

Лекция 46. Электрические цепи с магнитно связанными катушками.

Цель: Изучение процессы электромагнитные цепи индуктивного характера.

План :

1. Взаимная индуктивность
2. Маркировка зажимов.
3. Последовательное включение двух индуктивно связанных катушек.
4. Метод холостого хода для определения взаимной индукции.
5. Воздушный (линейный) трансформатор

Ключевые слова: Трансформатор, индуктивность, индуктивно связанных катушек, взаимной индукции, контур, магнитное поле, магнитные поток.

Взаимная индуктивность.

Пусть имеется два контура; первый контур (1к) с числом витков W_1 , и второй контур (2к) с числом витков W_2 . Условно покажем каждый из контуров в виде одного витка (см. рис.1).

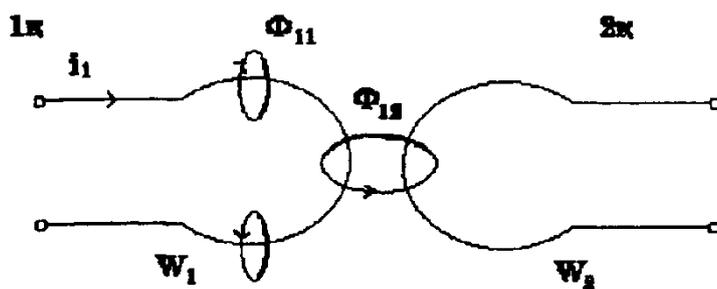


Рис.1

Ток, протекая в первом контуре, создаёт магнитное поле. По правилу буравчика находим направление силовых линий. Силовые линии магнитного потока непрерывны и замкнуты. Некоторые из них будут сцепляться со вторым контуром. На рис.1 Φ_{11} - поток рассеяния, т.е. поток, образованный током первого контура и сцепляющийся с первым контуром. В свою очередь Φ_{21} - это поток взаимной индукции, т.е. поток, образованный током первого контура и сцепляющийся со вторым. В общем случае индексы у магнитного потока записываются так Φ_{km} - поток взаимной индукции, образованный током M -ого контура и сцепляющийся с витками K -ого контура.

Как известно, под индуктивностью понимают отношение потокосцепления (пси) к току i , его вызвавшему.

$$L = \frac{\Psi}{i} [\text{Гн}]$$

где (пси) $= w\Phi$ - потокосцепление, w - число витков, Φ - магнитный поток самоиндукции.

Взаимной индуктивностью называется отношение потокосцепления взаимной индукции к току, его вызвавшему.

$$M_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1} [\text{Гн}] \quad (1)$$

где $\psi_{21} = W_2 \Phi_{21}$, ψ_{21} - потокосцепление взаимной индукции.

В линейной цепи взаимная индуктивность не зависит от потокосцепления и тока, а определяется

$$M_{21} = \frac{W_1 W_2}{R_M} \quad (2)$$

где $R_M = \frac{1}{\mu \mu_R} \frac{1}{S}$ - магнитное сопротивление пути замыкания потока взаимоиндукции.

l, S длина и площадь сечения магнитопровода.

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \mu_R$ - относительная магнитная проницаемость сердечника.

Пусть по второй катушке протекает ток, при этом часть силовых линий магнитного потока будет сцепляться с витками первого контура. Тогда можно ввести потокосцепление взаимной индукции первого контура, вызываемое током второго контура

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_2} \quad (3)$$

Для линейной цепи выполняется равенство $M_{12} = M_{21} = M$ - принцип линейно' Магнитной цепи.

Всякое изменение магнитного потока во времени порождает ЭДС. Найдем ЭДС взаимной индукции

$$e_m = -\frac{d\psi_m}{dt} \quad (4)$$

В соответствии с законом электромагнитной индукции

$$e_{21} = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -\frac{d}{dt}(M_{21}i_1) = -M_{21} \frac{di_1}{dt} - i_1 \frac{dM_{21}}{dt}$$

но для линейной цепи $M = \text{const}$ и

$$i_1 \frac{dM_{21}}{dt} = 0$$

тогда ЭДС взаимной индукции

$$e_{21} = -M_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (5)$$

ЭДС взаимной индукции уравнивается напряжением взаимной индукции например, для второго контура

$$e_{21} = -U_{21}, U_{21} = M_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (6)$$

В общем случае, ЭДС и напряжение взаимной индукции определяются следующими выражениями: $e_M = M \frac{di}{dt}$ (7)

$$U_M = M \frac{di}{dt} \quad (8)$$

Переидём от мгновенных значений к комплексным, получим комплексы амплитудных значений ЭДС и напряжения взаимной индукции.

$$E_m = -j\omega M \dot{I}_m = -Z_m \dot{I}_m$$

$$U_m = -j\omega M \dot{I}_m = -jX_m \dot{I}_m = Z_M \dot{I}_m,$$

где $Z_m = j\omega M = jX_m = X_M e^{j90^\circ}$ - комплексное сопротивление взаимной индукции.

Рассмотрим, как связаны положительные направления тока и напряжения взаимной индукции. Различают так называемые *одноимённые (генераторные) зажимы*. Это такая пара зажимов, при втекании тока, в которую напряжение взаимной индукции U_m направлено так же, как и токи их вызывающие (см. рис. 2). Например, если ток i_1 в первой катушке направлен от зажима в катушку, то во второй катушке он наводит напряжение, направленное от зажима в катушку и наоборот, если ток i_2 во второй катушке протекает по катушке к зажиму, то напряжение в первой катушке направлено также по катушке к зажиму.

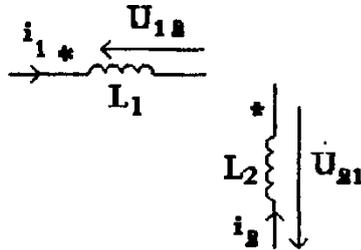


Рис. 2

В отличие от индуктивности взаимная индукция M может быть больше нуля, меньше нуля, равной нулю. Рассмотрим все три случая.

$M > 0$.

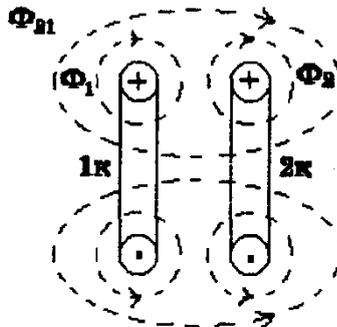


Рис.3

Если поток самоиндукции и взаимной индукции совпадает по направлению катушки включены согласно, при этом взаимная индукция $M > 0$. Например, на

поток самоиндукции Φ_2 совпадает по направлению с потоком взаимной индукции Φ

Если потоки самоиндукции и взаимной индукции не совпадают по направлению, имеем встречное включение, при этом $M < 0$ (см. рис.4). Поток Φ_2 не совпадает по направлению с потоком Φ_{21} .

3. $M=0$

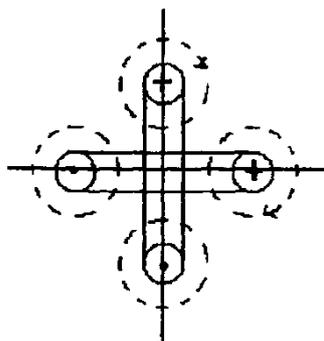


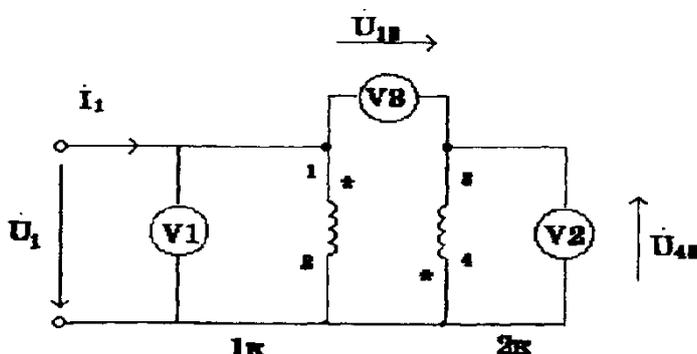
рис.4

В этом случае оси катушек должны быть взаимно перпендикулярными (см. рис. 5).

Маркировка зажимов.

Как определить одноимённые зажимы? Для этого необходимо одну из катушек подсоединить к источнику входного напряжения U_1 , а вторую катушку одним из концов подсоединить к первой и измерить три напряжения: входное (напряжение на первой катушке), напряжение на второй катушке и общее (см. рис. 6). При этом, в зависимости от того какие зажимы катушек соединены, могут встретиться два случая. Рассмотрим эти случаи:

1. Предположим, что одноимённые зажимы 1 и 4

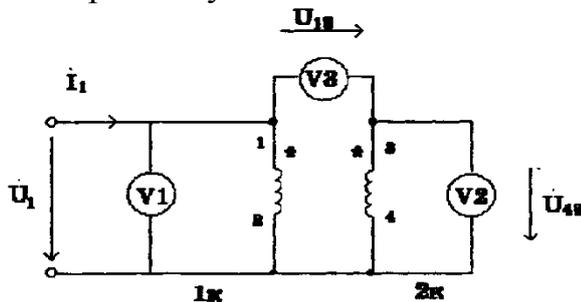


Тогда ток I_1 создаёт во втором контуре напряжение взаимной индукции U_{43} По ЗНК имеем:

$$\dot{U}_{13} - \dot{U}_{43} - \dot{U}_1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{или } \dot{U}_{13} = \dot{U}_1 + \dot{U}_{43}$$

1. Теперь пусть одноимёнными зажимами будут 1-3. При этом напряжение U_{34} на второй катушке поменяло свое направление



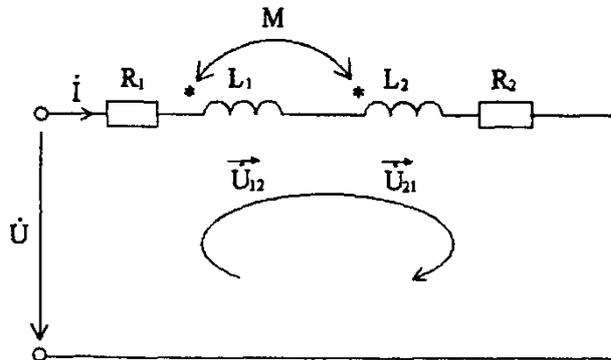
Тогда общее напряжение (2)

$$\dot{U}_{13} = \dot{U}_1 - \dot{U}_{34}$$

Вывод: если соединяются разноимённые зажимы, то общее напряжение на двух катушках $U(.)_{13}$ получается больше входного (первый случай, рис. б).

Последовательное включение двух индуктивно связанных катушек.

1. Согласно включение.



Допустим, катушки соединены согласно, т.е. конец предыдущей катушки соединен с началом следующей, при условии, что они намотаны в одну сторону, ток втекает в одноименные зажимы для первой и второй катушек. Тогда по ЗНК

$$\dot{I} R_1 + j\omega L_1 \dot{I} + \dot{U}_{12} + \dot{I} R_2 + j\omega L_2 \dot{I} + \dot{U}_{21} = \dot{U} \quad (1)$$

где

$$\dot{U}_{12} = j\omega M_1 \dot{I} = \dot{U}_{21} \quad (2)$$

напряжения взаимной индукции на первой и второй катушках.

Подставим (2) в (1), получим

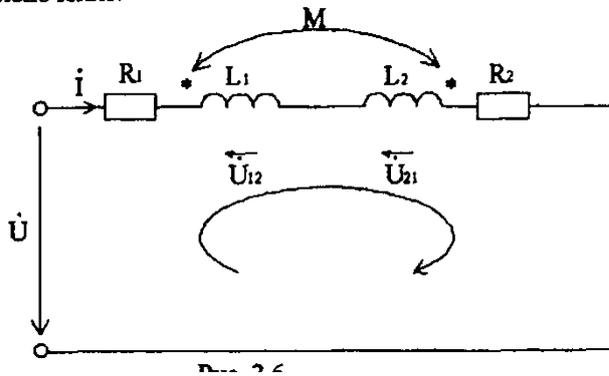
$$\dot{I}(R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M) = \dot{U} \quad (3)$$

Обозначим через

$$L_{\text{экс}} = L_1 + L_2 + 2M \quad (4)$$

индуктивность двух согласовано включённых катушек при их последовательном соединении.

Встречное включение.



Поменяем у одной из катушек начало и конец (рис. 3.6). Тогда

$$\dot{I} R_1 + j\omega L_1 \dot{I} + \dot{U}_{12} + \dot{I} R_2 + j\omega L_2 \dot{I} - \dot{U}_{21} = \dot{U}$$

Аналогично найдем эквивалентную индуктивность при встречном включении

$$L_{\text{экс}} = L_1 + L_2 - 2M \quad (5)$$

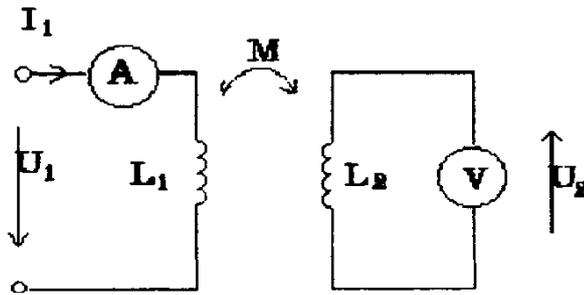
Вычитая выражения (4) и (5), определим взаимную индуктивность через эквивалентные индуктивности в виде

$$M = \frac{L_{1\text{экс}} - L_{2\text{экс}}}{4} \quad (6)$$

- Рассмотрим, как экспериментально определить случаи согласного и встречного включения. Очевидно, что при встречном включении эквивалентное реактивное сопротивление $X_{2\text{экс}} = (\omega)L_{2\text{экс}}$ получится меньше, чем при согласном $X_{1\text{экс}} = (\omega)L_{1\text{экс}}$, т.к. $L_{1\text{экс}} > L_{2\text{экс}}$. Тогда при неизменных параметрах цепи, ток при встречном включении окажется больше, чем при согласном. Теперь можно формулировать правило определения одноимённых зажимов: чтобы экспериментально определить одноимённые зажимы, нужно включить исследуемые катушки и измерить ток; где значение тока выше, там случай встречного включения. Величина взаимной индукции может быть найдена экспериментально исходя из выражения (6).

Метод холостого хода для определения взаимной индукции.

Для этого необходимо включить первую катушку на источник синусоидального напряжения, и измерить ток в первой катушке и напряжение на второй катушке (см. рис. 7).



Напряжение на второй катушке равно ЭДС взаимной индукции и определяется выражением

$$\dot{U}_2 = j\omega M \dot{I}_1 = \dot{E}_2$$

Измерив ток и напряжения можно найти M , исходя из выражения

$$M = \frac{U_2}{\omega L_1}$$

Чем выше сопротивление вольтметра, тем ближе значения напряжения и ЭДС, тем точнее измерение величины взаимной индукции M .

Воздушный (линейный) трансформатор

Одним из важнейших элементов электрических цепей является трансформатор, служащий для преобразования величин токов и напряжений. В простейшем случае трансформатор состоит из двух гальванически несвязанных и неподвижных катушек без ферромагнитного сердечника. Такой трансформатор называется воздушным. Он является линейным. Наличие ферромагнитного сердечника обусловило бы нелинейные свойства трансформатора.

На рис. 3 представлена схема замещения трансформатора, первичная обмотка которого включена на напряжение U_1 , а от вторичной обмотки получает питание приемник с сопротивлением

В трансформаторе энергия из первичной цепи передается во вторичную посредством магнитного поля. Если в первичной цепи под действием напряжения источника возникает переменный ток, то во вторичной цепи за счет магнитной связи катушек индуцируется ЭДС, вызывающая протекание тока в нагрузке.

По второму закону Кирхгофа для первичной и вторичной цепей трансформатора можно записать

$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 - \dot{E}_1 = R_1 \dot{I}_1 - (-jX_{L1} \dot{I}_1 - jX_M \dot{I}_2) = (R_1 + jX_{L1}) \dot{I}_1 + jX_M \dot{I}_2;$$

$$\dot{E}_2 = -jX_{L2} \dot{I}_2 - jX_M \dot{I}_1 = \dot{I}_2 R_2 + \dot{I}_2 Z_H.$$

Таким образом, уравнения воздушного трансформатора имеют вид:

$$\dot{U}_1 = (R_1 + jX_{L1}) \dot{I}_1 + jX_M \dot{I}_2; \tag{11}$$

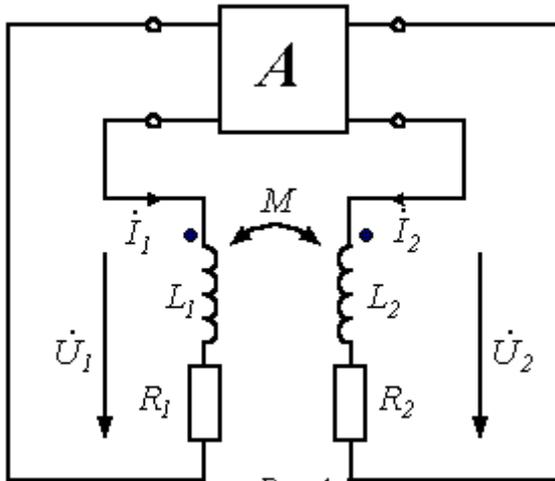


Рис.4

$$0 = jX_M \dot{I}_1 + (R_2 + jX_{L2}) \dot{I}_2 + \dot{U}_2, \quad (12)$$

где R_1 и R_2 - активные сопротивления обмоток; $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_H$.

Если уравнения (11) и (12) решить относительно \dot{I}_1 , предварительно подставив в (12) $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 (R_H + jX_H)$ и обозначив $R_{22} = R_2 + R_H$; $X_{22} = X_{L2} + X_H$, то получим

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{(R_1 + R_{BH}) + j(X_{L1} - X_{BH})}, \quad (13)$$

где $R_{BH} = X_M^2 R_{22} / (R_{22}^2 + X_{22}^2)$; $X_{BH} = X_M^2 X_{22} / (R_{22}^2 + X_{22}^2)$ - вносимые активное и реактивное сопротивления.

Таким образом, согласно (13) воздушный трансформатор со стороны первичной обмотки может рассматриваться как двухполюсник с сопротивлением $Z = (R_1 + R_{BH}) + j(X_{L1} - X_{BH})$.

1. Что такое индуктивность.
2. Что такое маркировка.
3. Какие элементы называются индуктивно связанными?
4. Что такое коэффициент связи, и в каких пределах он изменяется?
5. Что такое воздушный трансформатор? Почему он называется линейным?

Лекция 47. Явление феррорезонансная напряжения.

План:

1. Явление феррорезонансная в последовательном соединении конденсатора и катушки с ферромагнитным сердечником.
2. Явление феррорезонансная в параллельном соединении конденсатора и катушки с ферромагнитным сердечником.

Явление феррорезонансная в последовательном соединении конденсатора и катушки с ферромагнитным сердечником.

Явление феррорезонансная в последовательном соединении катушки с ферромагнитным наконечником и конденсатора.

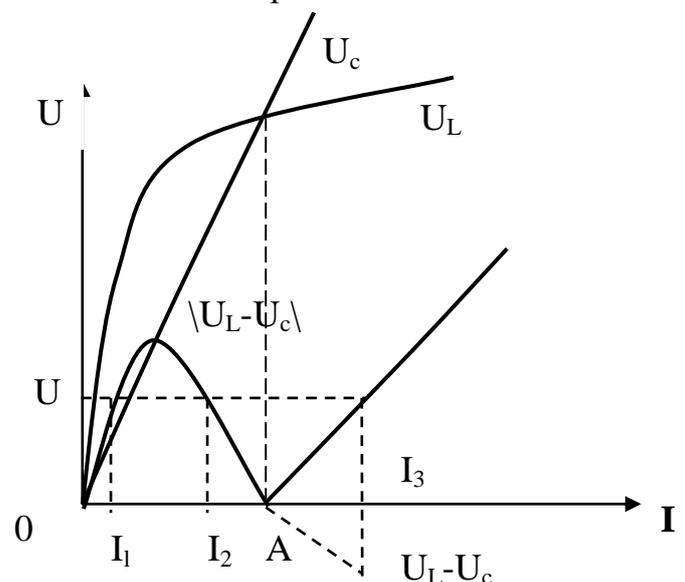
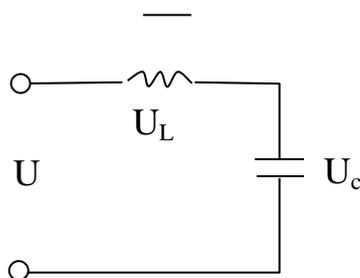
Пусть задана цепь, состоящая из последовательно соединенных реактивной катушки с ферромагнитным наконечником и конденсатора емкостью C .

Предположим, что в цепи отсутствуют потери и заменим несинусоидальные кривые напряжения и тока эквивалентными синусоидами, выбрав их равными первым гармоникам действительных кривых, иными словами, пренебрежем наличием высших гармоник. При указанных условиях напряжение U_L на зажимах катушки и напряжение U_C на зажимах конденсатора по фазе прямо противоположны друг другу. Представляя напряжения U_L и U_C в виде функций тока I , причем $U_L = F(I)$ изобразится характеристикой катушки, а $U_C = (I/(\omega C))$ изобразится прямой, проходящей через начало координат, получим

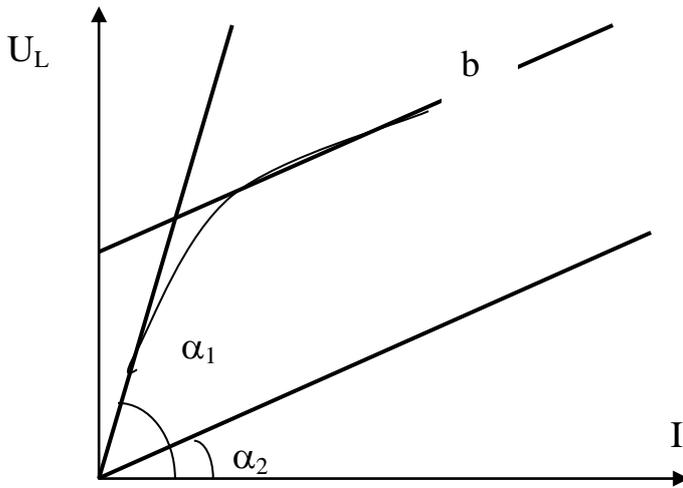
$$U = |U_L - U_C| = |F(I) - (I/(\omega C))| = \varphi(I)$$

Зависимость $U = \varphi(I)$ является не линейной характеристикой всей цепи.

График разности $U_L - U_C$ найдем, вычитая из ординат кривой $U_L = F(I)$ соответствующие ординаты прямой $U_C = (I / \omega C)$. Ток при заданном значении напряжения U определим, находя точки пересечения кривой $|U_L - U_C|$ с прямой, проходящей параллельно оси абсцисс на расстоянии U от нее.



Как видно из рисунка таких точек может быть три, откуда следует, что при одном и том же напряжении на зажимах цепи в ней могут вообще говоря, устанавливаться при различных режимах тока. Такая неопределенность совершенно не свойственна цепям с постоянными параметрами, не может иметь места и в рассматриваемой цепи, если характеристика катушки не пересекается с характеристикой конденсатора. Пересечение возможно, если $C_{\min} < C < C_{\max}$. Для получения минимального значения C_{\min} проведем касательную "а" к в.а.х. катушки индуктивности проходящую через начало координат. Тангенс угла наклона ее к оси абсцисс численно равен $1/\omega C_{\min}$, $\text{tg}\alpha_1 = (1/\omega C_{\min})$ откуда $C_{\min} = (1/\omega \text{tg}\alpha_1)$, где ω - основная частота.

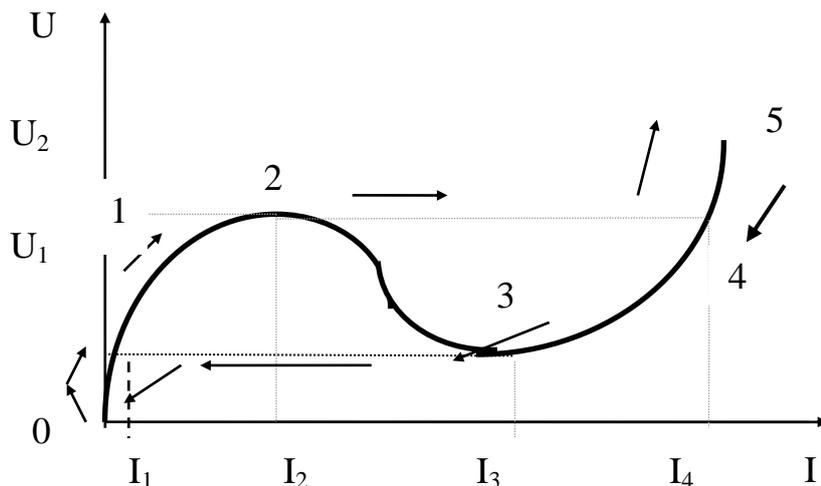


Для нахождения максимального значения емкости проведем касательную "в" к возрастающему линейному участку в.а.х.. Параллельно перенесем ее в начало координат, откуда

$$C_{\max} = (1 / \omega \text{tg}\alpha_2)$$

В отличие от цепей с постоянными параметрами, резонанса в рассматриваемой цепи можно достичь изменением величины приложенного напряжения или тока. Это объясняется тем, что индуктивность катушки с ферромагнитным сердечником зависит от величины тока. Это явление называется явлением феррорезонанса.

