Б.Абдалимов

Ўзбекистон Республикаси Қишлоқ ва
сув хўжалиги Вазирлиги

Тошкент Давлат Аграр Университети

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА КУРСИДАН МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР ТЎПЛАМИ

I

Олий ўқув юртлараро илмий-услубий бирлашмалар
фаолиятини мувофиқлаштирувчи кенгаш
томонидан олий ўқув юртлари учун ўқув
қўлланма сифатида тавсия этилган

ТОШКЕНТ «ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ
ЭНЦИКЛОПЕДИЯСИ» – 2001

Мазкур дарслик Аграр университет ва қишлоқ хўжалик олий ўқув юртларининг олий математика дастури асосида ёзилган бўлиб, унда текислик ва фазода аналитик геометрия, математик анализ, дифференциал тенгламалар, векторлар ва чизиқли алгебра элементлари, эҳтимоллар назарияси, математик статистика элементлари ҳақида қисқача маълумотлар, масалалар ечиш намуналари, сўнгра мустақил ечиш учун мисол ва масалалар берилган.

Дарслик қишлоқ хўжалик олий ўқув юртлари талабалари учун мўлжалланган бўлиб, унда иқтисодиёт ва техника олий ўқув юртлари талабалари хам фойдаланишлари мумкин. Шунингдек, ушбу дарсликни қишлоқ хўжалиги соҳасидаги коллежлар ҳамда академик лицейлар ўқув жараёнида ҳам қўлланиши мумкин.

Тақризчи: Тошкент Давлат Иқтисодиёт Университети Олий математика» кафедраси мудири, доцент С.Исамухамедов.

Махсус муҳаррир: Х.Мансуров – ЎзМУ доценти, физика-математика фанлари номзоди.

СЎЗ БОШИ

Тошкент Давлат аграр университети қишлоқ хўжалиги ҳамда иқтисод соҳалари бўйича малакали кадрлар тайёрловчи республикамизнинг етакчи олий ўқув юрти ҳисобланади.

Таълим соҳасидаги туб ислоҳотлар, кадрлар тайёрлашнинг миллий дастури асосида бу олий ўқув юртида ҳам кўп йўналишлар бўйича меъёрий ҳужжатлар: давлат таълим стандартлари, ўқув режалар ва дастурлар ишлаб чиқилди.

Навбатдаги вазифа ушбу бакалаврлар тайёрлаш дастури асосида дарслик ҳамда қўлланмалар яратишдан иборат. Қишлоқ хўжалик ўқув юртлари талабаларининг иқтисодий масалаларни ечишда зарур бўладиган математик аппарат асослари билан чуқурок таништириш, халқ хўжалиги масалаларининг математик моделларини қуришнинг самарали йўлларини кўрсатишда, мазкур олий ўқув юрти талабалари учун, муаллифнинг «Ўқитувчи» нашриёти томонидан 1994 йилда чоп этилган «Олий математика» дарслиги муносиб хизмат қилиб келмоқда.

Сизга ҳавола қилинаётган ушбу қўлланма муаллифнинг юқорида келтирилган дарсликка мослаб ёзилаётган масалалар тўпламининг биринчи қисми бўлиб, 8 бобдан иборатдир. Биринчи бобда жуда кўп учрайдиган ва қўлланиладиган сонлар ва улар устида амаллар, пропорция ва фоизлар, тенгламалар ва тенгсизликларга бағишлангандир. 2-7 боблари аналитик геометрияга, 8-боб эса чизиқли ва векторлар алгебрасининг бошланғич тушунчаларига доирдир. Ҳар бир мавзуга намуна тариқасида мисоллар ечиб кўрсатилган ҳамда мустақил ечиш учун мисол ва масалалар келтирилган. Ўз-ўзини синаш мақсадида тест усулидан фойдаланиш бўйича мисоллар келтирилган.

Ушбу масалалар тўпламидан қатор олий ўқув юртлари талабалари билан бирга барча коллежлар талабалари, лицей ўқувчилари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Муаллиф

I БОБ

ДАСТЛАБКИ МАЪЛУМОТЛАР

1-§. СОНЛАР ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

Сон тушунчаси ўқувчига ўрта мактаб математика курсидан маълум бўлса ҳам, биз бу ерда баъзи қоидаларни келтириб, мисоллар кўрсатишни мақсадга мувофиқ деб ҳисобладик.

1°. Энг катта умумий бўлувчи. Энг кичик умумий бўлинувчи. Агар n_1 ва n_2 натурал сонларнинг ҳар бири бирор m сонга бўлинса, m сон бу сонларнинг умумий бўлувчиси дейилади.

n_1 ва n_2 сонлар умумий бўлувчиларининг каттаси шу сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси дейилади. Масалан, 12 ва 24 сонларининг энг катта умумий бўлувчиси 12 га тенг бўлади.

1-мисол. Ушбу 360 ва 8400 сонларининг энг катта умумий бўлувчисини топинг. Аввало бу сонларни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$360=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5,$$
$$8400=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7.$$

Бундан кўринадики, 360 ва 8400 сонларининг умумий бўлувчилари

$$2\cdot3\cdot5=30,$$
$$2\cdot2\cdot3\cdot5=60,$$
$$2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5=120$$

бўлиб, уларнинг каттаси 120 бўлади.

Агар m натурал сон ҳам n_1 сонга, ҳам n_2 сонга бўлинса, бу m сонни n_1 ва n_2 сонларнинг умумий бўлинувчиси дейилади.

n_1 ва n_2 сонларнинг умумий бўлинувчиларининг кичиги, шу сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчиси дейилади.

2-мисол. Ушбу 36 ва 54 сонларининг энг кичик умумий бўлинувчисини топинг.

Аввало бу сонларни қуйидагича туб кўпайтувчиларга ажратиб ёзиб оламиз:

$$36=2\cdot2\cdot3\cdot3,$$
$$54=2\cdot3\cdot3\cdot3.$$

Сўнг тенгликларнинг ўнг томонидаги кўпайтмада қатнашган кўпайтувчилардан 2 ва 3 сонларнинг катта (юқори) даражалари билан олинса, унда

$$2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3=108,$$

сон ҳосил бўлади. Бу 108 сони берилган 36 ва 54 сонларининг энг кичик умумий бўлинувчиси бўлади.

2°. Касрлар устида амаллар. Икки $\frac{a}{b}$ ва $\frac{c}{d}$ каср берилган бўлсин. Бу касрларнинг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва нисбати (бўлинмаси) қуйидаги қоидаларга кўра ҳисобланади:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d},$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Эслатма. Касрларни қўшиш ва айиришда:

1) Касрларнинг махражлари бир хил бўлганда

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b},$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

бўлади.

2) Касрлар махражлари ҳар хил бўлганда, бу каср махражлари b ва d сонларининг энг кичик умумий бўлинувчисини топиб, сўнг бу касрлар умумий махражга келтирилади ва 1) қоида бўйича йиғиндиси ҳамда айирмаси топилади.

3-мисол. Ушбу

$$\frac{4}{9}+\frac{5}{21}$$

йиғиндини топинг.

Касрлар махражлари 9 ва 21 сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчиси 63 га тенг бўлади. Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$\frac{{}^{7}4}{9}+\frac{{}^{3}5}{21}=\frac{7\cdot4+3\cdot5}{63}=\frac{28+15}{63}=\frac{43}{63}.$$

*3°. **Амалларни бажариш тартиби.*** Бир неча (I ва II босқич) босқич амаллар қатнашган сонли ифодаларни ҳисоблаииб аввал юқори босқич амаллари бўлган кўпайтирув ва бўлиш, биринчи бажарилади, сўнгра қуйи боскич амаллари бўлган қўшиш, айириш амаллари бажарилади.

4-мисол. Ушбу ифоданинг қийматини топинг:

$$5+8:2-4\cdot3$$

Бу қуйидагича ҳисобланади:

$$5+8:2-4\cdot3=5+4-12=9-12=-3.$$

Фақат I босқич амаллар қатнашган ҳолда, улар чапдан ўнгга қараб кетма-кет бажарилади.

Масалан,

$$10-1-2-3-4=9-2-3-4=7-3-4=4-4=0.$$

Қавс қатнашган сонли ифодаларда аввал қавс ичидаги

амаллар бажарилади.

5-мисол. **Ушбу ифоданинг қийматини топинг:**

$$\left[\left(6\frac{3}{4}+5\frac{1}{2}\right):26\cdot 3\frac{5}{7}-0{,}05\right]:0{,}2$$

Берилган ифоданинг қийматини топиш қуйидаги тартибда бажарилади:

1) $6\frac{3}{4}+5\frac{1}{2}=\frac{27}{4}+\frac{11}{2}=\frac{27+22}{4}=\frac{49}{4}$,

2) $\frac{49}{4}:26=\frac{49}{4}\cdot\frac{1}{26}=\frac{49}{104}$,

3) $\frac{49}{104}\cdot 3\frac{5}{7}=\frac{49}{104}\cdot\frac{26}{7}=\frac{7\cdot 1}{4\cdot 1}=\frac{7}{4}$,

4) $\frac{7}{4}-0{,}05=\frac{7}{4}-\frac{5}{100}=\frac{7}{4}-\frac{1}{20}=\frac{7\cdot 5-1}{20}=\frac{17}{10}$,

5) $\frac{17}{10}:0{,}2=\frac{17}{10}:\frac{2}{10}=\frac{17}{10}\cdot\frac{10}{2}=\frac{17}{2}=8{,}5$.

Демак, берилган ифоданинг қиймати 8,5 га тенг экан.

4°. Соннинг даражаси. ***a*** **сонни ўзини ўзига *n* марта кўпайтиришдан ҳосил бўлган сон *a* нинг *n*-даражаси дейилади ва a^n каби ёзилади.**

Демак, $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{марта}}$.

Даражанинг хоссалари:

1) $a^0=1 \quad (a\neq 0)$,

2) $a^{-n}=\frac{1}{a^n} \quad (a\neq 0)$,

3) $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$,

4) $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$,

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad (b\neq 0)$,

6) $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$,

7) $\left(a^n\right)^m=a^{nm}$,

6-мисол. **Ушбу ифоданинг қийматини топинг:**

$$A=(0,25)^{-1}\cdot\left(1\frac{1}{4}\right)^2+25\cdot\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}:\left(\frac{5}{4}\right)^3\right]:\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$$

Ҳисоблаймиз:

1) $(0,25)^{-1}=\frac{1}{0,25}=\frac{100}{25}=4$,

2) $\left(1\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{5\cdot5}{4\cdot4}=\frac{25}{16}$,

3) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{1}{\frac{4^2}{3^2}}=\frac{1}{\frac{16}{9}}=\frac{9}{16}$,

4) $\left(\frac{5}{4}\right)^3=\frac{5^3}{4^3}=\frac{125}{64}$,

5) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^3}=\frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{1}{-\frac{8}{27}}-\frac{27}{8}$.

Демак,

$$A=4\cdot\frac{25}{16}+25\cdot\left(\frac{9}{16}:\frac{125}{64}\right):\left(-\frac{27}{8}\right)=\frac{25}{4}-25\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{64}{125}\cdot\frac{8}{27}=$$

$$=\frac{25}{4}-\frac{32}{15}=\frac{375-128}{60}=4\frac{7}{60}.$$

5°. n-даражали илдиз.

a **соннинг** ***n*-даражали илдизи деб шундай *x* сонга айтиладики, у соннинг n-даражаси а га тенг бўлади: $x^n=a$. а соннинг *n*-даражали илдизи**

$$x=\begin{cases}\sqrt[n]{a}, & \text{агар } n \text{ тоқ бўлса,}\\ \pm\sqrt[n]{a}, & \text{агар } n \text{ жуфт бўлса}\end{cases}$$

бўлади.

Эслатма. $\sqrt[n]{a}$ **ифода *a*<0 ва *n* жуфт бўлганда маънога эга эмас.**

Номанфий *a* соннинг *n*-даражали арифметик илдизи деб, *n*-даражаси *a* га тенг бўлган номанфий сонга айтилади.

Исталган мусбат *a* да ва *n* тоқ бўлганда

$$\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$$

бўлади.

Илдизнинг хоссалари:

1) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{a}=\sqrt[n\cdot m]{a^{n+m}}$ $\quad (a>0, n\geq 2, m\geq 2)$,

2) $\sqrt[nm]{a^m}=\sqrt[n]{a}$,

3) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$,

4) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$,

5) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a^{m-n}}$,

6) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$,

7) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nm]{a}$.

7-мисол. **Ушбу ифода қийматини топинг:**

$$\sqrt[4]{625}\cdot\sqrt[3]{4\cdot\sqrt{256}}$$

Равшанки,

$$625=25^2=(5^2)^2=5^4,$$

$$256=(16)^2=(4^2)^2=4^4.$$

Унда

$$\sqrt[4]{625}=\sqrt[4]{5^4}=5^{\frac{4}{4}}=5, \qquad \sqrt{256}=\sqrt{4^4}=4^{\frac{4}{2}}=4^2$$

бўлиб,

$$\sqrt[4]{625}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{256}}=5\cdot\sqrt[3]{4\cdot 4^2}=5\cdot\sqrt[3]{4^3}=5\cdot 4=20$$

бўлади. Демак, берилган ифоданинг қиймати 20 га тенг.

2-§. ПРОПОРЦИЯ ВА ФОИЗЛАР

1°. Пропорция. ***a, b, c, d*** **бутун сонлардан тузилган** $\frac{a}{b}$ **ва** $\frac{c}{d}$ **нисбатлар**

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \tag{1.1}$$

тенглигига пропорция дейилади.

Одатда (1.1) пропорцияни қуйидагича

$$a \;-\; d$$

$$b \;-\; c$$

ёзилиб, уни пропорция тузиш дейилади. Бу ёзув $ac=bd$ **(пропорциянинг асосий хоссасини) ифодалашда фойдаланилади.**

8-масала. **Жамғарилган ёнилғи 100 мотоцикл учун 25 кунга етади. Шу жамғарма 125 та мотоцикл учун неча кунга етади?**

Айтайлик, 125 та мотоцикл учун ёнилғи x **кунга етсин.**

Масаланинг шартидан фойдаланиб, 100 та мотоцикл учун 1 кунда ёнилғининг $\frac{1}{25}$ қисми, 125 та мотоцикл учун 1 кунда ёнилғининг $\frac{1}{x}$ қисми зарур бўлишини топамиз.

Энди пропорция тузамиз:

$$\left.\begin{array}{ccc} 100 & - & \frac{1}{25} \\ 125 & - & \frac{1}{x} \end{array}\right\}.$$

Ундан

$$100\cdot\frac{1}{x}=125\cdot\frac{1}{25}$$

бўлиши келиб чиқади. Кейинги тенгликдан топамиз:

$$\frac{100}{x}=5,\quad x=20\cdot$$

Демак, ёнилғи жамғармаси 125 та мотоцикл учун 20 кунга етар экан.

9-масала. 15 кг бўлган бир яшик пиёз 48 сўм туради. Шу пиёзнинг 40 килограмми неча сўм туради?

Фараз қилайлик, 40 кг пиёз x сўм турсин. Пропорция тузамиз:

$$\left.\begin{array}{ccc} 15 & - & 48 \\ 40 & - & x \end{array}\right\}.$$

Бундан

$$15\cdot x=48\cdot 40$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенгликдан:

$$x=\frac{48\cdot 40}{15}=128\cdot$$

Демак, 40 кг пиёз 128 сўм турар экан.

*2°. **Фоизлар.*** Бирор a сон берилган бўлсин. Бу a сонниг юздан бир қисми унинг фоизи (1 фоизи) дейилади ва 1% каби белгиланади:

$$1\%=\frac{1}{100}a\cdot$$

Бунда а сонининг ўзи 100% ни ташкил этади. a сон берилган ҳолда унинг $\alpha\%$ и бўлган b сон ушбу

$$b=\frac{a}{100}\cdot\alpha \qquad (1.2)$$

формула орқали топилади.

a сонининг $\beta\%$ и берилган b сонига тенг экани маълум бўлган ҳолда a соннинг ўзи ушбу

$$a = \frac{b}{\beta} \cdot 100 \qquad (1.3)$$

формула орқали топилади.

10-масала. Корхона бир йилда 300 дона маҳсулот ишлаб чиқаради. Агар меҳнат унумдорлиги 20% га ошса, корхона бир йилда қанча маҳсулот ортиқ ишлаб чиқаради?

Корхонанинг бир йилда ортиқча ишлаб чиқарган маҳсулотини x билан белгилайлик. Унда

$$\left.\begin{array}{ccc} 300 & - & 100\% \\ x & - & 20\% \end{array}\right\}$$

яъни $300 \cdot 20 = 100x$ бўлади. Бу тенгликдан топамиз:

$$x = \frac{300 \cdot 20}{100} = 60 \cdot$$

Демак, корхона 1 йилда 60 та маҳсулот ортиқ ишлаб чиқади.

11-масала. Кооператив жамоа хўжалигидан 20 тонна олмани 1 килограммини 1 сўм 50 тийиндан сотиб олди. Сўнгра олмани саралаб 5% ини чиқиндига чиқариб ташлади; 40% ини биринчи навга, қолганини эса иккинчи навга ажратди. Биринчи нав олмани 1 килограммини 6 сўмдан, иккинчи нав олмани 2 сўм 50 тийиндан сотди. Шу кооперативнинг фойдасини ҳисобланг.

Аввало кооператив харажатини ҳисоблаймиз. Бу харажат 20000·1,5=30000 сўм га тенг бўлади.

Масаланинг шартидан фойдаланиб, биринчи навли олма

$$20000 \cdot \frac{40}{100} = 8000 \text{ кг,}$$

иккинчи навли олма эса

$$20000 \cdot \frac{55}{100} = 11000 \text{ кг}$$

бўлишини топамиз. Бу олмалар

8000·6=48000 сўм,

11000·2,5=27500 сўмга

сотилган. Кооператив фойдаси

(48000+27500)-30000=45500 сўм

бўлади.

3°. Оддий фоизли жамғармани ҳисоблаш.

Агар банкга қўйилган A сўмнинг маълум бир фоизи бирор вақт ўтиши билан қўшилиб борса жамғарма ҳосил бўлади. Бу жамғармада фоиз қўшилиб бориши фақатгина бошланғич пул миқдорига нисбатан бўлса, оддий фоизли жамғарма дейилади.

Фараз қилайлик, бошланғич A сўмнинг ўсиш фоизи p бўлсин, у ҳолда n-йилдан кейинги жамғарма миқдори A_n оддий фоизда қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$A_n = A + n\frac{p}{100}\cdot A = A\left(1 + n\frac{p}{100}\right) \qquad (1.4)$$

12-мисол. Агар банкга оддий фоизли қўйилган A=10000 сўм пулни йиллик ўсиши 5 фоиз бўлса, 4 йилдан сўнг жамғарма миқдори қанча бўлади?

Ечиш. A=10000, $\frac{p}{100} = 0{,}05$, n=4 бўлгандан (1.4) формулага асосан жамғарма

$$A_4 = A(1+4\cdot 0{,}05) = 10000\cdot 1{,}2 = 12000 \text{ сўм}$$

бўлишлиги келиб чиқади.

4°. Мураккаб фоизли жамғармани ҳисоблаш.

Агар жамғарма банкга қўйилган бошланғич пул миқдорига нисбатан эмас, балки ҳар йилги ўсиш фоизига нисбатан олинса, мураккаб фоизли жамғарма ҳосил бўлади.

Фараз қилайлик, банкга қўйилган бошланғич пул миқдори K сўм бўлиб, n йил давомида p фоиздан мураккаб фоизда кўпайсин. n йилдан кейинги пул миқдори K_n қуйидаги формула билан топилади:

$$K_n = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \qquad (1.5)$$

13-мисол. Агар 10000 сўм пул, ҳар йили p=5 фоиздан мураккаб фоизли кўпайса, 4 йилдан сўнг қанча бўлади?

Ечиш. Равшанки n=4, $\frac{p}{100}$=0,05, K=10000. (1.5) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$K_4 = K\left(1 + \frac{p}{100}\right)^4 = 10000(1+0{,}05)^4 =$$

$$= 10000\cdot 1{,}2155062 \approx 12155 \text{ сўм 6 тийин.}$$

3-§. ТЕНГЛАМАЛАР ВА ТЕНГСИЗЛИКЛАР

1°. Чизиқли ва квадрат тенгламалар.

Ушбу

$$ax + b = 0 \qquad (1.6)$$

кўринишдаги тенглама чизиқли тенглама дейилади. Бунда a,b сонлар – тенгламанинг коэффициентлари, x– номаълум сон

1) Агар $a\neq 0$ бўлса, (1.6) тенгламанинг ечими

$$x = -\frac{b}{a}$$
бўлади.

