left|Hp^{(m)}FE\right|_2,$$

где $\left|Hp^{(m)}FE\right|_2$ — площадь прямоугольника $Hp^{(m)}FE$ (см. рис. 8.19).

Фирма-монополист может, например, назначить три цены: p_1, p_2, p_3. По цене p_1 фирма реализует свою продукцию в объеме $y \le y_1$, по цене p_2 фирма реализует свою продукцию в объеме $y - y_1$, где $y_1 \le y \le y_2$, по цене p_3 фирма реализует свою продукцию в объеме $y - (y_1 + y_2)$, где $y_2 \le y \le y_3$. При такой структуре цен фирма-монополист на рынке может реализовать свою продукцию в объеме y_3, который может быть значительно больше объема $y^{(m)}$ (см. рис. 8.19). При реализации продукции в объеме y_3 фирма-монополист получит прибыль, равную сумме площадей $|Hp_1F_1E_1|_2 + |E_1G_1F_2E_2|_2 + |E_2G_2F_3E_3|_2$ четырехугольников $Hp_1F_1E_1$, $E_1G_1F_2E_2$, $E_2G_2F_3E_3$, которая может быть значительно больше максимальной прибыли фирмы $PR^{(m)}$ в условиях отсутствия ценовой дискриминации второго рода. Напомним, что эта максимальная прибыль $PR^{(m)}$ равна площади $|Hp^{(m)}FE|_2$ прямоугольника $Hp^{(m)}FE$.

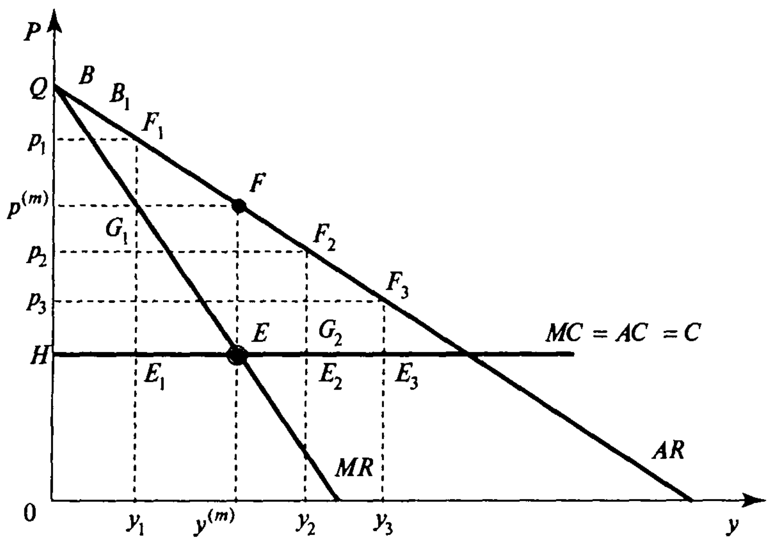


Рис. 8.19

Замечание 8.4.1

Отметим, что приведенный выше пример, иллюстрирующий суть ценовой дискриминации *второго рода* в случае постоянных предельных издержек $MC = C$, аналогичен примеру, иллюстрирующему суть ценовой дискриминации *первого рода* в случае постоянных предельных издержек $MC = C$. В случае ценовой дискриминации первого рода каждая единица выпускаемой фирмой продукции имеет свою цену, равную цене спроса, т.е. в случае $MC = C$ ценовая дискриминация первого рода представляет собой, по существу, асимптотический непрерывный вариант дискретной по сути ценовой дискриминации второго рода.

В условиях, когда с ростом объемов выпуска средние (AC) и предельные (MC) издержки падают, ценовая дискриминация второго рода приводит к повышению благосостояния потребителей за счет расширения масштабов производства и снижения средних и предельных издержек (рис. 8.20).

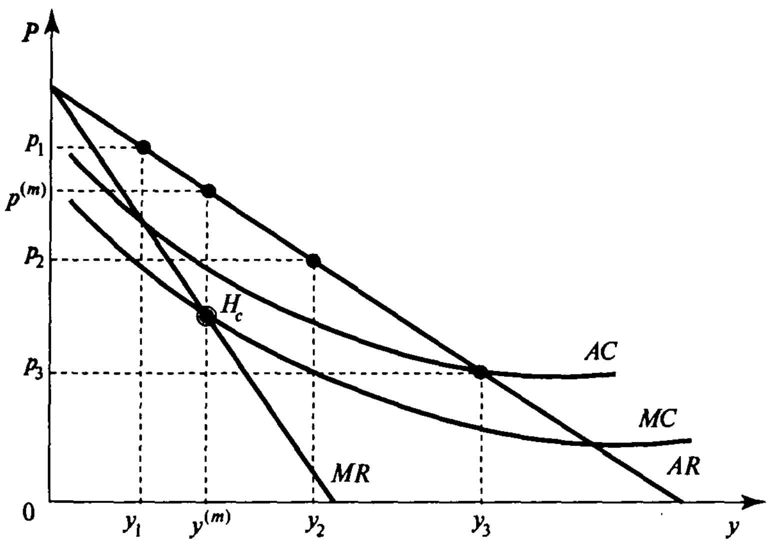


Рис. 8.20

8.4.5. Рассмотрим более подробно вариант ценовой дискриминации второго рода, называемой *пакетной дискриминацией.*

В случае пакетной дискриминации задача фирмы-монополиста состоит в том, чтобы предложить такие пакеты, чтобы получить наибольшую прибыль от тех пакетов, которые приобретут потребители.

Предполагается, что на рынке есть два типа потребителей. Типичный представитель потребителей первого типа – это потребитель C_1, типичный представитель потребителей второго типа – это потребитель C_2. Предполагается далее, что для любого объема y продукции, выпускаемой фирмой-монополистом, имеет место неравенство $V_1'(y) < V_2'(y)$, откуда при условии, что $V_1(0) = V_2(0)$, следует, что $V_1(y) < V_2(y)$. Здесь $V_1(y)$ и $V_2(y)$ – функции полезности потребителей C_1 и C_2 соответственно, удовлетворяющие условиям, приведенным в случае ценовой дискриминации первого рода. Неравенство $V_1(y) < V_2(y)$ содержательно означает, что уровень потребительских амбиций у потребителя C_2 выше, чем у потребителя C_1.

Далее ограничимся случаем двух пакетов (y_1, t_1) и (y_2, t_2), который принципиально не отличается от общего случая конечного числа пакетов. Добавим ограничение — *условие участия* каждого потребителя в рыночной ситуации, которое означает, что ни один потребитель не уйдет с рынка:

$$V_1(y_1) - t_1 \geq 0, \quad V_2(y_2) - t_2 \geq 0.$$

Предполагается далее (в отличие от случая идеальной (совершенной) ценовой дискриминации), что фирма-монополист не может определить тип потребителя.

Пусть пакеты (y_1^*, t_1^*) и (y_2^*, t_2^*) максимизируют прибыль фирмы-монополиста при выполнении условий участия для потребителей C_1 и C_2. Тогда, как и в случае идеальной (совершенной) ценовой дискриминации, условия участия выполняются как равенства

$$V_1(y_1^*) - t_1^* = 0, \quad V_2(y_2^*) - t_2^* = 0.$$

Имеем (на основании неравенства $V_1(y_1^*) < V_2(y_1^*)$)

$$V_2(y_1^*) - t_1^* > V_1(y_1^*) - t_1^* = 0$$

и (на основании неравенства $V_1(y_2^*) < V_2(y_2^*)$)

$$V_1(y_2^*) - t_2^* < V_2(y_2^*) - t_2^* = 0.$$

Выписанные равенства и неравенства содержательно означают, что, во-первых, для потребителя C_2 «чужой» пакет (y_1^*, t_1^*) лучше, чем «свой» пакет (y_2^*, t_2^*), ибо $V_2(y_1^*) - t_1^* > V_1(y_1^*) - t_1^* = 0 = V_2(y_2^*) - t_2^*$ (разность значения функции полезности $V_2(y_1^*)$ потребителя C_2 и оплаты t_1^* им этого объема y_1^* больше разности значения функции полезности $V_2(y_2^*)$ потребителя C_2 и оплаты t_2^* им этого объема y_2^*), и, во-вторых, для потребителя C_1 «свой» пакет (y_1^*, t_1^*) лучше, чем «чужой» пакет (y_2^*, t_2^*), ибо $V_1(y_2^*) - t_2^* < V_2(y_2^*) - t_2^* = 0 = V_1(y_1^*) - t_1^*$.

Таким образом, если фирма-монополист не может определить тип потребителя, она теряет потребителя C_2 (ибо ему выгоднее стать потребителем C_1) с более высоким уровнем потребительских амбиций, т.е. «качество» потребителей снижается. Снижение «качества» потребителей на рынке фирмы-монополиста снижает ее прибыль, что, конечно, фирме-монополисту не нравится. Поэтому фирма-монополист заинтересована на рынке иметь дело только с теми потребителями, которые будут приобретать «свои» пакеты и не будут приобретать «чужие» пакеты, ибо это им будет невыгодно. Фирма-монополист может использовать *механизм фильтрации*, который формально описывается двумя *условиями самовыявления*, т.е. неравенством

$$V_1(y_1) - t_1 \geq V_1(y_2) - t_2$$

для потребителя C_1 и неравенством

$$V_2(y_2) - t_2 \geq V_2(y_1) - t_1$$

для потребителя C_2.

Первое из этих неравенств $V_1(y_1) - t_1 \geq V_1(y_2) - t_2$ по существу означает, что при переходе потребителя C_1 от «своего» контракта (y_1, t_1) к «чужому» контракту (y_2, t_2) снижается (точнее, не повышается) разность между значением его функции полезности на приобретаемом им объеме продукта (выпускаемого фирмой-монополистом) и оплатой этого объема. Аналогично толкуется второе неравенство $V_2(y_2) - t_2 \geq V_2(y_1) - t_1$.

Доказательство того, что прибыль фирмы-монополиста снижается, если потребитель C_2 превращается в потребителя C_1, приведено ниже для случая постоянных предельных издержек фирмы-монополиста.

Переходим к формальному решению задачи максимизации прибыли фирмы-монополиста PR, которая имеет дело с $k_1 > 0$ одинаковыми потребителями C_1 первого типа и с $k_2 > 0$ одинаковыми потребителями C_2 второго типа:

$$PR = k_1 t_1 + k_2 t_2 - C(k_1 t_1 + k_2 t_2) \text{ (max)} \qquad (8.4.4)$$

при условиях

$$V_1(y_1) \geq t_1, \qquad (8.4.5)$$

$$V_2(y_2) \geq t_2 \qquad (8.4.6)$$

(условия участия) и

$$V_1(y_1) - t_1 \geq V_1(y_2) - t_2, \qquad (8.4.7)$$

$$V_2(y_2) - t_2 \geq V_2(y_1) - t_1 \qquad (8.4.8)$$

(условия самовыявления).

В точке максимума $(\hat{y}_1; \hat{y}_2; \hat{t}_1; \hat{t}_2)$ задачи (8.4.4)–(8.4.8) есть по крайней мере одно из каждой пары специальных ограничений (8.4.5)–(8.4.6) и (8.4.7)–(8.4.8), которое выполняется как равенство.

Если оба ограничения (8.4.5) и (8.4.6) в точке максимума выполняются как строгие неравенства, то тогда можно *увеличить* значение переменных t_1 и t_2 на достаточно малые величины так, чтобы ограничения (8.4.5) – (8.4.6) сохранились как строгие неравенства и при этом максимальное значение целевой функции (8.4.4) увеличилось за счет роста переменных t_1 и t_2. Описанное возмущение значений t_1 и t_2 можно осуществить независимо от того, чем являются в точке максимума ограничения (8.4.7)–(8.4.8) – строгими неравенствами или равенствами.

Следовательно, по крайней мере одно из ограничений (8.4.5)–(8.4.6) в точке максимума должно быть равенством.

Пусть в точке максимума ограничение (8.4.6) выполняется как равенство $V_2(\hat{y}_2) = \hat{t}_2$. Подставив это равенство в (8.4.8), будем иметь $\hat{t}_1 \geq V_2(\hat{y}_1) > V_1(\hat{y}_1)$. Последнее звено цепочки добавлено на основании того, что уровень потребительских амбиций у потребителя C_2 выше, чем у потребителя C_1. Сопоставляя первое и третье звенья последней цепочки, получаем, что для потребителя C_1 не выполнено условие участия.

Таким образом, обязательно $V_2(\hat{y}_2) > \hat{t}_2$, и на основании вышеизложенного $V_1(\hat{y}_1) = \hat{t}_1$.

Если оба ограничения (8.4.7) и (8.4.8) выполнятся в точке максимума как строгие неравенства, то, увеличив только значение $\hat{t}_2$ на достаточно малую величину, мы сохраним как строгие неравенства ограничения (8.4.6)–(8.4.8) и в то же время увеличим максимальное значение целевой функции (8.4.4).

Поэтому по крайней мере одно из ограничений (8.4.7), (8.4.8) в точке максимума выполняется как равенство.

Пусть ограничение (8.4.7) в точке максимума $(\hat{y}_1; \hat{y}_2; \hat{t}_1; \hat{t}_2)$ целевой функции (8.4.4) выполняется как равенство

$$V_1(\hat{y}_1) - \hat{t}_1 = V_1(\hat{y}_2) - \hat{t}_2, \tag{8.4.9}$$

а ограничение (8.4.8) выполняется как строгое неравенство

$$V_2(\hat{y}_2) - \hat{t}_2 > V_2(\hat{y}_1) - \hat{t}_1. \tag{8.4.10}$$

На основании доказанного выше равенства $V_1(\hat{y}_1) = \hat{t}_1$ из (8.4.9) получаем равенство $\hat{t}_2 = V_1(\hat{y}_2)$.

Таким образом, при выполнении равенства (8.4.9) имеем $\hat{t}_1 = V_1(\hat{y}_1)$ и $\hat{t}_2 = V_1(\hat{y}_2)$, поэтому максимум

$$k_1\hat{t}_1 + k_2\hat{t}_2 - C(k_1\hat{t}_1 + k_2\hat{t}_2)$$

целевой функции (8.4.4) можно переписать так:

$$k_1V_1(\hat{y}_1) + k_2V_1(\hat{y}_2) - C(k_1\hat{y}_1 + k_2\hat{y}_2).$$

Отсюда вытекает, что задача максимизации (8.4.4)–(8.4.8) эквивалентна задаче макисимизации

$$k_1 V_1(y_1) + k_2 V_1(y_2) - C(k_1 y_1 + k_2 y_2) \text{ (max)}.$$

На основании того, что функции $V_1(y_1)$ и $V_1(y_2)$ выпуклы вверх, условия первого порядка

$$\frac{\partial}{\partial y_1}(k_1 V_1(y_1) + k_2 V_1(y_2)) - C(k_1 y_1 + k_2 y_2)) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y_2}(k_1 V_1(y_1) + k_2 V_1(y_2)) - C(k_1 y_1 + k_2 y_2)) = 0$$

являются необходимыми и достаточными условиями того, что решение $(\hat{y}_1; \hat{y}_2)$ $(\hat{y}_1 > 0, \hat{y}_2 > 0)$ есть точка глобального максимума целевой функции $k_1 V_1(y_1) + k_2 V_1(y_2) - C(k_1 y_1 + k_2 y_2)$.

Перепишем частные производные по y_1 и y_2 в развернутом виде и подставим в условия первого порядка значение $\hat{y}_1$ и $\hat{y}_2$:

$$k_1 V_1'(\hat{y}_1) = k_1 C'(k_1 \hat{y}_1 + k_2 \hat{y}_2),$$
$$k_2 V_1'(\hat{y}_2) = k_2 C'(k_1 \hat{y}_1 + k_2 \hat{y}_2).$$

Отсюда вытекает равенство $V_1'(\hat{y}_1) = V_1'(\hat{y}_2)$, которое при $\hat{y}_1 \neq \hat{y}_2$ невозможно, ибо по экономическому смыслу $V'(y)$ строго убывает с ростом y. Ниже показано, что $\hat{y}_1 < \hat{y}_2$.

Таким образом, допустив, что ограничение (8.4.8) в точке максимума $(\hat{y}_1; \hat{y}_2; \hat{t}_1; \hat{t}_2)$ целевой функции (8.4.4) выполняется как строгое неравенство, мы пришли к противоречию, поэтому остается принять, что ограничение (8.4.8) выполняется как равенство

$$V_2(\hat{y}_2) - \hat{t}_2 = V_2(\hat{y}_1) - \hat{t}_1.$$

В комбинации с доказанным ранее равенством $V_1(\hat{y}_1) = \hat{t}_1$ оно дает представление для оплаты $\hat{t}_2$:

$$\begin{aligned} \hat{t}_2 &= V_2(\hat{y}_2) - V_2(\hat{y}_1) + V_1(\hat{y}_1) = \\ &= V_2(\hat{y}_2) - (V_2(\hat{y}_1) - V_1(\hat{y}_1)). \end{aligned} \qquad (8.4.11)$$

На основании последнего равенства в целевой функции (8.4.4) можно переменные t_1 и t_2 заменить соответственно на выражения $V_1(y_1)$ и $V_2(y_2) - V_2(y_1) + V_1(y_1)$ и переписать целевую функцию так:

$$\begin{aligned} PR(y_1, y_2) = k_1 V_1(y_1) &+ k_2(V_2(y_2) - V_2(y_1) + V_1(y_1)) - \\ &- C(k_1 y_1 + k_2 y_2) \text{ (max)}. \end{aligned} \qquad (8.4.12)$$

Задача максимизации (8.4.12) эквивалентна задаче максимизации (8.4.4)–(8.4.8).

Если функции $k_1 V_1(y_1)$, $k_2(V_2(y_2) - V_2(y_1) + V_1(y_1))$, $-C(k_1 y_1 + k_2 y_2)$ выпуклые вверх, условия первого порядка

$$\frac{\partial}{\partial y_1}[k_1 V_1(y_1) + k_2(V_2(y_2) - V_2(y_1) + V_1(y_1)) - C(k_1 y_1 + k_2 y_2)] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y_2}[k_1 V_1(y_1) + k_2(V_2(y_2) - V_2(y_1) + V_1(y_1)) - C(k_1 y_1 + k_2 y_2)] = 0$$

являются необходимыми и достаточными условиями того, что решение $(\hat{y}_1; \hat{y}_2)$ $(\hat{y}_1 > 0, \hat{y}_2 > 0)$ этой системы есть точка глобального максимума $\widehat{PR} = PR(\hat{y}_1; \hat{y}_2)$ целевой функции (8.4.12).

Перепишем частные производные в развернутом виде и подставим в условие первого порядка значения $\hat{y}_1$ и $\hat{y}_2$:

$$(k_1 + k_2)V_1'(\hat{y}_1) - k_2 V_2'(\hat{y}_1) = k_1 C'(k_1\hat{y}_1 + k_2\hat{y}_2), \qquad (8.4.13)$$

$$V_2'(\hat{y}_2) = C'(k_1\hat{y}_1 + k_2\hat{y}_2). \qquad (8.4.14)$$

Из равенства (8.4.13) следует, что

$$k_1 V_1'(\hat{y}_1) = k_1 C'(k_1\hat{y}_1 + k_2\hat{y}_2) + k_2(V_2'(\hat{y}_1) - V_1'(\hat{y}_1)),$$

откуда вытекает на основании неравенства $(V_2'(\hat{y}_1) - V_1'(\hat{y}_1)) > 0$, что

$$V_1'(\hat{y}_1) > C'(k_1\hat{y}_1 + k_2\hat{y}_2). \qquad (8.4.15)$$

Попутно отметим, что из неравенства $V_2'(\hat{y}_1) > V_1'(\hat{y}_1)$ и соотношений (8.4.14), (8.4.15) следует цепочка неравенств $V_2'(\hat{y}_1) > V_1'(\hat{y}_1) > V_2'(\hat{y}_2)$, откуда на основании того, что предельная полезность $V_2'(y)$ убывает, вытекает, что $\hat{y}_1 < \hat{y}_2$.

Таким образом, в рассматриваемом варианте пакетной дискриминации ценовой дискриминации второго рода система оптимальных контрактов $(\hat{y}_1, \hat{t}_1)$, $(\hat{y}_2, \hat{t}_2)$ фирмы-монополиста с потребителями C_1 и C_2 соответственно обладает следующими свойствами:

$$V_1(\hat{y}_1) = \hat{t}_1, \; V_2(\hat{y}_2) > \hat{t}_2.$$

В случае постоянных предельных издержек ($C'(x) = C$ — скалярная постоянная) имеем (на основании (8.4.14) и (8.4.15))

$$V_2'(\hat{y}_2) = C, \; V_1'(\hat{y}_1) > C.$$

Напомним, что в случае идеальной ценовой дискриминации (и в случае чистой конкуренции) система оптимальных контрактов (y_1^*, t_1^*) и (y_2^*, t_2^*) в случае постоянных издержек обладала свойствами:

$$V_1(y_1^*) = t_1^*, \quad V_2(y_2^*) = t_2^*,$$

$$V_1'(y_1^*) = C, \quad V_2'(y_2^*) = C.$$

8.4.6. Сопоставим между собой обе системы оптимальных контрактов: систему $(\hat{y}_1, \hat{t}_1)$, $(\hat{y}_2, \hat{t}_2)$ и систему (y_1^*, t_1^*), (y_2^*, t_2^*).

Для потребителя C_2 имеем $V_2'(y_2^*) = C$ и $V_2'(\hat{y}_2) = C$, т.е. потребитель C_2 получит одно и то же количество продукции $\hat{y}_2 = y_2^*$. Однако размер платежа $\hat{t}_2$ за это количество продукцию у потребителя C_2 меньше, чем в случае идеальной дискриминации, ибо $t_2^* = V_2(\hat{y}_2) > \hat{t}_2$, $V_2(y_2^*) = t_2^*$ $(\hat{y}_2 = y_2^*)$.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию этого положения. Размер платы t_2^* потребителя C_2 в условиях идеальной ценовой дискриминации равен

$$\int_0^{\hat{y}_2} V_2'(y)dy = V_2(\hat{y}_2) - V_2(0) = V_2(\hat{y}_2) = t_2^*,$$

что геометрически (в случае постоянных предельных издержек $C(y)$ ($C'(y) = C$, где C – скалярная постоянная)) интерпретируется как площадь $|\alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta \cup \varepsilon \cup \eta \cup \tau|_2$ множеств α, β, γ, δ, ε, η и τ $(\eta = \eta_1 \cup \eta_2)$ (рис. 8.21).

Размер оплаты $\hat{t}_2$ потребителя C_2 равен (на основании (8.4.11) и равенства $V_2(\hat{y}_2) = V_2(y_2^*) = t_2^*$)

$$\hat{t}_2 = V_2(\hat{y}_2) - (V_2(\hat{y}_1) - V_1(\hat{y}_1)) = t_2^* - (V_2(\hat{y}_1) - V_1(\hat{y}_1)),$$

где $(V_2(0) = V_1(0) = 0)$, разность

$$V_2(\hat{y}_1) - V_1(\hat{y}_1) = \int_0^{\hat{y}_1} (V_2'(y) - V_1'(y))dy$$

равна площади $|\gamma|_2$ криволинейного четырехугольника γ (см. рис. 8.21). Следовательно, в условиях пакетной дискриминации потребитель C_2 платит на величину $|\gamma|_2$ меньше, чем в условиях идеальной ценовой дискриминации.

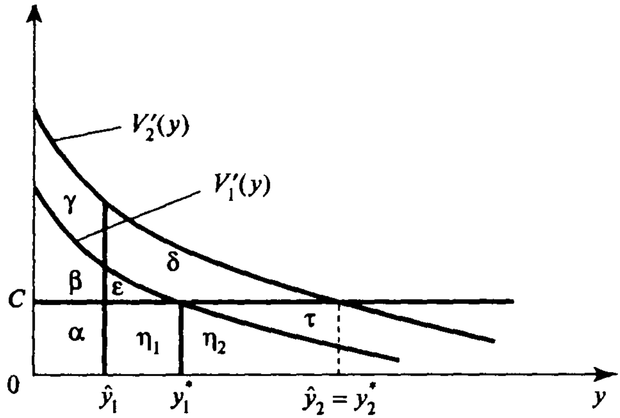


Рис. 8.21

Из неравенства $V_1'(\hat{y}_1) > C$ и равенства $V_1'(y_1^*) = C$ следует, что $y_1^* > \hat{y}_1$, т.е. в случае идеальной ценовой дискриминации потребитель C_1 получает больше, чем в случае пакетной дискриминации. Равенство $V_1'(\hat{y}_1) = \hat{t}_1$ означает, что потребитель C_1 оплачивает количество $\hat{y}_1$ в объеме $\hat{t}_1$ в случае пакетной дискриминации.

Равенство

$$(V_1(0) = 0)\ \hat{t}_1 = V_1(\hat{y}_1) = \int_0^{\hat{y}_1} V_1'(y)dy = |\alpha \cup \beta|_2$$

означает, что в случае пакетной дискриминации оплата $\hat{t}_1$ потребителя C_1 равна его потребительскому излишку $|\alpha \cup \beta|_2$. Равенство

$$t_1^* = V_1(y_1^*) = \int_0^{y_1^*} V_1'(y)dy = |\alpha \cup \beta \cup \varepsilon \cup \eta_1|_2$$

означает, что в случае идеальной ценовой дискриминации оплата t_1^* потребителя C_1 равна его потребительскому излишку $|\alpha \cup \beta \cup \varepsilon \cup \eta_1|_2$.

Таким образом, при переходе фирмы-монополиста от идеальной ценовой дискриминации к пакетной оплата потребителя C_1 осталась равной его потребительскому излишку, т.е. потребитель C_1 ничего не выиграл и не проиграл, хотя объем приобретаемой им продукции и размер оплаты за нее уменьшились ($\hat{y}_1 < y_1^*$, $\hat{t}_1 = |\alpha \cup \beta|_2 < |\alpha \cup \beta \cup \varepsilon \cup \eta_1|_2 = t_1^*$). Потребитель C_2 выиграл, ибо за одинаковый объем приобретаемой им продукции ($y_2^* = \hat{y}_2$) он заплатил меньше ($\hat{t}_2 = t_2^* - |\gamma|_2$), т.е. получил выигрыш, равный площади $|\gamma|_2$.

Проигрыш (отрицательная величина) фирмы-монополиста оказался равным величине $-k_1|\varepsilon|_2 - k_2|\gamma|_2$, ибо

$$\widehat{PR} - PR^* = PR(\hat{y}_1; \hat{y}_2) - PR(y_1^*; y_2^*) = [k_1\hat{t}_1 + k_2\hat{t}_2 - C(k_1\hat{y}_1 + k_2\hat{y}_2)] -$$

$$-[k_1t_1^* + k_2t_2^* - C(k_1y_1^* + k_2y_2^*)] \overset{(\hat{y}_2 = y_2^*)}{=} k_1(\hat{t}_1 - t_1^*) + k_2(\hat{t}_2 - t_2^*) - (Ck_1(\hat{y}_1 - y_1^*)) =$$

$$= -k_1(V_1(y_1^*) - V_1(\hat{y}_1)) - k_2(V_2(\hat{y}_1) - V_1(\hat{y}_1)) - k_1C(\hat{y}_1 - y_1^*) =$$

$$= -k_1\left(\int\limits_{\hat{y}_1}^{y_1^*} V_1'(y)dy - C(y_1^* - \hat{y}_1)\right) - k_2\left(\int\limits_0^{\hat{y}_1} V_2'(y)dy - \int\limits_0^{\hat{y}_1} V_1'(y)dy\right) =$$

$$= -k_1\left(|\varepsilon \cup \eta_1|_2 - |\eta_1|_2\right) - k_2\left(|\alpha \cup \beta \cup \gamma|_2 - |\alpha \cup \beta|_2\right) = -k_1|\varepsilon|_2 - k_2|\gamma|_2.$$

Чистые потери общественного благосостояния (отрицательная величина) равны сумме выигрышей всех потребителей C_1 и всех потребителей C_2 и проигрыша монополиста, т.е.

$$-DL = k_2|\gamma|_2 - k_1|\varepsilon|_2 - k_2|\gamma|_2 = -k_1|\varepsilon|_2.$$

Из равенства (8.4.13) следует, что

$$k_1(V_1'(\hat{y}_1) - C'(k_1\hat{x}_1 + k_2\hat{y}_2)) = k_2(V_2'(\hat{y}_1) - V_1'(\hat{y}_1)),$$

откуда получаем в случае постоянных предельных издержек $C'(k_1\hat{y}_1 + k_2\hat{y}_2) = C$ следующее равенство:

$$\frac{V_2'(\hat{y}_1) - V_1'(\hat{y}_1)}{V_1'(\hat{y}_1) - C} = \frac{k_1}{k_2},$$

которое геометрически интерпретируется так: длина отрезка вертикальной прямой $y_1 = \hat{y}_1$, расположенного между линиями $V_2'(y)$ и $V_1'(y)$ (см. рис. 8.21), относится к длине отрезка вертикальной прямой между линией $V_1'(y)$ и линией постоянных предельных издержек как k_1 к k_2.

В модели пакетной дискриминации в отличие от модели идеальной (совершенной) ценовой дискриминации предполагается, что фирма-монополист не может определить тип потребителя. Было показано, что для потребителя C_2 «чужой» пакет (y_1^*, t_1^*) лучше, чем «свой» пакет (y_2^*, t_2^*); для потребителя C_1 «свой» пакет (y_1^*, t_1^*) лучше, чем «чужой» пакет. Поэтому потребителю C_2 выгоднее стать потребителем C_1, что содержательно означает, что более «качественный» покупатель C_2 уходит с рынка, чтобы прийти на рынок менее «качественным» покупателем C_1.

Докажем, что с уходом с рынка относительно более качественного потребителя C_2 и заменой его относительно менее качественным потребителем C_1 прибыль фирмы-монополиста *понижается*. Доказательство проводится для случая постоянных предельных издержек.

Выше была выписана максимальная прибыль PR^* фирмы-монополиста в случае идеальной (совершенной) ценовой дискриминации.

Имеем

$$PR^* = k_1 t_1^* + k_2 t_2^* - C(k_1 y_1^* + k_2 y_2^*) \underset{(C'=c)}{\overset{(t_i^*=V_i(y_i^*))}{=}}$$
$$= k_1 V_1(y_1^*) + k_2 V_2(y_2^*) - ck_1 y_1^* - ck_2 y_2^* =$$
$$= k_1(V_1(y_1^*) - cy_1^*) + k_2(V_2(y_2^*) - cy_2^*).$$

Если потребитель C_2 поведет себя как потребитель C_1, он выберет контракт (y_1^*, t_1^*), то максимальная прибыль фирмы-монополиста получится равной

$$PR^{**} = k_1 t_1^* + k_2 t_1^* - C(k_1 t_1^* + k_2 t_1^*) \underset{(C'=c)}{\overset{(t_1^*=V_1(y_1^*))}{=}}$$
$$= k_1(V_1(y_1^*) - cy_1^*) + k_2(V_1(y_1^*) - cy_1^*).$$

Сопоставим между собой слагаемые $k_2(V_2(y_2^*) - cy_2^*)$ и $k_1(V_1(y_1^*) - cy_1^*)$.

Имеем (см. рис. 8.21)

$$V_2(y_2^*) - cy_2^* = \int_0^{y_2^*} V_2'(y)dy - cy_2^* = \int_0^{y_2^*} (V_2'(y) - c + c)dy - cy_2^* =$$
$$= \int_0^{y_2^*} (V_2'(y) - c)dy + \int_0^{y_2^*} cdy - cy_2^* = \int_0^{y_2^*} (V_2'(y) - c)dy = \left|\beta \cup \gamma \cup \varepsilon \cup \delta\right|_2.$$

Имеем (см. рис. 8.21)

$$V_1(y_1^*) - cy_1^* = \int_0^{y_1^*} V_1'(y)dy - cy_1^* = \int_0^{y_1^*} (V_1'(y) - c)dy + \int_0^{y_1^*} cdy - cy_1^* =$$

$$= \int_0^{y_1^*} (V_1'(y) - c)dy = |\beta \cup \varepsilon|_2.$$

Очевидно, $|\beta \cup \gamma \cup \varepsilon \cup \delta|_2 > |\beta \cup \varepsilon|_2$, откуда вытекает, что

$$V_2(y_2^*) - c\,y_2^* > V_1(y_1^*) - c\,y_1^*,$$

т.е. $PR^* > PR^{**}$.

Пример 8.4.2. иллюстрирует случай пакетной дискриминации. Пусть функции полезности потребителя C_i, $i = 1, 2$, имеет вид $U_i(y_i, z_i) = V_i(y_i) + z_i$. Для потребителей C_1 и C_2 их функции полезности соответственно равны $V_1(y_1) = \sqrt{y_1}$, $V_2(y_2) = 2\sqrt{y_2}$; функция издержек фирмы-монополиста имеет вид $C(y) = C \cdot y$. Число потребителей типа C_1 равно k_1, число потребителей типа C_2 равно k_2.

Тогда функция прибыли фирмы-монополиста имеет вид (см. (8.4.12))

$$k_1\sqrt{y_1} + k_1(2\sqrt{y_2} - 2\sqrt{y_1} + \sqrt{y_1}) - C(k_1 y_1 + k_2 y_2) \text{ (max)}.$$

Выпишем для этой функции условия первого порядка (т.е. частные производные по y_1 и y_2 приравняем нулю):

$$\frac{k_1}{2\sqrt{y_1}} - \frac{k_2}{2\sqrt{y_1}} - Ck_1 = 0, \quad \frac{k_2}{2\sqrt{y_2}} = Ck_2.$$

Пусть $k_1 > k_2$, тогда

$$\hat{y}_1 = \left(\frac{k_1 - k_2}{2Ck_1}\right)^2, \quad \hat{y}_2 = \frac{1}{C^2},$$

$$\hat{t}_1 = V_1(\hat{y}_1) = \frac{k_1 - k_2}{2k_1 C}, \quad \hat{t}_2 = V_2(\hat{y}_2) - V_2(\hat{y}_1) + V_1(\hat{y}_1) = \frac{3k_1 + k_2}{2Ck_1}.$$

Если $k_1 = 2k_2$, то

$$\hat{y}_1 = \frac{1}{16C^2}, \quad \hat{y}_2 = \frac{1}{C^2}, \quad \hat{t}_1 = \frac{1}{4C} \quad \hat{t}_2 = \frac{7}{4C}.$$

Максимальная прибыль $\widehat{PR} = PR(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ фирмы-монополиста в случае применения ею пакетной дискриминации равна (следует выполнить прямой счет при $\hat{y}_1 = \left(\frac{k_1 - k_2}{2Ck_1}\right)$ и $\hat{y}_1 = \frac{1}{C^2}$)

$$\widehat{PR} = k_1\sqrt{\hat{y}_1} + k_2(2\sqrt{\hat{y}_2} - \sqrt{\hat{y}_1}) - C_1k_1\hat{y}_1 - C_2k_2\hat{y}_2 = \frac{(k_1 + k_2)^2}{4Ck_1}.$$

Выигрыш (положительная величина) потребителя C_2 при переходе от идеальной ценовой дискриминации к пакетной равен

$$t_2^* - \hat{t}_2 = V_2(\hat{y}_1) - V_1(\hat{y}_1) = 2\sqrt{\hat{y}_1} - \sqrt{\hat{y}_1} = \sqrt{\hat{y}_1} = \frac{k_1 - k_2}{2Ck_1};$$

выигрыш (положительная величина) потребителей C_2 равен

$$k_2(t_2^* - \hat{t}_2) = k_2(V_2(\hat{y}_1) - V_1(\hat{y}_1)) = \frac{(k_1 - k_2)k_2}{2Ck_1}.$$

Проигрыш (отрицательная величина) фирмы-монополиста при переходе от идеальной ценовой дискриминации к пакетной равен

$$\widehat{PR} - PR^* = -k_1(V_1(\hat{y}_1) - V_1(\hat{y}_1)) - k_2(V_2(\hat{y}_1) - V_1(\hat{y}_1)) - k_1C(\hat{y}_1 - y_1^*) =$$
$$= \frac{k_2(k_2 - 2k_1)}{4Ck_1} < 0,$$

ибо $k_1 > k_2$ по предположению.

Максимальная прибыль PR^* фирмы-монополиста в условиях идеальной ценовой дискриминации равна

$$PR^* = \widehat{PR} - \frac{k_2(k_2 - 2k_1)}{4Ck_1} = \frac{(k_1 + k_2)^2}{4Ck_1} - \frac{k_2(k_2 - 2k_1)}{4Ck_1}.$$

Чистые потери общественного благосостояния (отрицательная величина) при переходе от идеальной к пакетной дискриминации равны $\left(y_1^* = \frac{1}{4C^2}\right)$

$$-DL = k_2(t_2^* - \hat{t}_2) + PR - PR^* = \frac{2k_1k_2 - 2k_2^2}{4Ck_1} + \frac{k_2^2 - 2k_1k_2}{4Ck_1} = -\frac{k_2^2}{4Ck_1}.$$

При $(k_1 / k_2) \to 0$

$$\hat{y}_1 \to \frac{1}{4C^2} = y_1^*, \quad -DL \to 0.$$

8.4.7. Переходим к рассмотрению варианта дискриминации второго рода, который называется *двухкомпонентным* тарифом, т.е. к случаю, когда размер оплаты $t(y)$ потребителем продукции фирмы-монополиста в объеме, равном y единиц, равен сумме $t(y) = A + py$, где $A > 0$ – фиксированный размер оплаты за право приобретения любого положительного количества y продукции и py – размер оплаты, пропорциональной количеству y приобретаемой продукции по цене p за одну единицу продукции. Таким образом, двухкомпонентный тариф $t(y)$ – это такая функция, что

$$t(y) = \begin{cases} A + py, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}.$$

Напомним, что параметры A и p называются *характеристиками* двухкомпонентного тарифа. Фирма-монополист заинтересована в определении характеристик *оптимального* двухкомпонентного тарифа.

Известно, что оптимальная величина спроса потребителя C_i, $i = 1, \ldots, k$, определяется из условия первого порядка $V_i'(y) = p$, тогда функция $V_i'(y) = p$ представляет собой обратную функцию спроса потребителя C_i, $i = 1, \ldots, k$.

Далее, как и раньше, рассматривается случай двух типов потребителей, C_1 и C_2, число потребителей C_1 равно k_1, число потребителей C_2 равно k_2. Для любого $y > 0$ $V_1'(y) < V_2'(y)$ и $V_1(y) < V_2(y)$ функции $V_1(y)$ и $V_2(y)$ полезности гладкие, выпуклые вверх, функция $C(y)$ издержек гладкая и выпуклая вниз.

Обозначим символом $D_1(p) = y_1$ функцию спроса потребителя C_1, символом $D_2(p) = y_2$ – функцию спроса потребителя C_2, тогда функция совокупного спроса на продукцию, выпускаемую фирмой-монополистом, имеет вид

$$D_1(p) = k_1 D_1(p) + k_2 D_2(p).$$

Условия участия потребителей C_1 и C_2, очевидно, имеют вид

$$V_1(D_1(p)) - A - pD_1(p) \geq 0, \quad V_2(D_2(p)) - A - pD_2(p) \geq 0.$$

Далее предполагается, что каждый из потребителей C_1 и C_2 приобретает положительное количество продукции, т.е. $y_1 = D_1(p) > 0$, $y_2 = D_2(p) > 0$, т.е. имеет место случай внутреннего решения.

Задача максимизации прибыли PR фирмы-монополиста при условии участия обоих потребителей C_1 и C_2 имеет вид

$$PR(y_1, y_2) = k_1(A + py_1) + k_2(A + py_2) - C(k_1 y_1 + k_2 y_2) \text{ (max)}$$

$$V_1(y_1) - A - py_1 \geq 0, \quad V_2(y_2) - A - py_2 \geq 0.$$

Напомним, что $A + py_1 = t_1(y_1)$, $A + py_2 = t_2(y_2)$.

В точке $(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ максимума прибыли $PR(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ по крайней мере одно из условий участия должно выполняться как равенство. В противном случае фирма-монополист сможет увеличить свою прибыль, увеличив параметр A.

Покажем, что в точке $(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ максимума прибыли фирмы-монополиста

$$V_1(\hat{y}_1) - A - p\hat{y}_1 = 0.$$

Пусть это не так, т.е.

$$V_1(\hat{y}_1) - A - p\hat{y}_1 > 0 \quad \text{и} \quad V_2(\hat{y}_2) - A - p\hat{y}_2 = 0.$$

Потребитель C_2 выбрал продукцию в количестве $\hat{y}_2$, а не в количестве $\hat{y}_1$, поэтому

$$V_2(\hat{y}_1) - A - p\hat{y}_1 \le V_2(\hat{y}_2) - A - p\hat{y}_2 \ (= 0).$$

Приведенную цепочку можно проложить влево на основании неравенства $V_2(y) > V_1(y)$, т.е.

$$V_1(\hat{y}_1) - A - p\hat{y}_1 < V_2(\hat{y}_2) - A - p\hat{y}_2 = 0,$$

откуда следует, что для потребителя C_1 не выполнено условие участия. На основании полученного противоречия следует написать, что

$$V_2(\hat{y}_2) - A - p\hat{y}_2 > 0 \quad \text{и} \quad V_1(\hat{y}_1) - A - p\hat{y}_1 = 0.$$

Тогда естественно, что при фиксированной цене p фирме-монополисту выгодно выбрать значение параметра $A(p)$ так, чтобы

$$A(p) = V_1(D_1(p)) - pD_1(p).$$

Тогда выражение

$$\begin{aligned} PR(y_1, y_2) &= k_1 t_1(y_1) + k_2 t_2(y_2) - C(k_1 y_1 + k_2 y_2) = \\ &= k_1(A + py_1) + k_2(A + py_2) - C(k_1 y_1 + k_2 y_2) \end{aligned}$$

для прибыли фирмы-монополиста в качестве функции цены p следует переписать так:

$$\begin{aligned} PR(p) &= k_1(A(p) + pD_1(p)) + k_2(A(p) + pD_2(p)) - \\ &\quad - C(k_1 D_1(p) + k_2 D_2(p)) = \\ &= k_1 V_1(D_1(p)) + k_2[V_1(D_1(p)) - pD_1(p)] + k_2 pD_2(p) \\ &\quad - C(k_1 D_1(p) + k_2 D_2(p)) = \\ &= (k_1 + k_2)(V_1(D_1(p)) - k_1 pD_1(p) - k_2 pD_1(p) + \\ &\quad k_1 pD_1(p) + k_2 pD_2(p) - C(k_1 D_1(p) + k_2 D_2(p)) = \\ &= (k_1 + k_2)(V_1(D_1(p) - pD_1(p)) + pD(p) - C(D(p)) = \\ &= (k_1 + k_2)(V_1(D_1(p) - pD_1(p)) + PR_0(p) = (k_1 + k_2)A(p) + PR_0(p), \end{aligned} \tag{8.4.16}$$

где выражение $PR_0(p) = pD(p) - C(D(p))$ есть прибыль фирмы-монополиста, которая не применяет ценовую дискриминацию.

Имеем

$$\frac{dPR(p)}{dp} = (k_1 + k_2)[(V_1'(D_1(p)) - p)D_1'(p) - D_1(p)] + \frac{dPR_0(p)}{dp} =$$

$$= -(k_1 + k_2)D_1(p) + \frac{dPR_0(p)}{dp},$$

где последнее равенство имеет место на основании того, что $V_1'(D(p)) = p$; это последнее равенство (точнее, тождество по p) справедливо, ибо $V_1'(y_1) = p$ есть обратная функция спроса потребителя C_1.

Обозначим символом $\overline{p}$ решение задачи максимизации прибыли $PR(p)$ фирмы-монополиста (см. (8.4.16))

$$PR(p) \text{ (max)}.$$

Если $\overline{p} \geq 0$, то необходимо выполнение неравенства (случай краевого экстремума)

$$\frac{dPR(\overline{p})}{dp} = -(k_1 + k_2)D_1(\overline{p}) + \frac{dPR_0(\overline{p})}{dp} \leq 0.$$

Если $\overline{p} > 0$, то необходимо выполнение равенства (случай внутреннего экстремума)

$$\frac{dPR(\overline{p})}{dp} = -(k_1 + k_2)D_1(\overline{p}) + \frac{dPR_0(\overline{p})}{dp} = 0,$$

откуда вытекает, что

$$\frac{dPR_0(\overline{p})}{dp} = (k_1 + k_2)D_1(\overline{p}) > 0,$$

ибо выше было принято, что оба потребителя C_1 и C_2 обязательно приобретают продукцию фирмы-монополиста.

Из неравенства $\dfrac{dPR_0(\overline{p})}{dp} > 0$ следует, что в точке $p = \overline{p}$ функция $PR_0(p)$ строго возрастает, поэтому p_0 – точка ее максимума – должна быть строго больше, чем $\overline{p}$, т.е. $\overline{p} < p^0$.

В связи с тем что функция $D(p)$ спроса убывает, из $\overline{p} < p^0$ следует, что $D(\overline{p}) > D(p^0)$, т.е. при использовании двухкомпонентного тарифа фирма-монополист выпускает продукции больше, чем в случае отсутствия ценовой дискриминации.

Перепишем первое и последнее звенья цепочки (8.4.16) при $p = \bar{p}$ и $p = p^0$, полагая $V_1(D_1(p) - pD_1(p)) = A(p)$:

$$\overline{PR} = PR(\bar{p}) = (k_1 + k_2)A(\bar{p}) + PR_0(\bar{p}),$$
$$PR^0 = PR(p_0) = (k_1 + k_2)A(p^0) + PR_0(p^0).$$

В обоих случаях справедливы неравенства $PR(\bar{p}) > PR_0(\bar{p})$ и $PR(p^0) > PR_0(p^0)$, откуда следует, что при любом выборе цены из двух вариантов $\bar{p}$ и p^0 максимальная прибыль $\overline{PR} = PR(\bar{p})$ фирмы-монополиста в условиях двухкомпонентного тарифа строго больше максимальной прибыли $PR^0 = PR(p^0)$ при линейном (т.е. без ценовой дискриминации) ценообразовании.

Таким образом,

$$PR(\bar{p}) = \overline{PR} > PR_0(p_0).$$

Принимая во внимание выражения (при $\bar{p} > 0$)

$$D(\bar{p}) = k_1 D_1(\bar{p}) + k_2 D_2(\bar{p}),$$

$$\frac{dPR_0(\bar{p})}{dp} = (k_1 + k_2)D_1(\bar{p}), \quad \frac{dPR_0(\bar{p})}{dp} = D(\bar{p}) + (p - C'(D(\bar{p}))D'(\bar{p})),$$

получаем

$$k_1 D_1(\bar{p}) + k_2 D_2(\bar{p}) + (p - C'(D(\bar{p}))D'(\bar{p})) = k_1 D_1(\bar{p}) + k_2 D_1(\bar{p}),$$

откуда вытекает равенство

$$k_2(D_2(\bar{p}) - D_1(\bar{p})) + [\bar{p} - C'(D(\bar{p}))]D'(\bar{p}) = 0, \qquad (8.4.17)$$

в котором левое слагаемое $D_2(\bar{p}) - D_1(\bar{p})$ положительно, поэтому правое слагаемое отрицательно.

В связи с тем что функция спроса $D(p)$ с ростом p строго убывает, имеем неравенство $D'(\bar{p}) < 0$, откуда следует, что $p - C'(D(\bar{p})) > 0$, т.е.

$$\bar{p} > C'(D(\bar{p})). \qquad (8.4.18)$$

Прежде чем комментировать неравенство (8.4.18), докажем, что $D_2(\bar{p}) > D_1(\bar{p})$(см. выше). Имеем $\bar{y}_1 = y_1(\bar{p}) = D_1(\bar{p})$, $\bar{y}_2 = y_2(\bar{p}) = D_2(\bar{p})$, откуда для обратных функций спроса вытекает, что $V_1'(\bar{y}_1) = \bar{p} = V_2'(\bar{y}_2) > V_1'(\bar{y}_2)$ (ибо $V_2'(y) > V_1'(y)$ для любого $y > 0$). В связи с тем что предельная полезность $V_1'(y)$ (строго) убывает, из неравенства $V_1'(\bar{y}_1) > V_1'(\bar{y}_2)$ следует, что $\bar{y}_2 > \bar{y}_1$, т.е. $D_2(\bar{p}) > D_1(\bar{p})$.

Возвращаемся к неравенству (8.4.18), которое показывает, что цена $\bar{p}$ выпускаемой фирмой-монополистом продукции строго выше предельных издержек $C'(D(\bar{p}))$, поэтому фирма-монополист производит меньший объем продукции $\bar{y} = k_1\bar{y}_1 + k_2\bar{y}_2$, чем объем продукции $\tilde{y}$ оптимальный с общественной точки зрения, который должен удовлетворять условию $D(C'(D(\tilde{y}))) = \tilde{y}$.

Пример 8.4.3 (*продолжение примера 8.4.2*)

Пример иллюстрирует двухкомпонентный тариф и пакетную ценовую дискриминацию. Пусть, как и в предыдущем примере, функции полезности потребителей C_1 и C_2 соответственно имеют вид $u_1(y_1, z_1) = \sqrt{y_1} + z_1$ и $u_2(y_2, z_2) = 2\sqrt{y_2} + z_2$, функция издержек линейна $C(y) = Cy$. Обратные функции спроса потребителей C_1 и C_2 имеют вид

$$V_1'(y_1) = \frac{1}{2\sqrt{y_1}} = p, \quad V_2'(y_2) = \frac{1}{\sqrt{y_2}} = p,$$

откуда получаем представление функций спроса потребителей C_1 и C_2

$$y_1 = D_1(p) = \frac{1}{4p^2}, \quad y_2 = D_2(p) = \frac{1}{p^2}, \qquad (8.4.19)$$

а тогда

$$D(p) = k_1 D_1(p) + k_2 D_2(p) = \frac{k_1 + 4k_2}{4p^2}$$

$$\text{и} \quad D'(p) = -\frac{k_1 + 4k_2}{2p^3}. \qquad (8.4.20)$$

Подставив (выражения (8.4.19) и (8.4.20) при $p = \bar{p}$ в (8.4.17), получим

$$k_2\left(\frac{1}{(\bar{p})^2} - \frac{1}{4(\bar{p})^2}\right) - (\bar{p} - C)\frac{k_1 + 4k_2}{2(\bar{p})^3} = 0,$$

откуда следует, что

$$\bar{p} = \frac{2(k_1 + 4k_2)}{2k_1 + 5k_2} C > C.$$

Параметр $A = A(\bar{p})$ равен

$$A(\bar{p}) = V_1(D_1(\bar{p})) - \bar{p}D_1(\bar{p}) = \frac{1}{4\bar{p}}.$$

В случае фирмы-монополиста, которая не использует ценовую дискриминацию, условие первого порядка задачи максимизации прибыли

$$PR_0(p) = pD(p) - C \cdot D(p)$$

имеет вид

$$D(p) + (p - C)D'(p) = 0,$$

откуда получаем (используя уравнение 8.4.20)

$$\frac{k_1 + 4k_2}{4p^2} - (p - C)\frac{k_1 + 4k_2}{2p^3} = 0,$$

которое имеет решение $p^0 = 2C > \bar{p}$. Неравенство $2C > \bar{p}$ проверяется непосредственно.

Максимальная прибыль PR^0 фирмы-монополиста, которая не использует ценовую дискриминацию, равна

$$PR^0 = PR^0(p^0) = (p_0 - C)D(p_0) = C\frac{k_1 + 4k_2}{4 \cdot 4C^2} = \frac{k_1 + 4k_2}{16C}.$$

Максимальная прибыль $\overline{PR}$ фирмы-монополиста, который использует двухкомпонентный тариф, равна (см. (8.4.16))

$$\overline{PR} = PR(\bar{p}) = k_1(A(\bar{p}) + \bar{p}D_1(\bar{p})) + k_2(A(\bar{p}) + \bar{p}D_2(\bar{p})) -$$
$$- C(k_1 D_1(p) - k_2 D_2(\bar{p})) =$$
$$= k_1\left(\frac{1}{4\bar{p}} + \bar{p}\frac{1}{4(\bar{p})^2}\right) + k_2\left(\frac{1}{4\bar{p}} + \bar{p}\frac{1}{(\bar{p})^2}\right) - C\left(\frac{k_1}{4(\bar{p})^2} + \frac{k_2}{(\bar{p})^2}\right) =$$
$$= \frac{\bar{p}(2k_1 + 5k_2) - C(k_1 + 2k_2)}{4(\bar{p})^2} = \frac{(2k_1 + 5k_2)^2}{16(k_1 + 4k_2)C}.$$

Непосредственно проверяется, что

$$\widehat{PR} = \frac{(k_1 + k_2)^2}{4Ck_1} > \frac{(2k_1 + 5k_2)^2}{16(k_1 + 4k_2)C} =$$
$$= \overline{PR} = PR(\bar{p}) > \frac{k_1 + k_2}{16C} = PR^0 = PR(p^0),$$

где $\widehat{PR}$ – максимальная прибыль фирмы-монополиста в случае применения ею пакетной дискриминации (см. пример 8.4.2).

Чистые потери общественного благосостояния (отрицательная величина) при переходе фирмы-монополиста от идеальной ценовой дискриминации к двухкомпонентному тарифу равны

$$-DL = k_1\sqrt{D_1(\bar{p})} + 2k_2\sqrt{D_2(\bar{p})} - CD(\bar{p}) -$$
$$- k_1\sqrt{D_1(C)} - 2k_2\sqrt{D_2(C)} + CD(C) =$$
$$= k_1\sqrt{\frac{1}{4(\bar{p})^2}} + 2k_2\sqrt{\frac{1}{(\bar{p})^2}} - C\frac{k_1 + 4k_2}{4(\bar{p})^2} -$$
$$- k_1\sqrt{\frac{1}{4C^2}} - 2k_2\sqrt{\frac{1}{C^2}} + C\frac{k_1 + 4k_2}{4C^2} = \frac{-9k_2^2}{16C(k_1 + 4k_2)}.$$

Можно показать, что и в общем случае имеет место неравенство

$$\widehat{PR} = PR(\hat{p}) > PR(\bar{p}) = \overline{PR},$$

т.е. максимальная прибыль фирмы-монополиста, которая использует пакетную дискриминацию, строго больше максимальной прибыли фирмы-монополиста в случае двухкомпонентного тарифа.

8.4.8. При использовании фирмой-монополистом ценовой дискриминации *третьего рода* потребители продукции фирмы разделяются на два (или более) рыночных сегмента. На каждом сегменте существует своя линия спроса, своя монопольная цена и свой монопольный объем продаж. Рыночные сегменты выбираются монополистом так, чтобы потребитель, который приобрел продукцию по более низкой цене на одном сегменте, не мог бы ее реализовать по более высокой цене, но меньше той, которая имеет место на другом сегменте.

Так, например, авиакомпания, которая является монополистом на определенном направлении пассажирских авиаперевозок, может сравнительно дешево и заранее продавать авиабилеты пенсионерам (по предъявлении пенсионного удостоверения) и туристам (по предъявлении турпутевок) и назначать достаточно высокую цену на авиабилеты деловым людям (которые часто приобретают билеты по принципу «продайте прямо сейчас и как можно быстрее»). Все авиабилеты именные и поэтому не могут быть реализованы, что называется, «с рук».

Другие примеры ценовой дискриминации третьего рода: цены на билеты в кинотеатры, театры, в городском транспорте для студентов, пенсионеров, военнослужащих, сотрудников отдельных министерств; гостиничные тарифы для граждан России и иностранных граждан, плата за обучение в вузах России для россиян и иностранных граждан и т.п.

Случай, когда фирма-монополист не использует ценовую дискриминацию, был проанализирован в параграфе 8.1. Переходим к анализу случая, когда фирма-монополист реализует свою продукцию в двух сегментах. Случай любого конечного числа k сегментов анализируется аналогично и поэтому здесь подробно не рассматривается.

В каждом сегменте рынка фирмы-монополиста имеет место своя линия спроса. Фирма-монополист в каждом сегменте выбирает объем продаж $y_1^{(m)}$ и $y_2^{(m)}$ (соответственно монопольные цены $p_1^{(m)}$ и $p_2^{(m)}$) так, чтобы общая прибыль PR фирмы была наибольшей.

Для общей прибыли PR монополии имеем следующее представление:

$$PR = R - C,$$

где $R(y) = R_1(y_1) + R_2(y_2) = p_1y_1 + p_2y_2$ $(y = y_1 + y_2)$ – доход фирмы-монополиста, который равен сумме дохода $R_1 = p_1y_1$ фирмы в первом сегменте и дохода $R_2 = p_2y_2$ во втором сегменте. Издержки $C(y)$ фирмы-монополиста равны $C(y) = C(y_1 + y_2)$.

Для максимизации прибыли фирмы-монополиста, которая использует ценовую дискриминацию (третьего рода), выпишем условия первого порядка:

$$0 = \frac{\partial PR}{\partial y_1} = \frac{\partial R}{\partial y_1} - \frac{\partial C}{\partial y_1} = \frac{\partial R}{\partial y_1} - \frac{\partial C(y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial y_1} = \frac{d(R_1(y_1) + R_2(y_2))}{dy_1} - MC(y) =$$

$$= MR_1(y_1) - MC(y), \qquad (8.4.21)$$

$$0 = \frac{\partial PR}{\partial y_2} = \frac{\partial R}{\partial y_2} - \frac{\partial C}{\partial y_2} = \frac{\partial R}{\partial y_2} - \frac{\partial C(y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial y_2} = \frac{d(R_1(y_1) + R_2(y_2))}{dy_2} - MC(y) =$$

$$= MR_2(y_2) - MC(y). \qquad (8.4.22)$$

Напомним, что $dR_1(y_1)/dy_1 = MR_1(y_1)$, $dR_2(y_2)/dy_2 = MR_2(y_2)$, $dC(y)/dy = MC(y)$. Из (8.4.21) и (8.4.22) следует

$$MR_1(y_1) = MC(y) = MR_2(y_2).$$

Отметим, что в случае, когда число k сегментов фирмы-монополиста конечно и больше двух, т.е. в случае, когда $y = y_1 + \ldots + y_k$, $R(y) = R_1(y_1) + \ldots + R_k(y_k) = p_1 y_1 + \ldots + p_k y_k$, $C(y) = C(y_1 + \ldots + y_k)$, справедлива аналогичная цепочка равенств $MR_1(y_1) = \ldots = MR_k(y_k) = MC(y)$.

Если предельные издержки $MC(y)$ фирмы-монополиста постоянны, $MC(y) = MC^*$, то равенства (8.4.21) и (8.4.22) соответственно приобретают вид

$$MR_1(y_1) = MC(y) = MC^*, \tag{8.4.23}$$

$$MR_2(y_2) = MC(y) = MC^*. \tag{8.4.24}$$

Из (8.4.23) получаем объем выпуска $y_1^{(m)}$ фирмы-монополиста в первом сегменте, из (8.4.24) – объем выпуска $y_2^{(m)}$ фирмы-монополиста во втором сегменте. Объем $y_1^{(m)}$ максимизирует прибыль $PR_1(y_1)$ фирмы-монополиста в первом сегменте, объем $y_2^{(m)}$ максимизирует прибыль $PR_2(y_2)$ фирмы-монополиста во втором сегменте. С помощью функций AR_1 и AR_2 спроса первого и второго сегментов рынка фирмы-монополиста определяем монопольные цены $p_1^{(m)}$ и $p_2^{(m)}$ в первом и во втором сегментах соответственно (рис. 8.22, который также наглядно интерпретирует равенства (8.4.23) и (8.4.24)).

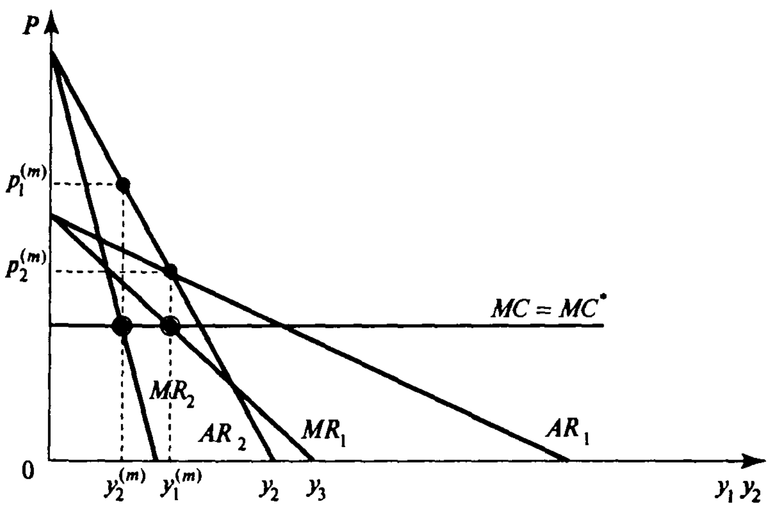


Рис. 8.22

Полагая в известном равенстве $MR(y)=p\left(1+\frac{1}{E_d}\right)$ сначала $y=y_1^{(m)}$, $p=p_1^{(m)}$, а затем $y=y_2^{(m)}$, $p=p_2^{(m)}$, получим для первого и второго сегментов представления для предельного дохода:

$$MR_1(y_1^{(m)})=p_1^{(m)}\left(1+\frac{1}{E_{d1}}\right), \tag{8.4.25}$$

$$MR_2(y_2^{(m)})=p_2^{(m)}\left(1+\frac{1}{E_{d2}}\right) \tag{8.4.26}$$

(E_{d1} и E_{d2} – эластичности спроса по ценам $p_1^{(m)}$ и $p_2^{(m)}$ первого и второго сегментов на продукцию фирмы-монополиста). Поделив равенство (8.4.25) на равенство (8.4.26) и принимая во внимание равенство $MR_1(y_1^{(m)}) = MR_2(y_2^{(m)})$ (см. равенства 8.4.23) и (8.4.24)), получим важное соотношение для цен $p_1^{(m)}$ и $p_2^{(m)}$

$$\frac{p_1^{(m)}}{p_2^{(m)}}=\frac{1+1/E_{d2}}{1+1/E_{d1}}, \tag{8.4.27}$$

которое показывает, что более высокая цена фирмой-монополистом назначается в том сегменте рынка, в котором спрос менее эластичен (см. рис. 8.22, на котором линия спроса AR_2 менее эластична, чем линия спроса AR_1, и, следовательно, цена $p_2^{(m)}$ выше цены $p_1^{(m)}$).

Рассмотрим случай, когда предельные издержки $MC(y)$ не являются постоянными, т.е. случай, когда в цепочках (8.4.23) и (8.4.24) последние звенья MC^* отсутствуют. Здесь уже необходимо определить, чему должны быть равны предельные издержки и, следовательно, общий объем $\hat{y}=y^{(m)}$ выпуска фирмы-монополиста, максимизирующий ее прибыль.

Для того чтобы определить этот объем, следует для прибыли $PR(y)=R(y)-C(y)$ выписать условие первого порядка $0=\frac{dPR}{dy}=$ $=\frac{dR}{dy}-\frac{dC(y)}{dy_1}$ = $MR(y)$ – $MC(y)$ (отметим, что $MR(y)=\frac{dR}{dy}=$ $=\frac{d(R_1(y)+R_2(y))}{dy}=\frac{dR_1(y_1)}{dy_1}\cdot\frac{dy_1}{dy}+\frac{dR_2(y_2)}{dy_2}\cdot\frac{dy_2}{dy}=MR_1(y_1)+MR_2(y_2)$), откуда получаем требуемый общий объем $\hat{y}=y^{(m)}$ выпуска фирмы-монополиста ($MR(\hat{y}) = MC(\hat{y})$). Для определения объема $\hat{y}=y^{(m)}$, строго говоря, условие первого порядка следует дополнить условием второго порядка или проанализировать ситуацию с переменой знака у предельной прибыли $MPR(y) = MR(y) - MC(y)$ в точке $\hat{y} = y^{(m)}$.

Для определения объема $y_1^{(m)}$ выпуска фирмы-монополиста, который максимизирует прибыль фирмы-монополиста в первом сегменте, следует относительно y_1 решить уравнение

$$MR_1(y_1) = MC(\hat{y}).$$

Аналогично в случае второго сегмента следует относительно y_2 решить уравнение

$$MR_2(y_2) = MC(\hat{y}).$$

Таким образом, в случае переменных предельных издержек $MC(y)$ следует в правых частях (8.4.23) и (8.4.24) вместо MC^* поставить $MC(\hat{y})$.

С помощью функций спроса AR_1 и AR_2 первого и второго сегментов определяем монопольные цены $p_1^{(m)}$ и $p_2^{(m)}$ в первом и во втором сегментах соответственно (рис. 8.23, на котором ломаная BGN есть сумма по горизонтали линий MR_1 и MR_2, точка E пересечения линий $MC(y)$ и $MR(y)$ (ломаной BGN), объем $\hat{y} = y_1^{(m)} + y_2^{(m)}$, точки E_1 и E_2 есть точки пересечения горизонтальной линии $MC(\hat{y})$ (т.е. линии EF) с линиями MR_1 и MR_2 соответственно).

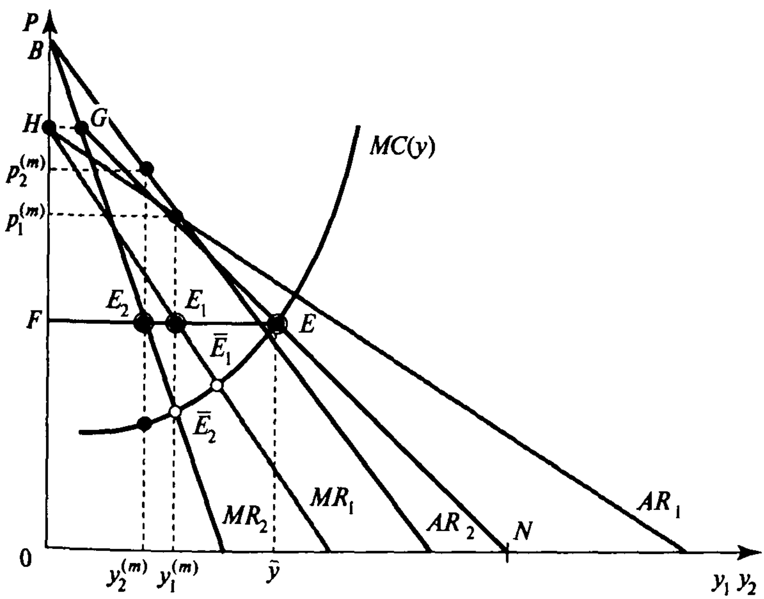


Рис. 8.23

Отметим, что $y_1^{(m)}$ и $y_2^{(m)}$ – абсциссы точек E_1 и E_2 соответственно, а не точек $\bar{E}_1$ и $\bar{E}_2$, в которых *линия* $MC(y)$ пересекает линии MR_1 и MR_2.

Как и в случае $MC(y) = MC^*$, используя равенства (8.4.25) и (8.4.26), получаем соотношение (8.4.27) для цен $p_1^{(m)}$ и $p_2^{(m)}$.

Приведем пример, когда монополия при высоких предельных издержках MC не использует ценовую дискриминацию, хотя в принципе могла бы это сделать (рис. 8.24, на котором линии MR_1 и MC не имеют общих точек, т.е. монополии невыгодно продавать свою продукцию в первом сегменте по низкой цене).

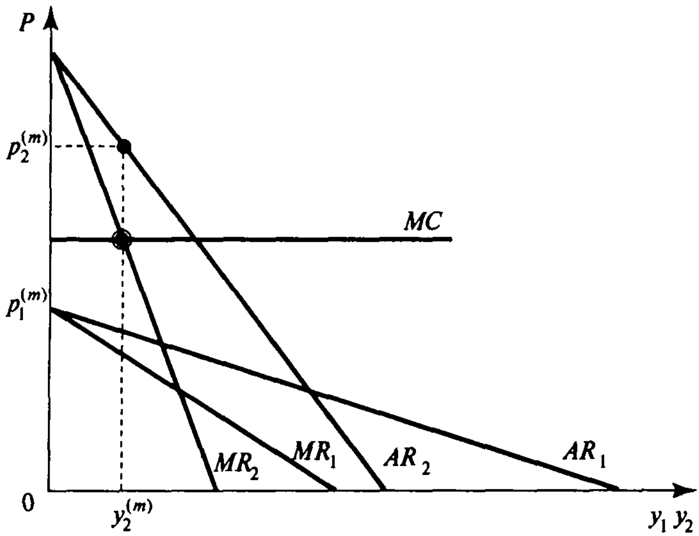


Рис. 8.24

Замечание 8.4.2

Прежде чем переходить к примеру, иллюстрирующему ситуацию с использованием фирмой-монополистом ценовой дискриминации третьего рода, отметим, что не существует четкой границы между понятиями ценовой дискриминации второго и третьего рода, как не существует четкой границы между понятиями ценовой дискриминации первого и второго рода (см. приведенное выше замечание 8.4.1).

Само понятие ценовой дискриминации на сегодняшний день является недостаточно разработанным, на что обращают внимание отдельные авторы (см., например, В.М. Гальперин, С.М. Игнатьев, В.И. Моргунов (1997). Микроэкономика. Т. 2. С. 112).

Рассмотрим иллюстративный пример.

Фирма-монополист имеет два сегмента рынка, в каждом из которых функция, обратная функции спроса, имеет вид $AR_1 = 18 - y_1$ и $AR_2 = 24 - 2y_2$ (сами функции спроса имеют вид $y_1 = 18 - p$ и $y_2 = 12 - p/2$, предельные издержки MC постоянные и равны $MC = 8$).

Решим задачу максимизации прибыли фирмы-монополиста в условиях ценовой дискриминации третьего рода и в случае отсутствия ценовой дискриминации третьего рода.

1. Сначала решим задачу максимизации прибыли фирмы в первом сегменте рынка. Поскольку $AR_1 = 18 - y_1$, постольку $R_1 =$ $= 18y_1 - y_1^2$, откуда $MR_1 = \dfrac{dR_1}{dy_1} = 18 - 2y_1$.

Из уравнения $MR_1 = MC$ следует, что $18 - 2y_1 = 8$, т.е. $y_1^{(m)} = 5$, $p_1^{(m)} = 18 - y_1^{(m)} = 18 - 5 = 13$ и $PR_1^{(m)} = (p_1^{(m)} - MC)\, y_1^{(m)} = (13 - 8) \cdot 5 =$ $= 5 \cdot 5 = 25 = \left|Hp_1^{(m)} F_1 E_1\right|_2$ ($\left|Hp_1^{(m)} F_1 E_1\right|_2$ – площадь прямоугольника $Hp_1^{(m)} F_1 E_1$ (рис. 8.25).

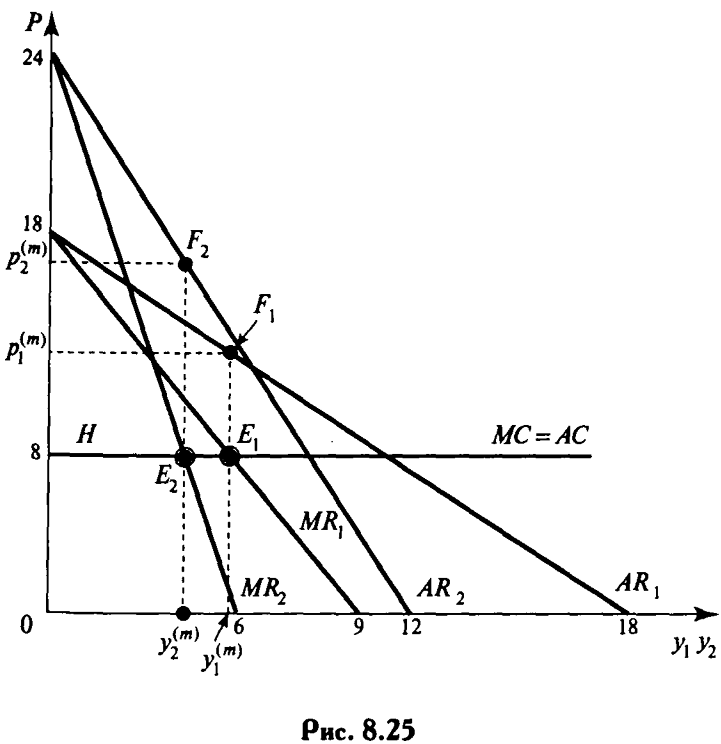


Рис. 8.25

2. Решим задачу максимизации прибыли монополии во втором сегменте рынка. Поскольку $AR_2 = 24 - 2y_2$, постольку $MR_2 = 24 - 4y_2$.

Из уравнения $MR_2 = MC$ следует, что $24 - 2y_2 = 8$, т.е. $y_2^{(m)} = 4$, $p_2^{(m)} = 24 - 2 \cdot 4 = 16$ и $PR_2^{(m)} = (p_2^{(m)} - MC)y_2^{(m)} = (16 - 8) \cdot 4 = 8 \cdot 4 = = \left| Hp_2^{(m)} F_2 E_2 \right|_2$ (см. рис. 8.25).

3. Суммарная максимальная прибыль $PR^{(m)}$ фирмы-монополиста равна $PR^{(m)} = PR_1^{(m)} + PR_2^{(m)} = 25 + 32 = 57$.

4. Найдем максимальную прибыль фирмы-монополиста в случае отсутствия ценовой дискриминации третьего рода. Для этого сначала построим линию AR (линию QGN, $G = (3;\ 18)$) среднего дохода фирмы-монополиста путем суммирования по горизонтали линий AR_1 и AR_2 (рис. 8.26). Аналитически линия AR описывается следующими уравнениями, разрешенными относительно p:

$$y = 12 - \frac{p}{2} \quad (18 \le p \le 24), \quad y = 30 - \frac{3}{2}p \quad (0 \le p \le 18),$$

и относительно y:

$$p = 24 - 2y \quad (0 \le y \le 3), \quad p = 20 - \frac{2}{3}y \quad (3 \le p \le 30).$$

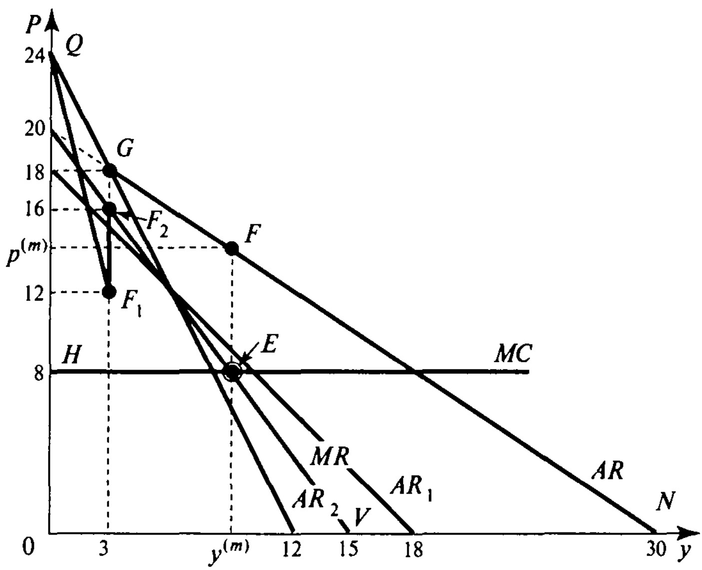


Рис. 8.26

Линия MR (QF_1F_2V) описывается следующими уравнениями, разрешенными относительно y: $p = 24 - 4y$ ($0 \le y \le 3$), $p = 20 - \frac{4}{3}y$ ($3 \le y \le 15$). Точки Q, F_1, F_2 и V имеют координаты $Q = (0; 24)$, $F_1 = (3; 12)$, $F_2 = (3; 16)$, $V = (15; 0)$. При $0 \le y \le 3$ $p \ge 12$, поэтому при $0 \le y \le 3$ линии MR и $MC = 8$ не пересекаются, при $3 \le y \le 30$ имеем $MC = MR$, т.е. $8 = 20 - \frac{4}{3}y$, откуда $y^{(m)} = 9$, а $p^{(m)} = 20 - \frac{2}{3}y^{(m)} = 20 - \frac{2}{3} \cdot 9 = 14$, следовательно, точка $E = (9; 8)$, точка $F = (9; 14)$.

Осталось найти $PR^{(m)} = (p^{(m)} - MC)y^{(m)} = (14 - 8) \cdot 9 = 6 \cdot 9 = 54 = \left| Hp^{(m)}FE \right|_2$ (см. рис. 8.26).

Отметим, что $y_1^{(m)} + y_2^{(m)} = 5 + 4 = 9 = y^{(m)}$, $p_1^{(m)} = 13 < 14 = p^{(m)} < 16 = p_2^{(m)}$ и $PR_1^{(m)} + PR_2^{(m)} = 25 + 32 = 57 > 54 = PR^{(m)}$, т.е. сумма площадей $\left| Hp_1^{(m)}F_1E_1 \right|_2$ и $\left| Hp_2^{(m)}F_2E_2 \right|_2$ прямоугольников $Hp_1^{(m)}F_1E_1$ и $Hp_2^{(m)}F_2E_2$ (см. рис. 8.25) больше площади $\left| Hp^{(m)}FE \right|_2$ прямоугольника $Hp^{(m)}FE$. (см. рис. 8.26). В рассматриваемом примере фирме-монополисту выгодно проводить ценовую дискриминацию третьего рода, ибо суммарная максимальная прибыль $PR_1^{(m)} + PR_2^{(m)}$ фирмы строго больше максимальной прибыли $PR^{(m)}$ фирмы при отсутствии ценовой дискриминации третьего рода.

8.5. Максимизация прибыли в краткосрочном и долговременном промежутках для фирмы, функционирующей в условиях монополистической конкуренции

8.5.1. Характеристики модели рынка монополистической конкуренции подробно анализируются во вводном и промежуточных курсах микроэкономики. На рынке монополистической конкуренции много продавцов и покупателей (но не так много, как в случае чистой конкуренции), достаточно свободный вход на рынок и уход с него, имеет место совершенная информированность покупателей и продавцов и, что весьма существенно, продукция фирм дифференцирована (однако все продукты мало отличаются друг от друга по качеству (являются близкими субститутами)), а также активно используется ценовая конкуренция. Существует достаточно много фрагментов экономической реальности, для описания которых модель рынка монополистической конкуренции достаточно адекватна (напомним, что для моделей чистой конкуренции и чистой монополии это не так): рынки предметов потребления (одежды, обуви, мебели, косметики, моющих средств), материальных услуг (парикмахерские, бани и т.д.), образовательных услуг и т.п.

Отдельная фирма в условиях монополистической конкуренции может функционировать, когда другие фирмы своего поведения не меняют и когда другие фирмы также меняют свое поведение.

Если фирма снижает цену на свою продукцию, а другие фирмы этого не делают, то фирма может значительно увеличить число своих покупателей (рис. 8.27, на котором показано, что при снижении фирмой цены с p_0 до p_1 объем выпускаемой (и реализуемой) ею продукции вырастет с y_0 до y_1, если другие фирмы своего поведения не меняют). Если другие фирмы вслед за нашей фирмой также снижают свою цену, то число покупателей у рассматриваемой фирмы увеличивается, но незначительно (см. рис. 8.27, на котором показано, что при снижении фирмой цены с p_0 до p_1 объем выпускаемой (и реализуемой) ею продукции вырастет с y_0 до y'_1, если другие фирмы последуют ее примеру).

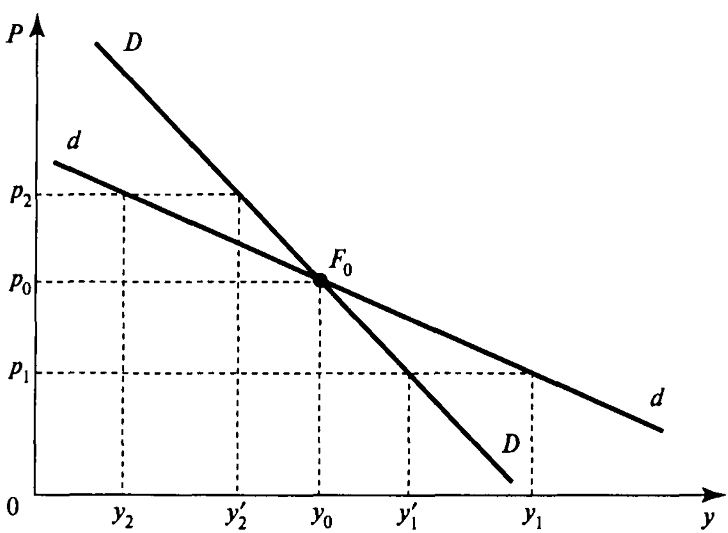


Рис. 8.27

Если фирма повысит цену с p_0 до p_2, то реакция на это потребителей также будет неоднозначной и будет зависеть от поведения других фирм. Если другие фирмы повышать свои цены не будут, фирма потеряет много покупателей (y_2 значительно меньше y_0); если другие фирмы также повысят свои цены, то фирма потеряет немного своих покупателей (y_2' меньше y_0, но больше y_2) (см. рис. 8.27).

Отсюда следует важный содержательный вывод. Фирма, функционирующая в условиях монополистической конкуренции, имеет две линии спроса на свою продукцию: линию dd (более эластичную, т.е. более пологую) и линию DD (менее эластичную, т.е. менее пологую) (см. рис. 8.27).

Отметим, что линии dd и DD пересекаются в точке F_0 с координатами y_0 (объем текущего выпуска) и p_0 (значение текущей цены фирмы, функционирующей в условиях монополистической конкуренции (см. рис. 8.27)).

8.5.2. Рассмотрим задачу максимизации прибыли фирмы, функционирующей в условиях монополистической конкуренции в случае *краткосрочного* промежутка.

При текущей цене p_0 фирма предлагает на рынке свою продукцию в объеме y_0, который не максимизирует прибыль (рис. 8.28, на котором изображены точка F_0' пересечения линий d_1d_1 и DD, линия предельного дохода MRd_1, соответствующая линии d_1d_1 спроса на продукцию фирмы, а также линия предельных издержек фирмы). Точка пересечения линий MC и MRd_1 E_1 определяет объем выпуска фирмы y_1, который максимизирует ее прибыль при условии, что другие фирмы не меняют своего поведения. При этом условии цена p_1 есть ордината точки F_1 пересечения линии d_1d_1 и вертикальной линии $y = y_1$. Новая цена p_1 ниже цены p_0, т.е. ради максимизации своей прибыли фирма снижает цену с p_0 до p_1. Если другие фирмы еще не максимизируют свои прибыли, они также захотят снизить свои цены. В таком случае при цене p_1 рассматриваемая фирма обеспечит свой выпуск не в объеме y_1, а в меньшем объеме y_1', который равен абсциссе точки F_1' пересечения линии цены $p = p_1$ и линии DD. Следовательно, при цене p_1 рассматриваемая фирма при объеме выпуска y_1' уже свою прибыль не максимизирует.

Переход из точки F_1 в точку F_1' означает, что линия спроса d_1d_1 на продукцию рассматриваемой фирмы переходит в положение d_2d_2,

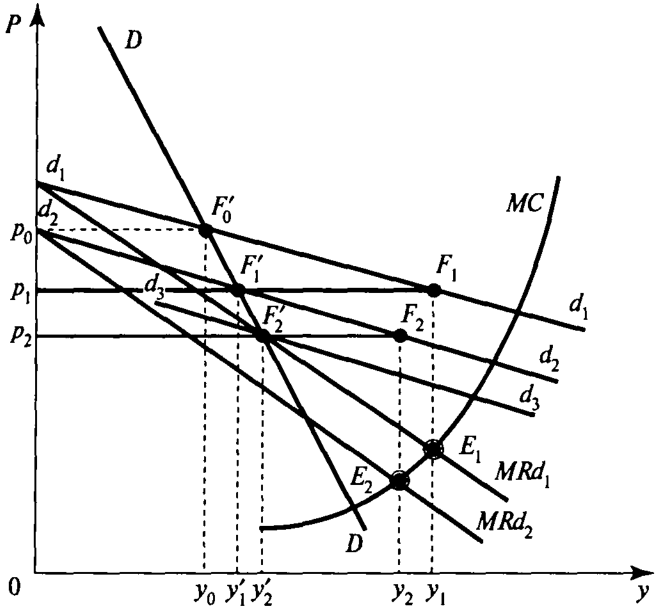


Рис. 8.28

ибо линия спроса должна содержать точку F'_1. Далее рассуждение проводятся аналогично. На рис. 8.28 показана новая линия MRd_2 предельного дохода, которая соответствует линии спроса d_2d_2. Точка пересечения E_2 линий MC и MRd_2 определяет объем y_2 выпуска фирмы, который максимизирует ее прибыль при условии, что другие фирмы своего поведения не меняют, т.е. цены не снижают. Цена p_2, которую назначает рассматриваемая фирма, равна ординате точки F_2 пересечения линии спроса d_2d_2 и вертикальной линии, проходящей через точку $y = y_2$ на оси абсцисс. Цена p_2 меньше цены p_1, поэтому другие фирмы, которые еще не получили максимальной прибыли, также могут снизить свои цены. В этом (как и предыдущем) случае при цене p_2 рассматриваемая фирма обеспечит свой выпуск не в объеме y_2, а в меньшем объеме y'_2 (см. рис. 8.28), который равен абсциссе точки F'_2 пересечения линии цены $p = p_2$ и линии DD. Таким образом, при цене $p = p_2$ рассматриваемая фирма при объеме y'_2 уже не будет максимизировать свою прибыль. Переход из точки F_2 в точку F'_2 означает, что линия спроса d_2d_2 на продукцию рассматриваемой фирмы спускается ниже в положение d_3d_3, линия спроса должна проходить через точку F_2' (см. рис. 8.28) и т.д. Мы видим, что точки y_1, y_2 и т.д. движутся по оси Oy справа налево, а точки y_1', y_2' движутся по оси Oy_1 слева направо. Процесс сходится к точке y^* (рис. 8.29), которая есть абсцисса точек E^* (точки пересечения линий MC и MRd^*) и F^* (точки пересечения линий DD и d^*d^*). Линия d^*d^* – предельная для линий d_1d_1, d_2d_2 (см. рис. 8.28) и т.д. В рассматриваемом случае $F'^* = F^*$, и поэтому у фирмы нет заинтересованности изменить цену p^*.

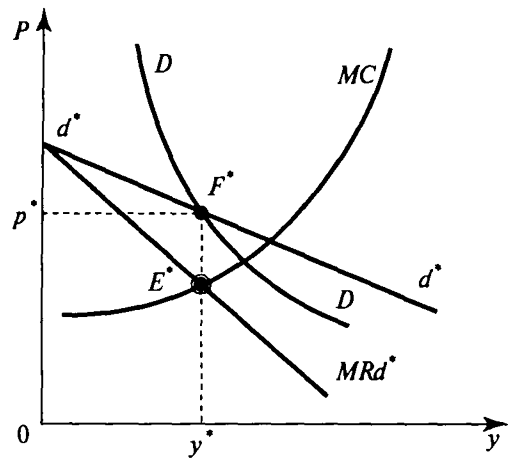


Рис. 8.29

Максимальная прибыль рассматриваемой фирмы в случае $p = p^*$ и $y = y^*$ может быть положительной, нулевой и отрицательной в зависимости от того, где проходит линия $AC(y)$ средних издержек. Если $AC(y^*) > p^*$, то $PR(y^*) < 0$, если $AC(y^*) = p^*$, то $PR(y^*) = 0$, если $AC(y^*) < p^*$, то $PR(y^*) > 0$.

8.5.3. Рассмотрим задачу максимизации прибыли фирмы, функционирующей в условиях монополистической конкуренции в случае *долговременного* промежутка.

В связи с тем что барьеры на вход отрасли, функционирующей в условиях монополистической конкуренции, практически отсутствуют, максимальная прибыль $PR(y^*)$ средней фирмы в случае долговременного промежутка должна равняться нулю. В случае положительной прибыли в долговременном промежутке в отрасль будут приходить новые фирмы, что приведет к последующему снижению цен на продукты и снижению максимальной прибыли средней фирмы, пока она не станет равной нулю.

Факт нулевой максимальной прибыли средней (типичной) фирмы, функционирующей в условиях монополистической конкуренции в течение долговременного промежутка, проиллюстрируем на рис. 8.30.

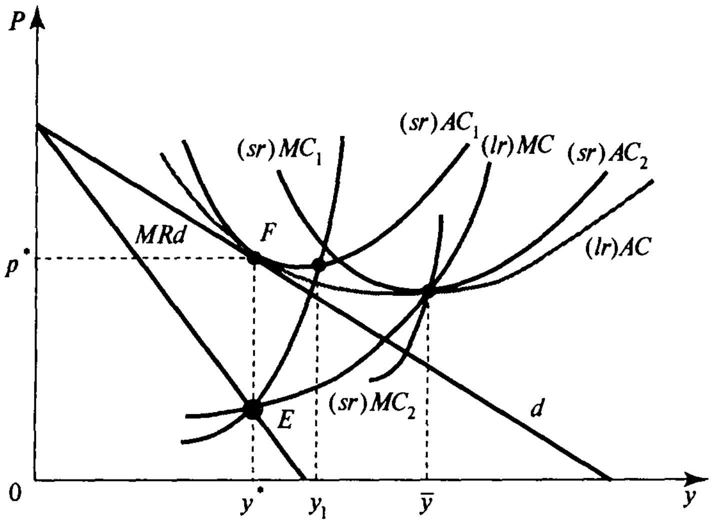


Рис. 8.30

Линия $(lr)AC$ средней фирмы представляет собой огибающую линий ее краткосрочных средних издержек $(sr)AC$ (на рис. 8.30 показаны линии $(sr)AC_1$ и $(sr)AC_2$). Объем y^* выпуска средней фирмы есть абсцисса точки E пересечения линий MRd и $(lr)MC$ (см. также параграф 8.1). Этот объем y^* фирма выпускает в текущем периоде, в котором она выбрала (технологический) вариант с линиями $(sr)AC_1$ и $(sr)MC_1$, причем линия $(sr)MC_1$ пересекает линию $(lr)MC$ и линию MRd в точке E, линия $(sr)AC_1$ касается линии $(lr)AC$ в точке F, абсцисса которой равна y^*, а ордината – p^*. В этом случае доход фирмы в текущем периоде и ее издержки равны друг другу и площади $\left|Op^*Fy^*\right|_2$ прямоугольника Op^*Fy^*.

8.6. Учет расходов на рекламу в задаче максимнзации прибылн фирмы в условиях монополистической конкуренции

8.6.1. Реклама может быть эффективным средством стимулирования спроса на продукцию фирмы, которая функционирует в условиях монополистической конкуренции, ибо реклама является одним из источников информации о результатах стратегического поведения фирмы по снижению издержек или/и повышению уровня дифференциации ее продукции.

Сначала кратко рассмотрим проблему учета расходов на рекламу в аналитической форме.

Объем затрат фирмы в течение периода времени на рекламу обозначим символом a, тогда издержки C фирмы есть функция двух переменных $C(y;\, a)$: переменной y, которая равна объему продукции, выпускаемой фирмой в течение периода, и переменной a.

Прибыль, которую получит фирма в этот период времени, имеет вид

$$PR(y;\, a) = py - C(y;\, a).$$

Функция спроса на продукцию фирмы и обратная к ней в рассматриваемом случае имеют вид $y = D(p,\, a)$ и $p = H(y,\, a)$. Заменив в выражении для прибыли $PR(y,\, a)$ цену p на ее представление $H(y,\, a)$, получим

$$PR(y,\, a) = yH(y,\, a) - C(y,\, a). \tag{8.6.1}$$

Выпишем условия первого порядка максимизации прибыли фирмы:

$$\frac{\partial PR(y,\, a)}{\partial y} = H(y,\, a) + y\frac{\partial H(y,\, a)}{\partial y} - \frac{\partial C(y,\, a)}{\partial y} = 0, \tag{8.6.2}$$

$$\frac{\partial PR(y,\, a)}{\partial a} = y\frac{\partial H(y,\, a)}{\partial a} - \frac{\partial C(y,\, a)}{\partial a} = 0. \tag{8.6.3}$$

Пусть вектор $(y^0;\, a^0)$ есть решение системы (8.6.2)–(8.6.3).

Если для этого вектора выполнены условия второго порядка, то при объеме выпуска y^0 и расходах на рекламу a^0 фирма в рассматриваемом периоде получит максимальную прибыль

$$PR^0 = PR(y^0;\, a^0) = y^0 H(y^0;\, a^0) - C(y^0;\, a^0).$$

В учебнике трех авторов (см.: В.М. Гальперин, С.М. Игнатьев, В.И. Моргунов (1997). Т. 2. С. 269–274) анализируется задача максимизации прибыли фирмы не только с учетом расходов на рекламу, но и с учетом показателя g качества продукции.

8.6.2. Проанализируем влияние расходов на рекламу с помощью наглядных геометрических построений (рис. 8.31).

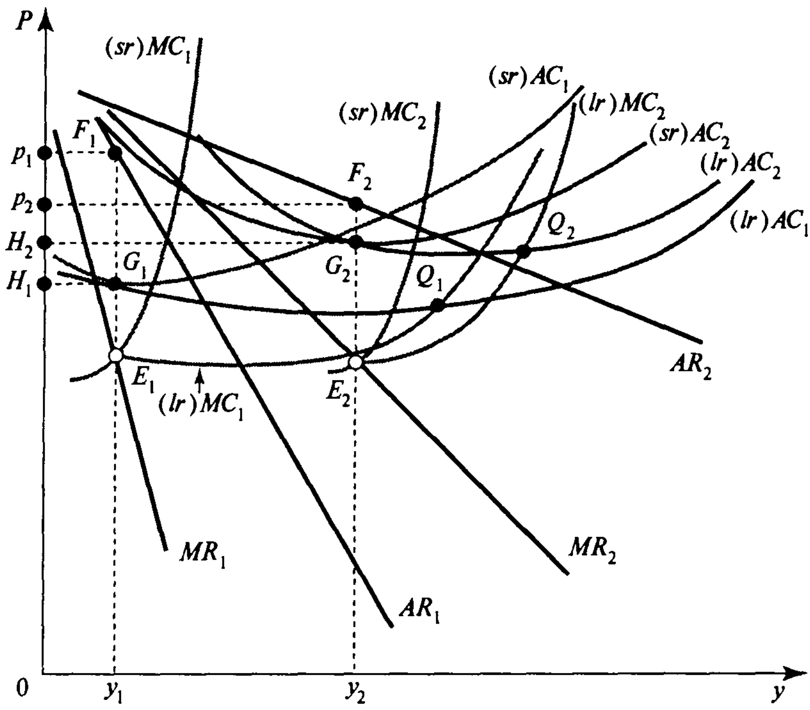


Рис. 8.31

На рис. 8.31 линия $(lr)AC_1$ есть линия долговременных средних издержек фирмы, которая не имеет расходов на рекламу. Точка Q_1 – минимальная точка линии $(lr)AC_1$. Точка E_1 – точка пересечения линий MR_1, $(sr)MC_1$ и $(lr)MC_1$. Ее абсцисса y_1 – объем выпускаемой фирмой продукции, который вместе с ценой p_1 (ординатой точки F_1, абсцисса которой есть y_1) максимизирует прибыль фирмы в течение периода в случае долговременного промежутка. Максимальная прибыль равна площади $|H_1p_1F_1G_1|_2$ прямоугольника $H_1p_1F_1G_1$. На рис. 8.31 линия $(lr)AC_2$ есть линия долговременных средних издержек фирмы, которая имеет расходы на рекламу, повышающие средние издержки фирмы, что иллюстрируется высоким расположением линии $(lr)AC_2$ по сравнению с линией $(lr)AC_1$. Точка Q_2 – минимальная точка линии $(lr)AC_2$. Расположение линии спроса AR_2 выше и правее линии спроса AR_1 означает, что после рекламной кампании спрос на продукцию фирмы значительно вырос (см. рис. 8.31). В точке E_2 пересекаются линии MR_2, $(sr)MC_2$, $(lr)MC_2$, откуда следует, что абсцисса y_2 точки E_2 есть объем выпускаемой фирмой продукции, который вместе с ценой p_2 (ординатой точки F_2, абсцисса которой есть y_2) максимизирует прибыль фирмы в течение периода долговременного промежутка в том случае, когда фирма имеет расходы на рекламу. Максимальная прибыль во втором случае равна площади $|H_2p_2F_2G_2|_2$ прямоугольника $H_2p_2F_2G_2$, которая больше площади $|H_1p_1F_1G_1|_2$ прямоугольника, равной максимальной прибыли фирмы в случае отсутствия расходов на рекламу (важного средства стимулирования спроса). В этом примере расходы на рекламу позволили фирме снизить цену на свою продукцию (с p_1 до p_2) и повысить свою прибыль (с величины $|H_1p_1F_1G_1|_2$ до величины $|H_2p_2F_2G_2|_2$).

Рисунок 8.32 аналогичен рис. 8.31 и иллюстрирует ситуацию, когда при стимулировании спроса путем рекламной кампании фирма повышает цену ($p_2 > p_1$) и снижает свою прибыль в течение периода времени в случае долговременного промежутка. Площадь $|H_1p_1F_1G_1|_2$ прямоугольника $H_1p_1F_1G_1$, которая равна прибыли фирмы в случае отсутствия у нее расходов на рекламу, больше площади $|H_2p_2F_2G_2|_2$ прямоугольника $H_2p_2F_2G_2$, которая равна прибыли фирмы в случае наличия у нее расходов на рекламу.

Рассмотренные примеры показали, что не существует однозначного ответа на вопрос, как влияют меры фирмы по стимулированию спроса в форме расходов на рекламу на ее прибыль, цену выпускаемой ею продукции. Не существует однозначного ответа и на вопрос о влиянии расходов на рекламу на выпуск фирмы, который максимизирует ее прибыль.

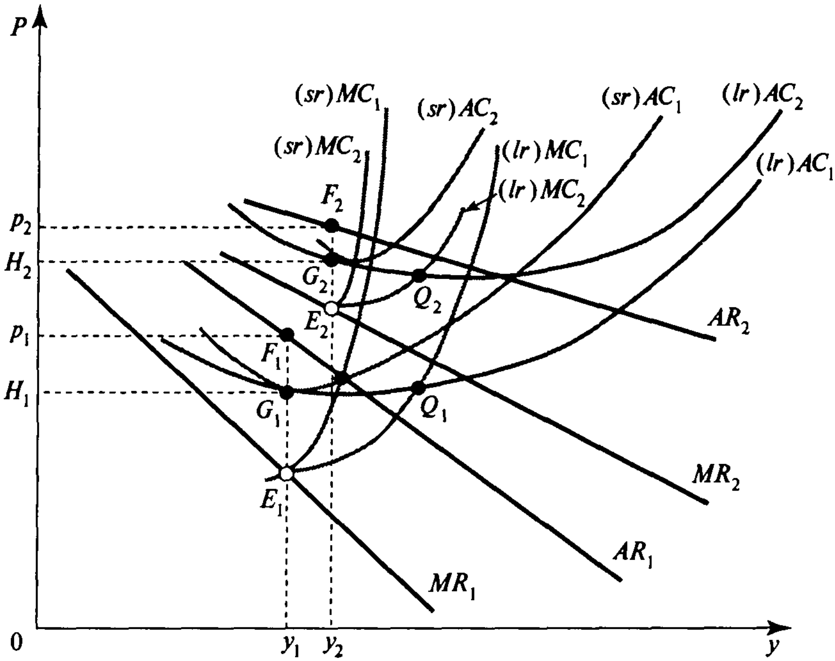


Рис. 8.32

8.7. Модели дуополии и олигополии Курно

8.7.1. Олигополия – это важная рыночная структура. Ей принадлежат отрасли, которые функционируют на гребне научно-технического прогресса (аэрокосмическая отрасль, отрасль, производящая оборудование для телекоммуникационных и компьютерных систем, автопром и т.п.), отрасли топливно-энергетического комплекса, черной и цветной металлургии. Исследованию и, в частности, математическому моделированию дуополии и олигополии посвящена обширная литература, ряд позиций которой представлен в списке литературы к главе 8. Краткий аналитический обзор классических результатов и их обобщений содержится в конце параграфа 20 учебного пособия А.А. Васина, В.В. Морозова (2005).

Сначала проанализируем количественную *дуополию*, т.е. рынок однородного продукта, на котором функционируют две фирмы. Каждая фирма принимает решение об объеме (количестве) только своего выпуска, который бы максимизировал ее прибыль в течение определенного (производственного) периода (например, в течение одного года). Естественно, что при этом фирма должна не только ориентироваться на свои издержки и условия спроса, но и учитывать поведение другой фирмы.

Выбор формы учета поведения другой (конкурирующей) фирмы должен базироваться на определенных предпосылках (допущениях). Сначала будет рассмотрена простейшая предпосылка о том, что первая (вторая) фирма, принимая решение об объеме $\hat{y}_1$ ($\hat{y}_2$) своего выпуска, максимизирующего ее прибыль в фиксированном производственном периоде, полагает, что конкурирующая с ней вторая (первая) фирма имеет в данном периоде фиксированный выпуск $\bar{y}_2$ ($\bar{y}_1$), т.е. не изменяет своего выпуска в этом периоде, даже если первая (вторая) фирма изменит свой выпуск. Содержательным оправданием этой простейшей предпосылки является основанное на фактах экономической реальности соображение о том, что первая (вторая) фирма уверена, что вторая (первая) фирма не успеет в течение производственного периода отреагировать на изменение объема выпуска первой (второй) фирмы, даже если бы попыталась это сделать. Далее мы увидим, что простейшая предпосылка не означает, что модель, построенная на ее основе и называемая *моделью дуополии Курно*, также будет простейшей.

Переходим к формальному описанию и анализу модели Курно.

На рынке в течение производственного периода функционируют две фирмы. Их функции издержек являются линейными функциями, т.е. имеют вид

$$C_1 = cy_1 + d_1, \quad C_2 = cy_2 + d_2,$$

где $c = MC_1 = MC_2$, $d_1 = FC_1$, $d_2 = FC_2$; y_1 – объем выпуска первой фирмы; y_2 – объем выпуска второй фирмы; $y = y_1 + y_2$ – суммарный выпуск обеих фирм (т.е. отраслевой выпуск); MC_1 и MC_2 – предельные издержки фирм; FC_1 и FC_2 – постоянные издержки обеих фирм.

Функция, обратная к функции рыночного спроса, предполагается линейной и имеет вид

$$p = a - b(y_1 + y_2),$$

где a и b – положительные параметры. Тогда доход (выручка) у первой фирмы равна $R_1 = py_1$, а у второй $R_2 = py_2$. Для прибыли каждой фирмы получаем следующие выражения:

$$PR_1(y_1, y_2) = R_1 - C_1 = (a - by_1 - by_2)y_1 - cy_1 - d_1, \qquad (8.7.1)$$

$$PR_2(y_1, y_2) = R_2 - C_2 = (a - by_1 - by_2)y_2 - cy_2 - d_2. \qquad (8.7.2)$$

Из приведенных формул следует, что прибыль каждой фирмы зависит не только от объема ее собственного выпуска, но и от объема выпуска другой (конкурирующей с ней) фирмы.

Далее все построения будут выполнены только для первой фирмы. Ряд результатов для второй фирмы выписывается по аналогии.

В соответствии с принятой предпосылкой (первая фирма *полагает*, что выпуск второй фирмы в рассматриваемом периоде не меняется, т.е. $y_2 = \bar{y}_2$ и, следовательно, $dy_2/dy_1 = d\bar{y}_2/dy_1 = 0$) прибыль первой фирмы имеет вид

$$PR_1 = (a-c)y_1 - by_1^2 - by_1\bar{y}_2 - d_1. \tag{8.7.3}$$

Аналогично если вторая фирма *полагает*, что выпуск первой фирмы в рассматриваемом периоде не меняется, т.е. $y_1 = \bar{y}_1$ (и, таким образом, $dy_1/dy_2 = d\bar{y}_1/dy_2 = 0$), то прибыль второй фирмы имеет вид

$$PR_2 = (a-c)y_2 - by_2^2 - b\bar{y}_1 y_2 - d_2.$$

Для решения задачи максимизации прибыли PR_1 следует сначала использовать условие первого порядка

$$\frac{dPR_1}{dy_1} = (a-c) - 2by_1 - b\bar{y}_2 = 0$$

(выписанное с учетом равенства $d\bar{y}_2/dy_1 = 0$), откуда следует, что

$$\hat{y}_1(\bar{y}_2) = \frac{a-c}{2b} - \frac{\bar{y}_2}{2}. \tag{8.7.4}$$

Отметим, что $0 < \hat{y}_1 < \dfrac{a-c}{2b}$.

Для прибыли PR_1 условие второго порядка имеет вид

$$\frac{d^2 PR_1}{dy_1^2} = -2b < 0.$$

Таким образом, объем выпуска первой фирмы, равный $\hat{y}_1$ (см. (8.7.4)), максимизирует ее прибыль PR_1 в течение производственного периода, если выпуск второй фирмы равен $\bar{y}_2$.

Аналогично если выпуск первой фирмы равен $\bar{y}_1$, то выпуск второй фирмы, максимизирующий ее прибыль PR_2 в течение производственного периода, равен $\hat{y}_2(\bar{y}_1)$:

$$\hat{y}_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{\bar{y}_1}{2}. \tag{8.7.5}$$

На основании равенств (8.7.4) и (8.7.5) выписываем систему

$$y_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_2}{2},$$

$$y_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2}$$

линейных алгебраических уравнений, которая имеет единственное решение

$$\overset{*}{y}_1 = \overset{*}{y}_2 = \frac{a-c}{3b},$$

которое позволяет переписать равенства (8.7.4) и (8.7.5) так:

$$\overset{*}{y}_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{\overset{*}{y}_2}{2}, \qquad (8.7.6)$$

$$\overset{*}{y}_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{\overset{*}{y}_1}{2}, \qquad (8.7.6')$$

т.е. если $\bar{y}_2 = \overset{*}{y}_2$, то $\hat{y}_1 = \overset{*}{y}_1$, и если $\bar{y}_1 = \overset{*}{y}_1$, то $\hat{y}_2 = \overset{*}{y}_2$.

Таким образом, выпуск $\overset{*}{y}_1$ первой фирмы максимизирует ее прибыль, если вторая фирма имеет выпуск $\overset{*}{y}_2$, который максимизирует ее прибыль при условии, что первая фирма имеет выпуск $\overset{*}{y}_1$, который максимизирует ее прибыль. Естественно такую пару выпусков $(\overset{*}{y}_1, \overset{*}{y}_2)$ первой и второй фирм назвать равновесием дуополии Курно или просто *равновесием Курно*. Ниже приведено подробное пояснение этого фундаментального понятия экономической теории.

Напомним, что изопрофита – это линия постоянной прибыли фирмы.

При объеме $\hat{y}_1 = \hat{y}_1(\bar{y}_2)$ выпуска первой фирмы ее максимальная прибыль равна

$$PR_1(\hat{y}_1, \bar{y}_2) = \widehat{PR}_1 = (a-c)\hat{y}_1 - b\hat{y}_1^2 - b\hat{y}_1\bar{y}_2 - d_1 = \hat{\tau}_1. \qquad (8.7.7)$$

Уравнение изопрофиты $l_1(\hat{\tau}_1)$ имеет вид

$$PR_1(y_1, y_2) = \hat{\tau}_1$$

или в развернутом виде

$$(a-c)y_1 - by_1^2 - by_1y_2 - d_1 = \hat{\tau}_1,$$

откуда следует, что

$$y_2 = \frac{a-c}{b} - y_1 - \frac{\hat{\tau}_1 + d_1}{b} \cdot \frac{1}{y_1}, \qquad (8.7.8)$$

т.е. получили, что уравнение изопрофиты $l_1(\hat{\tau}_1)$ есть уравнение гиперболы, проходящей через точку $(\hat{y}_1, \bar{y}_2)$. У этой гиперболы одна вертикальная асимптота ($y_1 = 0$) и одна наклонная, которая проходит через точки G_1 и G_2 и которая имеет уравнение

$$y_2 = \frac{a-c}{b} - y_1 \qquad (8.7.9)$$

(рис. 8.33).

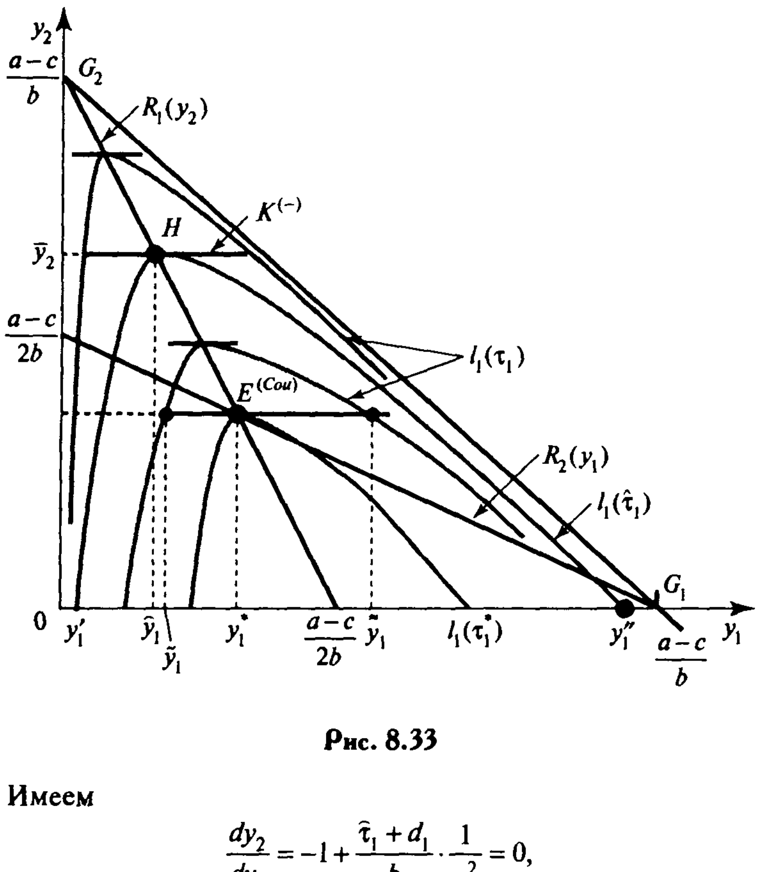


Рис. 8.33

Имеем

$$\frac{dy_2}{dy_1} = -1 + \frac{\hat{\tau}_1 + d_1}{b} \cdot \frac{1}{y_1^2} = 0,$$

откуда следует, что

$$y_1^2 = \frac{\hat{\tau}_1 + d_1}{b} \overset{(8.7.7)}{=} \frac{(a-c)\hat{y}_1 - b\hat{y}_1^2 - b\hat{y}_1\bar{y}_2}{b} = \hat{y}_1\left(\frac{a-c}{b} - \bar{y}_2\right) \overset{(8.7.4)}{=} 2\hat{y}_1^2 - \hat{y}_1^2 = \hat{y}_1^2,$$

т.е. при $y_1 = \widehat{y}_1$ производная $dy_2/dy_1 = 0$ и, следовательно, изопрофита $l_1(\widehat{\tau}_1)$ в точке $(\hat{y}_1, \overline{y}_2)$ имеет горизонтальную касательную $K^{(-)}$ (см. рис. 8.33).

Поскольку

$$\frac{d^2 y_2(\widehat{y}_1)}{dy_1^2} = -2\frac{\widehat{\tau}_1 + d_1}{b} \cdot \frac{1}{\widehat{y}_1^3} < 0,$$

то при $y_1 = \widehat{y}_1$ изопрофита $l_1(\widehat{\tau}_1)$ имеет максимум, равный $\overline{y}_2$, что проверяется непосредственно:

$$y_2 = \frac{a-c}{b} - \widehat{y}_1 - \frac{\widehat{\tau}_1 + d_1}{b} \cdot \frac{1}{\widehat{y}_1} \overset{(8.7.7)}{=} \frac{a-c}{b} - \hat{y}_1 - \frac{(a-c)\widehat{y}_1 - b\widehat{y}_1^2 - b\widehat{y}_1\overline{y}_2}{b} \cdot \frac{1}{\widehat{y}_1} =$$

$$= \frac{a-c}{b} - \widehat{y}_1 - \frac{a-c}{b} + \widehat{y}_1 + \frac{b\widehat{y}_1\overline{y}_2}{b\widehat{y}_1^2} = \overline{y}_2.$$

Таким образом, в точке $H = (\widehat{y}_1, \overline{y}_2)$ изопрофита $l_1(\widehat{\tau}_1)$ имеет «шапочку» (см. рис. 8.33), т.е. самая высокая точка каждой изопрофиты $l_1(\widehat{\tau}_1)$ первой фирмы расположена на линии $R_1(y_2)$, имеющей уравнение

$$y_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_2}{2}.$$

Линию $R_1(y_2)$ можно назвать *линией реакции* первой фирмы на выпуск второй фирмы, ибо эту линию $R_1(y_2)$ заметают (от слова «метла») все точки $(\hat{y}_1, \overline{y}_2)$, первые координаты $\hat{y}_1$ которых равны выпуску, максимизирующему прибыль первой фирмы, если первая фирма *полагает*, что вторая фирма имеет выпуск $\overline{y}_2$.

Формальное дифференцирование функции $y_1 = \dfrac{a-c}{2b} - \dfrac{y_2}{2}$ по переменной $y_2 (dy_1/dy_2 = -{}^1/_2)$ некорректно, ибо оно молчаливо опирается на неявную предпосылку, что вторая фирма меняет свой выпуск y_2 в рассматриваемом производственном периоде, что противоречит фундаментальной предпосылке Курно, что вторая фирма не меняет свой выпуск $y_2 = \overline{y}_2$ в рассматриваемом производственном периоде.

На рис. 8.33 показаны две другие изопрофиты $l_1(\tau_1)$ первой фирмы, а также изопрофита $l_1(\tau_1^*)$, проходящая через точку $E^{(Cou)}$, которая изображает равновесие (y_1^*, y_2^*) Курно. Очевидно,

$$\tau_1^* = PR_1(y_1^*, y_2^*) = (a-c)y_1^* - b(y_1^*)^2 - by_1^*y_2^* - d_1.$$

Абсциссы y_1' и y_1'' точек пересечения изопрофиты $l(\hat{\tau}_1)$ с осью Oy_1 находим, положив в уравнении (8.7.8) изопрофиты $l(\hat{\tau}_1)$ $y_2 = 0$. Тогда получим квадратное уравнение

$$y_1^2 - \frac{a-c}{b} y_1 + \frac{\hat{\tau}_1 + d_1}{b} = 0,$$

корни которого y_1' и y_1'' получаем по известной формуле решения квадратного уравнения, которая после элементарных преобразований приобретает вид

$$y_1 = \frac{\frac{a-c}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{a-c}{b}\right)^2 - 4\hat{y}_1^2}}{2}$$

(напомним, что $0 < \hat{y}_1 < \frac{a-c}{2b}$).

Имеем на основании формулы (8.7.3), что

$$\frac{\partial PR_1}{\partial \bar{y}_2} = -by_1 < 0,$$

откуда следует, что с ростом выпуска $\bar{y}_2$ второй фирмы максимальная прибыль $\widehat{PR}_1 = PR_1(\hat{y}_1, y_2)$ первой фирмы убывает, т.е. чем выше изопрофита, тем меньшему значению прибыли первой фирмы она соответствует.

Если в приведенных рассуждениях первую и вторую фирмы поменять местами, то получим результаты, которые симметричны только что приведенным (рис. 8.34).

Вернемся к точке $(\hat{y}_1, \bar{y}_2)$ (см. рис. 8.33). На изопрофите $l_1(\hat{\tau}_1)$ первой фирмы, проходящей через точку $(\hat{y}_1, \bar{y}_2)$, прибыль PR_1 равна $\hat{\tau}_1$ (см. (8.7.7)).

На рис. 8.35 представлены изопрофиты $l_1(\tau_1^1)$, $l_1(\tau_1^*)$, $l_1(\tau_1^2)$ первой фирмы, которые соответствуют значениям τ_1^1, τ_1^*, τ_1^2 прибыли первой фирмы, таким, что $\tau_1^1 < \tau_1^* < \tau_1^2$. Аналогично на рис. 8.35 представлены изопрофиты $l_2(\tau_2^1)$, $l_2(\tau_2^*)$, $l_2(\tau_2^2)$ второй фирмы, которые соответствуют значениям τ_2^1, τ_2^*, τ_2^2 прибыли второй фирмы, таким, что $\tau_2^1 < \tau_2^* < \tau_2^2$. В точке E_{11} пересекаются изопрофиты $l_1(\tau_1^1)$ и $l_2(\tau_2^1)$, в точке E_{12} – изопрофиты $l_1(\tau_1^1)$ и $l_2(\tau_2^2)$, в точке E_{21} – изопрофиты $l_1(\tau_1^2)$ и $l_2(\tau_2^1)$, в точке E_{22} – изопрофиты $l_1(\tau_1^2)$ и $l_2(\tau_2^2)$.

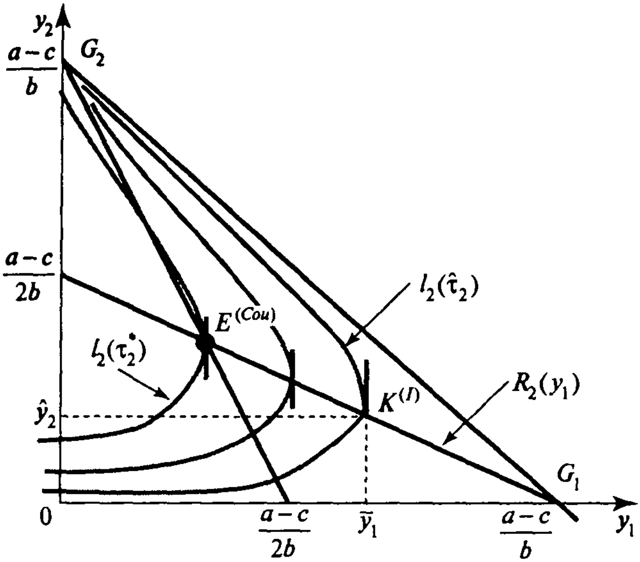


Рис. 8.34

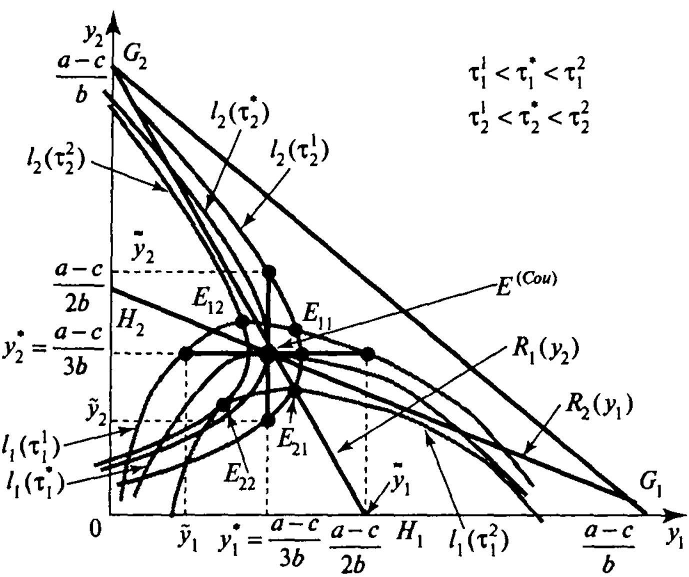


Рис. 8.35

В точке $E^{(Cou)}$ пересекаются изопрофиты $l_1(\tau_1^*)$ и $l_2(\tau_2^*)$. Таким образом, в точках E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} имеем следующие соотношения между значениями прибыли обеих фирм: в точке E_{11} $\tau_1^1 < \tau_1^*$, $\tau_2^1 < \tau_2^*$; в точке E_{12} $\tau_1^1 < \tau_1^*$, $\tau_2^2 > \tau_2^*$; в точке E_{21} $\tau_1^2 > \tau_1^*$, $\tau_2^1 < \tau_2^*$; в точке E_{22} $\tau_1^2 > \tau_1^*$ и $\tau_2^2 > \tau_2^*$.

Из всех точек E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, $E^{(Cou)}$ только последняя точка обладает свойством: если одна из фирм, скажем первая фирма, меняет свой выпуск y_1^*, уменьшая его до $\tilde{y}_1$ или увеличивая его до $\tilde{\tilde{y}}_1$, а вторая фирма не изменяет свой выпуск y_2^*, то первая фирма уменьшает свою прибыль, переходя с изопрофиты $l_1(\tau_1^*)$ на более высокую изопрофиту $l_1(\tau_1^1)$. Это означает, что первой фирме *в одиночку* не выгодно менять свой выпуск y_1^*, если другая фирма не меняет свой выпуск y_2^*. Ситуация, когда первая фирма не меняет свой выпуск y_1^*, а другая фирма меняет свой выпуск y_2^*, уменьшая его до $\tilde{y}_2$ или увеличивая его до $\tilde{\tilde{y}}_2$, поясняется на рис. 8.35 аналогично.

Отсюда следует, что точку $E^{(Cou)}$ естественно считать *равновесием* дуополии, в котором прибыль равновесия первой фирмы равна τ_1^* и прибыль равновесия второй фирмы равна τ_2^*. В этом равновесии ни одной фирме в *одиночку* не выгодно менять объем выпускаемой продукции, если другая фирма этого не делает. Описанное равновесие есть *равновесие Курно* дуополии. Оно представляет собой частный случай *равновесия Нэша* (см. параграф 9.7). Равновесие (y_1^*, y_2^*) Курно – одна из первых реализаций фундаментальной идеи экономического равновесия.

Отметим, что главным обстоятельством получения точки $E^{(Cou)}$ является факт пересечения изопрофит $l_1(\tau_1^*)$ и $l_2(\tau_2^*)$.

Таким образом, на основании равновесия Курно топ-менеджерам фирм можно дать конструктивную рекомендацию для принятия ими рационального решения в условиях неопределенности (когда каждая фирма не знает, какое решение об объеме выпуска примет другая фирма): каждой фирме следует выпускать продукцию в объеме $y_1^* = y_2^*$ равновесия Курно. Отметим, что если обе фирмы изменят свой выпуск $y_1^* = y_2^*$, *уменьшив* его, то они могут прийти в точку E_{22} (см. рис. 8.35), в которой пересекаются изопрофиты, соответствующие большим значениям прибыли $\tau_1^* < \tau_1^2 = PR_1$ и $\tau_2^* < \tau_2^2 = PR_2$ и которые расположены соответственно ниже и левее изопрофит, проходящих через точку $E^{(Cou)}$.

Отмеченная оптимальность объемов производства y_1^* и y_2^* в равновесии Курно имеет место в случае некооперативного поведения фирм. Уменьшение объемов производства и увеличение прибыли каждой фирмы возможны в случае кооперативного поведения фирм, которое будет проанализировано ниже.

8.7.2. Если не принимать простейшую предпосылку о том, что $dy_2/dy_1 = 0$ ($dy_1/dy_2 = 0$), то для прибыли PR_1 первой фирмы

$$PR_1 = (a-c)y_1 - by_1^2 - by_1y_2 - d_1$$

условие первого порядка имеет вид

$$\frac{dPR_1}{dy_1} = (a-c) - 2by_1 - by_2 - by_1\frac{dy_2}{dy_1} = 0. \qquad (8.7.10)$$

Выражение dPR_1/dy_1 есть предельная прибыль первой фирмы. Оно показывает, как изменится прибыль первой фирмы, если объем ее выпуска y_1 изменится на одну единицу.

Производная dy_2/dy_1 формально показывает, на сколько единиц вторая фирма изменяет объем своего выпуска в производственном периоде, если первая фирма изменит объем своего выпуска в том же периоде на одну единицу. В контексте формулы (8.7.10) производную dy_2/dy_1 необходимо интерпретировать следующим образом: первая фирма предполагает, что вторая фирма изменит объем своего выпуска на dy_2/dy_1 единиц, если первая фирма изменит объем своего выпуска на одну единицу. Поэтому производную dy_2/dy_1 (а также производную dy_1/dy_2) принято кратко называть *предполагаемой реакцией*, ибо первая фирма предполагает, как будет реагировать вторая фирма на изменение выпуска первой фирмы.

Выбор конкретной предпосылки о значении производной dy_2/dy_1 (производной dy_1/dy_2) означает выбор конкретной модели количественной дуополии. Если предположить, что $dy_2/dy_1 = dy_1/dy_2 = 0$, то получим, как отмечалось выше, *модель Курно*.

Задачу максимизации прибыли PR_1 в предположении, что $y_2 = \bar{y}_2$, можно решать методом Лагранжа с использованием функции Лагранжа в виде

$$L(y_1, y_2, \lambda) = (a-c)y_1 - by_1^2 - by_1y_2 - d_1 + \lambda(\bar{y}_2 - y_2).$$

Точка $E^{(Cou)}$ есть точка пересечения линий $R_1(y_2)$ и $R_2(y_1)$ реакций первой и второй фирм соответственно на выпуск y_2 второй фирмы и выпуск y_1 первой фирмы. Поэтому координаты y_1^* и y_2^*

точки $E^{(Cou)}$ *формально* получаются как решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{dPR_1(y_1, y_2)}{dy_1} = (a-c) - 2by_1 - by_2 = 0,$$

$$\frac{dPR_2(y_1, y_2)}{dy_2} = (a-c) - 2by_2 - by_1 = 0,$$

описывающих эти линии реакции

$$y_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_2}{2}(R_1(y_2)), \tag{8.7.11}$$

$$y_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2}(R_2(y_1)). \tag{8.7.12}$$

Для максимальной прибыли $\widehat{PR}_1 = PR_1(y_1^*, y_2^*)$ получаем

$$\tau_1^* = PR_1(y_1^*, y_2^*) \overset{(8.7.7)}{=} (a-c)y_1^* - b(y_1^*)^2 - by_1^* y_2^* - d_1 =$$

$$= (a-c)\frac{a-c}{3b} - b\frac{(a-c)^2}{(3b)^2} - b\frac{(a-c)^2}{(3b)^2} - d_1 = \frac{(a-c)^2}{9b} - d_1. \tag{8.7.13}$$

Аналогично имеем и для максимальной прибыли $\widehat{PR}_2 = PR_2(y_1^*, y_2^*)$

$$\tau_2^* = PR_2(y_1^*, y_2^*) = (a-c)y_2^* - b(y_2^*)^2 - by_1^* y_2^* - d_2 =$$

$$= \frac{(a-c)^2}{9b} - d_2. \tag{8.7.14}$$

Осталось найти

$$\widehat{PR} = \widehat{PR}_1 + \widehat{PR}_2 = \frac{2(a-c)^2}{9b} - d_1 - d_2,$$

$$y^* = y_1^* + y_2^* = \frac{2}{3}\frac{a-c}{b}$$

и

$$p^* = a - by^* = a - b \cdot \frac{2}{3}\frac{a-c}{b} = \frac{3a - 2a + 2c}{3} = \frac{a+2c}{3}.$$

Сопоставим цену p^*, выпуск y^* и общую максимальную прибыль $\widehat{PR}_1 + \widehat{PR}_2$ дуополии Курно с ценами, общим выпуском и общей прибылью в случае чистой конкуренции и в случае чистой монополии при условии, что во всех трех случаях функция, обратная к функции (отраслевого) спроса, имеет вид $p = a - by$ ($y = y_1 + y_2$).

В случае чистой конкуренции $p^{(c)} = c$, поэтому $c = a - by^{(c)}$, откуда получаем, что суммарный отраслевой выпуск равен

$$y^{(c)} = \frac{a-c}{b}$$

и

$$\widehat{PR}^{(c)} = p^{(c)}y^{(c)} - cy - d_1 - d_2 = -d_1 - d_2.$$

В случае чистой монополии монопольный выпуск $y^{(m)}$ определяется из уравнения $MR = MC$, которое в рассматриваемом случае имеет вид $MR = a - 2by = c$, ибо $R = py = (a - by)y = a - by^2$, $MC = c$. Из уравнения $a - 2by = c$ следует, что

$$y^{(m)} = \frac{a-c}{2b}$$

и

$$p^{(m)} = a - by^{(m)} = a - b\frac{a-c}{2b} = \frac{a+c}{2}.$$

Для общей максимальной монопольной прибыли имеем

$$\widehat{PR}_1 + \widehat{PR}_2 = \widehat{PR}^{(m)} = p^{(m)}y^{(m)} - cy^{(m)} - d_1 - d_2 =$$

$$= (p^{(m)} - c)y^{(m)} - d_1 - d_2 = \left(\frac{a+c}{2} - c\right)\frac{a-c}{2b} - d_1 - d_2 = \frac{(a-c)^2}{4b} - d_1 - d_2.$$

Сопоставляя цены, отраслевые выпуски и значения максимальной прибыли, получаем, что

$$p^{(c)} = c < p^* = \frac{a+2c}{3} < p^{(m)} = \frac{a+c}{2}$$

(ибо $c < a$),

$$y^{(m)} = \frac{a-c}{2b} < y^* = \frac{2}{3}\frac{a-c}{b} < y^{(c)} = \frac{a-c}{b},$$

$$\widehat{PR}^{(c)} = -d_1 - d_2 < \widehat{PR}^* = \frac{2}{9}\frac{(a-c)^2}{b} - d_1 - d_2 < \widehat{PR}^{(m)} =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{(a-c)^2}{b} - d_1 - d_2.$$

Сведем все эти величины в табл. 8.1.

Таблица 8.1

	p	y	$\widehat{PR}$
Чистая конкуренция	c	$\frac{a-c}{b}$	$-d_1-d_2$
Дуополия Курно	$\frac{a+2c}{3}$	$\frac{2}{3}\cdot\frac{a-c}{b}$	$\frac{2}{9}\cdot\frac{(a-c)^2}{b}-d_1-d_2$
Чистая монополия	$\frac{a+c}{3}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{a-c}{b}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{(a-c)^2}{b}-d_1-d_2$

Сопоставим данные таблицы с рис. 8.35. Точка G_1 показывает конкурентный выпуск $y_1=\frac{a-c}{b}$ первой фирмы и нулевой выпуск второй фирмы, т.е. в этой ситуации суммарный выпуск равен $\frac{a-c}{b}$. С точкой G_2 ситуация аналогична. Точка H_1 показывает монопольный выпуск $y_1=\frac{a-c}{2b}$ первой фирмы и нулевой выпуск второй фирмы, т.е. в этой ситуации суммарный выпуск равен $\frac{a-c}{2b}$. С точкой H_2 ситуация аналогична.

8.7.3. Вернемся к толкованию линии реакции $R_1(y_2)$ первой фирмы на объем выпуска y_2 второй фирмы. Согласно основной предпосылке дуополии Курно первая фирма предполагает, что вторая фирма не реагирует на изменение выпуска первой фирмы в течение одного производственного периода, т.е. в *статике*. Формализуется эта предпосылка так: $dy_2/dy_1=0$. В связи с тем что в модели дуополии Курно обе фирмы идентичны, имеет место аналогичное равенство $dy_1/dy_2=0$. С другой стороны, из (8.7.11) и (8.7.12) формально следует, что

$$dy_2/dy_1=-{}^1\!/_2 \quad \text{и} \quad dy_1/dy_2=-{}^1\!/_2,$$

что, на первый взгляд, явно противоречит равенствам $dy_1/dy_2=0$, $dy_2/dy_1=0$.

Это противоречие было преодолено в разделе 8.7.1. Здесь мы продолжим анализ рассматриваемой ситуации.

Поскольку вторая фирма в течение одного производственного периода не может одновременно не реагировать на изменение выпуска первой фирмы ($dy_2/dy_1 = 0$) и в то же самое время реагировать на него ($dy_2/dy_1 = -1/2$), постольку естественно принять, что вторая фирма реагирует уже в следующем производственном периоде $t + 1$ на изменение выпуска первой фирмы в производственном периоде t, т.е. естественно перейти от статики к динамике в толковании уравнений (8.7.11) и (8.7.12) (см. М. Интрилигатор, 1975; 2002):

$$y_1(t+1) = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_2(t)}{2}, \tag{8.7.15}$$

$$y_2(t+1) = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1(t)}{2}. \tag{8.7.16}$$

Формально уравнения (8.7.15), (8.7.16) образуют неоднородную систему линейных обыкновенных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

Сначала решим эту систему графически (рис. 8.36), а затем аналитически.

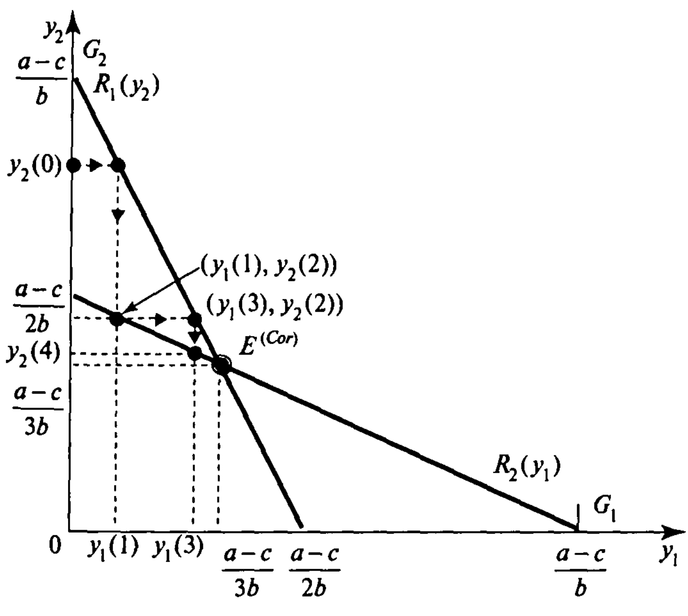


Рис. 8.36

Пусть в базовом периоде $t = 0$ выпуск второй фирмы равен $y_2(0)$,тогда в силу (8.7.15) в первом периоде $t = 1$ выпуск первой фирмы будет равен $y_1(1)$ (см. рис. 8.36, на котором показано, что точка $(y_1(1), y_2(0))$ расположена на линии реакции $R_1(y_2)$ первой фирмы на выпуск $y_2(0)$ второй фирмы).

Далее рассуждения аналогичны. Если в первом периоде $t = 1$ выпуск первой фирмы равен $y_1(1)$, то во втором периоде $t = 2$ выпуск второй фирмы будет равен $y_2(2)$ (см. рис. 8.36, на котором показано, что точка $(y_1(1), y_2(2))$ расположена на линии $R_2(y_1)$ реакции второй фирмы на выпуск $y_1(1)$ первой фирмы). И т.д.

Рисунок 8.36 наглядно показывает, что выпуски $y_1(1), y_1(3), \ldots$ неограниченно приближаются (снизу) к точке $y_1^* = \dfrac{1}{3}\dfrac{a-c}{b}$, а выпуски $y_2(0)$, $y_2(2)$, $y_2(4)$, ... неограниченно приближаются (сверху) к точке $y_2^* = \dfrac{1}{3}\dfrac{a-c}{b}$. Неограниченное приближение выпусков первой и второй фирм к выпускам y_1^* и y_2^* равновесия Курно свидетельствует об устойчивости этого равновесия.

Для аналитического решения неоднородной системы (8.7.15), (8.716) сначала найдем общее решение соответствующей ей однородной системы, затем частное решение неоднородной системы и выпишем общее решение неоднородной системы в виде суммы полученных общего и частного решений.

Для однородной системы

$$z_1(t+1) = -\frac{z_2(t)}{2}, \tag{8.7.17}$$

$$z_2(t+1) = -\frac{z_1(t)}{2} \tag{8.7.18}$$

выпишем характеристическое уравнение

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4},$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица системы (8.7.17), (8.7.18).

Найдем правые собственные векторы матрицы A, соответствующие собственным числам $\lambda_1 = 0,5$, $\lambda_2 = -0,5$:

$$\begin{pmatrix} -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^1 \\ h_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -0,5 \\ -0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^2 \\ h_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда получаем, что

$$h^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение однородной системы (8.7.17), (8.7.18) имеет вид (в векторной форме)

$$z(t) = \gamma_1 h^1 \lambda_1^t + \gamma_2 h^2 \lambda_2^t,$$

где γ_1 и γ_2 – произвольные постоянные. В координатной форме общее решение $z(t)$ имеет вид

$$z_1(t) = \gamma_1 (0,5)^t + \gamma_2 (-0,5)^t,$$
$$z_2(t) = -\gamma_1 (0,5)^t + \gamma_2 (-0,5)^t.$$

Частное решение неоднородной системы (8.7.15), (8.7.16) отыскиваем в виде $\bar{y}(t) = \begin{pmatrix} \eta \\ \eta \end{pmatrix}$, где η – скалярная величина.

Имеем

$$\eta = \frac{a-c}{2b} - \frac{\eta}{2}, \quad \eta = \frac{a-c}{2b} - \frac{\eta}{2},$$

откуда следует, что

$$\eta = \frac{a-c}{3b}.$$

Следовательно, общее решение неоднородной системы (8.7.15), (8.7.16) имеет вид

$$y_1(t) = \gamma_1 (0,5)^t + \gamma_2 (-0,5)^t + \frac{a-c}{3b}, \tag{8.7.19}$$

$$y_1(t) = -\gamma_1 (0,5)^t + \gamma_2 (-0,5)^t + \frac{a-c}{3b}. \tag{8.7.20}$$

Если $y_1(0) = y_1^0$, $y_2(0) = y_2^0$, то для определения значений произвольных постоянных следует решить систему линейных алгебраических уравнений

$$y_1^0 = \gamma_1 + \gamma_2 + \frac{a-c}{3b}, \tag{8.7.21}$$

$$y_2^0 = -\gamma_1 + \gamma_2 + \frac{a-c}{3b}. \tag{8.7.22}$$

При фиксированных γ_1 и γ_2 при $t \to +\infty$

$$y_1(t) \to \frac{a-c}{3b} = y_1^*, \tag{8.7.23}$$

$$y_2(t) \to \frac{a-c}{3b} = y_2^*. \tag{8.7.24}$$

Таким образом, получено аналитическое решение неоднородной системы (8.7.15), (8.7.16) и доказана устойчивость равновесия Курно.

8.7.4. Рассмотрим дуополию Курно, когда издержки обеих фирм имеют соответственно вид $C_1 = c_1 y_1 + d_1$, $C_2 = c_2 y_2 + d_2$ и $c_1 \neq c_2$, т.е. $MC_1 \neq MC_2$. Все остальное сохраняется без изменений, в частности обратная функция спроса

$$p = a - d(y_1 + y_2).$$

Выражения (8.7.1) и (8.7.2) для прибыли каждой фирмы перепишутся так:

$$PR_1(y_1, y_2) = (a - c_1)y_1 - by_1^2 - by_1 y_2 - d_1,$$
$$PR_2(y_1, y_2) = (a - c_2)y_2 - by_2^2 - by_1 y_2 - d_2.$$

Повторив формальные построение начала параграфа 8.7 и принимая во внимание предпосылку Курно $dy_2/dy_1 = 0$, $dy_1/dy_2 = 0$, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$(a - c_1) - 2by_1 - by_2 = 0,$$
$$(a - c_2) - 2by_2 - by_1 = 0$$

для нахождения равновесия Курно

$$y_1^* = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3b}, \quad y_2^* = \frac{a - 2c_2 + c_1}{3b}.$$

Для максимальной прибыли $\widehat{PR}_1 = PR_1(y_1^*, y_2^*)$ имеем

$$\tau_1^* = PR_1(y_1^*, y_2^*) = \frac{(a-2c_1+c_2)^2}{9b} - d_1,$$

для максимальной прибыли $\widehat{PR}_2 = PR_2(y_1^*, y_2^*)$ имеем

$$\tau_2^* = PR_2(y_1^*, y_2^*) = \frac{(a-2c_2+c_1)^2}{9b} - d_2.$$

Для остальных характеристик равновесия Курно (y_1^*, y_2^*) имеем

$$\widehat{PR} = \widehat{PR}_1 + \widehat{PR}_2 = \frac{(a-2c_1+c_2)^2}{9b} + \frac{(a-2c_2+c_1)^2}{9b} - d_1 - d_2,$$

$$y^* = y_1^* + y_2^* = \frac{a-2c_1+c_2}{3b} + \frac{a-2c_2+c_1}{3b} = \frac{2a-c_1-c_2}{3b},$$

$$p^* = a - by^* = a - b\frac{2a-c_1-c_2}{3b} = \frac{a+c_1+c_2}{3}.$$

Если положить $c_1 = c_2 = c$, то из только что выписанных выражений получим равенства (8.7.12), (8.7.13), (8.7.14), а также значения

$$\widehat{PR} = \frac{2(a-c)^2}{9b} - d_1 - d_2,$$

$$y^* = \frac{2}{3}\frac{a-c}{b},$$

$$p^* = \frac{a+2c}{3}.$$

Рассмотрим дуополию Курно, когда издержки обеих фирм имеют соответственно вид

$$C_1 = c_1 y_1, \ C_2 = c_2 y_2, \quad \text{т.е. } c_1 = MC_1, \ c_2 = MC_2.$$

Пусть функция рыночного спроса имеет вид

$$y = y_1 + y_2 = \frac{\gamma}{p^\alpha}$$

(α и γ – положительные параметры), тогда обратная функция спроса имеет следующее представление:

$$p(y) = \frac{\gamma^{1/\alpha}}{y^{1/\alpha}}.$$

В этом случае для прибыли каждой фирмы имеем выражение

$$PR_i(y_1, y_2) = p(y)y_i - c_i y_i, \quad i = 1, 2.$$

Для нахождения равновесия Курно (y_1^*, y_2^*) выпишем систему алгебраических уравнений

$$\frac{\partial PR_1(y_1, y_2)}{\partial y_1} = \gamma^{1/\alpha} \cdot \frac{(y_1 + y_2)^{1/\alpha} - \frac{1}{\alpha}(y_1 + y_2)^{(1/\alpha)-1} y_1}{(y_1 + y_2)^{2/\alpha}} - c_1 - 0,$$

$$\frac{\partial PR_2(y_1, y_2)}{\partial y_2} = \gamma^{1/\alpha} \cdot \frac{(y_1 + y_2)^{1/\alpha} - \frac{1}{\alpha}(y_1 + y_2)^{(1/\alpha)-1} y_2}{(y_1 + y_2)^{2/\alpha}} - c_2 - 0.$$

После элементарных преобразований этих уравнений и деления первого уравнения на второе получим равенство

$$\frac{(\alpha - 1)y_1 + \alpha y_2}{\alpha y_1 + (\alpha - 1)y_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

откуда следует представление

$$y_2 = \frac{\alpha\left(1 - \frac{c_1}{c_2}\right) - 1}{\left(\frac{c_1}{c_2} - 1\right)\alpha - \frac{c_1}{c_2}} y_1,$$

которое после подстановки, например, в уравнение $\partial PR_1(y_1, y_2) : : \partial y_1 = 0$ позволит найти равновесие Курно (y_1^*, y_2^*). В целях упрощения выкладок положим $c_1 = c_2$, тогда получим, что $y_1 = y_2$.

Преобразуем уравнение $\partial PR_1(y_1, y_2)/\partial y_1 = 0$, положив $y_2 = y_1$, тогда

$$\gamma^{1/\alpha} = \frac{(2y_1)^{1/\alpha} - \frac{1}{\alpha}(2y_1)^{1/\alpha} y_1}{(2y_1)^{2/\alpha}(2y_1)} = c,$$

откуда следует, что

$$y_2^* = y_1^* = \frac{\gamma c^{-\alpha}}{2 \cdot 2^{\alpha}}\left(2 - \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}.$$

Если $\alpha = 1$, то выпуск второй и первой фирм в равновесии Курно приобретут вид

$$y_2^* = y_1^* = \frac{\gamma}{4c}.$$

В этом случае имеем

$$y^* = y_1^* + y_2^* = \frac{\gamma}{2c},$$

$$p^* = \frac{(\gamma)^{1/\alpha}}{(y^*)^{1/\alpha}} = 2c,$$

$$\widehat{PR}_1 = PR_1(y_1^*, y_2^*) = (p^* - c)y_1^* = \frac{\gamma}{4} = \widehat{PR},$$

$$\widehat{PR} = \widehat{PR}_1 + \widehat{PR}_2 = \frac{\gamma}{2}.$$

8.7.5. Перейдем к модели олигополии Курно, которая аналогична дуополии Курно.

На рынке в течение производственного периода функционируют n фирм, функции издержек которых имеют вид

$$c_i = cy_i + d_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $c = MC_i$, $d_i = FC_i$; y_i – объем выпуска фирмы F_i, $i = 1, \ldots, n$; $y = y_1 + \ldots + y_n$ – совокупный (отраслевой) выпуск.

Функция, обратная к функции рыночного спроса, имеет вид

$$p = a - by = a - b(y_1 + \ldots + y_n),$$

где a и b – положительные параметры. Для прибыли PR_i фирмы F_i имеем представление

$$PR_i(y_i) = (a - by)y_i - cy_i - d_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{8.7.25}$$

В рассматриваемом случае n фирм предполагается, что фирма F_i полагает, что выпуск остальных фирм $F_1, \ldots, F_{i-1}, F_{i+1}, \ldots, F_n$ в рассматриваемом периоде не меняется (даже если фирма F_i изменит свой выпуск в этом периоде), т.е. $y_1 = \bar{y}_1, \ldots, y_{i-1} = \bar{y}_{i-1}$, $y_{i+1} = \bar{y}_{i+1}, \ldots, y_n = \bar{y}_n$ и, следовательно, $dy_j/dy_i = d\bar{y}_j/dy_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, $j \neq i$.

Тогда выражение (8.7.25) для прибыли $PR_i(y_i)$ фирмы F_i, $i = 1, \ldots, n$, перепишется так:

$$PR_i(y_i) = (a - b\bar{y}_1 - \ldots - b\bar{y}_{i-1} - by_i - b\bar{y}_{i+1} - \ldots - b\bar{y}_n)y_i - cy_i - d_i =$$

$$= (a-c)y_i - b\bar{y}_1 y_i - \ldots - b\bar{y}_{i-1}y_i - by_i^2 - b\bar{y}_{i+1}y_i - \ldots - b\bar{y}_n y_i - d_i. \tag{8.7.26}$$

Для решения задачи максимизации прибыли $PR_i(y_i)$ следует сначала использовать условие первого порядка

$$\frac{dPR_i(y_i)}{dy_i} = (a-c) - b\overline{y}_1 - \ldots - b\overline{y}_{i-1} - 2by_i - b\overline{y}_{i+1} - \ldots - b\overline{y}_n = 0,$$

откуда получаем объем выпуска $\hat{y}_i$ фирмы F_i

$$\hat{y}_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{\overline{y}_1 + \ldots + \overline{y}_{i-1} + \overline{y}_{i+1} + \ldots + \overline{y}_n}{2},$$

который *максимизирует* ее прибыль $PR_i(y_i)$. Отметим, что в рассматриваемом случае условие второго порядка имеет вид

$$\frac{d^2 PR_i(y_i)}{d_i^2} = -2b < 0.$$

Таким образом, точка $(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_{i-1}, \hat{y}_i, \overline{y}_{i+1}, \ldots, \overline{y}_n)$ расположена на $(n-1)$-мерной плоскости $R_i\ (y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)$ реакции фирмы F_i на объем выпусков остальных фирм:

$$y_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1 + \ldots + y_{i-1} + y_{i+1} + \ldots + y_n}{2}, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (8.7.27)$$

По аналогии со случаем дуополии Курно равновесие $y^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*)$ олигополии Курно формально определяется как решение системы (8.7.27) n уравнений с n неизвестными $y_1, \ldots, y_n$.

В силу предполагаемой симметрии все фирмы будут иметь равные выпуски, максимизирующие их прибыли, поэтому $y_1 = \ldots = y_{i-1} = y_{i+1} = \ldots = y_n = y_i$ и, следовательно, выражение (8.7.26) перепишется так:

$$y_i = \frac{a-c}{2b} - \frac{(n-1)y_i}{2},$$

откуда следует, что

$$y_i^* = \frac{a-c}{b} \cdot \frac{1}{n+1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, в случае n фирм равновесие Курно имеет вид

$$y_1^* = \ldots = y_n^* = \frac{a-c}{b} \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Отраслевой выпуск y^* равен

$$y^* = y_1^* + \ldots + y_n^* = \frac{a-c}{b} \cdot \frac{n}{n+1},$$

а цена p^* имеет представление

$$p^* = a - by^* = a - \frac{a-c}{b} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{a}{n+1} + c\frac{n}{n+1}.$$

Для максимальной прибыли $\widehat{PR}_i$ фирмы F_i, $i = 1, \ldots, n$, имеем выражение

$$\widehat{PR}_i(y_i^*) = (a-c)y_i^* - b(y_i^*)^2 \cdot n - d_i = y_i^*((a-c) - by_i^* \cdot n) - d_i =$$
$$= \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{(a-c)^2}{b} - d_i,$$

а суммарная максимальная прибыль (максимальная прибыль отрасли) равна

$$\widehat{PR} = \widehat{PR}_1(y_1^*) + \ldots + \widehat{PR}_n(y_n^*) = \frac{n}{(n+1)^2} \cdot \frac{(a-c)^2}{b} - (d_1 + \ldots + d_n).$$

При неограниченном росте числа n фирм цена $p^* \to c$, $y^* \to \dfrac{a-c}{b}$ и суммарная максимальная прибыль становятся суммой числового ряда $-(d_1 + \ldots + d_n + \ldots)$, т.е. при неограниченном росте числа n основные характеристики олигополии Курно (цена p^*, суммарный выпуск p^*) приближаются к основным характеристикам чистой конкуренции (цена $c = MC_i$, суммарный выпуск $\dfrac{a-c}{b}$).

При $n = 1$ имеем случай чистой монополии:

$$p^* = \frac{a+c}{2}, \quad y^* = \frac{a-c}{2b}, \qquad \widehat{PR} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(a-c)^2}{b} - d.$$

Случаи $n = 1$, $n = 2$ и n сведем в табл. 8.2.

Таблица 8.2

	p	y	$\widehat{PR}$
$n=1$	$\frac{a+c}{2}$	$\frac{a+c}{2b}$	$\frac{1}{4}\frac{(a-c)^2}{b}-d$
$n=2$	$\frac{a+2c}{3}$	$\frac{2}{3}\frac{a-c}{b}$	$\frac{2}{9}\frac{(a-c)^2}{b}-d_1-d_2$
n	$\frac{a}{n+1}+\frac{n}{n+1}c$	$\frac{n}{n+1}\frac{a-c}{b}$	$\frac{n}{(n+1)^2}\frac{(a-c)^2}{b}-(d_1+\ldots+d_n)$

8.7.6. Вернемся к формуле (8.7.26), которая представляет прибыль $PR_i(y_i)$ фирмы F_i, $i=1, \ldots, n$. Доход фирмы F_i в рассматриваемом случае равен

$$R_i(y_i)=py_i,$$

где $p=a-by_1-\ldots-by_{i-1}-by_i-by_{i+1}-\ldots-by_n$ и $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$ фиксированы, т.е. $y_j=\bar{y}_j$, $j=1, \ldots, n$, $i \neq j$.

Имеем

$$MR_i(y_i)=\frac{dpy_i}{dy_i}=p+y_i\frac{dp}{dy_i}=p\left(1+\frac{y_i}{p}\cdot\frac{dp}{dy_i}\right)=$$

$$=p\left(1+\frac{y_i}{y}\left(\frac{y}{p}\cdot\frac{dp}{dy}\right)\right)=p\left(1+s_i\cdot\frac{1}{\frac{p}{y}\cdot\frac{dy}{dp}}\right)=p\left(1+\frac{s_i}{E_d}\right), \tag{8.7.28}$$

где s_i – доля выпуска фирмы F_i в общем выпуске $y=y_1+\ldots+y_n$ отрасли; E_d – эластичность рыночного спроса по цене p (отметим, что $dp/dy_i=(dp/dy)(\partial y/\partial y_i)=dp/dy$).

В (8.7.28) положим $MR_i(y_i)=MC_i$ (условие максимизации прибыли фирмы F_i), тогда получим

$$MC_i=p\left(1+\frac{s_i}{E_d}\right),$$

откуда следует, что

$$\frac{p - MC_i}{p} = -\frac{s_i}{E_d}, \qquad (8.7.29)$$

т.е. получено выражение для индекса Лернера фирмы F_i олигополии Курно. Из формулы (8.7.29) следует, что рыночная власть отдельной фирмы F_i обратно пропорциональна эластичности рыночного спроса и прямо пропорциональна доле объема выпуска фирмы F_i (на рынке олигополии Курно).

Умножим обе части равенства (8.7.29) на s_i и просуммируем по всем фирмам от 1 до n включительно. Тогда получим

$$\frac{p(s_1 + \ldots + s_n) - (s_1 MC_1 + \ldots + s_n MC_n)}{p} = -\frac{s_1^2 + \ldots + s_n^2}{E_d},$$

откуда следует равенство

$$L = \frac{p - \overline{MC}}{p} = -\frac{HHI}{E_d}, \qquad (8.7.30)$$

ибо $s_1 + \ldots + s_n = 1$, $s_1^2 + \ldots + s_n^2 = HHI$ (индекс Хиршмана–Херфиндаля), $\overline{MC}$ – средневзвешенные издержки всех фирм, где роль весов играют доли $s_1, \ldots, s_n$ этих фирм в общем объеме выпуска отрасли.

Из формулы (8.7.30) следует, что индекс Лернера олигополии Курно определяется числом фирм, их рыночными долями, т.е. индексом HHI, а также эластичностью рыночного спроса по цене.

8.8. Модели дуополии и олигополии Штакельберга

8.8.1. Модель дуополии Курно представляет собой симметричную количественную дуополию, ибо обе фирмы придерживаются одного типа поведения на рынке. Первая (вторая) фирма полагает, что конкурирующая с ней вторая (первая) фирма имеет фиксированный выпуск в производственном периоде, т.е. она его не изменяет в этом периоде, если даже первая (вторая) фирма изменит свой выпуск, что формально выражается так:

$$\frac{dy_1}{dy_2} = 0, \quad \frac{dy_2}{dy_1} = 0.$$

Модель дуополии Штакельберга – модель асимметричной количественной дуополии, ибо *каждая* из двух фирм придерживается одного из двух типов поведения: стремится либо стать *лидером* по объему выпускаемой продукции, либо быть *последователем*, т.е. следовать за лидером.

В этом параграфе проанализирована ситуация, когда одна фирма (например, первая фирма) является лидером (по объему выпускаемой продукции), а другая фирма (вторая) – последователем. Случай ценовой войны, когда обе фирмы стремятся быть лидером, рассматриваться не будет, ибо в этом последнем случае в результате ценовой войны один из лидеров откажется от своих притязаний либо фирмы вступят в сговор.

Согласно предпосылке Штакельберга вторая фирма полагает, что выпуск первой фирмы фиксирован в производственном периоде, т.е. не изменится в данном периоде, что формально означает, что

$$dy_1/dy_2 = 0, \tag{8.8.1}$$

т.е. для второй фирмы сохраняется предпосылка Курно. Собственно, эта предпосылка делает вторую фирму последователем. Первая фирма, согласно предпосылке Штакельберга, полагает, что вторая фирма сокращает в производственном периоде объем производства в два раза, если первая фирма увеличивает объем своего производства на одну единицу. Это формально означает, что

$$dy_2/dy_1 = -\frac{1}{2}. \tag{8.8.2}$$

Собственно, предпосылка (8.8.2) делает первую фирму лидером.

Сначала рассмотрим дуополию, когда издержки обеих фирм имеют соответственно вид $C_1 = cy_1 + d_1$, $C_2 = cy_2 + d_2$, т.е. $MC_1 = MC_2 = c$. Как и раньше, символом y_1 обозначим объем выпуска первой фирмы (фирмы-лидера), символом y_2 – объем выпуска второй фирмы (фирмы-последователя) в течение фиксированного периода. Символом y обозначена сумма $y_1 + y_1 = y$.

Прибыль PR_1 первой фирмы имеет вид

$$PR_1 = py_1 - cy_1 - d_1 = (a - by_1 - by_2)y_1 - cy_1 - d_1.$$

Для решения задачи максимизации прибыли PR_1 первой фирмы следует сначала использовать условие первого порядка

$$\frac{dPR_1}{dy_1} = a - c - 2by_1 - by_2 - by_1\frac{dy_2}{dy_1} \overset{(8.8.2)}{=} a - c - \frac{3}{2}by_1 - by_2 = 0,$$

т.е. первая фирма (фирма-лидер) учитывает в функции своей прибыли равенство (8.8.2).

Из последнего равенства получаем уравнение реакции первой фирмы $R_1^{(st1)}(y_2)$

$$y_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{a-c}{b} - \frac{2}{3}y_2 \tag{8.8.3.1}$$

на выпуск y_2 второй фирмы.

Прибыль PR_2 второй фирмы имеет вид

$$PR_2 = py_2 - cy_2 - d_2 = (a - by_2 - by_1)y_2 - cy_2 - d_2.$$

Для решения задачи максимизации прибыли PR_2 второй фирмы следует использовать условие первого порядка

$$\frac{dPR_2}{dy_2} = a - c - 2by_2 - by_1 - by_2\frac{dy_1}{dy_2} \overset{(8.8.1)}{=} a - c - 2by_2 - by_1 = 0,$$

откуда получаем уравнение реакции второй фирмы $R_2^{(st1)}(y_1)$

$$y_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2} \tag{8.8.3.2}$$

на выпуск y_1 первой фирмы (см. формулу (8.7.2) параграфа 8.7). Подставив выражение (8.8.3.2) в (8.8.3.1), получим

$$y_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{a-c}{b} - \frac{2}{3}\left(\frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2}\right),$$

откуда вытекает, что

$$y_1^{(st1)} = \frac{a-c}{2b}. \tag{8.8.4}$$

Подставив (8.8.4) в $y_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2}$, получим

$$y_2^{(st1)} = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}\cdot\frac{a-c}{2b} = \frac{a-c}{4b}.$$

Выпуски $y_1^{(st1)}$ и $y_2^{(st1)}$ образуют равновесие 1 Штакельберга, когда первая фирма является лидером, а вторая фирма является последователем.

Отметим, что в равновесии 1 Штакельберга объем выпуска первой фирмы в 2 раза больше объема выпуска второй фирмы.

Найдем суммарный (отраслевой) выпуск

$$y^{(st1)} = y_1^{(st1)} + y_2^{(st1)} = \frac{a-c}{2b} + \frac{a-c}{4b} = \frac{3}{4}\cdot\frac{a-c}{b}, \tag{8.8.5}$$

цену $p^{(st1)}$ равновесия по обратной функции рыночного спроса

$$p^{(st1)} = a - by_1^{(st1)} - by_2^{(st1)} = a - b\frac{3}{4}\cdot\frac{a-c}{b} = \frac{a+3c}{4}. \qquad (8.8.6)$$

Максимальная прибыль $\widehat{PR}_1^{(st1)}$ первой фирмы (фирмы-лидера) равна

$$\widehat{PR}_1^{(st1)} = p^{(st1)}y_1^{(st1)} - cy_1^{(st1)} - d_1 = (p^{(st1)} - c)y^{(st1)} - d_1 =$$
$$= \left(\frac{a+3c}{4} - c\right)\frac{a-c}{2b} - d_1 = \frac{1}{8}\cdot\frac{(a-c)^2}{b} - d_1.$$

Максимальная прибыль $\widehat{PR}_2^{(st1)}$ второй фирмы (фирмы-последователя) равна

$$\widehat{PR}_2^{(st1)} = p^{(st1)}y_2^{(st1)} - cy_2^{(st1)} - d_2 = (p^{(st1)} - c)y^{(st1)} - d_2 =$$
$$= \left(\frac{a+3c}{4} - c\right)\frac{a-c}{2b} - d_2 = \frac{1}{16}\cdot\frac{(a-c)^2}{b} - d_2.$$

Суммарная максимальная прибыль равна

$$\widehat{PR}^{(st1)} = \frac{3}{16}\frac{(a-c)^2}{b} - d_1 - d_2.$$

В случае когда лидером является вторая фирма, а последователем — первая фирма, равновесие 2 Штакельберга характеризуется следующими величинами:

$$y_1^{(st2)} = \frac{a-c}{4b}, \quad y_2^{(st2)} = \frac{a-c}{2b}, \quad y_1^{(st2)} = \frac{3}{4}\frac{a-c}{b},$$

$$p^{(st2)} = a - by_1^{(st2)} - by_2^{(st2)} = \frac{a+3c}{4},$$

$$\widehat{PR}_1^{(st2)} = \frac{1}{16}\frac{(a-c)^2}{b} - d_1, \quad \widehat{PR}_2^{(st2)} = \frac{1}{8}\frac{(a-c)^2}{b} - d_2.$$

Суммарная максимальная прибыль равна

$$\widehat{PR}^{(st2)} = \frac{3}{16}\frac{(a-c)^2}{b} - d_1 - d_2.$$

Сведем все характеристики равновесий 1 и 2 Штакельберга в табл. 8.3, в которую также поместим все характеристики равновесия Курно.

Таблица 8.3

	y_1	y_2	y	p
Курно	$\frac{1}{3}\frac{a-c}{b}$	$\frac{1}{3}\frac{a-c}{b}$	$\frac{2}{3}\frac{a-c}{b}$	$\frac{a+2c}{3}$
Штакельберг – 1	$\frac{1}{2}\frac{a-c}{b}$	$\frac{1}{4}\frac{a-c}{b}$	$\frac{3}{4}\frac{a-c}{b}$	$\frac{a+3c}{4}$
Штакельберг – 2	$\frac{1}{4}\frac{a-c}{b}$	$\frac{1}{2}\frac{a-c}{b}$	$\frac{3}{4}\frac{a-c}{b}$	$\frac{a+3c}{4}$
	$\widehat{PR}_1$	$\widehat{PR}_2$	$\widehat{PR}_1+\widehat{PR}_2$	
Курно	$\frac{1}{9}\frac{(a-c)^2}{b}-d_1$	$\frac{1}{9}\frac{(a-c)^2}{b}-d_2$	$\frac{2}{9}\frac{(a-c)^2}{b}-d_1-d_2$	
Штакельберг – 1	$\frac{1}{8}\frac{(a-c)^2}{b}-d_1$	$\frac{1}{16}\frac{(a-c)^2}{b}-d_2$	$\frac{3}{16}\frac{(a-c)^2}{b}-d_1-d_2$	
Штакельберг – 2	$\frac{1}{16}\frac{(a-c)^2}{b}-d_1$	$\frac{1}{8}\frac{(a-c)^2}{b}-d_2$	$\frac{3}{16}\frac{(a-c)^2}{b}-d_1-d_2$	

Прибыль PR_1 первой фирмы (фирмы-лидера) можно представить так:

$$PR_1 = py_1 - cy_1 - d_1 = (a-c)y_1 - by_1^2 - by_1y_2 - d_1 =$$

$$= (a-c)y_1 - by_1^2 - by_1\left(\frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2}\right) - d_1 = \frac{a-c}{2}y_1 - b\frac{y_1^2}{2} - d_1.$$

Для решения задачи максимизации этой прибыли выписываются условия первого и второго порядков

$$\frac{dPR_1}{dy_1} = \frac{a-c}{2} - by_1 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2PR_1}{dy_1^2} = -b < 0.$$

Из условия первого порядка сразу получаем объем выпуска (8.8.4) первой фирмы (фирмы-лидера), который максимизирует ее прибыль.

