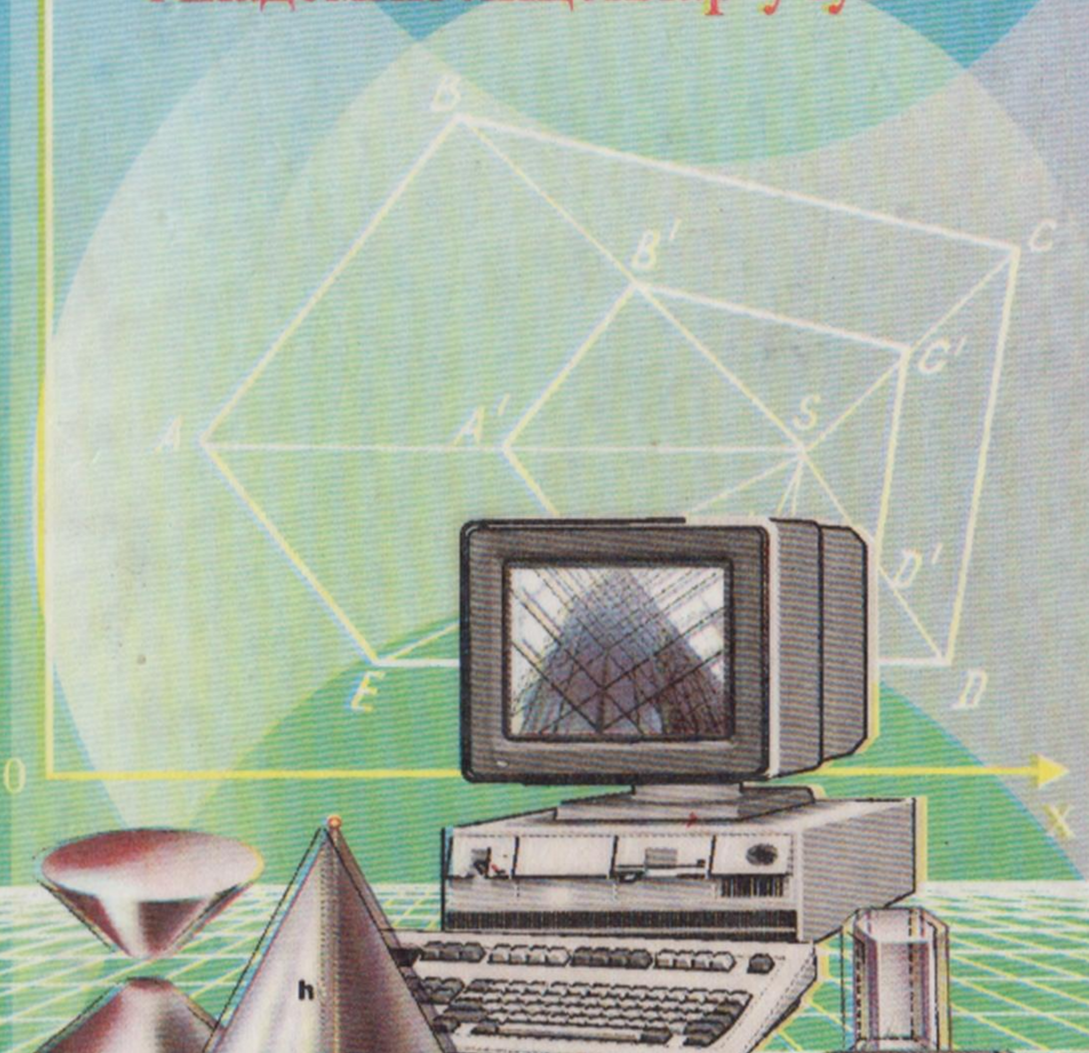
ГЕОМЕТРИЯДАН МАСАЛАЛАР ТЎПЛАМИ

Академик лицейлар учун



ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ЎРТА МАХСУС КАСБ-ҲУНАР ТАЪЛИМИ МАРКАЗИ

ЎРТА МАХСУС КАСБ-ҲУНАР ТАЪЛИМИНИ
РИВОЖЛАНТИРИШ ИНСТИТУТИ

И. Исраилов, З. Пашаев

ГЕОМЕТРИЯДАН МАСАЛАЛАР ТЎПЛАМИ

Академик лицей ва касб-ҳунар коллежлари учун ўқув қўлланма сифатида тавсия этилган

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 2001

Тақризчилар:

физика-математика фанлари доктори, проф. *А. Ортиқбоев*, педагогика фанлари доктори, проф. *М. Тожиев*, физика-математика фанлари номзоди, доц. *Ш. Рўзиев*, Тошкент ш., Акмал Икромов туманидаги 197-ўрта мактабнинг олий тоифали ўқитувчиси *М.Ахтамова*, Самарқанд ш., Боғишамол туманидаги 55-ўрта мактабнинг олий тоифали ўқитувчиси *М. Каримова*

Мазкур қўлланма «Геометрия» фанидан академик лицейлар учун мавжуд ўқув дастури асосида ёзилган бўлиб, унда ҳар бир бўлим бўйича ечилиши зарур бўлган масалалар тест топшириқлари шаклида берилган. Қўлланма академик лицей ва касб-ҳунар коллежлари талабалари учун мўлжалланган. Шунингдек, ундан олий ўқув юртларига кириш учун тест синовларига мустақил тайёрланаётганлар ҳам фойдаланишлари мумкин.

В $\frac{4306010500-180}{353(04)-2001}$ Буюрт. вар.–2001

ISBN 5-645-03811-8

СЎЗ БОШИ

Мазкур қўлланма «Геометрия» фани бўйича академик лицейлар учун мавжуд ўқув дастурида кўрсатилган барча бўлимларга доир масалаларни ўз ичига олади.

Қўлланма икки қисмдан иборат бўлиб, ўн бешта параграфдан ташкил топган. Ҳар бир параграфнинг бошида мавзуга оид асосий тушунча, тасдиқ ва формулалар келтирилган. Сўнгра ҳар бир параграф мавзуси бўйича қатор масалалар келтирилиб, уларнинг ечилишлари баён қилинган. Ҳар бир параграфнинг охирида мустақил ечиш учун масалалар ҳам берилган.

Қўлланманинг ёзилишидан асосий мақсад, Таълим тўғрисидаги Қонун ва Кадрлар тайёрлаш миллий дастурини амалга ошириш тадбирларидан бири сифатида математикадан адабиётлар мажмуаси (комплекти) яратишдан иборат бўлиб, у академик лицейлар ва касб-ҳунар коллежлари талабалари учун мўлжалланган. Шунингдек, қўлланма математикани мустақил ўрганиб, олий ўқув юртларига кириш тест синовларига тайёрланаётганларга ҳам ёрдам беради ва, шу билан бирга, «Геометрия» фанидаги барча тушунчалар, асосий формулалар ва тасдиқларнинг масалаларни ечишда қўлланилишини чуқурроқ ўрганиш имкониятини яратади.

Қўлланма ҳақидаги фикр ва мулоҳазаларингизни муаллифлар мамнуният билан қабул қиладилар.

Муаллифлар

1-қисм
ПЛАНИМЕТРИЯ

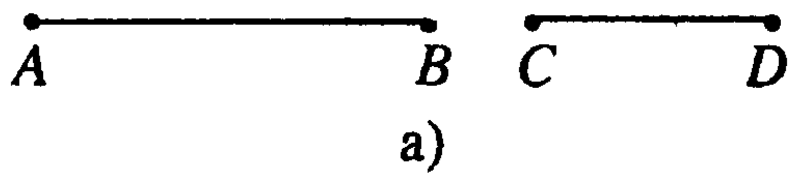
1-§. АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР

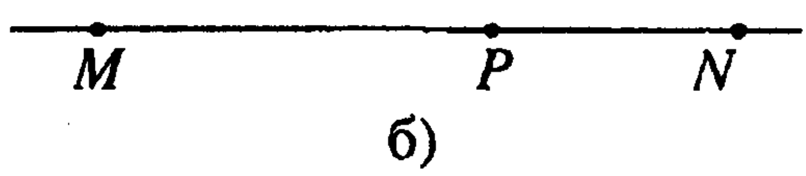
1.1 Кесма ва бурчаклар

Энг содда тушунчалар орқали таърифлаш мумкин бўлмаган тушунчалар *бошланғич тушунчалар* дейилади. Геометрияда шундай бошланғич тушунчалар жумласига *нуқта, тўғри чизиқ, текислик* киради. Бошланғич тушунчаларнинг хоссалари аксиомалар ёрдамида киритилади. Тўғри чизиқнинг икки томондан чегараланган қисми *кесма* дейилади. Бир томондан чегараланган тўғри чизиқ *нур* (ярим тўғри чизиқ) деб аталади.

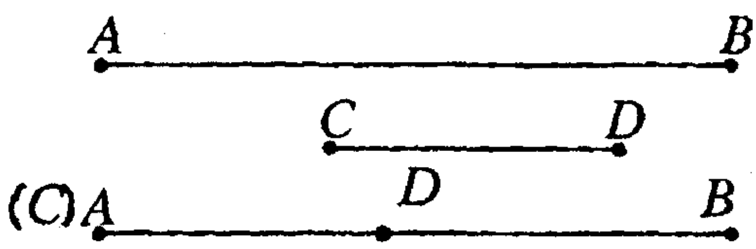
Четки нуқталари устма-уст тушадиган кесмалар *тенг* кесмалар дейилади.

Берилган иккита AB ва CD (1.1-чизма) кесманинг йиғиндисини топиш учун тўғри чизиқни ва унда бирор M нуқтани (1.1-чизма) оламиз, сўнгра циркуль ёрдамида бу тўғри чизиқнинг М нуқтасидан аввало AB кесмага тенг MP кесма ажратамиз ва унинг





1.1-чизма.



1.2-чизма.

охиридан шу йўналиш бўйича CD кесмага тенг PN кесма ажратамиз. Ҳосил қилинган MN кесма AB ва CD кесмаларнинг йиғиндиси дейилади:

$$MN=AB+CD.$$

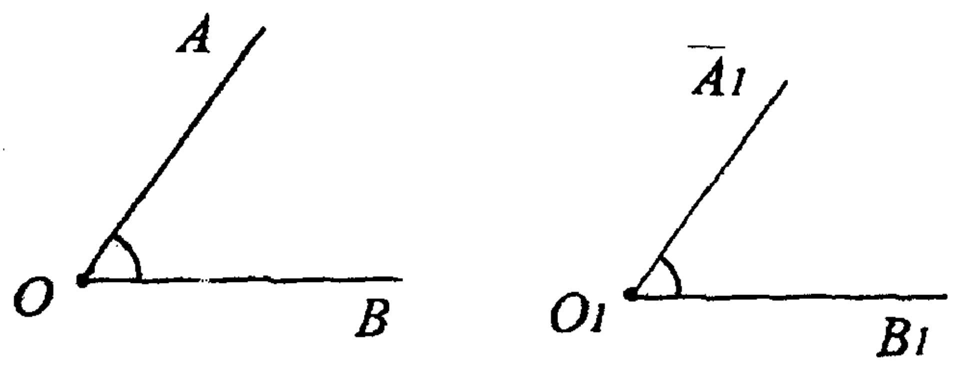
Фараз қилайлик, $|AB|>|CD|$ бўлсин. CD кесманинг C учини A нуқтадан қўйиб, CD кесмани AB кесманинг ички қисмида ясаймиз. У ҳолда DB кесма AB ва CD кесмаларнинг *айирмаси* деб аталадиган кесмани беради (1.2-чизма).

Умумий учга эга бўлган иккита нурдан ташкил топган геометрик шакл *бурчак* деб аталади. Нурлар бурчакнинг *томонлари,* уларнинг умумий нуқтаси бурчакнинг *учи* деб аталади ва $\angle AOB$ ёки $\angle O$ каби белгиланади.

Текисликда олинган бурчакнинг томонлари текисликни икки қисмга бўлади. Ҳар бир бурчак учун бу қисмларнинг бири унинг ички қисми, иккинчиси ташқи қисми бўлади.

Агар бурчакнинг томонлари бир тўғри чизиқнинг тўлдирувчи ярим тўғри чизиқлардан иборат бўлса, у *ёйиқ бурчак* дейилади.

Бурчакнинг катталиги транспортир ёрдамида топилади. Агар бурчакларнинг катталиклари бир хил бўлса, улар тенг бурчаклар дейилади. Бошқача айтганда, агар $\angle A_1O_1B_1$ ни ўз-ўзига параллел силжитиб, O_1 нуқтани O нуқтага, O_1B_1 нурни OB нурга устма-



1.3-чизма.

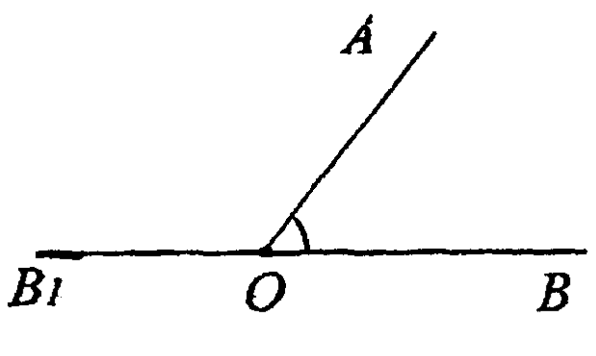
уст туширганда O_1A_1 томон OA томон билан устма-уст тушса, $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ бўлади (1.3-чизма).

Битта томони умумий бўлиб, қолган томонлари бир тўғри чизиқни тўлдирувчи бурчаклар *қўшни бурчаклардир*. Масалан, $\angle AOB_1$ ва $\angle AOB$ қўшни бурчаклардир. $\angle BOB_1$ эса *ёйиқ бурчакдир* (1.4-чизма). Шунинг учун қўшни бурчакларнинг йиғиндиси

$$\angle AOB + \angle AOB_1 = 180° \qquad (1.1)$$

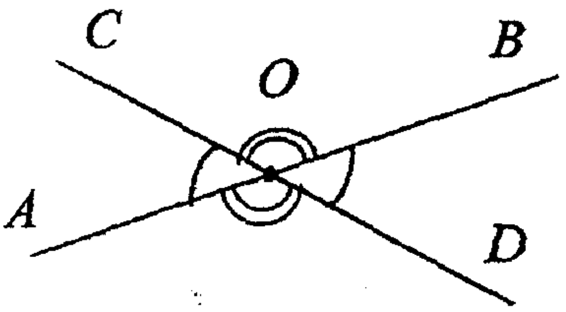
тенгликни қаноатлантиради.

Қўшни бурчаклар ўзаро тенг бўлса, уларнинг ҳар бири тўғри бурчакдан иборат бўлиб, катталиклари 90° га тенг. Иккита AB ва CD тўғри чизиқнинг кесишишидан ҳосил бўлган бурчаклар ***вертикал бурчаклар*** деб аталади (1.5-чизмада $\angle AOC$ ва $\angle BOD$; $\angle AOD$ ва $\angle BOC$—вертикал бурчаклар). Вертикал бурчаклар ўзаро тенг бўлади: $\angle AOC = \angle BOD$, $\angle AOD = \angle BOC$.

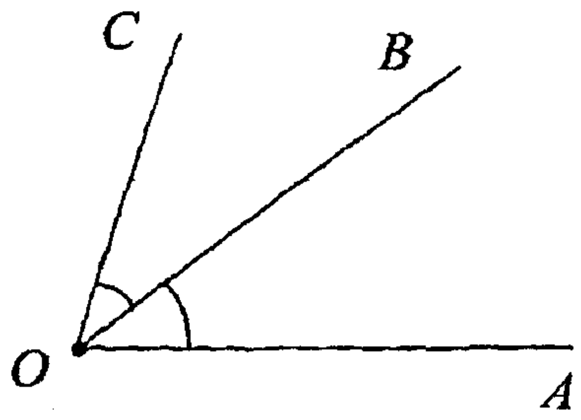


1.4-чизма.

Иккита $\angle AOB$ ва $\angle BOC$ бурчакни қўшиш (айириш) учун уларнинг учларини ва биттадан томонини устма-уст туширамиз. Сўнгра уларни қўшиш учун иккинчи бурчак-



1.5-чизма.

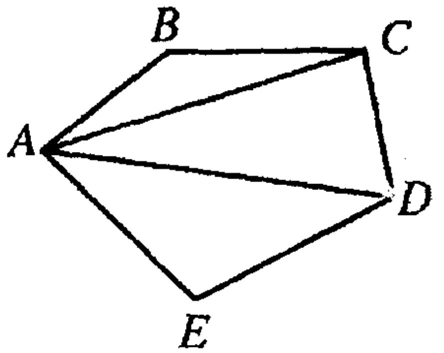


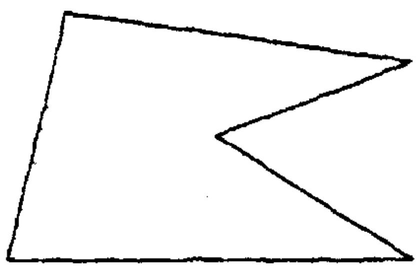
1.6-чизма.

нинг иккинчи томонини биринчи бурчакнинг ташқарисидан, айириш учун эса ичкарисидан йўналтирамиз (1.6-чизма).

1.2. Кўпбурчаклар

Кўпбурчак текисликда содда ёпиқ синиқ чизиқдан ташкил топган шаклдир (1.7- чизмада $ABCDE$ бешбурчак тасвирланган). Синиқ чизиқнинг бўғинлари кўпбурчакнинг *томонлари* (AB, BC, CD, DE, EA), синиқ чизиқнинг учлари эса кўпбурчакнинг *учларидир* (A, B, C, D, E). Томонларининг сонига қараб кўпбурчаклар *учбурчак, тўртбурчак, бешбурчак* ва ҳоказо деб номланади.





қаварик бешбурчак қаварик бўлмаган бешбурчак

1.7- чизма.

Кўпбурчакнинг *периметри* унинг ҳамма томонлари узунликларининг йиғиндисидан иборат.

Агар кўпбурчакнинг ихтиёрий икки нуқтасини туташтирувчи кесма шу кўпбурчакка тегишли бўлса, бу кўпбурчак *қавариқ* бўлади. Акс ҳолда кўпбурчак қавариқ бўлмайди.

Кўпбурчакнинг иккита қўшни томони ҳосил қилган бурчаклар унинг *ички бурчаклари,* кўпбурчакнинг ички бурчакларига қўшни бўлган бурчаклар кўпбурчакнинг *ташқи бурчаклари* дейилади.

Кўпбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси қуйидаги формула ёрдамида топилади:

$$\sum=2d\ (n-2),\ (n\text{ — томонлар сони, } d=90^\circ). \qquad (1.2)$$

Кўпбурчакнинг иккита қўшни бўлмаган учларини туташтирувчи кесма кўпбурчакнинг *диагонали* дейилади (1.7-чизмада AC, AD).

Кўпбурчакнинг муҳим хоссалари қуйидагилардир.

1. Ихтиёрий кўпбурчак ташқи бурчакларининг йиғиндиси 360° га тенг.

2. Мунтазам кўпбурчакнинг ҳамма ички бурчаклари тенг.

1.3. Параллел тўғри чизиқлар

Бир текисликда ётиб, кесишмайдиган a ва b тўғри чизиқлар параллел тўғри чизиқлар дейилади ва улар $a \parallel b$ каби белгиланади.

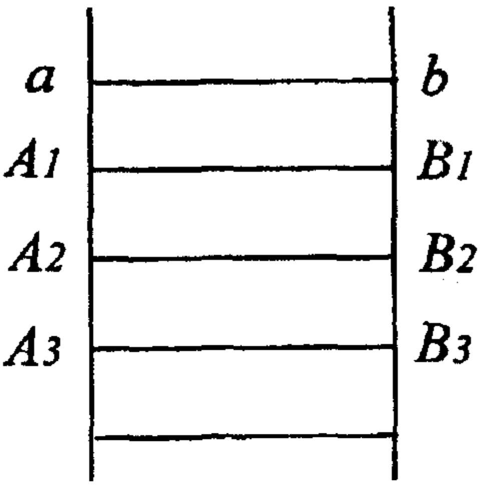
Параллел тўғри чизиқларнинг хоссалари:

4. Агар a ва b тўғри чизиқлар параллел бўлса, улар орасидаги масофа ўзгармас миқдордир.

5. Битта тўғри чизиққа параллел бўлган ҳамма тўғри чизиқлар ўзаро параллелдир.

6. Бир текисликда ётиб, битта тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган ҳамма тўғри чизиқлар ўзаро параллелдир.

7. Иккита параллел a ва b тўғри чизиқларга перпендикуляр бўлган тўғри чизиқларнинг бу параллел тўғри чизиқлар орасидаги қисмлари ўзаро тенгдир: $A_1B_1=A_2B_2=A_3B_3$ (1.8- чизма).



1.8- чизма.

8. Бурчак томонларини бир неча параллел тўғри чизиқлар кесиб ўтса, бурчакнинг томонлари ўзаро пропорционал бўлган кесмаларга ажралади (Фалес теоремаси):

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{AA_1}{BB_1} = ... = \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n} \quad \text{(1.9-чизма)}$$

Текисликда иккита a ва b тўғри чизиқни учинчи c тўғри чизиқ кесиб ўтган бўлсин, у ҳолда ҳосил бўлган бурчаклар қуйидагича номланади (1.10-*а* чизма):

$\angle 3$ ва $\angle 5$, $\angle 4$ ва $\angle 6$ — *ички алмашинувчи бурчаклар;*

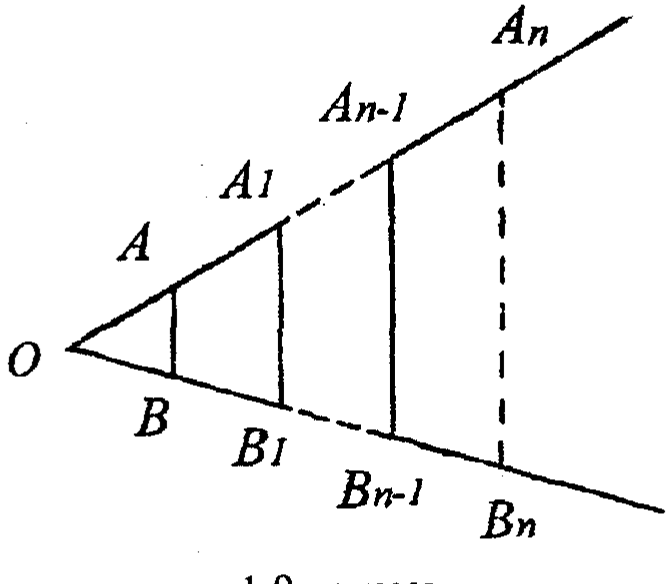
$\angle 1$ ва $\angle 8$, $\angle 2$ ва $\angle 7$ — *ташқи алмашинувчи бурчаклар;*

$\angle 1$ ва $\angle 5$, $\angle 2$ ва $\angle 6$, $\angle 3$ ва $\angle 7$, $\angle 4$ ва $\angle 8$ — *мос бурчаклар;*

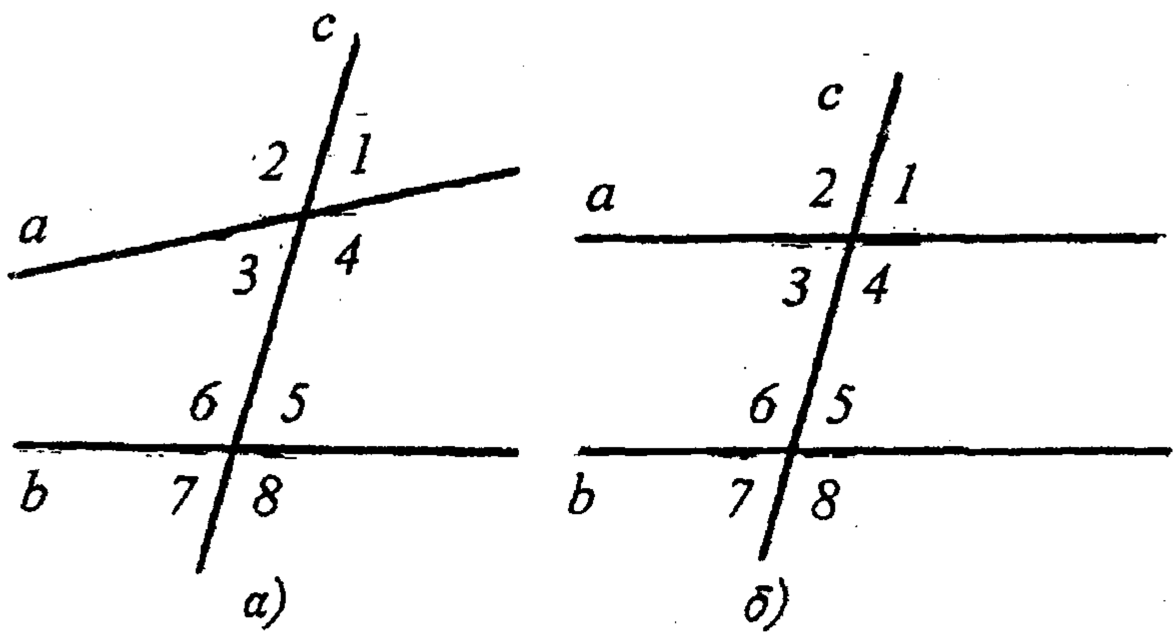
$\angle 3$ ва $\angle 6$, $\angle 4$ ва $\angle 5$ — *ички бир томонли бурчаклар;*

$\angle 2$ ва $\angle 7$, $\angle 1$ ва $\angle 8$ — *ташқи бир томонли бурчаклар.*

9. Агар параллел a ва b тўғри чизиқлар c тўғри чизиқ билан кесишган бўлса (1.10-*б* чизма), у ҳолда:



1.9- чизма.



1.10- чизма

1) ички алмашинувчи бурчаклар тенг: $\angle 3 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 6$;

2) ташқи алмашинувчи бурчаклар тенг: $\angle 1 = \angle 7$, $\angle 2 = \angle 8$;

3) мос бурчаклар тенг: $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 8$;

4) ички бир томонли бурчакларнинг йиғиндиси 180° га тенг: $\angle 3 + \angle 6 = 180°$, $\angle 4 + \angle 5 = 180°$;

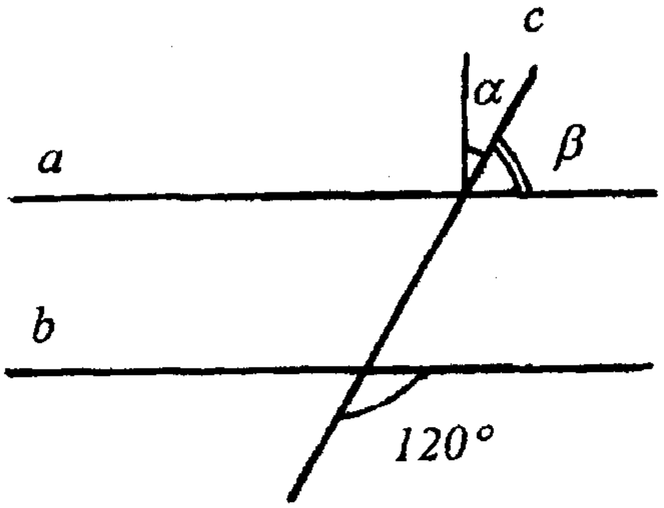
5) ташқи бир томонли бурчакларнинг йиғиндиси 180°га тенг, $\angle 2 + \angle 7 = 180°$; $\angle 1 + \angle 8 = 180°$.

10. Иккита a ва b тўғри чизиқ учинчи c тўғри чизиқ билан кесишганда: 1) ички алмашинувчи бурчаклар тенг, 2) мос бурчаклар тенг, 3) бир томонли ички (ташқи) бурчакларнинг йиғиндиси 180°га тенг бўлса, a ва b тўғри чизиқлар параллелдир ($a \parallel b$).

1.4. Мавзуга оид баъзи масалаларнинг ечимлари

1. Берилган. $a \parallel b$, $\gamma = 120°$.

α топилсин (1.4.1- чизма).



1.4.1- чизма.

Е ч и л и ш и. Ташқи бир томонли бурчаклар йиғиндиси 180° га тенг: $\beta+120°=180°$ ва $\beta=180°-120°=60°$. Шартга кўра $\alpha+\beta=90°$, у ҳолда $\alpha=90°-\beta$, $\alpha=90°-60°=30°$.

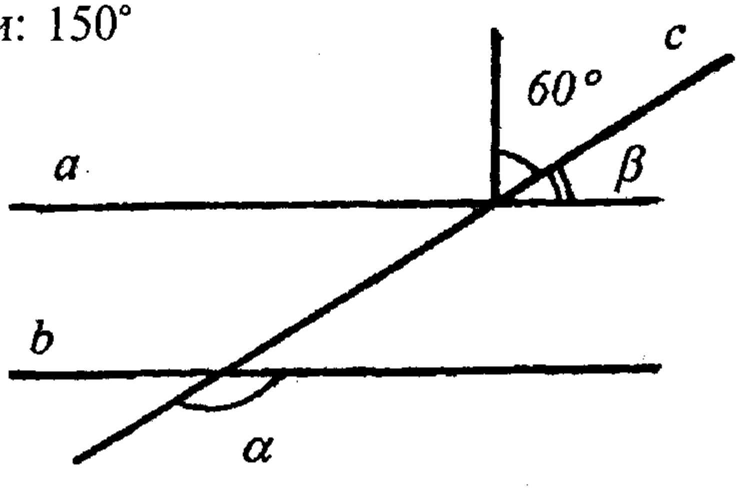
Жавоби: 30°.

2. Б е р и л г а н. $a \parallel b$, $\gamma=60°$.

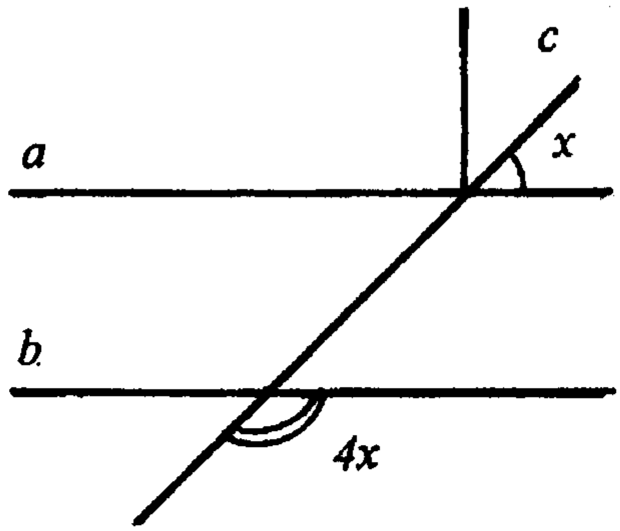
α т о п и л с и н (1.4.2-чизма).

Е ч и л и ш и. a ва b бир томонли ташқи бурчаклардир. Шунинг учун $\alpha+\beta=180°$. Иккинчи томондан, $\beta+60°=90°$ тенглама: $\beta=90°-60°=30°$ ва $\alpha=180°-30°=$ $=150°$ эканлигини беради.

Жавоби: 150°



1.4.2- чизма.



1.4.3- чизма.

3. Берилган. $a \parallel b$.

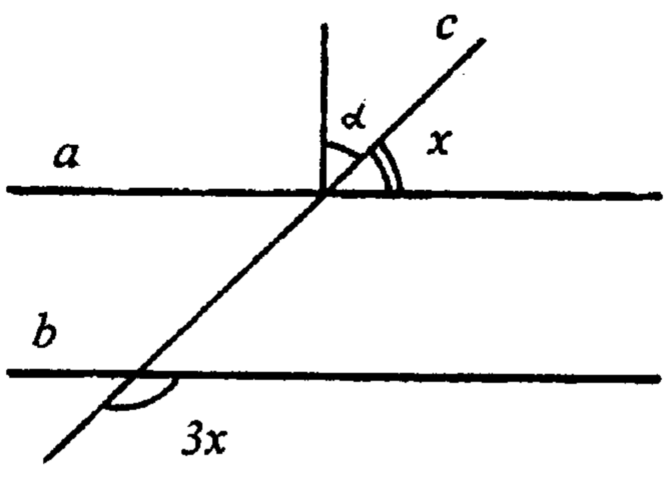
x топилсин (1.4.3- чизма).

Ечилиши. $a \parallel b$ бўлгани учун, 9- хоссага мувофиқ ташқи бир томонли бурчакларнинг йиғиндиси 180°га тенг. Демак, $x+4x= =180°$, $5x=180°$, $x=36°$.

Жавоби: $x=36°$.

4. Берилган. $a \parallel b$.

α топилсин (1.4.4- чизма).



1.4.4- чизма.

Ечилиши. $a \parallel b$ бўлгани учун, 9- хоссага мувофиқ, $3x$ ва x бир томонли ташқи бурчаклар бўлади ва $3x+x=180°$, $4x=180°$, $x=45°$. $\alpha+x=90°$, у ҳолда $\alpha=90°-$ $-45°=45°$.

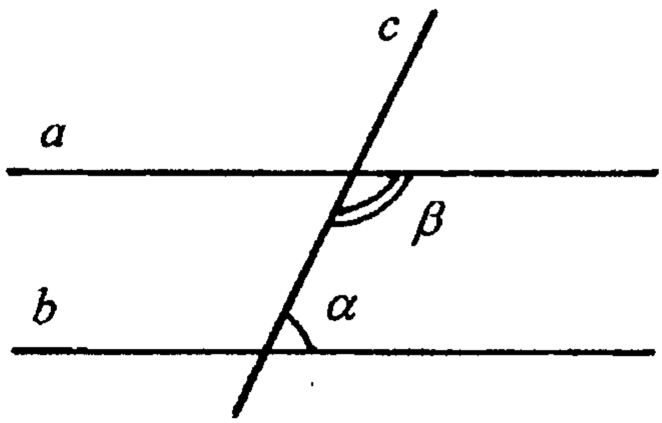
Жавоби: $\alpha=45°$.

5. Берилган. $a \parallel b$. $\beta=\alpha+34°$.

α, β топилсин (1.4.5- чизма).

Ечилиши. $a \parallel b$ бўлганлиги учун 9- хоссага мувофиқ, ички бир томонли α, β бурчаклар учун $\alpha+\beta=180°$ бўлади ёки $\alpha+\alpha+34°=180°$, $2\alpha=146°$, $\alpha=73°$ ва $\beta=73°+34°=107°$.

Жавоби: $\alpha=73°$, $\beta=107°$.

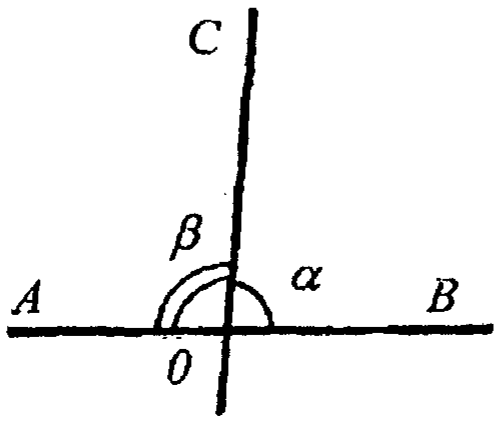


1.4.5- чизма.

6. Берилган. $\angle AOC$, $\angle COB$ қўшни бурчаклар, $\angle AOC=\angle COB+20°$.

$\angle AOC$, $\angle COB$ топилсин (1.4.6- чизма).

Ечилиши. (1.1) формулага асосан, қўшни бурчакларнинг йиғиндиси 180°га тенг, улар учун $\angle COB=\alpha$, $\angle AOC=\beta$ белгилашлар киритамиз. Иккита α, β номаълумга нисбатан



1.4.6- чизма.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 180^\circ, \\ \beta - \alpha = 20^\circ \end{cases}$$

системани ҳосил қилдик. Системадаги тенгламаларни қўшамиз: $\beta+\beta=200^\circ$, $\beta=100^\circ$ ва $\alpha=100^\circ-20^\circ=80^\circ$.

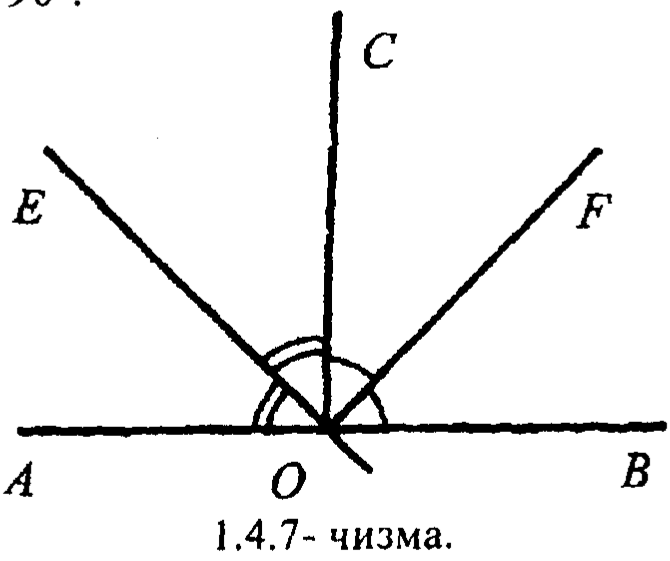
Жавоби: 80° ва 100°.

7. Берилган. $\angle AOC$, $\angle COB$ қўшни бурчаклар, OE, OF — уларнинг биссектрисалари.

$\angle EOF$ топилсин (1.4.7- чизма).

Ечилиши. (1.1) формулага асосан, қўшни бурчакларнинг йиғиндиси 180° га тенг, яъни $\angle AOE+$ $+\angle EOC+\angle COF+\angle FOB$ $=180^\circ$, бу ердан, $2(\angle EOC+\angle COF)=180^\circ$ ва $\angle EOF=\angle EOC+\angle COF=90^\circ$.

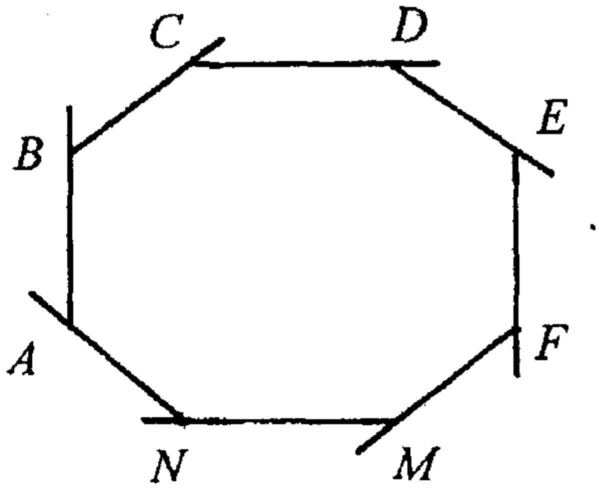
Жавоби: 90°.



1.4.7- чизма.

8. Берилган. Кўпбурчак.
$S_{ич}=S_{таш}+720^\circ$.

n топилсин (1.4.8- чизма).



1.4.8- чизма.

Е ч и л и ш и. Кўпбурчакнинг томонлари сони n бўлсин. (1.2) формулага мувофиқ, кўпбурчак ички бурчаклари йиғиндиси $180°(n-2)$га тенг, 1.2- банддаги 1- хоссага мувофиқ бир йўналишда олинган ташқи бурчаклари йиғиндиси 360°га тенг. Шартга кўра, $180°(n-2)=360°+$ $+720°$, $180°(n-2)=1080°$, $n-2=6$, $n=8$.

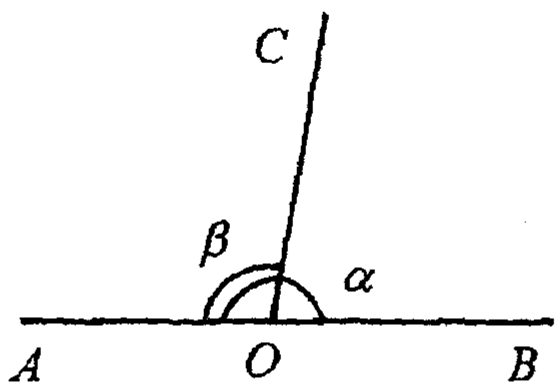
Жавоби: $n=8$.

9. Б е р и л г а н. $\angle AOC$, $\angle COB$ қўшни бурчаклар, $\angle AOC : \angle COB = 11:7$.

$\angle AOC$, $\angle COB$ т о п и л с и н (1.4.9- чизма).

Е ч и л и ш и. $\angle AOC=\alpha$, $\angle COB=\beta$ бўлсин. α ва β га нисбатан $\begin{cases} \alpha + \beta = 180°, \\ \beta : \alpha = 11:7 \end{cases}$ тенгламалар системасини ёзамиз. Бу ердан $\begin{cases} \beta = \dfrac{11}{7}\alpha, \\ \dfrac{11}{7}\alpha + \alpha = 180° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 110° \\ \beta = 70° \end{cases}.$

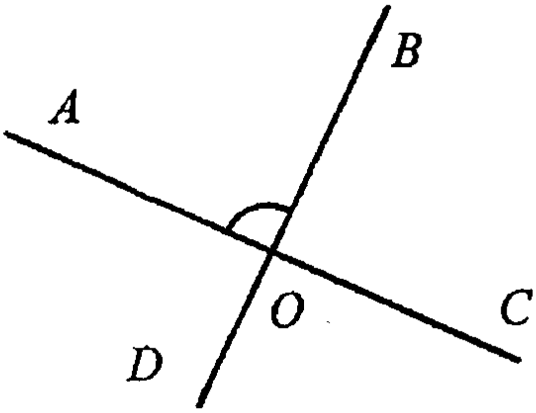
Жавоби: 70° ва 110°.



1.4.9- чизма.

10. Б е р и л г а н. $AC \cap BD = O$,
$\angle AOD + \angle AOB + \angle BOC = 255^\circ$.

$\angle AOB$ т о п и л с и н (1.4.10- чизма).



1.4.10- чизма.

Е ч и л и ш и. AC ва BD лар O нуқтада кесишганда ҳосил бўлган тўртта бурчакнинг йиғиндиси 360°га тенг. Шартга кўра, учтасининг йиғиндиси 255°га тенг бўлса, тўртинчиси $\angle COD = 360^\circ - 255^\circ = 105^\circ$га тенг. Вертикал бурчаклар тенглигидан $\angle AOB = \angle DOC = 105^\circ$.

Жавоби: 105°.

1.5. Мустақил ечиш учун масалалар

1. AC тўғри чизиқда A ва C нуқталар орасида B нуқта ётади. Агар $BC = 7{,}4$ см бўлиб, AB кесманинг узунлиги AC кесманинг узунлигидан 3 марта кичик бўлса, AC топилсин.

А) 11,2; В) 10,6; С) 10,8; Д) 11,1; Е) 12,1 см.

2. D, E, C нуқталар бир тўғри чизиқда ётади. $DE = 16$ см, $DC = 9$ см ва D нуқта E ва C нуқталар орасида бўлса, CE кесманинг узунлиги топилсин.

А) 22; В) 24; С) 23; Д) 26; Е) 25 см.

3. D ва E нуқталар орасида C нуқта жойлашган. Агар $DE = 16$ см, $DC = 9$ см бўлса, CE кесманинг узунлиги топилсин.

А) 7; В) 8; С) 6; Д) 5; Е) 9 см.

4. $\angle ACD=80°$, $\angle DCE=42°$ ҳамда CE нур CA ва CD нурлар орасидан ўтади. $\angle ACE$ топилсин.

A) 40°; B) 39°; C) 38°; Д) 42°; E) 43°.

5. $\angle AOC=48°$, $\angle COD=27°$ ҳамда OC нур OA ва OD нурлар орасидан ўтса, $\angle AOD$ топилсин.

A) 60°; B) 75°; C) 70°; Д) 45°; E) 80°.

6. Қўшни бурчаклардан бири 37°га тенг бўлса, иккинчиси топилсин.

A) 152°; B) 154°; C) 143°; Д) 148°; E) 151°.

7. Қўшни бурчаклардан бири иккинчисидан 8 марта катта. Катта бурчакнинг катталиги топилсин.

A) 160°; B) 150°; C) 130°; Д) 140°; E) 145°.

8. Қўшни бурчакларнинг катталиклари 4:5 каби нисбатда. Қўшни бурчаклардан кичиги топилсин.

A) 70°; B) 64°; C) 85°; Д) 75°; E) 80°.

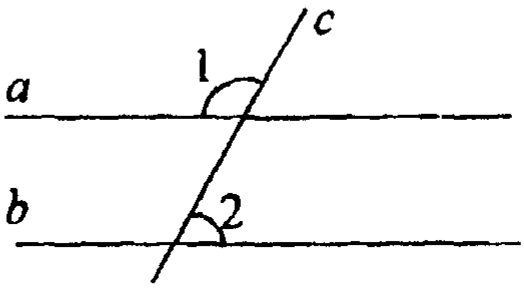
9. α бурчак β бурчакдан 2 марта катта, β бурчак эса α бурчакдан 50° кичик. Бу бурчаклар қўшни бўлишлари мумкинми?

A) —; B) —; C) —; Д) Мумкин эмас; E) Мумкин.

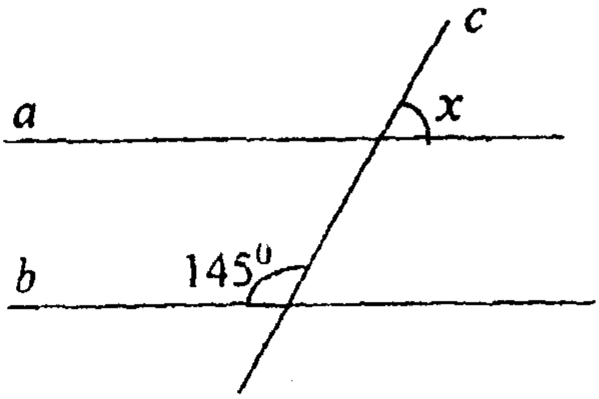
10. Ёйиқ (aa_1) бурчакнинг учидан битта яримтекисликка b ва c нурлар ўтказилган ва $\angle(ac)=30°$, $\angle(a_1b)=40°$. d нур эса $\angle(bc)$ бурчакнинг биссектрисаси бўлса, $\angle(dc)$ бурчак топилсин.

A) 45°; B) 55°; C) 50°; Д) 60°; E) 40°.

11. a тўғри чизиққа нисбатан ҳар хил яримтекисликларда A ва C нуқталар олинган. Улар a тўғри чи-



1.5.1- чизма.



1.5.2- чизма.

зиқнинг бирор O нуқтаси билан туташтирилган. Ҳосил қилинган тўртта бурчакдан бири 35°га, иккинчиси 115°га тенг. O нуқта AC тўғри чизиқда бўлиши мумкинми?

А) C нуқта O ва A орасида; В) O нуқта A ва C орасида; С) A нуқта O ва C орасида; Д) Ҳа; Е) Йўқ.

12. Қўшни бурчаклардан бири иккинчисидан 50° кичик. Катта бурчак топилсин.

А) 105°; В) 90°; С) 110°; Д) 115°; Е) 120°.

13. $\angle(ab)=90°$, $\angle(ak)=30°$, $\angle(bk)=120°$ бўлса, a нур b ва k нурлар орасидан ўтиши мумкинми?

А) Мумкин; В) Мумкин эмас; С)—; Д)—; Е)—.

14. a ва b параллел тўғри чизиқлар c тўғри чизиқ билан кесишган. $\angle 2=68°$ бўлса, $\angle 1$ топилсин (1.5.1-чизма).

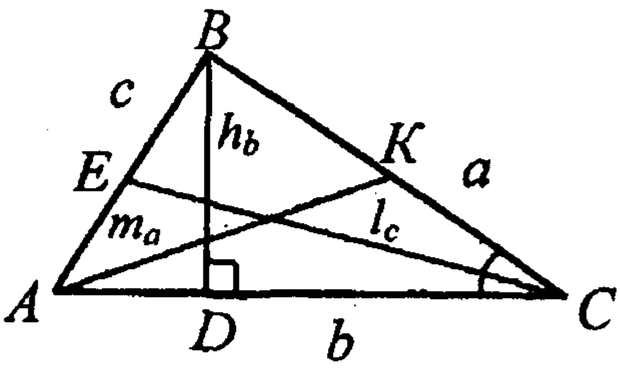
А) 140°; В) 130°; С) 112°; Д) 120°; Е) 115°.

15. a ва b тўғри чизиқлар параллел ва c тўғри чизиқ билан кесишган. x бурчак топилсин (1.5.2-чизма).

А) 30°; В) 35°; С) 40°; Д) 45°; Е) 32°.

2-§. УЧБУРЧАК ВА УНИНГ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

2.1 Асосий тушунчалар ва хоссалар



2.1-чизма

Учбурчакнинг ихтиёрий томонини унинг *асоси* деб олиш мумкин. Асос қаршисида ётган бурчакнинг учи учбурчакнинг *учидир.*

Медиана учбурчакнинг учи билан унга қарши томоннинг ўртасини туташтирувчи кесмадир. ABC учбурчакнинг томонларини $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ деб, унинг A учидан ўтказилган медианасини $AK=m_a$ деб белгилаймиз (2.1-чизма). Учбурчак медианасининг узунлиги унинг томонлари узунликлари орқали қуйидаги формула бўйича топилади:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2};$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}; \qquad (2.1)$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Учбурчакнинг *баландлиги* унинг учидан қарши томонга ўтказилган BD перпендикулярдир (2.1- чизма).

Учбурчакнинг томонлари a, b, c бўлсин. У ҳолда қарши томонга туширилган баландликларнинг узунликлари.

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad (2.2)$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

бунда $p = \frac{a+b+c}{2}$ — яримпериметр.

Учбурчакнинг учидан чиқиб, шу учдаги бурчакни тенг иккига бўлувчи кесма унинг биссектрисасидир (CE).

Томонлари, a, b, c бўлган учбурчакда томонларга ўтказилган биссектрисаларнинг узунликлари ушбу формулалар бўйича топилади:

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)} \text{ ва } l_a = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc((b+c)^2-a^2)}\ ;$$

$$l_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)} \text{ ва } l_b = \frac{1}{a+c}\sqrt{ac((a+c)^2-b^2)}\ ;$$

$$l_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)} \text{ ва } l_c = \frac{1}{a+b}\sqrt{ab((a+b)^2-c^2)}\ .$$

Учбурчакнинг медианалари унинг оғирлик маркази деб аталган битта нуқтада кесишади. Баландликлар эса учбурчакнинг *ортомаркази* деб аталган нуқтада кесишади. Шунингдек, биссектрисалар ҳам битта нуқтада кесишади.

Бурчакларига қараб учбурчаклар уч хил бўлади:

а) ўткир бурчакли (ҳамма бурчаклари ўткир);

б) ўтмас бурчакли (битта бурчаги ўтмас);

в) тўғри бурчакли (битта бурчаги тўғри).

Томонларига нисбатан учбурчаклар:

а) тенг томонли (ҳамма томонлар узунликлари ўзаро тенг);

б) тенг ёнли (иккита томони ўзаро тенг);

в) ихтиёрий учбурчак бўлади.

Тенг томонли учбурчак *мунтазам учбурчак* ҳам дейилади.

Тенг ёнли учбурчакда иккита тенг томон унинг *ён томонлари,* учинчи томони эса *асос* дейилади.

Учбурчакнинг битта томонини ташқи соҳага давом эттирсак, ички бурчакка қўшни бўлган бурчак учбурчакнинг *ташқи бурчаги* деб айтилади.

Тўғри бурчакли учбурчакда тўғри бурчак ташкил қилган томонлар *катетлар,* учинчи томон эса *гипотенузадир.* Агар иккита ΔABC ва $\Delta A_1B_1C_1$ нинг мос томонлари пропорционал, мос бурчаклари эса тенг бўлса, улар ўхшаш дейилади, яъни ўхшаш ΔABC ва $\Delta A_1B_1C_1$да

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \tag{2.4}$$

ва мос бурчаклари тенг, яъни

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1. \tag{2.5}$$

Учбурчаклар ўхшашлиги белгиси $\sim$ дир.

Учбурчак иккита томонининг ўрталарини туташтирувчи кесма учбурчакнинг *ўрта чизиғи* дейилади.

Учбурчакнинг хоссаларини келтирамиз.

1. Учбурчакларнинг тенглик аломатлари:

а) агар бир учбурчакнинг иккита томони ва улар орасидаги бурчаги иккинчи учбурчакнинг мос иккита томонига ва улар орасидаги бурчагига тенг бўлса, бу учбурчаклар тенгдир.

б) агар бир учбурчакнинг битта томони ва унга ёпишган иккита бурчаги иккинчи учбурчакнинг битта томонига ва унга ёпишган иккита бурчагига тенг бўлса, бу учбурчаклар тенгдир.

в) агар бир учбурчакнинг учта томони иккинчи учбурчакнинг учта томонига мос равишда тенг бўлса, учбурчаклар тенгдир.

2. Т е н г ё н л и учбурчакда:

а) асосга туширилган баландлик учбурчакнинг ҳам медианаси, ҳам биссектрисаси бўлади;

б) асосидаги бурчаклар ўзаро тенг.

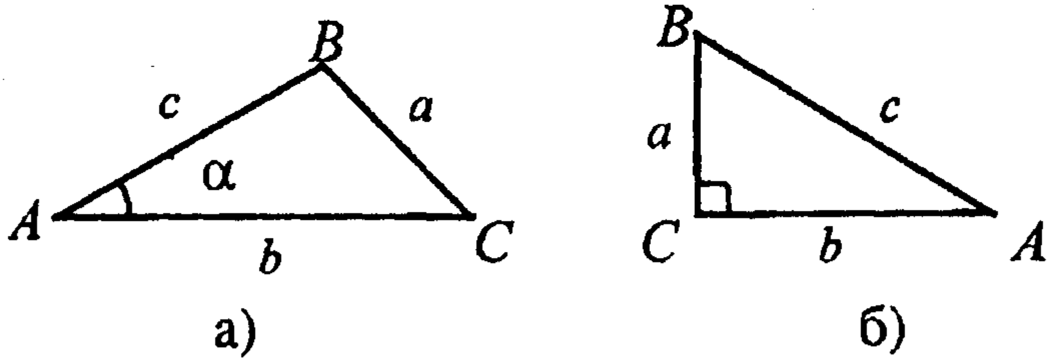
3. Учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 180° га тенг.

4. Учбурчакнинг ташқи бурчаги унинг шу бурчакқа қўшни бўлмаган иккита ички бурчагининг йиғиндисига тенг.

5. Ҳар қандай учбурчакда медианалар битта нуқтада кесишади ва кесишиш нуқтасида учбурчак учидан ҳисоблаганда, 2:1 нисбатда бўлинади.

6. К о с и н у с л а р т е о р е м а с и. Учбурчакда исталган томон узунлигининг квадрати қолган томонлар узунликлари квадратларининг йиғиндисидан шу томонлар узунликлари ва улар орасидаги бурчак косинусининг иккиланган кўпайтмасини айириш натижасига тенг (2.2-а чизма):

$$\begin{aligned} a^2&=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,\\ b^2&=a^2+c^2-2ac\cos\beta,\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos\gamma. \end{aligned} \tag{2.6}$$



2.2- чизма.

7. Пифагор теоремаси. Тўғри бурчакли учбурчакда гипотенуза узунлигининг квадрати катетлар узунликлари квадратларининг йиғиндисига тенг (2.2-б чизма):

$$c^2=a^2+b^2. \qquad (2.7)$$

8. Синуслар теоремаси. Учбурчакда томонлар узунликлари улар қаршисидаги мос бурчакларнинг синусларига пропорционал (2.3-чизма):

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Эслатма. Ушбу нисбат учбурчакка ташқи чизилган айлананинг диаметрига тенг:

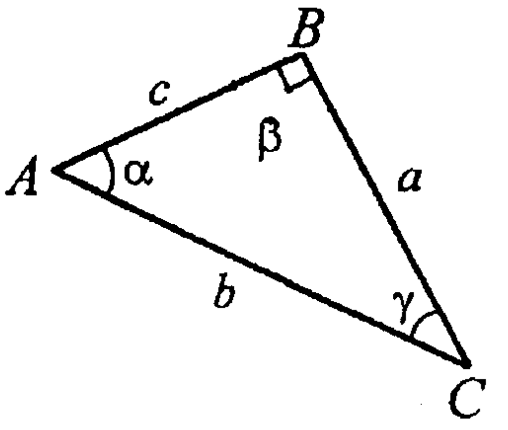
$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R. \qquad (2.9)$$

9. Учбурчакларнинг ўхшашлик аломатлари:

а) бир учбурчакнинг иккита бурчаги иккинчи учбурчакнинг иккита бурчагига мос равишда тенг бўлса, улар ўхшаш бўлади;

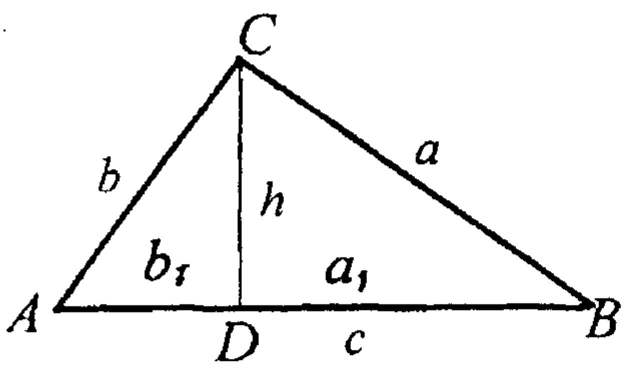
б) бир учбурчакнинг иккита томони узунликлари иккинчи учбурчакнинг иккита томони узунликларига мос равишда пропорционал, улар орасидаги бурчаклар эса тенг бўлса, бу учбурчаклар ўхшаш бўлади;

в) бир учбурчакнинг томонлари узунликлари иккинчи учбурчакнинг томонлари узунликларига, мос равишда, пропорционал бўлса, улар ўхшаш бўлади.



2.3-чизма

10. Ҳар қандай учбурчакка ички айлана чизиш мумкин. Унинг маркази уч-



2.4 -чизма.

бурчак биссектрисаларининг кесишиш нуқтасида бўлади.

11. Ҳар қандай учбурчакка ташқи айлана чизиш мумкин. Унинг маркази учбурчак томонларининг ўрта нуқталаридан томонларга ўтказилган перпендикулярларнинг кесишиш нуқтасида бўлади.

12. Тўғри бурчакли учбурчакда:

а) гипотенузага ўтказилган баландлик гипотенузада ҳосил қилинган кесмаларнинг ўрта пропорционал миқдоридир:

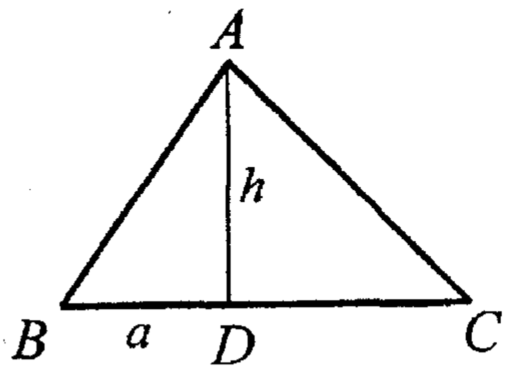
$$h^2 = a_1 \cdot b_1; \tag{2.10}$$

б) ҳар бир катет гипотенуза ва гипотенузадаги проекциясининг ўрта пропорционал миқдори бўлади (2.4-чизма):

$$a^2 = c \cdot a_1 \quad \text{ва} \quad b^2 = c \cdot b_1. \tag{2.11}$$

13. Учбурчакнинг ўрта чизиғи асосга параллел ва унинг ярмига тенг.

14. Учбурчакнинг юзини ҳисоблаш формулалари:



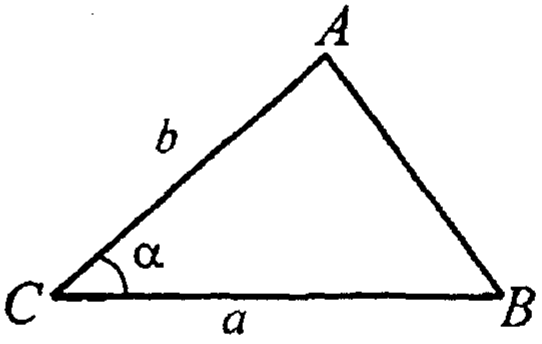
2.5- чизма.

$$S = \frac{ah}{2} \text{ (2.5- чизма);} \tag{2.12}$$

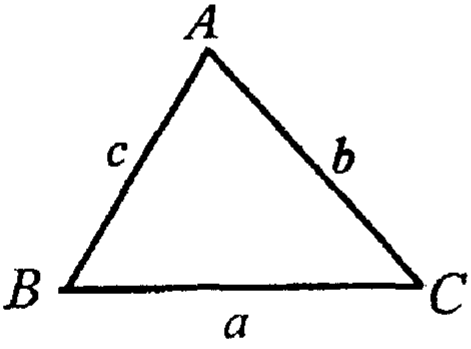
$$S = \frac{ab \sin \alpha}{2} \text{ (2.6- чизма);} \tag{2.13}$$

Герон формуласи:

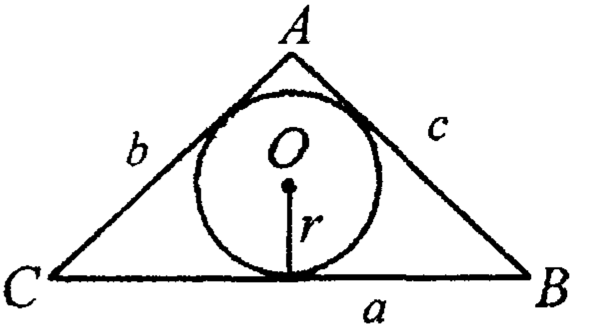
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,, \tag{2.14}$$



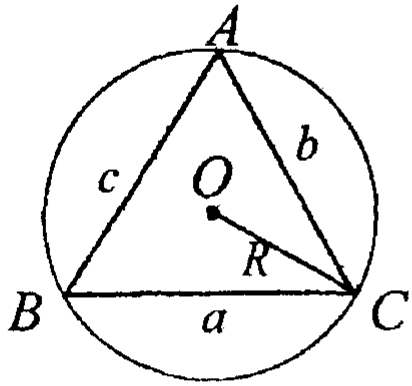
2.6- чизма



2.7- чизма



2.8- чизма.



2.9- чизма.

бунда $p = \frac{a+b+c}{2}$ (2.7- чизма)

$$S=pr, \qquad (2.15)$$

бунда r — ички чизилган айлананинг радиуси (2.8- чизма);

$$S = \frac{abc}{4R}, \qquad (2.16)$$

бунда R — ташқи чизилган айлананинг радиуси. (2.9- чизма).

2.2. Мавзуга доир масалалар

1. a нинг қандай қийматларида узунликлари мос равишда $1+a$, $1-a$ ва 1,5 бўлган кесмалардан учбурчак ясаш мумкин?

А) (0; 1,5]; В) (−0,75; 0,75); С) (−1; 1); Д) (0; 1,5); Е) (−3; −1).

2. Учбурчакнинг иккита томони 0,5 ва 7,9 га тенг. Учинчи томонининг узунлиги бутун сон эканлигини билган ҳолда шу томони топилсин.

А) 7; В) 9; С) 8; Д) 10; Е) 5.

3. Периметри 30 см га тенг бўлган учбурчак биссектрисаси билан иккита учбурчакка ажралган. Бу учбурчакларнинг периметрлари 16 см ва 24 см бўлса, биссектрисанинг узунлиги топилсин.

А) 1; В) 3; С) 7; Д) 4; Е) 5 см.

4. Тенг ёнли учбурчакнинг учидаги бурчаги 94°га тенг. Асосдаги бурчакларнинг биссектрисалари ўтказилган. Бу биссектрисалар орасидаги ўткир бурчак топилсин.

А) 37°; В) 43°; С) 48°; Д) 47°; Е) топиш мумкин эмас.

5. Учбурчакда бурчаклар катталиклари 1:2:3 нисбатда, кичик томони $2\sqrt{3}$ см га тенг бўлса, учбурчакнинг периметри топилсин.

А) $8+3\sqrt{3}$; В) $3(2+\sqrt{3})$; С) $11\sqrt{3}$; Д) $9+4\sqrt{3}$; Е) $6+6\sqrt{3}$ см.

6. Тўғри бурчакли учбурчакда тўғри бурчакнинг биссектрисаси гипотенузани 1:2 нисбатда бўлади. Тўғри бурчак учидан ўтказилган баландлик гипотенузани қандай нисбатда бўлади?

А) 1:4; В) 1:5; С) 1:9; Д) 1:25; Е) 2:1.

7. Тенг ёнли учбурчакнинг учидаги бурчаги асосидаги бурчакдан 30° катта. Учбурчакнинг бурчаклари топилсин.

А) 30°, 30°, 60°; В) 60°, 60°, 90°; С) 40°, 50°, 80°;
Д) 50°, 50°, 80°; Е) 50°, 80°, 80°.

2. Учбурчакнинг иккита томони 0,5 ва 7,9 га тенг. Учинчи томонининг узунлиги бутун сон эканлигини билган ҳолда шу томони топилсин.

А) 7; В) 9; С) 8; Д) 10; Е) 5.

3. Периметри 30 см га тенг бўлган учбурчак биссектрисаси билан иккита учбурчакка ажралган. Бу учбурчакларнинг периметрлари 16 см ва 24 см бўлса, биссектрисанинг узунлиги топилсин.

А) 1; В) 3; С) 7; Д) 4; Е) 5 см.

4. Тенг ёнли учбурчакнинг учидаги бурчаги 94°га тенг. Асосдаги бурчакларнинг биссектрисалари ўтказилган. Бу биссектрисалар орасидаги ўткир бурчак топилсин.

А) 37°; В) 43°; С) 48°; Д) 47°; Е) топиш мумкин эмас.

5. Учбурчакда бурчаклар катталиклари 1:2:3 нисбатда, кичик томони $2\sqrt{3}$ см га тенг бўлса, учбурчакнинг периметри топилсин.

А) $8+3\sqrt{3}$; В) $3(2+\sqrt{3})$; С) $11\sqrt{3}$; Д) $9+4\sqrt{3}$; Е) $6+6\sqrt{3}$ см.

6. Тўғри бурчакли учбурчакда тўғри бурчакнинг биссектрисаси гипотенузани 1:2 нисбатда бўлади. Тўғри бурчак учидан ўтказилган баландлик гипотенузани қандай нисбатда бўлади?

А) 1:4; В) 1:5; С) 1:9; Д) 1:25; Е) 2:1.

7. Тенг ёнли учбурчакнинг учидаги бурчаги асосидаги бурчакдан 30° катта. Учбурчакнинг бурчаклари топилсин.

А) 30°, 30°, 60°; В) 60°, 60°, 90°; С) 40°, 50°, 80°;
Д) 50°, 50°, 80°; Е) 50°, 80°, 80°.

ландлик ўтказилган. Ҳосил қилинган учбурчакларнинг юзлари ҳисоблансин.

А) 10,8 ва 13,5; В) 12,4 ва 15,3; С) 8,64 ва 15,36; Д) 9,12 ва 16,48; Е) 8,4 ва 16,6 см^2.

15. Томонлари 13 см, 14 см, 15 см бўлган учбурчакда энг кичик баландлик топилсин.

А) 11; В) 12; С) 12,2; Д) 11,5; Е) 11,2 см.

16. Тенг ёнли учбурчакда ён томон 5 см га, асосидаги бурчакнинг косинуси 0,6 га тенг. Учбурчакка ички чизилган айлананинг радиуси топилсин.

А) 1; В) 1,5; С) 2; Д) 2,5; Е) 3 см.

17. Учбурчакнинг a, b, c томонлари $a^2=b^2+c^2+\sqrt{3}\,bc$ шартни қаноатлантирса, a томон қаршисидаги бурчак топилсин.

А) 135°; В) 140°; С) 125°; Д) 150°; Е) 120°.

18. Иккита ўхшаш учбурчакнинг юзлари 8 ва 32 см^2 га, периметрларининг йиғиндиси 48 см га тенг бўлса, кичик учбурчакнинг периметри топилсин.

А) 12; В) 16; С) 20; Д) 9,6; Е) топиш мумкин эмас.

19. Тўғри бурчакли учбурчакда катет 7 см га, унинг гипотенузадаги проекцияси эса 1,96 см га тенг. Иккинчи катетнинг узунлиги топилсин.

А) 12; В) 16; С) 24; Д) 15; Е) 26.

20. Тенг ёнли учбурчакнинг баландлиги h, учидаги бурчаги β га тенг бўлса, унинг асоси топилсин.

А) $h\sin\beta$; В) $h\cos\beta$; С) $h\sin\frac{\beta}{2}$; Д) $h\cos\frac{\beta}{2}$; Е) $2h\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

21. Тўғри бурчакли ABC учбурчакда томонлар узунликлари ўсувчи геометрик прогрессияни ташкил қилади. Унинг кичик ўткир бурчаги топилсин.

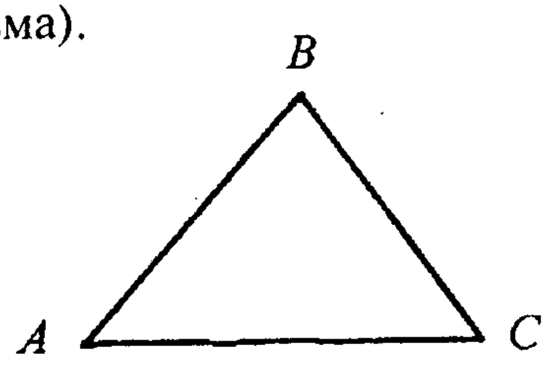
A) 35°; B) 40°; C) $\arcsin\frac{\sqrt{3}+1}{3}$; Д) $\arccos\frac{\sqrt{3}+1}{3}$;
E) $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

22. ABC учбурчакнинг AD медианаси AB ва AC томонлар билан мос равишда 60° ва β бурчаклар ташкил қилади. $AB=\sqrt{3}$ см, $AC=3$ см га тенг бўлса, $\sin\beta$ топилсин.

A) $\frac{1}{3}$; B) $\frac{1}{2}$; C) $\frac{2}{3}$; Д) $\frac{1}{4}$; E) $\frac{3}{4}$.

2.3.Мавзуга доир масалаларнинг ечимлари

1. Берилган. $AB=1+a$, $AC=1-a$, $BC=1,5$. a топилсин (2.3.1- чизма).



2.3.1- чизма.

Ечилиши. Учбурчак тенгсизлигига кўра, учта кесма ёрдамида ясалган учбурчакнинг иккита томони узунликлари йиғиндиси учинчи томони узунлигидан катта бўлиши керак. Шунга асосан,

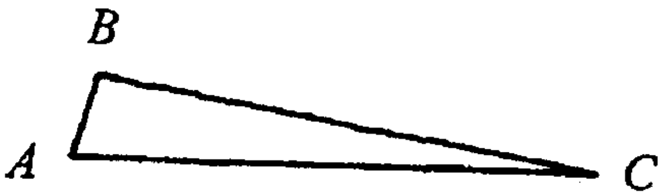
$$\begin{cases} 1+a+1-a>1{,}5; \\ 1+a+1{,}5>1-a; \\ 1-a+1{,}5>1+a; \\ 1-a>0,\ 1+a>0 \end{cases}$$

тенгсизликлар системасини ёзамиз ва уни a га нисбатан ечамиз:

$$\begin{cases} a < 1, \\ a > -1; \\ 0a + 2 > 1{,}5; \\ 2a > -1{,}5; \\ 2a < 1{,}5, \end{cases} \qquad \begin{cases} a < 1, \\ a > -1, \\ a \in R, \\ a > -0{,}75, \\ a < 0{,}75, \end{cases} \qquad -0{,}75 < a < 0{,}75.$$

Жавоби: В).

2. Берилган. ΔABC, $AB=0{,}5$, $AC=7{,}9$, $BC \in N$. BC топилсин (2.3.2- чизма).



2.3.2- чизма

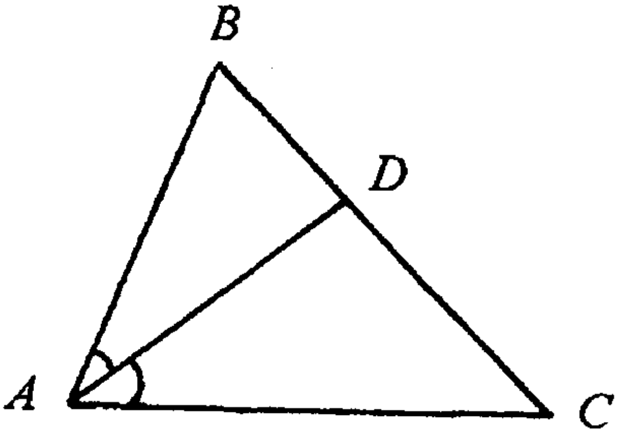
Ечилиши. Учбурчак тенгсизлигига кўра ушбу системани ёзамиз:

$$\begin{cases} BC + 0{,}5 > 7{,}9; \\ BC + 7{,}9 > 0{,}5; \\ 7{,}9 + 0{,}5 > BC \end{cases} \qquad \begin{cases} BC > 7{,}4; \\ BC > -7{,}4; \\ BC > 8{,}4 \end{cases} \qquad 7{,}4 < BC < 8{,}4.$$

Шартга кўра BC кесманинг узунлиги бутун сондан иборат. Шунинг учун $BC=8$.

Жавоби: С).

3. Берилган. ΔABC, $P_{ABC}=30$ см, AD биссектриса, $P_{ABD}=16$ см, $P_{ADC}=$ $=24$ см.



2.3.3-чизма

AD биссектриса топилсин (2.3.3-чизма).

Ечилиши. Учбурчакнинг периметри таърифидан фойдаланиб,

$$\begin{cases} AB + BC + AC = 30, \\ AB + BD + AD = 16, \\ AC + DC + AD = 24 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ёзамиз. Сўнгра, охирги иккита тенгламани ҳадма-ҳад қўшамиз:

$AB+BD+AD+AC+DC+AD=16+24$ ёки $AB+AC+$ $+(BD+DC)+2 \cdot AD=40$.

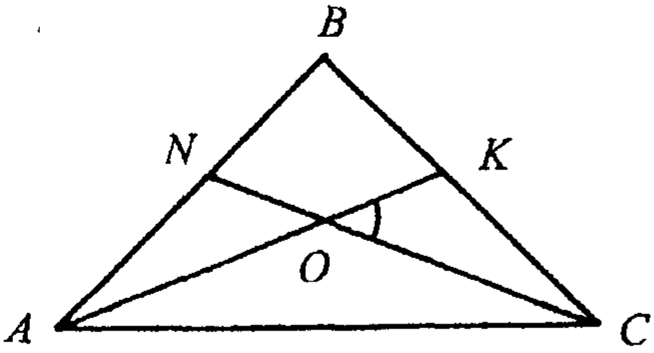
$BD+DC=BC$ ёки $AB+BC+AC=30$ бўлгани учун $30+2AD=40$, $2AD=40-30$, $2AD=10$ ва $AD=5$ см ни ҳосил қиламиз.

Жавоби: Е).

4. Б е р и л г а н. ΔABC, $AB=BC$, AK, CN биссектрисалар, $AK \cup CN$, $\angle KOC<90°$, $\angle ABC=94°$.

$\angle KOC$ т о п и л с и н (2.3.4-чизма).

Е ч и л и ш и. 3-хоссага мувофиқ, учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 180°га тенг. 2-хоссага мувофиқ, тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги бурчаклари ўзаро тенг. Шунинг учун, $\angle BAC = \frac{180°-94°}{2} = \frac{86°}{2} = 43°$. AK ва CN биссектрисалар, демак, $\angle KAC=\angle NCA=\frac{43°}{2} \cdot$ ΔAOC да AK ва CN биссектрисалар орасидаги бурчак $\angle AOC>90°$, чунки $\angle OAC+\angle OCA<90°$. $\angle KOC$ бурчак ΔAOC учун ташқи бурчак бўлгани сабабли, унинг ўлчови унга қўшни бўлмаган $\angle AOC$ ва



2.3.4-чизма

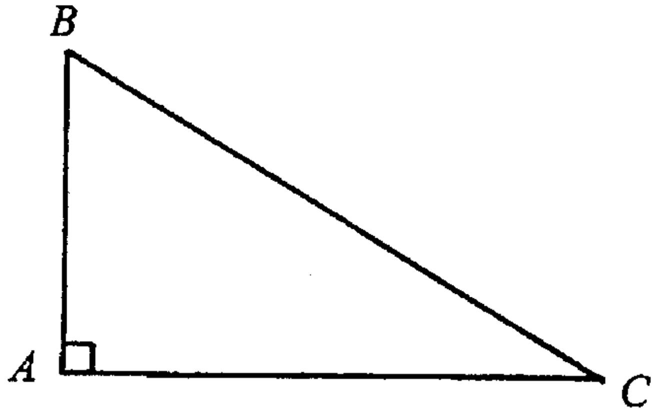
$\angle OCA$ бурчаклар ўлчовларининг йиғиндисига тенг, яъни

$$\angle KOC = \angle OAC + \angle OCA = 2\angle OAC = 2 \cdot \frac{43^\circ}{2} = 43^\circ.$$

Жавоби: B).

5. Берилган. ΔABC, $\angle A : \angle B : \angle C = 1:2:3$, $BC = 2\sqrt{3}$ см.

P_{ABC} периметр топилсин (2.3.5-чизма).



2.3.5-чизма.

Ечилиши. $\angle A = x$ бўлсин. У ҳолда $\angle B = 2x$, $\angle C = 3x$. Учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 180°га тенг, яъни $x + 2x + 3x = 180^\circ$ бўлганлигидан $6x = 180^\circ$, $x = 30^\circ$. Демак, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 90^\circ$.

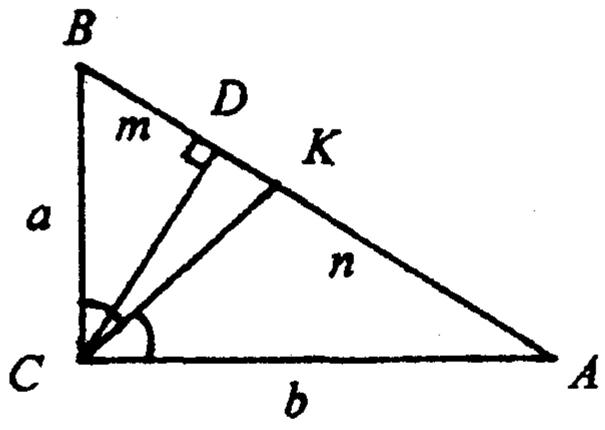
Учбурчакда кичик $\angle A$ қаршисида кичик томон ётиши маълум, шунинг учун $BC = 2\sqrt{3}$ см. Тўғри бурчакли учбурчакда 30° ли бурчак қаршисидаги томон гипотенузанинг ярмига тенг. Шунинг учун гипотенуза $AB = 2BC = 4\sqrt{3}$ см. Иккинчи катетни Пифагор теоремаси ёрдамида топамиз: $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{16 \cdot 3 - 4 \cdot 3} = 6$ см. У ҳолда периметр: $P_{ABC} = 6 + 2\sqrt{3} + 4 = 6 + 6\sqrt{3}$ см.

Жавоби: E).

6. Берилган. ΔABC, $BK : KA = 1:2$, CK биссектриса, $\angle ACK = \angle BCK = 45^\circ$, CD баландлик, $CD \perp AB$.

$AD : DB$ топилсин (2.3.6-чизма).

Ечилиши. $BK=m$, $AK=n$, $BC=a$, $AC=b$, гипотенуза $AB=c$ белгилашларни киритамиз. У ҳолда $m+n=c$, $x+y=c$. Шартга кўра $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$ ва $n=2m$.



2.3.6- чизма.

Учбурчакнинг биссектрисаси қаршисидаги томонни қолган икки томонга пропорционал кесмаларга ажратади. Демак, $m:n=a:b=1:2$ ва $b=2a$. Пифагор теоремасидан c гипотенузани топамиз: $c^2=a^2+b^2=a^2+4a^2=5a^2$ ва $c=a\sqrt{5}$, $c=m+n=m+2m=3m$. У ҳолда $m=c:3=a\sqrt{5}:3$, $n==2a\sqrt{5}:3$.

ΔABC нинг юзини ҳисоблаймиз. Биринчидан, $S=\frac{1}{2}a\cdot b$ ёки $S=\frac{1}{2}a\cdot 2a=a^2$. Иккинчи томондан, $S=\frac{1}{2}c\cdot h$. Агар $CD=h$ бўлса, $c=a\sqrt{5}$ ни келтириб қўйиб, ҳосил қилинган иккита ифодани солиштирамиз: $a^2=\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{5}\cdot h$. У ҳолда баландлик $h=2a:\sqrt{5}$ бўлади. Пифагор теоремаси ёрдамида ΔBCD дан $BD=x$ кесмани топамиз:

$$x^2=a^2-h^2=a^2-\frac{4}{5}\cdot a^2=\frac{(5-4)}{5}a^2=\frac{1}{5}a^2, x=\frac{a}{\sqrt{5}}.$$

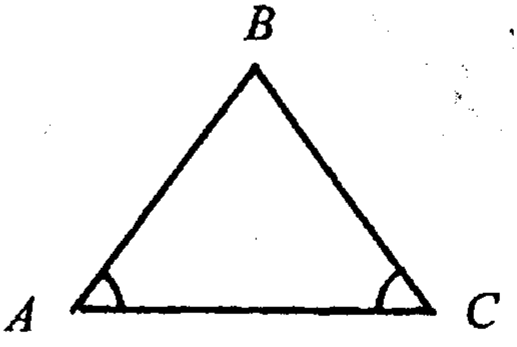
У ҳолда $y=c-x=a\sqrt{5}-\frac{a}{\sqrt{5}}=4\frac{a}{\sqrt{5}}$ ва

$$\frac{x}{y}=\frac{a}{\sqrt{5}}:\frac{4a}{\sqrt{5}}=\frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot 4a}=\frac{1}{4}.$$

Жавоби: A).

7. Б е р и л г а н. ΔABC, $AB=BC$, $\angle ABC=\angle BAC+30°$.

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ т о п и л с и н (2.3.7- чизма).



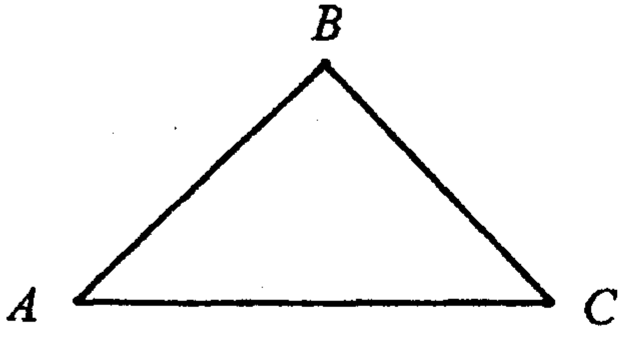
2.3.7- чизма.

Е ч и л и ш и. Тенг ёнли учбурчакда 2-хоссага асосан асосидаги бурчаклар ўзаро тенг, демак, $\angle A=\angle C$, учбурчакда ички бурчаклар йиғиндиси 180°га тенг: $2\angle A+\angle B=180°$. Шартга кўра $\angle B=\angle A+30°$. У ҳолда $2\angle A+\angle B=180°$, $3\angle A=180°-$ $-30°$, $3\angle A=150°$, $\angle A=50°$, $\angle C=\angle A=50°$, $\angle B=50°+30°=80°$.

Жавоби: D).

8. Б е р и л г а н. ΔABC, $AB=BC$, $P_{ABC}=42$см, $AC=AB+6$ см.

AB, AC т о п и л с и н (2.3.8- чизима).



2.3.8-чизма

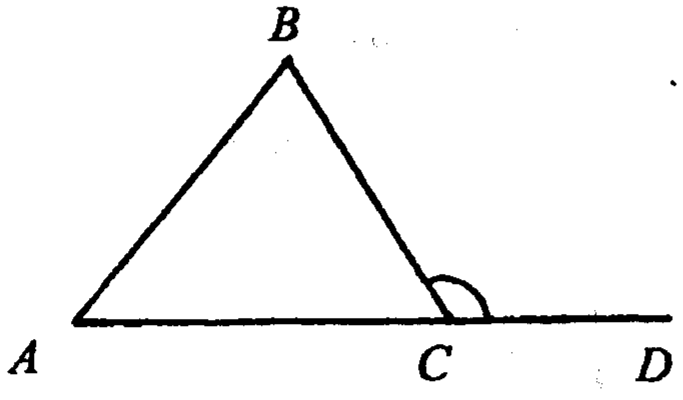
Е ч и л и ш и. Периметрнинг таърифига кўра:

$AB+BC+AC=42$,
$2AB+AB+6=42$,
$3AB=42-6$, $AB=12$.

Демак, $AB=BC=12$ см ва $AC=12+6=18$ см.

Жавоби: В).

9. Берилган. ΔABC, $\angle BCD=120°$, $\angle A:\angle B=5:7$. $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ топилсин (2.3.9-чизма).


2.3.9-чизма.

Ечилиши. Ички $\angle ACB$ ва ташқи $\angle BCD$ қўшни бурчаклар бўлгани учун, уларнинг йиғиндиси 180°га тенг. Шунинг учун $\angle ACB=180°-\angle BCD=180°-120°=60°$.

Энди $\begin{cases}\angle A+\angle B=120°,\\ \angle A:\angle B=5:7\end{cases}$ системани ечамиз:

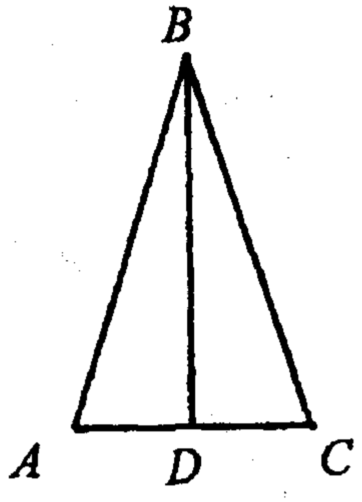
$$\begin{cases}\angle A=(5:7)\angle B,\\ (5:7)\angle B+\angle B=120°\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\angle A=(5:7)\angle B,\\ 12\angle B=7\cdot 120°\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\angle A=(5:7)\angle B,\\ \angle B=70°\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\angle A=50°,\\ \angle B=70°.\end{cases}$$

Жавоби: С).

10. Берилган. ΔABC, $AB=BC$, $BD\perp AC$, $BD=15$ см, $AB=2\cdot AC$.

AB топилсин (2.3.10- чизма).


2.3.10- чизма.

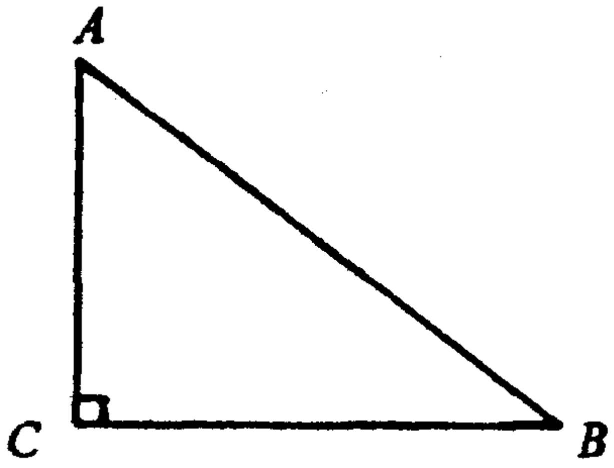
Ечилиши. BD баландлик бўлгани учун ΔABD тўғри бурчакли ва Пифагор теоремасидан фойдаланиш мумкин. $AD=x$ деб белгилаймиз. У ҳолда $AC=2AD=2x$, $AB=4x$. ΔABD дан $AB^2=AD^2+BD^2$,

$(4x)^2=x^2+15^2$, $16x^2-x^2=15^2$, $15x^2=15^2$, $x^2=15$ ва $x=\sqrt{15}$.

Демак, учбурчакнинг ён томони $AB=4\sqrt{15}$ см.

Жавоби: В).

11. Берилган. ΔABC, $\angle C=90°$, $AC:BC=3:4$, $AB=15$ см.



2.3.11- чизма.

BC топилсин (2.3.11- чизма).

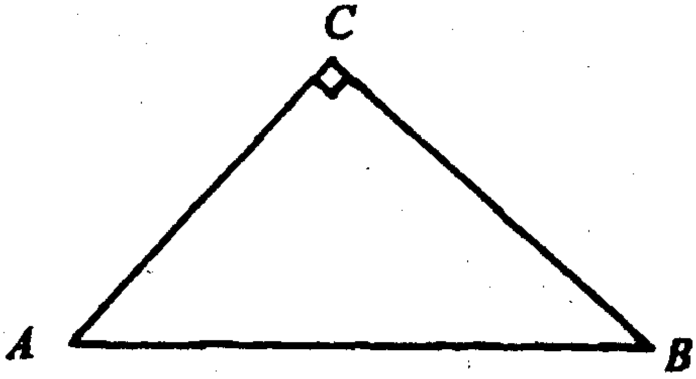
Ечилиши. Пифагор теоремасига кўра, қуйидаги системани ёзамиз:

$$\begin{cases} \dfrac{AC}{BC}=\dfrac{3}{4}, \\ AC^2+BC^2=AB^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} AC=\dfrac{3}{4}\cdot BC, \\ \dfrac{9}{16}BC^2+BC^2=15^2, \end{cases} \quad \begin{cases} AC=\dfrac{3}{4}\cdot BC, \\ 25BC^2=15^2\cdot 16, \end{cases} \quad BC=12\,\text{см}.$$

Жавоби: В).

