ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Тошкент Молия институти

Қ.Сафаева, Ф.Шомансурова

Математик программалаштириш

Ўқув қўлланма

ТОШКЕНТ
«IQTISOD-MOLIYA»
2009

Сафаева Қ., Шомансурова Ф. Математик программалаштириш. Ўқув қўлланма (II-олий таълим олувчилар учун) –Т.: «IQTISOD-MOLIYA», 2009 йил, 124 бет.

Ушбу ўқув қўлланма олий таълимнинг 340000-“Бизнес ва бошқарув” ҳамда 140000- “Ўқитувчилар тайёрлаш ва педагогика фани” таълим соҳасидаги барча бакалавриат таълим йўналишларида II-олий таълим олувчи талабалар учун мўлжалланган бўлиб, унга “Математик программалаштириш” фанининг чизиқли программалаштиришга доир барча мавзуларининг назарий асослари, назорат саволлари, мустақил ечиш учун масалалар ва тестлар киритилган. Ўқув қўлланмада мустақил иш вариантлари ҳамда адабиётлар рўйхати ҳам келтирилган. Ўқув қўлланмадан фанни мустақил ўрганувчилар, талабалар ва профессор-ўқитувчилар ҳам фойдаланишлари мумкин.

Ўқув қўлланма Тошкент молия институти Илмий-услубий Кенгашида муҳокама қилинган ва нашрга тавсия этилган (5-сонли қарор 26.06.08.)

Тақризчилар: И.Хабибуллаев – Давлат солиқ академиясининг “Информацион технологиялар” кафедраси мудири, т.ф.д. проф.,
Э.Мамуров - ф.м.ф.н.

ISBN 978-9943-13-096-8

1-§. Математик программалаштириш фанининг предмети Энг содда масалаларнинг математик моделлари

Математик программалаштириш математиканинг экстремал масалаларни ўрганувчи ва уларни ечиш усулларини яратувчи бир йўналишидир. Инсон фаолиятининг турли соҳаларида, жумладан, иқтисодий изланишларда, иқтисодиётни, унинг турли тармоқларини бошқариш ва режалаштиришда ҳамда бошқа иқтисодий жараёнларни оптималлаштиришда математик программалаштириш масалалари ва усуллари қўлланилади.

Ўзгарувчиларига маълум чекланишлар қўйилган кўп ўлчовли функциянинг максимум ва минимумини топиш масаласи умумий ном билан математик программалаштириш масаласи деб аталади.

Математик программалаштириш чизиқли ва чизиқсиз тенгликлар ҳамда тенгсизликлар билан берилган тўпламларда аниқланган кўп ўлчовли функцияларнинг максимум ва минимум қийматларини топиш назарияси ва усулларини ўргатади. Максимуми ёки минимуми қидирилаётган функция мақсад функцияси деб аталади.

Номаълумларга қўйилган чекламалар чизиқли ёки чизиқсиз тенглик ва тенгсизликлар системасидан иборат бўлиб, улар бошқарувчи ўзгарувчиларнинг мумкин бўлган қийматлар соҳасини (мақсад функциянинг аниқланиш соҳасини) ифодалайдилар.

Математик программалаштириш фанининг ривожланишига Л.В.Канторович, В.С.Немчинов, Д.Б.Юдин, Е.Г.Гольштейн, Д.Данциг, Г.Купманс, Р.Беллман, Л.Форд, С.Гасс ва бошқалар катта ҳисса қўшганлар.

Математик программалаштиришнинг предмети корхона, фирма, бозор, ишлаб чиқариш бирлашмаси, халқ хўжалиги тармоқлари, бутун халқ хўжалигига доир иқтисодий жараёнларни тасвирловчи математик моделлардан иборат.

Математик моделлар кўп даврлардан буён иқтисодиётда ишлатилмоқда. Масалан, иқтисодиётда қўлланилган 1-модел – Ф.Кене (1758 й.) томонидан яратилган такрор ишлаб чиқариш моделидир.

«Иқтисодий масаланинг математик модели» деб масаланинг асосий шартлари ва мақсадининг математик формулалар ёрдамидаги тасвирига айтилади. Умумий ҳолда математик программалаштириш масаласининг математик модели қуйидаги кўринишда бўлади:

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

шартларни қаноатлантирувчи $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ функциянинг экстремуми топилсин.

Бу ерда: f,g_i – берилган функциялар, b_i – ихтиёрий ҳақиқий сонлар.

Агар f,g_i функцияларнинг ҳаммаси чизиқли функциялардан иборат бўлса, берилган масала **чизиқли программалаштириш** масаласи бўлади.

Агар f ва g_i функциялардан бирортаси ночизиқли функция бўлса, у ҳолда берилган модел **чизиқсиз программалаштириш** масаласини ифодалайди.

Агар f ёки g_i функциялар тасодифий миқдорларни ўз ичига олсалар, у ҳолда модел **стохастик программалаштириш** масаласини ифодалайди.

Агар f ва g_i функциялар вақтга боғлиқ бўлиб, масалани ечишга кўп босқичли жараён сифатида қаралса, у ҳолда берилган модел **динамик программалаштириш** масаласидан иборат бўлади.

Математик программалаштириш масалалари ичида мукаммал ўрганилгани чизиқли программалаштиришдир. Чизиқли программалаштириш усуллари билан ишлаб чиқаришни режалаштириш, ишлаб чиқарилган маҳсулотларни оптимал тақсимлаш, оптимал аралашмалар тайёрлаш, оптимал бичиш, саноат корхоналарини оптимал жойлаштириш ва бошқа кўплаб масалаларни ечиш мумкин.

Ҳар қандай иқтисодий масалани математик программалаштириш усулларини қўллаб ечишдан аввал, уларнинг математик моделини тузиш керак; бошқача айтганда, берилган иқтисодий масаланинг чегараловчи шартларини ва мақсадини математик формулалар орқали ифодалаб олиш керак. Ҳар қандай масаланинг математик моделини тузиш учун:

1) масаланинг иқтисодий маъносини ўрганиб, ундаги асосий шарт ва мақсадни аниқлаш;

2) масаладаги номаълумларни белгилаш;

3) масаланинг шартларини алгебраик тенгламалар ёки тенгсизликлар орқали ифодалаш;

4) масаланинг мақсадини функция орқали ифодалаш керак.

Энди бир нечта энг содда иқтисодий масалаларнинг математик моделини тузиш жараёни билан танишамиз.

Ишлаб чиқаришни ташкил этиш ва режалаштириш масаласи

Фараз қилайлик, корхонада $\boldsymbol{m}$ хил маҳсулот ишлаб чиқарилсин; улардан ихтиёрий бирининг тартиб рақамини $\boldsymbol{i}$ $(i=\overline{1.m})$ билан белгилаймиз. Бу маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун $\boldsymbol{n}$ хил ишлаб чиқариш факторлари зарур бўлсин. Улардан ихтиёрий бирининг тартиб рақамини $\boldsymbol{j}$ $(j=\overline{1.n})$ билан белгилаймиз.

Ҳар бир ишлаб чиқариш факторининг умумий миқдори ва бир бирлик маҳсулотни ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган нормаси қуйидаги жадвалда берилган.

И/ч факторлари / *И/ч маҳсулот турлари*	*1*	*2*	*3*	…	*n*	*Даромад*
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1n}	C_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2n}	C_2
…	…	…	…	…	…	…
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	…	a_{mn}	C_m
И/ч факторининг захираси	b_1	b_2	b_3	…	b_n	

Жадвалдаги ҳар бир $\boldsymbol{b_j}$ – $\boldsymbol{j}$-ишлаб чиқариш факторининг умумий миқдори (захираси); $\boldsymbol{a_{ij}}$ – $\boldsymbol{i}$-маҳсулотнинг бир бирлигини ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган $\boldsymbol{j}$-факторнинг миқдори; $\boldsymbol{c_i}$–корхонанинг $\boldsymbol{i}$-маҳсулотнинг бир бирлигини реализация қилишдан оладиган даромади.

Масаланинг иқтисодий маъноси: корхонанинг ишини шундай режалаштириш керакки: а) ҳамма маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган ҳар бир ишлаб чиқариш факторининг миқдори уларнинг умумий миқдоридан ошмасин; б) маҳсулотларни реализация қилишдан корхонанинг оладиган даромади максимал бўлсин.

Режалаштирилган давр ичида ишлаб чиқариладиган $\boldsymbol{i}$ $(i=\overline{1.m})$ - маҳсулотнинг миқдорини $\boldsymbol{x_i}$ билан белгилаймиз. У ҳолда масаладаги (а) шарт қуйидаги тенгсизликлар системаси орқали ифодаланади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \leq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \leq b_2, \\ ------------------ \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \leq b_n, \end{cases}$$

Масаланинг иқтисодий маъносига кўра ҳамма номаълумлар манфий бўлмаслиги керак, яъни:

$$x_i \geq 0 \quad (i=1,2,\ldots m). \qquad (2)$$

Масаладаги б) шарт унинг мақсадини аниқлайди. Демак, масаланинг мақсади маҳсулотларни реализация қилишдан ва корхонанинг оладиган умумий даромадини максималлаштиришдан иборат ва уни

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m \qquad (3)$$

чизиқли функция орқали ифодалаш мумкин. Шартга кўра $\boldsymbol{Y \to max}$.

Шундай қилиб, ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласининг математик модели қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \leq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \leq b_2, \\ ------------------ \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \leq b_n, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_m \geq 0,$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m \to max.$$

Истеъмол савати масаласи

Фараз қилайлик, киши организми учун бир суткада $\boldsymbol{n}$ хил $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ озуқа моддалари керак бўлсин, жумладан $\boldsymbol{A_1}$ озуқа моддасидан бир суткада энг ками $\boldsymbol{b_1}$ миқдорда, $\boldsymbol{A_2}$ озуқа моддасидан $\boldsymbol{b_2}$ миқдорда, $\boldsymbol{A_3}$ озуқа моддасидан $\boldsymbol{b_3}$ миқдорда ва ҳоказо $\boldsymbol{A_n}$ дан $\boldsymbol{b_n}$ миқдорда зарур бўлсин ва уларни $\boldsymbol{m}$ та $\boldsymbol{B_1, B_2, \ldots, B_m}$ маҳсулотлар таркибидан олиш мумкин бўлсин. Ҳар бир $\boldsymbol{B_i}$ маҳсулот таркибидаги $\boldsymbol{A_j}$ озуқа моддасининг миқдори $\boldsymbol{a_{ij}}$ бирликни ташкил қилсин.

Масаланинг берилган параметрларини қуйидаги жадвалга жойлаштириш мумкин.

Озуқа моддалари / *Маҳсулотлар*	A_1	A_2	…	A_n	*Маҳсулот баҳоси*
B_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	C_1
B_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	C_2
…	…	…	…	…	…
B_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	C_m
Озуқа моддасининг минимал нормаси	b_1	b_2	…	b_n	

Масаланинг иқтисодий маъноси: истеъмол саватига қандай маҳсулотлардан қанча киритиш керакки, натижада: а) одам организми қабул қиладиган озуқа моддаси белгиланган минимал нормадан кам бўлмасин; б) истеъмол саватининг умумий баҳоси минимал бўлсин.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \geq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \geq b_2, \\ ------------------ \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \geq b_n. \end{cases} \qquad (4)$$

Истеъмол саватига киритиладиган ***i***-маҳсулотнинг миқдорини $\boldsymbol{x_i}$ билан белгилаймиз. У ҳолда масаланинг а) шарти қуйидаги тенгсизликлар системаси орқали ифодаланади.

Масаланинг иқтисодий маъносига кўра ундаги номаълумлар манфий бўла олмайди, яъни

$$x_1\ ^3\ 0,\ \ x_2\ ^3\ 0, \ldots,\ \ x_m\ ^3\ 0, \qquad (5)$$

Масаланинг б) шарти унинг мақсадини ифодалайди. Демак, масаланинг мақсади истеъмол саватига киритиладиган маҳсулотларнинг умумий баҳосини минималлаштиришдан иборат бўлиб, уни қуйидаги чизиқли функция кўринишида ифодалаш мумкин.

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m \text{®}\ \ min. \qquad (6)$$

Шундай қилиб, «истеъмол савати» масаласининг математик моделини кўринишда ёзиш мумкин.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \geq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \geq b_2, \\ ------------------ \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \geq b_n, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_m \geq 0,$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m \rightarrow min.$$

Оптимал бичиш масаласи

Дейлик, узунлиги ***L*** бўлган хомаки материаллардан узунликлари Δ_i $(i=\overline{1,m})$ бўлган ***m*** хил деталларнинг ҳар биридан $\boldsymbol{a_i}$ миқдорда тайёрлаш керак бўлсин. Бундан ташқари хомаки материалларни ***n (j=1,…,n)*** усул билан кесиш ҳамда ҳар бир ***j***- усул билан кесилган хомаки материалдан $\boldsymbol{a_{ij}}$ миқдорда ***i***- детал тайёрлаш ва $\boldsymbol{c_j}$ миқдорда чиқинди ҳосил қилиш мумкин эканлиги аниқланган бўлсин.

Хомаки материаллардан қанчасини қайси усул билан кесганда тайёрланган деталлар миқдори режадагига тенг бўлади ва ҳосил бўлган чиқиндиларнинг умумий миқдори энг кам (минимал) бўлади. Масаланинг маълум параметрларини қуйидаги кўринишдаги жадвалга жойлаштирамиз.

Тайёрланадиган деталларнинг узунликлари	*Кесиш усуллари*				*Деталлар ишлаб чиқариш режаси*
	1	*2*	…	*n*	
Δ_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	a_1
Δ_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
Δ_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	a_m
Чиқиндилар	c_1	c_2	…	c_n	

j-усул билан кесиладиган хомаки материаллар миқдорини $\boldsymbol{x_j}$ билан белгилаймиз. У ҳолда масаланинг математик модели қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_2, \\ ------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = a_m, \end{cases} \qquad (11)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \qquad (12)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \min. \qquad (13)$$

Бу ерда (11) шарт ҳар бир тайёр маҳсулот бўйича режанинг тўлиқ бажарилиши кераклигини, (12) шарт номаълумларнинг номанфийлигини ва (13) шарт чиқиндиларнинг умумий миқдори минимал бўлиши кераклигини кўрсатади.

Таянч сўз ва иборалар

Программалаштириш, математик программалаштириш, математик модел, чизиқли программалаштириш.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Математик программалаштиришнинг предмети нимадан иборат?
2. Иқтисодий масаланинг математик модели нима ва у қандай тузилади?
3. Чизиқли программалаштириш масаласининг чегараловчи шартлари қандай кўринишда бўлиши мумкин?
4. Ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласидаги номаълумлар, асосий шартлар ва мақсад функция қандай маънони билдиради?
5. «Истеъмол савати» масаласидаги номаълумлар, асосий шартлар ва мақсад функция қандай маънони билдиради?
6. «Оптимал бичиш» масаласидаги номаълумлар, асосий шартлар ва мақсад функция қандай маънони билдиради?

Мустақил ечиш учун масалалар

1. Мебел фабрикасида стандарт ўлчамдаги фанерлардан мос равишда 24, 31 ва 18 дона 3 хил буюмлар учун тайёр қисмлар қирқилиши керак. Ҳар бир фанер тайёр қисмларга икки хил усулда қирқилиши мумкин. Қуйидаги жадвалда ҳар бир қирқиш усулида олинадиган тайёр қисмлар сони ва бунда ҳосил бўладиган чиқиндилар миқдори берилган.

Тайёр қисм турлари	*Қирқиш усулида ҳосил бўладиган тайёр қисмлар сони (дона)*	
	I	*II*
I *II* *III*	*2* *5* *2*	*6* *4* *3*
Чиқиндилар миқдори(см^2)	*12*	*16*

Зарур миқдордан кам бўлмаган тайёр қисмлар қирқиш ва энг кам чиқиндига эга бўлиш учун фанерлардан нечтасини, қайси усулда қирқиш керак?

2. Савдо ташкилоти 3 турдаги товарларни сотиш учун вақт ва савдо муассасалари ресурсларидан фойдаланади.

Ҳар бир турдаги маҳсулотнинг бир партиясини сотиш учун ресурслар сарфи қуйидаги жадвалда келтирилган.

Ресурслар	*Товарларни сотишдаги ресурслар сарфи*			*Ресурслар захираси*
	I	***II***	***III***	
вақт (соат)	*0,5*	*0,7*	*0,6*	*970*
майдон (м^2)	*0,1*	*0,3*	*0,2*	*90*
даромад (минг сўм)	*5000*	*8000*	*6000*	

Савдо корхонасига максимал даромад келтирувчи оптимал товар айирбошлаш режасини топинг.

3. Икки хил маҳсулот сотишда 4 хил ресурслардан фойдаланилади. Маҳсулотларнинг бир бирлигини сотиш учун сарф қилинадиган турли ресурслар миқдори (меъёри) ҳамда ҳар бир ресурснинг захираси қуйидаги жадвалда келтирилган.

Ресурслар	*Ҳар бир маҳсулот бирлигига сарф қилинадиган ресурслар миқдори (меъёри)*		*Ресурслар захираси*
	I-маҳсулот	*II-маҳсулот*	
1	*2*	*2*	*12*
2	*1*	*2*	*8*
3	*4*	*0*	*16*
4	*0*	*4*	*12*
Маҳсулот бирлигини сотишдан олинадиган даромад (пул бирлиги)	*2*	*3*	

Чегараланган ресурслардан фойдаланиб, савдо корхонасининг даромадини максималлаштирувчи маҳсулотларни сотиш режасини топинг.

4. Чорва молларини яхшироқ боқиш учун кундалик рационал таркибида А озуқа моддасидан 6 бирлик, В озуқа моддасидан 12 бирлик, С озуқа моддасидан эса 4 бирлик бўлиши керак. Молларни боқишда икки турдаги емлардан фойдаланилади. Қуйидаги жадвалда ем таркибидаги фойдада озуқа моддаларини улуши, озуқа моддаларига бўлган кундалик минимал эҳтиёж ва емлар бирлигининг нархи келтирилган. Чорва молларини боқиш учун энг арзон бўлган кундалик рационни аниқланг.

Озуқа моддалари	*1 кг емдаги озуқа моддалари миқдори*		*Озуқа моддаларига бўлган кундалик минимал талаб*
	I	*II*	
A	*2*	*1*	*6*
B	*2*	*4*	*12*
C	*0*	*4*	*4*
1 кг. емнинг баҳоси (сўм)	*50*	*60*	

5. Бензиннинг 2 туридан *A* ва *B* аралашмалари ҳосил бўлади. *A* аралашмаси 60% 1- нав, 40% 2- нав бензиндан ташкил топади. *B* аралашмаси 80% 1- нав, 20% 2- нав бензиндан ташкил топади. *A* аралашманинг нархи 10 пул бирлигига, *B* аралашманинг нархи эса 12 пул бирлигига тенг. 1- нав бензиннинг захираси 50 тонна, 2- нав бензиннинг захираси эса 30 тоннани ташкил қилади.

Энг қиммат нархли аралашмани тайёрлаш режасини тузинг.

6. Маиший хизмат уйидаги дурадгорлик устахонасида савдо тармоқлари учун стол ва тумбочкалар ишлаб чиқарилади. Уларни тайёрлаш учун 2 турдаги ёғочлар ишлатилади. Бир дона маҳсулот учун сарф қилинадиган ёғочлар миқдори ҳамда хом ашёлар захираси қуйидаги жадвалда келтирилган.

Маҳсулотлар	*Хом ашёлар сарфи ($м^3$)*	
	I турдаги ёғоч	*II турдаги ёғоч*
Стол *Тумбочка*	*0,18* *0,09*	*0,08* *0,28*
Хом ашёлар захираси ($м^3$)	*72*	*56*

Битта столни ишлаб чиқаришдан устахона 4,4 пул бирлиги битта тумбочка ишлаб чиқаришдан эса 2,8 пул бирлигида даромад олинади. Устахона ўзида бор хом ашёдан қанча стол ва тумбочка ишлаб чиқарганда унинг даромади максимал бўлади?

7. Тикув фабрикасида 4 турдаги маҳсулот ишлаб чиқариш учун 3 артикулдаги газламалар ишлатилади. Турли маҳсулотнинг биттасини тикиш учун сарфланадиган турли артикулдаги газламалар нормаси жадвалда келтирилган. Фабрика ихтиёридаги ҳар бир артикулдаги газламаларнинг умумий миқдори ва маҳсулотлар баҳоси ҳам ушбу жадвалда берилган. Фабрика ҳар бир турдаги маҳсулотдан қанча миқдорда ишлаб чиқарса корхонанинг оладиган даромади максимал бўлади?

Газлама турлари	*1 та маҳсулотга сарфланадиган газлама миқдори (нормаси) (м)*				*Газламалар захираси (м)*
	I	*II*	*III*	*IV*	
1	*1*	*-*	*2*	*1*	*180*
2	*1*	*1*	*3*	*2*	*210*
3	*4*	*2*	*-*	*4*	*800*
Маҳсулот бирлигидан олинадиган даромад (минг сўм)	*9*	*6*	*4*	*7*	

8. Қоғоз комбинати бир неча турдаги қоғозларнинг ишлаб чиқариш режасини бажарди ҳамда хом ашёдан 80 т. ёғоч массаси, 2 т. каолин ва 50 т. целлюлозани орттириб қолишга муяссар бўлди.

Қуйидаги жадвалда бир неча турдаги қоғозлардан бир тонна ишлаб чиқариш учун кетадиган целлюлоза, ёғоч массаси, каолин нормаси берилган. Бир тонна босмахона қоғозидан 5 пул бирлиги, муқова қоғозидан эса 8 пул бирлиги миқдорида фойда олинади.

Маҳсулотлар	*Хом ашёлар*			*Маҳсулот бирлигидан олинадиган фойда*
	целлюлоза	*ёғоч массаси*	*каолин*	
Босмахона қоғози	*206*	*829*	*20*	*5*
Муқова қоғози	*424*	*627*	*10*	*6*
ёзув қоғози	*510*	*518*	*12*	*8*

Иқтисод қилинган хом ашёдан ва қандай қоғоз туридан қанча миқдорда ишлаб чиқарилса корхонанинг фойдаси кўпроқ бўлади?

Тестлар

1. Икки хил *A* ва *B* маҳсулотлар ишлаб чиқариш учун корхонада 4 хил хом ашё ишлатилади. Ҳар бир маҳсулот бирлигини ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган турли хом ашёлар миқдори (нормаси), хом ашёлар захираси ва маҳсулот бирлигидан олинадиган фойда қуйидаги жадвалда келтирилган.

Маҳсулотлар	*Хом ашёлар*				*Маҳсулот бирлигидан олинадиган фойда*
	I	*II*	*III*	*IV*	
A	*2*	*1*	*2*	*1*	*3*
B	*3*	*1*	*1*	*0*	*2*
Хом ашёлар захираси	*21*	*8*	*12*	*5*	

Корхона фойдасини максималлаштирувчи ишлаб чиқариш режасини топиш масаласининг математик моделини тузинг.

Жавоблар:

A.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 3; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \qquad \le 2; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ \ x_4 \ge 0;$$

$$F = 21x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 5x_4 \to \max.$$

B.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ x_3 \ge 0,\ \ x_4 \ge 0.$$

$$F = 21x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 5x_4 \to \max$$

C.

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 \le 21; \\ x_1+x_2 \le 8; \\ 2x_1+x_2 \le 12; \\ x_1 \le 5; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$

$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

Д.

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 \ge 21; \\ x_1+x_2 \ge 8; \\ 2x_1+x_2 \ge 12; \end{cases}$$

$x_1 \ge 5, \quad x_2 \ge 0;$

$F = 3x_1 + 2x_2 \to \min$

E.

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3+x_4 \ge 3; \\ 3x_1+x_2+x_3 \qquad \ge 2; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, \ x_4 \ge 0;$

$F = 21x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 5x_4 \to \min$

2. Математик программалаштириш фанининг предмети нима?

Жавоблар:

A. Корхона, фирмага доир иқтисодий жараёнлар

B. Ишлаб чиқариш бирлашмаси, халқ хўжалик тармоқлари, бутун халқ хўжалигига доир иқтисодий жараёнлар

C. Корхона, фирма, бозор, ишлаб чиқариш бирлашмаси, тармоқ хўжалигига доир иқтисодий жараёнлар

Д. Корхона, фирма, бозор, ишлаб чиқариш бирлашмаси, тармоқ хўжалигига доир иқтисодий жараёнларни тасвирловчи математик моделлар

E. Барча жавоблар нотўғри.

3. Иқтисодий жараённинг математик модели нима?

Жавоблар:

A. Иқтисодий жараённинг математик формулалар орқали тасвири.

B. Иқтисодий жараённи тавсифловчи барча параметрларни матрица формада ифодаланиши.

C. Иқтисодий жараённинг барча чегараловчи шартлари ва мақсадини математик формулалар ёрдамидаги тасвири.

Д. Барча жавоблар тўғри.

E. Барча жавоблар нотўғри.

4. Ҳар қандай иқтисодий масаланинг математик модели қандай тузилади?

Жавоблар:
A. Масаланинг иқтисодий маъносини ўрганиб, ундаги асосий шарт ва мақсадини аниқлаш орқали.
B. Масаладаги номаълум параметрларни белгилаш орқали.
C. Масаланинг шартларини алгебраик тенгламалар ёки тенгсизликлар орқали, мақсадини эса функция орқали ифодалаш йўли билан.
Д. A, B, C босқичлардаги барча ишларни бажариш йўли билан.
E. Барча жавоблар нотўғри.

5. Ишлаб чиқаришни ташкил этиш ва режалаштириш масаласида қандай параметрлар маълум бўлади?

Жавоблар:
A. Корхонада ишлаб чиқариладиган маҳсулот турлари ва ишлаб чиқариш факторларининг турлари ва захираси.
B. Маҳсулот бирлигидан корхона оладиган даромад.
C. Маҳсулот бирлигига сарф қилинадиган ишлаб чиқариш факторларининг миқдори (нормаси).
Д. A, B, C босқичларда кўрсатилган параметрларнинг барчаси.
E. Барча жавоблар нотўғри.

6. Ишлаб чиқаришни ташкил этиш ва режалаштириш масаласида номаълумлар қандай маънони билдиради?

Жавоблар:
A. Бир кунда ишлаб чиқариладиган маҳсулот миқдори.
B. Бир ойда ишлаб чиқариладиган маҳсулот миқдори.
C. Бир йилда ишлаб чиқариладиган маҳсулот миқдори.
Д. Режалаштирилган давр ичида ишлаб чиқариладиган маҳсулот миқдори.
E. Бир мавсумда ишлаб чиқариладиган маҳсулот миқдори.

7. Истеъмол савати масаласидаги асосий параметрлар қандай?

Жавоблар:
A. Одам организми учун 1 суткада керак бўлган озуқа моддаларининг турлари ва нормаси.
B. Маҳсулот турлари ва маҳсулот бирлигининг баҳоси.
C. Маҳсулот таркибидаги турли озуқа моддаларининг миқдори.