Так в последовательной цепи напряжения U_L и U_C могут значительно превышать входное напряжение, поэтому феррорезонанс в последовательной цепи называется феррорезонансом напряжения. В следствие наличия потерь и высших гармоник фактическая характеристика цепи приобретает вид :



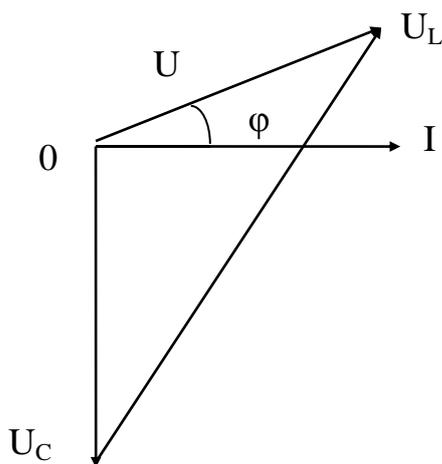
Будем начиная с нуля плавно увеличивать напряжение источника Э.Д.С. При этом изображающая точка будет перемещаться от точки 0 через точку 1 к точке 2. Если напряжение и дальше повышать, то изображающая точка скачком переместится из точки 2 в точку 4, а затем движение будет происходить на участке 4 - 5. При уменьшении напряжения изображающая точка будет перемещаться от точки 5 через точку 4 к точке 3, затем произойдет скачок в точку 1 и далее от точки 1 к точке 0. Таким образом, при подъеме напряжения и достижении им значения U_2 в цепи происходит скачкообразное увеличение тока со значениями I_2 до I_4 . При этом происходит опрокидывание фазы. При плавном уменьшении напряжения источника Э.Д.С. и достижении им значения U_1 ток в цепи скачком уменьшается со значения I_3 до I_1 . Явление резкого изменения тока при незначительном изменении напряжения называется триггерным эффектом.

Основное различие феррорезонанса от линейного резонанса заключается в том, что феррорезонанс достигается изменением напряжения, тока, частоты источника, емкости и индуктивности. Линейный резонанс достигается только изменением C, L, ω .

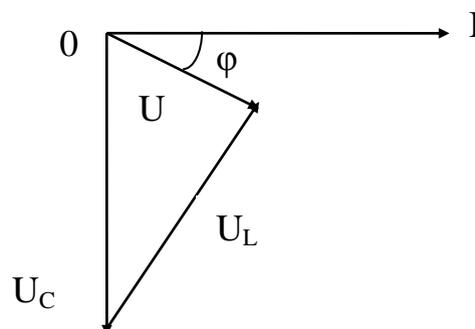
При достижении линейного резонанса фаза изменяется плавно, при феррорезонансе наблюдается опрокидывание фаз.

В линейном резонансе, мы имеем точку резонанса, при феррорезонансе - область феррорезонанса (область точек 2, 3, 4).

При увеличении активного сопротивления цепи точка 3 поднимается вверх, область неустойчивых режимов (2 ; 3) уменьшается, и при достаточно большом "R" феррорезонанс наблюдаться в цепи не будет. Активное сопротивление должно быть меньше емкостного на основной частоте. Построим векторные диаграммы для случаев : до феррорезонанса и после феррорезонанса.



а) до феррорезонанса
Напряжение во входной цепи



б) после феррорезонанса

$$U(I) = \sqrt{(U_R(I))^2 + U_X(I)^2}$$

Определить рабочие точки можно из следующего уравнения :

$$U = U_X^2(I) + U_R^2(I) = [U_L(I) - U_C(I)]^2 + U_R^2 = [U_L(I) - (I / \omega C)^2 + (IR)^2$$

В результате решение относительно $U_L(I)$ получается

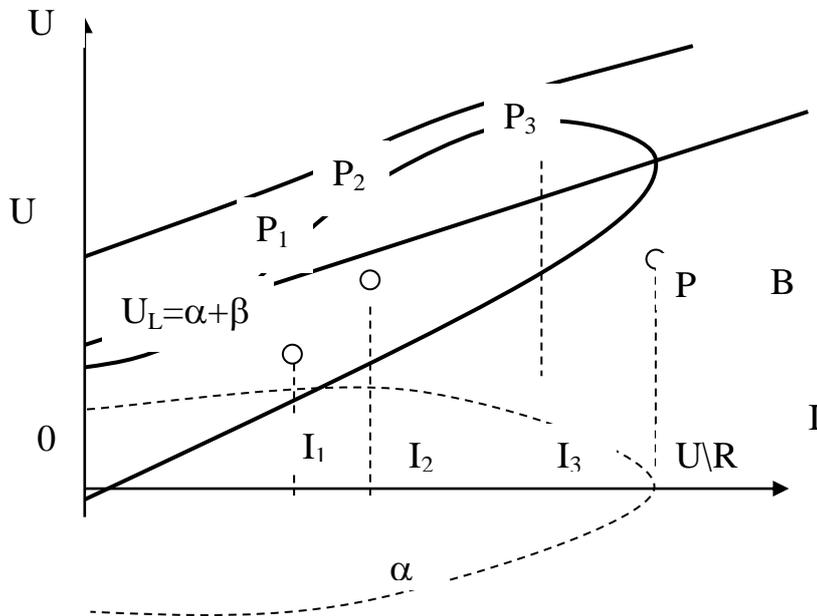
$$U_L(I) = \pm \sqrt{ (U^2 + (IR)^2 + (I / \omega C)^2)} = \alpha + \beta$$

Выражение $\alpha = \pm \sqrt{ (U^2 - (IR)^2)}$ можно

преобразовать :

$$\frac{\alpha^2}{U^2} + \frac{I^2}{\left(\frac{U}{R}\right)^2} = 1$$

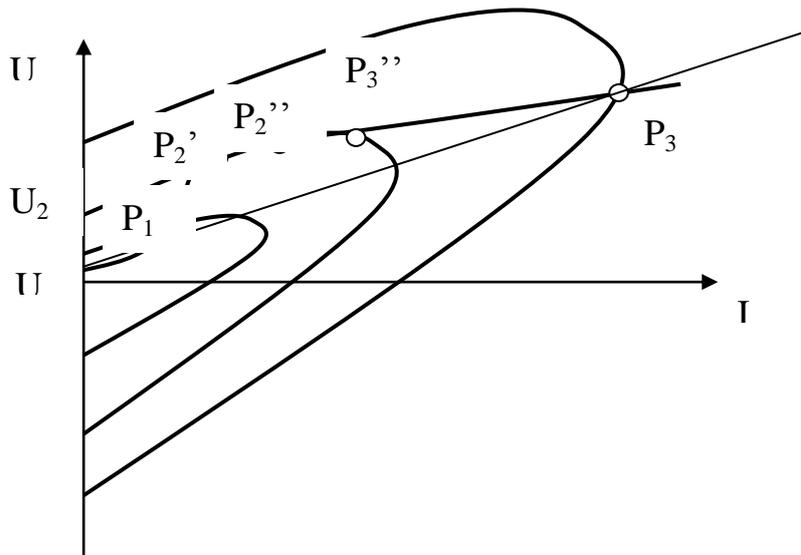
$\alpha(I)$ представляет собой эллипс с полуосями $b = U$ и $a = (U/R)$ (рис)



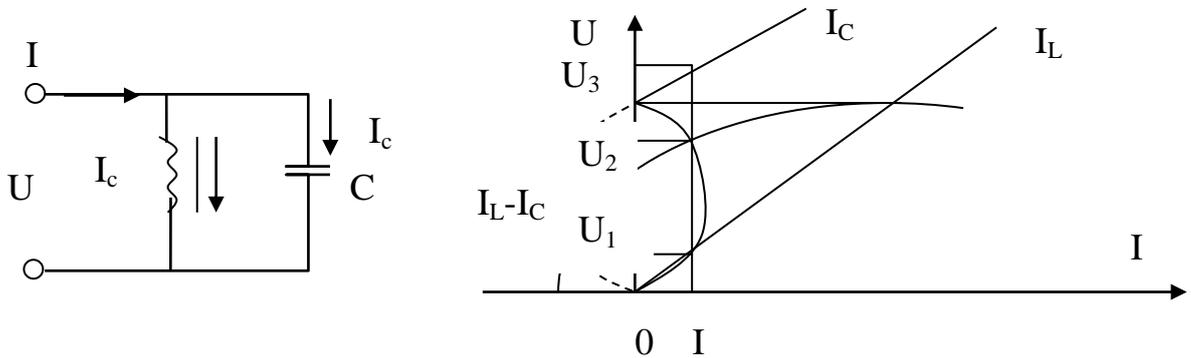
зависимость $\beta = (I/\omega C)$ представляет собой прямую.

Для различных входных напряжений.

При U_1 возможна только одна точка, при U_2 - три точки, при U_3 только одна рабочая точка.



Явление феррорезонанса при параллельном соединении катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора.

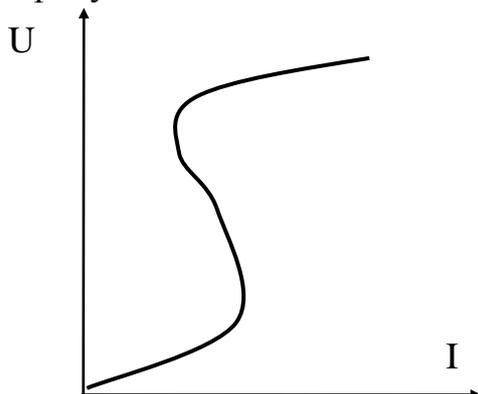


Пренебрежением потерями в цепи и наличием высших гармоник. Тогда ток I_L и I_C в реактивной катушке и ток I_C в конденсаторе по фазе будут противоположны друг другу, а ток I в неразветвленной части цепи будет равен :

$$I = | I_L - I_C | = | F(U) - \omega C U | = \varphi(U),$$

что и является нелинейной характеристикой всей цепи. График разности $| I_L - I_C | = | F(U) - \omega C U |$ найден вычитая из абсцисс кривой $I_L = F(U)$ соответствующие абсциссы прямой $I_C = \omega C U$.

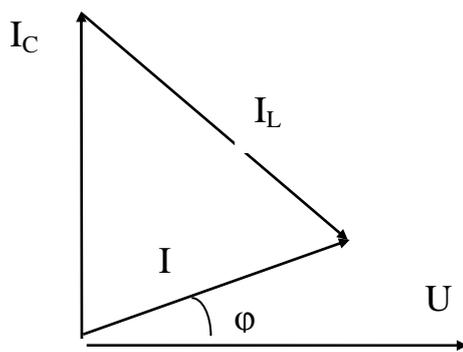
Напряжение, при котором ток во внешней цепи равен заданному значению I , мы определим, находя точки пересечения кривой $| I_L - I_C |$ с прямой, проходящей параллельно оси ординат на расстоянии I от нее. Как видно из рисунка таких точек может быть три, откуда следует, что один и тот же ток в цепи, может, вообще говоря, установится при трех различных значениях напряжения на её зажимах. Эта особенность рассматриваемой цепи исчезнет, если характеристика катушки не пересекается с характеристикой конденсатора. Характеристика катушки пересекается с характеристикой конденсатора при условии $C_{\min} < C < C_{\max}$. Границы изменения емкости определяются также, как и в последовательной цепи. Так как токи на индуктивности и на емкости превышают ток во входной цепи, поэтому феррорезонанс в параллельной цепи называют феррорезонансом токов. В следствии наличия в цепи потерь и высших гармоник, которыми мы пренебрегли, фактическая характеристика цепи приобретает вид, показанный на рисунке.



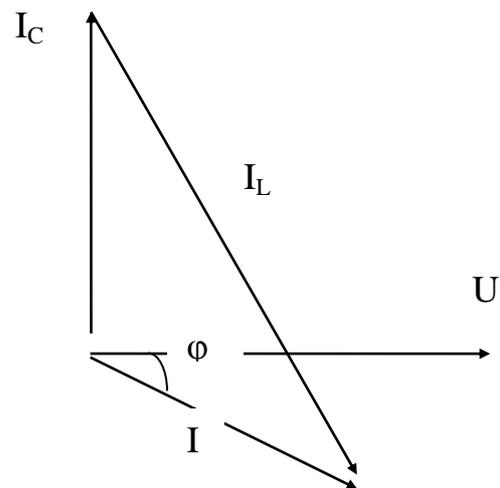
Из этой кривой видно, что при постепенном увеличении тока в цепи, а также при уменьшении его будут происходить срывы, аналогичные срывам при последовательном соединении и также сопровождающиеся изменением знака угла сдвига в цепи. Однако для получения этих срывов на опыте необходимо приключить ее через большое линейное сопротивление r , значительно превосходящее сопротивление контура из параллельно соединенных катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора. В таком случае ток I будет определяться сопротивлением r и при его изменении будут происходить скачки напряжения на зажимах этого контура. Если же цепь присоединить к источнику напряжения с малым внутренним сопротивлением, то при изменении U может быть получена на опыте вся кривая без скачков, т.к. каждому значению напряжения соответствует одно значение тока.

Условия феррорезонанса токов и различия с линейным резонансом такие же, как и при последовательном соединении.

Векторные диаграммы представлены на рисунке.



а) до феррорезонанса



б) после феррорезонанса

Модуль полного тока равен

$$I(U) = \sqrt{I_R^2(U) + I_X^2(U)}$$

Аналогично, как и при последовательном соединении, можно построить рабочие точки и при параллельном соединении. Для этой цепи пользуются уравнением

$$I^2 = [I_L(U) - \omega CU]^2 + \left(\frac{U}{R}\right)^2$$

Откуда

$$I_L(U) = \pm I(U) - \omega CU = \sqrt{I^2 - (U/R)^2} + \omega CU = \alpha + \beta I^2$$

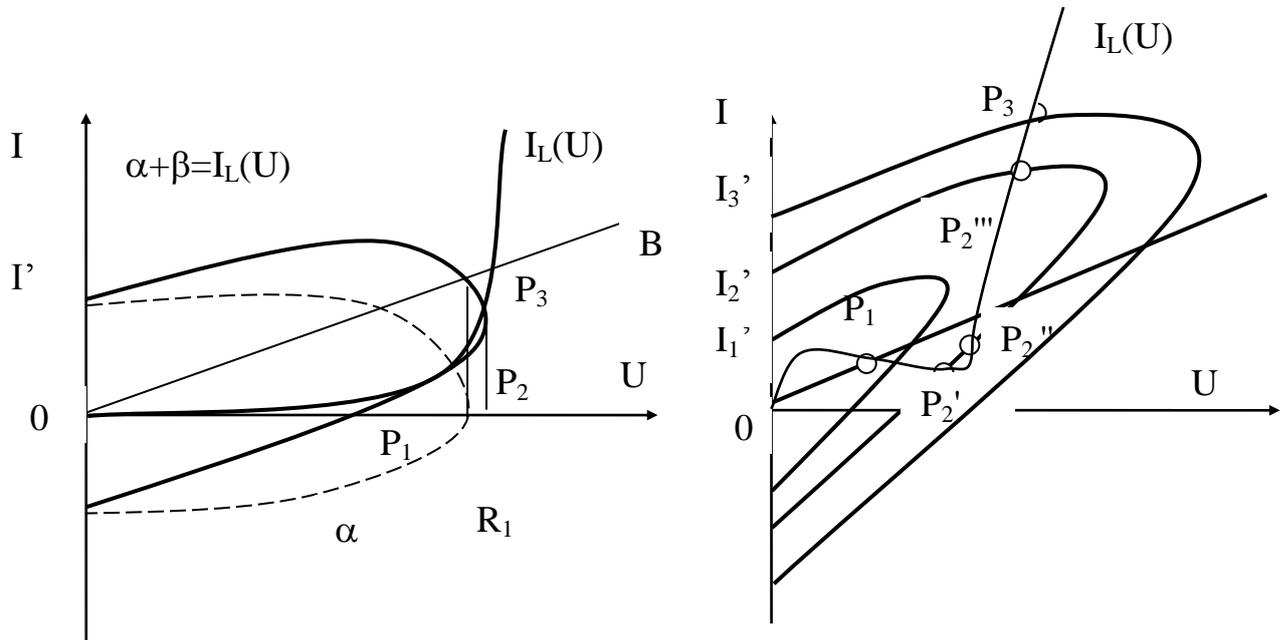
Выражение

$$\alpha = \pm \sqrt{I^2 - (U/R)^2}$$

представляет собой эллипс

$$\frac{\alpha^2}{I} + \frac{U^2}{(IR)^2} = 1$$

$\beta = \omega CU$ представляет собой прямую



В.а.х. $I_L(U)$ и наклонный эллипс $I_L(U)$ пересекаются в рабочих точках. В зависимости от величины тока I возможны одна точка (P_1 или P_3) или три точки (P_2' , P_2'' , P_2'''). Если получаются три точки пересечения, то две рабочие (P_1' и P_2''') и одна нестабильная (P_2'').

Литература:

1. Л.Р.Нейман; К.С.Демирчян "Теоретические основы электротехники" т.2 "энергия" Москва 1981 г. стр. 81-124
2. Бессонов Л.А. "Теоретические основы электротехники". Высшая школа 1978 г. стр.247-322

Значащие слова:

1. Феррорезонанс – резонанс в цепи с нелинейной индуктивностью и конденсатором.
2. Феррорезонанс напряжений – превышение напряжения на реактивных элементах по отношению к входному в последовательной цепи с нелинейной индуктивностью и ёмкостью.
3. Феррорезонанс токов – превышение токов на реактивных элементах по сравнению с входным в параллельной цепи с нелинейной индуктивностью и ёмкостью.
4. Мягкое возбуждение колебаний – когда при уменьшении сопротивления ток плавно увеличивается.

5. Жёсткое возбуждение колебаний - когда при уменьшении сопротивления ток скачками увеличивается.

6. Триггерный эффект – явление резкого изменения тока при незначительном изменении напряжения.

7. S-образная характеристика – вольтамперные, веберамперные, кулон-вольтные характеристики при наличии на них падающего участка по форме напоминающие букву S.

8. N-образная характеристика – вольтамперные, веберамперные, кулон-вольтные характеристики при наличии на них падающего участка по форме напоминающие букву N.

Вопросы для самопроверки:

1. Каковы условия возникновения феррорезонанса напряжения?
2. Чем отличается феррорезонанс напряжения от линейного резонанса?
3. Каким образом можно достичь феррорезонанс напряжения?
4. Когда возникает триггерный эффект в последовательной цепи с нелинейной индуктивностью и линейной ёмкостью?
5. Каковы условия возникновения феррорезонанса токов?
6. Влияние ёмкости и активной проводимости на многозначность вольтамперной характеристики двухполюсника.
7. В чём состоит сущность "опрокидывания фазы"?

Лекция 48. Явление феррорезонанса тока.

План:

1. Явление феррорезонанса в последовательном соединении конденсатора и катушки с ферромагнитным сердечником.
2. Явление феррорезонанса в параллельном соединении конденсатора и катушки с ферромагнитным сердечником.

Явление феррорезонанса в последовательном соединении конденсатора и катушки с ферромагнитным сердечником.

Явление феррорезонанса в последовательном соединении катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора.

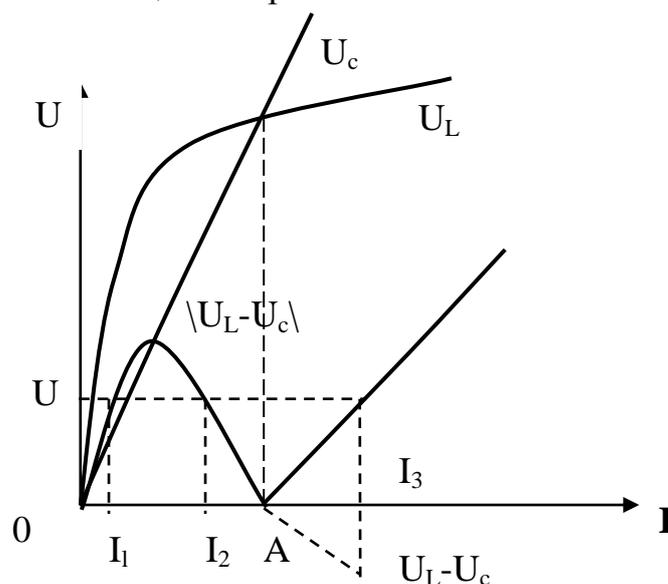
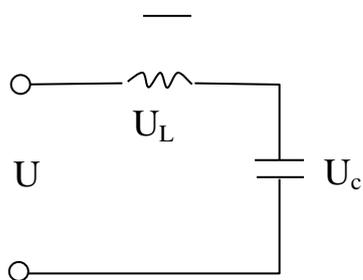
Пусть задана цепь, состоящая из последовательно соединенных реактивной катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора емкостью C .

Предположим, что в цепи отсутствуют потери и заменим несинусоидальные кривые напряжения и тока эквивалентными синусоидами, выбрав их равными первым гармоникам действительных кривых, иными словами, пренебрежем наличием высших гармоник. При указанных условиях напряжение U_L на зажимах катушки и напряжение U_C на зажимах конденсатора по фазе прямо противоположны друг другу. Представляя напряжения U_L и U_C в виде функций тока I , причем $U_L = F(I)$ изобразится характеристикой катушки, а $U_C = (I/(\omega C))$ изобразится прямой, проходящей через начало координат, получим

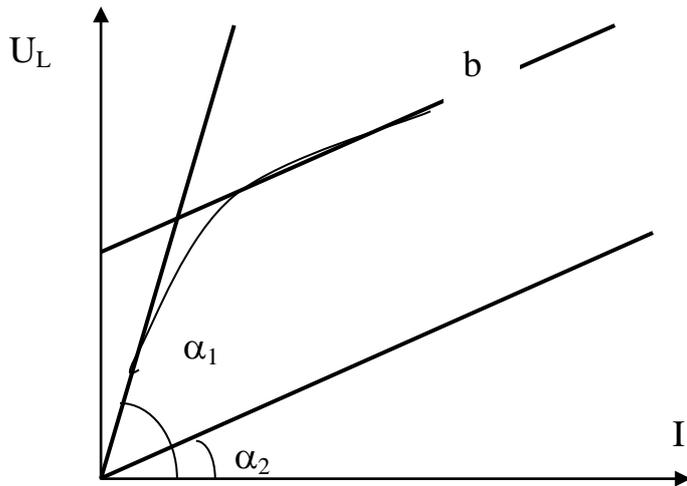
$$U = |U_L - U_C| = |F(I) - (I/(\omega C))| = \varphi(I)$$

Зависимость $U = \varphi(I)$ является не линейной характеристикой всей цепи.

График разности $U_L - U_C$ найдем, вычитая из ординат кривой $U_L = F(I)$ соответствующие ординаты прямой $U_C = (I / \omega C)$. Ток при заданном значении напряжения U определим, находя точки пересечения кривой $|U_L - U_C|$ с прямой, проходящей параллельно оси абсцисс на расстоянии U от нее.



Как видно из рисунка таких точек может быть три, откуда следует, что при одном и том же напряжении на зажимах цепи в ней могут вообще говоря, устанавливаться при различных режимах тока. Такая неопределенность совершенно не свойственна цепям с постоянными параметрами, не может иметь места и в рассматриваемой цепи, если характеристика катушки не пересекается с характеристикой конденсатора. Пересечение возможно, если $C_{\min} < C < C_{\max}$. Для получения минимального значения C_{\min} проведем касательную "а" с в.а.х. катушки индуктивности проходящую через начало координат. Тангенс угла наклона ее к оси абсцисс численно равен $1/\omega C_{\min}$, $\text{tg}\alpha_1 = (1/\omega C_{\min})$ откуда $C_{\min} = (1/\omega \text{tg}\alpha_1)$, где ω - основная частота.