2) $a=0$, $b=0$ бўлса, (1.6) тенгламанинг ечими чексиз кўп бўлади.

3) $a=0$, $b\neq 0$ бўлса, (1.6) тенглама ечимга эга бўлмайди.

15-мисол. Ушбу
$$(p^2-1)x+1+p^3=0$$
тенгламани ечинг. Равшанки, бу тенгламанинг ечими p га боғлиқ бўлади.

а) $p^2\neq 1$ бўлсин. Бу ҳолда берилган тенглама ечимга эга бўлиб,
$$(p^2-1)x+1+p^3=0 \to (p^2-1)x=-p^3-1 \to$$
$$\to x=\frac{-p^3-1}{p^2-1}=-\frac{(p+1)(p^2-p+1)}{(p-1)(p+1)} \to x=\frac{p^2-p+1}{1-p}$$
бўладя.

б) $p=1$ бўлсин. Бу ҳолда тенглама ечимга эга бўлмайди.

в) $p=-1$ бўлсин. Бу ҳолда ихтиёрий x сон унинг ечими бўлади.

16-масала. Умумий юзи 8,5 га бўлган икки участкадан 58 ц зиғирпоя толаси олинди. Биринчи участканинг ҳар бир гектаридан ўртача $8\frac{4}{7}$ ц, иккинчи участканинг ҳар бир гектаридан 5,6 ц зиғирпоя олинди. Ҳар қайси участканинг юзи топилсин.

Биринчи участканинг юзи x га бўлсин. Унда иккинчи участканинг юзи 8,5-x га бўлади.

Равшанки, биринчи участкадан олинган зиғирпоя толаси $8\frac{4}{7}x$ ц, иккинчи участкадан олинган зиғирпоя толаси $(8{,}5-x)\cdot 5{,}6$ ц бўлади. Масаланинг шартидан фойдаланиб топамиз.
$$8\frac{4}{7}x+(8{,}5-x)\cdot 5{,}6=58.$$

Бу ҳосил бўлган чизикли тенгламани ечамиз:
$$x\left(8\frac{4}{7}-5{,}6\right)=58-8{,}5\cdot 5{,}6,$$
$$x=\frac{58-8{,}5\cdot 5{,}6}{8\frac{4}{7}-5{,}6}=\frac{58-47{,}6}{\frac{60}{7}-\frac{28}{5}}=\frac{10{,}4}{\frac{104}{35}}=\frac{52}{5}\cdot\frac{35}{104}=\frac{7}{2}=3{,}5.$$

Демак, биринчи участканинг юзи 3,5 га, иккинчи участканинг юзи 8,5-3,5=5 га.

Ушбу

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1.7)$$

кўринишдаги тенглама квадрат тенглама дейилади. Бунда a, b, c сонлар – квадрат тенгламанинг коэффициентлари, x-номаълум сон.

(1.7) квадрат тенгламанинг коэффициентларидан ҳосил қилинган ушбу

$$D=b^2-4ac$$

миқдор тенгламанинг дискриминанти дейилади.

1) Агар $D>0$ бўлса, (1.7) квадрат тенглама иккита турли

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ечимларга эга бўлади.

2) Агар $D=0$ бўлса, (1.7) квадрат тенгламанинг ечимлари бир-бирига тенг ва

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

бўлади.

3) Агар $D<0$ бўлса, (1.7) квадрат тенгламанинг ҳақиқий ечими мавжуд эмас.

17-мисол. Ушбу тенгламани ечинг:

$$px^2+2x+1=0$$

Равшанки, бу тенгламанинг ечими p нинг қийматига боғлиқ бўлади.

1) $p=0$ бўлсин. Унда

$$px^2+2x+1=0 \rightarrow 2x+1=0 \rightarrow x=-\frac{1}{2}.$$

2) $p\neq 0$ бўлсин. Унда берилган квадрат тенгламанинг дискриминанти

$$D=2^2-4p=4(1-p)$$

бўлиб, $p<1$ бўлганда $D>0$, $p>1$ бўлганда эса $D<0$ бўлади. Демак, $p<1$ бўлганда берилган квадрат тенгламанинг ечимлари

$$x_1=\frac{1+\sqrt{1-p}}{p},\ x_2=\frac{1-\sqrt{1-p}}{p}.$$

18-масала. Биринчи ишчи бир детални тайёрлаш учун иккинчисидан 3 минут кам вақт сарфлайди. Агар 7 соат ичида биринчи ишчи иккинчисидан 16 та кўп детал ясай олса, уларнинг ҳар бири шу вақт ичида қанчадан детал ясай олади?

Айтайлик, биринчи ишчи 7 соат давомида x та детал ясасин. Унда шу вақт давомида иккинчи ишчи x-16 та детал ясайди.

Равшанки, биринчи ишчининг битта детал ясашга кетган вақти $\frac{7}{x}$ бўлса, иккинчи ишчининг битта детал ясашга кетган вақти $\frac{7}{x-16}$ га тенг бўлади.

Масаланинг шартига кўра

$$\frac{7}{x-16}-\frac{7}{x}=3\text{ мин.}$$

бўлади. 3 минут $\frac{1}{20}$ соатга тенг бўлишини эътиборга олсак, кейинги тенглик ушбу

$$\frac{7}{x-16}-\frac{7}{x}=\frac{1}{20}$$

кўринишга келади. Бу тенгламани ечамиз:

$$\frac{7}{x-16}-\frac{7}{x}=\frac{1}{20} \to \frac{7x\cdot 20}{x(x-16)\cdot 20}-\frac{7\cdot 20(x-16)}{x(x-16)\cdot 20}=\frac{x(x-16)}{20x(x-16)} \to$$

$$\to 140x-140(x-16)=x(x-16) \to x^2-16x-2240=0 \to$$

$$\to x_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{256+4\cdot 2240}}{2}=\frac{16\pm 96}{2} \to x_1=8+48=56,\quad x_2=-40.$$

Демак, 7 соат давомида биринчи ишчи 56 та, иккинчи ишчи эса 56-16=40 та детал тайёрлар экан.

Виет теоремаси. Агар x_1 ва x_2 лар

$$ax^2+bx+c=0,\quad a\neq 0$$

квадрат тенгламанинг илдизлари бўлса,

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a},\quad x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

бўлади.

19-мисол. Агар x_1 ва x_2 лар

$$2x^2+3x-5=0$$

тенгламанинг ечимлари бўлса,

$$x_1^2\cdot x_2+x_1\cdot x_2^2$$

ни топинг.

Равшанки,

$$x_1^2\cdot x_2+x_1\cdot x_2^2=x_1\cdot x_2(x_1+x_2).$$

Виет теоремасига кўра берилган тенглама учун

$$x_1\cdot x_2=-\frac{5}{2},\quad x_1+x_2=-\frac{3}{2}$$

бўлади. Демак,

$$x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{4}.$$

2°. Чизиқли ва квадрат тенгсизликлар.

Ушбу

$$ax + b > 0 \quad (a \neq 0)$$
$$(ax + b < 0, \quad ax + b \geq 0, \quad ax + b \leq 0) \qquad \textbf{(1.8)}$$

кўринишдаги тенсизлик чизиқли тенгсизлик дейилади. Бунда *a*, *b* – берилган сонлар.

(1.8) тенгсизликнинг ечими *a*-нинг ишорасига боғлиқ:

1) *a*>0 бўлсин. Унда

$$ax + b > 0 \rightarrow ax > -b \rightarrow x > -\frac{b}{a}$$

бўлиб, тенгсизликнинг ечимлари $\left(-\frac{b}{a};+\infty\right)$ **тўпламни ташкил этади.**

2) *a*<0 бўлсин. Унда

$$ax + b > 0 \rightarrow ax > -b \rightarrow x < -\frac{b}{a}$$

бўлиб, тенгсизликнинг ечимлари $\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$ **тўпламни ташкил этади.**

20-мисол. **Ушбу тенгсизликни ечинг:**

$$-\frac{2}{3}x + 5(x-1) \leq \frac{x-2}{6}$$

Бу тенгсизлик қуйидагича ечилади:

$$-\frac{2}{3}x + 5(x-1) \leq \frac{x-2}{6} \rightarrow -4x + 30x - 30 \leq x - 2 \rightarrow 26x - 30 \leq x - 2 \rightarrow$$
$$\rightarrow 25x \leq 28 \rightarrow x \leq \frac{28}{25}.$$

Демак, берилган тенгсизликнинг ечимлар тўплами $\left(-\infty;\frac{28}{25}\right]$ **бўлади.**

Ушбу тенгсизликлар квадрат тенгсизликлар дейилади:

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad (a \neq 0)$$
$$(ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c \geq 0, \quad ax^2 + bx + c \leq 0) \qquad \textbf{(1.9)}$$

Равшанки,

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right]$$

бунда $D = b^2 - 4ac$.

1) *a*>0, *D*<0 бўлсин. Бу ҳолда x нинг барча қийматларида $ax^2 + bx + c$ **нинг ишораси мусбат бўлади. Бинобарин, берилган (1.9)**

тенгсизликнинг ечимлар тўплами $(-\infty;+\infty)$ бўлади.

2) $a>0$, $D>0$ бўлсин. Бу ҳолда квадрат учҳад қуйидагича

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

ифодаланади, бунда x_1, x_2 - квадрат тенгламани илдизлари. Сонлар ўқида x_1 ва x_2 $(x_1<x_2)$ сонларни белгилаймиз. Унда сонлар ўқи уч қисмга: $(-\infty;x_1)$, $(x_1;x_2)$ ҳамда $(x_2;+\infty)$ ларга ажралади. x_2 дан ўнг томондаги қисмга «+» ишорасини, чап томондаги қисмларга ишорани навбат билан тескарисига ўзгартириб қўямиз (1-чизма).

1-чизма.

Бу ишоралардан тенгсизлик ишораси билан бир хил бўлган қисми берилган тенгсизликнинг ечимлар тўплами бўлади. Демак, $(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$ ечимлар тўпламидир.

3) $a<0$, $D<0$ бўлсин. Бу ҳолда x нинг барча қийматларида ax^2+bx+c нинг ишораси манфий бўлиб,

$$ax^2+bx+c>0$$

тенгсизлик ечимга эга бўлмайди.

21-мисол. Ушбу тенгсизликни ечинг:

$$x^2-3x+2>0$$

Аввало $x^2-3x+2=0$ тенгламани ечамиз:

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2};\quad x_1=1,\quad x_2=2.$$

Унда

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

бўлиб, берилган тенгсизлик қуйидаги

$$(x-1)(x-2)>0$$

кўринишга келади. Унинг ечимлари (2-чизма)

2-чизма.

$(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$ тўпламни ташкил этади.

3°. Иррационал тенгламалар ва тенгсизликлар.

Номаълум x илдиз (радикал) ишораси остида қатнашган тенгламалар иррационал тенгламалар дейилади.

Иррационал тенгламаларни ечишдан аввал, унда қатнашган номаълумнинг шундай қийматлари тўпламини топиш керак бўладики, бу тўпламнинг ҳар бир элементи учун тенглама маънога эга бўлсин.

22-мисол. **Ушбу тенгламани ечинг:**

$$3\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=7$$

Бу тенглама (тенглик) маънога эга бўлиши учун

$$x+3\geq 0,\quad x-2\geq 0$$

яъни

$$x\geq 2$$

бўлиши керак. Демак, номаълумнинг 2 дан катта бўлган қийматлари орасида берилган тенгламанинг ечимларини топиш лозим. Қаралаётган тенглама қуйидагича ечилади:

$$3\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=7\ \rightarrow\ 3\sqrt{x+3}=7+\sqrt{x-2}\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ (3\sqrt{x+3})^2=(7+\sqrt{x-2})^2\ \rightarrow\ 9(x+3)=49+14\sqrt{x-2}+x-2\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 8x-20=14\sqrt{x-2}\ \rightarrow\ 4x-10=7\sqrt{x-2}\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ (4x-10)^2=(7\sqrt{x-2})^2\ \rightarrow\ 16x^2-80x+100=49(x-2)\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 16x^2-129x+198=0\ \rightarrow$$

$$\rightarrow x_{1,2}=\frac{129\pm\sqrt{16641-4\cdot16\cdot198}}{2\cdot16}=\frac{129\pm63}{32}\ \rightarrow\ x_1=6,\quad x_2=2\frac{1}{16}.$$

Энди бу $x_1=6,\quad x_2=2\frac{1}{16}$ **ларнинг берилган тенгламани қаноатлантиришини текширамиз.**

$x_1=6$ **да**

$$3\sqrt{6+3}-\sqrt{6-2}=3\cdot3-2=7$$

бўлади. Демак, бу ҳолда 7=7.

$x_2=2\frac{1}{16}$ **да**

$$3\sqrt{2\frac{1}{16}+3}-\sqrt{2\frac{1}{16}-2}=3\sqrt{\frac{81}{16}}-\frac{1}{4}=6\frac{1}{2}$$

бўлади. Демак, бу ҳолда $6\frac{1}{2}\neq7$.

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг ечими x=6 бўлади.

Номаълум x илдиз (радикал) ишораси остида қатнашган тенгсизликлар иррационал тенгсизликлар дейилади.

23-мисол. **Ушбу иррационал тенгсизликни ечинг:**

$$\sqrt{1-x}-\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{3}}>0$$

Берилган тенгсизлик маънога эга бўлиши учун

$$1-x\ge 0,$$
$$x\ge 0,$$

яъни $0\le x\le 1$ бўлиши лозим. Шуни эътиборга олиб, тенгсизликни қуйидагича

$$\sqrt{1-x}>\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ёзиб оламиз. Ҳар икки томонини квадратга кўтарамиз:

$$\left(\sqrt{1-x}\right)^2>\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \to 1-x>x+2\sqrt{\frac{x}{3}}+\frac{1}{3} \to 1-x-x-\frac{1}{3}>2\sqrt{\frac{x}{3}} \to$$
$$\to \frac{2}{3}-2x>2\sqrt{\frac{x}{3}} \to \frac{1}{3}-x>\sqrt{\frac{x}{3}}.$$

Натижада берилган тенгсизликка тенгкучли бўлган ушбу

$$\frac{1}{3}-x>\sqrt{\frac{x}{3}} \qquad \left(x<\frac{1}{3}\right)$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Уни ечамиз:

$$\left(\frac{1}{3}-x\right)^2>\left(\sqrt{\frac{x}{3}}\right)^2 \to \frac{1}{3}-\frac{2}{3}x+x^2>\frac{x}{3} \to x^2-x+\frac{1}{9}>0 \to$$
$$\to \left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{6}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{6}\right)>0 \to x\in\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{5}}{6}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{5}}{6};+\infty\right).$$

Демак, $x\in[0,1]$ ва $x\in\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{5}}{6}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{5}}{6};+\infty\right)$.

Бундан эса берилган тенгсизликнинг ечими $\left[0;\frac{3-\sqrt{5}}{6}\right]$ тўпламдан иборат экани келиб чиқади.

4°. Логарифмик тенгламалар ва тенгсизликлар.

Берилган b соннинг ($b>0$) берилган a сонга (асосга) кўра логарифми деб, шу b сонни ҳосил қилиш учун a ни кўтариш керак бўлган даража кўрсаткичига айтилади ва

$$\log_a b \qquad (b>0,\quad a>0,\quad a\ne 1)$$

каби ёзилади. Бу таърифдан:

$$b=a^{\log_a b}.$$

Логарифм қуйидаги хоссаларга эга

1) $\log_a a=1, \qquad (a>0)$

2) $\log_a 1=0,$ 5) $\log_a N^n=n\log_a N,$

3) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$,

4) $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$,

6) $\log_{a^n} N=\frac{1}{n}\log_a N$,

7) $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$.

Номаълум x логарифм белгиси остида ёки логарифм асосида қатнашган тенгламалар логарифмик тенгламалар дейилади.

Ушбу

$$\log_a x=b \qquad (x>0, a>0, a\neq 1)$$

содда логарифмик тенгламанинг ечими $x=a^b$ бўлади.

Логарифмик тенгламаларни ечишда юқорида келтирилган логарифмнинг хоссаларидан ҳамда ушбу

$$\log_a \alpha=\log_a \beta \ \rightarrow\ \alpha=\beta \ \ (a>0, a\neq 1, \alpha>0, \beta>0)$$

қоидадан фойдаланилади.

24-мисол. **Ушбу тенгламани ечинг:**

$$\log_7(2x^2-5x+31)-2=0$$

Бу тенглама қуйидагича ечилади:

$$\log_7(2x^2-5x+31)-2=0 \rightarrow \log_7(2x^2-5x+31)=2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x^2-5x+31=7^2 \rightarrow 2x^2-5x+31-49=0 \rightarrow 2x^2-5x-18=0.$$

Бу тенгламанинг ечимлари

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+4\cdot 2\cdot 18}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{4}=\frac{5\pm 13}{4};$$

$$x_1=\frac{9}{2},\ x_2=-2$$

бўлади. Демак, берилган логарифмик тенгламанинг ечимлари $x_1=\frac{9}{2}$, $x_2=-2$ **бўлади.**

25-мисол. **Ушбу тенгламани ечинг:**

$$\log_x 25-3\log_{25} x=-2$$

Логарифмнинг хоссаларига кўра

$$\log_x 25=\frac{1}{\log_{25} x}$$

бўлади. Унда берилган тенглама қуйидаги

$$\frac{1}{\log_{25} x}-3\log_{25} x=-2$$

кўринишга келади. Бунда эса

$$1-3(\log_{25} x)^2 = -2\log_{25} x,$$

яъни

$$3(\log_{25} x)^2 - 2\log_{25} x - 1 = 0$$

бўлиши келиб чиқади. Энди

$$\log_{25} x = y$$

белгилаш киритамиз. Натижада

$$3y^2 - 2y - 1 = 0$$

квадрат тенгламага келамиз.

$$y_{1.2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4\cdot 3}}{2\cdot 3} = \frac{2\pm 4}{6}; \quad y_1 = 1, \quad y_2 = -\frac{1}{3}.$$

Демак,

$$\log_{25} x = 1, \quad \log_{25} x = -\frac{1}{3}.$$

Равшанки,

$$\log_{25} x = 1 \to x = 25,$$

$$\log_{25} x = -\frac{1}{3} \to x = 25^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}.$$

Шундай қилиб, берилган логарифмик тенгламанинг ечими $x_1 = 25$, $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}$ бўлади.

Номаълум x логарифм белгиси остида ёки логарифм асосида қатнашган тенгсизликлар логарифмик тенгсизликлар дейилади.

26-мисол. Ушбу

$$\log_2 \frac{x-3}{x+2} < 0$$

тенгсизликни ечинг.

Аввало x нинг берилган тенгсизлик маънога эга бўладиган қийматларини аниқлаймиз.

Равшанки, логарифм мавжуд бўлиши учун

$$\frac{x-3}{x+2} > 0$$

бўлиши керак. Бу тенгсизликни ечамиз:

$$\frac{x-3}{x+2} > 0 \to \frac{(x-3)(x+2)^2}{x+2} > 0\cdot(x+2)^2 \to (x+2)(x-3) > 0 \to$$

$$\to [x-(-2)](x-3) > 0 \to x \in (-\infty,-2) \cup (3,+\infty).$$

Энди $\log_2 1 = 0$ бўлишидан фойдаланиб тенгсизликни ечамиз:

$$\log_2 \frac{x-3}{x+2} < 0 \to \log_2 \frac{x-3}{x+2} < \log_2 1 \to \frac{x-3}{x+2} < 1 \to$$

$$\to \frac{x-3}{x+2}-1<0 \to \frac{-5}{x+2}<0 \to \frac{5}{x+2}>0 \to$$

$$\to \frac{5(x+2)^2}{x+2}>0\cdot(x+2)^2 \to x+2>0 \to x>-2.$$

Шундай қилиб, берилган логарифмик тенгсизликнинг ечимлар тўплами x нинг ушбу

$$-\infty<x<-2, \quad 3<x<+\infty, \quad x>-2$$

тенгсизликларни бир йўла қаноатлантирувчи қийматларидан, яъни $(3,+\infty)$ тўпламдан иборат бўлади.

5°. Кўрсаткичли тенгламалар ва тенгсизликлар.

Номаълум x даража кўрсаткичида қатнашган тенгламалар кўрсаткичли тенгламалар дейилади.

Ушбу

$$a^x=b \qquad (a>0, \quad a\neq 1, \quad b>0)$$

содда кўсаткичли тенгламанинг ечими

$$x=\log_a b$$

бўлади.

Кўрсаткичли тенгламаларни ечишда 1-§ параграфда келтирилган даража кўрсаткичининг хоссалари ҳамда

$$a^\alpha=a^\beta \Rightarrow \alpha=\beta \qquad (a>0, \quad a\neq 1)$$

қоидадан фойдаланилади.

