

Е.А. Лоторейчук

# Теоретические ОСНОВЫ электротехники

У Ч Е Б Н И К



СРЕДНЕЕ  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ  
ОБРАЗОВАНИЕ

СРЕДНЕЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

---

Серия основана в 2001 году

Е.А. Лоторейчук

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

УЧЕБНИК

*Допущено Министерством образования и науки  
Российской Федерации в качестве учебника  
для студентов учреждений среднего профессионального  
образования, обучающихся по специальностям  
технического профиля*

Электронно-  
Библиотечная  
Система  
znanium.com

Москва  
ИД «ФОРУМ» — ИНФРА-М  
2021

УДК 621.3(075.32)

ББК 31.2я723

Л80

Научный редактор:

заслуженный учитель РФ *С.Ц. Малинская*

Рецензенты:

*М.В. Гальперин*, д-р физ.-мат. наук, преподаватель МВЭМТ им. Л.Б. Красина;

*С.Б. Балакверская*, канд. техн. наук, ст. науч. сотр. отдела автоматизации ВГБИЛ им. М. Рудомино;

*Н.П. Петрова*, преподаватель Московского радиотехнического колледжа им. А.А. Расплетина

**Лоторейчук Е.А.**

Л80 Теоретические основы электротехники : учебник / Е.А. Лоторейчук. — Москва : ИД «ФОРУМ» : ИНФРА-М, 2021. — 317 с. — (Среднее профессиональное образование).

ISBN 978-5-8199-0764-1 (ИД «ФОРУМ»)

ISBN 978-5-16-013705-6 (ИНФРА-М, print)

ISBN 978-5-16-106362-0 (ИНФРА-М, online)

В учебнике излагается теоретический материал и описаны физические явления и процессы, происходящие в электрических и магнитных полях и цепях, а также рассмотрены методы расчета линейных и нелинейных электрических и магнитных цепей постоянного и переменного (синусоидального и несинусоидального) токов.

Учебник написан в соответствии с государственным образовательным стандартом, предназначен для студентов техникумов и колледжей энергетических, электротехнических, приборостроительных и радиотехнических специальностей, а также может быть рекомендован студентам вузов.

УДК 621.3(075.32)

ББК 31.2я723

ISBN 978-5-8199-0764-1 (ИД «ФОРУМ»)

ISBN 978-5-16-013705-6 (ИНФРА-М, print)

ISBN 978-5-16-106362-0 (ИНФРА-М, online)

© Лоторейчук Е.А., 2014

© ИД «ФОРУМ», 2014

*Светлой памяти  
моей жене, другу  
Софье Цалевне Малинской*

## **Предисловие**

«Теоретические основы электротехники» — одна из основных дисциплин энергетических, электротехнических, приборостроительных и радиотехнических техникумов и колледжей. Настоящая книга рекомендуется в качестве учебника для студентов перечисленных специальностей.

Предлагаемый учебник может быть также использован студентами и преподавателями смежных специальностей, не только техникумов, но и вузов.

В книге излагается теоретический материал, описаны физические явления и процессы, происходящие в электрических и магнитных полях и цепях, рассмотрены методы расчета линейных и нелинейных электрических и магнитных цепей постоянного и переменного, синусоидального и несинусоидального токов, трехфазных цепей, переходных процессов и другие вопросы.

Материал регламентирован примерной программой предмета «Теоретические основы электротехники», действующей в настоящее время.

Автор глубоко признателен и благодарен Малинской Софье Цалевне за помощь в научном редактировании издания, за указания и рекомендации, использованные автором при работе над книгой.

Автор благодарит рецензентов Гальперина М. В., Балакерскую С. Б. и Петрову Н. П., замечания которых учтены в настоящем учебнике.

Автор благодарен Шатайлову Ю. В. за техническую помощь в создании и оформлении книги.

*Е. А. Лоторейчук*



## Введение

Электрическая энергия широко применяется во всех областях промышленности, сельского хозяйства, связи, транспорта, автоматики, вычислительной техники, электроники, радиотехники и в быту благодаря своим весьма ценным свойствам:

1) универсальность, т. е. легко преобразуется в другие виды энергии (тепловую, механическую, химическую и др.). В свою очередь другие виды энергии (тепловая, механическая, химическая, ядерная, гидро- и др.) преобразуются в электрическую;

2) передается на большие расстояния с небольшими потерями. В настоящее время действуют линии электропередачи протяженностью тысячи километров;

3) легко дробится и распределяется по потребителям любой мощности (от десятков тысяч киловатт до долей ватта);

4) легко регулируется и контролируется различными электроприборами.

Электротехника как наука, изучающая свойства и особенности электрической энергии, легла в основу развития многих отраслей знаний — таких как медицина, биология, астрономия, геология, математика и др.

Азбукой электротехники являются ее теоретические основы. В настоящем учебнике теоретические вопросы электротехники рассматриваются в неразрывной связи с практическими задачами, что обеспечивает студентам знание качественных и количественных соотношений в различных процессах.

Данный курс является базой для изучения специальных предметов, поэтому является одной из важнейших дисциплин в процессе подготовки студентов по электро-, приборо-, радио-, кибернетическим и другим специальностям.

В учебнике условные обозначения соответствуют Единой системе конструкторской документации (ЕСКД).

В теоретическом материале, примерах и их решениях используется Международная система единиц СИ, которая приведена в Приложении I.

# Глава 1

## ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

### 1.1. Электрический заряд

Каждый химический элемент (вещество) состоит из совокупности мельчайших материальных частиц — атомов.

В состав атомов любого вещества входят элементарные частицы, часть которых обладает электрическим зарядом. Атом представляет собой систему, состоящую из ядра, вокруг которого вращаются электроны.

В ядре атома сосредоточены протоны, несущие в себе положительный заряд. Электроны имеют отрицательный электрический заряд. В электрически нейтральном атоме заряд электронов равен по абсолютной величине заряду протонов.

Электроны вращаются вокруг ядра по строго определенным орбитам (слоям). В каждом слое количество электронов не должно превышать определенного числа ( $2n^2$ , где  $n$  — номер слоя). Так, например, в первом, ближайшем к ядру слое могут находиться максимум два электрона, во втором — не более восьми и т. д.

Порядковый номер химического элемента в Периодической таблице Менделеева численно равен положительному заряду ядра этого элемента, следовательно, и числу вращающихся вокруг него электронов. На рис. 1.1 схематически показана структура атомов водорода (а), кислорода (б) и алюминия (в) с порядковыми номерами 1, 8 и 13.

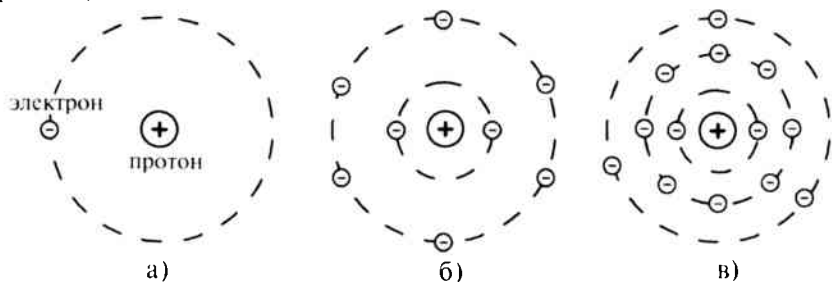


Рис. 1.1

Атомы, у которых внешние электронные слои целиком заполнены, имеют устойчивую электронную оболочку. Такой атом прочно держит все электроны и не нуждается в получении добавочного их количества.

Атом кислорода, например, имеющий шесть электронов, размещенных во внешнем слое, обладает возможностью притянуть к себе два недостающих электрона для заполнения внешнего электронного слоя. Это достигается путем соединения с атомами таких элементов, у которых внешние электроны слабо связаны со своим ядром. Например, электронами внешнего (третьего) слоя атома алюминия, которые слабо удерживаются и легко могут быть вырваны из атома.

Если нарушается равенство числа электронов и протонов, то из электрически нейтрального атом становится заряженным. Заряженный атом называется ионом.

Если в силу каких-либо причин атом теряет один или несколько электронов, то в нем нарушится равенство зарядов и такой атом становится положительным ионом, поскольку в нем преобладает положительный заряд протонов ядра. Если атом приобретает один или несколько электронов, то он становится отрицательным ионом, так как в нем преобладает отрицательный заряд.

Вещество (твердое тело, жидкость, газ) считается электрически нейтральным, если количество положительных и отрицательных зарядов в нем одинаково. Если же в нем преобладают положительные или отрицательные заряды, то оно считается соответственно положительно или отрицательно заряженным.

В Единой системе конструкторской документации (ЕСКД), которая используется в данном учебнике, электрический заряд (количество электричества) обозначается буквой  $Q$  или  $q$ , а единицей заряда (в системе СИ) является 1 кулон, то есть  $[Q] = \text{Кл}$  (кулон). Электрон и протон имеют равный по величине, но противоположный по знаку заряд  $Q = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

Электрический заряд или заряженное тело создают электрическое поле.

*Электрическое поле – это пространство вокруг заряженного тела или заряда, в котором обнаруживается действие сил на пробный заряд, помещенный в это пространство.*

Электрическое поле, создаваемое неподвижными зарядами, называется электростатическим.

## 1.2. Напряженность электрического поля

Обнаружить электрическое поле можно пробным зарядом, если поместить его в это поле. Пробным называется положительный заряд, внесение которого в исследуемое поле не приводит к его

изменению. То есть пробный заряд не влияет ни на силу, ни на энергию, ни на конфигурацию поля.

Если в точку  $A$  электрического поля (рис. 1.2), созданного зарядом  $Q$ , расположенную на расстоянии  $r$  от него, внести пробный заряд  $q$ , то на него будет действовать сила  $\vec{F}$ , причем если заряды  $Q$  и  $q$  имеют одинаковые знаки, то они отталкиваются (как это изображено на рис. 1.2), а если разные, то притягиваются.

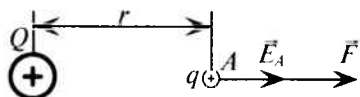


Рис. 1.2

Величина силы  $\vec{F}$ , действующей на пробный заряд  $q$ , помещенный в точку  $A$  электрического поля, пропорциональна величине заряда  $q$  и интенсивности электрического поля, созданного зарядом  $Q$  в точке  $A$

$$\vec{F} = q\vec{E}_A, \quad (1.1)$$

где  $\vec{E}_A$  — напряженность электрического поля, характеризующая интенсивность поля в точке  $A$ .

Из (1.1) видно, что

$$\vec{E}_A = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (1.2)$$

*То есть напряженность каждой точки электрического поля характеризуется силой, с которой поле действует на единицу заряда, помещенного в эту точку.* Таким образом, напряженность является силовой характеристикой каждой точки электрического поля.

Измеряется напряженность электрического поля в вольтах на метр  $[E] = \text{В/м}$ .

Напряженность электрического поля — величина векторная.

*Направление вектора напряженности в любой точке электрического поля совпадает с направлением силы, действующей на положительный пробный заряд, помещенный в эту точку поля* (см. рис. 1.2).

Поскольку в дальнейшем будут учитываться только значения силы и напряженности, будем обозначать их  $F$  и  $E$  соответственно.

Напряженность является параметром каждой точки электрического поля и не зависит от величины пробного заряда  $q$ . Изменение величины  $q$  приводит к пропорциональному изменению силы  $F$  (1.1), а отношение  $F/q$  (1.2), т. е. напряженность  $E_A$ , остается неизменной.

Для наглядности электрическое поле изображают электрическими линиями, которые иногда называют линиями напряженности электрического поля, или силовыми линиями. Электрические линии направлены от положительного заряда к отрицательному. Линия проводится так, чтобы вектор напряженности поля в данной точке являлся касательной к ней (рис. 1.3в).

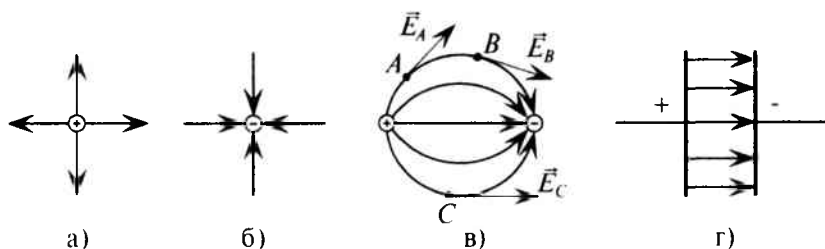


Рис. 1.3

Электрическое поле называется однородным, если напряженность его во всех точках одинакова по величине и направлению. Однородное электрическое поле изображается параллельными линиями, расположенными на одинаковом расстоянии друг от друга.

Однородное поле, например, существует между пластинами плоского конденсатора (рис. 1.3г).

### 1.3. Напряженность поля точечных зарядов

Точечным считается заряд, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием, на котором рассматривается его действие.

Сила взаимодействия  $F$  двух точечных зарядов  $Q$  и  $q$  (рис. 1.2) определяется по закону Кулона:

$$F = \frac{Qq}{4\pi r^2 \epsilon_a}, \quad (1.3)$$

где  $r$  — расстояние между зарядами;  $\epsilon_a$  — абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, в которой взаимодействуют заряды.

Из (1.3) следует, что напряженность электрического поля заряда  $Q$  в точке  $A$  (рис. 1.2) равна

$$E_A = \frac{F}{q} = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_a}. \quad (1.4)$$

Таким образом, напряженность поля  $E_A$ , созданная зарядом  $Q$  в точке  $A$  электрического поля, зависит от величины заряда  $Q$ , создающего поле, расстояния точки  $A$  от источника поля  $r$  и от абсолютной диэлектрической проницаемости среды  $\epsilon_a$ , в которой создается поле. Диэлектрическая проницаемость характеризует электрические свойства среды, т. е. интенсивность поляризации.

Единицей измерения абсолютной диэлектрической проницаемости среды является фарад на метр

$$[\epsilon_a] = \left[ \frac{Q}{4\pi r^2 E} \right] = \frac{\text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{м}} = \frac{\Phi}{\text{м (метр)}},$$

так как  $\text{Кл}/\text{В} = \Phi$ .

Различные среды имеют разные значения абсолютной диэлектрической проницаемости.

Абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума

$$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ Ф/м} \quad \text{или} \quad \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} \quad (1.5)$$

называется электрической постоянной.

Абсолютную диэлектрическую проницаемость любой среды  $\varepsilon_a$  удобно выражать через электрическую постоянную  $\varepsilon_0$  и диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon_r$  — табличную величину (Приложение 2).

Диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_r$ , которую иногда называют относительной, показывает, во сколько раз абсолютная диэлектрическая проницаемость среды больше, чем электрическая постоянная, т. е.

$$\varepsilon_r = \varepsilon_a / \varepsilon_0. \quad (1.6)$$

Из (1.6) следует

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon_r. \quad (1.7)$$

Таким образом, напряженность электрического поля, созданного зарядом  $Q$  на расстоянии  $r$  от него, определяется выражением

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r}. \quad (1.8)$$

Напряженность электрического поля, созданного несколькими зарядами в какой-либо точке  $A$  этого поля, определяется геометрической суммой напряженностей, созданных в этой точке каждым точечным зарядом:  $\vec{E}_A = \vec{E}_{A1} + \vec{E}_{A2} + \dots + \vec{E}_{Ak}$  (см. рис. 1.4).

### Пример 1.1

Расстояние между точечными зарядами  $Q_1$  и  $Q_2$  равно  $r = 5$  см. Вычислить величину напряженности в точке  $A$ , удаленной от заряда  $Q_1$  на расстояние  $r_1$ , а от заряда  $Q_2$  на расстояние  $r_2$  (рис. 1.5), если:  $Q_1 = 4 \cdot 10^{-11}$  Кл;  $Q_2 = 6 \cdot 10^{-11}$  Кл;  $r_1 = 4$  см =  $4 \cdot 10^{-2}$  м;  $r_2 = 3$  см =  $3 \cdot 10^{-2}$  м;  $\varepsilon_r = 1$ .

### Решение

Напряженность, созданная зарядом  $Q_1$  в точке  $A$

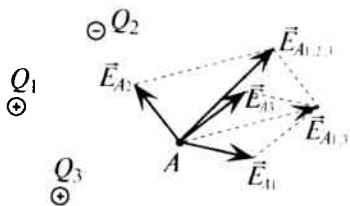


Рис. 1.4

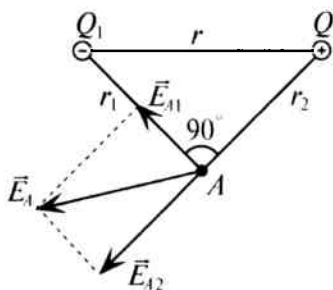


Рис. 1.5

$$E_{A_1} = \frac{Q_1}{4\pi r_1^2 \epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{4 \cdot 10^{-11} \cdot 36\pi}{4\pi (4 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 10^{-9} \cdot 1} = 2,25 \cdot 10^2 \text{ В/м.}$$

Напряженность, созданная зарядом  $Q_2$  в точке  $A$

$$E_{A_2} = \frac{Q_2}{4\pi r_2^2 \epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{6 \cdot 10^{-11} \cdot 36\pi}{4\pi (3 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 10^{-9} \cdot 1} = 6 \cdot 10^2 \text{ В/м.}$$

Направление векторов напряженности  $\vec{E}_{A_1}$  и  $\vec{E}_{A_2}$ , созданных зарядами  $Q_1$  и  $Q_2$ , и результирующего вектора напряженности  $\vec{E}_A$  в точке  $A$  изображены на рис. 1.5.

Между векторами напряженности в данном примере угол равен  $90^\circ$  ( $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ , т. е.  $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ , что справедливо только для прямоугольного треугольника), следовательно, результирующий вектор напряженности в точке  $A$  определяется выражением

$$E_A = \sqrt{E_{A_1}^2 + E_{A_2}^2} = \sqrt{(2,25 \cdot 10^2)^2 + (6 \cdot 10^2)^2} = 6,4 \cdot 10^2 \text{ В/м.}$$

#### 1.4. Теорема Гаусса

Произведение напряженности электрического поля  $E$  и площадки  $S$ , перпендикулярной к ней, в однородном электрическом поле называют потоком вектора напряженности поля  $N$  сквозь эту площадку (рис. 1.6а)

$$N = E_n S, \quad (1.9)$$

где  $E_n$  — нормальная (перпендикулярная площадке  $S$ ) составляющая вектора напряженности  $\vec{E}$  электрического поля.

Как следует из рис. 1.6а,  $E_n = E \cos \beta$ .

Единица измерения потока вектора напряженности

$$[N] = [ES] = (\text{В/м}) \cdot \text{м}^2 = \text{В} \cdot \text{м.}$$

Для неоднородного электрического поля площадку  $S$  разбивают на элементарные бесконечно малые площадки  $dS$ , для каждой из которых поле можно считать однородным.

Тогда элементарный поток  $dN = E_n dS$ .

Для определения потока вектора напряженности сквозь всю площадку  $S$  элементарные потоки  $dN$  суммируют (интегрируют) по всей площади  $S$

$$N = \int_S dN = \int_S E_n dS. \quad (1.10)$$

Если, например, точечный заряд  $Q$  расположен в центре сферической поверхности радиусом  $r$  (рис. 1.6б), то напряженность во всех точках этой поверхности, как следует из (1.8), равна

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r}.$$

Векторы напряженности перпендикулярны этой поверхности, т. е.  $E_n = E$ , и одинаковы во всех точках этой поверхности. Тогда поток вектора напряженности поля сквозь эту поверхность

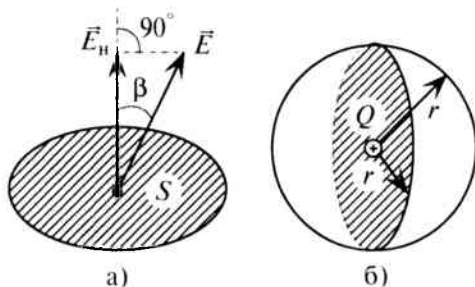


Рис. 1.6

$$N = \oint E_n dS = E \oint dS = E \cdot 4\pi r^2,$$

где  $\oint dS = 4\pi r^2$  — площадь поверхности шара радиусом  $r$ .

Следовательно, поток вектора напряженности будет равен

$$N = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r} \cdot 4\pi r^2;$$

$$N = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}. \quad (1.11)$$

То есть поток вектора напряженности  $N$  не зависит ни от формы поверхности, ни от места расположения зарядов внутри нее.

Таким образом, *поток вектора напряженности электрического поля сквозь замкнутую поверхность определяется отношением суммы зарядов, расположенных внутри этой поверхности, к абсолютной диэлектрической проницаемости среды* ( $\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ ).

Формула (1.11) является математическим выражением теоремы Гаусса, которая применяется для расчета электрического поля.

### Пример 1.2

Определить поток вектора напряженности электрического поля сквозь сферическую поверхность радиусом  $r = 3$  см (рис. 1.6б), заполненную маслом  $\varepsilon_r = 2,2$ , если в ее центре находится точечный электрический заряд  $Q = 2,2 \cdot 10^{-11}$  Кл. Определить напряженность электрического поля на поверхности сферы.

### Решение

Поток вектора напряженности сквозь сферическую поверхность

$$N = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{2,2 \cdot 10^{-11} \cdot 36\pi}{10^{-9} \cdot 2,2} = 36\pi \cdot 10^{-2} \text{ В/м.}$$

Тогда напряженность на поверхности сферы

$$E = \frac{N}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{36\pi \cdot 10^{-2}}{4\pi(3 \cdot 10^{-2})^2} = 10^2 = 100 \text{ В/м,}$$

где  $S_{\text{сф}} = 4\pi r^2$ , а  $3 \text{ см} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ .



Напряженность на поверхности сферы можно определить также по формуле (1.8)

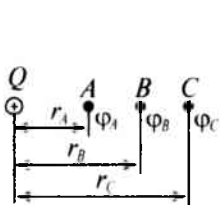
$$E = \frac{N}{4\pi r^2 \epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{2,2 \cdot 10^{-11} \cdot 36\pi}{4\pi (3 \cdot 10^{-2})^2 10^{-9} \cdot 2,2} = 10^2 = 100 \text{ В/м.}$$

То есть результат получился таким же.

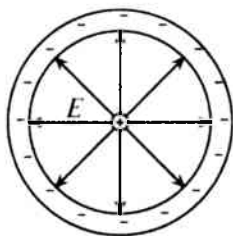
### 1.5. Потенциал и напряжение в электрическом поле

Для энергетической характеристики каждой точки электрического поля вводится понятие «потенциал». Обозначается потенциал буквой  $\varphi$ .

*Потенциал в каждой точке электрического поля характеризуется энергией  $W$ , которая затрачивается (или может быть затрачена) полем на перемещение единицы положительного заряда  $q$  из данной точки за пределы поля, если поле создано положительным зарядом, или из-за пределов поля в данную точку, если поле создано отрицательным зарядом (рис. 1.7а).*



а)



б)

Рис. 1.7

Из приведенного выше определения следует, что потенциал в точке  $A$  равен  $\varphi_A = W_A/q$ ; потенциал в точке  $B$  —  $\varphi_B = W_B/q$ , а потенциал в точке  $C$  —  $\varphi_C = W_C/q$ .

Измеряется потенциал в вольтах

$$[\varphi] = \left[ \frac{W}{q} \right] = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В.}$$

Величина потенциала в каждой точке электрического поля определяется выражением

$$\varphi_A = \frac{W_A}{q} = \frac{\int_{r_A}^{\infty} F dr}{q} = \frac{\int_{r_A}^{\infty} Eq dr}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r q} \int_{r_A}^{\infty} \frac{dr}{r^2};$$

$$\boxed{\varphi_A = \frac{Q}{4\pi r_A \epsilon_0 \epsilon_r}}$$

(1.12)

Потенциал — скалярная величина. Если электрическое поле создано несколькими зарядами, то потенциал в каждой точке поля определяется алгебраической суммой потенциалов, созданных в этой точке каждым зарядом.

Так как (рис. 1.7а)  $r_A < r_B < r_C$ , то из (1.12) следует, что  $\varphi_A > \varphi_B > \varphi_C$ , если поле создано положительным зарядом.

Если в точку  $A$  (рис. 1.7а) электрического поля поместить положительный пробный заряд  $q$ , то под действием сил поля он будет перемещаться из точки  $A$  в точку  $B$ , а затем в точку  $C$ , т. е. в направлении поля. Таким образом, положительный пробный заряд перемещается из точки с большим потенциалом в точку с меньшим потенциалом. Между двумя точками с равными потенциалами заряд перемещаться не будет. Следовательно, для перемещения заряда между двумя точками электрического поля должна быть разность потенциалов в этих точках.

Разность потенциалов двух точек электрического поля характеризует напряжение  $U$  между этими точками

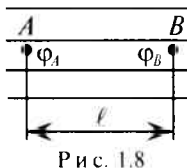
$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B; \quad U_{BC} = \varphi_B - \varphi_C; \quad U_{AC} = \varphi_A - \varphi_C.$$

*Напряжение между двумя точками электрического поля характеризуется энергией, затраченной на перемещение единицы положительного заряда между этими точками, т. е.  $U_{AB} = W_{AB}/q$ .*

Измеряется напряжение в вольтах (В).

Между напряжением и напряженностью в однородном электрическом поле (рис. 1.8) существует зависимость

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{W_{AB}}{q} = \frac{F\ell}{q} = E\ell,$$



откуда следует

$$E = \frac{U_{AB}}{\ell}. \quad (1.13)$$

Из (1.13) видно, что напряженность однородного электрического поля определяется отношением напряжения между двумя точками поля к расстоянию между этими точками.

В общем случае для неоднородного электрического поля значение напряженности определяется отношением

$$E = \frac{dU}{d\ell}, \quad (1.14)$$

где  $dU$  — напряжение между двумя точками поля на одной электрической линии на расстоянии  $d\ell$  между ними.

Единица напряженности электрического поля определяется из выражения (1.13)

$$[E] = \left[ \frac{U}{\ell} \right] = \text{В/м.}$$

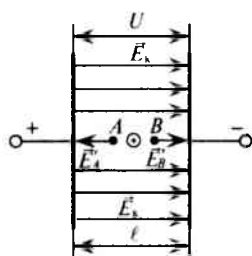


Рис. 1.9

Потенциалы в точках электрического поля могут иметь различные значения. Однако в электрическом поле можно выделить ряд точек с одинаковым потенциалом. Поверхность, проходящая через эти точки, называется равнопотенциальной, или эквипотенциальной.

Равнопотенциальная поверхность любой конфигурации перпендикулярна к линиям электрического поля. Обкладки цилиндрического конденсатора (рис. 1.76) и плоского конденсатора (рис. 1.9) имеют одинаковый потенциал по всей площади каждой обкладки и являются равнопотенциальными поверхностями.

### Пример 1.3

Для условия примера 1.1 определить потенциал  $\varphi_A$  в точке  $A$ , созданный зарядами  $Q_1$  и  $Q_2$ .

#### Решение

$$\varphi_{A1} = \frac{-Q_1}{4\pi r_1 \varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{-4 \cdot 10^{-11} \cdot 36\pi}{4\pi \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-9} \cdot 1} = -9 \text{ В},$$

$$\varphi_{A2} = \frac{Q_2}{4\pi r_2 \varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{6 \cdot 10^{-11} \cdot 36\pi}{4\pi \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-9} \cdot 1} = 18 \text{ В}.$$

Следовательно, алгебраическая сумма потенциалов равна

$$\varphi_A = \varphi_{A1} + \varphi_{A2} = -9 + 18 = 9 \text{ В}.$$

### Пример 1.4

Точечный заряд  $Q = 5 \cdot 10^{-12}$  Кл помещен в центре плоского воздушного конденсатора, расстояние между пластинами которого равно 4,5 см. Напряжение между пластинами  $U = 225$  В. Определить напряженность  $E$  электрического поля в точках  $A$  и  $B$ , находящихся на расстоянии 0,5 см справа и слева от заряда  $Q$  и лежащих на электрической линии, проходящей через заряд  $Q$  (рис. 1.9).

#### Решение

Напряженность однородного электрического поля между пластинами конденсатора

$$E_k = \frac{U}{l} = \frac{225}{4,5 \cdot 10^{-2}} = 50 \cdot 10^2 \text{ В/м}.$$

Напряженности, созданные зарядом  $Q$  в точках  $A$  и  $B$ ,

$$|E'_A| = |E'_B| = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{5 \cdot 10^{-12} \cdot 36\pi}{4\pi (0,5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 10^{-9} \cdot 1} = 18 \cdot 10^2 \text{ В/м}.$$

Напряженности, созданные в точках  $A$  и  $B$  однородным электрическим полем конденсатора и зарядом  $Q$ , определяются геометрической суммой векторов напряженностей  $\vec{E}_k$  и  $\vec{E}'$ .

В точке  $B$  векторы напряженностей  $\vec{E}_k$  и  $\vec{E}'$  совпадают по направлению, а в точке  $A$  векторы  $\vec{E}_k$  и  $\vec{E}'$  направлены в противоположные стороны.

Следовательно:

$$E_B = E_k + E'_B = 50 \cdot 10^2 + 18 \cdot 10^2 = 68 \cdot 10^2 \text{ В/м,}$$

$$E_A = E_k - E'_A = 50 \cdot 10^2 - 18 \cdot 10^2 = 32 \cdot 10^2 \text{ В/м.}$$

### 1.6. Электропроводность. Проводники

*Способность вещества проводить электрический ток называется электропроводностью.*

По электропроводности все вещества делятся на проводники, диэлектрики и полупроводники.

*Проводники обладают высокой электропроводностью.* Различают проводники первого и второго рода.

К проводникам первого рода относятся все металлы, некоторые сплавы и уголь. В этих проводниках связь между электронами и ядром атома слаба, в результате чего электроны легко покидают пределы атома и становятся свободными. Направленное перемещение свободных электронов и обуславливает электропроводность проводников первого рода. Таким образом, проводники первого рода обладают электронной проводимостью.

К проводникам второго рода относятся электролиты, в которых происходит процесс электролитической диссоциации, разделение молекул на положительные и отрицательные ионы (ионизация). Направленное перемещение ионов обуславливает электропроводность проводников второго рода, т. е. в проводниках второго рода имеет место ионная проводимость.

В проводниках отсутствует электростатическое поле (рис. 1.10б).

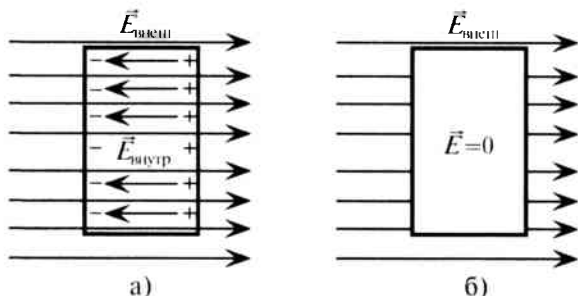


Рис. 1.10

Если проводник поместить в электростатическое поле, то под действием сил этого поля происходит перемещение зарядов в проводнике: положительных — в направлении внешнего поля, отрицательных — в противоположном направлении (рис. 1.10а). Такое разделение зарядов в проводнике под действием внешнего поля называется электростатической индукцией.

Разделенные внутри проводника заряды создают свое электрическое поле, направленное от положительных зарядов к отрицательным, т. е. против внешнего поля (рис. 1.10а).

Очевидно, разделение зарядов в проводнике прекратится тогда, когда напряженность поля разделенных зарядов  $E_{\text{внутр}}$  станет равной напряженности внешнего поля в проводнике  $E_{\text{внеш}}$ , т. е.

$$E_{\text{внутр}} = E_{\text{внеш}}, \text{ а результирующее поле}$$

$$E = E_{\text{внутр}} - E_{\text{внеш}} = 0.$$

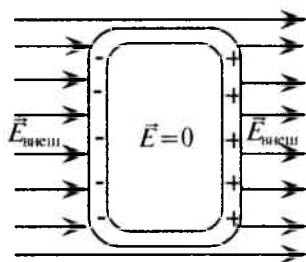


Рис. 1.11

Таким образом, результирующее поле внутри проводника станет равным нулю (рис. 1.10б). На этом принципе работает электростатический экран, защищающий часть пространства от внешних электрических полей (рис. 1.11). Для того чтобы внешние электрические поля не влияли на точность электроиз-

мерения, измерительный прибор помещают внутрь замкнутой проводящей оболочки (экрана), в которой электрическое поле отсутствует (рис. 1.11).

### 1.7. Электропроводность. Диэлектрики

*Электропроводность диэлектриков практически равна нулю в силу весьма сильной связи между электронами и ядром атома диэлектрика.*

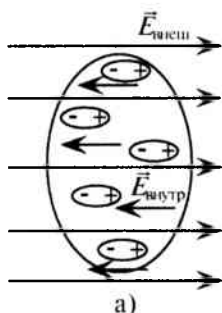


Рис. 1.12

Если диэлектрик поместить в электростатическое поле, то в нем произойдет поляризация атомов, т. е. смещение разноименных зарядов в самом атоме, но не разделение их (рис. 1.12а). Поляризованный атом (молекула) может

рассматриваться как электрический диполь (рис. 1.126), в котором «центры тяжести» положительных и отрицательных зарядов смещаются. Диполь — это система двух разноименных зарядов, расположенных на малом расстоянии друг от друга в замкнутом пространстве атома или молекулы.

Электрический диполь — это атом диэлектрика, в котором орбита электрона вытягивается в направлении, противоположном направлению внешнего поля  $\vec{E}_{\text{внеш}}$  (рис. 1.126).

Поляризованные атомы создают свое электрическое поле, напряженность которого направлена против внешнего поля. В результате поляризации результирующее поле внутри диэлектрика ослабляется.

Интенсивность поляризации диэлектрика зависит от его диэлектрической проницаемости (Приложение 2). Чем больше диэлектрическая проницаемость, тем интенсивней поляризация в диэлектрике и тем слабее электрическое поле в нем:

$$E = E_{\text{внеш}} - E_{\text{внутр}}.$$

Этим еще раз подтверждается справедливость формулы (1.8)

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0 \epsilon_r}.$$

Таким образом, напряженность электрического поля обратно пропорциональна абсолютной диэлектрической проницаемости среды  $\epsilon_a$ , в которой создается электрическое поле.

Если диэлектрик поместить в сильное электрическое поле, напряженность которого можно увеличивать, то при каком-то значении напряженности произойдет пробой диэлектрика, при этом электроны отрываются от атома, т. е. происходит ионизация диэлектрика. Таким образом, диэлектрик становится проводником.

Напряженность внешнего поля, при которой происходит пробой диэлектрика, называется пробивной напряженностью диэлектрика.

А напряжение, при котором происходит пробой диэлектрика, называют напряжением пробоя, или электрической прочностью диэлектрика.

$$E_{\text{пр}} = U_{\text{пр}} / d,$$

где  $U_{\text{пр}}$  — пробивное напряжение, т. е. напряжение, при котором происходит пробой диэлектрика;  $d$  — толщина диэлектрика.

Напряженность электрического поля, которая допускается в диэлектрике при использовании его в электрических установ-

ках, называется допустимой напряженностью. Допустимая напряженность должна быть в несколько раз меньше электрической прочности. Электрическая прочность некоторых диэлектриков приведена в Приложении 2.

### 1.8. Электропроводность. Полупроводники

*К полупроводникам относятся материалы, которые по своим электрическим свойствам занимают промежуточное положение между проводниками и диэлектриками.*

Широкое применение в полупроводниковой технике получили такие материалы, как германий, кремний, селен, арсенид галлия и др.

Электропроводность и концентрация носителей зарядов в полупроводниках зависит от температуры, освещенности, примесей, степени сжатия и т. д.

Электрическая проводимость полупроводника зависит от рода примесей, имеющих в основном материале полупроводника, и от технологии изготовления его составных частей.

Различают две основные разновидности электрической проводимости полупроводников — электронную и «дырочную».

Природа электрического тока в полупроводниках с электронной проводимостью та же, что и в проводниках первого рода. Однако так как свободных электронов в единице объема полупроводника во много раз меньше, чем в единице объема металлического проводника, то ток в полупроводнике будет во много раз меньше, чем в металлическом проводнике. В технике электронная проводимость называется проводимостью *n*-типа (от слова negative — отрицательный).

Полупроводник обладает «дырочной» проводимостью, если атомы его примеси стремятся захватить электроны атомов основного вещества полупроводника, не отдавая своих внешних электронов.

Если атом примеси «отберет» электрон у атома основного вещества, то в последнем образуется свободное место — «дырка» (рис. 1.13).

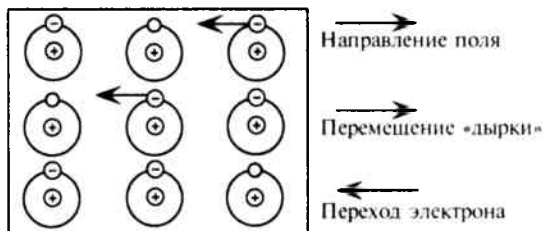


Рис. 1.13

Атом полупроводника, потерявший электрон, называют «дыркой». Если «дырка» заполняется электроном, перешедшим из соседнего атома, то она «ликвидируется» и

атом становится электронейтральным, а «дырка» смещается на место его атома, потерявшего электрон. Таким образом, если на полупроводник, обладающий «дырочной» проводимостью, действует электрическое поле, то «дырки» будут перемещаться в направлении поля.

Перемещение «дырок» в направлении электрического поля аналогично перемещению положительных электрических зарядов в поле, т. е. электрическому току в полупроводнике.

«Дырочная проводимость» в технике называется *p*-проводимостью (от слова positive – положительный).

Нельзя строго разграничивать полупроводники по проводимости, так как наряду с «дырочной» проводимостью полупроводник обладает и электронной проводимостью.

Рассмотрим природу полупроводниковой проводимости на примере вентиля, представляющего собой контактное соединение двух проводников, один из которых обладает электронной проводимостью *n*-типа, а другой – «дырочной» *p*-типа (рис. 1.14).

Вследствие большой концентрации электронов в полупроводнике типа *n* по сравнению с полупроводником *p*-типа, электроны из первого проводника будут проникать во второй. Аналогично происходит проникновение «дырок» в полупроводник *n*-типа. В результате такого проникновения зарядов в тонком пограничном слое возникают разноименные заряженные слои, между которыми создается электрическое поле, напряженность которого  $\vec{E}_k$  (рис. 1.14а, б). Напряженность  $\vec{E}_k$  создана контактной разностью потенциалов в пограничном слое двух полупроводников.

Эта напряженность  $\vec{E}_k$  образует потенциальный барьер в пограничном слое, препятствующий дальнейшему проникновению зарядов в пограничный слой каждого полупроводника. Напряженность  $\vec{E}_k$  направлена против силы, действующей на положительный заряд.

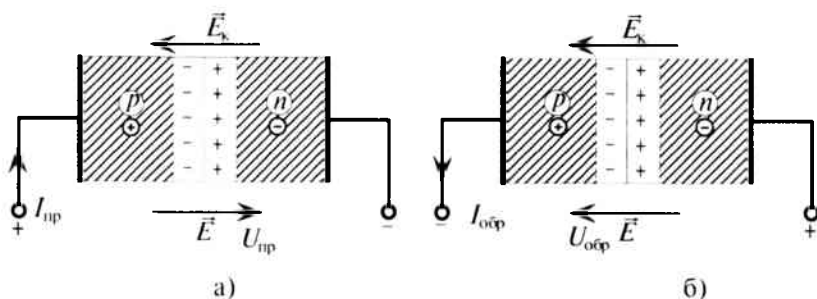


Рис. 1.14



Если к полупроводникам, образующим  $p$ - $n$ -переход, подвести напряжение от постороннего источника с напряжением  $U$ , то на границе полупроводников создается электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}$  (рис. 1.14), направление которого зависит от полярности источника.

При прямом включении источника ( $U_{\text{пр}}$ ) созданная им напряженность  $\vec{E}$  направлена против напряженности  $\vec{E}_k$ , т. е. ослабляет ее (рис. 1.14а). В результате чего уменьшается противодействие перемещению положительных зарядов в пограничном слое и увеличивается прямой ток в полупроводниках  $I_{\text{пр}}$ .

Если напряженность  $\vec{E}$  станет равной  $\vec{E}_k$ , то противодействие заряженным частицам полупроводника определяется только сопротивлением полупроводника.

При обратном включении источника ( $U_{\text{обр}}$ ) созданная им напряженность  $\vec{E}$  направлена в одном направлении с  $\vec{E}_k$ , следовательно, усиливает ее (рис. 1.14б). При этом усиливается противодействие положительным зарядам в полупроводнике, в результате чего обратный ток  $I_{\text{обр}}$  в ряде случаев может считаться равным нулю.

Таким образом, контактное соединение двух полупроводников с разными проводимостями ( $n$  и  $p$ ) обладает явно выраженной односторонней проводимостью, т. е. является вентилем (см. гл. 19 п. 2).

Односторонняя проводимость, малые габариты и другие свойства полупроводников используются в разнообразных приборах и устройствах (выпрямители, усилители и пр.). Полупроводники являются основным «строительным» материалом современных диодов, транзисторов, фоторезисторов, микропроцессоров и другой электронной техники.

## **Глава 2**

### **ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА**

#### **2.1. Электрическая цепь**

Основными элементами электрической цепи являются:

- 1) источник электрической энергии;
- 2) потребители;
- 3) устройства для передачи электрической энергии.

В источниках электрической энергии (генераторах, аккумуляторах, солнечных батареях, термоэлементах и др.) происходит преобразование различных видов энергии в электрическую.

В генераторах в электрическую энергию преобразуется механическая, тепловая, гидро-, атомная и другие виды энергии. В гальванических элементах и аккумуляторах в электрическую энергию преобразуется химическая энергия. Термоэлементы, фотоэлементы, солнечные батареи преобразуют в электрическую тепловую и световую энергию.

В потребителях происходит обратный процесс, т. е. электрическая энергия преобразуется в механическую, тепловую, световую и другие виды энергии.

Устройствами для передачи электрической энергии от источников к потребителям являются линии электропередачи, провода, кабели и другие проводники. Провод представляет собой металлическую проволоку из меди, алюминия или стали, покрытую или не покрытую изолирующим слоем. Изоляция препятствует контакту с токоведущими участками цепей, находящимися под напряжением.

Все основные элементы электрической цепи обладают электрическим сопротивлением.

Кроме основных элементов электрические цепи содержат вспомогательные элементы: предохранители, рубильники, выключатели, переключатели, измерительные приборы (амперметры, вольтметры, счетчики) и др.

Графическое изображение электрической цепи, содержащее условные обозначения ее элементов, называется схемой электрической цепи. Все основные и вспомогательные элементы в схе-

мах электрических цепей имеют условные обозначения (Приложение 3). Схема электрической цепи показана на рис. 2.1.

В электрической цепи различают два участка: внутренний и внешний. Источник является внутренним участком электрической цепи. Все остальные элементы относятся к внешнему участку электрической цепи.

## 2.2. Ток в электрической цепи

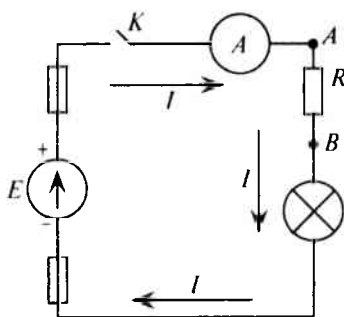


Рис. 2.1

*Электрический ток — это явление упорядоченного (направленного) перемещения заряженных частиц в проводнике под действием электрического поля.*

*Электрический ток может существовать только в замкнутой электрической цепи (ключ K замкнут — рис. 2.1).*

Интенсивность направленного перемещения электрических зарядов в замкнутой электрической цепи характеризует величину тока.

Обозначается величина постоянного тока буквой  $I$ , а переменного —  $i$  (мгновенное значение). Величина тока  $I$  определяется количеством электричества (зарядов)  $Q$ , проходящим через поперечное сечение проводника в единицу времени  $t$ :

$$I = \frac{Q}{t}, \quad i = \frac{dQ}{dt}. \quad (2.1)$$

Измеряется ток в амперах, т. е.  $[I] = \left[ \frac{Q}{t} \right] = \frac{\text{Кл}}{\text{с}} = \text{А}$  (ампер) — единица измерения тока.

Постоянным называется ток, величина и направление которого не изменяется с течением времени. Постоянный ток  $I'$  изображен на графике (рис. 2.2).

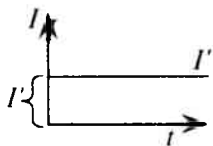


Рис. 2.2

*За направление тока в замкнутой электрической цепи принимается направление от положительной клеммы источника к его отрицательной клемме по внешнему участку цепи (рис. 2.1).*

Таким образом, направление тока противоположно направлению перемещения электронов в замкнутой цепи. Ток в цепи направлен так, как перемещались бы положительные заряды.

*В неразветвленной электрической цепи (рис. 2.1) ток на всех участках (во всех сечениях) цепи имеет одинаковое значение, в противном случае в какой-либо точке электрической цепи накапливались бы заряды, чего не может быть в замкнутой электрической цепи.*

Отношение величины тока в проводнике  $I$  к площади его поперечного сечения  $S$  характеризует плотность тока в этом проводнике.

Обозначается плотность тока буквой  $J$ .

$$J = \frac{I}{S}. \quad (2.2)$$

Единицей измерения плотности тока является ампер на квадратный метр

$$[J] = \left[ \frac{I}{S} \right] = \text{А/мм}^2.$$

Так как на практике площадь сечения проводов обычно выражают в  $\text{мм}^2$ , то плотность тока выражают  $[J] = \text{А/мм}^2$ .

Плотность тока — величина векторная. Вектор плотности тока направлен перпендикулярно площади сечения проводника.

Допустимая плотность тока определяет способность проводника определенного сечения выдерживать ту или иную токовую нагрузку. Так, например, допустимая плотность тока для монтажных проводов  $[J] = (6 \div 8) \text{ А/мм}^2$ . По допустимой плотности тока определяют сечение проводов коротких линий и проверяют сечение проводов длинных линий, рассчитанных по допустимой потере напряжения. Допустимая плотность тока в проводах из различного материала и различных марок при разных условиях монтажа приводится в справочной литературе (Приложение 11).

### 2.3. ЭДС и напряжение в электрической цепи

Источник электрической энергии осуществляет направленное перемещение электрических зарядов по всей замкнутой цепи (рис. 2.3).

Энергия  $W$ , которую затрачивает или может затратить источник на перемещение единицы положительного заряда по всей замкнутой цепи, характеризует электродвижущую силу источника  $E$  (ЭДС):

$$E = \frac{W_{\text{ист}}}{q}.$$

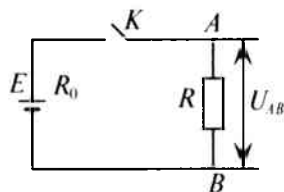


Рис. 2.3

Из определения следует, что ЭДС является энергетической характеристикой источника тока, а не силовой, как можно было бы решить по названию «электродвижущая сила». Единицей измерения ЭДС является вольт:

$$[E] = \left[ \frac{W}{q} \right] = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В (вольт)}.$$

Энергия, затраченная на перемещение единицы положительного заряда на каком-либо участке замкнутой цепи, характеризует напряжение или падение напряжения на этом участке (внутреннем или внешнем):

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q}.$$

Для замкнутой электрической цепи условие равновесия напряжений

$$E = U_0 + U. \quad (2.3)$$

Таким образом, ЭДС источника ( $E$ ) можно рассматривать как сумму падений напряжения на внутреннем ( $U_0$ ) и на внешнем ( $U$ ) участках замкнутой цепи (рис. 2.3).

#### 2.4. Закон Ома для участка цепи

Закон Ома для участка электрической цепи устанавливает зависимость между током, напряжением и сопротивлением на этом участке цепи.

Направленное перемещение электрических зарядов в проводнике (т. е. электрический ток  $I$ ) происходит под действием сил однородного электрического поля (рис. 2.4). Напряженность поля определяется из выражения (1.13)

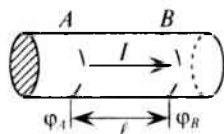


Рис. 2.4

$$E = \frac{U_{AB}}{\ell},$$

где  $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$  — напряжение на участке проводника длиной  $\ell$ .

Плотность тока в проводнике пропорциональна напряженности однородного электрического поля, силы которого направленно перемещают в нем заряды:

$$J = \gamma E, \quad (2.4)$$

где  $\gamma$  — коэффициент пропорциональности, называемый удельной проводимостью, характеризующий способность проводника проводить электрический ток.

Подставив в выражение (2.4) величину напряженности однородного электрического поля, силы которого перемещают заряды в проводнике, получим

$$\frac{I}{S} = \gamma \frac{U_{AB}}{\ell} \quad \text{или} \quad I = \frac{U_{AB}}{\frac{\ell}{\gamma S}},$$

где  $\frac{\ell}{\gamma S}$  — электрическое сопротивление участка проводника ( $R_{AB}$ ) длиной  $\ell$ ,  $R_{AB} = \frac{\ell}{\gamma S}$ .

Тогда

$$I = \frac{U_{AB}}{R_{AB}}. \quad (2.5)$$

Это и есть математическое выражение закона Ома для участка  $AB$  электрической цепи.

Таким образом, *ток на участке электрической цепи пропорционален напряжению на этом участке и обратно пропорционален сопротивлению этого участка.*

Закон Ома для участка цепи позволяет определить напряжение на данном участке

$$U_{AB} = IR_{AB}, \quad (2.6)$$

а также вычислить сопротивление участка электрической цепи

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I}. \quad (2.7)$$

Выражения (2.6) и (2.7) являются арифметическими следствиями закона Ома, которые широко применяются для расчета электрических цепей.

## 2.5. Электрическое сопротивление

Как уже говорилось, обозначается электрическое сопротивление буквой  $R$ . Единицей измерения сопротивления является Ом:

$$[R] = \text{Ом}.$$

*Электрическое сопротивление проводника — это противодействие, которое атомы или молекулы проводника оказывают направленному перемещению зарядов.*

Сопротивление  $R$  зависит от длины проводника  $\ell$ , площади поперечного сечения  $S$  и материала проводника  $\rho$ :

$$R = \rho \frac{\ell}{S}, \quad (2.8)$$

где  $\rho = \frac{1}{\gamma}$  — удельное сопротивление проводника, зависящее от свойства материала проводника.

Удельное сопротивление ( $\rho$ ) — это сопротивление проводника из данного материала длиной 1 м площадью поперечного сечения 1 мм<sup>2</sup> при температуре 20 °С. Величина удельного со-

противления некоторых проводников приведена в Приложении 4.

Единицей измерения удельного сопротивления является

$$[\rho] = \text{Ом} \cdot \text{м},$$

поскольку

$$[\rho] = \left[ \frac{RS}{\ell} \right] = \frac{\text{Ом} \cdot \text{м}^2}{\text{м}}.$$

Однако на практике сечение проводников выражают в  $\text{мм}^2$ . Поэтому  $[\rho] = \frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}$ .

Удельное сопротивление проводника определяет область его применения. Так, например, для соединения источника с потребителем применяются металлические провода с малым удельным сопротивлением — алюминий, медь. Для обмоток реостатов нагревательных приборов применяются сплавы с большим удельным сопротивлением — нихром, фехраль (при этом уменьшается длина проводника  $\ell = \frac{RS}{\rho}$ ).

Величину, обратную сопротивлению, называют проводимостью

$$g = \frac{1}{R}.$$

Единицей проводимости является сименс

$$[g] = \text{См (сименс)}.$$

Элементы электрической цепи, характеризующиеся сопротивлением  $R$ , называют резистивными, а промышленные изделия, предназначенные для выполнения роли сопротивления электрическому току, называются резисторами. Резисторы бывают регулируемые и нерегулируемые, проволочные и непроволочные, пленочные, композиционные и др.

Сопротивление проводников зависит от их температуры.

Сопротивление проводника при любой температуре (с достаточной степенью точности при изменении температуры в пределах  $0 \div 100^\circ\text{C}$ ) можно определить выражением

$$R_2 = R_1 + R_1 \alpha (t_2^* - t_1^*), \quad (2.9)$$

где  $R_2$  — сопротивление проводника при конечной температуре  $t_2^*$ ;  $R_1$  — сопротивление проводника при начальной температуре  $t_1^*$ ;  $\alpha$  — температурный коэффициент сопротивления.

Температурный коэффициент сопротивления определяет относительное изменение сопротивления проводника при изменении

его температуры на  $1^\circ\text{C}$ . Единицей измерения температурного коэффициента сопротивления является

$$[\alpha] = \frac{1}{^\circ\text{C}} = ^\circ\text{C}^{-1}.$$

Для различных проводников температурный коэффициент сопротивления имеет различные значения (Приложение 4).

Для металлических проводников (Приложение 4) температурный коэффициент сопротивления  $\alpha$  положителен, т. е. с ростом температуры сопротивление металлических проводников увеличивается (2.9). Объясняется это тем, что при нагревании увеличивается подвижность атомов и молекул металла, а следовательно, и число столкновений с ними электрических зарядов увеличивается. Таким образом, возрастает противодействие направленному перемещению этих зарядов, т. е. увеличивается сопротивление металлического проводника.

Для проводников второго рода (электролитов) и угля температурный коэффициент сопротивления  $\alpha$  отрицателен, т. е. с ростом температуры их сопротивление уменьшается (2.9). Объясняется это тем, что с повышением температуры ослабевают связи между положительно и отрицательно заряженными частицами, что приводит к усилению ионизации, обуславливающей электропроводность, т. е. уменьшается сопротивление электролитов и угля.

Для большинства электролитов  $\alpha \approx -0,02^\circ\text{C}^{-1}$ , а для угля  $\alpha = -0,005^\circ\text{C}^{-1}$ .

Температурный коэффициент сопротивления  $\alpha$  проводников определяет их применение. Например, такие сплавы, как константан и манганин, имеют малый температурный коэффициент сопротивления (Приложение 4), т. е. их сопротивление почти не зависит от температуры, поэтому их применяют в качестве материала для изготовления шунтов и добавочных сопротивлений, служащих для расширения пределов измерения амперметров и вольтметров, на точность которых не должна влиять температура.

При понижении температуры некоторых металлов и сплавов до очень низких значений, порядка нескольких градусов Кельвина ( $0^\circ\text{K} \approx -273^\circ\text{C}$ ), возникает явление сверхпроводимости.

*Сверхпроводником называют проводник, сопротивление которого практически равно нулю.*

В сверхпроводнике совершенно не выделяется тепло при прохождении тока, так как электроны при направленном движении не встречают препятствий. В нем невозможно существование магнитного поля.

Следует ожидать широкого применения сверхпроводников в электротехнике в будущем.



### 2.6. Закон Ома для замкнутой цепи

Для замкнутой электрической цепи (рис. 2.5) ЭДС источника, согласно (2.3), можно определить выражением

$$E = U_0 + U = IR_0 + IR = I(R_0 + R), \quad (2.10)$$

где  $R_0$  — сопротивление источника;  $R$  — сопротивление потребителя (сопротивлением проводов пренебрегают).

Из (2.10) следует, что ток в замкнутой цепи равен

$$I = \frac{E}{R_0 + R}. \quad (2.11)$$

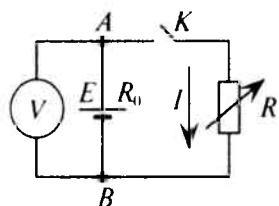


Рис. 2.5

Выражение (2.11) является математическим выражением закона Ома для замкнутой цепи.

Из (2.10) можно определить напряжение на внешнем участке цепи, т. е. напряжение на клеммах источника  $U$  между точками  $A$  и  $B$  (см. рис. 2.5).

$$U = E - U_0 = E - IR_0. \quad (2.12)$$

Таким образом, напряжение  $U$  на клеммах источника электрической энергии меньше, чем ЭДС этого источника ( $E$ ) на величину падения напряжения  $U_0$  на внутреннем сопротивлении источника.

Отсутствие нагрузки — ключ  $K$  разомкнут — соответствует режиму холостого хода. При этом  $IR_0 = 0$ . Вольтметр ( $V$ ), подключенный к клеммам источника  $A$  и  $B$  (рис. 2.5), при отсутствии нагрузки ( $I = 0$ ) показывает ЭДС источника  $E$

$$U = E - IR_0 = E - 0 = E.$$

Если же ключ  $K$  замкнут ( $I \neq 0$ ), то вольтметр покажет напряжение  $U$  на клеммах источника, которое меньше ЭДС на величину  $U_0 = IR_0$ , равную падению напряжения на внутреннем сопротивлении источника (2.12).

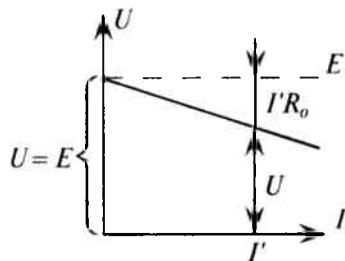


Рис. 2.6

Из (2.12) следует, что с увеличением нагрузки, т. е. с увеличением тока  $I$ , напряжение на клеммах источника уменьшается, что можно показать графически на внешней характеристике источника (рис. 2.6).

Очевидно, чем больше внутреннее сопротивление источника  $R_0$ , тем меньше будет напряжение на его клеммах при нагрузке  $I'$ .

## 2.7. Энергия и мощность электрического тока

В замкнутой электрической цепи источник затрачивает электрическую энергию  $W_{\text{ист}}$  на перемещение единицы положительного заряда по всей замкнутой цепи, т. е. на внутреннем и внешнем участках ((2.3) и рис. 2.3).

$$E = U + U_0.$$

ЭДС источника определяется выражением  $E = \frac{W_{\text{ист}}}{q}$ . Из этого выражения следует, что энергия, затраченная источником, равна

$$W_{\text{ист}} = Eq = EIt, \quad (2.13)$$

так как  $q = It$ , что вытекает из определения величины тока  $I = \frac{q}{t}$ .

Энергия источника расходуется на потребителе (полезная энергия)

$$W = Uq = UIt \quad (2.14)$$

и на внутреннем сопротивлении источника (потери)

$$W_0 = U_0q = U_0It. \quad (2.15)$$

Потерей энергии в проводах, при незначительной их длине, можно пренебречь.

Из закона сохранения энергии следует

$$W_{\text{ист}} = W + W_0. \quad (2.16)$$

Во всех элементах электрической цепи происходит преобразование энергии (в источниках различные виды энергии преобразуются в электрическую, в потребителях — электрическая в другие виды энергии).

*Скорость такого преобразования энергии определяет электрическую мощность элементов электрической цепи*

$$P = \frac{W}{t}. \quad (2.17)$$

Обозначается электрическая мощность буквой  $P$ , а единицей электрической мощности является ватт, другими словами,  $[P] = \text{Вт}$  (ватт)

$$[P] = \left[ \frac{W}{t} \right] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{с}} = \text{Вт}.$$

Таким образом, мощность источника электрической энергии определяется выражением

$$P_{\text{ист}} = \frac{W_{\text{ист}}}{q} = \frac{EIt}{t} = EI. \quad (2.18)$$

Мощность потребителя, т. е. полезная, потребляемая мощность, будет равна

$$P = \frac{W}{q} = \frac{UIt}{t} = UI. \quad (2.19)$$

Если воспользоваться законом Ома для участка электрической цепи, то полезную мощность можно определить следующим выражением:

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (2.20)$$

Потери мощности на внутреннем сопротивлении источника

$$P_0 = U_0 I = I^2 R_0. \quad (2.21)$$

Для любой замкнутой цепи должен сохраняться баланс мощностей

$$P_{\text{ист}} = P + P_0. \quad (2.22)$$

Так как электрическая мощность измеряется в ваттах, то единицей измерения электрической энергии является

$$[W] = [Pt] = \text{Вт} \cdot \text{с}.$$

Коэффициент полезного действия электрической цепи  $\eta$  определяется отношением полезной мощности (мощности потребителя) ко всей затраченной мощности (мощности источника)

$$\eta = \frac{P}{P_{\text{ист}}} \cdot 100 \%. \quad (2.23)$$

## 2.8. Закон Джоуля — Ленца

В проводах линии передачи электрической энергии, обмоток якорей и полюсов электрических машин, электробытовых приборов и других потребителей происходит преобразование электрической энергии в тепловую.

Ток  $I$ , протекая по проводнику с сопротивлением  $R$ , нагревает этот проводник. За время  $t$  в этом проводнике выделяется тепло, количество которого определяется количеством электрической энергии, затраченной в этом проводнике, т. е.

$$Q = W = Pt = I^2 Rt, \quad (2.24)$$

где  $Q$  — количество тепла, выделенного в проводнике, Вт·с.

Приведенная зависимость (2.24) является математическим выражением закона Джоуля — Ленца.

Таким образом, закон Джоуля — Ленца устанавливает зависимость между количеством тепла и электрической энергией: количество тепла, выделенное током в проводнике, пропорционально квадрату тока, сопротивлению проводника и времени прохождения тока по проводнику.

Количество тепла  $Q$  измеряется иногда внесистемной единицей — калорией (количество тепла, необходимое для нагревания 1 г воды на 1 °С). Причем 1 кал = 4,187 Дж, следовательно, 1 Вт·с = 1 Дж = 0,24 кал.

Для определения количества тепла  $Q$  в калориях пользуются выражением

$$Q = 0,24 I^2 R t \text{ (кал)}. \quad (2.25)$$

Коэффициент 0,24 называют электротермическим эквивалентом, который устанавливает зависимость между электрической и тепловой энергией.

Например, количество тепла, выделенное в проводнике с сопротивлением  $R = 24$  Ом, по которому проходит ток  $I = 5$  А в течение 2 часов ( $t = 2$  часа =  $2 \cdot 3600 = 7200$  с) составляет:

$$Q = I^2 R t = 5^2 \cdot 24 \cdot 7200 = 4\,320\,000 \text{ Вт} \cdot \text{с} = 4,32 \cdot 10^6 \text{ Дж}$$

или

$$Q = 0,24 \cdot 4,32 \cdot 10^6 = 1,9368 \cdot 10^6 \text{ кал.}$$

Преобразование электрической энергии в тепловую широко используется в разнообразных электронагревательных приборах. Однако преобразование электрической энергии в тепловую вызывает и непроизводительные расходы энергии в электрических машинах, трансформаторах и других элементах электрической цепи и снижает их КПД.

## 2.9. Режимы работы электрических цепей

В электрической цепи различают активные и пассивные элементы (участки). Активными считаются элементы, в которых преобразование энергии сопровождается возникновением ЭДС (аккумуляторы, генераторы). Пассивными считаются элементы, в которых ЭДС не возникает.

Параметры, характеризующие работу электрической цепи (рис. 2.5) при различных режимах, определяются следующими выражениями.

$$\text{Ток в замкнутой цепи } I = \frac{E}{R_0 + R}.$$

$$\text{Напряжение на клеммах источника } U = E - I R_0.$$

$$\text{Падение напряжения на сопротивлении источника } U_0 = I R_0.$$

Полезная мощность (мощность потребителя)

$$P = P_{\text{ист}} - P_0 = E I - I^2 R_0.$$

Исследуем изменение этих величин при изменении сопротивления  $R$  от бесконечности (режим холостого хода) до нуля (режим короткого замыкания).

1. В режиме холостого хода (ключ  $K$  разомкнут)  $R = \infty$ ,

$$I_{xx} = 0; U = E; U_0 = 0; P = 0.$$

2. В режиме короткого замыкания  $R = 0$ ,

$$I_{кз} = \frac{E}{R_0}; U = E - \frac{E}{R_0} R_0 = 0; U_0 = \frac{E}{R_0} R_0 = E;$$

$$P = E \frac{E}{R_0} - \frac{E^2}{R_0^2} R_0 = 0.$$

Таким образом, полезная мощность  $P$  при холостом ходе и коротком замыкании равна нулю. Следовательно, при каком-то значении сопротивления  $R$  полезная мощность  $P$  имеет максимальную величину.

Для определения этого значения определим первую производную полезной мощности по току и приравняем ее к нулю, т. е.

$$\frac{dP}{dI} = E - 2IR_0 = 0$$

или

$$E = 2IR_0.$$

Следовательно, максимальная мощность будет при токе

$$I = \frac{E}{2R_0} = \frac{I_{кз}}{2}.$$

Максимальная полезная мощность выделяется при

$$\boxed{R = R_0.} \quad (2.26)$$

*Полезная мощность максимальна, когда сопротивление потребителя  $R$  станет равным внутреннему сопротивлению источника  $R_0$ . Это и есть условие максимальной отдачи мощности источником (2.26).*

При максимальной отдаче мощности ток в цепи равен  $I = \frac{E}{2R_0} = \frac{I_{кз}}{2}$ , а коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{P}{P_{ист}} = \frac{UI}{EI} = \frac{EI}{2EI} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50 \%, \text{ так как } U = \frac{E}{2}.$$

К 100 % КПД цепи приближается в режиме, близком к холостому ходу.

Максимальной отдачи мощности добиваются в маломощной аппаратуре: звуковоспроизводящей, радио, магнитофонах и др. В мощных энергетических установках добиваются максимального КПД.

Зависимость напряжений и полезной мощности от нагрузки (тока  $I$ ) показана на рис. 2.7.

Режим короткого замыкания в электрических установках нежелателен, так как он приводит к большому току (больше номинального), т. е. к резкому увеличению выделения тепла и выходу из строя аппаратуры.

Нормальным (рабочим) называется режим работы цепи, при котором ток, напряжение и мощность не превышают номинальных значений — значений, на которые источник и приемники энергии рассчитаны заводом-изготовителем.

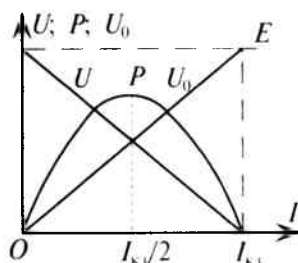


Рис. 2.7

### Пример 2.1

К источнику электрической энергии с ЭДС  $E = 30$  В и внутренним сопротивлением  $R_0 = 1$  Ом подключен резистор  $R$ , сопротивление которого можно изменять (рис. 2.5). Определить ток цепи  $I$ , напряжение на клеммах источника  $U$ , мощность потребителя  $P$ , мощность источника  $P_{\text{ист}}$  и КПД цепи  $\eta$  при следующих значениях сопротивлений резистора  $R = 0,5$  Ом; 1 Ом; 2 Ом.

### Решение

1. При сопротивлении резистора  $R = 0,5$  Ом

$$I = \frac{E}{R_0 + R} = \frac{30}{1 + 0,5} = 20 \text{ А};$$

$$U = E - IR_0 = 30 - 20 \cdot 1 = 10 \text{ В};$$

$$P = UI = 10 \cdot 20 = 200 \text{ Вт};$$

$$P_{\text{ист}} = EI = 30 \cdot 20 = 600 \text{ Вт};$$

$$\eta = \frac{P}{P_{\text{ист}}} \cdot 100 \% = \frac{200}{600} \cdot 100 \% = 0,33 = 33 \ %.$$

2. При сопротивлении резистора  $R = 1$  Ом ( $R = R_0$  — максимальная отдача мощности)

$$I = \frac{E}{R_0 + R} = \frac{30}{1 + 1} = 15 \text{ А};$$

$$U = E - IR_0 = 30 - 15 \cdot 1 = 15 \text{ В};$$

$$P = UI = 15 \cdot 15 = 225 \text{ Вт};$$

$$P_{\text{ист}} = EI = 30 \cdot 15 = 450 \text{ Вт};$$

$$\eta = \frac{P}{P_{\text{ист}}} \cdot 100\% = \frac{225}{450} \cdot 100\% = 0,5 = 50\%.$$

3. При сопротивлении резистора  $R = 2 \text{ Ом}$

$$I = \frac{E}{R_0 + R} = \frac{30}{1 + 2} = 10 \text{ А};$$

$$U = E - IR_0 = 30 - 10 \cdot 1 = 20 \text{ В};$$

$$P = UI = 20 \cdot 10 = 200 \text{ Вт};$$

$$P_{\text{ист}} = EI = 30 \cdot 10 = 300 \text{ Вт};$$

$$\eta = \frac{P}{P_{\text{ист}}} \cdot 100\% = \frac{200}{300} \cdot 100\% = 0,67 = 67\%.$$

### Пример 2.2

При замкнутом ключе  $K$  (рис. 2.8) показания вольтметра  $6 \text{ В}$ , а амперметра  $1,5 \text{ А}$ . Если ключ  $K$  разомкнут, то вольтметр покажет  $6,6 \text{ В}$ . Определить сопротивление потребителя  $R$  и внутреннее сопротивление источника  $R_0$ . Сохранен ли баланс мощностей и каков КПД цепи при замкнутом ключе  $K$ ?

**Решение**

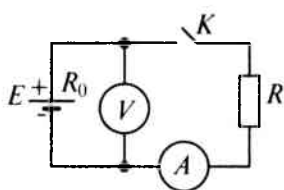


Рис. 2.8

При разомкнутом ключе  $K$  вольтметр показывает величину ЭДС источника  $E = 6,6 \text{ В}$ , а при замкнутом — напряжение на клеммах источника и потребителя  $U = 6 \text{ В}$ .

Тогда сопротивление потребителя

$$R = \frac{U}{I} = \frac{6}{1,5} = 4 \text{ Ом},$$

а внутреннее сопротивление источника

$$R_0 = \frac{E - U}{I} = \frac{6,6 - 6}{1,5} = 0,4 \text{ Ом}.$$

Баланс мощностей в работающей цепи:  $EI = I^2(R_0 + R)$ , т. е.  $6,6 \cdot 1,5 = 1,5^2 \cdot (0,4 + 4)$  или  $9,9 = 9,9$ , т. е. баланс мощностей сохранен.

$$\text{КПД цепи} \quad \eta = \frac{U}{E} = \frac{6}{6,6} = 0,91 = 91\%.$$

### Пример 2.3

Электрический чайник, рассчитанный на напряжение  $U = 220 \text{ В}$  и ток  $I = 4 \text{ А}$ , ежедневно работает 7 минут. Какое количество тепла

ежедневно выделяет его нагреватель и столько стоит потребляемая чайником энергия за 1 месяц (30 дней), если 1 кВт·ч энергии стоит 63 копейки?

### Решение

Ежедневно энергия, потребляемая чайником, составляет

$$W_1 = UI t = 220 \cdot 4 \cdot 420 = 369\,600 \text{ Вт}\cdot\text{с} = 0,102 \text{ кВт}\cdot\text{ч}.$$

За 1 месяц чайник потребляет энергии

$$W = 30 W_1 = 30 \cdot 0,102 = 3,06 \text{ кВт}\cdot\text{ч},$$

стоимость которой

$$3,06 \cdot 63 = 192,78 \text{ коп.} = 1 \text{ р. } 93 \text{ коп.}$$

Количество тепла, выделяемое ежедневно, равно

$$Q = 0,24 W_1 = 0,24 \cdot 369\,600 = 88\,704 \text{ кал.}$$



## Глава 3

### РАСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

#### 3.1. Режимы работы источников

Электрическая цепь, содержащая только линейные элементы, называется линейной. Элемент цепи, сопротивление которого остается постоянным при любых значениях и направлениях тока в нем и напряжении на его выводах, называется линейным.

Рассмотрим неразветвленную линейную электрическую цепь с несколькими источниками энергии (рис. 3.1а).

*Величина и направление тока в неразветвленной электрической цепи с несколькими источниками (рис. 3.1) определяется отношением алгебраической суммы ЭДС всех источников к полному сопротивлению цепи*

$$I = \frac{\sum E}{\sum R} \quad (3.1)$$

**Первое правило Лоторейчука:** Для определения знаков ЭДС в алгебраической сумме условно задаются направлением обхода кон-

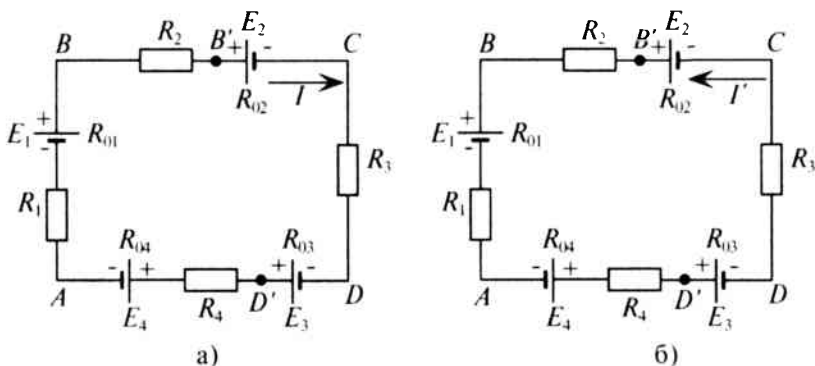


Рис. 3.1

тура: по часовой или против часовой стрелки. ЭДС источника, направление которой совпадает с выбранным направлением обхода, учитывают со знаком «плюс», а ЭДС источника, направление которой не совпадает с выбранным направлением обхода, — со знаком «минус». Например, (рис. 3.1а) направление обхода выбрано по часовой стрелке, тогда

$$I = \frac{E_1 - E_2 + E_3 - E_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_{01} + R_{02} + R_{03} + R_{04}}.$$

Если в результате расчета величина тока получится со знаком «плюс», то его направление совпадает с выбранным направлением обхода, если же со знаком «минус», то направление тока цепи противоположно выбранному направлению обхода.

Определив, таким образом, величину и направление тока в цепи, можно заключить, что направление ЭДС источников не всегда совпадает с направлением тока.

*Источники, ЭДС которых совпадают с направлением тока, работают в режиме генератора, а источники, ЭДС которых не совпадают с направлением тока, работают в режиме потребителя.*

Если, допустим, в результате расчета цепи (рис. 3.1а) окажется, что ток совпадает с выбранным направлением обхода (по часовой стрелке), то источники с ЭДС  $E_1$  и  $E_3$  будут работать в режиме генераторов, а  $E_2$  и  $E_4$  — в режиме потребителей.

Напряжения на каждом участке электрической цепи определяются отношением мощности, затраченной на этом участке, деленной на ток, проходящий по этому участку, т. е.

$$U_{yч} = \frac{P_{yч}}{I_{yч}}.$$

Ток на всех участках неразветвленной цепи имеет одинаковое значение  $I$ .

Напряжение на сопротивлении  $R_2$  можно определить отношением

$$U_2 = \frac{P_2}{I}.$$

На участке  $B'C$ , т. е. на клеммах источника  $E_2$ , работающего в режиме потребителя, мощность  $P_{B'C}$  затрачивается на преодоление мощности источника ( $E_2 I$ ) и на потери на внутреннем сопротивлении источника  $R_{02}$  ( $I^2 R_{02}$ ), откуда следует

$$P_{B'C} = E_2 I + I^2 R_{02}.$$

Тогда напряжение  $U_{B'C}$  на клеммах источника, работающего в режиме потребителя, равно

$$U_{B'C} = \frac{P_{B'C}}{I} = E_2 + I R_{02}.$$

Таким образом, *напряжение на зажимах источника, работающего в режиме потребителя, больше, чем ЭДС самого источника на величину падения напряжения на внутреннем сопротивлении этого источника:*

$$U_{\text{истр}} = E_{\text{истр}} + I R_{\text{истр}} . \quad (3.2)$$

А напряжение на клеммах источника, работающего в режиме генератора (2.12), меньше, чем ЭДС источника на величину падения напряжения на внутреннем сопротивлении:

$$U_{\text{ген}} = E_{\text{ген}} - I R_{\text{ген}} . \quad (3.3)$$

Следовательно, напряжение на любом участке цепи (рис. 3.1а) может быть определено выражением

$$U = \varphi_{(+)} - \varphi_{(-)} = E \pm I R , \quad (3.4)$$

где  $U$  — напряжение на участке между точкой с положительным потенциалом  $\varphi_{(+)}$  и точкой с отрицательным потенциалом  $\varphi_{(-)}$ , а  $R$  — полное сопротивление участка.

В формуле (3.4) знак «плюс» ставят для участка, на котором источник работает в режиме потребителя, а знак «минус» для участка, на котором источник работает в режиме генератора.

### Пример 3.1

Определить величину тока  $I'$  и напряжения на участках  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD'$  и  $D'A$  цепи (рис. 3.1б), если известно:

$$\begin{aligned} E_1 &= 20 \text{ В}; E_2 = 18 \text{ В}; E_3 = 10 \text{ В}; E_4 = 24 \text{ В}; \\ R_1 &= 1 \text{ Ом}; R_2 = 2 \text{ Ом}; R_3 = 3 \text{ Ом}; R_4 = 4 \text{ Ом}; \\ R_{01} &= R_{02} = R_{03} = R_{04} = 0,5 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Проверить баланс напряжений.

### Решение

Выберем направление обхода по часовой стрелке. Тогда

$$I' = \frac{E_1 - E_2 + E_3 - E_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_{01} \cdot 4} = \frac{20 - 18 + 10 - 24}{1 + 2 + 3 + 4 + 4 \cdot 0,5} = -1 \text{ А}.$$

Так как значение тока получили со знаком «минус», то его направление противоположно выбранному направлению обхода, т. е. ток в цепи  $I'$  (рис. 3.1б) направлен против часовой стрелки. (В дальнейшем знак «минус» не учитывается.) На участке  $AB$  источник работает в режиме потребителя, на участке  $BC$  — в режиме генератора, на участке  $CD'$  — в режиме потребителя и на участке  $D'A$  — в режиме генератора. Таким образом

$$U_{AB} = -U_{BA} = -[E_1 + I'(R_1 + R_{01})] = -[20 + 1 \cdot (1 + 0,5)] = -21,5 \text{ В};$$

$$U_{BC} = E_2 - I'(R_2 + R_{02}) = 18 - 1 \cdot (2 + 05) = 15,5 \text{ В};$$

$$U_{CD'} = -U_{D'C} = -[E_3 + I'(R_3 + R_{03})] = -[10 + 1 \cdot (3 + 05)] = -13,5 \text{ В};$$

$$U_{D'A} = E_4 - I'(R_4 + R_{04}) = 24 - 1 \cdot (4 + 05) = 19,5 \text{ В}.$$

Баланс напряжений в замкнутой неразветвленной цепи соблюдается:

$$-21,5 + 15,5 - 13,5 + 19,5 = 0.$$

### 3.2. Потенциальная диаграмма

При изучении и расчете некоторых электрических цепей необходимо определить потенциалы отдельных точек цепи и построить потенциальную диаграмму. Для этого можно использовать выражение (3.4) (рис. 3.1а).

На участке  $AB$  точка  $B$  имеет положительный потенциал  $\varphi_{(+)}$ , а точка  $A$  — отрицательный потенциал  $\varphi_{(-)}$ , поэтому  $\varphi_B - \varphi_A = \varphi_{(+)} - \varphi_{(-)} = E_1 - I(R_1 + R_{01})$ , так как источник работает в режиме генератора, т. е.

$$\varphi_B = \varphi_A + E_1 - I(R_1 + R_{01}).$$

На участке  $BC$  точка  $B$  имеет положительный потенциал  $\varphi_{(+)}$ , а точка  $C$  — отрицательный  $\varphi_{(-)}$ , поэтому  $\varphi_B - \varphi_C = \varphi_{(+)} - \varphi_{(-)} = E_2 + I(R_2 + R_{02})$ , источник с ЭДС  $E_2$  работает в режиме потребителя, т. е.

$$\varphi_C = \varphi_B - E_2 - I(R_2 + R_{02}).$$

Таким образом, потенциал точки  $D$  можно записать

$$\varphi_D = \varphi_A + E_1 - E_2 - I(R_1 + R_{01} + R_2 + R_{02} + R_3),$$

если обходить цепь по направлению тока, или

$$\varphi_D = \varphi_A + E_4 - E_3 - I(R_{04} + R_4 + R_{03}),$$

если обходить цепь против направления тока.

Отсюда можно сделать следующий вывод: *если обходить цепь или участок цепи по направлению тока, то потенциал в каждой точке определяется потенциалом предыдущей точки плюс ЭДС источника, работающего в режиме генератора, минус ЭДС источника, работающего в режиме потребителя, и минус падение напряжения на участке между точками цепи. При обходе контура против направления тока знаки ЭДС и падения напряжения изменяются на противоположные. Это второе правило Лоторейчука.*

Это правило особенно удобно применять в тех случаях, когда в цепи имеются участки с несколькими источниками.

Потенциальная диаграмма представляет собой график зависимости потенциалов точек цепи от величины сопротивлений участков между этими точками.

Для построения потенциальной диаграммы одну из точек электрической цепи условно заземляют (потенциал ее принимают равным нулю), а потенциалы остальных точек равны напряжению между ними и заземленной точкой.

Потенциальная диаграмма представляет собой ломаную линию (рис. 3.3).

### Пример 3.2

Для цепи, изображенной на рис. 3.2, дано:

$$E_1 = 8 \text{ В}; E_2 = 24 \text{ В}; E_3 = 9,5 \text{ В}; R_1 = 0,5 \text{ Ом}; R_2 = 1 \text{ Ом};$$

$$R_3 = 1,5 \text{ Ом}; R_{01} = 0,15 \text{ Ом}; R_{02} = 0,1 \text{ Ом}; R_{03} = 0 \text{ Ом}.$$

1. Определить величину и направление тока в цепи.
2. Определить потенциал точек  $B, C, D, E, G$ , приняв потенциал точки  $A$  равным нулю,  $\varphi_A = 0$ .

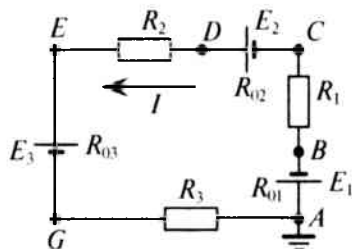


Рис. 3.2

3. Построить потенциальную диаграмму.

4. Составить и проверить баланс мощностей для цепи.

### Решение

1. Выбираем направление обхода контура по часовой стрелке, тогда величина тока

$$I = \frac{E_1 - E_2 + E_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_{01} + R_{02} + R_{03}} =$$

$$= \frac{8 - 24 + 9,5}{0,5 + 1 + 1,5 + 0,15 + 0,1 + 0} = -2 \text{ А}.$$

Знак «минус», полученный в результате вычислений, указывает на то, что ток направлен против выбранного направления обхода, как показано на рис. 3.2. В дальнейших расчетах знак «минус» не учитывается. Таким образом, источник ЭДС  $E_2$  работает в режиме генератора, а  $E_1$  и  $E_3$  — потребителей.

2. Для определения потенциалов указанных точек обходим контур по направлению тока. При этом получаем

$$\varphi_B = \varphi_A - E_1 - IR_{01} = 0 - 8 - 2 \cdot 0,15 = -8,3 \text{ В};$$

$$\varphi_C = \varphi_B - IR_1 = -8,3 - 2 \cdot 0,5 = -9,3 \text{ В};$$

$$\varphi_D = \varphi_C + E_2 - IR_{02} = -9,3 + 24 - 2 \cdot 0,1 = 14,5 \text{ В};$$

$$\varphi_E = \varphi_D - IR_2 = 14,5 - 2 \cdot 1 = 12,5 \text{ В};$$

$$\varphi_G = \varphi_E - E_3 - IR_{03} = 12,5 - 9,5 - 2 \cdot 0 = 3 \text{ В};$$

$$\varphi_A = \varphi_G - IR_3 = 3 - 2 \cdot 1,5 = 0.$$

3. Для построения потенциальной диаграммы по оси ординат в масштабе откладываются потенциалы точек, а по оси абсцисс — сопротивления участков. Потенциальная диаграмма изображена на рис. 3.3.

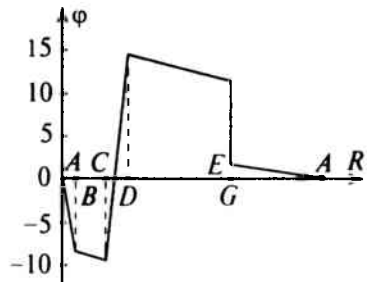


Рис. 3.3

4. Баланс мощностей в электрической цепи с несколькими источниками соблюдается при условии, что сумма мощностей источников, работающих в режиме генераторов, равна сумме мощностей источников, работающих в режиме потребителей, и потерям мощностей на всех сопротивлениях цепи, включая внутренние сопротивления источников:

$$E_2 I = E_1 I + E_3 I + I^2 (R_1 + R_2 + R_3 + R_{01} + R_{02} + R_{03});$$

$$24 \cdot 2 = 8 \cdot 2 + 9,5 \cdot 2 + 2^2 \cdot (0,5 + 1 + 1,5 + 0,15 + 0,1 + 0);$$

$$48 \text{ Вт} = 48 \text{ Вт}.$$

### 3.3. Законы Кирхгофа

В схемах электрических цепей можно выделить характерные элементы: ветвь, узел, контур.

Ветвью электрической цепи называется ее участок, на всем протяжении которого величина тока имеет одинаковое значение.

Узлом электрической цепи (узловой точкой) называется место соединения электрических ветвей. В узловой точке сходятся как минимум три ветви (проводника).

Контуром электрической цепи называют замкнутое соединение, в которое могут входить несколько ветвей (рис. 3.4б).

Ветви, содержащие источник электрической энергии, называются активными, а ветви, не содержащие источников, называются пассивными.

**Первый закон Кирхгофа.** В разветвленной цепи ток в различных ветвях может иметь различное значение. Сумма токов, входящих в узловую точку разветвленной цепи, должна быть равна сумме токов, выходящих из этой точки.

На рис. 3.4а показана узловая точка цепи А, для которой можно записать

$$I_1 + I_3 + I_5 = I_2 + I_4 \quad \text{или} \quad I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + I_5 = 0,$$

$$\boxed{\sum I = 0.}$$

(3.5)

Выражение (3.5) представляет собой математическую запись первого закона (правила) Кирхгофа.

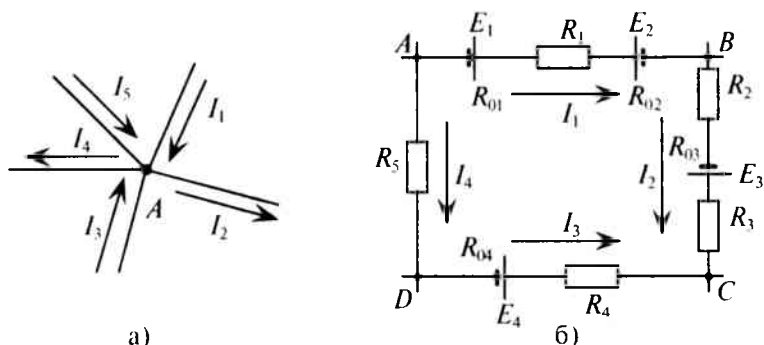


Рис. 3.4

Первый закон Кирхгофа формулируется так: *алгебраическая сумма токов в ветвях, соединенных в один узел, равна нулю.*

Токи, входящие в узел, принято считать положительными, а выходящие из узла — отрицательными.

*Второй закон Кирхгофа* устанавливает зависимость между ЭДС и падением напряжения в замкнутом контуре любой электрической цепи.

Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  являются узловыми точками (рис. 3.4б), поскольку в каждой из них сходятся четыре проводника.

Определим потенциал каждой узловой точки, воспользовавшись выражением (3.4).

$$\begin{aligned} \varphi_B &= \varphi_A + E_1 - I_1 R_{01} - I_1 R_1 - E_2 - I_2 R_{02} && \text{(обход по току);} \\ \varphi_C &= \varphi_B - I_2 R_2 + E_3 - I_2 R_{03} - I_2 R_3 && \text{(обход по току);} \\ \varphi_D &= \varphi_C + I_3 R_4 - E_4 + I_3 R_{04} && \text{(обход против тока);} \\ \varphi_A &= \varphi_D + I_4 R_5 && \text{(обход против тока).} \end{aligned}$$

Сумма потенциалов всех узловых точек замкнутого контура равна

$$\begin{aligned} \varphi_B + \varphi_C + \varphi_D + \varphi_A &= \varphi_A + E_1 - I_1 R_{01} - I_1 R_1 - E_2 - I_1 R_{02} + \\ &+ \varphi_B - I_2 R_2 + E_3 - I_2 R_{03} - I_2 R_3 + \varphi_C + I_3 R_4 - E_4 - I_3 R_{04} + \varphi_D + I_4 R_5. \end{aligned}$$

Сократив все потенциалы замкнутого контура, слева и справа от знака равенства, и перенеся все ЭДС замкнутого контура налево от знака равенства, а падения напряжения оставив справа, можно записать

$$\begin{aligned} -E_1 + E_2 - E_3 + E_4 &= -I_1 R_{01} - I_1 R_1 - I_1 R_{02} - I_2 R_2 - \\ &- I_2 R_{03} - I_2 R_3 + I_3 R_4 + I_3 R_{04} + I_4 R_5, \end{aligned}$$

что и является вторым законом Кирхгофа, который формулируется так:

*Алгебраическая сумма ЭДС в замкнутом контуре электрической цепи равна алгебраической сумме падений напряжений на всех участках этой цепи*

$$\Sigma E = \Sigma IR^{\circ} \quad (3.6)$$

Выражение (3.6) представляет собой математическую запись второго закона (правила) Кирхгофа.

**Третье правило Лоторейчука:** Для определения знаков в алгебраической сумме направление обхода контура выбирается произвольно: по часовой или против часовой стрелки.

ЭДС источника, совпадающая с выбранным направлением обхода контура, считается положительной, а не совпадающая — отрицательной.

Падение напряжения на сопротивлении  $R$  считается положительным, если ток, протекающий через него, совпадает с выбранным направлением обхода контура, или отрицательным — если не совпадает.

