А. ҲИКМАТОВ,
Ў. ТОШМЕТОВ,
К. КАРАШЕВА

МАТЕМАТИК АНАЛИЗДАН МАШҚЛАР ВА МАСАЛАЛАР ТЎПЛАМИ

А. Ғ. ҲИКМАТОВ
Ў. ТОШМЕТОВ
К. КАРАШЕВА

МАТЕМАТИК АНАЛИЗДАН МАШҚЛАР ВА МАСАЛАЛАР ТЎПЛАМИ

ЎзССР Маориф министрлиги томонидан педагогика институтларининг „Физика-математика“ факультетларида сиртдан ўқиётган студентлар учун ўқув қўлланмаси сифатида рухсат этилган

ТОШКЕНТ „ЎҚИТУВЧИ“ 1987

Тақризчилар:
физика-математика фанлари доктори, профессор
А. С. Саъдуллаев
физика-математика фанлари кандидати, доцент
Т. Т. Турдиев

Махсус муҳаррир
физика-математика фанлари кандидати, доцент
М. М. Мирзаҳмедов

Ушбу тўплам педагогика институтларининг „Физика-матема
ка“ факультетларининг „Математика“, „Математика-физика“ ихт
сосликларининг математик анализ курси программасига мосла
зилган. Унда 1700 га яқин машқлар ва масалалар берилган, ула
нинг ярми (тоқ номерлилари) ечиб кўрсатилган, қолганлари э
жавоб ёки кўрсатмалар билан таъминланган.

Қўлланмадан асосан педагогика институтларининг „Математ
ка“, „Математика-физика“ ихтисосликлари бўйича таҳсил кўраётга
сиртқи бўлим студентлари, шунингдек, олий техника ўқув юртла
ри математик анализ чуқур ўрганиладиган факультетларининг сту
дентлари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Х—47

Ҳикматов А. Г. ва бошқ.
Математик анализдан машқлар ва масалалар тўплами: /Пед. ин-т ларининг „Физ.-мат“. факларида ўқиётган студентлар учун ўқув қўлланмаси/ /А. Г. Ҳикматов, Ў. Тошметов, К. Карашева;/ Махсус муҳарр М. Мирзаҳмедов/. — Т.: Ўқитувчи; 1987. — 316 б.

I. I, 2 Соавт.

Хикматов А. Г. и др Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие для студентов педвузов.

22. 161я73

Х $\frac{1702040000-183}{353\ (04)-87}$ 39—87

СЎЗ БОШИ

Ушбу тўплам асосан педагогика институтларининг „Физика-математика“ факультетларида сиртдан ўқиётган студентларга мўлжалланган бўлиб, математик анализ курсининг „Математика“, Математика-физика“ ихтисосликлари программасига мослаб тузилган.

Математик анализ курсини ўрганишда I—II курс студентлари кўпгина қийинчиликларга дуч келадилар, бу қийинчиликлар—мисол ва масалаларни ечишда етарли малакага эга бўлмаслик ва кейинчалик янги тушунчаларнинг кўпайиб боришидир.

Ушбу китобни ёзишдан мақсад—студентларнинг математик анализга доир мисол ва масалаларни ечиш малакасини ошириш, назариянинг моҳиятини чуқур ўрганиб, уни амалий мисолларга татбиқ қилишни ўргатиш, математик фикрлаш қобилиятини шакллантиришдан иборатдир.

Мазкур қўлланманинг рус тилида чоп этилган мавжуд адабиётлардан фарқи шундаки, унда қисқа назарий маълумотлардан сўнг бевосита шу темага доир мисол ва масалалар ҳамда аралаш масалалар келтирилади. Уларнинг деярли барча тоқ номерлилари учун тула ечим ёки кўрсатмалар, қолганлари учун эса фақат жавоб ёки кўрсатма берилади. Бу—сиртқи бўлим студентларида контрол топшириқларни мустақил ечиш учун зарур кўникмалар ҳосил қилиш учун етарлидир.

Бундан ташқари ҳар бир боб охирида „Аралаш масалалар“ берилган бўлиб, бу масалалар студентлардан бирмунча мустақил фикрлаш ва масалалар ечишдаги малакаларидан тўла фойдалана олишни талаб қилади.

Қўлланманинг IV—X, XII бобларини А. Ғ. Ҳикматов, I—III, XI бобларини Ў. Тошметов, XIII—XV бобларини К. Карашева ёзган.

Китобнинг қўлёзмасини тайёрлашда Низомий номидаги Тошкент Давлат педагогика институти математик анализ кафедрасининг доцентлари Т. Турдиев ва Т. Шарифова ўртоқлар қимматли маслаҳатлари билан яқиндан ёрдам бердилар. Қўлёзмани тақриз қилишда ўзининг қимматли маслаҳатлари билан кўмакдош бўлган физика-математика фанлари доктори, профессор А. С. Саъдуллаев ва номлари юқорида тилга олинган ўртоқларга самимий ташаккур билдирамиз.

Муаллифлар

I БОБ. ФУНКЦИЯ ТУШУНЧАСИ

1-§. Ҳақиқий сонлар. Чегараланган ва чегараланмаган тўпламлар

1. Ҳар қандай чексиз ўнли каср ҳақиқий сон дейилади. Даврий чексиз ўнли каср рационал сон дейилади. Ҳар қандай рационал сонни $\frac{p}{q}$ (p ва q лар бутун сонлар ва $q\neq 0$) кўринишда ёзиш мумкин ва аксинча.

Даврий бўлмаган чексиз ўнли каср иррационал сон дейилади.

2. E бўш бўлмаган тўплам бўлсин. Барча $x \in E$ учун $x \leqslant M$ тенгсизликни қаноатлантирувчи M сон мавжуд бўлса, E юқоридан чегараланган тўплам дейилади. M сон E тўпламнинг юқори чегараси дейилади.

Юқоридан чегараланган тўплам юқори чегараларининг энг кичиги унинг аниқ юқори чегараси дейилади ва $m^* = \sup E$ кўринишда белгиланади. Агар E тўплам юқоридан чегараланмаган бўлса, $\sup E = +\infty$ деб олинади

Теорема. *m^* сон E тўпламнинг аниқ юқори чегараси бўлиши учун қуйидаги шартларнинг ўринли бўлиши зарур ва етарлидир:*

а) *барча $x \in E$ лар учун $x \leqslant m^*$,*

б) *m^* дан кичик бўлган ҳар бир a учун бирорта $x' \in E$ топилиб, $x' > a$ бўлади.*

3. Барча $x \in E$ учун $x \geqslant m$ тенгсизликни қаноатлантирувчи m сон мавжуд бўлса, E қуйидан чегараланган тўплам дейилади

m сон E тўпламнинг қуйи чегараси дейилади.

Қуйидан чегараланган тўплам қуйи чегараларининг энг каттаги унинг аниқ қуйи чегараси дейилади ва $m_* = \inf E$ кўринишда белгиланади. E қуйидан чегараланмаган бўлса. $\inf E = -\infty$ деб олинади.

Теорема. *m_* сон E тўпламнинг аниқ қуйи чегараси бўлиши учун қуйидаги икки шартнинг ўринли бўлиши зарур ва етарлидир:*

а) *барча $x \in E$ лар учун $x \geqslant m_*$,*

б) *m_* дан катта бўлган ҳар бир b сон учун бирор $x' \in E$ топилиб, $x' < b$ бўлади.*

4. Ҳам юқоридан, ҳам қуйидан чегараланган тўплам чегараланган тўплам дейилади.

1. Қуйидаги чексиз ўнли касрларнинг қайсилари рационал, қайсилари иррационал сонни ифодалайди? Рационал сонларни оддий каср кўринишида ёзинг:

а) 2,13 (14), б) 3,(74), в) 2,76(8), г) 0,1010010001..., д) 1,32032003200032. . . , е) 2,123123123. . .

2. Қуйидаги чексиз ўнли касрларнинг қайсилари рационал, қайсилари иррационал сонни ифодалайди? Рационал сонларни оддий каср кўринишида ёзинг:

а) 0,121121112 . . . , б) 0,2020020002. . . , в) 2,(32), г) 1,37 (9).

3. Рационал сон билан иррационал соннинг йиғиндиси иррационал сон эканини исботланг.

4. Рационал сон билан иррационал соннинг айирмаси иррационал сон эканини исботланг.

5. Нолдан фарқли рационал соннинг иррационал сонга нисбати иррационал сон эканини исботланг.

6. Нолдан фарқли рационал сон билан иррационал соннинг кўпайтмаси иррационал сон эканини исботланг.

Қуйидаги тўпламларнинг қайсилари юқоридан, қайсилари қуйидан чегараланганини аниқланг:

7. E — [2; 3] даги барча рационал сонлар тўплами.

8. E — $[a; b]$ даги барча иррационал сонлар тўплами.

9. $\left\{\frac{n^3}{2n^3+3};\ n \in N\right\}$.

11. $\left\{\frac{n^2}{n+1};\ n \in N\right\}$.

10. $\left\{\frac{m}{n};\ m,\ n \in N,\ m \leqslant n\right\}$.

12. $\left\{\frac{n^5}{n^4+1};\ n \in N\right\}$.

13. E — [0; 4] даги барча иррационал сонлар тўплами. Бу тўпламнинг чегараланган эканини кўрсатинг ва $\sup E$, $\inf E$ ларни топинг.

14. E — [3; 5] даги барча рационал сонлар тўплами. Бу тўпламнинг чегараланган эканини кўрсатинг ва $\sup E$, $\inf E$ ларни топинг.

2-§. Ҳақиқий соннинг модули (абсолют қиймати)

Таърифга биноан ҳақиқий a соннинг модули (абсолют қиймати)

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{агар } a \geqslant 0 \text{ бўлса,} \\ -a, & \text{агар } a < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Ҳақиқий сонларнинг модули қуйидаги хоссаларга эга:

1) $|a| = |-a|$;
2) $|a| \leqslant b$ ва $-b \leqslant a \leqslant b$ тенгсизликлар тенг кучли;
3) $|a| \geqslant b$ тенгсизлик $a \geqslant b$ ёки $a \leqslant -b$ эканини билдиради;
4) $|a \pm b| \leqslant |a| + |b|$;
5) $|a \pm b| \geqslant |a| - |b|$;

6) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;

7) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $(b \neq 0)$.

Қуйидаги тенгсизликларни ечинг.

15. $|x-2| \leqslant 3$.
16. $|x| < 5$.
17. $|x-5| < 4$.
18. $|x+2| < 4$.
19. $|x+3| > 2$.
20. $|x+1| > 3$.
21. $|x+2| + |x-2| \leqslant 10$.
22. $|x-3| + |x+3| \leqslant 10$.
23. $|x^2-2x-3| > x^2-2x-3$.
24. $|x^2-5x| > x^2-5x$.

Қуйидаги тенгламаларни ечинг.

25. $|2x+3| = x^2$.
26. $|3x+4| = x+4$.
27. $|x^2-5x+9| = 3$.
28. $|x^2-2x+7| = 4$.
29. $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{x-1}{x+1}$.
30. $\left|\frac{x+2}{x-3}\right| = -\frac{x+2}{x-3}$.

3-§. Функция ва унинг аниқланиш соҳаси

1. Элементлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган X ва Y тўпламлар берилган бўлсин.

Агар ҳар бир $x \in X$ сонга бирор қоида ёки қонунга биноан аниқ битта $y \in Y$ сон мос қўйилган бўлса, у ҳолда X тўпламда аниқланган f функция берилган дейилади ва $y = f(x)$ кўринишда ёзилади.

x эркли ўзгарувчи ёки аргумент дейилади, $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги қийматини ифодалайди.

X функциянинг аниқланиш (мавжудлик) соҳаси дейилади ва $D(f)$ кўринишда белгиланади. Функциянинг қийматлар тўплами $f(X)$ кўринишда белгиланади.

2. Функция аналитик усулда берилиб, аниқланиш соҳаси кўрсатилмаган бўлсин. Бу ҳолда аргументнинг аналитик ифода маънога (ҳақиқий қийматга) эга бўладиган барча ҳақиқий қийматлари тўплами функциянинг аниқланиш соҳаси деб тушунилади ва бу функциянинг табиий аниқланиш соҳаси дейилади.

31. $f(x) = 2x^3 - 3x + 4$ функция берилган, $f(-2)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(a)$ ларни топинг.

32. $f(x) = 2\sin 2x + \cos x$ функция берилган, $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f(1)$, $f(a)$ ларни топинг.

33. $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ функция берилган, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|$ ларни топинг. $f(-1)$ мавжудми?

34. $f(x)=\frac{|x-3|}{x-1}$ функция берилган, $f(0)$, $f(2)$, $f(-2)$ ларни топинг. $f(1)$ мавжудми?

35. $f(x)=\begin{cases} 2x, \text{ агар } -1<x<0, \\ 2, \text{ агар } 0\leqslant x<1, \\ x-1, \text{ агар } 1\leqslant x\leqslant 3 \end{cases}$ функция берилган. $f(2)$, $f(0)$, $f(0{,}5)$, $f(-0{,}5)$, $f(3)$ ларни топинг. $f(5)$ мавжудми?

36. $f(x)=\begin{cases} \sin x, \text{ агар } -1<x<0, \\ 1+x^2, \text{ агар } 0\leqslant x\leqslant 2 \end{cases}$ функция берилган. $f(1)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ларни топинг. $f(4)$ мавжудми?

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг.

37. $y=x^2-3x+2$.

38. $y=\frac{x}{x-1}$.

39. $y=\frac{1}{x^4-1}$.

40. $y=\frac{1}{x^2+2x-3}$.

41. $y=\frac{2x-1}{x^2-3x+2}$.

42. $y=\sqrt{4-x^2}$.

43. $y=\frac{1}{x^2+4}$.

44. $y=\sqrt{7-2x}$.

45. $y=\sqrt{x^2-4x+3}$.

46. $y=\sqrt{2x^2+x+8}$.

47. $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$.

48. $y=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$.

49. $y=\lg(3x-4)$.

50. $y=\lg(2x-6)$.

51. $y=\lg(x^2-4x+3)$.

52. $y=\lg(4-5x)$.

53. $y=\arcsin(3x-4)$.

54. $y=\arcsin(2x-5)$.

55. $y=\arccos\frac{2x-3}{5}$.

56. $y=\arccos(5x-8)$.

57. $y=\sqrt{3-x}+\arccos\frac{x-2}{3}$.

58. $y=\frac{1}{\lg(1-x)}+\sqrt{x+2}$.

59. $y=\frac{3}{4-x^2}+\lg(x^3-x)$.

60. $y=\sqrt{x^2-3x+2}+\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

61. $y=\sqrt{\sin x}-\sqrt{9-x^2}$.

62. $y = \frac{1}{\sqrt{\cos x}} + \sqrt[3]{\sin x}$.

63. Қуйидаги функциялар айнан тенгми?

а) $f(x) = 1$ ва $\varphi(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$, б) $f(x) = x$ ва $\varphi(x) = \frac{x^2}{x}$.

64. $f(x) = \lg x^2$ ва $\varphi(x) = 2\lg x$ функциялар айнан тенгми?

4-§. Функциянинг графиги

X тўпламда аниқланган $y = f(x)$ функция берилган бўлсин. Функциянинг x га мос келган $f(x)$ қийматини ҳисобласак, координаталар текислигидаги $M(x, f(x))$ нуқтага эга бўламиз Текисликдаги нуқталарнинг $\{M(x, f(x))/x \in X\}$ тўплами $y = f(x)$ функциянинг графиги дейилади.

Қуйидаги функцияларнинг графикларини ясанг.

65. $y = 2x - 3$.

66. $y = 3x + 1$.

67. $y = x^2$.

68. $y = \frac{x^2}{2}$.

69. $y = x^2 + 1$.

70. $y = x^2 - 2$.

71. $y = (x - 1)^2$

72. $y = (x + 2)^2$.

73. $y = x^2 - 2x + 3$.

74. $y = x^2 - 4x$.

75. $y = \frac{2}{x}$.

76. $y = \frac{1}{x^2}$.

77. $y = \frac{x}{x - 1}$.

78. $y = \frac{x}{x + 2}$.

79. $$y = \begin{cases} \cos x, & \text{агар } -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ 2, & \text{агар } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{x}, & \text{агар } 1 \leqslant x \leqslant 4. \end{cases}$$

80. $$y = \begin{cases} x^2, & \text{агар } -2 \leqslant x < 0 \text{ бўлса}, \\ 2x - 1, & \text{агар } 0 \leqslant x < 1 \text{ бўлса}, \\ 1, & \text{агар } 1 \leqslant x \leqslant 2 \text{ бўлса}. \end{cases}$$

81. $y = \{x\}$, $\{x\}$ — x нинг каср қисми.

82. $y = E(x)$, $E(x)$ — x нинг бутун қисми.

83. $y = |x| + x$.

84. $y = |x| - x$.

5-§. Функцияларнинг композицияси. Чегараланган ва чегараланмаган функциялар. Жуфт ва тоқ функциялар

1. $y = f(u)$ функция E тўпламда, $u = \varphi(x)$ функция X тўпламда берилган бўлиб, $u = \varphi(x)$ нинг қийматлар тўплами $\varphi(X)$ E нинг қисм тўплами бўлсин. Агар $y = f(u)$ да u нинг ўрнига $\varphi(x)$ ни қўйсак, $y = f(\varphi(x))$ функцияга эга бўламиз. Бу функцияни $y = f(u)$ ва $u = \varphi(x)$ функцияларнинг композицияси ёки мураккаб функция дейилади.

2. $y = f(x)$ функция X тўпламда берилган бўлсин. Агар шундай M сон топилиб, барча $x \in X$ лар учун $|f(x)| \leqslant M$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $y = f(x)$ X тўпламда чегараланган функция дейилади.

3. Агар X тўпламга ҳар бир x сон билан биргаликда $-x$ ҳам тегишли бўлса, X координаталар бошига нисбатан симметрик тўплам дейилади

$y = f(x)$ функция координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган X тўпламда берилган бўлсин.

а) агар ихтиёрий $x \in X$ учун $f(-x) = f(x)$ тенглик ўринли бўлса, $y = f(x)$ жуфт функция дейилади.

б) агар ихтиёрий $x \in X$ учун $f(-x) = -f(x)$ тенглик ўринли бўлса, $y = f(x)$ тоқ функция дейилади.

85. $y = u^2$, $u = x + 1$ функциялар берилган. y ни x орқали ифодаланг.

86. $y = 1 - u^2$, $u = \sin x$ функциялар берилган. y ни x орқали ифодаланг.

87. $y = \sqrt{u + 1}$, $u = 3^x$ функциялар берилган. y ни x орқали ифодаланг.

88. $y = \sqrt{1 + u^2}$, $y = \operatorname{tg} x$ функциялар берилган. y ни x орқали ифодаланг.

89. $f(x) = x^2$ ва $\varphi(x) = 2^x$ функциялар берилган. $f(f(x))$, $f(\varphi(x))$, $\varphi(f(x))$, $\varphi(\varphi(x))$ мураккаб функцияларни топинг.

90. $f(x) = x^3$ ва $\varphi(x) = 3^x$ функциялар берилган. $f(\varphi(x))$ ва $\varphi(f(x))$ мураккаб функцияларни топинг.

91. $f(x) = x^3 - x$ ва $\varphi(x) = \sin 2x$ функциялар берилган. $\varphi(f(1))$, $\varphi(f(2))$, $f\left(\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, $f(f(f(1)))$ ларни топинг.

92. $f(x) = \dfrac{5x^2 + 1}{2 - x}$ функция учун $f(3x)$, $f(x^3)$, $3f(x)$, $(f(x))^2$ ларни топинг.

Қуйидаги функцияларнинг қайсилари чегараланган?

93. $f(x) = x^2 + 2$, $[-1;\ 3]$ да.

94. $f(x)=\{x\}$, $]-\infty; +\infty[$ да.

95. $f(x)=x^2$, $]-\infty, +\infty[$ да.

96. $f(x)=\frac{1}{x}$, $]0; +\infty[$ да.

97. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, $]-\infty; +\infty[$ да.

98. $f(x)=\frac{1}{9+x^4}$, $]-\infty, +\infty[$ да.

99. $f(x)=\sin ax$, $]-\infty, +\infty[$ да.

100. $f(x)=\cos ax$, $]-\infty, +\infty[$ да.

Қуйидаги функцияларнинг тоқ ёки жуфтлигини текширинг.

101. $f(x)=x^2+1$. 102. $f(x)=1-x^2$.

103. $f(x)=x^4-2x^2$. 104. $f(x)=x^3-x$.

105. $f(x)=x^2\cos x$. 106. $f(x)=x^2\sin x$.

107. $f(x)=3^x$. 108. $f(x)=x^3-2$.

109. $f(x)=10$. 110. $f(x)=|x|$.

111. Бир вақтда ҳам тоқ, ҳам жуфт бўлган функция мавжудми?

112. $y=f(x)$ жуфт функция ва $f(x)\neq 0$. $y=\frac{1}{f(x)}$ функциянинг жуфт эканлигини кўрсатинг.

6-§. Даврий функциялар. Монотон функциялар

1. Агар $l\neq 0$ сон учун ҳар бир $x\in X$ билан биргаликда $x+l$ ва $x-l$ лар ҳам X тўпламга тегишли бўлса, X тўплам l даврли даврий тўплам дейилади.

а) Q — рационал сонлар тўплами.

б) $X_1=]-\infty, +\infty[$.

в) $X_2=\ldots\cup]-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}[\cup]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[\cup\ldots$

г) $X_3=\ldots\cup[-2; -1]\cup[0; 1]\cup\ldots[2; 3]\cup\ldots$

ларнинг ҳар бири даврий тўпламга мисол бўла олади.

д) $X_4=[0; +\infty[$, е) $X_5=]-2; 2[$, ж) $X_6=[4; 6]$

лар даврий тўплам эмас.

$y=f(x)$ функция l даврли даврий X тўпламда берилган бўлсин. Агар ихтиёрий $x\in X$ лар учун $f(x+l)=f(x)$ тенглик ўринли бўлса, $y=f(x)$ даврий функция дейилади ва l унинг даври дейилади. Функциянинг энг кичик мусбат даври (агар у мавжуд бўлса) унинг асосий даври дейилади.

2. $y=f(x)$ функция X тўпламда берилган бўлсин. Агар ихтиёрий $x_1, x_2\in X$ лар учун $x_1<x_2$ дан

а) $f(x_1) < f(x_2)$ келиб чиқса, $f(x)$ функция ўсувчи,
б) $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ келиб чиқса, $f(x)$ функция камаймовчи,
в) $f(x_1) > f(x_2)$ келиб чиқса, $f(x)$ функция камаювчи,
г) $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ келиб чиқса, $f(x)$ функция ўсмовчи дейилади.

Бу тўрт тип функция бир сўз билан монотон функция дейилади.

Қуйидаги функцияларнинг қайсилари даврий эканлигини аниқланг.

Даврий функцияларнинг асосий даврини кўрсатинг.

113. $f(x) = \sin 2x.$ **114.** $f(x) = \cos \pi x.$

115. $f(x) = \cos ax$ **116.** $f(x) = \sin^2 x.$

117. $f(x) = x \cdot \cos x.$ **118.** $f(x) = \{x\}.$

119. $f(x) = 1 + \operatorname{tg} x.$ **120.** $f(x) = 5.$

121. $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса.} \end{cases}$

Дирихле функцияси даврий функция бўлиб, унинг асосий даври йўқ эканини кўрсатинг.

122. $f(x) = \{2x\}$ функциянинг асосий даврини топинг.

Қуйидаги функцияларнинг ҳар бири кўрсатилган оралиқларда монотон эканини кўрсатинг.

123. $f(x) = 2x - 1,$ $]-\infty; +\infty[$ да,

124. $f(x) = 2 - 3x,$ $]-\infty; +\infty[$ да.

125. $f(x) = x^2 + 2x + 5,$ $]-\infty; -1[$ ва $]-1; +\infty[$да.

126. $f(x) = x^2 - 3x + 2,$ $]-\infty; 1{,}5[$ва$]1{,}5; +\infty[$ да.

127. $f(x) = \cos x,$ $[0; \pi]$ да.

128. $f(x) = \sin x,$ $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ да.

129. $f(x) = |x| - x,$ $]-\infty; +\infty[$ ла

130. $f(x) = |x| + x,$ $]-\infty; +\infty[$ да.

I бобга доир аралаш масалалар

131. Айирмалари рационал бўлган иккита ҳар хил иррационал сон кўрсатинг.

132. Кўпайтмалари рационал бўлган иккита ҳар хил иррационал сон кўрсатинг.

133 Қандай тўпламлар учун $\sup E = \inf E$ бўлади?

134. $[0; 1]$ дан бошқа шундай E тўплам кўрсатингки, бу тўплам учун $\inf E = 0,$ $\sup E = 1$ бўлсин.

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг.

135. $y = \lg(\cos(\lg x))$.

136. $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$.

137. $y = \arccos(2^x + 1)$.

138. Фақат $[-2; 2]$ да аниқланган функцияга мисол келтиринг.

139. $x = 2$ ва $x = 3$ лардан бошқа барча ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган функцияга мисол келтиринг.

140. $y = \operatorname{sgn} x$ (сигнум x) функция қуйидагича аниқланади:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Бу функциянинг графигини ясанг.

141. $\operatorname{sgn}(\operatorname{sgn} x)$ мураккаб функцияни топинг.

142. Қуйидаги функцияларнинг қайсилари тоқ, қайсилари жуфт?

а) $f(x) = \operatorname{sgn} x$; б) $f(x) = \lg(x + \sqrt{x^2+1})$;

в) $f(x) = \sin x^2 + \sin^2 x$; г) $f(x) = E(x)$;

д) $f(x) = x - E(x)$.

143. Иккита жуфт функциянинг кўпайтмаси жуфт функция бўлишини исботланг.

144 Иккита тоқ функциянинг кўпайтмаси жуфт функция бўлишини исботланг.

145. Тоқ ва жуфт функцияларнинг кўпайтмаси тоқ функция бўлишини исботланг.

146. Агар $\varphi(x)$ жуфт функция бўлса, у ҳолда $f(\varphi(x))$ функциянинг жуфт бўлишини исботланг.

147 Агар $y = f(x)$ ва $x = \varphi(t)$ функциялар тоқ бўлса, у ҳолда $f(\varphi(t))$ функциянинг тоқ бўлишини исботланг.

148. Агар $f(x)$ тоқ функция бўлиб, $[-5; 0]$ яримсегментда $f(x) = x^2 + 3$ формула билан берилган бўлса, $f(0)$, $f(3)$, $f(4)$ ларни топинг.

149. Агар $f(x)$ функция даври 1 га тенг бўлган даврий функция бўлиб, $]0; 1]$ да $f(x) = x^2$ формула билан берилган бўлса, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(2)$, $f(2{,}5)$ ларни топинг.

II БОБ. ЛИМИТЛАР

1-§. Сонли кетма-кетлик лимити

1. $$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \qquad (1)$$

кетма-кетлик берилган бўлсин. Ҳар бир $\varepsilon > 0$ учун шундай $N = N(\varepsilon)$ номер топилиб, барча $n > N$ лар учун $|x_n - a| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда a (1) кетма-кетликнинг лимити дейилади ва $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ кўринишда ёзилади.

Лимитга эга бўлган кетма-кетлик яқинлашувчи, лимитга эга бўлмаган кетма-кетлик узоқлашувчи дейилади.

2. Агар $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ бўлса, у ҳолда x_n чексиз кичик миқдор (ёки қисқача чексиз кичик) дейилади.

3. Агар исталганча катта $\Delta > 0$ учун шундай $N = N(\Delta)$ номер топилиб, $n > N$ лар учун $|x_n| > \Delta$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда x_n чексиз катта миқдор (ёки қисқача чексиз катта) дейилади ва $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ кўринишда ёзилади.

Теорема. *Агар x_n чексиз кичик бўлса, у ҳолда $y_n = \frac{1}{x_n}$ чексиз катта бўлади. Агар x_n чексиз катта бўлса, у ҳолда $y_n = \frac{1}{x_n}$ чексиз кичик бўлади.*

4. **Теорема.** *Агар $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ва $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда*

а) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ $(\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0)$ бўлади.

5. **Теорема.** *Агар $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ ва $\{y_n\}$ чегараланган бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = 0$ бўлади.*

1. Кетма-кетлик лимити таърифидан фойдаланиб қуйидагиларни исботланг:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$, б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n-1}{2n+1} = 2$, в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{5n-1} = \frac{3}{5}$.

2. Кетма-кетлик лимити таърифидан фойдаланиб қуйидаги тенгликларни исботланг:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n-1}{5n+1} = \frac{4}{5}$, б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n}}{n} = 1$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2\quad 3n}=-\frac{2}{3}$ тенгликни исботланг. Қайси n дан бошлаб, $\left|\frac{2n-1}{2-3n}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right|<0{,}0001$ тенгсизлик ўринли бўлади?

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{5n+1}=\frac{3}{5}$ тенгликни исботланг. Қайси n дан бошлаб, $\left|\frac{3n-1}{5n+1}-\frac{3}{5}\right|<0{,}001$ тенгсизлик ўринли бўлади?

5. а) $x_n=8n+1$, б) $x_n=n^k\,(k>0)$ ларнинг чексиз катта эканлигини исботланг.

6. а) $_n=6n-1$, б) $x_n=\sqrt{n^3+2}$ ларнинг чексиз катта эканлигини исботланг.

Қуйидаги лимитларни топинг.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{4n^2-1}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3-4}{n^3+6}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+3}{n^3+n-1}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^3+1}$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4+(n-1)^4}{n^4+10}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+4}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+n^2+1}}{n^2+2n-1}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+1}}{\sqrt[4]{n^4+3n-1}}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!+n!}{(n+2)!}$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}\cos n^3-\frac{3n}{6n+1}\right)$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+1\right)$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}\sin n!+\frac{2n^2}{1-9n^2}\right)$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n}\sin n^2+\frac{2n}{3n+1}\right)$.

2-§. Функциянинг лимити

1. $y=f(x)$ функция X тўпламда берилиб, a X тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

Агар ҳар бир $\varepsilon>0$ учун шундай $\delta=\delta(\varepsilon)$ топилиб X тўпламнинг $0<|x-a|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x нуқталарида $|f(x)-A|<\varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда A $f(x)$ функциянинг $x=a$ нуқтадаги лимити дейилади. У $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ кўринишда ёзилади.

2. Агар ҳар бир $\varepsilon>0$ учун шундай $\Delta>0$ топилиб, $|x|>\Delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x ларда $|f(x)-B|<\varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлса, B $f(x)$ функциянинг $x\to\infty$ даги лимити дейилади. У $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=B$ кўринишда ёзилади.

Агар $x>0$ бўлса, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=B$, $x<0$ бўлса, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=B$ кўринишда ёзилади.

Теорема *Агар $x=a$ нуқтада $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар лимитга эга бўлса, у ҳолда:*

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ $(\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0)$.

тенгликлар ўринли бўлади.

25. Функция лимити таърифидан фойдаланиб, қуйидаги тенгликларни исботланг.

а) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-5)=4$, б) $\lim\limits_{x\to 1}(4x-1)=3$,

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2}{x^2+1}=\dfrac{2}{5}$, г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$.

26. $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3$ тенгликни исботланг. δ нинг қандай қийматларида $0<|x-2|<\delta$ тенгсизликдан $|(2x-1)-3|<0{,}01$ тенгсизлик келиб чиқади?

27. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1)=3$ тенгликни исботланг. δ нинг қандай қийматларида $0<|x-2|<\delta$ тенгсизликдан $|(x^2-1)-3|<0{,}001$ тенгсизлик келиб чиқади?

28. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-1}{2(x+1)}=\dfrac{1}{4}$ тенгликни исботланг. δ нинг қандай қийматларида $0<|x-4|<\delta$ тенгсизликдан $\left|\dfrac{x-1}{2(x+1)}-\dfrac{1}{4}\right|<0{,}01$ тенгсизлик келиб чиқади?

Функциянинг чексизликдаги лимити таърифидан фойдаланиб, 29, 30-мисоллардаги тенгликларни исботланг.

29. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=1$, б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0$.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x+1}=\dfrac{3}{2}$.

30. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x+1} = 2$, б) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0$.

Қуйидаги лимитларни топинг.

31. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+5}{x^2+2}$ 32. $\lim\limits_{x\to 1} (5x^3 - 4x + 1)$.

33. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{x^2-1}$. 34. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5}$.

35. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$. 36. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

37. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}$. 38. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{2x^2+5x+2}{3x^2-x-14}$.

39. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$. 40. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

41. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{h}}{x}$. 42. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{2x^2}$.

43. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$. 44. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1-2x}-1}{3x}$.

45. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{16+x^2}-4}$. 46. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+3x}-3}{\sqrt{25+2x}-5}$.

47. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$. 48. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{5x-1}-3}{x^2-4}$.

49. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-5x+4}{5x^2-2x+3}$. 50. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

51. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{10x^4+3x^3+1}{0{,}1x^4+1}$. 52. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$.

53. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right)$. 54. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^4}{x^2+4} - x^2\right)$,

55. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$. 56. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4-3x+1}}{1-x^2}$.

57. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+4} - \sqrt{x})$. 58. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x-1} - \sqrt{x})$.

59. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$. 60. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$.

61. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$. 62. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1} + x)$.

Қуйидаги мисолларни ечишда $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ тенгликдан фойдаланинг.

63. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$.

64. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

65. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 7x}$.

66. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \alpha x}{\sin 3x}$.

67. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 5x}{x}$.

68. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} kx}{x}$.

69. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 4x}$.

70. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\arcsin x}{3x}$.

71. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x}$.

72. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\cdot\sin x}$.

73. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{2x}$.

74. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+\arcsin x}{2x+\operatorname{arctg} x}$.

75. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+\arcsin x}{\sin x+\arcsin x}$.

76. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3\dfrac{x}{4}}{x^3}$.

77. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}$.

78. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x$.

79. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

80. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(1+x)}{1+x}$.

81. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin x-\cos x}{1+\sin x-\cos x}$.

82. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}{\cos x}$.

Қуйидаги мисолларни ечишда $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ тенгликдан фойдаланинг.

83. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$.

84. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

85. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$.

86. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$.

87. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{2x}$.

88. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{2x}\right)^{-x}$.

89. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^x$.

90. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+4}\right)^x$.

91. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+1}\right)^x$.

92. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{3x-1}\right)^x$.

93. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.

94. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\operatorname{cosec} x}$.

95. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

96. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$.

3- §. Бир томонли лимитлар

1. Агар ҳар бир $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta = \delta(\varepsilon)$ топилиб, $a - \delta < x < a$ $(a < x < a + \delta)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x ларда $|f(x) - A| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда A $f(x)$ функциянинг $x = a$ даги чап (ўнг) лимити дейилади. Чап лимит $f(a - 0) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, ўнг лимит $f(a + 0) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ кўринишда белгиланади.

2. $x = a$ да функция лимитга эга бўлиши учун $f(a - 0) = f(a + 0)$ тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган нуқталардаги бир томонли лимитларини топинг.

97. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{агар } 0 < x < 1, \\ 3x + 1, & \text{агар } 1 \leqslant x < 3, \end{cases}$ $x = 1$ нуқтада.

98. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{агар } 0 < x \leqslant 2, \\ 2x - 1, & \text{агар } 2 < x < 3, \end{cases}$ $x = 2$ нуқтада.

99. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } -1 < x \leqslant 2, \\ 2x + 1, & \text{агар } 2 < x < 3 \end{cases}$ $x = 2$ нуқтада.

100. $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{агар } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x, & \text{агар } 1 < x \leqslant 3, \end{cases}$ $x = 1$, $x = 2$ нуқталарда.

101. $y = E(x)$, $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$ нуқталарда.

102. $y = \{x\}$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ нуқталарда.

103. $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x - 1}$, $x = 1$ нуқтада.

104. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$, $x = 2$ нуқтада.

105. $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x - 1}, & \text{агар } x < 0, \\ x, & \text{агар } 0 \leqslant x < 1, \\ 2, & \text{агар } 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$ $x = 0$, $x = 1$ нуқталарда.

106. $f(x) = \begin{cases} -\sin x, & \text{агар } -\dfrac{\pi}{2} < x < 0, \\ \sin x, & \text{агар } 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$ $x = 0$ нуқтада.

107. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ нинг $x = 0$ да бир томонли лимитларининг мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

108. $f(x)=\begin{cases} 3x, & \text{агар } -1<x\leqslant 1, \\ 2x+1, & \text{агар } 1<x<1 \end{cases}$ функция $x=1$ нуқтада лимитга эгами? Агар эга бўлса, лимитни топинг.

4- §. Чексиз кичикларни таққослаш. Эквивалент чексиз кичиклар

1. Агар $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ $x\to a$ да чексиз кичик функция дейилади (қисқача — „чексиз кичик“).

$\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ лар чексиз кичиклар бўлсин.

2. Агар $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ $\beta(x)$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик дейилади ва $\alpha(x)=o\,(\beta(x))$ кўринишда ёзилади.

3. Агар $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$ $(c\neq 0,\ c\neq\infty)$ бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ бир хил тартибли чексиз кичиклар дейилади. Хусусий ҳолда $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ лар эквивалент чексиз кичиклар дейилади ва $\alpha(x)\sim\beta(x)$ кўринишда ёзилади.

4. **Теорема** *Агар $x=a$ нуқта атрофида $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$ лар чексиз кичик ва $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ бўлса, у ҳолда*

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\qquad \textit{бўлади.}$$

109. $x\to 0$ да қуйидаги чексиз кичикларни $\beta(x)=x$ чексиз кичик билан таққосланг.

а) $\alpha(x)=3x$, б) $\alpha(x)=x^2$, в) $\alpha(x)=x+\sin x$,
г) $\alpha(x)=x^2+\operatorname{tg}x$, д) $\alpha(x)=x\sqrt{1+x^2+x^4}-x^3$.

110. $x\to 0$ да қуйидаги чексиз кичикларни $\beta(x)=x$ чексиз кичик билан таққосланг

а) $\alpha(x)=x^5$, б) $\alpha(x)=x^2+x^4$,
в) $\alpha(x)=\operatorname{tg}x+\sin x$, г) $\alpha(x)=\sqrt{1+\sin x}-1$.

111. Қуйидаги функцияларнинг қайсилари эквивалент чексиз кичиклар эканини текширинг.

а) $\alpha(x)=\sin nx$ ва $\beta(x)=nx$, $x\to 0$ да,
б) $\alpha(x)=\operatorname{tg}mx$ ва $\beta(x)=mx$, $x\to 0$ да,
в) $\alpha(x)=1-\cos x$ ва $\beta(x)=\frac{1}{2}x^2$, $x\to 0$ да,
г) $\alpha(x)=\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-1$ ва $\beta(x)=\frac{x}{2}$, $x\to 0$ да,

д) $\alpha(x)=x^2-1$ ва $\beta(x)=2(x-1)$, $x\to 1$ да.

112. Қуйидаги функцияларнинг қайсилари эквивалент чексиз кичиклар?

а) $\alpha(x)=\sqrt{1+x}-1$ ва $\beta(x)=\frac{1}{2}x$, $x\to 0$ да,

б) $\alpha(x)=\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$ ва $\beta(x)=\sin x$, $x\to 0$ да.

Эквивалент чексиз кичиклардан фойдаланиб, қуйидаги лимитларни топинг.

113. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 6x}{\sin 3x}$. **114.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin 2x}$.

115. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-1}{\sqrt{1+x+x^2}-1}$. **116.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{x-x^2}$.

117. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2-x^4+x^6}$. **118.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$.

II бобга доир аралаш масалалар

119. Монотон кетма-кетликларнинг лимити ҳақидаги теоремалардан фойдаланиб, қуйидаги кетма-кетликларнинг лимити мавжудлигини кўрсатинг.

а) $x_n=1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^n}$, б) $x_n=1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$,

в) $x_n=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\ldots+\frac{1}{2^n+1}$.

120. Қуйидаги кетма-кетликларнинг лимитлари мавжудлигини кўрсатинг ва уларни топинг.

а) $x_n=\frac{c^n}{n!}$ $(c>0)$, б) $x_n=\underbrace{\sqrt{3+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{3}}}}_{n\text{ та}}$.

в) $\underbrace{x_n=\sin\sin\ \ldots\ \sin 1}_{n\text{ та}}$.

121. $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ та}}$ ни топинг.

122. Қуйидаги лимитларни топинг.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\right)$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin nx}{x}$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\right)$, г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$,

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$.

Агар $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ $x\to a$ да чексиз катта дейилади.

Агар $f(x)$ ва $g(x)$ лар $x\to a$ да чексиз катталар бўлиб, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ бўлса, у ҳолда $x\to a$ да $f(x)$ функция $g(x)$ га нисбатан юқори тартибли чексиз катта дейилади.

Теорема. *Агар $x\to a$ да $f(x)$ функция $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ ларнинг ҳар бирига нисбатан юқори тартибли чексиз катта, $g(x)$ функция эса $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)$ ларнинг ҳар бирига нисбатан юқори тартибли чексиз катта бўлса, у ҳолда*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)+f_1(x)+\ldots+f_n(x)}{g(x)+g_1(x)+\ldots+g_m(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$ *тенглик ўринли бўлади.*

Юқоридаги теорема ёрдамида қуйидаги лимитларни ҳисобланг.

123. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}-x}$. **124.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt[4]{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x}$.

125. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}+3x^2}$.

126. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}-x}{\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[6]{x^9+x^5+4}}$.

III БОБ. УЗЛУКСИЗ ФУНКЦИЯЛАР

1-§. Узлуксиз функциялар. Функцияларнинг узилиш нуқталари

1. Агар $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ тенглик ўринли бўлса, функция x_0 нуқтада узлуксиз дейилади.

2. Аргументнинг x ва x_0 қийматлари орасидаги $x-x_0$ айирма аргументнинг x_0 нуқтадаги орттирмаси дейилади ва $\Delta x=x-x_0$ орқали белгиланади. Функциянинг $x=x_0+\Delta x$ ва x_0 нуқталардаги қийматларининг айирмаси $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ эса функциянинг x_0 нуқтадаги орттирмаси дейилади ва $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ орқали белгиланади.

Узлуксизликнинг таърифини яна қуйидагича бериш мумкин:

Агар $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)) = 0$ тенглик ўринли бўлса, функция x_0 нуқтада узлуксиз дейилади.

3. Агар $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ бўлса, у ҳолда $x = x_0$ функциянинг узилиш нуқтаси дейилади.

$x = x_0$ функциянинг узилиш нуқтаси бўлсин.

Агар $f(x_0 - o)$, $f(x_0 + o)$ бир томонли лимитлар мавжуд бўлса, у ҳолда $x = x_0$ функциянинг I тур узилиш нуқтаси дейилади.

Агар $f(x_0 - o)$, $f(x_0 + o)$ бир томонли лимитларининг камида биттаси мавжуд бўлмаса, у ҳолда $x = x_0$ функциянинг II тур узилиш нуқтаси дейилади. I тур узилиш нуқталар икки хил бўлади:

а) Агар $f(x_0 - o) = f(x_0 + o)$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $x = x_0$ да функциянинг узлуксизлигини тиклаш мумкин. Бунинг учун $f(x_0) = f(x_0 - o) = f(x_0 + o)$ деб олиш керак

б) Агар $f(x_0 - o) \neq f(x_0 + o)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $x = x_0$ да сакрашга эга бўлади. Сакраш катталиги $|f(x_0 + o) - f(x_0 - o)$ га тенг бўлади.

Агар $f(x_0 - o) = f(x_0)$ $(f(x_0 + o) = f(x_0))$ бўлса, $f(x)$ функция $x = x_0$ нуқтада чапдан (ўнгдан) узлуксиз дейилади.

Қуйидаги функцияларнинг узлуксизлигини таърифга биноан исботланг.

1. а) $f(x) = x^2 + x - 2$ барча $x \in]-\infty; +\infty[$ ларда,
   б) $f(x) = \sin(3x+2)$ барча $x \in]-\infty; +\infty[$ ларда,
   в) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ барча $x \in]-1; +\infty[$ ларда,
2. а) $f(x) = x^3 - 3$ барча $x \in]-\infty; +\infty[$ ларда,
   б) $f(x) = \cos(2x+1)$ барча $x \in]-\infty; +\infty[$ ларда.

Қуйидаги функцияларнинг узилиш нуқталари ва уларнинг турларини аниқланг. Графикларни ясанг.

3. $$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } x \neq 0, \\ 2, & \text{агар } x = 0. \end{cases}$$

4. $$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{агар } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 - x, & \text{агар } 1 < x < 2. \end{cases}$$

5. $$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{агар } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x, & \text{агар } 1 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

6. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{агар } x \neq 1, \\ 3, & \text{агар } x = 1. \end{cases}$$

7. $$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{агар } x < 1, \\ x, & \text{агар } 1 \leqslant x < 2, \\ 3, & \text{агар } 2 \leqslant x < 4. \end{cases}$$

8. $f(x)=\frac{1}{x^2}$.

9. а) $f(x)=x+\frac{1}{x}$, б) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$.

10. $f(x)=\frac{|x|}{x}$.

Қуйидаги функцияларнинг $x=0$ даги қийматини шундай танлангки, функция шу нуқтада узлуксиз бўлсин.

11. а) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, б) $f(x)=\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$,

в) $f(x)=\frac{\sqrt{1+2x}-1}{\sin x}$.

12. а) $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, б) $f(x)=\frac{5x^2-3x}{2x}$.

2-§. Кесмада узлуксиз функцияларнинг хоссалари. Тескари функция

1. **Теорема.** (Больцано—Коши). *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз бўлиб, кесманинг учларида қарама-қарши ишорали қийматларга эга бўлса, у ҳолда $]a, b[$ да шундай c нуқта мавжудки, $f(c)=0$ бўлади.*

2. **Теорема** (*Вейерштрасс*). *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)$ шу кесмада чегараланган бўлади.*

3. **Теорема.** *Агар $y=f(x)$ функция X оралиқда ўсувчи (камаювчи) ва узлуксиз бўлса, у ҳолда қийматлар тўплами $f(X)$ да унга тескари функция мавжуд бўлиб, бу функция ҳам ўсувчи (камаювчи) ва узлуксиз бўлади.*

Қуйидаги тенгламалар кўрсатилган кесмаларда ечимга эга эканини кўрсатинг.

13. а) $x^3+3x+1=0$, $[-1;\ 0]$,

б) $x^5-6x^2+3x-7=0$, $[0;\ 2]$,

в) $3\sin^3 x-5\sin x+1=0$, $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$,

г) $x^4-3x^2+2x-1=0$, $[1,\ 2]$.

14. а) $x^5-3x+1=0$, $[1;\ 2]$,

б) $\cos^4 x+3\cos x+1=0$, $[0;\ \pi]$.

15. Қуйидаги функциялар кўрсатилган кесмаларда чегараланган эканини исботланг.

а) $f(x)=\sin x\cdot\cos^2 x-\sqrt{x+1}$, $[0;\ 10]$,

б) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}$, $[2;\ 7]$.

16. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 1}\cos^7 x$ функция $[0;\ 2\pi]$ кесмада чегараланганми?

Қуйидаги функцияларга тескари бўлган функцияларнинг мавжудлиги ва уларнинг монотон, узлуксиз эканлигини исботланг.

17. а) $y = -3x + 1$, б) $y = x^{2n+1}$, в) $y = x + \sin x$.

18. а) $y = x^2$, $[0;\ +\infty[$, да, б) $y = \cos 2x$, $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ да.

3-§. Кўрсаткичли функция ва кўрсаткичли тенглама

1. $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ — кўрсаткичли функция дейилади.

Кўрсаткичли функциянинг аниқланиш соҳаси $D(y) =]-\infty;\ +\infty[$ бўлиб, $a > 1$ да ўсувчи, $a < 1$ да камаювчи бўлади.

2. **Теорема.** *Агар $a > 0$ ва $a \neq 1$ бўлса, у ҳолда $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ва $f(x) = g(x)$ тенгламалар тенг кучли.*

Қуйидаги функцияларнинг ўсувчи ёки камаювчи эканлигини аниқланг. Графикларини чизинг.

19. а) $y = 2^x$, б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, в) $y = \frac{1}{8} \cdot 4^{\frac{x}{2}}$.

20. а) $y = 2 \cdot 3^x$, б) $y = 3 \cdot 2^{-x}$.

Кўрсаткичли функциянинг хоссаларидан фойдаланиб, қуйидаги сонларни таққосланг (катта ёки кичиклигини аниқланг).

21. а) $(5{,}6)^{-5}$ ва $(5{,}6)^{-3}$, б) $2^{-6{,}2}$ ва $(0{,}25)^{4{,}3}$, в) $(0{,}45)^{-3}$ ва $(0{,}45)^{-1}$, г) $(2 + \sqrt{3})^{2{,}5}$ ва $\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^{2{,}7}$, д) $(2 - \sqrt{3})^{-3}$ ва $\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^2$.

22. а) $5^{1{,}41}$ ва $5^{1{,}42}$, б) $3^{\sqrt{3}}$ ва 3^2, в) $e^{1{,}2}$ ва $e^{-0{,}9}$, г) $(0{,}3)^2$ ва $(0{,}3)^{\sqrt{3}}$.

Қуйидаги тенгламаларни ечинг.

23. а) $3^{x^2-4} = 3^{3x-6}$, б) $5^x + 3 \cdot 5^{x-2} = 140$, в) $3 \cdot 4^{x+1} - 4^x = 44$, г) $7^{x+2} - 5 \cdot 7^x = 308$, д) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$, е) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 17 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$.

24. а) $2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 3^{x-1} = 13$, б) $2^{3x} \cdot 3^x - 2^{3x-1} \times 3^{x+1} = -288$.

4-§. Логарифмик функция ва логарифмик тенглама

1. $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$) логарифмик функция дейилади. Логарифмик функциянинг аниқланиш соҳаси $D(y)=]0, +\infty[$ бўлиб, $a>1$ да ўсувчи, $a<1$ да камаювчи бўлади.

2. **Теорема.** *Агар* $a>0$, $a\neq 1$ *бўлса, у ҳолда* $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ *тенглама ва* $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)>0 \end{cases}$ *система тенг кучли.*

Теоремадаги $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)>0 \end{cases}$ системанинг ўрнига $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)>0 \end{cases}$ системани олиш ҳам мумкин.

Қуйидаги функцияларнинг ўсувчи ёки камаювчи эканлигини аниқланг. Графикларини чизинг.

25. а) $y=\ln x$, б) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, в) $y=\log_3 x$.

26. а) $y=\log_2 x$, б) $y=3\cdot\log_{\frac{1}{4}} x$.

Логарифмик функциянинг хоссаларидан фойдаланиб, қуйидаги сонларни таққосланг.

27. а) $\ln 3$ ва $\ln\sqrt{e+1}$, б) $\lg 101$ ва $\lg 103$, в) $\log_{\frac{1}{3}} 7$ ва $\log_{\frac{1}{3}} 6$.

28. а) $\log_3 e$ ва $\log_3 2{,}7$, б) $\log_{\frac{1}{4}} 8$ ва $\log_{\frac{1}{4}} 9$, в) $\log_{\sqrt{2}} 3$ ва $\log_{\sqrt{2}} 1{,}5$.

Қуйидаги тенгламаларни ечинг.

29. а) $\log_2(x^2-6x+1)=\log_2(13-5x)$, б) $\log_a(x-3)(x+4)=\log_a 18$ $(a>0)$, в) $4-\lg x=3\sqrt{\lg x}$, г) $\log_x 2+\log_2 x=2{,}5$.

30. а) $\log_3(x^2-7x+6)=\log_3(3-3x)$, б) $\lg\sqrt{x-5}+\lg\sqrt{2x-5}=\frac{1}{2}\lg 30$, в) $\log_5(x^2-11x+43)=2$.

5-§. Баъзи бир ажойиб лимитлар

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$$

тенгликлар ёрдамида қуйидаги лимитларни топинг.

31. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}$.

32. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$.

33. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\frac{x+a}{x}$.

34. $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.

35. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$.

36. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{\sin x}$.

37. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-1}{2x}$.

38. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$.

39. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{10^{x^2}-1}{x^2+x^3}$.

40 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4^x-1}{\operatorname{tg} x}$.

41. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

42. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$.

43. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$.

44. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+\sin 3x}-1}{2x}$.

45. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{\operatorname{tg} x}$.

46. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt{1-2x}}{3x}$.

47. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$.

48. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1+\arcsin x}-1}{14x}$.

III бобга доир аралаш масалалар

49. $y=\frac{1}{\lg|x|}$ функция қайси нуқталарда узилишга эга?

50. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } x \text{ — иррационал бўлса,}\\ x, & \text{агар } x \text{ — рационал бўлса,}\end{cases}$ функция қайси нуқтада узлуксиз?

51. $D(x)=\begin{cases}1, & \text{агар } x \text{ — рационал бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x \text{ — иррационал бўлса,}\end{cases}$ Дирихле функциясининг узлуксизлик нуқтаси борми?

52. $f(x)$ функция $[0;\ 1]$ кесмада узлуксиз ва фақат рационал қийматларга эга. Агар $f\left(\frac{1}{2}\right)=3$ бўлса, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ни топинг.

53 Ҳар қандай тоқ даражали кўпҳад камида битта ҳақиқий илдизга эга эканини исботланг.

54. $x=a\sin x+b$ (бу ерда $a>0,\ b>0$) тенглама берилган. Бу тенгламанинг $a+b$ дан катта бўлмаган камида битта мусбат илдизи мавжуд эканини исботланг.

55. 54-масалада $0 < a < 1$, $b > 0$ бўлса, тенглама ягона ечимга эга эканини исботланг.

56. $[2, 3]$ кесмада узлуксиз ва қийматлар тўплами $f\,]2; 3] =]7; 10[$ бўладиган $f(x)$ функция мавжудми?

57. $[a, b]$ кесмада узлуксиз ва қийматлар тўплами $f[a, b] =]-\infty, +\infty[$ бўладиган $f(x)$ функция мавжудми?

IV БОБ. БИР АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯЛАР УЧУН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБ

1-§. Ҳосила тушунчаси

1. Функция орттирмаси Δy нинг мос аргумент орттирмаси Δx га бўлган нисбатининг $\Delta x \to 0$ даги лимити функция ҳосиласи дейилади:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Агар бу лимит чекли бўлса, у ҳолда $y = f(x)$ дифференциалланувчи дейилади.

2. Функция ҳосиласини топиш коидаси.

$y = f(x)$ функция ҳосиласини топиш учун қуйидаги ишларни бажариш керак:

1) $f(x)$ даги x ни $x + \Delta x$ га алмаштириб, функциянин $f(x + \Delta x) = y + \Delta y$ қийматини топамиз;

2) функциянинг кейинги қийматидан олдинги қийматини айириб, унинг Δy орттирмасини топамиз: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

3) функция орттирмаси Δy ни Δx га бўламиз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

4) аргумент орттирмаси $\Delta x \to 0$ да $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатнинг лимитини излаймиз: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{y}{\Delta x}$.

3. Геометрик томондан $f'(x_0)$ ҳосила $y = f(x)$ эгри чизиқнинг $M_0(x_0, f(x_0))$ нуқтасида ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини ифодалайди: $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$.

4. Механик томондан $f'(x_0)$ ҳосила $y = f(x)$ ҳаракат қонунининг x_0 моментдаги ўзгариш тезлигини ифодалайди.

5. Бир томонлама ҳосилалар.

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad f'_{-}(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

лар мос ҳолда $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада ўнг ва чап ҳосилалари дейилади.

Ҳосила мавжудлигининг зарурий ва етарли шарти $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ дан иборат.

Функция ҳосиласини топиш амалига функцияни дифференциаллаш дейилади.

6. Дифференциаллашнинг асосий қоидалари.

Агар c — ўзгармас ва $u(x)$, $v(x)$ дифференциалланувчи функциялар бўлса, у ҳолда

1) $(c)' = 0.$
2) $(x)' = 1.$
3) $(cu)' = cu'.$
4) $(u \pm v)' = u' \pm v'.$
5) $(uv)' = u'v + uv'.$
6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$
6′) $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}.$

7. Мураккаб функция ҳосиласи $y'_x = y'_u \cdot u'_x.$

8. Тескари функция ҳосиласи $y'_x = \frac{1}{x'_y}.$

9. Дифференциаллашнинг асосий формулалари.

1) $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'.$
2) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'.$
2′) $(e^u)' = e^u \cdot u'.$
3) $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}.$
3′) $(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$
4) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'.$
5) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'.$
6) $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}.$
7) $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$
8) $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}.$
9) $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$
10) $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1 + u^2}.$
11) $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1 + u^2}.$
12) $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'.$
13) $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'.$
14) $(\operatorname{th} u)' = \frac{u'}{\operatorname{ch}^2 u},$
15) $(\operatorname{cth} u)' = \frac{u'}{\operatorname{sh}^2 u}.$
16) $(u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} \cdot u'.$

1. $y = \sqrt{x}$ функция, $x = 0$ ва $\Delta x = 0{,}01$ берилган. Δy ва $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ни топинг.

2. $y = \frac{1}{x}$ функция, $x = 1$ ва $\Delta x = 0{,}01$ берилган. Δy ва $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ни топинг.

Ҳосила таърифидан фойдаланиб, қуйидаги $y=f(x)$ функциялар учун y' ҳосилани топинг.

3. $y=3x^2+4x$. **4.** $y=\frac{1}{x}$. **5.** $y=\sqrt{x}$. **6.** $y=x^3$.

7. $y=\frac{1}{x^2}$. **8.** $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

9. $y=|\ln x|$ функция $x=1$ да ҳосилага эгами? Текширинг.

10. $y=|x|$ функциянинг $x=0$ да бир томонли ҳосилаларини топинг. Бу функция $x=0$ да ҳосилага эгами?

Дифференциаллашнинг қоида ва формулаларидан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

11. $y=ax^4-bx^3$.

12. $y=x^n+nx+n$.

13. $y=x^{\frac{4}{3}}+5$.

14. $y=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+4$.

15. $s=3t^{-4}-t$.

16. $y=\sqrt{3x}+\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}$.

17. $y=6x^{\frac{7}{2}}+4x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}$.

18. $y=10^x+10^{0,1}$.

19. $y=\frac{2x^3}{\sqrt[5]{x^2}}-\frac{7x}{\sqrt[3]{x^4}}+$
$+8\sqrt[7]{x^3}$.

20. $y=(1+x^2)^{20}$.

21. $y=\frac{1}{\sin x}$.

22. $y=\ln\cos x$.

23. $y=\sin^2 x$.

24. $y=\sin x^2$.

25. $y=(2x^3+x^2-5)^3$.

26. $y=(2+x)^m\times$
$\times(3-x)^n$.

27. $y=x(x-1)(x+2)$.

28. $y=e^x(\sin x+\cos x)$.

29. $y=\ln(1+\sqrt{1-x})$.

30. $y=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

31. $y=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

32. $y=\frac{a^4+a^2x^2-4x^4}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

33. $y=\frac{x}{\sin x}$.

34. $y=\frac{x}{\ln x}$.

35. $y=\frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}$.

36. $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$.

37. $y=\arcsin x^2$.

38. $y=\arcsin(\sin x)$.

39. $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$.

40. $y = (\arcsin x)^2$.

41. $y = a^x + x^a$.

42. $y = x^n e^{\sin x}$.

43. $y = \sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$.

44. $y = \sqrt[x]{x}$.

45. $y = x^x$.

46. $y = (\cos x)^{\sin 2x}$.

47. $y = x^{\arcsin x}$.

48. $y = \left(\frac{x}{a}\right)^{a}$.

49. $y = \operatorname{arctg}\frac{4\sin x}{3+5\cos x}$.

50. $y = \arcsin x \times \times (\sin x - \cos x)$.

51. $y = \operatorname{arctg}(\ln x) + \ln(\operatorname{arctg} x)$.

52. $y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

53. $y = x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$.

54. $y = \arccos(\cos^2 x)$.

55. $y = \frac{(2x-1)^3 \cdot \sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2 \cdot \sqrt{1-x}}$

56. $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$.

57. $y = (\ln x)^x + x^{\ln x}$.

58. $y = \ln(\ln^2(\ln^3 x))$

59. $y = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}$.

60. $y = (4x^2-7)^{2+\sqrt{x^2-5}}$.

61. $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ тенгликдан дифференциаллаш амалини қўллаб, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ ни ҳосил қилинг.

62. $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ функциянинг ҳосиласини топинг.

63. а) $y = x|x|$, б) $y = \ln|x|$ функцияларнинг ҳосилаларини топинг. Берилган $y = f(x)$ функцияларнинг графикларини ва $y' = f'(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

64. а) $y = \sqrt[5]{x^3}$, б) $y = 3|x| + 1$ функциялар $x = 0$ нуқтада ҳосилага эга эмас.

Исботланг.

2-§. Ҳосиланинг татбиқи

1. Дифференциалланувчи $y = f(x)$ функция графигининг $M_0(x_0; y_0)$ $(y_0 = f(x_0))$ нуқтасида ўтказилган уринма тенгламаси

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ кўринишга, } f'(x_0) \neq 0$$

да нормаль тенгламаси

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \text{ кўринишга эга бўлади.}$$

2. $y = f_1(x)$ ва $y = f_2(x)$ функциялар графикларининг $M_0(x_0;$

кесишиш нуқтасида ўтказилган уринмалар орасидаги φ бурчак берилган икки эгри чизиқ орасидаги бурчакни ифодалайди ва

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)\cdot f_2'(x_0)}$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

3. Ҳаракат қонуни $s = f(t)$ бўлганда $v = s'(t_0)$, бу ҳаракатнинг t_0 моментдаги тезлигини ифодалайди.

4. Агар дифференциалланувчи функция $y = f(x)$ ошкормас кўринишда $F(x, y) = 0$ тенглама билан берилган бўлса, у ҳолда $F(x, y) = 0$ нинг чап томонини мураккаб функция деб қараб $\frac{d}{dx} F(x, y) = 0$ дан y' топилади.

65. $y = x^2 - 4$ параболанинг $x = 2$ нуқтасида ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топинг.

66. $y = x^2 - 3x + 5$ параболанинг $M_0(2;\ 3)$ нуқтасида ўтказилган уринма ва нормаль тенгламаларини тузинг.

67. $y = 2x^3 - 6x^2 + 5$ эгри чизиқнинг $x = 1$ нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топинг ва уринма тенгламасини тузинг.

68. $y = x^2 + 2x - 1$ параболанинг $y = 2x^2$ парабола билан кесишган нуқтасида ўтказилган уринма ва нормаль тенгламаларини тузинг.

69. $y = 3x^2 - 1$ ва $y = 2x^2 + 3$ эгри чизиқларнинг кесишиш нуқтасида ўтказилган уринмалар оғмалигини аниқланг ва бу эгри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

70. $y = x^2$ параболанинг қайси нуқтасида ўтказилган уринма: а) $y = 4x - 5$ тўғри чизиққа параллел; б) $2x - 6y + 5 = 0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлади?

71. $y = x^2 - 5x + 6$ эгри чизиқнинг $M_0(5;\ 6)$ нуқтасида ўтказилган нормаль тенгламасини тузинг.

72. $y = x^2$ параболада $x_1 = 1$ ва $x_2 = 3$ нуқталар орқали кесувчи ўтказилган. Параболанинг қандай нуқтасида ўтказилган уринма кесувчига параллел бўлади?

73. $y = \sin x$ синусоида ва $y = \cos x$ косинусоидалар қандай бурчак остида кесишади?

74. $y = x^2$ ва $y^2 = x$ параболалар қандай бурчак остида кесишади?

75. Тўғри чизиқли ҳаракат $s = t^3 + 2t^2$ қонун билан берилган. $t = 2$ секунддаги ҳаракат тезлигини аникланг.

76. Ҳаракат қонуни $s = t\ln(1 + t)$ кўринишида берилган. $t = 2$ пайтдаги ҳаракат тезлигини аниқланг.

77. Снаряд 200 м/с бошланғич тезлик билан горизонтга нисбатан 45° бурчак остида отилади. Учинчи секунд охирида снаряд тезлигини аниқланг.

78. 8 г массали жисм $s = -1 + \ln(1+t) + (1+t)^3$ қонун бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Ҳаракат бошланишидан бир секунд кейин жисмнинг кинетик энергияси $\frac{mv^2}{2}$ ни топинг.

Қуйидаги ошкормас функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

79. $x^3 + 3x^2 + 2y^2 = 0.$

80. $y^2 = 2px.$

81. $x^2 + 2xy - y^2 = 2x.$

82. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

83. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$

84. $\ln x + e^{\frac{y}{x}} = c.$

85. $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0,\ y'(1) = ?$

86. $x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0.$

87. $\operatorname{arctg} y - y + x = 0.$

88. $e^x - e^y = y - x.$

89. $x + \sqrt{xy} + y = a.$

90. $e^x \sin y - e^{-y} \cos y = 0.$

91. $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$

92. $4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0$

эгри чизиқнинг $M_0(-2;\ 3)$ нуқтасида уринма ва нормаль тенгламаларини тузинг.

3- §. Юқори тартибли ҳосилалар

1. $y = f(x)$ функция ҳосиласи y' нинг ҳосиласи берилган $y = f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи дейилади ва орқали белгиланади.

Умуман, $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$; $(n = 2,\ 3,\ \ldots)$.

2. $s = f(t)$ ҳаракат қонунияти берилган бўлса, $\frac{d^2s}{dt^2}$ ҳаракатнинг тезланишини ифодалайди.

3. Агар $u(x)$ ва $v(x)$ n марта дифференциалланувчи функциялар бўлса, у ҳолда $(c_1u + c_2v)^{(n)} = c_1u^{(n)} + c_2v^{(n)}$ бўлиб, $(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$ (Лейбниц формуласи) орқали ифодаланади. Бунда $u^{(0)} = u,\ v^{(0)} = v$; $C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

70. $\int\limits_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$ ни топинг.

71 Ушбу тенгсизликни исбот қилинг: $\int\limits_0^1 \frac{x}{\cos x}dx < \ln 2.$

72 $f(x) = \mathrm{tg}^2 x$ мусбат функция.

$$\int\limits_0^\pi \mathrm{tg}^2 x d x = \int\limits_0^\pi \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = [\mathrm{tg} x - x]\Big|_0^\pi = -\pi < 0.$$

Хатоликни ҳисобланг.

73. $f'(1)=8$, $f(2)+f''(2)=33$; $\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{7}{3}$ берилган. $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ нинг A, B, C коэффициентларини аниқланг.

74. $f'(0)=4$, $\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx = 3$, $f(x) = A\sin 2x + B$ нинг A ва B ларни аниқланг.

75. $\frac{9x-15}{19} < \int\limits_0^x \frac{dy}{(y+1)^2} - 1$ тенгсизликни ечинг.

76. $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \left\| \begin{matrix} x=\cos t \\ \pi \leqslant t \leqslant 2\pi \end{matrix} \right\| = \int\limits_\pi^{2\pi} \sqrt{1-\cos^2 t}(-$

$- \sin t)dt = - \int\limits_\pi^{2\pi} \sin^2 t dt = - \frac{\pi}{2}.$

$y = \sqrt{1-x^2} \geqslant 0$, $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx < 0$. Ҳисоблашдаги хатоликни аниқланг.

VII БОБ. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

1-§. Текис (ясси) фигуралар юзларини ҳисоблаш

1. Декарт координаталар системасида юзларни ҳисоблаш.

а) $y = f(x)[f(x) \geqslant 0]$ эгри чизиқ, $x = a$ ва $x = b$ тўғри чизиқлар ҳамда Ox ўқининг $[a; b]$ кесмаси билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзи.

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

формула орқали ҳисобланади.

б) $y = f(x)$ ва $y = g(x)$ $[f(x) \leqslant g(x),\ x \in [a;\ b]]$ эгри чизиқлар ҳамда $x = a$ ва $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзи

$$S = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$$

формула орқали ҳисобланади.

2. Параметрик кўринишда берилган эгри чизиқлар билан чегараланган фигура юзини ҳисоблаш.

Агар фигура $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \mathrm{T})$ параметрик кўринишда берилган ёпиқ эгри чизиқ билан чегараланган бўлса, унинг юзи

$$S = -\int_0^T y(t)x'(t)dx \quad \text{ёки} \quad S = \int_0^T x(t)y'(t)dt$$

формулаларнинг бири билан ҳисобланади.

Бу икки формулани бирлаштириб

$$S = \frac{1}{2}\int_0^T [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]dt$$

ни ҳосил қиламиз.

3. Қутб координаталар системасида берилган узлуксиз эгри чизиқ $\rho = \rho(\theta)$ ва $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ $(\alpha < \beta)$ нурлар билан чегараланган фигуранинг юзи

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\theta$$

формула орқали ҳисобланади.

1. $y = x^2 + 1$ парабола, $y = 0$; $x = -1$ ва $x = 4$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

2. $y = \dfrac{1}{x}$ тенг ёнли гипербола, $x = 1$ ва $x = 3$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини ҳисобланг.

3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс юзини ҳисобланг. Хусусий ҳолда R радиусли доиранинг юзини ҳисобланг.

4. $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ эгри чизиқ, $x = 0$ ва $y = 0$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

5. $y=x^2$ парабола ва $y=x$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

6. $y=-x^2$ парабола ва $x+y+2=0$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

7. $y=2x-x^2$ парабола $y=x$, $x=0$, $x=2$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

8. $y=-x^2$, $y=0$; $x=1$; $x=4$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

9. Абсцисса ўқи ва $y=\sin x$ синусоиданинг $[0; \pi]$ даги ёйи билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

10. $y=\cos x$ косинусоиданинг $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ даги бўлаги ва $y=0$ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

11. $x^2=4y$ парабола ва $y=\frac{8}{x^2+4}$ Аньези зулфи билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

12. $y=x^2$ ва $y^2=x$ параболалар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

13. $y^2=4x$ парабола ва $x^2+y^2=5$ айлана билан чегараланган фигура (кичик кисми) нинг юзини ҳисобланг.

14. $y^2=x+2$ ва $x=0$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

15. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ циклоиданинг бир аркаси ва абсцисса ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

16. $y=x^2-2x+3$ парабола ва $y=3x-1$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

17. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ астроиданинг юзини ҳисобланг.

18. $x=2\cos t$, $y=2\sin t$ доира чорагининг юзини ҳисобланг.

19. $x^3+y^3=3axy$ Декарт япроғининг юзини ҳисобланг.

20. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ эллипснинг юзини топинг.

21. $\rho=a\varphi$ Архимед спиралининг бир ўрами ва қутб ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

22. $y=\sin x$ ва $y=\cos x$ эгри чизиқлар ва абсцисса ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

23. $\rho=2a(2+\cos\varphi)$ Паскаль чиғаноғи билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

24. $\rho = a(1+\cos\varphi)$ кардиоида билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

25. $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ Бернулли лемнискатасининг юзини ҳисобланг.

26. $y = e^x$, $y = e^{-x}$ эгри чизиқлар ва $x = 1$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

27. $\rho = e^{a\varphi}$ логарифмик спираль ва r_1 ва r_2 қутб радиуслари билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

28. $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 8 = 0$ айлана ва $y = x^2 + 6x + 10$ парабола билан чегараланган ҳар бир фигуранинг юзини ҳисобланг.

2-§. Ёй узунлигини ҳисоблаш

1. Декарт тўғри бурчакли координаталарида ёй узунлиги. Агар $y = f(x)$ $[a; b]$ да силлиқ эгри чизиқ (яъни $f'(x)$ узлуксиз бўлган) бўлса, у ҳолда унинг ёйи узунлигини

$$L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

формула орқали ҳисобланади. Бунда a ва b ёй учларининг абсциссаларидир ($a < b$).

2. Параметрик кўринишда берилган эгри чизиқ ёйининг узунлиги. Агар эгри чизиқ $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ кўринишда берилган бўлиб, $x'(t)$, $y'(t)$ узлуксиз функциялар бўлса, у ҳолда эгри чизиқ ёйининг узунлиги

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$$

формула орқали ҳисобланади. Бунда t_1 ва t_2 лар t параметрнинг ёй учларига мос қийматларидир ($t_1 < t_2$).

3. Қутб координаталар системасида берилган силлиқ эгри чизиқ $\rho = \rho(\theta)$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ ёйининг узунлиги

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\theta$$

орқали ҳисобланади. Бунда α ва β—қутб бурчаги θ нинг ёй учларидаги қийматлари ($\alpha < \beta$).

29. $y^2 = x^3$ параболанинг O (0; 0) дан A(1; 1) нуқтагача бўлган ёйи узунлигини топинг.

30. $y^2 = 4x$ параболанинг $x = 0$ дан $x = 1$ гача бўлган ёйи узунлигини топинг.

31. $x^2 + y^2 = R^2$ айлана узунлигини топинг.

32. $y=\frac{x^2}{2}+1$ параболанинг Ox ўқи билан кесилган ёйининг узунлигини топинг.

33. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ астроиданинг узунлигини ҳисобланг.

34. $9y^2=4x^3$ эгри чизиқнинг $O(0;\ 0)$ дан $B(\sqrt{3};\ 2\sqrt{3})$ гача бўлган ёйи узунлигини топинг.

35. $y=\ln x$ эгри чизиқнинг $(\sqrt{3};\ \ln\sqrt{3})$ нуқтадан $(\sqrt{8},\ \ln\sqrt{8})$ нуқтагача бўлган ёйи узунлигини топинг.

36. $y=\mathrm{ch}x$ занжир чизиқнинг $x=0$ дан $x=1$ гача бўлган ёйи узунлигини топинг.

37. $y=\ln\sin x$ эгри чизиқнинг $x=\frac{\pi}{3}$ дан $x=\frac{\pi}{2}$ гача бўлган ёй узунлигини топинг.

38. $y=e^x$ эгри чизиқнинг $x=0$ дан $x=1$ гача бўлган ёйи узунлигини топинг.

39. $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ циклоиданинг $t=0$ дан $t=2\pi$ гача бўлган ёйи узунлигини ҳисобланг.

40. $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ астроиданинг узунлигини топинг.

41. $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t \end{cases}$ эллипс узунлигини $y=\sqrt{a^2-b^2}\times$ $\times\sin\frac{x}{b}$ синусоиданинг бир тўлқин узунлигига тенглигини исбот қилинг.

42. $\begin{cases} x=r\cos t, \\ y=r\sin t \end{cases}$ айлана узунлигини ҳисобланг.

43. $\rho=a\varphi$ Архимед спирали бир ўрамининг узунлигини топинг.

44. $\rho=ae^{m\varphi}$ логарифмик спиралнинг $(\rho_0;\ \varphi_0)$ дан $(\rho_1;\ \varphi_1)$ гача ёйи узунлигини топинг.

45. $\rho=a(1+\cos\varphi)$, $a>0$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ кардиоида узунлигини ҳисобланг.

46. $\rho\varphi=1$ гиперболик спиралнинг $\varphi=\frac{3}{4}$ дан $\varphi=\frac{4}{3}$ гача бўлган ёйи узунлигини ҳисобланг.

47. $\theta=\sqrt{\rho}$ $(0\leqslant\rho\leqslant 5)$ нинг узунлигини ҳисобланг.

48. $\rho=R$ айлана узунлигини ҳисобланг.

3-§. Ҳажмларни ҳисоблаш

1. Маълум кўндаланг кесимлари бўйича жисм ҳажмини ҳисоблаш.

Агар жисмнинг Ox ўқига перпендикуляр текисликлар билан кесишмасида ҳосил бўлган кесим юзи $S(x)$ берилган бўлса, у ҳолда бу жисм ҳажми

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

орқали ҳисобланади, бунда a ва b лар x нинг ўзгариш чегаралари бўлиб, $S(x)$ функция $[a;\ b]$ да аниқланган ва узлуксиз деб қаралади.

2. Тўғри бурчакли координаталар системасида айланма жисм ҳажми

а) Ox ўқи атрофида $a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)$ текис фигурани айлантириш натижасида ҳосил бўладиган жисм ҳажми

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

орқали ҳисобланади.

б) Oy ўқи атрофида $c \leqslant y \leqslant d,\ 0 \leqslant x \leqslant \varphi(y)$ текис фигурани айлантириш натижасида ҳосил бўладиган жисм ҳажми

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy$$

орқали ҳисобланади.

в) Oy ўқи атрофида $a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant y(x)$ ни айлантириш натижасида ҳосил бўладиган жисм ҳажми

$$V = 2\pi \int_a^b xy(x)dx$$

орқали ҳисобланади.

3. Параметрик усулда берилган $x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha < t < \beta$ эгри чизиқни Ox ўқи атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўладиган жисм ҳажми

$$V = \pi \int_\alpha^\beta [y(t)]^2 x'(t)dt$$

орқали ҳисобланади.

4. Қутб координаталар системасида берилган $\rho = \rho(\theta)$ эгри чизиқ $\rho = \alpha,\ \rho = \beta$ радиус-векторлар билан чегараланган текис фигурани қутб ўқи атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўладиган жисм ҳажми

$$V = \pi \int_\alpha^\beta \rho^3 \sin^3 \theta d\theta$$

орқали ҳисобланади.

$0 < \alpha < \theta < \beta < \pi$ бўлганда $V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta \rho^3(\theta) \sin\theta\, d\theta$ бўлади.

49. $y^2=4x$ параболанинг $O(0;\ 0)$ ва $A(4;\ 4)$ нуқталари орасидаги ёйини Ox ўқи атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўладиган айланма параболоиднинг ҳажмини ҳисобланг.

50. $y^2=4ax$ парабола ва $x=$ тўғри чизиқдан ҳосил бўлган фигурани $y=-2a$ тўғри чизиқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажмини топинг.

51. $y=x^2-4$ параболанинг Ox ўқи билан кесишганда ҳосил бўлган ёйини Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажмини топинг.

52. $y=x^3$, $y=0$, $x=2$ чизиқлар билан чегараланган фигурани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини топинг.

53. R радиусли шарнинг ҳажмини ҳисобланг.

54. $y=x^3$, $y=0$, $x=2$ чизиқлар билан чегараланган фигурани Oy ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини топинг.

55. $y=\frac{r}{h}x$ тўғри чизиқни $[0;\ h]$ да Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган конуснинг ҳажмини ҳисобланг.

56. $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=1$ чизиқлар билан чегараланган фигурани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажмини ҳисобланг.

57. $y=\frac{r_2-r_1}{h}x+r_1$ тўғри чизиқни $(r_2>r_1)$ $[0;\ h]$ да Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган кесик конуснинг ҳажмини ҳисобланг.

58. $x^2-y^2=4$, $y=-2$, $y=2$ чизиқлар билан чегараланган фигурани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажмини ҳисобланг.

59. Шар сегментининг ҳажмини топинг.

60. $y=\sin x\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$ синусоидани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажмини топинг.

61. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсни Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган айланма эллипсоиднинг ҳажмини ҳисобланг.

62. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоиднинг ҳажмини топинг.

63. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболани $(0\leqslant y\leqslant b)$ Oy ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажмини топинг.

64. $y = x^2$ ва $y^2 = x$ параболалар билан чегараланган фигурани Ox ўқи атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажмини топинг.

65 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ циклоиданинг бир аркасининг Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажмини ҳисобланг.

66. $\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t \end{cases}$ астроидани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажмини топинг.

67. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ астроидани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажмини топинг.

68. $\rho = a\varphi$ Архимед спиралининг ярим айланасини ($a > 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$) қутб ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажмини топинг.

69. $y^2 = 2px$ параболанинг $\left|0; \frac{p}{2}\right|$ даги ёйини Oy ва Ox ўқлари атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган жисм ҳажмини топинг.

70. $\rho = e^{\varphi}(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ логарифмик спиралнинг қутб ўқи билан чегараланган ёйи ташкил қилган фигурани қутб ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини топинг.

71. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ занжир чизиғи ва $x = -a$, $x = a$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигурани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини топинг.

72. Шар секторининг ҳажмини топинг.

73. $x^2 + (y - b)^2 = r^2$, $(b > r)$ доирани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган тор ҳажмини ҳисобланг.

74. Шар қатлами (камари нинг ҳажмини топинг.

4-§. Айланма жисм сиртининг юзи

1. Тўғри бурчакли координаталар системасида $y=f(x)$ силлиқ эгри чизиқ ёйини ($a \leqslant x \leqslant b$) Ox ўқи атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўладиган жисм сиртининг юзи

$$S=2\pi\int_{a}^{b} y\sqrt{1+y'^2}dx$$

орқали ҳисобланади.

2. Параметрик кўринишда берилган эгри чизиқ учун $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases}$ ($t_1 < t \leqslant t_2$) сирт юзи $S=2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$ орқали ҳисобланади.

3. Қутб координаталар системасида силлиқ эгри чизиқ $\rho=\rho(\theta)$ ($\alpha < \theta \leqslant \beta$) берилган бўлса, уни қутб ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм сиртининг юзи

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta} \rho\sin\theta\sqrt{\rho^2+\rho^{12}}\,d\theta$$

формула орқали ҳисобланади.

75. $y=\sin x$ синусоиданинг $x=0$ дан $x=\frac{\pi}{2}$ гача бўлган ёйини Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзини топинг.

76. $y=\operatorname{tg}x\ \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}\right)$ ни Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзини топинг.

77. $y=2\operatorname{ch}\frac{x}{4}$ нинг $x=0$ дан $x=2$ гача бўлган ёйини Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

78. $y^2=2x$, $(0 \leqslant x \leqslant 2)$ параболани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

79. $y=x^3$ параболанинг $x=0$ дан $x=1$ гача бўлган ёйини Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

80. $x^2+y^2-2rx=0$ доирани Ox ўқи атрофида ($0 \leqslant x \leqslant h < 2r$) айлантиришдан ҳосил бўлган шар қисмининг юзини топинг.

81. R радиусли шар ($x^2+y^2+z^2=R^2$) сиртининг юзини ҳисобланг.

82. $\rho=a(1+\cos\Theta)$ кардиоидани қутб ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

83. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсни Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

84. $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ лемнискатани қутб ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

85. $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ циклоиданинг бир аркасини Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

86. Радиуси r, баландлиги h бўлган конуснинг сирт юзини ҳисобланг.

87. $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ астроидани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

88. $\rho=R$ айланани қутб ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сферик сирт юзини ҳисобланг.

89. $\begin{cases} x=r\cos t, \\ y=r\sin t \end{cases}$ айланани ўз диаметри атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган r радиусли сферик сирт юзини ҳисобланг.

90. Сферик камар сиртининг юзини ҳисобланг.

91. $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(b>a)$ айланани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган тор сиртининг юзини ҳисобланг.

92. Сферик сегментнинг юзини ҳисобланг.

5-§. Ясси эгри чизиқ ва фигураларнинг оғирлик маркази. Гюльден теоремалари

1. Агар масса $y=f(x)$ эгри чизиқ ёйи бўйича текис тақсимланган (зичлик $\rho=1$) бўлса, у ҳолда $y=f(x)\geqslant 0$, $(a\leqslant x< b)$ эгри чизиқнинг Ox ва Oy ўқларга нисбатан статик моментлари мос ҳолда

$$M_x=\int_a^b y\,dl,\quad M_y=\int_a^b x\,dl$$

бўлади, бунда $dl=\sqrt{dx^2+dy^2}$.

Шу ёй оғирлик марказининг координаталари эса

$$\bar{x}=\frac{1}{L}\int_a^b x\,dl,\quad \bar{y}=\frac{1}{L}\int_a^b y\,dl$$

бўлади, бунда $dl=\sqrt{dx^2+dy^2}$ ва L— ёй узунлиги.

2. $y=f(x)$ силлиқ эгри чизиқ, $x=a$, $x=b$ тўғри чизиқлар ва Oy ўқи билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг Ox ва Oy ўқларига нисбатан статик моментлари мос ҳолда

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx,\quad M_y=\int_a^b xydx$$

бўлади. Шу фигура оғирлик марказининг координаталари эса

$$\bar{x}=\frac{1}{S}\int_a^b xds=\frac{1}{S}\int_a^b xydx,$$

$$\bar{y}=\frac{1}{2S}\int_a^b yds=\frac{1}{2S}\int_a^b y^2dx$$

бўлади, бунда S—жисм сиртининг юзи.

3. $y=f(x)\,(a\leqslant x\leqslant b)$ силлиқ эгри чизиқ ёйини Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзи шу ёй узунлиги билан унинг оғирлик маркази чизган айлана узунлигининг кўпайтмасига тенг (Гюльденнинг 1-теоремаси):

$$2\pi\bar{y}\cdot L=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

4. $y=f(x)$ эгри чизиқ, $x=a$, $x=b$ тўғри чизиқлар ва Ox ўқи билан чегараланган текис фигурани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган фигуранинг ҳажми берилган фигура юзи билан унинг оғирлик маркази чизган айлана узунлигининг кўпайтмасига тенг (Гюльденнинг 2-теоремаси):

$$2\pi\bar{y}\cdot S=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

93. $y=\cos x$ косинусоиданинг $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ Ox га нисбатан статик моментини топинг.

94. $y=\cos x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ косинусоида ва Ox ўқи билан чегараланган фигуранинг оғирлик марказини топинг.

95. $x^2+y^2=r^2\,(y\geqslant 0)$ ярим айлананинг оғирлик маркази координаталарини топинг.

96. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипснинг Ox ўқи устидаги ёйининг Ox ўққа нисбатан статик моментини аниқланг.

97. $x^2+y^2\leqslant r^2\,(y\geqslant 0)$ ярим доиранинг оғирлик марказини аниқланг.

98. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипс юзининг биринчи квадрантдаги бўлагининг оғирлик марказини топинг.

99. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипс ёйининг биринчи квадрантдаги бўлагининг оғирлик марказини топинг.

100. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ астроида ёйининг биринчи квадрантдаги қисмининг оғирлик марказини топинг.

101. $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ циклоида бир аркаси ва Ox ўқи билан чегараланган фигуранинг оғирлик марказини топинг.

102. Гюльден теоремасидан фойдаланиб, $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(a<b)$ доирани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган тор ҳажмини топинг.

103. $\rho=a(1+\cos\varphi)$ кардиоида ёйининг оғирлик марказини топинг.

104. Гюльден теоремасидан фойдаланиб, r радиусли ярим айлананинг оғирлик марказини аниқланг.

105. Гюльден теоремасидан фойдаланиб, шарнинг сирт юзини ҳисобланг.

106. Гюльден теоремасидан фойдаланиб, доиравий конуснинг ҳажми ва ён сиртини топинг.

6-§. Чегараланмаган кесмада аниқланган функциянинг хосмас интеграли

1. $f(x)$ функция x нинг барча $x \geqslant a$ қийматларида аниқланган ва $[a; n]$ да интегралланувчи бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^n f(x)dx$ лимит $f(x)$ функциянинг a дан $+\infty$ гача олинган хосмас интеграли дейилади ва $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ орқали белгиланади. Шунга ўхшаш

$$\lim_{n\to-\infty}\int_n^b f(x)dx=\int_{-\infty}^b f(x)dx,$$

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^c f(x)dx+\lim_{\beta\to-\infty}\int_c^\beta f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Агар кўрсатилган лимитлар мавжуд ва чекли бўлса, хосмас интеграллар яқинлашувчи, акс ҳолда узоқлашувчи дейилади.

2. Солиштириш аломати

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $x \geqslant a$ да аниқланган ва $[a; n]$ да интегралланувчи. Агар $\forall x \geqslant a$ учун $0 < f(x) \leqslant g(x)$ бўлса, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ нинг яқинлашишидан $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ нинг ҳам яқинлашиши келиб чиқади ва $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \leqslant \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ нинг узоқлашишидан $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ нинг ҳам узоқлашувчи бўлиши келиб чиқади.

3. Абсолют яқинлашиш аломати

$f(x)$ функция $\forall x \geqslant a$ учун аниқланган. Агар $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ яқинлашувчи бўлса, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ҳам яқинлашувчи бўлади ва у абсолют яқинлашувчи дейилади. Агар $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ яқинлашувчи, $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ шартли яқинлашувчи дейилади.

Хосмас интегралларни ҳисобланг:

107. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$.

108. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$.

109. $\int\limits_0^{+\infty} \sin xdx$.

110. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

111. $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

112. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

113. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x+x^3}$.

114. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$.

Қуйидаги интегралларнинг яқинлашишини текширинг.

115. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$.

116. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-px}dx$.

Солиштириш аломатидан фойдаланиб, яқинлашишни текширинг.

117. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^8}$. **118.** $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Хосмас интегралларни текширинг.

119. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$. **120.** $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x)^3}$.

121. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$. **122.** $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

7-§. Чегараланмаган функцияларнинг хосмас интеграллари

1. $f(x)$ функция $[a;\ b[$ да аниқланган ва $[a;\ b-\varepsilon](\varepsilon > 0)$ да интегралланувчи, лекин $]b-\varepsilon,\ b\ [$ да чегараланмаган бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

деб олинади. Агар бу лимит мавжуд ва чекли бўлса, хосмас интеграл яқинлашувчи, акс ҳолда узоқлашувчи дейилади. Шунга ўхшаш

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

ва

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \to 0+} \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)dx$$

таърифланади, охиргида c нуқта атрофида $f(x)$ функция чегараланмаган.

2. Агар $[a;\ b]$ да $f(x) > 0$, $\alpha < 1$ ва $\lim\limits_{x \to b-0} f(x)(b-x)^{\alpha} < \infty$ бўлса, $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ яқинлашувчи, $f(x) > 0$, $\alpha \geqslant 1$ ва $\lim\limits_{x \to b-0} f(x)(b-x)^{\alpha} > 0$ бўлса, $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ узоқлашувчи бўлади.

3. Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $[a;\ c]$ нинг c нуқтасида узилишга эга ва $\varphi(x) \geqslant f(x) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда $\int\limits_{a}^{c} \varphi(x)dx$ нинг яқинла-

шувчи бўлишидан $\int_a^c f(x)dx$ нинг ҳам яқинлашувчи экани келиб чиқади.

Чегараланмаган функциялар хосмас интегралларини текширинг.

123. $\int_0^1 \frac{dx}{x}$.

124. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

125. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

126. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

127. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$.

128. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

129. $\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$.

130. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

131. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

132. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+4x^3}$.

VII бобга доир аралаш масалалар

133. $y=\ln(x+\sqrt{1+x})$, $x=3$, $x=8$, $y=0$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

134. $\rho=a\sin k\varphi(k=3,\ k=4)$ тенглама билан аниқланган „атиргул“ эгри чизиғининг бир япроғининг юзини топинг.

135. $x^2+y^2=ax$ цилиндрнинг $x^2+y^2+z^2=a^2$ сфера ичидаги сирт юзини топинг.

136. $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$ цилиндрларнинг кесишмасида ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини топинг.

137. Баландлиги h, асоси эса ярим ўқлари a ва b бўлган эллипсдан иборат, эллиптик тўғри конуснинг ҳажмини топинг.

138. R радиусли шарнинг ҳажмини топинг (айланма жисм деб қаралмасин).

139. Асоси ва баландлиги мос ҳолда сферик сегментнинг асос ва баландлигига тенг бўлган цилиндрнинг ён сирти сферик сегментнинг сирт юзига тенглигини исбот қилинг.

140. $y=2x-x^2$ парабола, $y=2^x$ эгри чизиқ ва $x=0$, $x=2$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

141. $\rho=a(1+\cos\theta)$ кардиоидани қутб ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини ҳисобланг.

142. $f(x)=\frac{3x^2-1}{x^3-x+2}$, $g(x)=\frac{3x^2+1}{x^3+x+2}$ эгри чизиқлар, $x=2$ ва $x=3$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

143. $A(0;\ 4)$, $B(1;\ 9)$, $C(3;\ 7)$ нуқталар орқали $y=ax^2+bx+c$ парабола ўтган. A нуқтадан ўтган тўғри чизиқ тенгламаси топилиши керак, бу тўғри чизиқ ва парабола ташкил қилган фигуранинг юзи 9 га тенг.

144. $y=x^n(0\leqslant x\leqslant 1)$ функция графигининг белгили нуқтаси орқали абсцисса ўқига параллел ўтказилган.

Қандай нуқта учун $y=x^n$ нинг графигига ўтказилган тўғри чизиқ ва $x=0$, $x=1$ тўғри чизиқлар ҳосил қилган иккита эгри чизиқли учбурчаклар юзларининг йиғиндиси энг кичик бўлади?

145. Дифференциалланувчи ва қатъий ўсувчи $y=f(x)$ функция графигининг $t\in\,]a;\ b[$ нуқтаси орқали Ox ўқига параллел гўри чизиқ ўтказилган. $y=f(x)$ нинг графиги, ўтказилган тўғри чизиқ, $x=a$, $x=b$ тўғри чизиқлар ҳосил қиладиган иккита эгри чизиқли учбурчаклар юзларининг йиғиндиси t нинг қандай қийматида энг кичик бўлади?

VIII БОБ. СОНЛИ ҚАТОРЛАР

1-§. Асосий тушунчалар

Агар u_1, u_2, u_3, . . . , u_n, ... — сонлар кетма-кетлиги бўлса, у ҳолда

$$u_1+u_2+u_3+\ \ldots\ +u_n+\ \ldots \qquad (1)$$

сонли қатор дейилади. u_1, u_2, ... , u_n, ...— қатор ҳадлари, u_n — қаторнинг умумий ҳади дейилади. Кўп ҳолларда (1) қисқача $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ орқали белгиланади.