Д. А, В, С босқичларда кўрсатилган барча параметрлар.
Е. Одам организми учун 1 йилда керак бўлган озуқа моддаларининг турлари ва нормаси.

8. Ишлаб чиқаришни ташкил этиш ва режалаштириш масаласининг математик модели қандай кўринишда бўлади?

Жавоблар:

А.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \le b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \le b_2, \\ ------------------ \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \le b_n, \end{cases}$$

x_1 ³ 0, x_2 ³ 0, …, x_m ³ 0,
$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m$ ® max.

В.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \le b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \le b_2, \\ ----------------- \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \le b_n, \end{cases}$$

x_1 ³ 0, x_2 ³ 0, …, x_n ³ 0,
$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m$ ® min.

С.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \ge b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \ge b_2, \\ ------------------ \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \ge b_n, \end{cases}$$

x_1 ³ 0, x_2 ³ 0, …, x_n ³ 0,
$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m$ ® min.

Д.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \le b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \le b_2, \\ ------------------ \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \le b_n, \end{cases}$$

x_1 ³ 0, x_2 ³ 0, …, x_n ³ 0,
$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m$ ® max.

Е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \le b_2, \\ ----------------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \le b_n, \end{cases}$$

x_1 ³ 0, x_2 ³ 0, …, x_n ³ 0,
$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m$ ® max.

9. Истеъмол савати масаласидаги номаълумлар қандай маъноми билдиради?

Жавоблар:
А. Бир кунда ишлатиладиган і- маҳсулот миқдори.
Б. Бир ойда ишлатиладиган і- маҳсулот миқдори.

С. Бир йилда ишлатиладиган і- маҳсулот миқдори.
Д. Истеъмол саватига киритиладиган і- маҳсулот миқдори.
Е. Барча жавоблар нотўғри.

10. Истеъмол савати масаласининг математик модели қандай?

Жавоблар:

А.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \geq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \geq b_2, \\ ----------------- \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \geq b_n, \end{cases}$$

$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m$ ® $max.$

В.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \geq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \geq b_2, \\ ----------------- \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \geq b_n, \end{cases}$$

$x_1\ ^3\ 0,\ x_2\ ^3\ 0, \ldots,\ x_m\ ^3\ 0,$

$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m$ ® $min.$

С.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m = b_2, \\ ----------------- \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m = b_n, \end{cases}$$

$x_1\ ^3\ 0,\ x_2\ ^3\ 0, \ldots,\ x_n\ ^3\ 0,$

$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m$ ® $min.$

Д.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \leq b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \leq b_2, \\ ----------------- \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \leq b_n, \end{cases}$$

$x_1\ ^3\ 0,\ x_2\ ^3\ 0, \ldots,\ x_n\ ^3\ 0,$

$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m$ ® $min.$

Е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \leq b_2, \\ ---------------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \leq b_n, \end{cases}$$

$x_1\ ^3\ 0,\ x_2\ ^3\ 0, \ldots,\ x_n\ ^3\ 0,$

$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m$ ® $max.$

11. Оптимал бичиш масаласининг энг содда модели қандай?

Жавоблар:

A.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq a_2, \\ ----------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq a_m, \end{cases}$$

x_1 ³ 0, x_2 ³ 0, …, x_m ³ 0,

$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ ® min.

B.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_2, \\ ----------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = a_m, \end{cases}$$

$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ ® min.

C.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_2, \\ ----------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = a_m, \end{cases}$$

x_1 ³ 0, x_2 ³ 0, …, x_m ³ 0,

$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ ® min.

Д.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq a_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq a_2, \\ ----------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq a_m, \end{cases}$$

x_1 ³ 0, x_2 ³ 0, …, x_n ³ 0,

$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ ® min.

E.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \leq \grave{a}_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \leq \grave{a}_2, \\ ----------------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \leq \grave{a}_n, \end{cases}$$

x_1 ³ 0, x_2 ³ 0, …, x_n ³ 0,

$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m$ ® max.

2-§. Чизиқли программалаштириш масаласининг умумий қўйилиши ва унинг турли шаклларда ифодаланиши

Чизиқли программалаштириш масаласи умумий ҳолда қуйидагича ифодаланади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq (\leq) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq (\leq) b_2, \\ ------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq (\leq) b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \ldots, \; x_n \geq 0, \qquad (2)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to min\,(max) \qquad (3)$$

(1) ва (2) шартларни қаноатлантирувчи номаълумларнинг шундай қийматларини топиш керакки, улар (3) чизиқли функцияга минимум (максимал) қиймат берсин. Масаланинг (1) ва (2) шартлари унинг <u>чегаравий шартлари</u> деб, (3) функция эса масаланинг <u>мақсади</u> ёки <u>мақсад функцияси</u> деб аталади.

Масаладаги барча чегараловчи шартлар ва мақсад функция чизиқли эканлиги кўриниб турибди. Шунинг учун ҳам (1)–(3) масала <u>чизиқли программалаштириш</u> масаласи деб аталади.

Муайян масалаларда (1) шарт тенгламалар системасидан, «≥» ёки «≤» кўринишдаги тенгсизликлар системасидан ёки аралаш системадан иборат бўлиши мумкин. Лекин кўрсатиш мумкинки, (1)–(3) кўринишдаги масалани осонлик билан қуйидаги кўринишга келтириш мумкин.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ ---------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (4)$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \ldots, \; x_n \geq 0, \qquad (5)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to min. \qquad (6)$$

(4)-(6) масала <u>каноник</u> кўринишдаги чизиқли программалаштириш масаласи деб аталади. (4)–(6) масалани вектор кўринишда қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_nx_n = P_0\,, \qquad (7)$$

$$X \geq 0, \qquad (8)$$

$$Y = C'X \to min, \qquad (9)$$

бу ерда

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$C' = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ – вектор – қатор.

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор – устун.

(4)-(6) масаланинг матрица кўринишдаги ифодаси қуйидагича ёзилади:

$$AX = P_0, \qquad (10)$$

$$X \geq 0, \qquad (11)$$

$$Y = C'X \to min, \qquad (12)$$

бу ерда $\boldsymbol{A = (a_{ij})}$ (4) система коэффициентларидан ташкил топган матрица; $\boldsymbol{X = (x_1, x_2, \dots, x_n)}$ ва $\boldsymbol{P_0 = (b_1, b_2, \dots, b_n)}$ **–** устун векторлар.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad (i = 1, \dots, m) \qquad (13)$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n) \qquad (14)$$

$$Y = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \qquad (15)$$

(4)-(6) масалани йиғиндилар ёрдамида ҳам ифодалаш мумкин:

1-таъриф. Берилган (4)–(6) масаланинг жоиз ечими ёки жоиз режаси деб, унинг (4) ва (5) шартларини қаноатлантирувчи $\boldsymbol{X = (x_1, x_2, \dots, x_n)}$ векторга айтилади.

2-таъриф. Агар бирор $X^0 \in K_m = \{X : AX = b, \ X \geq 0\}$ жоиз режанинг $\boldsymbol{n\text{-}m}$ та координатаси ($\boldsymbol{m<n}$) нолга тенг бўлиб, қолган $\boldsymbol{x_1, x_2, \dots, x_m}$ координаталарига мос келган $\boldsymbol{P_1, P_2, \dots, P_m}$ шарт векторлари чизиқли эркли бўлса, у ҳолда $\boldsymbol{X^0 \in K_m}$ жоиз режа базис режа дейилади.

3-таъриф. Агар $\boldsymbol{X=(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ базис режадаги мусбат координаталар сони m га тенг бўлса, у ҳолда бу режа айнимаган базис режа, акс ҳолда айниган режа дейилади.

4-таъриф. Чизиқли функция (6) га энг кичик қиймат берувчи $\boldsymbol{X^0=(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ базис режа масаланинг оптимал режаси ёки оптимал ечими дейилади.

Чизиқли программалаштириш масаласи устида қуйидаги тенг кучли алмаштиришларни бажариш мумкин.

1. ***Y*® *max* ни *Y*® *min* га айлантириш**. Ҳар қандай чизиқли программалаштириш масаласини (4)–(6) кўринишга келтириш учун (1) тенгсизликлар системасини тенгламалар системасига ва ***Y*® *max*** ни ***Y*® *min*** га айлантириш керак. ***Y*® *max*** ни ***Y*® *min*** га келтириш учун ***Y*® *max*** ни тескари ишора билан олиш етарлидир.

Ҳақиқатдан ҳам, ҳар қандай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциянинг минимуми тескари ишора билан олинган шу функция максимумининг қийматига тенг, яъни

$minf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ва $-max[-f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$,

$maxf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ва $-min[-f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$

ифодалар номаълумларнинг бир хил қийматларидагина ўзаро тенг бўлишини кўрсатиш мумкин.

2. Тенгсизликларни тенгламага айлантириш. n номаълумли

$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ £ b, (16)

чизиқли тенгсизликни қараймиз. Бу тенгсизликни тенгламага айлантириш учун унинг кичик томонига номанфий номаълум сонни, яъни x_{n+1} ³ 0 ни қўшамиз.

Натижада $n+1$ номаълумли чизиқли тенгламага эга бўламиз:

$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = b.$ (17)

(16) тенгсизликни тенгламага айлантириш учун қўшилган x_{n+1} ўзгарувчи <u>қўшимча</u> ўзгарувчи деб аталади.

(16) тенгсизлик ва (17) тенгламанинг ечимлари бир хил эканлиги қуйидаги теоремада кўрсатилган.

1-теорема. Берилган (16) тенгсизликнинг ҳар бир

$X_0=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

ечимига (17) тенгламанинг фақат битта

$Y_0 = (a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})$

ечими мос келади ва, аксинча, (17) тенгламанинг ҳар бир Y_0 ечимига (16) тенгсизликнинг фақат битта X_0 ечими мос келади. Теореманинг исботини талабалар мустақил бажарадилар.

Шундай йўл билан чизиқли программалаштириш масаласининг чегараловчи шартларидаги тенгсизликларни тенгламаларга айлантириш мумкин. Бунда шунга эътибор бериш керакки, системадаги турли тенгсизликларни тенгламаларга айлантириш учун уларга бир-бирларидан фарқ қилувчи номанфий ўзгарувчиларни қўшиш керак. Масалан, агар чизиқли программалаштириш масаласи қуйидаги

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ ------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \qquad (18)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots,\ x_n \ge 0, \qquad (19)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min \qquad (20)$$

кўринишда бўлса, бу масаладаги тенгсизликларнинг кичик томонига $\boldsymbol{x_{n+1} \ge 0,\ x_{n+2} \ge 0,\ \ldots,\ x_{n+m} \ge 0}$ қўшимча ўзгарувчилар қўшиш ёрдамида тенгламаларга айлантириш мумкин. Бу ўзгарувчилар ***Y*** функцияга ***0*** коэффициент билан киритилади. Натижада берилган (18)–(20) масала қуйидаги кўринишга келади.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \quad + \quad x_{n+2} = b_2, \\ ------------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \qquad + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \qquad (21)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0,\ x_{n+1} \ge 0, \ldots, x_{n+m} \ge 0, \qquad (22)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0(x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}) \to \min. \qquad (23)$$

Худди шунингдек,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ ------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ge b_m, \end{cases} \qquad (24)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots,\ x_n \ge 0, \qquad (25)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad \to \min. \qquad (26)$$

кўринишда берилган чизиқли программалаштириш масаласини каноник кўринишга келтириш мумкин. Бунинг учун қўшимча $x_{n+1} \ge 0, x_{n+2} \ge 0, \ldots, x_{n+m} \ge 0$ ўзгарувчилар тенгсизликларнинг катта томонидан айрилади. Натижада қуйидаги масала ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \quad - \quad x_{n+2} = b_2, \\ -------------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \quad - \quad x_{n+m} = b_m, \end{cases} \qquad (27)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \dots,\ x_n \geq 0, \quad x_n \geq 0,\ x_{n+1} \geq 0, \dots,\ x_{n+m} \geq 0, \qquad (28)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0(x_{n+1} + \dots + x_{n+m}) \rightarrow min. \qquad (29)$$

Энди чизиқли программалаштириш масаласи ечимларининг хоссалари билан танишамиз. Бунинг учун энг аввал қаварик комбинация ва қаварик тўплам тушунчасини эслатиб ўтамиз.

5-таъриф. $\boldsymbol{A_1, A_2, \dots, A_n}$ векторларнинг қаварик комбинацияси деб

$$a_i \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i = 1$$

шартни қаноатлантирувчи

$$A = a_1A_1 + a_2A_2 + \dots + a_nA_n$$

векторга айтилади. $\boldsymbol{n}$-ўлчовли фазодаги ҳар бир $\boldsymbol{A=(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)}$ векторга координаталари $\boldsymbol{(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)}$ бўлган нуқта мос келади. Шунинг учун бундан кейин $\boldsymbol{A=(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)}$ векторни $\boldsymbol{n}$-ўлчовли фазодаги нуқта деб қараймиз.

6-таъриф. Агар $\boldsymbol{n}$-ўлчовли вектор фазодаги $\boldsymbol{C}$ тўплам ўзининг ихтиёрий $\boldsymbol{A_1}$ ва $\boldsymbol{A_2}$ нуқталари билан бир қаторда бу нуқталарнинг қаварик комбинациясидан иборат бўлган $\boldsymbol{A=a_1A_1 + a_2A_2\ (a_1 \geq 0,\ a_2 \geq 0,\ a_1 + a_2 = 1)}$ нуқтани ҳам ўз ичига олса, яъни $\boldsymbol{A_1, A_2 \in C \Rightarrow A \in C}$ бўлса, бу тўплам қаварик тўплам деб аталади.

2-теорема. Чизиқли программалаштириш масаласининг ечимларидан ташкил топган тўплам қаварик тўплам бўлади.

<u>Исботи</u>. Чизиқли программалаштириш масаласининг ихтиёрий иккита ечимининг қаварик комбинацияси ҳам ечим эканлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $\boldsymbol{X_1}$ ва $\boldsymbol{X_2}$ берилган чизиқли программалаштириш масаласининг ечимлари бўлсин. У ҳолда

$$AX_1 = P_0, \quad X_1 \geq 0, \qquad (30)$$

ва

$$AX_2 = P_0, \quad X_2 \geq 0, \qquad (31)$$

муносабатлар ўринли бўлади. Энди $\boldsymbol{X_1}$ ва $\boldsymbol{X_2}$ ечимларнинг қаварик комбинациясини тузамиз:

$$X = aX_1 + (1-a)X_2, \qquad 0 \leq a \leq 1.$$

ҳамда уни ечим эканлигини кўрсатамиз:

$$AX = A[aX_1 + (1-a)X_2] = aAX_1 + (1-a)AX_2$$

Энди (30) ва (31) тенгламаларни инобатга олиб топамиз:

$$AX = aP_0 + (1\text{-}a)P_0 = P_0.$$

Бу муносабат $\boldsymbol{X}$ вектор ҳам ечим эканлигини кўрсатади.

3-теорема. Чизиқли программалаштириш масаласининг чизиқли функцияси ўзининг оптимал қийматига шу масаланинг ечимларидан ташкил топган қаварик $\boldsymbol{K}$ кўпбурчакнинг бурчак нуқтасида эришади.

Агар чизиқли функция $\boldsymbol{K}$ қаварик тўпламнинг бирдан ортиқ бурчак нуқтасида оптимал қийматга эришса, у шу нуқталарнинг қаварик комбинациясидан иборат бўлган ихтиёрий нуқтада ҳам ўзининг оптимал қийматига эришади (теоремани исботсиз қабул қиламиз).

4-теорема. Агар $\boldsymbol{k}$ та ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган $\boldsymbol{P_1, P_2, \ldots P_k}$ векторлар берилган бўлиб, улар учун

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_kx_k = P_0$$

тенглик барча $\boldsymbol{x_i > 0}$ лар учун ўринли бўлса, у ҳолда $\boldsymbol{X = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)}$ вектор $\boldsymbol{K}$ қаварик тўпламнинг бурчак нуқтаси бўлади (теоремани исботсиз қабул қиламиз).

5-теорема. Агар $\boldsymbol{X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ бурчак нуқта бўлса, у ҳолда мусбат $\boldsymbol{x_i}$ ларга мос келувчи векторлар ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган векторлар системасини ташкил қилади (теоремани исботсиз қабул қиламиз).

Юқорида келтирилган теоремалардан қуйидаги хулосаларни чиқариш мумкин.

1-хулоса. $\boldsymbol{K}$ тўпламнинг ҳар бир бурчак нуқтасига $\boldsymbol{P_1, P_2, \ldots P_n}$ векторлар системасидан $\boldsymbol{m}$ та ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган векторлар системаси мос келади.

2-хулоса. $\boldsymbol{X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ $\boldsymbol{K}$ тўпламнинг бурчак нуқтаси бўлиши учун мусбат $\boldsymbol{x_i}$ координаталар

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_nx_n = P_0$$

ёйилмада ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган $\boldsymbol{P_i}$ векторларнинг коэффициентларидан иборат бўлиши зарур ва етарли.

3-хулоса. Чизиқли программалаштириш масаласи базис ечимларидан ташкил топган тўплам $\boldsymbol{K}$ қаварик тўпламнинг бурчак нуқталар тўпламига мос келади ва аксинча, ҳар бир базис ечим $\boldsymbol{K}$ тўпламнинг бирор бурчак нуқтасига мос келади.

4-хулоса. Чизиқли программалаштириш масаласининг оптимал ечимини $\boldsymbol{K}$ тўпламнинг бурчак нуқталари орасидан қидириш керак.

1-мисол. Берилган чизиқли программалаштириш масаласини каноник кўринишга келтиринг ва уни турли шаклда ифодаланг:

$$\begin{cases} 2x_1 \quad - 3x_3 \le -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2, \end{cases} \qquad (I)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$$

$$Y = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max .$$

Ечиш: Масаланинг чекламаларидаги биринчи ва учинчи тенгсизликларнинг кичик томонига $\boldsymbol{x_4{}^3 0,\ x_5{}^3 0}$ қўшимча ўзгарувчилар киритиб, уларни тенгламаларга айлантирамиз ҳамда биринчи тенгламанинг икки томонини (-1) га кўпайтириб, ундаги озод ҳадни мусбат сонга айлантирамиз ва (I) масалага эквивалент бўлган қуйидаги масалани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} -2x_1 \quad + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2, \end{cases} \qquad (II)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0,$$

$$Y = 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \max .$$

Ушбу масалада $\boldsymbol{Y}$® $\boldsymbol{max}$ ни тескари ишора билан олиб, уни $\boldsymbol{Y}$® $\boldsymbol{min}$ га айлантирамиз. Натижада берилган масаланинг каноник кўринишига эга бўламиз:

$$\begin{cases} -2x_1 \quad + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2, \end{cases} \qquad (III)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0,$$

$$Y = -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \min.$$

(III) масалага қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad C^{'} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ушбу белгилашларда (III) масала қуйидаги кўринишда ифодаланади:

$$AX=B,\quad X\geq 0,\quad Y=C'X\rightarrow min. \qquad \text{(IV)}$$

(III) масалага яна қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$P_1=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix},\quad P_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix},\quad P_4=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix},\quad P_5=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad P_0=\begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix},$$

$$C'=(-3\quad 2\quad -1\quad 0\quad 0).$$

Ушбу белгилашларда масала қуйидаги кўринишга келади:

$$P_1x_1+P_2x_2+P_3x_3+P_4x_4+P_5x_5=P_0,$$

$$X\geq 0, \qquad \text{(V)}$$

$$Y=C'X\rightarrow min.$$

2-мисол. $A_1\ (3;\ -2;\ 5)$ ва $A_2\ (-1;\ 6;\ 1)$ нуқталар берилган. Ушбу нуқталарнинг қаварик комбинациясидан иборат бўлган $A(x_1,x_2,x_3)$ нуқтани топинг.

Ечиш. A нуқта A_1 ва A_2 нуқталарнинг қаварик комбинациясидан иборат бўлгани учун

$$A=\lambda A_1+(1-\lambda)A_2$$

$(0\leq\lambda\leq 1)$ шарт ўринли бўлади.

Агар $\lambda=1/3$ бўлса, у ҳолда

$$A=\frac{1}{3}A_1+\left(1-\frac{1}{3}\right)A_2=\frac{1}{3}A_1+\frac{2}{3}A_2$$

тенглик ўринли бўлади. Бу тенгликни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$(x_1;\quad x_2;\quad x_3)=\frac{1}{3}(3;\quad -2;\quad 5)+\frac{2}{3}(-1;\quad 6;\quad 1)$$

ва натижада топамиз:

$$x_1=\frac{1}{3};\quad x_2=\frac{10}{3};\quad x_3=\frac{7}{3}.$$

Ж: $\qquad A=\left(\frac{1}{3};\quad \frac{10}{3};\quad \frac{7}{3}\right).$

Таянч сўз ва иборалар

Чегараловчи шартлар (чекламалар), мақсад функция, жоиз режа (ечим), базис режа, айниган ва айнимаган базис режа, оптимал режа, қўшимча ўзгарувчи, қаварик комбинация, қаварик тўплам, қаварик тўпламнинг бурчак нуқтаси.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Чизиқли программалаштириш масаласи вектор формада қандай ёзилади?
2. Чизиқли программалаштириш масаласининг матрица кўриниши қандай?
3. Чизиқли программалаштириш масаласининг йиғиндилар кўринишдаги ифодаси қандай?
4. Чизиқли программалаштириш масаласининг жоиз ечими деганда нимани тушунасиз?
5. Чизиқли программалаштириш масаласининг базис ечими нима?
6. Айниган ва айнимаган базис ечимларни таърифланг.
7. Чизиқли программалаштириш масаласининг оптимал ечими нима?
8. Чизиқли программалаштириш масаласида қандай тенг кучли алмаштиришларни бажариш мумкин?
9. «Векторларнинг қаварик комбинацияси» деганда нимани тушунасиз?
10. Қаварик тўпламни таърифланг.
11. Чизиқли программалаштириш масаласи ечимларидан ташкил топган тўплам қандай тўплам бўлади?
12. Ечимлардан ташкил топган қаварик кўпбурчакнинг бурчак нуқтаси билан базис ечим орасида қандай боғланиш бор?
13. Мақсад функция ўзининг оптимал қийматига қандай нуқтада эришади?

Мустақил ечиш учун масалалар

1. Берилган чизиқли программалаштириш масалаларини каноник кўринишга келтиринг.

а)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le -1, \\ -x_1 + x_2 \ge -3, \\ x_1 \le 3, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$
$$Y = x_1 + 2x_2 \to \max.$$

б)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$
$$Y = 2x_1 - 6x_2 \to \max.$$

в)

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 \ge 12, \\ -x_1 + x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 2,$$
$$Y = -2x_1 + 3x_2 \to \max.$$

г)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$
$$Y = 2x_1 - x_2 \to \min.$$

2. $A_1=(5;\ -3;\ 1)$ ва $A_2=(-2;\ 3;\ 7)$ векторларнинг қаварик комбинациясидан иборат бўлган $A\ (x_1;\ x_2;\ x_3)$ векторни топинг. *(l =1/4).*

3. Агар $A_1=(1;\ 2;\ 5)$ ва $A=(5;\ 6;\ 4)$ векторлар берилган. Агар А вектор A_1 ва $A_2=(\ x_1;\ x_2;\ x_3)$ векторларнинг қаварик комбинациясидан иборат бўлиб, *l =1/3* бўлса, A_2 векторни топинг.

Тестлар

1. Чизиқли программалаштириш масаласининг каноник кўриниши қандай?

Жавоблар:

А.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ ---------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

x_1 ³ 0, x_2 ³ 0, …, x_n ³ 0,

$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ ® *min.*

B.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ ----------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_n \geq 0,$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow min\ .$$

C.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ ----------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_n \geq 0,$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow min\ .$$

Д.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ ----------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_n \geq 0,$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow max\ .$$

E. Юқоридаги барча жавоблар тўғри.

2. Чизиқли программалаштириш масаласини қандай формаларда ифодалаш мумкин?

Жавоблар:

A. Умумий ва йиғиндилар кўринишида.
B. Матрица кўринишида.
C. Вектор формада.
Д. Умумий ва йиғиндилар кўринишида, матрица ва вектор формаларда.
E. Юқоридаги барча жавоблар тўғри.

3. Қуйидаги таърифлардан қайси бири тўғри?

Жавоблар:

А. Берилган чизиқли программалаштириш масаласининг жоиз ечими (жоиз режаси) деб унинг чегараловчи шартларини қаноатлантирувчи номанфий компонентли $X=(x_1,x_2,\ldots, x_n)$ векторга айтилади.

В. Агар бирор $X^0 \in K_m = \{X | AX = b, X \geq 0\}$ жоиз режанинг n-m та координатаси ($m \leq n$) нолга тенг бўлиб, қолган $x_1,x_2,\ldots, x_m$ координаталарига мос келган $P_1,P_2,\ldots,P_m$ шарт векторлари чизиқли эркли бўлса, у ҳолда $X^0 \in K_m$ вектор базис режа дейилади.

С. Агар $X=(x_1,x_2,\ldots, x_n)$ базис режадаги мусбат компонентлар сони m га тенг бўлса, у ҳолда бу режа айнимаган базис режа, акс ҳолда у айниган режа дейилади.

Д. Мақсад функцияга энг кичик (энг катта) қиймат берувчи базис режа оптимал режа деб аталади.

Е. Юқоридаги барча жавоблар тўғри.

4. Чизиқли программалаштириш масаласи устида қандай тенг кучли алмаштиришларни бажариш мумкин?

Жавоблар:

А. Y® max кўринишидаги мақсад функцияни Y® min кўринишга келтириш.

В. Y® min кўринишидаги мақсад функцияни Y® max кўринишга келтириш.

С. Қўшимча ўзгарувчилар киритиш ёрдамида тенгсизликларни тенгламага айлантириш.

Д. $x_{n+1}, x_{n+2},\ldots,x_{n+m}$ қўшимча ўзгарувчилар киритиб, тенгсизликлар системасини тенгламалар системасига айлантириш.

Е. Юқоридаги ҳамма жавоблар тўғри.

5. Чизиқли программалаштириш масаласи ечимларининг қандай хоссаларини биласиз?

Жавоблар:

А. Чизиқли программалаштириш масаласи ечимларидан ташкил топган тўплам қаварик тўплам бўлади.

В. Мақсад функция ўзининг экстремал қийматига ечимлардан ташкил топган қаварик кўпбурчакнинг 1 та бурчак нуктасида эришади.

С. Мақсад функция ўзининг экстремал қийматига ечимлардан ташкил топган қавариқ кўпбурчакнинг 2 та бурчак нуқтасида эришади.