Для электрической цепи, изображенной на рис. 3.4б, второй закон Кирхгофа записывается так:

$$E_1 - E_2 + E_3 - E_4 = I_1(R_1 + R_{01} + R_{02}) + I_2(R_2 + R_3 + R_{03}) - I_3(R_4 + R_{04}) - I_4R_5.$$

Направление обхода контура в приведенном расчете выбрано по часовой стрелке.

### 3.4. Последовательное соединение потребителей

*Последовательным соединением участков электрической цепи называют соединение, при котором через все участки цепи проходит один и тот же ток (рис. 3.5).*

Напряжение на каждом последовательно включенном участке пропорционально величине сопротивления этого участка.

При последовательном соединении потребителей с сопротивлениями  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  (рис. 3.5) напряжение на их зажимах равно

$$U_1 = IR_1; U_2 = IR_2; U_3 = IR_3.$$

Воспользовавшись вторым законом Кирхгофа для рассматриваемой цепи (рис. 3.5), можно записать

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

или

$$U = IR_1 + IR_2 + IR_3. \quad (3.7)$$

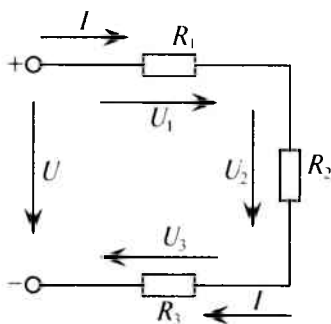


Рис. 3.5



Откуда 
$$\frac{U}{I} = R_1 + R_2 + R_3 = R. \quad (3.8)$$

Таким образом, *общее (эквивалентное) сопротивление  $R$  последовательно включенных сопротивлений (потребителей) равно сумме этих сопротивлений.*

Ток в цепи последовательно включенных потребителей (рис. 3.5) определяется выражением

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Нетрудно понять, что при изменении сопротивления хотя бы одного потребителя изменяется ток цепи, а следовательно, и режим работы (напряжение) всех последовательно включенных потребителей.

Поэтому последовательное соединение сопротивлений не нашло широкого практического применения.

Следует заметить, что при последовательном соединении резисторов на большем сопротивлении тратится большая мощность

$$P = UI = I^2 R.$$

### Потенциометр

Распределение напряжений, пропорциональное сопротивлениям последовательно соединенных резисторов, используется в работе потенциометра (делителя напряжения). В качестве потенциометра можно использовать реостат с подвижным контактом, включенным как показано на рис. 3.6.

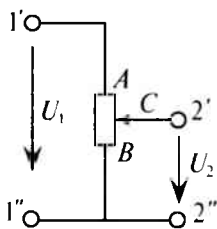


Рис. 3.6

Изменяя сопротивление реостата, можно плавно изменять напряжение  $U_2$ , получаемое на потребителе: от величины входного напряжения  $U_1$ , подведенного к клеммам 1'—1'' (движок реостата в точке  $A$ ), до нуля (движок реостата в точке  $B$ ). Потребитель подключается к клеммам 2'—2''.

Делитель напряжения может состоять из нескольких резисторов с постоянными сопротивлениями, соединенными последовательно. Напряжение при этом можно снимать с каждого резистора или группы резисторов.

### Потеря напряжения в проводах

В линиях электропередачи (ЛЭП) электрической энергии соединительные провода включаются последовательно с потребителем (рис. 3.7а).

Так как провода обладают сопротивлением  $R = 2\rho \frac{\ell}{S}$  (двухпроводная линия), то при прохождении по ним тока происходит потеря напряжения на них. За счет этой потери напряжение в конце линии электропередачи  $U_2$  меньше, чем напряжение  $U_1$  в начале. Величина потери напряжения в проводах:

$$\Delta U = U_1 - U_2 = IR_{\text{пр}}. \quad (3.9)$$

Из (3.9) следует, что потеря напряжения в проводах зависит от тока потребителя (нагрузки)  $I$  и сопротивления проводов  $R_{\text{пр}}$ .

Для того чтобы увеличение тока в линии не приводило к значительной потере напряжения и к ощутимому уменьшению напряжения на потребителе  $U_2$ , расчет сечений проводов ЛЭП производят с учетом допустимой потери напряжения

$$e \% = \frac{\Delta U}{U_2} \cdot 100 \%.$$

Допустимая потеря напряжения в многокилометровых ЛЭП не должна превышать 10 %.

Расчет сечения проводов (двухпроводной линии) по допустимой потере напряжения производят по следующему выражению:

$$S = 2\rho \frac{\ell}{R_{\text{пр}}} = 2\rho \frac{\ell I}{\Delta U} = \frac{2\rho \ell I \cdot 100}{e \% U_2} = \frac{200\rho \ell P_2}{e \% U_2^2}, \quad (3.10)$$

где  $S$  — сечение проводов ЛЭП, мм<sup>2</sup>;  $\rho$  — удельное сопротивление материала провода, Ом·мм<sup>2</sup>/м;  $\ell$  — длина ЛЭП, м;  $P_2$  — мощность потребителя, Вт;  $U_2$  — напряжение на потребителе, В.

Выбранное по допустимым потерям напряжения сечение проводов ЛЭП должно быть проверено по допустимому току (Приложение 11).

Из (3.10) видно, что сечение проводов зависит от напряжения на потребителе  $U_2$ . Поскольку эта зависимость квадратичная, то для уменьшения сечения проводов рационально увеличивать напряжение ЛЭП. В настоящее время напряжение ЛЭП переменного тока достигает 1150 кВ, а постоянного тока 1500 кВ.

Выражение (3.10) справедливо для ЛЭП с нагрузкой в конце линии (рис. 3.7а).

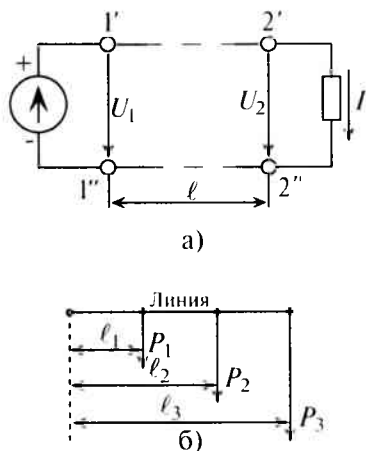


Рис. 3.7

Если же нагрузка распределена вдоль линии (рис. 3.7б), то сечение проводов определяется выражением

$$S = \frac{200\rho}{e\%U^2} (P_1\ell_1 + P_2\ell_2 + P_3\ell_3). \quad (3.10')$$

КПД линии электропередачи в процентах определяется выражением

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \cdot 100\% = \frac{U_1 - \Delta U}{U_1} \cdot 100\%, \quad (3.11)$$

где  $P_2$  — мощность потребителя;  $P_1$  — мощность источника.

Как следует из (3.11), чем больше потеря напряжения  $\Delta U$  в проводах, тем меньше КПД линии электропередачи. КПД длинных линий электропередачи лежит в пределах (90—98) %.

### 3.5. Параллельное соединение потребителей

*Параллельным соединением участков электрической цепи называют соединение, при котором все участки цепи присоединяются к одной паре узлов, т. е. находятся под действием одного и того же напряжения* (рис. 3.8). Токи параллельно включенных участков обратно пропорциональны сопротивлениям этих участков.

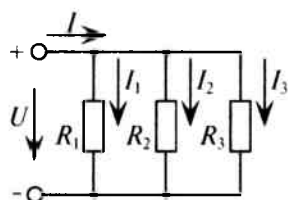


Рис. 3.8

При параллельном соединении сопротивлений  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  токи потребителей соответственно равны

$$I_1 = \frac{U}{R_1}; \quad I_2 = \frac{U}{R_2}; \quad I_3 = \frac{U}{R_3}.$$

Воспользовавшись первым законом Кирхгофа, можно определить ток  $I$  в неразветвленной части цепи

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \quad \text{или} \quad I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3}.$$

Тогда

$$\frac{I}{U} = \boxed{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R}}. \quad (3.12)$$

Таким образом, *обратная величина общего (эквивалентного) сопротивления  $R$  параллельно включенных потребителей равна сумме обратных величин сопротивлений этих потребителей.*

Величина, обратная сопротивлению, определяет проводимость потребителя  $g$ . Тогда общая (эквивалентная) проводимость цепи

при параллельном соединении потребителей определяется суммой проводимостей потребителей

$$g = g_1 + g_2 + g_3. \quad (3.13)$$

Если параллельно включены  $n$  одинаковых потребителей с сопротивлением  $R'$  каждый, то эквивалентное сопротивление этих потребителей  $R = \frac{R'}{n}$ . Если параллельно включены два потребителя с сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$ , то их общее (эквивалентное) сопротивление в соответствии с (3.12) равно

$$\frac{1}{R_{1,2}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2},$$

откуда

$$R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}. \quad (3.14)$$

Если параллельно включены три потребителя с сопротивлениями  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ , то общее их сопротивление (см. (3.12))

$$\frac{1}{R_{1,2,3}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}{R_1 R_2 R_3},$$

откуда

$$R_{1,2,3} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}. \quad (3.15)$$

Изменение сопротивления какого-либо из параллельно соединенных потребителей не влияет на режим работы (напряжение) других потребителей, включая изменяемое. Поэтому параллельное соединение нашло широкое практическое применение.

При параллельном соединении потребителей на большем сопротивлении тратится меньшая мощность:

$$P = UI = \frac{U^2}{R}.$$

## Глава 4

### МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

#### 4.1. Метод свертывания

Цепь со смешанным соединением включает в себя участки с последовательным и параллельным соединением потребителей, или сопротивлений (резисторов).

Расчет электрической цепи с одним источником и смешанным соединением резисторов методом свертывания проводится в следующей последовательности.

1. На схеме отмечаются все токи и узловые точки.
2. Группы резисторов с явно выраженным последовательным или параллельным соединением заменяются эквивалентными, и определяются их сопротивления (см. (3.8) и (3.12)).
3. Замена производится до получения простейшей схемы, для которой элементарно определяется общее (эквивалентное) сопротивление всей цепи.
4. По заданному напряжению источника и вычисленному общему сопротивлению всей цепи определяется ток в неразветвленной части цепи (общий ток).
5. Определяются падения напряжения на участках цепи и ток каждого резистора.

Расчет цепи методом свертывания рассмотрим на примере 4.1 (рис. 4.1).

#### Пример 4.1

1. При заданных сопротивлениях всех потребителей цепи и напряжении  $U$  определить токи всех потребителей.

2. Определить, как изменяются эти токи, если к потребителю с сопротивлением  $R_8$  параллельно подключить лампу накаливания (рис. 4.3).

Расчет осуществить в общем виде.

Внутренним сопротивлением источника пренебрегаем.

#### Решение

1. В рассматриваемой цепи (рис. 4.1) определяются группы потребителей, соединенных последовательно или парал-

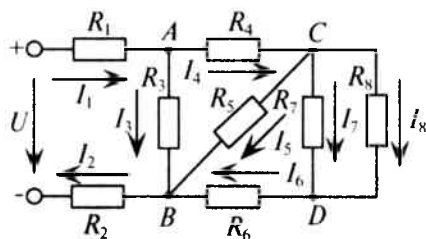


Рис. 4.1

тельно. Определяются эквивалентные сопротивления участков, а схема при этом «свертывается».

Очевидно, резисторы  $R_8$  и  $R_7$  соединены параллельно, так как напряжение на них одинаковое. Следовательно, их общее сопротивление (рис. 4.2а)

$$R_{7,8} = \frac{R_7 R_8}{R_7 + R_8}.$$

Сопротивление группы  $R_{7,8}$  соединено последовательно с резистором  $R_6$ , таким образом, общее сопротивление  $R_{6-8} = R_6 + R_{7,8}$  (рис. 4.2б).

Сопротивление  $R_{6-8}$  соединено параллельно с резистором  $R_5$  (в точках  $B, C$ ), следовательно, общее сопротивление (рис. 4.2в)

$$R_{5-8} = \frac{R_5 R_{6-8}}{R_5 + R_{6-8}}.$$

Сопротивление  $R_{5-8}$  соединено последовательно с резистором  $R_4$ , т.е. общее сопротивление  $R_{4-8} = R_4 + R_{5-8}$  (рис. 4.2г). Это сопротивление подключено параллельно к резистору  $R_3$  (в точках  $A, B$ ), следовательно, общее сопротивление (рис. 4.2д)

$$R_{3-8} = \frac{R_3 R_{4-8}}{R_3 + R_{4-8}}.$$

Сопротивление  $R_{3-8}$  соединено последовательно с резисторами  $R_1$  и  $R_2$ , следовательно, общее (эквивалентное) сопротивление исследуемой цепи  $R$  определяется выражением  $R = R_{1-8} = R_1 + R_{3-8} + R_2$  (рис. 4.2е).

Последовательность метода свертывания рассматриваемой схемы можно проиллюстрировать схемами, изображенными на рис. 4.2.

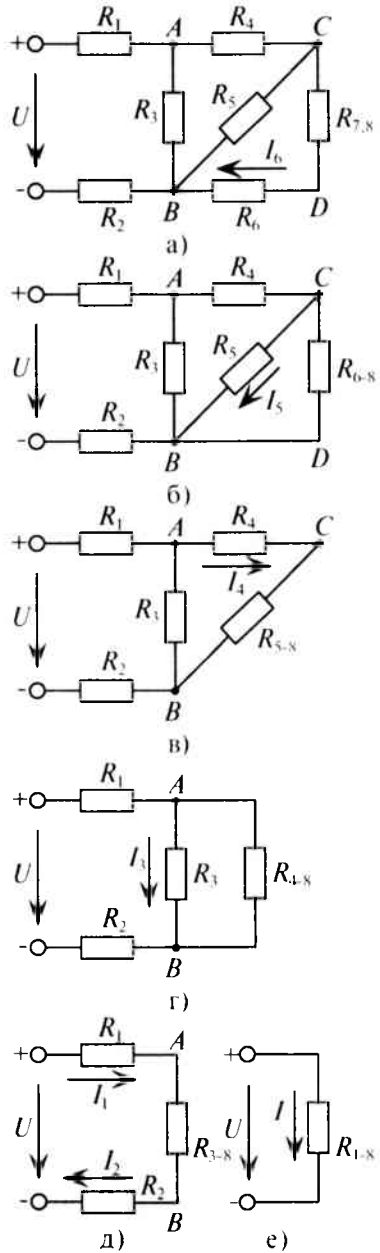


Рис. 4.2

Общий ток  $I$ , который проходит по сопротивлениям  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_{3-8}$ , определим, воспользовавшись законом Ома для замкнутой цепи (рис. 4.2д, е):

$$I = I_1 = I_2 = I_{R_{3-8}} = \frac{U}{R}. \quad (1)$$

Ток создает на сопротивлении  $R_{3-8}$  (в точках  $A$ ,  $B$ ) падение напряжения, величину которого определим по закону Ома

$$U_{AB} = I_{R_{3-8}} R_{3-8}. \quad (2)$$

Это же напряжение можно определить, воспользовавшись вторым законом Кирхгофа,

$$U_{AB} = U - I_1 R_1 - I_2 R_2. \quad (3)$$

Напряжение  $U_{AB}$  необходимо для вычисления тока  $I_3$  (рис. 4.2г) и остальных токов:

$$I_3 = \frac{U_{AB}}{R_3}. \quad (4)$$

К точкам  $A$ ,  $B$  подключено общее сопротивление  $R_{4-8}$ , следовательно, ток, который проходит по резистору  $R_4$ , т. е.  $I_4$ , можно определить по закону Ома (рис. 4.2в):

$$I_4 = I_{R_{4-8}} = \frac{U_{AB}}{R_{4-8}}. \quad (5)$$

Этот же ток  $I_4$  можно определить, воспользовавшись первым законом Кирхгофа,

$$I_4 = I_1 - I_3. \quad (6)$$

Ток  $I_4$  создает падение напряжения  $U_{CB}$  на общем сопротивлении  $R_{5-8}$ . Напряжение между точками  $C$ ,  $B$  ( $U_{CB}$ ) определяем по закону Ома (рис. 4.2в):

$$U_{CB} = U_{5-8} = I_4 R_{5-8}. \quad (7)$$

Это же напряжение можно определить по второму закону Кирхгофа:

$$U_{CB} = U_{AB} - I_4 R_4. \quad (8)$$

Напряжение  $R_{5-8}$  необходимо определить для вычисления тока  $I_5$  (рис. 4.2б) и остальных токов по закону Ома:

$$I_5 = \frac{U_{CB}}{R_5}. \quad (9)$$

К точкам  $C$ ,  $B$  подключено общее сопротивление  $R_{6-8}$ , следовательно, ток, который проходит по резистору  $R_6$ , т. е.  $I_6$ , можно определить по закону Ома (рис. 4.2а):

$$I_6 = I_{R_{6-8}} = \frac{U_{CB}}{R_{6-8}}. \quad (10)$$

Тот же ток можно определить по первому закону Кирхгофа:

$$I_6 = I_2 - I_3 - I_5. \quad (11)$$

Ток  $I_6$  создает падение напряжения  $U_{CD}$  на общем сопротивлении  $R_{7,8}$

$$U_{CD} = U_{7,8} = I_6 R_{7,8} \quad (12)$$

или

$$U_{CD} = U_{CB} - I_6 R_6. \quad (13)$$

Токи  $I_7$  и  $I_8$  определяются по закону Ома (рис. 4.1):

$$I_7 = \frac{U_{CB}}{R_7} \quad \text{и} \quad I_8 = \frac{U_{CB}}{R_8}. \quad (14)$$

Один из этих токов можно определить по первому закону Кирхгофа:

$$I_7 = I_6 - I_8 \quad \text{или} \quad I_8 = I_6 - I_7. \quad (15)$$

Таким образом, определены токи всех включенных в цепь (рис. 4.1) потребителей.

2. Рассмотрим динамический режим работы электрической цепи, т. е. режим изменения токов и напряжений в цепи. В примере 4.1 эти изменения вызваны подключением лампы накаливания  $R_9$  параллельно резистору  $R_8$  (рис. 4.3).

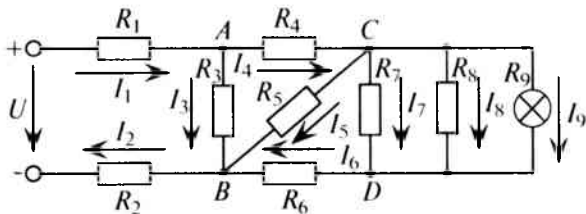


Рис. 4.3

Очевидно, параллельное подключение лампы накаливания к сопротивлению  $R_8$  уменьшает сопротивление участка между точками  $C, D$  ( $R_{7-9}$ ), следовательно, уменьшается и общее сопротивление цепи  $R$  (рис. 4.2б–е).

Уменьшение общего сопротивления приведет к увеличению общего тока цепи  $I$ , т. е. токов  $I_1$  и  $I_2$  (выражение (1)). Увеличение этих токов вызовет уменьшение напряжения  $U_{AB}$  (выражение (3)), а следовательно, уменьшение тока  $I_3$  (выражение (4)). Так как ток  $I_1$  увеличился, а ток  $I_3$  уменьшился, то ток  $I_4$  увеличится (выражение (6)). Увеличение тока  $I_4$  приведет к уменьшению напряжения  $U_{CB}$  (выражение (8)), в результате чего уменьшится ток  $I_5$  (выражение (9)). Уменьшение тока  $I_5$  вызовет увеличение тока  $I_6$  (выражение (11)), что приведет к уменьшению напряжения  $U_{CD}$  (выражение (13)). Следовательно, уменьшаются токи  $I_7$  и  $I_8$  (выражение (15)).



Как видно, параллельное подключение лампы  $R_9$  к резисторам с сопротивлением  $R_7$  и  $R_8$  шунтирует их, т. е. уменьшает напряжение  $U_{CD}$  на этих сопротивлениях и токи  $I_7$  и  $I_8$  в них.

Таким образом, подключение дополнительного потребителя в цепь вызывает соответствующие изменения режима работы всех участков цепи.

Для расчета электрической цепи методом свертывания могут быть заданы либо ток, протекающий через определенный резистор, либо напряжение на одном из участков.

Методика расчета параметров таких цепей приведена в примерах 4.2 и 4.3.

### Пример 4.2

Для цепи (рис. 4.4) заданы:  $I_1$ ;  $R_0$ ;  $R_1$ ;  $R_2$ ;  $R_3$ ;  $R_4$  и  $R_5$ .

1. Определить ЭДС источника  $E$ .
2. Определить токи в остальных ветвях.
3. Определить мощность на каждом резисторе.
4. Составить уравнение баланса мощностей в этой цепи.

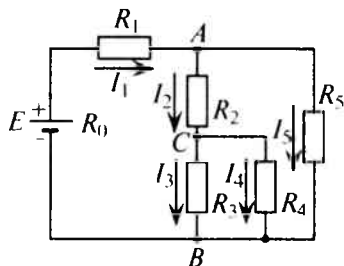


Рис. 4.4

### Решение

Ток  $I_1$  проходит через источник и создает падение напряжения на его внутреннем сопротивлении  $U_0 = I_1 R_0$  и на резисторе с сопротивлением  $R_1$ , т. е.  $U_1 = I_1 R_1$ . Тот же ток  $I_1$  создает падение напряжения между точками  $A$  и  $B$ , т. е.  $U_{AB} = I_1 R_{AB}$ . ЭДС источника складывается из этих падений напряжения, т. е.  $E = U_0 + U_1 + U_{AB}$ .

Для определения напряжения между точками  $A$  и  $B$  ( $U_{AB}$ ) и токов  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$  и  $I_5$  произведем «свертывание» схемы (рис. 4.4) и определим общее сопротивление  $R_{AB}^\circ$

$$R_{3,4} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}, \quad R_{2-4} = R_2 + R_{3,4}, \quad R_{AB} = \frac{R_{2-4} R_5}{R_{2-4} + R_5}.$$

Искомые токи определим по закону Ома

$$I_2 = \frac{U_{AB}}{R_{2-4}}, \quad I_5 = \frac{U_{AB}}{R_5}, \quad I_3 = \frac{U_{CB}}{R_3}, \quad I_4 = \frac{U_{CB}}{R_4},$$

где  $U_{CB} = I_2 R_{3,4}$  или  $U_{CB} = U_{AB} - I_2 R_2$ .

Мощность на каждом резисторе определяется выражением  $P = I^2 R = UI$ .

Например:  $P_1 = I_1^2 R_1 = U_1 I_1$ ,  $P_5 = I_5^2 R_5 = U_{AB} I_5$  и т. д.

Составляется уравнение баланса мощностей

$$E I_1 = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5.$$

**Пример 4.3**

Для цепи (рис. 4.5) заданы:  $U_4 = U_{AB} = 36$  В;  $R_0 = 0,5$  Ом;  $R_1 = 1$  Ом;  $R_2 = 2$  Ом;  $R_3 = 3$  Ом;  $R_4 = 4$  Ом;  $R_5 = 5$  Ом;  $R_6 = 6$  Ом;  $R_7 = 7$  Ом.

Определить токи всех резисторов и ЭДС источника  $E$ .

**Решение**

По заданному напряжению на участке  $AB$  ( $U_{AB}$ ) определяются токи

$$I_4 = \frac{U_{AB}}{R_4} = \frac{36}{4} = 9 \text{ А};$$

$$I_5 = I_6 = I_7 = \frac{U_{AB}}{R_{5-7}} = \frac{36}{18} = 2 \text{ А},$$

так как

$$R_{5-7} = R_5 + R_6 + R_7 = 5 + 6 + 7 = 18 \text{ Ом}.$$

Напряжение  $U_{AB}$  по закону Ома равно  $U_{AB} = I_3 R_{4-7}$ .

Откуда 
$$I_3 = \frac{U_{AB}}{R_{4-7}} = \frac{36}{3,27} = 11 \text{ А},$$

так как 
$$R_{4-7} = \frac{R_4 R_{5-7}}{R_4 + R_{5-7}} = \frac{4 \cdot 18}{4 + 18} = 3,27 \text{ Ом}.$$

Напряжение  $U_{AC}$  можно определить по второму закону Кирхгофа

$$U_{AC} = U_{AB} + U_{BC} = U_{AB} + I_3 R_3 = 36 + 11 \cdot 3 = 69 \text{ В}.$$

Тогда токи

$$I_2 = \frac{U_{AC}}{R_2} = \frac{69}{2} = 34,5 \text{ А};$$

$$I_1 = I_2 + I_4 + I_5 = 34,5 + 9 + 2 = 45,5 \text{ А}.$$

Ток  $I_1$  создает падение напряжения  $U_1$  на резисторе  $R_1$  и на внутреннем сопротивлении источника  $U_0$ .

$$U_1 = I_1 R_1 = 45,5 \cdot 1 = 45,5 \text{ В};$$

$$U_0 = I_1 R_0 = 45,5 \cdot 0,5 = 22,75 \text{ В}.$$

Тогда ЭДС источника

$$E = U_0 + U_1 + U_{AC} = 22,75 + 45,5 + 69 = 137,25 \text{ В}.$$

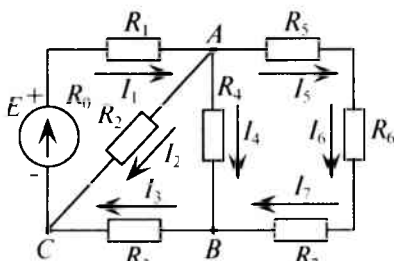


Рис. 4.5

**4.2. Метод преобразования схем**

Метод преобразования электрических схем применяют для расчета сложных цепей путем преобразований треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду или звезды сопротивлений в эквивалентный треугольник.

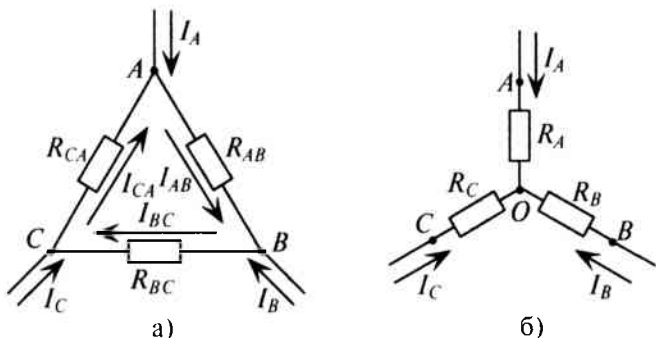


Рис. 4.6

Контур, состоящий из трех сопротивлений  $R_{AB}$ ,  $R_{BC}$  и  $R_{CA}$ , имеющий три узловые точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , образует треугольник сопротивлений (рис. 4.6а).

Электрическая цепь, состоящая из трех сопротивлений  $R_A$ ,  $R_B$  и  $R_C$ , соединенных в одной узловой точке  $O$ , образует звезду сопротивлений (рис. 4.6б).

Расчет некоторых сложных цепей значительно упрощается, если соединение звездой в них заменить соединением треугольником или наоборот.

Преобразование схемы должно производиться так, чтобы при неизменном напряжении между точками  $A$ ,  $B$  и  $C$  токи  $I_A$ ,  $I_B$  и  $I_C$  звезды и треугольника оставались без изменений.

Треугольник и звезда, удовлетворяющие этому условию, называются эквивалентными.

Для такого преобразования рекомендуется изображать схему цепи без заменяемого треугольника (или звезды), но с обозначенными вершинами  $A$ ,  $B$ , и  $C$  и к этим обозначенным вершинам подсоединить эквивалентную звезду (или треугольник).

При замене треугольника эквивалентной звездой сопротивления звезды определяются следующими выражениями:

$$R_A = \frac{R_{AB} R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}; \quad R_B = \frac{R_{BC} R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}; \\ R_C = \frac{R_{CA} R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}. \quad (4.1)$$

Таким образом, *каждое сопротивление эквивалентной звезды равно отношению произведения двух примыкающих к соответствующей узловой точке сопротивлений треугольника к сумме трех его сопротивлений.*

При замене звезды эквивалентным треугольником каждое сопротивление треугольника определяется следующими выражениями:

$$\begin{aligned} R_{AB} &= R_A + R_B + \frac{R_A R_B}{R_C}; R_{BC} = R_B + R_C + \frac{R_B R_C}{R_A}; \\ R_{CA} &= R_C + R_A + \frac{R_C R_A}{R_B}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Каждое сопротивление эквивалентного треугольника равно сумме трех слагаемых: двух примыкающих к соответствующим точкам сопротивлений звезды и отношению произведения этих сопротивлений к третьему сопротивлению звезды.

#### Пример 4.4

Определить токи во всех ветвях цепи (рис. 4.7а) при следующих исходных данных:  $E = 2,2$  В;  $R_1 = 10$  Ом;  $R_2 = 30$  Ом;  $R_3 = 60$  Ом;  $R_4 = 4$  Ом;  $R_5 = 22$  Ом;  $R_0 = 0$ .

#### Решение

Для расчета этой цепи заменим треугольник сопротивлений, подключенных к точкам  $A$ ,  $B$  и  $C$ , эквивалентной звездой, подключенной к тем же точкам (рис. 4.7б).

Определим величины сопротивлений эквивалентной звезды:

$$R_A = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{10 \cdot 60}{10 + 30 + 60} = 6 \text{ Ом};$$

$$R_B = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{10 \cdot 30}{10 + 30 + 60} = 3 \text{ Ом};$$

$$R_C = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{30 \cdot 60}{10 + 30 + 60} = 18 \text{ Ом}.$$

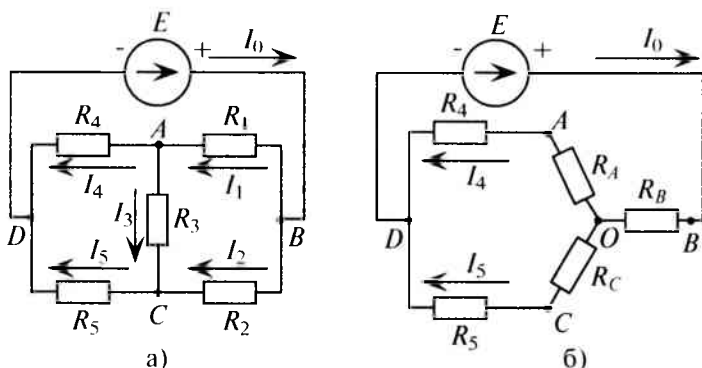


Рис. 4.7

Зная все сопротивления (рис. 4.7б), определим токи  $I_0$ ,  $I_4$  и  $I_5$ , которые в эквивалентной схеме имеют такие же значения, как и в исходной схеме. Расчет цепи производим методом свертывания.

$$R_{A,4} = R_A + R_4 = 6 + 4 = 10 \text{ Ом}; \quad R_{C,5} = R_C + R_5 = 18 + 22 = 40 \text{ Ом}.$$

Поскольку сопротивления между собой соединены параллельно, их общее сопротивление будет равно

$$R_{A,4,C,5} = \frac{R_{A,4} R_{C,5}}{R_{A,4} + R_{C,5}} = \frac{10 \cdot 40}{10 + 40} = 8 \text{ Ом},$$

а общее сопротивление схемы (см. рис. 4.7б)

$$R = R_B + R_{A,4,C,5} = 3 + 8 = 11 \text{ Ом}.$$

Тогда ток в неразветвленной части цепи, т.е. общий ток,

$$I_0 = \frac{E}{R} = \frac{2,2}{11} = 0,2 \text{ А}.$$

Напряжение на параллельном участке, т.е. на сопротивлении  $R_{A,4,C,5}$ , будет равно

$$U_{A,4,C,5} = I_0 R_{A,4,C,5} = 0,2 \cdot 8 = 1,6 \text{ В}$$

или

$$U_{A,4,C,5} = E - I_0 R_B = 2,2 - 0,2 \cdot 3 = 1,6 \text{ В}.$$

Значения токов в резисторах  $R_4$  и  $R_5$  получаются следующие:

$$I_4 = \frac{U_{A,4,C,5}}{R_{A,4}} = \frac{1,6}{10} = 0,16 \text{ А};$$

$$I_5 = \frac{U_{A,4,C,5}}{R_{C,5}} = \frac{1,6}{40} = 0,04 \text{ А}.$$

Для определения тока  $I_3$  в исходной схеме (рис. 4.7а) составляется уравнение по второму закону Кирхгофа для контура  $ACD$ :

$$I_3 R_3 + I_5 R_5 - I_4 R_4 = 0.$$

$$\text{Откуда} \quad I_3 = \frac{I_4 R_4 - I_5 R_5}{R_3} = \frac{0,16 \cdot 4 - 0,04 \cdot 22}{60} = -0,004 \text{ А}.$$

Знак «минус» перед значением тока показывает, что ток  $I_3$  направлен против произвольно выбранного направления тока, т.е. от узловой точки  $C$  к узловой точке  $A$ .

Тогда, воспользовавшись первым законом Кирхгофа для узловых точек  $A$  и  $C$ , можно определить искомые токи (рис. 4.7а):

$$I_1 = I_4 + I_3 = 0,16 - 0,004 = 0,156 \text{ А};$$

$$I_2 = I_5 - I_3 = 0,04 + 0,004 = 0,044 \text{ А}.$$

Для проверки:  $I_1 + I_2 = 0,156 + 0,044 = 0,2 \text{ A} = I_0$ , что справедливо для первого закона Кирхгофа.

### Пример 4.5

Справедливы ли полученные в примере 4.4 результаты, можно проверить, если преобразовать звезду сопротивлений (рис. 4.7б) в треугольник (рис. 4.7а).

### Решение

$$R_{AB} = R_A + R_B + \frac{R_A R_B}{R_C} = 6 + 3 + \frac{6 \cdot 3}{18} = 10 \text{ Ом} = R_1;$$

$$R_{BC} = R_B + R_C + \frac{R_B R_C}{R_A} = 3 + 18 + \frac{3 \cdot 18}{6} = 30 \text{ Ом} = R_2;$$

$$R_{CA} = R_C + R_A + \frac{R_C R_A}{R_B} = 18 + 6 + \frac{18 \cdot 6}{3} = 60 \text{ Ом} = R_3.$$

Таким образом, полученные в примере 4.4 результаты справедливы.

## 4.3. Метод наложения

Метод наложения является одним из методов расчета сложных цепей с несколькими источниками.

Сущность данного метода в следующем.

1. В каждой ветви рассматриваемой цепи направление тока выбирается произвольно.

2. Количество расчетных схем цепи равно количеству источников в исходной схеме.

3. В каждой расчетной схеме действует только один источник, а остальные источники заменяются их внутренним сопротивлением.

4. В каждой расчетной схеме методом свертывания определяют частичные токи в каждой ветви. Частичным называется условный ток, протекающий в ветви под действием только одного источника. Направление частичных токов в ветвях вполне определенно и зависит от полярности источника.

5. Искомые токи каждой ветви рассматриваемой схемы определяются как алгебраическая сумма частичных токов для этой ветви. При этом частичный ток, совпадающий по направлению с искомым, считается положительным, а несовпадающий — отрицательным. Если алгебраическая сумма частичных токов имеет положительный знак, то направление искомого тока в ветви совпадает с произвольно выбранным, если же отрицательный, то направление тока противоположно выбранному. Метод наложения рассмотрим на примере 4.6.

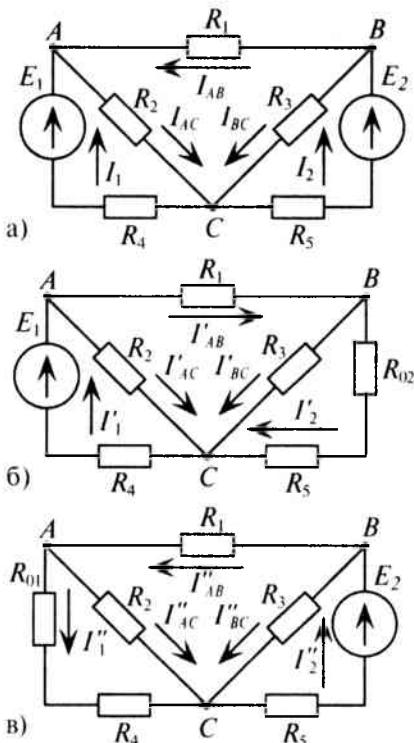


Рис. 4.8

**Пример 4.6**

Определить токи во всех ветвях цепи, схема которой приведена на рис. 4.8а, если задано:

$$E_1 = 40 \text{ В}; E_2 = 30 \text{ В};$$

$$R_{01} = R_{02} = 0,4 \text{ Ом};$$

$$R_1 = 30 \text{ Ом}; R_2 = R_3 = 10 \text{ Ом};$$

$$R_4 = R_5 = 3,6 \text{ Ом}.$$

**Решение**

Количество ветвей и соответственно различных токов в цепи (рис. 4.8а) равно пяти. Произвольно выбирается направление этих токов.

Расчетных схем две, так как в цепи два источника с ЭДС  $E_1$  и  $E_2$ . Вычисляются частичные токи, созданные в ветвях первым источником  $I'$ . Для этого изображается та же цепь, только вместо  $E_2$  — его внутреннее сопротивление  $R_{02}$ . Направленные частичных токов в ветвях указаны в схеме рис. 4.8б.

Вычисление сопротивлений и токов производится методом свертывания.

$$R'_{5,02} = R_5 + R_{02} = 3,6 + 0,4 = 4 \text{ Ом};$$

$$R'_{BC} = \frac{R_3 R'_{5,02}}{R_3 + R'_{5,02}} = \frac{10 \cdot 4}{10 + 4} = 2,85 \text{ Ом};$$

$$R'_{ABC} = R_1 + R'_{BC} = 30 + 2,85 = 32,85 \text{ Ом};$$

$$R'_{AC} = \frac{R_2 R'_{ABC}}{R_2 + R'_{ABC}} = \frac{10 \cdot 32,85}{10 + 32,85} = 7,7 \text{ Ом};$$

$$R' = R_4 + R_{01} + R'_{AC} = 3,6 + 0,4 + 7,7 = 11,7 \text{ Ом}.$$

Первые частичные токи в цепи (рис. 4.8б), созданные источником  $E_1$ , имеют следующие значения:

$$I'_1 = \frac{E_1}{R'} = \frac{40}{11,7} = 3,4 \text{ А};$$

$$U'_{AC} = I'_1 R'_{AC} = 3,4 \cdot 7,7 = 26 \text{ В};$$

$$\begin{aligned}
 I'_{AC} &= \frac{U'_{AC}}{R_2} = \frac{26}{10} = 2,6 \text{ А}; \\
 I'_{AB} &= \frac{U'_{AC}}{R'_{ABC}} = \frac{26}{32,85} = 0,8 \text{ А}; \\
 U'_{BC} &= I'_{AB} R'_{BC} = 0,8 \cdot 2,85 = 2,3 \text{ В}; \\
 I'_{BC} &= \frac{U'_{BC}}{R_3} = \frac{2,3}{10} = 0,23 \text{ А}; \\
 I'_2 &= \frac{U'_{BC}}{R'_{5,02}} = \frac{2,3}{4} = 0,57 \text{ А}.
 \end{aligned}$$

Вычисляются частичные токи, созданные вторым источником  $I''$ . Для этого изображается исходная цепь, в которой источник с ЭДС  $E_1$  заменен его внутренним сопротивлением  $R_{01}$ . Направления частичных токов в ветвях указаны на схеме рис. 4.8в.

Сопротивления и токи определяются методом свертывания.

$$\begin{aligned}
 R''_{4,01} &= R_4 + R_{01} = 3,6 + 0,4 = 4 \text{ Ом}; \\
 R''_{AC} &= \frac{R_2 R''_{4,01}}{R_2 + R''_{4,01}} = \frac{10 \cdot 4}{10 + 4} = 2,85 \text{ Ом}; \\
 R''_{BAC} &= R_1 + R''_{AC} = 30 + 2,85 = 32,85 \text{ Ом}; \\
 R''_{BC} &= \frac{R_3 R''_{BAC}}{R_3 + R''_{BAC}} = \frac{10 \cdot 32,85}{10 + 32,85} = 7,7 \text{ Ом}; \\
 R'' &= R_5 + R_{02} + R'_{BC} = 3,6 + 0,4 + 7,7 = 11,7 \text{ Ом}.
 \end{aligned}$$

Вторые частичные токи в цепи (рис. 4.8в) имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}
 I''_2 &= \frac{E_2}{R''} = \frac{30}{11,7} = 2,6 \text{ А}; \\
 U''_{BC} &= I''_2 R''_{BC} = 2,6 \cdot 7,7 = 20 \text{ В}; \\
 I''_{BC} &= \frac{U''_{BC}}{R_3} = \frac{20}{10} = 2 \text{ А}; \\
 I''_{AB} &= \frac{U''_{BC}}{R''_{ABC}} = \frac{20}{32,85} = 0,6 \text{ А}; \\
 U''_{AC} &= I''_{AB} R''_{AC} = 0,6 \cdot 2,85 = 1,7 \text{ В}; \\
 I''_{AC} &= \frac{U''_{AC}}{R_2} = \frac{1,7}{10} = 0,17 \text{ А}; \\
 I''_1 &= \frac{U''_{AC}}{R''_{4,01}} = \frac{1,7}{4} = 0,42 \text{ А}.
 \end{aligned}$$



Искомые токи в рассматриваемой цепи (рис. 4.8а) определяются алгебраической суммой частичных токов (см. рис. 4.8):

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1' - I_1'' = 3,4 - 0,43 = 2,97 \text{ А}; \\ I_2 &= -I_2' + I_2'' = -0,57 + 2,6 = 2,03 \text{ А}; \\ I_{AB} &= -I_{AB}' + I_{AB}'' = -0,8 + 0,6 = -0,2 \text{ А}; \\ I_{AC} &= I_{AC}' + I_{AC}'' = 2,6 + 0,17 = 2,77 \text{ А}; \\ I_{BC} &= I_{BC}' + I_{BC}'' = 0,23 + 2 = 2,23 \text{ А}. \end{aligned}$$

Ток  $I_{AB}$  имеет знак «минус», следовательно, его направление противоположно произвольно выбранному, он направлен из точки  $A$  в точку  $B$ .

#### 4.4. Метод узлового напряжения

Расчет сложных разветвленных электрических цепей с несколь-

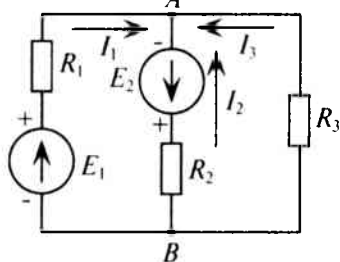


Рис. 4.9

кими источниками и двумя узлами можно осуществить методом узлового напряжения. Напряжение между узлами и называется узловым.  $U_{AB}$  — узловое напряжение цепи (рис. 4.9).

Для различных ветвей (рис. 4.9) узловое напряжение  $U_{AB}$  можно определить следующим образом.

1. Поскольку для первой ветви источник работает в режиме генератора

$$U_{AB} = E_1 - I_1(R_1 + R_{01}).$$

Величина тока определяется как

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{AB}}{R_1 + R_{01}} = (E_1 - U_{AB}) g_1, \quad (4.3)$$

где  $g_1 = \frac{1}{R_1 + R_{01}}$  — проводимость 1-й ветви.

2. Для второй ветви источник работает в режиме потребителя, следовательно

$$U_{AB} = -U_{BA} = -(E_2 + I_2(R_2 + R_{02})).$$

Тогда ток

$$I_2 = \frac{E_2 + U_{AB}}{R_2 + R_{02}} = -(E_2 + U_{AB}) g_2. \quad (4.4)$$

3. Для третьей ветви

$$U_{AB} = -U_{BA} = -I_3 R_3.$$

(Потенциал точки  $B$  для третьей ветви больше, чем потенциал точки  $A$ , так как ток направлен из точки с большим потенциалом в точку с меньшим потенциалом.)

Величину тока  $I_3$  можно определить по закону Ома

$$I_3 = -\frac{U_{AB}}{R_3} = -U_{AB} g_3. \quad (4.5)$$

По первому закону Кирхгофа для узловой точки  $A$  (или  $B$ ):

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \quad (4.6)$$

Подставив в уравнение (4.6) значения токов из уравнений (4.3), (4.4) и (4.5) для рассматриваемой цепи, можно записать

$$E_1 g_1 - U_{AB} g_1 - E_2 g_2 - U_{AB} g_2 - U_{AB} g_3 = 0. \quad (4.7)$$

Решив это уравнение относительно узлового напряжения  $U_{AB}$ , можно определить его значение

$$U_{AB} = \frac{E_1 g_1 - E_2 g_2}{g_1 + g_2 + g_3}. \quad (4.8)$$

Следовательно, величина узлового напряжения определяется отношением алгебраической суммы произведений ЭДС и проводимости ветвей с источниками к сумме проводимостей всех ветвей:

$$U_{AB} = \frac{\sum E g}{\sum g}. \quad (4.9)$$

Для определения знака алгебраической суммы направление токов во всех ветвях выбирают одинаковым, т. е. от одного узла к другому (рис. 4.9). Тогда ЭДС источника, работающего в режиме генератора, берется со знаком «плюс», а источника, работающего в режиме потребителя, со знаком «минус».

Таким образом, для определения токов в сложной цепи с двумя узлами вычисляется сначала узловое напряжение по выражению (4.9), а затем значения токов по формулам (4.3), (4.4), (4.5).

Узловое напряжение  $U_{AB}$  может получиться положительным или отрицательным, как и ток в любой ветви.

Знак «минус» в вычисленном значении тока указывает, что реальное направление тока в данной ветви противоположно условно выбранному.

#### Пример 4.7

В ветвях схемы (рис. 4.10) требуется определить токи, если:  $E_1 = 35$  В;  $E_2 = 70$  В;  $R_1 = 1,7$  Ом;  $R_{01} = 0,3$  Ом;  $R_2 = 0,9$  Ом;  $R_{02} = 0,1$  Ом;  $R_3 = 4$  Ом.

#### Решение

Узловое напряжение  $U_{AB}$

$$U_{AB} = \frac{E_1 g_1 + E_2 g_2}{g_1 + g_2 + g_3},$$

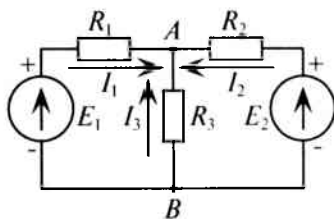


Рис. 4.10

$$\text{где } g_1 = \frac{1}{R_1 + R_{01}} = \frac{1}{1,7 + 0,3} = 0,5 \text{ См};$$

$$g_2 = \frac{1}{R_2 + R_{02}} = \frac{1}{0,9 + 0,1} = 1 \text{ См}; \quad g_3 = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ См};$$

$$\text{тогда } U_{AB} = \frac{35 \cdot 0,5 + 70 \cdot 1}{0,5 + 1 + 0,25} = 50 \text{ В.}$$

Токи в ветвях будут соответственно равны

$$I_1 = (E_1 - U_{AB})g_1 = (35 - 50) \cdot 0,5 = -7,5 \text{ А};$$

$$I_2 = (E_2 - U_{AB})g_2 = (70 - 50) \cdot 1 = 20 \text{ А};$$

$$I_3 = -U_{AB}g_3 = -50 \cdot 0,25 = -12,5 \text{ А.}$$

Как видно из полученных результатов, направление токов  $I_1$  и  $I_3$  противоположно выбранному. Следовательно, источник  $E_1$  работает в режиме потребителя.

### Пример 4.8

Два генератора (рис. 4.11), ЭДС и внутреннее сопротивление которых одинаковы:  $E_1 = E_2 = 122 \text{ В}$ ;  $R_{01} = R_{02} = 05 \text{ Ом}$ , питают потребитель (нагрузку) с сопротивлением  $R = 5,85 \text{ Ом}$ .

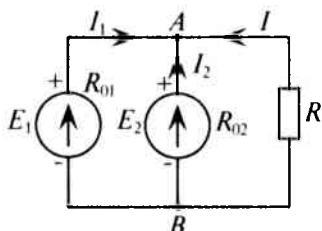


Рис. 4.11

Как изменится ток второго генератора:

- 1) при увеличении его ЭДС ( $E_2$ ) на 1 %;
- 2) при увеличении узлового напряжения ( $U_{AB}$ ) на 1 %.

### Решение

Определяется узловое напряжение  $U_{AB}$  цепи (рис. 4.11)

$$U_{AB} = \frac{E_1 g_1 + E_2 g_2}{g_1 + g_2 + g_3} = \frac{122 \cdot 2 + 122 \cdot 2}{2 + 2 + 0,171} = 117 \text{ В,}$$

$$\text{где } g_1 = \frac{1}{R_{01}} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ См}; \quad g_2 = \frac{1}{R_{02}} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ См}; \quad g_3 = \frac{1}{R} = \frac{1}{5,85} = 0,171 \text{ См.}$$

Тогда ток второго генератора

$$I_2 = (E_2 - U_{AB})g_2 = (122 - 117) \cdot 2 = 10 \text{ А.}$$

1. При увеличении  $E_2$  на 1 %, его величина станет равной

$$E'_2 = 123,22 \text{ В,}$$

$$\text{тогда } U'_{AB} = \frac{122 \cdot 2 + 123,22 \cdot 2}{2 + 2 + 0,171} = 117,6 \text{ В.}$$

$$\text{При этом } I'_2 = (E'_2 - U'_{AB})g_2 = (123,22 - 117,6) \cdot 2 = 12,4 \text{ А.}$$

Следовательно, увеличение ЭДС генератора  $E_2$  на 1 % приводит к увеличению тока этого генератора на 24 %.

$$\left( \frac{I_2' - I_2}{I_2} \cdot 100 \% = \frac{12,4 - 10}{10} \cdot 100 \% = 24 \% \right)$$

2. При увеличении узлового напряжения на 1 % его величина станет равной

$$U''_{AB} = 118,17 \text{ В.}$$

При этом  $I_2'' = (E_2'' - U''_{AB})g_2 = (122 - 118,17) \cdot 2 = 7,66 \text{ А.}$

Таким образом, ток второго генератора при увеличении узлового напряжения на 1 % уменьшится на 23,4 %.

$$\left( \frac{I_2'' - I_2}{I_2} \cdot 100 \% = \frac{7,66 - 10}{10} \cdot 100 \% = -23,4 \% \right)$$

Знак «минус» означает уменьшение, а не увеличение тока  $I_2$ .

### Параллельное соединение генераторов

Как видно из решения примера 4.8, незначительное изменение ЭДС одного из параллельно работающих генераторов значительно изменяет ток этого генератора.

Причиной значительного изменения тока генератора может быть также незначительное изменение узлового напряжения (рис. 4.11), что связано с изменением сопротивлений участков цепи или ЭДС источников.

Параллельное соединение генераторов нашло широкое применение в электрических сетях энергоснабжения потребителей (осветительная и силовая нагрузка).

Значительные изменения токов генераторов, вызванные незначительными изменениями параметров схемы электропитания потребителей от параллельно включенных генераторов, необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации электроустановок, в частности тот факт, что в различное время суток работает разное количество параллельно включенных генераторов.

Увеличение ЭДС какого-либо из параллельно работающих генераторов приведет к тому, что ток этого генератора окажется в несколько раз больше тока остальных генераторов. Этим обстоятельством пользуются, когда хотят «перевести нагрузку» с одного генератора на другой.

Генераторы окажутся также неодинаково загруженными при равных ЭДС, но при различных внутренних сопротивлениях. Более загруженными окажутся генераторы с меньшим внутренним сопротивлением.

При снижении ЭДС какого-либо из параллельно включенных генераторов до величины узлового напряжения цепи ( $E = U_{AB}$ ) ток

в цепи этого генератора падает до нуля:  $I = g(E - U_{AB}) = 0$ . Генератор, находящийся в таком режиме, называется уравновешенным (скомпенсированным). Если ЭДС генератора станет меньше узлового напряжения, то такой генератор начнет работать в режиме потребителя.

#### 4.5. Метод узловых и контурных уравнений

Метод узловых и контурных уравнений для расчета сложных электрических цепей подразумевает составление системы уравнений по законам Кирхгофа. При составлении системы уравнений должно учитываться следующее.

1. Число уравнений равно числу токов в цепи (число токов равно числу ветвей в рассматриваемой цепи). Направление токов в ветвях выбирается произвольно.

2. По первому закону Кирхгофа составляется  $(n - 1)$  уравнений, где  $n$  — число узловых точек в схеме.

3. Остальные уравнения составляются по второму закону Кирхгофа.

В результате решения системы уравнений определяются искомые величины для сложной электрической цепи (например, все токи при заданных значениях ЭДС источников  $E$  и сопротивлений резисторов). Если в результате расчета какие-либо токи получаются отрицательными, это указывает на то, что их направление противоположно выбранному.

#### Пример 4.9

Составить необходимое и достаточное количество уравнений по законам Кирхгофа для определения всех токов в цепи (рис. 4.12) методом узловых и контурных уравнений.

#### Решение

В рассматриваемой сложной цепи имеется 5 ветвей, следовательно, 5 различных токов, поэтому для расчета необходимо составить 5 уравнений, причем 2 уравнения — по первому закону Кирхгофа (в цепи  $n = 3$  узловых точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ ) и 3 уравнения — по второму закону Кирхгофа (внутренним сопротивлением источников пренебрегаем, т. е.  $R_0 = 0$ ).

Составляем уравнения:

1)  $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$  (для точки  $A$ );

2)  $I_1 + I_2 - I_5 = 0$  (для точки  $B$ );

3)  $E_1 - E_2 = I_1(R_1 + R_2) - I_2R_3$  (для контура  $AaB$ );

4)  $E_2 + E_5 - E_4 = I_2R_3 + I_5(R_7 + R_8) - I_4R_6$  (для контура  $ABbC$ );

5)  $E_4 - E_3 = I_4R_6 - I_1(R_4 + R_5)$  (для контура  $ACc$ ).

Обход по часовой стрелке.

**Пример 4.10**

Определить токи в примере 4.7 методом узловых и контурных уравнений (схема рис. 4.10) при тех же заданных условиях.

**Решение**

При выбранном в схеме рис. 4.10 направлении токов составим необходимое и достаточное количество уравнений по законам Кирхгофа:

- 1)  $I_1 + I_2 + I_3 = 0$  или  $I_1 = -I_2 - I_3$ ;
- 2)  $E_1 = I_1(R_1 + R_{01}) - I_3 R_3$  (обход по часовой стрелке);
- 3)  $E_2 = I_2(R_2 + R_{02}) - I_3 R_3$  (обход против часовой стрелки).

В уравнение (2) подставляются значения тока  $I_1$  из уравнения (1) и числовые значения заданных величин. Тогда уравнения (2) и (3) будут выглядеть так:

- 2)  $35 = -2I_2 - 6I_3$ ;
- 3)  $70 = -I_2 - 4I_3$ .

Для сокращения тока  $I_2$  при суммировании уравнений (2) и (3) все числовые значения уравнения (3) умножаются на 2 (два).

- 2)  $35 = -2I_2 - 6I_3$ ;
- 3)  $140 = 2I_2 - 8I_3$ .

Результаты суммирования:

$$175 = -14I_3.$$

$$\text{Откуда } I_3 = -\frac{175}{14} = -12,5 \text{ А.}$$

$$\text{Из уравнения (3): } I_2 = 70 + (-12,5 \cdot 4) = 20 \text{ А.}$$

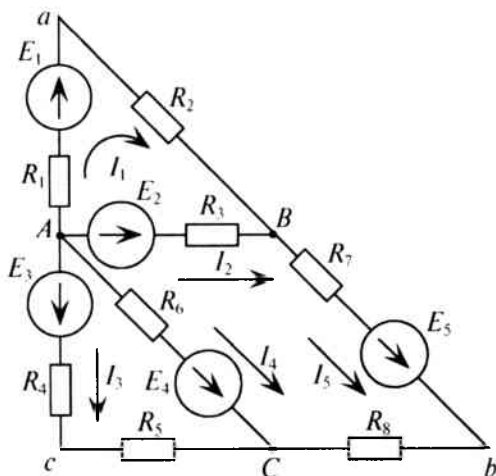


Рис. 4.12

И из уравнения (1):  $I_1 = -20 - (-12,5) = -7,5$  А.

Очевидно, что полученный результат совпадает с результатом, полученным методом узлового напряжения.

#### 4.6. Метод контурных токов

При расчете сложных цепей методом узловых и контурных уравнений (по законам Кирхгофа) необходимо решать систему из большого количества уравнений, что значительно затрудняет вычисления.

Так, для схемы рис. 4.13 необходимо составить и рассчитать систему из 7-ми уравнений.

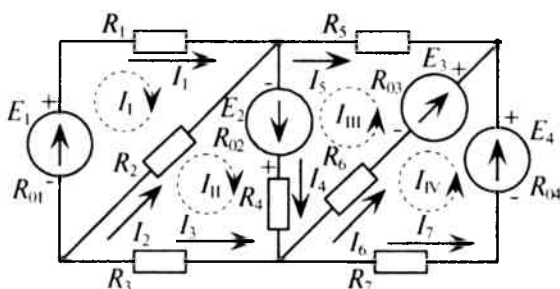


Рис. 4.13

Ту же задачу можно решить, записав только 4 уравнения по второму закону Кирхгофа, если воспользоваться методом контурных токов.

Суть метода состоит в том, что в схеме выделяют  $m$  независимых контуров, в каждом из которых произвольно направлены (см. пунктирные стрелки) контурные токи  $I_I, I_{II}, I_{III}, I_{IV}$ . Контурный ток — это расчетная величина, измерить которую невозможно.

Как видно из рис. 4.13, отдельные ветви схемы входят в два смежных контура. Действительный ток в такой ветви определяется алгебраической суммой контурных токов смежных контуров.

Таким образом

$$I_1 = I_I; \quad I_2 = I_{II} - I_I; \quad I_3 = -I_{II}; \quad I_4 = I_{II} + I_{III};$$

$$I_5 = -I_{III}; \quad I_6 = I_{III} - I_{IV}; \quad I_7 = I_{IV}.$$

Для определения контурных токов составляют  $m$  уравнений по второму закону Кирхгофа. В каждое уравнение входит алгебраическая сумма ЭДС, включенных в данный контур (по одну сторону от знака равенства), и общее падение напряжения в данном контуре, созданное контурным током данного контура и контурными токами смежных контуров (по другую сторону знака равенства).

Для данной схемы (рис. 4.13) необходимо составить 4 уравнения. Со знаком «плюс» записываются ЭДС и падения напряжения (по разные стороны знака равенства), действующие в направлении контурного тока, со знаком «минус» — направленные против контурного тока.

Система уравнений для схемы (рис. 4.13):

$$\begin{cases} E_1 = I_1 (R_{01} + R_1 + R_2) - I_{II} R_2, \\ E_2 = I_{II} (R_{02} + R_4 + R_3 + R_2) - I_1 R_2 + I_{III} (R_{02} + R_4), \\ E_2 + E_3 = I_{III} (R_{02} + R_4 + R_6 + R_{03} + R_5) + I_{II} (R_{02} + R_4) - \\ - I_{IV} (R_{03} + R_6), \\ E_4 - E_3 = I_{IV} (R_{04} + R_{03} + R_6 + R_7) - I_{III} (R_{03} + R_6). \end{cases}$$

Решением системы уравнений вычисляются значения контурных токов, которые и определяют действительные токи в каждой ветви схемы (рис. 4.13).

### Пример 4.11

Определить токи во всех участках сложной цепи (рис. 4.14), если:  $E_1 = 130$  В;  $E_2 = 40$  В;  $E_3 = 100$  В;  $R_1 = 1$  Ом;  $R_2 = 4,5$  Ом;  $R_3 = 2$  Ом;  $R_4 = 4$  Ом;  $R_5 = 10$  Ом;  $R_6 = 5$  Ом;  $R_{02} = 0,5$  Ом;  $R_{01} = R_{03} = 0$ .

### Решение

Необходимо составить 3 уравнения по второму закону Кирхгофа для определения контурных токов  $I_1$ ,  $I_{II}$  и  $I_{III}$  (направление контурных токов выбрано произвольно и указано пунктирными линиями).

$$1) E_1 = I_1 (R_{01} + R_1 + R_4 + R_6) + I_{III} R_4 + I_{II} R_6;$$

$$2) E_2 = I_{II} (R_{02} + R_2 + R_5 + R_6) - I_{III} R_5 + I_1 R_6;$$

$$3) E_3 = I_{III} (R_{03} + R_3 + R_5 + R_4) + I_1 R_4 - I_{II} R_5.$$

Подставляются числовые значения заданных величин

$$1) 130 = I_1 \cdot 10 + I_{III} \cdot 4 + I_{II} \cdot 5;$$

$$2) 40 = I_{II} \cdot 20 - I_{III} \cdot 10 + I_1 \cdot 5;$$

$$3) 100 = I_{III} \cdot 16 + I_1 \cdot 4 - I_{II} \cdot 10.$$

Из уравнения (2) определяется ток  $I_1$

$$I_1 = \frac{40 - I_{II} \cdot 20 + I_{III} \cdot 10}{5} = 8 - I_{II} \cdot 4 + I_{III} \cdot 2. \quad (2')$$

Значение тока  $I_1$  (выражение (2')) подставляется в уравнение (1):

$$1) 130 = (8 - I_{II} \cdot 4 + I_{III} \cdot 2) \cdot 10 + I_{III} \cdot 4 + I_{II} \cdot 5 = 80 - 40 \cdot I_{II} + 20 \cdot I_{III} + 4 \cdot I_{III} + 5 \cdot I_{II}$$

или  $50 = I_{III} \cdot 24 - I_{II} \cdot 35.$

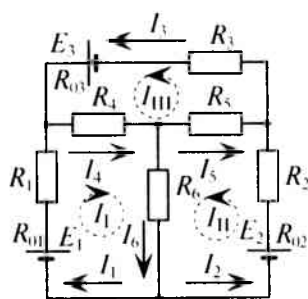


Рис. 4.14



То же значение тока  $I_1$  подставляется в уравнение (3):

$$3) 100 = I_{III} \cdot 16 + (8 - I_{II} \cdot 4 + I_{III} \cdot 2) \cdot 4 - I_{II} \cdot 10 = 16 \cdot I_{III} + 32 - 16I_{II} + 8 \cdot I_{III} - 10 \cdot I_{II}$$

$$\text{или } 68 = I_{III} \cdot 24 - I_{II} \cdot 26.$$

Из полученного уравнения (3) вычитается полученное уравнение (1). В результате получим

$$18 = I_{II} \cdot 9.$$

Откуда контурный ток  $I_{II} = \frac{18}{9} = 2 \text{ A}.$

Из уравнения (3) определяется контурный ток  $I_{III}$

$$I_{III} = \frac{68 + I_{II} \cdot 26}{24} = \frac{68 + 2 \cdot 26}{24} = 5 \text{ A}.$$

Из уравнения (2') определяется ток  $I_1$

$$I_1 = 8 - I_{II} \cdot 4 + I_{III} \cdot 2 = 8 - 8 + 10 = 10 \text{ A}.$$

Вычисляются реальные токи в заданной цепи:

$$I_1 = I_1 = 10 \text{ A}; I_2 = I_{II} = 2 \text{ A}; I_3 = I_{III} = 5 \text{ A};$$

$$I_4 = I_1 + I_{III} = 10 + 5 = 15 \text{ A}; I_5 = I_{III} - I_{II} = 5 - 2 = 3 \text{ A};$$

$$I_6 = I_1 + I_{II} = 10 + 2 = 12 \text{ A}.$$

Проверяется правильность решения для 1-го контура (рис. 4.14).

$$E_1 = I_1 R_1 + I_4 R_4 + I_6 R_6;$$

$$130 = 10 \cdot 1 + 15 \cdot 4 + 12 \cdot 5 = 130 \text{ В}.$$

Решение правильное.

Такую же проверку можно произвести и для других контуров (2-го и 3-го):

$$E_2 = I_1(R_1 + R_{02}) - I_5 R_5 + I_6 R_6$$

$$\text{или } 40 = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 10 + 12 \cdot 5 = 40 \text{ В}.$$

$$E_3 = I_3(R_3 + R_{03}) + I_4 R_4 + I_5 R_5$$

$$\text{или } 100 = 5 \cdot 2 - 15 \cdot 4 + 3 \cdot 10 = 100 \text{ В}.$$

Проверка показала правильность решения.

#### 4.7. Метод эквивалентного генератора

Метод эквивалентного генератора рационально применять в случае необходимости определения тока (напряжения, мощности и др.) только одной ветви сложной электрической цепи.

Для этой цели разбивают сложную электрическую цепь на две части — на сопротивление  $R$ , ток которого  $I$  нужно определить, и всю остальную цепь, ее называют активным двухполюсником, так

как эта часть имеет две клеммы  $A$  и  $B$ , к которой и подключается сопротивление  $R$  (рис. 4.15).

Активным этот двухполюсник называют потому, что в нем имеется источник ЭДС. Этот активный двухполюсник обладает определенной ЭДС  $E_{\text{эк}}$  и определенным внутренним сопротивлением  $R_{\text{эк}}$  и называется эквивалентным генератором.

Ток в резисторе с сопротивлением  $R$  определяют по закону Ома

$$I = \frac{E_{\text{эк}}}{R_{\text{эк}} + R}.$$

Таким образом, определение тока  $I$  сводится к вычислению ЭДС эквивалентного генератора  $E_{\text{эк}}$  и его внутреннего сопротивления  $R_{\text{эк}}$ .

Величина ЭДС  $E_{\text{эк}}$  определяется любым методом расчета цепей постоянного тока относительно точек  $A$  и  $B$  при разомкнутых клеммах, т. е. в режиме холостого хода. Практически эту ЭДС можно измерить вольтметром, подключенным к клеммам  $A$  и  $B$  при холостом ходе.

Внутреннее сопротивление эквивалентного генератора  $R_{\text{эк}}$  вычисляется относительно точек  $A$  и  $B$  после предварительной замены всех источников сложной схемы эквивалентного генератора их внутренними сопротивлениями.

Практически для определения внутреннего сопротивления эквивалентного генератора измеряют амперметром ток между точками  $A$  и  $B$  работающего двухполюсника при коротком замыкании, так как сопротивление амперметра настолько мало, что им можно пренебречь. Тогда

$$R_{\text{эк}} = \frac{U_{\text{хх}}}{I_{\text{кз}}}, \quad (4.10)$$

где  $U_{\text{хх}}$  — напряжение холостого хода,  $I_{\text{кз}}$  — ток короткого замыкания.

Такой метод практического определения внутреннего сопротивления эквивалентного генератора  $R_{\text{эк}}$  называется методом холостого хода и короткого замыкания.

Расчет параметров эквивалентного генератора, его ЭДС  $E_{\text{эк}}$  и внутреннего сопротивления  $R_{\text{эк}}$ , рассматриваются в примерах 4.12 и 4.13.

### Пример 4.12

Определить ток в сопротивлении  $R_1$ , подключенном к точкам  $A$  и  $B$  электрической цепи (рис. 4.8а) примера 4.6 методом эквивалентного генератора.

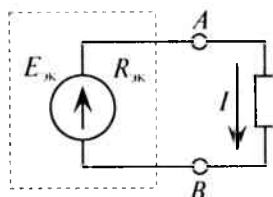


Рис. 4.15

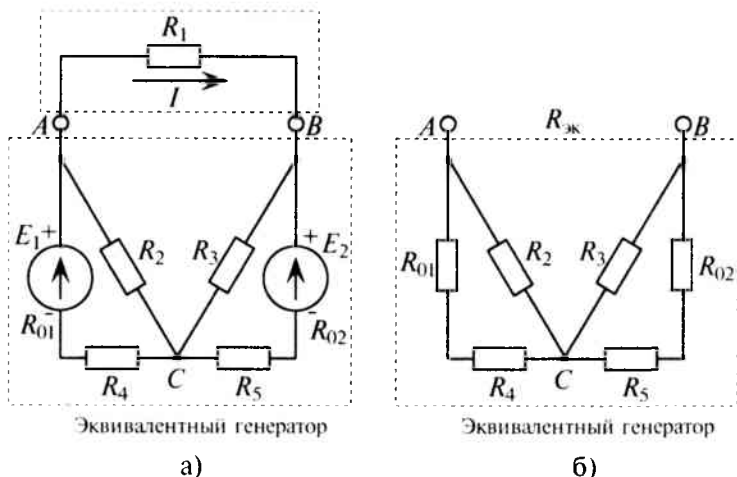


Рис. 4.16

**Решение**

Для определения тока  $I$  в сопротивлении  $R_1$  определим ЭДС эквивалентного генератора  $E_{\text{эк}}$  (рис. 4.16а) и его внутреннее сопротивление  $R_{\text{эк}}$  (рис. 4.16б) при холостом ходе, т. е. разомкнутой цепи (между точками  $A$  и  $B$ ).

$$E_{\text{эк}} = U_{AC} - U_{BC}.$$

Знак «минус» обусловлен тем, что источники в схеме включены встречно и потенциал в точке  $A$  больше потенциала в точке  $B$ , так как  $E_1 > E_2$  (см. пример 4.6).

Напряжение

$$U_{AC} = I_2 R_2 = \frac{E_1 R_2}{R_{01} + R_2 + R_4} = \frac{40 \cdot 10}{0,4 + 10 + 3,6} = 28,6 \text{ В.}$$

Напряжение

$$U_{BC} = I_3 R_3 = \frac{E_2 R_3}{R_{02} + R_3 + R_5} = \frac{30 \cdot 10}{0,4 + 10 + 3,6} = 21,4 \text{ В.}$$

Следовательно,  $E_{\text{эк}} = U_{AC} - U_{BC} = 28,6 - 21,4 = 7,2 \text{ В.}$

Внутреннее сопротивление эквивалентного генератора

$$\begin{aligned} R_{\text{эк}} &= \frac{R_2 (R_{01} + R_4)}{R_2 + R_{01} + R_4} + \frac{R_3 (R_{02} + R_5)}{R_3 + R_{02} + R_5} = \\ &= \frac{10 \cdot (0,4 + 3,6)}{10 + 0,4 + 3,6} + \frac{10 \cdot (0,4 + 3,6)}{10 + 0,4 + 3,6} = 5,72 \text{ Ом.} \end{aligned}$$

$$\text{Искомый ток } I = \frac{E_{\text{эк}}}{R_{\text{эк}} + R} = \frac{7,2}{5,72 + 30} = 0,2 \text{ А.}$$

Такой же ток получен в примере 4.6 на сопротивлении  $R_1$ .

### Пример 4.13

В схеме рис. 4.17а сопротивления плеч моста равны  $R_1 = 1 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = R_3 = R_4 = 2 \text{ Ом}$ .

Сопротивление гальванометра  $R_g = 98,33 \text{ Ом}$ , ЭДС источника  $E_{\text{и}} = 12 \text{ В}$ ;  $R_{0\text{и}} = 0$ . Методом эквивалентного генератора определить ток в ветви гальванометра (между точками  $A$  и  $B$ ).

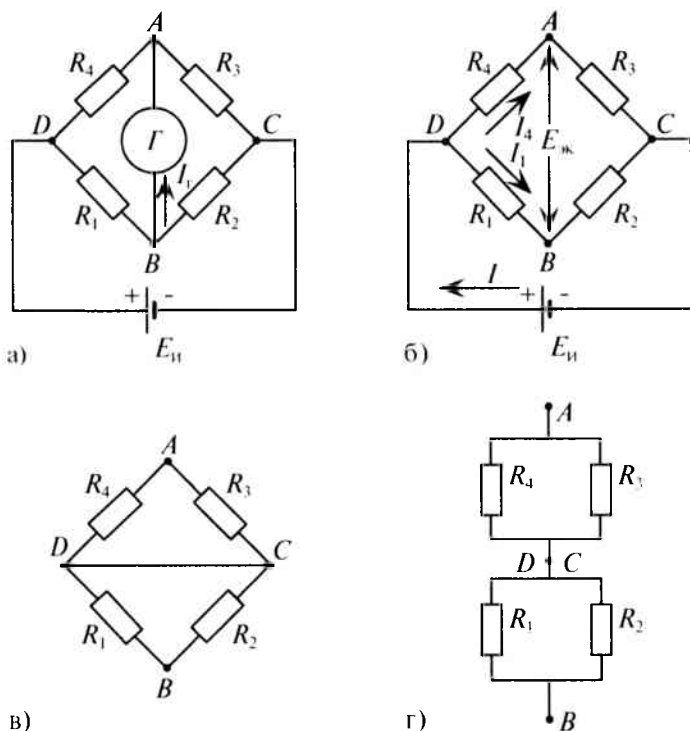


Рис. 4.17

### Решение

Для определения тока в цепи гальванометра  $I_g$  методом эквивалентного генератора необходимо вычислить ЭДС эквивалентного генератора  $E_{\text{эк}}$  между точками  $A$  и  $B$  (рис. 4.17б) и внутреннее сопротивление эквивалентного генератора  $R_{\text{эк}}$  относительно точек  $A$  и  $B$  при отсутствии гальванометра, заменив в схеме (рис. 4.17в) источник ЭДС  $E_{\text{и}}$  его внутренним сопротивлением ( $R_{0\text{и}} = 0$ ) равным нулю.

Для определения ЭДС эквивалентного генератора  $E_{\text{эк}}$  принимают потенциал точки  $C$  схемы (рис. 4.17б) равным нулю, т. е.  $\varphi_C = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} E_{\text{эк}} &= U_{BA} = \varphi_B - \varphi_A = (E_{\text{и}} - I_1 R_1) - (E_{\text{и}} - I_4 R_4) = \\ &= \left( E_{\text{и}} - \frac{E_{\text{и}}}{R_1 + R_2} R_1 \right) - \left( E_{\text{и}} - \frac{E_{\text{и}}}{R_4 + R_3} R_4 \right) = \\ &= \left( 12 - \frac{12}{1+2} \cdot 1 \right) - \left( 12 - \frac{12}{2+2} \cdot 2 \right) = 2 \text{ В}. \end{aligned}$$

При замене источника ЭДС  $E_{\text{и}}$  его внутренним сопротивлением, равным нулю, замыкаются накоротко точки  $C$  и  $D$  схемы (рис. 4.17в). При этом (рис. 4.17г) сопротивления  $R_3$  и  $R_4$  соединены между собой параллельно. Также параллельно соединены между собой сопротивления  $R_1$  и  $R_2$ . Между точками  $A$  и  $B$  сопротивления  $R_{1,2}$  и  $R_{3,4}$  соединены последовательно. Следовательно, сопротивление эквивалентного генератора относительно точек  $A$  и  $B$  будет равно

$$R_{\text{эк}} = R_{1,2} + R_{3,4} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{1 \cdot 2}{1+2} + \frac{2 \cdot 2}{2+2} = 1,67 \text{ Ом}.$$

Тогда ток в ветви с гальванометром, который направлен из точки  $B$  в точку  $A$ , т. е. из точки с большим потенциалом в точку с меньшим потенциалом (рис. 4.17а), будет равен

$$I = \frac{E_{\text{эк}}}{R_{\Gamma} + R_{\text{эк}}} = \frac{2}{98,33 + 1,67} = 0,02 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ А}.$$

## Глава 5

### НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

#### 5.1. Основные понятия

Нелинейными называются цепи, в которые включены нелинейные элементы (нэ).

*Элемент электрической цепи, сопротивление которого зависит от величины и направления тока в нем или от напряжения на его зажимах, называется нелинейным.* Нелинейными такие элементы называются потому, что их вольт-амперная характеристика (т. е. зависимость тока от напряжения, приложенного к элементу)  $I=f(U)$  — нелинейная. Виды нелинейной зависимости показаны на рис. 5.2б, 5.3б, 5.4б и др.

Примерами нелинейных элементов могут служить электронные или газонаполненные лампы, полупроводниковые приборы, лампы накаливания и пр.

В нелинейную цепь наряду с нелинейными элементами могут быть включены линейные. Сопротивление линейных элементов практически не зависит от тока или напряжения (резистор). Вольт-амперная характеристика линейного элемента — прямая линия, проходящая через начало координат, точку  $O$  (рис. 5.1).

Вторую точку (точку  $A$ ) для построения вольт-амперной характеристики линейного элемента определяют вычислением тока  $I'$  в линейном элементе при произвольно выбранном напряжении  $U'$ , приложенном к этому элементу, т. е.  $I' = \frac{U'}{R}$ , где  $R$  — заданное сопротивление линейного элемента — величина постоянная.

Аналитический расчет нелинейных цепей весьма сложен, так как сопротивление нелинейного элемента — непостоянная величина, зависящая от величины тока. Таким образом, в уравнении закона Ома ( $I = \frac{U}{R}$ ) две переменные величины. Поэтому при расчете нелинейных цепей к нелинейным элементам не применим закон Ома ни для участка, ни для замкнутой нелинейной цепи.

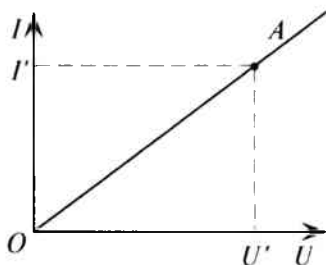


Рис. 5.1

Для расчета нелинейных цепей рационально использовать графо-аналитический метод, который предусматривает построение суммарной вольт-амперной характеристики цепи. По суммарной характеристике и характеристикам элементов определяются искомые величины (обычно токи и напряжения).

Построение суммарной вольт-амперной характеристики нелинейной цепи зависит от схемы соединения элементов нелинейной цепи и производится по заданным вольт-амперным характеристикам нелинейных элементов и построенным характеристикам линейных элементов, если они включены в цепь.

Кроме того, если в нелинейной цепи имеется линейный элемент, то расчет нелинейной цепи можно производить построением так называемой нагрузочной характеристики (рис. 5.3б).

## 5.2. Неразветвленная нелинейная цепь

В неразветвленной нелинейной электрической цепи все элементы соединены последовательно и по всем элементам проходит одинаковый ток (рис. 5.2а).

Для расчета цепи с последовательно соединенными нелинейными элементами  $нЭ_1$  и  $нЭ_2$  по заданным вольт-амперным характеристикам этих элементов строится суммарная вольт-амперная характеристика нелинейной цепи (рис. 5.2б).

При последовательном соединении элементов для построения суммарной вольт-амперной характеристики суммируются абсциссы (напряжения) вольт-амперных характеристик элементов при различных токах (например, в точках 1, 2, 3, 4 рис. 5.2б).

Зная напряжение, приложенное к цепи ( $U'$ ), по суммарной вольт-амперной характеристике (точка  $A$ ) определяем ток в нели-

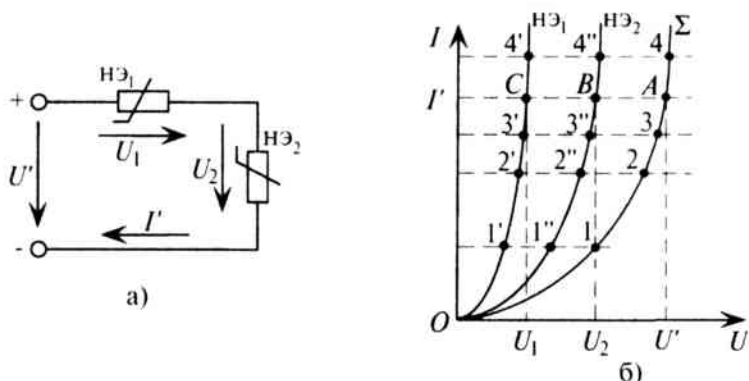


Рис. 5.2

нейной цепи ( $I'$ ). Этот ток создает падение напряжения на первом элементе  $U_1$  (точка  $C$ ) и на втором элементе  $U_2$  (точка  $B$ ).

Если же задан ток  $I'$  в рассматриваемой цепи, то по суммарной вольт-амперной характеристике можно найти напряжение цепи  $U'$  (точка  $A$ ) и напряжения на элементах  $U_1$  и  $U_2$  (точки  $C$  и  $B$ ).

У нелинейных элементов различают статическое  $R_{ст}$  и динамическое  $R_{дин}$  сопротивление.

Статическое сопротивление  $R_{ст}$  – это сопротивление нелинейного элемента в режиме работы цепи, т. е. сопротивление нелинейного элемента в определенной точке его вольт-амперной характеристики.

$$R_{ст} = \frac{U_1}{I'}. \quad (5.1)$$

Вычислить статические сопротивления нелинейных элементов в режиме работы рассматриваемой цепи, т. е. сопротивления для точек  $C$  и  $B$  вольт-амперных характеристик (при токе  $I'$  – рис. 5.2б), можно следующим образом:

$$R_{ст1} = \frac{U_1}{I'}; \quad R_{ст2} = \frac{U_2}{I'}.$$

Динамическое сопротивление нелинейных элементов ( $R_{дин}$ ) в режиме работы цепи определяется как

$$R_{дин} = \frac{dU}{dI}, \quad (5.2)$$

где  $dU$  – бесконечно малое приращение напряжения (определяется по вольт-амперным характеристикам нелинейных элементов у точек  $C$  и  $B$ ), а  $dI$  – бесконечно малое приращение тока у этих точек.

Если в неразветвленную нелинейную цепь включен линейный элемент с заданным сопротивлением  $R$ , то для расчета такой нелинейной цепи можно произвести суммирование абсцисс (напряжений) всех элементов цепи, включая линейный, построив предварительно его вольт-амперную характеристику в той же системе координат (рис. 5.1).

По суммарной вольт-амперной характеристике нелинейной цепи определяется режим работы цепи и ее элементов.

Для расчета нелинейной цепи с последовательно включенным линейным элементом с сопротивлением  $R$  (рис. 5.3а) можно воспользоваться построением нагрузочной характеристики (рис. 5.3б).

Нагрузочная характеристика представляет собой прямую линию, проведенную через две точки  $A$  и  $B$  (рис. 5.3б). Точка  $A$  рас-



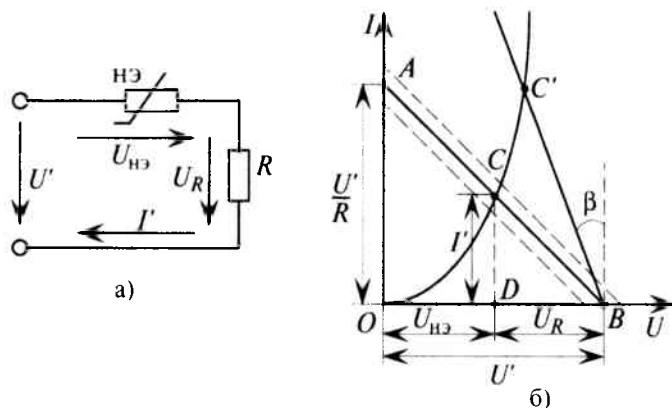


Рис. 5.3

положена на оси ординат (ток). Точка  $B$  – на оси абсцисс (напряжение).

Построение нагрузочной характеристики осуществляется с использованием двух уравнений (5.3 и 5.4) для рассматриваемой цепи в системе координат  $I=f(U)$

$$U_{\text{НЭ}} = U' - U_R = U' - I'R. \quad (5.3)$$

Откуда 
$$I' = \frac{U' - U_{\text{НЭ}}}{R} = \frac{U'}{R} - \frac{U_{\text{НЭ}}}{R}. \quad (5.4)$$

Точка  $B$  соответствует величинам  $I' = 0$  и  $U_{\text{НЭ}} = U'$  (см. (5.3)).

Точка  $A$  соответствует величинам  $U_{\text{НЭ}} = 0$  и  $I' = U'/R$  (см. (5.4)).

При построении в тех же координатных осях заданной вольт-амперной характеристики нелинейного элемента отмечается точка пересечения  $C$  этих характеристик, которая является единственно возможной при заданном режиме работы цепи:

отрезок  $DC$  – ток цепи  $I'$ ,

отрезок  $OD$  – напряжение на нелинейном элементе  $-U_{\text{НЭ}}$ ,

отрезок  $DB$  – напряжение на линейном элементе  $R - U_R$ .

Такой метод расчета неразветвленных нелинейных цепей называется методом пересечений.

На рис. 5.3б можно проследить изменения режима работы цепи ( $I'$ ;  $U_{\text{НЭ}}$ ;  $U_R$ ) при изменениях напряжения сети  $U'$  (пунктирные линии). На том же рисунке показаны изменения режима работы цепи при изменении сопротивления линейного элемента  $R$  (перемещение точки  $C'$  на рис. 5.3б).

Если точка  $A$ , соответствующая измененному значению напряжения сети  $U'$  или сопротивления линейного элемента  $R$  (см. (5.4)), выходит за пределы графика (рис. 5.3б), то определяют

угол  $\beta$ , который нагрузочная характеристика (прямая) составляет с вертикалью, проведенной из точки  $B$  (на оси  $U$ ), соответствующей напряжению сети  $U'$ , т. е.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{U''}{M_U} : \frac{I''}{M_I} = \frac{U''}{I''} \cdot \frac{M_I}{M_U} = R'' \frac{M_I}{M_U},$$

а

$$\beta = \operatorname{arctg} R'' \frac{M_I}{M_U}, \quad (5.5)$$

где  $M_I$  – принятый на графике масштаб тока;  $M_U$  – принятый на графике масштаб напряжения;  $U''$  – произвольно выбранное напряжение (например,  $U'$ );  $I''$  – ток, соответствующий напряжению  $U''$  и сопротивлению  $R''$ , т. е.:

$$I'' = \frac{U''}{R''}.$$

Тогда нагрузочную характеристику из точки  $B$  доводят только до пересечения с вольт-амперной характеристикой нелинейного элемента (точка  $C'$  рис. 5.3б) и определяют режим работы цепи, соответствующий измененному значению сопротивления линейного элемента  $R$  или напряжению сети  $U'$ .

### 5.3. Разветвленная нелинейная цепь

В разветвленной нелинейной электрической цепи нелинейные элементы могут быть соединены параллельно. При параллельном соединении нелинейных элементов напряжение на всех элементах будет одинаковым.

Для расчета цепи с параллельным соединением нелинейных элементов  $нЭ_1$  и  $нЭ_2$  (рис. 5.4а) строится суммарная вольт-амперная характеристика цепи по заданным вольт-амперным харак-

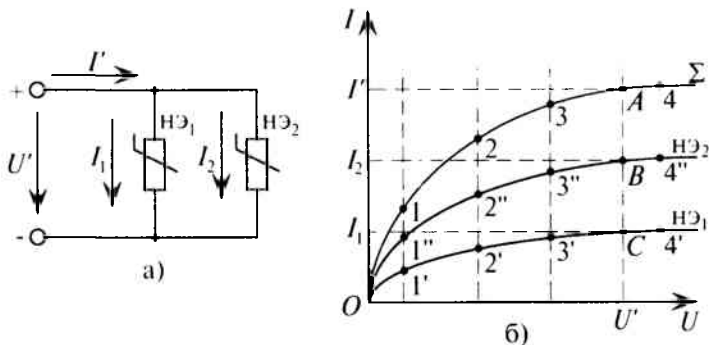


Рис. 5.4

теристикам нелинейных элементов, при этом суммируются ординаты (токи), соответствующие различным значениям напряжений (точки 1, 2, 3, 4 на рис. 5.4б).

При заданном значении тока в неразветвленной части нелинейной цепи  $I'$  по суммарной вольт-амперной характеристике (точка  $A$ ) можно определить напряжение цепи  $U'$ . Это напряжение создает ток в первом элементе  $I_1$  (точка  $C$ ) и во втором элементе  $I_2$  (точка  $B$ ).

Если задано напряжение  $U'$ , приложенное к элементам, то по суммарной вольт-амперной характеристике определяется ток в неразветвленной части цепи (точка  $A$ ), а по вольт-амперным характеристикам элементов определяются токи  $I_1$  и  $I_2$  (точки  $C$  и  $B$  рис. 5.4б).

Включение в нелинейную цепь линейного элемента не меняет характера и порядка расчета.

#### 5.4. Нелинейная цепь со смешанным соединением элементов

Расчет нелинейной цепи при смешанном соединении элементов (в общем виде) рассмотрен на примере 5.1 (рис. 5.5).

##### Пример 5.1

По заданному напряжению цепи  $U'$  требуется определить токи  $I'$ ,  $I_1$  и  $I_R$ , напряжения на участках  $U_1$  и  $U_{AB}$  (рис. 5.5а), а также сопротивления нелинейных элементов в заданном режиме работы цепи. Заданы вольт-амперные характеристики нелинейных элементов  $nЭ_1$  и  $nЭ_2$  (рис. 5.5б) и сопротивление линейного элемента  $R$ .

##### Решение

По заданному сопротивлению  $R$  линейного элемента строится вольт-амперная характеристика этого элемента (см. рис. 5.1). Линейный элемент с сопротивлением  $R$  включен параллельно с не-

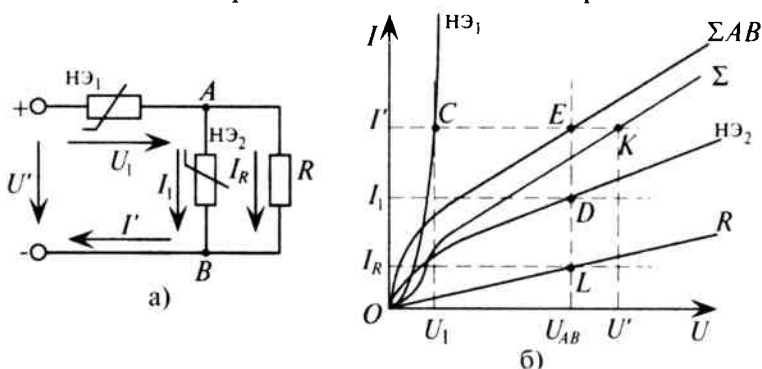


Рис. 5.5

линейным элементом  $n_2$ , и суммарная вольт-амперная характеристика для участка  $AB$  цепи ( $\Sigma AB$ ) строится так же, как на рис. 5.4б (т. е. суммируются ординаты (токи) характеристик  $n_1$  и  $R$ ).