***27-мисол.* Ушбу тенгламани ечинг:**

$$2^{2x}\cdot 9^x-2\cdot 6^{3x-1}+4^{2x-1}\cdot 3^{4x-2}=0$$

Агар

$$2^{2x}\cdot 9^x=4^x\cdot 9^x=(4\cdot 9)^x=(36)^x=(6^2)^x=6^{2x},$$

$$2\cdot 6^{3x-1}=2\cdot 6^{3x}\cdot 6^{-1}=\frac{2}{6}6^{3x}=\frac{1}{3}6^{3x},$$

$$4^{2x-1}\cdot 3^{4x-2}=4^{2x}\cdot 4^{-1}\cdot(3^2)^{2x-1}=\frac{1}{4}\cdot 4^{2x}\cdot 9^{2x}\cdot 9^{-1}=$$

$$=\frac{1}{36}(4\cdot 9)^{2x}=\frac{1}{36}(36)^{2x}=\frac{1}{36}\cdot 6^{4x}$$

эканини эътиборга олсак, у ҳолда берилган тенглама қуйидаги

$$6^{2x}-\frac{1}{3}6^{3x}+\frac{1}{36}\cdot 6^{4x}=0$$

кўринишга келади. Бу тенгликнинг ҳар икки томонини 6^{2x} га бўлиб топамиз:

$$6^{2x}-12\cdot 6^x+36=0.$$

Бу тенгликда $6^x = y$ белгилаш киритсак,

$$y^2 - 12y + 36 = 0$$

квадрат тенглама ҳосил бўлади.

Равшанки,

$$y^2 - 12y + 36 = (y-6)^2.$$

Демак,

$$(y-6)^2 = 0 \Rightarrow y = 6.$$

Шундай қилиб,

$$6^x = y = 6$$

бўлади. Бу тенгликдан эса x=1 бўлиши келиб чиқади.

Берилган тенгламанинг ечими x=1 бўлади.

Номаълум x даража кўрсаткичида қатнашган тенгсизликлар кўрсаткичли тенгсизликлар дейилади.

28-мисол. **Ушбу**

$$4^x < 2^{x+1} + 3$$

тенгсизликни ечинг.

Бу тенгсизлик қуйидагича ечилади:

$$4^x < 2^{x+1} + 3 \;\rightarrow\; 4^x - 2^{x+1} - 3 < 0 \;\rightarrow\; (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 3 < 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 2^x(2^x+1) - 3(2^x+1) < 0 \;\rightarrow\; (2^x+1)(2^x-3) < 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 2^x - 3 < 0 \;\rightarrow\; 0 < 2^x < 3 \;\rightarrow\; x < \log_2 3.$$

Демак, берилган тенгсизликнинг ечимлар тўплами $(-\infty, \log_2 3)$ бўлади.

6°. Тригонометрик тенгламалар.

Номаълум x тригонометрик функциялар белгиси остида қатнашган тенгламалар тригонометрик тенгламалар дейилади.

1. Ушбу

$$\sin x = a \qquad \textbf{(1.10)}$$

энг содда тригонометрик тенглама $|a| \le 1$ бўлгандагина ечимга эга бўлиб, унинг ечими

$$x = (-1)^n \arcsin a + n\pi \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$$

бўлади.

2. Ушбу

$$\cos x = a$$

энг содда тригонометрик тенглама $|a| \le 1$ бўлгандагина ечимга эга бўлиб, унинг ечими

$$x = \pm \arccos a + 2n\pi \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,...)$$

бўлади.

3. Ушбу

$$tgx = a$$

энг содда тригонометрик тенглама a нинг ихтиёрий қийматида ечимга эга бўлиб, у

$$x = arctga + n\pi \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,...)$$

бўлади.

4. Ушбу

$$ctgx = a$$

содда тригонометрик тенглама a нинг ихтиёрий қийматида ечимга эга бўлиб, у

$$x = arcctga + n\pi \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,...)$$

бўлади.

Одатда тригонометрик тенгламалар содда тригонометрик тенгламаларга келтириб ечилади.

29-мисол. Ушбу тригонометрик тенгламани ечинг:

$$8\cos^4 x - \cos 4x = 1$$

Қуйидаги

$$1 + \cos 4x = \cos^2 2x + \sin^2 2x + \cos^2 2x - \sin^2 2x = 2\cos^2 2x$$

тенгликдан фойдаланиб, сўнг

$$8\cos^4 x = 2(2\cos^2 x)^2 = 2\left(2\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = 2(1+\cos 2x)^2$$

бўлишини эътиборга олиб, берилган тенгламани қуйидагича

$$2(1+\cos 2x)^2 = 2\cos^2 2x$$

ёзиб оламиз. Кейинги тенгликдан эса

$$1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x = \cos^2 2x,$$

яъни

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенгламанинг ечими

$$2x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2n\pi,$$

яъни

$$x = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right) = \pm\frac{\pi}{6} + n\pi$$

бўлади. Демак, берилган тенгламанинг ечими

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + n\pi \qquad (n = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \ldots)$$

бўлади.

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

1. a ва b сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини топинг:
   1) a=756, b=360, ж:36.
   2) a=120, b=144, ж:24.
   3) a=372, b=156, ж:12.

2. a ва b сонларнинг энг кичик умумий бўлувчисини топинг:
   1) a=70, b=112, ж:560.
   2) a=308, b=264, ж:1848.
   3) a=75, b=114, ж:2850.

3. 108 ва 105 сонларининг энг катта умумий бўлувчиси қайси бири:
   A)1 B)3 C)5 D)2 E)6 ж:3.

4. 36 ва 54 сонларнинг энг кичик умумий бўлувчисини топинг:
   A)216 B)162 C)108 D)144 E)332 ж:108

5. 126, 540, 630 сонларининг энг катта бўлувчисини топинг:
   ж:18.

6. 200, 300, 315 сонларининг энг кичик бўлувчисини топинг:
   ж:18900.

7. n, n+1, n+2 сонларнинг энг каттаумумий бўлувчиси 1 эканлигини кўрсатинг.

8. n ва m сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси билан шу сонларнинг энг кичик умумий бўлувчиси кўпайтмаси n m га тенг бўлишини кўрсатинг.

9. 2n ва 2n+2 сонларнинг энг катта умумий бўлувчиси қайси бири?
   A)4 B)10 C)6 D)2 E)1 ж:2.

10. Ифодаларнинг қийматларини топинг:
    1) 5+8:2-4 3+17-54:2, ж:-3.
    2) (-2) 3+(-4)-7 0+1, ж:-9.
    3) (-2)+(-3):(-1)-(-7), ж:8.
    4) $\frac{(-1)(-2)(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)}{(-3)-(-5)}$, ж:-60.

5) $\dfrac{(-2)+(-3)\cdot(-1)\cdot 0+(-4)}{(-1)\cdot(-1)+3}$, ж: $-\dfrac{3}{2}$.

11. 8 6:3 2 ифоданинг қийматини топинг:

A)8 B)32 C)12 D)24 E)1 **ж:32.**

12. 24+8:4 2-1 ифоданинг кийматини топинг:

A)51 B)27 C)24 D)15 E)8 **ж:27.**

13. Сонли ифодаларнинг қийматларини топинг:

1) $(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}):(-1\frac{3}{5}-3\frac{3}{10}+5)$, **ж:** $-\dfrac{1}{2}$.

2) $\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}}\right):\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{\frac{7}{15}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{6}}\right)$, **ж:** $-\dfrac{9}{8}$.

3) $\dfrac{(11{,}81+8{,}19)\cdot 0{,}02}{\dfrac{9}{11{,}25}}$, **ж:0,5.**

4) $\dfrac{(1{,}09-0{,}29)\cdot 1\frac{1}{4}}{\left(18{,}9-16\frac{13}{20}\right)\cdot\frac{8}{9}}$, **ж:0,5.**

5) $\dfrac{\left(10:2\frac{2}{3}+7{,}5:10\right)\cdot 2\frac{1}{2}+0{,}75}{0{,}02}$ **ж:600.**

14. Сонли ифодаларнинг қийматларини топинг:

1) $\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}$, **ж:3.**

2) $\sqrt{8\sqrt{4}\cdot\sqrt[3]{64}}$, **ж:8.**

3) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{8^2}\cdot\sqrt[5]{32^2}}$, **ж:2.**

4) $\sqrt[3]{2}\left(\sqrt{2}\right)^4\cdot\sqrt[3]{\left(4\cdot\sqrt{2}\right)^2}$. **ж:16.**

5) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}:\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{2\dfrac{2}{3}}\right)$. **ж:** $\sqrt{2}$.

15. Сонли ифодаларнинг қийматларини топинг:

1. $\dfrac{2^3+2^{-3}}{4^3+1}$. **ж:** $\dfrac{1}{8}$.

2. $\dfrac{\left(3^4+3^3\right)^2}{9^3}$. **ж:16.**

3. $2^3+3\left(\frac{1}{2}\right)^0-2^{-2}\cdot 4+\left[(-2)^2:\frac{1}{2}\right]\cdot 8,$ **ж:74.**

4. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}-\left(-\frac{6}{7}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^2:2,$ **ж:** $\frac{17}{8}$.

5. $4^{-6}\cdot 4^4\cdot\left(2^3\cdot 2^{-4}\right)^{-1},$ **ж:** 2^{-3}.

16. $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}$ **ифоданинг кийматини топинг:**

A)5 B)0 C)-1 D)1 E)$\sqrt{2}$ **ж:1.**

17. $(-1)^{25}+(-1)^{36}+0^{15}$ **ифоданинг қийматини топинг:**

A)0 B)2 C)-1 D)1 E)-2 ж:0.

18. 1-2+3-4...+99-100 ифодани ҳисобланг.

A)-150 B)0 C)-49 D)-50 E)10 ж:-50.

19. 15 кг бўлган бир қути конфет 1080 сўм туради. Шу конфетнинг 40 килограмми қанча туради?

ж:2880.

20. 25 сонининг 5% ини топинг.

ж:1,25.

21. Агар буюмга сотиш учун қўйиладиган солиқ 6 %ни ташкил этса, 600 сўмли буюмга қанча солиқ қўйилади?

22. Буғдойни янчганда 69% дон, 28% сомон ва 3% бошқа чиқиндилар чиқади. 45 ц янчилмаган буғдойдан қанча дон, қанча сомон ва бошқа чиқиндилар чиқади?

ж:31,05ц, 12,6ц, 1,35ц.

23. Шоли оқланганда оғирлигининг 28% иқипиққа чиқади. 144 кг гуруч олиш учун қанча шоли керак?

ж:200 кг.

24. Ишчининг ойлик маоши 800 сўм эди. Икки марта кетма-кет маош бир сондаги фоизга оширилгандан сўнг 950 сўм бўлди. Маош ҳар гал неча фоиз ўсган?

25. Ўрикни қуритиш натижасида унинг массаси 45% га камаяди. 1кг туршак олиш учун неча кг ўрик олинади?

26. 325 т темир рудасидан $165\frac{3}{4}$ т темир чиқади. Темир бу руданинг неча фоизини ташкил этади?

ж:51%.

27. Завод бир ҳафтада режага мувофиқ 510000 та подшипник ўрнига 588000 та подшипник ишлаб чиқарган. Режа неча фоизга ошириб бажарилган?

ж: $15\frac{5}{17}$ %.

28. Ишлаб чиқариш унуми 20% ошди. Бирон детални ишлаш учун сарф қилинадиган вақт неча фоизга камайган?

ж: $16\frac{2}{3}$.

29. 20 кг ли мис қотишмада мис 40%ни ташкил этади. Унга неча килограмм қўрғошин қўшилса, ҳосил бўлган қотишмада 20% мис бўлади?

ж:20 кг.

30. Йилига 3% ҳисобидан қўйилган 400 сўмдан 5 йилда неча сўм фоиз пули келади?

ж:60 сўм.

31. 48 кунда 22,75 сўм фоиз пули олиш учун 3413,5 сўмни банкга неча фоиз ҳисобидан қўйиш керак?

ж:5%.

32. 35% ли 50 г хлорид кислотадан 10% ли кислота ҳосил қилиш учун унга қанча сув қуйиш керак?

ж:125 кг.

33. Молни сотишдан келадиган фойда, таннархининг 10%ига тенг бўлса, бу фойда мол таннархининг неча фоизига тенг бўлади?

ж: $11\frac{1}{9}$ %.

34. Молдан келадиган фойда таннархининг 25%ини ташкил этадиган бўлса, харидор эса молнинг сотиладиган нархидан 10% арзонига сотишни талаб қилса, фойда неча %га камаяди?

ж:12,5%.

35. Банкга 600 сўм пул қўйилди. Агар банк йилига 3% (мураккаб) тўлайдиган бўлса, қўйилган пул учинчи йилнинг охирида қанча пулга айланади?

ж:655,64 сўм.

36. Савдогар иккита бир хил автомобиль сотиб, биринчисидан 40%, иккинчисидан 69% фойда қилди. Унинг умумий фойдасини топинг.
A)100% B)50% C)54% D)40% E)60% ж:50%.

37. Агротехник талабларга кўра донни узоқ вақт сақлаш учун 14% гача намлик билан (кондицион ҳолат) тўкиб қўйилади. Агар янги ўриб-йиғиб олинган доннинг намлиги 24% бўлса, уни кондицион ҳолатгача қуритилганда доннинг массаси неча фоиз камаяди?
A)10% B)15% C)7% D)9,2% E)11,6%
ж:11,6%

38. 85 ли 7 г намокобга сув қўшиб 12 г намокоб ҳосил қилинади. Бу намокоб энди неча фоизли бўлади?
A)3,7% B)4,1% C)5% D) $4\frac{2}{3}$ % E) $5\frac{1}{2}$% ж: $4\frac{2}{3}$ %.

39. Бир корхонанинг акциялар нархи 4000 сўм бўлган. Йил охирида акциялар нархи 4200 сўм бўлган. Акциялар нархининг ўзгаришини фоизда топинг:

40. Силос бостиришда намлиги 75% бўлган кўк масса ҳосил қилиш учун намлиги 80% ва 35% бўлган ўсимликлардан қанчадан олиш керак?

Чизиқли тенгламаларни ечинг:

41. $6(x+4)=3-2x$ ж: $-2\frac{5}{8}$.

42. $\frac{5(x-2)}{x+2}-\frac{2(x-3)}{x+3}=0$ ж: $\frac{-7\pm\sqrt{265}}{6}$.

43. $0.2(x-1)+0.5(3x-9)=\frac{x}{3}-2$ ж: $\frac{81}{41}$.

44. $\frac{0.75(12x-4)-x-1}{2x-1}=0$ ж: ечими йўқ.

45. $(a^2-1)x+1+a^2=0$ ж: $-\dfrac{a^2+1}{a^2-1}$.

46. Пахта териш машинаси ҳар бир бункери 800 кг дан бир кунда 12 т пахта терди. У неча бункер пахта терган?

47. Пиллакор 7 қути пилла қурти боқиб, 350 кг пилла топширди. У ҳар бир қутидан неча килограммдан пилла топширган?

48. 25 та бир хил яшикка солинган олма 0,8 т бўлса, 1 яшикда қанча олма бор?

49. Тракторчи ҳар 15 га дан ер ҳайдаган бўлса, 120 га ерни неча кунда ҳайдайди?

50. Ушбу $\dfrac{a-1}{a(x-1)}+\dfrac{1}{a}=a$ чизиқли тенглама a нинг қандай қийматида ягона ечимга эга бўлади?

A) $a=1$ B) $a\neq2$ C) $a=2$ D) $a\neq1$ E) $a=0$

Чизиқли тенгсизликларни ечинг:

51. $7x-1>16(x-1)-2$.

52. $7\left(x+\dfrac{1}{7}\right)\leq(x-8)-2x$

53. $\dfrac{x-1}{2}+x\leq1{,}5x+3{,}5$.

54. $5(x+3)-\dfrac{x-1}{8}>\dfrac{11}{2}(x-2)$.

55. $2x-\dfrac{x-2}{3}+2(x+1)>5(3x-1)-\dfrac{2x+3}{2}-\dfrac{x}{3}$.

56. $(a-1)x>a^2-1$ чизиқли тенгсизликнинг ечимлар тўплами$(3,\ \infty)$ тенгсизликдан а нинг қандай қийматларида юзага келади?

A)1 B)3 C)2 D)0 E)-1

Квадрат тенгламаларни ечинг:

57. $2x^2-3x+1=0.$ ж:$1;\frac{1}{2}.$

58. $9x^2+6x+1=0.$ ж:$x_1,x_2=-\frac{1}{3}.$

59. $2x^2-3x+4=0.$ ж:йўк.

60. $\frac{5+2x}{4x-3}=\frac{3(x+1)}{7-x}.$ ж:$-\frac{11}{7};2.$

61. $1+\frac{2x}{x+1}+\frac{27}{2x^2+7x-4}=\frac{6}{2x-1}.$ ж: $-\frac{1}{3}.$

62. Агар ушбу $x^2-3a+a^2=0$ квадрат тенгламанинг илдизлари x_1 ва x_2 лар учун $x_1^2+x_2^2=112$ бўлса, а нинг кийматини топинг.

ж:$a_1=-4,a_2=4$

63. а нинг қандай қийматида ушбу $ax^2+(2a-1)x+1=0$ квадрат тенглама фақат битта ечимга эга бўлади?

64. Агар x_1 ва x_2 сонлар $2x^2+5x-3=0$ квадрат тенгламанинг илдизлари бўлса, $x_1^2+x_2^2$ топилсин.

A) 6,25; B) 3; C) 9,25; D) 3,25; E) 0; ж:9,25.

65. Битта деталнии тайёрлаш учун биринчи ишчи иккинчисига қараганда 7 минут кам сарфлайди. Агар 4 соат ичида биринчи ишчи иккинчисига қараганда 28 та детал ортиқ тайёрлайдиган бўлса, ҳар бир ишчи 4 соатда нечтадан детал тайёрлайди?

66. Икки пахтачилик бригадаси 120 т дан пахта топширишлари керак. Биринчи бригада иккинчисидан 3 кун кейин пахта топширишни бошлаб, лекин ҳар куни 5 т дан ортиқ пахта топширгани учун режани бир кун аввал бажарди. Улар ҳар куни бир хил микдорда пахта топширишган бўлса, кунлик норма аниқлансин.

ж:15,10.

Квадрат тенгсизликларни ечинг:

67. $2x^2-3x-1>0.$

68. $x^2+1<3x-x^2-3.$

69. $(3x-2)^2-4x(2x-3)>0.$

70. $x^2+10\le 7x$.

71. $x^2-16x+8\ge 0$.

Иррационал тенгламаларни ечинг:

72. $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-11}$. ж: $x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{34}}{2}$.

73. $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}=0$. **ж: Ечими йўқ.**

74. $\sqrt{\dfrac{20+x}{x}}+\sqrt{\dfrac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$. **ж:** $x_1=0; x_2=-24$.

75. $\sqrt{x+2}=x+\dfrac{1}{2}$. ж: $x_1=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$, $x_2=-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

76. $\sqrt{x^2+3x-3}+\sqrt{x^2-2x+2}=2$.

Иррационал тенгсизликларни ечинг:

77. $\sqrt{x+2}>x+\dfrac{1}{2}$.

78. $\sqrt{25-20x+4x^2}\le 1$.

79. $\sqrt{1-x}-\sqrt{x}\ge\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

80. $\sqrt{(x+2)(x-5)}<8-x$.

81. $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}>8$.

Логарифмик тенгламаларни ечинг:

82. $\log_2 x+\log_4 x+\log_{16} x=14$.

83. $\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=2-\log_4 x$.

84. $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=5{,}5$.

85. $\sqrt{\log_x 100} + 2\log_x 10 = 6$.

86. $\log_x 9x^2 \cdot \log_3^2 = 4$.

Логарифмик тенгсизликларни ечинг:

87. $\log_{0,3}(x-1) < \log_{0,09}(x-1)$.

88. $\log_\pi(x+2) - \log_\pi(16-2x) < \log_\pi x$.

89. $\frac{1}{2} + \log_9 x - \log_3 5x > \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$

90. $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$

91. $\log_x(x+6) > 2$

Кўрсаткичли тенгламаларни ечинг

92. 4^x-10 2^{x-1}-24=0. **ж: 3.**

93. 3^{2x+1}-10 3^x+3=0. **ж: 1;-1.**

94. $\left(\frac{2}{3}\right)^x - \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{65}{36}$. **ж: -2.**

95. $10^{x^2+x-2} = 1$. **ж: -2;1.**

96. $2^{x+6} + 2^{x+5} + 2^{x+1} = 7^x + 7^{x+1}$. **ж:2**

Қуйидаги кўрсаткичли тенгсизликларни ечинг:

97. $5^{x^2+3x} \leq 125 \cdot 5^x$.