12. Берилган. ΔABC, $\angle C=90°$, $AB=20$ см, $AC+BC=28$ см.



2.3.12- чизма.

$S_{\Delta ABC}$ ҳисоблансин (2.3.12- чизма).

Ечилиши. Катетларни $AC=b$, $BC=a$, гипотенузани $AB=c$ деб белгилаймиз. Пифагор теоремасидан фойдаланиб, қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

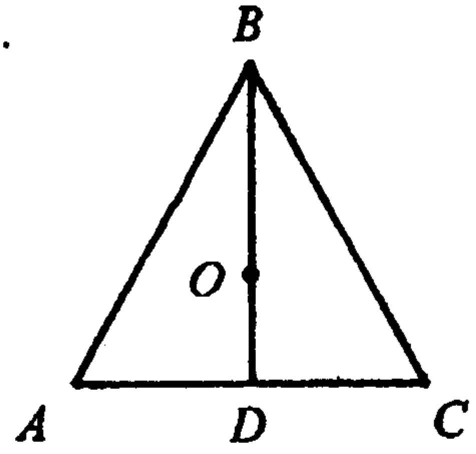
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 20^2, \\ a + b = 28, \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + b^2 = 400, \\ a + b = 28. \end{cases}$$

Лекин (2.9) формулага мувофиқ, учбурчакнинг юзи $S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b$ га тенг. Демак, агар $a\cdot b$ кўпайтма топилса, масала ечилади. Иккинчи тенгламани квадратга кўтарамиз: $(a+b)^2=28^2$, $a^2+2ab+b^2=784$, $2ab=784-(a^2+b^2)=$ $=784-400=384$, $a\cdot b=192$. Демак учбурчакнинг юзи $S=\frac{1}{2}\cdot 192=96$ см^2.

Жавоби: А).

13. Берилган. ΔABC — мунтазам, $BD\perp AC$, $BD=h=6$ см, (O, r) — ички чизилган айлана.

r топилсин (2.3.13-чизма).



2.3.13- чизма.

Ечилиши. Учбурчак мунтазам бўлгани учун, $BD=h$ баландлик медиана ҳам бўлади. Шунинг учун $BO:OD=2:1$, $OD=\frac{1}{3}BD=\frac{h}{3}$. Иккинчи томондан, мунтазам учбурчакда O нуқта ҳам ички, ҳам ташқи чизилган айланаларнинг марказидир. Демак, $OD=r=\frac{h}{3}=\frac{6}{3}=2$ см.

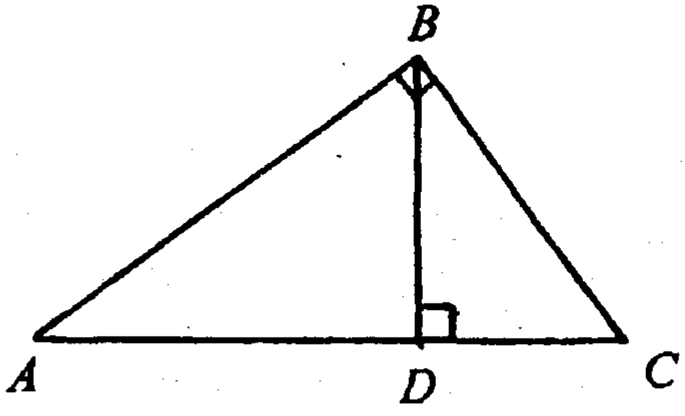
Жавоби: Е).

14. Берилган. ΔABC, $\angle C=90°$, $AC=6$ см, $BC=8$ см, $CD\perp AB$.

$S_{\Delta ACD}$, $S_{\Delta BCD}$ ҳисоблансин (2.3.14- чизма).

Ечилиши. $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} =$

$= \sqrt{36 + 64} = 10$ см.



2.3.14- чизма.

Тўғри бурчакли учбурчак учун 12-хоссадан фойдаланамиз. Қуйидаги системани ёзамиз:

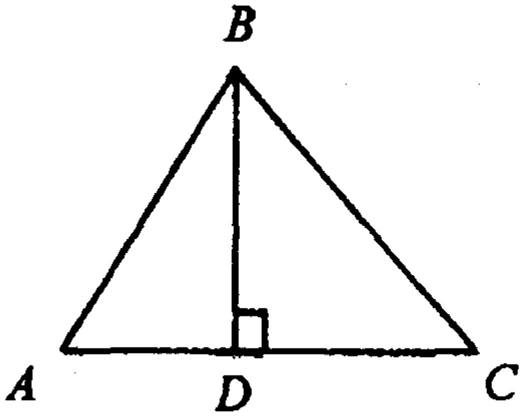
$$\begin{cases} AC^2 = AB \cdot BD, \\ BC^2 = AB \cdot BD, \\ CD^2 = AD \cdot DB, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6^2 = 10AD, \\ 8^2 = 10 \cdot BD, \\ CD^2 = AD \cdot DB \end{cases} \begin{cases} AD = 3{,}6, \\ BD = 6{,}4, \\ CD = \sqrt{3{,}6 \cdot 6{,}4} = 4{,}8. \end{cases}$$

У ҳолда $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 3{,}6 \cdot 4{,}8 = 8{,}64$ см^2.

$S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} BD \cdot CD = 15{,}36$ см^2.

Жавоби: С).



2.3.15- чизма.

15. Берилган. ΔABC, $BD \perp AC$, $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см.

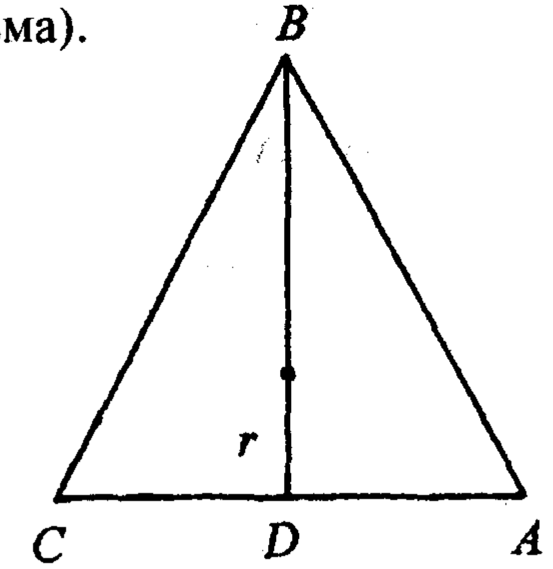
BD топилсин (2.3.15-чизма).

Ечилиши. Учбурчакнинг учта томони ҳам маълум бўлгани учун Герон формуласи (2.11) ёрдамида:

$p=\frac{13+14+15}{2}=21$, $S=\sqrt{21\cdot(21-13)(21-14)(21-15)}=$ $=7\cdot4\cdot3=84$ см². Иккинчи томондан, учбурчакнинг юзи (2.9) формула орқали ҳисобланади: $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD$. Демак, BD баландлик: $BD=\frac{2S}{AC}=\frac{2\cdot84}{15}=\frac{56}{5}=11{,}2$ см.

16. Б е р и л г а н. ΔABC — тенг ёнли, $AB=BC=5$ см, $\cos\angle A=0{,}6$, $(O,\ r)$ — ички чизилган айлана.

r т о п и л с и н (2.3.16-чизма).



2.3.16- чизма.

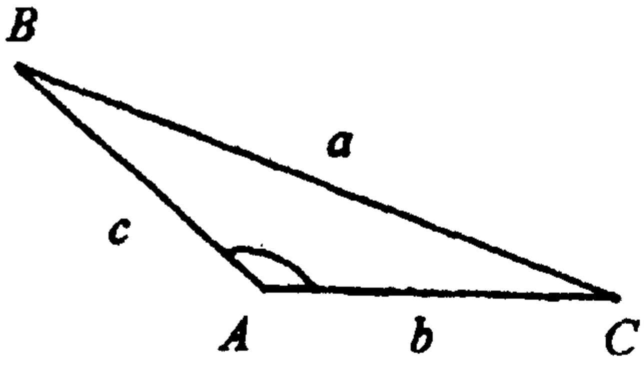
Е ч и л и ш и. ΔBDA тўғри бурчакли бўлганлиги учун $\cos\angle A=\frac{AD}{AB}$, бу ердан, $AD=AB\cdot\cos\angle A=5\cdot0{,}6$. 4, 10-хоссалардан фойдалансак, $\angle OAD=\frac{\angle A}{2}$. У ҳолда тўғри бурчакли ΔOAD дан $r=$ $=DO=AD\cdot\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2}$, $r=3\cdot\operatorname{tg}\frac{\angle A}{2}$.

Ярим аргументнинг тригонометрик функциялари формулаларидан, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{1-0{,}6}{1+0{,}6}}=\sqrt{\frac{0{,}4}{1{,}6}}=\frac{1}{2}$ эканлигини оламиз ва $r=3\cdot0{,}5=1{,}5$ см.

17. Б е р и л г а н. ΔABC, $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, $a^2=b^2+c^2+\sqrt{3}\,bc$.

$\angle A=\alpha$ т о п и л с и н (2.3.17-чизма).

Е ч и л и ш и. Учбурчакнинг томонлари маълум бўлгани сабабли, бурчакни топиш учун косинуслар теоремасидан (6-хосса) фойдаланамиз:



2.3.17- чизма.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

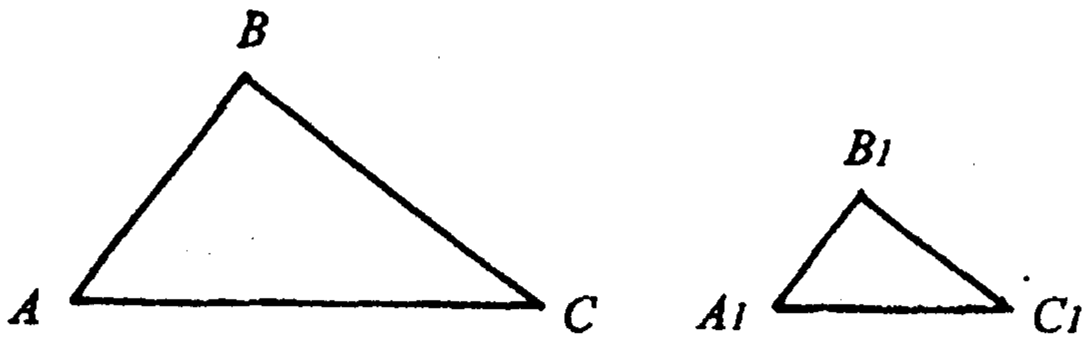
Масала шартида берилган ва бу тенгликларни солиштирамиз. Чап томонлари тенг бўлгани учун уларнинг ўнг томонларини тенглаштирамиз:

$$b^2+c^2-2bc\cos\alpha=b^2+c^2-\sqrt{3}\,bc,\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \alpha=150°.$$

Жавоби: Д).

18. Берилган. $\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$, $S=32$ см^2, $S_1=8$ см^2, $P+P_1=48$ см.

P_1 топилсин (2.3.18-чизма).



2.3.18-чизма.

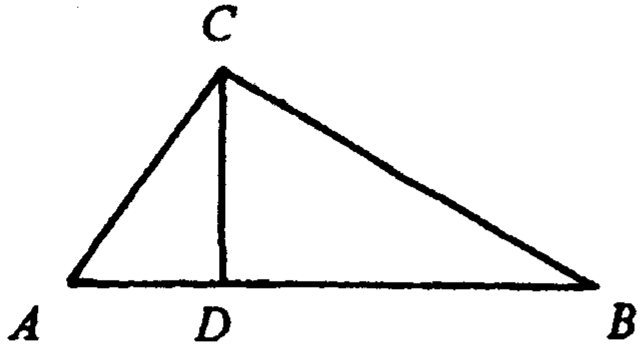
Ечилиши. Ўхшаш учбурчаклар юзларининг нисбати бу учбурчаклар мос периметрлари квадратларининг нисбатига тенглиги бизга маълум, яъни $\frac{S}{S_1}=\left(\frac{P}{P_1}\right)^2$. Берилган $P+P_1=48$ тенгликдан $P_1=48-P$ бўлади. У ҳолда $\frac{32}{8}=\left(\frac{P}{48-P}\right)^2, \left(\frac{P}{48-P}\right)^2=4$ ёки

$\frac{P}{48-P} = 2$. Демак, $P=96-2P$. Бу тенгламани ечамиз: $3P=96$, $P=32$ ва $P_1=48-32=16$ см.

Жавоби: B).

19. Берилган. ΔABC, $\angle C=90°$, $AC=7$ см, $AD=1{,}96$ см, $CD \perp AB$.

BC топилсин (2.3.19- чизма).



2.3.19- чизма.

Ечилиши. Катетнинг хоссаларига кўра, $AC^2=AD \cdot AB$ ёки $7^2=$ $=1{,}96AB$ ва гипотенуза

$$AB = \frac{49}{1{,}96} = \frac{4900}{196} = \frac{100}{4} = 25 \text{ см.}$$

Пифагор теоремасидан (6-хосса) фойдаланиб, иккинчи катетни топамиз:

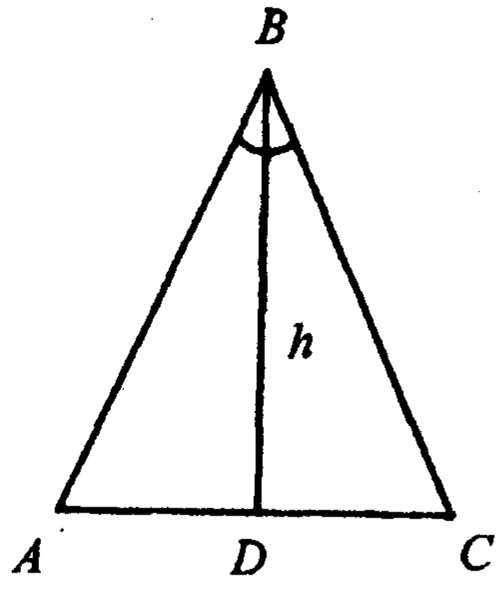
$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{25^2 - 7^2}$$

$$BC = \sqrt{18 \cdot 32} = \sqrt{16 \cdot 36} = \sqrt{576} = 24 \text{ см.}$$

Жавоби: C).

20. Берилган. ΔABC, $AB=BC$, $\angle ABC=\beta$, $AD=h \perp BC$.

AC топилсин (2.3.20- чизма).



2.3.20- чизма.

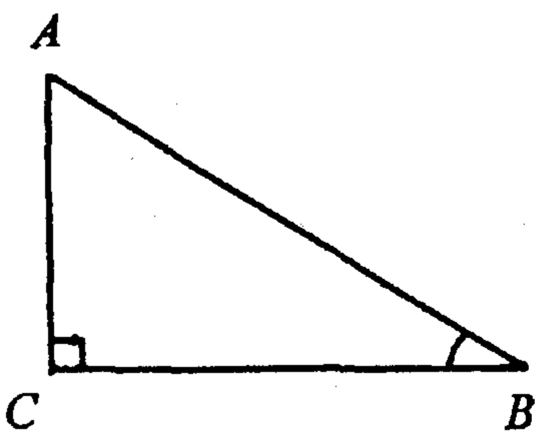
Ечилиши. 2-хоссадан фойдаланиб, учбурчакнинг асосидаги бурчакнинг катталигини топамиз: $\angle BAC=$

$=\angle BCA=\frac{180^\circ-\beta}{2}=90^\circ-\frac{\beta}{2}$. Тўғри бурчакли ΔABDдан AD кесмани топамиз: $\frac{AD}{BD}=\mathrm{ctg}\left(90^\circ-\frac{\beta}{2}\right)$, $AD=$ $=BD\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}=h\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$. Демак, $AC=2AD=2h\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$.

Жавоби: Е).

21. Берилган. ΔABC, $\angle C=90^\circ$, AC, BC, AB томонлар ўсувчи геометрик прогрессия ҳосил қилади.

Кичик $\angle B$ топилсин (2.3.21- чизма).



2.3.21- чизма.

Ечилиши. $AC=b$ бўлсин. Геометрик прогрессиянинг махражи q бўлса, $BC=b\cdot q$, $AB=b\cdot q^2$. 8-хоссага асосан: $AB^2=$ $=AC^2+BC^2$, $(bq^2)^2=b^2+(bq)^2$, $b^2q^4=b^2(1+q^2)$, $q^4=1+q^2$, q^4- $-q^2-1=0$. Бу биквадрат тенгламани ечамиз: $D=1-$ $4\cdot 1(-1)=5$, $q^2=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$, $q^2>0$. Шунинг учун $q^2=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$. Тўғри бурчакли учбурчакда катта катет қаршисида катта ўткир бурчак ётади. Кичик ўткир B қаршисида $AC=b$ томон ётади. У ҳолда $\angle B$ учун

$\sin\angle B=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{bq^2}=\frac{1}{q^2}$ ёки $\sin\angle B=\frac{2}{(1+\sqrt{5})}$ деб ёзиш

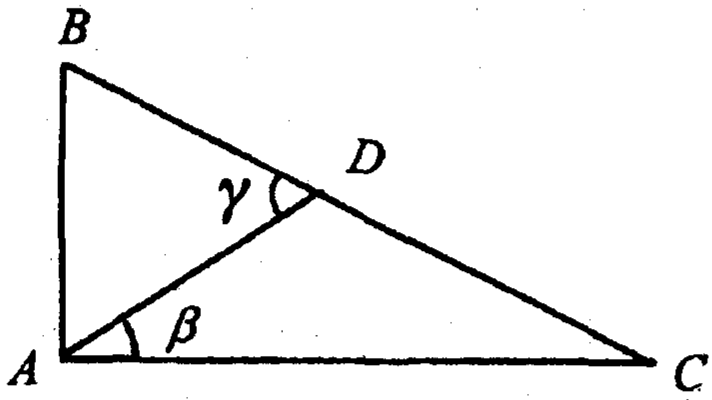
мумкин. Бу ердан $\sin\angle B=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2-1^2}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\angle B=\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Жавоби: Е).

22. Берилган. ΔABC, $AB=3$ см, $AC=3$ см, AD медиана, $\angle BAD=60°$, $\angle CAD=\beta$.

$\sin\beta$ топилсин (2.3.22- чизма).

Ечилиши. AD медиана бўлгани учун $BD=DC=x$ деб белгилаймиз. Синуслар теоремасидан (8-хосса) икки марта фойдаланамиз: ΔABDдан $\frac{x}{\sin 60°}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\gamma}$ ва бу



2.3.22- чизма.

ердан $x=\frac{\sqrt{3}\sin 60°}{\sin\gamma}=\frac{3}{2\sin\gamma}\cdot$ ΔACDдан $\frac{x}{\sin\beta}=\frac{3}{\sin(180°-\gamma)}$

ва $x=\frac{3\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot$ Бу муносабатларнинг чап томонлари тенг бўлганлигидан уларнинг ўнг томонлари ҳам тенгдир, яъни $\frac{3}{2\sin\gamma}=\frac{3\sin\beta}{\sin\gamma}$ ва $\sin\beta=\frac{1}{2}$.

Жавоби: В).

2.3. Мустақил ечиш учун масалалар

1. ΔABCда BD медиана AC томоннинг ярмига тенг. Учбурчакнинг B бурчаги топилсин.

А) 90°; В) 75°; С) 105°; Д) 70°; Е) 45°.

2. Учбурчакнинг иккита бурчаги мос равишда 62° ва 74°га тенг. Учбурчакнинг бу бурчакларидан ўтказилган баландликлар орасидаги ўтмас бурчак топилсин.

А) 172°; В) 126°; С) 110°; Д) 104°; Е) 136°.

3. Учбурчакда бурчаклар катталиклари 1:2:3 каби нисбатда. Катта томоннинг узунлиги 12 см га тенг бўлса, кичик томон узунлиги топилсин.

А) 5; В) 10; С) 7; Д) 6; Е) 4 см.

4. Тўғри бурчакли учбурчакда гипотенуза ва кичик катетнинг йиғиндиси 27 см га тенг. Агар катта катетнинг узунлиги $9\sqrt{3}$ см бўлса, гипотенузанинг узунлиги топилсин.

А) 19; В) 18; С) 20; Д) 15; Е) 16 см.

5. Тенг ёнли учбурчакнинг периметри 25 см, икки томонининг айирмаси 4 см ва ташқи бурчакларидан биттаси ўткир бурчак. Учбурчакнинг асоси топилсин.

А) 16; В) 17; С) 11; Д) 13; Е) 12 см.

6. Учбурчакнинг C тўғри бурчаги учидан AB гипотенузага CD баландлик туширилган. Агар $\angle A=30°$ бўлса, гипотенузада ҳосил қилинган кесмаларнинг $BD{:}AD$ нисбати топилсин.

А) $\frac{1}{3}$; В) $\frac{2}{5}$; С) $\frac{3}{5}$; Д) $\frac{3}{4}$; Е) $\frac{2}{3}$.

7. Тенг ёнли учбурчакнинг периметри $2p$, асосидаги бурчаги α га тенг. Учбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{p^2\sin 2\alpha}{1+\sin\alpha}$; В) $\frac{p^2\sin\alpha\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}$; С) $p^2\cos 2\alpha$;

Д) $(1+p^2)\sin\alpha$; Е) $\frac{p^2\sin 2\alpha}{1+\sin\alpha}$.

8. Тўғри бурчакли учбурчакнинг юзи 60 дм^2, периметри 40 дм га тенг. Учбурчакнинг катетлари узунликлари топилсин.

А) 7 ва 11; В) 4 ва 12; С) 8 ва 15; Д) 7 ва 13; Е) 9 дм ва 12 дм.

9. Тўғри бурчакли учбурчакнинг баландлиги гипотенузани узунликлари 18 ва 32 см га тенг бўлган кесмаларга ажратади. Учбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

A) 9; B) 10; C) 5; Д) 8; E) 6 $дм^2$.

10. Учбурчакнинг асосига туширилган баландлиги h га тенг. Учбурчакнинг асосига параллел кесма учбурчакнинг юзини тенг иккига бўлади. Учбурчакнинг учидан шу кесмагача бўлган масофа топилсин.

A) $2h$; B) $h\sqrt{2}$; C) $\frac{h\sqrt{3}}{2}$; Д) $\frac{h\sqrt{2}}{2}$; E) $\frac{h}{2}$.

11. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони 13 см, ён томонига ўтказилган баландлик 5 см га тенг. Учбурчак асосининг узунлиги топилсин.

A) 6; B) $\sqrt{26}$; C) 5; Д) $\sqrt{19}$; E) $\sqrt{17}$ см.

12. Агар тенг ёнли учбурчакнинг периметри 32 дм, ўрта чизиғи 6 дм га тенг бўлса, унинг томонлари узунликлари топилсин.

A) 13, 13 ва 7; B) 9, 9 ва 14; C) 10, 10 ва 12;
Д) 12, 12 ва 8; E) 10 дм, 11 дм ва 11 дм.

13. Тўғри бурчакли учбурчакда катетлар 7 см ва 24 см га тенг. Тўғри бурчакнинг биссектрисаси ўтказилган. Бу биссектриса гипотенузани қандай узунликдаги кесмаларга ажратади?

A) $14\frac{7}{12}$ ва $9\frac{5}{12}$; B) 13 ва 12; C) 17 ва 7.

Д) $6\frac{1}{3}$ ва $18\frac{2}{3}$; E) $5\frac{20}{31}$ ва $19\frac{11}{31}$ см.

14. Учбурчакнинг периметри 4,5 дм га тенг, биссектриса эса қарши томонни узунликлари 6 ва 9 см га тенг бўлган кесмаларга ажратади. Учбурчакнинг томонлари топилсин.

A) 12, 15, 18; B) 17, 11, 18; C) 14, 15, 16;
Д) 18, 17, 10; E) 12 см, 16 см, 17 см.

15. Ўткир бурчакли учбурчакда иккита томоннинг айирмаси 2 см га, бу томонларнинг учинчи томондаги проекциялари 9 см ва 5 см га тенг. Учбурчак томонлари узунликлари топилсин.

A) 12, 14, 20; B) 11, 14, 16; C) 14, 13, 17;
Д) 13, 14, 15; E) 13 см, 16 см, 19 см.

16. Учбурчак томонлари узунликлари берилган: 7 см, 11 см, 12 см. Унинг энг катта медианаси топилсин.

A) $\frac{37\sqrt{3}}{2}$; B) $\frac{1}{2}\sqrt{481}$; C) $\frac{21}{2}$; Д) $\frac{3\sqrt{174}}{2}$; E) $\frac{14\sqrt{2}}{3}$ см.

17. Тенг ёнли ΔABC да $AB=BC=12$. BD баландликнинг ўртасидан $MP \| BC$ кесма ўтказилган. MP кесманинг узунлиги топилсин.

A) 7; B) 6; C) 4; Д) 10; E) 9.

18. Учбурчакнинг асоси 60, баландлиги 12, асосга туширилган медианаси 13 га тенг. Учбурчакнинг катта ён томони топилсин.

A) 37; B) 35; C) 32; Д) 42; E) 45.

19. ΔABCда BD биссектриса ўтказилган. Агар $AB=6$ см, $BC=8$ см ва ABC учбурчакнинг юзи 12 см^2 га тенг бўлса, ΔABD ва ΔCBD юзлари ҳисоблансин.

A) $\frac{28}{11}$ ва $\frac{104}{11}$; B) 8 ва 4; C) $\frac{36}{7}$ ва $\frac{48}{7}$;

Д) $\frac{29}{7}$ ва $\frac{55}{71}$; E) $\frac{31}{7}$ ва $\frac{53}{7}$ см^2.

20. ABC учбурчакнинг a, b, с томонлари $a^2=b^2+c^2+$ $+\sqrt{2}\cdot b\cdot c$ муносабатни қаноатлантирса, a томон қаршисидаги бурчак топилсин.

A) 60°; B) 135°; C) 105°; Д) 75°; E) 90°.

21. Учбурчакнинг томонлари 8 см, 15 см ва 17 см га тенг. Катта томон қаршисидаги бурчак топилсин.

A) 45°; B) 60°; C) 75°; Д) 90°; E) 120°.

22. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси a, асосидаги бурчаги 75° бўлса, унинг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{a^2(2+\sqrt{3})}{4}$; B) $\frac{a^2(1+\sqrt{2})}{3}$; C) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;
Д) $\frac{a^2(\sqrt{3}+1)}{4}$; E) $\frac{a^2(\sqrt{5}+1)}{2}$.

23. ΔABCнинг томонлари узунликлари 13 см, 14 см ва 15 см га тенг. Учбурчакнинг энг катта ички бурчаги топилсин.

A) arctg 2; B) arcsin $\frac{2}{3}$; C) arccos $\frac{5}{12}$; Д) arcsin $\frac{1}{5}$; E) arccos $\frac{5}{13}$.

24. ΔABCда AB=13 см, AC=14 см, BC=15 см. Унинг B учидан ўтказилган баландликнинг узунлиги топилсин.

A) 14; B) 15; C) 11; Д) 10; E) 12.

25. ΔABCда AB=13 см, AC=14 см, BC=15 см. Унинг A учидан ўтказилган медиананинг узунлиги топилсин.

A) $\frac{\sqrt{374}}{2}$; B) $\frac{\sqrt{505}}{2}$; C) $\frac{\sqrt{481}}{2}$; Д) 13; E) $\frac{\sqrt{299}}{2}$ см.

26. Агар учбурчакнинг асоси a, унга ёпишган бурчаклари 30° ва 45° бўлса, унинг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$; B) $\frac{a^2(\sqrt{3}+2)}{2}$; C) $\frac{a^2(\sqrt{2}+2)}{4}$;

Д) $\frac{1}{4}a^2(\sqrt{3}-1)$; E) $\frac{a^2(\sqrt{3}+1)}{2}$.

27. Тўғри бурчакли учбурчакда катетларнинг нисбати 3:2 каби, баландлик эса гипотенузани шундай иккита кесмага ажратадики, улардан бирининг узунлиги иккинчисидан 2 м катта. Гипотенузанинг узунлиги топилсин.

A) 3,8; B) 5,1; C) 6,4; Д) 4,6; E) 5,2 м.

28. ABC учбурчак берилган. Унинг медианаларидан $\Delta A_1B_1C_1$ ясалган. ΔABC ва $\Delta A_1B_1C_1$ юзларининг нисбати топилсин.

A) 4:3; B) 2:3; C) 3:1; Д) 5:7; E) 3:5.

29. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари b ва c га тенг. Тўғри бурчак биссектрисасининг узунлиги топилсин.

A) $bc\sqrt{2}$; B) $\frac{(b+c)\sqrt{2}}{bc}$; C) $\frac{bc\sqrt{2}}{b+c}$; Д) $\frac{c\sqrt{2}}{b+c}$; E) $\frac{b\sqrt{2}}{b+c}$.

30. ΔABC да $AB=2$ см, BD медиана, $BD=1$ см, $\angle BDA=30°$. Учбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{5})$; B) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{15})$; C) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{8}}{4}$;

Д) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$; E) $\frac{10+\sqrt{13}}{4}$ см^2.

31. ΔABC да $AB=3$ см, $AC=5$ см, $\angle BAC=120°$. BD биссектрисанинг узунлиги топилсин.

A) $\frac{3\sqrt{7}}{2}$; B) $\frac{4\sqrt{7}}{5}$; C) $\frac{3\sqrt{2}}{7}$; Д) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$; E) $\frac{4\sqrt{7}}{3}$ см.

32. ΔABC да $\angle A$ бурчак $\angle B$ дан икки марта катта бўлиб, $AC=b$, $AB=c$. BC томоннинг узунлиги топилсин.

A) $\sqrt{b^2+c^2}$; B) $\sqrt{2b+c}$; C) $\sqrt{bc}$; Д) $\sqrt{b(b+c)}$;

E) $\sqrt{b+c}$.

33. ΔABCда $AC=13$ см, $AB+BC=22$ см, $\angle ABC=60^\circ$. BC томоннинг узунлиги топилсин.

А) 4; В) 9; С) 8; Д) 6; Е) 7 см.

34. Учбурчакнинг юзи S га тенг. Бу учбурчакнинг медианалари ташкил қилган учбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{3}{5}S$; В) $\frac{6}{7}S$; С) $\frac{3}{4}S$; Д) $\frac{1}{2}S$; Е) $\frac{4}{5}S$.

35. ΔABC нинг AB томони ўртасида K нуқта олинган. $AC=6$, $BC=4$, $\angle ACB=120^\circ$ бўлса, CK кесманинг узунлиги топилсин.

А) 3; В) $\sqrt{7}$; С) $\sqrt{5}$; Д) 4,5; Е) 5.

36. Агар тенг ёнли учбурчакнинг юзи 108 $см^2$, асоси 18 см бўлса, учбурчакнинг периметри топилсин.

А) 36; В) 52; С) 56; Д) 42; Е) 48 см.

37. Агар учбурчакнинг иккита томони 4 см ва 6 см ва улар орасидаги бурчакнинг тангенси 0,75 га тенг бўлса, унинг юзи ҳисоблансин.

А) 7,2; В) 7; С) 8; Д) 9; Е) 6,6 $см^2$.

38. Тўғри бурчакли учбурчакнинг бир катети гипотенузадан 10 см кичик, иккинчи катетидан эса 10 см катта. Учбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

А) 480; В) 640; С) 720; Д) 600; Е) 540 $см^2$.

39. Учбурчак томонларининг нисбати 3:6:5 каби. Унга ўхшаш учбурчакнинг катта томони 3,6 см га тенг. Биринчи учбурчакнинг периметри топилсин.

А) 5,6; В) 7,2; С) 8,4; Д) 7,6; Е) 9,2 см.

40. ΔABC да AD медиана AB томон билан 30° ли, AC томон билан 60° ли бурчаклар ташкил этади. Агар $AB=\sqrt{3}$ см бўлса, AC томоннинг узунлиги топилсин.

A) 2; B) 1,5; C) 2,5; Д) 3; E) 1 см.

41. Учбурчакнинг a, b, c томонлари $a^2=b^2+c^2-\sqrt{2}\,bc$ муносабатда бўлса, a томон қаршисидаги бурчак топилсин.

A) 45°; B) 30°; C) 60°; Д) 75°; E) 90°.

42. Тўғри бурчакли учбурчакнинг периметри 132, томонлари квадратларининг йиғиндиси 6050 га тенг. Унинг гипотенузаси узунлиги топилсин.

A) 64; B) 65; C) 55; Д) 60; E) 72.

43. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси 30 см, унга ўтказилган баландлиги 20 см га тенг. Ён томонга ўтказилган баландликнинг узунлиги топилсин.

A) 18; B) 22; C) 20; Д) 24; E) 26 см.

44. Учбурчакнинг асоси 60 см, унга ўтказилган баландлик 12 см ва медиана 13 см га тенг. Ён томонлардан каттасининг узунлиги топилсин.

A) 40; B) 37; C) 35; Д) 42; E) 39 см.

45. Тўғри бурчакли учбурчакнинг периметри $2p$ ва баландлиги h га тенг. Учбурчакнинг учинчи томони узунлиги топилсин.

A) $\frac{2p^2}{p+h}$; B) $\frac{p^2}{p+2h}$; C) $\frac{3p^2}{p+2h}$; Д) $\frac{p^2}{p+h}$; E) $\frac{2p^2}{2p+h}$.

46. Учбурчакнинг иккита b ва c томони ҳамда унинг юзи $S=\frac{2}{5}bc$ берилган. Учбурчакнинг учинчи томони узунлиги топилсин.

A) $\sqrt{b^2+c^2-\frac{3}{5}bc}$; B) $\sqrt{b^2+c^2}$; C) $\sqrt{b^2+c^2-\frac{6}{5}bc}$;

Д) $\sqrt{b^2-2bc}$; E) $\sqrt{b^2+c^2-\frac{4}{5}bc}$.

47. Учбурчакнинг иккита томони $AB=27$ см, $AC=29$ см ва BC томонга ўтказилган медиана 26 см га тенг. Учбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

A) 280; B) 320; C) 240; Д) 270; E) 260 $см^2$.

48. ΔABC да бурчаклар катталикларининг нисбати $\angle B:\angle A:\angle C=1:2:3$ каби ва $AC=b$, $AB=c$ бўлса, унинг BC томони узунлигини топинг.

A) $\sqrt{c^2-b^2}$; B) $\sqrt{b^2+c^2}$; C) $\sqrt{bc}$; Д) $\sqrt{2b^2-c^2}$;

E) $\sqrt[4]{bc^2(b^2+c^2)}$.

49. ΔABC да $AC=6$, $BC=4$, $\angle ACB=120°$ бўлса, унинг юзи ҳисоблансин.

A) $6\sqrt{5}$; B) 12; C) $3\sqrt{5}$; Д) $6\sqrt{2}$; E) $6\sqrt{3}$ $см^2$.

50. ΔABC да $AC=13$ см, $AB+BC=22$ см, $\angle ABC=120°$ бўлса, BA томон узунлиги топилсин.

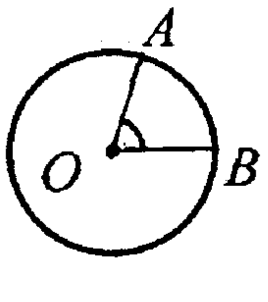
A) 18; B) 15; C) 14; Д) 16; E) 12 см.

3-§. АЙЛАНА ВА ДОИРА

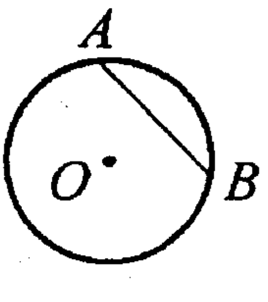
3.1. Асосий тушунчалар ва хоссалар

Айлана текисликдаги O нуқтадан бир хил масофада жойлашган нуқталардан иборат геометрик шаклдир. Берилган O нуқта айлананинг *маркази,* айлананинг ихтиёрий A нуқтасини унинг маркази билан туташтирувчи OA кесма эса айлананинг *радиуси* бўлиб, у одатда $OA=R$ ёки $OA=r$ каби белгиланади (3.1-чизма).

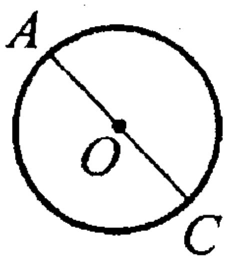
Айлананинг иккита A ва B нуқтасини туташтирувчи AB кесма айлананинг *ватари* (3.2-чизма), марказдан ўтувчи AC ватар айлананинг *диаметри* бўлади: $AC=2R$ ёки $AC=2r$. (3.3-чизма).



3.1-чизма.



3.2-чизма.



3.3-чизма.

$\angle AOB$ нинг OA ва OB томонлари айлананинг радиусларидан иборат бўлганда у *марказий бурчак*дир (3.1-чизма). Марказий бурчакнинг катталиги ўзи тиралган AB ёйнинг ўлчовига тенг:

$$\angle AOB = \smile AB. \tag{3.1}$$

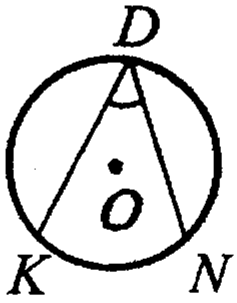
Учи айлананинг D нуқтасида бўлиб, томонлари айлананинг DK ва DN ватарларидан иборат $\angle KDN$ айланага *ички чизилган бурчак* (3.4-чизма) дейилиб, унинг катталиги ўзи тиралган KN ёй ўлчовининг ярмига тенг:

$$\angle KDN = \frac{1}{2} \smile KN. \tag{3.2}$$

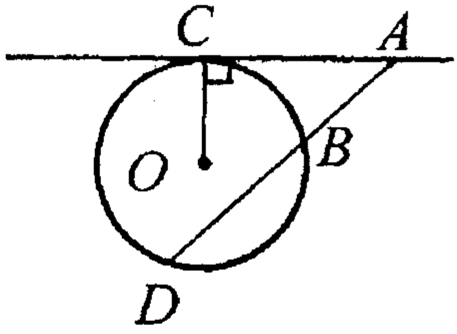
Айланага *уринма* шундай AC тўғри чизиқдан иборатки, у айлана билан фақат битта C умумий нуқтага эгадир. A нуқтадан ўтиб, айлана билан иккита B ва D умумий нуқтага эга бўлган тўғри чизиқ айлананинг *кесувчисидир* (3.5- чизма). AC уринманинг C уриниш нуқтасидан айланага радиус ўтказилса, у уринмага перпендикуляр бўлади: $AC \perp OC$ (3.5-чизма).

Текисликда тўғри бурчакли xOy координаталар системаси танланган бўлсин, O марказнинг координаталари $(a,\ b)$, айлананинг ихтиёрий нуқтасининг координаталари $(x,\ y)$, айлана радиуси $OA = R$ бўлса, айлана нуқталари учун қуйидаги тенглик бажарилади:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2, \tag{3.3}$$



3.4-чизма.



3.5-чизма.

бу айлана тенгламасидир. Айлананинг маркази координаталар системасининг бошида бўлса, унинг тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$x^2+y^2=R^2. \tag{3.4}$$

Ҳар қандай айлана текисликни унга нисбатан ички ва ташқи нуқталар тўпламларидан иборат икки қисмга бўлади. Айлананинг ички қисмида жойлашган нуқталар тўплами *доира* дейилади.

Айлананинг ўзи эса доиранинг чегараси бўлади.

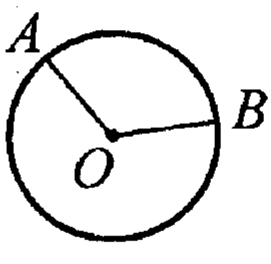
Доиранинг AB ёй ва OA ва OB радиуслар билан чегараланган қисми *доиравий сектор* бўлади (3.6-чизма).

Доиранинг $A_1B_1C_1$ ёй ва бу ёйга тиралган A_1C_1 ватар билан чегараланган қисми доиравий сегментдир (3.7-чизма).

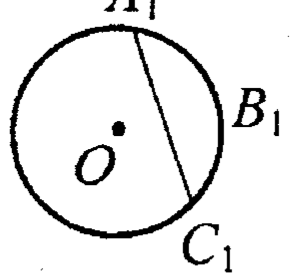
Айлана, доира, сегмент, секторнинг айрим хоссаларини келтирамиз.

1. Битта доирада ёки тенг доираларда:

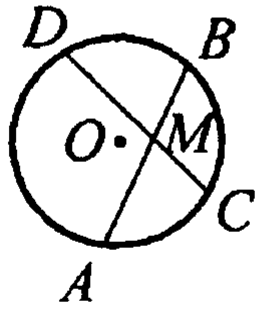
а) агар ёйлар тенг бўлса, уларга тиралган ватарлар тенг бўлиб, айлана марказидан тенг масофада ётади;



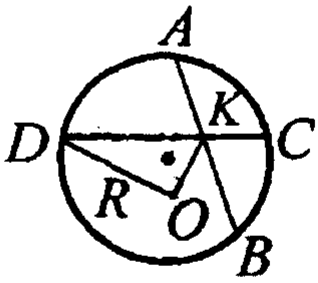
3.6-чизма.



3.7-чизма.



3.8-чизма.



3.9-чизма.

б) ярим айланадан кичик бўлган иккита ёй ўзаро тенг бўлмаса, катта ёйга тиралган ватар иккинчи ватардан катта ва иккинчи ватарга нисбатан айлана марказига яқин ётади.

Айлананинг ичида олинган M нуқтадан AB ватар ва CD диаметр ўтказилган бўлса, ватар қисмларининг кўпайтмаси диаметр қисмларининг кўпайтмасига тенг (3.8-чизма):

$$MA\cdot MB=MC\cdot MD. \qquad (3.5)$$

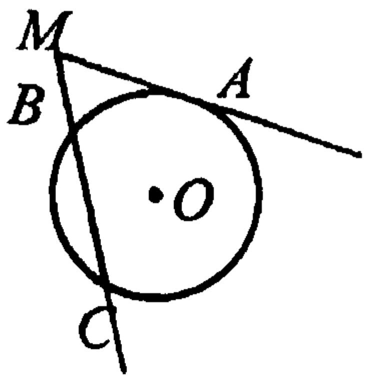
3. Радиуси R га тенг бўлган айлананинг ичида ётувчи бирор K нуқтадан ватарлар ўтказилган бўлса, ҳар бир ватар қисмларининг кўпайтмаси ўзгармас миқдор ва қиймати R^2-OK^2 га тенг (3.9-чизма):

$$AK\cdot KB=CK\cdot KD=\ldots=R^2-OK^2. \qquad (3.6)$$

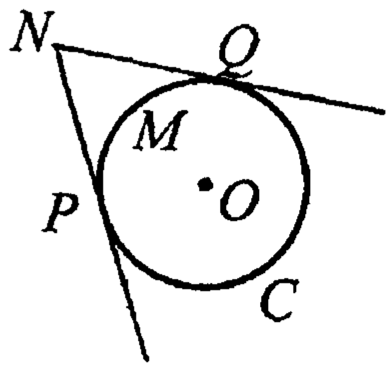
4. Айлана ташқарисидаги M нуқтадан айланага MA уринма ва MCB кесувчи (MB-кесувчининг ташқи қисми, BC-ички қисми) ўтказилган бўлса, уринма узунлигининг квадрати кесувчининг ўзи ва унинг ташқи қисмининг кўпайтмасига тенг (3.10-чизма):

$$MA^2=MC\cdot MB. \qquad (3.7)$$

5. Айлана ташқарисидаги N нуқтадан иккита NP ва NQ уринма ўтказиш мумкин, улар ҳосил қилган $\angle PNQ$ бурчак айланага *ташқи чизилган бурчак* дейи-



3.10-чизма.



3.11-чизма.

лади ва унинг катталиги катта ва кичик ёйлар катталиклари айирмасининг ярмига тенг (3.11-чизма):

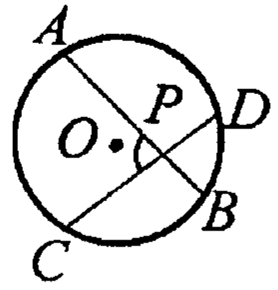
$$\angle PNQ=\frac{1}{2}(\smile QCP-\smile QMP). \tag{3.8}$$

6. Айлананинг AB ва CD ватарлари унинг ичидаги P нуқтада кесишса, бу ватарлар орасидаги бурчак қуйидагича топилади (3.12-чизма):

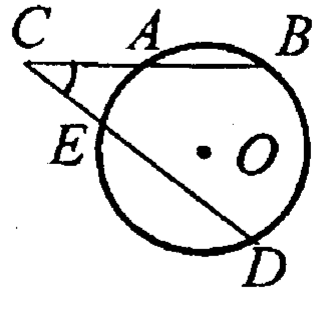
$$\angle APC=\frac{1}{2}(\smile AC+\smile DB). \tag{3.9}$$

7. Айлананинг AB ва ED ватарлари унинг ташқарисидаги C нуқтада кесишса, ватарлар орасидаги $\angle ACE$ нинг катталиги қуйидагича топилади (3.13-чизма):

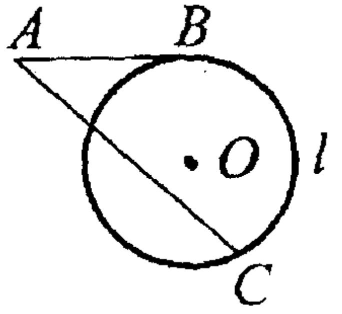
$$\angle ACE=\frac{1}{2}(\smile BD+\smile AE). \tag{3.10}$$



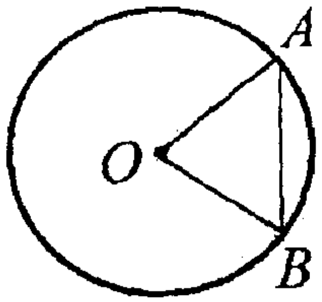
3.12-чизма.



3.13-чизма.



3.14-чизма.



3.15-чизма.

8. Айлананинг уринмаси ва ватари орасидаги бурчакнинг катталиги бурчак томонлари орасидаги айлана ёйи катталигининг ярмига тенг (3.14-чизма):

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BlC. \qquad (3.11)$$

9. Радиуси R га тенг бўлган айлананинг узунлиги

$$L = 2\pi R \qquad (3.12)$$

формула бўйича топилади.

10. Ўлчови $n°$ га тенг бўлган ёйнинг узунлиги

$$d = \frac{2\pi R n°}{360°} \qquad (3.13)$$

формула орқали топилади.

11. Радиуси R га тенг бўлган доиранинг юзи

$$S = \pi R^2 \qquad (3.14)$$

формула орқали ҳисобланади.

12. $n°$ ўлчовли доиравий секторнинг юзи (3.15- чизма)

$$S = \frac{\pi R^2 n°}{360°} \qquad (3.15)$$

формула бўйича ҳисобланади.

13. Доиравий сегментнинг юзи

$$S = S_{\text{сект}}. - S_{\Delta OAC} \qquad (3.16)$$

формула бўйича ҳисобланади.

3.2. Мавзуга доир масалалар

1. Айлананинг марказий бурчаги 100°, у тиралган ёйнинг узунлиги 10 см бўлса, айлананинг радиуси топилсин ($\pi=3$ деб қабул қилинсин).

А) 5; В) 6; С) 4; Д) 3; Е) 4,5 см.

2. AB ватар айланани иккита ёйга ажратади. Бу ёйларнинг нисбати 4:5 каби. Катта ёйнинг ихтиёрий нуқтасидан AB ватар қандай бурчак остида кўринади?

А) 80°; В) 75°; С) 90°; Д) 85°; Е) 70°.

3. Узунлиги $6\sqrt{3}$ га тенг бўлган ватар 120° га тенг бўлган ёйни тортиб туради. Айлананинг узунлиги топилсин.

А) 10π; В) 8π; С) 15π; Д) 9π; Е) 12π.

4. Айлананинг марказий бурчаги 60°, у тиралган ёйнинг узунлиги 10 см га тенг бўлса, айлананинг радиуси топилсин.

А) $\frac{20}{\pi}$; В) 15; С) $\frac{30}{\pi}$; Д) $\frac{40}{\pi}$; Е) $\frac{50}{\pi}$.

5. Айлананинг AB ватари ўзи ажратган ёйлардан бирининг ихтиёрий нуқтасидан 80° ли бурчак остида кўринади. A ва B нуқталар билан чегараланган ёйларнинг катталиклари топилсин.

А) 160° ва 200°; В) 150° ва 220°; С) 140° ва 220°; Д) 135° ва 225°; Е) 180° ва 120°.

6. Айлананинг $12\sqrt{2}$ га тенг ватари 90° ли ёйга тиралган. Айлананинг узунлиги топилсин.

А) 12π; В) 18π; С) 20π; Д) 24π; Е) 28π.

7. Радиуси 1 га тенг айлана учта ёйга бўлинган, уларга мос марказий бурчаклар 1, 2 ва 6 га пропорционал. Энг катта ёйнинг ўлчови топилсин.

А) 5; В) 2π; С) $\frac{5\pi}{2}$; Д) $\frac{3\pi}{2}$; Е) $\frac{4\pi}{3}$.

8. Радиуси 5 см га тенг бўлган айланада узунлиги 8 см га тенг бўлган ватар ўтказилган. Айлана марказидан ватаргача бўлган масофа топилсин.

А) 3; В) 1,5; С) 2; Д) 4; Е) 2,2 см.

9. Радиуси $R=15$ см бўлган доирада M нуқта олинган ва ушбу нуқтадан узунлиги 18 см га тенг бўлган ватар ва диаметр ўтказилган. M нуқтадан доира марказигача бўлган масофа 13 см га тенг. M нуқта ватарни қандай узунликлардаги кесмаларга ажратади?

А) 13 ва 5; В) 7 ва 11; С) 9 ва 9; Д) 14 ва 4; Е) 10 ва 8 см.

10. Айланага тегишли бўлмаган A нуқтадан унга уринма ва кесувчи ўтказилган. A нуқтадан уриниш нуқтасигача бўлган масофа 16 см, кесувчининг айлана билан кесишиш нуқталаридан биригача бўлган масофа 32 см га тенг. Агар унинг марказидан кесувчигача бўлган масофа 5 см га тенг бўлса, айлананинг радиуси топилсин.

А) 12; В) 13; С) 14; Д) 10; Е) 11 см.

11. Битта нуқтадан айланага иккита уринма ўтказилган. Уринманинг узунлиги 12 см, уриниш нуқталари орасидаги масофа 14,4 см га тенг бўлса, айлананинг радиуси топилсин.

А) 5; В) 8,5; С) 7; Д) 8; Е) 9 см.

12. 60° га тенг бўлган бурчакка иккита ўзаро ташқи уринган айлана ички чизилган. Кичик айлананинг радиуси r га тенг бўлса, катта айлананинг радиуси топилсин.

А) $2r$; В) $\frac{r}{2}$; С) $3r$; Д) $2{,}5r$; Е) $1{,}5r$.

13. Бурчаги 120° га тенг бўлган доиравий секторга ички доира чизилган. Берилган доиранинг ради-

уси R га тенг бўлса, янги доиранинг радиуси топилсин.

A) $2R$; B) $R(\sqrt{3}-\sqrt{2})$; C) $R\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$; Д) $R(3-\sqrt{2})$; E) $1{,}5R$.

14. Доиранинг юзини 96% орттириш учун унинг радиусини неча процент орттириш керак?

A) 45%; B) 15%; C) 20%; Д) 35%; E) 40%.

15. Радиуслари $r_1=6$ см, $r_2=7$ см, $r_3=8$ см бўлган айланалар иккитадан ўзаро уринади. Учлари бу айланалар марказларида жойлашган учбурчакнинг юзини ҳисобланг.

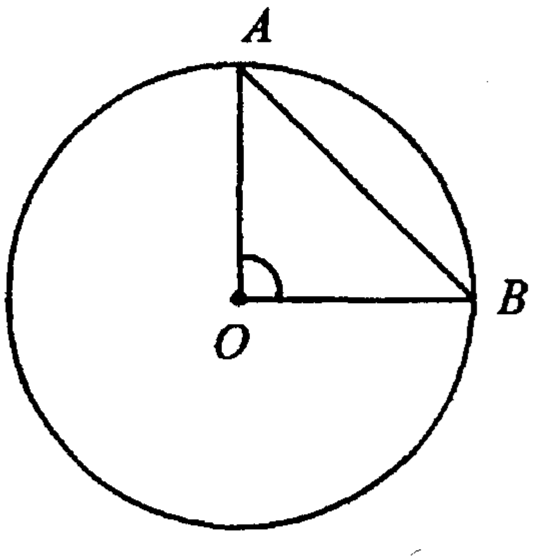
A) 90; B) 78; C) 56; Д) 42; E) 84 см^2.

3.3. Мавзуга доир масалаларнинг ечимлари

1. Берилган. (R,O) айлана, $\angle AOB=100°$, $AB=10$ см. ($\pi=3$ деб қабул қилинсин).

R топилсин (3.3.1- чизма).

Ечилиши. Айлана ёйининг катталиги 360°, айлананинг 1° ли бурчагига мос келган ёйнинг узунлиги $\frac{2\pi R}{360°}$ га тенг. Шартга кўра марказий бурчак 100°га тенглигидан, AB ёйнинг узунлиги $\frac{2\pi R}{360°}\cdot 100°$ бўлади. Олинган ифодаларни тенглаштириб, R га нисбатан тенгламани ечамиз:

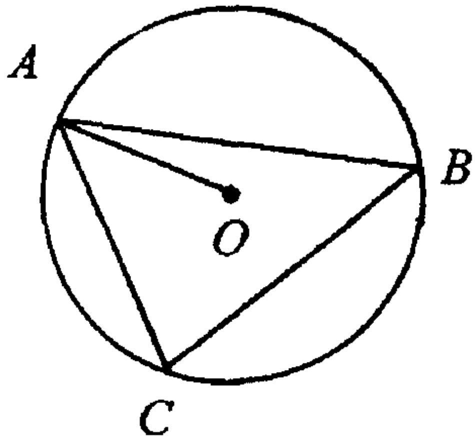


3.3.1- чизма.

$$\frac{2\pi R}{360^\circ}\cdot 100^\circ=10,\ \frac{2\cdot 3R}{36}=1,\ R=\frac{36}{6}=6 \text{ см.}$$

2. Б е р и л г а н. (R,O) айлана, $\cup ADB:\cup ACB=4:5$, $C\in\cup ACB$.

$\angle ACB$ т о п и л с и н (3.3.2-чизма).



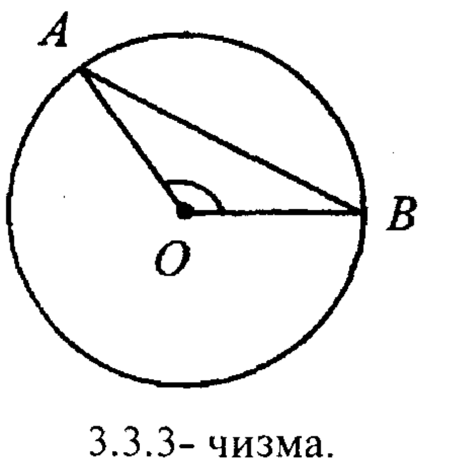
3.3.2-чизма.

Е ч и л и ш и. Айлана ёйининг катталиги 360° га тенг ёки $\cup ABC+\cup ADB=360°$. Шартга кўра, $\cup ADB=(4:5)\ \cup ACB$. У ҳолда $\cup ACB+(4:5)\cup ACB= =360°$, $(9:5)\ \cup ACB=360°$, $\cup ACB=(1:9)\cdot 5\cdot 360°=200°$ ва $\cup ADB=(4:5)200°=160°$, $\angle ACB$ ички чизилган бўлганлигидан, $\angle ACB=(1:2)\cup ADB= =(1:2)\cdot 160°=80°$.

3. Б е р и л г а н. (R,O) айлана, $\angle AOB=120°$, $AB=6\sqrt{3}$.

Айлана узунлиги L т о п и л с и н (3.3.3-чизма).

Е ч и л и ш и. $OA=OB=R$. Демак, ΔAOB тенг ёнли ва унинг асосидаги бурчаклар тенг, яъни $\angle OAB= =\angle ABO=\frac{1}{2}(180°—120°)=30°$. ΔAOB



3.3.3- чизма.

учун синуслар теоремасини (2-§, 8-хосса) ёзамиз:

$$\frac{OA}{\sin 30^\circ}=\frac{AB}{\sin 120^\circ},$$

$$\frac{R}{\sin 30^\circ}=\frac{6\sqrt{3}}{\sin(90^\circ+30^\circ)},$$

бу ердан $R = \frac{6\sqrt{3}\cdot\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{6\sqrt{3}\cdot 1/2}{\sqrt{3}/2} = 6.$

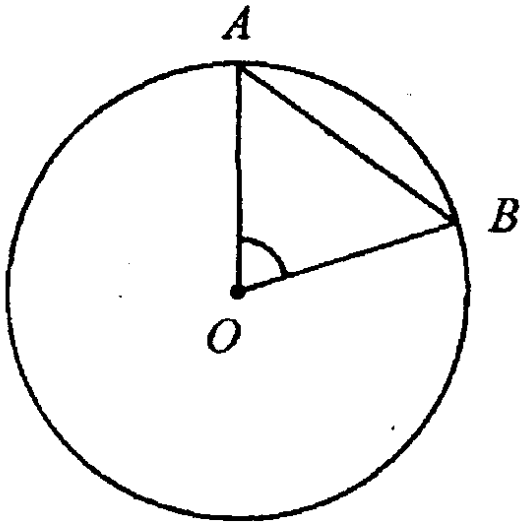
Демак, айлананинг узунлиги: $L=2\pi R=12\pi$.

Жавоби: Е).

4. Берилган. (R,O) айлана, $\angle AOB=60^\circ$, $\cup AB$ узунлиги 10 см.

$OA=R$ топилсин (3.3.4-чизма).

Ечилиши. $OA=OB=R$ айлананинг радиуси. Айлана ёйи катталиги 360° га тенг, демак AB ёйнинг узунлиги айлана узунлигининг 1/6 қисмига тенг. Шунга асосан $10=(1/6)\cdot 2\pi R$ тенгламани тузамиз. Бу ердан $R=6\cdot 10/2\pi=30/\pi$.

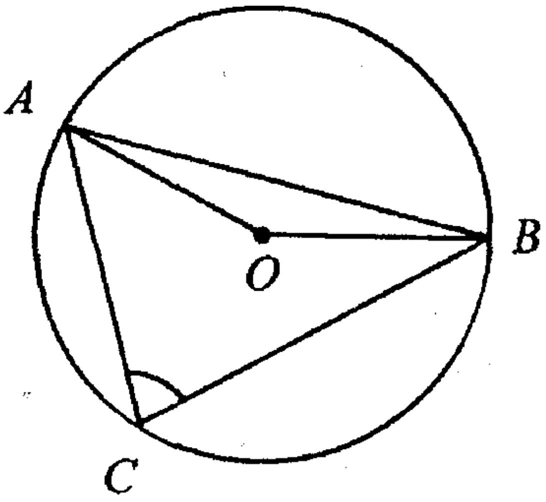


3.3.4- чизма.

5. Берилган. (R,O) айлана, $\angle ACB=80^\circ$.

AB ва ACB ёйлар топилсин (3.3.5-чизма).

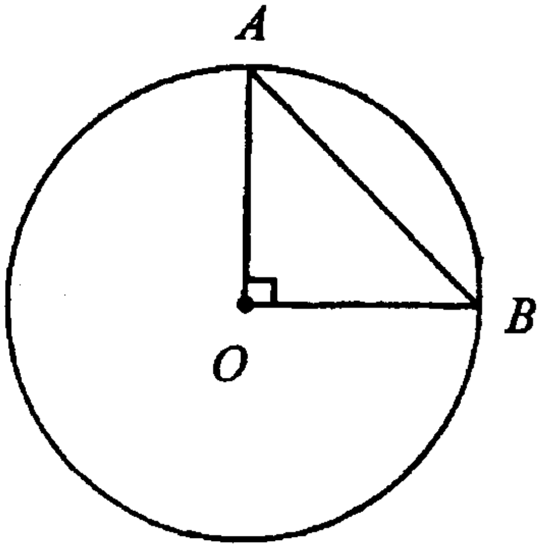
Ечилиши. $\angle ACB$ ички чизилган бурчак бўлганлигидан $\cup AB=2\cdot\angle ACB= =2\cdot 80^\circ=160^\circ$. Иккинчи ёй: $\cup ACB=360^\circ-160^\circ=200^\circ$ бўлади.



3.3.5- чизма.

Жавоби: А).

6. Берилган. (R,O) айлана, $AB=12\sqrt{2}$, $\angle AOB=90°$.



3.3.6- чизма.

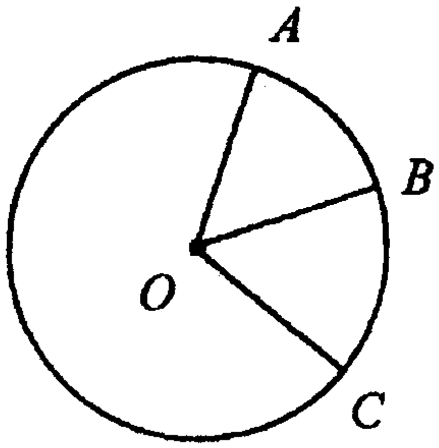
L топилсин (3.3.6-чизма).

Ечилиши. (3.12) формуладан фойдаланамиз. ΔAOB тўғри бурчакли ва тенг ёнлидир ($OA= =OB=R$), ундан $R=AB\cdot \cdot\sin 45°=12\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=12$ ва $L=2\pi\cdot 12=24\pi$ бўлади.

Жавоби: Д).

7. Берилган. (R,O) айлана, $R=1$, $\angle AOB:\angle BOC: :\angle AOC=1:2:6$.

$\cup AC$ нинг узунлиги топилсин (3.3.7-чизма).



3.3.7- чизма.

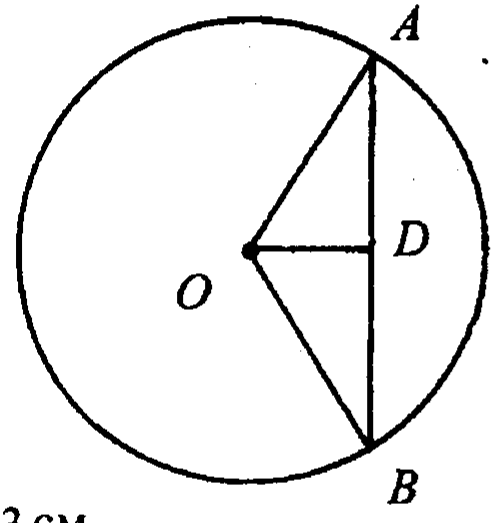
Ечилиши. Айлана узунлиги $2\pi R$ ни унинг катталиги 360°га бўлиб, 1° ли марказий бурчакка мос келган ёйнинг узунлигини топамиз: $\frac{2\pi\cdot 1°}{360°}=\frac{\pi}{180°}$. Берилганлардан $\angle AOB=\alpha$ бўлса, $\angle BOC=2\alpha$ ва $\angle AOC=6\alpha$ бўлади. Натижада, $\alpha+2\alpha+6\alpha=360°$ тенгламани ҳосил қиламиз ва уни ечиб, $\alpha=40°$ эканлигини оламиз. Энг катта марказий бурчак $6\cdot 40°=240°$ га тенг экан, унга мос келган ёйнинг узунлиги $\frac{\pi}{180°}\cdot 240°=\frac{4\pi}{3}$ бўлади.

Жавоби: Е).

8. Берилган. (R,O) айлана, $R=5$ см, $AB=8$ см.

$d(O,AB)=h$ топилсин (3.3.8-чизма).

Ечилиши. $AO=OB=R$ бўлгани учун, ΔAOB тенг ёнли. O нуқтадан AB ватарга CD перпендикуляр OD ўтказсак, у медиана ҳам бўлади: $AD=DB=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}8=$ $=4$ см. Пифагор теоремасига (2-§, 7-хосса) асосан: $h=\sqrt{OB^2-OD^2}, h=\sqrt{5^2-4^2}=3$ см.



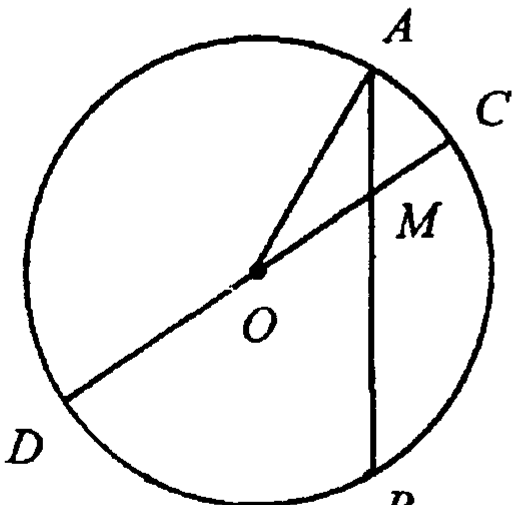
3.3.8-чизма.

Жавоби: А).

9. Берилган. (R,O) айлана, $AB=18$ см, $OA=R=$ $=15$ см, $M\in AB$, $MO=13$ см.

MA, MB топилсин (3.3.9-чизма).

Ечилиши. Айлананинг AB ва CD ватарлари M нуқтада кесишади ва (3.5) хоссага асосан, $MA\cdot MB=CM\cdot MD$. Бу ердан $CD=2R$ ёки $CD=2\cdot 15=30$ см, $OC=R=15$ см, $MO=13$ см ва шунинг учун $CM=15-13=$ $=2$ см, $MD=30-2=28$ см. Номаълум MA ва MB миқдорларга нисбатан тенгламалар системасини ёзамиз:



3.3.9- чизма.

$$\begin{cases} MA+MB=2\cdot 28, \\ MA+MB=18. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (18-x)x-56, \\ MA=18-MB, MB=x, \end{cases} \Rightarrow$$

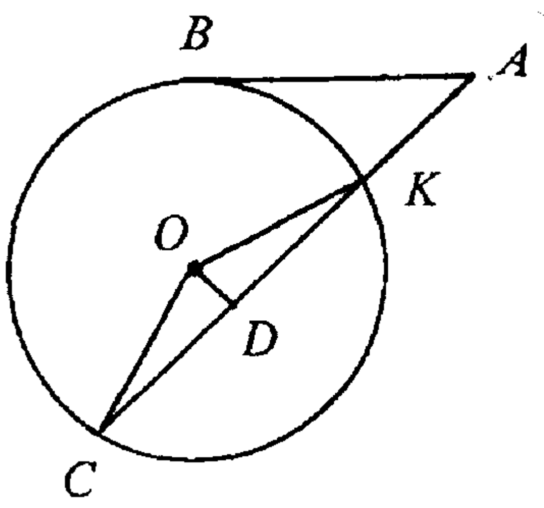
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 18x + 56 = 0, \\ MA = 18 - x. \end{cases}$$

Квадрат тенгламанинг дискриминанти $D=18^2-4\cdot 56=324-224=100$ бўлганлигидан, у иккита $x_1=4$, $x_2=14$ илдизга эга. Демак, $MA=14$ см, $MB=18-4==14$ см. ($MA=14$ см, $MB=4$ см).

Жавоби: Д).

10. Берилган. (R,O) айлана, AB уринма, $AB==16$ см, AKC—кесувчи, $AC=32$ см, $OD\perp AC$, $OD=5$ см.

R радиус топилсин (3.3.10-чизма).



3.3.10-чизма.

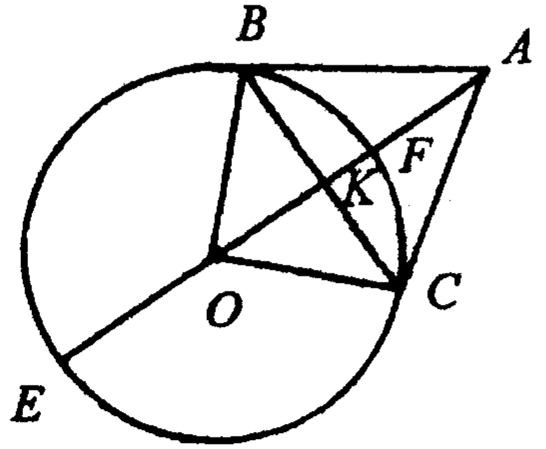
Ечилиши. 4-хоссага асосан: $AB^2=AC\cdot AK$. $AK=x$ деб белгилаймиз, у ҳолда $KC=32-x$ бўлади. Сўнгра, $16^2=32AK$ тенгламани ечамиз: $x=8$ см. Натижада, $KC=32-8=24$ см эканлигини оламиз. O марказни K ва C нуқталар билан туташтирамиз. Натижада ΔKOC тенг ёнли учбурчакни ҳосил қиламиз, унда $OK=OC=R$ ва $KD=\frac{1}{2}\cdot 24=12$ см. Тўғри бурчакли ΔKOD дан: $OK^2=KD^2+OD^2$ ёки $R^2=12^2+5^2$, $R^2=144+25=169$, $R=\sqrt{169}=13$ см.

Жавоби: В).

11. Берилган. (R,O) айлана, $AB=12$ см, $AC=AB$, $BC=14{,}4$ см.

R радиус топилсин (3.3.11- чизма).

Е ч и л и ш и. O айлананинг маркази бўлса, $OB=$ $=OC=R$ унинг радиусидир. Демак, ΔOBC тенг ёнли бўлганлиги сабабли OK баландлик медиана ҳам бўлади ва $BK=KC=7{,}2$ см. AB ва AC лар A нуқтадан берилган айланага ўтказилган иккита уринма бўлганлигидан, уларнинг узунликлари тенг бўлади, яъни $AB=AC$. Тўғри бурчакли ΔABK дан Пифагор теоремасига (2-§, 8-хосса) асосан, $AK^2=AB^2-BK^2=12^2-(7{,}2)^2=144-51{,}84=92{,}16$, $AK=$ $=9{,}6$ см бўлади.



3.3.11- чизма.

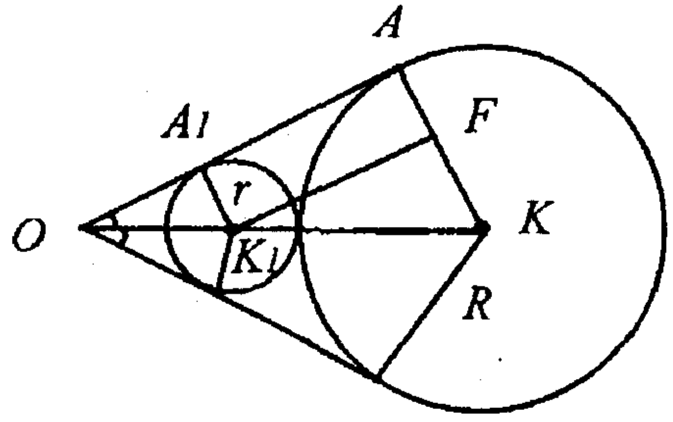
$OK=h$ деб белгилаймиз. Тўғри бурчакли ΔOBK дан $R^2-h^2=(7{,}2)^2$ тенгликни оламиз. (3.7) дан: $AB^2=AE\cdot AF$ формула ўринли, лекин $AE=AK+OK+OE=9{,}6+h+R$, $AF+AO-R=AK+h-R$. У ҳолда $AB^2=(9{,}6+h-R)$. $(9{,}6+h+R)=(9{,}6+h)^2-R^2$, $AB=12$, $R^2=h^2+7{,}2^2$ қийматларни охирги тенгликка қўямиз: $144=(9{,}6+h)^2-7{,}2^2-$ $-h^2$, $144=92{,}16+19{,}2h+h^2-51{,}84-h^2$, $19{,}2h=144-$ $-40{,}32=103{,}68$, $h=\dfrac{103{,}68}{19{,}2}=5{,}4$. Айлананинг радиусини топамиз: $R^2=5{,}4^2+7{,}2^2=51{,}84+29{,}16=81$, $R=9$ см.

Жавоби: Е).

12. Б е р и л г а н. $\angle AOB=60°$. (r, K_1) — кичик айлана ва (R, K) — катта айлана.

R т о п и л с и н (3.3.12-чизма).

Е ч и л и ш и. Бурчакка ички чизилган айлананинг маркази бурчакнинг биссектрисасида ётганлигидан, $\angle KOA=30°$. K ва K_1 мос равишда, ички чизилган катта ва кичик айланаларнинг марказлари бўлсин. Бу



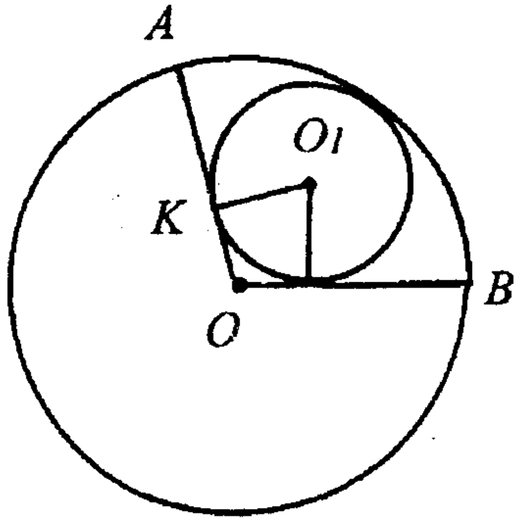
3.3.12- чизма.

нуқталардан бурчакнинг OA томонига перпендикулярлар ўтказамиз: $A_1K_1 \perp OA_1$, $AK \perp OA$ ва шартга кўра, $A_1K_1=r$, $AK=R$ ҳамда $KF=R-r$, $KK_1=$ $=R+r$, агар $K_1F \| AA_1$ бўлса. Тўғри бурчакли ΔKK_1F дан

$KF=KK_1 \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} KK_1$ ёки $R-r=\frac{1}{2}(R+r)$, $R+r=2R-2r$, $R=3r$.

Жавоби: С).

13. Берилган. $(R,\ OAB)$ доиравий сектор, $\angle AOB=120°$, $(r,\ O_1)$—ички чизилган доира.



3.3.13- чизма.

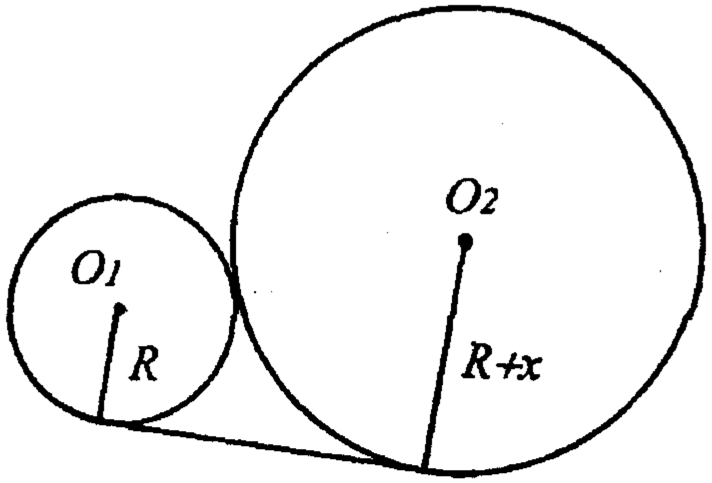
r топилсин (3.3.13-чизма).

Ечилиши. OA ички чизилган айланага уринма бўлганлиги учун $OA \perp O_1K$. Шунинг учун, ΔOO_1K тўғри бурчакли ва $\angle KOA_1=60°$. У ҳолда $O_1K=OO_1 \sin 60°$ ёки $r=OO_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. $OA=R$, $O_1K=r$ ва $OO_1=R-r$ бўлади. Демак,

$$r=(R-r)\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad r+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot r=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot R, \quad r\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot R$$

ёки $\frac{\sqrt{3}R}{2+\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{4-3}$, $r=R\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$.

Жавоби: С).



3.3.14-чизма.

14. Берилган. (O_1,R) биринчи доира, $(O_2,R+x)$ иккинчи доира, S_1, S_2 юзлар, $S_2=1{,}96S_1$.

x топилсин (3.3.14-чизма).

Ечилиши. Берилган доиранинг радиуси R, янги доиранинг радиуси $R+x$ бўлса, уларнинг юзлари, $S_1=\pi R^2$, $S_2=\pi(R+x)^2$ бўлади. У ҳолда $S_1=\pi R^2$ юз 100% бўлса, $S_2=\pi(R+x)^2$ юз 196% ни ташкил қилади. Пропорция тузамиз:

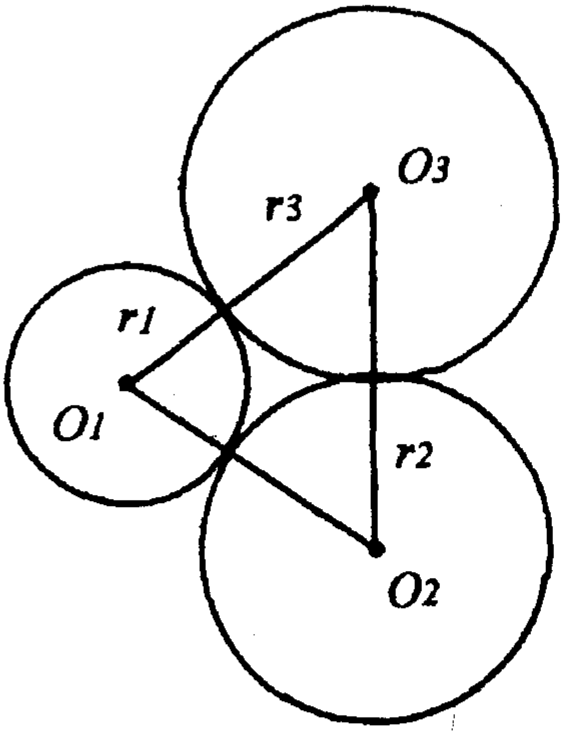
$$\pi R^2 — \quad 100\%$$
$$\pi(R+x)^2 — 196\%.$$

Бу пропорцияда ўрта ҳадлар кўпайтмаси четки ҳадлар кўпайтмасига тенг: $196\pi R^2=\pi(R+x)^2\cdot 100$. Бу квадрат тенгламани x га нисбатан ечамиз:

$$(R+x)^2=\frac{196R^2}{100},\quad R+x=\frac{14R}{10},\quad x=\frac{7}{5}R-R=\frac{2}{5}R=$$

$=0{,}4\ R$. Демак, радиусни 40% га орттириш керак.

15. Берилган. $(r_1,\ O_1)$, $(r_2,\ O_2)$, $(r_3,\ O_3)$ — ўзаро уринадиган айланалар, $O_1O_2O_3$—учлари айланалар марказларида жойлашган учбурчак.



3.3.15- чизма.

$S_{O_1O_2O_3}$ ҳисоблансин (3.3.15- чизма).

Ечилиши. Айланалар ўзаро урингани учун учбурчакнинг томонларини радиуслар ёрдамида топиш мумкин: $O_1O_2=r_1+r_2=6+$ $+7=13$ см, $O_1O_3=r_1+$ $+r_3=14$ см, $O_2O_3=r_2+$ $+r_3=15$ см. $\Delta O_1O_2O_3$ нинг юзини Герон формуласи ёрдамида ҳисоблаймиз:

$p=\frac{1}{2}(13+14+15)=21$ см ва $S=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=7\cdot 3\times$ $\times 4=84$ см^2.

Жавоби: Е).

3.4. Мустақил ечиш учун масалалар

1. A, B, C айланадаги нуқталар ва $\angle ABC=30°$. Айлананинг диаметри 20 см га тенг бўлса, AC ватарнинг узунлиги топилсин.

А) 8; В) 10; С) 12; Д) 6; Е) 9 см.

2. AB диаметрнинг учидан AC ватар ўтказилган ва бу ватар ярим айланани катталиклари 2:3 нисбатда бўлган 2 қисмга бўлади. ABC учбурчакнинг бурчаклари топилсин.

А) 40°, 50°, 90°; В) 30°; 60°; 90°; С) 32°, 58°, 90°;
Д) 36°, 54°, 90°; Е) 35°; 55°; 90°.

3. Иккита доира радиусларининг нисбати 1:2 каби. Катта доира айланасининг узунлиги $8\sqrt{\pi}$ га тенг. Кичик доиранинг юзи ҳисоблансин.

A) 4; B) 6; C) 3; Д) 2,5; E) 5.

4. Иккита доира юзларининг нисбати 1:16 каби. Кичик доиранинг радиуси $\frac{4}{\pi}$ га тенг бўлса, катта доира айланасининг узунлиги топилсин.

A) 40; B) 36; C) 38; Д) 42; E) 32.

5. Айлананинг узунлиги $8\pi\sqrt{3}$ га тенг бўлса, 120° га тенг бўлган ёйга тиралган ватарнинг узунлиги топилсин.

A) 16; B) 18; C) 12; Д) 10; E) 14.

6. Доиранинг юзи $6{,}25\pi$ га тенг. Бу доирада узунлиги 3 га тенг бўлган ватар ўтказилган. Доира марказидан ватаргача бўлган масофа топилсин.

A) 3; B) 2; C) 2,5; Д) 1; E) 4.

7. Маркази O нуқтада бўлган айланада AB ватар ва OD радиус ўтказилган ва улар C нуқтада кесишади ҳамда $AB \perp CD$, $OC=9$, $CD=32$. Ватарнинг узунлиги топилсин.

A) 60; B) 85; C) 80; Д) 75; E) 90.

8. Радиуси 8 см га тенг айлананинг A нуқтасидан иккита ўзаро тенг AB ва AC ватар ўтказилган. Ватарлар орасидаги бурчак 60° га тенг бўлса, айлана марказидан BC ватаргача бўлган масофа топилсин.

A) 3; B) 4,5; C) 5; Д) 4; E) 6 см.

9. Айланага A нуқтада AB уринма ўтказилган. $AB=5$ ва A нуқтадан айлананинг O марказигача масофа $5\sqrt{2}$ га тенг бўлса, айлананинг радиуси топилсин.

A) 5; B) 4; C) 6; Д) 3; E) 7.

10. Маркази O нуқтада бўлган айланада AB диаметр ва BC ватар ўтказилган. Агар $\angle AOC=60°$ бўлса, $\angle ABC$ топилсин.

А) 60°; В) 48°; С) 36°; Д) 45°; Е) 30°.

11. Радиуси $\frac{7,2}{\pi}$ га тенг бўлган айланада катталиги 100° га тенг бўлган ёйнинг узунлиги топилсин.

А) 5; В) 3; С) 4; Д) 6; Е) 4,5.

12. Доиранинг юзи 48π га тенг. Марказий бурчак 120° га тенг бўлса, унга мос ватарнинг узунлиги топилсин.

А) 12; В) 10; С) 13; Д) 15; Е) 14.

13. Маркази O нуқтада бўлган айланадаги B нуқтадан BA ватар, A нуқтадан айланага AC уринма ўтказилган. Агар $\angle BAC=35°$ бўлса, AOB топилсин.

А) 50°; В) 70°; С) 60°; Д) 80°; Е) 55°.

14. Айлананинг AB ва CD ватарлари K нуқтада кесишади. Агар $AB=22$ см, $CK=8$ см, $DK=12$ см бўлса, AK ва BK кесмалар топилсин.

А) 3, 19; В) 5,5, 16,5; С) 4, 18; Д) 6, 16; Е) 5,17 см.

15. Айланада AB диаметр, BC ватар, $AB=20$ см, $\angle ABC=75°$ бўлса, марказий AOC бурчакка мос келган ёйнинг узунлиги топилсин ($\pi=3$ деб олинсин).

А) 32; В) 30; С) 26; Д) 24; Е) 25 см.

16. Иккита айлана узунликларининг нисбати 4 га тенг бўлса, мос доиралар юзларининг нисбати топилсин.

А) 16; В) 15; С) 17; Д) 18; Е) 19.

17. Радиуси 8 см га тенг бўлган айланада узунлиги 8 см бўлган ватар ўтказилган. Ватар тиралган ёйнинг узунлиги топилсин.

A) $\frac{14\pi}{3}$; B) 2π; C) $\frac{8\pi}{3}$; Д) $\frac{7\pi}{3}$; E) 3π.

18. $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ айлананинг радиуси топилсин.

A) 3; B) 4; C) 5; Д) 2; E) 6.

19. $x^2-6x+y^2-8y=0$ айлана марказининг координаталари топилсин.

A) $(-3; -4)$; B) $(3; -4)$; C) $(-3; 4)$; Д) $(3; 4)$; E) $(-3; 0)$.

20. Берилган $A(-1,3)$, $B(0,-2)$, $C(3,1)$ нуқталардан қайсилари $x^2-2x+y^2+4y+4=0$ айланага тегишли?

A) A; B) C; C) A, C; Д) A, B; E) B.

21. Айлананинг битта нуқтасидан радиус ва узунлиги унга тенг бўлган ватар ўтказилган. Улар орасидаги бурчак топилсин.

A) 60°; B) 45°; C) 75°; Д) 30°; E) 90°.

22. Айлананинг битта нуқтасидан узунлиги унинг радиусига тенг бўлган иккита ватар ўтказилган. Улар орасидаги бурчак топилсин.

A) 30°; B) 60°; C) 120°; Д) 90°; E) 150°.

23. Айлана ичидаги нуқтадан айланагача энг қисқа масофа 6 см, энг катта масофа 12 см бўлса, айлананинг радиуси топилсин.

A) 8; B) 9; C) 6; Д) 10; E) 12 см.

24. Айлананинг ташқарисидаги нуқтадан айланагача бўлган энг қисқа масофа 7 см, энг катта масофа 23 см бўлса, айлананинг радиуси топилсин.

A) 6; B) 10; C) 7; Д) 8; E) 9 см.

25. Радиуси 4 см га тенг бўлган айланада ўзаро тенг бўлган $AB=AC=BC$ ватарлар ўтказилган. Айла-

на марказидан ватарларгача бўлган масофалар топилсин.

А) 3; В) 1,5; С) 1; Д) 2,5; Е) 2 см.

26. Айлана марказидан 4 см масофада ўзаро перпендикуляр бўлган иккита ватар ўтказилган, улардан бири 12 см га тенг. Кесишиш нуқтасида бу ватар қандай узунликдаги кесмаларга ажралади?

А) 3, 9; В) 1,5, 10,5; С) 2, 10; Д) 1, 12; Е) 2, 11 см.

27. Айлананинг ватари диаметр билан 30° ли бурчак ташкил қилади ва кесишиш нуқтаси диаметрни узунликлари 2 см ва 10 см бўлган кесмаларга ажратади. Айлана марказидан ватаргача бўлган масофа топилсин.

А) 2; В) 3; С) 2,5; Д) 4; Е) 4,5 см.

28. Радиуси 5 см бўлган айлана ташқарисидаги P нуқтадан иккита уринма ўтказилган ва улар орасидаги бурчак 60° га тенг. P нуқтадан айлана марказигача бўлган масофа топилсин.

А) 12; В) 10; С) 9; Д) 13; Е) 8 см.

29. Ўлчови 90° га тенг, радиуси 4 см бўлган ёйнинг ўртаси K дан ёйга уринма ўтказилган. Ёйнинг четки радиуслари уринма билан кесишгунча давом эттирилганда ҳосил бўлган кесманинг узунлиги топилсин.

А) 7; В) 14; С) 12; Д) 8; Е) 10 см.

30. Айланага ўзаро перпендикуляр бўлган иккита уринма ўтказилган. Уриниш нуқталарини туташтирувчи ватарнинг узунлиги 12 см га тенг. Айлана марказидан ватаргача бўлган масофа топилсин.

А) 4; В) 5; С) 6; Д) 8; Е) 3 см.

31. Айлана ташқарисидаги K нуқтадан KA ва KB уринмалар ўтказилган ва улар узунликларининг йиғиндиси 14,8 см га тенг. Кичик AB ёйнинг ихтиёрий C нуқтасидан айланага уринма ўтказилган бўлиб, у KA ва KB уринмаларни D ва E нуқталарда кесиб ўтади. KDE учбурчакнинг периметри топилсин.

А) 13,6; В) 14; С) 15; Д) 15,2; Е) 14,8 см.

32. K нуқтадан айланага KBA ва KDC кесувчилар ўтказилган. AC ёйнинг катталиги $106°20'$, BD ёйнинг катталиги $42°30'$ бўлса, кесувчилар орасидаги бурчак топилсин.

А) $42°24'$; В) $31°55'$; С) $32°40'$; Д) $29°32'$; Е) $36°28'$.

33. K нуқтадан айланага иккита уринма ўтказилган. Уринмалар орасидаги бурчак $60°$ бўлса, уриниш нуқталари орасидаги ёйларнинг катталиклари топилсин.

А) $120°$ ва $240°$; В) $100°$ ва $260°$; С) $90°$ ва $270°$;
Д) $130°$ ва $230°$; Е) $150°$ ва $210°$.

34. Айланага K нуқтадан KBA ва KDC кесувчилар ўтказилган. Агар $KA=20$ см, $KB=18$ см, $KC=24$ см бўлса, KD кесманинг узунлиги топилсин.

А) 16; В) 15; С) 14; Д) 18; Е) 17 см.

35. P нуқтадан айланага PT уринма ва PBA кесувчи ўтказилган. Агар $PT=18$ см ва $PB:BA=4:5$ каби бўлса, кесувчининг ташқи қисми узунлиги топилсин.

А) 14; В) 11; С) 12; Д) 10; Е) 15 см.

36. Айланадаги AB ва CD ватарлар P нуқтада кесишади. Агар $CP-PD=5$ см, $AP=12$ см, $AB=15$ см бўлса, CD ватарнинг узунлиги топилсин.

А) 15; В) 16; С) 18; Д) 13; Е) 14 см.

37. Айлананинг ватари a га тенг. Мос ёйнинг катталиги $120°$ га тенг бўлса, ёйнинг узунлиги топилсин.