Участок  $AB$  соединен последовательно с нелинейным элементом  $n_1$ . Суммарная вольт-амперная характеристика цепи ( $\Sigma$ ) строится так же, как на рис. 5.2б.

Зная напряжение цепи  $U'$ , по суммарной характеристике цепи (точка  $K$ ) определяется ток в неразветвленной части цепи  $I'$  (рис. 5.5б). Этот ток создает падение напряжения  $U_1$  (точка  $C$ ) и  $U_{AB}$  на параллельном участке (точка  $E$ ).

Напряжение на участке  $AB$  ( $U_{AB}$ ) в разветвленной цепи создает токи  $I_1$  (точка  $D$ ) и  $I_R$  (точка  $L$ ).

Определив напряжения и токи нелинейных элементов, можно определить статические сопротивления этих элементов в заданном режиме работы цепи

$$R'_1 = \frac{U_1}{I'}; \quad R'_2 = \frac{U_{AB}}{I_1}.$$

Таким образом, по вольт-амперным характеристикам соединенных смешанно элементов и их суммарным характеристикам можно определить все параметры нелинейной цепи ( $I_1$ ;  $I_R$ ;  $I'$ ;  $U_1$ ;  $U_{AB}$ ;  $U'$ ), если задан хотя бы один из этих параметров (рис. 5.5б).

### 5.5. Стабилизаторы тока и напряжения

Есть такие нелинейные элементы, вольт-амперная характеристика которых имеет участки, параллельные оси абсцисс или оси ординат (рис. 5.6). Такие нелинейные элементы применяют в качестве стабилизаторов тока (рис. 5.6а) и стабилизаторов напряжения (рис. 5.6б).

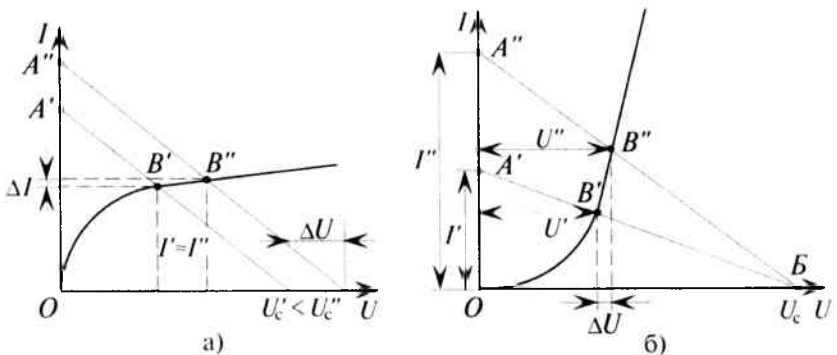


Рис. 5.6

В качестве стабилизатора тока можно использовать, например, бареттер (стальная нить в атмосфере водорода). На участке  $B'B''$  (рис. 5.6а) характеристика бареттера почти параллельна оси абсцисс. Если бареттер включить последовательно с участком  $ab$  цепи (рис. 5.8), то ток  $I$  цепи почти не изменяется при изменении напряжения или сопротивления (рис. 5.6а) – бареттер стабилизирует ток в цепи.

Эффективность стабилизации характеризует коэффициент стабилизации, показывающий, во сколько раз относительное изменение тока  $\Delta I$  меньше относительного изменения напряжения  $\Delta U$ :

$$S_1 = \frac{\Delta U}{U} \cdot \frac{I}{\Delta I}.$$

Для стабилизации напряжения применяют газоразрядные или полупроводниковые (кремниевые) стабилизаторы. Рабочий участок  $B'B''$  вольт-амперной характеристики стабилизатора напряжения почти параллелен оси ординат (рис. 5.6б). Стабилизатор напряжения включается параллельно сопротивлению  $R$ , на котором он стабилизирует напряжение.

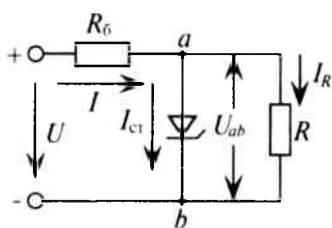


Рис. 5.7

Последовательно с разветвленным участком ( $ab$ ) включается балластное сопротивление  $R_6$  (рис. 5.7).

Как видно из рис. 5.6б, изменение балластного сопротивления  $R_6$  в определенных пределах от  $I' = \frac{U_c}{R'_6}$  до  $I'' = \frac{U_c}{R''_6}$  почти не вызывает изменения напряжения на стабилизаторе и, следовательно, на нагрузке  $R$  ( $U_{ab}$  на рис. 5.7).

**Пример 5.2**

Для стабилизации напряжения и тока накала электронной лампы (4 В; 1 А) включен бареттер  $B$  (рис. 5.8а), вольт-амперная характеристика которого приведена на рис. 5.8б.

Определить все токи и напряжения на бареттере  $U_1$  и нити накала  $U_2$ , если напряжение сети  $U = 10$  В, а сопротивление  $R_1 = 4$  Ом. Определить пределы изменения напряжений сети, при которых ток цепи  $I$  остается практически неизменным.

### Решение

Масштаб напряжения на графике  $M_U = 2$  В/см.

Масштаб тока на графике принят  $M_I = 1$  А/см.

Нагрузочная характеристика строится в координатах:  $U = 10$  В;

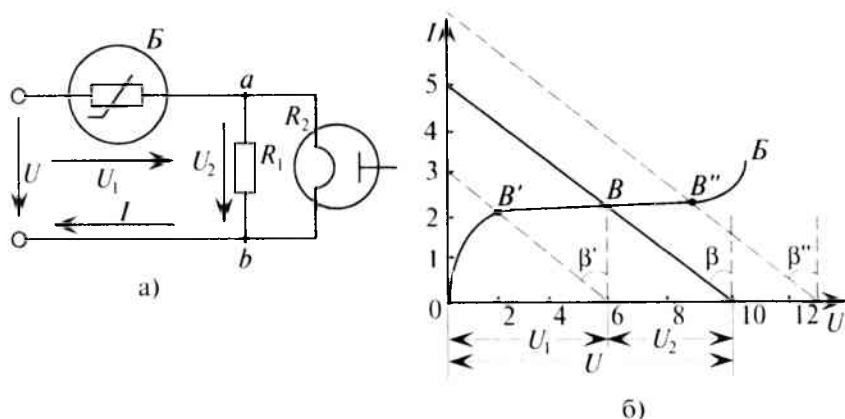


Рис. 5.8

$I = \frac{U}{R} = \frac{10}{2} = 5 \text{ А}$ , так как  $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4 \cdot 4}{4 + 4} = 2 \text{ Ом}$ , где сопротивление нити накала лампы  $R_2 = \frac{4}{1} = 4 \text{ Ом}$ .

Следовательно, точка пересечения вольт-амперной характеристики бареттера и нагрузочной характеристики  $B$  (рис. 5.8б) имеет координаты  $U_1 = 6 \text{ В}$ , а ток цепи  $I = 2 \text{ А}$ . Напряжение  $U_2 = 10 - 6 = 4 \text{ В}$ , а токи  $I_{R1} = I_{R2} = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} = \frac{4}{4} = 1 \text{ А}$ .

Нагрузочная характеристика проведена под углом  $\beta$  к оси ординат, т. е.

$$\beta = \arctg R \cdot \frac{M_I}{M_U} = \arctg 2 \cdot \frac{1}{2} = \arctg 1 = 45^\circ.$$

Нагрузочные характеристики, соответствующие пределам изменения напряжений сети, при которых ток цепи  $I$  остается практически неизменным ( $I \approx 2 \text{ А}$ ), проводятся параллельно основной нагрузочной характеристике под углами  $\beta' = \beta = \beta'' = 45^\circ$  к оси ординат.

Таким образом, как следует из графиков рис. 5.8б, эти напряжения соответственно равны

$$U_{\text{min}} = 6 \text{ В}, \quad U_{\text{max}} = 13 \text{ В}.$$

## Глава 6

### ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И ИХ РАСЧЕТ

#### 6.1. Электрическая емкость

Если проводник  $A$  получит какой-либо заряд  $Q$ , то этот проводник создает электрическое поле. Электрическое поле, созданное проводником  $A$ , обладает энергией, которая и характеризует потенциал проводника  $\phi$ . Очевидно, изменение заряда проводника вызывает аналогичное изменение его потенциала. Таким образом, между зарядом проводника и его потенциалом существует прямая пропорциональность, которую можно записать следующим уравнением:

$$Q = C\phi, \quad (6.1)$$

где  $C$  – коэффициент пропорциональности, который и называется электрической емкостью проводника.

Из (6.1) следует, что электрическая емкость проводника

$$C = \frac{Q}{\phi}. \quad (6.2)$$

То есть *электрическая емкость проводника характеризуется зарядом  $Q$ , который необходимо сообщить проводнику, чтобы его потенциал изменился на единицу.*

Единицей измерения емкости является фарад

$$[C] = \left[ \frac{Q}{\phi} \right] = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \text{Ф (фарад)}.$$

Фарад – большая единица. Например, электрическая емкость проводника под названием «земля» не превышает 0,7 Ф. Поэтому на практике емкость измеряется в микрофарадах, нанофарадах и пикофарадах.

Электрическая емкость проводника характеризует способность проводника накапливать электрический заряд, изменяющий его потенциал на единицу (на 1 В).

Емкость проводника не зависит от заряда  $Q$ , сообщенного проводнику, так как изменение заряда  $Q$  вызовет пропорциональное изменение потенциала проводника  $\phi$ , а их отношение остается неизменным (6.2). (Емкость 5-литрового баллона не зависит от количества жидкости, заполняющей баллон.)

Емкость проводника не зависит также от материала и массы проводника.

Емкость проводника зависит от:

1) площади поверхности проводника, так как заряды располагаются на поверхности проводника;

2) среды, в которой находится проводник. Например, если проводник перенести из воздуха в минеральное масло, его емкость увеличится в 2,2 раза, так как диэлектрическая проницаемость минерального масла  $\epsilon_r = 2,2$  (см. Приложение 2);

3) близости других проводников. Если рядом с проводником в определенной среде расположен еще один проводник, то емкость системы этих двух проводников будет гораздо больше, чем сумма емкостей каждого из этих проводников в этой среде. На этом принципе устроены электрические конденсаторы.

## 6.2. Конденсаторы

*Конденсатор представляет собой два проводника, разделенных диэлектриком.*

Емкость конденсатора характеризуется зарядом, который нужно сообщить одному из проводников конденсатора для того, чтобы разность потенциалов между проводниками конденсатора (напряжение) изменилась на единицу.

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{Q}{U}. \quad (6.3)$$

Если одному из проводников конденсатора (обкладке) сообщить электрический заряд  $Q$  определенного знака (например,  $+Q$ ), то вокруг этого проводника образуется электрическое поле, под действием которого в другом проводнике (обкладке) происходит разделение зарядов (электростатическая индукция) и заряд такого же знака и величины «уходит в землю» или на отрицательную клемму источника (рис. 6.1). В результате на проводнике, которому не сообщен заряд, остается заряд противоположного знака, «минус», по величине такой же, как и сообщенный первому проводнику, заряд, т. е.  $-Q$ .

Таким образом, за счет электростатической индукции проводники (обкладки) конденсатора, изолированные друг от друга, получают равные по величине, но противоположные по знаку заряды ( $+Q$  и  $-Q$ ) и разные потенциалы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Следовательно, между проводниками (обкладками) конденсатора появляется напряжение  $U = \varphi_1 - \varphi_2$ .

Различают естественные и искусственные конденсаторы.



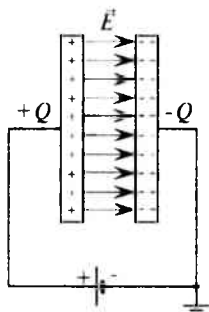


Рис. 6.1

Естественными конденсаторами являются провода электрической сети, две жилы кабеля, жила кабеля и его броня, провода воздушной линии электропередачи относительно земли, электроды электронной лампы и др. Естественные конденсаторы специально не создаются, их емкость определяется конструкцией электрических устройств, но ее необходимо учитывать при расчетах, монтаже и эксплуатации электротехнических и радиотехнических устройств.

Искусственные конденсаторы изготавливают специально. В зависимости от диэлектрика различают воздушные, бумажные, керамические, слюдяные, электролитические и другие виды конденсаторов. Каждый искусственный конденсатор обладает определенной емкостью  $C$  и рассчитан на определенное рабочее напряжение  $U_p$  (оба параметра указаны на корпусе конденсатора). Искусственные конденсаторы нашли широкое применение в энергетике, автоматике, радиотехнике, электронике, в схемах электрических фильтров, усилителей, стабилизаторов, колебательного контура, улучшения коэффициента мощности и т. д.

Конденсаторы могут служить для накопления и сохранения электрического поля и его энергии (так как проводимость диэлектриков конденсаторов ничтожно мала).

Широко используются конденсаторы как постоянной, так и переменной емкости.

### 6.3. Соединение конденсаторов

#### Параллельное соединение конденсаторов

Конденсаторы, как и резисторы, могут соединяться последовательно, параллельно и смешанно.

При параллельном соединении конденсаторов к каждому конденсатору приложено одинаковое напряжение  $U$ , а величина заряда на обкладках каждого конденсатора  $Q$  пропорциональна его емкости (рис. 6.2).

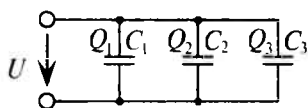


Рис. 6.2

$$Q_1 = UC_1; Q_2 = UC_2; Q_3 = UC_3.$$

Общий заряд  $Q$  всех конденсаторов

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = U(C_1 + C_2 + C_3)$$

или 
$$\frac{Q}{U} = C_1 + C_2 + C_3 = C. \quad (6.4)$$

Общая емкость  $C$ , или емкость батареи, параллельно включенных конденсаторов равна сумме емкостей этих конденсаторов. Очевидно, что параллельное подключение конденсатора к группе других включенных конденсаторов увеличивает общую емкость батареи этих конденсаторов.

Если параллельно включены  $m$  одинаковых конденсаторов емкостью  $C'$  каждый, то общая (эквивалентная) емкость батареи этих конденсаторов может быть определена выражением

$$C = C'm. \quad (6.5)$$

Следовательно, параллельное соединение конденсаторов применяется для увеличения емкости.

#### Последовательное соединение конденсаторов

Если последовательно соединенные конденсаторы подключить к источнику постоянного тока с напряжением  $U$  (рис. 6.3), то напряжение источника окажется приложенным к внешним обкладкам крайних конденсаторов

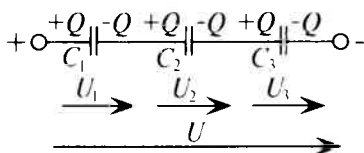


Рис. 6.3

( $+Q$  — к левой обкладке конденсатора  $C_1$ , а  $-Q$  — к правой обкладке конденсатора  $C_3$ ). На вторых пластинах (обкладках) последовательно включенных конденсаторов  $C_1$  и  $C_3$  тот же заряд  $Q$ , но с противоположными знаками появится за счет электростатической индукции (рис. 6.1). На обкладках конденсатора  $C_2$  появятся заряды  $+Q$  и  $-Q$  за счет того, что заряд  $+Q$  перешел с правой обкладки конденсатора  $C_1$  (рис. 6.1), а  $-Q$  появился за счет электростатической индукции или за счет перехода электронов (заряд  $-Q$ ) с левой обкладки конденсатора  $C_3$ .

Таким образом, на обкладках последовательно соединенных конденсаторов, подключенных к источнику постоянного тока с напряжением  $U$ , появятся заряды одинаковые по величине с противоположными знаками. Напряжение на конденсаторах распределяется обратно пропорционально емкостям конденсаторов:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}; \quad U_2 = \frac{Q}{C_2} \quad \text{и} \quad U_3 = \frac{Q}{C_3}. \quad (6.6)$$

По второму закону Кирхгофа

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right).$$

Откуда 
$$\frac{U}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{C}. \quad (6.7)$$

*Обратная величина общей емкости последовательно соединенных конденсаторов равна сумме обратных величин емкостей этих конденсаторов.*

Из выражения (6.7) следует, что емкость батареи последовательно включенных трех конденсаторов  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  (см. рис. 6.3) определяется выражением

$$C_{1,2,3} = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_1 C_2}. \quad (6.8)$$

При последовательном включении двух конденсаторов их общая емкость определяется следующим выражением:

$$\frac{1}{C_{1,2}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_2 + C_1}{C_1 C_2}; \quad C_{1,2} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (6.9)$$

Если в цепь включены последовательно  $n$  одинаковых конденсаторов емкостью  $C'$  каждый, то общая емкость этих конденсаторов:

$$C = \frac{C'}{n}. \quad (6.10)$$

Из (6.10) видно, что, чем больше конденсаторов  $n$  соединено последовательно, тем меньше будет их общая емкость  $C$ , т.е. последовательное включение конденсаторов приводит к уменьшению общей емкости батареи конденсаторов. Зачем же последовательно включать конденсаторы, если это приводит к уменьшению общей емкости этих конденсаторов?

На практике может оказаться (пример 6.1), что допустимое рабочее напряжение  $U_p$  конденсатора меньше напряжения, на которое необходимо подключить конденсатор. Если этот конденсатор подключить на такое напряжение, то он выйдет из строя, так как будет пробит диэлектрик. Если же последовательно включить несколько конденсаторов, то напряжение распределится между ними (6.6) и на каждом конденсаторе напряжение окажется меньше его допустимого рабочего  $U_p$ . Следовательно, *последовательное соединение конденсаторов применяют для того, чтобы напряжение на каждом конденсаторе не превышало его рабочего напряжения  $U_p$*  (пример 6.1).

### Смешанное соединение конденсаторов

Смешанное соединение (последовательно-параллельное) конденсаторов применяют тогда, когда необходимо увеличить емкость и рабочее напряжение батареи конденсаторов.

Рассмотрим смешанное соединение конденсаторов на нижеприведенных примерах.

#### Пример 6.1

К участку цепи с напряжением  $U = 380$  В необходимо подключить емкость  $C = 18$  мкФ. Имеются конденсаторы емкостью  $C' = 8$  мкФ, рассчитанные на напряжение  $U_p = 100$  В каждый. Сколько нужно таких конденсаторов и как их соединить?

#### Решение

Для того чтобы напряжение на каждом конденсаторе не превышало его рабочего  $U_p$ , на заданное напряжение  $U = 380$  В необходимо соединить последовательно 4 конденсатора.

$$n = \frac{U}{U_p} = \frac{380}{100} \approx 4.$$

Емкость этой группы, состоящей из 4 последовательно соединенных конденсаторов, равна  $C_{\text{послед}} = \frac{C'}{n} = \frac{8}{4} = 2$  мкФ.

Для получения емкости  $C = 18$  мкФ необходимо включить параллельно 9 таких последовательно соединенных групп

$$m = \frac{C}{C_{\text{послед}}} = \frac{18}{2} = 9. \text{ Следовательно}$$

но, необходимо иметь  $k = nm = 4 \cdot 9 = 36$  конденсаторов и соединить их смешанно (рис. 6.4).

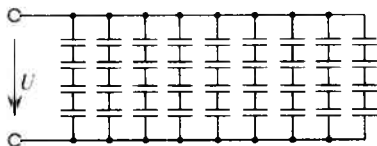


Рис. 6.4

#### Пример 6.2

Конденсаторы, емкости которых  $C_1 = 2$  мкФ;  $C_2 = 1$  мкФ;  $C_3 = 2$  мкФ;  $C_4 = 6$  мкФ;  $C_5 = 4$  мкФ, соединены по схеме рис. 6.5 и подключены к источнику с постоянным напряжением  $U = 100$  В.

Определить общую емкость конденсаторов  $C$ , заряд и энергию электрического поля каждого конденсатора и всей цепи.

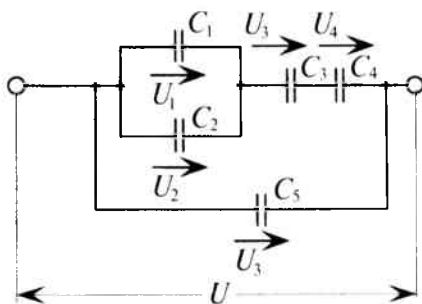


Рис. 6.5

**Решение**

$$C_{3,4} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = \frac{2 \cdot 6}{2 + 6} = 1,5 \text{ мкФ} = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ Ф.}$$

$$C_{1,2} = C_1 + C_2 = 2 + 1 = 3 \text{ мкФ} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ Ф.}$$

$$C_{1-4} = \frac{C_{1,2} C_{3,4}}{C_{1,2} + C_{3,4}} = \frac{3 \cdot 1,5}{3 + 1,5} = 1 \text{ мкФ} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ Ф.}$$

Общая емкость конденсаторов (см. рис. 6.5)

$$C = C_5 + C_{1-4} = 4 + 1 = 5 \text{ мкФ} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Ф.}$$

Заряды в параллельных ветвях распределяются пропорционально емкостям ветвей

$$Q_{1-4} = C_{1-4} U = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 10^{-4} \text{ Кл};$$

$$Q_5 = C_5 U = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Кл.}$$

Заряд  $Q_{1-4}$  создает напряжения:

$$U_1 = U_2 = \frac{Q_{1-4}}{C_{1,2}} = \frac{1 \cdot 10^{-4}}{3 \cdot 10^{-6}} = 33,3 \text{ В}; \quad U_3 = \frac{Q_{1-4}}{C_3} = \frac{1 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-6}} = 50 \text{ В};$$

$$U_4 = \frac{Q_{1-4}}{C_4} = \frac{1 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 10^{-6}} = 16,7 \text{ В (так как } Q_3 = Q_4 = Q_{1-4}).$$

Заряды конденсаторов  $C_1$  и  $C_2$ :

$$Q_1 = C_1 U_1 = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 33,3 = 66,6 \cdot 10^{-6} \text{ Кл};$$

$$Q_2 = C_2 U_2 = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 33,3 = 33,3 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

**Пример 6.3**

Напряжение на параллельно включенных конденсаторах  $C_1$  и  $C_2$  равно  $U_1 = U_2 = 120 \text{ В}$  (см. рис. 6.5). Определить напряжение на каждом конденсаторе и напряжение всей цепи, используя величины емкостей примера 6.2.

**Решение**

Заряд пары ( $C_1$  и  $C_2$ ) параллельно включенных конденсаторов

$$Q_{1,2} = C_{1,2} U_1 = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 120 = 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ Кл.}$$

Такой же заряд имеют конденсаторы  $C_3$  и  $C_4$ , соединенные последовательно с парой конденсаторов  $C_1$  и  $C_2$ , т. е.

$$Q_3 = Q_4 = Q_{1,2} = 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ Кл.}$$

Тогда напряжение на конденсаторах  $C_3$  и  $C_4$  будет равно

$$U_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{3,6 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-6}} = 180 \text{ В};$$

$$U_4 = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{3,6 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 10^{-6}} = 60 \text{ В.}$$

А напряжение всей цепи  $U = \frac{Q_{1,2}}{C_{1-4}} = \frac{3,6 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 10^{-6}} = 360 \text{ В}$ .

Это же напряжение можно определить по второму закону Кирхгофа:  $U = U_1 + U_3 + U_4 = 120 + 180 + 60 = 360 \text{ В}$ .

Такое же напряжение приложено к конденсатору  $C_5$ , т. е.  $U_5 = U = 380 \text{ В}$ .

#### 6.4. Емкость и энергия конденсаторов

Из искусственных конденсаторов большое распространение получили плоские конденсаторы. Плоским называют конденсатор, у которого обкладки представляют собой параллельно расположенные пластины (рис. 6.6), разделенные диэлектриком.

Пренебрегая искажением поля у краев пластин, электрическое поле между пластинами можно считать однородным.

Из выражений (1.9), (1.11) и (1.13) определяется емкость плоского конденсатора.

Поток вектора напряженности через площадь  $S$

$$N = ES = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r}.$$

Откуда заряд пластины  $Q = ES\epsilon_0\epsilon_r$ .

С другой стороны, та же напряженность однородного электрического поля между пластинами конденсатора согласно (1.13) равна  $E = \frac{U}{d}$ , откуда напряжение между пластинами  $U = Ed$ .

Емкость конденсатора согласно (6.3)

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{ES\epsilon_0\epsilon_r}{Ed}.$$

Следовательно, емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{S\epsilon_a}{d}, \quad (6.11)$$

где  $S$  — площадь пластины плоского конденсатора;  $\epsilon_a = \epsilon_0\epsilon_r$  — абсолютная диэлектрическая проницаемость диэлектрика конденсатора;  $d$  — расстояние между пластинами конденсатора.

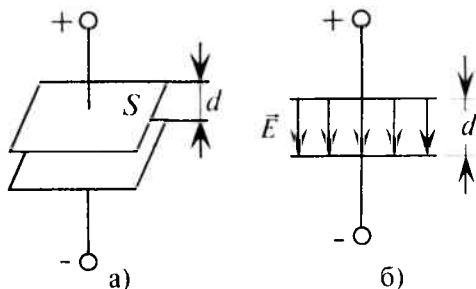


Рис. 6.6

Таким образом, емкость плоского конденсатора пропорциональна площади пластины конденсатора, абсолютной диэлектрической проницаемости диэлектрика конденсатора и обратно пропорциональна расстоянию между пластинами конденсатора (толщине диэлектрика).

Из выражения (6.11) следует, что емкость плоского конденсатора можно увеличить за счет уменьшения расстояния между пластинами конденсатора  $d$ . Однако такое увеличение емкости приведет к уменьшению допустимого рабочего напряжения конденсатора  $U_p$ .

Из (6.11) следует, что, чем больше диэлектрическая проницаемость диэлектрика  $\epsilon_a$ , тем больше емкость конденсатора с определенными  $S$  и  $d$ .

Из (6.11) также следует, что емкость плоского конденсатора можно увеличить за счет увеличения площади пластин конденсатора  $S$ . Однако такое увеличение емкости  $C$  рационально осуществлять в конденсаторах с эластичным диэлектриком, например бумажных. Бумажный конденсатор представляет собой две станиолевые ленты с парафинированной бумагой (диэлектрик) между ними. Заготовка свертывается в рулон и помещается в кожух. Таким образом значительное увеличение площади пластин (станиолевых лент) незначительно увеличивает габариты конденсатора.

В искусственных конденсаторах с хрупким диэлектриком (например, слюдяных) увеличение площади пластин  $S$  нерационально, так как это приведет к пропорциональному увеличению габаритов конденсатора.

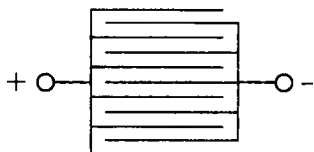


Рис. 6.7

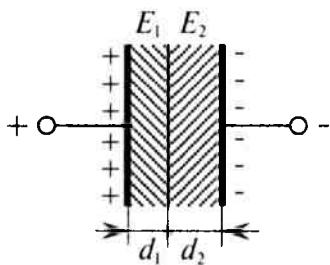


Рис. 6.8

Для увеличения емкости конденсаторов с хрупким диэлектриком последние делают многопластинчатыми (рис. 6.7).

При незначительном увеличении габаритов емкость таких конденсаторов увеличивается в  $(n - 1)$  раз, т. е.

$$C = \frac{S \epsilon_0 \epsilon_r}{d} (n - 1), \quad (6.12)$$

где  $n$  — количество пластин многопластинчатого конденсатора;  $(n - 1)$  — количество параллельно включенных конденсаторов, подключенных к двум клеммам (+ и -).

Многопластинчатыми рационально делать конденсаторы переменной емкости, преимущественно воздушные.

Если между пластинами конденсатора расположены два диэлектрика и поверхность раздела их параллельна пластинам (рис. 6.8), то такой плоский конденсатор можно рассматривать как два последовательно соединенных плоских конденсатора.

Поверхность раздела диэлектриков эквипотенциальна, и внесение тончайшего металлического листа вдоль этой поверхности никаких изменений в электрическом поле не вызывает, так как любое проводящее тело в электрическом поле эквипотенциально (равнопотенциально).

Емкости этих конденсаторов

$$C_1 = \frac{S\varepsilon_0\varepsilon_1}{d_1}; \quad C_2 = \frac{S\varepsilon_0\varepsilon_2}{d_2}. \quad (6.13)$$

А общая емкость плоского конденсатора с двухслойным диэлектриком равна

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = S \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}. \quad (6.14)$$

При последовательном соединении заряды конденсаторов одинаковы:

$$Q = Q_1 = Q_2 = C_1 U_1 = C_2 U_2 = CU.$$

Тогда напряжения на конденсаторах:

$$U_1 = \frac{UC}{C_1}; \quad U_2 = \frac{UC}{C_2}. \quad (6.15)$$

Подставив в выражение (6.15) соответственно (6.13) и (6.14), получим значения напряжений

$$U_1 = U \frac{\varepsilon_2 d_1}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}; \quad U_2 = U \frac{\varepsilon_1 d_2}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}. \quad (6.16)$$

Напряженности электрического поля в диэлектриках конденсаторов

$$E_1 = \frac{U_1}{d_1} = U \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}; \quad E_2 = \frac{U_2}{d_2} = U \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}. \quad (6.17)$$

Используя (6.17), получим

$$\boxed{\frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \quad (6.18)$$

Следовательно, напряженности полей в диэлектриках конденсатора с двухслойным диэлектриком обратно пропорциональны их диэлектрической проницаемостям.

Из выражения (6.18) следует, что если в многослойном конденсаторе есть слой, диэлектрическая проницаемость которого во



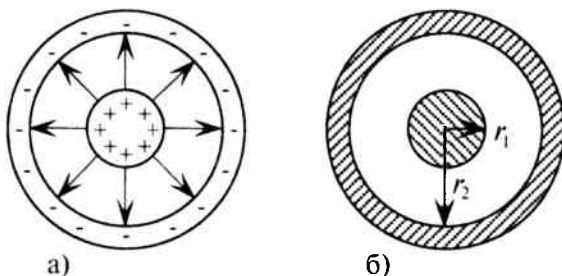


Рис. 6.9

много раз меньше проницаемости других слоев (диэлектриков), то в этом слое (например, пузырьки воздуха) могут возникнуть значительные напряженности, которые могут стать причиной разрушения изоляции конденсатора. Поэтому сушка изоляции проводов, кабелей, обмоток электрических машин и трансформаторов имеет огромное значение.

В цилиндрическом конденсаторе (рис. 6.9) радиально направленное поле возникает между двумя цилиндрическими электродами, имеющими общую ось. Емкость  $C$  цилиндрического конденсатора определяется выражением

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r\ell}{\ln \frac{r_2}{r_1}}, \quad (6.19)$$

где  $r_1$  — радиус внутреннего цилиндра (электрода);  $r_2$  — радиус внешнего цилиндра (электрода);  $\ell$  — длина конденсатора (высота) (обычно больше диаметра конденсатора).

Двухпроводная линия (рис. 6.10) представляет собой естественный конденсатор, емкость которого необходимо учитывать при расчете линии электропередачи. Емкость двухпроводниковой линии определяется из условия, что расстояние между проводниками  $D$  значительно превосходит радиус самих проводов ( $r_0$ ). Емкость такой двухпроводной линии можно определить по формуле

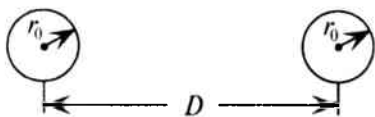


Рис. 6.10

$$C = \frac{\pi\ell\epsilon_a}{\ln \frac{D}{r_0}}. \quad (6.20)$$

Если к конденсатору (рис. 6.1) или к электростатической цепи (рис. 6.2–6.5) приложено напряжение  $U$ , то в электрической цепи этих конденсаторов создается электрическое поле, в котором накапливается энергия

$$W_{эл} = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2}, \quad (6.21)$$

где  $Q$  – заряд конденсатора или конденсаторов, к которым приложено напряжение  $U$ ;  $C$  – электрическая емкость конденсатора или батареи соединенных конденсаторов, к которой приложено напряжение  $U$ .

Таким образом, конденсаторы служат для накопления и сохранения электрического поля и его энергии.

#### Пример 6.4

В цепи (рис. 6.11) заданы величины:  $E_1 = 130$  В;  $E_2 = 125$  В;  $R_{01} = 0,2$  Ом;  $R_{02} = 0,5$  Ом;  $R = 20$  Ом и  $C = 20$  мкФ.

Определить энергию, накопленную в электрическом поле конденсатора емкостью  $C$ .

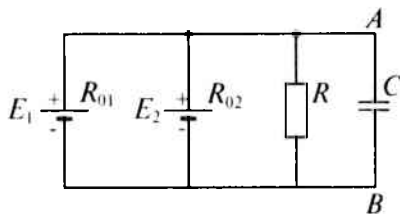


Рис. 6.11

#### Решение

Для определения величины энергии воспользуемся выражением (6.21)  $W_{эл} = \frac{CU^2}{2}$ . Для этого необходимо определить напряжение на конденсаторе  $U_{AB}$ .

Самым рациональным методом расчета этого напряжения в данном случае является метод узлового напряжения, так как включение конденсатора между точками  $A$  и  $B$  равносильно разрыву цепи между ними.

$$U_{AB} = \frac{E_1 g_1 + E_2 g_2}{g_1 + g_2 + g_3} = \frac{130 \cdot 5 + 125 \cdot 2}{5 + 2 + 0,05} = 127,66 \text{ В},$$

где  $g_1 = \frac{1}{0,2} = 5$  см;  $g_2 = \frac{1}{0,5} = 2$  см;  $g_3 = \frac{1}{20} = 0,05$  см.

$$\text{Тогда } W_{эл} = \frac{CU^2}{2} = \frac{20 \cdot 10^{-6} \cdot 127,6^2}{2} = 0,163 \text{ Вт}\cdot\text{с}.$$

#### Пример 6.5

Определить энергию электрического поля каждого конденсатора отдельно и электрического поля всех конденсаторов батареи для примеров 6.1 и 6.2.

#### Решение

Для примера 6.1 (рис. 6.4).

Энергия электрического поля всех конденсаторов батареи, изображенной на рис. 6.4, будет равна

$$W_{\text{эл}} = \frac{CU^2}{2} = \frac{18 \cdot 10^{-6} \cdot 380^2}{2} = 0,13 \text{ Вт}\cdot\text{с}.$$

К каждому конденсатору схемы (рис. 6.4) приложено напряжение  $U' = \frac{U}{4} = \frac{380}{4} = 95 \text{ В}$ , так как в каждой ветви включены последовательно 4 конденсатора. Следовательно, в каждом конденсаторе запасена энергия

$$W'_{\text{эл}} = \frac{C'(U')^2}{2} = \frac{8 \cdot 10^{-6} \cdot 95^2}{2} = 36,1 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}\cdot\text{с}.$$

Тогда энергия электрического поля всех 36-ти конденсаторов схемы рис. 6.4

$$W_{\text{эл}} = W'_{\text{эл}} K = 36,1 \cdot 10^{-3} \cdot 36 = 1,3 \text{ Вт}\cdot\text{с}.$$

Для примера 6.2 (рис. 6.5).

Энергия электрического поля каждого конденсатора

$$W_{1\text{эл}} = \frac{C_1 U_1^2}{2} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 33,3^2}{2} = 11 \cdot 10^{-4} \text{ Вт}\cdot\text{с};$$

$$W_{2\text{эл}} = \frac{C_2 U_2^2}{2} = \frac{1 \cdot 10^{-6} \cdot 33,3^2}{2} = 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ Вт}\cdot\text{с};$$

$$W_{3\text{эл}} = \frac{C_3 U_3^2}{2} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 50^2}{2} = 25 \cdot 10^{-4} \text{ Вт}\cdot\text{с};$$

$$W_{4\text{эл}} = \frac{C_4 U_4^2}{2} = \frac{6 \cdot 10^{-6} \cdot 16,7^2}{2} = 8,5 \cdot 10^{-4} \text{ Вт}\cdot\text{с};$$

$$W_{5\text{эл}} = \frac{C_5 U_5^2}{2} = \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2}{2} = 200 \cdot 10^{-4} \text{ Вт}\cdot\text{с}.$$

Энергия электрического поля конденсаторов батареи (рис. 6.5) равна

$$W_{\Sigma\text{эл}} = \frac{CU^2}{2} = \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2}{2} = 250 \cdot 10^{-4} \text{ Вт}\cdot\text{с}.$$

Из примера 6.5 видно, что энергия электрического поля батареи конденсаторов (примеры 6.1 и 6.2) равна сумме энергий каждого конденсатора батареи, независимо от схемы соединения конденсаторов.

## Глава 7 МАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ЕГО ПАРАМЕТРЫ

### 7.1. Магнитное поле

Если магнитную стрелку поместить около проводника, по которому проходит ток, то на стрелку будут действовать силы, заставляющие стрелку установиться в определенном направлении. Если проводник с током вращать вокруг оси, перпендикулярной оси проводника, то и стрелка будет вращаться вместе с проводником.

*Пространство, в котором обнаруживается действие сил на магнитную стрелку или ток, называется магнитным полем.*

*Магнитное поле создается электрическим током.*

Следовательно, магнитное поле и электрический ток неразрывно связаны. Магнитное поле не может существовать без электрического тока.

*За направление магнитного поля принимается направление, в котором устанавливается северный конец магнитной стрелки, расположенной в этом магнитном поле.*

Для наглядности магнитное поле изображается магнитными линиями, которые в отличие от электрических линий *всегда замкнуты*. В качестве примера на рис. 7.1а приведены магнитные линии постоянного магнита прямоугольной формы.

Направление магнитных линий, т. е. направление магнитного поля (МП), и направление тока  $I$  в проводниках различной конфигурации, создающего это поле, связаны правилом буравчика.

Для прямого тока правило буравчика формулируется так: если поступательное движение буравчика совпадает с направлением прямого тока, то вращательное движение рукоятки буравчика при этом указывает направление магнитного поля. Магнитное поле прямого тока, т. е. тока в прямолинейном проводнике, показано на рис. 7.1б.

Для кругового тока: если вращательное движение буравчика совпадает с направлением кругового тока, то поступательное движение буравчика при этом указывает направление магнитного поля. Поле кругового тока изображено на рис. 7.1в.

На рис. 7.1г изображено магнитное поле, созданное током  $I$  в цилиндрической катушке. Магнитное поле цилиндрической катушки с током аналогично магнитному полю прямоугольного магнита (рис. 7.1а). По аналогии этих полей конец катушки, из

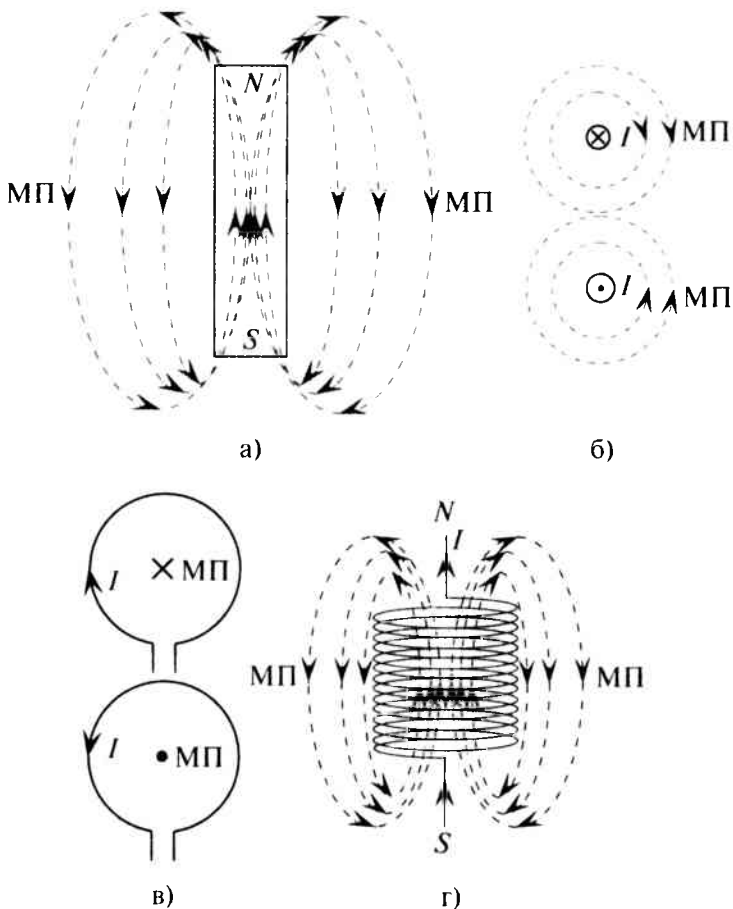


Рис. 7.1

которого выходят магнитные линии, будет считаться северным полюсом  $N$  катушки, а конец, в который входят магнитные линии, — южным полюсом  $S$  катушки. Следовательно, магнитное поле цилиндрической катушки полярно, т. е. имеет северный  $N$  и южный  $S$  полюса. Полярным также является магнитное поле кругового тока (рис. 7.1в), т. е. там, где магнитные линии выходят из круга, — северный полюс  $N$ , а там, где входят в круг, — южный полюс  $S$  круга.

В проводнике с током и вокруг него магнитное поле обусловлено этим током. Внутри постоянного магнита или намагниченного тела магнитное поле обусловлено внутренним и внутримолеку-

лярным направленным движением элементарных заряженных частиц.

В атоме любого вещества вокруг ядра направленно, по определенным орбитам вращаются электроны (круговой ток). Следовательно, атомы любого вещества являются элементарными магнетиками, которые называются доменами. Домены имеют северный и южный полюс. Полярность домена зависит от направления тока электронов вокруг ядра. Направление тока электронов вокруг ядра атома противоположно направлению вращения электрона.

Под влиянием внешних факторов (внешнего магнитного поля) элементарные магнетики-домены могут ориентироваться, т. е. поворачиваться в определенном направлении. Ориентация доменов в определенном направлении обуславливает намагничивание материала. Все материалы обладают различной способностью намагничивания (магнитная проницаемость). Таким образом, намагнитить данный материал — значит сорентировать элементарные магнетики этого материала в определенном направлении. Намагниченный материал, как и постоянный магнит, создает вокруг себя внешнее магнитное поле. Чем больше доменов сорентировано в одном направлении, тем интенсивней намагничен материал, т. е. тем сильнее его внешнее поле. Если же все домены материала расположены хаотично, то такой материал не создает внешнего магнитного поля.

## 7.2. Магнитная индукция

Для характеристики интенсивности магнитного поля вводится понятие магнитной индукции. Магнитная индукция характеризуется силой, действующей на движущийся в магнитном поле электрический заряд (ток). Обозначается магнитная индукция буквой  $B$ .

Элементарная магнитная индукция  $dB$ , созданная в какой-либо точке  $A$  элементом длины проводника  $d\ell$ , по которому проходит ток  $I$ , на расстоянии  $r$  от элемента длины  $d\ell$  (рис. 7.2) определяется выражением (закон Био — Савара)

$$dB = \frac{\mu_a}{4\pi} I \frac{d\ell \sin\alpha}{r^2}, \quad (7.1)$$

где  $\mu_a$  — абсолютная магнитная проницаемость среды, в которой определяется индукция;  $r$  — радиус-вектор (расстояние между элементом длины  $d\ell$  и исследуемой точкой  $A$ );

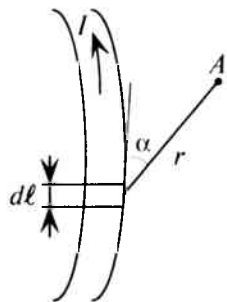


Рис. 7.2

$\alpha$  — угол между направлением тока  $I$  по элементу длины проводника и радиусом-вектором  $r$ .

Для определения магнитной индукции  $B$ , которая создается всем проводником длиной  $\ell$  с током  $I$ , в точке  $A$  необходимо просуммировать (проинтегрировать) элементарные индукции  $dB$  по всей длине проводника

$$B = \int dB. \quad (7.2)$$

Магнитная индукция — величина векторная. Вектор магнитной индукции в каждой точке магнитного поля направлен по касательной к магнитной линии в этой точке.

В качестве примера определяется магнитная индукция в центре кольцевого проводника радиусом  $r$ , по которому проходит ток  $I$  (рис. 7.3).

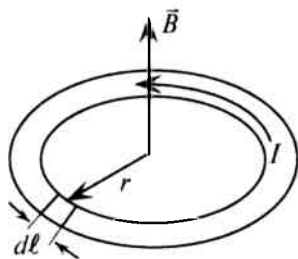


Рис. 7.3

Величина магнитной индукции определяется по выражению (7.2), т.е.

$$B = \int dB, \text{ где } dB = \frac{\mu_a}{4\pi} I \frac{d\ell \sin \alpha}{r^2} \text{ (согласно (7.1)).}$$

Так как радиус окружности  $r$  всегда перпендикулярен касательной к окружности, т.е.  $\alpha = 90^\circ$ , а  $\sin \alpha = 1$ , то

$$dB = \frac{\mu_a}{4\pi} I \frac{d\ell}{r^2} \text{ и } B = \oint \frac{\mu_a}{4\pi} I \frac{d\ell}{r^2}.$$

Вынося постоянные величины за знак интеграла, получим

$$B = \frac{\mu_a I}{4\pi r^2} \oint d\ell, \text{ а } \ell = 2\pi r.$$

Тогда

$$B = \frac{\mu_a I}{4\pi r^2} 2\pi r.$$

Иначе

$$B = \frac{\mu_a I}{2r} = \frac{\mu_a I}{d}, \quad (7.3)$$

где  $d = 2r$  — диаметр окружности.

Таким образом, магнитная индукция в магнитном поле пропорциональна величине тока  $I$ , создающего поле, и абсолютной магнитной проницаемости среды  $\mu_a$ , в которой она создается. Кроме того, магнитная индукция в каждой точке магнитного поля зависит от формы проводника, по которому проходит ток, создающий магнитное поле, от длины этого проводника и от расстояния между исследуемой точкой и этим проводником.

*Магнитное поле, магнитная индукция в каждой точке которого имеет одинаковое значение и магнитные линии параллельны друг другу, называется однородным.*

Основной единицей измерения магнитной индукции является тесла:  $[B] = \text{Тл}$  (тесла). Однако в практических расчетах иногда рационально воспользоваться единицами, эквивалентными основной единице:

$$\text{Тл} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2}.$$

Кроме того, иногда пользуются единицей магнитной индукции гаусс:  $[B] = 1 \text{ Гс (гаусс)} = 10^{-4} \text{ Тл}$ .

### 7.3. Магнитная проницаемость

Из выражений (7.1) и (7.3) следует, что магнитная индукция в магнитном поле зависит от абсолютной магнитной проницаемости  $\mu_a$ , характеризующей магнитные свойства среды, в которой создается поле.

*Абсолютная магнитная проницаемость среды характеризует способность среды намагничиваться.* Единицей абсолютной магнитной проницаемости является (из (7.3))

$$[\mu_a] = \left[ \frac{Bd}{I} \right] = \frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{А}} = \frac{\text{Ом} \cdot \text{с}}{\text{м}} = \frac{\text{Гн (генри)}}{\text{м (метр)}}.$$

Абсолютная магнитная проницаемость вакуума  $\mu_0$  — величина постоянная и называется магнитная постоянная. Ее значение равно

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м} \quad \text{или} \quad \mu_0 \approx 125 \cdot 10^{-8} \text{ Гн/м}. \quad (7.4)$$

Абсолютную магнитную проницаемость любой среды  $\mu_a$  удобно выражать через магнитную постоянную  $\mu_0$  и магнитную проницаемость  $\mu_r$ , которая показывает, во сколько раз абсолютная магнитная проницаемость среды больше или меньше магнитной постоянной:

$$\mu_r = \frac{\mu_a}{\mu_0},$$

тогда

$$\mu_a = \mu_0 \mu_r. \quad (7.5)$$

Иногда  $\mu_r$  называют относительной магнитной проницаемостью.



В зависимости от магнитной проницаемости все вещества делятся на диамагнитные, парамагнитные и ферромагнитные.

1. Магнитная проницаемость диамагнитных (противомагнитных) веществ  $\mu_r < 1$ . Так, например, для меди  $\mu_r = 0,999995$ , для серебра  $\mu_r = 0,999981$ . К диамагнитным веществам относятся кварц, водород, вода, медь, серебро и др.

2. Магнитная проницаемость парамагнитных веществ  $\mu_r > 1$ . Так, например, для воздуха  $\mu_r = 1,0000031$ , для платины  $\mu_r = 1,000364$ . К парамагнитным веществам относятся алюминий, кислород, воздух, платина и др.

Магнитная проницаемость диамагнитных и парамагнитных материалов — величина постоянная и в технических расчетах принимаются равной единице ( $\mu_r = 1$ ).

3. Магнитная проницаемость ферромагнитных материалов во много раз больше единицы  $\mu_r \gg 1$ . Так, например, для чугуна  $\mu_r \approx 600$ , для стали  $\mu_r \approx 7500$ , для пермаллоя  $\mu_r \approx 115\,000$ . К ферромагнитным материалам относятся сталь, никель, кобальт, их сплавы и др. Магнитная проницаемость ферромагнитных материалов зависит от интенсивности магнитного поля и температуры, поэтому ее значения указаны приближенно.

#### 7.4. Магнитный поток

Магнитный поток  $\Phi$  сквозь площадку  $S$ , перпендикулярную вектору магнитной индукции  $\vec{B}_n$  в однородном магнитном поле, определяется выражением

$$\Phi = B_n S. \quad (7.6)$$

Магнитный поток измеряется в веберах (основная единица):

$$[\Phi] = [BS] = \frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^2} = \text{В} \cdot \text{с} = \text{Вб (вебер)}.$$

В практических расчетах встречается единица магнитного потока максвелл, которая в  $10^8$  раз меньше вебера: т. е.  $1 \text{ Мкс} = 10^{-8} \text{ Вб}$ .

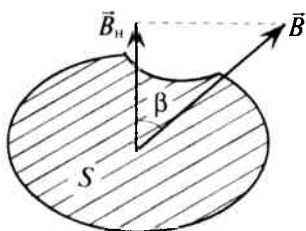


Рис. 7.4

Если вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  составляет угол  $\beta$  с перпендикуляром к площадке  $S$  (рис. 7.4), то нормальная (перпендикулярная) составляющая вектора магнитной индукции  $B_n$  определяется как  $B_n = B \cos \beta$ .

В общем случае при определении магнитного потока через произволь-

ную поверхность в неоднородном магнитном поле площадку  $S$  разбивают на бесконечно малые площадки  $dS$ , для каждой из которых поле можно считать однородным. Тогда элементарный магнитный поток  $d\Phi$  через элементарную площадку  $dS$  определяется так:

$$d\Phi = B_{\parallel} dS.$$

Магнитный поток  $\Phi$  через всю поверхность площадью  $S$  определяется суммированием (интегрированием) элементарных магнитных потоков  $d\Phi$  по всей площади  $S$

$$\Phi = \int_S B_{\parallel} dS.$$

Магнитный поток сквозь замкнутую поверхность равен нулю  $\Phi = \oint B_{\parallel} dS = 0$ , так как каждая магнитная линия, входящая в замкнутую поверхность, должна из нее выйти.

Магнитный поток, как один из параметров магнитного поля, необходимо знать или определять при анализе и расчете режима работы различных электротехнических приборов, устройств и установок (магнитных цепей, электрических машин, трансформаторов, электромагнитов различного назначения, электроизмерительных приборов и др.).

### 7.5. Напряженность магнитного поля

*Напряженность в каждой точке магнитного поля — это расчетная величина, характеризующая интенсивность магнитного поля в этой точке, созданного током, без учета среды, в которой создается поле.*

Обозначается напряженность магнитного поля буквой  $H$ .

Если в катушку, по которой проходит ток  $I$ , внести сердечник из ферромагнитного материала (рис. 7.1г), то величина магнитной индукции  $B$  в каждой точке магнитного поля увеличивается, а напряженность  $H$  в этих точках остается неизменной.

Разница между напряженностью  $H$  и индукцией  $B$  в какой-либо точке магнитного поля (хотя обе величины характеризуют интенсивность магнитного поля) заключается в том, что напряженность в точке магнитного поля характеризует интенсивность поля в этой точке, созданного током без учета магнитной проницаемости среды, в которой создается поле, а индукция в этой точке характеризует интенсивность магнитного поля, созданного током и средой, которая намагничивается и изменяет его интенсивность; т. е. напряженность является расчетной величиной, не имеющей физического смысла, так как физически невозможно представить себе, что интенсивность поля не зависит от среды.

Таким образом, соотношение между  $B$  и  $H$  в какой-либо точке магнитного поля выглядит следующим образом:

$$B = \mu_a H = \mu_0 \mu_r H, \quad (7.7)$$

так как  $\mu_a$  характеризует способность среды намагничиваться. Следовательно, напряженность в этой точке

$$H = \frac{B}{\mu_a} = \frac{B}{\mu_0 \mu_r}. \quad (7.8)$$

Из выражения (7.8) определяем единицу измерения напряженности в любой точке магнитного поля:

$$[H] = \left[ \frac{B}{\mu_a} \right] = \frac{B \cdot c}{m^2 \cdot \text{Ом} \cdot c} = \frac{A}{m} \text{ (ампер)}.$$

В практических расчетах можно встретить единицу напряженности эрстед (Э).

$$1 \text{ Э} \approx 80 \text{ А/м}.$$

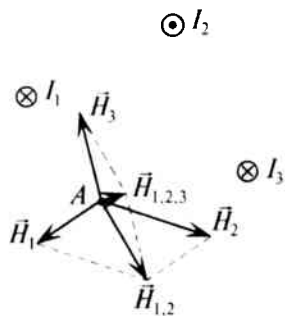


Рис. 7.5

Напряженность — величина векторная, причем направление вектора напряженности в каждой точке совпадает с направлением магнитного поля в этой точке (касательная к магнитной линии в этой точке).

Если магнитное поле создано несколькими токами, то напряженность в каждой точке этого поля определяется геометрической суммой напряженностей, созданных каждым током в этой точке (рис. 7.5):

$$\vec{H}_A = \vec{H}_{A1} + \vec{H}_{A2} + \dots + \vec{H}_{Ak}.$$

Очевидно, для каждой точки магнитного поля напряженность имеет определенную величину и направление.

### 7.6. Закон полного тока

Допустим, что в точке  $A$  вектор напряженности  $H$  составляет угол  $\alpha$  с элементом длины  $d\ell$  замкнутого контура, ограничивающего поверхность, пронизываемую токами  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  (рис. 7.6).

Проекцию вектора напряженности  $H$  на элемент длины контура  $d\ell$  или на его продолжение  $H_\parallel$  называют продольной составляющей вектора напряженности:

$$H_\parallel = H \cos \alpha.$$

Сумма (интеграл) произведений элементов длины  $d\ell$  замкнутого контура и продольных составляющих  $H_t$  в каждой точке этого контура, взятая по всему контуру, называется магнитным напряжением  $U_m$ , или магнитодвижущей силой  $F$ .

$$U_m = \oint H_t d\ell = F. \quad (7.9)$$

Выражение  $\oint H_t d\ell$  иногда называют циркуляцией вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру.

Магнитное напряжение  $U_m$  и магнитодвижущая сила  $F$  измеряются в амперах:

$$[U_m] = [F] = [H\ell] = \frac{A}{m} \cdot m = A.$$

Алгебраическая сумма токов, пронизывающих площадь, ограниченную замкнутым контуром (рис. 7.6), называется полным током сквозь поверхность, ограниченную этим контуром.

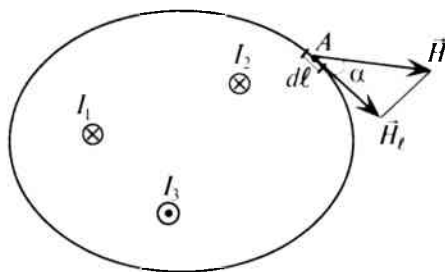


Рис. 7.6

$$\sum I = I_1 + I_2 - I_3. \quad (7.10)$$

Это и есть математическое выражение полного тока для площади, ограниченной контуром (рис. 7.6).

Для определения знака каждого тока (7.10), пронизывающего площадь, ограниченную замкнутым контуром, задаются направлением обхода контура (по или против часовой стрелки). Тогда ток, совпадающий с поступательным движением буравчика, рукоятка которого вращается в заданном направлении обхода контура, в алгебраической сумме берется со знаком «плюс» (например, токи  $I_1$  и  $I_2$ , если обход контура взят по часовой стрелке), а ток, не совпадающий с направлением обхода, со знаком «минус» (например, ток  $I_3$  при том же условии).

Установлено, что магнитное напряжение (магнитодвижущая сила) поля по замкнутому контуру равно полному току, пронизывающему поверхность, ограниченную этим контуром:

$$\oint H d\ell = \sum I. \quad (7.11)$$

Формула (7.11) и есть математическое выражение закона полного тока.

Если напряженность имеет одинаковую величину по всей контуре и направлена по магнитной линии (т. е.  $H_t = H$ ), то уравнение закона полного тока упрощается:

$$H \cdot \sum l = I. \quad (7.12)$$

Закон полного тока нашел широкое применение для расчета магнитных цепей, магнитных полей, прямого тока, тока катушки и др.

### 7.7. Магнитное поле прямолинейного проводника с током

Напряженность в каждой точке магнитного поля, созданного током прямолинейного проводника, и индукцию в этой точке легко определить, воспользовавшись законом полного тока. То есть закон полного тока позволяет определить интенсивность магнитного поля ( $H$  и  $B$ ) в любой точке  $A$  магнитного поля, расположенной на расстоянии  $r$  от центра прямолинейного проводника радиусом  $a$ , по которому проходит ток  $I$  (рис. 7.7).

Можно определить  $H$  и  $B$ , созданные током  $I$  в точке  $A$ , расположенной:

- 1) вне проводника с током и
- 2) внутри проводника с током.

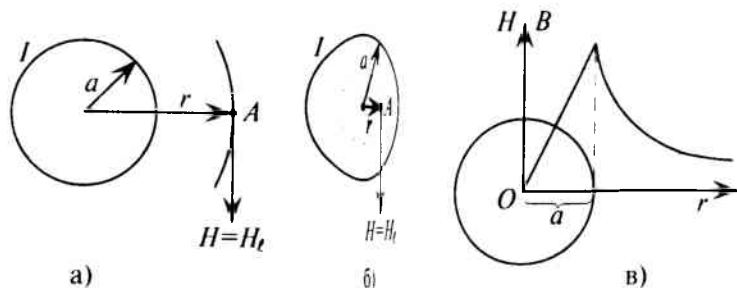


Рис. 7.7

1. Напряженность в точке  $A$ , расположенной вне проводника с током, т. е.  $r > a$  (рис. 7.7а), определяется по закону полного тока. Для этого через точку  $A$  проводится условная окружность радиусом  $r$ . Эта окружность и является контуром, который ограничивает площадь круга, пронизываемую током  $I$ .

Таким образом, полный ток  $\sum I = I$ .

Тогда 
$$\oint H_t \cdot dl = \oint H dl = H \int dl = H \cdot 2\pi r = \sum I = I. \quad (7.13)$$

При этом напряженность  $H = H_i$  и по всей окружности радиусом  $r$  имеет одинаковое значение, а  $\oint dl = 2\pi r$  — длина окружности радиусом  $r$ .

Таким образом, величина напряженности в точке  $A$ , расположенной вне проводника, будет равна

$$H_A = \frac{I}{2\pi r}. \quad (7.14)$$

Величина магнитной индукции в точке  $A$  согласно выражению (7.6):

$$B_A = \mu_0 \mu_r H_A = \mu_0 \mu_r \frac{I}{2\pi r}. \quad (7.15)$$

Если магнитное поле создается в воздухе, т. е.  $\mu_r = 1$ , тогда

$$B_A = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}. \quad (7.16)$$

*Интенсивность магнитного поля в любой точке  $A$ , расположенной вне проводника с током, обратно пропорциональна расстоянию  $r$  от центра проводника до этой точки ((7.14), (7.15) и (7.16)).*

2. Напряженность в точке  $A$ , расположенной внутри проводника с током,  $r < a$  (рис. 7.7б), также определяется по закону полного тока. Окружность радиусом  $r$  ограничивает площадь сечением  $S_r = \pi r^2$ . Сечение проводника радиусом  $a$  равно  $S_a = \pi a^2$ . Плотность тока в проводнике определяется как  $J = \frac{I}{S_a} = \frac{I}{\pi a^2}$ . Тогда величину напряженности магнитного поля в точке  $A$  внутри проводника можно рассчитать по формуле

$$H_A = \frac{\sum I}{2\pi r} = \frac{JS_r}{2\pi r} = \frac{I\pi r^2}{\pi a^2 \cdot 2\pi r}. \quad (7.17)$$

Величина магнитной индукции в той же точке  $A$  внутри проводника будет равна

$$B_A = \mu_0 \mu_r \frac{I}{2\pi a^2} r. \quad (7.18)$$

*Интенсивность магнитного поля в любой его точке, расположенной внутри проводника с током, пропорциональна расстоянию  $r$  от центра проводника до этой точки ((7.17) и (7.18)).*

Зависимость интенсивности магнитного поля внутри ( $r < a$ ) и вне ( $r > a$ ) проводника с током от расстояния от центра ( $r$ ) проиллюстрирована на графике рис. 7.7в. Из графика видно, что с увеличением расстояния  $r$  от центра внутри проводника интенсивность поля ( $B$  и  $H$ ) увеличивается пропорционально  $r$ , а за пределами проводника уменьшается обратно пропорционально  $r$ . Таким образом, наибольшей интенсивности магнитное поле достигает на поверхности проводника с током, при  $r = a$ .

### Пример 7.1

По медному проводнику радиусом  $a = 0,5$  см проходит ток  $I = 50$  А. Определить напряженность и индукцию магнитного поля, созданного этим током, на расстоянии  $r_1 = 0,2$  см;  $r_2 = 0,5$  см;  $r_3 = 1$  см от центра проводника.

### Решение

Вычисление значений  $H$  и  $B$  производят по выражениям (7.14), (7.15), (7.17) и (7.18), учитывая, что  $\mu_r = 1$  для среды вокруг и внутри медного провода.

Итак:

$$H_1 = \frac{I}{2\pi a^2} r_1 = \frac{50 \cdot 0,2 \cdot 10^{-2}}{2\pi(0,5 \cdot 10^{-2})^2} = 636,94 \text{ А/м,}$$

где  $r_1 = 0,2$  см  $= 0,2 \cdot 10^{-2}$  м;  $a = 0,5$  см  $= 0,5 \cdot 10^{-2}$  м.

$$B_1 = \mu_0 \mu_r H_1 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 636,94 = 799 \cdot 10^{-6} \text{ Тл.}$$

$$H_2 = \frac{I}{2\pi a^2} r_2 = \frac{50 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}}{2\pi(0,5 \cdot 10^{-2})^2} = 1592,3 \text{ А/м,}$$

где  $r_2 = a = 0,5$  см  $= 0,5 \cdot 10^{-2}$  м.

Или 
$$H_2 = \frac{I}{2\pi r_2} = \frac{50}{2\pi \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}} = 1592,3 \text{ А/м,}$$

$$B_2 = \mu_0 \mu_r H_2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 1592,3 = 2000 \cdot 10^{-6} \text{ Тл.}$$

$$H_3 = \frac{I}{2\pi r_3} = \frac{50}{2\pi \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 796,1 \text{ А/м,}$$

где  $r_3 = 1$  см  $= 1 \cdot 10^{-2}$  м.

$$B_3 = \mu_0 \mu_r H_3 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 796,1 = 13 \cdot 10^{-6} \text{ Тл.}$$

Таким образом, пример 7.1 подтверждает, что наибольшая интенсивность магнитного поля имеет место на поверхности проводника с током. Кроме того, напряженность магнитного поля на поверхности проводника можно определить по формулам (7.14) или (7.17) — результат получается одинаковым.

### 7.8. Магнитное поле кольцевой и цилиндрической катушек

Напряженность магнитного поля кольцевой катушки с числом витков  $W$ , по которым проходит ток  $I$  (рис. 7.8а), определяется также по закону полного тока.

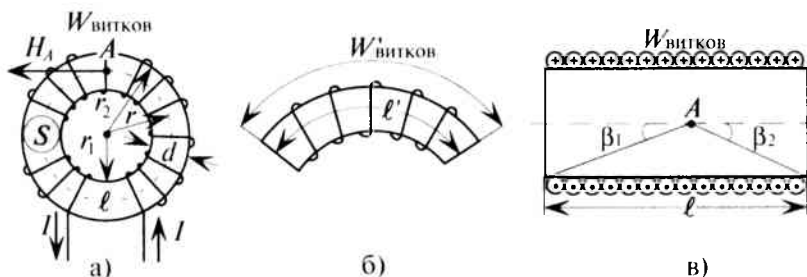


Рис. 7.8

Точка  $A$  находится на окружности радиусом  $r$  и длиной  $l = 2\pi r$ , образующей замкнутый контур. Поверхность, ограниченную этим контуром, пронизывают все  $W$  витков, по которым проходит ток  $I$ . Следовательно, полный ток, пронизывающий поверхность, ограниченную этим замкнутым контуром, будет равен  $\Sigma I = IW$ .

Напряженность поля  $H$  во всех точках замкнутого контура одинакова и направлена по касательной в каждой точке окружности (рис. 7.8а).

Для определения напряженности  $H$  в любой точке этой окружности можно воспользоваться выражением (7.12):

$$H = \frac{\Sigma I}{l} = \frac{IW}{l}. \quad (7.19)$$

Произведение тока  $I$  и числа витков обмотки  $W$ , т. е.  $IW$ , называют ампер-витками.

Таким образом, напряженность магнитного поля в любой точке кольцевой катушки определяется ампер-витками  $IW$ , приходящимися на единицу длины  $l$  этой катушки:

$$H_A = \frac{IW}{l}.$$

На расстоянии  $r$ , меньше  $r_1$  и больше  $r_2$ , магнитное поле отсутствует, так как полный ток, пронизывающий поверхность, ограниченную окружностью радиусом  $r$  (меньше  $r_1$  и больше  $r_2$ ), равен нулю  $\Sigma I = 0$ , т. е. магнитное поле вне катушки отсутствует.

Напряженность в любой точке кольцевой катушки можно определить выражением (7.19), если воспользоваться частью кольце-



вой катушки длиной  $\ell'$ , на которой расположена часть витков  $W'$  катушки (рис. 7.8б):

$$H = \frac{IW'}{\ell'}$$

Цилиндрическую катушку (рис. 7.8в) можно рассматривать как часть кольцевой катушки (рис. 7.8б) с бесконечно большим радиусом. Поэтому и для цилиндрической катушки справедливо выражение

$$H = \frac{IW}{\ell} \quad (7.19)$$

Используя это уравнение, можно определить напряженность в точке  $A$ , расположенной на осевой линии цилиндрической катушки длиной  $\ell$  (рис. 7.8в). Однако выражение (7.19) является приближенным.

Ошибка в определении напряженности в цилиндрической катушке будет тем меньше, чем больше длина катушки, меньше ее сечение и исследуемая точка лежит ближе к центру цилиндра.

Более точным выражением для определения величины напряженности в точке  $A$  на осевой линии цилиндрической катушки является выражение

$$H_A = \frac{IW}{2\ell} (\cos \beta_1 + \cos \beta_2) \quad (7.20)$$

Величина магнитной индукции в точке  $A$  цилиндрической катушки

$$B_A = \mu_0 \mu_r \frac{IW}{2\ell} (\cos \beta_1 + \cos \beta_2) \quad (7.21)$$

### Пример 7.2

Определить напряженность в точке  $A$  на оси катушки (рис. 7.9), если ток в катушке  $I = 2$  А, число витков катушки  $W = 100$ . Вычислить ошибку, полученную при определении напряженности в точке  $A$  по приближенному выражению (7.19). Габариты катушки даны в сантиметрах.

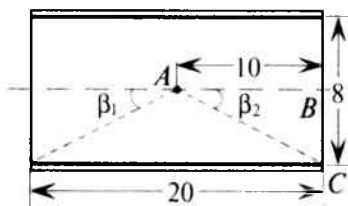


Рис. 7.9

### Решение

Определяется напряженность магнитного поля в точке по приближенному выражению:

$$H'_A = \frac{IW}{2\ell} = \frac{2 \cdot 100}{20 \cdot 10^{-2}} = 1000 \text{ А/м},$$

где  $\ell = 20 \text{ см} = 20 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ .

Для определения напряженности в точке  $A$  по более точному выражению определяется  $\cos\beta_1$  и  $\cos\beta_2$ . Причем  $\cos\beta_1 = \cos\beta_2$ , так как равны углы  $\beta_1 = \beta_2$ .

$$\cos\beta_1 = \cos\beta_2 = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{10}{\sqrt{10^2 + 4^2}} = 0,9285.$$

Тогда

$$H_A = \frac{IW}{2\ell} (\cos\beta_1 + \cos\beta_2) = \frac{2 \cdot 100}{2 \cdot 20 \cdot 10^{-2}} (0,9285 + 0,9285) = 928,5 \text{ А/м}.$$

Погрешность, полученная при определении напряженности по приближенному выражению:

$$\gamma = \frac{H'_A - H_A}{H'_A} \cdot 100\% = \frac{1000 - 928,5}{1000} \cdot 100\% = 7,15\%.$$

### 7.9. Электромагнитная сила

В однородное магнитное поле с индукцией  $B$  помещен проводник длиной  $\ell$ , по которому проходит ток  $I$ , направленный перпендикулярно магнитным линиям (рис. 7.10а).

Вокруг проводника с током создается магнитное поле  $B_I$ , которое накладывается на магнитное поле  $B$ .

Направление поля  $B_I$  определяется по правилу буравчика. В результате наложения магнитных полей (рис. 7.10) справа от проводника магнитное поле усиливается, а слева ослабляется (рис. 7.10б).

В результате такого наложения полей, как видно из рис. 7.10б, на проводник с током в магнитном поле действует сила  $F_{\text{в}}$ , под действием которой проводник будет вытесняться из магнитного поля в определенном направлении.

Эта сила  $F_{\text{в}}$ , т. е. сила взаимодействия тока с магнитным полем, называется электромагнитной силой.

Направление электромагнитной силы определяется по правилу левой руки:

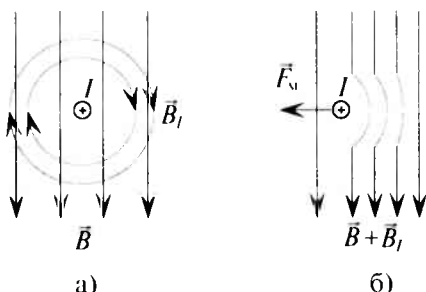


Рис. 7.10

Левую руку располагают так, чтобы магнитные линии входили в ладонь, вытянутые четыре пальца совпадали с направлением тока в проводнике, тогда отогнутый большой палец укажет направление электромагнитной силы.

Направление электромагнитной силы  $F_m$  на рис. 7.10б подтверждает это правило.

Очевидно, на проводник длиной  $\ell$ , по которому проходит ток  $I$ , перпендикулярно магнитным линиям поля с индукцией  $B$  действует электромагнитная сила

$$F_m = IB\ell. \quad (7.22)$$

Электромагнитная сила, т. е. сила взаимодействия тока  $I$ , проходящего по проводнику длиной  $\ell$  перпендикулярно магнитному полю с индукцией  $B$ , пропорциональна произведению этих величин.

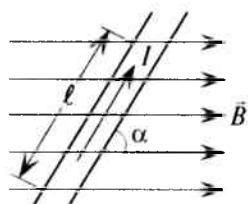


Рис. 7.11

Если же проводник с током  $I$  поместить в однородное магнитное поле под углом  $\alpha$  (рис. 7.11), то величина электромагнитной силы определяется по формуле (7.23).

В общем случае для однородного магнитного поля и прямолинейного проводника с током, расположенного в этом поле, величина электромагнитной силы определяется выражением

$$F_m = IB\ell \sin \alpha, \quad (7.23)$$

где  $\ell$  — активная длина проводника, т. е. часть проводника, которая находится в магнитном поле;  $\alpha$  — угол между током и магнитным полем.

Единица силы ньютон связана с единицей магнитной индукции тесла следующим соотношением:

$$[F_m] = [IB\ell] = \text{А} \cdot \text{Тл} \cdot \text{м} = \frac{\text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{м}}{\text{м}^2} = \text{Н} \text{ (ньютон)}.$$

Если в неоднородное магнитное поле помещен криволинейный проводник с током  $I$ , то элементарную бесконечно малую электромагнитную силу  $dF_m$ , действующую на бесконечно малый элемент длины проводника  $d\ell$ , для которого поле считается однородным, определяют выражением

$$dF_m = IBd\ell \sin \alpha.$$

Для вычисления электромагнитной силы, действующей на весь проводник, элементарные электромагнитные силы  $dF_m$  суммируются (интегрируются) по всей активной длине проводника  $\ell$ :

$$F_m = \int_l dF_m = \int_l IBd\ell \sin\alpha. \quad (7.24)$$

Взаимодействие тока с магнитным полем широко используется в электрических машинах, электроизмерительных приборах, реле, тяговых и подъемных электромагнитах, контакторах и др.

Электромагнитные силы приходится учитывать при расчете электрических аппаратов, распределительных устройств электростанций, линий электропередачи, сетей и в других случаях.

### 7.10. Взаимодействие проводников с токами

Параллельное расположение проводников с токами на практике встречается часто, например в линиях электропередачи, при установлении шин распределительных устройств электрических станций и подстанций, в кабелях и др. Для того чтобы правильно выбрать провода, шины, изоляторы, на которых они закреплены, приходится определять электромагнитные силы взаимодействия проводников или шин.

Сила взаимодействия двух проводников с токами  $I_1$  и  $I_2$  (рис. 7.12), расположенных на расстоянии  $r$  друг от друга параллельно по длине  $\ell$ , зависит от индукции  $B$ , созданной током одного проводника в центре другого, и тока другого проводника.

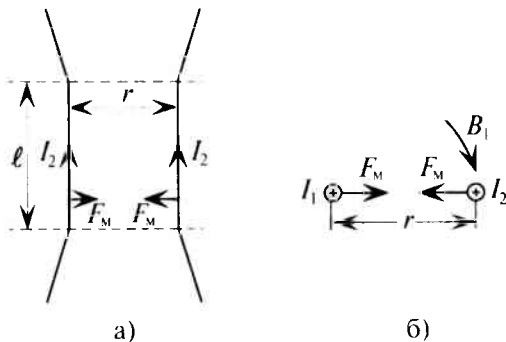


Рис. 7.12.

Индукция  $B_1$ , созданная током  $I_1$  в центре второго проводника (рис. 7.12б), определяется выражением (7.15):

$$B_1 = \mu_0 \mu_r \frac{I_1}{2\pi r}.$$

Тогда электромагнитная сила  $F_m$  взаимодействия второго тока  $I_2$  и индукции  $B_1$  согласно (7.22) равна

$$F_m = I_2 B_1 \ell = \frac{I_2 \mu_0 \mu_r I_1}{2\pi r} \ell,$$

где  $F_M$  — сила, с которой первый проводник действует на второй проводник. С такой же силой второй проводник действует на первый. Следовательно, это и есть сила взаимодействия двух проводников с током, т. е.

$$F_M = \mu_0 \mu_r \frac{I_1 I_2}{2 \pi r} \ell. \quad (7.25)$$

Выражение (7.25) позволяет определить силу взаимодействия двух проводников с током с большой степенью точности, если длина параллельно расположенных проводников  $\ell$  значительно больше расстояния  $r$  между ними.

Выражение (7.25) является математическим выражением закона Ампера для определения силы взаимодействия проводников с током.

На практике удобно рассчитывать силу взаимодействия проводников с токами  $F'_M$ , приходящуюся на единицу длины проводников:

$$F'_M = \frac{F_M}{\ell} = \mu_0 \mu_r \frac{I_1 I_2}{2 \pi r}. \quad (7.26)$$

Направление силы взаимодействия двух проводников с током можно определить по правилу левой руки, определив предварительно направление магнитной индукции каждого проводника в центре другого проводника (рис. 7.13).

Определить направление силы взаимодействия двух проводников с токами можно иначе — определив направления магнитных полей каждого проводника по правилу буравчика (рис. 7.14). Как

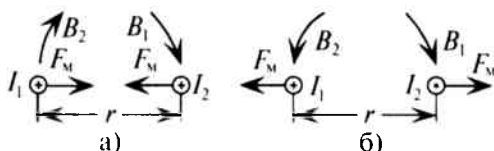


Рис. 7.13

видно на рис. 7.14а, магнитное поле между проводниками ослаблено, а на рис. 7.14б — усилено. Электромагнитные силы направлены в сторону ослабленного поля. В любом из

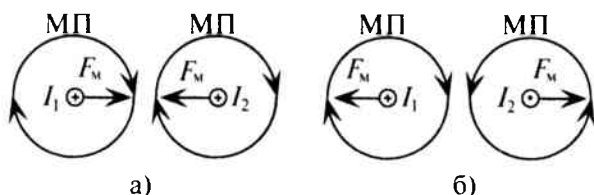


Рис. 7.14

предложенных методов определения направления электромагнитных сил (рис. 7.13 и 7.14) легко увидеть, что при одинаковом направлении взаимодействующих токов проводники притягиваются (рис. 7.13а и 7.14а), а при разных направлениях – отталкиваются (рис. 7.13б и 7.14б).

### Пример 7.3

Определить величину и направление сил, действующих на единицу длины проводов 1, 2, 3 и 4, расположенных на расстояниях, указанных в сантиметрах на рис. 7.15а, если по проводам проходят токи:  $I_1 = I_2 = 100$  А;  $I_3 = I_4 = 200$  А.

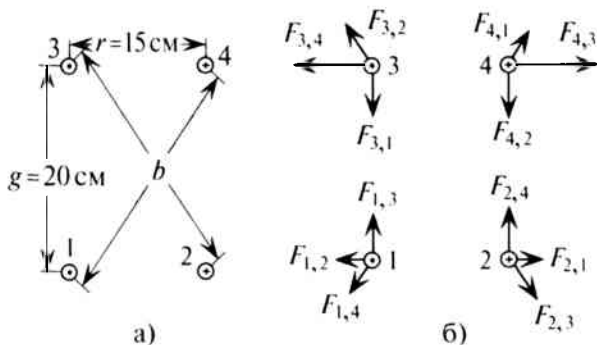


Рис. 7.15

### Решение

Для решения примера 7.3 необходимо определить расстояние между проводами (1–4) и (2–3), т. е. расстояние  $b$  (рис. 7.15а).

$$b = r_{1-4} = r_{2-3}.$$

Расстояние между проводами  $r_{1-2} = r_{3-4} = 15$  см =  $15 \cdot 10^{-2}$  м =  $r$ .

Расстояние между проводами  $r_{1-3} = r_{2-4} = 20$  см =  $20 \cdot 10^{-2}$  м =  $g$ .

Тогда  $b = \sqrt{r^2 + g^2} = \sqrt{(15 \cdot 10^{-2})^2 + (20 \cdot 10^{-2})^2} = 25 \cdot 10^{-2}$  м, так как  $r$  и  $g$  являются катетами прямоугольного треугольника, а расстояние  $b$  является гипотенузой этого треугольника.

Силы взаимодействия между проводами с указанными токами, приходящиеся на единицу длины этих проводов, определяются по выражению (7.26):

$$F_{2,1} = F_{1,2} = \mu_0 \mu_r \frac{I_1 I_2}{2 \pi r} = 4 \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot \frac{100 \cdot 100}{2 \pi \cdot 15 \cdot 10^{-2}} = 13,3 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м.}$$

$$F_{3,1} = F_{1,3} = \mu_0 \mu_r \frac{I_1 I_3}{2 \pi g} = 4 \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot \frac{100 \cdot 200}{2 \pi \cdot 20 \cdot 10^{-2}} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м.}$$

$$F_{4,1} = F_{1,4} = \mu_0 \mu_r \frac{I_1 I_4}{2 \pi b} = 4 \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot \frac{100 \cdot 200}{2 \pi \cdot 25 \cdot 10^{-2}} = 16 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м.}$$

$$F_{2,3} = F_{3,2} = \mu_0 \mu_r \frac{I_2 I_3}{2 \pi b} = 4 \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot \frac{100 \cdot 200}{2 \pi \cdot 25 \cdot 10^{-2}} = 16 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м.}$$

$$F_{2,4} = F_{4,2} = \mu_0 \mu_r \frac{I_2 I_4}{2 \pi g} = 4 \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot \frac{100 \cdot 200}{2 \pi \cdot 20 \cdot 10^{-2}} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м.}$$

$$F_{3,4} = F_{4,3} = \mu_0 \mu_r \frac{I_3 I_4}{2 \pi r} = 4 \pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot \frac{200 \cdot 200}{2 \pi \cdot 15 \cdot 10^{-2}} = 53,3 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м.}$$

При расчете учтено, что  $\mu_r = 1$ , так как провода находятся в воздухе.

Направления сил взаимодействия указаны на рис. 7.156.

## Глава 8 МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ И ИХ РАСЧЕТ

### 8.1. Магнитная цепь

В состав многих электротехнических устройств входят магнитные цепи.

*Магнитная цепь представляет собой сочетание тел преимущественно из ферромагнитных материалов, в которых замыкается магнитный поток.*

Простейшей магнитной цепью является сердечник кольцевой катушки (рис. 7.8а), в котором замыкается магнитный поток, созданный током этой катушки. Магнитные цепи трансформаторов, электрических машин, измерительных приборов и других электрических аппаратов имеют более сложную форму.

Отдельные участки магнитных цепей могут изготавливаться из различных ферромагнитных материалов различной формы и размеров. Одним из участков магнитной цепи может быть воздушный зазор.

Конструктивно различают неразветвленные и разветвленные магнитные цепи (рис. 8.1).

Характерной особенностью неразветвленной магнитной цепи (рис. 8.1а) является то, что магнитный поток  $\Phi$ , созданный токами обмоток для всех участков и сечений магнитной цепи, имеет одинаковое значение (как ток в неразветвленной электрической цепи).

Для разветвленной магнитной цепи (рис. 8.1б) характерно то, что созданный ток магнитный поток  $\Phi$  разветвляется, при

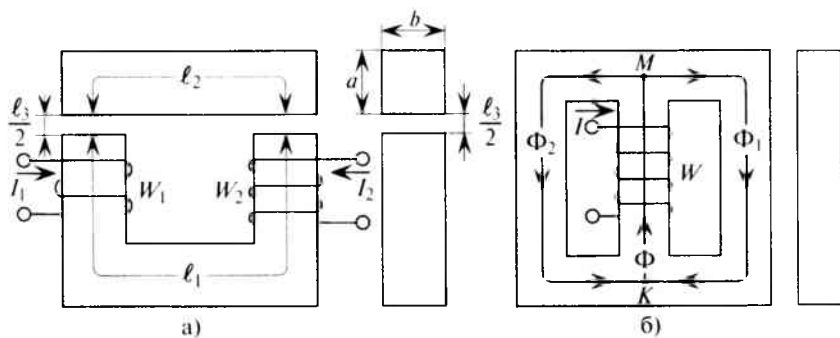


Рис. 8.1



этом его величина определяется алгебраической суммой магнитных потоков в разветвлениях  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$  (как и ток в разветвленной электрической цепи — по первому закону Кирхгофа).

Разветвленная магнитная цепь может быть симметричной или несимметричной. Цепь считается симметричной, если правая и левая ее части имеют одинаковые размеры, выполнены из одинакового материала (включая воздушные зазоры) и действующие в каждой части магнитодвижущие силы  $IW$  одинаковы.

Магнитные цепи могут быть однородными и неоднородными. Однородная магнитная цепь представляет собой замкнутый сердечник (рис. 7.8а), который по всей длине  $\ell$  имеет одинаковое сечение  $S$  и выполнен из определенного материала.

Неоднородная магнитная цепь (рис. 8.1а) состоит из нескольких однородных участков, каждый из которых по всей своей длине имеет одинаковое сечение и выполнен из определенного материала.

На рис. 8.1а изображена неразветвленная неоднородная магнитная цепь, состоящая из трех однородных участков длиной  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  и  $\ell_3$ , где  $\ell_3$  — воздушный зазор.

## 8.2. Закон Ома для магнитной цепи

Если по кольцевой катушке с числом витков  $W$  проходит ток  $I$  (рис. 7.8а), то этот ток в сердечнике катушки длиной  $\ell$  и сечением  $S$  создает напряженность (7.19)

$$H = \frac{IW}{\ell}.$$

На рис. 7.8а изображена однородная неразветвленная магнитная цепь, сердечник которой по всей длине  $\ell$  выполнен из одного материала с относительной магнитной проницаемостью  $\mu_r$ . Тогда магнитный поток  $\Phi$  в сердечнике кольцевой катушки можно определить по формуле

$$\Phi = BS = \mu_0 \mu_r \frac{IW}{\ell} S, \quad (8.1)$$

$$\text{где } B = \mu_0 \mu_r H = \mu_0 \mu_r \frac{IW}{\ell}. \quad (8.2)$$

Это же уравнение (8.1) можно записать иначе:

$$\Phi = \frac{IW}{\frac{\ell}{\mu_0 \mu_r S}},$$

где числитель ( $IW$ ) — магнитодвижущая сила, или магнитное напряжение магнитной цепи  $U_m = IW$ , а знаменатель  $\left(\frac{\ell}{\mu_0 \mu_r S}\right)$  —

магнитное сопротивление магнитной цепи (по аналогии с электрическим сопротивлением, зависящим от длины, удельной проводимости и сечения проводника — см. (2.8)), т. е.

$$R_m = \frac{\ell}{\mu_0 \mu_r S}. \quad (8.3)$$

Тогда магнитный поток магнитной цепи

$$\Phi = \frac{U_m}{R_m}. \quad (8.4)$$

Это и есть математическое выражение закона Ома для неразветвленной однородной магнитной цепи, изображенной на рис. 7.8а, т. е. *магнитный поток в рассматриваемой магнитной цепи пропорционален магнитному напряжению  $U_m$  и обратно пропорционален магнитному сопротивлению  $R_m$*  (как и ток по закону Ома для участка электрической цепи).

Если неразветвленная цепь неоднородна и на сердечнике имеются две обмотки, т. е. две магнитодвижущие силы и три однородных участка (рис. 8.1а), то закон Ома для такой магнитной цепи:

$$\Phi = \frac{I_1 W_1 \pm I_2 W_2}{\frac{\ell_1}{\mu_0 \mu_{r1} S_1} + \frac{\ell_2}{\mu_0 \mu_{r2} S_2} + \frac{\ell_3}{\mu_0 \mu_{r3} S_3}} \quad (8.5)$$

или иначе:

$$\Phi = \frac{U_{m1} \pm U_{m2}}{R_{m1} + R_{m2} + R_{m3}} \quad (8.6)$$

(как и ток в неразветвленной электрической цепи с несколькими источниками и несколькими сопротивлениями).

В выражениях (8.5) и (8.6) знак «плюс» между магнитными напряжениями ставят тогда, когда обмотки  $W_1$  и  $W_2$  (рис. 8.1а) включены «согласно», т. е. создают магнитные потоки в сердечнике одного направления, а знак «минус» — когда обмотки включены «встречно», т. е. создают магнитные потоки в сердечнике, направленные друг против друга.

Из выражений (8.3) и (8.5) следует, что наибольшим сопротивлением в магнитной цепи обладает воздушный зазор  $R_3$ , так как относительная магнитная проницаемость его  $\mu_{r3} = 1$ , притом что магнитная проницаемость ферромагнитных участков исчисляется десятками тысяч.

Как видно, законы в магнитной цепи для определения магнитного потока во многих случаях аналогичны законам в электрических цепях для определения электрического тока, что в значительной степени помогает при расчетах магнитных цепей.

Однако пользоваться законом Ома с использованием выражений (8.4) и (8.5) для расчета магнитных цепей не представляется возможным, так как магнитная цепь нелинейная. Нелинейность магнитной цепи обусловлена тем, что магнитное сопротивление ферромагнитных участков магнитной цепи, определяющее магнитный поток, само зависит от магнитного потока.

Тем не менее законы Ома для однородной и неоднородной цепи решают качественную задачу расчета цепей, т. е. зависимость параметров магнитных цепей друг от друга.

Расчет магнитных цепей производится с использованием закона полного тока.

### 8.3. Намагничивание ферромагнитных материалов

Так как ферромагнитный материал является основой магнитных цепей, то для исследования и расчета магнитных цепей необходимо изучить свойства и характеристики ферромагнитных материалов.

Если по катушке с числом витков  $W$ , расположенной на замкнутом магнитопроводе длиной  $\ell$ , проходит ток  $I$  (рис. 8.2), то в катушке создается магнитное поле, напряженность которого

$$H = \frac{IW}{\ell}.$$

Если магнитопровод выполнен из неферромагнитного материала, то индукция в магнитном поле магнитопровода  $B_0 = \mu_0 H$ .

Если же магнитопровод катушки выполнен из ферромагнитного материала, то этот материал намагничивается, т. е. происходит ориентация доменов ферромагнитного материала в направлении внешнего магнитного поля, созданного магнитодвижущей силой катушки  $IW$ . Тем самым создается добавочная магнитная индукция  $B_d$ , обусловленная намагничиванием ферромагнитного материала магнитопровода:  $B_d = \mu_0 M$ , где  $M$  — величина, характеризующая намагниченность материала.