98. $2^{2+x} - 2^{2-x} > 15$.

99. $4^{x^2+5x} \leq 2^{5+x}$.

100. $(0,25)^x > 2^{\frac{2x}{x+1}}$.

101. $2^{x+2}-2^{x+3}+2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}$

Тригонометрик тенгламаларни ечинг:

102. $\cos\frac{x}{2}=1-\cos x.$

103. $tgx+2ctgx=3$.

104. $4\cos^2 x+8\sin x+1=0$.

105. $2+\cos x=2tg\frac{x}{2}$.

106. $\sin^3 x+\cos^3 x=1$.

107. $1-4\sin x\cos x=0$.

108. $\sqrt{3}+4\sin x\cos x=0$.

109. $(2\sin x-1)(3\sin x+1)=0$.

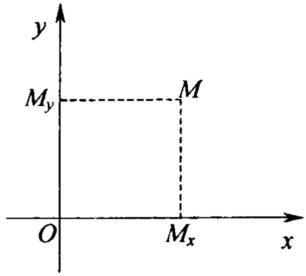
110. $(tgx-1)(tgx+\sqrt{3})=0$.

II БОБ

ТЕКИСЛИКДА АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯНИНГ ДАСТЛАБКИ ТУШУНЧАЛАРИ

1°. Тўғри бурчакли декарт координаталар системаси

Текисликда иккита ўзаро перпендикуляр тўғри чизиқни олайлик. Тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасини O ҳарфи билан белгилаб, уни координата боши деб атаймиз. Горизонтал тўғри чизиқ O_x ўқи ёки абсцисса ўқи дейилади. Вертикал тўғри чизиқ эса O_y ўқи ёки ордината ўқи дейилади (3-чизма).



3-чизма.

Айтайлик, M текисликдаги бирор нуқта бўлсин. Бу нуқтадан O_x ва O_y ўқларга перпендикулярлар тушириб, уларнинг O_x ва O_y ўқлар билан кесишган нуқталарини M_x ва M_y лар билан белгилаймиз.

Ушбу

$$OM_x=x, \quad OM_y=y$$

кесмаларнинг узунлиги M нуқтанинг координаталари деб аталади. Бунда M_x нуқта O нуқтадан ўнгда жойлашса, OM_x кесма узунлиги мусбат ишора билан, чапда бўлса, OM_x манфий ишора билан олинади.

Худди шунга ўхшаш, M_y нуқта O нуқтадан юқорида жойлашса, OM_y мусбат, пастда жойлашса, манфий ишора билан олинади. x сон M нуқтанинг биринчи координатаси ёки абсциссаси, y сон эса M нуқтанинг иккинчи координатаси ёки ординатаси деб аталади.

M нуқта координаталари ёрдамида қуйидагича ёзилади: $M(x;y)$.

2°. Икки нуқта орасидаги масофа.

Текисликда иккита $A_1(x_1,y_1)$ ва $A_2(x_2,y_2)$ нуқталар орасидаги масофа d ушбу

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (2.1)$$

формула билан топилади.

1-мисол. **$A(1;2)$ ва $A(4;6)$ нуқталар орасидаги масофа топилсин.**

Ечиш. **Равшанки, A нуқтанинг координаталари $x_1=1$, $y_1=2$. B нуқтанинг координаталари эса $x_2=4$, $y_2=6$ бўлади. (2.1) формуладан фойдаланиб топамиз:**

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(6-2)^2}=$$
$$=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

2-мисол. **Абсцисса ўқи O_x да жойлашган шундай нуқтани топингки, у $A(3,2)$ ва $B(1,-6)$ нуқталардан баравар узоқликда бўлсин.**

Ечиш. **Изланаётган нуқта C бўлсин. Равшанки, бу нуқтанинг ординатаси 0 га тенг: $C(x;0)$.**

(2.1) формуладан фойдаланиб, AC ва BC кесмаларнинг узунликларини топамиз:

$$|AC|=\sqrt{(x-3)^2+(0-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+4},$$
$$|BC|=\sqrt{(x-1)^2+(0-(-6))^2}=\sqrt{(x-1)^2+36}.$$

Шартга кўра

$$|AC|=|BC|$$

Демак,

$$\sqrt{(x-3)^2+4}=\sqrt{(x-1)^2+36}.$$

Бу тенгламани ечиб, топамиз:

$$\left(\sqrt{(x-3)^2+4}\right)^2=\left(\sqrt{(x-1)^2+36}\right)^2\to(x-3)^2+4=(x-1)^2+36\to$$
$$\to x^2-6x+9+4=x^2-2x+1+36\to x^2-6x+13-x^2+2x-37=0\to$$
$$\to -4x=24\to x=-6.$$

Демак, изланаётган нуқта $C(-6;0)$ бўлади.

3°. Кесмани берилган нисбатда бўлиш

Текисликда $A(x_1,y_1)$ ва $B(x_2,y_2)$ нуқталар берилган бўлиб, уларни туташтириш нитижасида AB кесма ҳосил қилинган. AB кесмада шундай C нуқта топиш керакки, AC кесманинг CB кесмага нисбатан берилган λ сонга тенг бўлсин:

$$\frac{AC}{BC}=\lambda$$

Изланаётган C нуқтанинг координаталари x ва y ларни ушбу

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (2.2)$$

формула билан топилади.

Хусусан, $C(x,y)$ нуқта AB кесмани иенг иккига бўлувчи нуқта бўлса, унинг координаталари

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

бўлади.

3-мисол. $A(-2;2)$ ва $B(6;4)$ нуқталарни туташтирувчи AB кесмани $\lambda=0{,}2$ нисбатда бўладиган $C(x,y)$ нуқта топилсин.

Ечиш. $C(x,y)$ нуқтанинг координаталарини (2.2) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$x=\frac{x_1+x_2\lambda}{1+\lambda}=\frac{-2+0{,}2\cdot 6}{1+0{,}2}=\frac{-2+1{,}2}{1{,}2}=\frac{-0{,}8}{1{,}2}=-\frac{3}{2}$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{2+0{,}2\cdot 4}{1+0{,}2}=\frac{2+0{,}8}{1{,}2}=\frac{2{,}8}{1{,}2}=\frac{7}{3}.$$

Шундай қилиб, AB кесмани $\lambda=0{,}2$ нисбатда бўлувчи нуқта $C\left(-\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)$ бўлади.

4-мисол. Агар учбурчакнинг учлари $A(-4;4)$, $B(2;6)$, $C(2;-6)$ бўлса, CD медиананинг узунлигини топинг.

Ечиш. CD берилган учбурчакнинг AB томонига туширилган медиана бўлгани сабабли

$$AD=DB$$

бўлади. Демак, $D(x;y)$ нуқта AB кесмани $\lambda=1$ нисбатда бўлади. Шу сабабли

$$x=\frac{-4+2}{2}=\frac{-2}{2}=-1,$$

$$y=\frac{-4+0}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

бўлади. Демак, $D(-1;-2)$.

Энди (2.1) формуладан фойдаланиб, CD медиананинг узунлигини топинг:

$$|CD|=\sqrt{(-1-2)^2+(-2-(-6))^2}=\sqrt{9+16}=5$$

4°. Учбурчак юзи.

Фараз қилайлик, текисликда ΔABC берилган бўлсин. Бу учбурчак учлари - A, B, C нуқталарнинг координаталари мос равишда (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) бўлсин.

ΔABC нинг юзи ушбу

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left[(y_1+y_2)(x_2-x_1)+(y_2+y_3)(x_3-x_2)+(y_1+y_3)(x_3-x_1)\right] \quad (2.3)$$

формула билан топилади.

5-мисол. Учлари $A(1;1)$, $B(2;4)$, $C(3;3)$ нуқталарда бўлган учбурчак юзи топилсин.

Ечиш. Равшанки, бу ҳолда

$x_1=1;\quad x_2=2;\quad x_3=3,$

$y_1=1;\quad y_2=4;\quad y_3=3$

бўлади. (2.3) формуладан фойдаланиб, учбурчакнинг юзини топамиз:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left[(1+4)(2-1)+(4+3)(3-2)+(3+1)(1-3)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}[5+7-8]=\frac{1}{2}\cdot 4=2 \quad \text{кв. бирлик.}$$

6-мисол. Учбурчакнинг иккита $A(2;2)$ ва $B(1;-2)$ учлари маълум. O_x ўқида шундай C нуқтани топингки, учбурчакнинг юзи 7 га тенг бўлсин.

Ечиш. C нуқтанинг абсциссасини x дейлик. Унинг ординатаси $y=0$ бўлади:

Учбурчакнинг юзини топиш формуласи (2.3) ҳамда масаланинг шартидан

$$7=\frac{1}{2}\left[(2(-2)-2\cdot 1)+(1\cdot 0-x\cdot(-2))+(x\cdot 2-2\cdot 0)\right]$$

бўлиши келиб чиқади. Бу тенгликдан эса

$$7=-3+2x$$

бўлиб, $x=5$ бўлади. Демак, $C(5;0)$.

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

1. Тўғри бурчакли Декарт координаталар системасида қуйидаги нуқталар ясалсин:

$A(2;3)$, $B(1;-4)$, $C(-2;5)$, $D(-1;1)$, $E(0;1)$,

$F(2;0)$, $G(\sqrt{2};\sqrt{2})$, $U(2\frac{1}{3};1)$, $V(0{,}7;3{,}14)$

2. Ушбу

$$A(3;2),\ B(-4;1)\ C(2;-4)\ E(-1;-1)$$

нуқталарнинг абсциссалар ўқига туширилган проекциялари (проекцияларнинг координаталари) топилсин.

3. Ушбу

$$A(3;2),\ B(-4;1)\ C(2;-4)\ E(-1;-1)$$

нуқталарнинг ординаталар ўқига туширилган проекциялари топилсин.

4. Текисликда

$$A(0;2),\ B(-2;1),\ C(3;-1),\ D(-2;-3)$$

нуқталар берилган. Бу нуқталарга абсциссалар ўқига нисбатан симметрик бўлган нуқталар топилсин.

5. Текисликда

$$A(2;3),\ B(1;0),\ C(-2;3),\ D(-1;-2)$$

нуқталар берилган. Бу нуқталарга ординаталар ўқига нисбатан симметрик бўлган нуқталар топилсин.

6. Агар учлари $O(0;0)$, $A(0;y)$, $B(x;0)$ нуқталарда бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси $AB=6$ $\angle OAB=30^0$ бўлса, A ва B нуқталарнинг координаталари топилсин.

7. Биринчи чоракда координата ўқлари орасидаги бурчак биссектрисасида ётган $M(x;y)$ нуқта координаталари x ва y лар қандай муносабатда бўлади?

$A)$ $x>y$; $B)$ $x<y$; $C)$ $x=y$; $D)$ $x=2y$; $E)$ $2x=y$

8. Текисликда, абсциссаси $|x|=1$ тенгламани, ординатаси эса $|y|=1$ тенгламани қаноатлантирувчи нуқталар топилсин.

9. Агар $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ ва $B\left(1;\frac{1}{2}\right)$ нуқталар $ABCD$ квадратнинг кетма-кет келган учлари бўлса, C ва D учларининг координаталари топилсин.

10. Текисликда $A(-2;3)$ ва $B(5;4)$ нуқталар берилган. Улар орасидаги масофа топилсин.

11. Текисликдаги $M(1;1)$ нуқтадан 2 бирлик узоқликда жойлашган нуқталарнинг x ва y координаталари орасидаги муносабат топилсин.

12. Учлари $A(1;1)$, $B(1;2)$, $C(2;1)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг периметри топилсин.

13. Агар $A(2;6)$ нуқтадан абсциссалар ўқида ётувчи B нуқтагача бўлган масофа $d=10$ бўлса, шу B нуқтанинг координаталари топилсин.

14. Учлари $A\left(-\sqrt{3};0\right)$, $B(0;3)$, $C\left(\sqrt{3};0\right)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг A учидан BC томонга туширилган баландликнинг узунлиги топилсин.

$A)\ \sqrt{3}$, $B)\ \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $C)\ \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $D)\ 3$, $E)\ 2\sqrt{3}$

15. $A(1;2)$ ва $B(4;-4)$ нуқталарни бирлаштирувчи AB кесмани 3:4 нисбатда бўладиган нуққтанинг координаталари топилсин.

16. $A(-5;3)$ ва $B(2;-1)$ нуқталарни бирлаштирувчи AB кесманинг ўртасини ифодаловчи нуқанинг координаталари топилсин.

17. Учлари $A(2;1)$, $B(4;3)$, $C(2;3)$ нуқталарда бўлган учбурчак томонларининг ўрталари топилсин.

18. Агар $M(2;-1)$, $N(-1;4)$, $P(-2;2)$ нуқталар бирор учбурчак томонларининг ўрталарини ифодаловчи нуқталар бўлса, шу учбурчак учларининг координаталари топилсин.

19. Учлари $A(-2;7)$, $B(3;-1)$, $C(2;5)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг BD медиана узунлиги топилсин.

20. AB кесма $P(2;1)$, $Q(1;5)$ нуқталар ёрдамида тенг уч қисмга бўлинган. A ва B нуқталарнинг координаталари топилсин.

21. Учлари $O(0;0)$, $A(0;1)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг медианалари кесишган нуқтанинг координаталари топилсин.

$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{3}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{4};\frac{1}{2}\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{1}{2}\right)$, $D\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, $E\left(\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{1}{2}\right)$.

22. Учлари $A(4;2)$, $B(9;4)$, $C(7;6)$ нуқталарда бўлган бўлган учбурчакнинг юзи ҳисоблансин.

23. Учлари $A(5;1)$, $B(-2;2)$, $C(x;0)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг юзи 10 га тенг. C нуқтанинг координаталари топилсин.

24. Учлари $A(5;6)$, $B(5;-6)$, $C(-2;-1)$, $D(-2;1)$ нуқталарда бўлган тўртбурчакнинг юзи топилсин.

25. Учлари $O(0;0)$, $A\left(\frac{1}{2};1\right)$, $B(1;0)$ нуқталарда бўлган OAB учбурчак берилган. Агар бу учбурчак медианалари кесишган нуқта C бўлса, унда OAB учбурчакнинг юзи OAC учбурчакнинг юзидан неча марта катта бўлади?

$A)\ 2$, $B)\ 1\frac{1}{2}$, $C)\ 3$, $D)\ 4$, $E)\ 2\frac{1}{2}$.

III БОБ

ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ВА УНИНГ ТЕНГЛАМАЛАРИ

1-§.ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ ТУРЛИ КЎРИНИШДАГИ ТЕНГЛАМАЛАРИ.

1^o. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси

Қуйидаги

$$Ax+By+C=0$$

тенглама тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси деб аталади.
Хусусий ҳоллар:

1) $Ax+By=0$ тўғри чизиқ координата бошидан ўтади.
2) $By+C=0$ $(B\neq 0)$ тўғри чизиқ O_x ўқига (абсцисса ўқига) параллел бўлади.
3) $Ax+C=0$ $(A\neq 0)$ тўғри чизиқ O_y ўқига (ордината ўқига) параллел бўлади.
4) $y=0$ тўғри чизиқ O_xўқининг тенгламасидир.
5) $x=0$ тўғри чизиқ O_y ўқининг тенгламасидир.

2^o. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффицецтли тенгламаси

Текислик берилган тўғри чизиқ O_y ўқининг $B(0;b)$ нуқтаси орқали ўтиб, O_x ўқининг мусбат йўналиши билан α бурчак ташкил этсин. Ушбу

$$y=kx+b$$

кўринишдаги тенглама тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси деб аталади, бунда $k=tg\alpha$.

3^o. Тўғри чизиқнинг кесмалар бўйича тенгламаси

Текисликда бирор тўғри чизиқ O_X ва O_Y ўқларини мос равишда A ва B нуқталарда кесиб, координата ўқларидан мос равишда

$$OA=a, \quad OB=b$$

кесмалар ажратсин.
Ушбу

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (3.2)$$

кўринишидаги тенглама тўғри чизиқнинг кесмалар бўйича тенгламаси деб аталади.

4°. Тўгри чизиқнинг нормал тенгламаси

Текисликда бирор тўғри чизиқ берилган бўлсин. Координата бошидан тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг узунлиги p ҳамда шу перпендикулярнинг O_X ўқининг мусбат йўналиши билан ташкил этган α бурчак маълум бўлсин.

Ушбу

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \tag{3.3}$$

тенглама тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси дейилади.

Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси $Ax+By+C=0$ ни нормалловчи кўпайтувчи

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \tag{3.4}$$

га кўпайтириш натижасида тенглама нормал кўринишдаги тенгламага келади. Нормалловчи кўпайтирувчининг ишораси тенгламадаги C озод ҳаднинг ишорасига тескари қилиб олинади.

1-мисол. $5x+12y-26=0$ тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси нормал тенгламага келтирилсин.

Ечиш. Юқоридаги (3.4) муносабатдан фойдаланиб, нормалловчи кўпайтувчини топамиз:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{1}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{1}{\sqrt{25+144}} = \frac{1}{\sqrt{169}} = \frac{1}{13}$$

берилган тенгламани $\mu = \frac{1}{13}$ га кўпайтирамиз :

$$\frac{1}{13}(5x+12y-26)=0$$

Натижада берилган тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси

$$5x+12y-26=0$$

ушбу

$$\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-2=0$$

нормал кўринишга келади.

2-§. ТЎҒРИ ЧИЗИҚҚА ОИД МАСАЛАЛАР

1°. Берилган нуқтадан (берилган йўналиш бўйича) ўтувчи тўгри чизиқ тенгламаси.

Текисликда $M(x_1;y_1)$нуқтадан ўтадиган ҳамда O_X ўқининг мусбат йўналиши билан α бурчак ташкил этадиган тўғри чизиқнинг тенгламаси қуйидагича

$$y-y_1=k(x-x_1) \tag{3.5}$$

2-мисол. $M(3;2)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси топилсин.

Ечиш. Юқоридаги (3.5) формулага кўра $M(3;2)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси ушбу

$y-2=k(x-3)$ яъни $y=k(x-3)+2$

кўринишда бўлади.

2°. Икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси.

Текисликда иккита $M(x_1;y_1)$ ва $N(x_2;y_2)$ нуқталар берилган. Ушбу

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \tag{3.6}$$

тенглама $M(x_1;y_1)$ ва $N(x_2;y_2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси бўлади.

3-мисол. $M(2;1)$ ва $N(1;2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси топилсин.

Ечиш. Икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси (3.6)даги $x_1;y_1$ ҳамда $x_2;y_2$ лар ўрнига $M(2;1)$ ва $N(1;2)$ нуқталарнинг координаталарини қўйииб топамиз;

$$\frac{x-2}{1-2}=\frac{y-1}{2-1}$$

Уни

$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{1}$ ёки $x+y-3=0$

кўринишда ёзиш мукин.

3°. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак

Текисликда икки тўғри чизиқ

$y=k_1x+b_1$ $(k_1=tg\,\alpha_1)$

$y=k_2x+b_2$ $(k_2=tg\,\alpha_2)$

берилган бўлсин. Бу тўғри чизиқ орасидаги φ бурчак ушбу

$$tg\,\varphi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2} \tag{3.7}$$

формуладан олинади.

4-мисол. Ушбу $2x-y-5=0$, $x-3y+12=0$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчак топилсин.

Ечиш. Аввало берилган тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентларини топамиз. Бунинг учун тенгламаларни y га нисбатан ечамиз:

$2x-y-5=0 \to y=2x-5,$

$x-3y+12=0 \to 3y=x+12 \to y=\frac{1}{3}x+4.$

Демак,

$$k_1=2, \quad k_2=\frac{1}{3}$$

(3.7) формулага кўра

$$tg\varphi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1\cdot k_2}=\frac{2-\frac{1}{3}}{1+2\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}=1$$

бўлади. Демак,

$$\varphi=45^0$$

4°. Икки тўгри чизиқнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари

Текисликда иккита тўғри чизиқ $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$, берилган бўлсин.

Ушбу

$$k_1=k_2$$

тенглик *икки тўгри чизиқнинг параллеллик шартини ифодалайди.* Ушбу

$$k_1=-\frac{1}{k_2} \qquad \left(k_2=-\frac{1}{k_1}\right)$$

тенглик *икки тўгри* чизиқнинг *перпендикулярлик шартини* ифодалайди.

5-мисол. $y=5x+7$ ва $y=5x-11$ тўғри чизиқлар параллелдир, чунки $k_1=5$, $k_2=5$ ва, демак, $k_1=k_2$.