A) $\frac{3\sqrt{2}a\pi}{9}$; B) $\frac{2\sqrt{2}a\pi}{9}$; C) $\frac{3a\pi}{9}$; Д) $\frac{2a\pi}{7}$; E) $\frac{2\sqrt{3}a\pi}{9}$.

38. Ёйнинг узунлиги c га тенг ва мос марказий бурчакнинг катталиги $90°$ бўлса, ёйнинг учларини туташтирувчи ватарнинг узунлиги топилсин.

A) $\frac{2\sqrt{2}c}{\pi}$; B) $\frac{3\sqrt{2}c}{\pi}$; C) $\frac{\sqrt{2}c}{\pi}$; Д) $\frac{\sqrt{3}c}{\pi}$; E) $\frac{3\sqrt{3}c}{\pi}$.

39. Ёйнинг радиуси 6 см, унга мос марказий бурчак $120°$ га тенг. Бу ёйдан ясалган янги айлананинг радиуси топилсин.

A) 2,5; B) 3; C) 4; Д) 2; E) 1 см.

40. Айлананинг радиуси 5 см га ортганда, айлананинг узунлиги қанча ортади?

A) 8π; B) 10π; C) 9π; Д) 12π; E) 15π.

41. Доиранинг юзи 49π см^2 бўлса, унга мос айлананинг узунлиги топилсин.

A) 15π; B) 10π; C) 14π; Д) 13π; E) 12π.

42. Доиранинг юзи 16 марта ортса, мос айлананинг узунлиги қандай ўзгаради?

A) 8 марта ортади; B) 16 марта ортади; C) 2 марта ортади; Д) 4 марта камаяди; E) 4 марта ортади.

43. Умумий марказга эга бўлган иккита доиранинг радиуслари 9 ва 14 см. Улар ташкил қилган ҳалқанинг юзи ҳисоблансин.

A) 115π; B) 114π; C) 110π; Д) 116π; E) 112π.

44. Умумий марказга эга бўлган иккита айлананинг узунликлари мос равишда 12π ва 22π см га тенг. Улар ташкил қилган ҳалқанинг юзи ҳисоблансин.

A) 88π; B) 72π; C) 78π; Д) 85π; E) 83π см².

45. Агар ёйнинг ўлчови 120° га ва доиравий сегментнинг радиуси 8 см га тенг бўлса, унинг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{42\pi}{5}-8$; B) $\frac{56\pi}{3}-9$; C) $\frac{48\pi}{\sqrt{2}}-8$; Д) $\frac{64\pi}{3}-16\sqrt{3}$;

E) $\frac{36\pi}{5}-8$ см².

46. Доиравий сегментда ватар 6 см га тенг ва мос марказий бурчакнинг катталиги 60° бўлса, сегментнинг юзи ҳисоблансин.

A) 16π; B) $12\pi+9\sqrt{3}$; C) $10\pi+\sqrt{3}$; Д) $12\pi-\sqrt{3}$;

E) $6\pi-9\sqrt{3}$ см².

47. Радиуси 9 см бўлган доира марказининг бир томонида ўзаро параллел бўлган иккита ватар ўтказилган. Ватарларга мос келган ёйлар катталиклари 60° ва 120° бўлса, камарнинг юзи ҳисоблансин.

A) 34π; B) $\frac{27}{2}\pi$; C) 36π; Д) 32π; E) $\frac{29}{2}\pi$ см².

48. Агар доиравий сектор марказий бурчагининг катталиги 60° ва радиуси 13 см бўлса, унинг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{135}{8}\pi$; B) $\frac{144}{7}\pi$; C) 169π; Д) $\frac{169}{6}\pi$; E) $\frac{169}{7}\pi$ см².

49. Радиуси 4 см га тенг бўлган доира сегменти марказий бурчагининг катталиги 120° бўлса, сегментнинг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{18\pi-8\sqrt{3}}{7}$; B) $\frac{16\pi-12\sqrt{3}}{3}$; C) $\frac{13\pi-4\sqrt{3}}{3}$;

Д) $\frac{15\pi-2\sqrt{3}}{3}$; E) $\frac{16\pi-8\sqrt{3}}{5}$ см².

50. Агар доиранинг юзи радиуслари 5 см ва 7 см бўлган доиралар юзларининг йиғиндисига тенг бўлса, доиранинг юзи ҳисоблансин.

A) 74π; B) 72π; C) 64π; Д) 88π; E) 84π $см^2$.

4-§. ТЎРТБУРЧАКЛАР

4.1. Асосий тушунчалар ва хоссалар

I. Параллелограмм. Қарама-қарши томонлари параллел бўлган тўртбурчак *параллелограммдир.*

У қуйидаги хоссаларга эга:

1. Параллелограммнинг қарама-қарши томонлари тенг: $AB=CD$, $BC=AD$.

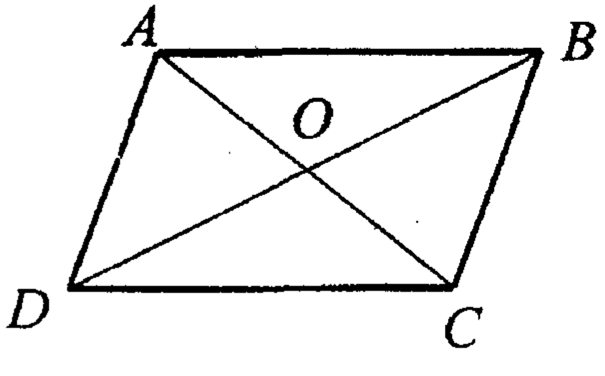
2. Параллелограммнинг қарама-қарши бурчаклари тенг: $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$.

3. Бир томонга ёпишган бурчакларнинг йиғиндиси 180° га тенг: $\angle A+\angle D=180°$, $\angle B+\angle C=180°$, $\angle C+$ $+\angle D=180°$, $\angle A+\angle B=180°$.

4. Параллелограммнинг диагонали уни иккита тенг учбурчакка бўлади: $\Delta ABC=\Delta ADC$, $\Delta ABD=\Delta BCD$.

5. Параллелограммнинг диагоналлари кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади: $AO=OC$, $BO=OD$.

6. Параллелограмм диагоналларининг кесишиш нуқтаси O параллелограммнинг симметрия марказидир.



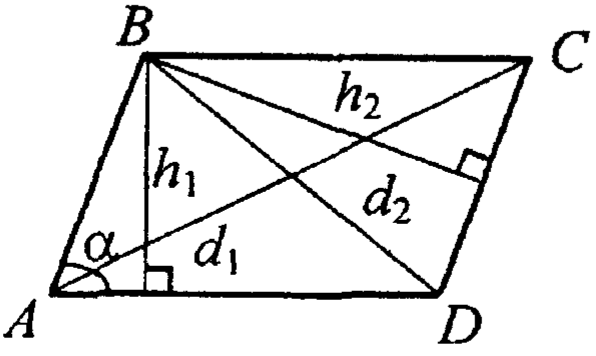
4.2-чизма.

7. Параллелограмм диагоналлари квадратларининг йиғиндиси унинг ҳамма томонлари квадратларининг йиғиндисига тенг:

$$AC^2+BD^2=2(AB^2+AD^2).$$

8. Параллелограммнинг юзини ҳисоблаш формулалари (4.2-чизма):

1) $S=a\cdot h_1=b\cdot h_2$, (4.1)



4.2-чизма.

h_1, h_2 — параллелограммнинг баландликлари;

$$2)\ S=a\cdot b\cdot \sin\alpha, \qquad (4.2)$$

α — бу a ва b қўшни томонлар орасидаги бурчак;

$$3)\ S=0{,}5\cdot d_1\cdot d_2\cdot \sin\gamma, \qquad (4.3)$$

бунда d_1 ва d_2 — диагоналлар, γ — диагоналлар орасидаги бурчак.

II. Тўғри тўртбурчак. *Тўғри тўртбурчак* томонлари ўзаро перпендикуляр бўлган параллелограммдир (4.3-чизма).

Тўғри тўртбурчак учун параллелограммнинг барча хоссалари ўринли. Унинг қўшимча хоссалари қуйидагича:

9. Тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари ўзаро тенг: $AC=BD$.

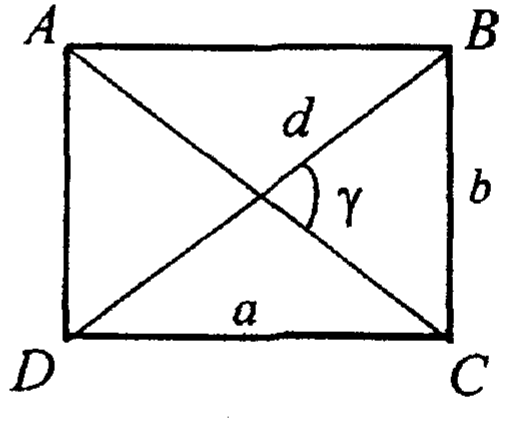
10. Тўғри тўртбурчакнинг юзини ҳисоблаш формулалари (4.3-чизма):

$$S=ab, \qquad (4.4)$$

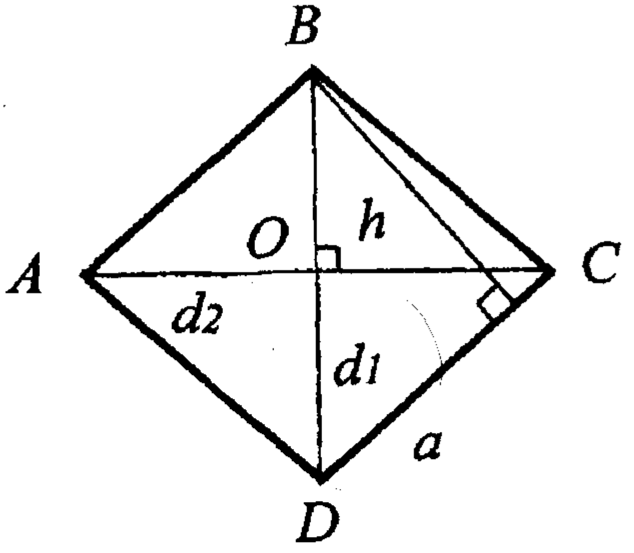
бунда a, b — тўғри тўртбурчакнинг томонлари;

$$S=0{,}5\cdot d^2\cdot \sin\gamma, \qquad (4.5)$$

бунда d — диагонал, γ — диагоналлар орасидаги бурчак.



4.3-чизма.



4.4-чизма.

III. Ромб. Томонлари тенг бўлган параллелограмм *ромбдир* (4.4-чизма). Параллелограммнинг барча хоссалари ромб учун ҳам ўринли. Унинг ўзига хос хоссалари қуйидагилар:

11. Ромбнинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр:

$$d_1=AC\perp BD=d_2.$$

12. Ромбнинг юзини ҳисоблаш формулалари:

$$S=ah,$$

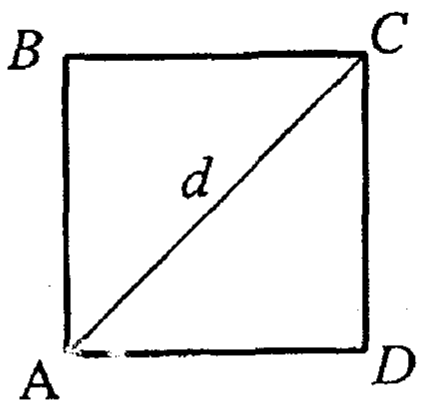
бунда h — ромбнинг баландлиги;

$$S=0,5d_1d_2,$$

бунда d_1, d_2 — диагоналлар.

IV. Квадрат. Томонлари тенг бўлган тўғри тўртбурчак *квадратдир* (4.5-чизма). Квадрат учун параллелограмм, тўғри тўртбурчак, ромбнинг барча хоссалари ўринли. Квадратнинг юзи: $S=a^2$, $S=\frac{1}{2}d^2$ (4.8) формулалар бўйича ҳисобланади.

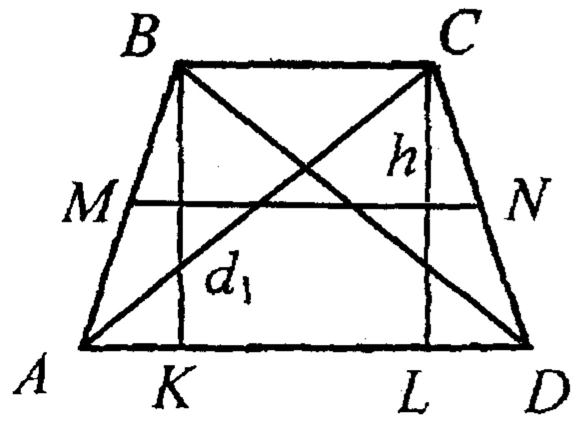
V. Трапеция. Фақат иккита томони параллел бўлган тўртбурчак *трапециядир* (4.6-чизма).



4.5-чизма.

Параллел бўлган томонлар трапециянинг *асослари*, параллел бўлмаган томонлар эса трапециянинг *ён томонлари* дейилади (4.6-чизмада AD ва BC — асослар, AB ва CD — ён томонлар).

Агар трапециянинг ён томонлари тенг бўлса ($AB=CD$), у *тенг ёнли* трапеция дейилади. Трапециянинг учидан қарама-қарши асосга перпендикуляр қилиб ўтказилган кесма трапециянинг *баландлиги* дейилади: BK, CL — баландликлар.



4.6-чизма.

Трапецияда AC, BD — диагоналлардир (4.6-чизма).

Трапеция ён томонларининг ўрталарини туташтирувчи кесма унинг *ўрта чизиғи* дейилади. Агар $MA=MB$, $NC=ND$ бўлса, MN ўрта чизиқдир.

14. Трапециянинг ўрта чизиғи унинг асосларига параллел ва улар йиғиндисининг ярмига тенг: $MN \| AD, MN \| BC,\ MN=\frac{BC+AD}{2}$.

15. Трапециянинг юзини ҳисоблаш формулалари:

$$1)\ S=\frac{a+b}{2}\cdot h, \qquad (4.9)$$

бунда a, b — асосларнинг узунликлари, h — баландлик узунлиги;

$$2)\ S=\frac{1}{2}d_1\, d_2 \sin\gamma,$$

бунда d_1, d_2 — диагоналлар узунликлари, γ — диагоналлар орасидаги бурчак.

4.2. Мавзу бўйича масалалар

1. Параллелограммнинг бир томони иккинчи томонидан 4 марта катта, периметри $20\sqrt{2}$ см, ўткир бурчаги 45° га тенг. Параллелограммнинг юзи ҳисоблансин.

A) $8\sqrt{2}$; B) $32\sqrt{2}$; C) 16; Д) 8; E) $16\sqrt{2}$ см^2.

2. Параллелограммнинг томонлари нисбати 3:5 каби, периметри 48 см, ўтмас бурчаги 120° га тенг. Параллелограммнинг юзи ҳисоблансин.

A) 67,5; B) $\frac{135\sqrt{2}}{2}$; C) 48; Д) $67,5\sqrt{3}$; E) $48\sqrt{3}$ см^2.

3. Ромбнинг битта диагонали 10% орттирилиб, иккинчи диагонали эса 15% камайтирилса, ромбнинг юзи қандай ўзгаради?

A) 5% ортади; B) ўзгармайди; C) 5% камаяди;
Д) 5,65% камаяди; E) 6,5% ортади.

4. $ABCD$ ромбнинг периметри 14 га тенг. Ромб томонларининг ўрталари туташтирилса, янги $A_1B_1C_1D_1$ тўртбурчак ҳосил бўлади. $A_1B_1C_1D_1$ тўртбурчак томонларининг ўрталари янги $A_2B_2C_2D_2$ тўртбурчакнинг учларидир. $A_2B_2C_2D_2$ тўртбурчакнинг периметри топилсин.

A) 7; B) 10; C) 8; Д) 6; E) 9.

5. Иккита ўхшаш ромб учун мос томонлар нисбати 3 га тенг. Улар юзларининг нисбати нимага тенг?

A) 7; B) 8; C) 10; Д) 11; E) 9.

6. $ABCD$ квадратнинг A учидан AD ва AB тўғри чизиқлар ўтказилган. Квадратнинг C учидан BD диагоналга параллел бўлган EF тўғри чизиқ ўтказилган. Агар квадратнинг юзи 3 га тенг бўлса, ΔAFE учбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

A) 5; B) 6; C) 7; Д) 9; E) 8.

7. Параллелограммнинг периметри 54 см, томонларининг бири иккинчисидан 3 см катта. Параллелограммнинг кичик томони узунлиги топилсин.

A) 10; B) 14; C) 12; Д) 16; E) 15.

8. Тўғри тўртбурчакнинг диагонали $AC=15$ см, томони $AD=12$ см. Тўғри тўртбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

А) 108; В) 116; С) 100; Д) 121; Е) 225 см^2.

9. Ромбнинг томони 5 см, битта диагонали 8 см бўлса, унинг иккинчи диагонали узунлиги топилсин.

А) 14; В) 7; С) 6; Д) 8; Е) 5 см.

10. Параллелограммнинг юзи 180 см^2, баландликлари 10 см ва 15 см бўлса, унинг яримпериметри топилсин.

А) 40; В) 25; С) 45; Д) 30; Е) 35 см.

11. Параллелограммда A бурчакнинг биссектрисаси қаршисидаги BC томонни узунликлари a ва b бўлган иккита кесмага ажратади. Параллелограммнинг периметри топилсин.

А) $2(a+b)$; В) $2a+3b$; С) $2a+4b$; Д) $3a+2b$; Е) $4a+2b$.

12. Ромбнинг периметри 16 см, баландлиги 2 см га тенг. Ромбнинг бурчаклари топилсин.

А) 140° ва 40°; В) 150° ва 30°; С) 120° ва 60°;
Д) 100° ва 80°; Е) 90° ва 90°.

13. Параллелограммнинг диагоналлари 17 см ва 19 см, битта томони эса 10 см бўлса, параллелограммнинг иккинчи томони узунлиги топилсин.

А) 17; В) 15; С) 16; Д) 18; Е) 8 см.

14. Тенг ёнли трапецияда ён томони $4\sqrt{2}$ га, кичик асос 4 га тенг. Трапециянинг диагонали ён томони билан 30°, катта асос билан эса α бурчакни ташкил қилади, α бурчак топилсин.

А) 60°; В) 35°; С) 30°; Д) 50°; Е) 45°.

15. Тенг ёнли трапециянинг асослари 4,2 ва 5,4 га, кичик асосидаги бурчаги 135° га тенг. Трапециянинг юзи ҳисоблансин.

А) 24,8; В) 9,6; С) 16,8; Д) 4,8; Е) 2,88.

16. Агар тенг ёнли трапециянинг асослари 10 см ва 26 см, диагоналлари эса ён томонларига перпендикуляр бўлса, унинг юзи ҳисоблансин.

А) 225; В) 218; С) 216; Д) 220; Е) 214 см^2.

17. Трапециянинг битта бурчаги 30°, ўрта чизиғи 10 см, битта асоси 8 см бўлиб, ён томонлари давом эттирилганда тўғри бурчак остида кесишади. Трапециянинг кичик ён томони топилсин.

А) 2; В) 3; С) 5; Д) 1; Е) 4 см.

18. Параллелограммнинг томонлари a ва b, ўткир бурчаги эса α га тенг. Ҳамма бурчакларнинг биссектрисалари ўтказилганда улар кесишиб, тўртбурчак ҳосил қилади. Шу тўртбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{1}{2}(a+b)^2$; В) $(a+b)^2 \sin\alpha$; С) $ab \sin\alpha$;

Д) $\frac{1}{2}(a-b)^2 \sin\alpha$; Е) $\frac{1}{2}(a+b)^2 \sin\alpha$.

19. Трапециянинг асосларига параллел бўлган тўғри чизиқ унинг диагоналлари кесишган нуқтадан ўтади. Агар трапециянинг асослари m ва n га тенг бўлса, тўғри чизиқнинг ён томонлар орасида ётган кесмаси узунлиги топилсин.

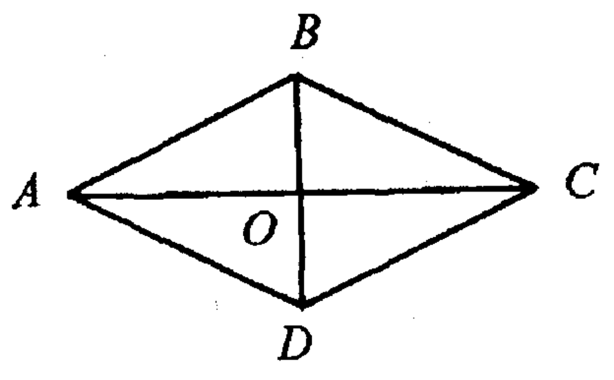
А) $\frac{m-n}{m+n}$; В) $\frac{2mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$; С) $\frac{\sqrt{2mn}}{m+n}$; Д) $\frac{mn}{m-n}$; Е) $\frac{2mn}{m+n}$.

20. Тенг ёнли трапециянинг асослари 15 см ва 49 см, битта бурчаги 60° га тенг. Трапециянинг периметри топилсин.

3. Берилган. $ABCD$ — ромб, $AC=d_1$, $BD=d_2$ — диагоналлар, d_1 10% орттирилиб, d_2 15% камайтирилса.

S_{ABCD} ўзгариши аниқлансин (4.3.3-чизма).

Ечилиши. Ромбнинг юзини (4.7) формула бўйича ҳисоблаш мақсадга мувофиқ, чунки унинг диагоналлари берилган. 1% соннинг 0,01 қисмига тенг. Шунинг учун янги ромбнинг диагоналлари $d_1+0,1d_1=1,1d_1$ ва $d_2-0,5d_2=0,85d_2$ га тенг бўлади. Янги ромбнинг юзи $S_1=\frac{1}{2}\cdot 1,1d_1\cdot 0,85d_2=1,1\cdot 0,85S=93,5S$. Демак, ромбнинг юзи $100\%-93,5\%=6,5\%$ га камаяди.



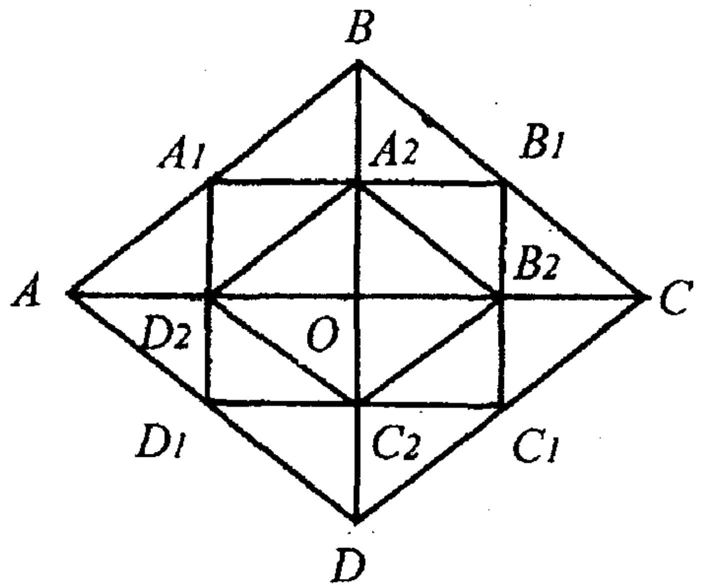
4.3.3-чизма.

Жавоби: Е).

4 Берилган. $ABCD$ — ромб, $P=14$ см, A_1,B_1,C_1,D_1 — ромб томонларининг ўрталари, A_2,B_2,C_2,D_2 — янги ромбнинг учлари.

$P_{A_2B_2C_2D_2}$ топилсин (4.3.4-чизма).

Ечилиши. Ромбнинг ҳамма томонлари тенг ва $AB=a$ деб белгиласак, унинг периметри $4a$ га тенг бўлади. Шартга асосан $4a=14$ ва



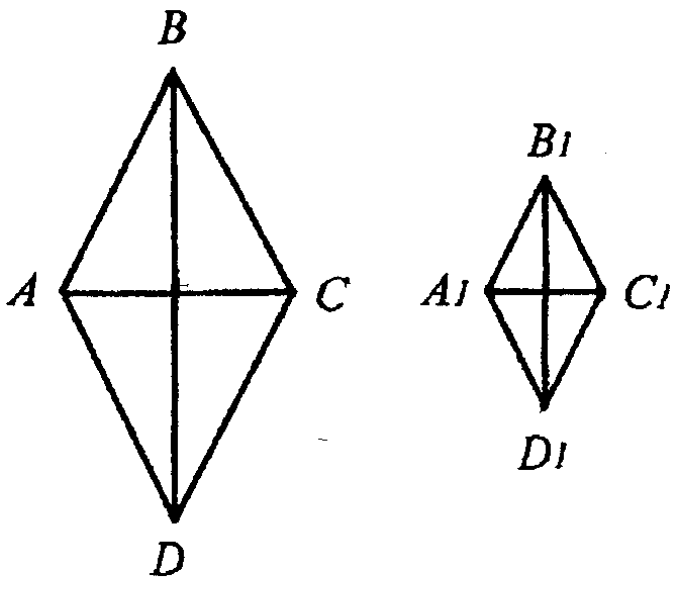
4.3.4-чизма.

$a=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$. A_1, B_1 ўрта нуқталар бўлганлигидан, A_1B_1 кесма ΔABC нинг ўрта чизиғидир. Ромбнинг диагоналлари — унинг симметрия ўқларидир. Шунинг учун A_1B_1 кесманинг A_2 ўрта нуқтаси BD диагоналда ётади ва $BA_2=A_2O$. Шунга ўхшаш, $CB_2=B_2O$, $DC_2=C_2O$, $AD_2=D_2O$ муносабатларни оламиз. Демак, A_2B_2 — ΔBOC нинг ўрта чизиғидир ва ўрта чизиқнинг хоссаларига кўра, $A_2B_2=\frac{1}{2}BC=\frac{7}{4}$ ва $A_2B_2\|BC$. Энди $A_2B_2C_2D_2$ тўртбурчакнинг периметрини ҳисобласак, $P_{A_2B_2C_2D_2}=4\frac{7}{4}=7$ см бўлади.

Жавоби: А).

5. Берилган. $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ — ромблар, $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$, $AB{:}A_1B_1=3$.

$S{:}S_1$ топилсин (4.3.5-чизма).



4.3.5-чизма.

Ечилиши. Ўхшаш кўпбурчаклар юзларининг нисбати мос томонлар нисбатининг квадратига тенг. Шунинг учун:

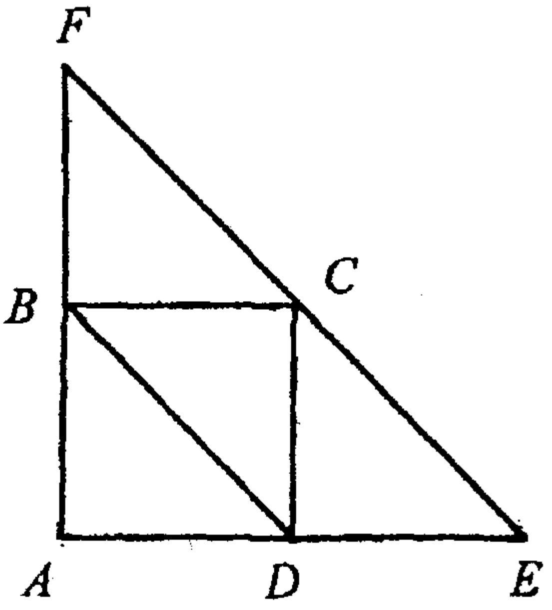
$$\frac{S}{S_1}=\left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2=3^2=9.$$

Жавоби: Е).

6. Берилган. $ABCD$ — квадрат, $S_{KB}=3$, $FCE \parallel BD$.

$S_{\Delta FEA}$ ҳисоблансин (4.3.6-чизма).

Е ч и л и ш и. Квадратнинг томони $AB=a$ бўлса, унинг юзи $S=a^2$ ва берилганига кўра $a^2=3$. Квадратнинг томони $a=\sqrt{3}$ ва диагонали $BD=\sqrt{2a^2}=\sqrt{6}$, $FE \| BD$ бўлгани учун, BD кесма ΔAFE нинг ўрта чизиғи бўлади ва $FE=2 \cdot BD=$ $=2\sqrt{6}$, $AF=2 \cdot AB=2\sqrt{3}$, $AE=AF$. У ҳолда



4.3.6-чизма.

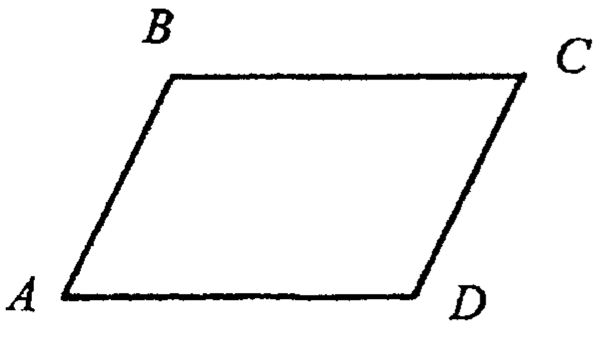
$$S_{\Delta AEF}=\frac{1}{2}AE \cdot AF=\frac{1}{2}AF^2 \text{ ёки } S_{\Delta AEF}=\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3=6.$$

Жавоби: B).

7. Б е р и л г а н. $ABCD$ — параллелограмм, $P=54$ см, $AD=AB+3$ см.

AB т о п и л с и н (4.3.7.-чизма).

Е ч и л и ш и. Периметрнинг таърифига асосан, $P=2(AB+AD)$. AD ва P нинг ўрнига маълум миқдорларни қўямиз: $54=2(AB+AB+3)$, $2AB+$ $+3=27$, $2AB=24$. Параллелограммнинг кичик томони $AB=12$ см.

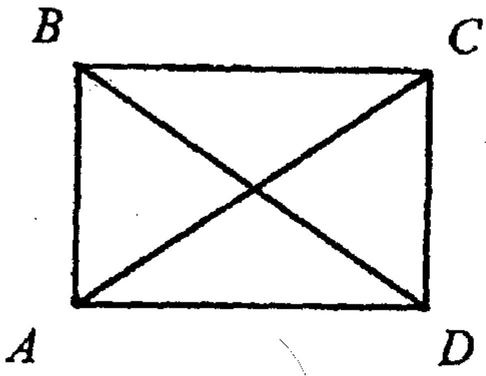


4.3.7.-чизма.

Жавоби: C).

8. Б е р и л г а н. $ABCD$ — тўғри тўртбурчак, $AC=15$ см, $AD=12$ см.

S_{ABCD} ҳ и с о б л а н с и н (4.3.8-чизма).



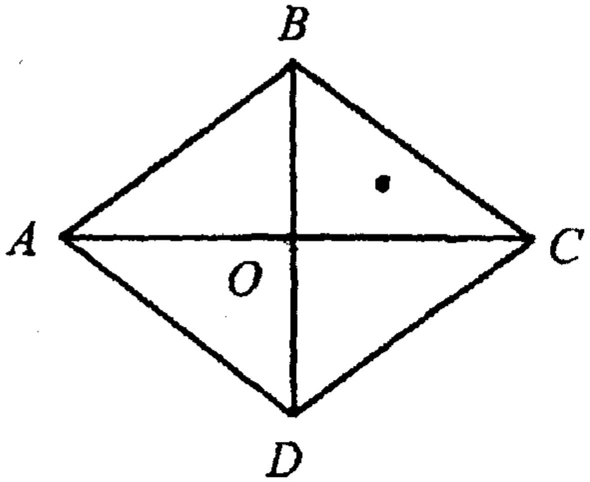
4.3.8-чизма.

Ечилиши. Юзни ҳисоблашда (4.4) формуладан фойдаланамиз: $S=AD\cdot AB$. Демак, тўғри тўртбурчакнинг AD га қўшни бўлган иккинчи AB томонини топиш керак. ΔACD тўғри бурчакли ва $CD=AB$. Пифагор теоремасидан (2-§, 7-хосса) фойдаланамиз:
$AB=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{15^2-12^2}=\sqrt{(15-12)(15+12)}=$
$=9$ см. Демак, $S=12\cdot 9=108$ см^2.

Жавоби: А).

9. Берилган. $ABCD$ — ромб, $AB=5$ см, $BD=8$ см.

AC топилсин (4.3.9-чизма).



4.3.9-чизма.

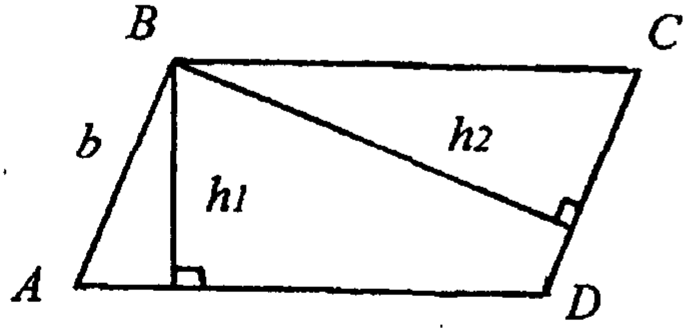
Ечилиши. Берилганлардан, $BO=4$ см ва Пифагор теоремасига (2-§, 7-хосса) асосан, ΔAOB дан AO ни топамиз: $AO=$
$=\sqrt{AB^2-BO^2}=\sqrt{5^2-4^2}=$
$=3$ см. Иккинчи диагонал $AC=2\cdot AO=6$ см бўлади.

Жавоби: С).

10. Берилган. $ABCD$ — параллелограмм, $h_1=10$ см, $h_2=15$ см, $S=180$ см^2.

$\frac{1}{2}P_{ABCD}$ топилсин (4.3.10-чизма).

Ечилиши. Параллелограммнинг томонлари $AD=a$, $AB=b$ бўлса, периметри $P=2(a+b)$. Параллелограммнинг юзи (4.1) формуладан ҳисобланади: $S=a\cdot h_1$ ва $S=b\cdot h_2$. Бу тенгликдан a ва b ни топамиз: $180=10\cdot a$, $a=18$ см, $180=15\cdot b$, $b=12$ см. Параллелограммнинг яримпериметрини топамиз: $\frac{1}{2}P=2(9+6)=30$ см.

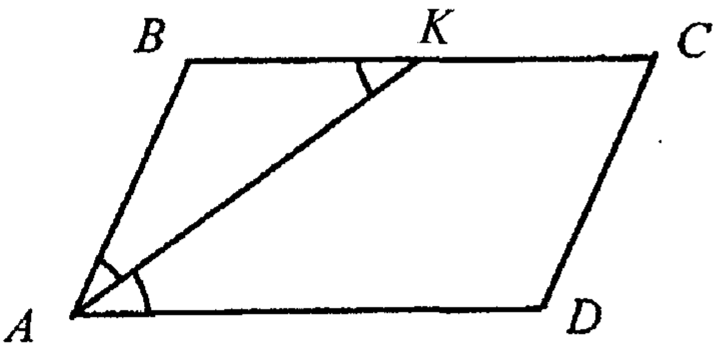


4.3.10-чизма.

Жавоби: Д).

11. Берилган. $ABCD$ — параллелограмм, AK — биссектриса, $\angle BAK=\angle KAD$, $BK=a$, $KC=b$.

P_{ABCD} топилсин (4.3.11-чизма).



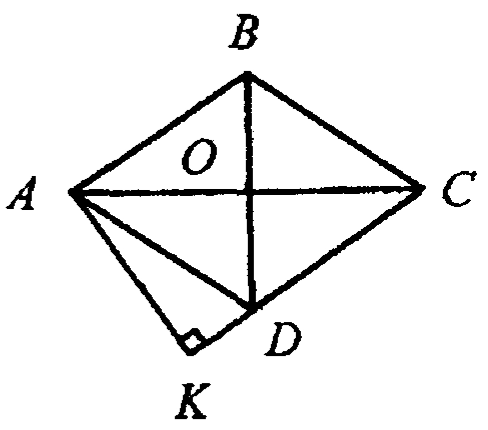
4.3.11-чизма.

Ечилиши. Периметрнинг таърифидан, $P=2(AD+$ $+AB)$. Берилган шартга асосан, $AD=BC=BK+KC=$ $=a+b$. AD ва BC тўғри чизиқлар учинчи AK тўғри чизиқ билан кесишган. У ҳолда ички алмашинувчи бурчаклар тенг: $\angle BKA=\angle KAD$. AK биссектриса бўлгани учун, $\angle BAK=\angle KAD$. Шунинг учун $\angle BAK=\angle BKA$ ва шу сабабли ΔABK тенг ёнли, яъни $AB=BK=a$. У ҳолда параллелограммнинг периметри $P=2(a+a+b)=4a+2b$ бўлади.

Жавоби: Е).

12. Б е р и л г а н. $ABCD$ — ромб, $P=16$ см, $AK=h=$ $=2$ см, $AK \perp DC$.

$\angle A$, $\angle D$ т о п и л с и н (4.3.12-чизма).



4.3.12-чизма.

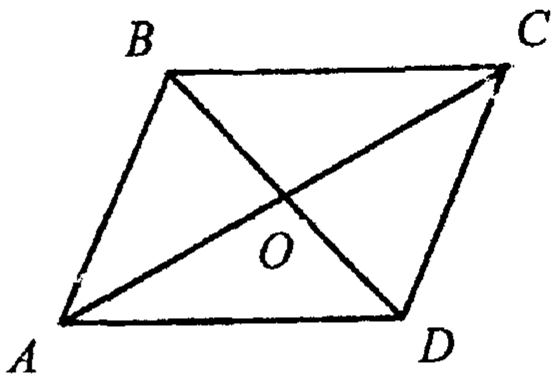
Е ч и л и ш и. Ромбнинг ҳамма томонлари тенг. $AB=a$ бўлса, $P=4a=16$ тенгликдан $4a=16$, $a=4$ эканлигини оламиз: ΔADK тўғри бурчакли бўлганлигидан, $\angle ADK=\alpha$ бўлса, $\sin\alpha=\frac{h}{a}=\frac{1}{2}$ ва $\alpha=30°$ эканлиги келиб чиқади. У ҳолда $\angle CDA=180°-30°=150°$. Демак, ромбнинг ўткир бурчаклари 30°, ўтмас бурчаклари эса 150° бўлади.

Жавоби: В).

13. Б е р и л г а н. $ABCD$ — параллелограмм, $AB=$ $=10$ см, $AC=19$ см, $BD=17$ см.

AD т о п и л с и н (4.3.13-чизма).

Е ч и л и ш и. 7-хоссага мувофиқ, $AC^2+BD^2=2(AB^2+$ $+AD^2)$. Бу тенгликдан $AD^2=\frac{AC^2+BD^2-2AB^2}{2}$ ёки



4.3.13-чизма.

$$AD^2=\frac{1}{2}(17^2+19^2-2\cdot10^2)=$$

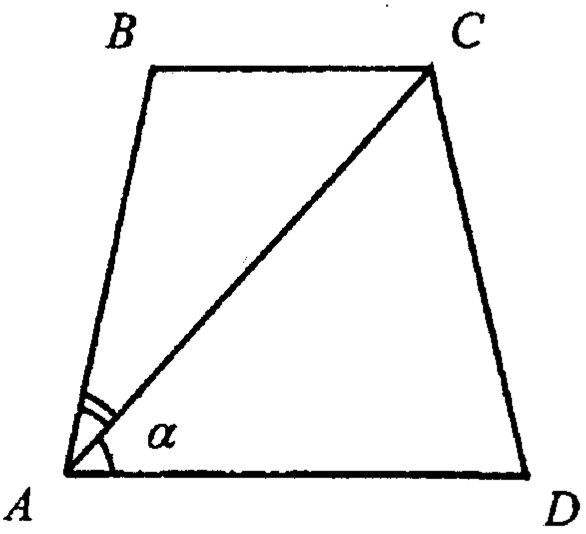
$$=\frac{1}{2}(289+361-200)=225\ \text{см}^2,$$

$AD=15$ см натижани оламиз.

Жавоби: В).

14. Б е р и л г а н. $ABCD$ — трапеция, $BC=4$, $AB=CD=4\sqrt{2}$, $\angle CAB=30°$, $\angle CAD=\alpha$.

α т о п и л с и н (4.3.14-чизма).



4.3.14-чизма.

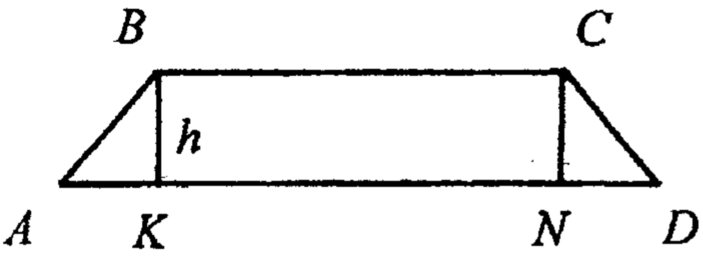
Е ч и л и ш и. Трапецияда AD, BC асослар ўзаро параллел, AC диагонал эса уларни кесиб ўтади. Шунинг учун ҳосил бўлган ички алмашинувчи бурчаклар ўзаро тенг. $\angle BCA=\angle CAD=\alpha$. ΔABC да иккита томони $BC=4$, $AB=4\sqrt{2}$ ва қаршисидаги бурчаклар мос равишда 30° ва α. Синуслар теоремасидан (2-§, 8-хосса) фойдаланамиз: $\frac{AB}{\sin\alpha}=\frac{BC}{\sin 30°}$, $\frac{4\sqrt{2}}{\sin\alpha}=\frac{4}{0{,}5}$, $\sin\alpha=$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ва $\alpha=45°$.

Жавоби: B).

15. Б е р и л г а н. $ABCD$ — трапеция, $AB=CD$, $BC=4{,}2$, $AD=5{,}4$, $\angle ABC=135°$.

S_{ABCD} ҳ и с о б л а н с и н (4.3.15-чизма).

Е ч и л и ш и. Агар трапециянинг асослари $AD=a$, $BC=b$, баландлиги $BK=h$ га тенг бўлса, унинг юзи (4.9) формула бўйича ҳисобланади. B ва C учларидан трапециянинг асосига



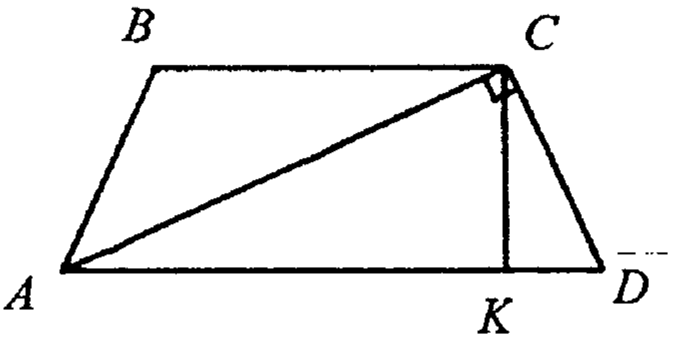
4.3.15-чизма.

перпендикулярлар ўтказсак, $BK=CN=h$ параллел тўғри чизиқлар орасидаги масофа $KN=BC=b$ бўлади. $\Delta ABK=\Delta CND$, чунки уларнинг гипотенузалари ва биттадан катетлари тенг. Шунинг учун $AK=ND$, $\angle BAK=\angle CND=45°$, чунки ўтмас бурчаклар 135° га тенг. Демак, тўғри бурчакли ABK тенг ёнли ва $AK=BK$. Лекин $AK=0{,}5(AD-BC)=0{,}5(5{,}4-4{,}2)=0{,}6$. Шунинг учун (4.9) формулага асосан, $S=\frac{4{,}2+5{,}4}{2}\cdot 0{,}6=2{,}88$.

Жавоби: Е).

16. Берилган. $ABCD$ — трапеция, $AB=CD$, $AC\perp CD$, $AD=26$, $BC=10$.

S_{ABCD} ҳисоблансин (4.3.16-чизма).



4.3.16-чизма.

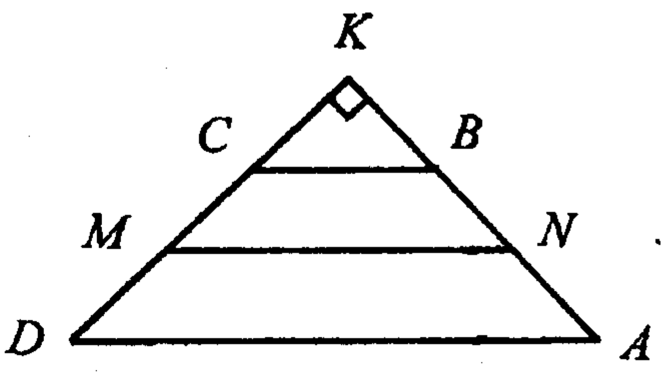
Ечилиши. Юзни ҳисоблашда (4.9) формуладан фойдаланамиз. Трапеция тенг ёнли бўлгани учун $DK=\frac{26-10}{2}=8$ ва $AK=26-8=18$. ΔACD тўғри бурчакли ва тўғри бурчак учидан ўтказилган баландликнинг хоссасидан (2-§) фойдаланамиз: $h^2=AK\cdot KD=8\cdot 18=9\cdot 16$, $h=3\cdot 4=12$. Энди трапециянинг юзини ҳисоблаймиз: $S=\frac{26+10}{2}\cdot 12=36\cdot 6=216$.

Жавоби: С).

17. Берилган. $ABCD$ — трапеция, MN — ўрта чизиқ, $MN=10$ см, $BC=b=8$ см, $\angle CDA=30°$, $(ABK)\perp(DCK)$.

AB кичик ён томони топилсин (4.3.17-чизма).

Ечилиши. 14-хоссага мувофиқ: $MN=(a+b)/2$. Шунинг учун $a=2\cdot 10-8=12$. ΔAKD тўғри бурчакли ва унинг битта ўткир бурчаги 30° га тенг: $KA=0{,}5\cdot 12=6$. $BC\parallel AD$ бўлгани учун $\Delta BKC\sim\Delta AKD$ ($\angle K$—умумий). Ўхшаш учбурчакларнинг хоссасига асосан (2-§, (2.4) формула): $\frac{AK}{BK}=\frac{AD}{BC}$, $\frac{AB+BK}{BK}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$.



4.3.17-чизма.

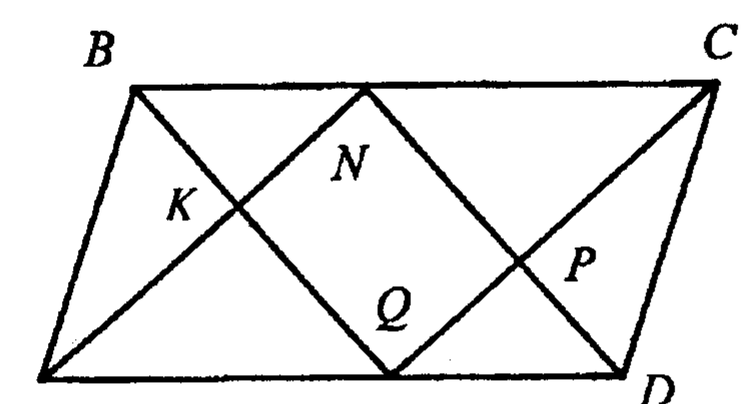
Лекин ΔBKA да $\angle K=90°$, $\angle KCB=30°$ ва шунинг учун $BK=\frac{BC}{2}=\frac{1}{2}\cdot 8=4$ см. Энди AB ни топамиз: $\frac{AB+4}{4}=\frac{3}{2}$, $2AB+8=12$, $2AB=4$, $AB=2$ см.

Жавоби: А).

18. Берилган. $ABCD$—параллелограмм, $AD=a$, $AB=b$, $\angle BAD=\alpha$, AK, BK, CP, DP— биссектрисалар.

S_{KNPQ} ҳисоблансин (4.3.18-чизма).

Ечилиши. Параллелограммнинг 3-хоссасидан фойдаланамиз, яъни унинг бир томонига ёпишган бурчакларининг йиғиндиси 180°га тенг. Бурчакларнинг биссектрисалари ўтказилса, ярим бурчакларнинг йиғиндиси 90° га



4.3.18-чизма.

тенг бўлади ва шу билан $\angle BKA=90°$ бўлишини кўрамиз. Демак, $KNPQ$ тўғри тўртбурчак ва унинг юзи (4.4) формуладан топилади: $S=KN\cdot KQ$, $\angle BAD=\alpha$ бўлса, $\angle KAD=\frac{\alpha}{2}$ ва $\angle CBD=90°-\frac{\alpha}{2}$.

У ҳолда $KN=(a-b)\sin\frac{\alpha}{2}$. Ҳақиқатан, $BC\|AD$ бўлгани учун $\angle FAD=\angle BFA=\frac{\alpha}{2}=\angle BAF$. Демак, ΔABF тенг ёнли ва $BF=AB=b$. Шунга ўхшаш, $KD=b$ ва $AK=AD-$ $-KD=a-b$ бўлишини кўрамиз ва $MQ=(a-b)\sin(90°-\frac{\alpha}{2})$ эканлигини оламиз. Энди юзини ҳисобласак:

$$S_{MNPQ}=(a-b)\sin\frac{\alpha}{2}\,(a-b)\sin(90°-\frac{\alpha}{2})=$$

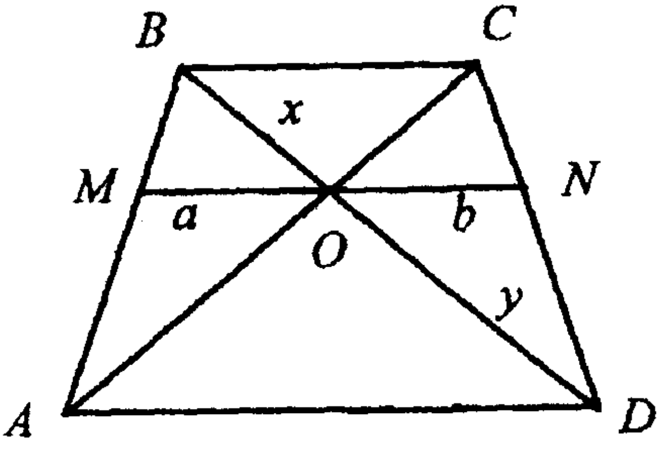
$$=\frac{1}{2}(a-b)^2\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(a-b)^2\sin\alpha.$$

Жавоби: D).

19. Берилган. $ABCD$ — трапеция, $AD=m$, $BC=n$, $AC\cap BD=O$, $(MON)\|AD$.

MN топилсин (4.3.19- чизма).

Ечилиши. Трапециянинг AC ва BD диагоналлари O нуқтада кесишган бўлсин ва $BO=x$, $OD=y$, $MO=a$, $ON=b$ деб белгилаймиз. Трапециянинг диагоналлари кесишиши натижасида ҳосил бўлган ΔAOD ва ΔBOC лар ўхшаш, яъни $\Delta AOD \sim \Delta BOC$ ($\angle BOC=\angle AOD$ — вертикал бурчаклар, $\angle CBD=\angle ADB$ — ички алмашинувчи бурчак-



4.3.19- чизма.

лар бўлгани учун), уларнинг мос томонлари пропорционал бўлади: $m:y=n:x$ ёки $y:x=m:x$.

Иккинчи томондан, $\Delta ABD \sim \Delta MBO$ ($AD \| MO$, $\angle ABD$ — умумий бўлгани учун) ва уларда ҳам мос томонлар пропорционал, яъни $a:m=x:(x+y)$ ёки $a=m\cdot 1:(1+y:x)=m:(1+m:n)=mn:(m+n)$. Учинчидан, $\Delta BCD \sim \Delta OND$ ($ON \| BC$, $\angle D$ — умумий бўлгани учун) ва уларда мос томонлар пропорционал бўлади, яъни $b:n=y:x+y$, $b=n\cdot \frac{1}{x/y+1}=\frac{m\cdot n}{m+n}$. У ҳолда, $MN=a+b=$
$=\frac{m\cdot n}{m+n}+\frac{m\cdot n}{m+n}=\frac{2mn}{m+n}$.

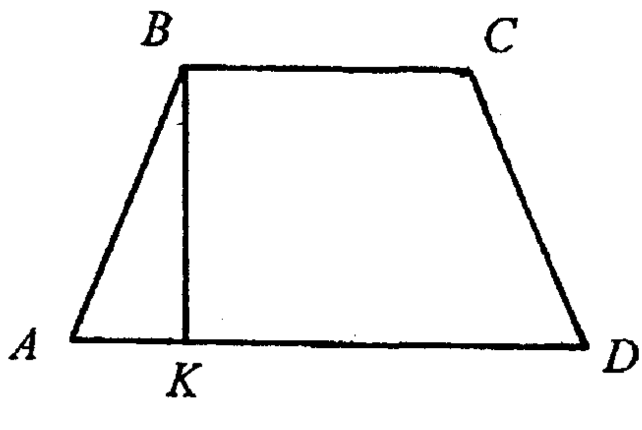
Жавоби: Е).

Бу ердан трапеция диагоналларининг кесишиш нуқтасидан ўтувчи ва унинг асосларига параллел бўлган кесма шу кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади, деган хулоса келиб чиқади.

20. Берилган. $ABCD$ — трапеция, $AB=CD$, $BC=15$ см, $AD=49$ см, $\angle BAD=60°$.

P_{ABCD} топилсин (4.3.20-чизма).

Ечилиши. Таърифга кўра, $P=AD+BC+2AB$. B учидан BK баландлик ўтказамиз. Трапеция тенг ёнли бўлгани учун, $AK=$ $=\frac{49-15}{2}=17$ см. Тўғри бурчакли ΔABK нинг битта ўткир бурчаги $60°$ бўлса, $\angle ABK=30°$ бўлади. $30°$ ли бурчак қаршисидаги катет гипотенузанинг ярмига тенг бўлганлиги-



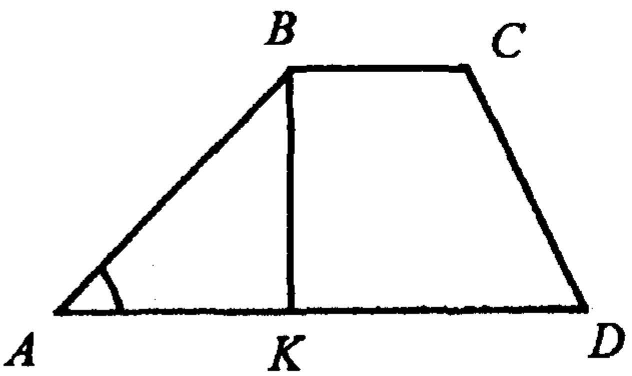
4.3.20-чизма.

дан, $AB=2AK=2\cdot17=34$ см. Энди периметрни ҳисоблаймиз: $P=15+49+2\cdot34=132$ см.

Жавоби: Д).

21. Берилган. $ABCD$ — трапеция, $BC=28$ см, $AD=64$ см, $AB=42$ см, $\angle BAD=30°$.

S_{ABCD} ҳисоблансин (4.3.21-чизма).



4.3.21-чизма.

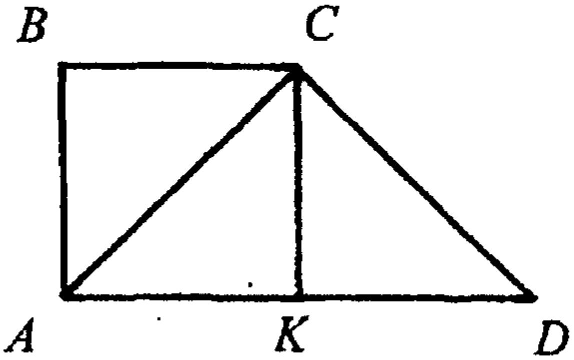
Ечилиши. Агар $BK=h$ трапециянинг баландлиги бўлса, унинг юзи (4.9) формула бўйича ҳисобланади:

$$S=\frac{BC+AD}{2}\cdot h=$$
$$=\frac{28+64}{2}\cdot h=46h.$$

ΔABK — тўғри бурчакли ва $BAK=30°$ бўлгани учун $h=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\cdot42=21$ см ва, демак, $S=46\cdot21=$ $=966$ см^2.

22. Берилган. $ABCD$ — трапеция, $\angle BAD=90°$, $AC=15$ см, $AC\perp CD$, $AB=12$ см.

AD топилсин (4.3.22-чизма).



4.3.22-чизма.

Ечилиши. ΔABC тўғри бурчакли ва Пифагор теоремаси (2-§, 7-хосса) ёрдамида трапециянинг кичик BC асоси узунлигини топамиз: $BC=$ $\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{225-144}=$ $=\sqrt{81}=9$ см. $CK\perp AD$ ўтказамиз, у ҳолда $CK=AB=12$ см, ΔACD тўғри бурчакли бўлганлигидан C тўғри бурчак учидан ўтказилган CK баландликнинг хоссасидан фойдаланамиз (16-масаланинг ечилишига қ.): $CK^2=AK\cdot KD$, $12^2=9\cdot KD$ ва $KD=\frac{12^2}{9}=\frac{144}{9}=16$ см. У ҳолда трапециянинг катта асоси $AD=AK+KD=9+16=25$ см бўлади.

Жавоби: В).

4.4. Мустақил ечиш учун масалалар

1. Параллелограммнинг томонлари 3 см ва 10 см га тенг. Катта томонига ёпишган икки бурчагининг биссектрисалари ўтказилган ва улар қаршисидаги томонни учта қисмга ажратади. Шу қисмларнинг узунликлари топилсин.

А) 3, 3, 4; В) 4, 3, 3; С) 4, 4, 2; Д) 2, 4, 4; Е) 3, 4, 3 см.

2. $ABCD$ тўғри тўртбурчакнинг периметри 24 см га тенг. BC томонининг ўртасидаги нуқта M бўлиб, $MA\perp MD$. Тўғри тўртбурчакнинг томонлари узунликлари топилсин.

А) 3,5, 8,5; В) 5, 7; С) 4, 8; Д) 3, 9; Е) 5, 6 см.

3. Параллелограммнинг томонлари 6 см ва 15 см га тенг. a тўғри чизиқ ён томонга параллел қилиб ўтказилган ва параллелограммни иккита ўхшаш параллелограммга бўлади. Агар ён томонда ажратилган кесмалардан бири иккинчисидан тўрт марта катта бўлса, ҳосил қилинган параллелограммлар юзларининг нисбати топилсин.

А) 3:5; В) 4:1; С) 5:2; Д) 3:4; Е) 4:3.

4. Ромбнинг диагоналлари 16 см ва 12 см га тенг, унинг баландлиги топилсин.

А) 9,6; В) 8,8; С) 7,2; Д) 10,2; Е) 9,4 см.

5. Параллелограммнинг юзи 8 см^2, диагоналларидан бири иккинчисидан 2 марта кичик ва улар орасидаги бурчак 30° га тенг. Диагоналлар узунликлари топилсин.

А) 8 ва 6; В) 5 ва 2,5; С) 6 ва 4; Д) 4 ва 8; Е) 3 ва 9 см.

6. Тенг ёнли трапециянинг катта асоси 44 м, ён томони 17 м, диагонали 39 м га тенг. Трапециянинг юзи ҳисоблансин.

А) 600; В) 480; С) 580; Д) 560; Е) 540 м^2.

7. Параллелограммнинг диагоналлари 14 см ва 18 см, томонларининг нисбати 4:7 каби. Унинг периметри топилсин.

А) 40; В) 44; С) 42; Д) 48; Е) 46 см^2.

8. Параллелограммнинг юзи 120 см^2, баландликлари 8 ва 12 см га тенг бўлса, унинг периметри топилсин.

А) 50; В) 48; С) 46; Д) 54; Е) 58 м.

9. Параллелограммнинг диагоналлари 12 ва 15 см, улар орасидаги бурчак 30° бўлса, параллелограммнинг юзи ҳисоблансин.

А) 100; В) 48; С) 45; Д) 46; Е) 58 см^2.

10. Ромбнинг баландлиги қарама-қарши томонни тенг иккига бўлади. Ромбнинг ўтмас бурчаги топилсин.

А) 90°; В) 110°; С) 130°; Д) 120°; Е) 150°.

11. Ромбнинг юзи 384 см^2, диагоналлари нисбати 3:4 каби бўлса, унинг периметри топилсин.

А) 80; В) 90; С) 70; Д) 100; Е) 96 см.

12. Тенг ёнли трапециянинг асослари 6 см ва 10 см, диагонали 10 см бўлса, унинг юзи ҳисоблансин.

А) 42; В) 48; С) 44; Д) 46; Е) 52 см^2.

13. Тўғри бурчакли трапециянинг ён томонлари ва кичик асоси мос равишда 8, 10 ва 10 см. Трапециянинг катта асоси узунлиги топилсин.

А) 15; В) 12; С) 16; Д) 14; Е) 18 см.

14. Тенг ёнли трапеция асосларининг айирмаси 3 см га, асосидаги бурчакнинг синуси 0,8 га тенг. Трапециянинг ён томони узунлиги топилсин.

А) 3,5; В) 3; С) 4; Д) 2; Е) 2,5 см.

15. Тўғри тўртбурчакнинг периметри 60 см, томонларидан бири иккинчисидан 10 см катта бўлса, унинг юзи ҳисоблансин.

А) 200; В) 180; С) 225; Д) 220; Е) 196 см^2.

16. $ABCD$ параллелограммда AB томон ва BD диагонал 10 см, AD томонга ўтказилган баландлик эса 5 см. Параллелограммнинг юзи ҳисоблансин.

А) $54\sqrt{2}$; В) $54\sqrt{3}$; С) $44\sqrt{3}$; Д) $50\sqrt{3}$; Е) $48\sqrt{3}$ см^2.

17. $ABCD$ трапецияда диагоналлар P нуқтада кесишади. Агар $BC=10$ см, $AP=9$ см, $PC=6$ см бўлса, унинг AD катта асоси узунлиги топилсин.

А) 13; В) 15; С) 16; Д) 18; Е) 10 см.

18. $ABCD$ параллелограммда BK баландлик ўтказилган. Агар $\angle ABK=30°$, $AK=5$ дм, $KD=8$ дм бўлса, параллелограммнинг периметри топилсин.

А) 42; В) 45; С) 44; Д) 48; Е) 46 дм.

19. *ABCD* трапециянинг юзи 161 см^2, баландлиги 14 см, асослари айирмаси 11 см бўлса, унинг катта асоси узунлиги топилсин.

А) 15; В) 17; С) 18; Д) 16; Е) 21 см.

20. Агар мунтазам олтибурчакнинг юзи $54\sqrt{3}$ см^2 бўлса, унинг томони узунлиги топилсин.

А) 2; В) 3; С) 6; Д) 5; Е) 4 см.

21. Параллелограммнинг катта томони 5 см, баландликлари 2 см ва 2,5 см бўлса, унинг иккинчи томони узунлиги топилсин.

А) 5; В) 4; С) 3; Д) 2; Е) 3,5 см.

22. *ABCD* параллелограммда $AB=12$ дм, $\angle A=30°$ бўлса, *C* нуқтадан *AD* тўғри чизиққача ва *AD* кесмагача бўлган масофалар топилсин.

А) 6 ва 13; В) 3 ва 15; С) 3 ва 14; Д) 5 ва 13; Е) 6 ва 12 дм.

23. Параллелограмм бурчагининг биссектрисаси қаршисидаги томонни узунликлари 5 см ва 3 см бўлган кесмаларга ажратади. Параллелограммнинг периметри топилсин.

А) 30 ёки 24; В) 26 ёки 24; С) 28 ёки 26; Д) 26 ёки 22; Е) 24 ёки 24 см.

24. Тўғри тўртбурчакнинг кичик томони 7 см, диагоналлари эса 60° ли бурчак остида кесишади. Тўғри тўртбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

А) $49\sqrt{3}$; В) $56\sqrt{3}$; С) $42\sqrt{3}$; Д) $48\sqrt{3}$; Е) $54\sqrt{3}$ см^2.

25. *ABCD* тўғри тўртбурчакда *A* ва *B* бурчакларнинг биссектрисалари *CD* томонни учта тенг кесмага ажратади ва ҳар бир кесманинг узунлиги 3 см га тенг. Тўғри тўртбурчакнинг периметри топилсин.

A) 16 ёки 18; B) 18 ёки 28; C) 24 ёки 30; Д) 26 ёки 28; E) 20 ёки 32 см.

26. Ромбнинг томони a га, бурчаги 150° га тенг. Ромбнинг қарама-қарши томонлари орасидаги масофа топилсин.

A) $3a$; B) $0,5a$; C) a; Д) $1,5a$; E) $2a$.

27. Агар квадрат томонлари 7 см ва 28 см бўлган тўғри тўртбурчакка тенгдош бўлса, унинг периметри топилсин.

A) 56; B) 48; C) 52; Д) 64; E) 60 см.

28. Агар тўғри тўртбурчакнинг томонлари нисбати 2:3 каби, юзи 54 см^2 бўлса, унинг периметри топилсин.

A) 42; B) 40; C) 30; Д) 28; E) 32 см.

29. Биринчи квадратнинг диагонали иккинчи квадратнинг томонидан иборат бўлса, иккинчи ва биринчи квадратлар юзларининг нисбати топилсин.

A) 5:2; B) 4:3; C) 2:3; Д) 3:1; E) 2:1.

30. Биринчи квадратнинг диагонали иккинчи квадратнинг томонидан, иккинчи квадратнинг диагонали эса учинчи квадратнинг томонидан иборат бўлса, учинчи ва биринчи квадратлар периметрларининг нисбати топилсин.

A) 2:7; B) 1:3; C) 2:3; Д) 2:1; E) 2:5.

31. Трапециянинг асослари нисбати 3:5 каби, ўрта чизиғи эса 32 см бўлса, унинг катта асоси узунлиги топилсин.

A) 38; B) 40; C) 42; Д) 36; E) 34 см.

32. Трапециянинг диагоналлари унинг ўрта чизиғини учта тенг кесмага бўлади. Трапециянинг катта ва кичик асослари нисбати топилсин.

A) 2:1; B) 3:1; C) 4:3; Д) 3:2; E) 1:5.

33. Тенг ёнли трапециянинг асослари 22 см ва 42 см, ён томони 26 см бўлса, унинг диагонали узунлиги топилсин.

A) 42; B) 50; C) 40; Д) 30; E) 36 см.

34. Тенг ёнли трапециянинг асослари 5 см ва 11 см, периметри 28 см бўлса, унинг юзи ҳисоблансин.

A) 24; B) 19; C) $26\sqrt{3}$; Д) $24\sqrt{3}$; E) $18\sqrt{3}$ см^2.

35. Агар тенг ёнли трапециянинг катта асоси 22 см, ён томони 8,5 см ва диагонали 19,5 см бўлса, унинг юзи ҳисоблансин.

A) 124; B) 136; C) 118; Д) 120; E) 135 см^2.

36. Тенг ёнли трапециянинг асоси $AD=36$ см, $\angle BAC=\angle CAD$, периметри 90 см бўлса, унинг ён томони узунлиги топилсин.

A) 18; B) 16; C) 14; Д) 12; E) 10 см.

37. AB кесманинг учлари a тўғри чизиқдан 9 см ва 13 см масофада жойлашган. Кесманинг ўртасидаги C нуқтадан a тўғри чизиққача бўлган масофа топилсин.

A) 12; B) 11; C) 10; Д) 13; E) 17 см.

38. Агар параллелограммнинг баландликлари 7 см ва 5 см бўлиб, катта баландлиги узунлиги 10 см бўлган томонга ўтказилган бўлса, унинг периметри топилсин.

A) 36; B) 46; C) 48; Д) 42; E) 45 см.

39. $ABCD$ параллелограммнинг диагонали $BD=14$ см ва AD томонга перпендикуляр. Агар $\angle A=45°$ бўлса, параллелограммнинг юзи ҳисоблансин.

A) 184; B) 180; C) 200; Д) 192; E) 196 см^2.

40. Ромбнинг юзи 24 см^2, диагоналлари нисбати 3:4 каби бўлса, унинг периметри топилсин.

А) 19; В) 16; С) 22; Д) 20; Е) 18 см.

41. Тенг ёнли трапециянинг диагонали 6 дм ва ён томонлари билан 38° ва 112° ли бурчаклар ташкил қилади. Унинг юзи ҳисоблансин.

А) 10; В) 12; С) 16; Д) 8; Е) 9 дм^2.

42. Ўхшаш тўртбурчаклар периметрларининг нисбати 2:3 каби, юзларининг йиғиндиси 260 дм^2 бўлса, тўртбурчаклардан ҳар бирининг юзи ҳисоблансин.

А) 82 ва 108; В) 76 ва 100; С) 80 ва 180; Д) 64 ва 196; Е) 84 ва 180 дм^2.

43. Иккита ўхшаш тўртбурчакнинг юзлари 50 см^2 ва 32 см^2, периметрларининг йиғиндиси 117 см. Ҳар бир тўртбурчакнинг периметри топилсин.

А) 48 ва 64; В) 52 ва 65; С) 50 ва 60; Д) 54 ва 62; Е) 58 ва 60 см.

44. Ромбнинг периметри 4 дм, диагоналларининг нисбати 3:4 каби бўлса, унинг юзи ҳисоблансин.

А) 9,6; В) 8,8; С) 10,4; Д) 10,2; Е) 9,8 дм^2.

45. Ромбнинг периметри $2p$ см, диагоналларининг йиғиндиси m см бўлса, унинг юзи ҳисоблансин.

А) $\sqrt{m^2+n^2}$; В) $\frac{1}{2}mp$; С) $\frac{m^2+p^2}{4}$; Д) $\frac{m^2-p^2}{4}$; Е) $\frac{3mp}{4}$ см^2.

46. Трапециянинг асослари a ва b га тенг. Асосларга параллел бўлган ва трапецияни иккита тенгдош трапецияга бўлувчи кесманинг узунлиги топилсин.

А) $\sqrt{a^2+2b^2}$; В) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$; С) $\sqrt{a^2+b^2}$; Д) $\sqrt{ab}$;
Е) $\sqrt{2a^2+b^2}$.

47. Параллелограммнинг ўткир бурчаги 60°, диагоналлари квадратларининг нисбати 19:7 каби бўлса, параллелограммнинг томонлари нисбати топилсин.

А) 3:2; В) 2:1; С) 3:4; Д) 5:2; Е) 5:3.

48. Трапециянинг асослари a ва b га тенг, ён томонлари катта асос билан α ва β ўткир бурчаклар ташкил қилса, унинг юзи ҳисоблансин.

А) $\dfrac{(a^2+b^2)\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\beta}$; В) $\dfrac{(a^2-b^2)\sin 2\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$; С) $\dfrac{(a^2-b^2)\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$;

Д) $\dfrac{(a^2-b^2)\cos 2\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$; Е) $\dfrac{(a^2-b^2)\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$.

49. Трапециянинг юзи 36 см^2, баландлиги 10 см, асосларидан бири иккинчисидан 3 марта катта бўлса, унинг катта асоси узунлиги топилсин.

А) 4,2; В) 6,0; С) 5,8; Д) 6,2; Е) 5,4 см.

5-§. ИЧКИ ВА ТАШҚИ ЧИЗИЛГАН КЎПБУРЧАКЛАР

5.1. Асосий тушунчалар ва хоссалар

Ҳамма учлари айланада ётган кўпбурчак айланага *ички чизилган кўпбурчак* дейилади.

Ҳамма томонлари айланага уринган кўпбурчак айланага *ташқи чизилган кўпбурчак* дейилади.

Ҳар қандай учбурчакка ички айлана чизиш мумкин ва агар учбурчакнинг томонлари a, b, c, юзи S_Δ бўлса, бу айлананинг радиуси

$$r = \frac{2S_\Delta}{a+b+c} \qquad (5.1)$$

формула орқали топилади.

Ҳар қандай учбурчакка ташқи айлана чизиш мумкин бўлиб, унинг радиуси

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot S_\Delta} \qquad (5.2)$$

га тенг.

Қуйидаги хоссаларни эслатиб ўтамиз:

1. Учбурчакка ички чизилган айлананинг маркази учбурчак бурчаклари биссектрисаларининг кесишиш нуқтасидир.

Учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази учбурчак томонларининг ўрталаридан шу томонларга ўтказилган перпендикулярларнинг кесишиш нуқтасидир.

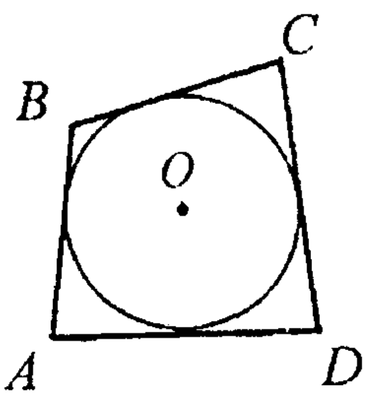
2. Агар тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари йиғиндиси ўзаро тенг бўлса, яъни $AB+CD=BC+AD$ бўлса (5.1-чизма), тўртбурчакка ички айлана чизиш мумкин.

3. Агар тўртбурчак қарама-қарши бурчакларининг йиғиндиси 180° га тенг, яъни $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180^\circ$ бўлса, тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкин.

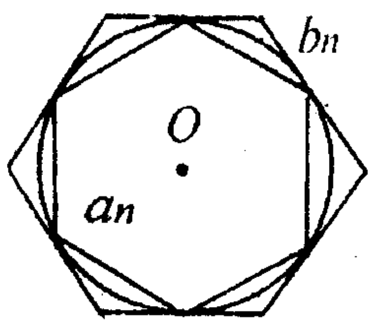
4. Тўғри бурчакли учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази гипотенузанинг ўртасидир.

Мунтазам кўпбурчак айланага ички чизилган бўлсин. Унинг a_n томони

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n} \qquad (5.3)$$



5.1-чизма.



5.2-чизма.

формула билан ҳисобланади. Бу формуладан фойдаланиб, айланага ички чизилган мунтазам учбурчак, мунтазам тўртбурчак ва мунтазам олтибурчакнинг томонларини аниқлаш мумкин:

$$n=3,\quad a_3=2R\sin 60°=R\sqrt{3}; \tag{5.4}$$

$$n=4,\quad a_4=2R\sin 45°=R\sqrt{3}; \tag{5.5}$$

$$n=6,\quad a_6=2R\sin 30°=R. \tag{5.6}$$

Энди айланага ташқи чизилган мунтазам кўпбурчакни қараймиз. Унинг томонини b_n деб белгиласак, у ички чизилган айлананинг r радиуси орқали

$$b_n = 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{180°}{n} \tag{5.7}$$

формуладан аниқланади. Хусусий ҳоллар:

$$n=3,\quad b_3=2r\,\mathrm{tg}60°=2r\sqrt{3}; \tag{5.8}$$

$$n=4,\quad b_4=2r\,\mathrm{tg}45°=2r; \tag{5.9}$$

$$n=6,\quad b_6=2r\,\mathrm{tg}30°=\frac{2r\sqrt{3}}{3}. \tag{5.10}$$

5.2. Мавзуга доир масалалар

1. Бир томони 10, унга ёпишган бурчаклари 105° ва 45° бўлган учбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиуси топилсин.

A) 8; B) 10; C) 12; Д) 14; E) 7.

2. Доиранинг юзи 36π га тенг. Унга ташқи чизилган квадратнинг юзи ҳисоблансин.

A) 100; B) 169; C) 128; Д) 130; E) 144.

3. Томони 81 бўлган тенг томонли учбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиуси топилсин.

A) $27\sqrt{3}$; B) $16\sqrt{2}$; C) $16\sqrt{3}$; Д) 18; E) $9\sqrt{5}$.

4. Доиранинг радиуси 40% ортса, унинг юзи қандай ўзгаради?

A) 20 % ортади; B) 96 % ортади; C) 80 % ортади; Д) 38 % ортади; E) ўзгармайди.

5. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони 3, учидаги бурчаги 120° га тенг. Шу учбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиуси топилсин.

A) 1; B) 5; C) 2; Д) 3; E) 4.

6. Ромбнинг кичик диагонали ва томони $18\sqrt{3}$ га тенг. Ромбга ички чизилган айлананинг радиуси топилсин.

A) 13,5; B) 14; C) 16; Д) 9; E) 20.

7. Доирага ички чизилган тўғри тўртбурчакнинг томонлари 12 ва 16 га тенг. Доиранинг юзи ҳисоблансин.

A) 80 π; B) 100 π; C) 96 π; Д) 24 π; E) 64 π.

8. Радиуси $\sqrt{3}$ га тенг бўлган доирага ўткир бурчаги 60° бўлган тенг ёнли трапеция ташқи чизилган. Трапеция ўрта чизиғининг узунлиги топилсин.

A) 5; B) 3; C) 4; Д) 2; E) 1.

9. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катети $\sqrt{3}$ ва унга ёпишган бурчаги 30° га тенг. Учбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиуси топилсин.

A) 12; B) 10; C) $\sqrt{7}$; Д) 4; E) 1.

10. Тўғри бурчакли учбурчакка айлана ички чизилган ва уриниш нуқтасида гипотенуза узунликлари 5 см ва 12 см бўлган иккита кесмага ажратилган. Учбурчакнинг катта катети узунлиги топилсин.

A) 10; B) 17; C) 20; Д) 15; E) 14 см.

11. Айлананинг узунлиги 6 π га тенг бўлса, унга ички чизилган квадратнинг юзи ҳисоблансин.

А) 18; В) 14; С) 13; Д) 12; Е) 22.

12. Ромбнинг томони $a=4$, унга ички чизилган айлана радиуси $r=1{,}5$ бўлса, ромбнинг юзи ҳисоблансин.

А) 10; В) 12; С) 13; Д) 11; Е) 8.

13. Тўғри тўртбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиуси 15 см бўлса, унинг қўшни томонлари ўрталари орасидаги масофа топилсин.

А) 12; В) $\frac{24}{7}$; С) 15; Д) 14; Е) 13 см.

14. Тенг ёнли учбурчакнинг асосига туширилган баландлик 25 см, ички чизилган айлананинг радиуси 8 см бўлса, учбурчак асосининг узунлиги топилсин.

А) 12; В) $\frac{24}{7}$; С) $\frac{32}{5}$; Д) $\frac{40}{3}$; Е) $\frac{80}{3}$ см.

15. Учбурчакнинг томонлари 13, 14 ва 15 см. Унга ташқи ва ички чизилган доиралар юзларининг нисбати топилсин.

А) $\left(\frac{65}{32}\right)^2$; В) 12; С) $\frac{64}{15}^2$; Д) 4; Е) $\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2$.

16. Мунтазам ўниккибурчакнинг ички бурчаги α бўлса, $\sin\alpha$ топилсин.

А) 0,8; В) 0,6; С) 0,75; Д) 0,5; Е) 0,25.

17. Мунтазам учбурчакка айлана ички чизилган, шу айланага эса мунтазам олтибурчак ички чизилган. Учбурчак ва олтибурчак юзларининг нисбати топилсин.

А) 1; В) 3; С) 4; Д) 2; Е) 7.

18. Учбурчакнинг иккита бурчаги $\frac{\pi}{3}$ ва $\frac{\pi}{4}$ эканлиги маълум ва у радиуси 2 см бўлган айланага ички чизилган. Учбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

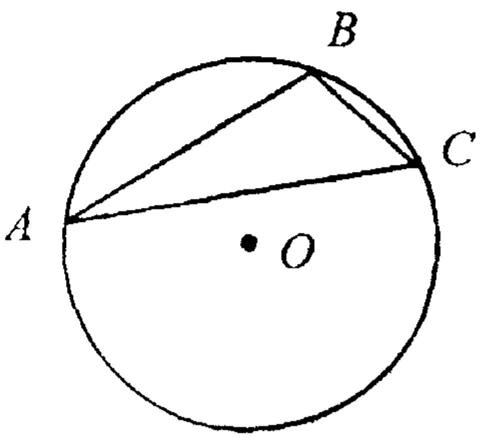
А) $3+\sqrt{3}$; В) $2+\sqrt{3}$; С) 5; Д) 4,5; Е) 4 см^2.

5.3. Мавзуга оид масалаларнинг ечимлари

1. Берилган. (O, R) — айлана, ΔABC, $A, B, C \in (O, R)$, $BC=10$, $\angle B=105°$, $\angle C=45°$.

R топилсин (5.3.1-чизма).

Ечилиши. Учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 180° га тенг. Иккита B ва C бурчаклари берилган. Учинчи бурчакни топамиз: $A=180°-150°=30°$. Синуслар теоремасининг (2-§, 8-хосса) натижасидан фойдаланамиз: $\frac{BC}{\sin\angle A}=2R$ ёки $\frac{10}{\sin 30°}=2R$.



5.3.1- чизма.

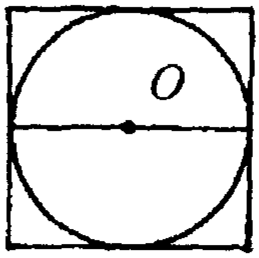
У ҳолда $R=\frac{10}{2\sin 30°}=\frac{10}{2\cdot 1/2}=10$.

Жавоби: В).

2. Берилган. (O, R) — доира, $S_д=36\pi$, $ABCD$ — квадрат.

S_{ABCD} топилсин (5.3.2-чизма).

Ечилиши. Айлананинг O марказидан квадратнинг AB ва CD томонларига радиуслар ўтказамиз. Лекин уриниш нуқтасидан ўтказилган радиус уринмага перпендикуляр, ON ва MO параллел AB ва CD



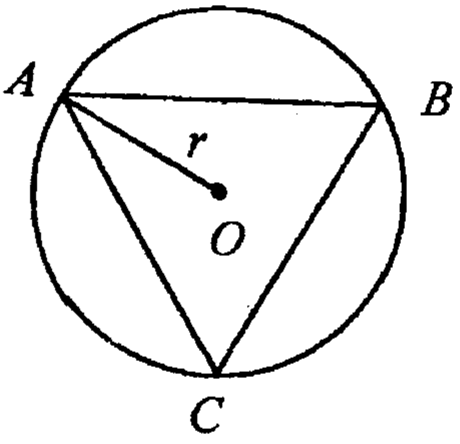
5.3.2-чизма.

тўғри чизиқларга перпендикуляр бўлгани учун битта MN тўғри чизиқда ётади ва $MN=BC=a$ бўлади. Демак, MN айлананинг диаметридан иборат, яъни $MN=2R$ бўлиб, квадратнинг юзи $S=(2R)^2=4R^2$ бўлади.

Берилган шартга кўра, $S_Д=\pi R^2$, $36\pi=\pi R^2$ ва $R^2=36$. У ҳолда квадратнинг юзи $S=4\cdot 36=144$.

3. Берилган. $(O,\ R)$ — айлана, ΔABC, $AB=AC=$ $=BC$, $A,B,C\in(O,\ R)$, $AB=81$.

R топилсин (5.3.3-чизма).



5.3.3-чизма.

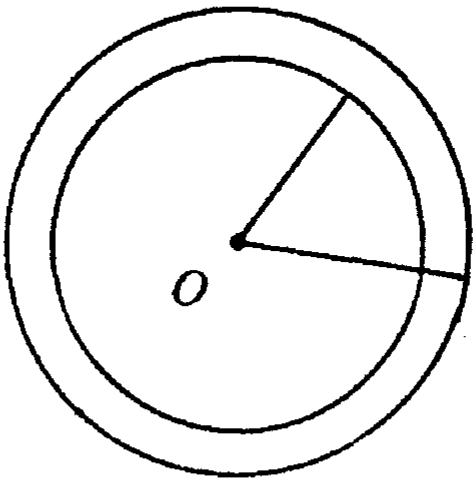
Ечилиши. Учбурчак тенг томонли бўлгани учун унинг ички бурчаклари ўзаро тенг ва $\angle A=\angle B=\angle C=60°$. Синуслар теоремаси (2-§, 8-хосса) нинг натижасидан фойдаланамиз:

$$\frac{AB}{\sin 60°}=2r,\ r=\frac{81}{\sqrt{3}}=27\sqrt{3}.$$

Жавоби: А).

4. Берилган. $(O,\ r)$ — айлана, $R=1{,}4r$.

S_1-S топилсин (5.3.4-чизма).



5.3.4-чизма.

Ечилиши. Айлананинг радиуси 40% ортганлиги ва 1% соннинг 0,01 қисмига тенг бўлгани учун янги айлананинг радиуси $R=r+0{,}4r=1{,}4r$ бўлади.

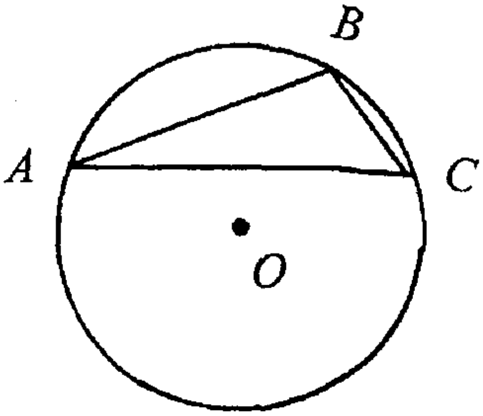
Доираларнинг юзлари, мос равишда, $S=\pi r^2$ ва $S_1=\pi R^2=\pi(1{,}4r)^2=1{,}96\pi r^2$ бўлади. У ҳолда ўзгариш миқдорини топсак, $S_1-S=(1{,}96-1)\pi r=0{,}96\pi$. Демак, доиранинг юзи 96% ортади.

Жавоби: В).

5. Берилган. (O, R) — айлана, ΔABC, $A,B,C\in(O, R)$, $\angle ABC=120°$, $AB=BC=3$.

R топилсин (5.3.5-чизма).

Ечилиши. ΔABC тенг ёнли бўлгани учун асосдаги бурчаклар ўзаро тенг ва $\angle A=\angle C=\frac{180°-120°}{2}=30°$. Синуслар теоремасининг (2-§, 8-хосса) натижасига кўра $\frac{AB}{\sin 30°}=2R$ ва $R=\frac{3}{2\cdot 1/2}=3$.



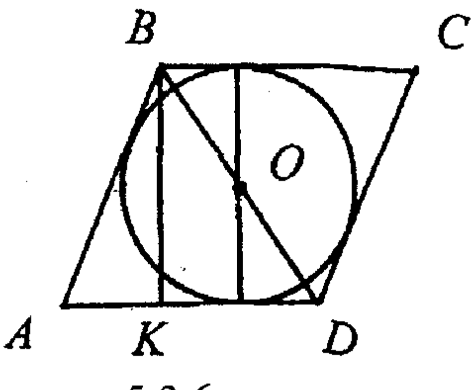
5.3.5-чизма.

Жавоби: Д).

6. Берилган. $ABCD$ — ромб, $AB=BD=18\sqrt{3}$, (O, R) — ички чизилган айлана.

R топилсин (5.3.6-чизма).

Ечилиши. Ромбнинг томони ва диагонали тенг бўлгани учун ΔABD тенг томонлидир. Демак, $\angle BAD=60°$. Ички чизилган айлананинг O марказидан ромбнинг BC ва AD томонларига перпендикулярлар ўтказамиз. Улар параллел тўғри чизиқларга пер-

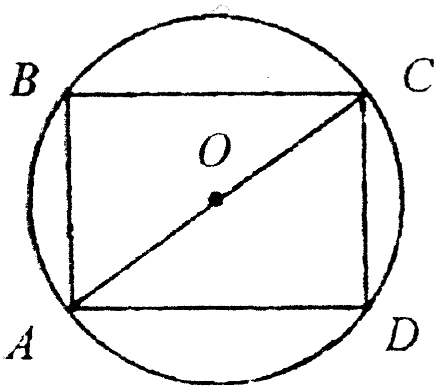


5.3.6-чизма.

пендикуляр бўлгани учун бир тўғри чизиқда ётади ва ромб учун баландлик бўлади: $2R=H$. Ромбнинг баландлигини B нуқтадан туширамиз ва ΔABK ни ҳосил қиламиз. У ҳолда $H=AB\cdot\sin 60^\circ=18\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=$ $=9\cdot 3=27$ ва $R=\frac{1}{2}H=13{,}5$.

7. Берилган. $ABCD$ — тўғри тўртбурчак, $(O,\ R)$ — ташқи чизилган айлана, $AD=16$, $CD=12$.

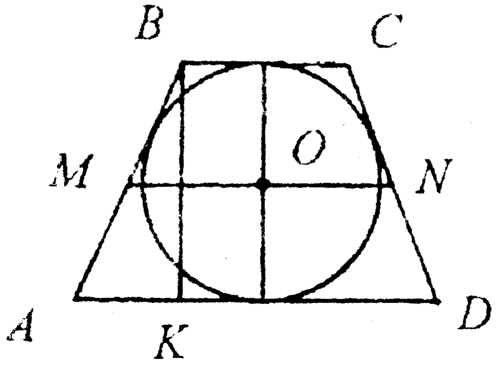
$S_Д$ топилсин (5.3.7-чизма).



5.3.7-чизма.

Ечилиши. Доиранинг юзи (3-§) $S=\pi R^2$ формула билан ҳисобланади. $ABCD$ тўртбурчакда AC диагоналини ўтказамиз. Унинг ўртасидаги O нуқта тўртбурчакнинг симметрия маркази бўлгани учун $AC=2R$. Тўғри бурчакли ΔACD дан Пифагор теоремаси (2-§, 7-хосса) га асосан, $AC^2=AD^2+CD^2=16^2+12^2=$ $=256+144=400$, $AC=20$ ва $R=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\cdot 20=10$. Доиранинг юзи $S=100\pi$.

8. Берилган. $(O,\ R)$ — айлана, $R=\sqrt{3}$, $\angle A=60^\circ$, $ABCD$ — трапеция, $ABCD$ — ташқи чизилган.



5.3.8-чизма.

MN ўрта чизиқ топилсин (5.3.8-чизма).