Таким образом, магнитная индукция  $B$  в магнитопроводе катушки складывается из двух компонентов — магнитной индукции внешнего поля, созданной МДС катушки  $B_0$ , и добавочной индукции  $B_d$ , созданной намагниченным магнитопроводом из ферромагнитного материала, т. е.

$$B = B_0 + B_d = \mu_0 H + \mu_0 M. \quad (8.7)$$

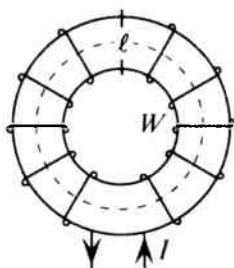


Рис. 8.2

Зависимость магнитных индукций  $B_0$ ,  $B_d$  и  $B$  от изменения напряженности  $H$  представлена на рис. 8.3.

Зависимость  $B_0 = f(H)$  — прямая линия из начала координат (прямая 1).

Характер изменения добавочной индукции  $B_d = f(H)$  можно объяснить следующим образом (кривая 2):

участок  $Oa$  — намагниченность сердечника  $M$  увеличивается пропорционально напряженности  $H$ ;

участок  $ab$  — рост намагниченности сердечника  $M$  замедляется, так как большинство доменов уже сориентировалось в направлении магнитного поля катушки;

участок  $bc$  — рост намагниченности сердечника  $M$  прекращается, т. е. наступает режим магнитного насыщения, так как все домены сориентировались в направлении внешнего магнитного поля (участок  $bc$  параллелен оси абсцисс).

Суммарная кривая  $B = f(H)$  строится путем сложения ординат кривых  $B_0 = f(H)$  и  $B_d = f(H)$ .

Суммарная кривая 3 зависимости индукции ферромагнитного материала от напряженности магнитного поля  $B = f(H)$  называется кривой намагничивания данного ферромагнитного материала. Кривые намагничивания различных ферромагнитных материалов приведены в Приложениях 5 и 6.

Ферромагнитные материалы относятся к нелинейным средам, поэтому магнитные цепи, в которых они используются, являются нелинейными.

Магнитная проницаемость ферромагнитных материалов — величина непостоянная и зависит от предварительного намагничивания, т. е. от напряженности поля, созданного в материале. Характер этой зависимости представлен кривой  $\mu_a = f(H)$  (рис. 8.4). Кривая построена по уравнению (8.8), полученному в соответствии со следующими зависимостями:

$$B = B_0 + B_d = \mu_0 H + \mu_0 M,$$

из выражения (7.7)

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu_a H.$$

Тогда  $\mu_a H = \mu_0 H + \mu_0 M$ .

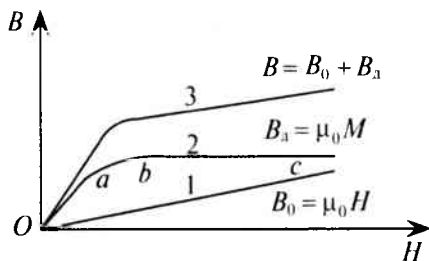


Рис. 8.3

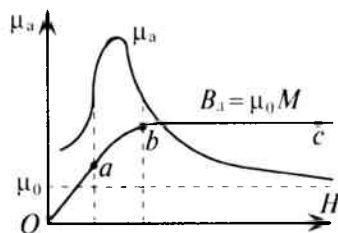


Рис. 8.4

Если левую и правую части этого уравнения разделить на  $H$  то получается

$$\mu_a = \mu_0 \left( 1 + \frac{M}{H} \right). \quad (8.8)$$

Из уравнения видно, что изменение  $\mu_a$  зависит от отношения  $M/H$  (остальные величины постоянные). С увеличением  $H$  на участке  $Oa$  (рис. 8.3 и 8.4)  $M$  растет быстрее, чем  $H$ , следовательно, отношение  $M/H$  увеличивается, и увеличивается  $\mu_a$  (8.8).

Максимального значения абсолютная магнитная проницаемость  $\mu_a$  достигает на участке  $ab$  зависимости  $B_d = f(H)$  (рис. 8.4) В режиме же насыщения (участок  $bc$ ) намагниченность ( $M$ ) остается неизменной, следовательно, отношение  $M/H$  уменьшается вызывая уменьшение  $\mu_a$  (выражение (8.8) и рис. 8.4). При дальнейшем увеличении  $H \rightarrow \infty$   $\mu_a \rightarrow \mu_0$  (8.8), т. е. ферромагнитный материал теряет свои ферромагнитные свойства.

Определить магнитную проницаемость ферромагнитного материала при определенной напряженности  $H$  или индукции  $I$  можно, воспользовавшись кривой намагничивания данного ферромагнитного материала:

$$\mu_a = \frac{B}{H}, \quad (8.9)$$

$$\text{а } \mu_r = \frac{\mu_a}{\mu_0}.$$

#### 8.4. Циклическое перемагничивание

Изменение тока в катушке (рис. 8.2) и соответственно напряженности  $H$  магнитного поля в ней не только по величине, но и по направлению приводит к изменению индукции в ферромагнитном сердечнике катушки по величине и направлению (рис. 8.5).

Зависимость магнитной индукции  $B$  в сердечнике от напряженности  $H$  при изменении тока  $I$  катушки по величине и направлению можно проследить по кривой рис. 8.5.

Если в катушке находится полностью размагниченный сердечник, то при токе  $I=0$ ,  $H_0 = \frac{IW}{\ell} = 0$  (рис. 8.5).

Увеличение тока приводит к увеличению напряженности  $H$ , а следовательно, и индукции  $B$  в ферромагнитном материале до насыщения по кривой 0–1, т. е. по кривой намагничивания данного ферромагнитного материала (рис. 8.5). Если уменьшать ток до нуля, то и напряженность  $H$  уменьшается до нуля, а индукция при этом уменьшается от величины  $B_m$  (насыщение) до значе-

ния 0–2 по кривой 1–2. Значение индукции 0–2, оставшейся в сердечнике катушки (рис. 8.5) при уменьшении напряженности до  $H=0$ , называется остаточной индукцией  $B_r$  в данном ферромагнитном материале. Остаточная индукция в сердечнике  $B_r$  имеет место за счет того, что не все элементарные магнитики материала дезориентировались при размагничивании, т. е. часть доменов остались сориентированными в направлении внешнего поля катушки.

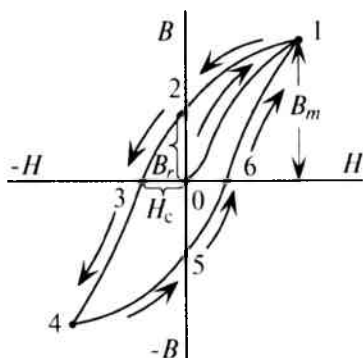


Рис. 8.5

Если изменить направление тока в катушке, а следовательно, и направление напряженности в сердечнике и увеличивать эту напряженность (в обратном направлении), то можно добиться уменьшения индукции до нуля (кривая 2–3), т. е. сердечник полностью размагнитится. Напряженность 0–3, которая потребовалась для того, чтобы размагнитить ферромагнитный материал, т. е. полностью дезориентировать домены, называется задерживающей, или коэрцитивной, силой  $H_c$ .

Если продолжить увеличение напряженности, то индукция изменит свое направление и ее значение будет увеличиваться в новом направлении от нуля до насыщения по кривой 3–4.

Если уменьшать напряженность до нулевого значения, то индукция уменьшится по кривой 4–5, где отрезок 0–5 – остаточная индукция  $B_r$  в обратном направлении. Чтобы размагнитить сердечник, т. е. уменьшить индукцию до нуля, необходимо снова изменить направление тока и напряженности (в первоначальном направлении) и увеличивать его. При этом индукция в сердечнике уменьшится до нуля по кривой 5–6, где отрезок 0–6 – задерживающая, или коэрцитивная, сила  $H_c$  в первоначальном направлении, которая снова размагничивает сердечник – уничтожает остаточную индукцию. Дальнейшее увеличение напряженности приведет к увеличению индукции от нуля до насыщения в первоначальном направлении по кривой 6–1.

Кривая 0–1 называется кривой первоначального намагничивания, а замкнутая кривая 1–2–3–4–5–6–1 называется кривой циклического перемагничивания, или петлей гистерезиса. Гистерезис – греческое слово, означающее «отставание», т. е. изменение индукции отстает от изменения напряженности: напряженность уменьшилась до нуля, а индукция еще не равна нулю, или

индукция только уменьшилась до нуля, а напряженность уже увеличивается в обратном направлении.

Циклическое перемагничивание имеет место в магнитопроводах (сердечниках) электрических машин, трансформаторов, электроизмерительных приборов, дросселей и др., по обмоткам которых проходит переменный ток.

Циклическое перемагничивание сопровождается затратой электрической энергии, которая преобразуется в тепловую и в большинстве случаев рассеивается в пространстве. Такие тепловые потери относят к магнитным потерям  $P_m$  и называют потерями энергии (мощности) на циклическое перемагничивание, или потерями на гистерезис. Мощность потерь на циклическое перемагничивание данного ферромагнитного материала пропорциональна площади, ограниченной петлей гистерезиса этого материала. Для борьбы с подобными потерями в различных аппаратах и машинах применяют различные меры, основной из которых является выбор ферромагнитного материала для сердечников с узкой петлей гистерезиса.

Искусственно циклическое перемагничивание можно применить для размагничивания ферромагнитного материала, т. е. для уменьшения остаточной индукции до нулевого значения. Для этого по катушке, расположенной на магнитопроводе из ферромагнитного материала, пропускают изменяющийся по величине и направлению ток (переменный ток), величину которого постепенно уменьшают до нулевого значения.

### 8.5. Ферромагнитные материалы

Свойства большинства ферромагнитных материалов являются одинаковыми, однако проявляются они по-разному в зависимости от химического состава материала. В этой связи различают две основные группы ферромагнитных материалов: а) магнитно-мягкие и б) магнитно-твердые.

*А. Магнитно-мягкие ферромагнитные материалы обладают высокой магнитной проницаемостью ( $\mu_r \approx 10^3 \div 10^6$ ), низкой задерживающей (коэрцитивной) силой ( $H_c \leq 400$  А/м) и узкой петлей гистерезиса, т. е. малыми потерями на гистерезис.*

Магнитно-мягкие ферромагнитные материалы легко намагничиваются и размагничиваются.

К магнитно-мягким материалам относятся металлы и сплавы: электролитическое железо, электротехническая сталь, пермаллой, ферриты, магнитодиэлектрики и др.

Железо и электротехническая сталь нашли широкое применение для магнитных цепей электрических машин, аппаратов, трансформаторов, электроизмерительных приборов, т. е. там, где

необходимо создать сильное магнитное поле при относительно небольших магнитодвижущих силах ( $IW$ ).

Ферриты и магнитодиэлектрики применяются в качестве магнитопроводов в аппаратуре проводной и радиосвязи, в магнитных усилителях, вычислительных машинах и других видах техники.

Пермаллой используется при изготовлении сердечников, предназначенных для работы в высокочастотных устройствах до 50 000 кГц. Магнитные свойства пермаллоев в значительной степени зависят от технологии их изготовления.

*Б. Магнитно-твердые ферромагнитные материалы обладают незначительной магнитной проницаемостью ( $\mu_r$  — порядка нескольких сотен), относительно высокой остаточной индукцией  $B_r \approx (0,3 \div 125)$  Тл, большой задерживающей (коэрцитивной) силой  $H_c \approx (5000 \div 240\,000)$  А/м и имеют широкую петлю гистерезиса.*

Из магнитно-твердых материалов изготавливаются постоянные магниты, применяемые в технике связи, электроизмерительной технике и т. п.

К магнитно-твердым материалам, обладающим лучшими магнитными свойствами, относятся такие сплавы, как альни, альниси, альнико и др.

### Пример 8.1

Определить и изобразить изменение относительной магнитной проницаемости  $\mu_r$  электротехнической стали при следующих значениях напряженности в ней:

$$H = 1000; 2000; 4000; 8000; 12\,000 \text{ и } 16\,000 \text{ А/м.}$$

### Решение

Результаты расчета заносятся в таблицу 8.1, воспользовавшись кривой намагничивания электротехнической стали (Приложение б) и следующими выражениями:

$$\mu_a = \frac{B}{H}; \quad \mu_r = \frac{\mu_a}{\mu_0}.$$

Таблица 8.1

$H$ (А/м)	$B$ (Тл)	$\mu_a$ (Гн/м)	$\mu_r$
1000	1	$10^{-3}$	796,2
2000	1,4	$0,7 \cdot 10^{-3}$	557
4000	1,6	$0,4 \cdot 10^{-3}$	318
8000	1,7	$0,21 \cdot 10^{-3}$	167
12 000	1,8	$0,15 \cdot 10^{-3}$	119
16 000	1,88	$0,12 \cdot 10^{-3}$	95,5



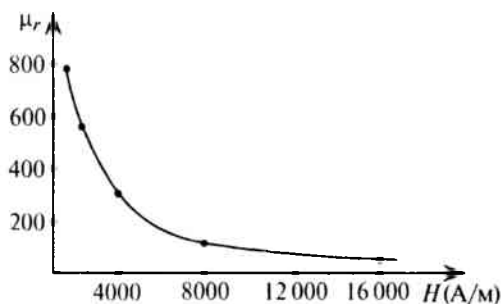


Рис. 8.6

На основании данных таблицы 8.1 строится график (рис. 8.6). Как видно (рис. 8.6), электротехническая сталь находится в режиме магнитного насыщения (резкое уменьшение  $\mu_r$ ).

### 8.6. Расчет неразветвленных магнитных цепей

Вопросы выбора размеров, формы и материалов при конструировании магнитной цепи электромагнитных аппаратов решаются и изучаются в специальных курсах.

В настоящей главе рассматривается расчет сконструированной, т. е. существующей, магнитной цепи, размеры и материалы которой, а также количество и расположение обмоток с токами известны. Расчет производится с использованием закона полного тока.

Такой расчет предусматривает решение одной из двух задач: прямой задачи и обратной задачи.

*Прямая задача предусматривает определение магнитодвижущей силы  $F = IW$  по заданному магнитному потоку  $\Phi$  в магнитной цепи.* Если одна из величин  $I$  или  $W$  задана, то определяется только другая величина.

*Обратная задача предусматривает определение магнитного потока  $\Phi$  или магнитной индукции  $B$  в участках цепи или всей цепи по заданной магнитодвижущей силе  $F = IW$ .*

Расчет магнитных цепей различных конструкций по закону полного тока производится в определенной последовательности.

#### Расчет однородной неразветвленной магнитной цепи

Прямая задача расчета однородной магнитной цепи (рис. 8.7) выполняется в следующей последовательности.

1. По заданному магнитному потоку  $\Phi$  и габаритам магнитопровода цепи определяется магнитная индукция  $B = \frac{\Phi}{S}$ , где

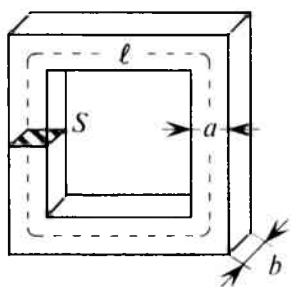


Рис. 8.7

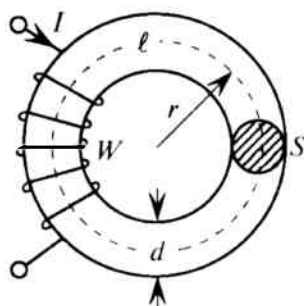


Рис. 8.8

$S = ab$  – площадь сечения магнитопровода, которая по всей длине  $\ell$  имеет одинаковое значение.

2. По кривой намагничивания для заданного материала сердечника (Приложение 6 или таблица Приложения 5) по вычисленной индукции определяется напряженность магнитного поля магнитной цепи  $H$ .

3. По закону полного тока определяется магнитодвижущая сила обмотки, расположенной на магнитопроводе, по выражению  $F = IW = H\ell$ , где  $\ell$  – длина средней линии сердечника, которая определяется по заданным габаритам.

Обратная задача расчета однородной магнитной цепи (рис. 8.8) решается в следующей последовательности.

1. По заданной магнитодвижущей силе  $F = IW$  и габаритам магнитопровода магнитной цепи определяется напряженность магнитного поля цепи  $H = \frac{IW}{\ell}$ , где  $\ell = 2\pi r$ .

2. По вычисленной напряженности по кривой намагничивания (Приложение 6 или таблица Приложения 5) для заданного ферромагнитного материала сердечника магнитной цепи определяется индукция  $B$  магнитного поля однородной цепи.

3. Определяется искомый магнитный поток цепи  $\Phi = BS$ , где  $S$  – площадь сечения магнитопровода магнитной цепи,  $S = \frac{\pi d^2}{4}$ .

При расчете неразветвленной однородной магнитной цепи может быть предусмотрено определение других параметров магнитной цепи, например магнитной проницаемости материала сердечника в заданном режиме работы. Для этого применяется выражение  $\mu_a = \frac{B}{H}$ .

### Расчет неоднородной магнитной цепи

Прямая задача расчета неразветвленной неоднородной магнитной цепи (рис. 8.9) решается в следующей последовательности.

1. По заданному магнитному потоку  $\Phi$ , который для всех участков неразветвленной цепи имеет одинаковое значение, определяют магнитную индукцию  $B$  каждого участка  $B_1 = \frac{\Phi}{S_1}$ ;  $B_2 = \frac{\Phi}{S_2}$ ;  $B_3 = \frac{\Phi}{S_3}$ , где  $S$  — площадь сечения участка.

Для прямоугольного сечения (рис. 8.7)  $S = ab$ ; для круглого сечения (рис. 8.8)  $S = \frac{\pi d^2}{4}$ .

Если задана магнитная индукция какого-либо участка  $B_{\text{уч}}$ , то находят магнитный поток этого участка  $\Phi_{\text{уч}} = B_{\text{уч}} S_{\text{уч}}$ , который для всех участков неразветвленной цепи имеет одинаковое значение. Затем определяют магнитную индукцию остальных участков, как показано выше.

2. По кривым намагничивания материалов (Приложение 5 или 6) определяют напряженности ферромагнитных участков  $H_1$  и  $H_2$ . Напряженность в воздушном зазоре вычисляется по отношению  $H_3 = \frac{B_3}{\mu_0}$ .

3. Определив длину средней линии каждого участка, по закону полного тока (второй закон Кирхгофа для магнитной цепи) вычисляют намагничивающую силу рассчитываемой магнитной цепи  $IW = H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2 + H_3 \ell_3$ , или ток  $I$ , или витки  $W$ .

#### Пример 8.2

Определить число витков обмотки, расположенной на сердечнике из электротехнической листовой стали, размеры которого указаны на рис. 8.9. в см, если по обмотке проходит ток  $I = 5$  А, который создает в магнитной цепи магнитный поток  $\Phi = 43,2 \cdot 10^{-4}$  Вб.

#### Решение

Магнитная цепь состоит из 3-х однородных участков сечением  $S_1 = 6 \cdot 10^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{-2} = 36 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup> (6 см =  $6 \cdot 10^{-2}$  м);  $S_2 = 8 \cdot 10^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{-2} = 48 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup> (8 см =  $8 \cdot 10^{-2}$  м);  $S_3 = 36 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup> (воздушный зазор).

1. По заданному потоку определяется магнитная индукция в каждом однородном участке:

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1} = \frac{43,2 \cdot 10^{-4}}{36 \cdot 10^{-4}} = 1,2 \text{ Тл}; \quad B_2 = \frac{\Phi}{S_2} = \frac{43,2 \cdot 10^{-4}}{48 \cdot 10^{-4}} = 0,9 \text{ Тл};$$

$$B_3 = \frac{\Phi}{S_3} = \frac{43,2 \cdot 10^{-4}}{36 \cdot 10^{-4}} = 1,2 \text{ Тл.}$$

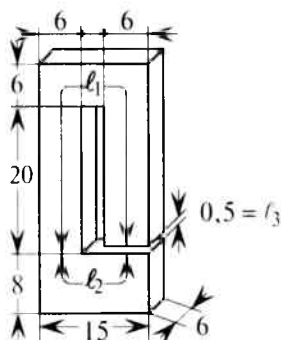


Рис. 8.9

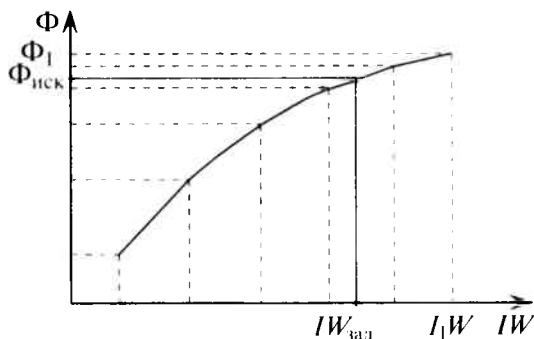


Рис. 8.10

2. По кривой намагничивания для листовой электротехнической стали (Приложение 5 или 6) определяются напряженности первого –  $H_1 = 1000$  А/м и второго –  $H_2 = 500$  А/м участков. Напряженность в воздушном зазоре  $H_3 = \frac{B_3}{\mu_0} = \frac{1,2}{4\pi \cdot 10^{-7}} \approx 1 \cdot 10^6$  А/м.

3. Составляется уравнение по закону полного тока для магнитной цепи:  $IW = H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2 + H_3 \ell_3$ , из которого определяется искомое число витков обмотки

$$W = \frac{H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2 + H_3 \ell_3}{I} = \frac{1000 \cdot 0,545 + 500 \cdot 0,17 + 10^6 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}}{5} = 1126 \text{ витков.}$$

Предварительно вычисляется длина средней линии каждого участка:

$$\ell_1 = 20 + 3 + 9 + 3 + 19,5 = 54,5 \text{ см} = 0,545 \text{ м,}$$

$$\ell_2 = 4 + 9 + 4 = 17 \text{ см} = 0,17 \text{ м,}$$

$$\ell_3 = 0,5 \text{ см} = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Обратная задача расчета неоднородной неразветвленной магнитной цепи, т. е. определение магнитного потока по заданной магнитодвижущей силе (МДС), может быть решена методом последовательных приближений. Для этого задаются несколькими значениями магнитного потока и для каждого из них решают прямую задачу расчета магнитной цепи. По результатам расчетов намагничивающих сил для разных магнитных потоков строят зависимость  $\Phi = f(IW)$  (рис. 8.10), по которой определяют искомый магнитный поток  $\Phi_{иск}$  по заданной МДС  $IW_{зад}$ .

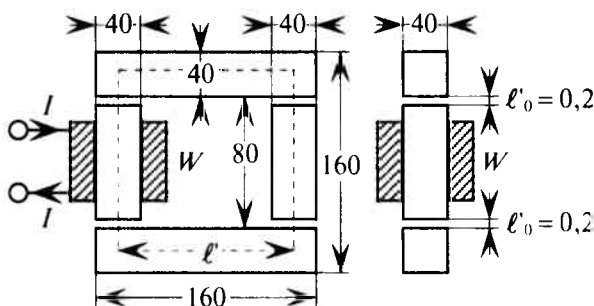


Рис. 8.11

### Пример 8.3

Определить магнитный поток в замкнутом сердечнике из листовой электротехнической стали, размеры которого указаны на рис. 8.11 в мм, если на сердечнике расположена обмотка (катушка) с числом витков  $W = 500$ , по которой проходит ток  $I = 2$  А (обратная задача). Длина каждого воздушного зазора  $\ell'_0 = 0,2$  мм (рис. 8.11).

### Решение

Сечение сердечника магнитной цепи и воздушных зазоров при указанных размерах будет равно  $S_c = S_0 = 4 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^{-2} = 16 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$  ( $40 \text{ мм} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ).

Длина четырех воздушных зазоров на стыках сердечника:

$$\ell_0 = 4 \ell'_0 = 4 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3} = 0,8 \cdot 10^{-3} = 0,08 \cdot 10^{-2} \text{ м} \quad (0,2 \text{ мм} = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}).$$

Длина средней линии сердечника:  $\ell_c = 4 \cdot 12 \cdot 10^{-2} = 48 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ , так как длина каждой стороны квадрата сердечника

$$\ell' = 16 \cdot 10^{-2} - 2 \cdot 10^{-2} - 2 \cdot 10^{-2} = 12 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Как видно, длина воздушного зазора ( $\ell_0 = 0,08 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ) очень мала по сравнению с длиной средней линии сердечника, поэтому ее влиянием на длину сердечника ( $\ell_c = 48 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ) можно пренебречь.

Магнитная цепь в рассматриваемом примере состоит из двух однородных участков — сердечника из листовой электротехнической стали длиной  $\ell_c = 48 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ , сечением  $S_c = 16 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$  и воздушного зазора длиной  $\ell_0 = 0,08 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ , сечением  $S_c = 16 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ .

Для выбора одного из магнитных потоков на графике зависимости  $\Phi = f(IW)$ , например  $\Phi_1$  (рис. 8.10), предполагается, что магнитное сопротивление воздушного зазора  $R_0$  равно магнитному сопротивлению всей магнитной цепи  $R_m$ .

Это предположение обусловлено тем, что сопротивление воздушного зазора  $R_0$  значительно больше сопротивления ферромаг-

нитных участков цепи, магнитная проницаемость которых ( $\mu_r$ ) в тысячи раз больше магнитной проницаемости воздуха ( $\mu_r = 1$ ). Поэтому магнитным сопротивлением ферромагнитной части, в первом приближении, можно пренебречь.

Таким образом по закону Ома для магнитной цепи

$$R_0 = \frac{\ell_0}{\mu_0 S_0} = \frac{0,08 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 16 \cdot 10^{-4}} = 39,8 \cdot 10^4 \text{ Ом.}$$

$$\text{Тогда } \Phi_1 = \Phi_{01} = \frac{IW}{R_0} = \frac{2 \cdot 500}{39,8 \cdot 10^4} = 25,12 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

Задаемся магнитным потоком  $\Phi_1 = 25 \cdot 10^{-4}$  Вб.

Магнитодвижущая сила ( $IW$ ), необходимая для создания магнитного потока  $\Phi_1$ , определяется в следующей последовательности.

Магнитная индукция в магнитопроводе и воздушном зазоре будет равна

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_c} = \frac{\Phi_1}{S_0} = \frac{25 \cdot 10^{-4}}{16 \cdot 10^{-4}} = 1,56 \text{ Тл.}$$

Напряженность магнитного поля в сердечнике из листовой электротехнической стали (Приложение 6)

$$H_{1c} = 3500 \text{ А/м.}$$

При этом магнитное напряжение

$$U_{1c} = H_{1c} \ell_c = 3500 \cdot 48 \cdot 10^{-2} = 1680 \text{ А.}$$

Напряженность в воздушном зазоре

$$H_{10} = \frac{B_1}{\mu_0} = \frac{1,56}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 124 \cdot 10^4 \text{ А/м.}$$

Магнитное напряжение при этом

$$U_{10} = H_{10} \ell_0 = 124 \cdot 10^4 \cdot 0,08 \cdot 10^{-2} = 992 \text{ А.}$$

Следовательно, магнитодвижущая сила для создания магнитного потока  $\Phi_1$  в магнитной цепи будет равна

$$I_1 W = U_M = U_{1c} + U_{10} = H_{1c} \ell_c + H_{10} \ell_0 = 1680 + 992 = 2672 \text{ А.}$$

Так как заданные ампер-витки ( $IW = 1000$  А) меньше, чем требуется для создания магнитного потока  $\Phi_1$ , то для построения графика зависимости  $\Phi = f(IW)$  в необходимых пределах произвольно выбираемый магнитный поток необходимо уменьшать, т.е. определяется МДС для создания магнитных потоков  $\Phi_2 = 20 \cdot 10^{-4}$  Вб;  $\Phi_3 = 15 \cdot 10^{-4}$  Вб и  $\Phi_4 = 10 \cdot 10^{-4}$  Вб.

Магнитодвижущая сила для каждого из выбираемых магнитных потоков  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  и  $\Phi_4$  определяется тем же методом и в той же последовательности, что и для магнитного потока  $\Phi_1$ .

Результаты расчетов заносят в таблицу 8.2 и график  $\Phi = f(IW)$  строится по этим результатам (рис. 8.12).

Таблица 8.2

Участок цепи	$\Phi_1 \cdot 10^4$ (Вб)	$B_1$ (Тл)	$H_1$ (А/м)	$U_{1м} = H_1 \ell$ (А)	$I_1 W$ (А)	$\Phi_2 \cdot 10^4$ (Вб)	$B_2$ (Тл)	$H_2$ (А/м)	$U_{2м} = H_2 \ell$ (А)	$I_2 W$ (А)
Эл.-техн. сталь	25	1,56	3500	1680	2672	20	1,25	1600	768	1564
Возд. зазор			124 · 10 <sup>4</sup>	992						
Участок цепи	$\Phi_3 \cdot 10^4$ (Вб)	$B_3$ (Тл)	$H_3$ (А/м)	$U_{3м} = H_3 \ell$ (А)	$I_3 W$ (А)	$\Phi_4 \cdot 10^4$ (Вб)	$B_4$ (Тл)	$H_4$ (А/м)	$U_{4м} = H_4 \ell$ (А)	$I_4 W$ (А)
Эл.-техн. сталь	15	0,94	100	480	1079	10	0,625	300	144	342,4
Возд. зазор			74,8 · 10 <sup>4</sup>	599						

*Примечание.* Если по таблице 8.2 значение  $\Phi \cdot 10^4 = 25$  Вб, то это означает, что  $\Phi = 25 \cdot 10^{-4}$  Вб.

По этому графику определяется магнитный поток  $\Phi$ , созданный заданными ампер-витками  $IW_{\text{зад}} = 1000$  А.

Как видно (рис. 8.12), заданная МДС  $IW = 1000$  А создает в магнитной цепи магнитный поток

$$\Phi = 14,9 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

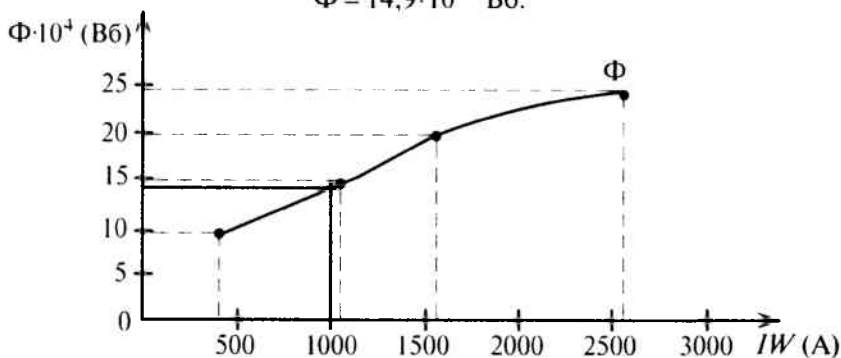


Рис. 8.12

Такой же результат можно получить при расчете той же магнитной цепи графо-аналитическим методом пересечений (рис. 8.13).

Как указывалось выше, магнитная цепь является нелинейной цепью, так как кривая намагничивания любого ферромагнитного материала, из которого состоит магнитная цепь, — кривая линия (см. рис. 8.3 и Приложение 6).

Таким образом, рассматриваемая в примере 8.3 (рис. 8.11) неразветвленная магнитная цепь состоит из двух однородных участков: участок, выполненный из листовой электротехнической стали, — нелинейный участок и воздушный зазор — линейный участок ( $B_0 = \mu_0 H$  на рис. 8.3).

Следовательно, расчет нелинейной неразветвленной магнитной цепи можно осуществить графо-аналитическим методом пересечений аналогично методу расчета нелинейных неразветвленных электрических цепей постоянного тока (см. рис. 5.36, 5.6, 5.86).

Для нелинейного участка неразветвленной магнитной цепи строится кривая зависимости  $\Phi = f(U_c)$  по результатам, полученным при расчете обратной задачи примера 8.3 (таблица 8.2). Кривая зависимости  $\Phi = f(U_c)$  называется магнитной характеристикой магнитной цепи.

Для построения магнитной характеристики выписываются значения величины магнитного потока  $\Phi$  и магнитного напряжения на ферромагнитных участках ( $U_c$ ) в таблицу 8.3 из таблицы 8.2. По полученным данным строится магнитная характеристика нелинейного участка рассматриваемой цепи (рис. 8.13).

Таблица 8.3

$\Phi \cdot 10^4$ (Вб)	$U_c = H_c l_c$ (А)
10	144
15	480
20	768
25	1680

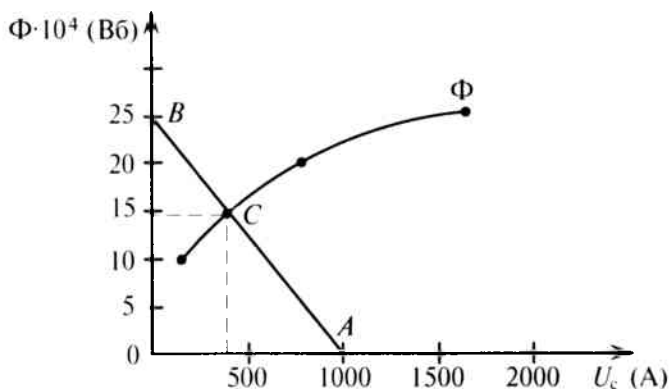


Рис. 8.13



Согласно второму закону Кирхгофа для магнитной цепи, изображенной на рис. 8.11, в соответствии с законом полного тока:

$$U_c + U_0 = IW,$$

откуда

$$U_c = IW - U_0 = IW - R_0\Phi, \quad (8.10)$$

где  $R_0$  — магнитное сопротивление воздушного зазора,  $U_0 = R_0\Phi$ , что следует из закона Ома для участка магнитной цепи (8.4).

Зависимость (8.10) ( $U_c = IW - R_0\Phi$ ) линейная и графически изображается прямой линией, построение которой производится по двум точкам  $A$  и  $B$  (рис. 8.13).

Точка  $A$  откладывается на оси абсцисс  $U_c$  при  $\Phi = 0$  (т. е. при  $U_c = IW$ ), а точка  $B$  откладывается на оси ординат  $\Phi$  при  $U_c = 0$  (т. е.  $\Phi = \frac{IW}{R_0}$ ). Точка пересечения прямой  $AB$  с магнитной характеристикой нелинейного участка магнитной цепи (точка  $C$ ) определяет искомый магнитный поток  $\Phi$  (на оси ординат) и магнитное напряжение  $U_c$  (на оси абсцисс), соответствующее этому магнитному потоку. Таким образом, магнитное напряжение  $U_c = 450$  В (рис. 8.13) создает магнитный поток в магнитной цепи  $\Phi = 14,9 \cdot 10^{-4}$  Вб.

Как видно, результат получился таким же, как при расчете цепи (рис. 8.11) методом последовательных приближений.

### 8.7. Расчет разветвленных магнитных цепей

*Расчет симметричной разветвленной магнитной цепи* рассматривается на примере 8.4 (прямая задача).

#### Пример 8.4

На среднем стержне Ш-образного сердечника, выполненного из электротехнической стали Э21 (1311), расположена обмотка с числом витков  $W = 515$  (рис. 8.14). Якорь  $A$  этой разветвленной магнитной цепи выполнен из стали Э42 (1512). Между якорем  $A$  и сердечником находится воздушный зазор  $\ell_3 = 0,2$  мм. Размеры магнитной цепи даны в мм.

Определить величину тока в обмотке, расположенной на среднем стержне, при котором в якорь  $A$  создается магнитная индукция  $B_A = 1,2$  Тл.

#### Решение

Магнитная цепь по оси симметрии ( $OO'$ ) делится на две равные части. Каждая часть рассчитывается отдельно как неоднородная неразветвленная магнитная цепь. Магнитный поток  $\Phi$  в каждой части определяется по заданной магнитной индукции в якорь

$$\Phi = B_A S_A = 1,2 \cdot 56 \cdot 10^{-4} = 67,2 \cdot 10^{-4} \text{ Вб},$$

где  $S_A = 7 \cdot 10^{-2} \cdot 8 \cdot 10^{-2} = 56 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ .

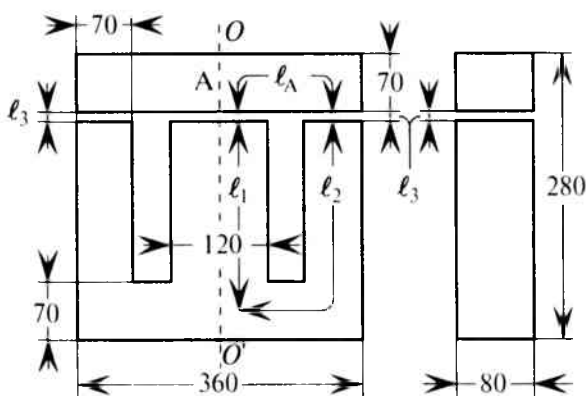


Рис. 8.14

В каждой части (половине) вычисленный магнитный поток замыкается через ярлык, воздушные зазоры и участок Ш-образного сердечника.

1. По вычисленному потоку  $\Phi$  определяется магнитная индукция в однородных участках.

На участке  $l_1$

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1} = \frac{67,2 \cdot 10^{-4}}{48 \cdot 10^{-4}} = 1,4 \text{ Тл,}$$

где  $S_1 = 6 \cdot 10^{-2} \cdot 8 \cdot 10^{-2} = 48 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ .

На участке  $l_2$

$$B_2 = \frac{\Phi}{S_2} = \frac{67,2 \cdot 10^{-4}}{56 \cdot 10^{-4}} = 1,2 \text{ Тл,}$$

где  $S_2 = 7 \cdot 10^{-2} \cdot 8 \cdot 10^{-2} = 56 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ .

В зазоре бокового стержня

$$B_{\text{зая. 2}} = B_2 = 1,2 \text{ Тл.}$$

В зазоре среднего стержня

$$B_{\text{зая. 1}} = B_1 = 1,4 \text{ Тл.}$$

В ярлык —  $B_A = 1,2 \text{ Тл}$ .

2. Напряженность магнитного поля для ферромагнитных участков (Приложение 5):

$$H_A = 540 \text{ А/м, } H_1 = 1580 \text{ А/м, } H_2 = 840 \text{ А/м.}$$

Напряженность в воздушных зазорах:

$$H_{\text{зая. 1}} = \frac{B_{\text{зая. 1}}}{\mu_0} = \frac{1,4}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 1,1 \cdot 10^6 \text{ А/м,}$$

$$H_{\text{з.з. 2}} = \frac{B_{\text{з.з. 2}}}{\mu_0} = \frac{1,2}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 0,95 \cdot 10^6 \text{ А/м.}$$

3. Величина тока определяется из уравнения, составленного по закону полного тока:

$$I = \frac{H_A \ell_A + H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2 + (H_{31} + H_{32}) \ell_3}{W} = \\ = [540 \cdot 18,5 \cdot 10^{-2} + 1580 \cdot 17,5 \cdot 10^{-2} + 840 \cdot 29 \cdot 10^{-2} + \\ + (1,1 + 0,95) \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-4}] / 515 = 2 \text{ А,}$$

где длина средней линии каждого участка магнитной цепи соответственно равна:

$$\ell_A = 35 + 115 + 35 = 185 \text{ мм} = 18,5 \cdot 10^{-2} \text{ м,}$$

$$\ell_3 = 0,2 \text{ мм} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м,}$$

$\ell_1 = 280 - 70 - 35 = 175 \text{ мм} = 17,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$  (длиной зазора пренебрегаем),

$$\ell_2 = 175 + 115 = 290 \text{ мм} = 29 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$
 (длиной зазора пренебрегаем).

Таким образом, индукцию  $B_A = 1,2 \text{ Тл}$  в якоре разветвленной магнитной цепи (рис. 8.14) создает ток  $I = 2 \text{ А}$ .

*Расчет несимметричной разветвленной магнитной цепи* рассматривается на примере 8.5 (прямая задача).

### Пример 8.5

Для разветвленной несимметричной магнитной цепи (рис. 8.15) известны длины пяти участков, их поперечные сечения и магнитный поток  $\Phi_5$  в воздушном зазоре длиной  $\ell_5$ . Остальные участки выполнены из ферромагнитного материала, кривая намагничивания которого известна.

Определить магнитодвижущую силу  $IW$  (МДС), созданную двумя обмотками, необходимую для создания в зазоре магнитного потока  $\Phi_5$ .

Решение произвести в общем виде. Стрелками указано направление магнитного потока участков цепи.

### Решение

Магнитные потоки участков 3, 4 и 5 одинаковы, т.е.  $\Phi_3 = \Phi_4 = \Phi_5$ , следовательно, можно определить магнитную индукцию в каждом участке  $B = \frac{\Phi_5}{S_{\text{уч}}}$ , и если сечения этих участков одинаковы,

то и магнитная индукция в них одинакова, т.е.  $B_3 = B_4 = B_5$ .

Для участков 3 и 4, выполненных из ферромагнитного материала, по кривой намагничивания определяется напряженность поля

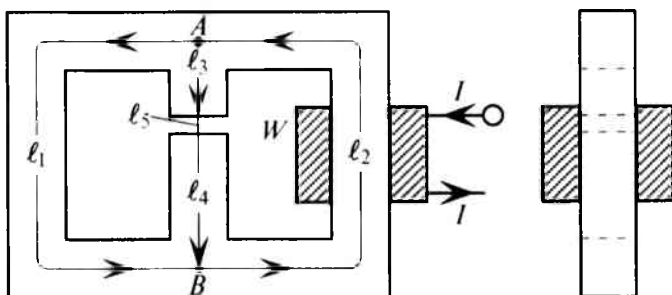


Рис. 8.15

$H_3$  и  $H_4$ , а напряженность в воздушном зазоре определяется по формуле

$$H_5 = \frac{B_5}{\mu_0}.$$

Магнитное напряжение на участках 3, 4, 5, между точками  $A$  и  $B$ , определяется соотношением  $U_m = H_3 l_3 + H_5 l_5 + H_4 l_4$ .

Такое же магнитное напряжение будет на участке  $l_1$ , так как он расположен между точками  $A$  и  $B$ , т. е.  $U_m = H_1 l_1$ , откуда вычисляется  $H_1 = \frac{U_m}{l_1}$ .

По кривой намагничивания для материала участка определяется индукция  $B_1$  и магнитный поток  $\Phi_1 = B_1 S_1$ .

Магнитный поток согласно первому закону Кирхгофа для разветвленной магнитной цепи будет равен  $\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3$ .

Величина магнитной индукции вычисляется отношением

$$B_2 = \frac{\Phi_2}{S_2}.$$

По кривой намагничивания определяется  $H_2$ .

Тогда искомая МДС будет равна  $F = IW = H_2 l_2 + U_m$ .

Обратную задачу расчета разветвленной магнитной цепи решают с использованием схем замещения и графо-аналитическим методом.

Расчеты всех магнитных цепей произведены с учетом отсутствия рассеяния магнитного потока.

## Глава 9 ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

### 9.1. Явление и ЭДС электромагнитной индукции

Если проводник длиной  $\ell$  пересекает магнитное поле с индукцией  $B$  со скоростью  $V$ , то в этом проводнике индуцируется ЭДС электромагнитной индукции.

*Явление наведения ЭДС электромагнитной индукции в проводнике, пересекающем магнитное поле, называется электромагнитной индукцией.*

Природу наведения ЭДС в пересекающем магнитное поле проводнике можно рассматривать на примере перемещения указанного выше проводника перпендикулярно линиям магнитного поля со скоростью  $V$ , вверх (рис. 9.1).

Очевидно, вместе с проводником вверх перемещаются все свободные и несвободные заряды проводника, создавая свой ток, т.е. направленное перемещение зарядов. Так как перемещающиеся направленно заряды создают ток в магнитном поле, то на каждый свободный заряд будет действовать электромагнитная сила, направление которой можно определить по правилу левой руки. Учитывая, что за направление тока принято направление перемещения положительных зарядов, ток положительных зарядов, перемещающихся вместе с проводником, направлен вверх, а ток отрицательных зарядов — вниз, т.е. противоположно току положительных зарядов.

В результате взаимодействия тока зарядов с магнитным полем на положительные заряды, в данном примере, электромагнитная сила направлена влево, а на отрицательные заряды — вправо. Таким образом, на концах рассматриваемого проводника сосредотачиваются разноименные заряды (рис. 9.1), т.е. создается ЭДС электромагнитной индукции  $E$ .

Направление ЭДС электромагнитной индукции определяется правилом правой руки: *правую руку располагают так, чтобы магнитные линии поля входили в ладонь, а отогнутый большой палец*

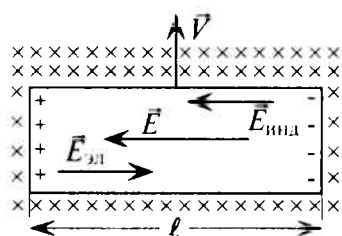


Рис. 9.1

показывал направление перемещения проводника (направление скорости  $V$ ), тогда вытянутые четыре пальца покажут направление индуктированной ЭДС  $E$  (см. рис. 9.1).

Проводник с ЭДС может выполнять функцию источника электрической энергии.

Величина индуктированной ЭДС рассчитывается с учетом того, что разделение зарядов в проводнике происходит под действием электромагнитных сил, напряженность которых определяется выражением

$$E_{\text{инд}} = \frac{F_{\text{инд}}}{q_{\text{зар}}} = \frac{I_{\text{зар}} B \ell}{q_{\text{зар}}} = \frac{q_{\text{зар}} B \ell}{t q_{\text{зар}}} = BV, \quad (9.1)$$

где  $E_{\text{инд}}$  — напряженность индукции — напряженность поля, созданная электромагнитными силами и направленная так же, как силы, действующие на положительный заряд (рис. 9.1);  $F_{\text{инд}}$  — электромагнитные силы, действующие на заряды, создающие ток зарядов;  $q_{\text{зар}}$  — заряды, создающие ток зарядов;  $I_{\text{зар}}$  — ток зарядов, направленно пересекающих магнитное поле, т. е.  $I_{\text{зар}} = q_{\text{зар}}/t$  (количество электричества в единицу времени);  $V = \ell/t$  — скорость перемещения проводника (зарядов), где  $\ell$  — путь, пройденный зарядом за время  $t$ .

Разделенные в проводнике заряды создают в нем электрическое поле, напряженность которого  $\vec{E}_{\text{эл}}$  направлена от положительного заряда к отрицательному (рис. 9.1). Таким образом, напряженность электрического поля в проводнике  $\vec{E}_{\text{эл}}$  направлена против напряженности индукции  $\vec{E}_{\text{инд}}$ . Очевидно, разделение зарядов в проводнике под действием электромагнитных сил прекратится тогда, когда напряженность  $E_{\text{эл}}$  станет равной  $E_{\text{инд}}$ :

$$E_{\text{эл}} = E_{\text{инд}} = BV.$$

Сосредоточенные на концах проводника разделенные заряды создают в проводнике однородное электрическое поле. Следовательно, напряжение на концах проводника согласно (1.13) будет равно

$$U = E_{\text{эл}} \ell = BV \ell.$$

Так как проводник разомкнут (холостой ход), то напряжение  $U$  на концах проводника равно его ЭДС —  $E$  (см. раздел 2.6).

Тогда

$$E = BV \ell. \quad (9.2)$$

Так определяется ЭДС электромагнитной индукции  $E$  в проводнике длиной  $\ell$ , пересекающем однородное магнитное поле с индукцией  $B$  перпендикулярно его направлению со скоростью  $V$ .

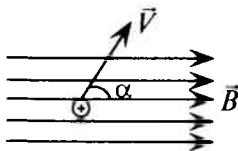


Рис. 9.2

Если же проводник пересекает поле под углом  $\alpha$  (рис. 9.2), то ЭДС  $\mathcal{E}$  в этом проводнике определяется выражением

$$\mathcal{E} = BVl \sin \alpha, \quad (9.3)$$

где  $\alpha$  – угол между направлением движения проводника и магнитным полем.

Если проводник с индуцированной ЭДС замкнуть, то в замкнутой цепи проводника появится ток, который, как и ЭДС, называется индуцированным.

Направление индуцированного тока совпадает с направлением индуцированной ЭДС.

## 9.2. Преобразование энергий. Правило Ленца

### Преобразование механической энергии в электрическую

Если проводник пересекает магнитное поле, то в нем индуцируется ЭДС электромагнитной индукции. При замыкании проводника в цепи появится индуцированный ток. Таким образом, механическая энергия, затраченная на перемещение проводника в магнитном поле, преобразуется в электрическую энергию тока в этом проводнике.

Подобное преобразование механической энергии в электрическую имеет место в электрических генераторах.

Направление индуцированного тока в проводнике определяется по правилу правой руки (рис. 9.3). Индуцированный ток взаимодействует с магнитным полем, в результате чего на проводник с током  $I$  действует электромагнитная сила  $\vec{F}$ , направление которой определяется по правилу левой руки. Как видно (рис. 9.3), эта сила направлена против скорости перемещения проводника  $\vec{V}$ , которая является причиной возникновения индуцированного тока.

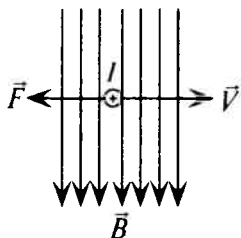


Рис. 9.3

Это и легло в основу **правила Ленца**, согласно которому *индуцированный ток всегда противодействует причине, вызвавшей его* (т. е.

сила  $\vec{F}$ , вызванная индуцированным током  $I$ , противодействует перемещению проводника со скоростью  $V$ , которое и является причиной, вызвавшей этот ток).

Затраченная на перемещение проводника механическая мощность компенсируется мощностью электромагнитных сил  $FV$ , т. е.

$$P_{\text{мех}} = FV = BI\ell V = IE = P_{\text{эл}}. \quad (9.4)$$

Уравнение (9.4) устанавливает количественную сторону преобразования механической энергии в электрическую. Таков баланс мощностей при преобразовании механической энергии в электрическую.

### Преобразование электрической энергии в механическую

Если по проводнику сопротивлением  $R$ , расположенном в магнитном поле с индукцией  $B$ , проходит ток  $I$ , созданный источником с ЭДС  $E$  и внутренним сопротивлением  $R_0$ , то на этот проводник будет действовать электромагнитная сила  $F$ , за счет которой проводник будет перемещаться (рис. 9.4).

Таким образом, электрическая энергия тока  $I_{\text{ист}}$  преобразуется в механическую энергию движения этого проводника под действием электромагнитной силы  $F$ .

Такое преобразование электрической энергии в механическую имеет место в электрических двигателях.

Направление электромагнитной силы определяется по правилу левой руки. При движении проводника в том же магнитном поле под действием электромагнитной силы  $F$  в проводнике, пересекающем это поле, индуцируется ЭДС электромагнитной индукции  $E_{\text{инд}}$ . Направление индуцированного тока  $I_{\text{инд}}$ , вызванного этой ЭДС  $E_{\text{инд}}$  в замкнутой цепи, определяется по правилу правой руки (рис. 9.4).

Как видно, индуцированный ток  $I_{\text{инд}}$  направлен против тока источника  $I_{\text{ист}}$  в сопротивлении  $R$ . Тем самым еще раз подтверждается правило Ленца: *индуцированный ток всегда противодействует причине, вызвавшей его*; т. е.  $I_{\text{инд}}$  направлен против тока  $I_{\text{ист}}$ , взаимодействие которого с магнитным полем создает электромагнитную силу  $F$ , являющейся причиной создания  $I_{\text{инд}}$ .

Для замкнутой цепи, изображенной на рис. 9.4, величина преобразованной электрической энергии в механическую определяется на основании второго закона Кирхгофа:

$$E - E_{\text{инд}} = IR_0 + IR$$

или

$$E = E_{\text{инд}} + I(R_0 + R).$$

Умножив левую и правую части равенства на  $I$ , получаем

$$EI = E_{\text{инд}}I + I^2(R_0 + R)$$

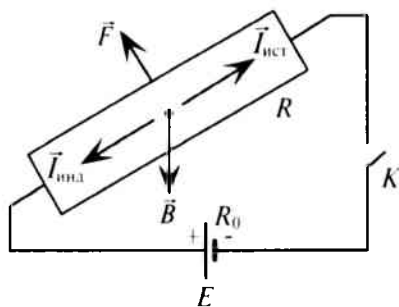


Рис. 9.4



$$\text{или } P_{\text{эл}} = BV\ell I + I^2(R_0 + R) = FV + I^2(R_0 + R) = P_{\text{мех}} + \Delta P_{\text{эл}}, \quad (9.5)$$

где  $E_{\text{инд}} = BV\ell$ ;  $P_{\text{эл}} = EI$ ;  $F = BI\ell$ ;  $P_{\text{мех}} = FV$ ;  $\Delta P_{\text{эл}} = I^2(R_0 + R)$  — мощность электрических потерь в рассматриваемой цепи;  $I = I_{\text{ист}} - I_{\text{инд}}$ .

Таков баланс мощностей преобразования электрической энергии в механическую.

### 9.3. ЭДС электромагнитной индукции в контуре и катушке

Допустим, что проводник длиной  $\ell$  пересекает однородное магнитное поле с неравномерной скоростью  $V = db/dt$  (рис. 9.5). Следовательно, в этом проводнике индуцируется переменная ЭДС электромагнитной индукции

$$e = BV\ell = B\ell \frac{db}{dt},$$

где  $e$  — мгновенное значение переменной ЭДС;  $db$  — бесконечно малый отрезок пути, пройденный проводником за время  $dt$ .

За время  $dt$  проводник пересекает элементарную площадку магнитного поля  $dS = \ell db$ . Следовательно,  $e = B \frac{dS}{dt}$ .

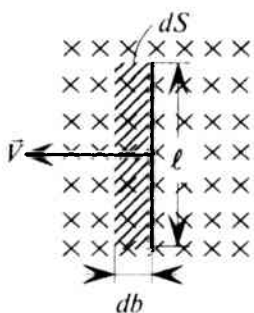


Рис. 9.5

Пронизывающий проводник элементарный магнитный поток  $d\Phi$  магнитного поля равен

$$d\Phi = BdS.$$

Тогда

$$e = \frac{d\Phi}{dt}. \quad (9.6)$$

Таким образом, ЭДС электромагнитной индукции в проводнике равна скорости изменения магнитного потока в этом проводнике.

Из уравнения (9.6) следует, что для создания ЭДС электромагнитной индукции в проводнике проводник должен пересекаться переменным магнитным потоком, поскольку при постоянном значении магнитного потока его производная равна нулю ( $\frac{d\Phi_{\text{пост}}}{dt} = 0$ ).

Для того чтобы магнитный поток, пронизывающий проводник, был переменным, необходимо, чтобы или проводник пересекал неподвижное магнитное поле, или магнитное поле пересекало неподвижный проводник, или проводник должен пересекаться переменным по величине или направлению магнитным потоком.

Выражение (9.6) получено для случая пересечения прямолинейным проводником однородного магнитного поля с неравномерной скоростью под углом  $90^\circ$ .

Это же выражение (9.6) справедливо для определения ЭДС электромагнитной индукции в проводнике любой формы, пересекающем любое магнитное поле под любым углом.

На практике возникает необходимость определить ЭДС электромагнитной индукции в замкнутом контуре или катушке.

Если контур пересекает неоднородное магнитное поле со скоростью  $V$ , то в левом проводнике этого контура, пересекающем за время  $dt$  элементарный магнитный поток  $d\Phi_1$ , индуцируется ЭДС  $e_1 = \frac{d\Phi_1}{dt}$ , а в правом проводнике контура, пересекающем за время  $dt$  элементарный магнитный поток  $d\Phi_2$ , индуцируется ЭДС  $e_2 = \frac{d\Phi_2}{dt}$ .

Направление ЭДС в проводниках контура определяется по правилу правой руки.

Эти ЭДС, как видно на рис. 9.6, направлены в контуре навстречу друг другу. Следовательно, суммарная ЭДС электромагнитной индукции в контуре равна их разности

$$e = e_2 - e_1 = \frac{d\Phi_2 - d\Phi_1}{dt}.$$

Положительное направление ЭДС связано с направлением вращательного движения рукоятки буравчика, поступательное движение которого совпадает с направлением магнитного поля.

Приращение магнитного потока  $d\Phi$  в контуре за время  $dt$ , полученное при перемещении контура влево (рис. 9.6), равно  $d\Phi = d\Phi_1 - d\Phi_2$ , так как  $d\Phi_1$  вошел в контур, а  $d\Phi_2$  вышел из контура за это время.

Следовательно, ЭДС электромагнитной индукции в контуре

$$e = \frac{d\Phi_2 - d\Phi_1}{dt} = -\frac{d\Phi_1 - d\Phi_2}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

ЭДС электромагнитной индукции в контуре определяется скоростью изменения магнитного потока в этом контуре, взятой с обратным знаком:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

(9.7)

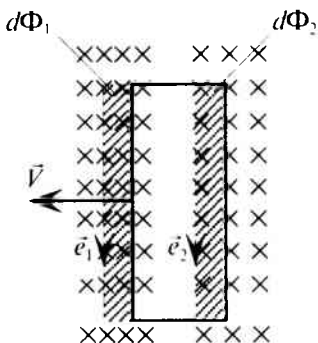


Рис. 9.6

Знак «минус» здесь отражает правило Ленца, которое для контура гласит так: *индуцированный в контуре ток, наведенный индуктированной ЭДС, противодействует изменению магнитного потока в этом контуре.*

Индуктированный ток в контуре изменяет свое направление в зависимости от того, уменьшается или увеличивается магнитный поток в этом контуре (рис. 9.7) при неизменном направлении его.

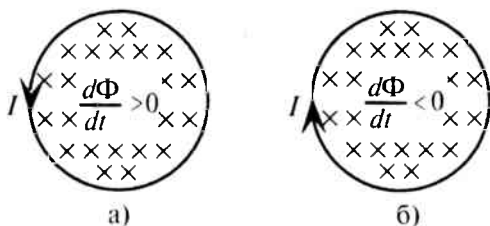


Рис. 9.7

То есть при увеличении магнитного потока (рис. 9.7а) индуцированный ток противодействует этому увеличению, а при уменьшении потока индуцированный ток противодействует его уменьшению (рис. 9.7б).

Если магнитное поле изменяется в катушке, состоящей из  $W$  витков (рис. 9.8а), то в каждом витке (контуре) этой катушки индуцируется ЭДС  $e' = -\frac{d\Phi}{dt}$ . Во всех витках этой катушки ЭДС

$$e = We' = -\frac{d\Phi W}{dt}.$$

Произведение  $\Phi W = \Psi$  называется *потокосцеплением*.

Тогда ЭДС, индуцированная переменным магнитным потоком в катушке, будет определяться:

$$e = -\frac{d\Psi}{dt}. \quad (9.8)$$

Таким образом, *ЭДС электромагнитной индукции в катушке равна скорости изменения потокосцепления в ней, взятой с обратным знаком.* Знак «минус» является отражением правила Ленца.

#### 9.4. Явление и ЭДС самоиндукции

Если по катушке с числом витков  $W$  (рис. 9.8а) проходит ток  $I$ , то этот ток создает в катушке магнитный поток  $\Phi$ , величина которого пропорциональна току. Очевидно, пропорционально этому току и потокосцепление  $\Psi = \Phi W$ .

Следовательно, отношение  $\frac{\Psi}{I}$  для данной катушки — величина постоянная. Эта постоянная величина обозначается буквой  $L$  и называется индуктивностью катушки:

$$L = \frac{\Psi}{I} \quad (9.9)$$

Таким образом, индуктивность  $L$  является параметром определенной катушки, а также параметром любого проводника и контура.

Единицей индуктивности  $L$  является генри:

$$[L] = \left[ \frac{\Psi}{I} \right] = \frac{Вб}{А} = \frac{В \cdot с}{А} = Ом \cdot с = Гн \text{ (генри)}.$$

Магнитный поток, созданный в катушке (рис. 9.8а) с числом витков  $W$  током  $I$ , будет равен согласно (8.1)

$$\Phi = \mu_0 \mu_r \frac{IW}{\ell} S.$$

Тогда потокосцепление  $\Psi = \Phi W = \mu_0 \mu_r \frac{IW^2}{\ell} S.$

Индуктивность катушки определяется выражением

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu_0 \mu_r \frac{W^2}{\ell} S. \quad (9.10)$$

Таким образом, индуктивность катушки пропорциональна квадрату числа витков катушки и зависит от габаритов и материала магнитопровода этой катушки.

Изменять индуктивность катушки можно изменением магнитной проницаемости магнитопровода  $\mu_a = \mu_0 \mu_r$ : при разомкнутом магнитопроводе катушки сердечник можно вставлять или вынимать из катушки, а при замкнутом сердечнике из ферромагнитного материала можно изменять ток катушки (рис. 8.4).

Если по катушке с индуктивностью  $L$  (рис. 9.8б) пропустить переменный ток  $i$ , то он создает в катушке переменный магнитный поток, который индуцирует в витках катушки ЭДС самоиндукции  $e_L$ .

Явление наведения ЭДС самоиндукции в проводнике, контуре или катушке, вызванное изменением тока в самом проводнике, контуре или катушке, называется явлением самоиндукции.

ЭДС самоиндукции в катушке можно определить, используя выражения (9.8) и (9.9):

$$e_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{dLi}{dt} = -L \frac{di}{dt}.$$

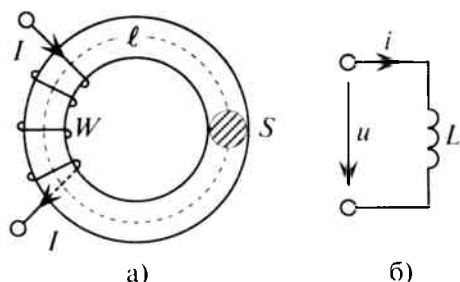


Рис. 9.8

Таким образом, ЭДС самоиндукции  $e_L$  в проводнике, контуре или катушке пропорциональна скорости изменения тока в этом проводнике, контуре или катушке, взятой со знаком «минус», т. е.

$$e_L = -L \frac{di}{dt}. \quad (9.11)$$

Знак «минус» отражает здесь правило Ленца, которое в данном случае можно сформулировать так: *индуктированный в катушке ток, вызванный ЭДС самоиндукции, противодействует изменению тока, вызвавшего эту ЭДС.*

Так, например, если ток  $i$  катушки увеличивается, то ЭДС самоиндукции (индуктированный ток) противодействует этому увеличению; если же ток  $i$  катушки уменьшается, то индуктированный ток противодействует его уменьшению.

Из формулы (9.11) видно, что индуктивность  $L$  как параметр проводника, контура и катушки характеризует их с точки зрения наведения в них ЭДС самоиндукции, т. е. чем больше индуктивность  $L$ , тем больше ЭДС самоиндукции в них при неизменной скорости изменения тока.

Если по катушке с индуктивностью  $L$  проходит ток  $I$ , то в магнитном поле этой катушки накапливается энергия, величина которой определяется:

$$W_{\text{магн}} = \frac{I^2 L}{2}. \quad (9.12)$$

### 9.5. Явление и ЭДС взаимной индукции

Если две или несколько катушек расположить так, что магнитный поток одной из них пронизывает витки остальных, то такие катушки называют магнитосвязанными.

Если по одной из магнитосвязанных катушек, например первой  $W_1$  (рис. 9.9а), пропустить ток  $i_1$ , то он создает в этой катушке магнитный поток  $\Phi_1$ , пропорциональный  $i_1$ , часть которого  $\Phi_{1,2}$  пронизывает витки второй катушки  $W_2$ , создавая потокосцепление  $\Psi_{1,2} = \Phi_{1,2} W_2$ , пропорциональное  $i_1$ . Часть магнитного потока  $\Phi_1$  рассеивается  $\Phi_p$ .

Если по второй катушке  $W_2$  (рис. 9.9а) проходит ток  $i_2$ , то он создает в ней магнитный поток  $\Phi_2$ , пропорциональный  $i_2$ , часть которого  $\Phi_{2,1}$  пронизывает витки первой катушки  $W_1$ , создавая потокосцепление  $\Psi_{2,1} = \Phi_{2,1} W_1$ , пропорциональное  $i_2$ .

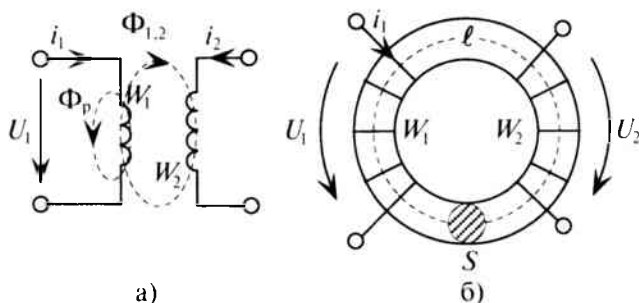


Рис. 9.9

Следовательно, для двух магнитосвязанных катушек отношение

$$\frac{\Psi_{1,2}}{i_{1,2}} = \frac{\Psi_{2,1}}{i_{2,1}} = M \quad (9.13)$$

есть величина постоянная, обозначается буквой  $M$  и называется взаимной индуктивностью этих катушек.

Взаимная индуктивность  $M$  — это параметр магнитосвязанных проводников, контуров или катушек.

Взаимная индуктивность  $M$  измеряется в генри

$$[M] = \left[ \frac{\Psi}{I} \right] = \frac{В \cdot с}{А} = Ом \cdot с = Гн.$$

Если на магнитопроводе неразветвленной магнитной цепи (рис. 9.9б) расположены две катушки  $W_1$  и  $W_2$ , то при отсутствии рассеивания (магнитный поток каждой катушки полностью замыкается в магнитопроводе и пронизывает другую катушку) взаимная индуктивность этих катушек определяется выражением

$$M = \frac{\Psi_{1,2}}{i_1} = \frac{\Phi_{1,2} W_2}{i_1} = \mu_0 \mu_r \frac{W_1 W_2}{\ell} S, \quad (9.14)$$

где  $\ell$  — общая длина магнитопровода;  $S$  — сечение магнитопровода;  $\Phi_{1,2} = \mu_0 \mu_r \frac{i_1 W_1}{\ell} S = \Phi_1$  (согласно выражению (8.1)).

Таким образом, взаимная индуктивность двух магнитосвязанных катушек пропорциональна произведению числа витков этих катушек и зависит от габаритов и материала магнитопровода, на котором расположены эти катушки.

Каждая из рассмотренных магнитосвязанных катушек (рис. 9.9б) обладает индуктивностью (см. (9.10))

$$L_1 = \mu_0 \mu_r \frac{W_1^2}{\ell} S; \quad L_2 = \mu_0 \mu_r \frac{W_2^2}{\ell} S.$$

Произведение этих индуктивностей будет равно

$$L_1 L_2 = \mu_0^2 \mu_r^2 \frac{W_1^2 W_2^2}{\ell^2} S^2 = M^2. \quad (9.15)$$

Следовательно, при отсутствии рассеяния величина взаимной индуктивности

$$M = \sqrt{L_1 L_2}.$$

В общем случае

$$M = K \sqrt{L_1 L_2}. \quad (9.16)$$

Коэффициент  $K$  называют коэффициентом связи двух магнитосвязанных катушек

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (9.17)$$

*Коэффициент связи  $K$  показывает, какая часть созданного катушками магнитного потока пронизывает одновременно обе магнитосвязанные катушки.*

Коэффициент связи может изменяться от нуля до единицы, т. е.  $0 \leq K \leq 1$ . При отсутствии рассеяния магнитного потока  $K = 1$ , а при отсутствии магнитной связи  $K = 0$ .

Если по одной из магнитосвязанных катушек (рис. 9.9б), например первой, пропустить переменный ток  $i_1$ , то он создает в ней переменный магнитный поток  $\Phi_1$ , часть которого  $\Phi_{1,2}$  пронизывает витки второй катушки  $W_2$  и индуцирует в них ЭДС взаимоиндукции  $e_{M2}$ .

*Явление наведения ЭДС взаимоиндукции в одной из магнитосвязанных катушек, вызванное изменением тока в другой катушке, называется явлением взаимоиндукции.*

ЭДС взаимоиндукции во второй катушке будет равна

$$e_{M2} = -\frac{d\psi_{1,2}}{dt} = -\frac{dMi_1}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}. \quad (9.18)$$

То есть ЭДС взаимоиндукции в одной из магнитосвязанных катушек пропорциональна скорости изменения тока в другой катушке со знаком «минус».

Следовательно

$$e_{M1} = -M \frac{di_2}{dt}. \quad (9.19)$$

Знак «минус» отражает правило Ленца.

Взаимная индуктивность  $M$  как параметр взаимосвязанных проводников, контуров и катушек характеризует явление взаимной индукции с точки зрения наведения ЭДС взаимной индукции в одном элементе (катушке 2), вызванное изменением тока в другом элементе (катушке 1), магнитосвязанном с ним.

Явление взаимной индукции лежит в основе работы электрических трансформаторов.

Приложенное к первичной обмотке трансформатора напряжение  $U_1$  уравновешивается падением напряжения на обмотке  $i_1 R_1$ , ЭДС самоиндукции этой обмотки  $e_{L1} = -L \frac{di_1}{dt}$  и ЭДС взаимной индукции в той же обмотке  $e_{M1} = -M \frac{di_2}{dt}$  (см. рис. 9.9б).

Применяя второй закон Кирхгофа (для мгновенных значений), можно записать для первичной обмотки

$$U_1 + e_{L1} + e_{M1} = i_1 R_1 \text{ или } U_1 = i_1 R_1 - e_{L1} - e_{M1}.$$

Тогда

$$U_1 = i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}. \quad (9.20)$$

По аналогии можно записать выражение для определения напряжения  $U_2$  на вторичной обмотке, к которой подключается потребитель:

$$U_2 = i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}. \quad (9.21)$$

Перед ЭДС взаимной индукции в (9.20) и (9.21) может стоять знак «минус», если имеет место встречное включение, т. е.  $e_L$  и  $e_M$  в обмотке направлены в разные стороны.

Как видно, в обмотках трансформатора имеет место явление электромагнитной индукции, самоиндукции и взаимной индукции. Чем же отличаются эти явления?

Природа всех этих явлений одинакова — переменный магнитный поток индуцирует в проводнике, контуре или катушке переменную ЭДС. Если происхождение этого потока произвольно, то он индуцирует ЭДС электромагнитной индукции  $e$ . Если этот магнитный поток создан током, проходящим по самому проводнику, контуру или катушке, то он индуцирует ЭДС самоиндук-



ции  $e_L$ . Если магнитный поток создан током, проходящим по одному элементу цепи (например, первому контуру) магнитосвязанному с другим элементом цепи (например, вторым контуром), то он наводит во втором контуре ЭДС взаимной индукции  $e_M$ .

### 9.6. Вихревые токи

Сердечники якоря и полюсов электрических машин, трансформаторов, дросселей и других аппаратов, по обмоткам которых проходит переменный ток, выполняются обычно из электротехнической стали, представляющей собой ферромагнитный материал и одновременно проводник.

Переменный ток в обмотках массивных сердечников (рис. 9.10а)

создает в этих сердечниках переменный магнитный поток  $\Phi$ , направленный вдоль сердечника перпендикулярно площади его поперечного сечения. Переменный магнитный поток в каждом сечении сердечника индуцирует ЭДС электромагнитной индукции. Эта ЭДС в каждом слое массивного сердечника создает токи, которые замыкаются в этом слое проводящего материала (рис. 9.10а).

Эти токи называются вихревыми токами.

Между вихревыми токами в каждом слое массивного сердечника и током  $I$ , создающим эти токи, существует не электрическая, а электромагнитная связь.

Вихревые токи вызывают нагрев стальных сердечников электромагнитных аппаратов

и снижают их КПД за счет потерь энергии, которая тратится на нагрев.

Потери, вызванные вихревыми токами в токопроводящих сердечниках, называются потерями на вихревые токи. Для уменьшения потерь на вихревые токи стальные сердечники, по обмоткам которых проходит переменный ток, выполняют из листовой стали (рис. 9.10б). Для этой цели используются тонкие листы толщиной 0,35 или 0,5 мм, малое сечение которых создает большое сопротивление вихревым токам (см. (2.5)) и уменьшает их. Для

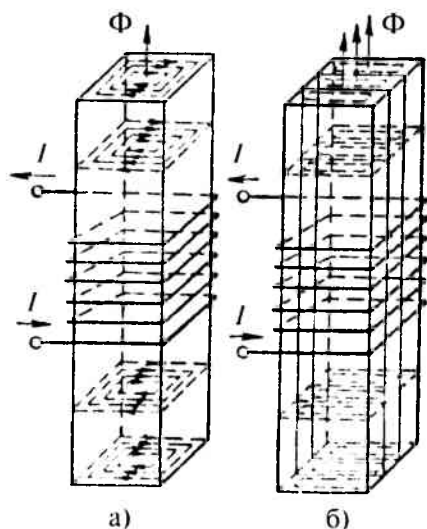


Рис. 9.10

уменьшения вихревых токов листы стали изолируются друг от друга специальным лаком. Кроме того, для ослабления вихревых токов, а следовательно, и потерь на них в электротехническую сталь вводится кремний, благодаря чему увеличивается удельное сопротивление, а следовательно, и сопротивление сердечника в целом (см. (2.8)).

Направление вихревых токов в сердечниках определяют по правилу Ленца.

Вихревые токи применяются для индукционной плавки металлов, закалки стальных деталей (шестерен и коленчатых валов). В индукционных печах вихревые токи используют для нагревания заготовок. Принцип действия индукционных приборов (электрических счетчиков) базируется на вихревых токах. Вихревые токи используются в электроизмерительных устройствах, в магнитоиндукционных успокоителях колебаний некоторых приборов.

## Глава 10

# ОДНОФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

### 10.1. Основные понятия

Для получения, передачи и распределения электрической энергии применяются в основном устройства переменного тока: генераторы, трансформаторы, линии электропередачи и распределительные цепи переменного тока.

Постоянный ток, необходимый в некоторых областях народного хозяйства (транспорт, связь, электрохимия и др.), получают выпрямлением переменного тока.

*Переменным электрическим током называют ток, периодически изменяющийся по величине и направлению.*

*Основное достоинство переменного тока заключается в возможности трансформировать напряжение.* Кроме того, электрические машины переменного тока надежнее в работе, проще по устройству и эксплуатации.

Говоря о переменном токе, обычно имеют в виду синусоидальный переменный ток, т. е. ток, изменяющийся по синусоидальному закону. При синусоидальном токе ЭДС электромагнитной индукции, самоиндукции и взаимной индукции изменяются по синусоидальному закону.

Синусоидальный переменный ток проходит в замкнутой линейной электрической цепи под действием синусоидальной ЭДС.

Рассмотрим получение синусоидальной ЭДС. Если в однородном магнитном поле с индукцией  $B$  равномерно со скоростью  $V$  вращается рамка (рис. 10.1), то в каждой активной стороне этой рамки длиной  $\ell$  индуцируется ЭДС электромагнитной индукции, которая согласно (9.3) будет равна

$$e = BV\ell \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол, под которым активный проводник рамки пересекает магнитное поле (угол между  $\vec{B}$  и  $\vec{V}$ ), или угол поворота рамки относительно нейтральной плоскости  $NN'$ , как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

Плоскость  $NN'$  называется нейтральной, т. к. ЭДС в рамке, расположенной в этой плоскости, равна нулю ( $\alpha = 0$ , следовательно,  $\sin \alpha = 0$ ).

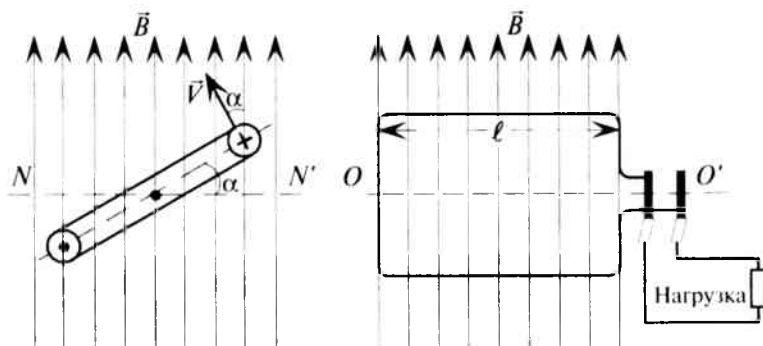


Рис. 10.1

Так как  $BV\ell$  — величина постоянная по условию, то  $e$  пропорциональна  $\sin \alpha$ , т.е. ЭДС в этой рамке, при вращении ее вокруг оси  $OO'$ , изменяется по синусоидальному закону. Если к этой рамке подключить нагрузку (потребитель), то в замкнутой цепи (рис. 10.1) пойдет ток, который, как и ЭДС, изменяется по синусоидальному закону. Поэтому такой ток и называется синусоидальным.

Синусоидальная ЭДС  $e = f(\alpha)$  изображена на графике рис. 10.2. Этот график принято называть «волновая диаграмма». (Если изменяющаяся величина изображена в зависимости от времени  $e = f(t)$ , то ее называют «временная диаграмма».) На этой диаграм-

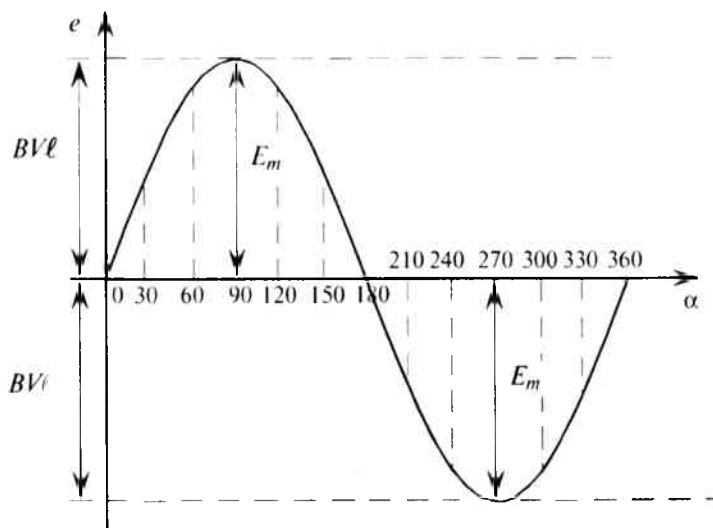


Рис. 10.2

ме синусоида ограничивает величины ЭДС (ординаты) при различных углах поворота рамки относительно нейтральной плоскости  $NN'$ . Как видно, синусоидальная ЭДС изменяется по величине и направлению.

## 10.2. Величины, характеризующие синусоидальную ЭДС

**Амплитуда** — это максимальное значение периодически изменяющейся величины.

Обозначаются амплитуды прописными буквами с индексом  $m$ , т. е.  $E_m$ ,  $U_m$  и  $I_m$ .

Нетрудно видеть (рис. 10.2), что ЭДС достигает своих амплитудных значений тогда, когда рамка повернется на угол  $\alpha = 90^\circ$  или на угол  $\alpha = 270^\circ$ , так как  $|\sin 90^\circ| = |\sin 270^\circ| = 1$ . Следовательно,  $E_m = BV\ell$ .

Тогда

$$e = E_m \sin \alpha. \quad (10.1)$$

**Период** — это время, в течение которого переменная величина делает полный цикл своих изменений, после чего изменения повторяются в той же последовательности.

Обозначается период буквой  $T$  и измеряется в секундах, с (сек) т. е.  $[T] = \text{с}$ .

Значение ЭДС через каждый период определяется следующим равенством (рис. 10.3):

$$e(t_1) = e(t_1 + T) = e(t_1 + kT),$$

где  $k$  — целое число.

На рис. 10.3 изображена временная диаграмма синусоидальной ЭДС при вращении рамки в магнитном поле.

**Частота** — число периодов в единицу времени, т. е. величина, обратная периоду.

Обозначается частота буквой  $f$ ,  $f = \frac{1}{T}$ , и измеряется в герцах (Гц):

$$[f] = \left[ \frac{1}{T} \right] = \frac{1}{\text{с}} = \text{Гц}$$

Стандартной частотой в электрических сетях России является частота  $f = 50$  Гц. Для установок электронагрева используются частотами  $f = 50 \div 50 \cdot 10^6$  Гц ( $1 \cdot 10^6$  Гц = 1 МГц — мегагерц).

При частоте  $f = 50$  Гц, т. е. 50 периодов в секунду, период

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ с.}$$

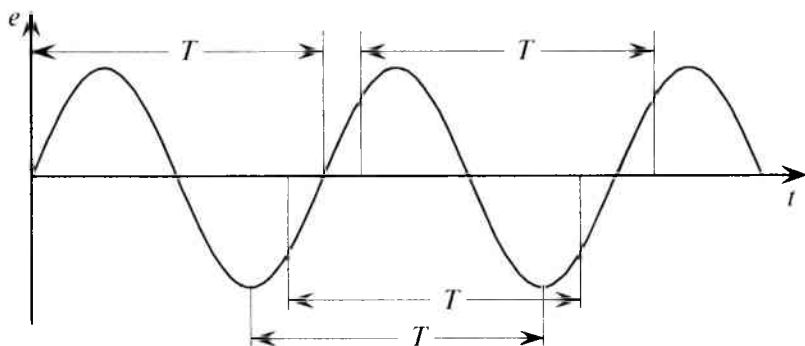


Рис. 10.3

**Угловая частота** (угловая скорость) характеризуется углом поворота рамки в единицу времени.

Обозначается угловая частота буквой  $\omega$  (омега):

$$\omega = \frac{\alpha}{t}. \quad (10.2)$$

Измеряется угловая частота в единицах радиан в секунду (рад/с), так как угол измеряется в радианах (рад).

За время одного периода  $T$  рамка повернется на угол  $360^\circ = 2\pi$  рад. Следовательно, угловую частоту можно выразить следующим образом:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \quad (10.3)$$

**Мгновенное значение** — это значение переменной величины в любой конкретный момент времени.

Мгновенные значения обозначаются строчными буквами, т. е.  $e$ ,  $i$ ,  $u$ .

Из выражения (10.2) следует, что угол поворота рамки  $\alpha = \omega t$ , тогда мгновенные значения синусоидальных величин можно записать так:

$$e = E_m \sin \omega t; \quad i = I_m \sin \omega t; \quad u = U_m \sin \omega t. \quad (10.4)$$

Таким образом, любая синусоидальная величина характеризуется амплитудой и угловой частотой, которые являются постоянными для данной синусоиды. Следовательно, по формулам (10.4) можно определить синусоидальную величину в любой конкретный момент времени  $t$ , если известны амплитуда и угловая частота.

### Фаза и сдвиг фаз

Если в магнитном поле вращаются две жестко скрепленные между собой под каким-то углом одинаковые рамки (рис. 10.4а), т. е. амплитуды ЭДС  $E_m$  и угловые частоты  $\omega$  их одинаковы, то мгновенное значение их ЭДС можно записать в виде

$$e_1 = E_m \sin(\omega t + \Psi_1); \quad e_2 = E_m \sin(\omega t + \Psi_2), \quad (10.5)$$

где  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  — углы, определяющие значения синусоидальных величин  $e_1$  и  $e_2$  в начальный момент времени ( $t=0$ ), т. е.

$$e_{01} = E_m \sin \Psi_1; \quad e_{02} = E_m \sin \Psi_2.$$

Поэтому эти углы  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  называют начальными фазами синусоид.

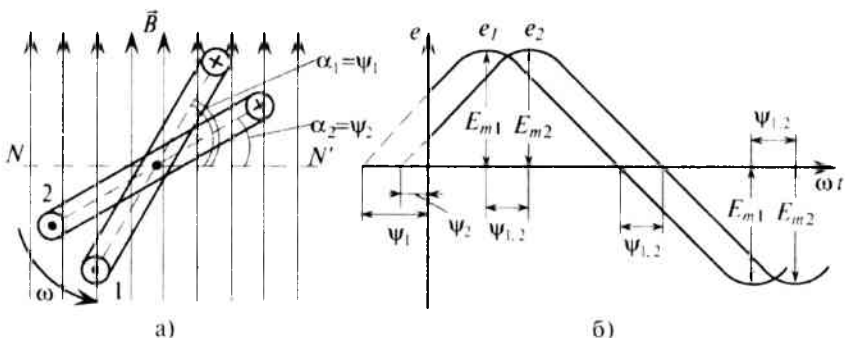


Рис. 10.4

Начальные фазы  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  этих ЭДС различны.

Таким образом, согласно (10.5) каждая синусоидальная величина характеризуется амплитудой  $E_m$ , угловой частотой  $\omega$  и начальной фазой  $\Psi$ . Для каждой синусоиды эти величины ( $E_m$ ,  $\omega$  и  $\Psi$ ) являются постоянными. В выражениях (10.4) начальные фазы  $\Psi$  синусоид равны нулю ( $\Psi = 0$ ).

Величина  $(\omega t + \Psi)$  называется фазой синусоиды.

Разность начальных фаз двух синусоидальных величин одинаковой частоты определяет угол сдвига фаз этих величин:

$$\Psi_{1,2} = \Psi_1 - \Psi_2. \quad (10.6)$$

При вращении против часовой стрелки (рис. 10.4а) ЭДС в первой рамке достигает амплитудного и нулевого значения раньше, чем во второй, т. е.  $e_1$  опережает по фазе  $e_2$  или  $e_2$  отстает по фазе

от  $e_1$  (рис. 10.4б). Угол сдвига фаз  $\Psi_{1,2}$  показывает, на какой угол одна синусоидальная величина опережает или отстает от другой (т. е. достигает своих амплитудных и нулевых значений раньше или позже).

Две синусоидальные величины одинаковой частоты, достигающие одновременно своих амплитудных (одного знака) и нулевых значений, считаются совпадающими по фазе (рис. 10.5а).

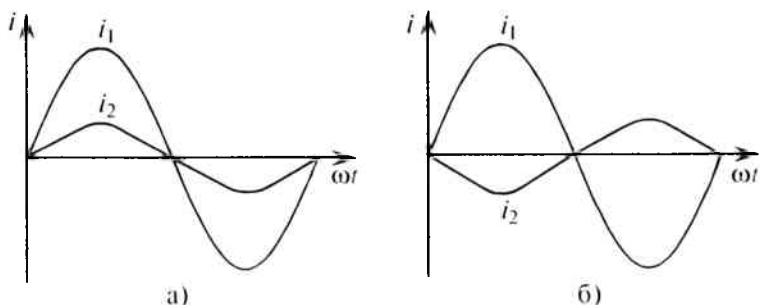


Рис. 10.5

Если две синусоиды одинаковой частоты достигают одновременно своих нулевых и амплитудных значений разных знаков (рис. 10.5б), то они находятся в противофазе.

Время, на которое одна синусоидальная величина опережает или отстает от другой, характеризует время сдвига фаз  $t_{1,2} = \frac{\Psi_{1,2}}{\omega}$ , которое можно выразить через период  $T$  и частоту  $f$  синусоиды следующим образом:

$$t_{1,2} = \frac{\Psi_{1,2}}{\omega} = \frac{\Psi_{1,2}}{2\pi f} = \frac{\Psi_{1,2}}{2\pi} T. \quad (10.7)$$

### 10.3. Среднее и действующее значения переменного тока

Кроме амплитудных и мгновенных значений переменный ток, напряжение, ЭДС характеризуются еще средними и действующими (эффективными) значениями.

#### Среднее значение переменного тока

Среднее значение переменного тока равно величине такого постоянного тока, при котором через поперечное сечение проводника проходит то же количество электричества  $Q$ , что и при переменном токе.



Таким образом, среднее значение переменного тока эквивалентно постоянному току по количеству электричества  $Q$ , проходящему через поперечное сечение проводника в определенный промежуток времени.

Средние значения переменных величин обозначаются прописными буквами с индексом «с», т. е.  $I_c$ ,  $U_c$ ,  $E_c$ .

Если ток изменяется по синусоидальному закону, то за половину периода через поперечное сечение проводника проходит определенное количество электричества  $Q$  в определенном направлении, а за вторую половину периода через то же сечение проходит то же количество электричества в обратном направлении. Таким образом, среднее значение синусоидального тока за период равно нулю, т. е.  $I_c = 0$ .

Поэтому для синусоидального переменного тока определяется его среднее значение за половину периода  $T/2$ , т. е.

$$I_c = \frac{Q}{T/2}.$$

Из выражения (2.1) значение переменного тока  $i = \frac{dQ}{dt}$ , откуда  $Q = \int idt$ . Следовательно, среднее значение синусоидального тока  $i = I_m \sin \omega t$  с начальной фазой  $\Psi = 0$  за полупериод определяется (рис. 10.6) выражением

$$I_c = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} I_m = 0,637 I_m,$$

где  $\omega = 2\pi f$ , а  $T = 1/f$ .

Графически среднее за полупериод значение синусоидального тока равно высоте прямоугольника с основанием, равным  $T/2$ , и площадью, равной площади, ограниченной кривой тока и осью абсцисс за половину периода (рис. 10.6).

Под средним значением переменной величины понимают постоянную составляющую этой величины.

Средние значения синусоидального напряжения и ЭДС за полупериод можно определить по аналогии с током.

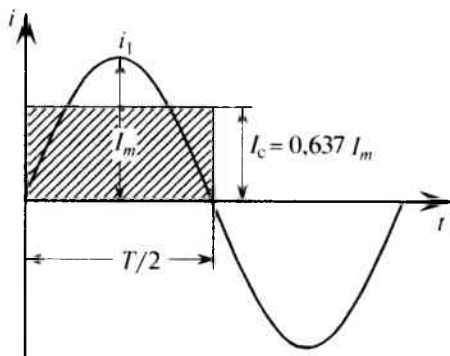


Рис. 10.6

$$\begin{aligned}
 U_c &= \frac{2}{\pi} U_m = 0,637 U_m ; & E_c &= \frac{2}{\pi} E_m = 0,637 E_m ; \\
 I_c &= \frac{2}{\pi} I_m = 0,637 I_m .
 \end{aligned}
 \tag{10.8}$$

### Действующее значение переменного тока

Действующее (или эффективное) значение переменного тока — это значение переменного тока, эквивалентное постоянному току по тепловому действию.

Действующее значения переменных величин обозначается прописными буквами без индексов:  $I$ ,  $U$ ,  $E$ .