Д. Чизиқли программалаштириш масаласининг мақсад функцияси ўзининг экстремал қийматига режалардан ташкил топган қавариқ кўпбурчакнинг бурчак нуқтасида эришади. Агар мақсад функция 2 та бурчак нуқтада экстремал қийматига эришса, у шу нуқталарнинг қавариқ комбинациясидан иборат бўлган ихтиёрий нуқтада ҳам шу қийматга эришади.

Е. Тўғри жавоблар йўқ.

6. Берилган чизиқли программалаштириш масаласининг каноник кўриниши қандай?

Жавоблар:

А.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -4, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 20, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$
$$Z = x_1 - 5x_2 \to \max .$$

В.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 20, \end{cases}$$
$$\tilde{o}_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$
$$Z = x_1 - 5x_2 \to \max .$$

С.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 20, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$
$$Z = -x_1 + 5x_2 \to \min .$$

Д.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 20, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$
$$Z = x_1 - 5x_2 \to \max .$$

Е. Тўғри жавоблар йўқ.

7. Агар векторлар учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлса, у ҳолда бу масала қандай чизиқли программалаштириш масаласини ифодалайди?

$$P_1 = \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \\ 35 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 20 \\ 3 \\ 60 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 60 \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} 120 \\ 150 \\ 300 \end{pmatrix},$$

$$X' = (x_1, x_2, x_3), \quad C = (30; \quad 25; \quad 45)$$

$P_1x_1+P_2x_2+P_3x_3$£P_0 ,

X³$0$,

$Z=C$¢X®max

Жавоблар:

А.

$$\left.\begin{array}{l} 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 \le 120, \\ 2x_1 + 3x_2 + 25x_3 \le 150, \\ 35x_1 + 60x_2 + 60x_3 \le 300, \end{array}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0,$$

$$Z = 30x_1 + 25x_2 + 45x_3 \to \max .$$

В.

$$\left.\begin{array}{l} 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 = 120, \\ 2x_1 + 3x_2 + 25x_3 = 150, \\ 35x_1 + 60x_2 + 60x_3 = 300, \end{array}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0,$$

$$Z = 30x_1 + 25x_2 + 45x_3 \to \max .$$

С.

$$\left.\begin{array}{l} 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 \ge 120, \\ 2x_1 + 3x_2 + 25x_3 \ge 150, \\ 35x_1 + 60x_2 + 60x_3 \ge 300, \end{array}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0,$$

$$Z = 30x_1 + 25x_2 + 45x_3 \to \min .$$

Д.

$$\left.\begin{array}{l} 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 \le 120, \\ 2x_1 + 3x_2 + 25x_3 \le 150, \\ 35x_1 + 60x_2 + 60x_3 \le 300, \end{array}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0,$$

$$Z = 30x_1 + 25x_2 + 45x_3 \to \min .$$

Е. Тўғри жавоблар йўқ.

8. Агар векторлар учун муносабатлар ўринли бўлса, у ҳолда бу масала қандай чизиқли программалаштириш масаласини ифодалайди?

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 12 & 9 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad P_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$X' = (x_1, x_2, x_3), \quad C = (3, \; -4, \; 1)$$

AX£P₀ ,

X³0,

Z=C¢X®max.

Жавоблар:

А.

$$\left.\begin{aligned}6x_1+5x_2+3x_3&\le 8,\\12x_1+9x_2+3x_3&\le 14,\\3x_1+5x_2+3x_3&\le 8,\end{aligned}\right\}$$

$$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0,$$

$$Z=3x_1-4x_2+x_3\to\max.$$

В.

$$\left.\begin{aligned}6x_1+12x_2+3x_3&\le 8,\\5x_1+9x_2+5x_3&\le 14,\\3x_1+3x_2+3x_3&\le 8,\end{aligned}\right\}$$

$$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0,$$

$$Z=3x_1-4x_2+x_3\to\max.$$

С.

$$\left.\begin{aligned}6x_1+5x_2+3x_3&=8,\\12x_1+9x_2+3x_3&=14,\\3x_1+5x_2+3x_3&=8,\end{aligned}\right\}$$

$$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0,$$

$$Z=3x_1-4x_2+x_3\to\max.$$

Д.

$$\left.\begin{aligned}6x_1+5x_2+3x_3&\le 8,\\12x_1+9x_2+3x_3&\le 14,\\3x_1+5x_2+3x_3&\le 8,\end{aligned}\right\}$$

$$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0,$$

$$Z=3x_1-4x_2+x_3\to\min.$$

Е) Тўғри жавоблар йўқ.

9. Қуйидаги келтирилган ЧПМ ни қандай қилиб каноник кўринишга келтириш мумкин?

$$\begin{cases}2x_1+x_2\le 1,\\x_1+2x_2\le 1,\end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,$$

$$Z=x_1+x_2\to\max.$$

Жавоблар:

А. Масала каноник кўринишда берилган.

В. Ҳар бир тенгсизликнинг ўнг томонига номанфий ўзгарувчиларни қўшиш керак.

С. Ҳар бир тенгсизликнинг чап томонига номанфий ўзгарувчиларни қўшиш керак.

Д. Масалани каноник кўринишга келтириб бўлмайди.

Е. Тўғри жавоб йўқ.

10. Қуйидаги иккита ЧПМ қандай кўринишда берилган?

а)

$$\left.\begin{aligned}6x_1+5x_2+3x_3&=8,\\12x_1+9x_2+3x_3&=14,\\3x_1+5x_2+3x_3&=8,\end{aligned}\right\}$$

$$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0,$$

$$Z=3x_1-4x_2-x_3\to\min.$$

б)

$$\left.\begin{aligned}2x_1+x_2&\le 1,\\x_1+2x_2&\le 1,\end{aligned}\right\}$$

$$x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,$$

$$Z=x_1+x_2\to\max.$$

Жавоблар:

А. а) симметрик (стандарт) шаклда ва **б)** каноник шаклда.
В. а) каноник шаклда ва **б)** симметрик шаклда.
С. а) ва **б)** симметрик (стандарт) шаклда.
Д. Тўғри жавоб йўқ.
Е. а) ва **б)** каноник шаклда.

3-§. Чизиқли программалаштириш масаласининг геометрик талқини. График усул

Қуйидаги кўринишда ёзилган чизиқли программалаштириш масаласини кўрамиз:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le a_i, \quad (i=\overline{1,m}) \qquad (1)$$

$$x_j \ge 0, \quad (j=\overline{1,n}) \qquad (2)$$

$$Y=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min(\max). \qquad (3)$$

Ушбу масаланинг геометрик талқини билан танишамиз.

Маълумки, $\boldsymbol{n}$ та тартиблашган $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ сонлар $\boldsymbol{n}$-лиги (бирлашмаси) $\boldsymbol{n}$ ўлчовли фазонинг нуқтаси бўлади. Шунинг учун (1)-(3) чизиқли программалаштириш масаласининг режасини $\boldsymbol{n}$ ўлчовли фазонинг нуқтаси деб қараш мумкин. Бизга маълумки, бундай нуқталар тўплами қавариқ тўпламдан иборат бўлади. Қавариқ тўплам чегараланган (қавариқ кўпбурчак), чегараланмаган (қавариқ кўп қиррали соҳа), битта нуқтадан иборат ёки бўш тўплам бўлиши ҳам мумкин.

Координаталари $a_1x_1+a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = a$ тенгламани қаноатлантирувчи $\boldsymbol{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ нуқталар тўплами <u>гипертекислик</u> деб аталади. Шу сабабли кўринишда ёзилган мақсад функцияни $\boldsymbol{Y}$ нинг турли $\boldsymbol{C_0}$ қийматларига мос келувчи ўзаро параллел <u>гипертекисликлар</u> оиласи деб қараш мумкин.

$$c_1x_1 + c_2x_2+ \ldots + c_nx_n=Y \qquad (*)$$

Ҳар бир гипертекисликнинг ихтиёрий нуқтасида $\boldsymbol{Y}$ функция бир хил қийматни қабул қилади (демак, ўзгармас сатҳда сақланади). Шунинг учун улар «сатҳ текисликлари» дейилади. Геометрик нуқтаи назардан чизиқли программалаштириш масаласини қуйидагича таърифлаш мумкин:

(1) ва (2) шартларни қаноатлантирувчи ечимлар кўпбурчагига тегишли бўлган шундай $\boldsymbol{X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)}$ нуқтани топиш керакки, бу нуқтада $\boldsymbol{Y}$ мақсад функцияга максимум (минимум) қиймат берувчи (3) гипертекисликлар оиласига тегишли бўлган гипертекислик ўтсин. Жумладан, $\boldsymbol{n=2}$ да (1)-(3) масала қуйидагича талқин қилинади:

(1)-(2) шартларни қаноатлантирувчи ечимлар кўпбурчагига тегишли бўлган шундай $\boldsymbol{X^* = (x_1^*, x_2^*)}$ нуқтани топиш керакки, бу нуқтадан $\boldsymbol{Y}$ мақсад функцияга энг катта (энг кичик) қиймат берувчи ва сатҳ чизиқлар оиласига тегишли бўлган чизиқ ўтсин.

Чизиқли программалаштириш масаласининг геометрик талқинига ҳамда бу масала ечимларининг хоссаларига таяниб, масалани баъзи ҳолларда график усулда ечиш мумкин.

Икки ўлчовли фазода берилган қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини кўрамиз.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ ---------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases} \qquad (4)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \qquad (5)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max. \qquad (6)$$

Фараз қилайлик, (4) система (5) шартни қаноатлантирувчи система ечимларга эга бўлсин ҳамда улардан ташкил топган тўплам чекли бўлсин. (4) ва (5) тенгсизликларнинг ҳар бири тўғри чизиқлар билан чегараланган ярим текисликларни ифодалайди.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \ (i=1,\dots,m),$$
$$x_1=0, \ x_2=0$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \ (i=1,\dots,m), \qquad (7)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i \ (i=1,\dots,m), \qquad (8)$$

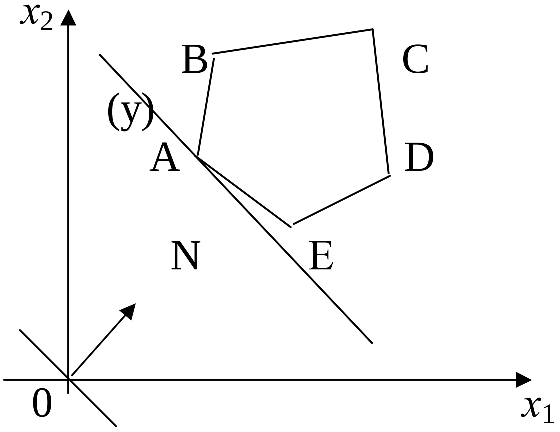
Ҳар бир тўғри чизиқнинг қайси томонида ётган ярим текислик тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар тўпламидан иборат эканлигини аниқлаш учун $\boldsymbol{O(0;0)}$ координата бошини мўлжал нуқта деб қараш мумкин. Агар $\boldsymbol{x_1=0; x_2=0}$ қийматларни (8) тенгсизликка қўйганда $\boldsymbol{0 \le b_i}$ тенгсизлик ҳосил бўлса, у ҳолда қидирилаётган ярим текислик (7) тўғри чизиқнинг остида (координата боши томонида) ётади, акс ҳолда у (7) тўғри чизиқнинг юқорисида ётувчи ярим текисликдан иборат бўлади. Чизиқли функция (6) ҳам маълум бир ўзгармас $\boldsymbol{C_0=const}$ қийматда сатҳ тўғри чизиқлари оиласидан иборат бўлиб, ҳар бир $\boldsymbol{C_0}$ учун битта сатҳ тўғри чизиғи тўғри келади.

$$c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$$

Ечимлардан ташкил топган қаварик кўпбурчакни ҳосил қилиш учун тўғри чизиқлар билан чегараланган кўпбурчакни ясаймиз.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \ldots,\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 = b_m,$$
$$x_1=0,\ x_2=0$$

Фараз қилайлик, бу кўпбурчак ***ABCDE*** бешбурчакдан иборат бўлсин (1-шакл).



1-шакл

Чизиқли функцияни ихтиёрий ўзгармас $\boldsymbol{C_0}$ сонга тенг деб оламиз.

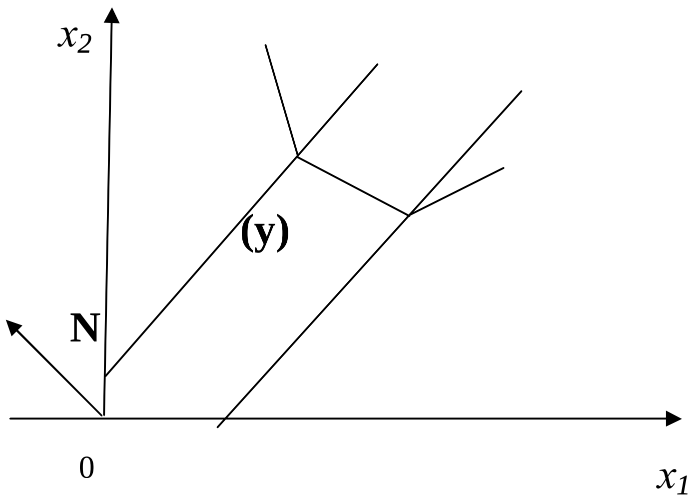
Натижада сатҳ тўғри чизиғи ҳосил бўлади. Бу тўғри чизиқни $\boldsymbol{N(c_1,c_2)}$ вектор йўналишида ёки унга тескари йўналишда ўзига параллел суриб бориб қаварик кўпбурчакнинг чизиқли функцияга энг катта ёки энг кичик қиймат берувчи нуқталарини аниқлаймиз.

$$c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$$

1-шаклдан кўриниб турибдики, чизиқли функция ўзининг минимал қийматига қаварик кўпбурчакнинг ***A*** нуқтасида эришади. ***C*** нуқтада эса, у ўзининг максимал (энг катта) қийматига эришади. Биринчи ҳолда $\boldsymbol{A(x_1,x_2)}$ нуқтанинг координаталари масаланинг чизиқли функцияга минимал қиймат берувчи оптимал ечими бўлади. Унинг координаталари ***AB*** ва ***AE*** тўғри чизиқларда ифодаланувчи тенгламалар орқали аниқланади.

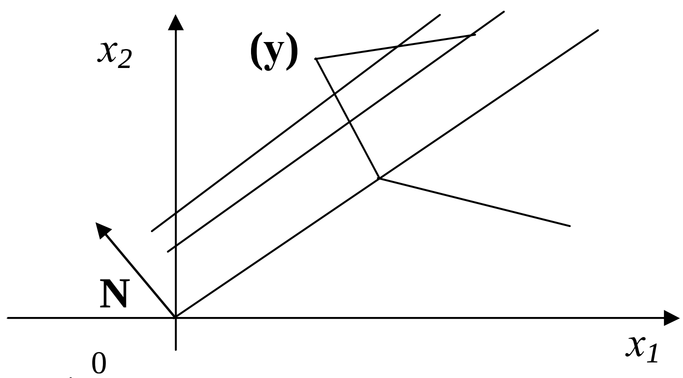
Агар ечимлардан ташкил топган қаварик кўпбурчак чегараланмаган бўлса, икки ҳол бўлиши мумкин.

1-ҳол. $\boldsymbol{c_1x_1 + c_2x_2 = C_0}$ тўғри чизиқ $\vec{N}$ вектор бўйича ёки унга қарама-карши йўналишда силжиб бориб, ҳар вақт қаварик кўпбурчакни кесиб ўтади. Аммо минимал қийматга ҳам, максимал қийматга ҳам эришмайди. Бу ҳолда чизиқли функция қуйидан ва юқоридан чегараланмаган бўлади (2-шакл).

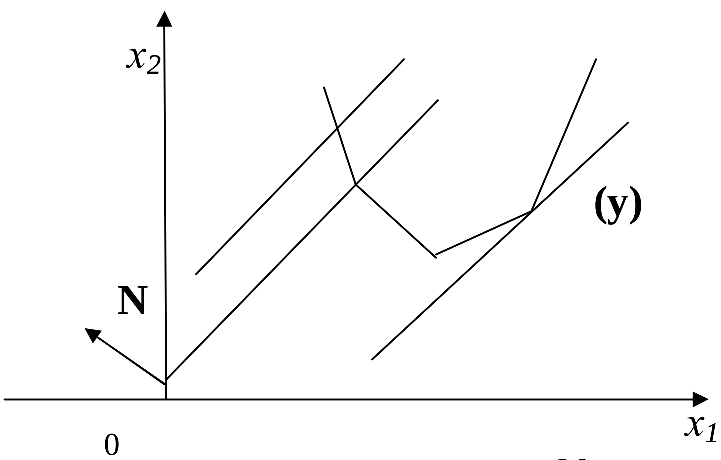


2-шакл

$c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$ тўғри чизиқ $\vec{N}$ вектор бўйича силжиб бориб, қаварик кўпбурчак-нинг бирорта четки нуқтасида ўзининг минимал ёки максимал қийматига эришади. Бундай ҳолда чизиқли функция юқоридан чегараланган, қуйидан эса чегараланмаган (3-шакл) ёки қуйидан чегараланган, юқоридан эса чегараланмаган (4-шакл) бўлиши мумкин.



3-шакл

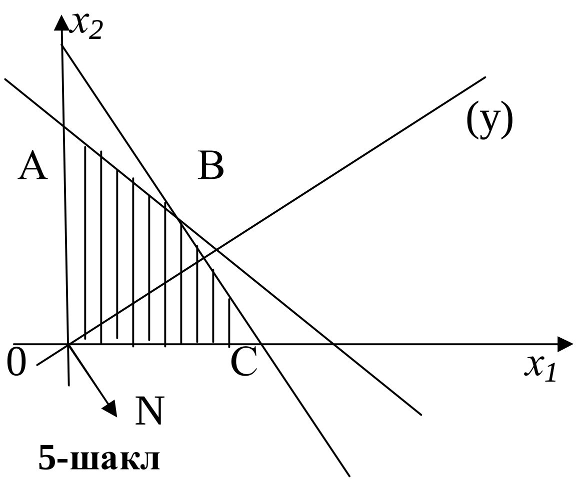


4-шакл

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 12, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$
$$Y = 2x_1 - 5x_2. \quad \to \max.$$

1-мисол. Масалани график усулда ечинг.
Ечиш. Ечимлардан ташкил топган қавариқ кўпбурчак ясаш учун координаталар системасида чизиқлар ясаймиз (5-шакл).

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 12, \quad (L_1) \\ 3x_1 + 4x_2 = 12, \quad (L_2) \end{cases}$$
$$x_1 = 0, x_2 = 0,$$



5-шакл

Берилган тенгсизликларни қаноатлантирувчи ечим штрихланган ***OABC*** тўртбурчакни ташкил қилади. Энди координаталар бошидан $\vec{N}$ ***=(2;-5)*** векторни ясаймиз ва унга перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ тенглама орқали ифодаланади.

$$2x_1 - 5x_2 = const$$

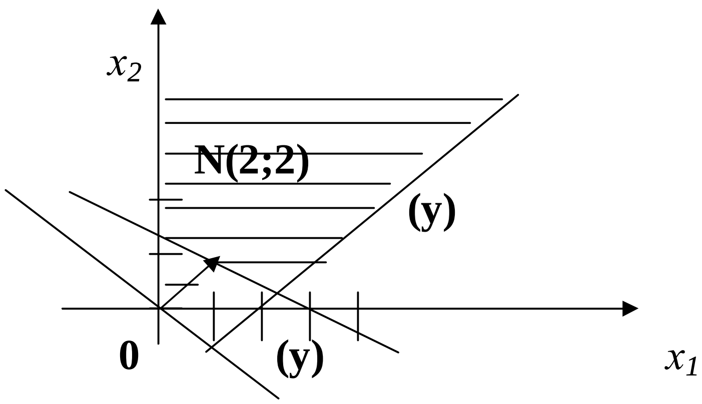
Уни $\vec{N}$ вектор йўналишида ўзига параллел ҳолда силжитиб борамиз. Натижада чизиқли функцияга максимал қиймат берувчи ***C(3;0)*** нуқтани топамиз. Бу нуқтанинг координаталари ***x_1=3, x_2=0*** масаланинг оптимал ечими бўлади ва унинг учун ***$Y_{max} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 0 = 6$*** бўлади.

2-мисол. Берилган чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 3, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$
$$Y = 2x_1 + 2x_2 \to \max.$$

Ечиш. Ечимлар кўпбурчагини ҳосил қиламиз. Бунинг учун координаталар системасида тўғри чизиқлар билан чегараланган ечимлар кўпбурчагини ясаймиз (6-шакл).

$x_1 + 2x_2 = 3,$ $x_1 - x_2 = 2,$ $x_1 = 0,$ $x_2 = 0$



6-шакл

Шаклдан кўринадики, ечимлар кўпбурчаги юқоридан чегараланмаган. Координата бошидан $\vec{N}\,(2;2)$ векторни ясаймиз ва унга перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу чизиқ тенглама орқали ифодаланади.

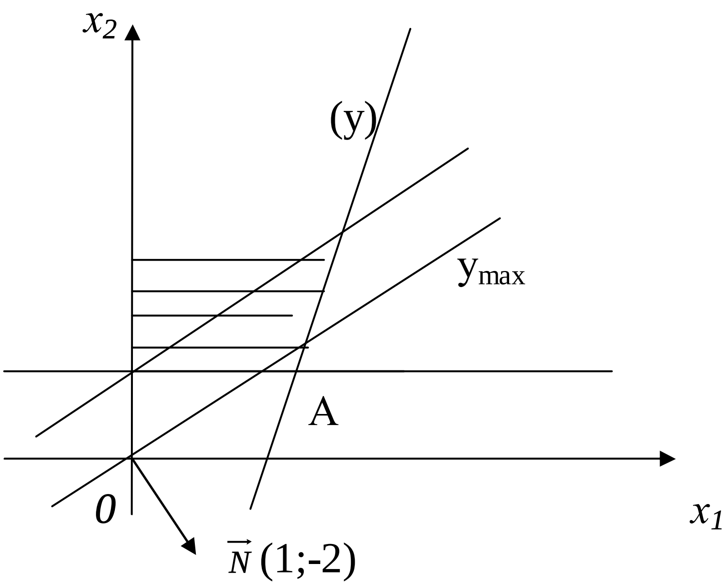
$$2x_1 + 2x_2 = const$$

Шаклдан кўринадики, масалада мақсад функциянинг қиймати юқоридан чегараланмаган экан.

3-мисол. Масалани график усулда ечинг.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 1, \end{cases}$$
$$Y = x_1 - 2x_2 \to \max.$$

Масалани юқоридаги усул билан ечиб, қуйидаги шаклга эга бўламиз (7-шакл).



7-шакл.

Шаклдан кўринадики, ечимлар тўплами чегараланмаган, лекин оптимал ечим мавжуд ва у ***А*** нуқта координаталаридан иборат.

График усул ёрдами билан иқтисодий масалаларни ечиш ва ечимни таҳлил қилиш

Қуйидаги иқтисодий масалани кўрамиз.

Фараз қилайлик, корхонада икки хил бўёқ ишлаб чиқарилсин. Бу бўёқларни ишлаб чиқариш учун 2 хил хом ашёдан фойдаланилсин. Хом ашёларнинг захираси берилган ва улар 6 ва 8 бирликни ташкил қилади. Иккинчи бўёққа бўлган талаб 2 бирликни ташкил қилади ва у биринчи бўёққа бўлган талабдан 1 бирликка катта.

Ҳар бир бўёқнинг бир бирлигини ишлаб чиқариш учун керак бўлган хом ашёлар миқдори (меъёри) ҳамда корхонанинг ҳар бир бўёқдан оладиган даромади қуйидаги жадвалда келтирилган.

Хом ашёлар / *Бўёқлар*	*1*	*2*	*Маҳсулотлар баҳоси*
I	*1*	*2*	*3*
II	*2*	*1*	*2*
Хом ашё захираси	*6*	*8*	

Ҳар бир бўёқдан қанча ишлаб чиқарилганда уларга сарф қилинган хом ашёлар миқдори уларнинг захираларидан ошмайди ҳамда талаб бўйича шартлар ҳам бажарилади?

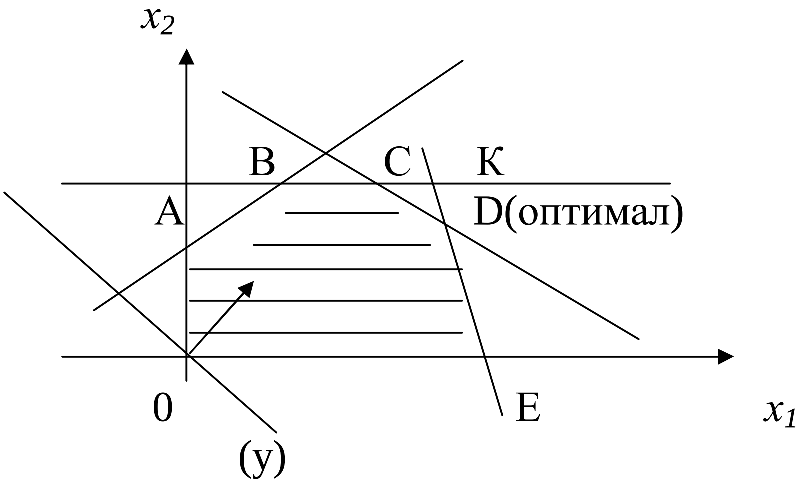
Масаладаги номаълумларни белгилаймиз: $\mathbf{x_1}$ – ишлаб чиқаришга режалаштирилган I-маҳсулотнинг миқдори, $\mathbf{x_2}$ – II маҳсулот миқдори.

У ҳолда масаланинг математик модели қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$
$$Y = 3x_1 + 2x_2 \quad \to \quad \max .$$

Масалани график усулда ечамиз ҳамда $D(3\tfrac{1}{3}, 1\tfrac{1}{3})$ оптимал нуқта эканлигини аниқлаймиз.



8-шакл

Оптимал ечим қуйидагича бўлади:

$$x_1 = 3\frac{1}{3}; \quad x_2 = 1\frac{1}{3}; \quad Y_{\max} = 12\frac{2}{3}.$$

Демак, корхона биринчи бўёқдан $3^1/_3$ бирлик, иккинчисидан $1^1/_3$ бирлик ишлаб чиқариши керак. Бу ҳолда унинг оладиган даромади $12^2/_3$ бирликка тенг бўлади.

Энди график ёрдамида иқтисодий масала ечимини таҳлил қилиш мумкин эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун оптимал D нуқтага қараймиз. Бу нуқта $\boldsymbol{2x_1 + x_2 = 8}$ **ва** $\boldsymbol{x_1 + 2x_2 = 6}$ тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтаси эканлиги берилган иқтисодий масаланинг (1) ва (2) чегараловчи шартлари ***D*** нуқтада тенгламага айланишини кўрсатади. Бу эса, буёқ ишлаб чиқариш учун сарф қилинади-ган иккала хом ашёнинг ҳам камёб эканлигини кўрсатади. Оптимал нуқта билан боғлиқ бўлган шартлар <u>актив</u> шартлар. Унга боғлиқ бўлмаган шартлар эса, <u>пассив</u> шартлар деб аталади. Биз кўраётган масалада маҳсулотларга бўлган талабга қўйилган ***$-x_1 + x_2$ £ 1* ва *x_2£2*** шартлар оптимал нуқтага боғлиқ эмаслигини ва шу сабабли бу шартлар пассив шартлар эканлигини аниқлаймиз.