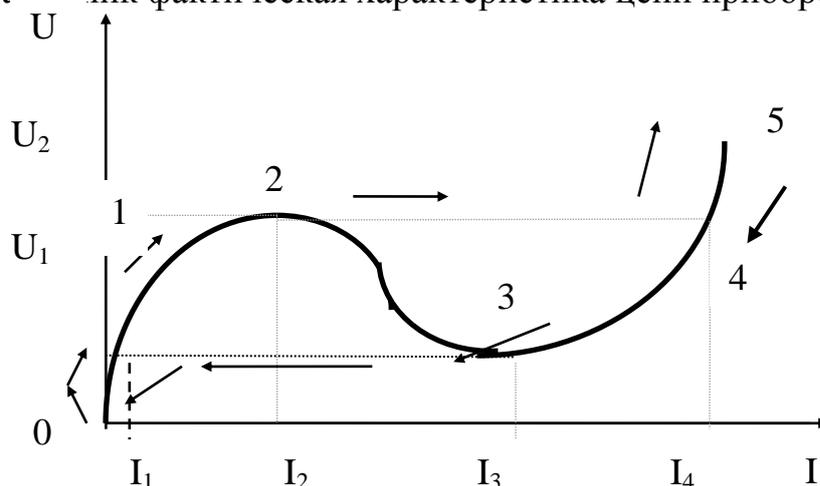


Для нахождения максимального значения емкости проведем касательную "в" к возрастающему линейному участку в.а.х.. Параллельно перенесем ее в начало координат, откуда

$$C_{\max} = (1 / \omega \text{tg}\alpha_2)$$

В отличие от цепей с постоянными параметрами, резонанса в рассматриваемой цепи можно достичь изменением величины приложенного напряжения или тока. Это объясняется тем, что индуктивность катушки с ферромагнитным сердечником зависит от величины тока. Это явление называется явлением феррорезонанса.

Так в последовательной цепи напряжения U_L и U_C могут значительно превышать входное напряжение, поэтому феррорезонанс в последовательной цепи называется феррорезонансом напряжения. В следствие наличия потерь и высших гармоник фактическая характеристика цепи приобретает вид :



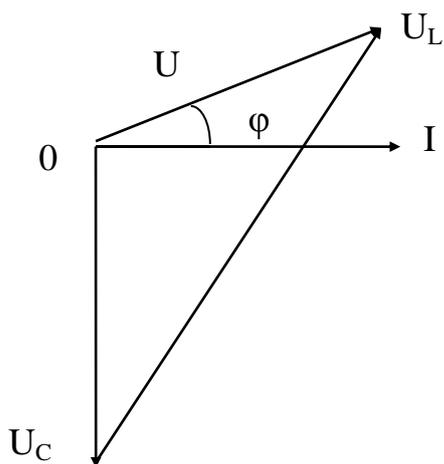
Будем начиная с нуля плавно увеличивать напряжение источника Э.Д.С. При этом изображающая точка будет перемещаться от точки 0 через точку 1 к точке 2. Если напряжение и дальше повышать, то изображающая точка скачком переместится из точки 2 в точку 4, а затем движение будет происходить на участке 4 - 5. При уменьшении напряжения изображающая точка будет перемещаться от точки 5 через точку 4 к точке 3, затем произойдет скачок в точку 1 и далее от точки 1 к точке 0. Таким образом, при подъеме напряжения и достижении им значения U_2 в цепи происходит скачкообразное увеличение тока со значениями I_2 до I_4 . При этом происходит опрокидывание фазы. При плавном уменьшении напряжении источника Э.Д.С. и достижении им значения U_1 ток в цепи скачком уменьшается со значения I_3 до I_1 . Явление резкого изменения тока при незначительном изменении напряжения называется триггерным эффектом.

Основное различие феррорезонанса от линейного резонанса заключается в том, что феррорезонанс достигается изменением напряжения, тока, частоты источника, емкости и индуктивности. Линейный резонанс достигается только изменением C, L, ω .

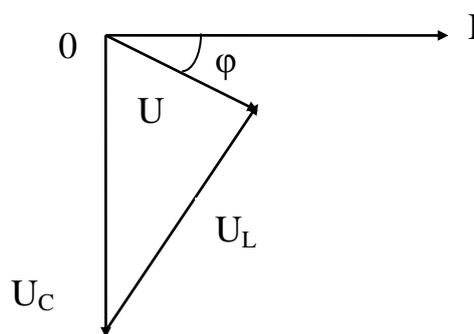
При достижении линейного резонанса фаза изменяется плавно, при феррорезонансе наблюдается опрокидывание фаз.

В линейном резонансе, мы имеем точку резонанса, при феррорезонансе - область феррорезонанса (область точек 2, 3, 4).

При увеличении активного сопротивления цепи точка 3 поднимается вверх, область неустойчивых режимов (2 ; 3) уменьшается, и при достаточно большом "R" феррорезонанс наблюдаться в цепи не будет. Активное сопротивление должно быть меньше емкостного на основной частоте. Построим векторные диаграммы для случаев : до феррорезонанса и после феррорезонанса.



а) до феррорезонанса
Напряжение во входной цепи



б) после феррорезонанса

$$U(I) = \sqrt{(U_R(I))^2 + U_X(I)^2}$$

Определить рабочие точки можно из следующего уравнения :

$$U = U_X^2(I) + U_R^2(I) = [U_L(I) - U_C(I)]^2 + U_R^2 = [U_L(I) - (I/\omega C)]^2 + (IR)^2$$

В результате решение относительно $U_L(I)$ получается

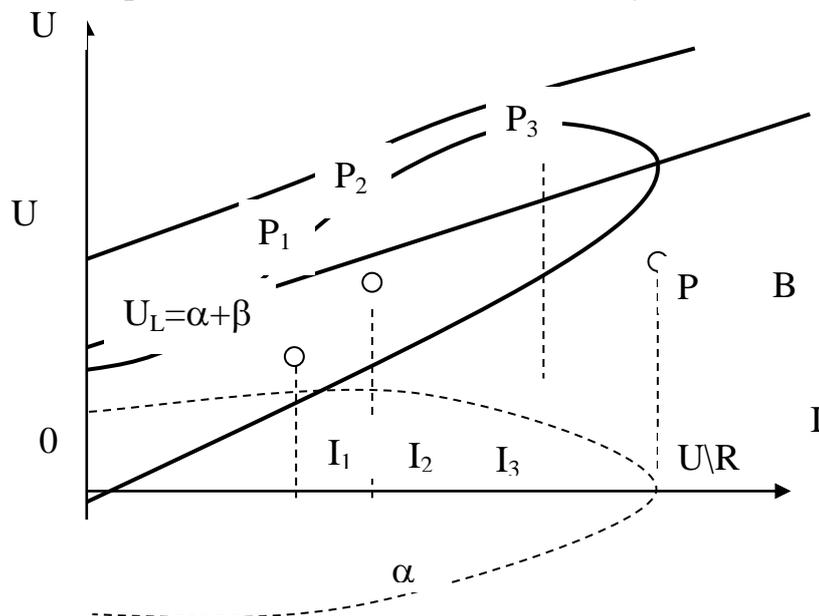
$$U_L(I) = \pm \sqrt{(U^2 + (IR)^2 + (I/\omega C)^2)} = \alpha + \beta$$

Выражение $\alpha = \pm \sqrt{(U^2 - (IR)^2)}$ можно

преобразовать :

$$\frac{\alpha^2}{U^2} + \frac{I^2}{\left(\frac{U}{R}\right)^2} = 1$$

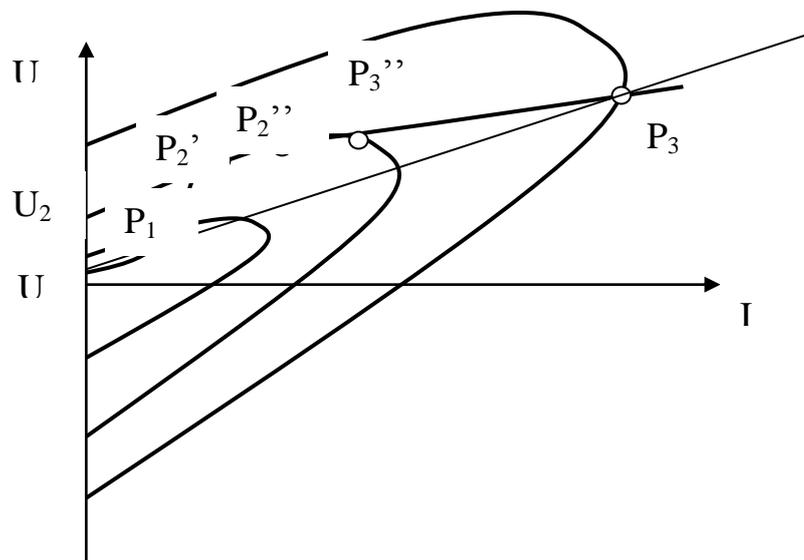
$\alpha(I)$ представляет собой эллипс с полуосями $b = U$ и $a = (U/R)$ (рис)



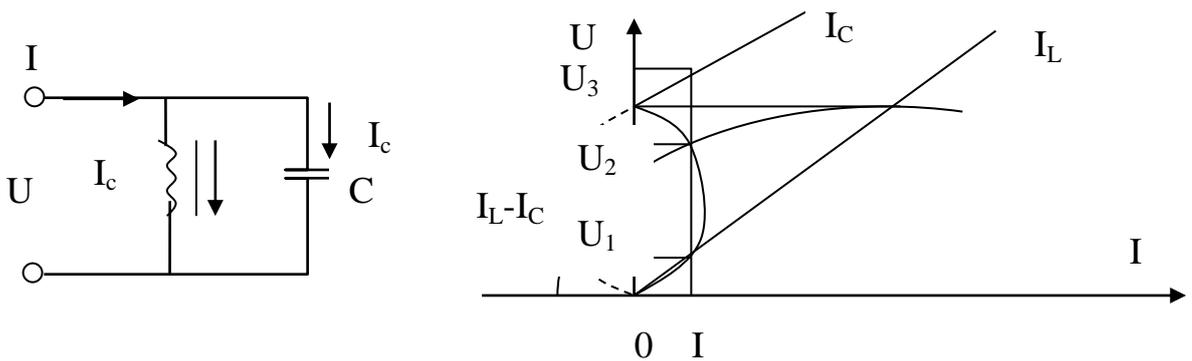
зависимость $\beta = (I/\omega C)$ представляет собой прямую.

Для различных входных напряжений.

При U_1 возможна только одна точка, при U_2 - три точки, при U_3 только одна рабочая точка.



Явление феррорезонанса при параллельном соединении катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора.

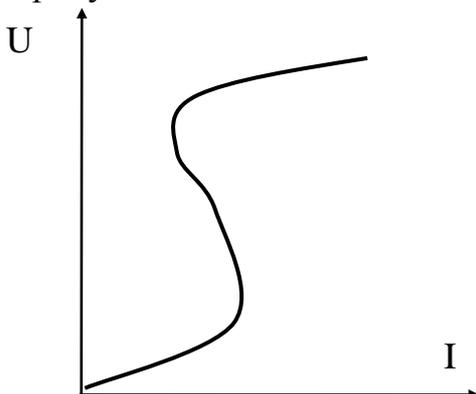


Пренебрежением потерями в цепи и наличием высших гармоник. Тогда ток I_L и I_C в реактивной катушке и ток I_C в конденсаторе по фазе будут противоположны друг другу, а ток I в неразветвленной части цепи будет равен :

$$I = | I_L - I_C | = | F(U) - \omega C U | = \varphi(U),$$

что и является нелинейной характеристикой всей цепи. График разности $| I_L - I_C | = | F(U) - \omega C U |$ найден вычитая из абсцисс кривой $I_L = F(U)$ соответствующие абсциссы прямой $I_C = \omega C U$.

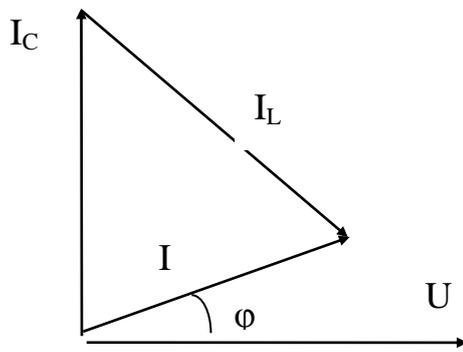
Напряжение, при котором ток во внешней цепи равен заданному значению I , мы определим, находя точки пересечения кривой $| I_L - I_C |$ с прямой, проходящей параллельно оси ординат на расстоянии I от нее. Как видно из рисунка таких точек может быть три, откуда следует, что один и тот же ток в цепи, может, вообще говоря, установится при трех различных значениях напряжения на её зажимах. Эта особенность рассматриваемой цепи исчезнет, если характеристика катушки не пересекается с характеристикой конденсатора. Характеристика катушки пересекается с характеристикой конденсатора при условии $C_{\min} < C < C_{\max}$. Границы изменения емкости определяются также, как и в последовательной цепи. Так как токи на индуктивности и на емкости превышают ток во входной цепи, поэтому феррорезонанс в параллельной цепи называют феррорезонансом токов. В следствии наличия в цепи потерь и высших гармоник, которыми мы пренебрегли, фактическая характеристика цепи приобретает вид, показанный на рисунке.



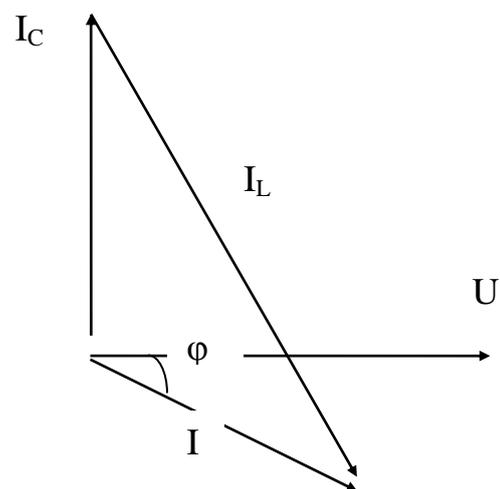
Из этой кривой видно, что при постепенном увеличении тока в цепи, а также при уменьшении его будут происходить срывы, аналогичные срывам при последовательном соединении и также сопровождающиеся изменением знака угла сдвига в цепи. Однако для получения этих срывов на опыте необходимо приключить ее через большое линейное сопротивление r , значительно превосходящее сопротивление контура из параллельно соединенных катушки с ферромагнитным сердечником и конденсатора. В таком случае ток I будет определяться сопротивлением r и при его изменении будут происходить скачки напряжения на зажимах этого контура. Если же цепь присоединить к источнику напряжения с малым внутренним сопротивлением, то при изменении U может быть получена на опыте вся кривая без скачков, т.к. каждому значению напряжения соответствует одно значение тока.

Условия феррорезонанса токов и различия с линейным резонансом такие же, как и при последовательном соединении.

Векторные диаграммы представлены на рисунке.



а) до феррорезонанса



б) после феррорезонанса

Модуль полного тока равен

$$I(U) = \sqrt{I_R^2(U) + I_X^2(U)}$$

Аналогично, как и при последовательном соединении, можно построить рабочие точки и при параллельном соединении. Для этой цепи пользуются уравнением

$$I^2 = [I_L(U) - \omega CU]^2 + \left(\frac{U}{R}\right)^2$$

Откуда

$$I_L(U) = \pm I(U) = \sqrt{I^2 - (U/R)^2} + \omega CU = \alpha + \beta I^2$$

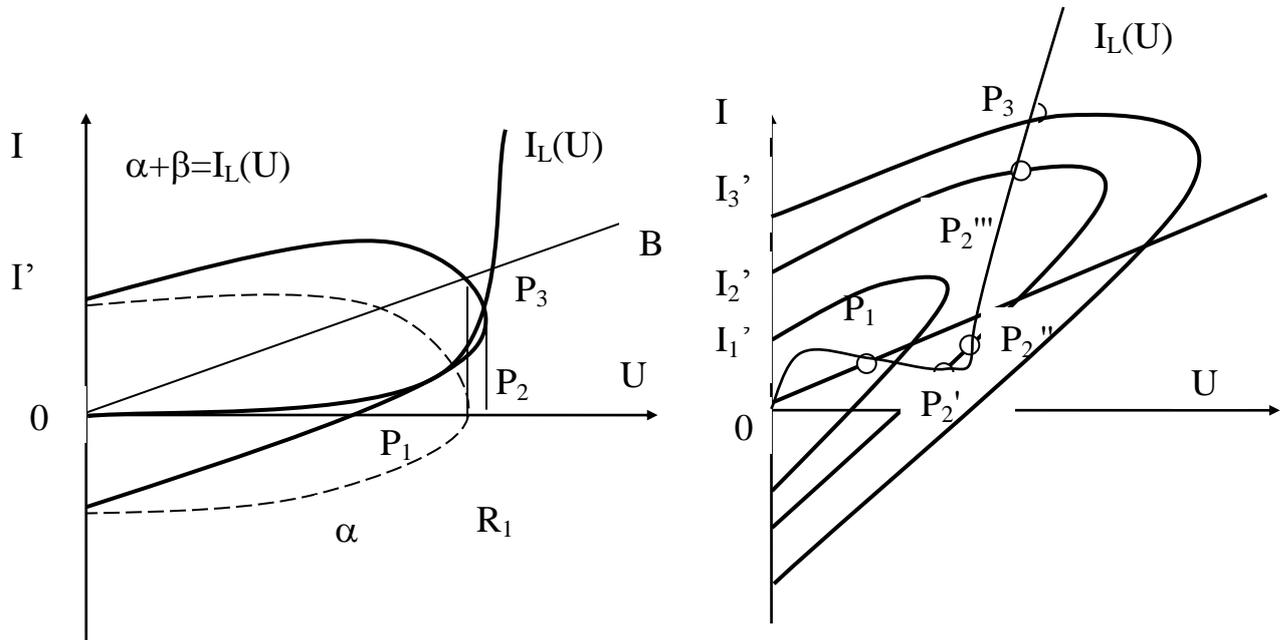
Выражение

$$\alpha = \pm \sqrt{I^2 - (U/R)^2}$$

представляет собой эллипс

$$\frac{\alpha^2}{I} + \frac{U^2}{(IR)^2} = 1$$

$\beta = \omega CU$ представляет собой прямую



В.а.х. $I_L(U)$ и наклонный эллипс $I_L(U)$ пересекаются в рабочих точках. В зависимости от величины тока I возможны одна точка (P_1 или P_3) или три точки (P_2', P_2'', P_2'''). Если получаются три точки пересечения, то две рабочие (P_1' и P_2''') и одна нестабильная (P_2'').

Литература:

1. Л.Р.Нейман; К.С.Демирчян "Теоретические основы электротехники" т.2 "энергия" Москва 1981 г. стр. 81-124
2. Бессонов Л.А. "Теоретические основы электротехники". Высшая школа 1978 г. стр.247-322

Значащие слова:

9. Феррорезонанс – резонанс в цепи с нелинейной индуктивностью и конденсатором.
10. Феррорезонанс напряжений – превышение напряжения на реактивных элементах по отношению к входному в последовательной цепи с нелинейной индуктивностью и ёмкостью.
11. Феррорезонанс токов – превышение токов на реактивных элементах по сравнению с входным в параллельной цепи с нелинейной индуктивностью и ёмкостью.
12. Мягкое возбуждение колебаний – когда при уменьшении сопротивления ток плавно увеличивается.

13. Жёсткое возбуждение колебаний - когда при уменьшении сопротивления ток скачками увеличивается.

14. Триггерный эффект – явление резкого изменения тока при незначительном изменении напряжения.

15. S-образная характеристика – вольтамперные, веберамперные, кулон-вольтные характеристики при наличии на них падающего участка по форме напоминающие букву S.

16. N-образная характеристика – вольтамперные, веберамперные, кулон-вольтные характеристики при наличии на них падающего участка по форме напоминающие букву N.

Вопросы для самопроверки:

8. Каковы условия возникновения феррорезонанса напряжения?
9. Чем отличается феррорезонанс напряжения от линейного резонанса?
10. Каким образом можно достичь феррорезонанс напряжения?
11. Когда возникает триггерный эффект в последовательной цепи с нелинейной индуктивностью и линейной ёмкостью?
12. Каковы условия возникновения феррорезонанса токов?
13. Влияние ёмкости и активной проводимости на многозначность вольтамперной характеристики двухполюсника.
14. В чём состоит сущность "опрокидывания фазы"?

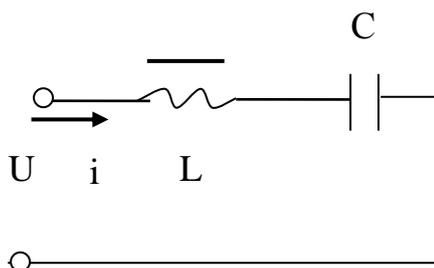
Лекция 49. Образование низкочастотных колебаний от частоты источника электроэнергии.

План:

1. Образование низкочастотных колебаний.
2. Делители частоты.

Образование низкочастотных колебаний.

При расчете периодических процессов в нелинейных цепях можно пользоваться следующим способом отыскания неизвестных величин. В общем случае токи и напряжения в нелинейной цепи не синусоидальны, поэтому представляем ожидаемое решение в виде суммы основной и ряда высших гармоник, у которых неизвестными являются амплитуда и начальные фазы. Представляя эту сумму в нелинейное дифференциальное уравнение, написанное для данной искомой величины, представим все члены, входящие в дифференциальное уравнение, в виде сумм гармоник. Суммируя справа и слева от знака равенства все коэффициенты при членах, содержащих $\sin K\omega t$ и приравниваем эти суммы друг другу. Пропускаем ту же операцию с коэффициентами при $\cos K\omega t$. Повторяем эти операции для всех значений K , получаем систему из $2k$ алгебраических уравнений. Эту систему используем для определения неизвестных амплитуд и начальных фаз каждой гармоники. Такой метод называется метод гармонического баланса. Точное решение нелинейной задачи этим методом в общем случае требует учета бесконечного множества гармоник, что практически невозможно осуществить. Поэтому при решении конкретных задач число гармоник в ожидаемом решении берется ограниченным и в большинстве случаев - не больше 2 - 3. В результате такого ограничения точный баланс гармоник в уравнении нарушается и становится приближенным. Применим метод гармонического баланса для последовательной цепи.



Пусть $U = U_m \sin \omega t$, а нелинейная характеристика катушки может быть представлена аналитически в виде $i = a\psi^3$. Ищем решение для потокосцепления в виде суммы:

$$\psi = \psi_{1m} \sin(\omega t + \theta_1) + \psi_{3m} \sin(3\omega t + \theta_3)$$

т.е. ограничиваемся первой и третьей гармоникой. Неизвестными

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{i}{c}$$

являются

$$U = \frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + U_c(0) \text{ или}$$

$\psi_{1m}; \psi_{3m}; \theta_1; \theta_3$. Дифференциальное уравнение :
Подставляя значения U, ψ, i получим:

$$\omega U_m \cos \omega t = -\omega^2 \psi_{1m}^2 \sin(\omega t + \theta_1) - 9\omega^2 \psi_{3m}^2 \sin(3\omega t + \theta_3) + \frac{a\psi^3}{C} =$$

$$-\omega^2 \psi_{1m}^2 \sin(\omega t + \theta_1) - 9\omega^2 \psi_{3m}^2 \sin(\omega t + \theta_3) +$$

$$\frac{a}{C} \left[\psi_{1m}^3 \sin(\omega t + \theta_1) + 3\psi_{1m}^2 \psi_{3m} \sin^2(\omega t + \theta_1) \sin(\omega t + \theta_3) + 3\psi_{1m} \psi_{3m}^2 \sin(\omega t + \theta_1) \sin^2(3\omega t + \theta_3) + \psi_{3m}^3 \sin^3(\omega t + \theta_3) \right]$$

Приравниваем коэффициенты при $\sin \omega t, \cos \omega t, \sin 3\omega t, \cos 3\omega t$, имеем:

$$\omega U_m = \left(-\omega^2 \psi_{1m}^2 + \frac{3a}{4C} \psi_{1m}^3 + \frac{3a}{2C} \psi_{1m} \psi_{3m}^2 \right) \sin \theta_1 - \frac{3a}{4C} \psi_{1m}^2 \psi_{3m} \sin(\theta_3 - 2\theta_1) \quad (1)$$

$$0 = \left(-\omega^2 \psi_{1m}^2 + \frac{3a}{4C} \psi_{1m}^3 + \frac{3a}{2C} \psi_{1m} \psi_{3m}^2 \right) \cos \theta_1 - \frac{3a}{4C} \psi_{1m}^2 \psi_{3m} \cos(\theta_3 - 2\theta_1) \quad (2)$$

Решая совместно эти уравнения можно найти все четыре величины.