Действующее значение переменного тока  $I$  равно величине такого постоянного тока, которое за время, равное одному периоду переменного тока  $T$ , выделит в том же сопротивлении  $R$  такое же количество тепла, что и переменный ток  $i$ :

$$I^2 RT = \int_0^T i^2 R dt.$$

Откуда действующее значение переменного тока

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt \quad \text{или} \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}.$$

Если переменный ток изменяется по синусоидальному закону с начальной фазой, равной нулю, т. е.  $i = I_m \sin \omega t$ , то действующее значение такого синусоидального тока будет равно

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{1,41} = 0,707 I_m .$$

Действующее значение синусоидального тока в  $\sqrt{2} = 1,41$  раза меньше его амплитудного значения. Так же можно определить действующие значения синусоидального напряжения и ЭДС.

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 U_m ; & E &= \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 0,707 E_m ; \\
 I &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m .
 \end{aligned}
 \tag{10.9}$$

Номинальные значения тока и напряжения в электрических цепях и устройствах выражаются их действующими значениями.

Так, например, стандартные напряжения электрических сетей  $U = 127$  В или  $U = 220$  В выражают действующие значения этих напряжений. А изоляцию необходимо рассчитывать на амплитудное значение этих напряжений, т. е.

$$U_m = 127 \cdot \sqrt{2} = 179 \text{ В} \quad \text{или} \quad U_m = 220 \cdot \sqrt{2} = 310 \text{ В}.$$

При расчете цепей переменного тока и их исследованиях чаще всего пользуются действующими (эффективными) значениями тока, напряжения и ЭДС.

На шкалах измерительных приборов переменного тока указывается действующее значение переменного тока или напряжения.

Именно действующие значения тока, напряжения и ЭДС указываются в технической документации, если нет специальных оговорок.

### Коэффициенты формы и амплитуды

Отклонения кривых тока, напряжения и ЭДС от синусоиды характеризуются коэффициентами формы  $K_\Phi$  и амплитуды  $K_a$ .

Коэффициент формы  $K_\Phi$  определяется отношением действующего значения переменной величины к ее среднему значению:

$$K_\Phi = \frac{I}{I_c}. \quad (10.10)$$

Коэффициент формы необходимо учитывать при проектировании и изучении выпрямительных устройств и электрических машин.

Для синусоидальных величин коэффициент формы будет равен

$$K_\Phi = \frac{I_m \pi}{\sqrt{2} \cdot 2 I_m} = 1,11.$$

Коэффициент амплитуды  $K_a$  определяется отношением амплитудного значения переменной величины к ее действующему значению:

$$K_a = \frac{I_m}{I}. \quad (10.11)$$

Для синусоидальных величин коэффициент амплитуды равен

$$K_a = \frac{I \cdot \sqrt{2}}{I} = \sqrt{2} = 1,41.$$

Чем больше коэффициент формы и коэффициент амплитуды отличается от значений  $K_\Phi = 1,11$  и  $K_a = 1,41$ , тем больше рассматриваемая кривая отличается от синусоиды. Так, например, если

$K_a > 1,41$ , то исследуемая кривая имеет более острую форму, чем синусоида, а если  $K_a < 1,41$ , то более тупую.

График прямоугольной формы имеет коэффициент амплитуды  $K_a = 1$ .

### 10.4. Векторные диаграммы

Для наглядности синусоидальные величины изображают векторами, вращающимися против часовой стрелки со скоростью, равной угловой частоте  $\omega$  этих синусоид. Так как эти векторы изображают синусоиды в начальный момент времени ( $t = 0$ ), то они неподвижны. Длина вектора в выбранном масштабе определяется амплитудой синусоиды, а угол поворота вектора против часовой стрелки относительно положительного направления оси абсцисс равен начальной фазе синусоиды. Таким образом, вектор учитывает все значения, характеризующие синусоидальную величину, — амплитуду, угловую частоту и начальную фазу.

Например, три синусоидальные ЭДС одинаковой частоты

$$e_1 = E_{m1} \sin(\omega t + 45^\circ),$$

$$e_2 = E_{m2} \sin(\omega t),$$

$$e_3 = E_{m3} \sin(\omega t - 60^\circ)$$

можно изобразить векторами (рис. 10.7).

Совокупность нескольких векторов, изображающих синусоидальные величины одинаковой частоты в начальный момент времени, называется векторной диаграммой.

На векторной диаграмме (рис. 10.7) наглядно видны величины синусоид (амплитуды), их начальные фазы и углы сдвига фаз между ними. Очевидно, наибольшую амплитуду имеет ЭДС  $e_1$ , а наименьшую — ЭДС  $e_3$ . ЭДС  $e_1$  опережает по фазе ЭДС  $e_2$  на угол  $45^\circ$ , а ЭДС  $e_3$  отстает от ЭДС  $e_1$  по фазе на угол  $105^\circ$  и т. д.

Начало отсчета времени можно выбирать произвольно, т. е. один из векторов векторной диаграммы направляется произвольно, а остальные векторы (соответствующих длин) изображаются по отношению к нему под углами, равными углам сдвига фаз между ними (рис. 10.8). При указанном выборе ЭДС могут быть записаны так:

$$e_1 = E_{m1} \sin(\omega t),$$

$$e_2 = E_{m2} \sin(\omega t - 45^\circ),$$

$$e_3 = E_{m3} \sin(\omega t - 105^\circ).$$

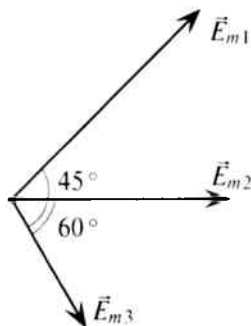


Рис. 10.7

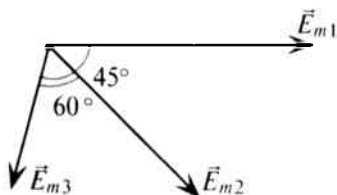


Рис. 10.8

При этом амплитуды ЭДС и углы сдвига фаз остаются неизменными (как и угловая частота), а меняются только начальные фазы синусоид, изображенных на векторной диаграмме (рис. 10.7). В расчетах, если специально не оговорено, начальные фазы не играют роли.

### 10.5. Сложение синусоидальных величин

Сложение и вычитание синусоидальных величин одинаковой частоты можно осуществлять аналитически и графически. В результате такого сложения (вычисления) получается синусоида с той же частотой, с определенной амплитудой и определенной начальной фазой.

Аналитическое сложение предусматривает сложение мгновенных значений синусоидальных величин, выраженных аналитически, т. е.

$$e = e_1 + e_2 - e_3,$$

где  $e_1 = E_{m1} \sin(\omega t + \psi_1)$ ,  $e_2 = E_{m2} \sin(\omega t - \psi_2)$ ,  $e_3 = E_{m3} \sin(\omega t)$ °

Тогда

$$e = E_{m1} \sin(\omega t + \psi_1) + E_{m2} \sin(\omega t - \psi_2) - E_{m3} \sin(\omega t) = \dots \\ \dots = E_m \sin(\omega t \pm \psi).$$

Математический анализ позволяет определить суммарную ЭДС  $e$  и ее аналитическое выражение.

Графическое сложение можно осуществлять по: 1) волновым (временным) диаграммам и 2) векторным диаграммам.

1. Графическое сложение по временным диаграммам (рис. 10.9) осуществляется следующим образом: ординаты суммарной синусоиды определяются сложением ординат слагаемых синусоид в различные моменты времени.

Как видно, в рассматриваемом примере амплитуда суммарной синусоиды не равна алгебраической сумме амплитуд слагаемых синусоид. Начальная фаза суммарной синусоиды также не является результатом арифметических действий, т. е. по временным диаграммам производятся только графические действия.

2. Графическое сложение по векторным диаграммам осуществляется в следующей последовательности. Прежде всего необходимо построить векторную диаграмму слагаемых синусоидальных величин (рис. 10.10а).

Определение вектора, изображающего суммарную синусоиду, осуществляется сложением векторов слагаемых синусоид

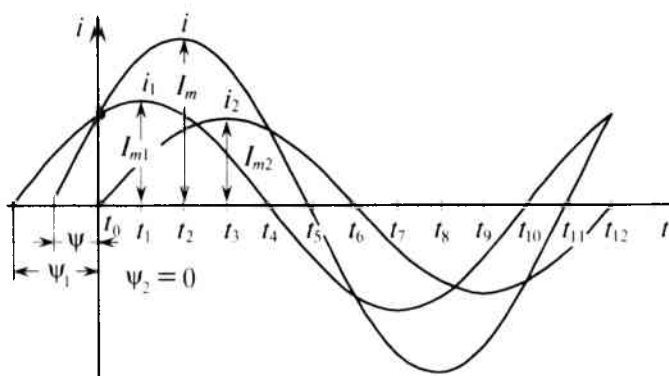


Рис. 10.9

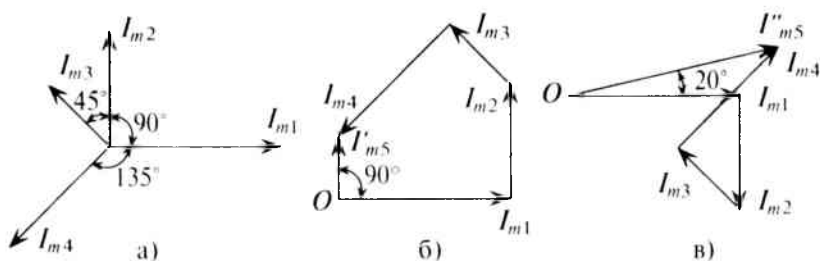


Рис. 10.10

по правилу многоугольника, т. е. из какой-либо точки  $O$  изображают вектор, соответствующий первой слагаемой синусоиде (рис. 10.10б), из конца этого вектора изображают вектор, соответствующий второй слагаемой синусоиде, и т. д.

Вектор, соответствующий суммарной синусоиде, проводят из точки  $O$  к концу последней слагаемой синусоиды.

Этот вектор (рис. 10.10б), в масштабе изображения слагаемых синусоид, соответствует амплитуде суммарной синусоиды  $I_m$ . Угол поворота этого вектора против часовой стрелки относительно положительного направления оси абсцисс соответствует положительному значению начальной фазы  $\psi$  суммарной синусоиды. Угловая частота суммарной синусоиды равна частоте слагаемых синусоид.

Вычитание синусоидальной величины равносильно умножению этой величины на отрицательную единицу ( $-1$ ), что соответствует повороту вектора этой величины на  $180^\circ$  (рис. 10.10в).

Сложение и вычитание синусоидальных величин по векторным диаграммам рассматривается в примере 10.1.

### Пример 10.1

Заданы мгновенные значения четырех токов:

$$i_1 = 3 \sin 314t;$$

$$i_2 = 2 \sin (314t + 90^\circ);$$

$$i_3 = 1,5 \sin (314t + 135^\circ);$$

$$i_4 = 2,5 \sin (314t - 135^\circ).$$

Определить:

1) суммарный ток при условии  $i_{\Sigma 1} = i_1 + i_2 + i_3 + i_4$ ;

2) суммарный ток при условии  $i_{\Sigma 2} = i_1 - i_2 + i_3 - i_4$ ;

3) частоту  $f$  всех синусоид.

### Решение

Для построения векторной диаграммы слагаемых токов задаются определенным масштабом токов  $M_I$  (например,  $M_I = 1 \text{ А/см}$ ). В этом масштабе построена векторная диаграмма токов на рис. 10.10а.

1. Для определения суммарного тока производится сложение векторов по правилу многоугольника (рис. 10.10б). Суммарный ток в результате сложения будет равен  $i_{\Sigma 1} = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 1,5 \sin (314t + 90^\circ)$ . Амплитуда суммарного тока  $I_m = 1,5 \text{ А}$  определена из многоугольника в выбранном масштабе, а начальная фаза его измерена транспортиром  $\Psi = 90^\circ$ .

2. Построение многоугольника для заданного условия показано на рис. 10.10в. Из многоугольника определяется результирующий ток

$$i_{\Sigma 2} = i_1 - i_2 + i_3 - i_4 = 3,75 \sin (314t + 20^\circ).$$

3. Частота слагаемых и результирующих токов будет равна

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3,14}{6,28} = 50 \text{ Гц}$$

В заключение можно сделать вывод, что самым удобным и, следовательно, распространенным методом сложения синусоидальных величин является метод графического сложения по векторным диаграммам. Этот метод и будет использован при расчете электрических цепей однофазного и трехфазного тока, изменяющегося по синусоидальному закону.

Так как действующие значения синусоидальных величин пропорциональны их амплитудным значениям (см. (10.9)), то вектор,

выражающий в определенном масштабе амплитудное значение, в другом масштабе представляет действующее значение той же величины. Исходя из этого, *в дальнейшем на векторных диаграммах будут изображаться векторы, в определенном масштабе представляющие не амплитудное, а действующее значение синусоидальной величины*, которое чаще всего используется при расчетах цепей переменного тока.



## Глава 11

### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА. ЭЛЕМЕНТЫ И ПАРАМЕТРЫ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

В общем случае цепь переменного тока характеризуется тремя параметрами: активным сопротивлением  $R$ , индуктивностью  $L$  и емкостью  $C$ . В технике часто применяются цепи переменного тока, в которых преобладает один или два из этих параметров.

*При анализе работы и расчетах цепей исходят из того, что для мгновенных значений переменного тока можно использовать все правила и законы постоянного тока.*

#### 11.1. Цепь с активным сопротивлением

Активным сопротивлением  $R$  обладают элементы, которые нагреваются при прохождении через них тока (проводники, лампы накаливания, нагревательные приборы и т. д.).

Если к активному сопротивлению  $R$  (рис. 11.1) приложено синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin \omega t$ , то и ток в этой цепи изменится по синусоидальному закону (рис. 11.1в):

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t,$$

где 
$$I_m = \frac{U_m}{R}. \quad (11.1)$$

Ток в цепи с активным сопротивлением совпадает по фазе с напряжением, так как начальные фазы их равны ( $\Psi_i = \Psi_u = 0$ ). Векторная диаграмма для цепи с активным сопротивлением изображена на рис. 11.1б, временная диаграмма изображена на рис. 11.1в.

Математическое выражение закона Ома для цепи переменного тока с активным сопротивлением имеет вид:

$$\boxed{I = \frac{U}{R}.} \quad (11.2)$$

Это вытекает из выражения (11.1), если левую и правую части уравнения разделить на  $\sqrt{2} = 1,41$ .

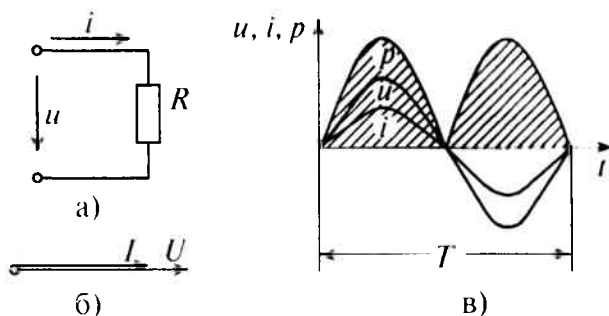


Рис. 11.1

Таким образом, действующее значение синусоидального тока  $I$  пропорционально действующему значению синусоидального напряжения  $U$  и обратно пропорционально сопротивлению  $R$  участка цепи, к которому приложено напряжение  $U$ . Такая интерпретация закона Ома справедлива как для мгновенных, так и для действующих и амплитудных значений синусоидального тока.

### Активная мощность

Мгновенная мощность в цепи с активным сопротивлением определяется произведением мгновенных значений напряжения и тока, т. е.  $p = ui$ . Это действие производится над кривыми тока и напряжения в определенном масштабе (рис. 11.1в). В результате получена временная диаграмма мгновенной мощности  $p$ .

Как видно из временной диаграммы, мощность в цепи с активным сопротивлением изменяется по величине, но не изменяется по направлению (рис. 11.1в). Эта мощность (энергия) необратима. От источника она поступает на потребитель и полностью преобразуется в другие виды мощности (энергии), т. е. потребляется. Такая потребляемая мощность называется активной.

Поэтому и сопротивление  $R$ , на котором происходит подобное преобразование, называется активным сопротивлением.

В цепи с активным сопротивлением мгновенная мощность характеризует скорость преобразования электрической энергии в другие виды энергии.

Количественно мощность в цепи с активным сопротивлением определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 p &= ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t = U_m I_m \sin^2 \omega t = \\
 &= \frac{U_m I_m}{2} - \frac{U_m I_m}{2} \cos 2 \omega t = UI - UI \cos 2 \omega t.
 \end{aligned}
 \quad (11.3)$$

Мгновенная мощность в цепи синусоидального тока с активным сопротивлением представляет собой сумму двух величин — постоянной мощности  $UI$  и переменной  $UI \cos 2\omega t$ , изменяющейся с двойной частотой.

Средняя за период мощность, равная постоянной составляющей мгновенной мощности  $UI$ , является активной мощностью  $P$ . Среднее за период значение переменной составляющей, как и всякой синусоидальной величины, равно нулю, то есть

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T UI \cos 2\omega t \, dt = 0.$$

Таким образом, величина активной мощности в цепи синусоидального тока с активным сопротивлением с учетом закона Ома определяется выражением:

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}, \quad (11.4)$$

где  $U$  — действующее значение напряжения;  $I$  — действующее значение тока.

Единицей активной мощности является ватт:

$$[P] = [UI] = \text{Вт}.$$

## 11.2. Поверхностный эффект и эффект близости

Сопротивление проводника постоянному току  $R_0$  называют омическим сопротивлением и определяют выражением (2.8)

$$R_0 = \rho \frac{\ell}{S}.$$

Сопротивление проводника переменному току  $R$  называют активным.

Оказывается, что сопротивление проводника переменному току больше его омического сопротивления за счет так называемого поверхностного эффекта и эффекта близости, т. е.  $R > R_0$ .

Увеличение активного сопротивления вызвано неодинаковой плотностью тока в различных сечениях проводника (рис. 11.2а).

На рис. 11.2а изображено магнитное поле проводника цилиндрического сечения. Если по проводнику проходит переменный ток, то он создает переменный магнитный поток внутри и вне проводника. Этот поток в различных сечениях проводника индуцирует ЭДС самоиндукции, которая, согласно правилу Ленца, противодействует изменению тока как причине создания ЭДС. Очевидно, центр проводника охвачен большим количеством магнитных линий (большее потокоцепление), чем слои, близкие к поверхности. Следовательно, в центре проводника ЭДС (сопротивление) больше, чем на поверхности проводника. Плотность

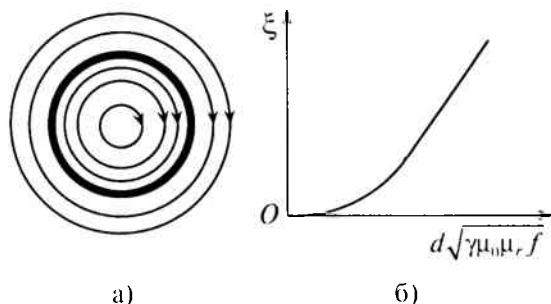


Рис. 11.2

тока на поверхности больше, чем в центре. Поэтому это явление и называется поверхностным эффектом.

Таким образом, поверхностный эффект уменьшает сечение проводника для переменного тока, а следовательно, увеличивает его активное сопротивление  $R$ .

Отношение активного сопротивления проводника к его омическому сопротивлению определяет коэффициент поверхностного эффекта  $\xi$  (кси)

$$\xi = \frac{R}{R_0}$$

График зависимости коэффициента поверхностного эффекта от диаметра проводника  $d$ , его удельной проводимости  $\gamma$ , магнитной проницаемости материала проводника  $\mu_0\mu_r$  и частоты переменного тока  $f$ , проходящего по проводнику, показан на рис. 11.2б.

При токах большой частоты  $f$  (радиочастотах) ток в центре проводника отсутствует. Поэтому такие проводники делают трубчатыми, т. е. полыми.

На величину активного сопротивления проводника  $R$  оказывает влияние и эффект близости.

Если токи в двух параллельных проводах, расположенных близко друг к другу, направлены в одну сторону, то элементы сечения проводников, удаленных на большее расстояние друг от друга, сцепляются с меньшим магнитным потоком и имеют большую плотность тока (заштриховано на рис. 11.3а), чем элементы сечения проводников, расположенные близко друг к другу.

Если же токи в близко расположенных параллельных проводах направлены в различные стороны, то большая плотность тока наблюдается в элементах сечения проводников, расположенных ближе друг к другу (заштриховано на рис. 11.3б).

Таким образом, эффект близости в проводниках также влияет на активное сопротивление проводников за счет наведения в рит-

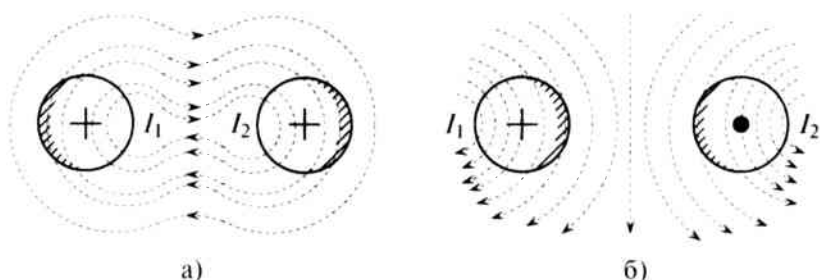


Рис. 11.3

личных элементах сечений проводников различных ЭДС взаимной индукции, направление которых определяется правилом Ленца.

### 11.3. Цепь с идеальной индуктивностью

Идеальной называют индуктивность  $L$  такой катушки, активным сопротивлением  $R$  и емкостью  $C$  которой можно пренебречь, т. е.  $R=0$  и  $C=0$ .

Если в цепи идеальной катушки индуктивностью  $L$  (рис. 11.4а) проходит синусоидальный ток  $i = I_m \sin \omega t$ , то этот ток создает в катушке синусоидальный магнитный поток  $\Phi = \Phi_m \sin \omega t$ , который индуцирует в катушке ЭДС самоиндукции, равную согласно (9.11)

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{dI_m \sin \omega t}{dt} = -I_m \omega L \cos \omega t = I_m \omega L \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (11.5)$$

так как  $(-\cos \omega t) = \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ .

Очевидно, эта ЭДС достигает своего амплитудного значения  $E_m$  тогда, когда  $\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 1$ :

$$E_m = I_m \omega L. \quad (11.6)$$

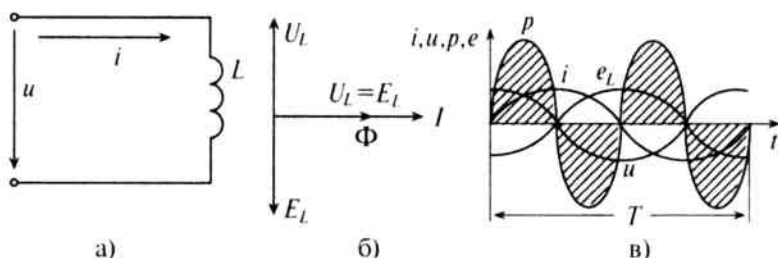


Рис. 11.4

Тогда

$$e_L = E_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (11.7)$$

Таким образом, ЭДС самоиндукции в цепи с идеальной индуктивностью  $L$ , как и ток, вызвавший эту ЭДС, изменяется по синусоидальному закону, но отстает от тока по фазе на угол  $90^\circ = \frac{\pi}{2}$  (рис. 11.4б, в).

По второму закону Кирхгофа для мгновенных значений можно записать

$$u + e_L = iR = 0. \quad (11.8)$$

Откуда  $u = -e_L$ .

Тогда напряжение, приложенное к цепи с идеальной индуктивностью (см. (11.5)):

$$u = -e_L = -I_m \omega L \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_m \omega L \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (11.9)$$

Очевидно, напряжение достигает своего амплитудного значения  $U_m$  тогда, когда  $\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ :

$$U_m = I_m \omega L. \quad (11.10)$$

Следовательно,

$$u = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (11.11)$$

Таким образом, напряжение, приложенное к цепи с идеальной индуктивностью, как и ток в этой цепи, изменяется по синусоидальному закону, но опережает ток по фазе на угол  $90^\circ = \frac{\pi}{2}$  (рис. 11.4б, в).

Резюмируя все вышесказанное, можно сделать вывод: для существования тока в цепи с идеальной индуктивностью необходимо приложить к цепи напряжение, которое в любой момент времени равно по величине, но находится в противофазе с ЭДС, вызванной этим током (рис. 11.4б, в).

Временная диаграмма (рис. 11.4в) еще раз иллюстрирует правило Ленца: ЭДС  $e_L$  противодействует изменению тока.

Если уравнение (11.10) разделить на  $\sqrt{2} = 1,41$ , то получается  $U = I\omega L$ , откуда

$$I = \frac{U}{\omega L}. \quad (11.12a)$$

Это уравнение (11.12a) и есть математическое выражение закона Ома для цепи синусоидального тока с идеальной индуктивностью. Очевидно, знаменатель этого уравнения есть не что иное, как сопротивление, которое называют индуктивным сопротивлением  $X_L$ .

Таким образом,

$$X_L = \omega L = 2\pi fL. \quad (11.13)$$

Закон Ома для этой цепи можно записать иначе:

$$I = \frac{U}{X_L}. \quad (11.126)$$

*Индуктивное сопротивление  $X_L$  — это противодействие, которое ЭДС самоиндукции  $e_L$  оказывает изменению тока.*

### Реактивная мощность в цепи с индуктивностью

Мгновенная мощность для цепи синусоидального тока с идеальной катушкой равна произведению мгновенных значений напряжения и тока

$$p = ui = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot I_m \sin \omega t = U_m I_m \sin \omega t \cdot \cos \omega t,$$

где  $\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \omega t$ .

Следовательно,  $p = U_m I_m \sin \omega t \cdot \cos \omega t$ .

Полученное уравнение умножают и делят на 2:

$$p = \frac{U_m I_m}{2} 2 \sin \omega t \cdot \cos \omega t = UI \sin 2\omega t. \quad (11.14)$$

Таким образом, *мощность в цепи синусоидального тока с идеальной катушкой индуктивности изменяется по синусоидальному закону с двойной частотой.*

Следовательно, среднее значение этой мощности за период  $P_c$ , как и любой синусоидальной величины, т. е. активная потребляемая мощность, в этой цепи равна нулю,  $P = 0$ .

Временная диаграмма (рис. 11.4в) подтверждает этот вывод. На диаграмме видно, что мгновенная мощность ( $p = ui$ ) в рассматриваемой цепи изменяется по синусоидальному закону с двойной частотой.

То есть в 1-ю и 3-ю четверти периода мощность (энергия) источника накапливается в магнитном поле индуктивности. Максимальное значение накапливаемой в магнитном поле идеальной катушки энергии по (9.12) равно

$$W_{mL} = \frac{I_m^2 L}{2}.$$

Во 2-ю и 4-ю четверти периода эта мощность (энергия) из магнитного поля идеальной катушки возвращается к источнику.

Таким образом, в цепи переменного тока с идеальной катушкой, мощность не потребляется ( $P=0$ ), а колеблется между источником и магнитным полем индуктивности, загружая источник и провода.

Такая колеблющаяся мощность (энергия), в отличие от активной, т. е. потребляемой, называется реактивной.

Обозначается реактивная мощность буквой  $Q$  и измеряется в варах, т. е.  $[Q] = \text{вар}$  (вольт-ампер реактивный).

Величина реактивной мощности в рассматриваемой цепи определяется выражением

$$Q_L = UI = I^2 X_L = \frac{U^2}{X_L}. \quad (11.15)$$

Так как реактивная мощность  $Q_L$  имеет место в цепи с индуктивным сопротивлением, то индуктивное сопротивление считается реактивным сопротивлением  $X$  индуктивного характера (индекс  $L$ ), т. е.  $X_L$ .

#### 11.4. Цепь с емкостью

Если конденсатор емкостью  $C$  подключить к источнику с постоянным напряжением  $U$  (рис. 11.5а), то ток зарядки конденсатора проходит в цепи очень короткое время, пока напряжение на конденсаторе  $U_C$  не станет равным напряжению источника  $U$ .

Ток в рассматриваемой цепи (рис. 11.5а) практически отсутствует (амперметр  $A$  покажет  $I=0$ ).

Если же конденсатор подключить к источнику с синусоидальным напряжением (рис. 11.5б), то ток в цепи конденсатора существует все время, пока цепь замкнута, и амперметр  $A$  покажет этот ток. Ток в цепи конденсатора, подключенного к источнику с синусоидальным напряжением, имеет место потому, что напряжение на конденсаторе  $U_C$  отстает по фазе от напряжения источника и при зарядке, и при разрядке конденсатора. Например, пока напряжение на конденсаторе достигает значения 1, напряжение источника достигнет значения 2 (рис. 11.5в), т. е. конденсатор заря-

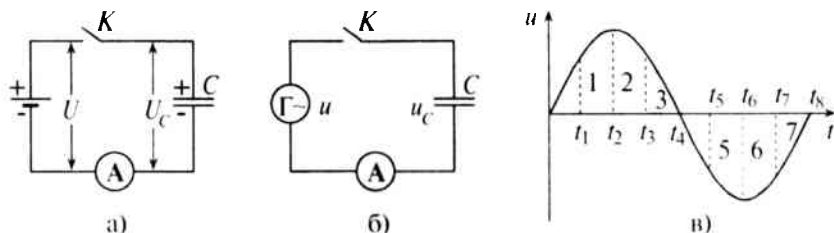


Рис. 11.5



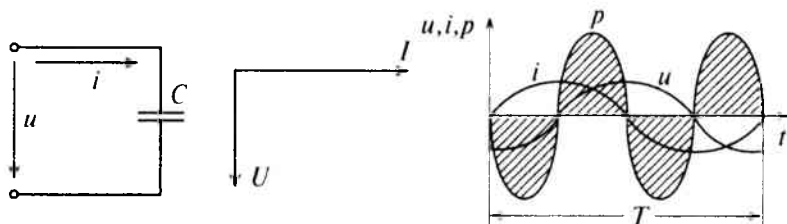


Рис. 11.6

жается; пока конденсатор зарядится до напряжения 2, напряжение источника уменьшится до напряжения 3 — конденсатор разряжается на источник и т. д. Однако ток проходит только в цепи конденсатора. Через диэлектрик конденсатора ток не проходит.

Таким образом, если к конденсатору емкостью  $C$  приложено синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin \omega t$ , то в цепи конденсатора проходит ток  $i$  (рис. 11.6а):

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} = C \frac{dU_m \sin \omega t}{dt} = U_m \omega C \cos \omega t = \quad (11.16)$$

$$= U_m \omega C \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

где  $q = Cu$  согласно (6.3).

Очевидно, ток в цепи конденсатора достигает амплитудного значения тогда, когда  $\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ :

$$I_m = U_m \omega C. \quad (11.17)$$

Тогда

$$i = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (11.18)$$

Как видно, ток в цепи конденсатора, как и напряжение, приложенное к его обкладкам, изменяется по синусоидальному закону, однако опережает это напряжение по фазе на угол  $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ .

Следовательно, напряжение отстает по фазе от тока на  $90^\circ = \frac{\pi}{2}$  (рис. 11.6б).

Если уравнение (11.17) разделить на  $\sqrt{2} = 1,41$ , то получится равенство  $I = U\omega C$  или

$$I = \frac{U}{\frac{1}{\omega C}}. \quad (11.19a)$$

Это равенство (11.19а) и является математическим выражением закона Ома для цепи переменного тока с емкостью.

Очевидно, знаменатель этого равенства является сопротивлением конденсатора  $X_C$ , которое называется емкостным сопротивлением:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC}. \quad (11.20)$$

Тогда закон Ома для цепи с конденсатором можно записать:

$$I = \frac{U}{X_C}. \quad (11.19б)$$

Емкостное сопротивление — это противодействие, которое оказывает напряжение заряженного конденсатора напряжению, приложенному к нему (рис. 11.5а).

#### Реактивная мощность в цепи с конденсатором

Если в цепи конденсатора емкостью  $C$ ,  $R_C = 0$  (рис. 11.6а) проходит ток  $i$ , изменяющийся по синусоидальному закону:

$$i = I_m \sin \omega t,$$

то напряжение  $u$ , приложенное к этому конденсатору (рис. 11.6), будет равно

$$u = U_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -U_m \cos \omega t.$$

Мгновенная мощность в цепи с конденсатором

$$\begin{aligned} p = ui &= -U_m \cos \omega t \cdot I_m \sin \omega t = \\ &= -\frac{U_m I_m}{2} 2 \cos \omega t \cdot \sin \omega t = -UI \sin 2\omega t. \end{aligned} \quad (11.21)$$

*Мощность в цепи с конденсатором, подключенным к источнику с синусоидальным напряжением, изменяется по синусоидальному закону с двойной частотой (рис. 11.6в).*

Следовательно, активная мощность  $P$  в рассматриваемой цепи (рис. 11.6а), равная среднему значению мгновенной мощности за период, имеет нулевое значение,  $P = 0$ .

Это следует и из временной диаграммы (рис. 11.6в). На временной диаграмме видно, что изменение мгновенной мощности  $p$  по синусоидальному закону происходит с двойной частотой: во 2-ю и 4-ю четверти периода мощность (энергия) источника накапливается в электрическом поле конденсатора.

Максимальное значение энергии, накапливаемой в электрическом поле конденсатора, равно

$$W_{mc} = \frac{U_m^2 C}{2}.$$

В 1-ю и 3-ю четверти периода эта мощность (энергия) из электрического поля конденсатора возвращается к источнику.

Таким образом, в цепи переменного тока с конденсатором происходит колебание мощности (энергии) между источником и электрическим полем конденсатора. Такая колеблющаяся, но не потребляемая мощность называется реактивной мощностью.

Величина реактивной мощности в цепи конденсатора определяется выражением

$$Q_C = UI = I^2 X_C \frac{U^2}{X_C}. \quad (11.22)$$

Из временных диаграмм (рис. 11.4в, 11.6в) видно, что реактивная мощность в цепи конденсатора изменяется в противофазе с реактивной мощностью в цепи с идеальной катушкой. Отсюда и знак «минус» в уравнении (11.21) — аналитическом выражении мгновенной мощности в цепи с конденсатором.

Так как реактивная мощность  $Q_C$  имеет место в цепи с емкостным сопротивлением, то это емкостное сопротивление считается реактивным сопротивлением  $X$  емкостного характера ( $X_C$ ).

## Глава 12

### РАСЧЕТ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Расчет электрических цепей синусоидального тока производится преимущественно с помощью векторных диаграмм. В настоящей главе рассматривается расчет неразветвленных цепей синусоидального тока, содержащих активное сопротивление  $R$ , индуктивность  $L$  и емкость  $C$  в различных сочетаниях.

#### 12.1. Цепь с активным сопротивлением и индуктивностью

Если по цепи с реальной катушкой, обладающей активным сопротивлением  $R$  и индуктивностью  $L$ , проходит синусоидальный ток  $i = I_m \sin \omega t$  (рис. 12.1а), то этот ток создает падение напряжения на активном сопротивлении проводников катушки  $u_a = iR$  и индуктивном сопротивлении катушки  $u_L = iX_L$ .

Следовательно, по второму закону Кирхгофа, для мгновенных значений, приложенное к реальной катушке напряжение можно записать

$$u = u_a + u_L. \quad (12.1)$$

Это равенство справедливо для неразветвленной цепи синусоидального тока с последовательно включенными активным сопротивлением  $R$  и индуктивным сопротивлением  $X_L$  (рис. 12.1б).

Активное напряжение (рис. 11.1б) совпадает по фазе с током и может быть записано  $u_a = U_m \sin \omega t$ . Индуктивное напряжение (11.1)  $u_L = U_{mL} \sin (\omega t + \frac{\pi}{2})$  опережает ток на угол  $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ .

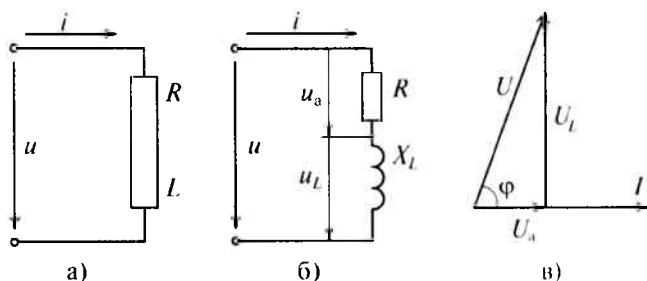


Рис. 12.1

Мгновенное значение напряжения, приложенного к цепи, определяется алгебраической суммой мгновенных значений напряжений  $u_a$  и  $u_L$  согласно (12.1). А действующее значение этого напряжения  $U$  определяется геометрической суммой их действующих значений

$$\vec{U} = \vec{U}_a + \vec{U}_L.$$

Это равенство лежит в основе построения векторной диаграммы (рис. 12.1в).

Из векторной диаграммы (рис. 12.1в) видно, что напряжение  $U$ , приложенное к реальной катушке, опережает по фазе ток  $I$  на угол  $\varphi$ . Мгновенное значение этого напряжения может быть записано:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (12.2)$$

где  $\varphi$  — это международное обозначение угла сдвига фаз между током и напряжением для любой цепи переменного тока.

Воспользовавшись теоремой Пифагора для определения гипотенузы прямоугольного треугольника, по векторной диаграмме (рис. 12.1в) определяется напряжение

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_L^2} = \sqrt{I^2 R^2 + I^2 X_L^2} = I \sqrt{R^2 + X_L^2}. \quad (12.3)$$

Откуда

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}. \quad (12.4)$$

Равенство (12.4) является математическим выражением закона Ома для цепи синусоидального тока с активным  $R$  и индуктивным  $X_L$  сопротивлениями в неразветвленной цепи.

Знаменатель этого равенства является сопротивлением этой цепи, которое называется полным, или кажущимся, сопротивлением цепи синусоидального тока. Обозначается кажущееся (полное) сопротивление любой цепи переменного тока буквой  $Z$ :

$$Z_k = \sqrt{R^2 + X_L^2}, \quad (12.5)$$

где  $Z_k$  — полное, или кажущееся, сопротивление реальной катушки (рис. 12.1б).

Тогда закон Ома для любой цепи переменного тока в общем виде можно записать

$$I = \frac{U}{Z}, \quad (12.6)$$

где  $Z$  — кажущееся сопротивление этой цепи.

### Треугольники напряжений, сопротивлений, мощностей

Треугольник, все стороны которого изображены векторами напряжений, называется треугольником напряжений. Пользуясь векторной диаграммой для неразветвленной цепи с активным и индуктивным сопротивлениями (рис. 12.1в), выделяем треугольник напряжений (рис. 12.2а).

Связь между напряжениями в данной цепи можно рассматривать как соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника:

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_L^2}; U_a = U \cos \varphi; U_L = U \sin \varphi \text{ и др.} \quad (12.7)$$

Если все стороны треугольника напряжений разделить на величину тока в цепи, то получится подобный прямоугольный треугольник, все стороны которого в определенном масштабе изображают сопротивления цепи, т. е. получится треугольник сопротивлений (рис. 12.1б). Сопротивления не являются векторными величинами. Из треугольника сопротивлений можно определить:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}; R = Z \cos \varphi; X_L = Z \sin \varphi. \quad (12.8)$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}; \sin \varphi = \frac{X_L}{Z}; \operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L}{R}. \quad (12.9)$$

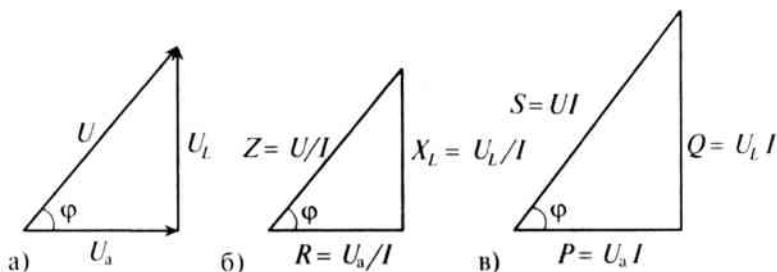


Рис. 12.2

Обычно тригонометрические функции угла  $\varphi$  определяются из треугольника сопротивлений отношением (12.9).

Если все стороны треугольника напряжений умножить на величину тока цепи, то получится подобный прямоугольный треугольник, все стороны которого в определенном масштабе изображают мощности цепи, т. е. получится треугольник мощностей (рис. 12.2в).

Произведение напряжения и тока цепи характеризует полную мощность цепи

$$S = UI, \quad (12.10)$$

которая измеряется в вольт-амперах, т. е.  $[S] = \text{В} \cdot \text{А}$ .

Однако потребляется в цепи только часть полной мощности — активная мощность

$$P = S \cos \varphi = UI \cos \varphi, \quad (12.11)$$

где  $\cos \varphi$  показывает, какая часть полной мощности  $S$  потребляется в цепи, поэтому  $\cos \varphi$  называют *коэффициентом мощности*:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}. \quad (12.12)$$

Полная мощность цепи  $S$  называется кажущейся.

Из того же треугольника мощностей (рис. 12.2в) можно записать:

$$Q = S \sin \varphi = UI \sin \varphi. \quad (12.13)$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (12.14)$$

Построив треугольники напряжений, сопротивлений и мощностей для любой цепи синусоидального тока, по выражениям (12.7)–(12.14) можно рассчитать параметры этой цепи.

### 12.2. Цепь с активным сопротивлением и емкостью

Если в цепи с последовательно включенными активным сопротивлением  $R$  и емкостью  $C$  протекает синусоидальный ток  $i = I_m \sin \omega t$ , то он создает падение напряжения на активном сопротивлении  $u_a = U_{ma} \sin \omega t$  и на емкостном сопротивлении  $u_c = U_{mc} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$ . Векторная диаграмма для этой цепи изображена на рис. 12.3б.

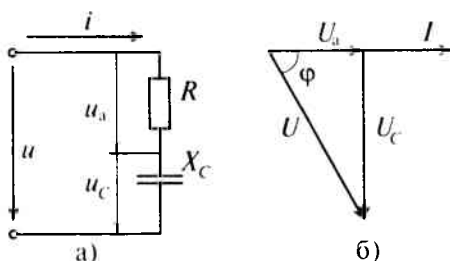


Рис. 12.3

Напряжение цепи изменяется, как и ток, по синусоидальному закону и отстает по фазе от тока на угол  $\varphi < 90^\circ$ , т. е.

$$u = U_m \sin(\omega t - \varphi). \quad (12.15)$$

Действующее значение напряжения  $U$ , приложенного к этой цепи, определяется по векторной диаграмме (рис. 12.3):

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_c^2} = \sqrt{I^2 R^2 + I^2 X_c^2} = I \sqrt{R^2 + X_c^2}.$$

Откуда математическое выражение закона Ома для этой цепи:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_c^2}} = \frac{U}{Z_c}. \quad (12.16)$$

### Пример 12.1

К цепи с последовательно включенными сопротивлениями  $R = 8$  Ом и  $X_c = 6$  Ом (рис. 12.3а) приложено напряжение  $U = 220$  В. Определить ток цепи  $I$ , напряжение на активном  $U_a$  и реактивном  $U_p$  участках, полную  $S$ , активную  $P$  и реактивную  $Q$  мощности.

### Решение

Для определения тока вычислим полное сопротивление цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + X_c^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ Ом.}$$

Тогда ток будет равен

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{10} = 22 \text{ А.}$$

Напряжения на участках:

$$U_a = IR = 22 \cdot 8 = 176 \text{ В; } U_p = IX_c = 22 \cdot 6 = 132 \text{ В.}$$

Полная мощность  $S = UI = 220 \cdot 22 = 4840 \text{ В} \cdot \text{А.}$



Активная мощность  $P = S \cos \varphi = 4840 \cdot 0,8 = 3872$  Вт.

$$\left( \cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{8}{10} = 0,8. \right)$$

Реактивная мощность  $Q = S \sin \varphi = 4840 \cdot 0,6 = 2904$  вар.

$$\left( \sin \varphi = \frac{X_C}{Z} = \frac{6}{10} = 0,6. \right)$$

### 12.3. Неразветвленная цепь с активным сопротивлением, индуктивностью и емкостью

Если в неразветвленной цепи с  $R$ ,  $L$  и  $C$  (рис. 12.4а) протекает синусоидальный ток  $i = I_m \sin \omega t$ , то он создает падение напряжения на всех участках цепи:  $u_a = U_{ma} \sin \omega t$ ,  $u_L = U_{mL} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$  и  $u_C = U_{mC} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$ .

Мгновенное значение напряжения цепи определяется по формуле

$$u = U_m \sin(\omega t \pm \varphi).$$

Так как в рассматриваемой цепи включены два реактивных сопротивления  $X_L$  и  $X_C$ , то возможны три режима работы цепи: 1)  $X_L > X_C$ ; 2)  $X_L < X_C$ ; 3)  $X_L = X_C$ .

Векторная диаграмма цепи для режима  $X_L > X_C$  изображена на рис. 12.4б.

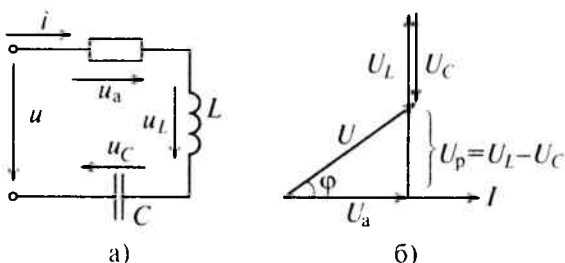


Рис. 12.4

Знак перед углом сдвига фаз  $\varphi$  зависит от режима работы цепи. Если в рассматриваемой цепи преобладает индуктивное напряжение (сопротивление), т. е.  $U_L > U_C$ , то цепь имеет индуктивный характер и напряжение  $U$  опережает по фазе ток  $I$  ( $+\varphi$ ).

Если в цепи преобладает емкостное напряжение (сопротивление), т. е.  $U_L < U_C$ , то цепь имеет емкостной характер и напряжение  $U$  отстает по фазе от тока  $I$  ( $-\varphi$ ).

Из векторной диаграммы (рис. 12.4б) следует:

$$u = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} = \sqrt{U_a^2 + (U_L - U_C)^2} = \\ = \sqrt{I^2 R^2 + (IX_L - IX_C)^2} = I \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \quad (12.17)$$

Сопротивление  $R$  может включать в себя сопротивление самостоятельного резистора или активное сопротивление реальной катушки и конденсатора.

Математическое выражение закона Ома для неразветвленной цепи с активным сопротивлением, индуктивностью и емкостью:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{Z}, \quad (12.18)$$

где  $Z$  — полное (или кажущееся) сопротивление неразветвленной цепи с  $R$ ,  $L$  и  $C$ , т. е.

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \quad (12.19)$$

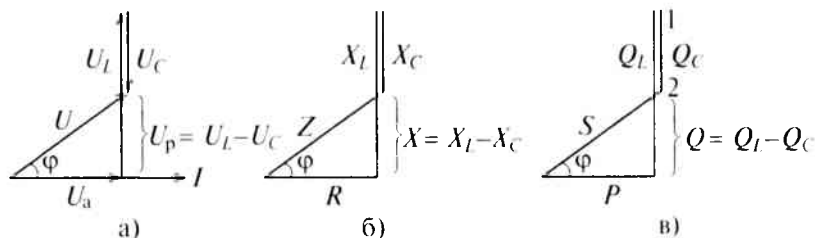


Рис. 12.5

На рис. 12.5 изображены треугольники напряжений, сопротивлений и мощностей для рассматриваемой цепи.

Знак и значение угла  $\varphi$  можно определить из треугольника сопротивлений (рис. 12.5б):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = \frac{X_L - X_C}{R} \quad (12.20)$$

или

$$\sin \varphi = \frac{X}{Z} = \frac{X_L - X_C}{Z}. \quad (12.21)$$

Из выражений (12.20) и (12.21) видно, что если  $X_L > X_C$ , то угол  $\varphi$  положителен ( $+\varphi$ ), если  $X_L < X_C$ , то угол  $\varphi$  отрицательный ( $-\varphi$ ).

Из треугольника мощностей (рис. 12.5в) видно, что в цепи с  $R$ ,  $L$  и  $C$  кроме активной мощности  $P = S \cos \varphi$  имеется реактивная

мощность  $Q = S \sin \varphi$ . Кроме того, в цепи происходит колебание мощности (меньшей из двух реактивных, в нашем случае  $U_C$ ) между электрическим полем конденсатора  $C$  и магнитным полем катушки индуктивности  $L$ , так как мощности  $Q_L$  и  $Q_C$  изменяются в противофазе. Но эта мощность (1–2 на рис. 12.5в) не считается реактивной, так как она не загружает источник и провода.

Из треугольника мощностей (рис. 12.5в) видно, что реактивная мощность, которая загружает источник и провода,  $Q = Q_L - Q_C$ . Эта реактивная мощность (энергия) колеблется между источником и магнитным полем катушки индуктивности, так как  $Q_L > Q_C$ .

Полная мощность цепи определяется по формуле

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (12.22)$$

#### 12.4. Колебательный контур

Электрические цепи, в которых происходят периодические изменения токов, напряжений, энергии называются колебательными.

Для того чтобы исследовать резонансные явления, необходимо иметь представления о процессах в колебательном контуре, состоящем из идеальной катушки и конденсатора без потерь.

Если конденсатор емкостью  $C$  зарядить до напряжения  $U_m$ , то в электрическом поле этого конденсатора накопится энергия, максимальное значение которой согласно выражению (6.21):

$$W_{mC} = \frac{U_m^2 C}{2}.$$

Если к заряженному конденсатору подключить индуктивность  $L$  замыканием ключа  $K$  (рис. 12.6), то конденсатор будет разряжаться через индуктивность переменным током  $i$ . При этом в индуктивности  $L$  создается ЭДС самоиндукции  $e_L$ , и в магнитном поле ее накапливается энергия, максимальное значение которой (9.12):

$$W_{mL} = \frac{I_m^2 L}{2}.$$

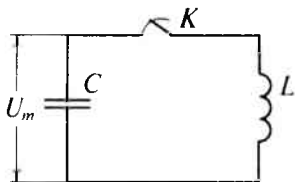


Рис. 12.6

Источником энергии в этом контуре является конденсатор. Ток в контуре, состоящем из индуктивности  $L$  и конденсатора  $C$ , не прекращается даже когда конденсатор полностью разрядится. За счет ЭДС самоиндукции и энергии, накопившейся в магнитном поле индуктивности, конденсатор будет

заряжаться, и энергия магнитного поля индуктивности переходит в электрическое поле конденсатора. При этом источником энергии в этом контуре является индуктивность. Дальше процесс повторяется.

Таким образом, в замкнутом контуре, состоящем из индуктивности и емкости, происходит колебание энергии между электрическим полем конденсатора  $C$  и магнитным полем индуктивности  $L$ . Поэтому такой замкнутый контур называется колебательным контуром.

Колебание энергии в колебательном контуре происходит с определенной частотой  $\omega_0$ , которую называют частотой собственных колебаний контура. Частоту собственных колебаний  $\omega_0$  определяют из условия равенства энергии электрического и магнитного полей:

$$\frac{U_m^2 C}{2} = \frac{I_m^2 L}{2} \quad \text{или} \quad U^2 C = I^2 L = U^2 \omega_0^2 C^2 L,$$

так как из (11.19) в цепи переменного тока с емкостью  $I = U\omega C$ .

Откуда

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad (12.23)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (12.24)$$

Таким образом, частота собственных колебаний колебательного контура определяется параметрами этого контура  $L$  и  $C$ .

Если в колебательном контуре отсутствуют потери (идеальный контур), то колебания в нем будут незатухающими с неизменной амплитудой. Если в колебательном контуре имеется активное сопротивление, т.е. возникают потери, то колебания энергии в нем будут затухающие, с уменьшающейся амплитудой, если эти потери не компенсируются.

## 12.5. Резонанс напряжений

Если в цепи синусоидального тока с последовательно соединенными конденсатором емкостью  $C$  и катушкой с сопротивлением  $R$  и индуктивностью  $L$  (рис. 12.7а) равны реактивные сопротивления, то в цепи наступает резонанс напряжений. Равенство реактивных сопротивлений является условием резонанса напряжений.

$$X_L = X_C. \quad (12.25)$$

Из (12.25) следует  $\omega_{\text{рез}} L = \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C}$ , тогда частота резонанса определяется выражением

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0. \quad (12.26)$$

Из (12.26) следует, что резонанс напряжений имеет место в неразветвленной цепи с  $L$  и  $C$  тогда, когда частота вынужденных колебаний (частота источника)  $\omega_{\text{рез}}$  будет равна частоте собственных колебаний резонансного контура  $\omega_0$ . Следовательно, добиться резонанса напряжений можно изменением частоты источника  $\omega_{\text{рез}}$  или изменением параметров колебательного контура  $L$  или  $C$ , т. е. изменением частоты собственных колебаний  $\omega_0$ .

Полное (кажущееся) сопротивление цепи (рис. 12.7а) при резонансе напряжений определяется по формуле

$$Z_{\text{рез}} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + 0} = R, \quad (12.27)$$

так как  $X_L - X_C = 0$ .

То есть полное сопротивление неразветвленной цепи при резонансе напряжений  $Z_{\text{рез}}$  становится минимальным и равным активному сопротивлению цепи  $R$ .

Следовательно, ток в неразветвленной цепи при резонансе напряжений максимальный:

$$I_{\text{рез}} = \frac{U}{Z_{\text{рез}}} = \frac{U}{R}. \quad (12.28)$$

Реактивные сопротивления при резонансе напряжений равны между собой, т. е.

$$\frac{1}{\omega_{\text{рез}} C} = \omega_{\text{рез}} L = \frac{1}{\sqrt{LC}} L = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z_{\text{в}}. \quad (12.29)$$

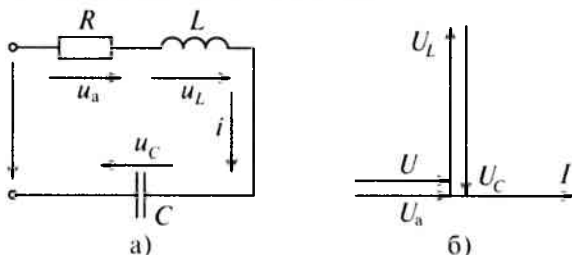


Рис. 12.7

Таким образом, реактивные сопротивления при резонансе напряжений равны (каждое) волновому сопротивлению  $Z_w$ , которое называют характеристическим сопротивлением:

$$Z_w = X_L = X_C = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (12.30)$$

Напряжения на индуктивности  $U_L$  и на емкости  $U_C$  при резонансе напряжений равны между собой, так как равны сопротивлениям, см. (12.25).

$$U_L = IX_L = IZ_w = IX_C = U_C. \quad (12.31)$$

Равенство (12.31) определяет название «резонанс напряжений».

Так как  $U_L$  и  $U_C$  изменяются в противофазе, то напряжение в резонансном режиме равно напряжению на активном сопротивлении  $U_a$ , т. е.  $U = U_a$ , что видно на векторной диаграмме (рис. 12.76).

При резонансе напряжений каждое из реактивных напряжений  $U_L$  и  $U_C$  может оказаться большим, чем напряжение цепи  $U$ .

$$\frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{IZ_w}{IR} = \frac{Z_w}{R} = Q, \quad (12.32)$$

где  $Q$  — добротность резонансного контура.

Добротность контура  $Q$  показывает, во сколько раз напряжение на индуктивности  $U_L$  и емкости  $U_C$  (каждое) больше напряжения цепи  $U$ .

Высокая добротность резонансного контура (при малом активном сопротивлении контура) нашла широкое применение в радиотехнике, в частности в антенном контуре.

Из векторной диаграммы (рис. 12.76) видно, что при резонансе напряжение цепи  $U$  совпадает по фазе с током  $I$ , угол между  $I$  и  $U$   $\varphi = 0$  и  $\cos \varphi = 1$ . Следовательно, кажущаяся мощность цепи  $S$  при резонансе вся потребляется, т. е. является активной:

$$P = S \cos \varphi = S. \quad (12.33)$$

Колеблющаяся между магнитным полем индуктивности и электрическим полем емкости мощность ( $Q_L = Q_C$ ) не является реактивной, так как не загружает источник и провода.

Из выражения (12.33) следует, что при отсутствии активной мощности  $P$  (активного сопротивления  $R$ ) резонансный контур становится при резонансе идеальным колебательным контуром. Следовательно, при наличии активного сопротивления  $R$  источ-

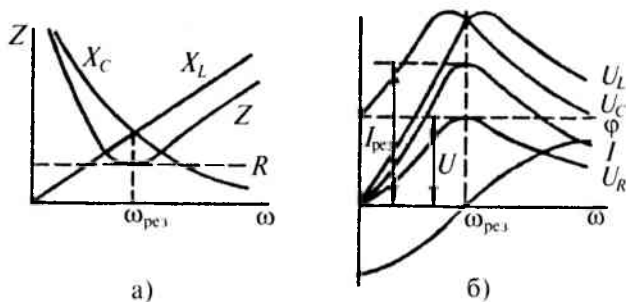


Рис. 12.8

ник расходует свою мощность на компенсацию потерь в контуре, за счет чего колебания в цепи будут незатухающими.

Кроме активного сопротивления  $R$  резонансной цепи и напряжения, приложенного к ней, все параметры резонансной цепи ( $I$ ;  $U_L$ ;  $U_C$ ;  $Z$ ;  $X_L$ ;  $X_C$ ; угол  $\varphi$ ;  $U_R$ ) изменяются с изменением частоты сети  $\omega$ .

Эти изменения параметров резонансной цепи наглядно иллюстрируются резонансными кривыми, изображенными на рис. 12.8.

На резонансных кривых четко просматриваются значения этих параметров при частоте резонанса  $\omega_{\text{рез}}$ .

### 12.6. Общий случай неразветвленной цепи

Для неразветвленной цепи, содержащей несколько активных и реактивных сопротивлений различного характера (рис. 12.9а), справедливо геометрическое равенство напряжений (баланс напряжений)

$$\vec{U} = \vec{U}_{a1} + \vec{U}_{L1} + \vec{U}_{C1} + \vec{U}_{a2} + \vec{U}_{L2} + \vec{U}_{a3} + \vec{U}_{C2} + \vec{U}_{L3} + \vec{U}_{a4},$$

которое лежит в основе построения векторной диаграммы (рис. 12.9б).

Таким образом, *напряжение цепи равно геометрической сумме напряжений на всех участках этой цепи.*

Из векторной диаграммы следует (рис. 12.9б)

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2},$$

где  $U_a = U_{a1} + U_{a2} + U_{a3} + U_{a4}$  — активное напряжение цепи равно арифметической сумме напряжений на активных участках цепи;  $U_p = U_{L1} - U_{C1} + U_{L2} - U_{C2} + U_{L3}$  — реактивное напряжение цепи равно алгебраической сумме напряжений на реактивных участках цепи.

Те же рассуждения можно отнести и к сопротивлениям:

- полное сопротивление цепи  $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ ;
- активное сопротивление цепи  $R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ ;
- реактивное сопротивление цепи  $X = X_{L1} - X_{C1} + X_{L2} - X_{C2} + X_{L3}$ .

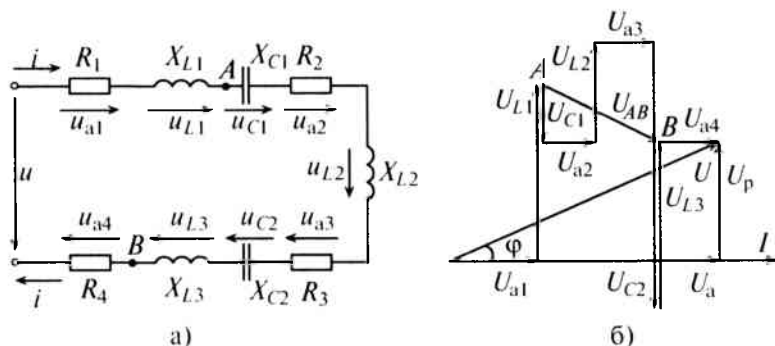


Рис. 12.9

Напряжение на каком-либо участке неразветвленной цепи (рис. 12.9а), например на участке  $AB$ , определяется так:

$$U_{AB} = IZ_{AB} = I \sqrt{(R_2 + R_3)^2 + (-X_{C1} + X_{L2} - X_{C2} + X_{L3})^2}.$$

Вектор напряжения  $U_{AB}$  показан на векторной диаграмме (рис. 12.9б).

### Пример 12.2

Напряжение, приложенное к неразветвленной цепи (рис. 12.10)  $U = 220$  В, частота тока сети  $f = 50$  Гц. Начальная фаза тока  $\psi_i = 0$ . Сопротивление участков цепи:  $R_1 = 8$  Ом;  $R_2 = 7$  Ом;  $R_3 = 5$  Ом;  $X_{L1} = 20$  Ом;  $X_{L2} = 18$  Ом;  $X_{C1} = 10$  Ом;  $X_{C2} = 13$  Ом.

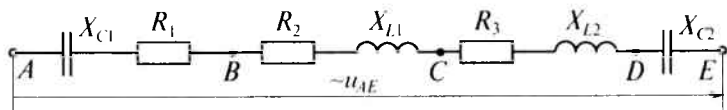


Рис. 12.10

Требуется:

1. Вычислить ток цепи  $I$  и записать его мгновенное значение.
2. Записать мгновенное значение напряжения цепи  $u_{AE}$ , определив предварительно угол  $\varphi$  и характер цепи.
3. Определить напряжение между точками  $AB$  и  $CD$ .
4. Построить в масштабе векторную диаграмму цепи, определив предварительно напряжение на каждом сопротивлении.
5. Определить мощности  $S$ ,  $P$  и  $Q$  цепи.
6. Определить частоту, при которой в цепи наступит резонанс напряжений, и ток при резонансе.
7. Определить максимальную энергию, запасенную в магнитном поле катушек  $W_{mL}$  и электрическом поле конденсаторов  $W_{mC}$ .
8. Как нужно изменить емкость конденсаторов, чтобы в цепи наступил резонанс напряжений при частоте  $f = 50$  Гц?



**Решение**

1. Для определения тока цепи  $I$  необходимо вычислить полное сопротивление цепи:

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2 + R_3)^2 + (-X_{C1} + X_{L1} + X_{L2} - X_{C2})^2} = \\ = \sqrt{(8 + 7 + 5)^2 + (-10 + 20 + 18 - 13)^2} = 25 \text{ Ом.}$$

Действующее значение тока  $I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{25} = 8,8 \text{ А}$ , а амплитудное значение тока  $I_m = \sqrt{2}I = 1,41 \cdot 8,8 = 12,4 \text{ А}$ .

Угловая частота  $\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 = 314 \text{ рад/с}$ .

Мгновенное значение тока цепи:

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = 12,4 \sin(314t), \text{ так как } \varphi_i = 0.$$

2. Угол сдвига фаз  $\varphi$  и характер цепи определяется через  $\operatorname{tg} \varphi$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = \frac{-X_{C1} + X_{L1} + X_{L2} - X_{C2}}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{-10 + 20 + 18 - 13}{8 + 7 + 5} = \frac{15}{20} = 0,75.$$

Таким образом, угол  $\varphi = 37^\circ$  (из таблицы), характер цепи индуктивный ( $+\varphi$ ).

Тогда мгновенное значение напряжения цепи

$$u_{AE} = U_m \sin(\omega t + \varphi) = 310 \sin(314t + 37^\circ),$$

где  $U_m = \sqrt{2}U = 1,41 \cdot 220 = 310 \text{ В}$ .

3. Напряжение на участках:

$$U_{AB} = IZ_{AB} = I \sqrt{R_1^2 + X_{C1}^2} = 8,8 \sqrt{8^2 + 10^2} = 112,6 \text{ В};$$

$$U_{CD} = IZ_{CD} = I \sqrt{R_3^2 + X_{L2}^2} = 8,8 \sqrt{5^2 + 18^2} = 164,1 \text{ В}.$$

4. Для построения векторной диаграммы определяются напряжения:

$$U_{C1} = IX_{C1} = 8,8 \cdot 10 = 88 \text{ В},$$

$$U_{R1} = IR_1 = 8,8 \cdot 8 = 70 \text{ В},$$

$$U_{R2} = IR_2 = 8,8 \cdot 7 = 62 \text{ В},$$

$$U_{L1} = IX_{L1} = 8,8 \cdot 20 = 176 \text{ В},$$

$$U_{R3} = IR_3 = 8,8 \cdot 5 = 44 \text{ В},$$

$$U_{L2} = IX_{L2} = 8,8 \cdot 18 = 158 \text{ В},$$

$$U_{R2} = IX_{C2} = 8,8 \cdot 13 = 114 \text{ В}.$$

Векторная диаграмма цепи (отображает только характер участков, но не величины напряжений на них) изображена на рис. 12.11.

5. Полная мощность цепи  
 $S = UI = 220 \cdot 8,8 = 1936 \text{ В} \cdot \text{А}$ ,  
 активная мощность  $P =$   
 $= S \cos \varphi = 1936 \cdot 0,8 = 1548,8 \text{ Вт}$   
 (так как  $\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{20}{25} = 0,8$ ),  
 реактивная мощность  $Q =$   
 $= S \sin \varphi = 1936 \cdot 0,6 = 1161,6 \text{ вар}$ ,  
 (так как  $\sin \varphi = \frac{X}{Z} = \frac{15}{25} = 0,6$ ).

6. Для определения частоты резонанса вычисляется индуктивность  $L$  и емкость  $C$  цепи:

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{X_{L1} + X_{L2}}{\omega} =$$

$$= \frac{20 + 18}{314} = 0,12 \text{ Гн.}$$

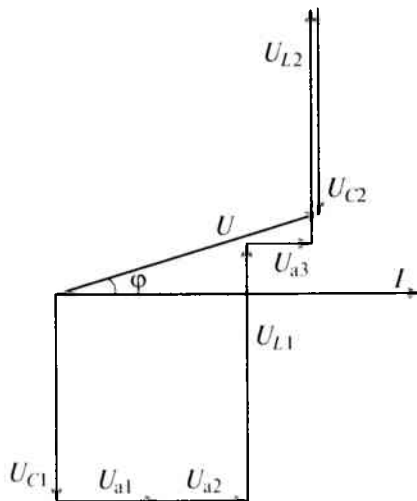


Рис. 12.11

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{\omega(X_{C1} + X_{C3})} = \frac{1}{314(10 + 13)} = 138 \cdot 10^{-6} \text{ Ф.}$$

Тогда

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,12 \cdot 138 \cdot 10^{-6}}} = 246 \text{ рад/с};$$

$$f_{\text{рез}} = \frac{\omega_{\text{рез}}}{2\pi} = \frac{246}{2 \cdot 3,14} = 39,2 \text{ Гц.}$$

Ток цепи при резонансе  $I_{\text{рез}} = \frac{U}{R} = \frac{220}{20} = 11 \text{ А}$ .

7. Максимальная энергия, запасенная в магнитном поле катушек:

$$W_{mL} = \frac{I_m^2 L}{2} = \frac{12,4^2 \cdot 0,12}{2} = 9,23 \text{ Вт} \cdot \text{с.}$$

Максимальная энергия, запасенная в электрическом поле конденсаторов:

$$W_{mC} = \frac{U_{mC}^2 C}{2} = \frac{[\sqrt{2}(U_{C1} U_{C2})]^2 C}{2} =$$

$$= \frac{[1,41(88 + 114)]^2 \cdot 13 \cdot 10^{-6}}{2} = 5,63 \text{ Вт} \cdot \text{с.}$$

8. Условие резонанса  $X_L = X_C$ .

По условию задачи  $X_L = X_{L1} + X_{L2} = 20 + 18 = 38$  Ом, а  $X_C = X_{C1} + X_{C2} = 10 + 13 = 23$  Ом. Этому  $X_C$  соответствует емкость  $C = 138 \cdot 10^{-6}$  Ф при  $f = 50$  Гц. Для того чтобы выполнить условие резонанса при сохранении частоты 50 Гц, необходимо  $X_C$  увеличить до 38 Ом. Чтобы емкостное сопротивление равнялось 38 Ом, величина емкости  $C$  должна быть равна

$$C = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 38} = 83 \cdot 10^{-6} \text{ Ф},$$

т. е. емкость конденсаторов нужно уменьшить на

$$138 \cdot 10^{-6} - 83 \cdot 10^{-6} = 55 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 55 \text{ мкФ}.$$

## Глава 13

### РАЗВЕТВЛЕННАЯ ЦЕПЬ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

#### 13.1. Активный и реактивный токи

Для расчета разветвленных цепей синусоидального тока вводятся расчетные величины активного и реактивного токов цепи.

Если к цепи, содержащей активное сопротивление  $R$  и индуктивное  $X_L$  (рис. 13.1а), приложено синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin \omega t$ , то синусоидальный ток в цепи, вызванный этим напряжением, отстает от него по фазе на угол  $\varphi$  (рис. 12.1в),  $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$ .

Векторная диаграмма в этом случае изображена на рис. 13.1б.

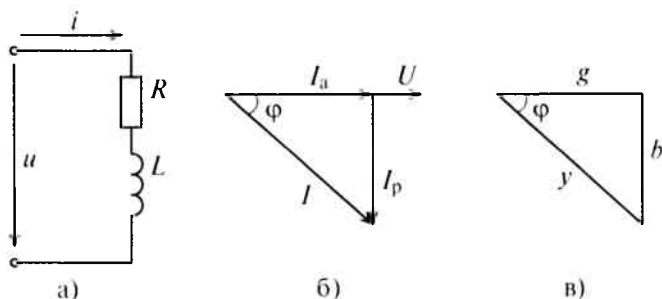


Рис. 13.1

Ток цепи  $I$  (рис. 13.1б) раскладывается на две составляющие, одна из которых  $I_a$  совпадает по фазе с напряжением, другая  $I_r$  — сдвинута на  $90^\circ$ . Составляющая тока  $I_a$ , совпадающая по фазе с напряжением, называется активной составляющей, или активным током. Составляющая тока  $I_r$ , имеющая относительно напряжения сдвиг по фазе на угол  $90^\circ$ , называется реактивной составляющей, или реактивным током.

Активный и реактивный токи физического смысла не имеют. Они являются расчетными величинами, так как в неразветвленной цепи (рис. 13.1а) ток на всех участках имеет одинаковое значение. Однако понятия активный  $I_a$  и реактивный  $I_r$  токи значительно облегчают расчет разветвленных цепей синусоидального тока. Соотношения между токами определяются из треугольника токов (рис. 13.1б).

### 13.2. Проводимости

Из треугольника токов для рассматриваемой цепи (рис. 13.1б) следует:  $I_a = I \cos \varphi$ ;  $I_p = I \sin \varphi$  и  $I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}$ .

С другой стороны, известно, что  $I = \frac{U}{Z}$  (см. (12.6)), а  $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$  и  $\sin \varphi = \frac{X}{Z}$  (см. (12.9)).

$$\text{Тогда} \quad I_a = I \cos \varphi = \frac{U}{Z} \cdot \frac{R}{Z} = U \frac{R}{Z^2} = Ug, \quad (13.1)$$

где  $g$  – активная проводимость цепи, равная

$$g = \frac{R}{Z^2}. \quad (13.2)$$

*Величина, на которую умножают напряжение, чтобы получить ток, называют проводимостью.*

А так как  $g$  определяет активный ток  $I_a$ , то ее и называют активной проводимостью.

Таким образом, *активная проводимость  $g$  определяется величиной активного сопротивления, деленного на квадрат полного (кажущегося) сопротивления цепи.*

Величина реактивного тока определяется выражением

$$I_p = I \sin \varphi = \frac{U}{Z} \cdot \frac{X}{Z} = U \frac{X}{Z^2} = Ub, \quad (13.3)$$

где  $b$  – реактивная проводимость цепи, равная

$$b = \frac{X}{Z^2}. \quad (13.4)$$

Величина полного тока цепи равна

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = \sqrt{U^2 g^2 + U^2 b^2} = U \sqrt{g^2 + b^2} = Uy, \quad (13.5)$$

где  $y = \sqrt{\frac{R^2}{Z^4} + \frac{X^2}{Z^4}} = \frac{1}{Z^2} \sqrt{R^2 + X^2} = \frac{Z}{Z^2} = \frac{1}{Z}$ , так как для цепи синусоидального тока с  $R$  и  $L$  (рис. 13.1а)  $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$ .

Таким образом,  $y$  – полная, или кажущаяся, проводимость цепи:

$$y = \frac{1}{Z}. \quad (13.6)$$

Полная (кажущаяся) проводимость цепи «у» является обратной величиной полного (кажущегося) сопротивления цепи.

Активная  $g$  и реактивная  $b$  проводимости являются соответственно обратными величинами активного  $R$  и реактивного  $X$  сопротивлений только в том случае, если эти сопротивления ( $R$  и  $X$ ) являются единственными в цепи или ветви, т. е.  $g = \frac{1}{R}$  и  $b = \frac{1}{X}$ .

Если же в неразветвленной цепи (или ветви) включены сопротивления  $R$ ,  $X_L$  и  $X_C$ , то для определения проводимостей можно воспользоваться выражениями (13.2), (13.4), (13.6). Треугольник проводимостей для рассматриваемой цепи (рис. 13.1а) изображен на рис. 13.1в. Соотношения между проводимостями определяют из этого треугольника.

### 13.3. Параллельное соединение катушки и конденсатора

Если к источнику синусоидального напряжения  $u = U_m \sin \omega t$  подключить параллельно реальную катушку с активным сопротивлением  $R_1$  и индуктивным  $X_L$  и конденсатор с активным сопротивлением  $R_2$  и емкостным  $X_C$  (рис. 13.2а), то токи в параллельных ветвях этой цепи изменяются по синусоидальному закону:

$$i_1 = I_{m1} \sin(\omega t - \varphi_1); \quad i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Действующие значения этих токов будут соответственно равны

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + X_L^2}}; \quad I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + X_C^2}}.$$

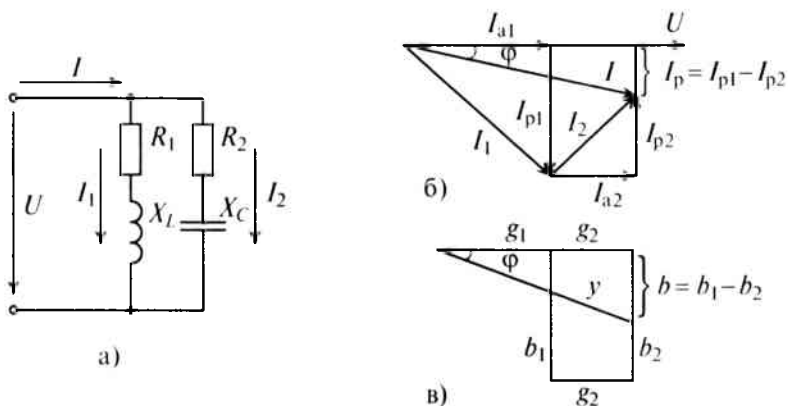


Рис. 13.2

Ток в неразветвленной цепи  $I$  равен геометрической сумме токов в ветвях, так как токи не совпадают по фазе:

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2.$$

Для определения этого тока строится векторная диаграмма цепи (рис. 13.2б), из которой следует:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = \sqrt{(I_{a1} + I_{a2})^2 + (I_{p1} - I_{p2})^2} = \\ &= \sqrt{(Ug_1 + Ug_2)^2 + (Ub_1 - Ub_2)^2} = \\ &= U \sqrt{(g_1 + g_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} = Uy, \end{aligned} \quad (13.7)$$

где

$$y = \sqrt{(g_1 + g_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}. \quad (13.8)$$

Таким образом, ток в неразветвленной части цепи  $I$  определяется произведением напряжения  $U$  и полной проводимости цепи  $y$ .

Реактивные проводимости в ветвях имеют различные знаки, так как сопротивления в ветвях различного характера (индуктивное и емкостное).

Треугольник проводимостей рассматриваемой цепи изображен на рис. 13.2в.

Характер разветвленной цепи определяется так же, как и неразветвленной. Если ток цепи  $I$  отстает от напряжения  $U$  (как в рассматриваемом случае), то цепь индуктивного характера, если же ток  $I$  опережает напряжение  $U$ , то цепь емкостного характера.

### 13.4. Резонанс токов

Резонанс токов в цепи (рис. 13.2а) с параллельным включением катушки и конденсатора (в различных ветвях) возникает при равенстве реактивных проводимостей в ветвях:

$$b_1 = b_2 \quad \text{или} \quad \nu_L = b_C. \quad (13.9)$$

Выражение (13.9) является условием резонанса токов в разветвленных цепях синусоидального тока.

Полная (кажущаяся) проводимость при этом условии

$$\begin{aligned} y_{\text{рез}} &= \sqrt{(g_1 + g_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} = \\ &= \sqrt{(g_1 + g_2)^2 + 0} = g_1 + g_2 = g, \end{aligned} \quad (13.10)$$

так как  $b_1 - b_2 = 0$ .

Таким образом, *полная проводимость цепи при резонансе токов  $Y_{\text{рез}}$  минимальна по величине и равна активной проводимости  $g$* . Следовательно, и ток в неразветвленной части цепи при резонансе токов имеет минимальную величину

$$I_{\text{рез}} = U y_{\text{рез}} = Ug. \quad (13.11)$$

Реактивные токи в ветвях при резонансе токов равны между собой

$$I_{p1} = Ub_L = Ub_C = I_{p2}. \quad (13.12)$$

Это равенство и определяет название «резонанс токов».

На основании равенства (13.12) строится векторная диаграмма при резонансе токов (рис. 13.3). Реактивные токи находятся в противофазе, поэтому ток в неразветвленной части цепи  $I$  при резонансе токов равен активному току  $I_a$  и совпадает по фазе с напряжением, т. е.  $\varphi = 0$ , а  $\cos \varphi = 1$ . Следовательно, вся мощность цепи  $S$  при резонансе токов является активной  $P$ :

$$P = S \cos \varphi = S.$$

Эта активная мощность компенсирует потери на активном сопротивлении в параллельном резонансном контуре. Мощность (энергия), которая колеблется между электрическим полем конденсатора и магнитным полем индуктивности при резонансе, не является реактивной, так как не загружает источник и провода.

Частота резонанса токов в параллельном резонансном контуре может быть определена из условия резонанса токов, т. е. равенства реактивных проводимостей в ветвях ( $b_1 = b_2$ ):

$$\frac{\omega_{\text{рез}} L}{R_1^2 + \omega_{\text{рез}}^2 L^2} = \frac{1}{\omega_{\text{рез}} C} \cdot \frac{1}{R_2^2 + \frac{1}{\omega_{\text{рез}}^2 C^2}}. \quad (13.13)$$

После ряда преобразований равенства (13.13) определяется частота резонанса токов

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}}. \quad (13.14)$$

Резонансная частота зависит не только от параметров колебательного контура  $L$  и  $C$ , но и от активных сопротивлений в ветвях реального резонансного контура.

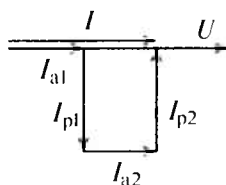


Рис. 13.3



Если в резонансном контуре отсутствуют активные сопротивления в ветвях, то частота резонанса токов  $\omega_{\text{рез}}$  становится равной частоте собственных колебаний идеального резонансного контура

$$\omega_{\text{рез}} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0.$$

Если в резонансном контуре  $R_2^2 > \frac{L}{C} > R_1^2$  или  $R_2^2 < \frac{L}{C} < R_1^2$ , то резонанса токов добиться невозможно.

Резонанс токов нашел широкое применение в радиотехнике и выпрямительной технике (в резонансных фильтрах) и др.

### Пример 13.1

Напряжение, приложенное к параллельно включенным катушке и конденсатору (рис. 13.4а),  $U = 127$  В, частота сети  $f = 50$  Гц. Параметры цепи:  $R = 10$  Ом;  $L = 63,7$  мГн;  $C = 212$  мкФ. Определить:

- 1) токи всех участков цепи:  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I$ ;
  - 2) углы сдвига фаз этих токов относительно напряжения:  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi$ ;
  - 3) полную  $S$ , активную  $P$  и реактивную  $Q$  мощности цепи;
  - 4) частоту, при которой наступит резонанс токов в этой цепи.
- Построить векторную диаграмму.

### Решение

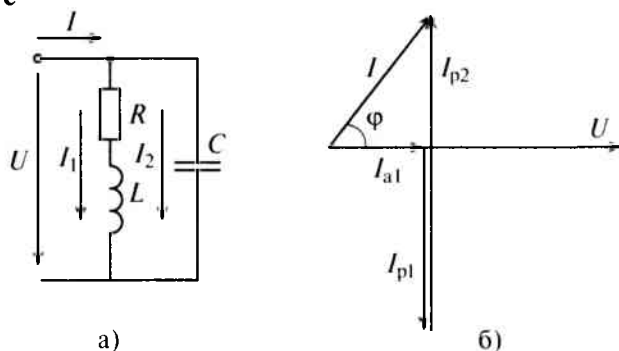


Рис. 13.4

1. Сопротивление участков цепи:

$$X_L = \omega L = 314 \cdot 63,7 \cdot 10^{-3} = 20 \text{ Ом},$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{314 \cdot 212} = 15 \text{ Ом},$$

где  $\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 = 314$  рад/с.

Сопротивление 1-й ветви:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_L^2} = \sqrt{10^2 + 20^2} = 22,4 \text{ Ом.}$$

Токи в ветвях соответственно равны

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{127}{22,4} = 5,67 \text{ А,}$$

$$I_2 = \frac{U}{X_C} = \frac{127}{15} = 8,47 \text{ А.}$$

Для определения тока  $I$  в неразветвленной части цепи определяются проводимости:

$$g_1 = \frac{R}{Z_1^2} = \frac{10}{22,4^2} = 0,02 \text{ См,}$$

$$b_1 = \frac{X_L}{Z_1^2} = \frac{20}{22,4^2} = 0,04 \text{ См,}$$

$$b_2 = \frac{1}{X_C} = \frac{1}{15} = 0,067 \text{ См.}$$

Тогда полная проводимость цепи будет равна

$$y = \sqrt{g_1^2 + (b_1 - b_2)^2} = \sqrt{0,02^2 + (0,04 - 0,067)^2} = 3,36 \cdot 10^{-2} \text{ См.}$$

Ток в неразветвленной части цепи

$$I = Uy = 127 \cdot 3,36 \cdot 10^{-2} = 4,27 \text{ А.}$$

2. Углы сдвига фаз:

$$\varphi_1 = \arctg \frac{b_1}{g_1} = \arctg \frac{0,04}{0,02} = \arctg 2 = 64^\circ;$$

$$\varphi_2 = 90^\circ, \text{ так как ветвь чисто емкостная;}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctg \frac{b}{g_1} = \arctg \frac{b_1 - b_2}{g_1} = \arctg \frac{0,04 - 0,067}{0,02} = \\ &= \arctg(-1,35) = -53^\circ 30'. \end{aligned}$$

Знак «минус» перед значением угла  $\varphi$  параллельного контура означает, что цепь имеет емкостной характер, так как  $b_2 > b_1$ .

3. Полная мощность цепи  $S = UI = 127 \cdot 4,27 = 542 \text{ В} \cdot \text{А.}$

Активная мощность цепи  $P = S \cos \varphi = 542 \cdot 0,59 = 320 \text{ Вт}$ , так как  $\cos \varphi = \cos 53^\circ 30' \approx 0,59$ .

Реактивная мощность цепи  $Q = S \sin \varphi = 542 \cdot 0,8 = 434 \text{ вар}$ , так как  $\sin \varphi = \sin 53^\circ 30' \approx 0,8$ .

4. Угловая частота резонанса токов в цепи равна

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{63,7 \cdot 10^{-3} \cdot 212 \cdot 10^{-6}}} \cdot \sqrt{\frac{63,7 \cdot 10^{-3} - 10^2}{212 \cdot 10^{-6} - 0}} = 212 \text{ рад/с.}$$

$$\text{Откуда } f_{\text{рез}} = \frac{\omega_{\text{рез}}}{2\pi} = \frac{221}{2 \cdot 3,14} = 35,2 \text{ Гц.}$$

Для построения векторной диаграммы определяют активные и реактивные токи в ветвях:

$$I_{a1} = Ug_1 = 127 \cdot 0,02 = 2,54 \text{ А;}$$

$$I_{p1} = Ub_1 = 127 \cdot 0,04 = 5,08 \text{ А;}$$

$I_{a2} = 0$ , так как в ветви с емкостью отсутствует активное сопротивление, т. е.  $R_2 = 0$ ;

$$I_{p2} = I_2 = 8,47 \text{ А.}$$

Векторная диаграмма для рассматриваемой цепи изображена на рис. 13.46.

На векторной диаграмме видно, что ток  $I$  опережает напряжение  $U$  на угол  $53^\circ 30'$  (цепь емкостного характера).

### 13.5. Коэффициент мощности

Номинальные параметры, т. е. мощность источника  $S_{\text{ист}}$ , мощность потребителя  $P_{\text{потр}}$  и коэффициент мощности  $\cos \varphi_{\text{потр}}$ , связаны следующим соотношением

$$S_{\text{ист}} = \frac{P_{\text{потр}}}{\cos \varphi_{\text{потр}}}. \quad (13.15)$$

Из (13.15) следует, что чем меньше  $\cos \varphi_{\text{потр}}$ , тем большую мощность  $S$  должен иметь источник для питания этого потребителя, т. е. тем больше его габариты, вес, расход материалов, стоимость и др.

Ток в цепи потребителя с определенным  $\cos \varphi_{\text{потр}}$  согласно выражению (12.11) равен

$$I = \frac{P_{\text{потр}}}{U \cos \varphi_{\text{потр}}}. \quad (13.16)$$

Из (13.16) видно, что чем меньше  $\cos \varphi_{\text{потр}}$ , тем больше ток потребителя  $I$ , тем больший ток проходит по проводам линий

электропередачи, тем больше потери энергии в этой линии и меньше КПД ее и всей системы (3.11). Кроме того, увеличение тока требует для его передачи проводов большего сечения, т. е. большего расхода цветных металлов.

Таким образом, низкий коэффициент мощности потребителя  $\cos \varphi_{\text{потр}}$  приводит к увеличению мощности источника, питающего этот потребитель, уменьшению КПД линии электропередачи и к увеличению сечения проводов линий электропередачи.

В России установлен минимально допустимый коэффициент мощности не менее 0,93, т. е.  $\cos \varphi_{\text{потр}}$  должен быть равен или больше 0,93 ( $\cos \varphi_{\text{потр}} \geq 0,93$ ).

Однако  $\cos \varphi_{\text{потр}}$  большинства электрических потребителей переменного тока меньше этой нормы. Так, например,  $\cos \varphi_{\text{потр}}$  асинхронных двигателей, в зависимости от нагрузки, составляет  $0,2 \div 0,85$ , трансформаторов —  $0,5 \div 0,9$ , выпрямителей —  $0,7 \div 0,85$  и т. д. Следовательно, коэффициент мощности этих потребителей необходимо повышать.

Так как большинство потребителей представляет собой нагрузку индуктивного характера, то для улучшения  $\cos \varphi_{\text{потр}}$  параллельно с ним подключаются конденсаторы (рис. 13.5а).

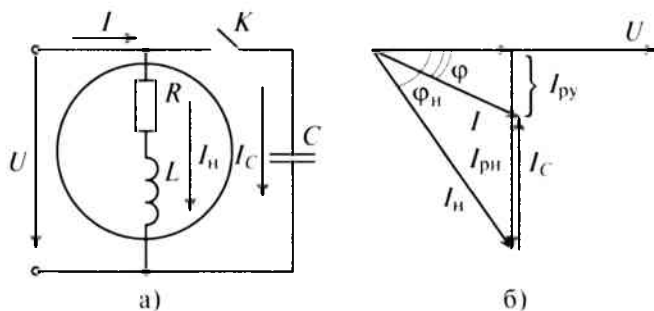


Рис. 13.5

Из векторной диаграммы (рис. 13.5б) видно, что с подключением конденсатора  $C$  (ключ  $K$  замкнут) появляется  $I_c$ , за счет которого уменьшается угол  $\varphi$  ( $\varphi < \varphi_n$ ) и увеличивается  $\cos \varphi$  установки. При этом уменьшается ток цепи  $I$ , который до подключения конденсатора был равен току нагрузки  $I_n$ .

Для повышения коэффициента мощности ( $\cos \varphi$ ) конденсатор можно включить последовательно с потребителем индуктивного характера. Однако при этом нарушается режим работы (напряжение) потребителя. Поэтому для улучшения  $\cos \varphi$  конденсатор подключают параллельно с нагрузкой (рис. 13.5а).

Коэффициент мощности можно повысить, увеличив активную нагрузку. При этом увеличивается потребляемая энергия, что экономически нецелесообразно (уменьшается КПД установки).

### Пример 13.2

Асинхронный двигатель, включенный в сеть с напряжением  $U = 220$  В и частотой  $f = 50$  Гц, развивает на валу мощность  $P_{\text{дв}} = 11,4$  кВт. КПД двигателя  $\eta_{\text{дв}} = 95\%$  при  $\cos \varphi_{\text{н}} = 0,74$ . Определить емкость конденсатора  $C$ , который необходимо включить параллельно с двигателем (рис. 13.5а), чтобы повысить  $\cos \varphi$  установки до 0,95.