Задачу максимизации прибыли первой фирмы (фирмы-лидера) можно сформулировать как задачу на условный экстремум

$$PR_1 = (a-c)y_1 - by_1^2 - by_1y_2 - d_1 \text{ (max)}$$

при наличии ограничения

$$\frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2} - y_2 = 0$$

в виде равенства и решать эту задачу методом Лагранжа с помощью функции Лагранжа:

$$L(y_1, y_2, \lambda) = (a-c)y_1 - by_1^2 - by_1y_2 - d_1 + \lambda\left(\frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2} - y_2\right).$$

Уравнение изопрофиты $l_1(\hat{\tau}_1)$ первой фирмы (фирмы-лидера), соответствующей ее максимальной прибыли $\widehat{PR}_1 = \hat{\tau}_1$, имеет вид

$$(a-c)y_1 - by_1^2 - by_1y_2 - d_1 = \frac{1}{8}\cdot\frac{(a-c)^2}{b} - d_1, \qquad (8.8.7)$$

откуда следует, что

$$y_2 = \frac{a-c}{b} - y_1 - \frac{1}{8}\frac{(a-c)^2}{b^2}\frac{1}{y_1}. \qquad (8.8.8)$$

Получили уравнение гиперболы, у которой одна асимптота есть ось Oy_2 ($y_1 = 0$), а другая – прямая G_1G_2 (рис. 8.37), имеющая уравнение $y_2 = \frac{a-c}{b} - y_1$.

Непосредственно проверяется, что при $y_1^{(st1)} = \frac{1}{2}\frac{a-c}{b}$ имеем $y_2^{(st1)} = \frac{1}{4}\frac{a-c}{b}$ (действительно, $y_2 = \frac{a-c}{b} - \frac{1}{2}\frac{a-c}{b} - \frac{1}{8}\frac{(a-c)^2}{b^2}\cdot\frac{2b}{(a-c)} = \frac{1}{4}\frac{a-c}{b}$) и

$$\frac{dy_2}{dy_1} = -1 + \frac{1}{8}\frac{(a-c)^2}{b^2}\cdot\frac{1}{y_1^2} = -\frac{1}{2}$$

(действительно, $\frac{dy_2}{dy_1} = -1 + \frac{1}{8}\frac{(a-c)^2}{b^2}\cdot\frac{4b^2}{(a-c)^2} = -\frac{1}{2}$).

Из приведенных расчетов следует, что изопрофита (8.8.8) касается линии (8.8.3.2) в точке $E_1^{(st1)}$ в равновесии 1 Штакельберга (см. рис. 8.37). В задачах для самопроверки, помещенных в конце главы 8, предлагается обосновать прохождение изопрофиты $l_1(\hat{\tau}_1)$, соответствующей максимальной прибыли $\widehat{PR}_1^{(st1)} = \hat{\tau}_1$ через точку $F = \left(\frac{a-c}{4b}, \frac{a-c}{4b}\right)$, и доказать, что в этой точке F касаются изопрофиты, соответствующие прибыли $\widehat{PR}_1^{(st1)} = \hat{\tau}_1$ и прибыли $\widehat{PR}_2^{(st2)} = \hat{\tau}_2$.

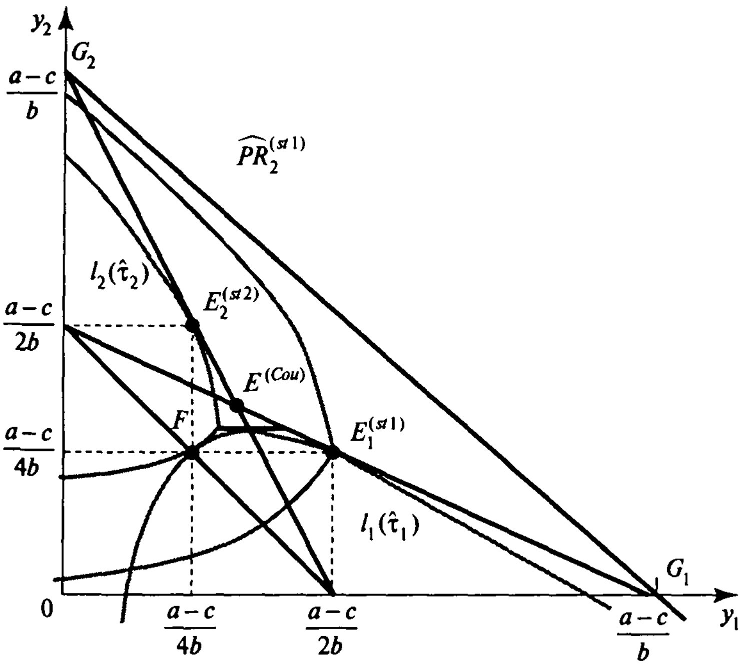


Рис. 8.37

8.8.2. Вернемся к исходным предпосылкам Штакельберга в случае Штакельберг – 1. Вторая фирма (фирма-последователь) полагает, что выпуск первой фирмы (фирмы-лидера) фиксирован в производственном периоде, т.е. не изменяется в производственном периоде ($dy_1/dy_2 = 0$), что означает выполнение предпосылки Курно. В этом случае условие первого порядка

$$\frac{dPR_2}{dy_2} = (a-c) - by_1 - 2by_2 - by_2\frac{dy_1}{dy_2} = (a-c) - by_1 - 2by_2 = 0$$

задачи максимизации прибыли PR_2 второй фирмы дает выражение функции $R_2^{(st1)}(y_1)$ реакции второй фирмы на объем выпуска y_1 первой фирмы

$$y_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2}.$$

Первая фирма (фирма-лидер), согласно предпосылке Штакельберга, знает о «подражательном» поведении второй фирмы (фирмы-последователя) согласно ее функции реакции $y_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2}$ и поэтому принимает равенство $dy_2/dy_1 = -{}^1/_2$. В этом случае условие первого порядка

$$\frac{dPR_1}{dy_1} = (a-c) - by_2 - 2by_1 - by_1\frac{dy_2}{dy_1} = (a-c) - by_2 - \frac{3}{2}by_1 = 0$$

задачи максимизации прибыли PR_1 первой фирмы дает выражение функции $R_1^{(st1)}(y_2)$ реакции первой фирмы на объем выпуска y_2 второй фирмы

$$y_1 = \frac{2}{3}\frac{a-c}{b} - \frac{2}{3}y_2.$$

В рассматриваемом случае из равенства $y_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2}$ следует, что

$$\frac{dy_2}{dy_1} = -\frac{1}{2},$$

т.е. имеет место предпосылка Штакельберга о «подражательном» поведении второй фирмы. Из равенства $y_1 = \frac{2}{3}\frac{a-c}{b} - \frac{2}{3}y_2$ следует, что

$$\frac{dy_1}{dy_2} = -\frac{2}{3},$$

что противоречит предпосылке $dy_1/dy_2 = 0$.

Как и в случае модели Курно, для элиминирования противоречия перейдем от статики к динамике, т.е. будем толковать уравнения $y_1 = \frac{2}{3}\frac{a-c}{b} - \frac{2}{3}y_2$ и $y_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2}$ как реакции фирм в производственном периоде $t+1$ на объемы выпусков своих конкурентов в предыдущем периоде t:

$$y_1(t+1) = -\frac{2}{3}y_2(t) + \frac{2}{3}\frac{a-c}{b},$$

$$y_2(t+1) = -\frac{1}{2}y_1(t) + \frac{a-c}{2b}.$$

Общее решение полученной системы обыкновенных разностных уравнений первого порядка найдем аналогично тому, как было найдено общее решение системы (8.7.15), (8.7.16).

Для однородной системы

$$z_1(t+1) = -\frac{2}{3}z_2(t),$$

$$z_1(t+1) = -\frac{1}{2}z_2(t)$$

выпишем характеристическое уравнение

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{3} = 0,$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & -2/3 \\ -2/2 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица однородной системы.

Найдем правые собственные векторы матрицы A, соответствующие собственным числам $\lambda_1 = 3^{-1/2}$, $\lambda_2 = 3^{-1/2}$:

$$\begin{pmatrix} -3^{-1/2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & -3^{-1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1^1 \\ h_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3^{-1/2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & -3^{-1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1^2 \\ h_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда получаем, что

$$h^1 = \begin{pmatrix} +2 \cdot 3^{-1/2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h^2 = \begin{pmatrix} +2 \cdot 3^{-1/2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение однородной системы имеет вид (в векторной форме)

$$z(t) = \gamma_1 h^1 \lambda_1^t + \gamma_2 h^2 \lambda_2^t,$$

где γ_1 и γ_2 – произвольные постоянные. В координатной форме общее решение $z(t)$ имеет вид

$$z_1(t) = \gamma_1(2 \cdot 3^{-1/2}) \cdot 3^{-t/2} + \gamma_2(2 \cdot 3^{-1/2}) \cdot (-3)^{-t/2},$$

$$z_2(t) = \gamma_1(-1) \cdot 3^{-t/2} + \gamma_2(-3)^{-t/2}.$$

Частное решение неоднородной системы отыскиваем в виде $\bar{y}(t) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$, где η_1 и η_2 – скалярные величины.

Имеем

$$\eta_1 = -\frac{2}{3}\eta_2 + \frac{2}{3}\frac{a-c}{b}, \quad \eta_2 = -\frac{1}{2}\eta_1 + \frac{a-c}{2b}.$$

Подставив выражение η_2 в первое уравнение, получим

$$\eta_1 = \frac{a-c}{2b},$$

откуда имеем

$$\eta_2 = -\frac{1}{2}\eta_1 + \frac{a-c}{2b} = -\frac{1}{2}\frac{a-c}{2b} + \frac{a-c}{2b} = \frac{a-c}{4b}.$$

Следовательно, общее решение неоднородной системы обыкновенных разностных уравнений в аналитической форме имеет вид

$$y_1(t) = \gamma_1(2\cdot 3^{-1/2})\cdot 3^{-t/2} + \gamma_2(2\cdot 3^{-1/2})(-3)^{-t/2} + \frac{a-c}{2b},$$

$$y_2(t) = \gamma_1(-1)3^{-t/2} + \gamma_2(-3)^{-t/2} + \frac{a-c}{4b}.$$

Если $y_1(0) = y_1^0$, $y_2(0) = y_2^0$, то для определения значений произвольных постоянных γ_1 и γ_2 следует решить систему линейных алгебраических уравнений

$$y_1^0 = \gamma_1(2\cdot 3^{-1/2}) + \gamma_2(2\cdot 3^{-1/2}) + \frac{a-c}{2b},$$

$$y_2^0 = -\gamma_1 + \gamma_2 + \frac{a-c}{4b}.$$

При фиксированных γ_1 и γ_2 при $t \to \infty$

$$y_1(t) \to \frac{a-c}{2b} = y_1^{(st1)},$$

$$y_2(t) \to \frac{a-c}{4b} = y_2^{(st1)}.$$

Таким образом, траектория $(y_1(t), y_2(t))$ выпусков первой и второй фирм с ростом номера t обладает свойством устойчивости и сходится к равновесию 1 Штакельберга $(y_1^{(st1)}, y_2^{(st1)})$ (рис. 8.38, на котором видно, что если $y_2(0) > y_2^{(st1)}$, то $y_2(2)$, $y_2(4)$, ... стремятся к $y_2^{(st1)}$ сверху, а $y_1(1)$, $y_1(3)$, ... стремятся к $y_1^{(st1)}$ снизу. Если $y_1(0) > y_1^{(st1)}$, то, очевидно, выпуски y_1 первой фирмы будут стремиться к $y_1^{(st1)}$ сверху, а выпуски y_2 второй фирмы будут стремиться к $y_2^{(st1)}$ снизу). Случай равновесия 2 Штакельберга рассматривается аналогично.

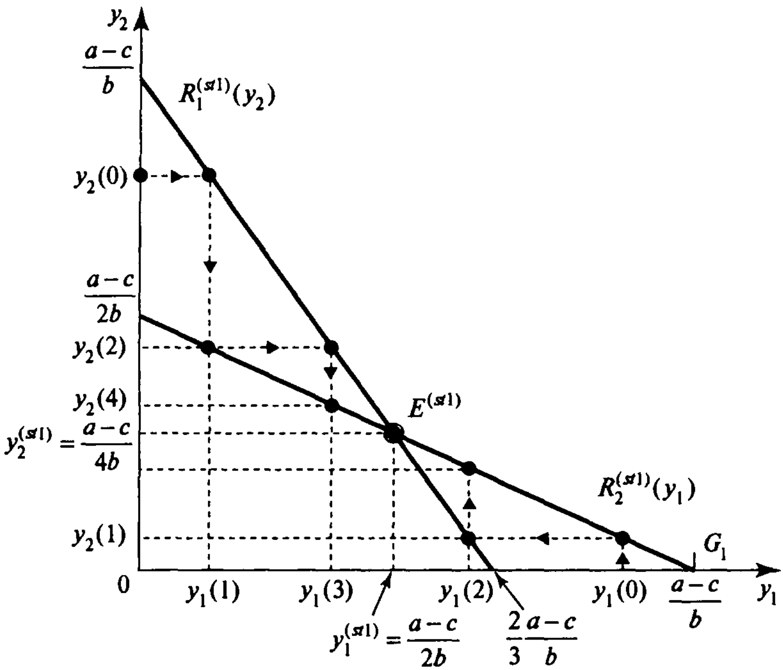


Рис. 8.38

8.8.3. Рассмотрим дуополию, когда издержки обеих фирм имеют соответственно вид

$$C_1 = c_1 y_1 + d_1, \quad C_2 = c_2 y_2 + d_2 \quad \text{и} \quad c_1 < c_2,$$

т.е. $MC_1 < MC_2$. Для символов y_1, y_2 и y сохраняется старое толкование.

Принимается предпосылка, что вторая фирма (фирма-последователь) полагает, что выпуск первой фирмы (фирмы-лидера) фиксирован в производственном периоде, т.е. не изменяется в данном периоде (т.е. $dy_1/dy_2 = 0$), что означает выполнение предпосылки Курно.

Для максимизации прибыли PR_2 второй фирмы

$$PR_2 = py_2 - c_2y_2 - d_2 = (a - by_1 - by_2)y_2 - c_2y_2 - d_2$$

необходимо использовать условие первого порядка

$$\frac{dPR_2}{dy_2} = (a - c_2) - by_1 - 2by_2 - by_2\frac{dy_1}{dy_2} = 0. \qquad (8.8.9)$$

В силу предпосылки Курно о том, что выпуск y_1 первой фирмы не изменяется в рассматриваемом периоде, т.е. $dy_1/dy_2 = 0$, равенство (8.8.9) перепишется так:

$$\frac{dPR_2}{dy_2} = (a - c_2) - by_1 - 2by_2 = 0,$$

откуда следует, что выражение функции реакции второй фирмы на объем выпуска y_1 первой фирмы

$$y_2 = \frac{a - c_2}{2b} - \frac{y_1}{2}. \qquad (8.8.10)$$

Условие второго порядка $\dfrac{d^2PR_2}{dy^2} = -2b < 0$ выполняется.

Для максимизации прибыли PR_1 первой фирмы

$$PR_1 = py_1 - c_1y_1 - d_1 = (a - by_1 - by_2)y_1 - c_1y_1 - d_1$$

используем условие первого порядка

$$\frac{dPR_1}{dy_1} = (a - c_1) - 2by_1 - by_2 - by_1\frac{dy_2}{dy_1} = 0. \qquad (8.8.11)$$

В силу того что принимается предпосылка

$$\frac{dy_2}{dy_1} = -\frac{1}{2},$$

условие первого порядка (8.8.11) для первой фирмы перепишется так:

$$\frac{dPR_1}{dy_1} = (a - c_1) - \frac{3}{2}by_1 - by_2 = 0,$$

откуда следует, что функция реакции первой фирмы на объем выпуска y_2 второй фирмы имеет вид

$$y_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{a - c_1}{b} - \frac{2}{3} y_2. \tag{8.8.12}$$

Условие второго порядка

$$\frac{d^2 PR_1}{dy_1^2} = -2b < 0$$

выполняется, следовательно, задача максимизации прибыли PR_1 решена.

Подставив (8.8.10) в (8.8.12), получим

$$y_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{a - c_1}{b} - \frac{2}{3}\left(\frac{a - c_2}{2b} - \frac{y_1}{2}\right),$$

откуда следует, что

$$y_1^{(st1)} = \frac{1}{2} \frac{a - 2c_1 + c_2}{b}. \tag{8.8.13}$$

Подставив (8.8.13) в (8.8.10), получим

$$y_2^{(st1)} = \frac{1}{2} \frac{a - 2c_2}{b} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a - 2c_1 + c_2}{b}\right) = \frac{1}{4} \frac{a + 2c_1 - 3c_2}{b}.$$

Найдем остальные характеристики равновесия 1 Штакельберга, когда $c_1 < c_2$:

$$y^{(st1)} = y_1^{(st1)} + y_2^{(st2)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3a - 2c_1 - c_2}{b}, \tag{8.8.14}$$

$$p^{(st1)} = a - by^{(st1)} = \frac{a + 2c_1 + c_2}{4},$$

$$\widehat{PR}_1^{(st1)} = (p - c_1) y_1^{(st1)} - d_1 = \frac{1}{8} \cdot \frac{(a - 2c_1 + c_2)^2}{b} - d_1,$$

$$\widehat{PR}_2^{(st1)} = (p - c_2) y_2^{(st1)} - d_2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{(a + 2c_1 - 3c_2)^2}{b} - d_2,$$

$$\widehat{PR}^{(st1)} = \widehat{PR}_1^{(st1)} + \widehat{PR}_2^{(st1)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{(a - 2c_1 + c_2)^2}{b} + \frac{1}{16} \cdot \frac{(a + 2c_1 - 3c_2)^2}{b} -$$

$$- d_1 - d_2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{3a^2 + 12c_1^2 + 11c_2^2 - 4ac_1 - 2ac_2 - 20c_1c_2}{b} - d_1 - d_2.$$

Полагая $c_1 = c_2$ в выражениях $y_1^{(st1)}$, $y_2^{(st1)}$, а также во всех формулах, которые выписаны после формулы (8.8.14), получим все выражения строки Штакельберга – 1 табл. 8.3.

8.8.4. Переходим к случаю n фирм и предположим, что у первой фирмы (фирмы-лидера) предельные издержки c_1 строго меньше предельных издержек $c_2, \ldots, c_n$ остальных фирм (фирм-последователей), которые предполагаются равными, т.е. $c_1 < c_2 = \ldots = c_n = c_f$. Общие издержки фирм имеют соответственно вид

$$C_1 = c_1 y_1 + d_1,\ C_2 = c_f y_2 + d_2,\ \ldots,\ C_n = c_f y_n + d_n.$$

Как и выше, символы $y_1, y_2, \ldots, y_n$ означают объемы выпусков фирм с первой по n-ю в фиксированном периоде времени, так что функция, обратная к функции рыночного (отраслевого) спроса, имеет вид

$$p = a - b(y_1 + \ldots + y_n) = a - by, \text{ где } y = y_1 + \ldots + y_n.$$

Аналогично случаю двух фирм ($n = 2$) принимается предпосылка, что каждая фирма-последователь полагает, что выпуск первой фирмы (фирмы-лидера) и любой другой фирмы-последователя фиксирован в производственном периоде, т.е. в данном периоде не меняется (т.е. $dy_1/dy_2 = 0, \ldots, dy_1/dy_n = 0$, $dy_i/dy_j = 0$, $i \neq j$, $i, j = 2, \ldots, n$), что означает выполнение предпосылки Курно. Предпосылка Штакельберга о том, что полагает первая фирма (фирма-лидер), приведена ниже.

Для максимизации прибыли PR_i, $i = 2, \ldots, n$, каждой фирмы-последователя

$$PR_i = py_i - c_i y_i - d_i = (a - b(y_1 + y_2 + \ldots + y_n))y_i - c_i y_i - d_i =$$
$$= (a_i - c_i)y_i - by_1 y_i - \ldots - by_i^2 - \ldots - by_n y_i - d_i$$

необходимо использовать условие первого порядка

$$\frac{dPR_i}{dy_i} = (a - c_i) - by_1 - by_2 - \ldots - 2by_i - \ldots - by_n = 0 \qquad (8.8.15)$$

($dy_1/dy_i = \ldots = dy_{i-1}/dy_i = dy_{i+1}/dy_i = \ldots = dy_n/dy_i = 0$ согласно сделанному выше предположению о том, что для каждой фирмы-последователя выполняется предпосылка Курно).

Условие второго порядка

$$\frac{d^2 PR_i}{dy_i^2} = -2b < 0$$

выполняется.

Следовательно, выпуски $y_2, \ldots, y_n$ всех фирм-последователей, которые максимизируют прибыль этих фирм, удовлетворяют системе $n-1$ линейных алгебраических уравнений, получаемых из уравнений (8.8.15) путем их деления на b:

$$2y_2 + y_3 + \ldots + y_n = \frac{a - c_f}{b} - y_1,$$

$$y_2 + 2y_3 + \ldots + y_n = \frac{a - c_f}{b} - y_1,$$

....

$$y_2 + y_3 + \ldots + 2y_n = \frac{a - c_f}{b} - y_1.$$

Непосредственно проверяется, что определитель этой системы из $n-1$ уравнений с $n-1$ неизвестными равен n и сама система имеет решения

$$y_f = y_2 = \ldots = y_n = \frac{1}{n}\frac{a - c_f}{b} - \frac{1}{n}y_1. \qquad (8.8.16)$$

Выражения (8.8.16) представляют собой функции реакций фирм-последователей.

Согласно предпосылке Штакельберга фирма-лидер полагает, что каждая фирма-последователь реагирует на изменение объема выпуска y_1 первой фирмы-лидера по формуле (8.8.16) (т.е. уменьшает объем своего выпуска, если фирма-лидер его увеличивает, или, наоборот, увеличивает объем своего выпуска, если фирма-лидер его уменьшает).

Из (8.8.16) следует, что

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \ldots = \frac{dy_n}{dy_1} = -\frac{1}{n}. \qquad (8.8.17)$$

Для максимизации прибыли PR_1 фирмы-лидера

$$PR_1 = py_1 - c_1 y_1 - d_1 = (a - c_1)y_1 - by_1^2 - by_1 y_2 - \ldots - by_1 y_n - d_1$$

используем условие первого порядка (принимая во внимание равенства (8.8.17)):

$$\frac{dPR_1}{dy_1} = a - c_1 - 2by_1 - by_2 - \ldots - by_n + \frac{n-1}{n}by_1 = 0. \qquad (8.8.18)$$

Условие второго порядка

$$\frac{d^2 PR_1}{dy_1} = \left(-2 + \frac{n-1}{n}\right)b = -\frac{n+1}{n}b < 0$$

выполняется.

Из равенства (8.8.18) получаем функцию реакции фирмы-лидера

$$\frac{a-c_1}{b} - (y_2 + \ldots + y_n) = \frac{n+1}{n} y_1,$$

откуда следует, что

$$y_1 = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{a-c_1}{b} - \frac{n}{n+1}(y_2 + \ldots + y_n) =$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{a-c_1}{b} - \frac{n(n-1)}{n+1} y_f. \qquad (8.8.19)$$

Последнее равенство цепочки (8.8.19) написано на основании (8.8.16).

Из (8.8.16) и (8.8.19) получим объемы выпусков фирмы-лидера и всех фирм-последователей в равновесии 1 Штакельберга (равновесие 1 означает, что лидером является первая фирма).

Имеем из (8.8.19) и (8.8.16)

$$y_1 = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{a-c_1}{b} - \frac{(n-1)n}{n+1}\left[\frac{1}{n}\frac{a-c_f}{b} - \frac{1}{n}y_1\right] =$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{a-c_1}{b} - \frac{n-1}{n+1}\frac{a-c_f}{b} + \frac{n-1}{n+1}y_1,$$

откуда получаем

$$y_1 = n\frac{a-c_1}{2b} - n\frac{a-c_f}{2b} + \frac{a-c_f}{2b} = \frac{a-c_1}{2b} + (n-1)\frac{c_f - c_1}{2b} = y_1^{(st1)}. \qquad (8.8.20)$$

Имеем на основании (8.8.16) и (8.8.20)

$$y_f = \frac{1}{n}\frac{a-c_f}{2b} - \frac{1}{n}\left[\frac{a-c_1}{2b} - (n-1)\frac{c_f - c_1}{2b}\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\frac{a-c_f}{2b} - \frac{c_f - c_1}{2b} = y_f^{(st1)}. \qquad (8.8.21)$$

Общий объем выпуска всех n фирм (фирмы-лидера и остальных $(n-1)$ фирм последователей) равен

$$y^{(st1)} = y_1^{(st1)} + (n-1)y_f^{(st1)} = \frac{a-c_1}{2b} + \frac{n-1}{n}\frac{a-c_f}{2b}, \qquad (8.8.22)$$

а рыночная цена $p^{(st1)}$ равна

$$p^{(st1)} = a - by^{(st1)} = a - b\left(\frac{a-c_1}{2b} + \frac{n-1}{n}\frac{a-c_f}{2b}\right) =$$

$$= \frac{a+c_1}{2} - \frac{n-1}{n}\frac{a-c_f}{2}. \qquad (8.8.23)$$

С ростом числа n фирм выпуск $y_2^{(st1)}$ каждой фирмы последователя убывает (см. (8.8.21)), общий выпуск всех фирм-последователей также убывает, ибо

$$(n-1)y_f^{(st1)} = \frac{n-1}{n}\frac{a-c_f}{2b} - (n-1)\frac{c_f-c_1}{2b},$$

общий выпуск $y^{(st1)}$ растет и приближается снизу к дроби

$$\frac{2a-c_1-c_f}{2b},$$

цена равновесия $p^{(st1)}$ неограниченно приближается к дроби

$$\frac{a+c_1}{2} - \frac{a-c_f}{2} = \frac{c_1+c_f}{2},$$

которая расположена между c_1 и c_f $(c_1 < (c_1+c_f)/2 < c_f)$.

Если $c_1 = c_f$, то формулы (8.8.20)–(8.8.22) перепишутся так:

$$y_1^{(st1)} = \frac{a-c_1}{2b}, \quad y_f^{(st1)} = \frac{1}{n}\frac{a-c_1}{2b}, \quad y^{st} = \frac{2n-1}{n}\frac{a-c_1}{2b},$$

$$p^{(st1)} = \frac{a+c_1}{2} - \frac{n-1}{n}\frac{a-c_1}{2}.$$

Сопоставление моделей олигополии Курно и Штакельберга аналогично сопоставлению этих моделей в случае дуополии. Читателю предлагается в этом убедиться самостоятельно.

8.9. Модели сговора в дуополии и олигополии

8.9.1. В модели сговора (в модели картеля) фирмы объединяются в целях совместного принятия решения относительно рыночной цены и общего объема выпуска, т.е. в модели сговора фирмы функционируют в режиме кооперативного поведения. Другими словами, разные фирмы на рынке выступают в качестве (одного) монополиста.

Функция, обратная к функции рыночного (отраслевого) спроса, имеет вид $p = a - by$ ($y = y_1 + y_2$), функции издержек обеих фирм соответственно равны

$$C_1 = cy_1 - d_1, \quad C_2 = cy_2 - d_2.$$

Постоянные издержки d_1 и d_2 неотрицательны, остальные параметры a, b, c положительны.

Общая (совокупная) прибыль обеих фирм равна

$$PR = py - C_1 - C_2 = (a - c - by)y - d_1 - d_2.$$

Для максимизации общей прибыли PR используем условие первого порядка

$$\frac{dPR}{dy} = (a - c) - 2by = 0. \qquad (8.9.1)$$

Условие второго порядка выполняется всегда:

$$\frac{d^2PR}{dy^2} = -2b < 0.$$

Из равенства (8.9.1) следует, что общий выпуск $y^{(m)}$, максимизирующий общую прибыль PR, равен

$$y^{(m)} = \frac{a - c}{2b},$$

рыночная цена $p^{(m)}$, очевидно, равна

$$p^{(m)} = a - by^{(m)} = \frac{a + c}{2}$$

и максимальная общая прибыль $PR^{(m)}$ такова:

$$PR^{(m)} = p^{(m)}y^{(m)} - cy^{(m)} - d_1 - d_2 = \frac{1}{4}\frac{(a - c)^2}{b} - d_1 - d_2.$$

Напомним, что общая максимальная прибыль дуополии Курно, т.е. общая прибыль двух фирм в равновесии Курно, равна

$$\widehat{PR}^* = \frac{2}{9}\frac{(a-c)^2}{b} - d_1 - d_2,$$

следовательно, $PR^{(m)} > \widehat{PR}^*$.

Правило распределения объема общего выпуска $y^{(m)}$ по выпускам y_1 и y_2 отдельных фирм определяется вне рассматриваемой модели.

В связи с тем что фирмы отличаются только своими постоянными издержками, наиболее естественным является равное распределение объема общего выпуска $y^{(m)}$ по фирмам: $y_1 = y_2 = \dfrac{a-c}{4b}$.

Каждая фирма получает свою часть $PR_i^{(m)}$, $i = 1, 2$, общей максимальной прибыли $PR^{(m)}$:

$$PR_1^{(m)} = p^{(m)}y_1 - cy_1 - d_1 = \frac{1}{8}\frac{(a-c)^2}{b} - d_1,$$

$$PR_2^{(m)} = p^{(m)}y_2 - cy_2 - d_2 = \frac{1}{8}\frac{(a-c)^2}{b} - d_2.$$

На рис. 8.39 показана контрактная линия L, имеющая уравнение

$$y_1 + y_2 = \frac{a-c}{2b},$$

а также изопрофиты первой и второй фирм, которые проходят через точки контрактной линии L. Каждая точка B (в том числе точка B_0) контрактной линии L показывает возможное распределение y_1 и y_2 общего выпуска $y^{(m)} = \dfrac{a-c}{2b}$ по обеим фирмам. В каждой точке B изопрофиты первой и второй фирм касаются: в точке B_0 под углом, равным $\pi/4$; в точках B, расположенных на линии L ниже точки B_0, под углом, меньшем, чем $\pi/4$; в точках B, расположенных на линии L выше точки B_0, под углом, большим, чем $\pi/4$.

Точки контрактной линии L образуют границу Парето, ибо при переходе от одной точки к другой на этой прямой прибыль одной фирмы будет строго возрастать, а прибыль другой фирмы – строго убывать (см. рис. 8.39).

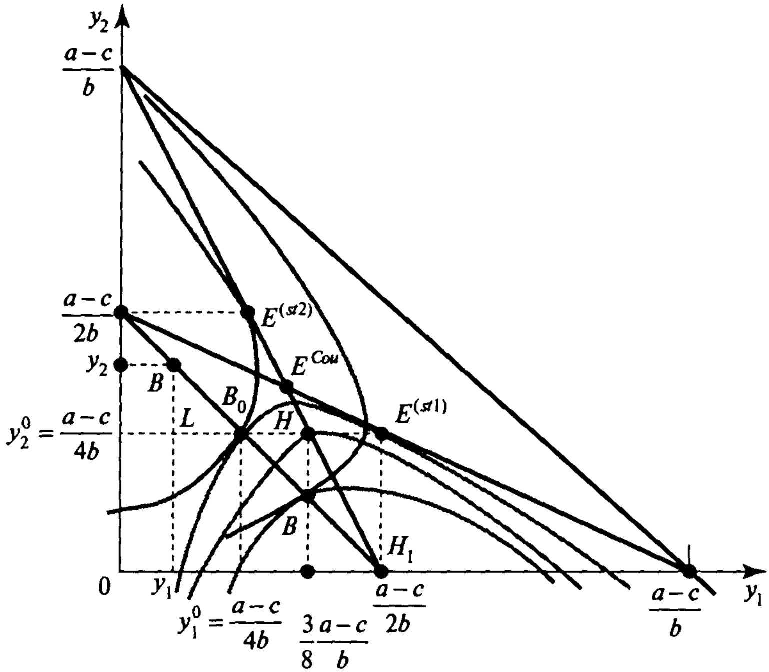


Рис. 8.39

8.9.2. Проанализируем ситуацию, когда одна из двух фирм (например, первая) нарушает договор и увеличивает свой выпуск, зная, что другая фирма будет соблюдать договоренность. На рис. 8.40 точка $B' = (y_1', y_2')$ принадлежит контрактной линии L. Это означает, что фирмы, вступившие в сговор, поделили общий выпуск $y_1 + y_2 = \frac{a-c}{2b}$ таким образом, что первая фирма выпускает продукцию в объеме y_1', а вторая — в объеме y_2'. В этом случае рыночная цена p' равна

$$p' = a - b\frac{a-c}{2b} = \frac{a+c}{2},$$

максимальная прибыль PR_1' первой и максимальная прибыль PR_2' второй фирмы равны

$$PR_1' = p'y_1' - cy_1' - d_1 = \frac{a-c}{2}y_1' - d_1,$$

$$PR_2' = p'y_2' - cy_2' - d_2 = \frac{a-c}{2}y_2' - d_2.$$

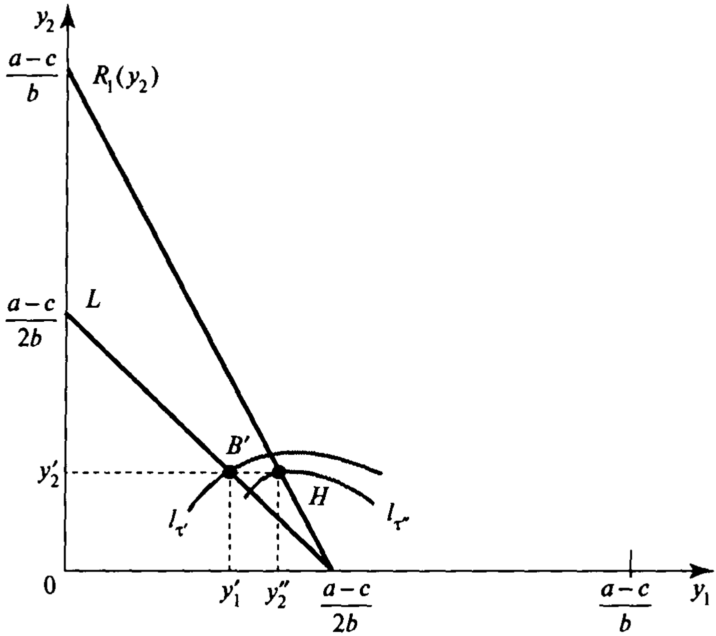


Рис. 8.40

Если первая фирма, зная, что вторая фирма будет соблюдать договоренность, решила смошенничать и увеличить свою прибыль за счет увеличения объема выпуска своей продукции, она соответственно из точки B' перейдет в точку H, расположенную на линии $R_1(y_2)$ реакции первой фирмы на выпуск второй фирмы, ибо на горизонтальной прямой $y_2'H$ только в точке H прибыль первой фирмы будет наибольшей (изопрофита $l_{\tau_1''}$ соответствует прибыли τ_1'', которая строго больше прибыли τ_1', соответствующей изопрофите $l_{\tau_1'}$). Приведем результаты необходимых в такой ситуации вычислений:

$$y_1'' = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_2'}{2},$$

$$p'' = a - b(y_1'' + y_2') = \frac{a+c}{2} - \frac{1}{2}by_2' < p',$$

$$PR_1'' = (p''-c)y_1'' - d_1 = \frac{a-c}{2}y_1' - d_1 + \frac{1}{4}b(y_2')^2 = PR_1' + \frac{1}{4}b(y_2')^2 > PR_1',$$

$$PR_2'' = (p''-c)y_2'' - d_2 = \frac{a-c}{2}y_2' - d_2 - \frac{1}{2}b(y_2')^2 = PR_2' - \frac{1}{2}b(y_2')^2 < PR_2'.$$

Если точка B' (см. рис. 8.40) совпадает с точкой B_0 (см. рис. 8.39), то приведенные общие формулы конкретизируются следующим образом:

$$y_1' = y_2' = \frac{a-c}{4b},\ p' = \frac{a+c}{2},\ PR_1' = \frac{1}{8}\frac{(a-c)^2}{b} - d_1,\ PR_2' = \frac{1}{8}\frac{(a-c)^2}{b} - d_2,$$

$$y_1'' = \frac{3}{8}\frac{a-c}{b},\ p'' = \frac{3a+5c}{8},\ PR_1'' = \frac{9}{64}\frac{(a-c)^2}{b} - d_1,\ PR_2'' = \frac{3}{32}\frac{(a-c)^2}{b} - d_2.$$

Таким образом, в условиях сговора у каждой (в частности, у первой) фирмы есть соблазн смошенничать путем увеличения объема выпуска своей продукции ($y_1'' > y_1'$) и своей прибыли ($PR_1'' > PR_1'$) даже при понижении рыночной цены ($p'' < p'$) при условии, что другая фирма будет соблюдать договоренность. Отсюда следует, что сговор (картель) не может быть устойчивым рыночным образованием.

Итак, с одной стороны, в условиях сговора общая прибыль обеих фирм может быть строго больше общей прибыли фирм в равновесии Курно. С другой стороны, равновесие Курно представляет собой устойчивое рыночное образование в отличие от сговора, которое не является устойчивым рыночным образованием. Отсюда следует, что принятие решения фирмами, функционирующими в дуополии, по своей сути нетривиально и зависит от вероятности склонности к мошенничеству этих фирм.

8.9.3. В случае олигополии имеем функцию $p = a - by,\ y = y_1 + \ldots + y_n$, обратную к функции рыночного (отраслевого) спроса; функции издержек n фирм соответственно равны

$$C_1 = cy_1 + d_1,\ \ldots,\ C_n = cy_n + d_n.$$

Постоянные издержки $d_1,\ \ldots,\ y_n$ неотрицательны, остальные параметры a, b, c положительны.

Общая (совокупная) прибыль всех фирм равна

$$PR = py - C_1 - \ldots - C_n = ((a-c) - by)y - d_1 - \ldots - d_n.$$

Для ее максимизации используем условие первого порядка

$$\frac{dPR}{dy} = (a-c) - 2by = 0. \qquad (8.9.2)$$

Условие второго порядка

$$\frac{d^2 PR}{dy^2} = -2b < 0$$

не зависит от y, поэтому решение $y^{(m)} = \frac{a-c}{2b}$ уравнения (8.9.2) есть общий выпуск всех n фирм, который обеспечивает их общую прибыль.

Как и в случае дуополии, определяем рыночную цену

$$p^{(m)} = a - by^{(m)} = \frac{a+c}{2}$$

и максимальную общую прибыль $PR^{(m)}$

$$PR^{(m)} = p^{(m)}y^{(m)} - cy^{(m)} - d_1 - \ldots - d_n = \frac{1}{4}\frac{(a-c)^2}{b} - d_1 - \ldots - d_n.$$

Правило распределения объема общего выпуска $y^{(m)} = \frac{a-c}{2b}$ по выпускам $y_1, \ldots, y_n$ отдельных фирм определяется вне рассматриваемой модели.

Как и в случае дуополии, наиболее естественным является правило равномерного распределения общего объема выпуска $y^{(m)}$ по фирмам:

$$y_1 = \ldots = y_n = \frac{1}{2n}\frac{a-c}{b}.$$

Каждая фирма получает свою часть $PR_i^{(m)}$, $i = 1, \ldots, n$, общей максимальной прибыли $PR^{(m)}$:

$$PR_i^{(m)} = (p^{(m)} - c)y_i - d_i = \frac{a-c}{2}\frac{1}{2n}\frac{a-c}{b} - d_i = \frac{1}{4n}\frac{(a-c)^2}{b} - d_i,$$

$$i = 1, \ldots, n.$$

Ситуация, когда одна из фирм нарушает договоренность, увеличивая свой выпуск, а остальные фирмы договоренности не нарушают, аналогична ситуации, проанализированной в случае дуополии.

8.10. Модели дуополии и олигополии Бертрана

8.10.1. Модель дуополии Бертрана представляет собой модель ценовой, а не количественной дуополии. Для фирмы в дуополии Бертрана постоянным является не объем выпуска фирмы-конкурента, а назначаемая конкурентом цена. Как и в случае модели Курно, пусть две фирмы производят однородные продукты, имеют равные предельные издержки c, но теперь фирмы выбирают цены, а не объемы выпускаемой ими продукции. В связи с тем что продукты однородны, потребители приобретают продукты той фирмы, которая предлагает меньшую цену. Если цена у обеих фирм одна и та же, то, естественно, объем продаж у каждой фирмы будет один и тот же.

В рассматриваемом случае равновесие в дуополии Бертрана достигается, когда цена p_i каждой фирмы становится равной предельным издержкам c, т.е. $p_1^{(B)} = p_2^{(B)} = c$.

Если функция, обратная к функции рыночного спроса, имеет вид $p = a - by$, $y = y_1 + y_2$, то прибыль каждой фирмы PR_i равна

$$PR_i^{(B)} = py_i - cy_i - d_i = -d_i,\ i = 1, 2,$$

ибо $p = p_1 = p_2 = c$. Выпуск каждой фирмы при этом, очевидно, равен

$$\frac{a-c}{2b} = y_1^{(B)} = y_2^{(B)} \quad \left(y = y_1 + y_2 = \frac{a-c}{b}\right).$$

Таким образом, дуополия Бертрана функционирует как рынок совершенной конкуренции (такая ситуация называется парадоксом Бертрана).

Для сравнения в случае дуополии Курно

$$y_1^{(Cou)} = y_2^{(Cou)} = \frac{a-c}{3b}, \quad p^{(Cou)} = \frac{a+2c}{3},$$

$$PR_1^{(Cou)} = \frac{(a-c)^2}{9b} - d_1, \quad PR_2^{(Cou)} = \frac{(a-c)^2}{9b} - d_2.$$

В равновесии Бертрана (когда цены фирм устанавливаются на уровне предельных издержек c) ни одна фирма не заинтересована изменять свою цену, равную предельным издержкам, если другая фирма не будет этого делать. Действительно, если одна фирма повышает цену (а другая этого не делает), она потеряет всех своих покупателей. Если одна фирма понизит цену, которая будет уже ниже предельных издержек (а другая фирма не станет этого делать), то первая фирма, получив в свое распоряжение всех покупателей, будет терять деньги и торговать себе в убыток.

Таким образом, в случае когда фирмы производят однородные продукты, более естественно конкурировать с помощью объемов (как у Курно) выпускаемой продукции, а не цен (как у Бертрана).

Построим линию спроса на продукцию одной (скажем, первой) фирмы дуополии. Пусть функция рыночного спроса имеет вид

$$y = \frac{a}{b} - \frac{p}{b}, \quad y = y_1 + y_2.$$

Если цена p_1, устанавливаемая первой фирмой, строго больше, чем цена p_2 (т.е. $p_1 > p_2$), то, очевидно, первая фирма потеряет всех своих покупателей и при $p_1 > p_2$ линия спроса на продукцию первой фирмы есть вертикальный полупромежуток $[a, p_2)$ на оси Op_1 (рис. 8.41). Если $p_1 = p_2$, то величину $D(p_1)$ рыночного спроса фирмы первая и вторая поделят поровну. Тогда точка G на рис. 8.41 есть фрагмент линии спроса на продукцию первой фирмы. Наконец, если $p_1 < p_2$, то фрагментом линии спроса на продукцию первой фирмы является отрезок $[H, K]$. Поскольку случай $p_1 < c$ экономического смысла не имеет, постольку точка K – последняя точка этой линии спроса.

8.10.2. В случае когда фирмы в условиях дуополии выпускают дифференцированные продукты, ценовая конкуренция является вполне уместной.

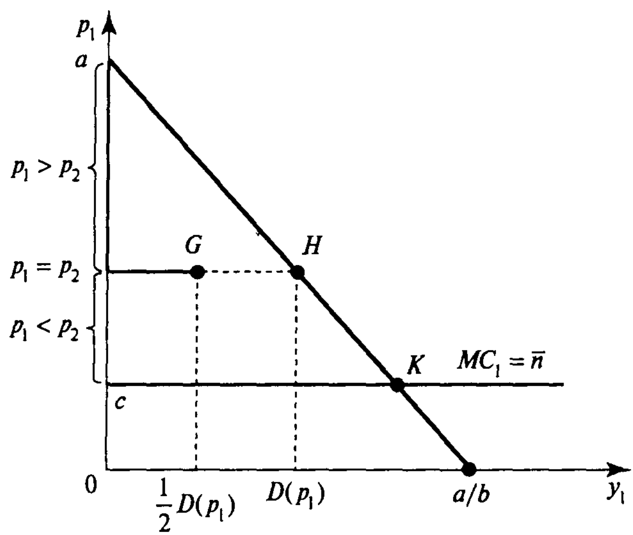


Рис. 8.41

Пусть функции спроса на продукцию каждой фирмы имеют одни и те же параметры и выглядят так:

$$y_1 = h - gp_1 + kp_2, \quad y_2 = h - gp_2 + kp_1.$$

Все параметры h, g, k – положительные постоянные.

Для максимизации прибыли

$$PR_1 = p_1 y_1 - cy_1 - d_1 = (p_1 - c)(h - gp_1 + kp_2) - d_1$$

первой фирмы используем условие первого порядка

$$\frac{dPR_1}{dp_1} = h - gp_1 + kp_2 + (p_1 - c)\left(-g + k\frac{dp_2}{dp_1}\right) = -2gp_1 + h + kp_2 + cg_1 = 0$$

(по аналогии со случаем Курно в модели дуополии Бертрана принимается предпосылка о том, что $dp_2/dp_1 = 0$ и $dp_1/dp_2 = 0$. Это содержательно означает, что каждая из фирм полагает, что в течение производственного периода другая фирма не меняет цену на свою продукцию). Отсюда получаем функцию реакции $R_1(p_2)$ первой фирмы на цену p_2, которую назначает вторая фирма:

$$p_1 = \frac{k}{2g}p_2 + \frac{cg + h}{2g}(R_1(p_2)). \qquad (8.10.1)$$

Условие второго порядка

$$\frac{d^2 PR_1}{dp_1^2} = -2g + k\frac{dp_2}{dp_1} = -2g < 0$$

для точки максимума прибыли PR_1 выполняется.

По аналогии на основании решения задачи максимизации прибыли

$$PR_2 = p_2 y_2 - cy_2 - d_2 = (p_2 - c)(h - gp_1 + kp_2) - d_2$$

второй фирмы получаем функцию реакции $R_2(p_1)$ второй фирмы на цену p_1, которую назначает первая фирма:

$$p_2 = \frac{k}{2g}p_1 + \frac{cg + h}{2g}(R_2(p_1)). \qquad (8.10.2)$$

Если $k < 2g$ (с содержательной точки зрения естественно, что $k < g$), графики функций $R_2(p_1)$ и $R_1(p_2)$ должны иметь углы наклонов с осями Op_1 и Op_2 соответственно, которые меньше $\pi/4$ (45°) (рис. 8.42).

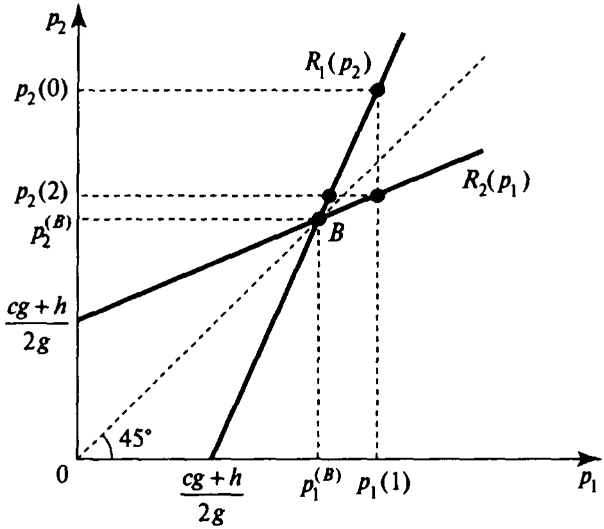


Рис. 8.42

Точка B пересечения графиков функций $R_2(p_1)$ и $R_1(p_2)$ имеет координаты $p_1^{(B)}$ и $p_2^{(B)}$, которые по экономическому смыслу должны быть больше предельных издержек c.

Решая систему уравнений (8.10.1) и (8.10.2), найдем явное выражение для $p_1^{(B)}$ и $p_2^{(B)}$:

$$p_1^{(B)} = \frac{cg+h}{2g-k} = p_2^{(B)}.$$

Точка $B = (p_1^{(B)}, p_2^{(B)})$ (см. рис. 8.42) представляет собой геометрическую интерпретацию равновесия Бертрана в дуополии Бертрана.

Отметим, что линии реакции (графики функций реакций $R_2(p_1)$ и $R_1(p_2)$) являются восходящими. Это содержательно означает, что прибыль каждой фирмы растет с ростом цены на ее продукцию. Напомним, что в случае дуополии Курно линия реакции каждой фирмы была нисходящей. Это содержательно означало, что прибыль фирмы растет по мере понижения ее выпуска.

8.10.3. Из (8.10.1) и (8.10.2) получаем, что

$$\frac{dp_1}{dp_2} = \frac{k}{2g} > 0, \quad \frac{dp_2}{dp_1} = \frac{k}{2g} > 0.$$

Это противоречит предпосылке о том, что $dp_2/dp_1 = 0$, $dp_1/dp_2 = 0$.

Как и в случае дуополии Курно, противоречие элиминируется, если от статики в (8.10.1) и (8.10.2) перейти к динамике:

$$p_1(t+1) = \frac{k}{2g} p_2(t) + \frac{cg+h}{2g}, \tag{8.10.3}$$

$$p_2(t+1) = \frac{k}{2g} p_1(t) + \frac{cg+h}{2g}. \tag{8.10.4}$$

Для однородной системы, соответствующей неоднородной системе (8.10.3), (8.10.4),

$$q_1(t+1) = \frac{k}{2g} p_2(t),$$

$$q_2(t+1) = \frac{k}{2g} q_2(t),$$

выпишем характеристическое уравнение

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & \dfrac{k}{2g} \\ \dfrac{k}{2g} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{k^2}{4g^2} = 0,$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & k/2g \\ k/2g & 0 \end{pmatrix}$ – матрица однородной (неоднородной) системы.

Найдем правые собственные векторы матрицы A, соответствующие собственным числам $\lambda_1 = \frac{k}{2g}$, $\lambda_2 = -\frac{k}{2g}$:

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{k}{2g} & \dfrac{k}{2g} \\ \dfrac{k}{2g} & -\dfrac{k}{2g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^1 \\ V_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dfrac{k}{2g} & \dfrac{k}{2g} \\ \dfrac{k}{2g} & \dfrac{k}{2g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^2 \\ V_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда получаем, что

$$V^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение однородной системы имеет вид (в векторной форме)

$$q(t) = \gamma_1 V^1 \lambda_1^t + \gamma_2 V^2 \lambda_2^t,$$

где γ_1 и γ_2 – произвольные.

В координатной форме общее решение $q(t)$ имеет вид

$$q_1(t)=\gamma_1\lambda_1^t+\gamma_2\lambda_2^t=\gamma_1\left(\frac{k}{2g}\right)^t+\gamma_2\left(-\frac{k}{2g}\right)^t,$$

$$q_2(t)=\gamma_1\lambda_1^t-\gamma_2\lambda_2^t=\gamma_1\left(\frac{k}{2g}\right)^t-\gamma_2\left(-\frac{k}{2g}\right)^t.$$

Частное решение неоднородной системы (8.10.3), (8.10.4) отыскиваем в виде $\overline{p}(t)=\begin{pmatrix}\eta\\ \eta\end{pmatrix}$, где η – скалярная величина.

Имеем на основании (8.10.3), (8.10.4)

$$\eta=\frac{k}{2g}\eta+\frac{cg+h}{2g},\quad \eta=\frac{k}{2g}\eta+\frac{cg+h}{2g},$$

откуда вытекает, что

$$\eta=\frac{cg+h}{2g-k}=p_1^{(B)}=p_2^{(B)}.$$

Следовательно, общее решение неоднородной системы (8.10.3) (8.10.4) имеет вид

$$p_1(t)=\gamma_1\left(\frac{k}{2g}\right)^t+\gamma_2\left(-\frac{k}{2g}\right)^t+p_1^{(B)},$$

$$p_2(t)=\gamma_1\left(\frac{k}{2g}\right)^t-\gamma_2\left(-\frac{k}{2g}\right)^t+p_2^{(B)}.$$

Если $p_1(0)=p_1^0$, $p_2(0)=p_2^0$, то для определения значений произвольных постоянных γ_1 и γ_2 следует решить систему линейных алгебраических уравнений

$$p_1^0=\gamma_1+\gamma_2+p_1^{(B)},$$
$$p_2^0=\gamma_1-\gamma_2+p_2^{(B)}.$$

При фиксированных γ_1 и γ_2 при $t\to\infty$ и при $k<2g$

$$p_1(t)\to\frac{cg+h}{2g-k}=p_1^{(B)},$$

$$p_2(t)\to\frac{cg+h}{2g-k}=p_2^{(B)}.$$

Таким образом получено аналитическое решение неоднородной системы (8.10.3), (8.10.4) и доказана устойчивость равновесия Бертрана. Имеем ситуацию, аналогичную случаям равновесия Курно и Штакельберга.

Рисунок 8.42 наглядно демонстрирует, как текущие цены $p_2(0)$, $p_2(2)$, ... приближаются к цене $p_2^{(B)}$, а текущие цены $p_1(1)$, ... приближаются к цене $p_1^{(B)}$.

8.10.4. Если прибыль $PR_1 = \tau_1$, то соответствующая изопрофита l_{τ_1} первой фирмы имеет уравнение $(p_1 - c)(h - gp_1 + kp_2) - d_1 = \tau_1$.

Положим

$$F(p_1, p_2) = p_1 h - ch - gp_1^2 + cgp_1 + kp_2 p_1 - kcp_2,$$

тогда уравнение изопрофиты l_{τ_1} перепишется так:

$$F(p_1, p_2) = \tau_1 + d_1.$$

Имеем

$$\frac{\partial F(p_1, p_2)}{\partial p_1} = h - 2gp_1 + cg + kp_2, \quad \frac{\partial F(p_1, p_2)}{\partial p_2} = kp_1 - kc = k(p_1 - c).$$

Если $p_1 - c > 0$, то уравнение $F(p_1, p_2) = \tau_1 + d_1$ изопрофиты l_{τ_1} определяет p_2 как неявную функцию переменной p_1. По теореме о неявной функции

$$\frac{dp_2}{dp_1} = -\frac{\dfrac{\partial F(p_1, p_2)}{\partial p_1}}{\dfrac{\partial F(p_1, p_2)}{\partial p_2}} = -\frac{h - 2gp_1 + cg + kp_2}{k(p_1 - c)}.$$

Условие первого порядка в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{dp_2}{dp_1} = 0, \quad \text{т.е.} \quad h - 2gp_1 + cg + kp_2 = 0,$$

откуда следует, что

$$p_1 = \frac{k}{2g} p_2 + \frac{h + cg}{2g},$$

что представляет собой функцию $R_1(p_2)$ реакции первой фирмы.

При $p_1 < \frac{h}{2g}p_2 + \frac{h+cg}{2g}$ имеем $\frac{dp_2}{dp_1} < 0$, при $p_1 > \frac{h}{2g}p_2 + \frac{h+cg}{2g}$ имеем $\frac{dp_2}{dp_1} > 0$, т.е. выполнено первое достаточное условие минимума для изопрофиты l_{τ_1} первой фирмы, откуда следует, что изопрофита $PR_1 = \tau_1$ первой фирмы пересекает линию реакции $R_1(p_2)$ в своей самой низкой точке, т.е. в минимальной точке.

На основании теоремы о неявной функции

$$\frac{d^2 p_2}{dp_1^2} = 2\frac{-gp_1 + h + kp_2}{k(p_1 - c)^2}.$$

Неравенство

$$\frac{d^2 p_2}{dp_1^2} > 0 \tag{8.10.5}$$

является достаточным условием выпуклости вниз изопрофиты $PR_1 = \tau_1$ первой фирмы. Неравенство (8.10.5) эквивалентно неравенству $-gp_1 + h + kp_2 > 0$, множество решений которого состоит из всех точек (p_1, p_2), расположенных левее и выше прямой $-gp_1 + h + kp_2 = 0$, уравнение которой можно переписать так: $p_1 = \frac{k}{g}p_2 + \frac{h}{g}$. Если $c < \frac{h}{g}$, то прямая $p_1 = \frac{k}{g}p_2 + \frac{h}{g}$ расположена выше (по оси Op_1) прямой $R_1(p_2)$ и имеет более крутой наклон относительно оси Op_2, чем прямая $R_1(p_2)$, имеющая уравнение

$$p_1 = \frac{k}{2g}p_2 + \frac{h+cg}{2g}$$

(рис. 8.43).

Таким образом, все изопрофиты $PR_1 = \tau_1$ первой фирмы есть линии, выпуклые вниз к оси Op_1, которые пересекают линию $R_1(p_2)$ реакции первой фирмы в своих самых низких точках. Аналогично все изопрофиты $PR_2 = \tau_2$ второй фирмы есть линии, выпуклые влево к оси Op_2, которые пересекают линию $R_2(p_1)$ реакции второй фирмы в своих самых крайних левых точках (рис. 8.44).

При движении по линии реакции $R_1(p_2)$ вверх мы переходим на изопрофиты первой фирмы, которые соответствуют все большим значениям прибыли первой фирмы. Это обстоятельство естественным образом аргументируется как содержательными (чем выше цены, тем выше прибыль фирмы), так и формальными (можно найти

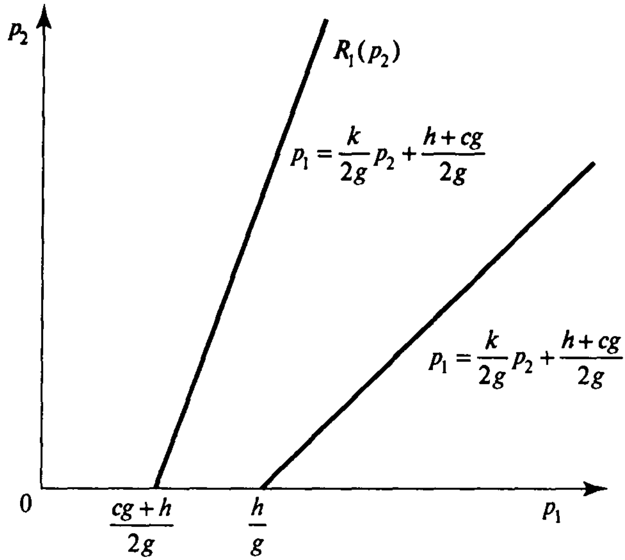


Рис. 8.43

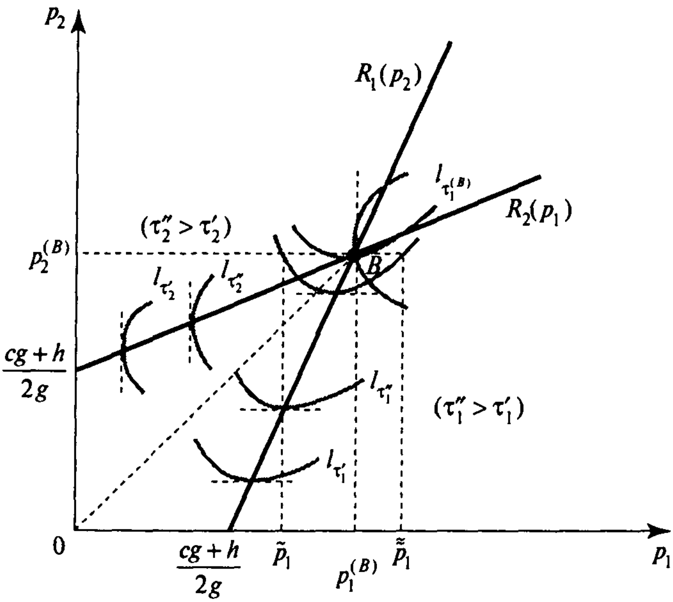


Рис. 8.44

производную прибыли PR_1 по направлению линии $R_1(p_2)$ реакции первой фирмы в любой ее точке) соображениями (см. рис. 8.44). Для изопрофит второй фирмы ситуация аналогичная (см. рис. 8.44).

Сопоставление дуополии Бертрана с дуополией Курно показывает, что эти дуополии представляют собой антиподы. В случае дуополии Курно линии реакции фирм являются нисходящими, изопрофиты выпуклы вверх и вправо и с ростом прибыли фирм изопрофиты перемещаются вниз и влево.

В случае дуополии Бертрана линии реакции фирм являются восходящими, изопрофиты выпуклы вниз и влево и с ростом прибыли фирм изопрофиты перемещаются вверх и вправо.

8.10.5. Проиллюстрируем суть равновесия Бертрана $B=(p_1^{(B)}, p_2^{(B)})$ как частный случай равновесия Нэша на рис. 8.44. Если фирма устанавливает цену $p_2^{(B)}$, а первая фирма уменьшает свою цену (с $p_1^{(B)}$ до $\tilde{p}_1$) или увеличивает ее (с $p_1^{(B)}$ до $\tilde{\tilde{p}}_1$), то первая фирма уменьшает свою прибыль, переходя с изопрофиты $l_{\tau_1^{(B)}}$ ($\tau_1^{(B)}$ – прибыль первой фирмы, если фирма устанавливает цену $p_1^{(B)}$) на более низкую изопрофиту (содержащую точки $(\tilde{p}_1, p_2^{(B)})$, $(\tilde{\tilde{p}}_1, p_2^{(B)})$). Это означает, что первой фирме в одиночку не выгодно менять цену $p_1^{(B)}$, если вторая фирма не меняет свою цену $p_2^{(B)}$. Ситуация, когда первая фирма не меняет цену $p_1^{(B)}$, а вторая фирма меняет цену $p_2^{(B)}$, анализируется аналогично. Таким образом, равновесие Бертрана $B=(p_1^{(B)}, p_2^{(B)})$ есть равновесие Нэша.

В случае когда параметры функции спроса обеих фирм отличаются между собой:

$$y_1 = h_1 - g_1 p_1 + k_1 p_2, \quad y_2 = h_2 - g_2 p_2 + k_2 p_1,$$

аналитические построения усложняются, но качественный характер результатов существенно не корректируется.

Напомним, что задача оценки параметров функций спроса как отдельных фирм, так и рыночного спроса (в частности, в случаях Курно и Бертрана) представляет собой, как правило, серьезную прикладную проблему.

При переходе от дуополии к олигополии Бертрана ситуация качественным образом сильно не изменится. В случае однородной продукции развитие рынка идет в режиме ценовой войны, в которой все фирмы в конце концов установят цену на уровне предельных издержек и олигополия превратится в рынок чистой конкуренции. Общий объем выпуска определяется линией рыночного спроса и равен $\frac{a-c}{b}$, объем выпуска каждой фирмы при этом будет равняться n-й части общего объема, т.е. $\frac{a-c}{nb}$. Напомним, олигополия Курно переходит в рынок чистой конкуренции только в случае, когда $n \to +\infty$.

В случае дифференцированной продукции (как и в случае дуополии) вводится понятие равновесия по Бертрану и демонстрируется его устойчивость.

Вопросы для самоконтроля к главе 8

1. Что представляют собой условия первого и второго порядка для задачи максимизации фирмой-монополистом своей прибыли?
2. Что представляет собой геометрическая интерпретация условия второго порядка для задачи максимизации фирмой-монополистом своей прибыли?
3. Что такое производственный период и временной промежуток в задаче максимизации фирмой-монополистом своей прибыли?
4. Что такое краткосрочный и долговременный промежутки в задаче максимизации фирмой-монополистом своей прибыли? В чем сходство и различие этих понятий?
5. Что представляет собой достаточное условие ухода фирмы-монополиста со своего рынка в случае краткосрочного промежутка? Ответ обоснуйте.
6. Каким образом фирма-монополист выбирает «оптимальный» вариант своего функционирования в текущем периоде в случае долговременного промежутка?
7. Что такое монопольная власть? Что представляют собой три источника монопольной власти?
8. Чему равен индекс Лернера монопольной власти?
9. Как на индекс Лернера фирмы влияют линия спроса и эластичность спроса на продукцию фирмы?
10. Чему равен индекс Хиршмана–Херфиндаля концентрации фирм на рынке?
11. Что такое естественная монополия?
12. Что представляет собой второе наилучшее решение регулирования естественной монополии? Какие существуют альтернативные варианты регулирования естественной монополии?
13. Что такое конкуренция по Демзетцу?

14. Что такое ценовая дискриминация первого рода? Идеальная ценовая дискриминация? (Приведите примеры фрагментов экономической реальности, которые допускают использование ценовой дискриминации первого рода.)
15. Что представляет собой условие участия потребителя в рыночной ситуации? Дайте содержательную экономическую интерпретацию величин, фигурирующих в условии участия.
16. Что такое оптимальный контракт между фирмой-монополистом и потребителем? Дайте содержательную экономическую интерпретацию координатам оптимального контракта.
17. Что представляют собой линейная схема ценообразования (линейный тариф) и нелинейная схема ценообразования (нелинейный тариф)? Что такое двухкомпонентный тариф?
18. Какова взаимосвязь между максимальной прибылью фирмы-монополиста, не использующей и использующей ценовую дискриминацию первого рода (в случае предельных издержек)?
19. Что такое совокупная дополнительная прибыль фирмы-монополиста?
20. Что такое ценовая дискриминация второго рода? (Приведите примеры фрагментов экономической реальности, которые допускают использование ценовой дискриминации второго рода.)
21. Что такое пакетная (ценовая) дискриминация?
22. Что такое условие самовыявления потребителя?
23. Задача максимизации прибыли монополии в случае пакетной дискриминации. Постановка задачи и ее решение.
24. Сформулируйте постановку и решение задачи максимизации в случае двухкомпонентного тарифа.
25. Приведите результаты сравнительного анализа максимизации прибыли фирмы-монополиста в случае пакетной дискриминации и двухкомпонентного тарифа.
26. Какова взаимосвязь между максимальной прибылью фирмы-монополиста, не использующей и использующей ценовую дискриминацию второго рода (в случае постоянных предельных издержек)?
27. Какова взаимосвязь между ценовыми дискриминациями первого и второго рода?
28. Что такое ценовая дискриминация третьего рода? (Приведите примеры фрагментов экономической реальности, которые допускают использование ценовой дискриминации третьего рода.)
29. Чему равна максимальная прибыль фирмы-монополиста, использующей ценовую дискриминацию третьего рода на двух рыночных сегментах (в случае постоянных и непостоянных предельных издержек)?
30. Какова взаимосвязь между ценами фирмы-монополиста на двух рыночных сегментах и между эластичностями спроса по этим ценам?

31. Для описания функционирования каких фрагментов экономической реальности целесообразно использовать модель монополистической конкуренции?
32. Что представляет собой модель двух линий спроса фирмы, функционирующей в условиях монополистической конкуренции?
33. Как фирма, функционирующая в условиях монополистической конкуренции, решает задачу максимизации своей прибыли в случае краткосрочного промежутка?
34. Как фирма, функционирующая в условиях монополистической конкуренции, решает задачу максимизации своей прибыли в случае долговременного промежутка?
35. Как фирма решает задачу максимизации своей прибыли в случае учета расходов на рекламу?
36. Могут ли меры по стимулированию спроса путем расходов на рекламу привести к снижению цены на продукцию фирмы и повышению ее прибыли? (Ответ обоснуйте с помощью геометрических построений.)
37. Могут ли меры по стимулированию спроса путем расходов на рекламу привести к повышению цены на продукцию фирмы и снижению ее прибыли? (Ответ обоснуйте с помощью геометрических построений.)
38. Могут ли меры по стимулированию спроса путем расходов на рекламу привести к снижению цены на продукцию фирмы и снижению ее прибыли? (Ответ обоснуйте с помощью геометрических построений.)
39. Могут ли меры по стимулированию спроса путем расходов на рекламу привести к повышению цены на продукцию фирмы и повышению ее прибыли? (Ответ обоснуйте с помощью геометрических построений.)
40. Может ли выпуск фирмы упасть в результате принятых ею мер по стимулированию спроса путем расходов на рекламу? (Ответ обоснуйте с помощью геометрических построений.)
41. Что представляет собой основная предпосылка Курно в модели дуополии Курно? (Дайте экономическую интерпретацию этой предпосылки.)
42. Что представляет собой функция реакции и линия реакции фирмы на выпуск другой фирмы в дуополии Курно? (Рассмотрите статический и динамический варианты.)
43. Что представляет собой изопрофита фирмы в модели количественной дуополии? Какая существует взаимосвязь между изопрофитами и линиями реакции фирм в дуополии Курно?
44. Что такое равновесие Курно в случае двух фирм? (Дайте геометрическую интерпретацию.) Докажите, что равновесие Курно – это частный случай равновесия Нэша.

45. Как выглядят результаты сопоставления цены, общего выпуска и максимальной прибыли дуополии Курно с ценами, общим выпуском и общей прибылью в случае чистой конкуренции и чистой монополии?
46. Что представляет собой статический и динамический варианты функций (линий) реакции в случае дуополии Курно?
47. Что понимается под устойчивостью равновесия Курно? (Дайте геометрическое пояснение и аналитическое обоснование.)
48. Что представляет собой модель олигополии Курно?
49. Как определяется равновесие олигополии Курно?
50. Как выглядят результаты сопоставления цен, общего выпуска и максимальной прибыли олигополии Курно, когда число n фирм олигополии равно $n = 1$ (случай чистой монополии), $n = 2$ (случай дуополии), $n \to +\infty$ (случай чистой конкуренции)?
51. Чему равен индекс Лернера олигополии Курно? Чем определяется индекс Лернера олигополии Курно?
52. В чем экономическая суть предпосылок Штакельберга о поведении фирм дуополии в производственном периоде?
53. Как определяется равновесие Штакельберга в случае дуополии?
54. Как выглядят основные характеристики равновесия по Штакельбергу в случае дуополии (выпуски обеих фирм, цена равновесия, максимальная прибыль каждой фирмы, суммарная максимальная прибыль)?
55. Как выглядят результаты сопоставления основных характеристик равновесий Курно и Штакельберга в случае дуополии (выпуски обеих фирм, цены равновесия, максимальная прибыль каждой фирмы, суммарная максимальная прибыль)?
56. Что представляют собой изопрофиты обеих фирм в равновесии Курно и Штакельберга?
57. Что представляют собой статический и динамический варианты функций (линий) реакции фирм в случае дуополии Штакельберга?
58. Что понимается под устойчивостью равновесия Штакельберга? (Дайте геометрическое и аналитическое обоснования.)
59. Как выглядят основные характеристики равновесия Штакельберга в случае дуополии, в которой фирмы имеют разные предельные издержки?
60. Что представляет собой модель олигополии Штакельберга?
61. Как определяется равновесие олигополии Штакельберга?
62. Как выглядят результаты сопоставления цен, выпусков и значений максимальной прибыли олигополии Штакельберга, где число n фирм олигополии меняется от двух до бесконечности?
63. Как выглядят результаты сопоставления основных характеристик равновесия по Курно и по Штакельбергу в случае олигополии?

64. Что представляет собой модель сговора в случае двух (и большего числа) фирм?
65. Как выглядят основные характеристики равновесия дуополии (олигополии) в случае сговора (общий выпуск фирм, цена, общая максимальная прибыль)? Покажите на примере неустойчивость равновесия в случае сговора.
66. Что представляют собой изопрофиты фирм в равновесии в случае сговора двух фирм?
67. Как выглядят результаты сопоставления основных характеристик равновесия по Курно и по Штакельбергу в случае сговора для двух (и большего числа) фирм?
68. Как формулируются основные предпосылки модели дуополии Бертрана в случае недифференцированных и дифференцированных продуктов?
69. Как выглядит линия спроса на продукцию фирмы в случае дуополии Бертрана? Ответ обоснуйте.
70. В чем суть парадокса Бертрана?
71. Как определяется равновесие по Бертрану в случае дифференцированных продуктов для двух фирм?
72. Что представляют собой статический и динамический варианты функций (линий) реакции фирм в случае дуополии Бертрана?
73. Что понимается под устойчивостью равновесия по Бертрану? (Дайте геометрическое и аналитическое обоснование.)
74. Что представляют собой изопрофиты обеих фирм в модели ценовой дуополии?
75. Как выглядят результаты сопоставления основных характеристик равновесия (для двух (и большего числа) фирм) Курно, Штакельберга, Бертрана, а также в случае чистой конкуренции ($n \to +\infty$) и чистой монополии ($n = 1$)?

Задачи и упражнения для самоконтроля к главе 8

1. У фирмы-монополиста функция AC имеет вид $AC(y) = 0{,}25(y-2)^2 + 9{,}25$. Функция $AR(y) = 10 - (y/3)$:
   а) определите: функции MC и MR, а также $y^{(m)}$ и $p^{(m)}$, при которых $PR^{(m)}$ будет максимальной;
   б) дайте геометрическую интерпретацию функциям $AC(y)$, $MC(y)$, $AR(y)$, $MR(y)$, а также величинам $y^{(m)}$, $p^{(m)}$, $R(y^{(m)})$, $C(y^{(m)})$ и $PR(y^{(m)})$.
2. Эластичность спроса на продукцию фирмы равна: а) $E_d = -4$; б) $E_d = 6$. Определите индекс Лернера монопольной власти фирмы в случаях а) и б).

3. Предельные издержки MC фирмы равны $MC = 10$, а цена (p) одной единицы продукции фирмы равна 15. Определите индекс Лернера монопольной власти фирмы.
4. Максимальная прибыль фирмы равна 1000 д.е., доход фирмы составляет 6000 д.е. Определите индекс Лернера монопольной власти фирмы.
5. Максимальная прибыль фирмы равна 2000 д.е., объем продукции фирмы равен 1000 д.е., каждая из которых реализуется по цене, равной 5 д.е. Определите индекс Лернера монопольной власти фирмы.
6. На рынке функционируют 10 фирм, имеющих следующие рыночные доли: $s_1 = 0{,}2$, $s_2 = s_3 = 0{,}15$, $s_4 = s_5 = s_6 = 0{,}1$, $s_7 = s_8 = s_9 = s_{10} = 0{,}05$. Найдите индекс Хиршмана – Херфиндаля концентрации фирм на рынке.
7. Средние издержки $AC(y)$ естественной монополии имеют вид $AC(y) = 3y^{-1/2}$:
   а) определите предельные издержки $MC(y)$;
   б) решите задачу максимизации прибыли $PR^{(m)}$ естественной монополии, определите $y^{(m)}$, $p^{(m)}$, а также $PR^{(m)}$;
   в) определите $y^{(r)}$, $p^{(r)}$, и $PR^{(r)} = p^{(r)}y^{(r)} - C(y^{(r)})$ (см. рис. 8.11);
   г) определите $y^{(\bar{n})}$, $p^{(\bar{n})}$, и $PR^{(c)} = p^{(c)}y^{(c)} - C(y^{(c)})$ (см. рис. 8.11).
8. Средний доход $AR(y)$ фирмы-монополиста имеет вид $AR = 60 - (y/2)$, предельные издержки $MC(y)$ постоянны и равны $MC(y) = 25$:
   а) решите задачу максимизации прибыли фирмы, определив $y^{(m)}$, $p^{(m)}$ и $PR^{(m)}$;
   б) определите прибыль фирмы, если она применяет ценовую дискриминацию первого рода.
9. Фирма-монополист имеет два сегмента рынка, на каждом из которых функция, обратная к функции спроса, имеет вид $AR_1 = 18 - y_1$ и $AR_2 = 24 - 2y_2$. Предельные издержки фирмы постоянны и равны $MC = 13$:
   а) определите выпуск $y_1^{(m)}$, цену $p_1^{(m)}$ и максимальную прибыль $PR_1^{(m)}$ фирмы в первом сегменте;
   б) определите выпуск $y_2^{(m)}$, цену $p_2^{(m)}$ и максимальную прибыль $PR_2^{(m)}$ фирмы во втором сегменте;
   в) определите суммарный выпуск $y = y_1^{(m)} + y_2^{(m)}$ и суммарную прибыль $PR = PR_1^{(m)} + PR_2^{(m)}$;
   г) выпишите уравнение линии рыночного спроса AR (путем сложения по горизонтали линий спроса AR_1 и AR_2) и линии предельного дохода MR. Постройте эти линии AR и MR;
   д) определите выпуск $y^{(m)}$, цену $p^{(m)}$ и максимальную прибыль $PR^{(m)}$ фирмы в условиях отсутствия ценовой дискриминации третьего рода;
   е) сопоставьте величины y и $y^{(m)}$, а также PR и $PR^{(m)}$ и сделайте содержательные выводы на основании результатов сопоставления.

10. Фирма-монополист имеет два сегмента рынка, в каждом из которых функция, обратная к функции спроса, имеет вид $AR_1 = 18 - y_1$ и $AR_2 = 24 - 2y_2$. Предельные издержки фирмы равны $MC = 12 + \frac{14}{9}y$:
   а) постройте линии AR_1 и AR_2;
   б) выпишите уравнения линий MR_1 и MR_2 и постройте их;
   в) выпишите уравнение линии $MR = MR_1 + MR_2$ и постройте ее;
   г) далее выполните все пункты а)–е) предыдущей задачи 2.
11. Дайте геометрическую интерпретацию ситуации, когда меры по стимулированию спроса путем расходов на рекламу приводят к повышению цены и прибыли.
12. Обоснуйте прохождение изопрофиты, соответствующей максимальной прибыли $\widehat{PR}^{(sl1)}$, через точку $F = \left(\frac{a-c}{4b}, \frac{a-c}{4b}\right)$. Дайте геометрическую интерпретацию.
13. Найдите производную функции
$$y_2 = \frac{a-c}{b} - y_1 - \frac{1}{8}\frac{(a-c)^2}{b^2}\frac{1}{y_1},$$
графиком которой является изопрофита, соответствующая максимальной прибыли $\widehat{PR}^{(sl1)}$, в точке $y_1 = \frac{a-c}{4b}$. Дайте геометрическую интерпретацию.
14. Докажите, что изопрофиты, соответствующие максимальным прибылям $\widehat{PR}_1^{(sl1)}$ и $\widehat{PR}_2^{(sl1)}$, касаются в точке $F = \left(\frac{a-c}{4b}, \frac{a-c}{4b}\right)$. Дайте геометрическую интерпретацию.
15. Найдите для изопрофиты $l_1(t_1^*)$ dy_2/dy_1 в точке ее пересечения с контрактной прямой $y_1 + y_2 = \frac{a-c}{2b}$. Найдите для изопрофиты $l_2(t_2^*)$ dy_2/dy_1 в точке ее пересечения с контрактной прямой $y_1 + y_2 = \frac{a-c}{2b}$.
16. В отрасли с функцией (отраслевого) спроса $Y = 2000 - 30p$ функционируют 100 фирм, которые выпускают однородный продукт и каждая из которых имеет функцию предельных издержек, равную $MC = 20 + y$. Здесь Y – объем отраслевого выпуска; y – объем выпуска каждой фирмы; p – цена одной единицы выпускаемой фирмами продукции. Все эти величины «привязаны» к одному производственному периоду (равному, например, одному году) (расчеты во всех пунктах проводите с тремя знаками после запятой):

а) пусть все фирмы отрасли объединились в картель. Картель максимизирует суммарную прибыль.

Определите рыночную цену одной единицы продукции фирм, выпуск (отраслевого) картеля, его максимальную прибыль, выпуск каждой фирмы, индекс Лернера картеля. Дайте геометрическую интерпретацию для этого пункта;

б) пусть каждая фирма отрасли максимизирует прибыль в условиях чистой конкуренции.

Определите рыночную цену одной единицы продукции фирм, выпуск каждой фирмы, максимальную прибыль каждой фирмы, отраслевой выпуск, максимальную отраслевую прибыль. Дайте геометрическую интерпретацию этого пункта;

в) пусть 25 фирм отрасли объединились в картель, а остальные фирмы образуют конкурентное окружение картеля и действуют как фирмы-последователи. Найдите рыночную цену одной единицы продукции фирм, выпуск и прибыль каждой фирмы конкурентного окружения, картеля, всей отрасли, индекс Лернера для картеля. Дайте геометрическую интерпретацию этого пункта;

г) пусть 50 фирм отрасли объединились в картель, а остальные фирмы образуют конкурентное окружение картеля и действуют как фирмы-последователи. Найдите рыночную цену одной единицы продукции фирм, выпуск и прибыль каждой фирмы конкурентного окружения, картеля, всей отрасли, индекс Лернера для картеля. Дайте геометрическую интерпретацию этого пункта;

д) пусть 75 фирм отрасли объединились в картель, а остальные фирмы образуют конкурентное окружение картеля и действуют как фирмы-последователи. Найдите рыночную цену одной единицы продукции фирм, выпуск и прибыль каждой фирмы конкурентного окружения, картеля, всей отрасли, индекс Лернера для картеля. Дайте геометрическую интерпретацию этого пункта.

Вопросы и тесты для контрольных работ к главе 8

1. Функция, обратная к функции спроса на продукцию монополии, имеет вид $p = a - by$. Пусть $y^{(m)}$ и $\bar{y}^{(m)}$ – выпуски монополии, которые соответственно максимизируют прибыль монополии и ее доход. Тогда:
   а) $y^{(m)} > \bar{y}^{(m)}$;
   б) $y^{(m)} = \bar{y}^{(m)}$;
   в) $y^{(m)} < \bar{y}^{(m)}$;
   г) нет однозначного ответа.
2. Точка E пересечения линий MR и MC фирмы-монополиста определяет объем выпуска $y^{(m)}$, максимизирующий ее прибыль, если:
   а) касательные линий MR и MC в точке E совпадают;
   б) касательная к линии MC в точке E более пологая относительно горизонтальной оси Oy, чем касательная к линии MR в этой точке;

в) касательная к линии MR в точке E более пологая относительно горизонтальной оси Oy, чем касательная к линии MC в этой точке;
г) нет однозначного ответа.

3. Индекс Лернера монопольной власти равен:
а) $\dfrac{p^{(m)} - MC(y^{(m)})}{p^{(m)}}$;
б) норме прибыли фирмы (т.е. отношению максимальной прибыли фирмы к ее доходу);
в) отношению средней прибыли фирмы к цене $p^{(m)}$;
г) варианты а)–в) верны;
д) варианты а)–в) не верны.

4. С ростом числа фирм на рынке индекс Хиршмана – Херфиндаля:
а) возрастет;
б) становится сколь угодно малым;
в) варианты а) и б) верны;
г) нет однозначного ответа.

5. Для регулирования естественной монополии второе наилучшее решение означает, что для определения объема выпуска продукции и цены выбирается:
а) точка пересечения линий $MR(y)$ и $MC(y)$;
б) точка пересечения линий $AC(y)$ и $AR(y)$;
в) точка пересечения линий $MC(y)$ и $AR(y)$;
г) варианты а)–в) не верны.

6. Если фирма-монополист имеет постоянные предельные издержки, то:
а) ценовая дискриминация первого рода представляет собой асимптотический непрерывный вариант дискретной дискриминации второго рода;
б) ценовая дискриминация первого рода представляет собой асимптотический непрерывный вариант дискретной дискриминации третьего рода;
в) ценовая дискриминация второго рода есть частный случай ценовой дискриминации третьего рода;
г) ценовая дискриминация третьего рода есть частный случай ценовой дискриминации второго рода;
д) все варианты а)–г) не верны.

7. Если фирма-монополист имеет растущие предельные издержки $MC(y)$, то при ценовой дискриминации третьего рода:
а) объем $y_1^{(m)}$, максимизирующий прибыль фирмы в первом сегменте, строго больше объема $\bar{y}_1^{(m)}$, который представляет собой абсциссу точки пересечения линии предельного дохода $MR_1(y)$ фирмы в первом сегменте с линией предельных издержек $MC(y)$ фирмы;

б) объем $y_2^{(m)}$, максимизирующий прибыль фирмы в первом сегменте, строго больше объема $\bar{y}_2^{(m)}$, который представляет собой абсциссу точки пересечения линии предельного дохода $MR_2(y)$ фирмы в первом сегменте с линией предельных издержек $MC(y)$ фирмы;

в) объем $y_1^{(m)}$, максимизирующий прибыль фирмы в первом сегменте, строго меньше объема $\bar{y}_1^{(m)}$, который представляет собой абсциссу точки пересечения линии предельного дохода $MR_1(y)$ фирмы в первом сегменте с линией предельных издержек $MC(y)$ фирмы;

г) объем $y_2^{(m)}$, максимизирующий прибыль фирмы во втором сегменте, строго меньше объема $\bar{y}_2^{(m)}$, который представляет собой абсциссу точки пересечения линии предельного дохода фирмы в первом сегменте с линией предельных издержек $MC(y)$ фирмы;

д) оба варианта б) и в) верны;

е) оба варианты в) и г) верны.

8. Фирма, функционирующая в условиях монополистической конкуренции, имеет две линии спроса, ибо:

а) продукт этой фирмы сильно отличается от продуктов, выпускаемых другими фирмами;

б) продукт этой фирмы слабо отличается от продуктов, выпускаемых другими фирмами;

в) другие фирмы не реагируют на изменение цены этой фирмой;

г) другие фирмы реагируют на изменение цены этой фирмой;

д) оба варианта а) и в) верны;

е) оба варианта в) и г) верны.

9. При стимулировании спроса путем рекламной кампании фирма в случае долговременного промежутка:

а) может понизить цену и снизить свою прибыль;

б) может понизить цену и повысить свою прибыль;

в) может повысить цену и повысить свою прибыль;

г) может повысить цену и снизить свою прибыль;

д) все варианты а)—г) верны.

10. Изопрофиты фирмы (скажем, фирмы F_1), функционирующей в дуополии Курно:

а) в своих самых высоких точках пересекают ее линию реакции ($R_1(y_2)$) на выпуск другой фирмы;

б) пересекают ее линию реакции ($R_1(y_2)$) на выпуск другой фирмы в своих самых высоких точках;

в) при движении вдоль линии реакции ($R_1(y_2)$) сверху вниз переходят от изопрофит с большей прибылью к изопрофитам с меньшей прибылью;

г) в точках пересечения с линией реакции ($R_1(y_2)$) имеют вертикальные касательные.

11. Изопрофита первой фирмы, проходящая через точку равновесия $E^{(sl1)}$:
  а) касается изопрофиты второй фирмы, проходящей через точку равновесия $E^{(sl2)}$;
  б) касается изопрофиты второй фирмы, проходящей через точку $E^{(cou)}$;
  в) расположена выше изопрофиты первой фирмы, проходящей через точку $E^{(cou)}$.
12. Изопрофиты фирмы (скажем, фирмы F_1), функционирующей в дуополии Бертрана:
  а) пересекают ее линию реакции ($R_1(p_2)$) в своих самых высоких точках;
  б) пересекают ее линию реакции ($R_1(p_2)$) в своих самых низких точках;
  в) при движении вдоль линии реакции ($R_1(p_2)$) сверху вниз осуществляется переход от изопрофит с меньшей прибылью к изопрофитам с большей прибылью;
  г) в точках пересечения с линией реакции ($R_1(p_2)$) имеют вертикальные касательные.

Задачи для контрольных работ к главе 8

1. Фирма-монополист имеет два сегмента рынка, в каждом из которых функция спроса имеет вид $y_1 = 18 - p$, $y_2 = 24 - 2p$. Предельные издержки фирмы постоянные и равны $MC = 10$:
  а) постройте линии AR_1 и AR_2;
  б) выпишите уравнения линий MR_1 и MR_2 и постройте их;
  в) определите выпуски $y_1^{(m)}$, $y_2^{(m)}$, цены $p_1^{(m)}$, $p_2^{(m)}$ и максимальные значения прибыли $PR_1^{(m)}$ и $PR_2^{(m)}$ в каждом из сегментов;
  г) определите суммарный выпуск $y = y_1^{(m)} + y_2^{(m)}$ и суммарную прибыль $PR = PR_1^{(m)} + PR_2^{(m)}$;
  д) выпишите уравнение рыночного спроса AR (путем суммирования по горизонтали линий спроса AR_1 и AR_2) и линии предельного дохода MR. Постройте эти линии AR и MR;
  е) определите выпуск $y^{(m)}$, цену $p^{(m)}$ и максимальную прибыль $PR^{(m)}$ фирмы в условиях отсутствия ценовой дискриминации третьего рода;
  ж) сопоставьте величины y и $y^{(m)}$, а также PR и $PR^{(m)}$ и сделайте содержательные выводы на основании результатов сопоставления.
2. Фирма-монополист имеет два сегмента рынка, на каждом из которых функция спроса имеет вид $y_1 = 18 - p$, $y_2 = 24 - 2p$. Предельные издержки фирмы равны $MC = \frac{5}{6}y$:
  а) постройте линии AR_1 и AR_2;

б) выпишите уравнения линий MR_1 и MR_2 и постройте их;

в) выпишите уравнения линии $MR = MR_1 + MR_2$ и постройте ее;

г) далее выполните все пункты в)–ж) предыдущей задачи 1.

3. Дайте геометрическую интерпретацию ситуации, когда меры по стимулированию спроса путем расходов на рекламу приводят к падению и цены, и прибыли фирмы.
4. Проанализируйте случай дуополии, когда $dy_1/dy_2 = 0$ (случай Курно) и когда $dy_2/dy_1 = h$ (при $h = -^1/_2$ имеем случай Штакельберга).
5. Докажите, что изопрофиты обеих фирм, проходящие через точку $E^{(Cou)}$, пересекаются также в точке F с координатами $\left(\frac{a-c}{6b}; \frac{a-c}{6b}\right)$.

Глава 9

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕКООПЕРАТИВНЫХ ИГР

9.1. Некоторые понятия теории игр и их краткая характеристика

ч **9.1.1.** В теории игр описываются и анализируются ситуации принятия решений о своих действиях (ходах) несколькими взаимодействующими индивидуумами, называемыми игроками. Такие ситуации появляются в экономике, политике, учебном процессе и во многих других областях человеческой (и не только человеческой) деятельности. Многие задачи микроэкономики удобно формулировать и исследовать, используя язык и аппарат математической теории игр, которая в настоящее время представляет собой достаточно обширный раздел современной математики.

Специфика микроэкономических задач обусловливает отбор таких положений математической теории игр, которые в наибольшей степени сочетались бы с этой спецификой.

Существует достаточно подробная классификация составных частей теории игр. Одним из самых общих критериев такой классификации является деление теории игр на теорию некооперативных игр, в которых субъектами принятия решений являются собственно индивидуумы, и теорию кооперативных игр, в которых субъектами принятия решений являются группы, или коалиции индивидуумов. На сегодняшний день в панораме использования теоретико-игрового подхода для описания и решения микроэкономических задач многие авторы отдают предпочтение некооперативной теории игр.

В настоящей главе приведены основы теории некооперативных игр. Для первоначального знакомства и изучения теории кооперативных игр можно рекомендовать главу шестую книги М. Интрилигатора (1975, 2002).

9.1.2. Некооперативные игры обычно представляют в нормальной (стратегической) и развернутой (экстенсивной) формах. Важным является вопрос о переходе описания игры от одной формы к другой. В главе дано описание статических игр с полной и неполной информацией. В статических играх индивидуумы принимают решения о своих действиях (своих ходах) независимо друг от друга в течение одного фиксированного периода времени. При переходе от нормальной формы статической игры к ее развернутой форме появляется важное понятие информационного множества игрока, которое позволяет формально описать состояние неопределенности игрока в связи с тем, что он не знает, какой конкретно ход будет сделан другим (другими) игроком (игроками). Много внимания в главе уделено важному частному случаю статических игр с полной информацией в нормальной форме – теории биматричных игр, для которых нормальная форма имеет вид двойной матрицы, элементы которой показывают размеры выигрышей игроков, если игроки принимают определенные решения о своих действиях (ходах). Специальный параграф (параграф 9.5) посвящен биматричным играм с матрицами второго порядка.

В динамических играх игроки делают ходы поочередно, т.е. в одном периоде времени принимает решения о своем действии (ходе) один игрок, а в следующем периоде времени принимает решения о своем действии (ходе) другой игрок и т.д.

Для динамических игр наиболее удобной является развернутая (экстенсивная) форма представления, т.е. форма представления игры в виде дерева, вершины которого показывают положение (состояние) игрока, а дуги, выходящие из вершины, показывают его возможные ходы (его возможные действия).

В статической игре каждый игрок, делая ход, получает определенный выигрыш (он может быть как собственно выигрышем, так и проигрышем), который зависит также от ходов, которые сделают другие игроки, т.е. каждый игрок делает ход в условиях полной неопределенности, ибо не знает, какие ходы сделают другие игроки. Естественно, каждый игрок стремится максимизировать свой выигрыш, что непросто сделать в условиях полной неопределенности. Понятие оптимального решения (или просто – решения) игры до сих пор определить не удалось. Поэтому предлагались различные версии понятия решения игры. Основные версии этого понятия будут определены и проанализированы в этой главе (равновесие в доминирующих стратегиях, равновесие Нэша, равновесие Нэша – Байеса).

В случае динамической игры центральным понятием является понятие оптимальной стратегии игрока. Основные версии этого понятия будут определены и проанализированы: равновесие Нэша, совершенное в подыграх равновесие, совершенное байесовское равновесие).

В главе предложены содержательные экономические задачи, для описания и решения которых использовались приведенные основные положения теории игр. Познавательная полезность ряда положений теории игр демонстрируется на приведенных примерах.

9.2. Статические игры с полной информацией в нормальной форме. Биматричные игры

9.2.1. В *статической* игре каждый ее участник (игрок) P принимает решение (делает свой ход, выбирает *стратегию* своего поведения) одновременно с другими игроками в некотором периоде времени, не зная, какие решения принимаются другими участниками (игроками). Отметим, что в этом параграфе понятия «решение игрока», «ход игрока», «стратегия поведения игрока» являются синонимами. Далее понятия «ход игрока», «стратегия поведения игрока» могут иметь разные толкования, что будет специально оговариваться.

Везде в этой главе речь пойдет о случае игры G m лиц ($2 \leq m$ — натуральное число), т.е. о случае игры, в которой участвует конечное число игроков $P_1, ..., P_m$. Символом $I = \{1, ..., m\}$ обозначим множество номеров всех игроков. Каждый игрок P_k, $k = 1, ..., m$, имеет множество S_k своих стратегий, т.е. множество своих возможных действий. Стратегия игрока P_k обозначается символом s_k. Упорядоченный набор $s = (s_1, ..., s_m)$ стратегий $s_1, ..., s_m$, выбранных игроками $P_1, ..., P_m$, соответственно, называется *профилем* стратегий игры G m лиц. Термин *полная информация* означает, что каждый игрок P_k знает множества S_j стратегий всех игроков P_j,

$j=1,...,m$ (в том числе и множество S_k своих стратегий), однако игрок P_k не знает, какие конкретно стратегии выберут все остальные игроки $P_j, j \neq k$. (Понятие «неполная информация» приведено ниже в параграфе 9.8.) Каждый игрок P_k имеет функцию своего выигрыша (функцию полезности) $u_k(s)$, частное значение которой равно выигрышу игрока P_k и зависит не только от стратегии s_k, выбранной игроком P_k, но и от стратегий s_j, выбранных всеми другими игроками P_j, $j \neq k$, т.е. частное значение $u_k(s)$ функции выигрыша игрока P_k зависит от профиля s стратегий игроков $P_1,...,P_m$ игры G. Частные значения функции выигрыша игрока P_k не обязаны иметь стоимостную форму. Предполагается, что каждый игрок P_k должен сам вести себя рационально, т.е. максимизировать (насколько возможно) функцию своего выигрыша.

Описание статической игры G с полной информацией с указанием множества $I=\{1,...,m\}$ всех номеров игроков P_k, множеств S_k стратегий игроков P_k и функций $u_k(s)$ выигрыша игроков P_k, $k=1,...,m$, называется нормальной (стратегической) формой игры G m лиц, т.е. нормальная форма игры G есть представление этой игры в виде

$$G = \langle S_k, u_k(s), k \in I \rangle. \tag{9.2.1}$$

Отметим, что профиль $s=(s_1,...,s_m)$ стратегий игры G m лиц есть элемент декартова произведения $S=S_1 \times ... \times S_m$ множеств стратегий $S_1,...,S_m$ игроков $P_1,...,P_m$ т.е. $s \in S$.

Подчеркнем, что для описания игры G в нормальной форме следует задать:

1) множество номеров всех игроков;
2) множество стратегий каждого игрока;
3) функцию выигрыша каждого игрока на множестве профилей, состоящих из всех стратегий игроков.

Задача теории игр – найти оптимальное решение игры, т.е. определить, какие стратегии выберут игроки, так, чтобы соответствующий профиль стратегий игроков был предпочитаемым некоторым другим или всем профилям стратегий этой игры. Далее эта общая постановка будет уточняться, однако до сих пор в литературе нет конкретного рационального понятия оптимального решения игры.

В параграфе 9.3 описан один из возможных подходов определения профиля стратегий, предпочитаемого остальным профилям стратегий, который опирается на понятие доминирующей (строго доминирующей) стратегии. К сожалению, существование доминирующих (строго доминирующих) стратегий – достаточно редкое явление в теории игр.

В параграфе 9.3 рассматривается также другой подход определения профиля стратегий, предпочитаемого остальным профилям.

9.2.2. *Определение 9.2.1.* Если $m=2$, а множества S_1 и S_2 стратегий игроков P_1 и P_2 конечны, то статическая игра с полной информацией называется ***биматричной игрой.***

Если $m \geq 2$, а множества $S_1, ..., S_m$ стратегий игроков $P_1, ..., P_m$ — конечны, что статическая игра с полной информацией называется конечной.

Биматричная игра может быть представлена двойной матрицей $(A|B)$ (отсюда и термин «биматричная игра»)

$$\begin{array}{ccc} (a_{11};b_{11}) & \cdots & (a_{1n};b_{1n}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_{m1};b_{m1}) & \cdots & (a_{mn};b_{mn}), \end{array} \qquad (9.2.2)$$

построенной на основе матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ (с размерами $m \times n$) которые называются матрицами выигрышей игроков P_1 и P_2 соответственно. Поэтому говорят, что биматричная игра задается матрицами A и B с одинаковыми размерами и обозначается символом $G(A;B)$. Принято считать, что игрок P_1 имеет m стратегий, а игрок P_2 имеет n стратегий. Если игрок P_1 выбирает стратегию с номером i, а игрок P_2 выбирает стратегию с номером j, то выигрыш игрока P_1 будет равен a_{ij}, а выигрыш игрока P_2 будет равен b_{ij} т.е. выигрыши a_{ij} и b_{ij} образуют пару (a_{ij}, b_{ij}), расположенную в двойной матрице $(A|B)$ на пересечении i-й строки и j-го столбца. i-ю строку двойной матрицы $(A|B)$ называют i-й стратегией игрока P_1 (символика: s_1^i), а j-й столбец двойной матрицы $(A|B)$ также называют j-й стратегией игрока P_2 (символика: s_2^j) и наглядно биматричную игру представляют в виде табл. 9.1, в которой двойная матрица $(A|B)$ выделяется двойной рамкой.

Таблица 9.1

		Стратегии игрока P_2		
		s_2^1	...	s_2^n
Стратегии игрока P_1	s_1^1	(a_{11}, b_{11})	...	(a_{1n}, b_{1n})
	.	.	...	.
	s_1^m	(a_{m1}, b_{m1})	...	(a_{mn}, b_{mn})

Множество S_1 стратегий игрока P_1 состоит из всех стратегий $s_1^1,...,s_1^m$ игрока P_1 т.е. $S_1 = \{s_1^1,..., s_1^m\}$. Аналогично множество S_2 стратегий игрока P_2 состоит из всех стратегий s_2^1 ,...,s_2^n игрока P_2, т.е. $S_2 = \{s_2^1,..., s_2^n\}$.

Функция выигрыша игрока P_1 принимает частные значения $a_{ij}=u_1(s_1^i , s_2^j)$, функция выигрыша игрока P_2 принимает частные значения $b_{ij}=u_2 (s_1^i, s_2^j)$.

Таким образом, нормальная форма биматричной игры с матрицами A и B имеет вид

$$G(A,B) = \langle S_1,S_2;A,B\rangle.$$

По существу нормальной формой биматричной игры является двойная матрица (9.2.2), все строки которой представляют все стратегии игрока P_1, все столбцы которой представляют все стратегии игрока P_2, все левые элементы a_{ij} представляют собой все частные значения функции выигрыша игрока P_1, а все правые элементы b_{ij} представляют собой все частные значения функции выигрыша игрока P_2.

Таким образом, формально определенная биматричная игра (см. определение 9.2.1) порождает двойную матрицу (9.2.1). Очевидно, верно и обратное. Любая двойная матрица (9.2.2) с размерами $(m \times n)$ является порождением игры с полной информацией с двумя игроками P_1 и P_2 и с конечными множествами S_l и S_l стратегий игроков P_1 и P_2.

9.3. Равновесие в статических играх с полной информацией

9.3.1. Имеем статическую игру с полной информацией $G=<S_k,u_k,(s),k\in I>$. Для профиля $s=(s_1,...,s_i,...,s_m)$ стратегий $s_1,...,s_i,...,s_m$ игроков $P_1,...,P_i,...,P_m$ используется символика $s= = (s_i; s_{-i})$, где символом s_{-i} обозначен профиль $(s_1,...,s_{i-1},s_{i+1},...,s_m)$ стратегий $s_1,...,s_{i-1},s_{i+1},...,s_m$ игроков $P_1,...P_{i-1}, P_{i+1},...,P_m$. Символом S_{-i} принято обозначать декартово произведение $S_1\times...\times \times S_{i-1}\times S_{i+1}\times S_m$. Переход от профиля стратегий $s = (s_i;s_{-i})$ к профилю стратегий $(s_i';s_{-i})$ означает, что игрок P_i *один* отклонился от профиля стратегий $(s_i;s_{-i})$, т.е. только он один поменял свою стратегию s_i на стратегию s_i'.

Определение 9.3.1. Говорят, что стратегия $s_i \in S_i$ игрока P_i сильно доминирует стратегию $s_i' \in S_i$ игрока P_i, если для любого профиля $s_{-i} \in S_{-i}$ справедливо строгое неравенство $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$.

Если для любого профиля $s_{-i} \in S_{-i}$ справедливо нестрогое неравенство $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$, то говорят, что стратегия s_i игрока P_i *слабо доминирует* стратегию s_i' игрока P_i.

Определение 9.3.2. Стратегия $s_i \in S_i$ игрока P_i называется *сильно доминирующей стратегией* (*сильной доминантой*) игрока P_i, если она сильно доминирует *любую* стратегию из S_i.

Стратегия $s_i \in S_i$ игрока P_i называется *доминирующей стратегией* (*доминантой*) игрока P_i, если она (слабо) доминирует *любую* стратегию из S_i.

Очевидно, если стратегия $s_i \in S_i$ сильно доминирует стратегию $s_i' \in S_i$, то стратегия $s_i \in S_i$ слабо доминирует стратегию $s_i' \in S_i$. Обратное, конечно, неверно. Если стратегия является сильно доминирующей, то она является доминирующей. Здесь также обратное неверно.

Если у игрока P_i есть сильно доминирующая стратегия, то она обязательно единственная (для доказательства следует использовать метод от противного).

Если у каждого игрока P_i, $i=1, ..., m$, есть своя сильно доминирующая стратегия, то, естественно, ее следует принять в качестве оптимальной для этого игрока, а профиль из оптимальных стратегий также естественно назвать оптимальным. Таким образом, в рассматриваемом случае существует единственный оптимальный профиль у игры G из m лиц. Как отмечалось выше, к сожалению, существование доминирующей стратегии у каждого игрока — явление достаточно редкое.

Если у каждого игрока P_i, $i=1, ..., m$, есть (слабо) доминирующая стратегия, она не обязательно является единственной. В этом случае мы также имеем существование оптимального профиля у игры G из m лиц, который может быть не единственным.

Определение 9.3.3. Если стратегия каждого игрока в профиле $s^* \in S$ является его доминирующей стратегией, то профиль s^* называется равновесием в доминирующих стратегиях статической игры G m лиц.

Пример 9.3.1. Рассмотрим известную игру «Голосование». В Законодательном собрании три фракции: правые, центристы и левые. В каждой фракции равное число депутатов. При голосовании по некоторому законопроекту каждая фракция (как единое целое) голосует «за» или «против». Решение принимается большинством голосов. Пусть правые и центристы выступают за принятие законопроекта, а левые – против. Если законопроект будет принят, правые и центристы получают в качестве выигрыша по 1, а левые получают выигрыш (–1), т.е. проигрыш. Если законопроект не будет принят, у каждой фракции выигрыш будет равен нулю.

Обозначим символами P_1, P_2, P_3 соответственно фракции левых, центристов и правых, тогда в профиле $s = (s_1, s_2, s_3)$ s_1 — это стратегия левых, s_2 —стратегия центристов, s_3 — стратегия правых. Определим, существует ли в этой игре профиль равновесия в доминирующих стратегиях.

Первую стратегию (ЗА) игрока P_1 естественно представлять в виде вектора $s_1^1 = (1, 0)$, вторую стратегию (ПР) игрока P_1 естественно представлять в виде вектора $s_1^2 = (0, 1)$.

Аналогично первая стратегия (ЗА) игрока P_2 имеет вид $s_2^1 = (1,0)$, вторая стратегия (ПР) игрока P_2 имеет вид $s_2^2 = (0, 1)$. Для игрока P_3 имеем первую (ЗА) стратегию $s_3^1 = (1, 0)$, вторую (ПР) $s_3^2 = (0, 1)$.

Функция выигрыша $u_1(s_1, s_2, s_3)$ игрока P_1 (фракция левых) принимает следующие частные значения в зависимости от профилей $s = (s_1, s_2, s_3)$:

$$u_1(s_1^1,s_2^1,s_3^1) = -1,\ u_1(s_1^2,s_2^1,s_3^1) = -1\ \left(u_1(s_1^1,s_2^1,s_3^1) = u_1(s_1^2,s_2^1,s_3^1)\right),$$

$$u_1(s_1^1,s_2^2,s_3^1) = -1,\ u_1(s_1^2,s_2^2,s_3^1) = 0\ \left(u_1(s_1^1,s_2^2,s_3^1) < u_1(s_1^2,s_2^2,s_3^1)\right),$$

$$u_1(s_1^1,s_2^1,s_3^1) = -1,\ u_1(s_1^2,s_2^1,s_3^2) = 0\ \left(u_1(s_1^2,s_2^1,s_3^2) < u_1(s_1^2,s_2^1,s_3^2)\right),$$

$$u_1(s_1^1,s_2^2,s_3^2) = 0,\ u_1(s_1^2,s_2^2,s_3^2) = 0\ \left(u_1(s_1^1,s_2^2,s_3^2) = u_1(s_1^2,s_2^2,s_3^2)\right).$$

Профиль $s = (s_1^1, s_2^1, s_3^1)$ стратегий s_1^1, s_2^1, s_3^1 означает, что каждый из игроков P_1, P_2, P_3 выбирает свою первую стратегию (т.е. голосует ЗА). В этом случае законопроект проходит, и поэтому частное значение $u = (s_1^1, s_2^1, s_3^1)$ функции выигрышей игрока P_1 равно (–1). Аналогично поясняются остальные частные значения функции выигрышей игрока P_1.

Из равенств и неравенств для частных значений функции выигрыша игрока P_1 вытекает, что стратегия s_1^2 (ПР) для игрока P_1 (фракция левых) является доминирующей.

Функция выигрыша $u_2(s_1, s_2, s_3)$ игрока P_2 (фракция центристов) принимает следующие частные значения в зависимости от профилей $s = (s_1, s_2, s_3)$:

$$u_2(s_1^1,s_2^1,s_3^1) = 1,\ u_2(s_1^1,s_2^2,s_3^1) = 1\ \left(u_2(s_1^1,s_2^1,s_3^1) = u_2(s_1^1,s_2^2,s_3^1)\right),$$

$$u_2(s_1^2,s_2^1,s_3^1) = 1,\ u_2(s_1^2,s_2^2,s_3^1) = 0\ \left(u_2(s_1^2,s_2^1,s_3^1) > u_2(s_1^2,s_2^2,s_3^1)\right),$$

$$u_2(s_1^1,s_2^1,s_3^2) = 1,\ u_2(s_1^1,s_2^2,s_3^2) = 0\ \left(u_2(s_1^1,s_2^1,s_3^2) > u_2(s_1^1,s_2^2,s_3^2)\right),$$

$$u_2(s_1^2,s_2^1,s_3^2) = 0,\ u_2(s_1^2,s_2^2,s_3^2) = 0\ \left(u_2(s_1^2,s_2^1,s_3^2) = u_2(s_1^2,s_2^2,s_3^2)\right),$$

откуда вытекает, что стратегия s_2^1 (ЗА) для игрока P_2 (фракция центристов) является доминирующей. Аналогично стратегия s_3^1 (ЗА) для игрока P_3 (фракция правых) является доминирующей.

На основании вышесказанного для игры «Голосование» существует профиль равновесия в доминирующих стратегиях $s = (s_1^2, s_2^1, s_3^1)$.

9.3.2. *Определение 9.3.4.* Стратегия $s_k' \in S_k$ игрока P_k называется сильно доминируемой, если существует стратегия $s_k \in S_k$ игрока P_k, которая ее сильно доминирует, т.е. $u_k(s_k, s_{-k}) > u_k(s_k', s_{-k})$ для любых стратегий $s_j \in S_j$, выбранных другими игроками $P_j (j \neq k)$.

Отбрасывание сильно доминируемых стратегий называется ***принципом сильного доминирования*** в теории статических игр m лиц с полной информацией. Отбрасывая (элиминируя) сильно доминируемые стратегии игрока, мы сужаем множество его стратегий. При этом подмножество оставшихся стратегий, естественно, содержит стратегии, которые должны входить в решение игры. Если после отбрасывания сильно доминируемых стратегий у каждого игрока останется по одной стратегии, то, очевидно, профиль, состоящий из всех этих стратегий, и будет решением игры. В этом случае говорят, что статическая игра с полной информацией разрешима по доминированию.

К сожалению, такая идиллия в теории игр – достаточно редкое явление. Однако последовательное сокращение множеств стратегий игроков за счет отбрасывания сильно доминируемых стратегий может упростить первоначально трудную задачу отыскания решения игры.

Отметим, что тот факт, что каждый игрок исходит из того, что каждый игрок не выберет доминируемую стратегию (и т.д. до бесконечности), принято называть *общим знанием*.

В рассматриваемом случае важно, что предполагается не только рациональность поведения игроков (не выбирать доминируемые стратегии), но их способность провести соответствующие рассуждения, ибо цепочка рассуждений может быть достаточно длинной (я знаю, что он знает, что я знаю...).

Пример 9.3.2. Биматричная игра $G(A;B)$ задана табл. 9.2, в которой двойная матрица выделена двойной рамкой.

Таблица 9.2

Стратегии игрока P_2

		s_2^1	s_2^2	s_2^3
Стратегии игрока P_1	s_1^1	(1, 2)	(4, 3)	(2, 5)
	s_1^2	(−1, 0)	(5, 3)	(3, 2)
	s_1^3	(−1, 7)	(3, 4)	(1, 6)

Проиллюстрируем на этой биматричной игре реализацию принципа сильного доминирования.

Стратегия $s_1^1 = (1; 4; 2)$ игрока P_1 сильно доминирует стратегию $s_1^3 = (-1; 3; 1)$ игрока P_1, ибо каждая координата вектора s_1^1 строго больше соответствующей координаты вектора s_1^3, что содержательно интерпретируется так: каждое частное значение $u_1(s_1^3; s_2)$, $s_2 = s_2^1, s_2^2, s_2^3$ функции выигрыша игрока P_1 при выборе им стратегии s_1^3 строго меньше соответствующего частного значения $u_1(s_1^1; s_2), s_2 = s_2^1, s_2^2, s_2^3$ функции выигрыша игрока P_1 при выборе им стратегии s_1^1, т.е. $u_1(s_1^1; s_2^1) = a_{11} = 1 > -1 = a_{31} = u_1(s_1^3; s_2^1)$, $u_1(s_1^1; s_2^2) = a_{12} =$ $=4 > 3 = a_{32} = u_1(s_1^3; s_2^2)$, $u_1(s_1^1; s_2^3) = a_{13} = 2 > 1 = a_{33} = u_1(s_1^1; s_2^3)$.

Таким образом, стратегия s_1^3 является сильно доминируемой, и поэтому ее можно отбросить: игрок P_1 не будет выбирать стратегию s_1^3.

После отбрасывания стратегии s_1^3 мы получим новую биматричную игру, задаваемую табл. 9.3. Говорят, что биматричная игра, задаваемая табл. 9.3, редуцируется к биматричной игре, задаваемой табл. 9.3. В табл. 9.3 сохранена символика табл. 9.2, хотя в табл. 9.3 стратегии s_2^1, s_2^2, s_2^3 игрока P_2 уже не те, что в табл. 9.2.

Таблица 9.3

Стратегии игрока P_2

		s_2^1	s_2^2	s_2^3
Стратегии игрока P_1	s_1^1	(1, 2)	(4, 3)	(2, 5)
	s_1^2	(−1, 0)	(5, 3)	(3, 2)

В табл. 9.3 стратегия s_2^3 игрока P_2 сильно доминирует стратегию s_2^1 игрока P_2, поэтому стратегия s_2^1 является сильно доминируемой и ее можно отбросить. После отбрасывания стратегии s_2^1 получаем новую биматричную игру, задаваемую табл. 9.4.

Таблица 9.4

Стратегии игрока P_2

		s_2^2	s_2^3
Стратегии игрока P_1	s_1^1	(4, 3)	(2, 5)
	s_1^2	(5, 3)	(3, 2)

В табл. 9.4 стратегия s_1^2 игрока P_1 сильно доминирует стратегию s_1^1 игрока P_1, поэтому стратегия s_1^1 является сильно доминируемой и ее можно отбросить. После отбрасывания стратегии s_1^1 получим новую биматричную игру, задаваемую табл. 9.5.

Таблица 9.5

Стратегии игрока P_2

		s_2^2	s_2^3
Стратегии игрока P_1	s_1^2	(5, 3)	(3, 2)

В табл. 9.5 стратегия s_2^2 игрока P_2 сильно доминирует стратегию s_2^3 игрока P_2, поэтому стратегия s_2^3 является сильно доминируемой и ее можно отбросить. После отбрасывания стратегии s_2^3 получим новую биматричную игру, задаваемую одной клеткой (см. табл. 9.6).

Таблица 9.6

Стратегии игрока P_2

		s_2^2
Стратегии игрока P_1	s_1^2	(5, 3)

Отсюда вытекает, что решение биматричной игры, заданной первоначальной табл. 9.2 двойной матрицей третьего порядка, будет получено, если игрок P_1 выберет единственную стратегию s_1^2, а игрок P_2 выберет единственную стратегию s_2^2, т.е. профиль (s_1^2, s_2^2) первоначальной игры является единственным профилем, (строго) предпочитаемым остальным профилям (s_1, s_2) игры, задаваемой табл. 9.2. Этот профиль (s_1^2, s_2^2) был получен с помощью принципа сильного доминирования.

9.3.3. Приведем определение равновесия Нэша как профиля, который предпочитается некоторым, но, вообще говоря, не всем профилям игры G m лиц.

Определение 9.3.5. Пусть $G=\langle S_k, u_k, (s), k \in I\rangle$ — статическая игра m лиц в нормальной форме. Профиль $s^\circ = (s_1^\circ, ..., s_m^\circ) \in S_1 \cdot ... \cdot S_m$ стратегий $s_1^\circ, ..., s_m^\circ$ игры G называется равновесием Нэша игры G, если для любого номера $k \in I$ и любой стратегии $s_k \in S_k$ справедливо неравенство $u_k(s^\circ) \geq u_k\,(s_k; s_{-k}^\circ)$.

Стратегия s_k°, $k = 1, ... m$, входящая в равновесие Нэша s°, называется *стратегией равновесия Нэша.*

Приведенное неравенство означает, что если каждый игрок $P_j(j \neq k)$ выбирает свою стратегию s_j° равновесия Нэша, а игрок P_k перейдет в одиночку (!) от своей стратегии s_k° равновесия Нэша к другой своей стратегии s_k, то выигрыш игрока P_k может только уменьшиться. Другими словами, в равновесии Нэша $s^\circ = (s_1^\circ, ..., s_m^\circ)$ любому игроку P_k в одиночку не выгодно менять свою стратегию s_k°, если все остальные игроки $P_j(j \neq k)$ этого не делают, т.е. не меняют свои стратегии s_j°.

Если же в равновесии Нэша $s^\circ = (s_1^\circ, ..., s_m^\circ)$ поменяют свои стратегии s_j° два (или более) игрока, то они уже могут строго увеличить свои выигрыши (см. далее пример 9.3.3).

Равновесие Нэша представляет собой вариант решения игры G в нормальной форме.

Имеет место следующая важная теорема существования равновесия Нэша для игры G m лиц.

Теорема 9.3.1 (Х. Никайдо, К. Исода). Пусть в статической игре m лиц $G=\langle S_k, u_k, (s), k \in I\rangle$ в нормальной форме каждое множество S_k выпукло, замкнуто и ограничено в евклидовом пространстве, каждая функция выигрыш $u_k(s)$ непрерывна на $S = S_1 \times ... \times S_m$ и выпукла вверх по s_k при любых фиксированных s_l, $l \neq k$. Тогда существует равновесие Нэша игры G из m лиц.

Для биматричной игры $G(A;B)$ с $(m \times n)$ матрицами выигрышей A и B игроков P_1 и P_2 соответственно простроим двойную матрицу $(A|B)$.

$$\boxed{\begin{matrix} (a_{11};b_{11}) & \cdots & (a_{1n};b_{1n}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_{m1};b_{m1}) & \cdots & (a_{mn};b_{mn}) \end{matrix}}$$

В каждом *столбце* j двойной матрицы среди элементов a_{ij} выберем наибольший и пометим его знаком $\vee$ – «птичкой». Если наибольших элементов будет несколько, «птичкой» пометим каждый из них. Аналогично в каждой *строке* i двойной матрицы среди элементов b_{ij} выберем наибольший и пометим его $\wedge$ – «шляпкой». Если наибольших элементов будет несколько, «шляпкой» пометим каждый из них. Элемент (клетка) $(\check{a}_{i_0j_0}; \hat{b}_{i_0j_0})$ двойной матрицы, куда попали и «птичка», и «шляпка», соответствует равновесию Нэша $(s_1^{i_0}; s_2^{j_0})$ данной биматричной игры. Если таких элементов (клеток) несколько, то каждой из них соответствует свое равновесие Нэша. Если нет такого элемента (клетки) двойной матрицы, куда попадают одновременно «птичка» и «шляпка», то это означает, что биматричная игра не имеет ни одного равновесия Нэша.

Из сказанного следует, что если для элемента (клетки) $(a_{i_0j_0}; b_{i_0j_0})$ двойной матрицы $(A|B)$ справедливы неравенства

$$a_{ij_0} \le a_{i_0j_0}, \ b_{i_0j} \le b_{i_0j_0}, \ i = 1,\dots,m, \ j = 1,\dots,n,$$

то этому элементу (клетке) $(a_{i_0j_0}; b_{i_0j_0})$ соответствует равновесие Нэша $(s_1^{i_0}; s_2^{j_0})$ биматричной игры. Очевидно, верно и обратное утверждение.

Пример 9.3.3. На рынке функционируют конкурирующие фирмы F_1 и F_2 (скажем, два магазина, которые могут торговать в течение некоторого фиксированного периода (например, в течение недели) по нормальной цене (НЦ) или по высокой цене (ВЦ)). Если каждая фирма торгует по ВЦ, она получает прибыль (выигрыш), равную 200 д.е., если каждая фирма торгует по НЦ, она получает прибыль, равную 30 д.е. Если фирма F_1 торгует по ВЦ, а фирма F_2 по НЦ, то фирма F_1 получает прибыль, равную (–50 д.е.), т.е. будет в убытке, а фирма F_2 получит прибыль 300 д.е., ибо к ней придет много новых покупателей, которые ранее приобретали товар у фирмы F_1. Если фирма F_1 торгует по НЦ, а фирма F_2 по ВЦ, то фирма F_1 получит прибыль 400 д.е., а фирма F_2 получит прибыль (–100 д.е.), т.е. будет в убытке.

Приведенное описание функционирования фирм F_1 и F_2 переведем на язык теории игр.

В примере 9.3.3 $P_1 = F_1$, $P_2 = F_2$, $m = 2$. Каждое из множеств S_1 и S_2 состоит из двух стратегий: торговать по НЦ, торговать по ВЦ, что формально можно записать так: S_1 = {НЦ, ВЦ,}, S_2 = {НЦ, ВЦ}. В связи с тем что $m = 2$, а множества S_1 и S_2 — конечны, игра этого примера является биматричной $G(A, B)$.

Прибыли (выигрыши) фирм F_1 и F_2, которые могут быть как положительными, так и отрицательными, представим в виде табл. 9.7, основным элементом которой является двойная матрица с размерами 2×2, обведенная двойной рамкой. Первая клетка двойной матрицы есть профиль (точнее, соответствует профилю) из первой стратегии (НЦ) игрока P_1 и первой стратегии (НЦ) игрока P_2. Когда игрок P_1 и игрок P_2 выбирают первую стратегию (НЦ), прибыль (выигрыш) каждого из них равна 30 д.е., что и показано в первой клетке. Левое число относится к игроку P_1, правое число – к игроку P_2. Аналогично поясняются клетки со второй по четвертую двойной матрицы.

Таблица 9.7

Стратегии игрока P_2

		НЦ	ВЦ
Стратегии игрока P_1	НЦ	(30,30) 1	2 (400,–100)
	ВЦ	(–50,300) 3	4 (200,200)

Аналогично тому, как это было сделано в примере 9.3.2, стратегия НЦ игрока P_1 сильно доминирует свою стратегию ВЦ, а стратегия НЦ игрока P_2 сильно доминирует свою стратегию ВЦ. Поэтому профиль стратегий НЦ игроков P_1 и P_2 есть равновесие в доминирующих стратегиях, которое является равновесием Нэша.

Если в рассматриваемом примере допустить смену своих стратегий НЦ на стратегии ВЦ сразу двум игрокам P_1 и P_2, то каждый из них увеличит свой выигрыш с 30 до 200 д.е.

Таблица 9.8

Стратегии игрока P_2

		НЦ	ВЦ
Стратегии игрока P_1	НЦ	(30,30) 1	2 (400,–100)
	ВЦ	(–50,100) 3	4 (200,200)

Пример 9.3.4. Рассмотрим биматричную игру $G(A;B)$, заданную табл. 9.8. Здесь стратегия НЦ игрока P_1 сильно доминирует стратегию ВЦ игрока P_1. Среди стратегий НЦ и ВЦ игрока P_2 нет доминирующей. Поэтому рассматриваемая игра не имеет равновесия в доминирующих стратегиях. Как и в предыдущем примере 9.3.3, профиль стратегий НЦ игроков P_1 и P_2 есть равновесие Нэша.

Пример 9.3.3 отражает тот факт, что равновесие в доминирующих стратегиях есть равновесие Нэша; пример 9.3.4 показывает, что равновесие Нэша не обязано быть равновесием в доминирующих стратегиях.

Пример 9.3.5. Биматричная игра $G(A;B)$, представленная табл. 9.9, не имеет ни одного равновесия Нэша, ибо ее двойная матрица $(A|B)$ не содержит ни одной клетки, в которой одновременно были бы «птичка» и «шляпка».

Таблица 9.9

Стратегии игрока P_2

		НЦ	ВЦ
Стратегии игрока P_1	НЦ	$(60,8\hat{0})$	$(7\breve{0},-40)$
	ВЦ	$(15\breve{0},60)$	$(-70,20\hat{0})$

Взаимосвязь последовательного использования принципа строгого доминирования и равновесия Нэша описывается следующими двумя теоремами.

Теорема 9.3.2. Пусть $s^0 = (s_1^0, ..., s_m^0)$ — равновесие Нэша игры G m лиц. Тогда ни одна из входящих в s^0 стратегий не может быть отброшена в результате применения принципа сильного доминирования.

Теорема 9.3.3. Пусть в результате последовательного применения принципа сильного доминирования у каждого игрока P_k, $k = 1, ..., m$, остается единственная стратегия s_k^0. Тогда профиль $s^0 = (s_1^0, ..., s_m^0)$ — равновесие Нэша игры G m лиц.

В примере 9.3.6 показано, что равновесие дуополии Курно есть равновесие Нэша этой модели как статической игры с полной информацией. Для разбора примера 9.3.6 достаточно сведений об этой классической модели, которые описываются в параграфе 8.7 этой книги.

Пример 9.3.6. Модель дуополии Курно как статическая игра с полной информацией.

Обозначим символом s_i объем выпуска фирмы F_i, $i=1,2$, в некотором фиксированном периоде времени. Функция, обратная к функции спроса, имеет вид $p=a-b(s_1+s_2)$, где a и b — положительные параметры. Прибыль PR_i фирмы F_i имеет вид

$$PR_i=ps_i-c_is_i-d_i, \tag{9.3.1}$$

где $c_i=MC_i$ — предельные издержки, а $d_i=FC_i$ — постоянные издержки фирмы F_i, $i=1, 2$.

Прибыль PR_i фирмы F_i есть выигрыш u_i фирмы F_i, которая рассматривается в качестве игрока P_i, $i=1, 2$. Игроки P_1 и P_2 ходы делают одновременно, т.е. фирмы F_1 и F_2 выпускают свою продукцию на рынок, не зная об объемах друг друга.

Покажем, что мы имеем дело со статической игрой с полной информацией.

1. Число игроков равно двум. Как только что было отмечено, игроком P_1 является фирма F_1, игроком P_2 — фирма F_2.
2. Множество $S_i=\{s_i|0\le s_i\in E_1\}$ есть множество возможных объемов выпусков s_i фирмы F_i, $i=1, 2$.
3. Для игрока P_i функция $u_i(s)=u_i(s_1, s_2)$ выигрыша есть функция прибыли PR_i фирмы F_i (см. (9.3.1)):

$$u_i(s_1,s_2)=PR_i=(a-b(s_1+s_2))s_i-c_is_i-d_i. \tag{9.3.2}$$

Для нахождения равновесия Нэша этой статической игры с полной информацией следует максимизировать функции $u_1(s)$ и $u_1(s)$ выигрышей обоих игроков P_1 и P_2.

Задача максимизации прибыли $PR_1(s_1, s_2)$ фирмы F_1 решается путем отыскания ее первой производной по переменной s_1 с учетом предпосылки модели Курно о том, что предполагаемая вариация $ds_2/ds_1=0$.

Имеем уравнение

$$\frac{du_1(s_1,s_2)}{ds_1}=\frac{dPR_1(s_1,s_2)}{ds_1}=a-c_1-2bs_1-bs_2=0,$$

откуда следует, что

$$s_1=\frac{a-c_1-bs_2}{2b}=\frac{a-c_1}{2b}-\frac{s_2}{2}. \tag{9.3.3}$$

Отметим, что

$$0\le s_1\le\frac{a-c_1}{2b}.$$

Поскольку

$$\frac{d^2u_1(s_1,s_2)}{ds_1} = -2b < 0,$$

постольку выражение (9.3.3) (глобально) максимизирует прибыль $R_1(s_1, s_2)$ при фиксированном s_2.

Аналогично имеем для объема выпуска s_2 фирмы F_2, максимизирующего прибыль $R_2(s_1, s_2)$, при фиксированном s_1

$$s_2 = \frac{a-c_2}{2b} - \frac{s_1}{2}. \tag{9.3.4}$$

Из (9.3.3) и (9.3.4) следует, что

$$s_1^{(Cou)} = s_1^0 = \frac{a-2c_1+c_2}{3b}, s_2^{(Cou)} = s_2^0 = \frac{a-2c_2+c_1}{3b} \tag{9.3.5}$$

и профиль (s_1^0, s_2^0) есть равновесие Нэша модели Курно как статической игры с полной информацией, ибо

$$u_1(s_1^0,s_2^0) = (a-c_1)s_1^0 - b(s_1^0)^2 - bs_1^0s_2^0 - d_1 \geq$$
$$\geq (a-c_1)s_1 - bs_1^2 - bs_1s_2^0 - d_1 = u_1(s_1,s_2^0),$$

$$u_2(s_1^0,s_2^0) = (a-c_2)s_2^0 - b(s_2^0)^2 - bs_1^0s_2^0 - d_2 \geq$$
$$\geq (a-c_2)s_1 - bs_2^2 - bs_1^0s_2 - d_2 = u_2(s_1^0,s_2).$$

Последние два неравенства можно проверить непосредственно, используя явные выражения (9.3.5).

При $c_1 = c_2 = c$ имеем классическое равновесие Нэша дуополии Курно.

Аналогично показывается, что модель дуополии Бертрана представима как статическая игра с полной информацией, а равновесие Бертрана есть частная версия равновесия Нэша.

Равновесия Курно и Бертрана в случае олигополии также являются равновесиями Нэша.

9.4. Смешанное расширение биматричных игр

9.4.1. В этом параграфе уточняется и развивается понятийный аппарат теории биматричных игр $G(A;B)$, который был введен в параграфе 9.2.

Таблица 9.1 дает наглядное представление биматричной игры $G(A, B)$. i-ю строку двойной матрицы $(A|B)$ с этого момента будем называть i-й чистой стратегией игрока P_1, i-я чистая стратегия игрока P_1 обозначается символом s_1^i. Аналогично j-й столбец двойной матрицы $(A|B)$ с этого момента будет называть j-й чистой стратегией игрока P_2, j-я чистая стратегия игрока P_2 обозначается символом s_2^i. Множество $S_1 = \{s_1^1, ..., s_1^m\}$ всех строк двойной матрицы $(A|B)$ — это множество всех чистых стратегий игрока P_1. Множество $S_2 = \{s_2^1, ..., s_2^m\}$ всех столбцов двойной матрицы $(A|B)$ — это множество всех чистых стратегий игрока P_2.

В связи с тем что

$$e_i A = (0,\dots,0,\underset{i}{1},0,\dots,0)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{i1},\dots,a_{in}),$$

$$e_i B = (0,\dots,0,\underset{i}{1},0,\dots,0)\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = (b_{i1},\dots,b_{in}),$$

$$e_i(A|B) = ((a_{i1}, b_{i1}),\dots,(a_{in}, b_{in})),$$

естественно вектор $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ также назвать i-й чистой стратегией игрока P_1.

Если игрок P_1 использует свою первую чистую стратегию $e_1(1,0,...,0)$ с вероятностью $p_1(0 \le p_1 \le 1)$,..., свою m-ю чистую стратегию $e_m = (0,...,0,1)$ с вероятностью $p_m(0 \le p_m \le 1)$, то произведение

$$p(A|B) = ((pa^1; pb^1),\dots,(pa^n; pb^n))$$

естественно толковать как смесь чистых стратегий $s_1^1, ..., s_1^m$ игрока P_1 с весовыми множителями $p_1,.., p_m$, которую (смесь) следует назвать смешанной стратегией игрока P_1.

Здесь символы $a^j, b^j, j = 1,...,n$, означают столбцы матриц A и B соответственно, а $p_1 + ... + p_m = 1$, ибо игрок P_1 обязательно должен выбрать какую-то из своих чистых стратегий $s_1^1, ..., s_1^m$.

Термин «смешанная стратегия игрока» P_1 применяется не только к смеси $p(A|B)$ чистых стратегий $s_1^1,...,s_1^m$ с весовыми множителями

$p_1,\dots p_m$, но и к самому вектору $p=(p_1,\dots,p_m)$ вероятностей $p_1,\dots,p_m$. Отметим, что вектор $p\in S^{(m)}$, где $S^{(m)}=\{z=(z_1,\dots,z_m)|z_1\geq 0,\dots,z_m\geq 0,z_1+$ $+z_m=1\}-(m-1)$-мерный симплекс в m-мерном пространстве E_m.

Очевидно, чистые стратегии $e_1,\dots,e_m$ игрока P_1 являются частными случаями смешанной стратегии $p=(p_1,\dots,p_m)$ этого игрока.

9.4.2. В связи с тем, что

$$Af_j=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{1} \\ \dot{0} \end{pmatrix}\Bigg| j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

$$Bf_j=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{1} \\ \dot{0} \end{pmatrix}\Bigg| j=\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix},$$

$$(A|B)f_j=\begin{pmatrix} (a_{1j},b_{1j} \\ \cdots \\ (a_{mj},b_{mj} \end{pmatrix},$$

естественно вектор $f_j=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ также назвать j-й чистой стратегией игрока P_2.

Если игрок P_2 использует свою первую чистую стратегию $f_l=(1,0,\dots,0)$ с вероятностью q_1 $(0\leq q_1\leq 1)$, ..., свою n-ю чистую стратегию $f_n=(0,\dots,0,1)$ с вероятностью q_n $(0\leq q_n\leq 1)$, то произведение

$$(A|B)q=\begin{pmatrix} (a_1q,b_1q) \\ \cdots \\ (a_mq,b_mq) \end{pmatrix}$$

естественно толковать как смесь чистых стратегий $s_2^1,\dots,s_2^n$ игрока P_2 с весовыми множителями $q_1,\dots,q_n$, которую (смесь) следует назвать смешанной стратегией игрока P_2.

Здесь символы a_i, b_i, $i=1,\dots m$, означают строки матриц A и B соответственно, а $q_1+\dots+q_n=1$, ибо игрок P_2 обязательно должен выбрать какую-то из своих чистых стратегий $s_2^1,\dots,s_2^n$.

Термин «смешанная стратегия игрока» P_2 применяется не только к смеси $(A|B)q$ чистых стратегий $s_2^1,\dots,s_2^n$ с весовыми множителями $q_1,\dots,q_n$, но и к самому вектору $q=(q_1,\dots,q_n)$ вероятностей $q_1,\dots,q_n$. Отметим, что вектор $q\in S^{(n)}$, где $S^{(n)}=\{z=(z_1,\dots,z_n)|z_1\geq 0,\dots,z_n\geq 0,\dots,z_1+\dots$ $\dots+z_n=1\}-(n-1)$-мерный симплекс в n-мерном пространстве E_n.

Очевидно, чистые стратегии $f_1,...,f_n$ игрока P_2 являются частными случаями смешанной стратегии $q = (q_1, ..., q_n)$ игрока P_2.

9.4.3. Напомним, что k-мерный вектор $z = (z_1,..., z_k)$, который рассматривается сам по себе, можно представить как в виде вектора-строки $z = (z_1, ..., z_k)$, так и в виде вектора-столбца

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix},$$

где числа $z_1,..., z_k$ — координаты вектора z.

Если вектор z умножается на некоторую матрицу D и расположен слева от нее, то в этом случае он обязательно есть вектор-строка.

Если вектор z умножается на некоторую матрицу D и расположен справа от нее, то в этом случае он обязательно есть вектор-столбец.

Ожидаемый выигрыш (частное значение функции ожидаемого выигрыша) игрока P_1, когда игрок P_1 выбирает смешанную стратегию $p = (p_1, ..., p_m)$, а игрок P_2 выбирает смешанную стратегию $q = (q_1, ..., q_n)$, естественно определить так:

$$u_1(p,q) = pAq = (p_1,...,p_m)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}.$$

Аналогично ожидаемый выигрыш (частное значение функции ожидаемого выигрыша) игрока P_2, когда игрок P_1 выбирает смешанную стратегию $p = (p_1, ..., p_m)$, а игрок P_2 выбирает смешанную стратегию $q = (q_1, ..., q_n)$, определяется так:

$$u_2(p,q) = pBq = (p_1,...,p_m)\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}.$$

Игра $\bar{G}(A,B) = \left\langle S^{(m)}, S^{(n)}, u_1(p,q), u_2(p,q) \right\rangle$ называется смешанным расширением биматричной игры $G(A,B) = \langle S_1, S_2, A, B\rangle$ (см. параграф 9.2).

Аналогично описанному определяется смешанное расширение конечной игры G. Смешанные расширения биматричной игры $G(A, B)$ называются рандомизацией биматричной игры $G(A, B)$. В общем случае переход от чистых стратегий игры к ее смешанным стратегиям называется рандомизацией соответствующей игры.

Для игры $\overline{G}(A,B)$ векторы $p=(p_1,\dots,p_m)\in S^{(m)}$ и $q=(q_1,\dots,q_n)$ $\in S^{(n)}$ являются стратегиями, вектор (p, q) — профиль стратегий p и q, $u_1(p, q)$ и $u_2(p, q)$ — функции выигрышей игроков P_1 и P_2.

Однако принято все понятия, которые появляются в связи с введением смешанного расширения $\overline{G}(A,B)$ биматричной игры $G(A, B)$, привязывать к биматричной игре $G(A, B)$. Векторы $p =$ $= (p_1, \dots, p_n) \in S^{(m)}$ и $q = (q_1, \dots, q_n) \in S^{(n)}$ называются смешанными стратегиями биматричной игры $G(A, B)$, которые могут быть, в частности, и чистыми стратегиями; вектор (p, q) называется профилем смешанных стратегий биматричной игры $G(A, B)$, а значения u_1 (p, q) и $u_2(p, q)$ функций выигрышей игроков P_1 и P_2 называются (ожидаемыми) выигрышами игроков P_1 и P_2 биматричной игры $G(A, B)$.

Приведем определение равновесия Нэша в смешанных стратегиях биматричной игры $G(A, B)$.

Определение 9.4.1. Равновесие (p^0, q^0) Нэша игры $G(A, B)$ называется равновесием Нэша в смешанных стратегиях биматричной игры $G(A, B)$, что формально записывается так:

$$u_1(p, q^0)\le u_1(p^0, q^0) \text{ для любых } p\in S^{(m)}\subseteq E_m,$$
$$u_2(p^0, q)\le u_2(p^0, q^0) \text{ для любых } q\in S^{(n)}\subseteq E_n.$$

Справедлива следующая важная *лемма 9.4.1.*

Для того чтобы профиль (p^0, q^0) был равновесием Нэша в смешанных стратегиях биматричной игры $G(A, B)$, необходимо и достаточно выполнение неравенств $u_1(e_i, q^0)\le u_1(p^0, q^0), i=1,\dots,m,$ $u_2(p^0, f_j)\le u_2(p^0, q^0)$, $j=1,\dots,n$. Необходимость леммы 9.4.1 очевидна, ибо в определении 9.4.1 можно положить $p=e_i\in S^{(m)}$, $q=f_j\in$ $S^{(n)}$. Для доказательства достаточности леммы 9.4.1 перепишем неравенство $u_1(e_i, q^0)\le u_1(p^0, q^0)$ в явном виде $e_iAq^0\le p^0Aq^0$, $i=1,\dots m$. Умножив его обе части на $p_i\ge 0$, $p_1+\dots+p_m=1$ и сложив полученные неравенства, будем иметь

$$\underbrace{(p_1e_1+\dots+p_me_m)}_{p}Aq^0\le \underbrace{(p_1^0+\dots+p_m^0)}_{1}p^0Aq^0,$$

т.е. $pAq^0\le p^0Aq^0$.

Аналогично получается неравенство $p^0Bq\le p^0Bq^0$, а это означает, что профиль (p^0, q^0) стратегий p^0 и q^0 есть равновесие Нэша биматричной игры $G(A,B)$.

Имеет место следующая важная теорема теории биматричных игр.

Теорема 9.4.1 (Дж. Нэш). Для любой биматричной игры $G(A, B)$ существует равновесие (p^0, q^0) Нэша в смешанных стратегиях.

Для любой конечной игры существует равновесие Нэша в смешанных стратегиях.

Доказательство первой части этой теоремы сразу следует из теоремы 9.3.1. Действительно, множества $S^{(m)} \subseteq E_m$ и $S^{(n)} \subseteq E_n$, которые являются симплексами, выпуклы, замкнуты и ограничены. Функции $u_1(p, q)$ и $u_2(p, q)$ билинейны и, следовательно, непрерывны на $S^{(m)} \times S^{(n)}$. Функция $u_1(p, q)$ линейна по переменным $p=(p_1,...,p_m)$ при фиксированных переменных $q=(q_1,...,q_n)$ и поэтому выпукла вверх на множестве $S^{(m)}$; аналогично функция $u_2(p, q)$ линейна по переменным $q=(q_1,...,q_n)$ при фиксированных переменных $p=(p_1,...,p_m)$ и, значит, выпукла вверх на множестве $S^{(n)}$. По теореме 9.3.1 всего этого достаточно для существования равновесия Нэша у игры $\overline{G}(A,B)$ и, значит, существования равновесия Нэша в смешанных стратегиях биматричной игры $G(A,B)$. Как было показано выше, биматричная игра $G(A,B)$ в примере 9.3.5 не имела ни одного равновесия Нэша в чистых стратегиях.

Теорема 9.4.2 (условия дополняющей нежесткости). Пусть (p^0, q^0) — равновесие Нэша в смешанных стратегиях биматричной игры $G(A,B)$. Тогда

1) $p_i^0 > 0 \Rightarrow u_1(e_i,q^0) = u_1(p^0,q^0)$;

2) $u_1(e_i,q^0) < u_1(p_0,q_0) \Rightarrow p_i^0 = 0$;

3) $q_j^0 > 0 \Rightarrow u_2(p_0,f_j) = u_2(p_0,q_0)$;

4) $u_2(p^0,f_j) < u_2(p^0,q^0) \Rightarrow q_j^0 = 0$.

9.4.4. Приведем ряд полезных символов и понятий.

Положим $M=\{1,...,m\}=I, N=\{1,...,n\}$, M_1 и N_1 — непустые множества, такие, что $M_1 \subseteq M$, $N_1 \subseteq N$. Множество $sp(p)$ $(sp(q))$ называется спектром (носителем) вектора $p \in E_m (q \in E_n)$, если $sp(p) = M_1 = \{i \in M | p_i > 0\}$, $sp(p) = N_1 = \{i \in N | q_j > 0\})$.

Пусть a_i — i-я строка матрицы A и b^j — j-й столбец матрицы B. Обозначим символом A_{M_1} матрицу, строками которой являются разности строк $a_i - a_{i_1}$, где i_1— первый (наименьший) номер во множестве M_1, $i \neq i_1$. Обозначим символом A'_{M_1} матрицу, строками которой являются разности строк $a_{i'} - a_{i_1}$, где $i' \notin M_1$. Символом

B_{N_1} обозначим матрицу, столбцами которой являются разности столбцов $b^j - b^{j_1}$, где j_1 — первый (наименьший) номер во множестве $N_1, j \neq j_1$. Символом B'_{N_1} обозначим матрицу, столбцами которой являются разности столбцов $b^{j'} - b^{j_1}$, где $j' \notin N_1$.

Опишем метод нахождения всех равновесий Нэша в смешанных стратегиях биматричной игры $G(A, B)$.

Для нахождения всех равновесий Нэша в смешанных стратегиях биматричной игры $G(A, B)$ с матрицами A и B:

1) зафиксируем два непустых множества M_1 и N_1, таких, что $M_1 \subseteq M$ и $N_1 \subseteq N$;

2) обозначим символом $P(M_1, N_1)$ множество всех векторов $p \in S^{(m)}$, таких, что:

2.1) $sp(p) = M_1$;

2.2) вектор p есть решение системы линейных алгебраических уравнений $p\, B'_{N_1} = 0$;

2.3) вектор p есть решение системы линейных неравенств $p\, B'_{N_1} \leq 0$;

3) обозначим символом $Q(M_1, N_1)$ множество всех векторов $q \in S^{(n)}$, таких, что:

3.1) $sp(q) = N_1$;

3.2) вектор q есть решение системы линейных алгебраических уравнений $A_{M_1} q = 0$;

3.3) вектор q есть решение системы линейных неравенств $A'_{M_1} q = 0$.

Множество всех векторов $(p, q) \in P(M_1, N_1) \times Q(M_1, N_1)$ принадлежит множеству всех равновесий Нэша в смешанных стратегиях.

Для нахождения всех равновесий Нэша в смешанных стратегиях биматричной игры $G(A, B)$ следует приведенную процедуру 1)–3) выполнить для всех непустых множеств M_1 и N_1, т.е. осуществить (полный) перебор непустых множеств M_1 и N_1 и нахождение множеств $P(M_1, N_1)$ и $Q(M_1, N_1)$. Реально этот (полный) перебор осуществим для биматричных игр $G(A, B)$ с матрицами A и B небольших размеров.

Определение 9.4.2. Профиль (p, q) стратегий p и q биматричной игры $G(A, B)$ называется вполне смешанным, если спектры (носители) векторов p и q полностью совпадают со множествами $M = \{1, ..., m\}$ и $N = \{1, ..., n\}$ соответственно.

Пусть в биматричной игре $G(A, B)$ с матрицами второго порядка элементы, стоящие в одном столбце матрицы A, и элементы, стоящие в одной строке матрицы B, попарно различны. Тогда в биматричной игре $G(A, B)$ равновесия Нэша могут быть либо чистыми, либо вполне смешанными.

Действительно, пусть в равновесии Нэша, например, стратегия игрока P_1 является чистой, скажем $p^0 = e_1$, а стратегия q^0 игрока P_2 является смешанной. Тогда по условию дополняющей нежесткости из $q_1^0 > 0$ следует равенство $u_2(e_1, f_1) = u_2(e_1, q^0)$, а из $q_2^0 > 0$ следует равенство $u_2(e_1, f_2) = u_2(e_1, q^0)$, т.е. $u_2(e_1, f_1) = u_2(e_1, f_2)$, откуда получаем

$$b_{11} = (1;0)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_2(e_1, f_1) = u_2(e_1, f_2) = (1;0)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b_{12},$$

что противоречит предположению, что $b_{11} \neq b_{12}$.

9.5. Биматричные игры с матрицами второго порядка

9.5.1. Описанный кратко в параграфе 9.4 метод нахождения всех равновесий Нэша в смешанных стратегиях, естественно, можно применить для случая биматричной игры $G(A, B)$ с матрицами второго порядка. Однако проще рассмотреть прямой *метод* нахождения всех равновесий Нэша в смешанных стратегиях биматричной игры $G(A, B)$ с матрицами второго порядка, опираясь на определение 9.4.1 равновесия Нэша. По существу этот прямой метод аналогичен описанному в параграфе 9.4 общему методу.

Для того чтобы вектор (p^0, q^0) был равновесием Нэша в смешанных стратегиях биматричной игры $G(A, B)$ с (2×2)-матрицами A и B, по лемме 9.4.1 необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$u_1(e_1, q^0) \le u_1(p^0, q^0), \quad u_1(e_2, q^0) \le u_1(p^0, q^0),$$

$$u_2(p^0, f_1) \le u_2(p^0, q^0), \quad u_2(p^0, f_2) \le u_2(p^0, q^0).$$

Напомним, что $p^0 = (p_1^0; p_2^0)$, $q^0 = (q_1^0; q_2^0)$, $p_1^0 \ge 0$, $p_2^0 \ge 0$, $p_1^0 + p_2^0 = 1$, $q_1^0 \ge 0$, $q_2^0 \ge 0$, $q_1^0 + q_2^0 = 1$.

Перепишем выражение $u_1(p^0, q^0)$ в развернутом виде, полагая $p_2^0 = 1 - p_1^0$, $q_2^0 = 1 - q_1^0$:

$$u_1(p^0, q^0) = p^0 A q^0 = (p_1^0, p_2^0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1^0 \\ q_2^0 \end{pmatrix} = a_{11}p_1^0 q_1^0 + a_{12}p_1^0 q_2^0 +$$

$$+ a_{21}p_2^0 q_1^0 + a_{22}p_2^0 q_2^0 = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})p_1^0 q_1^0 + (a_{12} - a_{22})p_1^0 +$$

$$+ (a_{21} - a_{22})q_1^0 + a_{22}.$$

Аналогично для $u_2(p^0, q^0)$ имеем

$$u_2(p^0,q^0)= p^0Bq^0 = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})p_1^0q_1^0 + (b_{12} - b_{22})p_1^0 +$$
$$+(b_{21} - b_{22})q_1^0 + b_{22}.$$

Полагая $p^0=e_1=(1,0)$ (т.е. $p_1^0=1, p_2^0=0$), из выражения для $u_1(p^0, q^0)$ получим

$$u_1(e_1, q^0)=(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})q_1^0+(a_{21}-a_{22})\, q_1^0+a_{12}.$$

Полагая $p^0=e_2=(1,0)$ (т.е. $q_1^0 = 0, p_2^0=1$), из выражения для $u_1(p^0, q^0)$ будем иметь $u_1(e_2,q^0)=(a_{21} - a_{22})\, q_1^0 + a_{22}$.

Аналогично, полагая $q^0=f_1=(1,0)$ (т.е. $q_1^0 = 1, q_2^0 = 0$), из выражения для $u_2(p^0, q^0)$ получим

$$u_2(p^0,f_1) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})p_1^0 + (b_{12} - b_{22})p_1^0 + b_{21}.$$

Полагая $q^0=f_2=(0,1)$ (т.е. $q_1^0= 0, q_2^0=1$), из выражения для $u_2(p^0, q^0)$ получим

$$u_2(p^0,e_2) = (b_{12} - b_{22})p_1^0 + b_{22}.$$

Имеем

$$u_1(p^0,q^0) - u_1(e_1,q^0) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})p_1^0q_1^0 + (a_{12} - a_{22})p_1^0 + a_{22} -$$
$$-(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})q_1^0 - a_{12},$$
$$u_1(p^0,q^0) - u_1(e_2,q^0) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})p_1^0q_1^0 + (a_{12} - a_{22})p_1^0.$$

Положим $a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22} = \alpha$, $a_{12}-a_{22} = -\beta$, тогда только что полученные разности можно переписать так:

$$u_1(p^0,q^0) - u_1(e_1,q^0) = \alpha p_1^0q_1^0 - \beta p_1^0 - \alpha q_1^0 + \beta =$$
$$\alpha q_1^0(p_1^0 - 1) - \beta(p_1^0 - 1) = (p_1^0 - 1)(\alpha q_1^0 - \beta), \tag{9.5.1}$$
$$u_1(p^0,q^0) - u_1(e_2,q^0) = \alpha p_1^0q_1^0 - \beta p_1^0 = p_1^0(\alpha q_1^0 - \beta). \tag{9.5.2}$$

Аналогично выпишем разности

$$u_2(p^0,q^0) - u_2(p^0,f_1) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})p_1^0q_1^0 + (b_{21} - b_{22})q_1^0 + b_{22} -$$
$$-(b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})p_1^0 - b_{21},$$
$$u_2(p^0,q^0) - u_2(p^0,f_2) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})p_1^0q_1^0 + (b_{21} - b_{22})q_1^0.$$

Как и в случае функции $u_1(p^0, q^0)$, положим $b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = \gamma$, $b_{22} - b_{21} = \delta$, тогда только что выписанные разности можно переписать так:

$$u_2(p^0,q^0)-u_2(p^0,f_1)=\gamma p_1^0q_1^0-\delta q_1^0-\gamma p_1^0+\delta=$$
$$=q_1^0(\gamma p_1^0-\delta)-(\gamma p_1^0-\delta)=(q_1^0-1)(\gamma p_1^0-\delta), \qquad (9.5.3)$$
$$u_2(p_1^0,q_1^0)-u_2(p^0,f_2)=\gamma p_1^0q_1^0-\delta q_1^0=q_1^0(\gamma p_1^0-\delta). \qquad (9.5.4)$$

Для того чтобы вектор (p^0, q^0) был равновесием Нэша в смешанных стратегиях, необходимо и достаточно (см. начало этого параграфа 9.5), чтобы левые разности четырех равенств ((9.5.1) – (9.5.4)) были неотрицательны, т.е. необходимо и достаточно, чтобы были справедливы неравенства

$$(p_1^0-1)(\alpha q_1^0-\beta)\ge 0, \qquad (9.5.5)$$
$$p_1^0(\alpha q_1^0-\beta)\ge 0, \qquad (9.5.6)$$
$$(q_1^0-1)(\gamma p_1^0-\delta)\ge 0, \qquad (9.5.7)$$
$$q_1^0(\gamma p_1^0-\delta)\ge 0, \qquad (9.5.8)$$
$$0\le p_1^0\le 1, \qquad (9.5.9)$$
$$0\le q_1^0\le 1, \qquad (9.5.10)$$

где коэффициенты $\alpha=a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}$, $\gamma=b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22}$, $\beta=a_{22}-a_{12}$, $\delta=b_{22}-b_{21}$ были определены выше.

Таким образом, решение (p_1^0, q_1^0) системы неравенств

$$(p_1-1)(\alpha q_1-\beta)\ge 0, \qquad (9.5.11)$$
$$p_1(\alpha q_1-\beta)\ge 0, \qquad (9.5.12)$$
$$(q_1-1)(\gamma p_1-\delta)\ge 0, \qquad (9.5.13)$$
$$q_1(\gamma p_1-\delta)\ge 0, \qquad (9.5.14)$$
$$0\le p_1^0\le 1, \qquad (9.5.15)$$
$$0\le q_1\le 1 \qquad (9.5.16)$$

порождает равновесие $(p^0,q^0)=((p_1^0;p_2^0),(q_1^0,q_2^0))$ Нэша в смешанных стратегиях биматричной игры $G(A,B)$ с (2×2)-матрицами A и B и любое равновесие (p^0, q^0) Нэша порождается решением (p_1^0 q_1^0) приведенной системы неравенств.

9.5.2. Выпишем и найдем решения систем неравенств для примеров биматричных игр $G(A, B)$ с (2×2)-матрицами A и B.

Пример 9.5.1 (продолжение той части примера 9.3.2, в которой фигурирует двойная матрица второго порядка).

Двойная матрица выигрышей биматричной игры $G(A,B)$ имеет вид

(4; 3)	$(2;\hat{5})$
$(\breve{5};\hat{3})$	$(\breve{3};2)$

Сразу получаем, что эта биматричная игра имеет равновесие $(e_2;f_1)((e_2=(0;1);f_1=(1;0))$ Нэша в чистых стратегиях. В этом равновесии выигрыши игроков P_1 и P_2 соответственно равны $u_1(e_2;f_1)$ $=5$, $u_2(e_2;f_1)=3$.

В рассматриваемом примере $a_{11}=4$; $a_{12}=2$; $a_{21}=5$; $a_{22}=3$; $b_{11}=3$; $b_{12}=5$; $b_{21}=3$; $b_{22}=2$.

Имеем $\alpha=a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}=4-2-5+3=0, \gamma=b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22}=$ $=3-5-3+2=-3$, $\beta=a_{22}-a_{12},=3-2=1$, $\delta=b_{22}-b_{21}=2-3=-1$.

Перепишем систему неравенств (9.5.11)–(9.5.16) для этого конкретного примера:

$$(p_1-1)(0\cdot q_1-1)\geq 0,$$
$$p_1(0\cdot q_1-1)\geq 0,$$
$$(q_1-1)(-3p_1-(-1))\geq 0,$$
$$q_1(-3p_1-(-1))\geq 0,$$
$$0\leq p_1\leq 1, \qquad 0\leq q_1\leq 1.$$

Рассмотрим сначала первые два неравенства $-(p_1-1)\geq 0$, $-p_1\geq 0$ и цепочки $0\leq p_1\leq 1$, $0\leq q_1\leq 1$.

После элементарных преобразований получаем, что $p_1\leq 0$, $p_1\leq 1$, $0\leq p_1$.

Отсюда следует, что $p_1=0$. При этом $0\leq q_1\leq 1$. На плоскости Op_1q_1 множество $\{p_1,q_1)\mid p_1=0, 0\leq q_1\leq 1\}$ изображается отрезком OW, выделенным черной жирной линией (рис. 9.1).

Таким образом, множество, изображающее на плоскости Op_1q_1 систему из первых двух неравенств и неравенств $0\leq p_1\leq 1$, $0\leq q_1\leq 1$, есть отрезок OW.

Рассмотрим теперь третье и четвертое неравенства $(q_1-1)(-3p_1+$ $+1)\geq 0$, $q_1(-3p_1+1)\geq 0$ и цепочки $0\leq p_1\leq 1$, $0\leq q_1\leq 1$.

При $q_1 = 0$ имеем неравенство $-(-3p_1 + 1) \geq 0$, т.е. $3p_1 - 1 \geq 0$ и, значит, (с учетом того, что $p_1 \leq 1$) $1 \geq p_1 \geq {}^1/_3$. На плоскости Op_1q_1 множество $\{p_1, q_1)| \; 1 \geq p_1 \geq {}^1/_3, \; q_1 = 1\}$ изображается отрезком V_1V, расположенным на оси Op_1 и выделенным светлой жирной линией (см. рис. 9.1).

При $q_1 = 1$ имеем неравенство $-3p_1 + 1 \geq 0$, откуда следует, что (с учетом, что $p_1 \geq 0$) $1 \leq p_1 \leq {}^1/_3$. На плоскости Op_1q_1 множество $\{p_1, q_1)| \, 0 \leq p_1 \leq {}^1/_3, q_1 = 1\}$ изображается отрезком WV_0, выделенным светлой жирной линией (см. рис. 9.1).

При $0 < q_1 < 1$ имеем неравенство $-3p_1 + 1 \leq 0, \leq -3p_1 + 1 \geq 0$, откуда вытекает $p_1 = {}^1/_3$. На плоскости Op_1q_1 множество $\{p_1, q_1)| \, p_1 = {}^1/_3, \, 0 < q_1 < 1\}$ изображается промежутком V_1V_0 (без концов V_1 и V_0), выделенным светлой жирной линией (см. рис. 9.1).

Таким образом, множество, изображающее на плоскости Op_1q_1 все решения системы третьего и четвертого неравенств и цепочки $0 \leq p_1 \leq 1, 0 \leq q_1 \leq 1$, есть зигзаг WV_0V_1V.

В рассматриваемом примере точка пересечения отрезка OW и зигзага WV_0V_1V есть точка $W = (0; 1)$ (показанная кружком), т.е. $p_1^0 = 0$, $q_1^0 = 0$, откуда следует, что равновесие Нэша существует, является единственным и имеет вид

$$(p^0, q^0) = (p_1^0, p_2^0), (q_1^0, q_2^0) = ((0; 1), (1; 0)) = (e_2; f_1).$$

Других равновесий Нэша рассмотренная биматричная игра не имеет. Выигрыши игроков P_1 и P_2 были выписаны выше.

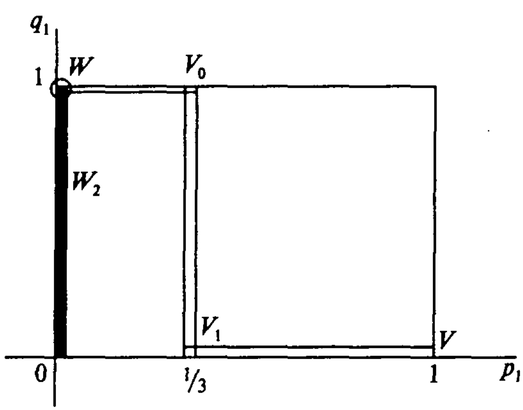


Рис. 9.1

Пример 9.5.2. Двойная матрица выигрышей биматричной игры $G(A, B)$ имеет вид

$(\breve{30}; \hat{30})$	$(200; -100)$
$(-50; 100)$	$(\breve{300}; \hat{200})$

Сразу получаем, что эта биматричная игра имеет два равновесия Нэша в чистых стратегиях: $(e_1;f_1)$ $(e_1 = (1; 0); f_1 = (1; 0))$ и $(e_2;f_2)$ $(e_1 = (0; 1); f_1 = (0; 1))$. Выигрыши игроков P_1 и P_2 в этих равновесиях Нэша соответственно равны

$u_1(e_1;f_1) = 30,\ u_2(e_1;f_1) = 30,$

$u_1(e_2;f_2) = 300,\ u_2(e_2;f_2) = 200.$

В рассматриваемом примере $a_{11} = 30$; $a_{12} = 200$; $a_{21} = -50$; $a_{22} = 300$; $b_{11} = 30$; $b_{12} = -100$; $b_{21} = 100$; $b_{22} = 200$.

Имеем $\alpha = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 30 - 200 + 50 + 300 = 180,$

$\beta = a_{22} - a_{12} = 300 - 200 = 100,$

$\gamma = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = 30 + 100 - 100 + 200 = 230,$

$\delta = b_{22} - b_{21} = 200 - 100 = 100.$

Система неравенств (9.5.11)–(9.5.16) для этого конкретного примера 9.5.2 имеет вид

$(p_1 - 1)(180q_1 - 100) \geq 0,$

$p_1(180q_1 - 100) \geq 0,$

$(q_1 - 1)(230p_1 - 100) \geq 0,$

$q_1 (230p_1 - 100) \geq 0,$

$0 \leq p_1 \leq 1,$

$0 \leq q_1 \leq 1.$

Сначала проанализируем систему из первого и второго неравенств с учетом цепочек $0 \leq p_1 \leq 1$, $0 \leq q_1 \leq 1$.

При $p_1 = 0$ из первого неравенства (с учетом того, что $q_1 \geq 0$) имеем $0 \leq q_1 \leq {}^5/_9$. На плоскости Op_1q_1 множество $\{p_1, q_1)|p_1 = 0, 0 \leq q_1 \leq {}^5/_9\}$ изображается отрезком OW_1, выделенным черной жирной линией (рис. 9.2).

При $p_1 = 1$ из второго неравенства (с учетом того, что $q_1 \leq 1$) имеем цепочку $1 \geq q_1 \geq 5/9$.

На плоскости Op_1q_1 множество $\{p_1, q_1)|p_1 = 1, 5/9 \geq q_1 \geq 1\}$ изображается отрезком W_2W_3, выделенным черной жирной линией (см. рис. 9.2).

При $0 < p_1 < 1$ из первого и второго неравенств следует, что $q_1 = {}^5/_9$. На плоскости Op_1q_1 множество $\{p_1, q_1)|0 < p_1 < 1, q_1 = {}^5/_9\}$

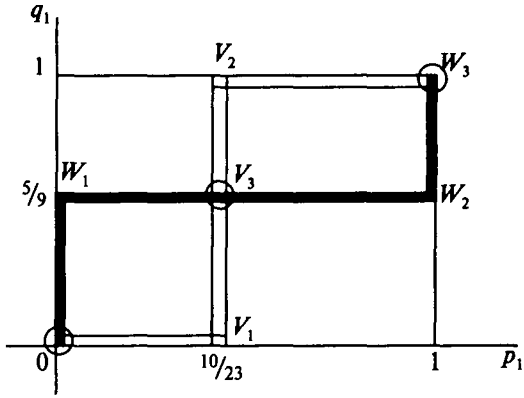


Рис. 9.2

изображается отрезком W_1W_2 (без концов W_1 и W_2), выделенным черной жирной линией (см. рис. 9.2).

Таким образом, множество, изображающее на плоскости Op_1q_1 все решения системы из двух неравенств $(p_1 - 1)(180q_1 - 100) \geq 0$, $p_1(180q_1 - 100) \geq 0$ и цепочек $0 \leq p_1 \leq 1$, $0 \leq q_1 \leq 1$, есть зигзаг $OW_1W_2W_3$.

Переходим к анализу системы из третьего и четвертого неравенств:

$$(q_1 - 1)(23p_1 - 10) \geq 0,\ q_1(23p_1 - 10) \geq 0$$

и двух цепочек $0 \leq p_1 \leq 1$, $0 \leq q_1 \leq 1$.

При $q_1 = 0$ из неравенства $(q_1 - 1)(23p_1 - 10) \geq 0$ с учетом того, что $p_1 \geq 0$, имеем $0 \leq p_1 \leq {}^{10}/_{23}$. На плоскости Op_1q_1 множество $\{p_1, q_1)|0 < p_1 < {}^{10}/_{23}, q_1 = 0\}$ изображается отрезком OV_1, расположенным на оси Op_1 и выделенным светлой жирной линией (см. рис. 9.2).

При $q_1 = 1$ имеем неравенство $23p_1 \geq 10$, откуда следует с учетом того, что $p_1 \leq 1$, ${}^{10}/_{23} \leq p_1 \leq 1$. На плоскости Op_1q_1 множество $\{p_1, q_1)|{}^{10}/_{23} < p_1 < 1, q_1 = 1\}$ изображается отрезком V_2W_3, выделенным светлой жирной линией (см. рис. 9.2).

При $0 < q_1 < 1$ из третьего и четвертого неравенств получаем $p_1 = {}^{10}/_{23}$. На плоскости Op_1q_1 множество $\{p_1, q_1)|p_1 = {}^{10}/_{23}, 0 < q_1 < 1\}$ изображается промежутком V_1V_2 (без концов V_1 и V_2), выделенным светлой жирной линией (см. рис. 9.2).