Ечилиши. Айлананинг O марказидан BC ва AD га перпендикулярлар ўтказамиз. У ҳолда айлананинг диаметри трапециянинг баландлигига тенг бўлади: $H=2R=2\sqrt{3}$. Тўғри бурчакли ΔABK ($BK\perp AD$) дан топамиз:

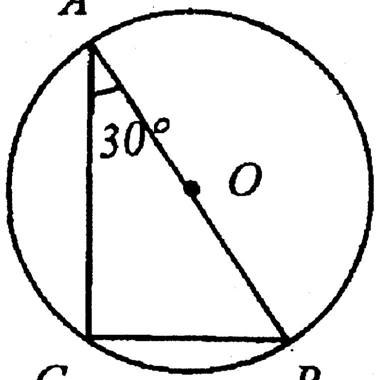
$$\frac{BK}{AB}=\sin 60^\circ,\ AB=\frac{BK}{\sin 60^\circ}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4.$$

Айланага трапеция ташқи чизилгани учун қарама-қарши томонлар йиғиндиси $AB+CD=BC+AD$, $2AB=BC+AD$, $MN=\frac{AD+BC}{2}=AB=4$.

Жавоби: С).

9. Берилган. (O, R) — айлана, $AC=\sqrt{3}$, $A, B, C\in(O, R)$, ΔABC, $\angle C=90^\circ$, $\angle A=30^\circ$.

R топилсин (5.3.9-чизма).



5.3.9-чизма.

Ечилиши. Тўғри бурчакли учбурчакка айлана ташқи чизилган бўлса, айлананинг диаметри гипотенузанинг узунлигига тенг. Шунинг учун берилган катет ва бурчак орқали гипотенузани топамиз:

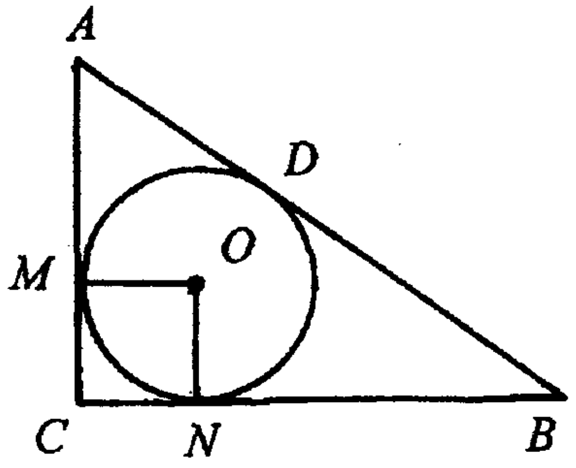
$$\cos 30^\circ=\frac{AC}{AB} \text{ ва } AB=\frac{AC}{\cos 30^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2.$$

Ташқи чизилган айлананинг радиуси эса $R=\frac{1}{2}\cdot AB=1$ см.

Жавоби: Е).

10. Берилган. ΔABC, $\angle C=90^\circ$, (O, r) — ички чиз. айлана, D — уриниш нуқтаси, $AD=5$ см, $BD=12$ см.

BC топилсин (5.3.10-чизма).



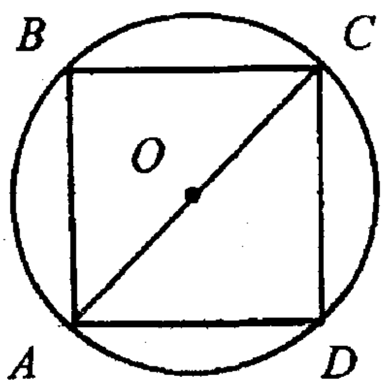
5.3.10-чизма.

Е ч и л и ш и. Ички чизилган айлананинг радиуси r бўлсин: $ON=$ $=OM=OD=r$. 3-§, 4-хоссага мувофиқ айланадан ташқаридаги нуқтадан айланага уринмалар ўтказилган бўлса, шу нуқтадан уриниш нуқтасигача бўлган кесмаларнинг узунликлари ўзаро тенгдир: $MA=AD=5$ см, $BD=BN=12$ см, $CM=CN=r$. ΔABC да гипотенуза $AB=AD+BD=5+12=17$ см, $AC=5+r$, $BC=12+r$. Пифагор теоремаси (2- §, 7-хосса) га кўра, $AC^2+BC^2=AB^2, (r+5)^2+(r+12)^2=17^2$, $r^2+10r+25+r^2+24r+144=289$, $2r^2+34r-120=0$, r^2+17r- $-60=0$, $D=17^2+4\cdot 60=529=23^2$, $r_1=\dfrac{-17-23}{2}$, $r_2=\dfrac{-17+23}{2}$, $r_2=3$, $r_1=-20$. Бу ерда, катта катет $BC=12+3=15$ см бўлади.

Жавоби: Д).

11. Б е р и л г а н. (O, R) — айлана, $ABCD$ — ички чизилган квадрат, $L_0=6\pi$.

S_{ABCD} ҳ и с о б л а н с и н (5.3.11- чизма).



5.3.11- чизма.

Е ч и л и ш и. Квадратнинг томони $AB=a$ бўлса, унинг юзи $S=a^2$. Агар радиуси R бўлган айланага квадрат ички чизилган бўлса, (5.5) формулага кўра унинг томони $a=R\sqrt{2}$ га тенг.

Демак, айлананинг радиусини топиш керак. Айлана узунлиги маълум бўлгани учун $2\pi R=6\pi$ тенгламадан радиусни топамиз:

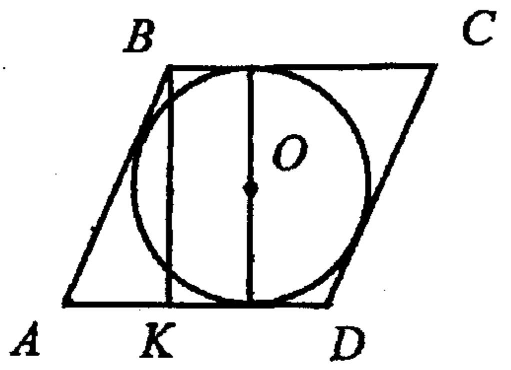
$R=3$. Демак, квадратнинг томони $a=3\sqrt{2}$ ва унинг юзи $S=(3\sqrt{2})^2=18$ бўлади.

Жавоби: А).

12. Б е р и л г а н. $ABCD$ — ромб, $AB=a=4$, (O, r) — ички чизилган айлана, $r=1,5$.

S_{ABCD} ҳ и с о б л а н с и н (5.3.12-чизма).

Е ч и л и ш и. Ромбнинг A учидан $AK=h$ баландлик ($AK\perp DC$) ўтказамиз. Ромбнинг юзи (4.6) формула бўйича ҳисобланади: $S=ah$. O нуқтадан AB томондаги уриниш нуқтасига радиус ўтказамиз. У ҳолда $h=2r=$ $=2\cdot 1,5=3$ ва ромбнинг юзи $S=4\cdot 3=12$ бўлади.



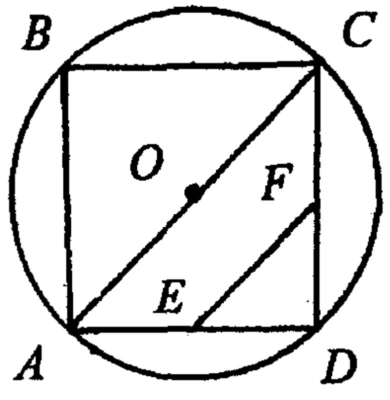
5.3.12-чизма.

Жавоби: В).

13. Б е р и л г а н. (O, R) — айлана, $R=15$, $ABCD$ — тўғри тўртбурчак, $AE=ED$, $CF=FD$.

EF т о п и л с и н (5.3.13-чизма).

Е ч и л и ш и. A, B, C, D нуқталар айланага тегишли. Диагоналларнинг кесишиш нуқтаси O тўғри тўртбурчакнинг симметрия маркази бўлганлигидан, AC диагонал O нуқтадан ўтади ва $AC=2R=2\cdot 15=30$. ΔACD да E ва F нуқталар томонларнинг ўрталари бўлгани учун, EF кесма ACD уч-



5.3.13-чизма.

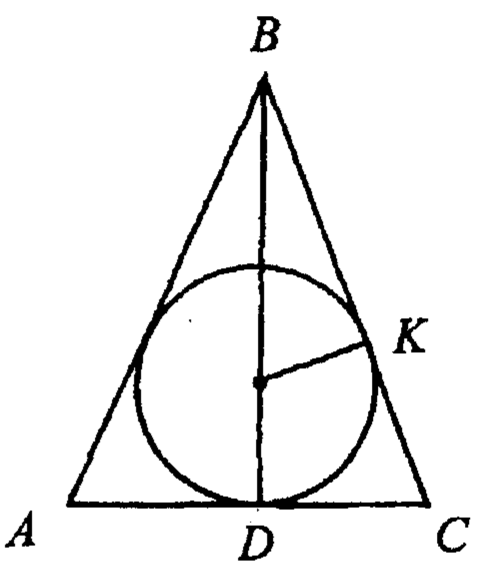
бурчакнинг ўрта чизиғи бўлади ва асосининг ярмига тенг:

$$EF = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15.$$

Жавоби. С).

14. Берилган. ΔABC, $AB=BC$, $BD \perp AC$, $BD=25$ см, (O, r) — ички чизилган айлана, $r=8$ см.

AC топилсин (5.3.14-чизма).



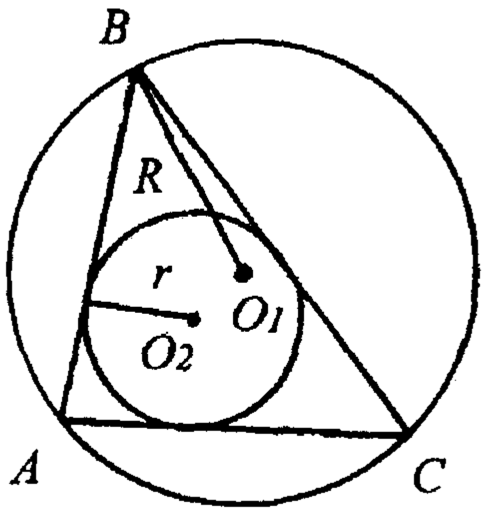
5.3.14-чизма.

Ечилиши. O нуқта учбурчакка ички чизилган айлананинг маркази бўлсин. Шартга кўра, $BD=25$ см, $OD=8$ см. У ҳолда $BO=25-$ $-8=17$ см. O нуқтадан уриниш нуқтаси K га $OK=8$ см радиусни ўтказамиз. $OK \perp BC$ ва ΔOBK тўғри бурчакли. Пифагор теоремасига (2-§, 7-хосса) асосан $KC=DC=a$, $BC=15+a$. ΔOBK дан: $BK=$ $=\sqrt{BO^2+OK^2}=15$ см, $KC=$ $=KD=a$, у ҳолда $BC=15+a$. Тўғри бурчакли ΔBDC учун Пифагор теоремасидан (2-§, 7-хосса): $BC^2=$ $=BD^2+DC^2$, $(15+a)^2=25^2+a^2$, $225+30 \cdot a+a^2=625+a^2$, $30 \cdot a=400$, $a=\frac{40}{3}$ эканлигини оламиз. Бу ердан, $AC=2a=\frac{80}{3}$ см.

15. Берилган. ΔABC, $AC=13$ см, $BC=14$ см, $AB=15$ см, (O_1, R) — ташқи чизилган айлана, (O_2, r) — ички чизилган айлана, S_1, S_2 — доиралар юзлари.

S1:S2 топилсин (5.3.15-чизма).

Е ч и л и ш и. Учбурчакка ички чизилган айлананинг радиуси r, ташқи чизилган айлана радиуси R бўлсин. Учбурчакнинг юзи қуйидаги: $S=\frac{abc}{4R}$ ёки $S=pr$, $p=\frac{a+b+c}{2}$ формуладан топилади. Учбурчак юзини Герон формуласидан (2-§, (2.14) формула) топамиз:



5.3.15-чизма.

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Бизда $a=13$, $b=14$, $c=15$, $p=\frac{13+14+15}{2}=21$ бўлади.

У ҳолда $S=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}$,

$S=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=7\cdot 3\cdot 4=84$ см^2.

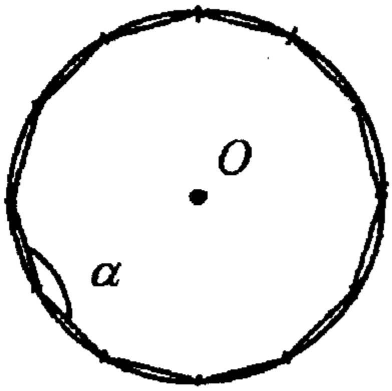
$R=\frac{abc}{4S}=\frac{13\cdot 14\cdot 15}{4\cdot 84}=\frac{65}{8}$ см, $r=\frac{S}{p}=\frac{84}{21}=4$ см. Ташқи ва ички чизилган доиралар юзларининг нисбатини топамиз: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\pi R^2}{\pi r^2}=\frac{65^2}{8^2\cdot 4^2}=\left(\frac{65}{32}\right)^2$.

Жавоби: А).

16. Б е р и л г а н. AB — мунтазам ўниккибурчак, $\alpha=\angle ABC$.

$\sin\alpha$ т о п и л с и н (5.3.16-чизма).

Е ч и л и ш и. Мунтазам n — бурчак ички бурчакларнинг йиғиндиси (1-§, (1.2) формула) $180°(n-2)$ га тенг. Бизда $n=12$ ва ички бурчаклар бир-бирига тенг,



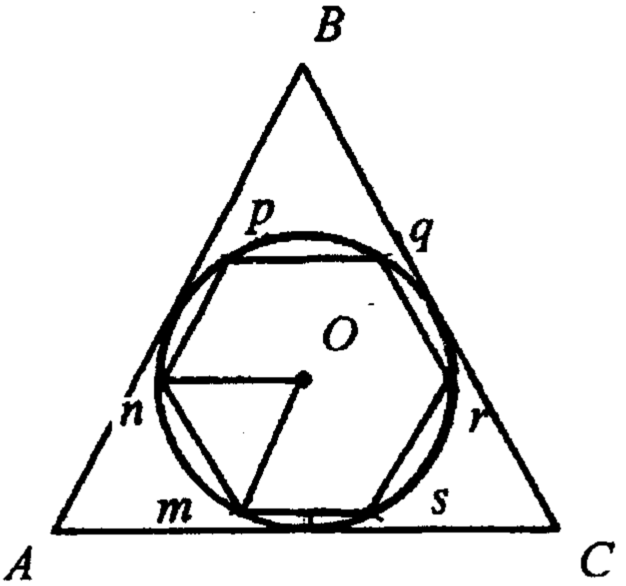
5.3.16-чизма.

Шу сабабли, $\alpha = \frac{180°(12-2)}{12} = 150°$. Унда $\sin 150° = \sin(180° - -30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$.

Жавоби: Д).

17. Берилган. ΔABC, (O, r) — ички чизилган айлана, $(mnpqrs)$ — мунтазам олтибурчак.

$S_\Delta : S_6$ топилсин (5.3.17-чизма).



5.3.17-чизма.

Ечилиши. Учбурчакнинг томонини $AB = a$ деб белгилаймиз. Мунтазам учбурчакнинг ҳар бир бурчаги 60° га тенг ва унинг юзи (2-§, (2.10) формулага мувофиқ), $S_\Delta = \frac{1}{2} a^2 \sin 60° = \frac{2a^3\sqrt{3}}{4 \cdot 3a} = \frac{2a\sqrt{3}}{12} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Айланага мунтазам олтибурчак ички чизилган бўлса, унинг a_6 томони айлананинг радиусига тенг: $a_6 = r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. У ҳолда ΔmnO тенг томонли ва унинг юзи $S_1 = \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2}{36} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$ ва $S_6 = 6 \cdot S_1 = \frac{6 \cdot 3a^2\sqrt{3}}{36 \cdot 4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ бўлади. Изланаётган нисбатни ҳисоблаймиз:

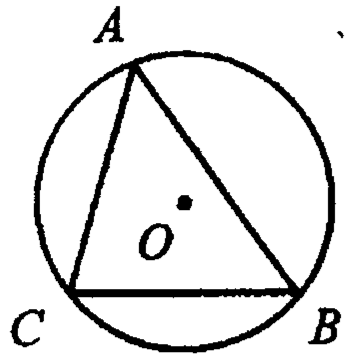
$$\frac{S_\Delta}{S_6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} : \frac{a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{a^2\sqrt{3} \cdot 8}{4 \cdot a^2\sqrt{3}} = 2.$$

Жавоби: Д).

18. Берилган. ΔABC, $\angle A=\frac{\pi}{3}$, $\angle B=\frac{\pi}{4}$, (O, R) — ташқи чизилган айлана, $R=2$ см.

S_Δ ҳисоблансин (5.3.18-чизма).

Ечилиши. Агар $AC=b$, $AB=c$ бўлса, учбурчакнинг юзи (2-§, (2.10) формула) дан $S_\Delta=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}=\frac{bc\sqrt{3}}{4}$.



5.3.18-чизма.

Синуслар теоремаси (2-§, 8-хосса) га асосан, $\frac{b}{\sin 45^\circ}=\frac{c}{\sin(180^\circ-45^\circ-60^\circ)}$, $\frac{b}{\sin 45^\circ}=\frac{c}{\sin 75^\circ}=2R$ муносабат ўринли. У ҳолда $b=2R\sin 45^\circ=2R\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=R\sqrt{2}$, $c=2\sin 75^\circ=$ $=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$. Учбурчакнинг юзи (2-§, (2.10) формуладан) $S=\frac{1}{2}bc\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}\cdot\frac{4}{2}\sqrt{6}=3+\sqrt{3}$ бўлади.

Жавоби: А).

5.4. Мустақил ечиш учун масалалар

1. Тўғри бурчакли учбурчакка ички чизилган айлананинг радиуси 4 см, гипотенузаси эса 26 см. Учбурчакнинг периметри топилсин.

А) 64; В) 54; С) 60; Д) 45; Е) 70 см.

2. Тенг ёнли учбурчакнинг учидаги бурчаги 120° ва ён томони 2 см бўлса, унга ташқи чизилган айлананинг диаметри топилсин.

А) 2; В) 3; С) 2,5; Д) 4; Е) 3,5 см.

3. Айланага тенг ёнли трапеция ташқи чизилган. Трапециянинг битта бурчаги 30°, ўрта чизиғи 2 м. Айлананинг радиусини топинг.

A) 2; B) 2,5; C) 1,5; Д) 1; E) 0,5 см.

4. Агар тўғри бурчакли учбурчакка ички чизилган айлананинг радиуси 3 м, унинг кичик катети эса 10 м бўлса, учбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиусини топинг.

A) 7; B) 7,5; C) 8; Д) 7,25; E) 8,25 м.

5. Тўғри бурчакли учбурчакда гипотенузага ўтказилган баландлик 4 см. Гипотенузада ажратилган кесмалар узунликларининг айирмаси 6 см га тенг. Учбурчакнинг кичик катети узунлиги топилсин.

A) 6; B) $2\sqrt{5}$; C) $3\sqrt{5}$; Д) 4; E) $4\sqrt{5}$ см.

6. Мунтазам ўнбурчакнинг ички бурчаги топилсин.

A) 110°; B) 122°; C) 150°; Д) 144°; E) 136°.

7. Мунтазам ўнбешбурчак учун марказий бурчак топилсни.

A) 20°; B) 22°; C) 18°; Д) 36°; E) 24°.

8. Қандай кўпбурчакнинг ички бурчаги унинг марказий бурчагидан 10 марта катта?

A) 16; B) 22; C) 24; Д) 18; E) 15 см.

9. Тенг ёнли учбурчакнинг баландлиги 20 см, асос ва ён томонининг нисбати 4:3 каби. Учбурчакка ички чизилган айлананинг радиуси топилсин.

A) 5; B) 6; C) 9; Д) 8; E) 7 см.

10. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони 2 дм, асоси 2,4 дм. Учбурчакка айлана ички чизилган ва учбурчак асосига параллел қилиб, унга уринма ўтказилган. Ушбу уринма ёрдамида ажратилган учбурчакнинг периметри топилсин.

A) 2,4; B) 1,8; C) 1,6; Д) 2,1; E) 3,2 дм.

11. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси 12 см, асосига туширилган баландлик 8 см бўлса, учбурчакка ташқи чизилган айлананинг диаметри топилсин.

A) 12,5; B) 12; C)13; Д) 13,5; E) 11,5 см.

12. Қавариқ тўртбурчакка айлана ички чизилган. Агар тўртбурчакнинг томони 12 см, унга ёпишган бурчаклари эса 60° ва 120° бўлса, унинг радиуси топилсин.

A) $3\sqrt{2}$; B) $4\sqrt{2}$; C) $4\sqrt{3}$; Д) $2\sqrt{3}$; E) $3\sqrt{3}$ см.

13. Трапеция айланага ички чизилган. Трапециянинг учлари айланани 2:3:2:5 нисбатда бўлади. Агар айлананинг радиуси 6 см бўлса, трапециянинг юзи ҳисоблансин.

A) $4(2\sqrt{3}+3)$; B) $4\sqrt{3}+7$; C) $4(\sqrt{3}+5)$; Д) $6(\sqrt{3}+2)$; E) $8+5\sqrt{3}$ см^2.

14. Радиуси 14 дм га тенг бўлган айланага мунтазам учбурчак ички чизилган ва учбурчакка яна айлана ички чизилган. Ҳосил бўлган ҳалқанинг юзи ҳисоблансин.

A) 18π; B) 10π; C) 12π; Д) 16π; E) 15π дм^2.

15. Айлананинг радиуси $\sqrt{3}$ см га тенг. Унинг атрофида тенг ёнли трапеция ташқи чизилган ва унинг ўткир бурчаги 60° га тенг. Трапециянинг юзи ҳисоблансин.

A) $6\sqrt{5}$; B) $8\sqrt{5}$; C) $8\sqrt{2}$; Д) $6\sqrt{3}$; E) $8\sqrt{3}$ см^2.

16. Мунтазам тўртбурчак айланага ички чизилган бўлиб, унинг томони $4\sqrt{2}$ см. Айланага ташқи чизилган мунтазам учбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

A) $56\sqrt{2}$; B) 48; C) $45\sqrt{3}$; Д) $48\sqrt{3}$; E) 45 см^2.

17. Айланага ташқи чизилган мунтазам олтибурчакнинг томони $4\sqrt{2}$. Айланага ички чизилган квадратнинг юзи ҳисоблансин.

A) 64; B) 48; C) 52; Д) 50; E) 60 см^2.

18. Ромбнинг томони $10\sqrt{3}$ см га, ўткир бурчаги 60° га тенг. Ромбга ички чизилган доиранинг юзи ҳисоблансин.

A) $56,25\pi$; B) $48,75\pi$; C) $52,25\pi$; Д) $50,6\pi$; E) $48,5\pi$ см^2.

19. Ўтмас бурчаги 120° бўлган ромбга ички чизилган доиранинг юзи 36π см^2. Ромбнинг юзи ҳисоблансин.

A) $92\sqrt{2}$; B) $96\sqrt{2}$; C) $88\sqrt{3}$; Д) $96\sqrt{3}$; E) $92\sqrt{3}$ см^2.

20. Айланага мунтазам олтибурчак ички чизилган ва унинг кичик диагонали 12 см. Олтибурчакнинг юзи ҳисоблансин.

A) $64\sqrt{2}$; B) 64; C) $72\sqrt{2}$; Д) $64\sqrt{3}$; E) $72\sqrt{3}$ см^2.

21. Тўғри бурчакли учбурчак айланага ташқи чизилган ва гипотенуза айланага уриниш нуқтасида 3 см ва 2 см бўлган кесмаларга ажралади. Учбурчакка ички чизилган доиранинг юзи ҳисоблансин.

A) 2π; B) $1,44\pi$; C) π; Д) 4π; E) $2,25\pi$ см^2.

22. Тенг ёнли ΔABC нинг асоси $AC=12$ см, баландлиги $DB=8$ см. Учбурчакка ички чизилган айлана марказидан унинг B учигача бўлган масофа топилсин.

A) 8; B) 5; C) 6; Д) 9; E) 4 см.

23. Квадратнинг томони 8 см бўлса, унга ташқи чизилган айлананинг узунлиги топилсин.

A) $8\sqrt{2}\,\pi$; B) $6\sqrt{2}\,\pi$; C) 8π; Д) $10\sqrt{2}\,\pi$; E) $7\sqrt{5}\,\pi$ см.

24. Радиуси $R=6$ бўлган айланага учбурчак ички чизилган ва унинг ички бурчаклари катталиклари 3:4:5 каби нисбатда. Энг катта ёйнинг узунлиги топилсин.

А) 3π; В) 8π; С) 4π; Д) 6π; Е) 5π.

25. Айланага ташқи чизилган тенг ёнли трапециянинг ўрта чизиғи 5 см. Трапециянинг периметри топилсин.

А) 21; В) 24; С) 22; Д) 20; Е) 18 см.

26. Мунтазам тўртбурчакнинг томони 8 см бўлса, унга ташқи чизилган доиранинг юзи ҳисоблансин.

А) 28π; В) 24π; С) 32π; Д) 30π; Е) 16π см^2.

27. Ромбнинг томони 15 см, ўткир бурчаги 30° бўлса, ромбга ички чизилган айлананинг узунлиги топилсин.

А) 6π; В) $7{,}5\pi$; С) $8{,}5\pi$; Д) 7π; Е) 12π см.

28. Трапециянинг томонлари a, a, a ва $2a$ бўлса, унга ташқи чизилган айлананинг узунлиги топилсин.

А) $7a\pi$; В) $3a\pi$; С) $6a\pi$; Д) $2a\pi$; Е) $4a\pi$.

29. Тенг ёнли трапецияга айлана ички чизилган. Трапециянинг ён томони 4 см, катта асосидаги ўткир бурчаги 30° бўлса, трапециянинг юзи ҳисоблансин.

А) 8; В) 6; С) 9; Д) 12; Е) 13 см^2.

30. Айланага ички чизилган учбурчакнинг учлари айланани узунликлари 2:3:4 каби нисбатда бўлган учта қисмга ажратади. Учбурчакнинг ички бурчаклари катталиклари топилсин.

А) 30°, 60°, 90°; В) 40°, 50°, 90°; С) 50°, 60°, 70°; Д) 60°, 65°, 40°; Е) 40°, 60°, 80°.

31. Тўғри бурчакли учбурчак тўғри бурчаги учидан ўтказилган медиана ва биссектриса орасидаги

бурчак 10°. Учбурчакнинг бурчаклари катталиклари топилсин.

А) 20° ва 70°; В) 45° ва 50°; С) 35° ва 55°;
Д) 30° ва 60°; Е) 40° ва 50°.

32. Учбурчакнинг битта учидан ўтказилган баландлик, биссектриса ва медиана шу бурчакни тўртта тенг бурчакка бўлади. Учбурчакнинг бурчаклари катталиклари топилсин.

А) 90°, 35°, 55°; В) 90°, 22°, 30°; С) 90°, 40°, 50°;
Д) 90°, 36°, 54°; Е) 90°, 30°, 60°.

33. Тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчаги учидан ва ички ҳамда ташқи чизилган айланалар марказларидан нурлар ўтказилган бўлиб, улар орасидаги бурчак 7°. Учбурчакнинг ўткир бурчаклари катталиклари топилсин.

А) 30° ва 60°; В) 40° ва 50°; С) 45° ва 45°;
Д) 38° ва 52°; Е) 36° ва 54°.

34. Мунтазам олтибурчакнинг томони $a=12$ см бўлса, олтибурчакка ички чизилган доиранинг юзи ҳисоблансин.

А) 112π; В) 96π; С) 98π; Д) 120π; Е) 108π см^2.

35. Радиуси 5 см бўлган айланага мунтазам ўниккибурчак ички чизилган. Марказий AOB бурчакка мос келган ёйнинг узунлиги топилсин.

А) $\frac{5\pi}{6}$; В) $\frac{2\pi}{3}$; С) $\frac{3\pi}{4}$; Д) $\frac{5\pi}{8}$; Е) $\frac{6\pi}{7}$ см.

36. Тенг ёнли учбурчакнинг учидаги бурчаги 2α, унга ташқи чизилган айлананинг радиуси p га тенг. Учбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

А) $p^2\sin2\alpha$; В) $4p^2\cos^3\alpha\cdot\sin\alpha$; С) $p^2\sin3\alpha$; Д) $p^2\cos2\alpha$;
Е) $(1+p^2)\sin2\alpha$.

37. r радиусли айланага тенг ёнли трапеция ташқи чизилган. Трапециянинг ўткир бурчаги α бўлса, унинг юзи ҳисоблансин.

А) $2r^2\sin\alpha$; В) $r^2\operatorname{tg}\alpha$; С) $\frac{4r^2}{\sin\alpha}$; Д) $\frac{2r^2}{\cos\alpha}$; Е) $\frac{3r^2}{\operatorname{tg}\alpha}$.

38. Айланага мунтазам учбурчак ички чизилган ва унинг юзи S. Сўнгра учбурчакка айлана ички чизилган. Ҳосил бўлган камарнинг юзи ҳисоблансин.

А) $1{,}5S$; В) $0{,}5S$; С) $0{,}75S$; Д) $3\pi\frac{\sqrt{2}}{5}$; Е) $S\pi\sqrt{3}/3$.

39. Айланага мунтазам олтибурчаклар ички ва ташқи чизилган. Иккинчи олтибурчакнинг юзи биринчисининг юзидан $8\sqrt{3}$ см^2 ортиқ. Айлананинг радиуси топилсин.

А) $5\sqrt{3}$; В) 6; С) $4\sqrt{3}$; Д) 4; Е) 8 см.

40. Учбурчакнинг томонлари $AB=29$ см, $AC=25$ см, $BC=6$ см. Учбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиуси топилсин.

А) $\frac{145}{8}$; В) 16; С) $\frac{140}{9}$; Д) $\frac{139}{7}$; Е) $\frac{152}{7}$ см.

41. Учбурчакнинг икки томони $a=11$, $b=24$ см ва улар орасидаги бурчаги 120°. Учбурчакнинг ташқи чизилган айлананинг радиуси топилсин.

А) $3\sqrt{2}$; В) $\frac{31}{\sqrt{3}}$; С) $\frac{40}{\sqrt{3}}$; Д) $\frac{53}{\sqrt{3}}$; Е) $4\sqrt{3}$ см.

42. Тенг ёнли ABC учбурчакда асос $AC=4$ см, $\angle ADC=135°$ ва AD учбурчакнинг биссектрисаси бўлса, унинг узунлиги топилсин.

А) $\sqrt{13}$; В) $2\sqrt{7}$; С) $2\sqrt{5}$; Д) $2\sqrt{3}$; Е) $2\sqrt{2}$ см.

43. Мунтазам олтибурчакнинг юзи $12\sqrt{3}$ см^2. Олтибурчакка ички чизилган доиранинг юзи ҳисоблансин.

А) 7π; В) 4π; С) 6π; Д) 5π; Е) 8π см^2.

44. Томони $3\sqrt{2}$ см бўлган мунтазам тўртбурчакка айлана ташқи чизилган. Шу айланага ташқи чизилган мунтазам учбурчакнинг томони узунлиги топилсин.

А) $4\sqrt{2}$; В) $5\sqrt{3}$; С) $6\sqrt{2}$; Д) $6\sqrt{3}$; Е) $7\sqrt{2}$ см.

45. Айланага мунтазам олтибурчак ташқи чизилган ва унинг томони $2\sqrt{3}$ см бўлса, айланага ички чизилган квадратнинг юзи ҳисоблансин.

А) 15; В) 16; С) 20; Д) 19; Е) 18 см^2.

46. $ABCD$ тўртбурчак доирага ички чизилган ва $CB=4$, $CD=5$, $\angle A=60°$ бўлса, BD диагоналнинг узунлиги топилсин.

А) $\sqrt{61}$; В) $\sqrt{59}$; С) $\sqrt{57}$; Д) $\sqrt{71}$; Е) $\sqrt{65}$.

47. Радиуси $\sqrt{3}$ бўлган доирага ўткир бурчаги 60° бўлган тенг ёнли трапеция ташқи чизилган. Трапециянинг ўрта чизиғи узунлиги топилсин.

А) 3; В) 4; С) 5; Д) 8; Е) 6.

6-§. ВЕКТОРЛАР

6.1. Асосий тушунчалар

Бошланиш нуқтаси A ва охирги нуқтаси B танланган AB кесма йўналган кесма дейилади, бунда A нуқта йўналган кесманинг *боши*, B нуқта *охири* дейилади.

Геометрияда йўналган кесма *вектор* деб аталади. Векторлар қуйидагича белгиланади: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ ёки $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

$\overline{AB}$ векторнинг *узунлиги* деб AB кесманинг узунлигини айтилади ва у $|\overline{AB}|$ ёки $|\overline{a}|$ каби белгиланади.

Боши ва охири устма-уст тушган вектор $\overline{0}$ *ноль вектор* деб аталади. Унинг узунлиги нолга тенг.

Агар икки $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторнинг узунликлари тенг, йўналишлари эса қарама-қарши бўлса, улар *қарама-қарши векторлар* дейилади ва қуйидагича ёзилади: $\bar{a} = -\bar{b}$.

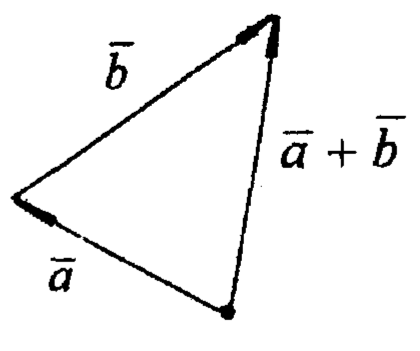
Векторларни қўшишнинг иккита қоидаси мавжуд.

1. **УЧБУРЧАК ҚОИДАСИ.** Иккита $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторни қўшиш учун биринчи $\bar{a}$ векторнинг охирига иккинчи векторнинг бошини жойлаштирамиз. Биринчи векторнинг бошини иккинчи векторнинг охири билан туташтирувчи вектор $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларнинг йиғиндиси дейилади ва у $\bar{a}+\bar{b}$ каби белгиланади (6.1-чизма).

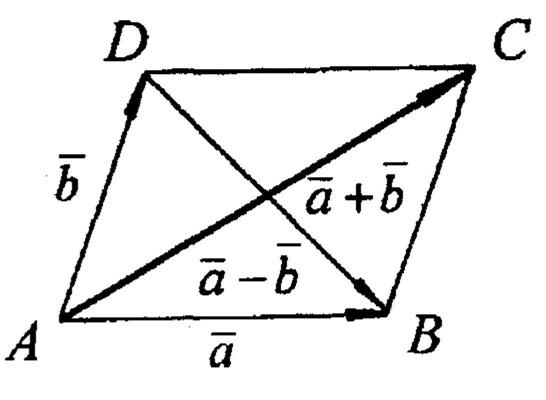
2. **ПАРАЛЛЕЛОГРАММ ҚОИДАСИ.** $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларнинг бошини умумий A нуқтага келтирамиз. Ҳар бир векторнинг учидан иккинчи векторга параллел тўғри чизиқ ўтказиб, $ABCD$ параллелограмм ясаймиз. $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларнинг умумий А нуқтасидан чиққан диагоналдаги $\overline{AC}$ вектор $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларнинг йиғиндиси бўлади (6.2-чизма).

Бу қоидалар ёрдамида векторларнинг айирмасини аниқлаймиз.

3. Агар $\bar{b}$ ва $\bar{p}$ векторларнинг йиғиндиси $\bar{a}$ векторга тенг бўлса, $\bar{p}$ вектор $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларнинг *айирмаси* деб аталади ва $\bar{a}-\bar{b}=\bar{p}$ каби белгиланади (6.2-чизма).



6.1-чизма.



6.2-чизма.

Демак, $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторлар ёрдамида ясалган параллелограммнинг A учидан чиққан диагоналида $\bar{a}+\bar{b}$ вектор, бу векторларнинг охирида ётган учларидан ўтувчи диагоналида эса $\bar{a}-\bar{b}$ вектор ётади (6.2-чизма).

Энди баъзи таърифлар ва хоссаларни келтирамиз.

4. Агар векторлар битта тўғри чизиқда ёки параллел тўғри чизиқларда ётса, улар *коллинеар* дейилади.

5. $\bar{a}$ *вектор* ва k *соннинг кўпайтмаси* деб, шундай $\bar{b}$ векторга айтиладики, унинг учун $\bar{a} \parallel \bar{b}$ ва $|\bar{a}|=|k|\,|\bar{a}|$ шартлар бажарилади.

6. Берилган $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларни умумий O нуқтага келтирамиз. Ушбу векторлар орасидаги бурчак φ бўлса, $\text{пр}_{\bar{a}}=|\bar{a}|\cdot\cos\varphi$ сон берилган $\bar{a}$ векторнинг $\bar{b}$ вектор йўналишидаги *проекциясидир*. φ бурчак 0 дан π гача ўзгарганлиги учун проекция мусбат, манфий ва нолга тенг қийматлар қабул қилиши мумкин.

7. Тенг векторларнинг проекциялари ҳам ўзаро тенг.

8. Векторлар йиғиндисининг проекцияси қўшилувчи векторларнинг проекциялари йиғиндисига тенг, яъни $\bar{c}=\bar{a}+\bar{b}$ бўлса, $\bar{c}_{\text{пр}}=\bar{a}_{\text{пр}}+\bar{b}_{\text{пр}}$.

9. Иккита $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторнинг скаляр кўпайтмаси шу векторларнинг узунликлари ва улар орасидаги бурчак косинусининг кўпайтмасига тенг:

$$(\bar{a}\cdot\bar{b})=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi. \tag{6.2}$$

Векторнинг проекцияси тушунчасидан фойдаланиб, иккита $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторнинг скаляр кўпайтмасини қуйидагича ҳам ёзиш мумкин:

$$(\bar{a}\cdot\bar{b})=|\bar{a}|\cdot\text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b}=|\bar{b}|\cdot\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a}. \tag{6.3}$$

Скаляр кўпайтма қуйидаги хоссаларга эга:

9.1. $(\bar{a}\cdot\bar{b})=(\bar{b}\cdot\bar{a})$ — ўрин алмаштириш хоссаси.

9.2. $p(\bar{a}\cdot\bar{b})=((p\cdot\bar{a})\cdot\bar{b})=(\bar{a}\cdot(p\cdot\bar{b}))$ — гуруҳлаш хоссаси, p — ҳақиқий сон.

9.3. $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}\cdot\bar{b})+(\bar{a}\cdot\bar{c})$ — тақсимот хоссаси.

9.4. Агар $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ лардан бири ноль вектор ё $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлса, $(\bar{a}\cdot\bar{b})=0$ бўлади.

9.5. (6.2) да $\bar{a}=\bar{b}$ бўлса, $(\bar{a}\cdot\bar{a})=|\bar{a}|^2$ бўлади. Натижада векторнинг узунлиги

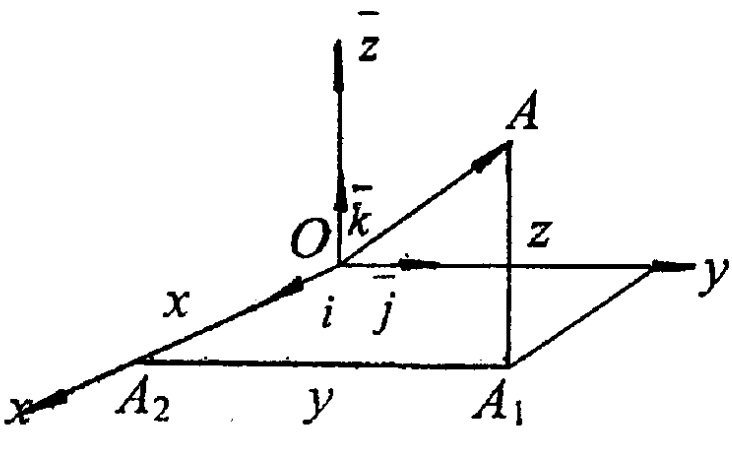
$$|\bar{a}|=\sqrt{\bar{a}^2}=\sqrt{(\bar{a}\cdot\bar{a})} \tag{6.4}$$

9.6. Икки вектор орасидаги бурчак

$$\cos\varphi=\frac{(a\cdot b)}{|a|\cdot|b|} \tag{6.5}$$

формуладан топилади.

10. Векторнинг фазодаги координаталари. Фазода тўғри бурчакли $Oxyz$ координаталар системаси танланган бўлса, $\bar{a}=\overline{OA}$ векторни O нуқтага келтирамиз ва координаталар ўқларига проекциялаймиз. Проекцияларнинг алгебраик қийматлари $\bar{a}$ векторнинг координаталаридир. Координаталар ўқларининг ҳар бирида бирлик векторларни танлаймиз; (Ox ўқда $\bar{i}$, Oy ўқда $\bar{j}$, Oz ўқда $\bar{k}$ векторлар). Берилган A нуқтани Oxy текисликка проекциялаймиз. (Проекция A_1 нуқта бўлса, уни Ox ўққа проекциялаймиз ва унинг проекцияси A_2 бўлсин). Сўнгра OA_2A_1A ёпиқ синиқ чизиқни ҳосил қиламиз. У ҳолда,



6.3-чизма.

$$\overline{OA} = \overline{OA_2} + \overline{A_2A_1} + \overline{A_1A} \qquad (6.6)$$

$\overline{OA_2} \parallel \bar{i}, \overline{A_2A_1} \parallel \bar{j}, \overline{A_1A} \parallel \bar{k}$ бўлгани учун, $\overline{OA_2} = x\bar{i}$, $\overline{A_1A_2} = y\bar{j}$, $\overline{A_1A} = z\bar{k}$ деб ёзиб мумкин, натижада векторнинг $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ векторлар орқали ёйилмаси деб аталадиган

$$\overline{OA} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \qquad (6.7)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ёйилмадаги $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ векторлар олдидаги коэффициентлар берилган $\bar{a}$ векторнинг координаталаридир: $\bar{a}\,(x, y, z)$. $\bar{a} = \overline{AB}$ векторнинг учлари $A\,(x_1, y_1, z_1)$ ва $B\,(x_2, y_2, z_2)$ нуқталарда бўлса, A ва B нуқталарни O нуқта билан туташтирамиз ва (6.7) формуладан:

$$\overline{OA} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}, \ \overline{OB} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}, z_2\bar{k}$$

ҳамда

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k} \qquad (6.8)$$

муносабатларни ҳосил қиламиз.

Демак, икки нуқта билан аниқланган векторнинг координаталари шу нуқталар мос координаталарининг айирмасига тенг:

$$x = x_2 - x_1, \ y = y_2 - y_1, \ z = z_2 - z_1. \qquad (6.9)$$

$\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$ векторлар ва p сон берилган бўлсин.

У ҳолда

$$\begin{aligned}
&\bar{a} + \bar{b} = (x_1 + x_2)\bar{i} + (y_1 + y_2)\bar{j} + (z_1 + z_2)\bar{k}, \\
&(\bar{a} + \bar{b})(x_1 + x_2, \ y_1 + y_2, \ z_1 + z_2); \qquad (6.10) \\
&\bar{a} - \bar{b} = (x_1 - x_2)\bar{i} + (y_1 - y_2)\bar{j} + (z_1 - z_2)\bar{k}, \\
&(\bar{a} - \bar{b})(x_1 - x_2, \ y_1 - y_2, \ z_1 - z_2);
\end{aligned}$$

$$p\bar{B} = px_2\bar{i} + py_2\bar{j} + pz_2\bar{k}, \quad p\bar{B}(px_2, py_2, pz_2).$$

$\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторлар коллинеар бўлса, $a = \bar{k}\,b$ ва $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = p$ бўлади. Векторнинг узунлиги ҳисоблаш формуласи

$$|\bar{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \qquad (6.12)$$

ёки

$$|\bar{a}| = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

кўринишни олади.

Икки вектор орасидаги бурчак формуласи қуйидагичадир:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}. \qquad (6.14)$$

6.2. Мавзу бўйича масалалар

1. $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=3$ векторлар орасидаги бурчак $(\bar{a} \wedge \bar{b}) = \frac{\pi}{3}$ бўлса, а) $(\bar{a} \cdot \bar{b})$; б) $(\bar{a} - \bar{b})^2$; с) $(2\bar{a} - \bar{b}) \times$ $\times (\bar{a} + 3\bar{b})$ скаляр кўпайтмалар ҳисоблансин.

а): А) 2; В) 3; С) 7; Д) 5; Е) 6.

б): А) 8; В) 9; С) 10; Д) 7; Е) 6.

с): А) 4; В) –3; С) –4; Д) 9; Е) 3.

2. $\bar{e}_1$ ва $\bar{e}_2$ ўзаро перпендикуляр ($\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$) бирлик векторлар бўлса, $\bar{a} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2$ векторнинг узунлиги ҳисоблансин.

А) $\sqrt{5}$; В) 2; С) $\sqrt{6}$; Д) $\sqrt{7}$; Е) $\sqrt{11}$.

3. $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларнинг узунликлари $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=1$ ва $(\bar{a} \wedge \bar{b}) = \frac{\pi}{3}$ бўлса, $\bar{p}=\bar{a}-\bar{b}$ ва $\bar{q}=\bar{a}+\bar{b}$ векторлар орасидаги бурчак $(\bar{p} \wedge \bar{q})$ топилсин.

A) $\arccos\frac{5}{\sqrt{41}}$; B) $\arcsin\frac{8}{\sqrt{91}}$; C) $\frac{\pi}{4}$; Д) arctg2; E) $\arccos\frac{8}{\sqrt{91}}$.

4. $\bar{a}=3\bar{i}+4\bar{j}$ ва $\bar{b}=5\bar{i}+12\bar{j}$ векторлар орасидаги бурчакнинг косинуси ҳисоблансин.

A) $-\frac{11}{35}$; B) $\frac{13}{65}$; C) $-\frac{17}{65}$; Д) $-\frac{33}{65}$; E) $-\frac{23}{65}$.

5. Учлари $A\,(4\sqrt{3},-1)$, $B\,(0,\ 3)$, $C\,(8\sqrt{3},\ 3)$ нуқталарда бўлган ΔABC нинг B бурчаги топилсин.

A) 45°; B) 30°; C) 75°; Д) 60°; E) 15°.

6. $\bar{a}\,(2,\ 1,\ 0)$ ва $\bar{b}\,(0,\ -1,\ 1)$ векторлар ёрдамида ясалган параллелограммнинг диагоналлари орасидаги бурчакнинг косинуси ҳисоблансин.

A) $\frac{1}{\sqrt{6}}$; B) $\frac{1}{3}$; C) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; Д) $\frac{1}{\sqrt{7}}$; E) $\frac{1}{4}$.

7. $\bar{a}\,(-2,\ 1)$, $\bar{b}\,(0,\ 2)$, $\bar{c}\,(3,\ -1)$ векторлар берилган бўлса, $2\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}$ векторнинг координаталари топилсин.

A) $(-1;\ -1)$; B) $(0,1)$; C) $(2,\ -1)$; Д) $(-1,3)$; E) $(-2,\ -2)$.

8. $\bar{a}\,(-1,\ 3)$ ва $\bar{b}\,(4,\ -7)$ векторлар берилган бўлса, $\bar{a}+\bar{b}$ векторнинг узунлиги ҳисоблансин.

A) 6; B) 3,5; C) 4; Д) 7; E) 5.

9. Фазода $\bar{a}\,(2,\ 4,\ 0)$, $\bar{b}\,(0,\ -3,\ 1)$, $\bar{c}\,(5,\ -1,\ 2)$ векторлар берилган. $2\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}$ векторнинг координаталари топилсин.

A) (4, 7, −2); B) (9, 16, −1); C) (4, 16, −2); Д) (6, −4; 12); E) (8, 12, 3).

10. $\bar{a}(-3, p, 9)$ ва $\bar{b}(2, -8, r)$ векторлар ўзаро параллел бўлса, p ва r топилсин.

A) $p=6$, $r=-12$; B) $p=-6$, $r=-12$; C) $p=4$, $r=-6$; Д) $p=12$, $r=-6$; E) $p=-12$, $r=6$.

6.3. Мавзу бўйича масалаларнинг ечимлари

1. Е ч и л и ш и. а) (6.2) формуладан фойдаланамиз: $(\bar{a}\cdot\bar{b})=2\cdot 3\cdot\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=3.$

Жавоби: B).

b) Учинчи ва бешинчи хоссалардан фойдаланамиз:

$(\bar{a}-\bar{b})^2=\bar{a}^2-2(\bar{a}\cdot\bar{b})+\bar{b}=2^2-2\cdot 3+3^2=7.$

c) $(2\bar{a}-\bar{b})\cdot(\bar{a}+3\bar{b})=2\bar{a}^2+6(\bar{a}\cdot\bar{b})-(\bar{b}\cdot\bar{a})-3\bar{b}^2=$
$=2\cdot 4+5\cdot 3\cdot 2-3\cdot 9=11.$

Жавоби: C).

2. Е ч и л и ш и. Скаляр кўпайтманинг 9.3 ва 9.5-хоссаларидан фойдаланамиз:

$$|\bar{a}|=\sqrt{(2\bar{e}_1-\bar{e}_2)^2}=\sqrt{4\bar{e}_1^2-4(\bar{e}_1\cdot\bar{e}_2)+\bar{e}_1^2}=$$
$$=\sqrt{4-4\cdot 0+1}=\sqrt{5}.$$

Жавоби: A).

3. Е ч и л и ш и. Дастлаб $\bar{p}$ ва $\bar{q}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси ва узунликларини ҳисоблаймиз:

$$(\bar{p}\cdot\bar{q})=(\bar{a}-\bar{b})\cdot(\bar{a}+\bar{b})=\bar{a}^2-\bar{b}^2=3^2-1^2=8.$$

$$|\bar{p}| = |\bar{a} - \bar{b}| = \sqrt{(\bar{a} - \bar{b})^2} = \sqrt{\bar{a}^2 - 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2} =$$

$$= \sqrt{|\bar{a}|^2 - 2|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos 60^\circ + |\bar{b}|^2} = \sqrt{3^2 - 2\cdot 3\cdot 1\cdot \frac{1}{2} + 1} = \sqrt{7}.$$

$$|\bar{q}| = |\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{(\bar{a} - \bar{b})^2} = \sqrt{3^2 + 2\cdot 3\cdot \frac{1}{2} + 1^2} = \sqrt{13}.$$

Энди (6.5) формуладан фойдалансак,

$$\cos\varphi = \frac{(p\cdot q)}{|p|\cdot|q|} = \frac{8}{\sqrt{7}\sqrt{13}} = \frac{8}{\sqrt{91}} \text{ ва } \varphi = \arccos\frac{8}{\sqrt{91}}.$$

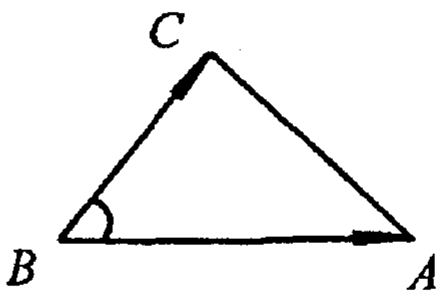
Жавоби: Е).

4. Ечилиши. $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларнинг ёйилмаларидан уларнинг координаталарини ёзиб оламиз: $\bar{a}\,(3, -4)$ ва $\bar{b}\,(5, 12)$. Сўнгра (6.5) формуладан фойдалансак,

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}};$$

$$\cos\varphi = \frac{3\cdot 5 - 4\cdot 12}{\sqrt{3^2 + 16}\cdot\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{-33}{13\cdot 5} = \frac{-33}{65}.$$

Жавоби: Д).



6.3.1-чизма.

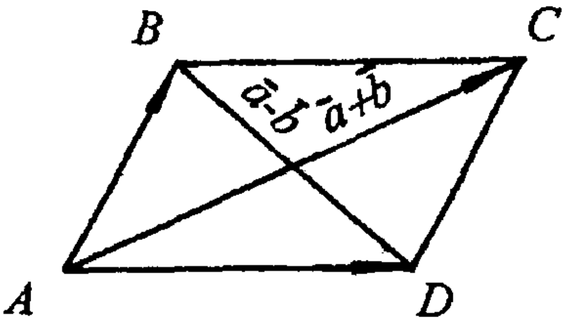
5. Ечилиши. $\angle B$ берилишига кўра, $\overline{BA}$ ва $\overline{BC}$ векторлар ёрдамида ҳосил қилинган (6.3.1-чизма). Шу сабабли, уларнинг координаталарини топамиз: $\overline{BA}\,(4\sqrt{3} - 0, -1 - 3) = (4\sqrt{3}, -4)$, $\overline{BC}\,(8\sqrt{3} - 0, 3 - 3) = (8\sqrt{3}, 0)$. Натижада,

$$\cos\angle B = \frac{(\overline{BA}\cdot\overline{BC})}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|} = \frac{4\sqrt{3}\cdot 8\sqrt{3} - 4\cdot 0}{\sqrt{48 + 16}\cdot\sqrt{(8\sqrt{3})^2}} = \frac{32\cdot 3}{8\cdot 8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

ва $\cos\angle B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, бу ердан $\angle B = 30°$.

Жавоби: В).

6. Ечилиши. $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторлар умумий битта нуқтага келтирилиб, параллелограмм ясалганлигидан, унинг диагоналлари устида $\bar{a}+\bar{b}$ ва $\bar{a}-\bar{b}$ векторлар ётади (6.3.2-чизма). Уларнинг координаталарини (6.9) формуладан топамиз:



6.3.2-чизма.

$$\bar{a}-\bar{b}=(2+0,\ 1-1,\ 0+1)=(2,\ 0,\ 1),$$

$$\bar{a}-\bar{b}=(2-0,\ 1+1,\ 0-1)=(2,\ 2,\ -1).$$

Энди бу векторлар орасидаги бурчакнинг косинусини (6.5) формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b})}{|(\bar{a}+\bar{b})\cdot|(\bar{a}-\bar{b})|};$$

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 2+0\cdot 2+1\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+0^2+1^2}\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Жавоби: С).

7. Ечилиши. Маълумки, вектор сонга кўпайтирилганда унинг ҳар бир координатаси шу сонга кўпайтирилади:

$$2\bar{a}=(2\cdot(-2),\ 2\cdot 1)=(-4,\ 2).$$

Энди $2\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}$ ифоданинг координаталарини топамиз:

$$2\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}=(-4-0+3, 2-2+(-1))=(-1,\ -1).$$

Жавоби: А).

8. Е ч и л и ш и. Аввало $\bar{a}-\bar{b}$ векторнинг координаталарини топамиз:

$$\bar{a}+\bar{b}=(-1+4,\ 3-7)=(3,\ -4).$$

Сўнгра унинг узунлигини ҳисоблаймиз:

$$|\bar{a}+\bar{b}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

Жавоби: Е).

9. Е ч и л и ш и. Дастлаб $2\bar{a}$ ва $3\bar{b}$ векторларнинг координаталарини топамиз:

$$2\bar{a}=(2\cdot 2,\ 2\cdot 4,\ 2\cdot 0)=(4,\ 8,\ 0),$$
$$3\bar{b}=(3\cdot 0,\ 3\cdot(-3),\ 3\cdot 1)=(0,\ -9{,}3).$$

У ҳолда, $2\bar{a}-3\bar{b}+\bar{c}=(4-0+5,\ 8+9-1,\ 0-3+2)=(9,\ 16,\ -1)$.

Жавоби: В).

10. Е ч и л и ш и. Параллел векторларнинг мос координаталари пропорционал бўлганлигидан, қуйидаги $-\frac{3}{2}=\frac{-p}{-8}=\frac{9}{r}$ формула ўринлидир. Бу ердан, $-\frac{3}{2}=\frac{-p}{-8}\Rightarrow p=\frac{24}{2}=12,\ -\frac{3}{2}=\frac{9}{r}\Rightarrow r=-6.$

Жавоби: Д).

6.4. Мустақил ечиш учун масалалар

1. $\overline{AB}=\bar{c}$ ва $\overline{AC}=\bar{b}$ векторлар ёрдамида ΔABC ясалган. AK медианадаги $\overline{AK}$ векторни $\bar{b}$ ва $\bar{c}$ векторлар орқали ифодаланг.

А) $\frac{\bar{b}-\bar{c}}{2}$; В) $\frac{\bar{c}-2\bar{b}}{2}$; С) $\frac{2\bar{b}-\bar{c}}{3}$; Д) $\frac{\bar{b}+\bar{c}}{2}$; Е) $\bar{c}+2\bar{b}$.

2. ABC учбурчакда $\overline{AB}=\overline{c}$, $\overline{AC}=\overline{b}$, $\overline{BC}=\overline{a}$ ва O унинг медианаларининг кесишиш нуқтаси бўлса, $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$ йиғиндини ҳисобланг.

А) $\overline{a}+2\overline{b}$; В) 0; С) $\overline{a}-\overline{b}$; Д) $2\overline{a}$; Е) $\overline{a}+\overline{b}$.

3. $ABCDEF$ мунтазам олтибурчакнинг маркази O нуқта бўлсин, $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}, \overline{OE}, \overline{OF}$ векторларнинг йиғиндиси ҳисоблансин.

А) 0; В) $2\overline{AC}$; С) $\overline{AB}$; Д) $\overline{AE}$; Е) $\overline{BC}$.

4. $ABCD$ параллелограмм $\overline{AB}=\overline{a}$ ва $\overline{AD}=\overline{c}$ векторлар ёрдамида ясалган ва унинг диагоналлари кесишиш нуқтаси O бўлсин. $\overline{OD}$ вектор $\overline{a}$ ва $\overline{c}$ орқали ифодалансин.

А) $\frac{\overline{a}}{2}$; В) $2\overline{a}\,\overline{c}$; С) $\frac{\overline{c}-\overline{a}}{2}$; Д) $\frac{\overline{a}-\overline{c}}{2}$; Е) $\overline{a}+2\overline{c}$.

5. $ABCD$ параллелограммда $\overline{AC}=\overline{a}$ ва $\overline{BD}=\overline{c}$ бўлса, $\overline{BC}$ вектор $\overline{a}$ ва $\overline{c}$ векторлар орқали ифодалансин.

А) $\frac{\overline{a}-\overline{c}}{2}$; В) $2\overline{a}+\overline{c}$; С) $\overline{a}-2\overline{c}$; Д) $\frac{\overline{a}+\overline{c}}{2}$; Е) $\frac{\overline{c}-\overline{a}}{2}$.

6. $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ векторлар ўзаро перпендикуляр ҳамда $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=4$ бўлса, $|\overline{a}+\overline{b}|$ топилсин.

А) 5; В) 4; С) 6; Д) 6; Е) 7.

7. ΔOAB $\overline{OA}=\overline{a}$ ва $\overline{OB}=\overline{b}$ векторлар ёрдамида ясалган. AOB бурчакнинг биссектрисасидаги $\overline{OK}$ вектор $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ векторлар орқали ифодалансин.

А) $\frac{\overline{ba}}{|\overline{a}+\overline{b}|}$; В) $\frac{\overline{ab}}{|\overline{a}+\overline{b}|}$; С) $\frac{\overline{a}}{|\overline{a}+\overline{b}|}$; Д) $\frac{\overline{a}+\overline{b}}{|\overline{a}+\overline{b}|}$; Е) $\frac{\overline{ab}+\overline{ba}}{|\overline{a}+\overline{b}|}$.

8. Агар: 1) $|\bar{a}|=6$, $|\bar{b}|=1, (\bar{a}\hat{,}\bar{b}) = \frac{\pi}{3}$ бўлса; 2) $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=2\sqrt{2}$, $(\bar{a}\hat{,}\bar{b})=135°$ бўлса; 3) $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=3, \bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b}$ бўлса; 4) $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=3, \bar{a}\uparrow\downarrow\bar{b}$ бўлса, $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси топилсин.

1) A) 2; B) 1; C) 3; Д) 4; E) 2,5.
2) A) 4; B) 3; C) −2; Д) −6; E) 1
3) A) 4; B) 6; C) 2; Д) 3; E) 12
4) A) −6; B) 6; C) −3; Д) −12; E) 4.

9. Агар $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=3$, бурчак $(\bar{a}\hat{,}\bar{b}) = \frac{\pi}{3}$ бўлса, қуйидагилар ҳисоблансин:

a) $(\bar{a}, \bar{b})$; b) $\bar{a}^2$; c) $\bar{b}^2$; d) $(\bar{a}-\bar{b})^2$; e) $(2\bar{a}-\bar{b})(\bar{a}-2\bar{b})$; и) $(\bar{a}-\bar{b})(\bar{a}+\bar{b})$.

a) A) 4; B) 3; C) 5; Д) 2; E) 6.
b) A) 3; B) 5; C) 4; Д) 2; E) 1.
c) A) 9; B) 7; C) 6; Д) 11; E) 10.
d) A) 6; B) 5; C) 4; Д) 7; E) 8.
e) A) 11; B) 12; C) 13; Д) 15; E) 14.
и) A) −5; B) −14; C) −2; Д) −1; E) −3.

10. $|\bar{a}|=\frac{1}{2}$, $|\bar{b}|=4$, $(\bar{a}\hat{,}\bar{b}) = \frac{2\pi}{3}$ бўлса, $2|\bar{a}|(\bar{a}\,\bar{b})-$ $-3(\bar{b}\,\bar{a})-5\bar{b}^2$ ифоданинг қиймати ҳисоблансин.

A) −78; B) −36; C) 42; Д) 56; E) −64.

11. Агар: 1) $(\bar{a}\,\bar{b})=40$, $|\bar{a}|=5$, $|\bar{b}|=16$; 2) $(\bar{a}\,\bar{b})=-24$, $|\bar{a}|=6$, $|\bar{b}|=4$; 3) $(\bar{a}\,\bar{b})=4\sqrt{3}$, $|\bar{a}|=5$, $|\bar{b}|=20$ бўлса, $(\bar{a}\hat{,}\bar{b})$ топилсин.

1) A) 45°; B) 30°; C) $\arccos\frac{2}{5}$; Д) 60°; E) 90°.

2) A) 30°; B) 90°; C) 120°; Д) 180°; E) 60°.

3) A) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{25}$; B) $\arccos\frac{13}{15}$; C) 60°; Д) 45°; E) 90°.

12. $\bar{a} \perp \bar{b}$, $|\bar{a}|=5$, $|\bar{b}|=2$ бўлса, қуйидаги ифодалар ҳисоблансин:

1) $(\bar{a}-\bar{b})\bar{b}$; 2) $(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}-\bar{b})$; 3) $(2\bar{a}-3\bar{b})(\bar{a}-2\bar{b})$:

1) A) 8; B) 6; C) -2; Д) 1; E) -4.
2) A) 25; B) 4; C) 21; Д) 29; E) 16.
3) A) 65; B) 74; C) 68; Д) 72; E) 70.

13. Агар $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=1$ ва $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{\pi}{3}$ бўлса, $\bar{p}=\bar{a}-2\bar{b}$ векторнинг узунлиги топилсин.

A) 2; B) 3; C) 1; Д) 5; E) 6.

14. $\bar{a} \perp \bar{b}$, $|\bar{a}|=5$, $|\bar{b}|=2$ берилган бўлса, 1) $(\bar{a}-\bar{b})^2$; 2) $|2\bar{a}-3\bar{b}|^2$; 3) $|\bar{a}-5\bar{b}|^2$ ифодалар ҳисоблансин.

1) A) 25; B) 26; C) 27; Д) 28; E) 29.
2) A) 136; B) 137; C) 138; Д) 139; E) 140.
3) A) 120; B) 125; C) 126; Д) 135; E) 121.

15. $\overline{AB}=2\bar{a}+\bar{b}$ ва $\overline{AD}=\bar{a}-3\bar{b}$ векторлар ёрдамида $ABCD$ параллелограмм ясалган. Агар $\bar{a} \perp \bar{b}$, $|\bar{a}|=|\bar{b}|=1$ бўлса, AC ва BD диагоналларнинг узунликлари ҳисоблансин.

A) $\sqrt{17}$ ва $\sqrt{19}$; B) $\sqrt{19}$ ва $\sqrt{21}$; C) $\sqrt{11}$ ва $\sqrt{15}$; Д) $\sqrt{13}$ ва $\sqrt{17}$; E) 4 ва 6.

16. Агар $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ бирлик векторлар бўлиб, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=90°$ бўлса, $\bar{p}=2\bar{a}-\bar{b}$, $\bar{q}=2\bar{b}+\bar{a}$ векторлар орасидаги бурчак топилсин.

A) 75°; B) 60°; C) 45°; Д) 30°; E) 90°.

17. Агар $|\bar{p}|=2$, $|\bar{r}|=1$ ва улар орасидаги бурчак 60° га тенг бўлса, $\bar{a}=\bar{p}-\bar{r}$ ва $\bar{b}=5\bar{p}-2\bar{r}$ векторлар орасидаги бурчак топилсин.

A) $\arccos\frac{2}{5}$; B) $\arccos\frac{5}{\sqrt{7}}$; C) $\arccos\frac{5}{2\sqrt{7}}$; Д) $\arccos\frac{1}{4}$;

E) $\arccos\frac{2}{5}$.

18. Агар $\overline{a}=\overline{p}-\overline{r}$ ва $\overline{b}=4\overline{p}-5\overline{r}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлса, $\overline{p}$ ва $\overline{r}$ бирлик векторлар орасидаги бурчак топилсин.

А) 0°; В) 15°; С) 30°; Д) 45°; Е) 60°.

19. $ABCD$ параллелограмм $\overline{AB}=2\overline{a}-\overline{b}$ ва $\overline{AD}=\overline{a}-3\overline{b}$ векторлар ёрдамида ясалган. Агар $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ ўзаро перпендикуляр бирлик векторлар бўлса, $\overline{AC}$ ва $\overline{BD}$ векторлар орасидаги бурчак топилсин.

А) $\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$; В) $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$; С) $\arccos\frac{3}{\sqrt{5}}$; Д) 75°;
Е) 60°.

20. $\overline{p}=2\overline{a}-3\overline{b}$ ва $\overline{r}=4\overline{a}-k\overline{b}$ векторлар ўзаро перпендикуляр, $|\overline{a}|=|\overline{b}|=1$, $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ йўналишдош бўлса, k нинг қиймати топилсин.

А) 3; В) −2; С) −3; Д) 4; Е) −4.

21. $\overline{a}(-4, 2, 1)$ ва $\overline{b}$ $(3, -1, 1)$ векторлар берилган бўлса, $\overline{a}+\overline{b}$ векторнинг координаталари топилсин.

А) (0, 2, 1); В) (1, −1, −2); С) (−1; 1, 2);
Д) (−1, −1, 2); Е) (1, −1, 2).

22. $\overline{a}=21\overline{i}-3\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{b}=-5\overline{i}-\overline{k}$ векторлар маълум бўлса, $2\overline{a}$, $3\overline{b}$ векторларнинг координаталари топилсин.

А) (0, 2, 1) ва (15, 2, −3); В) (42, −6, 2) ва (−15, 0, −3);
С) (24, 6, 8) ва (5, 0, 1); Д) (32, −4, 1) ва (−5, 1, −3);
Е) (12, 4, 8) ва (0, −10, 3).

23. $\overline{a}=3\overline{i}-4\overline{j}-2\overline{k}$ ва $\overline{b}=-2\overline{i}+2\overline{j}$ векторлар берилган. $\overline{a}+\overline{b}$ векторнинг узунлиги ҳисоблансин.

А) 2; В) 1; С) 4; Д) 5; Е) 3.

24. $\overline{a}(2, -4, 5)$ ва $\overline{b}(4, -3, 5)$ векторлар орасидаги бурчакнинг косинуси топилсин.

A) $\frac{2}{\sqrt{11}}$; B) $\frac{3}{\sqrt{10}}$; C) $\frac{5}{\sqrt{11}}$; Д) $\frac{12}{\sqrt{145}}$; E) $\frac{3}{5}$.

25. ΔABC нинг $A(-1, 4, 1)$, $B(3, 4, -2)$, $C(5, 2, -1)$ учлари берилган. Учбурчакнинг B бурчаги топилсин.

A) π-$\arccos\frac{1}{3}$; B) $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$; C) 60°; Д) 120°;
E) 45°.

26. $\bar{a}(-2, -y, 1)$ ва $\bar{b}(3, -1, 2)$ векторлар перпендикуляр бўлса, y нинг қиймати топилсин.

A) 5; B) –3; C) 4; Д) 5; E) 1.

27. $\bar{a}(1, -2, 2)$ ва $\bar{b}(2, -2, -1)$ векторлар берилган бўлса, $2\bar{a}^2 - 4(\bar{a}\bar{b}) + 5\bar{b}^2$ ифоданинг қиймати ҳисоблансин.

A) 43; B) 44; C) 45; Д) 46; E) 47.

28. $\bar{a}(3, -1, 4)$ вектор берилган бўлиб, $\bar{c}$ вектор $\bar{a}$ вектор билан коллинеар ва $(\bar{a}\bar{c}) = -52$ шартни қаноатлантириши маълум бўлса, $\bar{c}$ векторнинг координаталари топилсин.

A) (6, –3, 2); B) (5, –3, 4); C) (8, –6, 4);
Д) (–6, 2, –8); E) (4, 1, –4).

29. Учлари $A(-4, -3, -2)$, $B(2, -2, -3)$, $C(-8, -5, 1)$, $D(4, -3, -1)$ бўлган $ABCD$ тўртбурчак берилган. Унинг AC ва BD диагоналлари орасидаги бурчак топилсин.

A) 45°; B) 90°; C) 60°; Д) 75°; E) 0°.

30. $\bar{a}(2, p, 6)$ ва $\bar{c}(1, 1, r)$ векторлар коллинеар бўлса, p ва r нинг қийматини топинг.

A) $p=12$, $r=12$; B) $p=3$, $r=14$; C) $p=-2$, $r=7$;
Д) $p=3$, $r=8$; E) $p=-2$, $r=10$.

31. $\bar{a}(2, 3, -1)$ ва $\bar{b}(0, 1, 4)$, $\bar{c}(1, 0, -3)$ векторлар берилган, $\bar{a}+2\bar{b}+3\bar{c}$ векторнинг координаталари топилсин.

A) $(-5, 5, -2)$; B) $(5, 5, -2)$; C) $(7, -3, 4)$;
Д) $(6, -3, 4)$; E) $(12, 14, -1)$.

32. $\bar{a}(l, -2, 5)$ ва $\bar{b}(l, m, -3)$ векторлар коллинеар бўлса, l ва m лар топилсин.

A) $l = \frac{5}{3}$, $m = \frac{6}{5}$; B) $l = -\frac{2}{3}$, $m = \frac{4}{5}$;

C) $l = -\frac{5}{3}$, $m = -\frac{1}{2}$; Д) $l = -\frac{5}{3}$, $m = \frac{6}{5}$;

E) $l = 2$, $m = \frac{4}{5}$.

33. $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ бирлик векторлар бўлиб, улар орасидаги бурчак 30° бўлса, $(\bar{a}+\bar{b})^2$ ни ҳисобланг.

A) $4+\sqrt{3}$; B) $2+\sqrt{3}$; C) $3+\sqrt{2}$; Д) $5+\sqrt{2}$; E) 13.

34. $\bar{a} = 2\bar{m}+\bar{n}$ ва $\bar{b} = \bar{m}-2\bar{n}$ векторлар бўйича параллелограмм ясалган. Агар $\bar{m}$ ва $\bar{n}$ бирлик векторлар ва улар орасидаги бурчак 60° бўлса, параллелограмм диагоналларининг узунликлари топилсин.

A) $\sqrt{5}$ ва $\sqrt{7}$; B) $\sqrt{10}$ ва $\sqrt{11}$; C) $\sqrt{7}$ ва $\sqrt{13}$;

Д) $\sqrt{11}$ ва $\sqrt{13}$; E) $\sqrt{7}$ ва $\sqrt{11}$.

35. $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=1$ ва $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторлар орасидаги бурчак 60° бўлса, $\bar{b}$ ва $\bar{a}-\bar{b}$ векторлар орасидаги бурчакнинг косинуси топилсин.

A) $\frac{\pi}{3}$; B) $\frac{\pi}{6}$; C) $\frac{\pi}{2}$; Д) $\frac{\pi}{4}$; E) $\frac{\pi}{8}$.

36. $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=1$ ва улар орасидаги бурчак $\varphi = \frac{\pi}{3}$ бўлса, $\bar{c}=2\bar{a}-3\bar{b}$ векторнинг узунлиги топилсин.

A) $\sqrt{10}$; B) $\sqrt{7}$; C) 7; Д) $\sqrt{13}$; E) $\sqrt{15}$.

37. $\overline{a}(1,\ -2,\ 2)$ ва $\overline{b}(-1,\ 1,\ 0)$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси ҳисоблансин.

A) -4; B) 4; C) 3; Д) -3; E) 0.

38. $\overline{a}(1,\ 3,\ -1,)$ ва $\overline{b}(-1,\ 1,\ 2)$ векторлар берилган бўлса, $2\overline{a}^2-4\overline{a}\overline{b}+5\overline{b}^2$ ҳисоблансин.

A) 52; B) 44: C) 42; Д) 60; E) -24.

39. $\overline{a}(4,\ m,\ -6,)$ ва $\overline{b}(m,\ 2,\ -7)$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлса, m нинг қиймати топилсин.

A) -4; B) -5; C) -7; Д) 2; E) 4.

40. Агар $|\overline{a}|=3, |\overline{b}|=1, \overline{a}\perp\overline{b}$ бўлса, $(3\overline{a}-5\overline{b})(2\overline{a}+7\overline{b})$ кўпайтма ҳисоблансин.

A) -17; B) 12; C) 14; Д) 16; E) 19.

41. $\overline{a}=\overline{i}+5\overline{j}-6\overline{k}$ ва $\overline{b}=2\overline{i}-\overline{j}+\lambda\overline{k}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлса, λ нинг қиймати топилсин.

A) $\frac{1}{2}$; B) $-\frac{1}{2}$; C) $\frac{1}{5}$; Д) $\frac{3}{4}$; E) $-\frac{3}{4}$.

42. Агар $(\overline{a}\cdot\overline{b})=3$ бўлса, $\overline{a}(1,\ 1,-2)$ векторга параллел бўлган $\overline{b}$ вектор топилсин.

A) $\left(-\frac{1}{2}, 1, -1\right)$; B) $\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$; C) $(1,\ -1,\ 2)$;

Д) $(3,\ -2,\ 1)$; E) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$.

43. $\overline{a}(2, \cos 10°, \sin 10°)$ ва $\overline{b}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 10°, \cos 10°\right)$ векторлар орасидаги бурчакнинг косинуси ҳисоблансин.

A) $\frac{\sqrt{15}}{13}$; B) $\frac{3\sqrt{2}}{14}$; C) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$; Д) $\frac{\sqrt{21}}{7}$; E) $\frac{13}{15}$.

44. $a(1,\ 1,\ -1)$ ва $b(2,\ 0,\ 0)$ векторлар берилган бўлса, $2\bar{a}+3\bar{b}$ векторнинг узунлиги ҳисоблансин.

А) $4\sqrt{3}$; В) $4\sqrt{2}$; С) $5\sqrt{3}$; Д) $6\sqrt{2}$; Е) 12.

45. $\bar{a}(-2,\ 2,\ 4k)$ векторнинг узунлиги $\bar{b}(3,\ 3k,\ 0)$ векторнинг узунлигидан 2 марта кичик бўлса, k нинг қиймати топилсин.

А) -1; В) 3; С) 2; Д) $\frac{2}{3}$; Е) ечим йўқ.

46. $\bar{a}(3,\ 1,\ -2)$ ва $\bar{b}(-2,\ 3,\ 4)$ векторлар орасидаги бурчак топилсин.

А) $\pi-\arccos\frac{3}{\sqrt{29}}$; В) $\pi-\arccos\frac{11}{\sqrt{406}}$; С) $\pi-\arccos\frac{11}{12}$;

Д) 75°; Е) 45°.

47. Агар $\bar{b}(-2,\ 3,\ 4)$, $(\bar{a}\cdot\bar{b})=29$ ва $\bar{a}\parallel\bar{b}$ бўлса, $\bar{a}$ векторнинг узунлиги ҳисоблансин.

А) $\sqrt{23}$; В) $\sqrt{29}$; С) $\sqrt{25}$; Д) $\sqrt{27}$; Е) $\sqrt{22}$.

48. $\bar{a}=2\bar{i}+m\bar{j}-3\bar{k}$ ва $\bar{b}=\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}$ векторлар перпендикуляр эканлиги маълум бўлса, m нинг қиймати топилсин.

А) $\frac{3}{4}$; В) $\frac{1}{4}$; С) $-\frac{1}{3}$; Д) $\frac{2}{5}$; Е) $-\frac{1}{2}$.

49. Учлари $A(1,\ -1,\ 1)$, $B(1,\ 3,\ 1)$, $D(4,\ -1,\ 1)$ нуқталарда ётган ΔABD берилган бўлсин. Учбурчакнинг AB ва AD томонлари орасидаги бурчак топилсин.

А) 180°; В) 30°; С) 60°; Д) 75°; Е) 90°.

50. Агар $\bar{a}(-4,\ 2,\ 4)$ ва $\bar{b}(\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ 0)$ берилган бўлса, $2\bar{a}$ ва $0{,}5\bar{b}$ векторлар орасидаги бурчак топилсин.

А) $\frac{\pi}{4}$; В) $\frac{\pi}{2}$; С) $-\frac{3\pi}{4}$; Д) π; Е) $-\frac{3\pi}{8}$.

7-§. АРАЛАШ МАСАЛАЛАР

1. Учбурчак бир томонининг узунлиги 10 см, бу томонга ёпишган бурчаклари эса 60° ва 30°. Учбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

А) $12{,}5\sqrt{3}$; В) $16\sqrt{3}$; С) $15\sqrt{3}$; Д) $18\sqrt{3}$; Е) $14\sqrt{3}$ см^2.

2. Радиуси 4 см бўлган айланага юзи 80 см^2 бўлган тенг ёнли трапеция ташқи чизилган. Трапециянинг ён томони топилсин.

А) 9; В) 7; С) 10; Д) 8; Е) 11 см.

3. Ромбнинг баландлиги 4 см, диагоналларидан бири 5 см га тенг. Ромбнинг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{45}{4}$; В) $\frac{50}{3}$; С) $\frac{47}{3}$; Д) 16,4; Е) 16,5 см^2.

4. Агар тўғри тўртбурчакнинг юзи $12\sqrt{3}$ дм^2, диагоналлари ҳосил қилган бурчаклардан бири 60° бўлса, унинг периметри топилсин.

А) $3\sqrt{48+24\sqrt{3}}$; В) $\sqrt{48+24\sqrt{3}}$; С) $5\sqrt{48+24\sqrt{3}}$;

Д) $2\sqrt{48+24\sqrt{3}}$; Е) $6\sqrt{48+24\sqrt{3}}$ дм.

5. 60° га тенг бўлган ўткир бурчакка бир-бирига ташқи уринувчи иккита айлана ички чизилган. Кичик айлананинг радиуси 2 см бўлса, катта айлананинг радиуси топилсин.

А) 5; В) 7; С) 8; Д) 4; Е) 6 см.

6. Катта асоси AD бўлган $ABCD$ тенг ёнли трапециянинг AC диагонали CD томонига перпендикуляр ва $\angle BAC=\angle CAD$. Агар трапециянинг периметри 20 см, $\angle D=60°$ бўлса, AD томон узунлиги топилсин.

А) 7; В) 8; С) 9; Д) 10; Е) 6 см.

7. Агар айлана диаметрининг учлари унинг бирор уринмасидан 18 ва 12 см узоқликда эканлиги маълум бўлса, шу айлана диаметрининг узунлиги топилсин.

А) 28; В) 27; С) 29; Д) 30; Е) 26 см.

8. Агар $(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{c}) = (\overline{b}\,\hat{,}\,\overline{c}) = 60°$, $|\overline{a}|=1$, $|\overline{b}|=|\overline{c}|=2$ бўлса, $(\overline{a}+\overline{b})\overline{c}$ ҳисоблансин.

А) 2; В) 5; С) 3; Д) 4; Е) 1.

9. Агар $A_1A_4=2{,}24$ бўлса, мунтазам $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ олтибурчакнинг периметри топилсин.

А) 6,72; В) 6,75; С) 6,77; Д) 6,43; Е) 6,47.

10. Радиуси 10 см бўлган айланага тенг ёнли учбурчак ички чизилган. Учбурчакнинг учидаги бурчаги 120° га тенг бўлса, унинг юзи ҳисоблансин.

А) $16\sqrt{3}$; В) $18\sqrt{3}$; С) $15\sqrt{3}$; Д) $26\sqrt{3}$; Е) $25\sqrt{3}$ см^2.

11. Учбурчак асосидаги бурчакларнинг каттаси 45° га тенг, баландлиги асосини 24 см ва 7 см узунликдаги кесмаларга ажратади. Шу учбурчакнинг катта ён томони узунлиги топилсин.

А) 23; В) 25; С) 24; Д) 26; Е) 27 см.

12. Айлананинг 90° ли марказий бурчагига тиралган ёйнинг узунлиги 15 см. Айланага ташқи чизилган мунтазам учбурчакнинг томони топилсин.

А) $73\sqrt{3}$; В) $74\sqrt{3}$; С) $77\sqrt{3}$; Д) $60\sqrt{3}$; Е) $71\sqrt{3}$ см.

13. *ABCD* параллелограммда $AB=7$ см, $AC=11$ см, $BD=13$ см бўлса, унинг AD томони узунлиги топилсин.

А) $2\sqrt{6}$; В) $3\sqrt{6}$; С) $4\sqrt{6}$; Д) $5\sqrt{6}$; Е) 2.

14. R радиусли айланага ўткир бурчаклари 15° ва 60° бўлган учбурчак ички чизилган. Шу учбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{R^2\sqrt{3}}{3}$; B) $\frac{R^2\sqrt{3}}{5}$; C) $\frac{R^2\sqrt{3}}{6}$; Д) $\frac{R^2\sqrt{3}}{8}$; E) $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

15. Агар квадратнинг икки учи R радиусли айланада, қолган икки учи эса айланага уринмада ётса, квадрат диагоналининг узунлиги топилсин.

A) $\frac{8\sqrt{2}R}{5}$; B) $\frac{8\sqrt{3}R}{5}$; C) $\frac{8\sqrt{3}R}{3}$; Д) $\frac{8\sqrt{2}R}{7}$; E) $\frac{6\sqrt{2}R}{7}$.

16. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетларидан бири 15 см бўлиб, унга ички чизилган айлананинг радиуси 3 см бўлса, учбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

A) 62; B) 61; C) 60; Д) 58; E) 59 см^2.

17. Катетлари 3 м ва 4 м бўлган тўғри бурчакли учбурчакка у билан умумий тўғри бурчакка эга бўлган квадрат ички чизилган. Квадратнинг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{139}{49}$; B) $\frac{138}{49}$; C) $\frac{137}{49}$; Д) $\frac{144}{49}$; E) $\frac{143}{49}$ м^2.

18. Агар $|\bar{a}|=2\sqrt{2}$, $|\bar{b}|=3$ ва $\widehat{\bar{a},\bar{b}}=45°$ бўлса, $5\bar{a}-2\bar{b}$ ва $\bar{a}-3\bar{b}$ векторлар ёрдамида ясалган параллелограммнинг диагоналлари узунликлари топилсин.

A) $\sqrt{165}$ ва $\sqrt{151}$; B) $\sqrt{163}$ ва $\sqrt{153}$; C) $\sqrt{165}$ ва $\sqrt{155}$; Д) $\sqrt{163}$ ва $\sqrt{155}$; E) $\sqrt{185}$ ва $\sqrt{153}$.

19. Агар нолдан фарқли $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларнинг узунликлари тенг бўлиб, $\bar{P}=\bar{a}-2\bar{b}$ ва $\bar{Q}=5\bar{a}-4\bar{b}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлса, $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторлар орасидаги бурчак топилсин.

A) $\arccos\frac{13}{14}$; B) $\arccos\frac{11}{12}$; C) $\arccos\frac{11}{13}$; Д) $\arccos\frac{12}{13}$;

E) $\arccos\frac{11}{14}$.

20. Радиуслари 1 м ва 3 м бўлган айланалар бирбирига ташқи уринади. Уриниш нуқтасидан айланаларнинг умумий уринмасигача бўлган масофа топилсин.

А) 1,8; В) 1,6; С) 1,4; Д) 1,5; Е) 1,3 м.

21. Ён томони 4 см бўлган тенг ёнли учбурчак ён томонининг медианаси 5 см. Шу учбурчакка ташқи чизилган айлана радиуси топилсин.

А) $\frac{6\sqrt{22}}{15}$; В) $\frac{8\sqrt{22}}{11}$; С) $\frac{8\sqrt{22}}{15}$; Д) $\frac{8\sqrt{3}}{25}$; Е) $\frac{6\sqrt{33}}{13}$.

22. Параллелограммнинг периметри 90 см бўлиб, унинг ўткир бурчаги 60° га тенг. Агар параллелограммнинг диагонали унинг ўтмас бурчагини 1:3 каби нисбатда бўлса, параллелограммнинг юзи ҳисоблансин.

А) 227; В) 226; С) $225\sqrt{2}$; Д) $226\sqrt{2}$; Е) $225\sqrt{3}$ см^2.

23. Тўғри бурчакли учбурчакка ички ва ташқи чизилган айланаларнинг радиуслари мос равишда 2 см ва 5 см. Учбурчакнинг катетлари топилсин.

А) 5 ва 7; В) 6 ва 7; С) 7 ва 8; Д) 6 ва 8; Е) 8 ва 10 см.

24. Ромбнинг диагоналларидан бири унинг томонига тенг. Ромбга ички чизилган айлананинг радиуси 2 см бўлса, ромбнинг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{32\sqrt{3}}{5}$; В) $\frac{33\sqrt{3}}{5}$; С) $\frac{32\sqrt{3}}{3}$; Д) $\frac{32\sqrt{3}}{7}$; Е) $\frac{32\sqrt{5}}{4}$ см^2.

25. Юзи 9 м^2 бўлган тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари ўзаро 120° ли бурчак ташкил қилади. Тўртбурчакнинг томонлари топилсин.

А) $3\sqrt[3]{3}$ ва $3\sqrt{3}$; В) $3\sqrt[4]{3}$ ва $3\sqrt{3}$; С) $\sqrt[3]{3}$ ва $\sqrt{3\sqrt{3}}$;
Д) $3\sqrt[4]{3}$ ва $\sqrt[3]{3}$; Е) $3\sqrt[4]{3}$ м ва $\sqrt{3\sqrt{3}}$ м.

26. Учбурчакда медианалар квадратлари йиғиндисининг томонлар квадратлари йиғиндисига нисбати топилсин.

А) 0,75; В) 0,5; С) 4; Д) $\frac{2}{3}$; Е) 0,8.

27. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузасида тенг томонли учбурчак ясалган ва унинг юзи берилган учбурчак юзидан 2 марта катта. Тўғри бурчакли учбурчак катетларининг нисбати топилсин.

А) $\sqrt{5}$; В) $\sqrt{3}$; С) $\sqrt{6}$; Д) $\sqrt{7}$; Е) 2.

28. Тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги бурчак 45°, ён томони эса $3\sqrt{2}$. Учбурчакнинг учидан медианалар кесишиш нуқтасигача бўлган масофа топилсин.

А) 3; В) 4; С) 2; Д) 5; Е) 6 см.

29. Учбурчакнинг периметри 4,5 дм бўлиб, ички бурчагининг биссектрисаси қарама-қарши томонни 6 см ва 4 см узунликдаги кесмаларга ажратади. Учбурчакнинг томонлари топилсин.

А) 12, 18, 15; В) 13, 19, 13; С) 16, 18, 11; Д) 10, 14, 21; Е) 15, 13, 17 см.

30. ABC учбурчакда $\angle C=90°$. AB гипотенузанинг давомида BC катетга тенг бўлган BD кесма ажратилган ҳамда C ва D нуқталар туташтирилган. Агар $BC=7$ см, $AC=24$ см бўлса, CD кесманинг узунлиги топилсин.

А) 11,3; В) 11,4; С) 11,1; Д) 11; Е) 11,2 см.

31. Айланага ички чизилган тенг ёнли учбурчак асосининг узунлиги 10 см, ён томонининг узунлиги 12 см. Учбурчак баландлигининг ўртасидан асосга параллел бўлган ватар ўтказилган. Ватарнинг узунлиги топилсин.

А) 13; В) 14; С) 12; Д) 11; Е) 10 см.

32. Радиуси $7\sqrt{3}$ бўлган айланага учбурчак ички чизилган. Учбурчакда ўткир бурчак қаршисидаги томон 21 см, қолган иккита томонларнинг нисбати 5:8 каби. Шу томонлар топилсин.

А) 15 ва 23; В) 15 ва 25; С) 14 ва 24; Д) 15 ва 24; Е) 16 ва 23 см.

33. 30° га тенг бўлган бурчакнинг битта томони учидан ўзаро тенг 10 та кесма ажратилган. Бўлиниш нуқталаридан ўтказилган перпендикулярлар бурчакнинг иккинчи томони билан кесишгунча давом эттирилган. Агар улардан энг каттасининг узунлиги 10 см га тенг бўлса, ажратилган кесманинг узунлиги топилсин.

А) $\sqrt{2}$; В) $2\sqrt{3}$; С) $3\sqrt{2}$; Д) 2; Е) $\sqrt{3}$ см.

34. *ABCD* тенг ёнли трапеция ва *AD* унинг катта асосидир. Трапециянинг ўрта чизиғи 12 дм, *ACD* ва *ABC* учбурчаклар периметрларининг айирмаси 6 дм. Трапециянинг катта асоси топилсин.

А) 14; В) 13; С) 15; Д) 12; Е) 11 дм.