Так как в цепи отсутствуют потери, то θ_1 и θ_3 равны $+\pi/2$. Действительно уравнения 1 и 3 удовлетворяются при $\theta_1 = +\pi/2$ и $\theta_3 = +\pi/2$. Синусы углов в уравнениях 1 и 3 равны при этом $+1$, и из этих уравнений определяются ψ_{1m} и ψ_{3m} . Пренебрежем третьей гармоникой, тогда

$$0 = \left(-9\omega^2 \psi_{3m}^2 + \frac{3a}{2C} \psi_{1m}^3 \psi_{3m} + \frac{3a}{4C} \psi_{3m}^3 \right) \sin \theta_3 - \frac{a}{4C} \psi_{1m}^3 \sin \theta_1 \quad (3)$$

$$\omega U_m = \left(-\omega^2 \psi_{1m}^2 + \frac{3a}{4C} \psi_{3m}^2 \right) \sin \theta_1$$

$$0 = \left(-9\omega^2 \psi_{3m}^2 + \frac{3a}{2C} \psi_{1m}^3 \psi_{3m} + \frac{3a}{4C} \psi_{3m}^3 \right) \cos \theta_3 - \frac{a}{4C} \psi_{1m}^3 \cos \theta_1 \quad (4)$$

$$\omega U_m = \left(-\omega^2 \psi_{1m} + \frac{3a}{4c} \psi_{3m}^2 \right) \cos \theta_1$$

Уравнения 3 и 4 отпадают, так как они были составлены из баланса для третьей гармоники.

Из уравнения (2) имеем $\theta_1 = \pm \pi/2$, следовательно $\sin = \pm 1$ и из первого уравнения определяется ψ_{1m} :

$$+\omega U_m = \pm (-\omega U_m + 3a/4c * \psi_{1m}^3)$$

Т.К.

$i = a\psi^3 = a\psi_{1m}^3 \sin^3 \omega t = 3/4 a\psi_{1m}^3 \sin \omega t - a/4 \psi_{1m}^3 \sin 3\omega t = 3/4 a\psi_{1m}^3 \sin \omega t$
то,

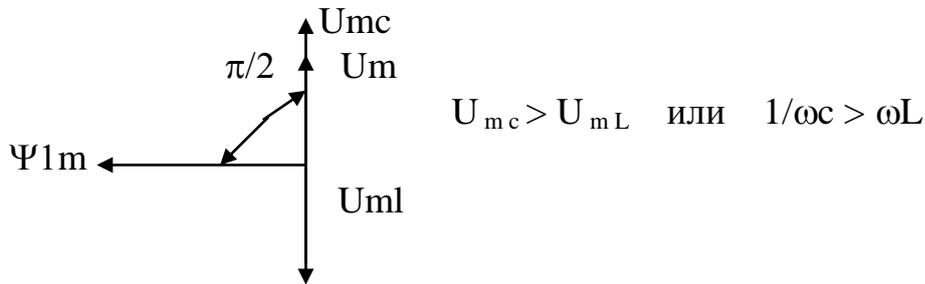
следовательно $I_{1m} = 3/4 a\psi_{1m}^3$ Подставляя отсюда значение потока в последнее уравнение, получаем :

$$U_m = \pm \left(\omega^3 \sqrt{\frac{4}{3a}} I_{1m} - I_{1m} / \omega c \right) = \pm I_{1m} (\omega L - 1 / \omega c)$$

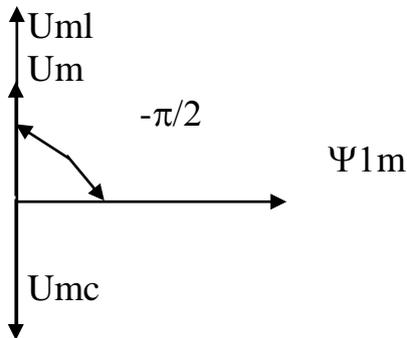
Где $L = \sqrt[3]{4/3a} I_{1m}$ является нелинейной индуктивностью катушки. Так как $U_m > 0$ как амплитуда, то знак “минус” относится к случаю $1/\omega c > \omega L$ и

знак “плюс” к случаю $\omega L > 1/\omega c$, т.е. $\sin \theta_1 = \pm 1$ $\theta_1 = \pm \pi/2$

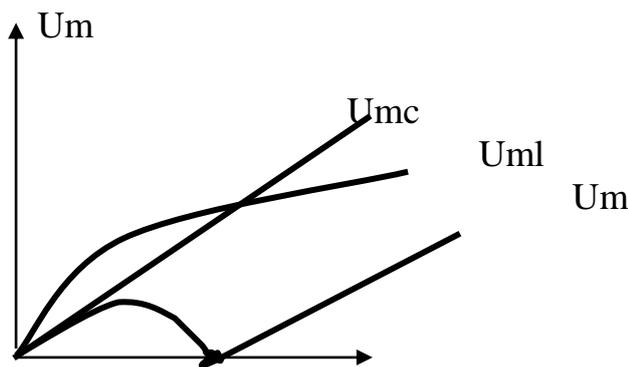
Векторная диаграмма для этого случая представлена на рисунке



При $\sin \theta_1 = -1$ $U_{mL} > U_{mc}$; т.е. $\omega L > 1/\omega c$



На основании последнего уравнения построены зависимости U_{mL} , U_{mc} , U_m от амплитуды тока I_m . Получены характеристики феррорезонанса методом эквивалентных синусоид.



В ряде случаев важным является определение самых высших гармоник.

Делители частоты.

В таком случае необходимо рассмотрение действительных несинусоидальных кривых тока и напряжения. Такая задача возникает, если мы хотим воспользоваться наличием высших гармоник в нелинейных цепях с целью умножения частоты.

Умножение частоты представляет собой преобразование частотного спектра и может быть осуществлено с использованием нелинейных элементов. Для получения достаточно высокого коэффициента полезного действия при таком преобразовании частоты целесообразно воспользоваться нелинейными элементами в которых потери энергии невелики. Таковыми могут быть, например, нелинейные индуктивные и емкостные элементы. Задача умножения частоты состоит в преобразовании частоты подводимого сигнала ω в n раз большую частоту $n\omega$, где n — целое число, превышающее единицу.

В симметричных многофазных системах гармоники, порядок которых равен или кратен числу фаз n , образуют симметричную систему нулевой последовательности. Остальные гармоники образуют симметричные системы прямой или обратной последовательности. Возьмем n одинаковых катушек с ферромагнитными сердечниками и соединим их обмотки в звезду без нейтрального провода. При питании этих обмоток от источника синусоидального симметричного n -фазного напряжения прямой последовательности вследствие нелинейности характеристик катушек в кривых тока появятся высшие гармоники. Однако гармоник, порядок которых равен или кратен n , в кривых тока не будет, так как они, образуя систему нулевой последовательности, могут замыкаться только по нейтральному проводу, который в данном случае отсутствует. Эти гармоники появляются в кривых магнитного потока сердечников и, соответственно в кривых фазовых напряжений на обмотках сердечников. Если теперь наложить на все сердечники одинаковые вторичные обмотки соединить их последовательно, то ЭДС гармоник, порядок которых равен или кратен " n ", сложатся арифметически, основные же гармоники ЭДС во вторичных обмотках в сумме дадут нуль.

Таким образом, на вторичных зажимах частота напряжения будет в “ n ” раз превышать частоты напряжения первичной цепи, т.е. мы получаем умножение частоты в “ n ” раз.” n ”-фазная система преобразуется в однофазную, т.е. происходит уменьшение числа фаз в “ n ” раз.

Вопросы для самопроверки.

1. В чём заключается сущность метода гармонического баланса?
2. Рассмотреть пример отыскания периодического решения методом гармонического баланса для последовательной цепи, содержащей катушку индуктивности с ферромагнитным сердечником и линейную ёмкость.
3. Как получить умножение частоты в нелинейных цепях?

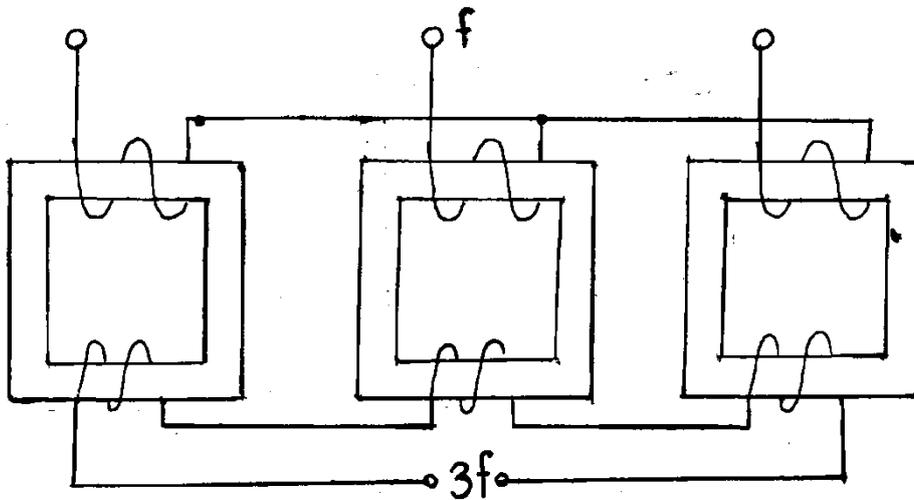
Лекция 50. Образование высокочастотных колебаний от частоты источника электроэнергии.

План:

1. Образование высокочастотных колебаний.
2. Умножители частоты. Утроение частоты.

Образование высокочастотных колебаний.

На рисунке изображены три одинаковых однофазных трансформатора, первичные обмотки которых соединены в звезду и образуют симметричную трехфазную систему. Вторичные обмотки образуют незамкнутый треугольник.



Сердечники всех трансформаторов насыщены. Нулевой провод отсутствует и сумма токов, протекающих в каждой фазе в любой момент времени, равно 0.

Пусть ток в 1 фазе

$$i_{n1} = I_{nm} \sin(\omega t + \psi_n)$$

Где n - гармоника тока в первичной обмотке первого трансформатора

$$i_{n2} = I_{nm} \sin[\omega(t + T/3) + \psi_n] = I_{nm} \sin[\omega t + 2\pi n/3 + \psi_n]$$

Где n - гармоника тока в первичной обмотке второго трансформатора

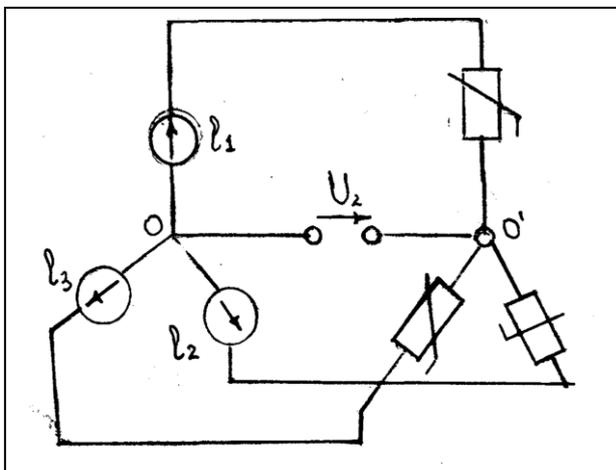
$$i_{n3} = I_{nm} \sin[\omega(t + 2T/3) + \psi_n] = I_{nm} \sin[\omega t + 4\pi n/3 + \psi_n]$$

n - гармоника тока в первичной обмотке третьего трансформатора.

Если $n=3$ то фазовые углы токов равны 2π , т.е. все три тока n -х гармоник находятся в фазе. Но их сумма должна быть равна трехкратному значению тока в одной обмотке и равна 0. Это невозможно т.к. нулевой провод отсутствует. Таким образом, ток третьей гармоники и гармоник, кратным 3, очевидно отсутствует. Ток содержит наряду с основной частотой прежде всего пятую и седьмую гармоники, которыми с основной можно пренебречь. Поэтому ток можно рассматривать, как синусоидальный. Фазовые потоки несинусоидальные и содержат третью гармонику. Третья гармоника содержится также в ЭДС, которая наводится во вторичных обмотках.

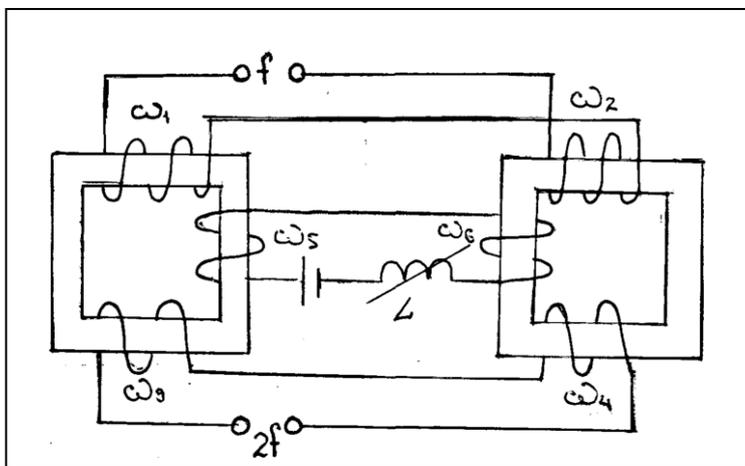
ЭДС вторичных обмоток складываются и ЭДС на выходе равна утроенному значению. Следует отметить, что хотя первичные фазовые напряжения несинусоидальны, их разность линейные напряжения синусоидальны.

Другая схема умножения частоты.



Три нелинейных элемента соединены звездой с выведенной нулевой точкой. Так как токи в системе при отсутствии нулевого провода не содержат гармоник, частоты которых кратны трем, и практически синусоидальны, то напряжения на нелинейных элементах содержат высшие гармоники, частоты которых кратны трем. При синусоидальной ЭДС

между точками 0 и 0' возникает напряжение U_2 , которое в основном содержит компонент напряжения утроенной частоты. В качестве нелинейных элементов могут быть использованы индуктивные, емкостные и активные сопротивления.



Умножители частоты. Утроение частоты.

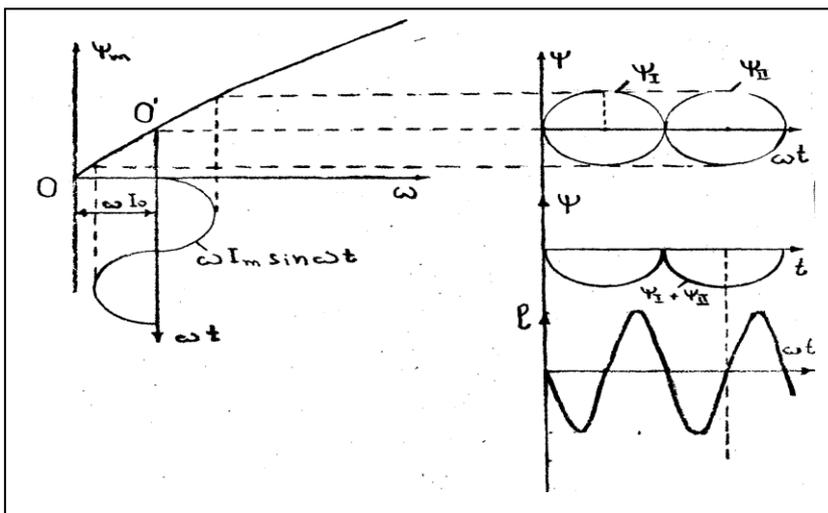
Удвоитель частоты построен на двух катушках с ферромагнитными сердечниками. На сердечники намотано по три обмотки, из которых: обмотки первичной цепи w_1 и w_2 соединены встречно, включаются на переменное напряжение частоты $f = 50$ Гц, обмотки вторичной цепи w_3 и w_4 , соединённые согласно, подключаются к источнику постоянной Э.Д.С. Нетрудно убедиться в том, что при таком соединении обмоток w_1, w_2, w_3 , и w_4 их намагничивающие силы за первую половину периода переменного тока в одном сердечнике совпадают по направлению, в другом – направлены встречно, за вторую половину периода картина измениться на обратную.

Индуктивность L_0 , присутствующая в цепи подмагничивания, служит для гашения высших гармоник, наводимых в обмотках w_5 , и w_6 . Напряжение холостого хода трансформатора на входных зажимах мало отличается от Э.Д.С., индуцируемой в первичной обмотке

$$U_m = E = 4K_f f \psi_m = 4,444 f \psi_m$$

где K_f – коэффициент формы кривой, для синусоиды $K_f = 1,11$

f – частота, ψ_m – амплитуда потокосцепления.



Отложив намагничивающую силу $w_5 F_0$ строим кривую

намагничивающей силы обмотки $w_1 - w_1 F_1 m \sin \omega t$. В результате получаем кривую $\psi_1 = f(\omega t)$ и $\psi_2 = f(\omega t)$, т.к. кривые ψ_1 и ψ_2 будут сходны на угол π из за указанного выше включения обмоток w_1, w_2, w_5 , и w_6 . Потокосцепление ψ_1 и ψ_2 несинусоидальные, причём кривые несимметричны относительно оси абсцисс. Следовательно, они содержат в общем случае постоянную составляющую основной частоты и высшие гармоники чётного и нечётного порядка. Представим в виде рядов Фурье потокосцепления ψ_1 и ψ_2 с учётом, что

$$\psi_{2(\omega t)} = \psi_{(\omega t + \pi)}$$

$$\psi_1 = \psi'_0 + \psi_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + \psi_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \psi_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \psi_{4m} \sin(4\omega t + \psi_4) + \dots$$

$$\psi_2 = \psi'_0 - \psi_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + \psi_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) - \psi_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \psi_{4m} \sin(4\omega t + \psi_4) + \dots$$

Потокосцепление со всей первичной цепью удвоителя, состоящей из обмоток $k W_1$ и W_2 , включенных встречно, равно:

$$\psi_1 = \psi_1 - \psi_2 = 2[\psi_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + \psi_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \psi_{5m} \sin(5\omega t + \psi_5) + \dots]$$

Потокосцепление со всей вторичной цепью при согласном включении обмоток w_3 и w_4

$$\psi_2 = \psi_1 + \psi_2 = 2[\psi'_0 + \psi_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \psi_{4m} \sin(4\omega t + \psi_4) + \psi_{6m} \sin(6\omega t + \psi_6) + \dots]$$

Переменная составляющая потокосцепления со всей вторичной цепью равна

$\psi'_1 = \psi_2 - 2\psi'_0 = 2[\psi_{2m}\sin(2\omega t + \psi_2) + \psi_{4m}\sin(4\omega t + \psi_4) + \psi_{6m}\sin(6\omega t + \psi_6) + \dots]$ По потокосцеплениям ψ_1 и ψ_2 построим кривые ψ_1 и ψ_2 . В первом случае получим синусоидальную кривую ψ_1 , чего и следовало ожидать, т.к. по условию U на зажимах всей первичной цепи удвоителя синусоидально, следовательно, синусоидальным должен быть и результирующий магнитный поток. Заключаем что $\psi_{3m} = \psi_{5m} = \psi_{1m} = 0$, т.е. нечётные гармоники отсутствуют и $\psi_1 = 2\psi_{1m}\sin(\omega t + \psi_{1m})$

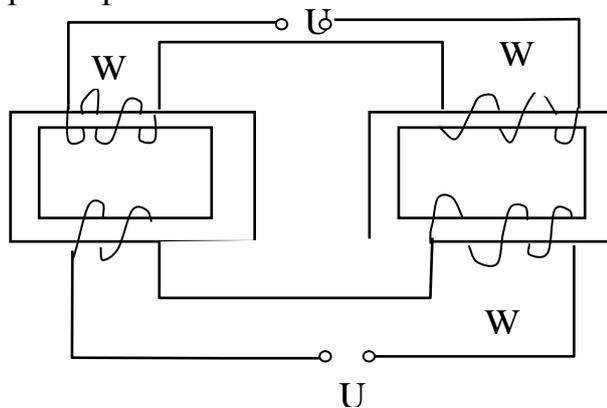
Переменная составляющая, потокосцепления $\Psi'_2 = \Psi_2 - 2\Psi'_0 = \Psi_1 + \Psi_2 - 2\Psi'_0$ содержит чётные гармоники, основной гармоникой является вторая и на выходе удвоителя получаем напряжение двойной частоты $2f$.

$$e_2 = -d\Psi'_2 / dt = -2 [2\omega\psi_{2m}\cos(2\omega t - \psi_2) + 4\omega\psi_{4m}\cos(4\omega t + \psi_4) + 6\omega\psi_6 m \cos(6\omega t - \psi_6) \dots]$$

Чётные гармоники, порядок которых больше двух, вызывает некоторые отклонения кривой Э.Д.С. e_2 от синусоидальной формы.

Умножение частоты с применением насыщенной магнитной цепи.

На рисунке показана схема утроителя частоты, состоящая из двух трансформаторов.



Первый трансформатор из-за наличия воздушного зазора имеет линейную характеристику $\Phi(i)$, а характеристика второго трансформатора обладает явно выраженной нелинейной зависимостью $\Phi(i)$. К входным обмоткам трансформаторов, содержащих одинаковое число витков, где и соединенных последовательно приложено напряжение $U_1 = U_{m1}\cos\omega t$

Очевидно

$$U_1 = W_1 \frac{d\phi_1}{dt} + W \frac{d\phi_2}{dt} = U_{m1} \cos \omega t$$

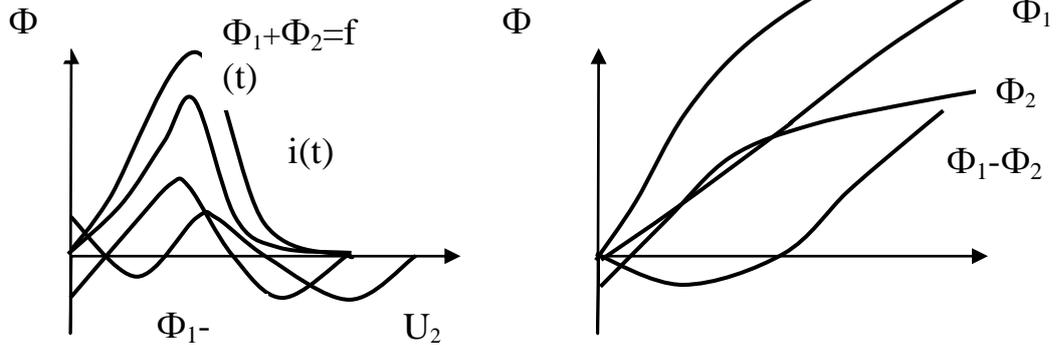
Отсюда следует

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = U_{m1}/X_{01}\omega_1 \sin \omega t$$

В данном случае ради простоты предполагается, что выходные обмотки также имеют одинаковое число витков W_2 и включены взаимно противоположно, так что

На рисунке показаны зависимости $\Phi_1 + \Phi_2 = f(i_1)$ и $\Phi_1 - \Phi_2 = g(i_1)$

$$U_2 = W_2 \frac{d\phi_1}{dt} - W_2 \frac{d\phi_2}{dt} = W_2 \frac{d}{dt} (\Phi_1 - \Phi_2) \quad \Phi_1 + \Phi_2$$



Характеристику $\Phi_1 - \Phi_2 = g(i_1)$ можно аппроксимировать полиномом Чебышева третьего порядка, что позволяет осуществить умножение частоты. На этом же рисунке представлены графики изменения суммы потоков $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, тока i_1 , разности потоков $\Phi_1 - \Phi_2$ и выходного напряжения от времени. График $\Phi_1 - \Phi_2 = g(i_1)$ в зависимости от соотношения витков вторичных обмоток может принимать различный вид.

Литература:

1. Л.Р.Нейман; К.С.Демирчян "Теоретические основы электротехники" т.2 "энергия" Москва 1981 г. стр. 81-124

2. Бессонов Л.А. "Теоретические основы электротехники". Высшая школа 1978 г. стр.247-322

Значащие слова:

1. Гармоника колебаний – одна из собственных частот колебательной системы.
2. Спектр колебаний – совокупность гармонических колебаний, на которые можно разложить данное сложение колебаний.
3. Анализ – метод установление связи между физическими величинами.
4. Метод гармонического баланса – метод, основанный на том, что искомая величина представляется в виде периодической функции с неизвестными коэффициентами и подставляется в уравнение цепи. Неизвестные определяются приравниванием коэффициентов при одинаковых гармонических составляющих в левой и правой частях уравнения.

5. Метод гармонической линеаризации – заключается в том, что при воздействии на нелинейный элемент гармонического сигнала в отклике учитывается только основная гармоника.
6. Ферромагнитный утроитель частоты – устройство, позволяющее преобразовать частоту напряжения первичной цепи в 3 раза.
7. Ферромагнитный удвоитель частоты – устройство состоящая из ферромагнитных элементов, позволяющее преобразовать первичное напряжение с частотой f во вторичное напряжение с частотой $2f$.
8. Чётные гармоники – гармоники кратные двум.
9. Умножитель частоты – устройство предназначенное для увеличения в целом число раз частоты подводимых к нему электрических колебаний.
10. Делитель частоты - устройство, предназначенное для получения на выходе схемы синусоидального колебания с частотой в целое число раз меньше, чем напряжение входного сигнала.

Вопросы для самопроверки.