Таким образом, множество, изображающее на плоскости Op_1q_1 все решения системы из третьего и четвертого неравенств $(q_1 - 1)(230p_1 - 100) \geq 0$, $q_1(230p_1 - 100) \geq 0$ и из цепочек $0 \leq p_1 \leq 1$, $0 \leq q_1 \leq 1$, есть зигзаг $OV_1V_2W_3$.

В рассматриваемом примере зигзаги $OW_1W_2W_3$ и $OV_1V_2W_3$ имеют три точки пересечения $O = (0; 0)$, $W_3 = (1; 1)$, $V_3 = ({}^{10}/_{23}; {}^{5}/_{9})$.

Точке $O = (0; 0)$ соответствует равновесие Нэша $((0; 1); (0; 1)) = (e_2; f_2)$ в чистых стратегиях e_2, f_2. В этом равновесии Нэша выигрыш игрока P_1 равен $u_1(e_2; f_2) = 300$, выигрыш игрока P_2 равен $u_2(e_2; f_2) = 200$.

Точке $W_3 = (1; 1)$ соответствует равновесие Нэша $((1; 0); (1; 0)) = (e_1; f_1)$ в чистых стратегиях e_1, f_1. В этом равновесии Нэша выигрыш игрока P_1 равен $u_1(e_1; f_1) = 30$, выигрыш игрока P_2 равен $u_2(e_1; f_1) = 30$.

Точке $V_3 = ({}^{10}/_{23}; {}^{5}/_{9})$ соответствует равновесие Нэша $(({}^{10}/_{23}; {}^{13}/_{23}); ({}^{5}/_{9}; {}^{4}/_{9}))$ в смешанных стратегиях

$$p = (p_1; p_2) = \left(\frac{10}{23}; \frac{13}{23}\right), \quad q = (q_1; q_2) = \left(\frac{5}{9}; \frac{4}{9}\right).$$

Ожидаемый выигрыш игрока P_1 равен

$$u_1\left(\left(\frac{10}{23}; \frac{13}{23}\right), \left(\frac{5}{9}; \frac{4}{9}\right)\right) = \left(\frac{10}{23}; \frac{13}{23}\right) \cdot \begin{pmatrix} 30 & 200 \\ -50 & 300 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5/9 \\ 4/9 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{950}{9} \cong 105{,}56.$$

Ожидаемый выигрыш игрока P_2 равен

$$u_2\left(\left(\frac{10}{23}; \frac{13}{23}\right), \left(\frac{5}{9}; \frac{4}{9}\right)\right) = \left(\frac{10}{23}; \frac{13}{23}\right) \cdot \begin{pmatrix} 30 & -100 \\ 100 & 200 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5/9 \\ 4/9 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1600}{23} \cong 69{,}57.$$

Таким образом, биматричная игра $G(A, B)$ этого примера (9.5.2) имеет три равновесия Нэша – два равновесия Нэша в чистых стратегиях и одно равновесие в смешанных стратегиях.

Пример 9.5.3. (В.В. Морозов (2002)). Двойная матрица выигрышей биматричной игры $G(A, B)$ имеет вид

$(0;\hat{3})$	$(\breve{1};\hat{3})$
$(\breve{1};-1)$	$(0;\hat{2})$

Сразу получаем, что эта биматричная игра имеет равновесие Нэша в чистых стратегиях: $(e_1;f_2)$ $((e_1 = (1;\ 0);f_2 = (0;\ 1))$. В этом равновесии Нэша выигрыши игроков P_1 и P_2 соответственно равны

$$u_1(e_1;f_2) = 1,\ u_2(e_1;f_2) = 3.$$

В данном примере $a_{11} = 0$; $a_{12} = 1$; $a_{21} = 1$, $a_{22} = 0$; $b_{11} = 3$; $b_{12} = 3$; $b_{21} = -1$; $b_{22} = 2$.

Имеем $\alpha = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 0 - 1 - 1 + 0 = -2$, $\beta = a_{22} - a_{12} = 0 - 1 = -1$, $\gamma = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = 3 - 3 + 1 + 2 = 3$, $\delta = b_{22} - b_{21} = 2 + 1 = 3$.

Перепишем систему неравенств (9.5.11)–(9.5.16) для этого конкретного примера (9.5.3):

$$(p_1 - 1)(-2q_1 + 1) \geq 0,$$
$$p_1(-2q_1 + 1) \geq 0,$$
$$(q_1 - 1)(3p_1 - 3) \geq 0,$$
$$q_1(3p_1 - 3) \geq 0,$$
$$0 \leq p_1 \leq 1,$$
$$0 \leq q_1 \leq 1.$$

Рассмотрим первое неравенство и цепочки $0 \leq p_1 \leq 1$, $0 \leq q_1 \leq 1$.

При $p_1 = 0$ имеем неравенство $-(-2p_1 + 1) \geq 0$, откуда следует неравенство $2q_1 - 1 \geq 0$, т.е., принимая во внимание неравенство $q_1 \leq 1$, имеем $1 \geq q_1 \geq {}^1/_2$. На плоскости Op_1q_1 множество $\{p_1, q_1)| p_1 = 0, {}^1/_2 \leq q_1 \leq 1\}$ изображается отрезком W_1W_2, выделенным черной жирной линией (рис. 9.3).

При $p_1 = 1$ имеем неравенство $-2q_1 + 1 \geq 0$, т.е. (принимая во внимание неравенство $q_1 \geq 0$) имеем $0 \leq q_1 \leq {}^1/_2$. На плоскости Op_1q_1 множество $\{p_1, q_1)| p_1 = 0, 0 \leq q_1 \leq {}^1/_2\}$ изображается отрезком W_3W_4, выделенным черной жирной линией (см. рис.9.3).

При $0 < p_1 < 1$ из первого и второго неравенств следует, что $q_1 = {}^1/_2$. На плоскости Op_1q_1 множество $\{p_1, q_1)| 0 < p_1 < 1, q_1 = {}^1/_2\}$ изображается отрезком W_2W_3 (без концов W_2 и W_3), выделенным черной жирной линией (см. рис. 9.3).

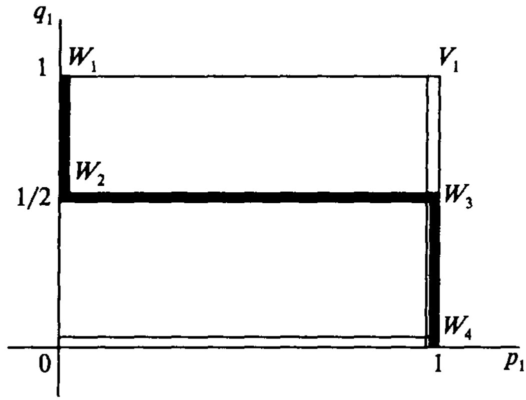


Рис. 9.3

Таким образом, множество, изображающее на плоскости Op_1q_1 все решения системы из неравенств $(p_1 - 1)(-2q_1 + 1) \ge 0$, $p_1(-2q_1 + 1) \ge 0$ и цепочек $0 \le p_1 \le 1$, $0 \le q_1 \le 1$, есть зигзаг $W_1W_2W_3W_4$.

Переходим к анализу системы из третьего и четвертого неравенств

$$(q_1 - 1)(3p_1 - 3) \ge 0,\ q_1(3p_1 - 3) \ge 0$$

и двух цепочек $0 \le p_1 \le 1$, $0 \le q_1 \le 1$.

При $q_1 = 0$ имеем неравенство $-p_1 + 1 \ge 0$, т.е. (принимая во внимание неравенство $p_1 \ge 0$) $0 \le p_1 \le 1$. На плоскости Op_1q_1 множество $\{p_1, q_1)| 0 \le p_1 \le 1, q_1 = 0\}$ изображается отрезком OW_4, выделенным светлой жирной линией (см. рис. 9.3).

При $q_1 = 1$ имеем неравенство $p_1 - 1 \ge 0$, т.е. $p_1 \ge 1$, и следовательно, $p_1 = 1$. На плоскости Op_1q_1 множество $\{p_1, q_1)| p_1 = 1, q_1 = 1\}$ изображается точкой $V_1 = (1; 1)$ (см. рис. 9.3).

При $0 < q_1 < 1$ имеем равенство $p_1 = 1$. На плоскости Op_1q_1 множество $\{p_1, q_1)| p_1 = 1, 0 < q_1 < 1\}$ изображается промежутком W_4V_1 (без концов W_4 и V_1), выделенным светлой жирной линией (см. рис. 9.3).

Следовательно, множество, изображающее на плоскости Op_1q_1 все решения системы из неравенств $(q_1 - 1)(3p_1 - 3) \ge 0$, $q_1(3p_1 - 3) \ge 0$ и цепочек $0 \le p_1 \le 1$, $0 \le q_1 \le 1$, есть зигзаг OW_4V_1.

В рассматриваемом примере зигзаги $W_1W_2W_3W_4$ и OW_4V_1 пересекаются по отрезку W_3W_4. Точке $W_4 = (1; 0)$ соответствует равновесие Нэша $(e_1; f_2)$ в чистых стратегиях e_1, f_2.

Выигрыши игроков P_1 и P_2 в этом равновесии Нэша были выписаны в начале текста этого примера.

Каждой точке $(1, q_1)$, $0 < q_1 \le {}^1/_2$ полупромежутка W_4V_1 (без конца W_4) соответствует равновесие Нэша $((1; 0); (q_1; 1 - q_1))$, $0 < q_1 < {}^1/_2$, в котором стратегия игрока P_1 является $e_1 = (1; 0)$, стратегия игрока P_2 является смешанной $(q_1; 1 - q_1)$, $0 < q_1 < {}^1/_2$.

Следует особо отметить, что в рассматриваемом примере 9.5.3 имеем бесконечно много (континуум) равновесий Нэша в смешанных стратегиях.

В равновесии Нэша $((1; 0); (q_1; 1 - q_1))$, $0 < q_1 < {}^1/_2$ ожидаемые выигрыши игроков P_1 и P_2 соответственно равны

$$u_1(e_1;(q_1,1-q_1)) = (1;0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ 1-q_1 \end{pmatrix} = (1;0)\begin{pmatrix} q_1 \\ 1-q_1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 - q_1,\ 0 < q_1 \le \tfrac{1}{2},$$

$$u_2(e_1;(q_1,1-q_1)) = (1;0)\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ 1-q_1 \end{pmatrix} = (3;3)\begin{pmatrix} q_1 \\ 1-q_1 \end{pmatrix} =$$

$$= 3q_1 + 3 - 3q_1 = 3.$$

Замечание 9.5.1. Пример 9.5.3 корректирует одно ошибочное утверждение в Замечании 2 на с. 407 книги «Количественные методы в экономических исследованиях» (2004).

9.6. Парето-эффективность в статических играх с полной информацией

9.6.1. *Определение 9.6.1* Профиль s^* игры $G = \langle s_k, u_k(s), k \in I \rangle$ называется *Парето-эффективным* (*Парето-оптимальным*), если не существует профиля s игры G, чтобы были справедливы неравенства

$$u_k(s) \ge u_k(s^*),\ k = 1, \ldots, m,$$

при этом хотя бы одно из этих неравенств должно быть строгим.

Это определение естественным образом формулируется в случае биматричной игры $G(A,B)$ в чистых стратегиях и в случае смешанного расширения $\overline{G}(A,B)$ биматричной игры $G(A,B)$.

Профиль (e_{i^*}, f_{j^*}) в чистых стратегиях e_{i^*}, f_{j^*} биматричной игры $G(A,B)$ называется Парето-эффективным в чистых стратегиях, если не существует ни одного профиля (e_j, f_j) чистых стратегий e_j, f_j, для которых одновременно были бы справедливы неравенства $u_1(e_{i^*}, f_{j^*}) \le u_1(e_i, f_j)$, $u_2(e_{i^*}, f_{j^*}) \le u_2(e_i, f_j)$, среди которых хотя бы одно должно быть строгим.

Профиль (p^*, q^*) в смешанных стратегиях p^* и q^* биматричной игры $G(A,B)$ называется Парето-эффективным, если не существует ни одного профиля (p, q) смешанных стратегий p и q (среди них могут быть и чистые стратегии), для которых одновременно были бы выполнены неравенства $u_1(p^*, q^*) \le u_1(p, q)$ $u_2(p^*, q^*) \le$ $\le u_2(p, q)$, среди которых хотя бы одно должно быть строгим.

Профиль (e_{i0}, f_{j0}) равновесия Нэша биматричной игры $G(A, B)$ в чистых стратегиях обязательно остается равновесием Нэша биматричной игры $G(A, B)$ в смешанных стратегиях. А профиль, Парето-эффективный в чистых стратегиях e_{i^*}, f_{j^*} биматричной игры $G(A, B)$, уже может не быть Парето-эффективным в смешанных стратегиях (см. ниже пример 9.6.3). Понятие Парето-эффективного в чистых стратегиях профиля биматричной игры введено в параграфе 9.6 скорее в учебных целях в связи с тем, что это понятие допускает наглядную геометрическую интерпретацию в двумерном *пространстве* (плоскости Ou_1u_2 *выигрышей* u_1 и u_2 игроков P_1 и P_2 соответственно). Это пространство Ou_1u_2 выигрышей принято также называть *критериальным*.

Каждый элемент $(a_{ij}; b_{ij})$ двойной матрицы (9.2.2) показывает величины a_{ij} и b_{ij} выигрышей игроков P_1 и P_2 для профиля $(e_i; f_j)$ (чистых) стратегий e_i и f_j, выбранных игроком P_1 и игроком P_2 соответственно. Если на оси Ou_1 отложить выигрыш a_{ij}, а на оси Ou_2 — выигрыш b_{ij}, то точка $M_{ij} = (a_{ij}; b_{ij})$ в пространстве Ou_1u_2 выигрышей наглядно геометрически проинтерпретирует пару $(a_{ij}; b_{ij})$ выигрышей игроков P_1 и P_2 для профиля $(e_i; f_j)$ их (чистых) стратегий e_i и f_j.

Пример 9.6.1 (продолжение примера 9.3.2). Двойная матрица $(A|B)$ биматричной игры $G(A, B)$ имеет вид

$(\breve{1}; 2)$	$(4; 3)$	$(2; \hat{5})$
$(-1; 0)$	$(\breve{5}; \hat{3})$	$(\breve{3}; 2)$
$(-1; \hat{7})$	$(3; 4)$	$(1; 6)$

Если игрок P_1 выбирает стратегию $e_1 = (1;\ 0;\ 0)$ (т.е. первую чистую стратегию), а игрок P_2 выбирает стратегию $f_1 = (1;\ 0;\ 0)$ (свою первую чистую стратегию), то выигрыш игрока P_1 равен 1, а выигрыш игрока P_2 равен 2.

Как уже было сказано выше, в системе координат Ou_1u_2 на оси Ou_1 следует откладывать выигрыши игрока P_1, а на оси Ou_2 – выигрыши игрока P_2.

Построим в пространстве выигрышей Ou_1u_2 вектор (точку) $(1;\ 2) = M_1$ и остальные элементы данной двойной матрицы (рис. 9.4). Каждую построенную точку следует толковать в качестве вершины прямого угла с (короткими) сторонами, параллельными осям Ou_1 и Ou_2 и уходящими вправо и вверх.

Угол, вершиной которого является точка $M_7 = (-1;\ 7)$, *не* содержит («не ловит») ни одной из точек $M_1, \ldots, M_6, M_8, M_9$, отличных от точки M_7. Отсюда следует (см. двойную матрицу), что пара

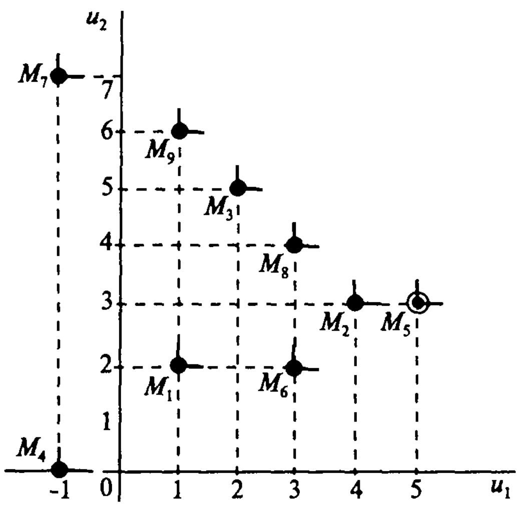


Рис. 9.4

чистых стратегий $e_3 = (0; 0; 1)$ и $f_1 = (1; 0; 0)$ игроков P_1 и P_2 соответственно образуют Парето-эффективный профиль (e_3, f_1) данной биматричной игры $G(A, B)$ в чистых стратегиях.

Угол, вершиной которого является точка $M_2 = (4; 3)$, содержит точку M_5. Поэтому соответствующая точке M_2 пара чистых стратегий $e_1 = (1; 0; 0)$ и $f_2 = (0; 1; 0)$ игроков P_1 и P_2 образует профиль стратегий (e_1, f_2), который не является Парето-эффективным в чистых стратегиях.

Таким образом, пары чистых стратегий $(e_3; f_1)$, $(e_3; f_3)$, $(e_1; f_3)$, $(e_3; f_2)$ и $(e_2; f_2)$, которые соответствуют точкам M_7, M_9, M_3, M_8, M_5, формируют Парето-эффективные профили чистых стратегий в чистых стратегиях, а пары чистых стратегий $(e_2; e_1)$, (e_1, f_1), (e_2, f_3), (e_1, f_2), которые соответствуют точкам M_4, M_1, M_6, M_2, формируют профили чистых стратегий, которые не являются Парето-эффективными в чистых стратегиях.

Отметим, что в рассматриваемом примере профиль (e_2, f_2) равновесия Нэша в чистых стратегиях совпадает с Парето-эффективным профилем в чистых стратегиях, а Парето-эффективные профили в чистых стратегиях (e_3, f_1), (e_3, f_3), (e_1, f_3), (e_3, f_2) не являются профилями равновесия Нэша в чистых стратегиях.

Равновесие Нэша в чистых стратегиях может и не быть Парето-эффективным в чистых стратегиях.

Смешанное расширение биматричной игры этого примера 9.6.1 рассматривать не будем.

Пример 9.6.2 (продолжение примера 9.3.3). Двойная матрица $(A|B)$ биматричной игры $G(A, B)$ имеет вид

$(\breve{30}; \overset{\frown}{30})$	$(\breve{400}; -100)$
$(-50; \overset{\frown}{300})$	$(200; 200)$

Построим в пространстве выигрышей Ou_1u_2 векторы (точки) $M_1 = (30, 30)$, $M_2 = (400, -100)$, $M_3 = (-50, 300)$, $M_4 = (200, 200)$, (рис. 9.5).

Здесь пары чистых стратегий $(e_2; f_1)$, $(e_2; f_2)$, $(e_1; f_2)$, которые соответствуют точкам M_3, M_4, M_2, формируют профили в чистых стратегиях, которые Парето-эффективны. Пара чистых стратегий (e_1, f_1), которая соответствует точке M_1, формирует равновесие

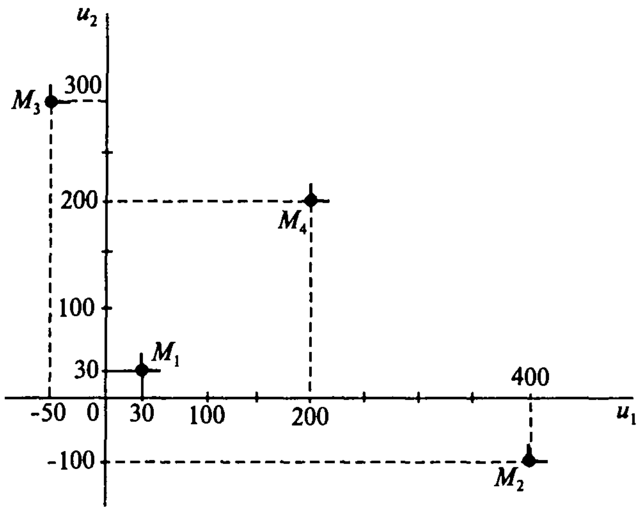


Рис. 9.5

Нэша в чистых стратегиях, которое не является Парето-эффективным, т.е. равновесия Нэша могут не быть эффективными.

Здесь $e_1 = (1; 0)$, $e_2 = (0; 1)$, $f_1 = (1; 0)$, $f_2 = (0; 1)$.

9.6.2. *Пример 9.6.3.* Двойная матрица биматричной игры $G(A, B)$ имеет вид

$(50; 7\hat{0})$	$(6\breve{0}; -50)$
$(1\breve{0}0; 50)$	$(-50; 1\hat{2}0)$

Рассматриваемая игра не имеет ни одного равновесия Нэша в чистых стратегиях.

Построим в пространстве выигрышей Ou_1u_2 векторы (точки) $M_1 = (50, 70)$, $M_2 = (60, -50)$, $M_3 = (100, 50)$, $M_4 = (-50, 120)$ (рис. 9.6).

Здесь пары чистых стратегий $(e_1; f_1)$, $(e_2; f_1)$, $(e_2; f_2)$ $((e_1 = (1; 0)$, $e_2 = (0; 1)$, $f_1 = (1; 0)$, $f_2 = (0; 1))$, которые соответствуют точкам M_1, M_3 и M_4, формируют профили чистых стратегий, которые Парето-эффективны в чистых стратегиях. Пара чистых стратегий $(e_1; f_2)$, соответствующая точке M_2, формирует профиль чистых стратегий, который не является Парето-эффективным.

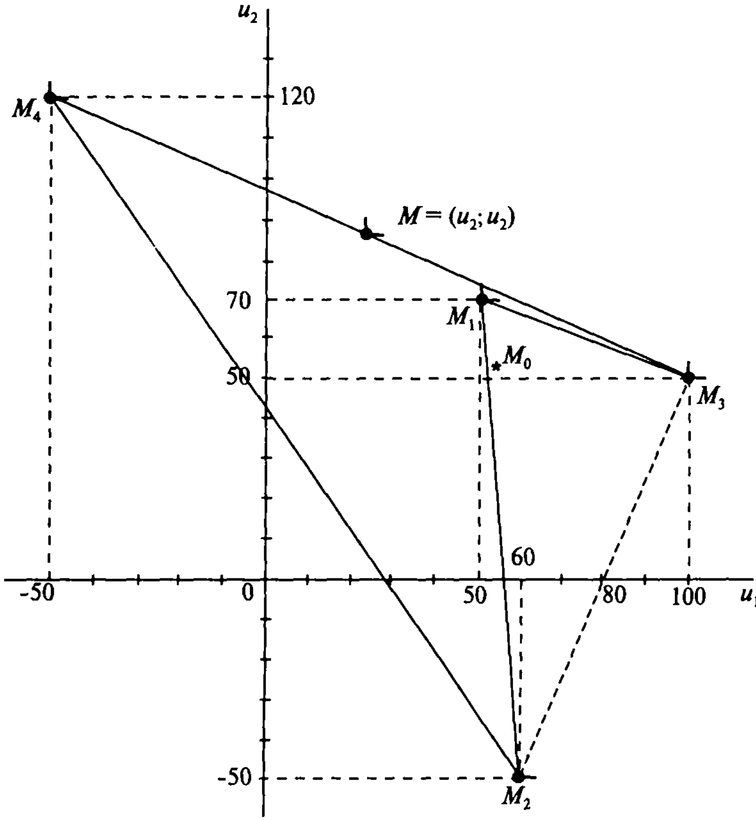


Рис. 9.6

Перейдем к смешанному расширению $\bar{G}(A,B)$ данной биматричной игры.

Сначала определим равновесия Нэша в смешанных стратегиях.

Имеем $a_{11} = 50$; $a_{12} = 60$; $a_{21} = 100$; $a_{22} = -50$; $b_{11} = 70$; $b_{12} = -50$; $b_{21} = 50$; $b_{22} = 120$.

Положим $\alpha = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 50 - 60 - 100 - 50 = -160$,

$\beta = a_{22} - a_{12} = -50 - 60 = -110$, $\gamma = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = 70 + 50 - 50 + 120 = 190$, $\delta = b_{22} - b_{21} = 120 - 50 = 70$.

Тогда система неравенств (9.5.11)–(9.5.16) запишется так:

$(p_1 - 1)(-160q_1 + 110) \geq 0$,

$p_1(-160q_1 + 110) \geq 0$,

$(q_1 - 1)(190p_1 - 70) \ge 0,$
$q_1(100p_1 - 70) \ge 0,$
$0 \le p_1 \le 1,$
$0 \le q_1 \le 1.$

Проанализируем первые два неравенства

$(p_1 - 1)(-160q_1 + 110) \ge 0$, $p_1(-160q_1 + 110) \ge 0$ и две цепочки

$$0 \le p_1 \le 1,\ 0 \le q_1 \le 1.$$

При $p_1 = 0$ имеем $-(-16q_1 + 11) \ge 0$, откуда с учетом неравенства $q_1 \le 1$ получаем $1 \ge q_1 \ge {}^{11}/_{16}$. На плоскости Op_1q_1 множество $\{p_1, q_1)|p_1 = 0, {}^{11}/_{16} \le q_1 \le 1\}$ изображается отрезком W_1W_2, выделенным черной жирной линией (рис. 9.7).

При $p_1 = 1$ имеем $-16q_1 + 11 \ge 0$, откуда с учетом неравенства $q_1 \ge 0$ получаем $0 \le q_1 \le {}^{11}/_{16}$. На плоскости Op_1q_1 множество $\{p_1, q_1)|p_1 = 1, 0 \le q_1 \le {}^{11}/_{16}\}$ изображается отрезком W_3W_4, выделенным черной жирной линией (см. рис. 9.7).

При $0 < p_1 < 1$ имеем $q_1 = {}^{11}/_{16}$. На плоскости Op_1q_1 множество $\{p_1, q_1)|\ 0 < p_1 < 1, q_1 = {}^{11}/_{16}\}$ изображается промежутком W_2W_3 (без концов W_2 и W_3), выделенным черной жирной линией (см. рис. 9.7).

Таким образом, множество, изображающее на плоскости Op_1q_1 все решения системы из двух первых неравенств и цепочек $0 < p_1 < 1, 0 \le q_1 \le 1$, есть зигзаг $W_1W_2W_3W_4$.

Переходим к анализу системы из третьего и четвертого неравенств:

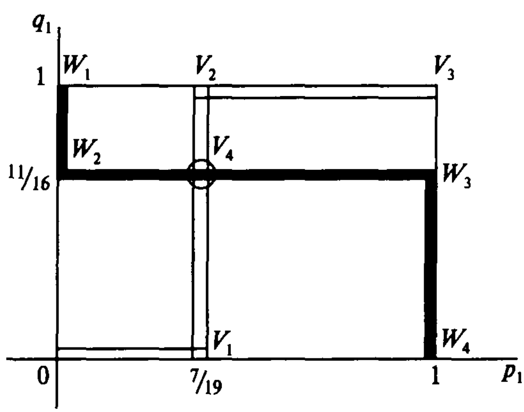


Рис. 9.7

$(q_1 - 1)(190p_1 - 70) \geq 0$, $q_1(190p_1 - 70) \geq 0$ и двух цепочек $0 \leq p_1 \leq 1, 0 \leq q_1 \leq 1$.

При $q_1 = 0$ имеем неравенство $-(19p_1 - 7) \geq 0$, откуда с учетом неравенства $p_1 \geq 0$ получаем $0 \leq p_1 \leq {}^7/_{19}$. На плоскости Op_1q_1 множество $\{p_1, q_1)| \; 0 < p_1 < {}^7/_{19}, q_1 = 0\}$ изображается отрезком OV_1, выделенным светлой жирной линией (см. рис. 9.7).

При $q_1 = 1$ имеем неравенство $19p_1 - 7 \geq 0$, откуда с учетом неравенства $p_1 \leq 1$ получаем ${}^7/_{19} \leq p_1 \leq 1$. На плоскости Op_1q_1 множество $\{p_1, q_1)| \; {}^7/_{19} < p_1 < 1, q_1 = 1\}$ изображается отрезком V_2V_3, выделенным светлой жирной линией (см. рис. 9.7).

При $0 < q_1 < 1$ имеем равенство $p_1 = {}^7/_{19}$. На плоскости Op_1q_1 множество $\{p_1, q_1)|p_1 = {}^7/_{19}, 0 < q_1 < 1\}$ изображается промежутком V_1V_2 (без концов V_1 и V_2), выделенным светлой жирной линией (см. рис. 9.7).

Следовательно, множество, изображающее на плоскости Op_1q_1 все решения системы из третьего и четвертого неравенств и из цепочек $0 \leq p_1 \leq 1$, $0 \leq q_1 \leq 1$, есть зигзаг $OV_1V_2V_3$.

Зигзаги $W_1W_2W_3W_4$ и $OV_1V_2V_3$ имеют единственную общую точку $V_4 = \left(\frac{7}{19}, \frac{11}{16}\right)$, которой соответствует единственное равновесие Нэша $\left(\left(\frac{7}{19}, \frac{12}{19}\right), \left(\frac{11}{16}, \frac{5}{16}\right)\right)$ в смешанных стратегиях

$$p^0 = (p_1^0, p_2^0) = \left(\frac{7}{19}, \frac{12}{19}\right), \; q^0 = (q_1^0, q_2^0) = \left(\frac{11}{16}, \frac{5}{16}\right).$$

Ожидаемый выигрыш игрока P_1 равен

$$u_1(p^0, q^0) = \left(\frac{7}{19}, \frac{12}{19}\right)\begin{pmatrix} 50 & 60 \\ 100 & -50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{11}{16} \\ \frac{5}{16} \end{pmatrix} = \frac{850}{16} = 53{,}125.$$

Ожидаемый выигрыш игрока P_2 равен

$$u_2(p^0, q^0) = \left(\frac{7}{19}; \frac{12}{19}\right)\begin{pmatrix} 70 & -50 \\ 50 & 120 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{11}{16} \\ \frac{5}{16} \end{pmatrix} = \frac{1090}{19} \cong 57{,}368.$$

Построим в пространстве выигрышей Ou_1u_2 точку $M_0 = \left(\frac{850}{16}; \frac{1090}{19}\right)$ (см. рис. 9.6).

Таким образом, биматричная игра $G(A, B)$ этого примера имеет единственное равновесие Нэша в смешанных стратегиях.

Для того чтобы проанализировать Парето-эффективные профили в смешанных стратегиях $p = (p_1, p_2)$ и $q = (q_1, q_2)$, выпишем в явном виде функции ожидаемых выигрышей игроков P_1 и P_2 соответственно:

$$u_1(p,q) = (p_1; p_2)\begin{pmatrix} 50 & 60 \\ 100 & -50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 50p_1q_1 + 100q_1p_2 + 60p_1q_2 - 50p_2q_2,$$

$$u_2(p,q) = (p_1; p_2)\begin{pmatrix} 70 & -50 \\ 50 & 120 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 70p_1q_1 + 50q_1p_2 - 50p_1q_2 + 120p_2q_2.$$

Из выписанных формул получим следующие представления вектора $u = (u_1; u_2)$, принадлежащего пространству выигрышей Ou_1u_2:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = q_1\left[p_1\begin{pmatrix} 50 \\ 70 \end{pmatrix} + p_2\begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}\right] + q_2\left[p_1\begin{pmatrix} 60 \\ -50 \end{pmatrix} + p_2\begin{pmatrix} -50 \\ 120 \end{pmatrix}\right] =$$

$$p_1\left[q_1\underbrace{\begin{pmatrix} 50 \\ 70 \end{pmatrix}}_{M_1} + q_2\underbrace{\begin{pmatrix} 60 \\ -50 \end{pmatrix}}_{M_2}\right] + p_2\left[q_1\underbrace{\begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}}_{M_3} + q_2\underbrace{\begin{pmatrix} -50 \\ 120 \end{pmatrix}}_{M_4}\right] \qquad (9.6.1)$$

Если в выражении (9.6.1) $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, а p_1 пробегает значения от 0 до 1 (тогда p_2 пробегает значения от 1 до 0, ибо $p_1 + p_2 = 1$, $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$), точка $u = (u_1; u_2)$ заметает (от слова «метла») отрезок M_3M_1 (см. рис. 9.6).

Если в выражении (9.6.1) $q_1 = 0$, $q_2 = 1$, а $0 \leq p_1 \leq 1$, $1 \geq p_2 \geq 0$, точка $u = (u_1; u_2)$ заметает отрезок M_4M_2 (см. рис. 9.6). Если в (9.6.1) $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, а $0 \leq q_1 \leq 1$, $1 \geq q_2 \geq 0$, точка $u = (u_1; u_2)$ заметает отрезок M_2M_1. Если в (9.6.1) $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, а $0 \leq q_1 \leq 1$, $1 \geq q_2 \geq 0$, точка $u = (u_1; u_2)$ заметает отрезок M_4M_3 (см. рис. 9.6).

Если $0 \leq p_1 \leq 1$, $1 \geq p_2 \geq 0$, $0 \leq q_1 \leq 1$, $1 \geq q_2 \geq 0$, то точка $u = (u_1; u_2)$ заметает некоторое множество в пространстве выигрышей Ou_1u_2, которому принадлежат все построенные только что отрезки M_3M_1, M_4M_2, M_2M_1, M_4M_3, однако внутренние точки отрезка M_2M_3 в это множество не входят. Это можно доказать, взяв любую точку промежутка M_2M_3, скажем точку (80; 0), и доказав, что система уравнений $u_1(p; q) = 80$, $u_2(p; q) = 0$ не имеет ни одного неотрицательного решения p_1, p_2, q_1, q_2, такого, что $p_1 + p_2 = 1$, $q_1 + q_2 = 1$.

Любая точка $M = (u_1; u_2)$ отрезка M_3M_4 соответствует Парето-эффективному профилю $(p; q)$ в смешанных стратегиях, ибо угол этой точки не содержит (кроме нее самой) ни одной точки треугольника $M_1M_3M_4$.

Как уже отмечалось выше, точка $M_1 = (50; 70)$, которая соответствует Парето-эффективному профилю $(e_1; f_1)$ в чистых стратегиях e_1 и f_1, не соответствует никакому Парето-эффективному профилю $(p; q)$ в смешанных стратегиях, ибо угол точки M_1 (кроме нее самой) содержит часть точек отрезка M_3M_4.

Точка M_0, соответствующая равновесию Нэша в смешанных стратегиях, не соответствует Парето-эффективному профилю в смешанных стратегиях, ибо точка M_0 не принадлежит отрезку M_3M_4, а расположена строго ниже него.

В заключение отметим, что четырехугольник $M_1M_3M_4\ M_2M_1$ и точка M_0, которая расположена вне его, принадлежат множеству ожидаемых выигрышей рассматриваемой биматричной игры. Само множество ожидаемых выигрышей здесь не строится.

9.7. Динамические игры с совершенной и несовершенной информацией

9.7.1. В *динамической игре* игроки делают свои ходы (т.е. принимают решения о своих действиях) поочередно. Если каждый игрок, делая ход, знает, какие ходы были сделаны до него, то такая динамическая игра называется игрой с *совершенной информацией.* В противном случае игра называется игрой с *несовершенной информацией* (уточнение дается ниже).

В качестве примера динамической игры с совершенной информацией рассмотрим хорошо известную игру, которую называют «Вхождение фирмы на рынок». Отметим, что в изложении разных авторов фигурируют разные условные цифры.

Пример 9.7.1 (Вхождение фирмы на рынок)

В отрасли функционирует фирма-монополист (F_2), и в эту отрасль пытается войти другая фирма (F_1) и потеснить на рынке отрасли фирму-монополиста F_2. Фирма F_1 (игрок P_1) имеет два возможных хода (два варианта принятия решения о своих действиях): вступить (В) в отрасль (в частности, построить завод по выпуску продукции) или не вступить (НВ) в отрасль. Фирма F_2 (игрок P_2) имеет два своих возможных хода: сохранить (С) объем выпускаемой продукции или сократить (СКР) объем выпускаемой продукции. Ходы фирмы делают поочередно: сначала ход делает фирма F_1, потом ход делает фирма F_2, и на этом игра заканчивается.

Если фирма F_1 приняла решение В в отрасль, а фирма F_2 приняла решение С объем выпускаемой продукции, то, естественно, объем предложения в отрасли вырастет и цена на продукцию упадет. В этой ситуации весьма вероятно, что фирма-новичок F_1 получит вообще отрицательную прибыль, а прибыль фирмы F_2 останется положительной, но меньше максимальной (равной 14). Итак, в этом случае расклад прибылей фирм F_1 и F_2 будет, например, таким (–3; 6).

Если фирма F_1 приняла решение В в отрасль, а фирма F_2 приняла решение СКР объем выпускаемой продукции, т.е. уступила часть (возможно, половину) рынка фирме F_1, то расклад прибылей фирм F_1 и F_2 будет таким: (7; 7).

Если фирма F_1 приняла решение НВ в отрасль, а фирма F_2 приняла решение С объем выпускаемой продукции, то, естественно, фирма F_1 в отрасли прибыли не получит, а у фирмы F_2 будет максимальная монопольная прибыль, равная 14 (например, 14 млрд руб.). Таким образом, описанная последовательность ходов НВ – С приводит к следующему набору выигрышей игроков P_1 и P_2 соответственно (к набору прибылей фирм F_1 и F_2): (0; 14).

Если фирма F_1 приняла решение НВ в отрасль, а фирма F_2 приняла решение СКР объем выпускаемой продукции, то эта последовательность ходов НВ – СКР приводит к следующему набору прибылей фирм F_1 и F_2: (0; 8). Отметим, что причин и поводов СКР объема выпускаемой фирмой F_2 продукции может быть достаточно много, например в связи с ухудшением конъюнктуры в данной отрасли (поэтому фирма F_1 решила НВ, а фирма F_2 решила СКР объем производства).

Динамическая игра, описывающая данную содержательную задачу, представляет собой математическую модель этой содержательной задачи и называется игрой «Вхождение фирмы на рынок».

Изобразим динамическую игру в виде графа (рис. 9.8), который называется *деревом игры*.

Представление игры в виде дерева является *развернутой* (*расширенной*, *экстенсивной*) формой игры.

Развернутая форма динамической игры с совершенной информацией включает:

1) дерево игры, которое имеет единственную начальную вершину (позицию), в котором каждая вершина (позиция) имеет только одну вершину (позицию), которая ей предшествует;

2) множество игроков;

3) единственную дугу, которая соединяет любую вершину (кроме начальной) с той единственной вершиной, которая ей непосредственно предшествует;

4) конечные вершины, которые не предшествуют другим вершинам и которые содержат векторы выигрышей всех игроков.

В каждой вершине дерева (т.е. в кружке) на рис. 9.8 указан игрок, делающий ход из этой вершины (принимающий решение о своих действиях). В квадратных скобках находятся номера вершин. Дуга изображает сам ход. Дуга имеет направление от вершины предшествующей к вершине, за ней следующей. В частности, дуга (В), которая соединяет вершины $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$, показывает, что игрок P_1 (фирма F_1) делает свой ход (принимает решение В в отрасль). Вершина с номером $\boxed{2}$, куда упирается дуга (В), означает, что теперь решение будет принимать игрок P_2 (фирма F_2), который может сделать ход С (сохранить объем выпускаемой продукции) или сделать ход СКР (сократить объем выпускаемой продук-

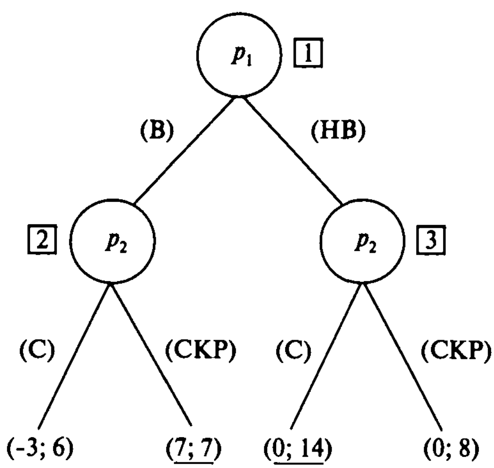


Рис. 9.8

ции). После хода игрока P_2 (фирмы F_2) игра заканчивается. Концом каждой последней (из четырех) дуги является конечная (висячая) вершина, в каждой из которых показаны прибыли фирм F_1 и F_2 (выигрыши игроков P_1 и P_2).

Отметим, что в рассматриваемом примере 9.7.1 начальная вершина — это вершина $\boxed{1}$, вершины $\boxed{2}$ и $\boxed{3}$ — вершины, которые *следуют* за вершиной $\boxed{1}$.

Множество, состоящее из вершины $\boxed{1}$, называется множеством очередности фирмы F_1 (игрока P_1); множество, состоящее из вершин $\boxed{2}$ и $\boxed{3}$, называется множеством очередности фирмы F_2 (игрока P_2). Остальные четыре вершины образуют множество конечных вершин. В каждой из них слева указана прибыль фирмы F_1, а справа — прибыль фирмы F_2 (т.е. слева указаны выигрыши игрока P_1, справа — выигрыши игрока P_2).

Последовательность ходов (действий), которые выбирают игроки P_1 и P_2 в каждой из своих вершин, называется траекторией ходов (действий), т.е. траектория ходов начинается в начальной вершине и заканчивается в одной из конечных вершин. Траектория ходов, предпочитаемая остальным траекториям, называется ***решением*** динамической игры с совершенной информацией в предположении, что игроки ведут себя рационально.

Решение игры в развернутой форме можно найти ***методом обратной индукции***, суть которого в том, что игра анализируется с ее конца, т.е. с конечных вершин.

Если фирма F_1 сделала ход (В), т.е. вступила в отрасль, то фирма F_2 сделает ход (СКР), т.е. сократит объем выпускаемой продукции, ибо прибыль, равная 7, больше прибыли, равной 6. Здесь формально сравниваются ***вторые*** координаты векторов (–3; 6) и (7; 7), ибо анализируется фирма F_2. Подчеркнем вектор (7; 7) на рис. 9.8.

Если фирма F_1 сделала ход (НВ), т.е. решила не вступать в отрасль, то фирма F_2 сделает ход (С), т.е. сохранит объем выпускаемой продукции, ибо 14 > 8. Здесь формально сравниваются ***вторые*** координаты векторов (0; 14) и (0; 8), ибо анализируется фирма F_2. Подчеркнем вектор (0; 14) на рис. 9.8.

Переходим к определению первого хода фирмы F_1. Для этого следует сравнить уже ***первые*** координаты двух подчеркнутых векторов (7; 7) и (0; 14). В связи с тем что фирма F_1 ведет себя рационально, она сделает ход (В), ибо 7 > 0.

Таким образом, в предположении того, что оба игрока ведут себя рационально, метод обратной индукции, который только что был использован для построения решения игры в развернутой форме, состоит из двух этапов. Сначала сопоставляются прибыли фирмы F_2 путем сравнения *вторых* координат двух пар векторов прибылей: пары (–3; 6) и (7; 7) и пары (0; 14) и (0; 8). В результате мы получаем из двух пар векторов одну пару векторов (7; 7) и (0; 14), в которой сравниваем уже *первые* координаты 7 и 0. Решением рассматриваемой игры является траектория, состоящая из двух ходов: хода (B), который делает фирма F_1 из вершины $\boxed{1}$ и который приводит в единственную вершину $\boxed{2}$; из вершины $\boxed{2}$ фирма F_2 затем делает ход (СКР), который приводит только в одну конечную вершину с вектором прибылей (7; 7). В результате таких ходов вектор прибылей фирм F_1 и F_2 (вектор выигрышей игроков P_1 и P_2) есть вектор (7; 7).

Метод обратной индукции, продемонстрированный на примере 9.7.1, является общим методом решения конечных динамических игр с совершенной информацией, имеющих развернутую форму, который позволяет получить хотя бы одно решение такой игры. Если дополнительно предположить, что выигрыши игроков во всех конечных вершинах различны, то такое решение (полученное методом обратной индукции) будет единственным. Метод обратной индукции на дереве называется *алгоритмом Куна* (*Kuhn H.* (1953))

Отметим, что последовательность дуг дерева, такая, что вершина, которая является концом предыдущей дуги, – это начало следующей дуги, называется *путем* в дереве. Следовательно, траектория ходов, которая исходит из начальной вершины и заканчивается в одной из конечных вершин, является в дереве путем, исходящим из начальной вершины и достигающим какую-то одну из конечных (висячих) вершин. Этот путь принято называть *партией* игры (динамической игры с совершенной информацией в развернутой форме). Траектория ходов (партия) однозначно реализует набор вершин дерева игры, исходящий из начальной вершины и достигающий какую-то одну из конечных вершин в связи с тем, что в дереве из каждой предыдущей вершины по дуге, выходящей из этой вершины, можно попасть только в единственную следующую за ней вершину. В примере 9.7.1 в качестве партии можно взять набор вершин $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, (–3;6); $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, (7; 7); $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, (0; 14); $\boxed{1}$, $\boxed{3}$, (0; 8).

Каждой вершине дерева, которое представляет динамическую игру с совершенной информацией, соответствует единственная предыстория, т.е. траектория ходов, которая приходит из начальной вершины в данную.

Уточним термин «совершенная информация» в случае динамической игры, используя представление в развернутой форме. Совершенная информация означает, что каждый игрок знает всю предысторию игры или, используя представление динамической игры в виде дерева, каждый игрок знает, в какой вершине он находится.

9.7.2. От развернутой формы динамической игры с совершенной информацией перейдем к представлению этой игры в нормальной форме, которая позволяет получать решение игры в виде равновесия Нэша.

Представление игры в нормальной форме состоит из: 1) задания множества номеров игроков; 2) множества стратегий (чистых) для каждого игрока; 3) функции выигрыша каждого игрока.

Чистая стратегия игрока динамической модели с совершенной информацией в развернутой форме *определяется* так. Фиксируются все вершины дерева, ходы из которых принадлежат определенному игроку (каждый ход имеет один и тот же номер t). Для каждой фиксированной вершины из всех возможных ходов с номером t данного игрока выбирается любой, но обязательно единственный ход.

Далее берется совокупность этих выбранных единственных ходов по всем зафиксированным вершинам данного игрока, которые соответствуют всем его ходам. Выбранная совокупность ходов и есть его чистая стратегия.

Поясним понятие чистой стратегии игрока и взаимосвязь понятий чистой стратегии и хода игрока в примере 9.7.2, который является продолжением примера 9.7.1.

Пример 9.7.2

Из одной вершины $\boxed{1}$ (см. рис. 9.8) первая фирма F_1 (т.е. игрок P_1) может сделать только два хода: ход (В) и ход (НВ), поэтому для фирмы F_1 имеем две чистые стратегии: стратегию (В) и стратегию (НВ).

Вершины $\boxed{2}$ и $\boxed{3}$ — это две вершины, из каждой фирма F_2 (игрок P_2) может сделать по два своих хода (после хода фирмы F_1).

Если мы выберем какой-то ход фирмы F_2 из вершины $\boxed{2}$ и какой-то ход фирмы F_2 из вершины $\boxed{3}$, то эту пару ходов следует толковать в качестве чистой стратегии фирмы F_2. В связи с тем что из двух вершин ($\boxed{2}$ и $\boxed{3}$) по одному ходу из каждой вершины можно выбрать четырьмя способами, мы получаем четыре чистые стратегии фирмы F_2 для нормальной формы динамической биматричной игры с совершенной информацией.

Первую чистую стратегию фирмы F_2 построим путем выбора хода (С) из вершины $\boxed{2}$ и хода (С) из вершины $\boxed{3}$. Эта чистая стратегия фирмы F_2 имеет следующее формальное представление:

	$\boxed{2}$ (С)
	$\boxed{3}$ (С)
(В)	(–3; 6)
(НВ)	(0; 14)

Если фирма F_1 выбирает стратегию (В), т.е. она выбирает дугу, соединяющую вершины $\boxed{1}$ и $\boxed{2}$, и фирма F_2 делает свой ход (С) из вершины $\boxed{2}$, тогда дуга (С) дерева, выходящая из вершины $\boxed{2}$, заканчивается вектором (–3; 6) (см. рис. 9.8). Число –3 равно прибыли (точнее, убытку) фирмы F_1 (т.е. выигрышу (в данном случае проигрышу) игрока P_1), число 6 равно прибыли фирмы F_2 (т.е. выигрышу игрока P_2). Таким образом, пара чисел (–3; 6) есть не что иное, как элемент двойной матрицы биматричной игры. Остальные элементы этой двойной матрицы будут построены постепенно дальше.

Если фирма F_1 выбирает стратегию (НВ), т.е. она выбирает дугу, соединяющую вершины $\boxed{1}$ и $\boxed{3}$, и фирма F_2 делает свой ход (С) уже из вершины $\boxed{3}$, тогда дуга (С) дерева, выходящая из вершины $\boxed{3}$, заканчивается вектором (0; 14) (см. рис. 9.8). Число 0 равно прибыли фирмы F_1 (т.е. выигрышу игрока P_1), число 14 равно прибыли фирмы F_2 (т.е. выигрышу игрока P_2). Следовательно, пара чисел (0; 14) есть следующий элемент двойной матрицы биматричной игры.

Вторую чистую стратегию фирмы F_2 построим путем выбора хода (СКР) из вершины $\boxed{2}$ и хода (СКР) из вершины $\boxed{3}$. Эта чистая стратегия фирмы F_2 имеет формальное представление

	$\boxed{2}$ (СКР)
	$\boxed{3}$ (СКР)
(В)	(7;7)
(НВ)	(0;8)

Пояснения этого представления аналогичны пояснениям первой чистой стратегии фирмы F_2 и поэтому здесь не приводятся.

Третью чистую стратегию фирмы F_2 построим путем выбора хода (С) из вершины $\boxed{2}$ и хода (СКР) из вершины $\boxed{3}$. Четвертую чистую стратегию фирмы F_2 построим путем выбора хода (СКР) из вершины $\boxed{2}$ и хода (С) из вершины $\boxed{2}$. Формально третья и четвертая чистые стратегии фирмы F_2 соответственно имеют вид

	$\boxed{2}$ (С)	$\boxed{2}$ (СКР)
	$\boxed{3}$ (СКР)	$\boxed{3}$ (С)
(В)	(–3; 6)	(7; 7)
(НВ)	(0; 8)	(0; 14)

Пояснения этих представлений аналогичны пояснениям первой чистой стратегии и поэтому здесь не приводятся.

Отметим, что номера у этих четырех чистых стратегий фирмы F_2 можно было расставить иначе.

На этом заканчивается комплектование всех чистых стратегий фирмы F_2, которая каждый раз выбирает свои ходы после того, как свой ход сделает фирма F_1. Основанием для такого завершения является осуществление полного перебора всех пар возможных ходов фирмы F_2, когда фирма F_2 один ход делает из вершины $\boxed{2}$, а другой — из вершины $\boxed{3}$.

Сведем чистые стратегии фирм F_1 и F_2 в табл. 9.10, содержащую двойную матрицу биматричной игры с матрицами 2×4.

Матрица A выигрышей игрока P_1 (фирмы F_1) и матрица выигрышей игрока P_2 (фирмы F_2) соответственно имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 6 & 7 \\ 14 & 8 & 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Таблица 9.10

		Чистые стратегии фирмы F_2			
		(1) $\boxed{2}$(С) $\boxed{3}$ (С)	(2) $\boxed{2}$(СКР) $\boxed{3}$ (СКР)	(3) $\boxed{2}$ (С) $\boxed{3}$ (СКР)	(4) $\boxed{2}$(СКР) $\boxed{3}$ (С)
Чистые стратегии фирмы F_1	(В)	$(-3; 6)$	$(7; \hat{7})$	$(-3; 6)$	$(7; \hat{7})$
	(НВ)	$(\breve{0}; \hat{14})$	$(0; 8)$	$(\breve{0}; 8)$	$(\breve{0}; \hat{14})$

Напомним (см. параграф 9.4), что первой (В) чистой стратегией фирмы F_1 является также вектор $e_1 = (1; 0)$, второй (НВ) чистой стратегией фирмы F_1 – вектор $e_2 = (0; 1)$, первой чистой стратегией фирмы F_2 – вектор $f_1 = (1; 0; 0; 0)$, второй чистой стратегией фирмы F_2 – вектор $f_2 = (0; 1; 0; 0)$, третьей чистой стратегией фирмы F_2 – вектор $f_3 = (0; 0; 1; 0)$, четвертой чистой стратегией фирмы F_2 – вектор $f_4 = (0; 0; 0; 1)$.

Построение двойной матрицы табл. 9.10 представляет собой результат перехода от игры в развернутой форме к игре в нормальной форме. Это главное формальное обстоятельство. Менее важно здесь то, что речь идет о динамической игре с совершенной информацией.

В двойной матрице $(A|B)$ табл. 9.10 расставим «птички» и «шляпки» и получим три равновесия Нэша в чистых стратегиях биматричной игры $G(A, B)$ с выписанной в табл. 9.10 двойной матрицей $(A|B)$:

$$(e_2; f_1),\ (e_1; f_2),\ (e_1; f_4).$$

9.7.3. Как уже отмечалось, в результате использования метода обратной индукции (см. пример 9.7.1) было получено на основании предпосылки о рациональном поведении фирм F_1 и F_2 решение динамической игры с совершенной информацией в виде траектории ходов (В) и (СКР) с вектором прибылей фирм F_1 и F_2, равным (7; 7).

Проанализируем связь между решением динамической игры с совершенной информацией, полученным методом обратной индукции, и тремя равновесиями Нэша.

Равновесие Нэша (e_2; f_1) интерпретируется следующим образом. Если фирма F_1 делает ход (В), то фирма F_2 делает ход (С), если фирма F_1 делает ход (НВ), то фирма F_2 делает ход (С) (см. рис. 9.8). Последовательность ходов (В) и (С) противоречит предпосылке о рациональном поведении фирм F_1 и F_2, ибо после хода (В) фирмы F_1 фирма F_2 на основании предпосылки о ее рациональном поведении должна сделать ход (СКР), ибо прибыль фирмы F_2, равная 6, меньше прибыли фирмы F_2, равной 7.

Противоречие предпосылке рациональности означает, что траектория ходов (В) и (С) не может быть получена методом обратной индукции, который опирается на предпосылку о рациональном поведении фирм F_1 и F_2. Таким образом, равновесие Нэша (e_2; f_1) оказывается «лишним».

Равновесие Нэша (e_2; f_1) интерпретируется следующим образом. Если фирма F_1 делает ход (В), то фирма F_2 делает ход (СКР), что соответствует предпосылке о рациональном поведении фирмы F_2 (прибыль фирмы F_2, равная 7, больше прибыли фирмы F_2, равной 6, – см. рис. 9.8). Если фирма F_1 делает ход (НВ), то фирма F_2 делает ход (СКР), что противоречит предпосылке о рациональном поведении фирмы F_2, ибо после хода (НВ) фирмы F_1 фирма F_2 должна сделать ход (С) в связи с тем, что прибыль фирмы F_2, равная 8, меньше прибыли фирмы F_2, равной 14. Поэтому траектория ходов (НВ) и (СКР) не может быть получена методом обратной индукции. Следовательно, равновесие Нэша (e_1; f_2) (как и равновесие Нэша (e_1; f_1)) является «лишним».

Осталось рассмотреть равновесие Нэша (e_1; f_4), для которого мы имеем следующие утверждения. Если фирма F_1 делает ход (В), то фирма F_2 делает ход (СКР). Если фирма F_1 делает ход (НВ), то фирма F_2 делает ход (С). Обе траектории ходов ((В) и (СКР), (НВ) и (С)) вполне содержательно состоятельны и соответствуют предпосылке о рациональном поведении фирм F_1 и F_2.

Таким образом, решение динамической игры с совершенной информацией в виде траектории ходов (В) и (СКР) соответствует равновесию Нэша (e_1; f_4) в чистых стратегиях, а по существу и есть равновесие Нэша (e_1; f_4) в чистых стратегиях.

Этот частный факт обобщается в виде следующей теоремы.

Теорема 9.7.1. Любое решение динамической игры с совершенной информацией (с конечным числом ходов), полученное методом обратной индукции, есть равновесие Нэша (в чистых стратегиях).

Как показали только что приведенные рассуждения, обратное утверждение о том, что любое равновесие Нэша может быть получено методом обратной индукции, является неверным.

Наличие «лишних» равновесий Нэша достаточно типично при представлении динамических игр в нормальной форме. «Лишние» равновесия Нэша противоречат предпосылке о рациональном поведении игроков P_1 и P_2 и поэтому могут дать смещенную оценку ожидаемому решению динамической игры с совершенной информацией.

9.7.4. Возникает вопрос о возможности элиминирования «лишних» равновесий Нэша. Элиминирование «лишних» равновесий Нэша называется ***рафинированием*** (от англ. *refinement* – усовершенствование, уточнение).

Прежде чем описать и проанализировать один из возможных подходов элиминирования «лишних» равновесий Нэша динамической игры с совершенной информацией путем усиления понятия равновесия Нэша таких игр, сделаем одно замечание.

Замечание 9.7.1. С одной стороны, динамическая игра с совершенной информацией (с двумя игроками и с конечным числом ходов) может быть представлена в нормальной форме в виде двойной матрицы $(A|B)$ (в примере 9.7.2 в виде двойной матрицы табл. 9.10). С другой стороны, двойная матрица $(A|B)$ (в частности, матрица табл. 9.10) является нормальной формой биматричной игры, которая является частным случаем статической игры с полной информацией (см. параграф 9.2). Таким образом, каждая двойная матрица $(A|B)$ является представителем сразу двух игр: динамической (с совершенной информацией) и статической (с полной информацией). В статической игре с полной информацией среди равновесий Нэша (найденных с помощью двойной матрицы) «лишних» не бывает. В динамической игре с совершенной информацией среди равновесий Нэша могут быть «лишние».

Приведем определение важного понятия ***подыгры*** игры с совершенной информацией в развернутой форме.

Определение 9.7.1. ***Подыгра*** игры с совершенной информацией ***в развернутой форме*** – эта игра в развернутой форме, которая содержит в качестве начальной любую вершину дерева игры (кроме конечных вершин), а также все вершины дерева игры, следующие за этой выбранной в качестве начальной вершиной, вплоть до конечных вершин игры. Сама игра называется ***полной игрой***.

Выигрыши игроков, которые показаны в конечных вершинах подыгры, совпадают с выигрышами игроков в конечных вершинах полной игры.

Собственная подыгра – это подыгра, начальная вершина которой отлична от начальной вершины полной игры. Полная игра называется также своей несобственной подыгрой.

У динамической игры с совершенной информацией, представленной на рис. 9.8, есть три подыгры: сама игра с начальной вершиной $\boxed{1}$ и две ее собственные подыгры с начальными вершинами $\boxed{2}$ и $\boxed{3}$.

Определение 9.7.2. Совершенным в подыграх равновесием называется такой набор стратегий игроков, который является равновесием Нэша в полной игре, а соответствующие части этого набора стратегий являются равновесиями Нэша во *всех* собственных подыграх полной игры.

Замечание 9.7.1. Понятие совершенного в подыграх равновесия было предложено германским экономистом Р. Зельтеном в работе *Selten R.* (1965).

Пример 9.7.3 (продолжение примеров 9.7.1 и 9.7.2). Представим первую собственную подыгру с начальной вершиной $\boxed{2}$ в нормальной форме.

Фирма F_1 в этой подыгре не функционирует, а фирма F_2 может сделать один из двух ходов (С) и (СКР). Двойная матрица рассматриваемой подыгры имеет вид

$\boxed{2}$ (С)	$\boxed{2}$ (СКР)
(–3; 6)	$(7;\hat{7})$

В этой двойной матрице имеет место одно равновесие Нэша $(\bar{e}_1; \bar{f}_2)$ (здесь $\bar{e}_1 = (1)$, $\bar{f}_2 = (0; 1)$). Оно предписывает фирме F_2 в вершине $\boxed{2}$ сделать ход (СКР). Для того чтобы равновесие Нэша в полной игре было *совершенным* в подыграх равновесием, необходимо, чтобы в вершине $\boxed{2}$ фирма F_2 сделала ход (СКР). А равновесие Нэша $(e_2; f_1)$ (здесь $e_2 = (0;\ 1)$, $f_1 = (1;\ 0;\ 0;\ 0)$) в полной игре предписывает фирме F_2 из вершины $\boxed{2}$ сделать ход (С) (см. чистую стратегию (1) фирмы F_2 в двойной матрице с размерами (2×4) в табл. 9.10). Следовательно, равновесие Нэша $(e_2; f_1)$ полной игры не является совершенным в подыграх равновесием.

Равновесие Нэша $(e_1; f_4)$ (здесь $e_1 = (1; 0), f_4 = (0; 0; 0; 1)$) в полной игре предписывает фирме F_2 из вершины $\boxed{2}$ сделать ход (СКР) (см. чистую стратегию (4) фирмы F_2 в двойной матрице с размерами (2×4), т.е. равновесие Нэша $(e_1; f_4)$ полной игры содержит в качестве составной части равновесие Нэша $(\bar{e}_1; \bar{f}_2)$ подыгры с начальной вершиной $\boxed{2}$).

Представим вторую собственную подыгру с начальной вершиной $\boxed{3}$ в нормальной форме. Фирма F_1 в этой подыгре не функционирует, а фирма F_2 может сделать один из двух ходов (С) и (СКР). Двойная матрица рассматриваемой подыгры имеет вид

$\boxed{3}$ (С)	$\boxed{3}$ (СКР)
$(0; \hat{14})$	$(0; 8)$

В этой двойной матрице имеет место одно равновесие Нэша $(\tilde{e}_1; \tilde{f}_1)$ (здесь $\tilde{e}_1 = (1)$, $\tilde{f}_1 = (1; 0)$). Оно предписывает фирме F_2 в вершине $\boxed{3}$ сделать ход (С). Для того чтобы равновесие Нэша в полной игре было *совершенным* в подыграх равновесия, необходимо, чтобы в вершине $\boxed{3}$ фирма F_2 сделала ход (С). А равновесие Нэша $(e_1; f_2)$ (здесь $e_1 = (0; 1), f_2 = (0; 1; 0; 0)$) в полной игре предписывает фирме F_2 из вершины $\boxed{3}$ сделать ход (СКР) (см. чистую стратегию (2) фирмы F_2 в двойной матрице с размерами (2×4) в табл. 9.10). Следовательно, равновесие Нэша $(e_1; f_2)$ полной игры не является совершенным в подыграх равновесием.

Равновесие Нэша $(e_1; f_4)$ (здесь $e_1 = (1; 0), f_4 = (0; 0; 0; 1)$) в полной игре предписывает фирме F_2 из вершины $\boxed{3}$ сделать ход (С), т.е. равновесие Нэша $(e_1; f_4)$ полной игры содержит в качестве составной части равновесие Нэша $(\tilde{e}_1; \tilde{f}_1)$ подыгры с начальной вершиной $\boxed{3}$.

Из того, что равновесие Нэша $(e_1; f_4)$ в полной игре содержит в качестве составных частей равновесия Нэша обеих подыгр, следует, что равновесие Нэша $(e_1; f_4)$ есть совершенное в подыграх равновесие.

Таким образом, равновесие Нэша $(e_1; f_4)$ полной игры (динамической игры с совершенной информацией), с одной стороны, получается методом обратной индукции и, с другой стороны, оно есть совершенное в подыграх равновесие, понятие которого усиливает и уточняет понятие равновесия Нэша.

Отмеченное обстоятельство является частным случаем общей теоремы о том, что в динамических играх с совершенной информацией и конечным числом ходов множество решений, получаемых методом обратной индукции, совпадает с множеством совершенных в подыграх равновесий.

В связи с тем что метод обратной индукции может быть проще методов отыскания совершенных в подыграх равновесий (особенно в случае, когда нормальные формы игр являются громоздкими), совершенные в подыграх равновесия следует отыскивать с помощью метода обратной индукции (который к тому же может иметь достаточно высокую степень наглядности).

9.7.5. Вернемся к табл. 9.10.

		Чистые стратегии фирмы F_2			
		(1) $\boxed{2}$ (C) $\boxed{3}$ (C)	(2) $\boxed{2}$ (СКР) $\boxed{3}$ (СКР)	(3) $\boxed{2}$ (C) $\boxed{3}$ (СКР)	(4) $\boxed{2}$ (СКР) $\boxed{3}$ (C)
Чистые стратегии фирмы F_1	(В)	$(-3; 6)$	$(\breve{7}; \hat{7})$	$(-3; 6)$	$(\breve{7}; \hat{7})$
	(НВ)	$(\breve{0}; 1\hat{4})$	$(0; 8)$	$(\breve{0}; 8)$	$(0; 1\hat{4})$

Выше уже отмечалось, что рассматриваемая динамическая игра с совершенной информацией, представленная в нормальной форме, имеет три равновесия Нэша – три клетки (0; 14), (7; 7), (7; 7), каждая из которых содержит «птичку» и «шляпку». Более формально эти три равновесия Нэша в чистых стратегиях легко представить в виде трех векторов (e_2, f_1), (e_1, f_2) и (e_1, f_4), где $e_1 = (1; 0)$, $e_2 = (0; 1)$, $f_1 = (1; 0; 0; 0)$, $f_2 = (0; 1; 0; 0)$, $f_4 = (0; 0; 0; 1)$.

Выявим Парето-эффективные профили (пары), используя критериальное пространство Ou_1u_2 (рис. 9.9).

Профили (пары) (e_2, f_1), (e_2, f_4), (e_1, f_2) и (e_1, f_4) чистых стратегий, которым соответствуют клетки $M_5 = M_8$ и $M_2 = M_4$, Парето-эффективны, остальные профили (пары) чистых стратегий Парето-неэффективны.

Здесь имеет место как совпадение равновесия Нэша и Парето-эффективности (см. точки $M_2 = M_4$ и M_5 на рис. 9.9),так и несовпадение (см. точку M_8 на рис. 9.9, которая соответствует Парето-эффективному профилю (e_2, f_4), который не является равновесием Нэша).

9.7.6. Выше был рассмотрен переход от игры в развернутой форме к игре в нормальной форме (конкретно в виде двойной матрицы выигрышей).

Теперь рассмотрим обратный переход — сначала на примере статической игры с полной информацией.

Пример 9.7.4 (модификация примера 9.7.1). Пусть фирма-монополист (F_2) функционирует в некоторой отрасли, а фирма (F_1) пытается войти в эту отрасль. Фирма F_1 (игрок P_1) имеет два возможных хода (два варианта принятия решения о своих действиях): вступить (В) в отрасль или не вступать (НВ) в отрасль. Фирма F_2 (игрок P_2) имеет два возможных хода: сохранить (С) объем выпускаемой продукции или сократить (СКР) объем выпускаемой про-

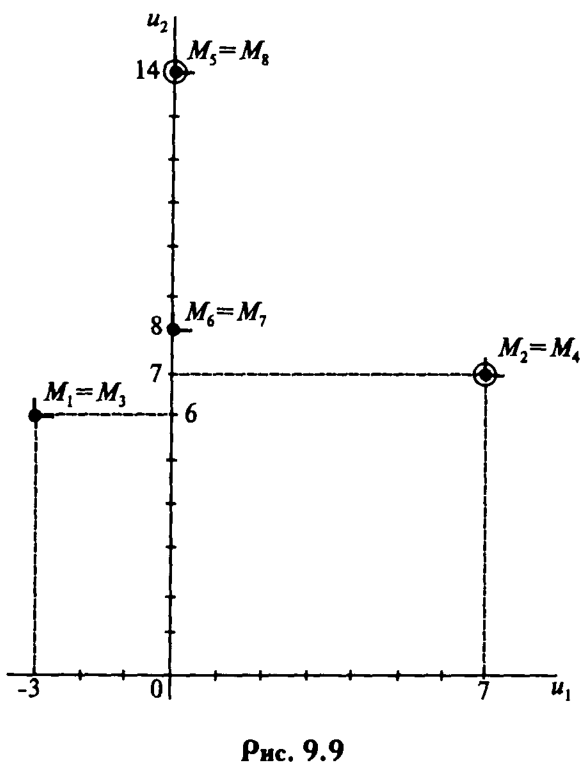


Рис. 9.9

дукции. Ходы фирмы делают одновременно, в течение некоторого периода времени, т.е., делая ход, ни одна из фирм не знает, какой ход сделает другая.

Нормальная форма этой статической игры с полной информацией имеет вид табл. 9.11.

Таблица 9.11

		Чистые стратегии фирмы F_2	
		(С)	(СКР)
Чистые стратегии фирмы F_1	(В)	(–3; 6)	(7; 7)
	(НВ)	(0; 14)	(0; 8)

Как уже отмечалось, в статической игре ход игрока и его стратегия – это одно и то же.

Если фирма F_1 выбирает стратегию (В), а фирма F_2 выбирает стратегию (С), то в этом случае прибыль фирмы F_1 (выигрыш игрока P_1) равен –3, а прибыль фирмы F_2 (выигрыш игрока P_2) равен 6, т.е. пара (–3; 6) образует первый (сверху и слева) элемент двойной матрицы (9.7.1):

(–3; 6)	(7; 7)	(9.7.1)
(0; 14)	(0; 8)	

Остальные элементы двойной матрицы (9.7.1) интерпретируются аналогично.

Одновременное выполнение ходов (выбор (чистых) стратегий) с помощью дерева игры можно представить в одном из двух вариантов (эти варианты эквивалентны) (рис. 9.10).

Выбору фирмой F_1 стратегии (В) и фирмой F_2 стратегии (С) соответствует выбор дуг (В) и (С) на левом (правом) дереве рис. 9.10, ибо решение о выборе этих стратегий фирмы F_1 и F_2 принимают одновременно, поэтому не важно, какая фирма находится в вершине $\boxed{1}$ — первая F_1 или вторая F_2. В конечной вершине стратегий (В) и (С) показаны прибыли фирм F_1 и F_2 согласно табл. 9.11. Выбор остальных стратегий фирмами F_1 и F_2 интерпретируются аналогично.

Если фирмы F_1 и F_2 принимают решения (игроки P_1 и P_2 делают ходы) одновременно, то фирма F_2 не знает, в какой вершине ($\boxed{2}$ или $\boxed{3}$) левого дерева рис. 9.10 она находится, ибо фирма F_2 не знает, какое решение ((В) или (НВ)) примет фирма F_1, т.е. какой ход ((В) или (НВ)) сделает фирма F_1. Поэтому говорят, что вершины $\boxed{2}$ и $\boxed{3}$ левого дерева рис. 9.10 находятся в ***информационном множестве*** фирмы F_2 (игрока P_2) Говорят, что информационное множество фирмы F_2 (овал левого дерева рис. 9.10, охватывающий вершины $\boxed{2}$ и $\boxed{3}$) представляет *несовершенную информацию* фирмы F_2.

Пояснение, относящееся к правому дереву рис. 9.10, аналогично. Если фирмы F_1 и F_2 принимают решение одновременно, то фирма F_1 не знает, в какой вершине ($\boxed{2}$ или $\boxed{3}$) правого дерева рис. 9.10 она находится, ибо фирма F_1 не знает, какое решение ((С) или (СКР)) примет фирма F_2. То есть здесь *информационное множество* фирмы F_1 (игрока P_1) состоит из вершин $\boxed{2}$ и $\boxed{3}$.

Естественно считать, что фирма, которая находится в вершине $\boxed{1}$ (см. левое или правое дерево на рис. 9.10), имеет информационное множество, состоящее из одной (первой) вершины.

В связи с введением важного понятия *информационного множества* игрока отметим следующее принципиальное обстоятельство: информационное множество игрока может состоять из одной вершины дерева игры или из более чем одной вершины дерева игры. Дерево на рис. 9.8 содержит три информационных множества, каждое из которых состоит только из одной (своей) вершины. Каждое дерево (левое и правое) рис. 9.10 содержит по два информационных множества: информационное множество, состоящее из одной вершины $\boxed{1}$, и информационное множество, состоящее из вершин $\boxed{2}$ и $\boxed{3}$.

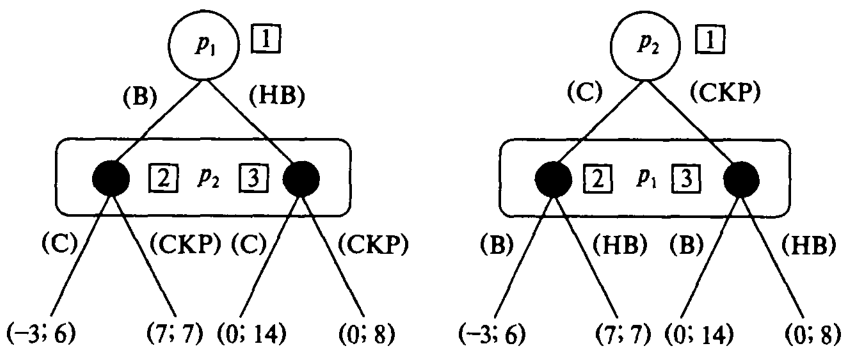


Рис. 9.10

С помощью понятия «информационное множество игрока» можно четко определить понятие игры с совершенной информацией и понятие игры с несовершенной информацией. Если каждое информационное множество состоит только из одной (своей) вершины, то соответствующая этому дереву игра является *игрой с совершенной информацией.* Если в дереве хотя бы одно информационное множество состоит из двух (или более) вершин этого дерева, то соответствующая этому дереву игра является *игрой с несовершенной информацией.*

Используя понятие «информационное множество игрока», можно отметить, что дерево есть совокупность информационных множеств игроков, такое, что каждая вершина дерева (кроме конечных вершин) принадлежит только одному (своему) информационному множеству, которое может содержать только ее или еще какие-то другие вершины дерева. Далее все вершины информационного множества игрока — это вершины информационного множества только одного (какого-то) игрока, принадлежащие (в случае динамической игры) множеству определенной очередности этого игрока. Наконец, в каждой вершине определенного информационного множества игрока множество ходов этого игрока должно быть одним и тем же.

Таким образом, каждая игра (статическая и динамическая) имеет представление в нормальной и развернутой формах.

В примере 9.7.4 был осуществлен переход от табл. 9.11, которая является нормальной формой статической игры с полной информацией, к ее развернутой форме в виде левого или правого дерева на рис. 9.10.

В следующем примере 9.7.5 осуществим переход от табл. 9.10, которую можно толковать как нормальную форму некоторой статической игры, к развернутой форме в виде дерева.

Пример 9.7.5. (продолжение примера 9.7.4). Для статической игры, имеющей в качестве нормальной формы табл. 9.10, построим соответствующее ей дерево игры (рис. 9.11).

Одновременному выбору фирмой F_2 (игроком P_2) стратегии (1) и фирмой F_1 (игроком P_1) стратегии (B) соответствует выбор дуг (1) и (B) на дереве рис. 9.11. В конечной вершине цепочки стратегий (1) и (B) показаны прибыли фирм F_1 и F_2 (−3; 6) согласно табл. 9.10. Выбор остальных пар стратегий фирмами F_1 и F_2 интерпретируется аналогично.

Поскольку фирмы F_1 и F_2 выбирают стратегии одновременно, фирма F_1 не знает, в какой из вершин ($\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$) (см. рис. 9.11) она находится, ибо она не знает, какую стратегию ((1), (2), (3), (4)) выберет фирма F_2. Поэтому все четыре вершины $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ образуют информационное множество фирмы F_1 на рис. 9.11.

В связи с тем что табл. 9.10 интерпретируется в качестве нормальной формы некоторой статической игры и фирмы F_1 и F_2 выбирают свои стратегии одновременно, построим другое (относительно дерева рис. 9.11) дерево, представляющее табл. 9.10 (рис. 9.12).

Одновременному выбору фирмой F_1 стратегии (В) и фирмой F_2 стратегии (1) соответствует выбор дуг (В) и (1) на дереве рис. 9.12. В конечной вершине цепочки стратегий (В) и (1) показаны прибыли фирм F_1 и F_2 (–3; 6) согласно табл. 9.10. Выбор остальных пар стратегий фирмами F_1 и F_2 интерпретируется аналогично.

Аналогично рассуждениям об информационном множестве фирмы F_1 дерева на рис. 9.11 в случае дерева рис. 9.12 показывается, что вершины $\boxed{2}$ и $\boxed{3}$ образуют информационное множество фирмы F_2.

9.7.7. От развернутой формы (см. рис. 9.8) динамической игры с совершенной информацией (назовем ее ДИ1) сначала был осуществлен переход к нормальной форме этой игры в виде табл. 9.10,

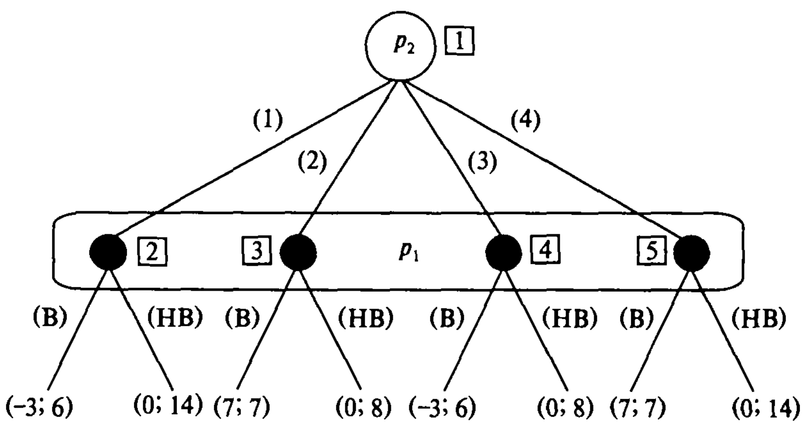


Рис. 9.11

а затем был сделан переход от этой нормальной формы к развернутой форме в виде деревьев на рис. 9.11 и 9.12. Деревья на рис. 9.11 и 9.12 представляют собой развернутую форму другой динамической игры (с несовершенной информацией (назовем ее ДИ2)), которая отличается от первоначальной динамической игры ДИ1, развернутой формой которого было дерево на рис. 9.8.

Переход от ДИ1 к ДИ2 привел к потере информации, которая выражается в появлении информационного множества фирмы F_2 (игрока P_2), состоящего из двух вершин, в то время как в ДИ1 информационные множества фирмы F_2 (игрока P_2) состоят из одной вершины каждое.

Следовательно, одна и та же нормальная форма в виде табл. 9.10 представляет две разные динамические игры и поэтому не может считаться адекватным представлением этих игр (ибо динамические игры разные).

В случае статических игр (с полной информацией) нормальная и развернутая формы однозначно соответствуют друг другу.

В случае игры с совершенной информацией при определении стратегии игрока (в отличие от определения хода игрока) необходимо было указывать все ходы данного игрока, которые он сделает, находясь в своей очередной вершине. В случае игры с несовершенной информацией это определение стратегии игрока следует обобщить путем замены очередной вершины игрока на его очередное информационное множество. Поскольку в определении понятия равновесия Нэша фигурировали *стратегии*, постольку

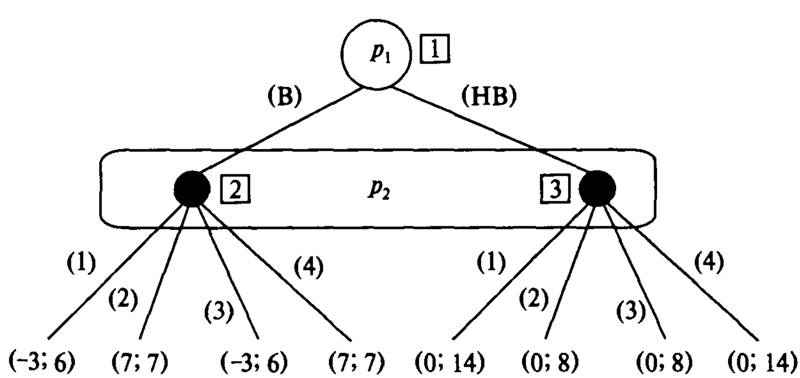


Рис. 9.12

это понятие дословно переносится на случай динамических игр с несовершенной информацией.

Определение понятия совершенного в подыграх равновесия в случае несовершенной информации дословно повторяет определение этого понятия в случае совершенной информации при условии корректировки определения подыгры при переносе его на случай несовершенной информации. В этом случае при определении подыгры следует требовать, чтобы наряду с вершиной дерева, содержащийся в подыгре, в этой подыгре принадлежало все информационное множество, содержащее эту вершину. При таком уточнении понятия подыгры для случая несовершенной информации не всякая вершина дерева (исключая с самого начала его конечные вершины) может быть начальной для некоторой подыгры. Например, в дереве на рис. 9.12 вершины $\boxed{2}$ и $\boxed{3}$ не могут играть роль начальных вершин для подыгр игры, представленной этим деревом. Поэтому в случае дерева на рис. 9.12 существует только одна подыгра, которая совпадает с полной игрой, представленной деревом на рис. 9.12.

Не к любой игре с несовершенной информацией можно применять метод обратной индукции для отыскания ее решения. В частности, в случае игры, представленной деревом на рис. 9.12, фирма F_2 (игрок P_2) не может осуществить выбор хода, ибо не знает, в какой вершине она находится. Как было показано, в примере 9.7.1 в случае игры с совершенной информацией с помощью метода обратной индукции было найдено решение в виде траектории ходов (В) и (СКР).

Игры с несовершенной информацией, для анализа которых можно использовать метод обратной индукции, называются *играми с почти совершенной информацией.* К числу таких относятся игры, в которых статические игры *повторяются* конечное число раз. Такие игры называются *повторяющимися.* В связи с этим динамические игры называются также *последовательными*, ибо в этих играх игроки делают свои ходы последовательно.

Анализировать повторяющиеся игры мы не будем.

Замечание 9.7.2. При подготовке текста настоящего параграфа 9.7 был использован текст параграфа 5.9 учебника «Количественные методы в экономических исследованиях» (М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004), в котором не всегда аккуратно сопоставлялись понятия «ход» игрока и «стратегия» игрока. В настоящем параграфе 9.7 отмеченные неточности полностью устранены.

9.8. Статические игры с неполной информацией

9.8.1. В статической игре с *полной информацией* (см. параграф 9.2) каждый игрок знает множество возможных ходов всех других игроков и их функции выигрышей. Если игрок не знаком с особенностями других игроков (с их функциями выигрышей и множеством возможных ходов), то говорят, что этот игрок обладает *неполной информацией*. Если в статической игре существует хотя бы один игрок, обладающий неполной информацией о других игроках, то такая игра называется *статической игрой с неполной информацией*.

Далее рассматриваются статические игры, в которых предпочтения каждого игрока определяются реализацией некоторой случайной переменной. Эту реализацию некоторой случайной переменной выбирает нулевой игрок P_0 (Природа). «Выбор» игроком P_0 определенной реализации означает, что осуществляется выбор определенного типа предпочтений каждого игрока, т.е. каждый игрок может реализоваться в нескольких вариантах, т.е. в нескольких своих типах. Каждый игрок может наблюдать реализации только своей случайной переменной, т.е. наблюдать только свои типы. Вводя для каждого игрока P_k различные *типы* его предпочтений, мы «расширяем» первоначальную игру. Такие статические игры с неполной информацией называются статическими *байесовскими играми*.

Инструмент байесовских игр активно востребован в экономических исследованиях, когда приходится учитывать случайные факторы. Дадим формальное описание статической байесовской игры.

В этой игре конечное число игроков $P_1, \ldots, P_m$ ($m \geq 2$ — натуральное число) и нулевой игрок P_0 — Природа. Обозначим символом Θ_k множество типов игрока P_k (множество Θ_k может быть не только конечным или счетным, хотя дальше мы ограничимся только конечным вариантом). Конкретный элемент $\theta_k \in \Theta_k$ соответствует определенному типу игрока P_k, $k = 1, \ldots, m$. Появление конкретного элемента θ_k — случайное событие. Поэтому должно быть задано распределение вероятностей $p(\theta)$ на $\Theta = \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_m$, известное всем игрокам $P_1, \ldots, P_m$. Здесь $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \Theta$. Вероятности должны быть неотрицательными, а их сумма по всем

$\theta \in \Theta$ должна равняться единице. После выбора типа θ_k игрока P_k, т.е. при выборе конкретного (типа) $\theta_k \in \Theta_k$, игрок P_k выбирает свою стратегию (свой ход) $s_k(\theta_k) \in S_k$, где S_k — множество ходов игрока P_k. Поэтому (чистая) *стратегия* $s_k(\theta_k)$ игрока P_k есть функция (отображение), аргумент которой пробегает множество Θ_k типов игрока P_k, а ее частные значения пробегают множество S_k ходов игрока P_k. Множество всех таких функций $s_k(\theta_k)$ обозначим символом $S_k(\Theta_k)$. Тогда $s(\theta) = (s_1(\theta_1), ..., s_m(\theta_m))$ есть профиль стратегий игроков $P_1, ..., P_m$ на множестве

$S(\Theta) = S_1(\Theta_1) \times ... \times S_m(\Theta_m)$, т.е. $s(\theta) = (s_1(\theta_1), ..., s_m(\theta_m)) \in S_1(\Theta_1) \times ... \times S_m(\Theta_m)$ для любого $\theta \in \Theta$.

Выигрыш игрока P_k зависит не только от выбора ходов $s_1, ..., s_m$ всех игроков $P_1, ..., P_m$, в том числе и от хода s_k самого игрока P_k, но и от их типов, т.е. выигрыш игрока P_k равен значению $u_k(s(\theta), \theta)$ его функции выигрыша на профиле $s(\theta) = (s_1(\theta_1), ..., s_m(\theta_m))$ стратегий $s_1(\theta_1), ..., s_m(\theta_m)$ игроков $P_1, ..., P_m$. Более подробно значение $u_k(s(\theta), \theta)$ следует представить так $u_k(s_k(\theta_k), s_{-k}(\theta_{-k}), \theta_k, \theta_{-k})$, где $\theta_{-k} = (\theta_{-1}, ..., \theta_k, \theta_{k+1}, ..., \theta_m)$, $s_{-k} = (s_{-1}, ..., s_k, s_{k+1}, ..., s_m)$.

Ожидаемый выигрыш игрока P_k, имеющего тип $\bar{\theta}_k$ и выбравшего ход s_k, в предположении, что остальные игроки $P_1, ..., P_{k-1}, P_{k+1}, ..., P_m$ выбрали стратегии (ходы) $s_{-i}(\theta_{-i}) = (s_1(\theta_1), ..., s_{k-1}(\theta_{k-1}), s_{k+1}(\theta_{k+1}), ..., s_m(\theta_m))$, равен

$$U_k(s_k, s_{-k}(\theta_{-k}), \bar{\theta}_k) = \sum_{\theta_{-k} \in \Theta_{-k}} p(\bar{\theta}_k, \theta_{-k}) u_k(s_k, s_{-k}(\theta_{-k}), \bar{\theta}_k, \theta_{-k}),$$

где $\theta_1, ..., \theta_{k-1}, \theta_{k+1}, ..., \theta_m$ — типы остальных игроков $P_1, ..., P_{k-1}, P_{k+1}, ..., P_m$; и сумма имеет место быть, если множества $\Theta_1, ..., \Theta_m$ не пусты, конечны или счетны. В противном случае вместо суммы появится интеграл.

В связи с тем что игрок P_k знает свой тип $\bar{\theta}_k$, математическое ожидание является *условным* по этому типу. Поскольку условные вероятности в общем случае рассчитываются по формуле Байеса, постольку атрибутом игры и далее равновесия является термин «байесовский».

Кратко статическую байесовскую игру можно записать так:

$$\langle S_k, u_k(s(\theta), \theta), \Theta_k, p(\theta) \rangle.$$

Таким образом, для описания статической байесовской игры необходимо иметь: 1) множество всех игроков $P_1, ..., P_m$; 2) для каждого игрока P_k — множество Θ_k всех его типов; 3) распределение вероятностей $p(\theta)$ на множествах $\Theta_1, \ldots, \Theta_m$ типов, известное всем игрокам; 4) для каждого игрока P_k множество S_k его возможных ходов s_k и множество $S_k(\Theta_k)$ функций $s_k(\theta_k)$, преобразующих множество Θ_k во множество S_k ходов игрока P_k; 5) для каждого игрока P_k функцию $u_k(s(\theta), \theta)$ выигрыша на профиле $s(\theta) = (s_1(\theta_1), \ldots, s_m(\theta_m))$.

Определение 9.8.1. Равновесие Нэша — Байеса статической байесовской игры (с конечным числом типов игроков) есть равновесие Нэша в «расширенной игре», в которой множество (чистых) стратегий каждого игрока P_k есть множество $S_k(\Theta_k)$ функций (отображений) из Θ_k в S_k, $k = 1, \ldots, m$, а в качестве выигрыша игрока P_k фигурирует его ожидаемый выигрыш.

Формально профиль $s(\theta) = (s_1(\theta_1), \ldots, s_m(\theta_m))$ (чистых) стратегий $s_1(\theta_1), \ldots, s_m(\theta_m)$ называется *равновесием Нэша — Байеса*, если для каждого номера k, $k = 1, \ldots, m$, справедливы неравенства

$$U_k(s_k(\theta_k), s_{-k}(\theta_{-k}), \theta_k) \geq U_k(s_k, s_{-k}(\theta_{-k}), \theta_k)$$

для любых $s_k \in S_k$.

Аналогично определяется равновесие Нэша — Байеса в смешанных стратегиях.

Замечание 9.8.1. В статической байесовской игре вместо одного игрока P_k, $k = 1, \ldots, m$, вводится множество его типов Θ_k, что фактически резко увеличивает число игроков. Однако множество S_k ходов (стратегий) каждого игрока остается неизменным. В связи с тем что каждый игрок P_k знает свой тип, а все другие игроки его тип не знают, другие игроки должны знать его ходы во всех случаях. Поэтому в качестве выигрыша игрока P_k предлагается использовать его ожидаемый выигрыш.

Замечание 9.8.2. Понятие равновесие Нэша — Байеса было предложено Дж. Харшаньи в серии работ, опубликованных в 1967—1968 гг. (см. *Harsanyi J.C.* (1967—1968)).

Более точно равновесие Нэша — Байеса следовало бы назвать байесовским равновесием Нэша, а еще более точно (и справедливо) — байесовским равновесием Харшаньи.

9.8.2. *Пример 9.8.1.* Модель дуополии Курно как статическая игра с неполной информацией.

Обозначим символом s_i выпуск фирмы F_i, $i = 1, 2$, в некотором фиксированном периоде времени. Функция, обратная к функции спроса, имеет вид $p = a - b(s_1 + s_2)$, где a и b — положительные параметры. Прибыль PR_i фирмы F_i имеет вид

$$PR_i = ps_i - c_i s_i - d_i, \tag{9.8.1}$$

где $c_i = MC_i$ — предельные издержки, а $d_i = FC_i$ — постоянные издержки фирмы F_i.

Фирма F_1 имеет один тип предпочтения, а фирма F_2 — два типа предпочтения. Типы $\theta_2^{(j)}$ характеризуются величиной $c_2^{(j)}$ предельных издержек, т.е. $\theta_2^{(j)} = c_2^{(j)}, j = 1, 2$. Следовательно, предельные издержки c_1 фирмы F_1 неизменны. То есть предельные издержки c_1 фирмы F_1 принимают c_1 с вероятностью единица, а предельные издержки c_2 фирмы F_2 принимают значение $c_2^{(1)}$ с вероятностью p_1 ($p_1 > 0$) (это тип один фирмы F_2) и значение $c_2^{(2)}$ с вероятностью $1 - p_1$ (это тип два фирмы F_2). Содержательно это интерпретируется следующим образом.

Фирма F_2 имеет полную информацию о фирме F_1, поэтому предельные издержки c_1 неизменны. Фирма F_1 полагает, что фирма F_2 имеет предельные издержки $c_2^{(1)}$ с вероятностью p_1, а предельные издержки $c_2^{(2)}$ — с вероятностью $q_1 = 1 - p_1$.

Прибыль PR_i фирмы F_i есть выигрыш u_i фирмы F_i, которая рассматривается в качестве игрока P_i, $i = 1, 2$. Игроки P_1 и P_2 ходы делают одновременно, т.е. фирмы F_1 и F_2 выпускают свою продукцию, не зная о выпусках друг друга.

Покажем, что мы имеем дело со статической байесовской игрой.

1. Число игроков равно двум. Игроком P_1 является фирма F_1, игроком P_2 — фирма F_2.

2. Для игрока P_1 множество $\Theta_1 = C_1$ его типов состоит из одного элемента — предельных издержек $\theta_1 = c_1$ фирмы F_1, которые являются неизменными. Для игрока P_2 множество $\Theta_2 = C_2$ его типов состоит из двух элементов: предельных издержек $c_2^{(1)}$ и предельных издержек $c_2^{(2)}$ фирмы F_2.

3. Распределение вероятностей на множестве $C = C_1 \times C_2$ типов (c_1, c_2) игроков P_1 и P_2 имеет вид

C	$(c_1, c_2^{(1)})$	$(c_1, c_2^{(2)})$
P	p_1	$1 - p_1$

,

т.е. случайная величина C принимает значение $(c_1, c_2^{(1)})$ с вероятностью p_1, а значение $(c_1, c_2^{(2)})$ — с вероятностью $q_1 = 1 - p_1$.

4. Для игрока P_1 множество $S_1(\Theta_1) = S_1(C_1)$ функций $s_1(\theta_1) = s_1(c_1)$ состоит из функции s_1, равной объему выпуска фирмы F_1 при предельных издержках c_1. Для игрока P_2 множество $S_2(\Theta_2) = S_2(C_2)$ функций состоит из $s_2(c_2)$, таких, что $s_2^{(1)} = s_2(c_2^{(1)})$ и $s_2^{(2)} = s_2(c_2^{(2)})$, т.е. $s_2^{(1)}$ есть выпуск фирмы F_2 при предельных издержках $c_2^{(1)}$, а $s_2^{(2)}$ — выпуск фирмы F_2 при предельных издержках $c_2^{(2)}$.

Следовательно, набор s стратегий s_1 и s_2 игроков P_1 и P_2 имеет вид $s = (s_1, s_2^{(1)}, s_2^{(2)})$.

5. Для игрока P_1 функция $U_1(s)$ ожидаемого выигрыша имеет вид прибыли PR_1 фирмы F_1:

$$\begin{aligned} U_1(s) &= PR_1(s_1, s_2^{(1)}, s_2^{(2)}) = \\ &= \lfloor a - b(s_1 + p_1 s_2^{(1)} + q_1 s_2^{(2)})\rfloor s_1 - c_1 s_1 - d_1 = \\ &= p_1\lfloor a - b(s_1 + s_2^{(1)})s_1 - c_1 s_1 - d_1\rfloor + \\ &+ q_1\lfloor a - b(s_1 + s_2^{(2)})s_1 - c_1 s_1 - d_1\rfloor. \end{aligned} \tag{9.8.2}$$

Третье звено приведенного выражения 9.8.2 можно обосновать так.

В связи с тем что фирма F_1 не знает, какой тип фирмы F_2 будет функционировать на рынке, и поэтому фирме F_1 неизвестен выпуск s_2 фирмы F_2, но зато фирме F_1 известно, что фирма F_2 может иметь предельные издержки $c_2^{(1)}$ с вероятностью p_1 и, следовательно, выпуск $s_2^{(1)}$ с той же вероятностью p_1, аналогично выпуск $s_2^{(2)}$ с вероятностью q_1, поэтому фирме F_1 естественно ориентироваться на ожидаемый выпуск $p_1 s_2^{(1)} + q_1 s_2^{(2)}$ фирмы F_2, который и был включен в формулу прибыли фирмы F_1

$$PR_1 = (a - b(s_1 + p_1 s_2^{(1)} + q_1 s_2^{(2)}))s_1 - c_1 s_1 - d_1$$

вместо объема s_2.

Последнее (четвертое) звено цепочки (9.8.2) следует обосновать так.

Прибыль фирмы F_1 есть ее ожидаемая прибыль, которая равна произведению прибыли фирмы F_1

$$(a - b(s_1 + s_2^{(1)}))s_1 - c_1 s_1 - d_1$$

(при условии, что выпуск фирмы F_2 равен $s_2^{(1)}$) и вероятности p_1 того, что фирма F_2 будет иметь выпуск $s_2^{(1)}$, плюс аналогичное произведение прибыли фирмы F_1

$$(a - b(s_1 + s_2^{(2)}))s_1 - c_1 s_1 - d_1$$

(при условии, что выпуск фирмы F_2 равен $s_2^{(2)}$) и вероятности q_1 того, что фирма F_2 будет иметь выпуск $s_2^{(2)}$.

Для игрока P_2, который знает свой тип, функция $U_2(s)$ имеет вид

$$U_2(s) = PR_2(s_1, s_2) = (a - b(s_1 + s_2))s_2 - c_2 s_2 - d_2.$$

Если предельные издержки фирмы F_2 равны $c_2^{(1)}$, то мы имеем первый тип фирмы F_2. В этом случае

$$U_2(s) = PR_2(s_1, s_2^{(1)}, 0) = (a - b(s_1 + s_2^{(1)}))\, s_2^{(1)} - c_2^{(1)}\, s_2^{(1)} - d_2.$$

Если предельные издержки фирмы F_2 равны $c_2^{(2)}$, то мы имеем второй тип фирмы F_2. В этом случае

$$U_2(s) = PR_2(s_1, 0, s_2^{(2)}) = (a - b(s_1 + s_2^{(2)}))\, s_2^{(2)} - c_2^{(2)}\, s_2^{(2)} - d_2.$$

Для нахождения равновесия Нэша — Байеса этой статической байесовской игры следует максимизировать функции $U_1(s)$ и $U_2(s)$ ожидаемых выигрышей обоих игроков P_1 и P_2.

Задача максимизации прибыли $PR_1(s_1, s_2^{(1)}, s_2^{(2)})$ фирмы F_1 решается путем отыскания ее первой производной по s_1 с учетом важной предпосылки модели Курно о том, что предполагаемые вариации $ds_2^{(1)} / ds_1 = 0$ и $ds_2^{(2)} / ds_1 = 0$.

Имеем уравнение

$$\frac{dU_1(s)}{ds_1} = \frac{dPR_1(s, s_2^{(1)}, s_2^{(2)})}{ds_1} = a - c_1 - 2bs_1 - b(p_1 s_2^{(1)} + q_1 s_2^{(2)}) = 0,$$

откуда следует, что

$$s_1 = \frac{a - c_1 - b(p_1 s_2^{(1)} + q_1 s_2^{(2)})}{2b}. \qquad (9.8.3)$$

Поскольку

$$\frac{d^2U_1(s)}{ds_1^2} = -2b < 0,$$

постольку выражение (9.8.3) (глобально) максимизирует прибыль $PR_1(s_1, s_2^{(1)}, s_2^{(2)})$ при фиксированных $s_2^{(1)}$ и $s_2^{(2)}$.

Задача максимизации прибыли $PR_2(s_1, s_2)$ фирмы F_2 решается путем отыскания ее первой производной по переменной s_2 с учетом важной предпосылки модели Курно о том, что предполагаемая вариация $ds_1 / ds_2 = 0$.

Имеем уравнение

$$\frac{dU_2(s)}{ds_2} = (a - c_2) - 2bs_1 - 2bs_2 = 0,$$

откуда получаем

$$s_2 = \frac{a - c_2 - bs_1}{2b}.$$

Поскольку

$$\frac{d^2U_2(s)}{ds_2} = -2b < 0,$$

постольку вектор (s_1, s_2) максимизирует (глобально) прибыль $U_2(s) = PR_2(s_1, s_2)$ при фиксированных s_1.

Если $c_2 = c_2^{(1)}$, то

$$s_2^{(1)} = \frac{a - c_2^{(1)} - bs_1}{2b}. \tag{9.8.4}$$

Если $c_2 = c_2^{(2)}$, то

$$s_2^{(2)} = \frac{a - c_2^{(2)} - bs_1}{2b}. \tag{9.8.5}$$

Подставив в (9.8.3) выражения (9.8.4) и (9.8.5), получим

$$\overset{o}{s}_{(1)} = \frac{a - 2c_1 + p_1c_2^{(1)} + q_1c_2^{(2)}}{3b}. \tag{9.8.6}$$

Подставив (9.8.4) и (9.8.5) в выражение (9.8.6), получим соответственно

$$\overset{o}{s}{}_2^{(1)} = \frac{2a - (3 + p_1)c_2^{(1)} - q_1c_2^{(2)} + 2c_1}{6b}, \tag{9.8.7}$$

$$\overset{o}{s}{}_2^{(2)} = \frac{2a - (3 + q_1)c_2^{(2)} - p_1c_2^{(1)} + 2c_1}{6b}. \tag{9.8.8}$$

Набор (9.8.6), (9.8.7) и (9.8.8.) представляет собой равновесие Нэша — Байеса (в чистых стратегиях) дуополии Курно как статической байесовской игры.

При $p_1 = 1$ ($q_1 = 0$) и $c_1 = c_2^{(1)}$ формулы (9.8.6) и (9.8.7) дают классическое равновесие Нэша дуополии Курно

$$\overset{o}{s}_1 = \frac{a - c_1}{3b}, \quad \overset{o}{s}_2 = \frac{a - c_1}{3b}.$$

Аналогично при $p_1 = 0$ ($q_1 = 1$) и $c_1 = c_2^{(2)}$ формулы (9.8.6) и (9.8.8) дают классическое равновесие Нэша дуополии Курно

$$\overset{o}{s}_1 = \frac{a - c_1}{3b}, \quad \overset{o}{s}_2 = \frac{a - c_1}{3b}.$$

9.8.3. *Пример 9.8.2* (*A. Mas-Colell, M.D. Winston, J.R. Green* (1995)).

Рассмотрим сначала хорошо известную биматричную игру «Дилемма заключенных» (в этом примере 9.8.2 игру 1), задаваемую табл. 9.12 (у разных авторов фигурируют разные цифры).

Таблица 9.12

		Заключенный 2 (P_2)	
		НП	П
Заключенный 1 (P_1)	НП	$(-2; -2)$ 1	2 $(-9; -\hat{1})$
	П	$(-\breve{1}; -9)$ 3	4 $(-\breve{4}; -\hat{4})$

Здесь и далее в этом примере буквы «П» и «НП» означают соответственно «Признаться», «Не признаться».

Содержательная интерпретация клеток 1–4 табл. 9.12 хорошо известна. Если оба заключенных не признаются, их выпускают на свободу через два года, приписав им не слишком серьезное правонарушение в целях оправдания их задержания на время ведения следствия. Если заключенный 1 признается, а заключенный 2 не признается (клетка 3), то заключенного 1 отпускают на свободу через один год. Заключенному 2 дают большой срок, равный 9 годам. Клетка 2 интерпретируется аналогично. Если оба заключенных признаются, им сокращают срок за признание и обоих отпускают на свободу через 4 года.

Модификацию игры 1 представляет игра «Брат следователя» (в этом примере игра 2), задаваемая табл. 9.13.

Таблица 9.13

		Заключенный 2 (P_2)	
		НП	П
Заключенный 1 (P_1)	НП	$(\breve{0}; -2)$ 1	2 $(-9; -\hat{1})$
	П	$(-1; -9)$ 3	4 $(-\breve{4}; -\hat{4})$

В игре 2 клетки со второй по четвертую интерпретируются так же, как и в игре 1. Клетка первая в табл. 9.13 интерпретируется так. Заключенный 1 является братом следователя, который ведет дело этих заключенных. Если заключенные оба *не* признаются, то следователь отпустит заключенного 1 на свободу. Как и в игре 1, в игре 2 равновесие Нэша образуют стратегии (П, П).

Рассмотрим модификацию игра «Брат следователя» (в этом примере игра 3), задаваемую табл. 9.14.

Таблица 9.14

		Заключенный 2 (P_2)	
		НП	П
Заключенный 1 (P_1)	НП	$(\breve{0}; -\hat{2})$	$(-9; -7)$
	П	$(-1; -\hat{9})$	$(-\breve{4}; -10)$

В игре 3 клетки первая и третья такие же, как и в (предыдущей) игре 2. Клетки вторая и четвертая интерпретируются так, что заключенный 2, признаваясь (П), хочет задержаться в тюрьме дополнительно еще на 6 лет (в случае клетки 2: $-1 - 6 = -7$, в случае клетки 4: $-4 - 6 = -10$), чтобы, например, исповедоваться тюремному священнику. Возможно, такое желание у заключенного 2 появилось в связи с некоторым душевным расстройством. В игре 3 равновесие Нэша образуют стратегии (НП, НП).

В игре 4 игрок P_1 имеет один тип предпочтений, игрок P_2 — два типа предпочтений. Формально единственный тип игрока P_1 характеризуется его матрицей выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix},$$

которая одна и та же в табл. 9.13 и 9.14. Это обстоятельство интерпретируется так: игрок P_2 имеет полную информацию о предпочтениях игрока P_1.

Первый и второй типы игрока P_2 характеризуются двумя его матрицами выигрыша

$$B_1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -9 & -10 \end{pmatrix},$$

которые следует выписать из табл. 9.13 и 9.14 соответственно.

Игрок P_2 имеет первый тип предпочтений с вероятностью p_1, а второй тип предпочтений с вероятностью $q_1 = 1 - p_1$, т.е. игрок P_1 полагает, что с вероятностью p_1 игрок P_2 имеет первый тип предпочтений, с вероятностью q_1 игрок P_2 имеет второй тип предпочтений. Строгое толкование первого и второго типов предпочтений игрока P_2 дается ниже.

Игра 4 в нормальной форме представлена в виде табл. 9.15.

Таблица 9.15

		P_2			
		НП	П	НП	П
P_1	НП	(0; –2)	(–1; 1)	(0; –2)	(–9; –7)
	П	(–1; –9)	(–4; –4)	(–1; –9)	(–4; –10)
		p_1		q_1	

Игра 4 в развернутой форме представлена на рис. 9.13. Выбор реализации случайной величины, которая определяет тип предпочтений каждого игрока, целесообразно отдать в руки нулевого игрока P_0, т.е. Природы (N), что и показано на рис. 9.13.

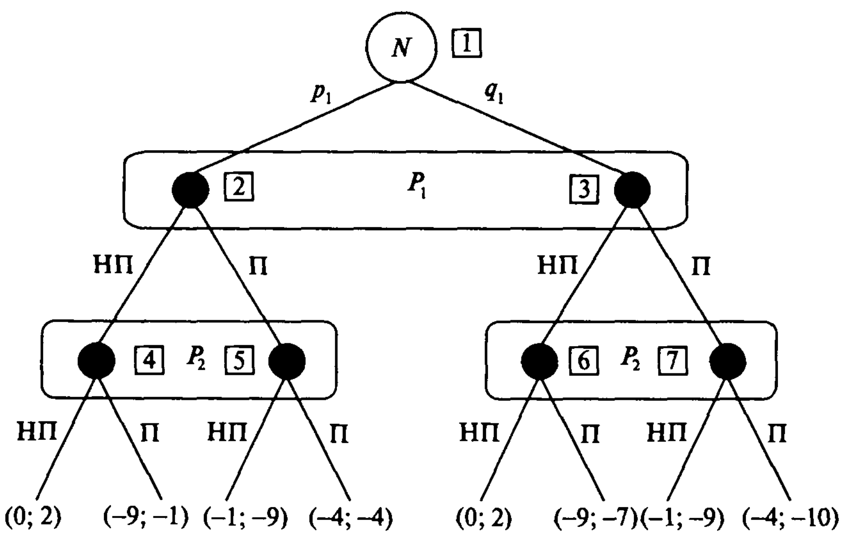


Рис. 9.13

Таким образом, игрок $p_0(N)$ делает первый ход, выбирая реализацию случайной величины, т.е. тип предпочтений *каждого* игрока (в данном случае игрока P_2), причем каждый игрок наблюдает реализацию только собственной случайной величины.

Представим чистые стратегии игроков P_1 и P_2 в виде единичных векторов $e_1 = (1; 0)$ (представление стратегии (НП) игрока P_1), $e_2 = (0; 1)$ (представление стратегии (П) игрока P_1), $f_1^{(1)} = (1, 0, 0, 0)$ (представление стратегии (НП) первого типа игрока P_2), $f_2^{(1)} =$ $= (0, 1, 0, 0)$ (представление стратегии (П) первого типа игрока P_2), $f_1^{(2)} = (0, 0, 1, 0)$ (представление стратегии (НП) второго типа игрока P_2), $f_2^{(2)} = (0, 0, 0, 1)$ (представление стратегии (П) второго типа игрока P_2).

Покажем, что игра 4 есть статическая байесовская игра.

1. Число игроков равно двум. Игроком P_1 является заключенный 1, игроком P_2 — заключенный 2. Нулевой игрок P_0 — Природа (N) в число игроков не включается.

2. Для игрока P_1 множество $\Theta_1 = C_1$ его типов состоит из одного элемента $\theta_1 = c_1$, для игрока P_2 множество $\Theta_2 = C_2$ его типов состоит из двух элементов $\theta_2^{(1)} = c_2^{(1)}$ и $\theta_2^{(2)} = c_2^{(2)}$.

3. Распределение вероятностей на множестве $C = C_1 \times C_2$ типов (c_1, c_2) игроков P_1 и P_2 имеет вид

C	$(c_1, c_2^{(1)})$	$(c_1, c_2^{(2)})$
P	p_1	q_1

То есть случайная величина C принимает значение $(c_1, c_2^{(1)})$ с вероятностью p_1, а значение $(c_1, c_2^{(2)})$ — с вероятностью $q_1 = 1 - p_1$.

4. Множество S_1 возможных ходов игрока P_1 имеет вид $S_1 = (e_1, e_2)$, множество S_2 возможных ходов игрока P_2 $S_2 = (f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_1^{(2)}, f_2^{(2)})$.

Множество $S_1(\Theta_1)$ совпадает со множеством S_1, ибо у игрока P_1 только один тип предпочтений.

Множество $S_2(\Theta_2)$ состоит из следующих четырех стратегий $s_2(1), s_2(2), s_2(3), s_2(4)$ статической байесовской игры:

$$s_2(1) = (f_1^{(1)}, f_1^{(2)}),\ s_2(2) = (f_1^{(1)}, f_2^{(2)}),\ s_2(3) = (f_2^{(1)}, f_1^{(2)}),$$
$$s_2(4) = (f_2^{(1)}, f_2^{(2)}).$$

5. Для игрока P_1 ожидаемый выигрыш $U_1(s(c))$ принимает следующие значения:

$$U_1(e_1, s_2(1)) = e_1(A \mid A)(p_1 f_1^{(1)} + q_1 f_1^{(2)}) = (1;\ 0)\begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 & -9 \\ -1 & -4 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ 0 \\ q_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$U_1(e_1, s_2(2)) = e_1(A \mid A)(p_1 f_1^{(1)} + q_1 f_2^{(2)}) = (1; 0)\begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 & -9 \\ -1 & -4 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ 0 \\ 0 \\ q_1 \end{pmatrix} =$$

$$= -9q_1 = -9 + 9p_1,$$

$$U_1(e_1, s_2(3)) = e_1(A \mid A)(p_1 f_2^{(1)} + q_1 f_1^{(2)}) = (1; 0)\begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 & -9 \\ -1 & -4 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \\ q_1 \\ 0 \end{pmatrix} = -9p_1,$$

$$U_1(e_1, s_2(4)) = e_1(A \mid A)(p_1 f_2^{(1)} + q_1 f_2^{(2)}) = (1; 0)\begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 & -9 \\ -1 & -4 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \\ 0 \\ q_1 \end{pmatrix} =$$

$$= -9p_1 - 9q_1 = -9.$$

Аналогично имеем

$$U_1(e_2, s_2(1)) = e_2(A|A)(p_1 f_1^{(1)} + q_1 f_1^{(2)}) = -1,$$

$$U_1(e_2, s_2(2)) = e_2(A|A)(p_1 f_1^{(1)} + q_1 f_2^{(2)}) = -4 + 3p_1,$$

$$U_1(e_2, s_2(3)) = e_2(A|A)(p_1 f_2^{(1)} + q_1 f_1^{(2)}) = -1 - 3p_1,$$

$$U_1(e_2, s_2(4)) = e_2(A|A)(p_1 f_2^{(2)} + q_1 f_2^{(2)}) = -4.$$

Для игрока P_2 $U_2(s(c))$ ожидаемый выигрыш принимает следующие значения:

$$U_2(e_1, s_2(2)) = e_1(B_1|\, B_2)(p_1 f_1^{(1)} + q_1 f_2^{(2)}) = -7 + 5p_1,$$

$$U_2(e_1, s_2(3)) = e_1(B_1|\, B_2)(p_1 f_2^{(1)} + q_1 f_1^{(2)}) = -2 + p_1,$$

$$U_2(e_1, s_2(4)) = e_1(B_1|\, B_2)(p_1 f_2^{(1)} + q_1 f_2^{(2)}) = -7 + 6p_1,$$

$$U_2(e_1, s_2(1)) = e_1(B_1 \mid B_2)(p_1 f_1^{(1)} + q_1 f_1^{(2)}) = (1;0)\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & -7 \\ -9 & -4 & -9 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ 0 \\ q_1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -2p_1 - 2q_1 = -2,$$

$$U_2(e_1, s_2(1)) = e_2(B_1 \mid B_2)(p_1 f_1^{(1)} + q_1 f_1^{(2)}) = (0;1)\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & -7 \\ -9 & -4 & -9 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ 0 \\ q_1 \\ 0 \end{pmatrix} = -9,$$

$$U_2(e_2, s_2(2)) = e_2(B_1 | B_2)(p_1 f_2^{(1)} + q_1 f_2^{(2)}) = -10 + p_1,$$

$$U_2(e_2, s_2(3)) = e_2(B_1 | B_2)(p_1 f_2^{(1)} + q_1 f_1^{(2)}) = -9 + 5p_1,$$

$$U_2(e_2, s_2(4)) = e_2(B_1 | B_2)(p_1 f_2^{(1)} + q_1 f_2^{(2)}) = -10 + 6p_1,$$

Для отыскания равновесий Нэша-Байеса рассматриваемой байесовской игры 4 следует попарно сравнить значения ожидаемых выигрышей игроков P_1 и P_2.

Имеем

$$U_1(e_1, s_2(1)) = 0 > -1 = U_1(e_2, s_2(1)),$$

$$U_2(e_1, s_2(1)) = -2 \geq -7 + 5p_1 = U_2(e_1, s_2(2)),$$

$$U_2(e_1, s_2(1)) = -2 \geq -2 + p_1 = U_2(e_1, s_2(3)),$$

$$U_2(e_1, s_2(1)) = -2 \geq -7 + 6p_1 = U_2(e_1, s_2(4)).$$

Система линейных неравенств $-2 \geq -7 + 5p_1$, $-2 \geq -2 + p_1$, $-2 \geq -7 + 6p_1$ имеет единственное решение $p_1 = 0$. Отсюда следует, что при $p_1 = 0$ профиль $(e_1, s_2(1)) = (e_1, f_1^{(1)}, f_1^{(2)})$ стратегий s_1 и $s_2(1)$ есть равновесие Нэша — Байеса рассматриваемой байесовской игры 4. Равенство $p_1 = 0$ содержательно означает, что в игре 4 с вероятностью единица участвует тип 2 игрока P_2. Если $p_1 > 0$, то профиль e_1, $s_2(1)$ не является равновесием Нэша — Байеса.

При $p_1 = 0$ профиль $(e_1, f_1^{(1)}, f_1^{(2)})$ содержательно интерпретируется так. Игрок P_1 выбирает стратегию (НП), а стратегия игрока P_2 есть выбор хода (НП) во втором типе игрока P_2.

Далее имеем

$$U_1(e_1, s_2(2)) = -9 + 9p_1 \geq -4 + 3p_1 = U_1(e_2, s_2(2)),$$

$$U_2(e_1, s_2(2)) = -7 + 5p_1 \geq -2 = U_2(e_1, s_2(1)),$$

$$U_2(e_1, s_2(2)) = -7 + 5p_1 \geq -2 + p_1 = U_2(e_1, s_2(3)),$$
$$U_2(e_1, s_2(2)) = -7 + 5p_1 \geq -7 + 6p_1 = U_2(e_1, s_2(4)).$$

Система этих четырех линейных неравенств противоречива. Отсюда следует, что профиль $(e_1, s_2(2)) = (e_1, f_1^{(1)}, f_2^{(2)})$ стратегий e_1 и $s_2(2)$ не является равновесием Нэша — Байеса рассматриваемой игры 4.

Аналогично анализируются профили $(e_1, s_2(3)) = (e_1, f_2^{(1)}, f_1^{(2)})$, $(e_1, s_2(4)) = (e_1, f_2^{(1)}, f_2^{(2)})$, $(e_1, s_2(1)) = (e_2, f_1^{(1)}, f_1^{(2)})$, $(e_2, s_2(2)) = (e_2, f_1^{(1)}, f_2^{(2)})$, $(e_2, s_2(3)) = (e_2, f_2^{(1)}, f_1^{(2)})$, $(e_2, s_2(4)) = (e_2, f_2^{(1)}, f_2^{(2)})$.

Профиль $(e_1, \overset{o}{s}_2(3)) = (e_1, f_2^{(1)}, f_1^{(2)})$ есть равновесие Нэша — Байеса игры 4 при $0 \leq p_1 \leq 1$.

Профиль $(e_2, \overset{o}{s}_2(3)) = (e_2, f_2^{(1)}, f_1^{(2)})$ есть равновесие Нэша — Байеса при $1/6 \leq p_1 \leq 1$.

Профиль $(e_2, \overset{o}{s}_2(4)) = (e_2, f_2^{(1)}, f_1^{(2)})$ есть равновесие Нэша — Байеса при $p_1 = 1$.

Остальные профили не являются равновесием Нэша — Байеса игры 4.

Приведенный подробный анализ игры 4 можно сократить, если воспользоваться частными особенностями этой игры 4. Если игрок P_2 использует тип 1 с вероятностью единица, то оба игрока должны выбрать стратегии e_1 = (П) и $f_2^{(1)}$(П), ибо пара этих стратегий есть равновесие Нэша в первом типе предпочтений игрока P_2. Если игрок P_2 использует второй тип с вероятностью единица, то оба игрока должны выбрать стратегии e_1 = (НП) и $f_2^{(1)}$(НП), ибо пара этих стратегий есть равновесие Нэша во втором типе предпочтений игрока P_2.

Замечание 9.8.3. Равновесие Нэша в смешанных стратегиях в играх с полной информацией можно представить как равновесие Нэша — Байеса (в чистых стратегиях) в играх с неполной информацией.

9.9. О динамических играх с полной и неполной информацией

9.9.1. Динамические игры с неполной информацией (динамические байесовские игры) обобщают статические игры с неполной информацией (статические байесовские игры). Здесь ситуация аналогична той, что имеет место во взаимодействии динамических и статических игр с полной информацией, которым были посвящены параграфы 9.1–9.7.

Важная особенность динамических игр с неполной информацией — наличие неизвестных вероятностей, с которыми игрок находится в той или иной вершине своего информационного множества, состоящего, естественно, более чем из одной вершины. Поэтому игрок должен делать предположения относительно того, с какой вероятностью он окажется в той или иной вершине своего информационного множества. Если у игрока есть такие предположения, то на их основе он выбирает стратегию, которая может обеспечить ему наибольший ожидаемый выигрыш

Эта идея является основной в понятии *совершенного байесовского равновесия* (СБР), для описания которого следует иметь: 1) набор стратегий $(s_1, ..., s_m)$ всех игроков $P_1, ..., P_m$; 2) набор ожидаемых каждым игроком P_k стратегий $s_{-k}^e = (s_1^e, ..., s_{k-1}^e, s_{k+1}^e, ..., s_m^e)$ всех остальных игроков $P_1, ..., P_{k-1}, P_{k+1}, ..., P_m$, $k = 1, ..., m$; 3) для каждого игрока P_k в каждом информационном множестве, в котором ему принадлежит ход, ожидаемое игроком P_k распределение вероятностей, заданное на вершинах этого информационного множества, $k = 1, ..., m$.

Для того чтобы описанный набор стратегий и ожиданий составлял СБР, требуется выполнение следующих условий: а) ожидаемое распределение вероятностей на вершинах информационных множеств для каждого игрока P_k соответствует (согласованы с) выбранной им стратегии s_k и тем стратегиям s_{-k}^e, которые, как он (игрок P_k) ожидает, выберут остальные игроки $P_1, ..., P_{k-1}$, $P_{k+1}, ..., P_m$; б) выбранная стратегия последовательно оптимальна при данных ожиданиях, т.е. выбор игрока P_k в каждом его информационном множестве должен быть таким, чтобы максимизировать ожидаемый выигрыш в предположении, что после каждого информационного множества игра будет продолжена в соответствии с набором стратегий (s_k, s_{-k}), $k = 1, ..., m$; в) ожидаемые стратегии s_{-k}^e совпадают с фактически выбранными стратегиями s_{-k}, т.е. $s_{-k}^e = s_{-k}$, $k = 1, ..., m$.

Особенность СБР в том, что в общем случае для его поиска невозможно использовать обратную индукцию, за исключением игр с почти совершенной информацией. Если игра не имеет подыгр, то СБР следует находить как решение системы уравнений: ожидаемые распределения вероятностей на вершинах информационных множеств находятся в соответствии с набором стратегий равновесия, а стратегия равновесия выбирается каждым игроком на основе предположений об ожидаемых распределениях вероятностей на вершинах информационных множеств.

Замечание 9.9.1. Неявное использование СБР содержалось в работах ряда авторов, посвященных динамическим моделям, в которых учитывалась неопределенность (ссылки даются по монографии *Fudenberg and Tirole* (2000)): *Aumann and Machler* (1966) (игра про разоружение), *Akerlof* (1970) (известная работа о рынке «лимонов»), *Spence* (1974) (работа о рыночном сигнализировании), *Ortega-Reichert* (1967) (работа об анализе аукционов с повторяющимся первым предложением). Первое формальное предложение идеи СБР было дано в работе Мильгрома и Робертса (*Milgrom and Roberts* (1982а). См. также: *Kreps and Wilson* (1982в) и *Milgrom and Roberts* (1982в)).

9.9.2. Проиллюстрируем построение СБР на конкретном примере.

Пример 9.9.1. (В.П. Бусыгин и др. (2000), *O. Shy* (1995)). В самолет, который должен лететь из пункта M в пункт G, попал террорист, который требует, чтобы самолет летел в пункт H. В противном случае террорист угрожает взорвать самолет. Террорист не может определить, куда летит самолет, но может определить, куда он прилетел. Дерево игры показано на рис. 9.14.

В игре фигурирует два типа террористов: сумасшедший и «нормальный». Террорист знает свой тип, а пилот его не знает. Если террорист (независимо от его типа) не станет выдвигать свое требование и угрожать, т.е. если $\mu_1 = 0$ и $\mu_2 = 0$, то «выигрыш» пилота и «выигрыш» террориста будут равны нулю. Если пилот посадит самолет в пункте H, то «выигрыш» пилота будет равен -1, а «выигрыш» террориста (независимо от его типа) будет равен 1. Если пилот посадит самолет в пункте G, а сумасшедший террорист взорвет самолет, то «выигрыш» пилота будет равен -100, а «выигрыш» сумасшедшего террориста будет равен нулю. Если пилот посадит самолет в пункте G, «нормальный» террорист не взорвет самолет, т.е. «выигрыш» пилота будет равен 1, а выигрыш «нормального» террориста будет равен -1.

СБР приведенной динамической игры с неполной информацией должно состоять из следующих величин: 1) вероятности μ_1, с которой сумасшедший террорист проводит свою операцию, т.е. выдвигает свои требования и угрожает, $\mu_1 \in [0; 1]$; 2) вероят-

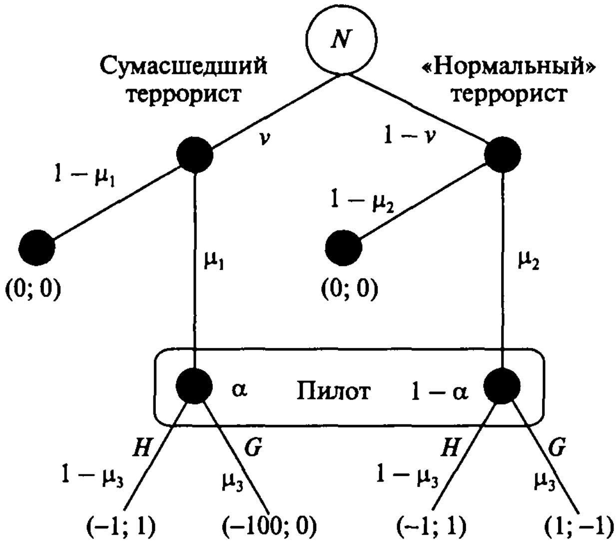


Рис. 9.14

ности μ_2, с которой «нормальный» террорист проводит свою операцию, $\mu_2 \in [0; 1]$; 3) вероятности α, с которой пилот ожидает появления сумасшедшего террориста, $\alpha \in [0; 1]$; 4) вероятности μ_3, с которой пилот летит в пункт G, $\mu_3 \in [0; 1]$. Все остальные вероятности рассчитываются как функции только что приведенных.

1°. Ожидаемые выигрыши пилота от двух его возможных ходов равны $-1\alpha + (-1)(1 - \alpha) = -1$ в случае, если пилот посадит самолет в пункте H, и $\alpha(-100) + (1 - \alpha) = 1$ в случае, если пилот посадит самолет в пункте G.

Очевидно, формальное неравенство $-1 < \alpha(-100) + (1 - \alpha) = 1$ (т.е. $\alpha < {}^2/_{101}$) означает, что выигрыш пилота в пункте G выше, поэтому пилот полетит в пункт G, т.е. $\mu_3 = 1$. Формальное неравенство $-1 > \alpha(-100) + (1 - \alpha) = 1$ (т.е. $\alpha > {}^2/_{101}$) означает, что выигрыш пилота в пункте G ниже, чем в пункте H, поэтому пилот полетит в пункт H, т.е. $\mu_3 = 0$. В случае равенства $-1 = \alpha(-100) + (1 - \alpha) = 1$ (т.е. $\alpha = {}^2/_{101}$) пилоту все равно куда лететь ($0 \le \mu_3 \le 1$).

Таким образом, зависимость стратегии пилота от вероятности α его ожидания имеет вид

$$\mu_3(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha < {}^2/_{101}, \\ [0,1], & \text{если } \alpha = {}^2/_{101}, \\ 0, & \text{если } \alpha > {}^2/_{101}. \end{cases}$$

2°. Опишем вероятность α ожидания пилота как функцию вероятностей μ_1 и μ_2. Если $\mu_1 \neq 0$ или $\mu_2 \neq 0$, то используем формулу Байеса, считая, что событие B_1 — это появление сумасшедшего террориста, событие B_2 — это появление «нормального» террориста, событие A — пилот получил ход и должен сделать выбор, куда лететь. Выпишем вероятности событий B_1, B_2 и A, используя введенную выше символику рассматриваемой модели: $P\{B_1\} = \nu$, $P\{B_2\} = 1 - \nu$, $P\{B_1|A\} = \alpha$, $P\{A|B_1\} = \mu_1$, $P\{A|B_2\} = \mu_2$. По известной формуле Байеса имеем

$$\alpha = \alpha(\mu_1, \mu_2) = P\{B_1 \mid A\} = \frac{P\{B_1\}P\{A \mid B_1\}}{P\{B_1\}P\{A \mid B_1\} + P\{B_2\}P\{A \mid B_2\}} =$$

$$= \frac{\nu\mu_1}{\nu\mu_1 + (1-\nu)\mu_2}$$

при $\mu_1 \neq 0$ или $\mu_2 \neq 0$.

Напомним, что $P\{A|B_1\}$ — это (условная) вероятность события A при условии, что произошло событие B_1 (если появился сумасшедший террорист (событие B_1), то условная вероятность событии A, т.е. $P\{A|B_1\}$, очевидно, равна μ_1). Аналогично $P\{A|B_2\}$ — это (условная) вероятность события A при условии, что произошло событие B_2 (если появился «нормальный» террорист (событие B_2), то условная вероятность события A, т.е. $P\{A|B_2\}$, очевидно, равна μ_2). Символ $P\{B_1|A\}$ — это (условная) вероятность события B_1 при условии, что произошло событие A.

Известная формула Байеса выше была использована обоснованно, ибо, во-первых, события B_1 и B_2 несовместимы (террорист либо сумасшедший, либо «нормальный») и, во-вторых, если произошло хотя бы одно из событий B_1 и B_2, то произошло также событие A (действительно, пилот самолета должен принимать решение о месте посадки в случае появления террориста любого типа).

Если $\mu_1 = 0$ и $\mu_2 = 0$, то, исходя из содержательных соображений, пилот может ожидать появление сумасшедшего террориста с любой вероятностью $0 \leq \alpha \leq 1$.

3°. Проанализируем выбор террориста каждого (из двух) типов. Если террорист сумасшедший, то его ожидаемый выигрыш при стратегии пилота лететь с вероятностью μ_3 в пункт G и с вероятностью $1 - \mu_3$ — в пункт H, очевидно, равен $(1 - \mu_3) \cdot 1 + \mu_3 \cdot 0 = 1 - \mu_3$.

Если $1 - \mu_3 > 0$ (тогда, очевидно, $\mu_3 < 1$), и поэтому $\mu_1 = 1$.

Если $1 - \mu_3 = 0$ (тогда, очевидно, $\mu_3 = 1$), и поэтому $0 \le \mu_1 \le 1$.

Случай $1 - \mu_3 < 0$ (тогда, очевидно, $\mu_3 > 1$) невозможен, ибо μ_3 — вероятность.

Таким образом,

$$\mu_1(\mu_3) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_3 < 1, \\ [0;\ 1], & \text{если } \mu_3 = 1. \end{cases}$$

Если террорист «нормальный», то его ожидаемый выигрыш при стратегии пилота лететь с вероятностью μ_3 в пункт G и с вероятностью $1 - \mu_3$ — в пункт H, очевидно, равен $(1 - \mu_3) \cdot (+1) + \mu_3 \times \times (-1) = 1 - 2\mu_3$.

Если $1 - 2\mu_3 > 0$ (тогда, очевидно, $\mu_3 < {}^1/_2$), и поэтому $\mu_2 = 1$.

Если $1 - 2\mu_3 = 0$ (тогда, очевидно, $\mu_3 = {}^1/_2$), и поэтому $0 \le \mu_2 \le 1$.

Если $1 - 2\mu_3 < 0$ (тогда, очевидно, $\mu_3 > {}^1/_2$), и поэтому $\mu_2 = 0$.

Таким образом,

$$\mu_2(\mu_3) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_3 < 1/2, \\ [0;\ 1], & \text{если } \mu_3 = 1/2, \\ 0, & \text{если } \mu_3 > 1/2. \end{cases}$$

4°. Набор вероятностей $(\mu_1^0, \mu_2^0, \mu_3^0, \alpha^0)$ задает СБР, если выполнены условия

$$\mu_3^0 \in \mu_3(\alpha^0),\ \mu_1^0 \in \mu_1(\mu_3^0),\ \alpha^0 \in \alpha(\mu_1^0, \mu_2^0),\ \mu_2^0 \in \mu_2(\mu_3^0).$$

Для решения этой системы целесообразно проанализировать следующие варианты: $\mu_2 = 0$ («нормальный» террорист не проведет операцию, т.е. не выдвигает свое требование и не угрожает), $\mu_2 = 1$ («нормальный» террорист проводит операцию, т.е. выдвигает свое требование и угрожает), $0 < \mu_2 < 1$ (у «нормального» террориста невырожденная смешанная стратегия).

5°. Рассмотрим случай, когда $\mu_1 = 0$ и $\mu_2 = 0$. Содержательно эти равенства означают, что террорист (независимо от его типа) не станет выдвигать свое требование и угрожать, поэтому пилот может спокойно сажать самолет в пункте G. Это означает формально, что $\mu_3 = 1$. При этом $\alpha = 0$, так как в рассматриваемом случае пилот не ожидает встретить сумасшедшего террориста (ибо $\mu_1 = 0$).

Таким образом, рассматриваемая динамическая игра с неполной информацией имеет следующее СБР: $\mu_1^0 = 0$, $\mu_2^0 = 0$, $\mu_3^0 = 1$, $\alpha^0 = 0$.

В связи с тем что $\mu_3(\alpha) = 1$, если $\alpha < 2/101$ (см. п. 1° этого примера), СБР $\mu_1^0 = 0$, $\mu_2^0 = 0$, $\mu_3^0 = 1$, $\alpha^0 = 0$ дополняется СБР вида $\mu_1^0 = 0$, $\mu_2^0 = 0$, $\mu_3^0 = 1$, $0 \le \alpha^0 \le {}^2/_{101}$. Отметим, что неравенство $\alpha^0 \le {}^2/_{101}$ означает, что вероятность α^0, с которой пилот ожидает появления сумасшедшего террориста, является малой (для сравнения сопоставьте это неравенство с неравенством $\nu \ge {}^2/_{101}$ п. 6° этого примера).

6°. Случай, когда $\mu_2 = 1$ и $\mu_1 = 1$, содержательно означает, что террорист (независимо от его типа) обязательно станет выдвигать свое требование и угрожать. Тогда для пилота вероятность α иметь на борту самолета сумасшедшего террориста, очевидно, будет совпадать с вероятностью ν, с какой сумасшедшие террористы появляются вообще, т.е. $\alpha = \nu$.

На основании п. 3° этого примера

$$\mu_1(\mu_3) = 1, \text{ если } \mu_3 < 1, \text{ и } \mu_2(\mu_3) = 1, \text{ если } \mu_3 < {}^1/_2,$$

т.е. в рассматриваемом случае $\mu_3 < {}^1/_2$.

Если $\nu(=\alpha) > {}^2/_{101}$, то $\mu_3(\nu) = 0$, и если $\nu(=\alpha) = {}^2/_{101}$, то $0 \le \mu_3(\nu) < {}^1/_2$ (см. п. 1° этого примера).

Таким образом, если $\nu(=\alpha) > {}^2/_{101}$, то СБР имеет вид $\mu_1^0 = 1$, $\mu_2^0 = 1$, $\mu_3^0 = 0$, $\alpha^0 = \nu$; если $\nu(=\alpha) = {}^2/_{101}$, то СБР имеет вид $\mu_1^0 = 1$, $\mu_2^0 = 1$, $\alpha^0 = \nu = {}^2/_{101}$, $0 \le \mu_3^0 < {}^1/_2$.

Отметим, что неравенство $\nu \ge {}^2/_{101}$ содержательно означает, что сумасшедшие террористы на свете встречаются, к сожалению, не очень редко. Для реальной действительности это, скорее всего, так и есть.

7°. Случай, когда $\mu_2 \in (0; 1)$ — необходимое условие равенства $\mu_3 = {}^1/_2$ (см. п. 3° этого примера), которое, в свою очередь, есть необходимое условие равенства $\alpha = {}^2/_{101}$ (см. п. 1° этого примера). Равенство $\mu_3 = {}^1/_2$ влечет равенство $\mu_1(\mu_3) = 1$ (см. п. 3° этого примера). Используя вышеприведенную формулу Байеса ($\mu_1 = 1$)

$$\frac{2}{101} = \alpha = \frac{\nu\mu_1}{\nu\mu_1 + (1-\nu)\mu_2} = \frac{\nu}{\nu + (1-\nu)\mu_2}$$

(см. п. 2° этого примера), получим, что

$$\mu_2 = \frac{99\nu}{2(1-\nu)},$$

откуда, принимая во внимание неравенство $\mu_2 < 1$, получаем, что $\nu < {}^2/_{101}$, откуда следует, что природа порождает не так уж много сумасшедших террористов, что, к сожалению, не совсем так, как было отмечено в п. 6° этого примера.

Следовательно, при $\nu < {}^2/_{101}$ получаем еще одно СБР

$$\mu_1^0 = 1,\ \mu_2^0 = \frac{99\nu}{2(1-\nu)},\ \mu_3^0 = \frac{1}{2},\ \alpha^0 = \frac{2}{101}.$$

Таким образом, в п. 5°–7° этого примера выписаны все СБР рассмотренной динамической игры с неполной информацией.

Замечание 9.9.2. Дальнейшее развитие концепции равновесия в теории некооперативных игр (равновесие Нэша, совершенное в подыграх равновесие, равновесие Нэша — Байеса, совершенное байесовское равновесие) представлено в монографии *D. Fudenberg and I. Tirole* (2000), в которой подробно проанализированы последовательное равновесие, совершенное равновесие относительно дрожащей руки, правильное (*poper*) равновесие и т.п. Широкий спектр понятий равновесия в теории игр свидетельствует о том, что в настоящее время вопрос о рациональном определении понятия оптимального решения игры, по-видимому, еще не имеет приемлемого ответа.

Вопросы для самоконтроля к главе 9

1. Дайте описание статической игры *n* лиц с полной информацией в нормальной форме.
2. Что означает термин «полная информация» в теории статических игр?
3. Что означают термины «стратегия игрока» и «профиль стратегий игры» в теории статических игр?
4. Дайте толкование понятий «задача теории игр» и «решение игры».
5. Сформулируйте определения биматричной игры и ее двойной матрицы.
6. Сформулируйте определение доминирующей (сильно, слабо) стратегии.
7. Сформулируйте определение равновесия в доминирующих стратегиях статической игры с полной информацией.
8. Что представляет собой принцип сильного доминирования в теории статических игр в нормальной форме?
9. Сформулируйте определение равновесия Нэша статической игры *m* лиц в нормальной форме.

10. Сформулируйте теорему о достаточном условии существования равновесия Нэша статической игры m лиц в нормальной форме.
11. Опишите взаимосвязь последовательного использования принципа сильного доминирования и равновесия Нэша статической игры и лиц в нормальной форме.
12. Сформулируйте определение понятий чистой стратегии, смешанной стратегии и ожидаемого выигрыша игрока в теории биматричных игр.
13. Что такое смешанное расширение (рандомизация) биматричной игры?
14. Сформулируйте определение и теорему существования равновесия Нэша в смешанных стратегиях биматричной игры.
15. Сформулируйте условие дополняющей нежесткости равновесия Нэша в смешанных стратегиях биматричной игры.
16. Приведите систему неравенств для явного определения равновесия Нэша в смешанных стратегиях биматричной игры с матрицами выигрышей игроков второго порядка.
17. Сформулируйте понятие Парето-эффективного профиля статической игры с полной информацией.
18. Что представляет собой «геометрический критерий» Парето-эффективности профиля чистых стратегий биматричной игры в критериальном пространстве выигрышей игроков?
19. Сформулируйте определение динамической игры с совершенной и несовершенной информацией.
20. Что означают термины «совершенная» и «несовершенная информация»?
21. Что такое развернутая (расширенная) форма динамической игры с совершенной информацией?
22. Сформулируйте понятие хода игрока, траектории ходов, пути в дереве игры, партии динамической игры с совершенной информацией в развернутой форме.
23. Что представляет собой метод обратной индукции решения динамической игры в развернутой форме?
24. Что представляет собой динамическая игра с совершенной информацией в нормальной форме?
25. Сформулируйте определение чистой стратегии игрока динамической модели с совершенной информацией в развернутой форме.
26. Сформулируйте теорему о связи решения динамической игры с совершенной информацией, полученного методом обратной индукции, и равновесием Нэша.
27. Сформулируйте определение подыгры игры с совершенной информацией в развернутой форме.
28. Сформулируйте определение совершенного в подыграх равновесия.
29. Сформулируйте определение информационного множества игрока.

30. Что представляет собой развернутая форма статической игры?
31. Сформулируйте понятие игр с совершенной и несовершенной информацией, используя понятие информационного множества.
32. Опишите ситуацию адекватности представления в виде нормальной формы динамической игры.
33. Сформулируйте определение неполной информации и статической игры с неполной информацией.
34. Дайте определение понятия типа предпочтений игрока.
35. Сформулируйте понятие статической байесовской игры.
36. Сформулируйте определение (чистой) стратегии игрока и ожидаемого выигрыша игрока в случае статической байесовской игры.
37. Сформулируйте определение равновесия Нэша — Байеса статической байесовской игры.
38. Представьте модель дуополии Курно как статическую игру с полной информацией.
39. Покажите, что равновесие Курно — это равновесие Нэша.
40. Представьте модель дуополии Бертрана как статическую модель с полной информацией. Покажите, что равновесие Бертрана — это равновесие Нэша.
41. Представьте модель дуополии Курно как статическую игру с неполной информацией.
42. Сформулируйте определение динамической игры с неполной информацией.
43. Сформулируйте основные требования к набору стратегий и ожиданий игроков, составляющих совершенное байесовское равновесие динамической игры с неполной информацией.

Задачи и упражнения для самоконтроля к главе 9

1. Биматричная игра $G(A, B)$ задана следующей информацией:

Таблица

		Стратегии игрока P_2		
		s_2^1	s_2^2	s_2^3
Стратегии игрока P_1	s_1^1	(2; 3)	(3; 5)	(7; 4)
	s_1^2	(-2; 1)	(2; 6)	(4; 7)
	s_1^3	(3; 2)	(2; 3)	(6; 4)

Реализуйте принцип сильного доминирования для этой биматричной игры.

2. Покажите, что равновесие дуополии Курно есть равновесие Нэша этой дуополии как статической игры с полной информацией.
3. Покажите, что равновесие Бертрана есть равновесие Нэша дуополии как статической игры с полной информацией Бертрана.
4. На рынок однородной продукции поставляют продукцию две фирмы F_1 и F_2. Для выпуска продукции каждая фирма может использовать один (1Ц) или два (2Ц) своих цеха. Если в каждой фирме функционирует два цеха, то это приведет к перепроизводству продукции, в результате каждая фирма понесет убытки в количестве 30 д.е. Если в каждой фирме функционирует только один цех, то каждая из них получит прибыль, равную 40 д.е. Если в одной фирме функционирует только один цех, а в другой — два цеха, то прибыль первой из этих фирм будет равна 30 д.е., а прибыль другой составит 60 д.е.

   Представьте описанную ситуацию в виде биматричной игры с явно выписанной двойной матрицей выигрышей (проигрышей) фирм F_1 и F_2.

   Представьте биматричную игру в развернутой форме, указав явно информационные множества обеих фирм.

   Для этой биматричной игры найдите равновесия Нэша в чистых и смешанных стратегиях. В критериальном пространстве выигрышей фирм F_1 и F_2 представьте множества выигрышей фирм F_1 и F_2 в случае чистых и в случае смешанных стратегий фирм F_1 и F_2 и выявите Парето-эффективные профили (смешанных) стратегий.

   Сопоставьте равновесие Нэша и Парето-эффективные профили смешанных стратегий. Дайте содержательную экономическую интерпретацию найденным равновесиям Нэша и Парето-эффективным профилям смешанных стратегий.
5. Фирма F_1 собирается продавать свою продукцию на одном из двух рынков, которые контролируются фирмой F_2. Если фирма F_1 выйдет со своей продукцией на первый рынок (M_1), она получит прибыль, равную 4 д.е., а фирма F_2 понесет убытки, равные 4 д.е. Если фирма F_1 выйдет со своей продукцией на второй рынок (M_2), она получит прибыль, равную 2 д.е., а фирма F_2 понесет убытки, равные 2 д.е. Если фирма F_2 принимает контрмеры и не пустит фирму F_1 на рынок M_1, то фирма F_2 получит прибыль, равную 3 д.е., а фирма F_1 понесет большие убытки, равные 5 д.е. Наконец, если фирма F_2 принимает меры и не пустит фирму F_1 на рынок M_2, то фирма F_2 получит прибыль, равную 4 д.е., а фирма F_1 понесет убытки, равные 1 д.е.

   Представьте описанную ситуацию в виде биматричной игры с явно выписанной двойной матрицей выиграшей (проигрышей) фирм F_1 и F_2.

   Представить биматричную игру в развернутой форме, указав явно информационные множества обеих фирм.

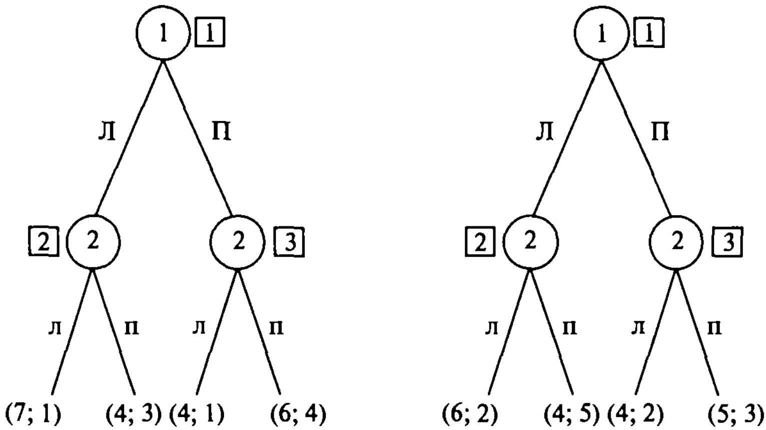
Для этой биматричной игры найти равновесие Нэша в смешанных стратегиях (равновесий Нэша в чистых стратегиях эта биматричная игра не имеет).

В критериальном пространстве выигрышей фирм F_1 и F_2 представьте множества выигрышей фирм F_1 и F_2 в случае чистых стратегий и в случае смешанных стратегий фирм F_1 и F_2 и выявите Парето-эффективные профили (смешанных) стратегий.

Сопоставьте равновесие Нэша и Парето-эффективные профили смешанных стратегий.

Дайте содержательную экономическую интерпретацию найденному равновесию Нэша и Парето-эффективным профилям смешанных стратегий.

6. Для следующих игр



(Л, л — игрок выбирает левую дугу;
П, п — игрок выбирает правую дугу)

сделайте переход от развернутой формы к нормальной форме, найдите равновесие Нэша (в чистых стратегиях), Парето-эффективные профили (чистых) стратегий, опишите все подыгры (включая полную игру), из равновесий Нэша выделите (с обоснованием) совершенное в подыграх равновесие, постройте их решения методом обратной индукции.

7.1. Для статической игры с полной информацией нормальная форма имеет следующий вид:

		(Чистые) стратегии игрока P_2	
		(Л)	(П)
(Чистые) стратегии игрока P_1	(Л)	(-2; 8)	(9; 9)
	(П)	(0; 12)	(0; 10)

Постройте ее развернутую форму в двух вариантах (в одном варианте в первой вершине находится игрок P_1, в другом варианте в первой вершине находится игрок P_2).

7.2. Для статической игры с полной информацией нормальная форма имеет следующий вид:

		(Чистые) стратегии игрока P_2	
		(Л)	(П)
(Чистые) стратегии игрока P_1	(Л)	(1; 7)	(8; 8)
	(П)	(2; 11)	(2; 10)

Постройте ее развернутую форму в двух вариантах (в одном варианте в первой вершине находится игрок P_1, в другом варианте в первой вершине находится игрок P_2).

8. Представьте модель дуополии Бертрана как статическую игру с полной информацией и докажите, что равновесие Бертрана есть равновесие Нэша.
9. От статических игр с полной информацией, имеющих в качестве нормальных форм таблицы, которые следует построить, выполняя задания 7.1 и 7.2, постройте соответствующие им деревья игр в двух вариантах (в одном варианте в первой вершине находится игрок P_1, в другом варианте в первой вершине находится игрок P_2).

Вопросы, тесты и задачи для контрольных работ к главе 9

1. Докажите, что пара сильно доминирующих стратегий игроков P_1 и P_2 составляет единственное равновесие Нэша.
2. Приведите пример биматричной игры, в которой равновесие Нэша не является равновесием в доминирующих стратегиях.
3. Приведите пример биматричной игры, в которой существует единственное равновесие Нэша (в чистых стратегиях).
4. Приведите пример биматричной игры, в которой существует два равновесия Нэша (в чистых стратегиях). Исследуйте вопрос о существовании у этой игры равновесия Нэша в смешанных стратегиях.
5. Для биматричной игры с матрицей выигрышей

(20; 20)	(–1; 30)
(40; –2)	(5; 5)

найдите равновесия Нэша и профили Парето-эффективных стратегий.

Дайте геометрическую интерпретацию в критериальном пространстве выигрышей игроков P_1 и P_2.

6. В игре игрок P_1 имеет два типа предпочтений, игрок P_2 — один тип предпочтений. Формально первый и второй типы предпочтений игрока P_1 характеризуются следующими матрицами выигрышей:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ -9 & -11 \end{pmatrix}.$$

Единственный тип предпочтений игрока P_2 характеризуется его матрицей выигрышей

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Игрок P_1 имеет первый тип предпочтений с вероятностью p_1, а второй тип предпочтения с вероятностью $q_1 = 1 - p_1$, т.е. игрок P_2 полагает, что с вероятностью p_1 игрок P_1 имеет первый тип предпочтений, с вероятностью q_1 игрок P_1 имеет второй тип предпочтений.

6.1. Представьте предложенную игру в нормальной форме.

6.2. Представьте предложенную игру в развернутой форме.

6.3. Покажите, что предложенная игра есть статическая байесовская игра.

6.4. Выпишите значение ожидаемого выигрыша игрока P_1.

6.5. Выпишите значение ожидаемого выигрыша игрока P_2.

6.6. Отыщите равновесия Нэша — Байеса предложенной игры.

Глава 10

ТЕОРИЯ РЫНОЧНОЙ КОНКУРЕНЦИИ

10.1. Толкование понятия рыночной конкуренции

10.1.1. Понятие *конкуренции* обсуждается и анализируется многими авторами. Отметим здесь только, что во введении ко второму тому курса микроэкономики трех авторов (В.М. Гальперин, С.М. Игнатьев, В.И. Моргунов (1997), с. 8), в частности, отмечается, что слова «*конкуренция*, *konkurrenz*, *concurrence* происходят от латинского *concurro* — сбегаться, сталкиваться (*con* — вместе, *curro* — бежать), тогда как английское *competition* восходит к латинскому *competitionem* (*com* = *con* + *petito* — стремление достать что-то, добиться чего-либо, притязать на что-то)».

Понятие *рыночной конкуренции* означает борьбу за ограниченный объем платежеспособного спроса потребителей, которая ведется фирмами на доступных им сегментах рынка. Здесь следует подчеркнуть, что речь идет о рыночной конкуренции, а не о конкуренции вообще. Понятие рыночной конкуренции можно толковать с позиций *поведенческого*, *структурного* и *функционального* подходов. Если анализируются методы рыночной конкуренции, стратегии конкуренции, используемые отдельными фирмами и т.д., то это означает использование поведенческого подхода к пониманию сути рыночной конкуренции. Если анализируются проблемы уровня монополизации (или, напротив, ее отсутствия) рынка, то это означает применение структурного подхода к пониманию сути рыночной конкуренции. Если речь идет об исследовании роли рыночной конкуренции в экономике, то это означает использование функционального подхода к пониманию сути рыночной конкуренции (А.Ю. Юданов (2001)).

10.1.2. В следующем параграфе рассматриваются основные положения теории рыночной конкуренции, разработанной М. Портером (2000), в которой рыночная конкуренция толкуется как модель пяти сил конкуренции. При изложении этой теории здесь активно используются материалы главы 15 книги А. Томпсона, Д. Формби (1998). Изложение остальных параграфов нашей главы 10 следует в основном тексту главы 16 книги А. Томпсона, Д. Формби (1998).

10.2. Модель пяти сил конкуренции

10.2.1. Рыночная конкуренция представляет собой систему, в которой взаимодействуют пять элементов (пять сил) конкуренции (рис. 10.1).

Сначала проанализируем рыночную конкуренцию между фирмами отрасли.

Каждая фирма должна иметь стратегию конкуренции, представляющую план действий фирмы по занятию лучших позиций на рынке и ее оборонительных действий по защите своих позиций на рынке.

Рассмотрим действия и противодействия конкурентных фирм отрасли на примере «Кока-кола» и «Пепси-кола» (см.: А. Томпсон, Д. Формби (1998), с. 432—434]).

В целях улучшения положения на рынке фирмы «Пепси» по сравнению с позицией «Коки» руководство «Пепси» в период с 1950 по 1955 г. реализовало первый этап своей наступательной программы. Прежде всего оно приняло целенаправленные меры по улучшению вкуса самого напитка «Пепси» (исключение подслащивающих компонент, усиление контроля за разливом напитка на местах, где к сиропу добавляли различное количество газированной воды). После повышения качества продукта фирма «Пепси» провела рекламную кампанию в целях улучшения имиджа напитка. «Пепси» (на рекламных плакатах «Пепси» пили красивые, со вкусом одетые женщины и галантные мужчины, рекламу сопровождала тема о легком напитке «Пепси», что косвенно

Рис. 10.1

означало, что «Кока» — тяжелый напиток). В этот же период времени фирма «Пепси» решила освоить тот рыночный сегмент, покупатели которого приобретали прохладительный напиток для домашнего потребления. Наконец, важный элемент первого этапа наступательной программы фирмы «Пепси» состоял в выборе 25 городов, в которых была реализована специальная программа стимулирования сбыта. Концентрация сил в этих 25 городах позволила фирме «Пепси» увеличить свою долю рынка. К 1955 г. итоги первого этапа наступательной программы фирмы «Пепси» позволили ей приступить к реализации ее второго этапа — увеличению доли на рынке продаж в розлив, где прочно укрепилась фирма «Кока». Фирма «Пепси» стала широко использовать автоматы по продаже напитков.

После того как второй этап наступления фирмы «Пепси» стал демонстрировать признаки успеха, фирма «Кока», которая с юмором относилась к наступлению «Пепси» и которая не привыкла к конкуренции, также стала действовать (проведение новой рекламной кампании под лозунгом, что «Кока» освежает лучше, и предложение бутылочек новых размеров), что позволило ей увеличить объем сбыта.

В начале 1960-х гг. темпы роста фирмы «Пепси» уменьшились и она предприняла новые рекламные кампании под лозунгами: «Будь общительным» и «Будь молодым». Фирма «Кока» ответила лозунгом: «С «Кокой» дела идут лучше».

Далее рыночная конкуренция между фирмами «Пепси» и «Кока», которая ранее сосредоточивалась на вкусе напитка, рекламе, размерах и формах бутылок, перешла в новые сферы. Первая сфера касалась использования одноразовых бутылок, алюминиевых и стальных банок. Вторая и третья сферы рыночной конкуренции касались новизны продукции (производство диетических прохладительных напитков, а также других вкусных напитков, отличных от знаменитых «кол»). Четвертая сфера рыночной конкуренции возникла в 1980-х гг., когда обе фирмы («Кока» и «Пепси») предложили рынку традиционные диетические варианты своей продукции, не содержащие кофеина.

В отрасли прохладительных напитков фирма «Кока» продолжает удерживать лидирующие позиции, а фирма «Пепси» занимает прочное второе место.

10.2.2. Силу или слабость (т.е. интенсивность) рыночной конкуренции между фирмами отрасли объясняет ряд факторов. Рассмотрим факторы, которые усиливают рыночную конкуренцию между фирмами отрасли:

1) рост числа конкурентов, уравнивание их размеров и мощностей;

2) медленный рост спроса на продукцию отрасли;

3) отраслевые условия таковы, что у конкурирующих фирм возникает соблазн использовать снижение цен или другие инструменты конкуренции в целях увеличения объема сбыта своей продукции (в случае уменьшения рыночного спроса уровень использования капитала начинает понижаться, рост удельных издержек заставляет конкурирующие фирмы прибегать к тайным ценовым уступкам, специальным скидкам и другой повышающей

объем продаж тактике, что усиливает конкуренцию; аналогично в случае скоропортящейся продукции конкуренция усиливается, когда фирмы применяют демпинг);

4) покупатели не несут значительных издержек при замене одного приобретаемого продукта другим (в этом случае конкурирующим фирмам легче перехватить потребителей друг у друга, что, конечно, усиливает рыночную конкуренцию);

5) отраслевые условия таковы, что одна или ряд конкурирующих фирм не удовлетворены занимаемым ими положением и предпринимают меры для корректировки ситуации за счет конкурентов (к таким мерам можно отнести поглощение малых конкурентов, выпуск новой продукции, активизацию рекламной деятельности, установление специальных цен);

6) рост размера отдачи от удачного стратегического шага (которая зависит от скорости, с которой предпринимаются ответные меры другими фирмами: если реакция фирм-конкурентов будет вялой, то инициатор стратегического шага может извлечь выгоды и получит преимущество во времени);

7) отраслевые условия таковы, что дороже выйти из бизнеса, чем в нем оставаться и конкурировать (чем выше издержки ухода с рынка отрасли, тем сильнее желание фирмы остаться в отрасли и конкурировать изо всех сил, даже если фирма будет функционировать с убытками);

8) сильные компании из других отраслей поглощают слабые фирмы отрасли и предпринимают агрессивные действия для превращения своих приобретений в сильных соперников других фирм отрасли.

10.2.3. На рыночную конкуренцию между фирмами отрасли оказывает существенное влияние разнообразие стратегий конкуренции отдельных фирм, индивидуальные особенности конкурентов, их корпоративные приоритеты и национальная принадлежность. Проанализируем силу конкуренции, которая возникает в результате попыток фирм завоевать покупателей продуктами-заместителями. Конкурентная угроза со стороны продуктов-заместителей сильна тогда, когда заместители имеют низкие цены, низкие издержки потребителей, связанные с переходом на продукты-заместители, и при этом потребители уверены, что заместители обладают не худшим качеством.

Фирмы, производящие прохладительные напитки, конкурируют с производителями фруктовых соков, чая, кофе. Производители пластиковой тары конкурируют с изготовителями стеклянных бутылок и банок, бумажных пакетов, жестяных и алюминиевых банок.

10.2.4. Переходим к анализу силы конкуренции, которая возникает в результате угрозы появления на рынке отрасли новых фирм. Уровень угрозы со стороны новых фирм зависит от барьеров входа и от ожидаемой реакции со стороны действующих на рынке отрасли фирм.

Причины появления барьеров входа новых фирм в отрасль:

1) экономия от масштаба производства затрудняет вход новых фирм в отрасль, ибо заставляет потенциальных новичков входить в отрасль на базе широкомасштабного производства (что сопряжено с большими издержками и большим риском) или согласиться занять невыгодное по издержкам положение в отрасли (т.е. согласиться столкнуться с барьерами не только в производстве, но и в рекламе, маркетинге, распределении готовой продукции, послепродажных услугах, приобретении сырья и проведении НИОКР);

2) невозможность получить доступ к технологиям и специализированному ноу-хау (вход на отраслевой рынок могут перекрыть патенты, отсутствие высококвалифицированных кадров и неспособность использовать сложные производственные методы);

3) наличие кривой обучения и опыта (снижение средних издержек частично или во многом есть функция опыта производства продукции и других характеристик кривой обучения, поэтому фирма-новичок, которая не имеет опыта, будет находиться в менее выгодном положении);

4) предпочтение и лояльность торговой марки (для преодоления предпочтений покупателей и для формирования своей клиентуры фирма-новичок должна сделать большие вложения в рекламу, предложить покупателям более низкие цены, лучшее качество и дополнительные услуги; все это для фирмы-новичка означает снижение прибыли, увеличение риска);

5) капиталоемкость (требования к объему инвестиций прямо связаны с производственными площадями и оборудованием, оборотным капиталом для финансирования складских запасов и про-

дажи в кредит, рекламой и стимулированием сбыта в целях формирования круга клиентов, а также для покрытия издержек стартового периода);

6) невыгодное положение по издержкам независимо от размера фирмы (фирмы отрасли могут иметь преимущества по издержкам, которые недоступны фирмам-новичкам независимо от их размеров: доступ к лучшему и дешевому сырью, владение патентами или технологическим ноу-хау, эффект кривой обучения и опыта, наличие давно построенных с меньшими издержками предприятий, наличие деловых кредитов);

7) доступ к каналам распределения продукции (вполне возможно, что придется с нуля организовывать сеть розничной торговли, ибо розничные торговцы и оптовики могут не пожелать иметь дело с товарами (продуктами), которые не пользуются достаточным признанием со стороны потребителей; для преодоления барьера, препятствующего доступу фирмы-новичка к каналам распределения продукции, ей придется специально оплатить доступ к этим каналам; в связи с этим прибыль фирмы-новичка может быть невысокой);

8) нормативно-правовая база (государственные органы могут ограничить или запретить вход на рынок, требуя лицензий или разрешений; это прежде всего относится к таким отраслям, как банковское и страховое дело, СМИ, розничная торговля алкогольной продукцией, железнодорожные перевозки; на международных рынках национальные правительства обычно ограничивают вход для иностранцев и утверждают все предложения по иностранным инвестициям);

9) тарифы и международные торговые ограничения (государственные органы стран используют тарифы и ограничения торговли в качестве мер, повышающих барьеры для иностранных фирм; в частности, европейские государства требуют, чтобы изготовленные в Европе детали и затраты труда европейских рабочих составляли не менее 40% цены некоторых товаров из стран Азии, например копировальной техники; для защиты европейских изготовителей электронных микросхем от дешевых азиатского производства европейские государства установили жесткую формулу вычисления нижней цены чипов компьютерной памяти).

Отметим в заключение, что угроза входа фирм-новичков на рынок отрасли как одна из сил конкуренции корректируется в зависимости от перспектив развития отрасли, в частности перспектив повышения и понижения барьеров. Например, окончание срока действия ключевого патента скорее усиливает угрозу входа в отрасль новых фирм. Повышение фирмами отрасли интенсивности их рекламной деятельности, укрепление их отношений с дилерами и дистрибьюторами, продвижение в сфере НИОКР, повышение качества продукции могут повысить уровень барьеров на пути в отрасль.

10.2.5. Переходим к анализу силы конкуренции, которая возникает в связи с наличием контроля за условиями следок *со стороны поставщиков*. Поставщики отрасли представляют собой *значительную конкурентную силу*, когда поставщики могут диктовать цены на свою продукцию и влиять на благосостояние отрасли-потребителя посредством надежности своих поставок или качества и технологических характеристик своей продукции. Поставщики отрасли представляют собой *слабую силу конкуренции*, если покупатели могут приобрести продукт (товар) из многих других источников, если существуют хорошие товары-заместители и когда благосостояние отрасли-покупателя важно для благосостояния ее поставщиков.

В качестве примера рыночной отрасли рассмотрим сельское хозяйство, а в качестве сильных поставщиков возьмем мощные машиностроительные и химические компании, которые гораздо сильнее фермеров, фермы которых образуют сельскохозяйственную отрасль. Прямым следствием дисбаланса существующих взаимосвязей между поставщиками (машиностроительными и химическими компаниями) и потребителями (фермерами) являются наблюдаемые во многих странах (в том числе и в России) «ножницы цен», когда цены на потребляемую сельским хозяйством промышленную продукцию растут быстрее, чем отпускные цены сельскохозяйственной продукции, в результате чего сельскохозяйственные фермы несут убытки и поэтому нуждаются в государственных субсидиях.

В качестве примера рыночной отрасли, которая сильнее своих поставщиков, можно привести фармацевтическую промышленность. Другой пример дает отрасль прохладительных напитков, которая сильнее своих поставщиков, производящих алюминиевые, пластиковые и стеклянные банки.

В заключение отметим, что, если рыночная отрасль сформировала тесные рабочие связи с основными поставщиками, она может получить значительные выгоды в виде комплектующих изделий более высокого качества, поставок точно в срок и снижения в связи с этим издержек на складские расходы.

10.2.6. Нам осталось рассмотреть силу конкуренции, которая возникает в связи с наличием контроля за условиями сделок *со стороны покупателей*. Покупатели рыночной отрасли представляют собой *значительную конкурентную силу*, если они способны навязать продавцам цены и другие условия сделки. Они являются *слабой силой конкуренции*, если рыночная отрасль способна диктовать цены покупателям. Это, в частности, возможно, когда рыночная отрасль достаточно крупная, а покупатели — мелкие и их к тому же значительное количество.

В качестве примера покупателя, представляющего собой значительную конкурентную силу, можно рассмотреть крупные фирмы пищевой промышленности, а в качестве рыночной отрасли — сельское хозяйство, состоящее из сельскохозяйственных фирм. Здесь ситуация аналогична той, которую мы наблюдаем в случае, когда поставщиками сельского хозяйства выступали крупные машиностроительные и химические фирмы.