6-мисол. $y=3x+7$ ва $y=-\frac{1}{3}x+1$ тўғри чизиқлар ўзаро перпендикулярдир, чунки $k_1=3$, $k_2=-\frac{1}{3}$ бўлиб, $k_1 \cdot k_2=-1$.

5°. Берилган нуқтадан берилган тўгри чизиққача бўлган масофа.

Текисликда $M(x_1;y_1)$ нуқта ва бирор тўғри чизиқ

$$Ax+By+c=0$$

берилган бўлсин. Берилган $M(x_1;y_1)$ нуқтадан шу тўғри чизиққача бўлган масофа d ушбу

$$d=\pm\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{3.8}$$

формула билан топилади.

7-мисол. Берилган $M(3;-4)$ нуқтадан $6x-8y+31=0$ тўғри чизиққача бўлган масофа топилсин.

Ечиш. Юқоридаги (3.8) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$d=\frac{6\cdot3-8\cdot(-4)+31}{\pm\sqrt{6^2+(-8)^2}}=\frac{18+32+31}{10}=8{,}1.$$

6°. Икки тўгри чизиқнинг кесишиш нуқтаси.

Текисликда иккита тўғри чизиқ

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \tag{3.9}$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0 \tag{3.10}$$

берилган бўлсин. Қаралаётган тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини $M(x;y)$ нинг координаталари x ва y лар ушбу

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$$

системасининг ечими билан топилади.

8-мисол. $3x-2y-4=0$; $x+3y-5=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси топилсин.

Ечиш. Бу тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасининг координаталарини топиш учун уларнинг тенгламаларини система қилиб ечамиз:

$$\begin{cases}3x-2—-4=0\\x+3—-5=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}3x-2—-4=0\\-3x-9—+15=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}3x=2—+4\\-11—+11=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}3x=2—+4\\—=1\end{cases}\rightarrow$$

$$\begin{cases}3x=2+4\\—=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=2\\—=1\end{cases}$$

Демак, тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси $M(2;1)$ бўлади.

9-мисол. Берилган $M(0;5)$ нуқтадан ўтувчи ҳамда $3x-2y-6=0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ тенгламаси топилсин.

Ечиш. Берилган $M(0;5)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси (3.5) формулага кўра

$$y-5=k(x-0)$$

ёки

$$y=kx+5 \tag{3.11}$$

бўлади. Энди берилган тўғри чизиқ тенгламаси $3x-2y-6=0$ ни у га нисбатан ечиб топамиз:

$$3x-2y-6=0 \rightarrow 2y=3x-6 \rightarrow y=\frac{3}{2}x-3 \tag{3.12}$$

Сўнг (3.11) ва (3.12) тўғри чизиқлар ўзаро перпендикуляр бўлиши шартидан

$$k\cdot\frac{3}{2}=-1$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, $k=-\frac{3}{2}$. Топилган k нинг бу қийматини (3.11) тенгламадаги k нинг ўрнига қўйсак, унда

$$y=-\frac{2}{3}x+5$$

га эга бўламиз. Бу берилган нуқтадан ўтувчи ҳамда берилган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасидир.

10-мисол. берилган $M(-1;3)$ нуқтадан ўтувчи ва $4y-3x+8=0$ тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси топилсин.

Ечиш. Берилган $M(-1;3)$ нуктадан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси (3.5) формулага кўра

$$y-3=k(x+1)$$

яъни

$$y=k(x+1)+3 \tag{3.13}$$

бўлади.

Берилган тўғри чизиқ тенгламаси $4y-3x+8=0$ ни у га нисбатан ечамиз:

$$4y-3x+8=0 \rightarrow 4y=3x-8 \rightarrow y=\frac{3x}{4}-2 \tag{3.14}$$

(3.13) ва (3.14) тўғри чизиқларнинг ўзаро параллел бўлиши шартидан

$$k=\frac{3}{4}$$

бўлиши келиб чиқади. Топилган k нинг бу қийматини (3.13) тенгламадаги k нинг ўрнига қўйсак, унда

$$y=\frac{3x}{4}+\frac{15}{4}$$

га эга бўламиз. Бу берилган нуқтадан ўтувчи ҳамда берилган тўўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасидир.

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

1. Ушбу

$$\frac{x-2}{6}+\frac{y-1}{3}=\frac{1}{2}$$

чизикли тенгламани тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси кўринишида ёзилсин.

2. Ушбу

$$\frac{1}{2}x-\frac{7}{8}y+\frac{1}{3}=0$$

тўғри чизиқда $M\left(1;\frac{20}{21}\right)$ нуқтанинг ётиши кўрсатилсин.

3. Ушбу

$$2x-y-3=0$$

тўғри чизиқда ординатаси 7 га тенг бўлган нуқта топилсин.

4. Ушбу

$$3x+7y-11=0$$

тўғри чизиқда абсциссаси 1 га тенг бўлган нуқта топилсин.

5. Ушбу

$$x-1=0,\quad y+2=0,\quad x+2y=0,\ 5x=0,\quad 7y=0$$

тўғри чизиқларнинг координаталар ўқларига нисбатан қандай жойлашганлиги аниқлансин ва чизмада кўрсатилсин.

6. Ордината ўқидан b=3 кесма ажратиб, O_X ўқи билан 120^0 бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқ тенгламаси ёзилсин.

7. Координаталар бошидан ўтиб, O_X ўқи билан 60^0 бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси ёзилсин.

8. M(0;-3) нуқтадан ўтувчи ҳамда O_X ўқи билан 45^0 бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси ёзилсин.

9. Ушбу

$$2y=2x+3$$

тўғри чизиқда O_Y ўқидан қандай кесма ажратади? O_X ўқи билан қандай бурчак ташкил этади?

10. Ушбу

$$y+\sqrt{3}x=-6$$

тўғри чизиқнинг O_y ўқидан ажратган кесмасини ва O_x ўқи билан ташкил этган бурчагини топинг.

11. Қуйидаги
   1) $2x+2y+7=0$
   2) $x+\sqrt{3}y-5=0$
   3) $x+11-y=0$

тўғри чизиқ тенгламаларини бурчак коэффициентли кўринишдаги тўғри чизиқ тенгламаларига келтирилсин ҳамда k ва b лар топилсин.

12. Иккинчи ва тўртинчи чорак координаталар бурчаклари биссектрисасининг тенгламаси топилсин.

A) $x-y=0$; B) $x+y=0$; C) $y=-2x$
D) $x=-2y$ E) $2x+3y=0$

13. Абсциссалар ўқидан 2 бирлик, ординаталар ўқидан 3 бирлик кесма ажратадиган тўғри чизиқ тенгламаси топилсин.

14. Координаталар ўқларидан тенг кесма ажратадиган тўғри чизиқнинг тенгламаси қандай кўринишда бўлади?

15. Ушбу

$$3x+2y-6=0$$

тўғри чизиқни кесмалар бўйича тўғри чизиқ тенгламаси кўринишига келтирилсин.

16. Ушбу

$$y=\sqrt{6}-\sqrt{3}x$$

тўғри чизиқни кесмалар бўйича тўғри чизиқ тенгламаси кўринишига келтирилсин.

17. Ординаталар ўқидаги $M(0;3)$ нуқтадан ўтувчи шундай тўғри чизиқ топингки, бу тўғри чизиқнинг координаталар ўқларидан ташкил топган учбурчакнинг юзи 15 га тенг бўлсин.

18. Қуйидаги
   1) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{3}y-3=0$
   2) $\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y+2=0$
   3) $x-2=0$
   4) $y+2=0$

тўғри чизиқ тенгламалари, шу тўғри чизиқнинг нормал тенгламалари бўладими?

19. Ушбу

1) $12x-5y+13=0$
2) $4x-3y-10=0$
3) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+10=0$
4) $2x-y-\sqrt{5}=0$

тўғри чизиқларнинг умумий тенгламаларини, уларнинг нормал кўринишдаги тенгламаларига келтирилсин.

20. Координаталар бошидан 1 бирлик узоқликда бўлган ва Ox ўқининг мусбат йўналиши билан 135^0 бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқнинг нормал тенгламаси топилсин.

A) $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-2=0$, B) $\sqrt{2}x+y-2=0$,

C) $x+\sqrt{2}y-2=0$, D) $x+y-1=0$,

E) $x-y=0$.

21. Координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси қандай кўринишда бўлади?

22. Ушбу $A(-1;1)$ нукктадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси қандай кўринишда бўлади?

23. Ушбу $A(-4;2)$ ва $B(3;-1)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси ёзилсин.

24. Координаталар бошидан ҳамда $A(-1;-4)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси топилсин.

25. Учлари $A(-2;0)$, $B(0;2)$, $C(4;0)$ нуқталарда бўлган учбурчак томонларининг тенгламалари топилсин.

26. Учлари $A(-4;-1)$, $B(-2;-3)$, $C(-5;-6)$ нуқталарда бўлган учбурчак томонларининг тенгламалари топилсин.

27. Учлари $A(0;1)$, $B(1;0)$, $C(-1;1)$ нуқталарда бўлган учбурчак берилган. Шу учбурчакнинг медианаларининг тенгламалари топилсин.

28. Учлари $A(1;2)$, $B\left(2;\frac{1}{2}\right)$ ҳамда $C\left(2;\frac{1}{2}\right)$, $D\left(2\frac{1}{2};3\frac{1}{2}\right)$ нуқталарда бўлган кесмалар ўрталаридан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси топилсин.

29. Координаталар ўқларидан тенг кесмалар ажратувчи ва $M(5;2)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси топилсин.

30. Қуйидаги тўғри чизиқлар орасидаги бурчак топилсин:

1) $5x-y+7=0$ ва $3x+2y=0$

2) $y=2x-3$ ва $y=\frac{1}{2}x+1$

3) $8x+6y=11$ ва $3x-4y=6$

4) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ ва $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$

31. Учлари $A(5;0)$, $B(0;1)$, $C(3;3)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг ички бурчаклари топилсин.

32. Учлари $A(-1;2)$, $B(5;7)$, $C(1;-3)$ нуқталарда бўлган учбурчак берилган. Бу учбурчакнинг BC томони билан CD медианаси орасидаги бурчак топилсин.

33. Ушбу

$14x-7y+1=0$ ва $4x-2y-1=0$

тўғри чизиқлар ўзаро параллел бўладими?

34. Ушбу

$3x-2y-1=0$ ва $3y-x+3=0$

тўғри чизиқлар ўзаро перпендикуляр бўладими?

35. Координаталар бошидан ўтувчи хамда $y=4x-3$ тўғри чизиққа параллел .

$$y=\frac{1}{2}x+1$$

тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқлар тенгламалари топилсин.

36. $A(2;3)$ нуқталардан ўтувчи ва абсциссалар ўқига ҳамда ординаталар ўқларига параллел бўлган тўғри чизиқларнинг тенгламалари ёзилсин.

37. Қуйидаги

1) $8x-3y-1=0$ ва $4x+y-13=0$

2) $5x-2y+13=0$ ва $x+3y-11=0$
тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқталари топилсин.

38. $3x+2y+6=0$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталари топилсин.

39. Ушбу $7x+2y-14=0$ тўғри чизиқнинг Oy ўқи билан кесишиш нуқтаси топилсин ва бу нуқтадан берилган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлиб ўтган тўғри чизиқ тенгламаси ёзилсин.

40. Ушбу $7x-y+3=0$ ва $3x+5y-4=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан ва $A(2;-1)$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси топилсин.

41. Учбурчак томонлари қуйидаги

$$2x-y+3=0$$
$$x+5y-7=0$$
$$3x-2y+6=0$$

тенгламалар билан ифодаланган. Шу учбурчак баландликларининг тенгламалари топилсин.

42. Координаталар бошидан $3x+5y-15=0$ тўғри чизиққача бўлган масофа топилсин.

43. $A(-3;5)$ нуқтадан $9x-12y+2=0$ тўғри чизиққача, $B(8;5)$ нуқтадан $3x-4y-15=0$ тўғри чизиққача бўлган масофа топилсин.

44. Агар координаталар бошидан $y=kx+5$ тўғри чизиққача бўлган масофа $\sqrt{5}$ га тенг бўлса, k топилсин.

45. Учлари $A\left(-\frac{1}{7};-\frac{3}{28}\right)$, $B(3;7)$, $C(5;-13)$ нуқталарда бўлган учбурчак берилган. Шу учбурчак баландликларининг узунлиги топилсин.

46. Ушбу

$$3x-4y+10=0 \quad \text{ва} \quad 6x-8y+15=0$$

тўғри чизиқларнинг ўзаро параллел эканлиги кўрсатилсин ва улар орасидаги масофа топилсин.

47. Ушбу

$$12x+5y-52=0$$

тўғри чизиқ берилган. Бу тўғри чизиққа параллел бўлган ва ундан 2 бирлик масофада турадиган тўғри чизиқнинг тенгламаси топилсин.

48. Учлари $A(2;3)$, $B(0;-3)$, $C(6;-3)$ нуқталарда бўлган учбурчак берилган. Шу учбурчак томонлари ўрталаридан ўтказилган перпендикулярларнинг кесишиш нуқтаси координаталари топилсин.

49. Ромбнинг икки томонининг тенгламалари

$$2x-5y-1=0, \qquad 2x-5y-34=0$$

бўлиб, диагоналларининг бирини тенгламаси $x+3y-6=0$ бўлса, унинг иккинчи диагонали тенгламаси топилсин.

50. Агар параллелограммнинг икки томонининг тенгламаси

$$x-2y=0, \qquad x-y-1=0$$

бўлиб, диагоналларининг кесишиш нуқтаси $M(3;-1)$ бўлса, шу параллелограммнинг қолган икки томони тенгламаси топилсин.

51. Ушбу $2x+y-3=0$ тўғри чизиқ ва шу тўғри чизиқда ётувчи $M(1;1)$ нуқта берилган. Шу тўғри чизиқда M нуқтадан $\sqrt{5}$ га узоқлашган нуқтанинг координаталари топилсин.

IV БОБ

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЭГРИ ЧИЗИҚЛАР

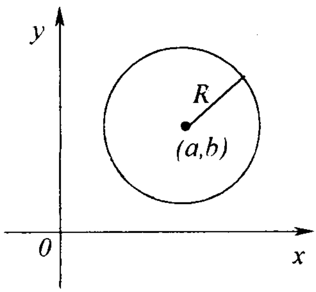
Иккинчи тартибли эгри чизиқлар x ва y ўзгарувчиларга нисбатан иккинчи даражали тенгламалар билан ифодаланади:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad (4.1)$$

Бунда A, B, C, D, E, F лар ўзгармас сонлар.

1-§. АЙЛАНА ВА УНИНГ ТЕНГЛАМАСИ

Текисликдаги бирор $A(a,b)$ нуқтадан тенг узоқликда турган нуқталар тўплами (нуқталарнинг геометрик ўрни) айлана деб аталади (4-чизма).



4-чизма.

Ушбу

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (4.2)$$

тенглама айлана тенгламасини ифодалайди. $A(a,b)$ нуқта айлана маркази, R эса айлана радиуси дейилади.

Хусусан, маркази $O(0,0)$ нуқтада бўлган айлана тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (4.3)$$

Иккинчи тартибли эгри чизиқ тенгламаси (4.1) да x^2 ва y^2 лар олдидаги коэффициентлар бир-бирига тенг бўлиб, xy нинг олдидаги коэффициент эса нолга тенг бўлса, у ҳолда бундай иккинчи тартибли эгри чизиқ айлана бўлади.

1-мисол. Иккинчи тартибли эгри чизиқ ушбу

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0 \qquad (4.4)$$

тенглама билан берилган. Унинг айлана тенгламаси эканини кўрсатиб, айлананинг маркази ва радиуси топилсин.

Ечиш. (4.4) тенгламани қуйидагича ёзиб оламиз:

$$x^2+2x+y^2-4y-20=0.$$

Равшанки,

$$x^2+2x=x^2+2x+1-1=(x+1)^2-1$$

$$y^2-4y=y^2-2\cdot 2y+4-4=(y-2)^2-4$$

Унда

$$x^2+2x+y^2-4y-20=(x+1)^2-1+(y-2)^2-4-20=$$
$$=(x+1)^2+(y-2)^2-25=0$$

бўлиб, берилган тенглама ушбу

$$(x+1)^2+(y-2)^2=25$$

кўринишни олади. Демак, айлананинг маркази $A(-1;2)$ нуқтада бўлиб, радиуси $R=5$ га тенг бўлади.

Айлана билан умумий битта $M(x_0;y_0)$ нуқтага эга бўлган тўғри чизиқ айланага ўтказилган уринма деб аталади. $x^2+y^2=R^2$ айлананинг $M(x_0;y_0)$ нуқтасидан ўтувчи уринма тенгламаси қуйидагича бўлади:

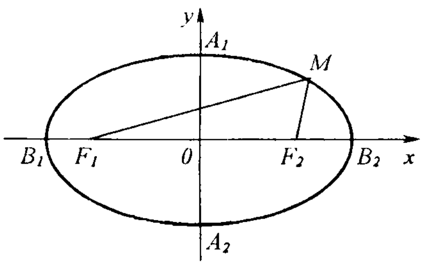
$$x_0x+y_0y-R^2=0 \qquad (4.5)$$

2-мисол. $x^2+y^2=8$ айлананинг $M(2;-2)$ нуқтасидан ўтувчи уринмаси топилсин.

Ечиш. Бу уринманинг тенгламаси юқоридаги (4.5) формулага кўра $2x+(-2)y-8=0$, яъни $x-y-4=0$ бўлади.

2-§. ЭЛЛИПС ВА УНИНГ ТЕНГЛАМАСИ

Текисликда иккита нуқта берилган бўлсин. Текисликда шундай нуқталар тўпламини қарайликки, бу тўпламнинг ҳар бир нуқтасидан берилган икки нуқтагача бўлган масофалар йиғиндиси ҳар доим бир хил ўзгармас сон $2a$га ($a>0$) тенг бўлсин. Одатда бундай нуқталар тўпламини (нуқталарнинг геометрик ўрни) эллипс деб аталади (5-чизма).



5-чизма.

Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4.6)$$

тенглама эллипснинг тенгламасини ифодалайди. F_1 ва F_2 нуқталар эллипснинг фокуслари дейилади. Одатда, a эллипснинг катта ярим ўқи, b эса кичик ярим ўқи деб аталади.

Эллипс фокуслари орасидаги масофа $2c$ нинг ($c^2=a^2-b^2$) унинг катта ўқи узунлиги $2a$ га нисбатан эллипс эксцентриситети дейилади ва e ҳарфи билан белгиланади.

Эллипс эксцентриситети

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \qquad (4.7)$$

га тенг бўлади.

3-мисол. Катта ўқи 10 га, эксцентриситети e=0,8 га тенг бўлган эллипснинг тенгламаси топилсин.

Ечиш. Масаланинг шартига кўра $2a$=10. Демак, a=5. (4.7) формуладан фойдаланиб,

$$0{,}8=\frac{c}{5}\Rightarrow c=5\cdot 0{,}8=4$$

бўлишини топамиз.Равшанки,

$$b^2=a^2-c^2=5^2-4^2=25-16=9, \quad b=3.$$

Демак, (4.6) формулага асосан эллипснинг тенгламаси

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1\Rightarrow\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

кўринишда бўлади.

4-мисол. Берилган $4x^2+9y^2=16$ эллипснинг катта ва кичик ярим ўқлари, фокуслари ҳамда эксцентриситети топилсин.

Ечиш. Берилган $4x^2+9y^2=16$ тенгламанинг ҳар икки томонини 16 га бўламиз. Натижада

$$\frac{x^2}{4}+\frac{9y^2}{16}=1\Rightarrow\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\frac{16}{9}}=1$$

тенгламага келамиз. Бу эллипс тенгламасини (4.6) билан солиштириб,

$$a^2=4 \quad\Rightarrow\quad a=2$$

$$b^2=\frac{16}{9}\Rightarrow \quad b=\frac{4}{3}$$

бўлишини топамиз. Равшанки,

$$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 4 + \frac{16}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{20}{9} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{20}}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

(4.7) формуладан фойдаланиб эллипснинг эксцентриситети e **ни топамиз:**

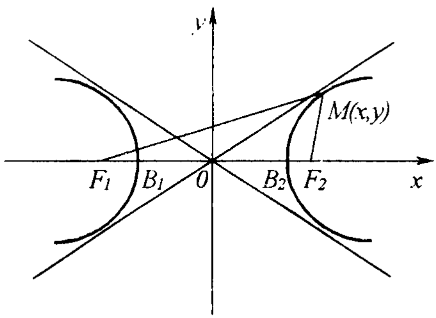
$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{3} : 2 = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Шундай қилиб:

$$a = 2,\quad b = \frac{4}{3},\quad F_1\left(\frac{2\sqrt{5}}{3};0\right),\quad F_2\left(-\frac{2\sqrt{5}}{3};0\right),\quad e = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

3-§. ГИПЕРБОЛА ВА УНИНГ ТЕНГЛАМАСИ

Текисликда иккита нуқта берилган бўлсин. Текисликда шундай нуқталар тўпламини қарайликки, бу тўпламнинг ҳар бир нуқтасидан берилган икки нуқтага бўлган масофалар айирмаси ҳар доим бир хил ўзгармас сонга тенг бўлсин. Одатда бундай нуқталар тўплами (нуқталарнинг геометрик ўрни) гипербола деб аталади (6-чизма).