Пассив шартларга мос келувчи ресурслар камёб бўлмайди ва уларнинг маълум даражада ўзгариши оптимал ечимга таъсир қилмайди. Аксинча, актив шартларга мос келувчи ресурсларни бир бирликка оширилиши оптимал ечимнинг ўзгаришига олиб келади.

Масалан, 1-хом ашё захирасини бир бирликка оширилиши оптимал ечимга қандай таъсир кўрсатишини кўриш учун уни 7 га тенг деб оламиз. У ҳолда ***CD*** кесма ўзига параллел равишда юқорига кўтарилади ва ***DCK*** учбурчак ҳосил бўлади. Энди ***K*** нуқта оптимал нуқтага айланади.

Бу нуқтада ***$x_2 = 2$*** ва ***$2x_1+x_2=8$*** тўғри чизиқлар кесишади. Шу-нинг учун энди масаланинг (2) ва (4) шартлари <u>актив</u> шартларга, (1) ва (3) шартлари эса <u>пассив</u> шартларга айланади. **K** нуқтанинг координаталари ***$x_2 = 2$ $x_1 = 3$.*** Демак, янги оптимал ечим бўлади.

$$x_1 = 3, \qquad x_2 = 2, \qquad Y_{max} = 13$$

Оптимал ечимда 1-хом ашёга доир (1) чегаравий шарт

$$x_1 + 2x_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$$

га тенг бўлади. Демак, 1-хом ашёнинг энг кўп мумкин бўлган захираси 7 га тенг бўлиши кераклигини кўрсатади.

Худди шундай йўл билан 2-хом ашёни бир бирликка ошириш оптимал ечимни қандай ўзгартиришини кўрсатиш мумкин.

Бундан ташқари камёб бўлмаган хом ашёлар миқдорини оптимал ечимга таъсир қилмаган ҳолда камайтиришни ҳам кўрсатиш мумкин.

Юқоридаги 8-шаклда ***BC*** кесма ***$x_2=2$*** чизиқни, яъни масаланинг 4 шартини ифодалайди. Бу – пассив шарт. Мақсад функция қийматини ўзгартирмаган ҳолда пассив шартни қанчалик ўзгартириш мумкин эканлигини аниқлаш учун ***BC*** кесмани ўзига параллел равишда пастга, то ***D*** нуқта билан кесишгунча силжитамиз. Бу нуқтада ***$x_2=4/3$*** бўлади.

Демак, иккинчи бўёққа бўлган талабни оптимал ечимга таъсир қилмасдан 4/3 гача камайтириш мумкин экан.

Шундай йўл билан масаланинг оптимал ечимига таъсир этмасдан унинг (3) – пассив шартнинг ўнг томонини қанчага камайтириш мумкин эканлигини кўрсатиш мумкин.

Таянч сўз ва иборалар

Гипертекислик, гипертекисликлар оиласи, ечимлар кўпбурчаги, сатҳ тўғри чизиғи, сатҳ тўғри чизиқлар оиласи, актив ва пассив шартлар, камёб хом ашё.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Чизиқли программалаштириш масаласининг геометрик талқини қандай?
2. График усулни чизиқли программалаштириш масаласи ечимларининг қандай хоссаларига таяниб, қўллаш мумкин?
3. Чизиқли программалаштириш масаласи режаларидан ташкил топган қавариқ кўпбурчак қандай бўлиши мумкин?
4. Қандай ҳолда чизиқли программалаштириш масаласи бирдан ортиқ оптимал ечимга эга бўлиши мумкин?
5. Иқтисодий масалани график усулда ечганда хом ашёларнинг камёб ёки камёб эмаслигини қандай аниқлаш мумкин?
6. Пассив ва актив чегараловчи шартлар нима?
7. Актив шартларни (камёб хом ашёларни) бир бирликка оширганда оптимал ечим қандай ўзгаради?
8. Оптимал ечимни ўзгартирмаган ҳолда пассив шартларни қанчалик ўзгартириш мумкин?

Мустақил ечиш учун масалалар

1. Қуйидаги иқтисодий масаланинг математик моделини тузинг, уни геометрик усул билан ечинг ва ечимни таҳлил қилинг.

Икки хил маҳсулотни сотишда 4 хил ресурслардан фойдаланилади. Маҳсулотнинг бир бирлигини сотиш учун сарф қилинадиган турли ресурслар миқдори (меъёри) ҳамда ҳар бир ресурснинг захираси қуйидаги жадвалда келтирилган.

Ресурслар	*Ҳар бир маҳсулотга сарф қилинадиган ресурслар миқдори*		*Ресурслар захираси*
	I маҳсулот	*II маҳсулот*	
1	*2*	*2*	*12*
2	*1*	*2*	*8*
3	*4*	*0*	*16*
4	*0*	*4*	*12*
Маҳсулот бирлигини сотишдан олинадиган даромад	*2*	*3*	

Савдо корхонасининг даромадини максималлаштирувчи маҳсулотларни оптимал сотиш режасини аниқланг.

2. Қуйидаги тенгсизликлар системасининг ечимлар кўпбурчагини ясанг ва бурчак нуқталарини аниқланг.

а) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 15 \le 0, \\ 0 \le x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 - 17 \le 0, \\ 0 \le x_1 \le 11. \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ 2x_1 - x_2 \le 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

3. Қуйидаги ЧП масалаларини график усулда ечинг.

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases}$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$
$Y = 2x_1 - 6x_2 \to \max.$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \end{cases}$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$
$Y = 2x_1 - x_2 \to \min.$

4. Икки хил *A* ва *B* маҳсулотлар ишлаб чиқариш учун корхона 3 хил хом ашё сарф қилади. Масаланинг қолган шартлари қуйидаги жадвалда келтирилган.

Хом ашё турлари	*Бир бирлик маҳсулот ишлаб чиқаришга сарф қилинадиган хом ашё меъёри*		*Хом ашёлар захираси*
	A	*B*	
1 *2* *3*	*12* *4* *3*	*4* *4* *12*	*300* *120* *252*
Маҳсулотни бир бирлигини со-тишдан олина-диган даромад	*30*	*40*	

Ишлаб чиқариладиган В маҳсулот миқдори А маҳсулот миқдоридан кам бўлмаслигини таъминлаган ҳолда ишлаб чиқариш режасини қандай тузганда корхонанинг маҳсулотларни сотишдан оладиган даромади максимал бўлади? Масалани график усулда ечинг ва таҳлил қилинг.

Тестлар

1. Берилган чизиқли программалаштириш масаласининг жоиз режалар кўп бурчагини ясанг ва базис ечимлар сонини аниқланг.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 2, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max.$$

Жавоблар:
А. 1 та.
В. 2 та.
С. 3 та.
Д. 4 та.
Е. Тўғри жавоб йўқ.

2. ЧПМ ни график усулда ечишда мақсад функциясини ифодаловчи тўғри чизиқ жоиз режалар кўп бурчагининг бурчак нуқтаси билан урилади. Бу ҳолда масаланинг оптимал базис ечимлар сони нечта бўлади?

Жавоблар:
А. Иккита.
В. Битта.
С. Ечим йўқ.
Д. Чексиз кўп.

Е. Учта.

3. Берилган ЧПМ нинг базис ечимлар сони нечта?

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 + 3x_2 \le 15, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

$$Z = 2x_1 - 3x_2 \to \max$$

Жавоблар:
А. 0 та.
В. 1 та.
С. Чексиз кўп.
Д. 2 та.
Е. 4 та.

4. Агар ЧПМ нинг мақсад функцияси ечимлар тўпламининг иккита четки нуқталарида максимал қийматга эришса, функциянинг максимал қиймати қандай бўлади?

Жавоблар:
А. Ягона бўлади.
В. Иккита бўлади.
С. Чексиз кўп бўлади.
Д. Учта бўлади.
Е. Биронта ҳам бўлмайди.

5. Агар ЧПМ учун жоиз режалар тўпламининг бурчак нуқталари *А(0;0)*, *В(0;5)*, *С(9;2)* ва *Д(12;0)* бўлса, $Z=2x_1-3x_2$ функция ўзининг максимал қийматига қайси нуқтада эришади?

Жавоблар:
А. *А* нуқтада.
В. *В* нуқтада.
С. *С* нуқтада.
Д. *Д* нуқтада.
Е. *АС* кесмада.

6. ЧПМ ни график усулда ечишда ($n=2$) мақсад функциясининг қийматини ифодаловчи тўғри чизиқ жоиз режалар кўп бурчагининг чегаравий тўғри чизиғи билан устма-уст тушади. Бу ҳолда масаланинг оптимал ечими нечта бўлади?

Жавоблар:

А. Битта.

В. Иккита.

С. Чексиз кўп.

Д. Учта.

Е. Оптимал ечим мавжуд эмас.

7. **Қандай ҳолларда ЧПМ чекли оптимал ечимга эга бўлмайди?**

Жавоблар:

А. Агар жоиз режалар кўп бурчаги чегараланмаган бўлса ҳамда $C_1X_1+C_2X_2=Co$ тўғри чизиқ $\vec{N}\,(C_1;C_2)$ вектор йўналишида ёки унга қарама-қарши йўналишда силжиб борганда на максимум, на минимум қийматга эришса, бу ҳолда масаланинг мақсад функцияси ҳам қуйидан, ҳам юқоридан чегараланмаган бўлади.

В. Агар жоиз режалар кўп бурчаги чегараланмаган бўлса ҳамда $C_1X_1+C_2X_2=Co$ тўғри чизиқ $\vec{N}\,(C_1;C_2)$ вектор йўналишида силжиб бориб, бирорта четки нуқтага урилса, у ҳолда масаланинг мақсад функцияси юқоридан чегараланган, қуйидан эса чегараланмаган бўлади.

С. Агар жоиз режалар кўп бурчаги чегараланмаган бўлса ҳамда $C_1X_1+C_2X_2=Co$ тўғри чизиқ $\vec{N}\,(C_1;C_2)$ вектор йўналишига тескари йўналишда силжиб бориб бирорта четки нуқтага урилиб ўтса, у ҳолда масаланинг мақсад функцияси юқоридан чегараланмаган, қуйидан эса чегараланган бўлади.

Д. Жоиз режалар кўп бурчаги бўш тўплам бўлади.

Е. Юқоридаги барча жавоблар тўғри.

8. Масалани график усулда ечинг ҳамда актив ва пассив шартларни аниқланг.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 - x_2 \le 2, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

$$\mathrm{Z} = -x_1 + 3x_2 \to \min.$$

Жавоблар:

А. Ҳамма шартлар актив.

В. Ҳамма шартлар пассив.

С. $x_1 + x_2 \le 4$ шарт пассив; $x_1 - x \ \le 2$ шарт актив.

Д. $x_1 + x_2 \le 4$ шарт актив; $x_1 - x_2 \le 2$ шарт пассив.
Е. Тўғри жавоб йўқ.

9. Масалани график усулда ечинг ва оптимал ечимни аниқловчи бурчак нуқтани топинг.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + 2x_2 \le 1, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$
$$Z = x_1 + x_2 \to \max.$$

Жавоблар:
А. 0 (0;0).
В. А $(0;\frac{1}{2})$.
С. В $(\frac{1}{3};\frac{1}{3})$.
Д. С $(\frac{1}{2};0)$.
Е. *AB* кесмадаги барча нуқталар.

10. Масалани график усулда ечинг ва мақсад функциянинг энг кичик (минимал) қийматини топинг.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ \frac{3}{2}x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{array}\right\}$$
$$Z = 2x_1 + 2x_2 \to \min.$$

Жавоблар:
А. $Z_{\min} = 3;$
В. $Z_{\min} = 5;$
С. $Z_{\min} = 9;$
Д. $Z_{\min} = 4, Z_{\min} = 2.$
Е. Тўғри жавоб йўқ.

4-§. Чизиқли программалаштириш масаласини ечиш учун симплекс усул (Данциг усули)

Данциг яратган симплекс усул ҳар бир тенгламада биттадан ажратилган номаълум (базис ўзгарувчи) қатнашиши шартига асосланган. Бошқача айтганда, ЧП масаласида ***m*** та ўзаро чизиқли эркли векторлар мавжуд деб қаралади. Умумийликни бузмаган ҳолда бу векторлар биринчи m та $P_1, P_2, \dots, P_m$ векторлардан иборат бўлсин, дейлик. У ҳолда масала қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ ------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \dots,\ x_n \geq 0, \qquad (2)$$

$$Y = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \min. \qquad (3)$$

(1) системани вектор шаклида ёзиб олайлик:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_mx_m + P_{m+1}x_{m+1} + \dots + P_nx_n = P_0,$$

бу ерда

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, P_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+2} \\ \dots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix}, \dots, P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

$P_1, P_2, \dots, P_m$ векторлар системаси ***m***-ўлчовли фазода ўзаро чизиқли эркли бўлган бирлик векторлар системасидан иборат. Улар ***m*** ўлчовли фазонинг базисини ташкил қилади. Ушбу векторларга мос келувчи $x_1, x_2, \dots, x_m$ ўзгарувчиларни «базис ўзгарувчилар» деб аталади.

$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ – базис бўлмаган (эркли) ўзгарувчилар. Агар эркли ўзгарувчиларга **0** қиймат берсак, базис ўзгарувчилар озод ҳадларга тенг бўлади. Натижада $X_0 = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$ ечим ҳосил бўлади. Бу ечим жоиз ечим бўлади. Ушбу ечимга $x_1P_1 + x_2P_2 + \dots + x_mP_m = P_0$ ёйилма мос келади. Бу ёйилмадаги $P_1, P_2, \dots, P_m$ векторлар ўзаро эркли бўлганлиги сабабли топилган жоиз ечим базис ечим бўлади.

Данциг усулида симплекс жадвал қуйидаги кўринишда бўлади:

Базис вект.	$C_{баз}$	P_0	C_1	C_2	…	C_m	C_{m+1}	…	C_k	…	C_n
			P_1	P_2	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
P_1	C_1	b_1	1	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
P_2	C_2	b_2	0	1	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
P_l	C_l	b_l	0	0	…	0	a_{lm+1}	…	a_{lk}	…	a_{ln}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
P_m	C_m	b_m	0	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}
$D_j=Z_j\text{-}C_j$	…	$Y_0=\overset{m}{\underset{i=0}{S}}C_ib_i$	$D_1=0$	$D_2=0$	…	$D_m=0$	$D_{m+1}=\overset{m}{\underset{i=0}{S}}a_{im+1}c_i\text{-}c_{m+1}$		$D_k=\overset{m}{\underset{i=0}{S}}a_{ik}c_i\text{-}c_k$		$D_n=\overset{m}{\underset{i=0}{S}}a_{in}c_i\text{-}c_n$

Жадвалдаги $\boldsymbol{C_{баз}}$ билан белгиланган устун $\boldsymbol{x_1,x_2,\ldots,x_m}$ базис ўзгарувчиларнинг чизиқли функциядаги коэффициентлардан ташкил топган вектор, яъни $\boldsymbol{C_{баз}=(C_1,C_2,\ldots,C_m)}$.

Жадвалда ҳар бир $\boldsymbol{P_j}$ векторнинг устига $\boldsymbol{x_j}$ номаълумнинг чизиқли функциядаги коэффициенти $\boldsymbol{c_j}$ ёзилган. $\boldsymbol{m+1}$- қаторга эса $\boldsymbol{x_1,x_2,\ldots,x_m}$ базис ўзгарувчилардаги чизиқли функциянинг қиймати ҳамда базис ечимнинг оптималлик мезонини баҳоловчи сон ёзилган. Базис ўзгарувчиларга мос келувчи $\boldsymbol{P_1, P_2, \ldots, P_m}$ векторлар базис векторлар деб белгиланган. Бу векторлар учун $D_j=Z_j\text{-}C_j=0$ $(j=1,\ldots,n)$ бўлади.

$$Y_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i c_i \qquad (4)$$

$$\Delta_j = Z_j - C_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}c_i - c_j \quad (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n) \qquad (5)$$

Агар барча устунларда D_j £ $\boldsymbol{0}$ бўлса $\boldsymbol{x=(x_1,x_2,\ldots,x_m) = (b_1,b_2,\ldots,b_m)}$ ечим оптимал ечим бўлади. Бу ечимдаги чизиқли функциянинг қиймати $\boldsymbol{Y_0}$ га тенг бўлади.

Агар камида битта $\boldsymbol{j}$ учун D_j > $\boldsymbol{0}$ бўлса, у ҳолда масаланинг оптимал ечими топилмаган бўлади. Шунинг учун топилган базис режани оптимал режага яқин бўлган бошқа базис режага алмаштириш мақсадида базисга

$$\max_{\Delta_j > 0}(\Delta_j) = \Delta_k$$

шартни қаноатлантирувчи $\boldsymbol{P_k}$ векторни киритиш керак. Агар $\boldsymbol{P_k}$ базисга киритилса, эски базис векторлардан бирортасини базисдан чиқариш керак. Базисдан

$$\min_{a_{ik} > 0}(b_i \,/\, a_{ik}) = b_l \,/\, a_{lk} \qquad (6)$$

шарт ўринли бўлган $\boldsymbol{P_l}$ вектор чиқарилади. Бу ҳолда $\boldsymbol{a_{lk}}$ элемент ҳал қилувчи элемент сифатида белгиланди. Шу элемент жойлашган $\boldsymbol{l}$-қатордаги $\boldsymbol{P_l}$ вектор ўрнига у жойлашган устундаги $\boldsymbol{P_k}$ вектор базисга киритилади. $\boldsymbol{P_l}$ векторнинг ўрнига $\boldsymbol{P_k}$ векторни киритиш учун симплекс жадвал қуйидаги формулалар асосида алмаштирилади.

$$\begin{cases} b_i' = b_i - (b_l / a_{lk}) \cdot a_{ik}, \\ b_l' = b_l / a_{lk}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{ij}' = a_{ij} - (a_{lj} / a_{lk}) \cdot a_{ik}, \\ a_{lj}' = a_{lj} / a_{lk}. \end{cases}$$

Симплекс жадвал алмашгандан сўнг яна қайтадан D_j баҳолар аниқланади. Агар барча $\boldsymbol{j}$ лар учун $D_j£0$ бўлса, оптимал ечим топилган бўлади. Акс ҳолда топилган базис режа бошқа базис режа билан алмаштирилади. Бунда қуйидаги теоремаларга асосланиб, иш кўрилади.

1- теорема. Агар $\boldsymbol{X=(x_1,x_2,\ldots,x_m)}$ базис режа учун $D_j=\boldsymbol{Z_j}\text{-}\boldsymbol{c_j}£0$ $(j=1,\ldots,n)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда бу режа оптимал режа бўлади.

2- теорема. Агар $\boldsymbol{X_0}$ базис режада тайин бир $\boldsymbol{j}$ учун $D_j=\boldsymbol{Z_j}\text{-}\boldsymbol{c_j}>\boldsymbol{0}$ шарт ўринли бўлса, у ҳолда $\boldsymbol{X_0}$ оптимал режа бўлмайди ва шундай $\boldsymbol{X_1}$ режани топиш мумкин бўладики, унинг учун $Y(X_1)<Y(X_0)$ тенгсизлик ўринли бўлади. Агар тайин бир $\boldsymbol{j}$ учун $D_j=\boldsymbol{Z_j}\text{-}\boldsymbol{c_j}>\boldsymbol{0}$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда 2- теоремага асосан бу базис режани ҳам янги базис режага алмаштириш керак бўлади. Бу жараён оптимал режа топилгунча ёки масаладаги мақсад функциянинг қуйидан чегараланмаган эканлиги аниқлангунча такрорланади.

Масаланинг оптимал ечимининг мавжуд бўлмаслик шарти қуйидагича:

агар тайин j учун $D_j=Z_j-c_j>0$ тенгсизлик ўринли бўлиб, бу устундаги барча элементлар a_{ij}£0 $(i=1,\ldots,m)$ бўлса, у ҳолда масаланинг мақсад функцияси чекли экстремумга эга бўлмайди.

Фараз қилайлик, симплекс жадвалда оптималлик шарти (D_j£0, $j=1,\ldots,n$) бажарилсин. Бу ҳолда бу ечим формула орқали топилади.

$$X_0=B^{-1}P_0$$

Бу ерда $B=(P_1, P_2, \ldots, P_m)$ матрица базис векторлардан ташкил топган матрицадир.

(1)-(3) масала учун B матрица m ўлчовли J_m , бирлик матрицадир, яъни $B=J_m$.

$BB^{-1}=J_m$ бўлганлиги сабабли B^{-1} матрица ҳам бирлик матрица бўлади. Демак, $X_0=P_0=(b'_{10}, b'_{20}, \ldots, b'_{m0}, 0, \ldots, 0)$ оптимал ечим бўлади.

1- мисол. Масалани симплекс усул билан ечинг:

$$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_5=7, \\ -2x_2+4x_3+x_4=12, \\ -4x_2+3x_3+8x_5+x_6=10, \end{cases}$$

x_j ³ 0, $(j=1,2,\ldots,6)$

$Y= x_2 -3x_3 +2x_5$ ® min.

Ечиш. Белгилашлар киритамиз ва симплекс жадвални тўлдирамиз:

$$p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad p_2=\begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix}, p_3=\begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}, p_4=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, p_5=\begin{pmatrix}-2\\0\\8\end{pmatrix}, p_6=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, p_0=\begin{pmatrix}7\\12\\10\end{pmatrix}.$$

$$C' = (0; 1; -\ 3; 0; 2).$$

i	Базис вект.	$C_{баз}$	P_0	0	1	-3	0	2	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1 2 3	P_1 P_4 P_6	0 0 0	7 12 10	1 0 0	3 -2 -4	-1 4 3	0 1 0	-2 0 8	0 0 1
Δ_j			0	0	-1	3*	0	-2	0
1 2 3	P_1 P_3 P_6	0 -3 0	10 3 1	1 0 0	5/2 -1/2 -5/2	0 1 0	1/4 1/4 -3/4	-2 0 8	0 0 1
Δ_j			-9	0	1/2*	0	-3/4	-2	0
1 2 3	P_2 P_3 P_6	1 -3 0	4 5 11	2/5 1/5 1	1 0 0	0 1 0	1/10 3/10 -1/2	-4/5 -2/5 6	0 0 1
Δ_j			-11	-1/5	0	0	-4/5	-8/5	0

Симплекс усулнинг I босқичида базисга $\boldsymbol{P_3}$ вектор киритилиб, $\boldsymbol{P_4}$ вектор чиқарилди, II босқичида $\boldsymbol{P_2}$ киритилди ва $\boldsymbol{P_1}$ чиқарилди. Симплекс жадвал (7) формулалар асосида алмаштирилиб борилди. III босқичда оптимал ечим топилди:

$$\mathbf{X = (0;\ 4;\ 5;\ 0;\ 0;\ 11),\quad Y_{min} = -\ 11.}$$

Сунъий базис усули

Агар масаланинг шартларида ўзаро эркли бўлган $\boldsymbol{m}$ та бирлик векторлар (базис векторлар) қатнашмаса, улар сунъий равишда киритилади. Масалан, масала қуйидаги кўринишда берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ ------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ \ x_n \ge 0, \qquad (2)$$

$$\mathbf{Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n} \text{ ® } \mathbf{max.} \qquad \mathbf{(3)}$$

Бу масалага $\boldsymbol{x_{n+1}}$ ³ ***0***, $\boldsymbol{x_{n+2}}$ ³ ***0, …,*** $\boldsymbol{x_{n+m}}$ ³ ***0*** қўшимча ўзгарувчилар киритилади ва $\boldsymbol{Y \rightarrow max\ \ Y \rightarrow min}$ га айлантирилади. Натижада қуйидаги кенгайтирилган масала ҳосил бўлади:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\
------------------- \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m,
\end{cases}
\qquad (4)
$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, \ x_n \geq 0, \ \ldots, x_{n+m} \geq 0, \qquad (5)$$

$$Y = - \ c_1x_1 - \ c_2x_2 - \ldots - \ c_nx_n + 0(x_{n+1} +,\ldots+ x_{n+m}) \to min. \quad (6)$$

Бу ҳолда $\boldsymbol{P_{n+1}}$, $\boldsymbol{P_{n+2}}, \ldots,$ $\boldsymbol{P_{n+m}}$ векторлар базис векторлар ва $\boldsymbol{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}}$ ўзгарувчилар «базис ўзгарувчилар» деб қабул қилинади.

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
------------------- \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{cases}
\qquad (7)
$$

Агар берилган масала қуйидаги кўринишда бўлса:

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ldots, \ x_n \geq 0, \qquad (8)$$

$$Y = (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n) \to min. \qquad (9)$$

Бу масалага сунъий $\boldsymbol{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}}$ ўзгарувчилар киритиб, қуйидаги кенгайтирилган масала ҳосил қилинади:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + \tilde{o}_{n+1} = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\
------------------- \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m,
\end{cases}
\qquad (10)
$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, \ x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0, \qquad (11)$$

$$Y = c_1x_1 - \ c_2x_2 - \ldots + c_nx_n + M(x_{n+1} +,\ldots+ x_{n+m})) \to min. \quad (12)$$

бу ерда: ***M*** **–** етарлича катта мусбат сон.

Сунъий базис ўзгарувчиларига мос келувчи $\boldsymbol{P_{n+1}}$, $\boldsymbol{P_{n+2}}, \ldots,$ $\boldsymbol{P_{n+m}}$ векторлар «сунъий базис векторлар» деб аталади.

Берилган (8)-(10) масаланинг оптимал ечими қуйидаги теоремага асосланиб, топилади.

<u>Теорема</u>. Агар кенгайтирилган (11)-(13) масаланинг оптимал ечимида сунъий базис ўзгарувчилари нолга тенг бўлса, яъни:

$$x_{n+i} = 0 \ (i=1,\ldots,m)$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда бу ечим берилган (8)-(10) масаланинг ҳам оптимал ечими бўлади.

Агар кенгайтирилган масаланинг оптимал ечимида камида битта сунъий базис ўзгарувчи нолдан фарқли бўлса, у ҳолда масала ечимга эга бўлмайди.