За рыночную отрасль, которая способна диктовать свои цены покупателям, опять можно принять фармацевтическую отрасль, покупателей которой не пугают высокие цены, ибо здоровье дороже всего на свете.

Теория пяти сил конкуренции представляет собой реализацию системного подхода к анализу экономических процессов, когда фрагмент экономической реальности описывается с помощью системы, состоящей из пяти элементов (см. рис. 10.1). Такая структуризация фрагментов экономической реальности позволяет анализировать уровни интенсивности конкуренции.

10.2.7. На рыночную конкуренцию оказывают влияние различные факторы, которые могут быть квалифицированы как движущие силы конкуренции:

1) изменения в характере роста отрасли в долговременном промежутке (скажем, увеличение спроса на продукцию отрасли в долговременном промежутке поощряет фирмы отрасли к расширению производства и привлекает в отрасль новые фирмы; сокращение спроса (сужение рынка) приводит к спаду производства, уходу фирм из отрасли);

2) изменения в категории покупателей продукции и способе ее использования (широкое использование персональных компьютеров и мобильных телефонов радикально преобразовало отрасли, производящие компьютеры и телекоммуникационные системы, что привело к повышению интенсивности конкуренции между фирмами в этих отраслях);

3) новая продукция (к отраслям, в которых ключевой движущей силой конкуренции является инновация, относятся отрасли копировального оборудования, вычислительной техники, телекоммуникационных систем, электронных видеоигр, лекарств, свежезамороженных продуктов питания, продуктов питания для домашних животных, программного обеспечения для персональных компьютеров);

4) технологические изменения (технические достижения могут серьезно изменить отрасль, расширить ее границы, повысить качество выпускаемых продуктов и снизить их цену, радикально изменить характер наемного труда (широкое распространение современного вида надомничества);

5) инновации в области маркетинга (за счет новых способов маркетинга своей продукции фирмы отрасли могут увеличить отраслевой спрос, повысить степень дифференциации продукции);

6) выход на рынок или уход с рынка ведущих фирм (выходящие на рынок ведущие фирмы часто существенно корректируют правила конкуренции и ключевых игроков; аналогичное справедливо и для ситуации, связанной с уходом с рынка ведущих фирм, например, в связи с ростом влияния остающихся в отрасли лидеров);

7) распространение технического ноу-хау (ноу-хау распространяется через научные журналы, торговые публикации, путем посещения предприятий, в ходе межличностных контактов между поставщиками и потребителями; одной из движущих сил конкуренции в последние годы стала международная передача технологий, происходящая в условиях глобализации рынков; передача технологий превратила в глобальные такие ранее внутренние отрасли, как автомобильная, бытовая электротехника, телекоммуникации и вычислительная техника);

8) глобализация промышленности (в качестве движущей силы конкуренции глобализация выступает в таких отраслях, как: а) базовые отрасли (сырая нефть, медь, хлопок); б) отрасли, для которых важны низкие издержки производства, что делает абсо-

лютно необходимым размещение производства в странах, где можно добиться самых низких издержек (например, производство трудоемкой продукции переносится в страны Юго-Восточной Азии (Южная Корея, Тайвань, Малайзия, Сингапур) с дешевой квалифицированной рабочей силой);

9) изменение издержек и эффективности (как только в издержках или эффективности происходят значительные изменения, сразу перед конкурирующими фирмами открываются возможности радикального изменения своего положения с учетом величины преимуществ по издержкам);

10) предпочтение потребителями товаров, обладающих индивидуальными качествами, перед стандартизированной продукцией или, наоборот, предпочтение стандартизированной продукции перед продукцией с индивидуальными качествами (когда покупатели начинают полагать, что высокостандартизированная (и относительно дешевая) продукция удовлетворяет их потребность столь же эффективно, как и дорогая продукция, обладающая набором дополнительных характеристик, то такое изменение спроса потребителей может существенно скорректировать профиль производства в пользу относительно дешевой стандартизированной продукции; может иметь место и обратная ситуация);

11) изменения государственной политики и нормативно-правовой базы (государственная политика, направленная на открытие внутреннего рынка для иностранных фирм или закрывающая его для них, может быть главным фактором, влияющим на международных рынках на то, имеет ли место конкуренция между национальными и зарубежными фирмами на равных или одна из сторон пользуется (незаслуженными) преимуществами);

12) социальные перемены, перемены в образе жизни (данные изменения могут быть источником существенных структурных сдвигов в развитых национальных экономиках; например, повышение интереса к поддержанию хорошей физической формы привело к появлению целой новой отрасли спортивных тренажеров, одежды, обуви для пробежек, медицинских программ соблюдения диет; нарастающая борьба с курением в долгосрочной перспективе представляет серьезную угрозу табачным фирмам);

13) снижение неопределенности и риска в бизнесе (для вновь формирующейся фирмы характерна неустойчивая структура издержек и неопределенность относительно потенциального размера рынка, затрат времени и средств на преодоление технических

проблем и определение каналов сбыта продукции и привлечения покупателей. Высокий риск в таких отраслях привлекает только наиболее предприимчивые фирмы. Со временем, когда первопроходцы достигают успеха и снижается неопределенность, в формирующуюся отрасль начинают постепенно входить более консервативные фирмы).

10.3. Конкурентное преимущество. Стратегии, используемые фирмами для получения конкурентного преимущества

10.3.1. Конкурентное преимущество — одно из важных понятий теории рыночной конкуренции. Фирма *A* имеет *конкурентное преимущество* перед фирмами *B*, *C*, ..., если она расширяет свою долю рынка за счет этих фирм.

К *источникам* конкурентного преимущества фирмы относятся: производство продукции более высокого качества; предоставление покупателям лучших услуг; достижение более низкого, чем у конкурентов, уровня издержек; выгодное географическое расположение, а также функционирование (полное или частичное) в рамках теневого сектора национальной экономики или глобальной экономики.

Как уже отмечалось в параграфе 10.2, стратегия конкуренции представляет собой совокупность действий фирмы, направленных на достижение успеха в рыночной конкуренции с другими фирмами. Стратегия конкуренции должна содержать меры наступательного и оборонительного характера в целях преодоления или ослабления всех пяти сил конкуренции (см. параграф 10.2). Степень разработанности стратегии конкуренции оценивается по двум критериям: критерий получения конкурентного преимущества и наличие выгодной позиции на рынке в долгосрочной перспективе и критерий высокой прибыли.

Стратегии конкуренции разрабатываются фирмами с учетом их уникальных особенностей, поэтому реально существует столько стратегий, сколько существует фирм. Однако число фундаментальных различий у стратегий конкуренции сравнительно невелико.

10.3.2. Принято выделять следующие пять стратегий, которые используются фирмами для *получения конкурентного преимущества*: стратегия лидерства по низким издержкам; стратегия дифференциации; гибридная стратегия; стратегия рыночной ниши и глобальная стратегия.

Стратегия лидерства по низким издержкам целесообразна на рынках стандартизированной продукции, покупатели которой чувствительны к ценам, т.е. в случае, когда доминирующим фактором конкуренции является цена, а не характеристики или качество продукции. Если фирме удалось снизить издержки, то она может использовать это обстоятельство для снижения цен по сравнению с конкурентами. В этом случае фирма расширяет свою долю рынка за счет конкурентов и, следовательно, получает конкурентное преимущество.

Стратегии лидерства по издержкам следуют такие известные фирмы, как «Форд» при производстве тяжелых грузовиков, «Дженерал электрик» в производстве бытового оборудования, «*Bic*» в производстве шариковых ручек.

Стратегия лидерства по издержкам позволяет фирме активно защищаться от всех пяти сил конкуренции (см. параграф 10.2). Лидер по издержкам за счет конкурентов своей отрасли увеличивает объем продаж (и следовательно, свою долю рынка), защищается от ценовых войн (ибо может назначить самую низкую на рынке цену). Лидер по издержкам имеет частичную защиту маржи своей прибыли от воздействия со стороны крупных *покупателей*, ибо последние редко сбивают цену ниже уровня выживания второго по издержкам продавца отрасли. Лидер по издержкам лучше своих конкурентов защищен от обладающих мощной рыночной силой *поставщиков*. Лидер по издержкам может использовать понижение цены и тем самым создать дополнительный барьер для фирм-новичков, которые являются кандидатами на вхождение в отрасль. Наконец, лидер по издержкам лучше своих конкурентов может использовать низкие цены от попыток *товаров-заместителей* пробиться на рынок данной отрасли.

Перечислим ряд условий, при выполнении которых высока вероятность достижения конкурентного преимущества в результате реализации стратегии лидерства по низким издержкам: доминирующей силой конкуренции является *ценовая конкуренция* при высокоэластичном спросе по цене; продукция отрасли в сильной степени стандартизирована, и потребитель может ее приобретать у разных продавцов (в том числе и у тех, кто предлагает ее по минимальной цене), дифференциация продукции менее значима для потребителей, чем ее цена.

10.3.3. Стратегия дифференциации целесообразна, когда предпочтения потребителей слишком разнообразны, чтобы их могла удовлетворить стандартизированная продукция. В результате стратегии дифференциации фирма получает конкурентное преимущество, если она наделяет свою продукцию такими характеристиками, которые привлекают новых потребителей, которые готовы платить за них больше (возможно, намного больше). Дифференциация результативна, если выручка, полученная от продажи дифференцированной продукции, превышает издержки, которые охватывают издержки, связанные с дифференциацией. Дифференциация неудачна, если форма уникальности продукции, выбранная фирмой, не привлекает достаточное число потребителей и если повышенная цена дифференцированной продукции не покрывает дополнительных издержек, связанных с дифференциацией.

Стратегии дифференциации следуют такие известные фирмы, как «*Federal Express*» (доставка почты в течение одних суток), «*Caterpillar*» (доставка запасных частей любому потребителю в любой стране мира в течение 48 часов), «*Rolex*» (престижные часы), «*Johnson & Johnson*» (товары для детей), «*McDonnald's*» (высокое качество картофеля-фри).

Стратегия дифференциации позволяет фирме активно защищаться от всех пяти сил конкуренции (см. параграф 10.2). В рамках *своей отрасли* фирма, следующая результативной стратегии дифференциации, имеет защиту от силы конкуренции, возникающей в результате стремления конкурентов занять лучшие позиции на рынке этой отрасли, ибо фирма реализует свою продукцию по повышенным ценам. Результативная дифференциация повышает барьер проникновения на рынок отрасли для *фирм-новичков*, ибо им трудно наладить выпуск дифференцированной (т.е., по сути, уникальной) продукции и, следовательно, привлечь новых покупателей, которые «избалованы» продукцией высокого качества. Результативная дифференциация уменьшает рыночную власть крупных *покупателей* в связи с тем, что продукция конкурентов менее привлекательна для них. Фирма, следующая результативной стратегии дифференциации, благодаря повышению цен на выпускаемую продукцию может повышать цены на приобретаемые у *поставщиков* ресурсы и тем самым получить защиту от той силы конкуренции, носителем которой являются поставщики.

Наконец, результативная стратегия дифференциации защищает фирму от угрозы со стороны *товаров-заместителей*, ибо потребители предпочитают качественную продукцию фирмы любой аналогичной продукции.

Перечислим ряд условий, при выполнении которых высока вероятность достижения конкурентного преимущества в результате реализации стратегии дифференциации: существует много способов дифференциации продуктов и услуг, с одной стороны, и большое число потребителей, которые полагают для себя ценными отличительные характеристики продуктов и услуг, наличие разнообразных причин, по которым потребители приобретают дифференцированную продукцию, относительно малое число фирм реализует один и тот же подход к дифференциации, дифференцирующие продукцию качества не могут быть быстро и без больших издержек имитированы.

Дифференциация продукции может базироваться на технологическом превосходстве, на качестве, на основе широкого спектра услуг.

10.3.4. *Гибридная стратегия* соединяет конкурентные преимущества, которые фирма получит, используя стратегию лидерства по издержкам и стратегию дифференциации. Если дифференциация востребована на рынке, а значительное число потребителей чувствительно к цене, то гибридная стратегия лучше двух крайностей: чистой стратегии низких издержек и чистой стратегии дифференциации, ибо фирма может функционировать в состоянии, близком к середине рынка, продавая либо продукцию среднего достоинства по цене, ниже среднерыночной, либо высокого качества по среднерыночной цене.

Гибридная стратегия представляет собой метод конкуренции, который принято называть стратегией производителя с наилучшими издержками.

10.3.5. *Стратегия рыночной ниши* целесообразна тогда, когда фирма не в состоянии получить конкурентное преимущество на всем рынке в масштабах национальной экономики. Ниша может быть определена с географической точки зрения, с точки зрения специальных требований к использованию продукции или особенностей характеристик, важных в рамках ниши.

Основу конкурентного преимущества фирмы, реализующей стратегию рыночной ниши, составляют либо низкие издержки на обслуживание ниши, либо способность предложить потребителям ниши нечто отличное от других конкурентов. Стратегия рыночной ниши, основанная на низких издержках, зависит от наличия сегмента потребителей, потребности которых удовлетворить дешевле, чем потребности покупателей остальной части рынка. Стратегия рыночной ниши, основанная на дифференциации, зависит от наличия сегмента покупателей, которым требуются уникальные качества продукции.

Стратегии рыночной ниши следуют такие известные фирмы, как «Роллс-Ройс» (сверхшикарные автомобили), «*Apple Computer*» (настольные издательские системы), ряд авиакомпаний («*Skywest*», «*Atlantic Southeast*»), специализирующихся на местных авиаперевозках, на не сильно загруженных линиях и коротких маршрутах.

Стратегия рыночной ниши целесообразна тогда, когда размеры ниши должны обеспечить прибыльность, когда ниша имеет хороший потенциал роста, когда конкуренты не рассматривают нишу в качестве критически важного фактора своего успеха, когда фирма обладает необходимыми ресурсами, достаточными для эффективного обслуживания ниши.

Стратегия рыночной ниши позволяет фирме активно защищаться от всех пяти сил конкуренции (см. параграф 10.2). Фирмы отрасли, действующие в нескольких рыночных нишах, не обладают той же конкурентной способностью, что и фирма, которая специализируется по обслуживанию целевой клиентуры. Специализированные знания и опыт фирмы, которая функционирует в рыночной нише, являются барьерами для входа на рынок фирм-новичков, а также для проникновения в нишу *товаров-заместителей*. Рыночная сила мощных *покупателей* снижается, ибо эти покупатели не испытывают особого желания приобретать продукцию у фирмы, которая не в полной мере может удовлетворить их потребности. Аналогично рыночная сила продавцов также снижается, ибо они, как правило, не могут удовлетворить все своеобразие потребностей фирмы, связанное с ее функционированием в рыночной нише.

Конкурентному преимуществу на *глобальных рынках* посвящен отдельный параграф 10.7.

10.4. Риски стратегий, используемых фирмами для получения конкурентного преимущества

10.4.1. Стратегии, используемые фирмой для получения конкурентного преимущества, не являются безрисковыми. Остановимся сначала на *факторах риска* стратегии лидерства по низким издержкам. Важным фактором снижения издержек являются, как правило, крупные инвестиции. Однако прорыв в технологиях может открыть перед конкурентами новые возможности снижения издержек и фактически обесценить инвестиции, сделанные лидером ради снижения издержек.

Конкуренты могут также достаточно дешево имитировать методы, примененные лидером для снижения издержек, и тем самым сократить срок жизни конкурентного преимущества.

Скалярная целевая функция фирмы (быть лидером по низким издержкам) может оказаться слишком узким критерием ее функционирования, в то время как фирма должна более активно реагировать также на текущие и радикальные перемены рыночной ситуации, например на изменение покупательных предпочтений в пользу качества, новых характеристик, которые могут появляться в связи с научно-технологическим прогрессом.

10.4.2. К факторам риска стратегии дифференциации можно отнести прежде всего то обстоятельство, что в результате реализации стратегии дифференциации не обязательно будет достигнуто конкурентное преимущество (т.е. не факт, что удастся привлечь новых потребителей за счет фирм-конкурентов).

Конкуренты могут быстро скопировать стратегию дифференциации. В этом случае стратегия дифференциации фирмы не будет результативной.

Слишком сильная степень дифференциации может привести к тому, что цена на продукцию значительно превысит цену конкурентов или качество продукции или услуг превысит запросы потребителей.

Слишком высокая надбавка к цене на продукцию позволяет конкурентам привлечь на их рыночный сектор тех покупателей, которые были в секторе фирмы, использующей стратегию дифференциации.

10.4.3. К факторам риска стратегии рыночной ниши можно отнести прежде всего то обстоятельство, что конкуренты могут отыскать пути обслуживания рыночной ниши с той же эффективностью, что данная фирма.

Предпочтения потребителей могут измениться в пользу качеств продукции, которые присущи остальному рынку, что означает исчезновение границы между нишей и остальным рынком. Рыночная ниша может оказаться настолько привлекательной, что она переполнится конкурентами. Это приведет к снижению прибыльности данного сегмента рынка. Наконец, реализация стратегии деятельности только в одной рыночной нише влечет за собой риск, поскольку единственная ниша может исчезнуть.

Таким образом, факторы риска стратегий, используемых фирмами для получения конкурентного преимущества, могут быть связаны с тем, что фирмы могут не иметь надежной защиты от пяти сил конкуренции.

10.5. Достижение конкурентного преимущества на основе стратегий лидерства по низким издержкам, дифференциации и рыночной ниши

10.5.1. Конкурентное преимущество посредством лидерства по низким издержкам достигается путем лучшего (чем у конкурентов) контроля над факторами, влияющими на издержки, а также путем преобразования цепи издержек производства так, чтобы снижение издержек позволяло продавать потребителям более дешевые продукты или услуги.

Перечислим основные факторы, влияющие на издержки звеньев цепи издержек производства.

1. Издержки от масштаба производства могут расти и снижаться в зависимости от звеньев цепи издержек производства (например, уменьшение числа моделей в массовом производстве уменьшает издержки, переход фирмы с регионального рынка на общенациональный может привести к росту издержек).

2. Эффекты кривых обучения и опыта (обучаемость зависит от того, сколько внимания руководители фирмы уделяют анализу опыта своей и других фирм; полученные знания и их обобщения могут держаться в секрете, вплоть до жестких условий неразгла-

шения тайны, которые включаются в контракты, заключаемые с персоналом).

3. Процент использования производственных мощностей (увеличение степени использования мощностей повышает эффективность использования основного производственного капитала; демпфирование сезонных скачков использования производственных мощностей — важный источник преимущества по издержкам).

4. Связи между видами деятельности цепи издержек производства (если издержки одного вида деятельности влияют на другой вид деятельности, то общие издержки можно снизить путем координации данных видов деятельности; важным фактором снижения издержек является активное использование телекоммуникационных систем, в частности сети Интернет, например, для решения задач материально-технического снабжения, когда можно резко сократить издержки на содержание складских помещений и на размеры запасов).

5. Совместное использование несколькими подразделениями фирмы вновь открывающихся возможностей (сокращение издержек достигается, когда деятельность одного подразделения может выполняться совместно с родственным подразделением).

6. Степень вертикальной интеграции (вертикальная интеграция может способствовать как снижению, так и росту издержек).

7. Соображения времени, связанные с преимуществами и недостатками первопроходца (фирма может выводить на рынок новый товар благодаря снижению издержек его создания и поддержания репутации фирменной марки; фирмы-последователи могут снизить издержки за счет того, что они имеют меньшие затраты на разработку нового товара и его вывода на рынок).

8. Выбор вариантов и оперативные решения (на издержки фирмы влияют решения, принимаемые руководителями разных уровней по следующим вопросам: расширение и свертывание номенклатуры продукции, предлагаемых потребителям услуг; увеличение/уменьшение характеристик качества продуктов; повышение/снижение зарплаты наемных работников; увеличение/уменьшение числа каналов сбыта готовой продукции; увеличение/уменьшение объемов НИОКР по сравнению с конкурентами; внимание, уделяемое производительности труда; повышение/понижение требований к качеству сырья и материалов).

9. Географические факторы (издержки могут быть снижены путем перемещения производства, складов и головных подразделений фирмы в другой регион).

10. Связь фирмы и теневого сектора (если объем теневого сектора в ВВП страны значителен, многие операции горизонтальной интеграции могут быть реализованы в рамках теневого сектора, что позволит сократить официальные и фактические издержки фирмы).

Приведем пример преобразования традиционной цепи издержек производства, которое позволило фирме «*Iowa Beef Packers*» (*IBP*) занять на рынке сильные конкурентные позиции (см.: А. Томпсон, Д. Формби (1998), с. 464—465):

«Традиционный процесс производства мяса включает в себя выращивание скота на разбросанных фермах и ранчо, доставку скота в живом виде на бойни, где производство отличается высокой трудоемкостью, а его условия находятся под жестким контролем профсоюза, транспортировку говяжьих туш розничными продавцами мяса, где туши рубятся на части и фасуются, после чего они поступают в продажу. Компания «*Iowa Beef Packers*» радикально перестроила традиционную цепь. Рядом с экономичными поставщиками скота были построены автоматизированные бойни, на которые нанимались только не члены профсоюза. Здесь же мясо рубилось на части (которые запаивались в пластик и были готовы к продаже), упаковывалось по ящикам и доставлялось розничным продавцам. Стоимость поставки скота на бойню, которая является традиционным источником основных издержек, была значительно снижена в результате сокращения потерь веса в процессе перевозки животных на далекие расстояния. Снизились и издержки сбыта, источником которых традиционно служит большое количество отходов при поставке продавцам целых туш. Стратегия компании «*Iowa Beef Packers*» оказалась настолько успешной, что к 1985 г. она стала крупнейшим производителем мяса в США, обойдя таких лидеров отрасли, как фирмы «*Swift*», «*Wilson*» и «*Armour*».

10.5.2. Конкурентное преимущество посредством дифференциации достигается путем использования возможностей для дифференциации в любом звене цепи издержек производства, а не только в отделах маркетинга и рекламы фирмы.

Перечислим основные звенья цепи издержек производства, которые могут быть источниками дифференциации.

1. Закупка сырья (сырье влияет на качество и характеристики конечной продукции; например, фирма «*McDonnald's*» избирательнее своих конкурентов подходит к закупке картофеля).

2. НИОКР в области продукции (улучшение конструкции, расширение спектра качества, сокращение времени разработки новых моделей готовой продукции).

3. НИОКР в области производственных процессов (повышение качества, надежности и показателей продукции).

4. Производственный процесс (изготовление высококачественной продукции).

5. Система сбыта и транспортировки продукции (поставки в срок по необходимым адресам).

6. Маркетинг, продажа, послепродажное обслуживание покупателей (обеспечение комфортных условий покупки продукции, ремонт продукции в короткие сроки, предоставление потребителям информации о новых изделиях, приемлемые условия продажи в кредит).

Дифференциация означает нечто большее, чем качество продукции и услуг фирмы. Качество есть функция физических характеристик продукции, тогда как источники дифференциации локализуются в любом звене цепи издержек производства.

10.5.3. Конкурентное преимущество фирмы в рыночной нише достигается путем снижения издержек или дифференциации в избранной фирмой нише.

Если фирма будет лидировать по низким издержкам, то ей следует применять в данной нише методы снижения издержек, которые она применяет в отрасли. Если фирма решит дифференцировать свою продукцию, то ей следует применять в данной нише методы дифференциации, которые она использует в отрасли.

Дополнительным источником конкурентного преимущества стратегии рыночной ниши является различие между нишами. При слабой разнице между нишами у небольшой фирмы нет защиты от крупных конкурентов, ибо они не хуже специализированной фирмы могут удовлетворять потребности ниши. Если цель издержек небольшой специализированной фирмы значительно отличается от цели издержек фирмы, которая следует стратегии крупносерийного производства и низких издержек, то небольшая фирма может эффективно функционировать в рыночной нише.

Для того чтобы стратегия рыночной ниши обеспечивала конкурентное преимущество, ниша должна обладать следующими признаками: покупатели должны иметь разнообразные потребности; цель издержек производства должна отличаться от аналогичной цели, характерной для другой ниши. Если конкуренты могут легко обслуживать многочисленные ниши, преимущества стратегии рыночной ниши проблематичны.

10.6. О становлении и потере конкурентного преимущества

10.6.1. *Период становления* (первый период) конкурентного преимущества может быть как коротким (например, в сфере услуг), так и длинным (например, в капиталоемких и технологически сложных отраслях). Чем длиннее период становления конкурентного преимущества, тем выше вероятность того, что конкуренты заметят это становление и будут на него реагировать.

Размер преимущества может быть как значительным (как в фармацевтической промышленности, где конкурентное преимущество приносит патенты на новые препараты), так и достаточно малым (как в производстве одежды, где новый фасон легко скопировать).

10.6.2. За периодом становления конкурентного преимущества следует *период извлечения выгоды* (второй период), в течение которого «пожинаются плоды конкурентного преимущества».

Продолжительность периода извлечения выгоды зависит от того, сколько времени требуется конкурентам, чтобы они могли ликвидировать конкурентное преимущество. Продолжительный период извлечения выгоды представляет собой время, в течение которого фирма получает хорошую прибыль и может вернуть инвестиции, вложенные в создание преимущества. С началом «контрнаступления» конкурентов начинается период исчезновения — «третий, последний период) конкурентного преимущества. В связи с этим фирма-лидер, имеющая конкурентное преимущество, должна постоянно поддерживать и развивать конкурентное преимущество и идти по крайней мере на шаг впереди своих конкурентов.

31 – 7620

10.7. Конкурентное преимущество на глобальных рынках

10.7.1. Фирма решает покинуть пределы рынка и конкурировать на глобальных (мировых) рынках по следующим причинам: желание фирмы найти новые рынки сбыта своей продукции; осознание необходимости, вызванное конкуренцией снижения издержек; желание использовать принадлежащие другим странам относительно дешевые ресурсы (в частности, труд и полезные ископаемые).

При переходе с национального на глобальный уровень фирме следует обратить внимание на различие между национальными рынками в потребностях и привычках покупателей, в каналах распространения продукции, в потенциалах долговременного роста, в особенностях конкуренции. *Международные рынки* характеризуются следующими четырьмя факторами: различиями производственных издержек между странами; колебаниями валютных обменных курсов; государственной торговой политикой и структурой международной конкуренции.

Различия в производственных издержках между странами зависят от разницы в зарплатах, в производительности труда, в уровне инфляции, в стоимости энергии, в налоговой политике. Фирмы, чьи производственные мощности функционируют в странах с дешевыми ресурсами, в частности трудовыми, обладают значительным конкурентным преимуществом. Такие страны, как Тайвань, Южная Корея, Мексика, Бразилия, давно являются раем для фирм, производящих трудоемкие товары.

В глобально конкурирующей отрасли мощное конкурентное преимущество обеспечивает мировое лидерство по низким ценам.

Колебания обменного курса валюты (в пределах от 20 до 40% в год считается обычным) затрудняют достижение конкурентного преимущества по издержкам от географического размещения предприятий. Изменение пределов колебания обменного курса может ликвидировать конкурентное преимущество страны по низким издержкам или сделать дорогую страну дешевой. Слабая национальная валюта выгодна фирмам-экспортерам страны и невыгодна фирмам, которые в страну импортируют свою продукцию. Это означает, что иностранные производители, которые импортируют свою продукцию в страну, теряют конкурентное преимущество перед национальными фирмами, а национальные фирмы, которые экспортируют свою продукцию, получают конкурентное преимущество перед национальными фирмами, работающими на внутренний рынок.

Государственная торговая политика может оказывать сильное влияние на участие страны в международных экономических отношениях. Национальные органы власти и управления могут устанавливать импортные тарифы и квоты, требования к продукции, которая изготавливается иностранными фирмами на их территориях, регулировать цены на импортируемые товары. Кроме того, они могут устанавливать стандарты, требования к сертификации продукции, заниматься предварительным одобрением капиталоемких проектов, управлять вывозом капитала из страны. Для оказания отечественным фирмам помощи в конкуренции с иностранными фирмами государственные органы некоторых стран предоставляют им субсидии или дешевые кредиты. В других странах в целях привлечения зарубежных инвестиций и создания новых рабочих мест субсидируются иностранные фирмы, им предоставляют привилегированный доступ к рынку и техническую помощь.

В глобально конкурирующей отрасли конкурентные позиции фирмы в одной стране влияют и подвержены влиянию конкуренции, имеющей место в других странах. В условиях глобальной конкуренции общее конкурентное преимущество фирмы формируется из всех ее международных отношений. Созданное фирмой конкурентное преимущество на отечественном рынке дополняется преимуществами, достигнутыми в ходе деятельности в других странах. Рыночная сила глобально конкурирующей фирмы прямо пропорциональна количеству ее конкурентных преимуществ в каждой стране. Глобальная конкуренция характерна для автомобильной, авиационной промышленности, производства телевизоров, шин, персональных компьютеров, телекоммуникационных систем, копировальной техники, часов.

В отрасли могут быть сегменты, для которых характерна глобальная конкуренция, и сегменты с конкуренцией на внутренних рынках многих стран. В отрасли мотелей и отелей дешевые и средние по ценам сегменты характеризуются конкуренцией на внутренних рынках многих стран, так как конкуренты обычно обслуживают клиентов в пределах одной страны. Однако в дорогих сегментах конкуренция глобальна. Отели таких фирм, как «*Marriott*», «*Sheraton*», «*Hilton*», расположены в международных секторах и в целях завоевания конкурентного преимущества в обслуживании клиентов, которые совершают частые международные поездки, используют всемирную систему бронирования и одинаковые стандарты качества и услуг.

На рынках, на которых преобладает условие внутрирыночной конкуренции, лидеры рынка — это национальные лидеры. В условиях глобальной конкуренции лидеры рынка — это мировые лидеры.

10.7.2. Отметим шесть видов международных стратегий конкуренции.

1. Продажа иностранным фирмам лицензий на использование технологии фирмы или на продажу ее продукции.

2. Создание производственной базы на национальном уровне в одной стране и экспорт товаров на зарубежные рынки.

3. Использование международной стратегии конкуренции на внутренних рынках многих стран (международная стратегия фирмы варьируется от страны к стране в соответствии с потребностями покупателей и с условиями конкуренции).

4. Использование глобальной стратегии низких издержек (в целях снижения издержек по сравнению с конкурентами стратегические усилия фирмы координируются в глобальных масштабах; фирма является самым дешевым поставщиком продукции покупателям на большинстве стратегически важных для нее рынков мира).

5. Использование глобальной стратегии дифференциации (имеется в виду дифференциация продукции на глобальных рынках по одним и тем же критериям).

6. Использование стратегии глобальной ниши (стратегия конкуренции фирмы направлена на обслуживание одинаковых ниш на стратегически важных рынках различных стран, для обеспечения целостной стратегии на каждом национальном рынке конкурентные шаги фирмы координируются в глобальных масштабах).

Чем больше разница между национальными рынками, тем выгоднее стратегия конкуренции на внутренних рынках многих стран, позволяющая фирме действовать с учетом ситуации на каждом из национальных рынков. В этом случае международная стратегия фирмы складывается из суммы ее стратегий в разных странах.

10.7.3. Глобальная стратегия фирмы лучше всего подходит тем отраслям, которым присуща глобальная конкуренция. Глобальная стратегия фирмы не зависит от национальных условий и практически одинакова в разных странах. Межнациональная универсальность глобальной стратегии позволяет фирме сконцентрироваться на завоевании стабильного конкурентного преимущества как над международными, так и над национальными конкурентами.

Глобальная стратегия фирмы позволяет ей достичь конкурентного преимущества: 1) посредством *концентрации* или *рассредоточения* своей деятельности (НИОКР, производство комплектующих, сборка, распределение, сбыт, маркетинг продукции, центры обслуживания потребителей) в целях снижения издержек или достижения большей дифференциации продукции, а также 2) путем *координации* своей концентрированной или рассредоточенной деятельности и стратегических шагов.

Концентрация деятельности фирмы в одной (двух) стране уместна, если может быть получена значительная экономия от масштаба производства, достигнут высокий уровень координации. В частности, фирме выгоднее создать одно крупное предприятие (например, по производству карданных валов), которое будет обслуживать несколько разных мировых рынков.

Рассредоточение фирме выгодно тогда, когда имеются виды деятельности (например, поставка продукции дилерам, сбыт, послепродажное обслуживание), которые должны быть расположены рядом с потребителями.

Таким образом, глобальная фирма может получить конкурентное преимущество над внутренними фирмами за счет концентрации или размещения своих операций именно там, где это выгоднее всего. Наибольшая выгода — это прежде всего самые низкие издержки.

Низкие издержки — не единственная причина рассредоточения деятельности глобальной фирмы. НИОКР следует локализовать прежде всего там, где живут необходимые для этого специалисты, хотя возможна ситуация, когда целесообразно пересылать специалистов. Процесс сборки может быть локализован в стране, правительство которой разрешило беспошлинно или по низким пошлинам импортировать комплектующие, производимые на предприятиях других стран.

Практика рассредоточения фирмой своей деятельности получила широкое распространение в связи с революционными преобразованиями в телекоммуникационных системах и в компьютеризации. Теперь рабочее место многих специалистов может быть оборудовано где угодно, в том числе и по месту проживания. Готовая продукция (например, программный продукт, научно-исследовательский текст, литературное произведение и т.п.) исполнителями может быть представлена руководству по электронной почте. Причем исполнители и их руководители могут быть локализованы не только в разных городах, но и в разных странах и на разных континентах. Современные формы практики рассредоточения фирмами своей деятельности стали возможны только в эпоху тотальной глобализации экономических отношений, материальной основой которых была революция в телекоммуникационных системах и в компьютеризации. Косвенным (по сути, но не значимости) эффектом современных форм практики рассредоточения фирмами своей деятельности стали такие значимые явления современной экономической реальности, как отсутствие необходимости ездить, пользуясь общественным или личным транспортом, работникам фирм на работу, что снижает нагрузку на общественный транспорт и уменьшает пробки на улицах больших городов.

Примером современной формы практики рассредоточения является кардинальное разделение в розничной и оптовой торговле информационных и материально-вещественных потоков, что позволило сделать эффективной торговлю через Интернет. В 1999 г. в США около 50% сделок по покупке автомобилей было оформлено с помощью электронных средств, в частности через Интернет.

Координация своей распределенной деятельности позволяет фирме завоевать надежное конкурентное преимущество. Фирма может передавать свои передовые технологии от одного филиала другому, имея большую экономию на издержках. Фирма может перемещать производство из одной страны в другую для получения выгоды от благоприятного обменного курса. Глобальный конкурент может выбирать, где бросить вызов соперникам. Фирма, которая конкурирует лишь на внутреннем рынке, не имеет возможности воспользоваться ни одним конкурентным преимуществом, связанным с географическим размещением или координацией.

10.8. Стратегические намерения фирм, «заповедники» прибыли, перекрестное финансирование

10.8.1. Конкурирующие фирмы отличаются не только своими стратегиями, но и своими долговременными целями или *стратегическими намерениями*. По характеру стратегических намерений различают четыре типа фирм.

1. Фирмы, которые намерены доминировать глобально, по крайней мере конкурировать с лидерами глобальных рынков. Эти фирмы реализуют глобальную стратегию.

2. Фирмы, которые намерены защищать свое доминирующее положение на внутреннем рынке несмотря на то, что некоторое количество своей продукции (обычно менее 20%) они сбывают за рубежом и действуют на нескольких или многих иностранных рынках.

3. Фирмы, которые намерены увеличить мировую долю своего сбыта и ориентированы главным образом на удовлетворение потребностей рынка каждой страны, в которой эти фирмы присутствуют; стратегия конкуренции таких фирм направлена на внутренние рынки многих стран, где они получают большую часть своих доходов.

4. Фирмы, работающие исключительно на внутреннем рынке своей отрасли и не стремящиеся к укреплению своего положения за границей. Происходящие на международных рынках события такие фирмы рассматривают с точки зрения влияния этих событий на свои операции на внутреннем рынке.

Рассмотрим ситуацию, когда одна американская фирма работает только на внутреннем рынке и конкурирует с японской фирмой, которая действует на рынках многих стран и которая стремится к глобальному доминированию. Японская фирма может снизить цены, чтобы за счет американской фирмы увеличить свою долю на американском рынке. Потери японская фирма компенсирует за счет доходов, которые она имеет в других странах. У американской фирмы нет возможности для адекватного ответа. Этот пример иллюстрирует ситуацию, в которой глобальная (японская) фирма имеет конкурентное преимущество перед национальной (американской) фирмой за счет перераспределения доходов, получаемых глобальной фирмой в разных странах. Если же американская фирма также является глобальной и работает, например, на рынках Японии, она может отреагировать на снижение цены японской фирмы в Америке снижением своей цены в Японии. То есть в этом примере японская и американская фирмы уже не имеют друг перед другом конкурентного преимущества.

10.8.2. *«Заповедником» прибыли* является рынок страны, в которой рыночные позиции фирмы хорошо защищены и приносят значительную прибыль.

Для большинства японских фирм «заповедником» их прибыли являются рынки Японии, ибо японское государство не позволяет иностранным фирмам обладать в стране большой долей рынка.

Защита от угрозы иностранных конкурентов позволяет японским фирмам держать повышенные цены и, следовательно, получать приличную прибыль. В большинстве случаев «заповедником» прибыли для фирмы является отечественный рынок, однако в случае многонациональных фирм их «заповедниками» прибыли являются рынки стран, в которых фирмы занимают прочные позиции, имеют большие объемы продаж и получают высокие прибыли.

Фирмы, у которых есть большие и хорошо защищенные «заповедники» прибыли, имеют конкурентное преимущество перед фирмами, у которых «заповедников» прибыли нет. Аналогично обстоит дело в случае фирмы с несколькими «заповедниками» прибыли и фирмы с одним «заповедником».

Критический рынок — важное понятие теории рыночной конкуренции. Критические рынки — это такие рынки:

1) которые являются «заповедниками» прибыли ключевых конкурентов;

2) для которых характерны большие объемы сбыта;

3) где имеются престижные и стратегически важные для фирмы покупатели;

4) слабая конкуренция на которых позволяет получать исключительно высокую прибыль.

10.8.3. *Перекрестное финансирование* состоит в том, что прибыль, заработанная фирмой в одной или нескольких странах, используется для финансирования наступления против конкурентов. Понятие *типичного наступления* означает, что продукция фирмы будет полностью или почти полностью соответствовать продукции конкурентов по качеству и услугам, однако цена ее будет ниже цены на продукцию конкурентов. Хотя более низкая цена означает снижение прибыли и даже наличие возможных убытков, фирма может все-таки получить приемлемую *совокупную* прибыль за счет доходов, извлекаемых из «заповедников» прибыли. Глобальная стратегия побеждает стратегию внутреннего рынка, ибо фирма, действующая только на внутреннем рынке, не может в долговременном промежутке эффективно защитить свою долю рынка от посягательств со стороны глобального конкурента, имеющего возможности перекрестного финансирования. Глобальная фирма может использовать низкие цены для завоевания покупателей, для увеличения доли рынка, для укрепления позиций. Издержки глобальной фирмы, обладающей крупным современным производством, почти наверняка будут меньше издержек фирмы, которая действует в нескольких странах и мелкосерийное специализированное производство которой рассредоточено по малым заводам. Поэтому многонациональные фирмы должны сосредоточить усилия на получении конкурентных преимуществ от деятельности в рыночной нише и от дифференциации продукции с учетом потребностей местных рынков. Такой способ защиты от глобальных конкурентов применим в тех сферах производства, в которых большие национальные различия препятствуют использованию глобальной стратегии. Но если эти различия не имеют значения для глобальной фирмы, то она может победить фирму с многонациональной стратегией.

Вопросы для самоконтроля к главе 10

1. Что такое рыночная конкуренция?
2. Что представляет собой модель пяти сил конкуренции?
3. В чем суть первого этапа наступательной программы фирмы «Пепси» в 1950—1955 гг.?
4. В чем суть второго этапа наступательной программы фирмы «Пепси» в 1955—1960 гг.?
5. Каковы факторы интенсивности рыночной конкуренции между фирмами отрасли?

6. Почему возникает сила конкуренции в случае возможного появления на отраслевом рынке продуктов-заместителей?
7. Почему возникает сила конкуренции в случае возможного появления на отраслевом рынке фирм-новичков?
8. Каковы причины появления барьеров для входа на отраслевой рынок фирм-новичков?
9. Почему возникает сила конкуренции в случае появления давления на отраслевой рынок со стороны поставщиков?
10. Почему возникает сила конкуренции в случае появления давления на отраслевой рынок со стороны покупателей?
11. Что такое движущие силы конкуренции?
12. Что представляют собой движущие силы конкуренции?
13. Что такое конкурентное преимущество?
14. Каковы источники конкурентного преимущества?
15. Что представляют собой основные стратегии, применяемые фирмой для получения конкурентного преимущества?
16. В чем суть стратегии лидерства по низким издержкам?
17. При каких условиях целесообразна стратегия лидерства по низким издержкам?
18. В чем суть стратегии дифференциации? Приведите примеры.
19. При каких условиях целесообразна стратегия дифференциации?
20. В чем суть гибридной стратегии? При каких условиях гибридная стратегия целесообразна? Приведите примеры.
21. В чем суть стратегии рыночной ниши? Приведите примеры.
22. При каких условиях целесообразна стратегия рыночной ниши?
23. Каковы факторы риска стратегии лидерства по низким издержкам?
24. Каковы факторы риска стратегии дифференциации?
25. Каковы факторы риска стратегии рыночной ниши?
26. Каковы факторы, влияющие на издержки звеньев цепи издержек производства?
27. Каковы основные звенья цепи издержек производства, которые могут быть источниками дифференциации?
28. Из каких периодов состоит траектория развития конкурентного преимущества?
29. Каковы факторы, характеризующие международные рынки?
30. Каковы причины перехода фирмы с национального на глобальный уровень функционирования?
31. Каковы виды международных стратегий конкуренции?
32. Каковы способы достижения конкурентного преимущества с помощью глобальной стратегии?
33. Каковы материальные основы широкой практики рассредоточения фирмой своей деятельности?
34. Что такое стратегическое намерение фирмы?
35. Что такое «заповедники» прибыли фирмы?
36. Что такое перекрестное финансирование?

Задачи и упражнения для самоконтроля к главе 10

1. Приведите собственный пример и проанализируйте возникновение силы конкуренции в результате стремления фирм-соперников занять лучшие позиции на рынке отрасли.
2. Приведите собственный пример и проанализируйте возникновение силы конкуренции в связи с наличием контроля за условиями сделок со стороны поставщиков.
3. Приведите собственный пример и проанализируйте возникновение силы конкуренции в связи с наличием контроля за условиями сделок со стороны покупателей.
4. Приведите собственный пример и проанализируйте возникновение силы конкуренции в связи с угрозой появления на рынке отрасли продукта-заместителя.
5. Приведите собственный пример и проанализируйте возникновение силы конкуренции в связи с угрозой появления на рынке отрасли фирм-новичков.
6. При каких условиях фирме следует выбрать стратегию по низким издержкам? В чем сила данной стратегии? В чем слабость данной стратегии?
7. Объясните, почему лидер по низким издержкам имеет защиту от пяти сил конкуренции.
8. Каковы преимущества стратегии дифференциации? В чем слабость данной стратегии?
9. Объясните, почему фирма, удачно реализующая стратегию дифференциации, успешно защищается от пяти сил конкуренции.
10. При каких условиях фирме следует выбрать стратегию рыночной ниши? В чем сила такой стратегии? В чем ее слабость?
11. Объяснить, почему фирма, реализующая стратегию рыночной ниши, успешно защищается от пяти сил конкуренции.

Тесты для контрольных работ к главе 10

1. Теория пяти сил конкуренции построена в рамках:
   а) поведенческого подхода;
   б) структурного подхода;
   в) функционального подхода.
2. Рыночную конкуренцию между фирмами отрасли усиливает следующий фактор:
   а) уравнивание размеров конкурентов;
   б) медленный рост спроса на продукцию отрасли;
   в) покупатели не несут значительных издержек при замене одного продукта другим;

г) отраслевые условия таковы, что дороже выйти из отрасли, чем в ней остаться;
д) ответы а)–г) верны.

3. Рыночную конкуренцию между фирмами отрасли усиливает следующий фактор (укажите *неверный* ответ):
а) рост размера отдачи от удачного стратегического шага;
б) сильные фирмы из других отраслей поглощают слабые фирмы отрасли и превращают их в сильных отраслевых соперников;
в) отраслевые условия таковы, что все фирмы удовлетворены занимаемым ими положением и не пытаются скорректировать ситуацию за счет конкурентов;
г) отраслевые условия таковы, что конкурирующие фирмы отрасли снижают цены в целях увеличения сбыта своей продукции;
д) рост числа конкурентов.

4. Укажите причину появления барьеров для входа новых фирм в отрасль:
а) невозможность получить доступ к передовым технологиям;
б) ограниченный доступ к каналам распределения продукции;
в) необходимость предъявления лицензий;
г) ответы а)–в) верны;
д) ответы а)–в) не верны.

5. К движущим силам конкуренции относятся (укажите *неверный* ответ):
а) появление новой продукции;
б) повышение уровня неопределенности в бизнесе;
в) снижение риска в бизнесе;
г) инновации в области маркетинга;
д) предпочтение потребителями дифференцированной продукции перед стандартизированной.

6. К факторам риска стратегии лидерства фирмы по низким издержкам относятся:
а) достижения научно-технологического прогресса, используемые конкурентами для снижения их издержек;
б) дешевая имитация фирмами-конкурентами методов фирмы-лидера по снижению издержек;
в) изменения предпочтений потребителей, которые появляются в результате использования фирмами достижений научно-технологического прогресса;
г) ответы а)–в) верны;
д) ответы а)–в) не верны.

7. К факторам риска стратегии дифференциации фирмы относятся (укажите *неверный* ответ):
а) повышение качества дифференцированного продукта;

б) необязательное достижение конкурентного преимущества в результате реализации стратегии дифференциации;
в) достигнутое качество дифференцированного продукта превысит запросы потребителей;
г) цена дифференцированного продукта значительно превысит запросы потребителей;
д) цена дифференцированного продукта значительно превысит цену конкурентов.

8. К факторам международного рынка относятся (укажите *неверный* ответ):
а) различия в производственных издержках между странами;
б) колебания валютных обменных курсов;
в) торговая политика государств;
г) ответы а)–в) верны;
д) ответы а)–в) не верны.

9. К международной стратегии конкуренции относятся:
а) использование глобальной стратегии низких издержек;
б) использование глобальной стратегии дифференциации;
в) использование стратегии глобальной ниши;
г) ответы а)–в) верны;
д) ответы а)–в) не верны.

10. Стратегия низких издержек лучше всего работает в следующей ситуации:
а) спрос эластичен по цене;
б) продукция отрасли не имеет существенных различий в зависимости от производящей фирмы;
в) на рынке превалирует конкуренция по цене;
г) ответы а)–в) верны;
д) ответы а)–в) не верны.

Задания для контрольных работ к главе 10

1. Опишите и проанализируйте конкурентную силу перекрестного финансирования в краткосрочном и долговременном промежутках.
2. Опишите и проанализируйте два способа достижения конкурентного преимущества фирмой, которая следует глобальной стратегии.
3. Опишите и проанализируйте составные элементы глобальной стратегии фирмы.
4. Проанализируйте сходства и различия межстрановой и глобальной стратегий фирмы.
5. Опишите и проанализируйте модель становления и потери конкурентного преимущества.

Глава 11

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАТИЧЕСКОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

11.1. Сфера производства модели Эрроу—Дебре. Функция рыночного предложения и ее свойства

11.1.1. Модель Эрроу–Дебре (см.: *K. Arrow, G. Debreu* (1954)) представляет собой вариант описания экономики с конкуренцией наряду с моделями Вальраса (см. Л. Вальрас (2000)) и МакКензи (см. *L.W. McKenzie* (1959)). Вальрас впервые дал подробное описание статического равновесия на основе своей модели. Эрроу и Дебре (совместно) и МакКензи независимо впервые доказали существование статического экономического равновесия (общего экономического равновесия) для своих общих моделей экономики с совершенной конкуренцией. Описание модели Эрроу–Дебре (МЭД) начнем с ее сферы производства. Сферу производства МЭД составляют фирмы. В МЭД фигурируют n фирм $F^{(1)}, ..., F^{(n)}$ и r продуктов $G_1, ..., G_r$. Каждая фирма $F^{(j)}, j = 1, ..., n$, выпускает продукты и затрачивает ресурсы. Если продукт G_i, $i = 1, ..., r$, выпускается фирмой $F^{(j)}$ в количестве $y_i^{(j)}$ единиц, то $y_i^{(j)} > 0$; если продукт G_k, $k = 1, ..., r$, затрачивается фирмой $F^{(j)}$ в качестве ресурса в количестве $|y_k^{(j)}|$ единиц, то $y_k^{(j)} < 0$. Вектор

$$y^{(j)} = (y_1^{(j)}, ..., y_r^{(j)}) \in Y^{(j)} \subseteq E_r,$$

где $Y^{(j)}$ — *технологическое множество фирмы* $F^{(j)}$.

Технологическое множество $Y^{(j)}$ удовлетворяет следующему условию:

(1.1) Для всех j ($j = 1, ..., n$) множество $Y^{(j)} \subseteq E_r$ ограничено, замкнуто и $o \in Y^{(j)}$, т.е. фирма $F^{(j)}$ может ничего не затрачивать и ничего не выпускать. Разные фирмы $F^{(j)}$ могут выпускать и затрачивать разные продукты. Алгебраическая сумма (сумма Минковского) множеств $Y^{(1)}, ..., Y^{(n)}$, т.е. множество

$$Y = Y^{(1)} + ... + Y^{(n)}$$

$$(Y = \{y \mid y = y^{(1)} + ... + y^{(n)},\ \ y^{(j)} \in Y^{(j)} \subseteq E_r,\ \ j = 1, ..., n\})$$

называется *технологическим множеством МЭД*. Оно удовлетворяет условию

(1.2) Y — выпуклое множество.

11.1.2. Пусть $p = (p_1, ..., p_r)$ вектор цен в МЭД. Каждая фирма $F^{(j)}$, $j = 1, ..., n$, максимизирует свою прибыль

$$p \cdot y^{(j)} \ \ (\max) \tag{11.1.1}$$

при условии, что

$$y^{(j)} \in Y^{(j)}. \tag{11.1.2}$$

Решение задачи максимизации прибыли фирмы $F^{(j)}$ обозначим символом $\overset{o}{y}{}^{(j)}(p)$, $j = 1, ..., n$. Решение $\overset{o}{y}{}^{(j)}(p)$ всегда существует, ибо множество $Y^{(j)}$ ограничено и замкнуто. Решение $\overset{o}{y}{}^{(j)}(p)$ называется *локальным рыночным равновесием* фирмы $F^{(j)}$ или *предложением фирмы* $F^{(j)}$, $j = 1, ..., n$, а также *функцией предложения фирмы* $F^{(j)}$, $j = 1, ..., n$. Сумма

$$\overset{o}{y}(p) = \overset{o}{y}{}^{(1)}(p) + ... + \overset{o}{y}{}^{(n)}(p) \tag{11.1.3}$$

называется *совокупным предложением* (*рыночным предложением*), а также *функцией совокупного предложения*.

Пример 11.1.1

Пусть $r = 2$.

Пусть

$$Y^{(j)} = \{y^{(j)} \mid y^{(j)} = (y_1^{(j)}, y_2^{(j)}),\ \ y_1^{(j)} + y_2^{(j)} \le 0,\ \ y_1^{(j)} \ge -3,\ \ y_2^{(j)} \ge 0\}.$$

Пусть вектор рыночных цен $p = (1; 2)$. Задача максимизации прибыли $R^{(j)}$ фирмы $F^{(j)}$ в этом случае имеет вид

$$p_1 y_1^{(j)} + p_2 y_2^{(j)} = y_1^{(j)} + 2y_2^{(j)} = R^{(j)} \to (\max)$$

при наличии ограничений $y_1^{(j)} + y_2^{(j)} \le 0$, $y_1^{(j)} \ge -3$, $y_2^{(j)} \ge 0$.

Тогда имеем

$$\overset{o}{y}{}^{(j)}(p) = (\overset{o}{y}{}_1^{(j)}(p), \overset{o}{y}{}_2^{(j)}(p)) = (-3; 3) \text{ (рис. 11.1).}$$

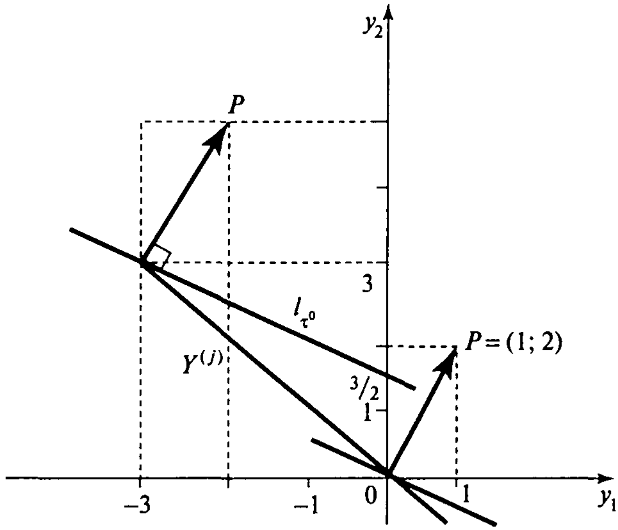


Рис. 11.1

Прямая l_{τ^0} — изопрофита, проходящая через точку $(\overset{\circ}{y}{}_1^{(j)}(p), \overset{\circ}{y}{}_2^{(j)}(p)) = (-3; 3)$, максимизирующую прибыль $PR^{(j)}$ фирмы $F^{(j)}$.

Предложение $\overset{\circ}{y}{}_1^{(j)}(p)$ фирмы $F^{(j)}$ есть функция, однородная нулевой степени своей векторной переменной $p = (p_1, ..., p_r)$, ибо

$$\overset{\circ}{y}{}^{(j)}(p) = \overset{\circ}{y}{}^{(j)}(\gamma p), \tag{11.1.4}$$

где $0 < \gamma \in E_1$, поскольку обе задачи (задача (11.1.1), (11.1.2) и задача $\gamma \cdot py^{(j)}$ (max) при условии (11.1.2)) имеют одно и то же множество максимальных решений.

Из равенств (11.1.3) и (11.1.4) следует, что

$$\overset{\circ}{y}(p) = \overset{\circ}{y}(\gamma p). \tag{11.1.5}$$

11.2. Сфера потребления модели Эрроу—Дебре. Функция рыночного спроса и ее свойства

11.2.1. Сферу потребления МЭД составляют потребители (например, домашние хозяйства). В МЭД фигурирует m потребителей $C^{(1)}, ..., C^{(m)}$. Каждый потребитель $C^{(i)}$ максимизирует свою функцию полезности $u^{(i)}(x)$ ($x \in E_r^+ = \{x \mid x = (x_1, ..., x_r), x_1 \geq 0, ..., x_r \geq 0\}$) при наличии бюджетного ограничения $px \leq M^{(i)}$, где $M^{(i)}$ — доход потребителя $C^{(i)}$, $i = 1, ..., m$. Таким образом, каждый потребитель $C^{(i)}$ решает задачу максимизации

$$u^{(i)}(x^{(i)}) \text{ (max)} \tag{11.2.1}$$

при условии, что

$$px^{(i)} \leq M^{(i)}, \quad x^{(i)} \geq 0. \tag{11.2.2}$$

Решение задачи максимизации потребителя $C^{(i)}$ обозначается символом $\overset{\circ}{x}{}^{(i)}(p)$ и называется *локальным рыночным равновесием потребителя* $C^{(i)}$ или *спросом потребителя* $C^{(i)}$, а также *функцией спроса потребителя* $C^{(i)}$, $i = 1, ..., m$. Сумма

$$\overset{\circ}{x}(p) = \overset{\circ}{x}{}^{(1)}(p) + ... + \overset{\circ}{x}{}^{(m)}(p) \tag{11.2.3}$$

называется *совокупным спросом* (*рыночным спросом*), а также *функцией совокупного спроса*.

Функция полезности $u^{(i)}(x^{(i)})$, $i = 1, ..., m$, удовлетворяет следующим условиям.

(2.1) Функция $u^{(i)}(x)$ имеет непрерывные частные производные по всем переменным $x_1, ..., x_r$.

(2.2) Множество $H_t^i = \{x \mid x = (x_1, ..., x_r), u^{(i)}(x) \geq t\}$ является строго выпуклым. Каждый потребитель $C^{(i)}$, $i = 1, ..., m$, имеет запас продуктов $z^{(i)} = (z_1^{(i)}, ..., z_r^{(i)})$, такой, что $z_k^{(i)} > 0$, $k = 1, ..., m$. Положим $z = z^{(1)} + ... + z^{(m)}$.

(2.3) Каждый потребитель $C^{(i)}$, $i = 1, ..., m$, получает долю $\alpha_{ij} \geq 0$ прибыли $\overset{\circ}{P}R^{(j)}$ фирмы $F^{(j)}$, $j = 1, ..., n$, и $\alpha_{1j} + ... + \alpha_{mj} = 1$.

Доход $M^{(i)}$ потребителя $C^{(i)}$, $i = 1, ..., m$, равен сумме $M^{(i)} = M_1^{(i)} + M_2^{(i)}$, где

$$M_1^{(i)} = pz^{(i)} = p_1 z_1^{(i)} + ... + p_r z_r^{(i)},$$

$$M_2^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} p \overset{\circ}{y}{}^{(j)}(p).$$

Спрос $\overset{\circ}{x}{}^{(i)}(p)$, $i = 1, ..., m$, потребителя $C^{(i)}$ есть однородная функция нулевой степени своей векторной переменной $p = (p_1, ..., p_r)$, ибо

$$\overset{\circ}{x}{}^{(i)}(p) = \overset{\circ}{x}{}^{(i)}(\gamma p), \; i = 1, ..., m, \tag{11.2.4}$$

где $0 < \gamma \in E_1$, поскольку обе задачи (задача (11.2.1), (11.2.2) и задача $u^{(i)}(x^{(i)})$ (max)) при условии, что

$$\gamma \cdot px^{(i)} \leq \gamma \cdot pz^{(i)} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \gamma \cdot p\overset{\circ}{y}^{(j)}(p) \tag{11.2.5}$$

имеют одно и то же множество решений.

Из равенств (11.2.3) и (11.2.4) следует, что

$$\overset{\circ}{x}(p) = \overset{\circ}{x}(\gamma p).$$

11.2.2. *Избыточный спрос* (*функция избыточного спроса*) определяется как разность совокупного спроса $\overset{\circ}{x}(p)$ и суммы совокупного предложения $\overset{\circ}{y}(p)$ и совокупного ликвидного запаса z, т.е.

$$F(p) = \overset{\circ}{x}(p) - \overset{\circ}{y}(p) - z, \tag{11.2.6}$$

где $\overset{\circ}{y}(p)$ дается формулой (11.1.3), $\overset{\circ}{x}(p)$ — формулой (11.2.3), а $z = z^{(1)} + \ldots + z^{(m)}$.

Равенство

$$pF(p) = 0 \tag{11.2.7}$$

при любом векторе цен $p \geq 0$ называется *законом Вальраса*.

Перепишем равенство (11.2.7), представив избыточный спрос $F(p)$ в развернутой форме (11.2.6):

$$p\overset{\circ}{x}(p) = p\overset{\circ}{y}(p) + pz. \tag{11.2.8}$$

Равенство (11.2.8) содержательно интерпретируется следующим образом. Стоимость $p\overset{\circ}{x}(p)$ совокупного спроса $\overset{\circ}{x}(p)$ в ценах p равна сумме стоимостей $p\overset{\circ}{y}(p) + pz$ совокупного предложения $p\overset{\circ}{y}(p)$ и совокупного ликвидного запаса pz.

11.3. Определение статического экономнческого равновесия модели Эрроу — Дебре и формулировка теоремы о его существовании

11.3.1. *Статическое экономическое равновесие* (*конкурентное равновесие*) МЭД есть набор векторов

$$\{p^*, y^{*(1)}, \ldots, y^{*(n)}, x^{*(1)}, \ldots, x^{*(m)}\}, \tag{11.3.1}$$

удовлетворяющих условиям:

1) вектор $p^* \geq 0$ и $\left|p^*\right| = p_1^* + \ldots + p_r^* = 1$,

вектор $p^* = (p_1^*, ..., p_r^*)$ называется ***вектором цен статического экономического равновесия*** МЭД;

2) вектор $\overset{*}{y}^{(j)} = \overset{\circ}{y}^{(j)}\left(p^*\right),\ j=1,\dots,n,$ есть локальное рыночное равновесие фирмы $F^{(j)}$, т.е. решение задачи максимизации прибыли $PR^{(j)}$ фирмы $F^{(j)}$ при ценах $p_1^*, ..., p_r^*$ ($p^* = (p_1^*, ..., p_r^*)$)

$$p^* y^{(j)} \to (\max)$$

при условии, что

$$y^{(j)} \in Y^{(j)}, j = 1, ..., n;$$

3) вектор $\overset{*}{x}^{(i)} = \overset{\circ}{x}^{(i)}(p^*),\ i=1,\dots,m,$ есть локальное рыночное равновесие потребителя $C^{(i)}$, т.е. решение задачи максимизации функции полезности $u^{(i)}(x)$ при ценах $p_1^*, ..., p_r^*$

$$u^{(i)}(x) \to (\max)$$

при условии, что

$$p^* x^{(i)} \le p^* z + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} p^* y^{(j)};$$

4) имеет место следующее векторное неравенство:

$$x^* \le y^* + z,$$

(которое означает отсутствие в МЭД дефицита по всем продуктам) и условие дополняющей нежесткости

$$p^*(x^* - y^* - z) = 0, \qquad (11.3.2)$$

где $x^* = \overset{*}{x}^{(1)} + \ldots + \overset{*}{x}^{(m)},\ y^* = \overset{*}{y}^{(1)} + \ldots + \overset{*}{y}^{(n)}$.

Условие дополняющей нежесткости в развернутом виде выписывается так:

$$p_1^*(x_1^* - y_1^* - z_1) + ... + p_r^*(x_r^* - y_r^* - z_r) = 0. \qquad (11.3.3)$$

В связи с тем что $x_1^* - y_1^* - z_1 \le 0, ..., x_r^* - y_r^* - z_r \le 0$, а вектор $p^* \ge 0$, равенство (11.3.3) означает, что если $p_k^* > 0$, то обязательно $x_k^* = y_k^* + z_k$, если же $\overset{*}{x} < \overset{*}{y} + z_k$, то цена $p^* = 0$.

Равенство (11.3.2) представляет собой закон Вальраса в ценах p^* равновесия.

Отметим, что понятие статического экономического равновесия содержит в качестве своего исходного элемента вектор цен равновесия, который является основополагающим для определения остальных элементов статического экономического равновесия. Несущей конструкцией понятия статического экономического равновесия является пункт 4) который, как уже подчеркивалось, означает отсутствие дефицита по всем продуктам.

11.3.2. При выполнении условий (1.1), (1.2), (2.1)—(2.3) *существует* статическое экономическое равновесие (см. раздел 11.3.1) *модели Эрроу — Дебре* (*теорема Эрроу — Дебре*).

Сформулированная теорема существования статического экономического равновесия была доказана Эрроу и Дебре (*K.J. Arrow, G. Debreu* (1954)) с помощью построения точечно-множественного отображения, которое удовлетворяет всем условиям теоремы Какутани (*S. Kakutani* (1941)) о неподвижной точке точечно-множественного отображения. Неподвижная точка этого специального точечно-множественного отображения и есть статическое экономическое равновесие (см. раздел 11.3.1).

Доказательство теоремы Эрроу — Дебре в этом учебнике не приводится. Далее сначала рассмотрим пример построения статического экономического равновесия МЭД в случае, когда $r = 2$, $m = 2$, $n = 1$.

11.4. Примеры модели Эрроу — Дебре и цен равновесия

11.4.1. Пример 11.4.1 приведен и разобран в книге Алипрантис и др. (1995). Пример 11.4.2, а также ряд заданий для самостоятельной работы и для контрольных работ представляют собой модификации аналогичного примера в книге Алипрантис и др. (1995).

Пример 11.4.1. Рассмотрим следующую МЭД:

1) пространство продуктов E_2;

2) два потребителя $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ с характеристиками:

потребитель $C^{(1)}$ имеет начальный запас $z^{(1)} = (1; 2)$ и функцию полезности $u^{(1)}(x_1, x_2) = x_1x_2$; потребитель $C^{(2)}$ имеет начальный запас $z^{(2)} = (2; 2)$ и функцию полезности $u^{(2)}(x_1, x_2) = x_1^2x_2$;

3) фирма F имеет технологическое множество

$Y = \{(y_1, y_2) \mid y_1 < 1 \text{ и } y_2 \leq y_1/(y_1 - 1)\}$;

4) доли потребителей $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ в прибыли фирмы равны $\alpha_1 = \alpha_2 = {}^1/_2$.

Технологическое множество Y изображено на рис. 11.2.

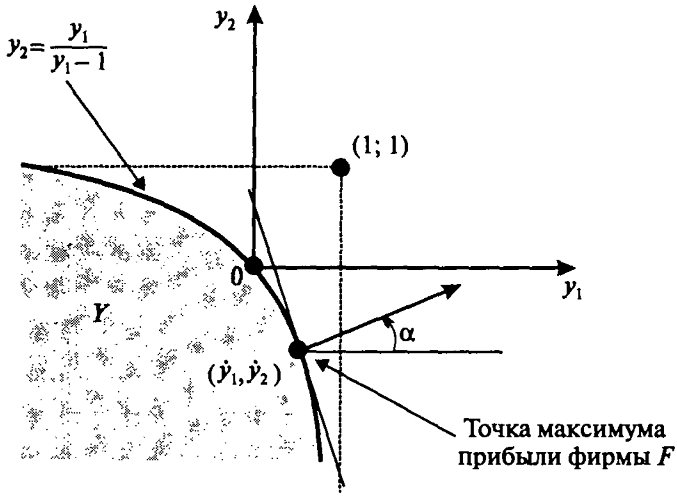


Рис. 11.2

Требуется найти для вектора $p = (p_1, p_2)$ локальное рыночное равновесие, максимальную прибыль фирмы F, локальное рыночное равновесие для каждого потребителя $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$, избыточный спрос, нормированные цены равновесия, статическое экономическое равновесие.

Локальное рыночное равновесие $\overset{o}{y}(p) = (\overset{o}{y}_1(p), \overset{o}{y}_2(p))$ фирмы F определяется как решение задачи на условный глобальный максимум:

$$p_1 y_1 + p_2 y_2 \,(\max) \tag{11.4.1}$$

при условии, что

$$y_2 = \frac{y_1}{y_1 - 1}. \tag{11.4.2}$$

Очевидно, вектор цен $p = (p_1, p_2) > 0$ $(p_1 > 0, p_2 > 0)$ (см. рис. 11.2).

Для решения задачи (11.4.1)–(11.4.2) выпишем для функции Лагранжа $L(y_1, y_2, \lambda) = p_1 y_1 + p_2 y_2 + \lambda\left(-y_2 + \frac{y_1}{y_1 - 1}\right)$ условия первого порядка

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = p_1 - \frac{\lambda}{(y_1 - 1)^2} = 0,\ \frac{\partial L}{\partial y_2} = p_1 - \lambda = 0,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -y_2 + \frac{y_1}{y_1 - 1} = 0.$$

Из первых двух уравнений получаем (в этой задаче λ — множитель Лагранжа $\lambda \neq 0$, что легко доказывается от противного):

$$\frac{p_1}{p_2} = (y_1 - 1)^2,$$

откуда вытекает, принимая во внимание неравенства

$\sqrt{p_2 / p_1} > 0$ и $y_1 < 1$, что

$1 - y_1 = \sqrt{\dfrac{p_1}{p_2}}$, т.е.

$y_1 = 1 - \sqrt{\dfrac{p_1}{p_2}}$.

Полагая $\sqrt{p_2 / p_1} = t$, имеем

$$\overset{o}{y}_1(p) = 1 - t,\ \overset{o}{y}_2(p) = \frac{\overset{o}{y}_1(p)}{\overset{o}{y}_1(p) - 1} = 1 - \frac{1}{t}.$$

В силу строгой выпуклости к точке O границы $y_2 = \dfrac{y_1}{y_1 - 1}$ технологического множества Y точка $(\overset{o}{y}_1(p), \overset{o}{y}_2(p))$ возможного условного локального максимума является не только точкой локального, но и глобального условного максимума рассматриваемой задачи (11.4.1)–(11.4.2) на условный экстремум.

Предложение фирмы F — это вектор $\overset{o}{y}(p) = (1 - t, 1 - \dfrac{1}{t})$.

Доход $M^{(1)}$ потребителя $C^{(1)}$ равен

$$M^{(1)} = p \cdot z^{(1)} + \frac{1}{2} p \cdot \overset{o}{y}(p) = p_1 + 2p_2 + \frac{1}{2} p_1(1 - t) + \frac{1}{2} p_2(1 - \frac{1}{t}).$$

Локальное рыночное равновесие $(\overset{o}{x}_1(p), \overset{o}{x}_2(p))$ потребителя $C^{(1)}$ определяется как решение задачи на условный глобальный максимум

$$u^{(1)}(x_1, x_2) = x_1 x_2 \ (\max) \qquad (11.4.3)$$

при бюджетном ограничении

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = M^{(1)}. \qquad (11.4.4)$$

Для решения задачи (11.4.3)–(11.4.4) выпишем для функции Лагранжа $L(x_1, x_2, \lambda) = x_1x_2 + \lambda(M^{(1)} - p_1x_1 - p_2x_2)$ условия первого порядка

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - p_1\lambda = 0,\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - p_2\lambda = 0,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = M^{(1)} - p_1x_1 - p_2x_2 = 0.$$

Из первых двух уравнений получаем, что $p_1x_1 = p_2x_2$ (в этой задаче множитель Лагранжа $\lambda \neq 0$, что легко доказывается от противного). Из третьего уравнения имеем

$$\overset{o}{x}_1 = \frac{M^{(1)}}{2p_1} = \frac{3}{4} + \frac{5}{4}t^2 - \frac{1}{2}t \text{ и } \overset{o}{x}_2 = \frac{M^{(1)}}{2p_2} = \frac{5}{4} + \frac{3}{4t^2} - \frac{1}{2t}.$$

В силу строгой выпуклости к точке O линий безразличия функции полезности $u_1(x_1, x_2) = x_1x_2$ точка $(\overset{o}{x}_1(p), \overset{o}{x}_2(p))$ возможного условного локального максимума является точкой не только локального, но и глобального условного максимума рассматриваемой задачи (11.4.3)–(11.4.4) на условный экстремум.

Таким образом, спрос потребителя $C^{(1)}$ — это вектор

$$\overset{o}{x}^{(1)}(p) = (\frac{3}{4} + \frac{5}{4}t^2 - \frac{1}{2}t,\ \frac{5}{4} + \frac{3}{4t^2} - \frac{1}{2t}).$$

Перейдем ко второму потребителю $C^{(2)}$. Его доход равен $M^{(2)} = p \cdot z^{(2)} + \frac{1}{2}p \cdot \overset{o}{y}(p) = 2p_1 + 2p_2 + \frac{1}{2}p_1(1-t) + \frac{1}{2}p_2(1-\frac{1}{t})$, и свою функцию полезности $u^{(2)}(x_1, x_2) = x_1^2x_2$ этот потребитель максимизирует при бюджетном ограничении $p_1x_1 + p_2x_2 = M^{(2)}$. Вновь используя множитель Лагранжа, получаем, что для набора, максимизирующего полезность, выполнено равенство $p_1x_1 = 2p_2x_2$. Следовательно, $M^{(2)} = p_1x_1 + p_2x_2 = \frac{3}{2}p_1x_1 = 3p_2x_2$.

Отсюда вытекает, что $\overset{o}{x}{}_1^{(2)} = \frac{2M^{(2)}}{3p_1} = \frac{5}{3} + \frac{5}{3}t^2 - \frac{2}{3}t$ и $\overset{o}{x}{}_2^{(2)} = \frac{M^{(2)}}{3p_2} = \frac{5}{6} + \frac{5}{6t^2} - \frac{1}{3t}$.

Следовательно, спрос второго потребителя $C^{(2)}$ выглядит так:

$$\overset{o}{x}^{(2)}(p) = (\frac{5}{3} + \frac{5}{3}t^2 - \frac{2}{3}t,\ \frac{5}{6} + \frac{5}{6t^2} - \frac{1}{3t}).$$

Избыточный спрос $F(p)$ для этой МЭД задается формулой

$$F(p)=\overset{o}{x}^{(1)}(p)+\overset{o}{x}^{(2)}(p)-y(p)-z^{(1)}-z^{(2)}=$$
$$=\left(\frac{35t^2-2t-19}{12},-\frac{35t^2-2t-19}{12t^2}\right)\le 0.$$

Последнее неравенство означает, что в статическом экономическом равновесии не должно быть дефицита ни по одному из продуктов.

Поскольку в рассматриваемом примере обязательно $p > 0$, постольку (по закону Вальраса) избыточный спрос $F(p) = 0$, а для этого необходимо и достаточно, чтобы $35t^2 - 2t - 19 = 0$.

Решая это квадратное уравнение и учитывая, что $t > 0$, получаем $t=\dfrac{1+\sqrt{666}}{35}\approx 0{,}766.$

Так как $p_2 / p_1 = t^2 \approx 0{,}587$, $p_1 + p_2 = 1$, то цены равновесия суть $p^* \cong (0{,}63; 0{,}37)$, $p_1^* \cong 0{,}63$, $p_2^* \cong 0{,}37$.

Соответствующий луч цен равновесия в плоскости цен изображен на рис. 11.3.

Статическое экономическое равновесие рассматриваемой МЭД есть набор

$$\left\{p^*, y^*, x^{*(1)}, x^{*(2)}\right\}=$$
$$=\left\{\left(p_1^*, p_2^*\right),\left(1-t^*, 1-\frac{1}{t^*}\right),\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}(t^*)^2-\frac{1}{2}t^*, \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\left(t^*\right)^2}+\frac{5}{4}-\frac{1}{2t^*}\right)\right\}.$$

В примере 11.4.2 МЭД $r = n = m = 2$.

11.4.2. Пример 11.4.2. Рассмотрим следующую МЭД:

1) пространство продуктов (ресурсов) E_2;

2) технологическое множество $Y^{(1)}$ фирмы $F^{(1)}$ имеет вид

$$Y^{(1)} = \{(y_1, y_2) | y_1 < 1, y_2 \le y_1/(y_1 - 1)\},$$

технологическое множество $Y^{(2)}$ фирмы $F^{(2)}$ имеет вид

$$Y^{(2)} = \{(y_1, y_2) | y_1 < 1, y_2 \le g/(y_1)\},$$

где $g(y_1)=\begin{cases} 1-e^{y_1}, & y_1 \le 0, \\ \ln(1-y_1), & 0 < y_1 < 1; \end{cases}$

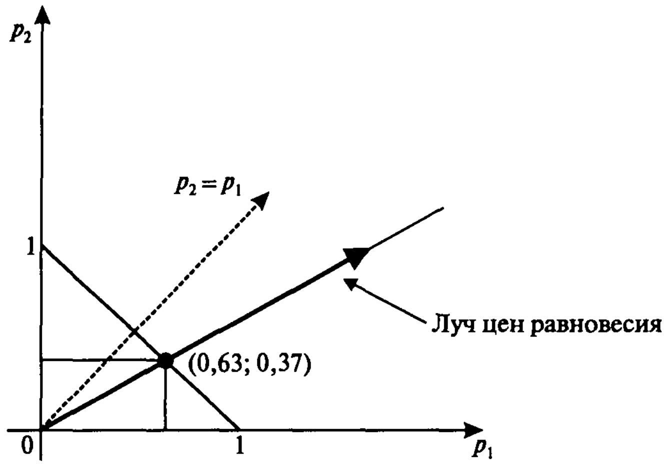


Рис. 11.3

3) потребитель $C^{(1)}$ имеет начальный запас $z^{(1)} = (1; 3)$ и функцию полезности $U_1(x_1, x_2) = x_1x_2$, потребитель $C^{(2)}$ имеет начальный запас $z^{(2)} = (4; 2)$ и функцию полезности $U_2(x_1, x_2) = x_1^2x_2$;

4) доли потребителей $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ в прибыли фирмы $F^{(1)}$ равны $\alpha_{11} = {}^3/_4$ и $\alpha_{21} = {}^1/_4$; в прибыли фирмы $F^{(2)}$ равны $\alpha_{12} = {}^1/_3$ и $\alpha_{22} = {}^2/_3$.

Требуется построить технологические множества $Y^{(1)}$ и $Y^{(2)}$, найти для вектора цен $p = (p_1, p_2)$ локальное рыночное равновесие, максимальную прибыль каждой фирмы $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$, найти локальное рыночное равновесие для каждого потребителя $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$, выписать избыточный спрос, найти нормированные цены равновесия, статическое экономическое равновесие, построить множества $2Y^{(1)}$, $Y^{(1)} + Y^{(1)}$, $Y^{(1)} + Y^{(2)}$.

1°. Технологические множества $Y^{(1)}$ и $Y^{(2)}$ расположены левее и ниже линий, которые являются графиками функций $y_2 = \dfrac{y_1}{y_1 - 1}$ и $y_2 = g(y_1)$ (рис. 11.4).

При $y_1 < 0$ имеем неравенство $\dfrac{y_1}{y_1 - 1} < 1 - e^{y_1}$, так как при $y_1 < 0$ и близких к точке $y_1 = 0$ имеем представления

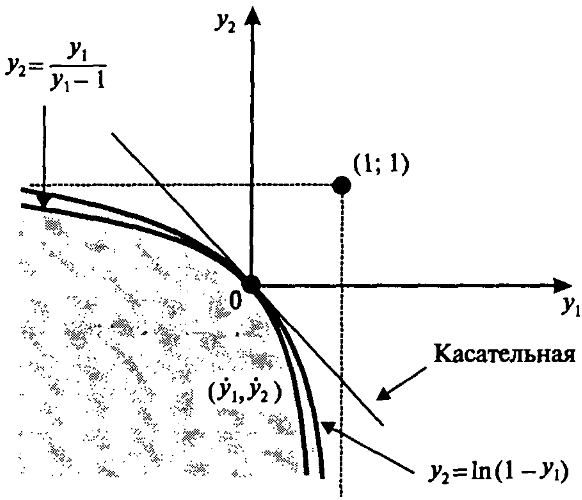


Рис. 11.4

$$\frac{y_1}{y_1-1}=1+\frac{1}{y_1-1}=-y_1-y_1^2-\dots,$$

$$1-e^{y_1}=-y_1-\frac{y_1^2}{2}-\dots .$$

При $y_1<0$

$$\frac{y_1}{y_1-1}<1-e^{y_1}, \tag{11.4.5}$$

ибо при $y_1 \to -\infty$ экспонента $-e^{y_1}$ приближается к оси Oy_1 снизу быстрее, чем гипербола $\dfrac{1}{y_1-1}$.

При $0<y_1<1$ имеет место неравенство

$$\frac{y_1}{y_1-1}<\ln(1-y_1),$$

так как при $0<y_1<1$ справедливы представления

$$\frac{y_1}{y_1-1}=1+\frac{1}{y_1-1}=-y_1-y_1^2-\dots,$$

$$\ln(1-y_1)=-y_1-\frac{y_1^2}{2}-\dots .$$

2°. Локальное рыночное равновесие (предложение) фирмы $F^{(1)}$ было дано в примере 11.4.1: $\overset{o}{y}^{(1)}(p) = \left(1-\tau, 1-\dfrac{1}{\tau}\right)$, где $\tau = \sqrt{p_2/p_1} > 0$.

Максимальная прибыль

$$P\overset{o}{R}^{(1)}(p) = p_1\overset{o}{y}_1^{(1)}(p) + p_2\overset{o}{y}_2^{(1)}(p) = p_1(1-\tau) + p_2\left(1-\frac{1}{\tau}\right).$$

3°. Для фирмы $F^{(2)}$ следует рассмотреть два случая: $\tau \geq 1$ и $0 < \tau < 1$.

При $\tau \geq 1$ (тогда $\sqrt{p_2/p_1} \geq 1$, откуда следует, что $p_2 \geq p_1$) необходимо решить задачу на условный экстремум

$$p_1x_1 + p_2x_2 \ (\max)$$

при условии, что

$$y_2 = 1 - e^{y_1}.$$

Частные производные функции Лагранжа $L = p_1y_1 + p_2y_2 + \lambda(y_2 - 1 + e^{y_1})$ приравняем к нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = p_1 + \lambda e^{y_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y_2} = p_2 + \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = y_2 - 1 + e^{y_1} = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{p_2}{p_1} = e^{-y_1}.$$

Полагая в последнем равенстве $\sqrt{p_2/p_1} = \tau$, будем иметь

$$\overset{o}{y}_{1(p)}^{(2)}(p) = -2\ln\tau,$$

а также

$$\overset{o}{y}_2^{(2)}(p) = 1 - e^{-\overset{o}{y}_1^{(2)}} = 1 - \frac{1}{\tau^2}.$$

Таким образом, при $\tau \geq 1$ локальное рыночное равновесие (предложение) фирмы $F^{(2)}$ имеет вид

$$\overset{o}{y}^{(2)}(p) = \left(-2\ln\tau;\ 1 - \frac{1}{\tau^2}\right)$$

и максимальная прибыль фирмы $F^{(2)}$ равна

$$\overset{\circ}{PR}{}^{(2)}(p) = -2p_1 \ln\tau + p_2\left(1 - \frac{1}{\tau^2}\right).$$

При $0 < \tau < 1$ (тогда $0 < \sqrt{p_2/p_1} < 1$, откуда следует, что $p_2 < p_1$) необходимо решить задачу на условный экстремум

$$p_1y_1 + p_2y_2 \text{ (max)}$$

при условии, что

$$y_2 = \ln(1 - y_1).$$

Частные производные функции Лагранжа $L = p_1y_1 + p_2y_2 + \lambda(y_2 - \ln(1 - y_1))$ приравняем к нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = p_1 + \frac{\lambda}{1-y_1} = 0,\ \frac{\partial L}{\partial y_2} = p_2 + \lambda = 0,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = y_2 - \ln(1-y_1) = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 - y_1,$$

т.е.

$$\overset{\circ}{y}{}_1^{(2)}(p) = 1 - \tau^2$$

и

$$\overset{\circ}{y}{}_2^{(2)}(p) = \ln(1 - \overset{\circ}{y}{}_1^{(2)}(p)) = \ln\tau^2 = 2\ln\tau.$$

Таким образом, при $0 < \tau < 1$ локальное рыночное равновесие (предложение) фирмы $F^{(2)}$ имеет вид

$$\overset{\circ}{y}{}^{(2)}(p) = \left(1 - \tau^2;\ 2\ln\tau\right)$$

и максимальная прибыль фирмы $F^{(2)}$ равна

$$\overset{\circ}{PR}{}^{(2)}(p) = p_1(1 - \tau^2) + 2p_2\ln\tau.$$

4°. Локальное рыночное равновесие (спрос) $\overset{\circ}{x}{}^{(1)}(p) = \left(\overset{\circ}{x}{}_1^{(1)}(p);\ \overset{\circ}{x}{}_2^{(1)}(p)\right)$ потребителя $C^{(1)}$ имеет вид

$$\overset{\circ}{x}{}_1^{(1)}(p) = \frac{\alpha_1 M_1}{(\alpha_1 + \alpha_2)p_1} = \frac{M_1}{2p_1},\ \overset{\circ}{x}{}_2^{(1)}(p) = \frac{\alpha_2 M_1}{(\alpha_1 + \alpha_2)p_2} = \frac{M_1}{2p_2},$$

где $M_1 = M_1^{(1)} + M_1^{(2)} = p_1 z_1^{(1)} + p_2 z_2^{(1)} + \alpha_{11} P\overset{\circ}{R}^{(1)} + \alpha_{12} P\overset{\circ}{R}^{(2)}$.

При $\tau \geq 1$ имеем

$$\overset{\circ}{x}{}_1^{(1)}(p) = \frac{1}{2p_1} M_1 = \frac{1}{2p_1}\left(M_1^{(1)} + M_1^{(2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2p_1}\left(p_1 + 3p_2 + \frac{3}{4}p_1(1-\tau) + \frac{3}{4}p_2(1-\frac{1}{\tau}) - \frac{2}{3}p_1 \ln\tau + \frac{1}{3}p_2\left(1-\frac{1}{\tau^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{17+49\tau^2-18\tau-8\ln\tau}{24},$$

$$\overset{\circ}{x}{}_2^{(1)}(p) = \frac{1}{2p_2} M_1 = \frac{1}{2p_2}\left(M_1^{(1)} + M_1^{(2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2p_2}\left(p_1 + 3p_2 + \frac{3}{4}p_1(1-\tau) + \frac{3}{4}p_2(1-\frac{1}{\tau}) - \frac{2}{3}p_1 \ln\tau + \frac{1}{3}p_2\left(1-\frac{1}{\tau^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{17+49\tau^2-18\tau-8\ln\tau}{24\tau^2}.$$

При $0 < \tau < 1$ имеем

$$\overset{\circ}{x}{}_1^{(1)}(p) = \frac{1}{2p_1} M_1 = \frac{1}{2p_1}\left(M_1^{(1)} + M_1^{(2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2p_1}\left(p_1 + 3p_2 + \frac{3}{4}(p_1(1-\tau) + p_2(1-\frac{1}{\tau})) + \frac{1}{3}(p_1(1-\tau^2) + 2p_2 \ln\tau)\right)$$

$$= \frac{25+41\tau^2-18\tau+8\tau^2\ln\tau}{24},$$

$$\overset{\circ}{x}{}_2^{(1)}(p) = \frac{1}{2p_2} M_1 = \frac{1}{2p_2}\left(M_1^{(1)} + M_1^{(2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2p_2}\left(p_1 + 3p_2 + \frac{3}{4}(p_1(1-\tau) + p_2(1-\frac{1}{\tau})) + \frac{1}{3}(p_1(1-\tau^2) + 2p_2 \ln\tau)\right)$$

$$= \frac{25+41\tau^2-18\tau+8\tau^2\ln\tau}{24\tau^2}.$$

5°. Локальное рыночное равновесие (спрос) $\overset{\circ}{x}{}^{(2)}(p)=\left(\overset{\circ}{x}{}_1^{(2)}(p),\ \overset{\circ}{x}{}_2^{(2)}(p)\right)$ потребителя $C^{(2)}$ имеет вид

$$\overset{\circ}{x}{}_1^{(2)}(p)=\frac{\alpha_1 M_2}{(\alpha_1+\alpha_2)p_1}=\frac{2M_2}{3p_1},\quad \overset{\circ}{x}{}_2^{(2)}(p)=\frac{\alpha_2 M_2}{(\alpha_1+\alpha_2)p_2}=\frac{M_2}{3p_2},$$

где $M_1=M_1^{(1)}+M_1^{(2)}=p_1 z_1^{(2)}+p_2 z_2^{(2)}+\alpha_{21}\overset{\circ}{PR}{}^{(1)}+\alpha_{22}\overset{\circ}{PR}{}^{(2)}$.

При $\tau\geq 1$ имеем

$$\overset{\circ}{x}{}_1^{(2)}(p)=\frac{2}{3p_1}M_2=\frac{2}{3p_1}\left(M_2^{(1)}+M_2^{(2)}\right)=$$

$$=\frac{2}{3p_1}\left(4p_1+2p_2+\frac{1}{4}(p_1(1-\tau)+p_2(1-\frac{1}{\tau}))+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3}(-2p_1\ln\tau+p_2(1-\frac{1}{\tau}))\right)=\frac{43+35\tau^2-6\tau-16\ln\tau}{18},$$

$$\overset{\circ}{x}{}_2^{(2)}(p)=\frac{1}{3p_2}M_2=\frac{1}{3p_2}\left(M_2^{(1)}+M_2^{(2)}\right)=$$

$$=\frac{1}{3p_2}\left(4p_1+2p_2+\frac{1}{4}(p_1(1-\tau)+p_2(1-\frac{1}{\tau}))+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3}(-2p_1\ln\tau+p_2(1-\frac{1}{\tau}))\right)=\frac{43+35\tau^2-6\tau-16\ln\tau}{36\tau^2}.$$

При $0<\tau<1$ имеем

$$\overset{\circ}{x}{}_1^{(2)}(p)=\frac{2}{3p_1}M_2=\frac{2}{3p_1}\left(M_2^{(1)}+M_2^{(2)}\right)=$$

$$=\frac{2}{3p_1}\left(4p_1+2p_2+\frac{1}{4}(p_1(1-\tau)+p_2(1-\frac{1}{\tau}))+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3}(p_1(1-\tau^2)+p_2\ln\tau)\right)=\frac{59+19\tau^2-6\tau+16\tau^2\ln\tau}{18},$$

$$\overset{\circ}{x}{}_2^{(2)}(p)=\frac{1}{3p_2}M_2=\frac{1}{3p_2}\left(M_2^{(1)}+M_2^{(2)}\right)=$$

$$=\frac{1}{3p_2}\left(4p_1+2p_2+\frac{1}{4}(p_1(1-\tau)+p_2(1-\frac{1}{\tau}))+\frac{2}{3}(p_1(1-\tau^2)+2p_2\ln\tau)\right)=$$

$$=\frac{59+19\tau^2-6\tau+16\tau^2\ln\tau}{36\tau^2}.$$

6°. Выписываем первую ($F_1(p)$) и вторую ($F_2(p)$) координаты избыточного спроса $F(p)$.

При $\tau\geq 1$ имеем

$$F_1(p)=\overset{\circ(1)}{x_1}(p)+\overset{\circ(2)}{x_1}(p)-\overset{\circ(1)}{y_1}(p)-\overset{\circ(2)}{y_1}(p)-z_1^{(1)}-z_1^{(2)}=$$

$$=\frac{17+49\tau^2-18\tau-8\ln\tau}{24}+\frac{43+35\tau^2-6\tau-16\ln\tau}{18}-1+\tau+2\ln\tau-5=$$

$$=\frac{-209+287\tau^2-6\tau+56\ln\tau}{72},$$

$$F_2(p)=\overset{\circ(1)}{x_1}(p)+\overset{\circ(2)}{x_2}(p)-\overset{\circ(1)}{y_1}(p)-\overset{\circ(2)}{y_2}(p)-z_2^{(1)}-z_2^{(2)}=$$

$$=\frac{17+49\tau^2-18\tau-8\ln\tau}{24\tau^2}+\frac{43+35\tau^2-6\tau-16\ln\tau}{18\tau^2}-1+\frac{1}{\tau}-1+\frac{1}{\tau^2}-5=$$

$$=\frac{209-287\tau^2+6\tau-56\ln\tau}{72\tau^2}.$$

При $0<\tau<1$ имеем

$$F_1(p)=\overset{\circ(1)}{x_1}(p)+\overset{\circ(2)}{x_1}(p)-\overset{\circ(1)}{y_1}(p)-\overset{\circ(2)}{y_1}(p)-z_1^{(1)}-z_1^{(2)}=$$

$$=\frac{25+41\tau^2-18\tau-8\tau^2\ln\tau}{24}+\frac{39+19\tau^2-6\tau-16\tau^2\ln\tau}{18}-1+\tau-1+\tau^2-5=$$

$$=\frac{-193+271\tau^2-6\tau+88\tau^2\ln\tau}{72},$$

$$F_2(p)=\overset{o(1)}{x_2}(p)+\overset{o(2)}{x_2}(p)-\overset{o(1)}{y_2}(p)-\overset{o(2)}{y_2}(p)-z_2^{(1)}-z_2^{(2)}=$$

$$=\frac{25+41\tau^2-18\tau-8\tau^2\ln\tau}{24\tau^2}+\frac{59+19\tau^2-6\tau-16\tau^2\ln\tau}{36\tau^2}-1+\frac{1}{\tau}-2\ln\tau-5=$$

$$=\frac{193-271\tau^2+6\tau-88\tau^2\ln\tau}{72\tau^2}.$$

Таким образом, при $\tau \geq 1$ $(p_2 \geq p_1)$ имеем

$$F(p)=\left(\frac{-209+287\tau^2-6\tau+56\ln\tau}{72},\ -\frac{-209+287\tau^2-6\tau+56\ln\tau}{72\tau^2}\right).$$

При $0 < \tau < 1$ $(p_2 < p_1)$ имеем

$$F(p)=\left(\frac{-193+271\tau^2-6\tau+88\tau^2\ln\tau}{72},\ -\frac{-193+271\tau^2-6\tau+88\tau^2\ln\tau}{72\tau^2}\right).$$

7°. Аналогично тому, что мы имели в примере 11.4.1, в рассматриваемом примере 11.4.2 всегда $p = (p_1, p_2) > 0$, поэтому (по закону Вальраса) $F(p) = 0$, т.е. $F_1(p) = 0$, $F_2(p) = 0$.

При $\tau \geq 1$ имеем уравнение

$$-209 + 287\tau^2 - 6\tau + 56\ln\tau = 0,$$

откуда следует, что

$$287\tau^2 - 6\tau + 56\ln\tau = 209.$$

При $\tau \geq 1$ это уравнение не имеет решений, ибо при $\tau = 1$ имеем

$$287 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 56\ln 1 = 287 - 6 = 281 > 209$$

и производная левой части равенства $287\tau^2 - 6\tau + 56\ln\tau = 209$

$$287\cdot 2\tau-6+\frac{56}{\tau}$$

при $\tau \geq 1$ положительна, ибо уравнение $287\tau^2 - 3\tau + 28 = 0$ не имеет действительных корней и, следовательно, его левая часть положительна.

При $0 < \tau < 1$ имеем уравнение

$$f(\tau) = 271\tau^2 - 6\tau + 88\tau^2\ln\tau = 193.$$

Путем перебора получаем, что $f(0{,}87) \cong 190{,}6215 < 193$, $f(0{,}88) \cong \cong 195 > 193$, откуда следует, что $\tau^* \cong 0{,}87$, а $(\tau^*)^2 \cong 0{,}7569 = p_2/p_1$.

Добавив к последнему равенству условие нормировки $p_1 + p_2 = 1$, получим, что $p_1^* \cong 0{,}5692$, $p_2^* \cong 0{,}4308$. Таким образом, вектор $p^* = (p_1^*, p_2^*)$ цен статического экономического равновесия равен $p^* \cong (0{,}5692;\ 0{,}4308)$, $p_1^* \cong 0{,}5692$, $p_2^* \cong 0{,}4308$.

Статическое экономическое равновесие рассматриваемой МЭД есть набор

$$\left\{p^*, y^{*(1)}, y^{*(2)}, x^{*(1)}, x^{*(2)}\right\} =$$

$$= \left\{(p_1^*, p_2^*),\ (1-\tau^*,\ 1-\frac{1}{\tau^*}),\ (1-(\tau^*)^2;\ \ 2\ln\tau^*),\right.$$

$$\left(\frac{25+41(\tau^*)^2-18\tau^*+8(\tau^*)^2\ln\tau^*}{24},\ \frac{25+41(\tau^*)^2-18\tau^*+8(\tau^*)^2\ln\tau^*}{24(\tau^*)^2}\right),$$

$$\left.\left(\frac{59+19(\tau^*)^2-6\tau^*+16\tau^*\ln\tau^*}{18},\ \frac{59+19(\tau^*)^2-6\tau^*+16\tau^*\ln\tau^*}{36\tau^*}\right)\right\},$$

где $\tau^* \cong 0{,}87$.

8°. Для того чтобы построить множество $Y = 2Y^{(1)}$, отметим, что по определению

$$Y = 2Y^{(1)} \overset{(def)}{=} \left\{y \mid y = 2y^{(1)},\ y^{(1)} \in Y^{(1)}\right\},$$

или более детально

$$Y = 2Y^{(1)} = \left\{(y_1, y_2) \mid (y_1, y_2) = (2y_1^{(1)}, 2y_2^{(1)}),\ y_1^{(1)} < 1,\ y_2^{(1)} \le \frac{y_1^{(1)}}{y_1^{(1)}-1}\right\}.$$

Положив $2y_1^{(1)} = y_1$, $2y_2^{(1)} = y_2$, получим для множества $Y = 2Y^{(1)}$ следующее представление:

$$2Y^{(1)} = \left\{(y_1, y_2) \mid \frac{y_1}{2} < 1,\ \frac{y_2}{2} \le \frac{y_1/2}{(y_1/2)-1}\right\} = \left\{(y_1, y_2) \mid y_1 < 2,\ y_2 \le \frac{2y}{y-2}\right\}.$$

Множество $Y = 2Y^{(1)}$ изображено на рис. 11.5.

Для того чтобы построить множества $Y = Y^{(1)} + Y^{(1)}$ и $Y = Y^{(1)} + Y^{(2)}$, напомним определение алгебраической суммы множеств (суммы Минковского):

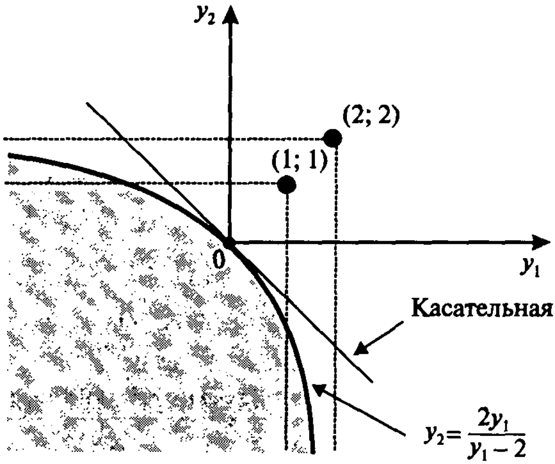


Рис. 11.5

$$Y = Y^{(1)} + Y^{(1)} \overset{(def)}{=} \left\{ y \mid y = y^{(1)} + y^{(2)}, y^{(1)} \in Y^{(1)}, y^{(2)} \in Y^{(1)} \right\},$$

$$Y = Y^{(1)} + Y^{(2)} \overset{(def)}{=} \left\{ y \mid y = y^{(1)} + y^{(2)}, y^{(1)} \in Y^{(1)}, y^{(2)} \in Y^{(2)} \right\}.$$

Очевидно, что

$$Y^{(1)} + Y^{(2)} = \bigcup_{y^{(1)} \in Y^{(1)}} (y^{(1)} + Y^{(2)}) = \bigcup_{y^{(2)} \in Y^{(2)}} (Y^{(1)} + y^{(2)}).$$

Здесь символ $y^{(1)} + Y^{(2)}(Y^{(1)} + y^{(2)})$ означает сдвиг каждого элемента $y^{(2)} \in Y^{(2)}$ ($y^{(1)} \in Y^{(1)}$) на вектор $y^{(1)}$ (на вектор $y^{(2)}$). Следовательно, алгебраическая сумма $Y^{(1)} + Y^{(2)}$ множеств $Y^{(1)}$ и $Y^{(2)}$ представляет собой объединение всех параллельных переносов множества $Y^{(2)}$ (множества $Y^{(1)}$) на всевозможные векторы $y^{(1)}$ из множества $Y^{(1)}$ (на всевозможные векторы $y^{(2)}$ из множества $Y^{(2)}$).

На рис. 11.6 линия l_1 изображает эффективную («северо-восточную») границу множества $Y^{(1)}$, которая имеет уравнение

$$y_2^{(1)} = \frac{y_1^{(1)}}{y_1^{(1)} - 1},$$

(пунктирная) линия l_2 изображает эффективную границу множества $Y^{(2)}$, которая имеет уравнение

$$y_2^{(2)} = g(y_1^{(2)}),$$

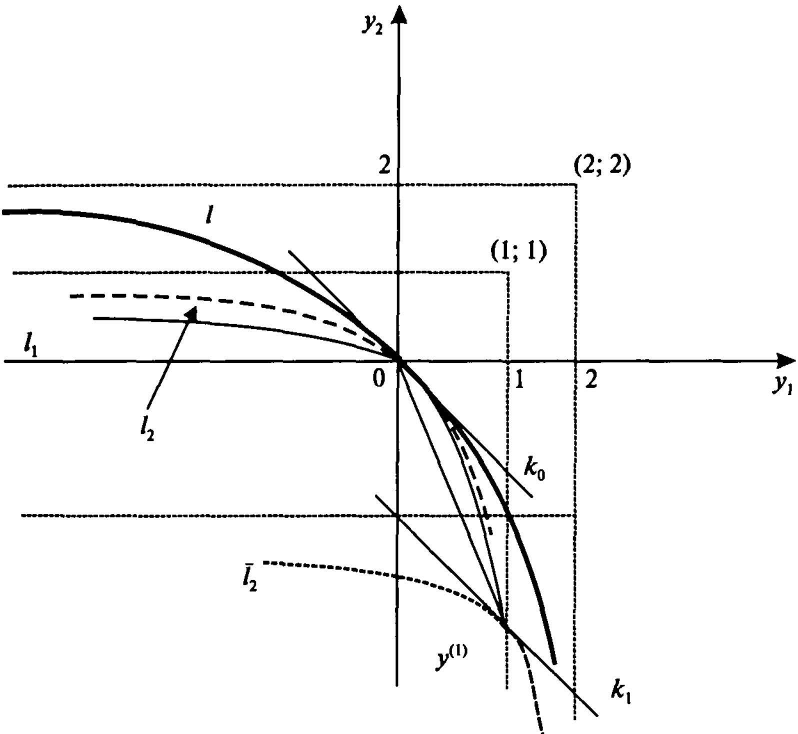


Рис. 11.6

линия l изображает эффективную границу множества $Y^{(1)} + Y^{(2)}$, которая имеет уравнение

$$y_2 = h(y_1).$$

Аналитическое представление $h(y_1)$ будет получено ниже для множеств $Y^{(1)} + Y^{(1)}$ и $Y^{(1)} + Y^{(2)}$.

Далее на рис. 11.6 линия $\bar{l}_2$ получена из линии l_2 путем ее (линии l_2) сдвига параллельным переносом на вектор $y^{(1)}$ (изображенный на рис. 11.6). Прямая K_0 — касательная к линиям l_1, l_2 и l в точке О, прямая K_1 — касательная к линии $\bar{l}_2$ в точке $y^{(1)} = (y_1^{(1)}, y_2^{(1)})$.

Очевидно, линия l есть огибающая семейства линий $\bar{l}_2$, когда вектор $y^{(1)}$ пробегает всю эффективную границу l_1 множества $Y^{(1)}$. Сама линия $\bar{l}_2$ заметает (от слова *метла*) все множество $Y^{(1)} + Y^{(2)}$. Аналогично можно было бы выбрать вектор $y^{(2)}$, принадлежащий эффективной границе множества $Y^{(2)}$, который осуществлял бы параллельный перенос линии l_1, а затем построить линию l как огибающую семейства линий $\overline{l}_1$ (линия $\overline{l}_1$ получается из линии l_1 путем ее сдвига на вектор $y^{(2)}$), когда вектор $y^{(2)}$ пробегает всю эффективную границу множества $Y^{(2)}$. При этом сама линия $\overline{l}_1$ будет заметать все множество $Y^{(1)} + Y^{(2)}$.

Сначала получим уравнение огибающей линии l в случае, когда вместо множества $Y^{(2)}$ фигурирует множество $Y^{(1)}$, а множество $Y^{(1)}$ фигурирует в качестве самого себя.

Итак, имеем

$Y = Y^{(1)} + Y^{(1)} = \{y | y = y^{(1)} + y^{(2)}, y^{(1)} \in Y^{(1)}, y^{(2)} \in Y^{(1)}\}$, при этом

$$y_1^{(1)} < 1, y_1^{(2)} < 1, \ y_2^{(1)} \le \frac{y_1^{(1)}}{y_1^{(1)} - 1}, \quad y_2^{(2)} \le \frac{y_1^{(2)}}{y_1^{(2)} - 1}.$$

Положим

$$y_1 = y_1^{(1)} + y_1^{(2)}, y_2 = y_2^{(1)} + y_2^{(2)}. \qquad (11.4.6)$$

Очевидно, $y_1 < 2$.

Рассмотрим уравнение эффективной границы множества $Y^{(1)}$:

$$y_2^{(1)} = \frac{y_1^{(1)}}{y_1^{(1)} - 1} \ \left(y_2^{(2)} = \frac{y_1^{(2)}}{y_1^{(2)} - 1}\right). \qquad (11.4.7)$$

Построим алгебраическую сумму (сумму Минковского) эффективной границы множества $Y^{(1)}$ и эффективной границы множества $Y^{(1)}$, используя метод построения огибающей однопараметрического семейства линий. Для этого перепишем равенства (11.4.6) и (11.4.7) следующим образом:

$$\frac{y_1^{(1)}}{y_1^{(1)} - 1} = y_2^{(1)} = y_2 - y_2^{(2)} = y_2 - \frac{y_1^{(2)}}{y_1^{(2)} - 1}, \ y_1^{(1)} = y_1 - y_1^{(2)},$$

откуда получаем уравнение

$$\frac{y_1 - y_1^{(2)}}{y_1 - y_1^{(2)} - 1} = y_2 - \frac{y_1^{(2)}}{y_1^{(2)} - 1} \qquad (11.4.8)$$

однопараметрического семейства линий, где переменная $y_1^{(2)}$ ($y_1^{(2)} < 1$) играет роль параметра.

Согласно теории огибающих (Математический энциклопедический словарь (1988)) следует взять и приравнять производные правой и левой частей уравнения (11.4.8) по параметру $y_1^{(2)}$:

$$\frac{-(y_1-y_1^{(2)}-1)+(y_1-y_1^{(2)})}{(y_1-y_1^{(2)}-1)^2}=-\frac{y_1^{(2)}-1-y_1^{(2)}}{(y_1^{(2)}-1)^2},$$

откуда после необходимых сокращений и преобразований получаем уравнение

$$(y_1-y_1^{(2)}-1)^2=(y_1^{(2)}-1)^2. \qquad (11.4.9)$$

Осталось из системы уравнений (11.4.8) и (11.4.9) исключить параметр $y_1^{(2)}$. Для этого сначала в уравнении (11.4.9) избавимся от квадратов.

Если $y_1 - y_1^{(2)} - 1 \geq 0$, то, извлекая из обеих частей уравнения (11.4.9) квадратный корень, будем иметь ($y_1^{(2)} < 1$)

$$y_1-y_1^{(2)}-1=1-y_1^{(2)},$$

откуда получаем $y_1 = 2$, что невозможно, ибо $y_1 < 2$.

Если $y_1 - y_1^{(2)} - 1 < 0$, то, извлекая из обеих частей уравнения (11.4.9) квадратный корень, будем иметь

$$-y_1+y_1^{(2)}+1=1-y_1^{(2)},$$

откуда получаем, что $y_1 = y_1^{(2)}/2$. Подставив последнее равенство в уравнение (11.4.8), получаем после элементарных преобразований

$$y_2=\frac{2y_1}{y_1-2}.$$

Таким образом, если $Y^{(2)} = Y^{(1)}$, то $y_2=h(y_1)=\dfrac{2y_1}{y_1-2}$.

В рассматриваемом случае оказалось, что $2Y^{(1)} = Y^{(1)} + Y^{(1)}$. Вообще говоря, справедливо включение $2Y^{(1)} \subseteq Y^{(1)} + Y^{(1)}$, что подтверждается простым примером:

$$2Y^{(1)}=2\left\{(y_1^{(1)},y_2^{(1)})\,|\,y_2^{(1)}=\frac{y_1^{(1)}}{y_1^{(1)}-1},\ y_1^{(1)}<1\right\}=$$

$$=\left\{(y_1,y_2)\,|\,y_2=\frac{2y_1}{y_1-2},\ y_1<2\right\}\subset\left\{(y_1,y_2)\,|\,y_2\leq\frac{2y_1}{y_1-2},\ y_1<2\right\}=$$

$$=Y^{(1)}+Y^{(1)}.$$

Построение уравнения огибающей в случае множеств $Y^{(1)}$ и $Y^{(2)}$ аналогично только что рассмотренному случаю, когда вместо множества $Y^{(2)}$ фигурировало множество $Y^{(1)}$.

Имеем

$$Y = Y^{(1)} + Y^{(2)} = \{y | y = y^{(1)} + y^{(2)}, y^{(1)} \in Y^{(1)}, y^{(2)} \in Y^{(2)}\},$$

при этом $0 \le y_1^{(1)} < 1,\ 0 \le y_1^{(2)} < 1,\ y_2^{(1)} \le \dfrac{y_1^{(1)}}{y_1^{(1)} - 1},\ y_2^{(2)} \le \dfrac{y_1^{(2)}}{y_1^{(2)} - 1}$.

Положим

$$y_1 = y_1^{(1)} + y_1^{(2)}, y_2 = y_2^{(1)} + y_2^{(2)}. \qquad (11.4.10)$$

Очевидно, $y_1 < 1$.

Уравнения эффективных границ множеств $Y^{(1)}$ и $Y^{(2)}$ соответственно имеют вид

$$y_2^{(1)} = \frac{y_1^{(1)}}{y_1^{(1)} - 1},\ y_2^{(2)} = \frac{y_1^{(2)}}{y_1^{(2)} - 1}. \qquad (11.4.11)$$

Как и в случае, когда вместо множества $Y^{(2)}$ фигурировало множество $Y^{(1)}$, имеем

$$y_1^{(1)} = y_1 - y_1^{(2)},$$

$$\ln(1 - y_1 + y_1^{(2)}) = \ln(1 - y_1^{(1)}) = y_2^{(1)} = y_2 - y_2^{(2)} = y_2 - \frac{y_1^{(2)}}{y_1^{(2)} - 1}. \qquad (11.4.12)$$

Оставив в (11.4.12) крайние звенья, будем иметь уравнение

$$\ln(1 - y_1 + y_1^{(2)}) = y_2 - \frac{y_1^{(2)}}{y_1^{(2)} - 1}, \qquad (11.4.13)$$

содержащее переменные y_1, y_2 и параметр $y_1^{(2)}$.

Согласно теории огибающих возьмем и приравняем производные по параметру $y_1^{(2)}$ правой и левой частей уравнения (11.4.13):

$$\left(\ln(1 - y_1 + y_1^{(2)})\right)'_{y_1^{(2)}} = \left(y_2 - \frac{y_1^{(2)}}{y_1^{(2)} - 1}\right)'_{y_1^{(2)}},$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{1 - y_1 + y_1^{(2)}} = -\frac{(y_1^{(2)} - 1) - y_1^{(2)}}{(y_1^{(2)} - 1)^2},$$

т.е.

$$(y_1^{(2)} - 1)^2 = 1 - y_1 + y_1^{(2)}. \qquad (11.4.14)$$

Для того чтобы получить уравнение огибающей $y_2 = h(y_1)$, следует из системы уравнений (11.4.13), (11.4.14) исключить параметр $y_1^{(2)}$ $(0 \le y_1^{(2)} < 1)$.

Раскроем скобки в (11.4.14) и решим квадратное уравнение

$$(y_1^{(2)})^2 - 3y_1^{(2)} + y_1 = 0$$

относительно параметра $y_1^{(2)}$. Имеем, очевидно,

$$y_1^{(2)} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4y_1}}{2}.$$

Корень

$$y_1^{(2)} = \frac{3+\sqrt{9-4y_1}}{2} > 1, (9-4y_1) \geq 0,$$

поэтому он является посторонним, ибо $0 \leq y_1^{(2)} < 1$.

Корень

$$0 \leq y_1^{(2)} = \frac{3-\sqrt{9-4y_1}}{2} < 1, \qquad (11.4.15)$$

откуда следует, что $0 \leq y_1 < 2$, т.е. этот корень подходит.

Подставив выражение $y_1^{(2)}$ в уравнение (11.4.13), будем иметь

$$\ln\left(1-y_1+\frac{3-\sqrt{9-4y_1}}{2}\right) = y_2 - \frac{\frac{3-\sqrt{9-4y_1}}{2}}{\frac{3-\sqrt{9-4y_1}}{2}-1},$$

откуда получаем, что

$$y_2 = \frac{6-4y_1-2\sqrt{9-4y_1}}{4(2-y_1)} + \ln\frac{5-2y_1-\sqrt{9-4y_1}}{2}. \qquad (11.4.16)$$

Таким образом, при $0 \leq y_1^{(1)} < 1$, $0 \leq y_1^{(2)} < 1$, $0 \leq y_1 < 2$ уравнение эффективной границы множества $Y = Y^{(1)} + Y^{(2)}$, которая является огибающей однопараметрического семейства линий (11.4.13), имеет вид (11.4.16).

Переходим к случаю $y_1^{(1)} \leq 0$, $y_1^{(2)} \leq 0$, $(y_1 = y_1^{(1)} + y_1^{(2)} \leq 0)$, тогда $0 \leq y_2^{(1)} < 1$ и $0 \leq y_2^{(2)} < 1$, $(0 \leq y_2 < 2)$.

Положим, как и ранее, $y_1^{(1)} = y_1^{(1)} - y_1^{(2)}$, $y_2^{(1)} = y_2 - y_2^{(2)}$.

В рассматриваемом случае получим

$$Y^{(1)} = \left\{ (y_1^{(1)}, y_2^{(1)}) \mid y_1^{(1)} \le 0,\ 0 \le y_2^{(1)} \le 1 - e^{y_1^{(1)}} \right\},$$

$$Y^{(2)} = \left\{ (y_1^{(2)}, y_2^{(2)}) \mid y_1^{(2)} \le 0,\ 0 \le y_2^{(2)} \le \frac{y_1^{(2)}}{y_1^{(2)} - 1} \right\}.$$

Выразим $y_1^{(1)}$ через $y_2^{(1)}$ и $y_1^{(2)}$ через $y_2^{(2)}$:

$$y_2^{(1)} = 1 - e^{y_1^{(1)}} \Rightarrow y_1^{(1)} = \ln\left(1 - y_2^{(1)}\right),$$

$$y_2^{(2)} = \frac{y_1^{(2)}}{y_1^{(2)} - 1} \Rightarrow y_1^{(2)} = \frac{y_2^{(2)}}{y_2^{(2)} - 1}.$$

Имеем

$$y_1 - \frac{y_2^{(2)}}{y_2^{(2)} - 1} = y_1 - y_1^{(2)} = y_1^{(1)} = \ln(1 - y_2^{(1)}) = \ln(1 - y_2 + y_2^{(2)}).$$

Выпишем крайние звенья приведенной цепочки

$$y_1 - \frac{y_2^{(2)}}{y_2^{(2)} - 1} = \ln(1 - y_2 + y_2^{(2)}). \qquad (11.4.17)$$

Согласно теории огибающих возьмем и приравняем производные по параметру $y_2^{(2)}$ правой и левой частей уравнения (11.4.17):

$$\left(y_1 - \frac{y_2^{(2)}}{y_2^{(2)} - 1} \right)'_{y_2^{(2)}} = \left(\ln(1 - y_2 + y_2^{(2)}) \right)'_{y_2^{(2)}},$$

откуда следует, что

$$(y_2^{(2)} - 1)^2 = 1 - y_2 + y_2^{(2)}. \qquad (11.4.18)$$

Для того чтобы получить уравнение огибающей, из системы уравнений (11.4.17) и (11.4.18) следует исключить параметр $y_2^{(2)}$ $(0 \le y_2^{(2)} < 1)$.

В связи с тем что переменные y_1, y_2 и параметр $y_2^{(2)}$ в уравнениях (11.4.17) и (11.4.18) соответствуют переменным y_2, y_1 и параметру $y_1^{(2)}$, по аналогии с решением (11.4.16) системы уравнений (11.4.13) и (11.4.14) выпишем решение

$$y_1 = \frac{6 - 4y_2 - 2\sqrt{9 - 4y_2}}{4(2 - y_2)} + \ln\frac{5 - 2y_2 - \sqrt{9 - 4y_2}}{2}. \qquad (11.4.19)$$

Таким образом, при $0 \le y_2^{(2)} < 1$, $0 \le y_2^{(1)} < 1$, $0 \le y_2 < 2$ уравнение эффективной границы множества $Y = Y^{(1)} + Y^{(2)}$, которая является огибающей однопараметрического семейства линий (11.4.17), имеет вид (11.4.19).

11.5. Критические замечания по МЭД и ее обобщения

МЭД — чисто теоретическая конструкция, которая представляет собой *абстрактную* модель, ее параметры и экзогенные переменные не оцениваются на основании реальных или (и) экспертных данных. Модель экономики называется *вычислимой*, если ее параметры и экзогенные переменные оцениваются на основании реальных или (и) экспертных данных.

Теоретические модели могут быть как абстрактными, так и вычислимыми. Прикладные модели — обязательно вычислимые модели. Для решения конкретных теоретических задач построено много абстрактных моделей. Абстрактные модели не являются универсальными. Универсальных моделей не существует, как не существует универсального транспортного средства, которое бы решало разнообразные транспортные проблемы перемещения в горах, по воде, в воздухе.

Как и всякая абстрактная модель, МЭД отражает многие характерные черты экономической реальности, но не все. Так, например, авторская версия МЭД не учитывает зарплату в формировании дохода потребителей. У каждого потребителя в МЭД доход формируется за счет ликвидного запаса и дивидендов из прибыли тех фирм, где потребитель является собственником. Для такого потребителя зарплата не нужна. Тогда в модели должны быть другие потребители, в формировании дохода которых важную роль играет заработная плата, а таких потребителей в МЭД нет. В МЭД нет динамики, и следовательно, в МЭД не представлена такая важная компонента экономической реальности, как инвестиционный процесс.

Если МЭД толковать как модель национальной экономики, в этой модели никак не отражаются внешние экономические связи.

Список таких замечаний может быть достаточно продолжительным. Но это обстоятельство, естественно, не умаляет главного достоинства МЭД как модели, для которой было получено доказательство существования статического экономического равновесия (общего экономического равновесия).

Работа Эрроу и Дебре стимулировала появление большого числа работ, в которых развивались в разнообразных направлениях основные положения МЭД.

В одной из версий МЭД в явном виде фигурируют труд и зарплата, в другой версии рассматривается динамический вариант МЭД. Во многих работах авторы шли в направлении повышения математического уровня абстракции МЭД за счет, в частности, перехода от конечного числа продуктов и потребителей к бесконечному числу продуктов и потребителей, что требовало от авторов весьма продвинутых математических средств, в частности теории топологических векторных пространств.

Результаты недавних исследований представлены в книге: *General Equilibrium: Problems, Prospects and Alternatives* (1999).

Абстрактные модели в экономической литературе выполняют важную функцию. Они играют роль формальных каркасов, которые охватывают в качестве частных случаев широкие классы прикладных моделей экономики. Небольшой список важных абстрактных моделей составляют динамические модели в матричной и конической формах (модели Дж. фон Неймана и Д. Гейла) и их обобщения, последние модели финансовой экономики. К этому списку «избранных» абстрактных моделей принадлежит и МЭД.

Вопросы для самоконтроля к главе 11

1. Опишите: сферу производства; теорию фирмы, затрачивающей несколько ресурсов и выпускающей несколько продуктов; технологическое множество фирмы и его свойства. Сформулируйте определение локального рыночного равновесия фирмы (определение предложения фирмы). Докажите однородность нулевой степени предложения фирмы как векторной функции цен.
2. Опишите технологическое множество сферы производства и сформулируйте его свойства. Дайте определение рыночного (совокупного) предложения.
3. Опишите сферу потребления, функцию полезности потребителя и ее свойства.
4. Опишите два слагаемых дохода потребителя. Сформулируйте локальное рыночное равновесие потребителя (спрос потребителя). Докажите однородность нулевой степени спроса потребителя как

векторной функции цен. Сформулируйте определение рыночного (совокупного) спроса.

5. Сформулируйте определение избыточного спроса. Докажите однородность нулевой степени избыточного спроса.
6. Сформулируйте закон Вальраса.
7. Сформулируйте определение статического экономического (конкурентного) равновесия.
8. Приведите формулировку теоремы Эрроу — Дебре.
9. Для сферы производства, состоящей из одной фирмы и содержащей два продукта, определите предложение фирмы как набор функций рыночных цен.
10. Для сферы потребления, состоящей из двух потребителей и содержащей два продукта, определите спрос первого и второго потребителей как наборы функций рыночных цен.
11. Определите понятие абстрактной модели. Приведите примеры абстрактных моделей.
12. Определите понятие вычислимой модели. Приведите примеры вычислимых моделей.
13. Сформулируйте критические замечания по модели Эрроу — Дебре.
14. Определите направления обобщения модели Эрроу — Дебре.

Задачи и упражнения для самоконтроля к главе 11

1. Технологическое множество Y фирмы F имеет вид

$$Y = \{(y_1; y_2) \mid y_1 < 1; y_2 \le g(y_1)\}, \text{ где } g(y_1) = \begin{cases} 1 - e^{y_1}, y_1 \le 0, \\ \ln(1 - y_1), 0 < y_1 < 1: \end{cases}$$

   1) постройте это множество на плоскости Oy_1y_2;
   2) найдите сумму $Y + Y$, опишите аналитически северо-восточную (эффективную) границу множества $Y + Y$. Постройте множество $Y + Y$. Ответ обоснуйте.

2. В моделируемой системе два продукта (продукт и ресурс), одна фирма F и два потребителя $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ Технологическое множество Y фирмы F описано в предыдущей задаче 1. Доли потребителей в прибыли фирмы F равны $\alpha_1 = {}^1/_4$; $\alpha_2 = {}^3/_4$. У потребителя $C^{(1)}$ начальный запас $(z_1^{(1)}; z_2^{(1)}) = (1; 3)$ и функция полезности $U_1(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$. У потребителя $C^{(2)}$ начальный запас $(z_1^{(2)}; z_2^{(2)}) = (2; 3)$ и функция полезности $U_2(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2^2$:
   а) найдите локальное рыночное равновесие фирмы F;
   б) найдите локальное рыночное равновесие у каждого потребителя $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$;
   в) выпишите вектор избыточного спроса;

г) Найдите цены равновесия (нормированные). Выпишите статическое экономическое равновесие;

д) постройте множество Y на плоскости Oy_1y_2.

3. В экономической системе два продукта (продукт и ресурс), две фирмы $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ и два потребителя $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$. Технологическое множество $Y^{(1)}$ фирмы $F^{(1)}$ имеет вид $Y^{(1)} = \{(y_1; y_2) | y_1 < 1; y_2 \le y_1/(y_1 - 1)\}$. Технологическое множество $Y^{(2)}$ фирмы $F^{(2)}$ имеет вид

$$Y^{(2)} = \{(y_1; y_2) | y_1 < 1; y_2 \le g(y_1)\}, \text{ где } g(y_1) = \begin{cases} 1 - e^{y_1}, y_1 \le 0, \\ \ln(1 - y_1), 0 < y_1 < 1. \end{cases}$$

Доля потребителей в прибыли фирмы $F^{(1)}$ и фирмы $F^{(2)}$ соответственно равны $\alpha_{11} = {}^2/_3$; $\alpha_{21} = {}^1/_3$; $\alpha_{12} = \alpha_{22} = {}^1/_2$. У потребителя $C^{(1)}$ начальный запас $(z_1^{(1)}; z_2^{(1)}) = (3; 1)$ и функция полезности $U(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2^2$. У потребителя $C^{(2)}$ начальный запас $(z_1^{(2)}; z_2^{(2)}) = (3; 2)$ и функция полезности $U(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$:

а) найдите локальное рыночное равновесие каждой фирмы;

б) найдите локальное рыночное равновесие для каждого потребителя;

в) выпишите вектор избыточного спроса;

г) найдите цены равновесия (нормированные). Выпишите статическое экономическое равновесие;

д) постройте множества $Y^{(2)}$ и $Y = Y^{(1)} + Y^{(2)}$.

4. Технологические множества $Y^{(1)}$ и $Y^{(2)}$ двух фирм $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ соответственно имеют вид

$$Y^{(1)} = \{y^{(1)} | y^{(1)} = (y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, 0 \le y_2^{(1)} \le \beta_1(-y_1^{(1)})^\alpha, y_1^{(1)} \le 0)\},$$

$$Y^{(2)} = \{y^{(2)} | y^{(2)} = (y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, 0 \le y_2^{(2)} \le \beta_2(-y_1^{(2)})^\alpha, y_1^{(2)} \le 0)\},$$

где α, β_1, β_2 — положительные параметры и $0 < \alpha < 1$:

а) постройте множества $Y^{(1)}$ и $Y^{(2)}$;

б) постройте множество $2Y^{(1)}$;

в) постройте множество $Y = Y^{(1)} + Y^{(2)}$;

г) опишите аналитически эффективную границу множества $Y = Y^{(1)} + Y^{(2)}$.

Вопросы, тесты и задачи для контрольных работ к главе 11

1 Фирма сферы производства МЭД характеризуется:

а) своей производственной функцией вида $y = f(y_1, ..., y_r)$, где y — объем выпускаемой фирмой продукции; y_i — количество затрачиваемого ресурса вида i, $i = 1, ..., r$;

б) технологическим множеством, описывающим допустимые комбинации затрачиваемых ресурсов и выпускаемых продуктов;

в) ответы а) и б) не верны.

2. Фирма сферы производства МЭД:

а) допускает соединенные затраты (т.е. использование ряда ресурсов);
б) допускает соединенные выпуски (т.е. выпуск ряда продуктов);
в) максимизирует прибыль;
г) ответы а)–в) являются верными.

3. Доход потребителя сферы потребления МЭД включает:
а) «стоимость» ликвидного запаса;
б) заработную плату;
в) субсидии государства;
г) налоговые льготы;
д) ответы а)–г) не верны.

4. В понятии статического экономического (конкурентного) равновесия исходным является понятие:
а) цен равновесия;
б) локального рыночного равновесия фирмы;
в) локального рыночного равновесия потребителя;
г) ответы а)–в) не верны.

5. Технологическое множество Y фирмы F имеет вид

$$Y = \{(y_1; y_2) \mid y_1 < 1; y_2 \le g(y_1)\}, \quad \text{где} \quad g(y_1) = \begin{cases} 1 - e^{y_1}, y_1 \le 0, \\ \ln(1 - y_1), 0 < y_1 < 1: \end{cases}$$

а) постройте это множество на плоскости Oy_1y_2;
б) Постройте множество $2Y$, опишите аналитически северо-восточную (эффективную) границу множества $2Y$. Ответ обоснуйте.

6. В моделируемой системе два продукта (продукт и ресурс), одна фирма F и два потребителя $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$. Технологическое множество Y фирмы F описано в задании 5. Доли потребителей в прибыли фирмы F равны $\alpha_1 = {}^1/_3$; $\alpha_2 = {}^2/_3$. У потребителя $C^{(1)}$ начальный запас $(z_1{}^{(1)}; z_2{}^{(1)}) = (2; 3)$ и функция полезности $U_1(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$. У потребителя $C^{(2)}$ начальный запас $(z_1{}^{(2)}; z_2{}^{(2)}) = (3; 2)$ и функция полезности $U_2(x_1, x_2) = x_1{}^2 \cdot x_2$:
а) найдите локальное рыночное равновесие фирмы F;
б) найдите локальное рыночное равновесие каждого потребителя $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$;
в) выпишите вектор избыточного спроса;
г) найдите цены равновесия (нормированные). Выпишите статическое экономическое равновесие;
д) постройте множество Y на плоскости Oy_1y_2.

7. В экономической системе два продукта (продукт и ресурс), две фирмы $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ и два потребителя $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$. Технологическое множество $Y^{(1)}$ фирмы $F^{(1)}$ имеет вид $Y^{(1)} = \{(y_1; y_2) \mid y_1 < 1; y_2 \le y_1/(y_1 - 1)\}$. Технологическое множество $Y^{(2)}$ фирмы $F^{(2)}$ имеет вид $Y^{(2)} = \{(y_1; y_2)|$

$y_1 < 1;\ y_2 \le g(y_1)\}$, где $g(y_1) = \begin{cases} 1 - e^{y_1},\ y_1 \le 0, \\ \ln(1 - y_1),\ 0 < y_1 < 1. \end{cases}$ Доля потребителей в прибыли фирмы $F^{(1)}$ и фирмы $F^{(2)}$ соответственно равны $\alpha_{11} = {}^3/_4$; $\alpha_{21} = {}^1/_4$; $\alpha_{12} = {}^1/_5$; $\alpha_{22} = {}^4/_5$. У потребителя $C^{(1)}$ начальный запас $(z_1^{(1)}; z_2^{(1)}) = (4; 2)$ и функция полезности $U(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2^2$. У потребителя $C^{(2)}$ начальный запас $(z_1^{(2)}; z_2^{(2)}) = (2; 3)$ и функция полезности $U(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot x_2$:

а) найдите локальное рыночное равновесие каждой фирмы;

б) найдите локальное рыночное равновесие для каждого потребителя;

в) выпишите вектор избыточного спроса;

г) найдите цены равновесия (нормированные). Выпишите статическое экономическое равновесие;

д) постройте множества $Y^{(1)}$ и $Y^{(2)}$;

е) постройте множества $Y^{(1)} + Y^{(1)}$, $2Y^{(1)}$, $Y^{(1)} + Y^{(1)}$, $2Y^{(1)}$, $Y^{(1)} + Y^{(2)}$.

Глава 12

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ БЛАГОСОСТОЯНИЯ

12.1. Парето-эффективность и статическое экономическое равновесие в экономике обмена. Первая и вторая теоремы экономики благосостояния

12.1.1. В модели экономики обмена функционирует m потребителей C_1, ..., C_m и r продуктов G_1, ..., G_r. Для каждого продукта G_k, $k = 1, ..., r$, имеет место равенство

$$x_k^{(1)} + x_k^{(2)} + ... + x_k^{(m)} = a_k, \tag{12.1.1}$$

где a_k — общее количество продукта G_k; $x_k^{(i)}$ — количество продукта G_k, которое находится в распоряжении потребителя C_i, $i = 1, ..., m$. Каждый потребитель имеет функцию полезности $u_i(x^{(i)})$ $\left(x^{(i)} \in E_r^+ = \{x | x = (x_1, \ldots, x_r), x_1 \geq 0, \ldots, x_r \geq 0\}\right)$. Потребители могут добровольно (без принуждения) обмениваться продуктами, увеличивая (или не уменьшая) свою функцию полезности.

В модели экономики обмена вместо потребителей C_1, ..., C_m могут фигурировать фирмы F_1, ..., F_n, а вместо продуктов (товаров) G_1, ..., G_r фигурировать ресурсы R_1, ..., R_r. Каждая фирма F_j имеет производственную функцию $f_{(j)}\left(y^{(j)}\right)\left(y^{(j)} = (y_1^{(j)}, \ldots, y_r^{(j)}), y_k^{(j)} \geq 0, k = 1, \ldots, r, j = 1, \ldots, n\right)$. Фирмы могут обмениваться ресурсами, увеличивая (или не уменьшая) объем выпуска своей продукции.

Набор векторов $\left\{\dot{x}^{(1)}, \ldots, \dot{x}^{(m)}\right\}$ называется *Парето-эффективным* (*эффективным по Парето*), если он допустим, т.е. удовлетворяет равенствам (12.1.1), и не существует другого допустимого набора векторов $\{x^{(1)},\ldots,x^{(m)}\}$, такого, что

$$u_i(x^{(i)}) \geq u_i(\dot{x}^{(i)}),\; i=1,\ldots,m, \qquad (12.1.2)$$

причем хотя бы одно неравенство является строгим.

Отметим, что в определении Парето-эффективности (эффективности по Парето) отсутствуют цены на продукты.

12.1.2. Парето-эффективность при $m = 2$ наглядно иллюстрируется с помощью диаграммы (ящика) Эджворта, которая строится следующим образом.

Для каждого потребителя C_1 и C_2 имеем пространство потребительских наборов и карту линий безразличия (рис. 12.1а (для потребителя C_1) и рис. 12.1б (для потребителя C_2)). Если функции полезности $u_1(x^{(1)})$ и $u_2(x^{(2)})$ строго выпуклы вверх и гладкие, то их линии l_τ и l_σ безразличия гладкие и выпуклы к точкам $O^{(1)}$ и $O^{(2)}$ соответственно.

Поскольку $x_1^{(1)} + x_1^{(2)} = a_1$, $x_2^{(1)} + x_2^{(2)} = a_2$, постольку $0 \leq x_1^{(i)} \leq a_1$, $0 \leq x_2^{(i)} \leq a_2$,, $i = 1, 2$, что и показано на рис. 12.1.

Для построения диаграммы Эджворта следует весь рис. 12.1б развернуть на 180° на плоскости $O^{(2)}x_1^{(2)}x_2^{(2)}$ и после этого совместить его с 12.1а так, чтобы точка $O^{(2)}$ попала в точку с координатами (a_1, a_2) (рис. 12.2). На рис. 12.2 точка B изображает два потре-

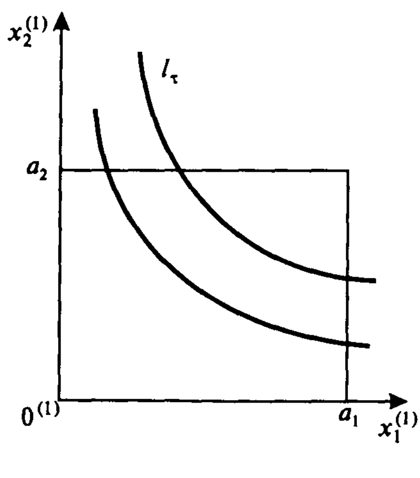


Рис. 12.1а

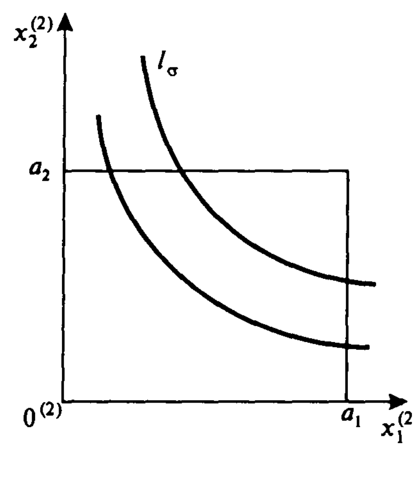


Рис. 12.1б

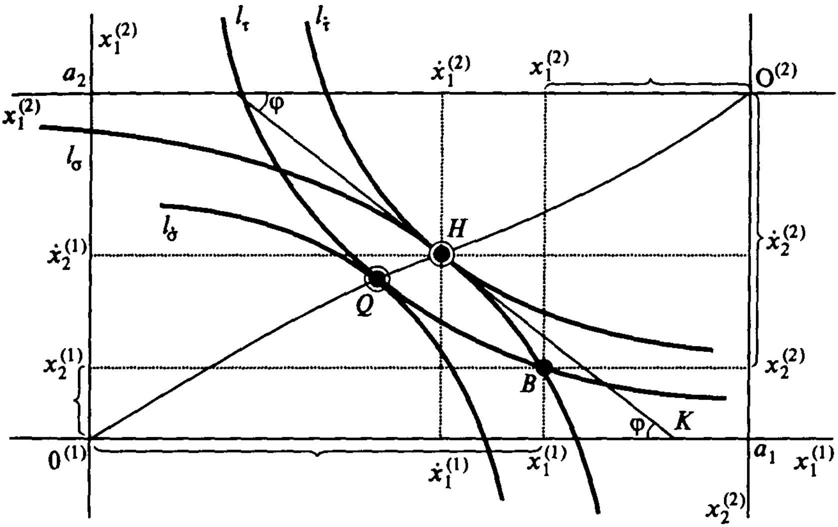


Рис. 12.2

бительских набора: $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ и $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$ и при этом $x_1^{(1)} + x_1^{(2)} = a_1, x_2^{(1)} + x_2^{(2)} = a_2$.

Очевидно, совокупность потребительских наборов $\{x^{(1)}, x^{(2)}\}$, изображающая на рис. 12.2 точку B, не является Парето-эффективной, ибо из точки B, которая изображает потребительские наборы $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ потребителей C_1 и C_2, можно перейти в точку H, которая изображает потребительские наборы $\dot{x}^{(1)} = \left(\dot{x}_1^{(1)}, \dot{x}_2^{(1)}\right)$, $\dot{x}^{(2)} = \left(\dot{x}_1^{(2)}, \dot{x}_2^{(2)}\right)$. При этом значение τ функции полезности $\tau = u_{(1)}\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)$ первого потребителя C_1 стало равным $\dot{\tau} = u_{(1)}\left(\dot{x}_1^{(1)}, \dot{x}_2^{(1)}\right) > \tau$, а значение σ функции полезности $\sigma = u_{(2)}\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right)$ второго потребителя C_2 не изменилось. Переход из точки B в точку H содержательно означает обмен продуктами, который осуществили потребители C_1 и C_2. Потребитель C_1 передал потребителю C_2 (т.е. потребитель C_2 получил от потребителя C_1) первый продукт в количестве $x_1^{(1)} - \dot{x}_1^{(1)} = \dot{x}_1^{(2)} - x_1^{(2)}$ единиц.

Потребитель C_1 получил от потребителя C_2 (т.е. потребитель C_2 передал потребителю C_1) второй продукт в количестве $\dot{x}_2^{(1)} - x_2^{(1)} = x_2^{(2)} - \dot{x}_2^{(2)}$ единиц.

Переход из точки B в точку Q анализируется аналогично. Только в этом случае значение τ функции полезности $u_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ первого потребителя C_1 остается неизменным, а значение σ функции полезности $u_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$ второго потребителя C_2 становится равным $\dot{\sigma} > \sigma$.

Точки H и Q на рис. 12.2 изображают Парето-эффективные наборы, ибо при переходе, скажем, из точки H в точку Q значение σ функции полезности $u_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$ растет и становится равным $\dot{\sigma} > \sigma$, а значение $\dot{\tau}$ функции полезности $u_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ убывает и становится равным $\tau < \dot{\tau}$. Выйти из точки H так, чтобы значение одной функции полезности строго выросло, а другой по крайней мере осталось неизменным, невозможно.

Парето-эффективность можно наглядно проиллюстрировать ситуацией двух козликов на мосту, которые упираются друг в друга своими рожками. Один козлик может продвинуться вперед только в том случае, если другой козлик отступит назад.

Линия L в диаграмме Эджворта, которая соединяет точки, изображающие Парето-эффективные наборы, называется *контрактной линией*. Криволинейный отрезок QH контрактной линии L, который находится между двумя линиями безразличия, называется *переговорным множеством*. Линии безразличия, проходящие через точки переговорного множества, соответствуют значениям функций полезности, которые больше (не меньше) значений функции полезности, соответствующих линиям безразличия, проходящим через точку B (на рис. 12.3 более детально показан фрагмент рис. 12.2, содержащий точки B, H и Q. На рис. 12.3 $\tau < \tilde{\tau} < \dot{\tau}$, $\sigma < \tilde{\sigma} < \dot{\sigma}$. Линии безразличия $l_{\tilde{\tau}}$ и $l_{\tilde{\sigma}}$ на рис. 12.2 показаны не были).

12.1.3. Пространство полезностей Ou_1u_2 называется *критериальным пространством* экономики обмена. Образ множества $0 \le x_1 \le a_1$, $0 \le x_2 \le a_2$ в пространстве полезностей называется *множеством* U *достижимых полезностей*. *Эффективной границей* ∂U множества U достижимых полезностей называется подмножество множества U достижимых полезностей, такое, что если векторы $u = (u_1, u_2) \in \partial U$ и $u' = (u'_1, u'_2) \in U$ и $u' \ge u$ (покоординатно), то $u' = u$.

Очевидно, эффективная граница ∂U множества U является образом контрактной линии L диаграммы Эджворта.

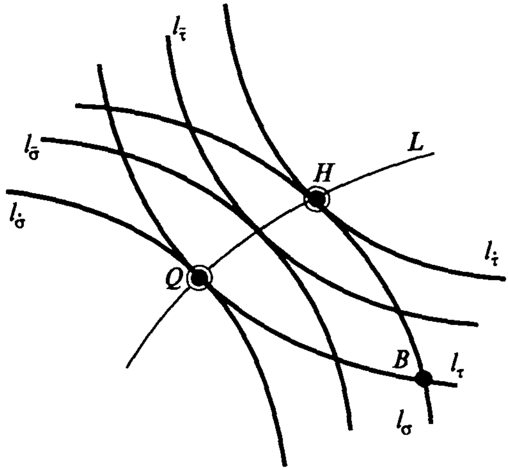


Рис. 12.3

Построим множество U достижимых полезностей в случае $m = 2$.

В точке $O^{(1)}$ $x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = 0, x_1^{(2)} = a_1, x_2^{(2)} = a_2$, поэтому $u_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = u_1(0, 0) = 0$, $u_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = u_1(a_1, a_2) = \hat{\sigma}$, т.е. образом точки $O^{(1)}$ в критериальном пространстве Ou_1u_2 является точка $\bar{O}^{(1)} = (u_1, u_2) = (0, \hat{\sigma})$ (рис. 12.4). Аналогично, в точке $O^{(2)}$ $x_1^{(1)} = a_1$, $x_2^{(1)} = a_2$, $x_1^{(2)} = x_2^{(2)} = 0$, поэтому $u_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = u_1(a_1, a_2) = \hat{\tau}$, $u_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = u_1(0, 0) = 0$,т.е. образом точки $O^{(2)}$ в критериальном пространстве Ou_1u_2 является точка $\bar{O}^{(2)} = (u_1, u_2) = (\hat{\tau}, 0)$ (см. рис. 12.4).

Образом точки $H = (\dot{x}_1^{(1)}, \dot{x}_2^{(1)})$ в критериальном пространстве Ou_1u_2 является точка $\bar{H} = (u_1, u_2)$, где $\dot{\tau} = u_1 = u_1\left(\dot{x}_1^{(1)}, \dot{x}_2^{(1)}\right)$, $\sigma = u_2 = u_2\left(\dot{x}_1^{(2)}, \dot{x}_2^{(2)}\right)$ (см. рис. 12.4). Образом точки $B = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)$, которая не принадлежит контрактной линии и, следовательно, потребительский набор $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ не является Парето-эффективным, в критериальном пространстве является точка $\bar{B} = (u_1, u_2)$, которая не принадлежит эффективной границе ∂U. В случае точки $\bar{B} = (u_1, u_2)$, $u_1 = \tau = u_1\,(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$, $u_2 = \sigma = u_1\,(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$, (см. рис. 12.4). Образом точки Q в критериальном пространстве Ou_1u_2 является точка $\bar{Q} = (u_1, u_2)$, где $u_1 = \tau$, $u_2 = \dot{\sigma}$ (см. рис. 12.4).

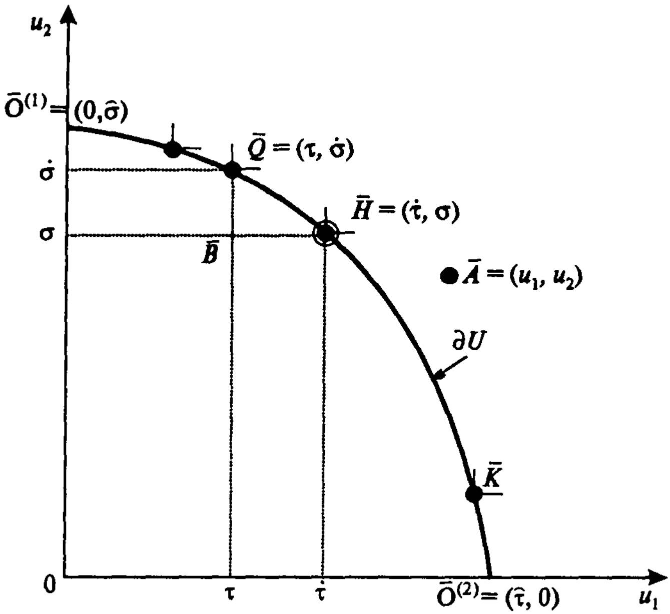


Рис. 12.4

Геометрическая характеристика некоторой точки $\bar{K}$ (см. рис. 12.4), принадлежащей эффективной границе ∂U множества U достижимых полезностей, формулируется так. Если прямой угол, вершина которого находится в точке $\bar{K}$ множества U и стороны которого параллельны осям Ou_1 и Ou_2, пересекается со множеством U только в самой вершине $\bar{K}$, то точка $\bar{K}$ принадлежит эффективной границе ∂U. Верно и обратное.

Точка $\bar{A} = (u_1, u_2)$ расположена вне множества U. Содержательно это означает, что потребители C_1 и C_2 не могут ее достигнуть, ибо для этого недостаточно запасов a_1 и a_2 продуктов G_1 и G_2.

12.1.4. Пример 12.1.1

В модели экономики обмена функции полезности потребителей C_1 и C_2 имеют соответственно вид $u_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) = a_0\left(x_1^{(1)}\right)^{\alpha_1}\left(x_2^{(1)}\right)^{\alpha_2}$, $u_2\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right) = b_0\left(x_1^{(2)}\right)^{\beta_1}\left(x_2^{(2)}\right)^{\beta_2}$. (Функции полезности в мультипликативной форме с одинаковыми показателями $\alpha_1 = \beta_1$ и $\alpha_2 = \beta_2$ первых и вторых переменных предложил рассматривать

Я.И. Кротов, когда он был студентом экономического факультета МГУ.) Имеем $x_1^{(1)} + x_1^{(2)} = a_1,\ x_2^{(1)} + x_2^{(2)} = a_2$.

Требуется:

1) выписать необходимые и достаточные условия Парето-эффективности;

2) выписать уравнение контрактной линии L и построить ее на диаграмме Эджворта;

3) выписать уравнение эффективной границы ∂U множества U достижимых полезностей (для ряда конкретных значений параметров α_1 и α_2).

Прежде чем выписать необходимое и достаточное условие Парето-эффективности набора $\left\{\dot{x}^{(1)}, \dot{x}^{(2)}\right\}$ $\dot{x}^{(1)} = \left(\dot{x}_1^{(1)}, \dot{x}_2^{(1)}\right)$, $\dot{x}^{(2)} = \left(\dot{x}_1^{(2)}, \dot{x}_2^{(2)}\right)$, отметим, что уравнение $\dot{\tau} = u_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)$ линии безразличия $l_{\dot{\tau}}$ определяет $x_2^{(1)}$ как неявную функцию от переменной $x_1^{(1)}$. В рассматриваемом случае вообще из уравнения $\dot{\tau} = a_0\left(x_1^{(1)}\right)^{\alpha_1}\left(x_2^{(1)}\right)^{\alpha_2}$ следует, что $x_2^{(1)} = \dfrac{\left(\dot{\tau}/a_0\right)^{1/\alpha_2}}{\left(x_1^{(1)}\right)^{\alpha_1/\alpha_2}}$), производная которой по теореме о неявной функции имеет вид

$$\frac{dx_2^{(1)}}{dx_1^{(1)}} = -\frac{\dfrac{\partial u_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})}{\partial x_1^{(1)}}}{\dfrac{\partial u_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})}{\partial x_2^{(1)}}}.$$

Аналогично

$$\frac{dx_2^{(2)}}{dx_1^{(2)}} = -\frac{\dfrac{\partial u_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})}{\partial x_1^{(2)}}}{\dfrac{\partial u_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})}{\partial x_2^{(2)}}}.$$

1. Поскольку необходимым и достаточным условием Парето-эффективности набора $\left\{\dot{x}^{(1)}, \dot{x}^{(2)}\right\}$ является касание линий безразличия $l_{\dot{\tau}}$ и $l_{\dot{\sigma}}$ в точке $\dot{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dot{x}_2^{(1)})$ (в точке $\dot{x}^{(2)} = (x_1^{(2)}, \dot{x}_2^{(2)})$ (см. рис. 12.2), постольку эти линии безразличия имеют в этой точке $\dot{x}^{(1)}$ ($\dot{x}^{(2)}$) одинаковые угловые коэффициенты

$$\frac{d\dot{x}_2^{(1)}}{dx_1^{(1)}} = \frac{d\dot{x}_2^{(2)}}{dx_1^{(2)}}. \qquad (12.1.3)$$

2. Используя теорему о неявной функции в случаях $\tau^{\cdot} = u_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$, $\sigma^{\cdot} = u_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$, получим из (12.1.3) следующую цепочку:

$$\frac{\dfrac{\partial u_2(\dot{x}_1^{(2)}, \dot{x}_2^{(2)})}{\partial x_1^{(2)}}}{\dfrac{\partial u_2(\dot{x}_1^{(2)}, \dot{x}_2^{(2)})}{\partial x_2^{(2)}}} = -\frac{d\dot{x}_2^{(2)}}{dx_1^{(2)}} = -\frac{d\dot{x}_2^{(1)}}{dx_1^{(1)}} = \frac{\dfrac{\partial u_1(\dot{x}_1^{(1)}, \dot{x}_2^{(1)})}{\partial x_1^{(1)}}}{\dfrac{\partial u_2(\dot{x}_1^{(1)}, \dot{x}_2^{(1)})}{\partial x_2^{(1)}}}. \qquad (12.1.4)$$

Подставив частные производные

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1^{(1)}} = a_0\alpha_1\left(x_1^{(1)}\right)^{\alpha_1-1}\left(x_2^{(1)}\right)^{\alpha_2}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2^{(1)}} = a_0\alpha_2\left(x_1^{(1)}\right)^{\alpha_1}\left(x_2^{(1)}\right)^{\alpha_2-1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1^{(2)}} = b_0\beta_1\left(x_1^{(2)}\right)^{\beta_1-1}\left(x_2^{(2)}\right)^{\beta_2}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2^{(2)}} = b_0\beta_2\left(x_1^{(2)}\right)^{\beta_1}\left(x_2^{(2)}\right)^{\beta_2-1}$$

в правое и левое звенья цепочки (12.1.4), получим

$$\frac{a_0\alpha_1\left(\dot{x}_1^{(2)}\right)^{\alpha_1-1}\left(\dot{x}_2^{(2)}\right)^{\alpha_2}}{a_0\alpha_2\left(\dot{x}_1^{(2)}\right)^{\alpha_1}\left(\dot{x}_2^{(2)}\right)^{\alpha_2-1}} = \frac{b_0\beta_1\left(\dot{x}_1^{(1)}\right)^{\beta_1-1}\left(\dot{x}_2^{(1)}\right)^{\beta_2}}{b_0\beta_2\left(\dot{x}_1^{(1)}\right)^{\beta_1}\left(\dot{x}_2^{(1)}\right)^{\beta_2-1}}. \qquad (12.1.5)$$

Выполнив сокращения и использовав равенства $\dot{x}_1^{(2)} = a_1 - \dot{x}_1^{(1)}$, $\dot{x}_2^{(2)} = a_2 - \dot{x}_2^{(1)}$, получим

$$\frac{\beta_1}{\beta_2}\cdot\frac{a_2 - \dot{x}_2^{(1)}}{a_1 - \dot{x}_1^{(1)}} = \frac{\alpha_1\cdot\dot{x}_2^{(1)}}{\alpha_2\cdot\dot{x}_1^{(1)}},$$

откуда следует, что уравнение контрактной линии L имеет вид

$$x_2^{(1)} = \frac{\alpha_2\beta_1 a_2 x_1^{(1)}}{\alpha_1\beta_2 a_1 - (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)x_1^{(1)}}.$$

Для того чтобы эта контрактная линия была отрезком $O^{(1)}O^{(2)}$ (рис. 12.5)

$$x_2^{(1)} = \frac{a_2}{a_1}x_1^{(1)}, \qquad (12.1.6)$$

необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство $\alpha_1\beta_2 = \beta_1\alpha_2$ для показателей степени мультипликативных функций полезности $u_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)$, $u_2\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right)$.

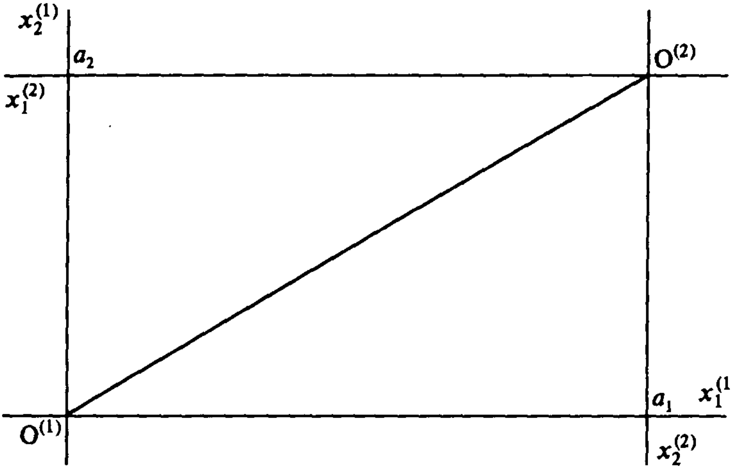


Рис. 12.5

Аналогично в переменных $x_1^{(2)}$ и $x_1^{(2)}$ уравнение контрактной линии L имеет вид

$$x_2^{(2)} = \frac{a_2}{a_1} x_1^{(2)}. \tag{12.1.7}$$

3. Подставив в $u_1 = a_0\left(x_1^{(1)}\right)^{\alpha_1}\left(x_2^{(1)}\right)^{\alpha_2}$, $u_2 = b_0\left(x_1^{(2)}\right)^{\beta_1}\left(x_2^{(2)}\right)^{\beta_2}$ выражения (12.1.6) и (12.1.7), будем иметь

$$u_1 = a_0\left(x_1^{(1)}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\alpha_2}\left(x_1^{(1)}\right)^{\alpha_2},\ u_2 = b_0\left(x_1^{(2)}\right)^{\beta_1}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\beta_2}\left(x_1^{(2)}\right)^{\beta_2},$$

откуда следует, что

$$u_1^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} = x_1^{(1)}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}(a_0)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}},\ u_2^{\frac{1}{\beta_1+\beta_2}} = x_1^{(2)}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}}(b_0)^{\frac{1}{\beta_1+\beta_2}}. \tag{12.1.8}$$

Полагая $x_1^{(2)} = a_1 - x_1^{(1)}$, получаем из (12.1.8)

$$u_1^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} = x_1^{(1)}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}(a_0)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}},\ u_2^{\frac{1}{\beta_1+\beta_2}} =$$

$$= \left(a_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}} - x_1^{(1)}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}}\right)(b_0)^{\frac{1}{\beta_1+\beta_2}}.$$

Полагая $a_0 = b_0$, после сложения и выполнения элементарных преобразований, принимая во внимание, что при $\alpha_1\beta_2 = \beta_1\alpha_2$ $\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} = \dfrac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}$ и $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} = \dfrac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}$, получаем уравнение эффективной границы ∂U множества U:

$$u_1^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} + u_2^{\frac{1}{\beta_1+\beta_2}} = a_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}} a_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}. \qquad (12.1.9)$$

Само множество U допустимых полезностей описывается следующей системой неравенств:

$$u_1^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} + u_2^{\frac{1}{\beta_1+\beta_2}} \le a_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}} a_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}}, \quad u_1 \ge 0, u_2 \ge 0.$$

3.1. В (12.1.9) положим $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \dfrac{1}{4}$, $a_1 = 4$, $a_2 = 9$, тогда уравнение (12.1.9) перепишется так:

$$u_1^2 + u_2^2 = 4^{\frac{1}{2}} 9^{\frac{1}{2}} = 6 \text{ (рис. 12.6).}$$

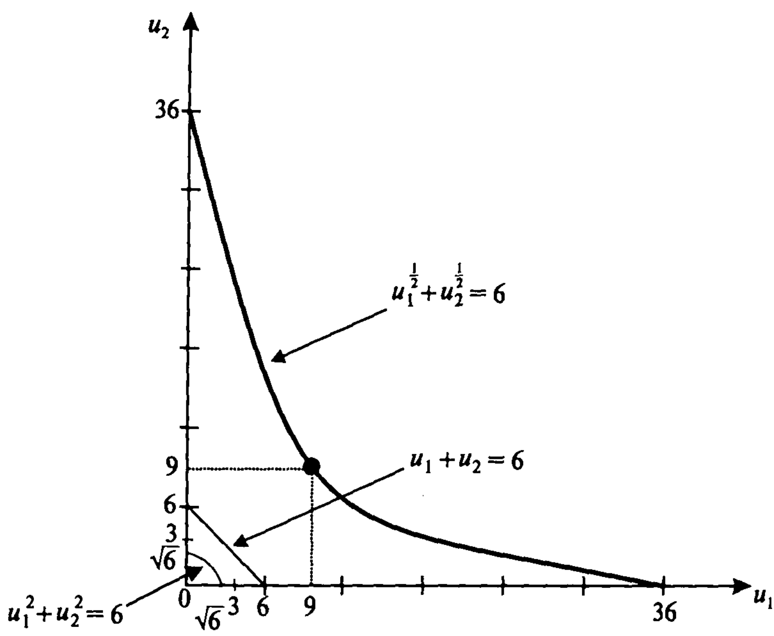


Рис. 12.6

3.2. В (12.1.9) положим $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}$, $a_1 = 4$, $a_2 = 9$, тогда уравнение (12.1.9) перепишется так:

$$u_1 + u_2 = 4^{\frac{1}{2}} 9^{\frac{1}{2}} = 6$$

(см. рис. 12.6).

3.3. В (12.1.9) положим $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 1$, $a_1 = 4$, $a_2 = 9$, тогда уравнение перепишется так:

$$u_1^{\frac{1}{2}} + u_2^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} 9^{\frac{1}{2}} = 6$$

(см. рис. 12.6).

3.4. В (12.1.9) положим $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, $\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{4}$, $a_1 = 4$, $a_2 = 9$, тогда $\alpha_1\beta_2 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \beta_1\alpha_2$, а $\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{1}{2}$, , а $a_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}} a_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}} = (a_1 a_2)^{\frac{1}{2}} = 6$, и поэтому уравнение (12.1.9) перепишется так:

$$u_1^{\frac{1}{4}} + u_2^{2} = 6$$

(рис. 12.7, на котором оси Ou_1 и Ou_2 имеют разные масштабные единицы).

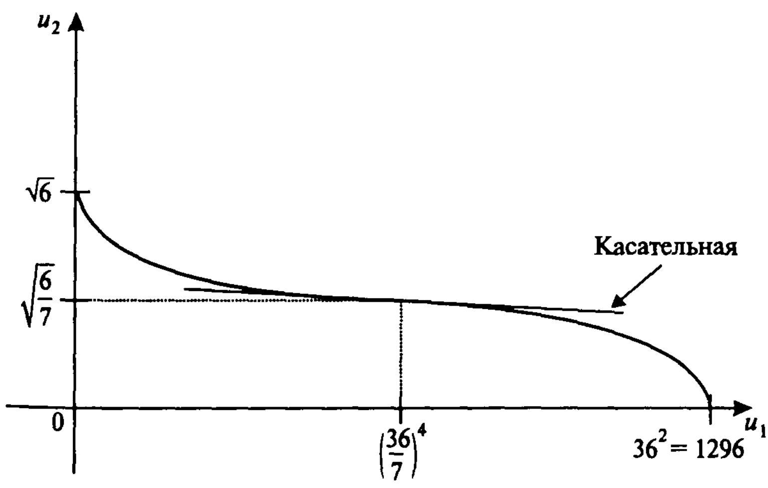


Рис. 12.7

12.1.5. Пример 12.1.2

В модели экономики обмена функции полезности потребителей C_1 и C_2 имеют соответственно вид

$$u_1\left(x_1^{(1)},x_2^{(1)}\right)=a_0\left(a_1\left(x_1^{(1)}\right)^{-\alpha}+a_2\left(x_2^{(1)}\right)^{-\alpha}\right)^{-\frac{h}{\alpha}},$$

$$u_2\left(x_1^{(2)},x_2^{(2)}\right)=b_0\left(b_1\left(x_1^{(2)}\right)^{-\alpha}+b_2\left(x_2^{(2)}\right)^{-\alpha}\right)^{-\frac{k}{\alpha}}.$$

Справедливы равенства $x_1^{(1)}+x_1^{(2)}=g_1$, $x_2^{(1)}+x_2^{(2)}=g_1$. Общие количества g_1 и g_2 первого и второго продуктов положительны: $g_1>0, g_2>0$. Показатель степени $\alpha\neq-1$.

1. Выпишем необходимые и достаточные условия Парето-эффективности.
2. Выпишем уравнение контрактной линии L.
3. Выпишем уравнение эффективной границы ∂U множества U достижимых полезностей.

При разборе этого примера на параметры функций полезности постепенно накладываются разнообразные ограничения.

Выражения (12.1.3) и (12.1.4), которые фигурировали в примере 12.1.1, в пример 12.1.2 переносятся без всяких корректировок.

Имеем

$$\frac{\partial u_1\left(x_1^{(1)},x_2^{(1)}\right)}{\partial x_1}=a_0h\left(a_1\left(x_1^{(1)}\right)^{-\alpha}+a_2\left(x_2^{(1)}\right)^{-\alpha}\right)^{-\frac{h}{\alpha}-1}\cdot a_1\left(x_1^{(1)}\right)^{-\alpha-1},$$

$$\frac{\partial u_2\left(x_1^{(1)},x_2^{(1)}\right)}{\partial x_2}=a_0h\left(a_1\left(x_1^{(1)}\right)^{-\alpha}+a_2\left(x_2^{(1)}\right)^{-\alpha}\right)^{-\frac{h}{\alpha}-1}\cdot a_2\left(x_2^{(1)}\right)^{-\alpha-1},$$

$$\frac{dx_2^{(1)}}{dx_1^{(1)}}=-\frac{\partial u_1\left(x_1^{(1)},x_2^{(1)}\right)}{\partial x_1^{(1)}}\Bigg/\frac{\partial u_1\left(x_1^{(1)},x_2^{(1)}\right)}{\partial x_2^{(1)}}=-\frac{a_1}{a_2}\left(\frac{x_2^{(1)}}{x_1^{(1)}}\right)^{\alpha+1}.$$

Аналогично получим, что

$$\frac{dx_2^{(2)}}{dx_1^{(2)}}=-\frac{b_1}{b_2}\left(\frac{x_2^{(2)}}{x_1^{(2)}}\right)^{\alpha+1}.$$

При $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ уравнение контрактной линии L, имеющей уравнение

$$\frac{dx_2^{(1)}}{dx_1^{(1)}} = \frac{dx_2^{(2)}}{dx_1^{(2)}},$$

приобретает простой вид

$$\frac{x_2^{(1)}}{x_1^{(1)}} = \frac{g_2 - x_2^{(1)}}{g_1 - x_1^{(1)}},$$

откуда вытекает, что контрактная линия L имеет уравнение

$$x_2^{(1)} = \frac{g_2}{g_1} x_1^{(1)},\ 0 \le x_1^{(1)} \le g_1, 0 \le x_2^{(1)} \le g_2.$$

По аналогии с этим уравнением имеем другое уравнение (в переменных $x_1^{(2)}$ и $x_2^{(2)}$)

$$x_2^{(2)} = \frac{g_2}{g_1} x_1^{(2)},\ 0 \le x_1^{(2)} \le g_1, 0 \le x_2^{(2)} \le g_2$$

контрактной линии L.