1. На каком принципе основано умножение частоты с помощью ферромагнитных элементов?
2. Устройство и принцип действия ферромагнитного утроителя частоты.
3. Принцип действия и устройство ферромагнитного удвоителя частоты.

Лекция 51. Синтез электрических цепей.

План:

1. Определение фазовой плоскости.
2. Интегральные кривые, фазовая траектория и предельный цикл.
3. Изображение простейших процессов на фазовой плоскости.
4. Изоклины.
5. Особые точки.
6. Построение интегральных кривых при помощи семейства изоклин.
7. Устойчивый и неустойчивый предельные циклы.
8. Качественное исследование процессов в нелинейных электрических цепях при помощи фазовой плоскости.

Определение фазовой плоскости и краткая характеристика областей ее применения для исследования переходных процессов в нелинейных цепях .

Качественное исследование различных процессов в электрических цепях , описываемых дифференциальными уравнениями первого и в особенности второго порядка , производится в ряде случаев при помощи фазовой плоскости .

Фазовой плоскостью называется плоскость , по оси абсцисс которой откладывается исследуемая величина (назовем ее x) , а по оси ординат - производная от исследуемой величины $(dx/dt) = y$.

Под x понимают либо ток , либо напряжение , либо заряд , либо индукцию. Любому сочетанию x и y исследуемой цепи соответствует вполне определенная точка фазовой плоскости . Для качественного исследования процессов в электрических цепях , описываемых уравнениями третьего порядка применяют трехмерное фазовое пространство . На одной оси декартовой системы этого пространства откладывают значение функции x , на другой - (dx/dt) , на третьей - (d^2x/dt^2) .

Качественные исследования - выявление общих свойств исследуемой цепи без интегрирования нелинейного дифференциального уравнения .

Под общими свойствами понимают особое выяснение зависимости характера переходного процесса от начальных условий , выяснение возможности возникновения в схеме автоколебаний , резонансных явлений , автомодуляции , а также исследование устойчивости перечисленных режимов и режима равновесия . Фазовая плоскость применяется для исследования процессов в электрических цепях , содержащих источники постоянной Э.Д.С. и не содержащих источников периодической Э.Д.С. Однако фазовая плоскость может быть использована и для исследования процессов в цепях , содержащих источники синусоидальной (и постоянной) Э.Д.С. , если предварительно перейти от уравнений , составленных для мгновенных значений , к уравнениям для медленно меняющихся составляющих.

Интегральные кривые , фазовая траектория и предельный цикл .

Зависимость $y = f(x)$, полученная из дифференциального уравнения системы, определяет семейство кривых на фазовой плоскости соответствующих различным значениям постоянной интегрирования .

Кривые $y = f(x)$, соответствующие различным начальным условиям , называют интегральными кривыми .

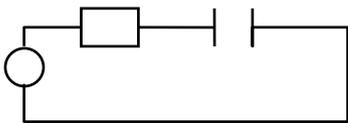
Начальное положение изображающей точки на фазовой плоскости определяется значениями x и $(dx/dt)=y$ при $t = 0$.

Интегральная кривая , проходящая через точку фазовой плоскости с заданными начальными условиями , называется фазовой траекторией . Вид фазовой траектории зависит от конфигурации схемы , от характера нелинейности и от соотношения между параметрами . Если процесс в цепи является периодическим , то через интервалы времени , равные периоду процесса соответствующие друг другу значения x и $(dx/dt) = y$ повторяются и фазовая траектория в этом случае является замкнутой кривой . Замкнутая фазовая траектория называется предельным циклом .

Если же процесс является непериодическим , то фазовая траектория представляет собой незамкнутую кривую .

Изображение простейших процессов на фазовой плоскости .

Требуется изобразить на фазовой плоскости переходной процесс в схеме .

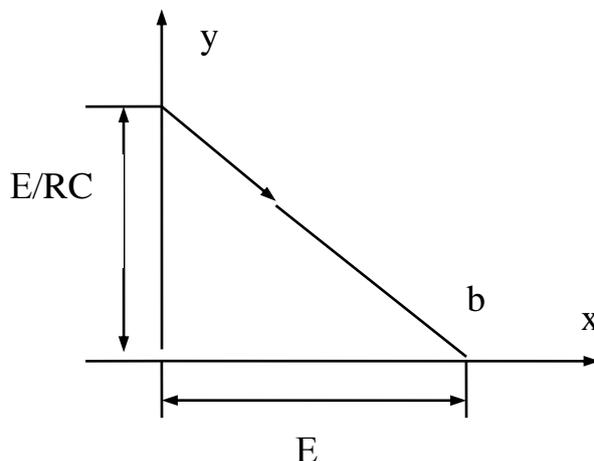


В уравнении цепи $Ri + U_c = E$, вместо i подставим $C(dU_c/dt)$, получим

$$RC(dU_c/dt) + U_c = E$$

положим $U_c = x$, $(dU_c/dt) = y$, тогда $y = (E - x) / RC$

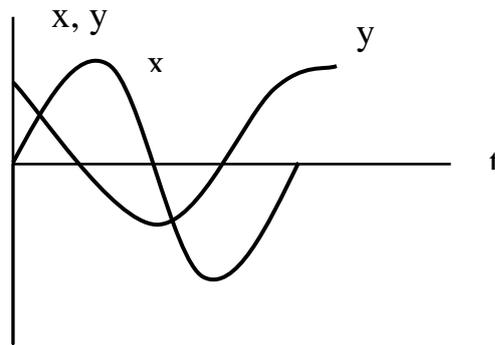
Последнее уравнение характеризует прямую ab . Эта прямая и является траекторией рассматриваемого процесса . Точка b является точкой равновесия .



В качестве второго примера рассмотрим изображение синусоидального колебания $i = I_m \sin(\omega t)$. Обозначим $i = x$, $y = (dx/dt) = \omega I_m \cos \omega t$

$$x = I_m \sin \omega t$$

$$y = \omega I_m \cos \omega t$$



Поделим первое уравнение на I_m , второе - на ωI_m затем возведем в квадрат полученные уравнения и сложим их. Будем иметь уравнение эллипса

$$(x/I_m)^2 + (y/\omega I_m)^2 = 1$$

Следовательно преобразованием синусоидального процесса (фазовой траектории) на фазовой плоскости будет эллипс . На рис.1 изображено несколько эллипсов соответствующих синусоидальным колебаниям с различными условиями . Направление движения изображающей точки показано стрелкой . В верхней полуплоскости $y = (dx/dt) > 0$; следовательно, в верхней полуплоскости изображающая точка движется в сторону увеличения координаты x . В нижней полуплоскости $y = (dx/dt) < 0$; изображающая точка движется в сторону уменьшения координаты x . В целом можно сказать, что перемещение изображающей точки на фазовой плоскости происходит всегда в направлении движения часовой стрелки.

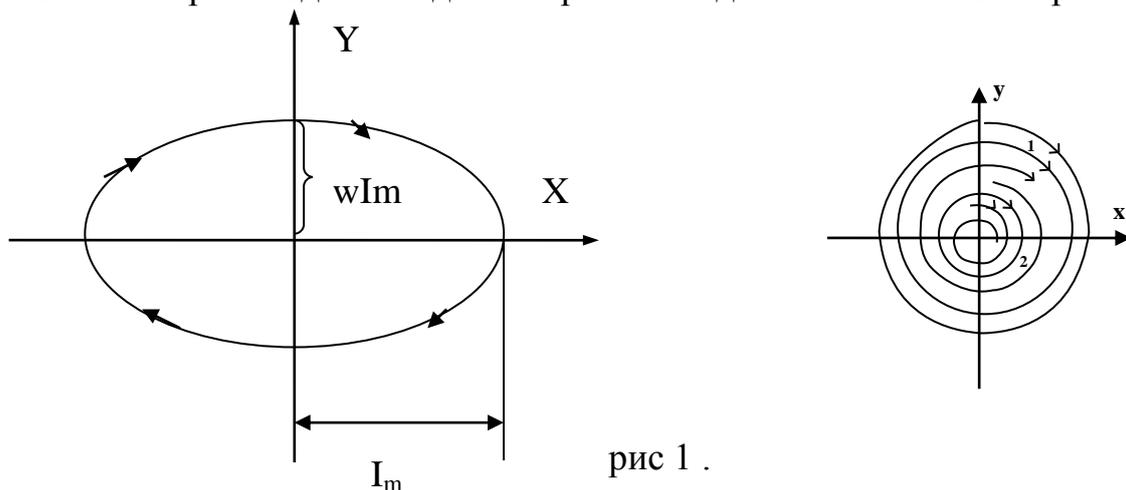


рис 1 .

Изображением затухающего синусоидального процесса - ему соответствуют комплексно - сопряженные с отрицательной действительной частью корни характеристического уравнения второго порядка - является свертывающаяся спираль .

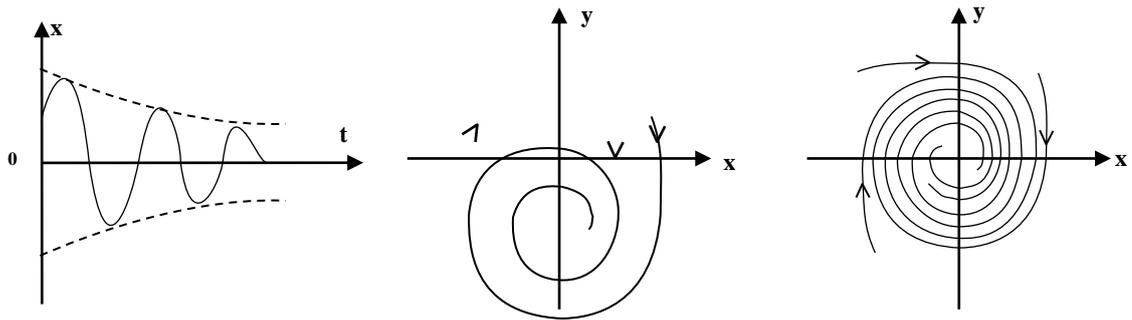


рис 2 .

На рис 2. представлено несколько свертывающихся спиралей , соответствующих затухающим синусоидальным колебаниям с различными начальными условиями .

Изображением нарастающего синусоидального колебания - корни характе

ристического уравнения комплексно сопряженные и имеют положительную действительную часть - является раскручивающая спираль .

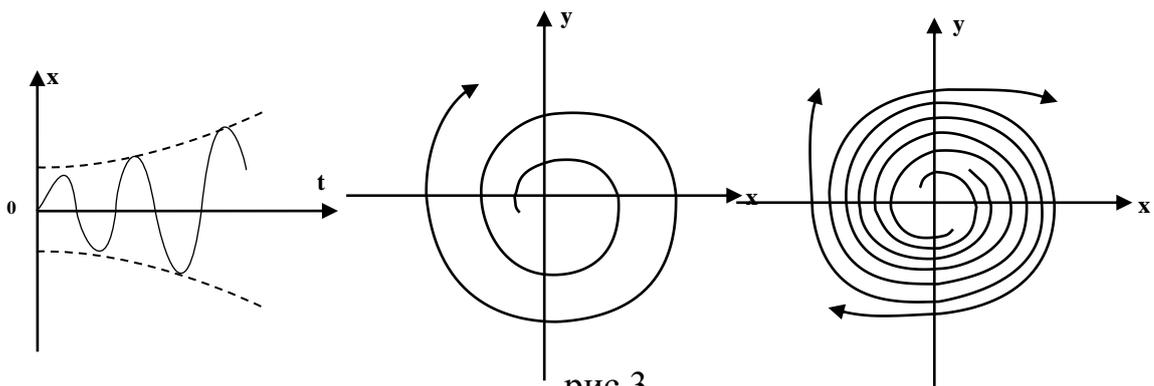


рис 3.

На рис3. дано несколько раскручивающихся спиралей для различных начальных условий .

На рисунке изображены две кривые - пунктирная и сплошная - для затухающего апериодического процесса в цепи второго порядка (корни характеристического уравнения вещественны и отрицательны) .Кривые рис 4. Изображают затухающие апериодические процессы в цепи второго порядка при различных начальных условиях .

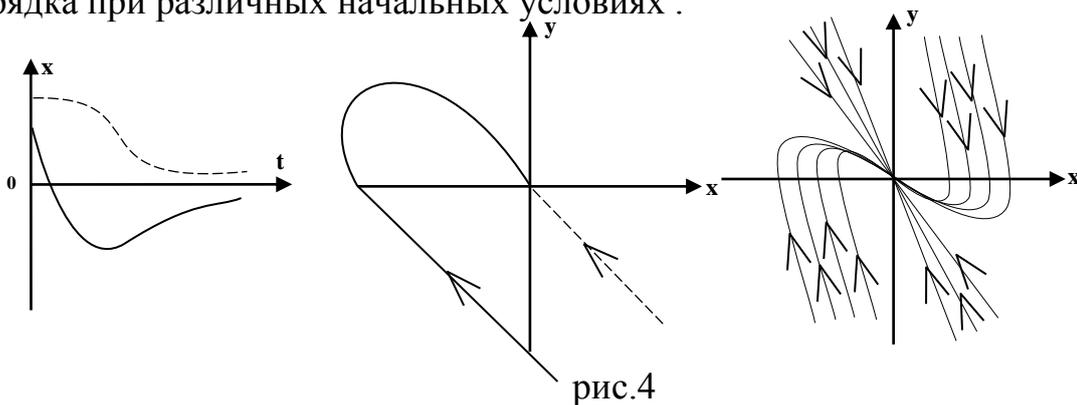


рис.4

Изображение нарастающего аperiodического процесса в цепи второго порядка (корни характеристического уравнения вещественны и положительны) даны на рисунке . На рис 5. Кривые соответствуют нарастающим аperiodическим процессам в цепи второго порядка при различных начальных условиях .

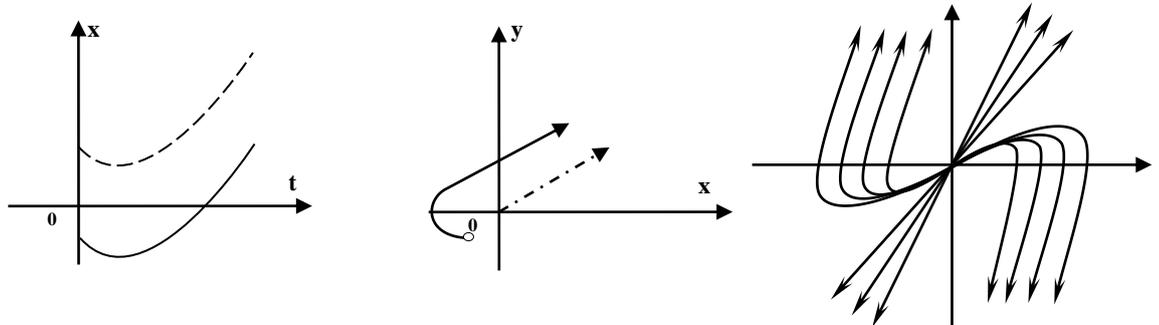


рис.5

Если корни характеристического уравнения второго порядка вещественны и имеют разные знаки, то исследуемая величина будет x с увеличением времени t будет либо сразу расти, либо начнёт увеличиваться после некоторого спада.

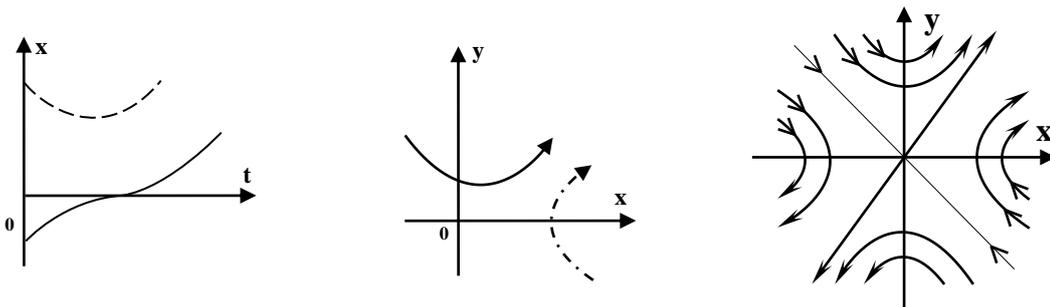


рис.6

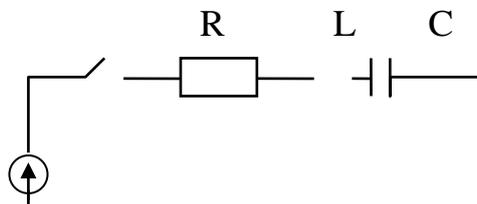
Кривые рис. 6 отражают процессы в цепи второго порядка при самых различных начальных условиях, когда корни характеристического уравнения вещественны и имеют разные корни.

Изоклины. Особые точки. Построение интегральных кривых при помощи семейства изоклин.

Под изоклиной (линией равного наклона) понимают геометрическое место точек фазовой плоскости, для которых dy/dx есть некоторое постоянное число. Таким образом, для одной изоклины dy/dx есть некоторое число, скажем a , для другой изоклины a_2 и т.д.

Выведем уравнение для построения семейства изоклин для линейной цепи . С этой целью запишем дифференциальное уравнение цепи:

$$L(di/dt) + Ri + 1/C \int i dt = U$$



Продифференцируем его по времени, заменим i на x , di/dt на y . Учтя, что $(d/dt)*(di/dt) = (d/dt)y = (dy/dx)(dx/dt) = y(dy/dx)$ получим.

$$Ly(dy/dx) + Ry + (x/C) = 0 \quad (a)$$

Уравнение (a) используем дважды и притом в различных целях. Сначала используем его при рассмотрении вопроса об особых точках на фазовой плоскости, а затем - при рассмотрении семейства изоклин.

Для рассмотрения вопроса об особых точках на фазовой плоскости разрешим уравнение (a) относительно dy/dx . Будем иметь

$$dy/dx = -(R/L) - (x/y)(1/LC)$$

В начале координат при $x = 0$ и $y = 0$

$dy/dx = -(R/L) - (0/0)(1/LC)$, т.е. dy/dx принимает неопределенное значение.

Точки, в dy/dx которых принимает неопределенные значения называют особыми точками. Если построения на фазовой плоскости производятся для мгновенных значений, то особые точки соответствуют точкам равновесия системы. Условились квалифицировать особые точки по виду интегральных кривых, окружающих эти точки:

Начало координат рис1. - особая точка, именуемая центром.

Начало координат рис2. - устойчивый фокус.

рис3. - неустойчивый фокус.

рис4. - особая точка, определяется как устойчивый узел

рис5. - неустойчивый узел.

рисб. - седло.

Используем уравнение (a) для построения семейства изоклин. С этой целью разрешим уравнение (a) относительно y . Получим

$$y = -x / (R + L(dy/dx)) \quad (б)$$

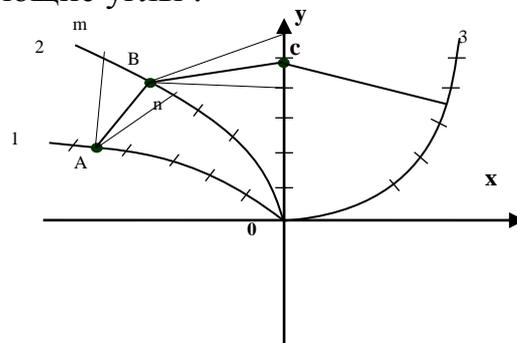
Для отыскания точек фазовой плоскости, принадлежащих первой изоклине, в уравнении (б) вместо dy/dx подставляем a_1

$$y = -x / (R + L a_1 C) \quad (в)$$

Придаем x различные значения, и из уравнения (в) соответствующие им значения y . Совокупность полученных точек дает изоклину, для которой $(dy/dx) = a_1$. Затем полагаем $(dy/dx) = a_2$ и таким же путем строим вторую изоклину и т.д.

Значение коэффициента a (с учетом масштабов по осям фазовой плоскости) численно равно тангенсу угла наклона с осью абсцисс касательной к любой интегральной кривой, принадлежащие данной изоклине.

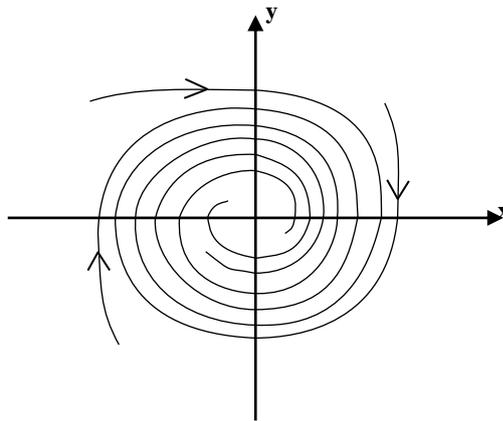
Если масштабы по осям x и y одинаковы, то любая интегральная кривая пересекает первую изоклину под углом 45° к оси абсцисс. Черточки на изоклинах и дают соответствующие углы.



Устойчивый и неустойчивый предельные циклы .

Устойчивым предельным циклом называют предельный цикл , на который навиваются расположенные внутри и вне цикла близлежащие интегральные кривые. Физически он соответствует устойчивому периодическому движению . Пример устойчивого предельного цикла – кривая 1.

Кривая 1.



Неустойчивым предельным циклом называется такой предельный цикл , с которого раскручивается (удаляются) вблизи расположенные интегральные кривые . Физически он соответствует неустойчивому периодическому процессу . Кривая 2 - пример неустойчивого предельного процесса .

Качественное исследование процессов.

в нелинейных электрических цепях при помощи фазовой плоскости.

Построения на фазовой плоскости могут проводиться:

1. Для мгновенных значений величин;
2. Для огибающих амплитуд первой (высшей, низшей) гармоники;
3. Для медленно меняющихся средних значений.

Для мгновенных значений построения проводятся с целью исследования:

- а. устойчивых точек равновесия;
- б. возможности возникновения автоколебаний в схеме;
- в. устойчивости возникающих автоколебаний и определения их амплитуды
- г. влияния начальных условий на возникающие в цепи процессы.

Допустим, что для некоторой схемы для мгновенных значений построены интегральные кривые. Какие заключения качественного порядка могут быть сделаны в отношении возможных процессов в этой системе при том значении параметров ее , для которых эти кривые построены .

В системе возможно лишь одно устойчивое состояние равновесия (начало координат). На фазовой плоскости есть один устойчивый предельный цикл (кривая 1) и один неустойчивый (кривая 2) . Если

начальные условия в системе таковы, что изображающая точка, характеризующая собой начальные значения x и $x = y$ попадает внутрь неустойчивого предельного цикла, то в системе возникает затухающий колебательный процесс, в результате которого система придет в состояние устойчивого равновесия. Если же начальные условия таковы, что изображающая точка попадает в область, находящуюся снаружи (вне) кривой 2, то в результате переходного процесса в системе возникнут устойчивые автоколебания - изображающая точка будет двигаться по устойчивому предельному циклу (кривая 1). С помощью фазовой плоскости при исследовании нелинейных электрических цепей могут быть решены следующие вопросы:

1. Исследование влияния начальных условий на характер установившегося или квазиустановившегося процесса;
2. Исследование устойчивости субгармонических колебаний и резонансов на высших гармониках;
3. Исследование устойчивости процессов автомодуляции.

Литература:

1. Л.Р.Нейман; К.С.Демирчян "Теоретические основы электротехники" т.2 "энергия" Москва 1981 г. стр. 156-173
2. Бессонов Л.А. "Теоретические основы электротехники". Высшая школа 1978 г. стр.514-515

Значение слова:

1. Фазовая плоскость – плоскость, координаты точек которой определяются состоянием динамической системы с одной степенью свободы.
2. Качественное исследование – выявление общих свойств исследуемой цепи без интегрирования нелинейной дифференциального уравнения.
3. Интегральные кривые – кривая, изображающая какой-либо интеграл дифференциального уравнения.
4. Фазовая траектория – интегральная кривая, проходящая через точку фазовой плоскости с заданными начальными условиями.
5. Предельный цикл – замкнутая фазовая траектория.
6. Дельта-метод – графический метод построения кривой на фазовой плоскости.
7. Метод Льенара – метод, позволяющий определить графически направление фазовой траектории в каждой точке.
8. Фазовый портрет – совокупность фазовых траекторий.
9. Изоклины (линии равного наклона) – линии вдоль которых функция имеет постоянное значение. Во всех точках какой-либо изоклины направление поля уравнения одно и то же.
10. Особые точки - точки, в которых производная принимает неопределённое значение.
11. Устойчивый узел – особая точка при отрицательных корнях характеристического уравнения $p_1 < 0, p_2 < 0$
12. Неустойчивый узел – особая точка при положительных корнях характеристического уравнения $p_1 > 0, p_2 > 0$
13. Устойчивый фокус – при комплексно-сопряженных корнях $p_1 = \alpha + j\omega_0$ и $\alpha < 0$
14. Неустойчивый фокус - при комплексно-сопряженных корнях $p_1 = \alpha + j\omega_0$ и $\alpha > 0$
15. Седло – неустойчивая особая точка при действительных корнях разного знака.
16. Центр – незатухающие колебания при мнимых корнях $p = \pm j\omega_0$

17. Автоколебания – колебания в нелинейной цепи с элементами, имеющими спадающий участок вольтамперной характеристики, или в цепях с обратной связью.
18. Устойчивый предельный цикл - предельный цикл, на который навиваются расположенные внутри и вне цикла ближайшие интегральные кривые.
19. Неустойчивый предельный цикл - предельный цикл, с которого раскручиваются (удаляются) интегральные кривые.
20. Квазиустановившийся процесс – процесс, за время распространения которого в пределах системы её состояния не успевает измениться.
21. Субгармонические колебания – колебания на частотах, составляющих доли частоты источника Э.Д.С.