2- мисол. Масалани сунъий базис усули билан ечинг:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3, \end{cases}$$

x_j ³ 0, (j=1, 2,…, 4),

Z = $5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4$) ® *max.*

<u>Ечиш.</u> Масалага сунъий ***x_5*³ *0* $x_6$³ *0*** ўзгарувчилар киритамиз ва уни нормал кўринишга келтирамиз.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 3, \end{cases}$$

x_j ³ 0, (j=1, 2,…, 6);

Z = $-5x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + M(x_5 + x_6)$) ® *min.*

ҳосил бўлган масалани симплекс жадвалга жойлаштириб, уни симплекс усул билан ечамиз.

i	Базис вект.	$C_{баз}$	P_0	-5	-3	-4	1	M	M
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1 2	P_5 P_6	M M	3 3	1 2	3 2	2 1	2 1	1 0	0 1
Δ_j			6M	3M+5	5M+3	3M+4	3M-1	0	0
1 2	P_2 P_6	-3 M	1 1	1/3 4/3	1 0	2/3 -1/3	2/3 -1/3	1/3 -2/3	0 1
Δ_j			M-3	4/3M+4	0	-1/3M+2	-1/3M-3	-5/3M-1	0
1 2	P_2 P_1	-3 -5	3/4 3/4	0 1	1 0	3/4 -1/4	3/4 -1/4	1/2 -1/2	-1/4 3/4
Δ_j			-6	0	0	3	-2	1-M	-3-M
1 2	P_3 P_1	-4 -5	1 1	0 1	4/3 1/3	1 0	1 0	2/3 -1/3	-1/3 2/3
Δ_j			-9	0	-4	0	-5	-1-M	-2-M

Шундай қилиб, симплекс усул бўйича 4 та қадамдан иборат яқинлашишда оптимал ечим топилди. $D_j \pounds$ ***0.*** Оптимал ечим $\boldsymbol{X=(1;0;1;0;0;0)\,Y_{min}=-9}$.

Кенгайтирилган масаланинг оптимал ечимидаги сунъий ўзгарувчилар 0 га тенг $\boldsymbol{(x_5=0,\ x_6=0)}$. Шунинг учун (3-теоремага асосан) берилган масаланинг оптимал ечими:

$\boldsymbol{X=(1;0;1;0);}$ $\boldsymbol{Z_{min}=-9;\quad Z_{max}=9}$ бўлади.

Таянч сўз ва иборалар

Данциг усули (симплекс усул), базис вектор, симплекс жадвал, сунъий ўзгарувчилар, сунъий базис векторлар, сунъий базис вектор усули

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Симплекс усул бўйича масаланинг чекли оптимал ечимга эга бўлмаслик шарти нимадан иборат?
2. Симплекс усул бўйича ЧП масаласи базис режасининг оптимал бўлиш шарти нимадан иборат?
3. Сунъий базис вектор усули қачон қўлланилади?
4. Қўшимча ўзгарувчилар билан сунъий ўзгарувчиларнинг фарқи нимадан иборат?
5. Сунъий базис вектор усули билан ечилганда ЧП масаласининг ечимга эга бўлмаслик шарти қандай?

Мустақил ечиш учун масалалар

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масалаларини симплекс усул билан ечинг.

$$a)\quad \begin{cases} 3x_1 + 4{,}5x_2 + 6x_3 \le 12, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 5, \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 15, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3),$$

$$Y = 7{,}5x_1 + 9x_2 - 15x_3 \to \max.$$

$$b)\quad \begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,6}),$$

$$Y = x_1 + x_2 + x_3 \to \min.$$

$$c)\quad \begin{cases} x_1 + x_4 + 6x_6 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,6}),$$

$$Y = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 \to \min.$$

2. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масалаларини сунъий базис вектор усули билан ечинг.

$$a)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3),$$

$$Y = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \to \min.$$

$$b)\quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 9, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 8, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3),$$

$$Y = 4x_1 + 6x_2 + 30x_3 \to \min.$$

$$c)\quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 3, \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4),$$

$$Y = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 \to \min.$$

$$d)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 8x_4 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 3, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4),$$

$$Y = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 \to \max.$$

Тестлар

1. Симплекс (Данциг) усулини қандай ЧПМни ечишда қўллаш мумкин?

Жавоблар:

А. Ҳар бир тенгламасида биттадан ажратилган номаълум қатнашган ЧПМни.

В. m та ўзаро чизиқли эркли векторлар қатнашган ЧПМни.

С. m та қўшимча ўзгарувчилар қатнашган ЧПМни.

Д. m та сунъий ўзгарувчилар қатнашган ЧПМни.

Е. Ихтиёрий вектор кўринишига келтирилган ЧПМни.

2.Симплекс усулда оптимал ечимнинг мавжуд эмаслик шарти қандай?

Жавоблар:

А. Агар тайин j учун $D_j=Z_j-C_j<0$ бўлиб, $a_{ij}{}^{3}0$ $(j=\overline{1,n})$ бўлса.

В. Агар тайин j учун $D_j=Z_j-C_j>0$ бўлиб, $a_{ij}\pounds 0$ $(j=\overline{1,n})$ бўлса.

С. Агар тайин j учун $D_j=Z_j-C_j=0$ бўлиб, $a_{ij}<0$ $(i=1,\dots,m)$ бўлса.

Д. Агар тайин j учун $D_j=Z_j-C_j=0$ бўлиб, $a_{ij}>0$ $(i=1,\dots,m)$ бўлса.

Е. Агар тайин j учун $D_j=Z_j-C_j\pounds 0$ бўлиб, $a_{ij}=0$ $(i=1,\dots,m)$ бўлса.

3. Симплекс усулини қўллаб топилган базис режа қайси ҳолда оптимал режа бўлади?

Жавоблар:

А. Агар $X=(x_1,x_2,\dots,x_m)$ базис режа учун $D_j=Z_j-C_j=0$ $(j=1,\dots,n)$ бўлса.

В. Агар $X=(x_1,x_2,\dots,x_m)$ базис режа учун $D_j=Z_j-C_j\pounds 0$ $(j=1,\dots,n)$ бўлса.

С. Агар $X=(x_1,x_2,\dots,x_m)$ базис режа учун $D_j=Z_j-C_j{}^{3}0$ $(j=1,\dots,n)$ бўлса.

Д. Агар $X=(x_1,x_2,\dots,x_m)$ базис режа учун $D_j=Z_j-C_j<0$ $(j=1,\dots,n)$ бўлса.

Е. Агар $X=(x_1,x_2,\dots,x_m)$ базис режа учун $D_j=Z_j-C_j>0$ $(j=1,\dots,n)$ бўлса.

4. Базис режани бошқасига алмаштириш учун қандай вектор базисга киритилиб, қандай вектор базисдан чиқарилади?

Жавоблар:

A. Базисга $\min\limits_{\Delta_j>0}(\Delta_j)=\Delta_l$ шартни қаноатлантирувчи P_k вектор киритилади ҳамда $\min\limits_{a_{ij}>0}\left(\dfrac{b_i}{a_{ik}}\right)=\dfrac{b_l}{a_{lk}}$ шартни қаноатлантирувчи P_l вектор базисдан чиқарилади.

B. Базисга $\min\limits_{\Delta_j>0}(\Delta_j)=\Delta_l$ шартни қаноатлантирувчи P_k вектор киритилади ҳамда $\max\limits_{a_{ij}>0}\left(\dfrac{b_i}{a_{ik}}\right)=\dfrac{b_l}{a_{lk}}$ шартни қаноатлантирувчи P_l вектор базисдан чиқарилади.

C. Базисга $\min\limits_{\Delta_j>0}(\Delta_j)=\Delta_l$ шартни қаноатлантирувчи P_k вектор киритилади ҳамда $\min\limits_{a_{ij}>0}\left(\dfrac{b_i}{a_{ik}}\right)=\dfrac{b_l}{a_{lk}}$ шартни қаноатлантирувчи P_l вектор базисдан чиқарилади.

Д. Базисга $\min\limits_{\Delta_j<0}(\Delta_j)=\Delta_l$ шартни қаноатлантирувчи P_k вектор киритилади ҳамда $\min\limits_{a_{ij}<0}\left(\dfrac{b_i}{a_{ik}}\right)=\dfrac{b_l}{a_{lk}}$ шартни қаноатлантирувчи P_l вектор базисдан чиқарилади.

E. Юқоридаги барча жавоблар нотўғри.

5. Қуйидаги ЧПМ учун ўринли бўлган хулосани кўрсатинг:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 3; \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ \ (j = 1,2,3,4);$$

$$Y = 5 + 2x_3 + 4x_4 \to \max .$$

Жавоблар:

A. Масаланинг чекли оптимал ечими йўқ.

B. $X=(3;1)$ оптимал ечим.

C. Янги базис режага ўтиш керак.

Д. Масала номанфий базис ечимга эга эмас.

E. Масаланинг чексиз кўп ечими бор.

6. Қуйидаги ЧПМ ни қандай йўл билан симплекс жадвалга жойлаштириш мумкин?

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 8; \\ 12x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 14; \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 8; \end{cases}$$

$$x_l \ge 0 \ \left(l = \overline{1,3}\right);$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max.$$

Жавоблар:

A. Бу масалани симплекс жадвалга жойлаштириш мумкин эмас.

B. Масалага қўшимча ўзгарувчилар киритиш йўли билан.

C. Масалага сунъий ўзгарувчилар киритиш йўли билан.

Д. Масалани ҳеч қандай ўзгаришсиз симплекс жадвалга жойлаштириш мумкин.

E. Мақсад функцияни *f(min)* га айлантириш ва сунъий ўзгарувчилар киритиш йўли билан.

7. Қуйидаги ЧПМ мақсад функциясини оптимал қийматини топинг.

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 1; \\ x_1 - x_3 - x_4 = 3; \end{cases}$$

$$x_l \ge 0 \ \left(l = \overline{1,4}\right);$$

$$F(x) = 5 + 2x_3 + 4x_4 \to \max.$$

Жавоблар:

A. $F^*(x)=5$.

B. $F^*(x)=7$.

C. $F^*(x)=9$.

Д. $F^*(x)=11$.

E. Функция максимум қийматга эга эмас.

8. Қуйидаги ЧПМ нинг оптимал ечими ҳақида қандай хулоса қилиш мумкин?

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 15; \\ 3x_1 + 2x_2 = -6; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0;$$

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max.$$

Жавоблар:

A. Масаланинг оптимал ечими чексиз.

B. Масала оптимал ечимга эга эмас.

C. Мақсад функция чекли оптимал қийматга эга эмас.

Д. Мисол чекли оптимал ечимга эга.

E. Тўғри жавоб йўқ.

9. Қуйидаги ЧПМ мақсад функциясининг оптимал қийматини топинг.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 15; \\ x_1 + 2x_2 \le -10; \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;$$
$$Z(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max .$$

Жавоблар:

A. $F^*(x)=45$.

B. $F^*(x)=10$.

C. $F^*(x)=0$.

Д. $F^*(x)=-20$.

E. Масала ечимга эга эмас.

10. Берилган ЧПМ нинг оптимал ечими тўғрисида қуйидаги мулоҳазалардан қайси бири тўғри?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 5; \\ x_2 + x_3 - 7x_4 = 3; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$$
$$Z = 15 + x_2 - 3x_4 \to \min.$$

Жавоблар:

A. Чекли оптимал ечим йўқ.

B. Масаланинг номанфий базис ечими йўқ.

C. Масаланинг оптимал ечими $X^0=(5;3;0;0)$, $Z(X^0)=15$.

Д. Янги базис режага ўтиш керак.

E. Масаланинг шартлари биргалашмаган.

5-§. Чизиқли программалаштиришда иккиланиш назарияси

Ҳар қандай чизиқли программалаштириш масаласига унга нисбатан қўшма масала деб аталувчи бошқа масалани мос қўйиш мумкин. Берилган масаладаги мақсад функция ва номаълумларга қўйилган чекламалар орқали қўшма масаланинг мақсад функция-сини ва чекламаларини тўла аниқлаш мумкин.

Берилган масала ва унга қўшма масалалар биргаликда ўзаро иккиланган масалалар деб аталади. Агар иккиланган масалалардан бирортаси ечимга эга бўлса, уларнинг иккинчиси ҳам оптимал ечимга эга бўлади.

Ўзаро иккиланган масалаларни кўз олдига келтириш ва улар-ни иқтисодий маъноларини таҳлил қилиш учун қуйидаги ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласини кўрамиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots,\ x_n \ge 0, \qquad (2)$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to max. \qquad (3)$$

Масаланинг (1) шарти маҳсулот ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган ***m*** хил хом ашёнинг ҳар бири чегараланган эканлигини ва уларни меъёрида сарф қилиш кераклигини кўрсатади. Бу ерда: x_j $(j=1,\ldots,n)$ ишлаб чиқариладиган ***j***-маҳсулот миқдори, b_i $(i=1,\ldots,n)$ ***i***-хом ашёнинг захираси (запаси), a_{ij} коэффициентлар ***j***-маҳсулот бир-лигини ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган ***i***-хом ашё миқдори (нормаси)ни кўрсатади. $Z \to max$ – мақсад функция бўлиб у ишлаб чиқарилган маҳсулотларнинг пул қиймати максимум бўлиши ке-раклигини кўрсатади. Бу ерда c_j – маҳсулот бирлигининг баҳоси-дир. Масалани матрица формада қуйидагича ёзиш мумкин:

$$AX \le B, \qquad (4)$$

$$X \ge 0, \qquad (5)$$

$$Z = CX \to max. \qquad (6)$$

Фараз қилайлик, корхона маълум бир сабабларга кўра маҳсулот ишлаб чиқаришни тўхтатган бўлсин. Шу сабабли корхона хом ашё ва бошқа ишлаб чиқариш воситаларини сотмоқчи бўлади. Корхона бу хом ашёларни сотишдан олган тушуми маҳсулот ишлаб чиқариб, уни сотишдан олган тушумидан кам бўлмаслигига ҳаракат қилади. Иккинчи томондан, хом ашё сотиб олувчи корхона эса уларни кам харажат сарф қилиб, сотиб олишга ҳаракат қилади. Қўшма масала хом ашёларни сотувчи ва уларни сотиб олувчи корхоналар мақсадини амалга ошириши керак. Бунинг учун хом ашёлар нархи $\boldsymbol{y_i}$ ***(i=1,…,m)*** қандай бўлганда сотувчи корхона зарар кўрмайди ҳамда сотиб олувчи корхонанинг сарф қилган харажатлари минимал бўлади?

Математик нуқтаи назардан қўшма масалани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ ...., \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \geq c_n, \end{cases} \qquad (7)$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0, \ldots,\ y_m \geq 0, \qquad (8)$$

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \rightarrow min. \qquad (9)$$

Қўшма масаладаги (7) чекламалар ҳар бир маҳсулотнинг бирлигини ишлаб чиқиш учун сарф қилинадиган барча хом ашёларнинг пул қиймати маҳсулот баҳосидан кам бўлмаслик шартини кўрсатади. (9) шарт эса мақсад функция бўлиб, у барча хом ашёларнинг баҳоси минимал бўлиши кераклигини кўрсатади.

Қўшма масала матрица формада қуйидагича ёзилади:

$$YA \geq C, \qquad (10)$$

$$Y \geq 0, \qquad (11)$$

$$F = YB \rightarrow min. \qquad (12)$$

(1)-(3), [(4)-(6)] ва (7)-(9) [(10)-(12)] масалалар «ўзаро симметрик бўлган иккиланган масалалар» дейилади. Бу масалаларда чегаравий шартлар тенгсизликлардан иборат бўлади ҳамда номаълумларнинг манфий бўлмаслиги талаб қилинади. Симметрик бўлмаган қўшма масалалар қуйидаги кўринишда бўлиши мумкин.

Берилган масала:	Қўшма масала:
I. $AX = B,$	$YA \geq C,$
$X \geq 0,$	$F = YB \to min.$
$Z = CX \to max.$	
II. $AX = B,$	$YA \leq C,$
$X \geq 0,$	$F = YB \to max.$
$Z = CX \to min.$	

Бу масалалардан кўринадики, агар берилган масаладаги чеклamalар тенглама кўринишда бўлса, иккиланган масаладаги чегаравий шартлар тенгсизлик кўринишида бўлиб, унинг «≤» ёки «≥» кўринишда бўлиши берилган масаланинг мақсад функциясининг $Y \to min$ ёки $Z \to max$ кўринишда бўлишига боғлиқ. Қўшма масаланинг мақсад функцияси берилган масала мақсад функциясига тескари бўлади, яъни агар берилган масала мақсад функцияси $Z \to max$ бўлса, қўшма масалада у $F \to min$ бўлади ва аксинча, агар берилган масалада мақсад функция $Z \to min$ кўринишида бўлса, у ҳолда қўшма масалада $F \to max$ кўринишда бўлади.

Юқоридагилардан хулоса қилиб, ўзаро иккиланган масалаларнинг математик моделларини қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин.

Симметрик бўлмаган иккиланган масалалар

Берилган масала:	Қўшма масала:
I. $AX = B,$	$YA \leq C,$
$X \geq 0,$	$F = YB \to max.$
$Z = C'X \to min.$	
II. $AX = B,$	$YA \geq C,$
$X \geq 0,$	$F = YB \to min.$
$Z = C'X \to max.$	

Симметрик иккиланган масалалар

Берилган масала:	Қўшма масала:
I. $AX \geq B,$	$YA \leq C,$
$X \geq 0,$	$Y \geq 0,$
$Z = C'X \to min.$	$F = YB \to max.$

$$\textbf{II.}\quad \begin{aligned} &AX \le B, \\ &X \ge 0, \\ &Y = C'X \to \max. \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &YA \ge C, \\ &Y \ge 0, \\ &F = YB \to \min. \end{aligned}$$

Иккиланган масалалар орасида яна қуйидаги боғланишлар мавжуд.

1. Берилган масаладаги технологик коэффициентлардан ташкил топган матрица кўринишда бўлса, қўшма масаладаги бу матрица кўринишда, яъни ***A*** матрицага транспонирланган матрица бўлади.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Қўшма масаладаги номаълумлар сони берилган масаладаги чекламалар сонига тенг. Қўшма масаладаги чекламалар сони берилган масаладаги номаълумлар сонига тенг бўлади.

3. Қўшма масала мақсад функциядаги коэффициентлар берилган масаладаги озод ҳадлардан иборат бўлади. Қўшма масаладаги озод ҳадлар эса берилган масала мақсад функция коэффициентларидан иборат бўлади.

4. Агар берилган масаладаги x_j номаълум мусбат бўлса, $(x_j \ge 0)$ у ҳолда қўшимча масаладаги ***j***-чеклама «$\ge$» кўринишдаги тенгсизликдан иборат бўлади. Агар x_j номаълум ҳам мусбат, ҳам манфий қийматларни қабул қилиши мумкин бўлса, у ҳолда қўшма масаладаги ***j***-чеклама тенгламадан иборат бўлади.

5. Агар берилган масаладаги ***i***-чеклама тенгликдан иборат бўлса, қўшма масаладаги Y_i номаълум мусбат бўлади, яъни $Y_i \ge 0$.

Агар (1)-(3) масаладаги ***i***-чеклама тенгликдан иборат бўлса, $Y_i \ge 0$ мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин.

1-мисол. Берилган масалага қўшма масалани тузинг.

Берилган масала:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 24, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \le 18, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \end{cases}$$

$$Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max.$$

Ечиш. Масаладаги барча чекламалар «≤» кўринишдаги тенгсизликлардан иборат демак, берилган масалага симметрик бўлган қўшма масала 4-кўринишда тузилади. Натижада қуйидаги симметрик қўшма масалани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2, \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \geq 1, \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3, \\ y_1 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = 12y_1 + 24y_2 + 18y_3 \to min.$$

2-<u>мисол.</u> Берилган масалага қўшма масала тузинг.

Берилган масала:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 13, \\ x_1 + 5x_2 - 6x_3 \leq 11, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$Z = 4x_1 + x_2 + 4x_3 \to max.$$

Ечиш. Берилган масаладаги иккинчи чеклама тенгламадан иборат, биринчи ва учинчи чекламалар эса тенгсизликлардан иборат. Шунинг учун қўшма масалани тузишда юқоридаги 5- пунктда келтирилган қоидага риоя қиламиз ва қуйидаги масалага эга бўламиз:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \geq 4, \\ -y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 1, \\ 4y_1 - 2y_2 - 6y_3 \geq 4, \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0,\ y_3 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = 12y_1 + 13y_2 + 11y_3 \to min.$$

Иккиланган масалалар ечимлари орасида мавжуд бўлган боғланишни иккиланиш назариясининг асосий тенгсизлиги ва биринчи теоремаси орқали аниқлаш мумкин.

Иккиланиш назариясида берилган масаланинг ихтиёрий ***X*** жоиз режаси ҳамда қўшимча масаланинг ихтиёрий ***Y*** жоиз режаси учун тенгсизлик, яъни

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$Z(X) \leq F(Y)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундай тенгсизлик иккиланиш назариясининг асосий тенгсизлиги деб аталади. Агар $\boldsymbol{X^*}$ ва $\boldsymbol{Y^*}$ жоиз режалар учун тенглик ўринли бўлса, у ҳолда бу жоиз режалар мос равишда берилган ва қўшма масаланинг оптимал режаси бўлади.

$$Z(X^*)=F(Y^*)$$

Бу тенгсизлик ихтиёрий жоиз ишлаб чиқариш режаси ҳамда хом ашёларнинг ихтиёрий жоиз баҳолари учун ишлаб чиқарилган маҳсулот баҳоси хом ашёлар баҳосидан ошмаслигини кўрсатади.

1-теорема. Агар иккиланган масалалардан бирортаси оптимал ечимга эга бўлса, у ҳолда уларнинг иккинчиси ҳам ечимга эга бўлади ҳамда бу масалалардаги мақсад функцияларнинг экстремал қийматлари ўзаро тенг бўлади, яъни Zmax = Fmin. Агар бу масалалардан бирининг чизиқли функцияси чегараланмаган бўлса, у ҳолда иккинчи масала ҳам ҳеч қандай ечимга эга бўлмайди.

Теоремани исботсиз қабул қиламиз.

Хулоса. Агар берилган масала ечимга эга бўлса, у ҳолда қўшма масаланинг ечими $\boldsymbol{Y^0=C^0B^{-1}}$ формула орқали топилади. Худди шунингдек, агар қўшма масала оптимал ечимга эга бўлса, у ҳолда берилган масаланинг оптимал ечими $\boldsymbol{X^0=B^{-1}b^0}$ формула орқали топилади. Бу формулаларда $\boldsymbol{C^0}$ – охирги симплекс жадвалдаги базис векторларга мос келувчи $\boldsymbol{C_{баз}}$ вектордан, $\boldsymbol{b^0}$-қўшма масала оптимал ечимга мос келувчи мақсад функция $\boldsymbol{F}$ нинг коэффициентларидан ташкил топган вектор; $\boldsymbol{B^{-1}}$ матрица биринчи симплекс жадвалдаги базис векторлардан ташкил топган $\boldsymbol{B}$ матрицага тескари матрица.

Келтирилган иккиланиш назариясининг 1- теоремаси иқтисодий нуқтаи назардан шундай талқин қилинади: агар ташқаридан белгиланган $\boldsymbol{c_j}$ баҳода сотилган маҳсулотнинг пул миқдори y_i ички баҳода ўлчанган харажатлар (хом ашёлар) миқдорига тенг бўлса, яъни

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда маҳсулотнинг жоиз ишлаб чиқариш режаси ҳамда хом ашёларнинг жоиз баҳолари оптимал бўлади. Бундан кўринадики, қўшма масаладаги номаълумлар (уларни иккиланган баҳолар деб атаймиз) сарф қилинган харажатлар ва ишлаб чиқарилган маҳсулотларнинг пул миқдорларини ўзаро тенг бўлишини таъминловчи восита бўлиб хизмат қилади.

3-мисол. Берилган масала ва унга иккиланган масаланинг ечимини топинг:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7, \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j=1, 2,\ldots, 6)$$

$$Z = x_2 - 3x_3 + 2x_5 \to min.$$

<u>Ечиш.</u> Масалага қўшма масалани тузамиз:

$$\begin{cases} 3y_1 - 2y_2 - 4y_3 \leq 1, \\ -y_1 + 4y_2 + 3y_3 \leq -3, \\ 2y_1 + 8y_3 \leq 2, \\ y_1 \leq 0, y_2 \leq 0, y_3 \leq 0, \end{cases}$$

$$F = 7y_1 + 12y_2 + 10y_3 \to max.$$

Берилган масалани симплекс жадвалга жойлаштириб, симплекс усул билан ечамиз:

Базис вект.	$C_{баз}$	P_0	0	1	-3	0	2	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	0	7	1	3	-1	0	2	0
P_4	0	12	0	-2	4	1	0	0
P_6	0	10	0	-4	3	0	8	1
Δ_j		0	0	-1	3*	0	-2	0
P_1	0	10	1	5/2	0	1/4	2	0
P_3	-3	3	0	-1/2	1	1/4	0	0
P_6	0	1	0	-5/2	0	-3/4	8	1
Δ_j		-9	0	1/2*	0	-3/4	-2	0
P_2	1	4	2/5	1	0	1/10	4/5	0
P_3	-3	5	1/5	0	1	3/10	2/5	0
P_6	0	11	1	0	0	-1/2	10	1
Δ_j		-11	-1/5	0	0	-4/5	-12/5	0

III босқичда оптимал ечимга эга бўламиз:

$$X^0 = (0;4;5;0;0;11)$$

$$C^0 = (1;-3;0)$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix};$$

$$Y^0 = C^0 B^{-1} = (1;\quad -3;\quad 0)\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{5};\quad -\frac{4}{5};\quad 0\right).$$

Жадвалдан кўринадики, қўшма масаланинг ечимини ҳисоблаб ўтирмаслик ҳам мумкин. Охирги симплекс жадвалда $\boldsymbol{B^{-1}}$ матрица кирувчи $\boldsymbol{(P_1, P_4, P_6)}$ векторларга мос келувчи $\boldsymbol{m+1}$ қатор элементлари $\boldsymbol{Y^0}$ векторнинг (қўшма масала ечимининг) элементларини беради**.** $\boldsymbol{m+1}$ қаторнинг $\boldsymbol{P}$ векторга мос келган элемент эса оптимал ечимга мос келувчи $\boldsymbol{Z_{min}}$ ва $\boldsymbol{F_{max}}$ функцияларнинг қийматини беради.

$$Z(X^0) = Z_{min} = F(Y^0) = F_{max} = -11.$$

Шундай қилиб айтиш мумкинки, оптимал ечимда иккиланган масалалар мақсад функцияларининг оптимал қийматлари ўзаро тенг бўлади.

Таянч сўз ва иборалар

Қўшма масала, симметрик қўшма масала, симметрик бўлмаган қўшма масала, иккиламчи баҳолар.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Берилган ва унга қўшма масалаларнинг умумий қўйилиши ва турли формада ёзилишини кўрсатинг.
2. Берилган ва унга қўшма масалаларнинг иқтисодий маъносини изоҳланг.
3. Берилган ва унга қўшма масалаларнинг мақсад функциялари орасида боғланиш қандай?

4. Берилган масала ва унга қўшма масала шартлари орасида қандай боғланиш бор?

5. Симметрик ва носимметрик қўшма масалалар орасидаги фарқ қандай?