1. Қаторнинг биринчи n та ҳади йигиндиси унинг хусусий йиғиндиси дейилади:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Агар $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ чекли бўлса, (1) қатор яқинлашувчи қатор дейилади ва S (1) қаторнинг йиғиндиси дейилади. Агар $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ чексиз бўлса ёки мавжуд бўлмаса, у ҳолда (1) қатор узоқлашувчи қатор дейилади.

$$2.\ u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+k} + \dots \tag{2}$$

кўринишдаги қатор (1) нинг n-ҳаддан кейинги қолдиғи дейилади ва қисқача $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$ орқали белгиланади.

Бунда:

а) Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (2) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади ва аксинча;

б) Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $au_1 + au_2 + \dots + au_n + \dots$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади ва йиғиндиси aS га тенг бўлади;

в) Агар $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ ва $\sigma = v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$ қаторлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n) + \dots$ қатор яқинлашувчи бўлади ва йиғиндиси $S + \sigma$ га тенг бўлади;

г) Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ бўлади (қатор яқинлашишининг зарурий шарти).

Агар $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ бўлса, у ҳолда қатор узоқлашувчи бўлади.

Қаторнинг умумий ҳади a_n берилган. Унинг биринчи учта ҳадини ёзинг.

1. $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$.
2. $a_n = \dfrac{n}{2^n(n+1)}$.

3. $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$
4. $a_n = \dfrac{2n-1}{4n^2+1}$.

Қаторнинг биринчи бир неча ҳадига кўра унинг умумий ҳадини ёзинг.

5. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{11} + \dfrac{1}{20} + \dots$

6. $1 + \dfrac{4}{2} + \dfrac{9}{6} + \dfrac{16}{24} + \dfrac{25}{120} + \dots$

7. $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \dots$

8. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{4}{11} + \dots$

Қаторларнинг йиғиндиларини **топинг.**

9. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots$

10. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-\ldots$

11. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots$

12. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots$

13. $\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\ldots$

14. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$

Қатор яқинлашишининг зарурий шартидан фойдаланиб, қуйидаги қаторларнинг узоқлашишини кўрсатинг.

15. $0{,}6+0{,}51+0{,}501+0{,}5001+\ldots$

16. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{4}{11}+\ldots$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+4}$. 18. $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{2n}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. 20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$.

2- §. Мусбат ҳадли қаторлар

$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ (1), $b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots$ (2)

мусбат ҳадли қаторлар берилган бўлсин, яъни $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$. $\forall n \in N$.

1) Солиштириш аломати. Агар $\forall n \in N$ учун $a_n \leqslant b$ ўринли бўлиб, (2) қатор яқинлашувчи бўлса, (1) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади ва (1) қатор узоқлашувчи бўлганда (2) қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.

Бу аломат n нинг бирор $n_0 \in N$ қийматидан бошлаб барча $n > n_0$ учун $a_n \leqslant b_n$ бўлганда ҳам ўринлидир.

2) 2-солиштириш аломати. Агар чекли $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=K\neq 0$ мавжуд бўлса, у ҳолда (1) ва (2) қаторлар бир вақтда ё яқинлашувчи, ё узоқлашувчи бўлади.

3) **Коши аломати.** Агар (1) учун $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ мавжуд бўлиб, $l < 1$ бўлса, у ҳолда (1) қатор яқинлашувчи, $l > 1$ да эса узоқлашувчи бўлади.

4) **Даламбер аломати.** Агар (1) учун $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ мавжуд бўлиб, $l < 1$ бўлса, қатор яқинлашувчи, $l > 1$ да узоқлашувчи бўлади.

5) **Коши интеграл аломати.** Агар $f(x)$ функция $[1; +\infty]$ да узлуксиз, камаювчи, мусбат бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ қатор ва $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ хосмас интеграл бир вақтда ё яқинлашувчи, ё узоқлашувчи бўлади.

6) **Раабе аломати.** Агар (1) қатор учун $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l$ бўлиб, $l > 1$ бўлса, қатор яқинлашувчи, $l < 1$ да узоқлашувчи бўлади.

7) **Гаусс аломати.** Агар (1) қатор учун $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^m + b_1 n^{m-1} + \ldots + b_m}{n^m + c_1 n^{m-1} + \ldots + c_m}$ бўлиб, $c_1 - b_1 > 1$ бўлса, қатор яқинлашувчи, $c_1 - b_1 \leqslant 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

Солиштириш аломатидан фойдаланиб, қаторларнинг яқинлашиши ёки узоқлашишини кўрсатинг.

21. $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{2^n + 1} + \ldots$

22. $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \ldots + \frac{1}{\ln(n+1)} + \ldots$

23. $1 + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots \ (p < 1).$

24. $\frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{5}{4 \cdot 9} + \frac{7}{9 \cdot 16} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \ldots$

25. $\sin^2\alpha + \frac{\sin^2 2\alpha}{8} + \ldots + \frac{\sin^2 n\alpha}{n^3} + \ldots$

26. $1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 5^{n-1}} + \ldots.$

Коши аломатидан фойдаланиб, қаторларни текширинг.

27. $\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \ldots$

28. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots$

29. $\sin\frac{1}{2}+4\cdot\sin^2\frac{1}{4}+27\cdot\sin^3\frac{1}{6}+\ldots+n^n\sin^n\frac{2}{2n}+\ldots$

30. $\arcsin 1+\arcsin^2\frac{1}{2}+\arcsin^3\frac{1}{3}+\ldots+$

$+\arcsin^n\frac{1}{n}+\ldots$

Даламбер аломатидан фойдаланиб, қаторларни текширинг.

31. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$

32. $\frac{10}{1!}+\frac{10^2}{2!}+\frac{10^3}{3!}+\ldots+\frac{10^n}{n!}+\ldots$

33. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2^2}+\ldots+\frac{\sqrt{n}}{2^n}+\ldots$

34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{n}.$

Коши интеграл аломатидан фойдаланиб, қаторларни текширинг.

35. $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}+\ldots$

36. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$

37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}.$

38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$

39. $\frac{\ln 2}{4}+\frac{\ln 3}{9}+\ldots+\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}+\ldots$

40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}.$

3- §. Ихтиёрий ҳадли қаторлар

1. Ҳар қандай икки қўшни ҳади қарама-қарши ишорали қийматларга эга бўлган қатор ишора алмашинувчи дейилади. Ишора алмашинувчи қатор

$$a_1-a_2+a_3-\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots;\quad (1)\quad (a_n>0,\ n\in N)$$

каби ифодаланади.

Лейбниц аломати. Агар (1)да $\forall n \in N$ учун $a_n \geqslant a_{n+1}$ (2) тенгсизлик ўрин бўлиб, $\lim a_n = 0$ (3) бўлса, у ҳолда (1) қатор яқинлашувчи бўлади. Агар $r_n = S - S_n$ бўлса, у ҳолда $|r_n| < a_{n+1}$ бўлади, яъни қатор йиғиндиси S ни унинг хусусий йиғиндиси S_n билан алмаштирганда хато биринчи ташланган ҳад a_{n+1} нинг модулидан катта бўлмайди.

2. Ихтиёрий ишорали ҳадларга эга қатор

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{4}$$

берилган ва

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| + \ldots \tag{5}$$

модуллардан тузилган қатор бўлсин.

Агар (5) қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (4) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади ва (4) қатор абсолют яқинлашувчи дейилади.

Агар (4) қатор яқинлашувчи, (5) қатор эса узоқлашувчи бўлса, у ҳолда (4) қатор шартли яқинлашувчи дейилади.

3. Агар (4) қатор абсолют яқинлашувчи бўлса, унинг ҳадлари ўрнини алмаштирганда яна абсолют яқинлашувчи қатор ҳосил бўлади ва йиғиндиси ўзгармайди.

Агар (4) қатор шартли яқинлашувчи бўлса, ҳар қандай B сон учун қатор ҳадларининг ўрнини тегишлича алмаштирганда, унинг йиғиндиси худди B сондан иборат бўлади. (Риман теоремаси.)

4.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = A \tag{4'}$$

ва

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = B \tag{6}$$

қаторлар учун

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \ldots + (a_1b_n + \ldots + a_nb_1) + \ldots \tag{7}$$

қатор (4) ва (6) нинг кўпайтмаси дейилади.

(4) ва (6) абсолют яқинлашувчи бўлганда, (7) ҳам яқинлашувчи бўлади ва (7) нинг йиғиндиси $C = A \cdot B$ бўлади.

Ишора алмашинувчи қаторларнинг абсолют, шартли яқинлашишини ёки узоқлашишини текширинг.

41. $1 - \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} - \ldots$

42. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots$

43. $\frac{1}{10} - \frac{1}{20} + \frac{1}{30} - \ldots$

44. $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \ldots$

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{2^n}$.

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{3}$.

47. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$.

48. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$.

49. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$.

50. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$.

Лейбниц аломатидан фойдаланиб бўлмаслигига ишонч ҳосил қилиб, қаторларнинг яқинлашишини текширинг.

51. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^5}+\ldots$

52. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3^3}+\ldots$

53. $1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^4}-\ldots+\frac{1}{(2n-1)^4}-\frac{1}{(2n)^3}+\ldots$

54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Қатор йиғиндисини 0,01 аниқлик билан топинг.

55. $1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\ldots$

56. $-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{28}+\frac{1}{65}-\frac{1}{126}+\ldots$

57. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$.

58. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\ln 2$ қатор ҳадлари ўринларини алмаштиришдан ҳосил бўлган қуйидаги қаторлар йиғиндиларини аниқланг.

59. $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\ldots$

60. $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots$,

VIII бобга доир аралаш масалалар

61. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+$ $+\ldots$ ни текширинг.

62. Яқинлашувчи $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$ қатор ҳадларининг ўрнини шундай алмаштирингки, узоқлашувчи қатор ҳосил бўлсин.

63. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ ва $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$ қаторларнинг кўпайтмаси 1 га тенг бўлишини кўрсатинг.

64. $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ эканлигини кўрсатинг.

65. $1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\ldots$ — шартли яқинлашувчи қаторнинг квадрати яқинлашувчи бўладими?

66. Агар $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ ва $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ қаторлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ абсолют яқинлашувчи бўлишини исботланг.

67. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ва $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ қаторларнинг айирмаси яқинлашувчими?

68. Йиғиндиси яқинлашувчи, айирмаси эса узоқлашувчи бўлган иккита қатор топинг.

69. Бири яқинлашувчи, иккинчиси узоқлашувчи бўлган икки қаторнинг йиғиндиси қандай қатор бўлади? Ҳар иккаласи узоқлашувчи бўлганда-чи?

70. $1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8}{2}\right)^n$ ва $1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ узоқлашувчи қаторлардир. *Уларнинг* кўпайтмаси абсолют яқинлашувчи бўлишини кўрсатинг.

IX БОБ. ФУНКЦИОНАЛ ҚАТОРЛАР

1-§. Функционал қаторнинг яқинлашиш соҳаси. Текис яқинлашиш

1. $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ функциялар бирор E соҳада аниқланган бўлсин.

$$u_1(x)+u_2(x)+\dots+u_n(x)+\dots \qquad (1)$$

функционал қатор $x=x_0\in E$ да сонли қатор $u_1(x_0)+u_2(x_0)+\dots+u_n(x_0)+\dots$ (2) га айланади.

Агар (2) яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (1) функционал қатор x_0 да яқинлашади ёки x_0 (1) нинг яқинлашиш нуқтаси дейилади. (1) қаторнинг барча яқинлашиш нуқталарининг тўплами (1) нинг яқинлашиш соҳаси дейилади ва $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ — (1) қаторнинг йиғиндиси дейилади. $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$ — қаторнинг қолдиғи дейилади.

2. Агар $\forall\varepsilon>0\ \exists N n>N$ ва $\forall\ x\in E \Longrightarrow |R_n(x)|<\varepsilon$ бўлса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қатор E тўпламда текис яқинлашувчи дейилади.

Функционал қаторнинг текис яқинлашиш критерийси:

Агар $\forall\ \varepsilon>0\ \ \exists N\ n>N$ ва $\forall x\in E \Longrightarrow |u_{n+1}(x)+\dots+u_{n+m}(x)|<\varepsilon$ бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор E да текис яқинлашувчи бўлади ва аксинча.

Вейерштрасс аломати.

Агар берилган $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор учун $\forall n\in N$ $\forall x\in E \Longrightarrow |u_n(x)|\leqslant c_n$ ни қаноатлантирадиган яқинлашувчи сонли қатор $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ мавжуд бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қатор E да текис яқинлашувчи ва ҳар бир $x\in E$ нуқтада абсолют яқинлашувчи бўлади.

3. Текис яқинлашувчи қаторларнинг асосий хоссалари:

а) ҳадлари узлуксиз функциялардан тузилган текис яқинлашувчи қаторнинг йиғиндиси ўша соҳада узлуксиз функция бўлади.

б) узлуксиз функциялардан тузилган текис яқинлашувчи қаторни ҳадлаб интеграллаш мумкин, яъни $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b u_n(x)dx =$

$$=\int\limits_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)dx.$$

в) Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қаторнинг ҳар бир ҳади J ораликда узлуксиз дифференциалланувчи ва J да яқинлашувчи, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ қатор J да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қаторни ҳадлаб дифференциаллаш мумкин, яъни $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)'$.

Функционал қаторларнинг яқинлашиш соҳасини топинг.

1. $1 + 2!x + 3!x^2 + \ldots + n!x^{n-1} + \ldots$
2. $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{1}{x^n} + \ldots$
3. $\frac{x+2}{x+3} + \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^n + \ldots$
4. $\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}} + \ldots$
5. $1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \ldots + \frac{1}{n^x} + \ldots$
6. $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n + \ldots$

Функционал қаторларнинг текис яқинлашишини текширинг.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n \cos n^2 x \; (|a| < 1)$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+2^n}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^{2n}+n}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ қатор $]-1;\ 1[$ да текис яқинлашувчи эмас. Текширинг.

Вейерштрасс аломати ёрдамида текширинг.

11. $\sin 2x + \frac{1}{2^2}\sin^2 2x + \frac{1}{3^2}\sin^3 2x + \ldots$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}$.

13. $1+\frac{\cos x}{1!}+\frac{\cos^2 x}{2!}+\ldots+\frac{\cos^n x}{n!}+\ldots$ қаторни ҳадлаб интеграллаш мумкинми?

14. $\sin x+\frac{\sin 2x}{2^5}+\frac{\sin 3x}{3^5}+\ldots+\frac{\sin nx}{n^5}+\ldots$ қаторни ҳадлаб дифференциаллаш мумкинми?

Ушбу функционал қаторлар йиғиндиси узлуксизми, текширинг:

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n(1+x^{2n})}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+n^2x^2}$.

2-§. Даражали қаторлар

1. $a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$ **(1)**
кўринишдаги қатор даражали қатор дейилади.

$$x_0=0 \text{ да } a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad \textbf{(2)}$$

қатор x нинг даражалари бўйича ёйилган қатор дейилади.

(2) нинг яқинлашиш радиуси деб шундай R сонга айтиладики, $|x|<R$ да (2) қатор яқинлашувчи ва $|x|>R$ да узоқлашувчи бўлади. $]-R;\ R[$ эса (2) қаторнинг яқинлашиш интервали дейилади.

(2) қаторнинг яқинлашиш радиуси Коши—Адамар формулалари ёрдамида ҳисобланади:

$$R=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,\quad R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

(1) қаторнинг яқинлашиш интервали $]x_0-R;\ x_0+R[$ бўлади.

2. а) $]-R;\ R[$ яқинлашиш интервалида жойлашган ҳар қандай $[a;\ b]$ да (2) қатор текис яқинлашувчи бўлади.

б) Яқинлашиш интервалида (2) қатор йиғиндиси узлуксиз функция бўлади.

в) (2) қаторни яқинлашиш интервалида жойлашган ҳар қандай кесмада ҳадлаб интеграллаш мумкин:

$$\int_{-r}^{r}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ndx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_{-r}^{r}x^ndx,\quad \forall[-r;\ r]\subset]-R;\ R[.$$

г) $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$ **(2)** ва $a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$ **(2′)**
қаторлар бир хил яқинлашиш радиусларига эга.

(2) қаторни $\forall[-r, r]\subset]-R;\ R[$ да ҳадлаб дифференциаллаш мумкин:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Даражали қаторларнинг яқинлашиш радиусларини, яқинлашиш интервалларини ва яқинлашиш соҳаларини топинг.

17. $1 - 3x + 9x^2 - 27x^3 + \ldots$

18. $1 + 5x + 2\cdot 25x^2 + 3\cdot 125x^3 + \ldots$

19. $x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots$

20. $(x+5) + \frac{(x+5)^2}{2^4} + \frac{(x+5)^3}{3^4} + \ldots$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 10^{2n}(2x-3)^{2n-1}.$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,2^n}{(2n)!} x^{2n}.$

23. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^{2n}.$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}.$

Қаторларнинг йиғиндиларини топинг.

25. $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$

26. $x + x^3 + x^4 + \ldots$

27. $1\cdot 2 + 2\cdot 3x + 3\cdot 4x^2 + \ldots$

28. $-2x + 4x^3 - 6x^5 + 8x^7 - \ldots$

29. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$

30. $x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \ldots$

3-§. Тейлор қатори

1. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтанинг бирор $u(x_0, \delta)$ атрофида исталган марта дифференциалланувчи ва шу оралиқда $|f^n(x)| < M$ тенсизлик ўринли бўлиб, M сони n га боғлиқ бўлмаса, у ҳолда $f(x)$ функция ўзининг Тейлор қаторига ёйилади дейилади:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \qquad (1)$$

$x_0 = 0$ да

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \quad \mathbf{(2)}$$

(2) қатор Маклорен қатори деб юритилади.

2. Қуйида баъзи функцияларнинг Тейлор қаторига ёйилмаларини келтирамиз:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \; x \in]-\infty; +\infty[.$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots; \; x \in]-\infty; +\infty[.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots;$$
$$x \in]-\infty; +\infty[.$$

$$\mathrm{sh}x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots; \; x \in]-\infty; +\infty[.$$

$$\mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots; \; x \in]-\infty; +\infty[.$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots; \; x \in]-1; 1[.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots; \; x \in]-1; 1[.$$

$$\mathrm{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots;$$
$$x \in [-1; 1].$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots +$$
$$+ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots; \; x \in]-1; 1[.$$

$$\mathrm{tg}\, x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots;$$
$$x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[.$$

Қуйидаги функцияларни турли усуллардан (алгебраик, ҳадлаб интеграллаш ва дифференциаллаш) фойдаланиб, x нинг даражалари бўйича Тейлор (Маклорен) қаторига ёйинг.

31. $f(x) = e^{-x^2}$. **32.** $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

33. $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$. 34. $f(x)=\frac{\arcsin x}{x}$.

$x-a$ даражалари бўйича Тейлор қаторига ёйинг.

35. $f(x)=\ln x$; $a=1$.

36. $f(x)=e^x$; $a=-4$.

37. $f(x)=x^4+2x^3+5x^2+2x+4$; $a=-3$.

38. $f(x)=\frac{1}{x}$; $a=-2$.

x нинг даражалари бўйича ёйилганда қаторнинг биринчи тўрт ҳадини топинг.

39. $f(x)=\sec x$. 40. $f(x)=e^{\cos x}$.

41. $f(x)=\operatorname{th} x$. 42. $f(x)=\ln\cos x$.

Қаторларнинг кўпайтириш қоидасидан фойдаланиб, x нинг даражалари бўйича ёйилмаларни топинг.

43. $f(x)=e^x\sin x$. 44. $f(x)=\cos^2 x$.

45. $f(x)=\operatorname{arctg}^2 x$. 46. $f(x)=\frac{\arcsin^2 x}{x^2}$.

Қуйидаги функцияларни Маклорен қаторига ёйиб бўладими?

47. $f(x)=\frac{1}{x+1}$. 48. $f(x)=\ln x$.

49. $f(x)=|x|$. 50. $f(x)=\sqrt{x}$.

4-§. Тақрибий ҳисоблашлар

Агар берилган $f(x)$ функция қаторга ёйилган бўлса, бу функциянинг бирор $x=x_0$ нуқтадаги тақрибий қийматини топиш учун: 1) қаторнинг биринчи n та ҳади йиғиндиси $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k x_0^k$ топилади; 2) қатор йиғиндисининг аниқ қиймати S билан S_n орасидаги $S-S_n$ фарқ, яъни R_n қолдиқ баҳоланади.

Тақрибий ҳисоблашларни бажаринг:

51. $\sin 18°$ ни 0,001 аниқликкача.

52. $\cos 1°$ ни 0,0001 аниқликкача.

53. $\sqrt[3]{30}$ ни 0,001 аниқликкача.

54. $\sqrt[5]{1,1}$ ни 0,0001 аниқликкача.

55. $\sqrt{e}$ ни 0,0001 аниқликкача.

56. $\ln 2$ ни 0,0001 аниқликкача.

57. $\sqrt[3]{1,06}$ ни 0,0001 аниқликкача.

58. $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ дан π ни 0,001 аниқликкача ҳисобланг.

Қуйидаги интегралларни 0,001 аниқликкача тақрибий ҳисобланг:

59. $\int\limits_0^1 e^{-t^2}\,dt.$ 60. $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx.$

61. $\int\limits_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x}\,dx.$ 62. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\arcsin t}{t}\,dt.$

Лимитларни ҳисобланг:

63. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}.$ 64. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x}.$

IX бобга доир аралаш масалалар

65. $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$ қатор $xy'' + y' - y = 0$ тенгламани қаноатлантиришини текширинг.

66. $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ қатор $y^{IV} = y$ тенгламани қаноатлантиришини текширинг.

67. $y = \frac{x}{1 + x - 2x^2}$ ни x нинг даражалари бўйича ёйинг.

68. $y = x^x$ ни $x - 1$ нинг даражалари бўйича ёйилганда биринчи 3 та ҳадини топинг.

69. $$1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\ldots n\cdot\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n + \ldots$$

гипергеометрик қаторнинг яқинлашиш соҳасини аниқланг.

70. $f(x)=\sqrt{1-x^2}\arcsin x$ ни Маклорен қаторига ёйинг.

71. $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ функциянинг Маклорен қаторига ёйилмасидан фойдаланиб, $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ нинг ёйилмасини топинг.

72. $2\sin x-\cos x=0$ тригонометрик тенгламани қаноатлантирадиган x нинг энг кичик мусбат қийматини топинг.

X БОБ. КОМПЛЕКС ҲАДЛИ ҚАТОРЛАР

1-§. Комплекс ҳадли сонли қаторлар

1. $W_1, W_2, \ldots, W_n, \ldots$ (1)
комплекс сонлар кетма-кетлиги берилган.

$$W_1+W_2+\ldots+W_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}W_n \qquad (2)$$

кўринишдаги ифода комплекс ҳадли қатор дейилади.

$S_n=W_1+\ldots+W_n$ ифода (2) қаторнинг хусусий йиғиндиси дейилади.

Агар $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ бўлса, у ҳолда (2) қатор яқинлашувчи ва S унинг йиғиндиси дейилади.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}W_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+iv_n)$ комплекс ҳадли қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ қаторларнинг яқинлашувчи бўлиши зарур ва етарлидир.

Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|W_n|$ яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (2) қатор абсолют яқинлашувчи дейилади.

2. Даламбер аломати.

Агар $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{W_{n+1}}{W_n}\right|=l$ бўлиб, $l<1$ бўлса, (2) абсолют яқинлашувчи бўлади.

3. Коши аломати. Агар $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|W_n|}=l$ бўлиб, $l<1$ бўлса, (2) абсолют яқинлашувчи бўлади.

Қаторларнинг яқинлашишини текширинг.

1. $(1+i)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}i\right)+\ldots$

2. $(1+0{,}1i)+\left(\frac{1}{2}+0{,}01i\right)+\left(\frac{1}{3}+0{,}001i\right)+\ldots$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+i}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{i}{7^n}\right)$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}+\frac{n}{n+1}i\right)$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{i}{n^2}\right)$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos n^2}{n^3}+i\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right)$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(3+i)^n}$.

2-§. Комплекс ҳадли функционал қаторлар

1. Комплекс ҳадли даражали қаторлар

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots \qquad (1)$$

кўринишдаги қатор комплекс ҳадли даражали қатор дейилади. Бунда c_n — комплекс сонлар, z — комплекс ўзгарувчи.

Умумий ҳолда $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ (2) қатор қаралади. (2) қатор учун маркази $M_0(z_0)$ нуқтада R радиусли доира мавжудки, бу доирада ($|z-z_0|<R$) (2) яқинлашувчи, доира ташқарисида ($|z-z_0|>R$) (2) узоқлашувчи бўлади, айрим ҳолларда $R=+\infty$ бўлиши мумкин, бунда (2) нинг яқинлашиш соҳаси C дан иборат бўлади Бу доира (2) нинг яқинлашиш доираси, R — яқинлашиш радиуси дейилади.

2. Яқинлашиш радиуси қуйидагича топилади:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

3. Маълум функцияларнинг даражали қаторга ёйилмалари:

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{z^{2n}}{2n!}+\ldots$$

70. $\int\limits_0^1 \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$ ни топинг.

71. Ушбу тенгсизликни исбот қилинг: $\int\limits_0^1 \frac{x}{\cos x}dx < \ln 2.$

72. $f(x) = \mathrm{tg}^2 x$ мусбат функция.

$$\int\limits_0^{\pi} \mathrm{tg}^2 x d\,x = \int\limits_0^{\pi}\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = [\mathrm{tg} x - x]\Big|_0^{\pi} = -\pi < 0.$$

Хатоликни ҳисобланг.

73. $f'(1)=8,\ f(2)+f''(2)=33;\ \int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{7}{3}$ берилган.

$f(x) = Ax^2 + Bx + C$ нинг A, B, C коэффициентларини аниқланг.

74. $f'(0)=4,\ \int\limits_0^{2\pi} f(x)dx = 3,\ f(x) = A\sin 2x + B$ нинг A ва B ларни аниқланг.

75. $\frac{9x-15}{19} < \int\limits_0^{x} \frac{dy}{(y+1)^2} - 1$ тенгсизликни ечинг.

76. $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \left\| \begin{matrix} x = \cos t \\ \pi \leqslant t \leqslant 2\pi \end{matrix} \right\| = \int\limits_{\pi}^{2\pi} \sqrt{1-\cos^2 t}(-$

$- \sin t)dt = -\int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin^2 t dt = -\frac{\pi}{2}.$

$y = \sqrt{1-x^2} \geqslant 0,\ \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx < 0.$ Ҳисоблашдаги хатоликни аниқланг.

VII БОБ. АНИҚ ИНТЕГРАЛНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

1-§. Текис (ясси) фигуралар юзларини ҳисоблаш

1. Декарт координаталар системасида юзларни ҳисоблаш.

а) $y = f(x)[f(x) \geqslant 0]$ эгри чизиқ, $x = a$ ва $x = b$ тўғри чизиқлар ҳамда Ox ўқининг $[a;\ b]$ кесмаси билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзи.

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

формула орқали ҳисобланади.

б) $y=f(x)$ ва $y=g(x)$ $[f(x)\leqslant g(x),\ x\in[a;\ b]]$ эгри чизиқлар ҳамда $x=a$ ва $x=b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзи

$$S=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx$$

формула орқали ҳисобланади.

2. Параметрик кўринишда берилган эгри чизиқлар билан чегараланган фигура юзини ҳисоблаш.

Агар фигура $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(0\leqslant t\leqslant \mathrm{T})$ параметрик кўринишда берилган ёпиқ эгри чизиқ билан чегараланган бўлса, унинг юзи

$$S=-\int_0^T y(t)x'(t)dx \quad \text{ёки} \quad S=\int_0^T x(t)y'(t)dt$$

формулаларнинг бири билан ҳисобланади.

Бу икки формулани бирлаштириб

$$S=\frac{1}{2}\int_0^T [x(t)y'(t)-y(t)x'(t)]dt$$

ни ҳосил қиламиз.

3. Қутб координаталар системасида берилган узлуксиз эгри чизиқ $\rho=\rho(\theta)$ ва $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ $(\alpha<\beta)$ нурлар билан чегараланган фигуранинг юзи

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2 d\theta$$

формула орқали ҳисобланади.

1. $y=x^2+1$ парабола, $y=0$; $x=-1$ ва $x=4$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

2. $y=\frac{1}{x}$ тенг ёнли гипербола, $x=1$ ва $x=3$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзини ҳисобланг.

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипс юзини ҳисобланг. Хусусий ҳолда R радиусли доиранинг юзини ҳисобланг.

4 $y=(x-1)(x-2)(x-3)$ эгри чизиқ, $x=0$ ва $y=0$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

5. $y=x^2$ парабола ва $y=x$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

6. $y=-x^2$ парабола ва $x+y+2=0$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

7. $y=2x-x^2$ парабола $y=x$, $x=0$, $x=2$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

8. $y=-x^2$, $y=0$; $x=1$; $x=4$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

9. Абсцисса ўқи ва $y=\sin x$ синусоиданинг $[0;\ \pi]$ даги ёйи билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

10. $y=\cos x$ косинусоиданинг $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ даги бўлаги ва $y=0$ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

11. $x^2=4y$ парабола ва $y=\frac{8}{x^2+4}$ Аньези зулфи билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

12. $y=x^2$ ва $y^2=x$ параболалар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

13. $y^2=4x$ парабола ва $x^2+y^2=5$ айлана билан чегараланган фигура (кичик қисми) нинг юзини ҳисобланг.

14. $y^2=x+2$ ва $x=0$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

15. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ циклоиданинг бир аркаси ва абсцисса ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

16. $y=x^2-2x+3$ парабола ва $y=3x-1$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

17. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ астроиданинг юзини ҳисобланг.

18. $x=2\cos t$, $y=2\sin t$ доира чорагининг юзини ҳисобланг.

19 $x^3+y^3=3axy$ Декарт япроғининг юзини ҳисобланг.

20. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ эллипснинг юзини топинг.

21. $\rho=a\varphi$ Архимед спиралининг бир ўрами ва қутб ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

22. $y=\sin x$ ва $y=\cos x$ эгри чизиқлар ва абсцисса ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

23. $\rho=2a(2+\cos\varphi)$ Паскаль чиғаноғи билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

24. $\rho=a(1+\cos\varphi)$ кардиоида билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

25. $\rho^2=a^2\cos2\varphi$ Бернулли лемнискатасининг юзини ҳисобланг.

26. $y=e^x$, $y=e^{-x}$ эгри чизиқлар ва $x=1$ тўғри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

27. $\rho=e^{a\varphi}$ логарифмик спираль ва r_1 ва r_2 қутб радиуслари билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

28. $x^2+y^2+6x-2y+8=0$ айлана ва $y=x^2+6x+10$ парабола билан чегараланган ҳар бир фигуранинг юзини ҳисобланг.

2-§. Ёй узунлигини ҳисоблаш

1. Декарт тўғри бурчакли координаталарида ёй узунлиги. Агар $y=f(x)$ $[a;\ b]$ да силлиқ эгри чизиқ (яъни $f'(x)$ узлуксиз бўлган) бўлса, у ҳолда унинг ёйи узунлигини

$$L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

формула орқали ҳисобланади. Бунда a ва b ёй учларининг абсциссаларидир ($a<b$).

2. Параметрик кўринишда берилган эгри чизиқ ёйининг узунлиги. Агар эгри чизиқ $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ кўринишда берилган бўлиб, $x'(t)$, $y'(t)$ узлуксиз функциялар бўлса, у ҳолда эгри чизиқ ёйининг узунлиги

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$$

формула орқали ҳисобланади. Бунда t_1 ва t_2 лар t параметрнинг ёй учларига мос қийматларидир ($t_1<t_2$).

3. Қутб координаталар системасида берилган силлиқ эгри чизиқ $\rho=\rho(\theta)$, $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ ёйининг узунлиги

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta$$

орқали ҳисобланади. Бунда α ва β—қутб бурчаги θ нинг ёй учларидаги қийматлари ($\alpha<\beta$).

29. $y^2=x^3$ параболанинг O (0; 0) дан $A(1;\ 1)$ нуқтагача бўлган ёйи узунлигини топинг.

30. $y^2=4x$ параболанинг $x=0$ дан $x=1$ гача бўлган ёйи узунлигини топинг.

31. $x^2+y^2=R^2$ айлана узунлигини топинг.

32. $y=\frac{x^2}{2}+1$ параболанинг Ox ўқи билан кесилган ёйининг узунлигини топинг.

33. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ астроиданинг узунлигини ҳисобланг.

34. $9y^2=4x^3$ эгри чизиқнинг $O\,(0;\ 0)$ дан $B(\sqrt{3};\ 2\sqrt{3})$ гача бўлган ёйи узунлигини топинг.

35. $y=\ln x$ эгри чизиқнинг $(\sqrt{3};\ \ln\sqrt{3})$ нуқтадан $(\sqrt{8},\ \ln\sqrt{8})$ нуқтагача бўлган ёйи узунлигини топинг.

36. $y=\operatorname{ch}x$ занжир чизиқнинг $x=0$ дан $x=1$ гача бўлган ёйи узунлигини топинг.

37. $y=\ln\sin x$ эгри чизиқнинг $x=\frac{\pi}{3}$ дан $x=\frac{\pi}{2}$ гача бўлган ёй узунлигини топинг.

38. $y=e^x$ эгри чизиқнинг $x=0$ дан $x=1$ гача бўлган ёйи узунлигини топинг.

39. $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ циклоиданинг $t=0$ дан $t=2\pi$ гача бўлган ёйи узунлигини ҳисобланг.

40. $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ астроиданинг узунлигини топинг.

41. $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t \end{cases}$ эллипс узунлигини $y=\sqrt{a^2-b^2}\times$ $\times\sin\frac{x}{b}$ синусоиданинг бир тўлқин узунлигига тенглигини исбот қилинг.

42. $\begin{cases} x=r\cos t, \\ y=r\sin t \end{cases}$ айлана узунлигини ҳисобланг.

43. $\rho=a\varphi$ Архимед спирали бир ўрамининг узунлигини топинг.

44. $\rho=ae^{m\varphi}$ логарифмик спиралнинг $(\rho_0;\ \varphi_0)$ дан $(\rho_1;\ \varphi_1)$ гача ёйи узунлигини топинг.

45. $\rho=a(1+\cos\varphi)$, $a>0$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ кардиоида узунлигини ҳисобланг.

46. $\rho\varphi=1$ гиперболик спиралнинг $\varphi=\frac{3}{4}$ дан $\varphi=\frac{4}{3}$ гача бўлган ёйи узунлигини ҳисобланг.

47. $\theta=\sqrt{\rho}$ $(0\leqslant\rho\leqslant 5)$ нинг узунлигини ҳисобланг.

48. $\rho=R$ айлана узунлигини ҳисобланг.

3-§. Ҳажмларни ҳисоблаш

1. Маълум кўндаланг кесимлари бўйича жисм ҳажмини ҳисоблаш.

Агар жисмнинг Ox ўқига перпендикуляр текисликлар билан кесишмасида ҳосил бўлган кесим юзи $S(x)$ берилган бўлса, у ҳолда бу жисм ҳажми

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

орқали ҳисобланади, бунда a ва b лар x нинг ўзгариш чегаралари бўлиб, $S(x)$ функция $[a; b]$ да аниқланган ва узлуксиз деб қаралади.

2. Тўғри бурчакли координаталар системасида айланма жисм ҳажми

а) Ox ўқи атрофида $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ текис фигурани айлантириш натижасида ҳосил бўладиган жисм ҳажми

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

орқали ҳисобланади.

б) Oy ўқи атрофида $c \leqslant y \leqslant d$, $0 \leqslant x \leqslant \varphi(y)$ текис фигурани айлантириш натижасида ҳосил бўладиган жисм ҳажми

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy$$

орқали ҳисобланади.

в) Oy ўқи атрофида $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant y(x)$ ни айлантириш натижасида ҳосил бўладиган жисм ҳажми

$$V = 2\pi \int_a^b xy(x)dx$$

орқали ҳисобланади.

3. Параметрик усулда берилган $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ эгри чизиқни Ox ўқи атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўладиган жисм ҳажми

$$V = \pi \int_\alpha^\beta [y(t)]^2 x'(t)dt$$

орқали хисобланади.

4. Қутб координаталар системасида берилган $\rho = \rho(\theta)$ эгри чизиқ $\rho = \alpha$, $\rho = \beta$ радиус-векторлар билан чегараланган текис фигурани қутб ўқи атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўладиган жисм ҳажми

$$V = \pi \int_\alpha^\beta \rho^3 \sin^3 \theta d\theta$$

орқали ҳисобланади.

$0 \leqslant \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta \leqslant \pi$ бўлганда $V = \dfrac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta \rho^3(\theta) \sin\theta \, d\theta$ бўлади.

49. $y^2=4x$ параболанинг $O(0;\ 0)$ ва $A(4;\ 4)$ нуқталари орасидаги ёйини Ox ўқи атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўладиган айланма параболоиднинг ҳажмини ҳисобланг.

50. $y^2=4ax$ парабола ва $x=a$ тўғри чизиқдан ҳосил бўлган фигурани $y=-2a$ тўғри чизиқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажмини топинг.

51. $y=x^2-4$ параболанинг Ox ўқи билан кесишганда ҳосил бўлган ёйини Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажмини топинг.

52. $y=x^3$, $y=0$, $x=2$ чизиқлар билан чегараланган фигурани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини топинг.

53. R радиусли шарнинг ҳажмини ҳисобланг.

54. $y=x^3$, $y=0$, $x=2$ чизиқлар билан чегараланган фигурани Oy ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини топинг.

55. $y=\frac{r}{h}x$ тўғри чизиқни $[0;\ h]$ да Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган конуснинг ҳажмини ҳисобланг.

56. $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=1$ чизиқлар билан чегараланган фигурани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажмини ҳисобланг.

57. $y=\frac{r_2-r_1}{h}x+r_1$ тўғри чизиқни $(r_2>r_1)$ $[0;\ h]$ да Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган кесик конуснинг ҳажмини ҳисобланг.

58. $x^2-y^2=4$, $y=-2$, $y=2$ чизиқлар билан чегараланган фигурани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажмини ҳисобланг.

59. Шар сегментининг ҳажмини топинг.

60. $y=\sin x\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$ синусоидани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажмини топинг.

61. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсни Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган айланма эллипсоиднинг ҳажмини ҳисобланг.

62. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоиднинг ҳажмини топинг.

63. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболани $(0\leqslant y\leqslant b)$ Oy ўқи атро-

фида айлантиришдан ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажмини топинг.

64. $y = x^2$ ва $y^2 = x$ параболалар билан чегараланган фигурани Ox ўқи атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажмини топинг.

65 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ циклоиданинг бир аркасининг Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажмини ҳисобланг.

66. $\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t \end{cases}$ астроидани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажмини топинг.

67. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ астроидани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажмини топинг.

68. $\rho = a\varphi$ Архимед спиралининг ярим айланасини $(a > 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ қутб ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган жисмнинг ҳажмини топинг.

69. $y^2 = 2px$ параболанинг $\left[0; \frac{p}{2}\right]$ даги ёйини Oy ва Ox ўқлари атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган жисм ҳажмини топинг.

70. $\rho = e^{\varphi}(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ логарифмик спиралнинг қутб ўқи билан чегараланган ёйи ташкил қилган фигурани қутб ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини топинг.

71. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ занжир чизиғи ва $x = -a$, $x = a$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигурани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини топинг.

72. Шар секторининг ҳажмини топинг.

73. $x^2 + (y - b)^2 = r^2$, $(b > r)$ доирани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган тор ҳажмини ҳисобланг.

74. Шар қатлами (камари нинг ҳажмини топинг.

4-§. Айланма жисм сиртининг юзи

1. Тўғри бурчакли координаталар системасида $y=f(x)$ силлиқ эгри чизиқ ёйини ($a \leqslant x \leqslant b$) Ox ўқи атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўладиган жисм сиртининг юзи

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx$$

орқали ҳисобланади.

2. Параметрик кўринишда берилган эгри чизиқ учун $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$ ($t_1 \leqslant t \leqslant t_2$) сирт юзи $S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$ орқали ҳисобланади.

3. Қутб координаталар системасида силлиқ эгри чизиқ $\rho=\rho(\theta)$ ($\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$) берилган бўлса, уни қутб ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм сиртининг юзи

$$S=2\pi \int_\alpha^\beta \rho\sin\theta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta$$

формула орқали ҳисобланади.

75. $y=\sin x$ синусоиданинг $x=0$ дан $x=\frac{\pi}{2}$ гача бўлган ёйини Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзини топинг.

76. $y=\operatorname{tg}x$ $\left(0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{4}\right)$ ни Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзини топинг.

77. $y=2\operatorname{ch}\frac{x}{4}$ нинг $x=0$ дан $x=2$ гача бўлган ёйини Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

78. $y^2=2x$, $(0\leqslant x\leqslant 2)$ параболани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

79. $y=x^3$ параболанинг $x=0$ дан $x=1$ гача бўлган ёйини Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

80. $x^2+y^2-2rx=0$ доирани Ox ўқи атрофида $(0\leqslant x\leqslant h<2r)$ айлантиришдан ҳосил бўлган шар қисмининг юзини топинг.

81. R радиусли шар $(x^2+y^2+z^2=R^2)$ сиртининг юзини ҳисобланг.

82. $\rho=a(1+\cos\theta)$ кардиоидани қутб ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

83. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсни Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

84. $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ лемнискатани қутб ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

85. $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ циклоиданинг бир аркасини Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

86. Радиуси r, баландлиги h бўлган конуснинг сирт юзини ҳисобланг.

87. $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ астроидани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг.

88. $\rho=R$ айланани қутб ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сферик сирт юзини ҳисобланг.

89. $\begin{cases} x=r\cos t, \\ y=r\sin t \end{cases}$ айланани ўз диаметри атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган r радиусли сферик сирт юзини ҳисобланг.

90. Сферик камар сиртининг юзини ҳисобланг.

91. $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(b\geqslant a)$ айланани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган тор сиртининг юзини ҳисобланг.

92. Сферик сегментнинг юзини ҳисобланг.

5-§. Ясси эгри чизиқ ва фигураларнинг оғирлик маркази. Гюльден теоремалари

1. Агар масса $y=f(x)$ эгри чизиқ ёйи бўйича текис тақсимланган (зичлик $\rho=1$) бўлса, у ҳолда $y=f(x)\geqslant 0$, $(a\leqslant x<b)$ эгри чизиқнинг Ox ва Oy ўқларга нисбатан статик моментлари мос ҳолда

$$M_x=\int_a^b ydl,\quad M_y=\int_a^b xdl$$

бўлади, бунда $dl=\sqrt{dx^2+dy^2}$.

Шу ёй оғирлик марказининг координаталари эса

$$\bar{x}=\frac{1}{L}\int_a^b xdl,\quad \bar{y}=\frac{1}{L}\int_a^b ydl$$

бўлади, бунда $dl=\sqrt{dx^2+dy^2}$ ва L— ёй узунлиги.

2. $y=f(x)$ силлиқ эгри чизиқ, $x=a$, $x=b$ тўғри чизиқлар ва Oy ўқи билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг Ox ва Oy ўқларига нисбатан статик моментлари мос ҳолда

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx,\quad M_y=\int_a^b xydx$$

бўлади. Шу фигура оғирлик марказининг координаталари эса

$$\bar{x}=\frac{1}{S}\int_a^b xds=\frac{1}{S}\int_a^b xydx,$$

$$\bar{y}=\frac{1}{2S}\int_a^b yds=\frac{1}{2S}\int_a^b y^2dx$$

бўлади, бунда S—жисм сиртининг юзи.

3. $y=f(x)\,(a\leqslant x\leqslant b)$ силлиқ эгри чизиқ ёйини Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт юзи шу ёй узунлиги билан унинг оғирлик маркази чизган айлана узунлигининг кўпайтмасига тенг (Гюльденнинг 1-теоремаси):

$$2\pi\bar{y}\cdot L=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

4. $y=f(x)$ эгри чизиқ, $x=a$, $x=b$ тўғри чизиқлар ва Ox ўқи билан чегараланган текис фигурани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган фигуранинг ҳажми берилган фигура юзи билан унинг оғирлик маркази чизган айлана узунлигининг кўпайтмасига тенг (Гюльденнинг 2-теоремаси):

$$2\pi\bar{y}\cdot S=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

93. $y=\cos x$ косинусоиданинг $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ Ox га нисбатан статик моментини топинг.

94. $y=\cos x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ косинусоида ва Ox ўқи билан чегараланган фигуранинг оғирлик марказини топинг.

95. $x^2+y^2=r^2\,(y\geqslant 0)$ ярим айлананинг оғирлик маркази координаталарини топинг.

96. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипснинг Ox ўқи устидаги ёйининг Ox ўққа нисбатан статик моментини аниқланг.

97. $x^2+y^2\leqslant r^2\,(y\geqslant 0)$ ярим доиранинг оғирлик марказини аниқланг.

98. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипс юзининг биринчи квадрантдаги бўлагининг оғирлик марказини топинг.

99. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипс ёйининг биринчи квадрантдаги бўлагининг оғирлик марказини топинг.

100. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ астроида ёйининг биринчи квадрантдаги қисмининг оғирлик марказини топинг.

101. $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ циклоида бир аркаси ва Ox ўқи билан чегараланган фигуранинг оғирлик марказини топинг.

102. Гюльден теоремасидан фойдаланиб, $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(a<b)$ доирани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган тор ҳажмини топинг.

103. $\rho=a(1+\cos\varphi)$ кардиоида ёйининг оғирлик марказини топинг.

104. Гюльден теоремасидан фойдаланиб, r радиусли ярим айлананинг оғирлик марказини аниқланг.

105. Гюльден теоремасидан фойдаланиб, шарнинг сирт юзини ҳисобланг.

106. Гюльден теоремасидан фойдаланиб, доиравий конуснинг ҳажми ва ён сиртини топинг.

6-§. Чегараланмаган кесмада аниқланган функциянинг хосмас интеграли

1. $f(x)$ функция x нинг барча $x \geqslant a$ қийматларида аниқланган ва $[a; n]$ да интегралланувчи бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^n f(x)dx$ лимит $f(x)$ функциянинг a дан $+\infty$ гача олинган хосмас интеграли дейилади ва $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ орқали белгиланади. Шунга ўхшаш

$$\lim_{n\to-\infty}\int_n^b f(x)dx=\int_{-\infty}^b f(x)dx,$$

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^c f(x)dx+\lim_{\beta\to-\infty}\int_c^\beta f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Агар кўрсатилган лимитлар мавжуд ва чекли бўлса, хосмас интеграллар яқинлашувчи, акс ҳолда узоқлашувчи дейилади.

2. Солиштириш аломати

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $x \geqslant a$ да аниқланган ва $[a; n]$ да интегралланувчи. Агар $\forall x \geqslant a$ учун $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ бўлса, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ нинг яқинлашишидан $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ нинг ҳам яқинлашиши келиб чиқади ва $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \leqslant \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ нинг узоқлашишидан $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ нинг ҳам узоқлашувчи бўлиши келиб чиқади.

3. Абсолют яқинлашиш аломати

$f(x)$ функция $\forall x \geqslant a$ учун аниқланган. Агар $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ яқинлашувчи бўлса, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ ҳам яқинлашувчи бўлади ва у абсолют яқинлашувчи дейилади. Агар $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ яқинлашувчи, $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ узоқлашувчи бўлса, у ҳолда $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ шартли яқинлашувчи дейилади.

Хосмас интегралларни ҳисобланг:

107. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$.

108. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$.

109. $\int\limits_0^{+\infty} \sin xdx$.

110. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

111. $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

112. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

113. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x+x^3}$.

114. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$.

Қуйидаги интегралларнинг яқинлашишини текширинг.

115. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$.

116. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-px}dx$.

Солиштириш аломатидан фойдаланиб, яқинлашишни текширинг.

117. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^8}$. **118.** $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Хосмас интегралларни текширинг.

119. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$. **120.** $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x)^3}$.

121. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$. **122.** $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

7-§. Чегараланмаган функцияларнинг хосмас интеграллари

1. $f(x)$ функция $[a;\ b[$ да аниқланган ва $[a;\ b-\varepsilon](\varepsilon>0)$ да интегралланувчи, лекин $]b-\varepsilon,\ b\,[$ да чегараланмаган бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

деб олинади. Агар бу лимит мавжуд ва чекли бўлса, хосмас интеграл яқинлашувчи, акс ҳолда узоқлашувчи дейилади. Шунга ўхшаш

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

ва

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0+} \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)dx$$

таърифланади, охиргида c нуқта атрофида $f(x)$ функция чегараланмаган.

2. Агар $[a;\ b]$ да $f(x)>0$, $\alpha<1$ ва $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)(b-x)^{\alpha}<\infty$ бўлса, $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ яқинлашувчи, $f(x)>0$, $\alpha\geqslant 1$ ва $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)\,(b-x)^{\alpha}>0$ бўлса, $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ узоқлашувчи бўлади.

3. Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $[a;\ c]$ нинг c нуқтасида узилишга эга ва $\varphi(x)\geqslant f(x)\geqslant 0$ бўлса, у ҳолда $\int\limits_{a}^{c} \varphi(x)dx$ нинг яқинла-

шувчи бўлишидан $\int\limits_a^c f(x)dx$ нинг ҳам яқинлашувчи экани келиб чиқади.

Чегараланмаган функциялар хосмас интегралларини текширинг.

123. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$.

124. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

125. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

126. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

127. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$.

128. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

129. $\int\limits_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$.

130. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

131. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

132. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+4x^3}$.

VII бобга доир аралаш масалалар

133. $y=\ln(x+\sqrt{1+x})$, $x=3$, $x=8$, $y=0$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

134. $\rho=a\sin k\varphi(k=3,\ k=4)$ тенглама билан аниқланган „атиргул“ эгри чизиғининг бир япроғининг юзини топинг.

135. $x^2+y^2=ax$ цилиндрнинг $x^2+y^2+z^2=a^2$ сфера ичидаги сирт юзини топинг.

136. $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$ цилиндрларнинг кесишмасида ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини топинг.

137. Баландлиги h, асоси эса ярим ўқлари a ва b бўлган эллипсдан иборат, эллиптик тўғри конуснинг ҳажмини топинг.

138. R радиусли шарнинг ҳажмини топинг (айланма жисм деб қаралмасин).

139. Асоси ва баландлиги мос ҳолда сферик сегментнинг асос ва баландлигига тенг бўлган цилиндрнинг ён сирти сферик сегментнинг сирт юзига тенглигини исбот қилинг.

140 $y = 2x - x^2$ парабола, $y = 2^x$ эгри чизиқ ва $x = 0$, $x = 2$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

141. $\rho = a(1 + \cos\theta)$ кардиоидани қутб ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини ҳисобланг.

142. $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x + 2}$, $g(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x + 2}$ эгри чизиқлар, $x = 2$ ва $x = 3$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

143. $A(0; 4)$, $B(1; 9)$, $C(3; 7)$ нуқталар орқали $y = ax^2 + bx + c$ парабола ўтган. A нуқтадан ўтган тўғри чизиқ тенгламаси топилиши керак, бу тўғри чизиқ ва парабола ташкил қилган фигуранинг юзи 9 га тенг.

144. $y = x^n (0 \leqslant x \leqslant 1)$ функция графигининг белгили нуқтаси орқали абсцисса ўқига параллел ўтказилган.

Қандай нуқта учун $y = x^n$ нинг графигига ўтказилган тўғри чизиқ ва $x = 0$, $x = 1$ тўғри чизиқлар ҳосил қилган иккита эгри чизиқли учбурчаклар юзларининг йиғиндиси энг кичик бўлади?

145. Дифференциалланувчи ва қатъий ўсувчи $y = f(x)$ функция графигининг $t \in [a; b]$ нуқтаси орқали Ox ўқига параллел тўғри чизиқ ўтказилган. $y = f(x)$ нинг графиги, ўтказилган тўғри чизиқ, $x = a$, $x = b$ тўғри чизиқлар ҳосил қиладиган иккита эгри чизиқли учбурчаклар юзларининг йиғиндиси t нинг қандай қийматида энг кичик бўлади?

VIII БОБ. СОНЛИ ҚАТОРЛАР

1-§. Асосий тушунчалар

Агар $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ — сонлар кетма-кетлиги бўлса, у ҳолда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

сонли қатор дейилади. $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — қатор ҳадлари, u_n — қаторнинг умумий ҳади дейилади. Кўп ҳолларда (1) қисқача $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ орқали белгиланади.

1. Қаторнинг биринчи n та ҳади йиғиндиси унинг хусусий йиғиндиси дейилади:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Агар $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ чекли бўлса, (1) қатор яқинлашувчи қатор дейилади ва S (1) қаторнинг йиғиндиси дейилади. Агар $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ чексиз бўлса ёки мавжуд бўлмаса, у ҳолда (1) қатор узоқлашувчи қатор дейилади.

2. $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+k} + \dots$ (2)

кўринишдаги қатор (1) нинг n-ҳаддан кейинги қолдиғи дейилади ва қисқача $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$ орқали белгиланади.

Бунда:

а) Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (2) қатор хам яқинлашувчи бўлади ва аксинча;

б) Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $au_1 + au_2 + \dots + au_n + \dots$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади ва йиғиндиси aS га тенг бўлади;

в) Агар $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ ва $\sigma = v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$ қаторлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n) + \dots$ қатор яқинлашувчи бўлади ва йиғиндиси $S + \sigma$ га тенг бўлади;

г) Агар (1) қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ бўлади (қатор яқинлашишининг зарурий шарти).

Агар $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ бўлса, у ҳолда қатор узоқлашувчи бўлади.

Қаторнинг умумий ҳади a_n берилган. Унинг биринчи учта ҳадини ёзинг.

1. $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$.
2. $a_n = \dfrac{n}{2^n(n+1)}$.
3. $a_n = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$
4. $a_n = \dfrac{2n-1}{4n^2+1}$.

Қаторнинг биринчи бир неча ҳадига кўра унинг умумий ҳадини ёзинг.

5. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{20} + \dots$
6. $1 + \frac{4}{2} + \frac{9}{6} + \frac{16}{24} + \frac{25}{120} + \dots$
7. $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \dots$
8. $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{4}{11} + \dots$

Қаторларнинг йиғиндиларини топинг.

9. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$

10. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \dots$

11. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$

12 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$

13. $\frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{5}{4 \cdot 9} + \frac{7}{9 \cdot 16} + \dots$

14. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$

Қатор яқинлашишининг зарурий шартидан фойдаланиб, қуйидаги қаторларнинг узоқлашишини кўрсатинг.

15. $0{,}6 + 0{,}51 + 0{,}501 + 0{,}5001 + \dots$

16. $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{4}{11} + \dots$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+4}$. 18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{2n}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. 20 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}$.

2- §. Мусбат ҳадли қаторлар

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1), \quad b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (2)$$

мусбат ҳадли қаторлар берилган бўлсин, яъни $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$ $\forall n \in N$.

1) Солиштириш аломати. Агар $\forall n \in N$ учун $a_n \leqslant l$ ўринли бўлиб, (2) қатор яқинлашувчи бўлса, (1) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади ва (1) қатор узоқлашувчи бўлганда (2) қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.

Бу аломат n нинг бирор $n_0 \in N$ қийматидан бошлаб барча $n > n_0$ учун $a_n \leqslant b_n$ бўлганда ҳам ўринлидир.

2) 2-солиштириш аломати. Агар чекли $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = K \neq 0$ мавжуд бўлса, у ҳолда (1) ва (2) қаторлар бир вақтда ё яқинлашувчи, ё узоқлашувчи бўлади.

3) **Коши аломати.** Агар (1) учун $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ мавжуд бўлиб, $l < 1$ бўлса, у ҳолда (1) қатор яқинлашувчи, $l > 1$ да эса узоқлашувчи бўлади.

4) **Даламбер аломати.** Агар (1) учун $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ мавжуд бўлиб, $l < 1$ бўлса, қатор яқинлашувчи, $l > 1$ да узоқлашувчи бўлади.

5) **Коши интеграл аломати.** Агар $f(x)$ функция $[1; +\infty]$ да узлуксиз, камаювчи, мусбат бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ қатор ва $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ хосмас интеграл бир вақтда ё яқинлашувчи, ё узоқлашувчи бўлади.

6) **Раабе аломати.** Агар (1) қатор учун $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l$ бўлиб, $l > 1$ бўлса, қатор яқинлашувчи, $l < 1$ да узоқлашувчи бўлади.

7) **Гаусс аломати.** Агар (1) қатор учун $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^m + b_1 n^{m-1} + \ldots + b_m}{n^m + c_1 n^{m-1} + \ldots + c_m}$ бўлиб, $c_1 - b_1 > 1$ бўлса, қатор яқинлашувчи, $c_1 - b_1 \leqslant 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.

Солиштириш аломатидан фойдаланиб, қаторларнинг яқинлашиши ёки узоқлашишини кўрсатинг.

21. $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{2^n + 1} + \ldots$

22. $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \ldots + \frac{1}{\ln(n+1)} + \ldots$

23. $1 + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots \ (p < 1).$

24. $\frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{5}{4 \cdot 9} + \frac{7}{9 \cdot 16} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \ldots$

25. $\sin^2\alpha + \frac{\sin^2 2\alpha}{8} + \ldots + \frac{\sin^2 n\alpha}{n^3} + \ldots$

26. $1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 5^{n-1}} + \ldots.$

Коши аломатидан фойдаланиб, қаторларни текширинг.

27. $\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \ldots$

28. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots$

29. $\sin\frac{1}{2}+4\cdot\sin^2\frac{1}{4}+27\cdot\sin^3\frac{1}{6}+\ldots+n^n\sin n\frac{2}{2n}+\ldots$

30. $\arcsin 1+\arcsin^2\frac{1}{2}+\arcsin^3\frac{1}{3}+\ldots+$

$+\arcsin^n\frac{1}{n}+\ldots$

Даламбер аломатидан фойдаланиб, қаторларни текширинг.

31. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$

32. $\frac{10}{1!}+\frac{10^2}{2!}+\frac{10^3}{3!}+\ldots+\frac{10^n}{n!}+\ldots$

33. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2^2}+\ldots+\frac{\sqrt{n}}{2^n}+\ldots$

34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{n}$.

Коши интеграл аломатидан фойдаланиб, қаторларни текширинг.

35. $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}+\ldots$

36. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$

37. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.

38. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

39. $\frac{\ln 2}{4}+\frac{\ln 3}{9}+\ldots+\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}+\ldots$

40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$.

3- §. Ихтиёрий ҳадли қаторлар

1. Ҳар қандай икки қўшни ҳади қарама-қарши ишорали қийматларга эга бўлган қатор ишора алмашинувчи дейилади. Ишора алмашинувчи қатор

$$a_1-a_2+a_3-\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots;\ (1)\ (a_n>0,\ n\in N)$$

каби ифодаланади.

Лейбниц аломати. Агар (1)да $\forall n \in N$ учун $a_n \geqslant a_{n+1}$ (2) тенгсизлик ўрин булиб, $\lim a_n = 0$ (3) бўлса, у ҳолда (1) қатор яқинлашувчи бўлади. Агар $r_n = S - S_n$ бўлса, у ҳолда $|r_n| < a_{n+1}$ бўлади, яъни қатор йиғиндиси S ни унинг хусусий йиғиндиси S_n билан алмаштирганда хато биринчи ташланган ҳад a_{n+1} нинг модулидан катта бўлмайди.

2. Ихтиёрий ишорали ҳадларга эга қатор

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \tag{4}$$

берилган ва

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + \dots \tag{5}$$

модуллардан тузилган қатор бўлсин.

Агар (5) қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (4) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади ва (4) қатор абсолют яқинлашувчи дейилади.

Агар (4) қатор яқинлашувчи, (5) қатор эса узоқлашувчи бўлса, у ҳолда (4) қатор шартли яқинлашувчи дейилади.

3. Агар (4) қатор абсолют яқинлашувчи бўлса, унинг ҳадлари ўрнини алмаштирганда яна абсолют яқинлашувчи қатор ҳосил бўлади ва йиғиндиси ўзгармайди.

Агар (4) қатор шартли яқинлашувчи бўлса, ҳар қандай B сон учун қатор ҳадларининг ўрнини тегишлича алмаштирганда, унинг йиғиндиси худди B сондан иборат бўлади. (Риман теоремаси.)

4.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = A \tag{4'}$$

ва

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots = B \tag{6}$$

қаторлар учун

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \dots + (a_1b_n + \dots + a_nb_1) + \dots \tag{7}$$

қатор (4) ва (6) нинг кўпайтмаси дейилади.

(4) ва (6) абсолют яқинлашувчи бўлганда, (7) ҳам яқинлашувчи бўлади ва (7) нинг йиғиндиси $C = A \cdot B$ бўлади.

Ишора алмашинувчи қаторларнинг абсолют, шартли яқинлашишини ёки узоқлашишини текширинг.

41. $1 - \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} - \dots$

42. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$

43. $\frac{1}{10} - \frac{1}{20} + \frac{1}{30} - \dots$

44. $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \dots$

45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos na}{2^n}$.

46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{3}$.

47. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$.　　48. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$.

49. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$.　　50. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$.

Лейбниц аломатидан фойдаланиб бўлмаслигига ишонч ҳосил қилиб, қаторларнинг яқинлашишини текширинг.

51. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^5}+\ldots$

52. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3^3}+\ldots$

53. $1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^4}-\ldots+\frac{1}{(2n-1)^4}-\frac{1}{(2n)^3}+\ldots$

54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Қатор йиғиндисини 0,01 аниқлик билан топинг.

55. $1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\ldots$

56. $-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{28}+\frac{1}{65}-\frac{1}{126}+\ldots$

57. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$.　　58. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\ln 2$ қатор ҳадлари ўринларини алмаштиришдан ҳосил бўлган қуйидаги қаторлар йиғиндиларини аниқланг.

59. $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\ldots$

60. $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots$,

61. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+$ $+\ldots$ ни текширинг.

62. Яқинлашувчи $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$ қатор ҳадларининг ўрнини шундай алмаштирингки, узоқлашувчи қатор ҳосил бўлсин.

63. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ ва $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$ қаторларнинг кўпайтмаси 1 га тенг бўлишини кўрсатинг.

64. $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ эканлигини кўрсатинг.

65. $1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\ldots$ — шартли яқинлашувчи қаторнинг квадрати яқинлашувчи бўладими?

66. Агар $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ ва $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ қаторлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ абсолют яқинлашувчи бўлишини исботланг.

67. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ва $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ қаторларнинг айирмаси яқинлашувчими?

68. Йиғиндиси яқинлашувчи, айирмаси эса узоқлашувчи бўлган иккита қатор топинг.

69. Бири яқинлашувчи, иккинчиси узоқлашувчи бўлган икки қаторнинг йиғиндиси қандай қатор бўлади? Ҳар иккаласи узоқлашувчи бўлганда-чи?

70. $1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8}{2}\right)^n$ ва $1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ узоқлашувчи қатордардир. Уларнинг кўпайтмаси абсолют яқинлашувчи бўлишини кўрсатинг.

IX БОБ. ФУНКЦИОНАЛ ҚАТОРЛАР

1-§. Функционал қаторнинг яқинлашиш соҳаси. Текис яқинлашиш

1. $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\ldots$, $u_n(x)$, $\ldots$ функциялар бирор E соҳада аниқланган бўлсин.

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

функционал қатор $x = x_0 \in E$ да сонли қатор $u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots$ (2) га айланади.

Агар (2) яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (1) функционал қатор x_0 да яқинлашади ёки x_0 (1) нинг яқинлашиш нуқтаси дейилади. (1) қаторнинг барча яқинлашиш нуқталарининг тўплами (1) нинг яқинлашиш соҳаси дейилади ва $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ — (1) қаторнинг йиғиндиси дейилади. $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ — қаторнинг қолдиғи дейилади.

2. Агар $\forall \varepsilon > 0\ \exists N n > N$ ва $\forall\ x \in E \Longrightarrow |R_n(x)| < \varepsilon$ бўлса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қатор E тўпламда текис яқинлашувчи дейилади.

Функционал қаторнинг текис яқинлашиш критерийси:

Агар $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N\ n > N$ ва $\forall x \in E \Longrightarrow |u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+m}(x)| < \varepsilon$ бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор Eда текис яқинлашувчи бўлади ва аксинча.

Вейерштрасс аломати.

Агар берилган $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қатор учун $\forall n \in N$ $\forall x \in E \Longrightarrow |u_n(x)| \leqslant c_n$ ни қаноатлантирадиган яқинлашувчи сонли қатор $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ мавжуд бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қатор E да текис яқинлашувчи ва ҳар бир $x \in E$ нуқтада абсолют яқинлашувчи бўлади.

3. Текис яқинлашувчи қаторларнинг асосий хоссалари:

а) ҳадлари узлуксиз функциялардан тузилган текис яқинлашувчи қаторнинг йиғиндиси ўша соҳада узлуксиз функция бўлади.

б) узлуксиз функциялардан тузилган текис яқинлашувчи қаторни ҳадлаб интеграллаш мумкин, яъни $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx =$

$$= \int\limits_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx.$$

в) Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қаторнинг ҳар бир ҳади J оралиқда узлуксиз дифференциалланувчи ва J да яқинлашувчи, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ қатор J да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ қаторни ҳадлаб дифференциаллаш мумкин, яъни $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)'$.

Функционал қаторларнинг яқинлашиш соҳасини топинг.

1. $1 + 2!x + 3!x^2 + \ldots + n!x^{n-1} + \ldots$

2. $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{1}{x^n} + \ldots$

3. $\frac{x+2}{x+3} + \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^n + \ldots$

4. $\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}} + \ldots$

5. $1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \ldots + \frac{1}{n^x} + \ldots$

6. $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n + \ldots$

Функционал қаторларнинг текис яқинлашишини текширинг.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n \cos n^2 x \ (|a| < 1)$. 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+2^n}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^{2n}+n}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ қатор]-1; 1[да текис яқинлашувчи эмас. Текширинг.

Вейерштрасс аломати ёрдамида текширинг.

11. $\sin 2x + \frac{1}{2^2}\sin^2 2x + \frac{1}{3^2}\sin^3 2x + \ldots$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}$.

13. $1+\frac{\cos x}{1!}+\frac{\cos^2 x}{2!}+\dots+\frac{\cos^n x}{n!}+\dots$ қаторни ҳадлаб интеграллаш мумкинми?

14. $\sin x+\frac{\sin 2x}{2^5}+\frac{\sin 3x}{3^5}+\dots+\frac{\sin nx}{n^5}+\dots$ қаторни ҳадлаб дифференциаллаш мумкинми?

Ушбу функционал қаторлар йиғиндиси узлуксизми, текширинг:

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n(1+x^{2n})}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+n^2x^2}$.

2-§. Даражали қаторлар

1. $a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots+a_n(x-x_0)^n+\dots$ (1)
кўринишдаги қатор даражали қатор дейилади.

$$x_0=0 \text{ да } a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots \qquad (2)$$

қатор x нин даражалари бўйича ёйилган қатор дейилади.

(2) нинг яқинлашиш радиуси деб шундай R сонга айтиладики, $|x|<R$ да (2) қатор яқинлашувчи ва $|x|>R$ да узоқлашувчи бўлади. $]-R; R[$ эса (2) қаторнинг яқинлашиш интервали дейилади.

(2) қаторнин яқинлашиш радиуси Коши—Адамар формулалари ёрдамида ҳисобланади:

$$R=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,\quad R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

(1) қаторнинг яқинлашиш интервали $]x_0-R; x_0+R[$ бўлади.

2. а) $]-R; R[$ яқинлашиш интервалида жойлашган ҳар қандай $[a; b]$ да (2) қатор текис яқинлашувчи бўлади.

б) Яқинлашиш интервалида (2) қатор йиғиндиси узлуксиз функция бўлади.

в) (2) қаторни яқинлашиш интервалида жойлашган ҳар қандай кесмада ҳадлаб интеграллаш мумкин:

$$\int_{-r}^{r}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ndx=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_{-r}^{r}x^ndx,\quad \forall[-r; r]\subset]-R; R[.$$

г) $a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots$ (2) ва $a_1+2a_2x+\dots+na_nx^{n-1}+\dots$ (2′)
қаторлар бир хил яқинлашиш радиусларига эга.

(2) қаторни $\forall[-r, r]\subset]-R;\ R[$ да ҳадлаб дифференциаллаш мумкин:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Даражали қаторларнинг яқинлашиш радиусларини, яқинлашиш интервалларини ва яқинлашиш соҳаларини топинг.

17. $1-3x+9x^2-27x^3+\dots$

18. $1+5x+2\cdot 25x^2+3\cdot 125x^3+\dots$

19. $x+2!x^2+3!x^3+\dots$

20. $(x+5)+\frac{(x+5)^2}{2^4}+\frac{(x+5)^3}{3^4}+\dots$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 10^{2n}(2x-3)^{2n-1}.$

22 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,2^n}{(2n)!}x^{2n}.$

23. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^{2n}.$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}.$

Қаторларнинг йиғиндиларини топинг.

25. $1+2x+3x^2+4x^3+\dots$

26. $x+x^3+x^4+\dots$

27. $1\cdot 2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\dots$

28. $-2x+4x^3-6x^5+8x^7-\dots$

29. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots$

30 $x+(x^2-x)+(x^3-x^2)+\dots$

3-§. Тейлор қатори

1. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтанинг бирор $u(x_0, \delta)$ атрофида исталган марта дифференциалланувчи ва шу оралиқда $|f^n(x)|<M$ тенгсизлик ўринли бўлиб, M сони n га боғлиқ бўлмаса, у ҳолда $f(x)$ функция ўзининг Тейлор қаторига ёйилади дейилади:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$
$$+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\dots \qquad (1)$$

$x_0 = 0$ да

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \quad (2)$$

(2) қатор Маклорен қатори деб юритилади.

2. Қуйида баъзи функцияларнинг Тейлор қаторига ёйилмаларини келтирамиз:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \ x \in]-\infty; +\infty[.$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots; \ x \in]-\infty; +\infty[.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots;$$

$$x \in]-\infty; +\infty[.$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots; \ x \in]-\infty; +\infty[.$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots; \ x \in]-\infty; +\infty[.$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots; \ x \in]-1; 1[.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots; \ x \in]-1; 1[.$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots;$$

$$x \in [-1; 1].$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots +$$

$$+ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots; \ x \in]-1; 1[.$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots;$$

$$x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[.$$

Қуйидаги функцияларни турли усуллардан (алгебраик, ҳадлаб интеграллаш ва дифференциаллаш) фойдаланиб, x нинг даражалари бўйича Тейлор (Маклорен) қаторига ёйинг.

31. $f(x) = e^{-x^2}$. **32.** $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

33. $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$. 34. $f(x)=\frac{\arcsin x}{x}$.

$x-a$ даражалари бўйича Тейлор қаторига ёйинг.

35. $f(x)=\ln x$; $a=1$.

36 $f(x)=e^x$; $a=-4$.

37. $f(x)=x^4+2x^3+5x^2+2x+4$; $a=-3$.

38. $f(x)=\frac{1}{x}$; $a=-2$.

x нинг даражалари бўйича ёйилганда қаторнинг биринчи тўрт ҳадини топинг.

39. $f(x)=\sec x$. 40. $f(x)=e^{\cos x}$.

41. $f(x)=\operatorname{th} x$. 42. $f(x)=\ln\cos x$.

Қаторларнинг кўпайтириш қоидасидан фойдаланиб, x нинг даражалари бўйича ёйилмаларни топинг.

43. $f(x)=e^x\sin x$. 44. $f(x)=\cos^2 x$.

45. $f(x)=\operatorname{arctg}^2 x$. 46. $f(x)=\frac{\arcsin^2 x}{x^2}$.

Қуйидаги функцияларни Маклорен қаторига ёйиб бўладими?

47. $f(x)=\frac{1}{x+1}$. 48. $f(x)=\ln x$.

49. $f(x)=|x|$. 50. $f(x)=\sqrt{x}$.

4-§. Тақрибий ҳисоблашлар

Агар берилган $f(x)$ функция қаторга ёйилган бўлса, бу функциянинг бирор $x=x_0$ нуқтадаги тақрибий қийматини топиш учун: 1) қаторнинг биринчи n та ҳади йиғиндиси $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k x_0^k$ топилади; 2) қатор йиғиндисининг аниқ қиймати S билан S_n орасидаги $S-S_n$ фарқ, яъни R_n қолдиқ баҳоланади.

Тақрибий ҳисоблашларни бажаринг:

51. $\sin 18^\circ$ ни 0,001 аниқликкача.

52. $\cos 1^\circ$ ни 0,0001 аниқликкача.

53. $\sqrt[3]{30}$ ни 0,001 аниқликкача.

54. $\sqrt[5]{1,1}$ ни 0,0001 аниқликкача.

55. $\sqrt{e}$ ни 0,0001 аниқликкача.

56. $\ln 2$ ни 0,0001 аниқликкача.

57. $\sqrt[3]{1,06}$ ни 0,0001 аниқликкача.

58. $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ дан π ни 0,001 аниқликкача ҳисобланг.

Қуйидаги интегралларни 0,001 аниқликкача тақрибий ҳисобланг:

59. $\int\limits_0^1 e^{-t^2}\,dt.$ 60. $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx.$

61. $\int\limits_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x}\,dx.$ 62. $\int\limits_0^{0,5} \frac{\arcsin t}{t}\,dt.$

Лимитларни ҳисобланг:

63. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}.$ 64. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x}.$

IX бобга доир аралаш масалалар

65. $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$ қатор $xy'' + y' - y = 0$ тенгламани қаноатлантиришини текширинг.

66. $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ қатор $y^{\mathrm{IV}} = y$ тенгламани қаноатлантиришини текширинг.

67. $y = \frac{x}{1 + x - 2x^2}$ ни x нинг даражалари бўйича ёйинг.

68. $y = x^x$ ни $x - 1$ нинг даражалари бўйича ёйилганда биринчи 3 та ҳадини топинг.

69. $1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots +$
$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\ldots n\cdot\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n + \ldots$

гипергеометрик қаторнинг яқинлашиш соҳасини аниқланг.

70. $f(x)=\sqrt{1-x^2}\arcsin x$ ни Маклорен қаторига ёйинг.

71. $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ функциянинг Маклорен қаторига ёйилмасидан фойдаланиб, $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ нинг ёйилмасини топинг.

72. $2\sin x-\cos x=0$ тригонометрик тенгламани қаноатлантирадиган x нинг энг кичик мусбат қийматини топинг.

X БОБ. КОМПЛЕКС ҲАДЛИ ҚАТОРЛАР

1-§. Комплекс ҳадли сонли қаторлар

1. $W_1, W_2, \dots, W_n, \dots$ (1)
комплекс сонлар кетма-кетлиги берилган.

$$W_1+W_2+\dots+W_n+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}W_n \qquad (2)$$

кўринишдаги ифода комплекс ҳадли қатор дейилади.
$S_n=W_1+\dots+W_n$ ифода (2) қаторнинг хусусий йиғиндиси дейилади.

Агар $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ бўлса, у ҳолда (2) қатор яқинлашувчи ва S унинг йиғиндиси дейилади.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}W_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+iv_n)$ комплекс ҳадли қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ қаторларнинг яқинлашувчи бўлиши зарур ва етарлидир.

Агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|W_n|$ яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (2) қатор абсолют яқинлашувчи дейилади.

2. Даламбер аломати.

Агар $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{W_{n+1}}{W_n}\right|=l$ *бўлиб,* $l<1$ *бўлса, (2) абсолют яқинлашувчи бўлади.*

3. Коши аломати. Агар $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|W_n|}=l$ **бўлиб,** $l<1$ **бўлса, (2) абсолют яқинлашувчи бўлади.**

Қаторларнинг яқинлашишини текширинг.

1. $(1+i)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}i\right)+\ldots$

2. $(1+0{,}1i)+\left(\frac{1}{2}+0{,}01i\right)+\left(\frac{1}{3}+0{,}001i\right)+\ldots$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+i}}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{i}{7^n}\right)$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}+\frac{n}{n+1}i\right)$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{i}{n^2}\right)$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos n^2}{n^3}+i\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right)$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(3+i)^n}$.

2-§. Комплекс ҳадли функционал қаторлар

1. Комплекс ҳадли даражали қаторлар

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots \tag{1}$$

кўринишдаги катор комплекс ҳадли даражали қатор дейилади. Бунда c_n — комплекс сонлар, z — комплекс ўзгарувчи.

Умумий ҳолда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ (2) қатор қаралади. (2) катор учун маркази $M_0(z_0)$ нуқтада R радиусли доира мавжудки, бу доирада ($|z-z_0|<R$) (2) яқинлашувчи, доира ташқарисида ($|z-z_0|>R$) (2) узоқлашувчи бўлади, айрим ҳолларда $R=+\infty$ бўлиши мумкин, бунда (2) нинг яқинлашиш соҳаси C дан иборат бўлади Бу доира (2) нинг яқинлашиш доираси, R — яқинлашиш радиуси дейилади.

2. Яқинлашиш радиуси қуйидагича топилади:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

3. Маълум функцияларнинг даражали қаторга ёйилмалари:

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{z^{2n}}{2n!}+\ldots$$

4. Эйлер формулалари

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z; \qquad (1)$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \qquad (2)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \qquad (3)$$

$$e^{z} = e^{x} (\cos y + i \sin y); \qquad (4)$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z; \qquad (5)$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}; \qquad (6)$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}; \qquad (7)$$

$$\cos z = \operatorname{ch} iz; \qquad (8)$$

$$i \sin z = \operatorname{sh} iz. \qquad (9)$$

Қаторларнинг яқинлашиш радиусини, яқинлашиш соҳасини топинг.

11. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n}$. **12.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n}}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{n}}{n}$. **14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{n}}{n^{2}}$.

Қуйидагиларни каррали ёй тригонометрик функциялари орқали ифодаланг.

15. $f(x) = \sin^{6} x$. **16.** $f(x) = \sin^{3} x \cos^{4} x$.

17. $f(x) = \cos^{3} x$. **18.** $f(x) = \sin^{4} x$.

19. Эйлер формулалари ёрдамида i^{i} нинг чексиз кўп ҳақиқий қийматлари борлигини кўрсатинг.

20. $e^{2\pi i} = 1$ эканини кўрсатинг.

X бобга доир аралаш масалалар

21. $z = x + iy$ учун $\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$ ва $\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$ ни келтириб чиқаринг.

22. $z = x + iy$ учун $\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y$ ва $\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y$ ни келтириб чиқаринг.

23. $\sin z = 0$ тенгламани ечинг.

24. $\operatorname{ch} z = 0$ ни ечинг.

XI БОБ. КЎП АРГУМЕНТЛИ ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБИ

1-§. Метрик фазолар

1. n та $x_1, x_2, \dots, x_n$ ҳақиқий сонларнинг тартибланган $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ системаси n ўлчовли арифметик нуқта дейилади. Барча n ўлчовли арифметик нуқталар тўплами n ўлчовли арифметик фазо дейилади. Агар иккита $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ва $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ нуқталар орасидаги масофа

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

формула билан аниқланса, ҳосил бўлган фазо n ўлчовли Евклид фазоси дейилади ва R^n билан белгиланади.

2. l_2 — ҳақиқий фазо. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$—ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги учун $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$, қатор яқинлашувчи бўлса, x l_2 нинг нуқтаси бўлади. Агар $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ва $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ лар l_2 нинг нуқталари бўлса, у ҳолда улар орасидаги масофа $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2}$ формула билан аниқланади.

3. $C = C[a; b]$ — фазо. $[a; b]$ сегментда узлуксиз бўлган барча ҳақиқий функциялар тўплами. $C[a, b]$ да f, $g \in C$ лар орасидаги масофа $\rho(f, g) = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)|$ формула билан аниқланади.

1. R^2 да координаталари $|x - 2| \leqslant 1$, $|y + 1| \leqslant 1$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқталар тўплами қандай соҳани ифодалайди? Чизмани чизинг.

2. R^2 да координаталари $|x - 1| \leqslant 2$, $|y - 2| \leqslant 1$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқталар тўплами қандай соҳани ифодалайди? Чизмани чизинг.

Текисликда қуйидаги тенгсизликлар билан берилган соҳаларнинг чизмаларини чизинг:

3. а) $y \leqslant 2x + 4$,

б) $(x-4)^2 + (y+6)^2 \leqslant 25$,

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 9, \\ x^2 + y^2 \leqslant 16, \end{cases}$

4. а) $y^2 \leqslant 6x$,

б) $(x+3)^2 + (y-6)^2 \leqslant 36$,

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 25, \\ y > 2x^2. \end{cases}$

Қуйидаги кетма-кетликларнинг лимитларини топинг:

5. а) $\left(M_k\left(\frac{1}{3k}, \frac{3k - 1}{5k + 1}\right)\right)$,

б) $\left(M_k\left(\frac{1}{2^k}, 1 + \frac{1}{k}\right)\right)$, в) $\left(M_k\left(\frac{1}{k}\cos\frac{k\pi}{2}, \frac{(-1)^k}{k}\right)\right)$,

г) $\left(M_k\left(\frac{k+1}{k^2+1}, \frac{1}{k}, \frac{2k-1}{3-4k}\right)\right)$,

д) $\left(M_k\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+4}, \frac{2k}{4k^2-1}, \frac{\sin k}{k}\right)\right)$.

6. а) $\left(M_k\left(\frac{2}{k}, \frac{1}{2}-\frac{1}{k}\right)\right)$,

б) $\left(M_k\left(\frac{3k+1}{2k-1}, 5\right)\right)$,

в) $\left(M_k\left(\frac{k}{k+1}, \frac{2k}{3k+1}, \frac{1}{3k}\right)\right)$.

Қуйидаги кетма-кетликларнинг қайсилари l_2 фазонинг нуқтаси бўлади?

7. а) $x=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right)$,

б) $x=\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, \ldots, \frac{n}{2^n}, \ldots\right)$,

в) $x=\left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$,

г) $x=\left(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \ldots, \sqrt{\frac{n+1}{n}}, \ldots\right)$.

8. а) $x=\left(\frac{1}{\sqrt{2!}}, \frac{1}{\sqrt{3!}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n!}}, \ldots\right)$,

б) $x=\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots\right)$,

в) $x=\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, -\frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{(-1)^n}{2^n}, \ldots\right)$.

9. $x=\left(1+\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}+\frac{1}{2^n}, \ldots\right)$ ва $y=\left(1, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots\right)$ нуқталар орасидаги масофа $\rho(x, y)$ ни топинг.

10. $x=\left(1+\frac{1}{3}, \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}+\frac{1}{3^n}, \ldots\right)$ ва $y=\left(1, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots\right)$ нуқталар орасидаги масофани топинг.

Икки функция орасидаги масофани топинг:

11. а) $f(x)=x^4+3$, $g(x)=8x^2$, $[-2;\ 2]$ кесмада,

б) $f(x)=e^{2x}$, $g(x)=e^{-2x}$ $[-2;\ 1]$ кесмада,

в) $f(x)=x^3+6x$, $g(x)=3x^2+2$, $[-1;\ 1]$ кесмада.

12. а) $f(x)=x^4$, $g(x)=2x^2-5$, $[-2;\ 2]$ кесмада,

б) $f(x)=x^5+1$, $g(x)=5x^4-5x^3$, $[-1;\ 2]$ кесмада.

2-§. Кўп аргументли функциялар

1. Берилган доимий C сони учун xOy текисликдаги $f(x,\ y)=C$ тенгликни қаноатлантирувчи барча нуқталар тўплами $z=f(x,\ y)$ функциянинг сатҳ чизиғи дейилади.

2. Берилган доимий C сони учун фазодаги $f(x,\ y,\ z)=C$ тенгликни қаноатлантирувчи барча нуқталар тўплами $u=f(x,\ y,\ z)$ функциянинг юксаклик сирти дейилади.

13. а) $f(x,\ y)=\frac{x+2y}{x-y}$, $f(2,1)$, $f(-3,\ -1)$, $f(a,\ b)$ $(a\neq b)$ ларни топинг.

б) $f(x,\ y)=e^{\sin(x+y)}$, $f\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ ларни топинг.

14. а) $f(x,\ y)=\frac{y}{1+x}$, $f(0,1)$, $f(4,2)$, $f(a,\ b)$ ларни топинг.

б) $f(x,\ y)=y^x+x^{y-1}$, $f(1,\ 1)$, $f(1,\ 2)$, $f(2,\ 2)$ ларни топинг.

Функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топинг.

15. $z=\frac{1}{x-y}$. 16. $z=\frac{1}{x+y}$.

17. $z=\sqrt{x+y}$. 18. $z=\sqrt{x-y}$.

19. $z=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}$. 20. $z=\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

21. $z=\sqrt{x^2+y^2-9}$. 22. $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$.

23. $z=\ln\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1\right)$. 24. $z=\ln(y^2-4x+8)$.

25. $z=\frac{1}{2-x^2-y^2}$. 26. $z=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}$.

27. $z=\arcsin\frac{y-1}{x}$.

28. $z = \arcsin \frac{x}{2} + \arccos \frac{y}{2}$.

29. $z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$.

30. $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}$ $(r < R)$.

31. $u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}$.

32. $u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}$ $(r < R)$

Функцияларнинг сатҳ чизиқларини ясанг:

33. $z = x + y$. 34. $z = x^2 + y^2$.

35. $z = x^2 - y^2$. 36. $z = y + x^2$.

37. $z = x \cdot y$. 38. $z = x \cdot \sqrt{y - 1}$.

39. $u = \frac{x + y + z}{x - y + z}$ функциянинг юксаклик сиртларини топинг.

40. $u = x^2 + y^2 + z^2$ функциянинг юксаклик сиртларини топинг.

3-§. Кўп аргументли функциянинг лимити ва узлуксизлиги

Агар ҳар бир $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ топилиб, координаталари $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи $M_0(x_0, y_0)$ дан бошқа барча $M(x, y)$ нуқталарда $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлса, A сони $f(x, y)$ функциянинг $M_0(x_0, y_0)$ нуқтадаги лимити дейилади ва у $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$ кўринишда ёзилади

Агар $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ тенглик ўринли бўлса, $f(x, y)$ функция $M_0(x_0, y_0)$ нуқтада узлуксиз дейилади.

Функция лимитининг таърифига асосланиб тенгликларни исботланг.

41. а) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 3}} (2x + 3y) = 13$, б) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to -1}} x^2 y = -4$.

42. а) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} (3x - y) = 2$, б) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to -1}} (x^2 + y^2) = 2$.

Лимитларни топинг.

43. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$. **44.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x\cdot y}$.

45. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$. **46.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}$.

47. $z=\dfrac{x+y}{x-y}$ функциянинг (0, 0) нуқтада лимитга эга эмаслигини кўрсатинг.

48. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ мавжудми?

(0, 0) нуқтада қуйидаги функцияларнинг узлуксизлигини текширинг:

49. $f(x,\ y)=\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1},\ f(0{,}0)=2.$

50. $f(x,\ y)=\dfrac{\sin(xy)}{x},\ f(0{,}0)=0.$

51. $f(x,\ y)=\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2},\ f(0{,}0)=0.$

52. $f(x,\ y)=\dfrac{1}{x^2+y^2},\ f(0{,}0)=0.$

4-§. Хусусий ҳосилалар ва тўла дифференциал

1. $z=f(x,\ y)$ функциянинг $M(x,\ y)$ нуқтадаги тўла орттирмаси $\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)$ ни $\Delta z=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta y$ кўринишда ёзиш мумкин бўлса, $z=f(x,\ y)$ функция $M(x,\ y)$ нуқтада дифференциалланувчи дейилади. Бу ерда A, B лар Δx, Δy ларга боғлиқ эмас, $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ да $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$ бўлади. $M(x,\ y)$ нуқтада дифференциалланувчи $z=f(x,\ y)$ функция тўла орттирмасининг бош қисми $A\Delta x+B\Delta y$ унинг тўла дифференциали дейилади ва $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ формула ёрдамида топилади.

2. $y=f(x)$ ошкормас функция $F(x,\ y)=0$ тенглик билан берилган бўлсин, у ҳолда $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$. Худди шу каби $\Phi(x, y, z)=0$ дан $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\Phi'_x}{\Phi'_z},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\Phi'_y}{\Phi'_z}.$

3. $z=f(x,\ y)$ функциянинг $M(x,\ y)$ нуқтадаги l йўналиш бўйича ҳосиласи деб

$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim\limits_{M'\to M} \frac{f(M') - f(M)}{\rho(M', M)}$ га айтилади (M' нукта M нуқтадан ўтувчи l тўғри чизиқда ётади, $\rho(M', M)$ эса ориентирилган MM' кесманинг узунлиги).

Агар $z = f(x, y)$ функция $M(x, y)$ нуқтада дифференциалланувчи ва l йўналиш координата ўқлари билан α ва β бурчаклар ташкил қилса, у ҳолда

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta.$$

4. $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$ вектор $z = f(x, y)$ функциянинг $M(x, y)$ нуқтадаги градиенти дейилади.

5. Агар $z = f(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ бўлса, у ҳолда $z = f(x(t), y(t))$ мураккаб функциянинг ҳосиласи (тўла ҳосила) $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$ формула бўйича топилади.

Функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг.

53. $z = x - y$.

54. $z = x + y$.

55. $z = x^2y^3 + x^3y^2$.

56. $z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

57. $z = (5x^2y - y^3 + 7)^3$.

58. $z = \sqrt{x^2 + y^3}$.

59. $z = e^{xy}$.

60. $z = e^{x^2\cdot\sin y}$.

61. $z = x^{y^2}$.

62. $z = y^{x^2+1}$.

63. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

64. $z = \ln(x + \ln y)$.

65. $z = \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{x}{y}}$.

66. $z = \arcsin\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

67. $z = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{y}$.

68. $z = \ln\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$.

69. $f(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ функция учун $f'_x(3, 4)$ ва $f'_y(3,4)$ ларни топинг.

70. $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^3}$. $f'_x(1,1)$, $f'_y(1,1)$ ларни топинг.

71. а) $u = xy + yz + zx$, б) $u = e^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

72. а) $u = x^3 + yz^2 + 3yx - x + z$,
б) $u = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$.

73. $z = x^y \cdot y^x$ функция учун $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = (x + y + \ln z)z$ тенгликнинг ўринли эканини кўрсатинг.

74. $z=\ln(e^x+e^y)$ функция учун $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$ тенгликнинг ўринли эканини кўрсатинг.

Функцияларнинг тўла дифференциалларини ёзинг:

75. $z=x^2y^4-x^3y^3+x^4y^2$.

76. $z=xy-x^2y^3+x^8y$.

77. $z=\cos(xy)$.

78. $z=y^x$.

79. $z=\frac{x+y+xy}{x^2+y^2}$.

80. $z=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

81. $z=\mathrm{arctg}(xy)$.

82. $z=\arcsin\frac{x}{y}$.

83. $f(x,y)=3x^4+xy+y^3$ функциянинг $(1,2)$ нуқтадаги абсцисса ўқи билан 135° бурчак ташкил қилувчи йўналиш бўйича ҳосиласини топинг.

84. $f(x,\ y)=\mathrm{arctg}(xy)$ функциянинг $(1,\ 1)$ нуқтадаги биринчи чорак бурчаги биссектрисаси йўналиши бўйича ҳосиласини топинг.

85. $f(x,\ y)=\ln(e^x+e^y)$ функциянинг $(1,\ \sqrt{3})$ нуқтадаги шу нуқтадан координата бошига қаратилган йўналиш бўйича ҳосиласини топинг.

86. $f(x,\ y)=\ln(x+y)$ функциянинг $(3,4)$ нуқтадаги шу нуқтадан $(4,\ 5)$ нуқтага қаратилган йўналиш бўйича ҳосиласини топинг.

Функцияларнинг градиентларини топинг.

87. а) $z=\sqrt{4+x^2+y^2}$, $(2,1)$ да

б) $z=\mathrm{arctg}\frac{x}{y}$, $(x_0,\ y_0)$ да

88. а) $z=x^2+y^2$, $(3,2)$ да

б) $z=2xy$, $(x_0,\ y_0)$ да

89. $z=x^2+xy^2$, $x=e^{2t}$, $y=\sin t$, $\frac{dz}{dt}=?$

90. $z=\arcsin(x-y)$, $x=3t$, $y=4t^3$, $\frac{dz}{dt}=?$

91. $z=\mathrm{arctg}\frac{x+1}{y}$, $y=e^{(1+x)^2}$, $\frac{dz}{dx}=?$

92. $z=\ln(e^x+e^y)$, $y=x^8$, $\frac{dz}{dx}=?$

93. $z=x^2+\sqrt{xy}$, $x=u+v$, $y=u-v$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial a}$, $\frac{\partial z}{\partial v}=?$

94. $z = x^2 \ln y,\ x = \frac{u}{v},\ y = 3u - 2v$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial v} = ?$

95. $z = x^2 y - y^2 x,\ x = u \cos v,\ y = u \sin v.\ \frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial v} = ?$

96. $z = xe^y + ye^x,\ x = u^2 + v^2,\ y = u^2 - v^2,\ \frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial v} = ?$

Ошкормас функцияларнинг ҳосилаларини топинг.