Вопросы для самопроверки:

1. Дать определение фазовой плоскости.
2. В каких областях применяется фазовая плоскость для исследования переходных процессов в нелинейных цепях?
3. Что называется интегральной кривой, фазовой траекторией, предельным циклом?
4. Как изображается фазовая плоскость в линейной последовательной цепи R,C ?
5. Как изображается синусоидальное колебание на фазовой плоскости?
6. Каким будет изображением затухающего, нарастающего синусоидальных колебаний на фазовой плоскости?
7. Как изображаются апериодические процессы в цепи второго порядка на фазовой плоскости?
8. Что понимают под изоклиной?
9. Каков фазовый портрет затухающих колебаний.
10. Каков фазовый портрет нарастающих синусоидальных колебаний?
11. Как влияют начальные условия на фазовый портрет?
12. Какие составляются уравнения для построения семейства изоклин?
13. Какие особые точки существуют?
14. Что называется устойчивым и неустойчивым предельным циклом?
15. Для чего проводится качественное исследование процессов в нелинейных электрических цепях при помощи фазовой плоскости, и с какой целью?

Лекция 52. Электростатическое поле.

План:

1. Введение
2. Электрический заряд.
3. Напряженность.
4. Безвихревой характер электростатического поля.
5. Электрический потенциал.
6. Графическое изображение полей.

Введение

В основе теории электромагнетизма лежит представление об электромагнитном поле. В простейшем случае термин “поле” употребляется, когда надо сопоставить каждой точке пространства некоторую физическую характеристику. В этом случае говорят о “поле температур” материальной среды, или, например, о “поле скоростей” частиц жидкости, газа. В сущности, при этом просто определяются какие-то функции координат и, быть может, времени: температура, скорость и т.п. Подобно этому об электрическом поле можно говорить как о “поле сил”; каждый раз имеется в виду сила, которая будет действовать на единичный положительный точечный заряд, если его поместить в пространство, где действует поле. Понятие поля в этих примерах имеет лишь некоторое описательное значение. Электромагнитное поле характеризуется некоторыми векторными функциями координат и времени. В философском смысле электромагнитное поле следует рассматривать как одну из форм существования материи. Хотя проявление электромагнитных сил в природе люди наблюдали с давних времен, научные понятия в этой области сложились сравнительно недавно; к ним, разумеется, нельзя относить первые представления древних.

В 1784 - 1789 г. были опубликованы работы Шарля Кулона об электрических и магнитных взаимодействиях. Найденный позднее закон Ампера о взаимодействии токов и другие закономерности этого рода идейно близки закону Кулона: действие одного объекта на другой, как полагали исследователи, происходит без всякого участия промежуточной среды, мгновенно. Это так называемый *принцип дальнего действия*, т.е. действия на расстоянии, вошедший в науку вместе с механикой Ньютона.

С именем Майкла Фарадея (1791-1867г.) связано зарождение *принципа близкодействия*, согласно которому взаимодействие осуществляется через посредство среды (в частности вакуума), являющейся “вместилищем” электромагнитного процесса; при этом возникает вопрос о времени передачи взаимодействия. Исключительный вклад в науку было суждено внести Джеймсу Клерку Максвеллу (1831-1879 г.). В современной физике уравнения Максвелла являются фундаментальными законами теории электромагнетизма. Максвеллу принадлежит теоретический вывод о существовании электромагнитных волн - вместе с гипотезой об

электромагнитной природе света. Этот вывод явился результатом анализа, отправной точкой которого были физические идеи Фарадея. Возбуждение электромагнитных волн в лаборатории и их экспериментальное исследование было осуществлено Генрихом Герцем (1857-1894 г.). Герц предвосхитил многое из того, что мы относим теперь к радиотехнической электродинамике. Радиотехника явилась опытной базой теории электромагнетизма, основывающейся на уравнениях Максвелла, а также стимулятором ее дальнейшего развития. Вместе с радиотехникой появилось понятие радиоволн в природных условиях над Землей и в космосе. Проблема излучения и приема электромагнитной энергии, переносимой радиоволнами, привела к теории антенн.

В первых опытах длина радиоволн измерялась метрами. В начале века, когда радиосвязь приобрела уже практическое значение, использовались главным образом длинные волны (длиной порядка километра). Но начиная с двадцатых годов, в радиотехнической практике осваиваются волны все более короткие. Возникшая в военное время радиолокация дала этому процессу мощный толчок - в технику вошли волны дециметровые, сантиметровые, а затем и миллиметровые. Эта практика изменила много как в самой радиотехнике, так и в ее теоретических основах. Дело в том, что ранее размеры элементов радиоаппаратуры оставались намного меньше длины волны. Благодаря этому основные представления электротехники и используемая ею теория цепей были пригодны как аппарат расчетов, а радиотехническая аппаратура во многом напоминала электротехническую. Но такое положение не могло сохраниться, когда понадобилось создавать радиотехнические элементы, сравнимые по размерам с длиной волны. Что касается элементов радиоаппаратуры на сантиметровых и миллиметровых волнах, то принципы их построения далеки от старых электротехнических образцов. Примечательно, например, использование различных волноводов в виде полых металлических труб, диэлектрических стержней и т.п., а также аналогично построенных резонаторов вместо так называемых колебательных контуров, включающих емкостные и индуктивные элементы. Для понимания принципов действия, сознательного применения и конструирования подобных устройств необходимо знание теории электромагнетизма, базирующейся на уравнениях Максвелла.

Благодаря широкому применению оптических квантовых генераторов - лазеров - в радиотехническую практику вошли чрезвычайно короткие волны; размеры соответствующей аппаратуры всегда очень велики в сравнении с длиной волны. В этой области электродинамическая теория пересекается с оптикой.

Задачи теории электромагнетизма, порождаемые радиотехнической практикой, нередко настолько сложны, что только появление современных ЭВМ делает эту теорию средством проектирования аппаратуры, уже автоматизированной.

При изучении электромагнитного поля мы будем рассматривать вначале отдельно неизменное во времени электрическое поле и его взаимодействие с неподвижными заряженными телами, по которым проходит постоянный ток. После освоения методов расчета электростатических и магнитостатических полей переход к рассмотрению законов электромагнитного поля и распространение электромагнитных волн будет менее трудным.

Электрический заряд.

Электрический заряд можно считать бесконечно делимым и пользоваться понятием плотности заряда. Если заряд “q” распределен в пространстве, то объемная плотность заряда:

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

Соответственно заряд:

$$q = \int \rho dv$$

Если заряд “q” распределен по поверхности “S”, то поверхностная плотность заряда:

$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

Заряд можно определить:

$$q = \int_S \sigma dS$$

S

Линейная плотность заряда:

$\tau = dq / dl$, где dl - элемент линии, вдоль которой распределен заряд.

$$q = \int_l \tau dl$$

Два точечных заряда одного знака отталкиваются друг от друга. Сила отталкивания “F” в вакууме определяется законом Кулона:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{R^2}$$

где: q_1 и q_2 - точечные заряды,

k - коэффициент пропорциональности

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 [\text{Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2]$$

ϵ_0 - электрическая постоянная

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

Если заряженные тела находятся в однородной изотропной среде, то:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{\epsilon \cdot R^2}$$

где ϵ - диэлектрическая проницаемость среды

Сила, действующая на заряд q, запишется в векторной форме:

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon R^2} \cdot I_R$$

Напряженность электростатического поля.

Предел отношения силы F , действующей на пробный заряд, к величине этого заряда q , когда он стремится к нулю, называют напряженностью электрического поля:

$$E = \lim_{q \rightarrow 0} F/q$$

Напряженность электрического поля точечного заряда :

$$E = K \frac{q}{\epsilon R^2} \cdot I_R \quad \text{в системе СИ } [E] = [B/m]$$

Сила взаимодействия двух точечных зарядов:

$$F = E \cdot q$$

Если в поле отсутствует пробный заряд q , механическая сила взаимодействия равна нулю, но напряженность E в каждой точке отлична от нуля.

Электрическим смещением или электрической индукцией называют величину D , которая в однородных и изотропных средах пропорциональна напряженности электрического поля.

$$D = \epsilon\epsilon_0 E \quad \text{- в вакууме}$$

$$D = \epsilon_0 E \quad \text{- в системе СИ } [D] = [Кл/м^2]$$

Если поле создается несколькими зарядами, то общая напряженность E в любой точке равна геометрической сумме:

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_n = \sum_{m=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \sum (q/R^2) \cdot I_{Rm}$$

В общем случае электростатическое поле могут возбудить неподвижные объемные, поверхностные и линейные заряды. Разбив объемы V , поверхности S и линии l на элементы dV , dS , dl можно записать:

$$dq_1 = \rho dV$$

$$dq_2 = \sigma dS$$

$$dq_3 = \tau dl$$

, где ρ - объемная, σ - поверхностная, τ - линейная плотность зарядов.

Тогда

$$dE_1 = \frac{dq_1}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1^2} \cdot I_R = \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1^2} \cdot I_R$$

$$dE_2 = \frac{dq_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_2^2} \cdot I_R = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_2^2} \cdot I_R$$

$$dE_3 = \frac{dq_3}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_3^2} \cdot I_R = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_3^2} \cdot I_R$$

Суммируя геометрически вектора dE_1 по V , dE_2 по S , dE_3 по l получим:

$$E = E_1 + E_2 + E_3$$

Это уравнение позволяет вычислить E , если известно распределение зарядов в пространстве.

Вычисление сводится к определению проекций вектора E в такой системе координат, в которой расчеты получаются наиболее простыми.

Безвихревой характер электростатического поля.

Работа, совершенная силами поля при перемещении заряда q из точки 1 в точку 2:

$$A = \int_1^2 F dl = q \int_1^2 E dl$$

Работа сил поля вдоль замкнутой кривой равна нулю. Для этого необходимо доказать, что циркуляция вектора E равна нулю.

$$\int_L E dl = 0$$

В случае точечного заряда:

$$\int_L \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot I_R dl \quad \text{так как}$$

$$I_R dl = dl \cos(R, dl) = dR, \text{ а } \int_L dR/R^2 = 0$$

$$\text{то } \int_L E dl = 0$$

$$\text{Пользуясь теоремой Стокса } \int_L E dl = \int_S \text{rot } E ds = 0$$

$$\text{rot } E = 0$$

Это соотношение выражает основное свойство электростатического поля - оно безвихревое.

Электрический потенциал.

Так как электрическое поле безвихревое ($\text{rot } E = 0$), то можно найти скалярную функцию ϕ , градиент которой, взятый со знаком “+” или “-”, равен вектору напряженности E .

$$\text{grad } \phi = \pm E$$

В теории поля выбирают знак “-”, который указывает на то, что напряженность направлена в сторону убывания ϕ . Скалярная функция ϕ называется потенциальной функцией или просто потенциалом.

Потенциал любой точки :

$$\phi = - \int E dl + \text{const}$$

Постоянная интегрирования определяется заданием точки с нулевым потенциалом. В системе СИ $[\varphi] = [V]$.

Разность потенциалов : $\int_a^b E dl$

$$\varphi_a - \varphi_b = \int_a^b E dl$$

Разность потенциалов не зависит от формы пути интегрирования.

Потенциал поля точечного заряда:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R^2} + \text{const}$$

Потенциал поля неподвижных объемных, поверхностных и линейных зарядов:

$$\varphi = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} + \int_S \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} + \int_L \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0\epsilon R}$$

Зная потенциал, можно найти напряженность E :

$$E = - \text{grad } \varphi$$

В поле объемных зарядов вектор E везде конечен и непрерывен. В поле поверхностных зарядов E конечен всюду, но претерпевает разрыв на поверхности S , по которой распределен заряд. В поле линейных зарядов вектор E обращается в бесконечность на линии L , вдоль которой распределен заряд.

Графическое изображение электростатического поля.

Электростатическое поле графически изображается с помощью эквипотенциальных поверхностей и линий вектора поля. Эквипотенциальные поверхности определяются уравнением $\varphi = \text{const}$. Задавая различные значения постоянной, получают семейство поверхностей. Эквипотенциальные поверхности наносятся так, чтобы разность потенциалов двух соседних поверхностей отличалась на одну и ту же величину.

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi \quad \varphi_3 = \varphi_2 + \Delta\varphi = \varphi_1 + 2 \Delta\varphi$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Delta\varphi = \varphi_1 + n \Delta\varphi$$

Там, где эквипотенциальные поверхности располагаются ближе, напряженность поля больше. Эквипотенциальные поверхности не пересекаются, так как потенциал - функция однозначная. Линии напряженности совпадают с касательной и пересекаются с эквипотенциальными поверхностями под прямым углом. Дифференциальное уравнение линий вектора:

$$[E dl] = 0$$

В декартовой системе:

$$E_y dz - E_z dy = 0 \quad E_z dx - E_x dz = 0 \quad E_x dy - E_y dx = 0$$

Одна из эквипотенциальных поверхностей разбивается на прямоугольные площадки. Размер площадок подбирается таким образом, чтобы поток вектора поля сквозь них имел одну и ту же величину. На чертеж наносится по одной линии вектора на каждую площадку, причем так, чтобы эта линия проходила через центр площадки. В тех областях поля, в которых напряженность больше, линии вектора сгущаются. В электростатическом поле линии вектора E разомкнутые кривые, они начинаются у положительных зарядов и заканчиваются у отрицательных.

Поляризованность диэлектрика и электрическая индукция.

Изменение напряженности электрического поля в диэлектрике в “ε” раз вызывается поляризацией диэлектрика. При наличии внешнего поля диэлектрик перестает быть нейтральным, он поляризуется. Заряды, выявившиеся при поляризации называются свободными. Связанные заряды создают поле, напряженность которого будет направлена противоположно напряженности внешнего поля. Поэтому E уменьшается. Степень поляризации диэлектрика характеризуется вектором поляризованности P.

$P = \epsilon_0 K \epsilon E$, где $K \epsilon$ - диэлектрическая восприимчивость.

Поляризованность P показывает, на сколько электрическая индукция в данной среде отличается от электрической индукции в вакууме.

$$P = D - \epsilon_0 E = \epsilon_0 (\epsilon - 1)E$$

$$K \epsilon = \epsilon - 1$$

В системе СИ $[P] = [Кл/м^2]$ Теорема Гаусса.

Поток вектора электрической индукции D сквозь произвольную замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме свободных зарядов q, расположенных в объеме, ограниченном этой поверхностью.

$$\int_S D ds = \sum q$$

(Теорема Гаусса в интегральной форме) Преобразуем поток вектора электрической индукции по теореме Остроградского:

$$\int_S D ds = \int_V \operatorname{div} D dv$$

В случае объемного распределения заряда:

$$q = \int \rho dv$$

По теореме Гаусса:

$$\int_S D ds = q$$

$$\int_V \operatorname{div} D dv = \int \rho dv$$

Объем V был выбран произвольно, и равенство справедливо для всех его значений. При таком условии:

$$\operatorname{div} D = \rho \quad (\text{Дифференциальная форма теоремы Гаусса})$$

$$\operatorname{div} E = \rho / \epsilon \epsilon_0$$

Источники электрического поля находятся только в тех местах, в которых имеются электрические заряды.

Уравнения Пуассона и Лапласа.

Используем уравнения:

$$\operatorname{div} E = \rho / \epsilon \epsilon_0$$

$E = -\operatorname{grad} \varphi$, подставим E, получим :

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\rho / \epsilon \epsilon_0$$

Обозначим $\operatorname{div} \operatorname{grad} = \nabla^2$, получим $\nabla^2 \varphi = -\rho / \epsilon$ - уравнение Пуассона.

В тех точках поля, в которых нет заряда

$\nabla^2\varphi = 0$ - уравнение Лапласа

Решение может быть записано в виде:

$$\varphi = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0\epsilon R}$$

Введение понятия потенциала облегчает расчет электростатических полей. Зная “ φ ” можно определить:

$$E = - \text{grad } \varphi$$

Непосредственное определение E поля из уравнения

$$\text{div } E = \rho/\epsilon\epsilon_0$$

свелось бы к нахождению трех скалярных функций, соответствующих трем проекциям E , что значительно сложнее.

Литература:

1. Никольский В.В., Никольская Т.И. “Электродинамика и распространение радиоволн” Наука 1991г, Москва стр 72-88
2. Бессонов Л.А. “Теоретические основы электротехники” “Электромагнитное поле” Высшая школа 1989г, стр 5-68.

Значащие слова:

1. Электрический потенциал – скалярная энергетическая характеристика электрического поля, один из потенциалов электромагнитного поля.

2. Потенциал – функция, используемая для описания свойств широкого класса векторных полей.

3. Эквипотенциальная поверхность – поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал.

4. Поляризованность диэлектриков – смещение положительных и отрицательных зарядов диэлектрика в противоположные стороны под действием электрического поля

5. Восприимчивость диэлектрика – характеристика диэлектрика, показывающая его способность поляризоваться в электрическом поле.

6. Поток смещения – поток вектора электрической индукции через некоторую поверхность.

7. Диполь электрический - источник электрического поля, создающий такое поле, распределение которого совпадает с распределением электрического поля, создаваемого системой из двух равных по величине и противоположных по знаку электрических зарядов при условии, что размеры этой системы малы по сравнению с расстояниями от нее до рассматриваемых точек поля.

8. Индуцированный электрический заряд – электрический заряд, возникающий в части нейтрального проводника в результате разделения

имеющихся в нем положительных и отрицательных электрических зарядов.

9. Поляризуемость – способность атомов, молекул и ионов приобретать электрический дипольный момент в электрическом поле.

10. Дипольный электрический момент – вектор, характеризующий электрический диполь, равный произведению заряда диполя на его плечо и направленный вдоль оси от отрицательного заряда к положительному.

11. Потенциальное поле – векторное поле, циркуляция которого по произвольному замкнутому контуру равна 0.

Вопросы для самопроверки.

1. Какой физический смысл придается потенциалу электростатического поля?
2. Какая интегральная и дифференциальная связь существует между напряженностью E и потенциалом φ ?
3. Какие поля называются. потенциальными ?
4. Что понимают под картиной поля?
5. В чем отличие свободных зарядов от связанных?
6. Каков смысл вектора P ?
7. Что послужило основанием для введения вектора D ?
8. Дайте физическое толкование градиента и дивергенции.

Лекция 53. Теорема Гаусса.

План:

1. Поляризованность диэлектрика и электрическая индукция.
2. Уравнения Пуассона и Лапласа.

Поляризованность диэлектрика и электрическая индукция.

Изменение напряженности электрического поля в диэлектрике в “ε” раз вызывается поляризацией диэлектрика. При наличии внешнего поля диэлектрик перестает быть нейтральным, он поляризуется. Заряды, выявившиеся при поляризации называются свободными. Связанные заряды создают поле, напряженность которого будет направлена противоположно напряженности внешнего поля. Поэтому E уменьшается. Степень поляризации диэлектрика характеризуется вектором поляризованности P.

$P = \epsilon_0 K \epsilon E$, где $K \epsilon$ - диэлектрическая восприимчивость.

Поляризованность P показывает, на сколько электрическая индукция в данной среде отличается от электрической индукции в вакууме.

$$P = D - \epsilon_0 E = \epsilon_0 (\epsilon - 1)E$$

$K \epsilon = \epsilon - 1$ В системе СИ $[P] = [Кл/м^2]$ Теорема Гаусса.

Поток вектора электрической индукции D сквозь произвольную замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме свободных зарядов q, расположенных в объеме, ограниченном этой поверхностью.

$$\int_S D ds = \sum q$$

(Теорема Гаусса в интегральной форме) Преобразуем поток вектора электрической индукции по теореме Остроградского:

$$\int_V D ds = \int_V \operatorname{div} D dv$$

В случае объемного распределения заряда:

$$q = \int_V \rho dv$$

По теореме Гаусса:

$$\int_S D ds = q$$

$$\int_V \operatorname{div} D dv = \int_V \rho dv$$

Объем V был выбран произвольно, и равенство справедливо для всех его значений. При таком условии:

$$\operatorname{div} D = \rho \quad (\text{Дифференциальная форма теоремы Гаусса})$$

$$\operatorname{div} E = \rho / \epsilon \epsilon_0$$

Источники электрического поля находятся только в тех местах, в которых имеются электрические заряды.

Уравнения Пуассона и Лапласа.

Используем уравнения:

$$\operatorname{div} E = \rho / \epsilon \epsilon_0$$

$E = -\text{grad } \varphi$, подставим E , получим :

$$\text{div grad } \varphi = -\rho/\varepsilon\varepsilon_0$$

Обозначим $\text{div grad} = \nabla^2$, получим $\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon$ - уравнение Пуассона.

В тех точках поля, в которых нет заряда

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad \text{- уравнение Лапласа}$$

Решение может быть записано в виде:

$$\varphi = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$$

Введение понятия потенциала облегчает расчет электростатических полей. Зная “ φ ” можно определить:

$$E = -\text{grad } \varphi$$

Непосредственное определение E поля из уравнения

$$\text{div } E = \rho/\varepsilon\varepsilon_0$$

свелось бы к нахождению трех скалярных функций, соответствующих трем проекциям E , что значительно сложнее.

Литература:

3. Никольский В.В., Никольская Т.И. “Электродинамика и распространение радиоволн” Наука 1991г, Москва стр 72-88

4. Бессонов Л.А. “Теоретические основы электротехники” “Электромагнитное поле” Высшая школа 1989г, стр 5-68.

Значащие слова:

12. Электрический потенциал – скалярная энергетическая характеристика электрического поля, один из потенциалов электромагнитного поля.

13. Потенциал – функция, используемая для описания свойств широкого класса векторных полей.

14. Эквипотенциальная поверхность – поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал.

15. Поляризованность диэлектриков – смещение положительных и отрицательных зарядов диэлектрика в противоположные стороны под действием электрического поля

16. Восприимчивость диэлектрика – характеристика диэлектрика, показывающая его способность поляризоваться в электрическом поле.

17. Поток смещения – поток вектора электрической индукции через некоторую поверхность.

18. Диполь электрический - источник электрического поля, создающий такое поле, распределение которого совпадает с распределением электрического поля, создаваемого системой из двух равных по величине и противоположных по знаку электрических зарядов

при условии, что размеры этой системы малы по сравнению с расстояниями от нее до рассматриваемых точек поля.

19. Индуцированный электрический заряд – электрический заряд, возникающий в части нейтрального проводника в результате разделения имеющихся в нем положительных и отрицательных электрических зарядов.

20. Поляризуемость – способность атомов, молекул и ионов приобретать электрический дипольный момент в электрическом поле.

21. Дипольный электрический момент – вектор, характеризующий электрический диполь, равный произведению заряда диполя на его плечо и направленный вдоль оси от отрицательного заряда к положительному.

22. Потенциальное поле – векторное поле, циркуляция которого по произвольному замкнутому контуру равна 0.

Вопросы для самопроверки.

9. Какой физический смысл придается потенциалу электростатического поля?

10. Какая интегральная и дифференциальная связь существует между напряженностью E и потенциалом φ ?

11. Какие поля называются. потенциальными ?

12. Что понимают под картиной поля?

13. В чем отличие свободных зарядов от связанных?

14. Каков смысл вектора P ?

15. Что послужило основанием для введения вектора D ?

16. Дайте физическое толкование градиента и дивергенции.

17. Вывести уравнения Пуассона и Лапласа для электростатического поля.

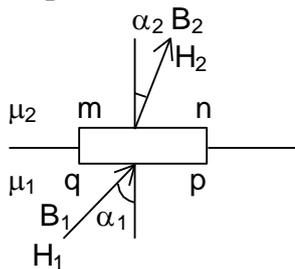
Лекция 54. Граничные условия проводящего тела и диэлектрика.

План:

1. Граничные условия в магнитном поле.
2. Граничные условия в электростатическом поле.
3. Граничные условия.

1. Граничные условия в магнитном поле.