### Решение

Мощность, потребляемая двигателем из сети:

$$P = \frac{P_{\text{дв}}}{\eta_{\text{дв}}} = \frac{11,4}{0,95} = 12 \text{ кВт} = 12 \cdot 10^3 \text{ Вт.}$$

Ток нагрузки  $I_{\text{н}}$ , т. е. ток двигателя (рис. 13.5а), равен

$$I_{\text{н}} = \frac{P}{U \cos \varphi_{\text{н}}} = \frac{12 \cdot 10^3}{220 \cdot 0,74} = 73,7 \text{ А.}$$

Реактивная составляющая тока двигателя  $I_{\text{рн}}$  (рис. 13.5б)

$$I_{\text{рн}} = I_{\text{н}} \sin \varphi_{\text{н}} = 73,7 \cdot 0,67 = 49,4 \text{ А}$$

(по таблице  $\varphi_{\text{н}} = 48^\circ$ ,  $\sin \varphi_{\text{н}} = 0,67$ ).

Ток установки  $I$  при подключении конденсатора, т. е. при  $\cos \varphi = 0,95$ , будет равен

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi} = \frac{12 \cdot 10^3}{220 \cdot 0,95} = 57,4 \text{ А.}$$

При  $\cos \varphi = 0,95$  угол  $\varphi = 18^\circ$ ,  $\sin \varphi = \sin 18^\circ = 0,31$ .

Реактивная составляющая тока установки (рис. 13.5б)

$$I_{\text{рy}} = I \sin \varphi = 57,4 \cdot 0,31 = 17,8 \text{ А.}$$

Ток конденсатора  $I_C$  (рис. 13.5б)

$$I_C = I_{\text{рн}} - I_{\text{рy}} = 49,4 - 17,8 = 31,6 \text{ А.}$$

Емкостное сопротивление конденсаторов

$$X_C = \frac{U}{I_C} = \frac{220}{31,6} = 6,96 \text{ Ом.}$$

Емкость конденсаторов, которые нужно подключить параллельно двигателю для улучшения  $\cos \varphi$  до 0,95:

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{2 \pi f X_C} = \frac{10^6}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 6,96} = 457,5 \text{ мкФ.}$$

## Глава 14

### СИМВОЛИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

#### 14.1. Действия над комплексными числами

Символический метод нашел широкое применение для расчета сложных цепей переменного тока.

Символический метод расчета основан на использовании комплексных чисел.

Комплексное число  $\underline{A}$  состоит из вещественной  $A'$  и мнимой  $A''$  частей, т. е.  $\underline{A} = A' + jA''$ .

Комплексное число на комплексной плоскости можно представить вектором. Проекция вектора на вещественную ось (ось абсцисс) соответствует вещественной части комплексного числа  $A'$  (рис. 14.1а). Проекция вектора на мнимую ось  $j$  (ось ординат) соответствует коэффициенту при мнимой единице  $A''$ . Мнимая единица  $j$  представляет собой поворотный множитель, умножение на который означает поворот вектора на  $90^\circ$  против часовой стрелки, т. е. в положительном направлении. Мнимая единица  $j = \sqrt{-1}$ . Тогда  $j^2 = -1$ ;  $j^3 = -j$ ;  $j^4 = 1$ .

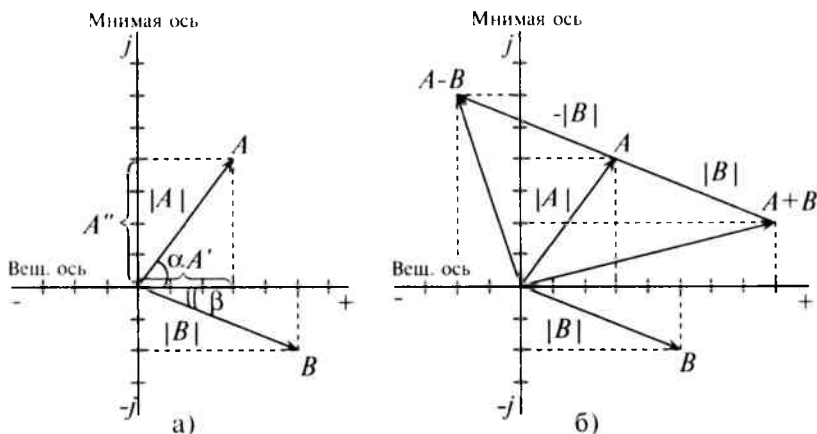


Рис. 14.1

Комплексным числам  $\underline{A} = 3 + 4j$  и  $\underline{B} = 5 - 2j$  соответствуют векторы  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ , изображенные на комплексной плоскости (рис. 14.1а и б) в масштабе.

Модуль комплексного числа соответствует длине вектора, изображающего это комплексное число.

Из построения (рис. 14.1а) видно, что модули комплексных чисел определяются выражением

$$|A| = \sqrt{(A')^2 + (A'')^2}. \quad (14.1)$$

Следовательно,  $|A| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ;  $|B| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = 5,4$ .

Углы  $\alpha$  и  $\beta$ , образованные векторами  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  с положительным направлением вещественной оси, называются аргументами комплексного числа.

Аргументы комплексного числа (рис. 14.1а) определяются выражением

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{A''}{A'}. \quad (14.2)$$

То есть  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} = 53^\circ 30'$ ;  $\beta = \operatorname{arctg} \left(-\frac{2}{5}\right) = -21^\circ 40'$ .

Как видно, аргумент комплексного числа  $\underline{B}$  отрицательный, так как вектор  $\vec{B}$  повернут на угол  $\beta$  по часовой стрелке, а не против.

Существует три формы записи комплексного числа:

$$1) \text{ алгебраическая: } \underline{A} = A' + jA''; \quad (14.3)$$

$$2) \text{ тригонометрическая: } \underline{A} = |A| \cos \alpha + j|A| \sin \alpha, \quad (14.4)$$

так как  $A' = |A| \cos \alpha$ , а  $A'' = |A| \sin \alpha$ ;

3) показательная:

$$\underline{A} = |A| e^{j\alpha} = 5e^{j53^\circ 10'}, \quad \underline{B} = |B| e^{j\beta} = 5,4e^{-j21^\circ 40'}, \quad (14.5)$$

где  $e$  — основание натурального логарифма, однако в данном случае имеет чисто символическое значение.

Для перевода из показательной формы записи комплексного числа в алгебраическую пользуются тригонометрической формой записи комплексного числа (14.4).

Для перевода из алгебраической формы записи комплексного числа в показательную определяют модуль по (14.1) и аргумент по (14.2) комплексного числа.

Для перевода комплексного числа из одной формы в другую можно использовать логарифмическую линейку или микрокалькулятор.

Комплексные числа можно складывать, вычитать, умножать и делить.

Сложение и вычитание комплексных чисел производится только в алгебраической форме

$$\underline{A} + \underline{B} = 3 + j4 + 5 - j2 = 8 + j2;$$

$$\underline{A} - \underline{B} = 3 + j4 - 5 + j2 = -2 + j6.$$

На рис. 14.16 видно, что сложение и вычитание комплексных чисел соответствует сложению и вычитанию векторов, изображающих эти числа.

Умножение и деление комплексных чисел можно производить в алгебраической форме:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = (3 + j4) \cdot (5 - j2) = 15 + j20 - j6 + 8 = 23 + j14 = 27e^{j31.30^\circ};$$

$$\begin{aligned} \frac{\underline{A}}{\underline{B}} &= \frac{3 + j4}{5 - j2} = \frac{(3 + j4)(5 + j2)}{(5 - j2)(5 + j2)} = \frac{15 + j20 + j6 - 8}{25 - j10 + j10 + 4} = \\ &= \frac{7 + j26}{29} = 0,24 + j0,896 = 0,93e^{j74.30^\circ}. \end{aligned}$$

Для того чтобы избавиться от комплексных чисел в знаменателе, числитель и знаменатель умножают на комплекс, сопряженный с комплексом знаменателя. У сопряженного комплекса знак перед мнимой единицей  $j$  изменяется на обратный.

Произведение двух сопряженных комплексных чисел — вещественное число, равное сумме квадратов вещественной и мнимой частей этих комплексных чисел.

Однако умножение и деление комплексных чисел удобно производить в показательной форме.

При умножении комплексных чисел в показательной форме модули этих чисел перемножаются, а аргументы складываются алгебраически:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = |A| \cdot |B| e^{j[\alpha + (-\beta)]} = 5 \cdot 5,4 \cdot e^{j[53.10^\circ - 21.40^\circ]} = 27e^{j31.30^\circ}.$$

При делении комплексных чисел в показательной форме модули этих чисел делятся, а аргументы вычитаются с учетом знаков:

$$\frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{|A|}{|B|} e^{j[\alpha - (-\beta)]} = \frac{5}{5,4} e^{j[53.10^\circ + 21.40^\circ]} = 0,93e^{j74.50^\circ}.$$

Таким образом, сложение и вычитание комплексных чисел можно производить только в алгебраической форме, а умножение и деление удобнее и проще производить в показательной форме.



## 14.2. Ток, напряжение и сопротивление в комплексном виде

Если ток и напряжение изменяются по синусоидальному закону  $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ ,  $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ , то, как указывалось выше, их можно изобразить векторами и, следовательно, записать комплексными числами:

$$\dot{I} = I e^{j\psi_i}, \quad \dot{U} = U e^{j\psi_u}, \quad (14.6)$$

где  $\dot{I}$  и  $\dot{U}$  — комплексы тока и напряжения. Точка над комплексами указывает, что ток и напряжение изменяются по синусоидальному закону с определенной частотой  $\omega$ ;  $I$  и  $U$  — модули комплексов тока и напряжения, они же действующие значения тока  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$  и напряжения  $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ ;  $\psi_i$  и  $\psi_u$  — аргументы комплексов тока и напряжения, они же начальные фазы тока  $\psi_i$  и напряжения  $\psi_u$ .

Для неразветвленной цепи с  $R$  и  $L$  (рис. 12.1а) мгновенные значения синусоидального тока и напряжения можно записать так:  $i = I_m \sin \omega t$ ,  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ . Тогда комплексы тока и напряжения

$$\dot{I} = I e^{j0}, \quad \dot{U} = U e^{j\varphi}. \quad (14.7)$$

Комплекс полного сопротивления цепи  $\underline{Z}$  определяется отношением комплекса напряжения к комплексу тока, т. е.

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi-0)} = Ze^{j\varphi}. \quad (14.8)$$

Комплексные величины, не зависящие от времени, обозначаются прописными буквами с черточкой внизу.

Модулем комплекса полного сопротивления является кажущееся сопротивление цепи  $Z = \frac{U}{I}$ , а аргументом — угол сдвига фаз между током и напряжением  $\varphi$ .

Алгебраическая форма записи комплекса полного сопротивления  $\underline{Z}$

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi = R + jX_L. \quad (14.9)$$

Вещественная часть комплекса полного сопротивления есть активное сопротивление  $R$ , а коэффициент при мнимой единице  $j$  — реактивное сопротивление  $X$ . Знак перед поворотным множителем (мнимой единицей) указывает на характер цепи. Знак «плюс» соответствует цепи индуктивного характера, а знак «минус» — цепи емкостного характера.

Выражения комплексов сопротивлений различных цепей приведены в Приложении 7.

Обратная величина комплекса сопротивления — комплекс проводимости  $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$ .

Любую цепь переменного тока можно рассчитывать по законам постоянного тока, если все величины представить в комплексной форме. В этом и заключается достоинство символического метода расчета.

### 14.3. Мощность в комплексном виде

Для неразветвленной цепи с  $R$  и  $C$  (рис. 12.3а) мгновенные значения тока и напряжения можно записать как

$$u = U_m \sin \omega t, \quad i = I_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Комплексы напряжения и тока соответственно равны

$$\dot{U} = Ue^{j\omega t}, \quad \dot{I} = Ie^{j(\omega t + \varphi)}.$$

Комплекс полной мощности цепи  $\underline{S}$  определяется произведением комплекса напряжения  $\dot{U}$  и сопряженного комплекса тока  $\dot{I}^*$  (над сопряженным комплексом синусоидальной величины ставят «звёздочку»)

$$\underline{S} = \dot{U} \dot{I}^* = Ue^{j\omega t} \cdot Ie^{-j(\omega t + \varphi)} = UIe^{-j\varphi} = Se^{-j\varphi}. \quad (14.10)$$

Таким образом, *модулем комплекса полной мощности  $\underline{S}$  является кажущаяся мощность цепи  $S = UI$ , а аргументом — угол сдвига фаз между током и напряжением.*

Если комплекс полной мощности  $\underline{S}$  перевести из показательной формы в алгебраическую, то получится

$$\underline{S} = UIe^{-j\varphi} = UI \cos(-\varphi) + jUI \sin(-\varphi) = P - jQ. \quad (14.11)$$

То есть *вещественная часть комплекса полной мощности — активная мощность  $P$ , а коэффициент при мнимой единице — реактивная мощность  $Q$ .*

Знак перед поворотным множителем  $j$  указывает на характер цепи. В рассматриваемой цепи реактивная мощность емкостного характера ( $-jQ$ ).

Комплексы величин токов, напряжений, сопротивлений, мощностей и других параметров цепи синусоидального тока необходимо выражать в двух видах записи комплексного числа: показательной и алгебраической. В этом случае сразу определяются действующие значения тока, напряжения, кажущееся сопротивление, его активные и реактивные части ( $R$  и  $X$ ), угол сдвига фаз  $\varphi$  между током и напряжением, характер цепи, кажущаяся  $S$ , активная  $P$  и реактивная  $Q$  мощности. Кроме того, в неразветвленной

цепи напряжения на участках складываются, суммируются токи в разветвленных цепях, а сложение комплексов можно производить только в алгебраической форме записи. В алгебраической форме записи кажущейся мощности  $S$  сразу определяются активная мощность  $P$  и реактивная мощность  $Q$ . В показательной форме записи сопротивлений производится их умножение и деление, необходимое при расчете цепей синусоидального тока при смешанном соединении потребителей, и т. д. Необходимость выражения комплексов в двух видах следует из примеров, разобранных в этой главе.

### Пример 14.1

Для цепи, изображенной на рис. 14.2а, дано:

$R_1 = 8$  Ом;  $X_{C1} = 6$  Ом;  $R_2 = 9$  Ом;  $X_{L2} = 12$  Ом;  $X_{C2} = 10$  Ом;  
 $U = 127$  В.

Определить токи  $I_1, I_2, I_3$ ; напряжение на участках  $AC$  ( $U_{AC}$ ) и  $CD$  ( $U_{CD}$ ); мощности  $S, P$  и  $Q$  цепи; угол  $\varphi$  и характер цепи.

Построить векторную диаграмму цепи.

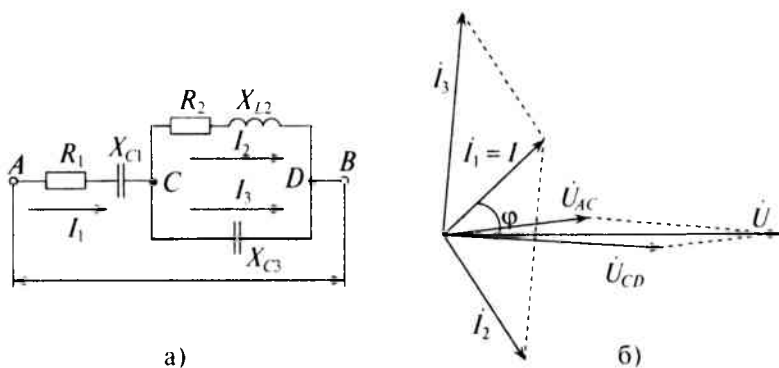


Рис. 14.2

### Решение

Комплексы сопротивлений участков (по номерам токов) и полного сопротивления цепи будут равны

$$\underline{Z}_1 = R_1 - jX_{C1} = 8 - j6 = 10e^{-j36^\circ 50'}$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L2} = 9 + j12 = 15e^{j53^\circ 10'}$$

$$\underline{Z}_3 = -jX_{C2} = -j10 = 10e^{j90^\circ}$$

Комплекс сопротивления участка  $CD$  цепи:

$$\underline{Z}_{CD} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{15e^{j53^\circ 10'} \cdot 10e^{-j90^\circ}}{9 + j12 - j10} =$$

$$= \frac{150e^{j36^\circ 50'}}{9,2e^{j12^\circ 35'}} = 16,35e^{-j49^\circ 25'} = (10,65 - j12,45).$$

Тогда полное сопротивление цепи равно

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{CD} = 8 - j6 + 10,65 - j12,45 = 18,65 - j18,45 = 26,2e^{-j44^\circ 45'}.$$

Вектор заданной величины (тока или напряжения) можно направить в любом направлении. Однако удобнее совмещать его с вещественной или мнимой осью.

В рассмотренном примере заданное напряжение направляется по вещественной оси. Таким образом, комплекс общего напряжения будет равен

$$\dot{U} = Ue^{j0} = 127e^{j0} = 127 \text{ В}.$$

Комплекс тока цепи  $\dot{I}$  равен комплексу первого тока  $\dot{I}_1$ :

$$\dot{i} = i_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{127e^{j0}}{26,2e^{-j44^\circ 45'}} = 4,85e^{j44^\circ 45'}.$$

Комплекс напряжения на участке AC:

$$\dot{U}_{AC} = \dot{I}_1 \underline{Z}_1 = 4,85e^{j44^\circ 45'} \cdot 10e^{-j36^\circ 50'} = 48,5e^{j7^\circ 55'}.$$

Комплекс напряжений на участке CD:

$$\dot{U}_{CD} = \dot{I} \underline{Z}_{CD} = 4,85e^{j44^\circ 45'} \cdot 16,35e^{-j49^\circ 25'} = 79,2e^{-j4^\circ 40'}.$$

Комплексы токов  $\dot{I}_2$  и  $\dot{I}_3$ :

$$\dot{i}_2 = \frac{\dot{U}_{CD}}{\underline{Z}_2} = \frac{79,2e^{-j4^\circ 40'}}{15e^{-j53^\circ 10'}} = 5,27e^{j57^\circ 50'},$$

$$\dot{i}_3 = \frac{\dot{U}_{CD}}{\underline{Z}_3} = \frac{79,2e^{-j4^\circ 40'}}{10e^{-j50'}} = 7,92e^{j85^\circ 20'}.$$

Комплекс полной мощности цепи:

$$\underline{S} = \dot{U} \dot{I}^* = 127e^{j0} \cdot 4,85e^{-j44^\circ 45'} = 616e^{-j44^\circ 45'} = 437 - j433.$$

Из расчета цепи (рис. 14.2а) символическим методом следует:

$$I = I_1 = 4,85 \text{ А}; I_2 = 5,27 \text{ А}; I_3 = 7,92 \text{ А}; U_{AC} = 48,5 \text{ В};$$

$$U_{CD} = 79,2 \text{ В}; S = 616 \text{ В} \cdot \text{А}; P = 437 \text{ Вт}; Q = 433 \text{ вар}; \varphi = -44^\circ 45';$$

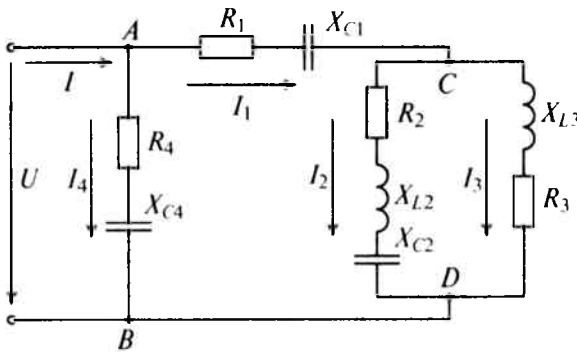
$$Z_1 = 10 \text{ Ом}; Z_2 = 15 \text{ Ом}; Z_3 = 10 \text{ Ом}; Z_{BC} = 16,35 \text{ Ом}; Z = 26,2 \text{ Ом}.$$

Характер цепи емкостной, так как угол  $\varphi$  отрицательный.

Векторная диаграмма для рассматриваемой цепи с учетом начальных фаз напряжений и токов изображена на рис. 14.2б.

**Пример 14.2**

Для цепи, изображенной на рис. 14.3, дано:



$$\begin{aligned} R_1 &= 1,5 \text{ Ом}; \\ X_{C1} &= 2 \text{ Ом}; \\ R_2 &= 5 \text{ Ом}; \\ X_{L2} &= 4 \text{ Ом}; \\ X_{C2} &= 6 \text{ Ом}; \\ R_3 &= 2 \text{ Ом}; \\ X_{L3} &= 3 \text{ Ом}; \\ R_4 &= 3 \text{ Ом}; \\ X_{C4} &= 4 \text{ Ом}; \\ I_2 &= 2 \text{ А}. \end{aligned}$$

Рис. 14.3

Определить токи  $I_1$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I$ ; напряжение цепи  $U$ ; угол  $\varphi$  и характер цепи.

**Решение**

Комплексы сопротивлений участков (по номерам токов):

$$\underline{Z}_1 = R_1 - jX_{C1} = 1,5 - 2j = 2,5e^{-j53^\circ 10'};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j(X_{L2} - X_{C2}) = 5 + (4 - 6)j = 5,4e^{-j21^\circ 40'};$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + jX_{L3} = 2 + 3j = 3,6e^{j56^\circ 20'};$$

$$\underline{Z}_4 = R_4 - jX_{C4} = 3 - 4j = 5e^{-j53^\circ 10'}.$$

Вектор заданного тока  $I_2$  в примере направим по мнимой оси, т. е.

$$\dot{i} = 2e^{j90^\circ} = j2.$$

Комплекс напряжения на участке  $CD$ :

$$\dot{U}_{CD} = \dot{I}_2 \underline{Z}_2 = 2e^{j90^\circ} \cdot 5,4e^{-j21^\circ 40'} = 10,8e^{j68^\circ 20'} = 4 + 10j.$$

Значение токов будут равны соответственно

$$\dot{i}_3 = \frac{\dot{U}_{CD}}{\underline{Z}_3} = \frac{10,8e^{j68^\circ 20'}}{3,6e^{j56^\circ 20'}} = 3e^{j12^\circ} = 2,93 + 0,625j,$$

$$\dot{i}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 2j + 2,93 + 0,625j = 2,93 + 2,625j = 3,94e^{j41^\circ 50'}.$$

Комплекс напряжения на участке  $AC$ :

$$\begin{aligned} \dot{U}_{AC} = \dot{U}_1 &= \dot{I}_1 \underline{Z}_1 = 3,94e^{j41^\circ 50'} \cdot 2,5e^{-j53^\circ 10'} = \\ &= 9,85e^{-j11^\circ 20'} = 9,65 - 1,94j. \end{aligned}$$

Комплекс напряжения на участке  $AB$ , т. е. напряжение сети, равен

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{U}_{AB} = \dot{U}_{AC} + \dot{U}_{CD} = 9,65 - 1,94j + 4 + 10j = \\ &= 13,65 + 8,06j = 15,85e^{j30^{\circ}35'}.\end{aligned}$$

Комплекс тока  $\dot{I}_4$ :

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{U}_{AC}}{\underline{Z}_4} = \frac{15,85e^{j30^{\circ}35'}}{5e^{-j53^{\circ}10'}} = 3,17e^{j83^{\circ}45'} = 0,345 + 3,15j.$$

Комплекс тока цепи:

$$\begin{aligned}\dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_4 = 2,93 + 2,625j + 0,345 + 3,15j = \\ &= 3,275 + 5,775j = 6,64e^{j60^{\circ}35'}.\end{aligned}$$

Комплекс полной мощности цепи:

$$\underline{S} = \dot{U}\dot{I}^* = 15,85e^{j30^{\circ}35'} \cdot 6,64e^{-j60^{\circ}35'} = 105,2e^{-j30^{\circ}} = 91 - 52,5j.$$

Результаты расчета:

$$I_3 = 3 \text{ A}; I_1 = 3,94 \text{ A}; I_4 = 3,17 \text{ A}; I = 6,64 \text{ A}; U = 15,85 \text{ В}; U_{CD} = 10,8 \text{ В};$$

$$U_{AC} = 9,85 \text{ В}; S = 105,2 \text{ В}\cdot\text{А}; P = 91 \text{ Вт}; Q = 52,5 \text{ вар}; \varphi = -30^{\circ};$$

$$Z_1 = 2,5 \text{ Ом}; Z_2 = 5,4 \text{ Ом}; Z_3 = 3,6 \text{ Ом}; Z_4 = 5 \text{ Ом}.$$

Характер цепи емкостной.

### Пример 14.3

По условиям примера 14.2 определить полное сопротивление цепи (рис. 14.3).

**Решение**

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{2,3} &= \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{5,4e^{j21^{\circ}40'} \cdot 3,6e^{j56^{\circ}20'}}{5 - 2j + 2 + 3j} = \\ &= \frac{19,44e^{j34^{\circ}40'}}{7,05e^{j8^{\circ}10'}} = 2,7e^{j26^{\circ}30'} = 2,47 + 1,23j;\end{aligned}$$

$$\underline{Z}_{1-3} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{2,3} = 1,5 - 2j + 2,47 + 1,23j = 3,97 - 0,77j = 4e^{-j11^{\circ}};$$

$$\begin{aligned}\underline{Z} = \underline{Z}_{1-4} &= \frac{\underline{Z}_4 \underline{Z}_{1-3}}{\underline{Z}_4 + \underline{Z}_{1-3}} = \frac{5e^{-j53^{\circ}10'} \cdot 4e^{-j11^{\circ}}}{3 - 4j + 3,97 - 0,77j} = \\ &= \frac{20e^{-j64^{\circ}10'}}{8,45e^{-j34^{\circ}20'}} = 2,37e^{-j29^{\circ}50'}.\end{aligned}$$

Результаты расчета: полное сопротивление цепи (рис. 14.3)  $\underline{Z} = 2,37 \text{ Ом}$ ; угол сдвига фаз  $\varphi = -29^{\circ}50'$ ; характер цепи — емкостной.

Погрешность  $10'$  при расчете угла  $\varphi$  в примерах 14.2 и 14.3 в пределах допустимого.

## Глава 15

### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ

#### 15.1. Переменная магнитная связь

Индуктивность двух взаимосвязанных катушек можно изменить, если кроме магнитной связи эти катушки соединены электрически. Индуктивность таких катушек зависит от их соединения и взаимного расположения относительно друг друга.

Устройство, дающее возможность изменять магнитную связь (коэффициент связи  $K$ ) двух контуров или катушек, называют вариометром.

Вариометр представляет собой две катушки, одна из которых (2) может поворачиваться внутри неподвижной катушки (1), изменяя

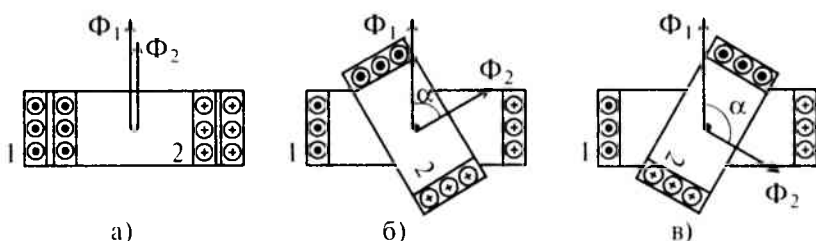


Рис. 15.1

при этом угол между магнитными потоками катушек (рис. 15.1).

В зависимости от взаимного расположения этих катушек различают их согласное и встречное включение.

При согласном включении угол между магнитными потоками катушек ( $\alpha$ ) не превышает  $90^\circ$  и магнитные потоки катушек при этом суммируются.

При встречном включении угол между магнитными потоками катушек ( $\alpha$ ) превышает  $90^\circ$  и магнитные потоки при этом вычитаются.

Схема замещения последовательно соединенных катушек вариометра изображена на рис. 15.2а.

При согласном включении катушек суммируются ЭДС самоиндукции, созданные магнитными потоками  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ :

$$e_{L1} = -L_1 \frac{di_1}{dt}; \quad e_{L2} = -L_2 \frac{di_2}{dt}.$$

Также суммируются ЭДС взаимоиндукции, созданные потоками одной катушки, пронизывающие витки другой катушки:

$$e_{M1} = -M \frac{di_2}{dt}; \quad e_{M2} = -M \frac{di_1}{dt}.$$

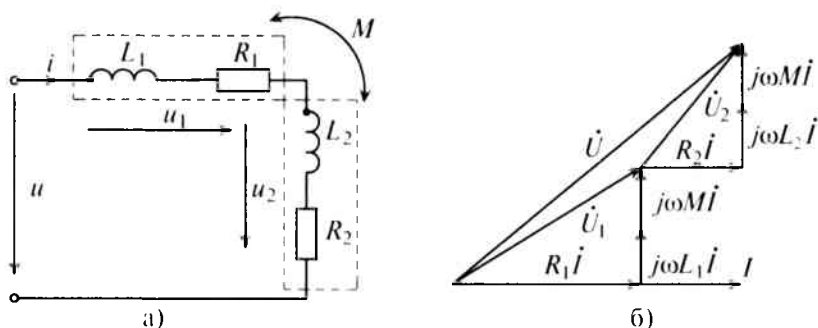


Рис. 15.2

При последовательном соединении катушек (рис. 15.2а)

$$i_1 = i_2 = i.$$

Составляется уравнение по второму закону Кирхгофа для первой катушки:

$$u_1 + e_{L1} + e_{M1} = iR_1, \quad \text{или} \quad u_1 = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt},$$

или в комплексной форме

$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} + j\omega M \dot{I}. \quad (15.1)$$

Для второй катушки:

$$u_2 + e_{L2} + e_{M2} = iR_2, \quad \text{или} \quad u_2 = R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt},$$

или в комплексной форме

$$\dot{U}_2 = R_2 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} + j\omega M \dot{I}. \quad (15.2)$$

Напряжение, приложенное к последовательно включенным катушкам (входное напряжение), определяется по формуле

$$\begin{aligned} u = u_1 + u_2 &= R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} = \\ &= (R_1 + R_2) i + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\dot{U} = (R_1 + R_2) \dot{I} + j\omega(L_1 + L_2 + 2M) \dot{I}. \quad (15.3)$$



Векторная диаграмма цепи при последовательном согласном включении двух катушек показана на рис. 15.26.

Как следует из (15.3), общая индуктивность двух катушек вариометра при их согласном включении:

$$L_c = L_1 + L_2 + 2M. \quad (15.4)$$

Таким образом, при согласном включении катушек ЭДС самоиндукции и взаимной индукции складываются: (15.1) и (15.2). При встречном включении тех же катушек ЭДС самоиндукции и взаимной индукции вычитаются:

$$u_1 = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} \quad \text{или} \quad \dot{U}_1 = R_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} - j\omega M \dot{I}. \quad (15.5)$$

$$\text{Для второй катушки: } \dot{U}_2 = R_2 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} - j\omega M \dot{I}. \quad (15.6)$$

Тогда напряжение, приложенное к встречно включенным катушкам, определяется выражением

$$\dot{U} = \dot{U}_1 - \dot{U}_2 = (R_1 + R_2) \dot{I} + j\omega (L_1 + L_2 - 2M) \dot{I}. \quad (15.7)$$

Из выражения (15.7) следует, что общая индуктивность двух катушек вариометра при их встречном включении:

$$L_v = L_1 + L_2 - 2M. \quad (15.8)$$

Сравнивая (15.4) и (15.8), видим, что суммарная (эквивалентная) индуктивность двух магнитосвязанных катушек и, следовательно, их индуктивное сопротивление  $X = \omega L$  при согласном включении больше, чем при встречном:

$$Z_c = \sqrt{R^2 + \omega^2 L_c^2} > Z_v = \sqrt{R^2 + \omega^2 L_v^2}, \quad \text{где } R = R_1 + R_2.$$

Следовательно, ток магнитосвязанных катушек при согласном включении  $I_c$  меньше, чем ток  $I_v$  при их встречном включении, т. е.  $I_c < I_v$ .

Если обмотку катушки выполнить двумя рядом расположенными изолированными проводами, соединенными электрически с одной стороны (концами или началами), то получится встречное включение, при котором  $L_1 = L_2 = M$ . При этом общая индуктивность согласно (15.8) будет равна нулю

$$L_v = L_1 + L_2 - 2M = 0.$$

Безындуктивные катушки, намотанные таким двойным проводом, называются бифилярными.

В ряде случаев явление взаимной индукции бывает полезным (трансформаторы). Иногда это явление бывает нежелательным, например, если параллельно линии электропередачи расположена линия связи.

### 15.2. Воздушный трансформатор

Рассмотрим в качестве примера расчета индуктивно связанных цепей воздушный трансформатор, который состоит из двух индуктивно связанных катушек (обмоток), намотанных одна на другую (рис. 15.3а).

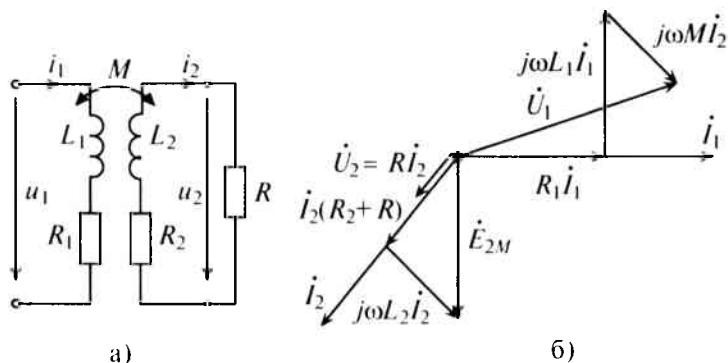


Рис. 15.3

Первичная обмотка трансформатора присоединена к источнику с напряжением  $u_1$ , а к вторичной обмотке с напряжением  $u_2$  подключается приемник, например, с активным сопротивлением  $R$ .

Положительные направления  $u_2$  и  $i_2$  выбираются так, чтобы ЭДС самоиндукции и взаимоиндукции суммировались (согласное включение):

$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = Z_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2. \quad (15.9)$$

Таким образом, напряжение, приложенное к первичной обмотке трансформатора  $\dot{U}_1$ , состоит из активной составляющей  $R_1 \dot{I}_1$ , совпадающей по фазе с током  $\dot{I}_1$  (рис. 15.3б), реактивной составляющей  $j\omega L_1 \dot{I}_1$ , опережающей ток  $\dot{I}_1$  по фазе на  $90^\circ$ , и составляющей  $j\omega M \dot{I}_2 = -\dot{E}_{1M}$ , опережающей по фазе ток  $\dot{I}_2$  на  $90^\circ$ .

Сопротивление первичной обмотки трансформатора равно

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1.$$

Так как во вторичной цепи отсутствует источник питания, т. е.  $E_2 = 0$ , то по второму закону Кирхгофа можно записать:

$$\begin{aligned} R \dot{I}_2 + R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 &= \dot{U}_2 + R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 = \\ &= \underline{Z}_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 = 0, \end{aligned} \quad (15.10)$$

где  $\dot{U}_2 = R\dot{I}_2$  — напряжение на приемнике  $R$  или на клеммах вторичной обмотки, а  $\underline{Z}_2 = R + R_2 + j\omega L_2$  — сопротивление вторичной цепи.

ЭДС взаимной индукции во вторичной обмотке будет равно

$$\dot{E}_{2M} = -j\omega M\dot{I}_1 = \underline{Z}_2 \dot{I}_2 = R\dot{I}_2 + R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2. \quad (15.11)$$

На векторной диаграмме (рис. 15.36) показано, что  $E_{2M}$  отстает по фазе от тока  $\dot{I}_1$  на  $90^\circ$  и равна сумме падений напряжений на сопротивлениях  $R$ ,  $R_2$  и на  $j\omega L_2$ .

Из выражения (15.11) определяется ток вторичной цепи

$$\dot{I}_2 = -\frac{j\omega M\dot{I}_1}{\underline{Z}_2}. \quad (15.12)$$

Подставив выражение (15.12) для тока  $\dot{I}_2$  в (15.9), можно определить  $\dot{U}_1$ :

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_1 \dot{I}_1 - \frac{j^2 \omega^2 M^2 \dot{I}_1}{\underline{Z}_2} = \left( \underline{Z}_1 + j^2 \frac{\omega^2 M^2}{\underline{Z}_2} \right) \dot{I}_1 = \underline{Z}_{\text{вх}} \dot{I}_1, \quad (15.13)$$

где  $\underline{Z}_{\text{вх}}$  — входное сопротивление нагруженного трансформатора.

Слагаемое  $\frac{\omega^2 M^2}{\underline{Z}_2}$  называют вносимым сопротивлением в первичную цепь, т. е.  $\underline{Z}_{\text{вн}} = \frac{\omega^2 M^2}{\underline{Z}_2}$ .

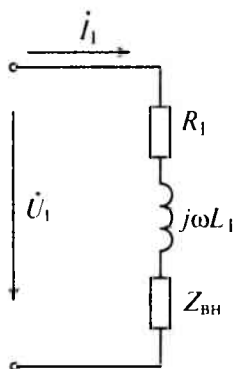


Рис. 15.4

Следовательно, для источника питания нагруженный трансформатор можно представить простой схемой замещения (рис. 15.4).

Тогда по закону Ома

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= (R_1 + j\omega L_2) \dot{I}_1 + \dot{Z}_{\text{вн}} \dot{I}_1 = \\ &= (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_{\text{вн}}) \dot{I}_1 = \dot{Z}_{\text{вх}} \dot{I}_1. \end{aligned} \quad (15.14)$$

$$\text{Откуда } \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_{\text{вх}}}.$$

Таким образом, при заданных параметрах первичной и вторичной цепей и напряжении источника питания можно рассчитать токи  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$  и построить векторную диаграмму (рис. 15.36).

В режиме холостого хода, когда  $I_2 = 0$ , ток  $\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_{\text{вх}}}$  и напряжение вторичной обмотки  $\dot{U}_2 = \dot{U}_{2\text{хх}} = -j\omega M\dot{I}_1 = \dot{E}_{2M}$ .

## Глава 16

### ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

#### 16.1. Трехфазная система ЭДС

Производство, передача и распределение электрической энергии осуществляется в основном трехфазным током в трехфазных цепях. Широкое распространение в качестве нагрузки в трехфазных цепях получили трехфазные потребители. В трехфазных цепях используются трехфазные трансформаторы. Электрическую энергию в трехфазных цепях производят трехфазные генераторы, создающие синусоидальные ЭДС одинаковой частоты, в трехфазных системах.

Трехфазной называется система трех ЭДС одинаковой частоты, сдвинутых друг относительно друга по фазе так, что сумма углов сдвига равна  $2\pi$ , или  $360^\circ$ .

Трехфазная система ЭДС называется симметричной, если ЭДС трех фаз сдвинуты друг относительно друга на угол  $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$  и амплитуды этих трех ЭДС одинаковы по величине:

$$\left. \begin{aligned} e_A &= E_m \sin(\omega t), \\ e_B &= E_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) = E_m \sin(\omega t - 120^\circ), \\ e_C &= E_m \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) = E_m \sin(\omega t - 240^\circ). \end{aligned} \right\} \quad (16.1)$$

Комплексы этих ЭДС

$$\dot{E}_A = E_A e^{j0^\circ}; \quad \dot{E}_B = E_B e^{-j120^\circ}; \quad \dot{E}_C = E_C e^{-j240^\circ}. \quad (16.2)$$

Получение симметричной трехфазной системы ЭДС осуществляется в трехфазном электромашинном генераторе (рис. 16.1а), в котором три жестко скрепленные под углом  $120^\circ$  обмотки пересекают магнитное поле с частотой  $\omega$ , вращаясь (в данном случае) против часовой стрелки.

Начала обмоток трехфазного генератора обозначаются прописными буквами  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а концы их соответственно  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  (т.е. в трехфазном генераторе имеется три обмотки:  $AX$ ,  $BY$  и  $CZ$  — рис. 16.1а).

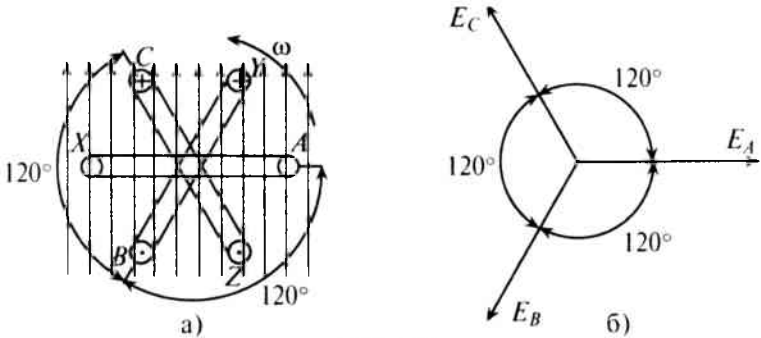


Рис. 16.1

Таким образом, при вращении в магнитном поле жестко скрепленных обмоток в них индуктируются одинаковые ЭДС ( $E_A = E_B = E_C$ ) одинаковой частоты  $\omega$  и сдвинутые на  $120^\circ$ .

Векторная диаграмма такой симметричной системы ЭДС изображена на рис. 16.1б. Как видно из векторной диаграммы, мгновенное значение ЭДС в обмотке CZ можно записать в виде

$$e_C = E_m \sin(\omega t - 240^\circ) = E_m \sin(\omega t + 120^\circ), \quad (16.3)$$

а комплекс этой ЭДС

$$\dot{E}_C = E_C e^{j120^\circ}, \quad (16.4)$$

т. е. логично, чтобы начальная фаза  $\psi_C$  не превышала  $180^\circ = \pi$  рад.

К каждой обмотке трехфазного генератора может быть подключена нагрузка с сопротивлениями  $Z_A$ ,  $Z_B$  и  $Z_C$ .

Если при этом три обмотки генератора электрически не соединены (рис. 16.2а), то такая трехфазная система называется несвязанной. Несвязанная трехфазная система практического применения не нашла.

Практическое применение нашла связанная трехфазная система (рис. 16.2б). Эта система экономически и энергетически более

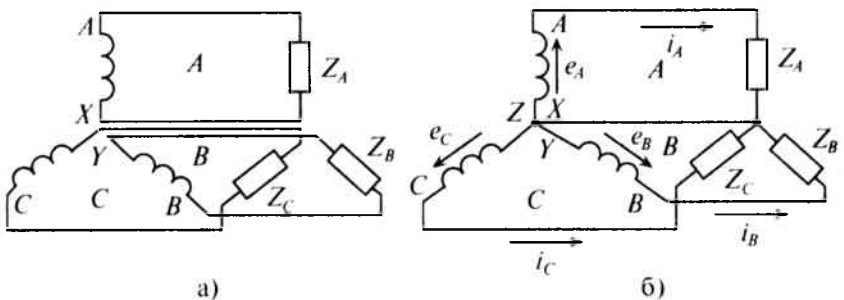


Рис. 16.2

рациональна, так как используется три или четыре соединительных провода вместо шести и получить можно два различных напряжения, фазное и линейное, вместо одного.

Каждая обмотка трехфазного генератора со своей нагрузкой и соединительными проводами называется фазой (рис. 16.2). В трехфазной системе различают три фазы  $A$ ,  $B$  и  $C$  (международные обозначения – прописные буквы).

Положительное направление ЭДС и токов в каждой фазе на рис. 16.2б указаны стрелками.

В связанных трехфазных системах применяется соединение обмоток генератора и потребителя звездой  $\star$  или треугольником  $\Delta$ .

### 16.2. Соединение обмоток генератора звездой

При соединении обмоток генератора звездой концы обмоток  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  электрически соединяются в одну точку  $O$  (рис. 16.3а), которая называется нулевой, или нейтральной. При этом генератор с потребителем соединяется тремя или четырьмя проводами.

Провода, подключенные к началам обмоток генератора ( $A$ ,  $B$  и  $C$ ), называют линейными проводами, а провод, подключенный к нулевой точке  $O$ , называется нулевым, или нейтральным.

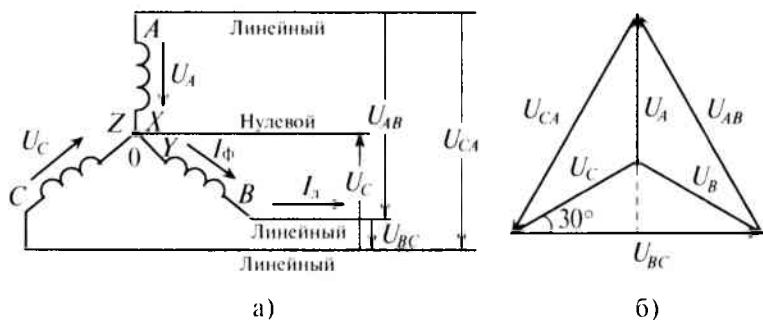


Рис. 16.3

В связанных трехфазных системах различают фазные и линейные напряжения и токи.

Фазным называется напряжение между началом и концом обмотки генератора или между нулевым и линейным проводом. Обозначаются фазные напряжения прописными буквами с индексами фаз  $U_A$ ,  $U_B$ ,  $U_C$  (рис. 16.3а). Так как сопротивление обмоток генератора мало, то фазные напряжения практически не отличаются от ЭДС в обмотках генератора.

Линейным называется напряжение между началами обмоток генератора или между линейными проводами. Обозначаются линейные напряжения  $U_{AB}$ ,  $U_{BC}$ ,  $U_{CA}$  (рис. 16.3а).

можно определить зависимость между линейными и фазными напряжениями при соединении обмоток генератора звездой.

Мгновенные значения фазных напряжений равны разностям потенциалов между началами и концами соответствующих обмоток, т. е.

$$u_A = \varphi_A - \varphi_X; \quad u_B = \varphi_B - \varphi_Y; \quad u_C = \varphi_C - \varphi_Z. \quad (16.5)$$

Мгновенные значения линейных напряжений равны разностям потенциалов между началами соответствующих обмоток:

$$u_{AB} = \varphi_A - \varphi_B; \quad u_{BC} = \varphi_B - \varphi_C; \quad u_{CA} = \varphi_C - \varphi_A. \quad (16.6)$$

Потенциалы концов обмоток одинаковы  $\varphi_A = \varphi_Y = \varphi_Z$ , так как все они соединены электрически в одну точку.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} u_{AB} &= \varphi_A - \varphi_B = (u_A + \varphi_X) - (u_B + \varphi_Y) = u_A - u_B, \\ u_{BC} &= \varphi_B - \varphi_C = (u_B + \varphi_Y) - (u_C + \varphi_Z) = u_B - u_C, \\ u_{CA} &= \varphi_C - \varphi_A = (u_C + \varphi_Z) - (u_A + \varphi_X) = u_C - u_A. \end{aligned} \right\} \quad (16.7)$$

То есть мгновенное значение линейных напряжений определяется разностью мгновенных значений двух соответствующих фазных напряжений.

При соединении обмоток генератора звездой действующее значение линейного напряжения определяется геометрической разностью двух соответствующих фазных напряжений. На этом основании построена векторная диаграмма напряжений (рис. 16.3б) для соединения обмоток генератора звездой. К такому же результату приводит определение комплексов линейных напряжений символическим методом:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B; \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C; \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A. \quad (16.8)$$

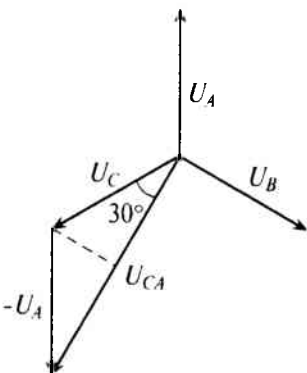


Рис. 16.4

При симметричной системе ЭДС фазные напряжения равны по величине ( $U_A = U_B = U_C$ ) и сдвинуты по фазе на угол  $120^\circ$ . По векторной диаграмме (рис. 16.3б) определяется линейное напряжение (рис. 16.4).

Линейное напряжение  $U_{CA}$  при симметричной системе ЭДС трехфазного генератора определяется равенством

$$\bar{U}_{CA} = \bar{U}_C - \bar{U}_A.$$

Из диаграммы (рис. 16.4) определяется вектор (комплекс)  $\bar{U}_{CA}$ .

$$U_{CA} = 2U_C \cos 30^\circ = 2U_C \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}U_C.$$

При симметричной системе ЭДС линейное напряжение трехфазного генератора, обмотки которого соединены звездой, в  $\sqrt{3} = 1,73$  раза больше фазного напряжения:

$$U_{\Delta} = \sqrt{3}U_{\Phi}. \quad (16.9)$$

Если говорят о напряжении генератора 127/220 В, то имеется в виду, что фазное напряжение в трехфазной цепи 127 В, а линейное – 220 В. В сети с напряжением 220/380 В фазное напряжение 220 В, а линейное – 380 В. Очевидно, что обмотки генератора такой симметричной цепи соединены звездой и отношение напряжений получится равным

$$\frac{220}{127} = \frac{380}{220} = \sqrt{3} = 1,73. \quad (16.10)$$

В связанных трехфазных системах фазным называется ток, проходящий по обмотке (фазе) генератора  $I_{\Phi}$ , а линейным считается ток, проходящий по линейному проводу  $I_{\Delta}$ .

Как видно на рис. 16.3а, при соединении обмоток генератора звездой линейный ток  $I_{\Delta}$  равен фазному току  $I_{\Phi}$ :

$$I_{\Delta} = I_{\Phi}. \quad (16.11)$$

### 16.3. Соединение обмоток генератора треугольником

При соединении обмоток генератора треугольником (рис. 16.5а) конец обмотки фазы  $A$  соединяется с началом обмотки фазы  $B$ , конец обмотки фазы  $B$  соединяется с началом обмотки фазы  $C$ , конец обмотки фазы  $C$  соединяется с началом обмотки фазы  $A$  и к точкам соединения подключаются линейные провода.

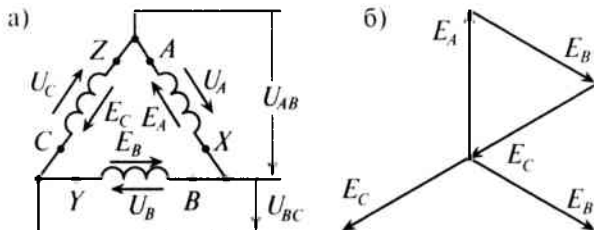


Рис. 16.5



При соединении обмоток генератора треугольником (рис. 16.5а) трехфазная цепь трехпроводная.

Как следует из схемы соединения обмоток треугольником (рис. 16.5а), линейное напряжение  $U_{AB}$  равно фазному напряжению  $U_A$ ,  $U_{BC} = U_B$  и  $U_{CA} = U_C$ .

То есть

$$U_{\Delta} = U_{\Phi}. \quad (16.12)$$

Из схемы (рис. 16.5а) следует, что три обмотки генератора, соединенные треугольником, образуют замкнутый контур, ток в котором при отсутствии нагрузки (холостой ход) определяется выражением

$$j = \frac{\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C}{Z_A + Z_B + Z_C}, \quad (16.13)$$

где  $\dot{E}_A$ ,  $\dot{E}_B$  и  $\dot{E}_C$  — комплексы (векторы) ЭДС фаз генератора;  $Z_A$ ,  $Z_B$  и  $Z_C$  — комплексы сопротивлений обмоток генератора ( $Z_A = R_A + jX_A$ ;  $Z_B = R_B + jX_B$  и  $Z_C = R_C + jX_C$ ), т. е. каждая обмотка обладает активным  $R$  и индуктивным  $X$  сопротивлениями.

Так как сопротивления обмоток малы, падением напряжения на них можно пренебречь и считать, что напряжение на каждой обмотке генератора равно ее ЭДС.

При симметричной системе ЭДС и правильном соединении обмоток генератора треугольником (рис. 16.5а) геометрическая сумма ЭДС (комплексов) обмоток генератора, образующих замкнутый контур, равна нулю (рис. 16.5б). Следовательно, и ток в замкнутом контуре обмоток, соединенных треугольником, также равен нулю ( $I = 0$ ) при холостом ходе независимо от величины внутреннего сопротивления обмоток  $Z$ .

Если обмотки симметричного генератора соединены «неправильным» треугольником, т. е. неправильно подключить начало и конец хотя бы одной из обмоток, например  $BY$  (рис. 16.5'а), то геометрическая сумма ЭДС в замкнутом контуре обмоток будет равна удвоенному значению ЭДС одной фазы (рис. 16.5'б). С учетом малого внутреннего сопротивления обмоток генератора ток в

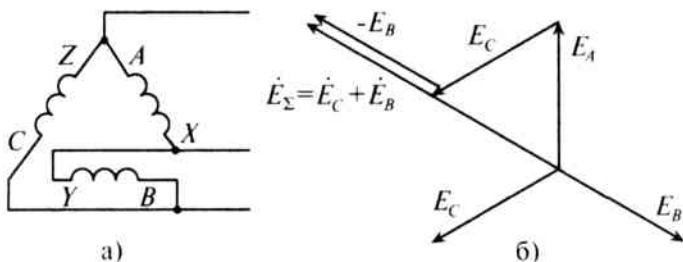


Рис. 16.5'

замкнутом контуре достигает катастрофической величины даже при отсутствии нагрузки (холостой ход). Таким образом, соединение обмоток трехфазного генератора «неправильным» треугольником равносильно короткому замыканию в замкнутом контуре обмоток.

#### 16.4. Соединение потребителей звездой

При соединении звездой потребителя и генератора (рис. 16.6) трехфазная система представляет собой сложную цепь с двумя узловыми точками 0 и 0'. Точка 0 – нейтральная точка генератора, а 0' – нейтральная точка потребителя. Напряжение между этими узловыми точками  $U_N$  называется *напряжением смещения нейтрали*.

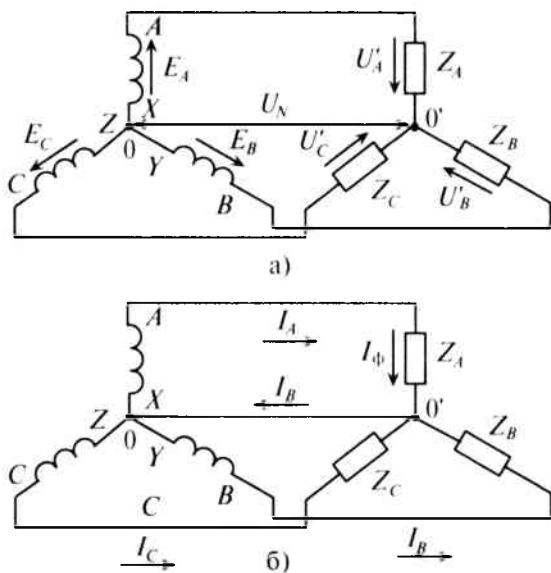


Рис. 16.6

Соединение генератора и потребителя звездой может быть с нулевым проводом (рис. 16.6б), т. е. четырехпроводная цепь, и без нулевого провода (рис. 16.6а), т. е. трехпроводная цепь.

Величину напряжения смещения нейтрали  $U_N$  определяют методом узлового напряжения (см. (4.9)) в символической (геометрической) форме:

$$\dot{U}_N = \frac{\dot{E}_A \underline{Y}_A + \dot{E}_B \underline{Y}_B + \dot{E}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_0}, \quad (16.14)$$

где  $\dot{U}_N$  — комплекс (вектор) напряжения смещения нейтрали;  $\dot{E}_A$ ,  $\dot{E}_B$  и  $\dot{E}_C$  — комплексы (векторы) ЭДС в обмотках соответствующих фаз генератора;  $\underline{Y}_A$ ,  $\underline{Y}_B$  и  $\underline{Y}_C$  — комплексы проводимостей соответствующих фаз:

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A}; \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B} \text{ и } \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C},$$

где  $\underline{Z}_A$ ,  $\underline{Z}_B$  и  $\underline{Z}_C$  — комплексы сопротивлений фаз потребителя, включая внутреннее сопротивление обмоток генератора и сопротивление соединительных проводов;  $\underline{Y}_0 = \frac{1}{\underline{Z}_0}$  — комплекс проводимости нулевого провода, а  $\underline{Z}_0$  — комплекс его сопротивления.

Напряжение  $U'$  на каждой фазе потребителя, соединенного звездой (рис. 16.6а), с учетом напряжения смещения нейтрали, определяют следующим образом:

$$\dot{U}'_A = \dot{E}_A - \dot{U}_N; \dot{U}'_B = \dot{E}_B - \dot{U}_N \text{ и } \dot{U}'_C = \dot{E}_C - \dot{U}_N, \quad (16.15)$$

где  $\dot{U}'_A$ ,  $\dot{U}'_B$  и  $\dot{U}'_C$  — комплексы (векторы) напряжений на фазах потребителей.

На основании (16.15) строится векторная диаграмма напряжений (рис. 16.7), на которой вектор напряжения смещения нейтрали взят произвольно. Из векторной диаграммы (рис. 16.7) следует, что при наличии напряжения смещения нейтрали напряжения на фазах потребителя, соединенного звездой, различны по величине и по начальной фазе даже при симметричной системе ЭДС в обмотках генератора.

Очевидно (рис. 16.7), что напряжения на фазах потребителя, соединенного звездой, будут одинаковыми по величине  $U'_A = U'_B = U'_C$ , если напряжение смещения нейтрали отсутствует, т. е.  $U_N = 0$ , при симметричной системе ЭДС генератора.

*Напряжение смещения нейтрали отсутствует, т. е.  $U_N = 0$ , при равномерной (симметричной) нагрузке фаз или при наличии нулевого провода.*

Рассмотрим эти условия.

1. Равномерная нагрузка фаз.

*Равномерной называют нагрузку, при которой комплексы сопротивлений фаз равны между собой.*

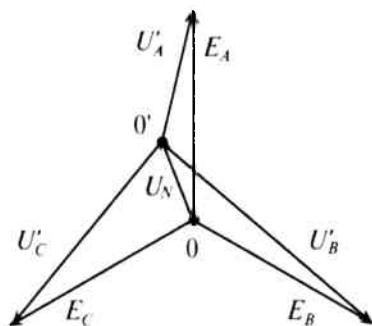


Рис. 16.7

$$\text{То есть} \quad \underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C \quad (16.16)$$

$$\text{или} \quad \underline{Y}_A = \underline{Y}_B = \underline{Y}_C = \underline{Y}. \quad (16.17)$$

Тогда  $\dot{U}_N = \frac{\underline{Y}(\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C)}{\Sigma \underline{Y}} = 0$ , так как при симметричной

системе ЭДС сумма  $\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0$  (см. рис. 16.56).

Так как комплекс сопротивления фазы  $\underline{Z}_\phi = \underline{Z}_\phi e^{\pm j\phi}$ , то *равномерной считается нагрузка, при которой сопротивления фаз одинаковы по величине  $Z_A = Z_B = Z_C$ , по характеру (активный, индуктивный или емкостной) и имеют одинаковый угол сдвига фаз  $\phi_A = \phi_B = \phi_C$ .*

2. Наличие нулевого провода.

При наличии нулевого провода, соединяющего нейтральные точки 0 и 0' (рис. 16.66),  $\underline{Z}_0 = 0$ , а  $\underline{Y}_0 = \infty$

$$\text{Тогда} \quad \dot{U}_N = \frac{\Sigma \dot{E} \underline{Y}}{\Sigma \underline{Y} + \underline{Y}_0} = \frac{\Sigma \dot{E} \underline{Y}}{\Sigma \underline{Y} + \infty} = 0.$$

В обоих случаях (1 и 2) напряжения на фазах потребителя, подключенного к трехфазному генератору с симметричной системой ЭДС, одинаковы по величине. При этом величина напряжения  $U'$  на каждой фазе потребителя, соединенного звездой, в  $\sqrt{3} = 1,73$  раза меньше линейного напряжения, т. е.

$$\boxed{U'_\phi = \frac{U_\Delta}{\sqrt{3}} = \frac{U_\Delta}{1,73}} \quad (16.18)$$

Ток в нулевом проводе  $\dot{I}_N$  (рис. 16.66) при соединении потребителей звездой определяется геометрической суммой токов в фазах потребителя:

$$\boxed{\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C} \quad (16.19)$$

Токи в фазах потребителя определяются по формулам

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}'_A}{\underline{Z}_A}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}'_B}{\underline{Z}_B}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}'_C}{\underline{Z}_C}. \quad (16.20)$$

Очевидно, что при равномерной нагрузке фаз ( $\dot{U}'_A = \dot{U}'_B = \dot{U}'_C$  (16.18) и  $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C$  (16.16)) токи в фазах равны по величине и сдвинуты, как и напряжения, по фазе на  $120^\circ$ . Следовательно, их геометрическая сумма ( $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$ ) равна нулю, т. е.  $\dot{I}_N = 0$  (см. рис. 16.56, где вместо  $E$  подставить  $I$ ).

Таким образом, при равномерной нагрузке фаз нулевой провод не нужен.

При неравномерной нагрузке фаз отсутствие нулевого провода приводит к неодинаковым по величине напряжениям на каждой фазе потребителя (рис. 16.7). При этом на фазе с большим сопротивлением  $Z$  будет большее напряжение  $U'$ .

Так как отсутствие нулевого провода при неравномерной нагрузке фаз потребителя, соединенного звездой, нарушает режим работы потребителей  $U'$ , то предохранитель в нулевой провод не ставят.

Следовательно, нулевой провод служит для выравнивания напряжений на фазах потребителя при неравномерной нагрузке фаз.

При соединении потребителей звездой ток каждой фазы потребителя  $I_{\phi}$  (рис. 16.16) равен линейному току трехфазной цепи  $I_L$ :

$$I_{\phi} = I_L.$$

### 16.5. Соединение потребителей треугольником

При соединении потребителя треугольником (рис. 16.8) к каждой фазе потребителя приложено линейное напряжение трехфазной цепи

$$U'_{\phi} = U_L. \quad (16.21)$$

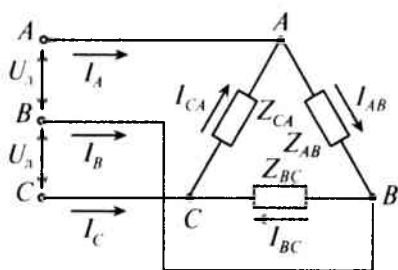


Рис. 16.8

Так как при симметричной системе ЭДС все линейные напряжения равны по величине и сдвинуты на угол  $120^\circ$  по фазе, то и напряжения на каждой фазе потребителя, соединенного треугольником, равны по величине ( $U'_A = U'_B = U'_C$ ) и сдвинуты по фазе на угол  $120^\circ$ , независимо от характера нагрузки.

При соединении потребителей треугольником линейные токи обозначаются прописными буквами с индексами фаз, т. е.  $I_A$ ,  $I_B$  и  $I_C$ , а токи в фазах потребителя —  $I_{AB}$ ,  $I_{BC}$  и  $I_{CA}$ .

Воспользовавшись первым законом Кирхгофа, линейные токи можно определить выражениями (рис. 16.8)

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} \quad \text{и} \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}. \quad (16.22)$$

Линейный ток при соединении потребителей треугольником определяется геометрической разностью двух фазных токов, сходящихся с линейным в одной узловой точке (рис. 16.8).

Фазные токи потребителя, соединенного треугольником, определяются:

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}'_{AB}}{\underline{Z}_{AB}}; \quad \dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}'_{BC}}{\underline{Z}_{BC}}; \quad \dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}'_{CA}}{\underline{Z}_{CA}}. \quad (16.23)$$

При симметричной системе ЭДС генератора ( $\dot{E}_A = \dot{E}_B = \dot{E}_C$ ) и равномерной нагрузке фаз потребителя ( $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{CA}$ ) токи в фазах потребителя равны между собой по величине ( $I_{AB} = I_{BC} = I_{CA}$ ) и, так же как напряжения на фазах потребителя, сдвинуты друг относительно друга по фазе на угол  $120^\circ$  (рис. 16.9).

$$I_C = 2 I_{CA} \cos 30^\circ = 2 I_{CA} \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} I_{CA}.$$

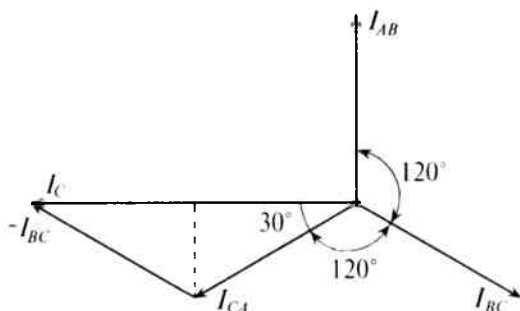


Рис. 16.9

Таким образом, при равномерной нагрузке фаз и симметричной системе ЭДС при соединении потребителей треугольником линейный ток в трехфазной цепи в  $\sqrt{3} = 1,73$  раза больше фазного тока:

$$I_L = \sqrt{3} I_{\Phi}. \quad (16.24)$$

### 16.6. Мощность трехфазного тока

Активная мощность, отдаваемая трехфазным генератором и потребляемая трехфазным потребителем, определяется суммой активных мощностей каждой фазы потребителя:

$$P = P_A + P_B + P_C = U_{\Phi A} I_{\Phi A} \cos \varphi_A + U_{\Phi B} I_{\Phi B} \cos \varphi_B + U_{\Phi C} I_{\Phi C} \cos \varphi_C. \quad (16.25)$$

Аналогичное определение можно отнести и к реактивной мощности трехфазного тока, т. е.

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = U_{\Phi A} I_{\Phi A} \sin \varphi_A + U_{\Phi B} I_{\Phi B} \sin \varphi_B + U_{\Phi C} I_{\Phi C} \sin \varphi_C. \quad (16.26)$$

Полная, или кажущаяся, мощность трехфазного потребителя равна

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (16.27)$$

Очевидно, что при равномерной нагрузке фаз ( $U_{\phi A} = U_{\phi B} = U_{\phi C}$  и  $I_{\phi A} = I_{\phi B} = I_{\phi C}$ ) активная мощность трехфазного тока равна утроенному значению активной мощности каждой фазы

$$P = 3P_{\phi} = 3U_{\phi}I_{\phi} \cos \varphi_{\phi}. \quad (16.28)$$

Однако на практике удобней оперировать линейными величинами, так как доступными являются линейные провода, а не обмотки генератора или двигателя.

При соединении потребителя звездой при равномерной нагрузке фаз

$$U_{\phi} = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}}, \quad \text{а} \quad I_{\phi} = I_{\text{л}}.$$

$$\text{Тогда} \quad P = 3U_{\phi}I_{\phi} \cos \varphi = 3 \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}} I_{\text{л}} \cos \varphi = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi.$$

При соединении потребителей треугольником при равномерной нагрузке фаз

$$U_{\phi} = U_{\text{л}}; \quad \text{а} \quad I_{\phi} = \frac{I_{\text{л}}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Тогда} \quad P = 3U_{\phi}I_{\phi} \cos \varphi = 3 \frac{I_{\text{л}}}{\sqrt{3}} U_{\text{л}} \cos \varphi = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi.$$

Таким образом, при равномерной нагрузке фаз при соединении потребителей звездой и треугольником мощности трехфазного тока определяются выражениями:

$$\text{активная мощность} \quad P = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi; \quad (16.29)$$

$$\text{реактивная мощность} \quad Q = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \sin \varphi; \quad (16.30)$$

$$\text{полная, или кажущаяся, мощность} \quad S = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \quad (16.31)$$

или при неравномерной нагрузке по (16.27)

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

При неравномерной нагрузке фаз полная, или кажущаяся, мощность трехфазного тока может быть определена суммой пол-

ных мощностей каждой фазы, выраженной в комплексной форме, а именно

$$\underline{S} = \underline{S}_A + \underline{S}_B + \underline{S}_C. \quad (16.32)$$

Равномерную нагрузку в трехфазных цепях обеспечивают электрические двигатели трехфазного тока, обмотки которых могут быть соединены или звездой, или треугольником.

### 16.7. Топографическая диаграмма

Напряжение между отдельными точками трехфазной цепи можно найти графически путем построения так называемой топографической диаграммы.

Топографическая диаграмма – это векторная диаграмма, построенная так, чтобы каждой точке цепи соответствовала определенная точка на диаграмме и чтобы вектор, проведенный в эту точку из начала координат, выражал по величине и фазе потенциал соответствующей точки цепи. Отрезок, соединяющий любые две точки на этой диаграмме, определяет напряжение между соответствующими точками цепи. Если топографическая диаграмма построена в определенном масштабе, то по ней можно определить искомое напряжение и ток по величине и по фазе.

При построении топографической диаграммы для трехфазной цепи удобно принять за точку с нулевым потенциалом нулевую, или нейтральную, точку генератора. Этой точке генератора соответствует начало координат топографической диаграммы.

Топографическая диаграмма для трехфазной цепи, изображенной на рис. 16.6, построена при условии, что точка  $O$  на диаграмме (рис. 16.10) соответствует нулевой точке генератора, потенциал которой равен нулю, т. е.  $\varphi_0 = 0$ .

Из точки  $O$  откладываются в определенном масштабе напряжений  $M_U$  векторы фазных ЭДС  $\dot{E}_A$ ,  $\dot{E}_B$  и  $\dot{E}_C$ , в результате чего получаются точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  на топографической диаграмме. Эти точки на диаграмме соответствуют началам обмоток генератора, соединенного звездой точками  $A$ ,  $B$  и  $C$  цепи.

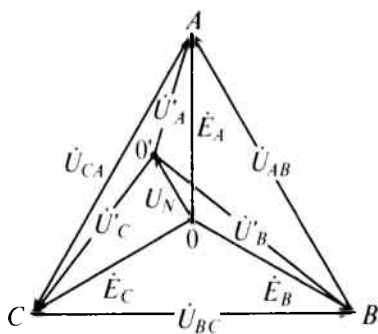


Рис. 16.10

Отрезок  $\overline{BC}$ , равный разности векторов  $\dot{E}_B - \dot{E}_C$ , представляет собой линейное напряжение  $\dot{U}_{BC} = \varphi_B - \varphi_C$  (падением напряже-



ния на внутреннем сопротивлении обмотки генератора пренебрегаем, т. е.  $\vec{E}_A = \vec{U}_A$ ). Аналогично отрезки  $\overline{AB}$  и  $\overline{CA}$  на топографической диаграмме изображают линейные напряжения  $\vec{U}_{AB}$  и  $\vec{U}_{CA}$  соответственно.

Отложив из точки 0 (начало координат) вектор напряжения смещения нейтрали  $\vec{U}_N$  (отрезок  $00'$ ), определяют потенциал нулевой точки потребителя  $0'$  на диаграмме. Тогда отрезки  $0'A$ ,  $0'B$  и  $0'C$  выражают напряжение на фазах потребителя  $\vec{U}_A$ ,  $\vec{U}_B$  и  $\vec{U}_C$ .

Если напряжение смещения нейтрали  $\vec{U}_N$  отсутствует ( $\vec{U}_N = 0$ ), то точка  $0'$  (нулевая точка потребителя) на топографической диаграмме совпадает с точкой 0 (нулевой точкой генератора). Тогда векторы напряжений на фазах потребителя  $\vec{U}'_A$ ,  $\vec{U}'_B$  и  $\vec{U}'_C$  равны по величине и по фазе векторам ЭДС генератора  $\vec{E}_A$ ,  $\vec{E}_B$  и  $\vec{E}_C$ .

Применение топографической диаграммы для расчета трехфазной цепи рассмотрено в примере 16.1 настоящей главы.

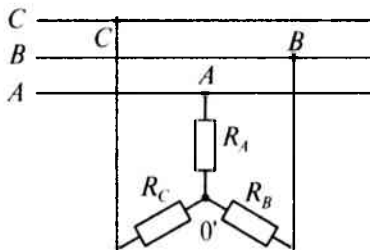


Рис. 16.11

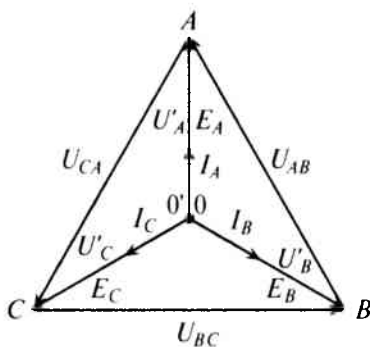


Рис. 16.12

### Пример 16.1

К трехфазной трехпроводной сети с линейным напряжением  $U_{\text{л}} = 220$  В подключен потребитель, соединенный звездой, с сопротивлениями  $R_A = R_B = R_C = 10$  Ом (рис. 16.11).

Определить напряжение и ток каждой фазы потребителя в каждом из трех режимов:

1. Потребители соединены звездой, как показано на рис. 16.11.
2. Обрыв в фазе А, т. е.  $R_A = \infty$ .
3. Короткое замыкание в фазе А, т. е.  $R_A = 0$ .

### Решение

Решение этой задачи производится с помощью построения топографической диаграммы для каждого режима.

1. Так как в данном режиме имеет место равномерная нагрузка фаз ( $R_A = R_B = R_C$ ), следовательно, напряжение смещения нейтрали  $U_N$  равно нулю ( $U_N = 0$ ) и точка  $0'$  на топографической диаграмме совпадает с точкой 0 (рис. 16.12).

Пренебрегая внутренним сопротивлением обмоток генератора ( $\dot{U}'_A = E_A, \dot{U}'_B = E_B$  и  $\dot{U}'_C = E_C$ ), определяют напряжение на каждой фазе потребителя при симметричной системе ЭДС:

$$U'_A = U'_B = U'_C = \frac{U'_\Delta}{\sqrt{3}} = \frac{220}{1,73} = 127 \text{ В,}$$

так как  $U_\Delta = U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = 220 \text{ В}$ .

Ток каждой фазы потребителя будет равен

$$I_A = I_B = I_C = \frac{U'_A}{R_A} = \frac{127}{10} = 12,7 \text{ А.}$$

Линейные токи в каждом линейном проводе также равны между собой и равны фазным токам каждой фазы, т. е.  $I_\Delta = I_\phi = 12,7 \text{ А}$ .

2. При обрыве в фазе  $A$  схема трехфазной цепи обретает следующий вид (рис. 16.13а), а топографическая диаграмма показана на рис. 16.13б.

Таким образом, точка  $0'$  на топографической диаграмме при обрыве в фазе  $A$  как бы опустилась на вектор линейного напряжения  $U_{BC}$ , разделив его величину поровну между  $U'_B$  и  $U'_C$ , т. е.

$$U'_B = U'_C = \frac{U_{BC}}{2} = \frac{U_\Delta}{2} = \frac{220}{2} = 110 \text{ В.}$$

Напряжение на оборванной фазе  $A$ , т. е. напряжение между точками  $0'$  и  $A$  в схеме, как следует из топографической диаграммы (рис. 16.13б), будет равно

$$U_{0'A} = U'_A = \sqrt{U_{CA}^2 - (U'_C)^2} = \sqrt{220^2 - 110^2} = 190 \text{ В.}$$

Токи в фазах:  $I_A = 0$ , так как  $R_A = \infty$ ;

$$I_B = I_C = \frac{U'_B}{R_B} = \frac{U'_C}{R_C} = \frac{110}{10} = 11 \text{ А.}$$

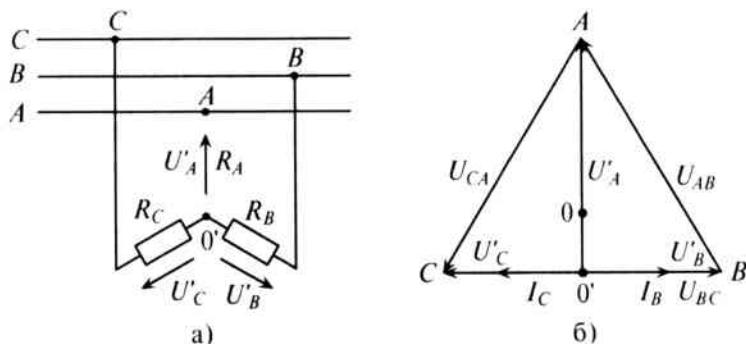


Рис. 16.13

Токи в линейных проводах:

$$I_{лА} = I_A = 0; I_{лВ} = I_{лС} = 11 \text{ А.}$$

3. При коротком замыкании фазы  $A$  схема трехфазной цепи показана на рис. 16.14а, топографическая диаграмма на рис. 16.14б.

Таким образом, точка  $O'$  на топографической диаграмме при коротком замыкании фазы как бы поднялась в точку  $A$  (т. е.  $\varphi_{O'} = \varphi_A$ ) и фазные напряжения  $U'_B$  и  $U'_C$  совпали с векторами линейных напряжений  $U_{AB}$  и  $U_{AC}$  соответственно и стали равными им по величине, т. е.  $U'_B = U_{AB} = U_{л} = 220 \text{ В}$ ,  $U'_C = U_{CA} = U_{л} = 220 \text{ В}$ , а  $U'_A = 0$ .

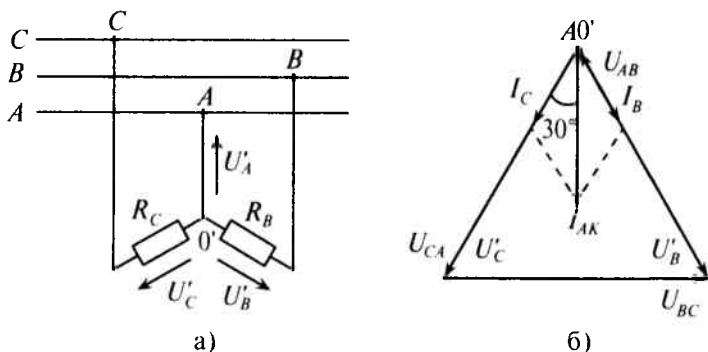


Рис. 16.14

Токи в фазах будут равны  $I_B = \frac{U'_B}{R_B} = \frac{220}{10} = 22 \text{ А}$ ;  
 $I_C = \frac{U'_C}{R_C} = \frac{220}{10} = 22 \text{ А}$ .

Ток в коротко замкнутой фазе  $I_A$ , т. е. ток в проводе, соединяющем точку  $O'$  и  $A$ , определяется геометрической суммой токов  $\vec{I}_{AK} = \vec{I}_B + \vec{I}_C$  (рис. 16.14б), т. е.

$$I_{AK} = 2 I_C \cos 30^\circ = 2 I_C \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} I_C = \sqrt{3} \cdot 22 = 38 \text{ А.}$$

Напряжение  $U'_B$  и  $U'_C$  и токи  $I_B$  и  $I_C$  в режимах 2 и 3 легко определить из схем рис. 16.13а и 16.14а, не прибегая к топографическим диаграммам.

### Пример 16.2

К соединенному звездой генератору с фазным напряжением 127 В подключен потребитель, соединенный треугольником. Активное сопротивление каждой фазы потребителя  $R = 8 \text{ Ом}$ , индуктивное  $X_L = 6 \text{ Ом}$  (рис. 16.15а).

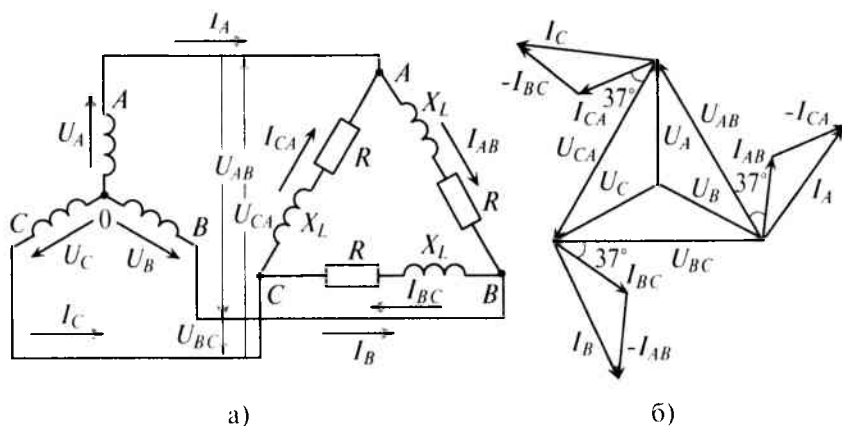


Рис. 16.15

Определить ток в каждой фазе генератора, отдаваемую им мощность и построить векторную диаграмму.

### Решение

Эту задачу можно решить, не прибегая к символическому методу и построению топографической диаграммы.

Напряжение на каждой фазе потребителя  $U_{\text{фн}}$  равно линейному напряжению генератора  $U_{\text{лн}}$ :

$$U_{\text{фн}} = U_{\text{лн}} = U_{\text{фн}} \cdot \sqrt{3} = 127 \cdot 1,73 = 220 \text{ В.}$$

Сопrotивление каждой фазы потребителя равно

$$Z_{\text{фн}} = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ Ом.}$$

Ток каждой фазы потребителя (нагрузка равномерная):

$$I_{\text{фн}} = \frac{U_{\text{фн}}}{Z_{\text{фн}}} = \frac{220}{10} = 22 \text{ А.}$$

В каждой фазе генератора проходит линейный ток потребителя, соединенного треугольником, т. е. (см. рис. 16.15а)

$$I_{\text{ф}} = I_{\text{лн}} = \sqrt{3} I_{\text{фн}} = 1,73 \cdot 22 = 38 \text{ А.}$$

Отдаваемая генератором мощность (активная мощность) равна

$$P = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi = 1,73 \cdot 220 \cdot 38 \cdot 0,8 = 11570 \text{ Вт,}$$

Так как  $\cos \varphi = \frac{R}{Z_{\text{фн}}} = \frac{8}{10} = 0,8$ .

Угол  $\varphi = 37^\circ$  (Приложение 10).

Таким образом, ток фазы потребителя отстает от напряжения на угол  $37^\circ$ , так как нагрузка индуктивного характера.

Вычисленные величины легли в основу построения векторной диаграммы (рис. 16.156).

### Пример 16.3

Параметры трехфазного потребителя, соединенного звездой, имеют следующие значения:  $R_A = 8$  Ом;  $X_A = 4$  Ом;  $X_B = 5$  Ом;  $R_B = 3$  Ом;  $R_C = 10$  Ом. Линейное напряжение сети симметричной системы ЭДС  $U_l = 220$  В.

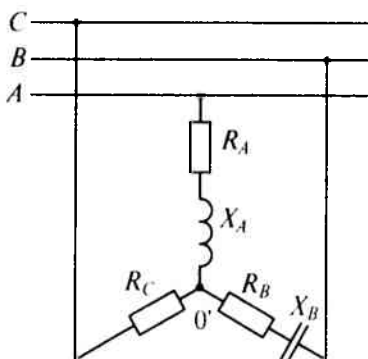


Рис. 16.16

Определить:

- 1) напряжение на каждой фазе потребителя;
  - 2) токи каждой фазы потребителя;
  - 3) мощности  $S$ ,  $P$  и  $Q$  цепи.
- Построить векторную диаграмму.

### Решение

Допустим, что обмотки генератора соединены звездой, тогда напряжение каждой фазы генератора (при симметричной системе ЭДС)

$$U_{\Phi} = \frac{U_l}{\sqrt{3}} = \frac{220}{1,73} = 127 \text{ В.}$$

Напряжение на каждой обмотке генератора в комплексной форме:

$$\dot{U}_A = 127 e^{j0^\circ} = 127,$$

$$\dot{U}_B = 127 e^{j120^\circ} = -63,5 - 110j,$$

$$\dot{U}_C = 127 e^{j240^\circ} = -63,5 + 110j.$$

Сопrotивление  $Z$  каждой фазы потребителя:

$$\underline{Z}_A = R_A + jX_A = 8 + 4j = 9e^{j26,30^\circ}$$

$$\underline{Z}_B = R_B - jX_B = 3 - 5j = 5,82e^{-j59^\circ},$$

$$\underline{Z}_C = R_C = 10 = 9e^{j0^\circ}.$$

Проводимости  $Y$  каждой фазы потребителя:

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A} = \frac{1}{9e^{j26,30^\circ}} = 0,119e^{-j26,30^\circ} = 0,0985 - 0,049j,$$

$$\underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B} = \frac{1}{5,82e^{-j59^\circ}} = 0,17e^{j59^\circ} = 0,0875 + 0,146j,$$

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{10e^{j0^\circ}} = 0,1e^{-j0^\circ} = 0,1.$$

Напряжение смещения нейтрали  $\dot{U}_N$  при отсутствии нулевого провода, т. е. при  $\underline{Z}_0 = \infty$  и  $\underline{Y} = 0$ , будет равно

$$\begin{aligned} \dot{U}_N &= \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_A + \dot{U}_B \underline{Y}_B + \dot{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_0} = \\ &= \frac{127e^{j0^\circ} \cdot 0,11e^{-j26^\circ 30'} + 127e^{-j120^\circ} \cdot 0,17e^{j59^\circ} + 127e^{j120^\circ} \cdot 0,1e^{-j0^\circ}}{0,0985 - 0,049j + 0,0875 + 0,146j + 0,1 + 0} = \\ &= 72,6e^{-j59^\circ} = 37,4 - 62,3j. \end{aligned}$$

При вычислении  $\dot{U}_N$  принято:  $\dot{U}_A = \dot{E}_A$ ;  $\dot{U}_B = \dot{E}_B$  и  $\dot{U}_C = \dot{E}_C$ .  
Напряжение на каждой фазе потребителя (16.15):

$$\begin{aligned} \dot{U}'_A &= \dot{U}_A - \dot{U}_N = 127 - 37,4 + 62,3j = \\ &= 89,6 + 62,3j = 109e^{j34^\circ 50'}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}'_B &= \dot{U}_B - \dot{U}_N = -63,5 - 110j - 37,4 + 62,3j = \\ &= -100,9 - 47,7j = 113e^{j154^\circ 40'}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{U}'_C &= \dot{U}_C - \dot{U}_N = -63,5 + 110j - 37,4 + 62,3j = \\ &= 100,9 + 172,3j = 200e^{j120^\circ 20'}. \end{aligned}$$

Токи в каждой фазе потребителя:

$$\dot{i}_A = \frac{\dot{U}'_A}{\underline{Z}_A} = \frac{109e^{j34^\circ 50'}}{9e^{j26^\circ 30'}} = 12,1e^{j8^\circ 20'};$$

$$\dot{i}_B = \frac{\dot{U}'_B}{\underline{Z}_B} = \frac{113e^{j154^\circ 40'}}{5,82e^{-j59^\circ}} = 19,4e^{-j95^\circ 40'};$$

$$\dot{i}_C = \frac{\dot{U}'_C}{\underline{Z}_C} = \frac{200e^{j120^\circ 20'}}{10e^{j0^\circ}} = 20e^{j120^\circ 20'}.$$

Мощности каждой фазы потребителя:

$$\underline{S}_A = \dot{U}'_A \dot{i}_A = 109e^{j34^\circ 50'} \cdot 12,1e^{-j8^\circ 20'} = 1318e^{j26^\circ 350'} = 1180 + 590j;$$

$$\underline{S}_B = \dot{U}'_B \dot{i}_B = 113e^{-j154^\circ 40'} \cdot 19,4e^{j95^\circ 40'} = 2192e^{-j59^\circ} = 1130 - 1880j;$$

$$\underline{S}_C = \dot{U}'_C \dot{i}_C = 200e^{j120^\circ 20'} \cdot 20e^{-j120^\circ 20'} = 4000e^{j0^\circ} = 4000.$$

Мощность всей трехфазной нагрузки:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{S}_A + \underline{S}_B + \underline{S}_C = 1180 + 590j + 1130 - 1880j + 4000 = \\ &= 6310 - 1290j = 6420e^{-j11^\circ 35'}. \end{aligned}$$

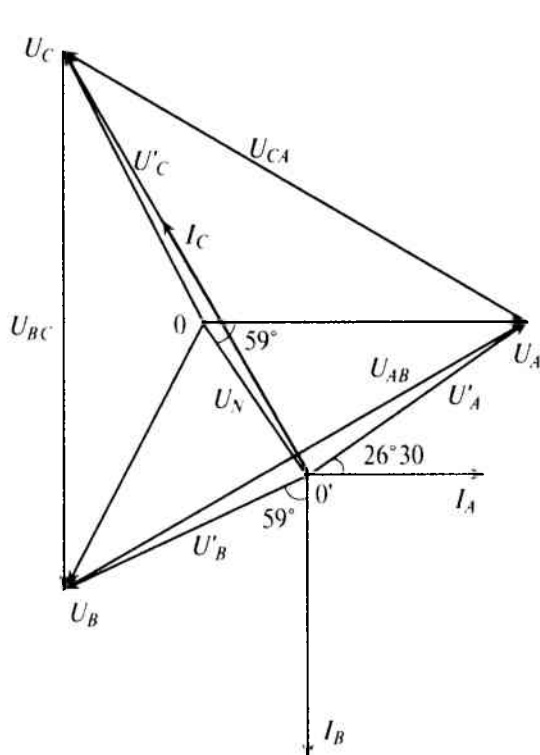


Рис. 16.17

Результаты расчета:

$Z_A = 9 \text{ Ом};$   
 $Z_B = 5,82 \text{ Ом};$   
 $Z_C = 10 \text{ Ом};$   
 $Y_A = 0,11 \text{ См};$   
 $Y_B = 0,17 \text{ См};$   
 $Y_C = 0,1 \text{ См};$   
 $U_N = 72,6 \text{ В};$   
 $U'_A = 109 \text{ В};$   
 $U'_B = 113 \text{ В};$   
 $U'_C = 200 \text{ В};$   
 $I_A = 12,1 \text{ А};$   
 $I_B = 19,4 \text{ А};$   
 $I_C = 20 \text{ А};$   
 $S_A = 1318 \text{ В} \cdot \text{А};$   
 $S_B = 2192 \text{ В} \cdot \text{А};$   
 $S_C = 4000 \text{ В} \cdot \text{А};$   
 $S = 6420 \text{ В} \cdot \text{А};$   
 $P_A = 1180 \text{ Вт};$   
 $P_B = 1130 \text{ Вт};$   
 $P_C = 4000 \text{ Вт};$   
 $P = 6310 \text{ Вт};$   
 $Q_A = 59 \text{ вар};$   
 $Q_B = 1880 \text{ вар};$   
 $Q_C = 0 \text{ вар};$   
 $Q = 1290 \text{ вар};$   
 $\varphi_A = 26^\circ 30'; \varphi_B = -59';$   
 $\varphi_C = 0; \varphi = 11^\circ 35'.$

Векторная диаграмма рассматриваемой цепи изображена на рис. 16.17.