97. $x^3 + y^3 - 3xy = 0.$ 98. $xy = y^x.$

99. $xy - \ln y = 0.$ 100. $ye^x + e^y = 0.$

101. $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0.$ 102. $\sin y + e^x - xy^2 = 0.$

Ошкормас функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг.

103. $x^2 + z^2 - zx + xy^4 - 1 = 0.$ 104. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

105. $z^3 + 3xyz = a^3.$ 106. $e^z - xyz = 0.$

Функцияларнинг барча иккинчи таргибли хусусий ҳосилаларини топинг.

107. $z = x + y + \frac{xy}{x-y}.$ 108. $z = xe^y.$

109. $z = y^{\ln x}.$ 110. $z = \sqrt[3]{x+y}.$

111. $z = \mathrm{tg}\,(x^2 + y^2).$ 112. $z = \mathrm{arctg}\,\frac{x+y}{x}.$

113. $z = x^{2y}.$ 114. $z = e^x(\cos y + x \sin y).$

115. $u = e^{xyz}.$ 116. $u = \sin(x^2 + y^2 + z^2).$

117. $f(x, y) = x^3 + 3x^2 y + 12xy^3.$

$f''_{x^2}(0,1),\ f''_{xy}(-1,\ 1),\ f''_{y^2}(2,0)$

ларни топинг.

118. $f(x, y) = x^3 + y^3 + x^3 y^3.$ $f''_{x^2}(1,1),\ f''_{xy}(1,2)$

ларни топинг.

Қуйидаги функциялар учун $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ тенгликнинг ўринли эканини текширинг.

119. $z = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5.$ 120. $z = x^3 + y^4 + x^2 y^2.$

121. $z = xe^y \cos(xy).$ 122. $z = xy \ln x.$

123. $z = e^x \cos y$ функция учун $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ эканини текширинг.

124. $z=\ln(e^x+e^y)$ функция учун $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$ эканини текширинг.

125. $x^2+y^2+z^2=2z$ ошкормас функция учун $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ни топинг.

126. $x^2+y^3+z^4=x+z$ функция учун $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ни топинг.

5-§. Юқори тартибли дифференциаллар ва Тейлор формуласи

1. Икки аргументли функция учун Тейлор формуласи қуйидагича:

$$\Delta f(x,\ y)=df(x,\ y)+\frac{1}{2!}d^2f(x,\ y)+\ldots+\frac{1}{n!}d^nf(x,\ y)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x+\Theta\Delta x,\ y+\Theta\Delta y),\ \ 0<\Theta<1$$

ёки

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)=f(x,\ y)+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Delta x\,\Delta y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2\right)+\ldots+R_n,$$

бу ерда R_n — қолдиқ ҳад.

2. **Сиртга ўтказилган уринма текислик ва нормалнинг тенгламаси.**

Агар сирт $F(x,\ y,\ z)=0$ тенглама билан берилган бўлса, унинг $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ нуқтасидаги уринма текислик тенгламаси

$$F'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)\cdot(y-y_0)+$$

$$+F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)(z-z_0)=0,$$

нормал тенгламаси

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)}$$

кўринишда бўлади

Функцияларнинг иккинчи тартибли дифференциалларини топинг:

127. $z=xy^2-x^2y$.

128. $z=\frac{x}{x+y}$.

129. $z=\ln(x-y)$.

130. $z=e^{x+y^2}$.

131. $z = \frac{1}{2(x^2+y^2)}$. 132. $z = x\sin^2 y$.

133. $u = \sin(x+y+z)$. 134. $u = \ln(x+y+z)$.

135. $z = e^{x+y}$, $d^n z = ?$ 136. $z = x \cdot e^{x+y}$, $d^3 z = ?$

137. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $d^2 z = ?$

138. $z^3 - 3xyz = a^3$, $d^2 z = ?$

Қуйидаги функциялар учун Тейлор формуласини ёзинг, биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилалар билан чекланинг.

139. $z = \ln(x+y)$. 140. $z = \frac{1}{x-y}$.

141. $z = e^{xy}$. 142. $z = \sqrt{x+y}$.

Уринма текислик ва нормалнинг тенгламаларини ёзинг.

143. $z = xy$, $(0, 0, 0)$ да.

144. $z = x^2 + y^2$, $(1, 1, 2)$ да.

145. $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5$, $(1, 1, 2)$ да.

146. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$, $(1, 2, -1)$ да.

147. $4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z$, $(2, 3, 6)$ да.

148. $e^z - z + xy = 3$, $(2, 1, 0)$ да.

6-§. Кўп аргументли функцияларнинг экстремумлари

$z = f(x, y)$ функция $M(x_0, y_0)$ нуқтада экстремумга эга бўлиб, $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ хусусий ҳосилалар мавжуд бўлса, у ҳолда $f'_r(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$ бўлади.

$f''_{x^2}(x_0, y_0) = A$, $f''_{y^2}(x_0, y_0) = C$, $f''_{xy}(x_0, y_0) = B$ деб олайлик. Агар $\Delta = A \cdot C - B^2 > 0$ бўлса, $M(x_0, y_0)$ нуқтада функция экстремумга эга бўлиб, $A < 0$ бўлса, максимум, $A > 0$ бўлса, минимум бўлади.

Қуйидаги функцияларнинг экстремум нуқталарини топинг.

149. $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$.

150. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.

151. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$. 152. $z = 3\ln x + xy^2 - y^3$.

153. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.

154. $z = 3x^3y - x^2y^2 + x.$

155. $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0.$

156. $\frac{x^3}{3} + 2y^2 - z^2x + z = 0.$

157. $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ функция $x = y = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ да минимумга эга эканини кўрсатинг.

158. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$ функция $x = y = \sqrt{2}$ да минимумга эга эканлигини текширинг.

Функцияларнинг кўрсатилган соҳалардаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

159. $z = x^2 - y^2,\qquad x^2 + y^2 < 4$ доирада.

160. $z = 2xy,\qquad x^2 + y^2 \leqslant 1$ доирада.

161. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = -3$ тўғри чизиқлар билан чегараланган учбурчакда.

162. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчакда.

163. $z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2)$, $x^2 + y^2 \leqslant 4$ доирада.

164. $z = \operatorname{arctg}(x^2 - xy + y)$, $x = -2$, $x = 2$, $y = -3$, $y = 3$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчакда.

XI бобга доир аралаш масалалар

165. $z = \sqrt{\sin \pi (x^2 + y^2)}$ функциянинг аниклаш соҳасини топинг.

166. $z = \sqrt{x \sin y}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

167. $z = \frac{1}{\sin \pi x} + \frac{1}{\sin \pi y}$ функциянинг узилиш нуқталарини топинг.

168. (0, 0) нуқтада
$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{агар } xy = 0, \\ 1, & \text{агар } xy \neq 0 \end{cases}$$
функциянинг иккала хусусий ҳосилалари мавжуд. Лекин шу нуқтада функция узлуксиз эмас. Текширинг.

169. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ функция O (0, 0) нуқтада ихтиёрий йўналиш бўйича ҳосилага эга, лекин шу нуқтада дифференциалланувчи эмас. Текшириб кўринг.

170. $z = \sqrt{|xy|}$ функция $O(0, 0)$ нуқтада узлуксиз, иккала хусусий $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$ ҳосилага ҳам эга, лекин $O(0, 0)$ нуқтада дифференциалланувчи эмас. Текшириб кўринг.

171. Қуйидаги функцияларни Тейлор қаторига ёйинг.

а) $f(x, y) = e^x \cos y$,

б) $f(x, y) = \ln(1 - x) \ln(1 - y)$,

в) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - x - y + xy}$,

г) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$.

172. Шартли экстремумларни топинг.

а) $z = e^{xy}$, $x + y = 1$.

б) $z = xy$, $x^2 + y^2 = 4$.

173. Диагоналлари d га тенг бўлган тўғри бурчакли параллелепипедлар орасида энг катта ҳажмлисини топинг.

174. $(-1{,}5)$ нуқтадан $y^2 = x$ параболагача бўлган энг қисқа масофани топинг.

XII БОБ. КАРРАЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

1-§. Асосий тушунчалар

1. Тўғри тўртбурчак бўйича икки каррали интеграл. Агар интеграллаш соҳаси $D = \left\{ (x, y) \,\middle|\, \begin{matrix} a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d \end{matrix} \right\}$ тўғри тўртбурчакдан иборат бўлса, у ҳолда икки каррали интеграл қуйидаги икки формуланинг бири билан ҳисобланади:

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y),\, dx, \tag{1}$$

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\, dy. \tag{2}$$

(1) ва (2) тенгликларнинг ўнг томонидаги интеграллар такрорий интеграллар дейилади. (1) даги $\int\limits_a^b f(x, y)\, dx$ ички интеграл дейилади ва $[a; b]$ да y ни ўзгармас деб x га нисбатан ҳисоблаб, би-

рор $\varphi(y)$ натижа олинади. Сўнгра $\int\limits_c^d \varphi(y)\,dy$ ташқи интеграл ҳисобланади.

2. Агар $D = [a, b;\ c, d]$ тўғри тўртбурчакда интеграл остидаги функция $f(x, y) = \varphi(x)\cdot\psi(y)$ кўринишда бўлса, у ҳолда

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx \int\limits_c^d \psi(y)\,dy$$

кўпайтма шаклида ёзилади.

Такрорий интегралларни ҳисобланг.

1. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^1 xydy.$ **2.** $\int\limits_2^3 dx \int\limits_1^2 x^2ydy.$

3. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 x^2y^2dy.$ **4.** $\int\limits_1^2 dx \int\limits_1^2 xy^2dy.$

5. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_1^3 \frac{dx}{x^2}.$ **6.** $\int\limits_2^3 dy \int\limits_1^2 \frac{xdx}{y^2}.$

Икки каррали интегралларни ҳисобланг.

7. $\iint\limits_D (x + y)\,dxdy;$ $D: \begin{Bmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 \leqslant y \leqslant 2 \end{Bmatrix}.$

8. $\iint\limits_D xy^3dxdy;$ $D: \begin{Bmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 1 \leqslant y \leqslant 3 \end{Bmatrix}.$

Такрорий интегралларни ҳисобланг.

9. $\int\limits_2^4 dx \int\limits_0^{x^2} xdy.$ **10.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x x^2dy.$

11. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^y xdx.$ **12.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^y x^2dx.$

13. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_1^{\sqrt{y}} ydx.$ **14.** $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{y^3} \frac{4}{y^3}\,dx.$

15. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x (x^2 + 2xy)\,dy.$ **16.** $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{y^2} (x + 2y)\,dx.$

17. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x e^{\frac{y}{x}}\,dy.$ **18.** $\int\limits_0^5 dx \int\limits_0^{5-x} \sqrt{4 + x + y}\,dy.$

2-§. Икки каррали интегралларни ҳисоблаш

1. D соҳа шундай L ёпиқ эгри чизиқ билан чегараланганки, Oy ўқига параллел бўлган ҳар бир тўғри чизиқ уни кўпи билан 2 нуқтада кесиб ўтади. D соҳани Ox ўқига проекциялаcак, $[a; b]$ ҳосил қилинади. L контурда $A(a)$ ва $B(b)$ нуқталар уни икки бўлакка ажратади: уларнинг тенгламалари $y=\varphi_1(x)$ ва $y=\varphi_2(x)$; $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$. $x \in [a; b]$ бўлсин. Бу ҳолда D соҳа қисқача:

$$D:\left\{\begin{array}{l} a \leqslant x \leqslant b \\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x) \end{array}\right\}$$

кўринишда белгиланади.

Икки каррали интеграл такрорий интеграллар ёрдамида

$$\iint\limits_{(D)} f(x,\ y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy \qquad (1)$$

кўринишда ёзилади.

2. D соҳани чегараловчи L ёпиқ контур Ox га параллел тўғри чизиқлар билан энг кўпи билан иккита умумий нуқтага эга бўлса, D соҳани Oy га проекциялаб, $[c; d]$ ни топамиз ва $x=\psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $\psi_1(y) < \psi_2(y)$ ларни ҳосил қиламиз. Бу ҳолда $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)\,dx$ (2) кўринишда бўлади.

3. Агар D соҳа 1 ва 2-ҳоллардаги шартларни бир вақтда қаноатлантирса, у ҳолда икки каррали интеграл қуйидагича ҳисобланади:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,\ y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)\,dx,$$

бу тенгликлардан такрорий интегралларда интеграллаш тартибини ўзгартириш мумкинлиги келиб чиқади.

4. Агар D соҳа 1 ва 2-ҳоллардаги шартларни қаноатлантирмаса, у ҳолда D соҳани бир неча 1 ёки 2-шартларни қаноатлантирадиган соҳаларга ажратиб интегралнинг аддитивлик хоссасидан фойдаланилади.

Икки каррали интегралларни такрорий интегралларга келтириб, ундаги чегараларни қўйинг.

$$\iint\limits_{D} f(x,\ y)\,dx\,dy = \int dx \int f(x,\ y)\,dy.$$

D соҳа қуйидаги чизиқлар билан чегараланган:

19. $D:\left\{\begin{array}{l} y^2 = x, \\ x = 1. \end{array}\right.$ **20.** $D:\left\{\begin{array}{l} xy = 6, \\ x + y - 7 = 0. \end{array}\right.$

21. $D: \begin{cases} y = x^2, \\ y = x. \end{cases}$ 22. $D: \begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = 0, \\ x = 4. \end{cases}$

23. $D: \begin{cases} y = 2x, \\ x = 0, \\ y = 4. \end{cases}$ 24. $D: \begin{cases} y^2 = 2x, \\ x^2 + y^2 = 3, \ x \geqslant 0, \\ \qquad y \geqslant 0. \end{cases}$

25. $D: \begin{cases} y = x, \\ y = x - 2, \\ y = 1, \ y = 2. \end{cases}$ 26. $D: \begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ y = -2, \ y = 2. \end{cases}$

Такрорий интегралларда интеграллаш таргибини ўзгартиринг, аввал интеграллаш соҳасини чизинг.

27. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2/2}^{-x^2+2} f(x, y)\, dy.$ 28. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy.$

29. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x}^{2x} f(x, y)\, dy.$ 30. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y}^{2-y} f(x, y)\, dx.$

31. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y)\, dx.$ 32. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{e^{-x}}^{e^{x}} f(x, y)\, dy.$

33. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x, y)\, dy.$ 34. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{2y} f(x, y)\, dx.$

Ифодаларни битта такрорий интеграл кўринишига келтиринг, олдин интеграллаш соҳасини чизинг:

35. $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y/2}^{y} f(x, y)\, dx + \int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{y/2}^{2} f(x, y)\, dx.$

36. $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{\frac{x}{2}-1}^{4x+6} f(x, y)\, dy + \int\limits_{-1}^{6} dx \int\limits_{\frac{x}{2}-1}^{2} f(x, y)\, dy.$

37. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{y^2/2}^{2} f(x, y)\, dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx +$

$+ \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x, y)\, dx.$

38. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{2}^{5} dy \int\limits_{-\sqrt{y-1}}^{3-y} f(x, y)\,dx.$

Икки каррали интегралларни ҳисобланг.

39. $\iint\limits_{D} x^2y dxdy$, D соҳа $y = -x^2$ ва $x = y^2$ чизиқлар билан чегараланган.

40. $\iint\limits_{D} e^{-y^2} dx\,dy$, D соҳа учлари (0; 0), (0; 1) ва (1; 1) нуқталарда бўлган учбурчак.

41. $\iint\limits_{D} xy^2 dxdy$, D соҳа $y^2 = x$, $x = 1$ чизиқлар билан чегараланган.

42. $\iint\limits_{D} (x + y^2)\,dx\,dy$, $D: \begin{cases} y^2 = x + 2, \\ y = x. \end{cases}$

43. $\iint\limits_{D} xydxdy$, D соҳа учлари (2; 4); (5; 4); (5; 2); (2; —2) бўлган тўртбурчак.

44. $\iint\limits_{D} x^2ydxdy$, D соҳа учлари (—2; 2), (—1; 2), (6; 2) бўлган учбурчак.

45. $\iint\limits_{D} xydxdy$, D соҳа $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x \leqslant y \leqslant 3x$ тенгсизликлар билан аниқланган.

46. $\iint\limits_{D} (x + y)\,dxdy$, $D: \begin{cases} 1 \leqslant y \leqslant 2, \\ y + 3 \leqslant x \leqslant y + 5. \end{cases}$

47. $\iint\limits_{D} xdxdy$, D соҳа $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$, $x \geqslant 0$ тенгсизликлар билан аниқланган.

48. $\iint\limits_{D} xydxdy$, $D: \begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 1, & x \geqslant 0, \\ x^2 + 2y \geqslant 1, & y \geqslant 0. \end{cases}$

49. $\iint\limits_{D} xydxdy$, $D: \begin{cases} xy = 6, \\ x + y = 7. \end{cases}$

50. $\iint\limits_{D} x^2ydxdy$, $D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y = 2. \end{cases}$

3- §. Икки каррали интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш. Қутб координаталар системасида икки каррали интеграллар

1. Агар узлуксиз дифференциалланувчи $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$ функциялар D соҳани S соҳага ўзаро бир қийматли акс эттирса, у ҳолда ўзгарувчиларни алмаштириш формуласи

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_S f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]\,|J|\,dudv \text{ бўлади.}$$

Бунда $J(u, v)$ якобиан қуйидагича ҳисобланади:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

2. $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ формулалар ёрдамида қутб координаталар системасига ўтиладиган бўлса, юқоридаги формулага асосан:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_S f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi$$

бўлади, бунда $|J| = \rho$.

3. Қутб координаталар системасида икки каррали интегрални такрорий интегралларга айлантириш қуйидагича бўлади:

а) агар S соҳа қутб ўқи билан $\varphi_1=\alpha$, $\varphi_2=\beta$ бурчаклар ташкил қилган нурлар ва $\rho=\rho_1(\varphi)$, $\rho=\rho_2(\varphi)$, $(\rho_1<\rho_2)$ эгри чизиқлар билан чегараланган бўлса,

$$\iint\limits_S f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho d\varphi = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho \text{ бўлади.}$$

б) Агар S соҳа координаталар боши 0 нуқтани ўз ичига олса,

$$\iint\limits_S f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho \text{ бўлади.}$$

Қутб координаталар системасида такрорий интегралларни ҳисобланг.

51. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^2 \rho\cos\varphi\,d\rho.$ **52.** $\int\limits_0^{\pi} d\varphi\int\limits_1^2 \rho^3\sin\varphi\,d\rho.$

53. $\int\limits_0^{\pi} d\varphi\int\limits_0^4 \rho\sin\varphi\,d\rho.$ **54.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int\limits_0^3 \rho^2\cos 2\varphi\,d\rho.$

Қутб координаталар системасида икки каррали интегралларни ҳисобланг.

55. $\iint\limits_S \rho\sin\varphi\, d\varphi\, d\rho$; S соҳа қутб ўқидан юқорида жойлашган $0\leqslant\rho\leqslant R$ ярим доирадан иборат.

56. $\iint\limits_S \rho\sin\varphi\, d\varphi\, d\rho$; S соҳа $\rho=a$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\varphi=\pi$ лар билан чегараланган доиравий сектордан иборат.

57. $\iint\limits_S \rho^2 d\varphi\, d\rho$; S соҳа $\rho=a$ ва $\rho=2a$ айланалар билан чегараланган.

58. $\iint\limits_S \rho^2 d\varphi\, d\rho$; S соҳа $\rho=a\varphi$ спиралнинг биринчи ўрамаси ва қутб ўқи билан чегараланган.

59. $\iint\limits_S \rho^2\sin\varphi\, d\varphi\, d\rho$; S соҳа $\rho=a(1+\cos\varphi)$ кардиоида, қутб ўқи билан чегараланиб, ўқдан юқори қисми.

60. $\iint\limits_S \rho^2\sin\varphi\, d\varphi\, d\rho$; S соҳа $\rho=a(1+\cos\varphi)$ кардиоида, қутб ўқи билан чегараланиб, ўқдан пастки қисми.

Қутб координаталарни киритиб, икки каррали интегралларни ҳисобланг.

61. $\iint\limits_D xy^2\, dxdy$, D соҳа $x^2+(y-1)^2=1$, $x^2+y^2=4y$ айланалар билан чегараланган.

62 $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2} dxdy$, D соҳа $x^2+y^2\leqslant a^2$ тенгсизлик билан аниқланган.

63. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$, D соҳа $x^2+y^2\leqslant 2Rx$, $y\geqslant 0$ тенгсизликлар билан аниқланган.

64. $\iint\limits_D \sqrt{25-x^2-y^2}\, dxdy$, D соҳа $x^2+y^2\leqslant 9$ доирадан иборат.

65. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$, D соҳа $x^2+y^2\leqslant 16$ доирадан иборат.

66. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\, dxdy$, D соҳа $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$ айланалар билан чегараланган ҳалқадан иборат

4-§. Текис фигура юзини ва жисм ҳажмларини ҳисоблаш

1. D соҳанинг юзи икки каррали интеграл ёрдамида $S_D = \iint\limits_D d\sigma$ формула бўйича хисобланади.

Тўғри бурчакли координаталарда юз элементи $d\sigma = dxdy$ бўлгани учун $S_D = \iint\limits_D dxdy$ бўлади. Эгри чизиқли координаталар системасида эса $d\sigma = | J(u, v) | dudv$ бўлгани учун $S_D = \iint\limits_D | J(u, v) | dudv$ бўлади. Хусусий ҳолда, қутб координаталар системасида $| J | = \rho$ бўлиб,

$$S_D = \iint\limits_D \rho \, d\rho \, d\varphi \text{ бўлади.}$$

2. Қуйидан $z = 0$ текислиги, юқоридан $z = f(x, y) \geqslant 0$ узлуксиз сирт, ён ёқлардан ясовчиси Oz ўқига параллел, йўналтирувчиси D соҳанинг контуридан иборат бўлган цилиндрик сирт билан чегараланган жисмнинг ҳажми

$$V = \iint\limits_D f(x, y) \, dxdy$$

формула билан ҳисобланади

3. Қутб координаталар системасида жисм ҳажми учун ушбу

$$V = \iint\limits_D f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \, \rho \, d\rho \, d\varphi$$

формула ўринлидир.

67. $y = 2x$, $2x - y = 7$. $x - 4y = -7$, $x - 4y = -14$ тўғри чизиқлар билан чегараланган фигура юзини икки каррали интеграл ёрдамида ҳисобланг.

68. $y^2 = x$. $y = x + 2$, $y = -2$. $y = 2$ чизиқлар билан чегараланган фигура юзини ҳисобланг.

69. $x^2 + y^2 = 1$, $x + y = 1$, $y = \frac{1}{2} \left(x \geqslant 0,\ y \geqslant \frac{1}{2} \right)$ чизиқлар билан чегараланган фигура юзини ҳисобланг.

70. $y = (x - 1)^2$, $y^2 + x^2 = 1$ чизиқлар билан чегараланган фигура юзини ҳисобланг.

71. $y = 4 - x^2$, $3x - 2y - 6 = 0$ чизиқлар билан чегараланган фигура юзини ҳисобланг.

72. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $(a > 0,\ b > 0)$ чизиқлар билан чегараланган фигура юзини ҳисобланг.

73. $\rho = a\cos \varphi$ эгри чизиқ билан чегараланган фигура юзини ҳисобланг.

74. $\rho = 2\sin\varphi$, $\rho = 4\sin\varphi$ эгри чизиқлар билан чегараланган фигура юзини ҳисобланг.

Қутб координаталарни киритиб қуйидаги чизиқлар билан чегараланган фигура юзини ҳисобланг.

75. $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ ва $x^2 + y^2 - 2ay = 0$.
76. $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ ва $x^2 + y^2 - ax = 0$.
77. $x^2 + y^2 = r^2$ ва $x^2 + y^2 - 2ry = 0$, $x = 0$.
78. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

Қуйидаги сиртлар билан чегараланган жисмлар ҳажмини ҳисобланг.

79. $y = x^2$, $y = 1$, $x + y + z = 4$, $z = 0$.
80. $z = y^2 - x^2$, $y = -2$, $y = 2$.
81. $x^2 + y^2 = a^2$, $x + y + z = 2a$, $z = 0$.
82. $x + y + z = 4$, $x = 3$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$.
83. $y = x^2$, $y + z = 2$, $z = 0$.
84. $z = 3 - x^2 - y^2$, $z = 0$.
85. $y = x^2$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $y = 1$.
86. $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$ $x = 0$, $y = 0$. $z = 0$.
87. $x + 2y - z = 0$, $x - 2y + 5 = 0$, $2x + 3y - 18 = 0$, $z = 0$.
88. $2x + y - z = 0$, $x + 3y - 18 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$, $z = 0$.
89 $z = 16 - x^2 - y^2$, $x = \pm 3$, $y = \pm 3$, $z = 0$.
90. $y = x^2$, $x = y^2$, $z = 12 + y - x^2$.

Қутб координаталар системасига ўтиш йўли билан қуйидаги сиртлар билан чегараланган жисмлар ҳажмини ҳисобланг.

91. $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = \frac{2 + x^2 + y^2}{2}$.
92 $x^2 + y^2 + z - 4 = 0$, $z = 0$.
93. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.
94. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z = a$, $z = b$, $R > b > a > 0$.
95. $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$.
96. $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$.
97. $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 = 2y$.
98. $z = 1 - x^2 - y^2$, $y = x$, $y = \sqrt{3}x$. $z = 0$.
99. $z = ax + by + c$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$ сиртлар билан чегараланган жисм ҳажми $\pi R^2 c$ га тенг. Исботланг.

100. $z = x^2 + y^2$, $z^2 = xy$, $z = 0$ сиртлар билан чегараланган жисм ҳажми $\frac{\pi}{192}$, исботланг.

5-§. Сирт юзини ҳисоблаш

1. а) Агар сирт $z = f(x, y)$ тенглама билан берилиб, унинг Oxy текислигига проекцияси D бўлса, у ҳолда сирт юзи $S = \iint\limits_{(D)} \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$ формула ёрдамида топилади.

Қуйидаги сирт бўлакларининг юзини топинг.

101. $x^2+y^2=R^2$ цилиндрнинг $z=0$, $z=H$ текисликлар билан кесишган қисми.

102. $x^2+y^2=R^2$ цилиндрнинг $z=0$, $z=kx$ текисликлар билан кесишган қисми.

103. $x+y+z=2a$ текисликнинг $x=0$, $y=0$, $x=a$, $y=a$ текисликлар билан кесишган қисми.

104. $z^2=2xy$ конуснинг $x+y=0$, $x=0$, $y=0$ текисликлар билан кесишган қисми.

105. $z=xy$ $(x>0, y>0)$ гиперболик параболоиднинг $x^2+y^2=R^2$ цилиндр билан кесишган қисми.

106. $y^2+z^2=x^2$ конуснинг $x^2+y^2=a^2$ цилиндр билан кесишган қисми.

107. $x^2+z^2=4$ цилиндрнинг $x^2+y^2=4$ цилиндр ичидаги қисми.

108. $x^2-y^2-z^2=0$ конуснинг $x^2+y^2=1$ цилиндр ичидаги қисми.

109. $2z=x^2+y^2$ параболоиднинг $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ цилиндр билан кесишган қисми.

110. $x^2+y^2+z^2=9$ сферанинг $x^2+y^2=4$ цилиндр билан кесишган қисми.

6-§. Уч каррали интегралларни ҳисоблаш

1. Уч ўлчовли фазода T жисм берилган бўлиб, унда $u=f(x, y, z)$ функция аниқланган бўлсин.

Агар T жисм қуйидаги тенгсизликлар билан аниқланган бўлса,

$$T = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; \begin{array}{l} a \leqslant x \leqslant b \\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x) \\ \psi_1(x, y) \leqslant z \leqslant \psi_2(x, y) \end{array} \right\},$$

у ҳолда уч каррали интеграл

$$\iiint\limits_{T} f(x, y, z)\,dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

2. $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$ цилиндрик координаталарга ўтиб, уч каррали интегрални ҳисоблаш мумкин:

$$(0\leqslant\rho<+\infty,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ -\infty<z<+\infty)$$

$$\iiint\limits_T f(x,\ y,\ z)\,dxdydz=\iiint\limits_{T'} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz.$$

3 $x=\rho\cos\varphi\sin\theta$, $y=\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z=\rho\cos\theta$ сферик координаталарга ўтиб, уч каррали интегрални ҳисоблаш мумкин:

$$(0\leqslant\rho<+\infty,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

$$\iiint\limits_T f(x,\ y,\ z)\,dxdydz=\iiint\limits_{T'} f(\rho\cos\varphi\sin\theta,\ \ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \ \rho\cos\theta)\times$$

$$\times\,\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

4. Агар T да $f(x,\ y,\ z)=1$ бўлса, у ҳолда T жисмнинг ҳажми $V=\iiint\limits_T dxdydz$ ёрдамида ҳисобланади.

Такрорий интегралларни ҳисобланг.

111. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^3 dy\int\limits_0^2(x+y+z)\,dz.$

112. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1(3x+y+2z)\,dz.$

113. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{x+2y} dz.$

114. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}} zdz.$

Уч каррали интегралларни ҳисобланг:

115. $\iiint\limits_T(2x+y-z)\,dxdydz;\ T:\left\{\begin{matrix}0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0\leqslant z\leqslant 1\end{matrix}\right\}.$

116. $\iiint\limits_T(x+y+z)\,dxdydz;\ \ T:\left\{\begin{matrix}0\leqslant x\leqslant a\\ 0\leqslant y\leqslant b\\ 0\leqslant z\leqslant c\end{matrix}\right\}.$

117. $\iiint\limits_T(3x+2y+z)\,dxdydz;\ \ T:\left\{\begin{matrix}0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 2\\ 0\leqslant z\leqslant 3\end{matrix}\right\}.$

118. $\iiint\limits_T\dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^4};\ \ T:\left\{\begin{matrix}0\leqslant x\leqslant 3\\ 0\leqslant y\leqslant 2\\ 0\leqslant z\leqslant 1\end{matrix}\right\}.$

Сферик координаталарни киритиб, уч каррали интегралларни ҳисобланг:

119. $\iiint\limits_T x^2\,dxdydz$; $T - x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ шардан иборат.

120. $\iiint\limits_T (x^2 + y^2 + z^2)\,dxdydz$; $T - x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ шардан иборат.

121. $\iiint\limits_T (x^2 + y^2)\,dxdydz$; $T - x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ $(z \geqslant$ $\geqslant 0)$ ярим шардан иборат.

122. $\iiint\limits_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$; $T - x^2 + y^2 + z^2 \leqslant$ $\leqslant R^2$ шардан иборат.

Цилиндрик координаталарни киритиб, уч ўлчовли интегралларни ҳисобланг:

123. $\iiint\limits_T (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz \quad T: \begin{cases} z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \text{айланма параболоид} \\ z = 2 - \text{текислик.} \end{cases}$

124. $\iiint\limits_T (x^2 + y^2 + z^2)^2\,dxdydz \quad T: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - \text{цилиндр,} \\ y = 0,\ y = 1 - \text{текисликлар.} \end{cases}$

7-§. Каррали интегралларнинг механикага татбиқи

1. Oxy текислигида зичлиги $\rho(x,y)$ бўлган пластинка берилган.

D—пластинканинг xOy да ҳосил қилган соҳаси бўлсин. Шу пластинканинг массаси

$$M = \iint\limits_D \rho(x, y)\,dxdy$$

бўлади. Ox ва Oy ўқларга нисбатан статик моментлари мос ҳолда $M_x = \iint\limits_D y\rho(x, y)\,dxdy$ ва $M_y = \iint\limits_{(D)} x\rho(x, y)dxdy$ бўлади.

2. Пластинканинг оғирлик маркази координаталари

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint\limits_{(D)} x\rho(x, y)dxdy}{\iint\limits_{(D)} \rho(x, y)dxdy},$$

$$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint\limits_{D} y\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_{(D)} \rho(x,y)dxdy}$$

формулалар билан аниқланади.

3. Пластинканинг инерция моментлари:

$$I_x=\iint\limits_{D} y^2\rho(x,y)dxdy, \qquad I_y=\iint\limits_{D} x^2\rho(x,y)dxdy$$

формулалар билан аниқланади.

Координаталар боши $O(0,0)$ га нисбатан инерция моменти эса

$$I_0=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy=I_x+I_y$$

формулалар билан аниқланади.

4. Жисм оғирлик марказининг координаталари қуйидагича аниқланади:

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{M}=\frac{\iint\limits_{D} xzdxdy}{\iint\limits_{D} dxdy} \quad \text{ёки} \quad \bar{x}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{(V)}\rho xdx\,dydz,$$

$$\bar{y}=\frac{M_{xz}}{M}=\frac{\iint\limits_{D} y^{z}dxdy}{\iint\limits_{D} dxdy} \quad \text{ёки} \quad \bar{y}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{(V)}\rho y\,dx\,dy\,dz,$$

$$\bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{\iint\limits_{D} z^2dxdy}{\iint\limits_{D} dxdy} \quad \text{ёки} \quad \bar{z}=\frac{1}{V}\iiint\limits_{(V)}\rho z\,dx\,dy\,dz,$$

бунда $V=\iiint\limits_{(V)}\rho\,dx\,dy\,dz.$

5. Жисмнинг инерция моментини топиш учун формулалар:

$$I_z=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)zdxdy, \quad I_{zx}=\iint\limits_{D} y^2zdxdy, \quad I_{yz}=\iint\limits_{D} x^2zdxdy.$$

6. Жисмнинг координата текисликлари ва $O(0,0)$ га нисбатан инерция моментлари

$$I_{xy}=\iiint\limits_{V}\rho z^2dxdydz, \quad I_{xz}=\iiint\limits_{V}\rho y^2dxdydz, \quad I_{yz}=\iiint\limits_{V}\rho x^2dxdydz$$

$$I_0=\iiint\limits_{V}\rho(x^2+y^2+z^2)dxdydz.$$

формулалар билан **аниқланади.**

125. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипс ва координата ўқлари билан чегараланган биринчи квадрантда жойлашган фигуранинг M_x ва M_y статик моментларини топинг. Фигиранинг зичлиги $\rho(x,y)=\alpha xy$, α — const.

126. $0\leqslant y\leqslant\sqrt{R^2-x^2}$ ярим доиранинг M_x ва M_y статик моментларини топинг. ρ — ўзгармас.

127. Учлари $A(0;0)$, $B(a;0)$, $C(0;b)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг M_x ва M_y статик моментларини топинг, ρ — ўзгармас

128. $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$ тўғри тўртбурчакнинг M_x, M_y статик моментларини топинг. ρ — ўзгармас.

Қуйидаги чизиқлар билан чегараланган бир жинсли фигуранинг оғирлик марказини топинг.

129. $x=-a$, $x=a$, $y=-b$, $y=b$ тўғри тўртбурчак.

130. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипснинг абсцисса ўқи юқори қисми билан чегараланган.

131. $y=x^2$ парабола ва $x+y=2$ тўғри чизиқ билан чегараланган.

132. $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $y=0$.

Бир жинсли жисмларнинг оғирлик марказини топинг.

133. $x+y+z=4$, $x=1$, $y=1$ текисликлар ва координата текисликлари билан чегараланган кесик призма.

134. $x^2+y^2+z^2\leqslant K^2$; $z\geqslant 0$ ярим шар.

135. Радиуси 1 га тенг бир жинсли шарнинг марказига нисбатан инерция моментини топинг.

136. $z^2=x^2+y^2$ конус, $z=h$ текислик ($h>0$, $z\geqslant 0$, $\rho=1$) билан чегараланган жисмнинг координата текисликларига нисбатан инерция моментларини топинг.

XII бобга доир аралаш масалалар

137. $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$ цилиндрлар билан чегараланган жисм ҳажмини ҳисобланг.

138. $x^2+y^2+z^2=a^2$ сферанинг $x^2+y^2=ay$ цилиндр ичидаги бўлагининг сирт юзини ҳисобланг.

139. $x^2+4y^2+z=1$ ва $z=0$ сиртлар билан чегараланган жисмнинг ҳажми $\frac{\pi}{4}$ га тенг. Исботланг.

140. $x^2+y^2=R^2$ конус, $x^2+y^2=2y$ цилиндр ва $z=0$ текислик билан чегараланган жисм ҳажмини ҳисобланг.

141. $z^2=x^2+y^2$ конуснинг $x^2+y^2=2x$ цилиндр билан кесилган қисмининг сирт юзини ҳисобланг.

142. φ_1 ва φ_2 узунликларга $(\varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2})$ мос келган меридианлар орасидаги R радиусли шар бўлагининг ҳажмини уч каррали интеграл ёрдамида ҳисобланг.

143. R радиусли шардан учи марказда, ясовчиси a Oz ўқи билан α бурчак ҳосил қилган конус ўйиб олиб, шар сектори ҳосил қилинган, унинг ҳажмини ҳисобланг.

144 Ўзгарувчиларни алмаштириш ёрдамида қуйидаги айниятни исботланг:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2z\sin\varphi\sin\theta)d\varphi d\theta = \left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\sin\lambda)d\lambda\right\}^2.$$

145 $x=\varphi(u)\cos v$, $y=\varphi(u)\sin v$, $z=\psi(u)$, $(\alpha \leqslant u \leqslant \beta$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi)$ айланма сирт юзини топинг.

146. $x=R\cos u\cos v$, $y=R\cos u\sin v$, $z=R\sin u$ сферанинг $u=u_1$, $u=u_2$ параллеллар ва $v=v_1$, $v=v_2$ меридианлар орасидаги бўлагининг сирт юзини топинг.

XIII БОБ ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

1-§. Биринчи тур эгри чизиқли интеграллар

1. Текисликдаги тўғриланувчи содда эгри чизиқда „нуқта функцияси“ $f(M)=f(x,y)$, эгри чизиқни A_iA_{i+1} бўлакларга бўлиш усули $T=\{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$ берилган бўлсин. Ҳар бир A_iA_{i+1} бўлакда ихтиёрий $M_i(\xi_i, \eta_i)$ нуқта танлаб,

$$S_T(f)=\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta s_i=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i \qquad (1)$$

интеграл йиғиндини тузамиз, бу ерда Δs_i билан A_iA_{i+1} ёй узунлиги белгиланган.

Агар $\lambda(T)=\max\Delta s_i \to 0$ да (1) интеграл йиғиндининг бўлиш усули T га ва M_i нуқталарнинг танлаб олинишига боғлиқ бўлмаган чекли лимити мавжуд бўлса, бу лимит $f(x,y)$ функциядан Γ эгри чизиқ бўйича олинган биринчи тур эгри чизиқли интеграл дейилади ва қуйидагича белгиланади:

$$I=\int_{\Gamma} f(x, y)\,ds \qquad (2)$$

бу ерда ds – ёй дифференциали.

2. Оддий аниқ интегралга келтириш.

AB эгри чизиқ

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин, бу ерда φ **ва** ψ ҳосилалари билан бирга узлуксиз бўлган функциялар. У ҳолда (2) эгри чизиқли интеграл

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt. \qquad \textbf{(3)}$$

Агар AB эгри чизиқ ошкор $y = g(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ тенглама билан берилган бўлса, (3) формула

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,ds = \int\limits_{a}^{h} f(x,g(x))\sqrt{1 + g'^2(x)}\,dx \qquad \textbf{(4)}$$

кўринишни олади.

Эгри чизиқ қутб системасида $\rho = g(\theta)$ $(\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1)$ тенглама билан берилган бўлса, (2) интеграл

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,ds = \int\limits_{\theta_0}^{\theta_1} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\theta \qquad \textbf{(5)}$$

формула бўйича ҳисобланади.

3. Механик масалаларга татбиқи.

Агар текис моддий AB эгри чизиқнинг зичлиги $\mu = \mu(x,y)$ бўлса, у ҳолда унинг M массаси

$$M = \int\limits_{AB} \mu(x,y)\,ds \qquad \textbf{(6)}$$

формула бўйича топилади.

Шу эгри чизиқнинг оғирлик маркази координаталарини ифодалаш формулалари эса

$$x_0 = \frac{1}{M}\int\limits_{AB} x\mu(x,y)\,ds,\ y_0 = \frac{1}{M}\int\limits_{AB} y\mu(x,y)\,ds \qquad \textbf{(7)}$$

кўринишда бўлади.

Қуйидаги эгри чизиқли интегралларни ҳисобланг.

1. $\int\limits_{\Gamma} (x+y)ds$, бу ерда Γ — учлари $O(0, 0)$, $A(1,0)$, $B(0, 1)$ нуқталарда ётувчи учбурчак контуридан иборат.

2. $\int\limits_{\Gamma} xyds$, бу ерда Γ — $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$, $y = 2$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчак контури.

3. $\int\limits_{\Gamma} (x^2+y^2)^5 ds$, бу ерда Γ — $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ айланадан иборат.

4. $\int\limits_{\Gamma} y^2 ds$, бу ерда $\Gamma - x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоиданинг биринчи арки.

5. $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} ds$, бу ерда $\Gamma - x^2 + y^2 = ax$ айланадан иборат.

6. $\int\limits_{\Gamma} x\sqrt{x^2 - y^2} ds$, бу ерда $\Gamma - \rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ лемнискатанинг ўнг япроғи.

7. $\int\limits_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds$, бу ерда $\Gamma - x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ винт чизиғининг биринчи ўрами.

8. $\int\limits_{\Gamma} (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) ds$, бу ерда $\Gamma - x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$ коник винт чизиғининг биринчи ўрамидан иборат.

9. $\int\limits_{\Gamma} x^2 ds$, бу ерда $\Gamma - x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ сфера билан $x + y + z = 0$ текисликнинг кесишишидан ҳосил бўлган айлана.

10. $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{2y^2 + z^2} dz$, бу ерда $\Gamma - x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ сфера билан $x = y$ текисликнинг кесишишидан ҳосил бўлган айлана.

11. Ҳар бир нуқтадаги зичлиги шу нуқтанинг ординатасига тенг бўлган $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ эллипснинг биринчи квадрантда ётувчи чорагининг массасини ҳисобланг.

12. Ҳар бир (x,y) нуқтадаги зичлиги $\mu(x,y) = |y|$ бўлган $y^2 = 2px$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{p}{2}\right)$ парабола ёйининг массасини ҳисобланг.

13. Бир жинсли $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$ циклоида ёйининг оғирлик маркази координаталарини топинг.

14. Биринчи квадрантда жойлашган $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ астроида ёйининг оғирлик маркази координаталарини топинг.

15. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ бир жинсли астроиданинг биринчи квадрантда ётувчи чорагининг координата ўқларига нисбатан статик моментларини топинг.

16. $x^2 + y^2 = a^2$ бир жинсли айлананинг диаметрига нисбатан инерция моментини топинг.

2-§. Иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар

1. Содда AB эгри чизиқда $P(M)=P(x,y)$ ва $Q(M)=Q(x,y)$ функциялар ва бу эгри чизиқни A_iA_{i+1} бўлакларга ажратиш усули $T=\{A_0,A_1, \ldots, A_n\}$ берилган бўлсин. Ҳар бир A_iA_{i+1} бўлакда ихтиёрий $M_i(\xi_i,\eta_i)$ нуқта танлаб олиб,

$$S_T(P)=\sum_{i=0}^{n-1} P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i$$

$$S_T(Q)=\sum_{i=0}^{n-1} Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i$$

интеграл йиғиндиларни тузамиз, бу ерда Δx_i ва Δy_i лар билан мос равишда A_iA_{i+1} ёйнинг x ва y ўқларидаги проекциялари белгиланган.

Агар $\lambda(T)=\max A_iA_{i+1}\to 0$ да $S_T(P)$ ва $S_T(Q)$ йиғиндиларнинг чекли лимитлари мавжуд бўлса, у ҳолда бу лимитлар $P(x,y)$ ва $Q(x,y)$ функциялардан олинган иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар дейилади ва мос равишда $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$, $\int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy$ каби белгиланади.

$$\int\limits_{AB} P\, x, y)dx+\int\limits_{AB} Q(x,y)\,dy \quad \text{йиғиндини}$$

иккинчи тур эгри чизиқли интегралларнинг умумий кўриниши деб аташ ва

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy \text{ каби ёзиш қабул қилинган.}$$

2. Оддий аниқ интегралга келтириш.

Агар AB эгри чизиқ

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ (\alpha\leqslant t<\beta)$$

параметрик тенгламалар билан берилса, у ҳолда иккинчи тур эгри чизиқли интеграл

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{\alpha}^{b}[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]dt \quad (1)$$

формула бўйича ҳисобланади.

Агар эгри чизиқ $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ тенглама билан берилса, (1) формула

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx+Q(x,y)dy=\int_{a}^{b}[P(x\,f(x))+Q(x,f(x))f'(x)]dx \quad (2)$$

кўринишни олади.

Агар $\vec{F}(x,y)=\{P(x,y), Q(x,y)\}$ — куч майдони бўлса, бу кучнинг моддий нуқтани эгри чизиқ бўйлаб силжитишда бажарган иши W иккинчи тур эгри чизиқли интеграл билан ифодаланади:

$$W=\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy.$$

Интегралларни ҳисобланг.

17. $\int\limits_{AB}(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, бу ерда $AB - y=x^2$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ парабола.

18. $\int\limits_{\Gamma} xdy$, бу ерда $\Gamma - \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ тўғри чизиқнинг Ox ўқи билан кесишиш нуқтасидан Oy ўқи билан кесишиш нуқтасигача бўлган кесмаси

19. $\int\limits_{\Gamma}(2a-y)dx-(a-y)dy$, бу ерда $\Gamma - x=a(t-$ $-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ циклоиданинг биринчи арки.

20. $\int\limits_{\Gamma} y^2dx+x^2dy$, бу ерда Γ — соат стрелкасининг ҳаракати бўйича йўналган $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ юқори ярим эллипс.

21. $\int\limits_{\Gamma} xdx+xydy$, бу ерда Γ — соат стрелкасининг ҳаракатига тескари йўналган $x^2+y^2=2x$ юқори ярим айлана.

22. $\int\limits_{\Gamma}\frac{xy(ydx-xdy)}{x^2+y^2}$, бу ерда $\Gamma - \rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ лемнискатанинг соат стрелкасининг ҳаракатига тескари йўналган ўнг япроғи.

23. $\int\limits_{\Gamma} yzdx+zxdy+xydz$, бу ерда $\Gamma - x=r\cos t$

$y=r\sin t$, $z=\frac{at}{2\pi}$ винт чизиғининг

$z=0$ текислик билан кесишиш нуқтасидан $z=a$ текислик билан кесишиш нуқтасигача бўлган ёйи.

24. $\int\limits_{\Gamma}(y^2-z^2)dx+2yzdy-x^2dz$, бу ерда Γ — параметрнинг ўсиб бориш томонига йўналган $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ чизиқ.

25. $\int\limits_{\Gamma} y^2dx + z^2dy + x^2dz$, бу ерда Γ — координаталар бошидан қараганда соат стрелкасининг ҳаракатига тескари йўналишда босиб ўтиладиган $x^2+y^2=ax$ $(a>0)$ цилиндр билан $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geqslant 0)$ сферанинг кесишишидан ҳосил бўлган Вивиани чизиғининг бир қисми.

26. $\int\limits_{\Gamma} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, бу ерда Γ — Ox ўқининг мусбат томонидан қараганда соат стрелкасининг ҳаракатига тескари йўналишда босиб ўтиладиган $x^2+y^2+z^2=a^2$ сфера билан $y = x\operatorname{tg}\alpha$ текисликнинг кесишишидан ҳосил бўлган айлана.

27. m масса $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ нуқтадан $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$ нуқтагача ихтиёрий Γ йўл бўйича силжишидаги F оғирлик кучи бажарган ишни аниқланг.

28. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ эллипснинг ҳар бир M нуқтасига миқдор жиҳатдан шу нуқтадан эллипснинг марказигача бўлган масофага тенг ва эллипснинг марказига қараб йўналган F куч қўйилган. Нуқта биринчи квадрантда ётувчи эллипс ёйи бўйича силжиганда F кучнинг бажарган ишини топинг.

3-§. Эгри чизиқли интегралнинг интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслик шартлари. Грин формуласи

1. Агар $P(x,\ y)$ ва $Q(x,\ y)$ функциялар учун

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (1)$$ шарт бажарилса, у ҳолда

$P(x,\ y)dx + Q(x,\ y)dy$ ифода бирор $u(x,\ y)$ функциянинг тўла дифференциали бўлади ва

$$\int\limits_{AB} P(x,\ y)dx + Q(x,\ y)dy$$ интеграл

интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмай, фақат A ва B нуқталарнинг берилиши билан бир қийматли аниқланади.

Тўла дифференциали бўйича функциянинг ўзи

$$u(x,\ y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,\ y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,\ t)dt + C \qquad (2)$$

ёки

$$u(x,\ y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,\ y)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,\ t)dt + C \qquad (3)$$

формула орқали топилади.

2. Икки каррали ва эгри чизиқли интегралларни боғловчи

$$\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_{\Gamma}Pdx+Qdy \tag{4}$$

формула Грин формуласи дейилиб, бу формуладан фойдаланиб, D соҳанинг юзини қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$S=\oint\limits_{\Gamma}xdy=-\oint\limits_{\Gamma}ydx=\frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma}xdy-ydx,$$

бу ерда $\Gamma - D$ соҳанинг чегараси.

Қуйидаги тўла дифференциаллардан олинган интегралларни ҳисобланг.

29. $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)}(x+y)(dx+dy).$

30. $\int\limits_{(3,4)}^{(5,12)}\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ (координаталар боши интеграллаш йўлига тегишли эмас).

31. $\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)}\frac{ydx-xdy}{x^2}$ Oy ўқи билан кесишмайдиган йўллар бўйича.

32. $\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy.$

33. $\int\limits_{(1,2,3)}^{(3,2,1)}yzdx+zxdy+xydz.$

34. $\int\limits_{(0,0,0)}^{(1,2,2)}\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

Қуйидаги мисолларда тўла дифференциал бўйича функцияни топинг.

35. $du=(3x^2-2xy+y^2)dx-(x^2-2xy+3y^2)dy.$

36. $du=(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy.$

37. $du=\frac{ydx \quad xdy}{3x^2-2xy+3y^2}.$

38. $du=\frac{(3y-x)dx+(y-3x)dy}{(x+y)^3}.$

39. $du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$

40. $du = \frac{2(zxdy + xydz - yzdx)}{(x - yz)^2}$.

Грин формуласидан фойдаланиб, интегралларни ҳисобланг.

41. $\oint\limits_{\Gamma} xy^2dy - x^2ydx$, бу ерда $\Gamma - x^2 + y^2 = a^2$ айлана.

42. $\oint\limits_{\Gamma} (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, бу ерда $\Gamma -$

$x^2 + y^2 = ax$ айлана.

43. $\oint\limits_{\Gamma} e^x[(1 - \cos y)dx - (y - \sin y)dy]$, бу ерда $\Gamma -$ $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \sin x$ соҳани чегараловчи мусбат йўналишдаги контур.

44. $\oint\limits_{\Gamma} (x + y)dx - (x - y)dy$, бу ерда $\Gamma -$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс.

45. $I = \oint\limits_{\Gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ интегрални қуйидаги икки ҳол учун ҳисобланг.

а) координаталар боши Γ нинг ташқарисида ётади.

б) Γ контур координаталар бошини бир марта ўраб олади.

46. $I_1 = \int\limits_{AnB} (x + y)^2dx - (x - y)^2dy$

ва

$$I_2 = \int\limits_{AmB} (x + y)^2dx - (x - y)^2dy$$

интегралларнинг айирмасини ҳисобланг, бу ерда AnB—$A(0, 0)$ ва $B(1, 1)$ нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси, AmB эса $y = x^2$ парабола ёйи.

Эгри чизиқли интеграл ёрдамида ёпиқ чизиқлар билан чегараланган фигураларнинг юзларини ҳисобланг.

47. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

48. $x=\frac{3t}{1+t^3}$, $y=\frac{3t^2}{1+t^3}$ Декарт сиртмоғи билан чегараланган.

49. $\rho=a\sin 2\varphi$.

50. $\rho=2a(2+\cos\varphi)$.

XIII бобга доир аралаш масалалар

51. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{12}=xy$ илмоқ шаклидаги эгри чизиқ билан чегараланган фигуранинг юзини топинг

52. Иккита нуқтавий массалар тортишиш кучининг уларнинг биттасини силжитишда бажарган ишининг йўл шаклига боғлиқ эмаслигини кўрсатинг. Ньютон қонунига биноан, тортишиш кучи $F=k\frac{m_1m_2}{r^2}$ формула билан аниқланади, бу ерда r— иккита нуқта орасидаги масофа, m_1 ва m_2—шу нуқталарда тўпланган массалар, k—гравитацион доимий.

53. $u(x,\ y)=\oint\limits_{\Gamma}\frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n})}{r}\,ds$ Гаусс интегралини ҳисобланг, бу ерда $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$ — $A(x,\ y)$ нуқтани содда ва силлиқ Γ ёпиқ контурнинг ўзгарувчан $M(\xi,\ \eta)$ нуқтаси билан бирлаштирувчи $\vec{r}$ векторнинг узунлиги, $(\vec{r}, \vec{n})$ — M нуқтада Γ эгри чизиққа ўтказилган $\vec{n}$ ташқи бирлик нормал билан $\vec{r}$ вектор орасидаги бурчак.

54. Ўтказгичнинг ds элементидан ўтаётган i ток фазонинг $M(x,\ y,\ z)$ нуқтасида Био-Савар қонунига кўра $d\vec{H}=ki\,\frac{[\vec{r}.\,\vec{ds}]}{r^3}$ кучланишли магнит майдон ҳосил қилади, бу ерда $\vec{r}$ элемент ds билан M нуқтани бирлаштирувчи вектор, k — пропорционаллик коэффициенти C ўтказгичнинг ёпиқ бўлган ҳоли учун M нуқтасида магнит майдон кучланиши $\vec{H}$ нинг H_ξ, H_η, H_ζ проекцияларини топинг.

XIV БОБ. БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1-§. Умумий тушунчалар Ўзгарувчилари ажраладиган тенгламалар

1. Номаълум функциянинг ҳосиласи ёки дифференциали **қатнашадиган** тенглама дифференциал тенглама дейилади.

Тенгламадаги номаълум функция ҳосиласи (**дифференциали**) нинг энг юқори тартиби тенгламанинг тартиби дейилади.

Бирор соҳада тенгламани қаноатлантирадиган $y=\varphi(x)$ **функция** шу соҳада тенгламанинг ечими ёки интеграли дейилади ва **бу** функция графиги тенгламанинг интеграл чизиғи дейилади.

2 Биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг умумий **кў**риниши

$$F(x,\ y,\ y') = 0. \quad (1) \qquad y' = f(x,\ y) \quad (2)$$

эса ҳосилага нисбатан ечилган кўринишидир

Коши масаласи. (2) тенгламани ва бошланғич

$$x = x_0 \text{ да } y = y_0 \qquad \textbf{(3)}$$

шартни қаноатлантирувчи функцияни топинг.

3. $M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$ **(4)**

кўринишдаги тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенглама **дейи**лади. (4) тенглама

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = C$$

интеграллаш билан ечилади.

Дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимини топинг.

1. $xydx + \sqrt{1+x^2}dy = 0.$
2. $yy' = \frac{1-2x}{y}.$
3. $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0.$
4. $e^{-s}\left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1.$
5. $y' = \cos(y - x).$
6. $y' - y = 2x - 3$
7. $(x + 2y)y' = 1.$
8 $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}.$

Дифференциал тенгламаларнинг бошланғич **шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимларини топинг.**

9. $y' \sin x = y \ln y; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e.$

10. $y' + \sin(x - y) = \sin(x + y), \quad y(\pi) = \frac{\pi}{2}.$

11. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2, \quad y(0) = 3.$

12. $y - xy' = b(1 + x^2 y'), \quad y(1) = 1.$

13. Ихтиёрий нуқтасида ўтказилган уринманинг уриниш нуқтасидан абсциссалар ўқигача бўлган кесмаси ординаталар ўқи билан кесишиш нуқтасида иккига бўлинадиган эгри чизиқларни топинг.

14. Моддий нуқта шундай тўғри чизиқли ҳаракат қиладики, унинг t моментдаги кинетик энергияси 0 дан t гача бўлган вақт оралиғидаги ўртача тезликка тўғри пропорционал. $t = 0$ да $s = 0$ экани маълум Ҳаракатнинг текис бўлишини кўрсатинг.

15. Тандирдан олинган ноннинг температураси 20 минутда 100° дан 60° гача пасаяди. Ҳавонинг температураси 25° Тандирдан олингач, қанча вақтдан кейин ноннинг температураси 30° бўлади?

16. Диаметри D, баландлиги H бўлган вертикал ўқли доиравий цилиндрик бак сув билан тўлдирилган. Бак тубидаги a диаметрли доиравий тешик орқали бакнинг тўла бўшаш вақтини аниқланг.

2-§. Бир жинсли тенгламалар

Агар t нинг ихтиёрий қийматида $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ шарт бажарилса, $f(x, y)$ функция n ўлчовли бир жинсли функция дейилади.

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

ёки

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2}$$

кўринишдаги тенглама бир жинсли дифференциал тенглама дейилади, бу ерда $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ бир хил ўлчовли бир жинсли функциялардир. $y = xu$ алмаштиришдан сўнг ўзгарувчилар ажралади.

Тенгламаларнинг умумий ечимини топинг.

17. $(x + 2y)dx - xdy = 0.$

18. $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0.$

19. $y^2 + x^2 y' = xyy'.$

20. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$.

21. $xy' = y \ln \frac{y}{x}$.

22. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$.

23. $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$.

24. $y' = \frac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$.

25. $(2x - y + 4)dy + (x - 2y + 5)dx = 0$.

26. $y' = 2\left(\frac{y + 2}{x + y - 1}\right)^2$.

Дифференциал тенгламаларнинг бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимларини топинг.

27. $(xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x, \quad y(1) = 0$.

28. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0, \quad y(0) = 1$.

29. Уринма ости уриниш нуқтасининг абсциссаси ва ординатасининг йиғиндисига тенг бўлган эгри чизиқларни топинг.

30. Шундай эгри чизиқ тенгламасини тузингки, унинг исталган нуқтаси орқали ўтказилган уринмасининг координаталар бошигача бўлган масофаси уриниш нуқтасининг абсциссасига тенг бўлсин.

3-§. Чизиқли дифференциал тенгламалар

$y' + P(x)y = f(x)$ тенглама чизиқли дифференциал тенглама дейилади. Буни $y = uv$ алмаштириш ёрдамида ечиш мумкин, бу ерда $v = v(x)$ $v' + P(x)v = 0$ тенгламадан топилади.

$$y' + P(x)y = f(x)y^n \quad (n \neq 0,\ n \neq 1)$$

Бернулли тенгламаси бўлиб, $u = y^{1-n}$ алмаштириш ёрдамида чизиқли тенгламага келтирилади.

Тенгламаларнинг умумий ечимларини топинг.

31. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

32. $y' + \frac{1 + 2x}{x^2} y = 1$.

33. $y' + y = \cos x$.

34. $y' = \frac{1}{2x - y^2}$.

35. $y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x}$.

36. $(x + y^2)dy = ydx$.

37. $y' + 2y = y^2 e^{\lambda}$.

38. $2xydy = (y^2 - x)dx$.

39. $xy^2y' = x^2 + y^3$.

40. $xdx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right)dy$.

41. Индуктивлик занжирида ўтиш процесси содир бўлади. L индуктивлик ва R қаршилик — ўзгармасдир. Бошланғич ток $I_0 = 0$ га тенг. Электр юритувчи куч t вақтнинг функцияси сифатида берилган: $E = f(t)$.

I токнинг t вақтга боғланишини топинг.

42. Олдинги масала шартидаги I токнинг t вақтга боғланишини топинг, бу ерда электр юритувчи куч $E = E_0 \sin \omega t$ қонун бўйича ўзгаради.

43. Шундай эгри чизиқ тенгламасини тузингки, унинг исталган нуқтасининг радиус вектори, шу нуқтадан ўтказилган уринма ва Ox ўқ ҳосил қилган учбурчакнинг юзи a^2 га тенг.

44. Координаталар бошидан ўтувчи шундай эгри чизиқ тенгламасини тузингки, унинг нормалининг эгри чизиқ исталган нуқтасидан Ox ўққача бўлган кесмасининг ўртаси $y^2 = ax$ параболада ётади.

4-§. Тўлиқ дифференциалли тенгламалар. Интегралловчи кўпайтувчи

Агар $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = du(x, y)$ бўлса, яъни $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ *шарт бажарилса,*

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

тенглама тўлиқ дифференциалли тенглама дейилади. (1) нинг умумий ечими $u(x, y) = C$ кўринишда бўлади. Бу функцияни

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy \tag{2}$$

формула бўйича топиш мумкин.

Агар $\mu M(x, y)\,dx + \mu N(x, y)\,dy = 0$ тўлиқ дифференциалли тенглама бўлса, $\mu = \mu(x, y)$ функция интегралловчи кўпайтувчи дейилади.

Фақат x га боғлиқ бўлган $\mu(x)$ $\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{M'_y - N'_x}{N}$ тенгламадан, фақат y га боғлиқ бўлган $\mu(y)$ эса $\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{N'_x - M'_y}{M}$ тенгламадан топилади.

Тўлиқ дифференциалли тенгламаларнинг умумий ечимларини топинг.

45. $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)\,y' = 0.$

46. $(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0.$

47. $e^y dx + (xe^y - 2y)\,dy = 0.$

48. $xdx + ydy = \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$

49. $2x\cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)\,dy = 0.$

50. $\left(\dfrac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0.$

51. Ушбу

$$(1 + e^{\frac{x}{y}})\,dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$$

тенгламанинг $y(0) = 2$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Тенгламаларнинг интегралловчи кўпайтувчиси **ва** умумий ечимларини топинг.

52. $(x^2 + y)\,dx - xdy = 0.$

53. $(x + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0.$

54. $\dfrac{y}{x}\,dx + (y^3 - \ln x)\,dy = 0.$

55. $2xy \ln y\,dx + (x^2 + y^2 \sqrt{1 + y^2})\,dy = 0.$

56. $(x\cos y - y\sin y)\,dy + (x\sin y + y\cos y)\,dx = 0.$

5-§. Ҳосилага нисбатан ечилмаган тенгламалар. Махсус ечимлар

1. Ҳар бир нуқтаси орқали ҳеч бўлмаганда иккита интеграл эгри чизиқ ўтувчи

$$F(x,\ y,\ y') = 0 \qquad (1)$$

тенгламанинг ечими махсус ечим дейилади.

Махсус интеграл эгри чизиқ (1) нинг интеграл эгри чизиқлар оиласининг ўрамаси сифатида топилиши мумкин. Бундан ташқари, махсус ечим $F(x,\ y,\ p) = 0$, $F'_p(x,\ y,\ p) = 0$ системадан p параметрни йўқотиш билан топилиши ҳам мумкин.

2. $y = xy' + \psi(y')$ Клеро тенгламасининг умумий ечими $y = Cx + \psi(C)$ кўринишда бўлади. Махсус ечим: $\begin{cases} y = px + \psi(p), \\ x = -\psi'(p). \end{cases}$

$y = x\varphi(y') + \psi(y')$ Лагранж тенгламаси $y' = p$ параметрни киритиб, x бўйича дифференциаллашдан сўнг

$$(\varphi(p) - p)\frac{dx}{dp} + x\varphi'(p) + \psi'(p) = 0$$

кўринишдаги чизиқли тенгламага келтирилади.

Юқори даражали биринчи тартибли дифференциал тенгламаларни ечинг.

57. $4(y')^2 - 9x = 0$.

58. $(y')^2 - 2xy' - 8x^2 = 0$.

59. $x(y')^2 - 2yy' + 4x = 0$.

60. $y(y')^2 - 2xy' + y = 0$.

61. $(y')^2 - \frac{xy}{4} = 0$.

62. $(y')^2 - 2yy' = y^2(e^{2x} - 1)$.

Тенгламаларнинг умумий ва махсус ечимларини топинг.

63. $y^2(1 + (y')^2) = a^2$.

64. $(y')^2 - 4y = 0$.

65. $y^2(y')^2 - 2xyy' + 2y^2 - x^2 = 0$.

66. $2y(y' + 2) - x(y')^2 = 0$.

67. Тенгламанинг умумий ечими $y - C^3x^2 + 2C^2x - C = 0$ кўринишда. Махсус ечимини топинг.

68. Тенгламанинг умумий ечими $(x - C)^2 + y^2 = 1$ кўринишда. Махсус ечимини топинг.

Қуйидаги тенгламаларни параметр киритиш йўли билан интегралланг.

69. $x = y' \sin y'$.

70. $y = (y')^2 + 2(y')^3$.

71. $y = (y')^2 + 2\ln y'$.

72. $y\sqrt{1 + (y')^2} = y'$.

73. $x(1 + (y')^2) = 1$.

74. $y\sqrt{y' - 1} = 2 - y'$.

75. $(y')^2 - yy' + e^x = 0$.

76. $y = x^2 + 2xy' + \frac{1}{2}(y')^2$.

Қуйидаги Лагранж ва Клеро тенгламаларининг умумий ва махсус ечимларини топинг.

77. $y = \frac{x}{2}\left(y' + \frac{4}{y'}\right)$.

78. $y = x(y')^2 + 2y'$.

79. $y' = \ln(xy' - y)$.

80. $y = xy' + \arcsin y'$.

81. $y = y(y')^2 + 2xy'$.

82. $x = y\left(\frac{1}{\sqrt{y'}} - \frac{1}{y'}\right)$.

83. $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{(y')^2}$.

84. $x(y')^2 - yy' - y' + 1 = 0$.

85. Шундай эгри чизиқни топингки, унга ўтказилган исталган уринманинг координата ўқлари орасидаги

кесмаси l га тенг бўлган ўзгармас узунликка эга бўлсин.

86. Шундай эгри чизиқни топингки, унга ўтказилган исталган нормалнинг координата ўқлари орасидаги кесмаси a га тенг бўлган ўзгармас узунликка эга бўлсин.

87 Эгри чизиқнинг исталган нуқтасидаги уринма ости ва нормал остининг ярим айирмаси уриниш нуқтасининг абсциссасига тенг. Шу эгри чизиқни топинг.

88. Эгри чизиқнинг исталган нуқтасидаги нормал ва нормал остининг йиғиндиси шу нуқтанинг абсциссасига пропорционал. Шу эгри чизиқни топинг.

6-§. Изогонал ва ортогонал траекториялар

Агар бир параметрли эгри чизиқлар оиласи

$$\Phi(x, y, C) = 0 \qquad (1)$$

тенглама билан берилса, у ҳолда шу оиланинг ҳар бир чизиғини ўзгармас α бурчак остида кесиб ўтувчи чизиқ берилган (1) оиланинг изогонал траекторияси дейилади. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ бўлганда эса ортогонал траектория дейилади.

Агар берилган эгри чизиқлар оиласи (1) нинг дифференциал тенгламаси

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (2)$$

кўринишда бўлса, у ҳолда (1) оиланинг изогонал траекториялари

$$F\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}\right) = 0 \qquad (3)$$

дифференциал тенгламадан топилади, бу ерда $k = \operatorname{tg} \alpha$. Ортогонал траекторияларнинг дифференциал тенгламаси эса

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$$

каби ёзилади.

89. $x^2 + y^2 + 2ay = 0$ айланалар оиласининг ортогонал траекторияларини топинг.

90. $(2a - x)y^2 = x^3$ циссоидалар оиласининг ортогонал траекторияларини топинг.

91. $x = \frac{a}{y}$ гиперболалар оиласининг ҳар бир чизиғини 45° бурчак остида кесувчи чизиқларни топинг.

92. Агар траекториялар билан $x^2 = 2a(y - \sqrt{3}x)$ эгри чизиқлар оиласининг чизиқлари $\alpha = 60^\circ$ га тенг бўлган ўзгармас бурчак ҳосил қилса, эгри чизиқлар оиласининг изогонал траекторияларини топинг.

XIV бобга доир аралаш масалалар

Тенгламаларни интегралланг.

93. $y = \arcsin y' + \ln(1 + (y')^2)$.

94. $y^{\frac{2}{5}} + (y')^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{2}{5}}$.

95. $(x^2 + y^2 + 1)\,dx - 2xy\,dy = 0$, $\mu = \varphi(y^2 - x^2)$.

96. $y'e^{-x} + y^2 - 2ye^x = 1 - e^{2x}$, $y_1 = e^x$.

97. $y' + x(y')^2 - y = 0$ тенгламанинг тўғри чизиқлардан иборат интеграл эгри чизиқларини топинг.

98. Координата ўқлари, эгри чизиқ ва унинг бирор нуқтасининг ординатаси билан чегараланган фигуранинг юзи шу фигурага мос эгри чизиқ ёйининг узунлигига тенг. Агар бу эгри чизиқнинг $M(0, 1)$ нуқтадан ўтиши маълум бўлса, унинг тенгламасини тузинг.

99. Ёруғлик оқимининг юпқа сув қатлами томонидан ютилиши қатлам қалинлигига ва қатлам сиртига тушаётган оқимга пропорционалдир. 3 м ли қатламдан ўтишда дастлабки ёруғлик оқимининг ярми ютилишини билган ҳолда унинг қандай қисми 30 м чуқурликка етиб боришини аниқланг.

100. Горизонт билан $\alpha = 30°$ бурчак ташкил этувчи оғма текислик бўйича оғир жисм бошланғич тезликсиз тушмоқда. Ишқаланиш коэффициенти $\mu = 0{,}2$ бўлганда $l = 39{,}2$ узунликдаги йўлни жисм қанча вақтда босиб ўтишини аниқланг.

XI БОБ. ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1-§. Тартибини пасайтириш мумкин бўлган дифференциал тенгламалар

1. $y^{(n)} = f(x)$ тенгламанинг тартибини пасайтириш кетма-кет интеграллаш йўли билан амалга оширилади:

$$y = \int dx \ldots \int f(x)\,dx + C_1x^{n-1} + \ldots + C_n$$

2. y ошкор ҳолда иштирок этмаган $F(x,\ y',\ y'') = 0$ тенгламанинг тартиби $y' = p$ алмаштириш ёрдамида биттага камайтирилади.

3. x ошкор ҳолда иштирок этмаган $F(y,\ y',\ y'') = 0$ тенгламанинг тартиби $y' = p$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ алмаштиришлар билан биттага камайтирилади.

4. $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ функция $y, y', \ldots, y^{(n)}$ ларга нисбатан бир жинсли бўлган

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

тенгламанинг тартиби $y = e^{\int z(x)\,dx}$ алмаштириш орқали биттага камайтирилади.

Тенгламаларнинг умумий ечимларини топинг.

1. $y''' = \sin x + \cos x$. 2. $y'' = \ln x$.

3. $y'' = x \sin x$. 4. $y''' = \frac{\ln x}{x^2}$.

5. $xy'' = y'$. 6. $y'' + \frac{y'}{x} = x$.

7. $y''(1 + x^2) = 2xy'$. 8. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$.

9. $y'' = ae^y$. 10. $2(y')^2 = (y - 1)y''$.

11. $y''' = \sqrt{1 - (y'')^2}$. 12. $xy^{\text{V}} - y^{\text{IV}} = 0$.

13. $x^2yy'' = (y - xy')^2$. 14. $yy'' - (y')^2 = 6xy^2$.

15. $(y'')^2 - y'y''' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2$. 16. $y'''(1 + (y')^2) = 3y'(y'')^2$.

Берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимларни топинг.

17. $2y'' = 3y^2$, $y(-2) = 1$, $y'(-2) = -1$.

18. $y''y = x(y')^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.

19. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

20. $yy'' + (y')^3 = (y')^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$.

21. Эгрилик радиусининг Oy ўқидаги проекцияси ўзгармас a сонга тенг бўлган эгри чизиқни топинг.

22. Қандай эгри чизиқнинг исталган нуқтасидаги эгрилик радиуси нормал узунлигига пропорционал бўлади? Пропорционаллик коэффициенти $k = 1$, -1 бўлсин.

23. Массаси m бўлган эркин тушаётган жисмга тезликнинг квадратига пропорционал ҳаво қаршилиги таъсир этади. $t = 0$ да $s = 0$ ва $v = 0$ бошланғич шартларда ҳаракат қонунини топинг.

24. Массаси m га тенг моддий нуқта оғирлик кучи таъсирида эркин тушмоқда. Нуқтанинг ҳаракат қонунини ҳавонинг қаршилигини ҳисобга олмасдан топинг.

2-§. Чизиқли дифференциал тенгламалар

1. $y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = 0$ (1)

бир жинсли чизиқли тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

формула билан аниқланади, бу ерда $y_1, y_2, \ldots, y_n$ лар (1) нинг чизиқли эркли ечимлари.

2. $y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n+1)} + \ldots + p_n(x)\, y = f(x)$ (2)

бир жинслимас тенгламанинг умумий ечими $u = y + u_1$ кўринишда бўлади, бу ерда y (2) га мос бир жинсли тенглама (1) нинг умумий ечими, u' эса (2) нинг бирор хусусий ечими.

Агар (1) нинг чизиқли эркли $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ечимлари маълум бўлса, у ҳолда ўзгармасларни вариациялаш усулини қўллаб, (1) га мос (2) нинг умумий ечимини

$$u = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2 + \ldots + C_n(x)\, y_n$$

формула бўйича топиш мумкин, бундаги $C_i(x)$ лар

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(k)} = 0, \quad (k = \overline{0, (n-2)}),$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-1)} = f(x) \qquad (3)$$

системадан топилади.

Функциялар системасининг чизиқли боғлиқлиги ёки чизиқли эрклилигини аниқланг.

25. $4, x$.
26. $1, 2, x, x^2$.
27. $1, x, x^2, x^3$.
28. e^x, xe^x, x^2e^x.
29. $\sin x, \cos 2x$.
30. $\sin x, \cos x, \cos 2x$.
31. $1, \sin^2 x, \cos^2 x$.
32. $1, \arcsin x, \arccos x$.

Берилган ечимларнинг фундаментал системаларига мос бир жинсли дифференциал тенгламаларни тузинг.

33. x, x^2.
34. e^x, xe^x.
35. $\sin x, \cos x$.
36. $x, \sin x, \cos x$.

37. $(1 - x^2)\, y'' - xy' + \frac{1}{4} y = 0$ тенгламанинг битта хусусий ечими $y_1 = \sqrt{x+1}$. Унинг умумий ечимини топинг.

38. $(2x - x^2)\, y''' + (x^2 - 2)\, y' + 2(1 - x)\, y = 0$ тенглама $y_1 = e^x$ хусусий ечимга эга. Бу тенгламанинг $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$ бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини топинг.

39. $x^2(\ln x - 1)\, y'' - xy' + y = 0$ тенгламанинг $y_1 = x$

хусусий ечими ёрдамида унинг умумий ечимини топинг.

40. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$ тенглама учун $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ функциялар ечимлардир. Унинг умумий ечимини топинг.

Ўзгармасларни вариациялаш усулидан фойдаланиб, қуйидаги бир жинслимас тенгламаларнинг умумий ечимини топинг.

41. $x^2y'' - xy' = 3x^3$.　　42. $xy'' + (2x-1)y^1 = -4x^2$.

43. $y'' - 2y' \operatorname{tg} x = 1$.　　44. $y''' + y' = \sec x$.

3-§. Ўзгармас коэффициентли чизиқли тенгламалар

1. n-тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0 \qquad (1)$$

тенгламанинг умумий ечими

$$r^n + a_1r^{n-1} + \ldots + a_{n-1}r + a_r = 0 \qquad (2)$$

характеристик тенгламанинг илдизларига қараб тузилади.

1) ҳар бир $m \geqslant 0$ каррали ҳақиқий илдизга умумий ечимдаги

$$(C_1 + C_2x + \ldots + C_mx^{m-1})e^{rx}$$

қўшилувчи мос келади.

2) ҳар бир $m \geqslant 0$ каррали $\alpha \pm \beta i$ қўшма комплекс илдизлар жуфтига умумий ечимда

$$e^{\alpha x}[(A_1 + A_2x + \ldots + A_{m-1}x^{m-1})\cos\beta x +$$
$$+ (B_1 + B_2x + \ldots + B_{m-1}x^{m-1})\sin\beta x]$$

қўшилувчи мос келади.

2. Бир жинслимас

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = f(x) \qquad (3)$$

тенгламанинг умумий ечимини топиш учун, 2-§ га кўра, унинг бирорта хусусий ечимини билиш етарлидир, чунки мос бир жинсли тенглама (1) нинг умумий ечими 1-пунктдаги қоидалар бўйича топилади.

Ўнг томони

$$f(x) = e^{ax}[P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx] \qquad (4)$$

махсус кўринишда бўлган (3) тенгламанинг хусусий ечимини топишда аниқмас коэффициентлар усулидан фойдаланиш мумкин. Бу ерда a ва b лар ўзгармас сонлар, $P_n(x)$ ва $Q_m(x)$ мос равишда даражалари n ва m бўлган кўпҳадлар Бу усул бўйича хусусий ечимни излаш қоидаси қуйидагича:

1) агар $a \pm ib$ (2) нинг илдизи бўлмаса, хусусий ечим

$$u_1 = e^{ax}\,[\overline{P}_l(x)\cos bx + \overline{Q}_l(x)\sin bx] \qquad (5)$$

кўринишда изланади, бу ерда $l = \max(n, m)$,

2) агар $a \pm ib$ (2) нинг p каррали илдизи бўлса, хусусий ечим

$$u_1 = x^p e^{ax}\,[\overline{P}_l(x)\cos bx + \bar{Q}_l(x)\sin bx] \qquad (6)$$

кўринишда изланади.

Ўнг қисмда $\cos bx$ ва $\sin bx$ функцияларининг биттаси иштирок этганда u_1 нинг ифодасига бу иккала функцияни ҳам киритиш керак.

(3) тенгламанинг ўнг қисми қандай бўлишидан қатъи назар унинг хусусий ечимини топишда ихтиёрий ўзгармасларни вариациялаш усулини қўллаш мумкин.

Қуйидаги бир жинсли тенгламаларнинг умумий ечимини топинг.

45. $y'' - y' = 0.$

46. $y'' - 4y = 0.$

47. $y'' - 4y' + 3y = 0.$

48. $y'' - 5y' + 6y = 0.$

49. $3y'' - 2y' - 8y = 0.$

50. $y'' - 4y' + 2y = 0.$

51. $y'' + 2y' + y = 0.$

52. $y'' - 4y' + 4y = 0.$

53. $y'' - 2y' + 2y = 0.$

54. $y'' + 4y' + 13y = 0.$

55. $4y'' - 8y' + 5y = 0.$

56. $\dfrac{2y' - y}{y''} = 3.$

Қуйидаги тенгламаларнинг берилган бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини топинг.

57. $y'' - 2y' + 3y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$

58 $y'' - 5y' + 4y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

59 $y'' + 4y' + 29y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 15.$

60. $4y'' + 4y' + y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

61. $y'' + 4y = 0$ тенгламанинг $M\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$ нуқтадан ўтувчи ва шу нуқтада $y + 1 = x - \frac{\pi}{2}$ тўғри чизиққа уринувчи интеграл эгри чизиғини топинг.

62. $y'' + 16y = 0$ тенгламанинг $M(x_0, y_0)$ нуқтадан ўтувчи ва шу нуқтада $y - y_0 = k(x - x_0)$ тўғри чизиққа уринувчи интеграл эгри чизиғини топинг.

Қуйидаги бир жинслимас тенгламанинг умумий ечимларини топинг.

63. $y'' - 7y' + 12y = x.$

64. $y'' - 4y' + 4y = x^2.$

65 $y'' - 2y' = x^2 - 1.$

66. $y'' - y' = 2x - 1.$

67. $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}.$

68. $y'' - y = e^x.$

69. $y''+y=\cos x$. **70.** $y''+4y'+5y=$
$=10e^{-2x}\cos x$.

71. $y''-2y'+2y=e^{x}(x\cos x+\sin x)$.
72. $y''-2y'+5y=e^{x}\cos 2x$.
73. $y''-3y'+2y=f(x)$; бу ерда $f(x)$:
1) $3e^{2x}$; 2) $2\sin x$; 3) $2e^{x}-e^{-2x}$; 4) $\sin x\sin 2x$.
74. $y''-4y'+4y=f(x)$, бу ерда $f(x)$:
1) $3e^{2x}$; 2) $\sin x\cos 2x$; 3) $4x+\sin x+\sin 2x$;
4) $sh\,2x$.

Ихтиёрий ўзгармасларни вариациялаш усулини татбиқ этиб, қуйидаги тенгламаларни интегралланг.

75. $y''+y=\operatorname{tg}x$. **76.** $y''+y=\sec x$.
77. $y''-2y'+y=$ **78.** $y''-4y'+4y=\sin^{3}x$.
$=\dfrac{e^{x}}{x^{2}+1}$.
79. $y''+2y'+2y=$ **80.** $y''-y'=\dfrac{1}{e^{x}+1}$.
$=\dfrac{1}{e^{x}\sin x}$.

81. P оғирликдаги юк тинч ҳолатидаги узунлиги l бўлган вертикал пружинага осилган, юкка қўзғатувчи $Q\sin pt$ даврий куч таъсир этади, бу ерда Q ва p ўзгармас. Пружинанинг массасини ва муҳитнинг қаршилигини ҳисобга олмай, юкнинг ҳаракат қонунини топинг.

82. Массаси 200 г бўлган юк пружинага осилган. Юк 2 см пастга тортилиб, кейин қўйиб юборилган. Агар юк $v=1$ см/с тезлик билан ҳаракат қилса, муҳит унга 0,1 г қаршилик кўрсатади. Пружинанинг қаршилик кучи уни 2 см чўзганда 10 кг. Пружинанинг массасини ҳисобга олмай, муҳит қаршилиги ҳаракат тезлигига пропорционал бўлган ҳолда юкнинг ҳаракат қонунини топинг.

83. Массаси m бўлган моддий нуқта ўзгармас F куч таъсирида A дан B га қараб тўғри чизиқли ҳаракат қилади. Муҳит қаршилиги B дан моддий нуқтагача бўлган масофага пропорционал ва бошланғич моментда (A нуқтада) f га тенг ($f<F$). Нуқтанинг бошланғич тезлиги 0 га тенг бўлганда нуқта A дан B гача қанча вақтда боради?

84. Ингичка узун най перпендикуляр ўқ атрофида доимий ω бурчак тезлик билан айланади. Найнинг ичида шарча ишқалишсиз сирпаниб борганда:

а) бошланғич моментда шарча айланиш ўқидан a масофада ва бошланғич тезлиги $v_0 = 0$ деб.

б) бошланғич моментда шарча айланиш ўқида бўлганда v_0 бошланғич тезликка эга деб ҳисоблаб; шарчанинг найга нисбатан ҳаракат қонунини топинг.

XV бобга доир аралаш масалалар

$yy' = p$, $(y')^2 = p$, $xy' = p$, $\frac{y'}{y} = p$ алмаштиришлар ёрдамида қуйидаги генгламаларнинг умумий ечимини топинг.

85. $xyy'' + x(y')^2 = 3yy'$.
86. $y'y^2 + yy'' - (y')^2 = 0$.
87. $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$.
88. $2xy'y'' = (y')^2 - 3$.
89. $x = 0$ ва $x = l$ учлари маҳкамланган $l = 100$ см узунликдаги тор $x = 50$ см нуқтада дастлабки ҳолатидан $h = 2$ см га четлаштирилган, кейин турткисиз қўйиб юборилган. Торнинг ихтиёрий t моментдаги шаклини аниқланг.
90. 10 кг массали жисмга уни барқарор мувозанат ҳолатига қайтариш учун ҳаракат қилувчи эластик куч таъсир этади. Куч силжишга пропорционал ва у юк 1 м силжиганда 2 кг га тенг. Муҳит қаршилиги ҳаракат тезлигига пропорционал. Учта тебранишдан сўнг амплитуда 10 баравар камаяди. Тебранишлар даврини топинг.

Қуйидаги Эйлер тенгламаларининг умумий ечимини топинг:

91. $x^2y'' + xy' + y = x$.
92. $x^2y'' - 2y = \sin\ln x$.

ЖАВОБЛАР, КЎРСАТМАЛАР, ЕЧИМЛАР

I БОБ

1. а) рационал сон, $2{,}13\,(14) = 2\,\frac{1314-13}{9900} = 2\,\frac{1301}{9900}$, б) рационал сон, $3{,}(714) = 3\,\frac{714}{999} = 3\,\frac{238}{333}$, в) рационал сон, $2{,}76\,(8) = 2\,\frac{768-76}{900} = 2\,\frac{173}{225}$, г) иррационал сон, чунки у даврий каср эмас. Фараз қилайлик, у даврий бўлиб, унинг давр узунлиги n бўлсин. У ҳолда кетма-кет келган n та рақам орасида 1 рақами қатнашиши керак. Лекин ўнгга қараб кетган сари кетма-кет n та 0 рақам учраб қоляпти, шунинг учун $0{,}1010010001\ldots$ каср даврий эмас, д) иррационал, чунки у даврий каср эмас, е) рационал сон, $2{,}123123\ldots = 2{,}(123) = 2\,\frac{123}{999} = 2\,\frac{41}{333}$. 2. а) иррационал, б) иррационал, в) рационал, $2\,\frac{32}{99}$, г) рационал, $1\frac{352}{900}$ 3. r рационал ва α иррационал сонларнинг йиғиндиси $r + \alpha = \beta$ ни олайлик. Агар β рационал сон бўлганда эди, у ҳолда иккита рационал соннинг айирмаси $\alpha = \beta - r$ ҳам рационал сон бўлар эди. Бу қарама-қаршилик β нинг иррационал сон эканини кўрсатади 5. r рационал ва α иррационал сонларнинг бўлинмаси $\frac{r}{\alpha} = \beta$ сонни олайлик. 3-мисолдаги каби фикр юритиб, β ни иррационал сон эканини кўрсатиш мумкин. 7. Чегараланган (яъни ҳам юқоридан, ҳам қуйидан чегараланган) тўплам. Ҳақиқатан, E нинг барча r элементлари учун $2 \leqslant r \leqslant 3$ тенгсизлик ўринли. 8. Чегараланган. 9. Чегараланган, барча $n \in N$ лар учун $0 < \frac{n^3}{2n^3+3} < \frac{1}{2}$. 10. Чегараланган. 11. Қуйидан чегараланган, юқоридан чегараланмаган. Ҳақиқатан, барча $n \in N$ лар учун $\frac{n^2}{n+2} > 0$ бўлгани учун қуйидан чегараланган

$\frac{n^2}{n+2} = n - \frac{2n}{n+2}$ тенгликда $\frac{2n}{n+2} < 2$ бўлгани учун $n - \frac{2n}{n+2}$ исталганча катта қийматларни қабул қила олади. Демак, $\left\{\frac{n^2}{n+2}\right\}$ тўплам юқоридан чегараланмаган **12.** Қуйидан чегараланган юқоридан чегараланмаган. **13**. E тўпламнинг ҳар бир x элементи учун $0 < x < 4$ *тенгсизлик ўринли бўлганидан* E чегараланган тўплам; $\sup E = 4$ эканини кўрсатамиз: а) барча $x \in E$ лар учун $x < 4$, б) 4 дан кичик бўлган a сон олсак (аниқлик учун $a \in [0;\ 4[$ бўлсин), у ҳолда $]a;\ 4[$ даги барча сонлар рационал сон бўла олмайди. Демак, $]a;\ 4[$ да бирорта иррационал x' сон мавжуд. Бундан $a < x'$, $x' \in E$ *бўлиб*, $\sup E = 4$ экани келиб чиқади. Худди шу усулда $\inf E = 0$ эканини кўрсатиш мумкин. **14.** $\sup E = 5$, $\inf E = 3$. **15.** $[-1;\ 5]$. $|x-2| \leqslant 3$ ва $-3 \leqslant x-2 \leqslant 3$ тенгсизликлар тенг кучли. Бундан $-1 \leqslant x \leqslant 5$. **16.** $]-5;\ 5[$. **17.** $]1;\ 9[$. $|x-5| < 4$ ва $-4 < x-5 < 4$ тенгсизликлар тенг кучли. Тенгсизликларнинг учала томонига 5 ни қўшсак, $1 < x < 9$ келиб чиқади. **18.** $]-6;\ 2[$. **19.** $]-\infty;\ -5\,[\mathrm{U}]-1;\ +\infty[$. $|x+3| > 2$ дан $x+3 > 2$ ёки $x+3 < -2$ бўлади. $x+3 > 2$ тенгсизликни ечсак, $x > -1$, $x+3 < -2$ тенгсизликни ечсак. $x < -5$ келиб чиқади. Демак, ечим $]-\infty;\ -5\,[\mathrm{U}]-1;\ +\infty[$. **20.** $]-\infty;\ -4\,[\mathrm{U}]\,2;\ +\infty[$. **21.** $[-5;\ 5]$. Бу ерда уч ҳолни қараймиз: а) $x \leqslant -2$. Бунда $x+2 \leqslant 0$ ва $x-2 \leqslant 0$ бўлганидан $\begin{cases} -(x+2)-(x-2) \leqslant 10 \\ x \leqslant -2 \end{cases}$ системага эга бўламиз. $\begin{cases} -2x \leqslant 10 \\ x \leqslant -2, \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant -5 \\ x \leqslant -2. \end{cases}$ Системанинг ечими: $[-5;\ -2]$.

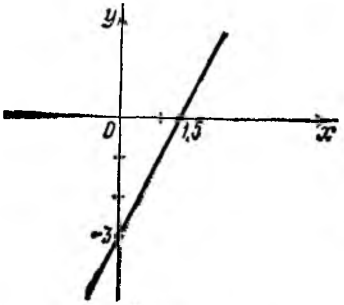
б) $-2 < x < 2$. Бунда $x+2 > 0$ ва $x-2 < 0$ бўлганидан $\begin{cases} x+2-(x-2) \leqslant 10 \\ -2 < x < 2 \end{cases}$ системага эга бўламиз. $\begin{cases} 4 \leqslant 10 \\ -2 < x < 2. \end{cases}$ Системанинг ечими: $]-2;\ 2[$. в) $x \geqslant 2$. Бунда $x+2 \geqslant 0$ ва $x-2 \geqslant 0$ бўлганидан $\begin{cases} x+2+(x-2) \leqslant 10 \\ x \geqslant 2 \end{cases}$ системага эга бўламиз. $\begin{cases} 2x \leqslant 10 \\ x \geqslant 2, \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant 5 \\ x \geqslant 2. \end{cases}$ Системанинг ечими: $[2;\ 5]$. Берилган тенгсизликнинг ечими учала система ечимларининг бирлашмасидан иборат, яъни $[-5;\ -2]\,\mathrm{U}]-2;\ 2\,[\mathrm{U}[2;\ 5] = [-5;\ 5]$. **22.** $[-5;\ 5]$. **23.** $]-1;\ 3[$. $|x^2-2x-3| > x^2-2x-3$ тенгсизлик $x^2-2x-3 < 0$ тенгсизликка тенг кучли. **24.** $]0;\ 5[$. **25.** $\{-1;\ 3\}$. Берилган тенглама: а) $2x+3 \geqslant 0$ бўлса, $\begin{cases} 2x+3 = x^2 \\ 2x+3 \geqslant 0 \end{cases}$ системага тенг кучли. б) $2x+3 < 0$ бўлса, $\begin{cases} -(2x+3) = x^2 \\ 2x+3 < 0 \end{cases}$ системага тенг кучли. а) ҳолни кўрайлик: $\begin{cases} 2x + 3 = x^2 \\ 2x + 3 \geqslant 0 \end{cases}$ системани ечиш учун $2x + 3 = x^2$ тенгламани ечамиз. Бу тенгламанинг ечимлари $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ бўлади. Бу ечимларни $2x + 3 \geqslant 0$ тенгсизликка қўйиб кўрамиз: $x_1 = -1$ да $2 \cdot (-1) + 3 = 1 > 0$, демак, $x_1 = -1$ тенгсизликнинг ҳам ечими бўлади. $x_2 = 3$ да $2 \cdot 3 + 3 = 9 > 0$, демак, $x_2 = 3$ ҳам тенгсизликнинг ечими бўлади. Бундан кўринадики, -1 ва 3 сонларнинг ҳар бири системанинг, демак, берилган тенгламанинг ечими бўлади. б) ҳолни кўрайлик: $\begin{cases} -(2x + 3) = x^2 \\ 2x + 3 < 0 \end{cases}$ системада $-(2x + 3) = x^2$ тенглама ечимга эга эмас. Шунинг учун бу система ечимга эга эмас. **26.** $\{0;\ 2\}$. **27.** $\{2;\ 3\}$. $|x^2 - 5x + 9| = 3$ тенглама ҳам а) $\begin{cases} x^2 - 5x + 9 = 3 \\ x^2 - 5x + 9 \geqslant 0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} -(x^2 - 5x + 9) = 3 \\ x^2 - 5x + 9 < 0 \end{cases}$ системаларга тенг кучли. Бу системаларни ҳам 24- мисолдаги каби ечиш мумкин. **28.** Ечимга эга эмас. **29.** $]-\infty;\ -1[\cup[1;\ +\infty[$. $\frac{x-1}{x+1} \geqslant 0$ бўлса, $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{x-1}{x+1}$ бўлиб, $\frac{x-1}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}$ тенгликка эга бўламиз. Демак, берилган тенглама $\frac{x-1}{x+1} \geqslant 0$ тенгсизликка тенг кучли. Бу тенгсизликни ечиш учун а) $\begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \\ x + 1 > 0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 1 \leqslant 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases}$ системаларни ечиш керак. а) ҳол: $\begin{cases} x \geqslant 1 \\ x > -1, \end{cases}$ $x \geqslant 1$, системанинг ечими $[1;\ +\infty[$. б) ҳол: $\begin{cases} x \leqslant 1 \\ x < -1, \end{cases}$ $x < -1$, системанинг ечими $]-\infty;\ -1[$. Демак, тенгламанинг ечимлар тўплами: $]-\infty;\ -1[\cup[1;\ +\infty[$.