2. Для магнитного поля $H_{1\tau} = H_{2\tau}$ оно выводится путём составления линейного интеграла $\oint H dl$ по плоскому контуру $mnpq$. Стороны pn и mq



4. ничтожно малы по сравнению со сторонами mn и pq . Длину стороны mn и pq обозначим dl . Тогда :

$$5. H_1 \sin \alpha_1 dl - H_2 \sin \alpha_2 dl = 0$$

$$6. H_1 \sin \alpha_1 = H_{1\tau} = H_2 \sin \alpha_2 = H_{2\tau}$$

7. следовательно $H_{1\tau} = H_{2\tau}$. Это условие не выполняется, если на поверхности раздела двух сред протекает так называемый поверхностный ток.

8. В этом случае:

$$9. H_1 \sin \alpha_1 dl - H_2 \sin \alpha_2 dl = \sigma dl$$

$$10. H_{1\tau} - H_{2\tau} = \sigma$$

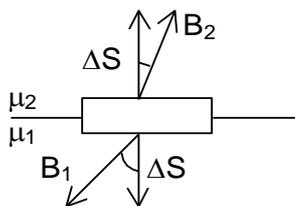
11. При наличии поверхностного тока с плотностью σ тангенциальная составляющая напряжённости поля терпит разрыв.

12. Для магнитного поля:

$$13. B_{1n} = B_{2n}$$

14. это вытекает из принципа магнитного потока

$$15. \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$



17. Выделим на границе раздела небольшой плоский параллелепипед и подсчитаем потоки вектора \vec{B} через нижнюю грань – $B_{1n} \Delta S$ и верхнюю грань – $B_{2n} \Delta S$

$$18. -B_{1n} \Delta S + B_{2n} \Delta S = 0$$

$$19. B_{1n} = B_{2n}$$

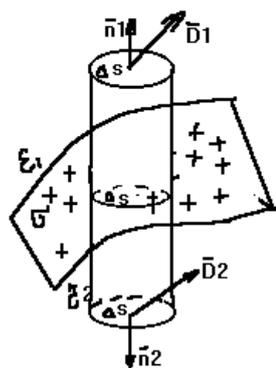
$$20. \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

2 Граничные условия в электростатическом поле.

Рассмотрим границу двух непроводящих сред, диэлектрические проницаемости которых ϵ_1 и ϵ_2 .

Пусть на границе имеется заряд с поверхностной плотностью.

Проведем замкнутую цилиндрическую поверхность S так, чтобы одна ее половина была расположена в первом диэлектрике, другая во втором.



По теореме Гаусса:

$$\int D ds = \sigma \Delta S$$

Представим поток вектора D в виде суммы трех потоков:

$$\int_S D ds = \int_{\Delta S} D_1 ds + \int_{\Delta S} D_2 ds + \int_{S_{бок}} D ds$$

Если площадка ΔS невелика, то можно считать, что во всех точках этой площадки вектор D имеет одну и ту же величину, тогда :

$$\int_{\Delta S} D_1 ds = D_{1n} \Delta S$$

$$\int_{\Delta S} D_2 ds = - D_{2n} \Delta S$$

Если высоту цилиндра уменьшать так, чтобы площадки ΔS стремились к границе между диэлектриками, то поток через боковую поверхность будет стремиться к нулю, тогда:

$$D_{1n} \Delta S - D_{2n} \Delta S = \sigma \Delta S$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma \quad \text{или}$$

$$\epsilon_0 \epsilon_1 E_{1n} - \epsilon_0 \epsilon_2 E_{2n} = \sigma$$

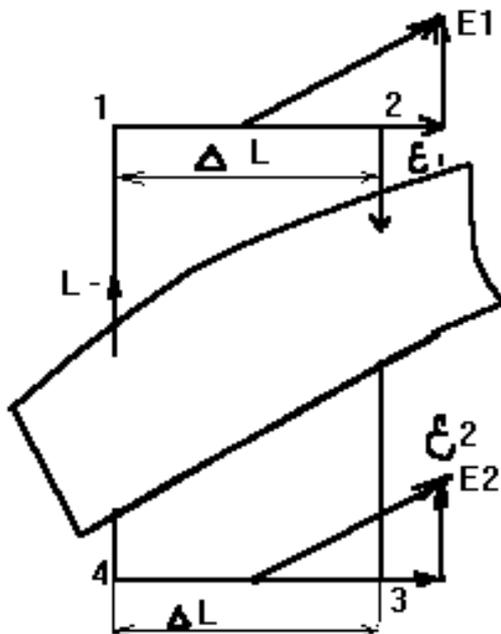
Нормальная составляющая вектора электрической индукции на границе двух непроводящих сред претерпевает скачок, равный поверхностной плотности свободных зарядов, распределенных на границе.

Если $\sigma = 0$

$$D_{1n} = D_{2n}$$

$$\epsilon_0 \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_0 \epsilon_2 E_{2n}$$

Нормальная составляющая вектора D на границе непрерывна. Для получения второго граничного условия проведем замкнутую линию L так, чтобы одна ее часть находилась в первом диэлектрике, другая - во втором.



Зададимся направлением обхода 1-2-3-4

$$\int_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

Представим его в виде четырех линейных интегралов:

$$\int_{12} \vec{E}_1 d\vec{l} + \int_{23} \vec{E} d\vec{l} + \int_{34} \vec{E}_2 d\vec{l} + \int_{41} \vec{E} d\vec{l} = 0$$

Если L невелика, то вектор E можно считать одинаковым на все отрезке, тогда :

$$\int_{12} \vec{E}_1 d\vec{l} = E_1 \tau \Delta l$$

$$\int_{34} E_2 dl = E_2 \tau \Delta l$$

Если отрезки 2-3 и 4-1 постепенно уменьшать так, чтобы в пределе они стали равными нулю, а отрезки Δl совпали с граничной поверхностью, то:

$$E_1 \tau \Delta l - E_2 \tau \Delta l = 0$$

$$E_1 \tau = E_2 \tau \quad \text{или} \quad D_1 \tau / \epsilon_1 = D_2 \tau / \epsilon_2$$

На границе двух непроводящих сред касательные составляющие вектора напряженности электрического поля равны.

На поверхности раздела двух сред потенциал непрерывен:

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

Если одна из сред проводящая, то граничные условия изменятся.

Пусть первая среда - диэлектрик с проницаемостью ϵ , вторая - проводник, тогда граничные условия запишутся:

$$E_2 = 0 \quad D_2 = 0 \quad \varphi_2 = \text{const}$$

$$D_{1n} = D_1 = \sigma \quad \text{или} \quad \epsilon_0 \epsilon E_1 = \sigma$$

$$E_1 \tau = 0 \quad D_1 \tau = 0$$

Энергия электростатического поля. Энергия взаимодействия "n" зарядов.

$$W_3 = 1/2 \sum_{k=1}^n q_k \varphi_k$$

Эта формула учитывает только энергию взаимодействия. Собственная энергия точечного заряда формально равна бесконечности, так как, для того, чтобы сосредоточить заряд конечной величины в точке, надо было бы затратить бесконечно большую работу.

Этой формулой можно пользоваться, когда заряды отстоят друг от друга на расстояниях значительно больших, чем размеры тел, несущих эти заряды.

Энергия электростатического поля может быть записана:

$$W_3 = \int_{V_2} \varphi \rho dV + \int_{S_2} \varphi \sigma dS$$

Из курса векторного анализа:

$$\text{div}(\varphi \mathbf{D}) = \varphi \text{div} \mathbf{D} + \mathbf{D} \text{grad} \varphi$$

Используя это, можно записать:

$$1/2 \int_V \text{div}(\varphi \mathbf{D}) dV = \int_{V_2} \varphi \text{div} \mathbf{D} dV + \int_{V_2} \mathbf{D} \text{grad} \varphi dV$$

Так как

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho \quad \text{grad} \varphi = -\mathbf{E}$$

$$\int_V \text{div}(\varphi \mathbf{D}) dV = \int_S \varphi \mathbf{D} dS$$

то:

$$s_3 \int_{V_2} \varphi \mathbf{D} dS = \int_{V_2} \varphi \rho dV - \int_{V_2} \mathbf{E} \mathbf{D} dV, \quad \text{но}$$

$$\mathbf{D} dS = -\mathbf{D} dS = -\sigma dS$$

тогда:

$$\oint_{S_2} \frac{\varphi \sigma}{2} dS = \int_V \frac{\varphi \rho}{2} dV - \int \underline{E} \underline{D} dV$$

и энергия электрического поля:

$$W_{\text{э}} = \int_V \frac{\varphi \rho}{2} dV + \int_S \frac{\varphi \sigma}{2} dS = \int_V \underline{E} \underline{D} dV$$

В однородных и изотропных средах:

$$D = \epsilon_0 \epsilon E, \text{ то}$$

$$W_{\text{э}} = \int_V \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} dV$$

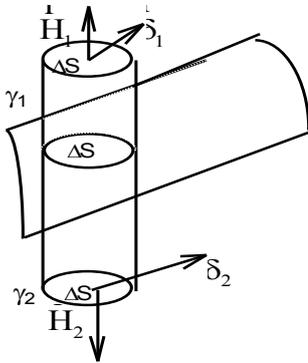
Физический смысл этого уравнения заключается в том, что носителем энергии является электрическое поле, причем энергия распределена во всем пространстве с объемной плотностью:

$$\frac{dW_{\text{э}}}{dV} = \frac{E D}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}$$

Там, где напряженность E отлична от нуля, силы поля могут совершать работу за счет энергии поля.

1. Проводники в электростатическом поле.
2. Граничные условия в электростатическом поле.
3. Энергия электростатического поля.

3. Граничные условия.



Рассмотрим границу двух проводящих сред, проводимости которых равны γ_1 и γ_2 . Построим цилиндрическую поверхность S . Ток сквозь эту поверхность равен 0, так как она замкнута.

$$\oint_S \delta d\vec{S} = 0 = \int_{\Delta S_1} \delta_1 d\vec{S} + \int_{\Delta S_2} \delta_2 d\vec{S} + \int_{\Delta S_{\text{бок}}} \delta d\vec{S}$$

Если высоту цилиндра уменьшить так, чтобы площадки $\Delta S_1 = \Delta S_2$ совпали с граничной поверхностью, и учитывая, что ΔS - небольшая, то

$$\delta_{1n} \Delta S - \delta_{2n} \Delta S = 0$$

$$\delta_{1n} = \delta_{2n}$$

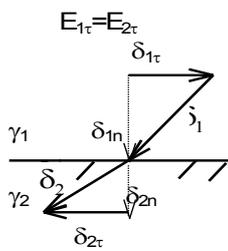
Нормальная составляющая вектора плотности тока на границе двух сред непрерывна.

Если на границе этих сред нет сторонних сил, то касательные составляющие вектора напряжённости электрического поля также должны быть направлены у границы.

Если векторы δ и E образуют с нормалью к границе угол α_1 в первой среде и угол α_2 во второй, то

$$E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2$$

$$\delta_1 \cos \alpha_1 = \delta_2 \cos \alpha_2$$



Так как $\delta_1 = \gamma_1 E_1$ и $\delta_2 = \gamma_2 E_2$, то

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2}$$

Лекция 55. Электрическое поле постоянного тока.

План:

1. Закон Ома в дифференциальной форме
2. Закон Джоуля –Ленца в дифференциальной форме
3. Первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме

Ток и плотность тока проводимости.

Мерой тока служит предел отношения заряда Δq , проходящего сквозь заданную поверхность в течении некоторого времени Δt , когда $\Delta t \rightarrow 0$ как к пределу:

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

ток величина скалярная $[i]=[A]$

Плотностью тока называют векторную величину δ , численное значение которой равно пределу отношения тока, протекающего через некоторую площадку, расположенную нормально к направлению движения зарядов, к величине площади этой площадки, когда она стремится к нулю, как к пределу

$$\delta = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta S_n} = \frac{di}{dS_n}$$

Направление вектора δ выбирается таким образом, чтобы оно совпадало с направлением движения положительных зарядов.

Ток и плотность тока связаны соотношением:

$$i = \int_S \delta dS$$

Плотность тока в системе СИ $[\delta]=[A/m^2]$

Иногда рассматривают поверхностные токи, которые протекают только по поверхности проводника.

$$\eta = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta l} = \frac{di}{dl}$$

В системе СИ $[\eta]=[A/m]$

Закон Ома в дифференциальной форме.

В однородном изотропном проводнике плотность тока проводимости δ пропорциональна напряжению электрического поля E :

$\delta = \gamma \vec{E}$ -Закон Ома в дифференциальной форме. Для того, чтобы в проводнике длительно проходил ток, необходимо наличие электрического поля, силы которого перемещают заряды. Такое поле может быть создано и будет поддерживаться процессами неэлектростатического происхождения (химическими, термоэлектрическими и др.) и носит название стороннего электрического поля.

Напряженность стороннего электрического поля

$$\vec{E}_{\text{стор}} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_{\text{стор}}}{q}$$

Напряженность результирующего поля

$$\vec{E}_{\text{рез}} = \vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}}$$

В тех областях проводника, в которых имеются сторонние силы, закон Ома записывается в виде:

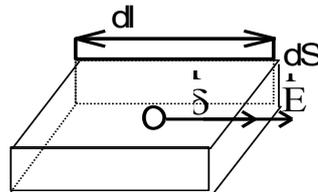
$$\vec{\delta} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{стор}})$$

, где γ - удельная проводимость в системе СИ [γ]=[см/м]

Закон Джоуля- Ленца в дифференциальной форме.

Мощность тепловых потерь в проводнике равна произведению тока и напряжения $P=UI$

Если рассматривать в проводящей среде элемент объема dV , то мощность тепловых потерь



$$dP = dI dU = \delta dS E dl = \delta E dV$$

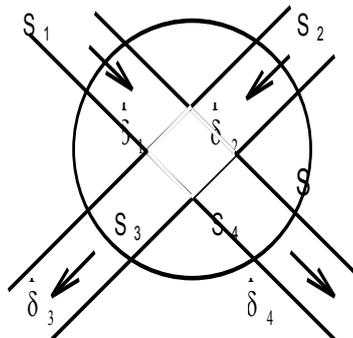
откуда

$$\frac{dP}{dV} = \delta E = \gamma E^2 = \frac{\delta^2}{\gamma} - \text{дифференциальная форма закона Джоуля- Ленца}$$

Мощность тепловых потерь в объеме V

$$P = \int_V \gamma E^2 dV$$

Первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме.



Замкнутая поверхность S охватывает узел цепи, к которому подходят токи I_1 и I_2 и из которого выходят токи I_3 и I_4 . Согласно первому закону Кирхгофа в интегральной форме

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4$$

Выразим токи через плотность тока

$$I_1 = \int_{S_1} \delta dS \quad I_2 = \int_{S_2} \delta dS$$

$$I_3 = \int_{S_3} \delta dS \quad I_4 = \int_{S_4} \delta dS$$

или $\int_{S_1+S_2+S_3+S_4} \delta dS = 0$ так как вне площадок S_1, S_2, S_3, S_4 плотность тока равна

нулю, то можно распространить интеграл на всю замкнутую поверхность S , тогда

$$\oint_S \delta dS = 0$$

Постоянный ток непрерывен. Линии δ замкнуты.

По теореме Остроградского

$$\oint_S \delta dS = \int_V \operatorname{div} \delta dv$$

Так как поверхность S , а следовательно, и объём V выбраны произвольно, то можно считать, что $\operatorname{div} \delta = 0$ - первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме.

Плотность тока проводимости не имеет источников. Это уравнение называют ещё уравнением для постоянного тока. Постоянный ток имеет в различных сечениях неразветвлённой цепи одно и то же значение, так как в противном случае были бы такие участки, в которых заряд или увеличивается или уменьшается, а это невозможно.

Дивергенция плоскости переменного тока может быть отлична от нуля, так как в цепях переменного тока могут быть участки, на которых заряды увеличиваются или уменьшаются. (конденсатор в цепи переменного тока)

ЛИТЕРАТУРА:

1. Никольский В.В., Никольская Т.И. “Электродинамика и распространение радиоволн” Наука 1991г, Москва стр 62-111
2. Бессонов Л.А. “Теоретические основы электротехники” “Электромагнитное поле” Высшая школа 1989г, стр 69-81.

ЗНАЧАЩИЕ СЛОВА:

1. Ток электрический – направленное движение электрических зарядов
2. Плотность электрического тока – вектор, направленный в сторону движения положительных электрических зарядов

3. Закон Ома в дифференциальной форме – устанавливает связь между плотностью тока в данной точке проводящей среды и напряженностью поля в этой же точке.
4. Стороннее электрическое поле – электрическое поле, обусловленное химическими, электрохимическими, тепловыми, термоэлектрическими процессами.
5. Обобщенный закон Ома в дифференциальной форме – закон Ома в диф. форме для областей, занятых источниками эдс.
6. Первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме – выражает непрерывность постоянного тока.
7. Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме – мощность тепловых потерь в объеме проводника.
8. Циркуляция вектора по замкнутому контуру – интегральная характеристика векторного поля.
9. Трубка тока – поверхность, образованная линиями тока, проведенными через все точки малого замкнутого контура, расположенного перпендикулярно этим линиям.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Почему уравнение $\delta = \gamma(E + E_{\text{стор}})$ называют обобщенным законом Ома, а также вторым законом Кирхгофа.
2. Что представляет закон Джоуля –Ленца в дифференциальной форме?
3. В каком случае электрическое поле в проводящей среде не является потенциальным?
4. Каково условие непрерывности постоянного тока?
5. Расскажите о свойствах электрического поля в проводящей среде и приведите его основные уравнения

Лекция 56. Магнитное поле постоянного тока. Основные уравнения электромагнитных полей. Уравнения Максвелла. Распространение электромагнит волн в диэлектрик.

План:

- 1. Основные величины, характеризующие магнитное поле.**
- 2. Магнитный поток и его непрерывность.**
- 3. Векторный потенциал.**
- 4. Скалярный магнитный потенциал.**
- 5. Граничные условия в магнитном поле.**
- 6. Энергия магнитного поля.**
- 7. Методы расчётов магнитных полей.**
- 8. Полный электрический ток.**
- 9. Дивергенция плотности тока проводимости.**
- 10. Непрерывность полного тока.**
- 11. I и II уравнения Максвелла.**

Основные величины характеризующие магнитное поле.

Основными свойствами является силовое воздействие его как на движущие в нём заряженные тела, так и на неподвижные проводники с электрическим током. Величиной характеризующей магнитное поле является вектор магнитной индукции \vec{B} . Зная значение и направление вектора \vec{B} можно установить свойства магнитного поля и вызываемых им явлений. Вектор \vec{B} можно определить по силе, с которой поле действует на контур с током.

Сила действующая на линейный элемент тока может быть определена по формуле:

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \times \vec{B}]$$

В системе СИ \vec{B} измеряется в Тл.

Связь между током и возбужденным им в пустоте в дифференциальной форме

$$d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I [d\vec{\delta} \times \vec{r}] dv}{4\pi R^2}$$

где δ – плотность тока

dV – элементарный объём

R – расстояние от dV до точки, в которой определяется \vec{B}

μ_0 – магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м

Если размеры поперечного сечения проводника малы по сравнению с длиной проводника и расстояние до точки наблюдения (проводник линейный) можно положить:

$$[\vec{d} \vec{r}] dv = [\vec{d} \vec{r}] \vec{S} d\vec{l} = [(\vec{d} \vec{S}) d\vec{l} \vec{r}] = I [d\vec{l} \vec{r}]$$

Проинтегрировав выражение определим

$$\vec{B}_0 = \oint_L \frac{\mu_0 I [d\vec{l} \vec{r}]}{4\pi R^2}$$

Если контур с током находится в каком-либо веществе, то величина магнитной индукции будет отличаться от \vec{B}_0 в μ раз:

$$\vec{B} = \mu \vec{B}_0 = \oint_L \frac{\mu \mu_0 I [d\vec{l} \vec{r}]}{4\pi R^2}$$

μ – магнитная проницаемость.

Напряженность магнитного поля

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu \mu_0}$$

Напряжённость магнитного поля не зависит от свойств среды.

Для линейного проводника с током

$$\vec{H} = \oint \frac{I [d\vec{l} \vec{r}]}{4\pi R^2} \text{ – закон Био-Савара-Лапласа.}$$

Собственное макроскопическое поле вещества можно характеризовать вектором \vec{J} , который называется вектором намагниченности. Этот вектор определяет, насколько магнитная индукция в данной среде $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$ отличается от магнитной индукции в вакууме $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ при одной и той же напряжённости магнитного поля

$$\begin{aligned} \vec{B} - \vec{B}_0 &= \mu_0 \vec{J} \\ \vec{J} &= K_m \vec{H} \end{aligned}$$

где K_m – магнитная восприимчивость

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{H} = \mu_0 (1 + K_m) \vec{H} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

следовательно $\mu = 1 + K_m$

В системе СИ $[\vec{H}] = [A/m]$ $[\vec{J}] = [A/m]$

Магнитный поток и его непрерывность.

Поток вектора магнитной индукции.

$$\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S}$$

В системе СИ $[\Phi] = [Вб]$

Магнитный сквозь замкнутую поверхность всегда равен нулю

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Пользуясь теоремой Остроградского, можно записать:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{B} dv = 0$$

Это равенство справедлива для любого объёма. Следовательно

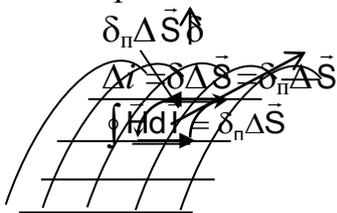
$$\text{div} \vec{B} = 0$$

Это соотношение дифференциальная форма принципа непрерывности магнитного потока. В любой точке магнитного поля нет ни истока ни стока линий вектора магнитной индукции. Линии \vec{B} нигде не прерываются, они представляют собой замкнутые сами на себя линии.

Количественная связь между циркуляцией вектора \vec{H} по замкнутому контуру и током внутри контура определяется законом полного тока:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = J$$

Выделим в какой-либо среде небольшой контур и составим циркуляцию вектора \vec{H}



Разделим обе части на $\Delta \vec{S}$ и устремим $\Delta \vec{S} \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} d\vec{l}}{\Delta S} = \delta_n$$

$$\text{rot}_n \vec{H} = \delta_n$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{\delta}$$

-закон полного тока в дифференциальной форме

Вектор может быть определён как функция, характеризующая поле в рассматриваемой точке в отношении способности к образованию вихрей.

Скалярный потенциал магнитного поля.

Вихревыми принято называть поля, ротор которых отличен от нуля. Так как для магнитного поля постоянного тока $\text{rot} \vec{H} = \vec{\delta}$, где $\vec{\delta} \neq 0$, поле вектора \vec{H}

является полем вихревым. Где $\vec{\delta}=0$ $\text{rot}\vec{H}=0$ и магнитное поле можно рассматривать как потенциальное.

Для таких областей

$$\vec{H} = -\text{grad}\varphi_{\text{МТ.К.}}$$

$$\text{div}\vec{B} = \text{div}\mu\mu_0\vec{H} = 0$$

$$\text{div}\vec{H} = 0$$

$$\text{divgrad}\varphi_{\text{М}} = 0$$

или $\nabla^2\varphi_{\text{М}} = 0$ – Уравнение Лапласа для областей не занятых током.

Разность скалярных магнитных потенциалов между точками 1 и 2 называют падением магнитного напряжения между точками 1 и 2:

$$U_{\text{М12}} = \varphi_{\text{М1}} - \varphi_{\text{М2}} = \int_1^2 \vec{H} d\vec{l}$$

Следует различать понятия «падение магнитного напряжения» и «магнитное напряжение». Первое определяется только линейным интегралом от \vec{H} на $d\vec{l}$ по выбранному пути. Второе – не только этим интегралом, но и МДС имеющейся на пути.

Векторный потенциал магнитного поля.

Для расчёта магнитного поля используется векторный потенциал:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$$

Основанием для представления индукции в виде ротора от вектора — потенциала служит то, что дивергенция любого ротора тождественно равна нулю

Т.к. $\text{div}\vec{B} = 0$, то $\text{divrot}\vec{A} = 0$

Векторный потенциал применяется для определения магнитной индукции для определения магнитного потока, пронизывающий какой-либо контур.

Уравнение Пуассона для вектора-потенциала.