35. Айланага ташқи чизилган тўртбурчакнинг иккита қўшни томони 5 ва 12 см бўлиб, ўзаро перпендикуляр. Тўртбурчакнинг бошқа иккита томонлари орасидаги бурчак 60° бўлса, шу томонлар топилсин.

А) 7 ва 15; В) 8 ва 15; С) 8 ва 13; Д) 7 ва 13; Е) 8 ва 14 см.

36. Асоси a га тенг бўлган тенг ёнли учбурчакка радиуси R га тенг бўлган доира ички чизилган. Учбурчак ва доира орасида жойлашган қисмнинг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{a^3R}{a^2-4R^2} - \pi R^2$; В) $\frac{a^3R}{a^2-2R} - \pi R^2$; С) $\frac{a^3R}{a^2-3R} - \pi R^2$;

Д) $\frac{a^3R^2}{a^2-4R^2} - \pi R^2$; Е) $\frac{a^3R^2}{a^2-2R^2} - \pi R^2$.

37. Доира ва унга ички чизилган тўғри бурчакли учбурчак юзларининг нисбати $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ га тенг. Учбурчакнинг катта ўткир бурчаги топилсин.

А) 60°; В) 30°; С) 50°; Д) 45°; Е) 70°.

38. Айланага мунтазам учбурчак ва мунтазам олтибурчак ички чизилган. Олтибурчак ва учбурчак юзларининг нисбати топилсин.

А) 3:2; В) 4:3; С) 4:1; Д) 3:1; Е) 2:1.

39. Радиуси 1 га тенг бўлган айланага тенг ёнли учбурчак ички чизилган ва унинг ён томони асосидан 2 марта катта. Шу учбурчакка айлана ички чизилган бўлса, унинг радиуси топилсин.

А) $\frac{4}{5}$; В) $\frac{3}{8}$; С) $\frac{6}{7}$; Д) $\frac{2}{3}$; Е) $\frac{1}{4}$.

40. Кичик асоси 1 га тенг бўлган тенг ёнли трапецияга радиуси 1 га тенг бўлган айлана ички чизилган. Трапециянинг юзи ҳисоблансин.

А) 8; В) 6; С) 5; Д) 4; Е) 3.

41. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси c га, катетлари a ва b га тенг. Учбурчакка ички чизилган айлананинг диаметри топилсин.

А) $a+b-c$; В) $a-b+c$; С) $a-b-c$; Д) $b-b-c$;
Е) $c-(a+b)$.

42. Биринчи учбурчакнинг медианалари иккинчи учбурчакнинг томонларига тенг бўлса, улар юзларининг нисбати топилсин.

А) 3:2; В) 5:2; С) 2:1; Д) 4:3; Е) 3:2.

43. Ўхшаш кўрбурчакларнинг юзлари мос равишда 121 ва 225 см^2 га тенг. Агар кўпбурчаклардан ик-

кинчисининг периметри биринчисиникидан 16 см катта бўлса, уларнинг периметрлари топилсин.

A) 44 ва 58; B) 43 ва 60; C) 43 ва 58; Д) 45 ва 62; E) 44 ва 60 см.

44. ABC учбурчакда $AB=24$ см, $BC=36$ см. Агар учбурчакда BD биссектриса ўтказилган бўлса, ҳосил қилинган учбурчаклар юзларининг нисбати топилсин.

A) $\frac{3}{4}$ ёки $\frac{4}{3}$; B) $\frac{2}{3}$ ёки $\frac{3}{2}$; C) $\frac{5}{4}$ ёки $\frac{4}{5}$; Д) $\frac{2}{5}$ ва $\frac{5}{2}$;

E) $\frac{3}{5}$ ёки $\frac{5}{3}$.

45. Айланага мунтазам учбурчак ва мунтазам тўртбурчак ички чизилган. Агар тўртбурчакнинг томони 6 см бўлса, учбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

A) $13,5\sqrt{3}$; B) $12,5\sqrt{3}$; C) $13,8\sqrt{3}$; Д) $13,6\sqrt{3}$; E) $13,5\sqrt{2}$ см².

46. $ABCD$ параллелограммда ички A бурчакнинг биссектрисаси BC томон билан K нуқтада, CD томоннинг давоми билан M нуқтада кесишади ва $BK=24$ см, $KC=6$ см, $\angle KMC=30°$. MKC учбурчакнинг периметри топилсин.

A) $6(2+\sqrt{2})$; B) $4(2+\sqrt{2})$; C) $6(2+\sqrt{3})$; Д) $5(2+\sqrt{3})$; E) $3(2+\sqrt{2})$ см².

47. Ромбга ички чизилган доиранинг юзи $\frac{49\pi}{4}$ см², ромбнинг ўтмас бурчаги 120° бўлса, унинг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{96}{\sqrt{3}}$; B) $\frac{94}{\sqrt{3}}$; C) $\frac{95}{\sqrt{3}}$; Д) $\frac{98}{\sqrt{3}}$; E) $\frac{97}{\sqrt{3}}$ см².

48. Трапециянинг асослари ва диагоналларининг қисмлари билан ҳосил қилинган учбурчакларнинг

юзлари S ва Q га тенг. Трапециянинг юзи ҳисоблансин.

A) S^2+Q^2; B) $S+Q$; C) $\sqrt{S}+\sqrt{Q}$; Д) $(\sqrt{S}-\sqrt{Q})^2$;
E) $(\sqrt{S}+\sqrt{Q})^2$.

49. Тўғри бурчакли трапециянинг ўрта чизиғи 16 см, трапецияга ички чизилган айлананинг радиуси 6 см бўлса, трапециянинг ён томони ва катта асоси орасидаги бурчак топилсин.

A) $\arcsin\frac{3}{5}$; B) $\arcsin\frac{2}{3}$; C) $\arcsin\frac{4}{5}$; Д) $\arcsin\frac{3}{4}$;

E) $\arcsin\frac{1}{2}$.

50. Учбурчакнинг асосига параллел бўлган кесма ён томонни учидан бошлаб 5:3 каби нисбатда бўлади ҳамда ҳосил қилинган қисмлар юзларининг айирмаси 56 см^2 га тенг. Учбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

A) 252; B) 256; C) 254; Д) 253; E) 255 см^2.

2-қисм

СТЕРЕОМЕТРИЯ

8-§. ФАЗОДАГИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР ВА ТЕКИСЛИКЛАР

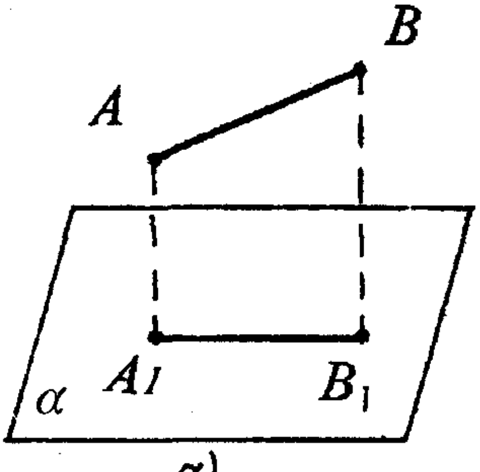
8.1. Асосий тушунчалар ва тасдиқлар

Фазода тўғри чизиқларнинг ўзаро вазияти уч хил бўлиши мумкин: а) кесишган тўғри чизиқлар; б) параллел тўғри чизиқлар; в) айқаш тўғри чизиқлар.

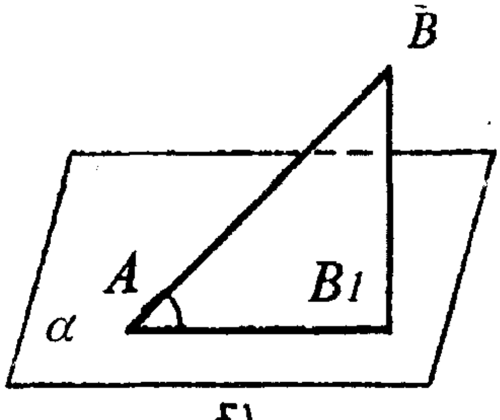
Тўғри чизиқ ва текисликнинг ўзаро вазияти ҳам уч хил бўлиши мумкин: а) тўғри чизиқ текисликда ётади; б) тўғри чизиқ текислик билан битта нуқтада кесишади; в) тўғри чизиқ ва текислик параллел бўлади.

Текисликдаги ҳар бир тўғри чизиққа перпендикуляр тўғри чизиқ шу текисликка перпендикуляр бўлади.

Агар AB кесманинг учларидан α текисликка (8.1-*а* чизма) AA_1 ва BB_1 перпендикулярлар ўтказсак, A_1B_1 кесма берилган AB кесманинг α текисликдаги *проекцияси* бўлади.



а)



б)

8.1-чизма.

Қуйидаги таъриф ва тасдиқлар ўринли

1. Текисликда AB оғманинг проекциясига перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказилса, бу тўғри чизиқ оғманинг ўзига ҳам перпендикуляр бўлади ва тасдиқнинг тескариси ҳам ўринли.

2. AB тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчак шу тўғри чизиқ ва унинг текисликдаги проекцияси орасидаги бурчакка тенг (8.1-*б* чизма).

3. Иккита ярим текисликдан ва уларни чегаралаб турган умумий тўғри чизиқдан ташкил топган шакл *икки ёқли бурчак* (8.2-чизма), ярим текисликлар икки ёқли бурчакнинг *ёқлари*, уларни чегараловчи тўғри чизиқ эса икки ёқли бурчакнинг *қирраси* дейилади.

4. Икки ёқли бурчакнинг қиррасига перпендикуляр текислик унинг ёқларини иккита ярим тўғри чизиқ бўйича кесиб ўтади. Бу ярим тўғри чизиқлар ташкил этган бурчак икки ёқли бурчакнинг *чизиқли бурчаги* дейилади.

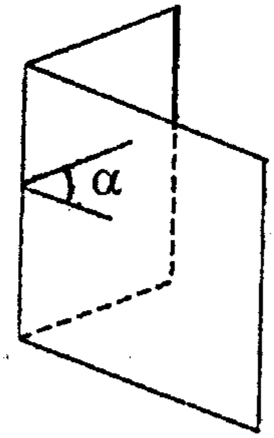
5. Икки ёқли бурчакнинг ўлчови чизиқли бурчакнинг катталигига тенгдир.

6. α текисликда ётувчи F шаклнинг β текисликка туширилган проекцияси F_1 шаклдан иборат бўлиб, α ва β текисликлар орасидаги бурчак φ бўлса, F_1 проекциянинг юзи.

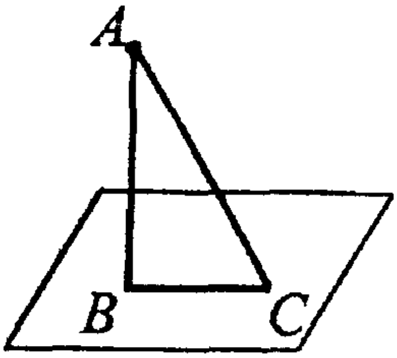
$$S_{F_1} = S_F \cdot \cos\varphi \qquad (8.1)$$

формула орқали ҳисобланади.

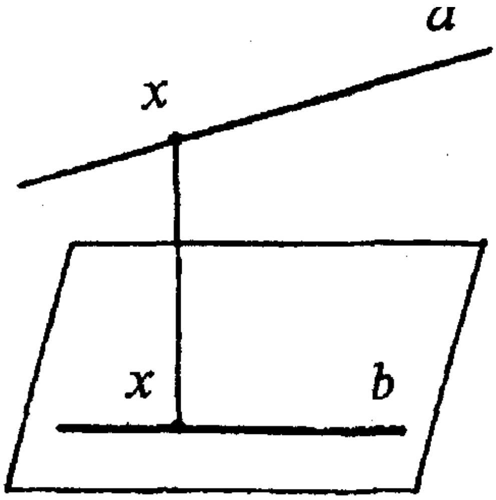
Берилган нуқтадан берилган текисликка ўтказилган *оғма* — бу бир учи шу нуқтада, иккинчи учи текисликда ётган ва текисликка перпендикуляр бўлмаган исталган кесмадир. Кесманинг текисликда ётган учи унинг *асосидир*. Битта нуқтадан ўтказилган перпендику-



8.2-чизма.



8.3-чизма.



8.4-чизма.

ляр ва оғманинг асосларини туташтирувчи кесма оғманинг *проекциясидир* (8.3-чизма).

7. (Уч перпендикуляр ҳақида.) Текисликда оғманинг асосидан унинг проекциясига перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизиқ оғманинг ўзига ҳам перпендикуляр. Аксинча, агар текисликдаги тўғри чизиқ оғмага перпендикуляр бўлса, у оғманинг проекциясига ҳам перпендикулярдир.

8. Икки айқаш тўғри чизиқнинг умумий перпендикуляри учлари шу тўғри чизиқларда бўлиб, уларнинг ҳар бирига перпендикуляр кесмадир. Икки айқаш тўғри чизиқ битта ва фақат битта умумий перпендикулярга эга. Бу перпендикуляр шу тўғри чизиқлар орқали ўтувчи параллел текисликларнинг умумий перпендикуляридир (8.4-чизма).

8.2. Мавзуга оид масалалар

1. AB кесманинг A учидан α текислик ўтказилган, B учидан ва ўртасидаги C нуқтадан ўзаро параллел BB_1 ва CC_1 кесмалар ўтказилган. Бу кесмалар α текисликни B_1 ва C_1 нуқталарда кесиб ўтади. Агар $BB_1 = 12$ см бўлса, CC_1 кесманинг узунлиги топилсин.

А) 4; В) 6; С) 5; Д) 4,5; Е) 7 см.

2. AB кесманинг A учидан текислик ўтказилган, кесманинг B учидан ва C нуқтасидан ўзаро параллел кесмалар ўтказилган ва улар текислик билан мос равишда B_1 ва C_1 нуқталарда кесишади. Агар $BB_1=16$ дм ва $AC:AB=3:5$ каби бўлса, CC_1 кесманинг узунлиги топилсин.

А) 9,6; В) 7,2; С) 8,4; Д) 9,0; Е) 7,6 дм.

3. A нуқтадан α текисликка иккита $AB=17$ м ва $AC=10$ м оғма ўтказилган. Улар проекцияларининг айирмаси 9 м бўлса, A нуқтадан α текисликкача бўлган масофа топилсин.

А) 5; В) 6; С) 7; Д) 8; Е) 9 м.

4. ΔABC да $\angle B=90°$ бўлиб, $BC=a$. Учбурчакнинг A учидан учбурчак текислигига AD перпендикуляр шундай ўтказилганки, D ва C нуқталар орасидаги масофа m га тенг. D нуқтадан BC катетгача бўлган масофа топилсин.

А) $\sqrt{a^2+2m^2}$; В) $\sqrt{a^2-m^2}$; С) $\sqrt{m^2-a^2}$;

Д) $\sqrt{am}$; Е) $\sqrt{\frac{a^2+m^2}{2}}$.

5. Трапециянинг асосларидан бири иккинчисидан икки марта катта. Трапециянинг ўрта чизиғи α текисликка параллел ва ундан 13 см масофада ўтади. Трапеция диагоналларининг кесишиш нуқтаси эса бу текисликдан 15 см масофада ётади. Трапециянинг асосларидан α текисликкача бўлган масофалар топилсин.

А) 7 ва 12; В) 8 ва 16; С) 7 ва 16; Д) 8 ва 11; Е) 7 см ва 19 см.

6. 120° га тенг бўлган икки ёқли бурчакнинг ёқларидаги A ва B нуқталардан бурчакнинг қиррасига $AC=7$ см ва $BD=8$ см перпендикулярлар ўтказилган.

Агар $AB=16$ см бўлса, CD кесманинг узунлиги топилсин.

А) 2; В) 3; С) 2,5; Д) 4; Е) 3,5.

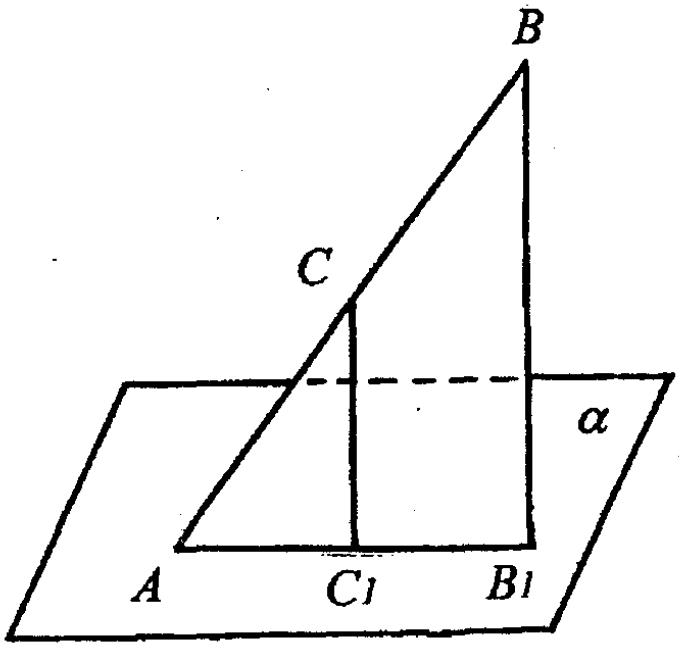
7. ΔABC да $AB=9$ м, $BC=6$ м, $AC=5$ м бўлиб, унинг AC томонидан учбурчак текислиги билан 45° ли бурчак ташкил этувчи текислик ўтказилган. ΔABC нинг шу текисликдаги проекцияси юзи ҳисоблансин.

А) 10; В) 9; С) 8; Д) 12; Е) 11 см².

8.3. Мавзуга оид масалаларнинг ечимлари

1. Берилган. $AB \cap \alpha = A$, $BB_1 \| CC_1$, $AC=CB$, $BB_1=12$ см.

CC_1 топилсин (8.3.1-чизма).



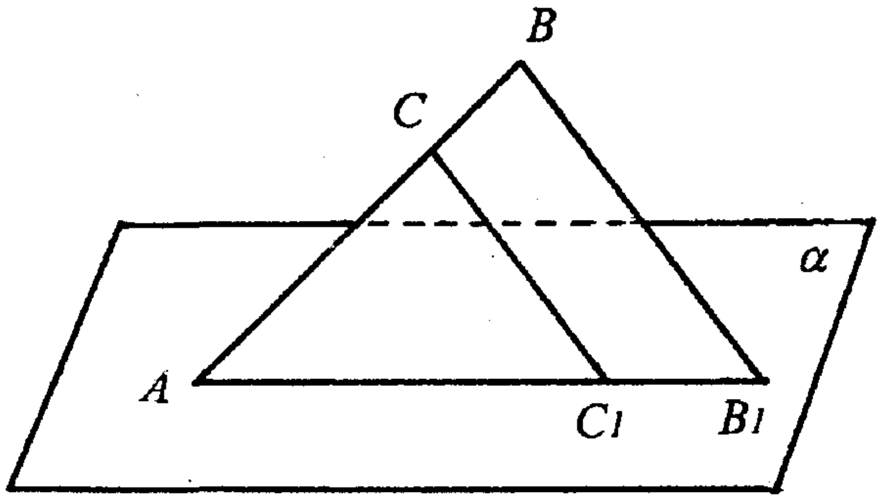
8.3.1-чизма.

Ечилиши. Берилишига кўра, $BB_1 \| CC_1$ бўлганлигидан, улар бир текисликда ётади ва бу текислик α текислик билан B_1C_1 тўғри чизиқ орқали кесишади. C нуқта AB кесманинг ўртасидаги нуқта ва $CC_1 \| BB_1$ бўлгани учун, CC_1 кесма ΔABB_1 нинг ўрта чизиғидир. Шунинг учун, $CC_1 = \frac{1}{2}\, BB_1 = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ см.

Жавоби: В).

2. Б е р и л г а н: $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$. $BB_1 \| CC_1$, $AC:AB=3:5$, $BB_1=16$ дм.

CC_1 т о п и л с и н (8.3.2-чизма).



8.3.2-чизма.

Е ч и л и ш и. Берилишига кўра, $BB_1 \| CC_1$ бўлганлигидан, $\Delta ACC_1 \sim \Delta ABB_1$. Ўхшаш учбурчакларда мос томонлар ўзаро пропорционал бўлганлигидан,

$$\frac{AB}{BB_1} = \frac{AC}{CC_1} \text{ ёки } \frac{CC_1}{BB_1} = \frac{AC}{AB}$$

бўлади. У ҳолда $CC_1 = \frac{AC}{AB} \cdot BB_1 = \frac{3}{5} \cdot 16 = \frac{48}{5} = 9{,}6$ дм.

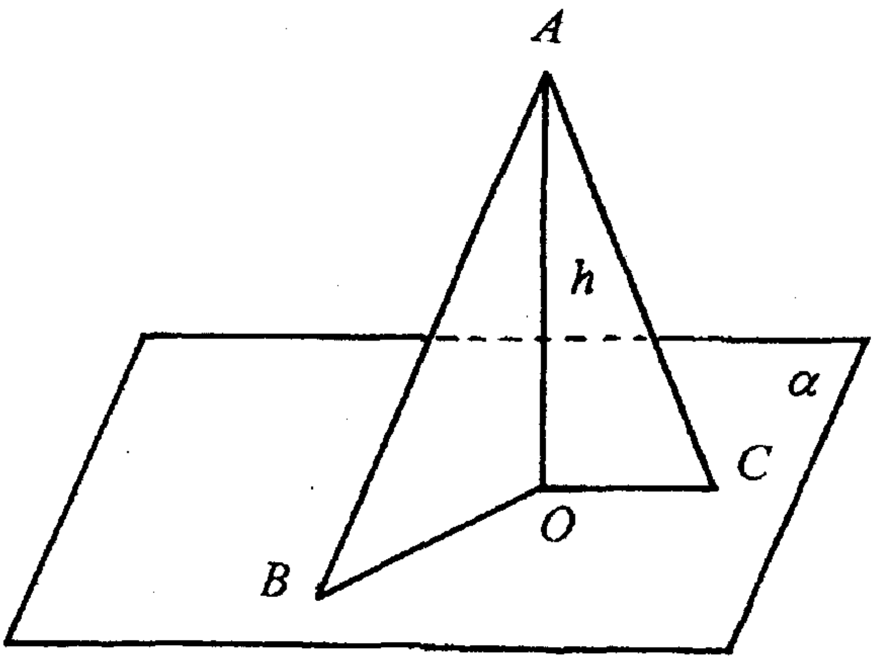
Жавоби: А).

3. Б е р и л г а н. α текислик, AB, AC — оғмалар, $AB=17$ м; $AC=10$ м, $AO \perp \alpha$, $BO-CO=9$ м.

AO т о п и л с и н (8.3.3-чизма).

Е ч и л и ш и. $AO=h$, $BO=x$, $CO=y$ белгилашларни киритамиз. ΔABO ва ΔAOC ларнинг ҳар бири тўғри бурчакли бўлади ва улардан

$AO^2=AB^2-BO^2$; $AO^2=AC^2-OC^2$; $BO-OC=9$



8.3.3-чизма.

муносабатларни оламиз. Белгилашларимиздан фойдалансак,

$$\begin{cases} h^2 = 17^2 - x^2, \\ h^2 = 10^2 - y^2, \\ x - y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 17^2 - x^2 = 10^2 - y^2, \\ x - y = 9, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 289 - 100, \\ x - y = 9, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - y)(x + y) = 189, \\ x - y = 9, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 21, \\ x - y = 9, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 30, \\ x - y = 9, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15, \\ x - y = 9, \end{cases} \Rightarrow$$

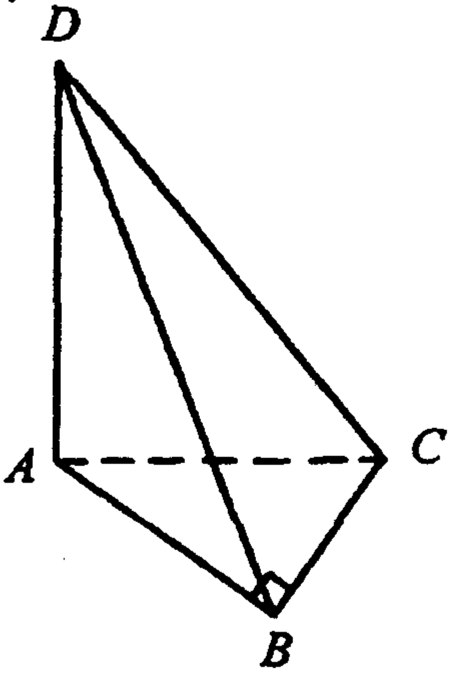
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 15, \\ 15 - y = 9, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15, \\ y = 6, \end{cases} \quad h^2 = 10^2 - 6^2 = 64; \ h = 8 \text{ м}.$$

Жавоби: Д).

4 Берилган ΔABC — тўғри бурчакли, $AD\perp(ABC)$, $BC=a$, $CD=m$.

BD топилсин (8.3.4-чизма).

Ечилиши. D нуқтадан BC катетга перпендикуляр ўтказиш керак. Лекин берилишига кўра, ΔABC — тўғри бурчакли ва $AB\perp BC$. Уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага асосан, $DB\perp BC$ бўлади. Тўғри бурчакли ΔDBC дан Пифагор теоремасига асосан, $BD=\sqrt{DC^2-BC^2}$ ёки $BD=\sqrt{m^2-a^2}$.

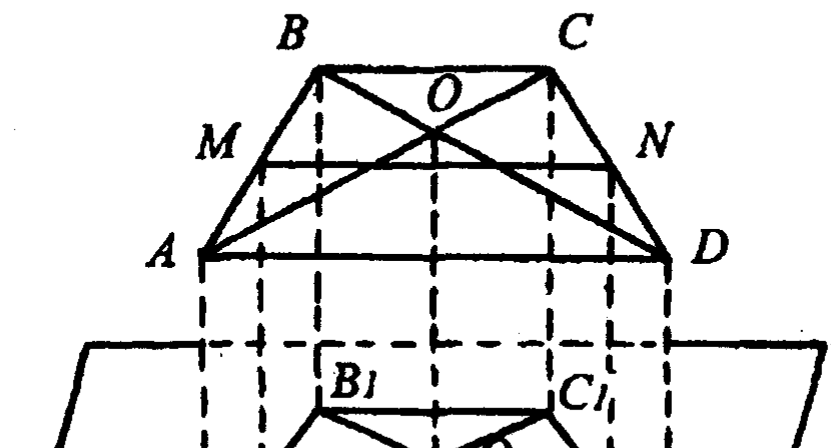


8.3.4-чизма.

Жавоби: C).

5. Берилган. $ABCD$ — трапеция, MN — ўрта чизиқ, α текислик, $MN\parallel\alpha$, $AD=2\cdot BC$, $AC\cap BD=O$, $OO_1=15$ см, $MM_1=13$ см.

AA_1, BB_1 топилсин (8.3.5-чизма).



8.3.5-чизма.

Е ч и л и ш и. $MN||AD$, $MN||BC$ бўлганлигидан ва берилишига кўра, $BC||\alpha$, $AD||\alpha$ бўлади. Трапециянинг учларидан ҳамда M, N ва O нуқталардан α текисликка перпендикуляр ўтказамиз. Улар битта текисликка перпендикулярлар бўлиб, ўзаро параллел бўлади.

$\Delta BCO \sim \Delta AOD$, чунки вертикал бурчаклар бўлганлигидан, $\angle BOC = \angle AOD$, ички алмашинувчи бурчаклар бўлгани учун $\angle BCO = \angle OAD$. Уларнинг мос томонлари ўзаро пропорционаллигидан,

$$\frac{AD}{BC} = \frac{AO}{OC}, \frac{AO}{OC} = \frac{2}{1} \text{ ва } \frac{AO}{OC} = 2.$$

$AA_1 \| BB_1$ бўлгани учун, AA_1B_1B — трапеция ва MM_1 — унинг ўрта чизиғидир. Шунинг учун,

$$MM_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2} \text{ ёки } 13 = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1),\ AA_1 + BB_1 = 26 \text{ см.}$$

Энди AA_1C_1C трапецияни алоҳида қараймиз. A нуқтадан $AP \| A_1C_1$ ни ўтказамиз ва у OO_1 билан K нуқтада кесишган бўлсин.

$AA_1 = x$, $CC_1 = BB_1 = y$ деб белгилаймиз. У ҳолда, $OK = 15 - x$, $CP = y - x$. Тўғри бурчакли ΔAOK ва ΔACP ларнинг ўхшашлигидан,

$$\frac{AC}{CP} = \frac{AO}{OK}, \frac{AO+OC}{AO} = \frac{CP}{OK}, 1 + \frac{OC}{AO} = \frac{CP}{OK}, 1 + \frac{1}{2} = \frac{y-x}{15-x},$$

$3(15 - x) = 2(y - x)$, $x + 2y = 45$.

Натижада $\begin{cases} x + y = 26, \\ x + 2y = 45 \end{cases}$ системани ҳосил қиламиз.

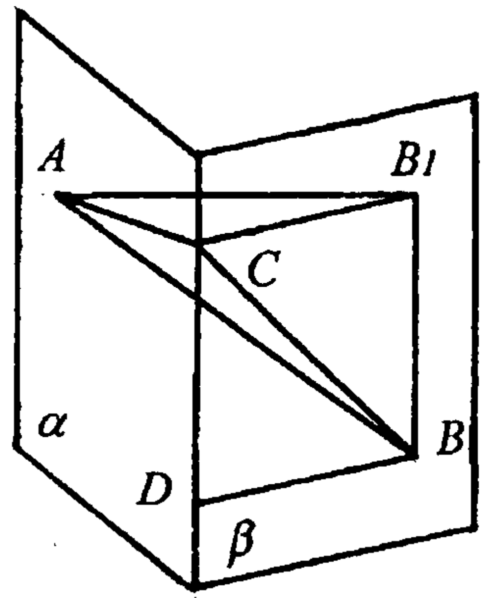
Бу системани ечамиз:

$$\begin{cases} x + y = 26, \\ 26 + y = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 26 - y, \\ y = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7, \\ y = 19. \end{cases}$$

Жавоби: Е).

6. Б е р и л г а н. $ACDB$ — икки ёқли бурчак, $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $AB=16$ см, $\alpha \cap \beta = CD$, $AC \perp CD$, $AC=7$ см, $BC \perp BD$, $BD=11$ см.

CD т о п и л с и н (8.3.6-чизма).



8.3.6-чизма.

Е ч и л и ш и. β текисликдаги C нуқтадан $CB_1 \perp CD$ ўтказамиз ва $CB_1=8$ см кесма ажратамиз. Икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги бўлганлигидан, $\angle ACB_1=120°$. ΔACB_1 дан косинуслар теоремаси ёрдамида топамиз:

$$AB_1^2 = AC^2 + B_1C^2 - 2AC \cdot B_1C \cdot \cos 120°,$$

$$AB_1^2 = 7^2 + 11^2 - 2 \cdot 7 \cdot 11\left(-\frac{1}{2}\right) = 49 + 21 + 77 = 247.$$

Иккинчи томондан, $B_1C=BD$, $B_1C \perp CD$, $BD \perp CD$ бўлгани учун, $BDCB_1$ — тўғри тўртбурчак ва $CB_1 \perp B_1B$. У ҳолда, уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага асосан, $AB_1 \perp BB_1$. Тўғри бурчакли ΔABB_1 дан:

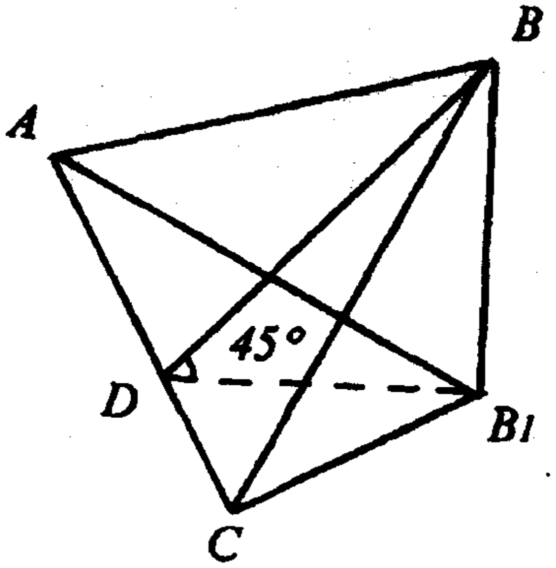
$$BB_1^2 = AB^2 - AB_1^2 = 16^2 - 247 = 9, \ BB_1=3 \text{ см}.$$

Жавоби: В).

7. Б е р и л г а н. ΔABC, $AC=5$ м, $AB=9$ м, $BC=6$ м, $AC \subset (AB_1C)$, $\angle BDB_1=45°$.

$S_{\Delta AB_1C}$ ҳ и с о б л а н с и н (8.3.7-чизма).

Е ч и л и ш и. B нуқтадан AC томонга BD перпендикуляр, D нуқтадан AB_1C текисликда AC га перпендикуляр бўлган DB_1 тўғри чизиқ ўтказамиз. ΔABC нинг текисликдаги проекциясини ясаш учун B нуқтадан



8.3.7-чизма.

(AB_1C) текисликка BB_1 перпендикуляр туширамиз, натижада ΔAB_1C — изланган проекция бўлади.

Шакл текисликка проекцияланган бўлиб, шакл ва текислик орасидаги бурчак φ бўлса, қуйидаги формула ўринли: $S_{пр.} = S_{ш} \cdot \cos\varphi$. Энди Герон формуласи воситасида ΔABC нинг юзини ҳисоблаймиз:

$$p = \frac{9+6+5}{2} = 10 \text{ см};$$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{10 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5} = 10\sqrt{2} \text{ см}^2.$$

У ҳолда

$$S_{\Delta AB_1C} = S_{пр.} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos 45° = 10 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 10 \text{ см}^2.$$

Жавоби: А).

8.4. Мустақил ечиш учун масалалар

1. AB кесманинг учларидан α текисликка $AC=3$ ва $BD=2$ м перпендикулярлар ўтказилган. Агар $CD=24$ дм бўлса, AB кесманинг узунлиги топилсин.

А) 15; В) 20; С) 24; Д) 26; Е) 28 дм.

2. A нуқтадан α текисликка иккита: $AB=20$ см, $AC=15$ см оғма ўтказилган. AB оғманинг α текисликдаги проекцияси 16 см бўлса, AC оғманинг текисликдаги проекцияси топилсин.

А) 9; В) 10; С) 8; Д) 12; Е) 6 см.

3. Мунтазам учбурчакнинг томони 3 см. Учбурчак текислигига тегишли бўлмаган K нуқта учбурчакнинг

учларидан бир хил — 2 см масофада ётади. K нуқтадан учбурчак текислигигача бўлган масофа топилсин.

А) 9; В) 0,5; С) 0,75; Д) 1; Е) 1,2 см.

4. Тўғри бурчакли ΔABC да катетлар 15 м ва 20 м. Тўғри бурчакнинг C учидан (ABC) текисликка $CD=35$ м перпендикуляр ўтказилган. D нуқтадан AB гипотенузагача бўлган масофа топилсин.

А) 40; В) 30; С) 32; Д) 29; Е) 37 м.

5. P текисликда 60° ли бурчак берилган. M нуқта бурчак учидан 25 см узоқликда, бурчак томонларидан эса мос равишда, 20 см ва 7 см узоқликда ётади. M нуқтадан P текисликкача бўлган масофа топилсин.

А) 12; В) 5; С) $\sqrt{37}$; Д) $\sqrt{33}$; Е) 6 см.

6. Узунлиги a бўлган кесма α текисликни кесиб ўтади. Агар кесманинг учлари α текисликдан b ва c узоқликда ётиши маълум бўлса, кесманинг текисликдаги проекцияси топилсин.

А) $\sqrt{a^2-(b+c)^2}$; В) $\sqrt{b^2-(a^2-ac)}$;
С) $\sqrt{c^2-(a^2+b^2)}$; Д) $\sqrt{a^2b^2-c^2}$; Е) $\sqrt{a^2-bc}$.

7. $ABCD$ квадратнинг A учидан AK перпендикуляр ўтказилган. Агар $AB=3$ дм, $BK=4$ дм бўлса, K нуқтадан квадратнинг C учигача бўлган масофа топилсин.

А) 4; В) 6; С) 5; Д) 4,5; Е) $5\sqrt{2}$ дм.

8. Тўғри бурчакли ΔABC нинг C тўғри бурчаги учидан гипотенузага параллел текислик ўтказилган. Гипотенуза $AB=12$ см ҳамда AC ва BC катетларнинг текисликдаги проекциялари, мос равишда, 6 см ва 10 см бўлса, гипотенузадан текисликкача бўлган масофа топилсин.

А) 5; В) 4; С) 6; Д) 1,5; Е) 2 см.

9. ΔABC нинг учларидан α текисликкача бўлган масофалар 2, 2,5 ва 4,5 дм. Учбурчак медианаларининг кесишиш нуқтасидан текисликкача бўлган масофа топилсин.

А) 2,5; В) 3,5; С) 2; Д) 3; Е) 4 дм.

10. A нуқта тўғри икки ёқли бурчакнинг ёқларидан 3 ва 4 дм узоқликда ётади. A нуқтадан икки ёқли бурчакнинг қиррасигача бўлган масофа топилсин.

А) 2; В) 4; С) 5; Д) 7; Е) 6 дм.

11. $AB=50$ см кесманинг учларидан берилган текисликкача бўлган масофалар $AC=30$ см ва $BD=44$ см. AB кесманинг бу текисликдаги проекцияси топилсин.

А) 36; В) 48; С) 42; Д) 54; Е) 39 см.

12. $CD=26$ см кесманинг учлари α текисликдан 18 см ва 8 см узоқликда бўлса, шу кесманинг текисликдаги проекцияси топилсин.

А) 24; В) 16; С) 20; Д) 21; Е) 32 см.

13. Узунлиги 15 см бўлган кесманинг учлари α текисликдан 3 см ва 6 см узоқликда ётиши маълум бўлса, кесманинг текисликдаги проекцияси топилсин.

А) 9; В) 16; С) 14; Д) 10; Е) 12 см.

14. $AB=26$ см кесманинг учлари P текисликдан 6 см ва 8 см узоқликда жойлашган бўлиб, AB кесма текисликни кесиб ўтади. AB кесманинг текисликдаги проекцияси топилсин.

А) 26; В) 22; С) 24; Д) 20; Е) 18 см.

15. Кесма текисликни кесиб ўтади ва унинг учлари текисликдан 3 см ва 12 см узоқликда бўлса, кес-

манинг ўрта нуқтаси текисликдан қандай узоқликда жойлашган?

А) 6,5; В) 6; С) 5; Д) 4,5; Е) 4 см.

16. Текислик билан кесишмайдиган кесманинг учлари текисликдан 30 см ва 50 см узоқликда ётади. Шу кесмани 3:7 каби нисбатда бўлувчи нуқта текисликдан қандай узоқликда ётади?

А) 24 ёки 28; В) 36 ёки 44; С) 24 ёки 36; Д) 18 ёки 24; Е) 18 см ёки 28 см.

17. P текисликнинг A нуқтасидан оғма тўғри чизиқ ўтказилиб, унда B ва C нуқталар олинган, $AB=8$ см ва $AC=14$ см, Агар B нуқтадан текисликкача масофа 6 см бўлса, C нуқтадан текисликкача бўлган масофа топилсин.

А) 16; В) 13,5; С) 12,5; Д) 10,5; Е) 13 см.

18. Мунтазам учбурчакнинг учлари P текисликдан 10, 15 ва 17 см узоқликда жойлашган. Учбурчакнинг марказидан P текисликкача бўлган масофа топилсин.

А) 16; В) 14; С) 15; Д) 12; Е) 17 см.

19. a узунликдаги AB кесма P текисликда ётади, ҳар бирининг узунлиги b бўлган AC ва BD кесмалар P текисликда ётмайди. AC кесма P текисликка перпендикуляр, AB кесмага перпендикуляр бўлган BD кесма P текислик билан 30° бурчак ҳосил қилса, CD кесма топилсин.

А) $\sqrt{2(a^2+b^2)}$; В) $\sqrt{2ab}$; С) $\sqrt{a^2+b^2}$; Д) $2\sqrt{ab}$;

Е) $\sqrt{a+b}$.

20. K нуқтадан P текисликка перпендикуляр ва оғма ўтказилган ҳамда улар орасидаги бурчак 45°.

Перпендикулярнинг узунлиги 12 см бўлса, оғманинг узунлиги топилсин.

A) $16\sqrt{3}$; B) 14; C) $12\sqrt{3}$; Д) 12; E) $12\sqrt{2}$ см.

21. Доиранинг марказидан унинг текислигига перпендикуляр ўтказилган. Агар перпендикулярнинг узунлиги 8 см, доиранинг юзи 36π см^2 бўлса, перпендикулярнинг устки учидан айлананинг нуқтасигача бўлган масофа топилсин.

A) 10; B) 12; C) 10; Д) 14; E) 16 см.

22. $ABCD$ квадратнинг томони a га тенг. Квадратнинг O марказидан унинг текислигига OK перпендикуляр ўтказилган ва $OK=b$. K нуқтадан квадратнинг учларигача бўлган масофа топилсин.

A) $\sqrt{2a^2-b^2}$; B) $\sqrt{a^2+2b^2}$; C) $\sqrt{a^2+\frac{b^2}{2}}$;

Д) $\sqrt{b^2+\frac{a^2}{2}}$; E) $\frac{\sqrt{ab}}{2}$.

23. K нуқтадан P текисликка иккита: $KA=16$ см ва $KB=10$ см оғма ўтказилган. KA оғма P текислик билан $30°$ ли бурчак ташкил этиши маълум бўлса, KB оғманинг P текисликдаги проекцияси топилсин.

A) 4; B) 6; C) 5; Д) 4,5; E) 5,8 см.

24. K нуқтадан P текисликка перпендикуляр ва оғма ўтказилган бўлиб, перпендикулярнинг узунлиги 6 см, оғманинг узунлиги 9 см. Перпендикулярнинг оғмадаги проекцияси топилсин.

A) 3,5; B) 4,5; C) 4; Д) 5; E) 6 см.

25. Тенг томонли учбурчакнинг томони 6 см. Учбурчакнинг ҳар бир учидан 4 см узоқликдаги нуқта билан унинг текислиги орасидаги масофа топилсин.

A) 1,5; B) 2,5; C) 4; Д) 3; E) 2 см.

26. Тенг томонли учбурчакнинг томони 6 см. Учбурчакнинг O марказидан учбурчак текислигига $OK=1$ см перпендикуляр ўтказилган. K нуқтадан учбурчакнинг томонигача бўлган масофа топилсин.

А) 2; В) 1; С) 2,5; Д) 2; Е) 1,5 см.

27. Учбурчакнинг томонлари 10, 17 ва 21 см. Шу учбурчакнинг катта бурчаги учидан унинг текислигига 15 см узунликдаги перпендикуляр ўтказилган. Унинг учларидан учбурчакнинг катта томонигача бўлган масофалар топилсин.

А) 7 ва 16; В) 6 ва 10; С) 5 ва 11; Д) 8 ва 17; Е) 6 см ва 12 см.

28. ΔABC — тенг ёнли ва $AC=6$ см, $AB=BC=5$ см. Учбурчакка ички чизилган айлананинг O марказидан учбурчак текислигига $OK=2$ см перпендикуляр ўтказилган. K нуқтадан учбурчакнинг томонларигача ва B учигача бўлган масофалар топилсин.

А) 3,5 ва 4; В) 3 ва $\frac{\sqrt{41}}{2}$; С) 2 ва $\sqrt{39}$;

Д) 1,8 ва $\sqrt{41}$; Е) 2,5 см ва $0,5\sqrt{41}$ см.

29. $ABCD$ тўғри тўртбурчакнинг A учидан унинг текислигига AK перпендикуляр ўтказилган. K нуқтадан тўртбурчакнинг учларигача бўлган масофалар $KB=6$ см, $KC=9$ см, $KD=7$ см бўлса, KA кесманинг узунлиги топилсин.

А) 6; В) 2; С) 3; Д) 4; Е) 1,5 см.

30. P текисликка параллел AB кесманинг учларидан P текисликка AC перпендикуляр ва BD оғма ўтказилган. Агар $AB=a$, $AC=b$ ва $BD=c$ бўлса, CD кесманинг узунлиги топилсин.

А) $\sqrt{ab+ac+bc}$; В) $\sqrt{a^2+b^2-c}$; С) $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$;

Д) $\sqrt{b^2+c^2-a^2}$; Е) $\sqrt{ab+ac}$.

31. AB ва CD — ўзаро кесишган икки текисликдаги параллел кесмалар; AE ва DK — текисликларнинг кесишиш чизиғига ўтказилган перпендикуляр бўлсин. Агар $AD=5$ см, $EK=4$ см бўлса, AB ва CD тўғри чизиқлар орасидаги масофа топилсин.

А) 3; В) 3,5; С) 2; Д) 4; Е) 4,5 см.

32. $ABCD$ трапециянинг AD асоси P текисликда ётади, BD асоси эса текисликдан 5 см узоқликдадир. Агар $AD:BC=7:3$ каби бўлса, шу трапеция диагоналларининг кесишиш нуқтаси M дан P текисликкача бўлган масофа топилсин.

А) 3; В) 2,5; С) 5; Д) 3,5; Е) 4 см.

33. α ва β текисликлар берилган бўлиб, α текисликнинг A ва B нуқталаридан β текисликка $AC=37$ см ва $BD=125$ см оғмалар ўтказилган. Агар AC оғманинг β текисликдаги проекцияси 12 см бўлса, BD кесманинг проекцияси топилсин.

А) 116; В) 120; С) 132; Д) 96; Е) 105 см.

34. Йиғиндиси c га тенг бўлган иккита кесманинг учлари икки параллел текисликка тиралади, уларнинг проекциялари, мос равишда a ва b га тенг. Шу кесмаларнинг узунликлари топилсин.

А) $\frac{a+b+c}{a-b}$, $\frac{a^2+b^2-c^2}{a-b}$; В) $\frac{b^2+c^2-a^2}{2a}$, $\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$;

С) $\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$, $\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$; Д) $\frac{2a^2+b^2-c^2}{bc}$, $\frac{2b^2+a^2-c^2}{ab}$;

Е) $\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$, $\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$.

35. A нуқтадан α текисликка $AC=6$ см перпендикуляр ва $AD=9$ см оғма ўтказилган. Перпендикулярнинг оғмадаги проекцияси топилсин.

А) 4,5; В) 5; С) 4; Д) 3; Е) 6 см.

36. P нуқтадан ўтказилган иккита тўғри чизиқ учта параллел текисликни A_1, A_2, A_3 ва B_1, B_2, B_3 нуқталарда кесиб ўтади. Агар $A_1A_2=4$ см, $B_2B_3=9$ см, $A_2A_3=B_1B_2$ бўлса, A_1A_3 ва B_1B_3 кесмаларнинг узунликлари топилсин.

A) 10 ва 15; B) 9 ва 16; C) 8 ва 14; Д) 12 ва 13; E) 11 см ва 16 см.

37. Учбурчакнинг томонлари 51, 30 ва 27 см. Учбурчакнинг кичик бурчаги учидан учбурчак текислигига перпендикуляр ўтказилган ва унинг узунлиги 10 см. Перпендикулярнинг учларидан учбурчакнинг ўша учи қаршисидаги томонигача бўлган масофалар топилсин.

A) 24 ва 26; B) 20 ва 22; C) 18 ва 24; Д) 20 ва 24; E) 32 см ва 16 см.

38. Ромбнинг диагоналлари 60 ва 80 см. Диагоналларнинг кесишиш нуқтасидан ромб текислигига узунлиги 45 см бўлган перпендикуляр ўтказилган. Перпендикулярнинг учларидан ромбнинг томонигача бўлган масофалар топилсин.

A) 60; B) 51; C) 48; Д) 36; E) 42 см.

39. Тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчаги учидан учбурчак текислигига узунлиги 16 см бўлган перпендикуляр ўтказилган. Учбурчакнинг катетлари 15 ва 20 см бўлса, перпендикулярнинг учларидан гипотенузагача бўлган масофалар топилсин.

A) 12 ва 21; B) 10 ва 18; C) 12 ва 20; Д) 15 ва 18; E) 16 см ва 22 см.

40. Тенг ёнли трапециянинг асослари 16 ва 30 см. M нуқта трапециянинг ҳар бир томонидан 11 см узоқликда ётса, M нуқтадан трапеция текислигигача бўлган масофа топилсин.

A) 3; B) 1,5; C) 2; Д) 1; E) 4 см.

41. *K* нуқтадан *P* текисликка иккита оғма ўтказилган. Оғмаларнинг ҳар бири *P* текислик билан 45° ли бурчак ташкил қилади ва *K* нуқтадан текисликкача бўлган масофа *a* га тенг. Оғмаларнинг проекциялари орасидаги бурчак 120° бўлса, оғмаларнинг учлари орасидаги масофа топилсин.

А) $a\sqrt{2}$; В) $2a$; С) $a\sqrt{5}$; Д) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; Е) $a\sqrt{3}$.

42. Тўғри бурчакли тенг ёнли учбурчакнинг катети орқали текислик ўтказилган. Учбурчакнинг иккинчи катети шу текисликка 45° ли бурчак остида оғмадан иборат бўлса, учбурчакнинг биссектрисаси ва текислик орасидаги бурчак топилсин.

А) 30°; В) 45°; С) 60°; Д) 15°; Е) 75°.

43. 60° ли икки ёқли бурчакнинг битта томонида *M* нуқта олинган ва *M* нуқтадан икки ёқли бурчакнинг иккинчи томонигача бўлган масофа *c* га тенг. *M* нуқтадан икки ёқли бурчакнинг қиррасигача бўлган масофа топилсин.

А) $\frac{c\sqrt{3}}{2}$; В) $\frac{2c\sqrt{3}}{3}$; С) $2c\sqrt{3}$; Д) $\frac{2c\sqrt{2}}{3}$; Е) $\frac{c\sqrt{2}}{2}$.

44. 120° ли икки ёқли бурчакнинг ички қисмида *M* нуқта олинган бўлиб, *M* нуқтадан икки ёқли бурчакнинг ҳар бир томонигача бўлган масофалар *p* га тенг. *M* нуқтадан икки ёқли бурчакнинг қиррасигача бўлган масофа топилсин.

А) $\frac{p^2\sqrt{15}}{4}$; В) $\frac{2p\sqrt{2}}{3}$; С) $\frac{2p\sqrt{3}}{3}$; Д) $\frac{p^2\sqrt{2}}{4}$; Е) $\frac{2p^2}{3}$.

45. Иккита тенг ёнли учбурчак умумий асосга эга бўлиб, уларнинг текисликлари орасидаги бурчак 60°. Умумий асоснинг узунлиги 12 см, битта учбурчакнинг ён томони 10 см, иккинчи учбурчакнинг ён

томонлари ўзаро перпендикулярдир. Учбурчакларнинг учлари орасидаги масофа топилсин.

А) $5\sqrt{12}$; В) $4\sqrt{3}$; С) 12; Д) $2\sqrt{13}$; Е) $2\sqrt{15}$ см.

46. АВ кесманинг учлари ўзаро перпендикуляр бўлган иккита текисликда жойлашган. A ва B нуқталардан текисликларнинг кесишиш чизиқларига $AD=a$ ва $CB=b$ перпендикулярлар ўтказилган. Агар $BD=c$ бўлса, AC кесма ва унинг проекциялари узунликлари топилсин.

А) $\sqrt{2(a^2+c^2-b^2)}, \sqrt{a^2-c^2}, \sqrt{d^2-c^2}$;

В) $\sqrt{2(a^2+b^2)-bc}, a\sqrt{2}, bc\sqrt{2}$;

С) $\sqrt{(a^2+b^2-c^2)}, \sqrt{a^2-c^2}, \sqrt{b^2-c^2}$;

Д) $\sqrt{abc}, \sqrt{a^2+c^2}, \sqrt{b^2+c^2}$

Е) $\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}, \sqrt{a^2+c^2}, \sqrt{b^2+c}$.

47. ΔABC нинг томонлари 13, 14 ва 15 см. Учбурчакнинг битта томони орқали учбурчак текислиги билан 30° ли бурчак ҳосил қилувчи текислик ўтказилган. Учбурчакнинг шу текисликдаги проекцияси юзи ҳисоблансин.

А) $42\sqrt{3}$; В) 42; С) $48\sqrt{3}$; Д) 48; Е) $44\sqrt{2}$ см².

48. Ясси кўпбурчак проекциясининг юзи 20 см², кўпбурчак ва проекциянинг текисликлари орасидаги бурчак 45° бўлса, кўпбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

А) 20; В) $20\sqrt{2}$; С) $16\sqrt{2}$; Д) $24\sqrt{2}$; Е) 24 см².

49. ΔABC — тўғри бурчакли бўлиб, унинг гипотенузаси 12 см. Фазодаги P нуқта ΔABC нинг учларидан бир хил — 10 см узоқликда ётса, P нуқтадан (ABC) текисликкача бўлган масофа топилсин.

А) 7; В) 6; С) 8; Д) $8\sqrt{2}$; Е) 9 см.

50. Тенг ёнли ΔABC нинг AC асоси α текисликда ётади, B учи эса α текисликдан 3 см узоқликда жойлашган. Агар учбурчакнинг асоси $AC=18$ см, учбурчак текислиги ва α текислик орасидаги бурчак 45° бўлса, ΔABC нинг юзи ҳисоблансин.

A) 64; B) 48; C) 36; Д) 54; E) 60 см^2.

51. Учлари иккита параллел текисликда жойлашган кесмалар узунликларининг нисбати 2:3 каби. Кесмаларнинг текисликлар билан ташкил қилган бурчаклари ўлчовларининг нисбати 2:1 каби бўлса, шу бурчаклар топилсин.

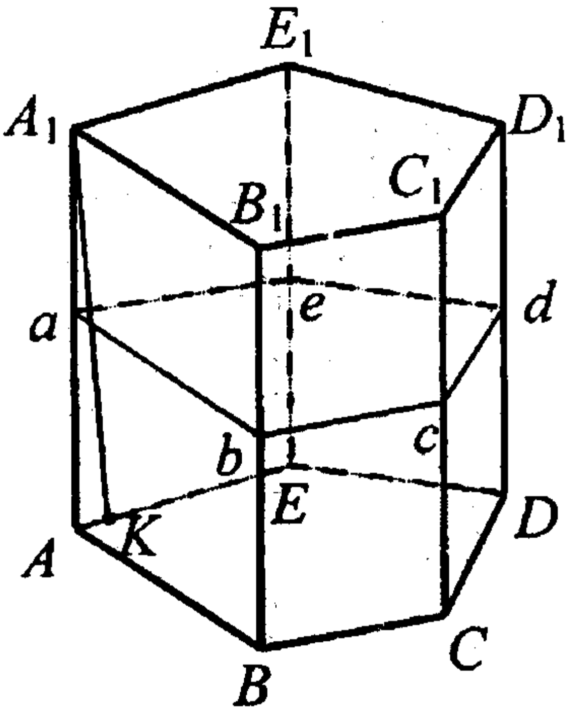
A) $\frac{\pi}{4}$ ва $2\arcsin\frac{2}{3}$; B) $\operatorname{arctg} 3$ ва 2α; C) $\arccos\frac{5}{6}$ ва $\frac{3\alpha}{2}$; Д) $2\arcsin\frac{4}{5}$ ва 3α; E) $\alpha=2\arccos\frac{3}{4}$ ва 2α.

9-§. ПРИЗМА

9.1. Асосий тушунчалар ва тасдиқлар

Кўпёқ чекли сондаги текисликлар билан чегараланган жисм бўлиб, кўпёқнинг чегараси унинг сиртидан иборат. Кўпёқ ўзини чегараловчи текисликларнинг ҳар биридан бир томонда ётса, у *қавариқдир*. Кўпёқнинг сирти билан уни чегаралаб турган текисликнинг умумий қисми унинг ёғи, кўпёқ *ёқларининг томонлари — қирралари*, кўпёқ ёқларининг учлари — кўпёқнинг *учларидир*. Масалан, куб қавариқ кўпёқдир, унинг сирти олтита квадратдан — ёқлардан ташкил топган. Бу квадратларнинг томонлари кубнинг қирралари, учлари эса кубнинг учларидир. Кубда олтита ёқ, ўн иккита қирра ва саккизта уч бор.

Призма иккита параллел текислик орасига жойлашган барча параллел тўғри чизиқлар кесмаларидан тузилган кўпёқ бўлиб, бу кесмалар шу текисликлардан бирида ётган ясси кўпбучакни кесиб ўтади. Призманинг параллел текисликларда ётган ёқлари — кўпбурчаклар унинг *асослари*, қолганлари унинг *ён ёқлари* бўлади. Демак, призманинг ён ёқлари параллелограммлардир.



9.1-чизма.

Тўғри призма ён қирралари асосига перпендикуляр бўлган призмадир. Акс ҳолда призма оғма призмадан иборат бўлади.

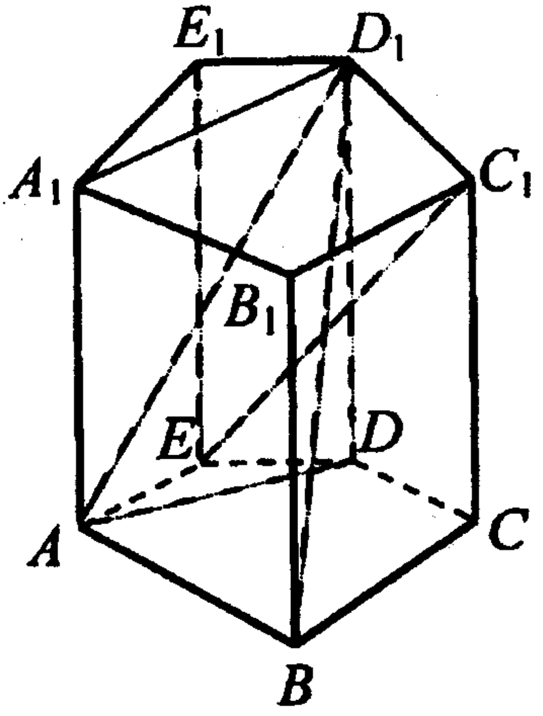
9.1-чизмада $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ призма келтирилган.

Призманинг AA_1 қиррасида ихтиёрий a нуқтани оламиз ва бу нуқтадан AA_1 қиррага перпендикуляр текислик ўтказсак, текислик призманинг сиртини $abcde$ кўпбурчак бўйлаб кесади. Бу кесим призманинг ***перпендикуляр кесими*** ва унинг ab, bc, cd, de, ea томонлари призманинг ён қирраларига перпендикуляр бўлади.

Призманинг асослари *юқори* (устки) ва *қуйи* (пастки) *асослар* дейилиб, юқори асоснинг ихтиёрий нуқтасидан пастки асосга ўтказилган A_1K перпендикуляр (9.1-чизма) призманинг *баландлигидир.*

Мунтазам призма асослари мунтазам кўпбурчаклар бўлган тўғри призмадир. Тўғри ва мунтазам призмаларнинг баландликлари уларнинг ён қирраларига тенгдир.

Призманинг диагонали унинг битта ёғига тегишли бўлмаган иккита учини бирлаштирувчи кесмадир (9.2-чизмада AD, AD_1, BD_1, ...). Қуйи ва юқори асос-



9.2-чизма.

ларнинг мос AD ва A_1D_1 диагоналларини ўтказамиз (9.2-чизма). Улардан ўтувчи кесим призманинг диагонал кесимидир (9.2-чизма ADD_1A_1, AA_1C_1C, ...). Тўғри ва мунтазам призмаларнинг диагонал кесимлари тўғри тўртбурчаклар, оғма призмада эса параллелограммлар бўлади.

Призма *ён сиртининг юзи* деб унинг ён ёқлари юзлари йиғиндисига, *тўла сиртининг* юзи деб призма ён сиртининг юзи билан унинг асослари юзларининг йиғиндисига айтилади.

Қуйидаги тасдиқлар ўринли.

1. Призма ён сиртининг юзи унинг перпендикуляр кесими билан ён қиррасининг кўпайтмасига тенг:

$$S_{ён}=P_{перп.кес}\cdot l, \text{ бунда } l=AA_1. \quad (9.1)$$

2. Призма тўла сиртининг юзи

$$S_т=S_{ён}+2S_{асос} \quad (9.2)$$

формула орқали ҳисобланади.

3. Призманинг ҳажми унинг асоси юзи билан баландлиги кўпайтмасига тенг:

$$V=S_{асос}\cdot h, \text{ бунда } h=A_1K. \quad (9.3)$$

4. Оғма призма шундай призмага тенгдошки, унинг асоси оғма призманинг перпендикуляр кесимига, баландлиги эса оғма призманинг ён қиррасига тенгдир.

9.2. Мавзуга оид масалалар

1. Тўртбурчакли мунтазам призма асосининг диагонали 8 см, ён ёғининг диагонали 7 см бўлса, унинг диагонали топилсин.

А) 6; В) 11; С) 9; Д) 8; Е) 10 см.

2. Учбурчакли мунтазам призма асосининг томони a, ён қирраси b га тенг. Призма қуйи асосининг томони ва қарама-қарши ён қиррасининг ўртасидан ўтказилган кесимнинг юзи топилсин.

А) $\frac{a}{2}\sqrt{3a^2+b^2}$; В) $\frac{a}{4}\sqrt{3a^2+b^2}$; С) $a\sqrt{a^2+3b^2}$;

Д) $\frac{a}{2}\sqrt{a^2+2b^2}$; Е) $\frac{a}{3}\sqrt{3a^2+b^2}$.

3. Тўртбурчакли мунтазам призманинг диагонали ён ёқ билан 30° ли бурчак ташкил қилади. Шу диагонал ва асос текислиги орасидаги бурчак топилсин.

А) 55°; В) 60°; С) 35°; Д) 70°; Е) 45°.

4. Учбурчакли оғма призманинг ён қирралари 8 см дан, призма перпендикуляр кесимининг томонлари 9:10:17 каби нисбатда бўлиб, унинг юзи 144 см^2 га тенг бўлса, призма ён сиртининг юзи топилсин.

А) 456; В) 544; С) 525; Д) 576; Е) 624 см^2.

5. Призманинг асоси квадратдан иборат бўлиб, юқори асоснинг битта учи пастки асоснинг учларидан бир хил масофада жойлашган. Агар призма асосининг томони a, ён қирраси b га тенг бўлса, призма тўла сиртининг юзи топилсин.

А) $2a\sqrt{4b^2-a^2}+2a^2$; В) $a\sqrt{2b^2-a^2}+2a^2$;

С) $a\sqrt{4b^2-a^2}+a^2$; Д) $2a\sqrt{2b^2-a^2}$.

6. Учбурчакли оғма призманинг ён қирралари 15 см, улар орасидаги масофалар 26, 25, 17 см бўлса, призманинг ҳажми ҳисоблансин.

A) 3060; B) 3025; C) 3225; Д) 3100; E) 3200 $см^2$.

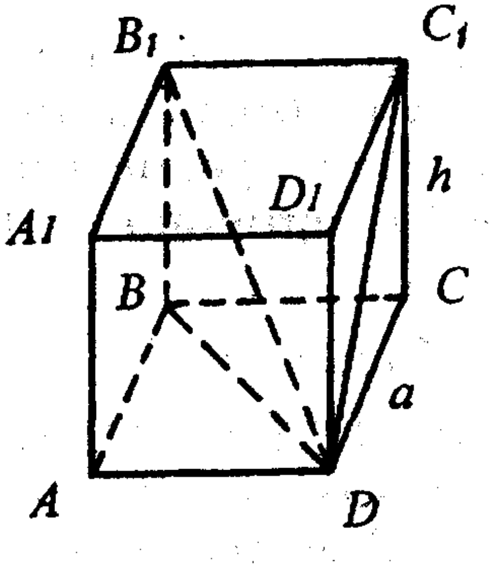
7. Олтибурчакли мунтазам призма энг катта диагонал кесимининг юзи Q, призма қарама-қарши ён ёқлари орасидаги масофа b бўлса, призманинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $\frac{2bQ}{3}$; B) $\frac{3bQ}{2}$; C) $\frac{3bQ}{4}$; Д) $\frac{4bQ}{3}$; E) $\frac{bQ}{2}$.

9.3. Мавзуга оид масалаларнинг ечимлари

1. Берилган. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ мунтазам тўртбурчакли призма, $BD=8$ см, $DC_1=7$ см, $ABCD$ квадрат.

B_1D топилсин (9.3.1-чизма).



9.3.1-чизма.

Ечилиши. Асосдаги $ABCD$ квадратнинг томони a билан, призманинг ён қиррасини $AA_1=h$ деб белгилаймиз. Сўнгра ABD, DCC_1, BB_1D тўғри бурчакли учбурчаклардан Пифагор теоремасига (2-§) асосан қуйидагиларни топамиз:

ΔABD дан: $BD^2=a^2+a^2$; $2a^2=8^2$; $a^2=32$;

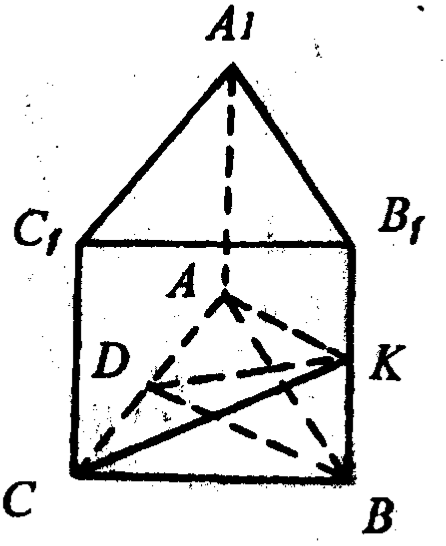
ΔDCC_1 дан: $C_1D^2=h^2+a^2$; $h^2=7^2-32=17$;

ΔBB_1D дан: $B_1D^2=h^2+BD^2=17+64=81$, $B_1D=9$ см.

Жавоби: C).

2. Б е р и л г а н. $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам призма, $AB=a$; $AA_1=b$, $BK=KB_1$.

S_{AKC} ҳ и с о б л а н с и н (9.3.2-чизма).



9.3.2-чизма.

Е ч и л и ш и! Призманинг мунтазамлигидан $AK=KC$ бўлади, яъни AKC — тенг ёнли, унинг KD медианаси баландлик ҳам бўлади, натижада кесимнинг юзи

$$S_{AKC}=\frac{1}{2}AC\cdot KD$$

формуладан топилади. Уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага асосан (8-§), $BD\perp AC$. ΔABC дан

$$BD=BC\cdot\sin 60^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Берилганига мувофиқ, $BK=\frac{1}{2}BB_1=\frac{b}{2}$. У ҳолда ΔBDK дан $DK^2=BD^2+BK^2$ ифодани оламиз, яъни

$$DK^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{3a^2}{4}+\frac{b^2}{4}=\frac{1}{4}(3a^2+b^2),$$

бу ердан

$$DK=\frac{1}{2}\sqrt{3a^2+b^2}.$$

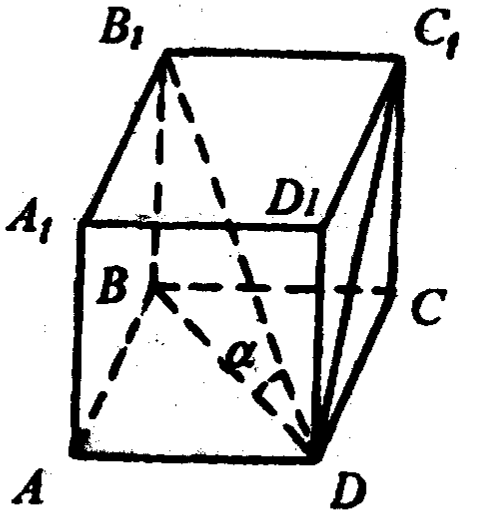
Демак, кесим юзи:

$$S_{AKC}=\frac{1}{2}a\frac{1}{2}\sqrt{3a^2+b^2}=\frac{a}{4}\sqrt{3a^2+b^2}.$$

Жавоби: В).

3. Берилган. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — мунтазам призма, $ABCD$ — квадрат, $\angle B_1D_1C_1=30°$.

$\angle B_1DB$ топилсин (9.3.3-чизма).



9.3.3-чизма.

Ечилиши. Тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчакни ясаш учун B_1 нуқтадан ён ёққа ва асосга перпендикулярлар ўтказиш керак. Призма мунтазам бўлганлигидан, $B_1C_1 \perp C_1D_1$ ва $B_1B \perp (ABCD)$. Тўғри чизиқ ва текисликнинг перпендикулярлик аломатига кўра (8-§), $B_1B \perp BD$ бўлади. Шу сабабли, таърифга кўра, $\angle B_1DC_1=30°$ диагонал ва ён ёқ орасидаги бурчакдан, $\angle B_1DB$ эса диагонал ва асос текислиги орасидаги бурчакдан иборат бўлади.

Фараз қилайлик, $AB=a$ бўлсин. У ҳолда тўғри бурчакли ΔDB_1C_1 дан: $B_1D = \dfrac{B_1C_1}{\sin 30°} = 2a$ ва ΔABD дан $BD=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$.

Энди тўғри бурчакли ΔBB_1D дан

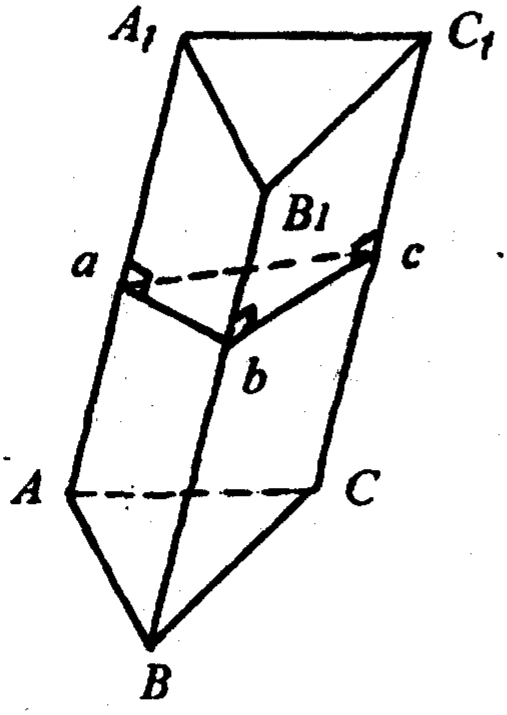
$\cos\alpha = \dfrac{BD}{B_1D} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; демак, $\alpha=45°$.

Жавоби: Е).

4. Берилган. $ABCA_1B_1C_1$ оғма призма, (abc) перпенд. кесим, $AA_1=8$ см, $ab:bc:ac=9:10:17$, $S_{п.к.}=144$ см^2.

$S_{ён.с.}$ ҳисоблансин (9.3.4-чизма).

Ечилиши. Перпендикуляр кесим томонларининг нисбати маълум бўлганлигидан, уларни қуйидагича ёзиб оламиз: $ab=9x$, $bc=10x$, $ac=17x$. Герон формуласи (2-§) ёрдамида перпендикуляр кесим — abc нинг юзини x орқали ифодалаймиз:



9.3.4-чизма.

$$p=\frac{9x+10x+17x}{2}=18x,$$

$$S_{пк}=S_{\Delta abc}=\sqrt{18x\cdot 9x\cdot 8x\cdot x}=36x^2.$$

Берилганларни ҳисобга олсак, $36x^2=144$ см^2, $x^2=4$, $x=2$ см.

Демак, $ab=18$, $bc=20$, $ac=34$ см ва призманинг ён сирти

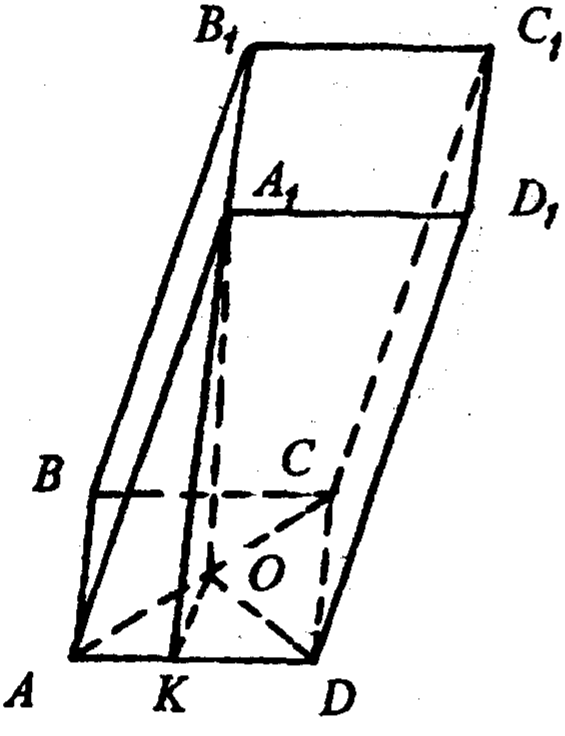
$$S_{ён}=(18+20+34)\cdot 8=576 \text{ см}^2.$$

Жавоби: Д).

5. Берилган. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ призма, $ABCD$ квадрат, $A_1A=A_1B=A_1C=A_1D$, $AB=a$, $AA_1=b$.

$S_{т.с.}$ ҳисоблансин (9.3.5-чизма).

Ечилиши. A_1 нуқта квадратнинг учларидан бир хил масофада бўлганлигидан АС диагоналнинг ўртасидаги О нуқта квадратга ташқи чизилган айлананинг маркази ёки квадрат диагоналларининг кесишиш нуқтаси бўлади. Демак, $ABCD$ квадратнинг диагонали



9.3.5-чизма.

$$AC=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2} \text{ ва } AO=\frac{1}{2}AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Энди A_1 нуқтадан AD томонга A_1K перпендикуляр ўтказамиз. O нуқта квадратнинг маркази бўлганлигидан, $OK=\frac{a}{2}$ ва уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага асосан (8-§) $OK\perp AD$ ва $AK=\frac{a}{2}$. Тўғри бурчакли ΔAA_1K дан Пифагор теоремасига кўра

$$A_1K=\sqrt{AA_1^2-AK^2}=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}$$

бўлади. У ҳолда,

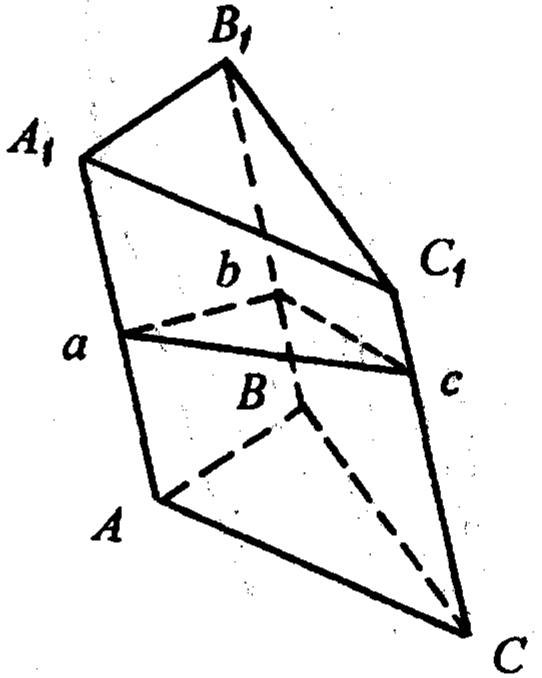
$$S_{\text{ён.с.}}=P_{\text{асос.}}\cdot AK=4a\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}=2a\sqrt{4b^2-a^2}.$$

Призма асосининг юзи $S_{\text{асос}}=a^2$. Призманинг тўла сиртини ҳисоблаймиз:

$$S_{\text{т.с.}}=S_{\text{ён.с.}}+2S_{\text{асос.}}=2a\sqrt{4b^2-a^2}+2a^2.$$

Жавоби: А).

6. Берилган. $ABCA_1B_1C_1$ оғма призма, $AA_1=15$ см, $AA_1\perp(ABC)$, $ab=25$ см, $ac=26$ см, $bc=17$ см.



9.3.6-чизма.

$V_{\text{призма}}$ ҳисоблансин (9.3.6-чизма).

Ечилиши. 4-тасдиққа кўра $V_{\text{призма}}=S_{abc}\cdot AA_1$ бўлиши керак, бу ерда S_{abc} — перпендикуляр кесимнинг юзи. Перпендикуляр кесимнинг юзини Герон формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$p=\frac{ab+ac+bc}{2}=\frac{25+26+17}{2}=34 \text{ см},$$

демак,

$$S_{abc}=\sqrt{34\cdot 9\cdot 8\cdot 17}=17\cdot 4\cdot 3=204 \text{ см}^2.$$

Энди призманинг ҳажми $V_{призма}=204\cdot 15=3060$ см^2.

Жавоби: А)

7. Берилган. $ABCDEFA_1B_1D_1E_1F_1$ олтибурчакли мунтазам призма, $S_{AA_1D_1D}=Q$, $A_1C_1=b$.

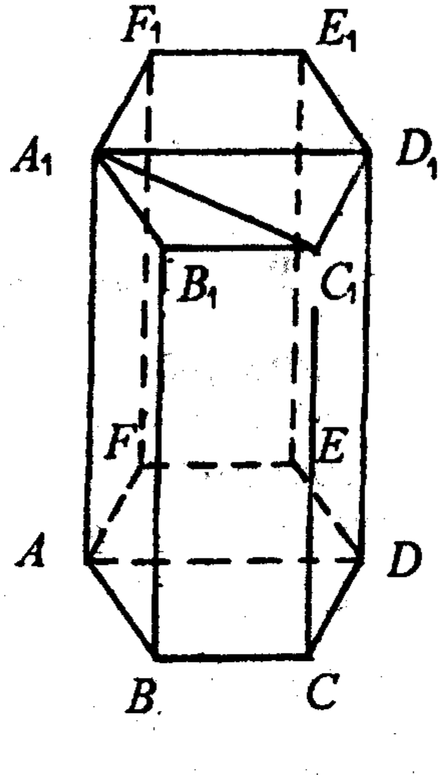
$V_{призма}$ ҳисоблансин (9.3.7-чизма).

Ечилиши. Энг катта диагонал кесим мунтазам олтибурчакнинг марказидан ўтадиган кесимдир. Қарама-қарши ён ёқлар ўзаро параллел бўлганлигидан, улар орасидаги масофа $AC=b$ диагоналнинг узунлигига тенг. Призманинг ҳажми

$$V=S_{асос}\cdot H,\ H=AA_1$$

формула бўйича ҳисобланади. Агар мунтазам олтибурчакнинг томони $AB=a$ бўлса, унинг юзи

$$S_{асос.}=6\cdot S_{\Delta AOB}=6\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2},$$



9.3.7-чизма.

катта диагонал кесимнинг юзи

$$S_{кесим}=AD\cdot AA_1=2aH,\ AD=2a.$$

У ҳолда призманинг ҳажми

$$V=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\cdot H$$

бўлади. Масаланинг берилишига кўра, $Q=2a\cdot H$ тенгликдан фойдалансак, $V=\frac{3a\sqrt{3}}{4}Q$.

Энди $AB=a$ нинг қийматини топиш учун ΔABC га косинуслар теоремасини (2-§) қўллаймиз:

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos120°$$

(чунки мунтазам олтибурчакнинг ички бурчаги 120° га тенг, $\angle ABC=120°$), яъни

$$b^2=a^2+a^2-2a^2\cos120°=2a^2(1-\cos120°)=4a^2\sin^2 60°=3a^2;$$

$$a^2=\frac{1}{3}b^2;\ a=\frac{b}{\sqrt{3}}.$$

Демак, призманинг ҳажми

$$V=\frac{b}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}Q=\frac{3bQ}{4}.$$

Жавоби: С).

9.4. Мустақил ечиш учун масалалар

1. Учбурчакли тўғри призманинг ён қирраси 15 см, асосининг томонлари 25, 39 ва 40 см. Ён қирра ва асоснинг ўрта баландлиги орқали ўтказилган кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) 325; В) 360; С) 380; Д) 350; Е) 240 см^2.

2. Олтибурчакли мунтазам призманинг диагоналлари 15 см ва 17 см. Унинг диагонали кесимларининг юзлари ҳисоблансин.

А) $16\sqrt{33}$; $24\sqrt{11}$; В) $18\sqrt{29}$; $24\sqrt{7}$; С) $16\sqrt{23}$; $18\sqrt{7}$; Д) $17\sqrt{35}$; $13\sqrt{29}$; Е) $16\sqrt{11}$; $24\sqrt{33}$.

3. Тўртбурчакли мунтазам призма диагонали кесимининг юзи S бўлса, призма ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $2\sqrt{3}\,S$; В) $3\sqrt{2}\,S$; С) $2\sqrt{2}\,S$; Д) $4\sqrt{3}\,S$; Е) $5\sqrt{2}\,S$.

4. Тўғри призманинг асоси ромбдан иборат бўлиб, призманинг диагоналлари 8 см ва 5 см, баландлиги 2 см. Призма асосининг томони узунлиги ҳисоблансин.

А) 4; В) 5,5; С) 4,8; Д) 5; Е) 4,5 см.

5. Учбурчакли оғма призманинг ён қирралари орасидаги масофалар мос равишда 37, 13 ва 40 см. Призманинг катта ён ёғи билан унинг қаршисидаги ён қирра орасидаги масофа топилсин.

А) 11; В) 12; С) 13; Д) 14; Е) 10 см.

6. Тўртбурчакли мунтазам призманинг диагонали 14 см, ён ёғининг диагонали 10 см бўлса, призманинг ён сирти топилсин.

А) $32\sqrt{3}$; В) $36\sqrt{2}$; С) $36\sqrt{3}$; Д) $23\sqrt{6}$; Е) $32\sqrt{2}$ см^2.

7. Учбурчакли мунтазам $ABCA_1B_1C_1$ призманинг баландлиги 6 дм га, унинг асоси ва A_1BC орасидаги бурчак 45° га тенг бўлса, призманинг тўла сирти топилсин.

А) $96\sqrt{3}$; В) 72; С) 96; Д) $84\sqrt{2}$; Е) 80 дм^2.

8. Тўғри призманинг асоси трапециядан иборат бўлиб, унинг периметри 58 см га тенг. Призманинг параллел ён ёқларининг юзлари 96 см^2 ва 264 см^2, бошқа ён ёқларининг юзлари 156 см^2 ва 180 см^2 бўлса, призманинг ҳажми ҳисоблансин.

А) 2100; В) 1840; С) 2240; Д) 2160; Е) 1960 см^3.

9. Призманинг асоси ΔABC да $AC=2$ дм, $AB=BC=3$ дм. Призманинг ён қирраси 6 дм га тенг ва асос текислиги билан 30° ли бурчак ташкил қилса, призманинг ҳажми ҳисоблансин.

А) 7,6; В) 6,5; С) $7;\sqrt{2}$ Д) 8; Е) $6\sqrt{2}$ дм^3.

10. Тўғри призманинг ён сирти S га тенг бўлиб, асоси тенг ёнли учбурчакдан иборат. Учбурчакнинг тенг томонлари a га, улар орасидаги бурчак α га тенг бўлса, призманинг ҳажми ҳисоблансин.

А) $\frac{1}{2}a^3 \operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{8}$; В) $\frac{aS}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}$; С) $a^2\sqrt{S}\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;
Д) $\frac{1}{6}a^2\sqrt{S}\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha$; Е) $\frac{1}{3}aS\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$.

11. Олтибурчакли мунтазам призма асосининг томони a, ён ёқлари эса квадратлардан иборат бўлса, призманинг диагоналлари топилсин.

А) $a\sqrt{6}$ ва $a\sqrt{2}$; В) $2a$ ва $a\sqrt{5}$; С) $a\sqrt{3}$ ва $a\sqrt{5}$;
Д) $3a$ ва $a\sqrt{3}$; Е) $2a$ ва $a\sqrt{2}$.

12. Олтибурчакли мунтазам призманинг асосига ташқи чизилган айлананинг радиуси R, ён ёқлари эса квадратлардан иборат бўлса, диагонал кесимларнинг юзлари ҳисоблансин.

А) $R^2\sqrt{7}$ ва $R^2\sqrt{3}$; В) $R^2\sqrt{6}$ ва $2R^2$; С) $R^2\sqrt{3}$ ва $2R^2$;
Д) $R^2\sqrt{2}$ ва $R^2\sqrt{3}$; Е) R^2 ва $2R^2$.

13. Учбурчакли мунтазам призманинг ҳамма қирралари ўзаро тенг ва уларнинг узунлиги a бўлиб, пастки асос томонидан ва призма ўқининг ўртасидан текислик ўтказилган. Ҳосил қилинган кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$; В) $\frac{a^2\sqrt{3}}{9}$; С) $\frac{9a^2}{4}$; Д) $\frac{3a^2}{4}$; Е) $\frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$.

14. Учбурчакли тўғри призма асосининг бир томони орқали қаршидаги ён қиррани кесувчи ва асос текислигига 45° оғма бўлган текислик ўтказилган. Призма асоснинг юзи Р бўлса, кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) $3P$; В). $P\sqrt{6}$; С) $2P$; Д) $P\sqrt{2}$; Е) $P\sqrt{3}$.

15. Учбурчакли тўғри призма асосининг томонлари 10 см, 17 см ва 21 см, призманинг баландлиги 18 см. Призманинг ён қирраси ва асоснинг кичик баландлиги орқали текислик ўтказилган. Ҳосил қилинган кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) 156; В) 172; С) 144; Д) 168; Е) 162 $см^2$.

16. Тўғри призманинг асоси — ромб, диагоналлари 8 см ва 5 см, баландлиги 2 см бўлса, призма асосининг периметри топилсин.

А) 15; В) 18; С) 16; Д) 24; Е) 20 см.

17. Учбурчакли оғма призманинг ён қирралари орасидаги масофалар, мос равишда 37, 13 ва 40 см. Призманинг катта ён ёғи билан унинг қаршисидаги ён қирраси орасидаги масофа топилсин.

А) 12; В) 14; С) 10; Д) 13; Е) 15 см.

18. Оғма призманинг ён қирраси l га тенг ва асос текислиги билан α бурчак ташкил қилади. Призманинг баландлиги топилсин.

А) $\frac{l}{\cos\alpha}$; В) $\sqrt{l^2 + tg^2\alpha}$; С) $l\,\mathrm{tg}\alpha$; Д) $\sqrt{l\sin\alpha}$;

Е) $l\sin\alpha$.

19. Олтибурчакли мунтазам призма нечта диагонал кесимга эга?

А) 5 та; В) 3 та; С) 9 та; Д) 8 та; Е) 6 та.

20. n-бурчакли мунтазам призма нечта диагонал кесимга эга?

А) $\frac{1}{3}n(n+1)$; В) $\frac{1}{2}n(n-3)$; С) $\frac{1}{3}n(n-2)$;

Д) $\frac{1}{2}n(n-1)$; Е) $\frac{1}{2}n(n+1)$.

21. Учбурчакли мунтазам призма асосининг томони a, ён қирраси b га тенг. Асоснинг томони ва

унга қарама-қарши ён қирранинг ўртасидан ўтказилган кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{a\sqrt{3a^2+5b^2}}{8}$; В) $\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{4}$; С) $\frac{a\sqrt{3a^2+b^2}}{4}$;

Д) $\frac{a\sqrt{3a^2+b^2}}{2}$; Е) $\frac{b\sqrt{3a^2+b^2}}{2}$.

22. Учбурчакли мунтазам призманинг ҳар бир қирраси a га тенг. Унинг қуйи асоси томони ва юқори асосининг ўрта чизиғидан текислик ўтказилган. Ҳосил қилинган кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{2a^2\sqrt{3}}{9}$; В) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$; С) $\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$; Д) $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$; Е) $\frac{3a^2\sqrt{19}}{16}$.

23. Тўртбурчакли мунтазам призма асосининг диагонали d га тенг, асоснинг диагонали ва иккинчи асоснинг учидан кесим ўтказилган бўлиб, у асос текислиги билан α ўткир бурчак ташкил қилади. Кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{d^2}{4\cos\alpha}$; В) $\frac{d^2}{4\sin\alpha}$; С) $\frac{d^2}{2\cos\alpha}$; Д) $\frac{1}{2}d^2\sin\alpha$;

Е) $\frac{1}{4}d^2\cos\alpha$.

24. Тўғри призманинг асоси тенг ёнли трапеция бўлиб, трапециянинг асослари 25 ва 9 см, баландлиги эса 8 см. Призманинг ён қирраларидаги иккиёқли бурчакларнинг катталиклари топилсин.

А) 60° ва 120°; В) 45° ва 135°; С) 30° ва 150°; Д) 90° ва 90°; Е) 80° ва 110°.

25. Тўртбурчакли мунтазам призманинг диагонали ён ёқ текислиги билан 30° ли бурчак ташкил қилади. Ушбу диагонал ва асос текислиги орасидаги бурчак топилсин.

А) 60°; В) 75°; С) 90°; Д) 45°; Е) 30°.

26. Тўртбурчакли мунтазам призма асосининг диагонали орқали призманинг диагоналига параллел

текислик ўтказилган. Агар призма асосининг томони 2 см, призманинг баландлиги 4 см бўлса, ҳосил қилинган кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) $4\sqrt{2}$; В) $3\sqrt{2}$; С) $2\sqrt{3}$; Д) $4\sqrt{3}$; Е) $6\sqrt{3}$ см².

27. $ABCA_1B_1C_1$ оғма призманинг асоси тенг ёнли учбурчак бўлиб, унинг томонлари $AC=AB=13$ см, $BC=10$ см, призманинг ён қирраси эса асос текислиги билан 45° ли бурчак ташкил қилади. Призма юқори асосининг A_1 учи пастки асоснинг марказига проекцияланади. CC_1B_1B ёқнинг юзи ҳисоблансин.

А) 80; В) $80\sqrt{2}$; С) $80\sqrt{3}$; Д) $40\sqrt{2}$; Е) $60\sqrt{2}$ см.