Перепишем выражение для функции $u_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ полезности потребителя C_1 следующим образом:

$$u_1^{-\frac{\alpha}{h}} = a_0^{-\frac{\alpha}{h}} \left(a_1 \left(x_1^{(1)}\right)^{-\alpha} + a_2 \left(x_2^{(1)}\right)^{-\alpha} \right) =$$

$$= a_0^{-\frac{\alpha}{h}} \left(a_1 \left(x_1^{(1)}\right)^{-\alpha} + a_2 \left(\frac{g_2}{g_1} \right)^{-\alpha} \left(x_1^{(1)}\right)^{-\alpha} \right) =$$

$$= a_0^{-\frac{\alpha}{h}} \left(a_1 + \left(\frac{g_2}{g_1} \right)^{-\alpha} a_2 \right) \left(x_1^{(1)}\right)^{-\alpha}.$$

Учитывая первое и последнее звенья цепочки, можно написать следующее равенство:

$$u_1^{\frac{1}{h}} = a_0^{\frac{1}{h}} a_1^{-\frac{1}{\alpha}} \left(1 + \left(\frac{g_2}{g_1} \right)^{-\alpha} \right)^{-\frac{1}{\alpha}} x_1^{(1)}.$$

По аналогии имеем

$$u_2^{\frac{1}{k}} = b_0^{\frac{1}{k}} b_1^{-\frac{1}{\alpha}} \left(1 + \left(\frac{g_2}{g_1}\right)^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} x_1^{(2)}.$$

При

$$a_0^{\frac{1}{h}} a_1^{-\frac{1}{\alpha}} = b_0^{\frac{1}{k}} b_1^{-\frac{1}{\alpha}} = r$$

имеем (напомним, что $x_1^{(2)} + x_2^{(2)} = g_1$)

$$u_1^{\frac{1}{h}} + u_2^{\frac{1}{k}} = r\left(1 + \left(\frac{g_2}{g_1}\right)^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} g_1 = r\left(g_1^{-\alpha} + g_2^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Таким образом, уравнение эффективной границы ∂U множества U достижимых полезностей имеет вид

$$u_1^{\frac{1}{h}} + u_2^{\frac{1}{k}} = r\left(g_1^{-\alpha} + g_2^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}, u_1 \geq 0, u_2 \geq 0.$$

Само множество U допустимых полезностей описывается системой неравенств

$$u_1^{\frac{1}{h}} + u_2^{\frac{1}{k}} \leq r\left(g_1^{-\alpha} + g_2^{-\alpha}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}, u_1 \geq 0, u_2 \geq 0.$$

12.1.6. *Статическое экономическое равновесие* в экономике обмена есть набор векторов $\left\{p^*, x^{*(1)}, \ldots, x^{*(m)}\right\}$, такой, что он удовлетворяет условиям:

1) вектор цен равновесия $p^* = \left(p_1^*, \ldots, p_r^*\right)$, $p_1^* \geq 0, \ldots, p_r^* \geq 0$, $p_1^* + \ldots + p_r^* = 1$;

2) вектор $x^{*(i)} = \left(x_1^{*(i)}, \ldots, x_r^{*(i)}\right)$ — локальное рыночное равновесие потребителя C_i, $i = 1, \ldots, m$, т.е. решение следующей задачи рационального поведения потребителя C_1 на рынке:

$$u_i\left(x^{(i)}\right)(\max)$$

$$p^* x^{(i)} = p^* x^{*(i)};$$

3) для каждого продукта G_k, $k = 1, \ldots, r$, имеет место равенство

$$x_k^{(1)} + \ldots + x_k^{(m)} = a_k.$$

В отличие от определения Парето-эффективности, в котором цены на продукты не фигурируют, в статическом экономическом равновесии обязательно присутствуют цены равновесия.

Взаимосвязь между Парето-эффективностью и статическим экономическим равновесием описывается двумя *теоремами экономики благосостояния*.

Первая теорема экономики благосостояния — это теорема о том, что статическое экономическое равновесие Парето-эффективно. Говоря точнее, если набор $\left\{p^*, x^{*(1)}, ..., x^{*(m)}\right\}$ есть статическое экономическое равновесие, то набор $\left\{x^{*(1)}, ..., x^{*(m)}\right\}$ является Парето-эффективным.

Вторая теорема экономики благосостояния — это теорема о том, что если набор $\left\{\dot{x}^{(1)}, ..., \dot{x}^{(m)}\right\}$ Парето-эффективен, то существует такой вектор $\dot{p} = \left(\dot{p}_1, ..., \dot{p}_r\right)$ цен, что набор $\left\{\dot{p}, \dot{x}^{(1)}, ..., \dot{x}^{(m)}\right\}$ есть статическое экономическое равновесие.

В случае экономики обмена при $m = 2$ обе теоремы экономики благосостояния доказываются достаточно просто с помощью использования диаграммы Эджворта.

Докажем сначала первую теорему экономики благосостояния, т.е. если набор $\left\{p^*, x^{*(1)}, ..., x^{*(m)}\right\}$ есть статическое экономическое равновесие, то набор $\left\{x^{*(1)}, ..., x^{*(m)}\right\}$ является Парето-эффективным.

Согласно определению статического экономического равновесия для потребителя C_i, $i = 1, 2$, потребительский набор $x^{*(i)}$ есть решение следующей задачи рационального поведения потребителя C_i, $i = 1, 2$, на рынке

$$u_i\left(x^{(i)}\right)(\max) \tag{12.1.10}$$

$$p_1^* x_1^{(i)} + p_2^* x_2^{(i)} = p_1^* x_1^{*(i)} + p_2^* x_2^{*(i)}. \tag{12.1.11}$$

Для этой экстремальной задачи выпишем функцию Лагранжа

$$L_i\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \lambda^{(i)}\right) = u_i\left(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}\right) + \lambda^{(i)}\left(p^* x^{*(i)} - p_1^* x_1^{(i)} - p_2^* x_2^{(i)}\right), \; i = 1, 2.$$

Потребительский набор $x^{*(i)} = \left(x_1^{*(i)}, x_2^{*(i)}\right)$ как решение экстремальной задачи (12.1.10), (12.1.11) удовлетворяет условиям первого порядка для функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L_i\left(x^{*(i)}, \lambda^{*(i)}\right)}{\partial x_1^{(i)}} = \frac{\partial u_i\left(x^{*(i)}\right)}{\partial x_1^{(i)}} - \lambda^{*(i)} p_1^* = 0, \qquad (12.1.12)$$

$$\frac{\partial L_i\left(x^{*(i)}, \lambda^{*(i)}\right)}{\partial x_2^{(i)}} = \frac{\partial u_i\left(x^{*(i)}\right)}{\partial x_2^{(i)}} - \lambda^{*(i)} p_2^* = 0,$$
$$\frac{\partial L_i\left(x^{*(i)}, \lambda^{*(i)}\right)}{\partial \lambda^{(i)}} = p^* x^{*(i)} - p_1^* x_1^{*(i)} - p_2^* x_2^{*(i)} = 0. \qquad (12.1.13)$$

Из (12.1.12) и (12.1.13) при $i = 1$ и $i = 2$ вытекает цепочка равенств (здесь существенно, что цены p_1^* и p_2^* являются общими для потребителей C_1 и C_2)

$$\frac{\dfrac{\partial u_1\left(x^{*(1)}\right)}{\partial x_1^{(1)}}}{\dfrac{\partial u_1\left(x^{*(1)}\right)}{\partial x_2^{(1)}}} = \frac{p_1^*}{p_2^*} = \frac{\dfrac{\partial u_2\left(x^{*(2)}\right)}{\partial x_1^{(2)}}}{\dfrac{\partial u_2\left(x^{*(2)}\right)}{\partial x_2^{(2)}}},$$

что означает касание линий безразличия в точке $x^{*(1)} = \left(x_1^{*(1)}, x_2^{*(1)}\right)$ (в точке $x^{*(2)} = \left(x_1^{*(2)}, x_2^{*(2)}\right)$), т.е. набор векторов $\left\{x^{*(1)}, x^{*(2)}\right\}$ Парето-эффективен.

Докажем, *предполагая* строгую выпуклость линий безразличия обоих потребителей C_1 и C_2, вторую теорему экономики благосостояния.

Набор векторов $\left\{\dot{x}^{(1)}, \dot{x}^{(2)}\right\}$ Парето-эффективен, что означает, что в точке $\dot{x}^{(1)}$ диаграммы Эджворта касаются линии безразличия потребителей C_1 и C_2, т.е. в точке $\dot{x}^{(1)}$ (в точке $\dot{x}^{(2)}$) диаграммы Эджворта имеем цепочку равенств

$$\frac{\dfrac{\partial u_1(\dot{x}_1^{(1)},\dot{x}_2^{(1)})}{\partial x_1^{(1)}}}{\dfrac{\partial u_1(\dot{x}_1^{(1)},\dot{x}_2^{(1)})}{\partial x_2^{(1)}}}=-\frac{dx_2^{(1)}}{dx_1^{(1)}}=-\frac{dx_2^{(2)}}{dx_1^{(2)}}=\frac{\dfrac{\partial u_2(\dot{x}_1^{(2)},\dot{x}_2^{(2)})}{\partial x_1^{(2)}}}{\dfrac{\partial u_2(\dot{x}_1^{(2)},\dot{x}_2^{(2)})}{\partial x_2^{(2)}}}.$$

Приравняв крайние звенья этой цепочки дроби $\dot{p}_1/\dot{p}_2$ $(\dot{p}_1 \geq 0, \dot{p}_2 > 0, \dot{p}_1 + \dot{p}_2 = 1)$, получим

$$\frac{\partial u_1(\dot{x}_1^{(1)},\dot{x}_2^{(1)})}{\partial x_1^{(1)}}=\dot{\lambda}^{(1)}\dot{p}_1,\quad \frac{\partial u_1(\dot{x}_1^{(1)},\dot{x}_2^{(1)})}{\partial x_2^{(1)}}=\dot{\lambda}^{(1)}\dot{p}_2, \tag{12.1.14}$$

$$\frac{\partial u_2(\dot{x}_1^{(2)},\dot{x}_2^{(2)})}{\partial x_1^{(2)}}=\dot{\lambda}^{(2)}\dot{p}_1,\quad \frac{\partial u_2(\dot{x}_1^{(2)},\dot{x}_2^{(2)})}{\partial x_2^{(2)}}=\dot{\lambda}^{(1)}p_2^*. \tag{12.1.15}$$

Из условий (12.1.14) и (12.1.15) первого порядка следует, что потребительские наборы $\dot{x}^{(1)}=\left(\dot{x}_1^{(1)},\dot{x}_2^{(1)}\right)$ и $\dot{x}^{(2)}=\left(\dot{x}_1^{(2)},\dot{x}_2^{(2)}\right)$ являются локальными рыночными равновесиями потребителей C_1 и C_2.

Равенства $\dot{x}_1^{(1)}+\dot{x}_1^{(2)}=a_1$, $\dot{x}_2^{(1)}+\dot{x}_2^{(2)}=a_2$ следуют из того, что набор векторов $\left\{\dot{x}^{(1)},\dot{x}^{(2)}\right\}$ Парето-эффективен.

Таким образом, доказано существование вектора цен $\dot{p}$ и то, что потребительские наборы $\dot{x}^{(1)}$ и $\dot{x}^{(2)}$ являются локальными рыночными равновесиями потребителей C_1 и C_2, т.е. набор векторов $\left\{p^*,x^{*(1)},\ldots,x^{*(m)}\right\}$ есть статическое экономическое равновесие в экономике обмена.

12.2. Парето-эффективность и статическое экономическое равновесие в экономике обмена. Первая и вторая теоремы экономики благосостояния (общий случай)

12.2.1. Рассмотрим модель экономики, состоящую из сферы производства (СПр) и сферы потребления (СПо), аналогичную модели главы 11.

Сфера производства состоит из *фирм* F_1, ..., F_n, каждая из которых характеризуется своим технологическим множеством (технологией) $Y^{(j)}$.

Технологическое множество (технология) Y сферы производства представляет собой алгебраическую сумму (сумму по Минковскому) технологических множеств $Y^{(j)}$ фирм:

$$Y = Y^{(1)} + \ldots + Y^{(n)} = \left\{ y \middle| y = y^{(1)} + \ldots + y^{(m)}, y^{(j)} \in Y^{(j)}, j = 1, \ldots, n \right\}.$$

(1.1) Технологическое множество Y предполагается выпуклым и ограниченным, что естественно с содержательной экономической точки зрения.

Сфера потребления состоит из *потребителей* $C_1, \ldots, C_m$, каждый из которых характеризуется своей функцией полезности $u_i(x^{(i)})$ и множеством $E_r^+ = \left\{ x \middle| x = (x_1, \ldots, x_r), \ \ x_i \geq 0, \ \ i = 1, \ldots, r \right\}$ потребительских наборов $x^{(i)} = \left(x_1^{(i)}, \ldots, x_r^{(i)} \right)$, $i = 1, \ldots, m$.

(2.1) Функция полезности $u_i(x^{(i)})$, $i = 1, \ldots, m$, предполагается строго выпуклой вверх при $x^{(i)} \in E_r^+$.

Любой вектор $x = x^{(1)} + \ldots + x^{(m)}$, для которого существует вектор $y \in Y$, такой, что $x \leq y$ (покоординатно), называется допустимым.

Набор векторов $\left\{ \dot{x}^{(1)}, \ldots, \dot{x}^{(m)} \right\}$ называется *Парето-эффективным*, если, во-первых, он допустим и, во-вторых, не существует допустимого набора векторов $\left\{ x^{(1)}, \ldots, x^{(m)} \right\}$, такого, что

$$u_i\left(x^{(i)} \right) \geq u_i\left(\dot{x}^{(i)} \right), \ i = 1, \ldots, m,$$

причем хотя бы для одного потребителя C_i неравенство будет строгим.

Таким образом, Парето-эффективность означает, что ни один потребитель не может увеличить уровень удовлетворения своих потребительских амбиций, не обедняя других потребителей.

Определение статического экономического равновесия дословно повторяет соответствующее определение параграфа 11.3 главы 11, с той лишь разницей, что в рассматриваемом здесь случае вектор запасов каждого потребителя принимается равным нулю.

12.2.2. *Первая теорема* экономики благосостояния формулируется так.

Пусть набор $\left\{ p^*, x^{*(1)}, \ldots, x^{*(m)}, y^{*(1)}, \ldots, y^{*(n)} \right\}$ есть статическое экономическое равновесие.

Тогда набор $\left\{x^{*(1)}, ..., x^{*(m)}\right\}$ Парето-эффективен.

Вторая теорема экономики благосостояния формулируется так.

Пусть существуют векторы $y^\circ \in Y$ и x°, такие, что $y^\circ - x^\circ > 0$.

Пусть для каждой функции полезности $u_i(x^{(i)})$ выполняется условие ненасыщаемости (т.е. для каждого потребительского набора $x^{(i)}$ существует потребительский набор $\bar{x}^{(i)}$, такой, что $u_i\left(\bar{x}^{(i)}\right) > u_i\left(x^{(i)}\right)$.

Пусть выполнены условия (1.1) и (2.1) см. раздел 12.2.1).

Пусть набор векторов $\left\{\dot{x}^{(1)}, ..., \dot{x}^{(m)}\right\}$ ($\dot{x}^{(i)}$ — потребительские наборы, $i = 1, ..., m$) Парето-эффективен. Тогда существуют вектор цен $\dot{p} = \left(\dot{p}_1, ..., \dot{p}_r\right)$ $\left(\dot{p}_1 \geq 0, ..., \dot{p}_r \geq 0\right)$, $|\dot{p}| = \dot{p}_1 + ... + \dot{p}_r = 1)$, $m \times n$—матрица $\left(\dot{\alpha}_{ij}\right)$ $\left(\dot{\alpha}_{ij} \geq 0,\ \dot{\alpha}_{1j} + ... + \dot{\alpha}_{mj} = 1,\ i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n\right)$ и векторы $\dot{y}^{(1)}, ..., \dot{y}^{(n)}$ $(\dot{y}^{(j)} \in Y_j,\ j = 1, ..., n)$, такие, что набор

$$\left\{p^*, x^{*(1)}, ..., x^{*(m)}, y^{*(1)}, ..., y^{*(n)}\right\}$$

есть статическое экономическое равновесие.

Доказательства этих общих теорем экономики благосостояния не являются обязательными и поэтому не приводятся.

При формулировках определений Парето-эффективности и статического экономического равновесия присутствует неявное допущение о наличии полной информации в моделируемой экономической системе.

12.3. Функции общественного благосостояния

12.3.1. В теории потребления каждый потребитель C_i, $i = 1, ..., m$, имеет свою индивидуальную функцию полезности. Для выяснения того, что является общественно желательным, целесообразно агрегировать индивидуальные функции полезности и агрегированную функции полезности естественно максимизировать. Индивидуальные функции полезности можно агрегировать по-разному, но при этом естественно требовать, чтобы с неубыванием каждой индивидуальной функции полезности агрегированная функция полезности также не убывала. Агрегированная функция полезности называется *функцией общественного благосостояния.* В общем виде функцию общественного благосостояния целесообразно представить в виде функции $W(u_1, ..., u_m)$ m переменных $u_1, ..., u_m$, где каждая переменная u_i, $i = 1, ..., m$, есть индивидуальная функция полезности потребителя C_i, $i = 1, ..., m$: $W = W(u_1(x^{(1)}),...,u_m(x^{(m)}))$, где $x^{(i)} = (x_1^{(i)},...,x_r^{(i)})$ — некоторый потребительский набор, $i = 1, ..., m$.

Если

$$W = u_1(x^{(1)}) + ... + u_m(x^{(m)}),$$

то функция общественного благосостояния называется *утилитаристской* функцией или функцией Бентама. Максимизация этой функции означает максимизацию суммарной полезности всех потребителей. На рис. 12.8 для случая двух потребителей C_1 и C_2 (т.е. $m = 2$) представлено выпуклое множество U достижимых полезностей. Линия уровня утилитаристской функции обществен-

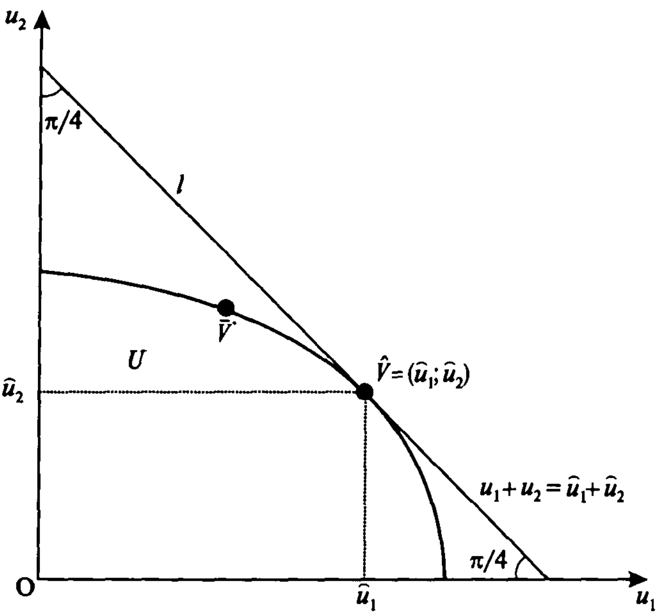


Рис. 12.8

ного благосостояния $W = u_1 + u_2$ представляет собой прямую l, образующую с осями Ou_1 и Ou_2 углы, равные 45° (=$\pi/4$). Точка $\widehat{V}(\widehat{u}_1; \widehat{u}_2)$ касания линии уровня l и эффективной границы ∂U множества U есть точка максимума утилитаристской функции общественного благосостояния. В случае, представленном на рис. 12.8, общественно желательной является ситуация $\widehat{V}(\widehat{u}_1; \widehat{u}_2)$, когда значение функции полезности $u_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)$ первого потребителя C_1 равно $\widehat{u}_1$, значение полезности $u_2\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right)$ второго потребителя C_2 равно $\widehat{u}_2$ и при этом получилось, что $\widehat{u}_1 > \widehat{u}_2$ (и весьма значительно).

Точка касания $\widehat{V}$ есть *одна* из точек эффективной границы ∂U множества U достижимых полезностей. Точка $\widehat{V}$ является образом точки V диаграммы Эджворта (рис. 12.9), которая расположена на контрактной линии L и, следовательно, изображает Парето-эффективный набор векторов $\left\{\widehat{x}^{(1)}, \widehat{x}^{(2)}\right\}$ $\left(\widehat{x}^{(1)} = (\widehat{x}_1^{(1)}, \widehat{x}_2^{(1)}),\ \widehat{x}^{(2)} = (\widehat{x}_1^{(2)}, \widehat{x}_2^{(2)})\right)$.

Следовательно, общественно желаемая ситуация $\widehat{V} = (\widehat{u}_1; \widehat{u}_2)$, реализуется на Парето-эффективном наборе векторов $\left\{\widehat{x}^{(1)}, \widehat{x}^{(2)}\right\}$. Обратное, конечно, неверно. Например, Парето-эффективному

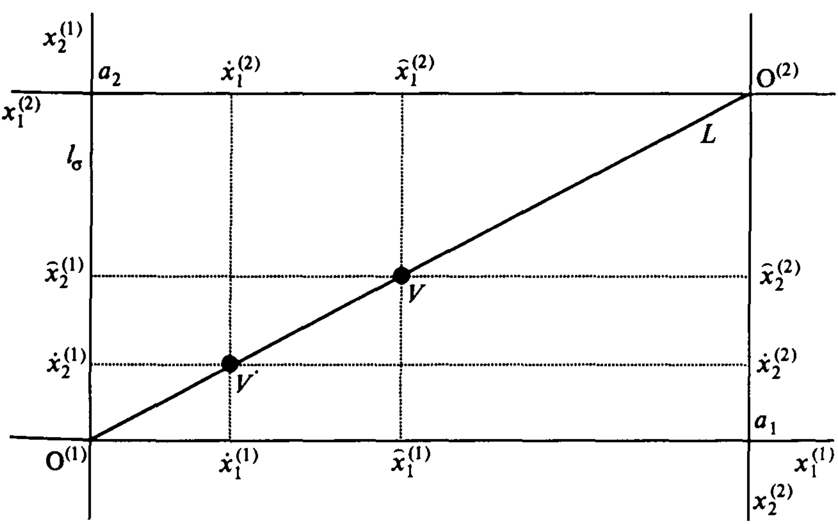


Рис. 12.9

набору векторов $\left\{\dot{x}^{(1)},\dot{x}^{(2)}\right\}$ (см. на рис. 12.9 точку $V^{\cdot}$ с координатами $(\dot{x}_1^{(1)},\dot{x}_2^{(1)})$ (или $(\dot{x}_1^{(2)},\dot{x}_2^{(2)})$) соответствует точка $\overline{V}^{\cdot}$ границы ∂U, которая не максимизирует утилитаристскую функцию общественного благосостояния. Поскольку (в случае выпуклых вверх функций полезности) Парето-эффективный набор порождает статическое экономическое равновесие, постольку общественно желаемая ситуация $\widehat{V}=(\widehat{u}_1;\widehat{u}_2)$ реализуется в статическом экономическом равновесии. Статическое экономическое равновесие может и не реализовать общественно желаемую ситуацию $\widehat{V}$. Здесь рассуждения аналогичны приведенным выше о том, что Парето-эффективный набор векторов не обязательно реализует общественно желаемую ситуацию.

Отметим, что в случае, когда уравнение границы ∂U множества достижимых полезностей имеет вид $u_1^2+u_2^2=6$ (см. рис. 12.6), имеем $\widehat{u}_1=\widehat{u}_2=\sqrt{3}$. Здесь $\widehat{x}_1^{(1)}=2$, $\widehat{x}_2^{(1)}=\dfrac{9}{2}$, $\widehat{x}_1^{(2)}=2$, $\widehat{x}_1^{(2)}=\dfrac{9}{2}$ (проверяется непосредственно). В случае когда уравнение границы ∂U

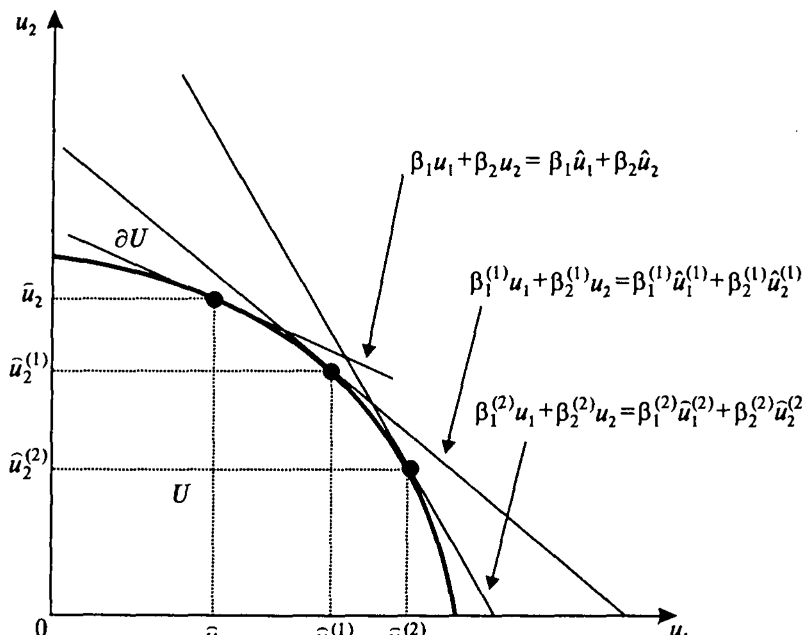


Рис. 12.10

имеет вид $u_1 + u_2 = 6$ имеем $\hat{u}_1 + \hat{u}_2 = 6$, $\hat{u}_1 \geq 0$, $\hat{u}_2 \geq 0$ (см. рис. 12.6). В случае когда уравнение границы ∂U имеет вид $u_1^{1/2} + u_2^{1/2} = 6$ (см. рис. 12.6), имеем либо $\hat{u}_1 = 0$, $\hat{u}_2 = 36$, либо $\hat{u}_1 = 36$, $\hat{u}_2 = 0$.

12.3.2. ***Обобщением*** утилитаристской функции общественного благосостояния является функция

$$W = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_m u_m,$$

в которой обычно полагают $\beta_1 + \ldots + \beta_m = 1$ и $\beta_1 \geq 0, \ldots, \beta_m \geq 0$.

Коэффициенты $\beta_1, \ldots, \beta_m$ принято называть весовыми множителями. Каждый такой коэффициент показывает относительную значимость соответствующей функции полезности для совокупного общественного благосостояния. На рис. 12.10 для случая двух потребителей C_1 и C_2 (т.е. для случая $m = 2$) представлено выпуклое множество U достижимых полезностей и показаны две линии уровня двух версий обобщенной утилитаристской функции общественного благосостояния:

$$W_1 = \beta_1^{(1)} u_1 + \beta_2^{(1)} u_2,$$
$$W_2 = \beta_1^{(2)} u_1 + \beta_2^{(2)} u_2.$$

Точка касания $\left(\hat{u}_1^{(1)}, \hat{u}_2^{(1)}\right) \in \partial U$ есть точка глобального максимума функции W_1, а точка касания $\left(\hat{u}_1^{(2)}, \hat{u}_2^{(2)}\right) \in \partial U$ есть точка глобального максимума функции W_2. Очевидно, в случае выпуклого множества U допустимых полезностей для каждой точки $(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$, границы ∂U достижимых полезностей можно подобрать весовые множители β_1 и β_2 так, чтобы точка глобального максимума функции $W = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$ общественного благосостояния при фиксированных запасах a_1 и a_2 продуктов G_1, G_2 совпадала с точкой $(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$. Таким образом, в случаях выпуклого множества U если весовые множители β_1 и β_2 пробегают (каждый) отрезок [0; 1] и при этом $\beta_1 + \beta_2 = 1$, то множество точек $(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$, которые являются решением задачи глобальной максимизации функции $W(u_1, u_2) = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2$, «заметает» (от слова «метла») всю эффективную границу ∂U множества U достижимых полезностей. Случай $m = 2$, проиллюстрированный на рис. 12.10, естественным образом обобщается на случай $W = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_m u_m$.

12.3.3. Случай обобщенной утилитаристской функции общественного благосостояния $W=\beta_1 u_1+\ldots+\beta_m u_m$ представляет собой важный частный случай *скалярной свертки критериев* задачи *векторной оптимизации*, в которой целевая функция векторная, а не скалярная, что имеет место в теории скалярной оптимизации.

Задача векторной оптимизации имеет следующую постановку:

$$W(x)=(u_1(x),\ldots,u_m(x))\,(\max)$$

при наличии ограничений

$$q_1(x)\geq 0,\ldots,q_p(x)\geq 0.$$

Здесь $x\in M\subseteq E_r$, M — замкнутое и выпуклое множество, функции $u_1(x),\ldots,u_m(x)$, $q_1(x),\ldots,q_p(x)$ выпуклы вверх на множестве M.

Вектор $x\in M$ называется допустимым, если он удовлетворяет неравенствам $q_1(x)\geq 0,\ldots,q_p(x)\geq 0$. Вектор $\dot{x}$ называется эффективным вектором задачи векторной оптимизации, если он допустим и если не существует другого допустимого вектора x, для которого $u_1(x)\geq u_1(\dot{x}),\ldots,u_m(x)\geq u_m(\dot{x})$, причем хотя бы одно из неравенств должно быть строгим.

Задача векторной оптимизации — это нахождение всех ее эффективных векторов.

Имеет место следующее важное утверждение.

Пусть $\dot{x}$ — эффективный вектор задачи векторной оптимизации. Тогда существуют числа $\beta_1,\ldots,\beta_m$, такие, что

$$\beta_1+\ldots+\beta_m=1,\ \beta_1\geq 0,\ldots,\beta_m\geq 0$$

и глобальный максимум функции $\beta_1 u_1(x)+\ldots+\beta_m u_m(x)$ при наличии ограничений $q_1(x)\geq 0,\ldots,q_p(x)\geq 0$, $x\in M$ достигается при $x=\dot{x}$.

12.3.4. Примером функции общественного благосостояния является следующая функция:

$$W(x)=\min\left(u_1(x),\ldots,u_m(x)\right),$$

которая называется *функцией Роулза*, или *роулзианской функцией* общественного благосостояния.

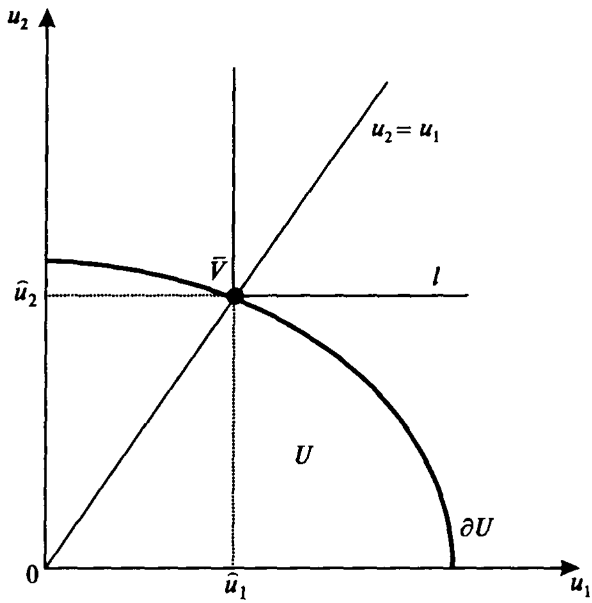


Рис. 12.11

Максимизация функции Роулза означает максимизацию уровня благосостояния потребителя, имеющего минимальное значение из значений остальных функций полезности.

На рис. 12.11 для случая двух потребителей C_1 и C_2 (т.е. для случая $m = 2$) представлено выпуклое множество U достижимых полезностей и показана линия l уровня функции общественного благосостояния $\min(u_1, u_2)$. Точка $\hat{V} = (\hat{u}_1; \hat{u}_2)$ «касания» линии уровня l и эффективной границы ∂U множества U есть точка глобального максимума функции Роулза общественного благосостояния. Рассмотрим случаи, представленные на рис. 12.6.

В случае когда ∂U имеет уравнение $u_1^2 + u_2^2 = 6$ (см. рис. 12.6), точка $\hat{V}$ имеет координаты $\hat{u}_1 = \hat{u}_2 = \sqrt{3}$. В случае когда ∂U имеет уравнение $u_1 + u_2 = 6$, точка $\hat{V}$ имеет координаты $\hat{u}_1 = \hat{u}_2 = 3$ (см. рис. 12.6). В случае когда ∂U имеет уравнение $u_1^{1/2} + u_2^{1/2} = 6$, точка $\hat{V}$ имеет координаты $\hat{u}_1 = \hat{u}_2 = 9$.

Если сопоставить полученные ответы с ответами в случае утилитаристской функции общественного благосостояния, то можно отметить их совпадение в случае, когда граница ∂U имеет уравнение $u_1^2 + u_2^2 = 6$. В остальных случаях ответы разные.

12.3.5. Выбор функции общественного благосостояния ассоциируется с определенным толкованием понятия *справедливости*. Например, согласно *Роулзу*, наиболее справедливым является такое распределение продуктов G_1, ..., G_r между потребителями C_1, ..., C_m, при котором максимизируется полезность наименее обеспеченных потребителей:

$$W(\hat{x}^{(1)}, ..., \hat{x}^{(m)}) = \max \min(u_1(x^{(1)}), ..., u_m(x^{(m)}).$$

Согласно *утилитаристскому подходу* наиболее справедливым является такое распределение продуктов G_1, ..., G_r между потребителями C_1, ..., C_m, при котором суммарная полезность $u_1(\hat{x}^{(1)}) + ... + u_m(\hat{x}^{(m)})$ максимальна. В этом случае вполне могут отличаться друг от друга значения $u_1(\hat{x}^{(1)}), ..., u_m(\hat{x}^{(m)})$ функций полезности разных потребителей C_1, ..., C_m (см. рис. 12.8).

В рассмотренных выше примерах (см. рис. 12.11 и 12.6) справедливое распределение продуктов G_1, G_2 между потребителями C_1, C_2 было Парето-эффективным и приводило к статическому экономическому равновесию.

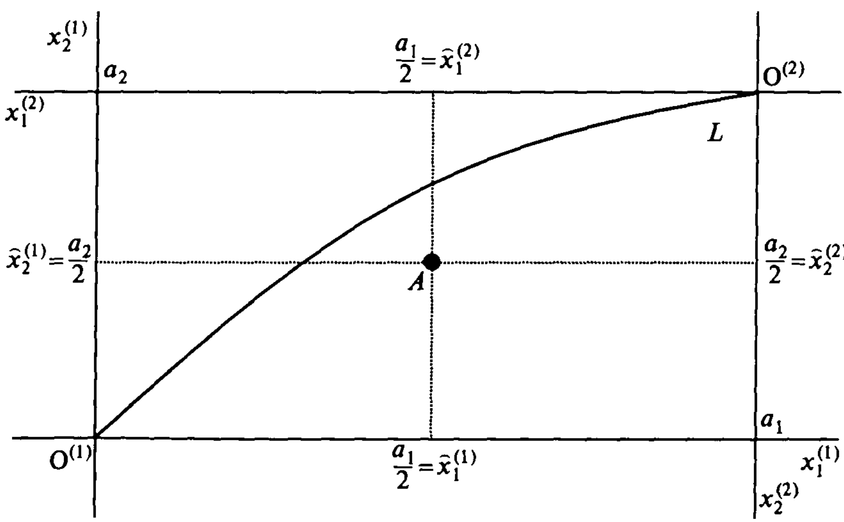


Рис. 12.12

Согласно *эгалитаристскому подходу* наиболее справедливым является такое распределение продуктов $G_1, \ldots, G_r$ между потребителями $C_1, \ldots, C_m$, при котором должно быть равное распределение каждого продукта между всеми потребителями. На рис. 12.12 точка $A = \left(\hat{x}_1^{(1)}, \hat{x}_2^{(1)}\right) = \left(\hat{x}_1^{(2)}, \hat{x}_2^{(2)}\right)$ такова, что $\hat{x}_1^{(1)} = \hat{x}_1^{(2)} = a_1/2$, $\hat{x}_2^{(1)} = \hat{x}_2^{(2)} = a_2/2$. Точка A иллюстрирует справедливое распределение продуктов G_1 и G_2 между потребителями C_1 и C_2 с точки зрения эгалитаристского подхода при $r = 2$ и $m = 2$. Если контрактная линия L не проходит через точку A (рис. 12.12), то мы имеем случай, когда ни один Парето-эффективный потребительский набор $\left(\dot{x}_1^{(1)}, \dot{x}_2^{(1)}\right)\left(\dot{x}_1^{(2)}, \dot{x}_2^{(2)}\right)$ не является справедливым (с точки зрения эгалитаристского подхода). Поскольку Парето-эффективный набор приводит к статическому экономическому равновесию (если все функции полезности выпуклы вверх), постольку статическое экономическое равновесие также может и не быть справедливым (с точки зрения эгалитаристского подхода).

Было рассмотрено три подхода к толкованию понятия справедливости, которые в порядке уменьшения равенства следует расположить так: эгалитаристский подход (каждый потребитель получает поровну всех продуктов), роулзианский подход (максимизируется минимальная функция полезности), утилитаристский подход (максимизируется суммарная полезность всех потребителей). К этим трем подходам следует добавить *рыночно ориентированный подход*, согласно которому справедливость устанавливает рынок.

12.4. Теорема о демократических групповых рыночных решениях и ее значение для теории общественного выбора

12.4.1. В параграфе 12.3 были рассмотрены конкретные примеры функции общественного благосостояния, которая агрегировала индивидуальные функции полезности. На самом деле вопрос о согласовании предпочтений не исчерпывается рассмотренными в параграфе 12.3 конкретными примерами.

Рассмотрим процедуру *голосования* в качестве способа согласования индивидуальных предпочтений. В ходе голосования подсчитывают число индивидуумов (потребителей), предпочитающих одно конкретное распределение x чего-то (например, продуктов, телепрограмм) другому конкретному распределению y. Вместо термина «конкретное распределение» (чего-то) используют термин «ситуация» (ситуация x, ситуация y). После подсчета голосов воля большинства признается выбором общества (*общественным выбором*). *Принцип большинства* является основой для принятия важнейших решений (политических, экономических, социальных) не только в странах, которые называют себя демократическими, но и во многих международных организациях, например в таких, как ООН, МОК. Принцип большинства базируется на эгалитаристском принципе «один человек – один голос».

Еще в XVIII в. Бурда и Кондорсе обратили внимание на *парадокс голосования*, суть которого состоит в следующем. Представим себе группу из трех студентов (s_1, s_2, s_3), каждый из которых имеет собственную шкалу предпочтений относительно трех видов спорта: футбола (F), легкой атлетики (LA) и гимнастики (H). Суть вопроса в том, на соревнование по какому виду спорта должна пойти вечером вся наша троица. Шкала предпочтений каждого студента имеет следующий вид:

S_1	S_2	S_3
F	LA	H
LA	H	F
H	F	LA

Шкала предпочтений каждого студента дана по убывающей сверху вниз. В частности, студент S_1 гимнастике предпочитает легкую атлетику, а легкой атлетике футбол. Аналогично поясняются шкалы предпочтений студентов S_2 и S_3.

При выборе между F и LA большинство (S_1 и S_3) высказывается в пользу F. При выборе между LA и H большинство (S_1 и S_2) высказывается в пользу LA. По аналогии со свойством транзитивности индивидуальных предпочтений естественно ожидать, что если F предпочитается LA, а LA предпочитается H, то F предпочитается H. Однако в рассматриваемом примере при выборе между H и F большинство (S_2 и S_3) высказывается в пользу H. Таким образом, свойство транзитивности здесь (т.е. в случае общественного выбора) не выполняется, т.е. голосование имеет *циклический* характер. В этом и состоит суть парадокса голосования.

Из-за нетранзитивности коллективных (групповых) предпочтений общественный выбор зависит от очередности постановки распределений (ситуаций) на голосование. Если сначала студенты должны (большинством голосов S_1 и S_3) сделать выбор между F и LA, а затем выбранную ситуацию F сравнить с H, то будет выбрана (большинством голосов S_2 и S_3) ситуация H. Если же сначала следует выбрать из F и H, а потом выбранную (большинством голосов S_2 и S_3) ситуацию H сравнить с LA, то большинством голосов (S_1 и S_2) будет выбрана ситуация LA. Зависимость общественного выбора от очередности постановки ситуаций на голосование открывает возможности для *манипулирования* этой очередностью.

12.4.2. В конце 40-х гг. XX в. К. Эрроу (*K. Arrow* (1950), К. Эрроу (2004)) проанализировал проблему преобразования индивидуальных предпочтений в коллективные в общем случае.

Эрроу предположил, что принятие коллективных решений в демократическом обществе должно удовлетворять ряду достаточно очевидных условий. Эрроу отобрал следующие *шесть* условий.

1. Все ситуации вполне упорядочены при принятии любого индивидуального (не коллективного) решения.

2. Все ситуации обладают свойством транзитивности при принятии любого индивидуального решения.

3. Правило принятия любого коллективного решения должно работать при любых индивидуальных предпочтениях (условие универсальности).

4. Если каждый индивидуум предпочитает ситуацию x ситуации y, то ситуация x социально предпочтительнее ситуации y (условие Парето-совместимости).

5. Не существует такого индивидуума (диктатора), предпочтения которого автоматически индуцируют аналогичные групповые (общественные) предпочтения независимо от индивидуальных предпочтений других индивидуумов (условие отсутствия диктатуры).

6. Отношение индивидуумов к ситуациям x и y не должно зависеть от их отношения к ситуации z (условие независимости от других ситуаций).

В своей работе Эрроу показал, что *невозможно* построить алгоритм принятия коллективных решений, который бы удовлетворял всем перечисленным шести условиям. Это утверждение Эрроу получило название *теоремы о невозможности* или теоремы о демократических групповых решениях. Суть этой теоремы в том, что любой коллективный выбор, удовлетворяющий всем перечисленным шести условиям, превращает одного индивидуума в диктатора.

Реакция теоретиков на основополагающую работу Эрроу была достаточно разноплановой. Некоторые теоретики считали необходимым наличие «единообразия» индивидуальных предпочтений для нормального функционирования демократических обществ. Для этого требуется манипулировать общественным сознанием. Другие теоретики обратили внимание на нерациональность удовлетворения общественных предпочтений тем же условиям, которым удовлетворяют индивидуальные предпочтения, т.е. условиям полной упорядоченности и транзитивности. Приписывать обществу (коллективу) характеристики отдельного индивидуума – значит заниматься его *олицетворением*, что логически неправомерно.

Работа Эрроу показала, что построение функции общественного благосостояния представляет собой серьезную проблему. В любом случае для преобразования индивидуальных предпочтений в коллективные (общественные) следует отказаться или существенно ослабить по крайней мере одно из перечисленных выше шести условий.

Вопросы для самоконтроля к главе 12

1. Что представляет собой модель экономики обмена?
2. В чем формальное отличие модели экономики обмена, в которой фигурируют потребители, от модели экономики обмена, в которой фигурируют фирмы?
3. Как определяется Парето-эффективность в модели экономики обмена?
4. Что представляет собой диаграмма (ящик) Эджворта?
5. Как с помощью диаграммы Эджворта описать процедуру обмена продуктами (товарами) между двумя потребителями C_1 и C_2?
6. Что такое контрактная линия?
7. Что такое критериальное пространство модели экономики обмена?
8. Что такое множество достижимых полезностей и его эффективная граница?
9. Как строятся множество достижимых полезностей и его эффективная граница в случае, когда степенные функции полезности потре-

бителей C_1 и C_2 имеют одинаковые показатели у первых и вторых переменных?

10. Как определяется статическое экономическое равновесие в экономике обмена?
11. Как формулируется первая теорема экономики благосостояния в случае экономики обмена? Приведите доказательство первой теоремы экономики благосостояния в случае экономики обмена.
12. Как формулируется вторая теорема экономики благосостояния в случае экономики обмена? Привести ее доказательство.
13. Как определяется Парето-эффективность (в общем случае)?
14. В чем принципиальное отличие Парето-эффективности и статического экономического равновесия?
15. Как формулируется первая теорема экономики благосостояния в общем случае?
16. Как формулируется вторая теорема экономики благосостояния в общем случае?
17. Как определяется функция общественного благосостояния?
18. Что такое утилитаристская функция общественного благосостояния?
19. Что такое роулзианская функция общественного благосостояния?
20. Как охарактеризовать взаимозависимость между общественно желаемой ситуацией, Парето-эффективностью и статическим экономическим равновесием?
21. Что такое обобщенная утилитаристская функция общественного благосостояния?
22. Как формулируется задача векторной оптимизации?
23. Как характеризуется взаимосвязь между сверткой критериев задачи векторной оптимизации и обобщенной утилитаристской функцией общественного благосостония?
24. Как характеризуется эгалитаристский подход к понятию справедливости?
25. Как характеризуется роулзианский подход к понятию справедливости?
26. Как характеризуется утилитаристский подход к понятию справедливости?
27. Как характеризуется рыночно ориентированный подход к понятию справедливости?
28. В чем суть парадокса голосования?
29. Как формулируются основные шесть условий теоремы Эрроу о невозможности?
30. Как формулируется теорема Эрроу о невозможности?
31. В чем состоит теоретическое значение теоремы Эрроу о невозможности?

32. В чем состоит практическое значение теоремы Эрроу о невозможности?

Задачи и упражнения для самоконтроля к главе 12

1. В экономике обмена $u_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)=\left(x_1^{(1)}\right)^{\alpha_1}\left(x_2^{(1)}\right)^{\alpha_2}$, $u_2\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right)=\left(x_1^{(2)}\right)^{\alpha_1}\left(x_2^{(2)}\right)^{\alpha_2}$, $x_1^{(1)}+x_1^{(2)}=a_1$, $x_2^{(1)}+x_2^{(2)}=a_2$.

   Параметры α_1 α_2, a_1 и a_2 равны:

   а) $\alpha_1=\frac{1}{2}$, $\alpha_2=\frac{1}{3}$, $a_1=32$, $a_2=1$;

   б) $\alpha_1=\frac{1}{2}$, $\alpha_2=1$, $a_1=32$, $a_2=1$;

   в) $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$, $a_1=32$, $a_2=1$.

   Для каждого конкретного набора параметров:

   а) постройте диаграмму (ящик) Эджворта;

   б) выпишите уравнение контрактной линии L и постройте ее в диаграмме Эджворта;

   в) постройте потребительский набор $\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)=\left(16; \frac{1}{3}\right)$ в диаграмме Эджворта. Выпишите уравнение линий безразличия функций полезности u_1 и u_2, содержащих потребительские наборы $\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)=\left(16; \frac{1}{3}\right)$ и $\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right)=\left(16; \frac{2}{3}\right)$. Постройте в диаграмме Эджворта эти линии безразличия (по не менее чем трем точкам, включая обязательно точки $(16; {}^1/_3)$ и $(16; {}^2/_3)$;

   г) найдите точки пересечения линий безразличия с контрактной линией и опишите полностью обмен продуктами между потребителями C_1 и C_2, когда они перемещаются в точки, расположенные на контрактной линии. Постройте точки пересечения в диаграмме Эджворта;

   д) выпишите уравнение эффективной границы ∂U множества достижимых полезностей U и постройте ∂U и U в критериальном пространстве Ou_1u_2 модели экономики обмена;

   е) найдите образы точки $(16; {}^1/_3)$ и точек, найденных в 4), в критериальном пространстве Ou_1u_2 и постройте эти образы в критериальном пространстве Ou_1u_2;

   ж) найдите и постройте в диаграмме Эджворта потребительский набор $\left(\bar{x}_1^{(1)}, \bar{x}_2^{(1)}\right)$, который реализует эгалитаристский подход к понятию справедливости. Постройте образ этого набора $\left(\bar{x}_1^{(1)}, \bar{x}_2^{(1)}\right)$ в критериальном пространстве Ou_1u_2;

   з) найдите и постройте в критериальном пространстве Ou_1u_2 конфигурацию $\left(\hat{u}_1, \hat{u}_2\right)$ полезностей, которая максимизирует утилитаристскую и роулзианскую функции общественного благосостояния. Найдите и постройте в диаграмме Эджворта прообразы $\left(\hat{x}_1^{(1)}, \hat{x}_2^{(1)}\right)$, $\left((\hat{x}_1^{(2)}, \hat{x}_2^{(2)})\right)$ конфигураций $\left(\hat{u}_1, \hat{u}_2\right)$ полезностей, которые реализуют утилитаристский и роулзианский подходы к справедливости.

2. В экономике обмена $u_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) = \left(x_1^{(1)}\right)^{\alpha_1}\left(x_2^{(1)}\right)^{\alpha_2}$, $u_2\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right) = \left(x_1^{(2)}\right)^{\beta_1}\left(x_2^{(2)}\right)^{\beta_2}$, $x_1^{(1)} + x_1^{(2)} = a_1$, $x_2^{(1)} + x_2^{(2)} = a_2$. Параметры α_1 α_2, β_1 β_2, a_1 и a_2 соответственно равны

   а) $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{1}{3}$, $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 2$, $a_1 = a_2 = 32$;

   б) $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_2 = \frac{1}{6}$, $a_1 = 16$, $a_2 = 256$.

   Для каждого конкретного набора параметров выполнить п. 1)–8) задания 1. Для варианта а) параметров рассмотреть два варианта потребительского набора $\left(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}\right)$: вариант $\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) = (4;\ 8)$ и вариант $\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) = (16;\ 8)$. Для варианта б) параметров рассмотреть два варианта потребительского набора $\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right)$: вариант $\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right) = (4;\ 64)$ и вариант $\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right) = (16;\ 64)$.

3. Проанализируйте групповые (общественные) предпочтения в случае, если шкала индивидуальных предпочтений (шкала предпочтений каждого студента) имеет вид

S_1	S_2	S_3
F	LA	H
LA	H	LA
H	F	F

4. Приведите содержательный пример индивидуальных предпочтений, объединение (агрегирование) которых в групповые предпочтения приводит к парадоксу голосования.

Вопросы, тесты и задачи для контрольных работ к главе 12

1. Нетранзитивными являются следующие отношения:
   а) отношение безразличия;
   б) отношение предпочтения-безразличия;
   в) отношение «вассал моего вассала не мой вассал».

2. Пусть функции полезности $u_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) = \left(x_1^{(1)}\right)^{\alpha_1}\left(x_2^{(1)}\right)^{\alpha_2}$, $u_2\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right) = \left(x_1^{(2)}\right)^{\alpha_1}\left(x_2^{(2)}\right)^{\alpha_2}$ строго выпуклы вверх. Тогда множество U достижимых полезностей модели экономики обмена:
   а) выпукло;
   б) не является неограниченным;
   в) является неограниченным;
   г) нет однозначного ответа.

3. Пусть функции полезности в модели экономики обмена имеют вид $u_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) = \left(x_1^{(1)}\right)^{\alpha_1}\left(x_2^{(1)}\right)^{\alpha_2}$, $u_2\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right) = \left(x_1^{(2)}\right)^{\alpha_1}\left(x_2^{(2)}\right)^{\alpha_2}$. Пусть граница ∂U множества U достижимых полезностей строго выпукла к точке О критериального пространства Ou_1u_2.
   Тогда:
   а) функция $u_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)$ выпукла вверх;
   б) функция $u_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)$ выпукла вниз;
   в) график функции $u_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)$ — элемент седловой поверхности;
   г) ответы а)–в) не верны.
4. Опишите взаимосвязь между контрактной линией диаграммы Эджворта и эффективной границей ∂U множества U достижимых полезностей.
5. Приведите пример, в котором справедливый (с точки зрения эгалитариетского подхода) потребительский набор Парето-эффективен.
6. Приведите пример Парето-эффективного потребительского набора $\left(\dot{x}_1^{(1)}, \dot{x}_2^{(2)}\right)$, который невозможно получить в процессе обмена на конкурентных рынках.
7. В экономике обмена $u_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) = \left(x_1^{(1)}\right)^2 x_2^{(1)}$, $u_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) = \left(x_1^{(1)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(x_2^{(1)}\right)^{\frac{1}{4}}$, $x_1^{(1)} + x_1^{(2)} = a_1$, $x_1^{(2)} + x_2^{(2)} = a_2$, где $a_1 = 8$, $a_2 = 64$:
   а) выведите уравнение контрактной линии L и постройте ее в диаграмме Эджворта;
   б) выведите уравнение эффективной границы ∂U множества достижимых полезностей U и постройте ∂U и U в критериальном пространстве Ou_1u_2 экономики обмена.

Глава 13

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЦЕН

13.1. Простейшая однопродуктовая модель экономнческой динамики (паутииообразная модель) и ее обобщения

13.1.1. В простейшей однопродуктовой модели экономической динамики время дискретное. Единица времени (например, сутки, неделя, декада, месяц, квартал, год) называется (производственным) *периодом*. Упорядоченная совокупность периодов называется *временным промежутком*. Базовый период называется нулевым ($t = 0$), текущий период называется периодом t. Состояние моделируемой системы в периоде t описывается одной (эндогенной) переменной – ценой $p(t)$ одной единицы продукта.

Функции рыночного предложения и рыночного спроса простейшей однопродуктовой модели экономической динамики с дискретным временем имеют вид

$$y^S(t) = \alpha p(t-1) + \beta,\ \ y^D(t) = -a \cdot p(t) + b,\ \ t = 1, 2, \ldots, \qquad (13.1.1)$$

где параметры $a > 0$, $b > 0$, $\alpha > 0$ и β не зависят от времени t.

В модели принята предпосылка, что величина $y^D(t)$ рыночного спроса в период t определяется ценой $p(t)$ этого же периода, ибо продукт (товар) сегодня (в период t) покупают по текущей $p(t)$, а не по вчерашней ($p(t-1)$) цене или по цене $p(t+1)$, которая будет завтра.

Продукт (товар) следует еще произвести. В модели принята предпосылка, что объем предложения сегодня (т.е. $y^S(t)$) определяется вчерашней ценой ($p(t-1)$) продукта. Тем самым предполагается, что периода хватит для производства и предложения продукта сегодня, т.е. в периоде t, в объеме $y^S(t)$.

Предполагается также, что произведенный в периоде $t-1$ и предлагаемый в периоде t продукт полностью реализуется в периоде t, т.е. предполагается, что $y^S(t) = y^D(t)$, т.е. в модели не создается запас продукта.

Таким образом, простейшая однопродуктовая модель экономической динамики в линейном варианте представляет собой обыкновенное линейное разностное уравнение первого порядка (неоднородное, с постоянными коэффициентами)

$$a \cdot p(t) + \alpha \cdot p(t-1) = b - \beta, \tag{13.1.2}$$

которое получается из равенства $y^S(t) = y^D(t)$.

Сначала проанализируем поведение во времени t траектории цен $p(t)$ (удовлетворяющей начальному условию $p(0) = p^0$ — рис. 13.1), используя наглядную геометрическую интерпретацию.

Если $\alpha < a$ и $b > \beta$, то прямая $y = \alpha p + \beta\,(S)$ пересекает ось Оp под углом φ, таким, что $tg\varphi = \alpha$, а прямая $y = -ap + b(D)$ пересекает ось Оp под углом ψ, таким, что $tg\psi = a$ (см. рис. 13.1). Поскольку $tg\psi = \alpha < a = tg\psi$, постольку прямая D пересекает ось Оp под большим углом ψ, чем угол φ, под которым S пересекает ось Оp. Точка

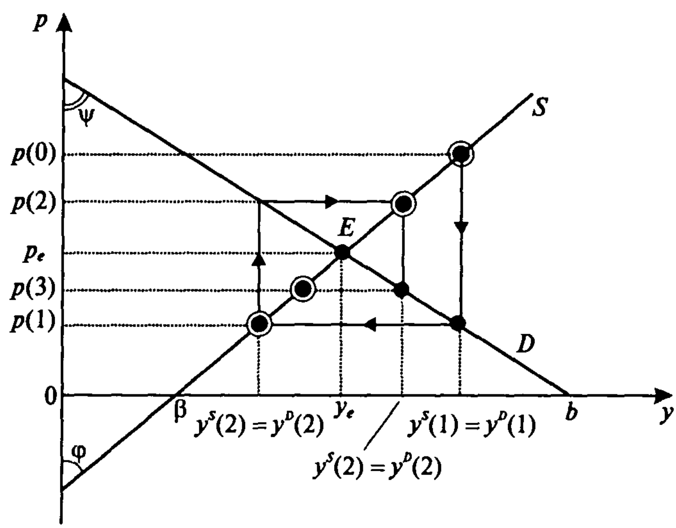


Рис. 13.1

E пересечения прямых D и S имеет координаты y_e (y_e – величина равновесия) и p_e (p_e – цена равновесия). На основании рис. 13.1 строим траекторию цен $p(t)$, удовлетворяющую начальному условию $p(0) = p^0$, следующим образом.

При $p(0) = p^0$ имеем $y^S(1) = \alpha \cdot p(0) + \beta$, далее из равенства $y^S(1) = y^D(1) = -a \cdot p(1) + b$ определим цену $p(1)$ Этот цикл повторяется:

$p(1) \Rightarrow y^S(2) = \alpha \cdot p(1) + \beta \Rightarrow y^S(2) = y^D(2) = - a \cdot p(2) + \beta \Rightarrow p(2)$ и т.д.

На основании рис. 13.1 имеем с ростом времени t неограниченное приближение текущей цены $p(t)$ к цене равновесия p_e (паутина «наматывается» на точку E). В связи с тем что разность $p(t) - p_e$ фактически становится равной нулю, имеем фактическое равенство $p(t) = p_e$, начиная с какого-то конечного номера t.

Если $\alpha > a$ и $b > \beta$, то прямая S пересекает ось Оp под углом φ, таким, что $tg\varphi = \alpha$, прямая D пересекает ось Оp под углом ψ, таким, что $tg\psi = a$, и угол φ больше угла ψ (рис. 13.2).

На основании рис. 13.2 строим траекторию цен $p(t)$ так же, как строилась траектория цен в первом случае ($\alpha < a$). Во втором случае ($\alpha > a$) паутина «разматывается» от точки E и построение заканчивается при цене $p(2)$, ибо вертикальная прямая $y = y^S(3)$ пересекает прямую D ниже оси Оy. Это означает в рассматриваемом

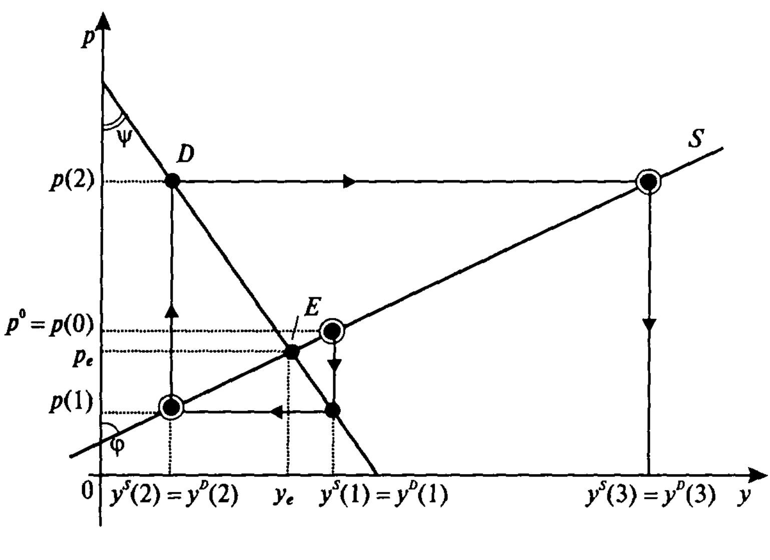


Рис. 13.2

втором случае выполнение неравенства $p(3) < 0$, что лишено экономического смысла.

Если эндогенная переменная (во втором случае текущая цена $p(t)$) принимает значения, не имеющие экономического смысла, то рассматриваемая модель теряет свою адекватность. Во втором случае линии D и S могут быть прямыми лишь вблизи точки E, а далее они должны искривляться, т.е. линейная модель должна превратиться в нелинейную.

Рассмотрим геометрическую версию второго случая ($\alpha > a$), которая более адекватна экономической реальности (рис. 13.3). Здесь около точки E наклоны линий S и D такие же, как и во втором случае ($\alpha > a$). Однако с удалением от точки E наклоны линий S и D становятся похожими на наклоны этих линий в первом случае ($\alpha < a$). В рассматриваемом сейчас варианте паутина также разматывается, но не уходит в отрицательные значения цены, а наматывается изнутри на некий прямоугольный контур (на рис. 13.3 он не показан) и при четных номерах цена $p(t)$ стремится к пороговой величине $p^{**} > 0$, а при нечетных номерах цена $p(t)$ стремится к пороговой величине p^{*} (см. рис. 13.3).

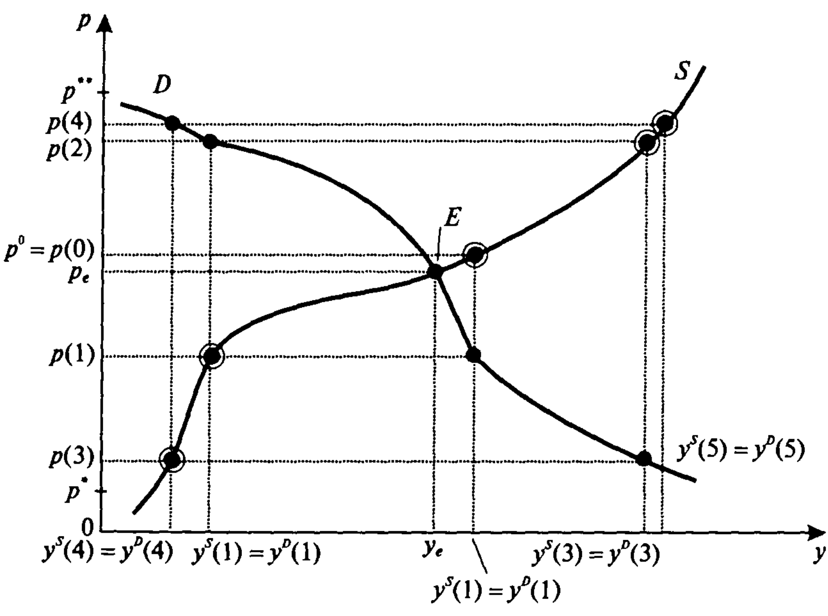


Рис. 13.3

Если $\alpha = a$ и $b > \beta$, то прямые S и D пересекают ось Op под равными углами $\varphi = \psi$ и мы имеем случай циклических колебаний текущей цены $p(t)$ около цены равновесия p_e (рис. 13.4). Этот модельный вариант маловероятен в реализации.

13.1.2. Формально динамика текущей цены анализируется с помощью аппарата теории обыкновенных линейных разностных уравнений первого порядка.

В линейном варианте (при $b > \beta$) имеем уравнение для отыскания цены p_e равновесия

$$a \cdot p + \alpha \cdot p = b - \beta, \tag{13.1.3}$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} p_e &= \frac{b-\beta}{a+\alpha}, \\ y_e &= -a\frac{b-\beta}{a+\alpha} + b = \frac{a\beta + \alpha b}{a+\alpha}. \end{aligned} \tag{13.1.4}$$

Полагая $q(t) = p(t) - p_e$, имеем после вычитания равенства (13.1.3) из уравнения (13.1.2) следующее однородное обыкновенное разностное уравнение первого порядка:

$$a \cdot q(t) + \alpha \cdot q(t-1) = 0, \tag{13.1.5}$$

общее решение которого имеет вид

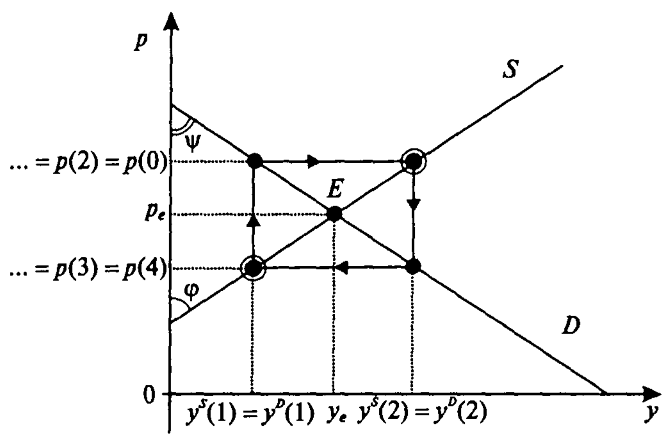


Рис. 13.4

$$q(t)=\left(-\frac{\alpha}{a}\right)^t c, \tag{13.1.6}$$

где c —произвольная постоянная. Тогда общее решение неоднородного разностного уравнения (13.1.2) имеет вид

$$p(t)=q(t)+p_e=\left(-\frac{\alpha}{a}\right)^t c+p_e. \tag{13.1.7}$$

Если $p(0)=p^0$, то имеем

$$p^0=\left(-\frac{\alpha}{a}\right)^0 c+p_e,$$

откуда

$$c=p^0-p_e.$$

Следовательно, частное решение уравнения (13.1.2), удовлетворяющее начальному условию $p(0)=p^0$, имеет вид

$$p(t)=(p^0-p_e)\left(-\frac{\alpha}{a}\right)^t+p_e. \tag{13.1.8}$$

Если $\alpha < a$, то, очевидно, текущая цена $p(t)$ при $t \to +\infty$ неограниченно приближается к цене равновесия p_e (см. рис. 13.1). Если $\alpha = a$, то имеем случай циклических колебаний

$$p(t)=(p^0-p_e)(-1)^t+p_e. \quad \text{(см. рис. 13.4).} \tag{13.1.9}$$

Если $\alpha > a$, то при $t \to +\infty$ текущая цена неограниченно растет по модулю:

$$|p(t)-p_e|=|p^0-p_e|\left|\frac{\alpha}{a}\right|^t \to +\infty \quad \text{(см. рис. 13.2).} \tag{13.1.10}$$

13.1.3. Простейшая однопродуктовая модель экономической динамики (13.1.2) обобщается в следующих направлениях.

1. Функция предложения $y^S(t)$ может зависеть не только от цены $p(t-1)$ предыдущего периода, но и от цен более ранних периодов:

$$y^S(t)=\alpha_1\cdot p(t-1)+\alpha_2\cdot p(t-2)+\ldots+\alpha_k\cdot p(t-k)+\beta.$$

В этом случае простейшая однопродуктовая модель экономической динамики (13.1.2) преобразуется в модель, описывающуюся неоднородным обыкновенным разностным уравнением порядка k с постоянными коэффициентами

$$a \cdot p(t) + \alpha_1 \cdot p(t-1) + \ldots + \alpha_k \cdot p(t-k) = b - \beta.$$

Для решения этого уравнения следует использовать теорию обыкновенных разностных уравнений порядка k с постоянными коэффициентами.

2. В модели могут быть учтены запасы $y^D(t) = y^S(t) + f(t)$.

Если $f(t) > 0$, то в моделируемую систему поступает извне (т.е. имеет внемодельное происхождение) продукт в объеме $f(t)$ единиц. Если $f(t) < 0$, то из моделируемой системы изымается продукт в объеме $(-f(t))$ единиц. Слагаемое $f(t)$ может быть как экзогенной переменной, так и некоторой функцией, зависящей от эндогенной переменной $p(t)$.

3. В функциях (13.1.1) спроса и предложения параметры могут зависеть от времени:

$$y^S(t) = \alpha(t) \cdot p(t-1) + \beta(t).\ y^D(t) = -a(t)p(t) + b(t),\ t = 1, 2, \ldots$$

В этом случае (при отсутствии запасов) простейшая однопродуктовая модель экономической динамики (13.1.2) преобразуется в следующую модель:

$$a(t)p(t) + \alpha(t)p(t-1) = b(t) - \beta(t). \qquad (13.1.11)$$

Частное решение уравнения (13.1.11), удовлетворяющее начальному условию $p(0) = p^0$, можно найти *пошаговым методом*, который, к сожалению, не распространяется на обыкновенные разностные уравнения с переменными коэффициентами порядка выше первого

$$a(t)p(t) + \alpha_1(t)p(t-1) + \ldots + \alpha_k(t)p(t-k) = b(t) - \beta(t).$$

Приведем первые две итерации пошагового метода.

При $t = 1$ из (13.1.11) получаем

$$p(1) = -\frac{\alpha(1)}{a(1)}p^0 + \frac{\gamma(1)}{a(1)},$$

где $\gamma(1) = (b(1) - \beta(1)) / a(1), p^0 = p(0)$.

При $t = 2$ имеем

$$p(2) = -\frac{\alpha(2)}{a(2)}p(1) + \frac{\gamma(2)}{a(2)} = -\frac{\alpha(2)}{a(2)}\left(-\frac{\alpha(1)}{a(1)}p^0 + \frac{\gamma(1)}{a(1)}\right) + \frac{\gamma(2)}{a(2)} =$$

$$= \frac{\alpha(2)\alpha(1)}{a(2)a(1)}p^0 - \frac{\alpha(2)}{a(2)} \cdot \frac{\gamma(1)}{a(1)} + \frac{\gamma(2)}{a(2)},$$

где $\gamma(2) = (b(2) - \beta(2)) / a(2)$. И т.д.

4. Функции (13.1.1) спроса и предложения могут быть нелинейными. В этом случае имеем нелинейную версию простейшей однопродуктовой модели экономической динамики (13.1.2)

$$f(p(t)) = g(p(t-1)), \tag{13.3.12}$$

где $f(p(t)) = y^D(t)$, $g(p(t-1)) = y^S(t)$.

На рис. 13.3 приведено геометрическое решение нелинейной версии (13.1.12).

13.2. Избыточный спрос и моделирование динамики цен с использованием аппарата теории обыкновенных дифференциальных уравнений

13.2.1. Разность между рыночным спросом $\overset{\circ}{x}(p)$ (см. параграф 11.2) и рыночным предложением $\overset{\circ}{y}(p)$ (см. параграф 11.1) $F(p) = \overset{\circ}{x}(p) - \overset{\circ}{y}(p)$ и называется *избыточным спросом* при ценах $p = (p_0, p_1, ..., p_r)$. (Здесь и далее в главе 13 полагаем, что число продуктов равно $r + 1$ (а не r, как в главе 11) и что общий запас потребителей $z = z^{(1)} + ... + z^{(m)} = 0$). Функция $F(p)$ однородна нулевой степени, ибо функции $\overset{\circ}{x}(p)$ и $\overset{\circ}{y}(p)$ однородны нулевой степени $\overset{\circ}{x}(\gamma p) = \overset{\circ}{x}(p)$, $\overset{\circ}{y}(\gamma p) = \overset{\circ}{y}(p)$, $0 \le \gamma \in E_1$ (см. параграфы 11.1 и 11.2).

Поскольку в этой главе речь идет о динамике цен, а по существу об экономической динамике, постольку время t вводится явно. С содержательной экономической точки зрения целесообразно рассматривать дискретное время, однако с формальной точки зрения более удобно непрерывное время, ибо аппарат теории обыкновенных дифференциальных уравнений проще аппарата теории обыкновенных разностных уравнений. Поэтому далее предполагается, что время t непрерывно.

Неравенство $F_k(p(t)) > 0$ означает, что в момент t избыточный спрос на продукт G_k, $k = 0, 1, ..., r$, положителен и поэтому текущая цена $p_k(t)$ должна расти, а цена $p_k(t)$ растет, если ее производная по времени t $\dot{p}_k(t)$ положительна, т.е. $\dot{p}_k(t) > 0$.

Неравенство $F_k(p(t)) < 0$ означает, что в момент t избыточный спрос на продукт G_k, $k = 0, 1, ..., r$, отрицателен и поэтому текущая цена $p_k(t)$ должна падать, а цена $p_k(t)$ падает, если ее производная по времени t $\dot{p}_k(t)$ отрицательна, т.е. $\dot{p}_k(t) < 0$.

Следовательно, если допустить, что избыточный спрос $F_k(p(t))$ на продукт G_k ($k = 0, 1, ..., r$) пропорционален производной $\dot{p}_k(t)$ цены на этот продукт по времени, то получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{p}_k(t) = \rho F_k(p_0(t), p_1(t), ..., p_r(t)), \\ &k = 0, 1, ..., r. \end{aligned} \tag{13.2.1}$$

Траектория $p(t)$ ($t \geq 0$) описывает динамику рыночных цен в модели Эрроу – Дебре (МЭД), рост и падение во времени которых зависит от знака и величины избыточного спроса.

13.2.2. Поскольку функции избыточного спроса $F_k(p_0, p_1, ..., p_r)$ однородны нулевой степени, постольку систему (13.2.1) можно переписать так:

$$\begin{aligned} &\frac{\dot{p}_k(t)}{\rho} = F_k\left(\frac{p_0(t)}{\rho}, \frac{p_1(t)}{\rho}, ..., \frac{p_r(t)}{\rho}\right), \\ &k = 0, 1, ..., r. \end{aligned} \tag{13.2.2}$$

Полагая в (13.2.2) $p_k(t)/\rho = \tilde{p}_k(t)$, получим

$$\dot{\tilde{p}}_k(t) = F_k(\tilde{p}_0(t), \tilde{p}_1(t), ..., \tilde{p}_r(t)), \quad k = 0, 1, ..., r.$$

Убрав волну, вернемся к старой символике $p_k(t)$, $k = 0, 1, ..., r$, т.е. для новой цены $\tilde{p}_k(t)$ будем использовать прежнюю символику $p_k(t)$, $k = 0, 1, ..., r$.

С помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{p}_k(t) = F_k(p_0(t), p_1(t), ..., p_r(t)), \\ &k = 0, 1, ..., r \end{aligned} \tag{13.2.3}$$

будем анализировать динамику текущих цен $p(t) = (p_0(t), p_1(t), ..., p_r(t))$. Напомним, что вектор цен $p(t)$ характеризует состояние моделируемой экономической системы в момент времени t.

13.3. Динамика цен в случае, когда они не нормированы, и в случае, когда они нормированы

13.3.1. В пункте 4 определения общего экономического равновесия (см. параграф 11.3) требуется, чтобы для цен $p^* = (p^*_0, p^*_1, ..., p^*_r)$ равновесия имел место закон Вальраса $p^*F(p^*) = 0$.

Если вектор цен равновесия положителен $p^* > 0$ (что естественно с содержательной экономической точки зрения), то по условию дополняющей нежесткости $F(p^*) = 0$, т.е.

$$F_0(p^*_0, p^*_1, ..., p^*_r) = 0,$$

$$...$$

$$F_r(p^*_0, p^*_1, ..., p^*_r) = 0,$$

откуда следует, что вектор цен равновесия p^* есть вектор равновесия автономной системы (13.2.3), т.е. вектор p^* есть постоянное (стационарное) решение автономной системы (13.2.3).

Таким образом, анализ динамики текущих цен $p(t) = (p_0(t), p_1(t), ..., p_r(t))$ сводится к анализу асимптотического поведения траектории текущих цен $p(t)$ при неограниченном возрастании времени t.

Анализ асимптотического поведения текущих цен $p(t)$ во времени проводится в предположении, что закон Вальраса $pF(p) = 0$ выполнен не только для цен равновесия p^*, но и для текущих цен $p(t) : p(t)F(p(t)) = 0$.

Вектору равновесия p^* системы (13.2.3) соответствует точка p^* фазового пространства цен $Op_0 p_1, ..., p_r$ (рис. 13.5).

В связи с тем что функции $F_0(p), F_1(p), ..., F_r(p)$ однородны нулевой степени, вектором равновесия системы (13.2.3) будет также вектор λp^*, где $\lambda > 0$ – любое число (см. рис. 13.5). Вектору равновесия p^* системы (13.2.3) в эволюционном пространстве $Otp_0p_1,...,p_r$ соответствует луч L^{**}, параллельный оси Ot, выходящий из точки p^* фазового пространства $Op_0p_1,...,p_r$, а лучу L^* натянутому на вектор p^* в фазовом пространстве $Op_0p_1,...,p_r$, в эволюционном пространстве $Otp_0p_1,...,p_r$ соответствует вертикальная плоскость, параллельная оси Ot и проходящая через этот луч L^* (рис. 13.6).

Если начальный вектор цен p^0 не расположен на луче L^*, то существует (по теореме существования и единственности реше-

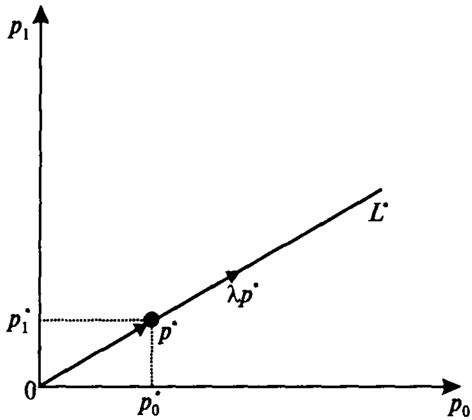


Рис. 13.5

ния задачи Коши) единственная траектория текущих цен $p(t, p^0)$, которая удовлетворяет системе (13.2.3) и начальному условию $p(0, p^0) = p^0$.

График траектории цен $p(t, p^0)$ в эволюционном пространстве $Otp_0p_1,...,p_r$ также называется *траекторией цен* или *интегральной*

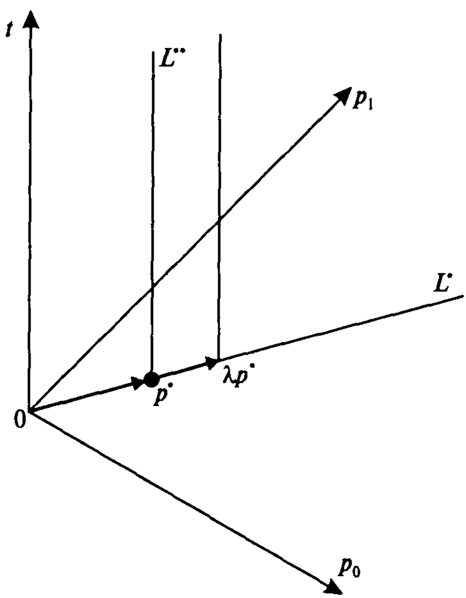


Рис. 13.6

линией цен (рис. 13.7). График траектории цен $p(t, p^0)$ в фазовом пространстве $Op_0p_1,...,p_r$ называется *фазовой траекторией цен* (рис. 13.8).

Если для любого начального вектора цен p^0, близкого к лучу L^*, существует постоянная $\lambda(p^0)$, такая, что траектория $p(t, p^0)$ неограниченно приближается к вектору $\lambda(p^0)p^*$ при неограниченном возрастании времени t, то говорят, что вектор равновесия p^* системы (13.2.3) *локально устойчив* (см. рис. 13.7 и 13.8).

Если $\lim\limits_{t} p(t, p^0) = \lambda(p^0)p^*$ для любого начального вектора p^0, то говорят, что вектор равновесия p^* системы (13.2.3) *глобально устойчив*.

13.3.2. Цены $p_0(t)$, $p_1(t)$, ..., $p_r(t)$ принято называть *ненормированными*. Переход к *нормированным* ценам осуществляется за счет того, что цены $p_1(t)$, ..., $p_r(t)$ делят на цену $p_0(t)$ нулевого продукта (товара), в роли которого могут выступать деньги. В качестве нормирующей цены может выступать любая другая цена $p_1(t)$, ..., $p_r(t)$.

Итак, нормированные цены имеют вид

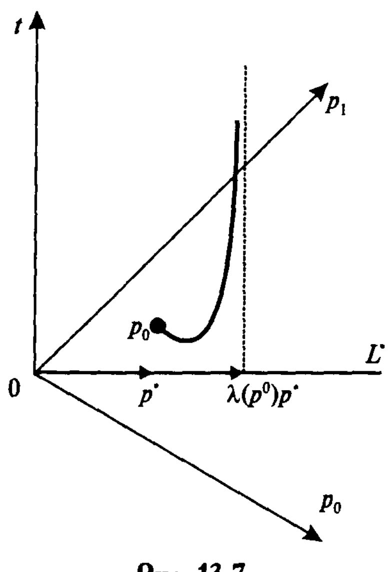


Рис. 13.7

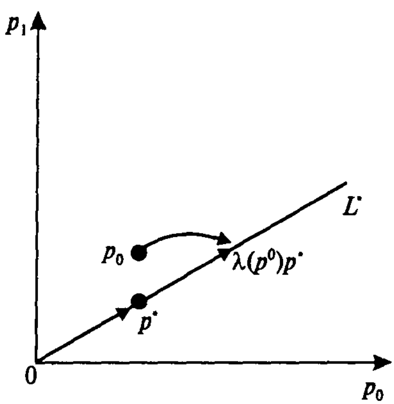


Рис. 13.8

$$q_1(t)=\frac{p_1(t)}{p_0(t)},\dots,q_r(t)=\frac{p_r(t)}{p_0(t)}.$$

В силу однородности нулевой степени избыточного спроса на каждый продукт имеем

$$F_i(p_0(t),\, p_1(t),\dots,\, p_r(t))=F_i\left(1,\frac{p_1(t)}{p_0(t)},\dots,\frac{p_r(t)}{p_0(t)}\right)=G_i(q_1(t),\dots,q_r(t)),$$

где $i = 0, 1, 2, \dots, r$.

Для анализа динамики нормированных цен используется следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}&\dot{q}_k(t)=G_k(q_1(t),\dots,q_r(t)),\\&k=1,\dots,r.\end{aligned} \tag{13.3.1}$$

Отметим, что системы (13.3.1) и (13.2.3) не являются эквивалентными в математическом смысле.

Аналогично случаю ненормированных цен используется понятие вектора равновесия q^* системы (13.3.1) и анализируется поведение траектории нормированных цен $q(t)$ при неограниченном возрастании времени t.

Вектор $q^* = (q_1^*, \dots, q_r^*)$ нормированных цен называется вектором равновесия системы (13.3.1), если

$$\begin{aligned}&G_k(q_1^*,\dots,q_r^*)=0,\\&k=1,\dots,r.\end{aligned} \tag{13.3.2}$$

Вектор равновесия q^* представляет собой постоянное (стационарное) решение системы (13.3.1). В фазовом пространстве $Oq_1, \dots, q_r$ вектор равновесия q^* изображается точкой (рис. 13.9), в эволюционном пространстве $Otq_1, \dots, q_r$ — лучом, параллельным оси Ot и проходящим через точку q^* в фазовом пространстве $Oq_1, \dots, q_r$ (рис. 13.10).

Если для любого вектора q^0, близкого к вектору q^*,

$$\lim_{t} q(t, q^0) = q^*, \tag{13.3.3}$$

то говорят, что вектор равновесия q^* *локально устойчив* (см. рис. 13.9 и 13.10). Символом $q(t, q^0)$ обозначено решение системы (13.3.1), удовлетворяющее начальному условию $q(0, q^0) = q^0$.

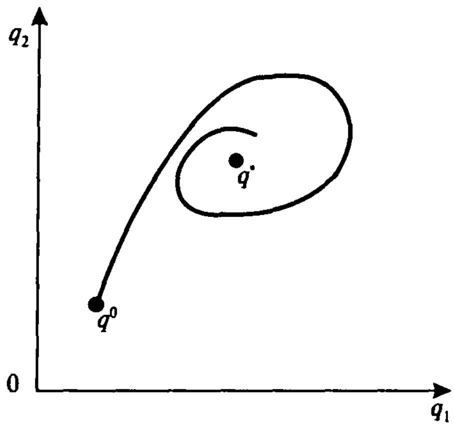


Рис. 13.9

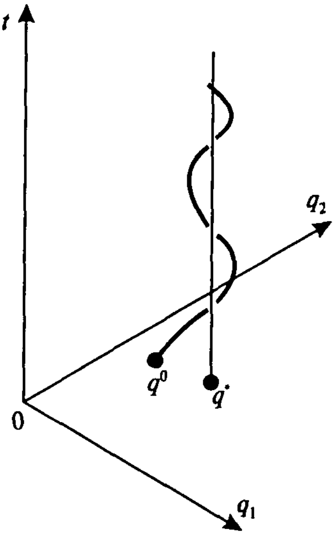


Рис. 13.10

Если для любого начального вектора q^0 имеет место равенство (13.3.3), то вектор равновесия q^* называется *глобально устойчивым*.

13.4. Достаточные условия локальной устойчивости цен равновесия

13.4.1. Достаточные условие локальной и глобальной устойчивости цен равновесия являются весьма жесткими. Для их формулировки нам понадобятся некоторые понятия, которые сами по себе также являются важными.

Квадратная матрица $C = (c_{ij})$ называется *матрицей Метцлера*, если все ее внедиагональные элементы $c_{ij} \geq 0$, $i \neq j$. Квадратная матрица $C = (c_{ij})$ называется *сильной* матрицей Метцлера, если все $c_{ij} > 0$, $i \neq j$.

Говорят, что выполнено *условие валовой заменимости*, если

$$A_{ij}(p) = \frac{\partial F_i(p)}{\partial p_j} \geq 0, \quad i, j = 0, 1, \ldots, r, \; i \neq j,$$

$$B_{ij}(q) = \frac{\partial G_i(q)}{\partial q_j} \geq 0, \quad i, j = 1, \ldots, r, \; i \neq j.$$

Говорят, что выполнено *условие сильной валовой заменимости*, если

$$A_{ij}(p)=\frac{\partial F_i(p)}{\partial p_j}>0,\ i,j=0,\ 1,\ \dots,\ r,\ i\neq j,$$

$$B_{ij}(q)=\frac{\partial G_i(q)}{\partial q_j}>0,\ i,j=1,\ \dots,\ r,\ i\neq j.$$

С содержательной экономической точки зрения неравенство

$$\frac{\partial F_i(p)}{\partial p_j}\geq 0,\ i\neq j\left(\frac{\partial G_i(q)}{\partial q_j}\geq 0,\ i\neq j\right)$$

означает, что продукты G_i и G_j являются взаимозаменяемыми (если цена p_j растет, то величина (избыточного) спроса на продукт G_i также растет).

Из условия валовой заменимости (сильной валовой заменимости) следует, что в моделируемой системе отсутствуют взаимодополняемые продукты, что является сильным упрощением экономической реальности.

13.4.2. В случае ненормированных цен достаточное условие локальной устойчивости цен равновесия формулируется так.

Пусть $A(p^*)=A_{ij}(p^*))$ – сильная матрица Метцлера. Пусть вектор равновесия $p^*>0$ и начальный вектор цен p^0 близок к лучу $L^*=$ $=\{\lambda p^*|\ 0\leq\lambda\in E_1\}$, тогда существует постоянная $\lambda^*=\lambda(p^0)$, такая, что

$$\lim_{t} p(t,\ p^0)=\lambda^*(p^0)p^*.$$

В случае нормированных цен достаточные условия локальной устойчивости цен равновесия формулируются так:

1. Пусть $B(q^*)=(B_{ij}(q^*))$ – матрица Метцлера, $i,j=1,\ \dots,\ r$. Пусть

$$\frac{\partial G_0(q^*)}{\partial q_j}>0,\ j=1,\dots,r$$

либо

$$\frac{\partial G_0(q^*)}{\partial q_j}\geq 0,\ j=1,\dots,r$$

и $\det B(q^*)=\det(B_{ij}(q^*))\neq 0.$

2. Пусть $B(q^*)$ – матрица Метцлера, пусть число ξ такое, что матрица $B(q^*)+\xi I \underset{(\neq)}{\geq} 0$, а номер h такой, что $(B(q^*)+\xi I)^h > 0$.

Пусть

$$\frac{\partial G_0(q^*)}{\partial q_1} \geq 0, \ldots, \frac{\partial G_0(q^*)}{\partial q_r} \geq 0, \quad \frac{\partial G_0(q^*)}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial G_0(q^*)}{\partial q_r} > 0.$$

Если выполнены условия пункта 1 или условия пункта 2, то вектор равновесия q^* системы (13.3.1) локально устойчив.

Приведенные условия пунктов 1 и 2 являются достаточными для использования теоремы Ляпунова о локальной устойчивости по первому приближению вектора равновесия q^* системы (13.3.1).

Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению утверждает, что если нелинейную систему (13.3.1) заменить на линейную однородную и если нулевой вектор линейной однородной системы глобально устойчив, то вектор q^* нелинейной системы (13.3.1) локально устойчив.

Суть линеаризации системы (13.3.1) состоит в следующем. Для функции $G_k(q_1, \ldots, q_r)$ выписываем разложение по формуле Тейлора в окрестности точки q^*:

$$G_k(q_1,\ldots,q_r) = G_k(q_1{}^*,\ldots,q_k{}^*) + \frac{\partial G_k(q_1{}^*,\ldots,q_r{}^*)}{\partial q_1}(q_1 - q_1{}^*) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\partial G_k(q_1{}^*,\ldots,q_r{}^*)}{\partial q_r}(q_r - q_r{}^*) + g, \quad k = 1,\ldots,r, \qquad (13.4.1)$$

где слагаемое g означает остаточный член со вторыми частными производными функции $G_k(q_1, \ldots, q_k)$.

В (13.4.1) $G_k(q_1{}^*, \ldots, q_k{}^*) = 0$, ибо $q^* = (q_1{}^*, \ldots, q_r{}^*)$ — вектор равновесия системы (13.3.1), и следовательно, справедливы равенства (13.3.2).

Полагая $z_k = q_k - q_k{}^*$ и используя выражение

$$\frac{\partial G_k(q_1^*,\ldots,q_r^*)}{\partial q_j} = B_{kj}(q_1^*,\ldots,q_r^*),$$

выпишем линеаризованный вариант системы (13.3.1) в виде однородной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\dot{z}_k = B_{k1}(q^*)z_1 + \ldots + B_{kz}(q^*)z_r, \; k = 1, \ldots, r. \qquad (13.4.2)$$

Если нулевой вектор $z = (0, \ldots, 0)$ системы (13.4.2) глобально устойчив, то вектор $q^* = (q_1^*, \ldots, q_r^*)$ системы (13.3.1) локально устойчив.

Для глобальной устойчивости нулевого вектора $z = 0$ системы (13.4.2) необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа матрицы $B(q^*) = (B_{ij}(q^*))$ имели отрицательные действительные части.

В отличие от просто проверяемых условий пунктов 1 и 2 начала раздела 13.4.2 для использования приведенного необходимого и достаточного условия следует отыскивать спектр матрицы $B(q^*)$, а это в общем случае требует больших вычислений. Однако при решении примеров на анализ локальной устойчивости вектора q^* системы (13.3.1) целесообразно вычислять собственные значения матрицы $B(q^*) = (B_{ij}(q^*))$.

13.5. Достаточные условия глобальной устойчивости цен равновесия

13.5.1. Приведем достаточные условия глобальной устойчивости цен равновесия в случае ненормированных цен.

1. Пусть вектор цен равновесия p^* и для любого вектора

$$p = (p_0, p_1, p_2, \ldots, p_r) > 0, \; \frac{\partial F_i(p)}{\partial p_j} > 0, \; i, j = 0, 1, \ldots, r, \; i \neq j.$$

2. Пусть вектор цен равновесия $p^* > 0$ и для любых p' и p'', $p' > 0$, $p'' > 0$, выполнена слабая аксиома выявленных предпочтений, т.е. из неравенства $p' F(p') \geq p' F(p'')$ следует, что $p'' F(p'') < p'' F(p')$.

Если выполнены условия пункта 1 или условия пункта 2, то вектор равновесия p^* глобально устойчив.

Замечание. Слабая аксиома выявленных предпочтений может иметь место для векторов p' и p'', близких к вектору p^*, но маловероятно, что она выполняется глобально.

13.5.2. Рассмотрим важное понятие доминирующей главной диагонали квадратной матрицы H.

37 — 7620

Квадратная матрица H – матрица с доминирующей главной диагональю, если существуют положительные постоянные $c_1, ..., c_r$, такие, что при $i = 1, ..., r$

$$c_i |h_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} c_j |h_{ij}| \quad \text{(доминирование по } i\text{-й строке)},$$

$$c_i |h_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} c_j |h_{ji}| \quad \text{(доминирование по } i\text{-му столбцу)}.$$

Приведем достаточные условия глобальной устойчивости вектора равновесия q^* в случае нормированных цен.

Пусть вектор равновесия q^* системы (13.3.1) положителен. Пусть существуют постоянные $0 < c_1, ..., c_r$, такие, что для любого номера i, $i = 1, ..., r$, и для любого вектора $q \underset{(\neq)}{\geq} 0$ справедливы неравенства

$$c_i \left| \frac{\partial G_i(q)}{\partial q_i} \right| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} c_j \left| \frac{\partial G_i(q)}{\partial q_j} \right|, \tag{13.5.1}$$

$$c_i \left| \frac{\partial G_i(q)}{\partial q_i} \right| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} c_j \left| \frac{\partial G_j(q)}{\partial q_i} \right|. \tag{13.5.2}$$

Если выполнено неравенство (13.5.1) или (13.5.2), то вектор равновесия q^* системы (13.3.1) глобально устойчив.

Замечание. Из (13.5.1) следует, что изменение на одну единицу нормированной цены q_i на продукт G_i, $i = 1, ..., r$, меняет величину избыточного спроса значительно сильнее, чем изменения на одну единицу каждой из остальных нормированных цен.

13.6. Критические замечания по модели динамики цен

13.6.1. В теории динамики цен (в теории экономической динамики) предполагалось, что технологические множества $Y^{(j)}, j = 1, ..., n$, фирм и функции полезности потребителей постоянны во времени, откуда следует, что вектор цен равновесия p^* не зависит от времени. На самом деле это не так, ибо в реальной экономике и технологические множества $Y^{(j)}$ фирм, и функции полезности потребителей меняются во времени и, следовательно, меняется вектор цен равновесия $p^*(t)$. Тогда предлагается задача определения оптимальной траектории $p(t, p^0)$, удовлетворяющей начальному условию $p(0, p^0) = p(0)$, такой, что $\left|p(t, p^0) - p^*(t)\right| \underset{t\to\infty}{\to} 0$.

Эта задача называется *задачей о погоне*. Она относится к числу трудных задач экономической динамики.

В моделях (13.2.3) и (13.3.1) динамики цен речь идет о траекториях ненормированных и нормированных рыночных цен, которые формируются под влиянием рыночного спроса и предложения на каждый продукт. Под влиянием только рыночных сил текущие цены должны двигаться к ценам равновесия.

В параграфах 13.4 и 13.5 приходится налагать на функции $F_0(p)$, ..., $F(p)$ избыточного спроса достаточно жесткие ограничения для доказательства локальной и глобальной устойчивости цен равновесия, что косвенно свидетельствует о том, что, скорее всего, одних рыночных сил недостаточно для обеспечения «правильной асимптотики» текущих цен, а возможно, требуются дополнительные меры по жесткому регулированию механизма ценообразования.

Вопросы для самоконтроля к главе 13

1. Каковы основные предпосылки простейшей линейной однопродуктовой модели экономической динамики?
2. Какая существует связь между равенством $y^S(t) = y^D(t)$ в простейшей однопродуктовой модели экономической динамики и законом Вальраса в случае МЭД?
3. Что такое избыточный спрос?
4. На какой содержательной основе выписывается система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая поведение во времени рыночных цен?
5. Какова взаимосвязь между вектором цен равновесия и вектором равновесия системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику рыночных цен?
6. Каков экономический смысл нормирования текущих рыночных цен?
7. Какое принципиальное отличие вектора равновесия в случае ненормированных цен от вектора равновесия в случае нормированных цен?

8. Как формулируются определения локальной и глобальной устойчивости вектора равновесия в случае ненормированных цен? Дайте наглядную геометрическую интерпретацию локальной и глобальной устойчивости в случае $r = 1$ ($p = p_0, p_1$) в фазовом и эволюционном пространствах.
9. Как формулируются определения локальной и глобальной устойчивости вектора равновесия в случае нормированных цен? Дайте наглядную геометрическую интерпретацию локальной и глобальной устойчивости в случае $r = 2$ ($q = (q_1, q_2)$) в фазовом и эволюционном пространствах.
10. В чем суть содержательной интерпретации локальной устойчивости вектора цен равновесия (в ненормированном и нормированном случаях)?
11. В чем суть содержательной интерпретации глобальной устойчивости вектора цен равновесия (в ненормированном и нормированном вариантах)?
12. Как формулируется условие валовой заменимости (сильной валовой заменимости) в случае ненормированных (нормированных) цен? Почему выполнение этого условия не вполне адекватно экономической реальности?
13. Как формулируется достаточное условие локальной устойчивости вектора равновесия в случае ненормированных цен? Дайте содержательную интерпретацию достаточного условия.
14. Как формулируется достаточное условие локальной устойчивости вектора равновесия в случае нормированных цен?
15. Что представляет собой линеаризация нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений?
16. Как формулируются необходимое и достаточное условия глобальной устойчивости нулевого вектора линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами?
17. Как формулируется теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению?
18. Как формулируются достаточные условия глобальной устойчивости вектора равновесия в случае ненормированных цен? Каков уровень адекватности этих условий?
19. Как формулируются достаточные условия глобальной устойчивости вектора равновесия в случае нормированных цен? Дайте содержательную интерпретацию этим условиям.
20. Как формулируется задача о погоне?
21. Какова взаимосвязь между жесткостью достаточных условий локальной и глобальной устойчивости вектора равновесия и реальной динамикой нерегулируемых рыночных цен?

Задачи и упражнения для самоконтроля к главе 13

1. Найдите все векторы равновесия $q^* \geq 0$ у следующих систем вида (13.3.1):

а) $\dot{q} = q(q^3 - 2)$, $r = 1$;

б) $\dot{q} = 35q^2 - 2q - 19$, $r = 1$;

в) $\dot{q} = q^2 - q - 2$, $r = 1$;

г) $\dot{q}_1 = -q_1 - q_1^2 + q_2$, $\dot{q}_2 = 3q_1 - q_1^2 - q_2$;

д) $\dot{q}_1 = (q_1 - 1)(q_2 - 1)$, $\dot{q}_2 = q_1 q_2 - 2$;

е) $\dot{q}_1 = \ln(-q_1 + q_2^2)$, $\dot{q}_2 = q_1 - q_2 - 1$.

2. Опишите все векторы равновесия $p^* \geq 0$ следующих систем вида (13.2.1):

а) $\dot{p}_0 = 0, \quad \dot{p}_1 = \dfrac{p_1^2}{p_0^2} - \dfrac{p_1}{p_0} - 2$;

б) $\dot{p}_0 = 0, \quad \dot{p}_1 = \dfrac{p_1^2}{p_0^2} - 2\dfrac{p_1}{p_0} - 3$;

в) $\dot{p}_0 = 0, \quad \dot{p}_1 = \dfrac{p_1^3}{p_0^3} - \dfrac{p_2}{p_0}, \quad \dot{p}_2 = \dfrac{p_1}{p_0} - \dfrac{p_1^3}{p_0^3}$;

г) $\dot{p}_0 = 3, \quad \dot{p}_1 = -\dfrac{p_1^3}{p_0^3} + \dfrac{p_2^3}{p_0^3}, \quad \dot{p}_2 = \dfrac{p_1^2}{p_0^2} - \dfrac{p_2^3}{p_0^3}$.

3. Исследуйте на локальную и на глобальную устойчивость векторы равновесия $q^* > 0$ следующих систем вида (13.3.1):

а) $\dot{q} = q(q^3 - 2)$;

б) $\dot{q} = 35q^2 - 2q - 19$;

в) $\dot{q} = q^2 - q - 2$;

г) $\dot{q} = q^2 - 2q - 3$;

д) $\dot{q}_1 = -q_1 - q_1^2 + q_2, \quad \dot{q}_2 = 3q_1 - q_1^2 - q_2$;

е) $\dot{q}_1 = \ln(-q_1 + q_2^2), \quad \dot{q}_2 = q_1 - q_2 - 1$.

Вопросы и тесты для контрольных работ к главе 13

1. Если в момент t избыточный спрос на продукт G_k строго положителен, то цена $p_k(t)$:
   а) строго убывает;
   б) строго возрастает;
   в) ведет себя неоднозначно.
2. Фазовые траектории цен $q(t)$:
   а) не пересекаются и не касаются друг друга;
   б) могут касаться;
   в) могут пересекаться;
   г) могут и пересекаться, и касаться.
3. Условие сильной валовой заменимости в случае ненормированных цен означает, что:
   а) продукт G_0 обязательно есть продукт Гиффена;
   б) продукт G_0 обязательно есть нормальный продукт;
   в) среди пар продуктов (G_0, G_1), ..., (G_0, G_r) обязательно найдется хотя бы одна пара взаимодополняемых продуктов;
   г) все продукты взаимодополняемы.
4. Если у системы дифференциальных уравнений для нормированных цен два (или более) вектора равновесия, то:
   а) они оба обязательно локально устойчивы;
   б) они оба обязательно локально неустойчивы;
   в) обязательно один вектор локально устойчив, другой — локально неустойчив;
   г) для каждого из них нет глобальной устойчивости.

Задачи для контрольных работ к главе 13

1. Найдите все векторы равновесия $q^* \geq 0$ у следующих систем, выписанных для случая нормированных цен:

   а) $\dot{q} = (q-1)(q^2-4)$;

   б) $\dot{q} = q^2 - q - 6$;

   в) $\dot{q}_1 = q_1^2 - q_2^2 - 15, \quad \dot{q}_2 = q_1^2 + q_2^2 - 17$;

   г) $\dot{q}_1 = q_1 q_2 - 4, \quad \dot{q}_2 = q_1^2 + q_2^2 - 17$;

2. Исследуйте на локальную и глобальную устойчивость векторы равновесия $q^* \geq 0$ следующих систем, выписанных для случая нормированных цен:

   а) $\dot{q} = (q-2)(q^2-9)$;

б) $\dot{q} = q^2 + q - 6;$

в) $\dot{q}_1 = q_1^2 - q_2^2 - 15, \quad \dot{q}_2 = q_1^2 + q_2^2 - 17;$

г) $\dot{q}_1 = q_1 q_2 - 4, \quad \dot{q}_2 = q_1^2 + q_2^2 - 17.$

Глава 14

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

14.1. Динамическая модель в матричной форме и оптимизация ее траекторий

14.1.1. Динамическая модель в матричной форме (ДММФ), предложенная Дж. фон Нейманом, состоит из двух сфер: производственной (ПС) и монетарной (МС). Основными понятиями модели являются основной производственный процесс (для краткости — процесс), интенсивность (кратность) его использования, продукт и цена продукта. В модели реализован принцип «затраты — выпуск».

Предполагается, что существует конечное число (скажем, n) основных производственных процессов. В каждом основном производственном процессе продукты затрачиваются и выпускаются в определенных количествах. Формально основной производственный процесс Q_i ($i = 1, ..., n$) представляет собой $2m$-мерный вектор-строку $(a_i, b_i) = (a_{i1}, ..., a_{im}; b_{i1}, ..., b_{im})$, где m — число продуктов G_j ($j = 1, ..., m$). Вектор-строка $a_i = (a_{i1}, ..., a_{im})$ называется вектором затрат, вектор-строка $b_i = (b_{i1}, ..., b_{im})$ — вектором выпуска. Число a_{ij} ($i = 1, ..., n; j = 1, ..., m$) показывает, сколько единиц продукта G_j затрачивается в основном процессе Q_i (если продукт G_j в процессе Q_i затрачивается, то $a_{ij} > 0$, если не затрачивается, то $a_{ij} = 0$). Аналогично число b_{ij} ($i = 1, ..., n; j = 1, ..., m$) показывает, сколько единиц продукта G_j выпускается в основном процессе Q_i (если продукт G_j в процессе Q_i выпускается, то $b_{ij} > 0$, если не выпускается, то $b_{ij} = 0$).

Количества затрачиваемых и выпускаемых продуктов «привязаны» к одному периоду времени («атому» времени), который называется производственным периодом и может, например, равняться одному году, т.е. время предполагается дискретным. Упорядоченная совокупность (производственных) периодов t называется временны́м промежутком ДММФ. Число T периодов временно́го промежутка называется временны́м горизонтом ДММФ. Предполагается, что число основных процессов n, число m продуктов и количества затрачиваемых и выпускаемых в каждом процессе продуктов от периода к периоду не меняются.

Предположения о возможности соединенных затрат ($a_{ij} > 0$, $a_{ik} > 0, j \neq k$) и соединенных выпусков ($b_{il} > 0$, $a_{ir} > 0$, $l \neq r$) отражают важные фрагменты экономической реальности. Например, в процессе, описывающем функционирование доменной печи, затрачиваются в определенных количествах кокс, железная руда и чугун, а выпускаются чугун и шлаки. Чугуна выпускается больше, чем его затрачивается.

Если два основных процесса Q_i и Q_k используются одновременно, то каждый продукт G_j теперь затрачивается в количестве $a_{ij} + a_{kj}$ единиц и выпускается в количестве $b_{ij} + b_{kj}$, т.е. использование основных процессов Q_i и Q_k можно толковать как процесс $Q_i + Q_k$, который равен покоординатной сумме процессов Q_i и Q_k.

Если основной процесс Q_i используется с интенсивностью (кратностью) $z_i > 0$, то каждый продукт G_j теперь затрачивается и выпускается в количествах $z_i a_{ij}$ и $z_i b_{ij}$ единиц соответственно, т.е. основной процесс Q_i, используемый с интенсивностью z_i, можно толковать как процесс $z_i Q_i$, который равен покоординатному произведению процесса Q_i на число z_i. Если процесс Q_i не используется, то его интенсивность $z_i = 0$, верно и обратное.

Теперь естественно определить допустимый процесс Q как неотрицательную линейную комбинацию $z_1 Q_1 + \ldots + z_n Q_n$ основных процессов $Q_1, \ldots, Q_n$ с неотрицательными коэффициентами $z_1, \ldots, z_n$. Векторы затрат и выпуска этого допустимого процесса Q соответственно имеют вид zA и zB, т.е. $Q = (zA, zB)$. Здесь $z = (z_1, \ldots, z_n)$ — неотрицательный вектор-строка, а $(n \times m)$ — матрицы A и B составлены из строк a_i и b_i ($i = 1, \ldots, n$) соответственно. Матрица $A \geq 0$ называется матрицей затрат, матрица $B \geq 0$ — матрицей выпуска.

Множество всех допустимых процессов (zA, zB) образует неотрицательный конус C_N в неотрицательном ортанте пространства

E_{2m}, конус C_N натянут на основные процессы (a_1, b_1), ..., (a_n, b_n). Этот конус называется технологическим множеством ПС ДММФ или технологией ПС ДММФ.

Предполагается, что смежные периоды t и $t + 1$ между собой связаны следующим образом:

$$z(t + 1)A \leq z(t)B, \; t = 0, 1, ..., T - 1, \tag{14.1.1}$$

где $z(t + 1) = (z_1(t + 1), ..., z_n(t + 1))$ *и* $z(t) = (z_1(t), ..., z_n(t))$ — векторы интенсивностей использования основных процессов Q_1, ..., Q_n в периоды $t + 1$ и t соответственно. Векторное неравенство (14.1.1) означает, что в следующем периоде $t + 1$ можно затратить каждого продукта G_j в количестве $z(t + 1)a^j$, не большем, чем его было выпущено в предыдущем периоде t в количестве $z(t)b^j$, $j = 1, ..., m$. Здесь a^j и b^j — j-е столбцы матриц A и B соответственно.

Формально ПС ДММФ представляет собой систему линейных неравенств

$$z(1)A \leq z(0)B, \tag{14.1.2}$$

$$z(t + 1)A - z(t)B \leq 0, \; t = 0, 1, ..., T - 1, \tag{14.1.3}$$

$$z(t) \geq 0, \; t = 0, 1, ..., T - 1. \tag{14.1.4}$$

Равенство $z(0) = z^0$ (z^0 — заданный вектор) называется начальным условием. Упорядоченная совокупность векторов интенсивностей $z(1)$, ..., $z(T)$ называется допустимой траекторией интенсивностей ПС ДММФ (с начальным условием $z(0) = z^0$). Очевидно, модельное время ПС ДММФ совпадает с реальным временем.

К неравенствам (14.1.2)–(14.1.4) можно добавить максимизируемую целевую функцию

$$f(z(1), ..., z(T)) \; (max). \tag{14.1.5}$$

Тогда получится задача математического программирования, размерность которой будет зависеть не только от чисел n и m, но и от временнóго горизонта T ПС ДММФ. Допустимая траектория $z(1)$, ..., $z(T)$ интенсивностей, максимизирующая целевую функцию, называется оптимальной траекторией интенсивностей ПС ДММФ (с начальным условием $z(0) = z^0$). Оптимальная траектория интенсивностей обозначается символом $z'(1)$, ..., $z'(T)$ (символ «штрих» к производной отношения не имеет).

Целевая функция (14.1.5) может быть как терминальной

$$z(T)u \; (max), \tag{14.1.6}$$

так и интегральной

$$\frac{z(1)u(1)}{1+\delta}+\frac{z(2)u(2)}{(1+\delta)^2}+\ldots+\frac{z(T)u(T)}{(1+\delta)^T}(\max). \qquad (14.1.7)$$

Здесь число $1/_{1+\delta}$ — дисконтирующий множитель, а число $\delta > 0$ — норма дисконтирования.

Далее в основном рассматривается терминальная целевая функция (14.1.6) с целевым вектором $u = (u_1, \ldots, u_n)$.

ПС ДММФ и экстремальные задачи, построенные на ее основе, имеют широкий класс содержательных областей на микро- и макроэкономическом уровнях. Каждый основной процесс ПС ДММФ может описывать производственный способ фирмы, которую тогда следует толковать как совокупность основных производственных процессов, которые могут конкурировать между собой. Каждый основной производственный процесс ПС ДММФ может описывать отрасль национальной экономики, производственную сферу которой тогда следует толковать как совокупность своих отраслей. Основной производственный процесс может описывать процесс хранения, транспортировки продуктов. Если продукт G_j является капиталом, то его можно включить в вектор выпуска b_i с учетом годовой нормы износа ξ_j: $b_{ij} = (1 - \xi_j)a_{ij}$. *В конце этого параграфа рассматриваются конкретные примеры ПС ДММФ.*

14.1.2. Каждый продукт G_j в периоде t имеет цену $p_j(t) \geq 0, j = 1, \ldots, m$. Тогда скалярные произведения $ap(t)$ и $bp(t)$ представляют собой общую «стоимость» затрат и общую «стоимость» выпуска в период t соответственно. В связи с тем что вектор выпуска b_t фактически используется в следующем после выпуска периоде $t + 1$, естественно прибыль, которую дает процесс Q_i, определить так:

$$bp(t+1) - ap(t). \qquad (14.1.8)$$

Поскольку в условиях чистой конкуренции в долговременном промежутке прибыль фирмы равна нулю, постольку естественно предположить, что прибыль (14.1.8) процесса Q_i неположительна:

$$b_i p(t+1) - a_i p(t) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, \quad n. \qquad (14.1.9)$$

Формально МС ДММФ представляет собой систему линейных неравенств

$$Ap(t) - Bp(t+1) \geq 0, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \qquad (14.1.10)$$

$$Ap(T) \geq Bp(T+1), \tag{14.1.11}$$

$$p(t) \geq 0, \quad t = 0, 1, ..., T. \tag{14.1.12}$$

Равенство $p(T + 1) = p^0$ (p^0 — заданный вектор) называется начальным условием. Упорядоченная совокупность векторов называется допустимой траекторией цен МС ДММФ (с начальным условием $p(T + 1) = p^0$). Формальная структура МС ДММФ такова, что ее модельное время противоположно реальному времени.

К неравенствам (14.1.10)–(14.1.12) можно добавить терминальную целевую функцию

$$z(0)Bp(1)\,(\min). \tag{14.1.13}$$

Если $u = Bp(T + 1)$, то задача линейного программирования (14.1.13), (14.1.10)—(14.1.12) будет сопряженной к задаче линейного программирования (14.1.6), (14.1.2)–(14.1.4).

Допустимая траектория цен $p(T)$, ..., $p(1)$, минимизирующая целевую функцию (14.1.13), называется оптимальной траекторией цен МС ДММФ (с начальным условием $p(T + 1) = p^0$). Оптимальная траектория цен обозначается символом $p'(T)$, ..., $p'(1)$ (в модельном времени) или символом $p'(1)$, ..., $p'(T)$ (в реальном времени). Отметим, что разнонаправленность модельного и реального времени, которая имеет место для модели (14.1.10)—(14.1.12) ((14.1.13), (14.1.10)—(14.1.12)), существует для любой задачи, сопряженной к исходной динамической задаче (в математическом программировании, теории оптимального управления).

Динамическая модель в матричной форме (ДММФ) представляет собой объединение своих производственной и монетарной сфер, т.е. систему линейных неравенств (14.1.2)—(14.1.4) и (14.1.10)—(14.1.12).

14.1.3. ПС ДММФ охватывает в качестве частных случаев широкие классы динамических межотраслевых моделей (ДМОМ) с лагом капитальных вложений продолжительностью в один год и более одного года. Содержательными областями ДМОМ являются национальные и региональные экономики, так что с точки зрения содержательных областей ДМОМ — это модели макроэкономические. С точки зрения структурно-математической ДМОМ относятся к моделям микроэкономики подобно тому, как модель общего экономического равновесия также относится к моделям микроэкономики.

ДМОМ в замкнутом варианте с постоянными во времени матрицами A_L, H и F_L (A_L — матрица коэффициентов прямых материальных затрат с учетом затрат на возмещение выбытия основного производственного капитала, F_L — матрица основного и оборотного капитала, H — матрица замыкания) имеет вид

$$F_L x(1) \le (I - A_L - H + F_L)x(0), \tag{14.1.14}$$

$$F_L x(t+1) - (I - A_L - H + F_L)x(t) \le 0, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \tag{14.1.15}$$

$$x(t) \ge 0, \quad t = 0, 1, \ldots, T, \tag{14.1.16}$$

где $x(t)$ — вектор выпусков отраслей.

Полагая в (14.1.14)–(14.1.16)

$$A = F_L', \; B = (I - A_L - H + F_L)', \; z(t) = x'(t) \tag{14.1.17}$$

(здесь штрих — символ транспонирования), получаем, что ДМОМ в замкнутом варианте укладывается в формальную схему ПС ДММФ (14.1.2)–(14.1.4).

ДМОМ в замкнутом варианте, в которой учитывается экологический фактор, также укладывается в формальную схему ПС ДММФ (14.1.2)–(14.1.4).

ДМОМ в замкнутом варианте с учетом затрат на борьбу с загрязнением окружающей среды имеет вид

$$\begin{aligned}&(F_L^{(1)} + \Delta F_L^{(1)} + F_L^{(2)})x(t+1) \le \\ &\le \left[I - (A_L^{(1)} + \Delta A_L^{(1)} + A_L^{(2)} + \Delta A_L^{(2)} + H) + F_L^{(1)} + \Delta F_L^{(1)} + F_L^{(2)}\right] \times \\ &\times x(t), \quad t = 0, 1, \ldots, T-1,\end{aligned} \tag{14.1.18}$$

где $F_L^{(1)}$ и $F_L^{(2)}$ — матрицы основного и оборотного капитала; $A_L^{(1)}$ — матрица коэффициентов прямых материальных затрат без учета затрат на возмещение выбытия основного производственного капитала; $A_L^{(2)}$ — матрица амортизации; $\Delta F_L^{(1)}$ — матрица прироста основного производственного капитала для устранения загрязнений окружающей среды; $\Delta A_L^{(2)}$ — матрица прироста матрицы амортизации в связи с приростом основного производственного капитала; $\Delta A_L^{(1)}$ — матрица прироста текущих материальных затрат в связи с наличием дополнительных материальных затрат для устранения загрязнений окружающей среды.

Полагая в (14.1.18), (14.1.16)

$$A = (F_L^{(1)} + \Delta F_L^{(1)} + F_L^{(2)}),$$

$$B=(I-(A_L^{(1)}+\Delta A_L^{(1)}+A_L^{(2)}+\Delta A_L^{(2)}+H)+F_L^{(1)}+\Delta F_L^{(1)}+F_L^{(2)})',$$
$$z(t)=x'(t),$$

получаем, что ДМОМ в замкнутом варианте с учетом затрат на борьбу с загрязнением окружающей среды укладывается в формальную схему ПС ДММФ (14.1.2)–(14.1.4).

14.1.4. ПС ДММФ допускает обобщения в разных направлениях. В частности, возможен переход от постоянных во времени матриц A и B к переменным $A(t)$ и $B(t)$, которые позволяют учитывать научно-технологический прогресс в экзогенной форме. В этом случае ПС ДММФ описывается следующей системой линейных неравенств:

$$z(1)A(1)\le z(0)B(0), \tag{14.1.19}$$

$$z(t+1)A(t+1)-z(t)B(t)\le 0, \quad t=0,1,\dots,T-1, \tag{14.1.20}$$

$$z(t)\ge 0,\ t=0,1,\dots,T. \tag{14.1.4}$$

Терминальная (14.1.6) и интегральная (14.1.7) целевые функции при этом не корректируются.

МС ДММФ описывается в этом случае такой системой линейных неравенств:

$$A(t)p(t)-B(t)p(t+1)\ge 0, t=0,1,\dots,T-1, \tag{14.1.21}$$

$$A(T)p(T)\ge u \tag{14.1.22}$$

$$p(t)\ge 0, \quad t=0,1,\dots,T. \tag{14.1.12}$$

Промежуточным вариантом между ДММФ с постоянными и переменными во времени матрицами $A(t)$ и $B(t)$ является ДММФ с асимптотически постоянными матрицами $A(t)$ и $B(t)$.

14.2. Стационарные траектории динамической модели в матричной форме и их основные характеристики

14.2.1. Упорядоченный набор векторов интенсивностей $\tilde{z}(1),\dots,\tilde{z}(T)$ такой, что для любого номера t, $t = 1, \dots, T-1$, имеет место равенство $\tilde{z}(t+1)=\nu\tilde{z}(t)$, называется стационарным (точнее, квазистационарным) набором интенсивностей. Вектор $\tilde{z}(t)$

называется элементом стационарного набора интенсивностей. Очевидно, набор интенсивностей является стационарным, если для любого номера t, $t = 1, ..., T$, имеет место равенство $\tilde{z}(t) = c_1 \nu^t s$. Здесь скалярные постоянные c_1 и ν положительны и вектор $s \geq 0$ такой, что его октаэдрическая норма $|s|$ равна единице: $|s| = s_1 + ... + s_n = 1$. Число $\nu > 0$ и вектор $s \geq 0$ называются основными характеристиками стационарного набора интенсивностей. Число $\nu > 0$ называется коэффициентом постоянного пропорционального (т.е. сбалансированного) роста стационарного набора интенсивностей, вектор $s \geq 0$ называется структурой стационарного набора интенсивностей. Если число $\nu > 1$, то имеем случай постоянно растущего стационарного набора; если число $\nu = 1$, то имеем случай собственно стационарного набора ($c_1 \nu = \tilde{z}(1) = ... = \tilde{z}(T)$); если число $0 < \nu < 1$, то имеем случай постоянно убывающего стационарного набора. Стационарный набор интенсивностей представляет собой набор сбалансированного развития (изменения) интенсивностей во времени. Все элементы стационарного набора интенсивностей расположены на луче L_s, натянутом на вектор s (рис. 14.1). Стационарный набор называется стационарной траекторией интенсивностей ПС ДММФ, если его элементы удовлетворяют неравенствам (14.1.3), (14.1.4). Выполнение неравенства (14.1.2) не обязательно, т.е. стационарная

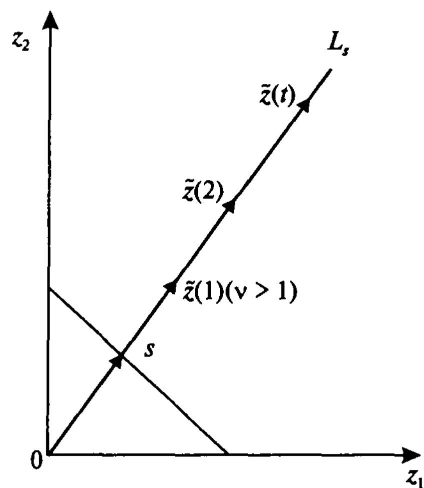


Рис. 14.1

траектория интенсивностей ПС ДММФ может и не быть допустимой траекторией интенсивностей ПС ДММФ.

Для стационарной траектории интенсивностей ПС ДММФ имеем

$$c_1 v^{t+1} sA - c_1 v^t sB \le 0,\ t = 0, 1, \dots, T-1$$

или после сокращения на положительный множитель $c_1 v^t$

$$vsA \le sB. \qquad (14.2.1)$$

Верно, очевидно, и обратное. Если основные характеристики v и s стационарного набора удовлетворяют векторному неравенству (14.2.1), то этот набор есть стационарная траектория интенсивностей ПС ДММФ.

14.2.2. Из всех стационарных траекторий $\tilde{z}(1), \dots, \tilde{z}(T)$ интенсивностей ПС ДММФ интерес представляют траектории с максимальным коэффициентом $\hat{v}$ постоянного пропорционального роста интенсивностей, т.е. траектории максимального постоянного пропорционального роста интенсивностей (ТрМсППРИ).

Для определения этих траекторий следует решить задачу квадратичного программирования

$$v(max), \qquad (14.2.2)$$

$$vsA \le sB, \qquad (14.2.3)$$

$$v \ge 0, \qquad (14.2.4)$$

$$s \ge 0, \qquad (14.2.5)$$

$$|s| = 1. \qquad (14.2.6)$$

Решение $(\hat{v}, \hat{s})$ этой задачи представляет собой основные характеристики ТрМсППРИ $\tilde{z}(t) = c_1(\hat{y})^t \hat{s}$, $t = 0, 1, \dots, T$. Основные характеристики определяются только матрицами A и B, т.е. технологией ПС ДММФ. Задача (14.2.2)—(14.2.6) называется моделью максимального постоянного пропорционального роста интенсивностей (ММсППРИ). Теория максимального постоянного пропорционального роста интенсивностей (ТеМсППРИ) анализирует ММсППРИ и их оптимальные решения $(\hat{v}, \hat{s})$. В ТеМсППРИ и в ММсППРИ цены не фигурируют.

Задача квадратичного программирования (14.2.2)—(14.2.6) эквивалентна следующей задаче на максимин:

$$\hat{v} = \max_{\substack{s \geq 0 \\ |s|=1}} \min\left(\frac{sb^1}{sa^1}, \ldots, \frac{sb^m}{sa^m}\right), \tag{14.2.7}$$

в которой дроби вида $(0/0)$ и $\left(sb^j/0\right)$ не рассматриваются.

Переход от задачи (14.2.2)–(14.2.6) к задаче (14.2.7) осуществляется с помощью следующих простых рассуждений.

Векторное неравенство (14.2.3) переписывается в координатной форме

$$vsa^1 \leq sb^1, \ldots, vsa^m \leq sb^m. \tag{14.2.8}$$

Получается система m неравенств с одной неизвестной v. Решение этой системы имеет вид

$$v(s) = \min\left(\frac{sb^1}{sa^1}, \ldots, \frac{sb^m}{sa^m}\right), \tag{14.2.9}$$

где дроби вида $(0/0)$ и $\left(sb^j/0\right)$ не рассматриваются, ибо они соответствуют неравенствам $vsa^j \leq sb^j$, которые удовлетворяются при любых значениях v. Для отыскания $\hat{v}$ остается найти $\max\limits_{\substack{s \geq 0 \\ |s|=1}} v(s)$.

14.2.3. Задачи вида (14.2.7) относятся к классу задач негладкой оптимизации и в общем случае достаточно трудноразрешимы. Однако при $n = 2$ задачи вида (14.2.7) легко решаются на основании элементарных геометрических соображений. Проиллюстрируем это обстоятельство на двух примерах.

Пример 14.2.1

Для матриц A и B

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

имеем

$$\hat{v} = \max_{\substack{s_1+s_2=1 \\ s_1 \geq 0, s_2 \geq 0}} \min\left(\frac{sb^1}{sa^1}, \frac{sb^2}{sa^2}\right) = \max_{\substack{s_1+s_2=1 \\ s_1 \geq 0, s_2 \geq 0}} \min\left(\frac{0{,}6s_1 + 0{,}5s_2}{0{,}3s_1 + 0{,}6s_2}; \frac{0{,}3s_1 + 0{,}4s_2}{0{,}4s_1 + 0{,}2s_2}\right) =$$

$$\overset{s_2 = 1 - s_1}{=} \max_{0 \leq s_1 \leq 1} \min\left(\underset{(I)}{\frac{0{,}5 + 0{,}1s_1}{0{,}6 - 0{,}3s_1}}, \underset{(II)}{\frac{0{,}4 - 0{,}1s_1}{0{,}2 + 0{,}2s_1}}\right).$$

Нарисуем эскизы графиков обеих дробно-линейных функций (I) и (II) (рис. 14.2). Очевидно, графиком функции $\nu(s)=\min\left(\frac{0,5+0,1s_1}{0,6-0,3s_1},\frac{0,4-0,1s_1}{0,2+0,2s_1}\right)$ является линия FEG, ибо при

$0\le s_1\le \hat{s}_1$ $\nu(s)=\min\left(\frac{0,5+0,1s_1}{0,6-0,3s_1},\frac{0,4-0,1s_1}{0,2+0,2s_1}\right)=\frac{0,5+0,1s_1}{0,6-0,3s_1}$, а при

$\hat{s}_1\le s_1\le 1$ $\nu(s)=\min\left(\frac{0,5+0,1s_1}{0,6-0,3s_1},\frac{0,4-0,1s_1}{0,2+0,2s_1}\right)=\frac{0,4-0,1s_1}{0,2+0,2s_1}$. Из элементарных геометрических соображений $\max\limits_{0\le s_1\le 1}\nu(s)$ достигается при $s_1=\hat{s}_1$. Для определения $\hat{s}_1$ следует решить уравнение $\frac{0,5+0,1s_1}{0,6-0,3s_1}=\frac{0,4-0,1s_1}{0,2+0,2s_1}$, которое сводится к квадратичному уравнению $s^2-30s_1+14=0$, корнями которого являются числа $s_1=15+\sqrt{211}$, $s_1=15-\sqrt{211}$.

Выбираем корень $\hat{s}_1=15-\sqrt{211}\cong 0,47$, который попадает в отрезок $0\le s_1\le 1$, второй корень $\hat{s}_1=15+\sqrt{211}>1$ является посторонним.

Осталось определить коэффициент роста:

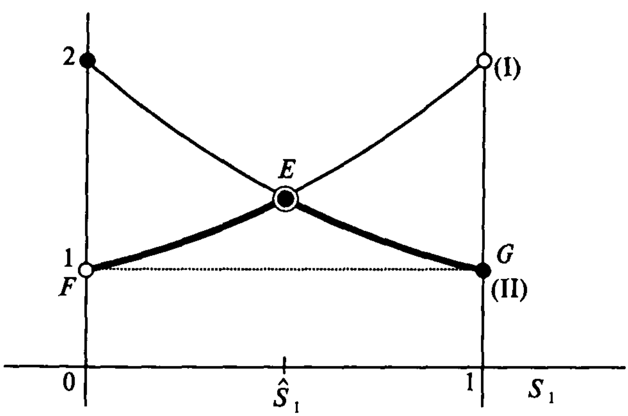


Рис. 14.2

$$\hat{v}=\frac{5+\hat{s}_1}{6-3\hat{s}_1}=\frac{5+15-\sqrt{211}}{6-45+3\sqrt{211}}=\frac{7+\sqrt{211}}{18}\cong 1{,}1959.$$

Таким образом, задача на максимин имеет решение

$$\hat{v}=\frac{7+\sqrt{211}}{18}\cong 1{,}1959,\ \hat{s}_1=15-\sqrt{211}\cong 0{,}47;$$

$$\hat{s}_2=1-s_1=\sqrt{211}-14\cong 0{,}53.$$

Пример 14.2.2

Для матриц A и B

$$A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}5\\ 0 & 0{,}3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}4\\ 0 & 0{,}7\end{pmatrix}$$

имеем

$$\hat{v}=\max_{\substack{s_1+s_2=1\\ s_1\geq 0, s_2\geq 0}}\min\left(\frac{sb^1}{sa^1},\frac{sb^2}{sa^2}\right)=\max_{\substack{s_1+s_2=1\\ s_1\geq 0, s_2\geq 0}}\min\left(\frac{0{,}6s_1}{0{,}3s_1};\frac{0{,}4s_1+0{,}7s_2}{0{,}5s_1+0{,}s_2}\right)=$$

$$\overset{s_2=1-s_1}{=}\max_{0\leq s_1\leq 1}\min\left(\underset{(I)}{\frac{0{,}6s_1}{0{,}3s_1}},\underset{(II)}{\frac{0{,}7-0{,}3s_1}{0{,}3+0{,}2s_1}}\right).$$

Нарисуем эскизы графиков обеих функций (I) и (II) (рис. 14.3). Из элементарных геометрических соображений графиком функции $v(s)=\min\left(\frac{0{,}6s_1}{0{,}3s_1},\frac{0{,}7-0{,}3s_1}{0{,}3+0{,}2s_1}\right)$ является множество, состоящее из ломаной линии FGH (без точки F) и изолированной точки $E=(0,\ ^7/_3)$ Точка $F=(0,2)$ не рассматривается, ибо при $s_1=0$ левая дробь $0{,}6s_1/0{,}3s_1$ имеет вид (0/0) и поэтому не учитывается. Самой высокой точкой этого множества (графика функции $v(s)$) является точка E. Следовательно, задача на максимин имеет решение $\hat{s}_1=0$, $\hat{s}_2=1$, $\hat{v}=7/3$. Непосредственно проверяется, что $\hat{s}_1=0$,

$$\hat{v}\cdot 0{,}3\hat{s}_1\leq 0{,}6\hat{s}_1\Rightarrow\frac{7}{3}\cdot 0{,}3\cdot 0\leq 0{,}6\cdot 0\Rightarrow 0=0,$$

$$\hat{v}(0{,}3+0{,}2\hat{s}_1)\leq(0{,}7-0{,}3\hat{s}_1)\Rightarrow\frac{7}{3}0{,}3\leq 0{,}7\Rightarrow 0{,}7=0{,}7.$$

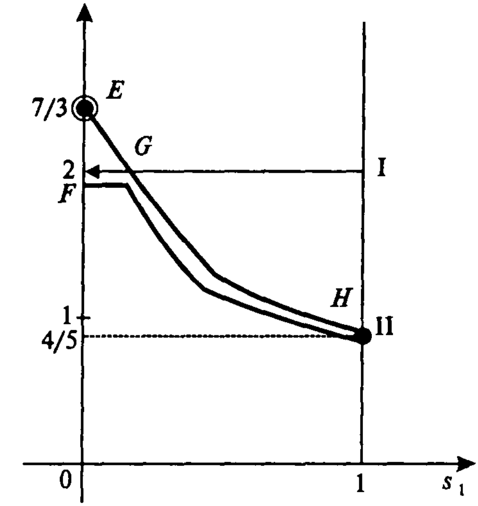


Рис. 14.3

14.2.4. Упорядоченный набор векторов цен $\tilde{p}(1), \ldots, \tilde{p}(T)$, такой, что для любого номера t, $t = T - 1, \ldots, 1$, *имеет место равенство* $\xi\tilde{p}(t+1) = \tilde{p}(t)$, называется стационарным (точнее, квазистационарным) набором цен. Вектор $\tilde{p}(t)$ называется элементом стационарного набора цен. Очевидно, набор цен является стационарным, если для любого номера t, $t = 1, \ldots, T$, имеет место равенство $\tilde{p}(t) = c_2\xi^{T+1-t}r$. Верно и обратное. Здесь скалярные постоянные c_1 и ξ положительны и вектор $r \geq 0$ такой, что его октаэдрическая норма (r) равна единице: $|r| = r_1 + \ldots + r_m = 1$. Число $\xi > 0$ и вектор $r \geq 0$ называются основными характеристиками стационарного набора цен. Число $\xi > 0$ называется коэффициентом постоянного пропорционального (т.е. сбалансированного) падения стационарного набора цен, вектор $r \geq 0$ называется структурой стационарного набора цен. Если число $\xi > 1$, то цены падают в реальном времени и растут в обратном времени; если число $\xi = 1$, то цены постоянны (случай истинно стационарного набора цен $c_2 r = \tilde{p}(1) = \ldots = \tilde{p}(T)$); если число $0 < \xi < 1$, то цены растут в реальном времени и падают в обратном времени. Стационарный набор цен представляет собой набор сбалансированного развития (изменения) цен во времени.

К вопросу о рациональности рассмотрения цен, падающих в реальном времени, мы вернемся в следующем параграфе 14.3.

Все элементы стационарного набора цен расположены на луче L_r, натянутом на вектор r. (рис. 14.4). Стационарный набор цен $\tilde{p}(1), \ldots, \tilde{p}(T)$ называется стационарной траекторией цен МС ДММФ, если его элементы удовлетворяют неравенствам (14.1.10), (14.1.12). Выполнение неравенства (14.1.11) не обязательно, т.е. стационарная траектория цен МС ДММФ может и не быть допустимой траекторией цен МС ДММФ.

Для стационарной траектории цен МС ДММФ имеем

$$Ac_2\xi^{T-t+1}r \geq Bc_2\xi^{T-t}r,\ t = 1, \ldots, T-1$$

или после сокращения на положительный множитель $c_2\xi^{T-t}$

$$\xi Ar \geq Br. \qquad (14.2.10)$$

Верно, очевидно, и обратное. Если основные характеристики ξ и r стационарного набора цен удовлетворяют векторному неравенству (14.2.10), то этот набор есть стационарная траектория цен МС ДММФ.

14.2.5. Из всех стационарных траекторий $\tilde{p}(1), \ldots, \tilde{p}(T)$ цен МС ДММФ интерес представляют траектории с минимальным коэффициентом $\breve{\xi}$ постоянного пропорционального падения цен в реальном времени (т.е. с минимальным коэффициентом $\breve{\xi}$ постоян-

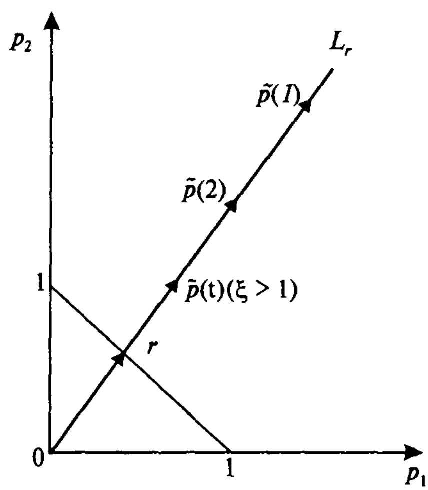


Рис. 14.4

ного пропорционального роста цен в обратном к реальному времени), т.е. траектория минимального постоянного пропорционального падения цен (ТрМиППРИ) в реальном времени.

Для определения этих траекторий следует решить задачу квадратичного программирования

$$\xi\ (min), \tag{14.2.11}$$

$$\xi Ar \geq Br, \tag{14.2.12}$$

$$\xi \geq 0, \tag{14.2.13}$$

$$r \geq 0, \tag{14.2.14}$$

$$|r| = 1. \tag{14.2.15}$$

Решение $\left(\breve{\xi}, \breve{r}\right)$ этой задачи представляет собой основные характеристики ТрМиППРИ $\breve{p}(t) = c_2(\breve{\xi})^{T+1-t}\,r$, $t = 1, \ldots, T$. Основные характеристики $\breve{\xi}$ и $\breve{r}$ определяются только матрицами A и B, т.е. технологией ПМ ДММФ.

Задача (14.2.11)—(14.2.15) эквивалентна следующей задаче на минимакс:

$$\breve{\xi} = \min_{\substack{r\geq 0\\ |r|=1}} \max\left(\frac{b_1 r}{a_1 r}, \ldots, \frac{b_n r}{a_n r}\right), \tag{14.2.16}$$

в которой дроби вида (0/0) и $(0/a_i r)$ не рассматриваются.

Переход от задачи (14.2.11)—(14.2.15) к задаче (14.2.16) осуществляется с помощью следующих простых рассуждений.

Векторное неравенство (14.2.12) переписывается в координатной форме

$$\xi a_1 r \geq b_1 r,\ \ldots,\ \xi a_n r \geq b_n r. \tag{14.2.17}$$

Получается система n неравенств с одной неизвестной ξ. Решение этой системы имеет вид

$$\xi(r) = \max\left(\frac{b_1 r}{a_1 r}, \ldots, \frac{b_n r}{a_n r}\right), \tag{14.2.18}$$

где дроби вида (0/0) и $(0/a_i r)$ не рассматриваются, ибо они соответствуют неравенствам $\xi a_i r \geq b_i r$, которые удовлетворяются при любых значениях ξ. Для отыскания $\breve{\xi}$ остается найти $\min\limits_{\substack{r\geq 0\\ |r|=1}} \xi(r)$.

14.2.6. Задачи вида (14.2.16) аналогичны задаче (14.2.7), они относятся к классу задач негладкой оптимизации и в общем виде трудноразрешимы. Однако при $m = 2$ задачи вида (14.2.16) легко решаются на основании элементарных геометрических соображений. Проиллюстрируем это обстоятельство на двух примерах.

Пример 14.2.3 (продолжение примера 14.2.1)

Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 \\ 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}$$

имеем

$$\breve{\xi} = \min_{\substack{r_1+r_2=1 \\ r_1\ge 0, r_2 \ge 0}} \max\left(\frac{b_1 r}{a_1 r}, \frac{b_2 r}{a_2 r}\right) = \min_{\substack{r_1+r_2=1 \\ r_1\ge 0, r_2 \ge 0}} \max\left(\frac{0,6r_1+0,3r_2}{0,3r_1+0,4r_2}; \frac{0,5r_1+0,4r_2}{0,6r_1+0,2r_2}\right) =$$

$$\overset{r_2=1-r_1}{=} \min_{0\le r_1 \le 1} \max\left(\underset{(I)}{\frac{0,3+0,3r_1}{0,4-0,1r_1}}, \underset{(II)}{\frac{0,4+0,1r_1}{0,2+0,4r_1}}\right).$$

Нарисуем эскизы графиков обеих дробно-линейных функций (I) и (II) (рис. 14.5). Очевидно, графиком функции

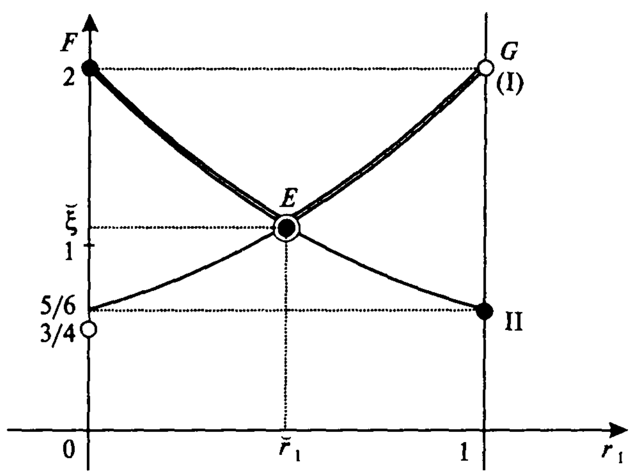


Рис. 14.5

$\xi(r)=\max\left(\dfrac{0,3+0,3r_1}{0,4-0,1r_1},\dfrac{0,4+0,1r_1}{0,2+0,4r_1}\right)$ является линия *FEG*, ибо при

$0\le r_1\le\breve{r}_1$ $\quad\xi(r_1)=\max\left(\dfrac{0,3+0,3r_1}{0,4-0,1r_1},\dfrac{0,4+0,1r_1}{0,2+0,4r_1}\right)=\dfrac{0,4+0,1r_1}{0,2+0,4r_1}$, а при

$\breve{r}_1\le r_1\le 1$ $\;\xi(r_1)=\max\left(\dfrac{0,3+0,3r_1}{0,4-0,1r_1},\dfrac{0,4+0,1r_1}{0,2+0,4r_1}\right)=\dfrac{0,3+0,3r_1}{0,4-0,1r_1}$. Из элементарных геометрических соображений $\min\limits_{0\le r_1\le 1}\xi(r)$ достигается при $r_1=\breve{r}_1$. Для определения $\breve{r}_1$ следует решить уравнение $\dfrac{0,3+0,3r_1}{0,4-0,1r_1}=\dfrac{0,4+0,1r_1}{0,2+0,4r_1}$, которое сводится к квадратичному уравнению $13r_1^2+18r_1-10=0$, корнями которого являются числа $\breve{r}_1=\dfrac{-9+\sqrt{211}}{13}\cong 0,425$, $\breve{r}_1=\dfrac{-9-\sqrt{211}}{13}$.

Выбираем корень $\breve{r}_1=\dfrac{-9+\sqrt{211}}{13}\cong 0,425$, который попадает в отрезок $0\le r_1\le 1$, второй корень $\breve{r}_1=\dfrac{-9-\sqrt{211}}{13}<-1$ является посторонним.

Осталось определить коэффициент падения:

$$\breve{\xi}=\frac{3+3\breve{r}_1}{4-\breve{r}_1}=\frac{3+3\dfrac{-9+\sqrt{211}}{13}}{4-\dfrac{-9+\sqrt{211}}{13}}=\frac{7+\sqrt{211}}{18}\cong 1,1959.$$

Таким образом, задача на минимакс имеет решение

$$\breve{\xi}=\hat{v}=\frac{7+\sqrt{211}}{18}\cong 1,1959,\ \breve{r}_1=\frac{-9+\sqrt{211}}{13}\cong 0,425,\ \breve{r}_2=\frac{22-\sqrt{211}}{13}\cong 0,575.$$

Пример 14.2.4 (продолжение примера 14.2.2)

Для матриц

$$A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,5\\ 0 & 0,3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0,6 & 0,4\\ 0 & 0,7\end{pmatrix}$$

имеем

$$\breve{\xi} = \min_{\substack{r_1+r_2=1 \\ r_1\geq 0, r_2\geq 0}} \max\left(\frac{b_1 r}{a_1 r}, \frac{b_2 r}{a_2 r}\right) = \min_{\substack{r_1+r_2=1 \\ r_1\geq 0, r_2\geq 0}} \max\left(\frac{0,6r_1+0,4r_2}{0,3r_1+0,5r_2}; \frac{0,7r_2}{0,3r_2}\right) =$$

$$\overset{r_2=1-r_1}{=} \min_{0\leq r_1\leq 1} \max\left(\underset{(I)}{\frac{0,4+0,2r_1}{0,5-0,2r_1}}, \underset{(II)}{\frac{0,7(1-r_1)}{0,3(1-r_1)}}\right).$$

Нарисуем графики обеих функций (I) и (II) (рис. 14.6). Из элементарных геометрических соображений графиком функции $\xi(r) = \max\left(\frac{0,4+0,2r_1}{0,5-0,2r_1}, \frac{0,7(1-r_1)}{0,3(1-r_1)}\right)$ является множество, состоящее из горизонтальной линии FG (без точки G) и изолированной точки $E = (1, 2)$. Точка $G = (1, {}^7/_3)$ не рассматривается, ибо при $r_1 = 1$ правая дробь $0,7(1-r_1)/0,3(1-r_1)$ имеет вид (0, 0) и поэтому не учитывается. Самой низкой точкой этого множества является точка E. Следовательно, задача на минимакс имеет решение $\breve{r}_1 = 1$, $\breve{r}_2 = 0$, $\breve{\xi} = 2$.

Непосредственно проверяется, что

$$\breve{\xi}0,3(1-\breve{r}_1) \geq 0,7(1-r_1) \Rightarrow 0 = 0,$$

$$\breve{\xi}(0,5-0,2r_1) \geq (0,4+0,2\breve{r}_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \breve{\xi}\cdot 0,3 \geq 0,6 \Rightarrow 2\cdot 0,3 \geq 0,6.$$

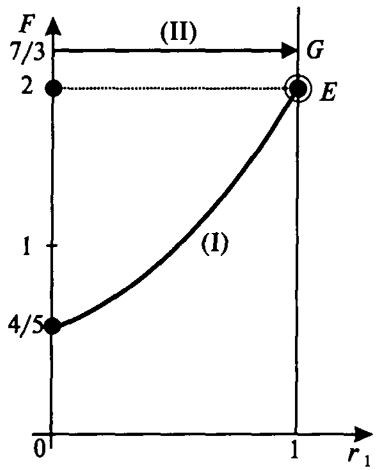


Рис. 14.6

Отметим, что в случае матриц A и B примеров 14.2.1 и 14.2.3 имеем $\hat{\nu} = \breve{\xi} = (7+\sqrt{211})/18$. В случае матриц A и B примеров 14.2.2 и 14.2.4 $\hat{\nu} = 7/3 > 2 = \breve{\xi}$.

Пример 14.2.5

Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

имеем

$$\hat{\nu} = \max_{s_1+s_2=1} \min\left(\frac{sb^1}{sa^1}, \frac{sb^2}{sa^2}\right) = \max_{s_1+s_2=1} \min\left(\frac{0{,}6s_1}{0{,}3s_1}; \frac{0{,}3s_1+0{,}3s_2}{0{,}4s_1+0{,}2s_2}\right) =$$

$$\overset{s_2=1-s_1}{=} \max_{0\le s_1\le 1} \min\left(\underset{(I)}{\frac{0{,}6s_1}{0{,}3s_2}}, \underset{(II)}{\frac{0{,}3}{0{,}2+0{,}2s_1}}\right).$$

Нарисуем эскизы графиков обеих дробно-линейных функций (I) и (II) (рис. 14.7). Очевидно, графиком функции $\nu(s_1) = \min\left(\frac{0{,}6s_1}{0{,}3s_1}, \frac{0{,}3}{0{,}2(1+s_1)}\right)$ является линия EG. Точка $F = (0, 2)$ не рассматривается, ибо при $s_1 = 0$ левая дробь $0{,}6s_1/0{,}3s_1$ имеет вид (0, 0) и поэтому не учитывается. Самой высокой точкой линии

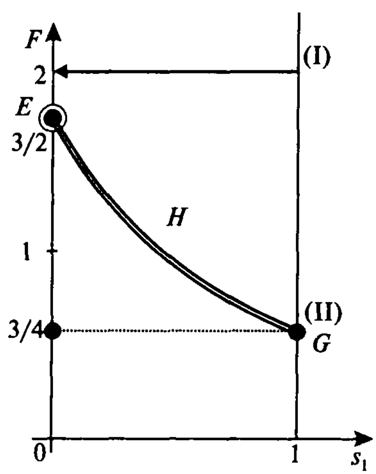


Рис. 14.7

EG является точка $E = (0, {}^3/_2)$. Следовательно, задача на максимин в рассматриваемом случае имеет вид $\hat{v} = {}^3/_2, \hat{s}_1 = 0, \hat{s}_2 = 1$.

Непосредственное проверяется, что

$$\hat{v}0{,}3\hat{s}_1 \le 0{,}6\hat{s}_1 \Rightarrow \frac{3}{2}\cdot 0{,}3\cdot 0 \le 0{,}6\cdot 0 \Rightarrow 0 \le 0,$$

$$\hat{v}(0{,}4\hat{s}_1 + 0{,}2\hat{s}_2) \le 0{,}3\hat{s}_1 + 0{,}3\hat{s}_2 \Rightarrow \frac{3}{2}\cdot 0{,}2\cdot 1 \le 0{,}3\cdot 1 \Rightarrow 0{,}3 \le 0{,}3.$$

Для $\breve{\xi}$ имеем

$$\breve{\xi} = \min_{\substack{r_1+r_2=1\\ r_1\ge 0, r_2\ge 0}} \max\left(\frac{b_1 r}{a_1 r}, \frac{b_2 r}{a_2 r}\right) = \min_{\substack{r_1+r_2=1\\ r_1\ge 0, r_2\ge 0}} \max\left(\frac{0{,}6r_1 + 0{,}3r_2}{0{,}3r_1 + 0{,}4r_2}, \frac{0{,}3r_2}{0{,}2r_2}\right)^{(r_2=1-r_1)} =$$

$$= \min_{\substack{r_1+r_2=1\\ r_1\ge 0, r_2\ge 0}} \max\left(\underset{(I)}{\frac{0{,}3+0{,}3r_1}{0{,}4-0{,}1r_1}}, \underset{(II)}{\frac{0{,}3(1-r_1)}{0{,}2(1-r_1)}}\right).$$

Нарисуем графики обеих функций (I) и (II) (рис. 14.8). Очевидно, графиком функции $\xi(r_1) = \max\left(\frac{0{,}3+0{,}3r_1}{0{,}4-0{,}1r_1}, \frac{0{,}3(1-r_1)}{0{,}2(1-r_1)}\right)$ является линия E_1E_2G. Точка $F = (1, {}^3/_2)$не рассматривается, ибо при $r_1 = 1$ правая дробь $0{,}3(1 - r_1)/0{,}2(1 - r_1)$ имеет вид (0/0) и поэтому

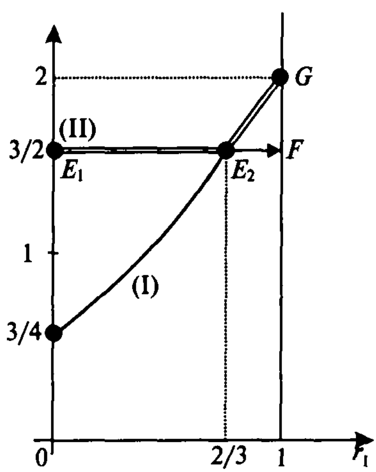


Рис. 14.8

не учитывается. Самыми низкими точками графика функции $\xi(r_1)$ являются точки отрезка E_1E_2 с координатами $(r_1, {}^3/_2)$, где $0 \le r_1 \le {}^2/_3$ (при $r_1 = {}^2/_3$ линии (I) и (II) пересекаются, что проверяется непосредственно). Следовательно, задача на минимакс имеет решение $\breve{\xi} = 3/2,\ 0 \le \breve{r}_1 \le \dfrac{2}{3},\ \breve{r}_2 = 1 - \breve{r}_1$.

Непосредственно проверяется, что

$$\breve{\xi}(0,3r_1 + 0,4r_2) \ge 0,6r_1 + 0,3r_2 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\cdot 0,4 - 0,3\right)r_2 + \left(\frac{3}{2}\cdot 0,3 - 0,6r_1\right) \ge 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0,6 - 0,3)(1 - r_1) + (0,45 - 0,6r_1) \ge 0 \Rightarrow 0,6 \ge 0,9r_1 \Rightarrow \frac{2}{3} \ge r_1 \ge 0.$$

$$\breve{\xi}0,2(1 - r_1) \ge 0,3(1 - r_1) \Rightarrow \frac{3}{2}\cdot 0,2 - \frac{3}{2}\cdot 0,2r_1 \ge 0,3 - 0,3r_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,3 - 0,3r_1 \ge 0,3 - 0,3r_1 \Rightarrow 0 \ge 0.$$

В рассматриваемом примере $\hat{\nu} = \breve{\xi} = \dfrac{3}{2}$, и вектор r определяется неоднозначно.

14.3. Динамическое равновесие динамической модели в матричной форме

14.3.1. Динамическим равновесием (ДР) динамической модели в матричной форме (ДММФ) называется пара стационарных траекторий интенсивностей и цен

$$z^*(t) = c_1(\nu^*)^t s^*,\ t = 1,\ldots,T, \tag{14.3.1}$$

$$p^*(t) = c_2(\nu^*)^{T+1-t} r^*,\ t = 1,\ldots,T, \tag{14.3.2}$$

таких, что основные характеристики (ν^*, s^*), (ν^*, r^*) этих траекторий удовлетворяют условиям

$$\nu sA \le sB, \tag{14.3.3}$$

$$\nu Ar \ge Br, \tag{14.3.4}$$

$$\nu \ge 0, \tag{14.3.5}$$

$$s \ge 0, \tag{14.3.6}$$

$$|s| = 1, \tag{14.3.7}$$

$$r \ge 0, \tag{14.3.8}$$

$$|r| = 1. \tag{14.3.9}$$

Таким образом, ДММФ находится в ДР, если развитие в ней осуществляется по стационарным траекториям (т.е. по траекториям сбалансированного развития) интенсивностей и цен.

Система неравенств и уравнений (14.3.3)–(14.3.9) называется моделью динамического равновесия (МДР) ДММФ. Теория динамического равновесия (ТДР) анализирует свойства МДР. Траектория (14.3.1) называется траекторией интенсивностей ДР, траектория (14.3.2) называется траекторией цен ДР.

Коэффициент ν^* называется коэффициентом роста ДР, векторы s^* и r^* — векторами интенсивностей и цен ДР. Для краткости ДР ДММФ называется набор из коэффициента роста ν^* и векторов s^* и r^* интенсивностей и цен ДР, что символически показывается так: $\rho(\nu^*) = \left\{\nu^*; s^*; r^*\right\}$.

ДР с коэффициентом роста ν^* называется невырожденным, если

$$s^* B r^* > 0, \qquad (14.3.10)$$

и вырожденным, если

$$s^* B r^* = 0. \qquad (14.3.11)$$

Для данного коэффициента роста ν^* могут быть ДР как невырожденные, так и вырожденные. Содержательный интерес представляют коэффициенты роста ν^*, для которых обязательно существуют невырожденные ДР. Для этих коэффициентов ν^* также могут быть и вырожденные ДР.

Если ДР $\left\{\nu^*; s^*; r^*\right\}$ невырожденное, то $s^* B r^* > 0$, откуда следует, что $z^*(t)Bp^*(t) = c_1(\nu^*)s^* B(c_2/\nu^*)^{T+1-t} r^* = c_1 c_2 (\nu^*)^{T+1} s^* B r^* > 0$, т.е. «общая стоимость» $z^*(t)Bp^*(t)$ в ценах равновесия $p^*(t)$ выпуска $z^*(t)B$ равновесия положительна и постоянна во времени. Это означает, что в случае роста интенсивностей равновесия цены равновесия должны падать в реальном времени: постоянство денежной массы в условиях экономического роста означает необходимость падения цен во времени.

Множество всех коэффициентов роста ν^*, для которых обязательно существуют невырожденные ДР, называется невырожденным спектром ДММФ. Множество всех коэффициентов роста ν^*, для которых существуют лишь вырожденные ДР, называется вырожденным спектром ДММФ.

ДР ДММФ является важным понятием как с содержательной экономической точки зрения, так и с формально математической точки зрения.

С математической точки зрения МДР, точнее векторные неравенства (14.3.3) и (14.3.4), представляет собой нетривиальное обобщение задачи на собственные числа и правые и левые собственные векторы как для матрицы

$$Dv = \lambda v,\ wD = \lambda w,$$

так и для матричного пучка

$$Gv = \lambda Hv,\ wG = \lambda wH.$$

14.3.2. В связи с ДР ДММФ возникают три вопроса: вопрос о существовании невырожденного ДР, вопрос о числе различных коэффициентов роста λ^* в случае невырожденного и вырожденного спектров и вопрос об условиях дополняющей нежесткости.

В предположении существования ДР $\rho(\nu^*) = \left\{\nu^*; s^*; r^*\right\}$, которое может быть как невырожденным, так и вырожденным, для доказательства условий дополняющей нежесткости не требуется накладывать на матрицы A и B никаких условий.

В предположении существования ДР $\rho(\nu^*) = \left\{\nu^*; s^*; r^*\right\}$ для доказательства того, что невырожденный спектр ДММФ обязательно содержит не более $\min(n, m)$ различных коэффициентов роста ν^*, также не требуется накладывать на матрицы A и B никаких условий.

Для доказательства существования ДР используются различные достаточные условия.

Первое достаточное условие было предложено Дж. фон Нейманом в1932 г. (опубликовано на немецком языке в 1938 г.) (см. *Neumann von J.* (1945–1946): пусть матрицы A и B — матрицы с неотрицательными элементами, т.е. $A \geq 0$, $B \geq 0$, и пусть $A + B > 0$. Тогда существует единственный коэффициент ν^*, который может принадлежать как невырожденному, так и вырожденному спектру и для которого справедливы равенства $\nu^* = \hat{\nu} = \breve{\xi}$ (см. параграф 14.2).

Если $A > 0$ и $B = 0$, то $\nu^* = 0$; если $A = 0$ и $B > 0$, то $\nu^* = +\infty$ (ситуация рога изобилия). Оба этих крайних варианта являются чисто формальными и не представляют интереса с содержательной точки зрения.

Второе достаточное условие существования ДР было предложено в работе трех авторов (Дж. Кемени, О. Моргенштерн, Дж. Томпсон), опубликованной в журнале *Econometrica* в 1956 г. (см.: *J.G. Kemeny*, *O. Morgenstern*, *G.L. Thompson* (1956)).

Пусть матрицы A и B неотрицательны и в каждой строке матрицы A и в каждом столбце матрицы B есть хотя бы один ненулевой элемент. Тогда существует хотя бы один коэффициент ν^*, принадлежащий невырожденному спектру, причем наибольший из таких ν^* равен $\hat{\nu}$, а наименьший равен ξ (см. параграф 14.2).

14.3.3. Если в ДР $\{\nu^*; s^*; r^*\}$ вектор $r^* > 0$, то $\nu^* = \hat{\nu}$. Приведем простое достаточное условие существования коэффициента ν^*, принадлежащего невырожденному спектру.

Пусть $n = m$, $\det B \neq 0$, матрица $D = AB^{-1}$ примитивна и правый собственный вектор r^* матрицы $G = B^{-1}A$, соответствующей числу Перрона матрицы G (матрицы D и G имеют одинаковые спектры), положителен.

Тогда существует единственный коэффициент ν^*, принадлежащей невырожденному спектру, с единственным ДР

$$\rho(\nu^*) = \{\nu^*; s^*; r^*\}.$$

Докажем это.

По теореме Г. Фробениуса примитивная матрица $D = AB^{-1}$ имеет число Перрона λ^* и левый вектор s^* Перрона, такие, что $s^* D = \lambda^* s^*$, откуда следует, что $(1/\lambda^*)S^* A = S^* B$, т.е. число $\nu^* = 1/\lambda^*$ и вектор s^* удовлетворяют неравенству (14.3.3) как равенству.

Аналогично для матрицы G имеем $Gr^* = \lambda^* r^*$, откуда вытекает равенство

$$\frac{1}{\lambda^*} Ar^* = Br^*,$$

т.е. число $\nu^* = 1/\lambda^*$ и вектор r^* удовлетворяют неравенству (14.3.4) как равенству.

Таким образом, набор $\left\{\nu^* = \dfrac{1}{\lambda^*}, s^*, r^*\right\}$ — ДР ДММФ.

Принадлежность ν^* к невырожденному спектру следует из неравенства

$$s^* Br^* > 0,$$

которое справедливо в силу того, что матрица $B \geq 0$ и векторы s^* и r^* положительны.

Единственность ν^* вытекает из неравенств $s^* > 0$ и $r^* > 0$.

Пусть матрицы A и B имеют размеры $n \times m$. Тогда может существовать не более $\min(n \times m)$ различных коэффициентов роста ν^*, принадлежащих невырожденному спектру ДММФ.

14.3.4. Пусть в ДР $\{\nu^*; s^*; r^*\}$ коэффициент роста ν^* принадлежит невырожденному спектру ДММФ, тогда существует пара индексов i и j, такая, что

$$s^* b^j > 0, \quad r_j^* > 0 \text{ и } s_j^* b_{ij} r_j^* > 0.$$

Пусть коэффициенты роста ν'' и ν' принадлежат невырожденному спектру и таковы, что

$$\nu'' > \nu' \ (\{\nu'', s'', r''\}, \{\nu', s', r'\}).$$

Пусть две пары координат s_j'', r_j'' и s_k', r_k' таковы, что справедливы неравенства $s''b^j > 0, r_j'' > 0$ и $s'b^k > 0, r_k' > 0$.

Имеем

$$\nu'' s'' a^j \le s'' b^j \overset{(r_j''>0)}{\Rightarrow} \nu'' s'' a^j = s'' b^j > 0 \Rightarrow s'' a^j > 0 \overset{(\nu''>\nu')}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \nu' s'' a^j < \nu'' s'' a^j = s'' b^j \Rightarrow r_j' = 0.$$

Поскольку $r_k' > 0$ и $r_j' = 0$, постольку $j \ne k$. Следовательно, может быть не более чем m различных коэффициентов роста ν^*, принадлежащих невырожденному спектру.

Аналогично показывается, что может быть не более чем n различных коэффициентов роста ν^*, принадлежащих невырожденному спектру.

14.3.5. *Условия дополняющей нежесткости* для ДР $\{\nu^*, s^*, r^*\}$ имеют вид:

Если $s_i^* > 0$, то $\nu^* a_i r^* = b_i r^*$, если $\nu^* a_i r^* > b_i r^*$, то $s_i^* = 0$ (первое условие дополняющей нежесткости).

Если $r_j^* > 0$, то $\nu^* s^* a^j = s^* b^j$, если $\nu^* s^* a^j < s^* b^j$, то $r_j^* = 0$ (второе условие дополняющей нежесткости).

Дадим содержательную интерпретацию первому условию дополняющей нежесткости.

Из равенства $\nu^* a_i r^* > b_i r^*$ следует, что $a_i c_2 (\nu^*)^{T-t+1} \equiv r^* = b_i c_2 (\nu^*)^{T-t} r^*$, т.е. $b_i p^*(t+1) - a_i p^*(t) = 0$. Верно и обратное. Из неравенства $\nu^* a_i r^* > b_i r^*$ следует, что $b_i p^*(t+1) - a_i p^*(t) < 0$. Верно и обратное.

Отсюда следует, что если основной процесс Q_i в ДР функционирует, то он дает максимальную прибыль в ценах равновесия. Если основной процесс Q_i в ДР не дает максимальной прибыли, то он в ДР не функционирует, ибо $s_i^* = 0$.

Дадим содержательную интерпретацию второму условию дополняющей нежесткости.

Из равенства $\nu^* s^* a^j = s b^j$ следует, что $c_1(\nu^*)^{t+1} s^* a^j = c_1(\nu^*)^t s^* b^j$, т.е. $z^*(t+1)a^j = z^*(t)b^j$, т.е. продукт G_j в периоде $t + 1$ затрачивается ровно в том количестве, в котором он был выпущен в периоде t. Верно и обратное. Из неравенства $\nu^* s^* a^j < s^* b^j$ следует, что $z^*(t+1)a^j < z^*(t)b^j$. Верно и обратное. Отсюда вытекает, что если в ДР продукт G_j имеет положительную цену $p_j^*(t) = c_2(\nu^*)^{T+1-t} r_j^* > 0$, то в периоде $t + 1$ он затрачивается ровно в том объеме, в котором он был выпущен в предыдущем периоде t. Если же в ДР в периоде $t + 1$ продукт G_j затрачивается в меньшем объеме, чем он был выпущен в предыдущем периоде t, то продукт G_j является свободным в ДР, т.е. его цена $p_j^*(t) = c_2(\nu^*)^{T+1-t} r_j^* = 0$.

Выше уже отмечалось, что наибольший коэффициент ν^* роста ДР равен $\hat{\nu}$, а наименьший равен $\breve{\xi}$. Отсюда следует, что среди траекторий интенсивностей и цен ДР обязательно находятся ТрМсППРИ и ТрМиПППЦ (см. параграф 14.2).

Верно и обратное. Пару $\hat{\nu}, \hat{s}$, которая является оптимальным решением ММсППРИ, можно пополнить вектором $\hat{r}$, таким, что тройка $\{\hat{\nu}, \hat{s}, \hat{r}\}$ станет ДР ДММФ. Пару $(\breve{\xi}, \breve{r})$, которая является оптимальным решением ММиПППЦ, можно пополнить вектором $\breve{s}$, таким, что тройка $\left\{\breve{\xi}, \breve{s}, \breve{r}\right\}$ станет ДР ДММФ.

Таким образом, установится взаимосвязь между тремя моделями: МДР, с одной стороны, и ММсППРИ и ММиПППЦ, с другой стороны.

Эта взаимосвязь аналогична двум теоремам экономики благосостояния, которые описывают взаимосвязь между эффективностью по Парето (ее аналогом являются ММсППРИ и ММиПППЦ) и конкурентным равновесием (его аналогом является ДР).

14.3.6. В заключение этого параграфа приведем доказательство первого условия дополняющей нежесткости. Будут приведены рассуждения, аналогичные рассуждениям, используемым для доказательства второй теоремы двойственности в линейном программировании. Однако следует добавить, что исторически двойственный подход в теории ДР ДММФ был предложен на ряд лет раньше, чем появилась теория двойственности в линейном программировании да и само линейное программирование.