30. $[-2;\ 3[$. **31.** $f(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - 3 \cdot (-2) + 4 = -6$; $f(-2) = -6$, $f(1) = 3$, $f(a) = 2a^3 - 3a + 4$. **32.** $f(0) = 1$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(1) = \cos 1 \cdot (1 + 4 \sin 1)$, $f(a) = \cos a \cdot (1 + \sin a)$.

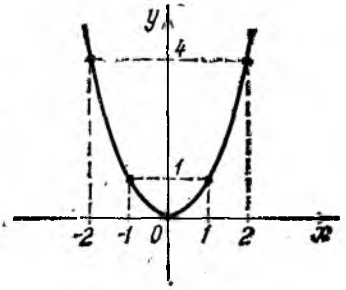
33. $f(0) = -2$, $f(1) = -\frac{1}{2}$, $f(2) = 0$, $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{\frac{1}{2} - 2}{\frac{1}{2} + 1}\right| = 1$, $\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = 1$. $x = -1$ да $\frac{x-2}{x+1}$ касрнинг махражи 0 бўлганидан $f(-1)$ мавжуд эмас. **34.** $f(0) = -3$, $f(2) = 1$, $f(-2) = -\frac{5}{3}$, $f(1)$

мавжуд эмас. **35.** $f(2)$ да $x = 2$ бўлиб, $1 < 2 < 3$ бўлганидан $f(2)$ ни топиш учун $f(x) = x - 1$ тенгликдан фойдаланамиз. Демак, $f(2) = 2 - 1 = 1$. $f(0)$ ни топиш учун $f(x) = 2$ тенгликдан фойдаланамиз, $f(0) = 2$. Худди шу каби $f(0{,}5) = 2$. $f(-0{,}5)$ да $x = -0{,}5$ бўлиб, $-1 < -0{,}5 < 0$ бўлганидан $f(-0{,}5)$ ни топиш учун $f(x) = 2x$ тенгликдан фойдаланамиз. Демак, $f(-0{,}5) = 2 \cdot (-0{,}5) = -1$, $f(-0{,}5) = -1$. $f(3) = (x-1)_{x=3} = 2$, $f(3) = 2$. $x = 5$ функциянинг аниқланиш соҳасига тегишли бўлмагани учун $f(5)$ мавжуд эмас. **36.** $f(1) = 2$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{\pi^2}{4}$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(4)$ мавжуд эмас. **37.** Ифода x нинг барча қийматларида маънога эга булгани учун $D(y) =]-\infty; +\infty[$. **38.** $x \neq 1$ **39.** Касрнинг махражи нолдан фарқли бўлиши керак, яъни $x^2 - 1 \neq 0$, бундан $x \neq -1$, $x \neq 1$. Демак, аниқланиш соҳасини $D(y) =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ кўринишда ёзиш мумкин. 40. $x \neq 1$, $x \neq -3$. **41.** $x^2 - 3x + 2 \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq 2$. $D(y) =]-\infty; 1[\cup]1; 2[\cup]2; +\infty[$. **42.** $[-2; 2]$. **43.** Каср аниқланган бўлиши учун $x^2 + 4 \neq 0$ бўлиши керак. Лекин x нинг ҳар қандай қийматида бу тенгсизлик ўринли. Шунинг учун $D(y) =]-\infty; +\infty[$. 44. $]-\infty; 3{,}5[$. **45.** $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$, $(x-1)(x-3) \geqslant 0$, $D(y) =]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$. **46.** $]-\infty; +\infty[$. **47.** $x^2 - 4x > 0$, $x(x-4) > 0$, $D(y) =]-\infty; 0[\cup]4; +\infty[$. **48.** $]-\infty; 0[$. **49.** $3x - 4 > 0$, $x > \frac{4}{3}$, $D(y) = \left]\frac{4}{3}; +\infty\right[$. **50.** $[3; +\infty[$. **51.** Манфий сон ва нолнинг логарифми бўлмагани учун $x^2 - 4x + 3 > 0$ бўлиши керак. Бу тенгсизликни ечиб, $D(y) =]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$ га эга бўламиз. **52.** $]-\infty; 0{,}8[$. **53.** $|3x - 4| \leqslant 1$, $-1 \leqslant 3x - 4 \leqslant 1$, $1 \leqslant x \leqslant \frac{5}{3}$. $D(y) = \left[1; \frac{5}{3}\right]$. **54.** $[2; 3]$. **55.** $\left|\frac{2x-3}{5}\right| \leqslant 1$, $-1 \leqslant \frac{2x-3}{5} \leqslant 1$, $-5 \leqslant 2x - 3 \leqslant 5$, $-1 \leqslant x \leqslant 4$, $D(y) = [-1; 4]$. **56.** $[1{,}4; 1{,}8]$. **57.** Бу функциянинг аниқланиш соҳаси $D(y) = D(\sqrt{3-x}) \cap D\left(\arccos\frac{x-2}{3}\right)$; а) $D(\sqrt{3-x})$ ни топамиз. Бу ерда $3 - x \geqslant 0$, $x \leqslant 3$. Бундан $D(\sqrt{3-x}) =]-\infty; -3]$, б) $D\left(\arccos\frac{x-2}{3}\right)$ ни топамиз. Бу ерда $\left|\frac{x-2}{3}\right| \leqslant 1$, $-1 \leqslant x \leqslant 5$. Бундан $D\left(\arccos\frac{x-2}{3}\right) = [-1; 5]$. Демак, $D(y) =]-\infty; -3] \cap [-1; 5] = [-1; 3]$. **58.** $[-2; 0[\cup]0; 1[$. **59.** 57-мисолдаги каби, аввал $D\left(\frac{3}{4 - x^2}\right)$ ни топа-

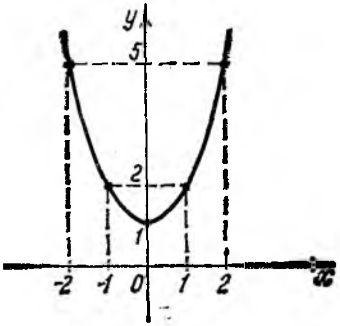
миз. $4-x^2\neq 0$, $x^2\neq 4$, $x\neq\pm 2$. $D\left(\frac{3}{4-x^2}\right)=]-\infty;\ -2\,[\cup]\,-2;\ 2\,[\cup]\,2;\ +\infty[$. Энди $D(\lg(x^3-x))$ ни топамиз. $x^3-x>0$, $x(x-1)(x+1)>0$, $D(y)=]-1;\ 0\,[\cup]\,1;\ +\infty[$. Демак, $D(y)=(]-\infty;\ -2\,[\cup]\,-2;\ 2\,[\cup]\,2;\ +\infty[)\cap(]-1;\ 0\,[\cup]\,1;\ +\infty[)=]-1;\ 0\,[\cup]\,1;\ 2\,[\cup]\,2;\ +\infty[$. **60.** $]-1;\ 1[\cup[2;\ 3[$. **61.** $D(\sqrt{\sin x})$ ни топамиз. $\sin x\geqslant 0$, $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$, $k\in Z$. $D(\sqrt{9-x^2})=[-3;\ 3]$. $D(y)=D(\sqrt{\sin x})\cap D(\sqrt{9-x^2})=[0;\ 3]$.
62. $\frac{\pi}{2}(4k-1)<x<\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $k\in Z$. **63.** а) $\cos^2x+\sin^2x=1$ бўлгани учун $f(x)$ ва $\varphi(x)$ лар айнан тенг, б) айнан тенг эмас, чунки $x=0$ да $f(x)$ аниқланган, $\varphi(x)$ эса аниқланмаган. $x\neq 0$ да $f(x)\equiv\varphi(x)$. **64.** Айнан тенг эмас. $]0;\ +\infty[$ да $f(x)=\varphi(x)$. **65.** 5- чизма. **67.** 6- чизма. **69.** 7- чизма. **71.** 8- чизма. **73.** 9- чизма. **75.** 10- чизма. **77.** 11- чизма. **79.** 12- чизма. **81.** 13- чизма. **83.** 14- чизма. **85.** $y=(x+1)^2=x^2+2x+1$. **86.** $y=\cos^2x$. **87.** $y=\sqrt{3^x+1}$.



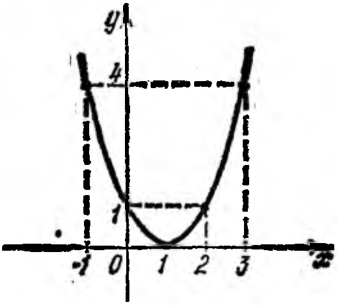
5- чизма.



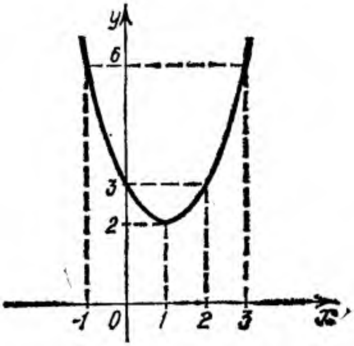
6- чизма.



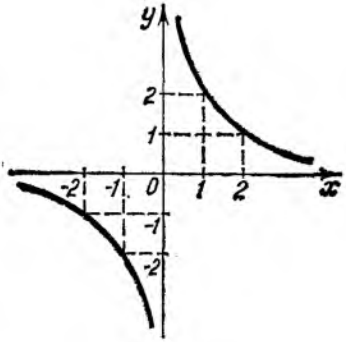
7- чизма.



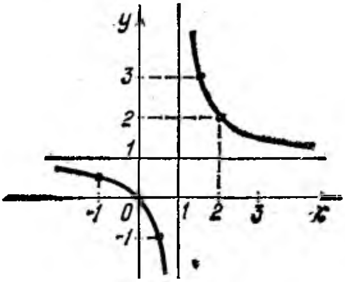
8- чизма.



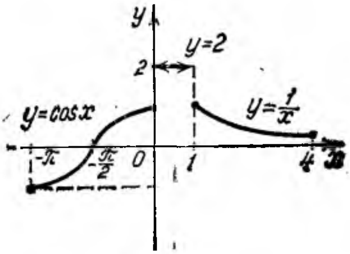
9- чизма.



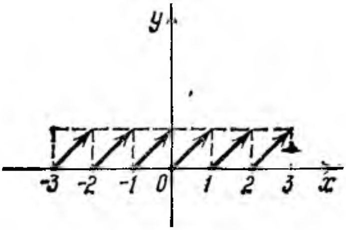
10- чизма.



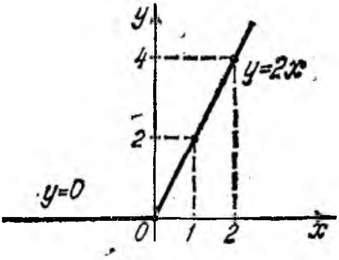
11- чизма.



12- чизма.



13- чизма.



14- чизма.

88. $y = \frac{1}{|\cos x|}$. **89.** $f\,(f\,(x)) = f\,(x^2) = (x^2)^2 = x^4$; $f(\,f\,(x)) = x^4$. $\varphi\,(f\,(x)) = \varphi\,(x^2) = 2^{x^2}$, $\varphi\,(f\,(x)) = 2^{x^2}$; $f((x)) = f(2^x) = (2^x)^2 = 2^{2x} = 4^x$. $f\,(\varphi\,(x)) = 4^x$; $\varphi\,(\varphi\,(x)) = \varphi\,(2^x) = 2^{2^x}$; $\varphi(\varphi(x)) = 2^{2^x}$. **90.** $f(\varphi(x)) = 3^{3^x}$, $\varphi\,(f\,(x)) = 3^{x^3}$. **91.** $f\,(1) = 1^3 - 1 = 0$, $f\,(1) = 0$, $\varphi\,(f\,(1)) = \varphi\,(0) =$

$= \sin(2 \cdot 0) = 0$, $\varphi(f(1)) = 0$; $f(2) = 2^3 - 2 = 6$, $f(2) = 6$, $\varphi(f(2)) = \varphi(6) = \sin(2 \cdot 6) = \sin 12$, $\varphi(f(2)) = \sin 12$. $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin \pi = 0$, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $f\left(\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = f(0) = 0^3 - 0 = 0$, $f\left(\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$, $f(f(1)) = f(0) = 0$, $f(f(f(x))) = f(0) = 0$, $f(f(f(x))) = 0$. **92.** $f(3x) = \frac{45x^2 + 1}{2 - 3x}$, $f(x^3) = \frac{5x^6 + 1}{2 - x^3}$, $3f(x) = \frac{3(5x^2 + 1)}{2 - x}$, $(f(x))^2 = \frac{25x^4 + 10x^2 + 1}{4 - 4x + x^2}$. **93.** $[-1; 3]$ даги барча x ларда $|x^2 + 2| \leqslant 1|$. Демак, функция чегараланган. **94.** Чегараланган. **95.** Чегараланмаган. Ҳақиқатан, ҳар қандай $M(M > 1)$ учун $f(M) = M^2 > M$, яъни $x = M$ деб олсак, $|f(x)| > M$ тенгсизлик ўринли. **96.** Чегараланмаган. **97.** $]-\infty; +\infty[$ даги барча x ларда $x^2 + 1 > x$ бўлгани учун $|f(x)| = \left|\frac{x}{x + 1}\right| < 1$. Демак, чегараланган функция. **98.** Чегараланган. **99.** Чегараланган. Чунки барча $x \in]-\infty; +\infty[$ ларда $|\sin ax| \leqslant 1$. **100.** Чегараланган. **101.** $f(x) = x^2 + 1$, $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1$. Булардан $f(-x) = f(x)$, демак, жуфт функция. **102.** Жуфт. **103.** $f(x) = x^4 + 2x^2$, $f(-x) = (-x)^4 - 2 \cdot (-x)^2 = x^4 - 2x^2$. Булардан $f(-x) = f(x)$, демак, жуфт функция. **104.** Тоқ. **105.** $f(x) = x^2 \cdot \cos x$, $f(-x) = (-x)^2 \cdot \cos(-x) = x^2 \cdot \cos x$. Булардан $f(-x) = f(x)$, демак, жуфт функция. **106.** Тоқ. **107.** $f(x) = 3^x$, $f(-x) = 3^{-x}$. Бу ерда $f(-x) \neq f(x)$ ва $f(-x) \neq -f(x)$ бўлгани учун, функция жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас. **108.** Тоқ ҳам, жуфт ҳам эмас. **109.** $f(x) = 10$, $f(-x) = 10$. Булардан $f(-x) = f(x)$, демак, жуфт функция. **110.** Жуфт. **111.** Бундай функциялар кўп. Мисол учун $f(x) = 0$. **113.** Даврий функция, унинг асосий даври π. Ҳақиқатан, шундай l сон топилиб, барча x ларда $\sin 2(x + l) = \sin 2x$ тенглик ўринли эканлигини кўрсатамиз. Бу тенгликдан хусусий ҳолда $x = \frac{\pi}{4}$ бўлса, $\sin 2\left(\frac{\pi}{4} + l\right) = \sin\frac{\pi}{2}$ келиб чиқади. Бундан $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2l\right) = \sin\frac{\pi}{2}$, $\cos 2l = 1$ га эга буламиз. $2l = 2k\pi$, $l = k\pi$. ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Бундан кўринадики, агар l давр бўлса, у $k\pi$ кўринишда бўлади $l = \pi$ функциянинг даври эканлигини кўрсатамиз. $\sin 2(x + \pi) = \sin 2x$. Демак, $f(x + \pi) = \sin 2(x + \pi) = \sin 2x = f(x)$, $l = \pi$ асосий давр экан. (Эслатма: юқорида $x = \frac{\pi}{4}$ ўрнига бошқа қийматларни ҳам олинса бўлар эди. Мисол учун $x = 0$, $x = \pi$, . . .). **114.** Даврий функция, асосий даври 2. **115.** Даврий функция, асосий даври $l = \frac{2\pi}{|a|}$. Буни 113-мисолдаги каби кўрсатиш мумкин. **116.** Даврий функция, асосий даври π. **117.** Даврий функция эмас. Агар у даврий функция бўлиб, унинг даври l бўлса, барча x ларда $(x+l)\cdot\cos(x+l)=x\cdot\cos x$ тенглик ўринли бўлар эди. Хусусий ҳолда, $x=0$ бўлсин, $l\cos l=0\cdot\cos l$, $l\cos l=0$, $l\neq 0$ бўлганидан, $\cos l=0$. Бундан $l=\frac{\pi}{2}+k\pi$ кўринишда бўлиши керак. Бу кўринишдаги сонлар давр бўла олмайди. Ҳақиқатан, $x=\frac{\pi}{2}$ деб олсак, $f(x+l)=f\left(\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\right)=$ $=f(\pi+k\pi)=(\pi+k\pi)\cos(\pi+k\pi)$, $f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0$. $f(x+l)\neq 0$ бўлгани учун $f(x+l)\neq f(x)$. Бу эса функциянинг даврий эмаслигини кўрсатади. **118.** Даврий функция, асосий даври 1. **119.** Даврий функция, асосий даври π. **120.** Даврий функция, асосий даври йўқ. **121.** $D(x)$— Дирихле функцияси даврий функция бўлиб, ҳар бир рационал r сон унинг даври бўлади. Ҳақиқатан, агар x— рационал сон бўлса, у ҳолда $x+r$ ҳам рационал сон бўлади, агар x — иррационал сон бўлса, у ҳолда $x+r$ ҳам иррационал сон бўлади (3- мисолга қаранг). Демак,

$$D(x+r)=\begin{cases}1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса.}\end{cases}$$

Бундан $D(x+r)=D(x)$ тенглик келиб чиқади. Энг кичик мусбат рационал сон йўқлигидан бу функция асосий даврга эга эмас. **122.** Асосий даври $\frac{1}{2}$. **123.** $f(x_1)=2x_1-1$, $f(x_2)=2x_2-1$. Агар $x_1<x_2$ бўлса, у ҳолда $2x_1<2x_2$ бўлади. Иккала томонидан 1 ни айирсак, $2x_1-1<2x_2-1$ га эга бўламиз. Бундан эса $f(x_1)<f(x_2)$ бўлиб, функциянинг $]-\infty;+\infty[$ да ўсувчи экани келиб чиқади. **124.** Камаювчи. **125.** $f(x_2)-f(x_1)=\left(x_2^2+2x_2+5\right)-\left(x_1^2+\right.$ $\left.+2x_1+5\right)=\left(x_2^2-x_1^2\right)+2(x_2-x_1)=(x_2-x_1)(x_2+x_1)+2(x_2-$ $-x_1)=(x_2-x_1)\cdot(x_2+x_1+2)$: а) агар $x_1<x_2$ ва $x_1,x_2\in]-\infty;$ $-1[$ бўлса, $x_2-x_1>0$, $x_2+x_1+2<0$ бўлиб, $f(x_2)-f(x_1)<0$ бўлади. Бундан $f(x_2)<f(x_1)$ бўлиб, функциянинг $]-\infty;-1[$ да камаювчи эканини кўрсатади, б) $x_1<x_2$ ва $x_1,x_2\in]-1;+\infty[$ бўлса, $x_2-x_1>0$, $x_2+x_1+2>0$ бўлиб, $f(x_2)-f(x_1)>0$ бўлади. Бундан $f(x_2)>f(x_1)$ бўлиб, функциянинг $]-1;+\infty[$ да ўсувчи эканини кўрсатади. **126.** $]-\infty;1,5[$ да камаювчи, $]1,5;+\infty[$ да ўсувчи. **127.** Камаювчи, Ҳақиқатан, $f(x_2)-f(x_1)=$ $=\cos x_2-\cos x_1=-2\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cdot\sin\frac{x_2+x_1}{2}$. Агар $x_1<x_2$ ва $x_1,x_2\in]0;\pi[$ бўлса, $0<\frac{x_2-x_1}{2}<\pi$, $0<\frac{x_2+x_1}{2}<\pi$ бўлганидан

$\sin\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$, $\sin\frac{x_2 + x_1}{2} > 0$ бўлади. Шу сабабли $f(x_2) - f(x_1) < 0$ дан $f(x_2) < f(x_1)$ тенгсизлик келиб чиқади **128.** Ўсувчи. **129.** Ўсмовчи. Ҳақиқатан, $x < 0$ бўлса, $f(x) = |x| - x = -x - x = -2x$, $f(x) = -2x$, камаювчи, агар $x \geqslant 0$ бўлса, $f(x) = |x| - x = x - x = 0$, $f(x) = 0$ доимий. Демак, ихтиёрий $x \in]-\infty; +\infty[$ да $x_1 < x_2$ бўлганда, $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ тенгсизлик ўринли бўлади. **130** Камаймовчи. **131.** Бундай сонлар жуда кўп. Мисол учун $a = 3 + \sqrt{2}$, $b = 2 + \sqrt{2}$. **132.** Бундай сонлар жуда кўп. Мисол учун $a = \sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}$. **133.** Бир элементли тўпламлар учун $\sup E = \inf E$ бўлади. **134.** Бундай тўпламлар жуда кўп. Мисол учун $E =]0; 1[$. **135.** $10^{-\frac{\pi}{2} + k\pi} < x < 10^{\frac{\pi}{2} + k\pi}$, $k \in Z$. **136.** $4k^2\pi^2 \leqslant x \leqslant (2k + 1)^2\pi^2$, $k \in Z_0$. **137.** $\varnothing$. **138.** Бундай функциялар жуда кўп, мисол учун $y = \sqrt{4 - x^2}$. **139.** Бундай функциялар жуда кўп. Мисол учун $y = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$. **141.** $\operatorname{sgn}(\operatorname{sgn} x) = \operatorname{sgn} x$. **142.** а) тоқ б) тоқ, в) жуфт, г) тоқ ҳам эмас, жуфт ҳам эмас, д) тоқ ҳам эмас, жуфт ҳам эмас. **148.** $f(0) = 3$, $f(3) = -12$, $f(4) = -19$. **149.** $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, $f(2) = 1$, $f(2,5) = \frac{1}{4}$.

II БОБ

1 а) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$ тенглик ўринли эканини исботлаш учун ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун шундай N сон топилиб, $n > N$ лар учун $\left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлишини кўрсатамиз. $\left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1}$ бўлганидан N ни топиш учун $\frac{2}{n+1} < \varepsilon$ тенгсизликни ечиш етарли. Бундан $n + 1 > \frac{2}{\varepsilon}$, $n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$ бўлганидан N учун $\frac{2}{\varepsilon} - 1$ нинг бутун қисмини олиш мумкин, яъни $N = E\left(\frac{2}{\varepsilon} - 1\right)$. б) Юқоридаги каби $\left|\frac{4n-1}{2n+1} - 2\right| = \frac{3}{2n+1}$ бўлганидан, $\frac{3}{2n+1} < \varepsilon$ тенгсизликни ечамиз. Бундан $n > \frac{3 - \varepsilon}{2\varepsilon}$, демак, $N = E\left(\frac{3 - \varepsilon}{2\varepsilon}\right)$. в) $\left|\frac{3n+1}{5n-1} - \frac{3}{5}\right| = \frac{8}{5(5n-1)}$. Бундан $\frac{8}{5(5n-1)} < \varepsilon$ тенсизликни ечсак, $n > \frac{8+5\varepsilon}{25\varepsilon}$ бўлади. Демак $N = E\left(\frac{8+5\varepsilon}{25\varepsilon}\right)$. **3.** Бу мисолни ҳам юқоридаги каби ечамиз. $\left|\frac{2n-1}{2-3n} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| = \frac{1}{3(3n-2)}$. Бундан $\frac{1}{3(3n-2)} < \varepsilon$ тенгсизликни ечсак, $n > \frac{1+6\varepsilon}{9\varepsilon}$. Демак, $N = E\left(\frac{1+6\varepsilon}{9\varepsilon}\right)$. Шу билан $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2-3n} = -\frac{2}{3}$ экани исботланди. Энди иккинчи саволга жавоб берамиз. Бунинг учун $\varepsilon = 0{,}0001$ деб олсак, $N = E\left(\frac{1+6\cdot 0{,}0001}{9\cdot 0{,}0001}\right) = 1111$. Демак, $n = 1112$ дан бошлаб $\left|\frac{2n-1}{2-3n} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| < 0{,}0001$ тенгсизлик ўринли бўлади. **5.** а) $x_n = 8n+1$ нинг чексиз катта миқдор эканини исботлаш учун хоҳлаганча катта Δ учун шундай N номер топилиб, $n > N$ ларда $|x_n| > \Delta$ тенгсизлик ўринли бўлишини кўрсатишимиз керак. Архимед аксиомасига биноан, 8 ва $\Delta - 1$ сонлар учун шундай N натурал сон топилиб, $8\cdot N > \Delta - 1$ тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан $8N + 1 > \Delta$ бўлиб, $n > N$ лар учун $|x_n| = |8n+1| > \Delta$ келиб чиқади. Демак, $|x_n| > \Delta$ бўлиб, x_n нинг чексиз катта миқдор экани келиб чиқади. б) Бу ерда 1 ва $\sqrt[k]{\Delta}$ лар учун Архимед аксиомасини қўлласак, $1\cdot N > \sqrt[k]{\Delta}$ тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан $N^k > \Delta$ бўлиб, $n > N$ лар учун $|x_n| = |n^k| > N^k > \Delta$ келиб чиқади. Демак, $|x_n| > \Delta$ бўлиб, x_n нинг чексиз катта миқдор экани келиб чиқади. **7.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{4n^2-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2\left(3+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(4-\frac{1}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n^2}}{4-\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{4}$.

8. 3. **9.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+3}{n^3+n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3\left(2+\frac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n^3}}{1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}} = 2.$

10. 1. **11.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 = 1^3 = 1.$

12. 2. **13.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+4} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{n\left(1+\frac{4}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}}{n^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{4}{n}\right)} = 0.$

14. 1. **15.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+n^2+1}}{n^2+2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4=\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)}}{n^2\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}}{n^2\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}}{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}=1.$$

16. $\sqrt{2}$. **17.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n!\,(n+1)-n!}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n!\,(n+1-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. **18.** 0. **19.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}}{\dfrac{1-\frac{1}{3^n}\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}}=\frac{\dfrac{1}{\frac{1}{2}}}{\dfrac{1}{\frac{2}{3}}}=\frac{4}{3}.$$

20. $\frac{1}{2}$. **21.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}\cdot\cos n^3-\frac{3n}{6n+1}\right)=-\frac{1}{2}$. Ҳақиқатан, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$ ва $|\cos n^3|\leqslant 1$ — чегараланган бўлгани учун $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}\cdot\cos n^3\right)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{6n+1}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{6+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$. **22.** 1. **23.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}\cdot\sin n!+\frac{2n^2}{1-9n^2}\right)=-\frac{2}{9}$.

Ҳақиқатан, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$ ва $|\sin n!|\leqslant 1$ — чегараланган бўлгани учун $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}\cdot\sin n!\right)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{1-9n^2}=-\frac{2}{9}$. **24.** $\frac{2}{3}$. **25**

а) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-5)=4$ тенгликни исботлаш учун ҳар бир $\varepsilon>0$ га мос равишда шундай $\delta>0$ топилиб, $0<|x-3|<\delta$ тенгсизликни каноатлантирувчи барча x ларда $|(3x-5)-4|<\varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлишини кўрсатишимиз керак. $\varepsilon>0$ олайлик. $|(3x-5)-4|=|3x-9|=|3(x-3)|=3|x-3|$. Бундан $3|x-3|<\varepsilon$,

$|x-3|<\frac{\varepsilon}{3}$. Агар $\delta\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$ деб олсак, $0<|x-3|<\delta$ тенгсизликдан $|(3x-5)-4|<\varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқади. Шу билан $\lim\limits_{x\to3}(3x-5)=4$ экани исботланди. б) Бу мисолни ҳам а) даги каби исботлаш мумкин. в) $\varepsilon>0$ олайлик, бунга мос келувчи δ ни излаймиз $\left|\frac{x^2-2}{x^2+1}-\frac{2}{5}\right|=\left|\frac{3(x^2-4)}{5(x^2+1)}\right|=\frac{3}{5}\cdot\left|\frac{(x+2)(x-2)}{x^2+1}\right|=$ $=\frac{3}{5}\cdot\left|\frac{x+2}{x^2+1}\right|\cdot|x-2|$. Осонлик учун $\delta<1$ деб олиш мумкин. Агар $|x-2|<1$ бўлса, у ҳолда $|x+2|=|(x-2)+4|\leqslant|x-2|+4<1+4=5$ ва $|x^2+1|>1$ бўлиб, бундан $\left|\frac{x+2}{x^2+1}\right|<5$ келиб чиқади. Демак, $\frac{3}{5}\cdot\left|\frac{x+2}{x^2+1}\right|\cdot|x+2|<\frac{3}{5}\cdot5\cdot|x+2|=$ $=3\cdot|x-2|$. Бундан кўринадики, $3\cdot|x-2|<\varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x ларда $\left|\frac{x^2-2}{x^2+1}-\frac{2}{5}\right|<\varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. $3\cdot|x-2|<\varepsilon$, $|x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$. Демак, $\delta=\min\left\{1;\ \frac{\varepsilon}{3}\right\}$ деб олиш мумкин. г) $|\sin x-1|=\left|\sin x-\sin\frac{\pi}{2}\right|=\left|2\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\times\right.$ $\left.\times\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right|=2\cdot\left|\cos\frac{2x+\pi}{4}\right|\cdot\left|\sin\frac{2x-\pi}{4}\right|\leqslant2\cdot1\cdot\left|\frac{2x-\pi}{4}\right|=$ $=\left|x-\frac{\pi}{2}\right|$. $|\sin x-1|\leqslant\left|x-\frac{\pi}{2}\right|$ бўлганидан $|\sin x-1|<\varepsilon$ бўлиши учун $\left|x-\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon$ бўлиши етарли. Демак, $\delta\leqslant\varepsilon$ деб олсак, $\left|x-\frac{\pi}{2}\right|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x ларда $|\sin x-1|<\varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шу билан $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$ тенглик исбот бўлди. **27.** $|(x^2-1)-3|=|x^2-4|=|x+2|\cdot|x-2|$. $\delta<1$ деб олсак, $|x-2|<1$ бўлганда, $|x+2|=|(x-2)+4|\leqslant$ $\leqslant1+4=5$ бўлади. Бундан $|x-2|\cdot|x+2|<5\cdot|x-2|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x ларда $|(x^2-1)-3|<\varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади $5|x-2|<\varepsilon$, $|x-2|<\frac{\varepsilon}{5}$. Демак, $\delta=\min\left\{1;\ \frac{\varepsilon}{5}\right\}$ деб олиш мумкин. $\varepsilon=0{,}001$ деб олсак, $\delta=$

$= \min\left\{1; \frac{0{,}001}{5}\right\} = 0{,}0002$ келиб чиқади. Демак, $|(x^2-1)-3|<0{,}001$ тенгсизлик ўринли бўлиши учун $\delta \leqslant 0{,}0002$ деб олиш мумкин.

29 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$ тенгликни исботлаш учун ҳар бир $\varepsilon>0$ га мос равишда $\Delta>0$ сон топилиб, $|x|>\Delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x ларда $\left|\frac{x^2}{x^2+1}-1\right|<\varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлишини кўрсатиш керак. $\left|\frac{x^2}{x^2+1}-1\right|=\frac{1}{x^2+1}$. Энди $\frac{1}{x^2+1}<\varepsilon$ тенгсизликни ечамиз, $x^2+1>\frac{1}{\varepsilon}$, $x^2>\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, $|x|>\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}$ (бу ерда $\varepsilon<1$ деб қарадик). Демак, $\Delta=\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}$ деб олсак, $|x|>\Delta$ бўлганда $\left|\frac{x^2}{x^2+1}-1\right|<\varepsilon$ бўлиб, $\lim\limits_{x\to 8}\frac{x^2}{x^2+1}=1$ экани келиб чиқади.

б) $|\sqrt{x^2+1}-x| = \left|\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right| = \left|\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right| = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$. $x>0$ бўлганда $\sqrt{x^2+1}+x>\sqrt{x^2}+x=2x$ бўлгани учун $|\sqrt{x^2+1}-x|=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}<\frac{1}{2x}$. $\frac{1}{2x}<\varepsilon$ тенгсизликдан $x>\frac{1}{2\varepsilon}$ келиб чиқади. $\Delta=\frac{1}{2\varepsilon}$ деб олсак, $x>\Delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x ларда $|\sqrt{x^2+1}-x|<\varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шу билан $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=0$ тенглик исбот бўлди. в) $\left|\frac{3x+1}{2x+1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{1}{2(2x+1)}\right|$, $|2(2x+1)|=2|2x+1|\geqslant$ $\geqslant 2(2|x|-1)$ бўлганидан $\left|\frac{3x+1}{2x+1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{1}{2(2x+1)}\right|\leqslant\frac{1}{2(2|x|-1)}$. $\frac{1}{2(2|x|-1)}<\varepsilon$ тенгсизликдан $|x|>\frac{1+2\varepsilon}{4\varepsilon}$ келиб чиқади. Демак, $\Delta=\frac{1+2\varepsilon}{4\varepsilon}$ деб олсак, $|x|>\frac{1+2\varepsilon}{4\varepsilon}$ тенгсизликдан $\left|\frac{3x+1}{2x+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқади. Шу билан $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+1}{2x+1}=\frac{3}{2}$ тенглик келиб чиқади. **31.** $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+5}{x^2-2}=\frac{\lim\limits_{x\to2}(x^2+5)}{\lim\limits_{x\to2}(x^2-2)}=\frac{2^2+5}{2^2-2}=4{,}5.$

32. 2. 33. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x(x-1)}{x^2-1}$, бу ерда суратнинг лимити ҳам, махражнинг лимити ҳам 0. Шунинг учун бўлинманинг лимити ҳақидаги теоремани қўллаб бўлмайди. Аввало, махражни кўпайтувчиларга ажратиб, касрнинг сурат ва махражини $x-1$ га бўламиз: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x(x-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$. **34.** 10.

35. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x-3}{x-10}=\frac{1}{8}$.

36. 0. **37.** $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^2(x+1)+3(x+1)}{x^2(x+1)+(x+1)}=$
$=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+1)(2x^2+3)}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{5}{2}$. **38.** $\frac{3}{13}$. **39.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$. Бундай мисолларни ечишда касрнинг суратини иррационалликдан қутқазиш керак. Бунинг учун касрнинг сурат ва махражини $\sqrt{1+x^2}+1$ га кўпайтирамиз. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{1+x^2-1}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=$$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=0$. **40.** $\frac{1}{2}$. **41.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{h}}{x}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{h})(\sqrt{x+h}+\sqrt{h})}{x(\sqrt{x+h}+\sqrt{h})}=\lim_{x\to0}\frac{x+h-h}{x(\sqrt{x+h}+\sqrt{h})}=$$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{h}}=\frac{1}{2\sqrt{h}}$. **42.** $\frac{3}{4}$. **43.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)\left((\sqrt[3]{1+x^2})^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}{x^2\left((\sqrt[3]{1+x^2})^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt[3]{1+x^2})^3-1}{x^2\left((\sqrt[3]{1+x^2})^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1+x^2-1}{x^2\cdot3}=\frac{1}{3}.$$

44. $-\frac{2}{9}$. **45.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{16+x^2}-4}$ касрнинг сурат ва махражларини иккаласининг қўшмаларига кўпайтирамиз.

$$\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)(\sqrt{16+x^2}+4)}{(\sqrt{16+x^2}-4)(\sqrt{16+x^2}+4)(\sqrt{1+x^2}+1)}=$$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x^2-1)(\sqrt{16+x^2}+4)}{(16+x^2-16)(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\cdot8}{x^2\cdot2}=4$. **46.** $\frac{5}{2}$.

47. $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\lim\limits_{x\to5}\frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=$

$=\lim\limits_{x\to5}\frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim\limits_{x\to5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}$. **48.** $\frac{5}{24}$.

49. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+4}{5x^2-2x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(5-\frac{2}{x}+\frac{3}{x_2}\right)}=\frac{2}{5}$. **50.** 0.

51. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x^4+3x^3+1}{0,1x^4+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4\left(10+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(0,1+\frac{1}{x^4}\right)}=100$. **52.** -1.

53. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2+1}=0$. **54.** -4.

55. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(\sqrt[4]{\frac{1}{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\cdot\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^2}}-1}=$

$=-1$. **56.** -1. **57.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})(\sqrt{x+4}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+4-x}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}=0$. **58.** 0. **59.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x((x^2+1)-(x^2-1))}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=1$.

60. $\frac{1}{2}$. **61.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=+\infty$. **62.** 0. **63.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}=$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2 = 1\cdot 2 = 2.$$ **64.** 3. **65.** $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 6x}{\sin 7x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 6x}{6x}\cdot 6x}{\frac{\sin 7x}{7x}\cdot 7x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{6x}{7x} = \frac{6}{7}.$$ **66.** $\frac{\alpha}{\beta}$. **67.** $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 5x}{\cos 5x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{5}{\cos 5x}\right) = 5.$$ **68.** k. **69.** $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{tg} 3x}{3x}\cdot 3x}{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x} =$$

$$= \frac{3}{4}.$$ **70.** $\frac{4}{3}$. **71.** $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{5x} =$$

$$= \frac{1}{5} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \sin \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$ **72.** 8. **73.** $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{2x}.$$

Бу ерда $\operatorname{arctg} x = y$ алмаштириш киритамиз. Бундан $x = \operatorname{tg} y$ ва $x \to 0$ да $y \to 0$ бўлади. Демак, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{2x} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$. **74.** $\frac{1}{3}$. **75.** Аввало, 73-мисолдаги каби $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$ эканини кўрсатиш мумкин. Кейин касрнинг сурат ва махражини x га бўлсак,

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x + \arcsin x}{\sin x + \arcsin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + \frac{\arcsin x}{x}}{\frac{\sin x}{x} + \frac{\arcsin x}{x}} = \frac{2+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

келиб чиқади. **76.** $\frac{1}{64}$. **77.** $\frac{\pi}{2} - x = y$ алмаштириш киритамиз. Бундан $x \to \frac{\pi}{2}$ да $y \to 0$ келиб чиқади. $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}{y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{y}{2}}{y^2} = \frac{1}{2}.$$ **78.** 1.

79 $\lim\limits_{x\to 0} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$. $1 - x = y$ алмаштириш киритсак, $x \to 1$ да

$y \to 0$ бўлади. Бундан $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim\limits_{y\to 0} y\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}y\right) =$

$$= \lim_{y\to 0}\left(y\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}y\right) = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cdot y\right)} = \frac{2}{\pi}.$$

80. $\sin 1$.

81. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin x-\cos x}{1+\sin x-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)-\sin x}{(1-\cos x)+\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}} = -1.$$

82. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

83. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{x}}{\frac{1+x}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

84. e^2.

85. $$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right)^{-1} = e^{-1},$$ чунки

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x} = e.$$

86. e^{mk}.

87. $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x}{5}}\right)^{\frac{x}{5}}\right)^{10} = e^{10}.$$

88. $e^{-\frac{3}{2}}$.

89. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x}{\left(1-\frac{1}{2x}\right)^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{-2x}\right)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}} = e.$$

Бу мисолни қуйидагича ечса ҳам бўлар эди. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{2}}\right)^{\frac{2x-1}{2}}\right)^{\frac{2x}{2x-1}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2x}{2x-1}} = e.$$

90. $e^{-3,5}$. **91.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\right)^{x} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}\right)^{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}\right)^{\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\cdot x}$$

. Бу ерда $x \to \infty$ да $\frac{x^{2}4 - x + 2}{2x-1} \to \infty$ бўлгани учун $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}\right)^{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}} = e$ ва $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-1)x}{x^2-4x+2} = 2$ дан $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x} = e^2$ келиб чиқади. **92.** 0. **93.** $\operatorname{ctg} x = y$ алмаштириш киритсак, $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} = \frac{1}{y}$ бўлади. $x \to 0$ да $y \to \infty$. Бундан $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} =$

$$= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e.$$

94 e^2. **95.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to+8}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$. **96.** 1. **97.** $f(1-o) = \lim\limits_{x\to 1-o} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-o}(x+1) = 2$, $f(1-o) = 2$. $f(1+0) = \lim\limits_{x\to 1+o} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+o}(3x+1) = 4$. $f(1+o) = 4$. **98.** $f(2-o) = 5$, $f(2+o) = 3$. **99.** $f(2-o) = \lim\limits_{x\to 2-o} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-o} x^2 = 4$, $f(2+o) = \lim\limits_{x\to 2+o} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0}(2x+1) = 5$. **100.** $f(1-o) = 3$, $f(1+o) = 2$, $f(2-o) = f(2+o) = 4$. **101.** $E(-2-o) = \lim\limits_{x\to -2-o} E(x) = \lim\limits_{x\to -2-o}(-3) = -3$, $E(-2+o) = \lim\limits_{x\to -2+o} E(x) = \lim\limits_{x\to -2+o}(-2) = -2$, $E(-o) = -1$, $E(+o) = 0$, $E(1-o) = 0$, $E(1+o) = 1$. **102** $f(1-o) = f(2-o) = f(3-o) = 1$. $f(1+o) = f(2+o) = f(3+o) = 0$. **103.** $f(1-o) = \lim\limits_{x\to 1-o}\frac{3x+1}{x-1} = -\infty$,

$f(1+o)=\lim\limits_{x\to 1+o}\frac{3x+1}{x-1}=+\infty$. **104.** $f(2-o)=-\infty$, $f(2+o)=$ $=+\infty$. **105.** $f(-o)=\lim\limits_{x\to -o}\left(-\frac{1}{x-1}\right)=1$, $f(+o)=\lim\limits_{x\to +o}x=0$, $f(1-o)=\lim\limits_{x\to 1-o}x=1$, $f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+o}2=2$. **106.** $f(-o)=f(+o)=0$.

1С7 $x_n=\frac{1}{2n\pi}$, $x_n'=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ ларни олсак, $n\to\infty$ да $x_n\to 0$ ва $x_n'\to 0$. Лекин $f(x_n)=\sin\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}=\sin 2n\pi=0$, $f(x_n)\to 0$, $f\left(x_n'\right)=$ $=\sin\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$, $f\left(x_n'\right)\to 1$. Демак, $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ функция $x=0$ да ўнг лимитга эга эмас. Агар $x_n=-\frac{1}{2n\pi}$ ва $x_n'=-\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ деб олсак $x=0$ да функциянинг чап лимитга ҳам эга эмаслиги кўринади. Демак, $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ функция $x=0$ да чап лимитга ҳам ўнг лимитга ҳам эга эмас. **108.** 3. **1С9.** а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3$. Демак, $\alpha(x)=3x$ ва $\beta(x)=x$ лар $x\to 0$ да бир хил тартибли чексиз кичик функциялардир. б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$. Демак, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик, яъни $x^2=0(x)$. в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=2$. Демак, бир хил тартибли чексиз кичиклар. г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+\operatorname{tg}x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x+\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)=1$.

Демак, $x^2+\operatorname{tg}x\sim x$. д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1+x^2+x^4}-x^3}{x}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x^2+x^4}-x^3\right)=1$. Демак, $x\sqrt{1+x^2+x^4}-x^3\sim x$. **110.** а) юқори тартибли, б) юқори тартибли, в) бир хил тартибли, г) бир хил тартибли. **111.** а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin nx}{nx}=1$, $\sin nx\sim nx$.

б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} mx}{mx}=1$, $\operatorname{tg} mx\sim mx$. в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=$$

$=1$, $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$. г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-1}{\frac{x}{2}}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-1)(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+1)}{\frac{x}{2}(\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1,$$

$\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-1\sim\frac{x}{2}$. д) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{2(x-1)}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{2}=1$, $x^2-1\sim2(x+1)$. **112.** а) эквивалент чексиз кичиклар, б) эквивалент эмас. **113.** $\operatorname{tg}6x\sim6x$, $\sin3x\sim3x$ бўлгани учун $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}6x}{\sin3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{6x}{3x}=2$. **114.** $\frac{1}{4}$. **115.** $\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-1\sim\frac{1}{2}x$, $\sqrt{1+x+x^2}-1\sim\frac{1}{2}x$ бўлгани учун

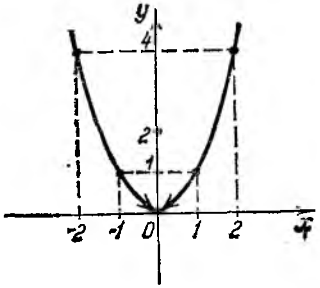
$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-1}{\sqrt{1+x+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}=1$. **116.** $\frac{1}{2}$. **117.** $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$ ((111. в) мисолга қаранг). $x^2-x^4+x^6\sim x^2$ бўлгани учун

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2-x^4+x^6}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}$. **118.** 1. **120.** а) 0, б) $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$, в) 0. **121.** π. **122.** а) $\frac{\sin x}{x}$, б) 0, в) $\frac{1}{2}$, г) 1, д) $-\frac{1}{2}$. **123.** -1.
124. ∞. **125.** $\frac{1}{3}$. **126.** 0.

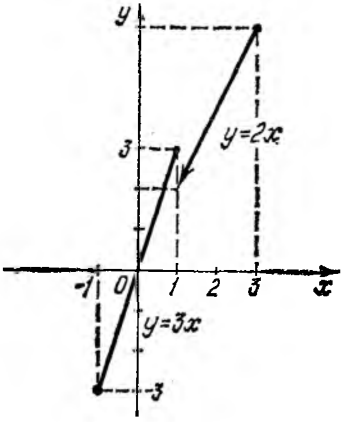
III БОБ

1. а) $\lim\limits_{\Delta x\to0}(f(x+\Delta x)-f(x))=\lim\limits_{\Delta x\to0}((x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)-2-(x^2+x-2))=\lim\limits_{\Delta x\to0}(2x\cdot\Delta x+\Delta x^2+\Delta x)=0$. Демак, $f(x)$ барча $x\in\,]-\infty;\ +\infty[$ ларда узлуксиз в) $\lim\limits_{\Delta x\to0}(f(x+\Delta x)-f(x))=$

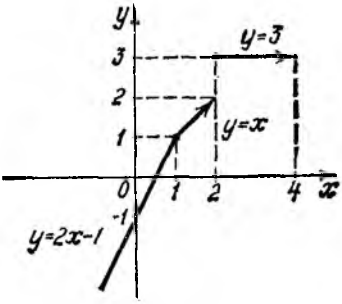
$= \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{x+\Delta x+1} - \frac{1}{x+1}\right) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{-\Delta x}{(x+\Delta x+1)(x+1)} = 0.$ Демак, барча $x \in]-1; +\infty[$ ларда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(x+\Delta x) - f(x)) = 0$ бўлгани учун функция шу x ларда узлуксиз. **3.** Функция $x = 0$ дан бошқа нуқталарда узлуксиз. Шунинг учун функцияни $x = 0$ да текширамиз. $f(-o) = \lim\limits_{x\to -o} f(x) = \lim\limits_{x\to -o} x^2 = 0$, $f(+o) = \lim\limits_{x\to +o} f(x) = \lim\limits_{x\to +o} x^2 = 0$, $f(0) = 2$ бўлиб, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$ бўлгани учун $x = 0$ да функция узилишга эга $f(-o) = f(0)$ бўлгани учун $x = 0$ да функция узлуксизлигини тиклаш мумкин, бунинг учун $f(0) = 0$ деб олиш керак (15 чизма). **4.** $x = 1$ да сакрашга эга. Сакраш катталиги 3 га тенг. **5.** Бу функцияни $x = 1$ да текширамиз $f(1-o) = \lim\limits_{x\to 1-o}(3x) = 3$, $f(1+o) = \lim\limits_{x\to 1+o}(2x) = 2$. $f(1-o) \neq f(1+o)$ бўлгани учун функция $x = 1$ да сакрашга эга (яъни I тур узилиш) Сакраш катталиги $|f(1+o) - f(1-o)| = |2-3| = 1$ (16- чизма). **6.** $x = 1$ да I тур узилишга (яъни узлуксизликни тиклаш мумкин) эга. **7.** Бу функцияни $x = 1$ ва $x = 2$ нуқталарда текширамиз $x = 1$ да $f(1-0) = \lim\limits_{x\to 1-0}(2x-1) = 1$, $f(1+0) = \lim\limits_{x\to 1+0} x = 1$. Демак, функция $x = 1$ да лимитга эга, яъни $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ ва $f(1) = 1$ бўлгани учун $x = 1$ да функция узлуксиз. $x = 2$ да $f(2-0) = \lim\limits_{x\to 2-0} x = 2$, $f(2+0) = \lim\limits_{x\to 2+0} 3 = 3$ $f(2-0) \neq f(2+0)$ бўлгани учун $x = 2$ да функция I тур узилиш (сакраш) га эга. Сакраш катталиги $|f(2+0) - f(2-0)| = |3-2| = 1$



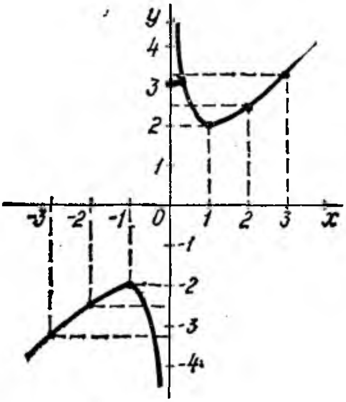
15- чизма.



16- чизма.



17- чизма.



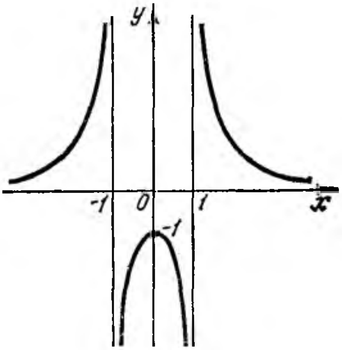
18- чизма.

(17- чизма). **8.** $x = 0$ да II тур узилишга эга. **9.** а) функцияни $x = 0$ да текширамиз. $f(-0) = \lim\limits_{x\to -0}\left(x + \frac{1}{x}\right) = -\infty$, $f(+0) = \lim\limits_{x\to +0}\left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$. Демак, $x=0$ да функция II тур узилишга эга (18- чизма). б) Бу функцияни $x = \pm 1$ нуқталарда текширамиз: $x = -1$ да $f(-1-0) = \lim\limits_{x\to 1-0}\frac{1}{x^2-1} = +\infty$, $f(-1+0) = \lim\limits_{x\to -1+0}\frac{1}{x^2-1} = -\infty$. Демак, $x = -1$ да функция II тур узилишга эга. Шунга ўхшаш $x = 1$ да ҳам функция II тур узилишга эга эканлигини кўрсатиш мумкин (19- чизма). **10.** $x = 0$ да сакрашга эга. Сакраш катталиги 2 га тенг. **11.** а) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ бўлгани учун $f(0) = 1$ деб олсак, $x = 0$ да функция узлуксиз бўлади, яъни

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{агар } x \neq 0, \\ 1, & \text{агар } x = 0. \end{cases}$$

12. а) $f(0) = \frac{1}{2}$, б) $f(0) = -\frac{3}{2}$.

13. а) $f(x) = x^3 + 3x + 1$ функция-

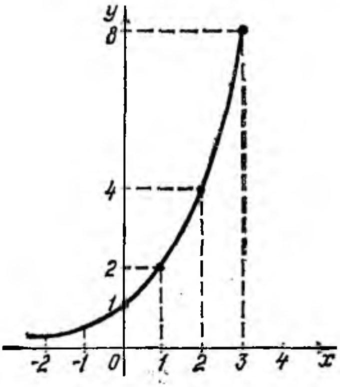


19- чизма.

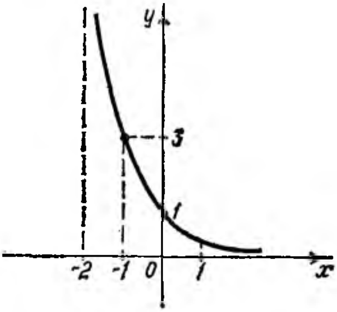
ни $[-1;\ 0]$ да текширамиз. Бу функция $[-1;\ 0]$ да узлуксиз. Кесманинг учларидаги қийматлари $f(-1) = -3$, $f(0) = 1$ бўлиб, турли ишорали. Больцано-Коши теоремасига биноан $]-1;\ 0[$ да бирор c нуқта топилиб, $f(c) = 0$ бўлади, яъни $c^3 + 3c + 1 = 0$ бўлиб, c берилган тенгламанинг ечими бўлади. б), в), г) мисоллар ҳам юқоридаги каби ечилади, **15**. а) $y = \sin x$, $y = \cos^2 x$ ва $y = \sqrt{x+1}$ функцияларнинг ҳар бири $[0;\ 10]$ кесмада узлуксиз бўлгани учун, $f(x) = \sin x \cdot \cos^2 x - \sqrt{x+1}$ функция ҳам $[0;\ 10]$ кесмада узлуксиз. Шунинг учун Вейерштрасс теоремасига биноан $f(x)$ функция $[0,\ 10]$ да чегараланган. б) $y = \sqrt{x^2+3x+1}$ ва $y = x - 1$ лар $[2;\ 7]$ да узлуксиз бўлиб, $y = x - 1$ функция $[2;\ 7]$ да нолга тенг қийматга эга бўлмаганлиги учун $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}$ функция ҳам $[2;\ 7]$ да узлуксиз бўлади. Шунинг учун бу функция $[2;\ 7]$ да чегараланган. **17**. а) $y = -3x + 1$ функциянинг аниқланиш соҳаси $D(y) =]-\infty;\ +\infty[$. қийматлар тўплами $E(y) =]-\infty;\ +\infty[$. $y_1 = -3x_1 + 1$, $y_2 = -3x_2 + 1$ дан $y_2 - y_1 = -3x_2 + 1 - (-3x_1 + 1) = -3(x_2 - x_1)$, $y_2 - y_1 = -3(x_2 - x_1)$ га эга бўламиз. Агар $x_1 < x_2$ бўлса, $x_2 - x_1 > 0$ бўлиб, $y_2 - y_1 < 0$ экани келиб чиқади. Бундан $y_2 < y_1$, демак, функция $D(y) =]-\infty;\ +\infty[$ да камаювчи. Иккинчи томондан $D(y) =]-\infty;\ +\infty[$ да $y = -3x + 1$ узлуксиз бўлганидан, $E(y) =]-\infty;\ +\infty[$ да унга тескари функция мавжуд бўлиб, бу функция ҳам камаювчи ва узлуксиз бўлади б) $y = x^{2n+1}$ функциянинг аниқланиш соҳаси $D(y) =]-\infty;\ +\infty[$ қийматлар тўплами $E(y) =]-\infty;\ +\infty[$. $y_2 - y_1 = x_2^{2n+1} - x_1^{2n+1} = (x_2 - x_1)(x_2^{2n} + x_2^{2n-1}\ x_1 + x_2^{2n-2}.\ x_1^2 + \ldots + x_1^{2n})$. Ихтиёрий x_1 ва x_2 ларда $(x_1 \neq x_2)$ иккинчи қавснинг ичи мусбат бўлади (текшириб кўринг). $x_1 < x_2$ да $x_2 - x_1 > 0$ бўлиб, $y_2 - y_1 > 0$ бўлади. Бундан $y_1 < y_2$ бўлиб, берилган функциянинг ўсувчи экани келиб чиқади. Иккинчи томондан $]-\infty;\ +\infty[$ да $y = x^{2n+1}$ узлуксиз бўлганидан, $E(y) =]-\infty;\ +\infty[$ да унга тескари функция мавжуд бўлиб, бу функция ҳам ўсувчи ва узлуксиз бўлади. в) Бу функция учун ҳам $D(y) =]-\infty;\ +\infty[$, $E(y) =]-\infty;\ +\infty[$. $y_2 - y_1 = x_2 + \sin x_2 - (x_1 + \sin x_1) = (x_2 - x_1) + (\sin x_2 - \sin x_1) \geqslant (x_2 - x_1) - |\sin x_2 - \sin x_1|$;

$$|\sin x_2 - \sin x_1| = \left| 2\sin\frac{x_2-x_1}{2} \cdot \cos\frac{x_2+x_1}{2} \right| = 2 \cdot \left| \sin\frac{x_2-x_1}{2} \right| \times \left| \cos\frac{x_2+x_1}{2} \right| < 2 \cdot \left| \frac{x_2-x_1}{2} \right| \cdot 1 = |x_2 - x_1|$$

бўлганидан $y_2 - y_1 \geqslant (x_2 - x_1) - |\sin x_2 - \sin x_1| > (x_2 - x_1) - (x_2 - x_1) = 0$ бўлиб, $y_2 > y_1$ экани келиб чиқади. Демак, $y = x + \sin x$ функция $D(y) =]-\infty;\ +\infty[$ да ўсувчи ва узлуксиз бўлганидан, $E(y) =]-\infty;$

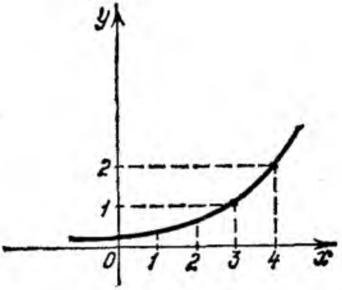


20- чизма.

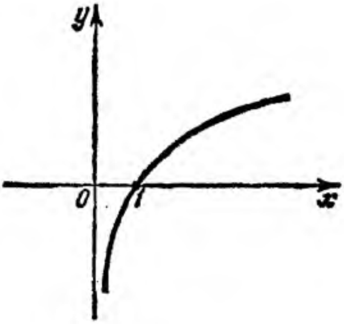


21- чизма.

$+\infty[$ да унга тескари функция мавжуд бўлиб, у ҳам ўсувчи ва узлуксиз бўлади. **18.** а) мавжуд, ўсувчи; б) мавжуд, камаювчи, **19.** а) $y = 2^x$, $a = 2 > 1$ бўлганидан кўрсаткичли функция ўсувчи (20- чизма). б) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $a = \frac{1}{3} < 1$ бўлганидан $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ функция камаювчи (21- чизма). в) $y = \frac{1}{8} \cdot 4^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{8} \cdot (\sqrt{4})^x = \frac{1}{8} \cdot 2^x$, $a = 2 > 1$ бўлгани учун 2^x ўсувчи, $\frac{1}{8} > 0$ бўлгани учун $y = \frac{1}{8} \times 2^x$ ҳам ўсувчи (22- чизма). **20.** а) ўсувчи, б) камаювчи. **21.** а) $y = (5,6)^x$ кўрсаткичли функцияда $a = 5,6 > 1$ бўлгани учун у ўсувчи. Шунинг учун $-5 < -3$ бўлганидан $(5,6)^{-5} < 5,6)^{-3}$. б) $(0,25)^{4,3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{4,3} = (2^{-2})^{4,3} = 2^{-8,6}$. $y = 2^x$ функцияда $a = 2 > 1$ бўлгани учун у ўсувчи. Шунинг учун $-6,2 > -8,6$ бўлганидан $2^{-6,2} > 2^{-8,6}$. Демак, $2^{-6,2} > (0,25)^{4,3}$. в) $y = (0,45)^x$ функцияда $a = 0,45 < 1$ бўлгани учун у камаювчи. Шунинг учун $-3 < -1$ бўлганидан $(0,45)^{-3} > (0,45)^{-1}$. г) $y = \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^x$ функцияда $a = \sqrt{2 + \sqrt{3}} > 1$ бўлганидан функция ўсувчи. Шунинг учун $2,5 < 2,7$ бўлганидан $\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^{2,5} < \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^{2,7}$. д) $y = \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^x$ функцияда $a = \sqrt{2 - \sqrt{3}} < 1$ бўлганидан у камаювчи. Шунинг учун $-3 < 2$ бўлганидан $\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^{-3} > \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^2$. **22** а) $5^{1,41} < 5^{1,42}$, б) $3^{\sqrt{3}} < 3^2$, в) $e^{1,2} > e^{-0,9}$,

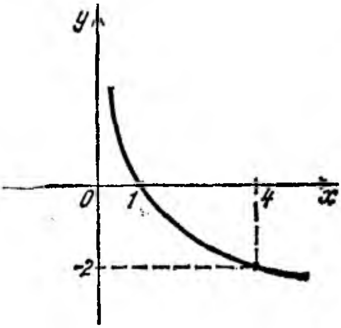


22- чизма.

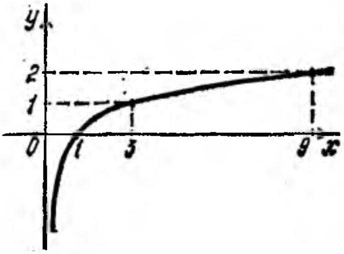


23- чизма.

г) $(0,3)^2 < (0,3)^{\sqrt{3}}$. **23.** а) $3^{x^2-4} = 3^{3x-6}$ тенглама $x^2 - 4 = 3x - 6$ тенгламага тенг кучли. Бу тенгламани ечиб, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ ларга эга бўламиз. б) $5^x + 3 \cdot 5^{x-2} = 140$, $5^x + 3 \cdot \frac{5^x}{5^2} = 140$, $5^x(25+3) = 140 \cdot 25$, $5^x = 5^3$, $x = 3$. в) $3 \cdot 4^{x+1} - 4^x = 44$, $3 \cdot 4^x \cdot 4 - 4^x = 44$, $11 \cdot 4^x = 44$, $4^x = 4$, $x = 1$. г) $7^{x+2} - 5\ 7^x = 308$, $7^x \cdot 49 - 5 \cdot 7^x = 308$, $7^x = 7$, $x = 1$. д) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$, $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$, $(3^x)^2 - 4 \times 3^x + 3 = 0$. $3^x = y$ белгилаш киритсак, $y^2 - 4y + 3 = 0$ тенгламага эга бўламиз. Бундан $y = 1$, $y_2 = 3$. Демак, $3^x = 1$ ва $3^x = 3$ тенгламаларга эга бўламиз. Биринчи тенгламадан $x_1 = 0$, иккинчисидан эса $x_2 = 1$ келиб чиқади. е) Бу тенгламани д) даги каби ечсак, $x_1 = 18$, $x_2 = 2$ келиб чиқади. **24.** а) 1, б) 2. **25.** а) $y = \ln x$, бу ерда асос $a = e > 1$ бўлгани учун функция ўсувчи (23- чизма) б) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, бу ерда $a = \frac{1}{2} < 1$ бўлгани учун функция камаювчи (24- чизма) в) $y = \log_3 x$, бу ерда асос $a = 3 > 1$ бўлгани учун функция ўсувчи (25- чизма). **26.** а) ўсувчи, б) камаювчи. **27.** а)



24- чизма.



25- чизма.

$y=\ln x$ логарифмик функциянинг асоси $a=e>1$ бўлгани учун y ўсувчи. Шунинг учун $3>\sqrt{e+1}$ бўлганидан $\ln 3>\ln\sqrt{e+1}$, б) $y=\lg x$ функциянинг асоси $a=10>1$ бўлгани учун y ўсувчи. Шунинг учун $101<103$ бўлганидан $\lg 101<\lg 103$. в) $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ функциянинг асоси $a=\frac{1}{3}<1$ бўлгани учун у камаювчи. Шунинг учун $7>6$ бўлганидан $\log_{\frac{1}{3}}7<\log_{\frac{1}{3}}6$. **28.** а) $\log_3 e>\log_3 2{,}7$, б) $\log_{\frac{1}{4}}8>\log_{\frac{1}{4}}9$, в) $\log_{\sqrt{2}}3>\log_{\sqrt{2}}1{,}5$. **29.** а) $\log_2(x^2-6x+1)=$ $=\log_2(13-5x)$ тенглама $\begin{cases}x^2-6x+1=13-5x\\ x^2-6x+1>0\end{cases}$ системага тенг кучли.

$x^2-6x+1=13-5x$ тенгламани ечамиз. $x^2-x-12=0$, бу тенгламанинг ечимлари $x_1=-3$, $x_2=4$, $x_1=-3$ ни системадаги тенгсизликнинг ечими бўлиш ёки бўлмаслигини текшириб кўрамиз. $(-3)^2-6\cdot(-3)+1=28>0$, $x_1=-3$ тенгсизликнинг ҳам ечими бўлар экан. Демак, $x_3=-3$ тенгламанинг ечими бўлар экан. Энди $x_2=4$ ни тенгсизликнинг ечими бўлиш ёки бўлмаслигини текширамиз. $4^2-6\cdot4+1=-7<0$, демак $x_2=4$ тенгсизликнинг ечими бўлмас экан. Шунинг учун у системанинг, демак тенгламанинг ҳам ечими бўлмайди. *Жавоб;* $\{-3\}$. Эслатма юқоридаги системанинг ўрнига $\begin{cases}x^2-6x+1=13-5x\\ 13-5x>0\end{cases}$ система олинса ҳам бўлар эди б) $\log_a(x-3)(x+4)=\log_a 18$ тенглама $\begin{cases}(x-3)\cdot(x+4)=18\\ (x-3)\cdot(x+4)>0\end{cases}$ системага тенг кучли $(x-3)(x+4)=18$, $x^2+x-30=0$. Бу тенгламанинг ечимлари $x_1=5$, $x_2=-6$, $x_1=5$ ни тенгсизликка қўйиб текширамиз: $(5-3)(5+4)>0$ бўлгани учун $x_1=5$ системанинг ечими. Шу каби $x_2=-6$ ҳам системанинг ечими бўлади. Демак, тенгламанинг ечимлари $\{5\ \ -6\}$. **39.** а) ечимга эга эмас. б) $\left\{\frac{15}{2}\right\}$, в) $\{2;\ 9\}$. **31.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+kx)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+kx)}{kx}\cdot k=1\cdot k=$ $=k$. **32.** $\frac{1}{a}$. **33.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\ln\frac{x+a}{x}$; бу ерда $\frac{1}{x}=y$ алмаштириш киритсак, $x\to+\infty$ да $y\to0$ бўлади. Бундан $x=\frac{1}{y}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\times$ $\times\ln\frac{x+a}{x}=\lim\limits_{y\to0}\frac{1}{y}\cdot\ln(1+ay)=\lim\limits_{y\to0}\frac{\ln(1+ay)}{y}=a$. **34.** e^{-1}. **35.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{2}{3}=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$. **36.** -1.

37. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}=1\cdot 1=1.$ **38.** 2. **39.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{10^{x^2}-1}{x^2+x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{10^{x^2}-1}{x^2(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{10^{x^2}-1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+x}=\ln 10.$ **40.** $\ln 4.$

41. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1+1-e^{bx}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x}-$ $-\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{bx}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}\cdot a-\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{bx}-1}{bx}\cdot b=a-b.$ **42.** 1. **43.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{n}}-1}{x}=\frac{1}{n}.$ **44.** $\frac{3}{8}.$ **45.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{\operatorname{tg} x}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+2x)^{\frac{1}{3}}-1}{2x}\cdot\frac{2x}{\operatorname{tg}x}\right)=\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}.$ **46.** $\frac{1}{3}.$ **47.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1+1-\sqrt[4]{1-2x}}{x(1+x)}=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{x^2}\cdot\frac{x}{1+x}\right)-\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1-2x)^{\frac{1}{4}}-1}{-2x}\cdot\frac{-2}{1+x}\right)=$ $=\frac{1}{3}\cdot 0-\frac{1}{4}(-2)=\frac{1}{2}.$ **48.** $\frac{1}{98}.$ **49.** $x=-1$ ва $x=1$ нуқталарда II тур узилишга эга. $x=0$ да I тур узилишга эга, бу нуқтада узлуксизликни тиклаш мумкин **50.** $x=0$ да узлуксиз. **51.** Дирихле функциясининг узлуксиз бўладиган нуқтаси йўқ. **52.** $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$ $=3.$ **56.** Мавжуд эмас. **57.** Мавжуд эмас.

IV БОБ

1. $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x};$ $x=0,$ $\Delta x=0{,}01$ учун $\Delta y=0{,}1.$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x};$ $x=0,$ $\Delta x=0{,}01$ учун $\frac{\Delta y}{\Delta x}=10$ бўлади. **2.** $\Delta y=-\frac{1}{101},$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{100}{101}.$ **3.** $y+\Delta y=$ $=3(x+\Delta x)^2+4(x+\Delta x);$ $\Delta y=3(x+\Delta x)^2+4(x+\Delta x)-3x^2-4x=$ $=(6x+3\Delta x+4)\Delta x;$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}=6x+3\Delta x+4.$ $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(6x+$ $+3\Delta x+4)=6x+4.$ $y'=6x+4.$ **4.** $y'=-\frac{1}{x^2}.$ **5.** $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\Delta y=$

$= \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$; $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$;

$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. **6.** $y' = 3x^2$. **7.** $\Delta y = \dfrac{1}{(x + \Delta x)^2} - \dfrac{1}{x^2} =$
$= \dfrac{-2x\Delta x - \Delta x^2}{x^2(x + \Delta x)^2}$; $y' = -\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2x + \Delta x}{x^2(x + \Delta x)^2}$; $y' = -\dfrac{2}{x^3}$. **8.** $y' =$
$= -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$. **9.** $x = 1$ да $\Delta y = |\ln(1 + \Delta x)| - |\ln 1| = |\ln(1 + \Delta x)|$

$\Delta y = \begin{cases} \ln(1+\Delta x), & \text{агар } \Delta x \geqslant 0 \text{ бўлса,} \\ -\ln(1+\Delta x), & \text{агар } \Delta x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$

Шунинг учун $\lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -1$.

Демак, $y = |\ln x|$ функция $x = 1$ да дифференциалланувчи эмас. **10** $f'_+(0) = 1$; $f'_-(0) = -1$; $f'_+(0) \neq f'_-(0)$. Демак, $f'(0)$ мавжуд эмас. **11.** $y' = 4ax^3 - 3bx^2$. **12.** $y' = n(x^{n-1}+1)$. **13.** $y' = \dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}$. **14.** $y' = 2x^2 - 3x$. **15.** $-12t^{-5} - 1$. **16.** $\dfrac{3}{2\sqrt{3x}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{x^2}$ **17.** $21x^{\frac{5}{2}} + 10x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}$. **18.** $10^x \ln 10$. **19.** $\dfrac{26}{5} x \sqrt[5]{x^3} + \dfrac{7}{3\sqrt[3]{x^4}} + \dfrac{24}{7\sqrt[7]{x^4}}$ **20.** $40x(1 + x^2)^{19}$. **21.** $\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$. **22.** $-\operatorname{tg} x$. **23.** $\sin 2x$. **24.** $2x \cos x^2$. **25.** $6x(3x + 1)(2x^3 + x^2 - 5)^2$. **26.** $(2 + x)^{m-1}(3 - x)^{n-1}(m(3 - x) - n(2 + x))$. **27.** $3x^2 + 2x - 2$. **28.** $2e^x \cos x$. **29.** $y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})} = \dfrac{1}{2(x - 1 - \sqrt{1-x})}$. **30.** $y' = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Кўрсатма: олдин логарифмлаб, сўнгра дифференциаллаш керак. **31.** $y = \dfrac{1}{2}(\ln(1 + \sin x) - \ln(1 - \sin x))$; $y' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(1 + \sin x)'}{1 + \sin x} -$
$- \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(1 - \sin x)'}{1 - \sin x} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos x}{1 + \sin x} + \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}\right) = \dfrac{\cos x}{1 - \sin^2 x} = \dfrac{1}{\cos x}$;
$y' = \dfrac{1}{\cos x}$. **32.** $\dfrac{x(3a^4 - 17a^2x^2 + 12x^4)}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$. **33.** $y' = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$. **34.** $\dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$. **35.** Логарифмик дифференциаллашдан фойдаланамиз.

$$\ln y = \ln \frac{(x + 1)^2}{(x + 2)^3(x + 3)^4} = 2\ln(x + 1) - 3\ln(x + 2) - 4\ln(x + 3).$$

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{2}{x + 1} - \frac{3}{x + 2} - \frac{4}{x + 3}; \quad y' = \frac{(x + 1)^2}{(x + 2)^3(x + 3)^4} \times$$

$\times\left(\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x+2}-\frac{4}{x+3}\right)$; $y' = -\frac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}$. **36.** $\frac{-2\sin^2 x}{(\sin x-\cos x)^2}$. **37.** $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$. **38.** $y'=1$. Чунки $y' = \frac{(\sin x)'}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{\cos x}{\cos x} = 1$, ҳақиқатан, $\arcsin(\sin x)=x$. $(x)'=1$. **39.** $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

40. $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. **41.** $a^x\ln a + ax^{a-1}$. **42.** $e^{\sin x}\,x^{n-1}(n+x\cos x)$. **43.** Функция ифодасини соддалаштирамиз. $\sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt{x}}}=x^{\frac{7}{12}}$; $y' = \frac{7}{12}x^{-\frac{5}{12}} = \frac{7}{12\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{x^5}}}}$. **44.** $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$. Кўрсатма: $\sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}$ умумий кўрсаткичли функциянинг ҳосиласи олинади.

45. $\ln y = x\ln x$; $(\ln y)' = \frac{y'}{y} = (x\ln x)' = \ln x + 1$, $y' = x^x(\ln x + 1)$.

46. $(\cos x)^{\sin 2x}(2\cos 2x\cdot\ln\cos x - \operatorname{tg} x\cdot\sin 2x)$. **47.** Логарифмлаб, сўнгра дифференциаллаймиз: $\ln y = \arcsin x\cdot\ln x$; $\frac{y'}{y} = (\arcsin x)'\ln x + \arcsin x\cdot\frac{1}{x} = \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x}$; $y' = x^{\arcsin x}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x}\right)$.

48. $a\left(\frac{x}{a}\right)^{ax}\left(\ln\frac{x}{a}+1\right)$. **49.** $\frac{4(3\cos x+5)}{9\cos^2 x+30\cos x+25}$. **50.** $\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x\cdot(\sin x+\cos x)$. **51.** $\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}+\frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$.

52. $\frac{2}{1+x^2}$. **53.** $y' = \sin(\ln x) - \cos(\ln x) + x\cos(\ln x)\times$ $\times(\ln x)' + x\sin(\ln x)(\ln x)'$; $y' = 2\sin(\ln x)$. 54. $\frac{\sin 2x}{|\sin x|\sqrt{1+\cos^2 x}}$.

55. $\ln y = 3\ln(2x-1)+\frac{1}{2}\ln(3x+2) - 2\ln(5x+4) - \frac{1}{3}\ln(1-x)$.

$$y' = \frac{(2x-1)^3\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}\left(\frac{6}{2x-1}+\frac{3}{2(3x+2)}-\frac{10}{5x+4}+\frac{1}{3(1-x)}\right).$$

56. $-\frac{2x^2+1}{(x^2-3x+2)(x^2-7x+12)}$. **57.** $y' = ((\ln x)^x)' + (x^{\ln x})' =$ $= (\ln x)^x\ln\ln x + x(\ln x)^{x-1}\cdot\frac{1}{x} + x^{\ln x}\cdot\ln x\,\frac{1}{x} + \ln x\cdot x^{\ln x-1} =$

$= (\ln x)^{x-1}(\ln\ln x \ln x + 1) + 2x^{\ln x - 1}\ln x$. **58.** $\dfrac{6}{x\ln x \ln(\ln^3 x)}$. **59.** $y' =$ $(e^x)' + (e^{e^x})' + \left(e^{e^{e^x}}\right)' = e^x + e^{e^x}e^x + e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x = e^x(1 + e^{e^x} \times$ $\times\left(1 + e^{e^{e^x}}\right)\Big)$. Логарифмик дифференциаллаш лозим:

$$y' = (4x^2 - 7)^{1+\sqrt{x^2-5}}\,\frac{x(4x^2-7)\ln(4x^2-7) + 8x\sqrt{x^2-5}(2+\sqrt{x^2-5})}{\sqrt{x^2-5}}$$

61. $(\sin 2x)' = (2\sin x\cos x)'$; $2\cos 2x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$; $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$. **63.** а) $y = x|x| =$

$$= \begin{cases} x^2, & \text{агар } x \geqslant 0 \text{ бўлса}, \\ -x^2, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса}, \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} f'_+(x) = 2x, \\ f'_-(x) = -2x, \end{array} \right. \quad f'_+(0) = f'_-(0) = 0.$$

Демак, $x = 0$ да дифференциалланувчи, лекин $x \neq 0$ да дифференциалланувчи эмас.

$$\text{б) } y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса}, \\ \ln(-x), & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса}, \end{cases} \quad \left| \; y' = \frac{1}{x},\ x \neq 0. \right.$$

64. Кўрсатма: бир томонланма ҳосилаларни топинг.

65. Уринманинг бурчак коэффициенти $k = f'(a)$; $y = x^2 - 4$, $y' = 2x$; $y'(2) = 4$; $k = 4$. **66.** $y = x + 1$ — уринма, $y = -x + 5$ — нормал тенгламаси. **67.** $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, $y' = 6x^2 - 12x$, $y'(1) = -6$; $y_0 = 1$, $y = -6x + 7$ — уринма тенгламаси. **68.** $y = 4x - 2$ ва $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{9}{4}$. **69.** $y = 3x^2 - 1$ ва $y = 2x^2 + 3$ эгри чизиқларнинг кесишиш нуқталарини аниқлаймиз.

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 1, \\ y = 2x^2 + 3, \end{cases} \quad 3x^2 - 1 = 2x^2 + 3;\ x^2 = 4;\ x_1 = 2;\ x_2 = -2.$$

Маълумки, $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)\, f_2'(x_0)}$ формуладан x_0 нуқтада икки эгри чизиқ орасидаги φ бурчак аниқланади. $f_1'(x) = 6x$; $f_2'(x) = 4x$; $f_1'(2) = 12$; $f_2'(2) = 8$. $\operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{8 - 12}{1 + 8 \cdot 12} = -\dfrac{4}{97}$; $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{4}{97}\right)$. $x = -2$ учун $\varphi_2 = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{4}{97}\right)$. **70.** 1) $x = 2$; 2) $x = -\dfrac{3}{2}$. **71.** $f'(x) = 2x - 5$. $f'(5) = 5$, $y = -\dfrac{x}{5} + 7$ — нормал тенгламаси. **72.** $x = 2$.

73. $\sin x = \cos x$ дан $x = \dfrac{\pi}{4}$. $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **74.** $\varphi = 90°$. **75.** $s = t^3 + 2t^2$ дан ҳаракат тезлиги $s' = 3t^2 + 4t$ бўлиб, $t = 2$ да $v = 20$ м/с бўлади. **76.** $v = \dfrac{2}{3} + \ln 3$. **77.** Ҳаракат тенгламаси $\begin{cases} x = v_1 \cos\varphi \cdot t, \\ y = v_1 \sin\varphi \cdot t - 4{,}9t^2; \end{cases}$ $t = 3$ с, $\varphi = 45°$, $v_1 = 200$ м/с бўлгани

учун $v = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v_1 \sin\varphi - 9{,}8t}{v_1 \cos\varphi} = \dfrac{200 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 9{,}8 \cdot 3}{200 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(1 - \dfrac{29{,}4}{100\sqrt{2}}\right)$ м/с.

78. $E = 625 \dfrac{\text{г} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$. **79.** $x^3 + 3x^2 + 2y^2 = 0$ дан y ни аниқлаб бўлади, лекин умумуй қоидага асосланиб, тенгламанинг чап томонини мураккаб функция деб қараб дифференциалланади. $3x^2 + 6x + 4y \cdot y' = 0$; $y' = -\dfrac{3x(x+2)}{4y}$. **80.** $\sqrt{\dfrac{P}{2x}}$. **81.** $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$; $2x + 2y + 2xy' - 2y \cdot y' = 2$; $y' = \dfrac{1 - x - y}{x - y}$. **82.** $-\dfrac{b^2x}{a^2y}$. **83.** $y' = -\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$. **84.** $\dfrac{ye^{\frac{y}{x}} - x}{xe^{\frac{y}{x}}}$. **85.** $3x^2 - 4xy^2 - 4x^2yy' + 5 + y' = 0$; $y' = \dfrac{4xy^2 - 3x^2 - 5}{1 - 4x^2y}$; $y'(1) = \dfrac{4}{3}$. **86.** $\dfrac{\sin y}{2\sin 2y - x\cos y - \sin y}$. **87.** $\dfrac{y'}{1 + y^2} - y' + 1 = 0$; $y' = 1 + \dfrac{1}{y^2}$ 88. $\dfrac{1 + e^x}{1 + e^y}$. **89.** $1 + \dfrac{y + xy'}{2\sqrt{xy}} + y' = 0$; $y' = -\dfrac{2a - 2x - y}{2a - 2y - x}$. **90.** $-\dfrac{e^x \sin y - e^{-y} \sin x}{e^x \cos y + e^{-y} \cos x}$. **91.** $\dfrac{\frac{y'x - y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \dfrac{\frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$; $(x \neq y)$. **92.** $y - 3 = -\dfrac{9}{2}(x + 2)$; $y - 3 = \dfrac{9}{2}(x + 2)$. **93.** $y = x^6 + e^{2x}$; $y^{\text{I}} = 6x^5 + 2e^{2x}$; $y^{\text{II}} = 30x^4 + 4e^{2x}$; $y^{\text{III}} = 120x^3 + 8e^{2x}$. **94.** $y^{\text{IV}} = \dfrac{2}{x^3}$. **95.** $y = e^{-x}\sin x$; $y^{\text{I}} = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x)$; $y^{\text{II}} = -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x) = -e^{-x} 2\cos x$; $y^{\text{III}} = 2e^{-x}(\sin x + \cos x)$ **96.** $y^{\text{VI}} = 32e^{2x}(2x^2 + 12x + 15)$. Кўрсатма: Лейбниц формуласидан фойдаланиш лозим. **97.** Шакл ўзгартирамиз: $y = \dfrac{x^2}{1 - x} =$

$= \frac{1 + x^2 - 1}{1 - x} = -(1 + x) + \frac{1}{1 - x} = -1 - x - (x - 1)^{-1}$; $y^{\text{I}} = -1 + (x - 1)^{-2}$; $y^{\text{II}} = -2(x-1)^{-3}$; $y^{\text{III}} = 2 \cdot 3(x - 1)^{-4}$; $y^{\text{IV}} = -4!(x - 1)^{-5}$. **98.** $y^{(10)} = e^x \left(\frac{10!}{x^{11}} - \frac{10 \cdot 9!}{x^{10}} + \ldots - \frac{10 \cdot 1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) = e^x \sum_{n=0}^{10} (-1)^n C_{10}^n \frac{n!}{x^{n+1}}$. **99.** Лейбниц формуласига кўра: $u = x^2$, $u' = 2x$, $u'' = 2$, $u''' = \ldots = u^{(10)} = 0$. $v = \sin x$, $v' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \ldots, v^{(10)} = \sin\left(x + 10 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$. $(x^2 \sin x)^{(10)} = x^2 \sin\left(x + 10 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 20x \sin\left(x + 9 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 90 \sin\left(x + 8 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = (x^2 + 20x)\cos x + 90 \sin x$. **100.** $y^{(n)} = k^n e^{kx}$. **101.** $y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$. (99-мисол ечимига қаранг). **102.** $y^{(n)} = (-1)^{n+1}(n - 1)!x^{-n}$. **103.** $y = \ln(ax + b)$; $y' = \frac{a}{ax + b}$; $y'' = \frac{-a^2}{(ax + b)^2}$; $y''' = \frac{2a^3}{(ax + b)^3}; \ldots$; $y^{(n)} = (-1)^{n+1} \frac{(n - 1)!a^n}{(ax + b)^n}$. **104.** $y^{(n)} = e^x(x^2 + 48x + 551)$. **105.** $y = \text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $y' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}x$; $y'' = \text{sh}x, \ldots,$ $y^{(n)} = \begin{cases} \text{ch}x, & \text{агар } n \text{ — тоқ сон бўлса,} \\ \text{sh}x, & \text{агар } n \text{ — жуфт сон бўлса.} \end{cases}$ **106.** $y^{(n)} = (-1)^n n! \frac{bc - ad}{(cx + d)^{n+1}} c^{n-1}$. **107.** $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$ нинг ҳар икки томонини x га кўпайтирамиз, сўнгра дифференциаллаймиз.

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \left(\frac{x - x^{n+1}}{1 - x}\right)' =$$

$$= \frac{(1-(n+1)x^n)(1-x) + (x-x^{n+1})}{(1 - x)^2} = \frac{1 - (n + 1)x^n - nx^{n+1}}{(1 - x)^2}.$$

Бу тенгликни x га кўпайтирамиз: $x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n = \frac{x - (n + 1)x^{n+1} - nx^{n+2}}{(1 - x)^2}$, энди яна дифференциаллаймиз: $1 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^{n-1} = \left(\frac{x^{n+1}(nx - n - 1) + 1}{(x - 1)^2}\right)' =$

$$= \frac{n^2x^{n+2} - (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} + (n+1)^2x^n - x - 1}{(x - 1)^3}, \quad (x \neq 1).$$

108. Кўрсатма: $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ тенглик n марта дифференциаллансин. **109.** $y^2 = 2px$; $y = (2px)^{\frac{1}{2}}$; $y' = p(2px)^{-\frac{1}{2}}$; $y'' = -p^2(2px)^{-\frac{3}{2}}$; $(y'')^{-\frac{2}{3}} = \left(-p^2(2px)^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} = -\frac{2px}{\sqrt[3]{p^4}} = \frac{2x}{\sqrt[3]{p}}$; $\left(\frac{2x}{\sqrt[3]{p}}\right)' = \frac{2}{\sqrt[3]{p}}$; $\left(\frac{2}{\sqrt[3]{p}}\right)' = 0$. Демак, $\left((y'')^{-\frac{2}{3}}\right)'' = 0$. **111.** $x^3 + y^3 - 3axy = 0$; $y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$; $y'' =$

$$= \frac{(ay' - 2x)(y^2 - ax) - (ay - x^2)(2yy' - a)}{(y^2 - ax)^2}; \qquad y'' =$$

$$= \frac{(ay - x^2)(2x^2y - ay^2 - a^2x) - (y^2 - ax)(2xy^2 - ax^2 - a^2y)}{(y^2 - ax)^3}.$$

112. $y'' = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}$. **113.** $e^x - e^y = y - x$; $e^x - e^y\, y' = y' - 1$; $y' = \frac{e^x + 1}{e^y + 1}$; $y'' = \frac{(e^x - e^y)(1 - e^{x+y})}{(1+e^y)^3}$. **114.** Кўрсатма: $y = f(e^x$; $y' = e^xf'(e^x), \ldots, y''' = e^{3x}f''' + 3e^{2x}f'' + e^xf'$. **115.** $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$; $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta f(1) = 0{,}862$, $df(x) = (6x^2 + 2)\Delta x$; $df(1) = 0{,}8$. **116.** $\Delta y \approx dy = 0{,}05$. **117.** $dy = f'(x)dx$; $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{a}$; $dy = \frac{adx}{a^2 + x^2}$. **118.** $d^2y = 4e^{2x}dx^2$. **119.** $y = \ln x$; $y' = \frac{1}{x}$; $y'' = -\frac{1}{x^2}$; $y''' = \frac{2}{x^3}$; $d^3y = y'''dx^3 = \frac{2}{x^3}dx^3$. **120.** $d^3y = -4\sin 2x dx^3$. **121.** $y =$

$$= \sqrt{\ln^2 x - 4}; \quad y' = \frac{\ln x}{x\sqrt{\ln^2 x - 4}}; \quad y'' =$$

$$= \frac{\frac{1}{x}\cdot x\sqrt{\ln^2 x - 4} - \ln x\left(\sqrt{\ln^2 x - 4} + \frac{\ln x}{\sqrt{\ln^2 x - 4}}\right)}{x^2(\ln^2 x - 4)} = \frac{4\ln x - 4 - \ln^3 x}{x^3(\ln^2 x - 4)^{3/2}}.$$

$d^2y = \frac{4\ln x - 4 - \ln^3 x}{x^3(\ln^2 x - 4)^{3/2}}dx^2$. **122.** $d^2y = \frac{4(x^4 + 4x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2}dx^2$. **123.** $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, $x = 1$, $\Delta x = 0{,}01$; $\Delta f(1) = -0{,}0099$. $df(1) = -0{,}01$. Абсолют хатолик $|\Delta y - dy| = 0{,}0001$. Нисбий хатолик $\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = 0{,}01$. **124.** 1) e^xdx^2; 2) $e^x(x'^2(t) + x''(t))\,dt^2$.

125. Δx нинг кичик қийматларида $\Delta y \approx dy$. Демак, $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx df(x_0)$;

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0) \qquad (1).$$

$y=\sqrt[3]{x}$, $x = 1$, $\Delta x = 0{,}02$ учун (1) дан $\sqrt[3]{1{,}02} = \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3} \cdot 0{,}02 = 1{,}006$. **126.** 2,0125. **127.** 125- мисолдаги (1) дан фойдаланамиз: $y = \sin x$, $\sin 29^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right)$; $x_0 = \frac{\pi}{6}$; $\Delta x = -\frac{\pi}{180}$; $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (1) га асосан: $\sin 29^\circ \approx \sin\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} = 0{,}484$. **128.** 0,851. **129.** $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; $V + \Delta V = \frac{4}{3}\pi(r + \Delta r)^3$; $\Delta V = \frac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2\Delta r + 4\pi r\Delta r^2 + \frac{4}{3}\pi\Delta r^3$. ΔV нинг геометрик мазмуни радиуслари $r+\Delta r$ ва r бўлган концентрик икки шар сиртлари орасидаги бўлакнинг ҳажми $dV = \frac{4}{3} \cdot 3\pi r^2 \Delta r = 4\pi r^2 \Delta r$ — асоси $4\pi r^2$ дан иборат, баландлиги Δr бўлган жисмнинг ҳажмини ифодалайди. Бу икки ҳажм орасидаги фарқ: $4\pi r\,\Delta r^2 + \frac{4}{3}\pi\Delta r^3$. **130** $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}$. **131.** $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$; $\frac{dx}{dt} = -\sin t$; $\frac{dy}{dt} = \cos t$; $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} t$. **132.** $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\varphi$. **133.** $\begin{cases} x=\operatorname{ch}t, & x'_t = \operatorname{sh} t, \\ y=\operatorname{sh}t, & y'_t = \operatorname{ch} t. \end{cases}$ $\frac{dy}{dx} = \operatorname{cth} t$. **134.** $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} t$. **135.** $x'_t = a(1-\cos t)$, $y'_t = a\sin t$. $\frac{dy}{dx} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$. **136.** $\frac{dy}{dx} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$. **137.** $x'_t = -e^{-t}$; $y'_t = 3t^2$; $x''_{tt} = e^{-t}$; $y''_{tt} = 6t$; $\frac{d^2y}{ax^2} = \frac{y''_{tt}\cdot x'_t - x''_{tt}\cdot y'_t}{(x'_t)^3}$ формуладан: $\frac{d^2y}{dx^2} = 3t(2 + t)e^{2t}$. **138.** $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{9}{16t}$. **139.** $x'_t = 3t^2+3$; $x''_{tt} = 6t$; $y'_t = 3t^2 - 3$; $y''_{tt} = 6t$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4t}{3(t^2+1)^3}$. **140.** $f(x) = x^3 + 5x^2 - 6x$ функция $[0;\ 1]$ да узлуксиз ва $f(0) = f(1) = 0$. $f'(x) = 3x^2+10x-6$ мавжудлигидан Ролль теоремасидан фойдаланиш мумкин. $c = -\frac{5}{3} + \frac{\sqrt{173}}{6} \in]0;\ 1[$. **141.** $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$; $f(0) = f(1) = 0$;

$f'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\neq 0$. Бунда Ролль теоремасига қарама-қаршилик йўқ, чунки $f(x)$ функция $[0;\ 1]$ да узлуксиз, лекин $x=0$ да ҳосиласи мавжуд эмас. Демак Ролль теоремасининг шартлари тўла бажарилмаган. **143** Мисол сифатида $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ ни $[-2;\ 2]$ да олсак, кифоя, чунки бу функция $f(-2)=f(2)=\sqrt[3]{4}$; $f(x)=x^{2/3}$ узлуксиз функция, фақат $f'(c)=0$ бўла олмайди, $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\neq 0$.

144. $c=\frac{5+\sqrt{97}}{12}\in\,]0;\ 2[$. **145.** $f(x)=\ln x$, $[1;\ e]$ да Лагранж теоремасининг барча шартларини қаноатлантиради: $f(x)=\ln x$ узлуксиз функция, $f'(x)=\frac{1}{x}$ мавжуд. $f(1)=\ln 1=0$, $f(e)=\ln e=1$.