28. $ABCA_1B_1C_1$ тўғри призманинг асоси тўғри бурчакли учбурчак бўлиб, $\angle B=90°$. Призманинг BB_1 қиррасидан AA_1C_1C текисликка перпендикуляр текислик ўтказилган. Агар $AA_1=10$ см, $AD=27$ см, $DC=12$ см бўлса, ҳосил қилинган кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) 225; В) 196; С) 240; Д) 180; Е) 214 см².

29. Асоснинг томони a, ён қирраси b га тенг бўлган учбурчакли мунтазам призма тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{ab}{2}+b^2\sqrt{3}$; В) $ab+\frac{b\sqrt{5}}{4}$; С) $3ab+\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$;

Д) $2ab+\frac{b^2\sqrt{3}}{2}$; Е) $4ab+\frac{ab}{\sqrt{2}}$.

30. Асоснинг томони a, ён қирраси b га тенг бўлган тўртбурчакли мунтазам призма тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $4ab+2a^2$; В) $2ab+4a^2$; С) $3ab+5a^2$; Д) $5ab+2a^2$;
Е) $6\,ab$.

31. Асоснинг томони a, ён қирраси b га тенг бўлган олтибурчакли мунтазам призма тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $4ab+2a^2\sqrt{3}$; В) $6ab+3a^2\sqrt{3}$; С) $4ab+3a^2\sqrt{2}$;
Д) $4ab+3a^2\sqrt{2}$; Е) $6ab+3a^2\sqrt{5}$.

32. Учбурчакли мунтазам призма асосининг бир томони ва унинг қаршисидаги қирранинг ўртасидан ўтган текислик асос билан 45° ли бурчак ташкил қилади. Призма асосининг томони l га тенг бўлса, призма ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $l^2\sqrt{21}$; В) $l^2\sqrt{15}$; С) $2l^2\sqrt{2}$; Д) $2l^2\sqrt{3}$; Е) $3l^2\sqrt{3}$.

33. Учбурчакли тўғри призма асосининг томонлари 25, 29 ва 36 дм га тенг. Агар призма тўла сиртининг юзи 1620 дм² бўлса, призма ён сиртининг юзи ва баландлиги топилсин.

А) 25 ва 4; В) 16 ва 2; С) 9 ва 1; Д) 12 м² ва 4 м.

34. Учбурчакли тўғри призма асоси томонларининг нисбати 17:10:9 каби, ён қирраси 16 см, тўла сиртининг юзи 1440 см² бўлса, призма асосининг томонлари топилсин.

А) 17, 10, 9; В) 34, 20, 18; С) 51, 30, 27;
Д) 48, 50, 26; Е) 39 см, 26 см, 24 см.

35. Тўғри призманинг асоси $ABCD$ тенг ёнли трапеция бўлиб, унинг томонлари $AB=CD=13$ см, $BC=11$ см, $AD=21$ см, диагонал кесимнинг юзи 180 см² бўлса, призма тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) 932; В) 880; С) 1024; Д) 906; Е) 864 см².

36. Учбурчакли оғма призманинг ён қирралари орасидаги масофалар 37 см, 15 см ва 26 см га тенг, ён сирти эса перпендикуляр кесимга тенгдош бўлса, призманинг ён қирраси топилсин.

А) 7; В) 2,5; С) 3; Д) 4; Е) 2 см.

37. Учбурчакли оғма призманинг ён қирралари 8 см дан, перпендикуляр кесимнинг томонлари 9:10:17

каби нисбатда ва унинг юзи 144 $см^2$ бўлса, призма ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) 576; В) 676; С) 625; Д) 584; Е) 600 $см^2$.

38. Учбурчакли оғма призманинг иккита ён ёғи ўзаро перпендикуляр бўлиб, уларнинг умумий қирраси 24 см ва қолган икки ён қиррадан 12 см ва 35 см узоқликда туради. Призма ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) 2048; В) 2016; С) 1896; Д) 1924; Е) 3200 $см^2$.

39. Оғма призманинг асоси ABC тенг ёнли учбурчакдан иборат ва $AB=AC=10$ см, $BC=12$ см. Призманинг A_1 учи A ва C учлардан бир хил узоқликда ва $AA_1=13$ см бўлса, унинг тўла сирти юзи ҳисоблансин.

А) 468; В) 366; С) 492; Д) 429; Е) 524 $см^2$.

40. Тўртбурчакли мунтазам призма диагонал кесимининг юзи 6 бўлса, призма ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $13\sqrt{3}$; В) $13\sqrt{2}$; С) $12\sqrt{3}$; Д) 12; Е) $12\sqrt{2}$.

41. Тўғри призманинг асоси учбурчакдан иборат бўлиб, унинг иккита томони 3,5 см ва улар орасидаги бурчак 120°. Агар призма энг катта ён ёғининг юзи 35 $см^2$ бўлса, призма ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) 58; В) 96; С) 72; Д) 75; Е) 64 $см^2$.

42. Олтибурчакли мунтазам призма қуйи асосининг томони ва юқори асосининг унга қарама-қарши томонидан текислик ўтказилган. Агар призманинг ҳар бир қирраси a бўлса, ҳосил қилинган кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) $3a^2$; В) $4a^2$; С) $2\sqrt{3}a^2$; Д) $3\sqrt{2}a^2$; Е) $6a^2$.

43. Тўртбурчакли мунтазам призма асосининг томони a га тенг бўлиб, асоснинг диагонали орқали асос текислиги билан α бурчак ташкил қилувчи текислик ўтказилган. Бу текисликнинг ён қиррани кесиб ўтишидан ҳосил қилинган кесимнинг юзи ҳисоблансин.

A) $a^2\sin\alpha$; B) $\frac{a^2}{2\cos\alpha}$; C) $a^2\cos\alpha$; Д) $2a^2\cos\alpha$; E) $a^2\mathrm{tg}\alpha$.

44. Учбурчакли мунтазам призма асосининг томони 10 см, баландлиги 15 см бўлса, призма тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) $60(90+\sqrt{3})$; B) $50(9+\sqrt{2})$; C) $50(9+\sqrt{3})$;

Д) $50(6+\sqrt{3})$; E) $(450+29\sqrt{3})$ см^2.

45. Олтибурчакли мунтазам призма асоснинг томони узунлиги 8 дм, баландлиги 5 дм га тенг бўлса, призма тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) $(180+96\sqrt{3})$; B) $(225+96\sqrt{3})$; C) $(220+192\sqrt{2})$;

Д) $(240+192\sqrt{3})$; E) $(196+37\sqrt{5})$ дм^2.

46. Тўғри призманинг асоси тўғри бурчакли учбурчакдан иборат бўлиб, унинг битта катети c, унга ёпишган бурчаги α га тенг. Берилган катет ва юқори асоснинг қарама-қарши учидан текислик ўтказилган. Ҳосил қилинган кесим асос текислиги билан β бурчак ташкил қилса, призма ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{c^2\sqrt{2}\mathrm{tg}\sin 2\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$; B) $\frac{\sqrt{3}c^2\sin 2\alpha\mathrm{tg}\beta}{\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$; C) $\frac{c^2\mathrm{tg}\alpha\mathrm{ctg}\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$;

Д) $\frac{\sqrt{3}c^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}$; E) $\frac{\sqrt{2}c^2\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

47. Тўртбурчакли мунтазам призманинг диагонали a ва ён ёқ текислиги билан 30° ли бурчак ташкил қилса, призманинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$; B) $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$; C) $\frac{a^3\sqrt{5}}{8}$; Д) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$; E) $\frac{a^3\sqrt{2}}{16}$.

48. Учбурчакли тўғри призманинг асоси ABC тенг ёнли учбурчакда $AB=BC=m$ ва $\angle ABC=\varphi$ бўлиб, призманинг ён қирраси асоснинг BD баландлигига тенг бўлса, призманинг ҳажми топилсин.

A) $2m^3\sin\varphi$; B) $\frac{1}{2}m^3\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}$; C) $m^3\cos\varphi\sin\frac{\varphi}{2}$;

Д) $\frac{1}{6}m^3\sin2\varphi\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$; E) $\frac{1}{3}m^3\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{3\varphi}{2}$.

49. Олтибурчакли мунтазам призма катта диагоналининг узунлиги 8 см бўлиб, у ён қирра билан 30° ли бурчак ташкил қилса, призманинг ҳажми топилсин.

A) 75; B) 68; C) 72; Д) 66; E) 64 см^3.

50. Тўғри призманинг асоси ABC тенг ёнли учбурчакда $AB=BC=a$, $\angle ABC=\alpha$ бўлиб, AB томон ва C учидан текислик ўтказилган ҳамда ҳосил қилинган кесим асос текислиги билан φ бурчак ташкил этади. Призманинг ҳажми топилсин.

A) $a^3\sin2\alpha\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$; B) $\frac{1}{8}a^3\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\varphi$; C) $\frac{1}{3}a^3\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}2\varphi$;
Д) $\frac{1}{2}a^3\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\varphi$; E) $a^3\sin2\alpha\,\mathrm{tg}\varphi$.

51. Оғма призманинг асоси тўғри бурчакли учбурчакдан иборат бўлиб, унинг битта ўткир бурчаги 30° га, гипотенузаси эса c га тенг. Призманинг ён қирраси b ва асос текислиги билан 60° ли бурчак ташкил қилади. Призманинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $\frac{3cb^2}{40}$; B) $\frac{b^2c}{24}$; C) $\frac{3bc^2}{8}$; Д) $3bc^2$; E) $\frac{3bc^2}{16}$.

52. Оғма призманинг асоси томони a бўлган мунтазам учбурчакдан иборат бўлиб, призма ён ёқларидан бири асосга перпендикуляр ва ромбдан иборат. Ушбу ромбнинг кичик диагонали c бўлса, призманинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $\frac{1}{8}ac\sqrt{12a^2-3c^2}$, $2a>c$; B) $\frac{1}{16}a^2\sqrt{4a^2-3c^2}$;

C) $\frac{1}{4}ac\sqrt{16a^2-4c^2}$; Д) $\frac{1}{2}ac\sqrt{4a^2-c^2}$;

E) $\frac{1}{4}c^2\sqrt{4c^2-3a^2}$.

53. Оғма призманинг асоси — томонлари 10, 10 ва 12 см бўлган учбурчакдан иборат бўлиб, призманинг ён қирраси 8 см ва асос текислигига 60° ли бурчак остида оғмадир. Призманинг ҳажми топилсин.

A) 192; B) $192\sqrt{3}$; C) 196; Д) $192\sqrt{2}$; E) $200\sqrt{3}$ см^3.

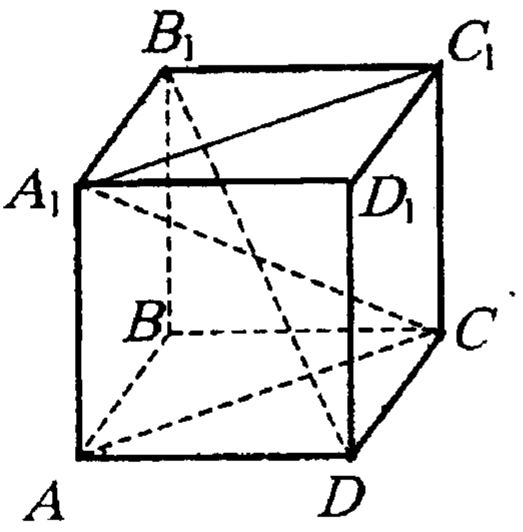
54. Учбурчакли оғма призма ён қирралари орасидаги масофалар мос равишда 37, 13 ва 30 см, призма ён сиртининг юзи 480 см^2 бўлса, унинг ҳажми топилсин.

A) 960; B) 1024; C) 1080; Д) 988; E) 1054 см^3.

10-§. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

10.1. Асосий тушунчалар ва тасдиқлар

Параллелепипед асослари параллелограммлар бўлган призмадир. Агар призманинг ён ёқлари ҳам параллелограммлардан иборат бўлса, у *оғма параллелепипед*, ён ёқлари асосларга перпендикуляр бўлса, параллелепипед тўғри бўлади, ҳамма ёқлари тўғри тўртбурчаклардан иборат параллелепипед *тўғри бурчаклидир*. Параллелепипеднинг *ўлчовлари* тўғри бурчакли параллелепипеднинг битта учидан чиққан учта қиррасининг узунликларидир. Ўлчовлари ўзаро тенг бўлган параллелепипед кубдир.



10.1-чизма.

Параллелепипеднинг битта ёғига тегишли бўлмаган ихтиёрий иккита қарама-қарши учини туташтирувчи кесма параллелепипеднинг *диагоналидир* (10.1-чизмада AC_1, B_1D, A_1C, BD_1). Параллелепипеднинг *диагонал кесими* — параллелепипед асосларининг мос диагоналларидан ўтувчи текислик билан параллелепипеднинг кесишишидан ҳосил қилинган тўртбурчаклардир (AA_1C_1C; BB_1D_1D).

Қуйидаги тасдиқлар ўринли:

1. Параллелепипеднинг қарама-қарши томонлари тенг ва параллел.

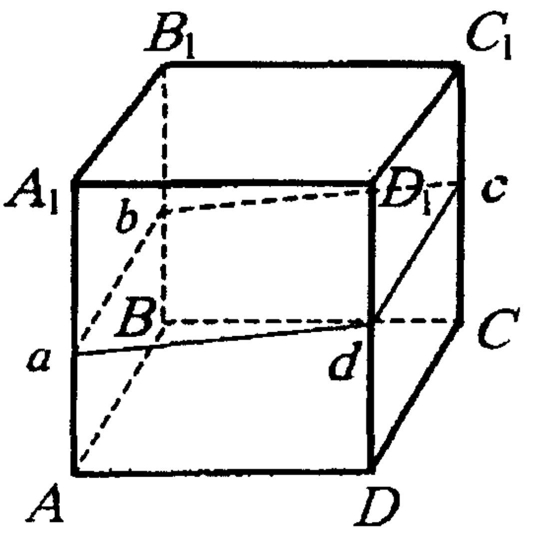
2. Параллелепипеднинг диагоналлари битта нуқтада кесишади ва кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади.

3. Параллелепипед диагоналлари квадратларининг йиғиндиси унинг ҳамма қирралари квадратларининг йиғиндисига тенг.

4. Тўғри бурчакли параллелепипед исталган диагоналининг квадрати унинг учта ўлчови квадратлари йиғиндисига тенг.

Параллелепипеднинг *перпендикуляр кесими* унинг ён қиррасига перпендикуляр ўтказилган текислик ва параллелепипеднинг кесишишидан ҳосил бўлган кесимдир.

5. Оғма параллелепипеднинг *ён сирти* перпендикуляр кесимнинг периметри билан ён қиррасининг



10.2-чизма.

кўпайтмасига тенг, яъни агар $abcd$ — перпендикуляр кесим, $AA_1=l$ — ён қирра (10.2-чизма) бўлса, у ҳолда

$$S_{ён}=P_{перп.кес.}\cdot l.$$

6. Тўғри параллелепипеднинг ён сирти унинг асоси периметри билан ён қиррасининг кўпайтмасига тенг, яъни агар $ABCD$ — асос, $AA_1=H$ — ён қирраси бўлса, у ҳолда

$$S_{ён}=P_{асос}\cdot H.$$

Параллелепипеднинг ҳажми — унинг асоси юзи ва баландлигининг кўпайтмасига тенг:

$$V_{пар\text{-}д}=S_{асос}\cdot H.$$

10.2. Мавзуга доир масалалар

1. Тўғри параллелепипед асосининг томонлари 3 см ва 5 см, асос диагоналларидан бири 4 см. Агар параллелепипеднинг кичик диагонали асос текислиги билан 60° ли бурчак ташкил қилса, унинг диагоналлари топилсин.

А) 8 ва 12; В) 8 ва 10; С) 7 ва 11; Д) 12 ва 6; Е) 9 ва 11 см.

2. Асоси $ABCD$ бўлган тўғри параллелепипедда AB=29 см, AD=36 см, BD=25 см ва унинг ён қирраси 48 см бўлса, AB_1C_1D кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) 1900; В) 2000; С) 1560; Д) 1680; Е) 1872 см².

3. Тўғри параллелепипеднинг асоси ромбдан иборат. Параллелепипед пастки асосининг бир томони

ва юқори асосининг қарама-қарши томони орқали кесим ўтказилган. Бу кесим параллелепипед асоси билан 45° ли бурчак ташкил қилади ва кесимнинг юзи Q. Параллелепипед ён сиртининг юзи топилсин.

А) $2Q$, В) $\sqrt{2}\,Q$, С) $2\sqrt{2}\,Q$; Д) $2Q\sqrt{3}$; Е) $3Q$.

4. Тўғри бурчакли параллелепипед қўшни ён ёқларининг диагоналлари асос текислиги билан мос равишда, α ва β бурчаклар ташкил қилади. Ушбу диагоналлар орасидаги бурчак топилсин.

А) $\arccos(\sin 2\alpha)$; В) $\arccos(\sin\alpha\cdot\sin\beta)$;
С) $\arccos(\cos\alpha\cdot\cos\beta)$; Д) $\arcsin(\cos\alpha\cdot\cos\beta)$;
Е) $\mathrm{arctg}(\sin\alpha\cdot\cos\beta)$.

5. Тўғри параллелепипеднинг асоси ромбдан иборат бўлиб, параллелепипед диагонал кесимларининг юзлари S_1 ва S_2 бўлса, параллелепипед ён сиртининг юзи топилсин.

А) $\frac{1}{2}\sqrt{S_1^2+S_2^2}$; В) $\sqrt{S_1^2+S_2^2}$; С) $S_1^2+S_2^2$;
Д) $\sqrt{S_1S_2}$; Е) $2\sqrt{S_1^2+S_2^2}$.

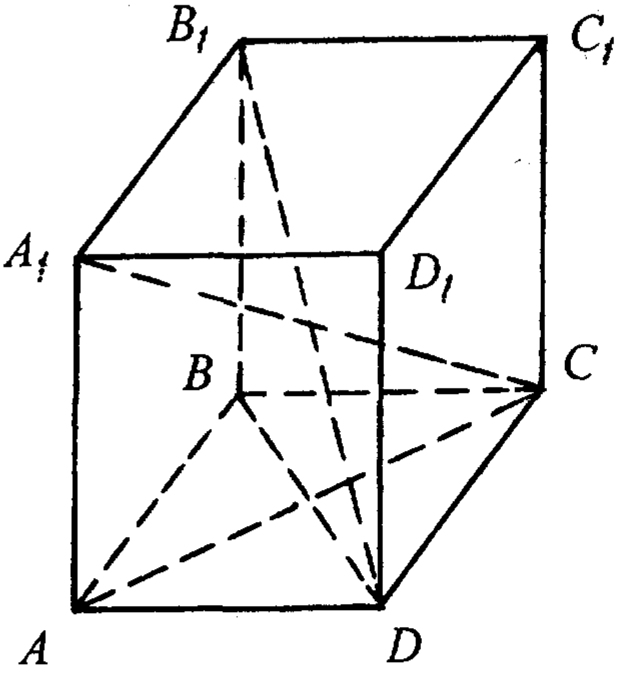
10.3. Мавзуга доир масалаларнинг ечимлари

1. Б е р и л г а н. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — тўғри параллелепипед, $AB=3$ см; $AD=5$ см, $BD=4$ см, $\angle BDB_1=60°$.

A_1C ва B_1D т о п и л с и н (10.3.1-чизма).

Е ч и л и ш и. Параллелепипед асоси $ABCD$ параллелограммнинг иккинчи диагоналини топамиз. Маълумки, параллелограмм диагоналлари квадратларининг йиғиндиси унинг томонлари квадратларининг йиғиндисига тенг, яъни

$$AC^2+BD^2=2(AB^2+AD^2),\ 4^2+AC^2=2(3^2+5^2),$$



10.3.1-чизма.

$AC^2=2\cdot 34-16=52;$

$AC=\sqrt{52}$ см;

Демак, AC — параллелепипед асосининг катта диагоналидир. Берилишига кўра, ΔBB_1D — тўғри бурчакли, шу сабабли,

$$\mathrm{tg}60^\circ=\frac{BB_1}{BD}, \quad BB_1=$$

$BD\cdot \mathrm{tg}60^\circ=4\sqrt{3}$ см.

Яна ΔBB_1D дан: $B_1D^2=BB_1^2+BD^2=(4\sqrt{3})^2+4^2=48+16=64$, $B_1D=8$ см.

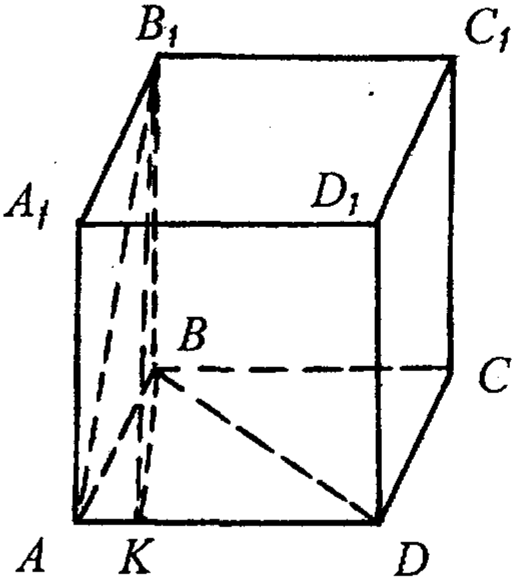
ΔAA_1C ҳам тўғри бурчакли бўлганлигидан,

$A_1C^2=AA_1^2+AC^2, A_1C^2=(4\sqrt{3})^2+(\sqrt{52})^2=48+52=100$, $A_1C=10$ см.

Жавоби: В).

2. Б е р и л г а н. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — тўғри параллелепипед, $AD=36$ см, $BD=25$ см, $AA_1=48$ см, $AB=29$ см.

$S_{AB_1C_1D}$ ҳ и с о б л а н с и н (10.3.2-чизма).



10.3.2-чизма.

Е ч и л и ш и. Тўғри параллелепипеднинг асоси параллелограмм бўлганлигидан, AB_1C_1D кесим ҳам параллелограммдир. Унинг юзини ҳисоблаш учун B_1 учидан AD томонига баландлик туширамиз; $B_1K\perp AD$. Уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага асосан (8-§) B_1K перпендикулярнинг параллелепипед асосидаги BK проекцияси ҳам AD га перпендикуляр бўлади; $BK \perp AD$. Берилишига кўра, ΔABD нинг ҳамма томонлари маълум, унинг юзини Герон формуласи орқали топиш мумкин:

$$p = \frac{36+29+25}{2} = 45;$$

$$S_{\Delta ABD} = \sqrt{45(45-36)(45-29)(45-25)} =$$

$$= \sqrt{45 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 20} = \sqrt{9 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 4 \cdot 5} = 5 \cdot 9 \cdot 8 = 360 \text{ см}^2.$$

Иккинчи томондан, $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BK \Rightarrow 360 = \frac{1}{2} 36 \cdot BK \Rightarrow$ $\Rightarrow BK = 20$ см.

Энди тўғри бурчакли ΔBB_1K дан Пифагор теоремаси (2-§) орқали B_1K гипотенузани топамиз:

$$B_1K^2 = BB_1^2 + BK^2, \Rightarrow B_1K^2 = 48^2 + 20^2 = 2704; \ B_1K = 52 \text{ см}.$$

У ҳолда AB_1C_1D кесимнинг юзи:

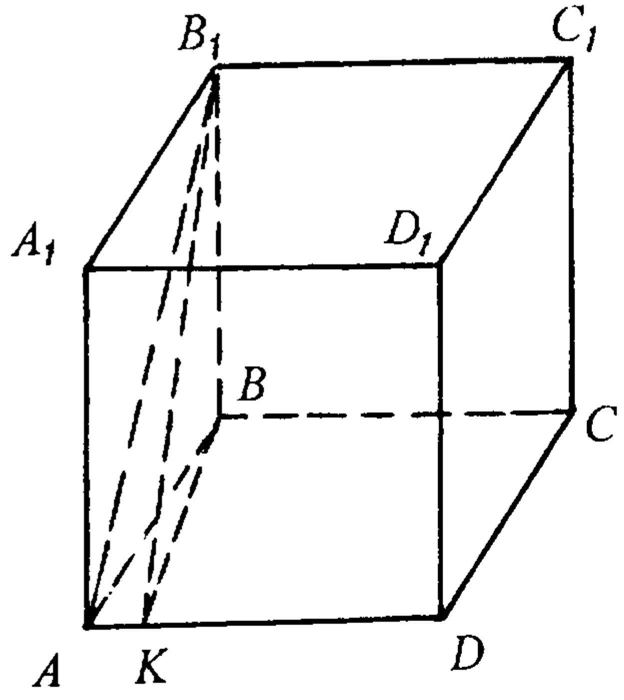
$$S = AD \cdot B_1K = 36 \cdot 52 = 1872 \text{ см}^2.$$

Жавоби: Е).

3. Б е р и л г а н. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — тўғри параллелепипед, $ABCD$ — ромб, $\angle B_1KB = 45°$, $S_{AB_1C_1D} = Q$.

$S_{\text{ён.с.}}$ ҳ и с о б л а н с и н (10.3.3-чизма).

Е ч и л и ш и. Аввало керакли ясашларни бажарамиз. A ва B_1, D ва C_1 нуқталар мос равишда AA_1B_1B ва DD_1C_1C текисликларда ётганини ҳисобга олиб, AB_1 ва C_1D кесмаларни ўтказамиз. Ҳосил қилинган кесим AB_1C_1D ромбдан иборат бўлади, ромбнинг B_1 учидан AD томонга B_1K перпендикуляр ўтказамиз: $B_1K \perp AD$. Уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага асосан, B_1K нинг BK проекцияси ҳам AD томонга перпендикулярдир: $BK \perp AD$. У ҳолда $\angle B_1KB$ — икки ёқли



10.3.3-чизма.

бурчакнинг чизиқли бурчаги бўлади ва берилишига кўра, $\angle B_1KB=45°$.

Иккинчи томондан, $BB_1 \perp BK$, демак, $\Delta BB_1K=$ $=90°-45°=45°$.

Учбурчакнинг иккита бурчаги ўзаро тенг бўлганлигидан, у — тенгёнли, яъни $BK=BB_1$. Энди $BB_1=BK=x$ деб олсак, Пифагор теоремасига (2- §) асосан, $B_1K^2=x^2+x^2=2x^2$ ва $B_1K=x\sqrt{2}$. AB_1C_1D ромбнинг юзи $S_{AB_1C_1D}=ADB_1K$ формуладан топилади. $AD=a$ деб олсак, $Q=a\cdot x\sqrt{2}$, $ax=\frac{Q}{\sqrt{2}}$.

Ниҳоят, тўғри параллелепипеднинг ён сирти

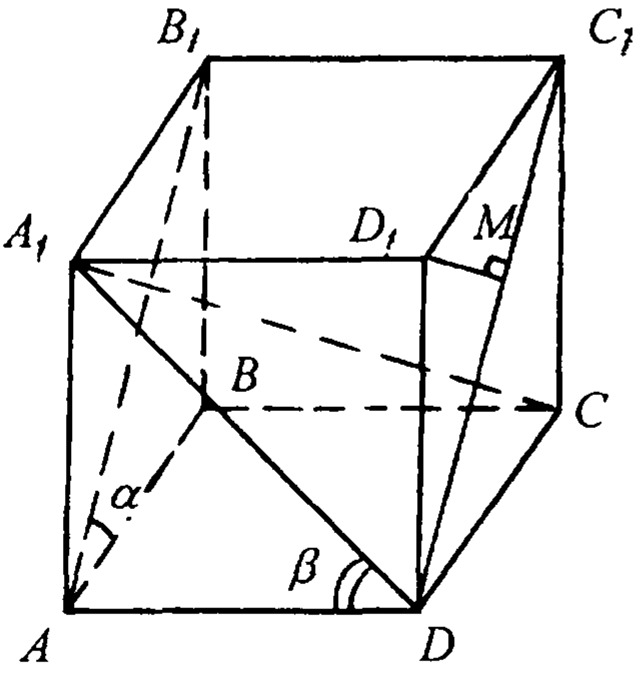
$$S_{\text{ён}}=P_{\text{асос}}B_1B=4ax \text{ ёки } S_{\text{ён}}=4\frac{Q}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\,Q.$$

Жавоби: С).

4. Берилган. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — тўғри бурчакли параллелепипед, $\angle B_1AB=\alpha$, $\angle A_1DA=\beta$

$(A_1D\,\widehat{\ }\,AB_1)$ топилсин (10.3.4-чизма).

Ечилиши. Аввало 3-масаладагига ўхшаш керакли ясашларни бажарамиз. Тўғри чизиқ ва текислик орасидаги бурчакнинг таърифига кўра, $\angle A_1DA=\beta$ ва $\angle B_1AB=\alpha$ ҳамда AB_1 ва A_1D лар параллелепипед қўшни ёқларининг ўзаро кесишмайдиган диагоналларидир. Параллелепипедда AB_1 га параллел бўлган DC_1 кесмани ўтказамиз. У ҳолда $\angle A_1DC_1$ ёқларнинг A_1D ва AB_1 диагоналлари орасидаги бурчакка тенг бўлган бурчақдир, уни $\angle A_1DC_1=x$ деб белгилаймиз. Параллелепипеднинг DD_1C_1C ён ёғида $D_1P\perp DC_1$ кесма ўтказамиз. Уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага асосан, $A_1P\perp DC_1$, демак, ΔA_1DP — тўғри бурчакли бўлади ва $\angle A_1DP=x$ ни топиш учун бурчакнинг иккита томонини битта ўлчов орқали ифодалаш керак. Бунинг учун $A_1D=l$ белгилаш киритамиз. У ҳолда ΔA_1AD дан $DP=l\cdot\cos x$. Тўғри бурчакли ΔA_1D_1D дан $\angle DA_1D_1=\angle A_1DA=\beta$, $DD_1=l\cdot\sin\beta$. Берилишига кўра, $\angle C_1DC=\alpha$ ва $D_1P\perp CD_1$, $DD_1\perp DC$ бўлгани учун, $\angle DD_1P=\angle C_1DC=\alpha$ ва $DM=DD_1\sin\alpha$, $DP=l\sin\beta\sin\alpha$. Демак, бир томондан, $DM=l\cdot\cos x$, иккинчи томондан, $DP=l\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha$, уларни тенглаштирсак,



10.3.4-чизма.

$$\cos x=\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

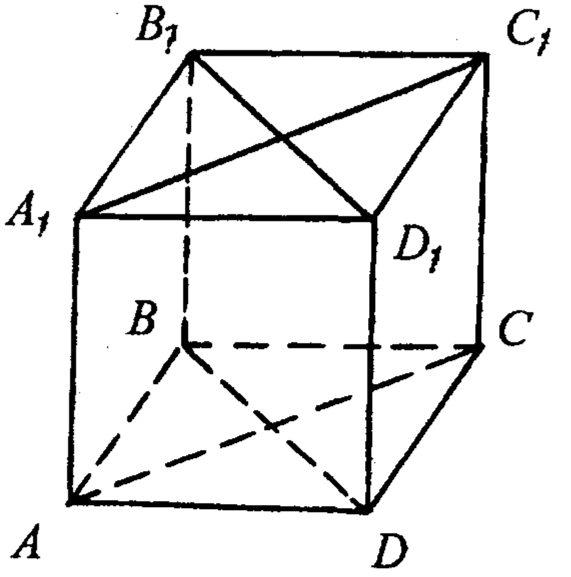
тенгликни оламиз, бу ердан $x=\arccos(\sin\alpha\cdot\sin\beta)$.

Жавоби: B).

5. Берилган. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — тўғри параллелепипед, $ABCD$ — ромб, $S_{AA_1C_1C}=S_1$; $S_{BB_1D_1D}=S_2$.

$S_{ён}$ ҳисоблансин (10.3.5-чизма).

Ечилиши. Маълумки, параллелепипеднинг ён сирти $S_{ён}=P_{асос}\cdot H$ формула орқали ҳисобланади. $AB=a$, $AA_1=H$ белгилашлар киритсак, параллелепипеднинг асоси ромб бўлганлигидан, $P_{асос}=4a$ ва



10.3.5-чизма.

$S_{ён}=4a\cdot H$ бўлади. Асоснинг диагоналлари $AC=d_1$, $BD=d_2$ бўлса, параллелепипед диагонал кесимларининг юзлари

$$S_1=d_1H,\ S_2=d_2H \text{ ва } d_1=\frac{S_1}{H};$$
$$d_2=\frac{S_2}{H}.$$

Параллелограмм диагоналлари квадратларининг йиғиндиси унинг ҳамма томонлари квадратларининг йиғиндисига тенг бўлганлигидан, ромб учун

$$d_1^2+d_2^2=4a^2$$

ифодани оламиз. Демак,

$$4a^2=\frac{S_1^2}{H^2}+\frac{S_2^2}{H^2},\ 4a^2H^2=S_1^2+S_2^2.$$

Бу ердан, $2a\cdot H=\sqrt{S_1^2+S_2^2}$. У ҳолда параллелепипеднинг ён сирти $S_{ён}=2\cdot 2aH=2\sqrt{S_1^2+S_2^2}$ бўлади.

Жавоби: Е).

10.4. Мустақил ечиш учун масалалар

1. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг учта ўлчови берилган бўлса, унинг диагонали топилсин: 1) 2, 1, 2; 2) 7, 6, 6; 3) 12, 21, 16.

1) А) 4; В) 3; С) 2; Д) 3,5; Е) 2,8.
2) А) 12; В) 8; С) 9; Д) 10; Е) 11.
3) А) 25; В) 27; С) 29; Д) 26; Е) 28.

2. Тўғри параллелепипед асосининг томонлари 3 дм ва 4 дм бўлиб, ўзаро 60° ли бурчак ташкил қилади. Параллелепипеднинг ён қирраси асоснинг томонлари орасида ўрта пропорционал бўлса, унинг катта диагонали топилсин.

A) 6; B) 4,5; C) 8; Д) 7; E) 10 дм.

3. Тўғри параллелепипеднинг ён қирраси 1 м, асосининг томонлари 23 дм ва 11 дм бўлиб, асос диагоналларининг нисбати 2:3 каби. Параллелепипед диагонал кесимларининг юзлари ҳисоблансин.

A) 2 ва 3; B) 3 ва 4; C) 1 ва 6; Д) 2,5 ва 4,5;
E) 12 $м^2$ ва 10 $м^2$.

4. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг учта ёғининг юзлари мос равишда 42 $см^2$, 72 $см^2$ ва 84 $см^2$ бўлса, унинг диагонали топилсин.

A) 15; B) 16; C) $\sqrt{180}$; Д) $\sqrt{240}$; E) $\sqrt{229}$ см.

5. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг диагонали 13 дм, баландлиги 12 дм, асосининг битта томони 4 дм бўлса, параллелепипед тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) 180; B) 196; C) 192; Д) 200; E) 156 $дм^2$.

6. Тўғри параллелепипеднинг асоси ромбдан иборат бўлиб, ромбнинг кичик диагонали d, ўткир бурчаги α га тенг. Агар параллелепипеднинг баландлиги $\frac{d}{2}$ бўлса, параллелепипед тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{1}{2}d^2\sin\alpha$; B) $d^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$; C) $\frac{1}{4}d^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$;
Д) $\frac{1}{8}d^2\sin\frac{\alpha}{2}$; E) $\frac{1}{2}d^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$.

7. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг диагонали d га тенг ва битта ёқ билан 30° ли, иккинчи ёқ

билан 45° ли бурчак ташкил қилади. Параллелепипед ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{1}{4}d^2\sqrt{2}$; B) $\frac{1}{8}d^2$; C) $\frac{1}{4}d^2$; Д) $\frac{d^2(\sqrt{2}+1)}{2}$; E) $\frac{1}{6}d^2\sqrt{2}$.

8. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг диагонали асос текислиги билан α бурчак ташкил қилади, унинг диагонал кесими ва ён ёғи ташкил этган икки ёқли бурчак β га тенг. Агар параллелепипед асосининг диагонали d бўлса, унинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $\frac{1}{4}d^3\sin\beta\ \mathrm{tg}\alpha$; B) $\frac{1}{2}d^3\cos2\beta\ \mathrm{tg}\alpha$; C) $\frac{1}{4}d^3\cos\beta\ \mathrm{tg}\alpha$;

Д) $\frac{1}{2}d^3\sin^2\beta\ \mathrm{tg}\alpha$; E) $\frac{1}{2}d^3\sin2\beta\ \mathrm{tg}\alpha$.

9. Тўғри параллелепипед асосининг томонлари a ва b бўлиб, улар орасидаги бурчак 60° га тенг. Параллелепипеднинг кичик диагонали асоснинг катта диагоналига тенг бўлса, унинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $ab\sqrt{6ab}$; B) $\frac{1}{2}ab\sqrt{5ab}$; C) $\frac{1}{2}ab\sqrt{6ab}$;

Д) $\frac{1}{2}ab\sqrt{3ab}$; E) $ab\sqrt{5ab}$.

10. Тўғри параллелепипеднинг асоси ўткир бурчаги α ва кичик диагонали d бўлган ромбдан иборат ва параллелепипеднинг баландлиги асоснинг томонидан икки марта кичик бўлса, унинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $\frac{d^3\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}{8\sin\frac{\alpha}{2}}$; B) $\frac{d^3}{8}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$; C) $\frac{d^3\sin\frac{\alpha}{2}}{4\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}$;

Д) $\frac{d^3\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}{8}$; E) $\frac{d^3\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{8}$.

11. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг битта учидан чиққан қирралари узунликлари 6, 6 ва 8 м бўлиб,

уларнинг ўрта нуқталаридан кесим ўтказилган. Шу кесимнинг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{5\sqrt{14}}{2}$; B) $\frac{3\sqrt{14}}{2}$; C) $\frac{4\sqrt{14}}{3}$; Д) $5\sqrt{14}$; E) $4\sqrt{14}$ м^2.

12. Тўғри бурчакли параллелепипед учта ён ёқларининг юзлари, мос равишда, 2, 3 ва 4 м^2 бўлса, параллелепипед тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) $\sqrt{24}$; B) 16; C) 24; Д) 9; E) 18 м^2.

13. Тўғри бурчакли параллелепипед ён ёқларининг юзлари S_1, S_2 ва S_3 бўлса, параллелепипеднинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $\sqrt{S_1S_2}+\sqrt{S_1S_3}$; B) $\sqrt{S_1S_2S_3}$; C) $\sqrt{S_1+S_2+S_3}$;
Д) $S_1\sqrt{S_2S_3}$; E) $S_2\sqrt{S_1S_3}$.

14. Тўғри параллелепипеднинг диагоналлари 9 ва $\sqrt{33}$ см, асосининг периметри 18 см ва ён қирраси 4 см бўлса, параллелепипед тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) 98; B) 92; C) 96; Д) 104; E) 108 см^2.

15. Тўғри параллелепипед асосининг томонлари a ва b бўлиб, улар орасидаги бурчак α га тенг. Параллелепипеднинг кичик диагонали асоснинг катта диагоналига тенг бўлса, унинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $2\sqrt{(ab)^3\cos\alpha}$; B) $2\cos\alpha\sqrt{(ab)^2\sin\alpha}$;

C) $\sin\alpha\sqrt{ab\cos\alpha}$; Д) $4\cos\alpha\sqrt{\sin\alpha}$;

E) $2\sin\alpha\sqrt{(ab)^3\cos\alpha}$.

16. Тўғри параллелепипеднинг асоси ромбдан иборат. Параллелепипед пастки асосининг бир томони ва юқори асосининг қарама-қарши томони орқали текислик ўтказилган. Ҳосил қилинган кесимнинг юзи

Q бўлиб, у асос текислиги билан β бурчак ташкил қилади. Параллелепипед ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) $4\,Q\sin\beta$; B) $2Q\,\mathrm{tg}\beta$; C) $Q\,\mathrm{ctg}\beta$; Д) $\frac{1}{2}Q\sin\beta$; E) $3\,Q\sin\beta$.

17. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг асоси тўғри тўртбурчакдан иборат бўлиб, унинг кичик томони a, диагоналлари орасидаги бурчак 60°. Агар параллелепипед асосининг катта томони унинг ён қиррасига тенг бўлса, параллелепипеднинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $6\,a^3$; B) $4\,a^3$; C) $3\,a^3$; Д) $\frac{1}{8}a^3$; E) $2\,a^3$.

18. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг диагонали 13 см, ён ёқларининг диагоналлари $4\sqrt{10}$ ва $3\sqrt{17}$ см бўлса, параллелепипеднинг ҳажми ҳисоблансин.

A) 148; B) 156; C) 128; Д) 144; E) 120 см^2.

19. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг диагонали l ва асос текислиги билан α бурчак ташкил қилади. Агар параллелепипед асосининг юзи S бўлса, унинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $S\cdot l\sin\alpha$; B) $2lS\mathrm{tg}\alpha$; C) $4l^3\cos\alpha$; Д) $(S+l^2)l\sin^2\alpha$; E) $5l\,S\mathrm{tg}\alpha$.

20. Тўғри параллелепипеднинг баландлиги h, унинг диагоналлари асос текислиги билан α ва β бурчакларни ташкил қилса, параллелепипед ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) $\sqrt{h^2\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta}$; B) $2h^2\sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\beta}$;

C) $h^2\sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\beta}$; Д) $\frac{h^2}{4}\sqrt{\mathrm{ctg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\beta}$;

E) $h^2\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta}$.

21. Тўғри параллелепипеднинг асоси параллелограмм бўлиб, унинг томонлари 1 ва 4 см, улар орасидаги бурчак 60°. Параллелепипеднинг катта диагонали 5 см бўлса, унинг ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) 28; В) 16; С) 24; Д) 18; Е) 20 см^2.

22. Кубда диагональ ва кубнинг у билан кесишмайдиган қирраси орасидаги масофа d бўлса, куб тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) 15 d^2; В) 18 d^2; С) 12 d^2; Д) 14 d^2; Е) 16 d^2.

23. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг диагонали l бўлиб, ён ёқлари билан мос равишда 30° ли ва 45° ли бурчаклар ташкил қилади. Параллелепипеднинг ҳажми ҳисоблансин.

А) $\frac{l^3}{4}$; В) $\frac{l^3\sqrt{2}}{8}$; С) $\frac{l^3}{8}$; Д) $\frac{l^3\sqrt{2}}{4}$; Е) $\frac{l^3\sqrt{3}}{8}$.

24. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг диагонали d, ўлчовлари нисбати $m:n:p$ каби бўлса, унинг ҳажми ҳисоблансин.

А) $\frac{d^3}{(m+n+p)^{3/2}}$; В) $\frac{(m+n+p)d^3}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$; С) $\frac{mnpd}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$;
Д) $\frac{mnpd^3}{(m^2+n^2+p^2)^{3/2}}$; Е) $\frac{(mn+np+mp)d}{(m^2+n^2+p^2)^{3/2}}$.

25. Куб тўла сиртининг юзи 36 см^2 бўлса, унинг иккита айқаш қирралари орасидаги масофанинг квадрати топилсин.

А) 8; В) 3; С) 6; Д) 4; Е) 5 см.

26. Тўғри параллелепипеднинг асоси параллелограмм, унинг ўткир бурчаги 60°, томонлари эса 1 ва 4 м. Параллелепипеднинг катта диагонали 5 см бўлса, унинг ҳажми ҳисоблансин.

А) $4\sqrt{3}$; В) $4\sqrt{2}$; С) $6\sqrt{2}$; Д) $6\sqrt{2}$; Е) 12 м^3.

27. Кубнинг диагонали ва унга айқаш бўлган ён қирра орасидаги масофа d бўлса, кубнинг ҳажми ҳисоблансин.

А) $d^3\sqrt{2}$; В) $d^3\sqrt{3}$; С) $2\ d^3$; Д) $d^3\sqrt{2}$; Е) $2\ d^3\sqrt{2}$.

28. Тўғри параллелепипеднинг асоси ромб бўлиб, унинг юзи S. Параллелепипед диагонал кесимларининг юзлари S_1 ва S_2 бўлса, унинг ҳажми ҳисоблансин.

А) $\sqrt{S_1}\ \frac{S_2+S_3}{2}$; В) $\frac{S_1+S_2+S_3}{2}$; С) $\sqrt{\frac{S_1S_2S}{2}}$;

Д) $\frac{\sqrt{S_1S_2S_3}}{2}$; Е) $\frac{\sqrt{S_1+S_2+S_3}}{2}$.

29. Тўғри параллелепипед асосининг томонлари a ва b, улар орасидаги бурчак 30°. Параллелепипед ён сиртининг юзи S га тенг бўлса, унинг ҳажми ҳисоблансин.

А) $\frac{abS}{8(a+b)}$; В) $\frac{abS}{4(a+b)}$; С) $\frac{(a+b)S}{4ab}$; Д) $\frac{abS}{a+b}$; Е) $\frac{S}{a+b}$.

30. Куб тўла сиртининг юзи 36 м^2 бўлса, унинг иккита айқаш қирраси ўрта нуқталари орасидаги масофа топилсин.

А) 3,5; В) 5; С) 4; Д) 3; Е) 6 см.

31. Тўғри бурчакли $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеднинг A, C ва D_1 учларидан текислик ўтказилган. Шу текислик ва асос текислиги орасидаги бурчак 60°, асоснинг томонлари 4 ва 3 см бўлса, параллелепипеднинг ҳажми ҳисоблансин.

А) $\frac{144\sqrt{3}}{5}$; В) $\frac{128\sqrt{3}}{5}$; С) $\frac{156\sqrt{3}}{5}$; Д) $\frac{108\sqrt{2}}{5}$; Е) $\frac{148\sqrt{3}}{7}$.

32. Тўғри параллелепипеднинг асоси параллелограмм ва унинг ўткир бурчаги 30°. Параллелепипед асосининг юзи 4 дм^2, ён ёқларининг юзлари 6 дм^2 ва 12 дм^2 бўлса, унинг ҳажми ҳисоблансин.

А) 10; В) 15; С) 8; Д) 16; Е) 12 дм^3.

33. Оғма параллелепипеднинг асоси — ромб ва унинг томони a, ўткир бурчаги 60°. Параллелепипеднинг ён қирраси AA_1 ҳам a га тенг ҳамда AB ва AD қирралар билан 45° ли бурчак ташкил қилса, унинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $\frac{1}{8}a^3$; B) $\frac{1}{5}a^3$; C) $\frac{1}{2}a^3$; Д) $\frac{1}{4}a^3$; E) $\frac{1}{3}a^3$.

34. Тўғри бурчакли параллелепипед ён ёқларининг диагоналлари a, b ва c. Параллелепипед тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) $ab+bc+ac$; B) $\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$; C) $a^2+b^2+c^2$;

Д) $\sqrt{a^4-(b^4-c^2)^2}+\sqrt{b^4-(c^2-a^2)^2}+\sqrt{c^4-(a^2-b^2)^2}$;

E) $\sqrt{a^2-(b-c)^2}+\sqrt{b^2-(c-a)^2}+\sqrt{c^2-(a-b)^2}$.

35. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг диагонали l ва ён қирра билан α бурчак ташкил этади. Параллелепипед асосининг периметри p бўлса, унинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $(p^2-4l^2\sin^2\alpha)l\cos\alpha$; B) $\frac{1}{8}(p^2-4l^2\sin^2\alpha)l\cos\alpha$;

C) $\frac{1}{2}(p^2-l^2\sin^2\alpha)l\,\mathrm{tg}\alpha$; Д) $\frac{1}{4}(p^2-8l^2)\,l\cos\alpha$;

E) $(p^2-l^2)\,\mathrm{tg}\alpha$.

36. Тўғри параллелепипеднинг асоси — ромб ва унинг ўткир бурчаги α ва кичик диагонали d. Параллелепипеднинг баландлиги асосининг томонидан икки марта кичик бўлса, параллелепипед тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

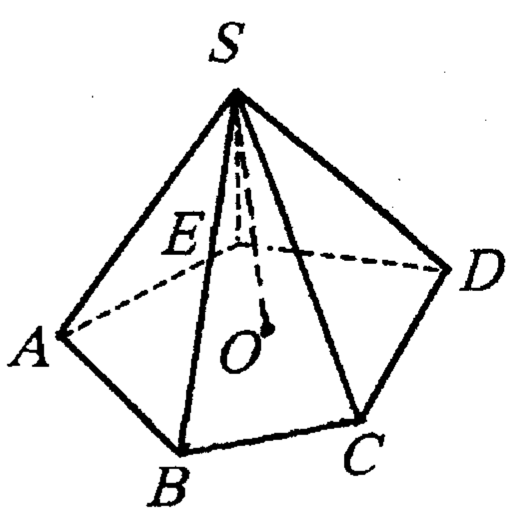
A) $\dfrac{d^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$; B) $d^2\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$; C) $d^2\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{4}$;

Д) $\frac{d^2\sin\alpha}{8}$; E) $\dfrac{d^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

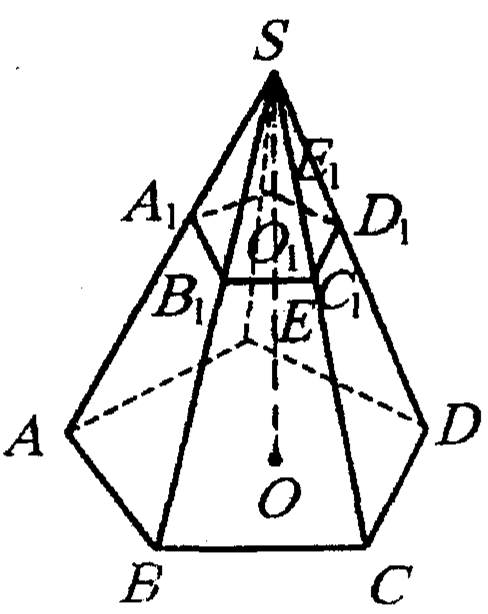
11-§. ПИРАМИДА

11.1. Асосий тушунчалар ва тасдиқлар

Пирамида — берилган нуқтани ясси кўпбурчакнинг нуқталари билан туташтирадиган барча кесмалардан ташкил топган кўпёқдан иборат. Шу берилган нуқта пирамиданинг *учи*, кўпбурчак эса пирамиданинг *асосидир*. Пирамиданинг сирти унинг асоси ва ён ёқларидан иборат, ён ёқлари учбурчаклардир. *Ён қирра* пирамиданинг учини асоси учи билан туташтирадиган ёки икки ён ёғининг кесишишидан ҳосил бўладиган кесмадир. Пирамиданинг *баландлиги* унинг учидан асос текислигига туширилган перпендикулярдир. 11.1-чизмада: S — пирамиданинг учи; $ABCDE$ — пирамиданинг асоси; ΔSAB, ΔSBC, ΔSCD, ΔSDE, ΔSEA — пирамиданинг ён ёқлари; SA, SB, SC, SD, SE — пирамиданинг ён қирралари; SO — пирамиданинг баландлигидир. *Мунтазам пирамида* — асоси мунтазам кўпбурчак бўлиб, баландлиги асоснинг марказидан ўтадиган пирамидадир. Мунтазам пирами-



11.1-чизма.



11.2-чизма.

данинг *ўқи* унинг баландлиги ётган тўғри чизиқдан иборат. *Апофема* — мунтазам пирамида ён ёғининг учидан ўтказилган баландликдир.

Қуйидаги хоссалар ва тасдиқлар ўринли.

1. Пирамиданинг асосига параллел ва уни кесиб ўтадиган текислик ўтказилган бўлса: а) шу пирамидага ўхшаш пирамида ажратади (11.2-чизма); б) пирамиданинг ён қирралари ва баландлиги пропорционал кесмаларга ажралади:

$$\frac{AS}{A_1S} = \frac{BS}{B_1S} = \ldots = \frac{SO}{SO_1};$$

в) кесимдаги кўпбурчак пирамиданинг асосига ўхшаш бўлади:

$$ABCDE \sim A_1B_1C_1D_1E_1;$$

г) пирамиданинг асоси ва кесим юзларининг нисбати пирамида учидан асосларгача бўлган мос масофалар квадратларининг нисбатига тенг:

$$\frac{S_{\text{ас}}}{S_{\text{кес}}} = \frac{H^2}{h^2}.$$

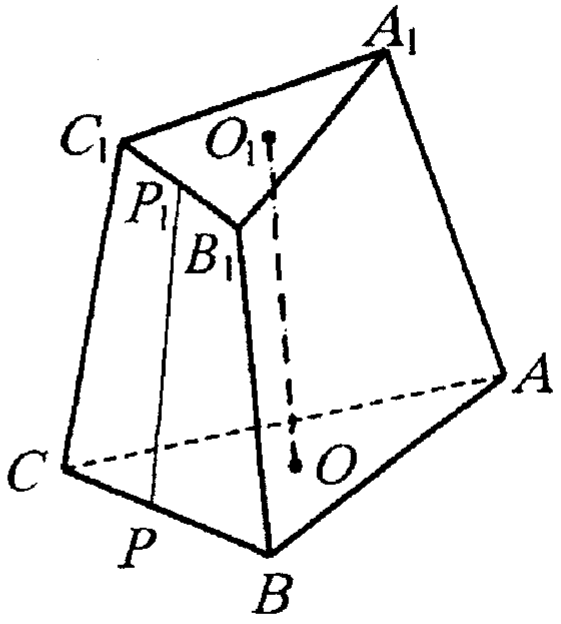
2. Мунтазам пирамиданинг ён сирти асосининг периметри ва апофемаси кўпайтмасининг ярмига тенг:

$S_{\text{ён}} = \frac{1}{2} P_{\text{ас}} \cdot l$ (l — апофема, $P_{\text{ас}}$ — асоснинг периметри).

3. Пирамиданинг ҳажми асосининг юзи билан баландлиги кўпайтмасининг учдан бирига тенг:

$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{ас}} \cdot H$ ($S_{\text{ас}}$ — асоси юзи, H — баландлиги).

Пирамиданинг асоси текислигига параллел ва пирамидан кесиб ўтувчи текислик ва асоси билан чегараланган қисми *кесик пирамидадир.*



11.2-чизма.

4. Мунтазам кесик пирамиданинг ён сирти — унинг асослари периметрлари йиғиндисининг ярми билан апофемасининг кўпайтмасига тенг:

$$S_{ён}=\frac{P_1+P_2}{2}\cdot l,$$

(P_1 — қуйи асос периметри, P_2 — юқори асос периметри, l — апофема).

5. Мунтазам бўлмаган кесик пирамиданинг ён сирти унинг ён ёқлари юзларининг йиғиндисига тенг.

6. Агар кесик пирамида асосларининг юзлари, мос равишда, S_1 ва S_2, баландлиги H бўлса, кесик пирамиданинг ҳажми

$$V=\frac{1}{3}H(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$$

формула орқали ҳисобланади.

11.2. Мавзуга оид масалалар

1. Ён қирраси b, асосининг томони a га кўра:

а) учбурчакли; б) тўртбурчакли ва в) олтибурчакли мунтазам пирамиданинг баландлиги топилсин.

а) А) $\sqrt{8b^2-3a^2}$; В) $\frac{1}{3}\sqrt{9b^2-3a^2}$; С) $\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}$;

Д) $\frac{1}{3}\sqrt{4b^2+a^2}$; Е) $\frac{1}{2}\sqrt{6b^2-2a^2}$;

б) А) $\frac{1}{2}\sqrt{2(2b^2-a^2)}$; В) $2\sqrt{2b^2-a^2}$; С) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$;

Д) $\frac{1}{4}\sqrt{a^2-b^2}$; Е) $\frac{1}{2}\sqrt{2b^2-a^2}$.

в) A) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}$; B) $\sqrt{a^2-b^2}$; C) $\sqrt{b^2-a^2}$;

Д) $\sqrt{a^2-b^2}$; E) $\sqrt{ab}$;

2. Пирамиданинг асоси асоси 12 см, ён томони 10 см бўлган тенг ёнли учбурчак бўлиб, пирамиданинг ён қирралари ўзаро тенг ва ҳар бири 13 см. Пирамиданинг баландлиги топилсин.

A) 1,6; B) $\frac{\sqrt{10}}{2}$; C) $\frac{\sqrt{48}}{5}$; Д) $\frac{\sqrt{51}}{4}$; E) 1,5 см.

3. Пирамиданинг асоси асоси 12 см, ён томони 10 см бўлган тенг ёнли учбурчак, ён ёқлари асос текислиги билан ўзаро тенг ва ҳар бири 45° дан иборат бурчак ҳосил қилади. Пирамиданинг ҳажми ҳисоблансин.

A) 62; B) 49; C) 54; Д) 45; E) 48 см^3.

4. Пирамиданинг баландлиги 16 см, асосининг юзи 512 м^2. Юзи 50 м^2 бўлган параллел кесим асосдан қандай масофада жойлашган?

A) 20; B) 11; C) 12; Д) 16; E) 18 м.

5. Учбурчакли пирамиданинг ён қирралари ўзаро перпендикуляр ва узунликлари, мос равишда, $\sqrt{70}$, $\sqrt{99}$ ва $\sqrt{126}$ га тенг. Пирамиданинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $21\sqrt{55}$; B) $2\sqrt{110}$; C) $4\sqrt{68}$; Д) $16\sqrt{33}$;
E) $29\sqrt{22}$.

6. Пирамиданинг асоси — ўткир бурчаги 45° бўлган ромб. Ромбга ички чизилган айлананинг радиуси 3 см бўлиб, пирамиданинг баландлиги шу айлана марказидан ўтади ва 4 см. Пирамида ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) 60; B) $60\sqrt{3}$; C) $60\sqrt{2}$; Д) 80; E) 108 см^2.

7. Пирамиданинг асоси — юзи 1 $м^2$ бўлган тўғри тўртбурчак, икки ён ёғи асосига перпендикуляр бўлиб, қолган иккитаси эса асоси билан 30° ва 60° ли бурчаклар ташкил этади. Пирамиданинг ҳажми ҳисоблансин.

А) $\frac{2}{3}$; В) $\frac{3}{4}$; С) $\frac{1}{2}$; Д) $\frac{1}{3}$; Е) $\frac{2}{5}$ $м^2$.

8. Учбурчакли мунтазам пирамиданинг ён сирти ва асоси юзларининг нисбати k га тенг. Пирамиданинг ён қирраси ва баландлиги орасидаги бурчак топилсин.

А) 45°; В) $\arcsin\frac{\sqrt{k-1}}{2}$, $k\geq1$; С) $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{k^2-1}}{2}$, $k>1$;

Д) $\arccos\frac{\sqrt{k-1}}{2}$, $k>1$; Е) $\mathrm{arcctg}\frac{\sqrt{k^2-1}}{2}$, $k>1$.

9. Учбурчакли мунтазам кесик пирамида асосларининг томонлари 6 дм ва 12 дм, баландлиги 1 дм. Пирамида ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) 52; В) 54; С) 56; Д) 60; Е) 63 $дм^2$.

10. Тўртбурчакли мунтазам кесик пирамиданинг диагонали 9 см, асосларининг томонлари 7 ва 5 см. Пирамиданинг ҳажми ҳисоблансин.

А) 109; В) 104; С) 96; Д) 98; Е) 105 $см^3$.

11.3. Мавзуга оид масалаларнинг ечимлари

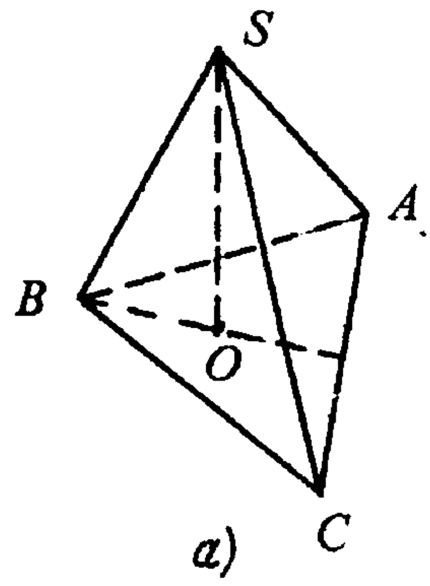
1. а) Берилган. $SABC$ — мунтазам учбурчакли пирамида, $AB=a$, $AS=BS=CS=b$, $SO\perp(ABC)$.

SO топилсин (11.3.1 а)-чизма.).

Ечилиши. Мунтазам пирамиданинг ён қирралари ўзаро тенг ва уларнинг проекциялари ҳам ўзаро тенг: $AO=BO=CO$. У ҳолда O нуқта — пирамида асосига ташқи чизилган айлананинг маркази бўлиб, $AO=R$.

Мунтазам учбурчакнинг ҳар бир бурчаги 60° бўлганлигидан, синуслар теоремасига кўра, $\frac{a}{\sin 60^\circ}=2R$ ва у ҳолда $R=\frac{a}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

$SO\perp(ABC)$ бўлганлигидан, SO — текисликдаги кесишиш нуқтаси O дан ўтувчи ихтиёрий тўғри чизиққа перпендикулярдир. Шу сабабли, $SO\perp OB$ ва ΔSOB — тўғри бурчакли. Пифагор теоремасига асосан, $SB^2=SO^2+BO^2$ ва



11.3.1 а)- чизма.

$$SO^2=SB^2-BO^2;\ SO^2=b^2-\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2=b^2-\frac{3a^2}{9}=\frac{9b^2-3a^2}{9};$$

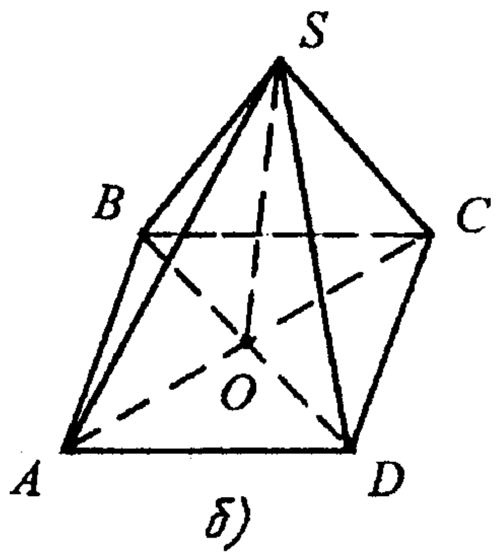
$$SO=\frac{1}{3}\sqrt{9b^2-3a^2}.$$

Жавоби: В).

б) Берилган. $SABCD$ — тўртбурчакли мунтазам пирамида, $ABCD$ — квадрат, $AB=a$, $SA=SB=SC=$ $=SD=b$.

SO топилсин (11.3.1 б)-чизма).

Ечилиши. SO баландлик ва SC ён қирра тўғри бурчакли ΔSOC нинг томонларидир. Агар биз OC томон узунлигини топсак, SO ни ҳисоблашимиз осон бўлади. Иккинчи томондан, OC кесма — $ABCD$ квадрат диагоналининг ярмига тенг: $OC=\frac{1}{2}AC$. AC томонни тўғри бурчакли ΔACD дан топамиз: $AC^2=AD^2+DC^2$,



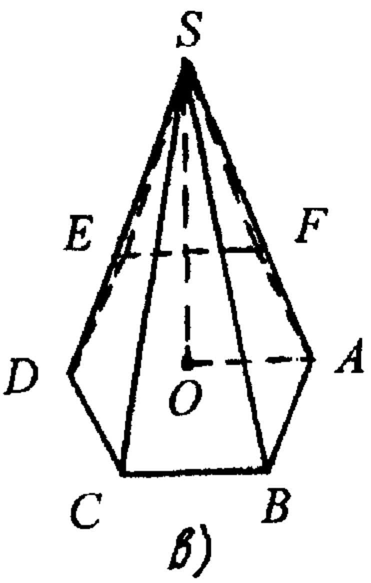
11.3.1 б)- чизма.

$AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=a\sqrt{2}$ ва $OC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Демак, пирамиданинг баландлиги

$$SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=\sqrt{b^2-\frac{2a^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2(2b^2-a^2)}.$$

Жавоби: А).

в) Берилган. $SABCDEF$ — олтибурчакли мунтазам пирамида; $AB=a$, $AC=b$.



11.3.1 в-чизма.

SO топилсин (11.3.1 в-чизма).

Ечилиши. Пирамиданинг асоси мунтазам олтибурчак бўлганлигидан, унга ташқи чизилган айлананинг радиуси ўша олтибурчакнинг томонига тенг: $OA=a$. У ҳолда пирамиданинг баландлигини тўғри бурчакли ΔOSA дан топилади:

$$SO=\sqrt{AS^2-OA^2}=\sqrt{b^2-a^2}.$$

2. Берилган. $SABC$ учбурчакли пирамида, ΔABC — тенг ёнли, $BD\perp AC$, $AC=12$ см, $AB=BC=10$ см, $AS=BS=CS=13$ см.

SO топилсин (11.3.2-чизма).

Ечилиши. Ён қирралари тенг бўлгани учун, уларнинг проекциялари ҳам тенг: $AO=BO=CO$. Демак, O нуқта ΔABC га ташқи чизилган айлананинг маркази ва $AO=R$ ушбу айлананинг радиуси ва уни қуйидаги формула ёрдамида топамиз: $R=\frac{abc}{4S}$.

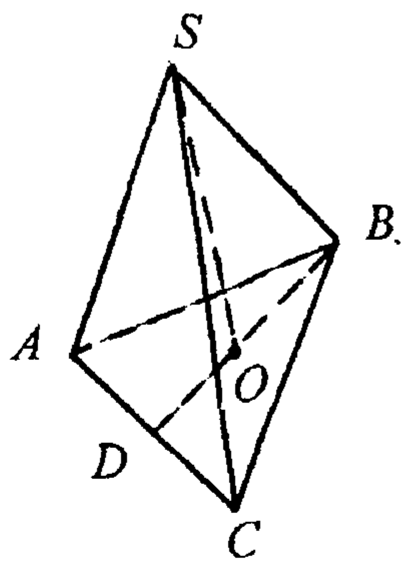
Учбурчакнинг юзини Герон формуласи ёрдамида топамиз:

$$p = \frac{10+10+12}{2} = 16,$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{16(16-10)^2(16-12)} =$$

$$= 4\cdot 6\cdot 2 = 48 \text{ см}^2.$$

У ҳолда $R = \frac{10^2\cdot 12}{4\cdot 48} = \frac{100}{4\cdot 4} = \frac{25}{4}$ см.



11.3.2-чизма.

Тўғри бурчакли ΔAOS дан Пифагор теоремаси ёрдамида топамиз:

$$SO^2 = AS^2 - AO^2 = 13^2 - \left(\frac{25}{4}\right)^2 = \frac{4\cdot 169 - 625}{4^2},$$

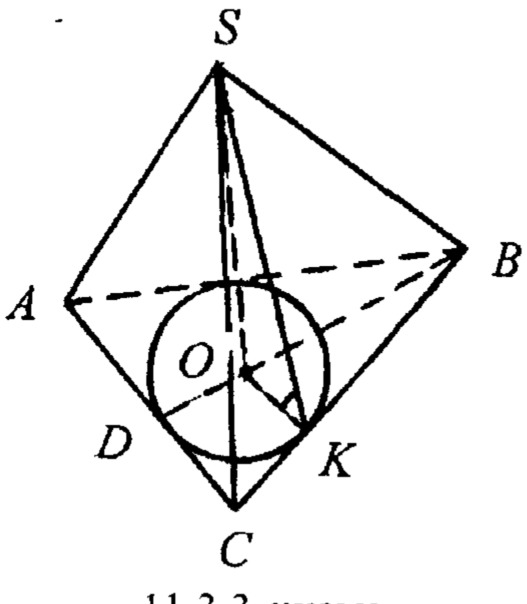
$$SO = \sqrt{\frac{(26-25)(26+25)}{4^2}} = \frac{\sqrt{51}}{4} \text{ см}.$$

Жавоби: Д).

3. Берилган. $SABC$ — учбурчакли пирамида, $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см. $\angle SKO = 45°$.

$V_{\text{пир.}}$ ҳисоблансин (11.3.3-чизма).

Ечилиши. Аввало ясашлар бажарамиз. Ён ёқ ва асос текислиги орасидаги икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчагини ясаш учун S нуқтадан асос текислигига SO ва асоснинг BC томонига SK перпендикулярларни ўтказамиз. Уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага асосан (8-§) $OK \perp BC$ бўлади. Де-



11.3.3-чизма.

мак, чизиқли бурчак $\angle OKS=45°$. Қолган чизиқли бурчакларни ҳам шунга ўхшаш ясаймиз. Ҳосил қилинган тўғри бурчакли учбурчаклар ўзаро тенг бўлганлигидан, $OK=OD=OF$. Иккинчи томондан, O нуқта учбурчакнинг томонларидан бир хил узоқликда ётганлигидан, у учбурчакка ички чизилган айлананинг маркази бўлади, $OK=r$ — ички чизилган айлананинг радиусидир.

Энди Герон формуласи ёрдамида ΔABC нинг юзини ҳисоблаймиз:

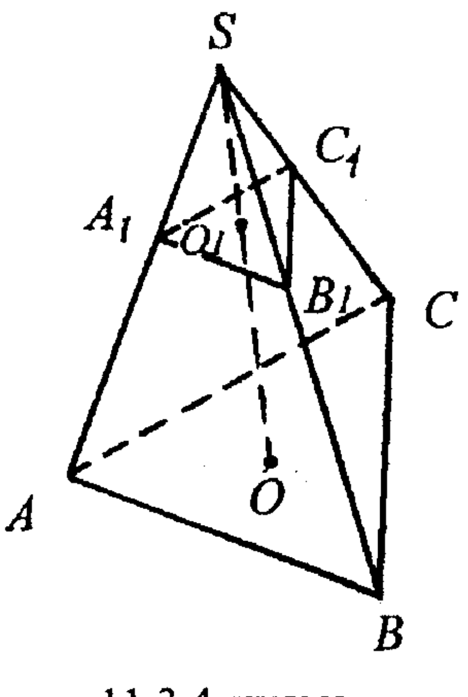
$$p=\frac{1}{2}(12+10+10)=16,\ S_{ac}=\sqrt{16(16-12)(16-10)^2}=$$

$= 4\cdot2\cdot6=48$ см^2.

Ички чизилган айлананинг радиуси $r=\frac{S_{ac}}{p}=\frac{48}{16}=$ $=3$ см.

Тўғри бурчакли ΔSOK нинг битта ўткир бурчаги $45°$, демак, иккинчи ўткир бурчаги ҳам $45°$ ва ΔSOK — тенг ёнли, яъни $OS=OK=3$ см. Пирамиданинг ҳажмини ҳисоблаймиз: $V=\frac{1}{3}S_{ac}\cdot H=\frac{1}{3}\cdot48\cdot3=48$см^3.

Жавоби: Е).



11.3.4-чизма.

4. Берилган. $SABC$ — пирамида, $S_{ac}=512$ м^2; $OS=H=16$ м, $(A_1B_1C_1)\|(ABC)$, $S_{кес.}=50$ м^2.

OO_1 топилсин (11.3.4-чизма).

Ечилиши. Агар пирамида асосига параллел кесим ўтказилса, $\frac{S_{ac}}{S_{кес.}}=\frac{H^2}{h^2}$ муносабат бажарилади, бу ерда $H=SO$, $h=SO_1$. Демак, $\frac{512}{50}=\frac{16^2}{h^2}$,

$h^2=\frac{256\cdot 50}{512}=25$; $h=5$ м. Натижада текисликлар орасидаги масофа $OO_1=16-5=11$ м бўлади.

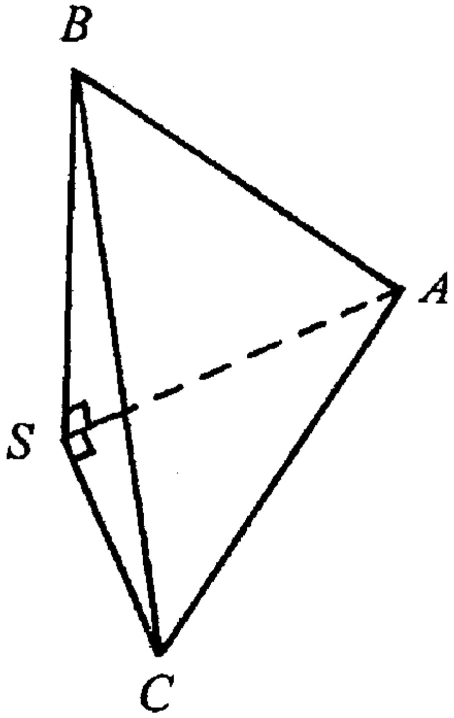
Жавоби: В).

5. Берилган. $SABC$ — учбурчакли пирамида, $SA\perp SB$, $SB\perp SC$, $SA\perp SC$, $SA=\sqrt{70}$, $SB=\sqrt{99}$, $SC=\sqrt{126}$.

$V_{\text{пир.}}$ ҳисоблансин (11.3.5-чизма).

Ечилиши. Агар пирамиданинг асоси сифатида унинг ён ёқларидан бирини қабул қилсак, масала жуда осон ечилади. Пирамиданинг ён қирралари ўзаро перпендикуляр бўлганлигидан, асос сифатида танлаб олинган учбурчак — тўғри бурчакли учбурчак бўлади, пирамиданинг баландлиги эса SB қиррага тенгдир. У ҳолда,

$$S_{\Delta ASC}=\frac{1}{2}AS\cdot CS=\frac{1}{2}\sqrt{70}\cdot\sqrt{126}.$$



11.3.5-чизма.

Пирамиданинг ҳажмини ҳисоблаймиз:

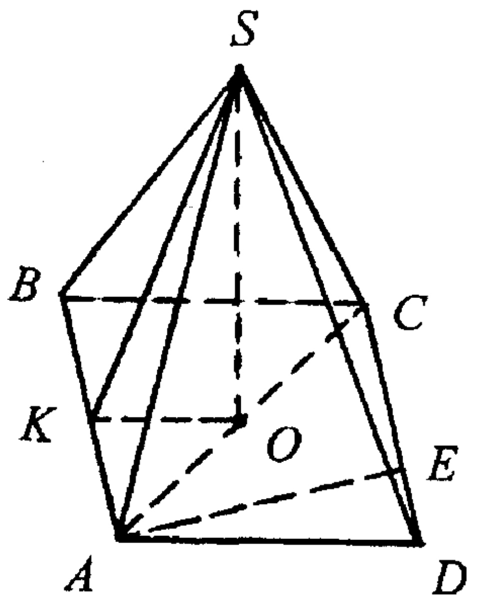
$$V=\frac{1}{3}S_{\Delta ASC}\cdot SB=\frac{1}{6}\sqrt{70}\cdot\sqrt{99}\cdot\sqrt{126}=\frac{1}{6}\sqrt{7\cdot 2\cdot 5\cdot 2\cdot 9\cdot 7\cdot 9\cdot 11}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 7\cdot 2\cdot 9\sqrt{55}=21\sqrt{55}.$$

Жавоби: А).

6. Берилган. $SABCD$ — пирамида, $ABCD$ — ромб, $\angle ADC=45°$, $OK=r=3$ см, $SO\perp(ABCD)$, $SO=4$ см.

$S_{\text{ён.}}$ ҳисоблансин (11.3.6-чизма).



11.3.6-чизма.

Е ч и л и ш и. Айлана билан ромб томонининг уриниш нуқтасини K деб белгилаймиз. Уриниш нуқтасига ўтказилган $OK=r$ радиус AB уринмага перпендикуляр бўлади, $OK\perp AB$. У ҳолда уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага асосан (8-§), $SK\perp AB$ бўлади. Демак, SK кесма ΔABS нинг баландлигидир. ΔKSO дан $SK=\sqrt{SO^2+OK^2}=\sqrt{4^2+3^2}=$ $=\sqrt{25}=5$ см. Иккинчи томондан, $S_{\Delta ASB}=\frac{1}{2}AB\cdot SK$. $ABCD$ ромбнинг A учидан $AE\perp CD$ баландлик ўтказамиз. $AE\perp AB$, $OK\perp AB$ бўлганлигидан, улар ўзаро параллел ва $AE=2\cdot OK=$ $=2\cdot 3=6$ см. Энди ромбнинг томони узунлигини тўғри бурчакли ΔAED дан топамиз. $AD=\frac{AE}{\sin 45^\circ}=6\sqrt{2}$ см. Демак, $S_{\Delta ASB}=\frac{1}{2}6\sqrt{2}\cdot 5=15\sqrt{2}$ см^2 ва пирамиданинг ён сирти:

$$S_{\text{ён.}}=4\cdot S_{\Delta ASB}=4\cdot 15\sqrt{2}=60\sqrt{2}\ \text{см}^2.$$

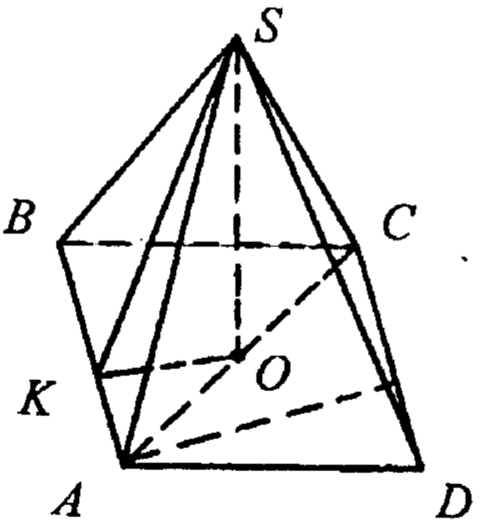
Жавоби: С).

7. Б е р и л г а н. $SABCD$ — пирамида, $ABCD$ — тўғри тўртбурчак, $S_{\text{ac}}=1$ м^2, $\angle SCB=30^\circ$; $\angle SAB=60^\circ$, $(SAB)\perp(ABCD)$; $(SBC)\perp(ABCD)$

$V_{\text{пир.}}$ ҳ и с о б л а н с и н (11.3.7-чизма).

Е ч и л и ш и. (SAB) ва (SBC) текисликлар пирамиданинг асосига перпендикуляр бўлганлигидан, уларнинг кесишиш чизиғи SB асосга перпендикуляр бўлади, демак, у пирамиданинг баландлигидир.

Пирамиданинг асоси тўғри тўртбурчак бўлганлигидан, $BC \perp CD$, $AB \perp AD$. Уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага мувофиқ (8-§), $SA \perp AD$, $SC \perp CD$ ва чизиқли бурчаклар мос равишда, $\angle SCB = 30°$, $\angle SAB = 60°$ бўлади.



11.3.7-чизма.

$SB = H$ бўлсин. ΔSBC дан: $BC = H \cdot \text{ctg}30° = H\sqrt{3}$, ΔASB дан $AB = H \cdot \text{ctg}60° = H \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$. У ҳолда асос — $ABCD$ тўғри тўртбурчакнинг юзи $S = AB \cdot BC$ бўлади ёки $H\sqrt{3} \cdot H\frac{1}{\sqrt{3}} = 1$ м^2; $H^2 = 1$; $H = 1$ м.

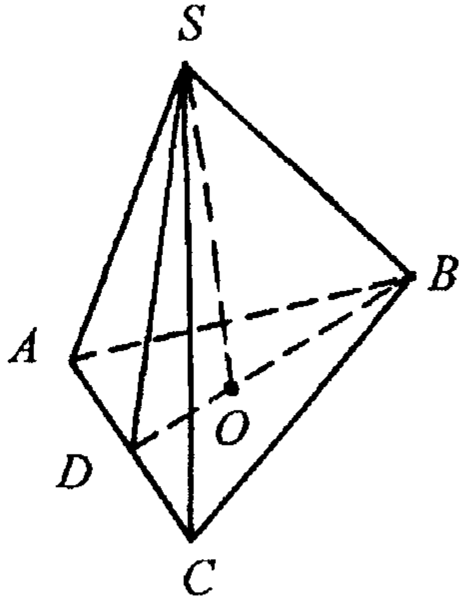
Демак, пирамиданинг ҳажми $V = \frac{1}{3} S_{\text{ас}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 =$

$= \frac{1}{3}$ м^3. Жавоби: Д).

8. Берилган. $SABC$ — мунтазам пирамида, $\frac{S_{\text{ён}}}{S_{\text{ас}}} = k$.

$\angle BSO$ топилсин (11.3.8-чизма).

Ечилиши. Учбурчакли мунтазам пирамиданинг SO баландлиги ΔABC медианаларининг кесишиш нуқтасидан ўтади ва $OB = R$ — ташқи чизилган айлананинг радиуси, $OD = r$ — ички чизилган айлананинг радиуси. $AB = BC = AC = a$ бўлсин, у ҳолда



11.3.8-чизма.

$$R=\frac{a}{2\sin 60^\circ}=\frac{a}{\sqrt{3}};\ r=\frac{R}{2}=\frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

$\angle BSO=\alpha$ деб оламиз, у вақтда тўғри бурчакли ΔSOB дан:

$SO=OB\cdot \mathrm{ctg}\alpha=\frac{a\mathrm{ctg}\alpha}{\sqrt{3}}$. ΔSOD дан SD апофемани топамиз:

$$SD^2=SO^2+OS^2=\frac{a^2}{12}+\frac{a^2\mathrm{ctg}^2\alpha}{3}=\frac{a^2}{12}(1+4\ \mathrm{ctg}^2\alpha),$$

$$CD=\frac{a}{6}\sqrt{3(1+4\mathrm{ctg}^2\alpha)}.$$

У ҳолда пирамиданинг ён сирти $S_{\text{ён.}}=$ $=\frac{1}{2}\cdot 3a\cdot\frac{a}{6}\sqrt{3(1+4\mathrm{ctg}^2\alpha)}$

Асоснинг юзи $S_{\text{ас}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Берилганлардан фойдалансак, α га нисбатан

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\sqrt{3(1+4\mathrm{ctg}^2\alpha)}=k\frac{a^2\sqrt{3}}{4},\ 1+4\mathrm{ctg}^2\alpha=k^2,$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу ердан, $\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{k^2-1}{4}$; $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{k^2-1}}{2}$; $k>1$. Натижада $a=\mathrm{arcctg}\frac{\sqrt{k^2-1}}{2}$; $k>1$ бўлади.

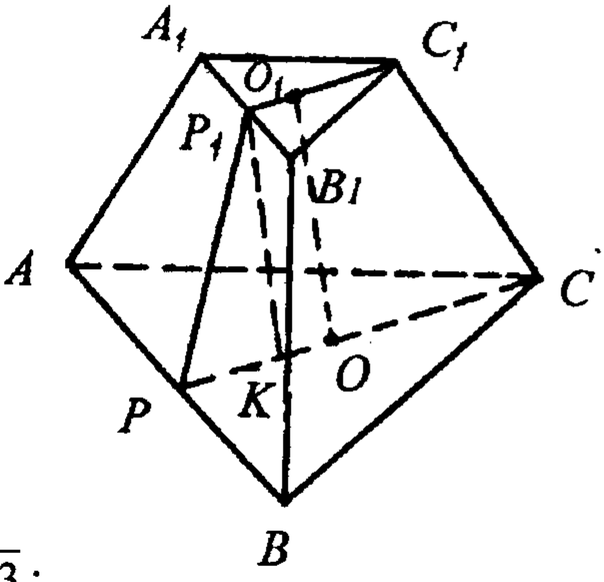
Жавоби: Е).

9. Берилган. $ABCA_1B_1C_1$ — мунтазам кесик пирамида, $AB=12$ дм, $A_1B_1=6$ дм, $H=1$ дм.

$S_{\text{ён}}$ ҳисоблансин (11.3.9-чизма).

Ечилиши. Пирамида мунтазам бўлганлигидан, (11.3.9-чизма) ΔABC ва $\Delta A_1B_1C_1$ тенг томонли учбурчаклардир. O ва O_1 лар бу учбурчаклар медианаларининг кесишиш нуқталари бўлиб, медианаларнинг хоссасига асосан, $OP=\frac{1}{3}CP$, $O_1P_1=\frac{1}{3}C_1P_1$, бу ерда

CP ва C_1P_1 — асосларнинг медианалари. P_1 нуқтадан қуйи асосга P_1K перпендикуляр ўтказамиз, $P_1K = OO_1 = 1$ дм.



11.3.9-чизма.

$CP \perp AB$, $\angle ABC = 60°$ бўлганлигидан, тўғри бурчакли ΔCBP да:

$CP = CB \cdot \sin 60° = 12\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$;

тўғри бурчакли $\Delta C_1B_1P_1$ да:

$C_1P_1 = C_1B_1 \sin 60° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

У ҳолда, $OP = \frac{1}{3}CP = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$; $O_1P_1 = \frac{1}{3}C_1P_1 = \sqrt{3}$ дм.

$$PK = OP - O_1P_1 = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ дм}.$$

Тўғри бурчакли ΔPP_1K дан PP_1 апофемани топамиз:

$$PP_1 = \sqrt{P_1K^2 + PK^2} = \sqrt{1+3} = 2 \text{ дм}.$$

Асосларнинг периметрлари 36, 18 дм лиги равшан.

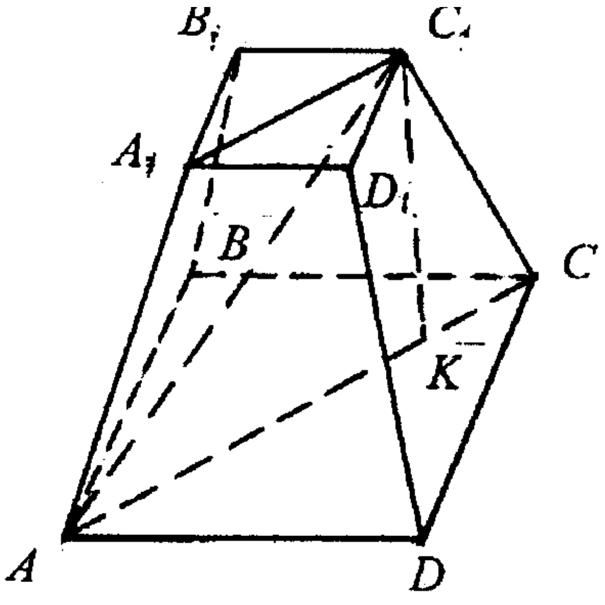
Натижада кесик пираминнинг ён сирти $S_{ён} = \frac{36+18}{2} \cdot$ $\cdot 2 = 54$ дм^2.

Жавоби: В).

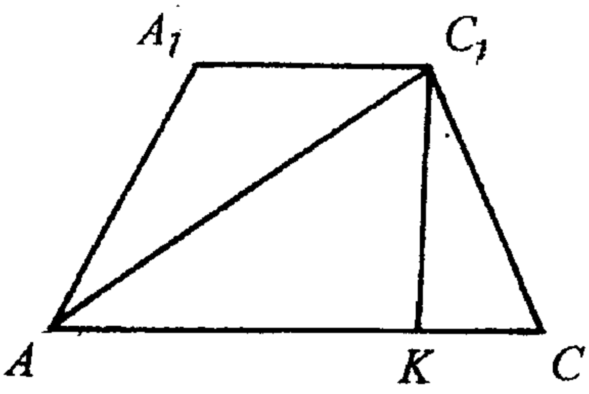
10. Б е р и л г а н. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — мунтазам кесик пирамида, $ABCD$ — квадрат, $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат, $AB=7$ см; $A_1B_1=5$ см, $AC_1=9$ см.

$V_{к.п.}$ ҳ и с о б л а н с и н (11.3.10-чизма).

Е ч и л и ш и. Маълумки, кесик пирамиданинг ҳажми $V_{к.п.} = \frac{1}{3}H(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2})$ формуладан топилади.



11.3.10-чизма.



11.3.11-чизма.

Кесик пирамиданинг асослари квадратлардан иборат бўлганлигидан, асосларнинг юзларини S, S_2 деб белгиласак, $S_1=7^2=49$ см^2; $S_2=5^2=25$ см^2 бўлади. Кесик пирамиданинг диагонал кесими AA_1C_1C тенг ёнли трапециядан иборат (13.3.11-чизма).

ΔACD дан: $AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=7\sqrt{2}$ см,

$\Delta A_1C_1D_1$ дан: $A_1C_1=\sqrt{A_1D_1^2+D_1C_1^2}=5\sqrt{2}$ см.

$KC=\frac{1}{2}(7\sqrt{2}-5\sqrt{2})=\sqrt{2}$ см.

ΔAC_1K ни қараймиз: унда $\angle AKC=90°$

ва $C_1K^2=AC_1^2-AK^2=9^2-(7\sqrt{2}-\sqrt{2})^2=81-72=$ $=9$ см^2; $C_1K=H=3$ см.

Демак, $V=\frac{1}{3}\cdot 3(49+25+7\cdot 5)=109$ см^3.

Жавоби: А).

11.4. Мустақил ечиш учун масалалар

1. Тўртбурчакли мунтазам пирамида ён қиррасининг узунлиги b ва асос текислиги билан α бурчак ташкил қилса, пирамида диагонал кесимининг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{1}{2}b^2\cos2\alpha$; В) $\frac{1}{2}b^2\sin2\alpha$; С) $b^2\sin2\alpha$; Д) $\frac{1}{4}b^2\sin2\alpha$;

Е) $\frac{1}{8}b^2\sin2\alpha$.

2. Учбурчакли мунтазам пирамида ён қиррасининг узунлиги l ва асос текислиги билан α бурчак ташкил қилади. Пирамиданинг ҳажми ҳисоблансин.

А) $l^3\sin2\alpha$; В) $\frac{\sqrt{2}}{4}l^3\sin\alpha\cos2\alpha$; С) $\frac{\sqrt{2}}{9}l^3\sin2\alpha\cos\alpha$;

Д) $\frac{\sqrt{3}}{8}l^3\sin2\alpha\cos\alpha$; Е) $l^3\sin2\alpha$.