Векторное неравенство

$$\nu^{*}s^{*}A < s^{*}B \tag{14.3.12}$$

распишем покоординатно:

$$\nu^{*}s^{*}a^{1} \le s^{*}b^{1}, \ldots, \nu^{*}s^{*}a^{m} \le s^{*}b^{m}.$$

Умножив каждое скалярное неравенство на соответствующую координату $r_1^{*} \ge 0, \ldots, r_m^{*} \ge 0$ и сложив полученные неравенства, будем иметь

$$\nu^{*}s^{*}a^{1}r_1^{*} + \ldots + \nu^{*}s^{*}a^{m}r_m^{*} \le s^{*}b^{1}r_1^{*} + \ldots + s^{*}b^{m}r_m^{*},$$

откуда следует, что

$$\nu^{*}s^{*}(a^{1}r_1^{*} + \ldots + a^{m}r_m^{*}) \le s^{*}(b^{1}r_1^{*} + \ldots + b^{m}r_m^{*}). \tag{14.3.13}$$

Принимая во внимание равенства $a^{1}r_1^{*} + \ldots + a^{m}r_m^{*} = Ar^{*}$, $b^{1}r_1^{*} + \ldots + b^{m}r_m^{*} = Br^{*}$, перепишем неравенство (14.3.13) так:

$$\nu^{*}s^{*}Ar^{*} \le s^{*}Br^{*}. \tag{14.3.14}$$

Аналогично поступив с векторным неравенством

$$\nu^{*}Ar^{*} \ge Br^{*},$$

получим неравенство

$$\nu^{*}s^{*}Ar^{*} \ge s^{*}Br^{*}. \tag{14.3.15}$$

Из (14.3.14) и (14.3.15) следует равенство

$$\nu^{*}s^{*}Ar^{*} = s^{*}Br^{*}, \tag{14.3.16}$$

которое следует расписать в виде скалярного произведения

$$s_1^{*}(\nu^{*}a_1r^{*} - b_1r^{*}) + \ldots + s_n^{*}(\nu^{*}a_nr^{*} - b_nr^{*}) = 0. \tag{14.3.17}$$

В каждом слагаемом $s_i^{*}(\nu^{*}a_ir^{*} - b_ir^{*})$, $i = 1, \ldots, n$, оба множителя (s_i^{*} и $\nu^{*}a_nr^{*} - b_nr^{*}$) неотрицательны. Следовательно, левая часть равенства (14.3.17) содержит все слагаемые одного знака. Отсюда следует, что каждое слагаемое левой части равенства (14.3.17) равно нулю, т.е. $s_i^{*}(\nu^{*}a_ir^{*} - b_ir^{*})$, i = 1, ..., n. Поэтому если $s_i^{*} > 0$, то $\nu^{*}a_ir^{*} - b_ir^{*} = 0$. Если же $\nu^{*}a_ir^{*} > b_ir^{*}$, то обязательно $s_i^{*} = 0$.

Таким образом, первое условие дополняющей нежесткости доказано. Второе условие дополняющей нежесткости доказывается аналогично.

14.4. Взаимосвязь между оптимальными траекториями и траекториями равновесия динамической модели в матричной форме

14.4.1. На основе ПС ДММФ (14.1.2)–(14.1.4) (см. параграф 14.1) строится ММсППРИ (14.2.2)–(14.2.6) (см. параграф 14.2), благодаря которой строятся ТрМсППРИ $\hat{z}(t)=c_1(\hat{v})^t\hat{s}$, $t=1, ..., T$, которые являются траекториями интенсивностей равновесия. На основе ПС ДММФ строятся терминально оптимальные траектории интенсивностей $z^t(1), ..., z^t(T)$.

Оптимальная траектория интенсивностей ПС ДММФ зависит от начального вектора $z(0) = z^0$, целевого вектора и от матриц A и B. Основные характеристики $\hat{v}$ и $\hat{s}$ ТрМсППРИ и, следовательно, сама ТрМсППРИ зависят только от матриц A и B, т.е. от технологического множества ДММФ.

Говорят, что оптимальная траектория интенсивностей обладает *магистральным свойством*, если она в своем развитии сначала приближается (не обязательно монотонно) к лучу $\hat{L}_s$, натянутому на вектор $\hat{s}$, затем в течение ряда периодов элементы оптимальной траектории располагаются около луча $\hat{L}_s$, мало отличаясь от соответствующих элементов $\hat{z}(t)$ ТрМсППРИ, и в конце временнóго промежутка ДММФ оптимальная траектория интенсивностей может отойти от луча $\hat{L}_s$ для того, чтобы попасть в терминальную точку $z^t(T)$ (рис. 14.9, на котором точками (кляксами) показаны элементы терминально оптимальной траектории, а крестиками — элементы ТрМсППРИ, которые все расположены на луче $\hat{L}_s$). Роль самой магистрали играет луч $\hat{L}_s$.

Термин «магистраль» означает скоростную автомобильную дорогу, по которой автомобилист передвигается с максимально возможной скоростью. К магистрали автомобилист едет по местной дороге, от магистрали также по другой местной дороге, чтобы попасть в требуемый пункт. Термин «магистральное свойство оптимальной траектории» был введен (П. Сэмуэльсоном) в связи с тем, что характер ее поведения похож на стратегию передвижения

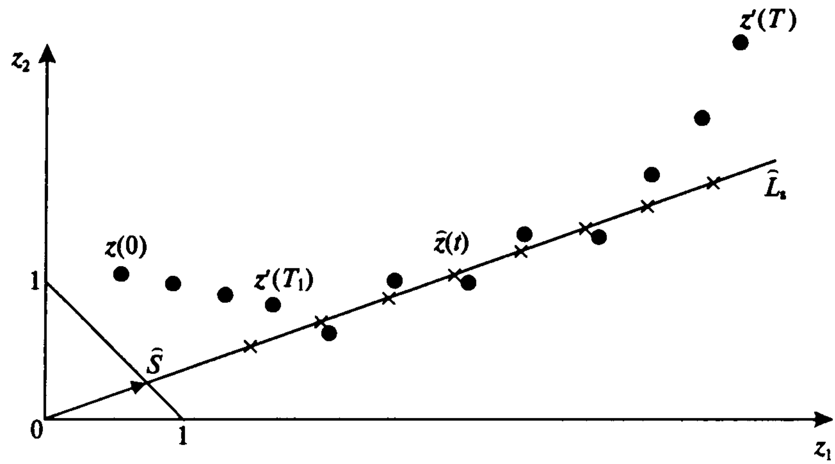


Рис. 14.9

автомобилиста, который должен проехать из одного города в другой, используя магистраль, если расстояние между городами относительно велико. (Если расстояние невелико, следует ехать по местной дороге, не выезжая на магистраль.)

Отметим, что теоремы, которые дают достаточные условия существования магистрального эффекта, называются теоремами о магистрали. Существует много теорем о магистрали, доказанных разными авторами. Совокупность теорем о магистрали составляет магистральную теорию. Магистральная теория включает также теоремы о магистрали для оптимальных траекторий цен, которые не только играют вспомогательную роль, но и представляют самостоятельный интерес.

14.4.2. Приведем достаточное условие существования магистрального свойства у терминально оптимальной траектории ДММФ с квадратными матрицами A и B.

Пусть набор $\left\{v^*, s^*, r^*\right\}$ —ДР ДММФ и нормированные векторы $s^* > 0$ $\left(\left|s^*\right| = 1\right)$ и $r^* > 0$ $\left(\left|r^*\right| = 1\right)$ являются единственными. Пусть число $\alpha^* > 0$ — простой корень характеристического уравнения $\det(B - wA) = 0$ и на окружности радиуса α нет других корней этого уравнения.

Пусть матрица $B \geq 0$ (матрица $A \geq 0$).

Пусть вектор $z^0 B \geq 0$ и его носитель включает носитель вектора $s^* A$.

Пусть $s^* u > 0$ и существует постоянная c, такая, что $u \leq c A r^*$. Тогда для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдутся номера T_1 ($T_1 = T_1(\varepsilon)$) и T_3 ($T_3 = T_3(\varepsilon)$), такие, что для любой терминально оптимальной траектории ДММФ при всех номерах t, удовлетворяющих неравенствам $T_1 \leq t \leq T - T_3$, справедливо неравенство

$$d(z'(t), s^*) < \varepsilon.$$

Номера T_1 и T_3 от T не зависят. Номер T ($T \geq T_1 + T_3$) может быть любым. Из неравенств $s^* > 0$ и $r^* > 0$ следует (см. параграф 14.3), что коэффициент роста ДР $\nu^* = \hat{\nu}$, т.е. траектория интенсивностей равновесия $z^*(t) = c_1 (\nu^*)^t s^*, t = 1, ..., T$, является ТрМсППРИ ДММФ $\hat{z}(t) = c_1 (\hat{\nu})^t \hat{s}, t = 1, ..., T$.

Векторы $s^* (= \hat{s})$ и $r^* (= \hat{r})$ называются магистральными векторами интенсивностей и цен, коэффициент роста $\nu^* (= \hat{\nu})$ называется магистральным коэффициентом роста.

Символом $d\left(z'(t), s^*\right)$ обозначено угловое расстояние между векторами $z'(t)$ и s^*:

$$d\left(z'(t), s^*\right) = \left| \frac{z'(t)}{|z'(t)|} - s^* \right| \text{ —}$$

где $|z'(t)| = z_1'(t) + ... + z_n'(t)$ — октаэдрическая норма вектора $z'(t)$;

$$\left| \frac{z'(t)}{|z'(t)|} - s^* \right| = \left| \frac{z_1'(t)}{|z'(t)|} - s_1^* \right| + ... + \left| \frac{z_n'(t)}{|z'(t)|} - s_n^* \right| \text{ —}$$

октаэдрическая норма вектора $\left(z'(t)/|z'(t)|\right) - s^*$.

Неравенство $d\left(z'(t), s^*\right) < \varepsilon$ означает, что все элементы $z'(t)$ ($T_1 \leq t \leq T - T_3$) оптимальной траектории $z'(1), ..., z'(T)$ расположены внутри ε — конуса, натянутого на октаэдрическую ε-окрестность вектора s^*.

Номер T_1 может зависеть от $z(0) = z^0$, номер T_3 — от целевого вектора u. С ростом номера T удлиняется второй (основной) участок оптимальной траектории интенсивностей, а длины первого и третьего участков с ростом номера T не меняются.

Неравенство $d\left(z'(t), s^*\right) < \varepsilon$ описывает поведение второго участка оптимальной траектории интенсивностей $z'(1), ..., z'(T)$ и означает, что этот второй участок близок к соответствующему участку ТрМсППРИ. Таким образом, второй участок оптимальной траектории аналогичен передвижению автомобилиста по магистрали с максимально возможной скоростью.

14.4.3. Поведение первого участка оптимальной траектории интенсивностей зависит от начального вектора $z(0) = z^0$, поведение последнего участка оптимальной траектории интенсивностей зависит от целевого вектора u. Характер поведения второго (основного) участка оптимальной траектории, по сути, регламентируется только технологическим множеством ПС ДММФ и не зависит ни от начального вектора $z(0) = z^0$, ни от целевого вектора u.

Отсюда можно сделать по крайней мере три важных теоретических вывода.

Во-первых, в ДММФ с продолжительным временны́м горизонтом не требуется большая точность для определения терминального целевого вектора u, ибо он влияет, по существу, только на третий участок (т.е. на «хвост») оптимальной траектории, который можно отбросить, уменьшив временной горизонт TДММФ.

Во-вторых, решение задачи динамической оптимизации, т.е. нахождение оптимальной траектории интенсивностей $z'(1)$, ..., $z'(T)$ в случае продолжительного временнóго горизонта T, получается лишь, по существу, благодаря максимальному постоянному пропорциональному росту, основные характеристики $v^*(=\hat{v})$ и $s^*(=\hat{s})$ которого эндогенны и определяются лишь технологическим множеством ДММФ. Итак, в случае продолжительного временнóго горизонта достижение оптимальности возможно только через максимальный постоянный пропорциональный рост с эндогенными основными характеристиками.

В-третьих, магистральное свойство можно использовать для рационального решения так называемой проблемы «хвоста» в экономической динамике, суть которой заключается в том, что всякая динамическая модель с конечным временны́м горизонтом T имеет свой модельный «конец света» в последний период T. Поэтому в последние годы временнóго промежутка оптимальная траектория переходит в режим «после нас хоть потоп». В связи с этим на элементы оптимальной траектории в последние годы временного промежутка следует накладывать дополнительные ограничения, элиминирующие неадекватное реальности поведение этой оптимальной траектории. Формирование этих дополнительных условий, особенно в задачах прогнозирования, представляет собой нетривиальную задачу. На основании магистрального свойства можно рекомендовать в качестве терминального вектора интенсивностей магистральный вектор интенсивностей $s^*(=\hat{s})$.

С прикладной точки зрения магистральное свойство полезно тем, что на его основе можно строить траектории структурно аппроксимирующие оптимальные, которые искать проще оптимальных. Делается это так. Сначала решается ММсППРИ и определяются магистральный коэффициент $\nu^*(=\hat{\nu})$ и магистральная структура интенсивностей $s^*(=\hat{s})$, а затем определяется только первый участок выхода на магистраль. Второй и третий участки — это участки развития по магистрали с наибольшим коэффициентом роста. Первый участок (участок выхода на магистраль) естественно рассматривать как участок перехода из начального состояния $z(0) = z^0$ ДММФ в сбалансированное состояние, определяемое вектором s^*.

Обобщение теорем о магистрали на случай асимптотически постоянных матриц основано на том, что в ММсППРИ (14.2.2)–(14.2.6), с помощью которой определяются магистральный коэффициент и магистральный вектор интенсивностей, в качестве матриц A и B берутся предельные матрицы асимптотически постоянных матриц $A(t)$ и $B(t)$. В случае переменных во времени матриц $A(t)$ и $B(t)$ «прямая» магистраль превращается в «косую», на которой коэффициент и магистральная структура вектора интенсивностей уже перестают быть постоянными, как в классических теоремах о магистрали.

Вопросы для самоконтроля к главе 14

1. Назовите четыре базовых понятия динамической модели в матричной форме (ДММФ).
2. В какой форме в ДММФ реализован основополагающий принцип «затраты — выпуск»?
3. Что представляет собой основной производственный процесс? Приведите примеры его содержательной интерпретации.
4. Дайте содержательное обоснование покоординатному сложению и умножению на неотрицательное число основных производственных процессов.
5. Как в производственной сфере (ПС) ДММФ учитывается научно-технологический прогресс?
6. Что такое технологическое множество (технологический конус) ПС ДММФ?

7. Как осуществляется переход от описания в матричной форме ПС ДММФ к ее описанию в конической форме?
8. Как осуществляется переход от описания в конической форме ПС ДММФ к ее описанию в матричной форме?
9. Как содержательно интерпретируется условие замкнутости ПС ДММФ?
10. Как определяются допустимые и оптимальные траектории интенсивностей ПС ДММФ?
11. Как определяется прибыль основного производственного процесса?
12. Какова взаимосвязь между реальным и модельным временем в ПС и монетарной сфере (МС) ДММФ?
13. Как определяются допустимые и оптимальные траектории цен МС ДММФ?
14. Что такое стационарная траектория интенсивностей ПС ДММФ? Каковы ее основные характеристики? Дайте геометрическую интерпретацию стационарной траектории интенсивностей.
15. Что такое траектория максимального постоянного пропорционального роста интенсивностей (ТМсППРИ)? Что такое модель максимального постоянного пропорционального роста интенсивностей (ММсППРИ) ПС ДММФ? Что такое теория максимального постоянного пропорционального роста интенсивностей (ТеМсППРИ)? Преобразуйте ММсППРИ в задачу на максимин.
16. Что такое стационарная траектория цен МС ДММФ? Каковы ее основные характеристики? Дайте геометрическую интерпретацию стационарной траектории цен.
17. Что такое траектория минимального постоянного пропорционального падения цен (ТМиПППЦ)? Что такое модель минимального постоянного пропорционального падения цен (ММиПППЦ) МС ДММФ? Что такое теория минимального постоянного пропорционального падения цен (ТеМиПППЦ)? Преобразуйте ММиПППЦ в задачу на минимакс.
18. Как определяется динамическое равновесие (ДР) ДММФ? Дайте развернутую и краткую версии ДР ДММФ.
19. Что такое траектория роста интенсивностей ДР и ее основные характеристики?
20. Что такое траектория падения цен ДР и ее основные характеристики?
21. Что такое модель динамического равновесия (МДР) ДММФ? Что такое теория динамического равновесия (ТеДР)?
22. Как можно охарактеризовать взаимосвязь между МДР ДММФ, с одной стороны, и ММсППРИ ПС ДММФ и ММиПППЦ МС ДММФ, с другой стороны?
23. Как определяются понятия невырожденного и вырожденного спектров ДММФ?

24. Сформулируйте достаточные условия существования ДР ДММФ.
25. Каковы мощности невырожденного и вырожденного спектров ДММФ?
26. Как формулируются условия дополняющей нежесткости ДР ДММФ? Приведите доказательства условий дополняющей нежесткости.
27. Что такое магистральное свойство оптимальной траектории интенсивностей ПС ДММФ? Приведите формулировку одной из теорем о магистрали.
28. В чем теоретическое значение магистрального свойства?
29. В чем заключается прикладное значение магистрального свойства?

Задачи и упражнения для самоконтроля к главе 14

1. Приведите конкретный пример фрагмента экономической реальности, который можно описать с помощью ПС ДММФ.
2. Покажите, что замкнутая динамическая межотраслевая модель (ЗДМОМ) укладывается в формальную схему ПС ДММФ.
3. Докажите, что если $r^* > 0$, то $\nu^* = \nu$ (см. параграфы 14.2 и 14.3).
4. Докажите, что если $s^* > 0$, то $\nu^* = \breve{\xi}$ (см. параграфы 14.2 и 14.3).
5. Пусть A — матрица затрат, B — матрица выпуска ДММФ. Для каждой пары матриц

5.1. $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$

5.2. $A = \begin{pmatrix} 3/4 & 1 \\ 2/3 & 5/4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

5.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

5.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix},$

5.5. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}:$

а) найдите основные характеристики $(\hat{\nu}, \hat{s})$ ТрМсППРИ, решив задачу на максимин. Выпишите ТрМсППРИ;

б) найдите основные характеристики $(\breve{\xi}, \breve{r})$ ТрМиПППЦ, решив задачу на минимакс. Выпишите ТрМиПППЦ;

в) в случае $\widehat{\nu} = \breve{\xi}$ выпишите ДР $\left\{\nu^*, s^*, r^*\right\}$. Проверьте условия дополняющей нежесткости;

г) в случае $\widehat{\nu} > \breve{\xi}$ опишите вырожденный спектр ДММФ;

д) в случае $\widehat{\nu} > \breve{\xi}$ опишите все ДР $\left\{\nu^*, s^*, r^*\right\}$ (невырожденные и вырожденные) ДММФ.

6. Приведите пример матриц A и B ДММФ, таких, что $\nu^* = \widehat{\nu}$, но среди векторов s^* нет положительных.
7. Приведите пример матриц A и B ДММФ, таких, что $\nu^* = \breve{\xi}$, но среди векторов r^* нет положительных.

Тесты для контрольных работ к главе 14

1. Продолжительность траектории перехода из начального состояния в сбалансированное для ПС ДММФ не зависит от:
   а) начального состояния z^0;
   б) углового расстояния между начальным и сбалансированным состоянием;
   в) сбалансированного состояния;
   г) продолжительности временнóго промежутка ПС ДММФ.
2. Коэффициент роста ДР ДММФ является наибольшим, если:
   а) целевой вектор ПС ДММФ положителен;
   б) вектор цен равновесия положителен;
   в) вектор интенсивностей равновесия положителен;
   г) вектор интенсивностей нулевого (базового) периода положителен.

   Из возможных ответов

1) только а);	4) только г), в);
2) только б);	5) только а), в);
3) только в);	6) только а), г)

   выберите наилучший.
3. Коэффициент роста ДР ДММФ является наименьшим, если:
   а) целевой вектор ПС ДММФ положителен;
   б) вектор цен равновесия положителен;
   в) вектор интенсивностей равновесия положителен;
   г) вектор интенсивностей нулевого (базового) периода положителен.

   Из возможных ответов

1) только а);	4) только г);
2) только б);	5) только а), б);
3) только в);	6) только а), г)

   выберите наилучший.

4. Коэффициент роста ДР ДММФ является единственным, если:
   а) целевой вектор ПС ДММФ положителен;
   б) вектор цен равновесия положителен;
   в) вектор интенсивностей равновесия положителен.

   Из возможных ответов

1) только а);	4) только а), б);
2) только б);	5) только б), в);
3) только в);	6) только а), в)

   выберите наилучший.
5. Основные характеристики траектории максимального постоянного пропорционального роста интенсивностей определяются:
   а) начальными условиями (при $t = 0$);
   б) конечными условиями (при $t = 0$);
   в) структурными параметрами (матрицами A и B);
   г) целевой функцией (целевым терминальным вектором u);
   д) длиной временнóго промежутка ПС ДММФ.
6. Теорема о магистрали для ПС ДММФ:
   а) устанавливает связь на продолжительном временнóм промежутке между оптимальной траекторией ПС ДММФ и траекторией максимального постоянного пропорционального роста интенсивностей;
   б) позволяет прогнозировать структурные параметры ПС ДММФ на далекую перспективу;
   в) дает рациональное решение проблемы выбора терминальной целевой функции для ПС ДММФ в случае продолжительного временнóго промежутка;
   г) позволяет определить оптимальную продолжительность временнóго промежутка модели.

   Из возможных ответов

1) только а), б);	4) только б), в);
2) только а), в);	5) только в), г)
3) только а), г);	

   выберите наилучший.
7. Магистральный темп роста и структура магистрального вектора интенсивностей ПС ДММФ определяются:
   а) ее начальным (базовым) вектором;
   б) ее технологическим множеством;
   в) ее целевым вектором (вектором u);
   г) первым участком ее оптимальной траектории.
8. Наиболее естественной является следующая (генетическая) связь между теориями экономической динамики:
   а) ТО → ТеМсППРИ → ТДР;

б) ТДР → ТО → ТеМсППРИ;
в) ТО → ТДР → ТеМсППРИ;
г) ТДР → ТеМсППРИ → ТО;
д) ТеМсППРИ → ТО → ТДР
(ТО — теория оптимизации).

9. В случае разрешимой модели максимального постоянного пропорционального роста интенсивностей в ее решение в качестве элемента входит:
   а) конечное число различных коэффициентов роста, для которых существуют невырожденные положения равновесия;
   б) бесконечное число различных коэффициентов роста, для которых существуют вырожденные положения равновесия;
   в) ни одного коэффициента роста;
   г) только один коэффициент роста.
10. Если оптимальная траектория интенсивностей обладает магистральным свойством, то не следует:
   а) задавать конечные условия;
   б) сглаживать ее первый участок;
   в) сглаживать ее второй участок;
   г) сглаживать ее третий участок;
   д) строить траекторию, которая ее аппроксимирует.

11. Модель максимального постоянного пропорционального роста интенсивностей представляет собой:
   а) задачу линейного программирования;
   б) двойственную пару задач линейного программирования;
   в) задачу квадратичного программирования;
   г) систему линейных неравенств;
   д) задачу на собственное число и собственный вектор.
12. Погодовые структурные сдвиги на траектории интенсивностей наиболее естественно оценивать с помощью следующего показателя:
   а) наибольшее отношение одноименных координат векторов интенсивностей двух смежных периодов временнóго промежутка;
   б) отношение норм векторов интенсивностей двух смежных периодов временнóго промежутка;
   в) угловое расстояние между векторами интенсивностей двух смежных периодов временнóго промежутка;
   г) косинус угла между векторами интенсивностей двух смежных периодов временнóго промежутка;
   д) такого показателя не существует.
13. ПСДММФ представляет собой:
   а) задачу линейного программирования;
   б) двойственную пару задач линейного программирования;
   в) задачу квадратичного программирования;

г) систему линейных неравенств;
д) задачу на собственное число и собственный вектор.

14. МДР (матрицы затрат (A) и выпуска (B) таковы, что $A \geq 0$, $B \geq 0$, $A + B > 0$):
   а) в динамическом равновесии свободный продукт имеет нулевую цену;
   б) функционирующие в динамическом равновесии основные процессы дают максимальную (т.е. нулевую) прибыль;
   в) для функционирования в динамическом равновесии безотносительно к длине временного промежутка необходимо наличие неограниченных ресурсов (в том числе естественных факторов производства).

   Из возможных ответов

1) только а), б);	4) только а), в);
2) только б);	5) только б), в)
3) только а);	

   выберите наилучший.

15. Траектория максимального постоянного пропорционального роста интенсивностей обладает следующим свойством:
   а) ее погодовые элементы имеют разные структуры;
   б) по всем интенсивностям она монотонна во времени;
   в) в качестве ее начального вектора может быть взят любой ненулевой неотрицательный вектор;
   г) ее коэффициент роста зависит от целевого вектора (целевых векторов);
   д) ее темп роста зависит от углового расстояния между структурами ее начального вектора и начального вектора ПС ДММФ.

16. Элементы траектории максимального постоянного пропорционального роста интенсивностей:
   а) являются решением задачи линейного программирования;
   б) определяются вектором интенсивностей базового года;
   в) определяются вектором интенсивностей, задающим конечное условие;
   г) имеют постоянную структуру в течение всего временнóго промежутка.

17. Если оптимальная траектория интенсивностей обладает магистральным свойством, то:
   а) ее первый участок обязательно является монотонным;
   б) ее второй участок обязательно является монотонным;
   в) ее третий участок обязательно является монотонным;
   г) первый участок траектории, которая ее аппроксимирует, обязательно является монотонным;

д) она позволяет определить оптимальную продолжительность временнóго промежутка ПС ДММФ.

18. Теоретическую оценку продолжительности траектории перехода из начального состояния в сбалансированное для ПС ДММФ дает:
    а) длина временнóго промежутка;
    б) длина третьего отрезка оптимальной траектории;
    в) длина второго отрезка оптимальной траектории;
    г) длина первого отрезка оптимальной траектории;
    д) длина первого и второго отрезков оптимальной траектории.
19. На магистральный темп роста и структуру магистрального вектора валовых выпусков существенно влияет:
    а) продолжительность модельного временнóго промежутка;
    б) целевой вектор;
    в) начальное условие;
    г) погодовая динамика угловых расстояний между векторами валовых выпусков в первые годы временнóго промежутка;
    д) матрица замыкания.
20. Теорема о магистрали для ПС ДММФ:
    а) служит основанием для построения траектории, аппроксимирующей оптимальную в течение всего продолжительного временнóго промежутка модели;
    б) позволяет оценить уровень модельной сбалансированности экономической системы в базовом году временнóго промежутка модели;
    в) дает рациональное решение проблемы «хвоста» в случае продолжительного временнóго промежутка ПС ДММФ;
    г) дает рациональное решение проблемы сглаживания оптимальной траектории на продолжительном временнóм промежутке модели.

    Из возможных ответов

1) только а), б), в);	4) только б), в), г);
2) только а), б), г);	5) только а), б)
3) только а), в), г);	

    выберите наилучший.
21. Комплексной характеристикой уровня сбалансированности в базовом году развивающейся экономической системы, описываемой ПС ДММФ, является:
    а) выполнение начального условия;
    б) коэффициент максимального постоянного пропорционального роста интенсивностей;
    в) угловое расстояние между базовым и магистральным векторами интенсивностей;

г) угловое расстояние между векторами интенсивностей базового и первого годов.

22. Процедура сглаживания оптимальной траектории интенсивностей ПС ДММФ осуществляется в целях:
   а) сохранения размерности ПС ДММФ;
   б) усиления магистрального эффекта оптимальной траектории ПС ДММФ;
   в) корректировки магистрального вектора интенсивностей;
   г) уменьшения разницы между интенсивностями смежных лет временнóго промежутка;
   д) корректировки магистрального коэффициента роста интенсивностей.

23. Связь между двумя теориями экономической динамики осуществляется посредством третьей теории экономической динамики:
   а) ТДР, ТеМсППРИ, МТ;
   б) ТДР, МТ, ТеМсППРИ;
   в) ТО, МТ, ТеМсППРИ;
   г) ТО, ТеМсППРИ, МТ;
   д) МТ, ТеМсППРИ, ТО.

Задачи для контрольных работ к главе 14

1. Пусть A — матрица затрат, B — матрица выпуска ДММФ. Для каждой пары матриц

1.1. $A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}6\\ 0{,}4 & 0{,}2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}8\end{pmatrix}$

1.2. $A=\begin{pmatrix}1 & 3/4\\ 3/2 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

1.3. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-4 & 6\\ 6 & -4\end{pmatrix}$

1.4. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

1.5. $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$:

   а) найдите основные характеристики $(\hat{v},\hat{s})$ ТрМсППРИ, решив задачу на максимин. Выпишите ТрМсППРИ;

б) найдите основные характеристики $(\breve{\xi}, \breve{r})$ ТрМиППРИ, решив задачу на минимакс. Выпишите ТрМиППРИ;

в) в случае $\hat{\nu} = \breve{\xi}$ выпишите ДР $\left\{\nu^*, s^*, r^*\right\}$. Проверьте условия дополняющей нежесткости;

г) в случае $\hat{\nu} > \breve{\xi}$ выпишите вырожденный спектр ДММФ;

д) в случае $\hat{\nu} > \breve{\xi}$ выпишите все ДР $\left\{\nu^*, s^*, r^*\right\}$ (невырожденные и вырожденные) ДММФ.

Пусть в ДР $\left\{\nu^*, s^*, r^*\right\}$ вектор r^* таков, что $Ar^* > 0$. Докажите, что $\nu^* = \hat{\nu}$, и ν^* принадлежит невырожденному спектру ДММФ.

Пусть в ДР $\left\{\nu^*, s^*, r^*\right\}$ вектор s^* таков, что $As^* > 0$. Докажите, что $\nu^* = \breve{\xi}$, и ν^* принадлежит невырожденному спектру ДММФ.

Пусть в ДР $\left\{\nu^*, s^*, r^*\right\}$ векторы s^* и r^* таковы, что $Ar^* > 0$ и $As^* > 0$. Докажите, что ν^* — единственный коэффициент роста ДММФ и ν^* принадлежит невырожденному спектру.

Глава 15

ВНЕШНИЕ ЭФФЕКТЫ

15.1. Отрицательные внешние эффекты

15.1.1. *Внешними эффектами* (экстерналиями) называются воздействия (неопосредованные рынком) одних экономических агентов на результаты деятельности других. Внешний эффект называется *отрицательным*, если деятельность одного экономического агента вызывает дополнительные издержки в деятельности другого. Внешний эффект называется *положительным*, если деятельность одного экономического агента уменьшает издержки в деятельности другого. Таким образом, в случае отрицательных внешних эффектов деятельность одних экономических агентов *не благоприятствует* деятельности других. В случае положительных внешних эффектов деятельность одних экономических агентов *благоприятствует* деятельности других.

В этом параграфе рассматриваются отрицательные внешние эффекты, в следующем — положительные.

Отрицательный внешний эффект имеет место, когда предприятия (металлургический завод, фирма по выращиванию поросят) сбрасывает отходы в реку, используемую для рыбной ловли или купания. В рассматриваемом примере внешний эффект представляет собой внешние издержки предприятия, загрязняющего реку. Такие издержки выражаются в дополнительных издержках рыболовецких и туристических фирм, которые они имеют в связи с тем, что должны принимать дополнительные меры по очистке речной воды. Эти внешние издержки предприятием, загрязняющим реку, не учитываются (поэтому они и называются внешними). Следовательно, имеет место ситуация, когда предприятие, загрязняющее реку, часть своих издержек (эта часть и есть внешние издержки) перекладывает (нерыночным способом) на другие фирмы. Сокращая таким образом свои издержки, предприятие получает конкурентное преимущество перед предприятиями, которые имеют дополнительные издержки для сокращения или ликвидации своих отходов. Особо отметим, что это конкурентное преимущество предприятие получает за счет деградации окружающей среды (в частности, загрязнения реки) и за счет перекладывания бремени дополнительных издержек на другие фирмы, а также и на рядовых потребителей продуктов и услуг этих фирм.

Внешние издержки предприятия, загрязняющего окружающую среду отходами, которые оно выбрасывает в атмосферу через трубу, в которой нет очистных агрегатов, выражаются, в частности, в дополнительных издержках граждан, которые вынуждены чаще красить крыши, больше покупать лекарств, больше тратить средств для временного переезда в рекреационные зоны и т.д.

15.1.2. Рассмотрим простейшую однопродуктовую модель, которая иллюстрирует суть отрицательных внешних издержек. Пусть фирма F_1 функционирует в условиях чистой конкуренции и производит продукт (товар) G_1 в количестве y_1 единиц. Пусть p_1 — рыночная цена одной единицы продукта G_1. Если фирма F_1 максимизирует прибыль при выпуске $y_1 = \hat{y}_1$, то

$$MC(\hat{y}_1) = p_1,$$

где $MC(\hat{y}_1)$ — частные предельные издержки фирмы F_1, которые не включают *дополнительные предельные издержки* $MEC(y_1)$, равные отрицательному внешнему эффекту (рис. 15.1). Сумма частных предельных издержек $MC(y_1)$ и дополнительных предельных издержек (*внешних предельных издержек*) $MEC(y_1)$

$$MC(y_1) + MEC(y_1) = MSC(y_1)$$

представляет собой *предельные общественные издержки* $MSC(y_1)$ (они по своей сути являются истинными предельными издержками фирмы F_1) На рис. 15.1 представлено также решение $\bar{y}_1$ уравнения $MSC(y_1) = p_1$.

На рис. 15.1 четко видно, что $\hat{y}_1 > \bar{y}_1$. Это означает, что продукт G_1 фирма F_1 производит в большем объеме $\hat{y}_1$, чем $\bar{y}_1$, т.е. в объеме $\bar{y}_1$ фирма F_1 производила бы продукт G_1, если бы учитывала не только частные предельные издержки $MC(y_1)$, но и внешние пре-

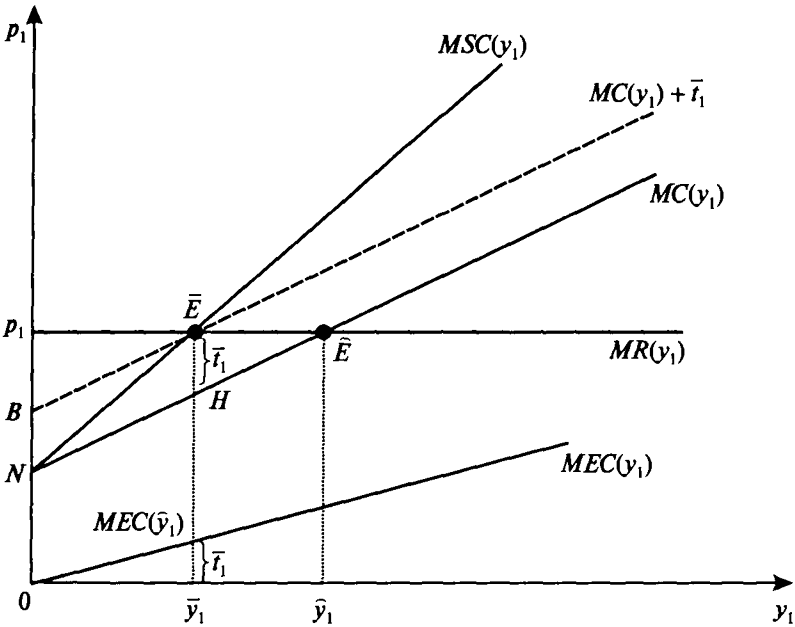


Рис. 15.1

дельные издержки $MEC(y_1)$. Объем $\bar{y}_1$ естественно назвать *эффективным с общественной точки зрения*, объем $\hat{y}_1$ — эффективным с точки зрения фирмы F_1. Таким образом, больший выпуск $\hat{y}_1$ фирма F_1 обеспечивает за счет того, что часть $MEC(y_1)$ своих истинных издержек $MSC(y_1)$ она перекладывает на другие фирмы и на общество в целом.

15.1.3. Проблема внешних издержек может быть решена с помощью так называемой *интернализации* внешнего эффекта, которая достигается за счет объединения (слияния) фирм, производящих, к примеру, продукты G_1 (скажем, сталь) и G_2 (скажем, рыбу). Здесь предполагается, что все свои внешние издержки фирма F_1 целиком перекладывает на фирму F_2. До объединения каждая фирма F_1 и F_2 решала самостоятельно свою задачу максимизации прибыли и, следовательно, задачу о максимальном объеме $\hat{y}_1$ и $\hat{y}_2$ своей продукции. После объединения фирма F_3 совместно решает задачу об объемах выпусков обоих продуктов G_1 и G_2. После объединения у фирмы F_1 уже нет внешних издержек, а ее общественные издержки играют роль ее частных издержек, и поэтому фирма F_1, сокращает свой максимальный выпуск. Сокращая максимальный выпуск, фирма F_1 сокращает свои общественные издержки и, следовательно, объем загрязнений. Однако возможная неэффективность с ростом масштаба производства ставит пределы такому способу решения проблемы внешних эффектов.

Другой вариант решения проблемы внешних эффектов заключается в установлении специального налога (называемого *налогом Пигу*). Ставка $\bar{t}$ налога Пигу устанавливается в размере

$$\bar{t}_1 = MEC(\bar{y}_1)$$

(см. рис. 15.1).

После введения налога Пигу линия $MC(y_1)$ частных предельных издержек сдвигается параллельно самой себе на величину $\bar{t}_1$ Новая линия $MC(y_1)+\bar{t}_1$ пересечет линию цены $MR(y_1)$ в точке $\bar{E}=(\bar{y}, p_1)$, т.е. в точке, где цена p_1 равна предельным общественным издержкам $MSC(y_1)$. Теперь издержки фирмы F_1, генерирующей отрицательный внешний эффект, равны сумме частных издержек (площадь четырехугольника $ONH\bar{y}_1$ и налоговых выплат (площадь прямоугольника $NB\bar{E}H$).

На практике установить ставку $\bar{t}_1$ налога Пигу довольно сложно, ибо величину $MEC(\bar{y}_1)$ оценить трудно. Для разных фирм эта величина $MEC(\bar{y}_1)$ может быть существенно разной. Кроме того, величина $MEC(\bar{y}_1)$ может сильно варьироваться от хорошо развитых к слаборазвитым регионам.

Третий вариант решения проблемы внешних эффектов дает известная *теорема Коуза*, суть которой состоит в следующем. Внешние эффекты можно интернализировать посредством закрепления прав собственности на порождающих внешние эффекты экономических агентах и обмена этими правами, если это не связано с большими трансакционными издержками.

Отметим, что права собственности — это установление законом правил, которые предписывают, что экономические агенты (люди, фирмы) могут делать со своей собственностью. Например, собственник земельного участка может на нем заниматься строительством, выращивать цветы, а может продать его целиком или какую-то его часть.

Пусть фирма F_1 (металлургический завод) загрязняет реку, на которой фирма F_2 (рыболовецкая артель) ловит рыбу. Рассмотрим сначала ситуацию, когда право собственности на чистую воду принадлежит фирме F_1. Фирма F_1, максимизирующая прибыль, может согласиться сократить выпуск своей продукции, если ей возместят потери (убытки), которые фирма F_1 будет иметь в связи с сокращением выпуска.

Если фирма F_1 выпускает y'_1 единиц своей продукции, то разность $p_1 - MC_1(y'_1) = B'N'$ равна чистой прибыли фирмы F_1 от производства y'_1-й единицы продукта G_1. Разность $MSC_1(y'_1) - MC_1(y'_1) = B'H'$ представляет собой внешние предельные издержки, связанные с производством y'_1-й единицы продукта G_1. В рассматриваемом случае $p_1 - MC_1(y'_1) > MSC_1(y'_1) - MC_1(y'_1)$ (рис. 15.2). Величина $MSC_1(y'_1) - MC_1(y'_1)$ — это максимально возможная сумма, которую фирма F_2 согласится заплатить фирме F_1 для того, чтобы фирма F_1 не выпускала эту y'_1-ю единицу продукта G_1. Поскольку максимально возможная сумма фирмы F_2 меньше чистой прибыли фирмы F_1, фирма F_1 не согласится с такой суммой возмещения. Если фирма F_1 выпускает y''_1 единиц своей продукции G_1, то разность $p_1 - MC_1(y''_1) = B''N''$ равна чистой прибыли фирмы F_1 от производства y''_1-й единицы продукта G_1. Разность $MSC_1(y''_1) - MC_1(y''_1) = B''H''$ представляет собой внешние предельные издержки, связанные с производством y''_1-й единицы продукта G_1. В рассматриваемом случае $MSC_1(y''_1) - MC_1(y''_1) > p_1 - MC_1(y''_1)$ (см. рис. 15.2). Теперь фирма F_2 не согласится выплачивать фирме F_1 такую большую компенсацию.

Очевидно, обе фирмы F_1 и F_2 могут достигнуть соглашения при $y_1 = \bar{y}_1$, при котором $p_1 - MC_1(\bar{y}_1) = MSC_1(\bar{y}_1) - MC_1(\bar{y}_1)$. Это означает, что фирма F_1 ограничит свой выпуск величиной $\bar{y}_1$ в обмен на денежную компенсацию $MSC_1(\bar{y}_1) - MC_1(\bar{y}_1) = \bar{B}\bar{E}$, которая равна $p_1 - MC_1(\bar{y}_1)$ чистой прибыли фирмы F_1 от производства $\bar{y}_1$-й единицы продукта G_1.

Анализ ситуации, когда право собственности на чистую воду принадлежит фирме F_2, проводится аналогично. В этом случае фирма F_1 будет оплачивать фирме F_2 и согласие на загрязнение воды. Фирма F_2 согласится дать такое разрешение на загрязнение, если платежи фирмы F_1 будут выше (точнее, не ниже) предельного для F_2 уровня загрязнения, равного $MEC_1(y_1) = MSC_1(y_1) - MC_1(y_1)$. Фирма F_1 согласится платить за право увеличить выпуск своей продукции на одну единицу, если этот платеж будет ниже (точнее, не выше), чем разность $MR_1(y_1) - MC_1(y_1)$. Соглашение будет достигнуто, когда фирма F_2 продает фирме F_1 право произвести продукцию в объеме $\bar{y}_1$ единиц (см. рис. 15.2), который является эффективным с общественной точки зрения. Этот

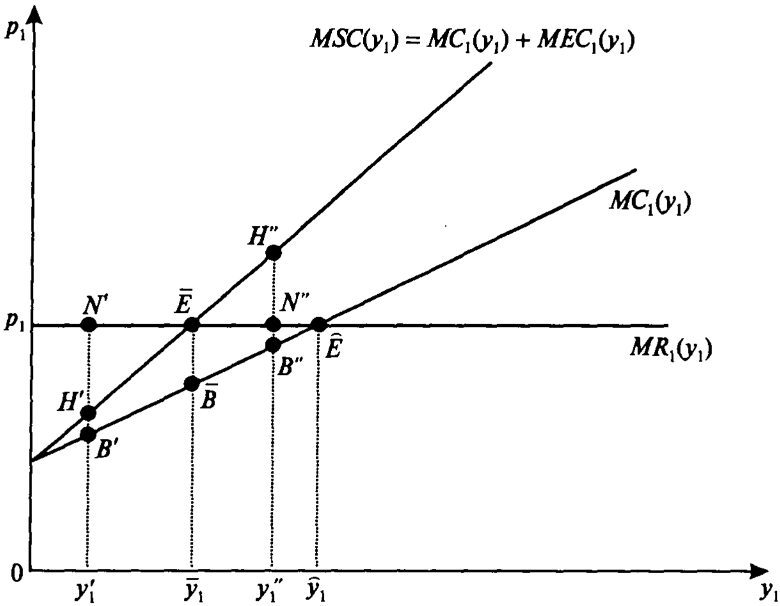


Рис. 15.2

объем получается независимо от того, кто наделен правом собственности, и без вмешательства органов управления на региональном и национальном уровнях.

Теорема Коуза привлекательна для либералов, которые считают, что органы управления на региональном и национальном уровнях должны как можно меньше вмешиваться в экономические проблемы и, в частности, в проблемы, порождаемые наличием отрицательных внешних эффектов. Однако с общественной точки зрения решения, предлагаемые на основании теоремы Коуза (если, конечно, они состоятся), не всегда обязательно будут рациональными.

Во-первых, решения на основании теоремы Коуза могут быть конструктивными в ситуации, охватывающей ограниченное число участников, и такой, что источники отрицательных внешних эффектов легко определяются. В этом случае распределение прав собственности на ресурсы влияет не на эффективный исход переговоров, а на распределение доходов. Поэтому эффективное с общественной точки зрения решение может и не быть справедливым.

Во-вторых, решения на основании теоремы Коуза могут быть конструктивными, если владельцы ресурсов могут четко идентифицировать источники наносимого им ущерба и легально предотвратить этот ущерб. К сожалению, такая адресная определенность далеко не всегда возможна (попробуйте определить истинных виновников смога и парникового эффекта). Отсюда следует, что не всегда ясно, как легально предотвращать ущерб, наносимый отрицательными внешними эффектами, когда невозможна локализация его источников. А если возможна, то по какому принципу распределять меру ответственности за ущерб, наносимый этими источниками отрицательных внешних эффектов.

В-третьих, теорема Коуза содержит важное условие о необходимости невысокой стоимости переговоров, предметом которых должно быть соглашение об эффективном с общественной точки зрения решении конкретной проблемы внешних эффектов. Это условие может не выполняться, когда, например, речь идет о проблемах отрицательных внешних эффектов, затрагивающих интересы миллионов граждан, владельцев личного автотранспорта — основного источника загрязнения атмосферы больших городов, и миллионов граждан, которые являются «потребителями» грязной атмосферы. Процесс таких переговоров непременно будет политизированным и иметь высокую стоимость.

15.2. Положительные внешние эффекты

15.2.1. Напомним, что внешний эффект называется положительным, если один экономический агент так воздействует на другого (других) экономического агента, что уменьшает издержки в его (другого агента) деятельности. Классическим примером, иллюстрирующим наличие положительного эффекта, служит ситуация «фруктовый сад — пасека».

Здесь фирма F_1 — это фруктовый (например, яблоневый) сад, фирма F_2 — пасека. Пчелы активно опыляют цветы, тем самым значительно снижают издержки фирмы F_1 на опыление. Цветы хорошо «кормят» пчел и тем самым значительно снижают издержки фирмы F_2.

Рассмотрим пример с ремонтом дома и разбивкой цветника. Символом y обозначим объем капиталовложений (например, в руб.) владельца дома, которые он выделяет на ремонт дома и разбивку цветника. Пусть расценки на ремонт дома и разбивку цветника не зависят от объема ремонтных работ, поэтому линия *MC* горизонтальна. Линия спроса *D* есть линия предельного частного выигрыша владельца дома от объема ремонта. Но ремонт также выгоден соседям, которым, например, будет достаточно любоваться цветником владельца дома, чтобы не тратиться на собственный цветник. Выгоды соседей отражает линия *MEB* предельных внешних выигрышей, которая является нисходящей, ибо по мере расширения объема ремонтных работ предельный внешний выигрыш убывает (отметим, что предельный внешний выигрыш здесь аналогичен предельной полезности потребителя, которая с ростом объема потребляемого продукта убывает). Линия *MSB* предельного общественного выигрыша есть сумма линий *D* и *MEB*, т.е. $MSB = D + MEB$ (рис. 15.3). Владелец дома реально инвестирует сумму $\hat{y}$, которая является проекцией точки пересечения линий *D* и *MC*. Эффективным с общественной точки зрения (т.е. с точки зрения учета не только интересов владельца дома, но

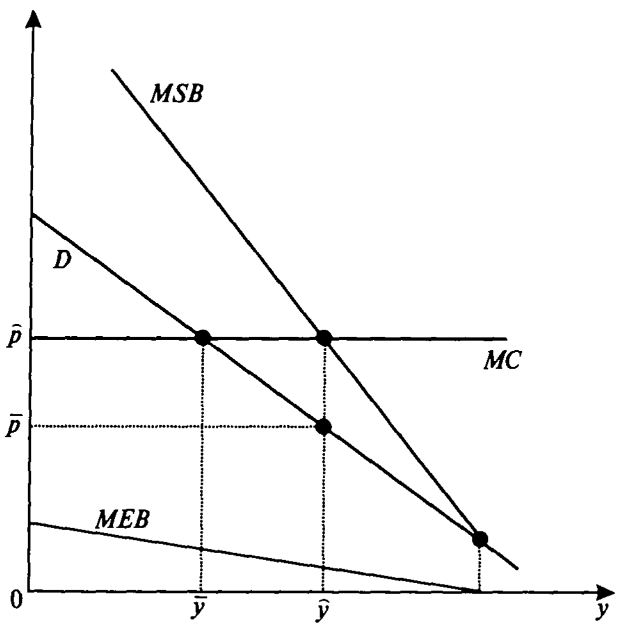


Рис. 15.3

и интересов соседей) является сумма $\overline{y}$, которая есть проекция точки пересечения линий *MSB* и *MC*. При более низкой цене $\overline{p}$ ($\overline{p} < \hat{p}$) владелец дома будет реально инвестировать сумму $\overline{y}$, которая эффективна с общественной точки зрения.

15.3. Модель для определения стандарта на вредные выбросы и платы за вредные выбросы

15.3.1. Рассмотрим и проанализируем модель для определения стандарта и размера платы за вредные выбросы для фирмы *F*. Модель состоит из линий *MSC* и *MCA*. Символом *MSC* обозначены ***предельные общественные издержки*** фирмы от вредных выбросов, символом *MCA* — ***предельные издержки от снижения вредных выбросов***, символом *y* обозначен объем вредных выбросов фирмы *F* (рис. 15.4). Линия *MSC* эквивалентна линии *MEC* (см. рис. 15.1). С ростом объема *y* вредных выбросов растут предельные обще-

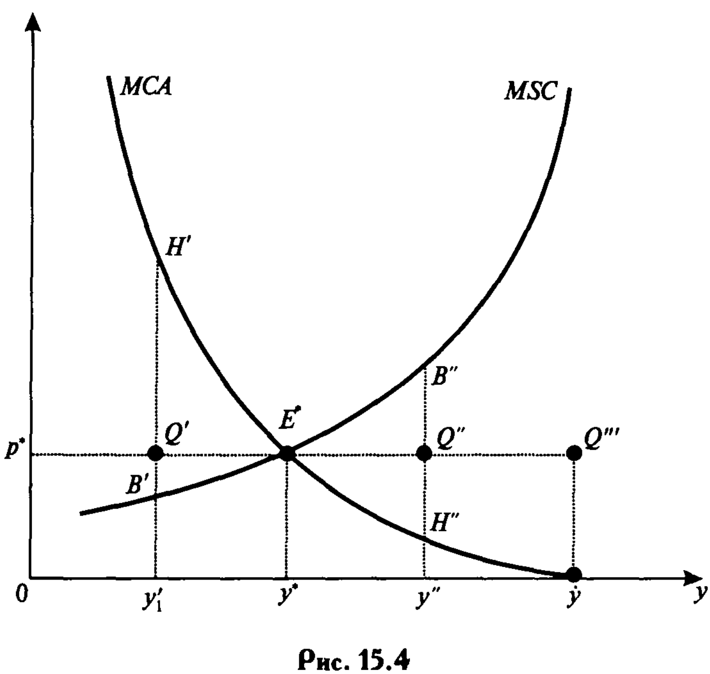


Рис. 15.4

ственные издержки от этих выбросов, поэтому линия *MSC* является восходящей.

Если фирма *F* увеличила объем вредных выбросов с уровня y' по уровень y'', это приведет к тому, что общественные издержки от вредных выбросов возрастут на величину, равную определенному интегралу

$$\int_{y'}^{y''} MSC(y)dy = |y'B'B''y''|_2,$$

где символом $|y'B'B''y''|_2$ обозначена площадь криволинейной трапеции $y'B'B''y''$.

Линия *MCA* имеет с осью Оy общую точку $\dot{y}$, которая соответствует объему производства фирмы, максимизирующего ее прибыль. Линия *MCA* является нисходящей, ибо при снижении объема вредных выбросов на небольшую величину (скажем, с $\dot{y}$ до y'' (см. рис. 15.4)) предельные издержки $MCA(y'')$ будут относительно невелики. При снижении объема вредных выбросов на сравнительно большую величину (скажем, с $\dot{y}$ до y' (см. рис. 15.4)) предельные издержки $MCA(y')$ также станут значительными, ибо большое снижение объема вредных выбросов требует относительного большего прироста издержек от снижения объема вредных выбросов на единицу. Если фирма снизила объем вредных выбросов с уровня y'' до уровня y', это потребует от нее дополнительных издержек, равных определенному интегралу

$$\int_{y'}^{y''} MC\ \ (y)dy = |y'H'H''y''|_2,$$

где символом $|y'H'H''y''|_2$ обозначена площадь криволинейной трапеции $y'H'H''y''$.

Отметим, что чисто внешне рассматриваемая модель напоминает крест Маршалла, в котором линия *MCA* есть линия спроса (скажем, на арбузы), а линия *MSC* есть линия предложения (арбузов). Точка пересечения E^* изображает в «арбузной» модели ***точку равновесия*** на рынке арбузов. В нашем (уже не арбузном) примере точка $E^* = (y^*, p^*)$ есть также ***точка равновесия***, абсциссу y^* которой естественно интерпретировать как ***стандарт*** (***норматив***) на объем вредных выбросов для фирмы *F*, а ординату p^* — как ***налог*** (***плату***) на одну единицу вредных выбросов, которые производит фирма *F*.

Стандарт y^* на объем вредных выбросов и налог p^* на одну единицу вредных выбросов рационально уравновешивают интересы фирмы F и общественные интересы. Отметим, что интересы фирмы F необходимо учитывать, если фирма F выпускает общественно значимый продукт, а его фирма может выпускать, только осуществляя вредные выбросы, т.е. если не будет вредных выбросов, то и не будет общественно значимого продукта.

Здесь уместно следующее важное замечание. Решение о введении стандарта (норматива) на объем вредных выбросов для фирмы F или налога (платы) на одну единицу вредных выбросов фирмы F должно приниматься органом регионального или национального управления. Иными словами, регулирование на региональном или национальном уровне необходимо для устранения (или ослабления) потерь, которые порождаются внешними эффектами. Описанная модель в принципе позволяет получить основу для принятия такого решения, ибо позволяет получить количественные оценки стандарта y^* и налога p^* для фирмы F. Серьезным является вопрос о реализации этого принципа, о чем речь пойдет дальше, когда будет обсуждаться вопрос, какой из показателей (y^* или p^*) более предпочтителен.

15.3.2. Если объем вредных выбросов фирмы F равен $\dot{y}$, то фирма должна выплатить налог в размере, равном площади четырехугольника $\left|Op^*Q'''\dot{y}\right|_2 = p^*\dot{y}$.

Если объем вредных выбросов фирмы F равен y^*, то фирма должна выплатить налог в размере, равном площади прямоугольника $\left|Op^*E^*y^*\right|_2 = p^*y^*$. К этому налогу p^*y^* следует добавить издержки

$$\int_{y^*}^{\dot{y}} MCA(y)dy = \left|y^*E^*\dot{y}\right|_2,$$

равные площади криволинейного треугольника $y^*E^*\dot{y}$, которые фирма F будет иметь в связи с тем, что она снизила вредные выбросы с объема, равного $\dot{y}$, до объема y^*. Таким образом, в рассматриваемом случае «полные» издержки фирмы F (сумма налога p^*y^* и издержек $\left|y^*E^*\dot{y}\right|_2$ в связи со снижением объема вредных выбросов с $\dot{y}$ до y^*) будут равны

$$p^*y^* + \int\limits_{y^*}^{\dot{y}} MCA(y)dy. \tag{15.3.1}$$

Если объем вредных выбросов фирмы F равен y' (y''), то фирма должна выплатить налог в размере, равном площади прямоугольника $\left|Op^*Q'y'\right|_2 = p^*y'$ $\left(\left|Op^*Q''y''\right|_2 = p^*y''\right)$. К этому налогу p^*y' (p^*y'') следует добавить издержки

$$\int\limits_{y'}^{\dot{y}} MCA(y)dy = \left|y'H'\dot{y}\right|_2 \left(\int\limits_{y''}^{\dot{y}} MCA(y)dy = \left|y''H''\dot{y}\right|_2\right),$$

равные площади криволинейного треугольника $y'H'\dot{y}$ $(y''H''\dot{y})$, которые фирма F имеет в связи с тем, что она снижает объем вредных выбросов с $\dot{y}$ до y' (до y''). Таким образом, в рассматриваемом случае «полные» издержки фирмы F (сумма налога p^*y' (p^*y'') и издержек $\left|y'H'\dot{y}\right|_2$ $\left(\left|y''H''\dot{y}\right|_2\right)$ в связи со снижением объема вредных выбросов с $\dot{y}$ до y' (до y'')) будут равны

$$p^*y' + \int\limits_{y'}^{\dot{y}} MCA(y)dy \tag{15.3.2}$$

$$\left(p^*y'' + \int\limits_{y''}^{\dot{y}} MCA(y)dy\right). \tag{15.3.3}$$

Из четырех величин $p^*\dot{y}$, (15.3.1), (15.3.2) и (15.3.3) минимальной является величина (15.3.1). Величина (15.3.2) больше величины (15.3.1) на площадь $\left|Q'H'E^*\right|_2$ криволинейного треугольника $Q'H'E^*$ (см. рис. 15.4). Величина (15.3.3) больше величины (15.3.1) на площадь $\left|E^*Q''H''\right|_2$ криволинейного треугольника $E^*Q''H''$ (см. рис. 15.4). Величина $p^*\dot{y}$ больше величины (15.3.1) на площадь $\left|E^*Q''\dot{y}\right|_2$ криволинейного треугольника $E^*Q''\dot{y}$ (см. рис. 15.4).

Таким образом, y^* вредных выбросов и налог p^* на одну единицу вредных выбросов совершенно равноправны, однако при реализации на практике, особенно в случае отсутствия достаточной информации, величины y^* и p^* теряют свое равноправие.

15.3.3. Сначала проанализируем ситуацию с налогом p^* на одну единицу вредных выбросов, который должен быть установлен для всех фирм, ибо контролировать каждую фирму государство не имеет возможности.

Рассмотрим две фирмы — фирму F_1 и фирму F_2, у которых предельные издержки от снижения объема вредных выбросов разные (на рис. 15.5 — MCA_1 и MCA_2), а предельные общественные издержки одинаковы (на рис. 15.5 они не показаны).

Если вводится стандарт y^* на объем вредных выбросов, единый для фирм F_1 и F_2, то каждая фирма снизит объем вредных выбросов на величину $\dot{y}-y^*$, а обе фирмы — на величину $2(\dot{y}-y^*)$. При этом издержки фирмы F_1 будут равны площади $\left|y^*E_1\dot{y}\right|_2$ криволинейного треугольника $y^*E_1\dot{y}$, а издержки фирмы F_2 будут равны площади $\left|y^*E_2\dot{y}\right|_2$ криволинейного треугольника $y^*E_2\dot{y}$.

Если вводится налог p^* на одну единицу вредных выбросов, то фирма F_1 снижает объем вредных выбросов на величину $\dot{y}-y_1$, а фирма F_2 — на величину $\dot{y}-y_2$, а обе фирмы снизят объем вредных выбросов на величину $2\dot{y}-y_1-y_2$. При этом издержки фирмы

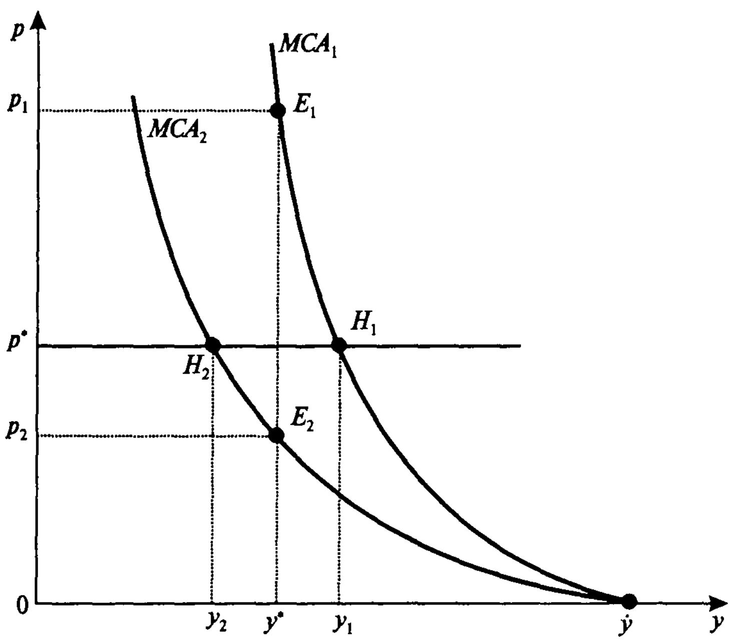


Рис. 15.5

F_1 будут равны площади $|y_1 H_1 \dot{y}|_2$ криволинейного треугольника $y_1 H_1 \dot{y}$, а издержки фирмы F_2 — площади $|y_2 H_2 \dot{y}|_2$ криволинейного треугольника $y_2 H_2 \dot{y}$.

Сопоставим издержки фирм F_1 и F_2 при введении стандарта y^* и налога p^*. В случае стандарта y^* издержки фирмы F_1 больше ее издержек в случае налога p^* на площадь $\left|y^* E_1 H_1 y_1\right|_2$ криволинейного четырехугольника $y^* E_1 H_1 y_1$ (см. рис. 15.5). В случае стандарта y^* издержки фирмы F_2 меньше ее издержек в случае налога p^* на площадь $y^* E_1 H_1 y_1$ криволинейного четырехугольника $y_2 E_2 H_2 y^*$ (см. рис. 15.5). Очевидно, площадь $\left|y^* E_1 H_1 y_1\right|_2$ больше площади $\left|y_2 H_2 E_2 y^*\right|_2$. Это означает, что в случае введения стандарта y^* суммарные издержки фирм F_1 и F_2 будут больше их суммарных издержек при введении налога p^*. Этот результат имеет место и в случае, когда $y_1 + y_2 = 2y^*$, т.е. когда в обоих случаях (в случае p^* и y^*) сокращение объема $2(\dot{y} - y^*) = 2\dot{y} - y_1 - y_2$ вредных выбросов будет одинаковым. Таким образом, в рассматриваемом примере налог p^* предпочтительнее стандарта y^*.

15.3.4. Проанализируем ситуацию влияния стандарта y^* на объем вредных выбросов. Рассмотрим случай, когда линия *MSC* фирмы F_1 идет достаточно круто вверх, а линия *MCA* фирмы F — достаточно пологая. Тогда точка $E^* = (y^*, p^*)$ пересечения этих линий геометрически показывает стандарт y^* и налог p^* (рис. 15.6).

Пусть из-за ограничений информации вместо стандарта y^* установлен стандарт y_1, такой, что $y_1 > y^*$ (см. рис. 15.6). Тогда общественные издержки фирмы F вырастут на площадь $\left|y^* E^* B_1 y_1\right|_2$ четырехугольника $y^* E^* B_1 y_1$, а издержки от снижения объема вредных выбросов уменьшатся на площадь $\left|y^* E^* H_1 y_1\right|_2$ четырехугольника $y^* E^* H_1 y_1$.

«Цена» погрешности в определении стандарта (в результате установления стандарта y_1 вместо стандарта y^*) равна площади $\left|E^* B_1 H_1\right|_2$ треугольника $E^* B_1 H_1$, которая равна разности $\left|E^* B_1 H_1\right|_2 = \left|y^* E^* B_1 y_1\right|_2 - \left|y^* E^* H_1 y_1\right|_2$.

Пусть теперь из-за ограниченной информации ошибочно установлен налог p_2, который меньше налога p^*, и пусть порядки ошибок в установлении налога p_2 и стандарта y_1 примерно одинаковы (см. рис. 15.6). Тогда цена погрешности в определении нало-

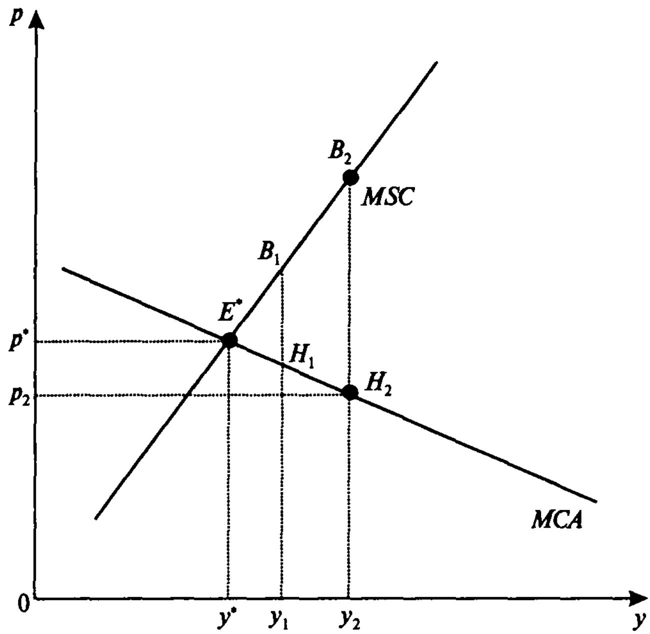


Рис. 15.6

га (в результате установления налога p_2 вместо налога p^*) равна площади $|E^* B_2 H_2|_2$ треугольника $E^* B_2 H_2$, которая равна разности $|E^* B_2 H_2|_2 = |y^* E^* B_2 y_2|_2 - |y^* E^* H_2 y_2|_2$. Рисунок 15.6 показывает, что в рассматриваемом случае чистый рост общественных издержек значительно больше в случае погрешности с налогом, чем в случае погрешности со стандартом.

Приведенные выше случаи показывают, что нет основания считать, что предпочтительнее: налог p^* или стандарт y^*. В одних ситуациях целесообразно ориентироваться на установление стандарта, в других — на установление налога.

В заключение отметим, что в разных странах «золотого миллиарда» исторические традиции являются разными. Например, в США органы государственного управления больше ориентируются на стандарты при решении задач контроля за загрязнением окружающей среды (заметим, что, вообще говоря, исторически сложилось так, что в США помешаны на стандартах, и не только в области контроля за загрязнением окружающей среды). Во многих европейских странах (в частности, в ФРГ) успешно используют практику налогов при решении задач контроля над загрязнением окружающей среды.

15.3.5. Рассмотрим и проанализируем модель переработки отходов (например, стеклотары). Составными элементами модели являются линии частных предельных издержек *MC* владельцев отходов, предельных общественных издержек *MSC*, предельных издержек переработки отходов *MCR* (отходы перерабатываются местными властями или специальными фирмами). Символом y обозначается объем отходов. Все элементы модели представлены на рис. 15.7. С ростом объемов отходов частные предельные издержки *MC* и общественные предельные издержки *MSC* растут. Предельные частные издержки *MC*, например, в связи с тем, что отходы, если их не трогать, растут в объеме и здорово мешают сбыту. Если заниматься их утилизацией, то эта процедура требует, по крайней мере, какого-то времени, которое уже невозможно потратить на что-то иное. С пониманием ситуации интенсивного роста общественных предельных издержек *MSC* в связи с ростом объема отходов дело обстоит достаточно просто, ибо растут горы мусора, растет число порезанных осколками стекла ног, загрязняется окружающая среда. Линии *MC* и *MSC* имеют тот же смысл, что и на рис. 15.1. Символ $\dot{y}$ означает максимальное число отходов (стеклотары) в течение некоторого фиксированного периода, например одного месяца. С увеличением объема перерабатываемых отходов (при движении по рис. 15.7 справа налево) предельные издержки *MCR* переработки отходов растут. Если в результате переработки объем отходов сократится с $\dot{y}$ до, например, $\widehat{y}$, то издержки такой переработки представляют собой интеграл

$$\int_{\widehat{y}}^{\dot{y}} MCR(y)dy = \left|\widehat{y}\widehat{E}\dot{y}\right|_2,$$

где $\left|\widehat{y}\widehat{E}\dot{y}\right|_2$ — площадь треугольника (вообще говоря, криволинейного) $\widehat{y}\widehat{E}\dot{y}$.

Из рис. 15.7 следует, что фактически перерабатывается объем отходов, равный $\dot{y}-\widehat{y}$, т.е. после переработки остаются отходы в объеме $\widehat{y}$ единиц. В то же время должен быть переработан объем отходов, который является эффективным с общественной точки зрения, и этот объем равен $\dot{y}-\overline{y} > \dot{y}-\widehat{y}$, т.е. эффективный с обще-

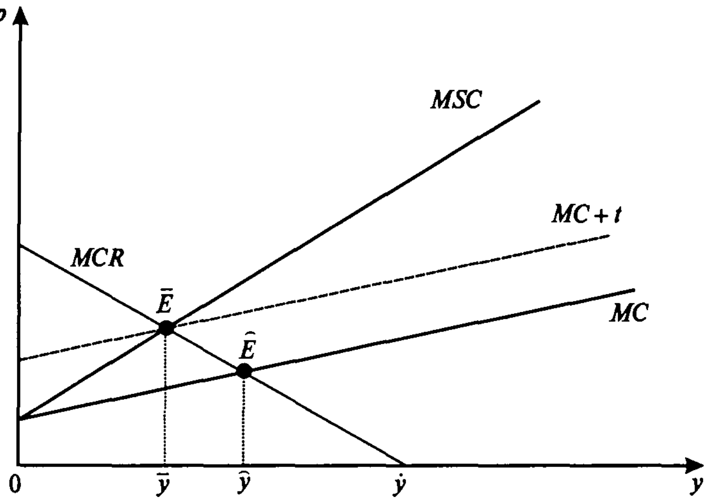


Рис. 15.7

ственной точки зрения объем отходов должен быть равен $\bar{y}$ (и $\bar{y} < \hat{y}$).

Реализовать объем $\bar{y}$ можно с помощью, например, введения залога t, который покупатель уплачивает за одну единицу стеклотары, приобретая в ней товар, и который (залог) покупатель получает обратно, когда он эту стеклотару возвращает по месту покупки. В этом случае линия частных предельных издержек переходит в линию $MC + t$, а объем $\hat{y}$ переходит в объем $\bar{y}$, который эффективен с общественной точки зрения.

Пример 15.3.1

Линии MSC и MCA имеют уравнение $MSC(y) = \alpha y + \beta$ $MCA =$ $= -ay + b$, где $a > 0$, $b > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\beta < b$.

Найдем:

1) стандарт y^* и налог p^*;

2) общественные издержки SC, если объем вредных выбросов увеличился с y' до y'';

3) издержки CA от снижения объема вредных выбросов с y' до y''.

- Имеем уравнение $MSC(y) = MCA(y)$,

$-ay + b = \alpha y + \beta$,

откуда вытекает, что

$$y^* = \frac{b-\beta}{a+\alpha}, \quad p^* = -ay^* + b = \frac{\alpha b - a\beta}{a+\alpha},$$

- $$SC(y';y'') = \int_{y'}^{y''} MSC(y)dy = \int_{y'}^{y''} (\alpha y + \beta)dy = \frac{\alpha}{2} y^2 \Big|_{y'}^{y''} + \beta y\Big|_{y'}^{y''} =$$
$$= (y''-y')\left(\frac{\alpha}{2}(y''+y')+\beta\right) = |y'B'B''y''|_2,$$

- $$CA(y';y'') = \int_{y'}^{y''} MCA(y)dy = \int_{y'}^{y''} (ay + b)dy = -\frac{a}{2} y^2 \Big|_{y'}^{y''} + by\Big|_{y'}^{y''} =$$
$$= (y''-y')\left(-\frac{a}{2}(y''+y')+b\right) = |y'H'H''y''|_2$$

(рис. 15.8).

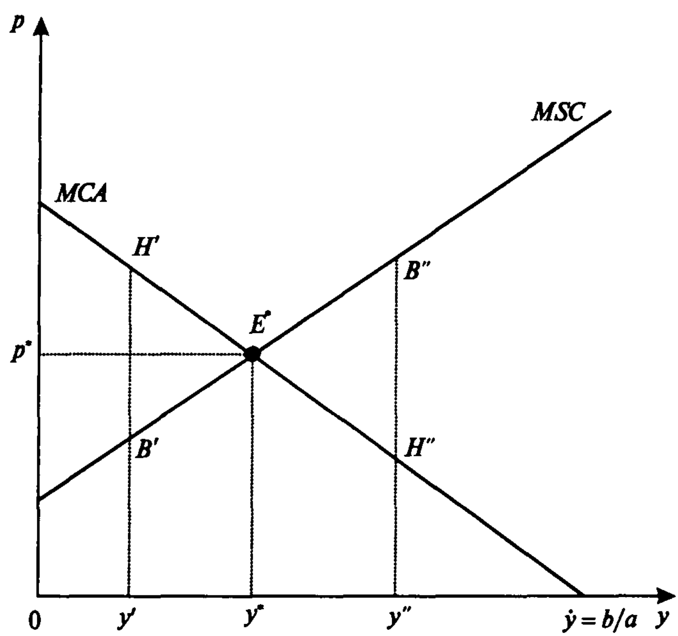


Рис. 15.8

15.4. Рынок прав на вредные выбросы

15.4.1. Предположим, что на региональном или национальном уровне удалось получить оценку предельного (сверху) общего объема вредных выбросов, который допустим в данном регионе или в стране в целом в течение некоторого периода времени, скажем в течение одного года. Пусть, однако, достоверная информация, достаточная для установления величины налога или стандарта, отсутствует. Тогда можно использовать метод лицензирования, суть которого заключается в следующем. Каждая фирма отрасли получает лицензию, в которой указывается разрешенный фирме предельный (сверху) объем (т.е. квота) вредных выбросов. Общая сумма этих квот должна, естественно, равняться предельному (сверху) объему вредных выбросов. Квоты (целиком или частично) могут продаваться и покупаться на рынке квот. Пусть, например, каждая из фирм F_1 и F_2 получила лицензию на одну и ту же (по объему) квоту, т.е. на одинаковый объем вредных выбросов в течение фиксированного периода времени. Пусть фирма F_1 имеет относительно высокие предельные издержки $MCA_1(y)$ от снижения объема вредных выбросов, а фирма F_2 — относительно низкие предельные издержки $MCA_2(y)$ от снижения объема вредных выбросов. Поэтому, естественно, фирма F_2 может продать часть своей квоты (или всю квоту) фирме F_1 по цене, меньшей (точнее, не большей) предельных издержек $MCA_1(y)$.

Если число фирм (и следовательно, лицензий) в отрасли достаточно велико, возникает конкурентный рынок лицензий (квот). В состоянии рыночного равновесия установится рыночная цена лицензии (точнее, цена равновесия одной единицы объема вредных выбросов). При этом фирмы с относительно низкими предельными издержками от снижения объема вредных выбросов будут сокращать вредные выбросы активнее других, а фирмы с относительно высокими предельными издержками от снижения объема вредных выбросов будут покупать больше лицензий (больше квот) и меньше сокращать вредные выбросы.

Описанный рыночный подход сочетает ряд преимуществ стандартов с преимуществами налогов.

Определение общего объема вредных выбросов и общего числа лицензий аналогично установлению стандартов. Возможность торговли лицензиями позволяет достичь общего объема вредных выбросов при минимальных издержках, что аналогично ситуации, когда вводятся налоги.

Вопросы для самоконтроля к главе 15

1. Что такое внешний эффект (экстерналия)?
2. Какой внешний эффект называется положительным? Приведите экономический пример.
3. Какой внешний эффект называется отрицательным? Приведите экономический пример.
4. Что такое частные предельные издержки фирмы?
5. Что такое объем выпуска фирмы, эффективной с точки зрения фирмы?
6. Что такое внешние предельные издержки фирмы?
7. Что такое предельные общественные издержки фирмы?
8. Что такое объем выпуска фирмы, эффективный с общественной точки зрения?
9. Что такое интернализация внешнего эффекта? Перечислите проблемы интернализации внешнего эффекта.
10. Что такое налог Пигу? Назовите проблемы, связанные с реальным установлением ставки налога Пигу.
11. Что такое права собственности?
12. В чем экономическая суть теоремы Коуза?
13. В чем суть проблем, связанных с реальным использованием теоремы Коуза?
14. Каков экономический смысл линии *MSC*? Как определить общественные издержки, если объем вредных выбросов растет?
15. Каков экономический смысл *MCA* — предельных издержек фирмы от снижения объема вредных выбросов? Как определить издержки фирмы от снижения объема вредных выбросов?
16. Что такое стандарт (норматив) на объем вредных выбросов для фирмы *F*? Как он определяется? Как формулируется основное свойство стандарта?
17. Что такое налог (плата) на одну единицу вредных выбросов? Как он определяется? Как формулируется основное свойство налога?
18. Чему равны полные издержки фирмы при ее переходе на стандарт на объем вредных выбросов?
19. Чему равны полные издержки фирмы при ее переходе на объем вредных выбросов, который не равен стандарту на объем вредных выбросов?
20. Как оцениваются суммарные издержки двух фирм в случае введения стандарта и налога?

21. Как оценивается погрешность в определении стандарта в случае крутой линии *MSC* и пологой линии *MCA*?
22. Как оценивается погрешность в определении налога в случае крутой линии *MSC* и пологой линии *MCA*?
23. Что представляет собой модель переработки отходов?
24. В чем суть метода лицензирования объемов вредных выбросов?
25. Как работает рынок прав на вредные выбросы?

Задачи и упражнения для самоконтроля к главе 15

1. Опишите подробно использование теоремы Коуза при анализе ситуации «металлургический завод» — «рыболовецкая артель» в случае, когда право собственности на чистую воду принадлежит рыболовецкой артели.
2. Пусть $MCA_1(y)=\frac{6-2y}{y+1}$, $MCA_2(y)=\frac{3-y}{y+1}$, $y^*=1$, $p^*=\frac{3}{2}$. Найдите:
   а) объем вредных выбросов $\dot{y}$, при котором фирмы F_1 и F_2 максимизируют свою прибыль;
   б) издержки CA_1 фирмы F_1, которая снизила объем вредных выбросов с $\dot{y}$ до y^*;
   в) издержки CA_2 фирмы F_2, которая снизила объем вредных выбросов с $\dot{y}$ до y^*;
   г) издержки CA_1 фирмы F_1, которая снизила объем вредных выбросов с $\dot{y}$ до y_1 (см. рис. 15.5);
   д) издержки CA_2 фирмы F_2, которая снизила объем вредных выбросов с $\dot{y}$ до y_2 (см. рис. 15.5).
   г) сопоставьте аналитически и графически совместные издержки CA_1 и CA_2 фирм F_1 и F_2 при введении стандарта y^* и налога p^*.
3. Пусть $MSC = y + 10$, $MCA = -3y + 110$, погрешность Δy^* в установлении стандарта равна $\Delta y^* = +1$, погрешность Δp^* в установлении налога равна $\Delta p^* = -1$. Найдите:
   а) стандарт y^* и налог p^*;
   б) «цену» погрешности в определении стандарта (когда вместо стандарта y^* устанавливается стандарт $y^* + 1$);
   в) «цену» погрешности в определении налога (когда вместо налога p^* устанавливается налог $p^* - 1$);
   г) сопоставьте аналитически и графически «цены» погрешности в определении стандарта y^* и налога p^*.
4. Фирмы расположены в северной части города, жилые кварталы — в южной. Фирмы выпускают один и тот же продукт и выбрасывают в атмосферу вредный для жителей дым:
   а) почему фирмы создают внешние эффекты?

б) могут ли в рассматриваемой ситуации переговоры решить проблему внешних эффектов?
в) как местные власти могли бы определить эффективный уровень качества воздуха?

Вопросы и тесты для контрольных работ к главе 15

1. Какое из следующих предложений описывает внешний эффект, а какое — нет? Ответ обоснуйте:
   а) политика ограничения экспорта кофе из Бразилии приведет к росту цены американского кофе, который вызовет рост цен на чай;
   б) реклама отвлекла водителя, и он попал в аварию.

2. Сопоставьте следуюшие три механизма борьбы с внешними эффектами загрязнения, когда издержки и выигрыши от уменьшения загрязнения неопределенны:
   а) налоги на выбросы;
   б) стандарты на выбросы;
   в) продаваемые лицензии на выбросы.

3. Когда внешние эффекты требуют государственного вмешательства, а когда не требуют?
4. Приведите конкретные экономические примеры, когда применение теоремы Коуза не является результативным.

Задачи для контрольных работ к главе 15

1. Пусть $MCA_1(y) = (y - 4)^2$, $MCA_2(y) = 0{,}75(y - 4)^2$, $y^* = 1$, $p^* = 8$. Найдите:
   а) объем вредных выбросов $\dot{y}$, при котором фирмы F_1 и F_2 максимизируют свою прибыль;
   б) издержки CA_1 фирмы F_1, которая снизила объем вредных выбросов с $\dot{y}$ до y^*;
   в) издержки CA_2 фирмы F_2, которая снизила объем вредных выбросов с $\dot{y}$ до y^*;
   г) издержки CA_1 фирмы F_1, которая снизила объем вредных выбросов с $\dot{y}$ до y_1 (см. рис. 15.5);
   д) издержки CA_2 фирмы F_2, которая снизила объем вредных выбросов с $\dot{y}$ до y_2 (см. рис. 15.5).

   Сопоставьте аналитически и графически совместные издержки CA_1 и CA_2 фирм F_1 и F_2 при введении стандарта y^* и налога p^*.

2. Пусть $MSC = y + 20$, $MCA = -2y + 80$, погрешность Δy^* в установлении стандарта равна $\Delta y^* = +2$, погрешность Δp^* в установлении налога равна $\Delta p^* = -4$.

Найдите:

а) стандарт y^* и налог p^*;

б) «цену» погрешности в определении стандарта, (когда вместо стандарта y^* устанавливается стандарт $y^* + 2$);

в) «цену» погрешности в определении налога, (когда вместо налога p^* устанавливается налог $p^* - 4$).

Сопоставьте аналитически и графически «цены» погрешностей в определении стандарта y^* и налога p^*.

Глава 16

ОБЩЕСТВЕННЫЕ БЛАГА

16.1. Характеристики общественных благ

16.1.1. Обычные продукты и услуги представляют собой частные блага. Они конкуренты и исключаемы, ибо приобретение частного блага индивидуумом означает, что другой индивидуум его приобрести уже не может.

Общественные блага — товары и услуги, потребление которых не изменяет их объем и доступно всем членам общества (услуги радиовещания, телевидения, национальной обороны, дороги, городские и национальные парки).

Общественные блага обладают двумя важными характеристиками: они *неконкурентны* и *неисключаемы*. *Неконкурентность* блага означает, что при любом заданном объеме его производства предельные издержки его предоставления дополнительному потребителю равны нулю, т.е. дополнительное потребление неконкурентного блага не увеличивает издержки. Если на шоссе нет «пробок», дополнительные издержки проезда по этому шоссе равны нулю. Дополнительное морское судно не увеличивает эксплуатационные издержки маяка. Частные блага конкурентны в потреблении. Если, например, индивидуум приобрел костюм, то это обстоятельство исключает возможность его приобретения другим индивидуумом.

Неисключаемость блага означает, что потребители не могут быть исключены из сферы его потребления. Примеры неисключаемого блага — национальная оборона, маяк, общественное радио и телевидение.

Некоторые блага исключаемы, но неконкурентны. Примером такого блага является телевизионный сигнал. Когда сигнал передан в эфир, появление дополнительного пользователя не требует дополнительных издержек. Это означает, что телевизионный сигнал — неконкурентное благо. Однако телевизионный сигнал может быть закодирован и поэтому недоступен тем потребителям, которые не знают его кода, т.е. телевизионный сигнал — исключаемое благо.

Примером конкурентного, но неисключаемого блага является обыкновенный воздух, неисключаемость которого очевидна. Однако дополнительные потребители чистого воздуха должны его дополнительно оплачивать, например в виде оплаты путевки в экологически чистый регион.

К общественным относятся следующие блага: информационные (непрерывные, например радио и телевидение), локальные (доступные представителям отдельного региона или социальной группы, например районные библиотеки и ведомственные поликлиники), ограниченного пользования (т.е. такие, которые доступны для одновременного использования ограниченному числу потребителей, например шоссе в часы «пик»), дискретные (картины в музеях), бесплатные (услуги травмпунктов), с положительной ценой (общественный транспорт), с отрицательной ценой (высшее образование).

Общественные блага требуют для своего производства частных благ и услуг, объем которых лимитируется суммарными доходами государства, которые, в частности, образуются от поступления различных налогов.

16.1.2. Проанализируем простую модель определения объема предоставления общественного блага с использованием функций спроса и предложения общественного блага.

Функция спроса индивидуума на общественное благо определяется как зависимость получаемой индивидуумом *предельной выгоды MB* от объема потребления общественного блага. Предельная выгода равна полезности индивидуума (выраженной в денежной единице) от потребления дополнительной единицы общественного блага. Предельная выгода показывает, сколько готов индивидуум заплатить за дополнительную единицу общественного блага. Предполагается, что индивидуум не ведет себя, как «заяц» (или «безбилетник»), т.е. как потребитель, который использует общественное благо за счет других потребителей.

Линия индивидуального спроса на общественное благо является нисходящей, ибо отражает убывающую предельную полезность от потребления дополнительной единицы общественного блага (рис. 16.1, на котором представлены линии D_1 и D_2 спроса первого (C_1) и второго (C_2) индивидуумов и линия D совокупного спроса на общественное благо G). Цены p^*_1 и p^*_2 показывают полезности (в денежной единице) индивидуумов первого (C_1) и второго (C_2) от потребления дополнительной (к y^*) единицы общественного блага.

Линия D совокупного спроса на общественное благо строится путем суммирования по вертикали линий D_1 и D_2 индивидуального спроса, ибо каждый индивидуум потребляет весь объем общественного блага (ибо оно неконкурентно). Отметим здесь принципиальное отличие построения линии совокупного спроса на общественное благо от построения линии совокупного спроса на частное благо путем горизонтального суммирования линий индивидуального спроса на это частное благо.

Частное равновесие на рынке общественного блага определяется в виде равенства суммарной предельной выгоды (величины суммарного спроса) потребителей потребительской цене p^* (предельным издержкам), по которой готов предложить производитель (продавец) данное количество y^* общественного блага. Равновесие называется частным потому, что речь идет лишь о рынке общественного блага (благ). Частные блага здесь не фигурируют. На рис. 16.1 частное равновесие на рынке общественного блага показано точкой E.

16.2. Частное и общее равновесие в модели экономики с общественными благами

16.2.1. Прежде чем рассматривать модель общего экономического равновесия, когда фигурирует два типа благ (частные и общественные), проанализируем графическое решение задачи оптимального распределения ресурсов при наличии частного блага и общественного блага.

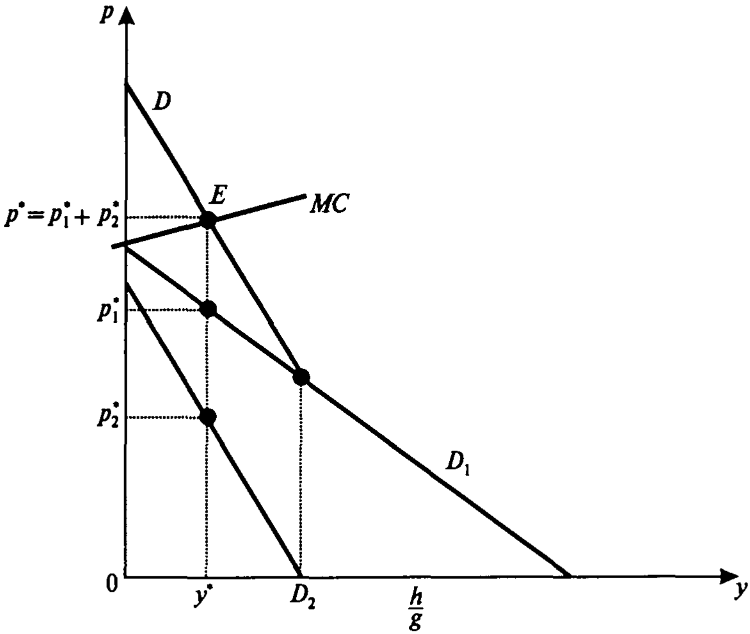


Рис. 16.1

Пусть в экономической системе только два потребительских блага — частное G_x и общественное G_y. Имеется два потребителя (индивидуума) (C_1 и C_2) со своими функциями полезности $u_1(x_1,y)$ и $u_2(x_2,y)$, где x_1 и x_2 — количества частного блага G_x, потребляемого соответственно индивидуумами C_1 и C_2 ($x = x_1 + x_2$), а y — количества общественного блага, потребляемого индивидуумами C_1 и C_2. Символами $l_{\tau_1}^{(1)}$ и $l_{\tau_2}^{(2)}$ обозначим линии безразличия первого и второго потребителей соответственно с уровнями полезности τ_1 и τ_2. Пусть граница P множества производственных возможностей задана и имеет уравнение $F(x,y) = 0$ (рис. 16.2).

Зафиксируем уровень τ_1 полезности первого индивидуума C_1, тогда получим конкретную линию безразличия $l_{\tau_1}^{(1)}$ (см. рис. 16.2). Уравнение $F(x,y) = 0$ определяет неявную функцию $x = f(y)$, графиком которой является линия P. Уравнения $u_1(x_1,y_1) = \tau_1$ и $u_2(x_2,y_2) = \tau_2$ определяют неявные функции $x_1 = h_1(y)$ и $x_2 = h_2(y)$, графиками которых являются линии безразличия $l_{\tau_1}^{(1)}$ и $l_{\tau_2}^{(2)}$ соответственно.

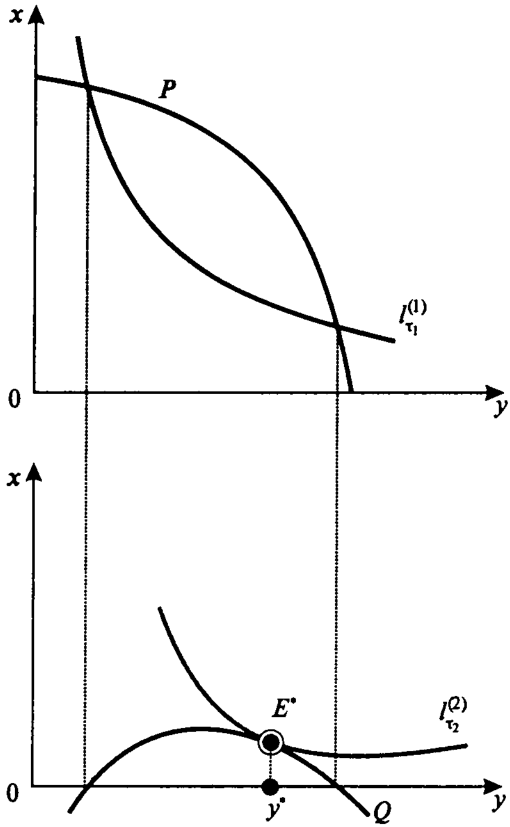


Рис. 16.2

Разность $f(y)-h_1(y) = q(y)$ функций $x = f(y)$ и $x_1 = h_1(y)$ имеет в качестве графика линию Q (см. рис. 16.2). Экономический смысл линии Q: она показывает для каждого объема y общественного блага объем частного блага x, которое доступно потребителю C_2, ибо $x = f(y)$ — общее количество частного блага, частное благо в объеме $x_1 = h_1(y)$ получил потребитель C_1.

При фиксированном уровне полезности τ_1 первого потребителя C_1 второй потребитель C_2 максимизирует свою функцию полезности $u_2(x,y)$ при наличии ограничения в виде линии Q:

$$u_2(x, y)\ (\max) \tag{16.2.1}$$

при условии, что

$$(x, y) \in Q. \tag{16.2.2}$$

Из простых наглядных соображений (см. рис. 16.2) решением этой задачи будет точка E^* касания линии Q и некоторой фиксированной линии $l^{(2)}_{\tau_2}$ безразличия второго потребителя.

Из того что точка E^* есть точка касания линий Q и $l^{(2)}_{\tau_2}$, следует, что при $y = y^*$ (y^* — абсцисса точки E^*) имеет место равенство производных:

$$\frac{dh_2(y^*)}{dy} = \frac{df(y^*)}{dy} - \frac{dh_1(y^*)}{dy}. \tag{16.2.3}$$

Производная $dh_1(y^*)/dy$ (dx^*_1/dy) представляет собой предельную норму замены при $y = y^*$ (одной единицы) общественного блага G_y частным благом G_x для первого индивидуума C_1, т.е.

$$\frac{dh_1(y^*)}{dy} = MRS^{(1)}_{yx_1}(y^*). \tag{16.2.4}$$

Аналогично

$$\frac{dh_2(y^*)}{dy} = MRS^{(2)}_{yx_2}(y^*). \tag{16.2.5}$$

Производная $df(y^*)/dy$ представляет собой предельную норму трансформации при $y = y^*$ частного блага G_x в (одну единицу) общественного блага G_y т.е.

$$\frac{df(y^*)}{dy} = -MRT_{yx}(y^*). \tag{16.2.6}$$

Подставив (16.2.4)—(16.2.6) в (16.2.3), получим

$$-MRS^{(2)}_{yx_2}(y^*) = -MRT_{yx}(y^*) - (-MRS^{(1)}_{yx_1}(y^*)),$$

откуда вытекает важное равенство

$$MRS^{(1)}_{yx_1}(y^*) + MRS^{(2)}_{yx_2}(y^*) = MRT_{yx}(y^*), \tag{16.2.7}$$

которое показывает оптимальное (Парето-эффективное) распределение ресурсов при наличии общественного блага в случае двух благ (одного частного G_x, одного общественного G_y и двух потребителей C_1 и C_2).

Содержательно формула (16.2.7) интерпретируется так. Предельная норма трансформации частного блага G_x в общественное благо G_y равна сумме предельных норм замены общественного блага G_y частным благом G_x для каждого индивидуума.

16.2.2. Формула (16.2.7) естественным образом обобщается в виде

$$MRS_{yx_1}^{(1)}(y^*)+\ldots+MRS_{yx_m}^{(m)}(y^*)=MRT_{yx}(y^*) \qquad (16.2.8)$$

на случай двух благ (одного частного G_x и одного общественного G_y) и m потребителей $C_1,\ldots,C_m$.

Частное благо G_x в количестве x единиц распределяется между потребителями следующим образом:

$$x=x_1+\ldots x_m,$$

где x_i — количество единиц частного блага G_x, которое доступно потребителю C_i, $i=1,\ldots,m$.

Общественное благо G_y в количестве y единиц доступно каждому потребителю в своем полном объеме y: $y_1=\ldots=y_m=y$.

Каждый потребитель C_i имеет свою функцию полезности

$$u^{(i)}(x_i,y),\ i=1,\ldots,m.$$

По аналогии с задачей (16.2.1), (16.2.2) оптимального (Парето-эффективного) распределения ресурсов при наличии общественного блага рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$u^{(1)}(x_1,y)\ (\max) \qquad (16.2.9)$$

при наличии ограничений

$$u^{(2)}(x_2,y)=\tau_2, \qquad (16.2.10.1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u^{(m)}(x_m,y)=\tau_m, \qquad (16.2.10.m)$$

$$F(x,y)=0, \qquad (16.2.11)$$

где уровни $\tau_2,\ldots,\tau_m$ полезностей потребителей $C_2,\ldots,C_m$ фиксированы.

Для решения задачи (16.2.9)–(16.2.11) составим функцию Лагранжа и приравняем все ее первые частные производны к нулю.

Имеем

$$\begin{aligned}L=u^{(1)}(x_1,y)+\lambda_2(u^{(2)}(x_2,y)-\tau_2)+\ldots+\\+\lambda_m(u^{(m)}(x_m,y)-\tau_m)+\xi F(x,y)\end{aligned} \qquad (16.2.12)$$

и

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{\partial u^{(1)}(x_1,y)}{\partial x_1}+\xi\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x_1}=0, \qquad (16.2.12.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \lambda_2 \frac{\partial u^{(2)}(x_2, y)}{\partial x_2} + \xi \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x_2} = 0, \qquad (16.2.12.2)$$

....

$$\frac{\partial L}{\partial x_m} = \lambda_m \frac{\partial u^{(m)}(x_m, y)}{\partial x_m} + \xi \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x_m} = 0, \qquad (16.2.12.m)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{\partial u^{(1)}(x_1, y)}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial u^{(2)}(x_2, y)}{\partial y} + \ldots \\ &\ldots + \lambda_m \frac{\partial u^{(m)}(x_m, y)}{\partial y} + \xi \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 0, \end{aligned} \qquad (16.2.13.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = u^{(2)}(x_2, y) - \tau_2 = 0, \qquad (16.2.13.2)$$

....

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = u^{(m)}(x_m, y) - \tau_m = 0, \qquad (16.2.13.m)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = F(x,y) = 0. \qquad (16.2.14)$$

Решением системы (16.2.12.1)—(16.2.14) является вектор $(x_1^*, \ldots, x_m^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_m^*, \xi^*)$. (16.2.15)

Далее все аналитические преобразования выполняются на векторе (16.2.15).

Из (16.2.12.1)—(16.2.12.m) вытекают равенства ($\partial x/\partial x_1 = \ldots = \partial x/\partial x_m = 1$)

$$\begin{gathered} \xi = -\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_1} \bigg/ \frac{\partial F}{\partial x}, \\ \lambda_2 = -\xi \frac{\partial F}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_2}, \ldots, \lambda_m = -\xi \frac{\partial F}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial u^{(m)}}{\partial x_m}. \end{gathered} \qquad (16.2.16)$$

Подставив выражения (16.2.16) в (16.2.13.1), получим

$$0=\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y}-\xi\frac{\partial u^{(2)}}{\partial y}\cdot\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial u^{(2)}}{\partial x_2}}-\ldots-\xi\frac{\partial u^{(m)}}{\partial y}\cdot\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial u^{(m)}}{\partial x_m}}+\xi\frac{\partial F}{\partial y}=$$

$$=\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y}-\xi\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial u^{(2)}/\partial y}{\partial u^{(2)}/\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial u^{(m)}/\partial y}{\partial u^{(m)}/\partial x_m}-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial x}\right)=$$

$$=\frac{\partial u^{(1)}}{\partial y}+\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u^{(2)}/\partial y}{\partial u^{(2)}/\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial u^{(m)}/\partial y}{\partial u^{(m)}/\partial x_m}-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial x}\right),$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial u^{(1)}/\partial y}{\partial u^{(1)}/\partial x_1}+\frac{\partial u^{(2)}/\partial y}{\partial u^{(2)}/\partial x_2}+\ldots+\frac{\partial u^{(m)}/\partial y}{\partial u^{(m)}/\partial x_m}=\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial x}. \quad (16.2.17)$$

На основании теоремы о неявной функции и равенств

$$-dx_1/dy=MRS_{yx_1}^{(1)},\ldots,-dx_m/dy=MRS_{yx_m}^{(m)},\ -dx/dy=MRT_{yx}$$

имеем

$$\frac{\partial u^{(1)}/\partial y}{\partial u^{(1)}/\partial x_1}=-\frac{dx_1}{dy}=MRS_{yx_1}^{(1)},$$

$$\frac{\partial u^{(2)}/\partial y}{\partial u^{(2)}/\partial x_2}=-\frac{dx_2}{dy}=MRS_{yx_1}^{(2)},\ldots,\frac{\partial u^{(m)}/\partial y}{\partial u^{(m)}/\partial x_m}=-\frac{dx_m}{dy}=MRS_{yx_m}^{(m)}, \quad (16.2.18)$$

$$\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial x}=-\frac{dx}{dy}=MRT_{yx}.$$

Подставив (16.2.18) в (16.2.17), получим важную формулу (16.2.8)

$$MRS_{yx_1}^{(1)}+\ldots+MRS_{yx_m}^{(m)}=MRT_{yx},$$

утверждающую, что предельная норма трансформации частного блага в общественное равна сумме предельных норм замены общественного блага частным благом у каждого индивидуума.

Строго говоря, система уравнений (16.2.12.1)–(16.2.14) представляет собой условия первого порядка. Решение системы есть критическая точка (16.2.15) функции Лагранжа, которая после элиминирования множителей Лагранжа λ_2^*, ..., λ_m^*, ξ^* не обязана быть точкой условного максимума функции (16.2.9) при наличии ограничений (16.2.10.1)–(16.2.11).

Для того чтобы узнать, является ли точка (x_1^*, ..., x_m^*, y^*) при наличии ограничений (16.2.10.1)–(16.2.11) точкой условного максимума функции (16.2.9), следует использовать условия второго порядка.

Если функции полезности $u^{(1)}(x_1,y)$,..., $u^{(m)}(x_m,y)$ строго вогнуты (выпуклы вверх) при $x_i \geq 0$, $y \geq 0$, $i = 1,..., m$, множество производственных возможностей строго выпукло, то (x_1^*,..., x_m^*, y^*) — единственная точка (глобального) максимума функции (16.2.9) при наличии ограничений (16.2.10.1)–(16.2.11).

Существование общего равновесия при разных предпосылках было доказано многими авторами (см. статью «Общественные блага» в «Экономико-математическом энциклопедическом словаре» (2003)).

16.2.3. Общественное благо обладает свойством неисключаемости, ибо нельзя его предоставлять одним индивидуумам и не предоставлять другим. Отсюда вытекает, что у потребителей (которых может быть довольно много) нет стимула участвовать в финансировании производства общественного блага в объеме, который соответствовал бы их оценкам общественного блага. Таким образом, эти индивидуумы ведут себя, как «зайцы» (пассажиры-безбилетники в общественном транспорте), ибо они потребляют общественное благо и не собираются за него платить.

Если потребителей конкретного общественного блага относительно немного, появление среди них «зайцев» маловероятно в связи с достаточной простотой их выявления. Однако с ростом числа потребителей общественного блага «поголовье зайцев» будет расти в связи с возрастающими трудностями их выявления и в связи с естественным соображением о том, что если число потребителей общественного блага велико, то его можно потреблять бесплатно.

Таким образом, рынок не может обеспечить эффективный уровень наличия общественного блага из-за существования среди его потребителей «зайцев». Поэтому, если общественное благо социально значимо, эффективный уровень производства общественного блага должен субсидироваться или обеспечиваться государством.

42 – 7620

В экономической теории предложен ряд моделей в целях решения проблемы элиминирования «зайцев» среди потребителей общественного блага. Эти модели следует оценивать с позиции трех критериев: общественные блага должны быть предоставлены в Парето-эффективном объеме; выявление истинных потребителей должно быть в их интересах и издержки, связанные с производством общественных благ, должны покрываться (должны быть равными) совокупными выплатами всех потребителей.

Ниже приводятся модель равновесия Линдаля и механизм действия закона Кларка.

16.3. Равновесие Линдаля

16.3.1. Рассмотрим модель экономики с частными и общественными благами. Экономическое равновесие Линдаля — это такое состояние экономики, в котором равенство спроса и предложения частных и общественных благ реализуется с помощью единых (для всех потребителей) цен на частные блага и с помощью персональных цен (для каждого потребителя) на общественные блага. Экономическое равновесие по Линдалю анализировалось многими авторами.

В модели экономики существует r частных благ $Q_1,...,Q_r$ и k общественных благ $G_1,...,G_k$. Вектор частных и общественных благ имеет вид $(x,y) = (x_1, ..., x_r, y_1, ..., y_k)$, где $0 \le x_i$ — количество частного блага Q_i, $i = 1,..., r$, и $0 \le y_j$ — количество общественного блага G_j, $j = 1,...,k$.

В модели экономики функционирует m потребителей $C_1,...,C_m$. Каждый потребитель C_i имеет вектор $w^{(i)} = (w_1^{(i)},..., w_r^{(i)})$ начальных запасов частных благ и функцию полезности $u_i(x, y)$, определенную на всех неотрицательных векторах x и y соответственно частных и общественных благ. Символом X обозначим производственное множество, элементами которого являются векторы предложения (z, y). Вектор предложения (z, y) представляет собой пару из вектора z частных благ (без запасов) для производства вектора y общественных благ. Допустимым распределением в экономике называется такой набор $(x^{(1)},..., x^{(m)}, y)$, состоящий из векторов $(x^{(1)},..., x^{(m)}$ частных благ и вектора y общественных благ $(x^{(i)} = x_1^{(i)}, ..., x_r^{(i)}, i = 1, ..., m; y = y(y_1, ..., y_k))$, что

$$\left(\sum_{i=1}^{m}(x^{(i)}-w^{(i)});\, y\right)\in X.$$

Вектор цен $(p^{(x)}, p^{(y^{(1)})}, \ldots, p^{(y^{(k)})})$ состоит из вектора общих для всех потребителей $C_1,\ldots,C_m$ цен $p^{(x)} = (p_1^{(x)}, \ldots, p_r^{(x)})$ на частные блага и персональных (для каждого потребителя C_i) цен $p^{(y(i))}$, $i = 1, \ldots, m$, на общественные блага.

Экономическим равновесием по Линдалю называется вектор цен $(p^{*(x)}, p^{*(y^{(1)})}, \ldots, p^{*(y^{(k)})})$ и допустимое распределение $(x^{*(1)},\ldots, x^{*(m)}, y^*)$, такие, что для любого вектора предложения $(z, y) \in X$ справедливо неравенство

$$\left(p^{*(x)}, \sum_{i=1}^{m} p^{*(y(i))}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}(x^{*(i)}-w^{(i)}), y^*\right)\ge\left(p^{*x}, \sum_{i=1}^{m} p^{*(y(i))}\right)(z, y);$$

если

$$u^{(i)}(x^{(i)},y^{(i)})> u^{(i)}(x^{*(i)},y^{*(i)}),$$

то

$$p^{*(x)}x^{(i)} + p^{*(y^{(i)})}y^{(i)} > p^{*(x)}x^{*(i)} + p^{*(y^{(i)})}y^{*(i)} = p^{*(x)}w^{(i)}.$$

Неравенство

$$\left(p^{*(x)}, \sum_{i=1}^{m} p^{*(y(i))}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}(x^{*(i)}-w^{(i)}), y^*\right)\ge\left(p^{*x}, \sum_{i=1}^{m} p^{*(y(i))}\right)(z, y)$$

означает, что в целях равновесия $\left(p^{*(x)}, p^{*(y^{(1)})}, \ldots, p^{*(y^{(m)})}\right)$ допустимое распределение $(x^{*(1)},\ldots, x^{*(m)}, y^*)$ является самым выгодным для предложения (т.е. для производства).

Импликация в определении экономического равновесия означает, что индивидуальный спрос $(x^{*(i)}, y^*)$ является наилучшим в бюджетном множестве потребителя C_i, $i = 1, \ldots, m$.

Величина $p^{(y^{(i)})}y = t_i$ представляет собой налог, который потребитель C_i готов заплатить за потребление набора общественных благ y, тогда стоимостный баланс по общественным благам имеет вид $\sum_{i=1}^{m} t_i = p^{(y)}y$, где $p^{(y)} = \left(p^{(y^{(1)})}, \ldots, p^{(y^{(m)})}\right)$.

Доказательство теоремы о существовании экономического равновесия Линдаля приведено в работе *D. Foley* (1970).

В экономическом равновесии Линдаля бюджет сбалансирован, ибо издержки предоставления общественного блага равны налоговым сборам на эти цели. Однако потребители не имеют стимулов к выявлению своих истинных предпочтений, а сущность проблемы «зайцев» в том и состоит, что потребитель заинтересован дезинформировать общество о своих истинных предпочтениях.

16.4. О налоге Кларка

16.4.1. Суть налога Кларка и его действие здесь иллюстрируются в случае трех индивидуумов.

Пусть три индивидуума решают вопрос о строительстве кафе или тренажерного зала (предполагается, что затраты на их строительство одинаковы).

Для решения вопроса каждый индивидуум определяет, сколько он готов заплатить за сооружение того и другого объекта. На основе информации о «готовности платить» осуществляется выбор между кафе и тренажерным залом и определяется величина налога Кларка.

Налог Кларка для конкретного индивидуума равен изменению благосостояния остальных индивидуумов, которое произошло бы, если бы этот конкретный индивидуум не принимал участия в голосовании. Помимо налога Кларка индивидуум платит налог, равный стоимости общественного блага, поделенной на число индивидуумов.

Пусть индивидуумы 1 и 2 предпочли бы кафе, а свою выгоду (полезность) от его строительства они оценивают соответственно в 10 и 15 д.е. Полезность от строительства зала тренажеров для индивидуумов 1 и 2 равна нулю, ибо тренажерный зал они не посещают. Индивидуум 3 предпочел бы тренажерный зал, свою выгоду от строительства которого он оценивает в 20 д.е., а полезность кафе для него нулевая, ибо он кафе не посещает. Приведенные данные сведем в табл. 16.1.

На основании информации о готовности платить будет принято решение о строительстве кафе, ибо $10 + 15 = 25 > 20$. Налог Кларка для индивидуума 1 равен 5 д.е., ибо на эту сумму изменит-

Таблица 16.1

Индивидуум	Кафе	Тренажерный зал	Налог Кларка
1	10	0	5
2	15	0	10
3	0	20	0
Итого	25	20	

ся состояние всех индивидуумов в результате неучастия индивидуума 1 в голосовании. Действительно, если индивидуум 1 не голосует, вопрос будет решен в пользу тренажерного зала, ибо 15 < 20. Выгода индивидуума 3 при этом увеличивается на 20 д.е., что дает в итоге + 20 – 15 = 5. Налог Кларка для индивидуума 2 равен 10 д.е., ибо на эту сумму изменится благосостояние всех индивидуумов в результате неучастия индивидуума 2 в голосовании. Действительно, если индивидуум 2 не голосует, вопрос решается в пользу тренажерного зала, ибо 10 < 20. Выгода индивидуума 3 при этом увеличится на 20 д.е. (с 0 до 20), а выгода индивидуума 1 снизится на 10 д.е., что дает в итоге + 20 – 10 = 10. Налог Кларка для индивидуума 3 равен нулю, ибо его участие в голосовании, как и его неучастие, ни на что не влияет.

Налог Кларка стимулирует честное поведение индивидуумов. Чтобы в этом убедиться на примере, предположим, что индивидуум 1 завысил оценку своей полезности от строительства кафе, тогда налог Кларка для него не изменится. Если индивидуум 1 будет вести себя, как «заяц», и вместо кафе отдаст свою оценку тренажерному залу, вопрос решается в пользу тренажерного зала. «Заяц» будет наказан, ибо не получит никакой выгоды и упустит свой шанс увеличить свою выгоду на 10 д.е. (см. табл. 16.1).

Если индивидуум 3 завысит оценку своей полезности до 30 д.е., то вопрос решится в пользу строительства тренажерного зала. В этом случае индивидуумы 1 и 2 потеряют свою выгоду в размере 25 д.е. и, следовательно, налог Кларка для индивидуума 3 составит 25 д.е., что больше его истинной оценки тренажерного зала, равной 20 д.е. (см. табл. 16.1).

Из приведенных рассуждений следует, что искажение своей оценки индивидуумом либо не влияет на результат голосования и величину налога Кларка, либо снижает выгоду обманщика.

16.4.2. К сожалению, введение налога Кларка не решает проблему «зайцев» по следующим причинам.

1. Индивидуумы в ходе голосования могут создавать коалиции, что может препятствовать выявлению истинных предпочтений. В концепции налога Кларка существенно используется предпосылка о желании всех индивидуумов участвовать в голосовании. Однако в реальности часть индивидуумов может отказаться участвовать в голосовании, считая, что издержки участия в голосовании превосходят выгоды от участия в голосовании (например, получение информации о различных альтернативах может потребовать значительных средств).

2. На практике не соблюдается предположение о том, что решения о потреблении частных и общественных благ можно рассматривать как независимые.

3. Неясно, смогут ли индивидуумы платить налог Кларка, если в действительности он будет введен, ибо изменение благосостояния остальных индивидуумов может многократно перекрывать материальные возможности индивидуума, который не участвует в голосовании.

4. Схема действия налога Кларка соответствует первым двум критериям, которым должны удовлетворять механизмы решения проблемы «зайцев» (общественное благо должно предоставляться в Парето-эффективном объеме, выявление истинных предпочтений индивидуумов должно быть в интересах самих индивидуумов). Однако схема действия закона Кларка не согласуется с третьим критерием, которому должны удовлетворять механизмы решения проблемы «зайцев» (критерий сбалансированности расходов на общественное благо с уровнем налоговых изъятий). Сборы по налогу Кларка создают бюджетный профицит, который нельзя вернуть индивидуумам, ибо это может привести к изменению их поведения.

На основании вышеизложенного следует утверждать, что приведенные модели (экономическое равновесие и закон Кларка) не дают решения (хотя бы принципиального) проблемы «зайцев». Отсюда следует, что сегодня альтернативы необходимости вмешательства государства в предоставление и финансирование общественных благ не существует.

Вопросы для самоконтроля к главе 16

1. Какие блага называются неконкурентными? Приведите примеры.
2. Какие блага называются неисключаемыми? Приведите примеры.
3. Какие блага называются общественными? Приведите примеры.
4. Что такое выгода индивидуума?
5. Как связаны между собой понятия предельной выгоды индивидуума и функция спроса на общественное благо со стороны индивидуума?
6. Как объяснить процедуру вертикального суммирования линий спроса на общественное благо?
7. В чем отличие частного и общего равновесия в экономической системе с общественными благами?
8. В чем экономический смысл равенства предельной нормы трансформации сумме предельных норм замены между частным и общественным благами в случае двух и более потребителей?
9. Что представляет собой проблема «зайцев»?
10. В чем проявляется неэффективность рыночных механизмов при обеспечении потребления общественного блага?
11. Как формулируются критерии, которым должны удовлетворять механизмы решения проблемы «зайцев»?
12. Как определяется экономическое равновесие Линдаля?
13. В чем сходство экономического равновесия Линдаля с общим экономическим равновесием?
14. В чем различие экономического равновесия Линдаля и общего экономического равновесия?
15. Почему с помощью модели экономического равновесия Линдаля нельзя решить проблему «зайцев»?
16. В чем суть налога Кларка?
17. В чем конкретно проявляется функция налога Кларка, стимулирующая честное поведение индивидуумов?
18. Каковы причины того, что введение налога Кларка не решает проблему «зайцев»?
19. Каким образом критериям (которым должны удовлетворять механизмы решения проблемы «зайцев») соответствует схема действия налога Кларка?

Задачи и упражнения для самоконтроля к главе 16

1. Общественные блага являются неконкурентными и неисключаемыми. Дайте толкование каждого термина и сформулируйте явные различия между ними. Приведите примеры благ неконкурентных и неисключаемых, конкурентных и неисключаемых, конкурентных и исключаемых и общественных благ.

2. В населенном пункте проживают 2000 граждан. Их интересует только футбол и пиво. Футбольный матч устраивают один раз в неделю. Ради посещения одного футбольного матча следует пожертвовать 10 бутылками пива. Функция полезности каждого жителя имеет вид

$$U(x_i,G) = x_i + G^{1/2}/40,$$

где x_i — количество бутылок пива, потребляемое в неделю одним жителем; G — число посетителей футбольного матча.

Чему равно Парето-эффективное число посетителей футбольного матча?

3. В комнате общежития проживают два студента. Функция полезности одного студента аддитивная $U_1(x_1,G) = 3x_1 + 2G$, функция полезности другого студента мультипликативная $U_2(x_2,G) = (x_2G)^{1/2}$. Здесь x_1 и x_2 — суммы, которые расходуют студенты (соответственно первый и второй) на частные блага (еда, одежда); G — сумма, которую они оба расходуют на общественные блага (холодильник, телевизор). Месячный доход студентов 6000 д.е., расходуемых на частные и общественные блага. Найти Парето-эффективное распределение этой суммы на частные и общественные блага.

4. В условиях чистой конкуренции предельные издержки фирмы равны $MC = 6$. Фирма готова предоставить любой объем услуги:

а) найдите оптимальный объем услуги, если она является частным благом и если спрос на нее со стороны двух потребителей имеет следующее представление:

$$y_1 = 60 - 20p, y_2 = 30 - p.$$

Дайте геометрическую интерпретацию;

б) найдите оптимальный объем предоставляемой услуги, если она представляет общественное благо при тех же функциях спроса на него. Дайте геометрическую интерпретацию.

5. В экономике имеется два блага: частное (Q) и общественное (G), два потребителя с функциями полезности $U_1(x_1,y) = x_1^{1/4}y^{1/4}$, $U_2(x_1,y) = x_2^{1/4}y^{1/4}$. Линия производственных возможностей имеет вид $x + 2y = 8$.

Определите оптимальный объем потребления общественного блага при условии, что первый потребитель имеет фиксированный уровень полезности, равный $U_1 = \tau_1$.

6. В населенном пункте проживают три группы граждан. Их линии спроса на телевидение в часах t имеют вид

$$U_1 = a_1 - t, U_2 = a_2 - 2t, U_3 = a_3 - t.$$

Пусть общественное телевидение — чисто общественное благо, для производства которого требуются постоянные предельные издержки MC:

а) чему равно оптимальное число часов общественного вещания?

б) сколько часов вещания может обеспечить конкурентный рынок?

Рассмотрите конкретный пример: $a_1 = 200$, $a_2 = 300$, $a_3 = 400$, $MC = 300$.

Дайте геометрическую интерпретацию.

Вопросы и тесты для контрольных работ к главе 16

1. Экономическое равновесие Линдаля отличается от общего экономического равновесия:
   а) наличием сферы производства;
   б) наличием сферы потребления;
   в) наличием общественных благ;
   г) все пункты верны.
2. С ростом числа потребителей общественного блага число «зайцев»:
   а) скорее убывает;
   б) скорее растет;
   в) нет однозначного ответа;
   г) ответы а)—в) не верны;
   д) ответы а)—в) верны.
3. Модель экономического равновесия Линдаля не элиминирует проблемы «зайцев» потому, что:
   а) издержки предоставления общественного блага равны налоговым сборам на эти цели;
   б) потребители не имеют стимулов к выявлению своих истинных предпочтений;
   в) общественные блага должны быть предоставлены в Парето-эффективном объеме;
   г) ответы а)—в) не верны;
   д) ответы а)—в) верны.
4. Налог Кларка элиминирует проблему «зайцев» потому, что:
   а) индивидуумы в ходе голосования могут создавать коалиции, что может препятствовать выявлению истинных предпочтений потребителей;
   б) неясно, смогут ли индивидуумы, не участвующие в голосовании, платить налог Кларка, в связи с тем что его размер может быть большим;
   в) на практике не соблюдается предположение о том, что решения о потреблении частных и общественных благ можно рассматривать как независимые;
   г) схема действия закона Кларка не согласуется с критерием сбалансированности расходов и на общественные блага с уровнем налоговых изъятий;
   д) ответы а)—г) не верны.

Задачи для контрольных работ к главе 16

1. Два потребителя имеют следующие функции полезности $U_1(x_1,y) = 4x_1 + 3y$, $U_2(x_1,y) = x_2^{1/4}y^{1/4}$. Здесь x_1 и x_2 — суммы, которые расходуют потребители (соответственно первый и второй) на частные блага, y — сумма, которую они оба расходуют на общественные блага. Месячный доход потребителей — 10 000 д.е., расходуемых на частные и общественные блага. Найдите Парето-эффективное распределение этой суммы на частные и общественные блага.
2. В экономической системе два блага: частное (Q) и (G), два потребителя с функциями полезности $U_1(x_1,y) = x_1^{1/4}y^{1/4}$, $U_2(x_1,y) = x_2^{1/2}y^{1/2}$. Линия производственных возможностей имеет вид $x + 4y = 16$. Определите оптимальный объем потребления общественного блага при условии, что второй потребитель имеет фиксированный уровень полезности, равный $U_2 = \tau_2$.
3. В условиях чистой конкуренции предельные издержки фирмы равны $MC = 8$. Фирма предоставляет любой объем услуг:
   а) найдите оптимальный объем услуги, если она является частным благом и если спрос на нее со стороны двух потребителей имеет следующие представления:
   $$y_1 = 80-4p, y_2 = 40-2p.$$
   Дайте геометрическую интерпретацию;
   б) найдите оптимальный объем предоставляемой услуги, если она представляет собой общественное благо при тех же функциях спроса на него.
   Дайте геометрическую интерпретацию.

Глава 17

АСИММЕТРИЧНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

17.1. Неблагоприятный отбор на рынке товаров и услуг

17.1.1. Если участники сделки (например, продавцы и покупатели) на рынке имеют полную информацию о предмете сделки (что имеет место, как правило, в экономической реальности достаточно редко, если имеет место вообще), то говорят, что участники сделки вступают в отношения в условиях симметричной информации (СИ).

В этом и остальных параграфах главы 17 предполагается, что участники экономической сделки (контракта) имеют разную информацию о предмете сделки, т.е. предполагается, что экономические (в том числе рыночные) отношения имеют место в условиях *асимметричной информации* (АСИ). Информированного в относительно большей степени участника сделки принято называть *агентом*, информированного в относительно меньшей степени участника (сделки) — принципалом. (Вместо пары терминов принципал — агент используется пара терминов заказчик — исполнитель.) Говоря точнее, перед заключением сделки (контракта) агент обладает большей информацией о предмете сделки (о предмете контракта), чем принципал.

Если в условиях АСИ более информированный агент, стремясь максимизировать свою полезность, совершает действия, которые негативно влияют на полезность принципала, то говорят, что имеет место *неблагоприятный отбор* (возможно, по контрасту с биологическим естественным отбором — отбором благоприятных свойств). Неблагоприятный отбор базируется на *ненаблюдаемых* (для принципала) *характеристиках* предмета сделки.

Если в условиях АСИ наличие издержек контроля со стороны принципала за поведением агента после заключения сделки создает у агента стимулы к максимизации собственной полезности в ущерб интересам принципала, то говорят, что возникает *моральный риск*, ибо после заключения сделки агент не чувствует необходимости находиться в каких-либо моральных рамках (отсюда термин «моральный риск» (для принципала)). Более точным является термин «риск недобросовестных действий». Здесь слово «риск» относится к принципалу, а слова «недобросовестные действия» — к агенту. Недобросовестные действия (агента) являются ненаблюдаемыми *действиями* для принципала. Вместо термина «неблагоприятный отбор» используют термин *предконтрактный оппортунизм*, а вместо термина «моральный риск» используют термин *постконтрактный оппортунизм*.

АСИ приводит к несовершенному функционированию рынков и порождает целый спектр теоретических и прикладных проблем.

Если сделка (контракт) заключена, то участники сделки находятся в (рыночном) равновесии, которое, скорее всего, будет локальным. Если участники сделки заключили ее в условиях СИ, то это равновесие оказывается Паретто-эффективным (на основании теоремы экономической теории благосостояния о том, что при естественных предположениях равновесие Паретто-эффективно). Если же участники сделки заключили ее в условиях АСИ, то равновесие уже не будет (скорее всего) Парето-эффективным. Таким образом, имеет место потеря Парето-эффективности в условиях АСИ. Из-за асимметрии одни участники могут получить дополнительный выигрыш, а другие участники могут оказаться в проигрыше. Равновесия, которые появляются в условиях АСИ, требуют специального анализа.

Для (рыночного) равновесия, которое Парето-эффективно, используют термин *первое лучшее*.

(Рыночное) равновесие называется условно Парето-эффективным, если не существует иного распределения ресурсов, которое будет Парето-доминировать данное равновесие при дополнительном условии, что для этого иного распределения ресурсов достаточно той информации, которая доступна участникам рынка.

Для (рыночного) равновесия, которое условно Парето-эффективно, используют термин *второе лучшее.*

17.1.2. Основы теории рынков, функционирующих в условиях АСИ, были предложены в статье Дж. Акерлофа (1994), который показал значение этой теории для анализа различных рынков (рынка страховых услуг, рынка банковских кредитов, рынка труда и т.д.). В качестве примера, на котором была продемонстрирована суть теории АСИ, был использован пример рынка подержанных автомобилей («лимонов»), который представляет собой ситуацию с ненаблюдаемыми характеристиками. Отметим, что термин «лимон» в Северной Америке используется для обозначения товаров со скрытыми дефектами.

На рынке предлагают два типа подержанных автомобилей — высокого и низкого качества. Пусть как продавцы, так и покупатели могут определить тип автомобиля, т.е. они находятся в условиях СИ. На рис. 17.1а S_H — линия предложения высококачественных автомобилей, а D_H — линия спроса на них. Аналогично S_L и D_L на рис. 17.1б — линии предложения и спроса для низкокачественных автомобилей. Заметим, что S_H расположена выше, чем S_L,

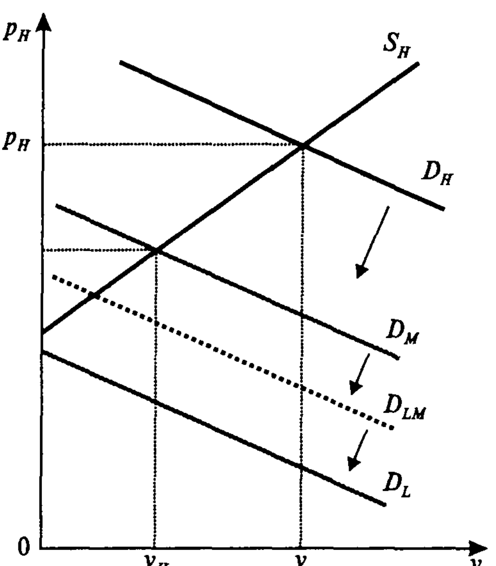


Рис. 17.1а

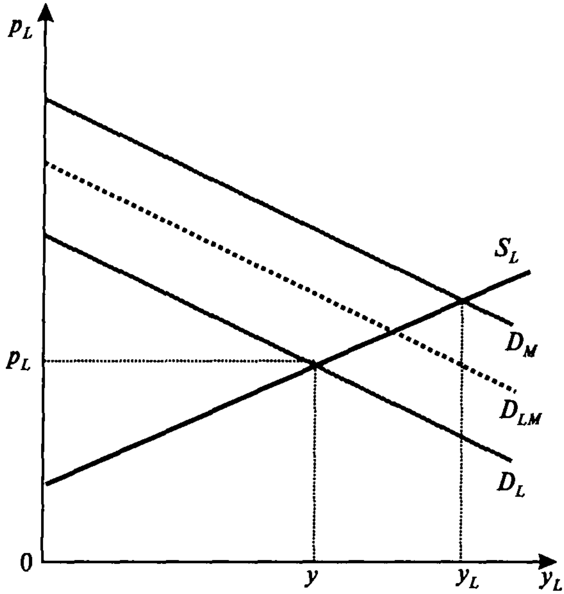


Рис. 17.1б

ибо продавцы высококачественных автомобилей должны получить за них более высокую плату. Аналогично D_H расположена выше D_L, так как покупатели готовы заплатить больше за хорошее качество. Как видно из рис. 17.1а и 17.1б, рыночная цена высококачественных машин — p_H д.е., низкокачественных — p_L д.е., и при этом продаются y экземпляров каждого типа. Таким образом, в условиях СИ, когда продавцы и покупатели одинаково информированы о выставленных на продажу автомобилях на каждом из двух сегментов рынка автомобилей, продавцы и покупатели могут заключать сделки. Итак, в условиях СИ (рыночное) равновесие есть пара наборов (p_H, y) и (p_L, y).

В действительности продавец подержанного автомобиля может знать больше о его качестве, чем покупатель. Пусть теперь продавцы хорошо осведомлены о качестве автомобилей, а покупатели вообще ничего не знают о нем (последние знакомятся с качеством автомобилей после их покупки и определенного пробега), т.е. теперь продавцы и покупатели находятся в условиях асимметричной информации. Вначале покупатели могли полагать, что шансы купить автомобиль хорошего качества равны 50%. Таким образом, совершая покупку, они считают все автомобили имеющими среднее качество. (Конечно, только купив машину, покупатель определит ее настоящее качество.) Линия спроса D_M на автомобили среднего качества (см. на рис. 17.1а и 17.1б) расположена ниже линии D_H, но выше линии D_L. Как видно из рис. 17.1а и 17.1б, теперь будет продано меньше (по сравнению с y) высококачественных автомобилей (y_H) и больше низкокачественных (y_L).

Как только потребители начинают понимать, что бо́льшая часть проданных автомобилей — низкого качества, их линия спроса сдвигается. Как показано на рис. 17.1а и 17.1б, новой линией спроса может быть линия D_{LM}, которая отражает снижение качества автомобилей ниже среднего уровня. Линия спроса передвигается влево, перемещая всю совокупность высококачественных и низкокачественных автомобилей в сторону низкого качества. Это перемещение продолжается до тех пор, пока на рынке не останутся только низкокачественные автомобили. При этом рыночная цена p_L окажется слишком низкой, чтобы осуществлялась продажа высококачественных автомобилей, так что потребители правильно полагают, что любой покупаемый ими автомобиль имеет низкое качество, и линия спроса совпадает с D_L. Итак, в условиях АСИ (рыночное) равновесие есть пара наборов $(\tilde{p}_H, 0)$, (p_L, y), $(\tilde{p}_H > p_L)$.

17.1.3. В условиях АСИ рынок может прийти к равновесию и при цене, обеспечивающей реализацию какой-то части высококачественных автомобилей. Но эта часть будет заведомо меньше, чем в том случае (СИ), когда потребителям известно качество автомобилей в момент покупки. Из-за асимметричности информации низкокачественные товары вытесняют с рынка высококачественные, происходит фактическая «дебилизация» рынка. Явление вытеснения с рынка высококачественных товаров товарами низкокачественными — это и есть, по существу, *неблагоприятный отбор*. Ущерб (потерю эффективности функционирования) от неблагоприятного отбора терпят и продавцы хороших товаров, и покупатели, и страховые фирмы, и страхователи — словом, участники всех рынков, на которых эффект неблагоприятного отбора оказывается значительным.

Следующий пример неблагоприятного отбора дает рынок страхования. Люди, покупающие страховку, знают намного лучше о своем общем состоянии здоровья, чем любая страховая компания, даже если последняя настаивает на медицинском освидетельствовании. В результате возникает неблагоприятный отбор, причем даже в большей мере, чем в случае с подержанными автомобилями. Поскольку вероятнее всего, что именно нездоровые люди желают быть страхователями и их доля в общем числе страхователей возрастает. Это повышает цену страховки, так что более здоровые люди, взвешивая риск, предпочитают уже не страховаться. Тем самым доля нездоровых еще больше увеличивается, что опять повышает цену, и т.д. до тех пор, пока на рынке не останется лишь эта категория лиц; таким образом, страховая деятельность становится невыгодной.

Неблагоприятный отбор может сделать проблематичным функционирование рынка страхования и по другим причинам. Допустим, например, что страховая компания собирается предложить полис для конкретного случая — такого, как автокатастрофа. Компания выбирает подходящую группу населения, скажем мужчин в возрасте до 25 лет, которой собирается продавать полисы, и оценивает частоту подобных несчастных случае по данной группе. Для некоторых ее представителей вероятность попасть в аварию низка, существенно ниже 0,01; для других — высока, существенно выше 0,01. Если страховая компания не может выделить группы людей с высокой и низкой степенями риска, она установит размер страховой премии для всех клиентов, исходя из вероятности происшествия 0,01. Располагая лучшей информацией, некоторые люди (с низкой вероятностью несчастного случая) предпочтут не страховаться, тогда как другие (с высокой вероятностью попасть в аварию) будут страховку покупать. Это, в свою очередь, повышает вероятность аварии в группе тех, кто застраховался до уровня выше 0,01, провоцируя страховую компанию повышать страховую премию. В конечном счете только наиболее вероятные жертвы захотят страховаться, что представит серьезную угрозу доходам страховой компании.

Рынки страхования социально значимы, и поэтому нельзя допустить их самоликвидации. В связи с этим необходим субъект, который своими действиями позволит сохранить рынок страхования в условиях неблагоприятного отбора. Таким субъектом в развитых странах является государство. Обеспечивая страхование всех пожилых людей (на Западе — старше 65 лет), государство устраняет проблему неблагоприятного отбора.

Следующим примером рынка, функционирующего в условиях неблагоприятного отбора, является *рынок кредита* на Западе. Используя кредитные карточки, граждане могут занимать деньги без какого-либо обеспечения. Большинство кредитных карточек позволяет их владельцам начислять на свой расчетный счет до нескольких тысяч долларов, и при этом многие люди имеют по несколько таких карточек. Компании, выпускающие эти карточки, получают доход, начисляя проценты на долг заемщика. Но как может такая компания или банк отличить «высококачественных» заемщиков (возвращающих долги) от «низкокачественных» (не возвращающих долги)? Очевидно, должник лучше, чем компания, знает, будет он возвращать долг или нет. Снова возникает проблема неблагоприятного отбора. Компании и банки должны назначать одинаковый процент для всех заемщиков, и это больше привлекает «низкокачественных» заемщиков. В свою очередь, это приводит к повышению ставки процента, что опять-таки увеличивает долю данной группы, снова повышается процент и т.д.

В действительности компании, выпускающие кредитные карточки, и банки могут в какой-то мере использовать хранящиеся в компьютере ретроспективные данные о кредитах, которыми они делятся друг с другом, чтобы научиться отличать «низкокачественных» заемщиков от «высококачественных». Многие люди считают, что компьютеризация кредитной информации является вторжением в частную жизнь. Это специальная юридическая проблема. С экономической точки зрения ретроспективная информация о кредитах выполняет важную функцию. Она снимает или, по крайней мере, существенно сглаживает проблемы неблагоприятного отбора, которые иначе могли бы препятствовать функционированию кредитных рынков.

17.1.4. В параграфе 8.4 главы 8 была рассмотрена и проанализирована модель идеальной (совершенной) ценовой дискриминации, в которой фирма-монополист выбирает для себя оптимальную схему ценообразования, т.е. такую схему, когда фирма-монополист может предложить каждому потребителю C_i, $i = 1, ..., k$, выпускаемый этой фирмой продукт в количестве y_i^* единиц с оплатой (со стороны потребителя C_i) в размере t_i^* д.е. При этом существенно, что фирма-монополист может индентифицировать каждого потребителя (т.е. определить его тип). Это означает, что фирма-монополист функционирует (проводит на рынке идеальную (совершенную) ценовую дискриминацию) в условиях СИ.

Оптимальные контракты (y_i^*, t_i^*), $i = 1, ..., k$, совокупность которых максимизирует прибыль фирмы при выполнении для каждого потребителя C_i, $i = 1, ..., k$, *условия участия*, являются контрактами *первого лучшего*. Эти контракты образуют рыночное равновесие в модели идеальной (совершенной) дискриминации (каждый потребитель C_i получил, что хотел, по оптимальной цене, а фирма-монополист получила максимальную прибыль).

В случае АСИ фирма-монополист не может (не умеет) различать потребителей, т.е. не может определить тип потребителя.

В параграфе 8.4 главы 8 был рассмотрен и проанализирован вариант ценовой дискриминации второго рода, называемой пакетной дискриминацией, которую фирма-монополист проводит в условиях АСИ. Как было показано в параграфе 8.4, в случае пакетной дискриминации потребители C_1 и C_2 первого и второго типов соответственно были заинтересованы заключить с фирмой-монополистом один и тот же контракт (y_1^*, t_1^*), что свидетельствует о наличии неблагоприятного отбора на рынке в условиях АСИ. Этот неблагоприятный отбор характеризуется тем, что потребители первого типа (с более скромными потребительскими амбициями) остаются потребителями первого типа, а потребители второго типа (у которых более высокие потребительские амбиции) превращаются в потребителей первого типа, ибо они, как и потребители первого типа, выбирают контракт (y_1^*, t_1^*), т.е. наблюдается «дебилизация» рынка (см. в начале этого параграфа 17.1 модель рынка «лимонов» Дж. Акелофа), в которой не заинтересована фирма-монополист. Причина этой незаинтересованности — в понижении прибыли фирмы-монополиста, когда потребители C_1 и C_2 выбирают один и тот же контракт (y_1^*, t_1^*).

Таким образом, в случае АСИ равновесие образует пара контрактов (y_1^*, t_1^*) и (y_1^*, t_1^*), которая понижает максимальную прибыль фирмы-монополиста, которую она имеет на паре контрактов (y_1^*, t_1^*) и (y_2^*, t_2^*).

Как уже отмечалось в параграфе 8.4, для уменьшения информационной асимметрии на рынке фирма-монополист может использовать *механизм фильтрации*, который в рассматриваемой ситуации выглядит так: фирма-монополист, максимизируя свою прибыль, имеет дело с теми потребителями, для которых выполнены не только условия участия, но и условия *самовыявления* (самоотбора):

$V_1(y_1) - t_1 \geq 0$, $V_2(y_2) - t_2 \geq 0$ (условие участия),

$V_1(y_1) - t_1 \geq V_1(y_2) - t_2$, $V_2(y_2) - t_2 \geq V_2(y_1) - t_1$ (условие самовыявления).

Условия участия являются естественными с содержательной точки зрения, ибо для фирмы-монополиста не существует потребителя, который не участвует в рыночной ситуации. Условие самовыявления $V_2(y_2) - t_2 \geq V_2(y_1) - t_1$ содержательно можно проинтерпретировать так: фирма-монополист имеет дело только с теми амбициозными потребителями, которые принципиально не позволят себе превратиться в потребителей неамбициозных ни при каких условиях. Условие самовыявления $V_1(y_1) - t_1 \geq V_1(y_2) - t_2$ можно проинтерпретировать аналогично только что приведенной содержательной интерпретации: фирма-монополист имеет дело только с теми неамбициозными потребителями, которые принципиально не готовы выдавать себя за амбициозных потребителей.

Множество контрактов между фирмой-монополистом и потребителями C_1 и C_2 с учетом условий участия и условий самовыявления уже позволит фирме-монополисту определить типы потребителей и проводить пакетную дискриминацию (в условиях АСИ).

Контракты $(\hat{y}_1; \hat{t}_1)$, $(\hat{y}_2; \hat{t}_2)$, которые представляют собой оптимальное решение задачи (8.4.4.)—(8.4.8) (см. параграф 8.4) максимизации прибыли фирмы-монополиста, являются *контрактами «второго лучшего»*. В параграфе 8.4 выполнено сопоставление между собой обеих систем оптимальных контрактов «первого лучшего» (контрактов (y_1^*, t_1^*), (y_2^*, t_2^*)) и «второго лучшего» (контрактов $(\hat{y}_1; \hat{t}_1)$, $(\hat{y}_2; \hat{t}_2)$) (см. материал параграфа 8.4, относящийся к пакетной дискриминации, включая пример 8.4.2).

17.2. Моральный риск

17.2.1. Общая характеристика морального риска была представлена в начале параграфа 17.1. В этом параграфе описывается и анализируется проблема морального риска на рынке труда, на котором функционируют фирма-наниматель (принципал) и наемный работник (агент).

Функция полезности агента имеет вид $u(w,e) = V(w) - e$, где w — его заработная плата; e— уровень усилий, прилагаемых агентом на рабочем месте; слагаемое $V(w)$ (которое принято называть также функцией полезности) удовлетворяет стандартным условиям $V(0) = 0$, $V'(w) > 0$, $V''(w) < 0$ при любых $w > 0$. Из неравенства $V'(w) > 0$ следует, что с ростом заработной платы полезность агента растет; из неравенства $V''(w) < 0$ следует, что $V'(w)$ строго убывает с ростом w и функция $V(w)$ строго выпукла вверх при $w > 0$.

Альтернативная полезность агента равна $\bar{u}$, т.е. неравенство $u(w, e) = V(w) - e \geq \bar{u}$, содержательно означает, что агент работает по найму у принципала, а в случае неравенства $u(w, e) < \bar{u}$ агент по найму у принципала не работает. Агент максимизирует свою функцию полезности.

Взаимосвязь между доходом R фирмы-нанимателя и уровнем усилий агента представлена в табл. 17.1.

Таблица 17.1

Доход / Уровень усилий	R_1	R_2
e_1	p_{11}	p_{12}
e_2	p_{21}	p_{22}

Для параметров табл. 17.1 выполнены следующие условия: $e_1 < e_2, R_1 < R_2, p_{11} + p_{12} = 1, p_{21} + p_{22} = 1, p_{11} > p_{12}, p_{21} < p_{22}$. Принципал максимизирует свою ожидаемую прибыль, что означает, что он *нейтрален* к риску.

17.2.2. График функции $V(w)$ представлен на рис. 17.2.

На рис. 17.2 $Ew = pw_1 + (1 - p)w_2$ — ожидаемая заработная плата агента, $Ew = pV(w_1) + (1 - p)V(w_2)$ — ожидаемая полезность агента, p — вероятность, с которой агент получает заработную плату w_1, $(1 - p)$ — вероятность, с которой агент получает заработную плату w_2.

Из строгой выпуклости вверх функции $V(w)$ вытекает неравенство $V(Ew) > EV(w)$, которое означает, что для агента полезность ожидаемой заработной платы более значима, чем его ожидаемая полезность. Отсюда следует, что агент согласен отказаться от своей ожидаемой (но рискованной) заработной платы в пользу меньшей, но фиксированной заработной платы w^*. Это означает, что агент является рискофобом.

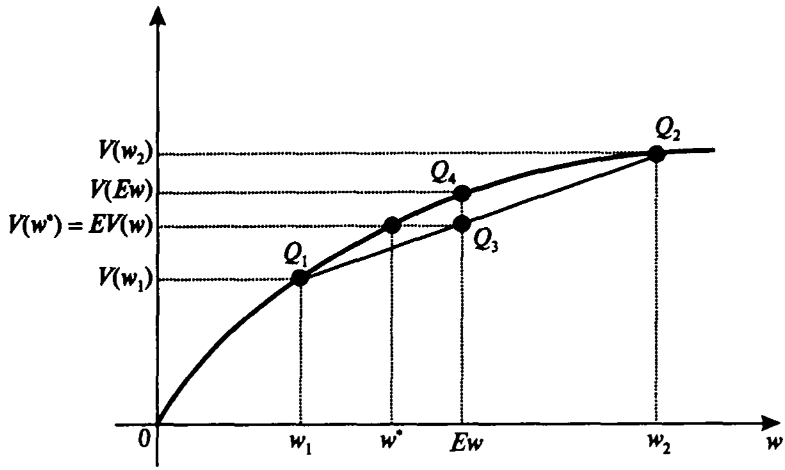


Рис. 17.2

Потеря в зарплате $Ew - w^* > 0$, на которую согласен агент в целях избавления от необходимости нести бремя риска (бремя неопределенности заработной платы), называется, как известно, ***премией за риск***. Потеря в полезности у агента в данном случае равна $V(Ew) - V(w^*) > 0$.

17.2.3. В условиях СИ усилия агента принципалом наблюдаемы.

Сначала рассмотрим случай, когда принципал стимулирует агента трудиться усердно (случай, когда $e = e_2$). В этих целях принципал предложит агенту следующий контракт:

$$w = \begin{cases} m_2, \text{если } e = e_2, \\ m_1, \text{если } e = e_1. \end{cases}$$

Агент соглашается заключить контракт с принципалом, если на основании предложения принципала полезность агента будет не меньше его альтернативной полезности $\bar{u}$, т.е.

$$u(w, e_2) = V(w) - e_2 \geq \bar{u},$$

откуда следует, что $V(m_2) \geq \bar{u} + e_2$. В силу того что функция $V(w)$ строго возрастает, уравнение $V(m_2) \geq \bar{u} + e_2$ имеет единственное решение $m_2 = \bar{m}_2$. Таким образом, если заработная плата агента $w \geq \bar{m}_2$, агент не покинет принципала (фирму-нанимателя).

Контракт, предлагаемый принципалом, стимулирующий агента трудиться усердно, имеет вид:

$$w = \begin{cases} \bar{m}_2, \text{если } e = e_2, \\ m_1, \text{если } e = e_1. \end{cases}$$

Отметим, что заработная плата m_1 должна быть такой, что $V(\bar{m}_2) - e_2 > V(m_1) - e_1$. Это содержательно означает, что агенту выгоднее получать зарплату $\bar{m}_2$, прилагая усилие $e = e_2$, чем получать зарплату m_1, прилагая меньшее усилие e_1. Решением этого неравенства будет принадлежность зарплаты m_1 некоторому промежутку. Аналогичное неравенство фигурирует ниже в случае, когда в условиях СИ принципал стимулирует агента трудиться с минимумом усилий (т.е. в случае $e = e_1$). Неравенства, подобные приведенному в случае АСИ (см. ниже), играют важную роль и называются условиями самовыявления (условия самоотбора).

В рассматриваемом случае, когда принципал стимулирует агента трудиться усердно ($e = e_2$), ожидаемый доход $ER_{(2)}$ принципала равен $ER_{(2)} = p_{21}R_1 + p_{22}R_2$, ожидаемая прибыль $EPR_{(2)}$ принципала равна $EPR_{(2)} = ER_{(2)} - \bar{m}_2$,, а полезность $u(\bar{m}_2, e_2)$ агента равна $u(\bar{m}_2, e_2) = V(\bar{m}_2) - e_2 = \bar{u}$.

Рассмотрим случай, когда принципал стимулирует агента трудиться с минимумом усилий (случай, когда $e = e_1$). Основанием для рассмотрения такого, с позволения сказать, варианта является то обстоятельство, что усердный труд агента приносит принципалу бóльший доход, но и бóльшие издержки из-за высокой оплаты труда.

В рассматриваемом случае $e = e_1$ принципалу естественно предложить агенту следующий контракт:

$$w = \begin{cases} \mu_2, \text{если } e = e_2, \\ \mu_1, \text{если } e = e_1. \end{cases}$$

Агент согласится заключить контракт с принципалом, если на основании предложения принципала полезность агента будет не меньше его альтернативной полезности $\bar{u}$, т.е.

$$u(w, e_1) = V(w) - e_1 \geq \bar{u},$$

откуда следует, что $V(\mu_1) \geq \bar{u} + e_1$. Уравнение $V(\mu_1) = \bar{u} + e_1$ имеет единственное решение $\mu_1 = \bar{\mu}_1$. Таким образом, если заработная плата агента $w \geq \bar{\mu}_1$, агент не покинет принципала.

Отметим, что аналогично случаю стимулирования агента трудиться с усердием ($e = e_2$) заработная плата μ_2 должна быть такой, что

$$V(\bar{\mu}_1) - e_1 \geq V(\mu_2) - e_2.$$

Ожидаемый доход принципала равен $ER_{(1)} = p_{11}R_1 + p_{12}R_2$, ожидаемая прибыль принципала равна $EPR_{(1)} = ER_{(1)} - \bar{\mu}_1$, а полезность агента $u(\mu_1, e_1) = V(\bar{\mu}_1) - e_1 = \bar{u}$.

Разность $\bar{m}_2 - \bar{\mu}_1$ равна издержкам оплаты принципалом дополнительных усилий агента.

Разность $ER_{(2)} - ER_{(1)}$ равна приросту ожидаемого дохода принципала, обусловленного дополнительными усилиями агента. Если $ER_{(2)} - ER_{(1)} \geq \bar{m}_2 - \bar{\mu}_1$, т.е. если $EPR_{(2)} - EPR_{(1)} \geq 0$, то принципалу выгоднее стимулировать агента трудиться усердно.

17.2.4. В условиях АСИ усилия агента принципалом не наблюдаемы. Поэтому при составлении контрактов, предлагаемых принципалом агенту, принципиалу ничего не остается, как в первую очередь руководствоваться собственным доходом, а также любой другой доступной ему информацией.

Для стимулирования агента трудиться усердно принципал предложит ему контракт вида

$$w = \begin{cases} y, \text{если } R = R_1, \\ x, \text{если } R = R_2. \end{cases}$$

Аналогично случаю СИ ожидаемая полезность агента в случае, когда он трудится усердно, равна
$Eu_{(2)} = p_{21}u(x, e_2) + p_{22}u(y, e_2) = p_{21}(V(x) - e_2) + p_{22}(V(x) - e_2) = p_{21}V(x) + p_{22}V(y) - e_2$
и она должна быть не меньше альтернативной полезности $\bar{u}$, т.е.

$$Eu^{(2)} \geq \bar{u}.$$

Это неравенство называется *условием участия* агента в контракте. Невыполнение этого неравенства означает, что агент не будет участвовать в контракте.

Далее приоритетное участие агента в усердном труде означает, что его ожидаемая полезность в случае усердного труда ($e = e_2$) должна быть больше (точнее, не меньше) ожидаемой полезности в случае труда с минимальным усердием ($e = e_1$), что формально записывается так:

$$Eu_{(2)} \geq Eu_{(1)}$$

или в развернутом варианте

$$p_{21}V(x) + p_{22}V(y) - e_2 \geq p_{11}V(x) + p_{12}V(y) - e_1.$$

Это неравенство называется *условием самовыявления* (*условием самоотбора*) агента, готового трудиться усердно. В экономической реальности условие самовыявления выполняется для трудоголиков. Множество пар (x, y), удовлетворяющих условиям участия и самовыявления, представляет собой множество контрактов, которые приемлемы для агента и стимулируют его трудиться усердно.

Задача принципала найти такие значения x и y ($x > 0$, $y > 0$), которые удовлетворяют условием участия и самовыявления и которые максимизируют его ожидаемую прибыль:

$$EPR_{(2)} = p_{21}(R_1 - x) + p_{22}(R_2 - y).$$

Пусть решение задачи максимизации ожидаемой прибыли принципала есть двумерный вектор (x^*, y^*), откуда следует, что оптимальный стимулирующий агента к усердному труду контракт имеет вид

$$w^* = \begin{cases} y^*, \text{если } R = R_2 > R_1, \\ x^*, \text{если } R = R_1. \end{cases}$$

Тогда ожидаемая заработная плата агента равна $Ew^* = p_{21}x^* + p_{22}y^*$, ожидаемый доход принципала равен $ER^* = p_{21}R_1 + p_{22}R_2$, ожидаемая прибыль принципала равна $EPR^* = ER^* - Ew^*$, ожидаемая полезность агента равна $Eu^* = p_{21}V(x^*) + p_{22}V(y^*) - e_2$.

Случай, когда принципалу необходимо нанять в условиях АСИ агента, который будет трудиться с минимальным усердием, совпадает со случаем, который имел место в условиях СИ. Главная забота принципала, чтобы агент не ушел от него. В таком случае агент как рациональный индивидуум, естественно, будет работать с минимальным усердием $e = e_1$.

Снова выпишем контракт в случае, когда агент трудится с минимальным усердием:

$$w = \begin{cases} \mu_2, \text{если } e = e_2, \\ \bar{\mu}_1, \text{если } e = e_1 \end{cases} —$$

и повторим соответствующие выражения для ожидаемых дохода и прибыли принципала и для полезности агента: $ER_{(1)} = p_{11}R_1 + p_{12}R_2$, $EPR_{(1)} = ER_{(1)} - \bar{\mu}_1, u(\bar{\mu}_1, e_1) = V(\bar{\mu}_1) - e_1 = \bar{u}$.

Если $EPR^* > EPR_{(1)}$, то заключение контракта, стимулирующего усердный труд агента, целесообразно. Если $EPR^* \le EPR_{(1)}$, то заключение контракта, стимулирующего минимальное усердие агента, целесообразно.

Пример 17.2.1. Пусть $u(w, e) = \sqrt{w} - e, \bar{u} = 2, e_1 = 1, e_2 = 3, R_1 = 10, R_2 = 80, p_{11} = 0{,}7, p_{12} = 0{,}3, p_{21} = 0{,}3, p_{22} = 0{,}7$.

Сначала проведем вычисление в случае СИ.

Для определения зарплаты $\bar{m}_2$ решаем относительно m_2 уравнение $V(m_2) = \bar{u} + e_2$ или в нашем конкретном примере уравнение $\sqrt{m_2} = 2 + 3$, откуда получаем $\bar{m}_2 = 25$.

Найдем промежуток возможных значений заработной платы m_1. Неравенство $V(\bar{m}_1) - e_2 \ge V(\bar{m}_1) - e_1$ в рассматриваемом примере имеет вид $\sqrt{25} - 3 > \sqrt{m_1} - 1$, откуда следует, что $m_1 < 9$.

Выпишем значения $ER_{(2)}$, $EPR_{(2)}$ и $u(\bar{m}_2, e_2)$:

$$ER_{(2)} = 0{,}3 \cdot 10 + 0{,}7 \cdot 80 = 59,$$

$$EPR_{(2)} = ER_{(2)} - \bar{m}_2 = 59 - 25 = 34,$$

$$u(\bar{m}_2, e_2) = \sqrt{25} - 3 = 2 = \bar{u}.$$

Для определения зарплаты $\bar{\mu}_1$ решаем относительно μ_1 уравнение $V(\bar{\mu}_1) = \bar{u} + e_1$, или $\sqrt{\bar{\mu}_1} = 2 + 1$, откуда получаем $\bar{\mu}_1 = 9$.

Найдем промежуток возможных значений заработной платы μ_2. Неравенство $V(\bar{\mu}_1) - e_1 > V(\bar{\mu}_2) - e_2$ в рассматриваемом примере имеет вид $\sqrt{9} - 1 > \sqrt{\bar{\mu}_2} - 3$, , откуда следует, что $\mu_2 < 25$.

Имеем

$$ER_{(1)} = 0{,}7 \cdot 10 + 0{,}3 \cdot 80 = 31,$$

$$EPR_{(1)} = ER_{(1)} - \bar{\mu}_1 = 31 - 9 = 22,$$

$$u(\bar{\mu}_1, e_1) = \sqrt{9} - 1 = 3 - 1 = 2 = \bar{u}.$$

Найдем разности $\bar{m}_2 - \bar{\mu}_1 = 25 - 9 = 16$, $EPR_{(2)} - EPR_{(1)} = 34 - 22 = 12$, т.е. принципалу выгоднее стимулировать агента трудиться усердно в условиях СИ.

Переходим к выполнению расчетов в случае АСИ. Для этого выпишем задачу максимизации ожидаемой прибыли принципала при условиях участия и самовыявления агента, которого принципал стимулирует трудиться усердно:

$$0{,}3(10 - x) + 0{,}7(80 - y) = EPR_{(2)}\ (\max)$$

при условиях

$$0{,}3\sqrt{x} + 0{,}7\sqrt{y} - 3 \geq 2,$$

$$0{,}3\sqrt{x} + 0{,}7\sqrt{y} - 3 \geq 0{,}7\sqrt{x} + 0{,}3\sqrt{y} - 1,$$

$$x > 0, y > 0.$$

Сделаем замену переменных $\sqrt{x} = \alpha, \sqrt{y} = \beta,$, тогда $EPR_{(2)} = 3 - 0{,}3\alpha^2 + 56 - 0{,}7\beta^2 = 59 - 0{,}3\alpha^2 - 0{,}7\beta^2$, $0{,}3\alpha + 0{,}7\beta \geq 5$, $0{,}3\alpha + 0{,}7\beta - 3 \geq 0{,}7\alpha + 0{,}3\beta - 1$.

Перепишем задачу максимизации в виде задачи минимизации:

$0{,}3\alpha^2 + 0{,}7\beta^2\ (\min)$

при условиях

$0{,}3\alpha + 0{,}7\beta \geq 5,$

$-0{,}4\alpha + 0{,}4\beta \geq 2,$

$x > 0, \beta > 0.$

Решим задачу минимизации графическим методом. Сначала построим множество стимулирующих контрактов, описываемое условиями задачи минимизации.

На плоскости $O\alpha\beta$ неравенство $3\alpha + 7\beta \geq 50$ изображает верхняя полуплоскость прямой $3\alpha + 7\beta = 50$ (рис. 17.3), неравенство $-4\alpha + 4\beta \geq 20$ изображает верхняя полуплоскость прямой $-\alpha + \beta = 5$. Неравенства $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ изображают правую и верхнюю открытые полуплоскости. Общая часть этих четырех полуплоскостей есть заштрихованный на рис. 17.3 неограниченный двуугольник.

Точка пересечения прямых $3\alpha + 7\beta = 50$ и $-4\alpha + 4\beta = 20$ имеет координаты $\alpha^{*} = 1{,}5$; $\beta^{*} = 6{,}5$ (проверяется непосредственно). Для построения линии уровня целевой функции $3\alpha^2 + 7\beta^2 = \gamma$, проходящей через точку (α^{*}; β^{*}), следует вычислить $\gamma^{*} = 3(\alpha^{*}) + 7(\beta^{*}) = 302{,}5$ и написать уравнение $3\alpha^2 + 7\beta^2 = \gamma^{*}$, которое после элементарных преобразований приобретает вид

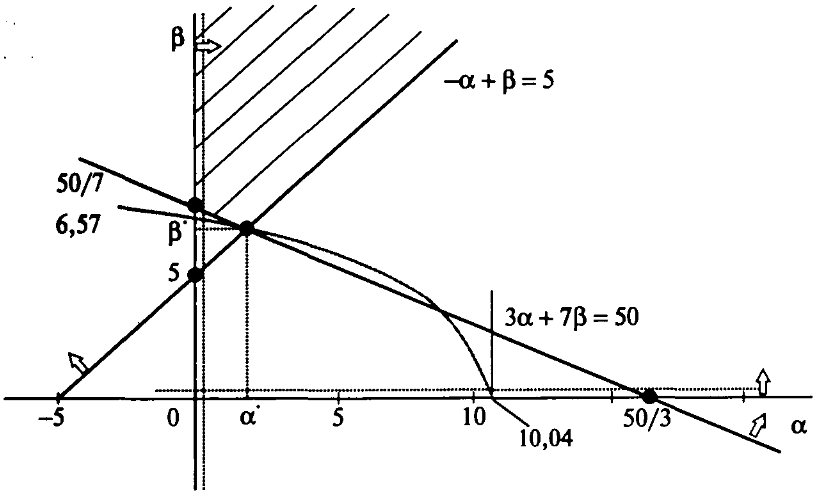


Рис. 17.3

$$\frac{\alpha^2}{\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{3}}\right)^2}+\frac{\beta^2}{\left(\sqrt{\frac{\gamma^*}{7}}\right)^2}=1\left(\frac{\alpha^2}{(10{,}04)^2}+\frac{\beta^2}{(6{,}57)^2}=1\right).$$

Его графиком в положительном ортанте плоскости $O\alpha\beta$ является «четвертушка» эллипса с полуосями, равными (приближенно) 10,04 и 6,57 (см. рис. 17.3).

Градиенты прямых $3\alpha + 7\beta = 50$ и $-4\alpha + 4\beta = 20$ соответственно равны (3; 7) и (–4; 4). Градиент целевой функции $\gamma = 3\alpha^2 + 7\beta^2$ в точке $(\alpha^*; \beta^*) = (1{,}5; 6{,}5)$ равен $\mathrm{grad}\,\gamma(\alpha^*; \beta^*) = (9;\ 91)$. Непосредственно проверяется, что в линейной комбинации

$$\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}\lambda_1+\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}\lambda_2=\begin{pmatrix}9\\91\end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 10$; $\lambda_2 = {}^{21}/_4$. Это означает, что $\mathrm{grad}\,\gamma(\alpha^*; \beta^*)$ содержится в неотрицательном конусе с вершиной в точке $(\alpha^*; \beta^*)$, натянутом на векторы (3,7) и (–4; 4), которые являются градиентами ограничений (эти три градиента на рис. 17.3 не показаны).

Отсюда вытекает, что точка $\gamma(\alpha^*; \beta^*)= (1{,}5; 6{,}5)$ есть решение задачи минимизации.

Возвращаясь к старым переменным $x = \alpha^2$ и $y = \beta^2$ и к задаче максимизации ожидаемой прибыли принципала, имеем оптимальный стимулирующий контракт

$$w^* = \begin{cases} x^* = (\alpha^*)^2 = 2{,}25, \text{если } R = R_2 = 80, \\ y^* = (\beta^*)^2 = 42{,}25, \text{если } R = R_1 = 10, \end{cases}$$

ожидаемую заработную плату агента

$$Ew^* = p_{21}x^* + p_{22}y^* = 0.3 \cdot 2{,}25 + 0{,}7 \cdot 42{,}25 = 30{,}25,$$

ожидаемую полезность агента

$$Eu^* = p_{21}V(x^\circ) + p_{22}V(y^\circ) - e_2 = 0{,}3 \cdot \sqrt{2{,}25} + 0{,}7 \cdot \sqrt{42{,}25} - 3 = 2,$$

ожидаемый доход принципала

$$ER^* = p_{21}R_1 + p_{22}R_2 = 0{,}3 \cdot 10 + 0{,}7 \cdot 80 = 59,$$

ожидаемую прибыль принципала

$$EPR^* = ER^* - Ew^* = 59 - 30{,}25 = 28{,}75.$$

Сопоставив ожидаемую прибыль $EPR^* = 28{,}75$ с найденной ранее $EPR_{(1)} = 22$, естественно сделать вывод, что в условиях АСИ (как и в условиях СИ — см. выше $EPR_{(2)} = 34$ и $EPR_{(1)} = 22$) принципалу выгоднее стимулировать агента трудиться усердно.

Для данного примера в целях сравнения ответов, полученных в случае СИ и в случае АСИ, сведем эти ответы в табл. 17.3.

Таблица 17.3

СИ	e_2	$m_1 < 9$	$\bar{m}_2 = 25$	$u(\bar{m}_2, e_2) = \bar{u} = 2$	$ER_{(2)} = 59$	$EPR_{(2)} = ER_{(2)} - \bar{m}_2 = 34$	
	e_1	$\bar{\mu}_1 = 9$	$\mu_2 < 25$	$u(\bar{\mu}_1, e_1) = \bar{u} = 2$	$ER_{(1)} = 31$	$EPR_{(1)} = ER_{(1)} - \bar{\mu}_1 = 22$	
АСИ	e_2	$x^* = 2{,}25$	$y^* = 42{,}25$	$Eu^* = 2$	$ER^* = 59$	$EPR^* = ER^* - Ew^* = 28{,}75$	$Ew^* = 30{,}25$
	e_1	$\bar{\mu}_1 = 9$	$\mu_2 < 25$	$u(\bar{\mu}_1, e_1) = \bar{u} = 2$	$ER_{(1)} = 31$	$EPR_{(1)} = ER_{(1)} - \bar{\mu}_1 = 22$	

В случае СИ и $e = e_2$ зарплата агента равна $\bar{m}_2 = 25$ и $EPR_{(2)} = ER_{(2)} - \bar{m}_2 = 59 - 25 = 34$. В случае АСИ и $e = e_2$ ожидаемая зарплата агента равна $Ew^* = 30{,}25$ и $EPR^* = ER^* - Ew^* = 59 - 30{,}25 = 28{,}75$. Следовательно, ожидаемая зарплата агента увеличивается на $30{,}25 - 25 = 5{,}25$ д.е., а ожидаемая прибыль принципала уменьшается на $34 - 28{,}75 = 5{,}25$ д.е.

На рис. 17.4, который представляет собой конкретизацию рис. 17.2, показан ряд результатов расчетов, сведенных в табл. 17.3. Для наглядности на осях абсцисс и ординат даны разные масштабы. Линия $OQ_1Q_4Q_2$ — график функции полезности $V(w)=\sqrt{w}$, прямая $Q_1Q_3Q_2$ — хорда, соединяющая точки Q_1 и Q_2. Разность $Ew^* - \bar{m}_2 = 30{,}25 - 25 = 5{,}25$ между ожидаемой зарплатой Ew^* и фиксированной зарплатой $\bar{m}_2$ есть премия за риск, содержательная интерпретация которой была дана в начале этого параграфа.

При переходе от СИ к АСИ ожидаемая прибыль принципала снижается в связи с тем, что он перестает наблюдать усилия агента. И это снижение $EPR_{(2)} - EPR^* = 34 - 28{,}75 = 5{,}25$ равно премии за риск.