Лагранж формуласига кўра: $\frac{f(e)-f(1)}{e-1}=f'(c)$. $f'(x)=\frac{1}{x}$; $f'(c)=\frac{1}{c}$; $\frac{1}{e-1}=\frac{1}{c}$; $c=e-1\in\,]1;\ e[$. **146.** $x=\frac{\pi}{2}\in\left|0;\ \frac{2\pi}{3}\right|$ да мавжуд эмас. **147.** $f(x)=x+|\sin x|$ функция $[-1;\ 1]$ да узлуксиз.

$$f(x)=\begin{cases} x-\sin x, & \text{агар } x\in[-1;\ 0], \\ x+\sin x, & \text{агар } x\in[0;\ 1]. \end{cases}$$

$f'_{-}(0)=0$, $f'_{+}(0)=2$, демак, $x=0$ да ҳосила мавжуд эмас. Шунинг учун $[-1;\ 1]$ да Лагранж теоремасини қўлланиб бўлмайди. 148. $c=0$. Теоремани қўлланиб бўлади. **149.** Ролль теоремасининг бир шарти бузилган. Бу функция $x=8$ да чекли ҳосилага эга эмас. $f'_{-}(8)=-\infty$; $f''_{+}(8)=+\infty$. **150.** $c_1=\frac{1}{2}$; $c_2=\frac{3}{2}$. **151**. Агар $]a;\ b[$ да $f'(x)=0$ бўлса, у ҳолда Лагранж формуласига асосан, $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ дан $f(b)-f(a)=0$, $f(b)=f(a)$ ва $\forall x\in\,]a;\ b[$ учун $f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)$ дан $f(x)=f(a)=f(b)$, яъни $f(x)=\text{const}$ келиб чиқади. **152**. Олдинги мисол натижасидан: $f'(x)=\left(\arcsin x+\arccos x-\frac{\pi}{2}\right)'=0$, $f(x)=c$. Демак, $\arcsin x+\arccos x-\frac{\pi}{2}=c$, $x=0$ деб олинса, $c=0$ келиб чиқади, яъни $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

153 $[1;\ 2]$ да $f(x)=x^3$, $\varphi(x)=x^2+1$; $f'(x)=3x^2$; $\varphi'(x)=2x\neq 0$. $\frac{f(2)-f(1)}{\varphi(2)-\varphi(1)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$ дан $\frac{7}{3}=\frac{x}{2}$ ёки $c=\frac{14}{9}$ бўлади **154**. Йўқ. Чунки $\varphi(-2)=\varphi(2)$.

155. $f'(x)=2x$, $\varphi(x)=3x^2$; $[-1;\ 1]$ да $\varphi'^2+f^2\neq 0$ шарти бузилган, чунки $x = 0$ да $f'(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$. **156.** $c = -\frac{1}{3} \in]-1; 1[$ **157.** $f(x) = ax^2 + bx + c$; $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1)$; $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1) + b$; $f'(x) = 2ax + b$; $f'(c) = 2ac + b$. $a(x_1 + x_2) + b = 2ac + b$ дан $c = \frac{x_1 + x_2}{2}$ келиб чиқади. **158.** Умуман, бу „исбот" нотўғри, чунки ҳар иккала функцияга мос келадиган c лар ҳар хил бўлади. Айрим ҳолларда $c_1 = c_2 = c$ бўлиши мумкин. **159.** $y=(x-2)^2$ дан $y' = 2(x-2)$; $2(x-2) > 0$ да $x > 2$ бўлади. Демак, $]2; +\infty[$ да функция ўсувчи, $]-\infty; 2[$ да эса функция камаювчи бўлади. **160.** $]-\infty; +\infty[$ да ўсувчи. **161.** $y = 1 - 4x - x^2$; $y' = -4 - 2x = -2(2 + x)$; $-2(2 + x) > 0$ дан $x < -2$ келиб чиқади, демак, $]-\infty; -2[$ да функция ўсувчи, $]-2; +\infty[$ да камаювчи бўлади **162** $]-\infty; 2[$ ва $]2; +\infty[$ да камаювчи. **163.** $y' = -24 + 30x - 6x^2$; $6x^2 - 30x + 24 = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизлари 1 ва 4 дан иборат. $a = -6 < 0$ бўлгани учун $y'>0$ тенгсизлик $]1; 4[$ да ўринли бўлади. $]-\infty; 1[$ ва $]4; +\infty[$ да эса $y' < 0$ бўлади. Демак, $]1; 4[$ да функция ўсувчи, $]-\infty; 1[$ ва $]4; +\infty[$ да камаювчи. **164.** $]-\infty; -1[$ ва $]4; +\infty[$ да ўсувчи $]-1; 4[$ да камаювчи. **165.** $y = \frac{2\ln x - 2}{\ln^2 x} = 2\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$; $y' > 0$, $\ln x > 1$, яъни $x > e$. Демак, $]0; e[$ да камаювчи, $]e; +\infty[$ да эса функция ўсувчи бўлади. **166.** $]-\infty; +\infty[$ да ўсувчи. **167.** $y' = -\frac{2x}{1-x^2} = \frac{2x}{x^2-1}$; $y = \ln(1 - x^2)$ функциянинг аниқланиш соҳаси $]-1; 1[$ ҳисобланади. Шунинг учун $]-1; 0[$ да $y'>0$ ва $]0; 1[$ да $y' < 0$; **168** $]-\infty; 0[$ ва $]2; +\infty[$ да камаювчи, $]0; 2[$ да ўсувчи. **169.** $y' = 3x + 6 > 0$, демак функция ўсувчи. **170.** Функция $]-\infty; +\infty[$ да ўсувчи. **171.** $y' = 2x - b$, $2x - b < 0$ дан $b > 2x$, $x \in]-1; 1[$ бўлгани учун $b \geqslant 2$ деб олиш кифоя. **172.** $p \leqslant -1$ **173** $y' = 6 - 3x^2$; $2 - x^2 = 0$; $x_1 = -\sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt{2}$. $y'' = -6x$; $f''(-\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} > 0$, яъни минимум. $f''(\sqrt{2}) = -6\sqrt{2} < 0$, яъни максимум. Демак $x = -\sqrt{2}$ да $y_{\min} = -4\sqrt{2}$; $x = \sqrt{2}$ да $y_{\max} = 4\sqrt{2}$ бўлади **174.** $y_{\min} = -9$. **175.** $y' = -6x(1 - x^2)^2$; $x(1 - x^2) = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$.

$$\left.\begin{aligned} y'(-1-\delta) &= -6(-1-\delta)(1-x^2)^2 > 0, \\ y'(-1+\delta) &= -6(-1+\delta)(1-x^2)^2 > 0 \end{aligned}\right\}$$

экстремум мавжуд бўлмайди. $x_3 = 1$ да ҳам худди шундай.

$$y'(-\delta) = -6(-\delta)(1-x^2)^2 > 0,$$
$$y'(\delta) = -6\delta(1-x)^2 < 0 \qquad (\delta > 0).$$

максимум бўлади, Демак, $x=0$ да $y_{\max}=1$. **176.** $y_{\max}(1)=0$, $y_{\min}(1{,}4)=-0{,}03456$. **177.** $y'=2ax+b$, $2ax+b=0$, $x=-\frac{b}{2a}$ — стационар нуқта. $y''=2a$; $a>0$ да $y''>0$; $a<0$ да $y''<0$. Демак, $a>0$ да квадратик функция минимумга, $a<0$ да максимумга эришади. Экстремум нуқтаси $x=-\frac{b}{2a}$, экстремум қиймати $\frac{4ac-b^2}{4a}$ бўлади. **178.** $y_{\max}=y(-3)=33$; $y_{\min}=y(1)=1$ **179.** $y'=\cos x-\sin x$; $\cos x=\sin x$; $x=\frac{\pi}{4}\pm 2\pi k$ ва $x=\frac{5\pi}{4}\pm\pm 2\pi k$, $k\in Z$. $y''=-(\sin x+\cos x)$; $y''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}<0$, $y''\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\sqrt{2}>0$. Демак, $x=\frac{\pi}{4}$ да $y_{\max}=\sqrt{2}$, $x=\frac{5\pi}{4}$ да $y_{\min}=-\sqrt{2}$. Шунга ўхшаш $\forall k\in Z\setminus\{0\}$ бўлганда y'' нинг ишораларига асосланиб, $y(x)$ нинг экстремум қийматлари аниқланади. **180.** $y_{\min}(-1)=-\frac{1}{2}$; $y_{\max}(1)=\frac{1}{2}$. **181.** $y'=\ln x+1$; $\ln x+1=0$; $x=\frac{1}{e}$; $y''=\frac{1}{x}$; $y''\left(\frac{1}{e}\right)=e>0$. Демак, $x=\frac{1}{e}$ да $y_{\min}=-\frac{1}{e}$. **182**. $x=\frac{1}{\ln 2}$ да $y_{\max}=-\frac{\ln\ln 2}{\ln 2}$. **183.** $y'=e^x-e^{-x}$; $e^x-e^{-x}=0$; $\frac{e^{2x}-1}{e^x}=0$, $e^{2x}=1$, $x=0$; $y''=e^x+e^{-x}$; $y''(0)=2>0$ демак, $x=0$ да $y_{\min}=2$. **184**. $y_{\max}(2)=2$. **185.** $y_{\min}(0)=2$. Кўрсатма: $y'(x)=0$ дан $x=0$. Текширишни y^{II}, y^{III}, y^{IV} гача давом эттириш лозим. Бунда $y^{\mathrm{II}}(0)=y^{\mathrm{III}}(0)=0$ бўлиб, $y^{\mathrm{IV}}(0)=2>0$, $n=4$ — жуфт сон. **186.** $\max\limits_{[-2;\,2]} f(x)=3$, $\min\limits_{[-2;\,2]} f(x)=-13$. **187**. $y'=x^2-4x$: $x_1=0$, $x_2=4\notin[-1;\,2]$.

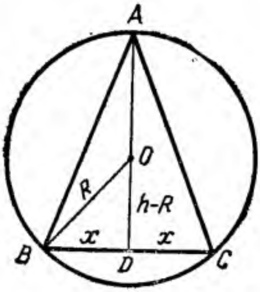
$$f(0)=3;\ f(-1)=\frac{2}{3};\quad f(2)=-\frac{7}{3}.$$

Демак, $\max\limits_{[-1;\,2]} f(x)=3$, $\min\limits_{[-1;\,2]} f(x)=-\frac{7}{3}$. **188** $\min\limits_{[-10;\,1]} y=0$; $\max\limits_{[-10;\,1]} y=4$. **189.** $y'=\frac{6x^2(x^2-9)-4x^4}{(x^2-9)^2}$; $2x^2(3x^2-27-2x^2)=0$; $x_1=-3\sqrt{3}$; $x_2=0$, $x_3=3\sqrt{3}$; $x_1\notin[4;\,6]$, $x_2\notin[4;\,6]$, $x_3=3\sqrt{3}\in[4;\,6]$. Шунинг учун $f(4)=18\frac{2}{7}$; $f(3\sqrt{3})=9\sqrt{3}$;; $f(6)=16$. Демак, $\min\limits_{[4;\,6]} y=9\sqrt{3}$;

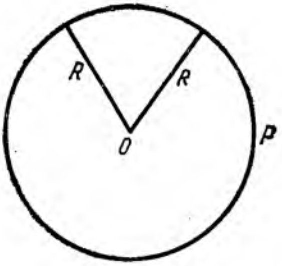
$\max\limits_{[4;\,6]} y = 18\frac{2}{7}$. **190.** $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2}\right]} y = \pi - 1$; $\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{2}\right]} y = -(\pi + 1)$. **191.** $y' = \cos x \sin 2x + \sin x \cos 2x \cdot 2 = 0$; $2\sin x\,(2\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$, $\sin x = 0$; $x = 2\pi k$, $k \in Z$; $2\cos^2 x - \sin^2 x = 0$ дан $\sin x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ ва $\sin 2x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$ келиб чиқади. Бир давр ичидаги стационар нуқталарни текширамиз: $f(0) = 0$; $f\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$; $f\left(\arcsin\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Демак, $\max\limits_{]-\infty;\,+\infty[} f(x) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$; $\min\limits_{]-\infty;\,+\infty[} f(x) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **192.** $\max\limits_{[0;\,1]} y = 0$; $\min\limits_{[0;\,1]} y$ — мавжуд эмас.

193. $y' = \ln x + 1$; $\ln x + 1 = 0$, $x = \frac{1}{e}$ — стационар нуқта. $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$; $f(1) = 0$; $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\frac{2}{e^2}$. Демак, $\min\limits_{\left[\frac{1}{e^2};\,1\right]} y = -\frac{2}{e^2}$; $\max\limits_{\left[\frac{1}{e^2};\,1\right]} y = 0$.

194. $\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{4};\,\frac{\pi}{4}\right]} y = \frac{\pi - 4}{4}$; $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{4};\,\frac{\pi}{4}\right]} y = \frac{4 - \pi}{4}$. **195.** $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$, $\frac{x^2 - 1}{x^2} = 0$; $x_1 = -1 \in [0{,}01;\ 100]$; $x_2 = 1 \in [0{,}01;\ 100]$. $f(1) = 2$; $f(0{,}01) = 100{,}01$; $f(100) = 100{,}01$. $\min\limits_{[0{,}01;\,100]} f(x) = 2$; $\max\limits_{[0{,}01;\,100]} f(x) = 100{,}01$. **197.** Доирага ички чизилган тўғри тўртбурчак қўшни томонларини x ва y билан белгилаймиз. $x^2 + y^2 = (2R)^2$; $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$. Юза $S = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ бўлади. $S(x)$ ёки S^2 нинг $[0;\ 2R]$ даги энг катта қийматини топамиз. $(S^2)' = 8R^2x - 4x^3$; $4x(2R^2 - x^2) = 0$; $x_1 = -R\sqrt{2}$; $x_2 = 0$; $x_3 = R\sqrt{2}$. $x_1 \overline{\in} [0;\ 2R]$; $x_2 = 0$ да тўртбурчак ҳосил бўлмайди. Демак, ягона стационар нуқта қолади $x_3 = R\sqrt{2}$. $(S^2)'' = 8R^2 - 12x^2$; $x = R\sqrt{2}$ да $(S^2)'' = -16R^2 < 0$; $S = 2R^2$ энг катта қиймат бўлади. Демак, $x = y = R\sqrt{2}$ да, яъни квадрат бўлганда энг катта юз ҳосил бўлади. **199.** Цилиндрнинг баландлигини x, асос радиусини $\frac{y}{2}$ орқали белгиласак, $x^2 + y^2 = (2R)^2$ бўлади. $y^2 = 4R^2 - x^2$. Цилиндр ҳажми $V = \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 x = \pi R^2 x - \frac{1}{4}\pi x^3$,



26- чизма.

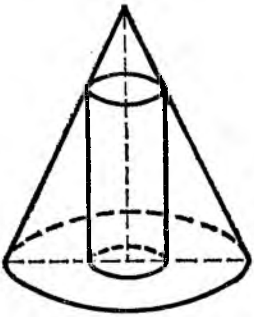


27- чизма.

$V' = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi x^2$; $\pi\left(R^2 - \frac{3}{4}x^2\right) = 0$; $x = \pm\frac{2R}{\sqrt{3}}$. $V'' = -\frac{3}{2}\pi x$. $V''\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{3\pi R}{\sqrt{3}} < 0$, демак, $x = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ да V энг катта қийматга эришади. **200.** $x = \frac{P}{\sqrt[3]{2}}$ да $d_{\min} = p\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)\sqrt{\frac{2 + \sqrt[3]{2}}{2}}$. **201.** Учбурчак асосини $2x$, баландлигини h десак, $S_{\triangle} = hx$, $h = R + \sqrt{R^2 - x^2}$; $S = x(R + \sqrt{R^2 - x^2})$ нинг энг катта қиймати изланади (26- чизма).

$$S' = \frac{R\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 - 2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0;\quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}R,\quad h = \frac{3}{2}R$$ бўлади.

202. $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **203.** Сектор радиусини x десак, ёй узунлиги $p - 2x$ бўлади. Сектор юзи $S = \frac{\varphi R^2}{2} = \frac{x^2(p - 2x)}{2}$ (27- чизма). $x = \frac{p}{3}$ да S энг катта қийматга эришади. **204.** $\frac{a}{6}$. **205.** Цилиндр асосининг радиусини x, конус асоси радиусини R десак, цилиндр баландлиги y, конус баландлиги H бўлсин. (28- чизма). $\triangle SOB \sim \triangle SO_1B_1$: $\frac{H}{H - y} = \frac{R}{x}$; $y = \frac{H(R - x)}{R}$. Цилиндр ҳажми $V =$



28- чизма.

$=\pi x^2y=\frac{\pi H}{R}(Rx^2-x^3)$. $V'=\frac{\pi H}{R}(2Rx-3x^2)$; $x=0$ ва $x=\frac{2R}{3}$ — стационар нуқталар. $x=0$ да минимумни, $x=\frac{2R}{3}$ да максимумни ҳосил қилади. **206.** Конус баландлиги $4R$ га тенг. **207.** Белгилашларни 205- мисолдагидек оламиз. Конус ҳажми $V=\frac{1}{3}\pi x^2H$. h — цилиндр баландлиги, $H=\frac{hx}{x-r}$; r — цилиндр асоси радиуси, x — конус асоси радиуси. $V=\frac{\pi h}{3}\frac{x^3}{x-r}$; $V'=\frac{\pi h}{3}\cdot\frac{2x^3-3x^2r}{(x-r)^2}=0$; $x_1=0$; $x_2=\frac{3}{2}r$. $x=\frac{3}{2}r$ да V энг катта қийматга эришади. **208.** $\varphi=\frac{\pi}{3}$. **209.** $y''=6x$; $x>0$ ва $y''>0$; $x<0$ ва $y''<0$ бўлади. Демак, $]-\infty;0[$ да график қавариқлиги билан юқорига, $]0;+\infty[$ да пастга қараган бўлади. $x=0$ букилиш нуқтаси. **210.** Қавариқлиги билан пастга қараган. **211.** $y''=6(x-1)$; $x=1$ ва $y''=0$; $x<1$ да $y''<0$, яъни қавариқлиги билан юқорига, $x>0$ да $y''>0$, яъни қавариқлиги билан пастга қараган. $x=1$ — букилиш нуқтаси. **212.** $]-\infty;-1[$ ва $]1;+\infty[$ да қавариқлиги билан пастга, $]-1;1[$ да юқорига қараган. $x=-1$, $x=1$ — букилиш нуқталари. **213.** $y''=\frac{2(\;x^2+1)}{(x^2-1)^3}$; $x=\pm1\overline{\in}D(y)$. $]-\infty;-1[$ ва $]1;+\infty[$ да $y''>0$, $]-1;1[$ да $y''<0$. Букилиш нуқтаси йўқ. **214** $]-\infty;0[$ да қавариқлиги билан пастга, $]0;+\infty[$ да юқорига қараган. **215.** $y'=e^{-x}(1-x)$; $y''=-e^{-x}(2-x)$; $x<2$ да $y''<0$; $x>2$ да $y''>0$. $x=2$ букилиш нуқтаси. **216.** $\left]-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ ва $\left]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$ да қавариқлиги билан пастга, $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ да юқорига қараган. $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ букилиш нуқталари. **217.** $y''=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\neq0$; $]-\infty;0[$ да $y''<0$; $]0;+\infty[$ да $y''>0$. $x=0\overline{\in}D(y)$, демак, букилиш нуқтаси мавжуд эмас. **218.** $x=\sqrt[4]{27}$ букилиш нуқтаси. **219.** $y''=3(4x^2+2ax+1)$; $4x^2+2ax+1\geqslant0$ дан $4a^2-16\leqslant0$ ёки $|a|\leqslant2$ келиб чиқади. Демак, $|a|\leqslant2$ да $y''>0$, яъни эгри чизиқ қавариқлиги билан пастга қараган. **220.** $a=-3$. **221.** $f_n(x)=a_0+a_1x^2+a_2x^4+\ldots+a_nx^{2n}$; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n>0$. $f''_n(x)=2a_1+12a_2x^2+\ldots+2n(2n-1)a_nx^{2n+2}$ ҳосил бўлади. $a_i>0$, $(i=\overline{1,n})$ ва x фақат жуфт даражаларда қатнашгани учун барча $x \in R$ да $f_n''(x) > 0$ бўлади, демак, эгри чизиқ қавариқлиги билан пастга қараган бўлади. **222.** К ў р с а т м а: **221**- мисол ечимига қаранг. **223.** Маълумки, агар $f(x)$ функция $[a;\ b]$ да қавариқ бўлса, у ҳолда ихтиёрий $x_1,\ x_2 \in [a;\ b]$ учун $x_1 < x_2$ бўлганда

$$f\left(\frac{x_1 + tx_2}{1+t}\right) > \frac{f(x_1) + tf(x_2)}{1+t} \qquad (*)$$

ўринли бўлади. Энди $f(x) = \cos x$ ни оламиз: $y'' = -\cos x$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ да $y'' < 0$ бўлади. Демак, $f(x) = \cos x$ функция $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ да қавариқ, яъни қавариқлиги билан юкорига қараган. $x_1 = a$, $x_2 = b$ ва $t = 1$ деб олинса, $(*)$ ни қўлласак, $\cos\frac{a+b}{2} > \frac{\cos a + \cos b}{2}$ тенгсизлик келиб чиқади. **224**. К ў р с а т м а: 223- мисолдаги $(*)$ ни $y = e^x$ га қўллаиб ва $x_1 = a$ ва $x_2 = b$, $t = 2$ олиш керак. **225.** Лопиталь қоидасидан:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx} = \frac{a}{b}\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax}{\cos bx} = \frac{a}{b}.$$

226. 4. **227.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{e^x - e^a}{x-a} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to a} e^x = e^a.$ 228. 2. **229.**

$$\lim_{x\to 1}\frac{1 - 4\sin^2\frac{\pi x}{6}}{1 - x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{-4\cdot 2\sin\frac{\pi x}{6}\cos\frac{\pi x}{6}\cdot\frac{\pi}{6}}{-2x} =$$

$= \frac{\pi}{3}\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\frac{\pi x}{3}}{x} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. **230.** $\frac{1}{6}$. **231.** Бу мисол $(\infty - \infty)$ кўринишдаги аниқмасликдир.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} =$$

$= \lim\limits_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}$. 232. 1. **233**. Бу (∞^0) кўринишдаги аниқмасликдир. $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$ дан $\ln y = \operatorname{tg} x\cdot\ln\frac{1}{x} = -\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

$$\lim_{x\to 0+}\ln y = -\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = -\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0+}\frac{\sin^2 x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0+}\frac{2\sin x\cos x}{1} = 0;\ \ln y = 0,\ y = 1;\ \lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = 1.$$

234. 1. **235.** Бу (∞^0) кўринишдаги аниқмасликдир.

$$y = (\operatorname{tg} x)^{2\cos x};\ \ln y = 2\cos x\ln\operatorname{tg} x = \frac{2\ln\operatorname{tg} x}{\frac{1}{\cos x}}.$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln y = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\ln\operatorname{tg} x}{\frac{1}{\cos x}}\ 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\sec^2 x}{\sec x\operatorname{tg} x} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x}{\operatorname{tg}^2 x} =$$

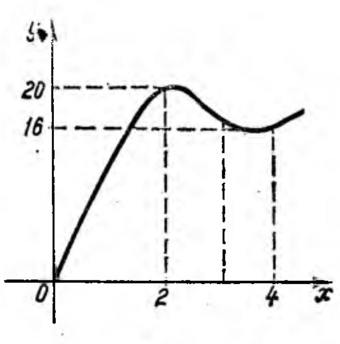
$$= 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\operatorname{tg} x}{2\operatorname{tg} x\cdot\sec^2 x} = 0;\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2\cos x} = e^0 = 1.$$

236. 1. **237.** Умуман, икки $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларнинг ўсиш тартибини солиштириш учун $x\to+\infty$ да қуйидаги лимитни ҳисоблаш керак. 1. Агар $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty$ бўлса, $f(x)$ функция $\varphi(x)$ га қараганда тезроқ (юқори тартибли) чексизликка интилади дейилади. 2. Агар $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$ бўлса, $f(x)$ функция $\varphi(x)$ га қараганда секинроқ чексизликка интилади дейилади. Энди $f(x) = x^{\alpha}$, $\varphi(x) = \ln(x)$ функциялар берилган бўлсин $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\frac{1}{x}} = \alpha\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha} = \infty$, демак, x^{α} функция $\ln x$ га қараганда тезроқ ўсар экан. Агар $f(x) = \ln x$ ва $\varphi(x) = a^x$ берилган бўлса,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{a^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{a^x\ln a} = 0,$$

демак, $y = \ln x$ функция кўрсаткичли a^x функцияга қараганда ҳам секинроқ ўсади. Агар $f(x) = a^x$, $\varphi(x) = x^{\alpha}$ берилган бўлса, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{\alpha x^{\alpha-1}} = \ldots = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a^x(\ln a)^{\alpha}}{\alpha!} = \infty$. Демак, кўрсаткичли функция даражали функцияга қа раганда тезроқ чексизликка интилар экан. **238.** Кўрсатма: Лопиталь қоидасини қўлланиб бўлмайди: бошқа йўлдан фойдаланинг. **239.** $\lim\limits_{x\to1} y = \lim\limits_{x\to1} \frac{2x}{x-1} = \infty$, демак, $x = 1$ вертикал асимптота. $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x-1} = 0$; $k = 0$; $l = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = 2$; $l = 2$. $y = 2$ — оғма асимптота. **240.** $x = \frac{1}{2}$ вертикал асимптота. $y = x + \frac{1}{2}$ — оғма асимптота. **241.** Маълумки, $\lim\limits_{x\to0+} \frac{\ln x}{x} = \infty$, демак, $x = 0$ вертикал асимптота, $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$; $l = \lim\limits_{x\to\infty} (y - kx) = 0$ дан $y = 0$ — оғма асимптота бўлади. **242.** $x = 0$ вертикал асимптота. **243.** $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x^2+4}}{x} = 2 \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} = 2$. $l = \lim\limits_{x\to\infty} (2\sqrt{x^2+4} - 2x) = 2 \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{x + \sqrt{x^2+4}} = 0$. Демак, $y = 2x$ оғма асимптота. **244.** $y = 0$ асимптота. **245.** $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x^2}\right) = 1, l = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$; $y = x$ — оғма асимптота. **246.** $y = \pm \frac{b}{x} x$ оғма асимптоталар. **247.** Функцияни умумий текшириш схемаси асосида олиб борамиз:

1. $D(y) =]-\infty; +\infty[$. Узлуксиз, жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас.
2 $x^3 - 9x^2 + 24x = 0$, $x = 0$, $x^2 - 9x + 24 \neq$.
3. $y' = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x^2 - 6x + 8) = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $a = 3 > 0$. Демак, $]-\infty; 2[$ ва $]4; +\infty[$ да $y(x)$ ўсувчи $]2; 4[$ да камаювчи; $y'' = 6x - 18 = 6(x - 3) = 0$, $x = 3$ (29-чизма). $]-\infty; 3[$ да $y'' < 0$, демак, $y(x)$ кавариқлиги билан юқорига, $]3; +\infty[$ да $y'' > 0$, демак, $y(x)$ қавариқлиги билан пастга қараган, $x = 3$ букилиш нуқтаси, $y' = 0$ дан $x_1 = 2$ ва $x_2 = 4$ стационар нуқталар.



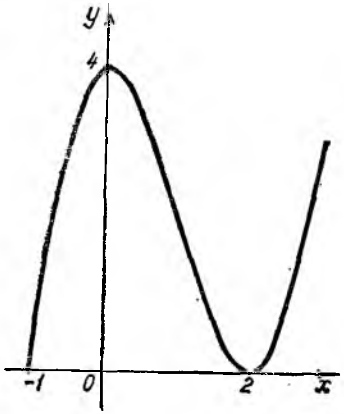
29- чизма.

$y''(2) < 0$. $x = 2$ да $y_{\max} = 20$,

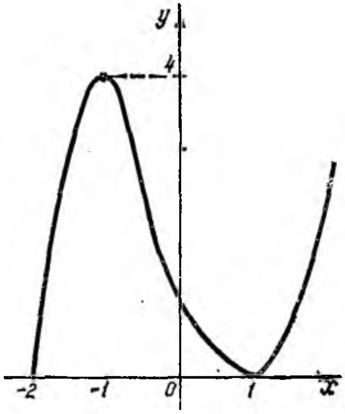
$y''(4) > 0$, $x = 4$ да $y_{\min} = 16$.

4. Асимптоталари йўқ. **248.** Жуфт, узлуксиз функция. $y_{\max}(0) = 1$,

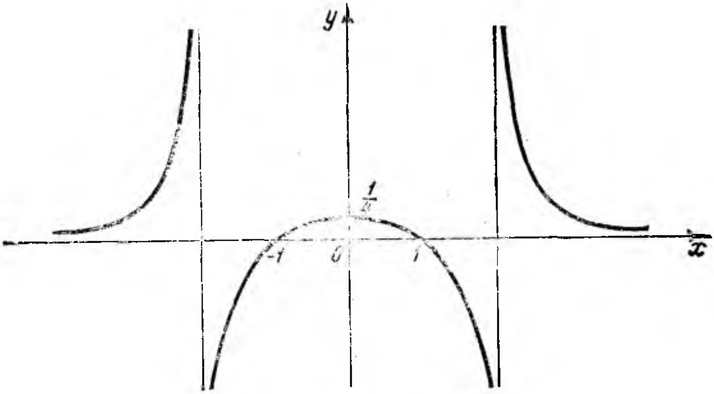
$y_{\min}\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $]-\infty; -\frac{1}{\sqrt{6}}[$ ва $]\frac{1}{\sqrt{6}}; +\infty[$ да қавариқлиги билан пастга, қолганида юқорига қаратилган. **249.** 1. $D(y) =]-\infty; +\infty[$, узлуксиз функция, 2, $(x+1)(x-2)^2 = 0$ дан $x = -1$, $x = 2$ да Ox ўқи билан кесишади 3. $y' = 3x(x-2) = 0$; $x = 0$. $x = 2$ стационар нуқталар $]-\infty; 0[$ ва $]2; +\infty[$ да $y' > 0$, $]0; 2[$ да $y' < 0$ (30-чизма). Демак, $x = 0$ да $y_{\max} = 4$; $x = 2$ да $y_{\min} = 0$. $y'' = 6(x-1) = 0$; $x = 1$, $]-\infty; 1[$ да $y'' < 0$, $]1; +\infty[$ да $y'' > 0$. $x = 1$ букилиш нуқтаси. 4. Асимптоталари йўқ. **250**. Жуфт, узлуксиз функция, $y_{\max}(0) = -1$; $y_{\min}(\pm 1) = 0$; $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ букилиш нуқталари. **251**. 1. $D(y) =]-\infty: +\infty[$, узлуксиз. 2. $(x-1)^2(x+2) = 0$, $x = 1$, $x = 2$ Ox ўқи билан кесишиш нуқталари, 3. $y' = 3(x^2-1) = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ стационар нуқталар (31-чизма). $]-\infty, -1[$ ва $]1; +\infty[$ да $y' > 0$;$]-1; 1[$ да $y' < 0$. Демак, $x = -1$ да $y_{\max} = 4$; $x = 1$ да $y_{\min} = 0$. $y'' = 6x = 0$; $]-\infty; 0[$ да $y'' < 0$; $]0; +\infty[$ да $y'' > 0$. $x = 0$ букилиш нуқтаси. **252**. Жуфт функция; $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ да аниқланмаган. $y_{\min}(0) = 0$; $]-2; 2[$ да қавариқлиги билан пастга, $]-\infty; -2[$ ва $]2 + \infty]$ да қавариклиги билан юқорига караган. $y = -1$ горизонтал, $x = -2$ $x =$ — вертикал асимптоталар. **253.** 1. $D(y) =]-\infty; -2[U]-2; 2[U]2; +\infty[$. Жуфт функция, 2. $\frac{1-x^2}{4-x^2} = 0$; $x = -1$, $x_2 = 1$ Ox билан кесишиш нуқталари. 3. $y' = -\frac{6x}{(4-x^2)^2} = 0$, $x = 0$ стационар нуқта. $]-2; 0[$ да



30- чизма.

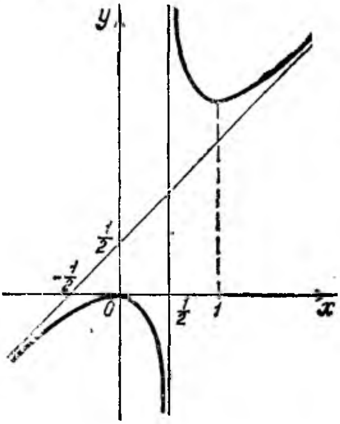


31- чизма.

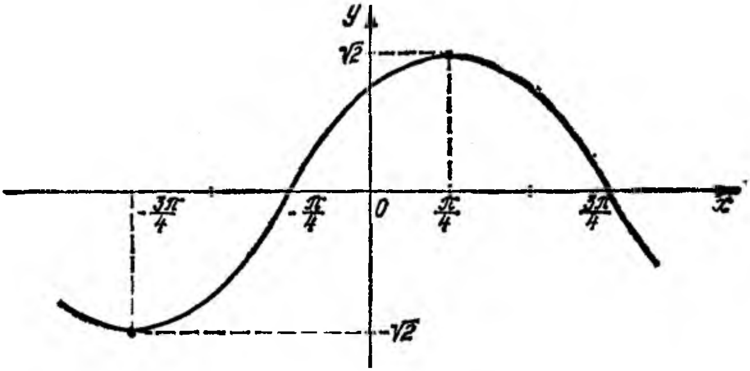


2- чизма.

$y' > 0$. $]0; 2[$ да $y < 0$; $x = 0$ да $y_{\max} = \frac{1}{4}$. $y'' = -6\frac{4-3x^2}{(4-x^2)^3}$. $]-\infty; -2[$ ва $]2; +\infty[$ да $y'' > 0$. $]-2; 2[$ да $y'' < 0$. 4. $x = -2$, $x = 2$ вертикал, $y = 0$ горизонтал асимптоталар. (32-чизма). 254. $D(y) =]-\infty; +\infty[\setminus \{-2; 2\}$. $y(0) = 0$; $x = -2$, $x = 2$ вертикал асимптоталар. **255**. 1. $D(y) =]-\infty; \frac{1}{2}$ [U] $\frac{1}{2}; +\infty[$. 2. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}-0} y(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}+0} y(x) = +\infty$; $y(0) = 0$. 3. $y' = \frac{4x(x-1)}{(2x-1)^2}$; $x - 0$, $x = 1$ стационар нуқталар. $]-\infty; 0[$ ва $]1; +\infty[$ да $y' > 0$. $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ ва $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$ да $y' < 0$. $y'' = \frac{4}{(2x-1)^3}$; $y''(0) = -4 < 0$, $y_{\max}(0) = 0$. $y''(1) = 4 > 0$, $y_{\min}(1) = 2$ (33-чизма). $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ да $y'' < 0$; $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ да $y'' > 0$. 4. $y = x + \frac{1}{2}$ оғма, $x = \frac{1}{2}$ вертикал асимптоталар (33-чизма). **256**. Жуфт функция. $D(y) = R \setminus \{0\}$.

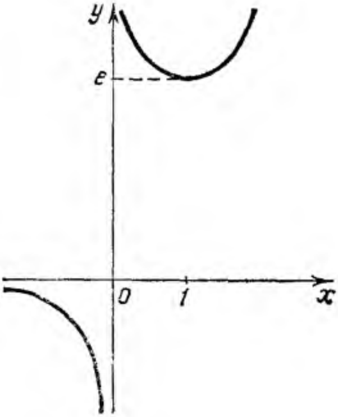


33- чизма.

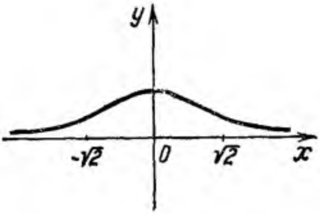


34- чизма.

$y_{\min}(\pm 1) = 2$. Қавариқлиги билан пастга қаратилган. **257. 1.** $D(y) =]-\infty; +\infty[$ Узлуксиз; даврий функция, давр $t = 2\pi$. **2.** $y' = -\cos x - \sin x = 0$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$ стационар нуқталар. **3.** $y'' = -(\cos x - \sin x)$; $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $k = 0, \pm 2, \ldots$ да $y_{\max} = \sqrt{2}$; $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k = \pm 1, \pm 3, \ldots$ да $y_{\min} = -\sqrt{2}$. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ букилиш нуқталари. 4. Асимптоталари йўқ (34-чизма). **258.** $D(y) =]-\infty; +\infty[$ тоқ, узлуксиз функция, $x = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ букилиш нуқталари **259.** $D(y) =]-\infty; 0[\mathrm{U}]0; +\infty[$ жуфт функция. **260.** Даври 2π бўлган даврий, узлуксиз, тоқ функция. **261.** 1, $D(y) =]-\infty; 0[\mathrm{U}]0; +\infty[$. 2. $]-\infty; 0[$ да $y < 0$, $]0; +\infty[$ да $y > 0$. 3. $y^1 = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$; $x = 1$ — стационар нуқта. $x < 1$ да $y' < 0$, $x > 1$ да $y' > 0$. $x = 1$ да $y_{\min} = e$. $y'' = \frac{e^x}{x^3}(x^2 - 2x + 2)$; $x > 0$ да $y'' > 0$, $x < 0$ да $y'' < 0$ 4. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = 0$; $y = 0$ горизонтал асимптота (35-чизма). **262.** $D(y) =]-\infty; +\infty[$, $y(0) = 0$, $y_{\max}(1) = \frac{1}{e}$. $y = 0$ асимптота. $x = 2$ букилиш нуқтаси. **263.** 1. $D(y) =]-\infty; +\infty[$. Жуфт, узлуксиз функция. 2. $y(x) > 0$. 3. $y' = -2xe^{-x^2}$; $x = 0$ стационар нуқта. $x > 0$ да $y' < 0$; $x < 0$ да $y' > 0$. $y_{\max}(0) = 1$. $y'' = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$; $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ букилиш нуқталари (36-чизма). 4.



35- чизма.



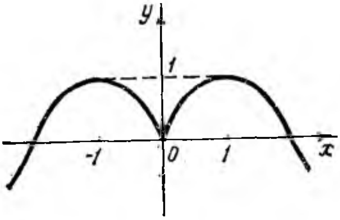
36- чизма.

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{xe^{x^2}} = 0$, $l = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0$; $y=0$ асимптота.

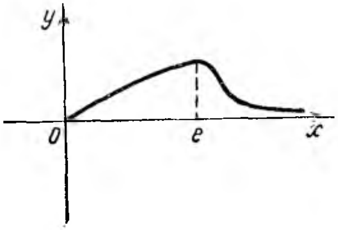
264. $D(y) =]-\infty; +\infty[$. Жуфт, узлуксиз функция. Қавариқлиги пастга қараган **265.** 1. $D(y) =]-\infty; +\infty[$. Жуфт, узлуксиз функция 2. $2|x| - x^2 = 0$; $x = 0$; $x = -2$, $x = 2$ Ox ўқи билан кесишиш нуқталари. 3. $x \geqslant 0$ да $y = 2x - x^2$; $y' = 2 - 2x$, $x = 1$ стационар нуқта. $x < 0$ да $y = -2x - x^2$; $y' = -2 - 2x$; $x = -1$ стационар нуқта. $y_{\max}(\pm 1) = 1$. 4. Асимптоталари йўқ. $x = 0$ қайтиш нуқтаси (37-чизма). **266.** $D(y) =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$. Монотон камаювчи, $y = 1$ асимптота. **267.** 1. $D(y) =]0; +\infty[$. Узлуксиз. 2. $y(x) > 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0+} y(x) = 0$. 3. $y'(x) = \frac{y}{x^2}(1 - \ln x) = 0$; $\ln x = 1$; $x = e$ стационар нуқта. $x < e$ да $y' > 0$; $x > e$ да $y^1 < 0$. $y_{max}(e) = e^{\frac{1}{e}}$. 4. $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}-1} = 0$; $l = 0$; $y = 0$ асимптота (38-чизма). **268.** $D(y) =]-\infty; +\infty[\setminus \{0\}$. Тоқ функция, $y = 0$ асимптота.

$$x = \frac{2}{\pi(2k+1)} \begin{cases} k - \text{жуфт сон бўлганда, } y_{\max} = 1, \\ k - \text{тоқ сон бўлганда, } y_{\min} = -1. \end{cases}$$

269. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3. \end{cases}$ $x(t)$ нинг монотонлик оралиқларини топамиз $x = t^2$ $]-\infty; 0[$ да камаювчи, $]0; +\infty[$ да ўсувчи. Шунинг учун ўрил-



37- расм.



38- расм.

ган система иккита $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ узлуксиз функцияларни аниқлайди.

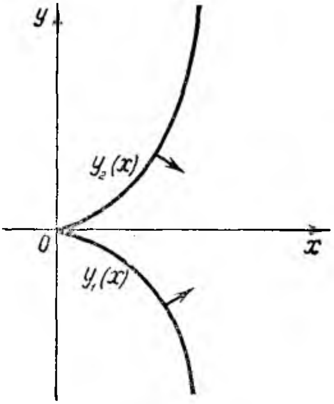
$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}t\begin{cases}<0, \text{ агар } t<0 \text{ бўлса, демак, } y_1(x) \text{ камаювчи},\\ =0, \text{ агар } t=0 \text{ бўлса},\\ >0, \text{ агар } t>0 \text{ бўлса, демак, } y_2(x) \text{ ўсувчи}\end{cases}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4t}\begin{cases}<0, \text{ агар } t<0 \text{ бўлса, } y_1(x) \text{ қавариқлиги юқорига қараган.}\\ >0, \text{ агар } t>0 \text{ бўлса } y_2(x) \text{ қавариқлиги пастга қараган.}\end{cases}$$

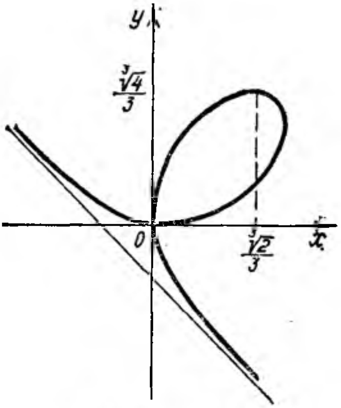
$t=0$ га $x=y=0$ мос келади, $(0; 0)$ — критик нуқта (39-чизма). 270. $t=0$ да $x=1$, $y_{\max}=1$, қавариқлиги юқорига қараган. **271.** $t=-1$ да $x(t)$ ва $y(t)$ аниқланмаган. $t=0$ да $x=y=0$. $t\to\pm\infty$ да $x\to 0$, $y\to 0$.

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}\begin{cases}<0, \text{ агар } t>\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ бўлса},\\ =0, \text{ агар } t=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ бўлса, } t_{\max}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.\\ >0, \text{ агар } t<\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ бўлса.}\end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}\begin{cases}<0, \text{ агар } -\infty<t<-1 \text{ ва } -1<t<0 \text{ бўлса},\\ =0, \text{ агар } t=0 \text{ бўлса},\\ >0, \text{ агар } 0<t<\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ бўлса},\\ <0, \text{ агар } \frac{1}{\sqrt[3]{2}}<t<\sqrt[3]{2} \text{ бўлса},\\ =0, \text{ агар } t=\sqrt[3]{2} \text{ бўлса},\\ >0, \text{ агар } \sqrt[3]{2}<t<+\infty \text{ бўлса.}\end{cases}$$



39- чизма.



40- чизма.

Жадвал тузамиз.

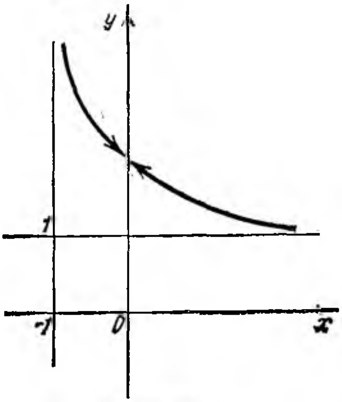
t узгариш соҳаси	x ўзгариш соҳаси	y узгариш соҳаси	y_x^1 ишораси	$y = f(x)$ ўзгариш характери
$-\infty < t < -1$	$0 < x < +\infty$	$0 > y > -\infty$	—	камаяди
$-1 < t < 0$	$-\infty < x < 0$	$+\infty > y > 0$	—	камаяди
$t = 0$	0	0	0	критик нуқта
$0 > t < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$0 < x < \sqrt[3]{4}$	$0 < y < \sqrt[3]{2}$	+	ўсади
$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < t < \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{4} > x > \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2} < y < \sqrt[3]{4}$	—	камаяди
$t = \sqrt[3]{2}$	$\frac{1}{3}\sqrt[3]{2}$	$\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}$	0	максимум н.
$\sqrt[3]{2} < t < +\infty$	$\sqrt[3]{2} > x > 0$	$\sqrt[3]{4} > y > 0$	+	ўсади

Асимптоталар: $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{t\to-1-0} \frac{\frac{t^2}{1+t^3}}{\frac{t}{1+t^3}} \quad \lim\limits_{t\to-1-0} t = -1.$ $\quad l =$ $= \lim\limits_{x\to+\infty} (y - kx) = \lim\limits_{t\to-1-0} \frac{t}{1-t+t^2} = -1.$ $x \to +\infty$ да асимптота

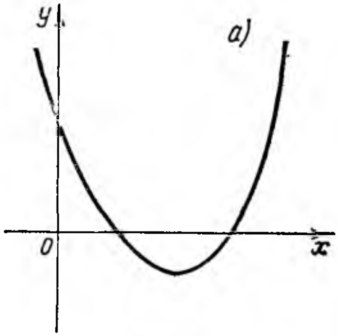
$y=-x-1$. $x\to-\infty$ да ҳам шунинг ўзи бўлади (40-чизма). Ҳосил бўладиган эгри чизиқ Декарт сиртмоғи дейилади. **272.** $t\neq 0$; $D(y(x))=]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$. **273.** $D(y)=]-\infty;+\infty[$. $y_{\min}(0)=0$; $y_{\max}\left(-\frac{2}{11}\right)=\left(\frac{9}{11}\right)^3\sqrt[3]{\frac{4}{121}}$. **274.** $D(y)=]-\infty;+\infty[$, тоқ функция. $y=0$ асимптота. **275.** $\frac{2(x+1)(23x-16x^2-141)}{15(4-x)\sqrt[5]{(x-3)(4-x)^{2/3}}}$. **276.** $\frac{y}{7}\left(4\cos 4x+\frac{8(x^3+1)}{x^4+4x+1}-\frac{30x^4+9x^2-36x+6}{x^5+5x^3-3x^2+x-2}\right)$. **277.** $-\frac{8x}{(x^2-4)^2}$.

278. $\frac{2^x x^2(\ln 2\log_2 x^2)^2-1}{\log_2^2 x^2}$. **279.** $u^v\ln u v^1+vu^{v-1}u^1$. **280.** $(\ln x)^{x-1}\times$ $\times(\ln x\ln(\ln x)+1)$. **281.** $2\ln x\cdot x^{\ln x-1}$. **282.** $\cos^2x(\sin x)^{\cos x-1}-$ $-(\sin x)^{\cos x+1}\ln\sin x-\sin^2x(\cos x)^{\sin x-1}+(\cos x)^{\sin x+1}\ln\cos x$. **283.** $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(\ln x+2)$. **284.** $x^{x^3+2}(3\ln x+1)$. **287.** Кўрсатма: $2\sin\frac{x}{2}$ га кўпайтириб, $\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$ дан фойдаланинг. **288** Кўрсатма: Олдин $S_n=\operatorname{sh}x+\operatorname{sh}2x+\ldots+\operatorname{sh}nx$ ни ҳисоблаб, сўнгра дифференциалланг. **289.** $x_0=0$; $y_0=-2$. **291.** Кўрсатма: $f(x)=\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}$ нинг $]-1;1[$ даги экстремумларидан фойдаланинг. **292.** Кўрсатма: $f(x)=(a+x)^k+(a-x)^k$; $]-a;a[$ да экстремумларидан фойдаланинг. **293.** $q\in]-\infty;1[$ да $\varphi=\frac{1}{5q^2-16q+16}$; $q\in]1;+\infty[$ да $\varphi=\frac{1}{5g^2}$. **294.** $a=0$. **296.** $q\in]1;2]$ да $\varphi=\frac{q^2-2}{4}$; $q\in]2;3[$ да $\varphi=\frac{(q-1)^2}{2}$; $g\in]3;+\infty[$ да $\varphi=\frac{q^2-3}{3}$.

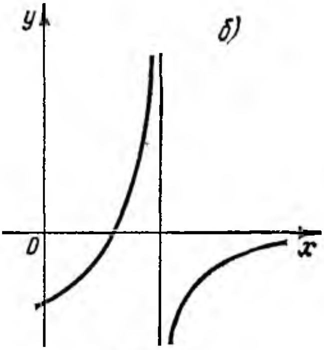
297. $y_{\min}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$; $y_{\max}(1)=1$. **298.** Кўрсатма: $f'(x+T)=f'(x)$ дан $f(x+T)=f(x)$ нинг бир хил даврийлиги келиб чиқади, яъни $f(x+T)-f(x)$ айирма x га боғлиқ бўлмайди. Демак, $f(x+T)+f(x)=b$ десак, $f(x)-\frac{b}{T}=g(x)$ деб олсак, $g(x)$



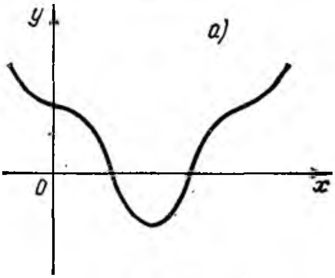
41- чизма.



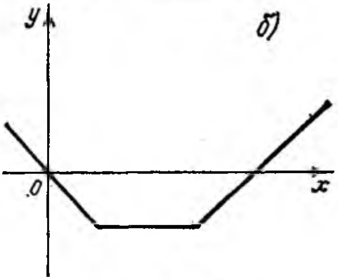
42- чизма.



43- чизма.



44- чизма.



45- чизма.

даврий функция эканлиги келиб чиқади. $f'(x)$ нинг даврийлигидан $f(x)$ нинг даврий функциядан чизиқли функция билан фарқланиши келиб чиқади. **299.** $D(y) =]-\infty; +\infty[$. $y_{\min}(\pm 1) = \sqrt[3]{4}$; $y_{\max}(0) = 2$. $y(x)$ — жуфт функция. **300.** $V = \frac{2\pi l^3\sqrt{3}}{27}$. **301.** $D(y) = R_+$. **302.** $D(y) = \{x | x > -1\} \setminus \{0\}$ (41-чизма). **303.** б). **304.** б). **305**. а) ва б) мисоллар: а) $y = 2^x$, б) $y = 2^{-x}$. **306.** а) (42-чизма), б) (43-чизма). **307** а) (44-чизма), б) (45-чизма). **308** $x = 0$ да, чунки $f'(x)$ — тоқ функция, $f(x)$ эса жуфт функция бўлади.

V БОБ

1. $\int (3x+1)dx = 3\int xdx + \int dx = \frac{3}{2}x^2 + x + C$. **2.** $\frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + C$. **3.** $\int \left(x^4 - \frac{1}{x^4}\right)dx = \int x^4 dx - \int x^{-4}dx = \frac{x^5}{5} +$

$+\frac{1}{3x^3}+C$. 4. $\frac{x^4}{4}-\frac{5}{3}x^3+6x-7\ln|x|+C$. 5. $\int x\left(x^2-\frac{2}{x}\right)dx = \int x^3dx-2\int dx=\frac{x^4}{4}-2x+C$. 6. $\ln|x|+\frac{1}{2x^2}+C$. 7. $\int(5e^x+\sqrt[3]{x^2})dx=5\int e^xdx+\int x^{\frac{2}{3}}dx=5e^x+\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$. 8. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$. 9. $\int\frac{x^2+2}{x^2-1}dx=\int\frac{x^2-1+3}{x^2-1}dx=\int\left(\frac{x^2-1}{x^2-1}+\frac{3}{x^2-1}\right)dx=\int dx+3\int\frac{dx}{x^2+1}=x+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. 10. $x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. 11. $\int\sin3x\,dx=\frac{1}{3}\int\sin3x\,d(3x)=-\frac{1}{3}\cos3x+C$. 12. $3\sin x+5\cos x+C$. 13. $\int\frac{dx}{3x-5}=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x-5)}{3x-5}=\frac{1}{3}\ln|3x-5|+C$. 14. $\ln\ln x+C$. 15. $\int e^{\cos x}\sin x\,dx=-\int e^{\cos x}d(\cos x)=-e^{\cos x}+C$. 16. $\frac{(3\ln x+5)^3}{9}+C$. 17. $\int\frac{x^2-4x+6}{\sqrt{x}}dx=\int\left(x^2x^{-\frac{1}{2}}-4x\cdot x^{-\frac{1}{2}}+6x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx-4\int x^{\frac{1}{2}}dx+6\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{8}{3}x\sqrt{x}+12\sqrt{x}+C$. 18. $\frac{x^6}{6}-\frac{3}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2-\ln|x|+C$. 19. $\int(3+2\sqrt[4]{x})^3dx=\int\left(27+54x^{\frac{1}{4}}+36x^{\frac{1}{2}}+8x^{\frac{3}{4}}\right)dx=27x+\frac{216}{5}x\sqrt[4]{x}+24x\sqrt{x}+\frac{32}{7}x\sqrt[4]{x^3}+C$. 20. $\sqrt{3x^2-5x+6}+C$. Кўрсатма. $d(3x^2-5x+6)=(6x-5)dx$ дан фойдаланинг. 21. $\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2x}+\int\frac{dx}{\sin^2x}=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$. 22. $-(\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x)+C$. 23. $\int\operatorname{tg}^2x\,dx=\int\frac{\sin^2x}{\cos^2x}dx=\int\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2x}-\int dx=\operatorname{tg}x-x+C$. 24. $\frac{e^{mx+n}}{m}+C$. 25. $\int\operatorname{cth}^2x\,dx=\int\frac{\operatorname{ch}^2x}{\operatorname{sh}^2x}dx=\int\frac{\operatorname{sh}^2x-1}{\operatorname{sh}^2x}dx=\int dx-\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2x}=x-\operatorname{cth}x+C$. 26. $x-\operatorname{th}x+$

$+ C$. **27.** $\int (2x-1)^{20}\,dx = \frac{1}{2}\int (2x-1)^{20}\,d(2x-1) = \frac{(2x-1)^{21}}{42} + C$. **28.** $-(x + \operatorname{ctg} x) + C$. **29.** $\int \sqrt{3x-1}\,dx = \frac{1}{3}\int (3x-1)^{\frac{1}{2}}\,d(3x-1) = \frac{2}{9}(3x-1)\sqrt{3x-1} + C$. **30.** $\frac{2}{9}(x^3-5)\sqrt{x^3-5} + C$. **31.** $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = \left\| \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{matrix} \right\| = -\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = -2\sqrt{t} + C = -2\sqrt{\cos x} + C$. **32.** $-\cos e^x + C$. **33.**

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10}-2}} = \left\| \begin{matrix} t = x^5 \\ dt = 5x^4 dx \end{matrix} \right\| = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2}} = \frac{1}{5}\ln|t + \sqrt{t^2-2}| + C = \frac{1}{5}\ln|x^5 + \sqrt{x^{10}-2}| + C.$$

34. $\ln \frac{(e^x+1)^2}{e^x} + C$. **35.**

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \left\| \begin{matrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{matrix} \right\| = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} e^x + C.$$

36. $-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C$. **37.** $\int \frac{dx}{\sin x} =$

$$= \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \left\| \begin{matrix} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dt = \frac{1}{2}\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

38. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2} + C$. **39.** $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$. **40.** $2\sqrt{1+e^x} + C$. **41.**

$$\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{4-\cos^4 x}} = \left\| \begin{matrix} t = \cos^2 x \\ dt = -2\cos x\sin x\,dx \end{matrix} \right\| = -\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = -\arcsin\frac{\cos^2 x}{2} + C.$$

42. $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + C$. **43.** $\int \frac{dx}{e^x - 1} =$

$$= \left\| \begin{matrix} t = e^x - 1;\ e^x = t + 1 \\ dt = e^x dx;\ dx = \frac{dt}{t+1} \end{matrix} \right\| = \int \frac{\frac{dt}{t+1}}{t} = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{t+1-t}{t(t+1)}\,dt =$$

$= \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t+1} = \ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right| + C.$ 44. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{2} + C.$ 45. $\int x\sin x\,dx = \begin{Vmatrix} u = x,\ dv = \sin x\,dx \\ du = dx,\ v = -\cos x \end{Vmatrix} = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -$
$- x\cos x + \sin x + C.$ 46. $x(\ln x - 1) + C.$ 47. $\int e^x\cos x\,dx =$
$= \begin{Vmatrix} u = e^x;\ dv = \cos x dx \\ du = e^x dx;\ v = \sin x \end{Vmatrix} = e^x\sin x - \int e^x\sin x\,dx = \left\| \begin{matrix} u = e^x; \\ du = e^x dx; \end{matrix} \right.$
$\left. \begin{matrix} dv = \sin x\,dx \\ v = -\cos x \end{matrix} \right\| = e^x\sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos x\,dx;\ \int e^x\cos x\,dx =$
$= e^x(\sin x + \cos x) - \int e^x\cos x\,dx; \int e^x\cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) +$
$+ C.$ 48. $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$ 49. $\int \operatorname{arctg} x\,dx = \left\| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x; \\ du = \frac{dx}{1+x^2}; \end{matrix} \right.$
$\left. \begin{matrix} dv = dx \\ v = x \end{matrix} \right\| = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ \ln(1 + x^2) + C.$
50. $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$ 51. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx =$
$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{Vmatrix} u = x; & dv = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \\ du = dx; & v = -\sqrt{1-x^2} \end{Vmatrix} =$
$= \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx;\ \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \arcsin x +$
$+ x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx;\ \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ (\arcsin x +$
$+ x\sqrt{1-x^2}) + C.$ 52. $\frac{2x^2-1}{4}\arcsin x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C.$ 53. $\int x\ln x dx =$
$= \begin{Vmatrix} u = \ln x; & dv = xdx \\ du = \frac{dx}{x}; & v = \frac{x^2}{2} \end{Vmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C.$
54. $e^x(x-1) + C.$ 55. $\int x^2e^xdx = \begin{Vmatrix} u = x^2; & dv = e^xdx \\ du = 2xdx; & v = e^x \end{Vmatrix} = x^2e^x -$
$- 2\int xe^xdx = \begin{Vmatrix} u = x;\ dv = e^x\,dx \\ du = dx;\ v = e^x \end{Vmatrix} = x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x\,dx =$
$= e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$ 56. $\frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C.$ 57. $\int \cos^2 xdx =$
$= \begin{Vmatrix} u = \cos x; & dv = \cos x\,dx \\ du = -\sin xdx; & v = \sin x \end{Vmatrix} = \sin x\cos x + \int \sin^2 x\,dx =$

$= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x)\, dx = \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x\, dx;$ $\int \cos^2 x\, dx = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + C$. **58.** $2 \sin \sqrt{x} - 2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + C$. **59.**

$$\int e^{2x} \sin x\, dx = \left\| \begin{matrix} u = e^{2x}; & dv = \sin x\, dx \\ du = 2e^{2x}\, dx; & v = -\cos x \end{matrix} \right\| = -e^{2x} \cos x +$$

$$+2 \int e^{2x} \cos x dx = \left\| \begin{matrix} u = e^{2x}; \ dv = \cos x\, dx \\ du = 2e^{2x}\, dx; \ v = \sin x \end{matrix} \right\| = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x -$$

$$- 4 \int e^{2x} \sin x\, dx; \quad 5 \int e^{x} \sin x\, dx = e^{x} (2 \sin x - \cos x) + C.$$

$\int e^{2x} \sin x\, dx = \frac{e^{x}(2 \sin x - \cos x)}{5} + C$. **60.** $\frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} - x^2 \right) \cos 2x + \right.$ $\left. + x \sin 2x \right) + C$. **61.** $\frac{1}{3} \ln |3x + 5| + C$. **62.** $\frac{1}{5} \ln |5x - 1| + C$. **63.**

$$\int \frac{dx}{(3x - 1)^2} = \frac{1}{3} \int (3x - 1)^{-2} d(3x - 1) = -\frac{1}{3(3x - 1)} + C.$$

64. $-\frac{1}{6(2x + 5)^3} + C$. **65.**

$$\int \frac{dx}{(x + 1)(x - 2)} = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2}, \\ A = -\frac{1}{3}; \quad B = \frac{1}{3} \end{matrix} \right\| = -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x + 1} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x - 2} = -\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x + 1}{x - 2} \right| + C.$$

66. $\frac{1}{3} \ln |x - 1| - \frac{1}{6} \ln (x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C$. **67.**

$$\int \frac{dx}{(x + 1)^2 (x - 2)} = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{(x + 1)^2 (x - 2)} = \frac{A}{(x + 1)^2} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 2} \\ A = -\frac{1}{3}; \quad B = -\frac{1}{9}; \quad C = \frac{1}{9} \end{matrix} \right\| = -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x + 1)^2} - \frac{1}{9} \int \frac{dx}{x + 1} + \frac{1}{9} \int \frac{dx}{x - 2} = \frac{1}{3(x+1)} -$$

$-\frac{1}{9} \ln \left| \frac{x + 1}{x - 2} \right| + C$. **68.** $\frac{3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x}{12} + \ln |x + 1| + C$. **69.**

$$\int \frac{dx}{x^3 - x^2} = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{x^3 - x^2} = \frac{1}{x^2 (x - 1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x - 1} \\ A = B = -1; \quad C = 1 \end{matrix} \right\| = -\int \frac{dx}{x^2} -$$

$$-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x-1}=\frac{1}{x}-\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+C.$$ **70.** $$\frac{1}{2(x-3)}+\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|+C.$$ **71.** $$\int\frac{dx}{2x^2+3}=\int\frac{dx}{(\sqrt{2}x)^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\sqrt{2}x)}{(\sqrt{2}x)^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+C.$$ **72.** $$\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^4}}+C.$$ **73.** $$\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}=\left\|\begin{array}{c}\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}\\ A=C=\dfrac{1}{2};\quad B=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right\|=$$ $$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1}+$$ $$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\ln\sqrt{x+1}-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$ **74.** $$\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$ **75.** $$\int\frac{dx}{x^4+x^2}=$$ $$=\left\|\begin{array}{l}\dfrac{1}{x^4+x^2}=\dfrac{1}{x^2(x^2+1)}=\dfrac{A}{x^2}+\dfrac{B}{x}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}\\ A=1,\qquad B=C=0,\ D=-1\end{array}\right\|=\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x^2+1}=$$ $$=-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x+C.$$ **76.** $$\frac{2}{1-x}+\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+C.$$ **77.** $$\int\frac{x^2dx}{x^4+5x^2+4}=\left\|\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{x^4+5x^2+4}=\dfrac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4}\\ A=C=0,\qquad B=-\dfrac{1}{3};\qquad D=\dfrac{4}{3}\end{array}\right\|=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{4}{3}\int\frac{dx}{x^2+4}=-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x+$$ $$+\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$ **78.** $$\frac{1}{x^2+2x+2}+2\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C.$$ **79.** $$\int\frac{x^3dx}{x^8+1}=\left\|\begin{array}{l}t=x^4\\ dt=4x^3dx\end{array}\right\|=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}t+C=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x^4+$$ $$+C.$$ **80.** $$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+4}\right|+C.$$ **81** $$\int\frac{1-x^4}{1+x^4}dx=$$ $$=\left\|\begin{array}{c}\dfrac{1-x^4}{1+x^4}=\dfrac{2}{(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)}-1=\dfrac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\\ A=-C=\dfrac{1}{\sqrt{2}};\qquad B=D=1\end{array}\right.$$

$$+\frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}-1\Bigg\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\,dx - x = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} +$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1)+\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)\right)-x+C.$$ **82.**

$$\ln\frac{\sqrt{x^2-2x+5}}{|x|}+3\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C.$$ **83.** $\int\frac{dx}{(x^4-1)^2}=$

$$=\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}+\int\frac{A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\,dx;$$

$$\frac{1}{(x^4-1)^2}=\frac{(3Ax^2+2Bx+C)(x^4-1)-(Ax^3+Bx^2+Cx+D)4x^3}{(x^4-1)^2}+$$

$$+\frac{A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1}{x^4-1};\quad A=B=D=0;\quad A_1=B_1=C_1=0;$$

$$C=-\frac{1}{4};\ D=-\frac{3}{4}\cdot\ \int\frac{dx}{(x^4-1)^2}=-\frac{x}{4(x^4-1)}-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^4-1}=$$

$$=-\frac{x}{4(x^4-1)}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x-\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$ **84.** $-\frac{x+2}{4(x^2+2)}+$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$ **85.** $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}=\left\|\begin{matrix}x=t^2\\ dx=2tdt\end{matrix}\right\|=$

$$=\int\frac{2t^2\,dt}{1+t}=2\int\frac{t^2-1+1}{1+t}\,dt=2\int(t-1)\,dt+2\int\frac{dt}{t+1}=$$

$$=(t-1)^2+2\ln|t+1|+C=(\sqrt{x}-1)^2+\ln(\sqrt{x}+1)^2+C.$$ **86.**

$$\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}-x+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x}-\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C.$$ **87.**

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}=\left\|\begin{matrix}x=t^6\\ dx=6t^5dt\end{matrix}\right\|=6\int\frac{t^2dt}{t^2+1}=6\int dt-$$

$$-6\int\frac{dt}{t^2+1}=6t-6\operatorname{arctg}t+C=6(\sqrt[6]{x}-\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x})+C.$$ **88.**

$$2\sqrt{2+x}+\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}+C.$$ **89.** $\int\frac{\sqrt{1-x}}{x}\,dx=$

$$=\left\|\begin{matrix}1-x=t^2;\ x=1-t^2\\ dx=-2tdt\end{matrix}\right\|=-2\int\frac{t^2\,dt}{1-t^2}=2\int\frac{1-t^2-1}{1-t^2}\,dt=$$

$$=2\int dt+2\int\frac{dt}{t^2-1}=2\sqrt{1-x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right|+C.$$ **90.**

$\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\,\mathrm{arctg}\,\sqrt[6]{x} + C$. 91 $\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}\,dx = \left\|\begin{matrix}3x+4=t^3\\ 3dx=3t^2\,dt\end{matrix}\right\| = \int\frac{t^3dt}{1+t} = \int\left(t^2+t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{3x+4}{3} + \frac{\sqrt[3]{(3x+4)^2}}{2} + \sqrt[3]{3x+4} - \ln|\sqrt[3]{3x+4}+1| + C$. 92. $\frac{1}{2}\times \ln\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1} + C$. 93 $\int\sqrt{4-x^2}\,dx = \int\frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 4\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} - \int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}} = 4\arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{4-x^2} - \int\sqrt{4-x^2}\,dx;\ \int\sqrt{4-x^2}\,dx = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C$

94. $C - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1+\sqrt{4+2x-x^2}}{x}$. 95. $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}} = \left\|\begin{matrix}4x^2+2x+1 = 4\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}\right)\\ t = x+\frac{1}{4},\ dt = dx;\ x = t-\frac{1}{4}\end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{3}{16}}} = \frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+2x+1}\right) + C$. 96. $\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{5}} + C$. 97 $\int\frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}} = \left\|\begin{matrix}x=\frac{1}{t}\\ dx=-\frac{dt}{t^2}\end{matrix}\right\| = -\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+5}} = -\int\frac{d(t-1)}{\sqrt{(t-1)^2+4}} = -\ln|t-1+\sqrt{t^2-2t+5}| + C = -\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}{x}\right| + C$. 98. $\frac{x}{9\sqrt{9+x^2}} + C$. 99.

$$\int x^3(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx = \left\|\begin{matrix}m=3; & & 1-x^2=t^2;\\ n=2; & \frac{m+1}{n}=2\in Z; & xdx=-2tdt\\ p=-\frac{3}{2}; & & x^2=1-t^2\end{matrix}\right\| = -\int(1-t^2)t^{-2}\,dt = -\int t^{-2}\,dt + \int dt = \frac{2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

100. $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 4\sqrt{x} + 16\sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} - 21\,\mathrm{arctg}\,\sqrt[6]{x} + C$. 101.

$$\int x\sqrt{1+x^4}\,dx = \left\| \begin{array}{lll} p=\frac{1}{2}; & & 1+x^4=t^2x^4; \\ m=1; & \frac{m+1}{n}+p=1\in Z; & xdx=- \\ n=4; & & \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} x=(t^2-1)^{-\frac{1}{4}} \\ -\frac{1}{2}\,\frac{tdt}{(t^2-1)\sqrt{t^2-1}} \end{array} \right\| = -\frac{1}{2}\int\frac{t^2\,dt}{(t^2-1)^2} = \left\| \begin{array}{ll} u=t; & dv=- \\ du=dt; & v= \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{t\,dt}{(t^2-1)^2} \\ =\frac{1}{t^2-1} \end{array} \right\| = \frac{1}{2}\,\frac{t}{t^2-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\,x^2\sqrt{1+x^4}+\frac{1}{4}\times$$

$$\times\ln\frac{\sqrt{1+x^4}+x^2}{\sqrt{1+x^4}-x^2}+C.$$ **102.** $\frac{3}{22}(1+x^2)^{11/3}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{8/3}+\frac{3}{10}(1+x^2)^{5/2}+C.$ **103.**

$$\int\frac{\sqrt{4+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx=\int x^{-\frac{2}{3}}\left(4+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}dx=$$

$$= \left\| \begin{array}{lll} p=\frac{1}{2}; & & 4+x^{\frac{1}{3}}=t^2 \\ m=-\frac{2}{3}; & \frac{m+1}{n}=1\in Z; & x^{-\frac{2}{3}}\,dx=6\,tdt \\ n=\frac{1}{3}; & & \end{array} \right\| = 6\int t^2\,dt=$$

$$=2\,(4+\sqrt[3]{x})^{3/2}+C.$$ **104.** $-\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}+C.$ **105.** $\int\sin^4x\cos^5x\,dx=$

$$=\left\| \begin{array}{c} t=\sin x \\ dt=\cos x\,dx \end{array} \right\| = \int\sin^4x\,(1-\sin^2x)^2\cos x\,dx=\int t^4(1-$$

$$-t^2)^2\,dt=\int t^4\,dt-2\int t^6\,dt+\int t^8\,dt=\frac{t^5}{5}-\frac{2}{7}\,t^7+\frac{t^9}{9}+C=\frac{\sin^5x}{5}-$$

$$-\frac{2\sin^7x}{7}+\frac{\sin^9x}{9}+C.$$ **106.** $\frac{\sin^3x}{3}+C.$ **107.** $\int\sin^3x\,\cos^2x\,dx=$

$$=\int(1-\cos^2x)\cos^2x\sin x\,dx=\left\| \begin{array}{c} t=\cos x \\ dt=-\sin x\,dx \end{array} \right\| =-\int(1-$$

$$-t^2)t^2\,dt=-\int t^2\,dt+\int t^4\,dt=\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+C=\frac{\cos^5x}{5}-\frac{\cos^3x}{3}+C.$$

108. $\frac{\sin^3x}{3}-\frac{\sin^5x}{5}+C.$ **109.** $\int\sin^2x\,dx=\int\frac{1-\cos2x}{2}\,dx=$

$=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$. **110.** $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C$. **111.** $\int\sin^4 x\,dx=$
$=\int\frac{(1-\cos 2x)^2}{4}\,dx=\frac{x}{4}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{1}{4}\int\cos^2 2x\,dx=\frac{5x}{8}-$
$-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$. **112.** $\frac{5x}{16}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{3\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}+C$.
113. $\int\sin^6 x\,dx=\int(\sin^2 x)^3\,dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3dx=\frac{1}{8}\int\Big(1-$
$-3\cos 2x+3\cos^2 2x-\cos^3 2x\Big)\,dx=\frac{x}{8}-\frac{3\sin 2x}{16}+\frac{3}{16}\int(1+$
$+\cos 4x)\,dx-\frac{1}{16}\int(1-\sin^2 2x)\,d(\sin 2x)=\frac{x}{61}-\frac{3\sin 2x}{4}+$
$+\frac{3\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C$. **114.** $\frac{x}{16}+\frac{\sin 2x}{64}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin 6x}{192}+C$.

115. $$\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}=\left\|\begin{array}{ll} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}; & \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}; & dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right\|=-$$
$-2\int\frac{dt}{t^2-2t-1}=-2\int\frac{dt}{(t-1)^2+(\sqrt{2})^2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{t-1-}{t-1+}\right.$
$\left.\frac{-\sqrt{2}}{+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|+C$. **116.** $-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}+$

$+C$. **117.** $$\int\sin 2x\cos 3x\,dx=\left\|\begin{array}{l}\sin 2x\cos 3x=\\ =\frac{1}{2}\Big(\sin(2x-3x)+\sin(2x+3x)\Big)\end{array}\right\|=$$
$=-\frac{1}{2}\int\sin x\,dx+\frac{1}{10}\int\sin 5x\,d(5x)=\frac{\cos x}{2}-\frac{\cos 5x}{10}+C$. **118.**
$\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin 4x}{8}+C$. **119.** $$\int\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx=\left\|\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}=\\ =\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{6}+\cos\frac{5x}{6}\right)\end{array}\right\|=$$
$=\frac{1}{2}\int\cos\frac{x}{6}dx+\frac{1}{2}\int\cos\frac{5x}{6}\,dx=3\sin\frac{x}{6}+\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+C$. **120.**
$\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+C$. **121.** $\int\frac{dx}{\sin x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=$

$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$. 122. $-\frac{1}{2\sin^2 x} - \ln|\sin x| + C$. 123. $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x - x + C$. 124. $\frac{(\operatorname{tg}^2 x-1)(\operatorname{tg}^4 x+10\operatorname{tg}^2 x+1)}{3\operatorname{tg}^3 x} + C$. 125. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx = \left\| \begin{array}{l} \sin x \sin 2x = \frac{1}{2}(\cos(-x) - \\ = \frac{1}{2}((\cos x - \cos 3x)\sin 3x) = \end{array} \right.$

$\left. \begin{array}{l} -\cos 3x); \quad \sin x \sin 2x \sin 3x = \\ = \frac{1}{4}(\sin 2x + \sin 4x - \sin 6x) \end{array} \right\| = \frac{1}{4}\int \sin 2x\, dx + \frac{1}{4}\int \sin 4x\, dx -$

$-\frac{1}{4}\int \sin 6x\, dx = \frac{\cos 6x}{24} - \frac{\cos 4x}{16} - \frac{\cos 2x}{8} + C$. 126. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C$. 127. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x} = \left\| \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \right\| = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x} dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} - \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = -(\operatorname{cth} x + \operatorname{th} x) + C$. 128. $\frac{\operatorname{sh} x}{2} - \frac{\operatorname{sh} 3x}{6} + C$. 129. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x \operatorname{sh} x3\, dx = \left\| \begin{array}{l} \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x = \\ \operatorname{sh} x \operatorname{sh} 2x \operatorname{sh} 3x = \end{array} \right.$

$\left. \begin{array}{l} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} 3x); \\ = \frac{1}{4}(\operatorname{sh} 2x + \operatorname{sh} 4x - \operatorname{sh} 6x) \end{array} \right\| = \frac{1}{4}\int (\operatorname{sh} 2x + \operatorname{sh} 4x - \operatorname{sh} 6x)\, dx =$

$= \frac{\operatorname{ch} 2x}{8} + \frac{\operatorname{ch} 4x}{16} - \frac{\operatorname{ch} 6x}{24} + C$. 130. $\int \operatorname{ch}^4 x\, dx = \frac{1}{4}\int (1 + \operatorname{ch} 2x)^2 dx = \frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \frac{\operatorname{sh} 4x}{32} + C$. 131. $\int \operatorname{th} x\, dx = \int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} dx = \int \frac{d(\operatorname{ch} x)}{\operatorname{ch} x} = \ln \operatorname{ch} x + C$. 132 $\frac{3}{5}\operatorname{ch}^5\frac{x}{3} - \operatorname{ch} 3\frac{x}{3} + C$. 133. $\frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$. 134. $\frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$. 135. $x\left(\arcsin(\sin x) - \frac{x}{2}\right) = \frac{x^2}{2} + C$. 136. $\frac{x^2}{2} + C$. 137. $x(\arcsin x - \arccos x) + C$. 138. $x\ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) - \frac{x}{2} + \frac{\arcsin x}{2} + C$.

139. $x \ln (x + \sqrt{a^2 + x^2}) - \sqrt{a^2 + x^2} + C$. **140.** $\frac{\text{ch}^3 x}{3} - \text{ch}\, x + C$. **141.** $-\text{th}\, x - \frac{\text{th}^3 x}{3} + C$. **142.** $\frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C$. **143.** $\frac{e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + C$. **144.** $\frac{x\sqrt{x^2 \pm a^2}}{2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$. **145.** $\frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + C$. **146.** $J_n = \int \text{tg}^n x\, dx = \frac{\text{tg}^{n-1} x}{n-1} - J_{n-2}$. **147.** $J_n = \int \text{ctg}^n x\, dx = -\frac{\text{ctg}^{n-1} x}{n-1} - J_{n-2}$. **148.** $J_n = \int \sin^n x\, dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} J_{n-2}$, $(n \neq 0)$. **149** $J_n = \int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} J_{n-2}$, $(n \neq 1)$. **150.** $J_n = \int \cos^n x\, dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} J_{n-2}$, $(n \neq 1)$. **151.** $J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^2(2n-2)} \times \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{a^2(2n-2)} J_{n-1}$, $(n \neq 1$. **152.** $\frac{\ln^3(1 - x^2)}{6} + C$.

154. Кўрсатма: Шартга кўра, $x = f(f^{-1}(x)) = F'(f^{-1}(x))$, $\int x d(f^{-1}(x)) = F(f^{-1}(x)) + C$, $\int x d(f^{-1}(x)) = xf^{-1}(x) - \int f^{-1}(x) dx$. $xf^{-1}(x) - \int f^{-1}(x)\, dx = F(f^{-1}(x)) + C$. **155.** Кўрсатма: $y = e^x$; $f^{-1}(x) = \ln x$. $\int \ln x dx = x \ln x - F(\ln x) + C = x \ln x - e^{\ln x} + C = x(\ln x - 1) + C$. **156.** $y = x^3 + 1$; $y = x^3 + 3$. **157.** $\left(\frac{\pi x}{2} - 2\sqrt{1 - x^2}\right) \arcsin x - x \arcsin^2 x + 2x + \sqrt{1 - x^2} + C$.

VI БОБ

1. $f(x) = x^2$ функция $[0; 1]$ кесмада узлуксиз бўлгани туфайли у интегралланувчи бўлади. Демак, интеграл берилган кесмани бўлакларга бўлиш усули ва ξ_k нуқталарни танлаш усулига боғлиқ бўлмайди. Интегрални ҳисоблаш учун $[0; 1]$ ни n та тенг бўлакка бўламиз: Бўлиниш нуқталари сифатида $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{2}{n}$, ..., $x_n = 1$ ларни олиш кифоя. Энди, ҳар бўлакда биттадан ξ_k нуқтани қуйидагича оламиз: $\xi_1 = \frac{1}{n}$, $\xi_2 = \frac{2}{n}$; ...; $\xi_n = 1$ (яъни бўлакларнинг ўнг учлари олинди); $f(\xi_1) = \frac{1}{n^2}$; $f(\xi_2) = \frac{4}{n^2}$; ...; $f(\xi_n) = 1$

бўлади. Интеграл йиғиндини тузамиз:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2).$$

Маълумки, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ формула ўринли $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$. Бизда $\Delta x_k = \frac{1}{k}\,(k = \overline{1,n})$, шунинг учун $\lambda = \frac{1}{n}$. Демак, $\lambda \to 0$ да $n \to \infty$. Натижада $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}$, яъни $\int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. **2** $e - 1$. **3.** $[1;\ 2]$ кесмани геометрик прогрессия ташкил қиладиган $x_0 = 1$, $x_1 = q$, $\ldots$, $x_n = q^n$ ёрдамида n та бўлакка бўламиз. Бунда $\Delta x_1 = q - 1$, $\Delta x_2 = q(q-1)$, $\ldots$, $\Delta x_n = q^{n-1}(q-1)$, $\xi_k : q,\ q^2, \ldots, q^n$ деб олинса, $f(\xi_k) : \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \ldots, \frac{1}{q^n} = \frac{1}{2}$ бўлади. Интеграл йиғиндиси $S_n = \frac{1}{q}(q - 1) + \frac{1}{q^2}(q^2 - q) + \ldots + \frac{1}{q^n}(q^n - q^{n-1}) = \frac{1}{q}(q-1) + \frac{1}{q}(q - 1) + \ldots + \frac{1}{q}(q-1) = \frac{n}{q}(q-1) = \frac{n\left(\sqrt[n]{2} - 1\right)}{\sqrt[n]{2}}$, чунки $q^n = 2$, $q = \sqrt[n]{2}$. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(2^{\frac{1}{n}} - 1)}{2^{\frac{1}{n}}}$; $2^{\frac{1}{n}} - 1 = t$ деб олсак, $2^{\frac{1}{n}} = 1 + t$; $n \to \infty$ да $t \to 0$. $2^{\frac{1}{n}} - 1 = t$; $\frac{1}{n}\ln 2 = \ln(1+t)$; $n = \frac{\ln 2}{\ln(1+t)}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t \ln 2}{\ln(1+t)\cdot(1+t)} = \ln 2 \lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} \cdot \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{1+t} = \ln 2$. Демак, $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$. **4.** $\frac{35}{2}$. **5.** $[a;\ b]$ кесмани n та тенг бўлакка бўламиз. $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, $\ldots$, $x_n = a + nh = b$. Бунда $h = \frac{b-a}{n}$. ξ_k ларни қуйидагича танлаймиз: $\xi_k = \sqrt{x_{k-1}\cdot x_k} : \xi_1 = \sqrt{a(a+h)}$, $\xi_2 = \sqrt{(a+h)(a+2h)}$, $\ldots$, $\xi_n = \sqrt{(a + (n-1)h)(a + nh)}$. $f(\xi_k) : \frac{1}{a(a+h)}, \frac{1}{(a+h)(a+2h)}, \ldots, \frac{1}{(a+(n-1)h)(a+nh)}$. Интеграл йиғиндиси $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k =$

$$= h\left(\frac{1}{a(a+h)} + \frac{1}{(a+h)(a+2h)} + \dots + \frac{1}{(a+(n-1)h)(a+nh)}\right) =$$

$$= h\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+h} + \frac{1}{a+h} - \frac{1}{a+2h} + \dots + \frac{1}{a+(n-1)h} - \frac{1}{a+nh}\right)\cdot\frac{1}{h} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+nh} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b},$$ чунки $a + nh = b$. Демак. $\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$. 6. $\underline{S} = \frac{5}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-2 + \frac{5(k-1)}{n}\right)^3$; $\overline{S} = \frac{5}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-2 + \frac{5k}{n}\right)^3$. 7. [0; 10] кесмани n та тенг бўлакка бўламиз: $\Delta x_n = \frac{10}{n}$, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{10}{n}$, $x_2 = \frac{20}{n}$, $\dots$, $x_n = 10$. Энди $\left[0; \frac{10}{n}\right]$, $\left[\frac{10}{n}; \frac{20}{n}\right]$, $\dots$, $\left[\frac{(n-1)\,10}{n}; 10\right]$ кесмаларнинг ҳар бирида $f(x) = 2^x$ функциянинг энг кичик m_k ва энг катта M_k қийматларини аниқлаймиз.

$$m_k\colon\ 2^0,\ 2^{\frac{10}{n}},\ \dots,\ 2^{\frac{(n-1)10}{n}}$$

$$M_k\colon\ 2^{\frac{10}{n}},\ 2^{\frac{20}{n}},\ \dots,\ 2^{10}.$$

$$\underline{S} = \frac{10}{n}\left(2^0 + 2^{\frac{10}{n}} + \dots + 2^{\frac{(n-1)10}{n}}\right) = \frac{10}{n}\cdot\frac{2^{10}-1}{2^{\frac{10}{n}}-1}$$

$$\overline{S} = \frac{10}{n}\left(2^{\frac{10}{n}} + 2^{\frac{20}{n}} + \dots + 2^{10}\right) = \frac{10}{n}\cdot\frac{2^{10}-1}{2^{\frac{10}{n}}-1}\cdot 2^{\frac{10}{n}}.$$

Дарбу йиғиндилари $\lambda \to 0$ да умумий лимитга эга бўлиши керак чунки $f(x) = 2^x$ функция [0; 10] да интегралланувчидир.

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S} = \lim_{n\to\infty}(2^{10}-1)\frac{\frac{10}{n}}{2^{\frac{10}{n}}-1} = (2^{10}-1)\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{10}{n}}{2^{\frac{10}{n}}-1} = \frac{2^{10}-1}{\ln 2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\overline{S} = (2^{10}-1)\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{10}{n}}{2^{\frac{10}{n}}-1}\lim_{n\to\infty}2^{\frac{10}{n}} = \frac{2^{10}-1}{\ln 2},$$ чунки $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$.

Демак, $\lim\limits_{n\to\infty}\underline{S} = \lim\limits_{n\to\infty}\overline{S} = \frac{2^{10}-1}{\ln 2}$. 8. $\underline{S} = \frac{\pi}{6}(1 + \sqrt{3})$; $\overline{S} = \frac{\pi}{6}(3 + \sqrt{3})$. 9. [1; 2] кесмани $x_0 = 1$, $x_1 = q$, $x_2 = q^2$, $\dots$, $x_n = q^n =$

$= 2$ нуқталар ёрдамида n та бўлакка бўламиз. m_k: $1, \sqrt{q}, \sqrt{q^2}, \sqrt{q^3}, \ldots, \sqrt{q^{n-1}}$. M_k: $\sqrt{q}, \sqrt{q^2}, \sqrt{q^3}, \sqrt{q^4}, \ldots, \sqrt{q^n} = 2$, чунки $q^n = 2$ $\underline{S} = (q-1) + \sqrt{q}(q^2-q) + \sqrt{q^2}(q^3-q^2) + \ldots + \sqrt{q^{n-1}}(q^n - q^{n-1}) = (q-1)(1 + q^{3/2} + q^3 + q^{9/2} + \ldots + q^{\frac{3(n-1)}{2}}) = (q-1)\dfrac{q^{\frac{3n}{2}}-1}{q^{\frac{3}{2}}-1}$. $\overline{S} = \sqrt{q}\,(q-1) + \sqrt{q^2}\,(q^2-q) + \ldots + \sqrt{q^n}(q^n - q^{n-1}) = (q-1)\dfrac{q^{\frac{3n+1}{2}}-1}{q^{\frac{3}{2}}-1}$. $q^n = 2$ дан $q = 2^{\frac{1}{n}}$, $q^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2n}}$, $q^{\frac{3}{2}n} = 2^{\frac{3}{2}}$, $q^{\frac{3n+1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}2^{\frac{2}{n}}$. Шунинг учун $\underline{S} = (2^{\frac{3}{2}}-1)\dfrac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{3}{2n}}-1}$

$\overline{S} = (2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{n}} - 1)\dfrac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{3}{2n}}-1}$. Лекин, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \ln 2$ бўлганидан, $\lim\limits_{n\to\infty}\underline{S} = \dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$; $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{S} = \dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$ бўлади. **10.** $\underline{S} = 0$; $\overline{S} = \dfrac{1}{n}$. **11.** Дирихле функцияси $[0; 1]$ кесмада қуйидагича аниқланган:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса,} \end{cases}$$

$[0; 1]$ нинг ихтиёрий λ бўлиниши учун $m_k = \inf D(x) = 0$, $M_k = \sup D(x) = 1$, $x \in [x_{k-1}; x_k]$. Шунинг учун $\underline{S} = \sum\limits_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0$; $\overline{S} = \sum\limits_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = 1$. Демак, $\lim\limits_{\lambda\to\infty}(\overline{S} - \underline{S}) = 1 \neq 0$, яъни $D(x)$ интегралланувчи эмас. **12.** 10-мисолнинг жавобига асосан: $\lim\limits_{\lambda\to 0}(\overline{S} - \underline{S}) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n} - 0\right) = 0$. **13.** $f(x)$ функция $[a; b]$ да интегралланувчи, демак, чегараланган, у ҳолда $f^2(x)$ ҳам чегараланган бўлади. $\sup|f(x)| = M$ бўлсин. $f^2(x)$ функциянинг $[a; b]$ даги тебраниши

$$\omega_{[a;\,b]}f^2 = \sup|f^2(x'') - f^2(x')| \leqslant 2M \cdot \omega_{[a;\,b]}f\ , a \leqslant x < x'' \leqslant b$$

бўлади. Шунинг учун $0 \leqslant \overline{S} - \underline{S} = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_{[x_{k-1};\,x_k]} f^2 \Delta x_k \leqslant$

$< 2M\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_{[x_{k-1},\, x_k]} f\cdot\Delta x_k$. Шартга кўра $f(x)$ интегралланувчи, демак, $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_{[x_{k-1};\, x_k]} f\cdot\Delta x_k = 0$, у ҳолда $\lim\limits_{\lambda\to0}(\overline{S}-\underline{S}) = 0$ бўлади. Демак, $f^2(x')$ ҳам $[a;\, b]$ да интегралланувчи бўлади. **14.** Шундай функциялардан бири

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

15. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\Big|_0^2 = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. **16.** 0. **17.** $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx = -\cos x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$. **18.** $\frac{\pi}{6}$. **19.** $\int\limits_1^5\frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3}\int\limits_1^5\frac{d(3x-2)}{3x-2} = \frac{1}{3}\ln(3x-2)\Big|_1^5 = \frac{1}{3}\ln 13$. **20.** $\ln(1+e)$. **21.** $\int\limits_0^2\frac{x+3}{x+4}dx = \int\limits_0^2\frac{x+4-1}{x+4}dx = \int\limits_0^2 dx - \int\limits_0^2\frac{dx}{x+4} = (x-\ln(x+4))\Big|_0^2 = 2+\ln\frac{2}{3}$. **22.** $2-\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

23. $\int\limits_1^e\frac{\ln^2 x}{x}dx = \int\limits_1^e\ln^2 x\,d(\ln x) = \frac{1}{3}\ln^3 x\Big|_1^e = \frac{1}{3}$. **24.** $\frac{e-1}{2}$. **25.**

$$\int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{dx}{e^x+1} = \int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}dx = \int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2}dx - \int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{e^x dx}{e^x+1} = (x - \ln(e^x+1))\Big|_{\ln 2}^{2\ln 2} = \ln\frac{6}{5}.$$

26. $\sqrt{e}-1$. **27.**

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}}\frac{dx}{\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{12}}\frac{d\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right)} = -\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{12}} = \sqrt{3}-1.$$

28. $\frac{\pi}{3}$.

29. $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{\frac{3\sqrt{3}}{4}} \frac{dx}{3+16x^2} = \frac{1}{4}\int\limits_{\frac{3}{4}}^{\frac{3\sqrt{3}}{4}} \frac{d(4x)}{(\sqrt{3})^2+(4x)^2} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{4x}{\sqrt{3}}\Bigg|_{\frac{3}{4}}^{\frac{3\sqrt{3}}{4}} = \frac{\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$. 30. $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$. 31. $\int\limits_0^1 xe^{-x}\,dx = \left\|\begin{matrix} u=x; & dv= e^{-x}\,dx \\ du=dx; & v=-e^{-x}\end{matrix}\right\| = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 e^{-x}\,dx = 1-\frac{2}{e}$. 32. 9π. 33. $\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx = \left\|\begin{matrix} u=\arcsin x; & dv=dx \\ du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; & v=x\end{matrix}\right\| = x\arcsin x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}-1$. 34. $\ln 4-1$. 35. $\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx = \left\|\begin{matrix} u=x; & dv=\sin x\,dx \\ du=dx; & v=-\cos x\end{matrix}\right\| = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi}\cos x\,dx = \pi$. 36. $\frac{\pi-2}{4}$. 37 Функциянинг ўрта қиймати $f(c)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ формула орқали ҳисобланади. $f(c)=\frac{1}{3}\int\limits_1^4\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{20}{9}$. 38. $\frac{8}{3}$. 39. $\int\limits_2^3 xdx$. Бу интеграл геометрик томондан трапециянинг юзини ифода қилади. Трапеция асослари 2 ва 3, баландлиги эса 1 бўлади. Бундай трапециянинг юзи $\frac{5}{2}$ га тенг. Демак, $\int\limits_2^3 xdx=\frac{5}{2}$.

40. $\frac{1}{2}$. 41. $f(x)=x^3$ тоқ функция. $[-2;\ 2]$ кесмада бу функциянинг графиги $O(0;\ 0)$ га нисбатан симметрик жойлашган, яъни бир қисми $[-2;\ 0]$ да Ox дан пастда, иккинчи қисми $[0;\ 2]$ да Ox дан юқорида. Бу бўлаклар Ox билан тенг юзлар ҳосил қилади, фақат бири Ox ўқдан пастда, иккинчиси юқорида, демак, ишораси қарама-қаршидир. Шунинг учун: $\int\limits_{-2}^{2} x^3dx=0$. 42. 0. 43 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ функция $[-2;\ 2]$ да тоқ функциядир, чунки $\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1-x^2})$. 44.