6-чизма.

Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textbf{(4.8)}$$

тенглама гиперболанинг тенгламасини ифодалайди ($b^2 = c^2 - a^2$). F_1 **ва** F_2 **нуқталар гиперболанинг фокуслари дейилади. Равшанки, фокуслар орасидаги масофа** $2c$ **га тенг.**

Қуйидаги

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

тўғри чизиқлар гиперболанинг асимптоталари деб аталади.

Гипербола фокуслари орасидаги масофа $2c$ нинг $2a$ га нисбати гиперболанинг эксцентриситети деб аталади ва e ҳарфи билан белгиланади. У

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

га тенг бўлади.

5-мисол. **Фокуслари орасидаги масофа** $2\sqrt{11}$ **бўлиб, ўзи** $M(9;-4)$ **нуқтадан ўтадиган гиперболанинг тенгламаси топилсин.**

Ечиш. Масаланинг шартига кўра $2c = 2\sqrt{11}$ **бўлади. Демак,** $c = \sqrt{11}$. **Равшанки,**

$$a^2 + b^2 = 11.$$

Гипербола $M(9;-4)$ **нуқтадан ўтади. Бинобарин, бу нуқтанинг координаталари гипербола тенгламаси**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ни қаноатлантиради:

$$\frac{9^2}{a^2} - \frac{(-4)^2}{b^2} = 1.$$

Бу тенгликдан топамиз:

$$\frac{9^2}{a^2} - \frac{(-4)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{81}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow 81b^2 - 16a^2 = a^2b^2.$$

Натижада a ва b ларни топиш учун ушбу

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 11, \\ 81b^2 - 16a^2 = a^2b^2 \end{array}\right\}$$

системага эга бўламиз. Энди бу системани ечамиз:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 11 \\ 81b^2 - 16a^2 = a^2b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a^2 = 11 - b^2 \\ 81b^2 - 16(11 - b^2) = (11 - b^2)b^2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 = 11 - b^2 \\ 81b^2 - 176 + 16b^2 - 11b^2 + b^4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2 = 11 - b^2 \\ b^4 + 86b^2 - 176 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2 = 11 - b^2 \\ b_{1,2}^2 = -43 \pm \sqrt{1849 + 176} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^2 = 11 - b^2 \\ b_1^2 = 2, \quad b_2^2 = -88 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1^2 = 11 - 2 = 9 \\ b_1^2 = 2 \end{matrix}\right\}$$

Демак, $a^2 = 9, \quad b^2 = 2$ **. Изланаётган гиперболанинг тенгламаси**

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{2} = 1$$

бўлади.

6-мисол. $16x^2 - 25y^2 = 400$ **гиперболанинг ўқлари, фокуслари, эксцентриситети топилиб, асимптотасининг тенгламаси тузилсин.**

Ечиш. Берилган гипербола тенгламасининг ҳар икки томонини 400 га бўламиз. Натижада гипербола тенгламаси қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{16x^2}{400} - \frac{25y^2}{400} = 1 \cdot$$

Демак,

$$a^2 = 25, \quad b^2 = 16,$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41},$$

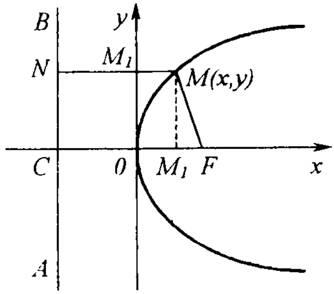
$$F_1\left(-\sqrt{41};0\right), \quad F_1\left(\sqrt{41};0\right), \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{41}}{5},$$

гипербола асимптотасининг тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{4}{5}x$$

4-§. ПАРАБОЛА ВА УНИНГ ТЕНГЛАМАСИ

Текисликдаги тўғри чизиқ ва бу тўғри чизиқда ётмаган бирор нуқта берилган бўлсин. Тўғри чизиқдан ва берилган нуқтадан баравар узоқликда турган нуқталар тўплами (нуқталарнинг геометрик ўрни) парабола деб аталади (7-чизма).



7-чизма.

Ушбу

$$y^2 = 2px \qquad (4.9)$$

тенглама параболанинг тенгламасини ифодалайди.

F нуқта параболанинг фокуси, тўғри чизиқ параболанинг директрисаси дейилади.

Парабола директрисасининг тенгламаси $x = -\frac{p}{2}$, парабола фокуси F нинг координаталари $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ бўлади.

7-мисол. Параболанинг фокуси (5;0) нуқта бўлса, шу параболанинг тенгламаси топилсин.

Ечиш. Масаланинг шартига кўра $F(5;0)$. Демак, $\frac{p}{2} = 5$. Бундан эса $p=10$ бўлиши келиб чиқади. Юқоридаги (4.9) дан фойдаланиб, изланаётган параболанинг тенгламаси

$$y^2 = 2 \cdot 10x = 20x$$

бўлишини топамиз.

8-мисол. Агар параболанинг (3;5) нуқтадан ўтиши маълум бўлса, унинг тенгламаси топилсин.

Ечиш. Шартга кўра изланаётган парабола (3;5) нуқтадан ўтади. Бинобарин бу нуқтанинг координаталари парабола тенгламасини қаноатлантиради: $5^2 = 2p \cdot 3$. Бу тенгликдан $p = \frac{25}{6}$ бўлишини топамиз.

Демак, параболанинг тенгламаси

$$y^2 = 2 \cdot \frac{25}{6}x = \frac{25}{3}x$$

бўлади.

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

1. Маркази $(3;-5)$ нуқтада, радиуси 2 га тенг бўлган айлананинг тенгламаси топилсин.
2. Маркази $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ нуқтада, радиуси $\frac{1}{2}$ га тенг бўлган айлананинг тенгламаси топилсин.
3. $A(1;2)$ ва $B(-3;-4)$ нуқталарни бирлаштирувчи кесма айлана диаметри бўлса, шу айлананинг тенгламаси топилсин.
4. $x^2+y^2=2$ айлананинг координаталар ўқлари билан кесишиш нуқталари топилсин.
5. Координаталар бошидан ва $A(6;-8)$ нуқтадан ўтувчи айлана тенгламаси топилсин.
6. $A(2;9)$ нуқтадан ўтувчи ва координаталар ўқларига уринувчи айлананинг тенгламаси топилсин.
7. Радиуси 5 га тенг бўлган айлана $A(4;-2)$ ва $B(5;-3)$ нуқталардан ўтади. Шу айлананинг тенгламаси топилсин.
8. $x^2+y^2=1$ айланада шундай A нуқта топилсинки, бу нуқтадан $B(1;3)$ ва $C(-2;2)$ нуқталаргача бўлган масофа бир хил бўлсин.
9. $x^2+y^2=5$ айлананинг $(1;-2)$ нуқтасига ўтказилган уринманинг тенгламаси топилсин.
10. $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ айлананинг $(5;5)$ нуқтасига ўтказилган уринманинг тенгламаси топилсин.
11. $x^2+y^2-6x+8y=0$ айлананинг маркази ва радиуси топилсин.
12. $x^2+y^2-4x-8y+7=0$ айлана билан $x+5y-9=0$ тўғри чизиқнинг кесишиш нуқталари орасидаги масофа топилсин.
13. Учлари $A(0;1)$, $B(-2;0)$, $C(0;-1)$ нуқталарда бўлган учбурчакка ташқи чизилган айлананинг тенгламаси топилсин.
14. Агар $A(3;0)$ нуқта $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ айланага ўтказилган ватарнинг ўртаси бўлса, шу ватарнинг тенгламаси топилсин.
15. Ушбу

$$x^2+y^2-2x+1=0 \qquad x^2+y^2-2y-1=0$$

айланалар бир-бирлари билан тўғри бурчак остида кесишиши исбот этилсин.
16. $25x^2+169y^2=4225$ эллипснинг катта ва кичик ярим ўқлари ва фокусининг координаталари топилсин.
17. $9x^2+25y^2=225$ эллипснинг катта, кичик ярим ўқлари,

фокусининг координаталари ҳамда эксцентриситети топилсин.

18. $4x^2+2y^2=1$ эллипс учларининг кординаталари, фокусларининг координаталари ва эксцентриситети топилсин.

19. a ва b ларнинг қандай қийматларида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипс (2;3) ва $(-1;-4)$ нуқталардан утади?

20. Агар эллипснинг катта ва кичик ярим ўқлар йиғиндиси 8 га, фокуслар орасидаги масофа 8 га тенг бўлса, шу эллипснинг тенгламаси топилсин.

21. $A(6;4)$, $B(-8;-3)$ нуқталардан ўтувчи эллипснинг тенгламаси топилсин.

22. Агар эллипснинг фокуслари $(0;-5)$ ва $(0;5)$ нуқталарда бўлиб, унинг эксцентриситети $\frac{2}{3}$ га тенг бўлса, шу эллипснинг тенгламаси топилсин.

23. Ушбу $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$ эллипснинг $2x-y-9=0$ тўғри чизиқ билан кесишиш нуқталари топилсин.

24. Ушбу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипснинг $F(c;0)$ фокуси орқали катта ўқига перпендикуляр қилиб ватар ўтказилган. Шу ватарнинг узунлиги топилсин.

25. Агар $4x-5y-40=0$ тўғри чизиқ $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{32}=1$ эллипсга уринса, уриниш нуқтаси топилсин.

26. Ушбу $4x^2+y^2=8$ эллипс берилган. Бу эллипсга шундай уринма ўтказиш керакки, у $2x+y=0$ тўғри чизиққа параллел бўлсин.

27. Ушбу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсга $x+y=c$, $x-y=c$ чизиқлар $(a^2+b^2=c^2)$ уринма бўлиши кўрсатилсин.

28. Фокуслари орасидаги масофа 10, учлари орасидаги масофа 8 га тенг бўлган гиперболанинг тенгламаси топилсин.

29. Фокуслари орасидаги масофа 10, асимптоталари эса $y=\frac{1}{2}x$, $y=-\frac{1}{2}x$ тўри бўлган чизиқлар бўлган гиперболанинг тенгламаси топилсин.

30. Ҳақиқий ўқи 10 га тенг, эксцентриситети эса 1,4 бўлган гиперболанинг тенгламаси топилсин.

31. Фокусларининг координаталари $(-2;0)$, $(2;0)$, асимптоталари эса $y=\frac{3}{5}x$, $y=-\frac{3}{5}x$ бўлган гиперболанинг тенгламаси топилсин.
32. $A(2;1)$ нуқтадан ўтувчи ҳамда асимптоталари $y=\frac{3}{4}x$, $y=-\frac{3}{4}x$ бўлган гиперболанинг тенгламаси топилсин.
33. $9x^2-25y^2=225$ гиперболанинг ҳақиқий ҳамда мавҳум ярим ўқлари, фокусларининг координаталари ҳамда эксцентриситети топилсин.
34. $4x^2-9y^2=36$ гиперболанинг асимптоталари топилсин.
35. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ гиперболанинг $20x+21y+12=0$ тўғри чизиқ билан кесишиш нуқталари топилсин.
36. Ушбу $x^2-y^2=16$ гиперболанинг $x^2+y^2=34$ айлана билан кесишиш нуқталари топилсин.
37. Тенг ёнли гиперболанинг эксцентриситети топилсин.
38. Агар гипербола асимптоталари орасидаги бурчак $60°$ га тенг бўлса, гиперболанинг эксцентриситети топилсин.
39. Ушбу 1) $x=-y^2$, 2) $y^2=3x$ параболанинг фокуси ва директрисаси топилсин.
40. Фокуси (4;0) ва директрисаси $x=-2$ бўлган параболани топинг.
41. Учи (3;2) ва фокуси (5;2) нуқталарда бўлган параболанинг тенгламаси топилсин.
42. Учи координаталар бошида, $A(6;9)$ нуқтадан ўтадиган хамда Oy ўқига нисбатан симметрик бўлган парабола тенгламаси топилсин.
43. Координаталар бошида умумий учга эга бўлиб, фокуслари мос равишда (2;0) ва (0;2) нуқталарда ётувчи параболанинг кесишиш нуқталари топилсин.
44. $O(0;0)$ ва $A(-1;2)$ нуқталардан ўтувчи ва Ox ўқига нисбатан симметрик бўлган парабола тенгламаси топилсин.
45. Ушбу $y^2=24x$ параболада фокусдан 14 бирлик масофада турадиган нуқта олинган. Шу нуқтадан парабола учигача бўлган масофа топилсин.
46. Oy ўқига нисбатан симметрик бўлган парабола $A(-5;2)$, $B(1;-4)$, $C(5;12)$ нуқталар орқали ўтади. Шу параболанинг учи, фокуси ва директрисаси топилсин.
47. $4y=x^2$ параболага (2;1) нуқтада уринма ўтказилган. Шу уринманинг тенгламаси топилсин.
48. $y^2=8x$ параболага шундай уринма ўтказиш керакки, у $A(0;-2)$ нуқтадан ўтсин. Шу уринманинг тенгламаси топилсин.

49. $y = 3\sqrt{x}$ **парабола берилган. Бу параболанинг директрисасидаги ординатаси –2 га тенг бўлган нуқта билан парабола фокуси орасидаги масофа топилсин.**

50. $y^2 = 2x$ **параболанинг** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ **эллипс билан кесишиш нуқтаси топилсин.**

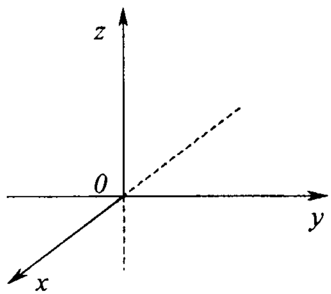
51. Фонтандан отилиб чиқаётган сув оқими, параметри p**=0,1 га тенг бўлган парабола шаклида. Сув ҳовузга, чиқаётган жойидан 2 м узоқликка тушаётгани маълум бўлса, отилиб чиқувчи сувнинг баландлиги топилсин.**

V БОБ

ФАЗОДА АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯНИНГ ДАСТЛАБКИ ТУШУНЧАЛАРИ

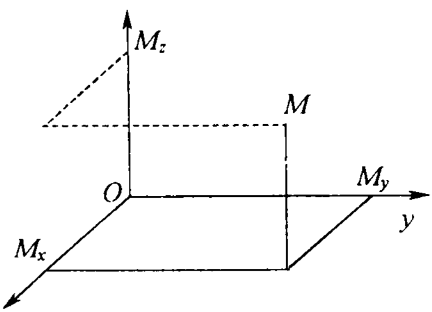
1. ФАЗОДА ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ ДЕКАРТ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ

Фазода ўзаро бир-бири билан перпендикуляр бўлган учта тўғри чизиқни олайлик. Бу тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасини O ҳарфи билан белгилаб, уни координата боши деб атаймиз. 8-чизмада кўрсатилганидек, тўғри чизиқларнинг бирини Ox ўқи ёки абсцисса ўқи, иккинчисини Oy ўқи ёки ордината ўқи, учинчисини эса Oz ўқи ёки аппликата ўқи деб аталади.



8-чизма.

Айтайлик, M – фазодаги бирор нуқта бўлсин. M нуқтадан yOz, xOz, xOy координат текисликларига параллел текисликлар ўтказилиб, уларнинг мос ўқлар билан кесишган нуқталарини M_x, M_y, M_z лар билан белгилаймиз. Бу M_x, M_y ва M_z нуқталарнинг аниқлашнинг йўл-йўриқлари 9-чизмада кўрсатилган.



9-чизма.

Ушбу

$$OM_x = x, \quad OM_y = y, \quad OM_z = z,$$

кесмаларнинг узунлиги M нуқтанинг координаталари деб аталади. x сон M нуқтанинг биринчи координатаси ёки абсциссаси, y сон M нуқтанинг иккинчи координатаси ёки ординатаси, z сон M нуқтанинг учинчи координатаси ёки аппликатаси деб аталади. M нуқта координаталари ёрдамида қуйидагича ёзилади: $M(x;y;z)$.

2. ФАЗОДАГИ ИККИ НУҚТА ОРАСИДАГИ МАСОФА

Фазода икки $A(x_1;y_1;z_1)$ ва $B(x_2;y_2;z_2)$ нуқталар орасидаги масофа ушбу

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (5.1)$$

формула билан топилади.

1-мисол. $A(2;5;0)$ ва $B(5;1;12)$ нуқталар орасидаги масофа топилсин.

Ечиш. Бу нуқталар орасидаги масофани (5.1) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (1-5)^2 + (12-0)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2} =$$
$$= \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13.$$

3. КЕСМАНИ БЕРИЛГАН НИСБАТДА БЎЛИШ

Фазода $A(x_1;y_1;z_1)$ ва $B(x_2;y_2;z_2)$ нуқталар берилган бўлиб, уларни туташтириш натижасида AB кесма ҳосил қилинган. Бу кесма ичида AC кесманинг CB кесмага нисбати берилган λ сонга тенг бўлсин:

$$\frac{AC}{CB} = \lambda.$$

Изланаётган C нуқтанинг координаталарини x, y ва z ушбу

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \qquad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \qquad (5.2)$$

формулалар билан топилади.

Хусусан, $C(x;y;z)$ нуқта AB кесмани тенг иккига бўлса, унинг x, y, z координаталари

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

бўлади.

2-мисол. $A(3;7;4)$ ва $B(8;2;3)$ нуқталарни туташтиришдан ҳосил бўлган AB кесмани $\lambda = \frac{2}{3}$ нисбатда бўлувчи C нуқта топилсин.

Ечиш. Изланаётган C нуқтанинг координаталарини юқорида келтирилган (5.2) формулалардан фойдаланиб топамиз:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{3 + \frac{2}{3}\cdot 8}{1+\frac{2}{3}} = \frac{9+16}{3+2} = 5,$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{7 + \frac{2}{3}\cdot 2}{1+\frac{2}{3}} = \frac{21+4}{5} = 5,$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} = \frac{4 + \frac{2}{3}\cdot 3}{1+\frac{2}{3}} = \frac{6}{\frac{5}{3}} = \frac{18}{5}.$$

Демак, $C\left(5;5;\frac{18}{5}\right)$.

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

1. Тўғри бурчакли декарт координаталар системасида қуйидаги нуқталар ясалсин. $A(0;1;2)$, $B(1;0;2)$, $C(1;2;0)$, $D(1;1;1)$, $E(0;0;1)$, $F(-5;3;1)$, $G(-2;-3;-1)$, $U(1;0;0)$, $V(0;1;0)$.
2. $A(1;2;3)$, $B(-2;1;3)$, $C(1;-2;-3)$ нуқталарни координата текисликларига, координаталар ўқларига туширилган проекциялари топилсин.
3. Фазода $A(1;1;1)$, $B(-1;2;1)$, $C(2;1;-1)$ нуқталар берилган. Бу нуқталарга xOy, xOz, yOz координата текисликларига нисбатан симметрик бўлган нуқталар топилсин.
4. Фазода $A(1;2;3)$, $B(-1;-2;-3)$ нуқталар берилган. Бу нуқталарга координаталар ўқларига нисбатан симметрик бўлган нуқталар топилсин.
5. $A(o;a;b)$, $B(a;o;b)$, $C(a;b;o)$, $A_1(o;o;a)$, $B_1(o;a;o)$, $C_1(a;o;o)$ нуқталар фазода қандай жойлашган?
6. Фазода, абсциссаси $|x|=1$, ординатаси $|y|=1$ ва аппликатаси $|z|=1$ текисликларни қаноатлантирувчи нуқталар топилсин.