Общественное благосостояние W (совокупное благосостояние агента и принципала) определяется как сумма полезности агента и прибыли принципала. В условиях СИ при стимулировании агента трудиться усердно (случай $e = e_2$) $W_{(2)} = u(\bar{m}_2, e_2) + EPR_{(2)} = 2 + 34 = 36$, при стимулировании агента трудиться с минимальным усердием (случай $e = e_1$) $W_{(1)} = u(\bar{\mu}_1, e_1) + EPR_{(1)} = 2 + 22 = 24$. В условиях АСИ при стимулировании агента трудиться усердно (случай $e = e_2$) $W^* = Eu^* + EPR^* = 2 + 28{,}75 = 30{,}75$, при стимули-

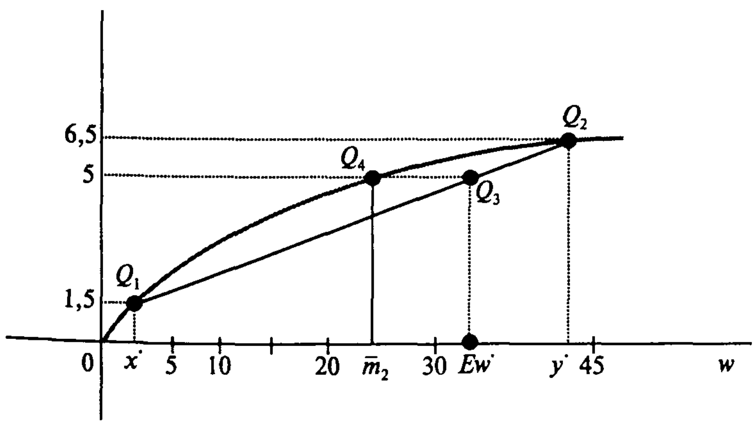


Рис. 17.4

ровании агента трудиться с минимальным усердием (случай $e = e_1$) $W_{(1)} = u(\bar{\mu}_1, e_1) + EPR_{(1)} = 2 + 22 = 24$.

Таким образом, при переходе от СИ к АСИ в случае стимулирования агента трудиться усердно общественное благосостояние понижается $W_{(2)} = W^* = 30 - 30{,}75 = 5{,}25$ на величину 5,25. В случае стимулирования агента трудиться с минимальным усердием общественное благосостояние остается неизменным — $W_{(1)} = W_{(1)}$.

На этом разбор примера 17.2.1 заканчивается.

17.2.5. Рассмотрим на вербальном уровне проблему морального риска на рынке страхования.

Если, например, собственник (агент) оптового магазина стоимостью 100 000 долл. реализует программу мер противопожарной безопасности для своих сотрудников стоимостью 50 долл., то вероятность пожара равна 0,005. Без такой программы вероятность пожара повышается до 0,01. Зная об этом, страховая компания (принципал), если она не может проследить за реализацией программы, сталкивается с дилеммой. В предлагаемый ею полис нельзя включать пункт о выплате страховки лишь в случае выполнения программы противопожарной безопасности. Если бы эта программа была выполнена, страховая компания могла бы застраховать оптовый магазин на сумму, равную ожидаемым потерям от пожара, составляющим 500 долл. (0,005 · 100 000 долл.). Когда же страховой полис куплен (агент и принципал заключили контракт), у собственника исчезает стимул к выполнению программы: если произойдет несчастье, то их финансовый ущерб будет полностью компенсирован. Невыполнение программы мер противопожарной безопасности агентом (собственником магазина) есть пример недобросовестного действия (точнее, бездействия), которое ненаблюдаемо для принципала (страховой компании). Таким образом, продавая полис за 500 долл., страховая компания терпит убытки, поскольку «ожидаемые потери» от пожара составляют не 500, а 1000 долл. (0,01 · 100 000 долл.).

Если какой-либо агент (страхователь) полностью застрахован и принципал (страховая компания, т.е. страховщик), имеющий ограниченную информацию, не может подвергнуть агента тщательному наблюдению, то поведение агента (страхователя) может измениться после покупки страхового полиса. Возникает проблема морального риска. Моральный риск имеет место, когда агент может воздействовать на вероятность или значимость страхового случая, т.е. события, обусловливающего выплату. Например, если индивидуум застраховал свое здоровье на все случаи, то он может посещать врача чаще, чем при ограниченном договоре. Если страховая компания в состоянии наблюдать за поведением своего клиента, то она может назначить повышенную плату для тех, кто посещает врачей чаще. Но если у компании нет такой возможности, то ее выплаты, вероятно, окажутся больше ожидаемых. В связи с моральным риском страховые компании вынуждены увеличивать страховые взносы или вообще отказываться от заключения подобных сделок.

Рынок страхования, в частности медицинского страхования, социально значим. Однако вследствие неблагоприятного отбора (увеличение страховых взносов в связи с тем, что на рынке остаются менее здоровые и малоимущие индивидуумы) рынок медицинского страхования содержит потенциал своей самоликвидации. В параграфе 17.1 уже отмечалось, что в экономически развитых странах действует практика обязательного государственного медицинского страхования всех пожилых лиц. Благодаря такой практике, а также другим социально-экономическим мерам действие неблагоприятного отбора блокируется, что выражается в нормальном функционировании рынка медицинского страхования.

Другой обширный класс ситуаций, связанных с моральным риском, образуют продажи на условиях абонементной платы — шведский стол, помесячная оплата телефона, газа и т.д.

Например, предельные расходы едока, оплатившего шведский стол, равны нулю — оплачено любое количество еды. Если плата ориентирована на средний аппетит, то она оттолкнет человека, привыкшего есть мало, и привлечет любителя хорошо поесть. Далее включается механизм неблагоприятного отбора, и в конце концов установится такая цена, которая может быть привлекательной лишь для обжор-рекордсменов. Такого в действительности не случается вследствие того, что возможность пользоваться шведским столом не покупается отдельно, а предоставляется обычно в комплекте с другими услугами при покупке туристической путевки, найме гостиничного номера, заказе обслуживания конференции, съезда и т.д. Тем самым действие неблагоприятного отбора ослабляется или сводится на нет.

17.2.6. В 1934 г. во время Великой депрессии правительство Соединенных Штатов ввело широкомасштабную систему финансового страхования. Федеральная корпорация страхования депозитов обеспечила страхование депозитов коммерческих банков, а Федеральная корпорация страхования займов и сбережений сделала то же самое (до 100 000 долл. на счет) для депозитов в ссудосберегательных ассоциациях. Эти программы страхования породили моральный риск у части вкладчиков, так как они могли теперь ссужать деньги любой финансовой организации, не принимая во внимание рискованность этого кредита и не подвергаясь при этом никакому риску.

Позднее моральный риск по депозитам соединился с моральным риском собственников сбережений и займов. Начиная с 1982 г. новые участники бизнеса убедились, что они могут привлекать крупные суммы капитала, застрахованного правительством, и осуществлять фактически неограниченные высокоприбыльные спекулятивные инвестиции. Поскольку вклады были застрахованы, их мало интересовал сопряженный с этим риск.

По существу, страхование вкладов позволило совершать более рискованные и крупные операции с займами и сбережениями, чем это было бы возможно без него. Неблагоприятные обстоятельства, связанные с моральным риском в сочетании с кризисом в сфере недвижимого имущества в ряде штатов, привели к потере многих сбережений и займов.

В 1990 г. затраты на спасение вкладчиков, чьи деньги были потеряны, когда разорились более 1000 ссудосберегательных ассоциаций, по скромной оценке, составили более 200 млрд долл. Наибольшие потери имели место в Техасе, где к октябрю 1990 г. было потрачено более 42 млрд долл. Полные затраты агентств, занимающихся страхованием вкладов, составили около 100 млрд долл. только за 1990 г.

Хотя перспективы на будущее не блестящие, имеются некоторые обнадеживающие признаки. Учитывая неблагоприятные факторы, связанные с моральным риском, правительство преобразовало свою систему страхования. Сегодня Федеральная корпорация страхования депозитов регулирует ссудосберегательные учреждения и банки так, что они подчиняются жестким требованиям, которые вынуждают менеджеров проводить более ответственную инвестиционную политику. Рискуя собственными деньгами; менеджеры в меньшей степени заинтересованы в спекулятивных инвестициях.

В отрасли сбережений и займов устранению проблемы морального риска вкладчиков способствуют следующие меры воздействия на вкладчиков:

1) уменьшение размеров страхового покрытия;

2) применение принятого максимального покрытия к индивидууму, а не к каждому его счету;

3) разрешение двойного страхования, предусматривающего страхование депозита с возмещением потерь в соотношении меньшем, чем один доллар за один доллар.

Устранению проблемы морального риска собственников паев способствуют следующие меры воздействия на собственников:

1) взимание страховых премий в зависимости от портфельного риска: чем выше риск, тем выше премия;

2) ограничение инвестиционных возможностей собственников паев.

17.3. Модели сигналов и фильтрации

17.3.1. В случае *морального риска* (риска недобросовестности, т.е. в ситуации *ненаблюдаемых действий*) агент выбирает действия, которые максимизируют его собственное благосостояние, а не общую прибыль. В случае *неблагоприятного отбора* агент выбирает контракт, максимизирующий его выгоду, выдавая себя за агента с другими характеристиками и увеличивая тем самым свою выгоду.

Однако не всегда агенту выгодно поступать так, чтобы его частная информация была недоступна принципалу, ибо такое поведение агента связано с появлением для него дополнительных издержек. Агенту выгоднее послать принципалу *сигнал* для того, чтобы принципал выбрал именно этого агента. Таким образом, подавая сигнал, агент уменьшает информационную асимметрию на рынке. Согласно концепции рыночных сигналов на некоторых рынках продавцы подают покупателям *сигналы*, содержащие информацию о качестве товаров.

Действие рыночных сигналов проиллюстрируем на рынке труда, который является характерным примером рынка с асимметричной информацией. Допустим, фирма намерена нанять работников. Работники (продавцы рабочей силы) знают гораздо больше о качестве своего труда (о своей продуктивности), чем фирма (покупатель рабочей силы). К примеру, работники представляют, насколько добросовестно намерены трудиться, насколько они ответственны, какова их квалификация и т.п. Фирме же удастся выяснить все это только после приема и какого-то периода их работы. В момент же найма фирме мало что известно об их продуктивности.

Почему бы фирмам просто не нанять работников, посмотреть, как они трудятся, а потом уволить тех, кто продемонстрирует свою относительно низкую продуктивность? Потому, что это зачастую обходится очень дорого. Во многих странах трудно уволить человека, проработавшего свыше нескольких месяцев. (Фирме требуется указать вескую причину или заплатить выходное пособие.) Кроме того, на многих местах работники не достигают полной производительности, по крайней мере, в первые шесть месяцев. Возможно, потребуется обучать работников, на что фирма должна будет выделить существенные средства. Таким образом, фирма может не выявить уровень продуктивности работников в период от шести месяцев до года. Так что было бы намного лучше, если бы фирма знала заранее уровень продуктивности потенциальных работников.

Какие же сведения о продуктивности потенциальных работников фирма может получить еще до их найма? Могут ли они сообщать данные об этом? Хорошая одежда и хорошо поставленная речь при собеседовании могли бы дать какую-то информацию, но даже плохие работники иногда одеваются хорошо или прекрасно говорят, чтобы получить работу. Таким образом, хорошая одежда и хорошо поставленная речь — это недостоверные сигналы, они не позволяют верно отличать относительно высокопродуктивных работников (работников с высокой производительностью) от относительно низкопродуктивных работников (работников с низкой производительностью). Чтобы сигнал был достоверным, необходимо, чтобы его с большей вероятностью подавали относительно высокопродуктивные работники (чтобы им было легче это сделать), чем относительно низкопродуктивные работники.

Например, образование является достоверным сигналом на рынке труда. Уровень образования работника может быть измерен несколькими показателями: количеством лет обучения, полученными степенями, репутацией университета или колледжа, давшего степень, средним баллом и т.д. Конечно, образование может прямо или косвенно повысить продуктивность человека. Во время обучения индивидуум часто попадает в ситуацию повышенной интеллектуальной активности, когда пробелы в знании необходимо хотя бы частично компенсировать интуицией, удачной импровизацией, когда приходится принимать рациональное решение в условиях жесткого цейтнота. Образование является важным сигналом продуктивности работника еще и потому, что более способному человеку проще достичь высокого уровня образования. (Способные люди, как правило, являются более интеллектуальными, целенаправленными, энергичными и трудолюбивыми, а эти качества полезны и при обучении.) Следовательно, более способные люди скорее могут получить хорошее образование, которое служит сигналом для фирм о возможностях работников, и тем самым рассчитывать на высокооплачиваемую работу. И фирмы вполне обоснованно рассматривают образование как сигнал о продуктивности.

17.3.2. Первую модель сигналов (модель о сигнализировании) на рынке труда предложил А.Спенс в своей классической работе (*A.M. Spens* (1973)). Далее при описании и анализе модели сигналов мы будем следовать основным положениям этой работы.

На рынке труда представлены работники (агенты) и фирмы-наниматели (принципалы), которые конкурируют по Бертрану. Далее для простоты предполагается наличие одной фирмы-нанимателя F и работников двух типов. Работник L_1 первого типа характеризуется относительно низкой продуктивностью (производительностью) θ_1, работник L_2 второго типа характеризуется относительно высокой продуктивностью (производительностью) θ_2. Здесь θ_i, $i = 1, 2$, — положительный скалярный параметр, который является денежным эквивалентом продуктивности (производительности) L_i. Следовательно, $\theta_1 < \theta_2$.

В случае СИ фирма-наниматель F предлагает работнику L_1 заработную плату в размере $W_1 = \theta_1$, работнику L_2 заработную плату в размере $W_2 = \theta_2$. Таким образом, в рассматриваемом случае равновесие на рынке труда реализуется в виде $W_1 = \theta_1$, $W_2 = \theta_2$; при этом прибыль фирмы-нанимателя F, которая наняла работника L_i, $i = 1, 2$, равна нулю: $PR_i = \theta_i - W_1 = 0$. Здесь слагаемое θ_i интерпретируется как доход фирмы F, а слагаемое W_i — как издержки фирмы F. Равенство нулю прибыли фирмы-нанимателя F является достаточно естественным с содержательной точки зрения, например в связи с тем, что конкурентная фирма имеет нулевую экономическую прибыль в случае долговременного промежутка, а также нулевую прибыль получают фирмы, конкурирующие по Бертрану.

В случае АСИ, когда у работников *отсутствует возможность* подачи сигналов, фирма-наниматель F готова платить каждому работнику (независимо от его продуктивности) заработную плату W, равную ожидаемой продуктивности

$\theta_1 q + (1-q)\theta_2$, т.е. $W = q\theta_1 + (1-q)\theta_2$.

Здесь скалярный множитель q, $0 \le q \le 1$, равен доле работников L_1 на рынке труда, тогда скалярный множитель $1-q$, $1 \ge 1-q \ge 0$, равен доле работников L_2 на рынке труда.

В рассматриваемом случае (на основании неравенства $\theta_1 < \theta_2$) для заработной платы W, равной средней продуктивности, имеет место следующая цепочка неравенств:

$\theta_1 = q\theta_1 + (1-q)\theta_1 \le q\theta_1 + (1-q)\theta_2 = W \le q\theta_2 + (1-q)\theta_2 = \theta_2$,

т.е. работник L_1 будет доволен тем, что он будет получать бóльшую (точнее, не меньшую) зарплату W по сравнению с зарплатой θ_1, в случае СИ, а работник L_2 будет недоволен тем, что он будет получать меньшую (точнее, не большую) зарплату W по сравнению с зарплатой θ_2 в случае СИ.

17.3.3. Переходим к разбору случая АСИ, когда работник имеет *возможность* подавать сигнал об уровне своей продуктивности. Речь идет о подаче достоверного *сигнала*, который фирма-наниматель F может (легко) проверить. В качестве такого сигнала в работе М. Спенса был выбран уровень образования работника. Свидетельством достоверности такого сигнала является, например, наличие документа об образовании.

Получение образования работником связано с издержками этого работника. Пусть e — уровень образования работника, т.е. например, число лет, в течение которых обучался работник, и пусть $c(e, \theta_i)$ — издержки этого работника i, $i = 1, 2$, связанные с получением им образования в течение e лет. Эти издержки $c(e, \theta_i)$ есть издержки сигнализирования работника L_i. Далее для краткости символа $c(e, \theta_i)$ будет использован краткий термин: издержки работника L_i, $i = 1, 2$. На основании содержательных соображений издержки $c(e, \theta_i)$ как функция двух переменных e и θ удовлетворяет неравенствами

$$\frac{\partial c}{\partial e} > 0(\geq 0), \ \frac{\partial^2 c}{\partial e^2} > 0(\geq 0), \ c(e, \theta_1) > c(e, \theta_2). \qquad (17.3.1)$$

Первые два из набора неравенств (17.3.1) означают, что с ростом продолжительности обучения e издержки $c(e, \theta)$, естественно, растут и функция $c(e, \theta)$ по переменной e выпукла вниз. Третье неравенство цепочки (17.3.1) означает, что у работника L_1 издержки выше, чем у работника L_2, что вполне согласуется с содержательными соображениями, ибо работник L_2, который более продуктивен, как правило, является более способным и поэтому обучается профессиональным навыкам быстрее и лучше, чем менее продуктивный работник L_1. Третье неравенство цепочки (17.3.1) можно обобщить в виде неравенства

$$\frac{\partial c}{\partial \theta} < 0,$$

которое означает, что предельные издержки по продуктивности отрицательны, и дополнить неравенством

$$\frac{\partial^2 c}{\partial e \partial \theta} < 0,$$

которое продолжим отношением конечных разностей (при относительно малой Δe)

$$0 > \frac{\partial^2 c}{\partial e \partial \theta} \cong \frac{\dfrac{\partial c(e + \Delta e, \theta)}{\partial \theta} - \dfrac{\partial c(e, \theta)}{\partial \theta}}{\Delta e},$$

откуда следует, что при $\Delta e > 0$ (т.е. с увеличением продолжительности обучения) предельные издержки $\partial e(e, \theta)/\partial \theta$ по продуктивности должны убывать.

Отметим также очевидные с содержательной точки зрения равенства $c(0, \theta_1) = c(0, \theta_2) = 0$. Если работник, имеющий продуктивность θ, обучался e лет и нанимается на ставку заработной платы W, то его функция полезности $U(e, W, \theta)$ приобретает вид

$$U(e, W, \theta) = W - c(e, \theta),$$

где, как уже отмечалось выше, $c(e, \theta)$ — издержки работника, связанные с получением им образования.

Очевидно, с ростом заработной платы (дохода) W работника значение его функции полезности растет, а с ростом уровня θ образования значение функции полезности работника убывает.

При фиксированных e и W имеем фиксированный уровень τ полезности работника, имеющего продуктивность θ:

$$U(e, W, \theta) = \tau(e, W), \text{ т.е. } W - c(e, \theta) = \tau(e, W).$$

При фиксированном уровне τ полезности множество пар (e, W), удовлетворяющих уравнению $W - c(e, \theta) = \tau$, представляет собой линию l_τ безразличия уровня τ полезности работника. Уравнение линии l_τ безразличия имеет вид

$$W = \tau + c(e, \theta).$$

Для работника L_i, $i = 1, 2$, линия безразличия $l_{\tau_1}^{(i)}$ уровня τ_i имеет уравнение $W_{(i)} = \tau_i + c(e, \theta_i)$ (рис. 17.5, который показывает, что линия безразличия $l_{\tau_1}^{(i)}$ является восходящей, что содержательно интерпретируется следующим образом: с ростом уровня e образования должен расти доход, который необходим для покрытия растущих издержек $c(e, \theta)$, чтобы иметь один и тот же уровень полезности.)

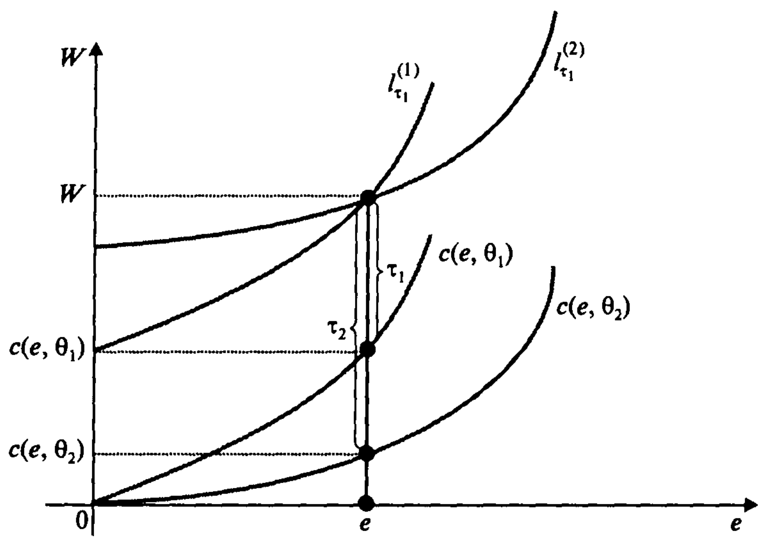


Рис. 17.5

Поскольку работник фирме-нанимателю подает сигнал в форме уровня e своего образования, постольку естественно этот уровень e образования толковать в качестве интенсивности сигнала.

Отметим, что продуктивность θ_i работника L_i — его частная информация, уровень e_i образования работника — общедоступная информация (которую принято называть общим знанием), фирма-наниматель F может дифференцировать работников по уровню их образования.

Действия работников и фирмы-нанимателя можно представить в виде *последовательной игры*.

Нулевой ход делает Природа, выбирая тип работника.

Первый ход делает «выбранный» Природой работник (агент, т.е. информированный участник рынка), который подает фирме-нанимателю F (принципалу, т.е. неинформированному участнику рынка) сигнал об уровне своего образования.

Второй ход делает фирма-наниматель F, которая, получив сигнал об уровне образования работника, относит этого работника к одному из двух типов и предлагает соответствующую зарплату. При отнесении работника к одному из двух типов фирма-наниматель руководствуется своей оценкой представления о связи уровня образования работника с его продуктивностью.

После предложения фирмой-нанимателем F зарплаты работнику он (работник) определяет (оценивает) соответствующее значение своей функции полезности, а фирма-наниматель вычисляет свою прибыль.

Для определения равновесия в рассматриваемом случае АСИ, когда работник *имеет возможность* подавать сигнал о своей продуктивности, необходимо иметь *оценку* представления фирмы-нанимателя F о том, как связан уровень образования работника с его продуктивностью. Эту оценку представления принято называть *верой* (по аналогии с верой в Бога) фирмы-нанимателя F. Если работники (агенты) разных типов ведут себя по-разному, имеем случай *разделяющего равновесия* на рынке труда в условиях АСИ. Если работники (агенты) разных типов ведут себя одинаково, имеем случай *объединяющего равновесия* на рынке труда в условиях АСИ.

17.3.4. Рассмотрим случай *разделяющего равновесия*.

Пусть фирма-наниматель F имеет следующее представление о связи уровня образования работника и его продуктивности:

- работник L_1 с уровнем образования $e < e^*$ характеризуется относительно низкой продуктивностью;
- работник L_2 с уровнем образования $e \geq e^*$ характеризуется относительно высокой продуктивностью.

Здесь скалярная величина e^* есть *оценка* представления (т.е. вера) фирмы-нанимателя F, о которой речь шла выше.

Минимальный промежуток, накрывающий величину e^*, будет описан ниже. Этот промежуток характеризует область разделяющих равновесий. Представление фирмы-нанимателя F обусловливает возникновение разделяющего равновесия, если работник L_1 выбирает относительно низкий уровень образования, а работник L_2 — относительно высокий уровень образования.

Работнику при данном представлении фирмы-нанимателя F невыгодно выбирать уровень образования, отличный от нуля или e^*. Действительно, если работник L_1 имеет уровень образования e (он связан с наличием издержек $c(e, \theta_1)$), такой, что $e < e^*$, то этот работник не изменит представления фирмы-нанимателя F о нем как о работнике с относительно низкой продуктивностью, которую он имел при $e = 0$ ($c(0, \theta) = 0$). Следовательно, работнику не имеет смысла повышать уровень своего образования с $e = 0$ до $e < e^*$, т.е. работнику не следует посылать фирме-нанимателю F никакого сигнала. Аналогично работнику L_2 не имеет смысл повышать уровень своего образования с $e = e^*$ до $e < e^*$, ибо он не изменит представления фирмы-нанимателя F о нем как о работнике с относительно высокой продуктивностью. Иными словами, работнику достаточно послать фирме-нанимателю F сигнал с интенсивностью, равной e^*.

Для того чтобы в разделяющем равновесии работники с различной продуктивностью выбирали разные уровни образования, необходимо выполнение *условий самовыявления* (*самоотбора*) для этих работников: работник L_1 не должен иметь стимулы для представления себя на рынке труда в качестве работника L_2 (первое условие самоотбора), а работник L_2 не должен представлять себя на рынке труда в качестве работника L_1 (второе условие самоотбора).

Формально *первое условие самоотбора* имеет вид

$$\theta_1 > \theta_2 - c(e^*, \theta_1),$$

откуда вытекает, что $c(e^*, \theta_1) > \theta_2 - \theta_1$. В последнем неравенстве левая часть $c(e^*, \theta_1)$ равна издержкам работника L_1, связанным с получением им образования, правая часть $\theta_2 - \theta_1$ показывает дополнительный выигрыш работника L_1 в случае, если этот работник становится работником L_2. Неравенство $c(e^*, \theta_1) > \theta_2 - \theta_1$ означает, что дополнительный выигрыш $(\theta_2 - \theta_1)$ работника L_1 не покрывает его издержек $c(e^*, \theta_1)$, поэтому работнику L_1 не следует на рынке труда представлять себя работником L_2.

В связи с тем что функция издержек $c(e, \theta_1)$ (строго) растет с ростом e, начиная с нулевого значения $c(0, \theta_1) = 0$, и значение $c(e^*, \theta_1)$ снизу подпирается положительной величиной $\theta_2 - \theta_1 > 0$, существует такое число $\breve{e} < e^*$ и $c(\breve{e}, \theta_1) = \theta_2 - \theta_1 > 0$ (рис. 17.6).

Таким образом, получена нижняя граница $\breve{e}$ для всех оценок e^* представлений фирмы-нанимателя F о том, как связан уровень образования работника L_1 с его продуктивностью θ_1.

Формально *второе условие самоотбора* имеет вид

$$\theta_2 - c(e^*, \theta_2) > \theta_1 - c(0, \theta_1).$$

Левая часть этой цепочки есть значение $U(\theta_2, e^*, \theta_2)$ функции полезности $U(W, e, \theta_2)$ работника L_2, которое строго больше правой части цепочки, которая есть значение $U(\theta_1, 0, \theta_1)$ функции полезности $U(W, e, \theta_1)$ работника L_1. Таким образом, работнику L_2 не следует на рынке труда представлять себя работником L_1. В связи с тем что функция издержек $c(e, \theta_2)$ строго растет с ростом e и значение $c(e^*, \theta_2)$ накрывается сверху положительным числом $\theta_2 - \theta_1$, существует такое число $\hat{e}$, что обязательно $e^* < \hat{e}$ и $c(\hat{e}, \theta_2) = \theta_2 - \theta_1$ (см. рис. 17.6). Таким образом получена верхняя граница $\hat{e}$ для всех оценок e^* представлений фирмы-нанимателя F и, следовательно, промежуток $(\breve{e}, \hat{e})$, содержащий все оценки e^*.

На рис. 17.6 $\tau_2^* = \theta_2 - \theta_1 - c(e^*, \theta_2)$ и $0 \le \tau_2^* \le \breve{\tau}_2 = \theta_2 - \theta_1 - c(\breve{e}, \theta_2)$. Сдвинутые вверх на величину θ_1 графики функций $c(e, \theta_1)$, $c(e, \theta_2)$ и $c(e, \theta_2) + \tau_2^*$ представлены на рис. 17.7, на котором линия $l_{\theta_1}^{(2)}$ есть график функции $W_{(1)} = c(e, \theta_1) + \theta_1$, т.е. линия $l_{\theta_1}^{(1)}$ есть линия безразличия уровня θ_1 работника L_1, которая имеет уравнение $U_1(e, W, \theta_1) = \theta_1$, т.е. $W - c(e, \theta_1) = \theta_1$. Линия $l_{\theta_1}^{(2)}$ есть график функции $W_{(2)} = c(e, \theta_2) + \theta_1$, т.е. линия $l_{\theta_1}^{(2)}$ есть линия безразличия уровня θ_1 работника L_2, которая имеет уравнение $U_2(e, W, \theta_2) = \theta_1$, т.е. $W - c(e, \theta_2) = \theta_1$. Линия $l_{\theta_1+\tau_2^*}^{(2)}$ есть график функции $W_{(2)} = c(e, \theta_2) + \theta_1 + \tau_2^*$, т.е. линия $l_{\theta_1+\tau_2^*}^{(2)}$ есть линия безразличия уровня $\theta_1 + \tau_2^*$ работника L_2, которая имеет уравнение $U_2(e, W, \theta_2) = \theta_1 + \tau_2^*$, т.е. $W_{(2)} = c(e, \theta_2) + \theta_1 + \tau_2^*$, $0 \le \tau_2^* \le \breve{\tau}_2 = \theta_2 - \theta_1 - c(\breve{e}, \theta_2)$.

На рис. 17.6 и 17.7 дан вариант оценки e^* представления фирмы-нанимателя F, ее нижней ($\breve{e}$) и верхней ($\hat{e}$) границ, заработной платы θ_1 работника L_1 и заработной платы θ_2 работника L_2.

Таким образом, если представление фирмы-нанимателя о работнике имеет вид:

– работник с уровнем образования $e < e^*$ характеризуется относительно низкой продуктивностью;

– работник с уровнем образования $e \geq e^*$ характеризуется относительно высокой продуктивностью, где $e^* \in (\breve{e}, e)$, то на рынке труда в условиях АСИ *существует разделяющее равновесие*:

$e_1 = 0$, $W = \theta_1$ для работников с относительно низкой продуктивностью;

$e_2 = e^*$, $e^* = (\breve{e}, e)$, $W = \theta_2$ для работника с относительно высокой продуктивностью.

Поскольку $\breve{e} < \hat{e}$, существует континуум разделяющих равновесий с уровнем образования e^* работника с относительно высокой продуктивностью, $e^* \in (\breve{e}, \hat{e})$(см. рис. 17.7).

17.3.5. Переходим к рассмотрению *случая объединяющего равновесия*.

Пусть фирма-наниматель F имеет следующее представление о связи уровня e образования работника и его продуктивности:

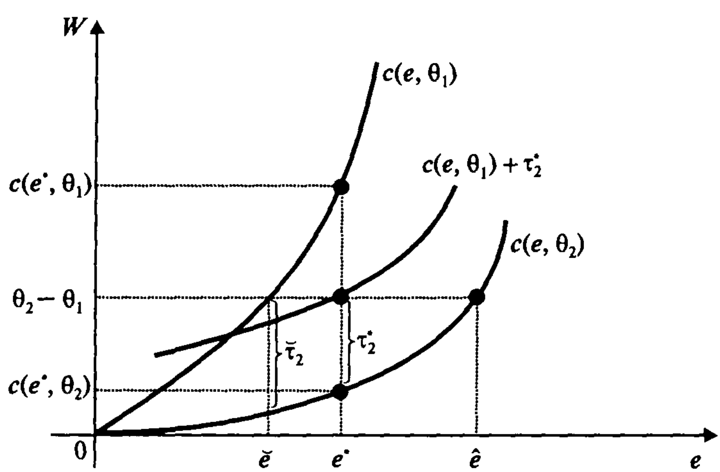


Рис. 17.6

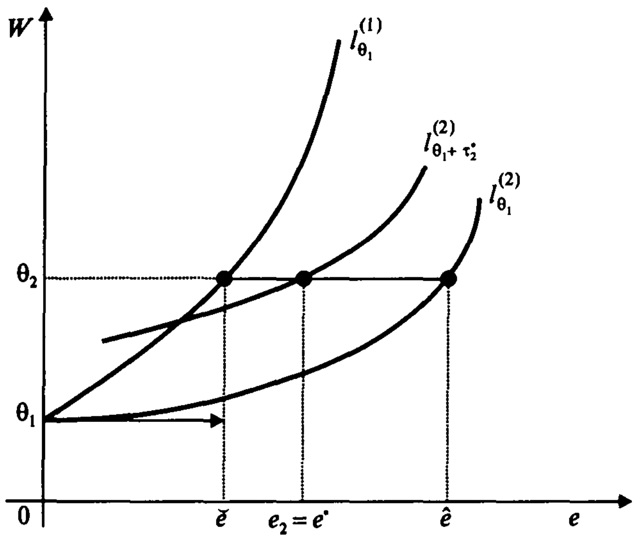


Рис. 17.7

- если е < е*, работник характеризуется относительно низкой продуктивностью с вероятностью 1;
- если е ≥ е*, работник характеризуется относительно низкой продуктивностью с вероятностью q или относительно высокой продуктивностью с вероятностью $(1 - q)$.

Как в случае разделяющего равновесия, каждый работник выбирает уровень образования между 0 и e^*. Если величина e^* достаточно *мала*, то каждый работник скорее выберет получение образования на уровне e^*. Для этого необходимо выполнение неравенств

$$q\theta_1 + (1-q)\theta_2 - c(e^*, \theta_1) \geq \theta_1, \qquad (17.3.2)$$

$$q\theta_1 + (1-q)\theta_2 - c(e^*, \theta_2) \geq \theta_1. \qquad (17.3.3)$$

Для содержательной интерпретации неравенства (17.3.2) преобразуем его следующим образом:

$$\theta_2 - \theta_1 > (1-q)(\theta_2 - \theta_1) \geq c(e^*, \theta_1),$$

откуда вытекает, что работник L_1 выбирает уровень e^* образования, ибо дополнительный выигрыш $\theta_2 - \theta_1$ работника L_1 при выборе им уровня e^* образования строго больше издержек $c(e^*, \theta_1)$, связанных с выбором уровня e^* образования.

Для содержательной интерпретации неравенства (17.3.3) преобразуем его так:

$$\theta_2 - \theta_1 > (1-q)(\theta_2 - \theta_1) \geq c(e^*, \theta_2),$$

откуда следует, что работник L_2 также выберет уровень e^* образования.

Итак, оба работника (L_1 и L_2) выберут один и тот же уровень e^* образования, в этом случае фирма-наниматель F предложит (ничего другого ей не остается) зарплату, равную ожидаемой продуктивности:

$$E_q(\theta) = q\theta_1 + (1-q)\theta_2.$$

Таким образом, имеет место *объединяющее равновесие*

$$e_1 = e^*, W = E_q(\theta),$$

$$e_2 = e^*, W = E_q(\theta).$$

В этом случае получение фирмой-нанимателем F сигнала с интенсивностью e^* не дает ей основания для идентификации работника с относительно высокой продуктивностью.

Объединяющее равновесие было получено в предположении, что справедливы неравенства (17.3.2) и (17.3.3).

Покажем сначала, что из неравенства (17.3.2) следует неравенство (17.3.3). Для этого вспомним, что $c(e^*, \theta_1) > c(e^*, \theta_2)$, откуда следует, что $-c(e^*, \theta_1) > -c(e^*, \theta_2)$.

Рассмотрим теперь очевидную цепочку

$$q\theta_1 + (1-q)\theta_2 - c(e^*, \theta_2) > q\theta_1 + (1-q)\theta_2 - c(e^*, \theta_1) \geq \theta_1,$$

откуда получаем, что из (17.3.2) следует (17.3.3).

Далее, в связи с тем что функция $c(e^*, \theta_1)$ строго возрастает по e ($c(0, \theta_1)$), с ростом величины e^* в левой части неравенства (17.3.2) эта левая часть убывает, поэтому найдется такая величина $e^0 > 0$, что неравенство (17.3.2) превратится в равенство

$$q\theta_1 + (1-q)\theta_2 - c(e^0, \theta_1) = \theta_1,$$

т.е. $(1-q)(\theta_2 - \theta_1) = c(e^0, \theta_1)$ (рис. 17.8).

Следовательно, для выполнения неравенства (17.3.2) достаточно, чтобы величина e^* была не больше этой величины e^0 (см. рис. 17.8).

Таким образом, $e^* \in [0, e_0)$. Поскольку $e_0 > 0$, существует континуум объединяющих равновесий с уровнем e^* образования работников с относительно высокой и с относительно низкой продуктивностью, $e^* \in [0, e_0)$.

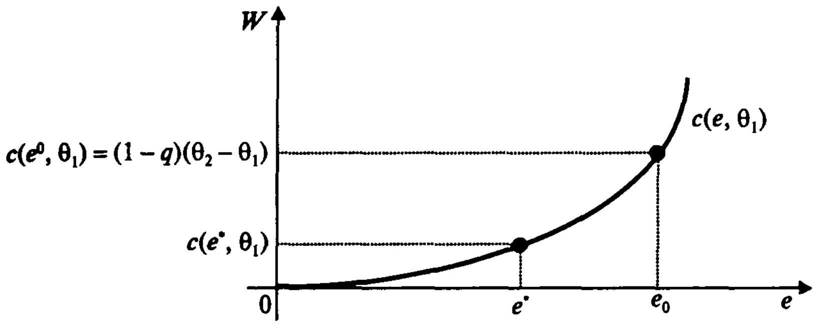


Рис. 17.8

Геометрическая интерпретация описанного выше объединяющего равновесия представлена на рис. 17.9. В связи с тем что при $e = e^*$ оба работника получат одну и ту же зарплату $E_q(\theta)$, линии безразличия $l_{\tau_1}^{(1)}$ и $l_{\tau_2}^{(2)}$ работников L_1 и L_2 должны пересечься в точке $(e^*, E_q(\theta))$.

17.3.6. Таким образом, в случае АСИ на рынке труда при отсутствии возможности подачи сигналов (при отсутствии института сигнализирования), как уже отмечалось выше, работник L_1 получит зарплату $W \geq \theta_1$, т.е. будет в выигрыше, а работник L_2 получит

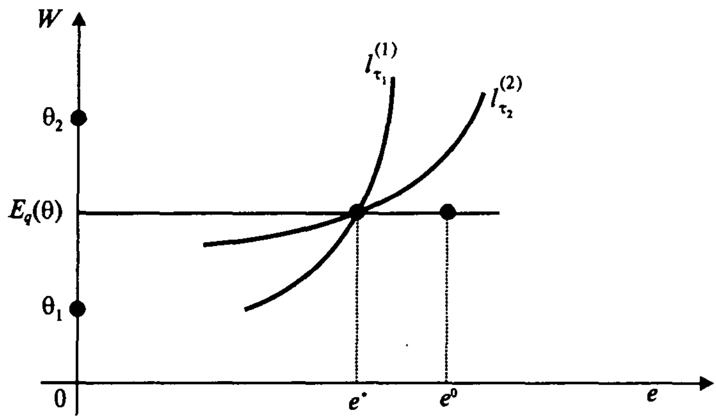


Рис. 17.9

зарплату $W \leq \theta_2$, т.е. будет в проигрыше. В этом случае фирма-наниматель F не может идентифицировать работников.

В случае АСИ на рынке труда при наличии возможности подачи сигналов (при наличии института сигнализирования), как только что было установлено, в случае разделяющего равновесия работник L_1 получит зарплату $W_1 = \theta_1$, работник L_2 получит зарплату $W_2 = \theta_2$. При этом зарплата работника L_1 уменьшается с W, которая была у него при отсутствии института сигнализирования, до θ_1, а зарплата работника L_2 увеличивается с W, которая была у него при отсутствии института сигнализирования, до θ_2. В этом случае фирма-наниматель F может идентифицировать работников.

В случае объединяющего равновесия при $0 < e^* < e^0$ имеем с зарплатой $W = q\theta_1 + (1 - q)\theta_2$ ситуацию, аналогичную той, которая имела место в случае АСИ при отсутствии возможности подачи сигналов.

В случае объединяющего равновесия при $e^* = 0$ (т.е. работники не обучаются) работник L_1 и работник L_2 получают одну и ту же зарплату $W = q\theta_1 + (1 - q)\theta_2$ без издержек, связанных с получением образования, т.е. имеем ситуацию, аналогичную той, которая имела место в случае АСИ при отсутствии возможности подачи сигналов.

Выше было отмечено, что существует континуум разделяющих равновесий $e^* \in (\breve{e}, \hat{e})$ и континуум объединяющих равновесий $e^* \in [0, e^0)$.

17.3.7. Наличие неединственности равновесий стимулирует экономистов на поиски таких равновесий, которые предпочитаются (по тем или иным критериям) другим равновесиям. Элиминирование этих других равновесий принято называть операцией *очищения* равновесий. Для очищения разделяющих равновесий можно использовать критерий минимизации издержек (затрат) работника L_2 за счет сокращения продолжительности e_2 его обучения при наличии ограничения $e^* \geq \breve{e}$. Напомним, что нижняя граница $\breve{e}$ величин e^* определялась как решение уравнения $c(e, \theta_1) = \theta_2 - \theta_1 > 0$, полученного в качестве «предельного» варианта первого условия самоотбора $\theta_1 > \theta_2 - c(e^*, \theta_1)$.

Назовем наименее *затратным разделяющим равновесием* такое, что:

$e_1 = 0$, $W = \theta_1$ для работника с относительно низкой продуктивностью;

$e_2 = \breve{e}$, $W = \theta_2$ для работника с относительно высокой продуктивностью.

Из вышеизложенного следует, что наименее затратное разделяющее равновесие существует и является единственным (рис. 17.10, на котором наименее затратное разделяющее равновесие представлено точками (контрактами между фирмой-нанимателем F и работниками L_1 и L_2) $A^{(1)} = (0,\ \theta_1)$ и $A^{(2)} = (\breve{e}, \theta_2)$, $\breve{\tau}_2 = \theta_2 - \theta_1 - c(\breve{e}, \theta_2)$.

17.3.8. Отметим, что разделяющим и объединяющим равновесиям можно дать теоретико-игровую интерпретацию в виде равновесия Нэша — Байеса.

В рассматриваемой *модели сигналов* (сигнализирование — *signaling*) первый ход делал работник (агент, т.е. информированный игрок), второй ход делала фирма-наниматель (принципал, т.е. неинформированный игрок), т.е. инициатива по преодолению информационной асимметрии принадлежит работникам.

Ниже рассматривается модель фильтрации (фильтрация (просеивание) — *screening*), в которой первый ход делает фирма-нани-

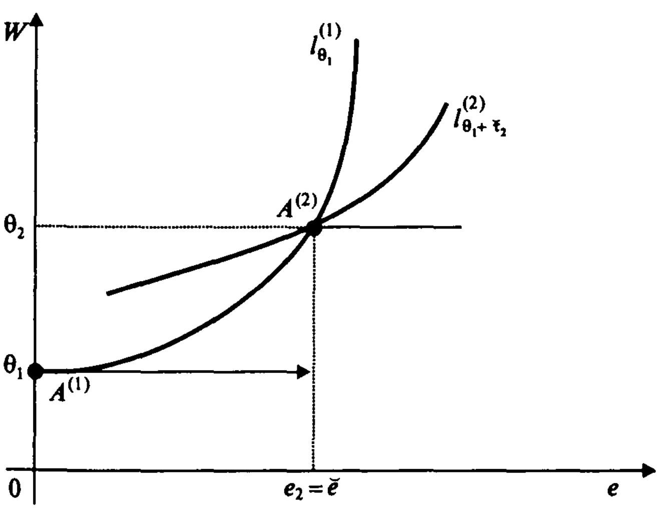


Рис. 17.10

матель (принципал, т.е. неинформированный игрок), предлагая работнику (агенту, т.е. информированному игроку) выбрать наилучшую (с точки зрения работника) из предлагаемых ему альтернатив (т.е. контрактов), т.е. инициатива по преодолению информационной асимметрии принадлежит уже фирме-нанимателю.

Первыми работами по теории фильтрации принято считать статьи М. Ротшильда и Дж.Е. Стиглица (*M. Rothschild*, *J.E. Stiglitz* (1976)) и С. Вильсона (*C. Wilson* (1976)).

Действия фирмы-нанимателя и работников можно представить в виде последовательной игры.

Нулевой ход делает Природа, выбирая тип работника.

Первый ход делает фирма-наниматель (принципал, т.е. неинформированный игрок), который предлагает (выбранному Природой) работнику (агенту, т.е. информированному игроку) набор альтернатив, т.е. набор контрактов.

Второй ход делает выбранный Природой работник, который принимает один из предложенных фирмой-нанимателем контрактов.

Все участники рынка вычисляют свои выигрыши (работник подсчитывает значение своей функции полезности, фирма-наниматель — свою прибыль).

Как и в случае модели сигналов, в модели фильтрации представлены работники (агенты) и фирмы-наниматели (принципалы), которые конкурируют по Бертрану. Следовательно, фирмы-наниматели получают нулевую прибыль. Для простоты предполагается (как и в модели сигналов) наличие одной фирмы-нанимателя F (которая получает нулевую прибыль) и работников двух типов, характеристики которых приведены в модели сигналов. Понятия объединяющего и разделяющего равновесий в модели фильтрации совпадают с аналогичными понятиями в модели сигналов.

В модели фильтрации любая пара неотрицательных чисел (e, W) называется *контрактом* (между фирмой-нанимателем и работником). Контракт (e, W) содержательно интерпретируется следующим образом: при уровне e образования работника фирма-наниматель предлагает работнику зарплату W. Предполагается, что работник является *лексиграфическим лодырем* (ЛГ-лодырем), т.е. из двух контрактов (e', W) и (e'', W) $(e' < e'')$ работник выберет контракт (e', W). Отсюда следует, что работник, имеющий определенную продуктивность, выберет единственный контракт, такой, что $(\tilde{e}, W)$, где $\tilde{e} = \min\limits_{(e,W)} e$.

Фирма-наниматель может предлагать любые контракты, т.е. любые пары (e, W) неотрицательных чисел e и W. Наличие функциональных зависимостей зарплаты W от уровня e образования не предполагается. Каждый работник из предлагаемых фирмой-нанимателем контрактов выбирает наилучший для себя, т.е. контракт, максимизирующий его функцию полезности.

Как и в модели сигналов, фирме-нанимателю неизвестны продуктивности работников. В модели фильтрации фирма-наниматель пытается оценить продуктивность работника на основании того, какой контракт из предложенных фирмой-нанимателем этот работник выбрал.

В модели фильтрации равновесие на рынке труда должно удовлетворять следующим условиям.

Во-первых, ни один из предлагаемых фирмой-нанимателем контрактов равновесия не дает ей отрицательную ожидаемую прибыль.

Во-вторых, не существует реализуемого контракта с положительной ожидаемой прибылью вне равновесия.

Покажем (методом от противного), что в модели фильтрации не существует объединяющего равновесия.

Пусть в модели фильтрации существует (хотя бы одно) объединяющее равновесие (геометрически интерпретируемое точкой $A = (e^*, Eq(\theta))$)

$$e_1 = e^*,\ W = Eq(\theta) = q\theta_1 + (1 - q)\theta_2,$$

$$e_2 = e^*,\ W = Eq(\theta) = q\theta_1 + (1 - q)\theta_2,$$

(рис. 17.11, который следует сопоставить с рис. 17.9), где число $0 \le q \le 1$ есть вероятность того, что при $e \ge e^*$ работник характеризуется относительно низкой продуктивностью, а число $1 - q$ есть вероятность того, что при $e \ge e^*$ работник характеризуется относительно высокой продуктивностью.

Здесь $Eq(\theta)$ — ожидаемая продуктивность, $W = Eq(\theta)$ — заработная плата, предлагаемая фирмой-нанимателем работникам L_1 и L_2. Тогда ожидаемая прибыль фирмы-нанимателя равна нулю:

$$Eq(pR) = Eq(\theta) - W = 0.$$

Рассмотрим контракт, предлагаемый фирмой-нанимателем, который геометрически интерпретируется точкой B, которая расположена строго ниже горизонтальной линии, проходящей через точку θ_2 на оси OW, и строго выше горизонтальной линии, прохо-

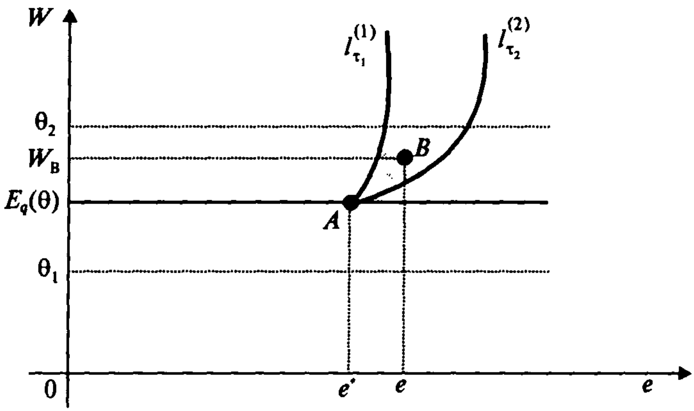


Рис. 17.11

дящей через точку A, и, следовательно, строго выше горизонтальной линии, проходящей через точку θ_1 на оси OW.

Точка $B = (e, W_B)$ расположена между пересекающимися в точке A линиями безразличия $l_{\tau_1}^{(1)}$ и $l_{\tau_2}^{(2)}$ работников L_1 и L_2 соответственно. Линия безразличия $l_{\tau_1}^{(1)}$ имеет уравнение $U_1(e, W, \theta_1) = \tau_1$, где $\tau_1 = Eq(\theta) - c(e^*, \theta_1)$. Градиент функции полезности $U_1(e, W, \theta_1)$ в точке А имеет вид

$$\operatorname{grad} U_1(e^*, Eq(\theta), \theta_1) = \left(-\frac{\partial c(e^*, \theta_1}{\partial e}, 1 \right),$$

поэтому значение функции полезности $U_1(e, W, \theta_1)$ в точке A строго больше ее значения в точке B. Это означает, что работнику L_1 невыгодно переходить от контракта A к контракту B.

Аналогично показывается, что работнику L_2 переход от контракта A к контракту B выгоден. Контракт $B = (e, W_B)$ между фирмой-нанимателем и работником L_2 обеспечивает фирме положительную прибыль $PR_2 = \theta_2 - W_B > 0$, ибо $\theta_2 > W_B$ (см. рис. 17.11).

Таким образом, *существует* реализуемый контракт $B = (e, W_B)$ между фирмой-нанимателем и работником L_2, который фирме обеспечивает положительную прибыль и который не совпадает с контрактом $A = (e^*, Eq(\theta))$(объединяющего равновесия).

Итак, предположение о том, что существует объединяющее равновесие в модели фильтрации, привело нас к противоречию:

существование (объединяющего) равновесия, с одной стороны, необходимо предполагает выполнение двух условий (см. выше), а с другой стороны, из существования объединяющего равновесия следует, что второе условие не выполняется. Следовательно, объединяющего равновесия в модели фильтрации не существует.

Переходим к вопросу существования и единственности разделяющего равновесия в модели фильтрации.

Пусть существует наименее затратное разделяющее равновесие, которое было выписано в модели сигналов (рис. 17.12):

$e_1 = 0$, $W = \theta_1$ для работника с относительно низкой продуктивностью;

$e_2 = \breve{e}$, $W = \theta_2$ для работника с относительно высокой продуктивностью.

Это разделяющее равновесие состоит из двух контрактов:

$A^{(1)} = (0, \theta_1)$ и $A^{(2)} = (\breve{e}, \theta_2)$ (см. рис. 17.12). Каждый из контрактов $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ приносит фирме-нанимателю нулевую прибыль:

$$PR_1 = \theta_1 - W(=\theta_1) = 0 \text{ и } PR_2 = \theta_2 - W(=\theta_2) = 0.$$

В связи с тем что все работники — ЛГ-лодыри, наименее затратное разделяющее равновесие (если оно *существует*) является *единственным*.

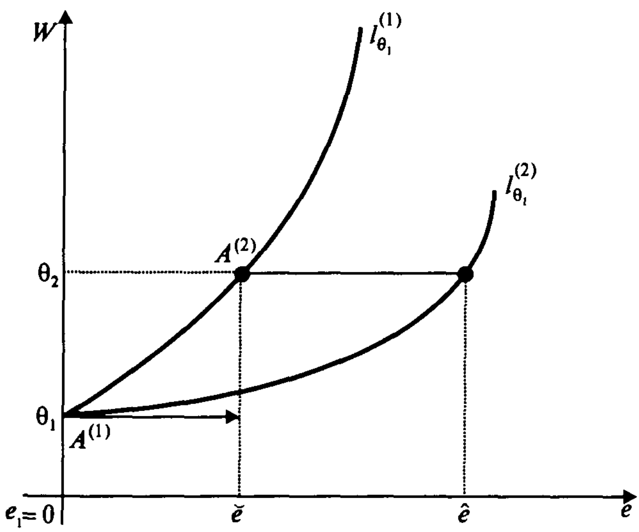


Рис. 17.12

Осталось провести исследование существования наименее затратного разделяющего равновесия.

Пусть фирма-наниматель предлагает работникам L_1 и L_2 контракт $D = (0,\ W_D)$, где $W_D = \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ (рис. 17.13).

Пусть число $0 \le q \le 1$ — доля работников L_1 первого типа, т.е. тех работников, которые характеризуются относительно низкой продуктивностью. Тогда число $0 \le q \le 1$ — доля работников L_2 второго типа, т.е. тех работников, которые характеризуются относительно высокой продуктивностью. В этом случае ожидаемая продуктивность работников, которые выберут контракт D, равна $E_q(\theta) = q\theta_1 + (1 - q)\theta_2$.

Если $q = q' \ge \dfrac{1}{2}$ (в этом случае среди работников, которые выберут контракт D, будут преобладать работники L_1), то, очевидно, $W_D = \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2} \ge E_{q'}(\theta)$ и поэтому ожидаемая прибыль фирмы-нанимателя будет отрицательной (неположительной) $E_{q'}(PR) = E_{q'}(\theta) - W_D \le 0$.

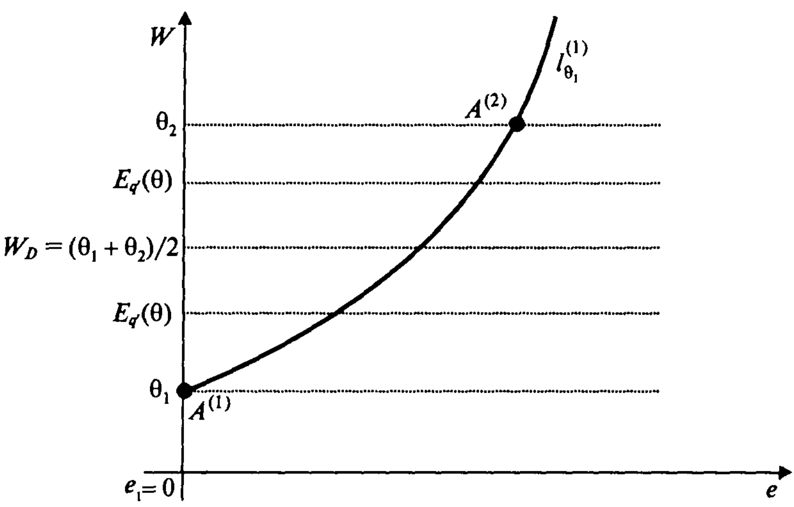


Рис. 17.13

Отрицательная (неположительная) прибыль будет также иметь место для всех контрактов $G = (e, W_D)$ и $H = (e, W_H)$, где $e \geq 0$ и $E_q(\theta) \leq W_H \leq \theta_2$.

Таким образом, в рассматриваемом случае выполнены оба условия существования равновесия, которое является разделяющим и которое состоит из двух контрактов $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$: во-первых, как только что отмечено, каждый из контрактов $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ разделяющего равновесия приносит фирме-нанимателю нулевую прибыль; во-вторых, все реализуемые контракты D, G и H, рассматриваемые вне разделяющего равновесия $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$, приносят фирме-нанимателю либо отрицательную, либо нулевую прибыль. Следовательно, выполнены оба условия *существования* (разделяющего) равновесия в модели фильтрации. Как уже отмечалось выше, это равновесие является наименее затратным разделяющим равновесием и оно *единственное*.

Если $q = q'' < \frac{1}{2}$ (в этом случае среди работников, которые выберут контракт $D = (0, W_D)$, преобладают работники L_2), то, очевидно, $W_D = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \leq E_{q''}(\theta)$, и поэтому ожидаемая прибыль фирмы-нанимателя будет положительной.

$$E_{q'}(PR) = E_{q'}(\theta) - W_D > 0.$$

Положительная прибыль будет также иметь место для всех контрактов $G = (e, W_D)$ и $H = (e, W_H)$, где $e \geq 0$ и $E_{q'}(\theta) > W_H > \theta_1$. Таким образом, в рассматриваемом случае каждый из контрактов $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ разделяющего равновесия приносит фирме-нанимателю нулевую прибыль, т.е. выполнено первое условие существования (разделяющего) равновесия в модели фильтрации. Второе условие существования равновесия в рассматриваемом случае не выполнено, ибо существуют реализуемые контракты D, G и H (достаточно существования одного из них) с положительной прибылью фирмы-нанимателя. Отсюда следует важный вывод: в рассматриваемом случае $\left(q \leq q'' < \frac{1}{2}\right)$ в модели фильтрации (разделяющего) равновесия не существует. Ранее было показано, что в моделях фильтрации не существует объединяющих равновесий.

17.3.9. Асимметричность информации присутствует на многих рынках. Добавим здесь несколько примеров: розничные магазины (устранит ли такой магазин дефект товара или вам разрешат товар вернуть? Магазин лучше покупателя знает свою линию поведения); торговцы редкими марками, монетами, книгами и картинами (подлинные или фальшивые эти предметы? Торговец знает гораздо больше об их подлинности, чем покупатель); кровельщики, водопроводчики, электрики (потребитель не полезет на крышу, когда кровельщик ремонтирует или обновляет ее); рестораны (часто ли его посетитель заходит там на кухню, чтобы проверить свежесть используемых шеф-поваром продуктов и соблюдение им законов об охране здоровья?).

Во всех этих случаях продавец знает больше о качестве товара, чем покупатель. И пока продавцы не смогут предоставить информацию о качестве покупателям, низкокачественные товары и услуги будут вытеснять высококачественные и рынок будет несостоятельным. Поэтому продавцы весьма заинтересованы в том, чтобы убедить потребителей, что качество предлагаемых товаров на самом деле высокое. В приведенных выше случаях это достигается в основном за счет репутации, которая является достоверным *сигналом* о высоком качестве товара. Индивидуум делает покупки именно в этом магазине, потому что он известен хорошим обслуживанием клиентов; нанимает тех кровельщика и водопроводчика, которые имеют репутацию хороших работников; идет именно в тот ресторан, который славится свежестью используемых продуктов и в котором никто из ваших знакомых не заболел после его посещения.

Иногда бизнесмены не в состоянии создать репутацию. Например, бóльшая часть клиентов закусочной или мотеля, находящихся у скоростного шоссе, заходят туда всего один раз или изредка, во время путешествия, так что этот бизнес не имеет возможности создать себе репутацию. Как в таком случае закусочным и мотелям решить проблему «лимонов»? Один из путей ее решения — *стандартизация*, которая является достаточно достоверным *сигналом* о высоком качестве товара. Живя в своем родном городе, индивидуум, возможно, не питается в «Макдональдсе». Однако, проезжая по скоростной трассе и решив позавтракать, он выберет именно «Макдональдс». Дело в том, что «Макдональдс» предлагает стандартизированный продукт; в любом «Макдональдсе» по всему миру используются одни и те же ингредиенты и подается одна и та же пища.

Перечень рынков с АСИ можно продолжить за счет рынков товаров длительного пользования, таких, как телевизоры, радиоаппаратура, кино- и фототовары, холодильники. Многие фирмы производят эти товары, но одни марки более надежны, чем другие. Если потребители не смогут определить, какая марка более надежна, то лучшие марки невозможно продать по более высоким ценам. Фирмы, производящие высококачественную, надежную продукцию, могут проинформировать об этом потребителей, подавая им *сигналы* в виде *гарантий* и *обязательств*.

Гарантии и обязательства эффективно сигнализируют о качестве товара, поскольку долгосрочные обязательства такого рода обходятся дороже производителю низкокачественного товара, чем высококачественного. (Низкокачественный товар чаще требует обслуживания по гарантии, которое производитель должен оплачивать.) Вследствие этого производители низкокачественного товара не заинтересованы в долгосрочных гарантиях. Таким образом, потребители могут справедливо считать гарантии и обязательства сигналами о высоком качестве товаров и будут платить за такие товары больше.

17.4. О модели «принципал — агент»

17.4.1. В этом параграфе на содержательном уровне проанализированы фрагменты экономической реальности, охватываемые моделью «принципал — агент». Интерпретация терминов «принципал» и «агент» дана в параграфе 17.1.

Мониторинг производительности работников и менеджеров требует, как правило, значительных издержек со стороны собственников. В большинстве фирм собственник (собственники) не в состоянии осуществить этот мониторинг. О своей производительности работники и менеджеры знают лучше собственника (собственников). Эта асимметричная информация приводит к проблеме «принципал — агент».

Агент — лицо, которое действует, а принципал — та сторона, на которую это действие влияет, так что менеджеры и рабочие являются агентами, а собственник — принципалом. Проблема «принципал — агент» состоит в том, что работники и менеджеры могут преследовать собственные цели даже за счет снижения прибыли собственника (собственников).

Отношения такого рода широко распространены в обществе. Например, врачи (врач — пример работника по найму) являются агентами для больниц и как таковые могут отбирать пациентов и делать процедуры, отвечающие их собственным предпочтениям, а не обязательно целям лечебного учреждения. Аналогично управляющие недвижимостью могут управлять собственностью не так, как хотели бы владельцы.

17.4.2. Пример 17.4.1. Проблема «принципал — агент» на частных предприятиях. Отдельная семья или финансовая организация обладает пакетом акций, превышающим 10%, лишь в 16 из 100 крупнейших промышленных корпораций США. Наиболее крупные фирмы управляются менеджерами. То обстоятельство, что большинство держателей акций владеют лишь незначительным процентом общего капитала корпорации, затрудняет получение ими информации о деятельности менеджеров. Одна из функций собственников (или их представителей) состоит в наблюдении за поведением менеджеров. Но такой мониторинг требует затрат на сбор и обработку информации, что недешево, особенно для отдельного лица.

Менеджеры частных корпораций могут преследовать свои собственные цели. Согласно одной точке зрения они, по существу, в большей степени добиваются роста объемов производства, чем прибыли, более быстрый рост и большая доля корпорации на рынке обеспечивают большие кассовые потоки, которые, в свою очередь, позволяют менеджерам чувствовать себя более сильными. Другая точка зрения переносит акценты с роста на полезность, получаемую менеджерами от их деятельности, имея в виду не столько прибыли, сколько престиж, власть над корпорацией, дополнительные льготы и другие преимущества, а также длительные сроки пребывания в должности.

Имеются, однако, некоторые важные факторы, ограничивающие возможности менеджеров уклоняться от достижения целей собственника (собственников). Во-первых, держатели акций могут недвусмысленно выражать недовольство, когда они чувствуют, что менеджеры ведут себя неподобающим образом, а в исключительных случаях — сменить их (возможно, при помощи совета директоров корпорации, чья обязанность заключается в наблюдении за поведением менеджеров). Во-вторых, в управлении корпорацией могут развиваться сильные рыночные начала. Если при плохом управлении корпорацией появляется угроза перехода управления в другие руки, то у менеджеров появляется серьезный стимул к максимизации прибыли. В-третьих, может существовать хорошо развитый рынок менеджеров. Если те из них, которые максимизируют прибыль, пользуются спросом, то они будут получать высокие оклады, что, в свою очередь, вызовет у других менеджеров желание придерживаться той же цели.

Пример 17.4.2. Проблема «принципал — агент» в государственных организациях. Модель «принципал — агент» может также помочь понять поведение менеджеров в государственных организациях. Здесь менеджеры могут быть заинтересованы во власти и дополнительных доходах, которые можно получить благодаря расширению организации за пределы эффективного уровня. Поскольку поведение менеджеров в общественном секторе контролировать также дорого, то и нет гарантий, что они обеспечат эффективный выпуск. Проверки государственных учреждений, проводимые в законодательном порядке, чаще всего бывают неэффективными, поскольку учреждения имеют лучшую информацию о своих издержках, чем проверяющие органы.

Однако, хотя в государственном секторе отсутствуют рыночные силы, дисциплинирующие менеджеров на частных предприятиях, существуют важные факторы, ограничивающие возможности менеджеров уклоняться от достижения основных целей государственных организаций. Во-первых, менеджеры государственных организаций заботятся не только об их размерах. Многие из них отдают предпочтение общественным работам с низкими издержками, так как им небезразличны «общественные интересы». Во-вторых, менеджеры государственных организаций (в не меньшей степени, чем частных) подчиняются строгим требованиям рынка менеджеров. Если выяснится, что они преследуют несоответствующие цели, то их возможности получить в будущем более высокие оклады сужаются. В-третьих, законодательные и другие государственные органы выполняют функцию надзора. Например, в США Государственная бухгалтерская служба, а также Управление менеджмента и бюджета тратят много сил на мониторинг других учреждений.

В США на местном уровне менеджеры в государственном секторе подвергаются даже более строгому контролю, чем на федеральном уровне. Пусть, например, какое-то городское управление транспорта расширило автобусные перевозки сверх эффективного уровня. Тогда жители города могут добиться смены руководства управления или же, если это не удастся, использовать альтернативные виды транспорта. И конкуренция между различными общественными службами может стать такой же эффективной, как и между частными корпорациями, ограничивая тем самым ориентацию менеджеров на цели, отличные от максимизации прибыли.

Пример 17.4.3. Об эффективности деятельности менеджеров некоммерческих и коммерческих фирм сферы медицинского обслуживания. При обследовании в США 725 больниц из 14 основных лечебных сетей сравнивались прибыли и средние издержки в коммерческом и некоммерческом секторах.

В ходе обследования установлено, что в 1977 и 1981 гг. нормы прибыли в этих типах больниц действительно различались. Например, в 1977 г. коммерческие больницы имели рентабельность 11,6%, тогда как некоммерческие — 8,8%. В 1981 г. прибыль первых составила 12,7%, а вторых — лишь 7,4%. Прямое сравнение прибыли и издержек этих больниц, однако, не вполне корректно, потому что они выполняют разные функции. Например, программы медицинского обслуживания по месту жительства осуществляются в 24% некоммерческих лечебниц и лишь в 6% коммерческих. Аналогичные различия можно обнаружить в обеспечении специальными услугами: 10% больниц первого типа и 5% второго имели сердечно-сосудистые отделения. Кроме того, 43% некоммерческих больниц и лишь 29% коммерческих имели отделения для недоношенных детей.

Используя регрессионный анализ, который определяет различия в предложении услуг, можно установить, объясняются ли эти различия более высокими издержками. Такое исследование обнаружило, что после исключения различий в услугах средние издержки на одного пациента в день на 8% выше в некоммерческих лечебницах, чем в коммерческих. Отсюда следует, что коммерческий статус больницы влияет на ее поведение в соответствии с моделью «принципал — агент»: не сталкиваясь с конкуренцией, некоммерческие лечебные учреждения в отличие от коммерческих могут ослабить внимание к издержкам и, следовательно, в недостаточной мере служить исполнителями для своих заказчиков и общества в целом.

На основании приведенных результатов обследования нельзя сделать вывод, что некоммерческие больницы бесполезны: они оказывают услуги, которые общественно востребованы. Однако при решении вопроса об освобождении их от уплаты налогов необходимо принять во внимание дополнительные издержки, связанные с управлением ими.

17.5. О теории эффективной заработной платы

17.5.1. В теории эффективной заработной платы базовой является *модель уклонения* наемных работников от добросовестного выполнения своих обязанностей, предложенная К. Шапиро и Дж. Стиглицем (*C. Shapiro, J.E. Stiglitz* (1984)). В этом параграфе 17.5 представлена на вербальном уровне основная идея этой модели. Детально модель описывается и анализируется в курсе, посвященном экономике труда.

Если рынок труда конкурентный, то всякий желающий работать найдет себе место за оплату, равную его предельному продукту. Однако большинство стран имеют высокую безработицу, несмотря на то что многие люди упорно ищут работу. Очевидно, многие безработные работали бы и за более низкую заработную плату, чем та, которую получают занятые. Однако фирмы не снижают заработную плату, не повышают уровень занятости и не увеличивают прибыль.

Производительность труда принято определять в зависимости от способностей работников и инвестиций фирм в основной капитал. Модели эффективной заработной платы предполагают, что производительность труда зависит также от размеров его оплаты. Существуют различные объяснения этой связи.

В развивающихся странах, как полагают экономисты, производительность работников зависит от оплаты труда в той мере, в какой они могут лучше питаться. Более высокооплачиваемые работники имеют возможность купить больше еды и лучшего качества, отчего они меньше болеют и интенсивнее трудятся.

Более подходящее объяснение для развитых стран дает *модель уклонения* наемных работников от добросовестного выполнения своих обязанностей. Поскольку мониторинг работников стоит дорого или вообще невозможен, фирмы в этих моделях имеют несовершенную информацию о производительности работников, что ставит проблему «принципал — агент». В простейшем виде модель уклонения предполагает, что рынки конкурентны, так что все работники одинаково производительны и получают одну и ту же заработную плату. Будучи нанятыми, они могут либо эффективно трудиться, либо ослабить свои усилия (уклоняться от работы). Но так как информация об их деятельности ограничена, работники могут не потерять работу, работая спустя рукава.

Модель уклонения имеет следующий вид. Если фирма платит своим работникам равновесную заработную плату W^*, то у работников есть стимул уклоняться от работы. Даже если это станет известно и их уволят (а этого может и не случиться), они немедленно устроятся где-нибудь еще за ту же заработную плату. В такой ситуации угроза увольнения не действует на работников, поэтому у них нет стимулов трудиться максимально эффективно. Чтобы повысить эффективность труда, фирма должна предложить работникам повышенную оплату W_e. При этом увольнение за недобросовестную работу приведет к уменьшению заработка, ибо тогда уволенные работники нанимаются другой фирмой, которая выплачивает заработную плату в размере $W^*(W^* < W_e)$. Когда различие в оплате труда достаточно велико, работники станут трудиться эффективно и фирма решит проблему уклонения путем ее элиминирования. Уровень оплаты, позволяющий добиться этого, называется *эффективной заработной платой*. С проблемой уклонения сталкиваются все фирмы. Это значит, что все они захотят предложить оплату труда W_e, превышающую равновесный уровень. Повсеместное повышение заработной платы не приведет к тому, что у работников исчезнет стимул к добросовестному выполнению своих обязанностей в связи с тем, что другие фирмы предлагают заработную плату, превышающую W^*, ибо в этом случае спрос на рабочую силу окажется ниже равновесного уровня, т.е. появится безработица. Это означает, что рабочие, уволенные за уклонение от добросовестного выполнения своих обязанностей, какое-то время будут безработными, прежде чем им предложат заработную плату W_e в другой фирме.

Рисунок 17.14 иллюстрирует явление уклонения от работы на рынке труда. Линия спроса на труд D_L, как правило, является нисходящей. Если бы не было уклонения, то точка (L^*, W^*) пересечения D_L с линией предложения S_L труда показывала бы рыночную заработную плату W^* и полную занятость L^*. Однако, учитывая уклонение, фирмы не согласны платить W^*. Им выгоднее при любом уровне безработицы назначить несколько более высокую плату, с тем чтобы работники стали эффективнее трудиться. Этот уровень оплаты показан линией *NSC*, построенной с учетом условия *отсутствия уклонений* (*NSC – No shrinking condition*). Эта линия *NSC* показывает, какова минимальная заработная плата, при которой работники перестают уклоняться от работы, при каждом уровне занятости L. Заметим, что чем ниже уровень занятости L (т.е. чем выше уровень безработицы), тем меньше разница между эффективной заработной платой W и W^*. Это объясняется тем, что при высоком уровне безработицы лица, уклоняющиеся от выполнения своих обязанностей, рискуют долго не найти работу и поэтому не требуют большого вознаграждения за высокопроизводительный труд (без уклонения).

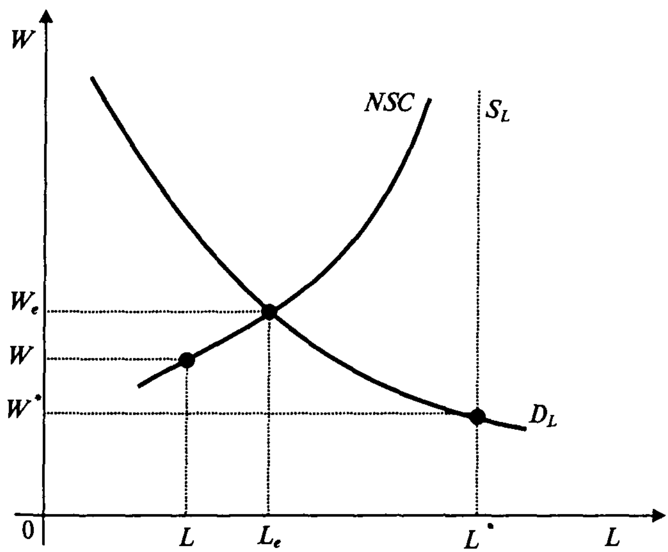


Рис. 17.14

На рис. 17.14 равновесная заработная плата W_e находится на пересечении линий NSC и D_L с числом рабочих L_e, получающих заработную плату W_e. Это объясняется тем, что NSC выражает минимальный уровень оплаты, при котором фирмы еще исключают уклонения. Им не нужно платить больше, чтобы привлечь требуемую численность рабочих, но они не могут предложить и меньше из опасения уклонений. Заметим, что линия NSC всегда расположена выше линии предложения труда S_L. Это означает, что в равновесии (L_e, W_e) всегда будет какая-то безработица ($L^* - L_e$).

17.5.2. Пример 17.5.1. Один из первых примеров использования эффективной заработной платы можно найти в истории компании «Форд» — одного из самых крупных производителей автомобилей в США. До 1913 г. производство автомобилей в значительной степени зависело от высококвалифицированных рабочих. Но применение сборочного конвейера коренным образом изменило положение. Теперь требовались специалисты гораздо более низкого уровня квалификации, а производство все больше стало зависеть от поддержания оборудования конвейера в рабочем состоянии. Это привело к падению уровня трудового энтузиазма рабочих, и они стали активно увольняться. В 1913 г. текучесть кадров на «Форде» составила 380%. В следующем году она достигла 1000%, что резко снизило рентабельность компании «Форд».

Компании необходимо было обеспечить себя стабильной рабочей силой, и Генри Форду, а также его деловому партнеру Джеймсу Казенсу удалось этого добиться. В 1914 г., когда дневная оплата труда в отрасли в среднем составляла от 2 до 3 долл., компания «Форд» ввела для своих рабочих дневной заработок в 5 долл. Эта мера была продиктована стремлением повысить эффективность труда (а не щедростью). Цель заключалась в привлечении лучших работников, которые не оставляли бы компанию, и в конечном счете в увеличении прибыли компании.

Хотя Генри Форда и критиковали за это решение (и не без основания, ибо рост зарплаты приводит к росту издержек, однако вопрос о росте заработной платы характеризуется не только простым эффектом (ростом издержек), но и составным эффектом (ростом прибыли), что и имело место у фирмы «Форд»), оно оказалось вполне успешным. Кадровый состав стал более стабильным, а известность компании обеспечила реализацию продукции. И поскольку Генри Форд получил возможность отбора рабочих, он смог нанять более производительных. Как следует из расчетов начальника отдела труда компании «Форд», производительность труда компании выросла на 51%. Согласно другому исследованию, число прогулов уменьшилось вдвое и пропуски по уважительным причинам также резко сократились. Итак, эффективность повысилась в большей степени, чем того требовало возмещение дополнительных затрат на оплату труда. В результате прибыли у компании «Форд» существенно выросли — с 30 млн долл. в 1914 г. до 60 млн в 1916 г.

Вопросы для самоконтроля к главе 17

1. Что такое асимметричная информация? принципал? агент?
2. Что такое неблагоприятный отбор?
3. Что такое моральный риск?
4. Как выглядит динамика линий спроса на высококачественные и низкокачественные автомобили в модели рынка «лимонов»? Ответ обоснуйте.
5. В чем суть неблагоприятного отбора на рынке медицинского страхования?
6. В чем суть неблагоприятного отбора на рынке кредита?
7. В чем суть связи между понятиями «идеальная (совершенная) ценовая дискриминация» и «симметричная информация»?
8. Как содержательно интерпретируется условие участия в модели пакетной дискриминации?
9. Как содержательно интерпретируется условие самовыявления в модели пакетной дискриминации?
10. Проблема морального риска на рынке труда: опишите понятийный аппарат модели.
11. Как функционирует модель рынка труда в условиях симметричной информации?
12. Как функционирует модель рынка труда в условиях асимметричной информации?
13. Как меняется общественное благосостояние при переходе от симметричной информации к асимметричной информации в случае стимулирования агента трудиться усердно и в случае стимулирования агента трудиться с минимальным усилием?
14. В чем суть морального риска в отрасли сбережений и займов?
15. В чем суть концепции рыночных сигналов?
16. Какой сигнал является сильным на рынке труда? Ответ обоснуйте.
17. В чем суть веры принципала, т.е. оценки его представления о том, как связан уровень образования агента с его продуктивностью?

18. В чем отличие ситуации на рынке труда в условиях асимметричной информации, в которой работник имеет возможность подавать сигнал о своей продуктивности, от ситуации, когда у работника отсутствует возможность подавать сигнал о своей продуктивности?
19. Что такое разделяющее равновесие на рынке труда в условиях асимметричной информации?
20. Дайте содержательную интерпретацию первому и второму условиям самовыявления (самоотбора) агента (работника).
21. Как получаются нижняя и верхняя оценки промежутка, содержащего все веры принципала в случае разделяющего равновесия?
22. Что такое объединяющее равновесие на рынке труда в условиях асимметричной информации?
23. Как получается верхняя оценка для значений продуктивности агента объединяющего равновесия?
24. Что такое наименее затратное разделяющее равновесие? Раскройте проблему существования и единственности наименее затратного разделяющего равновесия.
25. В чем сходство и различие между моделью сигналов и моделью фильтрации?
26. Что означает термин «лексикографический лодырь»?
27. Как формируются условия существования равновесия на рынке труда в модели фильтрации?
28. Как обосновать, что в модели фильтрации не существует объединяющего равновесия?
29. Как обосновать, что в модели фильтрации существует не более одного разделяющего равновесия?
30. Что такое репутация фирмы? Прокомментируйте это понятие в рамках концепции рыночных сигналов.
31. Что такое стандартизация продукции фирмы? Прокомментируйте понятие гарантии в рамках концепции рыночных сигналов.
32. В чем суть отношения «заказчик — исполнитель»? Приведите примеры отношения «заказчик — исполнитель».
33. Каковы факторы, ограничивающие возможности управляющих уклоняться от достижения целей собственников?
34. Каковы факторы, ограничивающие возможности управляющих уклоняться от достижения целей государственных организаций?
35. В чем суть модели уклонения?
36. Что такое линия *NSC*, построенная с учетом отсутствия уклонения? Каково взаимное расположение линии *NSC* и линии предложения труда S_L?
37. Что такое эффективная заработная плата?
38. Какие эффекты (прямой и составной) имело резкое повышение заработной платы работникам фирмы «Форд» накануне Первой миро-

вой войны? Объясните, почему рост дохода резко опережал рост издержек.

Задачи и упражнения для самоконтроля к главе 17

1. Во многих университетах Запада используется следующая система оценок (в порядке убывания их значимости): A, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*. Крупный университет запрещает ставить отметки *D*, *E* или *F*. Он объясняет это тем, что студенты стараются учиться выше среднего уровня, когда они не испытывают опасений быть исключенными. Университет заявляет, что он хочет, чтобы все его студенты получали только оценки *A* и *B*. Если цель состоит в том, чтобы поднять отметки в целом до уровня *B* или выше, то является ли это эффективной политикой? Ответьте, учитывая проблему морального риска.
2. Сталкиваясь с проблемой репутации производства автомобилей, требующих редкого ремонта, ряд американских автомобильных компаний предложили широкие гарантии покупателям машин (например, семилетние гарантии на все детали и выполнение необходимого ремонта):
   а) с учетом ваших знаний о рынке «лимонов» почему это будет разумной политикой?
   б) будет ли эта политика создавать проблему морального иска? Объясните.
3. Чтобы стимулировать конкуренцию и повысить благосостояние потребителей, Федеральная комиссия по торговле США требует, чтобы фирмы давали правдивую рекламу. Почему правдивая реклама благоприятствует конкуренции? Почему рынок менее конкурентен, если фирмы обманывают при рекламе?
4. Страховая компания рассматривает выпуск трех типов страховок от пожара:
   а) с полным страховым покрытием;
   б) с полным страховым покрытием за вычетом 10 000 долл.;
   в) с 90%-м покрытием всех потерь. Какая страховка, скорее всего, создаст проблему морального риска?
5. Для рынков с преобладанием асимметричной информации согласились бы вы с каждым из следующих утверждений? Дайте краткое объяснение:
   а) правительство должно субсидировать «Вестник потребителя»;
   б) правительство должно установить стандарты качества: например, фирмам должно быть запрещено продавать товары низкого качества;
   в) производитель качественного товара захочет, вероятно, предложить широкие гарантии;

г) правительство должно потребовать, чтобы все фирмы предложили широкие гарантии.

6. Доход фирмы за определенный короткий промежуток времени описывается формулой

$R = 10e - e^2$,

где e — затраты труда типичного рабочего (все рабочие предполагаются идентичными).

Рабочий выбирает свой уровень затрат труда так, чтобы максимизировать свою чистую заработную плату (т.е. за вычетом стоимости затрат) $w - e$ (стоимость единицы затрат труда полагается равной 1). Определите уровень затрат труда и уровень прибыли (доход минус уплаченная заработная плата) для каждой из следующих систем заработной платы. Объясните, почему эти различные схемы стимулирования исполнителя дают различные результаты:

а) $w = 2$ для $e \geq 1$; в противном случае $w = 0$;

б) $w = R/2$;

в) $w = R - 12{,}5$.

7. Функция полезности агента (наемного работника) имеет вид $U(W, e) = \sqrt[3]{W} - e$, где W — его заработная плата; e – уровень усилий агента, прилагаемых на рабочем месте. Альтернативная полезность агента $\bar{U} = 3$. Взаимосвязь между доходом R принципала (фирмы-нанимателя) и уровнем усилий агента представлена в следующей таблице:

Доход / Уровень усилий	$R_1 = 5$	$R_2 = 65$
$e_1 = 2$	$p_{11} = 0{,}8$	$p_{12} = 0{,}2$
$e_2 = 4$	$p_{21} = 0{,}3$	$p_{22} = 0{,}7$

а) постройте на плоскости $OW(U + e)$ график функции полезности агента;

б) проведите необходимые расчеты в условиях симметричной информации:

— найдите заработную плату $\bar{m}_2$ и промежуток возможных значений заработной платы m_1;

— найдите $ER_{(2)}$, $EPR_{(2)}$ и $U(\bar{m}_2, e_2)$;

— найдите заработную плату $\bar{\mu}_1$ и промежуток возможных значений заработной платы μ_2;

— найдите $ER_{(1)}$, $EPR_{(1)}$ и $U(\bar{\mu}_1, e_1)$;

— найдите разности $\bar{m}_2 - \bar{\mu}_1$ и $EPR_{(2)} - EPR_{(1)}$ и приведите их содержательную экономическую интерпретацию;

в) проведите необходимые расчеты в условиях асимметричной информации:

— выпишите условия участия и самовыявления агента в случае, когда его стимулируют трудиться усердно;

— выпишите ожидаемую прибыль принципала, который стимулирует агента трудиться усердно;

— решите задачу максимизации ожидаемой прибыли принципала, который стимулирует агента трудиться усердно при выполнении для агента условий участия и самовыявления, и выпишите оптимальный стимулирующий контракт;

— в случае оптимального стимулирующего контракта выпишите ожидаемую заработную плату Ew^* агента, ожидаемую полезность Eu^* агента, ожидаемый доход ER^* принципала и ожидаемую прибыль EPR^* принципала;

— сопоставьте ожидаемую прибыль EPR^* с найденной ранее $EPR_{(1)}$ и сделайте содержательные выводы;

г) постройте таблицу, аналогичную табл. 17.3, и сопроводите эту таблицу содержательными пояснениями;

д) постройте график, аналогичный графику на рис. 17.4, и сопроводите его содержательными пояснениями;

е) оцените общественное благосостояние в условиях симметричной и асимметричной информации. Сопоставьте общественное благосостояние в случае, когда агента стимулируют трудиться усердно и с минимальным усердием.

8. Пусть линия спроса на труд имеет уравнение $y = 20 - 2w$. Линия предложения труда имеет уравнение $y = 2w - 10$. Линия NSC имеет уравнение $w = 0{,}5y + 5{,}5 + \left(\frac{y}{20}\right)^2$ (цифры условные):

а) определите равновесную заработную плату w^* и равновесный объем труда L^*;

б) определите эффективную заработную плату w_e и эффективный объем труда L_e;

в) дайте геометрическую интерпретацию пунктов а) и б).

Вопросы для контрольных работ к главе 17

1. В чем отличие неблагоприятного отбора и морального риска на рынке страхования? Ответ обоснуйте.
2. Каковы меры устранения проблемы морального риска для собственников?

46*

3. Почему продавец может считать выгодным подавать сигналы о качестве своей продукции? Почему гарантии и обязательства являются рыночными сигналами?
4. Почему менеджеры фирм могут стремиться к достижению целей, отличных от максимизации прибыли — цели акционеров фирмы?
5. Как модель «заказчик — исполнитель» объясняет, почему государственные предприятия, такие, как почты, часто преследуют цели, отличные от максимизации прибыли?

Задачи для контрольных работ к главе 17

1. Пусть линия спроса на труд имеет уравнение $y = 30 - 3w$. Линия предложения труда имеет уравнение $y = \frac{3}{2}w - 6$. Линия NSC имеет уравнение $w = \frac{2}{3}y + 4{,}5 + \left(\frac{y}{30}\right)^2$:
   а) определите равновесную заработную плату w^* и равновесный объем труда L^*;
   б) определите эффективную заработную плату w_e и эффективный объем труда L_e;
   в) дайте геометрическую интерпретацию пунктов а) и б).
2. Функция полезности агента (наемного работника) имеет вид $U(W, e) = \sqrt[4]{W} - e$, где W — его заработная плата; e — уровень усилий агента, прилагаемых на рабочем месте. Альтернативная полезность агента $\bar{U} = 4$. Взаимосвязь между доходом R принципала (фирмы-нанимателя) и уровнем e усилий агента представлена в следующей таблице:

Доход / Уровень усилий	$R_1 = 4$	$R_2 = 100$
$e_1 = 2$	$p_{11} = 0{,}7$	$p_{12} = 0{,}3$
$e_2 = 5$	$p_{21} = 0{,}4$	$p_{22} = 0{,}6$

Требуется выполнить задания а)—е) пункта 7 из раздела «Задачи и упражнения для самоконтроля к главе 17.

Глава 18 [1]

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МИКРОЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

18.1. Влияние современных форм научно-технологического прогресса (телекоммуникациоиных систем и компьютеризации) на микроэкономические процессы

18.1.1. В развитых странах фирмы практически всех секторов экономики используют возможности, предоставляемые сетью Интернет, в целях снижения своих издержек, расширения связей с поставщиками, повышения эффективности управления запасами, более адекватного учета в реальном времени плановых решений. Фактически появление сети Интернет породило новую экономическую реальность.

Темпы развития телекоммуникационной отрасли (отрасли высоких технологий) крайне высоки.

Объем информации, передаваемой через Интернет, удваивается каждые 100 дней.

Темпы развития Интернета можно сравнить с темпами развития радио, телевидения и персональных компьютеров (ПК). Для того чтобы охватить 50 млн своих поклонников, радио потребовалось 38 лет, телевидению — 13 лет, персональному компьютеру — 16 лет. Интернет пересек эту отметку всего за 4 года.

---

[1] При подготовке параграфов 18.1—18.7 главы 18 были использованы материалы источников, приведенных в списке литературы к главе 18.

Цены на продукцию отрасли информационных технологий (IT) в США, скорректированные на улучшение качества и производительности, падали, в то время как цены во всей остальной экономике США росли. В частности, за 6 лет (с 1991 по 1997 г.) цена условного микропроцессора *MIPS* (*million instructions per second*), т.е. выполняющего 1 млн процессорных инструкций в секунду, упала с 230 до 3,42 долл.

По закону Мура, производительность компьютеров удваивается каждые 18 месяцев. Эмпирические данные показывают, что этот закон выполняется последние 30 лет. Исключение составил 2002 г., когда для удвоения производительности потребовалось менее 18 месяцев.

Экономический рост ускоряется не только в самой отрасли информационных технологий, но и в других отраслях экономики, ибо количество людей, имеющих выход в Интернет, постоянно растет, стремительно увеличивается и коммерческое использование Интернета.

Можно выделить 4 составляющие экономического роста, порождаемые НТП, в частности цифровой (электронной) революцией:

- развитие сети Интернет значительно увеличивает инвестиции в компьютеризацию и телекоммуникационные системы, создание специальных видов услуг;
- электронная коммерция на уровне фирм: примерно с 1995 г. фирмы (компании) стали использовать Интернет для взаимовыгодной торговли. Использование Интернета позволяет достичь значительных улучшений в производительности от использования электронных сетей в целях создания, покупки, продажи, доставки продуктов и услуг;
- электронная доставка товаров и услуг: компьютерные программы, газеты, музыкальные компакт-диски теперь не обязательно упаковывать и доставлять напрямую клиентам и в торговые точки. Можно получать электронные аналоги через Интернет. На сегодня очень распространены электронные сделки по покупке авиабилетов и операции с ценными бумагами. Такие услуги, как консалтинг, банковские услуги и страхование, обучение и медицинская помощь, могут встретить некоторые препятствия на своем пути, но уже сейчас предоставляющие их фирмы начинают все шире использовать Интернет в целях изменения стиля ведения бизнеса. Через неко-

торое время электронные продажи и доставка электронных товаров и услуг, скорее всего, станут основной движущей силой новой цифровой (электронной) экономики;

- розничная торговля физическими товарами. Интернет может быть также использован в целях продажи, хранения и физической доставки продуктов. Объем электронных продаж определенной продукции, например компьютерной техники, программного обеспечения, автомобилей, книг и цветов, растет очень быстрыми темпами.

Развитие собственно сети Интернет с чисто технологической точки зрения обеспечивается появлением и внедрением новых технологий.

Основной прогресс в телекоммуникациях состоит в повышении пропускной способности каналов связи. Возникла технология *DSL*, позволяющая использовать кабельные соединения, новые алгоритмы сжатия передаваемой информации, появились оптико-волоконные сети.

Темпы инвестиций в телекоммуникационный сектор стремительно увеличиваются, достаточно посмотреть на некоторые числа. В США группа компаний проинвестировала 27 млрд долл. для построения глобальной информационной сети, использующей спутники связи в 1998–2002 гг. Инвестиции в спутники и ретрансляторы достигли достаточных размеров. Персональные компьютеры, смарт-телефоны, часы смогут передавать и получать голосовую и видеоинформацию, имея при этом выход в Интернет, не привязанный физически к какой-то одной точке, что существенно повысит мобильность и производительность множества различных систем.

18.1.2. Электронная коммерция растет наивысшими темпами среди всех остальных форм бизнеса. Одной из причин является не только важность уровня *B2B* (*business-to-business*) и *B2C* (*business-to-consumer*), но и внутрифирменный уровень. Информационные технологии используются для координации закупочных операций между фирмами и поставщиками, для оперативного сбора и доставки информации в отделы планирования и логистики. Транспортные отделы располагают информацией о состояниях на складах и о текущем состоянии каждой транспортной операции.

Самые ранние компьютеры использовались исключительно в научных и военных целях, но не для торговли. Компьютеры стали использоваться в торговле, когда в 1960-х гг. была создана система *ERMA* (*the Electronic Recording Machine — Accounting*). В то время банки уже начали ощущать чрезмерный поток чеков, подлежащих обработке. В период с 1943 по 1952 г. объем чеков в обращении удвоился и вырос с 4 млрд подписанных чеков в год до 8 млрд. Автоматизируя процесс их обработки с помощью *ERMA*, первый банк (*Bank of America*), использующий компьютер, сообщил о том, что 9 работников могли выполнять объем заданий, для которого раньше требовалось 50 человек.

Коммерческое использование компьютеров стало быстро распространяться, когда компании различных секторов экономики стали использовать информационные технологии в бухгалтерском учете, административных задачах, создании проектных отчетов, планировании производственного цикла.

В 1970-х и 1980-х гг. фирмы стали использовать информационные технологии за пределами их офисов, посылая и принимая электронные дубликаты запросов на покупки, уведомления, погрузочные документы через систему *EDI* (*Electronic Data Interchange*).

В 1980-х гг. произошло достаточно важное событие — были введены в эксплуатацию *CAD*-системы (*computer-aided design*), *CAE*-системы (*computer-aided engineering*), *CAM*-системы (*computer-aided manufacturing*), которые позволили инженерам, дизайнерам и техническому персоналу получить доступ и работать с техническими спецификациями, инженерными проектами, дизайнерскими разработками через внутренние корпоративные информационные сети (интрасети).

Однако стоимость установки и эксплуатации быстрых и технически сложных сетей была достаточно высокой, поэтому их использование было доступно лишь большим фирмам. Большинство средних и мелких фирм предпочитали использовать телефон и факс в качестве основного коммуникационного оборудования. Даже крупные фирмы, использующие системы *EDI*, не всегда могли оценить в полной степени сокращение своих издержек, так как далеко не все их партнеры устанавливали аналогичные системы у себя.

Интернет сегодня делает электронную коммерцию и объем информацией доступными даже для малого бизнеса (так называемая категория *SOHO — small office and home office*).

Можно говорить о том, что рост электронной коммерции в секторе *B2B* вызван снижением закупочных издержек, сокращением необходимых складских запасов из-за более оперативных форм учета, более быстрой оборачиваемости средств (уменьшения длительности бизнес-цикла), более эффективной системы поддержки клиентов, меньшими издержками на продажи и маркетинговые исследования и, наконец, из-за новых возможностей по расширению продаж.

Покупка сырья, материалов или каких-либо специальных услуг означает достаточно длинный процесс согласования сначала со стороны покупателя, потом со стороны продавца, потом их непосредственное взаимодействие, после чего начинается процесс обмена обязательствами, уведомлениями, подтверждениями и т.д. В реальности этот процесс может быть значительно более запутанным и длительным. Фирмы снижают издержки по снабжению, объединяя покупки и развивая отношения с главными поставщиками в целях получения возможности использования дисконтных схем и устанавливая более тесное взаимодействие с партнерами во время производственного процесса. Фирмы, использующие системы *EDI* в частных корпоративных сетях, снижают издержки на наем персонала, издержки на печать бумажных документов, почтовые издержки. Автоматизируя рутинные снабженческие операции, фирма позволяет снизить число необходимого персонала и переключить его, например, на переговоры и поиск лучших ценовых условий и установление лучших взаимоотношений с партнерами. Эксперты оценивают такую экономию в среднем в 5—10% от издержек снабжения.

Интернет открывает возможности для дальнейшего снижения такого рода издержек. Большие фирмы могут выигрывать от более низких тарифов на передачу информации через Интернет по сравнению с частными сетями, однако здесь возникает достаточно серьезная проблема безопасности и конфиденциальности передаваемых коммерческих данных.

18.1.3. Одним из характерных примеров внедрения информационной системы и существенного снижения издержек снабжения является фирма *General Electric*. Ее складское подразделение было специально переоборудовано с тем, чтобы быстро и оперативно отвечать на запросы других ее подразделений о наличии тех или иных деталей на складе. Раньше специальный технический персонал должен был вручную заполнить форму запроса, доставить ее в установленное место, фотокопировать, присоединить к бумажному запросу, положить в конверт все документы и отправить по почте. Процесс занимал в среднем 7 дней и был таким сложным и длительным, что отдел снабжения обычно посылал заявки не более чем 2–3 поставщикам за день.

В 1996 г. фирма *GE* установила первую онлайновую систему снабжения. Теперь весь документооборот стал электронным, и процесс, который занимал 7 дней, теперь стал занимать не более 2 часов. Издержки на наем персонала в отдел снабжения снизились примерно на 30%. 60% персонала отдела снабжения были переспециализированы. Отдел по обработке запросов стал иметь от 6 до 8 свободных дней каждый месяц, которые можно было использовать на решение стратегических задач, а не на бумажную работу.

Издержки на покупку оборудования и прочего имущества в среднем снизились на 20% в связи с тем, что теперь фирма *GE* могла выйти на более широкий круг поставщиков, тем самым повысив уровень конкуренции среди них и снизив цены на их продукцию.

Использовав систему *APS* (*Advanced Planning System*), фирме *IBM* удалось существенно снизить свои издержки. Так, в первый год использования данной системы оборот запасов увеличился на 40%, а объемы продаж увеличились на 30%. Снижение операционных издержек и уменьшение необходимых инвестиций из-за улучшенного оборота запасов вылились в экономию в размере 500 млн долл.

Другой показательный пример — это укорачивание полного бизнес-цикла. Цикл — это время, необходимое для построения продукта. Очевидно, что если уменьшить данную величину по сравнению с конкурентами, то фирма получает конкурентное преимущество в виде дополнительных покупателей. Производство новой продукции всегда связано с фиксированными издержками, включающими амортизацию оборудования, издержки на аренду зданий и сооружений и большинство управленческих издержек, в том числе и выражающихся в истраченном времени. В 1980-е гг. меньшее время разработки конечного продукта позволило японским фирмам получить существенное конкурентное преимущество по сравнению с их американскими коллегами. Японские фирмы стали разрушать барьеры между различными департаментами фирмы, тем самым стараясь повысить эффективность. Самым главным нововведением стало более тесное взаимодействие между отделами дизайна, производства и отделом сбыта; кроме того, были улучшены связи с внешними партнерами. Все это позволило в первую очередь уменьшить время на необходимые операции по взаимодействию, не говоря уже об остальных преимуществах. Фирмы, рассматриваемые в данном примере, специализировались на производстве автомашин. После создания прототипа они должны были проводить комплексное тестирование; и как правило, после этого специалисты дорабатывали модель. Естественно, что подобные сертифицированные процедуры тестирования достаточно дороги. Поэтому японские автомобилестроительные фирмы внедрили специальные компьютерные эмуляторы, имитирующие физические законы и поведение каждого конкретного прототипа в зависимости от его технических характеристик. Это позволило сделать качественный рывок вперед и снизить издержки — как денежные, так и временны́е. Сегодня на современных производствах повсеместно используются *CAD*-, *CAM*- и *CAE*-программы, а также программы трехмерного моделирования. Работа командой, разделение и обмен информационными потоками с помощью сетей позволяют разрабатывать и выпускать новый автомобиль уже через 30 месяцев.

18.1.4. Фирмы начинают использовать Интернет и для улучшения поддержки своих клиентов. Имея перед глазами описание продуктов, службу технической поддержки и информацию по заказу продукции онлайн, клиент фирмы поможет ей не только снизить ее издержки, снизив потребности в техническом персонале, который мог бы отвечать на сложные специализированные вопросы, но эти возможности могли бы привести и к появлению более серьезных клиентов у фирмы.

Например, компания *Cisco Systems* сообщает о том, что производительность ее службы по работе с клиентами выросла на 200–300%, что отразилось в падении издержек на 125 млн долл. *Dell* оценивает свой выигрыш от использования аналогичной системы в несколько миллионов долларов в год.

Интернет действует вне временны́х и пространственных границ по всему земному шару. Как результат фирмы, ведущие электронные продажи, могут завоевывать новые рынки, которые были бы недоступны в традиционной экономике из-за дороговизны рекламной кампании и огромного количества персонала для индивидуального продвижения своей продукции. Кроме того, фирма физически не может присутствовать на иностранных рынках, если она имеет единственное представительство в одной стране. В Интернете электронный магазин находится как бы вне территориальных рамок и доступен для любого пользователя в любое время и из любой точки планеты.

Фирмы, которые используют Интернет для покупки, продажи, доставки и обслуживания продуктов и услуг, действуют так из-за снижения различного рода издержек, улучшения экономической эффективности и получения новых стратегических рыночных возможностей. И эти преимущества будут становиться все более значимыми с дальнейшим развитием электронных сетей, информационных технологий и электронной коммерции.

Сказанное следует кратко дополнить данными о специфике информационных услуг, например таких, как представление многих туристических фирм в Интернете, услуги страхования, банковские услуги (*home banking*), возникновение виртуальных биржевых площадок, проблемы безопасности в Сети. Кроме того, за кадром остается вторая половина типичного взаимодействия — потребитель — его характеристики, возникновение феномена дистанционной занятости, изменения профессиональных требований для работников, проекты по виртуальному обучению и оказанию удаленной медицинской помощи. Отдельная группа последствий — это влияние информационных технологий на монетарную сферу, в частности через Кембриджское уравнение денег, влияние на макроэкономические показатели (инфляция, занятость, экономический рост).

18.2. Рынок интернет-магазинов и его проблемы в российской экономике

18.2.1. Интернет-торговля — это продажа товаров и услуг любому пользователю Интернета. Можно добавить, что интернет-торговля — часть, причем совсем небольшая, более широкого понятия — «электронная коммерция».

Электронная коммерция — одно из наиболее бурно развивающихся направлений применения всемирной сети Интернет. Ее технической основой являются современные сетевые технологии (*WWW*, электронная почта, технологическая почта и т.п.). Суть же электронной коммерции заключается в использовании единого информационного пространства Интернета для повышения эффективности общения между участниками коммерческих операций (продавцом и покупателем, между деловыми партнерами, сотрудниками предприятия и т.д.). С точки зрения значимости для наибольшего числа людей самой важной областью электронной коммерции следует признать электронную торговлю — технологию продвижения товаров и услуг на рынок с использованием сети Интернет.

Интернет-торговля является преемницей широко распространенной в мире торговли по каталогам, только на совершенно другой технической основе.

Немаловажной особенностью интернет-торговли является то, что покупателю обычного магазина, чтобы найти более конкурентоспособный желаемый товар, придется обойти не один магазин (и не один рынок). Чаще всего, однако, бывает так: покупатель остановится на ближайшем магазине и купит там желаемое, даже осознавая, что немного переплатил, а умелого пользователя Интернета от конкурентоспособного товара в том или ином регионе отделяет только несколько кликов мышью!

Рассмотрим интернет-торговлю с точки зрения продавца.

Продавец может использовать Интернет по-разному. Имея реальный магазин, можно просто рекламировать свой товар в Интернете. Можно создать *Web*-каталог, что наиболее распространено в России. Продавец также изначально может создавать интернет-магазин.

В России, как показывает статистика, только 40% покупателей удовлетворены выполнением своих заказов. Многие интернет-торговцы проигрывают потому, что уделяют мало внимания созданию инфраструктуры обработки заказов и последующей доставки товаров. Западные консультанты выделяют три более или менее четкие стратегии обработки заказов в интернет-торговле.

Первая — передача заказов дистрибьюторам или производителям товаров, вторая — создание собственного склада, третья — аутсорсинг (передача операций по обработке и доставке заказов специализированным фирмам).

Рассмотрим интернет-торговлю с точки зрения покупателя.

Основное отличие интернет-торговли от обычного торгового процесса в том, что в интернет-торговле нет прямого общения покупателя с продавцом.

Единственным средством воздействия на покупателя в интернет-магазине является информация. Можно выделить следующие особенности интернет-торговли: психология прямого общения (воздействия) должна быть заменена психологией подачи/восприятия информации; знакомство или взаимодействие с товаром должно быть заменено его информационным описанием.

В обычном магазине всегда есть люди, пришедшие просто посмотреть товар (прицениться к нему, сравнить с какими-то другими и т.д.), а не купить его. В интернет-магазине таких посетителей, не являющихся покупателями, существенно больше, их просто интересует, что и, главное, как продается в том или ином магазине. Такой покупатель может подробно рассматривать каталог товаров, «складывать» их в «корзину» и даже выписывать счет, но не оплачивать его. На вопрос, зачем ему это, имеется ясный ответ: ему просто интересно, как это все работает (и работает ли вообще).

Продавцу же важно понять, что подобного рода хаотичную и безрезультатную активность покупателя необходимо использовать в своих целях.

Во-первых, всегда следует анализировать маршруты таких посетителей. Отслеживая места, куда они чаще всего направляются, можно определить, какой товар пользуется потенциально повышенным спросом, где дольше задерживаются покупатели. В наиболее интересных для покупателей местах интернет-магазина лучше всего размещать рекламу, в частности анонсировать новые продукты, объявлять лотереи и т.д. В обычных магазинах информация для ответа на подобные вопросы собирается с большим трудом.

Во-вторых, покупатель обязательно купит что-нибудь (и не раз!), если убедится, что в данном интернет-магазине есть не просто «голый» список товаров, а полноценный торговый зал с хорошим информационным наполнением, в котором имеется подробное описание товаров, их сравнение с другими товарами, различного рода «рекомендации продавцов» по выбору тех или иных товаров и т.д. К сожалению, информационная ценность для покупателя большинства российских интернет-магазинов практически равна нулю, ибо он в них никакого подробного описания товаров не находит.

Итак, интернет-магазин — это не просто список товаров с ценами на них, а существенно более тонкий и сложный инструмент для организации торгового процесса.

В целом для интернет-покупателей характерны две особенности: ***привередливость*** (он будет покупать только в «удобном» интернет-магазине, т.е. там, где ему обеспечен максимально дружественный интерфейс или просто интересно), ***дотошность*** (решив что-то покупать у вас, он захочет получить всю имеющуюся информацию о данном товаре, вашей фирме, гарантиях, которые вы ему готовы предоставить, и т.д).

У интернет-покупателя есть и определенные положительные черты: раскрепощенность (сидя дома за компьютером, практически все чувствуют себя значительно свободнее, чем в многолюдном торговом зале традиционного магазина), сверхлюбопытство (интернет-покупатель имеет больше времени на покупки, и следовательно, ему можно (и нужно!) выдавать больше информации, удовлетворяющей его любопытство).

18.2.2. Остановимся подробнее на особенностях и проблемах рынка интернет-магазинов в российской экономике.

Основные обороты составляют товары, которые не приносят прибыли, например компьютеры и комплектующие (норма прибыли от торговли компьютерной техникой составляет 2–3%).

Это объясняется тем, что развитие розничной интернет-торговли находится на начальном этапе и потребитель приобретает товар, который поддается полному описанию на страницах интернет-магазина. По мере вхождения интернет-торговли в жизнь российского общества, увеличения положительного опыта общения с виртуальными магазинами спрос будет смещаться в сторону более дорогих товаров и в сторону товаров повседневного спроса.

Самым популярным способом оплаты покупок в российских интернет-магазинах по-прежнему остается оплата наличными курьеру. Причинами этого являются невысокая степень распространения кредитных и дебетовых карт в России, недоверие со стороны покупателей к онлайновым способам оплаты (к электронным платежам). Такое отношение вызвано недоверием граждан к банковской системе вообще, нестабильностью экономической ситуации в стране, неурегулированностью организационных и правовых вопросов электронных платежей, неуверенностью в безопасности проведения платежей через Интернет.

Доставка — один из основных вопросов, без решения которого невозможно повысить уровень предлагаемых услуг. Покупатель прежде всего оценивает качество обслуживания в виртуальном магазине по скорости доставки товара. Наиболее распространенные способы доставки: курьерская — 55%, почтовая — 26%, другие — 19%.

Наличие удачного бренда (широко известной торговой марки) помогает увеличить не только эффективность взаимодействия с клиентами, рекламодателями, поставщиками и инвесторами, но и кредит доверия потенциальных клиентов. В Интернете конкурирующие проекты находятся на расстоянии одного клика друг от друга — все это увеличивает важность наличия самого бренда и лояльного отношения к нему пользователей.

Насколько сложно в настоящее время начать деятельность в Интернете?

Большинство игроков на рынке интернет-магазинов не получают прибыли. Их основной задачей было «вхождение в рынок». Открытие электронного магазина все еще не является очень дорогим удовольствием, несмотря на то, что «порог входа» в Интернет становится выше (по разным оценкам, стоимость его увеличивается от 50 до 100% в год). И если возможность «вхождения в рынок» сохраняется, то для того, чтобы закрепиться на нем и конкурировать с его другими участниками, уже недостаточно просто оформить *Web*-сайт и привлечь посетителей. Сейчас необходимо не только занять нишу, но и бороться за долю на рынке, совершенствовать проект, привлекать новых и удерживать старых клиентов.

Инфраструктура розничной интернет-торговли еще не сформирована: отсутствуют качественные услуги доставки товаров, не прижились системы онлайновых микроплатежей, большинство российских пользователей так и не стали доверять покупкам через интернет-магазины. Общие проблемы российского Интернета ограничивают возможности электронной торговли: низкая степень распространения Интернета среди населения, низкие доходы, неразвитость платежных систем, моральная неподготовленность населения совершать покупки в виртуальном магазине и т.д.

18.3. Глобализация и микроэкономические проблемы

18.3.1. Глобализация — тенденция к образованию всемирной инвестиционной среды и интеграция национальных рынков капиталов.

На исходе XX столетия мировая экономика как совокупность национальных хозяйств и их экономических и политических взаимоотношений обретает новое качество: важнейшей формой и одновременно новым этапом интернационализации хозяйственной жизни становится глобализация. Она охватывает важнейшие процессы социально-экономического развития мира, способствует ускорению экономического роста и модернизации. В то же время глобализация рождает новые противоречия и проблемы в мировой экономике. Сегодня все страны мира в разной степени охвачены процессом глобализации.

На протяжении тысячелетий существует в мире международная торговля, чуть меньше — понятие инвестиций, т.е. долгосрочного вложения капиталов в какое-либо дело или предприятие на территории своего или иного государства. Всесторонний, полный, универсальный и всеобщий процесс глобализации, относящийся к земному шару в целом, был подготовлен как раз самим фактом роста инвестиций в конце XIX в., и особенно после мировых войн XX в. Правда, все это называлось глобальными процессами. Сам термин «глобализация» впервые появился в литературе в 1983 г. в статье американского экономиста Т. Левита, опубликованной в «Гарвард бизнес ревью». Широкое употребление термин получил в начале 90-х гг. XX в. после распада СССР. Однако наиболее важной материально-вещественной предпосылкой явления глобализации была, конечно, научно-технологическая революция в телекоммуникационных системах и компьютеризации (Интернет, электронная почта), которая радикально изменила характер международных экономических отношений.

Речь идет не только о традиционной внешней торговле товарами и услугами, но и о валютных потоках, движении капитала, обмене технологиями, информацией и идеями, перемещении людей. Мерой масштаба глобализации может служить объем международных финансовых сделок, который только на валютных рынках Нью-Йорка ежедневно составляет 1,3 трлн долл., а на международном рынке ценных бумаг даже превышает эту сумму.

В процессе глобализации одни усматривают серьезную угрозу мировой экономической системе, а другие видят средство дальнейшего прогресса мировой экономики. Одни считают, что в результате процесса глобализации произойдут общепланетарное объединение национальных экономик и их универсализация, другие считают, что процесс глобализации закончится экологической деградацией, чрезмерным ростом народонаселения и широкой пропастью между богатыми и бедными странами. Характерной особенностью процесса глобализации являются международные потоки (в основном это потоки капитала и информации, а также иммиграционные потоки), которые в условиях либерализации почти или вовсе не контролируются национальными законодательствами. Важным следствием информационной революции становится нарастание раскола в развитых странах. В ближайшие десятилетия в них завершится формирование отчужденного класса лиц, не находящих применения своим способностям в области информационной экономики. Разрыв в доходах между интеллектуальными работниками и остальной частью общества будет нарастать. Именно поэтому на протяжении первой половины XXI в. страны будут сконцентрированы не только на внешних, но и на внутренних проблемах и степень их позитивного влияния на развивающийся мир неизбежно снизится. Условия конкуренции, потребности клиентов, технологии и рынки изменяются быстрее, масштабнее, неожиданнее, чем когда-либо раньше. Перманентное обновление становится решающим для будущего фирм.

Глобализация — это наиболее яркое проявление научно-технологического прогресса, несущего экономические и социальные новации не только по критерию изобилия неизвестных ранее благ и услуг, но и с учетом уже проглядывающих очертаний нового облика человечества. Вместе с тем глобализация уже в начальной своей стадии выявила новые опасности и риски, причем довольно грозные, представляющие вызовы всему человечеству. А это означает, что речь должна идти об общечеловеческой ответственности за происходящее и об общих усилиях по гармонизации устройства мира. Можно отметить, что глобализация — это соревнование не только за рынки, но и за ценности. На сегодняшний момент решающим ресурсом в соревновании глобальных рынков являются не запасы сырья, а неограниченные ресурсы знаний.

Глобализация затрагивает все области общественной жизни, включая экономику, политику, социальную сферу, культуру, экологию, безопасность и др. Глобализация является важнейшим процессом, без учета которого невозможно прогнозировать, определять и осуществлять внешнюю и внутреннюю политику любого государства.

18.3.2. О преимуществах глобализации

Если высказывания противников глобализации довольно легко найти в том же Интернете, то столь же активных сторонников у этого явления нет.

Но как бы ни относились к глобализации ее противники и сторонники, следует признать, что она уже явно изменила мировую систему, порождая новые проблемы и открывая новые возможности. Очевидно, что тенденции технологического, политического, институционального, идеологического и культурного развития активизируют глобализационный процесс, который в будущем, видимо, ускорится. Важным аспектом этого процесса станет рост международной торговли услугами. Ее объем уже значительно возрос, а в будущем увеличится еще больше, особенно в области телекоммуникационных и финансовых услуг. Мир станет более открытым, интегрированным, взаимозависимым.

Что касается преимуществ глобализации, то она вызвала, во-первых, обострение международной конкуренции, во-вторых, экономию на масштабе производства, что потенциально может привести к сокращению издержек и снижению цен, а следовательно, к устойчивому экономическому росту. В-третьих, глобализация может привести к повышению производительности труда в результате рационализации производства на глобальном уровне и распространения передовой технологии, а также конкурентного давления в пользу непрерывного внедрения инноваций в мировом масштабе. В-четвертых, преимущества глобализации связаны также с выигрышем от торговли на взаимовыгодной основе, удовлетворяющей все стороны, в качестве которых могут выступать отдельные лица, фирмы и другие организации, страны, торговые союзы и даже целые континенты.

По идее, конечным результатом глобализации должно стать общее повышение благосостояния в мире.

18.3.3. О минусах глобализации

Глобализация чревата негативными последствиями или потенциальными проблемами, в которых ряд ее критиков усматривают большую опасность.

Первая из основных проблем связана с вопросом: кто оказывается в выигрыше от глобализации? Некоторые оппоненты говорят о возможности глобальной конвергенции доходов, аргументируя это тем, что экономика бедных государств развивается более высокими темпами, чем богатых. На самом же деле быстрый рост характерен лишь для небольшой группы стран Юго-Восточной Азии («азиатских тигров»), тогда как наименее развитые в экономическом отношении страны отличаются гораздо более низкими темпами роста, чем богатые государства. Их выгоды от глобализации минимальные. Растущий разрыв в доходах вызывает недовольство со стороны бедных стран, чреватое международными конфликтами.

Вторая проблема связана с потенциальной региональной или глобальной нестабильностью из-за взаимозависимости национальных экономик на мировом уровне. Локальные экономические колебания или кризисы в одной стране могут иметь региональные или даже глобальные последствия. Такая возможность носит не только теоретический характер, а является вполне реальной, что подтверждает финансовый кризис в Азии, начавшийся летом 1997 г. в Таиланде, а затем перекинувшийся на другие страны Юго-Восточной Азии, дойдя до Южной Кореи.

Третья проблема вызвана опасением, что контроль над экономикой отдельных стран может перейти от суверенных правительств в другие руки, в том числе к наиболее сильным государствам, многонациональным или глобальным корпорациям и международным организациям. В силу этого некоторые усматривают в глобализации попытку подрыва национального суверенитета. Такие настроения могут легко перейти в крайний национализм с призывами к протекционизму, повлечь за собой рост экстремистских политических движений, что потенциально чревато серьезными конфликтами. Укрепление государства и его институтов — обязательное условие не только выживания, но и развития государства и нации в условиях глобализации.

К ряду издержек глобализации относят безработицу в экономически развитых странах с высоким уровнем заработной платы.

Но это утверждение опровергается низкой нормой безработицы во многих из них и ее высоким уровнем в государствах с низкой заработной платой. Национальная политика и научно-технологический прогресс являются более важными факторами занятости, чем факторы глобализации. С глобализацией увязывают и миф о том, что она угрожает социальному благосостоянию некоторых стран, однако значительно большее влияние на эту сферу оказывают другие факторы, такие, как налоговая политика и демографические тенденции. В обоих случаях глобализация обычно используется для оправдания провалов в национальной политике тех или иных государств.

Явление глобализации имеет последствия и неэкономического характера, сопряженные с огромными рисками, потенциальными издержками и даже возможностью катастрофы. Первой из таких областей является сфера безопасности, где глобальные процессы могут привести к возникновению конфликтов. Вторая область — это политические кризисы, способные перерасти из локальных в крупномасштабные события, а если их вовремя не устранить, то они могут привести к катастрофе. Третьей областью следует считать экологию и здравоохранение. Глобальные взаимосвязи чреваты и глобальными экологическими бедствиями, связанными, например, с всеобщим потеплением и изменением климата, широкомасштабными эпидемиями.

В целом решение экономических, политических и прочих проблем глобализации потребует реальных усилий но развитию сотрудничества всех крупных государств, особенно стран ЕС, США, Канады, Японии, России, Китая, Индии, Бразилии и др.

18.3.4. Об источниках глобализации

В течение последних десятилетий выявился ряд источников глобализации.

Первый источник — научно-технологический прогресс, который привел к резкому сокращению транспортных и коммуникационных издержек, значительному снижению затрат на обработку, хранение и использование информации. Информационное обслуживание непосредственно связано с успехами в электронике, созданием электронной почты, Интернета. Современный компьютер стоимостью в 2 тыс. долл. во много раз мощнее, чем компьютер стоимостью в 10 млн долл. 30 лет назад.

Второй источник глобализации — либерализация торговли и другие формы экономической либерализации, вызвавшие ограничение политики протекционизма и сделавшие мировую торговлю более свободной. В результате были существенно снижены тарифы, устранены многие иные барьеры в торговле товарами и услугами. Другие меры либерализации привели к усилению движения капитала и остальных факторов производства.

Третьим источником глобализации можно считать значительное расширение сферы деятельности организаций, ставшее возможным в результате научно-технологического прогресса. Многие фирмы, ориентировавшиеся раньше только на местные рынки, расширили свои производственные и сбытовые возможности и вышли на национальный, многонациональный, международный и даже глобальный уровень, что позволило им укрепить свои позиции, увеличить их прибыль, повысить производительность, выбирать источники сырья, открывать производства и осваивать рынки в других странах, быстро приспосабливаясь к меняющимся условиям. Практически все крупные предприятия располагают сетью филиалов или стратегическими союзами, которые обеспечивают им необходимое влияние и гибкость на рынке. В рамках подобных многонациональных корпораций в настоящее время осуществляется почти треть мировой торговли.

С появлением глобальных фирм международные конфликты в значительной мере переместились со странового на фирменный уровень, и борьба завязывается не между странами за территориальные владения, а между фирмами за долю на мировом рынке. Некоторые усматривают в таких фирмах угрозу власти и автономии государства, однако пока власть и суверенитет сохраняют силу, государство может спокойно выполнять свои традиционные функции в мировой экономике и политике. Более широкие перспективы открылись и перед неправительственными организациями, вышедшими, как и в случае с глобальными фирмами, на многонациональный или мировой уровень. Новую глобальную роль стали играть такие международные организации, как ООН, МВФ, Всемирный банк, ВТО. Таким образом, многонациональные фирмы и другие организации, как частные, так и государственные, превратились в основные действующие лица глобальной экономики.

Четвертый источник глобализации — особенности культурного развития. Речь идет о тенденции формирования глобальных «однородных» средств массовой информации, искусства, культуры, повсеместного использования английского языка в качестве всеобщего средства общения. Частично из-за этого некоторые страны, особенно Франция и ряд других европейских государств, рассматривают глобализацию как попытку США добиться культурной, экономической и политической гегемонии в мире.

Как бы ни относились к глобализации ее противники и сторонники, следует признать, что она уже явно изменила мировую систему, порождая новые проблемы и открывая новые возможности.

18.3.5. О влиянии глобализации на национальную экономику

Глобализация оказывает большое влияние на экономику всех стран. Она затрагивает производство товаров и услуг, использование рабочей силы, инвестиции в человеческий капитал, технологии и их распространение из одних стран в другие. Все это в конечном счете отражается на эффективности производства, производительности труда и конкурентоспособности. Влияние глобализации на национальную экономику проявляется прежде всего в высоких темпах роста прямых иностранных инвестиций, намного превосходящих темпы роста мировой торговли. Эти капиталовложения играют ключевую роль в трансферте технологий, промышленной реструктуризации, образовании глобальных фирм, что оказывает непосредственное воздействие на национальную экономику. Влияние глобализации проявляется в широком распространении технологических инноваций.

Новые технологии, как уже отмечалось, являются одной из движущих сил глобализации, но она, в свою очередь, усиливая конкуренцию, стимулирует их дальнейшее развитие и распространение среди стран.

Глобализация способствует росту торговли и услуг, которые превращаются в основной фактор международных торговых отношений. Если в 1970 г. с экспортом услуг было связано менее $^1/_3$ прямых иностранных инвестиций, то в настоящее время эта доля возросла до 50%, причем интеллектуальный капитал стал наиболее важным товаром на мировом рынке.

В начале XXI в. ожидается дальнейшее усиление взаимосвязей и взаимозависимостей между национальными хозяйствами стран мира. Весьма высокими темпами будет и впредь расти международный обмен товарами, услугами и капиталом.

Необходимость адаптации отечественного народного хозяйства к этим тенденциям, очевидно, требует такой стратегии взаимодействия с внешним миром, которая позволяла бы постепенно улучшать позиции России и минимизировать, блокировать неблагоприятные внешние воздействия.

Анализ показывает, что истоки внешнеэкономических проблем России находятся не где-то за пределами национальных границ, а внутри национальной экономики. Сырьевая специализация страны — следствие деформированной структуры промышленного производства и отсталости производственного аппарата. Импортная зависимость — оборотная сторона недостаточной конкурентоспособности отечественного производства. Утечка капитала — реакция отечественного бизнеса на нестабильность ситуации и неблагоприятный инвестиционный климат. Поэтому для изменения роли России в мировой экономике важно скорректировать прежде всего макроэкономическую политику и затем на новой основе строить внешнеэкономическую стратегию.

18.4. Технологический монополизм и микроэкономические проблемы

18.4.1. Глобализация представляет собой процесс формирования единого общемирового финансово-информационного пространства на базе современных форм научно-технологического прогресса (телекоммуникационных систем и компьютеризации).

Наибольшее впечатление производят «финансовые цунами» спекулятивных капиталов, сметающие национальные экономики (первый кризис глобальной экономики в 1997–1999 гг.), и наконец, вершина всего — Интернет, виртуальная реальность, интерактивность. Однако внешние атрибуты глобализации не должны заслонять главного — влияния современных форм научно-технологического прогресса на общество и на человечество в целом.

В 1991 г. компьютеров с доступом в Интернет во всем мире было около 5 млн, в 1996 г. — 60 млн, в 2001 г. их число достигло 300 млн. Беспрецедентный рост Всемирной информационной паутины (Интернета) базируется на двух факторах — удешевлении электронной техники и снижении стоимости услуг по передаче информации. Взаимодополняя и усиливая друг друга, они ведут к лавинообразному разрастанию компьютерных сетей и потоков информации. Объем информационного обмена посредством Интернета удваивается каждые 100 дней — ежегодный рост в 7,3 раза. При этом цена компьютеров в течение жизни одного поколения упала более чем в 10 тыс. раз и продолжает снижаться (в расчете на единицу мощности) на 30–40% в год. С помощью спутников связи по мобильному телефону, телефаксу, Интернету можно общаться из любой точки земного шара с абонентом в любой другой его точке. Новейшие телекоммуникационные и компьютерные технологии создали наднациональные мосты, благодаря которым информация легко преодолевает на своем пути физические преграды и государственные границы. Складывается глобальное киберпространство.

Современный мир формируется на базе качественно новых телекоммуникационных систем и компьютеров, которые породили новые информационные технологии, а те, в свою очередь, качественно *изменили природу бизнеса.*

Происходящее во всем мире обособление групп людей, работающих с «информационными технологиями», в «информационное сообщество» неизбежно ведет к постепенной концентрации этого сообщества в наиболее развитых странах (интеллект, хотя и выживает, но не воспроизводится в условиях бедности и опасности). Тем самым создается объективно обусловленный *технологический разрыв*, в первую очередь, между развитыми и развивающимися странами.

Данный разрыв закрепляется и становится практически непреодолимым в силу целого ряда факторов, важнейшими из которых являются так называемые метатехнологии — кардинально новый тип технологий, само применение которых принципиально исключает возможность конкуренции с разработчиком.

В качестве примеров можно привести проект сетевого компьютера (рассредоточение его памяти в сети открывает разработчику всю информацию пользователя) и современные технологии связи, позволяющие анализировать в онлайновом режиме все телефонные сообщения Европы (вялотекущий скандал вокруг системы «Эшелон» вызван именно коммерческим использованием результатов этого анализа), а также технологии формирования сознания, нуждающиеся в постоянном обновлении.

18.4.2. Появление и *распространение метатехнологии снижают значение финансов с точки зрения конкурентоспособности:* если раньше они были главным источником рыночной силы, то теперь становятся лишь ее следствием. Конкурентоспособность все больше определяется технологиями, которые часто нельзя купить.

Разработчики новых технологических принципов, а точнее владельцы организационных и исследовательских технологий разработки таких принципов, становятся наиболее влиятельными субъектами современной мировой экономики, в наибольшей степени контролирующими рынки своей продукции и практически избавленными от внешней конкуренции. Эффективность создания этих принципов связана не только с наибольшей долей добавленной стоимости (которая неуклонно уменьшается от верхних «этажей» технологической пирамиды к нижним, снижая соответственно эффективность бизнеса) и наибольшей степенью контроля за рынком сбыта (которая прямо зависит от степени уникальности товара — реальной или внедряемой в сознание, а также снижается от верхних этажей к нижним), но и с тем, что на основе этих принципов затем *формируются технические и поведенческие стандарты*, дающие совершенно фантастическое конкурентное преимущество тому, кто эти стандарты создает.

Признаком вырождения конкуренции является возникновение на едином мировом рынке глобальных монополий, почти не поддающихся регулированию государствами и международной бюрократией (последние были бессильны даже перед лицом традиционных производственных ТНК; сейчас же им противостоят во многом неформальные финансово-информационные группы, которые почти явно ненаблюдаемы).

Существует два способа преодоления глобальных монополий. Первый — расширение масштабов рынков.

Второй путь — качественный технологический рывок, и в отличие от первого он носит слабопредсказуемый, нерегулируемый и весьма разрушительный характер. Эта разрушительность вызвана кардинальным повышением производительности труда, в результате которого значительная часть занятых лишается работы и средств к существованию в сроки, не позволяющие самостоятельно адаптироваться к изменению и освоить новую профессию.

18.5. Экономический национализм и микроэкономические проблемы

18.5.1. Основная цель экономического национализма заключается в проведении экономической политики под контролем нации и национальных интересов. Ключевые элементы такого контроля следующие: поощрение индустриализации, национализация капитала и широкая интервенция государства в экономику. Националисты всегда верят, что только через экономическую независимость можно достичь политической и культурной независимости.

Очевидно, что с уровнем патриотизма в народе связана поддержка потребителями национального производителя. Особенно это чувствуется на таких рынках, как японский или американский. Представители этих наций выберут отечественный товар. С национальной идеей связан и бизнес. Национальная идея проявляется в том, что граждане покупают отечественные товары, отстаивают свой язык, пропагандируют свой стиль жизни. Часть экономистов считает, что в конечном итоге это приводит к росту благосостояния этих народов, а отсутствие национализма и патриотизма приводит к экономическим потерям.

Некоторые экономисты поддерживают идею, что экономический национализм является жизненной альтернативой «либерализации» торговой политики. Речь идет не об оживлении системы национального государства, а об интеграции мировой экономики разумным, демократическим образом.

Наиболее ярко в настоящее время экономический национализм проявляется в ситуации с транснациональными компаниями и глобальными брендами. И без антиглобалистов глобальные бренды переживают сегодня не лучшие времена, и причинами тому являются меняющиеся предпочтения потребителей и растущая конкуренция со стороны местных производителей. Уже сегодня британцы отправляются перекусить в забегаловки *Pret-a-Manger*, малайзийцы ездят на отечественных автомобилях *Proton*, китайцы пьют пиво *Tsingtao*, а россияне покупают одежду *Tom Klaim*. Десятки тысяч небольших национальных брендов, возникающие по всему миру, лишают гигантские транснациональные корпорации надежд на процветание.

Еще в 90-е гг. XX в. в такое развитие событий сложно было бы поверить. Тогда инвесторы рассматривали известные бренды как легкий способ зарабатывания денег. Рынки развитых стран были насыщены товарной массой, и продвигать новые торговые марки для массового потребителя в США, Японии и Западной Европе стало делом сложным и хлопотным. А вот выход со сложившимися брендами на новые рынки открыл безграничные возможности для экспансии, особенно после открытия для западных товаров рынков стран бывшего соцлагеря. Запретный плод западных брендов десятилетиями не был доступен в России, Китае и Восточной Европе, поэтому ликвидация торговых барьеров привела к быстрому завоеванию рынков этих стран западными торговыми марками. Аналогичная ситуация складывалась на рынках многих развивающихся стран (Латинской Америки, Юго-Восточной Азии и Индии), которые лишь в начале 90-х гг. XX в. ослабили торговые барьеры. Вместе с ростом объемов продаж резко росли и котировки акций владельцев брендов.

Однако достигнутый успех международных корпораций оказался явлением временным. Уже в конце 90-х гг. XX в. любовь потребителей новых рынков к международным брендам стала сходить на нет.

18.5.2. Призыв «Покупайте отечественное!», запущенный в России Ю.М. Лужковым, одновременно прозвучал и в других странах. Самое интересное, что и там, и в России он был услышан. Свою роль сыграло удачное стечение обстоятельств. Во-первых, одновременно с потерей потребителями первоначального интереса к иностранным торговым маркам (приобретение «Кока-колы» и «биг-маков» вовсе не приближало их потребителей к стандартам жизни западного среднего класса) в результате глобального финансового кризиса 1997—1999 гг. в России, Бразилии и Юго-Восточной Азии произошла девальвация. Она помогла местным производителям в этих странах успешнее конкурировать по ценам с западными гигантами. Во-вторых, в условиях жесткой конкуренции в середине 90-х гг. XX в. местным производителям пришлось подтянуть технологические стандарты до международного уровня и брать на вооружение агрессивную маркетинговую стратегию конкурентов. В-третьих, еще одним фактором стала постепенная индивидуализация потребительского спроса в этих странах, которая протекала одновременно с формированием среднего класса.

В результате рынки потребительских товаров были наводнены многочисленными национальными товарами, среди которых стали формироваться бренды, потеснившие западных гигантов. Например, сейчас в Китае, из десяти наиболее рекламируемых брендов — все десять китайские, хотя еще несколько лет назад в десятке были торговые марки *Procter and Gamble* и *Coca-Cola*. Наиболее быстро растущим брендом в этой стране стали компьютеры *Legend*. История компании *Legend* началась лишь в 1988 г., а собирать компьютеры под этой маркой стали лишь два года спустя. Но уже к 1997 г. *Legend* стала наиболее популярной маркой в Китае, неплохо продавались компьютеры этой марки и в соседних странах. А в 2000 г. компания *Legend* заняла восьмую строчку в рейтинге компьютерных брендов, опубликованном в журнале *BusinessWeek*. Не последнюю роль в продвижении китайских брендов по всему миру играет само правительство страны, принявшее специальное постановление по рекламе на Западе примерно 100 национальных брендов самого разного профиля.

Даже на рынке дорогих, эксклюзивных товаров международным брендам, которые согласно рейтингу *BusinessWeek* все еще находятся на подъеме, все большую конкуренцию составляют местные производители. Некоторым из них удается не только стать популярными на родине, но и добиться признания в развитых странах — как, например, бразильскому бренду *Rosa Cha*, продающему летнюю одежду и купальники, или японскому продавцу модной одежды *Uniqlo*. Бразильцы выигрывают за счет того, что представляют свои коллекции несколько раньше, чем это делают американские и европейские дизайнеры. Кроме того, местная индустрия одежды смогла в последние годы «раскрутить» несколько бразильских моделей международного уровня, например Жизель Бундхен.

Секретом успеха японской фирмы *Uniqlo* стало то, что владельцы магазина, продающие одежду, не считают, что покупать ее должны исключительно люди с фигурами Сталлоне или Шиффер. Этот нестандартный для западных бутиков подход позволил привлечь в магазины *Uniqlo* как молодежь, так и взрослых людей. Кроме того, большая часть одежды производится в Китае, а потому ее можно приобрести по фантастически низким в сравнении с западными брендами ценам. Годовой оборот сети *Uniqlo* уже превысил 2 млрд долл., и недавно японцы открыли свой магазин в Лондоне. Однако, даже если национальные бренды и не становятся международными, они вполне неплохо чувствуют себя на национальном рынке, как, например, российские (хотя и «косящие» под иностранные) бренды по продаже одежды и обуви *Devore*, *Gregory*, *Carlo Pazolini*, *Desegni*, *OGGY*.

Интересно, что экономический национализм охватил не только рынок товаров, но и рынок услуг.

Благодаря тем же факторам, что и на товарном рынке (девальвация, повышение качества, агрессивная реклама), вполне успешной оказалась раскрутка брендов авиакомпаний и гостиничных сетей. В странах Азии некоторые авиакомпании (*Cathay Pacific*, *Singapore Airlines*, *Thai Air*) и гостиничные сети (*Marco Polo* в Гонконге, *Meritus* в Сингапуре, *Dusit* в Таиланде) стали выигрывать по популярности у своих западных конкурентов. Недавно около 70 крупных азиатских отелей сформировали альянс, чтобы совместно бороться с транснациональными сетями.

18.6. Об экономической безопасности фирмы

18.6.1. Процесс создания внутреннего рынка в России и на территории стран ближнего зарубежья, появление негосударственных хозяйствующих субъектов и установление между ними отношений конкуренции делают актуальной такую проблему, как обеспечение безопасности предпринимательской деятельности.

Основные проблемы безопасности отечественного бизнеса заключаются в следующем. Во-первых, рыночная экономика, построенная на конкуренции, очень динамичная система, а следовательно, очень рискованная. Во-вторых, российский рынок находится в стадии становления, и поэтому многие механизмы еще просто не отработаны. В-третьих, в России пока отсутствуют устойчивые нормы права защиты интересов предпринимателей.

Экономическая безопасность фирмы — это такое состояние ее производственных, научно-технических, материально-технических, кредитно-финансовых и информационно-аналитических структур, которое обеспечивает защиту и дальнейшее эффективное использование имеющихся ресурсов в условиях конкуренции как внутри России и СНГ, так и на мировом рынке.

Любое игнорирование законов рыночной экономики и требований экономической безопасности очень часто приводит к тому, что упускаются выгодные сделки, заключаются контракты с недобросовестными партнерами, принимаются на работу некомпетентные сотрудники или сотрудники, являющиеся подставными лицами недобросовестных конкурентов и даже организованной преступности.

Легче, дешевле и выгоднее сохранять необходимый уровень экономической безопасности, чем вести длительные, дорогостоящие и не всегда перспективные судебные процессы, пытаясь задним числом отстоять свои права.

Безопасность фирмы зависит от разных причин. В частности, ущерб интересам предпринимателя может быть нанесен в результате недобросовестных действий конкурентов, невыполнения партнерами, заказчиками, поставщиками, клиентами своих обязательств по оплате контрактов, поставке товаров и т.п., а также в результате кризисных явлений в экономике, непредсказуемых изменений конъюнктуры рынка, стихийных бедствий, чрезвычайных происшествий, управленческой некомпетентности, социальной напряженности и, наконец, неблагоприятной экономической политики государства.

Таким образом, факторы, влияющие на уровень безопасности фирмы, могут быть внутренними и внешними, экономическими и внеэкономическими, объективными и субъективными.

18.6.2. Чтобы дать полную картину обстановки в российской национальной экономике, необходимо учитывать следующие особенности российского рынка (их следует толковать как ***внешние факторы*** безопасности фирмы): структурное деформирование национального хозяйства; размах промышленного и коммерческого шпионажа (со стороны различных структур, использующих методы агентурного и технического проникновения в коммерческую тайну); отсутствие единой стратегии обеспечения безопасности предпринимательских структур и, наконец, отсутствие цивилизованных юридических гарантий для реализации коммерческих интересов предпринимателя.

Говоря о ***внутренних факторах***, влияющих на безопасность фирмы, следует подчеркнуть, что наиболее широкое распространение в российской действительности получили кражи, грабежи, разбои, мошенничество, вымогательство, злоупотребление служебным положением, должностной подлог, а также различные формы недобросовестной конкуренции и такие особо опасные формы, как заказные убийства и захват заложников.

Кто в современных условиях может защитить предпринимателя?

Во всяком случае, на сегодняшний день российские правоохранительные органы в силу разных причин практически утратили способность профессионально защищать интересы предпринимателей. Произошло это в результате бесконечного реформирования органов и общего паралича, наступившего в результате такой распространенной болезни, как коррупция.

Все это означает одно: экономическая безопасность в условиях функционирования различных форм собственности — государственной, коллективной и частной — уже не может быть обеспечена силами только государственных правоохранительных органов. В результате представители российского бизнеса оказываются один на один с проблемой защиты своих жизненно важных интересов. Остается одно — объединяться и защищать свои интересы собственными силами.

Предприниматели должны осознать себя как клан, четко выстроить свои задачи и систематически финансировать их решение.

Похоже, что эту истину все усвоили, однако организацию такой деятельности каждый понимает по-своему, расставляя приоритеты на свой вкус, страх и риск, без учета наработанных профессионалами методик в ходе складывавшейся годами практики.

Анализ содержания бесед с экспертами наиболее крупных коммерческих служб безопасности (только в Москве их более 2 тыс.) показывает, что многие фирмы, заинтересованные в обеспечении собственной защиты, вынуждены сегодня действовать в пространстве, где нет достаточной нормативной базы, регламентирующей деятельность службы безопасности (СБ). Нет перечня сведений, составляющих коммерческую тайну, системного подхода к организации безопасности предпринимательской деятельности, налаженного информационно-аналитического сопровождения мер безопасности, квалифицированных кадров; практически отсутствуют научно обоснованные и проверенные практикой механизмы и технологии обеспечения различных видов безопасности (имеется в виду отсутствие наработанных методик по обеспечению физической защиты персонала и имущества фирмы, информационной безопасности, защиты коммерческой тайны).

Дальновидные и прибегающие к советам экспертов руководители могли бы с пользой для дела многие из перечисленных дефектов устранить уже сегодня (на практике почему-то это случается весьма редко).

Следует осознать, что обеспечение безопасности предпринимательской деятельности — весьма обширная проблема, включающая комплекс организационно-правовых, технико-технологических, административных, воспитательных, финансовых и специальных мер, направленных на выявление, предупреждение и пресечение угроз и посягательств на стабильность функционирования и развития фирмы.

Сегодня эффективная безопасность предпринимательской деятельности, как и всей национальной экономики, представляется специалистам как система мер, которая обеспечивается на следующих взаимосвязанных направлениях: защита от преступного мира; защита от нарушений закона с тем, чтобы самим не попасть под санкции; защита от недобросовестной конкуренции; защита от противоправных действий собственных сотрудников.

Эти направления деятельности реализуются на участках: производственный (сохранность материальных ценностей); коммерческий (оценка партнеров, юридическая защита интересов); информационный (определение значимости информации, порядка поступления, пользования, передачи, защиты от хищения), кадрового обеспечения.

Идея применения метода системного подхода к проблемам обеспечения экономической безопасности состоит в том, чтобы пресечь, сократить или, по крайней мере, ограничить утечку тех крупиц ценной информации, которые могут дать конкурентам возможность заранее узнать о том, что руководство фирмы предпринимает и планирует.

К сожалению, в России почти полностью отсутствуют такие необходимые для реализации системного подхода составляющие, как: достаточно полная законодательная база, регулирующая основные отношения в сфере бизнеса (например, в России недостаточно еще развиты частное право и юридическое обеспечение экономической деятельности); отлаженный реформой экономический механизм на федеральном и региональном уровнях; достаточный уровень включения общества в процессы экономических преобразований; государственная программа борьбы с распространяющейся коррупцией в национальной экономике; эффективная национальная статистика и контроль.

18.6.3. Какие же направления обеспечения экономической безопасности предпринимательской деятельности с учетом всего изложенного выше сегодня являются приоритетными?

При выработке концепции защиты следует в первую очередь исходить из того, что конечной целью применения любых мер противодействия угрозам является защита персонала, материальных и финансовых средств и информационных ресурсов от нанесения им материального и морального ущерба в результате случайных или преднамеренных действий.

По целям защитные мероприятия должны обеспечивать: предупреждение появления угроз; выявление возможных направлений и степени нарастания опасности; обнаружение реальных действий, приносящих ущерб предпринимательству; пресечение разглашения и утечки информации и несанкционированного доступа к ней; ликвидацию последствий неправомерного получения информации и ее использования злоумышленниками.

Анализ состояния дел в области экономической безопасности предпринимательства показывает, что:

- обеспечение безопасности не может быть одноразовым актом; это непрерывный процесс, заключающийся в обосновании и реализации наиболее рациональных форм, методов, способов и путей создания, совершенствования и развития системы безопасности, непрерывном управлении ею, контроле, выявлении ее узких и слабых мест и потенциально возможных угроз бизнесу;
- безопасность может быть обеспечена лишь при комплексном использовании всего арсенала средств защиты всех структурных элементов производственной системы и на всех этапах технологического цикла предпринимательской деятельности;
- требуемый уровень безопасности не может быть обеспечен без надлежащей подготовки персонала фирмы и пользователей и соблюдения ими всех установленных правил, направленных на обеспечение безопасности.

Главным в безопасности предпринимательства являются экономические рычаги по возмещению ущерба и предотвращению негативных последствий для организации бизнеса. В этом заключается основной смысл обеспечения экономической безопасности предпринимательства от противоправных действий.

Поддержание правопорядка в экономической сфере заключается в развитии судебной системы с ведущей ролью арбитражных судов. Только арбитражные суды, а не административные и другие внешнеэкономические меры могут воссоздать нормальный правопорядок в экономике и сделать предпринимательство цивилизованным.

Общепризнан тот факт, что приоритетным направлением в оперативной деятельности любой службы безопасности хозяйствующего субъекта является обеспечение его экономической безопасности.

Основа экономического развития любой фирмы — научно-технологический прогресс и ее способность осуществлять плавный переход к передовым технологиям. В этой связи можно утверждать, что стержнем экономической безопасности в современных условиях являются технико-экономическая независимость хозяйствующего субъекта и его технико-экономическая неуязвимость.

Следует упомянуть, что, как свидетельствует практика, при обеспечении экономической безопасности не всегда занимает полагающееся ей место защита интеллектуальной собственности фирмы. Кража интеллектуальной собственности может быть во много раз серьезнее материальной. Фирма, лишившаяся ее, рискует потерять место в конкурентной борьбе и будет вынуждена сократить штат сотрудников, отказаться от планов развертывания производства. Все это может в конце концов привести к банкротству.

Похоже, что сегодня российские предприниматели начинают понимать, что коммерческая тайна является обязательной для обеспечения безопасности фирмы.

Известно, что один из самых распространенных путей утечки информации — небрежное обращение со служебными документами. Как правило, огромное число входящих и исходящих документов в немалой степени затрудняет контроль за их сохранностью. Проводившаяся проверка на крупных российских отраслевых фирмах показала, что порядок регистрации и хранения документов у большинства из них не выдерживает критики.

Особо следует отметить, что большие возможности для незаконного распространения деловой информации предоставляет современная копировальная техника. Существенный ущерб несут фирмы и от утечки информации в результате подслушивания конкурентами телефонных разговоров, а также регистрации излучений компьютерных терминалов. По мнению специалистов, несмотря на самые совершенные технические средства, наилучшей защитой от промышленного (коммерческого) шпионажа является поддержание порядка и соответствующего режима секретности внутри фирмы.

Трудность обеспечения экономической безопасности любой фирмы заключается в том, что внутри самой предпринимательской структуры очень часто действуют скрытые от глаз противоречивые, если не взаимоисключающие, групповые и личные интересы. В связи с этим проблема службы экономической безопасности фирмы заключается в том, чтобы найти такие сферы, которые были бы выгодны (приемлемы) всем субъектам экономической деятельности фирмы в равной мере. Сгладить их, не разобравшись в существе, для субъектов обеспечения безопасности представляется затруднительным.

В рыночных условиях стабильная работа любой фирмы невозможна без надежной защиты от неправомерных посягательств на ее права, собственность и персонал от различного рода внутренних и внешних угроз. Следует заметить, что сегодня экономическая безопасность — это не только прерогатива государства и не только деятельность государственных служб по охране собственности, но также право самих организаций бизнеса.

18.7. О теневой экономике и некоторых микроэкономических проблемах

18.7.1. Понятие «теневая экономика» охватывает следующие четыре относительно самостоятельных понятия: 1) «неофициальная экономика» — включает легальные виды экономической деятельности, в рамках которой осуществляется не отражаемое официальной статистикой производство товаров и услуг в целях ухода от оплаты налогов; 2) «криминальная экономика» — охватывает все запрещенные законом виды экономической деятельности (торговля наркотиками, коррупция, рэкет, грабежи, сутенерство, проституция и т.д.); 3) «фиктивная экономика» — это экономика спекулятивных сделок, приписок, взяточничества, мошенничества, а также деятельность, направленная на получение необоснованных льгот субъектами хозяйствования; 4) «неформальная экономика» — это деятельность по производству товаров и услуг семьями и (или) коллективами друзей.

Субъекты теневой экономики образуют пирамиду, на верхней части которой располагаются криминальные элементы: нелегальные торговцы наркотиками и оружием, рэкетиры, грабители, наемные убийцы, сутенеры, проститутки, коррумпированные представители органов власти, которые берут крупные взятки, торгуют государственными должностями и интересами. По оценкам экспертов, численность криминальных элементов составляет от 5 до 25% всей пирамиды теневой экономики.

Среднюю часть пирамиды теневой экономики образуют теневики-хозяйственники, коммерсанты, финансисты, «челноки» и т.д.

Подножие пирамиды теневой экономики представлено наемными работниками физического и умственного труда, которые получают зарплату в конвертах и к которым примыкают мелкие и средние государственные служащие, в доходах которых, по оценкам экспертов, до 60% составляют взятки.

По оценкам экспертов, до 75% российской экономики работает в теневом секторе, хотя, конечно, точную цифру назвать практически невозможно.

18.7.2. В настоящее время в Правительстве РФ имеются представители, которые отстаивают две диаметрально противоположные точки зрения. Суть одной точки зрения — в необходимости проведения политики протекционизма национальной промышленности в целях укрепления положения российских национальных компаний на отечественном рынке. Суть другой точки зрения — в необходимости снижения таможенных барьеров в целях облегчения прихода иностранных компаний на российский рынок, что особенно важно перед вступлением РФ в ВТО.

Наличие двух таких крайних точек зрения имеет своим результатом отсутствие четкой последовательной политики регулирования национальной экономики РФ.

Среднюю и нижнюю части пирамиды теневой экономики можно вывести из тени, либо создав условия функционирования, к которым стремятся ее субъекты (теневики-хозяйственники и наемные работники), либо создав такие (невыполнимые) условия функционирования, при которых субъекты сами побегут, уже не думая куда.

По-видимому, Правительство РФ фактически стремилось «выдавливать» фирмы из теневого сектора, однако эта политика не дала серьезного эффекта.

Одна из причин отсутствия серьезного эффекта в том, что государственные структуры, которые должны заниматься «выдавливанием» фирм из теневого сектора (Государственный таможенный комитет РФ, Министерство по налогам и сборам РФ, Минфин РФ, службы экономической безопасности ФСБ и МВД и т.д.), не шли до конца, ибо существует такая точка зрения, что если закрыть в РФ теневой сектор полностью, то российская экономика тут же развалится.

Другая причина в том, что, выйдя на «легальную поверхность», почти каждая фирма тут же прекратит свое существование, ибо «климат на легальной поверхности» совершенно непригоден для нормального функционирования нормальной фирмы. Названное обстоятельство имеет, в свою очередь, две причины, которые показывают, как макроэкономическая политика влияет на функционирование микроэкономических субъектов: нерациональный налоговый режим и неустойчивая денежная политика в РФ.

Если по Налоговому кодексу РФ собирать все налоги, то фирма (производственное предприятие) на рубль дохода (т.е. выручки) должна внести в виде налогов и сборов в кассы различных организаций (от профсоюза до бюджета) 1 руб. 02 коп., т.е. фирме не остается никаких денег не только для предпринимательского дохода, но и для заработной платы персонала. В ходе подготовки Налогового кодекса РФ было заявлено, что налоговую нагрузку на производственные предприятия уменьшат. На самом деле произошло следующее: число налогов и сборов сократилось, но объем налогового изъятия у фирмы (промышленного предприятия) в среднем вырос, что, конечно, не стимулирует выход из тени как фирм, так и предпринимателей.

18.7.3. Если финансовая политика стратегически не определена (на сколько-нибудь длительный временной промежуток, хотя бы на 5—7 лет), то нет оснований для принятия микроэкономических решений радикального характера — инвестировать или изымать прибыль, осваивать новые продукты или нет. По оценкам экспертов, сформировавшийся в России класс собственников и предпринимателей (получивших собственность в ходе приватизации) в основном оказался неэффективным. За исключением нескольких сотен, максимум тысячи компаний, остальные (примерно 3 млн хозяйствующих субъектов) оказались неэффективными в том смысле, что они не имеют потенциала для удержания своей собственности на конкурентоспособном уровне. Они не могут в рамках своей собственности материализовать ни новые технологии, ни новый менеджмент. Для этого, к сожалению, часто не хватает знаний и нет денег. Необходимо отметить, что для эффективного функционирования фирмы не столь важно, кто является ее собственником, а важно, кто управляет собственностью.

Для создания предпосылок формирования внутренних источников накопления у микроэкономических субъектов необходима корректировка налоговой политики. В последние годы советской власти накопления предприятий составляли примерно 30%. В настоящее время аналогичный показатель в 2,3–2,5 раза ниже, что означает фактическое отсутствие внутренних источников инновационных процессов для инвестиций.

Внешние источники накопления (не обязательно иностранные) должны прийти в основном с рынка, на котором новые инвесторы будут покупать акции, облигации и прочие активы фирм. Однако новых инвесторов фактически не наблюдается: в течение ряда лет объем «голубых» фишек колеблется по годам, но новые субъекты не появляются.

На основании вышесказанного необходима корректировка средств макроэкономической политики в целях сокращения объема теневого сектора и создания нормальных условий функционирования фирм, выходящих из тени на «поверхность»: изменения налоговой системы, которая создавала бы фирмам условия, благоприятствующие их выходу из тени и проведению рациональной политики накопления, проведения стабильной по годам финансовой политики, преобразования административной системы путем перевода от разрешительного режима функционирования фирм к регистрационному режиму их функционирования.

В заключение отметим, что согласно утвержденной ООН в 1993 г. новой версии национальных счетов каждой стране было рекомендовано учитывать объем теневого сектора в объемах производства ее национальной экономики.

Вопросы для самоконтроля к главе 18

1. Что представляют собой современные формы научно-технологического прогресса?
2. С каким темпом роста растет объем передаваемой через Интернет информации?
3. Как можно охарактеризовать динамику в экономике США отрасли информационных технологий в последней четверти XX в.?
4. Как формулируется закон Мура?
5. Как можно охарактеризовать динамику цен на микропроцессоры в последнее десятилетие XX в.?
6. Что представляют собой составляющие экономического роста, порождаемые НТП и, в частности, цифровой революцией?
7. В каких операциях микроэкономического уровня используются информационные технологии?
8. Какой фактор был определяющим для быстрого роста коммерческого использования компьютеров?
9. За счет чего фирмы, использующие Интернет, снижают свои издержки? Приведите конкретные примеры.
10. Каковы основные проблемы российских интернет-магазинов?
11. В чем суть современного толкования понятия «глобализация»?
12. Что представляет собой материально-вещественная база современной глобализации?
13. Что представляют собой положительные последствия глобализации?
14. Что представляют собой негативные последствия глобализации?
15. Что представляют собой материальные и нематериальные источники глобализации?
16. В чем проявляется влияние глобализации на национальные экономики?
17. В чем суть технологического монополизма?
18. В чем суть современного толкования понятия «метатехнология»?
19. Что такое экономический национализм? Приведите конкретные примеры.
20. Что следует понимать под экономической безопасностью фирмы?
21. Каковы особенности современного (конец XX — начало XXI в.) российского рынка?
22. Каковы внешние факторы безопасности фирмы?
23. Каковы внутренние факторы безопасности фирмы?
24. Что представляет собой система мер, которая обеспечивает эффективную экономическую безопасность фирмы?
25. Что представляет собой современное толкование понятия «теневая экономика»?

26. Что представляет собой пирамида современной теневой экономики?
27. В чем суть двух крайних точек зрения о мерах государственного регулирования национальной экономики России?
28. Как следует корректировать средства макроэкономической политики в целях сокращения объема теневого сектора и создания нормальных условий для функционирования фирм, выходящих из тени на «поверхность»?

Вопросы для контрольных работ к главе 18

1. Опишите и проанализируйте составляющие экономического роста, порождаемые цифровой (электронной) революцией.
2. Опишите и проанализируйте факторы снижения издержек тех фирм, которые используют Интернет.
3. Объясните, почему в российских условиях основным способом оплаты покупок в интернет-магазинах является оплата наличными курьеру.
4. Опишите и проанализируйте проблемы российских интернет-магазинов.
5. Опишите и проанализируйте материально-вещественные основания современной глобализации.
6. Укажите на сходства и различия между глобальными процессами в прошлом и современной глобализацией.
7. Укажите и проанализируйте позитивные последствия глобализации.
8. Укажите и проанализируйте негативные последствия глобализации.
9. Укажите и проанализируйте основные экономические проблемы России в условиях глобализации.
10. Опишите суть феномена технологического монополизма.
11. Опишите и проанализируйте феномен экономического национализма.
12. Опишите исторические примеры экономического национализма.
13. Приведите современные примеры экономического национализма.
14. Укажите факторы современного подъема экономического национализма.
15. Опишите суть понятия экономической безопасности фирмы.
16. Назовите внешние и внутренние факторы понижения уровня экономической безопасности фирмы.
17. Опишите и проанализируйте четыре относительно самостоятельных фрагмента теневой экономики.
18. Проанализируйте влияние финансовой политики (краткосрочной и долговременной) правительства на принятие микроэкономических решений.

Приложение

ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В КУРСЕ «МИКРОЭКОНОМИКА. ПРОДВИНУТЫЙ УРОВЕНЬ»

П 1. Множества и отображения

П.1.1. ***Множество*** — начальное понятие в математике, которое строго не определяется, а только поясняется примерами: множество домов в городском квартале, множество точек прямой на плоскости. Немецкий математик Г. Кантор писал, что он под множеством понимает всякое многое, мыслимое как единое, т.е. всякую совокупность определенных элементов, которую можно связать в единое целое с помощью некоторого закона. Объекты, составляющие множество, называются его элементами. Множество задано, если указано свойство, которым обладают все его элементы и которым объекты, не принадлежащие множеству, не обладают. То, что объект x является элементом множества M, записывается так: $x \in M$ и читается: «x принадлежит M». То, что z не является элементом множества M, записывается так: $z \notin M$ и читается: «z не принадлежит M». Множество M, состоящее из элементов x, u, v ..., записывается так: $M = \{x, u, v \ldots\}$. В частности, множество M может состоять из одного элемента: $M = \{m\}$. Множество, содержащее конечное число элементов, называется *конечным*, в противном случае — *бесконечным*. Множество товаров одной партии — конечное множество; множество точек прямой на плоскости — бесконечное. Множество называется *пустым*, если оно не содержит ни одного элемента. Пустое множество обозначается символом $\varnothing$. Пусть A и M — два множества и пусть все элементы множества A являются элементами множества M, тогда множество A называется *подмножеством* (или *частью*) множества M, что записывается так: $A \subseteq M$ (или $M \supseteq A$) и читается: «A включено в M» (рис. П.1). Если $x \in M$, то $\{x\} \subseteq M$. Множество M является своим подмножеством. По определению пустое множество $\varnothing$ есть подмножество любого множества, $\varnothing$ и M называются *несобственными* подмножествами множества M, все остальные его подмножества называются *собственными*. Множество всех подмножеств множества M обозначается символом 2^M. Множества A и B называются *равными*, если $A \subseteq B$ и $A \supseteq B$, их равенство обозначается так: $A = B$.

П.1.2. *Теория множеств* изучает понятие «множество», операции над множествами и свойства этих операций. Приведем определения трех операций над множествами (объединения, пересечения и разности) и их свойства.

Объединением двух множеств A и B называется множество C (обозначаемое символом $A \cup B$), состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B (рис. П.2). В общем случае объединение произвольной совокупности множеств A_α ($\alpha \in I$), где I — некоторое множество (конечное или бес-

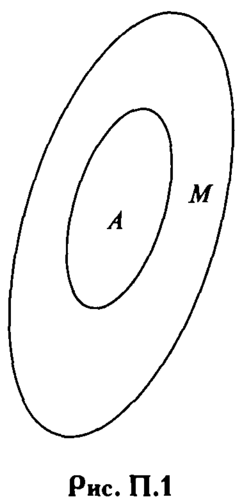


Рис. П.1

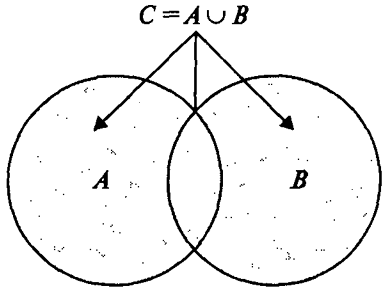


Рис. П.2

конечное) индексов, есть множество C (обозначаемое символом $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$), состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A_α ($\alpha \in I$). Вместо термина «объединение» иногда используют термин *«теоретико-множественная сумма»*.

Пересечением двух множеств A и B называется множество C (обозначаемое символами $A \cap B$), состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат каждому из множеств A и B. Иными словами, пересечение — это *общая часть* множеств A и B (рис. П.3). Например, множество всех квадратов есть пересечение множества всех ромбов и множества всех прямоугольников. Если множества A и B не имеют общих элементов, то говорят, что эти множества не пересекаются (или имеют пустое пересечение). В общем случае пересечение произвольной совокупности множеств A_α ($\alpha \in I$) есть множество C (обозначаемое символом $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$), состоящее из всех элементов, которые принадлежат каждому из множеств A_α ($\alpha \in I$). Вместо термина «пересечение» иногда используют термин *«теоретико-множественное произведение»*.

Разностью двух множеств A и B называется множество C, которое обозначается символом $A \setminus B$ и состоит из всех тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B (рис. П.4). Разность между множеством M и его подмножеством A называется *дополнением* множества A во множестве M.

Непосредственно проверяется, что:

1) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность);

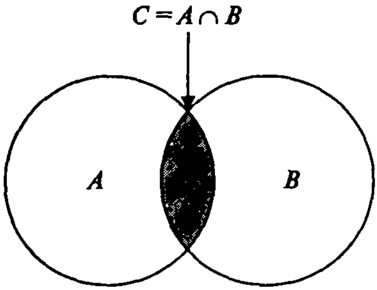


Рис. П.3

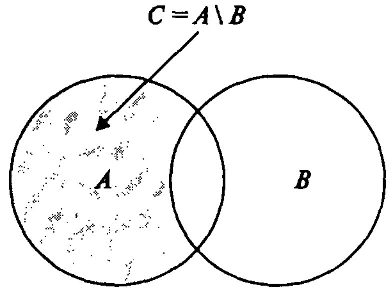


Рис. П.4

2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap A)$ (ассоциативность);
3) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$, $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (дистрибутивность);
4) $A\cup A=A$, $A\cap A=A$ (идемпотентность);
5) $A\cup\varnothing=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$; если $A\subseteq E$, то $A\cup E=E$, $A\cap E=A$;
6) если $A\subseteq E$, то $E\setminus(E\setminus A)=A$;
7) если $A\subseteq E$, то $A\cup(E\setminus A)=E$; $\mathrm{A}\cap(E\setminus A)=\varnothing$;
8) если $A\subseteq E$, $B\subseteq E$, то $(A\cup(E\setminus A))\cap B=B$, $(A\cap(E\setminus A))\cup B==B$;
9) $(A\cup B)\cap B=B$, $(A\cap B)\cup B=B$;
10) если $A\subseteq E$, $B\subseteq E$, то $E\setminus(A\cup B)=(E\setminus A)\cap(E\setminus B)$, $E\setminus(A\cap B)=(E\setminus A)\cup(E\setminus B)$.

Свойства 2), 3), 4), 10) естественным образом обобщаются на случай произвольной (конечной или бесконечной) совокупности множеств.

П.1.3. Пусть A и B — непустые множества, элементами которых могут быть любые объекты. *Отображение* g из A в B есть правило, ставящее в соответствие каждому элементу x множества A один вполне определенный (для каждого x свой) элемент y множества B. Элемент y, который отображение g ставит в соответствие элементу x, обозначается символом $g(x)$ и называется *частным значением* (или просто *значением*) отображения g на элементе x, т.е. $y=g(x)$. Элемент y называется также *образом* элемента x, а элемент x — *прообразом* элемента $y=g(x)$. Множество A называется областью определения отображения g. Множество всех значений отображения g обозначается символом $g(A)$ и называется *областью* *значений* отображения g. Таким образом, $g(A) \subseteq B$. Отображение полностью определено, если: 1) задано множество A (которое отображается); 2) задано множество B (в которое отображается множество A); 3) задано правило (закон) g, по которому для каждого элемента $x \in A$ задается определенный элемент $y \in B$ (для каждого x свой y). Если $g(A) = B$, то вместо термина «отображение g из A в B» используют термин «отображение g из A на B».Часто вместо длинной (но правильной) терминологии: ... отображение g из A в (на) B... применяют краткую (не совсем правильную) терминологию: ...*отображение* g ... не называя явно множества A и B. Используемая в литературе для записи отображения символика $g : A \to B$ включает все три составные части (g, A, B) понятия отображения. Символика $x \to g(x), x \in A$ (или $g : x \to g(x), x \in A$) предпочтительнее, ибо здесь прямо показано, что элемент $x \in A$ отображается в свой образ $g(x) \in B$. Наиболее употребительным является такое (укороченное) обозначение отображения: $g(x)$, $x \in A$, которое обычно и применяется. Вместо слова «отображение» используется также термин *оператор*.

Если $g(A) \subseteq A$, то отображение g называется преобразованием множества A. Пусть $g(A) \subseteq A$. Элемент $\dot{x} \in A$, такой, что $g(\dot{x}) = \dot{x}$, называется неподвижной точкой отображения A.

Отображение g называется *тождественным*, если $A = g(A)$ и $g(x) = x$ для всех x из A, т.е. в случае тождественного отображения все элементы x из A являются неподвижными.

Отображение называется обратимым, если из того, что $x' \neq x''$ ($x' \in A$, $x'' \in A$), следует, что $g(x') \neq g(x'')$ (т.е. каждый образ $g(x)$ имеет единственный прообраз x), а отображение $h : g(A) \to A$ называется обратным к отображению g. Иными словами, обратным называется отображение, ставящее в соответствие каждому образу $g(x)$ его прообраз x. Обратимость отображения g означает, что у этого отображения имеется обратное отображение h. Говорят, что обратимое отображение g устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами A и $g(A)$. Очевидно, область значений отображения g есть область определения обратного отображения h, а область определения отображения g — область значений отображения h. Обратное отображение также обратимо, и обратным для него является само отображение g. Отображение, обратное к отображению g, обозначается символом g^{-1}.