масаладаги каби $\int\limits_{-2}^{2} \ln (x + \sqrt{1 + x^2})\, dx = 0$. **45.** Агар $f(x)$ функция $[-a; a]$ да жуфт функция бўлса, у ҳолда $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int\limits_{0}^{a} f(x) dx$ даги иккинчи интегралда $x = -t$, $dx = -dt$; $x = 0$ да $t = 0$, $x = -a$ да $t = a$ бўлганидан, $\int\limits_{-a}^{0} f(x)\, dx = -\int\limits_{a}^{0} f(-t)\, dt = \int\limits_{0}^{a} f(-t)\, dt = \int\limits_{0}^{a} f(t)\, dt = \int\limits_{0}^{a} f(x) dx$ бўлиб, ўрнига қўйганда $\int\limits_{-a}^{a} f(x) dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\, dx = \int\limits_{0}^{a} f(x)\, dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\, dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\, dx$ бўлади. Агар $f(x)$ $[-a; a]$ да тоқ функция бўлса, $\int\limits_{-a}^{0} f(x) dx = -\int\limits_{a}^{0} f(-t)\, dt = \int\limits_{a}^{0} f(t)\, dt = -\int\limits_{0}^{a} f(t) dt = -\int\limits_{0}^{a} f(x) dx$ бўлиб, $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$ бўлади. **47.** $[a; a + T]$ кесмани $[a; T]$ ва $[T; a + T]$ ларга бўламиз. $\int\limits_{a}^{a+T} f(x) dx = \int\limits_{a}^{T} f(x) dx + \int\limits_{T}^{a+T} f(x)\, dx$ бўлса, $\int\limits_{T}^{a+T} f(x) dx = \int\limits_{T}^{a+T} f(x-T) dx$ бўлади. $x-T=z$ деб олсак, $\int\limits_{T}^{a+T} f(x) dx = \int\limits_{0}^{a} f(z) dz$ бўлади. Демак, $\int\limits_{a}^{a+T} f(x) dx = \int\limits_{a}^{T} f(x) dx + \int\limits_{0}^{a} f(x) dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)\, dx$ бўлади. 48. Агар Ньютон-Лейбниц формуласини „билмасдан“ қўлласак, $\int\limits_{0}^{5} \frac{dx}{(x - 4)^2} = \int\limits_{0}^{5} (x-4)^{-2} dx = -\frac{1}{x - 4}\Big|_{0}^{5} = -1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4} < 0$ ҳосил бўлади. $f(x) = \frac{1}{(x - 4)^2}$ функция $[0; 5]$ да фақат мусбат қийматлар қабул қилади. Интегралнинг қиймати эса манфий бўлди. Асосий сабаб: $f(x) = \frac{1}{(x - 4)^2}$ функция $[0; 5]$ нинг $x = 4$ нуқтасида узилишга эга. Шунинг учун ҳам Ньютон-Лейбниц формуласидан фойдаланиш тўғри эмас. 49. $[0; 1]$ ни $x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}1$; $x_2 = 0{,}2$; . . . ; $x_9 = 0{,}9$; $x_{10} = 1$ нуқталар ёрдамида 10 та тенг бўлакка бўламиз У ҳолда $y_0 = 0$, $y_1 = 0{,}01$; $y_2 = 0{,}04$, . . . ; $y_9 = 0{,}81$ $y_{10} = 1$ ларни ҳосил қиламиз. $\int\limits_{0}^{1} x^2 dx \approx 0{,}1\, (0 + 0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}09$

$+ 0,16 + 0,25 + 0,36 + 0,49 + 0,64 + 0,81) = 0,285$. **50.** $3,1236$; $\pi = 3,1415 \ldots$. **51.** $[1; 2]$ ни 10 та тенг бўлакка бўламиз: $x_0 = 1$; $x_1 = 1,1$; $x_2 = 1,2$; $\ldots$; $x_9 = 1,9$; $x_{10} = 2$. $h = 0,1$ $y_0 = 1$ $y_1 = 0,909$; $y_2 = 0,833$; $\ldots$; $y_9 = 0,526$; $y_{10} = 0,5$. Трапециялар формуласига кўра $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1}\right) = 0,1\left(\frac{1+0,5}{2} + 6,187\right) = 0,693$. Демак, $\ln 2 \approx 0,693$. **52.** $0,693$. **53.** $[0; 1]$ ни 10 та тенг бўлакка бўламиз: $x_0 = 0$; $x_1 = 0,1$; $x_2 = 0,2$; $\ldots$; $x_9 = 0,9$; $x_{10} = 1$; $h = 0,1$. $y_0 = 0$; $y_1 = 0,001$; $y_2 = 0,008$; $\ldots$; $y_9 = 0,729$; $y_{10} = 1$. $\int\limits_4^1 x^3 dx \approx 0,1\left(\frac{0+1}{2} + 0,001 + 0,008 + \ldots + 0,729\right) = 0,2525$. **54.** $\int\limits_0^4 (3x^2 + 2x + 4)dx = 96$; $\int\limits_0^4 (3x^2 + 2x + 4)\,dx \approx 96,32$. **55.** $[0; 1]$ ни 4 та тенг бўлакка бўламиз. $x_0 = 0$; $x_1 = 0,25$; $x_2 = 0,5$; $x_3 = 0,75$; $x_4 = 1$. $h = 0,25$. $y_0 = 1$; $y_1 = 0,941$; $y_2 = 0,8$; $y_3 = 0,64$; $y_4 = 0,5$. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \approx \frac{1}{12}((y_0 + y_4) + 4(y_1 + y_3) + 2y_2) = \frac{1}{12}(1,5 + 6,324 + 1,6) = 0,7853$. $\pi \approx 3,1415$. **57.** 0. Кўрсатма: юз икки бўлакдан иборат: бири Ox дан юқорида иккинчиси — пастда. Ҳар иккала юз бир-бирига тенг. **58.** $\frac{9\pi}{8}$. Кўрсатма. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ айлана билан чегараланган ярим доира юзи $\int\limits_0^3 \sqrt{3x - x^2}\,dx = \frac{9\pi}{8}$. **59.** $\frac{\pi}{2}$. Кўрсатма: радиуси $R = 1$ га тенг доиранинг ярмидан иборат юзни ифода қилади: $\int\limits_0^2 \sqrt{2x - x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$. **60.** Умуман айтганда, мавжуд бўлмайди. Тескари жумла тўғридир. **61.** Умуман айтганда, мавжуд бўлмайди. **62.** $a = \left\{\frac{1}{2};\ 2\right\}$. **63.** $a = e$. Кўрсатма: $f(c) = \frac{a \ln a - a + 1}{a - 1} = \frac{\ln a}{a - 1}$ дан $(a - 1)(\ln a - 1) = 0$. **64.** $J_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$. **65.** $a \in]2; +\infty[$. **66.** $a \in [3 + \sqrt{6}; +\infty[$. **67.** $[e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}; 1[\cup [e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}; +\infty[$. **68.** $a \in]4; +\infty]$. **69.** $\left\{-\pi; -\frac{\pi}{3}; 0\right\}$. **70.** $\ln(1 + \sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2}$. **71.** Кўрсатма: $[0; 1]$

да $0 < \sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$; $\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{4}$; $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} > 0$ дан $\frac{x}{\cos x} < \frac{2x}{2 - x^2}$. 72. Хатолик $f(x) = \mathrm{tg}^2 x$ нинг $[0;\ \pi]$ да тўла аниқланмаганлиги туфайли Ньютон-Лейбниц формуласини қўллаб бўлмайди. 73. $A = 7$, $B = -6$, $C = 3$. 74. $A = 2$, $B = \frac{3}{2\pi}$. 75. $]-\infty;\ -1[$.

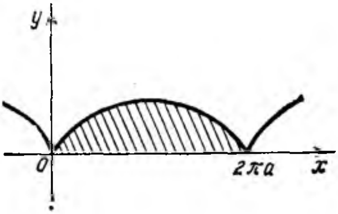
VII БОБ

1. $S = \int\limits_{-1}^{4}(x^2+1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_{-1}^{4} = \frac{80}{3}$. 2. $S = \ln 3$. 3. Эллипс юзининг $\frac{1}{4}$ қисмини топамиз:

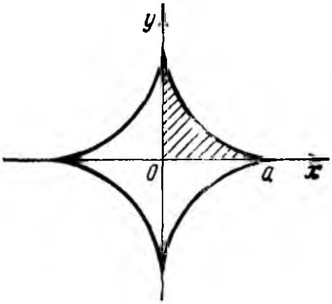
$$\frac{S}{4} = \frac{b}{a}\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left\| \begin{matrix} x = a\sin t \\ dx = a\cos t\,dt \end{matrix} \quad \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 0 & 0 \\ a & \frac{\pi}{2} \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{b}{a}a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{\pi ab}{4};\ S = \pi ab.$$

Доира ҳоли учун $a = b = r$ да доира юзи: $S = \pi r^2$. 4. **Кўрсатма:** Эгри чизиқнинг Ox ўқи билан кесишиш нуқталарини аниқлаб, фигура бўлакларининг юзларини алоҳида ҳисоблаш керак. $S = 2\frac{3}{4}$. 5. $\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases}$ дан $(0;\ 0)$ ва $(1;\ 1)$ кесишиш нуқталарини топамиз. $[0;\ 1]$ да $x > x^2$. $S = \int\limits_0^1 (x - x^2)dx = \frac{1}{6}$. 6. $S = 4{,}5$. 7. $\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = x \end{cases}$ дан $(0;\ 0)$ ва $(1;\ 1)$ кесишиш нуқталарини топамиз: $S = \int\limits_0^1 (2x - x^2 - x)^2\,dx = \frac{1}{6}$. Бунда $[0;\ 1]$ да $2x - x^2 > x$. 8. $S = 21$. 9. $S = \int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 2$. 10. $S = 2$. 11. $\begin{cases} x^2 = 4y \\ y = \frac{8}{x^2+4} \end{cases}$ дан $x = -2$ ва $x = 2$ кесишиш нуқталари абсциссаларини топамиз. $[-2;\ 2]$ да $\frac{8}{x^2+4} > \frac{x^2}{4}$ бўлади. Шунинг учун



46 чизма.



47- чизма.

$$S = \int_{-2}^{2}\left(\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4}\right)dx = \left(4\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = 2\left(\pi - \frac{2}{3}\right).$$ **12.** $S = \frac{1}{3}$.

13. $\begin{cases} y^2 = 4x \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ дан (1; 2) ва (1; —2) кесишиш нуқталарини топамиз. Кичик юз $S = 2\left(\int_0^1 2\sqrt{x}\,dx + \int_1^{\sqrt{5}} \sqrt{5 - x^2}\,dx\right) = 4\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx +$

$$+ 2\int_1^{\sqrt{5}} \sqrt{5 - x^2}\,dx = 4 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 + 2\left(\frac{5}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} +\right.$$

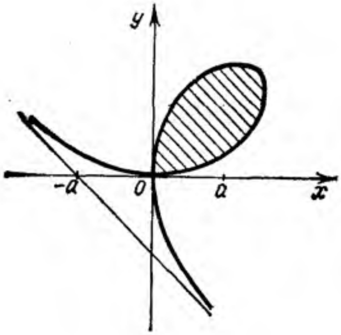
$$\left. + \frac{x\sqrt{5-x^2}}{2}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{5}} = \frac{8}{3} + \frac{5\pi}{2} - 5\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5} - 1 = 5\left(\frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} -\right.$$

$\left. - \arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$. **14.** $S = \frac{8\sqrt{2}}{3}$. **15.** $\begin{cases} x = a(t - \sin t) & dx = a(1 - \cos t)\,dt \\ y = a(1 - \cos t), & dy = a\sin t\,dt \end{cases}$. $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (46- чизма). $S = \int_\alpha^\beta y(t)dx(t) = a^2\int_0^{2\pi}(1 -$

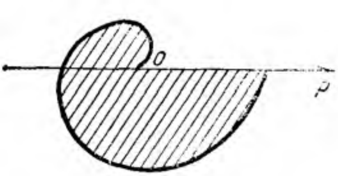
$$- \cos t)^2\,dx = 4a^2\int_0^2 \sin^4\frac{t}{2}\,dt = \left\|\begin{matrix} t = 2z; \\ dt = 2zdz; \end{matrix}\quad \begin{array}{c|c} t & z \\ \hline 0 & 0 \\ 2\pi & \pi \end{array}\right\| = 8a^2\int_0^{\pi}\sin^4 z dz =$$

$$= 16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 z\,dz = 16a^2\,\frac{3}{8}\,\frac{\pi}{2} = 3\pi a^2.$$ Бунда $\int \sin^4 z\,dz =$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}z - \sin 2z + \frac{\sin 4z}{8}\right) + C$. **16.** $S = 4{,}5$. **17.** Астроиданинг қутб координаталар системасидаги тенгламасига ўтиш маъқулдир. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (47- чизма). Астроида Ox ва Oy



48- чизма.



49- чизма.

ўқларига нисбатан симметрик жойлашган: $\frac{S}{4} = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} a \sin^3 t \times$

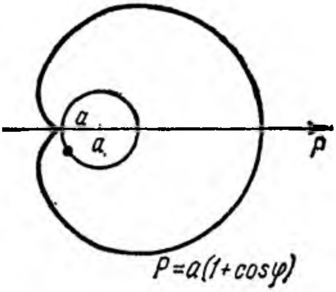
$\times (-3a \cos^2 t \sin t)\, dt = 3a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t\, dt = \frac{3a^2}{4} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \sin^2 t\, dt =$

$= \frac{3a^2}{8} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\ 1 - \cos 2t\ dt = \frac{3a^2}{8} \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\, dt - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \cos 2t dt \right) =$

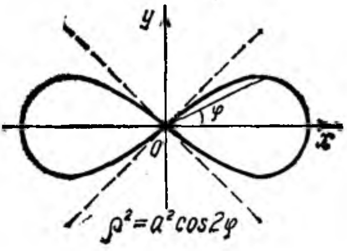
$= \frac{3}{32} \pi a^2$. $S = \frac{3}{8} \pi a^2$. **18.** $S = \pi$. 19. $x^3 + y^3 = 3axy$ Декарт япроғининг қутб координаталар системасидаги тенгламаси $\rho = \frac{3a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}$; $0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ бўлади (48-чизма). Декарт япроғининг ярим юзи $\frac{S}{2} =$

$$= \frac{9a^2}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\varphi \cos^2\varphi}{(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi)^2} d\varphi = \frac{9a^2}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \varphi \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^6 \varphi}}{\left(\frac{\sin^3 \varphi}{\cos^3 \varphi} + 1\right)^2} d\varphi = \frac{9a^2}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{tg}^2 \varphi\, d(\mathrm{tg} \varphi)}{(\mathrm{tg}^3 \varphi + 1)^2} =$$

$$= \frac{3a^2}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\mathrm{tg}^3 \varphi + 1)}{(\mathrm{tg}^3 \varphi + 1)^2} = -\frac{3a^2}{2} \frac{1}{\mathrm{tg}^3 \varphi + 1} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3a^2}{4},\ S = \frac{3a^2}{2}.$$ **20.**



50- чизма.



51- чизма.

$S = \pi ab$. **21.** $S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} a^2\varphi^2 d\varphi = \frac{4}{3}\pi^3a^2$. **22.** $S = 2 - \sqrt{2}$. **23.** Паскаль чиғаноғини чизишда φ 0 дан 2π гача ўзгаради (49- чизма). $S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} 4a^2(2+\cos\varphi)^2\,d\varphi = 2a^2\int\limits_0^{2\pi}(4 + 4\cos\varphi + \cos^2\varphi)d\varphi = (8a^2\varphi + {}$ $+ 8a^2\sin\varphi + a^2\varphi + \frac{a^2}{2}\sin 2\varphi\Big)\Big|_0^{2\pi} = 18\pi a^2$. **24.** $S = \frac{3\pi a^2}{2}$. Кўрсатма: кардиоида қутб ўқига нисбатан симметрик жойлашган (50- чизма). $S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)d\varphi = \frac{3}{4}\pi a^2$. **25.** $S = a^2$. Лемниската ҳар иккала координата ўқларига нисбатан симметрик жойлашган (51- чизма). $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ дан $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$ учун $\frac{S}{4} = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\, d\varphi =$ $= \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}$. **26.** $S = \frac{e^2+1}{e} - 2$. **27.** $S = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{2a\varphi}\,d\varphi =$ $= \frac{1}{4a}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{2a\varphi}d\,(2a\varphi) = \frac{1}{4a}e^{2a\varphi}\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4a}$. **28.** $S_1 = \frac{3\pi+2}{6}$; $S_2 =$ $= \frac{9\pi-2}{2}$. Кўрсатма: Аввал $\begin{cases}(x+3)^2+(y-1)^2 = 2\\ y = x^2+6x+10\end{cases}$ ларнинг кесишиш нуқталари $(-2;\ 2)$ ва $(-4;\ 2)$ топилади. Кичик юз $S_1 =$ $= \int\limits_{-4}^{-2}\left(\sqrt{2-(x+3)^2} + 1 - (x^2+6x+10)\right)dx$ ни аниқлаб, $S =$ $= \pi r^2 = 2\pi$ ни кузда тутиб, $S_2 = 2\pi - S_1$ ҳисобланади. **29.** $y^2 = x^3$,

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.\ L = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \int_0^1\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{4}{9}\int_0^1\Big(1+$$

$$+\frac{9x}{4}\Big)^{\frac{1}{2}} d\left(1+\frac{9x}{4}\right) = \frac{8}{27}\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 =$$

$= \frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8}-1\right)$. **30.** $L = 2\left(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right)$. **31.** Айлананинг биринчи чоракдаги узунлигини топамиз: $y=\sqrt{R^2-x^2}$; $0 \leqslant x \leqslant R$,

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}};\ \sqrt{1+y^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}.\ \frac{L}{4} = \int_0^R \frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}} =$$

$= R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R = R(\arcsin 1 - \arcsin 0) = \frac{\pi}{2}R$. $L = 2\pi R$. **32.** $L = \sqrt{6}+\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$. **33.** Астроида Ox ва Oy координата ўқлари ва $y=x$; $y=-x$ тўғри чизиқларга нисбатан симметрик фигура бўлгани учун, унинг саккиздан бир бўлагининг узунлигини ҳисоблаймиз: $\frac{L}{8} = \int_{\left(\frac{a}{2}\right)^{3/2}}^{a} \sqrt{1+\frac{a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\,dx$, чунки $y=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ дан $y' = -\frac{\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}$. $L = 8\int_{\left(\frac{a}{2}\right)^{3/2}}^{a}\sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\,dx =$

$= 8a^{\frac{1}{3}}\int_{\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}^{a} x^{-\frac{1}{3}}dx = 6a$; $L = 6a$. **34.** $L = \frac{14}{3}$. **35.** $y=\ln x$, $y' = \frac{1}{x}$,

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.\ L = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \left(\sqrt{1+x^2}\ -\right.$$

$$-\ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\Bigg)\Bigg|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} = 1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$ **36.** $L = \text{sh}\,1 \approx 1{,}17$. **37.** $y =$

$$= \ln\sin x;\quad y' = \text{ctg}\,x;\quad L = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+\text{ctg}^2 x}\,dx = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin x} = \ln\text{tg}\frac{x}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 3.$$ **38.** $y = e^x;\ y' = e^x.\ L = \int\limits_0^1 e^x\sqrt{1+e^{-2x}}\,dx = \left\|\begin{matrix} e^x = t; \\ dt = e^x dx;\end{matrix}\right.$

$$\frac{x}{t}\Bigg|\frac{0 \quad 1}{1 \quad e}\Bigg\| = \int\limits_1^e\sqrt{1+t^{-2}}\,dt = \int\limits_1^e\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,dt = \left(\sqrt{1+t^2}-\ln\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}\right)\Bigg|_1^e =$$

$$= \sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}-\ln\frac{1+\sqrt{1+e^2}}{e(1+\sqrt{2})}.$$ **39.** $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t);\end{cases}$

$$\begin{matrix} x' = a(1-\cos t) \\ y' = \sin t; \end{matrix}\quad \sqrt{x'^2+y'^2} = 2\sin\frac{t}{2}.\quad L = \int\limits_0^{2\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt =$$

$$= 2a\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 4a\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,d\left(\frac{t}{2}\right) = 8a.$$ **40** Астроиданинг тенгламаси параметрик кўринишда берилганда ҳам $L = 6a$ натижани ҳосил қилиш керак. **41.** Ҳар бирининг узунлигини ҳисоблаймиз:

$$L_{\text{эллипс}} = \int\limits_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt; \qquad (1)$$

$$L_{\text{синусоида}} = \int\limits_0^{2\pi b}\sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^2}\cos^2\frac{x}{b}}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi b}\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\cos^2\frac{x}{b}}\,d\left(\frac{x}{b}\right);\quad \left\|t = \frac{x}{b};\ \frac{x}{t}\Bigg|\frac{0 \quad 2\pi b}{0 \quad 2\pi}\right\|;$$

$$L_{\text{синусоида}} = \int\limits_0^{2\pi}\sqrt{b^2\sin^2 t + a^2\cos^2 dt}. \qquad (2)$$

$z = \frac{\pi}{2} - t$ деб олсак, $L_{\text{синусоида}} = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{b^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t\,dt} =$

$$= -4\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{b^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-z\right)+a^2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}\,dz =$$

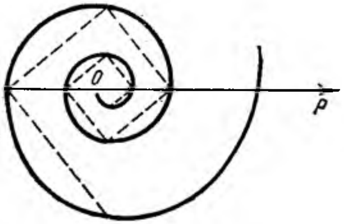
$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2\cos^2 z + a^2\sin^2 z}\, dz = L_{\text{эллипс}}.$ Шу нарсани алоҳида таъкидлаш лозимки, (1) ва (2) интеграллар элементар функциялар орқали ифодаланмайди, бундай интеграллар иккинчи жинс эллиптик интеграллар деб юритилади. **42.** $L = 2\pi r$. **43.** Маълумки, Архимед спиралининг бир ўрами φ нинг 0 дан 2π гача ўзгаришида ҳосил бўлади.

$$L = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\, d\varphi = a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi = a\left(\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}\right)\right).$$

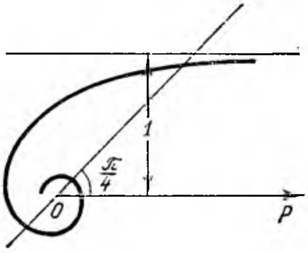
Бунда

$$\int \sqrt{a^2 + u^2}\, du = \frac{u\sqrt{a^2 + u^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{a^2 \pm u^2}\right| + C$$

формуладан фойдаланилади. **44.** $L = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{m}|\rho - \rho_0|$ (52- чизма). **45.** $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, $(a > 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$, $\rho' = a\sin\varphi$. $\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = a\sqrt{2(1 + \cos\varphi)} = 2a\cos\frac{\varphi}{2}$. $\frac{L}{2} = 2a\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 4a\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 4a$. $L = 8a$. **46.** $L = \frac{5}{12} + \ln\frac{3}{2}$ (53- чизма). **47.** $\Theta = \sqrt{\rho}$ берилган. Маълумки, $L = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\Theta$ формула мавжуддир. $\Theta = f(\rho)$ берилган. Бундан тескари функциянинг хосиласини топиш формуласига кўра $\rho'(\Theta) = \frac{1}{\Theta'(\rho)}$ бўлади ёки $\Theta'(\rho) = \frac{1}{\rho'(\Theta)}$;



52- чизма.



53- чизма.

$$d\theta = \theta' d\rho.\ \ L = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta = \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{\theta'^2}} \theta d\rho =$$

$= \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{(\rho\theta')^2 + 1}\, d\rho.$ Бизнинг мисолда: $\theta = \sqrt{\rho}$; $\theta' = \frac{1}{2\sqrt{\rho}}$; $(\rho\theta')^2 = \frac{\rho}{4}$. $L = \int\limits_0^5 \sqrt{\frac{\rho}{4} + 1}\, d\rho = \frac{1}{2} \int\limits_0^5 (\rho + 4)^{\frac{1}{2}} d\rho = 6\frac{1}{3}$. **48.** $L = 2\pi R$.

49. $V = \pi \int\limits_0^4 y^2 dx$ формулага асосан: $V = 8\pi$. **50.** $V = \frac{32}{3}\pi a^3$. Кўрсатма: координаталар бошини $O'(0;\ -2a)$ нуқтага кўчирилса, тенглама $(y_1 - 2a^2) = 4ax$ бўлади. $V = \pi \int\limits_0^a ((2a + \sqrt{4ax})^2 - (2a - \sqrt{4ax})^2)\, dx$. **51.** $y = x^2 - 4$ нинг Ox ўқи билан кесишиш нуқталарини топамиз: $x = -2$; $x = 2$. Изланган ҳажм: $V = \pi \int\limits_{-2}^{2} (x^2 - 4)^2 dx = 34\frac{2}{15}\pi$. **52.** $V = \frac{64}{5}\pi$. **53.** $x^2 + y^2 = R^2$ айлана билан чегараланган $[-R;\ R]$ даги ярим доирани Ox ўқи атрофида айлантирганда, шар ҳосил бўлади. Унинг ҳажми: $V = \pi \int\limits_{-R}^{R} (R^2 - x^4)\, dx = \left(\pi R^2 x - \frac{\pi x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R} = \frac{4\pi R^3}{3}$ ёки $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. **54.** $V = \frac{64}{5}\pi$. **55.** $O(0;\ 0)$ ва $A(h;\ r)$ нуқталар орқали ўтган тўғри чизиқ кесмасини Ox ўқи атрофида айлантирганда, баландлиги h ва асосининг радиуси r бўлган конус ҳосил бўлади. O ва A нуқталардан ўтган тўғри чизиқ тенгламаси: $y = \frac{r}{h} x$. $V = \pi \int\limits_0^h \left(\frac{r}{h} x\right) dx = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Конус ҳажми $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. **56.** 12π. **57.** $A(0;\ r_1)$ ва $B(h;\ r_2)$ нуқталар орқали ўтган тўғри чизиқ кесмаси ва $x = 0$, $x = h$, $y = 0$ тўғри чизиқлардан ҳосил бўлган трапецияни Ox ўқи атрофида айлантириб, кесик конус ҳосил қиламиз. $V = \pi \int\limits_0^h \left(\frac{r_2 - r_1}{h} x +\right.$

$+r_1)dx = \left\| \begin{array}{l|l|l} \frac{r_2-r_1}{h}x + r_1 = t; & \frac{x}{0} & \frac{t}{r_1} \\ dx = \frac{h}{r_2-r_1}dt; & h & r_2 \end{array} \right\| = \frac{\pi h}{r_2-r_1}\int\limits_{r_1}^{r_2} t^2dt = \frac{\pi h}{r_2-r_1}\,(r_2^3 -$ $- r_1^3) = \frac{\pi h}{3}\left(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2\right)$. Кесик конус ҳажми: $V = \frac{h}{3}\,\left(\pi r_1^2 + \right.$ $\left. + \pi r_2^2 + \pi r_1r_2\right)$. 58. $\frac{64}{3}\pi$. 59. $x^2 + y^2 = R^2$ да олинган доиравий сегментнинг асоси бу ўққа параллел бўлсин. Агар сегмент баландлиги (стрелкаси)ни H десак, у ҳолда шу сегмент ярмини Ox ўқи атрофида айлантирсак, шар сегменти ҳосил бўлади. $V = \pi\int\limits_{R-H}^{R}(R^2 -$ $- x^2)\,dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{R-H}^{R} = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right)$. Шар сегментининг ҳажми: $V = \pi H^2R - \frac{1}{3}\pi H^3$. 60. π^2. 61. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсни Ox ўқи атрофида айлантирганда айланма эллипсоид ҳосил бўлади. $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$; $-a \leqslant x \leqslant a$; $V = \pi\,\frac{b^2}{a^2}\int\limits_{-a}^{a}(a^2 - x^2)dx = \frac{4}{3}\pi ab$

62. $V = \frac{4}{3}\pi abc$. Кўрсатма. Ox ўққа перпендикуляр текислик билан кесилганда кесимда эллипс ҳосил бўлади Унинг юзи: $S(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. Бунда $V = \int\limits_a^b S(x)\,dx$ формуладан фойдаланинг. 63. Ҳисоблаш формуласи $V = \pi\int\limits_c^d \varphi^2(y)\,dy$ бўлади. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ дан $x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}$. $V = \pi\frac{a^2}{b^2}\int\limits_0^b (b^2 + y^2)\,dy = \pi\,\left(a^2y + \frac{a^2}{b^2}\,\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^b =$ $= \frac{4}{3}\pi a^2b$. 64. $\frac{3\pi}{10}$. 65. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), & dx = a(1 - \cos t)\,dt, \\ y = a(1 - \cos t); & 0 \leqslant x \leqslant 2\pi a; \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \end{cases}$

$$V = \pi\int\limits_0^{2\pi a} y^2dx = \pi a^3\int\limits_0^{2\pi}(1 - \cos t)^3\,dt = 8\pi a^3\int\limits_0^{2\pi}\sin^6\frac{t}{2}\,d\left(\frac{t}{2}\right) =$$

$= 32\pi a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 z dz$. Маълумки, $\int\sin^6 z dz = \frac{1}{6}\left(5\int\sin^4 z\,dz -\right.$ $\left.- \cos z\sin^5 z\right) = \frac{1}{6}\left(5\cdot\frac{1}{4}\left(3\int\sin^2 zdz - \cos z\sin^3 z\right) - \cos z\sin^5 z\right) =$

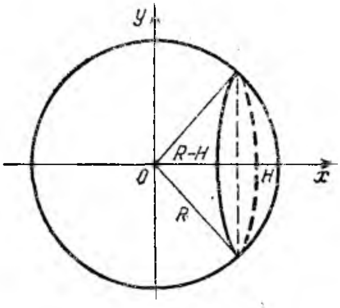
$= \frac{5}{16} z - \frac{5}{16} \sin z \cos z - \frac{5}{24} \cos z \sin^3 z - \frac{1}{6} \cos z \sin^5 z + C$. $V = 32\pi a^3 \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi^2 a^3$. **66.** $\frac{32\pi a^3}{105}$. Кўрсатма: $V = 2\pi \int\limits_0^a x^2 dy = 6\pi a^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t \cos^2 t dt$ дан топилади. **67.** Энди астроидани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўладиган жисм ҳажмини топишга ўтайлик. Астроиданинг ошкормас тенгламасидан фойдаланамиз. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[3]{y^2} = a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$; $y^2 = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3$.

$$V = 2\pi \int\limits_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx = 2\pi \int\limits_0^a \left(a^2 - 3a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} - x^2\right) dx =$$

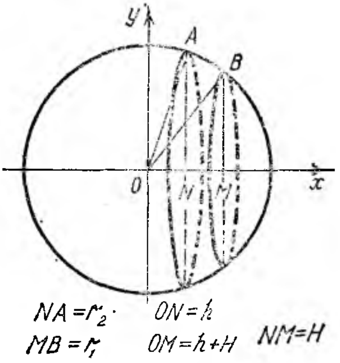
$= 2\pi \left(a^2 x - \frac{9}{5} a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7} a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{7}{3}} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a = \frac{32}{105} \pi a^3$. 68 $\frac{2}{3} \pi^2 a^3 (\pi^2 - 6)$. **69.** $y^2 = 2px$, $x = \frac{y^2}{2p}$. $V_y = \pi \int\limits_c^d x^2 dy = \pi \int\limits_0^p \frac{y^4}{4p^2} dy = \frac{\pi p^3}{20}$; $V_x = \pi \int\limits_0^{\frac{p}{2}} 2px dx = \frac{\pi p^3}{4}$. Демак, $V_y = \frac{1}{20} \pi p^3$; $V_x = \frac{1}{4} \pi p^3$. **70.** $\frac{\pi}{15} (e^{3\pi} - 1)$. **71.** $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ дан $y^2 = \frac{a^2}{4} \left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right)$.

$$V = \frac{\pi a^2}{4} \int\limits_{-a}^{a} \left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right) dx = \frac{\pi a^2}{2} \left(\frac{a}{2} \int\limits_0^a e^{\frac{2x}{a}} d\left(\frac{2x}{a}\right) + 2x \Big|_0^a - \frac{a}{2} \int\limits_0^a e^{-\frac{2x}{a}} d\left(-\frac{2x}{a}\right)\right) = \frac{\pi a^3}{2} \left(\frac{1}{2} e^{\frac{2x}{a}} + 2 - \frac{1}{2} e^{-\frac{2x}{a}}\right)\Big|_0^a = \frac{\pi a^3}{4} (e^2 +$$

$+ 4 - e^{-2})$. **72.** Шар секторининг ҳажми: $V = \frac{2}{3} \pi R^2 H$ (54-чизма). Кўрсатма: шар секторининг ҳажми конус ва шар сегментининг ҳажмлари йиғиндисидан иборат. Агар H — сегмент баландлиги, R — шар радиуси бўлса, конус баландлиги $R - H$ ва асосининг радиуси сегмент радиусига тенг бўлади. **73.** Айлана тенгламаси $x^2 + (y - b)^2 = r^2$ дан иккита ярим айланалар тенгламаларини топамиз: $y_1 = b - \sqrt{r^2 - x^2}$; $y_2 = b + \sqrt{r^2 - x^2}$. Тор ҳажми икки жисм ҳажмларининг айирмаси бўлади. Бу жисмларнинг бири таш-



54- чизма.



55- чизма

қи ярим доира айланишидан ҳосил бўлади, иккинчиси — ички доира айланишидан. Шунинг учун: $V = \pi \int\limits_{-r}^{r} (y_2^2 - y_1^2)\, dx = 2\pi \int\limits_0^r (b + \sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx - 2\pi \int\limits_0^r (b - \sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx = 8\pi b \int\limits_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\; dx =$

$$= \left\| \begin{array}{ll} x = r\sin t & \begin{array}{c|cc} x & 0 & r \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{2} \end{array} \\ dx = r\cos t\, dt & \end{array} \right\| = 8\pi b r^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt =$$

$= 8\pi b r^2 \left. \dfrac{t - \sin t \cos t}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi r^2 b$. Тор ҳажми: $V = 2\pi r^2 b$. **74** $V = \dfrac{\pi H}{6}\left(3r_1^2 + 3r_2^2 + H^2\right)$ (55- чизма). Кўрсатма: шар қатламини ҳосил қилиш учун доиранинг $NABM$ бўлаги диаметр атрофида айлантирилади. Агар ҳосил бўладиган доиралар радиусларини $0 < r_1 < r_2 < R$ десак, марказдан биринчи доирагача бўлган масофа h, иккинчисигача масофа $h + H$ бўлса, у ҳолда $V = \pi \int\limits_h^{h+H} (R^2 - x^2) dx$ бўлади. **75**. $S = 2\pi \int\limits_a^b y \sqrt{1 + y'^2}\, dx$ формуладан фойдаланамиз. $y = \sin x$; $y' = \cos x$; $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. $S = 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx =$

$$= \left\| \begin{array}{ll} t = \cos x & \begin{array}{c|cc} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 1 & 0 \end{array} \\ dt = -\sin x dx & \end{array} \right\| = -2\pi \int\limits_1^0 \sqrt{1 + t^2}\, dt = 2\pi \int\limits_0^1 \sqrt{1 + t^2} dt =$$

$= \pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$. Бунда $\int \sqrt{1 + x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{1 + x^2}}{2} + \frac{1}{2} \ln x + \sqrt{1 + x^2}) + C$ формуладан фойдаландик. **76.** $\pi(\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{5} - 1)}{2}$. **77.** $y = 2 \operatorname{ch} \frac{x}{2}$; $y' = \operatorname{sh} \frac{x}{2}$; $0 \leqslant x \leqslant 2$. $S = 2\pi \int_0^2 2 \operatorname{ch} \frac{x}{2} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}\, dx = 8\pi \int_0^2 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}\, d\left(\operatorname{sh} \frac{x}{2}\right)$, Бу мисолни ечишда ҳам $\int \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{x\sqrt{1 + x^2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln (x + \sqrt{1 + x^2}) + C$ дан фойдаланамиз. $S = 4\pi \ldots \left(\operatorname{sh} \frac{x}{2} \times \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}} + \ln\left(\operatorname{sh} \frac{x}{2} + \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}\right)\right)\Bigg|_0^2 = 4\pi\left(\operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2} + \ln\left(\operatorname{sh} \frac{x}{2} + \operatorname{ch} \frac{x}{2}\right)\right)\Bigg|_0^2 = 4\pi\left(\frac{e - e^{-1}}{2} \cdot \frac{e + e^{-1}}{2} + \ln\left(\frac{e \quad e^{-1}}{2} + \frac{e + e^{-1}}{2}\right)\right) = \pi(e^2 + 4 + e^{-2})$. **78.** $\frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1)$. **79.** $y = x^3$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y' = 3x^2$. $S = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\, dx = \frac{2\pi}{36} \int_0^1 (1 + 9x^4)^{\frac{1}{2}} d(1 + 9x^4) = \frac{\pi}{18} \cdot \frac{2}{3} (1 + 9x^4)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10} - 1)$. **80.** $2\pi rh$. **81.** $y = \sqrt{R^2 - x^2}$; $-R \leqslant x \leqslant R$; $1 + y'^2 = \frac{R^2}{R^2 - x^2}$. $S = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 2\pi Rx \Big|_{-R}^{R} = 4\pi R^2$. Демак, сфера сиртининг юзи $S = 4\pi R^2$ га тенг. 82. $\frac{32}{5}\pi a^2$. **83.** $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $(-a \leqslant x \leqslant a)$ бу эллипснинг юқори ярим қисми.

$y' = -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. $\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}$. $S = 2\pi \int_{-a}^{a} \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\, dx = \frac{4\pi b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2}\, dx$.

Бунда $\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \frac{c}{a}$ эллипснинг эксцентриситети.

$$\int_0^a \sqrt{a^2-(\varepsilon x)^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right).\ S=2\pi ab\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}+\right.$$

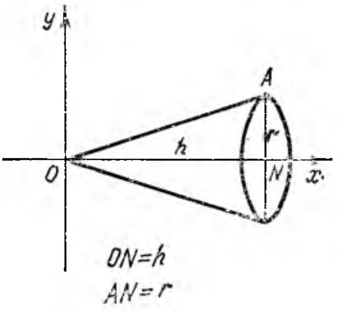
$$\left.+\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right).$$ 84. $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$.

85. $$S=2\pi\int_0^{2\pi} y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\times$$

$$\times dt=2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\times$$

$$\times\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=$$

$$=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt=16\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\times$$



56- чизма.

$$\times\, d\left(\frac{t}{2}\right)=-16\pi a^2\int_0^{\pi}(1-\cos^2 z)d(\cos z)=16\pi a^2\left(\cos z-\frac{\cos^3 z}{3}\right)\Bigg|_{\pi}^{0}=$$

$=\frac{64}{3}\pi a^2$. 86. $S=2\pi r\sqrt{h^2+r^2}$. Кўрсатма (56- чизма): (0; 0) ва $A(h;\ r)$ нуқталар орқали ўтган тўғри чизиқ кесмасини Ox ўқи атрофида айлантиришдан конус сирти ҳосил бўлади. 87. $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t. \end{cases}$

$$\begin{matrix} x'=-3a\cos^2 t\sin t, \\ y'=3a\sin^2 t\cos t, \end{matrix}\quad S=2\pi\int_0^{\pi} a\sin^3 t\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=$$

$$=12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\,dt=\frac{12}{5}\pi a^2.$$ 88. $S=4\pi R^2$. 89. $\begin{cases} x=r\cos t, \\ y=r\sin t. \end{cases}$

$$\begin{matrix} x'=-r\sin t, \\ y'=r\cos t. \end{matrix}\quad S_x=2\pi\int_0^{\pi} r\sin t\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,dt=$$

$=2\pi r^2\int_0^{\pi}\sin t\,dt=4\pi r^2$. 90. $S=2\pi RH$. Кўрсатма: сферик камар баландлиги H, марказдан доиралар a ва $a+H$ масофада бўлсин. $x^2+y^2=R^2$ дан ёй дифференциали $dl=\frac{Rdx}{y}$ ҳисобланади, интеграллаш чегараси $[a;\ a+H]$ да бўлади. 91. $x^2+(y-b)^2=$ $=a^2(b>a)$ айлана нуқталари $y=b$ га нисбатан симметрик жойлашган. Ташқи ярим айлана $y_2=b+\sqrt{a^2-x^2}$ ва ички ярим айлана $y_1=b-\sqrt{a^2-x^2}$ биргаликда Ox ўқи атрофида айлантирилиб, тор сиртини ҳосил қилинилади. $S = 2\pi\int\limits_{-a}^{a}\Big((b+\sqrt{a^2-x^2})\times$

$$\times\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}+(b-\sqrt{a^2-x^2})\sqrt{1+\frac{x^2}{a^3-x^2}}\Big)\,dx =$$

$= 4\pi ab\int\limits_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 8\pi ab\arcsin\frac{x}{a}\Big|_{0}^{a} = 4\pi a^2b$. **92.** $S = 2\pi RH$. К ў р с а т м а: баландлиги H бўлган сферик сегмент $x^2+y^2=R^2$ айлана ёйини Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлади. Ёй дифференциали $dl = \frac{Rdx}{y}$, интеграллаш $R-H$ дан R гача. **93.** $y =$

$$= \cos x,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.\ M_x = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx =$$

$$= \left\|\begin{array}{ll|cc} t = \sin x, & x & -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ \hline dt = \cos x\,dx, & t & -1 & 1\end{array}\right\| = \int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{t\sqrt{1+t^2}}{2}\Big|_{-1}^{1} +$$

$+\frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2})\Big|_{-1}^{1} = \sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$. **94.** $M\left(0;\ \frac{\pi}{8}\right)$.

95. Ярим айлана Oy га нисбатан симметрик жойлашганлиги туфайли $\overline{x} = 0$ бўлади. Ярим айлана узунлиги $L = \pi a$. $\overline{y} = \frac{1}{L}\int\limits_{-a}^{a} y\,dl =$

$= \frac{1}{\pi a}\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}.\ \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx = \frac{2a}{\pi}$. Демак, $\overline{x} = 0$, $\overline{y} =$

$= \frac{2a}{\pi}$. **96.** $M_x = \frac{b^2}{2}+\frac{a^2b}{2\sqrt{a^2+b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

97. Маълумки, $\overline{x} = \frac{1}{S}\int\limits_{a}^{b} xy\,dx$; $\overline{y} = \frac{1}{S}\int\limits_{a}^{b} y^2dx$. $x^2+y^2=a^2$; $y =$

$= \sqrt{a^2-x^2}$; $S = \pi a^2$. $\overline{x} = \frac{1}{\pi a^2}\int\limits_{-a}^{a} x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{2\pi a^2}\int\limits_{-a}^{a}(a^2-$

$-x^2)^{\frac{1}{2}}\,d\,(a^2-x^2) = -\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3\pi a^2}\Big|_{-a}^{a} = 0$. $\overline{y} = \frac{1}{\pi a^2}\int\limits_{-a}^{a}(a^2-$

$-x^2)dx = \frac{1}{\pi}x\Big|_{-a}^{a} - \frac{x^3}{3\pi a^2}\Big|_{-a}^{a} = \frac{4a}{3\pi}$. Демак, $\overline{x} = 0$, $\overline{y} = \frac{4a}{3\pi}$. **98.** $M\left(\frac{4a}{3\pi};\right.$ $\left.\frac{4b}{3\pi}\right)$. **99.** $M_x = \int\limits_{a}^{b} y\,dl = \int\limits_{a}^{b} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$; $y \geqslant 0$, $y =$

$= \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$ $dl = \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{a\sqrt{a^2 - b^2}};$ $M_x = \int\limits_{-a}^{a} y\,dl = \frac{b}{a^2}\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}\,dx.$ Маълумки, $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + C.$ Шунинг учун $M_x = \frac{b}{a^2\sqrt{a^2 - b^2}} \times \int\limits_{-a}^{a} \frac{d(\sqrt{a^2 - b^2}x)}{\sqrt{(a^2)^2 - (\sqrt{a^2 - b^2}x)^2}} = \frac{b}{a^2\sqrt{a^2 - b^2}}\left(\frac{a^4}{2}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}x}{a^2} + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}x\sqrt{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}}{2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} + b^2.$ **100.** $M\left(\frac{29}{5}; \frac{29}{5}\right).$ **101.** Циклоиданинг биринчи аркаси $x = \pi a$ тўғри чизиққа нисбатан симметрикдир, шунинг учун $\bar{x} = \pi a$ бўлади. $\bar{y} = \frac{1}{2S}\int\limits_{0}^{2\pi a} y^2dx = \frac{1}{6\pi a^2}\int\limits_{0}^{2\pi} a^3(1 - \cos t)^3\,dt = \frac{a}{6\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\,dt = \frac{5}{6}a.$ Демак, $\bar{x} = \pi a,$ $\bar{y} = \frac{5a}{6}.$ **102.** $V = 2\pi^2a^2b.$ **103.** Қутб нуқтаси кардиоиданинг қайтиш нуқтаси бўлиб, бу нуқта кардиоидани симметрик жойлашган икки бўлакка бўлади. $\rho = a(1 + \cos\varphi),$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi),$ $x = \rho\cos\varphi,$ $y = \rho\sin\varphi$ деб олсак, кардиоиданинг параметрик тенгламалари ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} x = a(1 + \cos\varphi)\cos\varphi, \\ y = a(1 + \cos\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

Маълумки, кардиоиданинг бутун узунлиги $8a$ га тенг. $\bar{x} = \frac{1}{4a}\int\limits_{0}^{\pi} a\sin\varphi(1+\cos\varphi)dl;$ $dl = \sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\varphi = a\sqrt{(1+\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}d\varphi =$

$$= 2a\cos\frac{\varphi}{2}.\ \bar{x} = \frac{1}{4a}\int\limits_{0}^{\pi} a\sin\varphi(1 + \cos\varphi)\,2a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$= \frac{a}{2}\int\limits_{0}^{\pi} \sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}(1 + \cos\varphi)\,d\varphi = \frac{4a}{5}.$ $\bar{y} = \frac{4a}{5}$ худди шу усулда топилади. Демак, $\bar{x} = \bar{y} = \frac{4a}{5}.$ **104.** $M\left(0; \frac{4r}{3\pi}\right).$ **105.** Маълумки, ярим айлананинг узунлиги $L = \pi R,$ ярим айлананинг оғирлик маркази ординатаси $\bar{y} = \frac{2R}{\pi}.$ Гюльденнинг 1- теоремасига кўра $S = 2\pi\bar{y} \times$

$\times L = 2\pi\cdot\frac{2R}{\pi}\pi R = 4\pi R^2$. **106.** Конус ҳажми $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, ён сирти $S = \pi r l$. Кўрсатма: конус ҳосил қилиш учун узунлиги l бўлган гипотенузани h узунликдаги катет атрофида айлантириш лозим. Гипотенузанинг оғирлик маркази унинг ўртасида ва айланиш ўқидан $\frac{r}{2}$ масофада жойлашган бўлади. S ни топишда Гюльдениннг 1-теоремасидан, V ни топишда 2-теоремасидан фойдаланилади. V ни топишда $S_{\Delta} = \frac{1}{2}hr$ ва оғирлик маркази медианалар кесишган нуқтада, яъни $\bar{x} = \frac{r}{3}$ бўлади. **107.** $\int\limits_2^N \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}} =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_2^N (x^2-3)^{-\frac{3}{2}} d(x^2-3) = \frac{1}{2}\left.\frac{(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right|_2^N = -\left.\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}\right|_2^N =$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{N^2-3}}.\ \lim_{N\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{N^2-3}}\right) = 1 < +\infty.$$

Демак, хосмас интеграл яқинлашувчи ва $\int\limits_2^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}} = 1$. **108.** Узоқлашувчи.

109. $\int\limits_0^N \sin xdx = -\cos x\Big|_0^N = 1 - \cos N$. $\lim\limits_{N\to+\infty}\cos N$ мавжуд эмас, демак, $\int\limits_0^{+\infty}\sin xdx$ узоқлашувчидир. **110.** Яқинлашувчи, $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = 1$.

111. $\int\limits_a^N \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} N - \operatorname{arctg} a$ $\lim\limits_{N\to+\infty}(\operatorname{arctg} N - \operatorname{arctg} a) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a < +\infty$. Демак, $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a$. **112.** Узоқлашувчи. **113.** $\int\limits_1^N \frac{dx}{x+x^3} = \int\limits_1^N \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int\limits_1^N \frac{dx}{x} - \int\limits_1^N \frac{xdx}{1+x^2} = \ln N -$

$$- \ln(1+N^2)^{\frac{1}{2}} = \ln\frac{N}{\sqrt{1+N^2}}.\ \lim_{N\to+\infty}\ln\frac{N}{\sqrt{1+N^2}} = \ln\lim_{N\to+\infty}\frac{N}{\sqrt{1+N^2}} =$$

$= \ln 1 = 0 < +\infty$. Демак, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x+x^3} = 0$. **114.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = 2$. **115.** Таърифга кўра: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{N\to+\infty} \int\limits_1^N x^{-p}\,dx = \lim\limits_{N\to+\infty} \frac{N^{1-p}-1}{1-p}$. Агар $p > 1$ бўлса, $\lim\limits_{N\to+\infty} N^{1-p} = 0$, демак, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ — яқинлашувчи; агар $p < 1$ бўлса, $\lim\limits_{N\to+\infty} N^{1-p} = \infty$, демак, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ узоқлашувчи. $p = 1$ да ҳам интеграл узоқлашувчи бўлади. **116.** $p > 0$ да яқинлашувчи, $p < 0$ да узоқлашувчидир. **117.** Солиштириш аломатидан фойдаланамиз. $f(x) = \frac{1}{1+x^8}$, $\varphi(x) = \frac{1}{x^8}$, $x \in [1;\ +\infty[$ да $0 < f(x) < \varphi(x)$. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^8}$ — яқинлашувчи (115-мисолдаги $p = 8 > 1$). Шунинг учун $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^8}$ ҳам яқинлашувчи бўлади. **118.** Яқинлашувчи. **Кўрсатма:** $(x-1)^2 \geqslant 0$; $-x^2 \leqslant -2x+1$, $e > 1$, $e^{-x^2} \leqslant e^{-2x+1} \leqslant e \times \times e^{-2x}$. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ яқинлашувчи (115-мисолдаги $p = 2 > 1$). **119.**

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} = \lim_{N\to+\infty} \int\limits_1^N \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx. \quad \int\limits_1^N \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x, & dv = \frac{dx}{x^2} \\ du = \frac{dx}{1+x^2}, & v = -\frac{1}{x} \end{matrix} \right\| = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\Bigg|_1^N + \int\limits_1^N \frac{dx}{x(1+x^2)} =$$

$$= -\frac{\operatorname{arctg} N}{N} + \operatorname{arctg} 1 + \left(\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\Bigg|_1^N = \frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2} -$$

$$-\frac{\operatorname{arctg} N}{N} + \ln\frac{N}{\sqrt{1+N^2}}.$$ $N \to +\infty$ да $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} +$

$+ \ln \sqrt{2}$ бўлади. Демак, яқинлашувчи. **120.** Яқинлашувчи **121.** $|\sin x| \leqslant 1$. Шунинг учун $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ — яқинлашувчи, демак, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\, dx$ ҳам яқинлашувчи. **122.** Яқинлашувчи. **123.** Таърифга кўра, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to0+} \int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to0+} \ln|x|\Big|_\varepsilon^1 = +\infty$, демак, интеграл узоқлашувчидир. **124.** $\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$. **125.** Таърифга кўра: $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{\varepsilon\to0-} \int\limits_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \lim\limits_{\delta\to0+} \int\limits_\delta^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 0$. Демак, $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 0$. **126.** Яқинлашувчи, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$. **127.** Маълумки, $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \lim\limits_{\varepsilon\to0+} \int\limits_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \lim\limits_{\varepsilon\to0+} \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\Bigg|_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} = \ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} - \lim\limits_{\varepsilon\to0+} \ln \operatorname{tg}\varepsilon = \infty$. **128.** Яқинлашувчи, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2$.

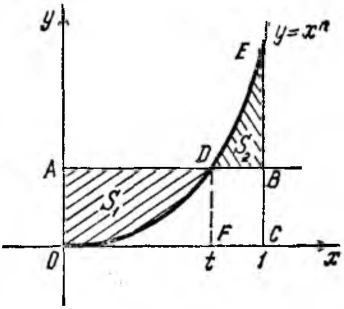
129. 2 га кўра $b = 0$, $a = 3$ деб олинса, $\lim\limits_{x\to0} f(x)\cdot x^3 = \lim\limits_{x\to0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$, демак, $\int\limits_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$ яқинлашувчи. $\int x^{-3} e^{\frac{1}{x}} dx = \left\| t = \frac{1}{x}, \right.$

$$dt = -\frac{dx}{x^2}\,\Big\| = -\int te^t dt = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} + C. \int\limits_{-1}^0 x^{-3} e^{\frac{1}{x}} dx =$$

$= \lim\limits_{\varepsilon\to0} \int\limits_{-1}^{-\varepsilon} \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^3} = -\frac{2}{e}$. **130.** Узоқлашувчи. **131.** $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} =$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{1+\varepsilon}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{\ln x}\,\Big|_{1+\varepsilon}^{e} = 2 < +\infty.$$ **132.** Яқинлашувчи. Кўрсатма: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+4x^3}$ билан $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ни солиштириш керак. **133.** $S = \ln\frac{2^{16}}{3^3 e^{3/2}}$. Кўрсатма: $x = e^{2y} - 2e^{y}$ тескари функцияга ўтиш керак. **134.** $k = 3$ да $\frac{\pi a^2}{4}$. **135.** $S = 2a^2(\pi - 2)$. Кўрсатма: сирт элементининг юзини топмоқ керак. **136.** $V = \frac{16}{3}a^3$. **137.** $V = \frac{1}{3}\pi abh$. **138.** $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. **140.** $S = \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}$. **141.** $V = \frac{8}{3}\pi a^3$. **142.** $S = \ln\frac{39}{32}$. **143.** $y = x + 4$. **144.** $t = \frac{1}{2}$. Кўрсатма: (57-чизма). $S_1 = S_{OADF} - S_{ODF}$, $S_2 = S_{FDEC} - S_{FDBC}$; $B(1;\ t^n)$, $E(1;\ 1)$, $F(0;\ t^n)$. **145.** $t = \frac{a+b}{2}$. Кўрсатма: 57-чизмага каранг. $S_1(t) = (t-a)f(t) - \int\limits_a^t f(x)\,dx$, $S_2(t) = \int\limits_1^b f(x)dx - (b-t)f(t)$. $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$; $S'(t) = (2t - a - b)f'(t)$. $S'(t) = 0$ дан: $t = \frac{a+b}{2}$.



57- чизма.

VIII БОБ

1. $a_n = \frac{3^n}{n!}$; $a_1 = 3$, $a_2 = \frac{9}{2}$, $a_3 = \frac{27}{6}$. **2.** $a_1 = \frac{1}{4}$; $a_2 = \frac{2}{12}$; $a_3 = \frac{3}{32}$. **3.** $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$; $(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdot\cdot\cdot 2n$; $(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdot\cdot\cdot(2n-1)$ деб олинган. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}$; $a_3 =$

$= \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}$. **4.** $\frac{1}{5}, \frac{3}{17}, \frac{5}{37}$. **5.** $a_n = \frac{1}{2^n + n}$. **6.** $a_n = \frac{n^2}{n!}$. **7.** $a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. **8.** $a_n = \frac{n}{3n-1}$. **9.** Мисолдаги қатор геометрик прогрессиядир: $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{3}$. Шунинг учун $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{3}{2}$. **10.** $S = \frac{3}{4}$. **11.** $a_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \ldots$, $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$; $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$. **12.** $S = \frac{1}{2}$. **13.** $a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1;^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$ бўлгани учун, $S_n = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)}$. $S = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1$. **14.** $\frac{1}{4}$. Кўрсатма. $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B+C}{n+1n+2}$; $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$, $C = \frac{1}{2}$. $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$; $S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$; $S = \frac{1}{4}$. **15.** $a_n = 0{,}5 + (0{,}1)^n$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(0{,}5 + (0{,}1)^n) = 0{,}5 \neq 0$, демак, қатор узоқлашувчи. **16.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. **17.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+4} = \frac{1}{2} \neq 0$, демак, қатор узоқлашувчи. **18.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$. **19.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e \neq 0$. **20.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e \neq 0$. **21.** Берилган қаторни $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ геометрик прогрессиядан тузилган қатор билан солиштирамиз. $\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$. Геометрик қаторда $q = \frac{1}{2} < 1$ бўлгани учун яқинлашувчи, солиштириш аломатига кўра берилган қатор ҳам яқинлашувчидир. **22.** Узоқлашувчи. **23.** Узоқлашувчи. Кўрсатма. Гармоник қатор билан солиштиринг. **24.** Яқинлашувчи. **25.** $a_n = \frac{\sin^2 n\alpha}{n^3} \leqslant \frac{1}{n^3} = b_n$, чунки $\sin^2 n\alpha < 1$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. яқинлашувчидир. Шунинг учун $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\,\alpha}{n^3}$ яқинлашувчи **26.** Яқинлашувчи. **27.** Яқинлашувчи: $l = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} =$

$= \frac{1}{2} < 1$. **28.** Яқинлашувчи. **29.** Яқинлашувчи: $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1.$$ **30.** Яқинлашувчи. **31.** $a_n = \frac{1}{n^2}$; $a_{n+1} =$

$$= \frac{1}{(n+1)^2};\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2};\ l = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} =$$

$= 1$; $l = 1$, демак Даламбер аломати жавоб беролмайди. 2-солиштирнш аломатидан фойдалансак: $a_n = \frac{1}{n^2}$; $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ яқинлашувчи қатор (1- мисолга қаранг), демак, берилган қатор яқинлашувчи. **32.** Яқинлашувчи. **33.** Яқинлашувчи. $a_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$; $a_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$; $l = \frac{1}{2} < 1$. **34.** Яқинлашувчи. Даламбер аломатида $l = 1$, Раабе аломатидан фойдаланиш керак. **35.** Узоқлашувчи. $a_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$; $f(x) =$

$$= \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}.\ \int_1^n \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \ln\ln(x+1)\Big|_1^n = \ln\ln(n+1) -$$

$-\ln\ln 2$; $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$ — узоқлашувчи. **36.** Яқинлашувчи. **37.** $a_n = \frac{1}{n^p}$; $f(x) = \frac{1}{x^p}$.

$$I = \int_1^n \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p}\frac{1}{x^{p-1}}\Big|_1^n = \frac{1}{(1-p)n^{p-1}} - \frac{1}{1-p} \to \frac{1}{p-1}, & \text{агар } p > 1 \text{ бўлса,} \\ \ln|x|\Big|_1^n = \ln n \to \infty, & \text{агар } p = 1 \text{ бўлса,} \\ \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^n = \frac{1}{1-p}(n^{1-p} - 1) \to \infty, & \text{агар } 0 < p < 1 \text{ бўлса,} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0, & \text{агар } p \leqslant 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Демак, $p > 1$ да қатор яқинлашувчи. **38.** Узоқлашувчи. **39.** Яқинлашувчи. $a_n = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}$; $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$. $\int\limits_1^n \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\,dx =$

$$=\int_2^{n+1}\frac{\ln x}{x^2}dx=\left\|\begin{matrix} u=\ln x, & dv=\frac{dx}{x^2}\\ du=\frac{dx}{x}, & v=-\frac{1}{x}\end{matrix}\right\|=-\frac{\ln x}{x}\Big|_2^{n+1}+\int_2^{n+1}\frac{dx}{x^2}=$$

$$=-\frac{\ln(n+1)}{n+1}-\frac{1}{n+1}+\frac{\ln 2}{2};\ \lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}dx=\frac{1}{2}(\ln 2+1).$$

40. Узоқлашувчи. **41** Абсолют яқинлашувчи. $1+\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}+\dots$ қаторни текширамиз. $a_n=\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}=\frac{1}{n^{4/3}}$; $p=\frac{4}{3}>1$, демак, бу қатор яқинлашувчи (37-мисолга қаранг). **42.** Абсолют яқинлашувчи. **43.** $\frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots\right)$, **қавс ичидаги қатор яқинлашувчи,** лекин унинг ҳадлари модулларидан тузилган қатор гармоник қатор бўлгани сабабли, узоқлашувчидир. Шунинг учун берилган қатор шартли яқинлашувчидир. **44.** Шартли яқинлашувчи. **45.** Мусбат ҳадли қатор $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n\alpha|}{2^n}$ ни $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ билан солиштирамиз: $|\cos n\alpha|\leqslant 1$; $\frac{|\cos n\alpha|}{2^n}\leqslant\frac{1}{2n}$. Шунинг учун берилган қатор абсолют яқинлашувчидир. **46.** Узоқлашувчи. **47.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ узоқлашувчи лекин $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ яқинлашувчидир, чунки Лейбниц аломатидаги шартлар қаноатлантирилади: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$. Буни Лопиталь қоидаси асосида текширса бўлади. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$. Демак, берилган қатор шартли яқинлашувчи. **48.** Шартли яқинлашувчи. **49.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ — геометрик прогрессия, $q=\frac{1}{2}<1$. Берилган қатор абсолют яқинлашувчи. 50. $p>1$ да абсолют яқинлашувчи, $0<p\leqslant 1$ да шартли яқинлашувчи. 51. Бу қатордаги мусбат ҳадларни алоҳида, манфий ҳадларни алоҳида олиб қарасак, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots$ ва $-\frac{1}{3}-\frac{1}{3^3}-\frac{1}{3^5}-\dots$, иккита яқин-

лашувчи қатор ҳосил бўлади. Берилган қатор абсолют яқинлашувчи. Бу қаторга Лейбниц аломатини қўлланиб бўлмайди, монотонлик шарти бажарилмайди: $1 > \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, $\ldots$. **52.** Узоқлашувчи.

53. $a_n \to 0$, лекин монотонлик шарти ўринли эмас: $1 > \frac{1}{2^3} > \frac{1}{3^4}$; $\frac{1}{3^4} < \frac{1}{4^3}$; $\ldots$; $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^4} + \ldots$ қатор яқинлашувчи, чунки бу қаторни $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ билан солиштирганда, берилган қаторнинг ҳар бир ҳади $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ қаторнинг мос ҳадларидан катта эмас. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ яқинлашувчи қатор. Шунинг учун берилган қатор абсолют яқинлашувчи. Бу мисолдан Лейбниц аломатининг ишора алмашинувчи қатор яқинлашиши учун зарурий эмас, балки етарлилиги маълум бўлади, яъни ишора алмашинувчи қаторда $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ шарт бажарилиб, монотонлик бўлмаганда ҳам қатор яқинлашувчи бўлиши мумкин. **54.** Узоқлашувчи. **55.** $S = 0{,}95$, $a_5 = \frac{1}{5^4} < 0{,}01$. Демак, қаторнинг биринчи 4 ҳад йиғиндиси олинса, хатолик 0,01 дан кичик бўлади. **56.** $S \approx -0{,}41$. **57.** $a_1 = 0{,}333$, $a_2 = -0{,}111$, $a_3 = 0{,}037$; $a_4 = -0{,}0123$; $a_5 = 0{,}004$; $S \approx 0{,}25$. **58.** 0,84. **59.** $\frac{\ln 2}{2}$. **60** $\ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3$.

61. Кўрсатма: қатор ишора алмашинувчи ва узоқлашувчи, чунки $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, лекин монотонлик бажарилмайди: $\frac{1}{\sqrt{2} - 1} > \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$; $\frac{1}{\sqrt{2} + 1} < \frac{1}{\sqrt{3} - 1}$ ва шунга ўхшаш. 53- мисолда айтилганидек, бунда қатор яқинлашувчи ҳам бўлиши мумкин. Лекин

$$S_{2m} = \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{1}{\sqrt{n} - 1} - \frac{1}{\sqrt{n} + 1} \right) = \sum_{n=2}^{m+1} \frac{2}{n - 1} = 2 \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}$$

бу гармоник қаторнинг хусусий йиғиндисидир. **62.** $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$ узоқлашувчи. **63.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \ldots$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} -$

$$-\frac{1}{120}+\ldots;\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1+(-1+1)+\left(\frac{1}{2}-1+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)+\ldots=1.\ 64.\ \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\right)^2=1+$$

$$+(1+1)+\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\right)+\left(\frac{1}{120}+\frac{1}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}\right)+\ldots=1+2+2+$$

$$+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{15}+\ldots=1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\frac{2^5}{5!}+\ldots=$$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$. **65.** Узоқлашувчи. **67.** Узоқлашувчи.

IX БОБ

1. $x=0$, чунки $x\neq 0$ да $\lim\limits_{n\to\infty} n!\ x^n\neq 0$. **2.** $]-\infty;\ -1[\cup]\ 1;\ +\infty[$. **3.** Махражи $q=\dfrac{x+2}{x+3}$ дан иборат бўлган геометрик прогрессиядан тузилган қатор берилган. $\left|\dfrac{x+2}{x+3}\right|<1$ бўлганда, қатор яқинлашувчи бўлади. $x+3>0$ да $-x-3<x+2<x+3$, яъни,

$$\begin{cases}-x-3<x+2,\\ x+2<x+3.\end{cases}\qquad \begin{cases}2x+5>0,\\ x+3>0\end{cases}$$

яқинлашиш соҳаси: $x>-\dfrac{5}{2}$. **4.** $]-\infty;\ -1\ [\cup]\ 1;\ +\infty\ [$. 5. $x>1$.

6. $x\geqslant-\dfrac{1}{2}$. 7. $|\cos n^2x|\leqslant 1$; $|a^n\cos n^2x|\leqslant|a^n|$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a^n|$ қатор, геометрик қатор бўлиб, $|a|<1$ учун яқинлашувчидир. Шунинг учун $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^n\cos n^2x$ барча ҳақиқий сонлар тўпламида текис яқинлашувчидир. 8. Текис яқинлашувчи. 9. $a_n=\dfrac{1}{x^{2n}+n}<\dfrac{1}{x^{2n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^{2n}}$ — геометрик прогрессиядан тузилган қатор, $\dfrac{1}{x^2}<1$ да

яқинлашувчи, демак, $x^2 > 1$ да ёки $]-\infty; -1] \cup [1 + \infty[$ да қатор текис яқинлашувчи. **11.** $|\sin^n 2x| \leqslant 1$, $\forall x \in R$ учун $\left|\frac{\sin^n 2x}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ яқинлашувчи. Демак, R да берилган қатор текис яқинлашувчи. **12.** R да текис яқинлашувчи. **13.** Ҳадлаб интеграллаш мумкин, чунки $a_n = \frac{\cos^n x}{n!}$ узлуксиз функция. $|\cos^n x| \leqslant 1$ дан $\left|\frac{\cos^n x}{n!}\right| \leqslant \frac{1}{n!}$ бўлиб, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ яқинлашувчидир. Демак, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n x}{n!}$ қатор $[u; b]$ да текис яқинлашувчи бўлади. **14.** Мумкин. **15.** $u_n = \frac{x^n}{2^n(1 + x^{2n})}$ узлуксиз функция. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(1 + x^{2n})}$ қатор эса текис яқинлашувчи. Демак, $S(x)$ узлуксиз функция. **16.** Узлуксиз. **17.** $a_n = (-1)^{n+1} 3^n x$, $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|3^n|}} = \frac{1}{3}$. $x = -\frac{1}{3}$ ва $x = \frac{1}{3}$ да қатор узоқлашувчи, шунинг учун яқинлашиш соҳаси $\left]-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right[$.
18. $R = \frac{1}{5}$; $\left]-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right[$. **19.** $R=0$; $a_n = n!$; $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. **20.** $R = 1$, $[-6; -4]$. **21.** $a_n = 10^{2n}(2x-3)^{2n-1}$; $a_{n+1} = 10^{2n+2} \cdot (2x-3)^{2n+1}$. Даламбер аломатидан: $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 10^2(2x-3)^2$, $100(2x-3)^2 < 1$; $1{,}45 < x < 1{,}55$. Демак, $]1{,}45, 1{,}55[$. **22.** $]-\infty; +\infty[$. **23.** Бу мисолда $y = x^2$ деб олсак, берилган қатор $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-2)^n y^n$ кўринишга келади ва $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-2)^n|}} = \frac{1}{2}$. $-\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}$; $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$. **24.** $]-\infty; +\infty[$. **25.** $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ (*)($|x| < 1$) қаторни ҳадлаб дифференциаллаш натижасида берилган қатор ҳосил бўлади. (*) қатор геометрик прогрессиядир, унинг йиғиндиси $\frac{1}{1-x}$ га тенг ва $[0; x] \subset]-1; 1[$ да текис яқинлашувчи. Ҳадлаб дифференциалласак, $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$.

ҳосил бўлади. **26.** $\frac{x^2}{1-x}$. **27.** $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{1}{1-x}$ ни ҳадлаб дифференциалланилса, $\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$; иккинчи марта дифференциалланилса, $\frac{1}{(1-x)^3}=1\cdot2+2\cdot3x+3\cdot4x^2+$ $+\ldots+(n-1)nx^{n-2}+\ldots$ ҳосил бўлади. **28.** $-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$. **29.** Агар $\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}+\ldots$, $(|x|<1)$ қаторни ҳадлаб интегралласак $\ln\frac{1+x}{1-x}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots$ бўлади. **30.** $[0;\ 1]$ да яқинлашувчи, $s(x)=0$, $x<1$ да; $s(1)=1$. **31.** $e^x=1+\frac{x}{1!}+$ $+\frac{x^2}{2!}+\ldots$; $(x\in\,]-\infty,\ +\infty[)$. x ни $-x^2$ га алмаштирамиз. $e^{-x^2}=$ $=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots$; $(x\in\,]-\infty;\ +\infty[)$. **32.** $1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots$ **33.** $1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\ldots$, чунки $e^x-1=\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots$. **34.** $1+\frac{1}{2}\times$ $\times\frac{x^2}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^4}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^6}{7}+\ldots+\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n}}{2n+1}+\ldots$.

35. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots$; $(x\in\,]-1;\ 1])$. x ни $x-1$ га алмаштирсак, $\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots$; $(x\in\,]0;\ 2])$. **36.** $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$; бунда x ни $x+4$ билан алмаштирамиз. $e^{x+4}=1+\frac{x+4}{1!}+\frac{(x+4)^2}{2!}+\ldots+\frac{(x+4)^n}{n!}+\ldots$; $e^x=e^{-4}\left(1+\frac{x+4}{1!}+\frac{(x+4)^2}{2!}+\ldots+\frac{(x+4)^n}{n!}+\ldots\right)$. **37.** $-20-$ $-22(x+3)+31(x+3)^2+10(x+3)^3+(x+3)^4$. $x\in\,]-\infty\ \ +\infty[$.

38. $\frac{1}{x}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x-2}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{x+2}{4}+\frac{(x-2)^2}{8}+\ldots+(-1)^n\frac{n(x-2)^n}{2^{n+1}}+\ldots$.

39. Фараз қиламиз, $\sec x=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ бўлсин. $\sec x=$ $=\frac{1}{\cos x}$ дан $1=\sec x\cdot\cos x=(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots)\left(1-\frac{x^2}{2!}+\right.$

$+\frac{x^4}{4!}-\dots\Big)=a_0+a_1x+\left(a_2-\frac{a_0}{2}\right)x^2+\left(a_3-\frac{a_1}{2}\right)x^3+\left(\frac{a_0}{24}-\frac{a_2}{2}+\right.$ $\left.+a_4\right)x^4+\dots;$ $a_0=1,\ a_1=0,\ a_2=\frac{1}{2};\ a_3=0,\ a_4=\frac{5}{24},\dots$ келиб чиқади Демак, $\sec x=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+\dots;$ $\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right)$. **40.** $e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-\dots\right)$. **41.** $y=\operatorname{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$. $y'=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$. $y''=-\frac{8(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^3}$; $y'''=\frac{16(e^{2x}-4+e^{-2x})}{(e^x+e^{-x})^4}$; $\dots;$ $y(0)=0;$ $y^{\mathrm{I}}(0)=1;$ $y^{\mathrm{II}}(0)=0;$ $y^{\mathrm{III}}(0)=-2;$ $y^{\mathrm{IV}}(0)=0;\dots;$ $\operatorname{th}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+\dots$ $\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right)$. **42.** $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}-\dots$. **43.** $e^x\cdot\sin x=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots\right)=x+x^2+\frac{x^3}{3!}-\frac{4x^5}{5!}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n$. **44.** $\cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2}=1-x^2+\frac{x^4}{3}-\frac{2x^6}{5\cdot 3^2}+\dots=1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\frac{2^5}{6!}x^6+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$. **45.** $\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots;$ $x\in[-1;\,1]$. $(\operatorname{arctg}x)^2=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots\right)\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots\right)=x^2-\frac{2x^4}{3}+\frac{23}{5\cdot 9}x^6-\frac{44}{15\cdot 7}x^8+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2n-1}\right)\frac{x^{2n}}{n}$. **46.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n};$ $|x|<1$. **47.** Маълумки, $1+x+x^2+\dots+x^n+\dots=\frac{1}{1-x};$ $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\dots+(-1)^nx^n+\dots$ **48** $y=\ln x$ нинг ҳосилалари $x=0$ чекли эмас. **49.** $x=0$ да ҳосилалари мавжуд эмас. **50.** $x=0$ да ҳосилалари мавжуд эмас. **51.** $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots;$ $x=18^\circ=\frac{\pi}{10}\approx 0{,}3142;$ $\sin 18^\circ=\sin 0{,}3142=0{,}3142-\frac{0{,}3142^3}{3!}+\frac{0{,}3142^5}{5!}-\dots\approx$

$\approx 0{,}3142 - 0{,}051 = 0{,}3091$. Бунда хатолик $\dfrac{0{,}3142^5}{5!}$ дан кичик. **52.** 0,9998. **53.** $\sqrt[3]{30} = (3^3 + 3)^{\frac{1}{3}} = 3\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}} = 3\left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)}{2!} \cdot \frac{1}{9^2} + \ldots\right) = 3{,}1072$. **54.** 1,0192. **55.** $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \frac{x^3}{3!} + \ldots$; $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!\,2^2} + \frac{1}{3!\,2^3} + \ldots$; $\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{6!\,2^6} = 1 + 0{,}5 + 0{,}125 + 0{,}02083 + 0{,}00261 + 0{,}00026 + 0{,}00002 = 1{,}6487$. **56.** 0,6931. **57.** $\sqrt[3]{1{,}06} = \left(1 + \frac{3}{50}\right)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{50} - \dfrac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{50}\right)^2}{2!} + \ldots = 1{,}0196$. **58.** 3,1416. **59.** $\int\limits_0^1 e^{-t^2} dt = \int\limits_0^1 dt - \int\limits_0^1 t^2 dt + \frac{1}{2!} \int\limits_0^1 t^4 dt - \ldots = 0{,}747$. **60.** $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} \ldots$; $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 0{,}946$. **61.** $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$; $\int\limits_0^{0,5} \frac{e^x - 1}{x} dx = \int\limits_0^{0,5} dx + \frac{1}{2} \int\limits_0^{0,5} x dx + \frac{1}{6} \int\limits_0^{0,5} x^2 dx + \ldots = 0{,}5633$. **62.** 0,507.

63. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) - 2 - 2x - x^2}{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \ldots}{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{2}{3!} + \frac{2x}{4!} + \ldots}{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \ldots} = 2$. **64.** $\frac{1}{6}$. **65.** $y = 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{36} + \frac{x^4}{576} + \ldots$; $y' = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{192} + \ldots$; $y'' = \frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{64} + \ldots$ Тенгламани қаноатлантиради **67.** $y = \dfrac{x}{1 + x - 2x^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + 2x}\right) = \frac{1}{3}(1 + x + x^2 + \ldots) - \frac{1}{3}(1 -$

$-2x+4x^2+8x^3+\ldots)=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(1-(-2)^n)x^n; \quad x\in\left]-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right[.$

68. $x^x=1+(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2!}+\ldots$. **69.** $]-1;\ 1[$, агар $\gamma-\alpha-\beta>0$ бўлса, $x=-1$, $x=1$ да абсолют яқинлашувчи; $-1<\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$ да $x=-1$ нуқтада шартли яқинлашувчи ва $\gamma-\alpha-\beta<0$ бўлса, $x=1$ да узоқлашувчи бўлади. **70.** $\sqrt{1-x^2}=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\ldots$ ва $\sqrt{1-x^2}$. $\arcsin x=x-\frac{x^3}{3}-\frac{3}{10}x^5-\ldots$

71. $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{3\cdot 3}{5!}x^5-\frac{3\cdot 5^2}{7!}x^7+\frac{3\cdot 5^2\cdot 7^2}{9!}x^9-\ldots$. **72.** 0,4636.

X БОБ

1. Берилган қатор ҳадларининг ҳақиқий ва **мавҳум** қисмларидан тузилган қаторларнинг яқинлашишига қараймиз. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$ ва $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots$, булар геометрик прогрессиялардир. $q_1=\frac{1}{2}<1$, $q_2=\frac{1}{3}<1$. Шунинг учун ҳар иккала қатор яқинлашувчи $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$; $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$. Демак, берилган қатор ҳам яқинлашувчи ва йиғиндиси $S=2+\frac{3}{2}i$. **2.** Узоқлашувчи. **3.** $W_n=$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}+i}=\frac{\sqrt{n}-i}{(\sqrt{n}+i)(\sqrt{n}-i)}=\frac{\sqrt{n}-i}{n+1}=\frac{\sqrt{n}}{n+1}-\frac{i}{n+1}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ — узоқлашувчи, демак, берилган қатор ҳам узоқлашувчи.

4. Узоқлашувчи. **5.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n}$ ва $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ қаторларда $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$ бўлгани учун берилган қатор ҳам узоқлашувчи. **6.** Яқинлашувчи.

7. $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ дан $a_n=\frac{\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n}{(\sqrt{2})^n}=$ $=\frac{1}{2^{n/2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$. Маълумки, агар $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ яқинлашувчи бўлса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ ҳам яқинлашувчи бўлади. $|a_n|=\frac{1}{2^{n/2}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=$ $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n/2}}$ геометрик прогрессия, $q=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$. Шунинг учун берилган қатор яқинлашувчи. **8** Яқинлашувчи. **9** Шартли яқинлашувчи. **10**. Абсолют яқинлашувчи **11**. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^n$ қаторнинг $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z|^n$ ҳадлари модулларидан тузилган бу қатор $|z|<1$ да яқинлашувчи. Шунинг учун $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^n$ ҳам $|z|<1$ да яқинлашувчи ва $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$. **12**. $R=1$ радиусли маркази (0, 0) да бўлган доира ташқарисида яқинлашувчи ва $S(z)=\frac{z}{1-z}$. **13** $|a_n|=\frac{1}{n}$; $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=1$.

14. $|a_n|=\frac{1}{n^2}$; $R=1$. **15**. Эйлер формуласидан: $\sin^6x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^8=$ $=\frac{1}{64i^6}(e^{6ix}-6e^{4ix}+15e^{2ix}-20+15e^{-2ix}-6e^{-4ix}+e^{-6ix})=$ $=-\frac{1}{32}\left(\frac{e^{6ix}+e^{-6ix}}{2}+6\,\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2}+15\,\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}-10\right)=$ $=-\frac{1}{32}(\cos 6x-6\cos 4x+15\cos 2x-10)$. **16**. $-\frac{1}{64}(\sin 7x+$ $+\sin 5x\quad 3\sin 3x-3\sin x)$. **17**. $\cos^3x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}(e^{3ix}+$ $+3e^{ix}+3e^{-3ix}+e^{-3ix})=\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}+3\,\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)=$ $=\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{3}{4}\cos x$. **18**. $\sin^4x=\frac{1}{3}(3-4\cos 2x+\cos 4x)$ **19**. $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=e^{i\frac{\pi}{2}}$. $i^i=e^{i^2\frac{\pi}{2}}=e^{-\frac{\pi}{2}}$; $e^{2\pi i}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$; $i^i=e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}$, $k\in Z$. 20 $e^{2\pi i}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$.

XI БОБ

1. $|x-2| < 1$ тенгсизлик $-1 \leqslant x-2 \leqslant 1$ тенгсизликка тенг кучли. Тенгсизликнинг учала қисмига 2 ни қўшсак, $1 \leqslant x \leqslant 3$ га эга бўламиз. Худди шу каби $|y+1| \leqslant 1$ тенгсизликни ечиб, $-2 < y \leqslant 0$ га эга бўламиз. Демак, изланаётган соҳа $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ -2 \leqslant y < 0 \end{cases}$ тўғри тўртбурчакдан иборат. **2.** $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 1 \leqslant y \leqslant 3 \end{cases}$ тўғри тўртбурчак. **3.** а) $y < 2x+4$ тенгсизлик текисликнинг $y = 2x+4$ тўғри чизиқдан пастдаги қисмини билдиради (яъни ординаталари $y = 2x+4$ тўғри чизиқнинг ординаталаридан кичик бўлган нуқталар тўпламидан иборат). Демак, $y \leqslant 2x+4$ тенгсизлик текисликнинг $y = 2x+4$ тўғри чизиқ ва ундан пастдаги қисмини билдиради. б) $(x-4)^2 + (y+6)^2 \leqslant 5^2$, маркази $M(4, -6)$ нуқтада ва радиуси $r = 5$ га тенг бўлган ёпиқ доирадан иборат. в) $x^2 + y^2 \geqslant 3^2$ тенгсизлик текисликнинг $x^2 + y^2 = 3^2$ айланадан ташқаридаги қисмини билдиради. $x^2 + y^2 \leqslant 4^2$ тенгсизлик эса $x^2 + y^2 = 4^2$ айлана ва унинг ичидаги қисмини билдиради.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 9 \\ x^2 + y^2 \leqslant 16 \end{cases}$$

система эса текисликнинг шу иккала айланалар орасидаги қисми (яъни ҳалқа) ни билдиради. 4. а) $y^2 = 6x$ параболанинг ички қисми. б) Маркази $M(-3;\ 6)$ нуқтада ва радиуси $r = 6$ га тенг бўлган ёпиқ доира. в) $y = 2x^3$ парабола $x^2 + y^2 \leqslant 5^2$ доирани икки бўлакка бўлади. Биз излаётган соҳа юқоридаги бўлакдан иборат (бу ерда $y = 2x^2$ парабола соҳага тегишли эмас). **5.** а) Бу ерда берилган нуқталарнинг абсциссаларидан $(x_k) = \left(\dfrac{1}{3k}\right)$ кетма-кетлик тузиб оламиз. Бундан $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{3k} = 0$. Худди шу каби ординаталардан $(y_k) = \left(\dfrac{3k-1}{5k+1}\right)$ кетма-кетлик тузиб олсак, $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{3k-1}{5k+1} = \dfrac{3}{5}$ бўлади. $M\left(0, \dfrac{3}{5}\right)$ нуқта берилган кетма-кетликнинг лимити бўлади, яъни $\lim\limits_{k\to 8} M_k\left(\dfrac{1}{3k}, \dfrac{3k-1}{5k+1}\right) = M\left(0, \dfrac{3}{5}\right)$. Шу усул билан қолган лимитларни топиш мумкин; б) $M(0,1)$; в) $M(0,0)$; $M\left(0,0, -\dfrac{1}{2}\right)$; д) $M(e, 0, 0)$, **7.** а) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{1}{2n}\right)^2 + \ldots = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^4} + \ldots + \dfrac{1}{2^{2n}} + \ldots$ қаторни тузсак, бу геометрик қатор бўлиб, унинг махражи $q = \frac{1}{4} < 1$. Демак, қатор яқинлашувчи бўлганлиги учун $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right) \in l_2$;

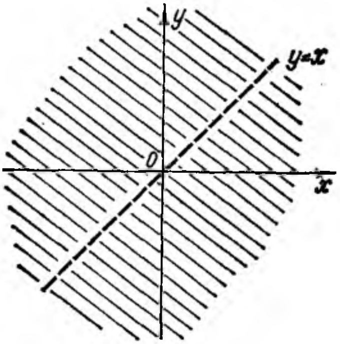
б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2^n}\right)^2$ қаторни тузсак, бу қатор яқинлашувчи бўлади (Даламбер белгиси ёрдамида текшириб кўринг). Шунинг учун $x \in l_2$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ қатор яқинлашувчи, шунинг учун $x \in l_2$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ қатор узоқлашувчи (чунки n-ҳаднинг лимити $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ бўлиб нолдан фарқли). Демак, $x \notin l_2$.

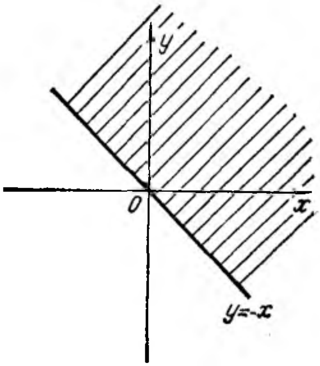
8. а) нуқтаси, б) нуқтаси эмас, в) нуқтаси.

9. $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{n^2}\right)^2} = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \ldots}$. Илдиз остидаги ифода геометрик қатор бўлиб, $q = \frac{1}{4} < 1$ бўлгани учун у яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси $\frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$ бўлади. Демак, $\rho(x, y) = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

10. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 11. а) Формулага биноан, $\rho(f, g) = \max\limits_{-2 \leqslant x \leqslant 2} |f(x) - g(x)| = \max\limits_{-2 \leqslant x \leqslant 2} |x^4 + 3 - 8x^2|$. Бундан кўринадики, $|\varphi(x)| = |x^4 + 3 - 8x^2|$ функциянинг $[-2; 2]$ кесмадаги энг катта қийматини топишимиз керак. Бунинг учун биринчидан $\varphi(x) = x^4 + 3 - 8x^2$ функциянинг $[-2; 2]$ даги энг кичик ва энг катта қийматларини топамиз, иккинчидан, шу топилган сонлар абсолют қийматларининг каттасини топамиз. Топилган сон изланган масофа бўлади. $\varphi(x)$ функциянинг $[-2: 2]$ даги критик нуқталарини топамиз. $\varphi'(x) = 4x^3 - 16x$, $4x^3 - 16x = 0$, $4x(x^2 - 4) = 0$, $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 2$. Энди функциянинг критик нуқталардаги ва кесманинг учларидаги қийматларини топамиз: $\varphi(0) = 3$, $\varphi(-2) = -13$, $\varphi(2) = -13$. Демак, $\varphi(x)$ функциянинг $[-2; 2]$ даги энг кичик қиймати -13, энг катта қиймати эса 3 га тенг. Шунинг учун $|\varphi(x)|$ функциянинг $[-2; 2]$ даги энг катта қиймати 13 га тенг. Демак, $\rho(f, g) = 13$. б) $\varphi(x) =$

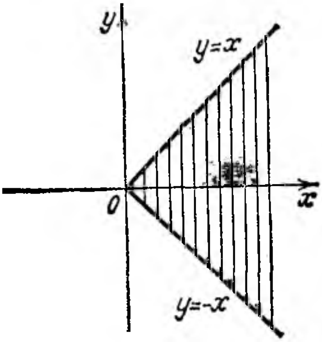


58- чизма.

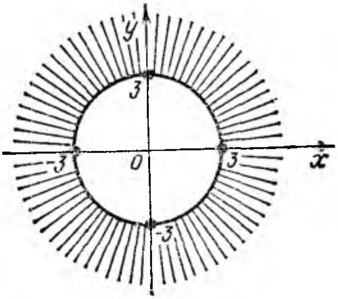


59- чизма.

$=f(x)-g(x)=e^{2x}-e^{-2x}$ функциянинг $[-2;\ 1]$ даги энг кичик қиймати $e^{-4}-e^{4}$, энг катта қиймати эса $e^{2}-e^{-2}$ булади. Шунинг учун $|\varphi(x)|$ нинг энг катта қиймати $|e^{-4}-e^{4}|=e^{4}-e^{-4}$ булади. Демак, $\rho(f,\ g)=e^{4}-e^{-4}$. в) $\rho(f,\ g)=12$. **12.** а) 13, б) 10. **13.** а) $f(2,\ 1)=\frac{2+2\cdot 1}{2-1}=4$; $f(-3,\ -1)=\frac{-3+2\cdot(-1)}{-3-(-1)}=2{,}5$; $f(a,\ b)=\frac{a+2b}{a-b}$; б) $f\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)=e^{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}=e^{\sin\pi}=1$; $f\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)=$ $=e^{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)}=e^{-\sin\frac{\pi}{2}}=e^{-1}$. **14.** а) $f(0{,}1)=1$, $f(4,\ 2)=\frac{2}{17}$; $f(a,\ b)=$ $=\frac{b}{1+a^{2}}$. б) $f(1,\ 1)=2$, $f(1,\ 2)=3$; $f(2,\ 2)=6$. **15.** Каср маънога эга булиши учун $x-y\neq 0$ булиши керак. Демак, аниқланиш соҳаси текисликнинг $x-y=0$ тўғри чизиқдан ташқаридаги нуқталар тўпламидан иборат (58-чизма). **16.** $y\neq -x$ (текисликнинг $y+x=0$ тўғри чизиқдан ташқари барча нуқталари). **17.** Бу ерда $x+y\geqslant 0$, $y\geqslant -x$. Демак, аниқланиш соҳаси $y=-x$ тўғри чизиқ ва текисликнинг бу тўғри чизиқдан юқоридаги қисмидан иборат (59- чизма). **18.** $y\leqslant x$ (текисликнинг $y=x$ тўғри чизиқ ва ундан пастдаги барча нуқталари). **19.** Аввало, $\sqrt{x+y}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топамиз. Бу ерда $x+y\geqslant 0$, $y\geqslant -x$. Демак, бу функциянинг аниқланиш соҳаси $y=-x$ тўғри чизиқ ва юқори ярим текисликдан иборат: $\sqrt{x-y}$ функция учун эса $x-y\geqslant 0$ бундан $y\leqslant x$ булади. Бу функциянинг аниқланиш соҳаси $y=x$ тўғри чизиқ ва қуйи ярим текисликдан иборат.

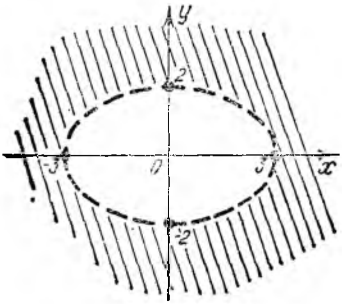


60- чизма

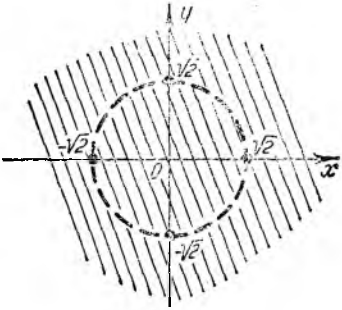


61- чизма.

$z = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}$ функциянинг аниқланиш соҳаси иккала функция аниқланиш соҳаларининг умумий қисмидан иборат, яъни текисликнинг биринчи ва тўртинчи чорак биссектрисалари орасидаги кисмидан иборат (60-чизма). **20.** $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ (I квадрант). **21.** $x^2 + y^2 - 9 \geqslant 0$, $x^2 + y^2 \geqslant 3^2$. Демак, аниқланиш соҳаси $x^2 + y^2 = 3^2$ айлана ва текисликнинг шу айланадан ташқаридаги қисмидан иборат (61-чизма). **22.** $x^2 + y^2 < 5^2$. **23.** Манфий сон ва нолнинг логарифми мавжуд бўлмаганлиги учун $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 > 0$ бўлади. Бундан $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} > 1$. Демак, аниқланиш соҳаси текисликнинг $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ эллипсдан ташқаридаги қисмидан иборат (62-чизма). 24. $x < \frac{y^2}{4} + 2\left(x = \frac{y^2}{4} + 2\right.$ параболанинг ташқари қисми). **25.** $2 - x^2 + y^2 \neq 0$, $x^2 - y^2 \neq (\sqrt{2})^2$. Демак, аниқланиш соҳаси текисликнинг $x^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$ айланада ётмаган барча нуқталаридан иборат (63-чизма). **26.** $x > 0$, $y > 0$. **27.** $-1 \leqslant \frac{y-1}{x} \leqslant 1$. Бу ерда икки ҳолни қараймиз: а) $x > 0$, бунда $-x \leqslant y - 1 \leqslant x$ бўлади. Учала томонга 1 ни қўшсак, $1 - x \leqslant y \leqslant x + 1$. Бундан $\begin{cases} y \geqslant 1 - x \\ y \leqslant x + 1 \\ x > 0 \end{cases}$ бўлади. Бу соҳа текисликнинг $y = 1 - x$ тўғри чизиқдан юқоридаги, $y = x + 1$ тўғри чизиқдан

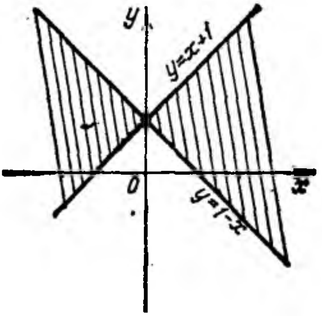


62- чизма.

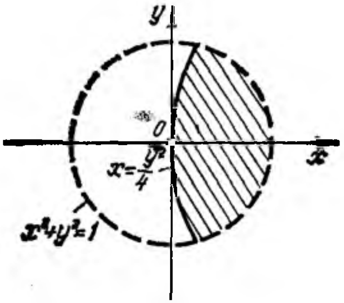


63- чизма.