6. Иккиланишнинг асосий теоремаси қандай таърифланади?

7. Иккиланиш назариясини асосий тенгсизлиги ва унинг иқтисодий талқини қандай?

Мустақил ечиш учун масалалар

1. Тўртта *А,Б,В,Г* маҳсулотлар ишлаб чиқаришда 3 хил (*I,II,III*) хом ашёлар ишлатилади. Масаланинг қолган шартлари қуйидаги жадвалда келтирилган:

Хом ашёлар	*Маҳсулот бирлигига сарф қилинадиган хом ашёлар меъёри*				*Хом ашёлар захираси*
	А	*Б*	*В*	*Г*	
I	*2*	*1*	*0,5*	*4*	*3400*
II	*1*	*5*	*3*	*0*	*1200*
III	*3*	*0*	*6*	*1*	*3000*
Маҳсулот бирлигидан олинадиган даромад	*7,5*	*3*	*6*	*12*	

1. Масаланинг математик моделини тузинг, бунда корхона даромадини максималлаштирувчи ишлаб чиқариш режасини топиш кераклигини эътиборга олинг.

2. Қўйилган масалага қўшма масалани тузиб, унинг иқтисодий изоҳини беринг.

3. Қўшма масалалардан ихтиёрий бирини симплекс усул билан ечиб, уларнинг иккинчисининг ечимини 1-теоремага асосан топинг.

2. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масалаларига қўшма масала тузинг. Қўшма масалалардан ихтиёрий бирини симплекс усул билан ечинг ҳамда иккиламчи масала ечимини 1- теоремадан фойдаланиб, ёзинг.

а) $$\begin{cases} x_1 - x_2 \le -2, \\ x_1 - 2x_2 \ge -13, \\ 3x_1 - x_2 \le 6, \end{cases}$$
$$\tilde{o}_j \ge 0, \quad (j = 1,2),$$
$$Y = x_1 + x_2 \to \max .$$

б) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \ge 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 3, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \ (j = 1,2,3),$$
$$Y = 10x_2 - 3x_3 \to \min .$$

3. Иккита ўзаро қўшма масалалар берилган:

$$I.\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ 2x_1 + x_2 \leq 2, \end{cases} \qquad II. \begin{cases} -y_1 + 2y_2 \geq 1, \\ -2y_1 + y_2 \geq -1, \end{cases}$$

$$\tilde{o}_j \geq 0, \quad (j = 1{,}2), \qquad y_i \geq 0, \quad (i = 1{,}2),$$

$$Y = x_1 - x_2 \to \max. \qquad F = -8y_1 + 2y_2 \to \min.$$

Бу масалаларни ечиб, қўшма масалада мақсад функция қуйидан чегараланмаганлиги ***(F_{min}=-¥)*** ва берилган масаладаги чекламалар биргаликда эмаслигини текширинг.

Тестлар

1. Берилган ва унга қўшма масалаларнинг қайси элементлари орасида ўзаро мослик мавжуд?

Жавоблар:

A. Берилган масала мақсад функцияси коэффициентлари билан қўшма масала ўзгарувчилари орасида.

B. Иккала масаланинг чегараловчи шартларидаги озод ҳадлар орасида.

C. Берилган масала чегараловчи шартларидаги озод ҳадлар билан иккиланган масала мақсад функцияси коэффициентлари орасида.

Д. Иккала масаланинг ўзгарувчилари орасида.

E. Иккала масаланинг мақсад функциялари орасида.

2. Берилган масалага қўшма масала тузинг.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 8, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 20, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0,$$

$$Z(x) = 12x_1 + 10x_2 \to \max.$$

Жавоблар:

A. $\begin{cases} y_1 - y_2 \geq 12, \\ -y_1 + 3y_2 \geq 10, \end{cases}$ $y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0,$ $F(y) = 8y_1 + 20y_2 \to \min.$

B. $\begin{cases} y_1 - 2y_2 \leq 12, \\ -y_1 + 3y_2 \leq 10, \end{cases}$ $y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0,$ $F(y) = 8y_1 + 20y_2 \to \min.$

С. $$\begin{cases} y_1 - y_2 \geq 12, \\ -2y_1 + 3y_2 \geq 10, \end{cases}$$
$$F(y) = 8y_1 + 20y_2 \to \min.$$

Д. $$\begin{cases} y_1 - 2y_2 \leq 12, \\ -y_1 + 3y_2 \leq 10, \end{cases}$$
$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0,$$
$$F(y) = 12y_1 + 10y_2 \to \min.$$

Е.
$$\begin{cases} y_1 - y_2 = 12, \\ -2y_1 + 3y_2 = 10, \end{cases}$$
$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0,$$
$$F(y) = 8y_1 + 20y_2 \to \min.$$

Берилган масала кўринишда бўлиб, қўшма масала кўринишда бўлса, у ҳолда иккиланиш назариясининг асосий тенгсизлиги қандай кўринишга эга?

3.
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ i = \overline{1,m};$$
$$x_j \geq 0,$$
$$Z_x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max.$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1,n};$$
$$y_i \geq 0,$$
$$F(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min.$$

Жавоблар:

А. $Z(X)^{3}F(Y)$.

В. $Z(X)£F(Y)$.

С. $Z(X)<F(Y)$.

Д. $Z(X)>F(Y)$.

Е. $Z(X)=F(Y)$.

4. ***max Z(X)*** **ни топишга доир масаладаги *i*- чеклама тенглама шаклида берилган. Унда қўшма масалада қуйидагилардан қайси бири ўринли бўлади?**

Жавоблар:

А. ***i*-** ўзгарувчи $y_i{}^{3}0$.

В. ***i*-** ўзгарувчи $y_i£0$.

С. i- ўзгарувчи ишорасига шарт қўйилмаган.
Д. i- ўзгарувчи $y_i=0$.
Е. Тўғри жавоб йўқ.

5. *max Z(X)* ни топишга доир масалада *i*- шарт «£» шаклда берилган. У ҳолда қўшма масалада қуйидаги шартлардан қайси бири ўринли бўлади?

Жавоблар:
А. y_i ўзгарувчига ҳеч қандай шарт қўйилмайди.
В. $y_i=0$.
С. y_i£0.
Д. y_i³.0.
Е. Тўғри жавоб йўқ.

6. Агар қўшма масала *F(Y)*® *min* кўринишда бўлиб y_i - ўзгарувчининг ишорасига шарт қўйилмаса, у ҳолда берилган масалада қуйидаги шартлардан қайси бири ўринли бўлади?

Жавоблар:
А. i- чеклама тенгламадан иборат.
В. i- чеклама «≥» кўринишдаги тенгсизликдан иборат.
В. i- чеклама «≤» кўринишдаги тенгсизликдан иборат.
Г. i- чеклама «<» кўринишдаги тенгсизликдан иборат.
Д. i- чеклама «>» кўринишдаги тенгсизликдан иборат.

7. Берилган масалага қўшма масала тузинг:

AX=B,
X*³*0,
Z(X)=CX*® *min.

Жавоблар:
А. *YA£C;* *Y³0;* *F(Y)=YB® max.*
В. *YA£C;* *F(Y)=YB® max.*
С. *YA³C;* *Y³0;* *F(Y)=YB® max.*
Д. *YA³C;* *F(Y)=YB® max.*
Е. Тўғри жавоб йўқ.

8. Берилган масала

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 9, \\ -2x_1 + 5x_2 \le 25, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$
$$Z(x) = 16x_1 + 9x_2 \to \max.$$

кўринишда бўлса, унга қўшма масала қандай кўринишда бўлади?

Жавоблар:

А.

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 = 16, \\ -3y_1 + 5y_2 \ge 9, \end{cases}$$
$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0,$$
$$F(y) = 9y_1 + 25y_2 \to \min.$$

В.

$$\begin{cases} 2y_1 - 2y_2 \ge 16, \\ -3y_1 + 5y_2 \ge 9, \end{cases}$$
$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0,$$
$$F(y) = 9y_1 + 25y_2 \to \min.$$

С.

$$\begin{cases} 2y_1 - 2y_2 \ge 16, \\ -3y_1 + 5y_2 \ge 9, \end{cases}$$
$$F(y) = 9y_1 + 25y_2 \to \min.$$

Д.

$$\begin{cases} 2y_1 - 2y_2 \ge 16, \\ -3y_1 + 5y_2 \ge 9, \end{cases}$$
$$y_2 \ge 0,$$
$$F(y) = 9y_1 + 25y_2 \to \min.$$

Е.

$$\begin{cases} 2y_1 - 2y_2 \ge 16, \\ -3y_1 + 5y_2 \ge 9, \end{cases}$$
$$y_1 \ge 0,$$
$$F(y) = 9y_1 + 25y_2 \to \min.$$

9. Берилган масала чекламаларидаги озод ҳадларнинг ўзгариши мақсад функцияга қандай таъсир қилади?

Жавоблар:

А. Масала чекламаларидаги озод ҳадлар ўзгариши мақсад функцияга таъсир қилмайди.

В. Ҳар бир озод ҳаднинг бир бирликка ошиши мақсад функция қийматининг ошишига олиб келади.

С. Озод ҳадларнинг бир бирликка камайиши мақсад функция қийматининг камайишига олиб келади.

Д. Масаладаги ***i***- чекламанинг озод ҳади бир бирликка оширилса, у ҳолда мақсад функциянинг қиймати шу чекламанинг иккиланган баҳоси миқдорига ўзгаради.

Е. Юқоридаги **Б** ва **С** жавоблар тўғри.

10. Агар берилган масаладаги номаълумлар ишлаб чиқариш режасини билдирса, у ҳолда қўшма масаладаги номаълумлар қандай маънони билдиради?

Жавоблар:

А. Сарф қилинадиган хом ашёлар меъёрини.

В**.** Хом ашёларнинг иккиланган баҳосини.

С. Хом ашёлар нархини.

Д. Сарф қилинадиган хом ашёларнинг умумий баҳосини.

Е. Тўғри жавоб йўқ.

6-§. Чизиқли программалаштиришнинг транспорт масаласи

Транспорт масаласи – чизиқли программалаштиришнинг алоҳида хусусиятли масаласи бўлиб, бир жинсли юк ташишнинг энг тежамли режасини тузиш масаласидир. Бу масала хусусийлигига қарамай қўлланиш соҳаси жуда кенгдир.

Масаланинг қўйилиши ва унинг математик модели

m-та A_i ***(i = 1,2,…, m)*** таъминотчиларда йиғилиб қолган бир жинсли a_i миқдордаги маҳсулотни **n**-та B_j истеъмолчиларга мос равишда b_j ***(j=1,2,…,n)*** миқдорда етказиб бериш талаб қилинади.

Ҳар бир ***i***-таъминотчидан ҳар бир ***j***-истеъмолчига бир бирлик юк ташишга сарф қилинадиган йўл харажати маълум ва у c_{ij} – сўмни ташкил қилади.

Юк ташишнинг шундай режасини тузиш керакки, таъминотчилардаги барча юклар олиб чиқиб кетилсин, истеъмолчиларнинг барча талаблари қондирилсин ва шу билан бирга йўл харажатларининг умумий қиймати энг кичик бўлсин.

Масаланинг математик моделини тузиш учун ***i***-таъминотчидан ***j***-истеъмолчига етказиб бериш учун режалаштирилган юк миқдорини x_{ij} орқали белгилаймиз, у ҳолда масаланинг шартларини қуйидаги жадвал кўринишда ёзиш мумкин:

Таъминотчилар	*Истеъмолчилар*				*Захиралар миқдори*
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Талаблар ҳажми	b_1	b_2	…	b_n	$S\ a_i = S\ b_j$

Жадвалдан кўринадики, ***i***-таъминотчидан ***j***-истеъмолчига режадаги x_{ij} – бирлик юк етказиб бериш сарф қилинадиган йўл харажати $c_{ij}\,x_{ij}$ – сўмни ташкил қилади. Харажатларнинг умумий қиймати эса, $Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$ га тенг бўлади.

Масаланинг биринчи шартига кўра, барча юклар олиб чиқиб кетилиши керак, демак:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i, \qquad (i=\overline{1,m})$$

тенгликлар бажарилиши керак.

Иккинчи шартга кўра, яъни барча талаблар тўла қондирилиши учун тенгликлар ўринли бўлиши керак.

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j, \qquad (j=\overline{1,n})$$

Шундай қилиб, масаланинг математик модели қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i, & i=\overline{1,m} \qquad (1)\\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j, & j=\overline{1,n} \qquad (2)\end{cases}$$

чизиқли тенгламалар системасининг шартларни қаноатлантирувчи шундай ечимини топиш керакки, бу ечим чизиқли функцияга энг кичик қиймат берсин.

$$x_{ij}\ ^{3}\ 0,\ \ i=1,2,\ldots,m; \qquad j=1,2,\ldots,n \qquad (3)$$

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\ \min \qquad (4)$$

Бу моделда маҳсулотга бўлган талаб таклифга тенг, яъни тенглик ўринли деб фараз қилинади. Бундай масалалар «ёпиқ моделли транспорт масаласи» дейилади.

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j \qquad (5)$$

Теорема. Талаблар ҳажми таклифлар ҳажмига тенг бўлган исталган транспорт масаласининг оптимал ечими мавжуд бўлади.

Бошланғич жоиз режани топиш усуллари

Маълумки, ихтиёрий чизиқли программалаштириш масаласининг оптимал ечимини топиш жараёни бошланғич таянч режани қуришдан бошланади.

Масаланинг (1) ва (2) чекламалари биргаликда mn – та номаълумли $m+n$ – та тенгламаларда иборат. Агар (1) системанинг тенгламаларини ҳадма-ҳад қўшсак ва алоҳида (2) системанинг тенгламаларини ҳадма-ҳад қўшсак, иккита бир хил тенглама ҳосил бўлади. Бу эса (1) ва (2) дан иборат системада битта чизиқли боғлиқ тенглама борлигини кўрсатади. Бу тенглама умумий системадан чиқариб ташланса, масала $m+n-1$ та чизиқли боғлиқ бўлмаган тенгламалар системасидан иборат бўлиб қолади. Демак, масаланинг айнимаган жоиз режаси $m+n-1$ та мусбат элементларни ўз ичига олади.

Шундай қилиб, транспорт масаласининг жоиз режаси бирор усул билан топилган бўлса, (x_{ij}) – матрицанинг $m+n-1$ та элементлари мусбат бўлиб, қолганлари нолга тенг бўлади. Агар транспорт масаласининг шартлари ва унинг жоиз режаси юқоридаги жадвал кўринишида берилган бўлса, нолдан фарқли x_{ij} – лар жойлашган катаклар «банд катаклар», қолганлари «бўш катаклар» дейилади.

Агар банд катакларни вертикал ёки горизонтал кесмалар билан туташтирилганда ёпиқ кўпбурчак ҳосил бўлса, бундай ҳол циклланиш дейилади ва ечим базис ечим бўлмайди. Демак, бирорта ечим базис ечим бўлиши учун банд катаклар сони $m+n-1$ та бўлиб циклланиш рўй бермаслиги керак.

Шимолий-ғарб бурчак усули. Транспорт масаласи жадвал кўринишида берилган бўлсин. Йўл харажатларини ҳисобга олмай, B_1 истеъмолчининг талабини A_1 таъминотчи ҳисобига қондиришга киришамиз. Бунинг учун a_1 ва b_1 юк бирликларидан кичигини (A_1,B_1) катакнинг чап пастки бурчагига ёзамиз. Агар $a_1 < b_1$ бўлса, B_1 нинг эҳтиёжини тўла қондириш учун (A_2,B_1) катакка етишмайдиган юк бирлигини A_2 дан олиб ёзамиз ва ҳ.қ. Бу жараённи (A_m,B_n) катакка етгунча давом эттирамиз. Агар (5) шарт ўринли бўлса, бу усулда тузилган ечим, албатта, таянч ечим бўлади.

Қуйидаги мисолда шимолий-ғарб бурчак усулидан фойдаланиб, транспорт масаласининг бошланғич ечими топилган:

Таъминотчилар	*Истеъмолчилар*					*Захира ҳажми*
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7	4	1	4	100
A_2	2 10	7 15	10	6	11	250
A_3	8	5 50	3 10	2 50	2	200
A_4	11	8	12	16 50	13 25	300
Талаб ҳажми	200	200	100	100	250	

Минимал харажат усули. Бу усулда бошланғич жоиз ечим қуриш учун аввал йўл харажати энг кичик бўлган катакка $\boldsymbol{a_i}$ ва $\boldsymbol{b_j}$ - лардан кичиги ёзилади ва кейинги энг кичик қийматли катакка ўтилади ва ҳ.к. Бу усулда тузилган бошланғич ечимни бузилмаслик ва циклланишга текшириш шарт.

Қуйидаги мисолда минимал харажат усули билан бошланғич ечим топилган.

Таъминот-чилар	*Истеъмолчилар*					*Захира ҳажми*
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1 10	4	100
A_2	2 200	7 50	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2 20	200
A_4	11	8 150	12 10	16	13 5	300
Талаб ҳажми	200	200	100	100	250	

Оптимал ечим қуришнинг потенциаллар усули

Теорема. Агар транспорт масаласининг $\boldsymbol{X^*=(x^*_{ij})}$ ечими оптимал бўлса, унга қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи **m+n** та сонлар системаси мос келади:

$X^*_{ij} > 0$ лар учун $U^*_i + V^*_j = C_{ij}$

$X^*_{ij} = 0$ лар учун $U^*_i + V^*_j \pounds C_{ij}$

$i=1,2,\ldots,m;$ $j=1,2,\ldots,n.$

U^*_i ва V^*_j сонлар мос равишда «таъминотчи ва истеъмолчиларнинг потенциаллари» дейилади.

Бу теоремага кўра бошланғич таянч ечим оптимал бўлиши учун қуйидаги икки шарт бажарилиши керак:

а) ҳар бир банд катак учун мос потенциаллар йиғиндиси шу катакдаги йўл харажати қийматига тенг бўлиши керак:

$$U^*_i + V^*_j = C_{ij} \qquad (6)$$

б) ҳар бир бўш катак учун мос потенциаллар йиғиндиси шу катакдаги йўл харажати қийматидан катта бўлмаслиги керак:

$$U^*_i + V^*_j \leq C_{ij} \qquad (7)$$

Агар камида битта бўш катак учун (7) шарт бажарилмаса, кўрилаётган ечим оптимал бўлмайди ва бу ечимни базисга (7) шарт бузилган катакдаги номаълумни киритиш билан яхшилаш мумкин. Шундай қилиб, навбатдаги таянч ечимни оптималликка текшириш учун аввал (6) шарт ёрдамида потенциаллар системаси қурилади ва сўнгра (7) шартнинг бажарилиши текширилади.

Потенциаллар усулининг алгоритми.

1. Бошланғич базис ечимни қуриш;

2. (6) шарт асосида потенциал тенгламалар системасини қуриш; бунда $\boldsymbol{m+n-1}$ та банд катак учун $\boldsymbol{m+n}$ та чизиқли тенглама ҳосил бўлади. Номаълумлар сони тенгламалар сонидан биттага ортиқ бўлгани учун битта номаълум эркли бўлиб, унга ихтиёрий қиймат, масалан, нол қиймат бериб, қолганлари мос тенгламалардан топилади;

3. Бўш катаклар учун (7) шарт текширилади;

а) бу шарт барча бўш катаклар учун бажарилса, ечим оптимал бўлади ва ечиш жараёни тугайди;

б) акс ҳолда ечим оптимал бўлмайди ва кейинги жоиз ечимга ўтишга киришилади;

4. Кейинги базис ечимга ўтиш учун бўш катакнинг ўнг паст бурчагига қийматлар ёзиб чиқилади ва бу қийматларнинг энг каттасига мос келган катакча, яъни қуйидаги шартни қаноатлантирган (A_l, B_k) катакча тўлдирилади ($\boldsymbol{x_{lk}}$ номаълум базисга киритилади) $\boldsymbol{x_{lk}}=\theta$ деб фараз қилиб $\boldsymbol{(A_l, B_k)}$, катакчага θ киритилади.

$$\Delta_{ij} = U_i + V_j - C_{ij}$$

$$\max_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij} = \Delta_{lk}$$

Сўнгра соат стрелкаси бўйича ҳаракат қилиб, тўлдирилган катакчаларга тартиб билан «-θ» ва «+θ» белгилари қўйиб борилади. Натижада ёпиқ ***K*** контур ҳосил бўлади.

$$\boldsymbol{K=K^{-}UK^{+}}$$

Бу ерда $\boldsymbol{K^{-}}$ ва $\boldsymbol{K^{+}}$ - «-θ» ва «+θ» белгиларни ўз ичига олувчи ярим контурлар.

Қуйидаги формула орқали θ нинг сон қиймати топилади

$$q = \min_{x_{ij} \in K^{-}} x_{ij} = x_{pq}$$

5. Янги таянч ечим ҳисобланади:

$$\left.\begin{aligned}
&x'_{lk} = q, \\
&x'_{pq} = 0, \\
&x'_{ij} = x_{ij}, \quad агар \quad x_{ij} \notin K, \\
&x'_{ij} = x_{ij} + q, \quad агар \quad x_{ij} \in K^{+}, \\
&x'_{ij} = x_{ij} - q, \quad агар \quad x_{ij} \in K^{-},
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Бу жараён чекли сон марта қайтарилгандан сўнг, албатта, оптимал ечим ҳосил бўлади. Бу алгоритмни юқоридаги мисолда батафсил кўриб чиқамиз.

Охирги жадвални қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз.

1-жадвал

b_j / a_i	200	200	100	100	250	U_i
100	10 -16	7 -8	4 -1	1 100	4 0	0
250	2 200	7 50	10 1	6 q 3	11 1	8
200	8 -16	5 -8	3 -2	2 -3	2 200	-2
300	11 -8	8 150	12 100	16 -6	13 50	9
V_j	-6	-1	3	1	4	q =50

Бу жадвалдан кўринадики ундаги тўлдирилган катакчалар сони **$n+m-1$** тадан кам, яъни **$n+m-2$** та. Шунинг учун (**A_1,B_5**) катакчага 0 киритиб, уни тўлдирилган катакчага айлантирамиз. Сўнгра тўлдирилган катакчалар учун потенциал тенгламалар системасини тузамиз:

$u_1+v_4=1;$	$u_4+v_2=8;$
$u_1+v_5=4;$	$u_4+v_3=12;$
$u_3+v_5=2;$	$u_2+v_2=7;$
$u_4+v_5=13;$	$u_2+v_1=2.$

Бу системада **$u_1=0$** деб қабул қилиб, қолган потенциалларни бирин кетин топамиз: **$U=(0;8;-2;9)$; $V=(-6;-1;3;1;4)$.**

Ҳар бир бўш катакча учун

$$D_{ij} = U_i + V_j - C_{ij}$$

катталикни ҳисоблаб, уни бўш катакчанинг пастки ўнг бурчагига ёзамиз:

$$\max_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij} = \Delta_{24} = 3.$$

бўлганлиги сабабли (**A_2,B_4**) катакчага q сон киритамиз ва **(A_1,B_4), (A_1,B_5), (A_4,B_5), (A_4,B_2), (A_2,B_2)** катакчаларни ўз ичига олувчи ёпиқ **K** контур тузамиз.

$$K=K^{-}UK^{+}$$

Бу ерда

$(A_1,B_4), (A_4,B_5), (A_2,B_2)\, \hat{I}\, K^{-}$,

$(A_1,B_5), (A_4,B_2), (A_2,B_4)\, \hat{I}\, K^{+}$,

$$q = \min_{x_{ij}\in K^{-}} x_{ij} = \min(100,50,50) = 50.$$

q нинг сон қиймати топилгач, базис ечимни (6) муносабатлар ёрдамида алмаштирамиз ва янги базис режани топамиз.

Янги базис режани қуйидаги жадвалга жойлаштирамиз.

2-жадвал

b_j / a_i	200	200	100	100	250	U_i
100	10 -13	7 -5	4 2	1 50	4 50	0
250	2 200	7 0	10 1	6 50	11 -2	5
200	8 -13	5 -5	3 1	2 -3	2 200	-2
300	11 -14	8 200	12 100	16 -9	13 -3	6
V_j	-3	2	6	1	4	q =0

Юқоридаги усул билан потенциаллар системасини тузамиз ва уни ечиб, топамиз:

$U=(0;5;-2;6)$,

$V=(-3;2;6;1;4)$.

Барча бўш катакчалар учун:

$D_{ij} = U_i + V_j - C_{ij}$

ни ҳисоблаймиз. 2- жадвалдан кўринадики:

$$\max_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij} = \Delta_{13} = 2.$$

Шунинг учун (A_1,B_3) катакчага θ ни киритамиз ва жадвалда кўрсатилган ёпиқ К контур тузамиз. Сўнгра:

$$q = \min_{x_{ij}\in K^-} x_{ij} = 0.$$

эканини аниқлаймиз. Топилган янги базис ечимни қуйидаги жадвалга жойлаштирамиз:

3-жадвал

b_j / a_i	200	200	100	100	250	U_i
100	10 -13	7 -7	4 q	1 50	4 50	0
250	2 200	7 -2	10 -1	6 50	11 -2	5

200	*8* *-13*	*5* *-7*	*3* *-9*	*2* *-3*	*2* *200*	*-2*
300	*11* *-6*	*8* *200*	*12* *100*	*16* *-7*	*13* *-1*	*8*
V_j	*-3*	*0*	*4*	*1*	*4*	

3-жадвалда келтирилган базис ечим оптимал ечим бўлади, чунки барча бўш катакчаларда $\Delta_{ij} \le 0$.

Шундай қилиб, учинчи циклда қуйидаги оптимал ечимга эга бўлдик:

$x_{14}=50;$ $x_{15}=50;$
$x_{21}=200;$ $x_{24}=50;$
$x_{35}=200;$ $x_{42}=200;$ $x_{43}=100;$
$Y_{min}=50+4\cdot50+2\cdot200+6\cdot50+2\cdot200+8\cdot200+12\cdot100=4150.$

Очиқ моделли транспорт масаласи

Агар талаб ва таклифларнинг умумий миқдорлари тенг бўлмаса, яъни

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

шарт ўринли бўлса у ҳолда масала «очиқ моделли транспорт масаласи» дейилади. Очиқ моделли масаланинг оптимал ечимини топиш учун ёпиқ моделга келтирилади ва потенциаллар усули қўлланилади.

Очиқ моделли масалани ёпиқ моделга келтириш учун қўшимча «сохта» таъминотчи ёки истеъмолчи киритилади, уларнинг захираси ёки талаб ҳажми қуйидагича топилади:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \quad \text{ёки} \quad b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Сохта таъминотчидан реал истеъмолчиларга ёки реал таъминотчилардан сохта истеъмолчиларга амалда юк ташилмагани учун йўл харажатлари нолга тенг қилиб олинади ***($C_{i,n+1}=0; C_{m+1,j}=0$).***

Натижада ёпиқ моделли масала ҳосил бўлади.