### Пример 16.4

К трехфазной сети с линейным напряжением  $U_L = 380 \text{ В}$  подключены двигатель Д и однофазные силовые потребители (рис. 16.18).

Обмотки трехфазного двигателя мощностью  $P = 10 \text{ кВт}$  и  $\cos \varphi = 0,76$  соединены треугольником. Однофазные силовые потребители с параметрами:  $R_A = R_B = 12 \text{ Ом}; R_C = 8 \text{ Ом}; X_A = X_B = 9 \text{ Ом}; X_C = 6 \text{ Ом}$  — соединены звездой.

Определить: показания амперметров  $A_1, A_2, A_3$  и  $A_4$ ; мощность  $P$ , потребляемую всей нагрузкой; показания вольтметров.

В линейном проводе С сгорел предохранитель (обрыв линейного провода С). Как при этом изменится показание вольтмет-

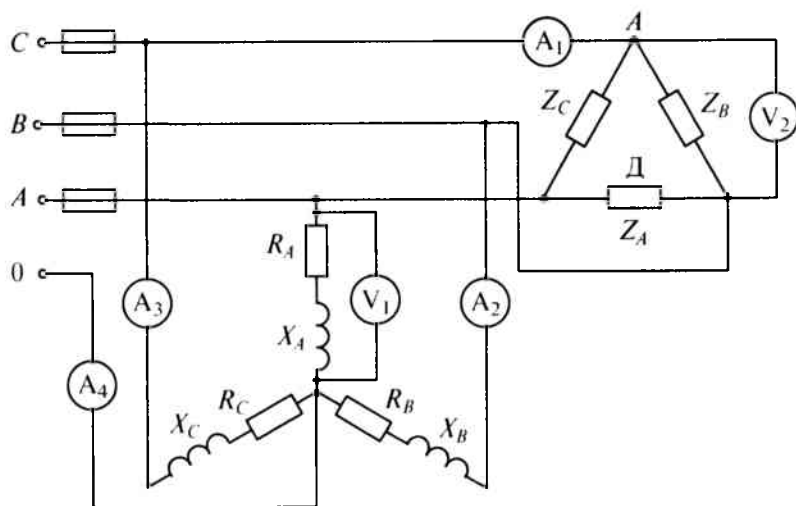


Рис. 16.18

ра  $V_1$ , если оборвется и нулевой провод? Как изменится показание вольтметра  $V_2$ ?

### Решение

Расчет трехфазной цепи (рис. 16.18) можно осуществить, не прибегая к символическому методу и построению топографической диаграммы.

Амперметр  $A_1$  включен в линейный провод  $C$ , подводящий питание к двигателю, обмотки которого соединены треугольником и представляют равномерную нагрузку фаз; следовательно (см. (16.29))

$$I_{A1} = I_{л} = \frac{P_{дв}}{\sqrt{3}U_{л} \cos \varphi_{дв}} = \frac{10000}{1,73 \cdot 380 \cdot 0,76} = 20 \text{ А.}$$

Амперметр  $A_2$  измеряет ток в фазе  $B$  силового потребителя, соединенного звездой. При наличии нулевого провода напряжение на каждой фазе потребителя  $U_{\phi} = \frac{U_{л}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{1,73} = 220 \text{ В}$ , тогда ток в фазе  $B$  будет равен

$$I_{A2} = I_B = \frac{U_{\phi}}{Z_B} = \frac{220}{15} = 14,7 \text{ А,}$$

так как  $Z_B = \sqrt{R_B^2 + X_B^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ Ом.}$



Показания амперметра  $A_3$ , включенного в фазу  $C$  силового потребителя:

$$I_{A3} = I_C = \frac{U_\Phi}{Z_C} = \frac{220}{10} = 22 \text{ А,}$$

так как  $Z_C = \sqrt{R_C^2 + X_C^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ Ом.}$

Амперметр  $A_4$  включен в нулевой провод, ток в котором  $I_N$  определяется геометрической суммой токов в фазах силового потребителя, соединенного звездой (см. (16.19) и рис. 16.19).

Для вычисления геометрической суммы токов фаз необходимо построить векторную диаграмму токов (рис. 16.19).

При наличии нулевого провода напряжения на фазах сдвинуты на угол  $120^\circ$ . Угол сдвига фаз между током и напряжением, исходя из условий, для всех трех фаз одинаков (это видно из заданных параметров силового потребителя):

$$\operatorname{tg} \varphi_A = \operatorname{tg} \varphi_B = \operatorname{tg} \varphi_C = \frac{X_A}{R_A} = \frac{X_B}{R_B} = \frac{X_C}{R_C} = \frac{12}{9} = \frac{8}{6} = 1,33.$$

Следовательно, фазные токи сдвинуты так же, как и напряжения, на угол  $120^\circ$ . Величины токов определены:  $I_A = I_B = 14,7 \text{ А}$ ,  $I_C = 22 \text{ А}$ . На основании этих данных можно построить векторную диаграмму токов (рис. 16.19).

На векторной диаграмме складываются геометрически  $\vec{I}_A$  и  $\vec{I}_B$  и получается суммарный ток, равный  $14,7 \text{ А}$ .

Поскольку этот суммарный ток находится в противофазе с током  $I_C$ , то ток в нулевом проводе  $I_N$  равен  $7,3 \text{ А}$ :

$$22 - 14,7 = 7,3 \text{ А.}$$

Следовательно, амперметр  $A_4$  покажет ток  $7,3 \text{ А}$ .

Для расчета мощности  $P$ , потребляемой всей нагрузкой, вычисляется активная мощность каждого силового потребителя:

$$P_A = U'_A I_A \cos \varphi_A = 220 \cdot 14,7 \cdot 0,8 = 2587 \text{ Вт,}$$

$$\text{где } \cos \varphi_A = \frac{R_A}{Z_A} = \frac{12}{15} = 0,8.$$

$$P_B = U'_B I_B \cos \varphi_B = 220 \cdot 14,7 \cdot 0,8 = 2587 \text{ Вт,}$$

$$\text{где } \cos \varphi_B = \frac{R_B}{Z_B} = \frac{12}{15} = 0,8.$$

$$P_C = U'_C I_C \cos \varphi_C = 220 \cdot 22 \cdot 0,8 = 3887 \text{ Вт,}$$

$$\text{где } \cos \varphi_C = \frac{R_C}{Z_C} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

Тогда активная мощность, потребляемая всей нагрузкой, будет равна

$$P = P_A + P_B + P_C + P_{\text{дв}} = 2587 + 2587 + 3887 + 10000 = 19046 \text{ Вт} \approx 19 \text{ кВт.}$$

При обрыве линейного провода  $C$  и нулевого провода две фазы силового потребителя  $A$  и  $B$  окажутся соединенными последовательно и подключенными к линейному напряжению  $U_{AB} = 380 \text{ В}$ . Так как сопротивления этих фаз равны по величине, т. е.  $Z_A = Z_B$ , то это линейное напряжение распределится между ними поровну, т. е.

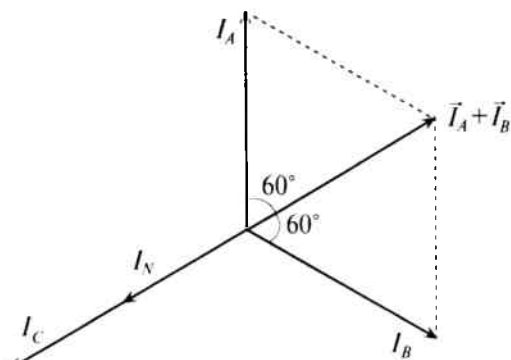


Рис. 16.19

$$U_A = U_B = \frac{U_{AB}}{2} = \frac{380}{2} = 190 \text{ В.}$$

Таким образом, вольтметр  $V_1$  покажет напряжение 190 В вместо 220 В, которое он показывал до обрыва.

При обрыве линейного провода  $C$  фазы  $B$  и  $C$  двигателя окажутся соединенными последовательно и подключенными к линейному напряжению  $U_{AB} = 380 \text{ В}$ . Так как сопротивления обмоток двигателя равны между собой, то линейное напряжение  $U_{AB}$  распределится поровну между обмотками  $B$  и  $C$  двигателя, т. е.

$$U_B = U_C = \frac{U_{AB}}{2} = \frac{380}{2} = 190 \text{ В.}$$

Таким образом, вольтметр  $V_2$  покажет напряжение 190 В вместо 380 В, которое он показывал до обрыва.

## Глава 17

### ВРАЩАЮЩЕЕСЯ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

#### 17.1. Вращающееся магнитное поле трехфазного тока

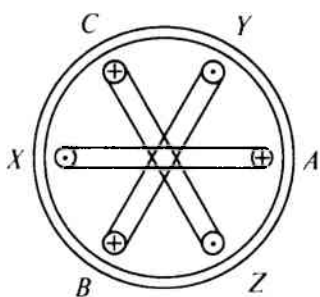


Рис. 17.1

Получение вращающегося магнитного поля рассматривается на примере магнитного поля трехфазного тока.

Если по трем неподвижным одинаковым катушкам (обмоткам)  $AX$ ,  $BY$  и  $CZ$ , скрепленным под углом  $120^\circ$  в пространстве (рис. 17.1), пропустить трехфазный ток (рис. 17.2)

$$\left. \begin{aligned} i_A &= I_m \sin \omega t; \\ i_B &= I_m \sin (\omega t - 120^\circ); \\ i_C &= I_m \sin (\omega t + 120^\circ), \end{aligned} \right\} (17.1)$$

то в этих обмотках создается трехфазный магнитный поток (рис. 17.2)

$$\left. \begin{aligned} \Phi_A &= \Phi_m \sin \omega t; \\ \Phi_B &= \Phi_m \sin (\omega t - 120^\circ); \\ \Phi_C &= \Phi_m \sin (\omega t + 120^\circ). \end{aligned} \right\} (17.2)$$

На рис. 17.1 и 17.2 обмотки изображены упрощенно, каждая в виде одного витка с началами  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и концами соответственно  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

Трехфазный магнитный поток внутри этих неподвижных катушек создает вращающееся магнитное поле трехфазного тока (рис. 17.2).

За положительное направление тока в обмотках принято направление от начала каждой катушки к ее концу, как показано на рис. 17.1.

Направление магнитного потока, созданного тремя обмотками для моментов времени  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , определяется по временной диаграмме (рис. 17.2) в зависимости от направления тока в каждой обмотке в эти моменты времени.

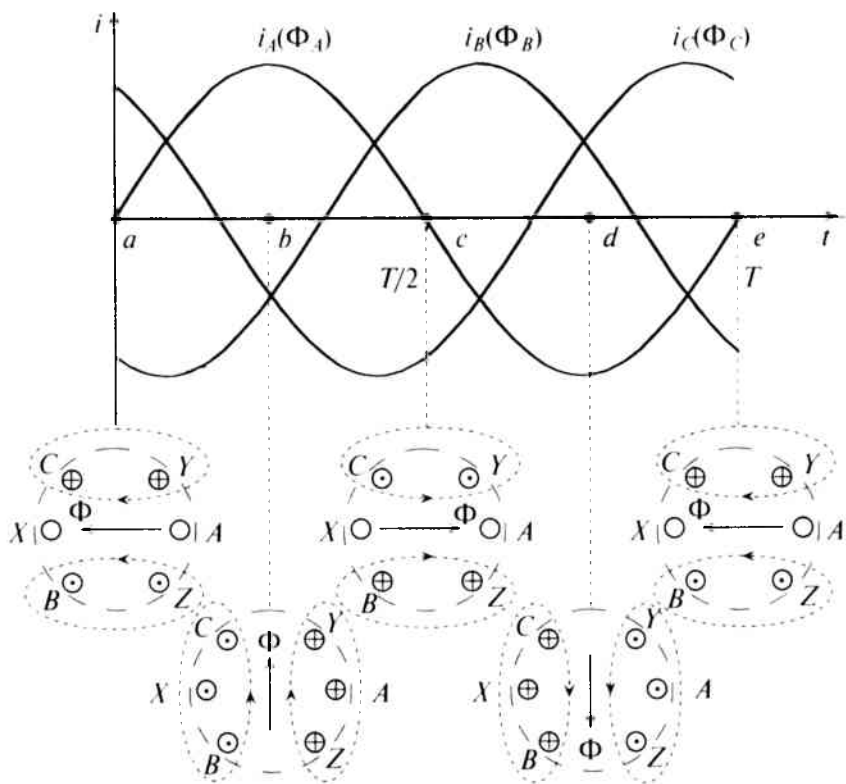


Рис. 17.2

Направление магнитного потока, созданного каждой активной стороной обмотки (и их сочетанием), определяется по правилу буравчика для каждого момента времени. Направление суммарного потока  $\Phi$  для каждого момента времени показано на рис. 17.2 прямыми стрелками  $\Phi$ .

Как видно, магнитное поле  $\Phi$  внутри неподвижных обмоток вращается по часовой стрелке. Для изменения направления вращения магнитного поля достаточно изменить чередования фаз обмоток при подключении последних к трехфазной цепи (например, поменять местами подключение двух обмоток:  $BC$  и  $CA$ ).

Величина вращающегося магнитного потока  $\Phi$  остается постоянной и равной  $\Phi = 1,5\Phi_m$  одной фазы, что можно наблюдать по временной диаграмме в любой момент времени (рис. 17.2). Вра-

шающееся магнитное поле трехфазного тока нашло широкое применение в трехфазных машинах (асинхронных и синхронных).

### 17.2. Вращающееся магнитное поле двухфазного тока

Двухфазным током называется совокупность двух однофазных токов, сдвинутых по фазе на угол  $90^\circ = \frac{\pi}{2}$  друг относительно друга (рис. 17.36):

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= I_m \sin \omega t; \\ i_2 &= I_m \sin(\omega t - 90^\circ). \end{aligned} \right\} \quad (17.3)$$

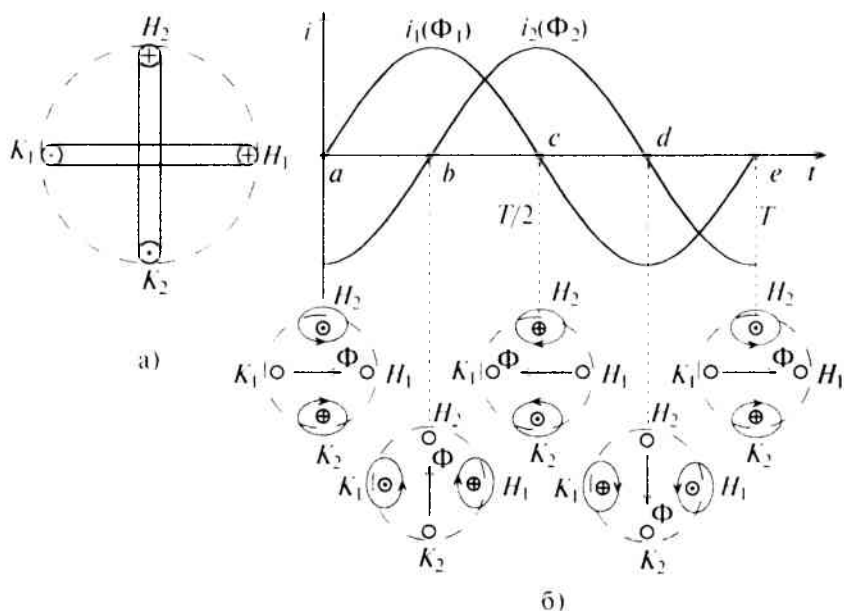


Рис. 17.3

Эти токи создают в обмотках переменные магнитные потоки, сдвинутые по фазе также на угол  $90^\circ$ :

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_m \sin \omega t; \\ \Phi_2 &= \Phi_m \sin(\omega t - 90^\circ). \end{aligned} \right\} \quad (17.4)$$

Таким образом, если по двум неподвижно скрепленным под углом  $90^\circ$  обмоткам пропустить двухфазный ток, то внутри этих об-

моток (рис. 17.3а) создается вращающееся магнитное поле двухфазного тока.

Как видно (рис. 17.3б), постоянный магнитный поток ( $\Phi = \Phi_m$  одной фазы) вращается против часовой стрелки, если при указанном расположении обмоток первый ток  $i_1$  опережает второй ток  $i_2$  по фазе.

Нетрудно убедиться в том, что если бы второй ток ( $i_2$ ) опережал первый ( $i_1$ ), то магнитное поле вращалось бы в обратную сторону.

Вращающееся магнитное поле двухфазного тока широко применяется для пуска и работы однофазных машин переменного тока.

### 17.3. Пульсирующее магнитное поле

Если по неподвижной катушке (обмотке) машины пропустить синусоидальный ток  $i = I_m \sin \omega t$ , то внутри этой катушки создается пульсирующее магнитное поле, т. е. поле, изменяющееся по величине и направлению, но расположенное в одной плоскости (рис. 17.4).

Пульсирующее магнитное поле, как видно из рис. 17.4, можно рассматривать как два магнитных поля, вращающихся в разные стороны. Поэтому в машинах, в которых используется пульсирующее магнитное поле, отсутствует пусковой момент. Для работы таких машин его необходимо создать. Пусковой момент в таких машинах создают или механически, или за счет пусковой обмотки, по которой в момент пуска пропускают импульс тока, сдвинутого по фазе относительно основного синусоидального тока, проходящего по катушке (обмотке) машины (аналогично двухфазному току).

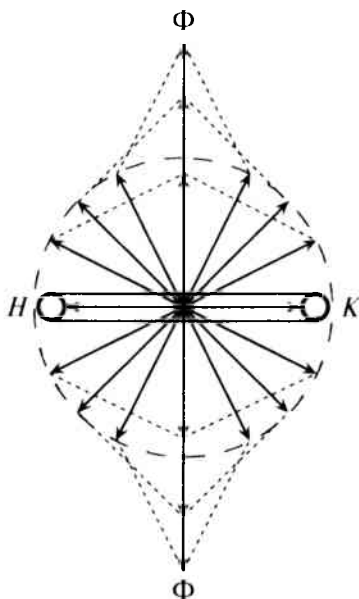


Рис. 17.4

## Глава 18 НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЙ ТОК

### 18.1. Основные понятия

Периодическими несинусоидальными токами называют токи, изменяющиеся во времени по периодическому несинусоидальному закону.

Несинусоидальные токи возникают при различных режимах работы электрических цепей. Таких режимов четыре.

1. Источник электрической энергии вырабатывает несинусоидальную ЭДС или несинусоидальный ток, а все элементы цепи (активные сопротивления, индуктивности и емкости) линейны, т. е. от величины тока не зависят. Такая цепь называется линейной.

2. Источник электрической энергии вырабатывает синусоидальную ЭДС, но один или несколько элементов цепи нелинейны, т. е. имеют нелинейные характеристики (катушка со стальным сердечником, выпрямители).

3. Источник электрической энергии вырабатывает несинусоидальную ЭДС, а в электрическую цепь входят одно или несколько нелинейных сопротивлений.

4. Источник электрической энергии вырабатывает постоянную или синусоидальную ЭДС, а один или несколько элементов цепи в процессе работы изменяют свои параметры.

Таким образом, причиной несинусоидальности в электрической цепи может быть источник электрической энергии или потребитель, т. е. нагрузка, или оба одновременно.

В электрических генераторах (источниках электрической энергии) основной причиной несинусоидальной ЭДС (напряжений) является неравномерное распределение магнитного потока (по окружности) в зазоре между статором и ротором генератора.

Причиной появления несинусоидальных токов в нагрузке является, как указывалось выше, нелинейные вольт-амперные характеристики потребителей или преобразователей, например трансформаторов. В настоящей главе рассмотрен расчет и особенности работы линейных электрических цепей при воздействии на них несинусоидальных ЭДС, т. е. первый из перечисленных выше режимов работы. Остальные режимы рассматриваются в главе 19 и в специальной технической и справочной литературе.

## 18.2. Гармоники

Несинусоидальные колебания могут быть периодическими и непериодическими. При рассмотрении периодических несинусоидальных колебаний можно воспользоваться теоремой Фурье, согласно которой любая периодически изменяющаяся величина может быть представлена в виде суммы постоянной составляющей и ряда синусоидальных составляющих с кратными частотами.

*Синусоидальные составляющие несинусоидальных колебаний называются гармониками.*

Синусоидальная составляющая, частота которой равна частоте несинусоидальной периодической величины, называется основной, или первой, гармоникой. А синусоидальные составляющие, частоты которых в 2, 3, ...,  $k$  раз больше частоты несинусоидальной величины, называются соответственно 2-й, 3-й, ...,  $k$ -й гармоникой.

Аналитическое выражение несинусоидальной периодической функции можно записать так:

$$f(\omega t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \psi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \psi_2) + A_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots + A_k \sin(k\omega t + \psi_k), \quad (18.1)$$

где  $f(\omega t)$  – несинусоидальная величина, изменяющаяся с частотой  $\omega$ ;  $A_0$  – постоянная составляющая несинусоидальной величины;  $A_1$ ;  $A_2$ ;  $A_3$ ; ...,  $A_k$  – амплитуды соответственно 1-й, 2-й, 3-й и  $k$ -й гармоник, т. е. синусоидальных составляющих с частотой  $\omega$ ,  $2\omega$ ,  $3\omega$ , ...,  $k\omega$ ;  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$ , ...,  $\psi_k$  – начальные фазы соответственно 1-й, 2-й, 3-й и  $k$ -й гармоник.

Из выражения (18.1) следует, что сложение синусоидальных колебаний (гармоник) с различными частотами и разными начальными фазами дает несинусоидальное колебание. Убедиться в этом можно при графическом сложении двух синусоидальных ЭДС  $e_1$  и  $e_3$  (рис. 18.1).

На рис. 18.1а складываются две синусоиды  $e_1$  и  $e_3$  ( $e = e_1 + e_3$ ), где

$$e_1 = E_{m1} \sin \omega t; \quad e_3 = E_{m3} \sin 3\omega t.$$

На рис. 18.1б складываются две синусоиды  $e_1$  и  $e_3$  ( $e = e_1 + e_3$ ), где

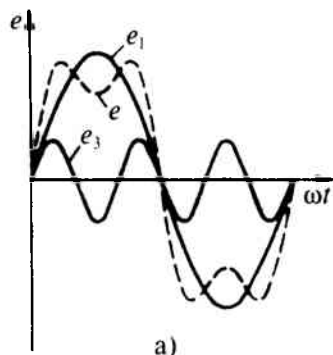
$$e_1 = E_{m1} \sin \omega t; \quad e_3 = E_{m3} \sin (3\omega t - \pi).$$

На рис. 18.1в складываются две синусоиды  $e_1$  и  $e_3$  ( $e = e_1 + e_3$ ), где

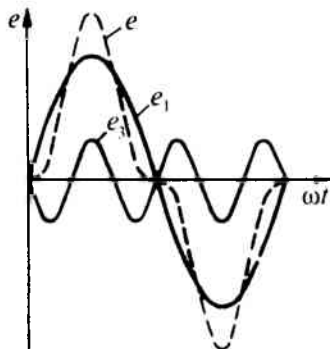
$$e_1 = E_{m1} \sin \omega t; \quad e_3 = E_{m3} \sin (3\omega t - \psi_3).$$

Как видно, суммарные колебания ( $e = e_1 + e_3$ ) в рассмотренных трех случаях (а, б и в) получились различными.

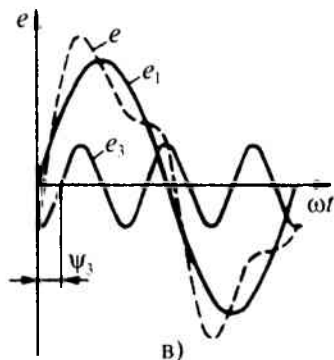




а)



б)



в)

Рис. 18.1

Из рис. 18.1 также видно, что не все несинусоидальные периодические колебания раскладываются в полный ряд Фурье. В данном случае складываются только 1-я и 3-я гармоники, и результирующие колебания  $e = e_1 + e_3$  могут быть записаны в виде:

$$e = E_{m1} \sin \omega t + E_{m3} \sin 3\omega t -$$

для рис. 18.1а;

$$e = E_{m1} \sin \omega t + E_{m3} \sin (3\omega t - \pi) -$$

для рис. 18.1б;

$$e = E_{m1} \sin \omega t + E_{m3} \sin (3\omega t - \psi_3) -$$

для рис. 18.1в.

Таким образом, несинусоидальные кривые  $e$ , изображенные на рис. 18.1, раскладываются в ряд Фурье только на нечетные гармоники 1-ю и 3-ю, т. е. в разложении отсутствуют постоянная составляющая, все четные гармоники и высшие нечетные гармоники (5-я, 7-я, 9-я и т. д.).

Гармоники можно преобразовать, применив из тригонометрии формулу синуса суммы двух углов. Из выражения (18.1)  $k$ -ю гармонику можно представить в виде

$$\begin{aligned} A_k \sin (k\omega t + \psi_k) &= \\ &= A_k \sin k\omega t \cdot \cos \psi_k + \\ &+ A_k \cos k\omega t \cdot \sin \psi_k. \end{aligned} \quad (18.2)$$

Обозначив постоянные величины выражения (18.2)

$$A_k \cos \psi_k = B_k$$

и

$$A_k \sin \psi_k = C_k,$$

$$(18.3)$$

можно получить

$$A_k \sin(k\omega t + \psi_k) = B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t. \quad (18.4)$$

Тогда выражение (18.1), т. е. ряд Фурье для несинусоидальной периодической функции, примет вид

$$f(\omega t) = A_0 + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots + B_k \sin k\omega t + \\ + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 2\omega t + C_3 \cos 3\omega t + \dots + C_k \cos k\omega t. \quad (18.5)$$

В отличие от амплитуды  $k$ -й гармоники  $A_k$ , постоянные величины  $B_k$  и  $C_k$  могут быть положительными или отрицательными.

Такая запись (18.5) характерна тем, что гармоники составляют ряд синусов и ряд косинусов с начальными фазами, равными нулю ( $\psi_k = 0$ ).

### 18.3. Свойства периодических кривых

Несинусоидальные периодические кривые, с которыми приходится встречаться в электротехнике, являются симметричными относительно оси абсцисс или ординат или начала координат.

Так как среднее за период  $T$  значение синусоиды равно нулю (§ 10.3), то среднее за период значение несинусоидальных колебаний, состоящих из нескольких синусоид и не содержащих постоянной составляющей, также равно нулю.

Или иначе, *если у несинусоидальной периодической кривой среднее за период значение (ордината) равно нулю, то постоянная составляющая такой кривой также равна нулю. Среднее значение периодической кривой, состоящей из постоянной составляющей и ряда гармоник, равно постоянной составляющей.*

Так, например, пульсирующая кривая (рис. 18.2в) мгновенной мощности  $P$  в цепи переменного тока с активным сопротивлением может быть разложена на постоянную составляющую и синусоиду (гармонику), изменяющуюся с двойной частотой (см. выражение (11.3)), т. е. второйю гармоникой. Среднее значение такой кривой равно постоянной составляющей, т. е. активной мощности  $P = UI$  (см. (11.4)).

Периодическая кривая называется симметричной относительно оси абсцисс, если на расстоянии половины периода они имеют ординаты, одинаковые по величине, но обратные по знаку (рис. 18.2а), т. е. отрицательная полуволна такой кривой представляет собой зеркальное изображение положительной полуволны.

Кривые, симметричные относительно оси абсцисс, не содержат постоянной составляющей и четных гармоник (рис. 18.1). Такая кривая содержит только нечетные гармоники:

$$f(\omega t) = A_1 \sin(\omega t + \psi_1) + A_3 \sin(3\omega t + \psi_3) + A_5 \sin(5\omega t + \psi_5) + \dots \quad (18.6)$$

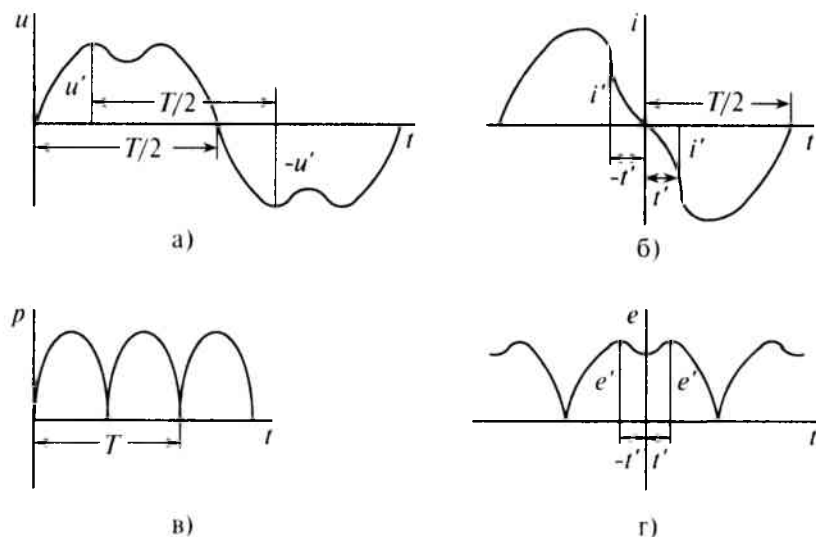


Рис. 18.2

Кривые, симметричные относительно оси абсцисс, встречаются в электротехнике часто, например кривые тока в катушке со стальным сердечником, подключенной к сети с синусоидальным напряжением.

Периодическая кривая называется симметричной относительно начала координат, если любым двум абсциссам, имеющим одинаковое значение, но разные знаки, соответствуют ординаты, равные по величине и обратные по знаку (рис. 18.2б).

Кривые, симметричные относительно начала координат, не содержат постоянной составляющей и косинусоид. Такая кривая содержит только синусоиды:

$$f(\omega t) = B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \dots + B_k \sin k\omega t. \quad (18.7)$$

Часто встречаются кривые, симметричные относительно оси абсцисс и начала координат (кривые 1, 2, 3 и 4 таблицы 18.1). Такие кривые не содержат постоянной составляющей, четных гармоник и косинусоидальных составляющих, а содержат только нечетные синусоиды:

$$f(\omega t) = B_1 \sin \omega t + B_3 \sin 3\omega t + B_5 \sin 5\omega t + \dots \quad (18.8)$$

Кривая, симметричная относительно оси ординат, изображена на рис. 18.2г. Такая кривая не содержит синусоид. Она содержит постоянную составляющую и косинусоиды:

$$f(\omega t) = A_0 + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 2\omega t + C_3 \cos 3\omega t + \dots \quad (18.9)$$

В таблице приведены несинусоидальные периодические кривые геометрически правильной формы и разложение их в ряд Фурье.

Таблица 18.1

1		$f(\omega t) = \frac{4a_m}{\alpha\pi} \left( \sin\alpha \sin\omega t + \frac{1}{9} \sin 3\alpha \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\alpha \sin 5\omega t + \dots \right)$
2		$f(\omega t) = \frac{8a_m}{\pi^2} \left( \sin\omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \frac{1}{49} \sin 7\omega t + \dots \right)$
3		$f(\omega t) = \frac{4a_m}{\pi} \left( \sin\omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right)$
4		$f(\omega t) = \frac{4a_m}{\pi} \left( \sin \frac{\alpha\pi}{2} \cos\omega t + \frac{1}{3} \sin \frac{3\alpha\pi}{2} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \sin \frac{5\alpha\pi}{2} \cos 5\omega t + \dots \right)$
5		$f(\omega t) = \frac{2a_m}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \cos\omega t + \frac{1}{3} \cos 2\omega t - \frac{1}{5} \cos 4\omega t + \frac{1}{7} \cos 6\omega t - \dots \right)$
6		$f(\omega t) = \frac{4a_m}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos 2\omega t - \frac{1}{5} \cos 4\omega t + \frac{1}{7} \cos 6\omega t - \dots \right)$
7		$f(\omega t) = \frac{3\sqrt{3}a_m}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} \cos 3\omega t - \frac{1}{5.7} \cos 6\omega t + \frac{1}{8.10} \cos 9\omega t - \dots \right)$
8		$f(\omega t) = \frac{3a_m}{\pi} \left( 1 + \frac{2\cos 6\omega t}{5.7} - \frac{2\cos 12\omega t}{11.13} + \frac{2\cos 18\omega t}{17.19} - \dots \right)$

### 18.4. Несинусоидальный ток в линейных электрических цепях

Если к линейной цепи приложено несинусоидальное напряжение, которое раскладывается на ряд гармоник, то ток в этой цепи раскладывается на такое же количество тех же гармоник.

Если, например, к неразветвленной цепи, состоящей из  $R$ ,  $L$  и  $C$  (рис. 18.3), приложено несинусоидальное напряжение

$$u = U_{m1}\sin(\omega t + \psi_1) + U_{m3}\sin(3\omega t + \psi_3) + U_{m5}\sin(5\omega t + \psi_5),$$

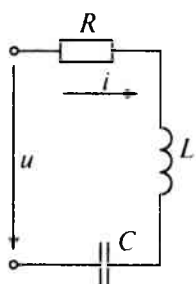


Рис. 18.3

то сопротивление этой линейной цепи для различных гармоник имеет различные значения.

Активное сопротивление  $R$  для всех гармоник одинаковое, если пренебречь поверхностным эффектом.

Индуктивное сопротивление  $X_L = \omega L$  с увеличением номера гармоники увеличивается, так как увеличивается частота  $\omega$ , и для любой гармоники может быть определено выражением

$$X_{Lk} = k\omega L = kX_{L1}, \quad (18.10)$$

где  $k$  — номер гармоники;  $X_{L1}$  — индуктивное сопротивление первой гармоники.

Емкостное сопротивление  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  с увеличением номера гармоник уменьшается и для любой гармоники определяется выражением

$$X_{Ck} = \frac{1}{k\omega C} = \frac{X_{C1}}{k}, \quad (18.11)$$

где  $k$  — номер гармоники;  $X_{C1}$  — емкостное сопротивление первой гармоники.

Полное сопротивление неразветвленной линейной цепи для любой гармоники

$$Z_k = \sqrt{R^2 + (X_{Lk} - X_{Ck})^2}. \quad (18.12)$$

Угол сдвига фаз между током и напряжением для любой гармоники

$$\varphi_k = \arctg \frac{X_k}{R} = \arctg \frac{X_{Lk} - X_{Ck}}{R}. \quad (18.13)$$

Очевидно, угол сдвига фаз  $\varphi$  может быть положительным или отрицательным в зависимости от характера цепи для определенной гармоники ( $X_L > X_C$  или  $X_L < X_C$ ).

Амплитуды токов для каждой гармоники равны

$$I_{mk} = \frac{U_{mk}}{Z_k}. \quad (18.14)$$

Мгновенное значение несинусоидального тока в линейной цепи (рис. 18.3) с заданным несинусоидальным напряжением  $u$  определяется выражением

$$i = I_{m1} \sin(\omega t + \psi_1 - \varphi_1) + I_{m3} \sin(3\omega t + \psi_3 - \varphi_3) + I_{m5} \sin(5\omega t + \psi_5 - \varphi_5). \quad (18.15)$$

Если в неразветвленной цепи включен конденсатор, а в приложенном к этой цепи несинусоидальном напряжении имеется постоянная составляющая, то ток постоянной составляющей равен нулю, так как для постоянной составляющей конденсатор представляет разрыв цепи.

Если задан несинусоидальный ток в линейной цепи и  $k$ -я гармоника тока записана

$$i_k = I_{mk} \sin(\omega t + \psi_k), \quad (18.16)$$

то напряжение в цепи, соответствующее этой гармонике, равно

$$u_k = U_{mk} \sin(k\omega t + \psi_k + \varphi_k). \quad (18.16')$$

Для расчета всех параметров цепи используются выражения (18.10)–(18.14).

### Пример 18.1

К линейной цепи (рис. 18.3) с параметрами  $R=100$  Ом,  $L=0,02$  Гн,  $C=2$  мкФ приложено несинусоидальное напряжение

$$u = 250 \sin(1000t) + 180 \sin(3000t + 15^\circ) + 130 \sin(5000t) + 100 \sin(7000t - 30^\circ).$$

Определить и записать мгновенное значение тока  $i$  в этой цепи.

### Решение

Для определения полного сопротивления цепи вычисляются индуктивные и емкостные сопротивления для каждой гармоники (1-й, 3-й, 5-й и 7-й):

$$X_{L1} = \omega L = 1000 \cdot 0,02 = 20 \text{ Ом}; \quad X_{C1} = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{1000 \cdot 2} = 500 \text{ Ом};$$

$$X_{L3} = 3\omega L = 3 \cdot 1000 \cdot 0,02 = 60 \text{ Ом}; \quad X_{C3} = \frac{1}{3\omega C} = \frac{10^6}{3 \cdot 1000 \cdot 2} = 167 \text{ Ом};$$

$$X_{L5} = 5X_{L1} = 5 \cdot 1000 \cdot 0,02 = 100 \text{ Ом}; \quad X_{C5} = \frac{X_{C1}}{5} = \frac{500}{5} = 100 \text{ Ом};$$

$$X_{L7} = 7X_{L1} = 7 \cdot 1000 \cdot 0,02 = 140 \text{ Ом}; \quad X_{C7} = \frac{X_{C1}}{7} = \frac{500}{7} = 71 \text{ Ом}.$$

Тогда полные сопротивления  $Z$  гармоник:

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + (X_{L1} - X_{C1})^2} = \sqrt{100^2 + (20 - 500)^2} = 490 \text{ Ом};$$

$$Z_3 = \sqrt{R^2 + (X_{L3} - X_{C3})^2} = \sqrt{100^2 + (60 - 167)^2} = 147 \text{ Ом};$$

$$Z_5 = \sqrt{R^2 + (X_{L5} - X_{C5})^2} = \sqrt{100^2 + (100 - 100)^2} = 100 \text{ Ом};$$

$$Z_7 = \sqrt{R^2 + (X_{L7} - X_{C7})^2} = \sqrt{100^2 + (140 - 71)^2} = 121 \text{ Ом}.$$

Амплитуды токов гармоник:

$$I_{m1} = \frac{U_{m1}}{Z_1} = \frac{250}{490} = 0,51 \text{ А}; \quad I_{m3} = \frac{U_{m3}}{Z_3} = \frac{180}{147} = 1,22 \text{ А};$$

$$I_{m5} = \frac{U_{m5}}{Z_5} = \frac{130}{100} = 1,3 \text{ А}; \quad I_{m7} = \frac{U_{m7}}{Z_7} = \frac{100}{121} = 0,83 \text{ А}.$$

Углы сдвига фаз для каждой гармоники:

$$\varphi_1 = \arctg \frac{X_{L1} - X_{C1}}{R} = \arctg \frac{20 - 500}{100} = -78^\circ;$$

$$\varphi_3 = \arctg \frac{X_{L3} - X_{C3}}{R} = \arctg \frac{60 - 167}{100} = -47^\circ;$$

$$\varphi_5 = \arctg \frac{X_{L5} - X_{C5}}{R} = \arctg \frac{100 - 100}{100} = 0^\circ;$$

$$\varphi_7 = \arctg \frac{X_{L7} - X_{C7}}{R} = \arctg \frac{140 - 71}{100} = 35^\circ.$$

Тогда мгновенное значение тока в цепи равно

$$\begin{aligned} i &= 0,51 \sin [1000t - (-78^\circ)] + 1,22 \sin [3000t + 15^\circ - (-47^\circ)] + \\ &+ 1,3 \sin (5000t - 0) + 0,83 \sin (7000t + 30^\circ - 35^\circ) = \\ &= 0,51 \sin (1000t + 78^\circ) + 1,22 \sin (3000t + 62^\circ) + \\ &+ 1,3 \sin (5000t) + 0,83 \sin (7000t - 5^\circ). \end{aligned}$$

Из рассмотренного примера можно сделать следующий вывод. Если в линейной цепи включено только активное сопротивление  $R$ , то кривая тока будет подобна кривой напряжения. Если кроме активного в цепи имеются еще индуктивное и емкостное сопротивления, то кривая тока не будет подобна кривой напряжения. Такая цепь (рис. 18.3) для некоторых гармоник может иметь емкостной характер, например для первой и третьей гармоник в примере 18.1, так как ток опережает по фазе напряжение этих

гармоник. Для некоторых гармоник – индуктивный характер, например для седьмой гармоники в примере 18.1, так как ток отстает от напряжения этой гармоники. Для одной из гармоник в неразветвленной цепи с катушкой и конденсатором может быть резонанс напряжений, например для пятой гармоники в примере 18.1. Резонанс напряжений возник потому, что

$$X_{L5} = X_{C5}. \quad (18.17)$$

В разветвленной цепи с несинусоидальным напряжением с параллельно соединенными катушкой и конденсатором для одной из гармоник может возникнуть резонанс токов при равенстве реактивных проводимостей, т. е.

$$b_{Lk} = b_{Ck}. \quad (18.18)$$

### Пример 18.2

В линейной цепи (рис. 18.3) протекает несинусоидальный ток  $i = 1,8 \sin(1000t + 15^\circ) + 1,1 \sin 2000t$ . Параметры цепи:  $R = 8 \text{ Ом}$ ,  $L = 0,008 \text{ Гн}$  и  $C = 100 \text{ мкФ}$ . Записать мгновенное значение напряжения  $u$ , приложенного к этой цепи.

### Решение

Определяется индуктивное и емкостное сопротивления для 1-й и 2-й гармоник:

$$X_{L1} = \omega L = 1000 \cdot 0,008 = 8 \text{ Ом}; \quad X_{C1} = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{1000 \cdot 100} = 10 \text{ Ом};$$

$$X_{L2} = 2\omega L = 2 \cdot 1000 \cdot 0,008 = 16 \text{ Ом}; \quad X_{C2} = \frac{1}{2\omega C} = \frac{10^6}{2 \cdot 1000 \cdot 1} = 5 \text{ Ом}.$$

Полные сопротивления  $Z$  для 1-й и 2-й гармоник будут равны

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + (X_{L1} - X_{C1})^2} = \sqrt{8^2 + (8 - 10)^2} = 8,25 \text{ Ом};$$

$$Z_2 = \sqrt{R^2 + (X_{L2} - X_{C2})^2} = \sqrt{8^2 + (16 - 5)^2} = 13,6 \text{ Ом}.$$

Амплитуды напряжений гармоник:

$$U_{m1} = I_{m1} Z_1 = 1,8 \cdot 8,25 = 14,85 \text{ В}; \quad U_{m2} = I_{m2} Z_2 = 1,1 \cdot 13,6 = 14,96 \text{ В}.$$

Углы сдвига фаз  $\varphi$  для 1-й и 2-й гармоник:

$$\varphi_1 = \arctg \frac{X_{L1} - X_{C1}}{R} = \arctg \frac{8 - 10}{8} = -14^\circ;$$

$$\varphi_2 = \arctg \frac{X_{L2} - X_{C2}}{R} = \arctg \frac{16 - 5}{8} = 54^\circ.$$

Мгновенное значение приложенного напряжения будет равно



$$u = U_{m1} \sin(1000t + 15^\circ + \varphi_1) + U_{m2} \sin(2000t + \varphi_1) = \\ = 14,85 \sin(1000t + 1^\circ) + 14,96 \sin(2000t + 54^\circ).$$

### 18.5. Действующее значение несинусоидальной величины

Действующим называют значение несинусоидального тока, эквивалентное постоянному току по тепловому действию.

При этом нужно учесть, что несинусоидальный ток складывается из постоянной составляющей и ряда гармоник:

$$i = I_0 + i_1 + i_2 + i_3 + \dots = I_0 + I_{m1} \sin(\omega t + \psi_1) + I_{m2} \sin(2\omega t + \psi_2) + \\ + I_{m3} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots$$

Каждая составляющая несинусоидального тока выделяет тепло в некотором элементе цепи с сопротивлением  $R$ . Воспользовавшись рассуждениями § 10.3 для определения действующих значений тока гармоник и постоянной составляющей несинусоидального тока, можно сделать вывод, что

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2}, \quad (18.19)$$

где  $I_0$  — постоянная составляющая несинусоидального тока;  $I_1, I_2, \dots, I_k$  — действующее значение токов гармоник, т. е.  $I_k = \frac{I_{mk}}{\sqrt{2}}$ .

Таким образом, действующее значение несинусоидального тока является средней квадратичной величиной постоянной составляющей и действующих значений токов гармоник.

С учетом выражения (10.9) действующее значение несинусоидального тока можно определить по формуле

$$I = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{m1}^2}{2} + \frac{I_{m2}^2}{2} + \frac{I_{m3}^2}{2} + \dots + \frac{I_{mk}^2}{2}}. \quad (18.20)$$

Аналогично действующее значение несинусоидального напряжения определяется выражением

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots + U_k^2}. \quad (18.21)$$

Действующее значение несинусоидального напряжения является средней квадратичной величиной постоянной составляющей и действующих значений напряжений гармоник.

Действующие значения несинусоидальных токов и напряжений измеряются амперметрами и вольтметрами электромагнитной, электродинамической и тепловой систем.

Кроме коэффициента формы  $K_f$  и коэффициента амплитуды  $K_a$ , определение которых дано в § 10.3 (выражение (10.10) и (10.11)), несинусоидальные периодические кривые характеризуются коэффициентом искажений  $K_{и}$ . Коэффициент искажений определяется отношением действующего значения основной (первой) гармоники тока или напряжения к действующему значению этих несинусоидальных величин. Такое определение аналогично для ЭДС, магнитного потока и т. д.

Коэффициент искажения тока

$$K_{и} = \frac{I_1}{\sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2}} \quad (18.22)$$

Коэффициент искажения напряжения

$$K_{и} = \frac{U_1}{\sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_k^2}} \quad (18.23)$$

Для синусоиды  $K_{и} = 1$ .

Чем меньше коэффициент искажения отличается от единицы, тем ближе к синусоиде данная кривая.

Так, например, для треугольной формы кривой (кривая 2 таблицы 18.1) —  $K_{и} \approx 0,99$ , а для прямоугольной формы кривой (кривая 3 таблицы 18.1) —  $K_{и} \approx 0,9$ .

В электронике и радиотехнике несинусоидальность кривой характеризуют коэффициентом гармоник, показывающим удельный вес высших гармоник  $K_r$  относительно первой (основной) гармоники:

$$K_r = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \dots + I_k^2}}{I_1} \quad (18.24)$$

Чем меньше коэффициент гармоник, тем ближе к синусоиде несинусоидальная кривая.

### 18.6. Мощность несинусоидального тока

Под активной мощностью  $P$  несинусоидального тока понимают среднее значение мгновенной мощности (§ 11.1) за период, т. е.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{1}{T} \int_0^T [U_0 + U_{m1} \sin(\omega t + \psi_1) + U_{m2} \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots + U_{mk} \sin(k\omega t + \psi_k)] \times [I_0 + I_{m1} \sin(\omega t + \psi_1 - \phi_1) + I_{m2} \sin(2\omega t + \psi_2 - \phi_2) + \dots + I_{mk} \sin(k\omega t + \psi_k - \phi_k)] dt$$

Проинтегрировав это выражение, получают

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_k = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \phi_1 + U_2 I_2 \cos \phi_2 + \dots + U_k I_k \cos \phi_k, \quad (18.25)$$

где  $P_0$  — мощность постоянной составляющей несинусоидального тока;  $P_1, P_2, \dots, P_k$  — активные мощности гармоник несинусоидального тока.

Таким образом, потребляемая, т. е. активная, мощность в цепи несинусоидального тока определяется суммой постоянной мощности и активных мощностей гармоник.

Реактивная мощность в цепи несинусоидального тока, по аналогии, определяется выражением

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_k = U_1 I_1 \sin \phi_1 + U_2 I_2 \sin \phi_2 + \dots + U_k I_k \sin \phi_k. \quad (18.26)$$

*Реактивная мощность в цепи несинусоидального тока определяется суммой реактивных мощностей гармоник.*

Постоянная составляющая реактивной мощности отсутствует, так как для постоянного тока колебание мощности (энергии) невозможно.

Полная, или кажущаяся, мощность в цепях несинусоидального тока равна  $S = UI$ .

Следует иметь в виду, что несинусоидальный ток или напряжение не могут быть выражены при помощи векторов. Кривые несинусоидального тока и напряжения в общем случае даже не подобны. Так что невозможно применить понятие об угле сдвига фаз, принятое для синусоидальных токов.

Поэтому при изучении некоторых свойств цепей несинусоидального тока несинусоидальные токи и напряжения заменяют эквивалентными синусоидальными. Замена производится таким

образом, что действующее значение синусоидального тока принимается равным действующему значению заменяемого несинусоидального тока, а действующее значение синусоидального напряжения принимается равным действующему значению несинусоидального напряжения.

Тогда угол сдвига фаз  $\varphi$  между эквивалентными синусоидами напряжения и тока выбирается таким, чтобы активная мощность эквивалентного синусоидального тока была равна активной мощности несинусоидального тока, т. е.  $P_s \approx U_s I_s \cos \varphi_s$ .

Откуда

$$\cos \varphi_s = \frac{P_s}{U_s I_s}. \quad (18.27)$$

При этом  $S_s = U_s I_s$ . Однако для цепи несинусоидального тока в общем случае

$$S \neq \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (18.28)$$

Равенство  $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$  (выражение (12.14)), выведенное из треугольника мощностей (рис. 12.2в), справедливо для синусоидального тока определенной частоты  $\omega$ . Несинусоидальный ток складывается из нескольких синусоидальных составляющих с разными (кратными) частотами и разными углами сдвига фаз  $\varphi$  между током и напряжением (определенными для каждой гармоники); т. е. для несинусоидального тока нельзя построить векторную диаграмму и прямоугольный треугольник мощностей. Поэтому выражение (12.14) для несинусоидального тока несправедливо и полная (кажущаяся) мощность не равна  $\sqrt{P^2 + Q^2}$ .

### Пример 18.3

К линейной цепи (рис. 18.4) приложено несинусоидальное напряжение  $u = 310 + 210 \sin \omega t + 176 \sin (3\omega t + 72^\circ)$ . Реактивные сопротивления для первой гармоники:  $X_{L1} = 3 \text{ Ом}$ ;  $X_{C1} = 9 \text{ Ом}$ . Активные сопротивления:  $R_1 = 4 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 6 \text{ Ом}$ .

Требуется записать мгновенное значение тока цепи  $i$  и определить показания всех приборов, включенных в цепь, а также коэффициент мощности цепи  $\cos \varphi_s$ .

### Решение

Так как в цепь включен конденсатор, то сопротивление цепи для постоянной составляющей несинусоидального напряжения равно бесконечности, а ток постоянной составляющей равен нулю, т. е.  $I_0 = 0$ .

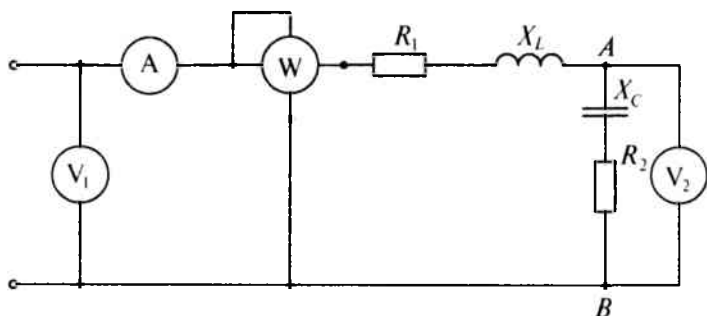


Рис. 18.4

Сопротивление цепи для 1-й и 3-й гармоник:

$$Z_1 = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_{L1} - X_{C1})^2} = \sqrt{(4 + 6)^2 + (3 - 9)^2} = 11,65 \text{ Ом};$$

$$Z_3 = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_{L3} - X_{C3})^2} = \sqrt{(4 + 6)^2 + (9 - 3)^2} = 11,65 \text{ Ом}.$$

так как  $X_{L3} = 3X_{L1} = 3 \cdot 3 = 9 \text{ Ом}$  и  $X_{C3} = \frac{X_{C1}}{3} = \frac{9}{3} = 3 \text{ Ом}$ .

Амплитуды токов гармоник:

$$I_{m1} = \frac{U_{m1}}{Z_1} = \frac{210}{11,65} = 18 \text{ А}; \quad I_{m3} = \frac{U_{m3}}{Z_3} = \frac{176}{11,65} = 15,1 \text{ А}.$$

Углы сдвига фаз  $\varphi$  для 1-й и 3-й гармоник:

$$\varphi_1 = \arctg \frac{X_{L1} - X_{C1}}{R} = \arctg \frac{3 - 9}{10} = -31^\circ;$$

$$\varphi_3 = \arctg \frac{X_{L3} - X_{C3}}{R} = \arctg \frac{9 - 3}{10} = 31^\circ.$$

Тогда мгновенное значение несинусоидального тока цепи будет записано

$$i = 18 \sin(\omega t + 31^\circ) + 15,1 \sin(3\omega t + 41^\circ).$$

Показания вольтметра  $V_1$ , т.е. действующее значение приложенного к цепи напряжения:

$$U_{\text{сстн}} = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_3^2} = \sqrt{310^2 + 149^2 + 125^2} = 366 \text{ В},$$

так как  $U_1 = \frac{U_{m1}}{\sqrt{2}} = \frac{210}{1,41} = 149 \text{ В}$ ;  $U_3 = \frac{U_{m3}}{\sqrt{2}} = \frac{176}{1,41} = 125 \text{ В}$ .

Таким образом, первый вольтметр  $V_1$  показывает 366 В. Амперметр  $A$  показывает действующее значение тока цепи

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = \sqrt{12,8^2 + 10,7^2} = 16,7 \text{ А},$$

так как  $I_1 = \frac{I_{m1}}{\sqrt{2}} = \frac{18}{1,41} = 12,8 \text{ А}$ ;  $I_3 = \frac{I_{m3}}{\sqrt{2}} = \frac{15,1}{1,41} = 10,7 \text{ А}$ .

Таким образом, амперметр  $A$  показывает ток  $16,7 \text{ А}$ .

Для определения показаний второго вольтметра  $V_2$  вычисляют сопротивление участка  $AB$  для 1-й и 3-й гармоник:

$$Z_{AB1} = \sqrt{R_2^2 + X_{C1}^2} = \sqrt{6^2 + 9^2} = 10,8 \text{ Ом};$$

$$Z_{AB3} = \sqrt{R_3^2 + X_{C3}^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 6,7 \text{ Ом}.$$

Тогда падение напряжения для 1-й и 3-й гармоник на участке  $AB$  будет равно

$$U_{AB1} = I_1 Z_{AB1} = 12,6 \cdot 10,8 = 138,2 \text{ В};$$

$$U_{AB3} = I_3 Z_{AB3} = 10,7 \cdot 6,7 = 71,7 \text{ В}.$$

Кроме того, постоянная составляющая напряжения сети  $U_0$  приложена к конденсатору. Следовательно, действующее значение напряжения на участке  $AB$ :

$$U_{AB} = \sqrt{U_0^2 + U_{AB1}^2 + U_{AB3}^2} = \sqrt{310^2 + 138,2^2 + 71,7^2} = 347 \text{ В}.$$

Таким образом, вольтметр  $V_2$  показывает  $347 \text{ В}$ .

Ваттметр  $W$  измеряет активную мощность цепи, т. е.

$$P = P_0 + P_1 + P_3 =$$

$$= U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 =$$

$$= 310 \cdot 0 + 149 \cdot 12,8 \cdot 0,86 + 125 \cdot 10,7 \cdot 0,86 = 2790 \text{ Вт},$$

так как  $\cos \varphi_1 = \cos(-31^\circ) = \cos(+31^\circ) = 0,86 = \cos \varphi_3$ .

Ваттметр  $W$  показывает мощность  $P = 2790 \text{ Вт}$ .

Для определения коэффициента мощности цепи  $\cos \varphi$ , вычисляется полная мощность  $S_3 = U_3 I_3 = 366 \cdot 16,7 = 6112 \text{ В} \cdot \text{А}$ .

Тогда коэффициент мощности цепи

$$\cos \varphi_3 = \frac{P_3}{S_3} = \frac{2790}{6112} = 0,46.$$

Эквивалентные синусоидальным величины  $U_3 = U_{\text{сети}}$ ;  $I_3 = I$ ;  $S_3 = S = U_3 I_3$  и  $P_3 = P$ .

#### Пример 18.4

Несинусоидальный ток в линейной цепи (рис. 18.5)  $i = 1,8 \sin(1000t + 15) + 1,1 \sin 3000t$ . Параметры цепи:  $R = 8 \text{ Ом}$ ;  $L = 0,02 \text{ Гн}$  и  $C = 33,3 \text{ мкФ}$ .

Требуется: записать мгновенное значение приложенного к цепи напряжения; определить показание всех включенных в цепь приборов; определить полную  $S$ , реактивную  $Q$  мощности и эквивалентный угол сдвига фаз между током и напряжением цепи  $\varphi$ .

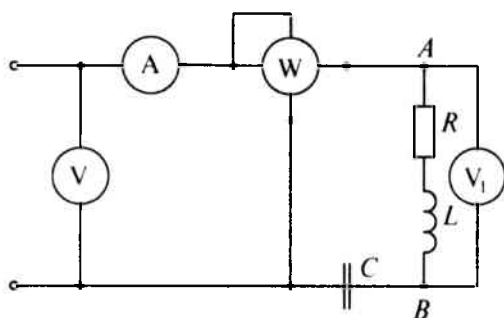


Рис. 18.5

**Решение**

Определяются индуктивное  $X_L$  и емкостное  $X_C$  сопротивления для 1-й и 3-й гармоник:

$$X_{L1} = \omega_1 L = \\ = 1000 \cdot 0,02 = 20 \text{ Ом};$$

$$X_{C1} = \frac{1}{\omega_1 C} = \frac{10^6}{1000 \cdot 33,3} = 30 \text{ Ом};$$

$$X_{L3} = \omega_3 L = 3000 \cdot 0,02 = 60 \text{ Ом}; \quad X_{C3} = \frac{1}{\omega_3 C} = \frac{10^6}{3000 \cdot 33,3} = 10 \text{ Ом}.$$

Сопротивление цепи для 1-й и 3-й гармоник:

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + (X_{L1} - X_{C1})^2} = \sqrt{8^2 + (20 - 30)^2} = 12,8 \text{ Ом};$$

$$Z_3 = \sqrt{R^2 + (X_{L3} - X_{C3})^2} = \sqrt{8^2 + (60 - 10)^2} = 50,60 \text{ Ом}.$$

Амплитуды напряжений сети для 1-й и 3-й гармоник:

$$U_{m1} = I_{m1} Z_1 = 1,8 \cdot 12,8 = 23 \text{ В}; \quad U_{m3} = I_{m3} Z_3 = 1,1 \cdot 50,6 = 55,7 \text{ В}.$$

Углы сдвига фаз для этих гармоник:

$$\varphi_1 = \arctg \frac{X_{L1} - X_{C1}}{R} = \arctg \frac{20 - 30}{8} = -51^\circ 30';$$

$$\varphi_3 = \arctg \frac{X_{L3} - X_{C3}}{R} = \arctg \frac{60 - 10}{8} = 81^\circ.$$

Тогда мгновенное значение приложенного к цепи напряжения записывается

$$u = 23 \sin(1000t - 36^\circ) + 55,7 \sin(3000t + 81^\circ).$$

Действующее значение приложенного напряжения:

$$U_1 = \frac{U_{m1}}{\sqrt{2}} = \frac{23}{1,41} = 16,3 \text{ В}; \quad U_3 = \frac{U_{m3}}{\sqrt{2}} = \frac{55,7}{1,41} = 39,5 \text{ В};$$

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2} = \sqrt{16,3^2 + 39,5^2} = 42,7 \text{ В}.$$

Вольтметр, включенный на входе цепи, показывает 42,7 В.

Действующее значение тока:

$$I_1 = \frac{I_{m1}}{\sqrt{2}} = \frac{1,8}{1,41} = 1,28 \text{ А}; \quad I_3 = \frac{I_{m3}}{\sqrt{2}} = \frac{1,1}{1,41} = 0,78 \text{ А};$$

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = \sqrt{1,28^2 + 0,78^2} = 1,5 \text{ А.}$$

Амперметр показывает ток 1,5 А.

Ваттметр показывает активную мощность в цепи потребителей, определяемую значениями

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = 16,3 \cdot 1,28 \cdot 0,62 = 13 \text{ Вт;}$$

$$P_3 = U_3 I_3 \cos \varphi_3 = 39,5 \cdot 0,78 \cdot 0,16 = 5 \text{ Вт.}$$

Показания ваттметра:

$$P = P_1 + P_3 = 13 + 5 = 18 \text{ Вт.}$$

Вольтметр  $V_1$  показывает падение напряжения на участке цепи  $AB$

$$U_{AB1} = I_1 Z_{AB1} = 1,28 \cdot \sqrt{8^2 + 20^2} = 27,6 \text{ В;}$$

$$U_{AB3} = I_3 Z_{AB3} = 0,78 \cdot \sqrt{8^2 + 60^2} = 47,2 \text{ В;}$$

$$U_{AB} = \sqrt{U_{AB1}^2 + U_{AB3}^2} = \sqrt{27,6^2 + 47,2^2} = 54,68 \text{ В.}$$

Вольтметр  $V_1$  показывает напряжение 54,68 В.

Полная, или кажущаяся, мощность в цепи несинусоидального тока  $S = UI = 42,7 \cdot 1,5 = 64 \text{ В} \cdot \text{А.}$

Реактивная мощность  $Q$  цепи равна

$$\begin{aligned} Q &= U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_3 I_3 \sin \varphi_3 = \\ &= 16,3 \cdot 1,28 \cdot (-0,77) + 39,5 \cdot 0,78 \cdot 0,98 = 14 \text{ вар.} \end{aligned}$$

Эквивалентный угол сдвига фаз  $\varphi$ , между током и напряжением

$$\varphi_3 = \arccos \frac{P_3}{U_3 I_3} = \arccos \frac{18}{42,7 \cdot 1,5} = 73^\circ.$$

Эквивалентные синусоидальные величины соответственно равны

$$P_3 = P = 18 \text{ Вт; } U_3 = 42,7 \text{ В; } I_3 = I = 1,5 \text{ А.}$$

### 18.7. Электрические фильтры

Электрическая цепь, содержащая индуктивность и емкость, обладает различными сопротивлениями для различных гармоник, так как индуктивное сопротивление  $X_L = \omega L$  с увеличением номера гармоники (увеличивается частота) увеличивается, а емкостное  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  уменьшается. Это дает возможность при заданной кривой напряжения изменять форму кривой тока путем включения электрического фильтра между источником и потребителем (рис. 18.6).



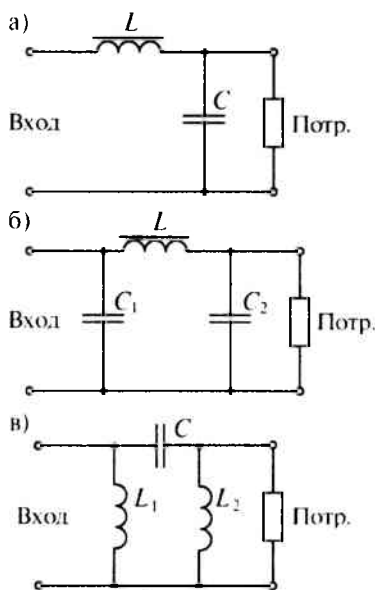


Рис. 18.6

фильтр (рис. 18.6а) и П-образный фильтр (рис. 18.6б).

Если нужно отфильтровать постоянную составляющую несинусоидального напряжения или его низкие частоты (гармоники), то в фильтре (рис. 18.6а, б) меняют местами индуктивность и емкость (рис. 18.6в).

Если в напряжении, поступающем на вход фильтра, имеется  $k$ -я гармоника, которую нужно отфильтровать, т. е. не пропустить к потребителю, то последовательно с потребителем можно включить параллельный резонансный контур (рис. 18.7а), настроенный в резонанс токов на частоту этой  $k$ -й гармоники. В результате чего на большом сопротивлении резонансного контура (близкого к бесконечности — при отсутствии активного сопротивления в контуре) напряжение  $k$ -й гармоники падает на контуре, не попадая на нагрузку.

Такого же эффекта можно добиться, если параллельно с потребителем включить последовательный резонансный контур (рис. 18.7б), настроенный в резонанс напряжений на частоту  $k$ -й гармоники.

При резонансе напряжений сопротивление последовательного контура мало, следовательно, уменьшается сопротивление участка  $AB$  схемы и уменьшается напряжение  $k$ -й гармоники на нем, а следовательно, и на потребителе.

Для того чтобы отфильтровать высшие гармоники несинусоидального напряжения, т. е. не пропустить их к потребителю, последовательно с потребителем включается индуктивность, а параллельно емкости (рис. 18.6а, б). При этом чем выше номер гармоники, тем большим сопротивлением обладает индуктивность и тем большее напряжение этой гармоники падает на индуктивном сопротивлении и тем меньшее напряжение поступает на нагрузку. Кроме того, чем выше номер гармоники (частота), тем меньше сопротивление конденсатора, тем больший ток этой частоты проходит через конденсатор, отфильтровываясь от потребителя. На рис. 18.6 показаны Г-образный

Одновременное включение обоих контуров (рис. 18.7в) обеспечивает значительно лучшую фильтрацию.

Однако резонансные фильтры хорошо отфильтровывают ту гармонику, на частоту которой они настроены в резонанс.

Фильтры, в которых резонансные контуры поменяли местами (рис. 18.8 по отношению к рис. 18.7), называются полосовыми и служат для того, чтобы пропустить к приемнику  $k$ -ю гармонику, на которую они настроены в резонанс, и не пропустить другие гармоники.

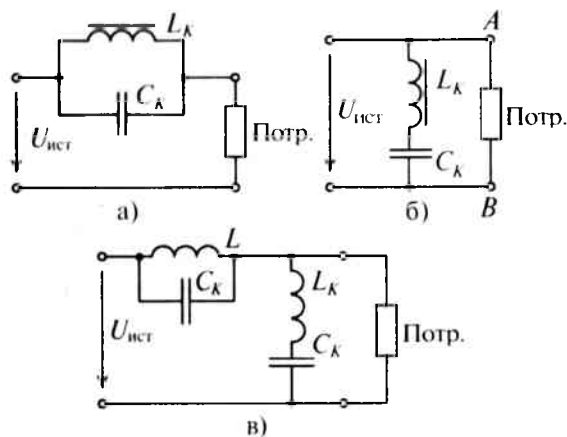


Рис. 18.7

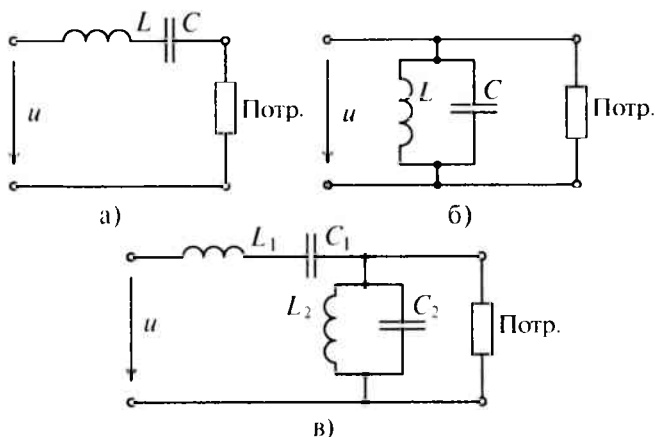


Рис. 18.8

Электрические фильтры широко используются в радиотехнике, в технике сильных токов, в выпрямительной технике, в технике проводной связи, в вычислительной технике и др.

## Глава 19

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

### 19.1. Нелинейные элементы

*Нелинейными электрическими цепями переменного тока называются цепи, в состав которых входят один или несколько нелинейных сопротивлений (нелинейных элементов) переменного тока.*

Характерной чертой нелинейных элементов переменного тока являются нелинейная вольт-амперная, кулон-вольтовая, вебер-амперная и другие характеристики.

Переменному току оказывают сопротивление активные сопротивления, индуктивности и емкости. В соответствии с этим нелинейные сопротивления переменного тока могут быть разделены на три группы: 1) группа нелинейных активных сопротивлений; 2) группа нелинейных индуктивных сопротивлений; 3) группа нелинейных емкостных сопротивлений.

Каждая из этих групп сопротивлений подразделяется на управляемые и неуправляемые.

1. В качестве управляемых нелинейных активных сопротивлений широкое распространение получили электронные и полупроводниковые приборы, магнитные усилители и другие устройства. Неуправляемыми нелинейными активными сопротивлениями являются электрическая дуга, полупроводниковые выпрямители, лампы накаливания и др. Нелинейные элементы этой группы способствуют созданию несинусоидальных токов в электрических цепях.

2. Под нелинейными индуктивными сопротивлениями, или иначе нелинейными индуктивностями, понимают катушки с ферромагнитными сердечниками, для которых зависимость магнитного потока в сердечнике от тока в катушке нелинейна. Катушка с ферромагнитным сердечником в цепи переменного тока искажает форму кривой тока, т. е. является генератором несинусоидального тока. Катушку со стальным сердечником называют дросселем (рис. 19.4).

3. Для нелинейных конденсаторов зависимость заряда  $Q$  на обкладках от напряжения, приложенного к конденсатору, нелинейна. Нелинейные конденсаторы называют варикоидами или варикапами. Пространство между обкладками нелинейного конденса-

тора заполнено сегнетоэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого зависит от напряженности электрического поля между обкладками конденсатора. Сегнетоэлектрики обладают гистерезисом, т. е. отставанием изменения электрического смещения в диэлектрике от изменения электрического поля в нем.

Такие явления, как выпрямление переменного тока в постоянный, стабилизация напряжения, умножение и деление частоты, получение сигналов различной формы и т. д., можно получить только в нелинейных цепях переменного тока.

В настоящей главе рассматривается работа двух нелинейных элементов: вентили (1-я группа нелинейных активных сопротивлений) и катушки с ферромагнитным сердечником (2-я группа нелинейных индуктивных сопротивлений).

### 19.2. Выпрямители – источники несинусоидального тока

Выпрямителями называют аппараты, преобразующие переменный ток в постоянный.

Основным элементом любого выпрямителя является электрический вентиль. Электрический вентиль обладает малым сопротивлением в прямом направлении и большим в обратном направлении. Вентиль имеет нелинейную вольт-амперную характеристику (рис. 19.1), поскольку обладает практически односторонней проводимостью. Графическое изображение электрического вентиля в электрических схемах и положительное направление прямого напряжения и тока показано на рис. 19.1а.

Вентиль, сопротивление которого в прямом направлении равно нулю, а в обратном – бесконечно большое, считается идеальным вентиляем. Характеристика идеального вентиля дана на рис. 19.1б. Вентиль, сопротивлением которого в прямом направлении пренебречь нельзя, а обратным током можно пренебречь, имеет вольт-амперную характеристику, изображенную на рис. 19.1в. Вольт-амперная характеристика реального полупроводникового вентиля изображена на рис. 19.1г. Как видно, если к реальному

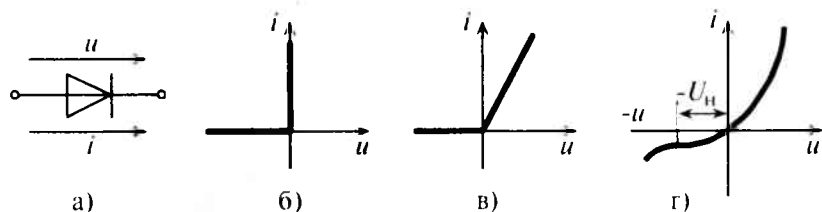


Рис. 19.1

вентилю приложено увеличивающееся по величине обратное напряжение ( $-u$ ), то его ток в обратном направлении увеличивается незначительно. Однако когда это обратное напряжение превышает номинальное ( $-U_{\text{н}}$ ), обратный ток становится ощутимым и при некотором обратном предельном напряжении вентиль теряет свои вентильные свойства.

Основными параметрами вентилях наряду с вольт-амперной характеристикой являются допустимая температура, плотность тока и допустимое обратное напряжение.

В выпрямителях вентиль включается по различным схемам.

В схеме однополупериодного выпрямителя вентиль включается последовательно с потребителем  $R$ , ток которого необходимо выпрямить (рис. 19.2а).

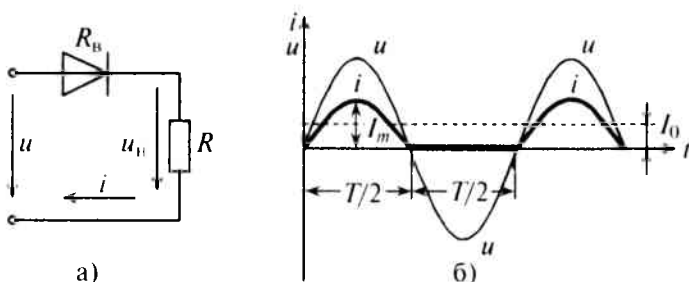


Рис. 19.2

Если к цепи, изображенной на рис. 19.2а, приложено синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin \omega t$  (и обратным током вентиля можно пренебречь), то ток в положительный полупериод изменяется также по синусоидальному закону:

$$i = \frac{u}{R_v + R} = \frac{U_m \sin \omega t}{R_v + R} = I_m \sin \omega t.$$

В течение же отрицательного полупериода напряжения ( $u < 0$ ) тока в цепи нет, так как предполагается  $R_{\text{обр}} = \infty$ . Таким образом, в рассматриваемой цепи создается однополупериодное выпрямление синусоидального тока (рис. 19.2б). При однополупериодном выпрямлении образуется значительная пульсация тока, т. е. большая переменная составляющая (гармоника) выпрямленного тока и незначительная величина среднего значения (постоянная составляющая) этого тока  $I_0$  (см. кривую 5 таблицы 18.1).

Таким образом, на сопротивлении  $R$  в результате выпрямления синусоидального напряжения  $u$  создается несинусоидальный ток и несинусоидальное напряжение  $u_n$ .

Если вентили включены по мостовой схеме (рис. 19.3а) и к мосту подведено синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin \omega t$ , то по сопротивлению потребителя  $R$  проходит несинусоидальный пульсирующий ток, полученный в результате двухполупериодного выпрямления (рис. 19.3б).

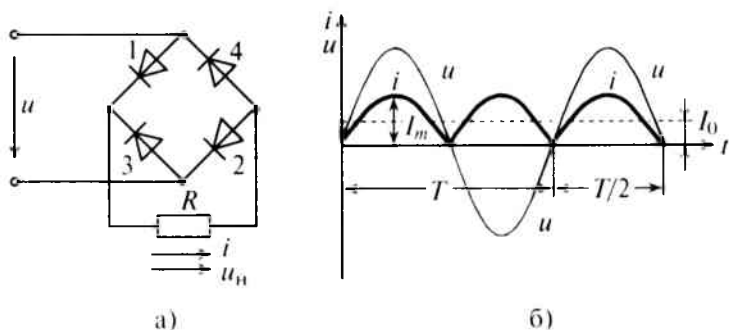


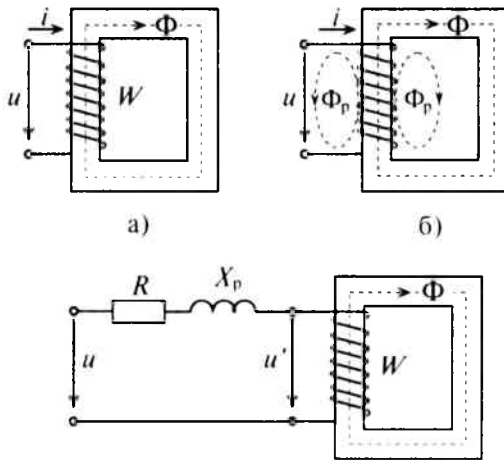
Рис. 19.3

В положительный полупериод синусоидального напряжения  $u$  ток проходит через вентили 1, 2 и через потребитель слева направо (рис. 19.3а). В отрицательный полупериод напряжения  $u$  ток проходит через вентили 3, 4 и через потребитель также слева направо. Таким образом, ток через потребитель изменяется по величине, но не меняется по направлению (рис. 19.3б), т. е. через потребитель проходит пульсирующий ток, который складывается из постоянной составляющей и четных гармоник. Таким же будет и напряжение  $u_n$  на потребителе (см. кривую 6 таблицы 18.1). При двухполупериодном выпрямлении постоянная составляющая несинусоидального тока и напряжения больше, чем при однополупериодном выпрямлении, а пульсации, т. е. гармоники, меньше.

При выпрямлении трехфазного тока (см. кривую 7 таблицы 18.1) несинусоидальный ток раскладывается на постоянную составляющую и гармоники, кратные трем, т. е. 3, 6, 9 и т. д. При этом постоянная составляющая тока (напряжения) на потребителе увеличивается, а пульсации уменьшаются (по сравнению с однофазным током). Для уменьшения пульсаций на потребителе в любой схеме соединения вентилей используются электрические фильтры (см. § 18.7).

### 19.3. Катушка с ферромагнитным сердечником

Наиболее распространенным нелинейным элементом переменного тока в электрических машинах, трансформаторах и других аппаратах является катушка со стальным сердечником (рис. 19.4).



в)  
Рис. 19.4

Если магнитный поток в сердечнике изменяется по синусоидальному закону  $\phi = \Phi_m \sin \omega t$ , то при отсутствии рассеяния он индуцирует в катушке, расположенной на сердечнике, ЭДС самоиндукции

$$e_L = -W \frac{d\phi}{dt} = -W \frac{d\Phi_m \sin \omega t}{dt} = -\omega W \Phi_m \cos \omega t = E_m \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Если пренебречь активным сопротивлением катушки, то напряжение, приложенное к ней, равно по величине и противоположно по знаку ЭДС самоиндукции, определяемой по (11.9):

$$u = -e_L = \omega W \Phi_m \cos \omega t = U_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

где  $U_m = \omega W \Phi_m = 2\pi f W \Phi_m$ , а действующее значение напряжения

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi f W \Phi_m}{1,41}$$

или

$$U = 4,44 f W \Phi_m.$$

(19.1)

Если к катушке со стальным сердечником приложено синусоидальное напряжение, то в сердечнике возникает синусоидальный

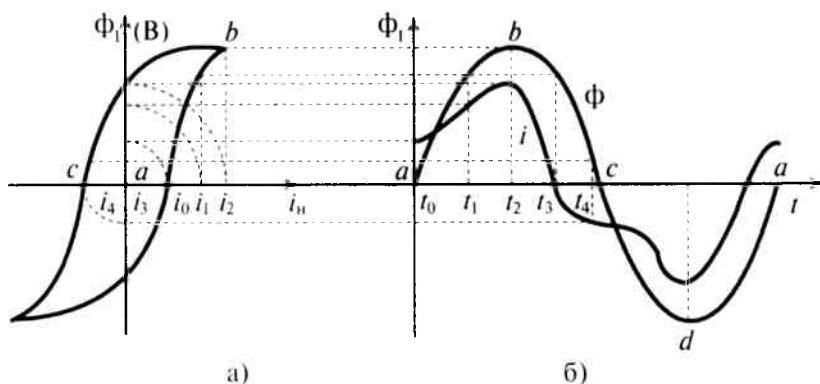


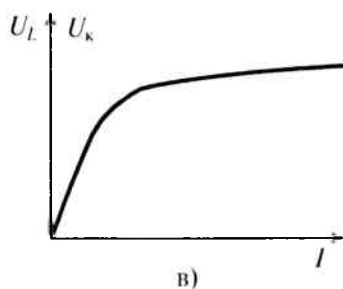
Рис. 19.5

магнитный поток. Ток в катушке при этом оказывается несинусоидальным. Это связано с нелинейной зависимостью между магнитным потоком и током  $\Phi = f(i)$ . На рис. 19.5а показана петля гистерезиса, изображающая эту зависимость.

Для каждого момента времени ( $t_0$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  и т. д.) по петле гистерезиса находят значение тока и откладывают его на ординате магнитного потока (смотри пунктирные линии на рис. 19.5). При увеличении магнитного потока пользуются участком  $ab$  петли гистерезиса, при уменьшении — участком  $bc$  и т. д.

Как видно (рис. 19.5б), кривая тока при синусоидальном магнитном потоке несинусоидальна.

Кривая намагничивания ферромагнитного материала (рис. 8.3) выражает зависимость индукции  $B$  в ферромагнитном материале от напряженности  $H$  магнитного поля в катушке. Напряженность  $H$  в катушке пропорциональна току  $I$  в катушке. Магнитный поток в ферромагнитном материале  $\Phi = BS$  связан с напряжением  $U_k$ , приложенным к катушке, прямой пропорциональностью (19.1). Следовательно, основную кривую намагничивания ферромагнитного материала магнитопровода  $B = f(H)$  можно считать вольт-амперной характеристикой катушки с сердечником из ферромагнитного материала (рис. 8.3), если изобразить ее в координатах  $U_k$  и  $I$  (рис. 19.5в). Таким образом, катушка с ферромагнитным сердечником является нелинейным элементом переменного тока, т. е. источником несинусоидальности.



в)



### 19.4. Мощность потерь. Векторная диаграмма катушки со стальным сердечником

При расчете цепи катушки со стальным сердечником несинусоидальный намагничивающий ток  $i$  часто заменяют эквивалентным синусоидальным, который имеет то же действующее значение, что и несинусоидальный. При этой замене пользуются поправочным коэффициентом  $\xi$ , зависящим от формы кривой тока, которая в свою очередь зависит от максимального значения индукции в сердечнике  $B_m$ .

Значение коэффициента  $\xi$  для электротехнической стали при индукции, не превышающей  $B_m \approx 0,8$  Тл, принимается равным единице. При больших значениях магнитной индукции поправочный коэффициент можно найти по графику (рис. 19.6).

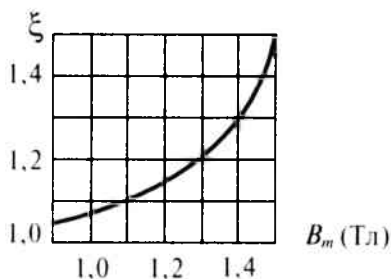


Рис. 19.6

При синусоидальном токе векторная диаграмма для катушки (без активного сопротивления) со стальным сердечником (без рассеяния) может быть построена как для идеальной индуктивности (рис. 11.4б), т. е. ток отстает от напряжения на угол  $90^\circ$ .

Если учесть потери на циклическое перемагничивание в сердечнике  $P_{\text{ци}}$  и на вихревые токи  $P_{\text{вт}}$ , т. е. потери в стали  $P_{\text{ст}} = P_{\text{ци}} + P_{\text{вт}}$ , то ток в катушке со стальным сердечником отстает от напряжения на угол  $\varphi' < 90^\circ$  (рис. 19.7а). При этом появляется активная составляющая тока

$$I_a = \frac{P_{\text{ст}}}{U} = I \cos \varphi' = I \sin \delta, \quad (19.2)$$

совпадающая по фазе с напряжением, и реактивная составляющая тока

$$I_p = I \sin \varphi' = I \cos \delta. \quad (19.3)$$

Реактивная составляющая тока, совпадающая по фазе с магнитным потоком и намагничивающая сердечник, называется намагничивающим током катушки.

Угол  $\delta$ , на который ток  $I$  опережает по фазе магнитный поток  $\Phi$  (рис. 19.7а), называется углом потерь

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{I_a}{I_p}. \quad (19.4)$$

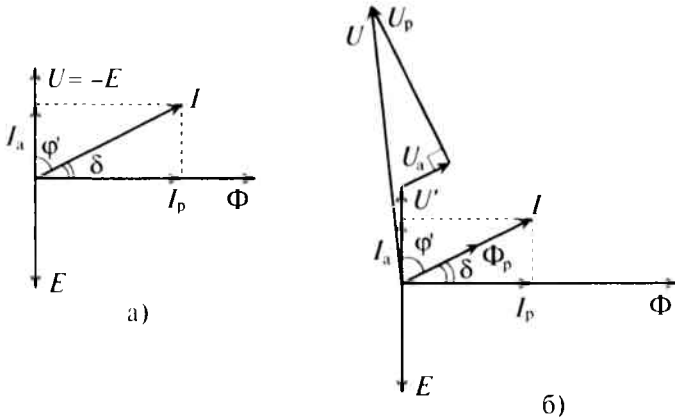


Рис. 19.7

Потери в стали (магнитные потери) можно определить выражением

$$P_{ст} = P_{уд} G, \quad (19.5)$$

где  $G$  — масса ферромагнитного сердечника, кг;  $P_{уд}$  — удельная мощность потерь в стали, Вт/кг.

Удельную мощность потерь вычисляют по формуле

$$P_{уд} = P_{1,0/50} B_m^2, \quad (19.6)$$

где  $P_{1,0/50}$  — потери в стали при индукции  $B_m = 1$  Тл и частоте  $f = 50$  Гц;  $B_m$  — максимальное значение индукции.

Значения  $P_{1,0/50}$  для различных марок электротехнической стали даны в Приложении 8.

Если не пренебрегать активным сопротивлением катушки  $R$ , то падение напряжения на этом сопротивлении  $U_a = IR$  совпадает по фазе с током  $I$ . На активном сопротивлении возникают потери мощности, которые являются электрическими потерями и называются потерями в меди  $P_m = I^2 R$ . Эти потери складываются с магнитными и создают суммарные потери в катушке со стальным сердечником  $P = P_{ст} + P_m$ . Суммарные потери  $P$  влияют на угол потерь  $\delta$  и на активную составляющую тока катушки  $I_a = I \cos \varphi$ , так как  $\cos \varphi = \frac{P}{UI}$ .

Большая часть магнитного потока, т. е. основной поток  $\Phi$ , замыкается в сердечнике, а незначительная часть потока  $\Phi_p$  рассеивается (рис. 19.4б). Поток рассеяния  $\Phi_p$  индуцирует в катушке ЭДС рассеяния  $E_p = I \omega L_p = I X_p$ , где  $L_p$  — индуктивность рассеяния. На преодоление ЭДС рассеяния в напряжении, прило-

женном к катушке, появляется составляющая  $U_p = -E_p$ , которая опережает ток на угол  $90^\circ$ . Поток рассеяния  $\Phi_p$  совпадает по фазе с током.

Следовательно, напряжение на зажимах катушки со стальным сердечником складывается из напряжения  $U' = -E$ , где  $E$  создается основным магнитным потоком  $\Phi$ , падения напряжения на активном сопротивлении катушки  $U_a = IR$  и напряжения  $U_p = -E_p$ , т. е.  $\dot{U} = \dot{U}' + \dot{U}_a + \dot{U}_p$ . Это выражение используется при построении векторной диаграммы катушки со стальным сердечником (рис. 19.76).

### 19.5. Схема замещения

Эквивалентная схема катушки со стальным сердечником изображена на рис. 19.4в. На эквивалентной схеме выделены активное сопротивление  $R$  и индуктивное сопротивление рассеяния  $X_p$ . Оставшуюся катушку с сердечником можно считать идеальной.

Напряжение  $U' = -E$  для идеальной катушки можно представить суммой падений напряжений на активном сопротивлении  $R_0 = \frac{P_{ст}}{I^2} = \frac{U'}{I} \cos \varphi'$  и индуктивном  $X_0 = \frac{U}{I} \sin \varphi'$ .

Эти соображения легли в основу построения схемы замещения катушки со стальным сердечником (рис. 19.8а).

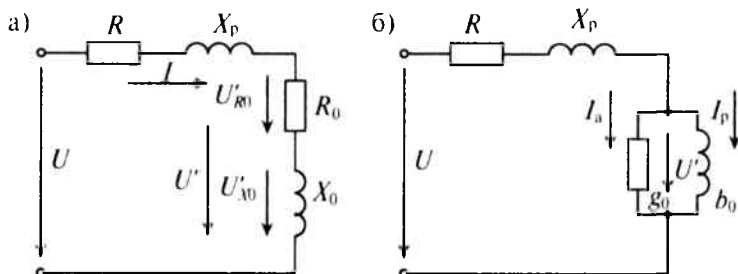


Рис. 19.8

Реальная катушка (рис. 19.4а) и схема ее замещения (рис. 19.8б) при одинаковых напряжениях на зажимах  $U$  имеют одинаковые токи и мощности.

Активная составляющая тока определяет активную проводимость идеальной катушки  $g_0 = \frac{I_a}{U'} = \frac{P_{ст}}{(U')^2}$ , а намагничивающий

ток — реактивную проводимость  $b_0 = \frac{I_p}{U'}$ . На рис. 19.8б показана схема замещения катушки со стальным сердечником с учетом этих проводимостей.

**Пример 19.1**

На среднем стержне Ш-образного магнитопровода (рис. 19.9), выполненного из листовой ( $\Delta = 0,5$  мм) стали Э42 (1512) с воздушным зазором  $\ell_3 = 0,5$  мм, расположена обмотка, к которой подведено напряжение  $U = 220$  В при частоте  $f = 50$  Гц. 10 % объема сердечника заполнено изоляцией. Активным сопротивлением обмотки и рассеянием можно пренебречь. Размеры магнитопровода указаны в мм.

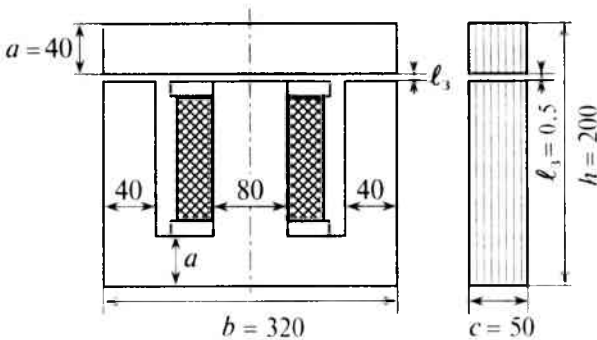


Рис. 19.9

Определить число витков обмотки  $W$ , ток в обмотке  $I$ , потери в стали  $P_{ст}$ , коэффициент мощности цепи  $\cos \varphi$  и угол потерь  $\delta$  для того, чтобы создать максимальную магнитную индукцию в среднем стержне  $B_m = 1,2$  Тл.