пастда жойлашган қисми ((0,1) нуқта соҳага тегишли эмас). б) $x < 0$, бунда $-x \geqslant y - 1 \geqslant x$ бўлади. Учала томонга 1 ни қўшиб $1 - x \geqslant y \geqslant x + 1$ га эга бўламиз. Бундан $\begin{cases} y \geqslant x + 1 \\ y \leqslant 1 - x \\ x < 0 \end{cases}$ бўлади. Бу соҳа текисликнинг $y = x + 1$ тўғри чизиқдан юқорида $y = 1 - x$ тўғри чизиқдан пастда жойлашган қисми ((0, 1) нуқта соҳага тегишли эмас). Функциянинг аниқланиш соҳаси шу иккала соҳанинг бирлашмасидан иборат (Тўғри чизиқларнинг (0,1) дан бошқа барча нуқталари ҳам соҳага тегишли. 64-чизма). 28. $-2 \leqslant x \leqslant 2$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$ (квадрат). 29. Бу ерда $\sqrt{4x - y^2}$ ва $\ln(1 - x^2 - y^2)$ функцияларнинг аниқланиш соҳаларини топиб оламиз. а) $\sqrt{4x - y^2}$ ифода маънога эга бўлиши учун $4x - y^2 \geqslant 0$ бўлиши керак. Бундан $x \geqslant \frac{y^2}{4}$. Бу функциянинг аниқланиш соҳаси $x = \frac{y^2}{4}$ парабола ва текисликнинг параболанинг ичидаги қисмидан иборат. б) $\ln(1 - x^2 - y^2)$ ифода маънога эга бўлиши учун $1 - x^2 - y^2 > 0$ бўлиши керак. Бундан $x^2 + y^2 < 1$. Бу маркази координата бошида ва радиуси 1 га тенг бўлган очиқ доира. Демак, $z = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$ функциянинг аниқланиш соҳаси шу иккала соҳанинг умумий қисмидан иборат ((0; 0) нуқта аниқланиш соҳага кирмайди) (65-чизма). 30. $r^2 < x^2 + y^2 \leqslant R^2$ (Текисликнинг $x^2 + y^2 = r^2$, $x^2 + y^2 = R^2$ айланалар орасидаги қисми. Ташқи айлана соҳага тегишли). 31. Бу ерда $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ бўлиши керак. Бу соҳа фазодаги учала координаталари мусбат бўлган



64- чизма.



65 чизма

барча нуқталар тўпламидан иборат. **32.** $r^2 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ (Фазонинг $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ сфералар орасидаги қисми. Сфераларнинг ўзлари ҳам соҳага тегишли). **33.** Сатҳ чизиқлар $z = \text{const}$ бўладиган нуқталар тўпламидан иборат. $z = c$ десак, $x + y = c$, демак, сатҳ чизиқлар тўғри чизиқлар оиласидан иборат. **34.** $x^2 + y^2 = c$ (айланалар оиласи). **35.** $z = c$ десак, $x^2 - y^2 = c$. Демак, сатҳ чизиқлар гиперболалар оиласидан иборат. **36.** $y + x^2 = c$ (параболалар оиласи). **37.** $z = c$ десак, $xy = c$ гиперболалар оиласи. **38.** $y = 1 + \frac{c^2}{x^2}$ —чизиқлар оиласи. **39.** $U=c$ десак, $\frac{x + y + z}{x - y + z} = c$ дан $(1 - c)x + (1 + c)y + (1 - c)z = 0$ текисликлар оиласига эга бўламиз. **40.** $x^2 + y^2 + z^2 = c$ — сфералар оиласи. **41.** а) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 3}} (2x + 3y) = 13$ тенгликни исботлаш учун $\varepsilon > 0$ га мос равишда $\delta > 0$ топилиб, координаталари $|x - 2| < \delta$, $|y - 3| < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи ($M(2, 3)$ нуқтадан бошқа) барча $M(x, y)$ нуқталардан $|(2x + 3y) - 13| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлишини кўрсатишимиз керак: $|(2x + 3y) - 13| = |(2x - 4) + 4 + (3y - 9) + 9 - 13| = |2(x - 2) + 3(y - 3)| \leqslant 2|x - 2| + 3y - 3|$. $2|x - 2| + 3|y - 3| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $|(2x + 3y) - 13| < \varepsilon$ тенгсизлик албатта ўринли бўлади. Агар $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{5}$ деб олсак, $|x - 2| < \delta$, $|y - 3| < \delta$ бўлишидан $2|x - 2| + 3|y - 3| < 2 \cdot \delta + 3 \cdot \delta = 5 \cdot \delta \leqslant \varepsilon$ келиб чиқади. Демак, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 3}} (2x + 3y) = 13$ тенглик исботланди. б) $|x^2y -$

$-(-4)|<\varepsilon$. $|x^2y+4|=|(x^2y+x^2)-x^2+4|=|x^2(y+1)-(x^2-4)|=|x^2(y+1)-(x-2)(x+2)|\leqslant x^2|y+1|+|x-2\cdot|x+2|$. Биз 2 га яқин бўлган x ларда текшираётганимиз учун $1<x<3$ деб қарашимиз мумкин. Бундай x ларда $x^2<9$, $|x+2|<5$ бўлади. Бундан $|x^2y+4|\leqslant x^2|y+1|+|x-2|\cdot|x+2|<9|y+1|+5|x-2|$ келиб чиқади. $9|y+1|+5|x-2|<\varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x ва y ларда $|x^2y+4|<\varepsilon$ тенгсизлик ҳам ўринли бўлади. Агар $\delta\leqslant\frac{\varepsilon}{14}$ десак, $9\cdot|y+1|+5\cdot|x-2|<9\cdot\delta+5\cdot\delta=14\cdot\delta\leqslant14\cdot\frac{\varepsilon}{14}=\varepsilon$ бўлиб, $|x^2y+4|<\varepsilon$ тенгсизлик келиб чиқади. Демак, $\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to-1}}x^2y=-4$. **43.** 1-усул. $x=0$, $y=0$ да касрнинг сурат ва махражи нолга тенг. Шунинг учун касрнинг сурат ва махражини $\sqrt{x^2+y^2+1}+1$ га кўпайтирсак;

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(\sqrt{x^2+y^2+1}-1)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(\frac{x^2+y^2+1-1}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}\right)=\lim_{\substack{r\to0\\y\to0}}\frac{x^2+y^2}{x+y^2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

2-усул. Бундай мисолларни ечишда қутб координаталарига ўтиш ишни осонлаштиради: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. $x^2+y^2=r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=r^2\cdot1=r^2$. $x\to0$. $y\to0$ да $r\to0$. Булардан

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}=\lim_{r\to0}\frac{\sqrt{r^2+1}-1}{r^2}=\lim_{r\to0}\frac{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}-1}{r^2}=\frac{1}{2}.$$

$\left(\text{Бу ерда }\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{(1+\alpha)^\mu-1}{\alpha}=\mu\text{ тенгликдан фойдаландик.}\right)$ **44.** 0. **45.** 0.

1-усул. $$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3}\cdot\frac{x^3+y^3}{x+y^2}\right)=1\times$$

$\times\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, бу лимитни ҳисоблаш учун қутб координаталарга ўтсак, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim\limits_{r\to0}\frac{r^3\cos^3\varphi+r^3\sin^3\varphi}{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}=$

$$=\lim_{r\to0}\frac{r^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)}{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}=\lim_{r\to0}r(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)=0\cdot(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)=0.$$

2-усул. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ ни текширамиз: $0\leqslant\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|=$

$$= \left|\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^2+y^2}\right| = \left|x+y\right|\cdot\left|\frac{(x^2+y^2)-xy}{x^2+y^2}\right| <$$

$$< |x+y|\cdot\left(\left|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\right) \leqslant |x+y|\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}|x+y|.$$

$((|x|-|y|)^2 \geqslant 0,\ x^2-2|xy|+y^2 \geqslant 0$, бундан $\frac{|xy|}{x^2+y^2}<\frac{1}{2}$ келиб чиқади). Бундан $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|<\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{3}{2}|x+y|=0$ бўлиб, $\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|\geqslant 0$ бўлганидан $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$ бўлади. Демак, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=0$. **46.** 0. **47.** Мавжуд эмас. Ҳақиқатан, $y_n=kx_n$ десак, $x_n\to0$ да $y_n\to0$ бўлади. $\lim\limits_{\substack{x_n\to0\\y_n\to0}}\frac{x_n+y_n}{x_n-y_n}=$

$$=\lim_{x_n\to0}\frac{x_n+kx_n}{x_n-kx_n}=\lim_{x_n\to0}\frac{x_n(1+k)}{x_n(1-k)}=\frac{1+k}{1-k}.$$

$k=0$ бўлса, $\lim\limits_{\substack{x_n\to0\\y_n\to0}}\frac{x_n+y_n}{x_n-y_n}=\frac{1+0}{1-0}=1$, $f(x_n;\ 0)\to1$, $k=2$ бўлса, $\lim\limits_{\substack{x_n\to0\\y_n\to0}}\frac{x_n+y_n}{x_n-y_n}=\frac{1+2}{1-2}=-3$, $f(x_n,\ 2x_n)\to-3$ келиб чиқади. Демак, k ўзгариши билан турли лимитларга эга бўлаяпмиз, шу сабабли $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x+y}{x-y}$ мавжуд эмас. **48.** Мавжуд эмас. **49.** Узлуксиз, ҳақиқатан,

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,\ y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy+1-1}=$$

$=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy\cdot2}{xy}=2$. Демак, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,\ y)=f(0{,}0)=2$ бўлгани учун $f(x,\ y)$ функция $(0,\ 0)$ нуқтадан узлуксиз. **50.** Узлуксиз. **51.** Узилиш нуқтаси. Ҳақиқатан, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}=$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x+y)^2}{(x-y)(x+y)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x-y}$. Бу лимит мавжуд эмас (47- мисолга қаранг). Шу сабабли (0, 0) функциянинг узилиш нуқтаси. 52. Узилиш нуқтаси. 53. $z'_x = (x-y)'_x = 1-0 = 1$; $z'_y = (x-y)'_y = 0-1 = -1$. 54. $z'_x = 1$, $z'_y = 1$ 55. $z'_x = 2xy^3 + 3x^7y^2$, $z'_y = 3x^2y^2 + 2x^3y$. 56. $z'_x = \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$; $z'_y = \frac{y^4 + 3x^2y^2 - 2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$.
57. $z'_x = 3(5x^2y - y^3 + 7)^2 \cdot (5x^2y - y^3 + 7)'_x = 3(5x^2y - y^3 + 7)^2 \times \times 10xy = 30xy(5x^2y - y^3 + 7)^2$; $z'_y = 3(5x^2y - y^3 + 7)^2 . (5x^2y - y^3 + + 7)'_y = 3(5x^2y - y^3 + 7)^2 \cdot (5x^2 - 3y^2)$. 58. $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^3}}$; $z'_y = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2+y^3}}$. 59. $z'_x = e^{xy} \cdot (xy)'_x = ye^{xy}$, $z'_y = e^{xy}(xy)'_y = xe^{xy}$.
60. $z'_x = 2x \cdot \sin y \cdot e^{x^2 \sin y}$; $z'_y = x^2 \cos y \cdot e^{x^2 \cdot \sin y}$. 61. $z'_x = y^2 \cdot x^{y^2-1}$; $z'_y = x^{y^2} \cdot \ln x \cdot (y^2)'_y = x^{y^2} \ln x \cdot 2y = 2y \cdot x^{y^2} \ln x$. 62. $z'_x = 2x \cdot y^{x^2+1} \cdot \ln y$; $z'_y = (x^2+1)y^{x^2}$. 63.

$$z'_y = \frac{(x+\sqrt{(x^2+y^2)}'_x}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad z'_y = \frac{(x+\sqrt{x^2+y^2})'_y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}.$$ 64. $z'_x = \frac{1}{x+\ln y}$;

$z'_y = \frac{1}{y(x+\ln y)}$. 65.

$$z'_x = \frac{(1)'_x \cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{y} - 1 \cdot \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)'_x}{\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)^2} =$$

$$= -\frac{\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x}{\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)^2} = -\frac{\frac{y^2}{y^3+x^2} \cdot \frac{1}{y}}{\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)^2} =$$

$$= -\frac{y}{(x^2+y^2) \cdot \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)^2}; \quad z'_y = -\frac{\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)'_y}{\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)^2} =$$

$$= -\frac{\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y}{\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)^2} = -\frac{\frac{y^2}{y^2+x^2}\cdot\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)}{\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)^2} = -\frac{-\frac{x}{y^2+x^2}}{\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)^2} =$$

$$= \frac{x}{(x^2+y^2)\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)^2}.$$ **66.** $z'_x \frac{xy\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$;

$$z'_y = -\frac{x^2\sqrt{2}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}.$$ **67.** $z'_x = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)'_x =$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{\sin\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{2}{2\sin\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{x}{y}}\times$$

$$\times\frac{1}{y} = \frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}};\quad z'_y = \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)'_y}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y =$$

$$= -\frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}.$$ **68.** $z'_x = -\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $z'_y = \frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$.

69. $f'_x(x, y) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Энди хосиланинг (3, 4) нуқтадаги қийматини ҳисоблаймиз. $f'_x(3,4) = 1 - \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} =$

$$= 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5};\quad f'_y(x, y) = 1 - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f'_y(3, 4) =$$

$$= 1 - \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$ **70.** $f'_x(1,1) = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$, $f'_y(1, 1) =$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}}{2}.$$ **71.** а) $u'_x = y+z$; $u'_y = x+z$; $u'_z = y+x$.

б) $u'_x = e^{x(x^2+y^2+z^2)}\cdot(x(x^2+y^2+z^2))'_x = (3x^2+y^2+$ $+z^2)e^{x(x^2+y^2+z^2)}$; $u'_y = 2xy\,e^{x(x^2+y^2+z^2)}$; $u'_z = 2xze^{x(x^2+y^2+z^2)}$.

72. а) $u'_x = 3x^2+3y-1$; $u'_y = z^2+3x$; $u'_z = 2yz+1$. б) $u'_x =$

$= 2x\cos(x^2+y^2+z^2)$; $u'_y = 2y\cos(x^2+y^2+z^2)$; $u'_z = 2z\cos(x^2+ + y^2+z^2)$. **73.** Аввало, $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ ларни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^y)'_x \cdot y^x + x^y \cdot (y^x)'_x = y \cdot x^{y-1} \cdot y^x + x^y \cdot y^x \cdot \ln y =$$

$$= x^y \cdot y^x\left(\frac{y}{x} + \ln y\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^y)'_y \cdot y^x + x^y \cdot (y^x)'_y = x^y \ln x \cdot y^x + x^y \cdot x \cdot y^{x-1} =$$

$$= x^y \cdot y^x\left(\ln x + \frac{x}{y}\right).$$

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot x^y \cdot y^x\left(\frac{y}{x} + \ln y\right) + y \cdot x^y \cdot y^x\left(\ln x + \frac{x}{y}\right) =$$
$$= x^y \cdot y^x\,(y + x\ln y + y\ln x + x) = x^y \cdot y^x \cdot (x+y+\ln y^x+\ln x^y) =$$
$$= x^y \cdot y^x \cdot (x + y + \ln(y^x \cdot x^y)) = z \cdot (x + y + \ln z).$$

75. Аввало, $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ ларни топиб оламиз: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^4 - 3x^2y^3 + + 4x^3y^2$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 4x^2y^3 - 3x^3y^2 + 2x^4y$. $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (2xy^4 - - 3x^2y^3 + 4x^3y^2)\,dx + (4x^2y^3 - 3x^3y^2 + 2x^4y)\,dy$. **76.** $dz = (y - 2xy^3 + + 3x^2y)\,dx + (x - 3x^2y^2 + x^3)\,dy$. **77.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin(xy) \cdot y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = = -\sin(xy) \cdot x$. $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -\sin(xy) \cdot ydx - \sin(xy) \times \times xdy = -\sin(xy) \cdot (ydx + xdy)$. **78.** $dz = y^{x-1}(y\ln y\,dx + xdy)$.

$$\textbf{79.}\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(1+y)(x^2+y^2) - (x+y+xy) \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} =$$
$$= \frac{x^2+x^2y+y^2+y^3-2x^2-2xy-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2+y^3-x^2-x^2y-2xy}{(x^2+y^2)^2};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(1+x)(x^2+y^2) - (x+y+xy) \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} =$$
$$= \frac{x^2+x^3+y^2+xy^2-2xy-2y^2-2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+x^3-y^2-xy^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$
$$dz = \frac{(y^2+y^3-x^2-x^2y-2xy)\,dx + (x^2+x^3-y^2-xy^2-2xy)dy}{(x^2+y^2)^2}.$$

80. $dz = \frac{4xy\,(xdy - ydx)}{(x^2-y^2)^2}$. **81.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{1+(xy)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{1+(xy)^2}$;

$dz = \frac{y}{1+(xy)^2}\,dx + \frac{x}{1+(xy)^2}\,dy = \frac{ydx + xdy}{1+(xy)^2}$. **82.** $dz =$

$= \frac{ydx - xdy}{y\sqrt{y^2 - x^2}}$. 83. l йўналиш Ox ўқи билан $\alpha = 135°$ бурчак ташкил қилгани учун Oy ўқи билан $\beta = 45°$ ташкил қилади. Энди $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ хусусий ҳосилаларни топамиз. $\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^3 + y$, $\frac{\partial f(1,2)}{\partial x} = 12 \cdot 1 + 2 = 14$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x + 3y^2$; $\frac{\partial f(1,2)}{\partial y} = 1 + 3 \cdot 2^2 = 13$. Демак, йўналиш бўйича ҳосила, $\frac{\partial f(1,2)}{\partial l} = \frac{\partial f(1,2)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(1,2)}{\partial y}\cos\beta = 14 \cdot \cos 135° + 13\cos 45° = 14\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 13 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\partial f(1,2)}{\partial l} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. 84. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 85. $M(1, \sqrt{3})$ нуқтадан $N(0, 0)$ нуқтага қаратилган йўналиш бўйича ҳосилани топиш учун $\overrightarrow{MN}$ векторни тузамиз: $\overrightarrow{MN} = (0 - 1)\vec{i} + (0 - \sqrt{3})\vec{j} = -\vec{i} - \sqrt{3} \cdot \vec{j}$. Бу векторнинг йўналтирувчи косинуслари $\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2}} = -\frac{1}{2}$; $\cos\beta = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Энди $\frac{\partial f(1,\sqrt{3})}{\partial x}$, $\frac{\partial f(1,\sqrt{3})}{\partial y}$ ларни топамиз. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}$, $\frac{\partial f(1,\sqrt{3})}{\partial x} = \frac{e}{e + e^{\sqrt{3}}}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x + e^y}$, $\frac{\partial f(1,\sqrt{3})}{\partial y} = \frac{e^{\sqrt{3}}}{e + e^{\sqrt{3}}}$. Демак, $\frac{\partial f(1,\sqrt{3})}{\partial l} = \frac{e}{e + e^{\sqrt{3}}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{e^{\sqrt{3}}}{e + e^{\sqrt{3}}} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-(e + \sqrt{3} \cdot e^{\sqrt{3}})}{2(e + e^{\sqrt{3}})} = -\frac{1 + \sqrt{3} \cdot e^{\sqrt{3}-1}}{2(1 + e^{\sqrt{3}-1})}$. 86. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

87. Функциянинг градиенти $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$ формула бўйича топилар эди: а) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{4 + x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{4 + x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial f(2,1)}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{4 + 2^2 + 1}} = \frac{2}{3}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{4 + x^2 + y^2}}$; $\frac{\partial f(2,1)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{4 + 2^2 + 1}} = \frac{1}{3}$. Демак $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}$. б) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} =$

$= \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} =$ $= -\frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}$. Демак, $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0) = \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2}\vec{i} - \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}\vec{j} =$ $= \frac{y_0\vec{i} - x_0\vec{j}}{x_0^2 + y_0^2}$. **88.** а) $6\vec{i} + 4\vec{j}$; б) $2(y_0\vec{i} + x_0\vec{j})$. **89.** Бу ҳолда ҳосила $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$ формула бўйича топилади. Шунинг учун $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ ларни топамиз: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$, $\frac{dx}{dt} = 2e^{2t}$, $\frac{dy}{dt} = \cos t$. Демак, $\frac{dz}{dt} = (2x + y^2) \cdot 2 \cdot e^{2t} + 2xy \cdot \cos t$, x ва y ларни ўрнига қийматларини қўйсак: $\frac{dz}{dt} = 2(2e^{2t} + \sin^2 t) \cdot e^{2t} + 2 \cdot e^{2t} \times$

$$\times \sin t \cdot \cos t = e^{2t}(4e^{2t} + 2\sin^2 t + \sin 2t).$$ **90.** $\frac{dz}{dt} =$ $= \frac{3 - 12t^2}{\sqrt{1 - 9t^2 + 24t^4 - 16t^6}}$. **91.** Бу ҳолда $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$ формула бўйича топилади: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x+1}{y}\right)'_x =$ $= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2 + (x+1)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{y}\right)^2} \times$ $\times \left(\frac{x+1}{y}\right)'_y = \frac{1}{\frac{y^2 + (x+1)^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x+1}{y^2}\right) = -\frac{x+1}{y^2 + (x+1)^2}$, $\frac{dy}{dx} = e^{(1+x)^2} \times$ $\times ((1+x)^2)' = e^{(1+x)^2} \cdot 2(1+x)$. Топилганларни формулага қўйсак:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y}{y^2 + (x+1)^2} - \frac{x+1}{y^2 + (x+1)^2} \cdot e^{(1+x)^2} \cdot 2(1+x) =$$

$= \frac{y - 2(1+x)^2 \cdot e^{(1+x)^2}}{y^2 + (x+1)^2}$. Энди y нинг ўрнига қиймати $e^{(1+x)^2}$ ни қўйсак, $\frac{dz}{dx} = \frac{e^{(1+x)^2} - 2(1+x)^2 \cdot e^{(1+x)^2}}{(e^{(1+x)^2})^2 + (1+x)^2} = \frac{1 - 2(1+x)^2}{e^{2(1+x)^2} + (1+x)^2} \times$ $\times e^{(1+x)^2}$. **92.** $\frac{dz}{dx} = \frac{e^x + 3x^2 \cdot e^{x^3}}{e^x + e^{x^3}}$. **93.** Бу ерда $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} +$

$+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$ формула бўйича топилади: $\frac{\partial z}{\partial x}=2x+\frac{y}{2\sqrt{xy}}=2x+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{y}{x}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{2\sqrt{xy}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}$, $\frac{\partial x}{\partial u}=1$, $\frac{\partial y}{\partial u}=1$. Топилганларни формулага қўйсак: $\frac{\partial z}{\partial u}=\left(2x+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)\cdot 1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\times 1=2x+\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}\right)=2(u+v)+\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{u-v}{u+v}}+\sqrt{\frac{u+v}{u-v}}\right)$. Энди $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$ ни топамиз: $\frac{\partial x}{\partial v}=1$, $\frac{\partial y}{\partial v}=-1$, $\frac{\partial z}{\partial v}=2(u+v)+\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{u-v}{u+v}}-\sqrt{\frac{u+v}{u-v}}\right)$. 94. $\frac{\partial z}{\partial u}=2\times\frac{u}{v^2}\cdot\ln(3u-2v)+\frac{3u^2}{v^2(3u-2v)}$; $\frac{\partial z}{\partial v}=-2\cdot\frac{u^2}{v^3}\ln(3u-2v)-\frac{2u^2}{v^2(3u-2v)}$. **95.** Аввал $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$ ларни топамиз: $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy-y^2$ $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2-2xy$, $\frac{\partial x}{\partial u}=\cos v$, $\frac{\partial x}{\partial v}=-u\sin v$, $\frac{\partial y}{\partial u}=\sin v$, $\frac{\partial y}{\partial v}=u\cos v$. Топилганларни формулага қўйсак, (93-мисолга қаранг): $\frac{\partial z}{\partial u}=(2xy-y^2)\cos v+(x^2-2xy)\cdot\sin v=(2\cdot u^2\times\cos v\cdot\sin v-u^2\sin^2 v)\cdot\cos v+(u^2\cos^2 v-2u^2\cos v\cdot\sin v)\times\sin v=2u^2\cos^2 v\cdot\sin v-u^2\sin^2 v\cos v+u^2\cos^2 v\sin v-2u^2\times\cos v\sin^2 v=3u^2\cdot\cos^2 v\cdot\sin v-3u^2\cdot\sin^2 v\cdot\cos v=3u^2\cos v\times\sin v(\cos v-\sin v)=\frac{3}{2}u^2\sin 2v(\cos v-\sin v)$, $\frac{\partial z}{\partial v}=(2xy-y^2)(-u\sin v)+(x^2-2xy)\cdot u\cos v=-(2u^2\cos v\cdot\sin v-u^2\times\sin^2 v)\cdot u\cdot\sin v+(u^2\cos^2 v-2u^2\cos v\cdot\sin v)\cdot u\cos v=u^3\times(\cos^3 v+\sin^3 v-2\cos v\cdot\sin v(\cos v+\sin v))=u^3((\cos v+\sin v)(\cos^2 v-\cos v\cdot\sin v+\sin^2 v)-2\cos v\cdot\sin v(\cos v+\sin v))=u^3(\cos v+\sin v)\cdot(1-3\cos v\cdot\sin v)=u^3(\cos v+\sin v)\cdot\left(1-\frac{3}{2}\sin 2v\right)$. **96.** $\frac{\partial z}{\partial u}=2u\left((1+u^2+v^2)e^{u^2-v^2}+(1+u^2-v^2)e^{u^2-v^2}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial v}=2v\left((1-u^2)e^{u^2-v^2}+(u^2-v^2-1)e^{u^2+v^2}\right)$.

97. Ошкормас функциянинг ҳосиласи $\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}$ формула бўйича топилади. Бу ерда $F(x, y)=x^3+y^3-3xy$. $F'_x=3x^2-3y=3\times$

$\times (x^2 - y)$, $F'_y = 3y^2 - 3x = 3(y^2 - x)$ Демак, $\frac{dy}{dx} = -\frac{3(x^2 - y)}{3(y^2 - x)} = -\frac{-(y - x^2)}{y^2 - x} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$. 98. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^x \ln y - y}{x(1 - y^{x-1})}$. 99. $F(x, y) = xy - \ln y$, $F'_x = y$, $F'_y = x - \frac{1}{y}$. $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y}{x - \frac{1}{y}} = -\frac{y}{\frac{xy-1}{y}} = \frac{y^2}{1 - xy}$. 100. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y - 1}$. **101.** $F(x, y) = xe^y + ye^x - e^{xy}$, $F'_x = e^y + ye^x - e^{xy} \cdot y$, $F'_y = xe^y + e^x - e^{xy} \cdot x$. Топилганларни формулага қўйсак, $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{e^y + ye^x - e^{xy} \cdot y}{xe^y + e^x - e^{xy} \cdot x} = \frac{ye^{xy} - e^y - ye^x}{xe^y + e^x - xe^{xy}}$.

102. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - y^2}{2xy - \cos y}$. **103.** Бу ерда хусусий ҳосилалар

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

формулалар бўйича топилади. $F(x, y, z) = x^2 + z^2 - zx + xy^4 - 1$ деб олсак: $F'_x = 2x - z + y^4$, $F'_y = 4xy^3$, $F'_z = 2z - x$. Булардан $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x - z + y^4}{2z - x} = \frac{2x - z + y^4}{x - 2z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4xy^3}{2z - x} = \frac{4xy^3}{x - 2z}$. **104.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2x}{a^2z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2y}{b^2z}$. **105.** $F(x, y, z) = z^3 + 3xyz - a^3$, $F'_x = 3yz$, $F'_y = 3xz$, $F'_z = 3z^2 + 3xy$. Булардан $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{3yz}{3(z^2 + xy)} = -\frac{yz}{z^2 + xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{3xz}{3(z^2+xy)} = -\frac{xz}{z^2 + xy}$. **106.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{e^z - xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{e^z - xy}$. **107.** $z'_x = 1 + \frac{y(x - y) - xy \cdot 1}{(x - y)^2} = 1 + \frac{yx - y^2 - xy}{(x - y)^2} = 1 - \frac{y^2}{(x - y)^2}$, $z''_{x^2} = \left(1 - \frac{y^2}{(x - y)^2}\right)'_x = -\frac{(y^2)'_x \cdot (x - y)^2 - y^2 \cdot \left((x - y)^2\right)'_x}{(x - y)^4} = -\frac{-y^2 \cdot 2(x - y)}{(x - y)^4} = \frac{2y^2}{(x - y)^3}$; $z''_{xy} = \left(1 - \frac{y^2}{(x - y)^2}\right)'_y =$

$$= -\frac{\left((y^2)'_y \cdot (x - y)^2 - y^2\left((x - y)^2\right)'_y\right)}{(x - y)^4} =$$

$$= -\frac{2y(x-y)^2 - y^2 \cdot 2(x-y) \cdot (-1)}{(x-y)^4} = -\frac{2y(x-y)(x-y+y)}{(x-y)^4} =$$

$$= -\frac{2xy}{(x-y)^3} = \frac{2xy}{(y-x)^3}. \quad z'_y = 1 + \frac{x(x-y) - xy \cdot (-1)}{(x-y)^2} =$$

$$= 1 + \frac{x^2 - xy + xy}{(x-y)^2} = 1 + \frac{x^2}{(x-y)^2}, \quad z''_{yx} = \left(1 + \frac{x^2}{(x-y)^2}\right)'_x =$$

$$= \frac{2x(x-y)^2 - x^2 \cdot 2(x-y)}{(x-y)^4} = \frac{2x(x-y)(x-y-x)}{(x-y)^4} =$$

$$= -\frac{2xy}{(x-y)^3} = \frac{2xy}{(y-x)^3}; \quad z''_{y^2} = \left(1 + \frac{x^2}{(x-y)^2}\right)'_y =$$

$$= \frac{-x^2 \cdot 2(x-y) \cdot (-1)}{(x-y)^4} = \frac{2x^2}{(x-y)^3}.$$ **108.** $z''_{x^2} = z''_{y^2} = 0, \quad z''_{xy} =$

$= z''_{yx} = e^y$. **109.** $z'_x = y^{\ln x} \cdot \ln y \cdot (\ln x)'_x = y^{\ln x} \cdot \ln y \cdot \frac{1}{x}; \quad z''_{x^2} =$

$$= \left(y^{\ln x} \cdot \ln y \cdot \frac{1}{x}\right)'_x = \left(y^{\ln x}\right)'_x \cdot \ln y \cdot \frac{1}{x} + y^{\ln x} \cdot \left(\ln y \cdot \frac{1}{x}\right)'_x = y^{\ln x} \times$$

$$\times \ln y \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln y \cdot \frac{1}{x} + y^{\ln x} \cdot \ln y \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} \cdot y^{\ln x} \cdot \ln y \cdot (\ln y - 1);$$

$$z''_{xy} = \left(y^{\ln x} \cdot \ln y \cdot \frac{1}{x}\right)'_x = \left(y^{\ln x}\right)'_y \cdot \ln y \cdot \frac{1}{x} + y^{\ln x} \cdot \left(\ln y \cdot \frac{1}{x}\right)'_y =$$

$$= \ln x \cdot y^{\ln x - 1} \cdot \ln y \cdot \frac{1}{x} + y^{\ln x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot y^{\ln x - 1} \cdot (\ln x \cdot \ln y +$$

$$+ 1); \quad z'_y = \ln x \cdot y^{\ln x - 1}; \quad z''_{yx} = \frac{1}{x} \cdot y^{\ln x - 1} + \ln x \cdot y^{\ln x - 1} \cdot \ln y \times$$

$$\times \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\, y^{\ln x - 1} \cdot (\ln x \cdot \ln y + 1); \quad z''_{y^2} = \ln x \cdot (\ln x - 1) \cdot y^{\ln x - 2}.$$

110. $z''_{x^2} = z''_{xy} = z''_{yx} = z''_{y^2} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x+y)^5}}$. **111.** $z'_x =$

$$= \frac{2x}{\cos^2(x^2+y^2)}, \quad z''_{x^2} = \frac{2\cos^2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2\cos(x^2+y^2) \times}{\cos^4(x^2+y^2)} \to$$

$$\to \frac{\times(-\sin(x^2+y^2)) \cdot 2x}{\cos^4(x^2+y^2)} = \frac{\cos(x^2+y^2)(2\cos(x^2+y^2) + 8x^2 \times}{\cos^4(x^2+y^2)} \to$$

$$\to \frac{\times \sin(x^2+y^2))}{\cos^4(x^2+y^2)} = \frac{2\cos(x^2+y^2) + 8x^2 \sin(x^2+y^2)}{\cos^3(x^2+y^2)}; \quad z''_{xy} =$$

$$= -\frac{2x \cdot 2\cos(x^2+y^2) \cdot (-\sin(x^2+y^2)) \cdot 2y}{\cos^4(x^2+y^2)} = \frac{8xy\sin(x^2+y^2)}{\cos^3(x^2+y^2)}.$$

$$z'_y = \frac{2y}{\cos^2(x^2+y^2)}, \quad z''_{y^2} = \frac{2\cos^2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2 \cdot \cos(x^2+y^2) \times}{\cos^4(x^2+y^2)} \to$$

$$\to \frac{\times(-\sin(x^2+y^2)) \cdot 2y}{\cos^4(x^2+y^2)} = \frac{\cos(x^2+y^2) \cdot (2\cos(x^2+y^2) +}{\cos^4(x^2+y^2)} \to$$

$\rightarrow \dfrac{+8y^2 \sin(x^2+y^2))}{\cos^4(x^2+y^2)} = \dfrac{2\cos(x^2+y^2) + 8y^2 \cdot \sin(x^2+y^2)}{\cos^3(x^2+y^2)}$; $z''_{yx} = z''_{xy}$ эканини текшириб кўринг. **112.** $z''_{x^2} = \dfrac{4xy+2y^2}{(2x^2+2xy+y^2)^2}$; $zxy = z''_{yx} = \dfrac{y^2-2x^2}{(2x^2+2xy+y^2)^2}$; $z''_{y^2} = \dfrac{2x^2+2xy}{(2x^2+2xy+y^2)^2}$. **113.** $z = x^{2y}$, $z'_x = 2y \cdot x^{2y-1}$, $z''_{x^2} = 2y(2y-1)x^{2y-2}$; $z''_{xy} = 2x^{2y-1} + 2y \times x^{2y-1} \cdot \ln x \cdot 2 = 2 \cdot x^{2y-1} \cdot (1+2y\ln x)$; $z'_y = x^{2y} \cdot \ln x \cdot 2$; $z''_{y^2} = x^{2y} \cdot \ln x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot 2 = 4\ln^2 x \cdot x^{2y}$; $z''_{yx} = 2x^{2y-1}(1+2y\ln x)$ эканини текшириб кўринг. **114.** $z''_{x^2} = e^x(\cos y + x\sin y + 2\sin y)$; $z''_{xy} = z''_{yx} = e^x \cdot (\cos y + x\cos y - \sin y)$; $z''_{y^2} = -e^x \cdot (x\sin y + \cos y)$. **115.** $u = e^{xyz}$, $u'_x = e^{xyz} \cdot yz$. $u''_{x^2} = e^{xyz} \cdot y^2z^2$; $u''_{xy} = (e^{xyz})'_y \cdot yz + e^{xyz} \cdot (yz)'_y = e^{xyz} \cdot xyz^2 + e^{xyz} \cdot z = e^{xyz} \times z(xyz+1)$; $u''_{xz} = (e^{xyz})'_z \cdot yz + e^{xyz} \cdot (yz)'_z = e^{xyz} \cdot xy^2z + e^{xyz} \cdot y = e^{xyz} \cdot y(xyz+1)$. Текшириб кўриш мумкин: $u''_{y^2} = e^{xyz} \cdot x^2z^2$; $u''_{z^2} = e^{xyz} \cdot x^2y^2$; $u''_{xy} = u''_{yx} = e^{xyz} \cdot z \cdot (xyz+1)$. $u''_{zx} = u''_{xz} = e^{xyz} \cdot y(xyz+1)$; $u''_{yz} = u''_{zy} = e^{xyz} \cdot x(xyz+1)$. **116.** $u''_{x^2} = 2\cos(x^2+y^2+z^2) - 4x^2 \cdot \sin(x^2+y^2+z^2)$; $u'_{xy} = u''_{yx} = 4xy\cos(x^2+y^2+z^2)$; $u''_{xz} = u''_{zx} = 4xz \cdot \cos(x^2+y^2+z^2)$; $u''_{yz} = u''_{zy} = 4yz \cdot \cos(x^2+y^2+z^2)$; $u''_{y^2} = 2\cos(x^2+y^2+z^2) - 4y^2 \times \sin(x^2+y^2+z^2)$; $u''_{z^2} = 2\cos(x^2+y^2+z^2) - 4z^2 \cdot \sin(x^2+y^2+z^2)$. **117.** $f'_x(x, y) = 3x^2+6xy+12y^3$, $f''_{x^2}(x, y) = 6x+6y$; $f''_{xy} \times (x, y) = 6x+36y^2$; $f'_y(x, y) = 3x^2+36xy^2$; $f''_{y^2}(x, y) = 72xy$. Демак, $f''_{x^2}(0, 1) = 6 \cdot 0 + 6 \cdot 1 = 6$; $f''_{x^2}(0, 1) = 6$; $f''_{xy}(-1; 1) = 6 \cdot (-1) + 36 \cdot 1^2 = 30$; $f''_{y^2}(2, 0) = 72 \cdot 2 \cdot 0 = 0$; $f''_{y^2}(2, 0) = 0$.

118. $f''_{x^2}(1, 1) = 6$; $f''_{xy}(1, 2) = 36$. **119.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + y^2 - 5y^3$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = (3x^2+y^2-5y^3)'_y = 2y - 15y^2$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xy - 15xy^2 + 5y^4$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = (2xy - 15xy^2 + 5y^4)'_x = 2y - 15y^2$. Демак, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

121. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^y \cdot \cos(xy) + xe^y \cdot (-\sin(xy) \cdot y) = e^y(\cos(xy) - xy\sin \times (xy))$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = e^y(\cos(xy) - xy\sin(xy)) + e^y(-\sin(xy) \cdot x -$

$- x\sin(xy) - xy\cos(xy)\cdot x) = e^y((1 - x^2y)\cos(xy) - x(y+2)\times$ $\times\sin(xy))$. $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^y\cos(xy) + xe^y(-\sin(xy)\cdot x) = e^y-(x\cdot\cos(xy)-$ $- x^2\sin(xy))$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = e^y(\cos(xy) - x\cdot\sin(xy)\cdot y - 2x\cdot\sin(xy)-$ $- x^2\cdot\cos(xy)\cdot y) = e^y((1 - x^2y)\cos(xy) - x(y+2)\sin(xy)$. Демак, $\frac{\partial^2 x}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 x}{\partial y\partial x}$. **123.** Аввало, $\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ларни топамиз: $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x\times$ $\times\cos y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x\cdot\cos y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = e^x\cdot(-\sin y) = -e^x\cdot\sin y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} =$ $= -e^x\cdot\cos y$. Топилганларга биноан, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^x\cdot\cos v -$ $- e^x\cdot\cos y = 0$. Демак, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ тенглик исботланди. **125.** $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ тенгликдан x бўйича ҳосила оламиз. Бунда y ни доимий, z ни эса x нинг функцияси деб қараймиз. Бу вақтда $2x+$ $+ 2z\cdot z'_x = 2z'_x$ бўлади. Бундан $z'_x = \frac{x}{1-z}$ бўлади. Бу тенгликдан яна x бўйича ҳосила оламиз: $z''_{x^2} = \frac{1\cdot(1-z) - x\cdot(1-z)'_x}{(1-z)^2} =$ $= \frac{1 - z + x\cdot z'_x}{(1-z)^2}$; z'_x нинг ўрнига қийматини қўйсак, $z''_{x^2} =$ $= \frac{1 - z + x\cdot\frac{x}{1-z}}{(1-z)^2} = \frac{1 - 2z + z^2 + x^2}{(1-z)^3}$ келиб чиқади. **126.** $z''_{xy} = \frac{36z^2y^2(2x-1)}{(1-4z^3)^3}$. **127.** 2-тартибли дифференциал $d^2z =$ $= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\cdot dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot dy^2$ формула бўйича топилар эди: $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 - 2xy$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 2y - 2x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy - x^2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x$. Топилганларни формулага қўйсак, $d^2z = -2ydx^2 + 2\times$ $\times(2y - 2x)\,dx\,dy + 2xdy^2 = -2ydx^2 + 4(y - x)\,dx\,dy + 2xdy^2$. 123. $d^2z = \frac{2}{(x+y)^2}\cdot(xdy^2 + (x-y)\,dx\,dy - ydx^2)$. **129.** $\frac{\partial z}{\partial x} =$ $= \frac{1}{x-y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x-y)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{1}{(x-y)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{x-y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{(x-y)^2}$. Топилганларни формулага қўйсак (127-мисолга қа-

ранг), $d^2z = -\frac{dx^2}{(x-y)^2} + 2\cdot\frac{dx\,dy}{(x-y)^2} - \frac{dy^2}{(x-y)^2} =$
$= -\frac{dx^2 + 2\cdot dx\cdot dy + dy^2}{(x-y)^2} = -\left(\frac{dx-dy}{x-y}\right)^2$. **130.** $d^2z = e^{x+y^2}\times$
$\times(dx^2 + 4x\,dx\,dy + 2(1+2y)\,dy^2)$. **131.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2(x^2+y^2)^2} =$
$= -\frac{x}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{(x^2+y^2)^2 - x\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^4} =$
$= -\frac{(x^2+y^2)(x^2+y^2-4x^2)}{(x^2+y^2)^4} = -\frac{y^2-3x^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{3x^2-y^2}{(x^2+y^2)^3}$. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} =$
$= -\frac{-x\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} = \frac{4xy}{(x^2+y^2)^3}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{2(x^2+y^2)^2} =$
$= -\frac{y}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{(x^2+y^2)^2 - y\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} =$
$= -\frac{(x^2+y^2)\cdot(x^2+y^2-4y^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{3y^2-x^2}{(x^2+y^2)^3}$. Топилганларни формулага қўйсак, $d^2z = \frac{(3x^2-y^2)\,dx^2 + 8xy\,dx\,dy + (3y^2-x^2)\,dy^2}{(x^2+y^2)^3}$. **132.**
$d^2z = 2\sin 2y\cdot dx\,dy + 2x\cdot\cos 2y\cdot dy^2$. **133.** $u'_x = \cos(x+y+z)$,
$u''_{x^2} = -\sin(x+y+z)$, $u''_{xy} = -\sin(x+y+z)$, $u''_{xz} = -\sin(x+y+z)$; $u'_y = \cos(x+y+z)$, $u''_{y^2} = -\sin(x+y+z)$; $u''_{yz} =$
$= -\sin(x+y+z)$; $u'_z = \cos(x+y+z)$, $u''_{z^2} = -\sin(x+y+z)$.
Уч аргументли функция учун 2-тартибли дифференциал $d^2u = u''_{x^2}dx^2 + u''_{y^2}\cdot dy^2 + u''_{z^2}dz^2 + 2u''_{xy}dx\cdot dy + 2u''_{xz}dx\,dz + 2u''_{yz}dy\times$
$\times dz$ формула бўйича топилади, шунинг учун $d^2u = -\sin(x+$
$+y+z)(dx^2+dy^2+dz^2+2\,dx\,dy+2\,dx\,dz+2\,dy\,dz) = -\sin\times$
$\times(x+y+z)\cdot(dx+dy+dz)^2$. **134.** $d^2u = -\left(\frac{dx+dy+dz}{x+y+z}\right)^2$

135. $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x+y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x+y}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial x^n} =$
$= \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y} = \ldots = \frac{\partial^n z}{\partial y^n} = e^{x+y}$. Булардан: $dz = e^{x+y}dx + e^{x+y}\times$
$\times dy = e^{x+y}\cdot(dx+dy)$, $d^2z = e^{x+y}\cdot dx^2 + 2e^{x+y}\cdot dx\,dy + e^{x+y}\times$
$\times dy^2 = e^{x+y}\cdot(dx+dy)^2$, $d^3z = e^{x+y}\cdot dx^3 + 3e^{x+y}\cdot dx^2\cdot dy +$
$+ 3e^{x+y}dx\cdot dy^2 + e^{x+y}\cdot dy^3 = e^{x+y}(dx+dy)^3$. Энди математик индукция методига асосан $d^{k-1}z = e^{x+y}(dx+dy)^{k-1}$ деб олиб, $d^kz = e^{x+y}\cdot(dx+dy)^k$ эканини келтириб чиқарамиз. Ҳақиқатан, $d^kz = d(d^{k-1}z) = d(e^{x+y}(dx+dy)^{k-1}) = (dx+dy)^{k-1}de^{x+y} =$

$= (dx + dy)^{k-1} \cdot e^{x+y} \cdot (dx + dy) = e^{x+y} \cdot (dx + dy)^k$ $(dx + d$ доимий бўлганлиги учун $d\left(e^{x+y}(dx + dy)^{k-1}\right) = (dx + dy)^{k-1} \times \times de^{x+y}$ деб олдик). Демак, математик индукция методига биноан ихтиёрий n учун $d^n z = e^{x+y}(dx + dy)^n$. **136.** $d^3 z = e^{x+y}((3 + x) \times \times dx^3 + 3(2 + x)dx^2 dy + 3(1 + x)dx\,dy^2 + xdy^3)$. **137.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ тенгликни айният деб қараб, чап ва ўнг томонларининг тўла дифференциалларини топамиз: $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)'_x \times \times dx + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)'_y dy + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)'_z dz = d$. (Бу ерда қаралаётган ҳамма ҳосилалар — хусусий ҳосилалардир.) $\frac{2x}{a^2} \times \times dx + \frac{2y}{b^2}dy + \frac{2z}{c^2}dz = 0$. Бундан, $dz = -\frac{c^2}{z}\left(\frac{x}{a^2}dx + \frac{y}{b^2}dy\right)$ Иккинчи тартибли дифференциал $d^2 z = d(dz) = \left(-\frac{c^2}{z}\left(\frac{x}{a^2}dx + \frac{y}{b^2}dy\right)\right)'_x dx + \left(-\frac{c^2}{z}\left(\frac{x}{a^2}dx + \frac{y}{b^2}dy\right)\right)'_y dy + \left(-\frac{c^2}{z}\left(\frac{x}{a^2}dx + \frac{y}{b^2}dy\right)\right)'_z dz = -\frac{c^2}{a^2 z}dx^2 - \frac{c^2}{b^2 z}dy^2 + \frac{c^2}{z^2}\left(\frac{x}{a^2}dx + \frac{y}{b^2}dy\right)dz$. dz нинг қийматини қўйсак, у ҳолда $d^2 z = -\frac{c^2}{a^2 z}dx^2 - \frac{c^2}{b^2 z}dy^2 + \frac{c^2}{z^2}\left(\frac{x}{a^2}dx + \frac{y}{b^2}dy\right)\left(-\frac{c^2}{z}\left(\frac{x}{a^2}dx + \frac{y}{b^2}dy\right)\right) = -\frac{c^2}{a^2 z}dx^2 - \frac{c^2}{b^2 z}dy^2 - \frac{c^4}{z^3}\left(\frac{x^2}{a^4}dx^2 + \frac{2xy}{a^2 b^2}dxdy + \frac{y^2}{b^4}dy^2\right) = -\frac{c^4}{z^3}\left(\frac{z^2}{a^2 c^2}dx^2 + \frac{z^2}{b^2 c^2}dy^2 + \frac{x^2}{a^4}dx^2 + \frac{2xy}{a^2 b^2}dx\,dy + \frac{y^2}{b^4}dy^2\right) = -\frac{c^4}{z^3}\left(\left(\frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2}\right) \times \frac{dx^2}{a^2} + \frac{2xy}{a^2 b^2}dx\,dy + \left(\frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right)$. **138.** $d^2 z = -\frac{2z(xy^3 dx^2 + (x^2 y^2 + 2xyz^2 - z^4)dx\,dy + x^3 y\,dy^2)}{(z^2 - xy)^3}$. **139.** $z'_x = \frac{1}{x + y}$, $z''_{x^2} = -\frac{1}{(x + y)^2}$, $z''_{xy} = -\frac{1}{(x + y)^2}$, $z'_y = \frac{1}{x + y}$, $z''_{y^2} = -\frac{1}{(x + y)^2}$, ..., $dz = z'_x \cdot \Delta x + z'_y \Delta y = \frac{\Delta x + \Delta y}{x + y}$, $d^2 z = z''_{x^2} \times \times \Delta x^2 + 2 \cdot z''_{xy} \cdot \Delta x \cdot \Delta y + z''_{y^2} \cdot \Delta y^2 = -\frac{\Delta x^2}{(x + y)^2} - 2 \cdot \frac{\Delta x \Delta y}{(x + y)^2} -$

$-\frac{\Delta y^2}{(x+y)^2} = -\frac{\Delta x^2 + 2\cdot\Delta x\cdot\Delta y + \Delta y^2}{(x+y)^2} = -\left(\frac{\Delta x + \Delta y}{x+y}\right)^2$. Топилганларни формулага қўйсак: $\Delta z = dz + \frac{1}{2!}d^2z + R_2 = \frac{\Delta x + \Delta y}{x+y} + \frac{1}{2!}\left(-\left(\frac{\Delta x + \Delta y}{x+y}\right)^2\right) + R_2 = \frac{\Delta x + \Delta y}{x+y} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{\Delta x + \Delta y}{x+y}\right)^2 + R_2$. **140.** $\Delta z = \frac{\Delta x + \Delta y}{(x-y)^2} - \frac{(\Delta x + \Delta y)^2}{(x-y)^3} + R_2$. **141.** $z'_x = e^{xy}y$, $z''_{x^2} = e^{xy}\cdot y^2$, $z''_{xy} = e^{xy}xy + e^{xy} = e^{xy}(xy+1)$; $z'_y = e^{xy}\cdot x$, $z''_{y^2} = e^{xy}\cdot x^2$. $dz = e^{xy}\cdot y\Delta x + e^{xy}\cdot x\Delta y = e^{xy}(y\Delta x + x\Delta y)$, $d^2z = e^{xy}y^2\Delta x^2 + 2e^{xy}(xy+1)\Delta x\Delta y + e^{xy}x^2\Delta y^2 = e^{xy}(y^2\Delta x^2 + 2(xy + 1)\Delta x\Delta y + x^2\Delta y^2)$. Демак, $\Delta z = dz + \frac{1}{2}d^2z + R_2 = e^{xy}(y\Delta x + x\Delta y) + \frac{1}{2}e^{xy}(y^2\Delta x^2 + 2(xy+1)\Delta x\Delta y + x^2\Delta y^2) + R_2 = e^{xy}(y\Delta x + x\Delta y + \frac{y^2}{2}\Delta x^2(xy+1)\Delta x\Delta y + \frac{x^2}{2}\Delta y^2) + R_2$. **142.** $\Delta z = \frac{\Delta x + \Delta y}{2\sqrt{x+y}} - \frac{(\Delta x + \Delta y)^2}{8(x+y)\sqrt{x+y}} + R_2$. **143.** Сирт тенгламасини $z - xy = 0$ кўринишда ёзиб олайлик. Энди уринма текислик ва нормалнинг тенгламасини тузиш учун хусусий ҳосилаларнинг қийматларини топишимиз керак. $F(x, y, z) = z - xy$ деб олсак, $F'_x(x, y, z) = -y$, $F'_y(x, y, z) = -x$, $F'_z(x, y, z) = 1$. Булардан $F'_x(0, 0, 0) = 0$, $F'_y(0, 0, 0) = 0$, $F'_z(0, 0, 0) = 1$. Топилганларни формулага қўйсак: $0\cdot(x-0) + 0\cdot(y-0) + 1\cdot(z-0) = 0$, $z = 0$ уринма текислик тенгламасига эга бўламиз. $\frac{x-0}{0} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-1}{1}$, $\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$ нормалнинг тенгламаси. **144.** $z = 2x + 2y + 2$—уринма текислик тенгламаси. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$ — нормалнинг тенгламаси. **145.** $F(x, y, z) = (z^3 - x^2)xyz - y^5 - 5$ ёки $F(x, y, z) = xyz^3 - x^3yz - y^5 - 5$. Бу ҳолда $F'_x(x, y, z) = yz^3 - 3x^2yz$, $F'_y(x, y, z) = xz^3 - x^3z - 5y^4$, $F'_z(x, y, z) = 3xyz^2 - x^3y$. Ҳосилаларнинг (1, 1, 2) нуқтадаги қийматларини топамиз: $F''_x(1, 1, 2) = 2$, $F'_y(1, 1, 2) = 1$, $F'_z(1, 1, 2) = 11$. Топилганларни формулага қўйсак: $2\cdot(x-1) + 1\cdot(y-1) + 11\cdot(z-2) = 0$ ёки $2x + y +$

$+ 11z - 25 = 0$ — уринма текислик тенгламаси, $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{11}$ — нормаль тенгламаси. 146. $x + 11y + 5z - 18 = 0$ — уринма текислик, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}$ — нормаль тенгламаси. 147. $F(x, y, z) = 4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x - y - z$, ҳосилаларни топсак. $F'_x(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - 1$, $F'_y(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - 1$, $F'_z(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - 1$. Булардан, $F'_x(2, 3, 6) = -\frac{5}{7}$, $F'_y \cdot (2, 3, 6) = -\frac{4}{7}$, $F'_z(2, 3, 6) = -\frac{1}{7}$. Топилганларни формулага қўйсак, $-\frac{5}{7} \cdot (x-2) - \frac{4}{7}(y-3) - \frac{1}{7}(x-6) = 0$ ёки $5x + 4y + z - 28 = 0$ — уринма текислик тенгламаси. $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-6}{1}$ — нормаль тенгламаси. **148.** $x + 2y - 4 = 0$ — уринма текислик $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{0}$ — нормаль тенгламаси. 149. Аввало, стационар нуқталарни топамиз. Бунинг учун иккала ҳосилани топиб уларни нолга тенглаб, системани ечамиз;

$$\begin{cases} z'_x = 3 - 2x - y \\ z_y = 6 - x + 2y; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 - 2x - y = 0 \\ 6 - x + 2y = 0. \end{cases}$$

Системанинг ечими $x = \frac{12}{5}$ $y = -\frac{9}{5}$ бўлади. Демак, $\left(\frac{12}{5}, -\frac{9}{5}\right)$ — стационар нуқта. Энди иккинчи тартибли ҳосилалар ва уларнинг стационар нуқтадаги кийматларини топамиз. $z''_{x^2} = -2$, $z''_{xy} = -1$, $z''_{y^2} = 2$, $A = -2$, $B = -1$, $C = 2$. Бундан $\Delta = A \cdot C - B^2 = (-2) \times \times 2 - (-1^2 = -5$, $\Delta = -5 < 0$ бўлгани учун функция экстремумга эга эмас. 150. (0, 0) нуқтада максимумга эга

151.
$$\begin{cases} z'_x = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} (x + y^2 + 2) \\ z'_y = e^{\frac{x}{2}} \cdot 2y, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} (x + y^2 + 2) = 0 \\ e^{\frac{x}{2}} \cdot 2y = 0. \end{cases}$$

Бу система $\begin{cases} x + y^2 + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ системага тенг кучли. Бу системанинг ечими $x=-2$, $y=0$ бўлади. Демак, $(-2, 0)$ — стационар нуқта. Энди иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларни ва ула нинг стационар нуқтадаги қийматларини топамиз:

$$z''_{x^2}=\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(x+y^2+4),\quad z''_{xy}=e^{\frac{x}{2}}y,\quad z''_{y^2}=2e^{\frac{x}{2}},$$

$$A=z''_{x^2}(-2,0)=\frac{e^{-1}}{2},\quad B=z''_{xy}(-2,0)=0,\quad C=z''_{y^2}(-2,0)=2e^{-1}.$$

Бундан $\Delta=A\cdot C-B^2=\frac{e^{-1}}{2}\cdot 2e^{-1}-0=e^{-2}$, $\Delta>0$ бўлгани учун $(-2, 0)$ да функция экстремумга эга. $A>0$ бўлгани учун $(-2, 0)$ да функция минимумга эга. **152.** Экстремум йўқ. **153.**
$\begin{cases} z_c=2x-y+3, \\ z'_y=-x+2y-2, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-y+3=0, \\ -x+2y-2=0. \end{cases}$ $x=-\frac{4}{3}$, $y=\frac{1}{3}$ —системанинг ечими, шунинг учун $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ стационар нуқта. $z''_{x^2}=2$, $z''_{xy}=-1$, $z''_{y^2}=2$. Бундан $A=2$, $B=-1$, $C=2$, $\Delta=2\cdot 2+1=5$. $\Delta=5>0$ ва $A>0$ бўлгани учун $\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ минимум нуқта

154. Экстремум йўқ. **155.** Бу ошкормас функция бўлгани учун

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{4x+8z}{2z+8x-1},\quad z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{4y}{2z+8x-1}.$$

Стационар нуқталарни топиш учун

$$\begin{cases} \frac{4x+8z}{2z+8x-1}=0, \\ \frac{4y}{2z+8x-1}=0, \\ 2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0, \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} 4x+8z=0, \\ 4y=0, \\ 2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0 \end{cases}$$

системани ечамиз. Системанинг ечимлари $(-2, 0, 1)$ ва $\left(\frac{16}{7}, 0, -\frac{8}{7}\right)$ бўлади. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$z''_{x^2}=-\frac{(4+8z'_x)\cdot(2z+8x-1)-(4x+8z)\cdot(2z'_x+8)}{(2z+8x-1)^2},$$

$$z''_{xy}=-\frac{8z'_y\cdot(2z+8x-1)+(4x+8z)2\cdot z'_y}{(2z+8x-1)^2},$$

$$z''_{y^2} = -\frac{4(2z+8x-1) - 4y\cdot 2z'_y}{(2z+8x-1)^2}.$$

$z'_x = 0$, $z'_y = 0$ бўлгани учун $z''_{x^2} = \frac{56z+4}{(2z+8x-1)^2}$; $z''_{xy} = 0$, $z''_{y^2} = -\frac{4}{2z+8x-1}$ бўлади. Аввал функцияни $(-2, 0, 1)$ нуқтада текширамиз. $A = z''_{x^2}(-2, 0, 1) = \frac{4}{5}$, $B = z''_{xy}(-2, 0, 1) = 0$, $C = z''_{y^2}(-2, 0, 1) = \frac{4}{15} \cdot \Delta = A\cdot C - B^2 = \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{15} - 0 = \frac{16}{75}$, $\Delta>0$, $A>0$ бўлгани учун $(-2, 0)$ да функция минимумга эга Энди функцияни $\left(\frac{16}{7}, 0, -\frac{8}{7}\right)$ нуқтада текширамиз: $A = -\frac{2940}{12321}$, $B = 0$, $C = \frac{28}{11}$. Бундан $\Delta>0$ ва $A<0$ бўлгани учун $\left(\frac{16}{7}, 0\right)$да функция максимумга эга. **156.** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ нуқтада максимумга эга. **157.** Биринчидан, $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ стационар нуқта эканини кўрсатамиз:

$$\left|\begin{aligned} z'_x &= 2x + y - \frac{1}{x^2}, \\ z'_y &= x + 2y - \frac{1}{y^2}, \end{aligned}\right. \qquad \left|\begin{aligned} 2x + y - \frac{1}{x^2} &= 0, \\ x + 2y - \frac{1}{y^2} &= 0. \end{aligned}\right.$$

$x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, $y = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ бу системанинг ечими бўлади (текшириб кўринг). Демак, $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ стационар нуқта. Энди иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларнинг қийматларини ҳисоблаймиз:

$$z''_{x^2} = 2 + \frac{2}{x^3},\ z''_{xy} = 1,\ z''_{y_2} = 2 + \frac{2}{y^3}.\ A = 2 + \frac{2}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^3} = 8,$$

$$B = 1,\ C = 2 + \frac{2}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^3} = 8. \qquad \Delta = A\cdot C - B^2 = 8\cdot 8 - 1 = 63.$$

$\Delta > 0$ ва $A > 0$ бўлгани учун $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ да функция минимумга эга. **159.** 1) Аввало, функциянинг берилган соҳадаги критик нуқталарини топамиз:

$$\begin{cases} z'_x = 2x \\ z'_y = -2y, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0, \end{cases}$$

$x = 0$, $y = 0$. Демак, (0, 0) стационар нукта ва у соҳага тегишли. 2) Функциянинг топилган нуқтадаги қийматини топамиз: $z_1(0, 0) = 0$. 3) Функциянинг соҳанинг чегарасидаги энг кичик ва энг катта қийматларини топамиз: бу ерда соҳанинг чегараси $x^2 + y^2 = 4$ айланадан иборат. Бундан $y^2 = 4 - x^2$ Буни берилган функцияга қўйсак, $z = x^2 - (4 - x^2)$, $z = 2x^2 - 4$. $x^2 + y^2 = 4$ айлана устидаги нуқталар учун $x \in [-2; 2]$. Шунинг учун $z = 2x^2 - 4$ функциянинг $[-2, 2]$ даги энг кичик ва энг катта қийматларини топамиз. а) Бунинг учун бу функциянинг критик нуқталарини топамиз: $z' = 4x$, $4x = 0$, $x = 0$. б) Функциянинг критик нуқтадаги қийматини топамиз: $z_2(0) = 4$. в) Функциянинг кесманинг учларидаги қийматларини топамиз: $z_3(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 4 = 4$, $z_4(2) = 2 \cdot 2^2 - 4 = 4$. 4) Топилган z_1, z_2, z_3, z_4 қийматларни тўплаймиз: $\{0; -4\ 4\}$. Демак, -4 функциянинг энг кичик қиймати, 4 эса энг катта қиймати экан. **160** *Энг катта қиймати* $z = 1$ *энг кичик қиймати* $z = -1$. **161.** 1) Функциянинг соҳадаги критик нуқталарини топамиз:

$$\begin{cases} z'_x = 2x - y + 1 \\ z'_y = 2y - x + 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0. \end{cases}$$

Системани ечсак, $x = -1$, $y = -1$. Демак, $(-1, -1)$ функциянинг критик (стационар) нуқтаси ва соҳага тегишли (бошқа критик нуқталари йўқ). 2) Функциянинг стационар нуқтадаги қийматини топамиз: $z_1(-1, -1) = -1$, $z_1 = -1$. 3) Функциянинг соҳанинг чегарасидаги энг кичик ва энг катта қийматларини топамиз. Соҳанинг чегараси уч бўлакдан иборат бўлиб, бу бўлаклар турли формулалар билан берилганлиги учун функцияни ҳар бир бўлакда алоҳида-алоҳида текширамиз. а) Функцияни *AO* томонда текширамиз, унинг тенгламаси $y = 0$ бўлади. Шу сабабли берилган функцияда $y = 0$ десак, $z = x^2 + x$ кўринишни олади, бу ерда $x \in [-3\ 0]$. Бу функциянинг критик нуқтасини топамиз: $z' = 2x + 1$, $2x + 1 = 0$, $x = -\frac{1}{2}$. $-\frac{1}{2} \in [-3; 0]$ бўлгани учун функциянинг $x = -\frac{1}{2}$ даги қийматини топамиз: $z_2\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$. Энди функцияни кесманинг учларида текширамиз: $z_3(-3) = 6$, $z_4(0) = 0$. б) Функцияни *OB* томонда текширамиз. Унинг тенгламаси $x = 0$ бўлгани учун, буни берилган функцияга қўйсак, $z = y^2 + y$ бўлиб, $y \in [-3; 0]$. Буни ҳам юқоридаги каби текшириш мумкин. Бу ерда ҳам $y =$

$= -\frac{1}{2}$ да $z_5 = -\frac{1}{4}$, $y = -3$ да $z_6 = 6$, $y = 0$ да $z_7 = 0$ бўлади.

в) Энди функцияни AB томонда текширамиз: унинг тенгламаси $y = -3 - x$ бўлгани учун $z = x^2 + (-3-x)^2 - x(-3-x) + x + (-3-x)$ ёки $z = 3x^2 + 9x + 6$ бўлади; $x \in [-3; 0]$. Критик нуқталарни топамиз: $z' = 6x + 9$, $6x + 9 = 0$, $x = -\frac{3}{2}$. $z_8\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$, $z_9(-3) = 6$, $z_{10}(0) = 6$. 4) Топилган z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_9, z_{10} қийматларни туплаймиз $\left\{-1, -\frac{1}{4}, 6, 0, -\frac{3}{4}\right\}$ Демак, -1 функциянинг энг кичик қиймати, 6 эса энг катта қиймати. **162.** Энг кичик қиймати $z = -3$, энг катта қиймати $z = 17$. **163.** 1) Функциянинг соҳадаги стационар нуқталарини топамиз:

$$\begin{cases} z_x = e^{-x^2-y^2} \cdot 2x(-2x^2 - 3y^2 + 2), \\ z_y = e^{-x^2-y^2} \cdot 2y(-2x^2 - 3y^2 + 3). \end{cases} \quad \begin{cases} 2x(-2x^2 - 3y^2 + 2) = 0, \\ 2y(-2x^2 - 3y^2 + 3) = 0, \end{cases}$$

Бу системани ечсак, $(0, 0)$, $(-1, 0)$. $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$ ларнинг ҳар бири стационар нуқта экани келиб чиқади ва буларнинг ҳар бири соҳага тегишли. 2) Функциянинг стационар нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз: $z_1(0, 0) = 0$, $z_2(-1, 0) = \frac{2}{e}$, $z_3(1, 0) = \frac{2}{e}$; $z_4(0, -1) = \frac{3}{e}$, $z_5(0, 1) = \frac{3}{e}$. 3) Функциянинг соҳанинг чегарасидаги энг кичик ва энг катта қийматларини топамиз. Соҳанинг чегараси $x^2 + y^2 = 4$ бўлиб, бундан $x^2 = 4 - y^2$ ни берилган функцияга қўйсак. $z = e^{-4} \cdot (8 + y^2)$ га эга бўламиз, бу ерда $y \in [-2; 2]$. Бу ҳолда $z' = e^{-4} \cdot 2y$, $y = 0$, $z_6(0) = \frac{8}{e^4}$. Кесманинг учларида эса $z_7(-2) = e^{-4}(8 + (-2)^2) = \frac{12}{e^4}$, $z_7 = \frac{12}{e^4}$, $z_8(2) = \frac{12}{e^4}$. 4) Топилган z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8 қийматларни туплаймиз: $\left\{0, \frac{2}{e}, \frac{3}{e}, \frac{8}{e^4}, \frac{12}{e^4}\right\}$

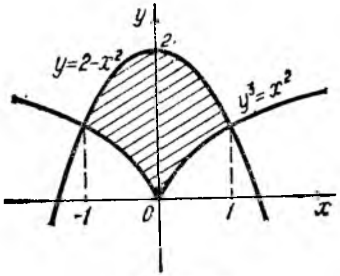
Демак, 0—функциянинг энг кичик қиймати, $\frac{3}{e}$ эса энг катта қиймати. **164.** Энг кичик қиймат $z = \operatorname{arctg}(-5)$, энг катта қиймат $z = \operatorname{arctg} 7$. **165.** $2k \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2k + 1$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ **166.**
$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ 2k \leqslant y \leqslant 2k + 1, \end{cases}$ $k \in \mathbf{Z}$. **167.** $x = k$, $y = k$, $k \in \mathbf{Z}$ тўғри чизиқларнинг ҳар бир нуқтасида узилади. **171.** а) $1 + x + y + \frac{x^2}{2!} + \frac{y^2}{2!} + \ldots$, б) $xy + \frac{xy^2}{2} + \frac{x^2y}{2} + \frac{xy^3}{3} + \frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{4} + \ldots$, в) $1 + x + y + x^2 +$

$+xy+y^2+\ldots$, г) $x^2+y^2-\frac{(x^2+y^2)^3}{3!}+\frac{(x^2+y^2)^5}{5!}+\ldots$ **172.** а) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ нуқтада Максимумга эга $z=\sqrt[4]{e}$, б) $(2, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}. +\sqrt{2})$ нуқталарда $z=2$ (максимум), $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ нуқталарда $z=-2$ (минимум). **173.** Учала ўлчовлари бир хил узунликда бўлиб, $\frac{d\sqrt{3}}{3}$ га тенг. **174.** $\sqrt{20}$.

XII БОБ

1. $\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^1 xydy = \int\limits_1^2 xdx\int\limits_0^1 ydy = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}$. **2.** $\frac{19}{2}$; **3.** $\int\limits_0^1 x^2dx\int\limits_0^2 y^2dy = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{9}$. **4.** $\frac{7}{2}$. **5.** $\int\limits_1^2 dy\int\limits_1^3\frac{dx}{x^2}=\int\limits_1^2\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^3 dy = \frac{2}{3}$. 6. $\frac{1}{4}$. 7. $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx\int\limits_1^2 (x+y)dy = \left\|\int\limits_1^2 (x+y)\,dy = x\int\limits_1^2 dy + \int\limits_1^2 ydy = x+\frac{3}{2}\right\| = \int\limits_0^1\left(x+\frac{3}{2}\right)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\frac{3}{2}x\Big|_0^1 = 2$. **8.** 40. 9. $\int\limits_2^4 xdx\int\limits_0^{x^2}dy=\int\limits_2^4 x^3dx=60$. **10.** 64. **11.** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{y^2} xdx = \left\|\int\limits_y^{y^2}xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_y^{y^2}=\frac{y^4}{2}-\frac{y^2}{2}\right\|=\frac{1}{2}\int\limits_0^1(y^4-y^2)\,dy=\frac{1}{2}\left(\frac{y^5}{5}-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1=-\frac{1}{15}$. **12.** $\frac{1}{28}$. **13.** $\int\limits_1^2 ydy\int\limits_1^{\sqrt{y}}dx = \left\|\int\limits_1^{\sqrt{y}}dx=\sqrt{y} - 1\right\| = \int\limits_1^2 y(\sqrt{y} -1)\,dy=\int\limits_1^2 y^{\frac{3}{2}}dy-\int\limits_1^2 ydy=\left(\frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}}-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2=\frac{4\sqrt[5]{4}-19}{10}$. **14.** 4. **15.** $\int\limits_0^2 xdx\int\limits_0^x(x+2y)dy=\left\|\int\limits_0^x(x+2y)\,dy = x\int\limits_0^x dy+2\int\limits_0^x ydy=(xy+y^2)\Big|_0^x=2x^2\right\|=\int\limits_0^2 2x^3dx=\frac{x^4}{2}\Big|_0^2=8$.

16. $-\frac{56}{5}$. **17.** $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x e^{\frac{y}{x}}dy=\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^x e^{\frac{y}{x}}d\left(\frac{y}{x}\right)=(e-1)\int\limits_0^1 xdx=\frac{e-1}{2}$. **18.** $\frac{506}{15}$. **19.** $\iint\limits_D f(x, y)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy=\int\limits_{-1}^1 dy\int\limits_{y^2}^1 f(x, y)dx$. **20.** $\int\limits_1^6 dx\int\limits_{6/x}^{7-x} f(x, y)dy=\int\limits_1^6 dy\int\limits_{6/y}^{7-y} f(x, y)\,dx$.



66- чизма.

21. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{\sqrt{x}} f(x,\ y)dy=\int\limits_0^1 dy\times\int\limits_{y^2}^{y} f(x,\ y)dx$. 22. $\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{2\sqrt{x}} f(x,\ y)dy=\int\limits_0^4 dy\int\limits_{\frac{y^2}{4}}^{4} f(x,\ y)dx$. 23. $\int\limits_0^4 dy\int\limits_0^{y/2} f(x,\ y)dx=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{2x}^{4} f(x,\ y)dy$. 24. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{3-x^2}} f(x,\ y)dy$. 25. $\int\limits_1^2 dx\int\limits_1^x f(x,\ y)dy+\int\limits_2^3 dx\int\limits_1^2 f(x,\ y)dy+\int\limits_3^4 dx\int\limits_{x-2}^2 f(x,\ y)dy$. 26. $\int\limits_{-2}^2 dy\int\limits_{-\sqrt{y^2+1}}^{\sqrt{y^2+1}} f(x,\ y)dx$. 27. $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{x^{2/3}}^{-x^2+2} f(x,\ y)dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{y^3}}^{\sqrt{y^3}} f(x,\ y)dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,\ y)dx$ (66-чизма). 28. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^3}^{x^2} f(x,\ y)dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{\sqrt{y}} f(x,\ y)dx$. 29. $\int\limits_0^2 dx\times\int\limits_x^{2x} f(x,\ y)dy=\int\limits_0^2 dy\int\limits_{y/2}^{y} f(x,\ y)dx+\int\limits_2^4 dy\int\limits_{y/2}^{2} f(x,\ y)dx$. 30. $\int\limits_0^1 dy\times\int\limits_y^{2-y} f(x,\ y)dx=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x,\ y)dy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^{2-x} f(x,\ y)dy$. 31. $\int\limits_0^1 dy\times\int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,\ y)dx=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} f(x,\ y)dy+\int\limits_1^3 dx\int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,\ y)dy$. 32. $\int\limits_0^1 dx\times\int\limits_{e^{-x}}^{e^x} f(x,\ y)dy=\int\limits_{\frac{1}{e}}^1 dy\int\limits_{-\ln y}^{1} f(x,\ y)dx+\int\limits_1^e dy\int\limits_1^{\ln y} f(x,\ y)dx$. 33. $\int\limits_{-2}^2 dx\int\limits_{x^2}^4 f(x,\ y)dy=\int\limits_0^4 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,\ y)dx$. 34. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_1^3 f(x,\ y)dy+\int\limits_2^6 dx\times\int\limits_{x/2}^3 f(x,\ y)dy$. 35 $\int\limits_0^2 dx\int\limits_x^{2x} f(x,\ y)dy$. 36. $\int\limits_{-2}^2 dy\int\limits_{\frac{y-6}{2}}^{2y+2} f(x,\ y)dx$. 37. $\int\limits_0^2 dx\times$

$\times \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x, y)dy$. **38.** $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x^2+1}^{3-x} f(x, y)dy$. **39.** $\iint\limits_D x^2ydxdy = \int\limits_0^1 x^2dx \times$
$\times \int\limits_{-\sqrt{x}}^{x^2} ydy = \left\| \int\limits_{-\sqrt{x}}^{x^2} ydy = \frac{x^4 - x}{2} \right\| = \left(\frac{x^7}{14} - \frac{x^4}{8}\right)\Big|_0^1 =$
$= -\frac{3}{56}$. **40.** $\int\limits_0^x e^{-y^2}dy$ интеграл чекли ҳолда олинмайди.
Интеграллаш тартибини ўзгартирсак, $\iint\limits_D e^{-y^2} dx \times$
$\times dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y e - y^2dx = \int\limits_0^1 e^{-y^2}dy \int\limits_0^y dx = \int\limits_0^1 ye^{-y^2} dy = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ бўлади.
41. $\iint\limits_D xy^2dxdy = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} y^2dy = \left\| \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} y^2dy = \frac{2x\sqrt{x}}{3} \right\| = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 x^{\frac{5}{2}}dx =$
$= \frac{4}{21}$. 42. $\frac{27}{20}$. **43.** $\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_2^5 xdx \int\limits_{-2}^4 ydy = \frac{x^2}{2}\Big|_2^5 \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_{-2}^4 = 63$. 44. $73\frac{1}{15}$.
45. $\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_0^1 xdx \cdot \int\limits_x^{3x} ydy = 1$. 46. 14. 47. $\iint\limits_D xax\,dy = \int\limits_0^a xdx \int\limits_{-\frac{a}{b}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy =$
$= \frac{2b}{a}\int\limits_0^a x\sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{2a^2b}{3}$. **48.** $\frac{1}{16}$. **49.** $\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_1^6 xdx \int\limits_{6/x}^{7-x} ydy =$
$= \left\| \int\limits_{6/x}^{7-x} ydy = \frac{y^2}{2}\Big|_{6/x}^{7-x} = \frac{(7-x)^2}{2} - \frac{18}{x^2} \right\| = \frac{1}{2}\int\limits_1^6 x(7-x)^2dx -$
$- 18\int\limits_1^6 \frac{dx}{x} = 88\frac{23}{24} - 18\ln 6$. **50.** $\frac{8}{5}$. **51.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 \rho\cos\varphi\, d\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \times$
$\times \int\limits_0^2 \rho d\rho = 2$. **52.** $\frac{15}{2}$. 53. $\int\limits_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^4 \rho d\rho = -\cos\varphi\Big|_0^\pi \cdot \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^4 = 16$.
54. $4\frac{1}{2}$. **55.** $\int\limits_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi \int\limits_0^R \rho d\rho = -\cos\varphi\Big|_0^\pi \cdot \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^R = R^2$. **56.** $\frac{a^2}{2}$.
57. $\iint\limits_S \rho^2 d\varphi d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2a} \rho^2 d\rho = \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^3}{3}\Big|_a^{2a} = \frac{14}{3}\pi a^3$. **58.** $\frac{4}{3}\pi^4 a^3$.
59. $\iint\limits_S \rho^2 \sin\varphi d\varphi d\rho = \int\limits_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} \rho^2 d\rho = \frac{a^3}{3}\int\limits_0^\pi (1 + \cos\varphi)^3 \sin\varphi\, d\varphi =$
$= \frac{a^3}{3}\int\limits_0^\pi (\sin\varphi + 3\cos\varphi\sin\varphi + 3\cos^2\varphi\sin\varphi + \cos^3\varphi\sin\varphi)\, d\varphi = \frac{4a^3}{3}$.
60. $-\frac{4}{3}a^3$. **61.** $\iint\limits_D xy^2\, dx\, dy = \int\limits_0^\pi \cos\varphi \sin^2\varphi d\varphi \int\limits_{2\sin\varphi}^{4\sin\varphi} \rho^4 d\rho = 0$. **62.** $\pi \times$

$\times\ (1-e^{-a^2})$. **63.** $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \left\| \begin{array}{ll} x=\rho\cos\varphi, & x^2+y^2=\rho^2, \\ y=\rho\sin\varphi, & dxdy=\rho d\rho d\varphi; \end{array} \right.$

$\left. \begin{array}{ll} 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}; & 0\leqslant\rho\leqslant 2R\cos\varphi \\ x^2+y^2=2Rx \Longrightarrow \rho=2R\cos\varphi \end{array} \right\| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2R\cos\varphi} \rho^2 d\rho = \frac{8R^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi =$

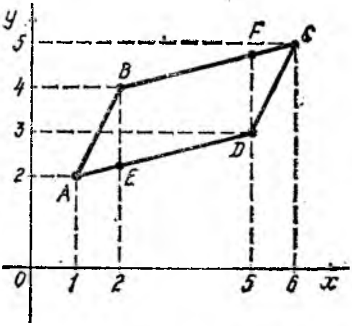
$=\frac{16}{9}R^3$. **64.** $\frac{122}{3}\pi$. **65.** $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}} = \iint\limits_{D'} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{25-\rho^2}} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \times$

$\times\int\limits_0^4 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{25-\rho^2}} = 4\pi$. **66.** $\frac{15}{2}\pi$. **67.** 67- чизма. D соҳа $ABCD$ параллелограмм. $D=\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3$; $\sigma_1 = ABE$; $\sigma_2 = BEDF$; $\sigma_3 = DFC$. $S_D =$

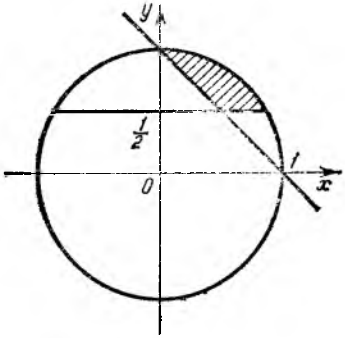
$=\iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{\sigma_1} dx\,dy + \iint\limits_{\sigma_2} dx\,dy + \iint\limits_{\sigma_3} dxdy$; $\iint\limits_{\sigma_1} dxdy = \int\limits_1^2 dx \times$

$\times\int\limits_{\frac{x+7}{4}}^{2x} dy = \frac{7}{8}$; $\iint\limits_{\sigma_2} dx\,dy = \int\limits_2^5 dx \int\limits_{\frac{x+7}{4}}^{\frac{x+14}{4}} dy = \frac{21}{4}$; $\iint\limits_{\sigma_3} dxdy = \int\limits_5^6 dx \times$

$\times\int\limits_{2x-7}^{\frac{x+14}{4}} dy = \frac{7}{8}$; $S_D = 7$. **68.** $\frac{40}{3}$. 69. (68- чизма). $S_D = \iint\limits_D dxdy =$



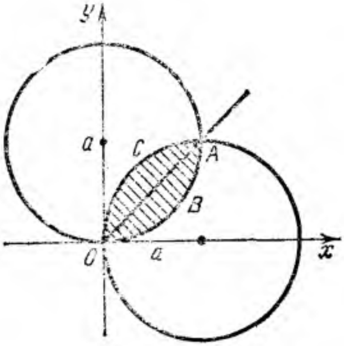
67- чизма.



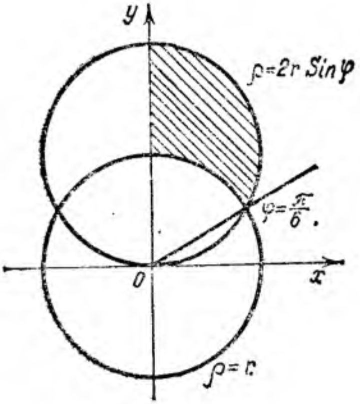
68- чизма.

$=\int\limits_{1/2}^{1} dy \int\limits_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} dx = \int\limits_{1/2}^{1} (\sqrt{1-y^2}-(1-y))dy = \frac{\pi}{6} - \frac{1+\sqrt{3}}{8}$.

70. $S=\frac{3\pi-4}{12}$. **71.** $S=\int\limits_{-\frac{7}{2}}^{2} dx \int\limits_{\frac{3x-6}{2}}^{4-x^2} dy = \frac{1331}{48}$. **72.** $S=\frac{ab(\pi-2)}{4}$.



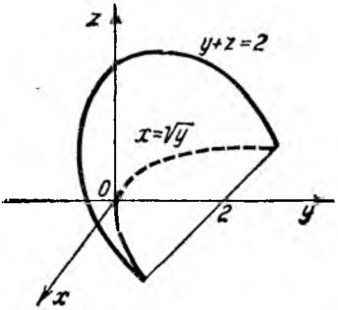
69- чизма.



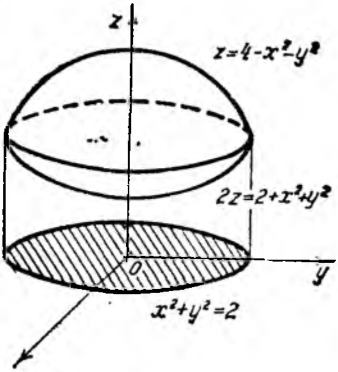
70- чизма.

73. $S=\iint\limits_D \rho d\rho d\varphi=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{a\cos 2\varphi}\rho d\rho=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 2\varphi d\varphi=\frac{\pi a^2}{2}$. **74.** $S=3\pi$.

75. $x^2+y^2-2ax=0$ ёки $(x-a)^2+y^2=a^2$ — маркази $(a;\ 0)$ да радиуси a га тенг айлана, $x^2+y^2-2ay=0$ ёки $x^2+(y-a)^2=a^2$ ҳам a радиусли маркази $(0;\ a)$ даги айланадир. Қутб координаталар системасига ўтамиз: $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi;\ x^2+y^2=\rho^2$, у ҳолда айлана тенгламалари: $\rho=2a\cos\varphi$ ва $\rho=2a\sin\varphi$ булади (69- чизма). $S=\iint\limits_D \rho d\rho\, d\varphi=\iint\limits_{(OBAO)}\rho d\rho\, d\varphi+\iint\limits_{(OACO)}\rho d\rho d\varphi=2\iint\limits_{(OBAO)}\rho d\rho d\varphi=$
$=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int\limits_0^{2a\sin\varphi}\rho d\rho=4a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\varphi d\varphi=a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. **76.** $\frac{3}{4}\pi a^2$. **77.**
$S=\iint\limits_D \rho\, d\rho\, d\varphi=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi\int\limits_r^{2r\sin\varphi}\rho d\rho=\frac{r^2}{2}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}(4\sin^2\varphi-1)d\varphi=\frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\right.$
$\left.+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (70- чизма). **78.** $2a^2$. **79.** Жисмнинг асоси $y=x^2$ парабола ва $y=1$ тўғри чизиқ билан чегараланган. $V=\iint\limits_D z dx dy=\int\limits_0^1 dy\ \times$
$\times\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}(4-x-y)\,dx=\int\limits_0^1\left((4-y)x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}dy=2\int\limits_0^1(4-y)\ \times$
$\times\sqrt{y}\ dy=\frac{68}{15}$. **80.** $V=\frac{32}{3}$. **Кўрсатма.** Симметрия хоссасидан фойдаланиб, $\frac{V}{4}$ ни топамиз. **81.** $V=\iint\limits_D(2a-x-y)\,dx\,dy=$



71- чизма.



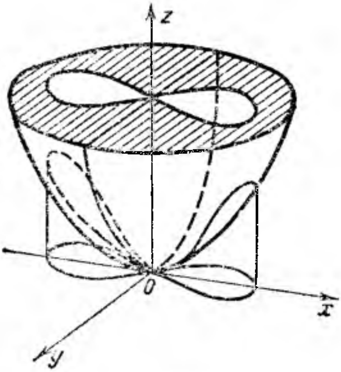
72- чизма.

$$=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}(2a-x-y)dy=\left\|\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}(2a-x-y)\,dy=\left(2ay-\right.\right.$$

$$\left.-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}=4a\sqrt{a^2-x^2}-2x\sqrt{a^2-x^2}\Bigg\|=4a\times$$

$\times\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx-2\int\limits_{-a}^{a}x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=2\pi a^3$. **82.** 9. **83.** Бунда жисмнинг асоси $y=x^2$ парабола ва $y=2$ тўғри чизиқ билан чегараланган параболик сегментдир, жисм юқоридан $z=2-y$ текислик билан чегараланган. Жисм yOz га нисбатан симметрик жойлашган (71- чизма). $\frac{V}{2}=\iint\limits_{D}(2-y)dxdy=\int\limits_{0}^{2}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{y}}(2-y)dx=\int\limits_{0}^{2}(2\sqrt{y}-$ $-y\sqrt{y})dy=\frac{16\sqrt{2}}{15}$; $V=\frac{32\sqrt{2}}{15}$. **84.** $\frac{9\pi}{2}$. **85.** Жисм yOz га нисбатан симметрикдир. $\frac{V}{2}=\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}(x^2+y^2)dy=\int\limits_{0}^{1}\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{x^2}^{1}dx=$ $=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x}{3}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{21}\right)\Bigg|_{0}^{1}=\frac{44}{105}$. **86.** $\frac{1}{6}$. **87.** $z=0$ текисликдаги D соҳа учбурчакдан иборат. $V=\int\limits_{-\frac{5}{2}}^{3}dx\int\limits_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x+5}{2}}(x+2y)dy+\int\limits_{3}^{36}dx\times$ $\times\int\limits_{-\frac{x}{2}}^{\frac{18-2x}{3}}(x+2y)dy=388\frac{5}{24}$. **88.** $160\frac{1}{15}$. **89.** 300. **90.** $\frac{569}{140}$. **91.** Жисм иккита айланма параболоидлар билан чегараланган (72- чизма). $V=V_1-V_2=\left(\iint\limits_D(4-x^2-y^2)dxdy-\iint\limits_D\frac{1}{2}(2+x^2+y^2)\,dxdy\right)$, бунда D сифатида $x^2+y^2\leqslant 2$ доиранинг чораги олинди. Энди қутб координаталарини киритамиз. $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $dxdy=\rho d\rho d\varphi$ $V_1=4\iint\limits_D(4-{}^2)\rho d\rho d\varphi$; $V_2=2\iint\limits_D(2+\rho^2)\rho d\rho d\varphi$. $x^2+y^2=2$ айлана тенгламаси $\rho=\sqrt{2}$ булади. $V_1=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}(4\rho-\rho^3)\,d\rho=12\times$ $\times\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi=6\pi$. $V_2=2\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}(2\rho+\rho^3)d\rho=6\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi=3\pi$; $V=3\pi$. 92. 8π. 93. Эллипсоид ярмининг ҳажмини ҳисоблаймиз. $z=c\times$ $\times\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$; $z=0$ текислигидаги D соҳа $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсдан иборат. $V=c\iint\limits_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$. Бу интегрални ҳисоблаш учун умумлашган қутб координаталарига ўтамиз. $x=$ $=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$, $\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}=\sqrt{1-\rho^2}$. Система якобиани $I(\rho,\varphi)=ab\rho$ бўлади. D соҳа учун $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\rho<1$. $\frac{V}{2}=c\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,ab\rho d\rho=-\frac{abc}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\,d(1-\rho^2)=$ $=\frac{2\pi}{3}abc$. Бундан $V=\frac{4\pi}{3}abc$. Агар $a=b=c=R$ бўлса, шар ҳажми $\frac{}{3}\pi R^3$ ҳосил бўлади. 94. $V=\frac{\pi(b-a)}{3}(3R^2-a^2-ab-b^2)$, $a=0$, $b=R$ да $V=\frac{2}{3}\pi R^3$ бўлади. **95.** Ҳажмини топиш талаб қилинган жисм пастдан $z=0$ текислик билан, юқоридан $z=$ $=\sqrt{x^2+y^2}$ конус сирти ва ён томонлардан $x^2+y^2=R^2$ цилиндрик сирт билан чегараланган. $V=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\times$ $\times\int\limits_0^{R^2}\rho^2 d\rho=\frac{2}{3}\pi R^3$. **96.** $\frac{45}{32}\pi$. **97.** Симметрия хусусиятидан фойдаланамиз. $V=2\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=2\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\sin\varphi}\rho^2 d\rho=2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{8}{3}\times$ $\times\sin^3\varphi d\varphi=\frac{16}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3\varphi d\varphi=\frac{16}{3}\int\limits_0^{\pi/2}(\cos^2\varphi-1)d(\cos\varphi)=\frac{32}{9}$. **98.** $\frac{\pi}{48}$.

99. Жисм юқоридан $z=ax+by+c$ текислик, пастдан $z=0$ текислик, ён томондан $x^2+y^2=R^2$ цилиндрик сирт билан чегаралан-



73- чизма.

гандир. $V = \iint\limits_D (ax + by + c)\,dxdy$, бунда D — $x^2 + y^2 = R^2$ доирадан иборат. $V = \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} (ax+by+c)dy = \pi R^2 c$. **100.** Сирт тенглама и $x^2+y^2 = R^2$ да z қатнашмайди, шунинг учун z га нисбатан ечилган формуладан эмас, балки x ёки y га нисбатан олинган формуладан фойдаланамиз. $x = \sqrt{R^2 - y^2}$ — ярим цилиндр. $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2-y^2}}$; $\frac{\partial x}{\partial z} = 0$ $\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}$. $S = 2\iint\limits_D \frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\,dxdy$, бунда $D: \begin{cases} -R \leqslant y \leqslant R, \\ 0 \leqslant z \leqslant H. \end{cases}$ $S = 2R\int\limits_0^H dz \int\limits_{-R}^{R} \frac{dy}{\sqrt{R^2-y^2}} = 2RH \arcsin\frac{y}{R}\Big|_{-R}^{R} = 2\pi RH$. **102.** $2kR^2$. **103.** $z = 2a - x - y$; $S = \iint\limits_D \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy = \sqrt{3}\int\limits_0^a dy\int\limits_0^a dx = \sqrt{3}\,a^2$. **104.** $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$. **105.** $z = xy$; $z'_x = y$; $z'_y = x$; $D: \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant R, \\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2-x^2}. \end{cases}$ Қутб координаталарини киритамиз: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. $D: \begin{cases} 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leqslant \rho \leqslant R. \end{cases}$ $S = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^R \sqrt{1+\rho^2}\,\rho d\rho = \frac{\pi}{4}\int\limits_0^R (1+\rho^2)^{\frac{1}{2}}\,d(1+\rho^2) = \frac{\pi}{6}\left((1+R^2)^{3/2} - 1\right)$. **106.** $2\pi a^2$. **107.** Симметрия хусусиятидан сиртнинг саккиздан бир бўлаги юзини ҳисоблаймиз. $\frac{S}{8} = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\,dy = 2\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} dy = 2\int\limits_0^2 dx = 4$. $s = 32$. **108.** 2π. **109.** $z = \frac{x^2+y^2}{2}$ параболоид тенгламасидан $z'_x = x$, $z'_y = y$; $\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} = \sqrt{1+x^2+y^2}$. $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$ цилиндр асоси xOy текислигида лемнискатани ифода қилади (73-чизма). $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dxdy$. D соҳа Ox ва Oy ўқларга нисбатан симметрик жойлашган. Энди қутб координаталарига ўтамиз: $S = 4\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho = \frac{20-3\pi}{9}$. **110.** $12\pi(3-\sqrt{5})$. **111.** $\int\limits_0^2 (x+y+z)dz = \left((x+y)z + \frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^2 = 2(x+y+1)$; $\int\limits_0^3 2(x+y+1)\,dy = (2(x+1)y + y^2)\Big|_0^3 = 6x + 15$; $\int\limits_0^1 (6x+15)dx = 18$. **112.** 3. **113.** $\int\limits_0^{x+2y} dz = x + 2y$; $\int\limits_0^1 (x+2y)dy = x+1$; $\int\limits_0^2 (x+1)dx = 4$. **114.** $\frac{1}{6}$. **115.** $\iiint\limits_T (2x+y-z)dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \times \int\limits_0^1 (2x+y-z)dz$; $\int\limits_0^1 (2x+y-z)dz = 2x + y - \frac{1}{2}$; $\int\limits_0^1 \left(2x + y - \frac{1}{2}\right)dy = 2x$; $\int\limits_0^1 2xdx = 1$. **116.** $\frac{abc}{3}(a^2+b^2+c^2)$. **117.** $\iiint\limits_T (3x + 2y + z)\,dxdydz = \int\limits_0^3 dz \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^1 (3x+2y+z)dx$; $\int\limits_0^1 (3x+2y+z)dx = \frac{3}{2} + 2y + z$; $\int\limits_0^2 \left(\frac{3}{2} + 2y + z\right)dy = 7 + 2z$; $\int\limits_0^3 (7+2z)dz = 30$. **118.** $\frac{1}{48}$. **119.** Сферик координаталарга ўтсак, $x = \rho\sin\theta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\theta \times \sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$, $I = \rho^2\sin\theta$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant R$. $\iiint\limits_T x^2dxdydz = \iiint\limits_{T'} \rho^4\sin^3\theta\cos^2\varphi d\rho d\theta d\varphi = \int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int\limits_0^R \rho^4 d\rho = \frac{\pi R^5}{5}\int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = \frac{\pi R^5}{5}\int\limits_0^{\pi} (\cos^2\theta - 1)d(\cos\theta) = \frac{4\pi R^5}{5}$. **120.** $\frac{2}{5}\pi R^5$.