Если между множествами A и B можно установить *взаимно однозначное соответствие*, т.е. если существует хотя бы одно обратимое отображение $g : A \to B$, такое, что $g(A) = B$, то говорят, что множества A и B имеют *одинаковую мощность*. Множества, имеющие одинаковую мощность, называются также эквивалентными множествами. Очевидно, множества A и B, эквивалентные одному и тому же множеству C, эквивалентны между собой. Два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они состоят из одного и того же числа элементов. Всякое бесконечное множество имеет хотя бы одно собственное подмножество, ему эквивалентное. Верно и обратное. Множество, эквивалентное множеству всех натуральных чисел $\{1, 2, 3, ...\}$, называется *счетным*. Все счетные множества эквивалентны между собой. Понятие мощности в применении к бесконечным множествам является аналогом понятия количества для конечных множеств.

П.1.4. Пусть даны два отображения $g : A \to B$ и $f : B \to C$ (очевидно, $g(A) \subseteq B$), т.е. отображение сопоставляет каждому элементу x из A один вполне определенный элемент $y = g(x)$ из B, а отображение f сопоставляет каждому элементу y из B один вполне определенный элемент $z = f(y)$ (рис. П.5). Отображение s из A в C, сопоставляющее каждому элементу x из A элемент $z = f(g(x))$ из C, обозначается символом fg (или $f^{\circ}g$) и называется композицией (суперпозицией или произведением) отображения g и f (см. рис. П.5). Таким

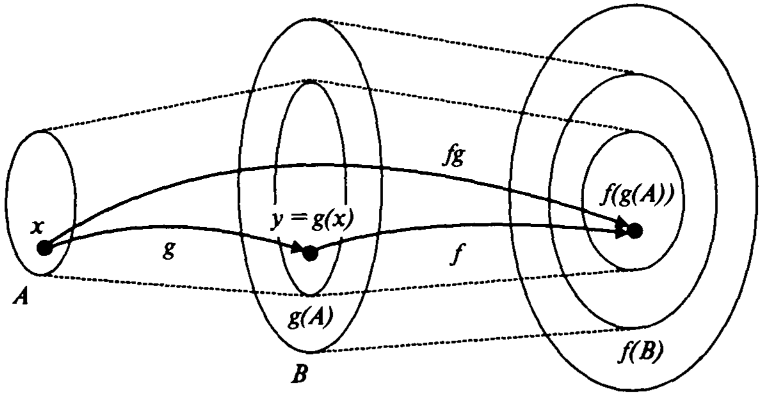


Рис. П.5

образом, $fg : x \to f(g(x))$, $x \in A$. Очевидно, отображение gg^{-1} и $g^{-1}g$ являются тождественными.

Отображение называется *функционалом*, если B есть множество действительных чисел E_1. Функционал называется *функцией*, если его область определения A представляет собой множество n-мерного пространства или, в частности, множество из E_1 (ряд авторов используют термины «отображение» и «функция» как синонимы). Иногда, чтобы подчеркнуть, что речь идет об отображении во множество действительных чисел, говорят *скалярная* (или *числовая*) функция. Для отображения множества n-мерного пространства E_n в m-мерное пространство E_m ($m \geq 1$) используют термин *векторная* (или *векторно-значная*) *функция* (при $m = 1$ имеем скалярную функцию). В случае функции (скалярной или векторной) элемент x из $A \subseteq E_1$ называется независимой переменной (аргументом), а сама функция (скалярная или векторная) называется *функцией одной переменной*, или *функцией скалярного аргумента*. В случае когда элемент $x \in A \subseteq E_n$, функцию (скалярную или векторную) называют *функцией нескольких переменных* $x = (x_1, ..., x_n)$, или функцией векторного аргумента x.

П 2. Векторы и множества векторов

П.2.1. n-мерный вектор — упорядоченный набор из n действительных чисел. Эти числа называются *координатами* (или компонентами) вектора. Вектор $x = (x_1, x_2)$, имеющий две координаты, называется двумерным, пять координат ($x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$) — пятимерным, n координат ($x = (x_1, ..., x_n)$) n-мерным. Одномерный вектор (т.е. вектор, имеющий одну координату) есть число.

Вектор, у которого все координаты равны нулю, называется нулевым $0 = (0, ..., 0)$. Два вектора называются равными, если они имеют одно и то же число координат и если их соответствующие координаты равны. Координаты вектора нельзя менять местами, ибо после их перестановки может получиться новый вектор, например $(3, 2, 6, 9, 4) \neq (2, 3, 6, 9, 4)$. Для n-мерных векторов определена операция умножения на действительные числа и операция сложения. Обе эти операции являются «покоординатными». Произведением вектора $x = (x_1, ..., x_n)$ на действительное число λ называется вектор $\lambda x = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$. Суммой векторов $x = (x_1, ..., x_n)$ и $y = (y_1, ..., y_n)$ называется вектор $x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$. Операции сложения и умножения векторов обладают следующими свойствами (проверяются непосредственно):

1) $x + y = y + x$;
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3) $x + 0 = x$;
4) $x + (-x) = 0$ $(-x = (-x_1, ..., -x_n))$;
5) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
7) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
8) $1x = x$.

Множество всех n-мерных векторов с определенными выше операциями сложения и умножения на действительные числа называется n-мерным пространством (символика: E_n), точнее n-мерным координатным пространством или n-мерным арифметическим пространством. n-мерные векторы являются элементами пространства E_n. Элементы пространства E_n называют его точками; следовательно, термины «вектор» и «точка» используются как синонимы.

Пусть $x_1, ..., x_k$ – n-мерные векторы, а $\alpha_1, ..., \alpha_k$ — числа. Вектор $y = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k$ называется линейной комбинацией векторов $x_1, ..., x_k$ с коэффициентами $\alpha_1, ..., \alpha_k$. Линейной оболочкой векторов $x_1, ..., x_k$ называется совокупность всех линейных комбинаций этих векторов. Набор (система) векторов $x_1, ..., x_k$ называется линейно зависимым, если существуют числа $\alpha_1, ..., \alpha_k$, не все равные нулю, такие, что $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k = 0$. В противном случае набор векторов называется линейно независимым. В пространстве E_n всякий набор, содержащий более чем n векторов, обязательно линейно зависим. Легко проверяется, что набор из векторов

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, ..., 0, 1)$$

пространства E_n линейно независим. Следовательно, всякий линейно независимый набор векторов в пространстве E_n содержит n векторов или меньше.

Набор из n линейно независимых векторов называется базисом пространства E_n, а число векторов в базисе — размерностью (рангом) пространства E_n. Таким образом, размерность (ранг) пространства E_n равна n. Базис $e_1, ..., e_n$ называется стандартным. Пусть набор векторов $f_1, ..., f_n$ является базисом пространства E_n, тогда всякий вектор $x \in E_n$ представляется в виде линейной комбинации векторов базиса $x = \xi_1 f_1 + ... + \xi_n f_n$, и это представление единственно. Поэтому говорят, что базис порождает пространство E_n, ибо пространство E_n совпадает с линейной оболочкой своего базиса. Коэффициенты $\xi_1, ..., \xi_n$ в представлении вектора x в виде линейной комбинации векторов базиса $f_1, ..., f_n$ называются координатами вектора f относительно базиса $f_1, ..., f_n$. Поскольку представление вектора $x = (x_1, ..., x_n)$ в виде линейной комбинации векторов стандартного базиса $e_1, ..., e_n$ имеет вид $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$, постольку координаты (компоненты) $x_1, ..., x_n$ вектора x суть не что иное, как координаты этого вектора относительно стандартного базиса $e_1, ..., e_n$ пространства E_n. В приложениях используются базисы пространства E_n, не являющиеся стандартным базисом, и осуществляются переходы от одних базисов к другим.

П.2.2. Евклидовой нормой (длиной) вектора $x = (x_1, ..., x_n)$ называется число, равное квадратному корню из суммы квадратов всех его координат, т.е.

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}.$$

Используются также октаэдрическая норма вектора $x = (x_1, ..., x_n)$: $|x|_0 = |x_1| + ... + |x_n|$ и кубическая норма вектора

$$x = (x_1, ..., x_n) : |x|_1 = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

Каждая из этих норм удовлетворяет следующим трем условиям:

1) $|x + y| \le |x| + |y|$ (неравенство треугольника);

2) $|\alpha x| = |\alpha|\,|x|$ (α — действительно число, $|\alpha|$ — его модуль);

3) $|x| > 0$, если $x \ne 0$, и $|x| = 0$, если $x = 0$.

Расстоянием между двумя n-мерными векторами $x = (x_1, ..., x_n)$ и $y = (y_1, ..., y_n)$ называется норма $|x - y|$ вектора $x - y$. Таким образом,

$$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}.$$

Это расстояние называется также евклидовым, ибо оно определено с помощью евклидовой нормы. Иногда для обозначения расстояния между n-мерными векторами x и y используют символ $|x - y|_n$.

Скалярным произведением векторов $x = (x_1, ..., x_n)$ и $y = (y_1, ..., y_n)$ называется число, обозначаемое символом (x, y) или xy и равное сумме произведений соответствующих координат этих векторов, т.е. $(x, y) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$. Свойства скалярного произведения: $(x, x) \ge 0$; $(x, y) = (y, x)$; $(x + y)\,z = (x, z) + (y, z)$; $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$. Векторы x и y называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю, т.е. $(x, y) = 0$. Нулевой вектор 0 ортогонален любому вектору: $(0, x) = 0$. n-мерное пространство, в котором определено скалярное произведение, называется n-мерным евклидовым пространством. Символика та же: E_n. В n-мерном евклидовом пространстве E_n базис $f_1, ..., f_n$ называется *ортогональным*, если $(f_i, f_j) = 0$, $i \ne j$, $i, j = 1, ..., n$. Базис $f_1, ..., f_n$ называется *ортонормированным*, если $(f_i, f_j) = 0$, $|f_i| = 1$, $i \ne j$, $i, j = 1, ..., n$. Очевид-

49*

но, стандартный базис является ортонормированным. Евклидова норма $|x|$ вектора $x = (x_1, ..., x_n)$ равна

$$|x| = \sqrt{(x, x)}.$$

Для любых двух n-мерных векторов x и y справедливо неравенство Коши – Буняковского $|(x, y)| \le |x|\,|y|$, где $|x|$ и $|y|$ — евклидовы нормы векторов x и y соответственно, а $|(x, y)|$ — модуль скалярного произведения (x, y).

Последовательность $x^1, x^2, ..., x^k$ n-мерных векторов $x^k = (x_1^k, ..., x_n^k)$ называется *сходящейся* к n-мерному вектору $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$, если $\lim |x^k - x^0| = 0$, $k = 1, 2, ...$.

П.2.3. n-мерный вектор $x = (x_1, ..., x_n)$ называется ***неотрицательным***, если все его координаты неотрицательны, т.е. $x_i \ge 0$, $i = 1, .., n$ (символика: $x \ge 0$). n-мерный вектор $x = (x_1, ..., x_n)$ называется ***положительным***, если все его координаты положительны, т.е. $x_i > 0$, $i = 1, ..., n$ (символика: $x > 0$).

Если $x \ge 0$, то $(x, x) \ge 0$, если же $x \ge 0$ $(\ne 0)$, то $(x, x) > 0$. Пусть $(x, y) = 0$ и $x \ge 0$, $y \ge 0$, тогда из $x_i > 0$ $(y_i > 0)$ следует, что $y_i = 0$ $(x_i = 0)$. Если векторы x и y имеют равное число координат, то пишут $x > y$, $x \ge y$ в зависимости от того, положительна или неотрицательна разность $x - y$. Отношение $\ge$ есть отношение порядка на множестве всех n-мерных векторов, ибо:

1) $x \ge x$ для любого вектора $x = (x_1, ..., x_n)$;
2) из $x \ge y$, $y \ge z$ следует, что $x \ge z$;
3) из $x \ge y$, $y \ge z$ следует, что $x = z$.

Множество всех n-мерных векторов частично упорядочено отношением $\ge$, поскольку неравенство $x \ge y$ (или симметричное ему $x \le y$) выполняется только для некоторых пар векторов x и y (если, например, $x_i > y_i$, а $x_j < y_j$ $(i \ne j)$, то ни $x \ge y$, ни $x \le y$ не выполняется). В то же время отношение $\ge$ на множестве всех действительных чисел есть отношение линейной упорядоченности, ибо для любых двух чисел α и β всегда справедливо либо $\alpha \le \beta$, либо $\alpha \ge \beta$.

П.2.4. Для изображения двумерных векторов введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат. Двумерный вектор $x = (x_1, x_2)$, т.е. упорядоченная пара (x_1, x_2) действительных чисел x_1 и x_2, изображается на плоскости *точкой* $X = (x_1, x_2)$ с координатами x_1 и x_2 (первая геометрическая интерпретация упорядоченной пары (x_1, x_2) — рис. П.6) или *направленным отрезком* OX, начало которого совпадает с началом координат — точкой O = (0, 0), а конец — с точкой $X = (x_1, x_2)$ (вторая геометрическая интерпретация упорядоченной пары (x_1, x_2) — рис. П.7). Двумерный вектор $x = (x_1, x_2)$ изображается также в виде произвольного направленного отрезка AB, равного направленному отрезку OX (равенство направленных отрезков AB и OX означает, что они параллельны, одинаково направлены и имеют равные длины — см. рис. П.7). Если точки X и Y изображают векторы $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ соответственно, то сумма $x + y$ этих векторов изображается точкой R, такой, что OXRY — параллелограмм, если точки O, X и Y не лежат на одной прямой (см. рис. П.6). Если число $\lambda > 0$, вектор $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2)$ изображается точкой $S = (\lambda x_1, \lambda x_2)$ луча OX, такой, что отношение длин отрезков OS и OX равно λ. Если $\lambda' < 0$, то вектор $\lambda' x = (\lambda' x_1, \lambda' x_2)$ изображается точкой $S' = (\lambda' x_1, \lambda' x_2)$, лежащей на продолжении луча OX за точку O и такой, что отношение длин отрезков OS' и OX равно числу $-\lambda' > 0$. Если число $\lambda = 0$, то вектор $\lambda x = (0, 0)$ изображается точкой O. Рассмотрим первую геометрическую интерпретацию двумерных векторов $x = (x_1, x_2)$,

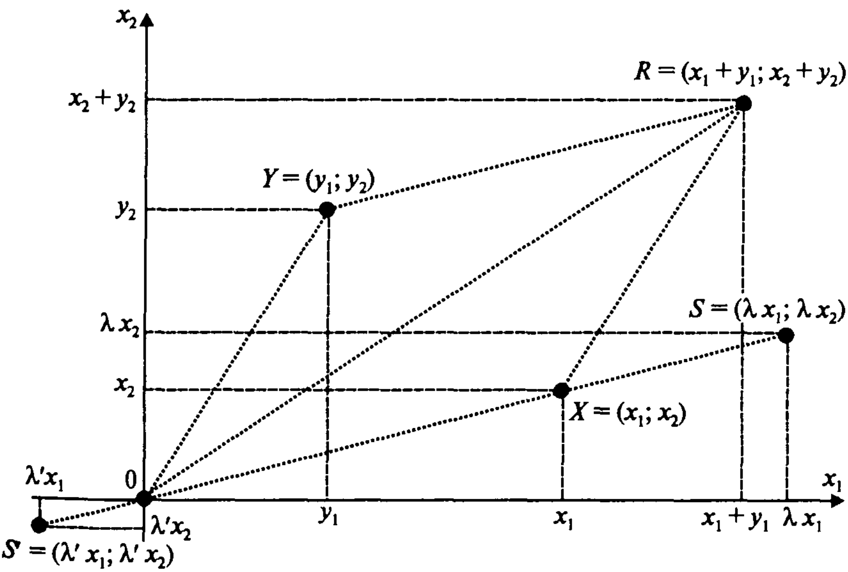


Рис. П6

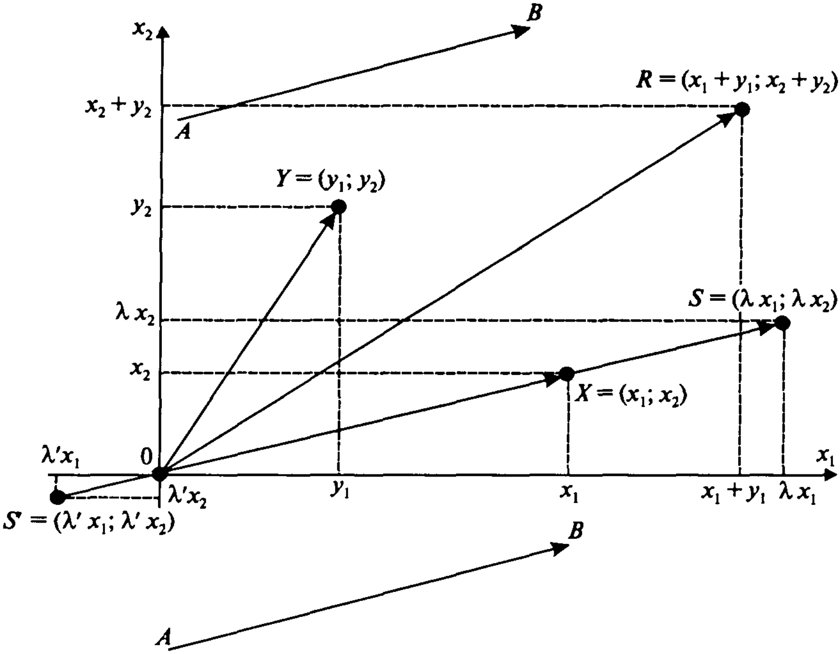


Рис. П7

таких, что $x \geq y$ (вектор $y = (y_1, y_2)$ — фиксированный), векторов $z = (z_1, z_2)$, таких, что $y \leq z$, и векторов $v = (v_1, v_2)$, для которых ни неравенство $v \geq y$, ни неравенство $v \leq y$ не выполняются. На рис. П.8 часть плоскости, заштрихованная горизонтально, изображает множество всех векторов x; часть плоскости, заштрихованная вертикально, изображает множество всех векторов z; часть незаштрихованной плоскости изображает множество всех векторов v. Вторая геометрическая интерпретация суммы двух векторов, произведения вектора на число и векторных неравенств рассматривается аналогично (см. рис. П.8 и П.9).

Одномерные векторы изображаются точками или направленными отрезками на координатной прямой, трехмерные векторы — точками или направленными отрезками в трехмерном пространстве, в котором введена прямоугольная декартова система координат. n-мерные векторы ($n \geq 4$) не имеют наглядной геометрической интерпретации. Если координаты n-мерного вектора x

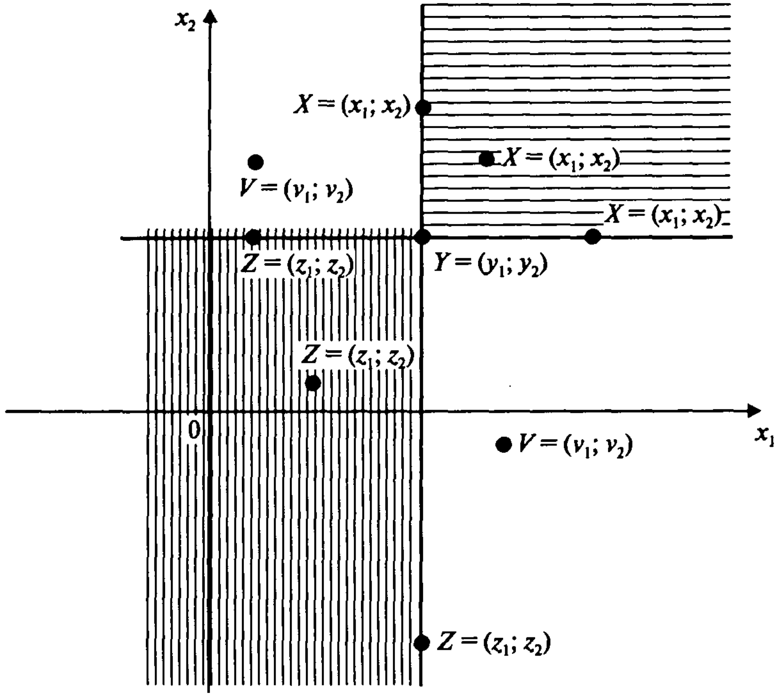


Рис. П8

записываются в виде строки $x = (x_1, ..., x_n)$, вектор называется *вектором-строкой*, если в виде столбца

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

вектор называется *вектором-столбцом*. Вектор-столбец есть транспонированный вектор-строка, поэтому его иногда обозначают символом x'. Разделение на векторы-строки и векторы-столбцы необходимо при рассмотрении векторов в комбинации с матрицами. В этом случае разделение каждый раз оговаривается.

Приведенные выше определения произведения вектора на число, суммы двух (и более) векторов, нормы вектора, расстояния между векторами и утверждения относительно этих операций применимы и для *комплексных векторов*, т.е. векторов, координа-

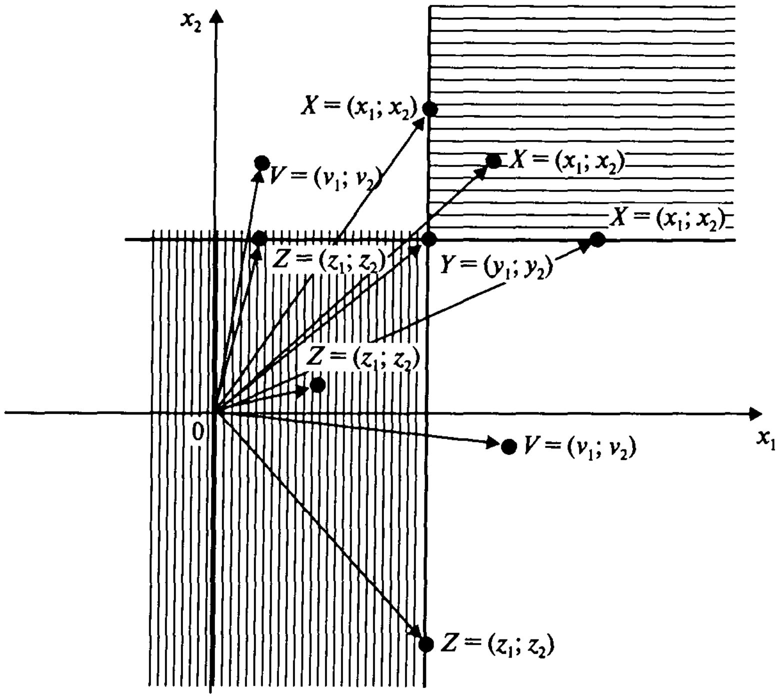


Рис. П9

тами которых являются комплексные числа. Исключение составляет скалярное произведение, которое для комплексных векторов $x=(x_1, \ldots, x_n)$, и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ вводится следующим образом:

$$(x, y)=x_1\overline{y}_1+\ldots+x_n\overline{y}_n,$$

где $\overline{y}_i$ — числа, комплексно сопряженные с числами y_i $(i=1, \ldots, n)$. Свойства скалярного произведения для любых комплексных векторов x, y, z и любого комплексного числа λ:

$$(x, x)\geq 0, (x, y)=\overline{(y, x)},$$
$$(x+y, z)=(x, z)+(y, z),$$
$$(\lambda x, y)=\lambda(x, y).$$

Вектор с координатами $\overline{y}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ обозначается символом $\overline{y}$ и называется вектором, *сопряженным* с вектором y. Скалярное произведение, введенное для комплексных векторов, на действительных векторах совпадает со скалярным произведением, определенным для действительных векторов.

Кроме векторов с действительными (и комплексными) координатами в экономико-математическом моделировании используются векторы, координаты которых — функции.

В теории n-мерного пространства применяется геометрическая терминология, хотя при $n \geq 4$ пространство E_n не имеет наглядной геометрической интерпретации. Использование геометрической терминологии при описании множеств пространства E_n ($n \geq 4$), задаваемых аналитически, оправдано тем, что эти множества сохраняют ряд существенных свойств аналогичных им множеств пространства E_n ($n = 1, 2, 3$), которые уже имеют наглядную геометрическую интерпретацию и свое геометрическое «имя». Это важное обстоятельство позволяет при исследовании (весьма абстрактных) объектов пространства E_n использовать богатый геометрический опыт, который приобретается естественным образом при изучении пространства E_n ($n = 1, 2, 3$). В дальнейшем для краткости вместо слов «множество векторов (точек) x из E_n, координаты $x_1, ..., x_n$ которых удовлетворяют уравнению (системе уравнений, неравенству, системе неравенств)», будем говорить «множество векторов (точек) x, удовлетворяющих уравнению (системе уравнений, неравенству, системе неравенств)».

П.2.5. Непустое множество векторов из E_n называется *подпространством* L пространства E_n; если $x \in L$ и $z \in L$ и α и β — произвольные действительные числа, то $\alpha x + \beta z \in L$. Отсюда вытекает, что подпространство L обязательно содержит нулевой вектор и вместе с любыми своими векторами содержит все их линейные комбинации. Очевидно, множество, состоящее только из нулевого вектора, а также все пространство E_n являются подпространствами. Эти подпространства называются *несобственными*, все остальные подпространства — *собственными* подпространствами пространства E_n. Набор, содержащий максимальное число линейно независимых векторов из L, называется базисом подпространства L, а само максимальное число — размерностью (рангом) подпространства L. Собственное подпространство пространства E_n может иметь размерность от 1 до $n - 1$ включительно. Размерность нулевого подпространства равна нулю. Любой вектор x из L представляется в виде линейной комбинации векторов базиса подпространства L, и это представление для вектора x единственно. Отсюда следует, что подпространство есть линейная оболочка векторов своего базиса. Пересечение любого числа подпространств есть подпространство пространства E_n. Множество всех векторов пространства E_n, ортогональных подпространству L (т.е. ортогональных любому вектору из подпространства L), обозначается символом $L^{\perp}$ и называется *ортогональным дополнением* подпространства L. Ортогональное дополнение подпространства L является подпространством пространства E_n (проверяется непосредственно). Ортогональным дополнением нулевого подпространства является все пространство E_n, и наоборот. Ортогональное дополнение ортогонального дополнения подпространства L есть само подпространство L. Если $f_1, ..., f_k$ — базис подпространства L, а $h_1, ..., h_m$ — базис его ортогонального дополнения L, то обязательно $k + m = n$ и набор $f_1, ..., f_k, h_1, ..., h_m$ является базисом пространства E_n. Множество всех векторов x, удовлетворяющих однородной системе линейных алгебраических уравнений $Ax = 0$, есть подпространство пространства E_n (проверяется непосредственно). Размерность этого подпространства равна $k = n - r$, где r — ранг матрицы A (см. ниже). Базис этого подпространства L называется фундаментальным набором решений системы $Ax = 0$. Базис ортогонального дополнения $L^{\perp}$ образует r линейно независимых строк матрицы A.

Множество C n-мерных векторов x, y, ... называется конусом в пространстве E_n, если для любых векторов x и y из C и любых действительных чисел $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ справедливо $\alpha x + \beta y \in C$.

n-мерный вектор (точка) x^{λ}, такой, что $x^{\lambda} = (1 - \lambda)x^0 + \lambda x^1$, где число $0 \leq \lambda \leq 1$, называется выпуклой комбинацией векторов (точек) x^0 и x^1. Множество всех выпуклых комбинаций векторов x^0 и x^1 называется отрезком K, соединяющим векторы (точки) x^0, x^1. Множество M n-мерных векторов называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя своими векторами (точками) целиком содержит отрезок, который их соединяет. Выпуклое множество — это множество, не имеющее вмятин и дыр.

Пусть L — подпространство пространства E_n и пусть $x^0 \in E_n$ — фиксированный вектор, который может как принадлежать, так и не принадлежать подпространству L. Рассмотрим множество M всех векторов $x = z + x^0$, где вектор z «пробегает» все подпространство L. Это множество называется линейным многообразием пространства E_n. Говорят, что линейное многообразие M есть результат сдвига подпространства L вдоль вектора x^0. Линейное многообразие может и не быть подпространством. Непустое пересечение любого числа линейных многообразий есть линейное многообразие. Множество всех векторов x, удовлетворяющих системе линейных алгебраических уравнений $Ax = b$, есть линейное многообразие M. Обратно, линейное многообразие M есть множество всех векторов x, удовлетворяющих системе уравнений $Ax = b$, строки матрицы A которой суть векторы базиса ортогонального дополнения $L^{\perp}$ подпространства L, сдвигом которого получилось линейное многообразие M. Размерностью (рангом) линейного многообразия M называется размерность (ранг) подпространства L, сдвигом которого было получено линейное многообразие M. Нульмерное многообразие состоит из единственного фиксированного вектора (точки); если этот вектор нулевой, нульмерное многообразие есть нулевое подпространство. Одномерное линейное многообразие называется прямой, двумерное — плоскостью, ..., k-мерное линейное многообразие — k-мерной плоскостью ($k \geq 3$). Линейное многообразие размерности (ранга) $n - 1$ называют гиперплоскостью пространства E_n и обозначают символом H_{n-1} или просто H. Гиперплоскость есть множество всех векторов x, удовлетворяющих уравнению $a_1x_1 + ... + a_nx_n = b$, где вектор $a = (a_1, ..., a_n) \neq 0$. Гиперплоскость H_1 изображается на плоскости; эта прямая имеет уравнение $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ (первая геометрическая интерпретация — рис. П.10). Кроме того, гиперплоскость H_1 можно понимать как множество (геометрическое место) концов направленных отрезков, координаты которых удовлетворяют уравнению $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ и начала которых находятся в точке О (вторая геометрическая интерпретация — см. рис. П.10). Гиперплоскость H порождает два замкнутых полупространства H^- и H^+ пространства E_n. *Замкнутое полупространство* $H^-(H^+)$ есть множество точек $x \in E_n$, удовлетворяющих неравенству $a_1x_1 + ... + a_nx_n \leq b$ ($a_1x_1 + ... + a_nx_n \geq b$) Очевидно, $H^+ \cap H^- = H_{n-1}$, $H^+ \cup H^- = E_n$. Полупространство $H^-(H^+)$, порождаемое прямой $2x_1 + x_2 = 2$, изображается полуплоскостью, содержащей эту прямую и расположенной ниже (выше) этой прямой (рис. П.11). Гиперплоскость H порождает также два открытых полупространства $\mathring{H}^-$ и $\mathring{H}^+$. Открытое полупространство $\mathring{H}^-(\mathring{H}^+)$ есть множество точек $x \in E_n$, удовлетворяющих неравенству $a_1x_1 + ... + a_nx_n < b$ ($a_1x_1 + ... + a_nx_n > b$). Очевидно, что $\mathring{H}^- \cap \mathring{H}^+ = \varnothing$ и $\mathring{H}^- \cup H \cup \mathring{H}^+ = E_n$. Полупространство $\mathring{H}^-(\mathring{H}^+)$, порождаемое прямой $2x_1 + x_2 = 2$, изображается полуплоскостью, не содержащей этой прямой и расположенной ниже (выше) этой прямой (см. рис. П.11).

Размерностью множества $A \subseteq E_n$ называется размерность линейного многообразия, которое есть пересечение всех линейных многообразий, включающих множество A.

В приводимых ниже определениях вместо термина «вектор» обычно используется эквивалентный ему термин «точка».

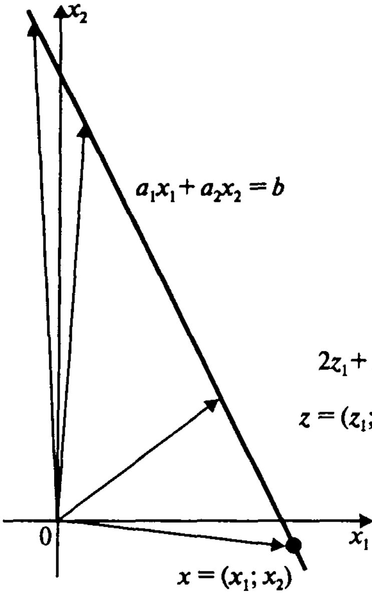


Рис. П10

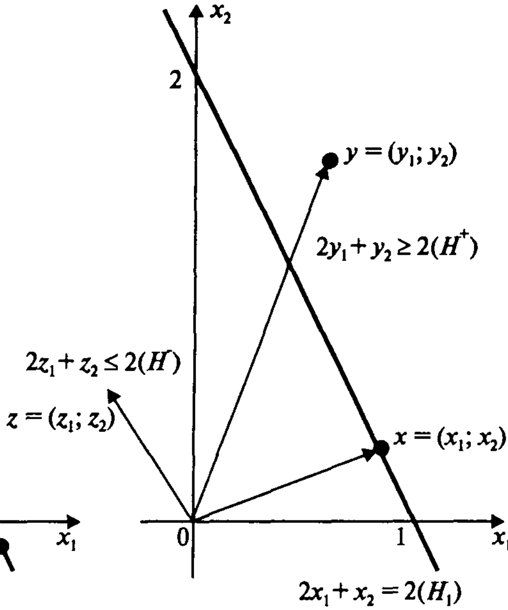


Рис. П11

П.2.6. Пусть $a \in E_n$ и $r > 0$ — число. Множество точек $x \in E_n$, обладающих свойством $|x - a| < r$, называется открытым n-мерным шаром радиуса r с центром в точке a (символика: $U_n(r, a)$). Напомним, что $|x - a| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}$. Множество точек $x \in E_n$, обладающих свойством $|x - a| = r$, называется n-мерной сферой радиуса r с центром в точке a (символика: $S_n(r, a)$). На плоскости множество $U_2(r, a)$ изображается кругом (без периферии) радиуса r с центром в точке a, а множество $S_2(r, a)$ — окружностью радиуса r с центром в точке a (рис. П.12). n-мерный открытый шар

$U_n(r, a)$ — выпуклое множество, не имеющее крайних точек. n-мерный замкнутый шар $U_n(r, a) \cup S_n(r, a)$ — выпуклое множество, множество крайних точек которого совпадает с $S_n(r, a)$. Множество $S_n(r, a)$ не является выпуклым.

ε-окрестностью точки a называется открытый n-мерный шар радиуса ε с центром в точке a. Точка a множества $A \subseteq E_n$ называется внутренней, если она принадлежит множеству A вместе со всеми близкими к ней точками, т.е. если она принадлежит множеству A вместе с некоторой своей ε-окрестностью $U_n(\varepsilon, a)$ (рис. П.13, $n = 2$). Множество внутренних точек множества A обозначается символом $\dot{A}$ и называется внутренностью множества A. Множество, все точки которого внутренние, называется открытым. Объединение двух и более открытых множеств есть множество открытое. Пересечение конечного числа открытых множеств есть множество открытое. Пространство E_n, n-мерный шар, открытое полупространство — примеры открытых множеств. Благодаря свойствам открытых множеств множество всех открытых множеств пространства E_n вместе с пустым множеством образует топологию в пространстве E_n (эта топология называется *естествен-*

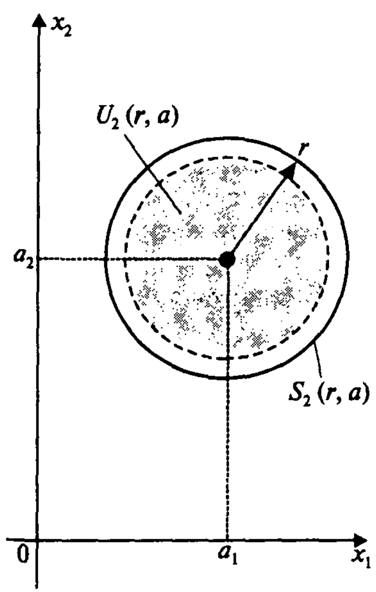


Рис. П12

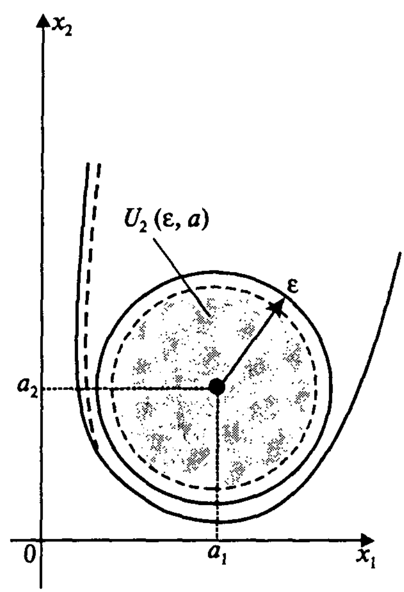


Рис. П13

ной). Следовательно, пространство E_n — это пример *топологического пространства*.

Точка $a \in E_n$ называется граничной точкой множества A, если для любого числа $\varepsilon > 0$ открытый шар $U_n(\varepsilon, a)$ содержит точки, как принадлежащие множеству A, так и не принадлежащие множеству A (рис. П.14, $n = 2$). Множество граничных точек множества A обозначается символом $\dot{A}$ и называется границей множества A. Объединение $A \cup \dot{A}$ обозначается символом $\bar{A}$ и называется замыканием множества A. Множество A, содержащее все свои граничные точки, называется замкнутым. Множество, не имеющее граничных точек, по определению является замкнутым. Пересечение двух и более замкнутых множеств есть множество замкнутое. Объединение конечного числа замкнутых множеств есть множество замкнутое. Пространство E_n, множество, содержащее только конечное число точек, n-мерная сфера, множество $U_n(r, a) \bigcup S_n(r, a)$ (это n-мерный замкнутый шар), линейное многообразие, замкнутое полупространство, множества $\dot{A}$ и $\bar{A}$ (если они не пусты) — примеры замкнутых множеств.

Если A — множество открытое, то $E_n \setminus A$ — множество замкнутое; если A — множество замкнутое, то $E_n \setminus A$ — множество открытое (теорема о дополнении). Множество $A \subseteq E_n$ называется ограниченным, если существует такое число $r > 0$, что $A \subseteq U_n(r, 0)$, в противном случае множество A называется неограниченным. n-мерный шар (открытый и замкнутый), n-мерная сфера — примеры ограниченных множеств; пространство E_n, подпространство (не нулевое), линейное многообразие (не нульмерное), полупространство — примеры неограниченных множеств. Множество $A \subseteq E_n$ называется компактом, если оно замкнуто и ограничено.

Пусть A_1 и A_2 — непустые множества в пространстве E_n. Векторной суммой (суммой по Минковскому) множеств A_1 и A_2 называется множество всех векторов z вида $z = x + y$, где вектор x «пробегает» все множество A_1, а вектор y — все множество A_2. Векторная сумма множеств A_1 и A_2 обозначается символом $A_1 + A_2$. Например, линейное многообразие M есть векторная сумма подпространства L и вектора x^0, вдоль которого подпространство сдвигается: $M = \{x^0\} + L$. Векторную сумму $A_1 + A_2$ множеств A_1 и A_2 не следует путать с объединением (теоретико-множественной суммой) $A_1 \bigcup A_2$ этих множеств. Пусть A — непустое множество в пространстве E_n. Произведением множества A на число α называется множество всех векторов z вида $z = \alpha x$, где вектор x «пробегает» все множество A. Произведение множества A на число α обозначается символом αA. Всегда $2A \subseteq A + A$, легко построить пример, когда $2A \neq A + A$. Пусть множество

$$A = \left\{ (x_1; x_2) \middle| x_2 = \frac{x_1}{x_1 - 1}, x_1 < 1 \right\}.$$

Тогда множество

$$2A = \left\{ (x_1; x_2) \middle| x_2 = \frac{2x_1}{x_1 - 2}, x_2 < 2 \right\},$$

а множество

$$A + A = \left\{ (x_1; x_2) \middle| x_2 \leq \frac{2x_1}{x_1 - 2}, x_2 < 2 \right\},$$

т.е. $2A \subset A + A$ (рис. П.15).

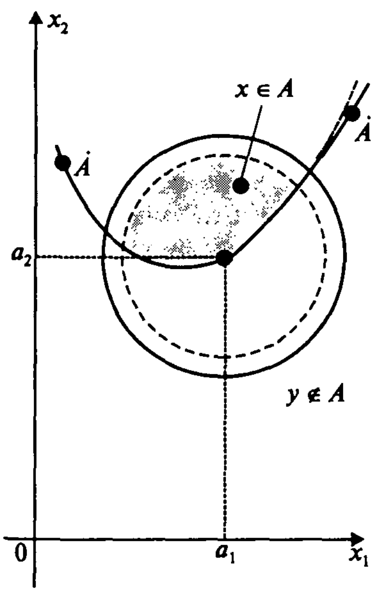


Рис. П14

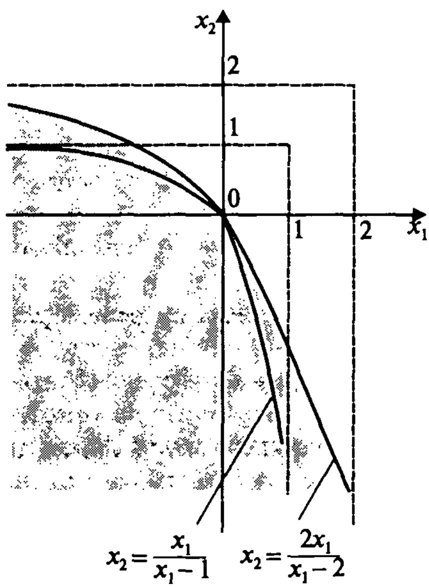


Рис. П15

П 3. Матрицы и операции над матрицами

П.3.1. Матрица — прямоугольная таблица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

действительных чисел a_{ij}, $i = 1, ..., m$; $i = 1, ..., n$. Такая таблица называется также матрицей с размерами $m \times n$ или $(m \times n)$-матрицей. n-мерный вектор $a_i = (a_{i1}, ..., a_{in})$ называется i-й строкой матрицы A,

а m-мерный вектор $a^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ называется j-м столбцом матрицы A.

Число a_{ij} называется элементом матрицы A: индекс i показывает номер строки, а индекс j — номер столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}. Используется следующая символика: $A = (a_{ij})$ (или $\mathrm{A} = \| a_{ij} \|$). Если $m = n$, то A называется квадратной матрицей, число n — ее порядком, а совокупность $a_{11}, ..., a_{nn}$ элементов квадратной матрицы A — главной диагональю матрицы A.

$(m \times n)$ — матрица, у которой все элементы равны нулю, называется нулевой. Нулевая матрица обозначается символом 0. $(1 \times n)$-матрица есть n-мерный вектор-строка, $(m \times 1)$-матрица есть m-мерный вектор-столбец, (1×1)-матрица есть число a_{11}. n-мерный вектор-строку можно понимать как $(1 \times n)$-матрицу, а m-мерный вектор-столбец — как $(m \times 1)$-матрицу.

Две матрицы A и B называются равными, если они имеют одинаковые размеры и если их соответствующие элементы равны. Равенство матриц A и B записывается так: $A = B$. Элементы матрицы переставлять нельзя, ибо после их перестановки может получиться, вообще говоря, новая матрица.

Для матриц определены операции сложения, умножения и умножения на числа.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число α называется матрица, каждый элемент которой равен соответствующему элементу a_{ij} матрицы A, умноженному на число α, т.е. $\alpha A = \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$.

Матрицы можно складывать, если они имеют одинаковые размеры. Суммой матриц A и B называется матрица C, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме соответствующих элементов a_{ij} и b_{ij} матриц A и B: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Непосредственно проверяется, что: 1) $A + B = B + A$; 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$; 3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$; 4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$; 5) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$. Здесь A, B, C — матрицы с размерами $m \times n$, а α и β — числа.

Произведением двух прямоугольных матриц — $(m \times n)$-матрицы A на $(n \times p)$-матрицу B — называется $(m \times p)$-матрица C, каждый элемент c_{ij} которой вычисляется по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, p.$$

Если число столбцов матрицы A не равно числу строк матрицы B, произведение AB не определяется. Непосредственно проверяется, что: 1) $(AB)C = A(BC)$; 2) $(A + B)C = AC + BC$; 3) $A(B + C) = AB + AC$; 4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$. Здесь матрицы A, B и C соответствующих размеров, а α — число.

Произведение двух квадратных матриц порядка n есть квадратная матрица порядка n. Если A и B — квадратные матрицы, то, вообще говоря, $AB \neq BA$.

Умножение $(m \times n)$-матрицы A на n—мерный вектор-столбец x и умножение m-мерного вектора-строки y на $(m \times n)$-матрицу A выполняется по правилу умножения прямоугольных матриц, когда одна из них является $(n \times 1)$-матрицей (т.е. n-мерным вектором-столбцом) или $(1 \times m)$-матрицей (т.е. m-мерным вектором-строкой).

Произведение $(m \times n)$-матрицы A на n-мерный вектор-столбец x есть m-мерный вектор-столбец, а произведение m-мерного вектора-строки y на $(m \times n)$— матрицу A есть n-мерный вектор-строка. Очевидно, что $Ax = x_1 a^1 + \ldots + x_n a^n$, $yA = y_1 a_1 + \ldots + y_m a_m$, т.е. Ax — линейная комбинация столбцов матрицы A, а yA —линейная комбинация строк матрицы A.

Матрица, полученная из матрицы A заменой строк на столбцы, обозначается символом A' и называется транспонированной по отношению к матрице A. Если x — вектор-строка, то очевидно x' — вектор-столбец, и наоборот. Легко проверяются свойства операции транспонирования: 1) $(A')' = A$; 2) $(\alpha A)' = \alpha A'$; 3) $(A + B)' = A' + B'$; 4) $(AB)' = B'A'$; 5) $(Ax)' = x'A'$.

В математическом анализе экономических процессов существенное применение находят матрицы с неотрицательными элементами. Матрица $A = (a_{ij})$ $i = 1, ..., m; j = 1, ..., n$, называется неотрицательной, если все ее элементы неотрицательны (обозначение: $A \geq 0$). Матрица $A = (a_{ij})$ называется положительной, если все ее элементы положительны (обозначение: $A > 0$). Квадратная матрица M, такая, что $m_{ij} \geq 0$ $(m_{ij} > 0)$, $i \neq j$, $i, j = 1, ..., n$, называется матрицей (строгой) Метцлера. Знаки диагональных элементов m_{ij}, $i = 1, ..., n$, не регламентируются. Если матрицы A и B имеют одинаковые размеры, то пишут $A \geq B$, $A > B$ в зависимости от того, неотрицательна или положительна разность $A - B$. Множество всех матриц с одинаковыми размерами $m \times n$ частично упорядочено соотношением $\geq$. Положение здесь такое же, как и в случае множества всех n-мерных векторов.

П.3.2. Пусть A — матрица с размерами $m \times n$. Ранг матрицы A обозначается символом $\rho(A)$ и равен максимальному числу линейно независимых строк (или столбцов) матрицы A, таким образом, всегда $\rho(A) \leq \min(m, n)$. Если $A = 0$, то $\rho(A) = 0$, в противном случае $\rho(A) \geq 1$. Очевидно, $\rho(A) = \rho(A')$. Если произведение двух матриц определено, то ранг этого произведения не больше ранга любого из сомножителей, т.е. $\rho(AB) \leq \min\{\rho(A), \rho(B)\}$. Ранг суммы двух матриц не больше суммы рангов слагаемых, т.е. $\rho(A + B) \leq \rho(A) + \rho(B)$.

Квадратная матрица A порядка n называется вырожденной, если ее ранг $\rho(A) < n$, и невырожденной, если ее ранг равен n.

Все строки (или все столбцы) невырожденной матрицы A порядка n могут быть взяты в качестве базиса пространства E_n. Если B — $(m \times n)$-матрица, T и S — невырожденные матрицы порядков m и n соответственно, то $\rho(B) = \rho(TB) = \rho(BS) = r(TBS)$, т.е. при умножении $(m \times n)$-матрицы B на невырожденную матрицу слева (справа или и слева и справа) ранг $\rho(B)$ матрицы B не меняется.

Каждая невырожденная матрица A порядка n имеет единственную обратную матрицу A^{-1} того же порядка, такую, что

$A^{-1}A = AA^{-1} = I$, где символом I обозначена единичная матрица, т.е. матрица I, такая, что ее элементы $e_{ii} = 1$, $e_{ij} = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Справедливы равенства $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

Если A и B — невырожденные матрицы одного порядка, то матрица AB также невырожденна и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Обратную матрицу A^{-1} можно построить, решив n систем линейных алгебраических уравнений $Ax^j = e^j$, где x^j — j-й столбец искомой обратной матрицы A^{-1}, а e^j — n-мерный орт-столбец, т.е. n-мерный единичный вектор-столбец, у которого одна (конкретно j-я координата) равна единице, а все остальные координаты равны нулю. Все системы $Ax^j = e^j$, $j = 1, \ldots, n$, можно решать одновременно методом Гаусса — Жордана. При больших n обратные матрицы строят именно таким способом.

Если A — квадратная матрица, то символ A^2 означает произведение AA матрицы A на себя, т.е. $A^2 = AA$, вообще для любого натурального k (т.е. k = 1, 2, ...) $A^k = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{k}$. Матрица A^k называется k-й степенью матрицы A. Для любых натуральных чисел p и q справедливы равенства $A^{p+q} = A^pA^q$, $(A^p)^q = A^{pq}$. Если p — натуральное число, то символ A^{-p} означает матрицу $(A^{-1})^p$, т.е. $A^{-p} = (A^{-1})^p$. Нулевая степень квадратной матрицы A есть единичная матрица, т.е. $A^0 = I$. Если A — невырожденная матрица, то для любых целых чисел (положительных, отрицательных и нуля) p и q справедливы равенства $A^{p+q} = A^pA^q$, $(A^p)^q = A^{pq}$.

Все приведенные здесь определения и утверждения (исключая понятия положительных матриц и матриц с неотрицательными элементами) дословно повторяются для матриц и векторов, элементами которых являются комплексные числа.

П 4. Определитель матрицы и его свойства

П.4.1. Квадратная матрица A индуцирует три важных числа: след матрицы A — $trA = a_{11} + \dots + a_{nn}$, ранг матрицы A — $\rho(A)$ и определитель матрицы A — $\det A$.

Определитель $\det A$ матрицы A определяется индуктивно следующим образом. Определитель $\det A$ матрицы A первого порядка (матрица первого порядка есть число a_{11}) равен числу a_{11}.

Определитель $\det A$ матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

есть число $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определитель $\det A$ матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

третьего порядка есть число $\det A = a_{11}a_{22}\,a_{33} + a_{12}a_{23}\,a_{31} + a_{21}a_{32}\,a_{13} - a_{13}a_{22}\,a_{31} - a_{12}a_{21}\,a_{33} - a_{23}a_{32}\,a_{11}$.

Если в матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

четвертого порядка вычеркнуть i-ю строку a_i и j-й столбец a^j, $i,j = 1, 2, 3, 4$, то получим матрицу третьего порядка, определитель M_{ij} которой называется минором (третьего порядка) элемента a_{ij}. Число $(-1)^{i+j}M_{ij}$ обозначается символом A_{ij} и называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы A. Определитель $\det A$ матрицы A четвертого порядка определяется так:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14},$$

т.е. путем разложения по первой строке матрицы A. Вместо первой строки можно было взять любую другую строку или любой столбец

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + a_{4j}A_{4j}.$$

Для матрицы A пятого (n) порядка вычисляются миноры ее элементов четвертого порядка (порядка $n - 1$), а определитель $\det A$ матрицы пятого (n) порядка вычисляется разложением по (любой) строке матрицы A или по (любому) столбцу матрицы A.

П 5. Основные результаты теории квадратных матриц

П.5.1. Вектор $v \neq 0$ называется (правым) собственным вектором (квадратной) матрицы A, если существует число λ, такое, что $Av = \lambda v$. Число λ называется собственным числом матрицы A.

Вектор $w \neq 0$ называется (левым) собственным вектором (квадратной) матрицы A, если существует число λ, такое, что $wA = \lambda w$. Число λ называется собственным числом матрицы A. Число λ и векторы w и v могут быть как действительными, так и комплексными.

Если A — квадратная матрица порядка n, матрица $\lambda I - A$, где λ — независимая скалярная переменная, называется характеристической для матрицы A. Определитель $\det(\lambda I - A)$ характеристической матрицы $\lambda I - A$ является многочленом относительно переменной λ. Он называется характеристическим многочленом матрицы A. Степень характеристического многочлена $\det(\lambda I - A)$ матрицы A равна порядку матрицы A, т.е. натуральному числу n (это можно проверить, непосредственно вычислив определитель $\det(\lambda I - A)$).

Уравнение $\det(\lambda I - A) = 0$ называется характеристическим уравнением матрицы A. Среди корней характеристического уравнения могут быть комплексные корни (даже если матрица A имеет только действительные элементы a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$). Поэтому при достаточно полном разборе таких важных понятий, как собственное число и собственный вектор матрицы A, нельзя обойтись без использования комплексных чисел, ибо собственное число матрицы A является корнем характеристического многочлена $\det(\lambda I - A)$ этой матрицы A; и наоборот, корень характеристического многочлена является собственным числом матрицы A. Поскольку многочлен $\det(\lambda I - A)$ имеет не более n различных корней, постольку матрица A имеет не более n различных собственных чисел. Множество всех собственных чисел матрицы A называется спектром матрицы A. Если матрица имеет собственное число, равное нулю, она вырожденная; и наоборот, вырожденная матрица обязательно имеет собственное число, равное нулю. Алгебраической кратностью (или просто кратностью) собственного числа λ_0 матрицы A называется кратность числа λ_0 как корня характеристического многочлена $\det(\lambda I - A)$.

Выпишем в виде набора $\lambda_1(A), ..., \lambda_n(A)$ все собственные числа матрицы A порядка n так, что каждое собственное число в наборе повторяется столько раз, какова его кратность, тогда: 1) собственные числа $\lambda_i(\alpha A + \beta I)$ $(i = 1, ..., n)$ матрицы $\alpha A + \beta I$ (α и β — числа) равны $\lambda_i(\alpha A + \beta I) = \alpha\lambda_i(A) + \beta$ $(i = 1, ..., n)$; 2) собственные числа $\lambda_i(A^k)$ $(i = 1, ..., n)$ матрицы A^k $(k = 1, ..., n)$ равны $\lambda_i(A)^k$ $(i = 1, ..., n)$; 3) собственные числа $\lambda_i(A^p)$ $(i = 1, ..., n)$ матрицы A^p (p — целое число, которое не равно нулю) равны $\lambda_i^p(A)$ $(i = 1, ..., n)$, если A — невырожденная матрица.

Если матрица A с действительными элементами a_{ij}, $(i, j = 1, ..., n)$ имеет комплексное собственное число ζ_0, то матрица A имеет обязательно собственное число $\bar{\zeta}_0$, комплексно сопряженное с числом ζ_0. Паре комплексно сопряженных собственных чисел ζ_0 и $\bar{\zeta}_0$ соответствует пара комплексно сопряженных собственных векторов u^0 и $\bar{u}^0$ матрицы $A: Au^0 = \zeta_0 u^0$, $A\bar{u}^0 = \bar{\zeta}_0\bar{u}_0$. Умножение действительной матрицы на комплексный вектор-столбец производится по обычному правилу умножения матрицы на вектор-столбец.

Собственные векторы, соответствующие различным собственным числам матрицы A, линейно независимы. Если среди собственных векторов есть комплексные, то необходимо приравнивать к нулю всевозможные линейные комбинации этих векторов с комплексными коэффициентами; в случае линейной независимости все эти коэффициенты должны равняться нулю. Геометрической кратностью собственного числа матрицы A называется максимальное число линейно независимых собственных векторов матрицы A, соответствующих этому собственному числу. Всегда геометрическая кратность не больше алгебраической. Если алгебраическая кратность равна единице, то и геометрическая кратность равна единице.

П.5.2. Важный частный случай квадратных матриц — класс матриц с неотрицательными элементами, которые часто применяются в математическом анализе моделей экономических состояний и процессов.

Квадратная матрица A называется разложимой, если перестановками строк и такими же перестановками столбцов ее можно привести к блочному (клеточному) виду

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix},$$

где A_1 и A_3 — квадратные подматрицы (не обязательно одного порядка) матрицы A. В противном случае квадратная матрица A называется неразложимой. Например, квадратная матрица $A > 0$ неразложима, а матрица I — разложима. Если перестановками матрицу $A \geq 0$ можно привести к блочному (клеточному) виду (вид называется циклическим разложением)

$$\begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{k-1} \\ A_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

где $k \geq 2$ и нули на главной диагонали означают нулевые квадратные подматрицы, которые могут иметь разные порядки, то матрица $A \geq 0$ называется циклической (импримитивной), в противном случае — примитивной. Отметим, что у циклической (импримитивной) матрицы может существовать несколько циклических разложений. Натуральное число $k \geq 2$ называется индексом цикличности (или индексом импримитивности) матрицы A. Если $A \geq 0$ ($\neq 0$) неразложима, то и матрица $A' \geq 0$ ($\neq 0$) также неразложима. Если $A \geq 0$ ($\neq 0$) неразложима, а $B > 0$, то $AB > 0$.

Квадратная матрица примитивна тогда, когда существует натуральное число $p \geq 1$, такое, что $A^p > 0$, т.е. матрица $A > 0$ — частный случай примитивной матрицы. Для наименьшего номера $p = p_A$, для которого справедливо неравенство $A^p > 0$, имеет место неравенство $p_A \leq (n-1)^2 + 1$, где n — порядок матрицы A. Если A примитивна и натуральное число $m > p$, то $A^m > 0$. Степень A^k примитивной матрицы A есть примитивная матрица ($1 \leq k$ — натуральное число).

Квадратная матрица $A > 0$ (примитивная матрица A) имеет положительное собственное число λ^*, кратность которого равна единице и которое строго больше модулей остальных собственных чисел матрицы A. Собственный вектор (как правый v^*, так и левый w^*), соответствующий собственному числу λ^*, можно выбрать положительным (для $A > 0$ — это теорема Перрона, для примитивной матрицы A — теорема Фробениуса).

Собственное число λ^* называется максимальным числом (или числом Перрона) положительной (примитивной) матрицы, соответствующие ему положительные собственные векторы v^* и w^* — векторами Перрона квадратной матрицы $A \geq 0$ (обычно в качестве векторов Перрона v^* и w^* фигурируют положительные нормированные векторы: $|v^*| = 1$, $|w^*| = 1$).

Пусть матрица $A \geq 0$ ($\neq 0$) порядка n примитивна и пусть вектор $z^0 \geq 0$ ($\neq 0$) ($z^0 \in E_n$), тогда существует число $c > 0$, зависящее только от вектора z^0, такое, что

$$\lim_{k\to\infty} A^k z^0/(\lambda^*)^k = cv^* \ (k=0,1,\ldots),$$

где $\lambda^* > 0$ и $v^* > 0$ ($|v^*| = 1$) соответственно число Перрона и правый вектор Перрона матрицы A (предельная теорема Фробениуса).

Квадратная матрица $P \geq 0$ ($\neq 0$) называется стохастической, если сумма элементов каждой строки матрицы P равна единице. Стохастическая матрица является частным случаем квадратной неотрицательной матрицы. Квадратная матрица $P \geq 0$ ($\neq 0$) является стохастической тогда и только тогда, когда вектор $(1, \ldots, 1)$ является собственным вектором этой матрицы, соответствующим собственному числу, равному единице. Все собственные числа стохастической матрицы P по модулю не превосходят единицы.

Квадратная матрица $A \geq 0$ ($\neq 0$) называется продуктивной, если существует вектор $x \geq 0$ ($\neq 0$), такой, что $x > xA$. Из последнего неравенства следует, что на самом деле вектор $x > 0$. Если матрица A является продуктивной, то матрица $I - A$ невырожденная. Для того чтобы матрица $A \geq 0$ была продуктивной, необходимо и достаточно, чтобы матрица $(I - A)^{-1} \geq 0$ ($\neq 0$). Если матрица A продуктивная, то $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0 \ (k=0,1,\ldots)$.

П.5.3. Квадратная матрица с действительными элементами называется ортогональной, если $A' = A^{-1}$. Ортогональная матрица A обладает следующими свойствами: 1) матрица, обратная к ортогональной, является ортогональной; 2) $I = A'A = AA'$ (это сразу следует из определения $A' = A^{-1}$), откуда вытекает, что скалярные квадраты всех строк (столбцов) равны единице и скалярные произведения попарно различных строк (попарно различных столбцов) равны нулю, т.е. попарно различные строки (попарно различные столбцы) ортогональны, их длины равны единице, и поэтому все строки (все столбцы) ортогональной матрицы могут быть взяты в качестве ортонормированного базиса в n-мерном пространстве E_n; 3) длина (евклидова норма) вектора Ax равна длине вектора x, т.е. $|Ax| = |x|$; 4) произведение двух ортогональных матриц есть ортогональная матрица; 5) определитель ортогональной матрицы равен ± 1; 6) все собственные числа ортогональной матрицы по модулю равны единице.

П.5.4. Квадратная матрица B называется подобной квадратной матрице A, если существует невырожденная матрица T, такая, что $B = T^{-1}AT$. Очевидно, из подобия B с A вытекает подобие A с B, ибо $A = S^{-1}BS$, где $S = T^{-1}$. Каждая квадратная матрица подобна сама себе; две матрицы, подобные третьей, подобны между собой. Приведем ряд свойств подобных матриц:

1) $tr(T^{-1}AT) = tr(A)$; 2) $\det(T^{-1}AT) = \det(A)$; 3) $\rho(T^{-1}AT) = \rho(A)$; 4) спектры подобных матриц совпадают, т.е. если $\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)$ — собственные числа матрицы A порядка n, где каждое собственное число выписано столько раз, какова его кратность, то $\lambda_i(T^{-1}AT) = \lambda_i(A)$; $i = 1, \ldots, n$.

Для произвольной квадратной матрицы A существует невырожденная матрица T, такая, что матрица $J = T^{-1}AT$ имеет нормальную жорданову форму, т.е. имеет следующий квазидиагональный (блочно-диагональный) вид:

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_1 \end{matrix}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \boxed{\lambda_1} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_1 \end{matrix}} & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \boxed{\lambda_r} \end{pmatrix}$$

Диагональные блоки матрицы J имеют специальный вид, они называются жордановыми блоками (жордановыми клетками). Число блоков (клеток), соответствующих одному и тому же собственному числу λ_i ($i = 1, ..., n$) квадратной матрицы A, равно геометрической кратности собственного числа λ_i. Собственное число λ_i квадратной матрицы A на главной диагонали матрицы J повторяется столько раз, какова его алгебраическая кратность.

Квадратная матрица подобна диагональной матрице $\Lambda = V^{-1}AV$ (элементами главной диагонали матрицы Λ являются собственные числа квадратной матрицы A, выписанные с учетом их кратностей)

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

тогда и только тогда, когда квадратная матрица A имеет ровно n (n — порядок квадратной матрицы A) линейно независимых собственных векторов $v^1, ..., v^n$, что, в свою очередь, эквивалентно тому, что алгебраические кратности всех собственных чисел квадратной матрицы A равны геометрическим кратностям этих чисел. Из равенства $\Lambda = V^{-1}AV$ следует, что $AV = V\Lambda$, т.е. столбцы матрицы V составлены из правых собственных векторов $v^1, ..., v^n$ квадратной матрицы A.

П.5.5. Квадратная матрица A называется симметрической, если $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, ..., n$ (n — порядок матрицы A).

Все собственные числа симметрической матрицы являются действительными числами, и для каждой симметрической матрицы A существует такая ортогональная матрица T, что матрица $T^{-1}AT = \Lambda$ является диагональной матрицей Λ. (Напомним, что для ортогональной матрицы $T^{-1} = T'$). Если в квадратичной форме

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

с матрицей A положить $x = Tz$, то получим канонический вид $f = \lambda_1 z_1^2 + ... + \lambda_n z_n^2$ квадратичной формы. Здесь $\lambda_1, ..., \lambda_n$ — спектр симметрической матрицы A, каждое собственное число повторяется столько раз, какова его алгебраическая кратность.

Симметрическая матрица $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, ..., n$, называется положительно (отрицательно) определенной, если соответствующая ей квадратичная форма

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

является положительно (отрицательно) определенной, т.е. $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) при любых $x \in E_n$, $x \neq 0$. Для того чтобы симметрическая матрица A (соответствующая ей квадратичная форма $f(x)$) была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее собственные числа были положительными (отрицательными). Другим необходимым и достаточным условием положительной (отрицательной) определенности симметрической матрицы A является выполнение неравенств $\det(A_k) > 0$ ($(-1)^k \det(A_k) > 0$), $k = 1, 2, ..., n$, где подматрицы $A_k = (a_{ij})$, $i, j = 1, ..., k$, симметричны относительно главной диагонали $a_{11}, ..., a_{mm}$ квадратной матрицы A. Миноры $\det(A_k)$, $k = 1, ..., n$, называются последовательно повышающими порядок главными минорами матрицы (критерий Сильвестра).

Симметрическая матрица $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, ..., n$, называется неотрицательно (неположительно) определенной, если квадратичная форма

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

является неотрицательно (неположительно) определенной, т.е. $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$) для любого $x \in E_n$. Для того чтобы симметрическая матрица A (соответствующая ей квадратичная форма $f(x)$) была неотрицательно (неположительно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее собственные числа были неотрицательны (неположительны). Другим необходимым и достаточным условием неотрицательной (неположительной) определенности симметрической матрицы A является выполнение при $k = 1, ..., n$ неравенств $\det(M_k) \geq 0$ ($(-1)^k \det(M_k)$), где $\det(M_k)$ — главные миноры матрицы A порядка k (т.е. определители всех подматриц M_k порядка k, симметричных относительно главной диагонали квадратной матрицы A). В этом утверждении неотрицательности только последовательно повышающих порядок миноров $\det(A_k)$, $k = 1, ..., n$, квадратной матрицы A недостаточно.

П.5.6. Число $|A| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ называется нормой $|A|$ квадратной матрицы A. Свойство нормы: 1) $|A| > 0$, если $A \neq 0$ и $|A| = 0$, если $A = 0$; 2) $|A + B| \leq |A| + |B|$; 3) $|\alpha A| = |\alpha||A|$; 4) $|AB| \leq |A||B|$; 5) $|Ax| \leq |A||x|$, $|Ax|$, $|x|$ — евклидовы нормы векторов Ax и x соответственно.

Используются и другие определения нормы квадратных, а также и прямоугольных матриц:

$$|A| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad |A| = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad |A| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$$

Известно, что если модуль $|a|$ числа a строго меньше единицы (т.е. $|a| < 1$), то справедливо равенство $(1 - a)^{-1} = 1 + a + a^2 + ... + a^k + ...$ Аналогичное равенство имеет место и для квадратной матрицы A, норма которой строго меньше единицы (т.е. $|A| < 1$): $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + ... + A^k + ...$ Последнее равенство находит широкое применение в анализе межотраслевых моделей, в которых A — матрица коэффициентов прямых материальных затрат, а $(I - A)^{-1}$ — матрица коэффициентов полных материальных затрат.

П 6. Основные результаты теории экстремума функций одной и нескольких переменных

П.6.1. Экстремум функции — это частное значение функции f одной или нескольких переменных, являющееся ее максимумом или минимумом.

Функция $f(x)$ одной переменной имеет в точке $x^0 \in M \subseteq E_1$ локальный максимум $f(x^0)$ (локальный минимум $f(x^0)$), если существует δ-окрестность $U_1(\delta, x^0)$ точки $x^0(U_1(\delta, x^0) \subseteq M)$, такая, что для любой точки $x \in U_1(\delta, x^0)$ справедливо неравенство $f(x^0) \geq f(x)$ ($f(x^0) \leq f(x)$). Точка x^0 называется точкой локального максимума (локального минимума) функции $f(x)$. Если для любой точки $x \in U_1(\delta, x^0)$ и такой, что $x \neq x^0$, справедливо неравенство $f(x^0) > f(x)$ ($f(x^0) < f(x)$), то говорят о сильном локальном максимуме $f(x^0)$ (сильном локальном минимуме $f(x^0)$). Если локальный экстремум не является сильным, он называется слабым.

Если для любой точки $x \in M \subseteq E_1$ справедливо неравенство $f(x^0) \geq f(x)$ ($f(x^0) \leq f(x)$), то говорят о глобальном максимуме $f(x^0)$ (глобальном минимуме $f(x^0)$) функции $f(x)$ на множестве $M \subseteq E_1$. Если глобальный экстремум не является сильным, он называется слабым. На рис. П.16 x_2 — точка локального максимума, x_4 — точка глобального максимума, точки x_3 — точки локального минимума, x_6 — точка глобального минимума. Точки x_2, x_4, x_6 — точки сильного экстремума (x_2, x_4 — точки сильного локального и сильного глобального максимума соответственно, x_6 — точка сильного глобального минимума). Точки x_3 — точки слабого локального минимума.

Если существует (сколь угодно малое) число $\delta > 0$ и x^0 ($x^0 \in U_1(\delta, x^0) \subseteq M \subseteq E_1$) — точка экстремума (локального или глобального) и в точке x^0 функция $f(x)$ непрерывна, то $f'(x^0) = 0$ или $f'(x^0) = \infty$ или $f'(x^0)$ не существует ни конечная, ни бесконечная (необходимое условие экстремума функции $f(x)$, непрерывной в точке x^0). На рис. П.16 $f'(x_2) = 0, f'(x_3) = 0, f'(x_6) = \infty, f'(x_4)$ — не существует ни конечной, ни бесконечной производной. В δ-окрестности точки x_2 график F функции имеет форму «шапочки» с «макушкой» ($x_2; f(x_2)$), в δ-окрестности точки x_6 график F имеет

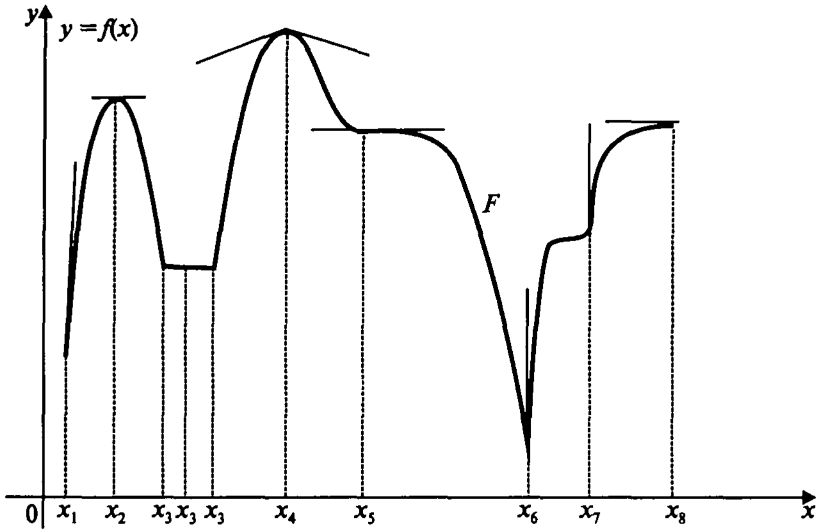


Рис. П16

форму «клюва», острие которого направлено вниз; точку x_4 естественно назвать «угловой», ибо график F функции $f(x)$ в точке (x_4; $f(x_4)$) не имеет касательной, а имеет слева и справа разные касательные.

Точка x^0, в которой $f'(x^0) = 0$ или $f'(x^0) = \infty$ или $f'(x^0)$ не существует ни конечная, ни бесконечная (функция $f(x)$ непрерывна в точке x^0), называется критической (стационарной) точкой функции $f(x)$. Часто термин «критическая точка» (стационарная точка) используют только в случае, когда $f'(x^0) = 0$. Критические точки называются подозрительными на экстремум, ибо экстремум может быть только в критических точках. Проверяют критическую точку на предмет наличия (или отсутствия) в ней экстремума с помощью достаточных условий экстремума функции $f(x)$, определенной в промежутке (конечном или бесконечном).

Если при переходе через точку x^0 производная $f'(x)$ меняет знак (через нуль, ∞ или через несуществование), а функция $f(x)$ непрерывна в точке x^0, точка x^0 есть точка локального сильного экстремума (достаточное условие сильного экстремума функции $f(x)$, непрерывной в точке x^0). Если знак меняется с + на –, то x^0 — точка сильного локального максимума (на рис. П.16 точки x_2 и x_4, точка x_4 — точка не только локального, но и глобального максимума).

Если знак у первой производной $f'(x)$ меняется с – на +, то x_0 — точка сильного локального минимума, который может быть глобальным (на рис. П.16 точка x_6). Если знак у первой производной $f'(x)$ не меняется, функция $f(x)$ в точке x^0 экстремума не имеет (на рис. П.16 точки x_5 и x_7).

На рис. П.16 точка x_1 — точка краевого (локального) минимума функции $f(x)$, x_8 — точка краевого (локального) максимума функции $f(x)$ на множестве M ($M = [x_1; x_8]$), остальные точки — точки внутреннего экстремума.

П.6.2. Функция $f(x)$ нескольких переменных $x = (x_1, ..., x_n)$ имеет в точке $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ абсолютный локальный максимум $f(x^0)$ (абсолютный локальный минимум $f(x^0)$), если существует δ-окрестность $U_n(\delta, x^0)$ точки x^0 ($x^0 \in U_n(\delta, x^0) \subseteq M \subseteq E_n$), такая, что для любой точки $x \in U_n(\delta, x^0) \subseteq M \subseteq E_n$ справедливо неравенство $f(x^0) \geq f(x)$ ($f(x^0) \leq f(x)$. Точка x^0 называется точкой абсолютного локального максимума (абсолютного локального минимума) функции $f(x)$. Если для любой точки $x \in U_n(\delta, x^0)$ и такой, что $x \neq x^0$, справедливо неравенство $f(x^0) > f(x)$ ($f(x^0) < f(x)$, то говорят об абсолютном сильном локальном максимуме $f(x^0)$ (абсолютном сильном локальном минимуме $f(x^0)$). Если абсолютный локальный экстремум не является сильным, он называется слабым.

Если для любой точки $x \in M \subseteq E_n$ справедливо неравенство $f(x^0) \geq f(x)$ ($f(x^0) \leq f(x)$), то говорят об абсолютном глобальном максимуме $f(x^0)$ (об абсолютном глобальном минимуме $f(x^0)$ функции $f(x)$ на множестве $M \subseteq E_n$). Точка x^0 называется в этом случае точкой абсолютного глобального максимума (абсолютного глобального минимума) функции $f(x)$ на множестве $M \subseteq E_n$. Если при $x \neq x^0$ $f(x^0) > f(x)$ ($f(x^0) < f(x)$), то говорят об абсолютном сильном глобальном максимуме $f(x^0)$ (абсолютном сильном глобальном минимуме $f(x^0)$). Если абсолютный глобальный экстремум не является сильным, то он называется слабым.

Функция $f(x)$ нескольких переменных $x = (x_1, ..., x_n)$ имеет в точке $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ условный локальный максимум $f(x^0)$ (условный локальный минимум $f(x^0)$) при наличии ограничений в виде равенств

$$g_1(x) = 0, ..., g_m(x) = 0 \qquad (\text{П } 6.1)$$

($m < n$), если существует δ-окрестность $U_n(\delta, x^0)$ точки $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, такая, что для любой точки $x \in U_n(\delta, x^0)$ и удовлетворяющей ограничениям (П 6.1) справедливо неравенство $f(x^0) \geq f(x)$ ($f(x^0) \leq f(x)$). Точка x^0 называется точкой условного локального максимума (условного локального минимума) функции $f(x)$ при наличии ограничения (П 6.1). Если для любой точки $x \in U_n(\delta, x^0)$, удовлетворяющей ограничениям (П 6.1), и такой, что $x \neq x^0$, справедливо неравенство $f(x^0) > f(x)$ ($f(x^0) < f(x)$), то говорят об условном сильном локальном максимуме $f(x^0)$ (условном сильном локальном минимуме $f(x^0)$) функции $f(x)$ при наличии ограничений (П 6.1). Если условный локальный экстремум не является сильным, он называется слабым. Если для любой точки $x \in M \subseteq E_n$ и удовлетворяющей ограничениям (П 6.1) справедливо неравенство $f(x^0) \geq f(x)$ ($f(x^0) \leq f(x)$), то говорят об условном глобальном максимуме $f(x^0)$ (условном глобальном минимуме $f(x^0)$) функции $f(x)$ на множестве $M \subseteq E_n$ при наличии ограничений (П 6.1). Точка x^0 называется в этом случае точкой условного глобального максимума (условного глобального минимума) функции $f(x)$) на множестве $M \subseteq E_n$. Если при $x \neq x^0$ $f(x^0) > f(x)$ ($f(x^0) < f(x)$), то говорят об условном сильном глобальном максимуме $f(x^0)$ (условном сильном глобальном минимуме $f(x^0)$) функции $f(x)$ при наличии ограничений (П 6.1). Если условный глобальный экстремум не является сильным, то он называется слабым.

Необходимые условия абсолютного локального экстремума и условного локального экстремума для функции нескольких переменных имеют, как правило, форму условий первого порядка.

П.6.3. Условия первого порядка для функции $y = f(x)$ ($x \in M \subseteq E_n$), имеющей конечные частные производные первого порядка по всем переменным $x = (x_1, \ldots, x_n)$, — это равенство нулю всех частных производных первого порядка этой функции:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} = 0.$$

Для функции одной переменной условие первого порядка имеет вид $f'(x) = 0$. Условия первого порядка

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n} = 0 \text{ —} \qquad (\text{П } 6.2)$$

необходимые условия абсолютного локального экстремума функции $y = f(x)$ ($x \in M \subseteq E_n$), имеющей в точке x^0 ($x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$) конечные частные производные по всем переменным $x = (x_1, ..., x_n)$, когда x^0 — внутренняя точка множества M. Точка $x^0 \in M \subseteq E_n$, для которой выполнены условия первого порядка (П 6.2), называется критической (стационарной) точкой функции $y = f(x)$ ($x \in M \subseteq E_n$). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема и выпукла (вниз) на открытом выпуклом множестве $M \subseteq E_n$, то условия первого порядка (П 6.2) — достаточные условия (абсолютного) глобального минимума $f(x^0)$ функции $y = f(x)$ на множестве M, достигаемого в точке x^0.

Функция Лагранжа задачи на условный локальный максимум (минимум)

$$f(x)\ (\max)$$

при наличии ограничений в виде равенств

$$g_1(x) = 0, ..., g_m(x) = 0$$

($x = (x_1, ..., x_n)$, $m < n$) имеет вид

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + ... + \lambda_m g_m(x).$$

Пусть функции $f(x)$, $g_1(x)$, ..., $g_m(x)$ непрерывны и имеют непрерывные первые частные производные по всем переменным $x = (x_1, ..., x_n)$ на открытом множестве $M \subseteq E_n$.

Пусть x^0 – точка условного локального максимума (минимума) и пусть градиенты $\operatorname{grad} g_1(x^0)$, ..., $\operatorname{grad} g_m(x^0)$ линейно независимы. Тогда существует единственный вектор $\lambda^0 = (\lambda_1^0, ..., \lambda_m^0)$, такой, что для «длинной» точки $(x^0; \lambda^0)$ имеют место условия первого порядка для функции Лагранжа $L(x, \lambda)$:

$$\frac{\partial L(x^0;\lambda^0)}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial L(x^0;\lambda^0)}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial L(x^0;\lambda^0)}{\partial \lambda_1} = 0, \ldots, \frac{\partial L(x^0;\lambda^0)}{\partial \lambda_m} = 0.$$

П.6.4. Достаточные условия абсолютного локального экстремума и условного локального экстремума функции нескольких переменных имеют, как правило, форму условий второго порядка.

Условия второго порядка для функции $y = f(x)$ ($x \in M \subseteq E_n$), имеющей непрерывные вторые частные производные по всем переменным $x = (x_1, ..., x_n)$, это совокупность неравенств $\det(A_k(x)) \gtrless 0, k = 1, \ldots, n$, где $\det(A_k(x))$, $k = 1, ..., n$, последовательно повышающие порядок главные диагональные миноры симметрической матрицы $A = A(x)$ вторых частных производных функции $y = f(x)$.

$$A(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Пусть M — открытое множество ($M \subseteq E_n$) и пусть для точки $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ выполнены условия первого порядка, т.е. пусть x^0 — стационарная точка функции $y = f(x)$ ($x \in M \subseteq E_n$).

1. Тогда условия второго порядка $\det(A_k(x^0)) > 0$, $k = 1, \dots, n$, — это достаточные условия того, что x^0 — точка абсолютного локального сильного минимума функции $y = f(x)$ на открытом множестве $M \subseteq E_n$.

2. Тогда условия второго порядка $(-1)^k \det(A_k(x^0)) > 0$, $k = 1, \dots, n$ — это достаточные условия того, что x^0 — точка абсолютного локального сильного максимума функции $y = f(x)$ на открытом множестве $M \subseteq E_n$.

3. Тогда условия второго порядка в виде $\det(A_k(x^0)) \neq 0$ и невыполнения условий второго порядка в виде 1) и в виде 2) — достаточные условия того, что x^0 — седловая точка, т.е. в точке x^0 абсолютного локального экстремума нет.

Функция Лагранжа задачи на условный локальный максимум (минимум)

$$f(x)\ (\max)$$

при наличии ограничений в виде равенств

$$g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0$$

($x = (x_1, \dots, x_n)$, $m < n$) имеет вид

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_m g_m(x).$$

Пусть функции $f(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$ имеют непрерывные вторые частные производные по всем переменным $x = (x_1, \dots, x_n)$ на открытом множестве $M \subseteq E_n$. Пусть для точки $(x^0; \lambda^0)$ выполнены условия первого порядка для функции Лагранжа, т.е. пусть $(x^0; \lambda^0)$ — стационарная точка функции Лагранжа $L(x; \lambda)$.

1. Тогда условия второго порядка $(-1)^m \det B_k(x^0; \lambda^0) > 0$, $k = m + 1, \dots, n$, — достаточные условия того, что x^0 — точка условного локального сильного минимума.

2. Тогда условия второго порядка $(-1)^k \det B_k(x^0; \lambda^0) > 0$, $k = m + 1, \dots, n$, — достаточные условия того, что x^0 — точка условного локального сильного максимума.

Здесь

$$\det B_k(x^0;\lambda^0) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial g_1(x^0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1(x^0)}{\partial x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial g_m(x^0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_m(x^0)}{\partial x_k} \\ \dfrac{\partial g_1(x^0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_m(x^0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L(x^0;\lambda^0)}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L(x^0;\lambda^0)}{\partial x_1 \partial x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial g_1(x^0)}{\partial x_k} & \cdots & \dfrac{\partial g_m(x^0)}{\partial x_k} & \dfrac{\partial^2 L(x^0;\lambda^0)}{\partial x_k \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L(x^0;\lambda^0)}{\partial x_k^2} \end{vmatrix}.$$

$(k = m + 1, \dots, n)$ — главный минор окаймленной матрицы Гессе

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial g_1(x^0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1(x^0)}{\partial x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial g_m(x^0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_m(x^0)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g_1(x^0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_m(x^0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L(x^0;\lambda^0)}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L(x^0;\lambda^0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial g_1(x^0)}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial g_m(x^0)}{\partial x_n} & \dfrac{\partial^2 L(x^0;\lambda^0)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L(x^0;\lambda^0)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

функции Лагранжа $L(x^0; \lambda^0)$ в точке $(x^0; \lambda^0)$.

П 7. Теоремы об огибающей

П.7.1. Теорема об огибающей (теорема о покрытии) — это теорема о частных производных по параметрам (локального) экстремума как функции параметров задачи на экстремум. Рассмотрим три версии теоремы об огибающей.

Случай задачи на абсолютный (локальный) экстремум функции $f(x, a)$ переменных $x = (x_1, ..., x_n)$ и параметров $a = (a_1, ..., a_k)$. Пусть при $a = a^0$ задача максимизации (минимизации) функции $f(x, a)$ на множестве $M \subseteq E_n$ имеет единственное решение $x^0(a^0)$. Пусть функция $f(x, a)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка по всем переменным x_i $(i = 1, ..., n)$ и параметрам a_j $(j = 1, ..., k)$ в некоторой окрестности точки $(x^0(a^0), a^0)$.

Пусть $\hat{V}(a) = (l)\max\limits_{x \in M} f(x,a)\,(\check{V}(a) = (l)\min\limits_{x \in M} f(x,a))$, тогда

$$\frac{\partial \hat{V}(a^0)}{\partial a_j} = \frac{\partial f(x^0, a^0)}{\partial a_j} \quad \left(\frac{\partial \check{V}(a^0)}{\partial a_j} = \frac{\partial f(x^0, a^0)}{\partial a_j}\right), j = 1, ..., k. \tag{П.7.1}$$

Случай задачи на условный (локальный) экстремум с параметрами $a = (a_1, ..., a_k)$. Рассмотрим задачу на условный экстремум (для определенности — задачу на условный локальный максимум, задача на условный локальный минимум рассматривается аналогично)

$$(\max) f(x, a)$$

при наличии ограничений в виде равенств

$$q_1(x, a) = 0, ..., q_m(x, a) = 0,$$

$$x = (x_1, ..., x_n), a = (a_1, ..., a_k), m < n.$$

Пусть при $a = a^0$ задача на условный (локальный) максимум имеет единственное решение $x^0 = x^0(a^0)$. Обозначим символом $V(a^0)$ сам локальный условный максимум $V(a^0) = f(x^0, a^0)$. Пусть найдутся шар

$$S_k(\alpha; a^0) = \left\{ a \middle| \left| a - a^0 \right| < \alpha \right\}$$

$$\left(\left| a - a^0 \right| = \sqrt{(a_1 - a_1^0)^2 + \ldots + (a_k - a_k^0)^2} \right)$$

и такое число $\beta > 0$, что для любой точки $a \in S_k(\alpha, a^0)$ задача на условный экстремум имеет решение $x(a)$ из шара $S_m(\beta, x^0) = \{x \| x - x^0| < \beta\}$.

Пусть целевая функция $f(x, a^0)$ и функции ограничений непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка по всем переменным x_i ($i = 1, \ldots, n$) и параметрам a_j ($j = 1, \ldots, k$) в некоторой окрестности точки $(x^0(a^0), a^0)$. Пусть градиенты $\text{grad}\, g_1(x^0(a^0), a^0)$, ..., $\text{grad}\, g_m(x^0(a^0), a^0)$ линейно независимы. Тогда функция $V(a)$ в точке a^0 имеет частные производные первого порядка и

$$\frac{\partial V(a^0)}{\partial a_j} = \frac{\partial L(x^0, a^0)}{\partial a_j}, \; j = 1, \ldots, k, \qquad (\text{П.7.2})$$

где $L(x, a) = f(x, a) + \lambda_1 g_1(x, a) + \ldots + \lambda_m g_m(x, a)$ — функция Лагранжа задачи на условный экстремум.

Случай задачи математического программирования с параметрами $a = (a_1, \ldots, a_k)$.

Рассмотрим задачу (локальной) максимизации (случай задачи (локальной) минимизации рассматривается аналогично)

$$(\max) f(x, a)$$

при наличии ограничений в виде равенств

$$g_1(x, a) \le 0, \ldots, g_m(x, a) \le 0,$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \; a = (a_1, \ldots, a_k).$$

Пусть при $a = a^0$ задача (локальной) максимизации имеет единственное решение $x^0 = x^0(a^0)$. Обозначим символом $V(a^0)$ сам локальный условный максимум $V(a^0) = f(x^0(a^0), a^0)$. Пусть найдутся шар $S_k(\alpha, a^0)$ и такое число $\beta > 0$, что для любой точки $a \in S_k(\alpha, a^0)$ задача локальной максимизации имеет решение $x(a)$ из шара $S_n(\beta, x^0)$. Пусть целевая функция $f(x, a)$ и функции ограничений $g_1(x, a)$, ..., $g_m(x, a)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные по всем переменным x ($x = x_1, \ldots, x_n$) и параметрам a ($a = a_1, \ldots, a_k$). Пусть градиенты $\text{grad}\, g_1(x^0(a^0), a^0)$, ..., $\text{grad}\, g_m(x^0(a^0), a^0)$, соответствующие тем ограничениям, которые при $(x^0(a^0), a^0)$

являются равенствами, линейно независимы. Тогда функция $V(a)$ в точке a^0 имеет частные производные первого порядка

$$\frac{\partial V(a^0)}{\partial a_j}=\frac{\partial L(x^0,a^0)}{\partial a_j},\ j=1,\dots,k,$$

где $L(x, a) = f(x, a) + \lambda_1 g_1(x, a) + \dots + \lambda_m g_m(x, a)$ — функция Лагранжа задачи математического программирования.

П.7.2. Рассмотрим задачу максимизации функции полезности $u(x_1, x_2)$ при бюджетном ограничении $p_1x_1 + p_2x_2 = M$, где M — доход потребителя; $(x_1; x_2)$ — потребительский набор; $(p_1; p_2)$ — рыночные цены за единицу первого и второго продукта соответственно. Функция Лагранжа задачи максимизации имеет вид $L(x_1; x_2; \lambda) = u(x_1; x_2) + \lambda(M - p_1x_1 - p_2x_2)$. Условия первого порядка для функции Лагранжа имеют вид

$$\frac{\partial L(x_1,x_2;\lambda)}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial L(x_1,x_2;\lambda)}{\partial x_2}=0,\ \frac{\partial L(x_1,x_2;\lambda)}{\partial \lambda}=0. \quad (\text{П. } 7.3)$$

Если линии безразличия функции полезности $u(x_1; x_2)$ строго выпуклы к точке $0 = (0; 0)$ в пространстве продуктов, то система (П. 7.3) имеет единственное решение $(x_1^0; x_2^0; \lambda^0)=(\hat{x}_1; \hat{x}_2; \hat{\lambda})$.

Функции $\hat{x}_1=\hat{x}_1(p_1;p_2;M)$, $\hat{x}_2=\hat{x}_2(p_1;p_2;M)$ называются функциями спроса по Маршаллу на первый и второй продукты соответственно. Условный максимум $v(p_1; p_2; M)$ функции полезности $u(x_1; x_2)$ равен

$$v(p_1;p_2;M)=u(\hat{x}_1;\hat{x}_2)=u(\hat{x}_1(p_1;p_2;M);\ \hat{x}_1(p_1;p_2;M)),$$

т.е. он зависит от параметров $p_1; p_2; M$ задачи максимизации функции полезности. Для функции Лагранжа имеем

$$L(\hat{x}_1(p_1;p_2;M);\hat{x}_2(p_1;p_2;M),\lambda)=v(p_1;p_2;M)+\hat{\lambda}(M-p_1\hat{x}_1-p_2\hat{x}_2).$$

Полагая в (П.7.2) $a_1^0=M$, $a_2^0=p_1$, $a_3^0=p_2$, получаем

$$\frac{\partial v(p_1;p_2;M)}{\partial M}=\frac{\partial L(\hat{x}_1;\hat{x}_2;\hat{\lambda})}{\partial M}=\hat{\lambda}$$

(предельная полезность по доходу равна множителю Лагранжа $\hat{\lambda}$),

$$\frac{\partial v(p_1;p_2;M)}{\partial p_1}=\frac{\partial L(\hat{x}_1;\hat{x}_2;\hat{\lambda})}{\partial p_1}=-\hat{\lambda}\hat{x}_1$$

(предельная полезность по цене первого продукта равна $-\hat{\lambda}\hat{x}_1$),

$$\frac{\partial v(p_1;p_2;M)}{\partial p_2}=\frac{\partial L(\hat{x}_1;\hat{x}_2;\hat{\lambda})}{\partial p_2}=-\hat{\lambda}\hat{x}_2$$

(предельная полезность по цене первого продукта равна $-\hat{\lambda}\hat{x}_2$).

Два последних равенства называются тождествами Роя (при $n = 2$). Функция $v(p_1; p_2; M)$ называется косвенной функцией полезности.

П.7.3. Рассмотрим задачу минимизации расхода $p_1x_1 + p_2x_2$ потребителя при фиксированном уровне $\breve{u}$ полезности $u(x_1; x_2)$, т.е. при $u(x_1, x_2)=\breve{u}$. Функция Лагранжа задачи минимизации имеет вид

$$N(x_1,x_2,v)=p_1x_1+p_2x_2+v(\breve{u}-u(x_1,x_2)).$$

Условия первого порядка для этой функции имеют вид

$$\frac{\partial N(x_1,x_2,v)}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial N(x_1,x_2,v)}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial N(x_1,x_2,v)}{\partial v}=0. \quad (\text{П. }7.4)$$

Если линии безразличия функции полезности $u(x_1; x_2)$ строго выпуклы к точке $0 = (0; 0)$ в пространстве продуктов, то система (П. 7.4) имеет единственное решение $(x_1^0;x_2^0;\lambda^0)=(\breve{x}_1;\breve{x}_2;\breve{\lambda})$. Функции $\breve{x}_1=\breve{x}_1(p_1,p_2,\breve{u})$, $\breve{x}_2=\breve{x}_2(p_1,p_2,\breve{u})$ называются функциями спроса по Хиксу на первый и второй продукты соответственно. Условный минимум $m(p_1,p_2,\breve{u})$ расходов потребителя $p_1x_1 + p_2x_2$ называется функцией расходов (по переменным $p_1,p_2,\breve{u}$). Этот минимум равен

$$m(p_1,p_2,\breve{u})=p_1\breve{x}_1(p_1,p_2,\breve{u})+p_2\breve{x}_2(p_1,p_2,\breve{u}).$$

Для функции Лагранжа имеем

$$N(\breve{x}_1(p_1,p_2,\breve{u}),\breve{x}_2(p_1,p_2,\breve{u}),v)=p_1\breve{x}_1+p_2\breve{x}+v(\breve{u}-u(\breve{x}_1;\breve{x}_2)).$$

Полагая в (П.7.2) $a_1^0=\breve{u}$, $a_2^0=p_1$, $a_3^0=p_2$, получаем

$$\frac{\partial m(p_1;p_2;\breve{u})}{\partial\breve{u}}=\frac{\partial L(\breve{x}_1;\breve{x}_2;\breve{v})}{\partial\breve{u}}=\breve{v}$$

(предельный расход по полезности равен множителю Лагранжа $\breve{v}$),

$$\frac{\partial m(p_1;p_2;\breve{u})}{\partial p_1}=\frac{\partial N(\breve{x}_1;\breve{x}_2;\breve{v})}{\partial p_1}=\breve{x}_1;\quad \frac{\partial m(p_1;p_2;\breve{u})}{\partial p_2}=\frac{\partial N(\breve{x}_1;\breve{x}_2;\breve{v})}{\partial p_2}=\breve{x}_2$$

(предельный расход по цене равен величине спроса по Хиксу на соответствующий продукт). Два последних равенства представляют собой лемму Шепарда.

Рассмотренные задачи максимизации функции полезности и минимизации расходов естественным образом обобщаются на случай $n > 2$.

П 8. Функции выпуклые, вогнутые, квазивогнутые, псевдовогнутые

П.8.1. Выпуклая функция — функция, графиком которой является выпуклая кривая (поверхность). Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве M пространства E_n, называется выпуклой (выпуклой вниз) на M, если для любых векторов (точек) x^0 и x^1, принадлежащих M, и для любого числа λ $(0 \geq \lambda \geq 1)$ справедливо неравенство

$$f((1-\lambda)x^0 + \lambda x^1) \leq (1-\lambda)f(x^0) + \lambda f(x^1). \qquad \text{(П.8.1)}$$

Например, функции $f(x) = a_1x_1 + ... + a_nx_n$ (линейная форма), $f(x) = x_1{}^2 + ... + x_{n-1}{}^2$ (неотрицательно определенная квадратичная форма) выпуклы на всем пространстве E_n, функция $f(x) = \ln x_1$ выпукла на полупространстве $x_1 > 0$ пространства E_n. Если функция $f(x)$ выпукла на множестве M, то она выпукла на любом выпуклом подмножестве множества M. График выпуклой функции $f(x)$ расположен ниже (точнее — не выше) любой своей хорды (рис. П.17).

Если функция $f(x)$ выпукла на выпуклом множестве $M \subseteq E_n$, то множество $\{x | x \in M, f(x) \leq b\}$ выпукло (если оно не пусто). Пусть $f(x)$ дифференцируема и выпукла на E_n, пусть ее градиент

$$f(x^0) = \left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n}\right) \neq 0,$$

тогда $(n-1)$-мерная плоскость

$$\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x^0)(x_i - x_i^0) = 0$$

$\left(f_{x_i}(x^0) = \dfrac{\partial f(x^0)}{\partial x_i}\right)$ в пространстве E_n будет касательной к поверхности уровня $f(x) = f(x^0)$ в точке x^0 и опорной к выпуклому множеству $\{x | x \in E_n, f(x) \leq f(x^0)\}$. Если функции $f_i(x)$ $(i = 1, ..., k)$ выпуклы на множестве M и числа $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, ..., k)$, то функция

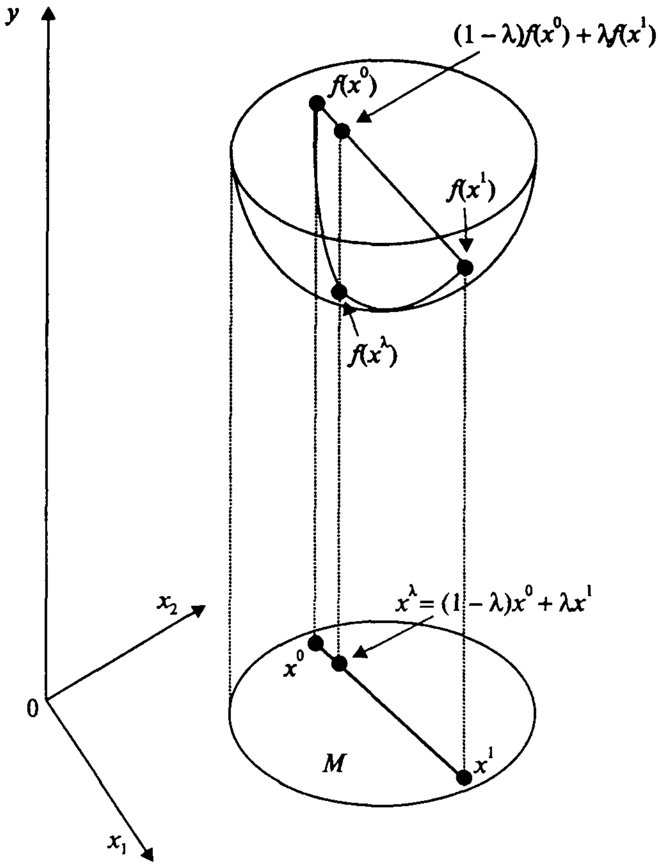


Рис. П17

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i f_i(x)$$

выпукла на множестве M. Функция $f(x)$, выпуклая на множестве M, непрерывна в каждой внутренней (и относительно внутренней) точке множества M. Отсюда следует, что функция $f(x)$, выпуклая на открытом множестве M, непрерывна на этом множестве. Функция $f(x)$, выпуклая на множестве M, которое не является открытым, может иметь точки разрыва, и эти точки обязательно принадлежат границе множества M.

Выпуклая функция может быть недифференцируемой даже во внутренних точках множества M. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на открытом выпуклом множестве M. Для того чтобы эта функция была выпуклой на множестве M, необходимо и достаточно, чтобы для любых векторов (точек) x^0 и x из множества M выполнялось неравенство

$$f(x) \geq f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x^0)(x_i - x_i^0).$$

Это неравенство означает, что график выпуклой дифференцируемой функции $f(x)$ расположен выше (точнее — не ниже) любой своей касательной плоскости K:

$$Y = f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x^0)(x_i - x_i^0),$$

т.е. любая касательная плоскость к графику выпуклой дифференцируемой функции $f(x)$ является опорной для надграфика F этой функции (рис. П.18).

Пусть функция $f(x)$ имеет все непрерывные вторые частные производные на открытом выпуклом множестве $M \subseteq E_n$. Для того чтобы эта функция была выпуклой на множестве M, необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x)\xi_i\xi_j$$

$\left(f_{x_i x_j}(x) = \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ была неотрицательно определенной на множестве M, т.е. чтобы для любых векторов $x \in M$ и $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in E_n$ квадратичная форма была неотрицательной. Критерий неотрицательной определенности приведен в параграфе П5.

Выпуклая на множестве $M \subseteq E_n$ функция $f(x)$ может не иметь локального (и следовательно, глобального) минимума (например, если M — открытое выпуклое множество, а функция $f(x) = a_1x_1 + ... + a_nx_n$, где $a_1^2 + ... + a_n^2 > 0$). Если функция $f(x)$ выпукла на множестве M и если она имеет локальный минимум на множестве M, то этот минимум обязательно является глобальным. Таким образом, задача минимизации выпуклой функции на выпуклом множестве является одноэкстремальной (если она имеет решение).

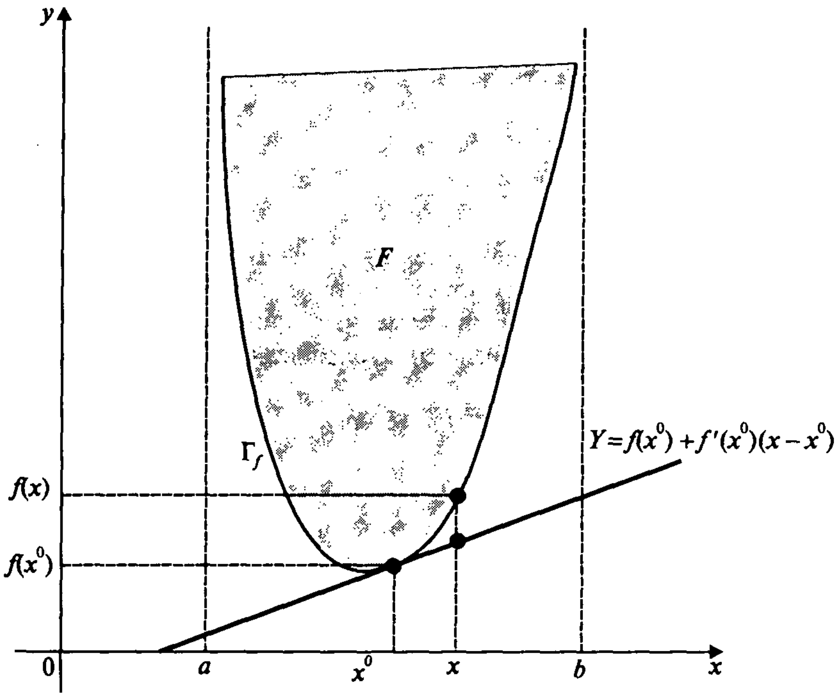


Рис. П18

Множество точек из M, в которых выпуклая функция $f(x)$ имеет глобальный минимум, есть выпуклое множество. Если функция $f(x)$ выпукла на множестве $M \subseteq E_n$, дифференцируема в точке $x^0 \in M$ и если $f'(x^0) = 0$, то x^0 — точка глобального минимума функции $f(x)$ на множестве M. Если выпуклая функция $f(x)$ имеет на ограниченном замкнутом множестве M глобальный максимум, то этот максимум достигается в одной (или более) крайней точке этого множества. Локальные максимумы этой функции также достигаются в крайних точках множества M, однако они не обязательно будут глобальными, т.е. задача максимизации выпуклой функции на замкнутом ограниченном выпуклом множестве является многоэкстремальной (если она имеет решение).

Выпуклая функция называется строго выпуклой на множестве $M \subseteq E_n$, если для любого числа λ $(0 < \lambda < 1)$ и для любых векторов (точек) x^0 и x^1 из множества M, таких, что $x^0 \neq x^1$, неравенство (П.8.1) превращается в строгое неравенство. Для того чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ была строго выпуклой на открытом выпуклом множестве $M \subseteq E_n$, необходимо и достаточно, чтобы для любых векторов (точек) x^0 и x из M ($x^0 \neq x$) выполнялось неравенство

$$f(x) > f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x^0)(x_i - x_i^0).$$

Положительно определенная квадратичная форма является строго выпуклой на всем пространстве E_n. Пусть функция $f(x)$ имеет все непрерывные вторые частные производные на открытом выпуклом множестве M; если квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x)\xi_i \xi_j$$

положительно определена на множестве M, то функция $f(x)$ строго выпукла на множестве M. Обратное, вообще говоря, не верно. Если строго выпуклая на множестве M функция $f(x)$ имеет локальный (и следовательно, глобальный) минимум, то он достигается в единственной точке из множества M.

Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве M пространства E_n, называется вогнутой (строго вогнутой) на множестве M, если функция $-f(x)$ выпукла (строго выпукла) на множестве M. Приведенные утверждения можно переформулировать для вогнутых (строго вогнутых) функций. Иногда выпуклые (строго выпуклые) функции называются выпуклыми (строго выпуклыми) вниз, а вогнутые (строго вогнутые) — выпуклыми (строго выпуклыми) вверх функциями.

П.8.2. Квазивогнутая функция $f(x)$ на выпуклом множестве $M \subseteq E_n$ — функция $f(x)$, такая, что множество $\{x | x \in M \subseteq E_n, f(x) \geq \tau\}$ выпукло (если оно не пусто) для любого действительного числа τ.

Функция $f(x)$ квазивогнута на выпуклом множестве $M \subseteq E_n$ тогда и только тогда, когда из неравенства $f(x) \geq f(x^0)$ следует неравенство $f(\lambda x + (1 - \lambda)x^0 \geq f(x^0)$ для любых векторов $x, x^0 \in M$ и любого числа $\lambda \in (0; 1)$.

Функция $f(x)$ квазивогнута строго на выпуклом множестве $M \subseteq E_n$, если из неравенства $f(x) \geq f(x^0)$ следует неравенство $f(\lambda x + (1 - \lambda)x^0) > f(x^0)$ для любых векторов $x \neq x^0$ из M и любого числа $\lambda \in (0; 1)$.

Функция $-f(x)$ квазивыпукла (квазивыпукла строго) на выпуклом множестве $M \subseteq E_n$, если функция $f(x)$ квазивогнута (квазивогнута строго) на выпуклом множестве $M \subseteq E_n$.

Свойства квазивогнутых и квазивыпуклых функций:

1) если функция $f(x)$ вогнута (выпукла вверх), то $f(x)$ квазивогнута; 2) если функция $f(x)$ выпукла (выпукла вниз), то $f(x)$ квазивыпукла; 3) если $f(x)$ ($x \in M \subseteq E_1$) возрастает или убывает, то $f(x)$ квазивогнута или квазивыпукла; 4) сумма квазивогнутых функций не обязательно квазивогнутая функция ($f_1(x) = x^3$ и $f_2(x) = -x$ — квазивогнутые функции, однако функция $f_1(x) = x^3 - x$ не обладает этим свойством); 5) сумма квазивыпуклых функций не обязательно квазивыпуклая функция; 6) если функция $f(x)$ ($x \in M \subseteq E_1$) квазивогнута (квазивыпукла), а функция $F(t)$ ($t \in E_1$) возрастает (убывает), то функция $F(f(x))$ квазивогнута (квазивыпукла) [квазивыпукла (квазивогнута)]; 7) если функция $f(x) > 0$, $x \in K \subseteq E_n$ (K — выпуклый конус) однородна степени 1 и квазивогнута на K, то функция $f(x)$ вогнута на K; 8) функция $f(x)$, непрерывная и имеющая непрерывные частные производные первого порядка по всем переменным, квазивогнута на открытом выпуклом множестве $M \subseteq E_n$ тогда и только тогда, когда из неравенства $f(x) \geq f(x^0)$ следует неравенство $\operatorname{grad} f(x^0)(x - x^0) \geq 0$ для любых x и x^0 из $M \subseteq E_n$.

Пусть

$$G_r(x) = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_r} \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_r} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_r \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_r^2} \end{vmatrix}.$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные по всем переменным до второго порядка включительно; 9) если функция $f(x)$ квазивогнута на открытом выпуклом множестве $M \subseteq E_n$, то

$$(-1)^r G_r(x) \geq 0,\ r = 1, \ldots, n,$$

для любых $x \in M$ (необходимые условия квазивогнутости); 10) если $(-1)^r G_r(x) > 0$ при $r = 1, \ldots, n$ для любых $x \in M \subseteq E_n$ (M — открытое выпуклое множество), то функция $f(x)$ квазивогнута на множестве M (достаточные условия квазивогнутости); 11) если функция $f(x)$ квазивыпукла на открытом выпуклом множестве $M \subseteq E_n$, то

$$G_r(x) \leq 0, r = 1, ..., n,$$

для любых $x \in M \subseteq E_n$ (необходимые условия квазивыпуклости); 12) если $G_r(x) < 0$ при $r = 1, ..., n$ для любых $x \in M \subseteq E_n$ (M — открытое выпуклое множество), то функция $f(x)$ квазивыпукла на множестве M (достаточные условия квазивыпуклости).

П.8.3. Псевдовогнутая функция $f(x)$ в точке x^0 выпуклого множества $M \subseteq E_n$ — функция $f(x)$ такая, что $f(x)$ непрерывна со всеми своими частными производными первого порядка на множестве $M \subseteq E_n$ и из неравенства $f(x) > f(x^0)$ следует неравенство $\text{grad} f(x^0)(x - x^0) \geq 0$ для любой точки $x \in M \subseteq E_n$. Функция $f(x)$ псевдовогнута на выпуклом множестве M, если функция $f(x)$ псевдовогнута в каждой точке множества $M \subseteq E_n$, т.е. для любых точек x и x^0 из множества M из неравенства $f(x) > f(x^0)$ следует неравенство $\text{grad} f(x^0)(x - x^0) > 0$. Функция $f(x)$ псевдовыпукла в точке x^0 выпуклого множества $M \subseteq E_n$, если $f(x)$ непрерывна со всеми своими частными производными первого порядка на множестве $M \subseteq E_n$ и если из неравенства $f(x) > f(x^0)$ следует неравенство $\text{grad} f(x^0)(x - x^0) < 0$ для любой точки $x \in M \subseteq E_n$. Функция $f(x)$ псевдовыпукла на выпуклом множестве $M \subseteq E_n$, если функция $f(x)$ псевдовыпукла в каждой точке множества M.

Свойства псевдовогнутых функций (свойства псевдовыпуклых функций аналогичны):

1) пусть функция $f(x)$ непрерывна со всеми своими частными производными первого порядка на множестве $M \subseteq E_n$. Тогда:

1.1) если функция $f(x)$ псевдовогнута на множестве $M \subseteq E_n$, то $f(x)$ квазивогнута на M;

1.2) если множество M открыто и $\text{grad} f(x) \neq 0$ для любой точки $x \in M \subseteq E_n$, то функция $f(x)$ на множестве M псевдовогнута тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ квазивогнута на $M \subseteq E_n$;

2) пусть функция $f(x)$ псевдовогнута на открытом выпуклом множестве $M \subseteq E_n$. Пусть точка $x^0 \in M$ такова, что $\text{grad} f(x^0)(x - x^0) \leq 0$ для любой точки $x \in M$ (что совпадает со случаем $\text{grad} f(x^0) = 0$). Тогда x^0 — точка глобального максимума функции $f(x)$ на множестве $M \subseteq E_n$.

П 9. Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений

П.9.1. Дифференциальное уравнение — это уравнение, содержащее неизвестную функцию, ее производные различных порядков и независимую переменную (независимые переменные). В экономических приложениях независимые переменные и функции принимают действительные значения.

Многие процессы описываются дифференциальными уравнениями (например, процесс возрастания денежной суммы при непрерывном начислении процентов), поэтому их интенсивно применяют в самых разнообразных теоретических и прикладных экономико-математических исследованиях. С помощью дифференциальных уравнений во многих случаях удается получить аналитические выражения различных законов.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение. Обыкновенные дифференциальные уравнения содержат неизвестные функции только одной независимой переменной, которую обозначают символом t. Это объясняется тем, что в ряде важных приложений независимой переменной является время. Дифференциальные уравнения в частных производных содержат неизвестные функции нескольких независимых переменных. Дифференциальные уравнения в частных производных в экономических приложениях встречаются достаточно редко. Обыкновенное дифференциальное уравнение порядка n имеет вид

$$F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0, \qquad (\text{П.9.1})$$

где $x = x(t)$ — неизвестная функция: $x'(t)$ — ее первая производная; $x^{(n)}(t)$ — производная порядка n неизвестной функции $x(t)$; F — заданная функция $n + 2$ переменных.

Решением (частным решением) уравнения (П.9.1) называется всякая функция, удовлетворяющая этому уравнению (т.е. при подстановке обращает его в тождество) для всех значений t в некотором конечном или бесконечном промежутке (интервале). График решения в плоскости переменных t, x называется интегральной линией уравнения (П.9.1). Дифференциальное уравнение имеет, вообще говоря, бесконечное множество решений.

Общее решение уравнения (П.9.1) представляет собой семейство функций $x = \varphi(t, c_1, ..., c_n)$, зависящих от n произвольных постоянных. Выбирая надлежащим образом значение этих постоянных, можно получить любое частное решение уравнения (П.9.1) (за исключением так называемых особых решений). Отыскание решений дифференциального уравнения называется его интегрированием.

В задаче с начальными условиями (называемой также задачей Коши) требуется найти частное решение $x(t)$ уравнения (П.9.1), удовлетворяющее n начальным условиям

$$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1,\ ...,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1},$$

где $t_0, x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ — заданные числа. На основании этих условий находятся соответствующие значения произвольных постоянных $c_1, ..., c_n$.

В краевой задаче требуется найти частное решение $x(t)$ уравнения, удовлетворяющее n краевым условиям, накладываемым на функцию и ее производные в двух точках t_0 и t_1. Вопрос о существовании (и единственности) решения задачи Коши решают теоремы существования и единственности решения. Приведем формулировку теоремы существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка $x'(t) = f(t, x(t))$, разрешенного относительно производной $x'(t)$: пусть функция $f(t, x)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $f_x(t, x)$ в открытом прямоугольнике $Q = \{(t, x) | a < t < b, c < x < d\}$, расположенном в плоскости переменных t, x; тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in Q$ существует единственное частное решение $x(t)$ уравнения $x'(t) = f(t, x(t))$, и это частное решение удовлетворяет начальному условию $x(t_0) = x_0$ и определено на некотором отрезке $[t^0 - k; t^0 + k]$. Геометрическая интерпретация теоремы: при выполнении условия теоремы через каждую точку (t_0, x_0) прямоугольника Q проходит (для каждой точки (t^0, x^0) своя) единственная интегральная линия уравнения $x'(t) = f(t^0, x^0)$ (рис. П.19). Множество всех интегральных линий в открытом прямоугольнике Q изображает общее решение дифференциального уравнения первого порядка $x'(t) = f(t, x(t))$.

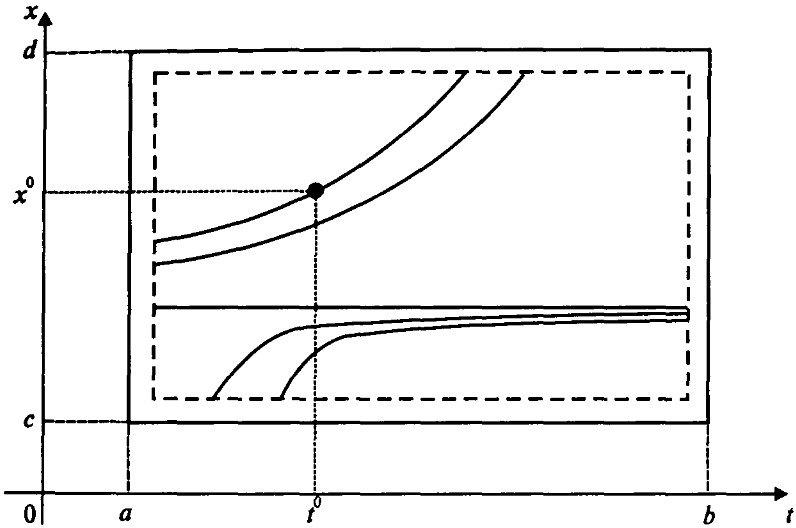


Рис. П19

П.9.2. В математической экономике большое применение находят линейные дифференциальные уравнения. Уравнение (П.9.1) называется линейным, если оно имеет вид

$$a_0(t)x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) = b(t), \quad (П.9.2)$$

где $a_0(t), \ldots, a_n(t)$, $b(t)$ — данные функции. Если $b(t) = 0$, уравнение называется однородным, в противном случае — неоднородным. Общее решение уравнения (П.9.2) есть сумма какого-либо его частного решения $x(t)$ и общего решения $z(t)$ соответствующего ему однородного уравнения

$$a_0(t)z^{(n)}(t) + a_1(t)z^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)z'(t) + a_n(t)z(t) = 0. \quad (П.9.3)$$

Если коэффициенты $a_0(t), \ldots, a_n(t)$ постоянные, уравнение (П.9.2) приобретает вид

$$a_0x^{(n)}(t) + a_1x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}x'(t) + a_nx(t) = b(t). \quad (П.9.4)$$

и называется линейным дифференциальным уравнением порядка n с постоянными коэффициентами ($a_0 \neq 0$). Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$a_0z^{(n)}(t) + a_1z^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}z'(t) + a_nz(t) = 0. \quad (П.9.5)$$

Многочлен $\Phi(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ называется характеристическим многочленом дифференциального уравнения (П.9.4 или П.9.5), а уравнение $\Phi(\lambda) = 0$ называется характеристическим уравнением дифференциального уравнения (П.9.4 или П.9.5). Если многочлен $\Phi(\lambda)$ имеет n действительных корней $\lambda_1, ..., \lambda_n$, общее решение $z(t)$ однородного линейного дифференциального уравнения (П.9.5) записывается так:

$$z(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}, \qquad (\text{П.9.6})$$

где $c_1, ..., c_n$ — произвольные постоянные. В случае комплексных и кратных корней многочлена $\Phi(\lambda)$ запись общего решения усложняется:

$$z(t) = P_1(t)e^{\lambda_1 t} + \ldots + P_j(t)e^{\lambda_j t} + \ldots + P_m(t)e^{\lambda_m t} \ (m \le n), \qquad (\text{П.9.7})$$

где $P_j(t) = c_{j0} + c_{j1}t + \ldots + c_{j_{\alpha_{j-1}}} t^{\alpha_{j-1}}$ $(j = 1, \ldots, m)$; α_j — кратность (действительного или комплексного) корня λ_j ($\alpha_j \ge 1$, $\alpha_1 + ... + \alpha_m = n$); c_{ij} — произвольные постоянные ($i = 1, ..., m$; $\nu = 0, 1, ..., \alpha_j - 1$). Если в случае действительных коэффициентов $a_0, a_1, ..., a_n$ характеристический многочлен $\Phi(\lambda)$ имеет комплексный корень $\lambda_j = \sigma_j + i\tau_j$ (здесь $i^2 = -1$) кратности α_j ($\alpha_j \ge 1$), то многочлен $\Phi(\lambda)$ обязательно имеет комплексно сопряженный корень $\lambda_k = \bar{\lambda}_j = \sigma_j - i\tau_j$ той же самой кратности $\alpha_k = \alpha_j$. В случае комплексно сопряженных корней λ_j и $\lambda_k = \bar{\lambda}_j$ произвольные постоянные $c_{j0}, \ldots, c_{j\alpha_{j-1}}, c_{k0}, \ldots, c_{k\alpha_{k-1}}$ в слагаемых $P_j(t)e^{\lambda_j t}$ и $P_k(t)e^{\lambda_k t}$ выражения (П.9.7) должны быть комплексными $c_{j\nu} = c'_{j\nu} + ic''_{j\nu}$. Положив $c_{k\nu} = \bar{c}_{j\nu} = c'_{j\nu} - ic''_{j\nu}$ и применив формулу Эйлера

$$e^{i\tau_j t} = \cos\tau_j t + i\sin\tau_j t,$$

после элементарных преобразований в сумме

$$P_j(t)e^{\lambda_j t} + P_k(t)e^{\lambda_k t}$$

выражения (П.9.7) мы избавимся от мнимой единицы i. Проделав то же самое во всех других парах $P_r(t)e^{\lambda_r t}$ и $P_s(t)e^{\lambda_s t}$, соответствующих остальным парам комплексно сопряженных корней λ_r и λ_s ($\lambda_s = \bar{\lambda}_r$), мы получим для общего решения уравнения (П.9.5) новое выражение (П.9.7), уже не содержащее мнимой единицы i. Таким образом, описанная процедура позволяет из общего комплексного решения (П.9.7) уравнения (П.9.5) с действительными коэффициентами $a_0, a_1, ..., a_n$ выделить действительное общее решение уравнения (П.9.5).

Частное решение $x(t)$ неоднородного уравнения (П.9.4) может быть найдено, например, методом вариации произвольных постоянных, методом неопределенных коэффициентов или с помощью операционного исчисления.

П.9.3. Система обыкновенных дифференциальных уравнений связывает неизвестные функции $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, их производные и независимую переменную t. Обычно рассматривают системы, содержащие столько уравнений, сколько в них имеется неизвестных функций. Основные понятия, введенные для дифференциальных уравнений, переносятся на случай системы естественным образом. Системы весьма общего вида обычно удается свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, имеющей по Коши нормальную форму

$$x'_1(t) = f_1(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)), \ldots, x'_n(t) = f_n(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)). \quad (\text{П.9.8})$$

Система вида (П.9.8) представляет собой обобщение уравнения $x'(t) = f(t, x_1(t))$, которое было рассмотрено выше. Утверждения для этого уравнения переносятся на систему (П.9.8), в частности теорема существования и единственности решения задачи Коши. Линейная система (П.9.8) имеет вид

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n'(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t), \end{aligned} \quad (\text{П.9.9})$$

или в векторно-матричной форме $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$, где $x(t)$ — n-мерный вектор-столбец с координатами $x_1(t), \ldots, x_n(t)$; $A(t) = (a_{ij}(t))$ — матрица порядка n и $b(t)$ — вектор-столбец с координатами $b_1(t), \ldots, b_n(t)$.

Для однородной системы (П.9.9) с постоянными коэффициентами (т.е. $b(t) = 0$; $a_{ij}(t) \equiv a_{ij}$; $j = 1, \ldots, n$) $z'(t) = Az(t)$ в случае неотрицательной неразложимой матрицы A имеет место следующий аналог теоремы Фробениуса. Пусть вектор $z^0 \geq 0$ ($\neq 0$) и пусть вектор $z(t)$ — решение системы $z'(t) = Az(t)$, удовлетворяющее начальному условию $z(t^0) = z^0$, тогда

$$\lim_{i \to +\infty} z(t)/e^{\lambda_* t} = cv^*,$$

где $c > 0$ — скалярный множитель, зависящий только от начального вектора z^0, а λ_* и $v^*(|v^*| = 1)$ — число Перрона и правый вектор Перрона соответственно матрицы A.

В рамках общей теории дифференциальных уравнений большое значение имеют результаты качественного исследования решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, т.е. исследования существенных свойств решений без явного знания этих решений. В качественной теории дифференциальных уравнений важное место занимают такие ее разделы, как устойчивость по А.М. Ляпунову и асимптотика решений по малому параметру. Материалы этих разделов находят применение для решения теоретических и прикладных задач математической экономики.

В общей теории дифференциальных уравнений рассматриваются также уравнения и системы, содержащие комплексные функции комплексных переменных.

П.9.4. Система (П.9.8) обыкновенных дифференциальных уравнений называется автономной, если ее правые части явно не зависят от времени t:

$$x'_1(t) = f_1(x_1(t), ..., x_n(t)), ..., x'_n(t) = f_n(x_1(t), ..., x_n(t)). \qquad (П.9.10)$$

Постоянное решение $x_1(t) \equiv a_1, ..., x_n(t) \equiv a_n$ системы (П.9.10) называется равновесием этой системы.

Для того чтобы n-мерный вектор $a = (a_1, ..., a_n)$ был равновесием системы (П.9.10), необходимо и достаточно, чтобы вектор $a = (a_1, ..., a_n)$ был решением (нелинейной) системы алгебраических уравнений

$$f_1(x_1, ..., x_n) = 0, ..., f_n(x_1, ..., x_n) = 0. \qquad (П.9.11)$$

Равновесие $a = (a_1, ..., a_n)$ системы (П.9.10) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$, такое, что как только $|x_i^0 - a_i| < \delta$, $i = 1, ..., n$, то $|x_i(t, x^0) - a_i| < \varepsilon$, $i = 1, ..., n$, где $x_i(t, x^0)$ — решение системы (П.9.10), удовлетворяющее начальным условиям

$$x_1(0, x^0) = x_1^0, ..., x_n(0, x^0) = x_n^0. \qquad (П.9.12)$$

Решение $x(t, x^0) = (x_1(t, x^0), ..., x_n(t, x^0))$, которое сравнивается с равновесием $a = (a_1, ..., a_n)$, называется возмущенным решением системы (П.9.10).

Равновесие $a = (a_1, ..., a_n)$ системы (П.9.10) называется асимптотически устойчивым, если оно, во-первых, устойчиво по Ляпунову и, во-вторых, существует такое число $\sigma > 0$, что при $|x_i^0 - a_i| < \sigma$, $i = 1, ..., n$,

$$\lim_t x_i(t, x^0) = a_i, \quad i = 1, ..., n. \tag{П.9.13}$$

Приведенные определения — это определения локальной устойчивости. Если постоянные δ и σ могут быть сколь угодно велики, то приведенные определения будут определениями глобальной устойчивости.

В первом методе Ляпунова вопрос об устойчивости и асимптотической устойчивости равновесия $a = (a_1, ..., a_n)$ системы (П.9.10) исследуется с помощью вспомогательной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, которая называется системой первого приближения системы (П.9.10).

Система первого приближения системы (П.9.10) строится так.

Предполагая, что в некоторой η-окрестности точки $a = (a_1, ..., a_n)$ функции $f_i = (x_1, ..., x_n)$, $i = 1,...,n$, обладают частными производными до второго порядка включительно, напишем представленные функции $f_i(x_1, ..., x_n)$, $i = 1, ..., n$, по формуле Тейлора:

$$f_i(x_1,...,x_n) = f_i(a_1,...,a_n) + \left(\frac{\partial f_i(a_1,...,a_n)}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + ... \right.$$
$$\left. ... + \frac{\partial f_i(a_1,...,a_n)}{\partial x_n}(x_n - a_n) \right) + \tag{П.9.14}$$
$$+ \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a_1 + \theta(x_1 - a_1), ..., a_n + \theta(x_n - a_n))}{\partial x_{jk}}(x_j - a_j)(x_k - a_k).$$

Полагая

$$x_i - a_i = z_i, \frac{\partial f_i(a_1, ..., a_n)}{\partial x_j} = g_{ij}, \quad i, j = 1, ..., n,$$

напишем однородную систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$z_1'(t) = g_{11}z_1(t) + ... + g_{1n}z_n(t),\ ...,\ z_n'(t) = g_{1n}z_1(t) + ... + g_{nn}z_n(t), \quad (\text{П}.9.15)$$

которую можно толковать как полученную из систем (П.9.10) путем отбрасывания остаточных членов второго порядка (П.9.14); отметим также, что $f_i(a_1, ..., a_n) = 0$, $i = 1, ..., n$ (см. (П.9.11)).

Система (П.9.15) и есть вспомогательная система первого приближения системы (П.9.10).

Пусть все собственные числа $\lambda_j = \alpha_j + \beta_j i$, $j = 1, ..., n$, $i^2 = -1$, матрицы

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

системы (П.9.15) имеют отрицательные действительные части $\alpha_j < 0$, $j = 1, ..., n$. Тогда равновесие $a = (a_1, ..., a_n)$ системы (П.9.10) (локально) асимптотически устойчиво. Отметим, что в рассматриваемом случае система (П.9.15) имеет единственное равновесие $z_1 = 0, ..., z_n = 0$, которое глобально асимптотически устойчиво. Если хотя бы одно собственное число матрицы G имеет положительную действительную часть $\alpha_{j_0} > 0$, то положение равновесия $a = (a_1, ..., a_n)$ системы (П.9.10) не является устойчивым по Ляпунову.

Во втором методе Ляпунова вопрос об устойчивости равновесия $a = (a_1, ..., a_n)$ системы (П.9.10) исследуется с помощью функции Ляпунова.

П 10. Задача оптимального управления и принцип максимума Л.С. Понтрягина

П.10.1. Задача оптимального управления с непрерывным временем формулируется следующим образом.

Процесс управления описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r), \end{aligned} \qquad (\text{П.10.1})$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор состояния управляемой системы — элемент фазового пространства; траектория состояний $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ называется фазовой траекторией, она описывает поведение управляемой системы во времени; $u = (u_1, \dots, u_n)$ — вектор управления системой; пара $(x, u) = (x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_n)$ называется процессом управления. Точка здесь и далее — символ производной по времени t.

Вектор управления u принадлежит области U возможных значений управления, область U может меняться во времени.

Таким образом,

$$u(t) \in U(t). \qquad (\text{П.10.2})$$

Заданы начальные условия траектории состояний

$$x_1(t_0) = x_{10}, \dots, x_n(t) = x_{n0} \qquad (\text{П.10.3})$$

и конечные условия траектории состояний

$$x_1(t_1) = x_{11}, \dots, x_{nm}(t_1) = x_{m1}, \; m \le n. \qquad (\text{П.10.4})$$

Неравенство $m \le n$ может быть строгим: $m < n$.

Качество процесса управления $(x(t), u(t))$ оценивается целевым функционалом

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r)dt + F(x(t_1))\,(\min). \qquad (\text{П.10.5})$$

Процесс управления $(x(t), u(t))$ называется допустимым процессом задачи оптимального управления (П.10.1)–(П.10.5), если он удовлетворяет условиям (П.10.1–(П.10.4). Допустимый процесс $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$ называется оптимальным процессом задачи оптимального управления (П.10.1)–(П.10.5), если он минимизирует целевой функционал (П.10.5).

Если правый конец траектории $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ зафиксирован полностью, то слагаемое $F(x(t_1))$ является постоянным, не оказывает влияния на нахождение оптимального процесса $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$.

Прежде чем приводить формулировку теоремы, отметим, что функции $f_0(t, x, u), f_1(t, x, u), ..., f_n(t, x, u)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные по переменным $t, x_1, ..., x_n$ в области их определения.

Теорема (*принцип максимума Понтрягина*). Пусть $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$ — оптимальный процесс задачи оптимального управления (П.10.1)—(П.10.5).

Тогда существует векторная функция $\psi(t) = (\psi_1(t), ..., \psi_n(t))$, такая, что:

1) функция $H(t, x, \psi, u) = \psi_1 f_1(t, x, u) + ... + \psi_n f_n(t, x, u) - f_0(t, x, u)$ достигает максимального значения при всех $t \in [t_0, t_1]$, при $x = \hat{x}(t)$, $\psi = \psi(t)$, по переменным $u = (u_1, ..., u_r)$, равным $u = \hat{u} = (\hat{u}_1(t), ..., \hat{u}_r(t))$, т.е.

$$H(t, \hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) = \max_{u(t) \in U(t)} H(t, \hat{x}(t), \psi(t), u(t));$$

2) векторная функция $\psi(t) = (\psi_1(t), ..., \psi_n(t))$ удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi}_i(t) = -\left.\frac{\partial H(t, x(t), \psi(t), \hat{u}(t))}{\partial x_i}\right|_{x=\hat{x}(t)}, \quad i = 1, ..., n;$$

3) в конечный момент $t = t_1$ выполнено условие трансверсальности

$$\psi_i(t_1) = -\left.\frac{\partial F(x)}{\partial x_i}\right|_{x=\hat{x}(t)}, \quad i = m+1, ..., n.$$

Приведенная теорема дает необходимые условия оптимального процесса $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$. Полученные необходимые условия позволяют сузить исходное множество допустимых процессов $(x(t), u(t))$ путем выделения из этого множества только тех процессов, которые удовлетворяют необходимым условиям. Совокупность приведенных необходимых условий, как правило, позволяет выделить единственную траекторию $\hat{x}(t)$ из множества допустимых. Если при этом еще известно (например, из содержательных соображений), что оптимальная траектория существует, тогда эта единственная траектория $\hat{x}(t)$ и отвечающее ей оптимальное управление $\hat{u}(t)$ образуют оптимальный процесс, который и есть решение задачи оптимального управления (П.10.1)–(П.10.5).

Функцию $H(t, x, \psi, u)$ принято называть функцией Гамильтона — Понтрягина, она является аналогом функции Лагранжа; функции $\psi_1(t)$, ..., $\psi_n(t)$ являются аналогами множителей Лагранжа λ_1, ..., λ_m в теории экстремальных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Глава 1

Винер Дж. (1925; 2000). Концепция полезности в теории ценности и ее критики // Вехи экономической мысли. Теория потребительского поведения и спроса. Т. 1. СПб.: Экономическая школа.

Воркуев Б.Л. (2002). Модели микроэкономики. М.: ТЕИС.

Воркуев Б.Л. (2007). Количественные методы исследования в микро- и макроэкономике. М.: ТЕИС.

Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И. (1996). Микроэкономика. Т. 1. СПб.: Экономическая школа.

Горбунов В.К. (2004). Математическая модель потребительского рынка: теория и прикладной потенциал. М.: Экономика.

Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. (1997, 1999, 2001, 2003). Математические методы в экономике. М.: ДИС.

Интрилигатор М. (1975, 2002). Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс.

Пиндайк Р., Рубинфельд Д. (2000). Микроэкономика. М.: Экономика: Дело.

Слуцкий Е.Е. (1999). Экономическая школа: Журнал-учебник. Выпуск 5.

Тарануха Ю.В. (2006). Микроэкономика. М.: ДИС.

Хикс Дж.Р. (1941; 2000). Реабилитация потребительского излишка // Вехи экономической мысли. Теория потребительского поведения и спроса. Т. 1. СПб.: Экономическая школа.

Хикс Дж.Р., Аллен Р.Г.Д. (1934; 2000). Пересмотр теории ценности // Вехи экономической мысли. Теория потребительского поведения и спроса. Т. 1. СПб.: Экономическая школа.

Экономико-математический энциклопедический словарь (2003). М.: Большая Российская Энциклопедия: ИНФРА-М.

Экономическая школа. Периодический научно-популярный журнал (1992). Выпуск 2.

Gravelle H., Rees R. (1992). Microeconomic. Longman Group UK Limited.

Gravelle H., Rees R. (1994). Microeconomic. Solutions Manuel and Workbook. Longman Group UK Limited.

Kreps D. (1990). A Gorse in Microeconomic Theory. Harvester Wheatsheaf.

* *Mas-Colell A., Winston M.D., Green J.R.* (1995). Microeconomic Theory. Oxford University Press.

Varian H.R. (1992). Microeconomic Analysis. W.W. Norton and Company.

Глава 2

* *Gravelle H., Rees R.* (1992). Microeconomic. Longman Group UK Limited.

Gravelle H., Rees R. (1994). Microeconomic. Solutions Manuel and Workbook. Longman Group UK Limited.

Kreps D. (1990). A Gorse in Microeconomic Theory. Harvester Wheatsheaf.

Mas-Colell A., Winston M.D., Green J.R. (1995). Microeconomic Theory. Oxford University Press.

Varian H.R. (1992). Microeconomic Analysis. W.W. Norton and Company.

Глава 3

Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И. (1996). Микроэкономика. Т. 1. СПб.: Экономическая школа.

Горбунов В.К. (2004). Математическая модель потребительского рынка: теория и прикладной потенциал. М.: Экономика.

Интрилигатор М. (1975, 2002). Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс.

* *Gravelle H., Rees R.* (1992). Microeconomic. Longman Group UK Limited.

Gravelle H., Rees R. (1994). Microeconomic. Solutions Manuel and Workbook. Longman Group UK Limited.

* Звездочкой отмечены те позиции списка литературы, материалы которых существенно были использованы при подготовке и написании текстов глав 1—18 и приложения настоящего учебника по микроэкономике.

Kahneman D., Tversky A. (1984). Choices, values and frames. American Psychologist, 39, pp. 341–350.

Kreps D. (1990). A Gorse in Microeconomic Theory. Harvester Wheatsheaf.

Mas-Colell A., Winston M.D., Green J.R. (1995). Microeconomic Theory. Oxford University Press.

Varian H.R. (1992). Microeconomic Analysis. W.W. Norton and Company.

Глава 4

* *Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И.* (1996). Микроэкономика. Т. 1. СПб.: Экономическая школа.

Ланкастер К. (1966; 2000). Перемены и новаторство в теории потребления // Вехи экономической мысли. Теория потребительского поведения и спроса. Т. 1. СПб.: Экономическая школа.

Глава 5

Выбор в условиях рынка. (1999) // Экономическая школа. Журнал-учебник. Выпуск 5. С. 391–409.

* *Гранатуров В.М.* (1999; 2002). Экономический риск: сущность, методы измерения, пути снижения. М.: ДИС.

* *Интрилигатор М.* (1975, 2002). Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс.

* *Пиндайк Р., Рубинфельд Д.* (2000). Микроэкономика. М.: Экономика: Дело.

Фридмен М., Сэвидж Дж. (1948; 2000). Анализ полезности при выборе среди альтернатив, предполагающих риск // Вехи экономической мысли. Теория потребительского поведения и спроса. Т. 1. СПб.: Экономическая школа.

Хей Дж. (2002). Неопределенность в экономической теории // Панорама экономической мысли конца XX столетия. Т. 1. СПб.: Экономическая школа: СПГУЭ: ГУ ВШЭ.

Kahneman D., Tversky A. (1979). Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk. Econometrica 47, pp. 263–292.

Mas-Colell A., Winston M.D., Green J.R. (1995). Microeconomic Theory. Oxford University Press.

Глава 6

Алчиан А. (1959; 2000). Затраты и выпуски // Вехи экономической мысли. Теория фирмы. Т. 2. СПб.: Экономическая школа.

Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И. (1996; 1997). Микроэкономика. Т. 1, 2. СПб.: Экономическая школа.

* *Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н.* (1997, 1999, 2001, 2003). Математические методы в экономике. М.: ДИС.

Количественные методы в экономических исследованиях (2004) / Под ред. М.В. Грачевой. Л.Н. Фадеевой, Ю.Н. Черемных. М.: ЮНИТИ-ДАНА.

Коуз Р.Г. (1937; 2000). Природа фирмы // Вехи экономической мысли. Теория фирмы. Т. 2. СПб.: Экономическая школа.

* Моделирование экономических процессов (2005) / Под ред. М.В. Грачевой, Л.Н. Фадеевой, Ю.Н. Черемных. М.: ЮНИТИ-ДАНА.

Махлуп Ф. (1967; 2000). Теория фирмы: маржиналистские, бихевиористические и управленческие // Вехи экономической мысли. Теория фирмы. Т. 2. СПб.: Экономическая школа.

* *Томпсон А., Формби Д.* (1998). Экономика фирмы. М.: БИНОМ.

Уолтерс А.А. (1963; 2000). Производственные функции и функции затрат: экономический обзор // Вехи экономической мысли. Теория фирмы. Т. 2. СПб.: Экономическая школа.

Экономическая школа. Периодический научно-популярный журнал (1993). Выпуск 3.

Экономико-математический энциклопедический словарь (2003). М.: Большая Российская Энциклопедия: ИНФРА-М.

Gravelle H., Rees R. (1992). Microeconomic. Longman Group UK Limited.

Gravelle H., Rees R. (1994). Microeconomic. Solutions Manuel and Workbook. Longman Group UK Limited.

Kreps D. (1990). A Gorse in Microeconomic Theory. Harvester Wheatsheaf.

Mas-Colell A., Winston M.D., Green J.R. (1995). Microeconomic Theory. Oxford University Press.

Varian H.R. (1992). Microeconomic Analysis. W.W. Norton and Company.

Глава 7

Антипов Е.В. (2002). Оптимальные вложения в научно-технический прогресс // Моделирование и прогнозирование социально-экономических процессов. М.: Экономический факультет МГУ.

* *Аршакуни К.В.* (2001). Вывод функции с постоянной эластичностью замещения // Современные проблемы экономико-математического моделирования: Сборник научных трудов. М.: Экономический факультет МГУ: ТЕИС.

Вагапова Я.Я. (2007). Моделирование экономического роста с учетом экологического и социального факторов. М.: МАКС-Пресс.

Голиченко О.Б. (1999). Экономическое развитие в условиях несовершенной конкуренции. Подходы к многоуровнему моделированию. М.: Наука.

Замков О.О., *Толстопятенко А.В.*, *Черемных Ю.*Н. (1997, 1999, 2001, 2003). Математические методы в экономике. М.: ДИС.

Интрилигатор М. (1975, 2002). Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс.

Клейнер Г.Б. (1986). Производственные функции: Теория, методы, применения. М.: Финансы и статистика.

Лагоша Б.А. (2003). Оптимальное уравнение в экономике. М.: Финансы и статистика.

* *Лотов А.В.* (1984). Введение в экономико-математическое моделирование. М.: Наука.

Моисеев А.Н. (2002). Двухсекторная модель НТП с закупкой технологий // Моделирование экономических процессов: Сборник научных работ молодых ученых / Под ред. М.В. Грачевой. М.: Экономический факультет МГУ: ТЕИС.

* *Моисеев А.Н.* (2004). Построение оптимальных траекторий управляемых процессов в экономических задачах. Автореферат дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов.

Смирнова А.К. (2001). Анализ агрегированных динамических моделей. М.: МАКС-Пресс.

Уолтерс А.А. (1963; 2000). Производственные функции и функции затрат: экономический обзор // Вехи экономической мысли. Теория фирмы. Т. 2. СПб.: Экономическая школа.

Экономико-математический энциклопедический словарь (2003). М.: Большая Российская Энциклопедия: ИНФРА-М.

Bucci A. (2001). Scale Effects, Market Power and Growth when Human and Technological Capital are Complements. — International Review of Economics and Business, vol. 48, №1.

Глава 8

Алчиан А.А., Демсец Г. (1972; 2003). Производство, стоимость информации и экономическая организация // Вехи экономической мысли. Теория отраслевых рынков. Т. 5. СПб.: Экономическая школа.

* *Бусыгин В.П., Желободько Е.В., Коковин С.Г., Цыплаков А.А.* (1998). Лекции по микроэкономической теории. Новосибирск.

* *Бусыгин В.П., Желободько Е.В., Коковин С.Г., Цыплаков А.А.* (2000) Микроэкономический анализ несовершенных рынков. Новосибирск.

Бусыгин В.П., Желободько Е.В., Цыплаков А.А. (2003) Микроэкономика — третий уровень. Новосибирск.

Васин А.А., Морозов В.В. (2005). Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС-Пресс.

Вурос А., Розанова Н. (2000). Экономика отраслевых рынков. М.: Экономический факультет МГУ: ТЕИС.

* *Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И.* (1997). Микроэкономика. Т. 2. СПб.: Экономическая школа.

Дюсуше О.М. (2003). К вопросу о модели нелинейных тарифов. Экономика и математические методы. 39. Вып. 1.

Дюсуше О.М. (2003). Особенности моделирования монопольного рынка дифференцированного продукта // Формирование российской модели рыночной экономики: Противоречия и перспективы. Часть 2 / Под ред.К.А. Хубиева. М.: Экономический факультет МГУ: ТЕИС.

Клюкин П.Н. (2001). Научные комментарии к «Экономическим очеркам» В.К. Дмитриева. Комментарий 52 к очерку 2 // Дмитриев В.К. Экономические очерки. М.: ГУ ВШЭ.

Милгром П., Робертс Дж. (2000). Ценовые и рекламные сигналы качества продукции // Вехи экономической мысли. Теория отраслевых рынков. Т. 5. СПб.: Экономическая школа.

Самуэлсон П.Э. (1967; 2000). Монополистическая конкуренция — революция в теории // Вехи экономической мысли. Теория фирмы. Т. 2. СПб.: Экономическая школа.

Стиглер Дж. Дж. (1964; 2000). Теория олигополии // Вехи экономической мысли. Теория фирмы. Т. 2. СПб.: Экономическая школа.

Стиглер Дж. Дж. (1964; 2000). Ломаная кривая спроса олигополиста и жесткие цены // Вехи экономической мысли. Теория фирмы. Т. 2. СПб.: Экономическая школа.

Тарануха Ю.В. (2006). Микроэкономика. М.: ДИС.

* *Томпсон А., Формби Д.* (1998). Экономика фирмы. М.: БИНОМ.

Хикс Дж.Р. (1935; 2000). Годовой обзор экономической теории: теория монополии // Вехи экономической мысли. Теория фирмы. Т. 2. СПб.: Экономическая школа.

Чахоян В.А. (2001). Об одном применении метода Лангранжа // Современные проблемы экономико-математического моделирования. М.: ТЕИС.

Чеканский А.Н., Фролова Н.Л. (2005). Микроэкономика. Промежуточный уровень: Учебник. М.: ИНФРА-М.

Чеканский А.Н., Фролова Н.Л. (2005). Микроэкономика. Промежуточный уровень: Учеб. пособие. М.: ИНФРА-М.

* *Шерер Ф.М., Росс Д.* (1997). Структура отраслевых рынков. М.: ИНФРА-М.

Шмалензи Р. (2003). Реклама и рыночная структура // Вехи экономической мысли. Теория отраслевых рынков. Т. 5. СПб.: Экономическая школа.

Экономико-математический энциклопедический словарь (2003). М.: Большая Российская Энциклопедия: ИНФРА-М.

Экономическая школа. Периодический научно-популярный журнал (1993). Выпуск 3.

Bertrand J. (1883). Review of theorie mathematique de la richesse sociale reacherches sur les principes mathematiques de la theorie des richesses // Journal ofdes Savants, 68, pp. 449-508.

Bowly A. (1924). Groundwork of Economics. Oxford: Oxford University Press.

Bresnahan T. (1981, 1983). Duopoly Models with Consistent Conjectures // American Economic Review, p. 934-945; p. 240-241.

Cournot A. (1838). Recherches sur, les principes mathematiques de la théorie des richesses. Paris.

Cournot A. (1863). Rrincipes de lá theorie des richesses. Paris.

Fisher I. (1898). Cournot and Mathematical Economics. // Quarterly Journal of Economics, 12(2), p. 119-138.

Frish R. (1933). Monopole — Polypole-La Notion de force dans L'Economie, Festschrift til Harold Westergaard. Supplement to natiooalerooomisk Tidsskrift.

Gravelle H., Rees R. (1992). Microeconomic. Longman Group UK Limited.

Gravelle H., Rees R. (1994). Microeconomic. Solutions Manuel and Workbook. Longman Group UK Limited.

Kreps D. (1990). A Gorse in Microeconomic Theory. Harvester Wheatsheaf.

Leontief W. (1936). Stackelberg on Monopolistic Competition. // Journal of Political Economy, p. 554-559.

Mas-Colell A., Winston M.D., Green J.R. (1995). Microeconomic Theory. Oxford University Press.

Stackelberg H. von (1934). Marktform und Gleichgewicht. Wien, Springer.

Varian H.R. (1992). Microeconomic Analysis. W.W. Norton and Company.

Глава 9

Бабешко Л.О., Лабскер Л.Г. (2003). Основы теории игр // Экономико-математическое моделирование. М.: Экзамен.

* *Бусыгин В.П., Желободько Е.В., Коковин С.Г., Цыплаков А.А.* (2000) Микроэкономический анализ несовершенных рынков. Новосибирск.

Бусыгин В.П., Желободько Е.В., Цыплаков А.А. (2003) Микроэкономика — третий уровень. Новосибирск.

Васин А.А., Морозов В.В. (2005). Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС-Пресс.

Данилов В.И. (2002). Лекции по теории игр. М.: Российская экономическая школа.

Интрилигатор М. (1975; 2002). Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс.

Крепс Д.М., Уилсон Р. (2003). Репутация и несовершенная информация // Вехи экономической мысли. Теория отраслевых рынков. Т. 5. СПб.: Экономическая школа.

Монте К. (2002). Теория игр и стратегическое поведение // Панорама экономической мысли конца XX столетия. Т. 1. СПб.: Экономическая школа: ГУЭиФ: ГУ ВШЭ.

Морозов В.В. (2002). Основы теории игр. М.: ФВМК МГУ.

Мулен Э. (1985). Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир.

Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. (1998). Теория игр. М.: Высшая школа: Университет.

* *Розен В.В.* (2002). Модели принятия решений в экономике. М.: Высшая школа: Университет.

Харшаньи Д., Зельтен Р. (2001). Общая теория выбора равновесия в играх. СПб.: Экономическая школа: СПб.ГУ.

Черемных Ю.Н. (2004). Элементы теории игр // Количественные методы в экономических исследованиях. М.: ЮНИТИ-ДАНА.

* *Шикин Е.В.* (1997). От игр к играм. Математическое введение. М.: Эдиториал УРСС.

Akerlof G. (1970). The market for "Lemons". // Quarterly Journal of Economies, 90, pp. 629-650.

Aumann R., Machler M. (1966). Game-theoretic aspects of gradual disarmament. –Mathematica ST-80, Chapter V, 1–55.

* *Fudenberg D., Tirole J.* (2000). Game Theory. The MIT Press.

* *Mas-Colell A., Winston M.D., Green J.R.* (1995). Microeconomic Theory. NY, Oxford, Part two. Game Theory.

Harsanyi J.C. (1967–1968). Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players. Parts I — III. // Management Science, V. 14, pp. 159-182, 320-334, 486-502.

Kuhn H. (1953). Extensive Games and the Problem of Information. Annals Mathematical Studies of Princeton University Press, № 28.

Milgrom P., Roberts J. (1982a). Limit pricing and entry under incomplete information. // Econometrica 50, pp. 443-460.

Milgrom P., Roberts J. (1982b). Predation, reputation, and entry deterrence. // Journal of Economic Theory 27, P. 280–312.

Nash J.F. (1950). Equilibrium Points iin N-Pperson Games. // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, v. 36, pp. 48-49.

Nash J.F. (1951). Non-Cooperative Games. // Annals of Mathematics, v.54, pp. 286-295.

Ortega-Reichert A. (1967). Models for competitive bidding under uncertainty, Ph. D. thesis, Stanford University.

Selten R. (1965). Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit. Parts I-II. // Zeitschrift für die Gesamte Staatswissenschaft, 121, S. 301–324, 667–689.

* *Shy O.* (1995). Industrial Orgamization. Theory and Applications. The MIT Press.

Spence A.M. (1974). Market Signaling. Harvard University Press.

Глава 10

Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И. (1997). Микроэкономика. Т. 2. СПб.: Экономическая школа.

* *Портер М.* (2000). Конкуренция. СПб.; М.; Киев: Вильямс.

Стиглер Дж. (1957; 2000). Совершенная конкуренция: исторический ракурс // Вехи экономической мысли. Теория фирмы. Т. 2. СПб.: Экономическая школа.

* *Томпсон А., Формби Д.* (1998). Экономика фирмы. М.: БИНОМ.

* *Юданов А.Ю.* (2001). Конкуренция: Теория и практика. М.

Глава 11

* *Алипрантис К., Браун Д., Бёркекшо О.* (1995). Существование и оптимальность конкурентного равновесия. М.: Мир.

Белоусов Е.Г., Курош Н.А. (2003). Линейная алгебра: операции над множествами. М.: ТЕИС.

Блауг М. (1994). Экономическая мысль в ретроспективе. М.: Дело.

Вальрас Л. (2000). Элементы чистой политической экономии, или Теория общественного богатства. М.: Изограф.

Вереникин А.О. (2004). Общее экономическое равновесие при возрастающей отдаче от масштабов производства. // Вестник Московского университета. Серия 6. Экономика. № 5.

Гильдебранд В. (1986). Ядро и равновесие в большой экономике. М.: Наука.

* *Данилов-Данильян В.И.* (2003). Экономического равновесия модели // Экономико-математический энциклопедический словарь. М.: БРЭ: ИНФРА-М.

* *Карлин С.* (1964). Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир.

Макаров В.Л. (1982). Экономическое равновесие: существование и экстремальное свойство // Итоги науки техники. Современные проблемы математики. Т. 19. М.

Математический энциклопедический словарь. (1988). М.: Советская энциклопедия. Статья Огибающая.

Негиши Т. (1995). История экономической теории. М.: Аспект-Пресс.

* *Никайдо Х.* (1972). Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир.

Полтерович В.М. (1990). Экономическое равновесие и хозяйственный механизм. М.: Наука.

Полтерович В.М. (2003). Экономического равновесия теория // Экономико-математический энциклопедический словарь. М.: БРЭ: ИНФРА-М.

Селигмен Б. (1968). Основные течения современной экономической мысли. М.: Прогресс.

Уэлли Дж. (2002). Прикладные модели общего равновесия // Панорама экономической мысли конца XX столетия. Т. 2. СПб.

Экланд И. (1983). Элементы математической экономики. М.: Наука.

Arrow K.J., *Debreu G.* (1954). Existence of an equilibrium for a competitive economy. // Econometrica, v. 22, No. 3.

Gale D. (1955). The law of supply and demand. // Journal of Mathematical Economics, v. 3.

General equilibrium: Problems, Prospects and Alternatives. (1999). XXI Workshop. Italy, Siena.

Kakutani S. (1941). A generalization of Brouwer's fixed point theorem. // Duke Mathematical Journal, v. 8, p. 281-314.

McKenzie L.W. (1954). On equilibrium in Graham's model of trade and other competitive systems. // Econometrica, v. 22, No. 2.

McKenzie L.W. (1959). On the existence of general equilibrium for a competitive market. // Econometrica, 27, pp. 54-71.

Sonnenschein H. (1973). Do Walras' identity and continuity characterize the class of community excess demand functions? // Journal of Economic Theory, v. 6, pp. 345-354.

Глава 12

Вехи экономической мысли. Экономика благосостояния и общественный выбор. Т. 4. (2004). СПб.: Экономическая школа.

Гаврилец Ю.Н. (2003). Общественного благосостояния функция // Экономико-математический энциклопедический словарь. М.: БРЭ: ИНФРА-М.

* *Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И.* (1997). Микроэкономика. В 2 т. Т. 2. СПб.: Экономическая школа: ГУЭИ: ГУ ВШЭ.

* *Интрилигатор М.* (1975, 2002). Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс.

* *Карлин С.* (1964). Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир.

Кац М., Роузен Х. (2004). Микроэкономика. Минск: Новое знание.

Мюллер Д. (2002). Теория общественного выбора // Панорама экономической мысли конца XX столетия. В 2 т. Т. 1. СПб.: Экономическая школа: ГУЭИ: ГУ ВШЭ.

* *Никайдо Х.* (1972). Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир.

Нуреев Р.М. (2005). Теория общественного выбора. М.: ГУ ВШЭ.

Роулз Дж. (1995). Теория справедливости. Н.

* *Стиглиц Дж.Ю.* (1997). Экономика государственного сектора. М.: Изд-во МГУ: ИНФРА-М.

Эрроу К.Дж. (2004). Коллективный выбор и индивидуальные ценности. М.: ГУ ВШЭ.

Arrow K. (1950). A Difficulty in the Concept of Social Welfare. // Journal of Political Economy, 58, N 3.

Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R. (1995). Microeconomic Theory. N-Y, Oxford: Oxford University Press.

Глава 13

Вальрас Л. (2000). Элементы чистой политической экономии, или Теория общественного богатства. М.: Изограф.

* *Интрилигатор М.* (1975, 2002). Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс.

* *Карлин С.* (1964). Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир.

Allais M. (1952). Traite d'economie pure. Paris: Impremerie Nationale.

Arrow K.J., Block D., Hurwicz L. (1959). On the stability of the competitive equilibrium, II. // Econometrica, 27, pp. 82–109.

General Equilibrium: Problems, Prospects and Alternatives. (1999). XII Workshop. Italy, Siena.

Hahn F.H. (1958). Gross substitutes and the dynamic stability of general equilibrium. // Econometrica, 26, pp. 169–170.

Hicks J.R. (1953). Value and capital. Oxford.

McKenzie L.W. (1956–1957). Demand theory without an utility index. // Review of Economic Studies, 24, pp. 185–189.

Metzler L.A. (1945). Stability of multiple markets: the Hicks conditions. // Econometrica, 13, pp. 277–292.

Mosak J.L. (1944). General equilibrium theory in international trade. Bloomington (Indiana).

Negishi T. (1962). The stability of a competitive economy: a survey article. // Econometrica, 30, pp. 635–669.

Uzawa H. (1960). Walras tatonnement in the theory of exchange. // Review of Economic Studies, 27, pp. 182–194.

Uzawa H. (1961). The stability of dynamic processes. // Econometrica, 29, pp. 617–631.

Глава 14

Альсевич В.В. (2004). Введение в математическую экономику. Конструктивная теория. М.: Едиториал УРСС.

• *Черемных Ю.Н.* (1987). Математическое моделирование народнохозяйственной динамики. М.: Знание.

• *Черемных Ю.Н.* (1982). Анализ траекторий динамики народнохозяйственных моделей. М.: Наука.

Экономико-математический энциклопедический словарь (2003). М.: Большая Российская Энциклопедия: ИНФРА-М.

Kemeny J.G., Morgenstern O., Thompson G.L. (1956). A Generalization of the von Neumann Model of an Expanding Economy. // Econometrika, v. 24, № 2.

Neumann J. von (1945–1946). A Model of General Economic Equilibrium. // Review of Economic Studies, v. 13(1), № 33.

Глава 15

• *Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И.* (1997). Микроэкономика. Т. 2. СПб.: Экономическая школа.

* *Пиндайк Р., Рубинфельд Д.* (2000). Микроэкономика. М.: Экономика: Дело.

Пирс Д.У. (2002). Экономика окружающей среды // Панорама экономической мысли конца XX столетия. Т. 1. СПб.: Экономическая школа: ГУЭИ: ГУ ВШЭ.

Экономическая школа. Журнал-учебник (1995). Выпуск 5.

Mas-Colell A., Winston M.D., Green J.R. (1995). Microeconomic Theory. Oxford University Press.

Глава 16

* *Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И.* (1997). Микроэкономика. Т. 2. СПб.: Экономическая школа.

* *Пиндайк Р., Рубинфельд Д.* (2000). Микроэкономика. М.: Экономика: Дело.

Полищук Л.И. (2003). Микроэкономическая теория: проблемы асимметричной информации и общественных благ. М.: Российская экономическая школа.

* Экономическая школа: Журнал-учебник (1999). Выпуск 5.

Foley D.K. (1970). Lindahl's Solution and the Core of an Economy with Public Goods. // Econometrica, vol. 38, Issue 1.

Mas-Colell A., Winston M.D., Green J.R. (1995). Microeconomic Theory. Oxford University Press.

Глава 17

Акерлоф Дж. (1970; 1994). Рынок «лимонов»: неопределенность качества и рыночный механизм // THESIS. № 5.

* *Пиндайк Р., Рубинфельд Д.* (2000). Микроэкономика. М.: Экономика: Дело.

Полищук Л.И. (2003). Микроэкономическая теория: проблемы асимметричной информации и общественных благ. Препринт № KL/2003/009. М.: Российская экономическая школа.

Экономико-математический энциклопедический словарь (2003). М.: Большая Российская Энциклопедия: ИНФРА-М.

Экономическая школа. Журнал-учебник (1999). Выпуск 5.

* *Юдкевич М.М., Подколзина Е.А., Рябинина А.Ю.* (2002). Основы теории контрактов: модели и задачи: Учеб. пособие. М.: ГУ ВШЭ.

* *Mas-Colell A., Winston M.D., Green J.R.* (1995). Microeconomic Theory. Oxford University Press.

Rothschild M., Stiglitz J.E. (1976). Equilibrium incompletitive insurance markets: An essay in the economics of imperfect information. // Quarterly Journal of Economics, 80, pp. 629–649.

Salanie B. (1997). The Economics of Contracts: A Primer. Boston, Mass.: MIT Press.

Spens A.M. (1973). Job Market Signaling // Quarterly Journal of Economics, № 87, pp. 355–374.

Shapiro C., Stiglitz J.E. (1984). Equilibrium unemployment as a worker displine device // American Economic Review, V. 74, № 3.

Wilson C. (1976). A model of insurance markets with incomplete information // Journal of Economic Theory, 16, pp. 167–207.

Глава 18

Барсукова С.Ю. (2004). Неформальная экономика: экономико-социологический анализ. М.: ГУ ВШЭ.

Богданович А. (2001). Покупайте отечественное // Эксперт. № 31.

Глинкина С.П. (2001) Теневая экономика в глобализирующемся мире // Проблемы прогнозирования. № 4.

Глобализация мирового хозяйства и национальные интересы России (2002) / Под ред. В.П. Колесова. М.: Экономический факультет МГУ: ТЕИС.

Джунусов М.С. (1998). Национализм: Словарь-справочник. М.

Загашвили В.С. (1997). Экономическая безопасность России. М.: Юристъ.

Исправников В.О., Куликов В.В. (1997). Теневая экономика в России: иной путь и третья сила // Российский экономический журнал: Фонд «За экономическую грамотность».

Мишель Л. Экономический национализм против мировой экономики, http://elem2000.virtualave.net.4econat.html

Некипелов А.Д. (2001). Глобализация и стратегия развития экономики России // Проблемы прогнозирования. № 4.

Практика глобализации: игры и правила новой эпохи (2000). М.: ИНФРА-М.

Рокер Р. Опасность национальной идеологии, http://elem2000.virtuala-ve.net.4econat.html

Савченко А. Я сделал бы ставку на экономический национализм, http://gs.com.ua/rus/gs/nomer/2000/2000-34/34tema2.html

* *Судоплатов А.П., Лекарев С.В.* (2001). Безопасность предпринимательской деятельности. М.: ОЛМА-ПРЕСС.

Черемных Ю.Н. (2000). О влиянии научно-технического прогресса в компьютеризации и информатике на современную экономику // Философия хозяйства. № 6 (12).

Шишков А. (2001). Внешнеэкономические связи в XX в. — от упадка к глобализации // Мировая экономика и международные отношения. № 8.

Щербаков В.И. (2003). Проблемы выработки промышленной политики в России. Международная Академия Менеджмента. Научные труды. Выпуск IV. М.

Р.А. Эксперт, http://www.raexpert.ru

Magazine.ru, www.magazine.ru

"The emerging digital economy"

Приложение

Математический энциклопедический словарь (1988). М.: Советская энциклопедия.

Сюдсетер К., Стрем А., Берк П. (2000). Справочник по математике для экономистов. СПб.: Экономическая школа.

Экономико-математический энциклопедический словарь (2003). М.: Большая Российская Энциклопедия: ИНФРА-М.

По вопросам приобретения книг обращайтесь:

Отдел продаж «ИНФРА-М» (оптовая продажа):
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31в, тел.: (495) 380-4260; факс: (495) 363-9212
E-mail: books@infra-m.ru

•

Магазин «Библиосфера» (розничная продажа):
109147, Москва, ул. Марксистская, д. 9, тел. (495) 670-5218, 670-5219

•

Отдел «Книга–почтой»:
тел. (495) 363-4260 (доб. 232, 246)

•

Центр комплектования библиотек:
119019, Москва, ул. Моховая, д. 16, (Российская государственная библиотека, кор. К)
тел. (495) 202-9315

Учебное издание

Юрий Николаевич Черемных

МИКРОЭКОНОМИКА

Продвинутый уровень

Учебник

Редактор *З.А. Басырова*
Корректор *Л.С. Куликова*
Компьютерная верстка *О.В. Савостиной, С.М. Майорова*

ЛР № 070824 от 21.01.93.

Сдано в набор 10.12.2006. Подписано в печать 20.06.07.
Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Newton.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 53,0. Уч.-изд. л. 48,1.
Тираж 30 000 экз. (1 — 2500 экз.). Заказ № 7620.
Цена свободная.

Издательский Дом «ИНФРА-М»
127282, Москва, Полярная ул., д. 31в.
Тел.: (495) 380-05-40, 380-05-43. Факс: (495) 363-92-12.
E-mail: books@infra-m.ru; http://www.infra-m.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО ордена «Знак Почета»
«Смоленская областная типография им. В. И. Смирнова».
214000, г. Смоленск, проспект им. Ю. Гагарина, 2.

ISBN 978-5-16-002041-9

9 785160 020419