7. Фазода $A(3;4;5)$ нуқта берилган. Координаталар бошидан шу нуқтагача бўлган масофа топилсин.
8. Фазода $A(2;0;3)$ ва $B(-1;1;12)$ нуқталар орасидаги масофа топилсин.
9. Фазода учлари $A(3;-1;2)$, $B(0;-4;2)$ ва $C(-3;2;1)$ нуқталарда бўлган учбурчак берилган. Шу учбурчакнинг периметри топилсин.
10. Фазода $M(1;1;1)$ нуқтадан 3 бирлик узоқликда бўлган нуқталарнинг x, y ва z координаталари орасидаги муносабат топилсин.
11. Фазода $A(1;2;3)$ ва $B(5;4;7)$ нуқталарни бирлаштирувчи AB кесмани 3:4 нисбатда бўладиган нуқтанинг координаталари топилсин.
12. Учлари $A(4;-1;\ 4)$, $B(0;7;-4)$, $C(3;1;-2)$ нуқталарда бўлган учбурчак томонлари ўрталарининг координаталари топилсин.
13. $A(3;-1;6)$ ва $B\ (-1;7;-2)$ нуқталарни бирлаштирувчи AB кесмани 4 та тенг бўлакка бўлувчи C, D, E нуқталарнинг координаталари топилсин.
14. Oz координаталар ўқида $A(-4;1;7)$, $B(3;5\text{-}2)$ нуқталардан тенг узоқликда бўлган нуқталар координаталари топилсин.

VI БОБ

ТЕКИСЛИК ВА УНИНГ ТЕНГЛАМАЛАРИ

1-§. ТЕКИСЛИКНИНГ ТУРЛИ КЎРИНИШДАГИ ТЕНГЛАМАЛАРИ

1°. Текисликнинг умумий тенгламаси

Қуйидаги

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (6.1)$$

x, y ва z га нисбатан биринчи даражали тенглама, текисликнинг умумий тенгламаси деб аталади.

Хусусий ҳоллар:

1) Ушбу

$$Ax + By + Cz = 0 \qquad (6.2)$$

текислик координата бошидан ўтади.

2) Ушбу

$$Ax + By + D = 0 \qquad (6.3)$$

текислик Oz ўқига параллел текисликни ифодалайди.

3) Ушбу

$$Ax + Cz + D = 0 \qquad (6.4)$$

текислик Oy ўқига параллел текисликни ифодалайди.

4) Ушбу

$$By + Cz + D = 0 \qquad (6.5)$$

текислик Ox ўқига параллел текисликни ифодалайди.

5) Ушбу

$$Ax + By = 0$$

текислик Oz ўқидан ўтувчи текисликни ифодалайди.

6) Ушбу

$$Ax + Cz = 0 \qquad (6.6)$$

текислик Oy ўқидан ўтувчи текисликни ифодалайди.

7) Ушбу

$$By + Cz = 0 \qquad (6.7)$$

текислик Ox ўқидан ўтувчи текисликни ифодалайди.

8) Ушбу

$$Cz + D = 0 \qquad (6.8)$$

текислик xOy текисликка параллел бўлган текисликни ифодалайди.

9) Ушбу

$$Ax + D = 0 \qquad (6.9)$$

текислик yOz текисликка параллел бўлган текисликни ифодалайди.

10) Ушбу

$$By + D = 0 \qquad (6.10)$$

текислик xOz текисликка параллел бўлган текисликни ифодалайди.

11) Ушбу

а) $Ax = 0$, яъни $x = 0$

б) $By = 0$, яъни $y = 0$

в) $Cz = 0$, яъни $z = 0$

текисликлар мос равишда yOz, xOz ва xOy координата текисликларини ифодалайди.

2°. Текисликнинг кесмалар бўйича тенгламаси

Фазода бирор текислик берилган бўлиб, у координата ўқлари Ox, Oy ва Oz лар билан мос равишда M_1, M_2, M_3 нуқталарда кесишиб, улардан ажратган кесмалари

$$OM_1=a, \quad OM_2=b, \quad OM_3=c$$

га тенг бўлсин.

Ушбу

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{6.11}$$

тенглама текисликнинг кесмалар бўйича тенгламасини ифодалайди.

3°. Текисликнинг нормал тенгламаси

Фазода Декарт координаталар системасига нисбатан бирор текисликни қарайлик. Координата бошидан бу текисликка туширилган перпендикулярнинг узунлиги p ва шу перпендикулярнинг Ox, Oy ва Oz ўқларнинг мусбат йўналишлари билан ташкил этган бурчакларига мос равишда α, β ва γ бўлсин.

Ушбу

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \tag{6.12}$$

тенглама текисликни нормал тенгламаси дейилади.

Текисликнинг умумий тенгламаси

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{6.13}$$

ни

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

га кўпайтириш натижасида бу тенглама нормал кўринишдаги тенгламага келади.

μ нормалловчи кўпайтувчи дейилиб, унинг ишораси (6.13) тенгламадаги D нинг ишорасига тескари қилиб олинади.

1-мисол. Текисликнинг умумий тенгламаси $4x+3y-7z+15=0$ ни нормал кўринишдаги тенгламага келтирилсин.

Ечиш: Аввало нормалловчи кўпайтувчини топамиз:

$$\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{1}{-\sqrt{4^2+3^2+(-7)^2}}=$$

$$=\frac{1}{-\sqrt{16+9+49}}=-\frac{1}{\sqrt{74}}.$$

Берилган тенглама ҳар икки томонини $\mu=-\frac{1}{\sqrt{74}}$ га кўпайтириб, ушбу

$$-\frac{4}{\sqrt{74}}x-\frac{3}{\sqrt{74}}y+\frac{7}{\sqrt{74}}z-\frac{15}{\sqrt{74}}=0$$

тенгламага келамиз. Бу текисликнинг нормал тенгламасидир. Бу ерда

$$\cos\alpha=-\frac{4}{\sqrt{74}},\quad \cos\beta=-\frac{3}{\sqrt{74}},\quad \cos\gamma=\frac{7}{\sqrt{74}},\quad p=\frac{15}{\sqrt{74}}$$

бўлади.

2-§. ТЕКИСЛИККА ОИД АСОСИЙ МАСАЛАЛАР

1°. Берилган нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси.

Фазода бирор $M(x_1;y_1;z_1)$ нуқта берилган бўлсин. Шу нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси қуйидаги

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \qquad (6.14)$$

кўринишда бўлади.

2-мисол. $M(2;4;6)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси топилсин.

Ечиш. Юқоридаги (6.14) формулага кўра $M(2;4;6)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси ушбу

$$A(x-2)+B(y-4)+C(z-6)=0$$

кўринишда бўлади. A, B ва C ларнинг турли қийматларида $M(2;4;6)$ нуқтадан ўтувчи турли текисликлар ҳосил бўлади.

2°. Икки текислик орасидаги бурчак.

Фазода икки текислик берилган бўлсин. Бу текисликлардан ҳосил бўлган ихтиёрий икки қўшни икки ёқли бурчак берилган текисликлар орасидаги бўрчак деб аталади.

Ушбу

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

текисликлар орасидаги бурчак φ ушбу

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (6.15)$$

формула билан топилади.

Қуйидаги

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \quad (6.16)$$

текник икки текисликнинг перпендикулярлик шартини

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (6.17)$$

тенгликлар эса икки текисликнинг параллеллик шартини ифодалайди.

3-мисол. $2x-3y-5z+7=0$, $6x-9y+15z+21=0$ текисликлар ўзаро параллелдир, чунки улар учун (6.17) шарт бажарилади:

$$\frac{2}{6} = \frac{-3}{-9} = \frac{5}{15}.$$

4-мисол. $2x+y-5z+4=0$, $3x+4y+2z-1=0$ текисликлар ўзаро перпендикуляр бўлади, чунки улар учун (6.16) шарт бажарилади:

$$2\cdot 3 + 1\cdot 4 + (-5)\cdot 2 = 0.$$

5-мисол. $2x+y+4z+2=0$, $x+2y-z+1=0$ текисликлар орасидаги бурчак топилсин.

Юқорида келитирлган формулага кўра изланаётган φ бурчакнинг косинуси

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 4\cdot(-1)}{\sqrt{4+1+16}\cdot\sqrt{1+4+1}} = -\frac{0}{\sqrt{126}} = 0$$

бўлади. Демак, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

3°. Берилган нуқтадан берилган текисликкача бўлган масофа

Берилган $M(x_1; y_1; z_1)$ нуқтадан

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (6.18)$$

текисликкача бўлган масофа қуйидаги

$$d = \pm\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (6.19)$$

формула билан топилади.

6-мисол. Берилган $M(3;0;1)$ нуқтадан ушбу $x-2y+z-1=0$ текисликкача бўлган масофа топилсин.

Ечиш. Равшанки, бу ҳолда

$A=1,\ B=-2,\ C=1,\ D=-1,\ x_1=3,\quad y_1=0,\quad z_1=1$

бўлади. Юқоридаги (6.19) формулага кўра

$$d=\frac{1\cdot 3+(-2)\cdot 0+1\cdot 1-1}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

бўлади.

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

1. $\frac{x-1}{12}+\frac{y+2}{4}-\frac{z}{3}=\frac{1-x}{6}$ **тенглик текисликнинг умумий тенгламаси кўринишида ёзилсин.**
2. $6x+4y+3z-12=0$ **текисликда қуйидаги** $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;4)$, $D\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{7}{3}\right)$ **нуқталарнинг ётиши кўрсатилсин.**
3. $2x-1=0,\ y+2=0,\ 2z-3=0$ **текисликлар координаталар текисликларига нисбатан қандай жойлашгани аниқлансин.**
4. **Координаталар ўқларидан мос равишда** $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$, $c=2$ **бирлик кесмалар ажратувчи текислик тенгламаси топилсин.**
5. **Координаталар ўқларидан мос равишда** $a=2,\ b=-3,\ c=4$ **бирлик кесмалар ажратувчи текислик тенгламаси топилсин.**
6. **Ушбу** $x+2y-3z+6=0$ **текисликнинг координаталар ўқларидан ажратган кесмалари топилсин.**
7. Ox **ўқидан 2 бирлик,** Oz **ўқидан 1 бирлик кесмалар ажратувчи ҳамда** $A(2;-4;-1)$ **нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси топилсин.**
8. Ox **ўқидан ҳамда** $A(0;-2;3)$ **нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси топилсин.**
9. **(0;0;0), (2;1;1), (3;-2;3) нуқталардан ўтувчи текислик тенгламаси топилсин.**
10. Oy **ўқидан ҳамда** $A(4;0;3)$ **нуқтадан ўтувчи текислик тенгламаси топилсин.**
11. $A(0;1;3)$ **ва** $B(2;4;5)$ **нуқталардан ўтувчи ва** Ox **ўқига параллел бўлган текислик тенгламаси топилсин.**
12. $M(2;-3;3)$ **нуқтадан ўтадиган ва** $3x+y-3z=0$ **текисликка параллел бўлган текисликнинг координаталар ўқидан ажратган кесмалари топилсин.**
13. **Ушбу** $x+2y-3z-6=0$ **текислик тенгламаси берилган. Унинг кесмалар бўйича тенгламаси топилсин.**
14. $A(2;-3;3)$ **нуқтадан ўтувчи** Oxy **координаталар текислигига параллел бўлган текислик тенгламаси топилсин.**

15. $A(-5;2;-1)$ нуқтадан ўтувчи ва Oyz координаталар текислигига параллел бўлган текислик тенгламаси топилсин.
16. $A(1;-2;4)$ нуқтадан ўтувчи Oxz координаталар текислигига параллел бўлган текислик тенгламаси топилсин.
17. Ушбу

1) $\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z-5=0$,

2) $\frac{6}{7}x-\frac{3}{7}y+\frac{2}{7}z+5=0$,

3) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}z-3=0$,

4) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+3=0$,

5) $x-1=0$,

6) $z-5=0$

тенгламалар текисликнинг нормал тенгламалари бўладими?

18. Ушбу

1) $2x-2y+z-18=0$,

2) $4x-6y-12z-11=0$,

3) $6x-8y-2=0$,

4) $2z-1=0$,

тенгламалар текисликнинг нормал кўринишдаги тенгламасига келтирилсин.

19. $2x+y-2z-4=0$, $3x+6y-2z-12=0$ текисликлар орасидаги бурчак топилсин.
20. $4x-5y+3z-1=0$, $x-4y-z+9=0$ текисликлар орасидаги бурчак топилсин.
21. $3x-y+2z+15=0$, $5x+9y-3z-1=0$ текисликлар орасидаги бурчак $90°$ бўлиши кўрсатилсин.
22. Ушбу $6x+2y-4z+17=0$, $9x+3y-6z-4=0$ текисликлар орасидаги бурчак $0°$ бўлиши кўрсатилсин.
23. $A(1;-1;1)$ нуқтадан ўтувчи ва ушбу $x-y+z-1=0$, $2x+y+z+1=0$ текисликларга перпендикуляр бўлган текислик тенгламаси топилсин.
24. α нинг қандай қийматида ушбу $3x-5y+\alpha z-3=0$ ва $x-3y+2z+5=0$ текисликлар ўзаро перпендикуляр бўлади?
25. Ox ўқини кесиб ўтувчи ва $x-y=0$ текислик билан $\frac{\pi}{3}$ бурчак ташкил этувчи текислик тенгламаси топилсин.
26. $A(2;1;1)$ нуқтадан қуйидаги $x+y-z+1=0$ текисликкача бўлган масофа топилсин.
27. $x-2y+z-1=0$ ва $2x-4y+2z-1=0$ параллел текисликлар орасидаги масофа топилсин.

28. *Ox* **ўқида ушбу** $2x+y-2z+4=0$ **текисликдан** $\alpha=\frac{2}{3}$ **га тенг масофада турувчи нуқта топилсин.**

29. *Oz* **ўқида қуйидаги** $12x+9y-20z-19=0$ **ва** $16x-12y+15z-9=0$ **текисликлардан баравар узоқликда бўлган нуқта топилсин.**

30. **Ушбу** $x-4y-2z+3=0,$ $3x+y+z-5=0,$ $3x-12y-6z+7=0$ **текисликларнинг кесишиш нуқталари топилсин.**

VII БОБ

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТЛАР

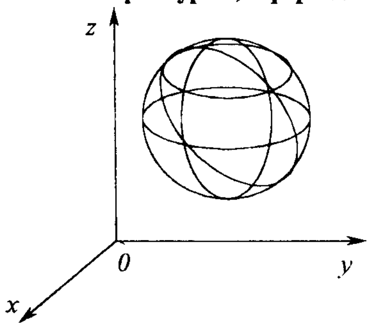
x, y ва z ўзгарувчиларга нисбатан ушбу

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + \\ + Fyz + Gx + Hy + Kz + T = 0 \quad (7.1)$$

тенглама иккинчи тартибли сиртнинг умумий тенгламаси деб аталади.

1°. Сфера ва унинг тенгламаси.

Фазода $A(a;b;c)$ нуқтадан тенг узоқликда ётган нуқталар тўплами (нуқталарнинг геометрик ўрни) сфера деб аталади (10-чизма).



10-чизма.

Ушбу

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \quad (7.2)$$

тенглама сферанинг тенгламаси бўлади.

$A(a;b;c)$-нуқта сфера маркази, R-эса сфера радиуси дейилади.

1-мисол. Маркази $A(1;2;3)$ нуқтада, ва радиуси $R=2$ бўлган сфера тенгламаси топилсин.

Ечиш. Юқорида келтирилган (7.2) формуладан фойдаланиб изланаётган сферанинг тенгламасини топамиз:

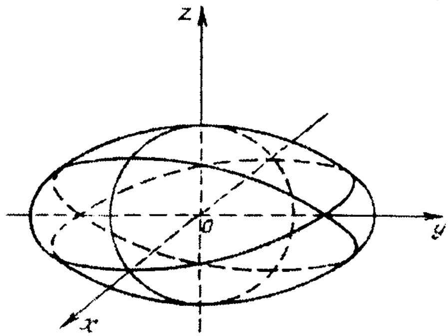
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2^2$$

2°. Эллипсоид

Эллипсоиднинг тенгламаси ушбу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (7.3)$$

кўринишда бўлиб, a; b;c лар эллипсоиднинг ярим ўқлари дейилади (11-чизма).



11-чизма.

(7.3) эллипсоид $x0y$ текисликни ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

эллипс бўйича, xOz текисликни ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

эллипс бўйича, yOz текисликни эса қуйидаги

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

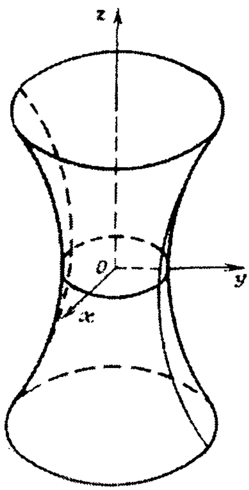
эллипс бўйича кесади.

3°. Гиперболоидлар

Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \textbf{(7.4)}$$

кўринишдаги тенглама бир паллали гиперболоиднинг тенгламаси бўлади (12-чизма).

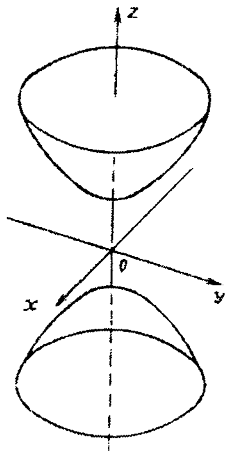


12-чизма.

Қуйидаги

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0 \tag{7.5}$$

кўринишдаги тенглама икки паллали гиперболоиднинг тенгламаси бўлади (13-чизма).



13-чизма.

Бир паллали гиперболоид координата текисликларига ва координата бошига нисбатан симметрик жойлашган бўлади.

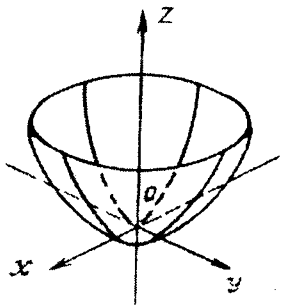
Икки паллали гиперболоид ҳам координата текисликларига ҳамда координата бошига нисбатан симметрик жойлашган бўлади.

4°. Параболоидлар

Ушбу

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \tag{7.6}$$

кўринишдаги тенглама эллиптик параболоиднинг тенгламаси бўлади (14-чизма).

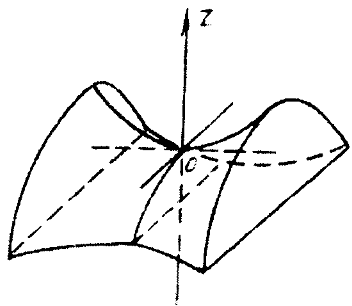


14-чизма.

Қуйидаги

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

кўринишдаги тенглама гиперболик параболоиднинг тенгламаси бўлади (15-чизма).



15-чизма.

Юқорида келтирилган параболоидлар *xOy* ҳамда *yOz* текисликларга нисбатан симметрик жойлашган бўлади.

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

1. Маркази (2;-1;3) нуқтада ва радиуси 3 га тенг бўлган сфера тенгламаси топилсин.

2. Маркази (0;0;0) нуқтада ва радиуси 1 га тенг бўлган сфера тенгламаси топилсин.

3. Маркази (1;1;1) нуқтада ва радиуси 2 га тенг бўлган сферанинг координата ўқлари билан кесишиш нуқталари топилсин.

4. $x^2+y^2+z^2+2x-4y-4=0$ сферанинг маркази (-1;2;0) нуқтада, радиуси 3 га тенг эканлиги кўрсатилган.

5. $x^2+y^2+z^2-2x+2y-6z-21=0$ сферанинг маркази ва радиуси топилсин.

6. Ярим ўқлари a=2, b=3, c=4 бўлган эллипсоидниг тенгламаси топилсин.

7. $x^2+2y^2+z^2+2x+4y-1=0$ эллипсоиднинг ярим ўқлари топилсин.

8. Ушбу

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$$

эллипсоиднинг x-2=0 текислик билан кесишишидан ҳосил бўлган эгри чизиқ топилсин.

9. Ушбу

$$\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$$

эллипсни Oy ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$$

эллипсоиддан иборат экани кўрсатилсин.

10. Ушбу

$$x^2+2y-z^2+2x+4y-1=0$$

тенглама ярим ўқлари a=2, $b=\sqrt{2}$, c=2 бўлган бир паллали гиперболоид тенгламаси эканлиги кўрсатилсин.

11. Ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}-z^2=1$$

бир паллали гиперболоидни $z-\sqrt{5}=0$ текислик билан кесишишидан ҳосил бўлган эгри чизиқлар топилсин.

12. Ушбу

$$x^2-4y^2-z^2+8y-2z-9=0$$

тенглама ярим ўқлари a=2, b=1, c=2 бўлган икки паллали гиперболоид тенгламаси экани кўрсатилсин.

13. $A\left(\frac{26}{3};1;3\right)$ нуқтанинг қуйидаги

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{4}=-1$$

икки паллали гиперболоидда ётиши кўрсатилсин.

14. Ушбу

$$x^2+2x+2y^2+4y-2z+3=0$$

тенглама $a=\sqrt{2}$, b=1 бўлган эллиптик параболоиднинг тенгламаси экани кўрсатилсин.