121. Сферик координаталарга ўтилганда: $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. $0 \leqslant \rho \leqslant R$. $\iiint\limits_T (x^2+y^2)dxdydz = \iiint\limits_{T'} \rho^4\sin^3\theta d\rho d\varphi d\theta = \int\limits_0^R \rho^4 d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \times \sin^3\theta d\theta = \frac{4}{15}\pi R^5$. **122.** πR^4. **123.** Цилиндрик координаталар киритамиз. $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. T жисм учун $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant 2$; $\rho^2 \leqslant z \leqslant 2$. $\iiint\limits_T (x^2+y^2)dxdydz = \iiint\limits_{T'} \rho^3 d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \times$

$\times \int\limits_0^2 \rho^3 d\rho \int\limits_{\rho^2}^2 dz = \frac{16\pi}{3}$. **124.** $\frac{3\pi}{2}$. **125.** $M_x = \iint\limits_D kxy^2dxdy$; $M_y = \iint\limits_D kx^2 \times$ $\times\, ydxdy$. D соҳа $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ эллипс ва $x = 0$, $y = 0$ ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$) координата ўқлари билан чегараланган. $M_x = k\iint\limits_D xy^2dxdy =$ $= k\int\limits_0^a xdx \int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y^2dy = \frac{kb^3}{3a^3}\int\limits_0^a x(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{ka^2b^3}{15}$. $M_y = k\iint\limits_D \times$ $\times\, x^2ydx\,dy = \frac{ka^3b^2}{15}$. **126.** $M_x = \frac{2R^3}{3}$; $M_y = 0$. **127.** $M_x = \frac{ab^2}{6}$, $M_y = \frac{a^2b}{6}$.

128. $M_x = M_y = 0$. **129.** $\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint\limits_D xdxdy}{\iint\limits_D dxdy}$; $\bar{y} = \frac{\iint\limits_D ydxdy}{\iint\limits_D dxdy}$; $\iint\limits_D dx \times$ $\times\, dy = 4ab$; $\iint\limits_D xdxdy = \int\limits_{-a}^a xdx\int\limits_{-b}^b dy = 0$, $M_x = 0$, $M_y = 0$; $\bar{x} = \bar{y} =$ $= 0$. **130.** $\bar{x} = 0$ $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$. **131.** $\bar{x} = \frac{M_y}{M}$; $\bar{y} = \frac{M_x}{M}$. $M = \int\limits_{-2}^1 (2 - x -$ $- x^2)dx = \frac{9}{2}$. $M_y = \iint\limits_D xdxdy = \int\limits_{-2}^1 xdx\int\limits_{x^2}^{2-x} dy = -\frac{9}{4}$. $M_x = \iint\limits_D y \times$ $\times\, dx\,dy = \int\limits_{-2}^1 dx\int\limits_{x^2}^{2-x} ydy = \frac{36}{5}$. $\bar{x} = -\frac{1}{2}$; $\bar{y} = \frac{8}{5}$. **132.** $\bar{x} = 0$, $\bar{y} =$ $= \frac{4R}{3\pi}$. **133.** Кесик призма $x = y$ текисликка нисбатан симметрик бўлгани учун $\bar{x} = \bar{y}$; $\bar{x} = \bar{y} = \frac{\iint\limits_D xzdxdy}{\iint\limits_D zdxdy}$, $\bar{z} = \frac{\frac{1}{2}\iint\limits_D z^2dxdy}{\iint\limits_D zdxdy}$, бунда

$D: \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$ $\iint\limits_D x(4-x-y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 x(4-x-y)dy = \frac{7}{12}$; $\iint\limits_D z^2dxdy = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 (4-x-y)^2dy = \frac{55}{6}$; $\iint\limits_D zdxdy = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 (4 - x -$ $- y)dy = 3$; $\bar{x} = \bar{y} = \frac{17}{36}$; $\bar{z} = \frac{55}{36}$ **134.** $C\left(0;\ 0;\ \frac{3R}{8}\right)$. **135.** Шарнинг маркази координаталар бошида бўлса, у ҳолда тенгламаси $x^2 +$ $+ y^2 + z^2 = 1$ бўлади. $I_0 = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$. Интегрални ҳисоблаш учун сферик координаталар киритамиз: $I_0 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi} \sin\theta \times$

$\times\, d\theta \int\limits_0^1 \rho^4 d\rho = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^1 \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta = \frac{4\pi}{5}$. **136.** $I_{xz} = I_{yz} = \frac{\pi h^5}{20}$; $I_{xy} = \frac{\pi h^5}{5}$. **137.** $\frac{16}{3}a^3$. **138.** $4a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$. **140.** $\frac{32}{9}$. **141.** $2\sqrt{2}\,\pi$ **142.** $\frac{2}{3}\ R^3 \times (\varphi_2 - \varphi_1)$. **143.** $\frac{4}{3}\pi R^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}$. **145.** $S = 2\pi\int\limits_\alpha^\beta \varphi(u)\sqrt{(\varphi'(u))^2 + (\psi'(u))^2}\ \cdot \times\, du$. **146** $(v_2 - v_1)(\sin u_2 - \sin u_1)R$.

XIII БОБ

1. Γ йўлнинг йўналиши биринчи тур интеграл учун аҳамияти йўқ. Шу сабабли Γ ни бўлакларга ажратиб,

$$J = \int\limits_{OB}(x + y)\,ds + \int\limits_{OA}(x + y)\,ds + \int\limits_{AB}(x + y)\,ds$$

ни ёзиш мумкин.

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,\ y)\,ds = \int\limits_a^b f(x,\ g(x))\sqrt{1 + g'^2(x)}\,dx$$

формула бўйича ҳисоблаймиз. OB бўйлаб $x = 0$, $ds = dy$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, шунинг учун

$$\int\limits_{OB}(x + y)\,ds = \int\limits_0^1 y\,dy = \frac{1}{2}.$$

OA бўйлаб $y = 0$, $ds = dx$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, демак,

$$\int\limits_{OA}(x + y)\,ds = \int\limits_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

AB кесма $x + y = 1$ тўғри чизиқда ётгани сабабли, $ds = \sqrt{2}\,dx$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, демак,

$$\int\limits_{AB}(x + y)\,ds = \sqrt{2}\int\limits_0^1 dx = \sqrt{2}.$$

Шундай қилиб, $J = 1 + \sqrt{2}$ ни ҳосил қиламиз. **2.** 24. **3.** $dx = -a\sin t\,dt$, $dy = a\cos t\,dt$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ бўлгани учун

$\int\limits_{\Gamma} f(x,\ y)\,ds = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t),\ \psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt$ формулага биноан.

$J = \int\limits_0^{2\pi} a^{10} \cdot a\,dt = 2\pi a^{11}$. **4.** $\frac{256}{15}a^3$. **5.** Қутб координаталарига ўтсак, Γ айлананинг тенгламасини $\rho = a\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ кўринишда ёзиш мумкин. Қутб бурчаги φ ни параметр сифатида олиб, айланани параметрик равишда $x = a\cos^2\varphi$, $y = a\cos\varphi\sin\varphi$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ каби тасвирлаймиз. Бу айланада $f(x,\ y) = \sqrt{x^2 + y^2} = a\cos\varphi$, $ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi = a\,d\varphi$ бўлгани учун $\int\limits_{\Gamma} f(x,\ y)\,ds =$

$= \int\limits_{\theta_0}^{\theta_1} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta$ формулага биноан, $I =$ $= a^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi = 2a^2$. 6. $\frac{2}{3}\sqrt{2}a^3$. 7. Фазовий Γ эгри чизиқ параметрик $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ тенгламалар билан берилган бўлсин, у ҳолда эгри чизиқли интеграл

$$\int\limits_{\Gamma}(x, y, z)\,ds = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt$$

формула бўйича ҳисобланади. $x' = -a\sin t$, $y' = a\cos t$, $z' = b$, $x^2+y^2+z^2 = a^2+b^2t^2$ бўлгани учун $I = \sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\,dt =$ $= 2\pi\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2+\frac{4}{3}\pi^2b^2\right)$. 8. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\left[(1+2\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1\right]$. 9. $x+y+$ $+z=0$ текислик координаталар бошидан ўтиб, $x^2+y^2+z^2=a^2$ сфера билан радиуси a га тенг айлана бўйича кесишади. Циклли алмаштиришлардан фойдаланиб,

$$\int\limits_{\Gamma} x^2 ds = \int\limits_{\Gamma} y^2 ds = \int\limits_{\Gamma} z^2 ds$$

эканини топамиз. Бундан

$$I = \int\limits_{\Gamma} x^2 ds = \frac{1}{3}\int\limits_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\,ds.$$

Радиуси a га тенг I айланада $x^2+y^2+z^2=a^2$, шунинг учун $I =$ $= \frac{1}{3}a^2\int\limits_{\Gamma} ds$. $\int\limits_{\Gamma} ds$ нинг қиймати Γ айлананинг узунлигига тенг, яъни $\int\limits_{\Gamma} ds = 2\pi a$, демак, $I = \frac{2}{3}\pi a^3$. 10. $2\pi a^2$. 11. $M = \int\limits_{\Gamma}\rho(x, y)\,ds$ формуладан фойдаланамиз: $M = \int\limits_{\Gamma} y\,ds$, $dx = -a\sin t\,dt$, $dy = b\cos t \times$ $\times\, dt$, $y = b\sin t$, $ds = \sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$ бўлгани учун $M =$ $= b\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,\sin t\,dt = -\frac{ab}{\varepsilon}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,d(\varepsilon\cos t)$, бу ерда $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ $\varepsilon \cos t = \sin u$ деб оламиз, у ҳолда $d(\varepsilon \cos t) = \cos u\, du$, $M = \frac{ab}{\varepsilon} \int\limits_0^{\arcsin \varepsilon} \cos^2 u\, du = \frac{b^2}{2} + \frac{ab}{2\varepsilon} \arcsin \varepsilon$. **12.** $\frac{2}{3} P^2 \times (2\sqrt{2} - 1)$. **13.** $x_0 = \frac{1}{M} \int\limits_{\Gamma} x\rho(x, y)\, ds$, $y_0 = \frac{1}{M} \int\limits_{\Gamma} y\rho(x, y)\, ds$ формуладан фойдаланамиз. Бунинг учун аввал, циклоида ёйининг массасини топамиз. $ds = 2a \sin \frac{t}{2} dt$ бўлгани учун $M = 2a \int\limits_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 4a$, сўнгра оғирлик марказининг x_0 ва y_0 координаталарини топамиз: $x_0 = \frac{1}{4a} \int\limits_0^{\pi} a(t - \sin t)\, 2a \sin \frac{t}{2}\, dt = \frac{4}{3} a$, $y_0 = \frac{1}{4a} \int\limits_0^{\pi} a(1 - \cos t)\, 2a \sin \frac{t}{2}\, dt = \frac{4}{3} a$. **14.** $x_0 = \frac{2}{5} a$, $y_0 = \frac{2}{5} a$. **15.** Бир жинсли чизиқ Γ нинг M_x ва M_y статик моментлари $M_x = \int\limits_{\Gamma} y\, ds$, $M_y = \int\limits_{\Gamma} x\, ds$ формулалар орқали ифодаланади. Γ эгри чизиқ бўйлаб $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $ds = 3a \sin t \cos t\, dt$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ бўлгани учун, $M_x = 3a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t\, dt = \frac{3}{5} a^2$, $M_y = 3a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin t\, dt = \frac{3}{5} a^2$.

16. πa^3. **17.** $\int\limits_{\Gamma} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int\limits_a^b [P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) \times f'(x)]\, dx$ формуладан фойдаланамиз $y = x^2$, $dy = 2x\, dx$ бўлгани учун, $\int\limits_0^1 [x^2 - 2x^3 + (x^4 - 2x^3)\, 2x]\, dx = -\frac{19}{30}$. **18.** $\frac{ab}{2}$. **19.** $dx = a(1 - \cos t)\, dt$, $dy = a \sin t\, dt$, $2a - y = a(1 + \cos t)$, $a - y = a \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ бўлгани учун $\int\limits_{\Gamma} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\, \varphi'(t) + [Q(\varphi(t), \psi(t))\, \psi'(t)]\, dt$ формулага мувофиқ $I = \int\limits_0^{2\pi} [a^2(1 - \cos^2 t) - a^2 \sin t \cos t]\, dt = \pi a^2$. **20.** $\frac{4}{3} ab^2$. **21.** Қутб координаталарига ўтиб, Γ ярим айлананинг тенгламасини $\rho = 2 \cos \varphi$ кўринишда ҳосил қиламиз. Параметр сифатида кутб бурчаги φ ни олиб, унинг $x = 2\cos^2 \varphi$, $y = \sin 2\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ параметрик ифодасини ёзамиз· $\int\limits_{\Gamma} P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t),\ \psi(t))\,\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\ \psi(t))\,\psi'(t)]\,dt$ формула бўйича ҳисоблаймиз: $I = 4 \times \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin 2\varphi (\cos 2\varphi - 1)\,d\varphi = -\frac{4}{3}$. **22.** 0. **23.** Винт чизиғининг $z = 0$ текислик билан кесишиш нуқтаси $t = 0$ га, $z = a$ текислик билан кесишиш нуқтаси эса $t = 2\pi$ га мос келади. Шунинг учун $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ бўлади. Бу ҳолда

$$I = \frac{ar^2}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} (t\cos 2t + \cos t \sin t)\,dt = 0.$$

24. 0. **25.** Қутб координаталар системасига ўтиб, Вивиани чизиғининг тенгламасини $\rho = a\cos\varphi$, $z = \sqrt{a^2 - \rho^2}$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ кўринишда ёзамиз. φ ни параметр сифатида олиб, унинг $x = a\cos^2\varphi$, $y = a\sin\varphi\cos\varphi$, $z = a\,|\sin\varphi\,|$ параметрик ифодасини ёзамиз. У ҳолда $dx = -2a\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$, $dy = a(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,d\varphi$, $dz = a \times \cos\varphi\,\mathrm{sgn}\,\varphi\,d\varphi$. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-2\sin^3\varphi\cos^3\varphi + \cos^5\varphi\,\mathrm{sgn}\,\varphi)\,d\varphi = 0$ тенгликдан фойдаланиб, $I = a^3 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-2\sin^3\varphi\cos^3\varphi + \sin^2\varphi - 2\sin^4\varphi + \cos^5\varphi\,\mathrm{sgn}\,\varphi)\,d\varphi = -\frac{\pi a^3}{4}$ ни топамиз. **26.** $2\sqrt{2}\,\pi a^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

27. F оғирлик кучининг координата ўқларидаги проекциялари: $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -mg$. Демак, изланаётган иш қуйидагича топилади:

$$A = \int\limits_{\Gamma} Xdx + Ydy + Zdz = \int\limits_{Z_1}^{Z_2} (-mg)\,dz = mg\,(z_1 - z_2).$$

28. $\frac{a^2 - b^2}{2}$. **29.** $(x + y)(dx + dy) = (x + y)\,d(x + y) = \frac{1}{2}\,d(x+y)^2$ тенгликка кўра, $\int\limits_{(0,\ 0)}^{(1,\ 1)} (x + y)(dx + dy) = \frac{(x+y)^2}{2}\Big|_{(0,\ 0)}^{(1,\ 1)} = 2$ ни ҳосил қиламиз. **30.** $\ln\frac{13}{5}$. **31.** Бу ҳолда $P(x,\ y) = \frac{y}{x^2}$, $Q(x, y) = -\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, шунинг учун $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2}$, демак, интеграл остидаги ифода

Oy ўқи нуқталарини ўз ичига олмайдиган ихтиёрий бир боғламли соҳада бирор функциянинг тўла дифференциали бўлади. Бу ҳолда (x_0, y_0) ва (x_1, y_1) нуқталарни бирлаштирувчи йўл сифатида координаталар ўқларига параллел тўғри чизиқ кесмаларидан иборат синиқ чизиқни олиш мумкин. У ҳолда $y = y_0$ тўғри чизиқ бўйлаб $dy = 0$; $x = x_1$ тўғри чизиқ бўйлаб эса $dx = 0$ бўлгани учун

$$\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{x_0}^{x_1} P(x, y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y_1} Q(x, y)\,dy$$

формулани ҳосил киламиз. Шу формулага биноан, $I = \int\limits_2^1 \frac{dx}{x^2} - \int\limits_1^2 dy = -\frac{3}{2}$. **32.** 62. **33.** $yzdx + zxdy + xydz = d(xyz)$ тенгликка кўра,

$$I = \int\limits_{(1, 2, 3)}^{(3, 2, 1)} d(xyz) = (xyz)\Big|_{(1, 2, 3)}^{(3, 2, 1)} = 0.$$

34. 3. **35.** $x_0 = 0$ ва $y_0 = 0$ деб, $u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, t)\,dt + C$ формулага кўра $u(x, y) = \int\limits_0^x 3t^2dt - \int\limits_0^y (x^2 - 2xt + 3t^2)dt + C = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 + C$ ни топамиз. **36.** $u = x^2 \cos y + y^2 \cos x + C$. **37.** $x_0 = 0$ ва $y_0 = \text{const} \neq 0$ деб ҳисоблаб, $u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t, y)\,dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, t)\,dt + C$ формулага биноан $u(x, y) = y\int\limits_0^x \frac{dt}{3t^2 - 2yt + 3y^2} + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3x - y}{2\sqrt{2}\,y} + C$ ни топамиз.

38. $u(x, y) = \frac{x - y}{(x + y)^2} + C$. **39.** du ни $du = x^2dx + y^2dy + z^2dz - 2(yzdx + xzdy + xydz) = d\left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} - 2xyz\right)$ кўринишда ёзиш мумкин, бундан $u(x, y, z) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C$.

40. $u = \frac{2x}{x - yz} + C$. **41.** D билан $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ ёпиқ соҳани белгилаймиз. Грин формуласи ёрдамида $I = \int\limits_{\Gamma} xy^2dy - x^2ydx = \iint\limits_{D} (y^2 + x^2)\,dx\,dy$ ни ҳосил қиламиз. Қутб координаталарига ўтиб,

$I=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \rho^3 d\rho = \frac{\pi a^4}{2}$ ни топамиз. **42.** $-\frac{\pi}{8}a^3$. **43.** Грин формуласига кура:

$$I = -\iint\limits_D ye^x dxdy = -\int\limits_0^{\pi} e^x dx \int\limits_0^{\sin x} ydy = -\frac{1}{5}(e^{\pi} - 1).$$

44. $-2\pi ab$. **45.** Қутб координаталарига ўтиб, $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = d\varphi$ ни ҳосил қиламиз. Агар ноль нуқта Γ нинг ташқарисида ётса, у ҳолда Грин формуласи бўйича:

$$I = \iint\limits_D \frac{y^2 - x^2 + x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dxdy = 0,$$

Агар Γ ноль нуқтани бир марта ўраб олса, $I = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} d\varphi = 2\pi$, бу ерда φ_0 – бошланғич нуқтанинг қутб бурчаги. **46.** $\frac{1}{3}$. **47.** $S = \frac{1}{2}\times$ $\times \oint\limits_{\Gamma} xdy - ydx$ формуладан фойдаланамиз: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$,

$dx = -3a\cos^2 t\sin t\,dt$, $dy = 3a\sin^2 t\cos t\,dt$, $S = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 3a^2\cos^2 t\,\times$ $\times \sin^2 t\,dt = \frac{3}{8}\pi a^2$. **48.** $\frac{3}{2}a^2$. **49.** Берилган эгри чизиқни параметрик равишда $x = \rho\cos\varphi = a\sin 2\varphi\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi = a\sin 2\varphi\sin\varphi$ каби тасвирлаш мумкин. Бу ерда $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\pi \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2}$ бўлгани учун $S = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma} x\,dy - ydx$ формулага биноан

$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [a^2\sin 2\varphi\cos\varphi\,(2\cos 2\varphi\sin\varphi + \sin 2\varphi\cos\varphi) -$$

$$- a^2\sin 2\varphi\sin\varphi\,(2\cos 2\varphi\cos\varphi - \sin 2\varphi\sin\varphi)]\,d\varphi =$$

$= a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{\pi}{4}a^2$. **50.** $18\pi a^2$. **51.** $\frac{1}{30}$. **53.**

$$n(x,\ y) = \begin{cases} 0 \ \text{(агар } A \text{ нуқта } \Gamma \text{ контурнинг ташқарисида ётса)}, \\ 2\pi \ \text{(агар } A \text{ нуқта } \Gamma \text{ нинг ичида ётса)}, \\ \pi \ \text{(агар } A \text{ нуқта } \Gamma \text{ да ётса)}. \end{cases}$$

54. $H_\xi = ki \oint\limits_C \frac{(y - \eta)\, d\xi - (z - \xi)\, d\eta}{r^3}$,

$$H_\eta = ki \oint\limits_C \frac{(z - \zeta)\, d\xi - (x - \xi)\, d\zeta}{r^3},$$

$$H_\zeta = ki \oint\limits_C \frac{(x - \xi)\, d\eta - (y - \eta)\, d\xi}{r^3}.$$

XIV БОБ

1. Тенгламанинг иккала томонини $y\sqrt{1 - x^2}$ кўпайтмага бўлиб, ўзгарувчиларни ажрагамиз, сўнгра интеграллаймиз: $\frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{dy}{y} = 0$, $-\sqrt{1 - x^2} + \ln|y| = \ln|C|$, $\ln\left|\frac{y}{C}\right| = \sqrt{1 - x^2}$, $y = Ce^{\sqrt{1 - x^2}}$. **2.** $y = \sqrt[3]{C + 3x - 3x^2}$. **3.** 1- мисолдагига ўхшаш ечамиз: $\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{y dy}{\sqrt{1 - y^2}} = 0$, $\arcsin x - \sqrt{1 - y^2} = C$. **4.** $e^t = C(1 - e^{-s})$. **5.** $u = y - x$ алмаштириш билан берилган тенгламани ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтирамиз: $u' = \cos u - 1$, $u' = -2\sin^2\frac{u}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{u}{2} = x + C$, $\operatorname{ctg}\frac{y - x}{2} = x + C$. **6.** $y + 2x - 1 = Ce^x$. **7.** 5- мисолдагига ўхшаш ечамиз: $u = x + 2y$, $u' = 1 + 2y'$, $u' = 1 + \frac{2}{u}$, $\frac{u}{u + 2}\, du = dx$, $u - 2\ln|u + 2| = x + C$, $y = C + \ln|x + 2y + 2|$. **8.** $\sqrt{4x + 2y - 1} - 2\ln\left(\sqrt{4x + 2y - 1} + 2\right) = x + C$. **9.** Ўзгарувчиларни ажратиб, топамиз: $\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}$, бундан $\ln y = C \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$ бошланғич шартдан фойдаланиб, $C = 1$ ни топамиз. Демак, хусусий ечим: $\ln y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ёки $y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$. **10.** $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = e^{2\sin x}$. **11.** 9- мисолдагига ўхшаш ечамиз: $\frac{dy}{y - 2} = -\operatorname{tg} x\, dx$, $\ln|y - 2| = \ln|\cos x| + \ln|C|$, $y - 2 = C\cos x$. $y(0) = 3$ бошланғич шартдан $C = 1$ ни топамиз. Демак, хусусий ечим: $y = 2 + \cos x$. **12.** $y = \frac{b + x}{1 + bx}$. **13.** $y = f(x)$ эгри чизиққа ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтада ўтказилган ўринма тенгламаси $Y - y = y'(X - x)$ кўринишга эга, бу ерда X, Y — ўринма нуқтасининг ўзгарувчи координаталари. Шартга кўра, $|AB| = |BM|$. Демак, A нуқтанинг координаталари $X = -x$, $Y = 0$. Тенгламага қўйсак, $y = 2xy'$. Бунинг умумий ечими $y^2 = Cx$ параболалар оиласидан иборат. **15.** Ноннинг совиш жараёни Ньютон қонунига асосан $\frac{dT}{dt} = k(T - \tau)$ дифференциал тенглама билан ифодаланади, бу ерда T — ноннинг температураси, τ — ҳаво температураси ($\tau = 25°$), k — пропорционаллик коэффициенти, $\frac{dT}{dt}$ — ноннинг совиш тезлиги. Ўзгарувчиларни ажратамиз, сўнгра интеграллаймиз:

$$\frac{dT}{T - 25} = kdt, \ \ln(T - 25) = kt + \ln C, \ T - 25 = C \cdot e^{kt}.$$

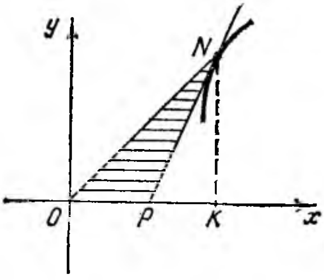
$t = 0$ да $T = 100°$ бошланғич шартдан C ни аниқлаймиз: $C = 75$, $t = 20$ мин да $T = 60°$ қўшимча шартдан e^k ни аниқлаймиз: $e^k = \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{20}}$. Шундай қилиб, ноннинг совиш тенгламаси $T = 25 + 75 \times \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}}$ кўринишни олади, бу ердан $T = 30°$ бўлгандаги изланаётган t вақтни аниқлаймиз: $\frac{1}{15} = \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}}$ ёки $t = -\frac{20 \ln 15}{\ln 7 - \ln 15} \approx$ ≈ 71 мин. **16.** $T = \frac{2D^2\sqrt{H}}{\mu a^2\sqrt{2g}}$. **17.** Аввал берилган тенгламани $y' = 1 + 2\frac{y}{x}$ кўринишда ёзиб оламиз. Бу тенглама $y = ux$ алмаштириш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтирилади: $xu' = 1 + u$, $\frac{du}{1 + u} = \frac{dx}{x}$, $1 + u = C \cdot x$. y ўзгарувчига қайтиб, умумий ечим $y = Cx^2 - x$ ни топамиз. **18.** $y = \frac{x^2}{C + x}$. **19.** 17-мисолдагига ўхшаш ечамиз; $y' = \frac{y^2}{xy - x^2}$, $y = ux$, $y = ux + u$, $xu' = \frac{u}{u - 1}$, $\frac{u - 1}{u} du = \frac{dx}{x}$, $Cxu = e^u$. y функцияга қайтиб, умумий интегрални топамиз: $Cy = e^{\frac{y}{x}}$. **20.** $\ln|Cx| = e^{-\frac{y}{x}}$. **21.** $y = xu$ десак, $\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$, бу ердан $\ln(\ln u - 1) = \ln x +$

$+\ln C$, $\ln u = 1 + Cx$ ёки $y = xe^{1+Cx}$. 22. $y = x\sqrt{1+Cx}$. 23. Аввал берилган тенгламани $y' = \dfrac{y-x+1}{y-x+2}$ кўринишда ёзиб оламиз. Ўзгарувчиларнинг коэффициентларидан тузилган детерминант $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ бўлгани учун $z = y - x$ алмаштириш бажариш қулайдир. У ҳолда $z' = y' - 1$, $z' = \dfrac{z+1}{z+2} - 1$, $z' = -\dfrac{1}{z+2}$. Интеграллласак, $(z+2)^2 = -2x + C$. Аввалги ўзгарувчиларга қайтсак $(y - x + 2)^2 + 2x = C$. 24. $3x + y + 2\ln|x + y - 1| = C$. 25. Аввал тенгламани $y' = \dfrac{2y-x-5}{2x-y+4}$ кўринишда ёзиб оламиз. $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ бўлгани учун бу тенгламани ечишда $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$ алмаштиришдан фойдаланамиз, бунда α ва β сонлари $\begin{cases} 2\beta - \alpha - 5 = 0, \\ 2\alpha - \beta + 4 = 0 \end{cases}$ системадан топилади: $\alpha = -1$, $\beta = 2$. Натижада бир жинсли $\dfrac{d\eta}{d\xi} = \dfrac{2\eta - \xi}{2\xi - \eta}$ тенгламани ҳосил қиламиз, буни $\eta = u\xi$ алмаштириш ёрдамида ечамиз: $\xi u' + u = \dfrac{2u-1}{2-u}$, $\dfrac{2-u}{u^2-1}du = \dfrac{d\xi}{\xi}$, бундан $\dfrac{u-1}{(u+1)^3} = C\xi^2$ ёки $\eta - \xi = C(\eta + \xi)^3$. Олдинги x ва y ўзгарувчиларга қайтсак, $y - x - 3 = C(x + y - 1)^3$. 26. $\ln|y + 2| + 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y+2}{x-3} = C$. 27. Аввал берилган тенгламанинг умумий ечимини топамиз: $y = xu$, $y' = u + xu'$, $xu'\,\mathrm{arctg}\,u = 1$, $\mathrm{arctg}\,u\,du = \dfrac{dx}{x}$, бундан $u\,\mathrm{arctg}\,u - \dfrac{1}{2}\ln(1 + u^2) = \ln|x| + C$ ёки $\dfrac{y}{x}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + C$. $x = 1$ да $y = 0$ бошланғич шартдан $C = 0$ ни топамиз. Демак, хусусий ечим: $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\frac{y}{x}\mathrm{arctg}\frac{y}{x}}$. 28. $y^3 = y^2 - x^2$. 29. Масала шартига кўра $\dfrac{y}{y'} = x + y$ ёки $x' = \dfrac{x}{y} + 1$. Бу тенгламада $x = yu$ алмаштириш бажариш қулайдир. У ҳолда $yu' = 1$. Бу ердан $u = \ln y - \ln C$, $y = Ce^u$. Умумий ечим $y = Ce^{\frac{x}{y}}$ эгри чизиқлар оиласидан иборат. 30. $y^2 + x^2 = Cx$. 31. $y = uv$ дейлик, у ҳолда $y' = u'v + uv'$ ва берилган тенглама

$$u'v + u(v' + 2xv) = 2xe^{-x^2} \qquad (1)$$

кўринишга келади, v функцияни $v' + 2xv = 0$ тенглик ўринли бўладиган қилиб танлаймиз. Бундан $v = e^{-x^2}$ $(C = 1)$. v нинг бу ифодасини (1) тенгламага қўйсак, $e^{-x^2}u' = 2xe^{-x^2}$, $u' = 2x$, $u = x^2+C$. Демак, умумий ечим: $y = u\,v = e^{-x^2}(x^2 + C)$. **32.** $y = x^2\left(1 + Ce^{-\frac{1}{x}}\right)$. **33.** 31-мисолдаги каби ечамиз: $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, $u'v + u(v' + v) = \cos x$, $v + v = 0$, $v = e^{-x}$, $e^{-x}u = \cos x$, $u = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + C$, $y = uv = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + Ce^{-x}$. **34.** $x = Ce^{2y} + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}$. **35.** Олдин берилган тенгламани $x' + \frac{1}{y}x = 2\ln y + 1$ кўринишда ёзиб оламиз. Бу x ва x' га нисбатан чизиқли тенгламадир. Шу сабабли $x = uv$ алмаштириш бажарамиз: $u'v + u\left(v' + \frac{v}{y}\right) = 2\ln y + 1$, $v' + \frac{v}{y} = 0$, $v = \frac{1}{y}$, $u' = y(2\ln y + 1)$, $u = y^2\ln y + C$, $x = y\ln y + \frac{C}{y}$. **36.** $x = y(y + C)$.

37. Берилган тенгламанинг иккала қисмини y^2 га бўлиб, $\frac{1}{y} = z$ деб оламиз, у ҳолда $z' - 2z = -e^x$ кўринишдаги чизиқли тенглама ҳосил бўлади. Унинг умумий ечими: $z = e^x(1 + Ce^x)$. z ни $\frac{1}{y}$ билан алмаштириб, берилган тенгламанинг умумий ечими $\frac{1}{y} = e^x \times$ $\times (1 + Ce^x)$ ни ҳосил қиламиз. **38.** $xe^{\frac{y^2}{x}} = C$. **39.** Бу тенгламани $y^2y' = \frac{y^3}{x} + x$ кўринишда ёзиб, $y^3 = z$, $3y^2y' = z'$ алмаштириш бажарсак, $\frac{z'}{3} = \frac{z}{x} + x$ чизиқли тенгламага келади. Бу тенгламанинг умумий ечими: $z = Cx^3 - 3x^2$. z ўрнига y^3 ни қўйсак, берилган тенгламанинг умумий ечими $y^3 = Cx^3 - 3x^2$ ни ҳосил қиламиз. **40.** $x^2 = y^2(C - y^2)$. **41.** Кирхгоф қонунига кўра занжирдаги электр юритувчи куч индуктивликдаги ва қаршиликдаги кучланишлар пасайиши йиғиндисига тенг: $f(t) = u_L + u_R$, бу ерда $u_L = L\frac{dI}{dt}$, $u_R = RI$. Шундай қилиб, $\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{f(t)}{L}$ чизиқли дифференциал тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламанинг $t = 0$ да $I = 0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечими $I = \frac{1}{L} e^{-\frac{Rt}{L}} \int\limits_0^t \times$ $\times f(\tau) e^{\frac{R\tau}{L}} d\tau$ функциядан иборат бўлади. 42. $I = \frac{E_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \times$ $\times [\omega L e^{-\frac{Rt}{L}} + R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t]$. 43. $N(x, y)$ уриниш нуқтаси, ON – нинг радиус-вектори, NP – уринма. PK – уринма ости бўлсин. ON радиус-вектор, NP уринма ва Ox ўқ ҳосил қилган учбурчакнинг юзи $S_{\triangle ONP} = |S_{\triangle ONK} - S_{\triangle PNK}|$ формула бўйича топилади. Бу ерда $S_{\triangle ONK} = \frac{1}{2} xy$, $S_{\triangle PNK} = \frac{1}{2} \frac{y^2}{y'}$, $S_{\triangle ONP} = a^2$. Демак, $\left| xy - y^2 \frac{dx}{dy} \right| = 2a^2$ ёки $\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = \pm \frac{2a^2}{y^2}$, бу ердан $x = Cy \pm \frac{a^2}{y}$ (74- чизма). 44. $y^2 = 4ax + 4a^2 (1 - e^{\frac{x}{a}})$. 45. Аввал берилган тенгламани $x(2x^2 + y^2)dx + y(x^2 + 2y^2)dy = 0$ кўринишда ёзиб оламиз. Бу ҳолда $M(x, y) = 2x^3 + xy^2$, $N(x, y) = yx^2 + 2y^3$. Энди



74- чизма.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x^3 + xy^2, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = yx^2 + 2y^3 \qquad (2)$$

тенгламаларни қаноатлантирувчи $u(x, y)$ функцияни топамиз. (1) дан $u(x, y) = \int (2x^3 + xy^2)\,dx + \varphi(y) = \frac{x^4}{2} + \frac{1}{2} x^2 y^2 + \varphi(y)$. Бу ердан $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 y + \varphi'(y)$. (2) га кўра $\frac{\partial u}{\partial y} = yx^2 + 2y^3$, шунинг учун $x^2 y + \varphi'(y) = x^2 y + 2y^3$, $\varphi'(y) = 2y^3$, $\varphi(y) = \frac{y^4}{2} + C$, $u(x, y) = \frac{x^4}{2} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^4}{2} + C$. Демак, умумий интеграл: $x^4 + x^2 y^2 + y^4 = C$. 46. $x^3 + 3x^2 y^2 + y^4 = C$ 47. Бу ҳолда $M(x, y) = e^y$, $N(x, y) = xe^y - 2y$. $u(x, y)$ ни топишда тайёр $u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx +$

$+\int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,\ y)\,dy$ формуладан фойдалансак ҳам бўлади:

$$u(x,\ y) = \int\limits_{x_0}^{x} e^y dx + \int\limits_{y_0}^{y} (x_0 e^y - 2y)\,dy = xe^y - y^2 - x_0 e^{y_0} + y_0^2.$$

Демак, умумий интеграл: $xe^y - y^2 = C$. 48. $x^2 + y^2 - 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} = C$. 49. 47- мисолдагига ўхшаш ечамиз: $u(x,\ y) = \int\limits_{x_0}^{x} 2x\cos^2 y\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} (2y - x_0^2 \sin 2y)\,dy = (x^2 - x_0^2)\cos^2 y + y^2 - y_0^2 + \dfrac{1}{2}x_0^2(\cos 2y - \cos 2y_0) = x^2\cos^2 y + y^2 - \dfrac{1}{2}x_0^2 - y_0^2 - \dfrac{1}{2}x_0^2\cos 2y_0$. Демак, умумий интеграл: $x^2\cos^2 y + y^2 = C$. 50. $\dfrac{\sin^2 x}{y} + \dfrac{x^2 + y^2}{2} = C$. **51.** Олдин умумий интегрални топамиз: $M(x,\ y) = 1 + e^{\frac{x}{y}}$, $N(x,\ y) = e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)$, $u(x,\ y) = \int (1 + e^{\frac{x}{y}})\,dx = x + ye^{\frac{x}{y}} + \varphi(y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} - \dfrac{x}{y}e^{\frac{x}{y}} + \varphi'(y)$, $e^{\frac{x}{y}} - \dfrac{x}{y}e^{\frac{x}{y}} + \varphi'(y) = e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)$, $\varphi'(y) = 0$, $\varphi(y) = C$. Демак умумий интеграл: $x + ye^{\frac{x}{y}} = C$. $x = 0$ да $y = 2$ шартдан $C = 2$ ни топамиз, демак хусусий интеграл: $x + ye^{\frac{x}{y}} = 2$. 52. $x - \dfrac{y}{x} = C$. Интегралловчи кўпайтувчи $\mu(x) = \dfrac{1}{x^2}$. 53. Бу ҳолда $M(x,\ y) = x + y^2$, $N(x,\ y) = -2xy$, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y$, $\dfrac{\partial N}{\partial y} = -2y$, $\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = 4y$. $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = \dfrac{4y}{x + y^2}$ нисбат x ва y га боғлиқ, $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = -\dfrac{2}{x}$ нисбат фақат x га боғлиқ. Демак, $\mu = \mu(x)$ интегралловчи кўпайтувчини $\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$ формула бўйича топиш мумкин: $\mu(x) = e^{-2\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x^2}$. Тенгламанинг иккала томонини $\frac{1}{x^2}$ га кўпайтирсак, $\frac{x + y^2}{x^2}\,dx - \frac{2y}{x}\,dy = 0$ тўлиқ дифференциаллардаги тенглама ҳосил булади. Унинг умумий интеграли: $\ln|x| - \frac{y^2}{x} = C$. **54.** $\frac{1}{y}\ln|x| + \frac{1}{2}y^2 = C$. **55.** Бу ҳолда $M(x, y) = 2xy\ln y$, $M(x, y) = x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}$. $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = \frac{1}{y}$ нисбат фақат y га боғлиқ бўлгани учун $\mu(y)$ ни $\mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M}\,dy}$ формула буйича топиш мумкин: $\mu(y) = e^{-\ln y} = \frac{1}{y}$. Тенгламанинг иккала томонини $\frac{1}{y}$ га кўпайтирсак, $d(x^2\ln y) + y\sqrt{y^2+1}\,dy = 0$ кўринишга келади, бу ердан $x^2\ln y + \frac{1}{3}\sqrt{(y^2+1)^3} = C$. **56.** $(x\sin y + y\cos y - \sin y)e^x = C$. **57.** Берилган тенгламани y' га нисбатан ечамиз: $y' = \pm\frac{3}{2}\sqrt{x}$. Уни интеграллаймиз:

$$y = \pm x^{\frac{3}{2}} + C, \quad (y - C)^2 = x^3.$$

58. $y = 2x^2 + C$, $y = -x^2 + C$. **59.** Тенгламани y' га нисбатан ечамиз: $y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4x^3}}{x}$. Бу бир жинсли тенглама $y = xu$ алмаштириш ёрдамида осон интегралланади:

$$u + x\frac{du}{dx} = u \pm \sqrt{u^2 - 4}, \quad \frac{du}{\pm\sqrt{u^2 - 4}} = \frac{dx}{x},$$

$\ln(u \pm \sqrt{u^2 - 4}) = \ln x - \ln C$, $u \pm \sqrt{u^2 - 4} = \frac{x}{C}$ Радикалдан қутқарамиз: $\frac{4C}{x} = \frac{4}{u \pm \sqrt{u^2 - 4}} = u \pm \sqrt{u^2 - 4}$, бундан $2u = \frac{x}{C} + \frac{4C}{x}$ ёки олдинги ўзгарувчиларга қайтсак, $x^2 = 2C(y - 2C)$. **60.** $y^2 + C^2 = 2Cx$. 61 Тенгламанинг чап томонини кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$\left(y' - \frac{\sqrt{xy}}{2}\right)\left(y' + \frac{\sqrt{xy}}{2}\right) = 0,$$

бундан $y' - \frac{\sqrt{xy}}{2} = 0$ ва $y' + \frac{\sqrt{xy}}{2} = 0$. Буларнинг умумий интеграллари:

$$\sqrt{y} - \frac{1}{6} x \sqrt{x} = C, \quad \sqrt{y} + \frac{1}{6} x \sqrt{x} = C.$$

Шунинг учун берилган тенгламанинг умумий интеграли

$$(\sqrt{y} - C)^2 - \frac{x^3}{36} = 0$$

кўринишда бўлади. **62.** $\ln|Cy| = x \pm e^x$. **63.** Тенгламани y' га нисбатан ечамиз: $y' = \pm \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$. Узгарувчиларни ажратамиз: $\frac{ydy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \pm dx$ бундан умумий интеграл $(x + C)^2 + y^2 = a^2$ ни топамиз Махсус интегрални топиш учун умумий интегрални C бўйича дифференциаллаймиз: $2(x + C) = 0$, бундан $C = -x$. Буни умумий интегралга қўйсак, $y = \pm a$ махсус ечимлар ҳосил бўлади. **64.** $(\sqrt{y} - x - C)(\sqrt{y} + x + C) = 0$, махсус ечим: $y = 0$. **65.** Берилган тенгламани y' га нисбатан ечамиз, сўнгра интеграллаймиз:

$$y' = \frac{x \pm \sqrt{2}\sqrt{x^2 - y^2}}{y},$$

$$\frac{xdx - ydy}{\mp\sqrt{x^2 - y^2}} = \sqrt{2}dx, \quad \mp\sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{2}x + C,$$

$(x + C\sqrt{2})^2 + y^2 = C^2$. Бу умумий интеграл. Махсус интегрални 63-мисолдаги каби топамиз:

$$2\sqrt{2}(x + C\sqrt{2}) = 2C, \quad C = -\sqrt{2}x, \quad y = \pm x.$$

66. $Cy - (C - x)^2 = 0$, махсус ечимлар: $y = 0$ ва $y = -4x$. **67.** Берилган умумий ечимни C бўйича дифференциаллаймиз: $3x^2C^2 - 4xC + 1 = 0$, бу ердан $C_1 = \frac{1}{x}$, $C_2 = \frac{1}{3x}$. Буларни умумий ечимга қўйсак, $y = 0$ ва $y = \frac{4}{27x}$ махсус ечимлар ҳосил бўлади. **68.** $y = \pm 1$. **69.** $y' = p$ деймиз, у ҳолда $x = p\sin p$, энди $\frac{dy}{dx} = p$ тенгликни $dy = pdx$ каби ёзиб оламиз. Бўлаклаб интеграллаш усулидан фойдалансак,

$$\int pd\,x = px - \int xdp = px + p\cos p - \sin p + C,$$

демак, $y = px + p\cos p - \sin p + C$. Умумий ечим бундай ёзилади:

$$\begin{cases} x = p\sin p, \\ y = p^2\sin p + p\cos p - \sin p + C. \end{cases}$$

70. $\begin{cases} x = 2p + 3p^2 + C, \\ y = p^2 + 2p^3. \end{cases}$ **71.** $y' = p$ деймиз; у ҳолда $y = p^2 + 2\ln p$, бундан $dy = \left(2p + \frac{2}{p}\right)dp$. $y' = p$ дан $dx = \frac{dy}{p}$, демак, $dx = 2 \times \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)dp$. Бундан $x = 2\left(p - \frac{1}{p}\right) + C$. Умумий ечим қуйидагича ёзилади:

$$\begin{cases} x = 2\left(p - \frac{1}{p}\right) + C, \\ y = p^2 + 2\ln p. \end{cases}$$

72. $\begin{cases} y = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}, \\ x = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1 + p^2} - 1}{\sqrt{1 + p^2} + 1} + C. \end{cases}$ **73.** 71-мисолдагига ўхшаш ечамиз:

$$y' = p,\ x = \frac{1}{1 + p^2},\ dx = -\frac{2p}{(1 + p^2)^2}dp,$$

$$dy = pdx = -\frac{2p^2}{(1 + p^2)^2}dp,$$

$$y = \frac{p}{1 + p^2} - \operatorname{arctg} p + C,$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{1 + p^2}, \\ y = \frac{p}{1 + p^2} - \operatorname{arctg} p + C. \end{cases}$$

74. $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{p - 1}} + C, \\ y = \frac{2 - p}{\sqrt{p - 1}} \end{cases}$ ёки $y = x - C - \frac{1}{x - C}$. **75.** Аввал берилган тенгламани у га нисбатан ечамиз: $y = y' + \frac{e^x}{y'}$. $y' = p$ деймиз у ҳолда $y = p + \frac{e^x}{p}$. Буни x бўйича дифференциаллаб, алгебраик алмаштиришлардан сўнг: $p'(p - e^x) = p(p - e^x)$. $p - e^x \neq 0$ десак, $p' = p$ ёки $\frac{dp}{dx} = p$ бундан $p = Ce^x$. Буни $y = p + \frac{e^x}{p}$ тенгликка қўйсак, $y = Ce^x + \frac{1}{C}$. **76.** $y = Cx + \frac{C^2 \quad x^2}{2}$. **77.** Бу Лагранж тенгламаси. Аввал параметрик усулдан фойдаланиб, умумий ечимни топамиз:

$$y' = p,\ y = \frac{1}{2}x\left(p + \frac{4}{p}\right),\ y' = \frac{1}{2}\left(p + \frac{4}{p}\right) + \frac{1}{2}x\left[1 - \frac{4}{p^2}\right]p'$$

бир қатор содда ўзгартиришлардан сўнг $\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$ ни топамиз, бундан $\ln p = \ln x + \ln C$ ёки $p = Cx$. Буни $y = \frac{1}{2}x\left(p + \frac{4}{p}\right)$ тенгликка қўйсак, $y = \frac{x^2}{C} + C$ умумий ечимни ҳосил қиламиз. Махсус ечимни топиш учун умумий қоида бўйича $\left|\begin{array}{l} y = \frac{x^2}{C} + C, \\ 0 = -\frac{x^2}{C^2} + 1 \end{array}\right.$ системани тузамиз, бу ердан $y = \pm 2x$. **78.** $\left|\begin{array}{l} x = \frac{2\ln p - 2p + C}{(p-1)^2}, \\ y = \frac{p^2(2\ln p - 2p + C)}{(p-1)^2} + 2p; \end{array}\right.$ $y = 0$. **79.** Аввал берилган тенгламани $y = xy' - e^{y'}$ кўринишда ёзиб оламиз. Бу Клеро тенгламасидир. y' ўрнига C ни қўйсак, унинг $y = Cx - e^C$ умумий ечими ҳосил бўлади. Махсус ечим:

$$\begin{cases} y = Cx - e^C, \\ 0 = x - e^C \end{cases}$$

системадан топилади: $y = x(\ln x - 1)$. **80.** $y = Cx + \arcsin C$, махсус ечим:

$$x = -\frac{1}{\sqrt{1 - p^2}},\quad y = -\frac{p}{\sqrt{1 - p^2}} + \arcsin p.$$

81. Берилган тенгламани y га нисбатан ечсак, $y = \frac{2y'}{1 - (y')^2}x$. Бу Лагранж тенгламасидир. Уни интеграллаш учун $x = \frac{1}{2}yx' - \frac{y}{2x'}$ кўринишда ёзиб олиш ва x ни y нинг функцияси деб ҳисоблаш қулайдир. $x' = p$ деймиз. У ҳолда $x = \frac{y}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right)$. Буни y бўйича дифференциаллacaк:

$$x' = \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right) + \frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}.$$

x' ни p билан алмаштириб ва ўзгартиришлар бажаргач, $\frac{dy}{y} =$

$=\frac{dp}{p}$ ни ҳосил қиламиз, бу ердан $y = Cp$ ёки $p = \frac{y}{C}$. Буни $x = \frac{y}{2}\left(p - \frac{1}{p}\right)$ тенгликка қўйсак, $2Cx = y^2 - C^2$. Бу умумий ечим. Махсус ечим йўқ. **82.** $(C - x)\,y = C^2$ махсус ечим: $y = 4x$. **83.** Аввал берилган тенгламани $x = yx' + (x')^2$ кўринишда ёзиб оламиз. Бу Клеро тенгламасидир. x' ни C билан алмаштирсак, $x = Cy + C^2$ умумий ечим ҳосил бўлади. Махсус ечим $\begin{cases} x = Cy + C^2, \\ 0 = y + 2C \end{cases}$ системадан топилади: $4x = - y^2$. **84.** $y = Cx - \frac{C-1}{C}$, махсус интеграл: $(y + 1)^2 = 4x$. **85** $y = f(x)$ эгри чизиққа $M(x, y)$ нуқтада ўтказилган уринма тенгламаси: $Y - y = y'(X - x)$ Бу тенгламадан уринманинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси A нинг абсциссасини $Y = 0$ деб, Oy ўқ билан кесишиш нуқтаси B нинг ординатасини эса $X = 0$ деб қуйидагини топамиз:

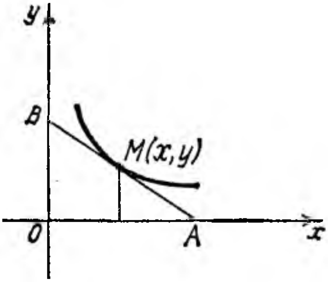
$$X_A = x - \frac{y}{y'} \text{ ва } Y_B = y - xy'.$$

Масала шартига кўра: $\sqrt{\left(x - \frac{y}{y'}\right)^2 + (y - xy')^2} = l$. Бу тенгламани ўзгартиришлардан сўнг $y = xy' \pm \frac{ly'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$ кўринишда ёзамиз Бу Клеро тенгламасидир. Унинг $y = Cx \pm \frac{Cl}{\sqrt{1 + C^2}}$ умумий ечими координата ўқлари орасидаги кесмалари l га тенг узунликка эга бўлган тугри чизиқлар оиласидан иборат.

Махсус интеграл

$$\begin{cases} y = Cx \pm \dfrac{Cl}{\sqrt{1 + C^2}}, \\ 0 = x \pm \dfrac{l}{\sqrt{(1 + C^2)^3}} \end{cases}$$

системадан топилади: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$. Шундай қилиб, махсус интеграл астроидадан иборат экан, y интеграл тўғри чизиқлар оиласининг ўрамаси бўлади (75- чизма). **86.**



75- чизма.

$$\begin{cases} y = \cos\alpha\left(C + \frac{a}{2}\sin^2\alpha\right), \\ x = \sin\alpha\left(\alpha - C - \frac{a}{2}\sin^2\alpha\right). \end{cases}$$

87. Масала шартига мувофик, $\frac{y}{y'}-$ $-yy' = 2x$ ёки $y = \frac{2y'}{1-y'^2}x$. Бу Лагранж тенгламасидир. Унинг умумий интеграли 81-мисолда топилган эди: $2Cx = y - C^2$. Демак, изланаётган эгри чизиклар параболалардан иборат экан. 88. $y^2 = Cx^{-\frac{1}{k}} + \frac{k^2}{2k+1}x^2$. 89. Айланалар оиласининг дифференциал тенгламасини тузамиз, бунинг учун берилган тенгламани дифференциаллаймиз: $2x + 2yy' + 2ay' = 0$, бунга

$$2a = -\frac{x^2+y^2}{y}$$

ифодани қўямиз: $2x + 2yy' - \frac{(x^2+y^2)y'}{y} = 0$ ёки $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$.

y' ни $-\frac{1}{y'}$ га алмаштирсак, ортогонал траекториялар оиласининг дифференциал тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\frac{1}{y'} = \frac{2xy}{y^2-x^2},$$

бундан

$$d\left(\frac{y^2}{x}\right) + dx = 0$$

— бу тўлиқ дифференциалли тенгламадир. Уни интеграллаб, яна

$$x^2 + y^2 - 2Cx = 0$$

айланалар оиласига эга бўламиз. Иккала оиланинг барча айланалари координаталар бошидан ўтади, бироқ берилган оила айланаларининг марказлари Oy ўқда, траекторияларининг марказлари эса Ox ўқда жойлашган. 90. $(x^2+y^2)^2 = C(y^2+2x^2)$. **91.** Аввал 89-мисолдагига ўхшаш гиперболалар оиласининг дифференциал тенгламасини тузамиз: $y + xy' = 0$. Изогонал траекториялар оиласининг дифференциал тенгламасини топиш учун бу тенгламадаги y' ни $\frac{y'-k}{1+ky'}$ билан алмаштирамиз, бу ерда масала шартига кўра, $k = \mathrm{tg}\,45° = 1$. Демак, $y + x\frac{y'-1}{1+y'} = 0$ ёки ўзгартиришлардан сўнг:

$y' = \frac{x-y}{x+y}$ — бу бир жинсли тенглама. Унинг умумий интеграли

$$y^2 + 2xy - x^2 = C.$$

92 $xy - \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2+y^2) = C$. 93. $\begin{cases} x + C = 2\operatorname{arctg} p - \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-p^2}}{p}\right|, \\ y = \arcsin p + \ln(1+p^2), \end{cases}$

$y = 0$. 94. $\begin{cases} x = 5\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 t - \operatorname{tg} t + t\right) + C, \\ y = a\sin^5 t. \end{cases}$ 95. $1 + y^2 - x^2 = Cx$,

$\mu_1 = \frac{1}{(1+y^2-x^2)^2}$, $\mu_2 = \frac{1}{x^2}$. 96. $y = e^x + \frac{1}{C+e^x}$. 97. $y = 0$, $y = x + 1$. 98. $y = \operatorname{ch} x$ ва $y = 1$. 99. $\frac{1}{1024}$. 100. $T = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}} = 4{,}94 \approx 5$ с.

XV БОБ

1. Кетма-кет уч марта интеграллаймиз:

$$y'' = -\cos x + \sin x + C_1,$$
$$y' = -\sin x - \cos x + C_1x + C_2,$$
$$y = \cos x - \sin x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

2. $y = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) + C_1x + C_2$. 3 Икки марта интеграллаймиз: $y' = -x\cos x + \sin x + C_1$. $y = -x\sin x - 2\cos x + C_1x + C_2$.

4. $y = -\frac{x}{2}\ln^2 x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$. 5. $y' = p$ белгилаш киритамиз, бу ердан $y'' = p'$.

$$xp' = p,\quad \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x},\quad p = C_1x,\quad y' = C_1x,\quad y = C_1x^2 + C_2.$$

6 $y = \frac{x^3}{9} + C_1\ln|x| + C_2$. 7. $y' = p$ ни киритиш билан ечамиз.

$$p'(x^2+1) = 2xp,\ p = C_1(1+x^2),\quad y = C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2.$$

8 $y = \frac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1x-1)^3} + C_2$. 9. $y' = p_1$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$ белгилаб оламиз.

$$p\frac{dp}{dy} = ae^y,\ \frac{p^2}{2} = ae^y + C_1^2,\ p = \pm\sqrt{2ae^y + C_1^2}$$

$$y' = \pm\sqrt{2ae^{y}+C_1^2}, \quad x + C_2 = \int \frac{dy}{\sqrt{2ae^{y}+C_1^2}}.$$

$$x + C_2 = \frac{2}{C_1} \ln \left| \frac{\sqrt{2ae^{y}+C_1^2}-C_1}{2ae^{y}} \right|.$$

10. $y(C_2+x) = C_1 + x$; $y = C$. **11.** $y''=p$ десак, $y'''=p'$ ва $\frac{dp}{dx} = \sqrt{1-p^2}$. Бу ердан:

$$\arcsin p = x + C_1, \ p = \sin(x + C_1)$$

p ўрнига y'' ни қўйиб топамиз: $y''=\sin(x+C_1)$, $y' = -\cos(x + C_1) + C_2$, $y = -\sin(x + C_1) + C_2x + C_3$. 12. $y = C_1x^5 + C_2x^3 + C_3x^2 + C_4x + C_5$. **13.** Берилган тенглама y, y', y'' ларга нисбатан бир жинсли. $y = e^{\int z(x)dx}$ десак, $y' = ze^{\int zdx}$, $y'' = (z' + z^2)e^{\int zdx}$ ва $x^2(z' + z^2)e^{2\int zdx} = (1 - xz)^2e^{2\int zdx}$, бу ердан: $x^2(z' + z^2) = (1 - xz)^2$, $x^2z' + 2xz = 1$, $(x^2z)' = 1$, $x^2z = x + C_1$, $z = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}$, $\int zdx = \ln|x| - \frac{C_1}{x} + \ln C_2$. Шунинг учун

$$y = e^{\int zdx} = e^{\ln|x| - \frac{C_1}{x} + \ln|C_2|} = C_2xe^{-\frac{C_1}{x}}.$$

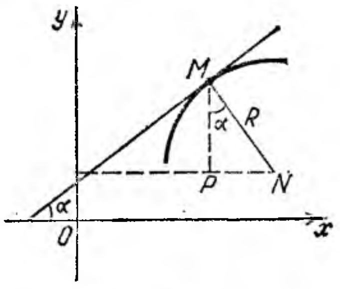
14. $y = C_2e^{x^3+C_1x}$. **15.** Берилган тенгламани $\frac{y'y''' - (y'')^2}{(y')^2} = -\frac{1}{x^2}$ кўринишда ёзиш мумкин, бу ердан $\left(\frac{y''}{y'}\right)' = -\frac{1}{x^2}$. Интеграллаб, топамиз. $\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} + C_1$. $y' = p$ десак, $y'' = p'$ ва $\frac{p'}{p} = \frac{1}{x} + C_1$. Интегралласак $\ln p = \ln x + C_1x + \ln C_2$, $p = C_2xe^{C_1x}$. p ўрнига y' ни қўйиб, топамиз: $dy = C_2xe^{C_1x}dx$, $y = C_2\left(xe^{C_1x} - \frac{1}{C_1}e^{C_1x}\right) + C_3$. **16.** $(x + C_2)^2 + (y + C_3)^2 = C_n^2$. **17.** $y' = p$ десак, $y'' = p\frac{dp}{dy}$ ва $2p\frac{dp}{dy} = 3y^2$. Бу ердан: $p^2 = y^3 + C_1$, $p = \pm\sqrt{y^3+C_1}$. p ўрнига y' ни қўйиб, топамиз: $y' = \pm\sqrt{y^3+C_1}$, $x+C_2 = \pm\int(y^3+C_1)^{-\frac{1}{2}}dy$. Охирги тенгликнинг ўнг қисмидаги дифференциал биномдан олинган интеграл элементар функциялар билан чекли кўринишда ифодаланмайди, чунки на p, на $\frac{m+1}{n}$, на $\frac{m+1}{n} + p$ $\left(m=0, \ n=3, \ p = -\frac{1}{2}\right)$ бу-

тун сон эмас. Бироқ бошланғич шартдан фойдалансак, $C_1 = 0$ ва $y' = -\sqrt{y^3}$. Интеграллаб ва $x_0 = -2$ да $y_0 = 1$ бошланғич шартдан фойдаланиб, $x = \frac{2}{\sqrt{y}} - 4$ ни ҳосил қиламиз. 18. $y = \frac{x}{1-x}$

19. $y' = p$, $y'' = p'$ десак, $p' = \frac{p}{x} + \frac{x^2}{p}$. Бу Бернулли тенгламасидир, уни интеграллаб, $p = \sqrt{2}x\sqrt{x+C_1}$ ни топамиз. P ни y' билан алмаштириб, $y'(1) = 0$ шартдан фойдалансак, $y' = \sqrt{2}x\sqrt{x-1}$. Интеграллаймиз: $y = 2\sqrt{2}(x-1)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{x}{5} + \frac{2}{15}\right) + C_2$. C_2 ни $x = 1$ да $y = 1$ бошланғич шартдан аниқлаймиз: $C_2 = 1$, натижада $y = 2\sqrt{2}(x-1)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{x}{5} + \frac{2}{15}\right) + 1$. 20. $y - x = 2\ln|y|$. 21. Эгрилик радиуси $R = \frac{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ $(R = MN)$ формула билан ифодаланади. Унинг Oy ўқидаги проекцияси $R\cos\alpha$ га тенг. $\operatorname{tg}\alpha = y'$ экани бизга маълум, у ҳолда $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$. Демак, шартга кўра,

$$\frac{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} = a$$

ёки $1 + (y')^2 = ay''$. $y' = p$, $y'' = p'$ десак, $\frac{dp}{1+p^2} = \frac{dx}{a}$, бу ердан $\operatorname{arctg} p = \frac{x}{a} + C_1$, яъни $p = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{a} + C_1\right) = y'$. Интегралласак, $y = a\ln\sec\left(\frac{x}{a} + C_1\right) + a\ln C_2$ ёки $e^{\frac{y}{a}} = C_2\sec\left(\frac{x}{a} + C_1\right)$ (76-чизма). 22. $k = 1$ бўлганда $y = \frac{1}{C_1}ch(C_1x + C_2)$, $k = -1$ бўлганда $(x + C_2)^2 + y^2 = C_1^2$. 23. Тушаётган жисмга иккита куч: жисмнинг оғирлик кучи ва ҳавонинг қаршилик кучи таъсир этади; уларнинг тенг таъсир этувчиси: $F = mg - kv^2$. Шунинг учун Ньютоннинг ик-



76- чизма.

кин и қонунидан $m\frac{d^2s}{dt^2}=mg-kv^2$ ёки $m\frac{d^2s}{dt^3}=mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ тенглама келиб чиқади. $\frac{ds}{dt}=p, \frac{d^2s}{dt^2}=p'$ десак, $mp'=mg-kp^2$. Интегралласак,

$$t+C_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{kg}}\ln\frac{\sqrt{\frac{mg}{k}}+p}{\sqrt{\frac{mg}{k}}-p}\text{, бу ердан } p=\sqrt{\frac{mg}{k}}\operatorname{th}\left[\sqrt{\frac{kg}{m}}\left(t+\right.\right.$$

$\left.\left.+C_1\right)\right]=\frac{ds}{dt}$. C_1 ни $t=0$ да $v_0=0$ бошланғич шартдан аниқлаймиз: $C_1=0$, демак, $\frac{ds}{dt}=\sqrt{\frac{mg}{k}}\operatorname{th}\sqrt{\frac{kgt}{m}}$. Интеграллаб, $s=$ $=\frac{m}{k}\ln\operatorname{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}t+C_2$ ни топамиз. $t=0$ да $s=0$, шунинг учун $C_2=0$. Шундай қилиб, жисмнинг ҳаракат қонуни бошланғич шартларни эътиборга олган ҳолда $s=\frac{m}{k}\ln\operatorname{ch}\sqrt{\frac{kg}{m}}t$ кўринишда бўлади. **24.** $s=\frac{gt^2}{2}+C_1t+C_2$. **25.** $\frac{x}{4}\neq\mathrm{const}$ бўлгани учун 4 ва x функциялар чизиқли эркли. **26.** Чизиқли боғлиқ. **27.** $\alpha_1+\alpha_2x+$ $+\alpha_3x^2+\alpha_4x^3=0$ тенглик куб тенглама бўлиб, у учтадан ортиқ илдизга эга бўла олмайди. Шунинг учун $\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3x^2+\alpha_4x^3$ ифода ҳеч қандай коэффициентларда айнан нолга тенг бўлмайди. Демак, 1, x, x^2, x^3 система чизиқли эркли. **28.** Чизиқли эркли. **29.** $\sin x$, $\cos 2x$ система чизиқли эркли, чунки $\alpha_1\sin x+\alpha_2\cos 2x=0$ айният фақат $\alpha_1=\alpha_2=0$ бўлгандагина бажарилади. Ҳақиқатан, $x=0$ ни айниятга қўйиб, $\alpha_2=0$ ни топамиз. Шунинг учун $\alpha_1\sin x=0$, бундан $\alpha_1=0$, чунки $\sin x\not\equiv 0$. **30.** Чизиқли эркли. **31.** $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=1$ да $\alpha_1\cdot 1+\alpha_2\sin^2x+\alpha_3\cos^2x=-1+\sin^2x+$ $+\cos^2x\equiv 0$. Шу сабабли, 1, $\sin^2x$, $\cos^2x$ система чизиқли боғлиқ. **32.** Чизиқли боғлиқ **33.** Изланаётган тенгламанинг ихтиёрий ечими (уни y деб белгилаймиз) x, x^2 ларга чизиқли боғлиқ бўлади, шу сабабли уларнинг Вронский детерминанти $W[x, x^2, y]=0$ бўлади. Бундан

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & y \\ 1 & 2x & y' \\ 0 & 2 & y'' \end{vmatrix}=0$$

ёки $x^2y''-2xy'+2y=0$ изланаётган тенглама ҳосил бўлади. **34.** $y''-2y'+y=0$. **35.** Изланаётган тенглама.

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & y \\ \cos x & -\sin x & y' \\ -\sin x & -\cos x & y'' \end{vmatrix}=0$$

ёки $y'' + y = 0$ бўлади. **36.** $xy''' - y'' + xy' - y = 0$. 37 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ тенгламанинг битта ечими y_1 маълум бўлган ҳолда унинг умумий ечими

$$y = y_1\left[C_1 + C_2\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}\,dx\right]$$

формула бўйича топилади. Берилган тенгламани

$$y'' - \frac{x}{1-x^2}y' + \frac{1}{4(1-x^2)}y = 0$$

кўринишда ёзиб оламиз. Бу ҳолда

$$y = \sqrt{1+x}\left[C_1 + C_2\int\frac{1}{1+x}e^{\int\frac{x}{1-x^2}dx}dx\right] =$$

$$= \sqrt{1+x}\left[C_1 + C_2\int\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\,dx\right] =$$

$$= \sqrt{1+x}\left[C_1 + C_2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right] = C_1\sqrt{1+x} + C_2\sqrt{1-x}.$$

38. $y = x^2 - e^{x-1}$. **39.** 37-мисолдаги умумий ечимни топиш формуласига биноан,

$$y = x\left[C_1 + C_2\int\frac{1}{x^2}e^{\int\frac{dx}{x(\ln x - 1)}}\,dx\right] =$$

$$= x\left[C_1 + C_2\int\frac{\ln x - 1}{x^2}\,dx\right] = C_1x + C_2\ln x.$$

40. $y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$. **41.** Аввал берилган тенгламани $y'' - \frac{y'}{x} = 3x$ кўринишда ёзиб оламиз. Мос бир жинсли $y'' - \frac{y'}{x} = 0$ тенгламанинг умумий ечими: $y = C_1x^2 + C_2$, бунда $y_1 = x^2$, $y_2 = 1$. Берилган тенгламанинг умумий ечимини $y = C_1(x)x^2 + C_2(x)$ кўринишда излаймиз. 2-§ даги (3) формулага кўра $C_1(x)$ ва $C_2(x)$ лар

$$\begin{cases} C_1'(x)x^2 + C_2'(x) = 0, \\ C_1'(x)2x = 3x \end{cases}$$

системадан топилади:

$$C_1'(x) = \frac{3}{2},\ C_1(x) = \frac{3}{2}x + C_1,$$

$$C_2'(x) = -\frac{3}{2}x^2,\ C_2(x) = -\frac{1}{2}x^3 + C_2.$$

Топилган ифодаларни ўз ўрнига қўйиб, умумий ечимни ёзамиз: $y = C_1x^2 + C_2 + x^3$. 42 $y = C_1\left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-2x} + C_2 - x^2$. **43.** Энг олдин бир жинсли $y'' - 2y'\operatorname{tg} x = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топамиз: $y = C_1 \operatorname{tg} x + C_2$. Берилган тенглама ечимини 41-мисолдагига ўхшаш топамиз: $y = C_1(x)\operatorname{tg} x + C_2(x)$,

$$\begin{cases} C_1'(x)\operatorname{tg} x + C_2(x) = 0, \\ C_1'(x) \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1; \end{cases} \qquad \begin{aligned} &C_1'(x) = \cos^2 x, \\ &C_2'(x) = -\sin x \cos x, \end{aligned}$$

$$C_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1, \qquad C_2(x) = -\frac{1}{2}\sin^2 x + C_2,$$

$$y = C_1 \operatorname{tg} x + C_2 + \frac{1}{2} x \operatorname{tg} x.$$

44. $y = C_1 + C_2 \sin x + C_3 \cos x - x\cos x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + \sin x \ln|\cos x|$. **45.** Мос характеристик тенглама $r^2 - r = 0$ нинг илдизлари: $r_1 = 0$, $r_2 = 1$. Демак, умумий ечим: $y = C_1 + C_2 e^x$. **46.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$. **47.** Мос характеристик тенглама $r^2 - 4r + 3 = 0$ нинг илдизлари: $r_1 = 3$, $r_2 = 1$. Демак, умумий ечим: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x$. **48.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$. **49.** Мос характеристик тенглама $3r^2 - 2r - 8 = 0$ нинг илдизлари: $r_1 = 2$, $r_2 = -\frac{4}{3}$. Демак, умумий ечим: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}$. **50.** $y = e^{2x}(C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x})$. **51.** $r^2 + 2r + 1 = 0$ характеристик тенглама $r_1 = r_2 = -1$ каррали илдизга эга, шунинг учун умумий ечим: $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$. **52.** $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$. **53.** $r^2 - 2r + 2 = 0$ характеристик тенглама $r_{1,2} = 1 \pm i$ илдизларга эга. Бинобарин, умумий ечим: $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. **54.** $y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$. **55.** $4r^2 - 8r + 5 = 0$ характеристик тенглама $r_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{2}i$ илдизларга эга. Демак, умумий ечим: $y = e^x\left(C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2}\right)$. **56.** $y = e^{\frac{1}{3}x}\left(C_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{3}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{2}}{3}x\right)$.

57. Аввал умумий ечимни топамиз: $r^2 - 2r + 3 = 0$ характеристик тенгламанинг илдизлари $r_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}i$ бўлгани учун $y = e^x(C_1 \cos\sqrt{2}x + C_1 \sin\sqrt{2}x)$. Дифференциалласак: $y' = e^x[(C_1 + \sqrt{2}C_2)\cos\sqrt{2}x + (C_2 - \sqrt{2}C_1)\sin\sqrt{2}x]$. Бошланғич шартларга кўра

$$\begin{cases} 1 = C_1, \quad C_1 = 1, \\ 3 = C_1 + \sqrt{2}C_2, \quad C_2 = \sqrt{2} \end{cases}$$

Демак, хусусий ечим: $y = e^x(\cos\sqrt{2}x + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x)$. **58.** $y = e^x$. **59.** Мос характеристик тенглама $r^2 + 4r + 29 = 0$ нинг илдизлари: $r_{1,2} = -2 \pm 5i$. Демак, умумий ечим: $y = e^{-2x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$ Бошланғич шартлардан фойдаланиб топамиз: $C_1=0$. Демак, $y=C_2e^{-2x}\sin 5x$. Дифференциаллаcак: $y'=C_2e^{-2x}(-2\sin 5x+5\cos 5x)$ $x=0$ да $y'=15$, демак, $C_2=3$, шу сабабли $y=3e^{-2x}\sin 5x$. **60.** $y=e^{-\frac{1}{2}x}(2+x)$. **61.** Юқоридаги мисоллардагига ўхшаш умумий ечимни топамиз: $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$. Дифференциаллаcак: $y'=-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x$ Масала шартига кўра $x=\frac{\pi}{2}$ да $y=-1$ ва $y'=1$. Демак, $C_1=1$ ва $C_2=-\frac{1}{2}$. Шунинг учун $y=\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x$ **62.** $y=\frac{k}{4}\sin 4(x-x_0)+y_0\cos 4(x-x_0)$. **63.** Бир жинслимас тенгламанинг умумий ечими $u=y+u_1$ формула бўйича топилади, бу ерда u_1 унинг бирор хусусий ечими, y мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими. Дастлаб мос бир жинсли $y''-7y'+12y=0$ тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Унинг характеристик тенгламаси $r_1=3$, $r_2=4$ илдизларга эга, демак, $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$. Агар $a=0$ ва $b=0$ бўлса, $f(x)=e^{ax}(p_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx)$ ифода $f(x)=P_n(x)$ кўринишда бўлади. Бу ҳолда $u_1=e^{ax}[\overline{P}_e(x)\cos bx+\overline{Q}_e(x)\sin bx]$ формулага кўра 0 сони характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаса, хусусий ечимни $u_1=Q_n(x)$ кўринишда, 0 сони характеристик тенгламанинг p каррали илдизи бўлганида эса хусусий ечимни $u_1=x^pQ_n(x)$ кўринишда излаш керак. Берилган тенгламанинг ўнг томони 1-даражали кўпҳад ва 0 сони характеристик тенгламанинг илдизи бўлмагани сабабли, хусусий ечимни $u_1=Ax+B$ кўринишда излаш лозим. Номаълум A ва B коэффициентларни топиш учун u_1 ни ва унинг ҳосилаларини тенгламага қўямиз ҳамда чап ва ўнг томондаги коэффициентларни таққослаймиз: $u_1'=A$, $u_1''=0$

$-7A+12(Ax+B)=x$, $A=\frac{1}{12}$, $B=\frac{7}{144}$. Демак, хусусий ечим: $u_1=\frac{1}{12}x+\frac{7}{144}$, умумий ечим:

$$u=y+u_1=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}+\frac{1}{12}x+\frac{7}{144}.$$

64. $u=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{8}(2x^2+4x+3)$. **65.** Мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими: $y=C_1+C_2e^{2x}$, чунки характеристик тенгламанинг илдизлари $r_1=0$, $r_2=2$. 0 сони характеристик тенгламанинг оддий илдизи бўлгани учун хусусий ечимни $u_1=xA(x^2+Bx+C)$ кўринишда излаш керак. Тегишли тенгламалардан A,

B, C ларни топамиз: $A = -\frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{2}$ Демак, хусусий ечим: $u_1 = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3$; умумий ечим:

$$u = C_1 + C_2e^{2x} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3.$$ **66.** $u = C_1 + C_2e^x - x - x^2$.

67 Мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини осонгина топамиз: $y = C_1e^{-5x} + C_2e^{-x}$. $f(x) = e^{ax}[P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx]$ ифода $b = 0$ бўлганда $f(x) = e^{ax}P_n(x)$ кўринишни олади. Бу ҳолда a сони характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаса, хусусий ечимни $u_1 = e^{ax}[\overline{P}_e(x\cos bx + \overline{Q}_e(x)\sin bx]$ формулага кўра $u_1 = e^{ax}Q_n(x)$ кўринишда, a сони характеристик тенгламанинг p каррали илдизи бўлганда эса хусусий ечимни $u_1 = x^pe^{ax}Q_n(x)$ кўринишда излаш керак. Берилган тенгламанинг e^{2x} ўнг томони $e^{2x}P_0(x)$ кўринишдадир. $a = 2$ характеристик тенгламанинг илдизи бўлмагани учун хусусий ечимни $u_1 = Ae^{2x}$ кўринишда излаймиз. Бу ечимни тенгламага қўйиб, $4Ae^{2x} + 12Ae^{2x} + 5Ae^{2x} = e^{2x}$ тенгликни ҳосил қиламиз, бу ердан $A = \frac{1}{21}$. Демак, хусусий ечим: $u_1 = \frac{1}{21}e^{2x}$; умумий ечим: $u = C_1e^{-5x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{21}e^{2x}$ бўлади. **68.** $u = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$. **69.** $r^2 + 1 = 0$ характеристик тенглама $r_{1,2} = \pm i$ илдизларга эга. Шунинг учун, мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими: $y = C_1\cos x + C_2\sin x$. Берилган тенгламанинг ўнг томони $f(x) = e^{0\cdot x}M\cos(1\cdot x)$ кўринишда бўлиб, $a + bi = i$ характеристик тенгламанинг оддий илдизи бўлгани учун, хусусий ечимни $u_1 = x^p e^{ax}[\overline{P}_e(x)\cos bx + \overline{Q}_e(x)\sin bx]$ формулага кўра $u_1 = x(A\cos x + B\sin x)$ шаклда излаймиз. Бу ифодани берилган тенгламага қўйсак, $-2A\sin x + 2B\cos x = \cos x$. $\cos x$ ва $\sin x$ олдидаги коэффициентларни тенглаб, A ва B ларни топамиз: $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$. Демак, хусусий ечим: $u_1 = \frac{1}{2}x\sin x$; умумий ечим: $u = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}x\sin x$. **70.** $u = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x + 5x\sin x)$. **71.** Мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими: $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$. $a \pm ib = 1 \pm i$ сон характеристик тенгламанинг оддий илдизи бўлгани учун хусусий ечимни $u_1 = x^pe^{ax}[\overline{P}_e(x)\cos bx + \overline{Q}_e(x)\sin bx]$ формула бўйича

$$u_1 = xe^x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x]$$

кўринишда излаймиз A, B, C, D лар учун мос тенгламаларни ечиб, $A = D = 0$, $B = -\frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{4}$ ларни топамиз. Демак, хусусий ечим: $u_1 = \frac{1}{4} e^x(x^2\sin x - x\cos x)$, умумий ечим: $u = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) + \frac{1}{4} e^x(x^2 \sin x - x\cos x)$. **72.** $u = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{1}{4} xe^x \sin 2x$. **73.** Мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими: $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$. 1) бу ҳолда $a = 2$, $b = 0$. $a + bi = 2$ сон характеристик тенгламанинг оддий илдизи бўлгани учун хусусий ечимни $u_1 = Axe^{2x}$ кўринишда излаймиз. Тегишли тенгламадан $A = 3$ ни топамиз. Демак, хусусий ечим: $u_1 = 3xe^{2x}$; 2) бу ҳолда $a = 0$, $b = 1$, демак, $a \pm bi = \pm i$ сон характеристик тенгламанинг илдизи эмас, шунинг учун хусусий ечимни $u_1 = A\cos x + B\sin x$ кўринишда излаймиз. A ва B лар учун мос тенгламаларни ечиб, $A = \frac{3}{5}$, $B = \frac{1}{5}$ ларни топамиз. Демак, $u_1 = \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$; 3) бу ерда ўнг қисм иккита қўшилувчидан иборат, шунинг учун хусусий ечим иккита қўшилувчидан иборат бўлиши керак. Уларни айрим ҳам, биргаликда ҳам аниқлаш мумкин. Хусусий ечимни $u_1 = Axe^x + Be^{-2x}$ кўринишда излаш керак, чунки биринчи қўшилувчи учун $a \pm bi = 1$ сон характеристик тенгламанинг оддий илдизи, иккинчи қўшилувчи учун эса $a \pm bi = -2$ сон характеристик тенгламанинг илдизи эмас. Юқоридаги мисоллардагига ўхшаш $A = -\frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{12}$ ларни топамиз Демак, $u_1 = -\frac{1}{2} xe^x - \frac{1}{12} e^{-2x}$; 4) аввал, тенгламанинг ўнг қисмини $\sin x \sin 2x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)$ кўринишда ёзиб оламиз. Хусусий ечимни *3-ҳолдагига ўхшаш*

$$u_1 = A\cos x + B\sin x + C\cos 3x + D\sin 3x$$

кўринишда излаймиз. Сўнгра $A = \frac{1}{20}$, $B = -\frac{3}{20}$, $C = \frac{7}{260}$, $D = \frac{9}{260}$ ларни топамиз. Демак, $u_1 = \frac{1}{20}\cos x - \frac{3}{20}\sin x + \frac{7}{260}\cos 3x + \frac{9}{260}\sin 3x$. Шундай қилиб, умумий ечим: $u = C_1e^x + C_2e^{2x} + u_1$.

бунда u_1: 1) $3xe^{2x}$; 2) $\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x$; 3) $u_1=-\frac{1}{2}xe^{x}-\frac{1}{12}e^{-2x}$; 4) $u_1=\frac{1}{20}\cos x-\frac{3}{20}\sin x+\frac{7}{260}\cos 3x+\frac{9}{260}\sin 3x$. **74.** $u=e^{2x}(C_1+C_2x)+u_1$, бунда u_1: 1) $\frac{3}{2}x^2e^{2x}$; 2) $\frac{1}{169}\left(-\frac{5}{2}\sin 3x+6\cos 3x\right)-\frac{1}{50}(3\sin x+4\cos x)$; 3) $x+1+\frac{4}{25}\cos x+\frac{3}{25}\sin x+\frac{1}{8}\cos 2x$; 4) $\frac{1}{4}\left(x^2e^{2x}-\frac{1}{8}e^{-2x}\right)$ **75.** Аввал, мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топамиз: $y=C_1\cos x+C_2\sin x$ Ўзгармасларни вариациялаб, хусусий ечимни $u_1=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$ кўринишда излаймиз $C_1(x)$ ва $C_2(x)$ ларни топишда 2-§ даги (3) системадан фойдаланамиз:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x+C_2'(x)\sin x=0,\\ C_1'(x)(-\sin x)+C_2'(x)\cos x=\operatorname{tg}x,\end{cases}$$

бу ердан $C_1'(x)=-\operatorname{tg}x\sin x$, $C_2'(x)=\sin x$, $C_1(x)=\sin x-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$, $C_2(x)=-\cos x$. Демак, $u_1=-\cos x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$, умумий ечим:

$$u=C_1\cos x+C_2\sin x-\cos x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

76. $u=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x+\cos x\ln|\cos x|$. **77.** Мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими: $y=(C_1+C_2x)e^x$ Хусусий ечимни $u_1=C_1(x)e^x+C_2(x)xe^x$ кўринишда излаймиз. $C_1(x)$ ва $C_2(x)$ ларни $C_1'(x)+C_2'(x)x=0$, $C_1'(x)+C_2'(x)(1+x)=\frac{1}{x^2+1}$ системадан топамиз: $C_1(x)=-\frac{1}{2}\ln(x+1)$, $C_2(x)=\operatorname{arctg}x$ Демак, $u_1=-\frac{1}{2}e^x\ln(1+x^2)+xe^x\operatorname{arctg}x$, умумий ечим: $u=e^x\left[C_1+C_2x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+x\operatorname{arctg}x\right]$. **78.** $u=e^{2x}(C_1+C_2x)+\frac{3}{100}(3\sin x+4\cos x)+\frac{1}{676}(5\sin 3x-12\cos 3x)$. **79.** Мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими: $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$. хусусий ечимни $u_1=e^{-x}(C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x)$ кўринишда излаймиз. $C_1(x)$ ва $C_2(x)$ ларни юқоридаги мисоллардаги каби топамиз: $C_1(x)=-x$, $C_2(x)=\ln|\sin x|$. Демак, хусусий ечим: $u_1=$

$=e^{-x}(-x\cos x+\sin x\ln|\sin x|)$ умумий ечим: $u=[(C_1-x)\cos x+$ $+(C_2+\ln|\sin x|)\sin x]e^{-x}$. **80.** $u=C_1e^x+C_2+(1+e^x)\ln(1+e^{-x})$. **81.** Ox ни юк осилган нуқта орқали пастга вертикал йўналтирамиз. Координаталар боши O ни юк мувозанатда бўлган ҳолатда оламиз. λ—пружинанинг айни моментдаги узайиши, $\lambda_{\text{ст}}$ эса статик узайиш бўлсин. Ҳаракатнинг дифференциал тенгламасини Ньютоннинг иккинчи қонуни $\vec{F}=m\vec{a}$ дан топамиз, бу ерда m — юкнинг массаси, $\vec{a}$ —ҳаракат тезланиши, $\vec{F}$ — юкка қўйилган кучларнинг тенг таъсир этувчиси. Масала шартига кўра тенг таъсир этувчи куч пружинанинг $-c\lambda$ га тенг бўлган (c — ўзгармас пропорционаллик коэффициенти) таранглик кучи $P=c\lambda_{\text{ст}}$ оғирлик кучи ва $Q\sin pt$ қўзғатувчи куч йиғиндисидан иборат. Шунинг учун ҳаракатнинг дифференциал тенгламаси

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-c\lambda+c\lambda_{\text{ст}}+Q\sin pt \qquad (1)$$

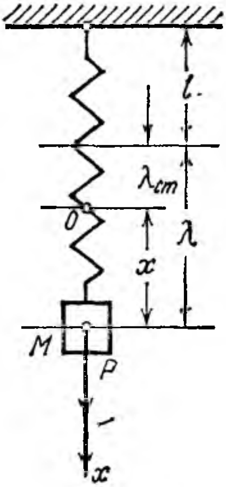
кўринишда бўлади: $\lambda-\lambda_{\text{ст}}$ ни x билан, $\frac{c}{m}$ ни k^2 билан, $\frac{Q}{m}$ ни q билан белгилаб, (1) ни

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=q\sin pt \qquad (2)$$

кўринишда қайта ёзиб оламиз. Бу коэффициентлари ўзгармас бўлган иккинчи тартибли бир жинслимас тенглама. Унга мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими $x=A\sin(kt+\alpha)$ кўринишда бўлади Бу юкнинг эркин тебранишларидир. A катталик тебранишнинг амплитудаси, $k+\alpha$ аргумент эса тебраниш фазаси дейилади. $k=\sqrt{\frac{c}{m}}$ катталик тебраниш частотасидир. $p\neq k$ бўлганда $Q\sin pt$ қўзғатувчи куч вужудга келтирадиган мажбурий тебранишларни характерловчи (2) нинг хусусий ечими $u_1=\frac{q}{k^2-p^2}\sin pt$ кўринишда бўлади. Бу ҳолда ҳаракат қонуни (2) тенгламанинг

$$u=\frac{q}{k^2-p^2}\sin pt+A\sin(kt+\alpha)$$

умумий ечими билан ифодаланади, $p=k$ бўлганда (2) нинг хусусий ечими $u_1=-\frac{q}{2k}t\cos kt$ кўринишда бўлиб, резонанс рўй беради. Бошқача айтганда, мажбурий тебранишлар амплитудаси $\frac{q}{2k}t$



77- чизма.

чексиз катта бўлиб қолиши мумкин (77- чизма). **82** $S = e^{-0,245t} \times \times[2\cos(156,6t) + 0,00313\,\sin(156,6t)]$. **83.** A билан B нинг орасидаги ихтиёрий M нуқтага иккита куч: F ўзгармас куч ва $F_1 = k(a - x)$ ҳавонинг қаршилик кучи таъсир этади. $x = 0$ да $F_1 = f$ бошланғич шартдан $k = \frac{f}{a}$ ни топамиз, шунинг учун $F_1 = \frac{f}{a}(a - x)$. Ньютоннинг иккинчи қонунига биноан моддий нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаси

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{f}{am}x = \frac{F}{m} - \frac{f}{m} \qquad (1)$$

кўринишда бўлади. Унга мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими:

$$x = C_1 e^{\sqrt{\frac{f}{am}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{f}{am}}t}.$$

(1) нинг хусусий ечими эса $u_1 = \frac{a(f - F)}{f}$. Демак, (1) тенгламанинг умумий ечими

$$u = C_1 e^{\sqrt{\frac{f}{am}}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{f}{am}}t} + \frac{a(f - F)}{f}$$

кўринишда бўлади. $t = 0$ да $u(0) = 0$ ва $u'(0) = 0$ бўлгани учун $C_1 = C_2 = \frac{a(F - f)}{2f}$ ва хусусий ечим $u = \frac{a(F - f)}{2f}\left[e^{\sqrt{\frac{f}{am}}t} - e^{-\sqrt{\frac{f}{am}}t} - 2\right]$ кўринишда бўлади. Моддий нуқтанинг A дан B гача етиб бориш вақтини аниқлаш учун бу тенгликда $u = a$ деймиз. Натижада $f < F$ эканини эътиборга олиб, $t = \sqrt{\frac{am}{f}} \times \times \ln\frac{F + \sqrt{f(2F - f)}}{F - f}$ ни ҳосил қиламиз **84.** а) $r = \frac{a}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$; б) $r = \frac{v_0}{2\omega}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})$. **85.** $y^2 = C_1x + C_2$. **86.** $y = \frac{C_1e^{C_1x}}{C_2 + e^{C_1x}}$. **87.**

$y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x}$. 88. $y = \frac{2}{3C_1}(C_1 x + 3)^{\frac{3}{2}} + C_2$. 89. $u = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \times$
$\times \sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi a}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x$. Кўрсатма. $\frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t} = 0$, $u(0,\ t) = 0$,

$$u(l,\ t) = 0, \quad u(x,\ 0) = \begin{cases} \frac{2hx}{l}, & \left(0 < x \leqslant \frac{l}{2}\right) \\ 2h\left(1 - \frac{x}{l}\right), & \left(\frac{l}{2} < x < l\right) \end{cases}$$

шартлардан фойдаланиш керак. 90. $T = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{g}}\sqrt{(6\pi)^2 + \ln^2 10}$.

91. $y = \frac{1}{2}x + C_1\cos\ln|x| + C_2\sin\ln|x|$. 92 $y = C_1x^2 + C_2\frac{1}{x} +$
$+ \frac{1}{10}(\cos\ln|x| - 3\sin\ln|x|)$.

АДАБИЁТ

1. Н. Я. Виленкин, Қ. А. Бохан и др. Задачник по курсу математического анализа, ч. I, II. «Просвещение», М., 1971.

2. Н. Я. Виленкин, Н. С. Куницкая, А. Г. Мордкович. Математический анализ. Дифференциальное исчисление. «Просвещение», М., 1978.

3. П. Е. Данко, А. Г. Попов. Высшая математика в упражнениях и задачах, ч. I, II, «Высшая школа», М., 1974.

4. Н. А. Давыдов, П. П. Коровкин, В. Н. Никольский. Сборник задач по математическому анализу. «Просвещение», М., 1973.

5. Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. «Наука». М., 1972.

6. И. И. Ляшко и др. Математический анализ в примерах и задачах. ч. I, «Вища школа», Киев, 1975.

7. Я. И. Ривкинд Дифференциальное и интегральное исчисление в задачах. «Вышейшая школа», Минск, 1971.

8. Г. И. Запорожец. Руководство к решению задач по математическому анализу. «Высшая школа», М., 1961.

9. В. Ф. Бутузов, Крутицкая Н. У., Медведев, Г. Н., Шишкин А. А. Математический анализ в вопросах и задачах. «Высшая школа». М., 1984.

10. Л. А. Қутузов. Сборник заданий по высшей математике, «Высшая школа», М., 1983.

11. Ш. Т. Мақсудов. Аналитик функциялар назариясидан машқлар. «Ўқитувчи», Т., 1978.

МУНДАРИЖА

На узбекском языке

АЗИМ ГУЛЯМОВИЧ ХИКМАТОВ
УРМАН ТОШМЕГОВ
КУЛЬЗАЙРА КАРАШЕВА

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Учебное пособие для студентов педвузов

Ташкент «Ўқитувчи» 1987

Редактор *М. Пўлатов*
Расмлар редактори *С. Соин*
Техредактор *Т. Грешникова*
Корректор *М. Минахмедова*

ИБ № 3896

Теришга берилди 22. 08. 86. Босишга рухсат этилди 29. 06.87. Формати $84\times108/_{32}$. Тип. қоғози № 2. Литературная гарнитура. Кегли 10 шпонсиз, 8 шпонли. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 16,59. Шартли кр-отт. 16,59. Нашр. л. 15,28. Тиражи 7000. Заказ № 6490. Баҳоси 80 т.

„Ўқитувчи" нашриёти. Тошкент, 129. Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 09—161—85.

Область газеталарининг М. В. Морозов номидаги бирлашган нашриёти ва босмахонаси, Самарқанд ш., У. Турсунов кўчаси, 82, 1987.

Объединенное издательство и типография областных газет имени М. В. Морозова. г. Самарканд, ул. У. Турсунова, 82.