3-мисол. Берилган очиқ моделли масалани ёпиқ моделли масалага айлантиринг.

Таъми-нотчилар	*Истеъмолчилар*						*Захира ҳажми*
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	10	7	4	1	4	0	100
A_2	2	7	10	6	11	0	250
A_3	8	5	3	2	2	0	200
A_4	11	8	12	16	13	0	300
Талаб ҳажми	200	150	100	100	200	100	

Ечиш. Берилган очиқ моделли масалада $\sum a_i = 850 > \sum b_j = 750$ шарт ўринли бўлгани учун унга қўшимча B_6 устунни киритамиз ва унга мос келувчи «сохта» талаб b_6 ни $b_6=(100+250+200+300)-(200+150+100+100+200)=100$ га тенг деб қабул қиламиз. Ҳосил бўлган ёпиқ моделли транспорт масаласини ечишни талабаларга ҳавола қиламиз.

Хос транспорт масаласи ва уни ечиш учун е- усул

Транспрот масаласининг таянч режасидаги мусбат компоненталар сони $k<n+m-1$ бўлса, бу режа хос режа бўлади. Бундай режани тўғрилаш учун унга $n+m-1-k$ та нол элемент киритиш мумкин. Киритилган нол элементларга мос векторлар ўзаро чизиқли боғлиқ бўлмаган векторлар бўлиши керак. Бунга эришиш учун қуйидаги e-усулни қўллаш мумкин.

е- усул. Шимолий-ғарбий бурчак усули билан бошланғич таянч режаси топилишини эслаймиз. Агар 1- қадамда $x_{21}=b_1-a_1=a_2$ бўлса, x_{31} ҳам, x_{22} ҳам мусбат сон бўла олмайди. Ҳар вақт бундай вазият рўй берганда таянч режадаги базис ўзгарувчилар сони камая боради. Бундай ҳол одатда, транспорт масаласидаги бир неча a_i-нинг йиғиндиси (ҳаммаси эмас) бир неча b_j нинг йиғиндисига тенг бўлганда бажарилиши мумкин. Ана шундай ҳол ўринли бўлган транспорт масаласини хос транспорт масаласи деб атаймиз.

Хослик ҳолатининг олдини олиш учун a_i ва b_j лардан тузилган хусусий йиғиндиларнинг ўзаро тенг бўлмаслигига эришиш, бунинг учун эса a_i ва b_j ларнинг қийматини бирор кичик сонга ўзгартириш керак. Масалан, етарлича кичик сон $e>0$ ни олиб, a_i ва b_j ларни қуйидагича ўзгартирамиз, яъни e- масала тузамиз:

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{a_i} = a_i + e, & (i = \overline{1, m}), \\ \overline{b_j} = b_j, & (j = \overline{1, n}), \\ \overline{b_n} = b_n + me, & \end{array}\right\} \qquad (7)$$

е етарлича кичик сон бўлганлиги сабабли ҳосил бўлган масаланинг ***X(e)*** оптимал режаси ***e=0*** да берилган масаланинг оптимал ечими бўлади.

Мисол. Берилган хос транспорт масаласи учун ***е***- масалани тузинг.

a_i \ b_j	3	4	5	3
4	4	5	6	3
3	3	2	7	6
8	5	9	1	3

Ечиш. (7) муносабатлардан фойдаланиб, қуйидаги ***е***- масалани ҳосил қиламиз:

a_i \ b_j	3	4	5	3+3e
4+e	4	5	6	3
3+e	3	2	7	6
8+e	5	9	1	3

Ушбу масалани ечиб*,* ***X(e)*** режани ҳамда берилган масаланинг оптимал ечими ***X*** ни топишни талабаларга ҳавола қилинади.

Таянч сўз ва иборалар

Ёпиқ моделли транспорт масаласи, очиқ моделли транспорт масаласи, банд катакчалар, бўш катакчалар, харажатлар матрицаси, ёпиқ контур, циклланиш, потенциаллар, потенциал тенглама, «шимолий-ғарб бурчак» усули, «минимал харажат» усули.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Транспорт масаласининг математик моделини ёзинг.
2. Очиқ ва ёпиқ моделли транспорт масалаларига изоҳ беринг.
3. Ёпиқ моделли транспорт масаласининг ечими мавжуд бўлишини зарур ва етарлилик шарти нимадан иборат?
4. Потенциаллар нима ва қандай маънога эга?
5. Потенциал тенглама нима ва у қандай ёзилади?
6. Транспорт масаласи ечимининг оптималлик шарти нимадан иборат?
7. Очиқ моделли транспорт масаласи қандай қилиб ёпиқ моделли масалага айлантирилади?
8. Транспорт масаласи чекламаларидан тузилган матрицанинг ранги нимага тенг?
9. Транспорт масаласи ечимидаги 0 дан фарқли бўлган ўзгарувчилар сони нечта бўлиши мумкин?
10. Қайси ҳолда транспорт масаласининг ечими бутун сонли бўлади?
11. «Шимолий-ғарб бурчак» усулининг ғояси қандай?
12. «Минимал харажат» усулининг ғояси қандай?
13. Сохта истеъмолчининг маҳсулотга бўлган талаби қанча бўлади?
14. Циклланиш нима ва у қандай ҳолларда рўй беради?
15. *e*- усулнинг моҳияти нимадан иборат?

Мустақил ечиш учун масалалар

1. Берилган масалаларнинг математик моделини тузинг.

а) 3 та A,B,C темир йўл станцияларида мос равишда 80,70 ва 50 вагонлар захираси мавжуд. Бу вагонларни ғалла ортишга шайланган 4 та пунктга юбориш керак. Жумладан, 1- пунктга 60 та, 2-

пунктга 45 та, 3- пунктга 65 ва 4- пунктга 30 та вагон керак. Вагонларни тақсимлаш учун сарф қилинадиган харажатлар матрицаси қуйидаги кўринишда берилган:

$$C=\begin{pmatrix}14 & 13 & 16 & 11\\ 12 & 17 & 14 & 18\\ 15 & 12 & 11 & 13\end{pmatrix}$$

Вагонларни истеъмолчиларга оптимал тақсимлаш режасини тузинг.

б) Тўрт хил иш майдонига уч хил турдаги ускуналарни оптимал тақсимлаш талаб қилинади. Ускуналар миқдори мос равишда 45,30,50 бирликда бўлиб, иш майдонларининг уларга бўлган талаблари мос равишда 20,40,45,20 бирликдан иборат.

Ҳар бир ускунанинг тайин иш майдонидаги меҳнат унумдорлиги қуйидаги матрица билан характерланади.

$$C=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3 & 5\\ 3 & 6 & 2 & 2\\ 1 & 5 & 4 & 7\end{pmatrix}$$

2. Берилган транспорт масалаларининг жоиз режаларини топинг.

а)

a_i \ b_j	*150*	*150*	*100*
200	*1*	*3*	*4*
150	*4*	*3*	*1*
50	*3*	*1*	*4*

б)

a_i \ b_j	*150*	*150*	*150*	*50*
170	*3*	*7*	*6*	*9*
180	*9*	*6*	*3*	*5*
150	*6*	*8*	*9*	*3*

3. 2-масаланинг оптимал режасини потенциаллар усули билан топинг.

4. Очиқ моделли транспорт масалаларини ечинг.

а)

a_i \ b_j	150	150	150
110	7	5	8
120	11	9	10
120	6	6	7

б)

a_i \ b_j	225	255	300
250	5	7	8
210	8	9	10
240	9	10	5

5. Хос транспорт масалаларини *е*- усулни қўллаб, ечинг.

а)

a_i \ b_j	200	250	200	150
200	5	9	8	7
250	6	7	8	9
350	9	8	7	6

б)

a_i \ b_j	12	18	20	10
12	1	3	5	7
18	2	4	6	1
30	6	7	3	5

Тестлар

1. Транспорт масаласига доир қуйидаги тасдиқлардан қайси бири тўғри?

Жавоблар:

А. Ихтиёрий Т- масаласи чекли ечимга эга.
В. Ихтиёрий Т- масаласи ягона ечимга эга.
С. Ихтиёрий очиқ моделли Т- масаласи чексиз кўп ечимга эга.
Д. Ихтиёрий ёпиқ моделли Т- масаласи чекли ечимга эга.
Е. Ҳамма жавоблар нотўғри.

2. Қуйидаги Т- масаласи мақсад функциясининг оптимал қийматини топинг.

b_j / a_i	*14*	*16*	*15*
15	*4*	*5*	*3*
17	*2*	*3*	*4*
13	*3*	*4*	*2*

Жавоблар:

А. 217. **В.** 137. **С.** 134. **Д.** 126. **Е.** 125.

3. Қуйидаги ифодалардан қайси бири Т- масаласи ечимининг оптималлик шартини ифодалайди?

Жавоблар:

А. $U^*_i + V^*_j = C_{ij}$ (x_{ij}³0);
$U^*_i + V^*_j$ £ C_{ij} ($x_{ij}=0$).

В. $U^*_i + V^*_j = C_{ij}$ (x_{ij}³0);
$U^*_i + V^*_j$ ³ C_{ij} ($x_{ij}=0$).

С. $U^*_i + V^*_j$ £ C_{ij} (x_{ij}³0);
$U^*_i + V^*_j$ ³ C_{ij} ($x_{ij}=0$).

Д. $U^*_i + V^*_j = C_{ij}$ (x_{ij}³0);
$U^*_i + V^*_j < C_{ij}$ ($x_{ij}=0$).

Е. $U^*_i + V^*_j = C_{ij}$ (x_{ij}³0);
$U^*_i + V^*_j > C_{ij}$ ($x_{ij}=0$).

4. Т-масаласи учун қайси тасдиқ тўғри?

Жавоблар:

А. Очиқ моделли Т-масаласи ечимга эга эмас.

В. Ёпиқ моделли транспорт масаласи чекли ечимга эга бўлмаслиги ҳам мумкин.

С. Ихтиёрий очиқ моделли Т-масаласини ёпиқ моделли масалага келтириш мумкин.

Д. Очиқ моделли Т-масаласида циклланиш ҳолати рўй бериши мумкин.

Е. Ихтиёрий ёпиқ моделли Т-масаласи жоиз режага эга бўлади.

5. Қуйидаги Т- масаласининг бошланғич жоиз режаси қандай усул билан топилган?

a_i \ b_j	*28*	*19*	*23*
20	^{4} *20*	^{5}	^{6}
25	^{3} *8*	^{3} *17*	^{1}
25	^{8}	^{5} *2*	^{6} *23*

Жавоблар:

А. «Шимолий-ғарб бурчак» усули.

В. «Устундаги минимал харажат» усули.

С. «Қатордаги минимал харажат» усули.

Д. «Матрицадаги минимал харажат» усули.

Е. Тўғри жавоб йўқ.

6. Берилган транспорт масаласида энг кам транспорт харажати қандай?

a_i \ b_j	*40*	*60*	*70*
90	^{4}	^{5}	^{6}
30	^{3}	^{3}	^{1}
50	^{8}	^{5}	^{6}

Жавоблар:
А. 900. **В.** 730. **С.** 650. **Д.** 680. **Е.** 620.

7. Транспорт масаласининг берилган жоиз режаси ҳақида тўғри таъкидни кўрсатинг.

b_j \ a_i	40	60	70
90	^{5}	^{5} 20	^{5} 70
30	^{4}	^{2} 30	^{3}
50	^{4} 40	^{4} 10	^{8}

Жавоблар:
А. Берилган жоиз режа оптимал режадан иборат.
В. Берилган жоиз режа оптимал эмас.
С. Масаланинг оптимал ечими мавжуд эмас.
Д. Жоиз режа оптимал эмас, уни бошқа жоиз режага алмаштириш керак.
Е. Тўғри жавоб йўқ.

8. Агар транспорт масаласининг ихтиёрий $X^*=(x^*_{ij})$ режаси учун $x^*_{ij}>0$ да $U_i + V_j = C_{ij}$ ва $x^*_{ij}=0$ да $U_i + V_j$ £ C_{ij} муносабатлар ўринли бўлса, у ҳолда қуйидаги таъкидлардан қайси бири тўғри?

Жавоблар:
А. X^* - жоиз режа бўлади.
В. X^* - базис режа бўлади.
С. X^* - оптимал режа бўлади.
Д. Масаланинг оптимал ечими мавжуд бўлмайди.
Е. Тўғри жавоб йўқ.

9. Қуйидаги Т- масаласининг бошланғич жоиз режаси қандай усулда топилганда унинг оптимал ечими бир босқичда чиқади?

b_j / a_i	30	18	42
20	5	5	5
20	4	2	6
50	4	4	5

Жавоблар:

А. «Шимолий-ғарб бурчак» усули.

В. «Устундаги минимал харажат» усули.

С. «Қатордаги минимал харажат» усули.

Д. «Матрицадаги минимал харажат» усули.

Е. Ҳар қандай усулда ҳам масаланинг оптимал ечими бир босқичда чиқмайди.

10. Транспорт масаласининг чегараловчи шартларини ифодаловчи тенгламалар системасининг ранги *r* нимага тенг?

Жавоблар:

А. $r=m+n$. **В.** $r<m+n$. **С.** $r>m+n$. **Д.** $r=m+n-1$.
Е. $r=m+n+1$.

Назорат иши вариантлари

1-вариант

1. Қуйидаги чизиқли программалаш масаласини график усулда ечинг.

$$F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, \quad (\min)$$

$$\begin{cases} 11x_1 + 4x_2 \geq 44; \\ 8x_1 + 7x_2 \leq 56; \\ 6x_1 + 11x_2 \leq 66; \\ x_1 + 9x_2 \geq 18; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2. Корхона 4 хил маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун хом ашё, ишчи кучи, ва ускуналардан иборат ресурслардан фойдаланади. Ҳар бир маҳсулотнинг бир бирлигини ишлаб чиқариш учун сарфланадиган ресурслар меъёри, захираси ва тайёр маҳсулотлардан олинадиган даромад қуйидаги жадвалда берилган:

Ресурслар	*Маҳсулот*				*Ресурслар ҳажми*
	А	*В*	*С*	*Д*	
Хом ашё(кг)	*3*	*5*	*2*	*4*	*60*
Ишчи кучи(киши-соат)	*4*	*7*	*9*	*15*	*200*
Ускуналар қуввати (станок-соат)	*2*	*7*	*4*	*8*	*64*
Даромад	*30*	*25*	*56*	*46*	

Барча маҳсулотларни сотишдан олинадиган даромад энг кўп бўлиши учун корхона қайси хил маҳсулотдан қанча миқдорда ишлаб чиқариши керак?

3. Қуйидаги жадвалда берилган транспорт масаласини ечинг.

a_i \ b_j	*100*	*80*	*280*	*80*
180	7	3	5	2
140	4	1	6	7
200	1	9	4	3

2-вариант

1.Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, \quad (\min).$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \geq 30; \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 24; \\ x_1 + 2x_2 \leq 10; \\ 3x_1 + 17x_2 \leq 51; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2. Мебель фабрикаси стол, стул, жавон ва шкафлар ишлаб чиқаради. Бу маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун икки хил тахта ишлатилиб, фабрика ихтиёрида 190 м^3 1-хил ва 900 м^3 2-хил тахта мавжуд. Бундан ташқари 1970 киши-соатдан иборат меҳнат ресурслари ҳам берилган. Қуйидаги жадвалда маҳсулот тайёрлашдаги ресурслар сарфи ва маҳсулот сотишдан олинадиган фойда келтирилган.

Маҳсулотлар *Ресурслар*	*Бирлик маҳсулотга сарфланиш меъёри*			
	Стол	*Стул*	*Жавон*	*Шкаф*
1-хил тахта	*2*	*4*	*6*	*7*
2-хил тахта	*5*	*8*	*8*	*5*
Меҳнат фонди (киши-соат)	*10*	*10*	*20*	*8*
Фойда	*30*	*25*	*28*	*35*

Максимал фойда келтирувчи ишлаб чиқариш режасини топинг.

3. Қуйидаги жадвалда берилган транспорт масаласини ечинг.

b_j / a_i	*400*	*200*	*400*	*600*	*500*
300	3	1	2	4	5
900	2	3	4	3	2
800	5	4	2	1	3

3-вариант

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = 7x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \quad (\min).$$

$$\begin{cases} 15x_1 + 4x_2 \geq 60; \\ 7x_1 + 8x_2 \geq 56; \\ 3x_1 + 16x_2 \geq 48; \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 84; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2. Корхона 4 хил маҳсулот ишлаб чиқаришда чегараланган ҳажмдаги пўлат, рангли металл ва токарлик станокларидан фойдаланади. Қуйидаги жадвалда маҳсулот ишлаб чиқаришга оид маълумотлар берилган.

Ресурслар	*Битта маҳсулотга сарфланиш меъёри*				*Ресурслар ҳажми*
	A	*B*	*C*	*Д*	
Пўлат (кг)	*4*	*3*	*8*	*10*	*490*
Рангли металл (кг)	*4*	*7*	*5*	*6*	*3000*
Станоклар қуввати (станок-соат)	*7*	*9*	*9*	*6*	*720*
Фойда	*12*	*9*	*7*	*15*	

Корхонага максимал фойда келтирувчи ишлаб чиқариш режасини топинг.

3. Қуйидаги жадвалда берилган транспорт масаласини ечинг.

b_j / a_i	*300*	*500*	*550*	*650*
400	*4*	*2*	*3*	*6*
700	*2*	*5*	*6*	*3*
500	*5*	*2*	*4*	*5*

4-вариант

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = 4x_1 + x_2 \to \max, \quad (\min).$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 3; \\ x_1 - x_2 \leq 3; \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18; \\ x_2 \leq 18; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2. Фабрика 3 хил типдаги ускуналарда ишлов талаб қилинадиган 4 хил газламалар ишлаб чиқаради. Ҳар бир тип ускунанинг қуввати (станок-соатда) ва бир бирлик газламага ишлов бериш вақти, ҳамда олинадиган фойда қуйидаги жадвалда берилган.

Ускуналар	*Газламалар бирлигига ишлов бериш учун сарфланадиган вақт нормаси*				*Ускуна-лар қуввати*
	1	*2*	*3*	*4*	
I тип	*3*	*5*	*2*	*4*	*1840*
II тип	*4*	*3*	*5*	*2*	*1200*
III тип	*2*	*1*	*3*	*5*	*2100*
Фойда	*4*	*2*	*4*	*5*	

Фабрикага максимал фойда келтирувчи ишлаб чиқариш режаси топилсин.

3. Қуйидаги жадвалда берилган транспорт масаласини ечинг.

b_j / a_i	*150*	*200*	*280*	*270*
350	*5*	*4*	*3*	*1*
250	*3*	*4*	*3*	*4*
300	*5*	*2*	*7*	*5*

5-вариант

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = 3x_1 + 6x_2 \to \max, \quad (\min).$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 3; \\ 5x_1 + 4x_2 \le 40; \\ -x_1 + 4x_2 \ge 4; \\ 3x_1 + x_2 \ge 5; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

2. Савдо ташкилоти 4 гуруҳ товарларни сотишда максимал фойда келтирувчи товар айирбошлаш режаси ва ҳажмини аниқлаш керак. Товарларни сотишда 3 хил ресурслар: иш вақти фонди-кўпи билан 1100 киши-соат, савдо заллари майдони-кўпи билан 900 $м^2$ ва муомала харажатлари-кўпи билан 145 шартли пул бирлигида (ш.п.б.) ишлатиши мумкин. Бир бирлик товарларни сотиш учун ресурсларнинг сарфланиш нормаси ва олинадиган фойда қуйидаги жадвалда берилган .

Ресурслар	*1 бирлик товарларни сотишдаги сарф-харажатлар*			
	1	*2*	*3*	*4*
Иш вақти фонди(киши-соат)	*3*	*5*	*4*	*3*
Савдо заллари ($м^2$)	*4*	*3*	*2*	*4*
Муомала харажатлари (ш.п.б.)	*2*	*2*	*5*	*2*
Фойда(ш.п.б.)	*7*	*6*	*5*	*8*

3. Қуйидаги жадвалда берилган транспорт масаласини ечинг.

a_i \ b_j	*70*	*60*	*110*	*50*
90	*5*	*7*	*1*	*2*
80	*3*	*4*	*2*	*5*
100	*5*	*2*	*3*	*1*

6-вариант

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = x_1 + 10x_2 \to \max, \quad (\min).$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 20; \\ -2x_1 + x_2 \ge 2; \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 15; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

2. 4 хил турдаги компот ишлаб чиқариш учун олма, олча ва олхўри ишлатилади. Қуйидаги жадвалда турли хилдаги компотлар бирлигини тайёрлаш учун мевалар сарфи, меваларнинг мавжуд захираси ва турли компотлар бирлигининг баҳоси берилган.

Мевалар	*Компот турлари*				*Мевалар захираси*
	1	*2*	*3*	*4*	
Олма,(кг)	*5*	*4*	*3*	*5*	*1500*
Олча,(кг)	*4*	*6*	*7*	*4*	*1200*
Олхўри,(кг)	*5*	*5*	*7*	*7*	*1100*
1 бирлик компот нархи(ш.п.б.)	*4*	*5*	*4*	*5*	

Маҳсулот сотишдан келадиган тушум максимал бўлишини таъминловчи режани топинг.

3. Қуйидаги жадвалда берилган транспорт масаласини ечинг.

a_i \ b_j	*800*	*300*	*400*
600	2	3	4
300	1	2	3
200	4	6	2
420	3	5	3

7-вариант

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = 4x_1 + x_2 \to \max, \quad (\min).$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 10x_2 \le 90; \\ x_1 + 2x_2 \ge 10; \\ 2x_1 + x_2 \ge 10; \\ x_1 \le 6; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

2. Корхона 4 хил A_1, A_2, A_3, A_4 маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун 3 хилдаги хом ашёдан фойдаланади. Бир дона маҳсулотни ишлаб чиқариш учун сарфланадиган хом ашё меъёри, хом ашёлар захираси ва бир дона маҳсулотни сотишдан олинадиган даромад қуйидаги жадвалда берилган:

Хом ашё турлари	*1 та маҳсулотга сарфланадиган хом ашё меъёри*				*Хом ашё захираси*
	A_1	*A_2*	*A_3*	*A_4*	
1	*7*	*4*	*4*	*12*	*1300*
2	*2*	*3*	*4*	*1*	*800*
3	*3*	*2*	*5*	*10*	*600*
Даромад	*12*	*5*	*15*	*10*	

Корхонага максимал даромад келтирувчи ишлаб чиқариш режасини топинг.

3. Қуйидаги жадвалда берилган транспорт масаласини ечинг.

a_i \ b_j	*250*	*300*	*350*	*300*
350	2	3	4	3
300	5	3	1	2
550	2	1	3	4

8-вариант

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = x_1 + x_2 \to \max, \quad (\min).$$

$$\begin{cases} 12x_1 + x_2 \le 10; \\ x_1 + x_2 \le 3; \\ x_1 + x_2 \ge 7; \\ 6x_1 + x_2 \ge 6; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

2. Тикувчилик фабрикасида 4 хил маҳсулот тайёрлаш учун 3 хил газмол ишлатилади. ҳар бир маҳсулотнинг бир бирлигини тайёрлаш учун зарур бўлган газмол миқдори, маҳсулотларнинг баҳоси ҳамда фабрикадаги газмоллар захираси ҳақидаги маълумотлар қуйидаги жадвалда келтирилган.

Газмоллар	*1 та маҳсулот учун сарфланадиган газмол меъёри*			*Газмоллар захираси*
	1	*2*	*3*	
1	*1*	-	*2*	*18*
2	-	*1*	*3*	*21*
3	*4*	*2*	-	*80*
Маҳсулот баҳоси	*20*	*20*	*40*	

Фабрикада тайёрланган жами маҳсулотлар пул қийматини максималлаштирувчи ишлаб чиқариш режасини топинг.

3. Қуйидаги жадвалда берилган транспорт масаласини ечинг.

a_i \ b_j	*100*	*90*	*110*	*150*
120	2	5	4	6
130	3	11	3	2
170	3	10	3	2

9-вариант

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = -2x_1 + 5x_2 \to \max, \quad (\min).$$
$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14; \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30; \\ 3x_1 + 8x_2 \geq 24; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2. Кондитер фабрикасида 3 хил карамел ишлаб чиқариш учун 3 хил хом ашё ишлатилади. Хом ашёларнинг мавжуд захираси, 1 бирлик карамел ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган турли хом ашё миқдори ва фабриканинг карамел ишлаб чиқаришдан оладиган даромади қуйидаги жадвалда келтирилган.

Хом ашё	*Хом ашё захираси*			*Хом ашё захираси (тонна)*
	1	*2*	*3*	
1	*0.6*	*0.5*	*0.4*	*60*
2	*0.4*	*0.2*	*0.3*	*24*
3	*-*	*0.3*	*0.3*	*12*
Даромад	*14*	*12*	*13*	

Корхонанинг даромадини максималлаштирувчи ишлаб чиқариш режасини топинг.

3. Қуйидаги жадвалда берилган транспорт масаласини ечинг.

a_i \ b_j	*400*	*200*	*300*	*300*
500	1	2	2	4
200	2	4	3	4
500	3	3	3	5

10-вариант

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = 3x_1 + x_2 \to \max, \quad (\min).$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7; \\ 6x_1 + x_2 \leq 6; \\ x_1 + x_2 \geq 3; \\ 12x_1 + x_2 \geq 10; \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2. Корхона 4 хил А,В,С,Д маҳсулотлар ишлаб чиқаради. Маҳсулот ишлаб чиқариш даражаси хом ашё, материаллар, ускуналар каби ресурсларнинг чегараланган миқдорда мавжудлиги сабабли чеклагандир. Ишлаб чиқаришга оид қўшимча маълумотлар қуйидаги жадвалда берилган.

Ресурслар	*Маҳсулотлар бирлигига ресурсларнинг сарфланадиган меъёри*				*Ресурслар ҳажми*
	А	*В*	*С*	*Д*	
Хом ашё,(кг)	*2*	*3*	*1*	*4*	*300*
Материаллар,(кг)	*1*	*4*	*-*	*2*	*260*
Ускуна,(стан.-соат)	*3*	*2*	*1*	*1*	*300*
Маҳсулот баҳоси	*60*	*80*	*70*	*50*	

Жами ишлаб чиқарилган маҳсулотнинг умумий баҳосини максималлаштирувчи ишлаб чиқариш режасини топинг.

3. Қуйидаги жадвалда берилган транспорт масаласини ечинг.

a_i \ b_j	700	100	200	300
500	2	2	3	4
600	2	3	4	1
200	5	2	2	2

11-вариант

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = 2x_1 - 6x_2 \to \max, (\min).$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2; \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4; \\ x_1 + 2x_2 \leq 8; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0.$$

2. Корхонада икки хил А ва В маҳсулот ишлаб чиқаришда 3 хил хом ашё ишлатилади. Хом ашёлар захираси ишлаб чиқариладиган маҳсулот бирлигидан олинадиган фойда ҳамда маҳсулот бирлигини ишлаб чиқаришга сарф қилинадиган хом ашёлар миқдори (нормаси) қуйидаги жадвалда келтирилган.