3. Учбурчакли мунтазам пирамиданинг ён қирраси b га тенг ва асос текислиги билан $60°$ ли бурчак ташкил этади. Пирамида асосининг бир томонидан қарама-қарши ён қиррага перпендикуляр текислик ўтказилган. Ҳосил қилинган кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{9b^2}{32}$; В) $\frac{9b^2}{8}$; С) $\frac{3b^2}{4}$; Д) $\frac{5b^2}{9}$; Е) $\frac{7b^2}{16}$.

4. Тўртбурчакли мунтазам пирамиданинг баландлиги h, асосидаги икки ёқли бурчаги $60°$ га тенг бўлса, пирамиданинг ён сирти ҳисоблансин.

А) $2h^2$; В) $\frac{4}{3}h^2$; С) $\frac{8h^2}{3}$; Д) $3h^2$; Е) $\frac{5}{6}h^2$.

5. Пирамиданинг асоси тенг ёнли учбурчакдан иборат бўлиб, унинг тенг томонлари 6 см дан, учинчи томони эса 8 см. Пирамиданинг ён қирралари

ўзаро тенг ва ҳар бири 9 см бўлса, пирамиданинг ҳажми ҳисоблансин.

А) 42; В) 32; С) 56; Д) 64; Е) 48 $см^3$.

6. Мунтазам тетраэдрнинг баландлиги h бўлса, унинг тўла сирти ҳисоблансин.

А) $\frac{2}{5}h^2$; В) $2h^2\sqrt{3}$; С) $\frac{4\sqrt{2}h^2}{3}$; Д) $\frac{3\sqrt{3}h^2}{2}$; Е) $\frac{3\sqrt{2}h^2}{2}$.

7. Пирамиданинг асоси тенг ёнли учбурчакдан иборат. Учбурчакнинг ён томони a, учидаги бурчаги α. Пирамиданинг барча ён қирралари асос текислиги билан ўзаро тенг β бурчак ташкил этиши маълум бўлса, унинг ҳажми ҳисоблансин.

А) $\frac{2}{3}a^3\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$; В) $\frac{1}{6}a^3\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{tg}\beta$; С) $\frac{1}{2}a^3\sin\alpha\cdot\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$;

Д) $\frac{1}{12}a^3\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$; Е) $\frac{1}{6}a^3\sin\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta$.

8. Тўртбурчакли мунтазам пирамида асосининг томони a, асосидаги икки ёқли бурчаги α бўлса, унинг ҳажми ҳисоблансин.

А) $\frac{1}{6}a^3\mathrm{tg}\alpha$; В) $\frac{1}{2}a^3\cos\alpha$; С) $\frac{1}{6}a^3\sin\alpha$; Д) $\frac{1}{12}a^3\mathrm{ctg}\alpha$;

Е) $\frac{1}{4}a^3\mathrm{tg}\alpha$.

9. Олтибурчакли мунтазам пирамиданинг апофемаси m, асосидаги икки ёқли бурчаги α га тенг бўлса, пирамиданинг тўла сиртини ҳисобланг.

А) $4m^2\cos\alpha\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$; В) $\sqrt{3}\,m^2\sin\alpha\cdot\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$;

С) $2\sqrt{3}\,m^2\sin\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$; Д) $3m^2\cos\alpha\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$;

Е) $4\sqrt{3}\,m^2\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

10. Пирамиданинг асоси — ён томони a, ўткир бурчаги α бўлган тенг ёнли трапециядан иборат. Пи-

рамиданинг ён ёқлари асос текислиги билан бир хил β бурчак ташкил қилса, пирамиданинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $\frac{1}{2}a^3\cos2\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta$; B) $\frac{1}{3}a^3\sin2\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta$; C) $\frac{1}{6}a^3\sin2\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta$;

Д) $\frac{2}{3}a^3\sin2\alpha\cdot\mathrm{tg}2\beta$; E) $\frac{1}{6}a^3\sin2\alpha\cdot\cos2\beta$.

11. Учбурчакли мунтазам кесик пирамида асосларининг томонлари a ва $b(a>b)$ бўлиб, ён қирраси асос текислиги билан 60° ли бурчак ташкил этади. Кесик пирамиданинг баландлиги топилсин.

A) $a-b$; B) $\sqrt{ab}$; C) $a+b$; Д) $\sqrt{a^2+b^2}$; E) $\sqrt{a^2-b^2}$.

12. Тўртбурчакли мунтазам кесик пирамида асосларининг томонлари 10 ва 2 м, пирамиданинг баландлиги 4 м. Кесик пирамида тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) 216; B) 256; C) 248; Д) 242; E) 238 м^2.

13. Тўртбурчакли кесик пирамида асосларининг томонлари a ва b $(a>b)$, катта асосидаги икки ёқли бурчаги α тенг бўлса, кесик пирамиданинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $\frac{1}{12}(a^3-b^3)\mathrm{tg}\alpha$; B) $\frac{1}{6}(a^3-b^3)\mathrm{tg}\alpha$; C) $\frac{1}{2}(a^3+b^3)\mathrm{ctg}\alpha$;

Д) $\frac{\alpha}{3}(a^3-b^3)\mathrm{tg}\alpha$; E) $\frac{2}{3}(a^3-b^3)\mathrm{ctg}\alpha$.

14. Олтибурчакли мунтазам пирамиданинг ён қирраси b ва асос текислиги билан α бурчак ташкил қилади. Пирамида энг катта диагонал кесимининг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{1}{2}b^2\cos2\alpha$; B) $2b^2\cos2\alpha$; C) $\frac{1}{3}b^2\cos\alpha$; Д) $\frac{1}{2}b^2\sin2\alpha$;

E) $b^2\sin\alpha$.

15. Учбурчакли мунтазам пирамиданинг апофемаси m ва асос текислиги билан α бурчак ташкил қилади. Пирамида ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{1}{6}m^2\cos\alpha$; В) $m^2\sin2\alpha$; С) $3\sqrt{3}m^2\cos\alpha$;

Д) $\sqrt{3}m^2\cos\alpha$; Е) $3m^2\cos\alpha$.

16. Тўртбурчакли мунтазам пирамида асосининг томони 10 м, баландлиги 12 м бўлса, пирамида тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) 360; В) 480; С) 345; Д) 540; Е) 420 м^2.

17. Пирамиданинг асоси квадратдан иборат бўлиб, баландлиги h ва асосининг учидан ўтади. Квадратнинг томони a бўлса, пирамида ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $4a(h+\sqrt{a^2+h^2})$; В) $2h(h+\sqrt{ah})$;
С) $h(a+\sqrt{a^2+h^2})$; Д) $2a(h+\sqrt{ah})$; Е) $a(h+\sqrt{h^2a^2})$.

18. Пирамиданинг асоси мунтазам учбурчакдан иборат бўлиб, ён ёқларидан бири асосга перпендикуляр, бошқа иккитаси асос текислиги билан 60° ли бурчаклар ташкил қилса, пирамиданинг катта ён қирраси асос текислигига қандай бурчак остида оғма бўлади?

А) $\arcsin\frac{3}{5}$; В) $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$; С) $\arcsin\frac{2}{3}$; Д) arctg2;

Е) $\arccos\frac{1}{4}$.

19. Пирамиданинг асоси — ўткир бурчаги 45° бўлган ромбдан иборат ва ромбга ички чизилган айлананинг радиуси 3 см. Пирамиданинг баландлиги 4 см ва ромбга ички чизилган айлананинг марказидан ўтади. Пирамида ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $64\sqrt{3}$; В) $62\sqrt{2}$; С) 60; Д) $60\sqrt{2}$; Е) $60\sqrt{3}$ см^2.

20. Олтибурчакли мунтазам пирамида асосининг томони ва пирамиданинг баландлиги 8 дм бўлса, кичик диагонал кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) $16\sqrt{15}$; В) $16\sqrt{3}$; С) $16\sqrt{2}$; Д) $16\sqrt{11}$; Е) $8\sqrt{19}$ дм.

21. Тўртбурчакли мунтазам пирамиданинг баландлиги h, асосининг диагонали d бўлса, унинг ҳажми ҳисоблансин.

А) $\frac{d^2h}{12}$; В) $\frac{dh^2}{4}$; С) $\frac{d^2h}{6}$; Д) $\frac{dh^2}{6}$; Е) $\frac{d^2+h^2}{3}$.

22. Учбурчакли мунтазам пирамида асосининг томони a, баландлиги h. Асосининг бир томонидан қарама-қарши қиррага перпендикуляр текислик ўтказилган. Ҳосил қилинган кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{1}{2}(a^2+h^2)$; В) $\frac{4}{5}ah\sqrt{2}$; С) $\frac{2}{5}ah\sqrt{3}$; Д) $\frac{4}{5}ah\sqrt{2}$;
Е) $\frac{a^2h}{2\sqrt{3h^2+a^2}}$.

23. Пирамиданинг асоси тенг ёнли учбурчак ва унинг томонлари 10, 10 ва 12 см. Пирамиданинг ён ёқлари асос текислиги билан 45° ли бурчак ташкил қилса, унинг баландлиги топилсин.

А) 7; В) 3; С) 4; Д) 5; Е) 2 см.

24. Пирамиданинг асоси — асоси 6 см, баландлиги 9 см бўлган тенг ёнли учбурчакдан иборат. Пирамиданинг ён қирралари ўзаро тенг ва 13 см бўлса, пирамиданинг баландлиги топилсин.

А) 16; В) 8; С) 14; Д) 12; Е) 10 см.

25. Пирамиданинг баландлиги H га тенг. Унинг асосига параллел текислик ўтказилган. Агар кесимнинг юзи асос юзининг $\frac{1}{5}$ қисмини ташкил қилса, пирамида учидан кесимгача бўлган масофа топилсин.

А) $\frac{H}{\sqrt{5}}$; В) $\frac{H}{\sqrt{3}}$; С) $\frac{H}{\sqrt{2}}$; Д) $H\sqrt{3}$; Е) $H\sqrt{5}$.

26. Мунтазам тўртбурчакли пирамиданинг ён ёқлари асос текислиги билан бир хил бурчак ташкил қилади. Агар пирамида тўла сирти юзининг асоси юзига нисбати k бўлса, ён ёқларининг асос текислиги билан ташкил қилган бурчагини топинг. Масала k нинг қандай қийматларида маънога эга?

A) $\operatorname{arctg}\frac{k+1}{2}$, $k>1$; B) $\arccos\frac{k}{k-1}$, $k>2$;

C) $\arccos\frac{1}{k-1}$, $k>2$; Д) $\operatorname{arctg}\frac{2-k}{k+1}$, $k>1$;

E) $\arcsin\frac{k-1}{2}$, $k>2$.

27. Пирамида асосидаги ромбнинг кичик диагонали d, ўткир бурчаги α. Пирамида асосидаги ҳамма икки ёқли бурчаклар β бўлса, унинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $\frac{1}{2}d^3\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin 2\beta$; B) $\frac{1}{3}d^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}$; C) $\frac{1}{6}d^3\sin 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$;

Д) $\frac{1}{12}d^3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$; E) $d^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$.

28. Учбурчакли мунтазам пирамида учидаги ясси бурчаги 90°. Пирамида ён сиртининг юзи ва асоси юзининг нисбати топилсин.

A) 2:3; B) $\sqrt{3}$; C) $\sqrt{2}:\sqrt{3}$; Д) $\sqrt{2}$; E) 5:7.

29. Мунтазам пирамида асосидаги кўпбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 720°. Агар пирамиданинг ён қирраси l бўлиб, унинг баландлиги билан 30° ли бурчак ташкил қилса, пирамиданинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $2l^3$; B) $\frac{2l^3}{15}$; C) $\frac{3l^3}{19}$; Д) $\frac{3l^3}{8}$; E) $\frac{3l^3}{16}$.

30. Тўртбурчакли мунтазам пирамида асосининг томони унинг ён қиррасига тенг бўлиб, a га тенг. Пирамида тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{a^2(1+\sqrt{7})}{2}$; В) $\frac{a^2(1+\sqrt{3})}{2}$; С) $\frac{a^2(\sqrt{2}+1)}{4}$;

Д) $\frac{a^2(\sqrt{5}+3)}{2}$; Е) $\frac{a^2(1+\sqrt{3})}{4}$.

31. Учбурчакли мунтазам пирамида асосининг томони a, асосидаги икки ёқли бурчаги 60° бўлса, пирамида тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$; В) $\frac{3a^2}{4}$; С) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$; Д) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; Е) $\frac{2a^2\sqrt{5}}{4}$.

32. Олтибурчакли мунтазам пирамиданинг апофемаси l, асосидаги икки ёқли бурчаги 60° бўлса, пирамида тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{3}{5}l^2\sqrt{5}$; В) $\frac{4}{5}l^2\sqrt{2}$; С) $\frac{l^2\sqrt{3}}{2}$; Д) $\frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$; Е) $\frac{l^2\sqrt{5}}{2}$.

33. Пирамида асосидаги учбурчакнинг томонлари a, a ва b бўлиб, пирамида ён қирраларининг ҳар бири асос текислиги билан 60° ли бурчак ташкил қилади. Пирамиданинг ҳажми ҳисоблансин.

А) $\frac{(a^2+b^2)\sqrt{2}}{4}$; В) $\frac{a^2b\sqrt{3}}{12}$; С) $\frac{ab^2\sqrt{3}}{12}$; Д) $\frac{ab^2\sqrt{3}}{12}$;

Е) $\frac{ab^2\sqrt{2}}{6}$.

34. Учбурчакли мунтазам пирамида асосининг томони 1 см, ён сиртининг юзи 3 см^2 бўлса, пирамиданинг ҳажми ҳисоблансин.

А) $\frac{\sqrt{29}}{2}$; В) $\frac{\sqrt{61}}{7}$; С) $\frac{\sqrt{45}}{14}$; Д) $\frac{\sqrt{35}}{12}$; Е) $\frac{\sqrt{47}}{24}$ см^3.

35. Пирамиданинг асоси — диагонали c га тенг ва диагоналлари орасидаги бурчак 60° бўлган тўғри тўртбурчакдан иборат. Пирамиданинг ён қирраларидан ҳар бири асос текислиги билан 45° ли бурчак ташкил қилади. Пирамиданинг ҳажми ҳисоблансин.

А) $\frac{c^3\sqrt{3}}{24}$; В) $\frac{c^3\sqrt{2}}{12}$; С) $\frac{c^3}{6}$; Д) $\frac{c^3\sqrt{3}}{14}$; Е) $\frac{c^3\sqrt{2}}{6}$.

36. Учбурчакли пирамиданинг ён қирралари жуфт-жуфт перпендикуляр ва мос равишда, $\sqrt{70}$, $\sqrt{99}$ ва $\sqrt{126}$ см га тенг. Пирамиданинг ҳажми ҳисоблансин.

А) $42\sqrt{3}$; В) $35\sqrt{7}$; С) $21\sqrt{55}$; Д) $21\sqrt{33}$;
Е) $42\sqrt{11}$ см^3.

37. Учбурчакли мунтазам пирамида асосининг томони a ва ён ёқлари асосига 45° ли бурчак остида оғма бўлса, пирамида тўла сиртининг юзи топилсин.

А) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; В) $\frac{a^2\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}{2}$; С) $\frac{a^2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{8}$;
Д) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}+1)$; Е) $\frac{a^2(\sqrt{2}+1)}{4}$.

38. Тўртбурчакли пирамиданинг асоси — ўткир бурчаги 30° бўлган ромбдан иборат. Пирамида ён ёқларининг ҳар бири асос текислиги билан 60° ли бурчак ташкил этади. Агар ромбга ички чизилган айлананинг радиуси r бўлса, пирамида тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $16r^2$; В) $24r^2$; С) $18\ r^2$; Д) $22r^2$; Е) $32r^2$.

39. Учбурчакли мунтазам пирамиданинг ён қирраси l, баландлиги h. Унинг асосидаги икки ёқли бурчак топилсин.

А) $\arccos\frac{2h}{h+1}$; В) $\arcsin\frac{h+l}{l}$; С) $2\mathrm{arctg}\frac{h}{l}$;
Д) $\arcsin\frac{2h^2}{h^2+l^2}$; Е) $\mathrm{arctg}\frac{2h}{\sqrt{l^2-h^2}}$.

40. n бурчакли мунтазам пирамида асосининг юзи Q бўлиб, пирамиданинг ҳар бир ён ёғи баландлик билан φ бурчак ташкил қилади. Пирамида тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{Q(1+tg\varphi)}{\sin\varphi}$; В) $\frac{Q(1-tg\varphi)}{\cos\varphi}$; С) $\frac{Q\sin\varphi}{\sqrt{3}}$; Д) $\frac{Q(1+\sin\varphi)}{\sin\varphi}$;
Е) $\frac{Q(1+\cos\varphi)}{\sin\varphi}$.

41. Учбурчакли мунтазам кесик пирамида асосларининг томонлари a ва $b(a>b)$, ён қирралари асос текислиги билан α бурчак ташкил қилади. Пирамиданинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $\frac{3}{5}b^3\sin2\alpha$; B) $\frac{4}{5}a^3\cos2\alpha$; C) $\frac{1}{12}(a^3-b^3)\mathrm{tg}\alpha$;

Д) $\frac{2}{3}(a^3-b^3)\cos\alpha$; E) $\frac{1}{6}(a^3-b^3)\mathrm{ctg}\alpha$.

42. Пирамиданинг асоси гипотенузаси c, ўткир бурчаги α бўлган тўғри бурчакли учбурчакдир. Пирамиданинг барча ён қирралари асос текислигига бир хил β бурчак остида оғма бўлса, пирамиданинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $\frac{c^3}{8}\cos2\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta$; B) $\frac{c^3}{24}\sin2\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta$; C) $\frac{c^3}{16}\sin2\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta$;

Д) $\frac{c^3}{6}\sin^2\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta$; E) $\frac{c^3}{3}\cos^2\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta$.

43. Пирамиданинг асоси — гипотенузаси c, ўткир бурчаги α бўлган тўғри бурчакли учбурчакдир. Пирамиданинг ҳамма ён қирралари асос текислиги билан бир хил, β бурчак ташкил қилади. Пирамиданинг учидан гипотенузага қарама-қарши ясси бурчак топилсин.

A) $180°-2\beta$; B) $90°-\beta$; C) $90°+2\beta$; Д) $\frac{3\beta}{2}$;
E) $180°-4\beta$.

44. Тўртбурчакли мунтазам кесик пирамиданинг баландлиги H бўлиб, у пирамиданинг ён қирраси ва диагонали асос текислиги билан, мос равишда, α ва β бурчаклар ташкил қилади. Пирамида ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{1}{3}H^2\cos2\beta\cdot\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}$; B) $\frac{1}{6}H^2\mathrm{tg}\beta\cdot\sin^2\frac{\beta}{2}$;

C) $\frac{1}{2}H^2\sqrt{3+\cos^2\beta}$; Д) $2H^2\mathrm{ctg}\beta\sqrt{2+\mathrm{ctg}^2\alpha}$;

E) $2H\cdot\mathrm{ctg}\beta\sqrt{1+\sin^2\alpha}$.

45. Тўртбурчакли мунтазам кесик пирамиданинг баландлиги H, диагонали d ва асосидаги икки ёқли бурчаги α бўлса, унинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $2(d^2-H^2)+H^2\sin 2\alpha$; B) $\frac{H^2}{6}(2(d^2-H^2)\sin 2\alpha)$;

C) $\frac{H^2}{6}((H^2-d^2)\mathrm{ctg}^2\alpha)$; Д) $\frac{H^2}{2}(2(d^2-H^2)H^2\mathrm{tg}^2\alpha)$;

E) $\frac{H^2}{6}(3(d^2-H^2)+2H^2\mathrm{ctg}^2\alpha)$.

46. Тўртбурчакли мунтазам кесик пирамиданинг асослари томонлари a ва $\sqrt{3}$ бўлиб, ён ёғи асос текислиги билан γ бурчак ташкил қилади. Кесик пирамида тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{a^3(3+4\sin\gamma)}{\cos^2\gamma}$; B) $\frac{2a^2(1+2\cos\gamma)}{\cos\gamma}$; C) $\frac{a^2(1+\cos\gamma)}{2\cos\gamma}$;

Д) $\frac{2a^2(1+2\sin^2\gamma)}{\cos 2\gamma}$; E) $\frac{a^2(2-\cos 2\gamma)}{2\sin\gamma}$.

47. Тўртбурчакли мунтазам пирамида асосининг томони a, асосидаги икки ёқли бурчак α. Пирамида асосининг томони орқали асос текислиги билан β бурчак ташкил қилувчи текислик ўтказилган. Ҳосил қилинган кесимнинг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{a^2\cos^2(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$; B) $\frac{a^2\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$; C) $\frac{a^2\sin^2\alpha\cdot\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$;

Д) $\frac{a^2\cos^2\alpha\cdot\sin\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$; E) $\frac{a^2\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$.

48. Тўртбурчакли мунтазам пирамиданинг ён қирраси l, қўшни ён ёқлар орасидаги икки ёқли бурчак β бўлса, унинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $\frac{2}{5}l^3\cos^2 2\beta\cdot\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$; B) $\frac{1}{6}l^3\sin^2\frac{\beta}{2}\cdot\mathrm{ctg}\beta$;

C) $\frac{1}{12}l^3\sin\beta\cdot\mathrm{tg}\frac{3\beta}{2}$; Д) $\frac{2}{3}l^3\frac{\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\cos\beta}{\sin^2\frac{\beta}{2}}$; E) $\frac{2}{3}l^3\sin 2\beta$.

49. Пирамиданинг асоси ён томонлари ва кичик асоси ўзаро тенг бўлиб, катта асоси a ва ўтмас бурчаги α бўлган трапециядан иборат. Пирамиданинг барча ён қирралари асос текислиги билан бир хил, β бурчак ташкил қилади. Пирамиданинг ҳажми ҳисоблансин.

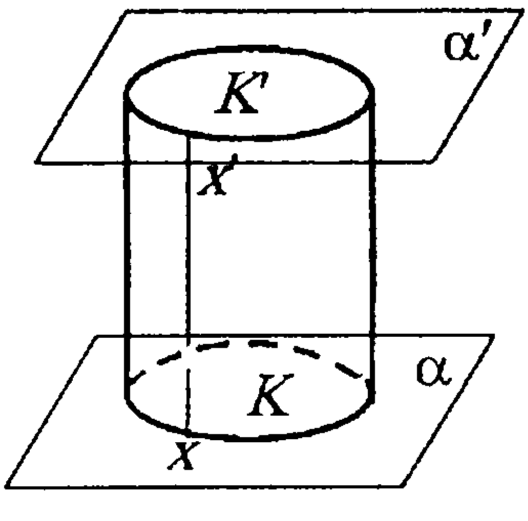
A) $\dfrac{a^3\sin^3\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}{12\cos^3(180^\circ-\frac{3\alpha}{2})}$; B) $\dfrac{a^3\sin\beta\cdot\mathrm{tg}^2\alpha}{4\cos^2(\alpha+\varphi)}$; C) $\dfrac{a^3\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}{4(1+\sin\alpha)}$;

Д) $\dfrac{a^3\sin^3\alpha}{4\mathrm{tg}\beta}$; E) $\dfrac{a^3\sin^2\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}{12\cos\frac{\alpha}{2}}$.

12-§. ЦИЛИНДР

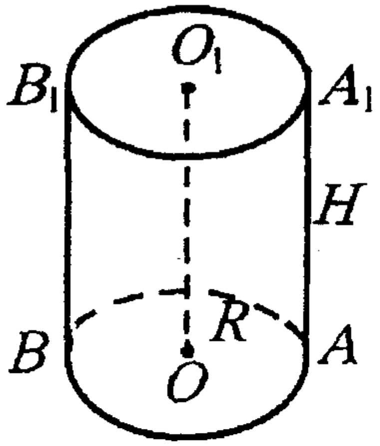
12.1. Асосий тушунчалар ва тасдиқлар

Цилиндр иккита параллел текислик орасида жойлашган ва бу текисликлардан биридаги доирани кесиб ўтадиган ҳамма параллел тўғри чизиқлар кесмаларидан ташкил топган жисмдир. Цилиндрнинг *ясовчилари* учлари шу доиранинг айланасида ётган кесмалардир. Цилиндрнинг *сирти* цилиндр асосларидан — параллел текисликларда ётган иккита доирадан ва ён сиртидан иборат. Ясовчилари асос текисликларига перпендикуляр цилиндр *тўғри цилиндр* бўлади (12.1-чизма). Чизмада: α ва α' — параллел текисликлар, xx' кесмалар — ясовчилар, K, K' доиралар — цилиндрнинг асосларидир.

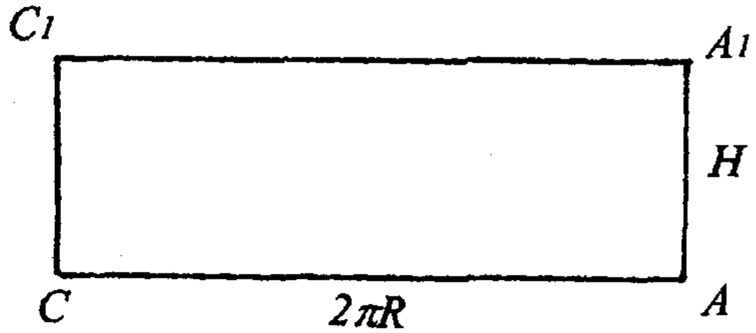


12.1-чизма.

Цилиндрнинг *радиуси* унинг асосининг радиуси, *баландлиги* цилиндр асослари текисликлари орасидаги



12.2-чизма.



масофадан иборат. Цилиндрнинг *ўқи* унинг асосларининг марказларидан ўтувчи тўғри чизиқдир. Цилиндрнинг *ўқ кесими* унинг ўқи орқали ўтувчи кесимдан иборат.

1. Агар цилиндр асосининг радиуси $OA=R$, ясовчиси $AA_1=H$ бўлса (12.2-чизма), цилиндр ён сиртининг юзи

$$S_{\text{ён}}=2\pi R\cdot H \qquad (12.1)$$

(асос айланаси узунлиги билан баландлигининг кўпайтмасига тенг).

2. Цилиндр тўла сиртининг юзи унинг ён сирти ва асослари юзларининг йиғиндисига тенг:

$$S_{\text{т}}=S_{\text{ён}}+2S_{\text{асос}}=2\pi R\cdot H+2\pi R^2=2\pi R(H+R). \qquad (12.2)$$

3. Цилиндрнинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг:

$$V_{\text{ц}}=S_{\text{асос}}\cdot H=\pi R^2 H. \qquad (12.3)$$

12.2. Мавзуга оид масалалар

1. Цилиндрнинг ўқ кесими квадратдан иборат ва унинг юзи Q бўлса, цилиндр асосининг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{\pi Q}{6}$; В) $2\pi Q$; С) $\frac{\pi Q}{4}$; Д) $\frac{\pi Q}{3}$; Е) $\frac{\pi Q}{12}$.

2. Цилиндрнинг баландлиги 8 дм, асосининг радиуси 5 дм. Цилиндрнинг ўқига параллел текислик шундай ўтказилганки, кесимда квадрат ҳосил бўлган. Бу кесимдан цилиндрнинг ўқигача бўлган масофа топилсин.

A) 3; B) 4; C) 2,5; Д) 5; E) 3,5 дм.

3. Цилиндр асоси юзининг ўқ кесими юзига нисбати π:4 каби. Ўқ кесимнинг диагоналлари орасидаги бурчак топилсин.

A) $\frac{\pi}{6}$; B) $\frac{\pi}{2}$; C) $\frac{\pi}{12}$; Д) $\frac{\pi}{4}$; E) $\frac{\pi}{3}$.

4. Цилиндр тўла сиртининг юзи 62 см^2, ён сиртининг юзи 30 см^2 бўлса, цилиндрнинг баландлиги топилсин.

A) $\frac{8}{\sqrt{\pi}}$; B) $\frac{16}{\sqrt{\pi}}$; C) $\frac{24}{\sqrt{\pi}}$; Д) $\frac{15}{4\sqrt{\pi}}$; E) $\frac{18}{\sqrt{\pi}}$.

5. Цилиндрнинг ўқига параллел қилиб, ўқдан a узоқликда кесим ўтказилган. Кесим цилиндрнинг асосидаги айланадан α радианга тенг бўлган ёйни ажратади. Агар кесимнинг юзи S бўлса, цилиндрнинг ҳажми топилсин.

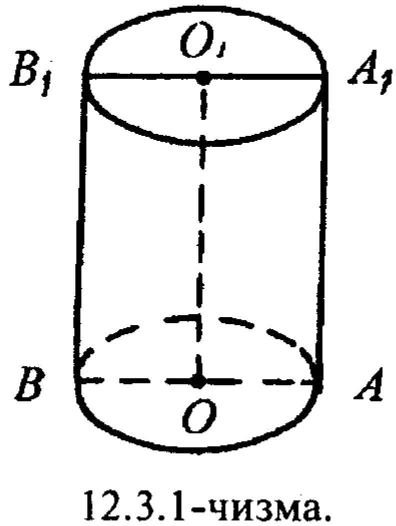
A) $\frac{\pi S\sqrt{a}}{\sin\alpha}$; B) $\frac{\pi S^2}{a\cos\alpha}$; C) $\pi aS\,\mathrm{tg}\alpha$; Д) $\frac{\pi Sa}{\cos\alpha}$; E) $\frac{\pi aS}{\sin\alpha}$.

12.3. Мавзуга оид масалаларнинг ечимлари

1. Берилган. AB_1 — цилиндр, AA_1B_1B — квадрат, $S_{AA_1B_1B}=Q$.

$S_{асос}$ ҳисоблансин (12.3.1-чизма).

Ечилиши. Агар цилиндр асосининг радиуси $OA=R$ бўлса, асосининг юзи $S_{асос}=\pi R^2$ бўлади.



12.3.1-чизма.

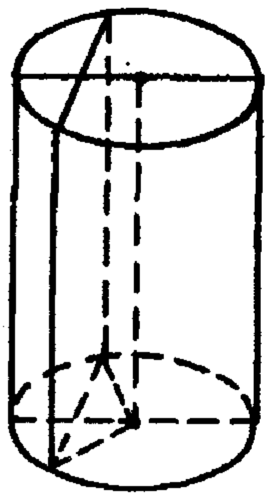
AA_1B_1B ўқ кесим квадрат бўлганлигидан, $AA_1=AB$ ёки $H=2R$. У ҳолда, ўқ кесимнинг юзи $Q=2R\cdot H=4R^2$ бўлади ва $R^2=\frac{Q}{4}$.

Демак, цилиндр асосининг юзи $S=\frac{\pi Q}{4}$ бўлади.

Жавоби: C).

2. Берилган. AB_1 — цилиндр, $OO_1 \parallel (PP_1QQ_1)$, PP_1QQ_1 — квадрат, $OO_1=8$ дм, $R=5$ дм.

OK топилсин (12.3.2-чизма).



12.3.2-чизма.

Ечилиши. O марказни PQ ватарнинг P ва Q учлари билан туташтирсак, ΔOPQ тенг ёнли бўлади: $OP=OQ=R$. O нуқтадан кесимгача масофа PQ га ўтказилган OK перпендикулярнинг узунлигига тенг. OK кесма ΔOPQ нинг медианаси ҳам бўлганлигидан, $PK=KQ$. Берилишига кўра, PP_1QQ_1 — квадрат ва $PQ=PP_1=8$ дм ва, демак, $PK=\frac{1}{2}PQ=4$ дм. Энди тўғри бурчакли ΔOPK дан Пифагор теоремасига асосан, $OK=\sqrt{OP^2-PK^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$ дм эканлигини оламиз.

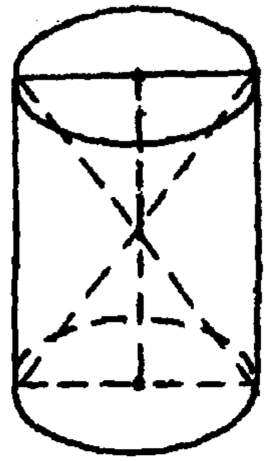
Жавоби: A).

3. Берилган. AB_1 — цилиндр, $S_{асос}:S_{кес.}=\pi:4$

$\angle AKB$ топилсин (12.3.3-чизма).

Ечилиши. $\angle AKB=\alpha$, $OA=R$ белгилашларни киритамиз. ΔAKB тенг ёнли ва $AK=BK$ бўлганлигидан, OK баландлик ҳам медиана, ҳам биссектриса бўлади. Демак, $\angle AKO=\frac{\alpha}{2}$. Тўғри бурчакли ΔAKO дан

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{OA}{AK} = \frac{R}{AK}$, $AK = \frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ бўлиши келиб чиқади. Цилиндр ўқ кесимининг диагонали $AB_1 = 2AK =$
$= \frac{2R}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ ва унинг юзи $S_{\text{кес.}} = \frac{1}{2}d^2 =$
$= \frac{1}{2}(AB_1)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2R}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = \frac{2R^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. Цилиндр асосининг юзи $S_{\text{асос}} = \pi R^2$.



12.3.3-чизма.

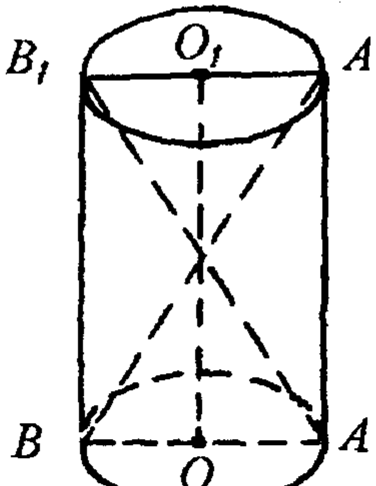
Берилганига кўра $S_{\text{асос}}:S_{\text{кес}} = \pi:4$, шу сабабли α га нисбатан $\frac{S_{\text{асос}}}{S_{\text{кес}}} = \frac{\pi R^2}{2R^2} \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}$, $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ тенгламани оламиз. Бу ердан $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Жавоби: В).

4. Берилган. AB_1 — цилиндр, $S_{\text{т.}} = 62$ см^2; $S_{\text{ён.}} =$ $= 30$ см^2.

H топилсин (12.3.4-чизма).

Ечилиши. Цилиндр тўла сиртининг юзи ва ён сиртининг юзи ҳисобланадиган (12.2), (12.3) формулалардан фойдаланиб, қуйидаги тенгламалар системасини тузамиз:



12.3.4-чизма.

$$\begin{cases} 2\pi RH + 2\pi R^2 = 62, \\ 2\pi RH = 30. \end{cases}$$

Натижада $\begin{cases} 30 + 2\pi R^2 = 62 \\ 2\pi RH = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi R^2 = 16, \\ \pi RH = 15 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} R = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}}, \\ H = \dfrac{15}{4\sqrt{\pi}}. \end{cases}$$

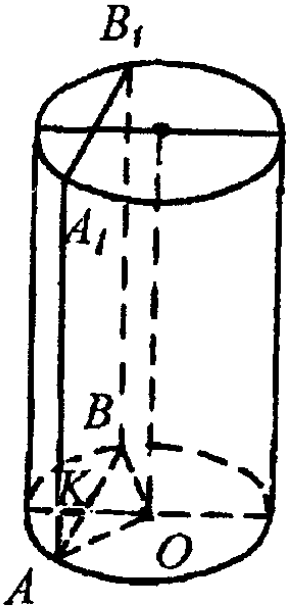
Жавоби: Д).

5. Б е р и л г а н. AB_1 — цилиндр, $OO_1 \| (AA_1B_1B)$. $S_{AA_1B_1B} = S$, $\cup ACB = \alpha$, $OK \perp (AA_1B_1B)$, $OK = a$,

$V_ц$ ҳ и с о б л а н с и н (12.3.5-чизма).

Е ч и л и ш и. $OA = OB = R$, $AA_1 = BB_1 = H$ белгилашларни киритамиз. ΔAOB — тенг ёнли ва $\angle AOB = \alpha$ марказий бурчакдан иборат. ΔAOB нинг асосидаги $\angle BAO = \angle ABO = \dfrac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$ бўлади. Синуслар теоремасига асосан, $\dfrac{AB}{\sin\alpha} = \dfrac{OB}{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$, бу ердан

$$AB = \frac{R\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2R\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2R\sin\frac{\alpha}{2}.$$



12.3.5-чизма.

Цилиндр асосининг радиусини $OK = a$ орқали ифодалаймиз:

$$\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{OK}{OB} = \frac{a}{R} \quad \text{ва} \quad R = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

У ҳолда $AB = \dfrac{2a\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2a\cdot \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Энди ABB_1A_1 тўғри тўртбурчакнинг баландлигини ҳисоблаймиз:

$$H = \frac{S}{AB} = \frac{S}{2a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{S}{2a}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Демак, цилиндрнинг ҳажми:

$$V = \pi R^2 \cdot H = \pi \cdot \frac{a^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S\cos\frac{\alpha}{2}}{2a\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi a S}{\sin\alpha}.$$

Жавоби: Е).

12.4. Мустақил ечиш учун масалалар

1. Цилиндр асосининг радиуси r, ўқ кесимининг диагонали d бўлса, ўқ кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) $h\sqrt{d^2-3r^2}$; В) $r\sqrt{d^2-2r^2}$; С) $2r\sqrt{d^2-4r^2}$;
Д) $2d\sqrt{d^2-4r^2}$; Е) $2r\sqrt{4r^2-3r^2}$.

2. Цилиндр ўқ кесимининг диагонали d бўлиб, асос текислигига α бурчак остида оғма бўлса, цилиндр ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{1}{4}\pi d^2 \mathrm{ctg}\alpha$; В) $\frac{1}{6}\pi d^2 \cos 2\alpha$; С) $\frac{1}{3}\pi d^2 \mathrm{tg} 2\alpha$;
Д) $\frac{1}{2}\pi d^2 \sin 2\alpha$; Е) $\pi d^2 \cos\alpha$.

3. Цилиндрнинг баландлиги 16 см, асосининг радиуси 10 см. Цилиндрнинг ўқига параллел кесим ўтказилган ва у ўқдан 60 мм узоқликда ётади. Кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) 216; В) 208; С) 256; Д) 196; Е) 160 см^2.

4. Цилиндрнинг ўқига параллел текислик ўтказилган. Текисликнинг цилиндр асоси билан кесишиш чизиғи айланани $m{:}n$ каби нисбатда бўлади. Агар кесимнинг юзи S бўлса, цилиндр ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $\dfrac{\pi S}{\sin\frac{\pi m}{m+n}}, (m \le n)$; В) $\dfrac{\pi S}{\cos\frac{\pi m}{m+n}}$; С) $\dfrac{\pi S n}{\cos\frac{\pi m}{n}}$;
Д) $\dfrac{\pi S m}{\sin\frac{\pi m}{m}}$; Е) $\dfrac{S(m+n)}{\sin\frac{\pi m}{\sqrt{mn}}}$.

5. Цилиндр асосининг юзи Q ва ўқ кесимининг юзи M бўлса, цилиндр тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $2M+\pi Q$; В) $\pi M+2Q$; С) $\frac{M+\pi Q}{3}$; Д) $\sqrt{M^2+4Q^2}$; Е) $\sqrt{M^2+2Q^2}$.

6. Цилиндр ён сиртининг юзи унинг тўла сирти юзининг ярмига тенг. Цилиндр ўқ кесимининг диагонали d бўлса, унинг ён сирти юзи ҳисоблансин.

А) πd^2+2; В) πd^2; С) $\frac{2\pi d^2}{7}$; Д) $\frac{2\pi d^2}{3}$; Е) $\frac{2\pi d^2}{5}$.

7. Цилиндрнинг асосида узунлиги a бўлган ватар α катталикдаги ёйга тиралган. Цилиндрнинг ўқ кесими квадратдан иборат бўлса, унинг ҳажми ҳисоб-лансин.

А) $\frac{4\pi a^2}{\sin^2\alpha}$; В) $\frac{\pi a^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$; С) $\frac{\pi a^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$; Д) $\frac{2\pi a^2}{\cos^2\alpha}$; Е) $\frac{\pi a^2}{1+\sin\alpha}$.

8. Цилиндрнинг баландлиги 15 см, асосининг радиуси 5 см. Узунлиги 17 см бўлган AB кесманинг учлари цилиндр асосларининг айланаларида ётади. Шу кесмадан цилиндрнинг ўқигача бўлган масофа топилсин.

А) 6; В) 4; С) 2; Д) 3; Е) 2,5 см.

9. Цилиндр ўқ кесимининг диагонали асосининг диаметридан 25% узун. Агар цилиндр асосларининг марказлари орасидаги масофа 18 см бўлса, унинг ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) 432 π; В) 360 π; С) 448 π; Д) 396 π; Е) 460 π.

10. Цилиндрнинг ён сирти 50 π. Агар унинг ён сирти асослари юзларининг йиғиндисига тенг бўлса, цилиндрнинг ҳажми ҳисоблансин.

А) 90 π; В) 125 π; С) 120 π; Д) 96 π; Е) 144 π.

11. Цилиндр ўқ кесимининг юзи Q. Асос радиусининг ўртасидан цилиндрнинг ўқига параллел ўтувчи кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{Q}{2}$; В) $\frac{Q\sqrt{2}}{3}$; С) $\frac{Q\sqrt{3}}{2}$; Д) $\frac{Q\sqrt{5}}{2}$; Е) $\frac{Q\sqrt{3}}{4}$.

12. Цилиндр ўқ кесимининг юзи Q. Цилиндрнинг ўқига параллел ва ундан асос радиусининг $\frac{1}{4}$ қисмига тенг узоқликда ўтувчи кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{Q\sqrt{2}}{4}$; В) $\frac{Q\sqrt{7}}{9}$; С) $\frac{Q\sqrt{13}}{3}$; Д) $\frac{Q\sqrt{11}}{4}$; Е) $\frac{Q\sqrt{15}}{4}$.

13. Цилиндрнинг ясовчиси 4 дм, асосининг радиуси 29 см. Цилиндрнинг ўқига параллел ўтувчи кесим квадрат шаклида бўлса, ўқдан шу кесимгача бўлган масофа топилсин.

А) 21; В) 18; С) 24; Д) 20; Е) 12,5 см.

14. Цилиндр ўқ кесимининг юзи Q. Шу кесимнинг битта ясовчиси орқали ўқ кесим билан 60° ли бурчак ташкил этувчи кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) 0,25 Q; В) 1,25 Q; С) 1,5 Q; Д) 0,5 Q; Е) 0,75 Q.

15. Цилиндр ўқ кесимининг юзи Q. Шу кесим билан 45° ли бурчак ташкил этувчи кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{Q\sqrt{3}}{5}$; В) $\frac{Q\sqrt{2}}{2}$; С) $\frac{Q\sqrt{3}}{4}$; Д) $\frac{Q}{3}$; Е) $\frac{Q\sqrt{11}}{3}$.

16. Цилиндр ўқ кесимининг юзи Q. Цилиндрнинг ўқига параллел бўлиб, асосининг айланасидан 90° ли ёйни ажратиб ўтувчи кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{Q\sqrt{11}}{4}$; В) $\frac{Q\sqrt{2}}{4}$; С) $\frac{Q\sqrt{2}}{2}$; Д) $\frac{Q\sqrt{3}}{2}$; Е) $\frac{Q\sqrt{5}}{3}$.

17. Цилиндр ўқ кесимининг юзи Q. Цилиндрнинг ўқига параллел бўлиб, асосининг айланасидан 120°

ли ёйни ажратиб ўтувчи кесимнинг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{Q\sqrt{15}}{3}$; B) $\frac{Q}{2}$; C) $\frac{Q\sqrt{5}}{3}$; Д) $\frac{Q\sqrt{3}}{4}$; E) $\frac{Q\sqrt{3}}{2}$.

18. Цилиндрнинг ясовчиси орқали ўзаро перпендикуляр бўлган иккита кесим ўтказилган. Бу кесимларнинг юзлари 45 дм^2 ва 2 м^2 бўлса, ўқ кесимнинг юзи ҳисоблансин.

A) 205; B) 210; C) 216; Д) 196; E) 180 дм^2.

19. Цилиндрда ўтказилган иккита кесим ўзаро перпендикуляр ва уларнинг кесишиш чизиғи — цилиндрнинг ўқига параллел. Шу чизиқ битта кесимни юзлари 77 дм^2 ва 27 дм^2 бўлган қисмларга, иккинчи кесимни эса юзларининг нисбати 7:33 каби бўлган қисмларга ажратади. Цилиндр ўқ кесимининг юзи ҳисоблансин.

A) 144; B) 96; C) 80; Д) 130; E) 120 дм^2.

20. Цилиндрнинг ясовчиси орқали икки AA_1B_1B ва AA_1C_1C кесим ўтказилган ва улар орасидаги бурчак 60°. Кесимларнинг юзлари мос равишда 420 см^2 ва 1 дм^2 бўлса, BCC_1B_1 кесимнинг юзи ҳисоблансин.

A) 296; B) 380; C) 360; Д) 344; E) 320 см^2.

21. Цилиндрнинг баландлиги 15 см, асосидаги айлананинг радиуси 5 см бўлиб, $AB=17$ см кесманинг учлари цилиндр асосларининг айланаларида ётади. AB кесма ва цилиндрнинг ўқи орасидаги масофа топилсин.

A) 4; B) 2; C) 3; Д) 2,5; E) 1,5 см.

22. Цилиндр асосининг юзи 36 π см^2, унинг ўқ кесими квадратдан иборат. Цилиндр ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) 144 π; B) 120 π; C) 156 π; Д) 136 π; E) 134 π см^2.

23. Цилиндр ён сиртининг юзи унинг тўла сирти юзининг ярмига тенг. Цилиндр ўқ кесимининг диагонали d бўлса, цилиндр тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{3}{5}\pi d^2$; В) $\frac{4}{3}\pi d^2$; С) $\frac{3}{4}\pi d^2$; Д) $\frac{2}{3}\pi d^2$; Е) $\frac{4}{5}\pi d^2$.

24. Цилиндр ўқ кесимининг диагонали асосининг радиусидан 5,2 марта катта. Цилиндр ён сиртининг юзи 120 π см^2 бўлса, унинг тўла сирти юзи ҳисоблансин.

А) 180; В) 160; С) 144; Д) 145; Е) 120 см^2.

25. Цилиндр асосининг юзи S, унинг ўқ кесими диагоналларининг кесишиш нуқтасида цилиндрнинг ясовчиси 60° ли бурчак остида кўринаяпти. Цилиндр ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{4}{3}S\sqrt{2}$; В) $\frac{4}{3}S\sqrt{3}$; С) $\frac{5}{4}S\sqrt{3}$; Д) $\frac{3}{4}S\sqrt{3}$;

Е) $\frac{3}{4}S\sqrt{2}$.

26. Цилиндрнинг баландлиги 6 дм, асосининг радиуси 5 дм. $AB=10$ дм кесманинг учлари ҳар хил асосларнинг айланаларида ётади. AB кесма ва цилиндрнинг ўқи орасидаги энг қисқа масофа топилсин.

А) 3,5; В) 5; С) 3; Д) 4; Е) 2,5 дм.

27. Цилиндрнинг ўқ кесими — квадрат ва унинг диагонали $3\sqrt{2}$ м бўлса, унинг ён сирти юзи ҳисоблансин.

А) 9 π; В) 8 π; С) 12 π; Д) 10 π; Е) 15 π м^2.

28. Цилиндрнинг ён сирти текисликка ёйилганда квадрат ҳосил бўлади. Квадратнинг томони a бўлса, цилиндрнинг ҳажми ҳисоблансин.

А) $\frac{a^3}{3\pi}$; В) $\frac{a^3}{2\pi}$; С) $\frac{a^3}{27\pi}$; Д) $\frac{a^3\pi}{15}$; Е) $\frac{a^3}{4\pi}$.

29. Цилиндрнинг баландлиги h бўлиб, цилиндр ёйилмасининг диагонали ясовчи билан $60°$ ли бурчак ташкил қилади. Цилиндрнинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $\frac{8\pi}{3}h^3$; B) $\frac{4}{5\pi}h^3$; C) $\pi\cdot h^3$; Д) $\frac{3}{4\pi}h^3$; E) $\frac{4}{5}h^3\pi$.

30. Цилиндрнинг ўқига параллел кесим ўтказилган. Цилиндр асосининг радиуси r, баландлиги h, кесим билан ажратилган кичик ёйнинг катталиги $120°$. Цилиндр кичик қисмининг ҳажми ҳисоблансин.

A) $\frac{\pi}{4}rh^2(4\pi-\sqrt{3})$; B) $\frac{\pi}{3}r^2h$; C) $\frac{\pi}{6}rh^2$; Д) $\frac{\pi}{8}r^2h$;

E) $\frac{\pi}{4}r^2h$.

31. Цилиндр қуйи асосининг марказидан ўтказилган текислик асосга α бурчак остида оғма. У юқори асосни узунлиги b бўлган ватар орқали кесиб ўтади ва катталиги β бўлган ёйни ажратади. Цилиндрнинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $\frac{\pi b^3}{24}\sin 4\alpha\cdot \mathrm{tg}^2\beta$; B) $\frac{\pi b^3}{12}\sin 2\alpha\cdot \mathrm{tg}\beta$; C) $\frac{\pi b^3}{8}\cdot\frac{\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\mathrm{tg}\alpha}{\sin^2\frac{\beta}{2}}$;

Д) $\frac{\pi b^3}{6}\cdot\frac{\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\sin\beta}{\cos^2\frac{\beta}{2}}$; E) $\frac{\pi b^3}{6}\cdot\frac{\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$.

32. Томони a бўлган мунтазам учбурчакнинг иккита учи — цилиндр пастки асосининг айланасида, учинчи учи эса цилиндр юқори асосининг айланасида жойлашган. Учбурчак текислиги цилиндрнинг ясовчиси билан α бурчак ташкил қилади. Цилиндр ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{\pi a^2\mathrm{ctg}\alpha(4-3\cos^2\alpha)}{4}$; B) $\frac{\pi a^2\mathrm{tg}\alpha(3-4\cos^2\alpha)}{4}$;

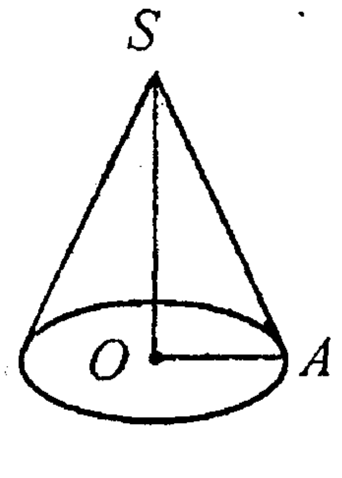
C) $\frac{\pi a^2\sin 2\alpha(1-2\sin^2\alpha)}{12}$; Д) $\frac{\pi a^2\cos 2\alpha}{8}$;

E) $\frac{\pi a^2\mathrm{tg}\alpha(2-4\sin^2\alpha)}{8}$.

13-§. КОНУС ВА КЕСИК КОНУС

13.1. Асосий тушунчалар ва тасдиқлар

Конус тўғри бурчакли учбурчакнинг катети атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм. Тўғри бурчакли ΔSOA ўзининг SO катети атрофида (теварагида) айланса, учбурчакнинг SA гипотенузаси конуснинг *ён сиртини*, OA катети — конуснинг *асоси* бўлган доирани чизади. S нуқта конуснинг *учи* (13.1-чизма), SA *гипотенуза* — конуснинг *ясовчиси*, $OA=R$ — конус асосининг *радиуси*, SO катет — конуснинг *баландлиги* ва конуснинг *симметрия* ўқи бўлади. Конуснинг ясовчиси $SA=l$ билан, баландлиги $SO=H$ билан белгиланади. Конуснинг баландлигидан ўтказилган текислик кесимда тенг ёнли ΔASB ҳосил қилади, у конуснинг *ўқ кесимидан* иборат.



13.1-чизма.

Агар конуснинг ён сиртини битта ясовчи бўйича кесиб, текисликка ёйсак, конуснинг ёйилмасини ҳосил қиламиз. Ясовчиси l, асосининг радиуси R бўлган конуснинг ёйилмаси радиуси l ва ёй узунлиги $2\pi R$ бўлган доиравий сектордир, унинг юзи конус ён сиртининг юзига тенг.

1. Конус ён сиртининг юзи:

$$S_{\text{ён}}=\pi\cdot R\cdot l, \qquad (13.1)$$

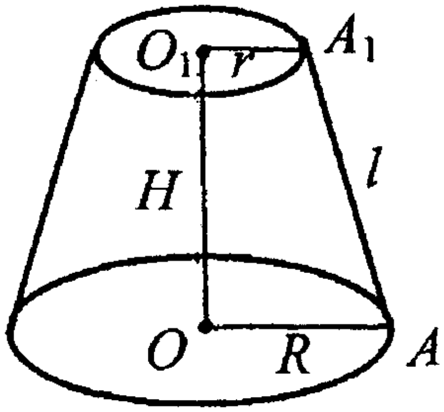
бу ерда l — конуснинг ясовчиси, R — конус асосининг радиуси.

2. Конус тўла сиртининг юзи:

$$S_{\text{т}}=S_{\text{ён}}+S_{\text{асос}},$$

яъни

$$S_{\text{т}}=\pi Rl+\pi R^2=\pi R\ (l+R). \qquad (13.2)$$



13.2.-чизма.

3. Конуснинг ҳажми:

$$V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H \qquad (13.3)$$

H — конуснинг баландлиги.

Конуснинг асосига параллел ва у билан кесишадиган текислик ўтказилганда текислик конусни доира бўйлаб кесади. Кесик конус — конуснинг асоси ва унга параллел текислик билан кесилган қисмидир (13.2.-чизма). Чизмада: AA_1 — кесик конуснинг ясовчиси, $OO_1 = H$ — кесик конуснинг баландлиги, $OA = R$ ва $O_1A_1 = r$ кесик конус асосларининг радиуслари.

4. Кесик конус ён сиртининг юзи:

$$S_{ён} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l, \qquad (13.4)$$

ёки

$$P_1 = 2\pi R, \; P_2 = 2\pi r \qquad (13.5)$$

бўлишини ҳисобга олсак,

$$S_{ён} = \pi(R + r)l. \qquad (13.6)$$

5. Кесик конус тўла сиртининг юзи:

$$S_т = S_{ён} + S_{ю.ас} + S_{қ.ас}$$

ёки

$$S_{т.} = \pi(R + r)l + \pi R^2 + \pi r^2. \qquad (13.7)$$

6. Кесик конуснинг ҳажми:

$$V_к = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2) \qquad (13.8)$$

формула бўйича ҳисобланади.

13.2. Мавзуга доир масалалар

1. Конус асосининг радиуси R бўлиб, унинг ўқ кесими эса тўғри бурчакли учбурчакдан иборат. Кесик конус ўқ кесимининг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{R^2}{2}$; В) R^2; С) $\frac{3}{4}R^2$; Д) $2R^2$; Е) $1{,}5\ R^2$.

2. Конуснинг баландлиги h га тенг. Агар кесимнинг юзи конус асосининг юзидан тўрт марта кичик бўлса, кесим асосдан қандай узоқликда ўтиши керак?

А) $\frac{2}{3}h$; В) $\frac{3}{4}h$; С) $\frac{5}{6}h$; Д) $\frac{h}{2}$; Е) $\frac{1}{4}h$.

3. Конус асосининг радиуси R, конуснинг учидан кесим ўтказилган бўлиб, кесим асос текислиги билан 60° ли бурчак ташкил қилади ва асосидаги 120° ли ёйни ажратади. Ўтказилган кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{1}{2}R^2\sqrt{3}$; В) $R^2\sqrt{3}$; С) $R^2\sqrt{2}$; Д) $\frac{3}{4}R^2$; Е) $\frac{1}{5}R^2$.

4. Конуснинг баландлиги 4, ясовчиси 5 бўлса, конус ёйилмасининг бурчаги катталиги ҳисоблансин.

А) 150°; В) 186°; С) 204°; Д) 196°; Е) 216°.

5. Конуснинг тўла сирти πS квадрат бирликка тенг, конуснинг ёйилмаси эса бурчаги 60° га тенг бўлган доиравий сектордан иборат. Конуснинг ҳажми ҳисоблансин.

А) $\frac{\pi S\sqrt{6S}}{14}$; В) $\frac{\pi S}{7}$; С) $\frac{\pi S\sqrt{5S}}{21}$; Д) $\frac{\pi S\sqrt{S}}{21}$; Е) $\frac{\pi S\sqrt{3S}}{14}$.

6. Конус асосининг марказидан ясовчисигача бўлган масофа d, ясовчи ва конуснинг баландлиги орасидаги бурчак α бўлса, конус тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{2\pi d^2 \mathrm{tg}\alpha}{1+\sin\alpha}$; В) $\frac{2\pi d^2}{1+\cos\alpha}$; С) $\frac{\pi d^2}{1+\cos\alpha}$;

Д) $\frac{2\pi d^2 \mathrm{ctg}\alpha\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin 2\alpha}$; Е) $\frac{3\pi d^2 \mathrm{tg}\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.

7. Кесик конус асосларининг радиуслари R ва r. Кесик конуснинг иккита ясовчиси орқали унинг асосидаги айланадан 90° ли ёй ажратувчи кесим ўтказилган. Бу кесим асоснинг текислиги билан 60° ли бурчак ташкил қилса, унинг юзи ҳисоблансин.

А) r^2+R^2; В) r^2-R^2; С) rR; Д) $R\sqrt{R^2+r^2}$;
Е) $r\sqrt{R^2-r^2}$.

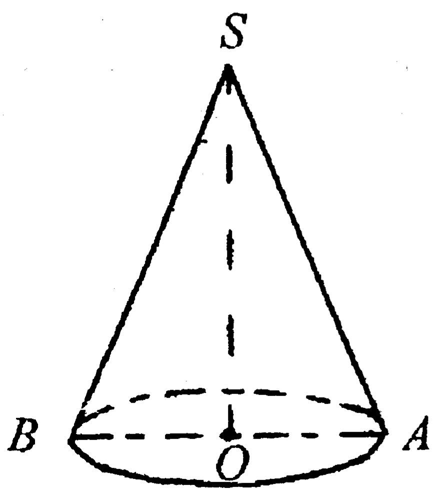
8. Кесик конус ўқ кесимининг диагонали d бўлиб, конуснинг пастки асоси билан α бурчак, ясовчиси билан 90° ли бурчак ташкил этади. Кесик конус ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $\pi d^2 \sin\alpha$; В) $\pi d^2 \cos\alpha$; С) $\pi d^2 \sin 2\alpha$; Д) $\pi d^2 \mathrm{tg}\alpha$;
Е) πd^2.

9. Кесик конус асосларининг радиуслари R ва r, ясовчи эса асос текислиги билан 45° ли бурчак ташкил этади. Кесик конуснинг ҳажми ҳисоблансин.

А) $\frac{2\pi(R^3-r^3)}{3}$; В) $\frac{\pi(R^3+r^3)}{3}$; С) $\frac{\pi R r^2}{3}$;
Д) $\frac{\pi R^2 r}{3}$; Е) $\frac{\pi(R^3-r^3)}{3}$.

13.3. Мавзуга оид масалаларнинг ечимлари


13.3.1-чизма.

1. Берилган. SAB — конус, ΔSAB — тўғри бурчакли, $OA=R$.

$S_{\Delta SAB}$ ҳисоблансин (13.3.1-чизма).

Ечилиши. Конуснинг ўқ кесими тенг ёнли тўғри бурчакли ΔSAB дан иборат. Шунинг учун, $\angle SAB=\angle SBA=45°$. SO баландликни ўтказсак, тенг ёнли

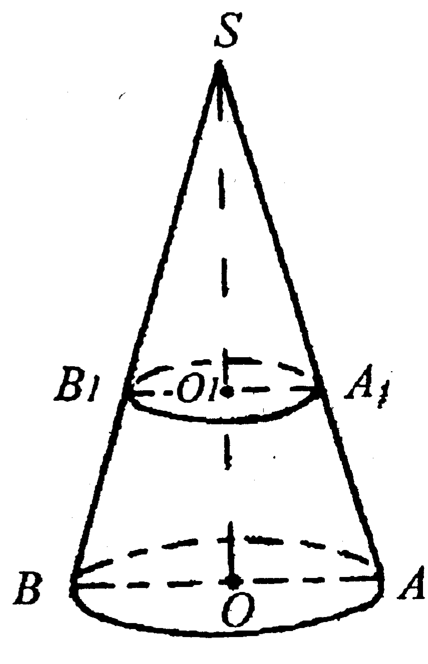
ΔSAO ҳосил қиламиз, чунки $\angle SAO=45°$. Демак, $SO=OA=R$. У ҳолда

$$S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}AB\cdot SO=\frac{1}{2}2R\cdot R=R^2.$$

2. Берилган. SAB — конус, $SO\perp AB$, $SO=h$, $A_1B_1 \parallel AB$, $S_{ас}=2\cdot S_{кес.}$

OO_1 топилсин (13.3.2-чизма).

Ечилиши. Берилишига кўра, кесим асосга параллел бўлганлигидан, $\Delta SOA \sim \Delta SO_1A_1$ бўлади ва ўхшаш учбурчаклар учун $\frac{OA}{O_1A_1}=\frac{SO}{SO_1}$ пропорцияни ёзамиз. Иккинчи томондан, $S_{ас}=$ $=2S_{кес}$ ёки $\pi\cdot OA^2=2\pi O_1A_1^2$. У ҳолда $OA=2O_1A_1$ ва $\frac{OA}{O_1A_1}=2$. Шартга кўра, $SO=h$, $SO_1=SO-$ $-OO_1=h-x$, $x=OO_1$. Бу ифодаларни пропорцияга келтириб қўйсак, $\frac{h}{h-x}=2$, $2h-2x=h$, $2x=$ $=2h-h=h$; $x=\frac{h}{2}$. Демак, $OO_1=\frac{h}{2}$.



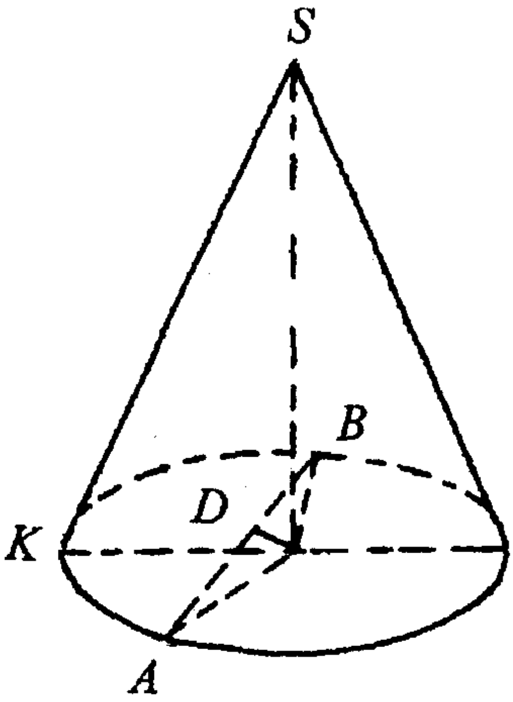
13.3.2-чизма.

Жавоби: Д).

3. Берилган. SAB — конус, ΔSAB — кесим, $\angle SDO=60°$, $\cup AKB=120°$, $OA=OB=R$.

$S_{кес.}$ ҳисоблансин (13.3.3-чизма).

Ечилиши. A нуқтани айланада танлаб ва A нуқтадан бошлаб айлананинг $\frac{1}{3}$ қисмини олиб, $\cup AKB=$ $=120°$ ёйни ажратамиз. A ва B нуқталарни айлана мар-



13.3.3-чизма.

кази O билан туташтириб, $\angle AOB=120^\circ$ ва тенг ёнли ΔAOB ни ҳосил қиламиз. Берилишига кўра, ΔSAB — тенг ёнли ($SA=SB$). Унинг S учидан $SD\perp AB$ ўтказсак, у медиана ҳам бўлади, яъни $AD=DB$. Уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага асосан, $OD\perp AB$ ва $\angle SDO=60^\circ$. Кесимнинг юзи $S_{\text{кес.}}=\frac{1}{2}AB\cdot SD$ формуладан топилади. ΔAOB тенг ёнли ва $\angle AOB=120^\circ$ бўлганлигидан, $\angle ABO=\angle BAO=$ $=\frac{180^\circ-120^\circ}{2}=30^\circ$. Тўғри бурчакли ΔOBD дан: $OD=OB\cdot\sin30^\circ=\frac{1}{2}R$, $BD=OB\cdot\cos30^\circ=\frac{1}{2}R\sqrt{3}$ ва $AB=2BD=R\sqrt{3}$.

Тўғри бурчакли ΔSOD дан: $\frac{OD}{SD}=\cos\ 60^\circ$,

$$SD=\frac{OD}{\cos60^\circ}=\frac{\frac{R}{2}}{\frac{1}{2}}=R.$$

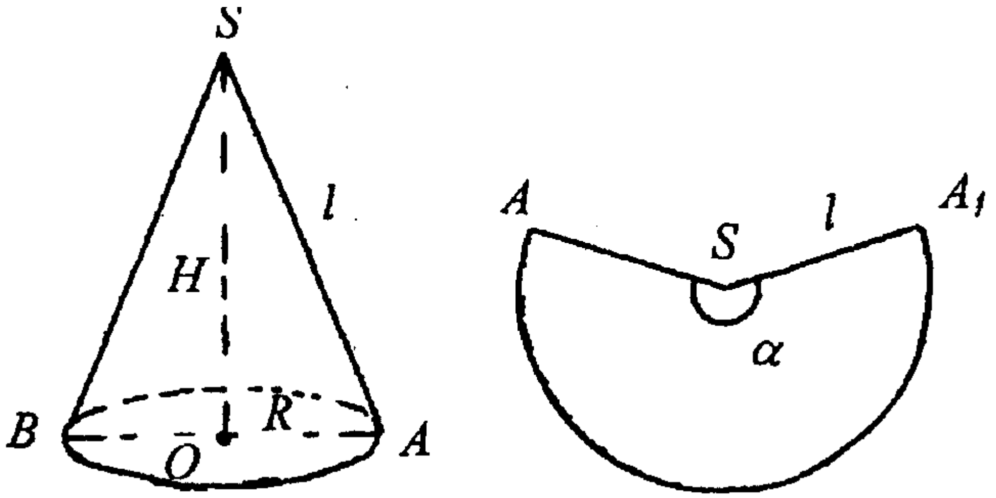
Демак, кесимнинг юзи $S_{\text{кес.}}=\frac{1}{2}AB\cdot SD=\frac{1}{2}R^3\sqrt{3}$ бўлади.

Жавоби: А).

4. Берилган. SAB — конус, $SO\perp AB$, $SO=4$, $SA=5$. α топилсин (13.3.4-чизма).

Ечилиши. Тўғри бурчакли ΔSOA дан, Пифагор теоремасига асосан, конус асосининг радиусини топамиз:

$$R^2=l^2-H^2=5^2-4^2=9,\ R=3.$$



13.3.4-чизма.

У ҳолда конус асоси айланасининг узунлиги $C=2\pi\cdot 3=6\pi$ бўлади. Ёйилмада AA_1 ёйнинг узунлиги 6π га тенг ва $SA=SA_1=5$.

Маълумки, 1° марказий бурчакка мос келган ёйнинг узунлиги $\frac{2\pi l}{360°}=\frac{10\pi}{360°}=\frac{\pi}{36°}$, у ҳолда α градусга мос келган ёйнинг узунлиги ифодасини тенглаштирамиз: $\frac{\pi\alpha}{36°}=6\pi$ ва $\alpha=6\cdot 36°=216°$.

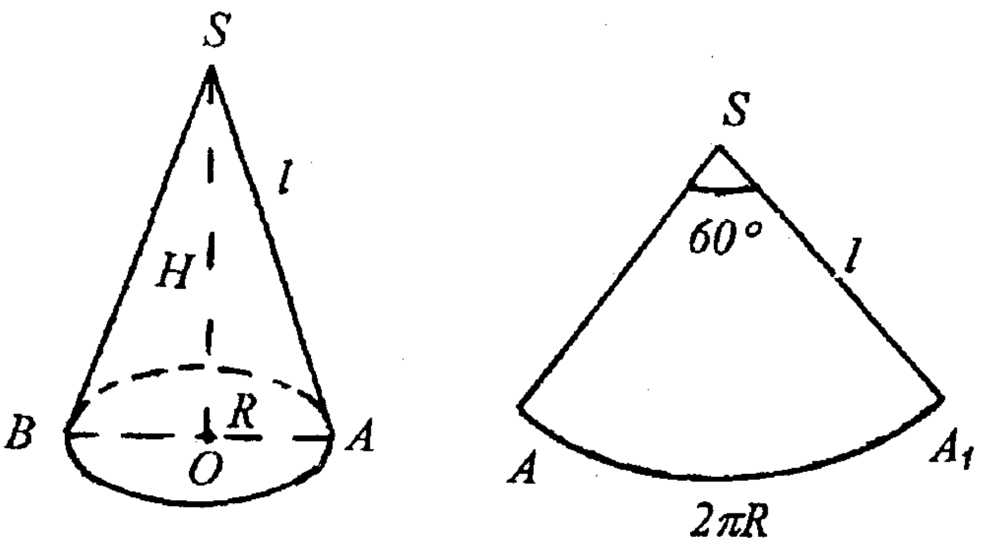
Жавоби: Е).

5. Берилган. SAB — конус, $S_т=\pi S$, ASA_1 — сектор, $\angle ASA_1=60°$, $SA=l$.

$V_к$ ҳисоблансин (13.3.5-чизма).

Ечилиши. Агар конус асосининг радиуси R, баландлиги H, ясовчиси l бўлса, унинг тўла сирти $S_т=\pi Rl+\pi R^2$, ҳажми эса $V_к=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot H$ формула бўйича ҳисобланади.

Конус ёйилмасининг бурчаги 60° бўлганлигидан унинг юзи доира юзининг $\frac{1}{6}$ қисмига тенг, яъни агар доиранинг юзи $S_д=\pi l^2$ бўлса, $S_c=\frac{1}{6}\pi l^2$ бўлади. Ик-



13.3.5-чизма.

кинчи томондан, секторнинг юзи конус ён сиртининг юзига тенгдир: $S_{\text{ён.}}=S_{\text{с}}$ ёки $\pi\cdot R\cdot l=\frac{1}{6}\pi l^2$ ва $l=6R$.

У ҳолда конуснинг тўла сирти учун $\pi Rl+\pi R^2=RS$ ифодани оламиз ва $l=6R$ ни келтириб қўйсак, $6R^2+R^2=S$, $7R^2=S$, $R^2=\frac{1}{7}S$ бўлади.

Тўғри бурчакли ΔSOA дан: $H^2=l^2-R^2$, $H^2=(6R)^2-R^2=35R^2$ ва $H=R\sqrt{35}$.

Энди конуснинг ҳажмини ҳисоблаймиз:

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{S}{7}\cdot\sqrt{\frac{S}{7}\cdot 35}=\frac{\pi S\sqrt{5S}}{21}.$$

Жавоби: С).

6. Берилган. SAB — конус, $\angle ASO=\alpha$, $OK=d$.

$S_{\text{т}}$ ҳисоблансин (13.3.6-чизма).

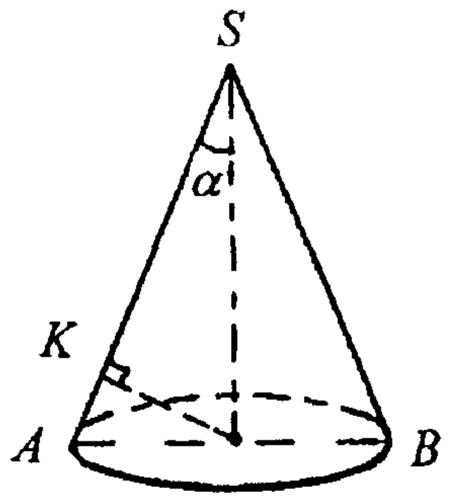
Ечилиши. Конус асосининг марказидан ясовчисигача бўлган масофа SA ясовчига асоснинг марказидан ўтказилган OK перпендикулярнинг узунлигига тенг: $OK=d$. OK перпендикуляр ёрдамида тўғри бурчакли ΔSKO ни ҳосил қиламиз: $OK=d$, $\Delta OSK=\alpha$. Бу учбурчакдан:

$$\sin\alpha=\frac{OK}{SO} \text{ ва } SO=\frac{d}{\sin\alpha}$$

Тўғри бурчакли ΔSAO дан:

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{AO}{SO},\ AO=R=SO\cdot\mathrm{tg}\alpha=$$

$$=\frac{d}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{d}{\cos\alpha},$$



13.3.6-чизма.

$$\sin\alpha=\frac{R}{l},\ l=\frac{R}{\sin\alpha}=\frac{d}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}.$$

Энди конуснинг тўла сирти юзини ҳисоблаймиз:

$$S_{т.}=\frac{\pi d}{\cos\alpha}\cdot\frac{d}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}+\frac{\pi d^2}{\cos^2\alpha}(1+\sin\alpha)$$

ёки $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin2\alpha$; $1+\sin\alpha=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

бўлганлигидан, $S_т=\dfrac{4\pi dd^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin2\alpha\cdot\cos\alpha}$. Иккинчи томондан, $\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

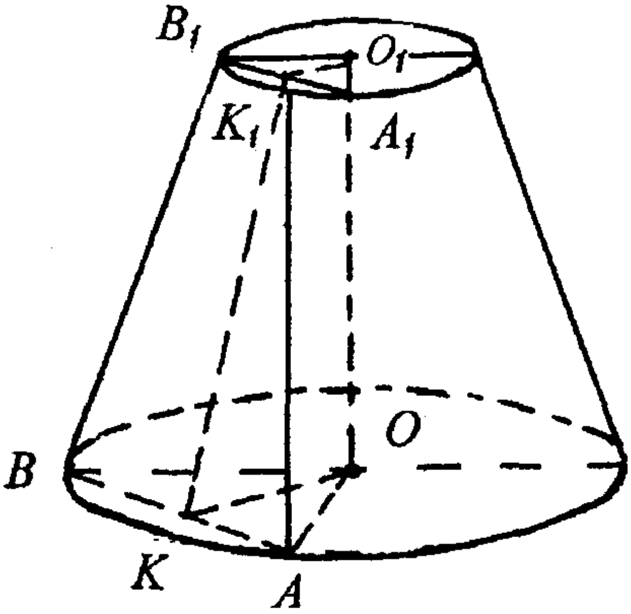
Шунинг учун,

$$S_т=\frac{2\pi d^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin2\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{2\pi d^2\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin2\alpha}.$$

Жавоби: Д).

7. Берилган. $OO_1AA_1BB_1$ — кесик конус, $\cup ACB=90°$, $\angle K_1KO=60°$, $OA=R$, $O_1A_1=r$.

$S_{AA_1B_1B}$ ҳисоблансин (13.3.7-чизма).



13.3.7-чизма.

Ечилиши. AA_1B_1B тенг ёнли трапециядир. Унинг асосларининг ўрталаридаги K ва K_1 нуқталарни туташтирсак, $KK_1 \perp AB$ бўлади. Уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага асосан (8-§), $OK \perp AB$ бўлади. Шу сабабли кесим ва асос текислиги орасидаги икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги $\angle K_1KO=60°$.бўлади.

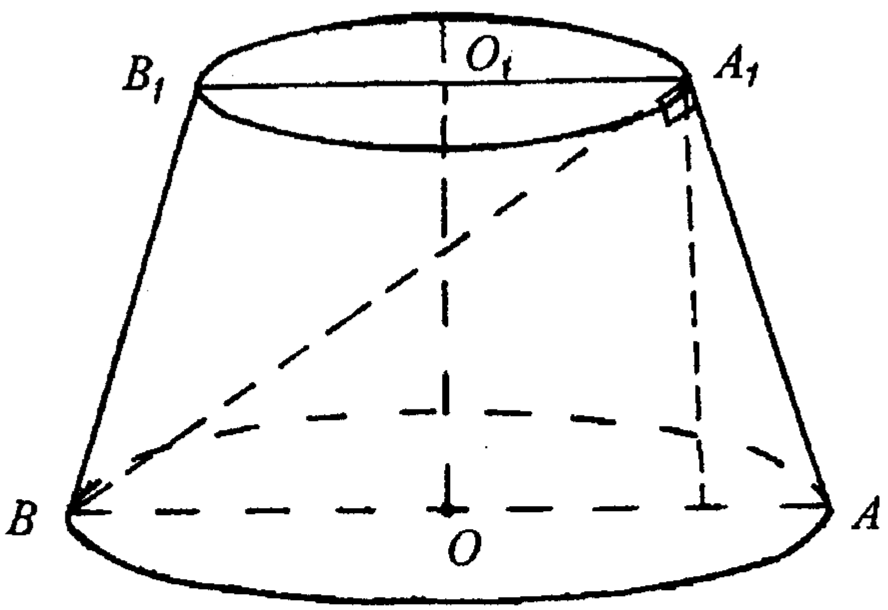
Берилишига кўра, AOB тўғри бурчакли ва тенг ёнлидир: $OA=OB$, $AOB=90°$. У ҳолда $AB=\sqrt{R^2+R^2}=$ $=R\sqrt{2}$, $OK=BK=\frac{R\sqrt{2}}{2}$. Шунга ўхшаш, $A_1B_1=r\sqrt{2}$; $OK_1=\frac{r\sqrt{2}}{2}$ бўлади. K нуқтадан кесик конуснинг пастки асосига перпендикуляр ўтказамиз: $K_1E \perp OK$, $KE=OK-OE=OK-O_1K_1$;

$KE=\frac{R\sqrt{2}}{2}-\frac{r\sqrt{2}}{2}=\frac{(R-r)\sqrt{2}}{2}$ бўлади. Сўнгра тўғри бурчакли ΔKEK_1 дан:

$$\cos 60°=\frac{KE}{KK_1},\ KK_1=\frac{KE}{\cos 60°}=\frac{(R-r)\sqrt{2}}{2\cdot\frac{1}{2}}=(R-r)\sqrt{2}.$$

У ҳолда тенг ёнли AA_1B_1B трапециянинг юзи:

$$S_{\text{кес.}}=\frac{AB+A_1B_1}{2}KK_1=\frac{(R+r)\sqrt{2}}{2}\cdot(R-r)\sqrt{2}=R^2-r^2.$$



13.3.8-чизма.

8. Б е р и л г а н. ABB_1A_1 — кесик конус, $A_1B=d$, $\angle A_1BA=\alpha$, $\angle BA_1A=90°$.

$S_{ён.}$ ҳ и с о б л а н с и н (13.3.8-чизма).

Е ч и л и ш и. Маълумки, кесик конус ён сиртининг юзи

$$S_{ён.}=\pi l(R-r)$$

формула бўйича ҳисобланади. ΔA_1BA тўғри бурчакли бўлганлигидан, $\frac{A_1B}{AB}=\cos\alpha$, $AB=\frac{A_1B}{\cos\alpha}=\frac{d}{\cos\alpha}$; $AA_1=d\cdot\mathrm{tg}\alpha$; $AK=AA_1\cdot d\cdot\mathrm{tg}\alpha\cdot\sin\alpha$.

Кесик конус юқори асосининг радиусини топамиз:

$$r=OK=O_1A_1=AO-AK=\frac{d}{2\cos\alpha}-\frac{d\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=$$

$$=\frac{d}{2\cos\alpha}(1-2\sin^2\alpha)$$

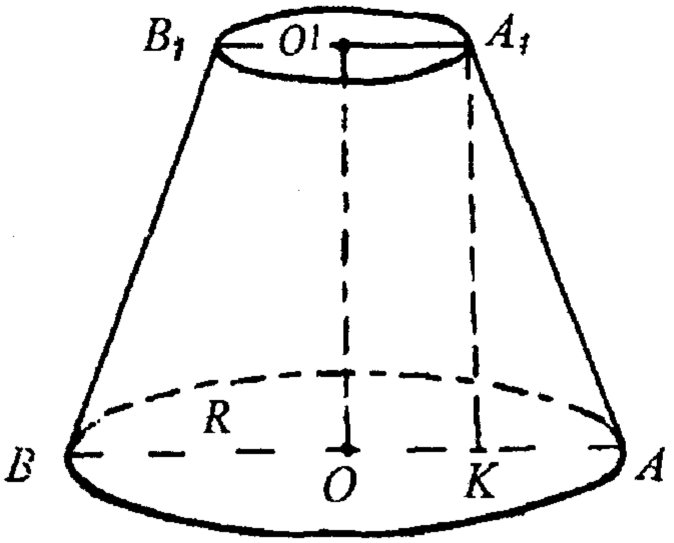
ёки $r=\frac{d\cos 2\alpha}{2\cos\alpha}$. У ҳолда, кесик конуснинг ён сирти

$$S_{ён}=\pi d\text{tg}\alpha\left(\frac{d}{2\cos\alpha}+\frac{d\cos 2\alpha}{2\cos\alpha}\right)=\frac{\pi d^2\text{tg}\alpha}{2\cos\alpha}(1+\cos 2\alpha)=$$

$$=\frac{\pi d^2\text{tg}\alpha\cdot 2\cos^2\alpha}{2\cos\alpha}=\pi d^2\sin\alpha\,.$$

9. Берилган. $OO_1ABB_1A_1$ — кесик конус, $OA=R$, $O_1A_1=r$, $\angle A_1AO=45°$.

$V_{к.к.}$ ҳисоблансин (13.3.9-чизма).



13.3.9-чизма.

Ечилиши. Маълумки, кесик конуснинг ҳажми

$$V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+r^2+Rr)$$

формула бўйича ҳисобланади. A_1 нуқтадан $A_1K\perp OA$ ўтказамиз. У ҳолда, $OK=O_1A_1$, $AK=OA-OK=R-r$. ΔAA_1K тўғри бурчакли ва $\angle A_1AK=45°$ бўлганлигидан у тенг ёнли ҳам бўлади, $A_1K=AK=R-r$.

Энди кесик конуснинг ҳажмини ҳисоблаймиз:

$$V_{к.к.}=\frac{1}{3}\pi(R-r)(R^2+Rr+r^2) \text{ ёки } V_{к.к.}=\frac{1}{3}\pi(R^3-r^3).$$

Жавоби: Е).

13.4. Мустақил ечиш учун масалалар

1. Конус асосининг радиуси R га тенг. Конуснинг баландлигини (учидан асосига қараб) $m:n$ нисбатда бўлувчи параллел кесимнинг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{4\pi R^2}{m^2+n^2}$; B) $\frac{2\pi R^2 m}{(m+n)^2}$; C) $\frac{\pi R^2 m^2}{(m+n)^2}$; Д) $\frac{\pi R^2 n^2}{(m+n)^2}$;

E) $\frac{2\pi R^2 n}{(m-n)^2}$.

2. Конус баландлигининг ўртасидан унинг l ясовчисига параллел тўғри чизиқ ўтказилган. Конуснинг ичида ётувчи тўғри чизиқ кесмасининг узунлиги топилсин.

A) 0,75 l; B) 2 l; C) 3 l; Д) 0,5 l; E) 1,25 l.

3. Тенг томонли (ўқ кесими мунтазам учбурчакдан иборат) конус асосининг радиуси R. Ораларидаги бурчак 30° бўлган икки ясовчи орқали ўтказилган кесимнинг юзи ҳисоблансин.

A) 2,5 R^2; B) 4 R^2; C) $\frac{1}{2}R^2$; Д) R^2; E) $2R^2$.

4. Агар конуснинг ўқ кесими тўғри бурчакли учбурчакдан иборат бўлса, конус ёйилмасининг бурчаги топилсин.

A) 225°; B) 255°; C) 280°; Д) 270°; E) 235°.

5. Конус асосининг радиуси R. Конуснинг учидан асос текислиги билан 60° ли бурчак ташкил қилиб, асосидаги айланадан 120° ли ёй ажратувчи кесим ўтказилган. Шу кесимнинг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{R^2\sqrt{2}}{8}$; B) $\frac{R^2\sqrt{2}}{4}$; C) $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$; Д) $\frac{R^2\sqrt{2}}{2}$; E) $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$.

6. Ярим доирадан конус ясалган бўлса, конуснинг ўқ кесими учидаги бурчак топилсин.

A) 75°; B) 90°; C) 60°; Д) 45°; E) 30°.

7. Конуснинг ўқ кесими учидаги бурчак 2α, ўқ кесимнинг юзи Q. Конус тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{2\pi Q\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha}$; B) $\frac{\pi Q\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}$; C) $\pi Q\cdot\mathrm{ctg}\alpha$;

Д) $\frac{\pi Q\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha}$; E) $\frac{\pi Q\cdot\mathrm{ctg}\alpha}{\sin^2\alpha}$.

8. Конуснинг баландлиги асосининг диаметрига тенг. Конуснинг асоси ва ён сирти юзларининг нисбати топилсин.

A) $\frac{5}{4}$; B) $\frac{3}{2}$; C) $\frac{\sqrt{7}}{7}$; Д) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

9. Конус асосининг радиуси R, ёйилмасидаги марказий бурчак 90°. Конуснинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $\frac{2}{3}\pi R^2\sqrt{11}$; B) $\frac{1}{3}\pi R^3\sqrt{15}$; C) $\frac{1}{3}\pi R^3\sqrt{11}$;

Д) $\frac{1}{3}\pi R^3\sqrt{13}$; E) $\frac{2}{3}\pi R^3\sqrt{5}$.

10. Конуснинг ўқ кесими учидаги бурчак 2α, баландлиги ва ясовчисининг йиғиндиси m га тенг. Конуснинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $\frac{1}{3}\pi m^3 \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha$; B) $\frac{\pi m^3\cos^2\frac{\alpha}{2}}{6\,\mathrm{tg}\alpha}$; C) $\frac{\pi m^3\sin 2\alpha}{6\cos\alpha}$;

Д) $\frac{1}{3}\pi m^3 \mathrm{ctg}\alpha$; E) $\frac{\pi m^3\cos\alpha\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}{6\cos^4\frac{\alpha}{2}}$.

11. Кесик конус асосларининг радиуслари 11 см ва 27 см, ясовчиси ва баландлигининг нисбати 17:15 каби бўлса, ўқ кесимнинг юзи ҳисоблансин.

A) 1020; B) 980; C) 1140; Д) 1440; E) 1200 см^2.

12. Кесик конуснинг баландлиги H, ясовчиси l бўлиб, ён сирти S га тенг. Кесик конус ўқ кесимининг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{SH}{4\pi}$; B) $\frac{SH}{2\pi}$; C) $\frac{SH}{\pi}$; Д) $\frac{SH}{l\pi}$; E) $\frac{SH}{l}$.

13. Кесик конуснинг ясовчиси 17 см, ўқ кесимининг юзи 420 см^2 ва ўрта кесимнинг юзи 196π см^2. Кесик конуснинг ҳажми ҳисоблансин.

A) 3020π; B) 2860π; C) 3240π; Д) 2980π;
E) 3080π см^3.

14. Конуснинг ўқ кесими баландлиги $5\sqrt{3}$ см бўлган тенг томонли учбурчак бўлса, конус ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) 60π; В) 50π; С) 48π; Д) 44π; Е) 64π см².

15. Конуснинг ясовчиси 10 м ва асос текислиги билан 30° ли бурчак ташкил қилади. Конус ўқ кесимининг юзи ҳисоблансин.

А) $24\sqrt{2}$; В) $25\sqrt{2}$; С) 25; Д) $25\sqrt{3}$; Е) 28 см².

16. Конуснинг баландлиги 8 см, асосининг радиуси 6 см. Конуснинг иккита ясовчиси орасидаги бурчак 90° бўлса, улар орқали ўтказилган кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) 44; В) 56; С) 48; Д) 60; Е) 50 см².

17. Конусда ораларидаги бурчак 60° бўлган ясовчилар орқали кесим ўтказилган. Конуснинг асоси марказидан кесимгача бўлган масофа 3 см, конуснинг баландлиги ва кесим орасидаги бурчак 30° бўлса, кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) 24; В) $12\sqrt{3}$; С) $16\sqrt{3}$; Д) $16\sqrt{2}$; Е) $8\sqrt{3}$ см².

18. Конуснинг баландлиги h, баландлик ва ясовчиси орасидаги бурчак α бўлса, конус ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{\pi h^2 \mathrm{tg}\alpha}{\cos\alpha}$; В) $\frac{\pi h^2 \sin\alpha}{1+\cos^2\alpha}$; С) $\frac{\pi h^2 \mathrm{ctg}\alpha}{1+\sin^2\alpha}$; Д) $\frac{\pi h^2 \mathrm{ctg}\alpha}{\cos\alpha}$;
Е) $\frac{\pi h^2}{\sin\alpha}$.

19. Конуснинг ясовчиси l, унинг ўқ кесими учидаги бурчак 2α бўлса, ўқ кесимнинг периметри топилсин.

А) $2l\sin 2\alpha$; В) $2l(1+\sin\alpha)$; С) $l(2+\sin\alpha)$; Д) $l(2+\cos\alpha)$;
Е) $2l(1+\cos\alpha)$.

20. Конус асосининг юзи S, ясовчиси эса асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Конус ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) $S(1+\cos\alpha)$; B) $S\cdot\cos\alpha$; C) $S\cdot\sin\alpha$; Д) $\frac{S}{\cos\alpha}$;

E) $\frac{S}{\sin\alpha}$.

21. Конус асосининг юзи S, тўла сиртининг юзи $3S$ га тенг. Конуснинг ясовчиси асос текислиги билан қандай бурчак ташкил этади?

A) 15°; B) 45°; C) 30°; Д) 75°; E) 60°.

22. Конуснинг ясовчиси l бўлиб, асоси текислиги билан α бурчак ташкил қилади. Конус ўқ кесимининг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{1}{4}l^2\sin\alpha$; B) $2l^2\sin\alpha$; C) $\frac{1}{2}l^2\sin2\alpha$; Д) $l^2\sin2\alpha$;

E) $\frac{1}{2}l^2\sin\alpha$.