**Решение**

По выражению (19.1) определяется число витков обмотки

$$W = \frac{U}{4,44 f \Phi_m} = \frac{220}{4,44 \cdot 50 \cdot 43,2 \cdot 10^{-4}} = 230 \text{ витков,}$$

где

$$\Phi_m = B_m S_{ср} K_{ст} = B_m 2ac K_{ст} = 1,2 \cdot 8 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,9 = 43,2 \cdot 10^{-4} \text{ Вб;}$$

$S_{ср}$  — площадь сечения среднего стержня сердечника;  $K_{ст}$  — коэффициент заполнения сердечника сталью,  $K_{ст} = 0,9$ .

Расчет намагничивающего тока  $I_p$  произведен по закону полного тока для половины симметричной магнитной цепи. Сечение всех участков половины магнитной цепи  $S_{ст}$  одинаковое (рис. 19.9) и определяется по формуле

$$S_{ст} = K_{ст} ac = 0,9 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 18 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Длина средней линии половины сердечника

$$\begin{aligned} \ell_{ст} &= 2\left(h - \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\right) + 2\left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\right) - 2\ell_3 = \\ &= 2(200 - 20 - 20) + 2\left(\frac{320}{2} - 20 - 20\right) - 2 \cdot 0,5 = 559 \text{ мм} = 55,9 \cdot 10^{-2} \text{ м.} \end{aligned}$$

Напряженность магнитного поля в магнитопроводе (Приложение 5) для стали Э42 (1512)  $H = 210$  А/м, так как действующее значение заданной индукции  $B = \frac{B_m}{\sqrt{2}} = \frac{1,2}{1,41} = 0,85$  Тл, а в Приложении 5 указаны действующие значения магнитной индукции.

Напряженность в воздушном зазоре ( $B_1 = B$ ) будет равна

$$H_3 = \frac{B_3}{\mu_0} = \frac{0,85}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 67,7 \cdot 10^4 \text{ А/м.}$$

Поправочный коэффициент  $\xi$  для максимальной индукции  $B_m = 1,2$  Тл определяется из графика (рис. 19.6),  $\xi = 1,1$ . Тогда намагничивающий ток  $I_p$  определяется по формуле

$$\begin{aligned} I_p &= \frac{H\ell_{ст} + 2H_3\ell_3}{W\xi} = \\ &= \frac{210 \cdot 55,9 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 67,7 \cdot 10^4 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}}{230 \cdot 1,1} = 3,14 \text{ А.} \end{aligned}$$

Масса стали сердечника

$$G = S_{ст} \ell_{ст} \rho = 18 \cdot 10^{-4} \cdot 55,9 \cdot 10^{-2} \cdot 7800 = 7,848 \text{ кг,}$$

где  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup> — плотность стали.

Потери в стали

$$P_{ст} = P_{уд} G = 2 \cdot 7,848 = 15,8 \text{ Вт,}$$

где  $P_{уд} = P_{1,0/50} B_m^2 = 1,4 \cdot 1,2^2 = 2$  Вт/кг, так как для стали Э42 при толщине листов  $\Delta = 0,5$  мм  $P_{1,0/50} = 1,4$  Вт/кг (Приложение 8).

Активная составляющая тока обмотки обусловлена этими потерями, т. е.

$$I_a = \frac{P_{ст}}{U} = \frac{15,8}{220} = 0,07 \text{ А.}$$

Ток в обмотке (рис. 19.7) будет равен

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = \sqrt{0,07^2 + 3,14^2} = 3,13 \text{ А.}$$

Коэффициент мощности цепи  $\cos \varphi = \frac{P_{ст}}{UI} = \frac{15,8}{220 \cdot 3,14} = 0,023$ ,

угол  $\varphi = 88^\circ 40'$ , а угол потерь  $\delta = 90^\circ - 88^\circ 40' = 1^\circ 20'$ .

### 19.6. Феррорезонанс

В цепи с нелинейной индуктивностью (катушка со стальным сердечником) существует нелинейная зависимость напряжения на индуктивности  $U_L$  от тока  $I$  (рис. 19.5в). Следовательно, резонанса напряжений, т. е. равенства напряжений на емкости  $U_C$  и индуктивности  $U_L$ , можно добиться изменением тока при последовательном соединении конденсатора и нелинейной индуктивности (рис. 19.10а).

Цепи, содержащие нелинейную индуктивность и линейную емкость, называют феррорезонансными, а явление равенства напряжений  $U_L$  и  $U_C$ , описанное выше, называют феррорезонансом.

Для объяснения явления феррорезонанса можно воспользоваться вольт-амперной характеристикой нелинейной индуктивности  $U_L=f(I)$ , линейной емкости  $U_C=f(I)$  и линейного активного сопротивления  $U_a=f(I)$ .

При построении суммарной вольт-амперной характеристики

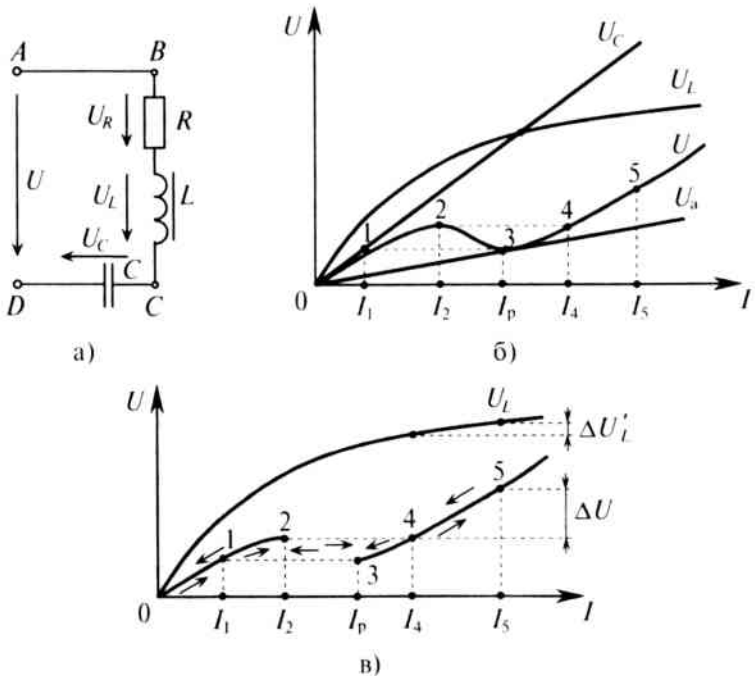


Рис. 19.10

рассматриваемой цепи исходят из того, что напряжение источника  $U$  уравнивается суммой напряжений:

$$\dot{U} = \dot{U}_a + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{U}_a + \dot{U}_p. \quad (19.7)$$

Из векторной диаграммы для рассматриваемой цепи (рис. 12.4б) следует, что индуктивное напряжение  $U_L$  опережает по фазе ток на угол  $90^\circ$ , а емкостное напряжение  $U_C$  — отстает на  $90^\circ$ . (Для упрощения несинусоидальные величины заменены эквивалентными синусоидальными, т. е. вольт-амперная характеристика нелинейной катушки  $U_L = f(I)$  аналогична характеристике, показанной на рис. 19.5в.) Следовательно, реактивные напряжения  $U_L$  и  $U_C$  находятся в противофазе, т. е.  $\dot{U}_p = \dot{U}_L - \dot{U}_C$ .

Величину емкости можно подобрать так, чтобы прямая  $U_C = f(I)$  пересекла кривую  $U_L = f(I)$ . Точка их пересечения и является точкой феррорезонанса напряжений ( $U_L = U_C$ ), при котором  $\dot{U}_p = \dot{U}_L - \dot{U}_C = 0$ . Следовательно,  $\dot{U} = \dot{U}_a = \dot{I}R$  ( $\dot{U}_p$  — реактивное напряжение цепи).

Из графика (рис. 19.10б) следует, что с увеличением тока  $I$  напряжение  $U$  сначала растет (участок 0–2), затем уменьшается (участок 2–3), достигая минимального значения при феррорезонансе (точка 3), затем снова растет (участок 3–5).

Из того же графика видно, что при непрерывном увеличении напряжения источника  $U$  ток  $I$  плавно увеличивается до значения  $I_2$  и скачком увеличивается до  $I_4$ , после чего продолжает плавно расти (участок 4–5).

При плавном уменьшении напряжения  $U$  ток  $I$  уменьшается до  $I_3$  и скачком уменьшается до  $I_1$ , затем плавно падает до нуля (при  $U = 0$ ).

Характерно, что при каждом скачке тока  $I$  его фаза по отношению к напряжению  $U$  изменяется на  $180^\circ$ , поэтому это явление называют «опрокидыванием фазы». «Опрокидывание фазы» в феррорезонансной цепи происходит потому, что до значения тока  $I_2$  цепь имеет индуктивный характер, т. е.  $X_L > X_C$ , а после значения тока  $I_3$  — емкостной, т. е.  $X_L < X_C$  (рис. 19.10б). Вызвано это тем, что после феррорезонанса происходит магнитное насыщение сердечника катушки, стабилизируется  $X_L$  и  $U_L$ , а  $U_C$  растет.

Явление «опрокидывания фазы» проиллюстрировано на рис. 19.10в, на котором показаны кривые напряжений  $U = f(I)$  и  $U_L = f(I)$ . Из кривой  $U_L = f(I)$  видно, что напряжение на выводах катушки (точки  $B$  и  $C$  схемы — рис. 19.10а) остается почти неизменным ( $\Delta U'_L$ ) даже при значительном изменении ( $\Delta U$ ) напряже-

ния сети  $U$  (точки  $A$  и  $D$ ), если незначительным значением напряжения  $U_a$  можно пренебречь.

Это явление используется в феррорезонансных стабилизаторах напряжения, в которых значительное изменение входного напряжения ( $\Delta U$ ) на клеммах  $AD$  вызывает незначительное изменение выходного напряжения ( $\Delta U_L$ ) на клеммах  $BC$ , к которому подключен потребитель.

При параллельном соединении катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора может возникнуть феррорезонанс токов, если  $I_{pL} = I_{pC}$ .



## Глава 20

### ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

#### 20.1. Основные понятия

*Переходный процесс в электрической цепи – это электромагнитный процесс, возникающий в электрической цепи при переходе от одного установившегося (принужденного) режима к другому. Установившимся (принужденным) называется режим работы электрической цепи, при котором напряжение и токи цепи в течение длительного времени остаются неизменными.*

Такой режим в электрической цепи устанавливается при длительном действии источников постоянной или переменной ЭДС при неизменных параметрах этой цепи  $R$ ,  $L$  и  $C$ .

Переходный процесс вызывается коммутацией в цепи. *Коммутацией называется процесс замыкания или размыкания рубильников или выключателей.* Переходный процесс может быть вызван изменением параметров электрической цепи  $R$ ,  $L$  или  $C$ .

Переходный процесс базируется на двух законах коммутации:

- 1) ток в индуктивности не может изменяться скачком;
- 2) напряжение на емкости не может изменяться скачком.

Действительно, если ток в индуктивности  $L$  изменяется скачком, т. е. мгновенно, то ЭДС самоиндукции  $e_L$  становится бесконечно большой (при  $t_{\text{ком}} = 0$ ):

$$e_L = -L \frac{di}{dt} \approx \infty.$$

В реальных цепях ЭДС самоиндукции может иметь только конечные значения.

Если в цепи с емкостью  $C$  напряжение на ее обкладках изменяется скачком, т. е. мгновенно, то появляется бесконечно большой зарядный (или разрядный) ток (при  $t_{\text{ком}} = 0$ ):

$$i = C \frac{du_C}{dt} \approx \infty.$$

Ток в электрических цепях может иметь только конечные значения.

Переходный процесс является быстропротекающим процессом, длительность которого обычно составляет десятые, сотые и даже

миллионные доли секунды и сравнительно редко – секунды и даже десятки секунд.

Таким образом, один установившийся режим цепи отделяется от другого некоторым промежуток времени, в течение которого происходит постепенный переход от прежнего состояния цепи к новому.

Переходный процесс в линейных цепях можно рассматривать как результат наложения двух процессов:

1) нового установившегося режима, который наступает после коммутации;

2) свободного процесса, обеспечивающего переход цепи от прежнего установившегося режима к новому установившемуся режиму.

Таким образом, ток  $i$  цепи в течение переходного процесса можно представить суммой двух токов: нового установившегося  $i_y$  и свободного  $i_{св}$ , возникающего после коммутации:

$$i = i_y + i_{св}. \quad (20.1)$$

Аналогично напряжение в течение переходного процесса равно

$$u = u_y + u_{св}. \quad (20.2)$$

В результате переходного процесса происходят изменения тока, напряжения, фазы, частоты и т. д.

Изучение переходных процессов очень важно, так как оно позволяет выявить возможные превышения напряжения на отдельных участках цепи, которые могут оказаться опасными для изоляции установки, позволяет выявить возможные броски токов, величина которых в десятки раз превышает установившийся. Изучение переходных процессов позволяет выявить ситуации, возникающие в электрических цепях при коротком замыкании, резком включении и выключении рубильников, и прочие режимы работы цепи.

## 20.2. Подключение катушки индуктивности к источнику с постоянным напряжением

Если катушку индуктивности ( $RL$ ) подключить к источнику с постоянным напряжением  $U$  (замыкание ключа  $K$ ), то ток  $i$  в неразветвленной цепи (рис. 20.1а) будет увеличиваться от нуля (в начале переходного процесса) до установившегося значения

$$i_y = I = \frac{U}{R}. \quad (20.3)$$

Установившийся, т. е. постоянный, ток  $I$  не индуцирует в катушке ЭДС самоиндукции, поэтому индуктивное сопротивление в установившемся режиме при условии (20.3) отсутствует.

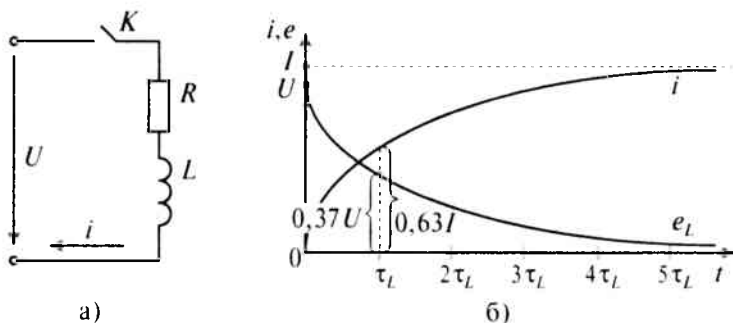


Рис. 20.1

Этот увеличивающийся ток  $i$  индуцирует в индуктивности  $L$  катушки ЭДС самоиндукции (см. (9.11))

$$e_L = -L \frac{di}{dt}.$$

Следовательно, для любого момента времени переходного процесса по второму закону Кирхгофа можно записать

$$U + e_L = iR \quad \text{или} \quad U = iR + L \frac{di}{dt}. \quad (20.4)$$

Разделив уравнение (20.4) на  $R$ , получают

$$\frac{U}{R} - i = \frac{L}{R} \cdot \frac{di}{dt}. \quad (20.5)$$

В уравнении (20.5)  $\frac{U}{R} = I$  — установившийся в конце переходного процесса ток ( $i_s$ ).

Отношение  $\frac{L}{R}$  имеет размерность времени  $\left( \left[ \frac{L}{R} \right] = \frac{\text{Гн}}{\text{Ом}} = \frac{\text{Ом} \cdot \text{с}}{\text{Ом}} = \text{с} \right)$ , обозначается буквой  $\tau$  (тау) и называется постоянной времени  $RL$ -цепи, т. е.

$$\tau_L = \frac{L}{R}. \quad (20.6)$$

Тогда уравнение (20.5) можно записать в виде

$$I - i = \tau_L \frac{di}{dt}. \quad (20.7)$$

Если это уравнение проинтегрировать, предварительно разделить переменные (ток и время), а затем спотенцировать, то получим выражение

$$i = I - I e^{-t/\tau_L} = I + (-I e^{-t/\tau_L}), \quad (20.8)$$

где  $e$  – основание натурального логарифма ( $e = 2,71$ );  $I$  – установившийся ток ( $i_y$ );  $(-Ie^{-t/\tau_L})$  – свободный ток ( $i_{св}$ ), так как  $i = i_y + i_{св}$ ,

т. е.

$$i_{св} = -Ie^{-t/\tau_L}. \quad (20.9)$$

Таким образом, уравнение, которое позволяет определить величину тока в цепи с индуктивностью  $L$  в любой момент переходного процесса  $RL$ -цепи при подключении реальной катушки индуктивности к источнику с постоянным напряжением  $U$ , записывается в виде

$$i = I(1 - e^{-t/\tau_L}). \quad (20.10)$$

Воспользовавшись Приложением 9, по выражению (20.10) можно определить, что за время  $t = \tau_L$  ток в цепи увеличивается до  $0,63I$ , а за время  $t = 4,6\tau_L$  – до  $0,99I$ , т. е. до 99 % установившегося тока  $I$ .

Теоретически переходный процесс происходит бесконечно долго. Практически переходный процесс в рассматриваемой цепи считается законченным, когда ток  $i$  увеличивается до 99 % установившегося тока  $I$ .

Как видим, чем больше  $\tau_L$ , тем больше времени  $t$  длится переходный процесс.

Таким образом, *постоянная времени  $\tau_L$  определяет скорость переходного процесса или его длительность.*

ЭДС самоиндукции в рассматриваемой цепи, вызванная свободным током  $i_{св}$ , определяется выражением

$$e_L = Ue^{-t/\tau_L}. \quad (20.11)$$

Таким образом, ЭДС самоиндукции в  $RL$ -цепи, подключенной к источнику с постоянным напряжением  $U$ , будет уменьшаться. Так, за время  $t = \tau_L$ , ЭДС самоиндукции согласно (20.11) уменьшится до  $0,37U$ , а за время  $t = 4,6\tau_L$  – до  $0,01U$ , т. е. до 1 % постоянного напряжения  $U$ .

Увеличение тока и уменьшение ЭДС самоиндукции катушки при подключении катушки к источнику с постоянным напряжением  $U$  показаны на графике рис. 20.16.

### 20.3. Отключение и замыкание $RL$ -цепи

Если цепь с катушкой, в которой проходит установившийся ток  $I$  (рис. 20.1а), разомкнуть, то ток  $i$  в такой цепи с боль-

шой скоростью уменьшается до нуля и в катушке индуцируется большая ЭДС самоиндукции  $e_L$

$$e_L = -L \frac{di}{dt}.$$

Эта ЭДС полностью приложена к клеммам ключа, так как при размыкании сопротивление ключа становится бесконечно большим. Эта ЭДС вызывает значительное увеличение электрического поля между контактами ключа, а следовательно, и напряженности поля. Большая напряженность электрического поля может вызвать искровой и даже дуговой разряд между размыкающимися контактами ключа, в результате чего обгорают контакты ключа.

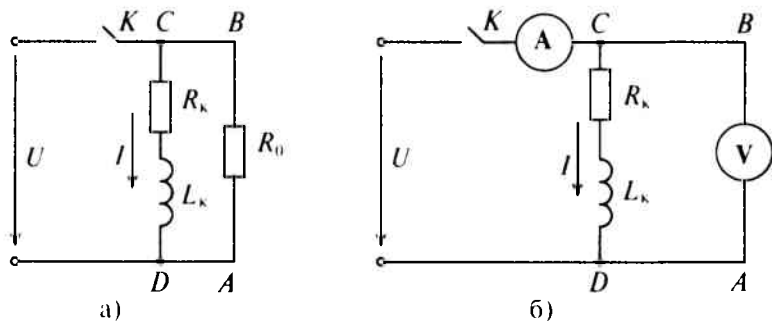


Рис. 20.2

Поэтому рубильники в  $RL$ -цепях шунтируются специальными устройствами, которые обеспечивают гашение дугового разряда. Для гашения дугового разряда необходимо одновременно с отключением катушки индуктивности от источника замкнуть ее на разрядное сопротивление  $R_0$  (рис. 20.2а).

Уменьшение тока  $i_{св}$  при отключении катушки от источника (рис. 20.1а) происходит по закону

$$i_{св} = I e^{-t/\tau_L}.$$

Наглядно это уменьшение можно наблюдать на рис. 20.1б, если кривую изменения  $e_L$  считать кривой уменьшения тока  $i_{св}$  в соответствующем масштабе.

Постоянная времени при отключении катушки от источника с постоянным напряжением  $U$  определяется как и при включении катушки на это напряжение, т. е.  $\tau_L = \frac{L}{R}$ .

Если катушку с установившимся током  $I$ , шунтированную сопротивлением  $R_0$  (рис. 20.2а), отключить от источника (разомкнуть ключ  $K$ ), то в замкнутом контуре  $ABCD$  в начальный

момент коммутации ( $t_0 = 0$ ) пройдет ток  $i_{сн} = Ie^{-0} = I$ , т. е. установившийся ток. Этот ток  $I$  может оказаться недопустимо большим для резистора с сопротивлением  $R_0$ .

Для определения активного сопротивления катушки  $R_k$  и полного ее сопротивления  $Z_k$  включают амперметр  $A$  и вольтметр  $V$  (рис. 20.26), т. е. вместо резистора с сопротивлением  $R_0$  в контур  $ABCD$  (рис. 20.26) включен вольтметр  $V$ . Этот вольтметр может не быть рассчитан на установившийся ток  $I$ , проходящий через него при размыкании ключа, в результате чего может сгореть. Чтобы не «сжечь» вольтметр (рис. 20.26), сначала необходимо отключить вольтметр, а затем разомкнуть ключ  $K$ .

Как видно, за счет переходных процессов в цепях с индуктивностью возникают большие токи и напряжения. С этим необходимо считаться и учитывать при проектировании и эксплуатации цепей с индуктивностью.

#### 20.4. Зарядка, разрядка и саморазрядка конденсатора

Если конденсатор с сопротивлением (утечки)  $R$  и емкостью  $C$  подключить к источнику с постоянным напряжением  $U$  (замыканием ключа  $K$ ), то в цепи (рис. 20.3а) появится ток зарядки конденсатора (см. (11.16)):

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c}{dt}, \quad (20.12)$$

где  $u_c$  — напряжение на конденсаторе в любой момент времени переходного процесса.

По второму закону Кирхгофа для цепи зарядки конденсатора (рис. 20.3а) можно записать уравнение

$$U = iR + u_c \quad \text{или} \quad U - u_c = iR = RC \frac{du_c}{dt}, \quad (20.13)$$

где произведение  $RC$  имеет размерность времени, обозначается буквой  $\tau$  и называется постоянной времени переходного процесса в  $RC$ -цепи, т. е.

$$\tau_c = RC. \quad (20.14)$$

$$\left( [\tau] = [RC] = \text{Ом} \cdot \Phi = \text{Ом} \cdot \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \frac{\text{Кл}}{\text{А}} = \frac{\text{А} \cdot \text{с}}{\text{А}} = \text{с}. \right)$$

Уравнение (20.13) можно записать в виде

$$U - u_c = \tau_c \frac{du_c}{dt}. \quad (20.15)$$

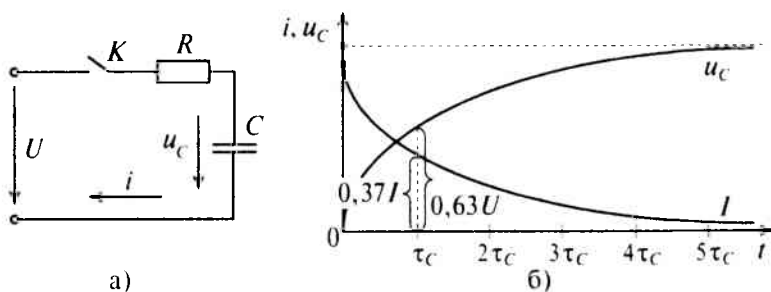


Рис. 20.3

Если в уравнении (20.15) разделить переменные, проинтегрировать, а затем спотенцировать, то получится выражение

$$u_C = U - Ue^{-t/\tau_C} = U + (-Ue^{-t/\tau_C}), \quad (20.16)$$

где  $U$  — установившееся напряжение  $u_y$   $RC$ -цепи;  $(-Ue^{-t/\tau_C})$  — свободная составляющая напряжения  $u_{св}$  на конденсаторе; т. е.  $u_C = u_y + u_{св}$ .

Следовательно, напряжение на заряжающемся конденсаторе в любой момент времени  $t$  переходного процесса определяется выражением

$$u_C = U(1 - e^{-t/\tau_C}). \quad (20.17)$$

По (20.17), пользуясь Приложением 9, можно определить, что за время  $t = \tau_C$  конденсатор зарядится до напряжения  $u_C = 0,63U$ , а за время  $t = 4,6\tau_C$  — до напряжения  $u_C = 0,99U$ .

Теоретически зарядка конденсатора длится бесконечно долго, а практически конденсатор считается заряженным, когда напряжение на нем достигает 99 % напряжения источника  $U$ .

Таким образом, и в  $RC$ -цепи, чем больше постоянная времени  $\tau_C$ , тем больше времени  $t$  тратится на зарядку конденсатора, т. е. и в данном случае *постоянная времени  $\tau_C$  характеризует длительность зарядки и разрядки конденсатора*.

Ток  $i$  при зарядке конденсатора (см. (20.13)) уменьшается по закону

$$i = Ie^{-t/\tau_C}, \quad (20.18)$$

где  $I = \frac{U}{R}$  — максимальный ток, который имеет место в начальный момент  $t = 0$  зарядки конденсатора (момент коммутации).

За время  $t = \tau_c$  ток в цепи заряжающегося конденсатора уменьшится до  $0,37I$ , а за время  $t = 4,6\tau_c$  — до  $0,01I$ , при котором переходный процесс можно считать законченным.

Графики изменения напряжения на конденсаторе и тока в цепи зарядки конденсатора изображены на рис. 20.36.

Если конденсатор емкостью  $C$ , заряженный предварительно до напряжения  $U$ , разряжать через резистор с сопротивлением  $R$  (рис. 20.4а), то напряжение  $u_c$  на конденсаторе и ток в цепи разрядки будут уменьшаться по закону

$$u_c = Ue^{-t/\tau_c}, \quad (20.19)$$

$$i = Ie^{-t/\tau_c}, \quad (20.20)$$

где  $U$  — напряжение на конденсаторе до начала разрядки (при  $t=0$ ), а  $I = \frac{U}{R}$  — максимальный ток в начальный момент разрядки

(при  $t=0$ ),  $\tau_c = RC$  — постоянная времени в цепи разрядки конденсатора.

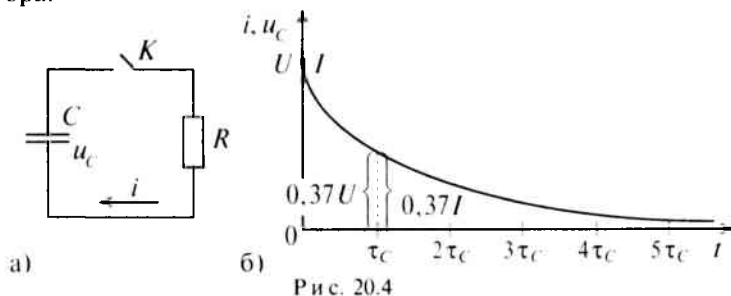


Рис. 20.4

За время  $t = \tau_c$  напряжение и ток уменьшатся до 37 % своих максимальных значений. Изменение напряжения и тока на разряжающемся конденсаторе показаны на рис. 20.4б (в разных масштабах).

Если конденсатор емкостью  $C$ , заряженный до напряжения  $U$ , отсоединить от источника, то он будет разряжаться через свой диэлектрик. Напряжение на нем будет уменьшаться по закону  $u_c = Ue^{-t/\tau_c}$ . Процесс разрядки конденсатора через свой диэлектрик называется саморазрядом.

Постоянная времени саморазряда зависит от физических свойств диэлектрика

$$\tau_c = \rho \epsilon_0 \epsilon_r, \quad (20.21)$$

где  $\rho$  — удельное сопротивление диэлектрика;  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная;  $\epsilon_r$  — диэлектрическая проницаемость диэлектрика (относительная).



Для определения напряжения, тока, ЭДС в любой момент переходного процесса  $RL$ -цепи и  $RC$ -цепи можно воспользоваться таблицей показательных функций (Приложение 9).

### Пример 20.1

Катушка электромагнита с параметрами  $R=11$  Ом и  $L=0,11$  мГн подключена к сети постоянного тока с напряжением  $U=110$  В. Определить время  $t$ , за которое ток в катушке  $i$  увеличится от нуля до 8 А. Определить, какого значения достигнет ЭДС самоиндукции  $e_L$  за время  $t$ .

### Решение

$$\text{Установившийся ток } I = \frac{U}{R} = \frac{110}{11} = 10 \text{ А.}$$

$$\text{Постоянная времени для катушки } \tau_L = \frac{L}{R} = \frac{0,11 \cdot 10^{-3}}{11} = 10^{-5} \text{ с.}$$

Подставляем значение величин в (20.10):

$$8 = 10(1 - e^{-t/\tau_L}), \text{ откуда } e^{-t/\tau_L} = \frac{10-8}{10} = 0,2.$$

По Приложению 9 определяется  $X = \frac{t}{\tau} = 1,6$ , откуда

$$t = 1,6\tau_L = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ с.}$$

ЭДС самоиндукции за время  $1,6 \cdot 10^{-5}$  с уменьшается со 110 В до значения

$$e_L = Ue^{-t/\tau_L} = 110e^{-1,6 \cdot 10^{-5}/10^{-5}} = 110e^{-1,6} = 110 \cdot 0,2 = 22 \text{ В.}$$

### Пример 20.2

К зажимам катушки индуктивности с параметрами  $R_k = 100$  Ом,  $L_k = 10$  Гн подключен вольтметр  $V$  (рис. 20.26) электродинамической системы. Сопротивление вольтметра  $R_V = 5000$  Ом. Напряжение на клеммах источника  $U = 200$  В.

Определить напряжение на зажимах вольтметра и ток в обмотках прибора (обмотки соединены последовательно) при  $t=0$ , если размыкание рубильника  $K$  произойдет мгновенно и дуги не возникнет.

### Решение

До размыкания рубильника через катушку проходил ток

$$i = I = \frac{U}{R_k} = \frac{200}{100} = 2 \text{ А.}$$

В момент размыкания рубильника ( $t = 0$ ) весь этот ток проходит по обмоткам вольтметра. При этом на вольтметре напряжение станет равным

$$U_V = I_V R_V = 2 \cdot 5000 = 10\,000 \text{ В.}$$

Такого напряжения (10 кВ) и такого тока (2 А) обмотка вольтметра (обычно подвижная обмотка электродинамического прибора рассчитана на ток порядка десятков, максимум, сотен миллиампер) не выдержит и сгорит.

При размыкании рубильника с конечной скоростью между расходящимися контактами рубильника  $K$  (рис. 20.26) возникнет электрическая дуга. Это приведет к тому, что увеличение напряжения на вольтметре и тока через обмотки вольтметра будет меньше, чем в рассмотренном выше случае (мгновенное размыкание рубильника). Однако меры предосторожности для сохранения вольтметра и рубильника, описанные выше, нужно соблюдать.

### Пример 20.3

Конденсатор емкостью  $C = 2$  мкФ через сопротивление  $R = 500$  кОм подключается к источнику с постоянным напряжением  $U = 220$  В.

Определить напряжение на конденсаторе  $u_C$  и ток в цепи заряда конденсатора  $i$  через 2 с от начала заряда конденсатора ( $t = 2$  с), а также время  $t'$ , за которое этот конденсатор зарядится до напряжения  $U_C = 150$  В.

### Решение

Постоянная времени заряда конденсатора

$$\tau_C = RC = 500 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 1 \text{ с.}$$

Напряжение на конденсаторе через 2 с от начала заряда

$$u_C = U(1 - e^{-t/\tau_C}) = 220(1 - e^{-2/1}) = 220 \cdot 0,865 = 190 \text{ В.}$$

Ток в цепи заряда конденсатора через 2 с от начала заряда

$$i = Ie^{-t/\tau_C} = 44 \cdot 10^{-5} \cdot 0,135 = 5,94 \cdot 10^{-5} \text{ А,}$$

так как  $I = \frac{U}{R} = \frac{220}{500 \cdot 10^3} = 44 \cdot 10^{-5} \text{ А.}$

Время  $t'$  заряда конденсатора до напряжения 150 В определяется по формуле (20.17):

$$150 = 220(1 - e^{-t'/\tau_C}).$$

Откуда  $e^{-t'/\tau_C} = \frac{220 - 150}{220} = 0,318 \text{ В.}$

Из таблицы показательных функций (Приложение 9) находят  $t' = 1,14$  с.

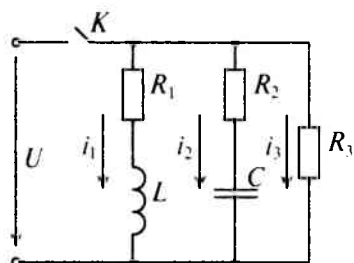


Рис. 20.5

### Пример 20.4

Параметры цепи, изображенной на рис. 20.5, следующие:  $R_1 = 6$  Ом;  $R_2 = 200$  кОм;  $R_3 = 60$  Ом;  $L = 3$  Гн;  $C = 10$  мкФ и  $U = 120$  В.

Определить значение токов в ветвях через время  $t = 2$  с после замыкания ключа  $K$ .

### Решение

Для ветви (1) с индуктивностью определяются:

$$\text{установившийся ток } I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{120}{6} = 20 \text{ А}$$

$$\text{и постоянная времени } \tau_L = \frac{L}{R} = \frac{3}{6} = 0,5 \text{ с.}$$

Тогда ток через 2 с будет равен

$$i_1 = I_1(1 - e^{-t/\tau_L}) = 20(1 - e^{-2/0,5}) = 20(1 - e^{-4}) = 20(1 - 0,018) = 19,64 \text{ А.}$$

Для ветви (2) с емкостью определяются: максимальный установившийся ток по окончании переходного процесса

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{120}{200 \cdot 10^3} = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ А}$$

и постоянная времени  $\tau_C = R_2 C = 200 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 2$  с.

Тогда ток зарядки через 2 с будет равен

$$i_2 = I_2 e^{-t/\tau_C} = 0,6 \cdot 10^{-3} e^{-2/2} = 0,6 \cdot 10^{-3} \cdot 0,37 = 0,22 \cdot 10^{-3} \text{ А.}$$

Для ветви (3) с активным сопротивлением  $R_3$  определяется

$$\text{ток ветви } I_3 = \frac{U}{R_3} = \frac{120}{6} = 2 \text{ А.}$$

Постоянная времени  $\tau_3 = 0$ , так как отсутствуют  $L$  и  $C$ .

Через 2 с значение тока будет таким же, т. е.  $i_3 = I_3 = 2$  А.

## Глава 21

### ТЕМЫ ДЛЯ ВЫБОРА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К СПЕЦИАЛЬНОСТИ

#### 21.1. Четырехполюсник в цепях постоянного и переменного тока

Четырехполюсником называется часть электрической цепи, имеющая две пары зажимов (рис. 21.1а).

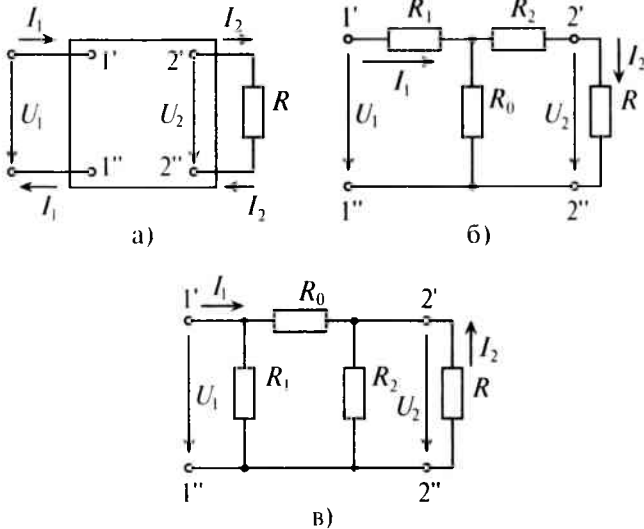


Рис. 21.1

К одной паре зажимов — входных ( $1'-1''$ ) — может быть присоединен источник, а к другой паре — выходных ( $2'-2''$ ) — присоединяется потребитель.

Если внутри четырехполюсников нет источников питания, то его называют пассивным. К пассивным четырехполюсникам относятся двухпроводная линия электропередачи, трансформаторы, выпрямители, фильтры, делители напряжения, мостовая схема и др.

Если электрическая схема содержит источник ЭДС, то в прямоугольнике, который изображает четырехполюсник, ставится буква «А» (активный).

Рассмотрим пассивный четырехполюсник.

Такой четырехполюсник является передаточным звеном между источником питания и потребителем. При этом предполагается, что может изменяться нагрузка четырехполюсника и напряжение на входе, но схема внутренних соединений четырехполюсника и значения сопротивлений в ней остаются неизменными.

Напряжение  $U_1$ , приложенное к входным зажимам ( $1'-1''$ ), называется входным напряжением. Ток, проходящий через входные зажимы ( $1'-1''$ ), называется входным током  $I_1$ .

Напряжение  $U_2$  между выходными зажимами ( $2'-2''$ ) называется выходным напряжением. Ток, проходящий через выходные зажимы ( $2'-2''$ ), называется выходным током  $I_2$  (рис. 21.1). Положительное направление напряжений и токов выбирается произвольно. Расчет подтвердит или опровергнет этот выбор.

Между входным и выходным напряжениями и токами четырехполюсника существуют линейные зависимости, называемые уравнениями четырехполюсника:

$$\begin{cases} U_1 = AU_2 + BI_2, \\ I_1 = CU_2 + DI_2. \end{cases} \quad (21.1)$$

Величины  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  в уравнениях четырехполюсника называются постоянными четырехполюсника.

Постоянные четырехполюсника  $A$  и  $D$  — отвлеченные числа,  $B$  имеет размерность сопротивления, а  $C$  — проводимости. Постоянные четырехполюсника взаимосвязаны уравнением

$$AD - BC = 1. \quad (21.2)$$

Если поменять местами входные и выходные зажимы четырехполюсника (рис. 21.1а), т. е. источник ЭДС присоединить к зажимам ( $2'-2''$ ), а потребитель к зажимам ( $1'-1''$ ), то уравнение четырехполюсника изменится:

$$\begin{cases} U_1 = DU_2 + BI_2, \\ I_1 = CU_2 + AI_2. \end{cases} \quad (21.3)$$

Как видно, при перемене входных и выходных зажимов четырехполюсника в уравнениях четырехполюсника меняются местами коэффициенты  $A$  и  $D$  (ср. (21.1) и (21.3)). Уравнение (21.2) остается справедливым и для этого случая.

Четырехполюсник называется симметричным, если при перемене мест источника и потребителя входные и выходные напря-

жения и токи не изменяются. Для симметричного четырехполюсника существует дополнительная связь между постоянными:

$$\boxed{A = D.} \quad (21.4)$$

Любой пассивный четырехполюсник, сопротивления которого постоянны, можно заменить эквивалентным четырехполюсником с тремя сопротивлениями, соединенными звездой – Т-образная схема замещения (рис. 21.1б) или треугольником – П-образная схема замещения (рис. 21.1в).

Уравнения четырехполюсника (21.1) и (21.3) справедливы для Т- и П-образных схем замещения. Постоянные четырехполюсника по-разному зависят от своих сопротивлений в этих схемах замещения.

Постоянные четырехполюсника А, В, С и D (в любом случае) зависят от схемы внутренних соединений четырехполюсника, от величины сопротивлений схемы и от частоты (для переменного тока) и могут быть определены расчетным или опытным путем.

Постоянные четырехполюсника экспериментально можно определить в режимах холостого хода и короткого замыкания. В режиме холостого хода (выходные зажимы 2'–2" разомкнуты,  $I_2 = 0$ ) четырехполюсник подключают к источнику и измеряют входное напряжение  $U_{1x}$  и входной ток  $I_{1x}$ .

В режиме короткого замыкания (зажимы 2'–2" замкнуты накоротко) измеряют входное напряжение  $U_{1x}$  и входной ток  $I_{1к}$ . Поменяв местами источник и потребитель, при холостом ходе (зажимы 1'–1" разомкнуты) определяют  $U_{2x}$  и  $I_{2x}$ , а при коротком замыкании (зажимы 1'–1" замкнуты накоротко) определяют  $U_{2к}$  и  $I_{2к}$ . Воспользовавшись результатами этих измерений, определяют постоянные четырехполюсника:

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{1}{\sqrt{\frac{U_{2x}}{I_{2x}} \left( \frac{U_{1x}}{I_{1x}} - \frac{U_{1к}}{I_{1к}} \right)}}; \quad A = C \frac{U_{1x}}{I_{1x}}; \\ D &= C \frac{U_{2к}}{I_{2к}}; \quad B = D \frac{U_{1к}}{I_{1к}}. \end{aligned} \right\} \quad (21.5)$$

По вычисленным постоянным четырехполюсника (21.5) определяют параметры Т-образной и П-образной схем замещения. Для Т-образной схемы:

$$R_0 = \frac{1}{C}; \quad R_1 = \frac{A-1}{C}; \quad R_2 = \frac{D-1}{C}. \quad (21.6)$$

Для П-образной схемы:

$$R_0 = B; R_1 = \frac{B}{D-1}; R_2 = \frac{B}{A-1}. \quad (21.7)$$

Для определения коэффициентов и параметров четырехполюсника в цепях переменного тока их записывают в символической форме. Уравнения четырехполюсника в символической форме для расчета в цепях переменного тока записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2. \end{cases} \quad (21.8)$$

Постоянные четырехполюсника  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  в символической форме связаны уравнением

$$AD - BC = 1. \quad (21.9)$$

Для симметричного четырехполюсника

$$A = D. \quad (21.10)$$

Расчет производится по тем же уравнениям, что и для четырехполюсников в цепи постоянного тока.

## 21.2. Круговые диаграммы

Проектируя линии электропередачи, электрические двигатели и другие электротехнические установки, строят графики изменения тока, мощностей, коэффициента мощности и других величин от какого-либо переменного параметра, например сопротивления.

Для исследования режимов работы электрических цепей переменного тока при изменении одного из параметров цепи можно применить круговые диаграммы.

Обоснование метода, порядок построения круговых диаграмм и определение по ним электрических величин рассматриваются на примере неразветвленной цепи с переменным активным и постоянным реактивным (индуктивным) сопротивлением (рис. 21.2а).

Для этой цепи справедливо выражение (второй закон Кирхгофа)

$$\dot{U} = \dot{I}R + j\dot{I}X_L. \quad (21.11)$$

Рассмотрим изменение тока в этой цепи при изменении сопротивления  $R$  от нуля до бесконечности.

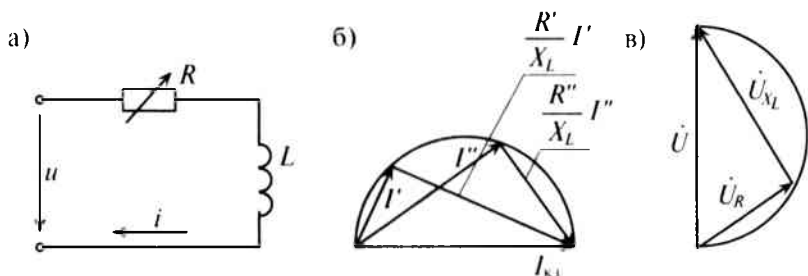


Рис. 21.2

При коротком замыкании ( $R = 0$ )

$$\dot{I}_{кз} = \frac{\dot{U}}{jX_L}. \quad (21.12)$$

При холостом ходе ( $R = \infty$ )

$$I_{кз} = 0.$$

Для определения тока при любом сопротивлении  $R$  выражение (21.11) можно разделить на  $jX_L$ :

$$\frac{\dot{U}}{jX_L} = \dot{I} \frac{R}{jX_L} + \dot{I} \frac{jX_L}{jX_L}.$$

Тогда

$$\dot{I}_{кз} = -j\dot{I} \frac{R}{X_L} + \dot{I}. \quad (21.13)$$

Таким образом, геометрическая сумма двух векторов — вектора тока  $\dot{I}$  и отстающего от него на  $90^\circ$  вектора  $(-j\dot{I} \frac{R}{X_L})$  — постоянна и равна току короткого замыкания. Следовательно, ток короткого замыкания  $\dot{I}_{кз}$  — величина постоянная. Вектор тока короткого замыкания можно изобразить гипотенузой прямоугольного треугольника, катетами которого являются рассмотренные выше сдвинутые на угол  $90^\circ$  два вектора.

Для двух значений тока  $\dot{I}$  ( $\dot{I}'$  и  $\dot{I}''$ ) при двух значениях сопротивления  $R$  ( $R'$  и  $R''$ ) построение треугольников показано на рис. 21.26. Следовательно, вектор тока короткого замыкания  $\dot{I}_{кз}$  можно рассматривать как диаметр полуокружности, по которой скользит конец вектора тока  $\dot{I}$  при изменении сопротивления  $R$  (рис. 21.26).

При коротком замыкании рассматриваемая цепь имеет чисто индуктивный характер ( $R = 0$ ). Следовательно, напряжение цепи  $\dot{U}$  опережает ток  $\dot{I}_{кз}$  на угол  $90^\circ$ . Напряжение цепи является ре-





Проекция вектора тока  $\dot{I}$  на вектор напряжения  $\dot{U}$  (отрезок  $\overline{OK}$ ) является активным током  $I_a$ , а проекция тока  $\dot{I}$  на вектор тока короткого замыкания  $\dot{I}_{кз}$  (отрезок  $\overline{OL}$ ) – реактивным током  $I_p$ , т. е.  $I_a = \overline{OK} \cdot M_I$ ;  $I_p = \overline{OL} \cdot M_I$ .

Очевидно, тот же отрезок  $\overline{OK}$ , но в масштабе мощности  $M_p$  является активной мощностью цепи  $P$ , а отрезок  $\overline{OL}$  – реактивной мощностью цепи  $Q$ , т. е.  $P = I_a U = \overline{OK} \cdot M_I U = \overline{OK} \cdot M_p$ , а  $Q = I_p U = \overline{OL} \cdot M_I U = \overline{OL} \cdot M_p$ .

Отсюда следует, что масштаб мощности  $M_p = M_I U$ .

Тогда отрезок  $\overline{OC}$  в масштабе мощности  $M_p$  – полная, или кажущаяся, мощность цепи  $S$ . Следовательно, на круговой диаграмме (рис. 21.3) видны изменения токов, напряжений, мощностей, сопротивлений и угла сдвига фаз  $\varphi$  между током и напряжением в зависимости от изменяющейся величины активного сопротивления  $R$ .

В таком же порядке строится круговая диаграмма для неразветвленной цепи с переменным активным и постоянным емкостным сопротивлениями. Однако ток в этой цепи опережает напряжение на угол  $\varphi$ , а при коротком замыкании ( $R=0$ ) – на угол  $90^\circ$  (см. рис. 21.4).

### Пример 21.1

Построить круговую диаграмму неразветвленной цепи с постоянным емкостным и переменным активным сопротивлениями (рис. 21.4а) и определить по ней значения тока, активного и реактивного напряжений, активной, реактивной и полной мощностей, а также полного сопротивления, угла  $\varphi$  и коэффициента мощности для переменных активных сопротивлений:  $R=0; 5; 10; 15; 20$  Ом, если к цепи приложено напряжение  $U=200$  В, а емкостное сопротивление  $X_C=10$  Ом.

### Решение

Определяем ток короткого замыкания цепи ( $R=0$ )

$$I_{кз} = \frac{U}{X_C} = \frac{200}{10} = 20 \text{ А.}$$

Выбираем масштабы тока  $M_I = 2$  А/см и напряжения  $M_U = 20$  В/см. Тогда масштаб сопротивлений можно определить  $M_R = \frac{X_C}{I_{кз}} M_I = \frac{10}{20} \cdot 2 = 1$  Ом/см, а масштаб мощности  $M_p = M_I U = 2 \cdot 200 = 400$  Вт/см.

В этих масштабах строим круговую диаграмму (рис. 21.4б), по которой определяем все искомые величины для цепи (рис. 21.4а) при указанных сопротивлениях  $R$  и заносим их в таблицу 21.1.

Таблица 21.1

$R$	$Z$	$I$	$U_R$	$U_C$	$P$	$Q$	$S$	$\varphi$	$\cos \varphi$
Ом	Ом	А	В	В	Вт	вар	В·А	град	
0	10	20	0	200	0	4000	4000	90	0
5	11,2	17,8	80	178	1588	3178	3560	63	0,446
10	14,1	14	141	141	2000	2000	2820	45	0,705
15	18	11,2	166	110	1920	1280	2320	33	0,83
20	22,3	9	176	90	1640	840	1880	27	0,89

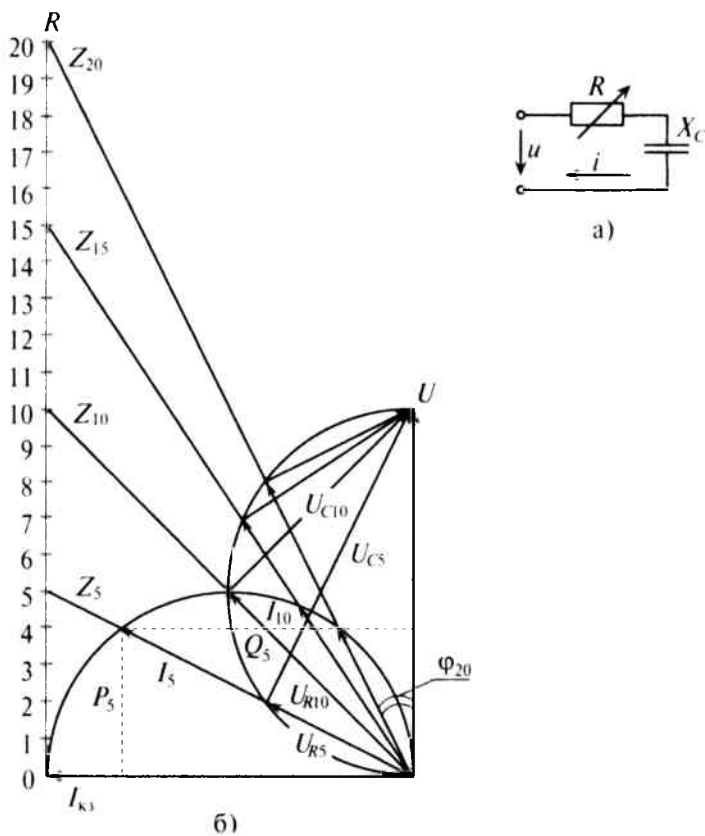


Рис. 21.4

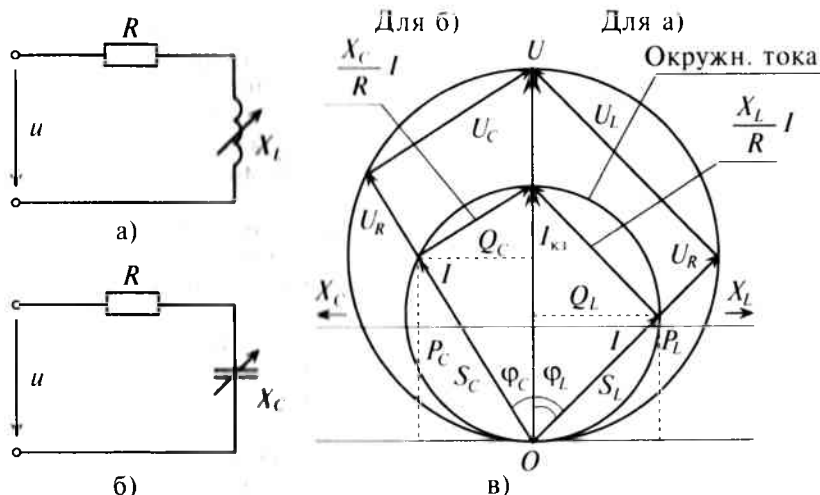


Рис. 21.5

Если в неразветвленной цепи (рис. 21.5а, б) переменным является реактивное сопротивление (индуктивное или емкостное), то при коротком замыкании ( $X=0$ )  $I_{кз} = \frac{\dot{U}}{R}$ , цепь чисто активная и напряжение цепи совпадает по фазе с током  $I_{кз}$ .

Для построения круговой диаграммы цепей (рис. 21.5а, б) учитывают, что диаметрами полуокружностей являются ток  $I_{кз}$  и напряжение цепи  $U$ .

Построение круговых диаграмм производится аналогично предыдущим (рис. 21.3 и 21.4б). Особенностью построения круговых диаграмм с переменным реактивным сопротивлением является то, что векторы  $I_{кз}$  и  $U$  совпадают по фазе.

Масштабы выбирают и рассчитывают как указано выше.

Построение круговых диаграмм для неразветвленных цепей с переменными реактивными сопротивлениями  $X_L$  и  $X_C$  показано на рис. 21.5в.

### 21.3. Электрические цепи с распределенными параметрами

Электрические цепи, параметры которых (сопротивления, индуктивности и емкости) распределены по всей длине, называются цепями с распределенными параметрами.

В неразветвленных цепях с распределенными параметрами токи в разных сечениях неодинаковы. Это происходит вследствие токов утечки между проводами, токов смещения через межпровод-

ные емкости и по ряду других причин. Так как токи утечки пропорциональны напряжению, а токи смещения пропорциональны частоте и напряжению, то с ростом напряжения и частоты их влияние становится более заметным. Кроме того, токи утечки и смещения увеличиваются с увеличением протяженности линии.

К цепям с распределенными параметрами относятся линии электропередачи.

Любая электрическая линия, например двухпроводная линия электропередачи или электросвязи, характеризуется четырьмя первичными параметрами, отнесенными к единице ее длины: активным сопротивлением проводов  $R_0$ , индуктивностью проводов  $L_0$ , активной проводимостью изоляции между проводами  $g_0$  и емкостью между проводами  $C_0$ . Если первичные параметры распределены равномерно по всей длине линии, то линию называют однородной.

Для исследования длинные линии с распределенными параметрами заменяют схемами замещения (рис. 21.6).

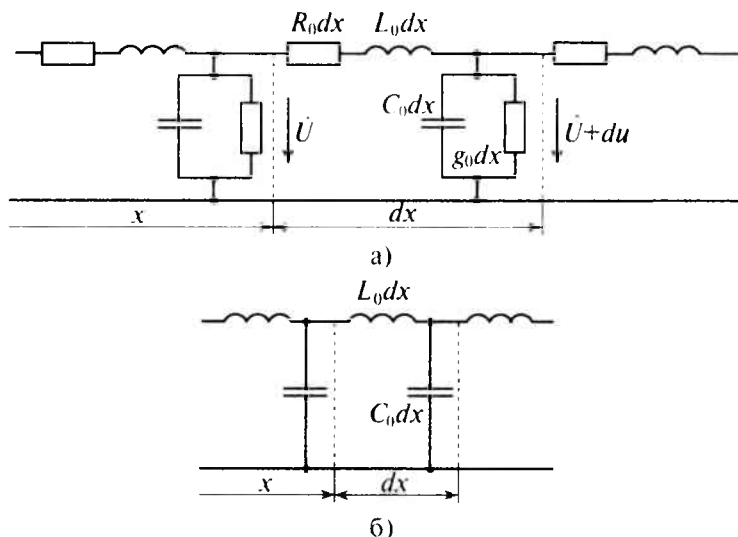


Рис. 21.6

На схеме замещения однородной линии с потерями (рис. 21.6а) рассматривается длинная линия, состоящая из бесконечно большого числа элементарных ячеек длиной  $dx$  с параметрами: активным сопротивлением  $R_0 dx$ , индуктивностью  $L_0 dx$ , проводимостью изоляции  $g_0 dx$  и емкостью  $C_0 dx$ , находящихся на разном расстоянии  $x$  от начала линии.

В зависимости от целей и требуемой точности выполненного расчета можно учитывать все четыре параметра или некоторые из них. Например, при исследовании линии электропередачи напряжением 35 кВ и частотой  $f = 50$  Гц часто не учитываются токи смещения и утечки, т. е. принимается  $g_0 = 0$  и  $C_0 = 0$ .

При высокой частоте или при коротких импульсах напряжения токи смещения могут быть значительно большими и ими пренебречь нельзя. Но при высокой частоте и малой длине линии можно пренебречь активным сопротивлением  $R_0$  и проводимостью  $g_0$ . При этом получается схема замещения однородной линии без потерь (рис. 21.66).

Исследуя длинную линию электропередачи как цепь с распределенными параметрами, в которой имеются токи утечки и смещения, передачу энергии следует рассматривать как движение электромагнитных волн, или волн тока и напряжения.

При включении генератора в начале линии возникают волны тока и напряжения, которые движутся от генератора (начало линии) к нагрузке (конец линии). Когда электромагнитная волна достигает конца линии, ее энергия лишь частично поглощается нагрузкой. При этом возникают отраженные волны тока и напряжения, перемещающиеся от нагрузки к генератору.

Только при специально подобранном сопротивлении нагрузки вся энергия поглощается нагрузкой и отраженные волны отсутствуют.

Если сопротивление нагрузки в конце линии равно волновому сопротивлению линии, то такая нагрузка называется согласованной. Если же сопротивление нагрузки в конце линии отличается от волнового сопротивления, то нагрузка называется несогласованной. Волновое сопротивление выражается отношением напряжения к току падающих (прямых) или отраженных волн. При согласованной нагрузке отраженных волн в линии нет, т. е. энергия, которую несет падающая электромагнитная волна, полностью поглощается в нагрузке.

При исследовании различных режимов работы длинных линий необходимо учитывать коэффициент отражения  $\rho$  и коэффициент преломления  $m$ .

Коэффициент отражения характеризует соотношение между падающими (прямыми) и отраженными волнами напряжения и тока:

$$\underline{\rho} = \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{U}_{\text{пад}}} = \frac{\dot{I}_{\text{отр}}}{\dot{I}_{\text{пад}}}. \quad (21.14)$$

Коэффициент преломления в рассматриваемом пункте линии  $n$ :

$$m = \frac{\dot{U}_n}{\dot{U}_{\text{пад}}} = \frac{\dot{I}_n}{\dot{I}_{\text{пад}}}. \quad (21.15)$$

То есть коэффициент преломления  $m$  равен отношению комплексов напряжения (тока) в рассматриваемой точке  $n$  к комплексу напряжения (тока) падающей волны.

Если на каждую падающую (прямую) волну напряжения и тока накладывается отраженная волна с амплитудой, равной амплитуде падающей волны, то результирующий процесс называют стоячей волной.

Скорость распространения электромагнитных волн в проводах воздушной линии в первом приближении можно считать равной скорости распространения электромагнитных волн в вакууме, т. е.  $c = 300\,000$  км/сек.

Расстояние, на которое распространяется электромагнитная волна, или волна тока и напряжения, в течение периода  $T$ , называется длиной волны  $\lambda$ , т. е.  $\lambda = cT = \frac{c}{f}$ .

$$\text{При частоте } f = 50 \text{ Гц} - \lambda = \frac{300\,000}{50} = 6000 \text{ км} = 6 \cdot 10^6 \text{ м.}$$

$$\text{При частоте } f = 1 \text{ МГц} = 10^6 \text{ Гц} - \lambda = \frac{300\,000}{10^6} = 0,3 \text{ км} = 300 \text{ м.}$$

$$\text{При частоте } f = 100 \text{ МГц} - \lambda = 3 \text{ м.}$$

При известной длине волны легко показать распределение тока или напряжения вдоль линии в любой момент времени и без вычислений токов утечки и смещения. Например, при частоте  $f = 1$  МГц и  $\lambda = 300$  м в некоторый момент времени ток  $i$  в начале линии (на зажимах генератора) равен нулю. В тот же момент времени на расстоянии  $\lambda/4 = 75$  м от начала наблюдается наибольшее значение тока  $I_m$ ; на расстоянии  $\lambda/2 = 150$  м от начала он равен нулю; на расстоянии  $3\lambda/4 = 225$  м ток опять максимален; на расстоянии  $\lambda = 300$  м ток снова равен нулю и т. д.

В следующий момент времени характер распределения тока будет таким же, но нулевые и амплитудные значения тока будут наблюдаться в других сечениях линии.

Неодинаковость тока наблюдается только в линиях, длина которых  $\ell$  соизмерима или больше длины волны  $\lambda$ . Такие линии называются длинными по отношению к длине волны. Очевидно, одна и та же линия при одной частоте будет длинной, а при другой, меньшей частоте ( $\lambda = \frac{c}{f}$ ) может быть недлинной. Например, при

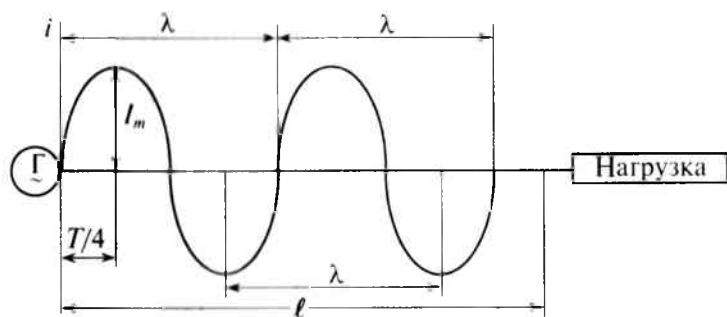


Рис. 21.7

стандартной частоте  $f = 50$  Гц вдоль линии протяженностью  $\ell = 300$  м укладывается только одна двадцатитысячная часть длины волны

$$\frac{\ell}{\lambda} = \frac{300}{6 \cdot 10^6} = \frac{1}{20\,000}.$$

Следовательно, величина тока, проходящего через каждое сечение линии в любой выбранный момент времени, практически одна и та же, т. е. линия слишком «коротка», чтобы в ней можно было заметить неравномерное распределение тока.

При частоте же  $f = 1$  МГц, как показано на рис. 21.7, в той же линии ( $\ell = 300$  м) уложится одна волна тока, и, следовательно, линия считается длинной.



## ПРИЛОЖЕНИЯ

### Приложение 1

#### Система единиц СИ

Наименование величины	Принятое обозначение	Единица измерения	Сокращенное обозначение	Связь с другими единицами
Количество электричества (заряд)	$Q, q$	кулон	Кл	
Время	$t$	секунда	с	$3600 \text{ с} = 1 \text{ ч}$
Сила	$F$	ньютон	Н	
Длина	$l$	метр	м	
Сила тока (ток)	$I, i$	ампер	А	$1 \text{ А} = 1 \text{ Кл/с}$
Напряженность электрического поля	$E$	вольт на метр	В/м	
Энергия (работа)	$W$	джоуль	Дж	$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Вт}\cdot\text{с}$
Электрический потенциал	$j$	вольт	В	
Напряжение	$U, u$	вольт	В	
Электродвижущая сила	$E, e$	вольт	В	
Электрическое сопротивление	$R, X, Z$	ом	Ом	$1 \text{ Ом} = 1 \text{ В/А}$
Электрическая проводимость	$g, b, y$	сименс	См	$1 \text{ См} = 1 \text{ А/В}$
Электрическая емкость	$C$	фарад	Ф	$1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл/В}$
Индуктивность, взаимная индуктивность	$L, M$	генри	Гн	$1 \text{ Гн} = 1 \text{ Ом}\cdot\text{с}$
Магнитная индукция	$B$	тесла	Тл	$1 \text{ Тл} = 1 \text{ Вб/м}^2 = 10^4 \text{ Гс}$
Магнитный поток	$\Phi$	вебер	Вб	$1 \text{ Вб} = 1 \text{ В}\cdot\text{с} = 10^8 \text{ Мкс}$
Напряженность магнитного потока	$H$	ампер на метр	А/м	
Активная мощность	$P$	ватт	Вт	
Реактивная мощность	$Q$	вольт-ампер реактивный	вар	
Полная мощность	$S$	вольт-ампер	В А	
Абсолютная диэлектрическая проницаемость	$\epsilon_a$	фарад на метр	Ф/м	
Абсолютная магнитная проницаемость	$\mu_a$	генри на метр	Гн/м	
Частота	$f$	герц	Гц	$1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$

## Приложение 2

Значение  
относительной диэлектрической проницаемости  $\epsilon_r$   
и пробивной напряженности  $E_{пр}$


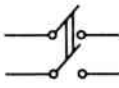

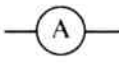
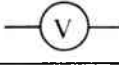


Материал	$\epsilon_r$	$E_{пр}$ , кВ/мм
Бумага парафинированная	4,3	10–25
Вода дистиллированная	80	—
Воздух	1,0	3,0
Гетинакс	5–8	20–40
Масло	2,2	7–12
Мрамор	8–10	1,5–3,5
Миканит	5,2	15–20
Парафин	2,2–2,3	20–30
Резина	3–6	15–20
Слюда	5–7	80–110
Стекло	5,5–8	10–40
Фарфор	5,5–6	1,5–20
Шифер	6–10	0,5–0,8
Эбонит	2,8–3,5	60–80

## Приложение 3

Условные графические обозначения,  
применяемые в электрических схемах

Наименование	Условный знак
Источник электрической энергии, источник ЭДС	
Электрический генератор постоянного тока	
Химический источник энергии	
Электрический двигатель постоянного тока	
Электрическая лампа накаливания	
Приемник электрической энергии, резистор	
Реостат регулируемый	
Резистор переменный	
Конденсатор: постоянной емкости	
переменной емкости	
Катушка индуктивности: без магнитопровода	
с магнитопроводом	
Провод, кабель, шина электрической цепи	
Соединение электрическое	
Соединение разъемное	

Продолжение табл.

Наименование	Условный знак
Выключатели: однополюсный	
двухполюсный	
Предохранитель плавкий	
Амперметр	
Вольтметр	
Диод полупроводниковый	
Заземление	

Приложение 4

### Основные характеристики проводниковых материалов

Материал	Удельное электрическое сопротивление, $\rho$ , Ом·мм <sup>2</sup> /м	Среднее значение температурного коэффициента сопротивления $\alpha$ (0 : 100 °С)
Алюминий	0,026–0,029	0,0040–0,0043
Бронза	0,021–0,052	0,004
Вольфрам	0,053–0,055	0,004–0,005
Железо	0,098	0,006
Константан	0,44–0,52	0,00005
Латунь	0,03–0,08	0,002
Манганин	0,42–0,50	0,00003–0,00004
Медь	0,0172–0,0182	0,004
Нихром	1,0–1,2	0,00013
Фехраль	1,0–1,2	0,0005
Хромаль	1,3	0,00004

## Приложение 5

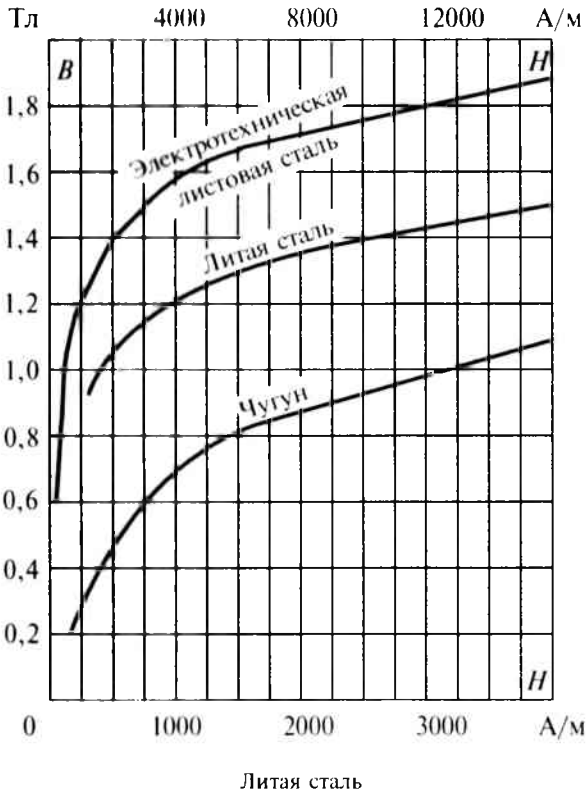
## Характеристика намагничивания сталей

В, Тл	Марка стали	
	1211 (Э11), 1212 (Э12), 1311 (Э21)	1511 (Э41), 1512 (Э42)
	<i>H</i> , А/м	<i>H</i> , А/м
0,10	—	40
0,20	—	50
0,30	2	60
0,40	140	70
0,45	152	75
0,50	171	85
0,55	191	94
0,60	211	110
0,65	236	127
0,70	261	— 145
0,75	287	165
0,80	318	185
0,85	352	210
0,90	397	235
0,95	447	270
1,00	502	300
1,05	570	340
1,10	647	395
1,15	739	460
1,20	840	540
1,25	976	640
1,30	1140	770
1,35	1340	970
1,40	1580	1300
1,45	1950	1830
1,50	2500	2750
1,55	3280	3850
1,60	4370	5150
1,65	5830	6950
1,70	7780	8900

Приложение 6

Кривые намагничивания стали и чугуна\*

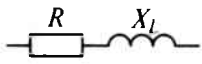
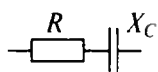
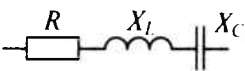
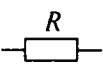
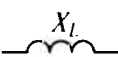

Электротехническая сталь и чугун



\* Кривые намагничивания не всегда совпадают с аналогичными кривыми в других печатных изданиях.

## Приложение 7

## Комплекс сопротивления для различных цепей

Характер цепи	Комплекс сопротивления
	$Z = R + jX_L = Ze^{j\varphi}$
	$Z = R - jX_C = Ze^{-j\varphi}$
	$Z = R + j(X_L - X_C) = Ze^{\pm j\varphi}$
	$Z = R = Re^{j0^\circ}$
	$Z = jX_L = X_L e^{j90^\circ}$
	$Z = -jX_C = X_C e^{-j90^\circ}$

## Приложение 8

## Потери активной мощности в стали

Марка стали	Э11	Э12	Э13	Э21	Э31	Э31	Э41	Э42	Э41	Э42	Э43
Толщина листа, мм	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,35	0,5	0,5	0,35	0,35	0,5
$P_{1,0/50}$ , Вт/кг	3,3	3,2	2,8	2,5	2,0	1,6	1,6	1,40	1,35	1,2	2,8

## Приложение 9

Таблица показательных функций

$x \left( \frac{t}{\tau} \right)$	$e^{-x} (e^{-\frac{t}{\tau}})$	$x \left( \frac{t}{\tau} \right)$	$e^{-x} (e^{-\frac{t}{\tau}})$
0,1	0,9048	2,0	0,1353
0,2	0,8187	2,1	0,1225
0,3	0,7408	2,2	0,1108
0,4	0,6703	2,3	0,1003
0,5	0,6065	2,4	0,0907
0,6	0,5488	2,5	0,0821
0,7	0,4966	2,6	0,0743
0,8	0,4493	2,7	0,0672
0,9	0,4066	2,8	0,0608
1,0	0,3679	2,9	0,0550
1,1	0,3329	3	0,0498
1,2	0,3012	4	0,0183
1,3	0,2725	5	0,0067
1,4	0,2466	6	0,0025
1,5	0,2231	7	0,0009
1,6	0,2019	8	0,0003
1,7	0,1827	9	0,000123
1,8	0,1653	10	0,000045
1,9	0,1496		



## Приложение 10

Таблица тригонометрических функций

Угол, град	sin	tg	ctg	cos	Угол, град
1	0,0175	0,0175	57,2900	0,9998	89
2	0,0349	0,0349	28,6363	0,9994	88
3	0,0523	0,0524	19,0811	0,9986	87
4	0,0698	0,0699	14,3007	0,9976	86
5	0,0872	0,0875	11,4301	0,9962	85
6	0,1045	0,1051	9,5144	0,9945	84
7	0,1219	0,1228	8,1443	0,9925	83
8	0,1392	0,1405	7,1154	0,9903	82
9	0,1564	0,1584	6,3138	0,9877	81
10	0,1736	0,1763	5,6713	0,9848	80
11	0,1908	0,1944	5,1446	0,9816	79
12	0,2079	0,2126	4,7046	0,9781	78
13	0,2250	0,2309	4,3315	0,9744	77
14	0,2419	0,2493	4,0108	0,9703	76
15	0,2588	0,2679	3,7321	0,9659	75
16	0,2756	0,2867	3,4874	0,9613	74
17	0,2924	0,3057	3,2709	0,9563	73
18	0,3090	0,3249	3,0777	0,9511	72
19	0,3256	0,3443	2,9042	0,9455	71
20	0,3420	0,3640	2,7475	0,9397	70
21	0,3584	0,3839	2,6051	0,9336	69
22	0,3746	0,4040	2,4751	0,9272	68
23	0,3907	0,4245	2,3559	0,9205	67
24	0,4067	0,4452	2,2460	0,9135	66
25	0,4226	0,4663	2,1445	0,9063	65
26	0,4384	0,4877	2,0503	0,8988	64
27	0,4540	0,5095	1,9626	0,8910	63
28	0,4695	0,5317	1,8807	0,8829	62
29	0,4848	0,5543	1,8040	0,8746	61
30	0,5000	0,5774	1,7321	0,8660	60
31	0,5150	0,6009	1,6643	0,8572	59
32	0,5299	0,6249	1,6003	0,8480	58
33	0,5446	0,6494	1,5399	0,8387	57
34	0,5592	0,6745	1,4826	0,8290	56
35	0,5736	0,7002	1,4281	0,8192	55
36	0,5878	0,7265	1,3764	0,8090	54
37	0,6018	0,7536	1,3270	0,7986	53
38	0,6157	0,7813	1,2799	0,7880	52
39	0,6293	0,8098	1,2349	0,7771	51
40	0,6428	0,8391	1,1918	0,7660	50
41	0,6561	0,8693	1,1504	0,7547	49
42	0,6691	0,9004	1,1106	0,7431	48
43	0,6820	0,9325	1,0724	0,7314	47
44	0,6947	0,9657	1,0355	0,7193	46
45	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	45
Угол, град	cos	ctg	tg	sin	Угол, град

## Приложение 11

Таблица значений номинальных токов  
для различных сечений медных проводов с резиновой изоляцией,  
проложенных открыто

Поперечное сечение, мм <sup>2</sup>	Наибольший допустимый ток, А	Поперечное сечение, мм <sup>2</sup>	Наибольший допустимый ток, А
0,50	10	35	150
0,75	13	50	190
1,0	15	70	240
1,5	20	95	290
2,5	27	120	340
4,0	36	150	390
6,0	46	185	450
10	68	240	535
16	90	300	615
25	125	400	735

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. М.: Высшая школа, 1978.
2. *Попов В. С.* Теоретическая электротехника. М.: Энергоатомиздат, 1990.
3. *Евдокимов Ф. Е.* Теоретические основы электротехники. М.: Высшая школа, 1999.
4. *Константинов В. И., Симонов А. Ф., Федоров-Королев А. А.* Сборник задач по теоретической электротехнике. М.: Энергия, 1975.
5. *Зайчик М. Ю.* Сборник задач и упражнений по теоретической электротехнике. М.: Энергоатомиздат, 1988.
6. Правила Лоторейчука. **Первое правило:** определение величины и направления тока в неразветвленной цепи постоянного тока с несколькими источниками. **Второе правило:** определение потенциала любой точки электрической цепи постоянного тока в зависимости от схемы соединения активных и пассивных элементов цепи/Е.А. Лоторейчук. — пат. № 7195, 31.03.2004.
7. **Третье правило Лоторейчука:** расстановка знаков в уравнениях, составленных по второму закону Кирхгофа/Е.А. Лоторейчук. — пат. № 7265, 23.04.2004.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Введение . . . . .	4
<b>Глава 1. Электрическое поле . . . . .</b>	<b>5</b>
1.1. Электрический заряд . . . . .	5
1.2. Напряженность электрического поля . . . . .	6
1.3. Напряженность поля точечных зарядов . . . . .	8
1.4. Теорема Гаусса . . . . .	10
1.5. Потенциал и напряжение в электрическом поле . . . . .	12
1.6. Электропроводность. Проводники . . . . .	15
1.7. Электропроводность. Диэлектрики . . . . .	16
1.8. Электропроводность. Полупроводники . . . . .	18
<b>Глава 2. Электрические цепи постоянного тока . . . . .</b>	<b>21</b>
2.1. Электрическая цепь . . . . .	21
2.2. Ток в электрической цепи . . . . .	22
2.3. ЭДС и напряжение в электрической цепи . . . . .	23
2.4. Закон Ома для участка цепи . . . . .	24
2.5. Электрическое сопротивление . . . . .	25
2.6. Закон Ома для замкнутой цепи . . . . .	28
2.7. Энергия и мощность электрического тока . . . . .	29
2.8. Закон Джоуля – Ленца . . . . .	30
2.9. Режим работы электрической цепи . . . . .	31
<b>Глава 3. Расчет линейных электрических цепей постоянного тока . . . . .</b>	<b>36</b>
3.1. Режим работы источников . . . . .	36
3.2. Потенциальная диаграмма . . . . .	39
3.3. Законы Кирхгофа . . . . .	41
3.4. Последовательное соединение потребителей . . . . .	43
Потенциометр . . . . .	44
Потеря напряжения в проводах . . . . .	44
3.5. Параллельное соединение потребителей. . . . .	46

<b>Глава 4. Методы расчета электрических цепей</b> . . . . .	48
4.1. Метод свертывания. . . . .	48
4.2. Метод преобразования схем . . . . .	53
4.3. Метод наложения . . . . .	57
4.4. Метод узлового напряжения . . . . .	60
Параллельное соединение генераторов . . . . .	63
4.5. Метод узловых и контурных уравнений . . . . .	64
4.6. Метод контурных токов . . . . .	66
4.7. Метод эквивалентного генератора. . . . .	68
<b>Глава 5. Нелинейные электрические цепи постоянного тока</b> . . . . .	73
5.1. Основные понятия . . . . .	73
5.2. Неразветвленная нелинейная цепь . . . . .	74
5.3. Разветвленная нелинейная цепь. . . . .	77
5.4. Нелинейная цепь со смешанным соединением элементов . . . . .	78
5.5. Стабилизаторы тока и напряжения . . . . .	79
<b>Глава 6. Электростатические цепи и их расчет.</b> . . . . .	82
6.1. Электрическая емкость . . . . .	82
6.2. Конденсаторы . . . . .	83
6.3. Соединение конденсаторов . . . . .	84
Параллельное соединение конденсаторов . . . . .	84
Последовательное соединение конденсаторов . . . . .	85
Смешанное соединение конденсаторов . . . . .	87
6.4. Емкость и энергия конденсаторов. . . . .	89
<b>Глава 7. Магнитное поле и его параметры.</b> . . . . .	95
7.1. Магнитное поле . . . . .	95
7.2. Магнитная индукция . . . . .	97
7.3. Магнитная проницаемость . . . . .	99
7.4. Магнитный поток . . . . .	100
7.5. Напряженность магнитного поля . . . . .	101
7.6. Закон полного тока. . . . .	102
7.7. Магнитное поле прямолинейного проводника с током . . . . .	104
7.8. Магнитное поле кольцевой и цилиндрической катушек . . . . .	107
7.9. Электромагнитная сила. . . . .	109
7.10. Взаимодействие проводников с токами. . . . .	111

<b>Глава 8. Магнитные цепи и их расчет</b> . . . . .	115
8.1. Магнитная цепь . . . . .	115
8.2. Закон Ома для магнитной цепи . . . . .	116
8.3. Намагничивание ферромагнитных материалов . . . . .	118
8.4. Циклическое перемагничивание . . . . .	120
8.5. Ферромагнитные материалы . . . . .	122
8.6. Расчет неразветвленных магнитных цепей . . . . .	124
Расчет однородной неразветвленной магнитной цепи . . . . .	124
Расчет неоднородной магнитной цепи. . . . .	126
8.7. Расчет разветвленных магнитных цепей . . . . .	132
<b>Глава 9. Электромагнитная индукция</b> . . . . .	136
9.1. Явление и ЭДС электромагнитной индукции . . . . .	136
9.2. Преобразование энергии. Правило Ленца . . . . .	138
Преобразование механической энергии в электрическую . . . . .	138
Преобразование электрической энергии в механическую . . . . .	139
9.3. ЭДС электромагнитной индукции в контуре и катушке . . . . .	140
9.4. Явление и ЭДС самоиндукции . . . . .	142
9.5. Явление и ЭДС взаимной индукции . . . . .	144
9.6. Вихревые токи . . . . .	148
<b>Глава 10. Однофазные электрические цепи переменного тока</b> . . . . .	150
10.1. Основные понятия . . . . .	150
10.2. Величины характеризующие синусоидальную ЭДС . . . . .	152
Фаза и сдвиг фаз . . . . .	154
10.3. Среднее и действующее значение переменного тока . . . . .	155
Среднее значение переменного тока. . . . .	155
Действующее значение переменного тока . . . . .	157
Коэффициенты формы и амплитуды . . . . .	158
10.4. Векторные диаграммы. . . . .	159
10.5. Сложение синусоидальных величин . . . . .	160
<b>Глава 11. Электрические цепи синусоидального тока. Элементы и параметры цепей синусоидального тока</b> . . . . .	164
11.1. Цепь с активным сопротивлением . . . . .	164
Активная мощность . . . . .	165
11.2. Поверхностный эффект и эффект близости. . . . .	166

11.3. Цепь с идеальной индуктивностью . . . . .	168
Реактивная мощность в цепи с индуктивностью . . .	170
11.4. Цепь с емкостью . . . . .	171
Реактивная мощность в цепи с конденсатором . . .	173
<b>Глава 12. Расчет неразветвленных электрических цепей</b>	
<b>    синоусоидального тока . . . . .</b>	<b>175</b>
12.1. Цепь с активным сопротивлением и индуктивностью	175
Треугольники напряжений, сопротивлений	
и мощностей . . . . .	177
12.2. Цепь с активным сопротивлением и емкостью . . .	178
12.3. Неразветвленная цепь с R, L и C . . . . .	180
12.4. Колебательный контур . . . . .	182
12.5. Резонанс напряжений . . . . .	183
12.6. Общий случай неразветвленной цепи . . . . .	186
<b>Глава 13. Разветвленная цепь синоусоидального тока . . . . .</b>	<b>191</b>
13.1. Активный и реактивный токи . . . . .	191
13.2. Проводимости . . . . .	192
13.3. Параллельное соединение катушки	
и конденсатора . . . . .	193
13.4. Резонанс токов . . . . .	194
13.5. Коэффициент мощности . . . . .	198
<b>Глава 14. Символический метод расчета электрических цепей</b>	
<b>    переменного тока . . . . .</b>	<b>201</b>
14.1. Действия над комплексными числами . . . . .	201
14.2. Ток, напряжение и сопротивление в комплексном	
виде . . . . .	204
14.3. Мощность в комплексном виде . . . . .	205
<b>Глава 15. Электрические цепи с взаимной индуктивностью . . . . .</b>	<b>210</b>
15.1. Переменная магнитная связь . . . . .	210
15.2. Воздушный трансформатор . . . . .	213
<b>Глава 16. Трехфазные цепи . . . . .</b>	<b>215</b>
16.1. Трехфазная система ЭДС . . . . .	215
16.2. Соединение обмоток генератора звездой . . . . .	217
16.3. Соединение обмоток генератора треугольником . . .	219
16.4. Соединение потребителей звездой . . . . .	221
16.5. Соединение потребителей треугольником . . . . .	224

---

16.6. Мощность трехфазного тока . . . . .	225
16.7. Топографическая диаграмма . . . . .	227
<b>Глава 17. Вращающееся магнитное поле . . . . .</b>	<b>238</b>
17.1. Вращающееся магнитное поле трехфазного тока . . . . .	238
17.2. Вращающееся магнитное поле двухфазного тока . . . . .	240
17.3. Пульсирующее магнитное поле . . . . .	241
<b>Глава 18. Несинусоидальный ток . . . . .</b>	<b>242</b>
18.1. Основные понятия . . . . .	242
18.2. Гармоники . . . . .	243
18.3. Свойства периодических кривых. . . . .	245
18.4. Несинусоидальный ток в линейных электрических цепях . . . . .	248
18.5. Действующее значение несинусоидальных величин . . . . .	252
18.6. Мощность несинусоидального тока . . . . .	254
18.7. Электрические фильтры . . . . .	259
<b>Глава 19. Нелинейные электрические цепи несинусоидального тока . . . . .</b>	<b>262</b>
19.1. Нелинейные элементы . . . . .	262
19.2. Выпрямители — источники несинусоидального тока . . . . .	263
19.3. Катушка с ферромагнитным сердечником . . . . .	266
19.4. Мощность потерь. Векторная диаграмма катушки со стальным сердечником. . . . .	268
19.5. Схема замещения . . . . .	270
19.6. Феррорезонанс . . . . .	273
<b>Глава 20. Переходные процессы в электрических цепях . . . . .</b>	<b>276</b>
20.1. Основные понятия . . . . .	276
20.2. Включение катушки индуктивности (RL) на постоянное напряжение . . . . .	277
20.3. Отключение и замыкание RL-цепи . . . . .	279
20.4. Зарядка, разрядка и саморазрядка конденсатора . . . . .	281
<b>Глава 21. Темы для выбора, применительно к специальности . . . . .</b>	<b>287</b>
21.1. Четырехполюсники в цепях постоянного и переменного тока. . . . .	287
21.2. Круговые диаграммы . . . . .	290



---

21.3. Электрические цепи с распределенными параметрами . . . . .	295
Приложения . . . . .	300
Список литературы . . . . .	310

*По вопросам приобретения книг обращайтесь:*  
**Отдел продаж «ИНФРА-М» (оптовая продажа):**

127214, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1

Тел. (495) 280-33-86 (доб. 218, 222)

E-mail: bookware@infra-m.ru

•

**Отдел «Книга—почтой»:**

тел. (495) 280-33-86 (доб. 222)

ФЗ Издание не подлежит маркировке  
№ 436-ФЗ в соответствии с п. 1 ч. 4 ст. 11

*Учебное издание*

**Лоторейчук Евсей Александрович**

# **ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

**УЧЕБНИК**

ООО «Издательский дом ФОРУМ»  
127247, Москва, ул. Софьи Ковалевской, д. 1, стр. 51

E-mail: forum2-book@yandex.ru

Тел.: (495) 280-15-96

ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М»  
127214, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1  
Тел.: (495) 280-15-96, 280-33-86. Факс: (495) 280-36-29  
E-mail: books@infra-m.ru <http://www.infra-m.ru>

Подписано в печать 16.07.2020.

Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Times.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 19,81.

ППТ50. Заказ № 06096

ТК 35580-1150303-151216

Отпечатано в типографии ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М»  
127214, Москва, ул. Полярная, д. 31В, стр. 1  
Тел.: (495) 280-15-96, 280-33-86. Факс: (495) 280-36-29

## ПРИГЛАШАЕМ К СОТРУДНИЧЕСТВУ АВТОРОВ

Мы всегда рады сотрудничеству с новыми авторами и со своей стороны прилагаем все усилия, чтобы книга была издана на достойном издательском и полиграфическом уровне, получила широкую известность на рынке и была востребована читателями. Поэтому мы постоянно совершенствуемся и находим новые варианты сотрудничества.



ГРУППА  
КОМПАНИЙ  
**ИНФРА-М**



Всем выпускаемым изданиям присваивается **ISBN** и **DOI**, а всем авторам — номера **ORCID**: метаданные в обязательном порядке отправляются в РИНЦ и в CrossRef. Все издания размещаются в электронной библиотечной системе Znanium.com. Немаловажно, что в состав группы компаний входит крупнейший оптовый книготорг, который, являясь официальным дилером издательства, обеспечивает книгам достойное распространение по всей России, а также в страны ближнего зарубежья. Среди наших партнеров такие розничные сети и магазины, как OZON.ru, My-shop.ru, «Читай-город», «Буквоед», «Библио-Глобус», Московский дом книги, «Молодая гвардия», ТД «Москва» и многие другие.

### Присылайте ваши предложения:

- ✓ По готовым и планируемым учебникам, учебным пособиям и монографиям  
главному редактору ПРУДНИКОВУ Владимиру Михайловичу  
e-mail: prudnik@infra-m.ru, тел.: (495) 280-15-96 (доб. 291)
- ✓ По публикациям в научных журналах  
руководителю проекта периодических изданий  
СКЛЯНКИНОЙ Дарье Сергеевне  
e-mail: 501@infra-m.ru, тел.: (495) 280-15-96 (доб. 501)
- ✓ По вопросам издания на коммерческой основе  
руководителю издательских проектов  
ЛОБАНОВОЙ Анастасии Игоревне  
e-mail: cai@infra-m.ru, тел.: (495) 280-33-86 (доб. 393)
- ✓ По вопросам участия в программе по увеличению цитируемости и повышению индекса Хирша  
руководителю проекта периодических изданий  
ТИТОВОЙ Елене Николаевне  
e-mail: titova\_en@infra-m.ru, тел.: 8-910-946-14-07
- ✓ По вопросам публикации в США  
генеральному директору издательского центра «РИОР»  
САФОНОВУ Михаилу Николаевичу  
e-mail: safonov@infra-m.ru, тел.: (495) 280-33-86 (доб. 380)

**Кроме того, Вы можете не только издавать новые произведения, но и переиздавать ранее вышедшие путем включения их в ЭБС Znanium.com**