Хом ашёлар \ Маҳсулотлар	A	B	Хом ашё захираси (кг)
I	12	4	48
II	4	4	32
III	3	12	24
Маҳсулот бирлигидан олинадиган фойда (ш.п. б.)	10	20	

Корхонага максимал фойда келтирувчи ишлаб чиқариш режасини аниқланг.

3. Қуйидаги жадвалда берилган транспорт масаласини ечинг.

a_i \ b_j	20	20	40
30	1	3	5
30	3	3	2
10	4	1	2

12-вариант

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = x_1 - x_2 \to \max, (\min).$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le -8, \\ x_1 + x_2 \le 5, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

2. Корхонада 4 хил *А,Б,В,Г* маҳсулотлар ишлаб чиқарилди. Бунинг учун 3 хил хом ашёдан фойдаланилади. Масаланинг қолган барча маълумотлари қуйидаги жадвалда келтирилган.

Хом ашёлар	Маҳсулот бирлигини ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган хом ашёлар миқдори				Хом ашё захираси (кг)
	А	В	С	Д	
I	2	1	1	4	300
II	1	5	3	0	120
III	3	0	6	1	360
Махсулот бирлигидан олинадиган фойда	12	15	6	12	

Корхонага максимал фойда келтирувчи ишлаб чиқариш режасини аниқланг.

3. Қуйидаги жадвалда берилган транспорт масаласини ечинг.

a_i \ b_j	60	60	50
50	2	3	2
70	2	4	5
60	6	5	7

13-вариант

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = 50x_1 + 30x_2 \to \max, (\min).$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2{,}5x_2 \le 400, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 360, \\ 9x_1 - 4x_2, \ \le 360, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

2. 4 хил хом ашёдан шундай аралашма тайёрлаш керакки, унинг таркибида *A* модда миқдори 26 бирликдан, *B* модда миқдори 30 бирликдан, *C* модда миқдори эса 24 бирликдан кам бўлмасин ҳамда аралашманинг баҳоси минимал бўлсин. Бир бирлик хом ашё таркибидаги турли моддалар миқдори ҳамда хом ашёлар нархи қуйидаги жадвалда келтирилган.

Таркибий моддалар	*Хом ашё бирлигидаги таркибий моддалар миқдори*				*Аралашма таркибий моддалар миқдори*
	I	*II*	*III*	*IV*	
A	1	1	-	4	26
B	2	-	3	5	30
C	1	2	4	6	24
Хом ашёлар нархи	5	6	7	4	

3. Қуйидаги жадвалда берилган транспорт масаласини ечинг.

b_j / a_i	120	40	200
180	2	3	4
60	5	3	1
80	2	1	4

14-вариант

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max, (\min).$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_2, \le 5, \\ 3x_1 \qquad \le 21, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

2. Фирмада 3 хил A,B,C маҳсулотлар ишлаб чиқарилади. Ишлаб чиқариладиган ҳар бир маҳсулотга 4 та ускунанинг ҳар бирида маълум вақт оралиғида қайта ишлов берилади. Масаланинг қолган маълумотлари қуйидаги жадвалда келтирилган.

Маҳсулотлар	*Маҳсулот бирлигини ишлаб чиқаришда ускуналарнинг сарф қилган вақти*				*Маҳсулот бирлигидан олинадиган фойда*
A	*1*	*3*	*1*	*2*	*3*
B	*6*	*1*	*3*	*3*	*6*
C	*3*	*3*	*2*	*4*	*4*
Ускуналарнинг вақт фонди	*84*	*42*	*21*	*42*	

Корхонага максимум фойда келтирувчи ишлаб чиқариш режасини тузинг.

3. Қуйидаги жадвалда келтирилган транспорт масаласини ечинг.

b_j / a_i	60	60	60
35	4	3	2
35	1	3	4
80	4	4	5

15-**вариант**

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = 4x_1 + 5x_2 \to \max(\min).$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 6x_2 \le 54, \\ 5x_1 + 8x_2 \ge 40, \\ 4x_2 \le 12, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

2. Фирма раҳбарияти чорвачиликни ривожлантириш учун 324 пул бирлиги миқдорида харажат қилинган. Ундан 180 пул бирлиги иш ҳақига, 144 пул бирлиги эса моддий харажатларга сраф қилинади. Қуйидаги жадвалда 1 центнер сут ва гўшт ишлаб чиқариш учун сарфланадиган харажатлар ва бошқа маълумотлар келтирилган.

Маҳсулотлар	*Меҳнат сарфи (пул бирлиги)*	*Моддий харажатлар*	*Маҳсулотлар нархи (пул бирлиги)*
Сут	*12*	*8*	*25*
Гўшт	*90*	*80*	*200*
Ресурслар захираси	*180*	*144*	

Чорвачилик маҳсулотлари ишлаб чиқариш режасини шундай тузингки, унда хўжаликнинг чорвачиликдан олинадиган даромади максимал бўлсин.

3. Қуйидаги жадвалда келтирилган транспорт масаласини ечинг.

b_j / a_i	500	275	225
350	2	3	4
300	5	4	2
250	1	2	5

16-**вариант**

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = 2x_1 + 7x_2 \to \max(\min).$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 \geq 35, \\ 3x_1 + 8x_2 \leq 24, \\ 10x_1 + 3x_2 \leq 30, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

2. Қуйидаги жадвалда келтирилган маълумотлар асосида қишлоқ хўжалиги моллари учун энг кам харажат сарф қилишга асосланган оптимал рационни аниқланг.

Озуқа моддалари	*Ем-хашак таркибидаги озуқа моддалари миқдори*			*Озуқа моддаларининг минимал нормаси*
	I	*II*	*III*	
A	*1*	*3*	*4*	*60*
B	*2*	*4*	*2*	*50*
C	*1*	*4*	*3*	*12*
Ем-хашак нархи (п.б.)	*9*	*12*	*10*	

3. Қуйидаги жадвалда берилган транспорт масаласини ечинг.

a_i \ b_j	*110*	*210*	*100*
175	*9*	*7*	*5*
125	*1*	*2*	*4*
140	*8*	*10*	*9*

17-**вариант**

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max, (\min).$$
$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \geq 30, \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ 3x_1 - 5x_2 \leq 15, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

2. Уч хил P_1, P_2, P_3 маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун тўрт хил S_1, S_2, S_3 ва S_4 хом ашё ишлатилади. Хом ашёлар захираси, ҳар бир маҳсулот бирлигининг ишлаб чиқаришда сарф қилинадиган турли хом ашёлар миқдори (нормаси) ва бошқа маълумотлар қуйидаги жадвалда келтирилган.

Маҳсулотлар / *Хом ашёлар*	P_1	P_2	P_3	*Хом ашёлар захираси (т)*
S_1	*4*	*2*	*1*	*150*
S_2	*6*	*0*	*2*	*170*
S_3	*0*	*2*	*4*	*100*
S_4	*8*	*7*	*0*	*200*
Маҳсулот баҳоси (п.б.)	*10*	*15*	*20*	

Ишлаб чиқариладиган маҳсулотларнинг пул ифодасини максималлаштирувчи ишлаб чиқариш режасини тузинг.

3. Қуйидаги транспорт масаласини ечинг.

a_i \ b_j	*200*	*200*	*200*
255	*5*	*9*	*2*
145	*2*	*5*	*6*
120	*1*	*2*	*3*

18-вариант

1. Қуйидаги масалани график усулда ечинг.

$$F = 7x_1 + 9x_2 \to \max, (\min).$$
$$\begin{cases} 7{,}5x_1 + 12x_2 \leq 90, \\ 9x_1 + 8x_2 \geq 72, \\ 11x_1 + 7x_2 \leq 77, \\ 5{,}5x_1 \qquad \leq 22, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

2. Цехнинг бир бўлими икки турдаги *A* ва *B* маҳсулот ишлаб чиқаради. Бунинг учун захираси 600 станок-соат бўлган ишлаб чиқариш ускуналари, захираси 300 тонна бўлган хом ашё, захираси 420 киши-соат бўлган меҳнат ресурслари ва захираси 450 кв/соат бўлган электроэнергия сарф қилинади. Ҳар бир маҳсулот бирлиги учун сарф қилинадиган ресурслар миқдори ҳамда маҳсулотлар нархи қуйидаги жадвалда келтирилган.

Ресурслар / *Маҳсулотлар*	*И/ч ускуналари*	*Хом ашё*	*Меҳнат (киши/соат)*	*Электроэнергия (кв/соат)*	*Маҳсулот нархи*
A	*4*	*2*	*2*	*3*	*30*
B	*3*	*1*	*3*	*2*	*20*
Ресурслар захираси	*300*	*300*	*420*	*450*	

Ишлаб чиқариладиган маҳсулотларнинг пул қийматини максимал бўлишини таъминловчи ишлаб чиқариш режасини аниқланг.

3. Қуйидаги жадвалда берилган транспорт масаласини ечинг.

b_j / a_i	*70*	*90*	*110*	*150*
120	2	5	4	6
130	3	11	3	2
150	6	3	10	5

19-вариант

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max, (\min).$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 13, \\ x_1 + x_2 \ge 15, \\ 6x_1 - 7x_2 \le 21, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

2. Фабрикада 3 турдаги A,B,C болалар оёқ кийим ишлаб чиқарилди. Бунда захиралари мос равишда 66, 72, 50, 43 шартли бирликни ташкил қилувчи 4 хил хом ашё ишлатилади. Ҳар бир оёқ кийими учун сарф қилинадиган турли хом ашёлар миқдори ҳамда турли оёқ кийимлар бирлигидан олинадиган даромад миқдори қуйидаги жадвалда келтирилган. Фабрикага энг кўп даромад келтирувчи ишлаб чиқариш режасини тузинг.

Оёқ кийим турлари	*Хом ашёлар*				*Маҳсулот бирлигидан олинадиган даромад*
	I	*II*	*III*	*IV*	
A	*4*	*1*	*3*	*2*	*8*
B	*3*	*2*	*3*	*5*	*6*
C	*3*	*4*	*5*	*5*	*9*
Хом ашёлар захираси	*66*	*72*	*50*	*43*	

3. Қуйидаги жадвалда келтирилган транспорт масаласини ечинг.

b_j / a_i	*300*	*300*	*300*
230	*7*	*5*	*9*
220	*6*	*9*	*5*
2 *50*	*5*	*7*	*6*

20-**вариант**

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = x_1 - x_2 \to \max, (\min).$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ 6x_1 - x_2 \le 6, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

2. Қоғоз комбинати хилма-хил турдаги қоғозларни ишлаб чиқариш режасини бажарди. Шунингдек, хом ашёлардан 50 т целлюлоза, 80 т ёғоч массаси ва 2 т каолин иқтисод қилди. Жадвалда турли қоғоз бирлигини ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган целлюлоза, ёғоч массаси ва каолин миқдори ҳамда маҳсулот бирликларидан олинадиган даромад миқдори акслантирилган.

Хом ашёлар / Маҳсулотлар	*Целлюлёза*	*Ёғоч массаси*	*Каолин*	*Маҳсулот бирлигидан олинадиган даромад (п.б.)*
Босмахона қоғози	*20*	*83*	*20*	*50*
Муқова қоғози	*42*	*68*	*10*	*60*
Ёзув қоғоз	*51*	*52*	*12*	*120*
Хом ашёлар захираси (т.)	*50*	*80*	*2*	

Қоғоз комбинатига максимал фойда келтирадиган қўшимча ишлаб чиқариш режасини аниқланг.

3. Қуйидаги жадвалда келтирилган транспорт масаласини ечинг.

a_i \ b_j	*500*	*500*	*300*
510	*5*	*5*	*9*
290	*9*	*6*	*7*
400	*8*	*9*	*5*

21-**вариант**

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = -5x_1 + 5x_2 \to \min, (\max).$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 8, \\ -2x_1 + x_2 \le 2, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

2. Сигирларни рационал боқиш учун бир кунлик рацион 6 бирликдан кам бўлмаган *A* озуқа моддасини, 12 бирликдан кам бўлмаган *B* озуқа моддасини ва 4 бирликдан кам бўлмаган *C* озуқа моддасини ўз ичига олиши керак. Бир кунлик рационда 2 турдаги ем ишлатилади. Турли емлар таркибидаги озуқа моддалари миқдори ҳамда емларнинг нархи қуйидаги жадвалда келтирилган.

Ем турлари / *Озуқа моддалари*	*I*	*II*	*Озуқа моддасига бўлган минимал талаб*
A	*2*	*1*	*6*
B	*2*	*4*	*12*
C	*0*	*4*	*4*
1 бирлик емнинг баҳоси. (ш.п.б.)	*5*	*6*	

Харажатларни минималлаштирувчи бир кунлик оптимал рационни аниқланг.

3. Қуйидаги жадвалда келтирилган транспорт масаласини ечинг.

a_i \ b_j	*250*	*260*	*290*
195	1	4	5
255	11	14	9
390	12	8	3

22-**вариант**

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = 20x_1 + 30x_2 \to \max, (\min).$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 5x_1 \le 20, \\ 5x_2 \le 15, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

2. Мебел фабрикасида сервант ва шифонер ишлаб чиқарилади. Бунинг учун фанера, тахта ва меҳнат каби ресурслардан фойдаланилади. Ресурслар захираси, ҳар бир тайёр маҳсулотга сарф қилинадиган ресурслар миқдори ҳамда маҳсулот баҳоси қуйидаги жадвалда келтирилган.

Ресурслар / *Маҳсулот турлари*	*Фанера $м^3$*	*Тахта $м^3$*	*Меҳнат киши/соат*	*Маҳсулот баҳоси (ш.п.б.)*
Сервант	*0,2*	*0,1*	*2*	*150*
Шифонер	*0,1*	*0,2*	*1*	*120*
Ресурслар захираси	*60*	*40*	*500*	

Ишлаб чиқарилган умумий маҳсулотларнинг пул қийматини максималлаштирувчи ишлаб чиқариш режасини тузинг.

3. Қуйидаги жадвалда келтирилган транспорт масаласини ечинг.

a_i \ b_j	*285*	*165*	*350*
277	4	15	7
183	11	20	18
290	9	3	8

23-вариант

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = x_1 + 2x_2 \to \max, (\min).$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 + 3x_2 \le 15, \\ \qquad 2x_2 \le 8, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

2. Қорамолларни боқишда шунга эътибор бериш керакки, ҳар бир қорамол бир кунда *A* озуқа моддасидан камида 60 бирлик, *B* озуқа моддасидан камида 50 бирлик ва *C* озуқа моддасидан камида 12 бирлик қабул қилиши керак. Бир кунлик рационда 3 хил ем ишлатилади. Ҳар бир ем таркибидаги турли озуқа моддаларининг миқдори, турли ем бирлигининг баҳоси қуйидаги жадвалда келтирилган.

Ем турлари / *Озуқа моддалари*	*1*	*2*	*3*	*Озуқа моддаларининг минимал нормаси*
A	*1*	*3*	*4*	*120*
B	*2*	*4*	*2*	*100*
C	*1*	*4*	*3*	*150*
Емлар нархи	*100*	*110*	*750*	

Энг кам сарф-харажат талаб қилувчи бир кунлик рационни аниқланг.

3. Қуйидаги жадвалда келтирилган транспорт масаласини ечинг.

b_j / a_i	*300*	*300*	*300*
450	5	10	4
350	10	5	3
200	9	4	7

24-**вариант**

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = x_1 + 2x_2 \to \max, (\min).$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ -x_1 + 5x_2 \leq 5, \\ x_1 - x_2 \quad \leq 2, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

2. Қуйидаги жадвалда келтирилган маълумотлар асосида корхонага максимал даромад келтирувчи ишлаб чиқариш режасини тузинг.

Хом ашёлар	*Маҳсулот бирлигини ишлаб чиқаришга сарф қилинадиган хом ашёлар*			*Хом ашё захираси (кг)*
	A_1	A_2	A_3	
I	*18*	*15*	*12*	*360*
II	*6*	*4*	*8*	*192*
III	*5*	*3*	*3*	*180*
Маҳсулот бирлигидан олинадиган даромад (п.б.)	*9*	*10*	*16*	

3. Қуйидаги жадвалда келтирилган транспорт масаласини ечинг.

a_i \ b_j	*210*	*240*	*400*
315	*10*	*15*	*14*
275	*7*	*12*	*3*
220	*8*	*6*	*13*

25-**вариант**

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max, (\min).$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ -x_1 + x_2 \leq 3, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

2. Уч хил A,B,C маҳсулотлар ишлаб чиқаришда уч хил хом ашё ишлатилади хом ашёлар захираси, маҳсулот бирлигидан корхонанинг олинадиган даромади ҳамда маҳсулот бирлигига сарф қилинадиган хом ашёлар миқдори қуйидаги жадвалда келтирилган.

Маҳсулотлар / *Хом ашёлар*	*A*	*B*	*C*	*Хом ашё захираси*
I	*1*	*2*	*0*	*500*
II	*2*	*1*	*0*	*550*
III	*0*	*1*	*1*	*200*
Маҳсулот бирлигидан олинадиган даромад	*3*	*4*	*1*	

Даромадни максималлаштирувчи ишлаб чиқариш режасини тузинг.

3. Қуйидаги жадвалда келтирилган транспорт масаласини ечинг.

b_j / a_i	*150*	*450*	*150*
218	9	7	4
172	3	12	2
310	17	9	4

26-**вариант**

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max(\min),$$
$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 \le 42, \\ 2{,}5x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \qquad\quad \le 3, \end{cases}$$
$$\tilde{o}_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

2. Кондитер фабрикасида 3 хил *А,Б,В* карамеллар ишлаб чиқариш учун 3 хил хом ашё ишлатилади. Хом ашёларнинг мавжуд захираси, бир бирлик карамел ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган турли хом ашё миқдори ва фабриканинг турли карамеллар ишлаб чиқаришдан олинадиган даромади қуйидаги жадвалда келтирилган.

Хом ашёлар	*Маҳсулот бирлигига сарф қилинадиган хом ашё миқдори*			*Хом ашё захираси*
	A	*B*	*C*	
I	*0,6*	*0,5*	*0,4*	*60*
II	*0,4*	*0,2*	*0,3*	*24*
III	-	*0,3*	*0,3*	*12*
Маҳсулот бирлигидан олинадиган даромад	*14*	*12*	*13*	

Фабриканинг даромадини максималлаштирувчи ишлаб чиқариш режасини топинг.

3. Қуйидаги жадвалда келтирилган транспорт масаласини ечинг.

b_j / a_i	400	500	300
480	1	2	4
220	2	3	4
450	3	3	5

27-вариант

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = x_1 + 3x_2 \to \max, (\min).$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 24, \\ 8x_1 + 3x_2 \ge 24, \\ x_1 + 2x_2 \ge 8, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ 0 \le x_2 \le 4.$$

2. Корхонада 4 хил маҳсулот 3 хил ускуна ёрдамида ишлаб чиқарилади. Бир бирлик маҳсулотни турли ускуналарда ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган вақт нормаси, ҳар бир ускуна учун ажратилган вақт фонди ҳамда ҳар бир маҳсулотдан корхонанинг оладиган даромади қуйидаги жадвалда келтирилган.

Ускуна турлари	*Ускуналарнинг маҳсулот бирлигини ишлаб чиқаришга сарф қиладиган вақти*				*Ускуналарнинг умумий иш фонди*
	1	*2*	*3*	*4*	
I	*2*	*1*	*1*	*3*	*300*
II	*1*	*-*	*2*	*1*	*70*
III	*1*	*2*	*1*	*-*	*340*
Бир бирлик маҳсулотдан олинадиган даромад (п.б.)	*8*	*3*	*2*	*1*	

Корхонанинг умумий даромадини максималлаштирувчи ишлаб чиқариш режасини аниқланг.

3. Қуйидаги жадвалда келтирилган транспорт масаласини ечинг.

b_j / a_i	120	130	200
145	6	4	8
175	4	7	5
170	7	4	7

28-**вариант**

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = 4x_1 + 5x_2 \to \max, (\min).$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 + 2x_2 \ge 24, \\ 0 \le x_1 \le 12, \\ 0 \le x_2 \le 8. \end{cases}$$

2. Механика заводи 4 турдаги детални ишлаб чиқариш учун токарлик, фрезерлик ва пайвандлаш станокларини ишлатади. Ҳар бир станокнинг умумий вақт фонди, ҳар бир детални ишлаб чиқариш учун сарфлайдиган вақти нормаси ҳамда ҳар бир детални сотишдан олинадиган даромад миқдори қуйидаги жадвалда келтирилган.

Станоклар	*Ҳар бир детални ишлаб чиқаришга станокларнинг сарф қиладиган вақти*				*Станокларнинг умумий вақти фонди (станок/ соат)*
	I	*II*	*III*	*IV*	
Токарлик	*2*	*1*	*1*	*3*	*300*
Фрезерлик	*1*	*-*	*2*	*1*	*70*
Пайвандлаш	*1*	*2*	*1*	*-*	*340*
Ҳар бир детални сотишдан олинадиган даромад	*8*	*3*	*2*	*1*	

Энг кўп даромад келтирувчи ишлаб чиқариш режасини топинг.

3. Қуйидаги жадвалда берилган транспорт масаласини ечинг.

b_j / a_i	500	250	250
450	9	3	12
180	18	11	6
270	7	3	4

29-**вариант**

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = 2x_1 - 2x_2 \to \max, (\min).$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 15, \\ 3x_1 + x_2 \leq 15, \\ 2x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 \leq 4, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0.$$

2. Магазинда 3 хил *A*,*B*,*C* маҳсулотлар сотилади. Бунинг учун 4 хил ресурс ишлатилади. Ресурслар захираси, маҳсулот бирлигини сотиш учун сарфланадиган ресурслар миқдори ҳамда маҳсулотлар баҳоси қуйидаги жадвалда келтирилган.

Ресурслар	*Станокларнинг умумий вақт фонди (станок/соат)*			*Ресурслар захираси*
	A	*B*	*C*	
1	*2*	*3*	*3*	*630*
2	*1*	*1*	*4*	*600*
3	*2*	*3*	*5*	*564*
4	*3*	*2*	*2*	*500*
Маҳсулотлар баҳоси	*5*	*3*	*6*	

Магазин тушумини максималлаштирувчи сотиш режасини топинг.

3. Қуйидаги жадвалда келтирилган транспорт масаласини ечинг.

b_j / a_i	190	310	180
230	2	12	10
150	11	12	6
320	8	10	16

30-**вариант**

1. Қуйидаги чизиқли программалаштириш масаласини график усулда ечинг.

$$F = 3x_1 + x_2 \to \max, (\min).$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 6x_2 \le 12, \\ x_2 \le 3, \\ 6x_1 - x_2 \le 24, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0.$$

2. Қуйидаги жадвалда келтирилган жадвалдаги маълумотлар асосида қайси қишлоқ хўжалик маҳсулотини қанча гектар ерга экканида мавжуд ер майдонидан фойдаланган ҳолда умумий даромад максимал бўлади?

Маҳсулот турлари	*Ҳосилдорлик ц/га*		*Даромад (ш.п.б.)*
	I тип ер	*II тип ер*	
Пахта	*28*	*25*	*15*
Буғдой	*20*	*25*	*5*
Умумий ер майдони	*100*	*200*	

3. Қуйидаги жадвалда берилган транспорт масаласини ечинг.

a_i \ b_j	*65*	*17*	*35*
18	*9*	*3*	*8*
47	*10*	*7*	*18*
60	*3*	*12*	*3*

Тавсия этилган адабиётлар

Дарсликлар ва ўқув қўлланмалар

1. Бобожонов Ш. Математическое программирование. (Учебное пособие). -Т.: ТМИ, 2006.

2. Х.Н.Жумаев, Б.Отаниёзов ва бошқалар. Математик программалаштириш. Дарслик, Тошкент. 2005 й.

3. Исследование операции в экономике. /Под редакцией Н.Ш. Кремера. (Учебное пособие). М.: «Экзамен», 2004.

4. Математические методы и модели исследования операций. Учебник -М.: «Дашков и К». 2006 г.

5. Сафаева Қ.. Математик дастурлаш. Дарслик, -Т.: «Ибн-Сино», 2004 й.

6. Safayeva Q. Matematik dasturlash. -T.: «IQTISOD-MOLIYA», 2008.

7. Қ.Сафаева. Математик программалаш. Ўқув қўлланма. -Т.: «ЎАЖБНТ» Маркази, 2004.

8. Сафаева Қ., Адигамова Э., Бобожонов Ш., Мамуров Э. Математическое программирование Сборник задач. -Т.: ТМИ, 2006.

9. Q. Safayeva va boshqalar. Matematik programmalashtirish (masalalar to‘plami). -T.: “IQTISOD-MOLIYA”, 2006.

10. Хазанова Л.Э. Математическое моделирование в экономике. (Учебное пособие). -М: Из-во БЕК, 1998.

Қўшимча адабиётлар

11. Пинегина М.В. Математические методы и модели в экономике. (Учебное пособие). М.: «ЮНИТИ», 1997.

12. Сафаева Қ., Адигамова Э. Математическое программирование. Курс лекций. -Т.: «IQTISOD-MOLIYA», 2006.

13. Сафаева Қ., Шомансурова Ф. «Математик программалаш» фанидан маъруза матнлари тўплами. Т.:ТМИ. 2003.

14. Safayeva Q., Shomansurova F. Matematik programmalash. Ma’ruza kurslari. -T. «IQTISOD-MOLIYA», 2006.

15. Хазанова Л.Э. Математическое моделирование экономических систем. Динамическое программирование. (Учебное пособие). -М.: ИНЭУП, 1997.

16. Фомин Г.П. Методы и модели линейного программирования коммерческой деятельности. (Учебное пособие). М.: «Финансы и статистика», 2000.

17. Wilkes F.M. Mathematics for business. – Finance and Economics. Rout ledge, London, 1997.

18. Интернет сайтлари

http://el.tfi.uz/pdf/mddj22.uzk.pdf
http://el.tfi.uz/pdf/mddj22.uzl.pdf
http://el.tfi.uz/pdf/mtpzogr-.uzk.pdf
http://el.tfi.uz/pdf/mtpzogr-.uzl.pdf

МУНДАРИЖА

Қ.Сафаева, Ф.Шомансурова

Математик программалаштириш

Муҳаррир Ш. Худойбердиева
Компьютерда саҳифаловчи Д.Тошходжаева

Босишга рухсат этилди 23.01.2009. Қоғоз бичими 60x84 $1/16$.
Ҳисоб-нашр табоғи 7,75 б.т. Адади 300. Буюртма №258

“IQTISOD–MOLIYA” нашриёти,
700084,Тошкент, Кичик ҳалқа йўли кўчаси,7–уй

Тошкент Молия институти босмахонасида ризография усулида чоп этилди.
700084, Тошкент, Кичик ҳалқа йўли кўчаси, 7-уй