23. Конуснинг баландлиги h, асосининг радиуси r. Конуснинг асосидаги ватар 60° ли ёйнинг учларини туташтиради. Шу ватар ва конуснинг учи орқали текислик ўтказилган. Ҳосил қилинган кесимнинг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{1}{4}r\sqrt{4h^2+3r^2}$; B) $r\sqrt{4h^2+3r^2}$; C) $\frac{1}{2}r\sqrt{4h^2+3r^2}$;

Д) $r^2\sqrt{4h+3r}$; E) $\frac{1}{2}r^2\sqrt{4h^2+3r^2}$.

24. Кесик конус асосларининг радиуслари 3 ва 6 дм, ясовчиси эса 5 дм. Кесик конус ўқ кесимининг юзи ҳисоблансин.

A) 40; B) 36; C) 42; Д) 32; E) 48 дм^2.

25. Конуснинг ёйилмаси ёйининг катталиги 270° бўлган доиравий сектордан иборат. Конуснинг ўқ кесими учидаги бурчак топилсин.

A) $2\arccos\frac{3}{4}$; B) arctg2; C) $\arcsin\frac{3}{4}$; Д) $2\arcsin\frac{3}{4}$;

E) $\arccos\frac{3}{4}$.

26. Конуснинг баландлиги h бўлиб, унинг асосига параллел текислик ўтказилган. Ҳосил қилинган кесимнинг юзи конус асосининг юзидан икки марта кичик. Конуснинг учидан кесимгача бўлган масофа топилсин.

A) $1{,}5h$; B) $2h$; C) $\sqrt{2}\,h$; Д) $\frac{1}{2}h$; E) $\frac{\sqrt{2}}{2}h$.

27. Конус асосининг юзи S, ён сиртининг юзи Q бўлса, унинг ўқ кесимининг юзи ҳисоблансин.

A) $\sqrt{Q^2 - S^2}$; B) $\frac{Q+S}{2}$; C) $\frac{\sqrt{Q^2-S^2}}{\pi}$; Д) $\frac{\sqrt{QS}}{\pi}$;

E) $\frac{\sqrt{Q^2+S^2}}{\pi}$.

28. Конуснинг асосидаги 120° ли ёйга тиралган ватар ва конуснинг учи орқали текислик ўтказилган бўлиб, у асос текислиги билан 45° ли бурчак ташкил этади. Агар конус асосининг радиуси 4 см бўлса, ҳосил қилинган кесимнинг юзи ҳисоблансин.

A) $6\sqrt{5}$; B) $4\sqrt{6}$; C) $5\sqrt{6}$; Д) $4\sqrt{3}$; E) $5\sqrt{3}$ см².

29. Конуснинг ён сирти ва тўла сирти юзларининг нисбати 7:8 каби бўлса, конуснинг ясовчиси ва асоси текислиги орасидаги бурчак топилсин.

A) $\arccos\frac{1}{7}$; B) $\arccos\frac{1}{8}$; C) $\arccos\frac{1}{15}$; Д) $\arccos\frac{1}{56}$;

E) $\arccos\frac{7}{8}$.

30. Конус ён сиртининг ёйилмаси катталиги 270° бўлган доиравий сектордан иборат. Конуснинг ясовчиси ва баландлиги орасидаги бурчак топилсин.

A) $\arccos\frac{3}{4}$; B) $\arccos\frac{3}{5}$; C) $\arcsin\frac{3}{5}$; Д) $\arcsin\frac{3}{4}$;

E) arctg2.

31. Конус ўқ кесимининг учидаги бурчаги α. Агар конуснинг ён сирти текисликка ёйилган бўлса, ёйилманинг марказий бурчаги топилсин.

А) $180°\sin\frac{\alpha}{2}$; В) $360°\cos\frac{\alpha}{2}$; С) $\frac{360°}{\cos\alpha}$; Д) $180°\cos\frac{\alpha}{2}$;

Е) $360°\sin\frac{\alpha}{7}$.

32. Конуснинг учидан унинг асоси текислигига φ бурчак остида оғма текислик ўтказилган. Бу текислик асос айланасидан катталиги α бўлган ёй ажратади. Ҳосил қилинган кесимнинг учидаги бурчак топилсин.

А) $\mathrm{arctg}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\varphi\right)$; В) $\mathrm{arcctg}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\varphi\right)$;

С) $2\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\varphi\right)$; Д) $2\arccos\left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\varphi\right)$;

Е) $2\arcsin\left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$.

33. Кесик конус асосларининг радиуслари 3 ва 6 дм, ясовчиси 5 дм бўлса, унинг ясовчиси ва асос текислиги орасидаги бурчак топилсин.

А) $\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$; В) $\arcsin\frac{4}{5}$; С) $\arcsin\frac{3}{5}$; Д) $\arcsin\frac{3}{4}$;

Е) $2\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$.

34. Конуснинг баландлиги 2 дм, асосининг радиуси 17 см. Конуснинг учидан ўтиб, асосининг марказидан 12 см узоқликда ётган кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) 2; В) 3; С) 2,4; Д) 2,8; Е) 2,1 дм^2.

35. Конуснинг баландлиги a. Конус баландлигининг ўртасидан унинг ясовчисига параллел тўғри чизиқ ўтказилган. Агар конус асосининг радиуси $\frac{a}{2}$ бўлса, ўтказилган тўғри чизиқ ва конуснинг асоси орасидаги бурчак топилсин.

A) $\arccos\frac{3}{5}$; B) $\arcsin\frac{3}{4}$; C) arctg4; Д) arctg2;

E) arcctg2.

36. Кесик конус асосларининг радиуслари 11 ва 27 см, ясовчиси ва баландлигининг нисбати 17:15 каби. Кесик конус ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) 1144π; B) 1200π; C) 960π; Д) 1180π; E) 1292π см^2.

37. Кесик конуснинг ясовчиси a бўлиб, асос текислиги билан α бурчак ташкил қилади. Кесик конус асослари радиусларининг нисбати 2:3 каби бўлса, унинг асослари юзлари ҳисоблансин.

A) $4\pi a^2\cos2\alpha$, $9\pi a^2\cos2\alpha$; B) $3\pi a^2\sin^2\alpha$, $7\pi a^2\sin^2\alpha$;
C) $4\pi a^2\cos^2\alpha$, $9\pi a^2\cos^2\alpha$; Д) $6\pi a^2$, $14\pi a^2$;
E) $6\pi a^2\cos^2\alpha$, $12\pi a^2\cos^2\alpha$.

38. Кесик конус ўқ кесимининг диагонали a га тенг бўлиб, асос текислиги билан α бурчак ташкил қилади. Кесик конус асослари радиусларининг нисбати 1:3 каби бўлса, кесик конуснинг ясовчиси топилсин.

A) $2a(1+\sin2\alpha)$; B) $\frac{a}{2}\sqrt{1+3\sin^2\alpha}$; C) $a\sqrt{1+2\sin^2\alpha}$;

Д) $\frac{a}{4}\sqrt{2+3\sin^2\alpha}$; E) $\frac{a}{3}\sqrt{1+2\cos^2\alpha}$.

39. Конуснинг ясовчиси 25 см, тўла сиртининг юзи 224π см^2 бўлса, унинг баландлиги топилсин.

A) 2; B) 18; C) 26; Д) 24; E) 21 см.

40. Конуснинг ясовчиси 25 см, баландлигининг ўртасидан ясовчисигача бўлган масофа 6 см бўлса, конус тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) 6π ёки 9π; B) 4π ёки 8π; C) 8π ёки 9π;
Д) $6{,}4\pi$ ёки $5{,}6\pi$; E) $7{,}2\pi$ ёки $8{,}0\pi$ дм^2.

41. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари 3 ва 4 дм бўлиб, учбурчак ўз гипотенузаси атрофида ай-

47. Кесик конуснинг ҳажми 129π см^3, баландлиги 9 м, ясовчисининг асосидаги проекцияси 5 м. Кесик конус юқори асосининг радиуси топилсин.

А) 4; В) 2,5; С) 1; Д) 3; Е) 2 см.

14-§. ШАР ВА СФЕРА

14.1. Асосий тушунчалар ва тасдиқлар

Шар — фазонинг берилган нуқтадан берилган масофадан катта бўлмаган узоқликда ётган ҳамма нуқталаридан иборат жисмдир. Берилган нуқта шарнинг *маркази*, берилган масофа эса шарнинг *радиусидир* (14.1-чизма).

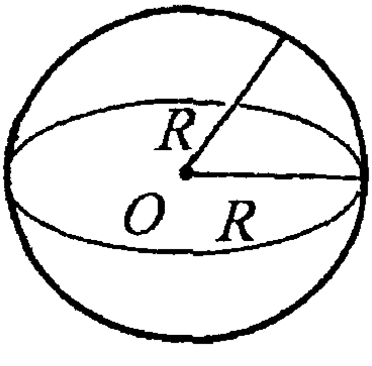
Шар сирти ёки сфера шарнинг чегарасидир, яъни шарнинг марказидан радиусга тенг масофа қадар узоқлашган барча нуқталари сферанинг нуқталаридир.

Агар сфера марказининг координаталари (a; b; c), радиуси R бўлса, унинг тенгламаси

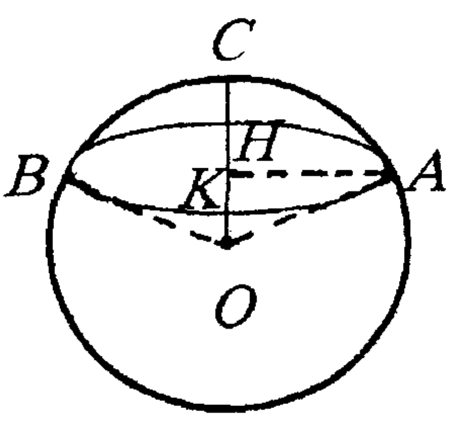
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \qquad (14.1)$$

кўринишда ёзилади.

Шар сегменти шарнинг шарни кесувчи текислик билан чегараланган қисмидан иборат, 14.2-чизмада



14.1-чизма.



14.2-чизма.

47. Кесик конуснинг ҳажми 129π см^3, баландлиги 9 м, ясовчисининг асосидаги проекцияси 5 м. Кесик конус юқори асосининг радиуси топилсин.

A) 4; B) 2,5; C) 1; Д) 3; E) 2 см.

14-§. ШАР ВА СФЕРА

14.1. Асосий тушунчалар ва тасдиқлар

Шар — фазонинг берилган нуқтадан берилган масофадан катта бўлмаган узоқликда ётган ҳамма нуқталаридан иборат жисмдир. Берилган нуқта шарнинг *маркази*, берилган масофа эса шарнинг *радиусидир* (14.1-чизма).

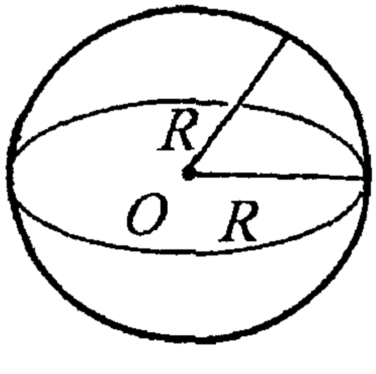
Шар сирти ёки сфера шарнинг чегарасидир, яъни шарнинг марказидан радиусга тенг масофа қадар узоқлашган барча нуқталари сферанинг нуқталаридир.

Агар сфера марказининг координаталари (a; b; c), радиуси R бўлса, унинг тенгламаси

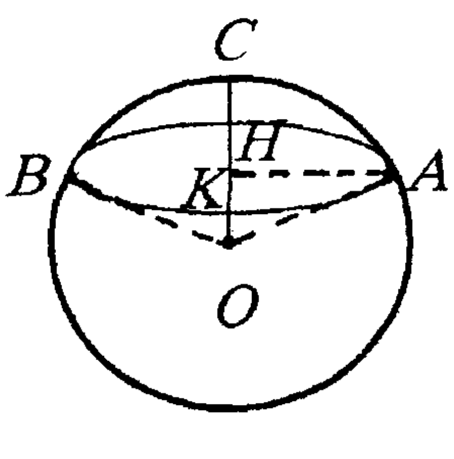
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \qquad (14.1)$$

кўринишда ёзилади.

Шар сегменти шарнинг шарни кесувчи текислик билан чегараланган қисмидан иборат, 14.2-чизмада



14.1-чизма.



14.2-чизма.

AKBCA шар сегментидир. Кесувчи текислик шарни иккита сегментга ажратади.

Агар шар сегменти асосидаги нуқталарни (агар у яримшардан кичик бўлса) шар маркази билан туташтирсак, конус ҳосил бўлади ва унинг сирти шар сегменти билан биргаликда *шар секторини* ташкил қилади. Агар шар сегменти яримшардан катта бўлса, шарнинг шу конус чиқариб ташланган қисми *шар секторидир* (14.2-чизмада *AOBCA* – шар сектори).

Шарнинг уни кесувчи параллел текисликлар билан чегараланган қисми *шар камаридир.*

Шар сегментининг *баландлиги* сегмент асосининг марказидан асосга ўтказилган перпендикулярнинг шар сирти билан кесишиш нуқтасигача бўлган масофадир.

14.1. Сферанинг радиуси R бўлса, унинг сирти

$$S=4\pi R^2 \qquad (14.2)$$

формула бўйича ҳисобланади.

14.2. Агар берилган шардаги сегментнинг баландлиги H, сферанинг радиуси R га тенг бўлса, шар сегменти ён сиртининг юзи

$$S=2\pi RH \qquad (14.3)$$

формуладан топилади.

14.3. Шар сектори сиртининг юзи

$$S_{\text{сект.}}=S_{\text{сегм.}}+S_{\text{конус}} \qquad (14.4)$$

формула бўйича ҳисобланади.

14.4. Шарнинг радиуси R бўлса, унинг ҳажми

$$V_{\text{т.}}=\frac{4}{3}\pi R^3 \qquad (14.5)$$

формула бўйича ҳисобланади.

14.5. Шарнинг радиуси R, шар сегментининг баландлиги H бўлса, шар сегментининг ҳажми

$$V_{\text{сегм.}}=\pi H^2\left(R-\frac{1}{3}H\right), \qquad (14.6)$$

шар секторининг ҳажми эса

$$V_{\text{сегм}}=\frac{2}{3}\pi R^2\text{H} \qquad (14.7)$$

формула бўйича ҳисобланади.

14.2. Мавзуга оид масалалар

1. Шарнинг радиуси 63 см. Шарга уринма текисликдаги битта нуқта уриниш нуқтасидан 16 см узоқликда ётади. Шу нуқтадан шар сиртигача бўлган энг қисқа масофа топилсин.

А) 8 см; В) 6 см; С) 4 см; Д) 2 см; Е) 3 см.

2. Иккита шарнинг радиуслари 25 ва 29 дм, марказлари орасидаги масофа 36 дм. Шу шарларнинг сиртлари кесишган чизиқ узунлиги топилсин.

А) 8π; В) 4π; С) 3π; Д) 6π; Е) 12π дм.

3. Шарнинг радиуси a. Радиуснинг учидан ўтказилган текислик шу радиус билан 60° ли бурчак ташкил қилади. Ҳосил қилинган кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) $\frac{\pi a^3}{4}$; В) $\frac{\pi a^2}{3}$; С) $\frac{\pi a^2}{8}$; Д) $\frac{\pi a^2}{2}$; С) $2\pi a^2$.

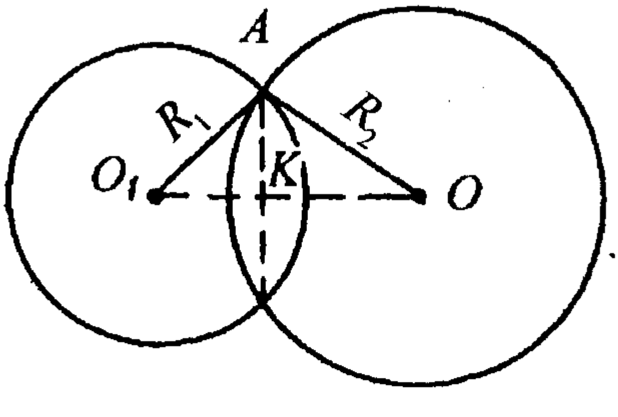
4. Шар камари асосларининг радиуслари 3 ва 4 м, унинг сферасининг радиуси 5 м. Агар камарнинг асослари шар марказининг ҳар хил томонида ётса, камарнинг ҳажми ҳисоблансин.

А) 96π; В) 86π; С) 72π; Д) 66π; Е) 64π м³.

5. Шар секторининг ҳажми 512π см³, мос сегмент сиртининг юзи эса 96π см². Шар секторининг баландлиги топилсин.

А) 4,5; В) 5; С) 2,5; Д) 4; Е) 3 см.

насининг радиусини $AK=r$ деб белгилаймиз. Бундан ташқари, $OK=x$ деб белгилаймиз, $O_1K=$ $=36-x$ бўлади. Иккита тўғри бурчакли ΔO_1AK ва ΔOAK ни қараймиз. Улардан Пифагор теоремасига асосан:



14.3.2- чизма.

$$\begin{cases} r^2 = R^2 - x^2, \\ r^2 = R_1^2 - (36-x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = 29^2 - x^2, \\ 29^2 - x^2 = 25^2 - (36-x)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2 = 29^2 - x^2, \\ 29^2 - 25^2 + 36^2 = x^2 + 72x + x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = 29^2 - x^2, \\ 4 \cdot 54 + 36^2 = 72x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2 = 29^2 - x^2, \\ 4 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 2 + 4^2 9^2 = 72x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = 29^2 - x^2, \\ x = \frac{36 \cdot 42}{72} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2 = 29^2 - x^2, \\ x = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = 29^2 - 21^2, \\ x = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 20, \\ x = 21 \end{cases} \text{дм.}$$

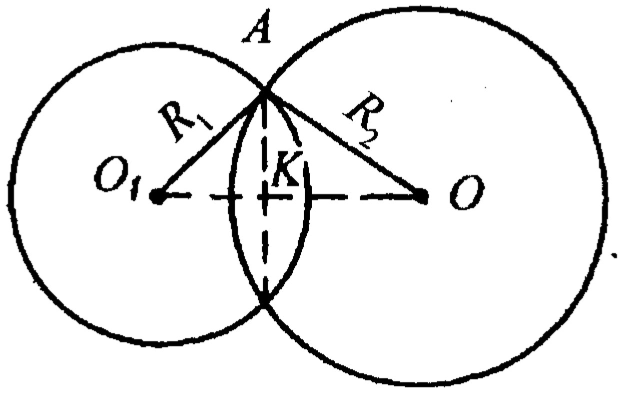
Демак, кесишиш чизиғи радиуси 20 дм бўлган айланадан иборат, унинг узунлиги $l = 2\pi \cdot 20$ дм$=4\pi \cdot$м.

Жавоби: B).

3. Берилган. (O, a) шар, $\angle OAB=60°$, $OA=a$.

$S_{\text{кес.}}$ ҳисоблансин (14.3.3-чизма).

Ечилиши. Кесимдаги доиранинг радиуси $O_1A=R$ бўлса, унинг юзи $S_{\text{кес}}=\pi R^2$ бўлади. Берилишига кўра, ΔAOB — тенг ёнли $OA=OB=a$ ва асосидаги бурчак-насининг радиусини $AK=r$ деб белгилаймиз. Бундан ташқари, $OK=x$ деб белгилаймиз, $O_1K==36-x$ бўлади. Иккита тўғри бурчакли ΔO_1AK ва ΔOAK ни қараймиз. Улардан Пифагор теоремасига асосан:



14.3.2- чизма.

$$\begin{cases} r^2 = R^2 - x^2, \\ r^2 = R_1^2 - (36-x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = 29^2 - x^2, \\ 29^2 - x^2 = 25^2 - (36-x)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2 = 29^2 - x^2, \\ 29^2 - 25^2 + 36^2 = x^2 + 72x + x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = 29^2 - x^2, \\ 4 \cdot 54 + 36^2 = 72x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2 = 29^2 - x^2, \\ 4 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 2 + 4^2 9^2 = 72x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = 29^2 - x^2, \\ x = \frac{36 \cdot 42}{72} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2 = 29^2 - x^2, \\ x = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = 29^2 - 21^2, \\ x = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 20, \\ x = 21 \end{cases} \text{дм.}$$

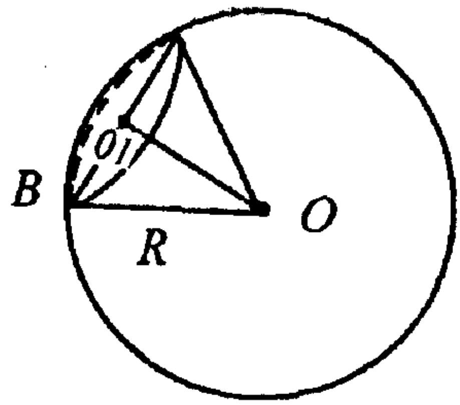
Демак, кесишиш чизиғи радиуси 20 дм бўлган айланадан иборат, унинг узунлиги $l = 2\pi \cdot 20$ дм$=4\pi \cdot$м.

Жавоби: В).

3. Берилган. (O, a) шар, $\angle OAB=60°$, $OA=a$.

$S_{кес.}$ ҳисоблансин (14.3.3-чизма).

Ечилиши. Кесимдаги доиранинг радиуси $O_1A=R$ бўлса, унинг юзи $S_{кес}=\pi R^2$ бўлади. Берилишига кўра, ΔAOB — тенг ёнли $OA=OB=a$ ва асосидаги бурчак-



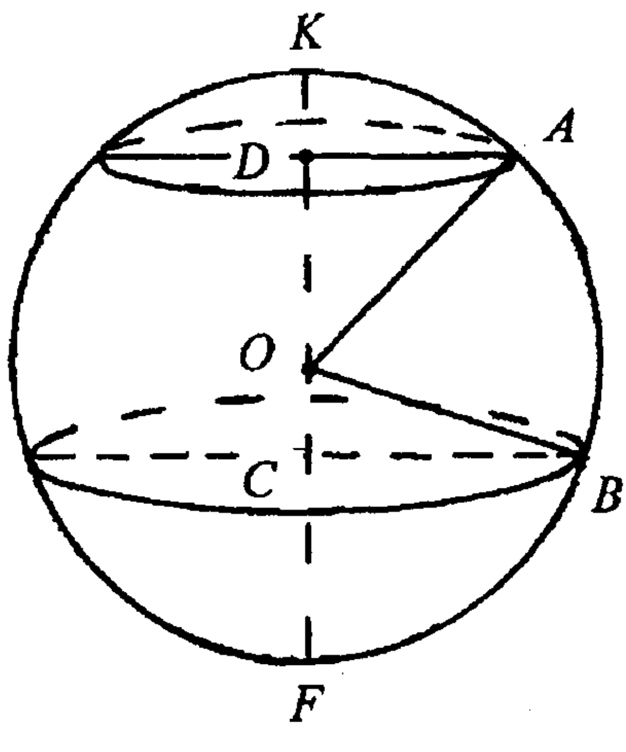
14.3.3-чизма.

лар 60° A дан бўлса, $\angle AOB = 60°$ бўлади, яъни ΔAOB — тенг томонли ва $AB = a$, яъни кесим доирасининг диаметри a бўлади. Демак, $R = \frac{1}{2}$, $AB = \frac{a}{2}$ ва кесимнинг юзи $S_{кес.} = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$ бўлади.

Жавоби: А).

4. Б е р и л г а н. (O, R) — шар, $AD = r_1 = 3$ м, $BC = r_2 = 4$ м, $R = 5$ м.

$V_{камар}$ ҳ и с о б л а н с и н (14.3.4-чизма).



14.3.4-чизма.

Е ч и л и ш и. Шар камарининг ҳажмини топиш учун ундаги иккита шар сегментининг ҳажмларини топиш етарли бўлади, сўнгра шарнинг ҳажмидан шу ҳажмларни айириб ташлаймиз. Маълумки, шар сегментининг ҳажми $V_{сегм} = \pi H^2\left(R - \frac{1}{3}H\right)$ формула бўйича ҳисобланади. Шаклда $CF = H_2$, $DK = H_1$ бўлсин. Тўғри бурчакли

ΔAOD дан: $OD = \sqrt{R^2 - r_1^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ м;

ΔBOC дан: $OC = \sqrt{R^2 - r_2^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ м.

У ҳолда $H_1=R-OD=5-4=1$ м; $H_2=R-OC=5-3=2$ м. Шар сегментларининг ҳажмлари, мос равишда,

$$V_1=\pi\cdot 4^2\left(5-\frac{1}{3}\cdot 4\right)=16\pi\cdot\frac{11}{3}=\frac{1}{3}16\cdot 11\pi \text{ м}^3;$$

$$V_2=\pi\cdot 3^2\left(5-\frac{1}{3}\cdot 3\right)36\pi \text{ м}^3.$$

Шарнинг ҳажми эса

$$V_{\text{ш.}}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\cdot 5^3=\frac{5000}{3}\pi \text{ м}^3.$$

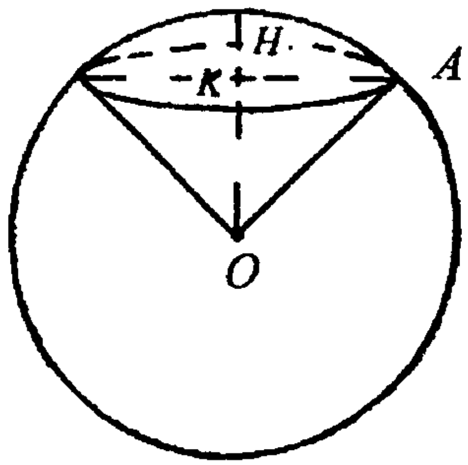
У ҳолда шар камарининг ҳажми

$$V_{\text{камар.}}=V_{\text{ш}}-V_1-V_2=\frac{500\pi}{3}-\frac{176}{3}\pi-36\pi=108\pi-36\pi=72\pi \text{ м}^3.$$

Жавоби: С).

5. Берилган. $(O,\ R)$ — шар, $V_{\text{ш.сект.}}=512\pi$; $S_{\text{ш.сегм.}}=96\ \pi$.

H топилсин (14.3.5-чизма).



14.3.5-чизма.

Ечилиши. Маълумки, шар секторининг ҳажми $V_{\text{ш.сект.}}=\frac{2}{3}\pi R^2H$ формуладан, шар сегментининг юзи

$$S_{\text{ш.сегм.}}=2\pi R\cdot H$$

формуладан топилади. $V_{\text{ш.сект.}}:$ $: S_{\text{ш.сегм.}}$ нисбатни тузамиз:

$$\frac{V_{\text{ш.сект.}}}{S_{\text{ш.сект.}}}=\frac{\frac{2}{3}\pi R^2H}{2\pi RH}\Rightarrow\frac{512}{96\pi}=\frac{R}{3}\Rightarrow\frac{16}{3}=\frac{R}{3}\Rightarrow R=16\text{ см}$$

ва $H=\dfrac{96\pi}{2\pi R}=\dfrac{96\pi}{2\pi\cdot 16}=3$ см.

Жавоби: Е).

14.4. Мустақил ечиш учун масалалар

1. Радиуси 41 см бўлган шар марказидан 9 дм узоқликда ётувчи текислик билан кесилган. Ҳосил қилинган кесимнинг юзи ҳисоблансин.

А) 12π; В) 22π; С) 24π; Д) 16π; Е) 18π дм^2.

2. Шарнинг сиртида учта нуқта берилган бўлиб, уларнинг ораларидаги тўғри чизиқ кесмалари 6, 8 ва 10 см. Шарнинг радиуси 13 см бўлса, шар марказидан шу учта нуқта орқали ўтказилган текисликкача бўлган масофа топилсин.

А) 12; В) 10; С) 13; Д) 14; Е) 16 см.

3. Шар камари асосларининг радиуслари 20 ва 24 м, шарнинг радиуси 25 м. Кесимлар шар марказининг бир томонида ётиши маълум бўлса, шар камари сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) 289π; В) 440π; С) 400π; Д) 360π; Е) 424π м^2.

4. Шар сегментининг баландлиги h, ўқ кесимидаги ёйнинг узунлиги 120°. Шар сегменти тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $12\pi h^2$; В) $7\pi h^2$; С) $8\pi h^2$; Д) $9\pi h^2$; Е) $6\pi h^2$.

5. Шарнинг диаметрига перпендикуляр бўлган текислик ўтказилган ва шу текислик билан шарнинг диаметри узунликлари 3 ва 9 см бўлган қисмларга ажралади. Ҳосил бўлган шар қисмларининг ҳажмлари ҳисоблансин.

А) 48π, 240π; В) 42π, 246π; С) 54π, 234π;
Д) 336π, 252π; Е) 45π, 243π см^3.

6. Агар шар сектори асосининг радиуси 60 см, шарнинг радиуси 75 см бўлса, шар секторининг ҳажми ҳисоблансин.

А) 1160π; В) 1180π; С) 1200π; Д) 1125π; Е) 1196π м^2.

7. Шарнинг радиуси 37 см. Шарнинг марказидан 23 см узоқликда кесим ўтказилган. Шу кесимнинг юзи ҳисоблансин.

A) 840π; B) 720π; C) 780π; Д) 820π; E) 800π см^2.

8. Шарнинг радиуси a бўлиб, радиуснинг учидан $30°$ ли бурчак ташкил қилувчи текислик ўтказилган. Ҳосил қилинган кесимнинг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{4}{5}\pi a^2$; B) $\frac{4}{3}\pi a^2$; C) $\frac{3}{4}\pi a^2$; Д) $\frac{1}{2}\pi a^2$; E) $\frac{2}{3}\pi a^2$.

9. A ва C нуқталар шарнинг OK радиусини учта тенг қисмга ажратади. A ва C нуқталардан радиусга перпендикуляр бўлган кесимлар ўтказилган. Шу кесимлар юзларининг нисбати топилсин.

A) 4:9; B) 5:8; C) 4:3; Д) 3:4; E) 7:12.

10. M нуқтадан шарга MK уринма ўтказилган ва $MK=12$. Агар шарнинг радиуси 5 бўлса, M нуқтадан шаргача бўлган масофа топилсин.

A) 12; B) 7; C) 9; Д) 6; E) 8.

11. Шарнинг K нуқтасидан ўзаро перпендикуляр бўлган учта KA, KB, KC ватар ўтказилган бўлиб, $KA=6$ см, $KB=13$ см, $KC=18$ см. Шарнинг радиуси узунлиги топилсин.

A) 10,5; B) 13; C) 15; Д) 11,5; E) 13,5 см.

12. Шарнинг радиуси 5 дм. Шар сиртидаги нуқтадан ўзаро перпендикуляр ва узунликларининг нисбати: 12:15:16 каби бўлган учта ватар ўтказилган. Ҳар бир ватарнинг узунлиги топилсин.

A) 48, 60, 64; B) 36, 48, 56; C) 24, 46, 60;
Д) 48, 56, 72; E) 42, 48, 56 см.

13. Шарда иккита ўзаро перпендикуляр ва юзлари 185π см^2 ва 320π см^2 бўлган кесимлар ўтказилган.

Бу кесимлар ўзаро кесишадиган ватарнинг узунлиги 16 см бўлса, шар радиусининг узунлиги топилсин.

А) 18; В) 21; С) 20; Д) 28; Е) 25 см.

14. Радиуси 18 см га тенг бўлган шарда иккита ўзаро перпендикуляр кесим ўтказилган. Агар кесимлар радиусларининг нисбати 2:3 каби ҳамда кесимлар ўзаро кесишадиган ватарнинг узунлиги 2 см бўлса, кесимлар радиусларининг узунликлари топилсин.

А) 16, 12; В) 12, 17; С) 10, 13; Д) 12, 14; Е) 10, 15 см.

15. Иккита шар берилган бўлиб, уларнинг радиуслари 41 см ва 5 дм, марказлари орасидаги масофа 21 см бўлса, шарлар кесишиш чизиғининг узунлиги топилсин.

А) 12π; В) 6π; С) 8π; Д) 9π; Е) 7π дм.

16. Иккита шар берилган бўлиб, уларнинг радиуслари 25 см ва 3 дм, шарлар кесишиш чизиғининг узунлиги 48π см бўлса, шарларнинг марказлари орасидаги масофа топилсин.

А) 20 ёки 16; В) 24 ёки 18; С) 23 ёки 12;
Д) 25 ёки 11; Е) 20 см ёки 12 см.

17. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари 3 дм ва 4 дм. Радиуси 65 см бўлган шар учбурчакнинг учларидан ўтади. Шардан учбурчак текислигигача бўлган масофа топилсин.

А) 6; В) 5; С) 8; Д) 10; Е) 4,5 дм.

18. Учбурчакнинг томонлари 13, 14 ва 15 см. Учбурчакнинг учларидан ўтувчи шарнинг маркази учбурчак текислигидан 9 см узоқликда жойлашган бўлса, шар радиусининг узунлиги топилсин.

А) $11\frac{3}{4}$; В) $12\frac{1}{8}$; С) $12\frac{1}{4}$; Д) $10\frac{3}{4}$; Е) $11\frac{1}{2}$ см.

19. Трапециянинг асослари 4 дм ва 48 см, баландлиги 8 см. Шу тенг ёнли трапециянинг учларидан ўтувчи шарнинг маркази трапеция текислигидан 6 дм узоқликда бўлса, шар радиусининг узунлиги топилсин.

А) 54; В) 62; С) 56; Д) 60; Е) 65 см.

20. Радиуси 1 дм бўлган шар ромбнинг барча томонларига уринади. Агар ромб диагоналларининг узунликлари 15 см ва 2 дм бўлса, шарнинг марказидан ромб текислигигача бўлган масофа топилсин.

А) 6; В) 12; С) 9; Д) 8; Е) 7 см.

21. Радиуси 15 см бўлган шар тенг ёнли трапециянинг барча томонларига уринади. Трапециянинг асослари 16 см ва 36 см бўлса, шарнинг марказидан трапеция текислигигача бўлган масофа топилсин.

А) 12; В) 8; С) 9; Д) 10; Е) 4 см.

22. Маркази O нуқтада бўлган шар a текисликка B нуқтада уринади ва A нуқта шу текисликда ётади ҳамда $OA=26$ см, $AB=24$ см. Шар сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) 6π; В) 4π; С) 5π; Д) $6{,}25\pi$; Е) $5{,}7\pi$ дм^2.

23. Шарнинг марказидан 8 см узоқликда текислик ўтказилган бўлиб, ҳосил қилинган кесимдаги доиранинг радиуси 6 см. Шарнинг ҳажми ҳисоблансин.

А) $\frac{4}{3}\pi$; В) $\frac{3}{4}\pi$; С) $\frac{4}{5}\pi$; Д) 4π; Е) $\frac{4}{7}\pi$ дм^3.

24. Биринчи шар сиртининг юзи 396π м^2. Иккинчи шарнинг радиуси биринчи шарнинг радиусидан 3 марта кичик бўлса, иккинчи шар сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) 48π; В) 46π; С) 42π; Д) 56π; Е) 44π м^2.

25. Биринчи шар сиртининг юзи 43π га тенг. Иккинчи шарнинг ҳажми биринчи шарнинг ҳажмидан 27 марта катта бўлса, унинг сирти юзи ҳисоблансин.

А) 368π; В) 356π; С) 422π; Д) 387π; Е) 400π.

26. Шар сегментининг баландлиги H, ўқ кесимидаги ёйнинг катталиги α га тенг. Шар сегментининг сферик қисми юзи ҳисоблансин.

А) $\dfrac{\pi(H^2+4^2)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$; В) $\dfrac{\pi H}{\sin^2\frac{\alpha}{4}}$; С) $\dfrac{\pi H^2}{\sin^2\frac{\alpha}{4}}$;
Д) $\dfrac{\pi H}{\sin^4\frac{\alpha}{4}}$; Е) $\dfrac{\pi H}{\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

27. Шар сегменти асосининг радиуси R, ўқ кесимидаги ёйнинг катталиги 60°. Шу сегмент тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $\pi R^2(1+2\sqrt{3})$; В) $\pi R^2(9-4\sqrt{3})$; С) $\pi R^2(8-4\sqrt{2})$;
Д) $\pi R^2(2+\sqrt{3})$; Е) $\pi R^2(3+2\sqrt{3})$.

28. Сферик камарнинг баландлиги 7 см, асосларининг радиуслари 16 см ва 33 см. Камар тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) 910π; В) 1080π; С) 920π; Д) 1108π; Е) 966π см^2.

29. Сферик камар асосларининг радиуслари 20 ва 24 м, шарнинг радиуси эса 25 м. Камар сферик қисмининг юзи ҳисоблансин.

А) 850π ёки 650π; В) 360π ёки 1200π; С) 280π ёки 1360π; Д) 440π ёки 960π; Е) 400π ёки 1100π м^2.

30. Шар сегментнинг баландлиги h, ўқ кесимидаги ёйнинг катталиги 120° бўлса, сегмент тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $3\pi h^2$; В) $9\pi h^2$; С) $6\pi h^2$; Д) $7\pi h^2$; Е) $5\pi h^2$.

31. Шар сегменти асосининг радиуси r, ўқ кесимидаги ёйнинг катталиги 90° бўлса, сегмент тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{\pi r^2\sqrt{5}}{6}$; B) $\pi r^2(3-2\sqrt{2})$; C) $\pi r^2(5-2\sqrt{2})$;

Д) $\frac{\pi r^2(4-\sqrt{3})}{3}$; E) $\pi r^2(6-2\sqrt{3})$.

32. Шарнинг диаметрига перпендикуляр текислик уни узунликлари 3 ва 9 см бўлган қисмларга ажратади. Ҳосил қилинган шар қисмларининг ҳажмлари ҳисоблансин.

A) 60π, 180π; B) 45π, 243π; C) 54π, 224π;
Д) 62π, 218π; E) 56π, 200π см^3.

33. Радиуси 13 см бўлган шар марказининг ҳар хил томонларида ўзаро параллел ва тенг кесимлар ўтказилган. Кесимларнинг ҳар бирининг радиуси 5 см бўлса, параллел текисликлар орасидаги шар қисмининг ҳажми ҳисоблансин.

A) 2904π; B) 2800π; C) 2860π; Д) 2780π;
E) 3024π см^3.

34. Шар секторининг радиуси R, ўқ кесимидаги бурчаги 120° бўлса, шар секторининг ҳажми ҳисоблансин.

A) $\frac{4}{5}\pi R^3$; B) $\frac{2\pi R^3}{3}$; C) πR^3; Д) $\frac{1}{2}\pi R^3$; E) $\frac{1}{3}\pi R^3$.

35. Шар сектори асосининг радиуси 60 см, шарнинг радиуси эса 75 см бўлса, шар секторининг ҳажми ҳисоблансин.

A) 960π; B) 1260π; C) 1160π; Д) 1125π; E) 1180π дм^3.

36. Шарнинг радиуси R, шар секторининг ўқ кесимидаги ёйнинг катталиги α бўлса, шар секторининг ҳажми ҳисоблансин.

A) $\frac{2}{3}\pi R^3\cos^2\frac{\alpha}{2}$; B) $\frac{1}{3}\pi R^3\sin^2\frac{\alpha}{2}$; C) $\frac{4}{3}\pi R^3\sin^2\frac{\alpha}{4}$;

Д) $\frac{2}{5}\pi R^3\cos^2\alpha$; Е) $\frac{3}{5}\pi R^3\sin 2\alpha$.

37. Радиуси $R=4$ бўлган шарнинг маркази $A(2; -4; 7)$ нуқтада бўлса, сферанинг тенгламаси топилсин.

А) $(x+2)^2+(y-4)^2+z^2=15$;
В) $(x-2)^2+(y+4)^2+(z-7)^2=16$;
С) $(x-2)^2+(y+4)^2+(z-7)^2=1$;
Д) $(x+2)^2+(y-4)^2+(z+7)^2=16$;
Е) $(x-2)^2+(y+4)^2+(z-7)^2=25$.

38. Маркази А$(-2, 2, 0)$ нуқтада, радиуси $R=2$ бўлган сферанинг тенгламаси топилсин.

А) $(x+2)^2+(y-4)^2+z^2=4$; В) $(x-2)^2+(y+4)^2=4$;
С) $(x+2)^2+(y+2)^2+z^2=9$; Д) $(x-2)^2+(y+2)^2+z^2=4$;
Е) $x^2-4x+y^2-4y+z^2=0$

39. Маркази А$(-2, 2, 0)$ нуқтада бўлиб, Р $(5, 0, -1)$ нуқтадан ўтувчи сферанинг тенгламаси топилсин.

А) $(x+2)^2+(y-2)^2+z^2=36$; В) $(x-2)^2+(y+2)^2+z^2=64$;
С) $(x+2)^2+(y-2)^2+z^2=49$; Д) $(x+2)^2+(y+2)^2+z^2=48$;
Е) $(x+2)^2+(y-2)^2+z^2=54$.

40. Тенгламаси $(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2$ кўринишда бўлган сферанинг юзи ҳисоблансин.

А) 10π; В) 12π; С) 4π; Д) 8π; Е) 6π.

41. Тенгламаси $x^2+y^2+z^2+6x-2y-2z-5=0$ кўринишда бўлган сферанинг маркази ва радиуси топилсин.

А) $C(-3, 1, 1)$, $R=3$; В) $C(3, -1, -1)$, $R=4$;
С) $A(-3, 1, 1)$, $R=4$; Д) $C(-3, 1, -1)$, $R=5$;
Е) $C(-3, 1, -1)$, $R=4$.

42. Сферанинг радиуси 112 см. Сферанинг A нуқтасидан уринма текислик ўтказилган ва шу текисликда B нуқта олинган. Агар $AB=15$ см бўлса, B нуқтадан сферагача бўлган масофа топилсин.

А) 2; В) 1; С) 3; Д) 4,5; Е) 1,5 см.

43. Шарда иккита параллел кесим ўтказилган. Агар кесимларнинг радиуслари 9 ва 12 см, кесимлар орасидаги масофа 3 см бўлса, сферанинг юзи ҳисоблансин.

A) 900π; B) 960π; C) 880π; Д) 848π; E) 942π см^2.

44. Шар сиртидаги нуқтадан учта ўзаро тенг бўлган ватар ўтказилган. Ватарлар ўзаро α катталикдаги бурчаклар ташкил қилса ва шарнинг радиуси R бўлса, ватарнинг узунлиги топилсин.

A) $2R\sqrt{3\cos(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)}$;

B) $\frac{2R}{\sqrt{3}}\sqrt{\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$;

C) $\frac{2}{3}R\sqrt{\cos(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)}$;

Д) $\frac{4R}{\sqrt{3}}\sqrt{\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$;

E) $4R\sqrt{3\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

45. Шарнинг ҳажми V. Шар сектори ўқ кесимининг марказий бурчаги α бўлса, секторнинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $2V\cdot\cos\frac{\alpha}{4}$; B) $V\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$; C) $V\cdot\sin^2\frac{\alpha}{4}$; Д) $V\cdot\cos^2\frac{\alpha}{4}$;

E) $V\cdot\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

46. Шарнинг радиуси R бўлиб, шар секторининг марказий бурчаги α га тенг бўлса, шар сектори тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) $2\pi R^2\sin\alpha$; B) $\pi R^2\cos\frac{\alpha}{2}$; C) $\pi R^2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$;

Д) $\pi R^2\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}^2\varphi$; E) $\dfrac{\pi R^2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\varphi}$ ва $\mathrm{tg}\varphi=\sqrt{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{4}}$.

47. Агар сфера AB диаметрининг $A(2, -3, 5)$, $B(4, 1, -3)$ учлари берилган бўлса, сферанинг тенгламаси топилсин.

A) $(x+3)^2+(y-1)^2+z^2=25$;
B) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$;
C) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=36$;
Д) $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=25$;
E) $(x-4)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=36$.

48. Сферасининг тенгламаси $x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z+$ $+5=0$ кўринишда бўлган шарнинг ҳажми ҳисоблансин.

A) 56π; B) 24π; C) 32π; Д) 36π; E) 48π.

15-§. ШАРГА ИЧКИ ВА ТАШҚИ ЧИЗИЛГАН КЎПЁҚЛАР ВА ЖИСМЛАР

15.1. Асосий тушунчалар ва тасдиқлар

Агар кўпёқнинг ҳамма учлари сферага тегишли бўлса, кўпёқ сферага *ички чизилган* бўлади (сферанинг ўзи кўпёққа *ташқи чизилган* бўлади).

Агар кўпёқнинг барча ёқлари сферага уринса, кўпёқ сферага *ташқи чизилган* бўлади (бунда сферанинг ўзи кўпёққа *ички чизилган* бўлади).

Қуйидаги тасдиқлар ўринли:

1. Агар пирамида асосига айланани ташқи чизиш мумкин бўлса, пирамидага ташқи сфера чизиш мумкин.

2. Агар призма тўғри бўлиб, унинг асосига айланани ташқи чизиш мумкин бўлса, призмага сферани ташқи чизиш мумкин.

Булардан: мунтазам призма ва мунтазам пирамидага сферани ташқи чизиш мумкинлиги келиб чиқади.

3. Ихтиёрий тетраэдрга сферани ички чизиш мумкин. Унинг маркази тетраэдр иккиёқли бурчаклари биссектор (тенг иккига бўлувчи) текисликларининг кесишиш нуқтасидан иборат бўлади.

4. Агар пирамиданинг асосига айланани ички чизиш мумкин бўлса ва пирамиданинг баландлиги ўша айлана марказидан ўтса, пирамидага сферани ички чизиш мумкин.

Демак, мунтазам пирамидага сферани доимо ички чизиш мумкин.

5. Агар: 1) призманинг перпендикуляр кесимига айланани ички чизиш мумкин бўлса;

2) призманинг баландлиги айлана диаметрига тенг бўлса, призмага сферани ички чизиш мумкин.

6. Ихтиёрий цилиндр ва конусга сферани ташқи чизиш мумкин. Ташқи чизилган сферанинг маркази цилиндр ёки конуснинг ўқ кесимига ташқи чизилган айлананинг марказидир.

7. Агар цилиндрнинг баландлиги унинг асоси диаметрига тенг бўлса, цилиндрга сферани ички чизиш мумкин.

8. Ҳар қандай конусга сферани ички чизиш мумкин.

9. П. Гюльден теоремаси: текис шаклнинг шу шакл текислигида ётиб, уни кесиб ўтмайдиган ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми шакл юзининг шакл оғирлик маркази чизган айлана узунлигига кўпайтмасига тенг:

$$V_{\text{а.ж.}} = 2\pi \cdot S \cdot d_{\text{с}},$$

бунда S — айланаётган шаклнинг юзи, $d_{\text{с}}$ — шакл оғирлик марказидан айланиш ўқигача бўлган масофа.

Қуйидаги тасдиқ ҳам ўринли:

10. Лемма. Агар ΔABC учбурчак текислигида ётиб, унинг A учидан BC томонни кесмасдан ўтувчи l ўқ

3. Ихтиёрий тетраэдрга сферани ички чизиш мумкин. Унинг маркази тетраэдр иккиёқли бурчаклари биссектор (тенг иккига бўлувчи) текисликларининг кесишиш нуқтасидан иборат бўлади.

4. Агар пирамиданинг асосига айланани ички чизиш мумкин бўлса ва пирамиданинг баландлиги ўша айлана марказидан ўтса, пирамидага сферани ички чизиш мумкин.

Демак, мунтазам пирамидага сферани доимо ички чизиш мумкин.

5. Агар: 1) призманинг перпендикуляр кесимига айланани ички чизиш мумкин бўлса;

2) призманинг баландлиги айлана диаметрига тенг бўлса, призмага сферани ички чизиш мумкин.

6. Ихтиёрий цилиндр ва конусга сферани ташқи чизиш мумкин. Ташқи чизилган сферанинг маркази цилиндр ёки конуснинг ўқ кесимига ташқи чизилган айлананинг марказидир.

7. Агар цилиндрнинг баландлиги унинг асоси диаметрига тенг бўлса, цилиндрга сферани ички чизиш мумкин.

8. Ҳар қандай конусга сферани ички чизиш мумкин.

9. П. Гюльден теоремаси: текис шаклнинг шу шакл текислигида ётиб, уни кесиб ўтмайдиган ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми шакл юзининг шакл оғирлик маркази чизган айлана узунлигига кўпайтмасига тенг:

$$V_{\text{а.ж.}}=2\pi\cdot S\cdot d_{\text{c}},$$

бунда S — айланаётган шаклнинг юзи, d_{c} — шакл оғирлик марказидан айланиш ўқигача бўлган масофа.

Қуйидаги тасдиқ ҳам ўринли:

10. Лемма. Агар ΔABC учбурчак текислигида ётиб, унинг A учидан BC томонни кесмасдан ўтувчи l ўқ

A) $\dfrac{\pi r^3(1+\mathrm{tg}\alpha)^3}{8\mathrm{tg}^2\alpha}$; B) $\dfrac{\pi r^3\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha\cos^3\alpha}$; C) $\dfrac{\pi r^3\sin^2\alpha}{4\sin\alpha\cos^2\alpha}$;

Д) $\dfrac{\pi r^3(1+\sin\alpha)^3}{3\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha}$; E) $\dfrac{\pi r^3(1+\sin\alpha)^3}{3\cos\alpha\cdot\sin^3\alpha}$.

5. Мунтазам тетраэдрнинг қирраси 1 см. Шу тетраэдрга ташқи чизилган шарнинг радиуси топилсин.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; Д) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; E) $\frac{1}{2}$.

6. Тўла сиртининг юзи S бўлган пирамидага R радиусли сфера ички чизилган. Пирамиданинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $\frac{1}{2}SR$; B) $\frac{1}{8}S^2R$; C) $\frac{R}{4}(S^2+R^2)$; Д) $\frac{S}{4}(S^2+R^2)$;

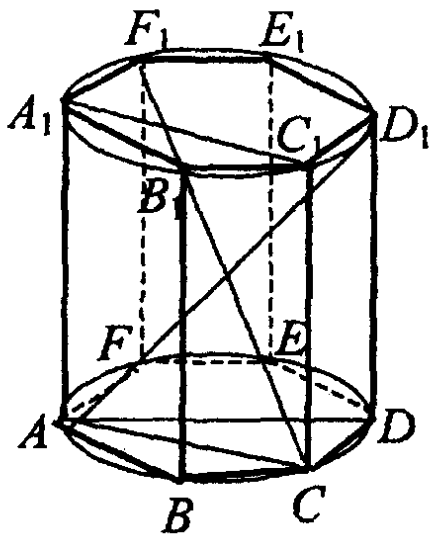
E) $\frac{1}{3}SR$.

15.3. Мавзуга оид масалаларнинг ечимлари

1. Берилган. $AB...E_1F_1$ — минтазам призма, AD_1 — ташқи чизилган цилиндр, $AD_1=d$; $AA_1=AD$.

$S_{AA_1C_1C}$ ҳисоблансин (15.3.1-чизма).

Ечилиши. Тенг ёнли цилиндрнинг ўқ кесими квадрат бўлади. Агар цилиндр асосининг радиуси R га тенг бўлса, айланага ички чизилган мунтазам олтибурчакнинг томони шу радиусга тенг бўлади (5-§): $AB=BC=$ $=...FA=R$. Тўғри бурчакли ΔADD_1 дан Пифагор теоремаси (2-§) ёрдамида $AD^2+DD_1^2=AD_1^2$, $(2R)^2+$ $+(2R^2)=d^2$, $8R=d^2$, $R^2=\frac{d^2}{8}$, $R=\frac{d\sqrt{2}}{4}$ бўлади.



15.3.1-чизма.

У ҳолда цилиндрнинг баландлиги: $H=2R=\frac{d\sqrt{2}}{4}$. Маълумки, мунтазам олтибурчакнинг ички бурчаги (5-§): $\angle ABC=\frac{180^\circ(6-2)}{6}=30^\circ\cdot4=120^\circ$. ΔABC дан, косинуслар теоремаси ёрдамида, олтибурчакнинг AC кичик диагоналини топамиз:

$$AC^2=2\cdot AB^2-2AB^2\cdot\cos120^\circ=2AB^2+2AB^2\cdot\frac{1}{2}=3AB^2,$$

$$AC=AB\sqrt{3}=R\sqrt{3}=\frac{d\sqrt{2}}{4}\sqrt{3}=\frac{d\sqrt{6}}{4}.$$

Демак, энди кичик диагонал кесимнинг юзи:

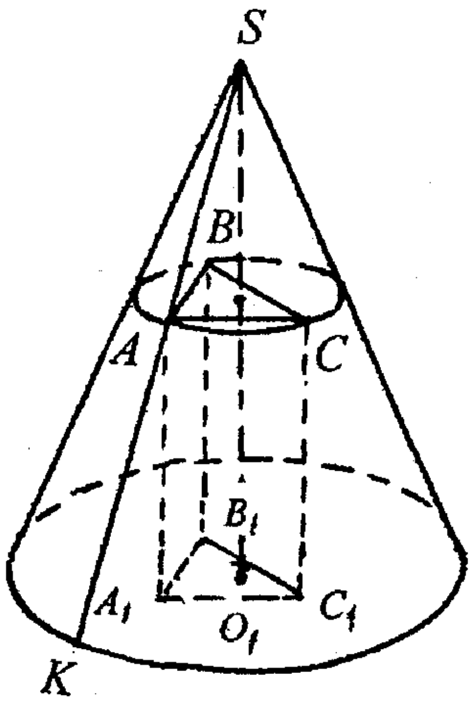
$$S_{AA_1C_1C}=AC\cdot H=\frac{d\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{d\sqrt{2}}{2}=\frac{d^2\sqrt{3}}{4}.$$

Жавоби: С).

2. Берилган. SK — конус, $ABCA_1B_1C_1$ — ички чизилган мунтазам призма, $O_1K=r$; $SO=h$; $AB=AA_1$.

AA_1 топилсин (15.3.2-чизма).

Ечилиши. Конуснинг SA ясовчисини ўтказамиз ва унинг асос текислиги билан кесишиш нуқтасини K деб белгилаймиз. Призма мунтазам бўлганлигидан, конуснинг баландлиги призма асосларининг O ва O_1 марказларидан ўтади, OA кесма ΔABC га ташқи чизилган айлананинг радиуси $OA=R$ бўлади ва $O_1A_1=R$. Лекин $O_1K=r$. Тўғри бурчакли $\Delta SOA\sim\Delta SKO_1$ ва улардан $\frac{O_1K}{OA}=\frac{SO_1}{SO}$ бўлади.



15.3.2-чизма.

$AB=a$ бўлсин, у ҳолда $OA=\frac{a}{2\sin 60^\circ}=\frac{a}{\sqrt{3}}$ (синуслар теоремасига асосан). Берилганига биноан, $OO_1=AA_1=$ $=a$ ва $SO=h-a$. Юқорида ёзилган пропорцияга келтириб қўйсак, $\frac{r}{a\sqrt{3}}=\frac{h}{h-a}$ ва уни a га нисбатан ечамиз:

$$\sqrt{3}rh-\sqrt{3}ra=ah,\ a(h+r\sqrt{3})=rh\sqrt{3},\ a=\frac{rh\sqrt{3}}{h+r\sqrt{3}}.$$

Жавоби: Е).

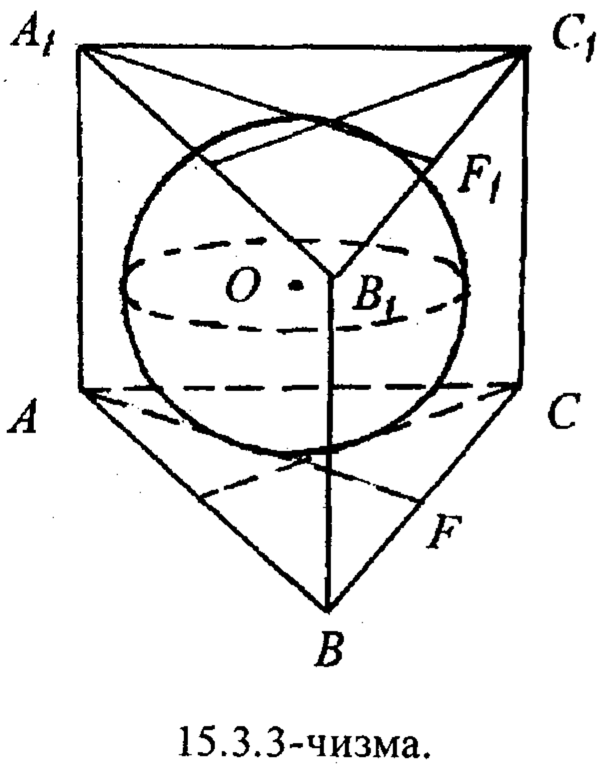
3. Берилган. (O, R) — шар, $ABCA_1B_1C_1$ — ташқи чизилган призма.

$S_{\text{т.пр.}}$ ҳисоблансин (15.3.3-чизма).

Ечилиши. Шар ички чизилган бўлганлигидан, унинг диаметри призманинг баландлигига тенг: $H=2R$. Агар призма асосининг томони $AB=a$, баландлиги H бўлса, тўла сирти

$$S_{\text{т.пр.}}=3a\cdot H+2\cdot S_{\text{ас.}},$$
$$S_{\text{ас.}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

формула бўйича ҳисобланади.



15.3.3-чизма.

Шарнинг марказидан призманинг асосига параллел текислик ўтказамиз ва кесимда призманинг асоси ΔABC га тенг бўлган учбурчакни ҳамда унга ички чизилган R радиусли айланани ҳосил қиламиз. Мунтазам ΔABC га ички чизилган айлананинг O маркази учбурчак биссектрисаларнинг кесишиш нуқтасидир (5-§). Шунинг учун, ΔAOK — тўғри бурчакли

$(OK \perp AB)$, $\angle AOK = 30°$; $AK = \frac{a}{2}$ ва $AK = OK \cdot \mathrm{ctg}30°$ ёки $\frac{a}{2} = R \cdot \mathrm{ctg}30°$, $a = 2R\sqrt{3}$.

У ҳолда $S_{\text{ён}} = 3 \cdot 2R\sqrt{3} \cdot 2R = 12\,R^2\sqrt{3}$;

$$S_{\text{ас}} = \frac{1}{4}(2R\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3} = 2R^2\sqrt{3}$$

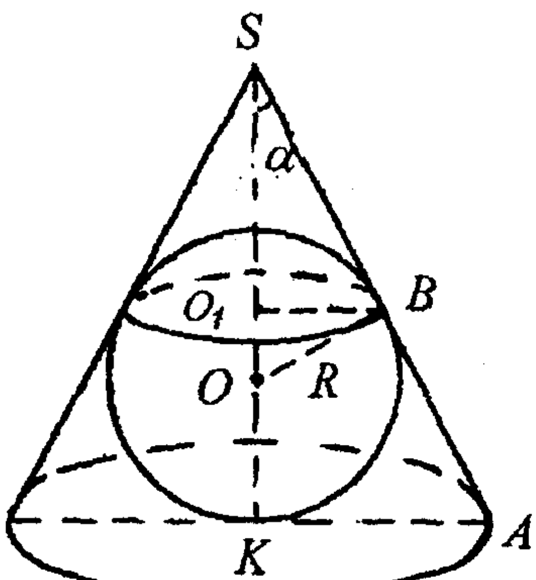
ва

$$S_{\text{т.пр.}} = S_{\text{ён}} + 2S_{\text{ас.}} = 12R^2\sqrt{3} + 6R^2\sqrt{3} = 18R^2\sqrt{3}.$$

Жавоби: B).

4. Б е р и л г а н. (SAK) — конус, $(O,\ R)$ — ички чизилган шар, $(O_1,\ r)$ — кесим, $\angle ASK = \alpha$.

$V_{\text{к.}}$ ҳ и с о б л а н с и н (15.3.4-чизма).



15.3.4-чизма.

Е ч и л и ш и. Маълумки, конуснинг ҳажми $V_{\text{к.}} = \frac{1}{3} S_{\text{ас.}} \cdot H$ формула бўйича ҳисобланади. Агар конус асосининг радиуси $AK = R_1$, конуснинг баландлиги $SK = H$ бўлса, $V_{\text{к}} = \frac{1}{3}\pi R_1^2 \cdot H$ бўлади. Кесимдаги доиранинг $O_1B = r$ радиуси уринмага перпендикулярдир. Шунинг учун, ΔABS ва ΔO_1BS тўғри бурчакли бўлади ва $O_1B \perp SK$, $OB \perp SA$ бўлгани учун $\angle O_1BO = \angle O_1SB_1$, чунки уларнинг мос томонлари ўзаро перпендикуляр. ΔOBO_1 дан ички чизилган шарнинг радиусини топамиз:

$$\cos\alpha = \frac{O_1B}{OB};\ R = OB = \frac{O_1B}{\cos\alpha} = \frac{r}{\cos\alpha}.$$

Тўғри бурчакли ΔOBS дан:

$$\sin\alpha = \frac{OB}{SO};\ SO = \frac{R}{\sin\alpha} = \frac{r}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}.$$

У ҳолда

$$H = SO + OK = \frac{r}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} + \frac{r}{\cos\alpha} = \frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}.$$

Конус асосининг радиуси

$$R_1 = H\cdot\mathrm{tg}\alpha = \frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha};\ R_1 = \frac{r(1+\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}$$

бўлади, демак, конуснинг ҳажми

$$V_к = \frac{1}{3}\pi\frac{r^2(1+\sin\alpha)^2}{\cos^4\alpha}\cdot\frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{\pi r^3(1+\sin\alpha)^3}{3\sin\alpha\cdot\cos^5\alpha}.$$

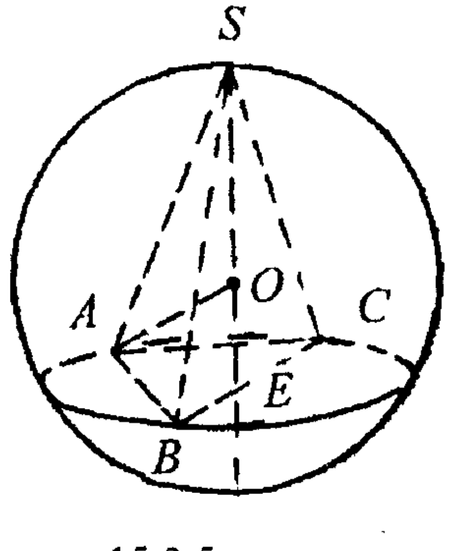
Жавоби: Д).

5. Берилган. $SABC$ — мунтазам тетраэдр, $AS=AB=1$, $OA=OS$,$(O,\ R)$ — ташқи чизилган шар.

R топилсин (15.3.5-чизма).

Ечилиши. Пирамида мунтазам бўлганлигидан, унинг SE баландлиги пирамиданинг асоси — ΔABC медианаларининг кесишиш нуқтаси E дан ўтади. У ҳолда $AE=r$ шу ΔABC га ички чизилган айлананинг радиусидан иборат ва

$$2r = \frac{AB}{\sin 60^\circ},\quad r = \frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



15.3.5-чизма.

Тўғри бурчакли ΔAES дан

$$H = SE = \sqrt{AS^2 - AE^2},\quad H = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2\cdot3}{3\cdot3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Энди SE баландликни шар билан K нуқтада кесишгунча давом эттирамиз ва $SK=2R$ шарнинг диаметри бўлади ҳамда ΔSAK — тўғри бурчакли ва AE унинг SK гипотенузасига ўтказилган баландликдан иборат.

Шу баландликнинг хоссасига кўра: $AE^2=SE\cdot EK$.

Бизнинг ҳолда $AE=r$, $EK=2R-H$. Шунинг учун,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{\sqrt{6}}{3}\left(2R-\frac{\sqrt{6}}{3}\right),\ \frac{1}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}\left(2R-\frac{\sqrt{6}}{3}\right),$$

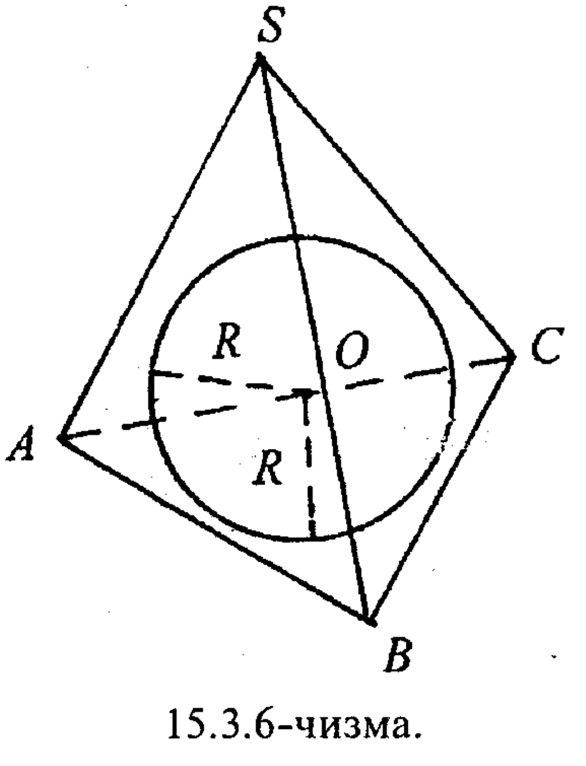
$$1=2\sqrt{6}\,R=\frac{6}{3},\ 3=2\sqrt{6}\,R,\ R=\frac{3\cdot\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}},\ R=\frac{3\sqrt{6}}{2\cdot 6}=\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Жавоби: В).

6. Б е р и л г а н. $SABC$ — пирамида, $S_т=S,(O,R)$ — ички чизилган шар.

$V_{пир.}$ ҳ и с о б л а н с и н (15.3.6-чизма).

Е ч и л и ш и. Масалани уч бурчакли пирамида учун ечамиз. Фараз қилайлик, пирамида ёқларининг юзлари, мос равишда, $S_{ABS}=S_1$, $S_{BSC}=S_2$, $S_{ASC}=S_3$, $S_{ABC}=S_4$ бўлсин. Ички чизилган шарнинг O марказидан пирамиданинг ёқларига радиуслар ўтказамиз ва бу радиуслар мос ёқларга перпендикуляр бўлади. O марказни пирамиданинг учлари билан туташтирсак, у тўртта $OSAB$, $OSBC$, $OSAC$, $OABC$ пирамидага ажралади. Натижада берилган



15.3.6-чизма.

пирамиданинг ҳажми шу тўртта пирамида ҳажмларининг йиғиндисига тенг бўлади:

$$V=V_1+V_2+V_3+V_4,$$

яъни

$$V=\frac{1}{3}S_1R+\frac{1}{3}S_2R+\frac{1}{3}S_3R+\frac{1}{3}S_4R;$$

$$V=\frac{1}{3}R(S_1+S_2+S_3+S_4).$$

Лекин, $S_1+S_2+S_3+S_4=S_т=S$. Шунинг учун пирамиданинг ҳажми

$$V=\frac{1}{3}S\cdot R$$

бўлади. Бу формула ихтиёрий пирамида учун ҳам исбот қилиниши мумкин.

Жавоби: Е).

15.4. Мустақил ечиш учун масалалар

1. Радиуси 9 дм бўлган шарга тўрт бурчакли мунтазам призма ички чизилган. Агар призманинг баландлиги 14 дм бўлса, призма асоси томонининг узунлиги топилсин.

А) 6; В) 8; С) 10; Д) 12; Е) 9 дм.

2. Олтибурчакли мунтазам призманинг баландлиги 8 м, ён ёғининг диагонали 13 м. Унга ташқи чизилган шарнинг радиуси топилсин.

А) 8; В) 14; С) 12; Д) 11; Е) 10 м.

3. Томонлари 6, 8 ва 10 см бўлган учбурчак тўғри призманинг асосидан иборат. Призманинг баландлиги 24 см бўлса, унга ташқи чизилган шарнинг радиуси топилсин.

А) 15; В) 12; С) 13; Д) 11; Е) 16 см.

4. Тўрт бурчакли мунтазам пирамиданинг баландлиги h, ён қирраси b бўлса, унга ташқи чизилган шарнинг радиуси топилсин.

А) $3b-2h$; В) $\frac{b^2-h^2}{h}$; С) $\frac{b^2+h^2}{2bh}$; Д) $\frac{h^2}{2b}$; Е) $\frac{b^2}{2h}$.

5. Мунтазам тетраэдрнинг қирраси a берилган бўлса, унга ички чизилган шарнинг радиуси топилсин.

А) $\frac{a\sqrt{6}}{12}$; В) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$; С) $\frac{a\sqrt{3}}{12}$; Д) $\frac{a\sqrt{3}}{14}$; Е) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

6. Берилган пирамида ён қирраларининг ҳар бири 9 см дан, баландлиги эса 5 см бўлса, унга ташқи чизилган шарнинг радиуси топилсин.

А) 6,8; В) 8,1; С) 7,2; Д) 9; Е) 7 см.

7. Баландлиги h, асосидаги иккиёқли бурчаги 60° бўлган мунтазам пирамидага ички чизилган шарнинг радиуси топилсин.

А) $\frac{h}{2}$; В) $\frac{3}{5}h$; С) $\frac{2}{5}h$; Д) $\frac{1}{3}h$; Е) $\frac{2}{3}h$.

8. Уч бурчакли мунтазам пирамиданинг баландлиги h, ён қирралари эса ўзаро перпендикуляр бўлса, унга ташқи чизилган шарнинг радиуси топилсин.

А) $1{,}8h$; В) $2h$; С) $1{,}5h$; Д) $0{,}75h$; Е) $1{,}2h$.

9. Пирамиданинг асоси томони 3 дм бўлган мунтазам учбурчакдан иборат, ён қирраларидан бири 2 дм ва асосига перпендикулярдир. Унга ташқи чизилган шарнинг радиуси топилсин.

А) 2,5; В) 1,5; С) 1; Д) 3; Е) 2 дм.

10. Тўрт бурчакли мунтазам призма асосининг томони 6 см, ён қирраси 17 см бўлса, унга ташқи чизилган шарнинг радиуси топилсин.

А) 9,5; В) 8; С) 10; Д) 8,5; Е) 12 см.

11. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ўлчамлари нисбати 2:3:6 каби, тўла сиртининг юзи 1152 см^2 бўлса, унга ташқи чизилган шарнинг радиуси топилсин.

А) 16; В) 14; С) 12; Д) 15; Е) 10 см.

12. Тўғри бурчакли параллелепипед ёқларининг диагоналлари, мос равишда, a, b, c бўлса, унга ташқи чизилган шарнинг радиуси топилсин.

А) $\frac{1}{8}\sqrt{a^2+2(b^2+c^2)}$; В) $\frac{1}{4}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$;

С) $\frac{1}{4}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$; Д) $\frac{1}{4}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$;

Е) $\frac{1}{4}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$.

13. Радиуси 21 см бўлган шарга баландлиги 14 см бўлган тўрт бурчакли мунтазам призма ички чизилган. Призма тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) 2780; В) 3242; С) 3136; Д) 2960; Е) 3164 см^2.

14. Уч бурчакли мунтазам призма асосининг томони 12 см, баландлиги 2 см бўлса, унга ташқи чизилган шарнинг радиуси топилсин.

А) 8; В) 10; С) 5; Д) 6; Е) 7 см.

15. Радиуси 14 см бўлган шарга учбурчакли мунтазам призма ички чизилган. Призманинг баландлиги асосининг томонидан 17 см катта бўлса, призма ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) 702; В) 696; С) 760; Д) 792; Е) 640 см^2.

16. Тўғри призманинг асоси тенг ёнли учбурчакдир. Учбурчакнинг асоси 6 см, баландлиги 1 см ҳамда призманинг баландлиги 24 см бўлса, призмага ташқи чизилган шарнинг радиуси топилсин.

А) 12; В) 13; С) 14; Д) 16; Е) 10 см.

17. Олти бурчакли мунтазам призма асосининг томони 4 дм, призманинг баландлиги 15 дм бўлса, унга ташқи чизилган шарнинг радиуси топилсин.

А) 10; В) 9,5; С) 9; Д) 8,5; Е) 8 дм.

18. Тўрт бурчакли пирамида қирраларининг ҳар бири a. Пирамидага ташқи чизилган шарнинг радиуси топилсин.

А) $a\sqrt{6}$; В) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; С) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; Д) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$; Е) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

19. Тўрт бурчакли мунтазам пирамида асосининг томони 8 дм, ён қирраси 9 дм. Пирамидага ташқи чизилган шарнинг радиуси топилсин.

А) $4\frac{13}{15}$; В) 4; С) 5; Д) 6; Е) $5\frac{11}{14}$ дм.

20. Уч бурчакли мунтазам пирамида асосининг томони a, пирамиданинг учидаги ясси бурчаклари 90° бўлса, пирамидага ташқи чизилган шарнинг радиуси топилсин.

А) $a\sqrt{6}$; В) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$; С) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; Д) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; Е) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

21. Уч бурчакли мунтазам пирамиданинг баландлиги 5 дм, ён қирраси ва асоси томонининг нисбати 2:3 кабидир. Пирамидага ташқи чизилган шарнинг радиуси топилсин.

А) 1; В) 0,5; С) 2; Д) 2,5; Е) 0,75 дм.

22. Олти бурчакли мунтазам пирамидага ташқи чизилган шарнинг маркази пирамида баландлигини узунликлари 1 ва 7 см бўлган кесмаларга ажратади. Пирамиданинг ҳажми ҳисоблансин.

А) $196\sqrt{3}$; В) $184\sqrt{3}$; С) 202; Д) $192\sqrt{3}$; Е) 196 см^3.

23. Призмага шар ички чизилган. Призманинг асоси тенг ёнли трапециядан иборат бўлиб, унинг

асослари 8 см ва 5 см. Призма тўла сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) 3740; В) 3080; С) 3480; Д) 3250; Е) 3560 $см^2$.

24. Пирамиданинг асоси томонлари 25, 29 ва 36 см бўлган учбурчакдан иборат. Агар пирамиданинг учи асосининг томонларидан бир хил узоқликда бўлса, пирамидага ички чизилган шарнинг радиуси топилсин.

А) 1,5; В) 3; С) $2\frac{4}{7}$; Д) 2; Е) $2\frac{2}{3}$ см.

25. Конуснинг ясовчиси 17 см, баландлиги 15 см. Конусга шар ички чизилган бўлса, шар ва конуснинг уриниш нуқталари ҳосил қилган айлананинг узунлиги топилсин.

А) $\frac{121\pi}{42}$; В) $\frac{144}{17}\pi$; С) $\frac{169\pi}{24}$; Д) $\frac{156\pi}{37}$; Е) $\frac{144\pi}{13}$.

26. Конус асосининг радиуси 6 дм. Конусга шар ички чизилган ва улар уринган айлананинг узунлиги 4π дм. Конуснинг ҳажмини ва ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

А) $36\sqrt{5}\pi$, 90π; В) $48\sqrt{3}\pi$, 72π; С) $36\sqrt{2}\pi$, 72π;
Д) $36\sqrt{2}\pi$, 84π; Е) $36\sqrt{3}\pi$ $дм^3$, 90π $дм^2$.

27. Кесик конуснинг ясовчиси 13 см, асосларидан бирининг радиуси 4 см. Агар шу кесик конусга шарни ички чизиш мумкин бўлса, унинг ён сирти юзи ва ҳажми ҳисоблансин.

А) 272π, 542π; В) 216π, 532π; С) 266π, 532π;
Д) 266π, 486π; Е) 272π $см^2$, 486π $см^3$.

28. Радиуси 12 см бўлган шарга кесик конус ташқи чизилган. Кесик конус асослари радиусларининг нисбати: 4:9 каби бўлса, унинг ҳажми ҳисоблансин.

А) 5216π; В) 3576π; С) 4526π; Д) 4256π; Е) 3976π $см^3$.

29. Радиуси 6 см бўлган шарга ясовчиси 15 см бўлган кесик конус ташқи чизилган. Шар ва кесик конус уриниш чизиғининг узунлиги топилсин.

A) $6{,}8\pi$; B) $10{,}2\pi$; C) $8{,}4\pi$; Д) $7{,}2\pi$; E) $9{,}6\pi$ см.

30. Асосининг радиуси 9 см бўлган конусга шар ички чизилган. Уларнинг уриниш чизиғидан текислик ўтказилган ва бу текислик конуснинг ҳажмини, учидан ҳисоблаганда, 8:117 нисбатда бўлади. Шарнинг радиуси топилсин.

A) 3; B) 4,5; C) 5; Д) 4; E) 6,5 см.

31. Пирамиданинг асоси — ромб ва унинг диагоналлари 6 ва 8 м. Пирамиданинг баландлиги 1 м ва асосининг марказидан ўтади. Пирамидага ички чизилган шарнинг радиуси топилсин.

A) 0,36; B) 0,72; C) 0,48; Д) 1,2; E) 0,52 м.

32. Уч бурчакли мунтазам кесик пирамида асосларининг томонлари a ва b. Шу пирамидага шар ички чизилган. Кесик пирамида ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{\sqrt{3}}{4}(a+b)^2$; B) $\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)^2$; C) $\frac{1}{4}(a+b)^2$; Д) $\frac{3}{5}(a+b)^2$;

E) $\frac{\sqrt{3}}{2}(a-b)^2$.

33. Олти бурчакли мунтазам кесик пирамида асосларининг томонлари a ва b. Унга шар ички чизилган бўлса, кесик пирамида ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{\sqrt{3}}{4}(a+b)^2$; B) $\frac{3\sqrt{3}}{2}(a-b)^2$; C) $\frac{3}{2}(a-b)^2$;

Д) $\frac{3\sqrt{3}}{2}(a+b)^2$; E) $\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)^2$.

34. Шарга тўрт бурчакли мунтазам кесик пирамида ташқи чизилган. Унинг асослари томонлари a ва

b бўлса, кесик пирамида ён сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{1}{2}(a-b)^2$; B) $(a-b)^2$; C) $\frac{a^2+b^2}{2}$; Д) $\frac{1}{2}(a+b)^2$;

E) $(a+b)^2$.

35. Радиуси $2r$ бўлган шарга асосининг радиуси r бўлган конус ички чизилган. Конуснинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $\frac{r\pi}{3}$ ёки $\frac{r\pi}{2}$; B) $\frac{r\pi}{3}(2+\sqrt{3})$ ёки $\frac{r\pi}{3}(2-\sqrt{3})$;

C) $\frac{r\pi}{3}(1+\sqrt{3})$ ёки $\frac{r\pi}{3}(1-\sqrt{3})$;

Д) $\frac{r\pi}{3}(1+\sqrt{2})$ ёки $\frac{r\pi}{3}(1-\sqrt{2})$;

E) $\frac{r\pi}{2}(1+\sqrt{3})$ ёки $\frac{r\pi}{2}(1-\sqrt{3})$.

36. Конуснинг ясовчиси l ва асоси текислиги билан α бурчак ташкил қилади. Конусга ташқи чизилган шарнинг ҳажми ҳисоблансин.

A) $\frac{\pi l^3 \sin\alpha}{\cos^3\alpha}$; B) $\frac{\pi l^3 \cos\alpha}{4\sin^2\alpha}$; C) $\frac{\pi l^3}{6\sin^3\alpha}$; Д) $\frac{\pi l^3 \cos\alpha}{6\sin^2\alpha}$;

E) $\frac{\pi l^3 \sin\alpha}{4\cos^2\alpha}$.

37. Кубга ички ва ташқи чизилган шарлар ҳажмларининг нисбати топилсин.

A) $\sqrt{3}:9$; B) 3:7; C) $\sqrt{2}:5$; Д) 5:9; E) 7:9.

38. Конуснинг ўқ кесими мунтазам учбурчакдан иборат. Конусга ташқи ва ички чизилган сфералар юзларининг нисбати топилсин.

A) 6:5; B) 3:1; C) 4:5; Д) 2:3; E) 4:1.

39. Мунтазам пирамиданинг апофемаси m ва асоси текислиги билан α бурчак ташкил қилади. Пира-

мидага ички чизилган сфера сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) $9\pi m^2 \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$; B) $\pi(2m \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2})^2$;

C) $4\pi m^2 \cdot \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$; Д) $2\pi m^2 \cos^2\alpha \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$; E) $4(m \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2})^2$.

40. Цилиндрнинг баландлиги h ва асосининг радиуси r. Цилиндрга ташқи чизилган сфера сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) $\pi(2r^2-h^2)$; B) $\pi(4r^2-2h^2)$; C) $\pi(4r^2+h^2)$;
Д) $\pi(r^2+2h^2)$; E) $\pi(2r^2+4h^2)$.

41. Тўрт бурчакли мунтазам пирамиданинг ён қирраси b ва асоси текислиги билан α бурчак ташкил қилади. Пирамидага ташқи чизилган сфера сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{\pi b^2}{\cos^2\alpha}$; B) $\pi b^2 \sin^2\alpha$; C) $\frac{\pi b^2}{\sin^2\alpha}$; Д) $\frac{\pi b^2}{\mathrm{tg}\alpha}$;

E) $\pi b^2 \cos^2\alpha$;

42. Уч бурчакли мунтазам пирамида асосининг томони a, асоси қиррасидаги икки ёқли бурчак α. Пирамидага ички чизилган сфера сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) $\frac{\pi}{3} a^2 \cos 2\alpha$; B) $\frac{\pi}{2} a^2 \sin^2\alpha$; C) $\frac{\pi}{4} a^2 \mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$;
Д) $\frac{\pi}{3} a^2 \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$; E) $\frac{1}{3} a^2 \mathrm{ctg}\alpha$.

43. Тўрт бурчакли мунтазам пирамида асосининг томони a, пирамиданинг ичидаги ясси бурчак α. Пирамидага ички чизилган сфера сиртининг юзи ҳисоблансин.

A) $\pi a^2 \mathrm{ctg}^2 2\alpha$; B) $\frac{\pi a^2}{4}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$; C) $\pi a^2 \mathrm{ctg}\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)$;

Д) $\pi a^2 \sin(60^\circ-\alpha)$; E) $\pi a^2 \mathrm{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

44. Шарга кесик конус ички чизилган. Кесик конуснинг асослари сфера сиртини юзлари 10π, 70π, 20π га тенг учта қисмларга ажратади. Кесик конуснинг ҳажми ҳисоблансин.

А) 64π; В) $\frac{259\pi}{3}$; С) $\frac{264}{3}\pi$; Д) $\frac{289\pi}{3}$; Е) 32π.

45. Шар сегментининг ўқ кесимидаги ёйнинг катталиги *а* бўлиб, шу сегментга ҳажми V га тенг бўлган шар ички чизилган. Шар сегменти ва ички чизилган шар ҳажмларининг айирмаси топилсин.

А) $3V \cdot \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{4}$; В) $3V \cdot \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$; С) $2V \cdot \cos^2\frac{\alpha}{4}$;

Д) $4V \cdot \cos^2\frac{\alpha}{4}$; Е) $3V \cdot \sin 2\alpha$.

Мустақил ечиш учун берилган масалаларнинг жавоблари

Параграф-лар / Топшириқ рақамлари	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	Д	А	В	Е	С	Д	А	Д	В	ВЕС	В	С	С	Д	В
2	Е	Е	Д	С	Д	В	С	А	А	Д	Д	Д	А	А	Д
3	А	Д	А	В	Е	А	В	Д	С	А	А	С	Д	С	С
4	С	В	Е	А	Д	С	Д	Е	Е	Е	С	А	В	В	Е
5	В	С	С	Д	В	Д	Е	С	В	С	Е	В	Е	Е	А
6	С	А	В	Е	Д	А	В	А	Д	В	Д	Е	С	Д	В
7	А	В	С	В	Е	Е	Д	С	А	Д	В	С	А	А	Д
8	Е	С	Д	А	В	СДВ А	С	Е	Д	Е	А	Д	Д	С	С
9	Д	Е	А	С	Д	ВСА ДЕА	А	Д	Е	С	Е	А	В	В	Е
10	В	Д	Е	Д	С	А	Е	С	В	А	С	В	Е	Е	А
11	Е	В	С	А	А	ДДА	В	В	В	В	А	С	С	Д	В
12	Д	С	А	В	Е	ЕСВ	Д	А	С	Е	Е	Е	Д	А	Д
13	А	Е	В	С	А	А	С	Е	А	В	В	А	А	В	С
14	С	А	Д	Е	С	ЕАВ	Е	С	Д	Д	Д	Д	В	Е	Е
15	В	Д	Е	А	Е	Д	А	Д	С	Е	С	В	Д	С	А
16		В	А	Д	Д	Е	С	В	В	А	А	С	Е	Д	В
17		Е	С	В	В	С	Д	Д	А	С	Е	Е	С	А	Д
18		А	В	Е	А	А	Е	В	Е	Д	В	А	А	В	С
19		С	Д	В	Д	В	А	С	С	А	Д	Д	В	Е	Е
20		В	Е	С	Е	Д	Д	Е	В	В	А	В	Д	Д	В
21		Д	А	В	С	С	В	А	С	Д	С	С	Е	С	А
22		А	С	Е	В	В	Е	Д	Е	С	Е	А	С	В	Д
23		Е	В	Д	А	Е	Д	В	А	В	В	Е	А	А	С
24		Е	Д	А	Е	В	С	С	В	Д	Д	Д	В	Е	Е

Давоми

Параграф-лар / Топшириқ рақамлари	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
25		В	Е	С	Д	А	Е	Е	Д	С	А	В	Д	Д	В
26		Д	С	В	С	С	А	А	С	А	С	С	Е	С	А
27		Е	А	А	В	Е	В	Д	В	Е	Д	А	С	В	С
28		А	В	С	Д	Д	С	Е	Д	С	В	Е	В	А	Д
29		С	Д	Е	А	В	Д	В	С	В	Е	Д	А	Е	Е
30		В	С	Д	Е	А	Е	С	А	Д	А	В	Д	Д	В
31		А	Е	В	С	В	А	А	В	А	С	С	Е	С	С
32		Д	В	А	В	Д	Д	Д	Е	Е	Д	А	С	В	А
33		Е	А	С	Д	В	Е	В	С	С	В		В	А	Д
34		С	В	Д	Е	С	С	Е	В	Д	Е		А	Е	Е
35		В	С	Е	А	С	В	С	Д	В	А		Д	Д	В
36		Е	Д	А	В	Д	А	А	Е	А	С		Е	С	С
37		А	Е	В	С	Д	Д	А	А		Д		С	В	А
38		Д	А	С	Е	А	Е	В	В		В		В	А	Е
39		С	Д	Е	Д	С	В	С	С		Е		Д	Е	В
40		Е	В	Д	А	Е	С	Д	Е		Д		А	Д	С
41		А	С	Е	В	В	А	Е	Д		С		Е	С	А
42		С	Е	С	Е	Е	Д	А	А		В		С	В	Д
43		Д	А	В	С	С	Е	В	В		А		Д	А	Е
44		В	Д	А	Д	Д	В	С	С		Д		А	Д	В
45		Е	С	Д	Е	Е	А	Д	Д		Е		В	С	А
46		С	Е	В	А	В	С	Е	Е		В		Е	Е	
47		Д	В	А	В	В	Д	А	А		С		С	В	
48		А	Д	С		Е	Е	В	В		Д			Д	
49		Е	В	Е		Е	А	С	С		А				
50		В				С	В	Д	Д						
51								Е	Е						

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР

1. Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина. Геометрия. Учебник для 7 класса средней школы. М.: “Просвещение”, 1989.
2. В. А. Гусев, А. И. Медяник. Задачи по геометрии для 8 класса (дидактические материалы). М.: “Просвещение”, 1987.
3. Н. Н. Никитин, Геометрия, Учебник для 6—8 классов, М.: “Учпедгиз”, 1964.
4. А. В. Погорелов. Геометрия. Учебное пособие для 7—11 классов средней школы. М.: “Просвещение”, 1989.
5. Н. Ғайбуллаев, А. Ортиқбоев. Геометрия. 7-синф учун ўқув қўлланма, “Ўқитувчи”, Т.: 1997 й., Т.: “Ўқитувчи”, 1999 й.
6. В. Н. Ғайбуллаев, А. Ортиқбоев. Геометрия. 8-синф учун ўқув қўлланма. “Ўқитувчи”, Т., 1999 й.
7. Под редакцией Сканави М. И. М.: “Высшая школа”, 1980.

МУНДАРИЖА

И 82

Исраилов И., Пашаев З.
Геометриядан масалалар тўплами. – Т.: «Ўқитувчи», 2001. – 304 б.
Сарл. олдида: Ўзбекистон Республикаси олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги

I. Автордош.

22.151я722

ИСРАИЛОВ ИСМАИЛ,
ПАШАЕВ ЗУБЕИР АБДУРАҲМОНОВИЧ

ГЕОМЕТРИЯДАН МАСАЛАЛАР ТЎПЛАМИ

Академик лицей ва касб-ҳунар коллежлари учун ўқув қўлланма

Тошкент «Ўқитувчи» 2001

Таҳририят мудири *М. Пўлатов*
Муҳаррир *Ў. Ҳусанов*
Бадиий муҳаррир *М. Кудряшова*
Муқова рассоми *М. Калинин*
Тех. муҳаррир *С. Турсунова*
Кичик муҳаррир *Ҳ. Мусахўжаева*
Мусаҳҳиҳ *М. Иброҳимова*

ИБ №7969

Оригинал-макетдан босишга рухсат этилди 12.11.2001. Бичими $84 \times 108^1/_{32}$. Кегли 11 шпонли. Таймс гарн. Офсет босма усулида босилди. Шартли б.т. 15,96. Шартли кр-отт. 16,38. Нашр. т. 9,31. 20000 нусхада босилди. Буюртма № 143.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент, 129. Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 09-134-2001.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитаси ҳузуридаги Тошкент китоб-журнал фабрикасида чоп этилди. Тошкент, Юнусобод даҳаси, Муродов кўчаси, 1-уй. 2001.

"O'QITUVCHI"