15. Ушбу

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=z$$

эллиптик параболоиднинг Oyz ҳамда Oxz координата текисликлари билан кесишишидан ҳосил бўлган эгри чизиқ топилсин.

16. Ушбу

$$x^2-\frac{y^2}{4}=z$$

гиперболоиднинг z-1=0 текислик билан кесишишидан ҳосил бўлган эгри чизиқ топилсин.

VIII БОБ

ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА ВА ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИНИНГ БОШЛАНҒИЧ ТУШУНЧАЛАРИ

1-§. ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА ВА АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ

1°. Иккинчи ва учинчи тартибли детерминантлар ва уларнинг хоссалари

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ ҳақиқий сонлар ёрдамида тузилган $a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$ миқдор иккинчи тартибли детерминант деб аталади ва қуйидагича белгиланади:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{8.1}$$

1-мисол.

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot 8 - 6\cdot 3 = 16 - 18 = -2,$

2) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-8) - 2\cdot 4 = 8 - 8 = 0,$

3) $\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 1\cdot(-7) = 6 + 7 = 13,$

4) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 3\cdot 2 = 8 - 6 = 2.$

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ сонлардан тузилган

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ифода учинчи тартибли детерминант деб аталади ва қуйидагича ёзилади:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

2-мисол. Ушбу учинчи тартибли детерминант ҳисоблансин:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix}.$$

Юқорида келтирилган қоидага кўра детерминантнинг қийматини топамиз:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

2°. Детерминантнинг хоссалари

1. Детерминантнинг сатрларини мос устунлари билан алмаштириш натижасида детерминантнинг қиймати ўзгармайди.

2. Детерминантнинг бирор сатри (ёки устуни) даги барча элементлар нолга тенг бўлса, детерминант нолга тенг бўлади.

3. Детерминантнинг икки сатрини (ёки икки устунини) ўзаро алмаштириш натижасида унинг абсолют қиймати ўзгармайди, ишораси эса тескарисига ўзгаради.

4. Детерминантнинг икки сатри ёки икки устуни бир хил бўлса, ёки пропорционал бўлса, детерминантнинг қиймати нолга тенг бўлади.

5. Детерминантнинг бирор сатридаги (ёки бирор устунидаги) барча элементлари бирор ўзгармас сонга кўпайтирилса, детерминантнинг қиймати шу сонга кўпаяди.

2-мисол. Қуйидаги детерминантлар ҳисоблансин:

1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 9 & 12 & 18 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3\cdot 3 & 4\cdot 3 & 6\cdot 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$=3\cdot[1\cdot4\cdot1+3\cdot6\cdot2+3\cdot0\cdot5-5\cdot4\cdot2-6\cdot0\cdot1-3\cdot3\cdot1]=3\cdot(4+36+0-40-0-9)=$$

$$=3\cdot(-9)=-27.$$

2)

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cdot 1 & 3\cdot 2 & 4\cdot 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 0 = 0.$$

3°. Чизиқли тенгламалар системаси

Ушбу

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \qquad (8.2)$$

система икки номаълум иккита чизиқли тенглама системаси деб аталади, бунда $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ сонлар тенгламалар системасининг коэффициентлари, b_1, b_2 сонлар эса озод ҳадлар дейилади.

Қуйидаги белгилашлар киритамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (8.3)$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (8.4)$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \qquad (8.5)$$

8.1-теорема.

1) Агар $\Delta \neq 0$ бўлса, у ҳолда (8.2) тенгламалар системаси ягона ечимга эга бўлиб, бу ечимлар

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

бўлади;

2) Агар $\Delta = 0$ бўлиб, $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$ бўлса, (8.2) системанинг ечими мавжуд бўлмайди;

3) Агар $\Delta = 0$ бўлиб, $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$ бўлса, у ҳолда (8.2) система чексиз кўп ечимга эга бўлади.

3-мисол. Ушбу система ечилсин:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1, \\ 4x + 3y = 11. \end{cases}$$

Бу система учун юқоридаги (8.3), (8.4) ва (8.5) детерминантларни тузамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 4 \cdot (-5) = 9 + 20 = 29,$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 11 \cdot (-5) = 3 + 55 = 58,$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 11\end{vmatrix}=3\cdot 11-4\cdot 1=33-4=29.$$

8.1 теоремадан фойдаланиб, берилган системанинг ечимини топамиз:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{58}{29}=2,$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{29}{29}=1.$$

Ушбу

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1,\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2,\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{cases}\qquad(8.6)$$

система уч номаълумли учта чизиқли тенгламалар системаси деб аталади, бунда $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}$ **сонлар тенгламалар системасининг коэффициентлари,** b_1, b_2, b_3 **сонлар эса озод ҳадлар деб аталади.**

Қуйидаги учинчи тартибли детерминант тузилади:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\qquad(8.7)$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\qquad(8.8)$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\qquad(8.9)$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix},\qquad(8.10)$$

1) Агар $\Delta\neq 0$ бўлса, (8.6) тенгламалар системаси ягона ечимга эга ва бу ечим

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta},\quad y=\frac{\Delta y}{\Delta},\quad z=\frac{\Delta z}{\Delta}$$

бўлади.

2) Агар $\Delta=0$ бўлиб, $\Delta x\neq 0$, $\Delta y\neq 0$, $\Delta z\neq 0$ бўлса, (8.6) системанинг ечими мавжуд бўлмайди. Агар $\Delta=0$ бўлиб, $\Delta x=0$, $\Delta y=0$, $\Delta z=0$ бўлса, у ҳолда (8.6) система чексиз кўп ечимга эга бўлади.

4-мисол. Ушбу система ечилсин:

$$\begin{cases} 2x-3y+z=-5, \\ x+2y-4z=-3, \\ 5x-4y+6z=5. \end{cases}$$

Бу система учун юқоридаги (8.7)-(8.10) детерминантларни тузамиз:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix}=24-4+60-10-32+18=56,$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -9 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix}=-60+36+60-10-161+80=-55,$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & -9 & -4 \\ 5 & 5 & 6 \end{vmatrix}=-108+100+5+45+30+40=112,$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & -9 \\ 5 & -4 & 5 \end{vmatrix}=20+20+135+50+15-72=168.$$

Берилган тенгламалар системасининг ечими

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-56}{56}=-1,$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{112}{56}=2,$$

$$z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{168}{56}=3.$$

бўлади.

2-§. ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ

Сон қиймати ва йўналиши билан аниқланувчи катталик вектор катталик ёки вектор деб аталади. Вектор катталик кичик ҳарф устига стрелка қўйиш билан $\vec{a}$ ёки $\vec{AB}$ каби белгиланади.

А нуқта векторнинг боши, В нуқта эса векторнинг охири дейилади. Векторнинг сон қиймати унинг узунлиги ёки модули деб аталади ва $|\vec{AB}|$ каби белгиланади.

Узунлиги ноль бўлган вектор ноль вектор дейилади. Икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг узунликлари бир хил бўлиб, улар ўзаро параллел ва бир томонга йўналган бўлса, у ҳолда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ ўзаро тенг векторлар дейилади ва $\vec{a}=\vec{b}$ каби ёзилади.

Узунлиги бирга тенг, йўналиши эса берилган $\vec{a}$ векторнинг йўналиши каби бўлган $\vec{a}_0$ вектор бирлик вектор деб аталади.

Равшанки,

$$\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a}_0.$$

1°. Векторларни қўшиш

Икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг бошлари А ва С ни бир нуқтага келтириб, томонлари $|\vec{a}|=|\vec{AB}|$ ва $|\vec{b}|=|\vec{CD}|$ бўлган параллелограмм ясаймиз. Бу параллелограмм диагонали $\vec{AE}=\vec{c}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар йиғиндиси деб аталади ва

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$$

каби ёзилади.

Ушбу

$$\vec{a}+(-\vec{b})$$

вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг айирмаси деб аталади ва $\vec{a}-\vec{b}$ каби белгиланади:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

Икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ вектор ўзаро параллел бўлса ёки параллел тўғри чизиқларда ётса, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ коллинеар векторлар деб аталади.

Учта $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ вектор битта текисликда ётса ёки бир текисликка параллел бўлса, $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ компланар векторлар деб аталади.

2°. Векторнинг координаталари.

Фазода $Oxyz$ Декарт координаталар системасини оламиз. Ox, Oy ва Oz ўқларидаги бирлик векторларни ортларни мос равишда $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ лар билан белгилаймиз. $\vec{a}$ векторнинг Ox, Oy, Oz координата ўқларидаги проекциялари a_x, a_y, a_z шу векторнинг координаталари дейилади ва $a\{a_x; a_y; a_z\}$ кўринишда ёзилади.

Бунда

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \tag{8.11}$$

бўлади.

Бошланғич нуқтаси координаталар бошида ва охирги нуқтаси $M(x;y;z;)$ да бўлган $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ вектор M нуқтанинг радиус-вектори дейилади. Бу ҳолда

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

нинг узунлиги

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{8.12}$$

бўлади.

Бошланғич нуқтаси $M_1(x_1; y_1; z_1)$ ва охирги нуқтаси $M_2(x_2; y_2; z_2)$ бўлган $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ векторнинг координаталари қуйидагича аниқланади:

$$\vec{a} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\} \tag{8.13}$$

5-мисол. Бошланғич нуқтаси $M_1(1;2;3)$ ва охирги нуқтаси $M_2(4;2;-1)$ бўлган $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторнинг ортлар бўйича ёйилмасини ёзинг ва узунлигини ҳисобланг.

(8.13) формулага кўра $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторнинг координаталарини топамиз:

$$\overrightarrow{M_1M_2}\ \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\} = \overrightarrow{M_1M_2}\ \{3;0;-4\}.$$

$\overrightarrow{M_1M_2}$ векторнинг ортлар бўйича ёйилмаси $\overrightarrow{M_1M_2} = 3\vec{i} - 4\vec{k}$ бўлади.

Энди (8.12) ёки (8.13) формулага кўра $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторнинг узунлигини ҳисоблаймиз:

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

3°. Векторнинг йўналтирувчи косинуслари

Бирор $\vec{a}\{a_x; a_y; a_z\}$ вектор билан $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ортлар орасидаги бурчакларни мос равишда α, β ва γ билан белгилайлик. cosα, cosβ, cosγ лар $\vec{a}$ векторнинг йўналтирувчи косинуслари дейилади. Улар учун

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (8.14)$$

бўлади.

Бошланғич нуктаси $A(x_1; y_1; z_1)$ ва охирги нуқтаси $B(x_2; y_2; z_2)$ бўлган $\overrightarrow{AB}$ векторнинг координата ўқларидаги проекциялари

$$np_{0x}\overrightarrow{AB} = x_2 - x_1, \quad np_{0y}\overrightarrow{AB} = y_2 - y_1, \quad np_{0z}\overrightarrow{AB} = z_2 - z_1$$

бўлиб, унинг йўналтирувчи косинуслари эса

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}}, \\ \cos\beta &= \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (8.15)$$

бўлади.

$\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ радиус-векторнинг йўналтирувчи косинуслари эса қуйидагича ҳисобланади:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x}{|\vec{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \cos\beta &= \frac{y}{|\vec{r}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{z}{|\vec{r}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned} \qquad (8.16)$$

6-мисол. $\vec{a}$ вектор *Ox* ўқ билан α=60°, *Oy* ўқ билан β=45°

бурчак ҳосил қилади. Агар $|\vec{a}|=3$ бўлса, унинг координаталарини аниқланг.

$\vec{a}$ векторнинг Oz ўқ билан ҳосил қилган бурчагини топиш учун (8.14) формуладан фойдаланамиз:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\cos^2\gamma=1.$$

Демак,

$$\cos\gamma=\frac{1}{2},\quad \gamma=60^\circ.$$

$\vec{a}$ векторнинг координаталарини аниқлаш учун

$$a_x=|\vec{a}|\cos\alpha,\quad a_y=|\vec{a}|\cos\beta,\quad a_z=|\vec{a}|\cos\gamma$$

формуладан фойдаланамиз:

$$a_x=\frac{3}{2},\quad a_y=\frac{3}{\sqrt{2}},\quad a_z=\frac{3}{2}.$$

Демак,

$$\vec{a}=\frac{3}{2}\vec{i}+\frac{3}{\sqrt{2}}\vec{j}+\frac{3}{2}\vec{k} \text{ ёки } \vec{a}=\left\{\frac{3}{2};\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{3}{2}\right\}.$$

4°. Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси

Ушбу

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) \quad (8.17)$$

миқдор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси дейилади. Улар қуйидаги хоссалар эга:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$,

2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$,

3) $\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{a},\vec{b}\right)$,

4) $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлганда уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлади. $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ортларнинг скаляр кўпайтмаси қуйидагича бўлади:

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0,\qquad \vec{i}\cdot\vec{i}=1,$$
$$\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0,\qquad \vec{j}\cdot\vec{j}=1,$$
$$\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0,\qquad \vec{k}\cdot\vec{k}=1.$$

5°. *Икки векторнинг вектор кўпайтмаси.*

$\vec{a}$ векторнинг $\vec{b}$ вектор билан вектор кўпайтмаси $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ деб шундай $\vec{c}$ векторга айтиладики, бу векторнинг узунлиги ва йўналиши қуйидаги шартларни қаноатлантиради:

1) $\vec{c}$ векторнинг узунлиги $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга ясалган параллелограммнинг юзига тенг.

$$\left|\vec{c}\right| = a\cdot b\cdot\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right),$$

2) $\vec{c}$ вектор шу параллелограмм текислигига перпендикулярдир, яъни ҳам $\vec{a}$ векторга, ҳам $\vec{b}$ векторга перпендикулярдир:

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=0 \text{ ва } \vec{b}\cdot\vec{c}=0.$$

3) $\vec{c}$ вектор шундай томонга йўналганки, унинг учидан қараганда $\vec{c}$ вектор атрофида $\vec{a}$ вектордан $\vec{b}$ векторга энг кичик бурчак билан айланиш соат стрелкаси айланишига қарама-қаршидир.

Вектор кўпайтманинг асосий хоссалари:

1) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]$,

2) $\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{c}\right]+\left[\vec{b},\vec{c}\right]$,

3) $\left[\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}\right]=\lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right]$,

4) Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлса, $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=0$.

Ортларнинг вектор кўпайтмаси қуйидагича бўлади:

$$\left[\vec{i},\vec{j}\right] = -\left[\vec{j},\vec{i}\right] = \vec{k}, \qquad \left[\vec{i},\vec{i}\right] = 0,$$

$$\left[\vec{j}.\vec{k}\right] = -\left[\vec{k},\vec{j}\right] = \vec{i}, \qquad \left[\vec{j},\vec{j}\right] = 0,$$

$$\left[\vec{k},\vec{i}\right] = -\left[\vec{i},\vec{k}\right] = \vec{j}, \qquad \left[\vec{k},\vec{k}\right] = 0.$$

Агар $\vec{a}\{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b}\{b_x, b_y, b_z\}$ **бўлса, уларнинг вектор кўпайтмаси:**

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\,\vec{j} +$$

$$+ (a_x b_y - a_y b_z)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

бўлиб, унинг модули

$$\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = \sqrt{(a_y b_x - a_z b_y)^2 + (a_x b_z - a_z b_x)^2 + (a_x b_y - a_y b_x)^2}$$

формула билан ҳисобланади.

Учлари $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$ **нуқталарда бўлган учбурчакнинг юзи**

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\vec{AB}, \vec{AC}\right]\right|$$

формула билан ҳисоблананади.

7-мисол. $\vec{a}$ **ва** $\vec{b}$ **векторлар орасидаги бурчак** $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ **га тенг ва** $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 3$ **эканлиги маълум.** $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ **векторнинг узунлигини топинг.**

$\vec{c}$ **вектор узунлигини топиш учун векторларнинг скаляр кўпайтмасидан фойдаланамиз.** $\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2$ **деб белгилаб ва** $\vec{a}^2 = |\vec{a}^2|$ **ни эътиборга олиб, берилган векторнинг ҳар икки томонини квадратга кўтарамиз:**

$$\vec{c}^2 = \left(2\vec{a} + 3\vec{b}\right)^2 = 4\vec{a}^2 + 12\vec{a}^2\cdot\vec{b} + 9\vec{b}^2.$$

Берилганларга асосан:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 2, \qquad \vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 9.$$

Демак,

$$\vec{c}^2 = 4\cdot 2 + 12\cdot 3 + 9\cdot 9 = 125,$$

бундан

$$|\vec{c}| = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}\,.$$

МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР

1. Ушбу детерминантлар ҳисоблансин:

1) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 15 \end{vmatrix}$, 3) $\begin{vmatrix} 12 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$,

4) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$, 5) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{vmatrix}$.

2. Ушбу детерминантлар ҳисоблансин:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -8 & 6 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$, 2) $\begin{vmatrix} 12 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$,

3) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$,

5) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix}$, 6) $\begin{vmatrix} 3 & -8 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & -10 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Ушбу тенглик исботлансин:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

4. Ушбу

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

тенглама ечилсин.

5. Ушбу

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

тенглама ечилсин.

6. Ушбу

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

тенглама ечилсин.

7. Ушбу

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1$$

тенгсизлик ечилсин.

8. Ушбу

$$\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$$

тенгсизлик ечилсин.

9. Ушбу

$$\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

айният исботлансин.

Қуйидаги тенгламалар системаси ечилсин:

10. $\begin{cases} 2x+3y=1, \\ 3x+5y=4. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 4x-5y=40, \\ 3x+2y=7. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x+y=4, \\ 2x+4y=1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 5x+2 — = 4, \\ 7x+4 — = 8. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x+y=1. \\ x-y=2. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x-y+3z=9, \\ 3x-5y+z=-4, \\ 4x-7y+z=5. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x+2y+3z=5, \\ 2x-y-z=1, \\ x+3y+4z=6. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x-y+3z=9, \\ 3x-5y+z=-4, \\ 4x-7y+z=5. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x-y+z=2, \\ 3x+2y-2z=-2, \\ x-2y+z=1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x-2y+z=4, \\ 2x+3y-z=3, \\ 4x-y+z=11. \end{cases}$

20. Ушбу $\vec{a}\{1;-1;\sqrt{2}\}$ векторнинг узунлиги топилсин.

21. Икки $A(2;5)$ ва $B(-3;2)$ нуқталар берилган бўлсин. $\vec{AB}$ векторни Ox ва Oy ўқларига проекциялари топилсин.

22. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар бўйича ушбу

$$2\vec{a}+\vec{b}, \quad \vec{a}-3\vec{b}, \quad \frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b},$$

векторлар чизмада тасвирлансин.

23. Учлари A,B,C нуқталарда бўлган ABC учбурчак берилган бўлиб,

$$\vec{AB}=\vec{c}, \quad \vec{BC}=\vec{a}, \quad \vec{CA}=\vec{b},$$

бўлсин. ABC учбурчакнинг $\vec{AN}$, $\vec{BM}$, $\vec{CP}$ медианалари $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар орқали ифодалансин.

24. $\vec{a}\{3;-5;8\}$, $\vec{b}\{-1;1;-4\}$ векторлар ёрдамида ҳосил бўлган параллелограмм диагоналларининг узунликлари топилсин.

25. Ушбу $\vec{a}\{3;-2;6\}$, $\vec{b}\{-2;1;0\}$ векторлар берилган бўлсин. Унда

$$2\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b},\quad \frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b},\quad 2\vec{a}+3\vec{b}$$

векторларнинг координаталари топилсин.

26. Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлса,

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$$

бўлиши кўрсатилсин.

27. Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг йўналиши бир хил бўлса,

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

бўлиши кўрсатилсин.

28. Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар ва бир хил йўналишга эга бўлса,

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

бўлиши кўрсатилсин.

29. Ушбу $\vec{a}\{-3;0;4\}$, $\vec{b}\{5;2;14\}$ векторлардан ташкил топган бурчакнинг биссектрисаси бўйича йўналган векторнинг координаталари топилсин.

МУНДАРИЖА

Б. Абдалимов

Олий математика курсидан мисол ва масалалар тўплами I - қисм

Ўзбек тилида

Муҳаррирлар: У.Хусанов, А.Алимов

Босишга рухсат этилди 14.08.2001 бичими (60х84)1/32. Шартли босма табоғи 6. Нашр босма табоғи 6. Адади 1000 нусха. Буюртма №35. Баҳоси шартнома асосида.

«Ўзбекистон миллий энциклопедияси» Давлат илмий нашриёти.

Ўзбекистон Республикаси матбуот қўмитасининг рухсатномасига асосан Тошкент Давлат аграр университети нашр таҳририяти бўлимининг РИЗОГРАФ аппаратида чоп этилди.

Тошкент – 140, Университет кўчаси 1-уй, ТошДАУ.