Исходя из закона полного тока в дифференциальной форме

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{\delta}$$

умножим и правую и левую часть на $\mu\mu_0$, получим:

$$\begin{aligned} \mu\mu_0 \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{\delta} \mu\mu_0 \text{ если } \mu = \text{const, то} \\ \operatorname{rot} \mu\mu_0 \vec{H} &= \operatorname{rot} \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{\delta} \text{ ,но} \\ \vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{A} \text{ будем иметь} \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} &= \mu\mu_0 \vec{\delta} \text{ из математики известно, что} \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{\delta} \text{ ,но} \\ \operatorname{div} \vec{A} &= 0 \text{ ,то} \\ \nabla^2 \vec{A} &= -\mu_0 \mu \vec{\delta} \text{ —уравнение Пуассона} \end{aligned}$$

Решением этого уравнения будет:

$$\vec{A} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\delta} dv}{R}$$

В системе СИ $[A]=[B \cdot \text{сек}/\text{м}]$

Так как $\Phi = \oint_S \vec{B} d\vec{S}$, а $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$, то $\Phi = \int_S \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{S}$. На основании теоремы

Стокса :

$$\begin{aligned} \int_S \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{S} &= \oint \vec{A} d\vec{l} \\ \Phi &= \oint \vec{A} d\vec{l} \end{aligned}$$

Для определения магнитного потока , пронизывающий некоторую площадь S, необходимо подсчитать циркуляцию вектора-потенциала по замкнутому контуру, на который опирается поверхность S.

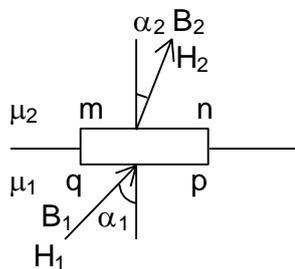
Для элемента тока :

$$d\vec{A} = \frac{\mu\mu_0 i d\vec{l}}{4\pi R}$$

составляющая векторного потенциала от элемента тока имеет такое же направление в пространстве, как и ток в элементе проводника.

Граничные условия в магнитном поле.

Для магнитного поля $H_{1\tau} = H_{2\tau}$ оно выводится путём составления линейного интеграла $\oint H dl$ по плоскому контуру mnpq. Стороны np и mq



ничтожно малы по сравнению со сторонами mn и pq . Длину стороны mn и pq обозначим dl. Тогда :

$$\begin{aligned} H_1 \sin \alpha_1 dl - H_2 \sin \alpha_2 dl &= 0 \\ H_1 \sin \alpha_1 &= H_{1\tau} = H_2 \sin \alpha_2 = H_{2\tau} \end{aligned}$$

следовательно $H_{1\tau} = H_{2\tau}$. Это условие не выполняется, если на поверхности раздела двух сред протекает так называемый поверхностный ток.

В этом случае:

$$\begin{aligned} H_1 \sin \alpha_1 dl - H_2 \sin \alpha_2 dl &= \sigma dl \\ H_{1\tau} - H_{2\tau} &= \sigma \end{aligned}$$

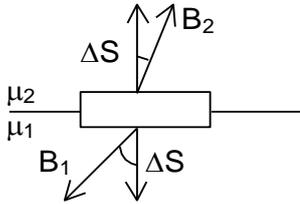
При наличие поверхностного тока с плотностью σ тангенциальная составляющая напряжённости поля терпит разрыв.

Для магнитного поля:

$$B_{1n} = B_{2n}$$

это вытекает из принципа магнитного потока

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$



Выделим на границе раздела небольшой плоский параллелепипед и подсчитаем потоки вектора \vec{B} через

нижнюю грань $-B_{1n}\Delta S$ и верхнюю грань $-B_{2n}\Delta S$

$$-B_{1n}\Delta S + B_{2n}\Delta S = 0$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Энергия магнитного поля.

Магнитный поток сквозь элементарную площадку $d\vec{l}$ равен:

$$d\Phi = \vec{B} d\vec{S}$$

Весь поток:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

Построим контурах, ограничивающих площадки $d\vec{S}$ силовые трубки. Так как в магнитном поле линии вектора \vec{B} всегда замкнуты, то силовые трубки получаются замкнутыми. Они заполняют весь объём V занятый магнитным полем. Если обозначить ось трубки L , то

$$\int_L \vec{H} d\vec{l} = I$$

энергия
$$dW_M = \frac{I d\Phi}{2} = \frac{1}{2} \vec{B} d\vec{S} \int_L \vec{H} d\vec{l} \text{ или}$$

$$W_M = \int dW_M = \int \int_S \int_L \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} d\vec{l} d\vec{S} = \int_V \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} dV \quad \text{ТО}$$

$$W_M = \int_V \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} dV = \int_V \frac{\mu\mu_0 \vec{H}}{2} dV = \int_V \frac{\vec{B}^2}{2\mu\mu_0} dV$$

Так как $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$, то

$$W_M = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \operatorname{rot} \vec{A} dV, \quad \text{но}$$

$\operatorname{div}[\vec{A} \vec{H}] = \vec{H} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{H}$ можно записать

$$W_M = \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div}[\vec{A} \vec{H}] dV + \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \operatorname{div} \vec{H} dV$$

По теореме Остроградского:

$$\int_V \operatorname{div}[\vec{A} \vec{H}] dV = \int_S [\vec{A} \vec{H}] d\vec{S}$$

Так как магнитное поле занимает неограниченный объём, то S можно представить себе как шаровую поверхность бесконечно большого радиуса R .

Вектор $[\vec{A} \vec{H}]$ убывает в функции расстояния не медленнее $\frac{1}{R^3}$, тогда как поверхность растёт не быстрее R^2 , следовательно при $R \rightarrow \infty$

$$\oint_S [\vec{A} \vec{H}] d\vec{S} = 0$$

тогда по первому уравнению Максвелла $\text{rot} \vec{H} = \vec{\delta}$ получим

$$\text{WM} = \int_V \frac{\vec{\delta} \vec{A}}{2} dV$$

Методы расчетов магнитных полей.

Расчет магнитных полей чаще всего сводится к определению вектора \vec{H} . Величины токов и положение проводников, по которым эти токи протекают, должны быть заданы. Если рассматривается поле в неферромагнитной среде $\mu \approx \mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ Гн/м.

Если непосредственное определение \vec{H} связано с большими математическими трудностями, удобно вводить векторный потенциал. Определив векторный потенциал, можно найти напряжённость поля. При расчёте магнитных полей могут быть применены следующие методы: применение закона полного тока в интегральной форме; применение первого уравнения Максвелла; применение уравнений Пуассона и Лапласа для векторного потенциала; метод зеркальных изображений; метод конформных преобразований, графический метод расчёта.

Литература:

1. Никольский В.В., Никольская Т.И. “Электродинамика и распространение радиоволн” Наука 1991г, Москва стр 62-111
2. Бессонов Л.А. “Теоретические основы электротехники” “Электромагнитное поле” Высшая школа 1989г, стр 69-81.

Значение слова:

1. Ток проводимости – электрический ток в проводнике, возникающий под действием электрического поля.
2. Ток смещения – физическая величина, зависящая от скорости изменения электрической индукции и определяющая магнитное поле.
3. Ток переноса (флотационный ток) – нерегулярный эл. ток, возникающий при переносе электрического заряда в проводнике в результате теплового движения электронов.
4. Ток поляризации – ток, вызванный смещением связанных зарядов в диэлектрике под действием внешнего электрического поля.
5. Полный электрический ток – совокупность явлений, при которых образуется магнитное поле.

6. Уравнения Максвелла – уравнения классической электродинамики, описывающие полностью все электромагнитные явления в произвольной среде и в вакууме.

7. Соленоидальное поле – векторное поле, не имеющее источников.

8. Стационарное поле – физическое поле, не изменяющееся со временем.

9. Силовое поле – часть пространства, в которой действуют силы на внесенные в нее тела.

10. Скалярное поле – физическое поле, описываемое функцией, которое в каждой точке пространства является скаляром.

11. Первое уравнение Максвелла – устанавливает зависимость между изменением во времени напряженности электрического поля и изменением в пространстве напряженности магнитного поля.

12. Второе уравнение Максвелла – дифференциальная форма закона электромагнитной индукции.

Вопросы для самопроверки:

1. Дать определения трех видов тока – проводимости, переноса и смещения.

2. Какой из трех видов тока проводимости, переноса и смещения может существовать в любой среде, а также в пространстве, свободном от вещества?

3. Расскажите о соотношении токов проводимости и смещения.

4. Какие величины определяют соотношение между токами проводимости и смещения?

5. Запишите I и II уравнения Максвелла и укажите их физический смысл.

Тема-57: Основные уравнения переменного электромагнитного поля.

План:

1. Определение переменного электромагнитного поля
2. Принцип неразрывности магнитного потока
3. Выражение переменного электромагнитного поля
4. Уравнение Максвелла для изменчивой среды.
5. Первое уравнение Максвелла
6. Второе уравнение Максвелла.

Полный электрический ток.

Электрический ток в проводящей среде представляет направленное движение электрических зарядов под действием сил поля. Такой ток называется током проводимости.

Согласно закону Ома:

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$$

Если заряженное тело или частицы движутся в непроводящей среде или в вакууме со скоростью V , то они образуют ток переноса:

$$\vec{\delta}_{\text{пер}} = \rho \vec{V}$$

В молекулах диэлектрика, который вносится во внешнее электрическое поле, под воздействием сил поля связанные заряды будут смещаться и образуют ток поляризации:

$$\vec{\delta}_{\text{поляризации}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

где \vec{P} – вектор поляризованности

Для сред, в которых $\vec{P} = \epsilon_0 K \vec{E}$

$$\vec{\delta}_{\text{поляризации}} = \epsilon_0 K \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Все три перечисленные виды тока представляют собой перемещение электрических зарядов. Каждый из этих токов сопровождается магнитным полем.

Максвелл предложил назвать электрическим током изменение во времени электрического тока в вакууме

$$\vec{\delta}_{\text{осм}} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Отличие тока смещения в вакууме от других видов токов заключается в том, что он не вызывает тепловых потерь.

Полным электрическим током называется совокупность всех явлений, при которых образуется магнитное поле.

$$\vec{\delta}_{\text{полн}} = \vec{\delta} + \vec{\delta}_{\text{пер}} + \vec{\delta}_{\text{поляризации}} + \vec{\delta}_{\text{осм}}$$

Сумму тока поляризации и тока смещения в вакууме называют током смещения в диэлектрике:

$$\bar{\delta}_{см} = \bar{\delta}_{поляр} + \bar{\delta}_{осм} = \epsilon_0(1 + K_э) \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

Плотность тока в этом случае:

$$\bar{\delta}_{полн} = \bar{\delta} + \bar{\delta}_{см} = \gamma \bar{E} + \epsilon_a \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

Ток переноса мы рассматривать не будем. В хорошо проводящей среде $\bar{\delta} \gg \bar{\delta}_{см}$, в диэлектрике с малыми потерями $\bar{\delta}_{см} \gg \bar{\delta}$. В проводящей среде токи проводимости и токи смещения соизмеримы.

Дивергенция плотности тока проводимости.

Постоянные токи могут быть только в замкнутых цепях. Линии вектора $\bar{\delta}$ непрерывны и $\text{div } \bar{\delta} = 0$. Постоянный ток через произвольную замкнутую поверхность должен всегда равен нулю.

Переменные токи могут иметь место и в не замкнутых цепях. Следовательно в переменных полях цепи с токами проводимости могут быть незамкнутыми. Там, где заканчиваются линии вектора плотности тока проводимости $\bar{\delta}$, могут накапливать заряды: поток вектора плотности тока проводимости через замкнутую поверхность может не равняться нулю.

Пусть в объёме V , ограниченном поверхностью S , имеется заряд q , объёмная плотность которого равна ρ . Если через поверхность S выходит ток проводимости i , то заряд q станет уменьшаться и ток

$$i = - \frac{\partial q}{\partial t}$$

Выразим ток через плотность получим:

$$\oint_S \bar{j} d\bar{S} = - \frac{\partial q}{\partial t}, \text{ но}$$

$$q = \int_V \rho dV$$

Преобразовав поток вектора $\bar{\delta}$ по теореме Остроградского

$$\oint_S \bar{\delta} d\bar{S} = \int_V \text{div } \bar{\delta} dV$$

получим

$$- \int_V \frac{\partial q}{\partial t} dV = \int_V \text{div } \bar{\delta} dV \quad \text{или}$$

$$\text{div } \bar{\delta} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Дивергенция плотности тока проводимости равна скорости убывания плотности объёмных зарядов.

Плотность тока проводимости может иметь источники и стоки в виде изменяющихся во времени объёмных зарядов.

Непрерывность полного тока.

Дивергенция плотности полного тока всегда равна нулю:

$$\bar{\delta}_{полн} = \bar{\delta} + \bar{\delta}_{см} = \bar{\delta} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

То

$$\operatorname{div} \bar{\delta}_{\text{полн}} = \operatorname{div} \bar{\delta} + \operatorname{div} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

Так как пространственные координаты от времени не зависят, то можно изменить порядок дифференцирования:

$$\operatorname{div} \bar{\delta}_{\text{полн}} = \operatorname{div} \bar{\delta} + \frac{\partial(\operatorname{div} \bar{D})}{\partial t}$$

По теореме Гаусса в дифференциальной форме $\operatorname{Div} D = \rho$, то

$$\operatorname{div} \bar{\delta} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Поэтому

$$\operatorname{div} \bar{\delta}_{\text{полн}} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Что и требовалось доказать.

Плотность полного тока представляет собой соленоидальный вектор, не имеющий источников и стоков.

Первое уравнение Максвелла.

Из закона полного тока следует:

$$\oint \bar{H} d\bar{l} = i_{\text{полн}} = \int_S \bar{\delta}_{\text{полн}} d\bar{S}$$

$$\oint_L \bar{H} d\bar{l} = \int_S \operatorname{rot} \bar{H} d\bar{S}$$

Преобразовав по теореме Стокса:

тогда

или

Так как

$$\int_S \operatorname{rot} \bar{H} d\bar{S} = \int_S \bar{\delta}_{\text{полн}} d\bar{S} \bar{\delta} \bar{D}$$
$$\begin{matrix} \bar{\delta}_{\text{полн}} = \gamma \bar{E} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \bar{H} = \bar{\delta}_{\text{полн}} \end{matrix}$$

То первое уравнение Максвелла имеет вид:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \gamma \bar{E} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

Для сред с полной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \text{const}$

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \gamma \bar{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

Физический смысл этого уравнения заключается в утверждении, что вихревое магнитное поле возбуждается как токами проводимости, так и изменяющимся во времени электрическим полем.

Для идеальных диэлектриков $\gamma = 0$

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

1-ое уравнение Максвелла устанавливает зависимость между изменением во времени напряжённости электрического поля и изменением в пространстве напряжённости магнитного поля и указывает на то, что электромагнитное поле всегда находится в движении.

Второе уравнение Максвелла.

Оно представляет дифференциальную форму закона электромагнитной индукции:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Но

$$\Phi = \int_S \bar{B} d\bar{S}$$

Наведенная в контуре

$$e = \oint_L \bar{E} d\bar{l}$$

Будем считать что поверхность S и контур L неподвижны и не деформируются, тогда

$$\oint_L \bar{E} d\bar{l} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\int_S \frac{\partial\bar{B}}{\partial t} d\bar{S}$$

По теореме Стокса

$$\begin{aligned} \oint_L \bar{E} d\bar{l} &= \int_S \text{rot} \bar{E} d\bar{S} \\ \int_S \text{rot} \bar{E} d\bar{S} &= -\int_S \frac{\partial\bar{B}}{\partial t} d\bar{S} \end{aligned}$$

Следовательно

Или

$$\text{rot} \bar{E} = -\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}$$

2-ое уравнение Максвелла.

Физический смысл заключается в утверждении, что изменяющееся во времени магнитное поле возбуждает вихревое электрическое поле. Так как $\text{rot} \bar{E} \neq 0$

, то линии E могут быть замкнутыми, причём они должны обхватывать линии вектора B. Направление линий векторов B и E указаны на рисунке, для

$$\frac{\partial B}{\partial t} < 0$$

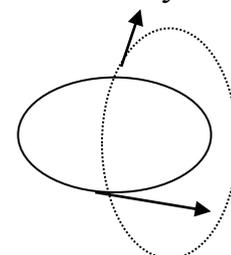
случая

.Для сред с $\mu = \text{const}$

2-е уравнение Максвелла устанавливает зависимость между изменением

$$\text{rot} \bar{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$$

во времени H и изменением в пространстве E.



Рис

Полная система уравнений электромагнитного поля.

Электромагнитное поле характеризуется четырьмя векторами E, D, B, H .
Для сред с постоянной проницаемостью

$$D = \epsilon \epsilon_0 E, \quad B = \mu_0 \mu H$$

Поэтому при расчёте достаточно определить только два вектора.
Обычно определяют E и H из уравнения Максвелла.

$$\operatorname{rot} H = \gamma E + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} E = -\mu \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$

Для однозначности определения E и H этих уравнений недостаточно.
Поэтому надо знать ещё и дивергенцию E и H .

По теореме Гаусса в дифференциальной форме $\operatorname{div} D = \rho$

При постоянном значении ϵ

$$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon}$$

Основное свойство магнитного поля – его солено дальность ($\operatorname{div} B = 0$)
позволит определить дивергенцию вектора H . При постоянном μ $\operatorname{div} H = 0$.

Если $\epsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$, то система уравнений электромагнитного поля заменятся:

$$\operatorname{rot} H = \gamma E + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \dots \dots \dots \operatorname{div} H = 0$$

$$\operatorname{rot} E = -\mu_0 \mu \frac{\partial H}{\partial t} \dots \dots \dots \operatorname{div} E = \frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon}$$

При решении конкретных задач должны быть учтены начальные и граничные условия.

На границе раздела двух сред значения ϵ, μ и γ меняются скачком, следовательно на поверхности раздела будет иметь место разрыв непрерывности векторов поля, причём граничные условия, полученные для постоянных во времени полей сохраняют силу и для мгновенных значений проекций векторов электромагнитного поля.

$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}$$

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = \eta$$

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

Если на поверхности раздела нет свободных зарядов, $\sigma=0$ и тока $\eta=0$.

Физический смысл основных уравнений электромагнитного поля заключается в том, что магнитное поле всегда вихревое и возбуждается оно как движущимися зарядами, так и изменяющемся во времени электрическим полем.

Электрические и магнитные поля связаны непрерывным взаимным превращением и представляют собой различные проявления единого электромагнитного поля, которое находится в движении и несёт с собой запас энергии.

$$W_{\text{эм}} = \int_V \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} dV + \int_V \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} dV$$

Для постоянных во времени процессов уравнения поля распадаются на две независимые системы:

$$\text{Для электрического поля } \text{rot} E = 0, \text{ div } \varepsilon_0 \varepsilon E = \rho$$

$$\text{Для магнитостатического поля } \text{rot} H = \delta, \text{ div } \mu_0 \mu H = 0$$

Литература:

1. Никольский В.В., Никольская Т.И. “Электродинамика и распространение радиоволн” Наука 1991г, Москва стр 62-111
2. Бессонов Л.А. “Теоретические основы электротехники” “Электромагнитное поле” Высшая школа 1989г, стр 69-81.

Значение слова:

13. Ток проводимости – электрический ток в проводнике, возникающий под действием электрического поля.

14. Ток смещения – физическая величина, зависящая от скорости изменения электрической индукции и определяющая магнитное поле.

15. Ток переноса (флотационный ток) – нерегулярный эл. ток, возникающий при переносе электрического заряда в проводнике в результате теплового движения электронов.

16. Ток поляризации – ток, вызванный смещением связанных зарядов в диэлектрике под действием внешнего электрического поля.

17. Полный электрический ток – совокупность явлений, при которых образуется магнитное поле.

18. Уравнения Максвелла – уравнения классической электродинамики, описывающие полностью все электромагнитные явления в произвольной среде и в вакууме.

19. Соленоидальное поле – векторное поле, не имеющее источников.

20. Стационарное поле – физическое поле, не изменяющееся со временем.

21. Силовое поле – часть пространства, в которой действуют силы на внесенные в нее тела.

22. Скалярное поле – физическое поле, описываемое функцией, которое в каждой точке пространства является скаляром.

23. Первое уравнение Максвелла – устанавливает зависимость между изменением во времени напряженности электрического поля и изменением в пространстве напряженности магнитного поля.

24. Второе уравнение Максвелла – дифференциальная форма закона электромагнитной индукции.

Вопросы для самопроверки:

1. Дать определения трех видов тока – проводимости, переноса и смещения.
2. Какой из трех видов тока проводимости, переноса и смещения может существовать в любой среде, а также в пространстве, свободном от вещества?
3. Расскажите о соотношении токов проводимости и смещения.
4. Какие величины определяют соотношение между токами проводимости и смещения?
5. Запишите I и II уравнения Максвелла и укажите их физический смысл.

Тема-58 Распределение электромагнитных полей в однородной и изотропной средах.

План:

1. Распределение электромагнитных волн в однородной и изотропной средах.
2. Уравнения Максвелла для проводящей среды. Плоская электромагнитная волна.
3. Магнитный поверхностный эффект.

Под волнами подразумевают колебательные движения непрерывных сред. Принципиальные отличия в математическом описании волновых процессов и колебаний токов и напряжений в радиотехнических цепях состоит в том, что для полного описания любой системы достаточно знать конечное число токов и напряжений на различных участках схем. Для полного описания волнового процесса необходимо знать его характеристики в бесконечно большом числе точек в рассматриваемом пространстве. Природа волновых процессов весьма разнообразна: электромагнитные волны, акустические, гравитационные и т. д. Физики полагают, что при распространении любых волн среда постепенно вовлекается в некоторый физический процесс, в результате которого происходит распространение энергии в пространстве.

Плоские электромагнитные волны в однородной изотропной среде без потерь.

Будем рассматривать свободные (существующие без сторонних источников) гармонические колебания электромагнитного поля в однородной изотропной среде без потерь ($\mu_a = \mu_0, \epsilon_a = \epsilon_0$). В этом случае для определения характеристик электромагнитного поля удобно воспользоваться однородными уравнениями Гельмгольца относительно векторов электромагнитного поля.

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \quad (2)$$

$k = \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a}$ - волновое число.

Векторные уравнения (1) и (2) можно записать в виде системы из трех скалярных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_x &= 0 \\
\frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_y &= 0 \\
\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_z &= 0
\end{aligned}
\tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \dot{H}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_x}{\partial z^2} + k^2 \dot{H}_x &= 0 \\
\frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_y}{\partial z^2} + k^2 \dot{H}_y &= 0 \\
\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial z^2} + k^2 \dot{H}_z &= 0
\end{aligned}
\tag{4}$$

Наиболее просто уравнения (3) и (4) и их решения выглядят в случае плоских электромагнитных волн. Под плоскими волнами подразумевают электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль линейной координаты, в каждый фиксированный момент времени неизменны в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. Будем полагать, что волна, распространяется вдоль оси Z , т.е. вектор Пойнтинга:

$$\bar{\Pi}_{cp} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \begin{bmatrix} \dot{E} \\ \dot{H} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \dot{E} \\ \dot{H} \end{bmatrix} = \bar{1}_z \Pi_{zcp} \tag{5}$$

Из соотношения (5) видно, что вектор Пойнтинга определяется компонентами электромагнитного поля, находящимися в плоскости xOy . В данном случае отсутствуют составляющие поля вдоль оси z . Таким образом, должны выполняться условия:

так как, по определению, поле должно быть неизменно в плоскости распространения волны, то:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial z} \neq 0 \\
E_x, E_y, H_x, H_y \neq 0; \quad E_z = H_z = 0
\end{aligned}
\tag{6}$$

Используя соотношение (6), выражения (3) и (4) можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \dot{E}_x}{dz^2} + k^2 \dot{E}_x = 0 \\ \frac{d^2 \dot{E}_y}{dz^2} + k^2 \dot{E}_y = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 \dot{H}_x}{dz^2} + k^2 \dot{H}_x = 0 \\ \frac{d^2 \dot{H}_y}{dz^2} + k^2 \dot{H}_y = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Решение каждого из уравнений: $\dot{E}_x = A_1 e^{-jkz} + A_2 e^{jkz}$ (9)

$$\dot{E}_y = B_1 e^{-jkz} + B_2 e^{jkz} \quad (10)$$

Для того, чтобы не увеличивать количество постоянных интегрирования мы компоненты поля \vec{H} найдем с использованием решений (9), (10) и уравнений Максвелла.

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega\mu_a \vec{H}$$

$$\vec{H} = -\frac{1}{j\omega\mu_a} \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{j\omega\mu_a} \left[\bar{1}_x \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} + \bar{1}_y \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} \right] \quad (11)$$

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \bar{1}_x & \bar{1}_y & \bar{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{E}_x & \dot{E}_y & \dot{E}_z \end{vmatrix} = \bar{1}_x \left[\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} \right] + \bar{1}_y \left[\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} \right] + \bar{1}_z \left[\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} \right]$$

Используя соотношение (11), получим:

$$\dot{H}_x = \frac{1}{j\omega\mu_a} (-jkB_1 e^{-jkz} + jkB_2 e^{jkz}) \quad (12)$$

$$\dot{H}_y = -\frac{1}{j\omega\mu_a} (-jKA_1 e^{-jkz} + jKA_2 e^{jkz}) \quad (13)$$

Вынося jk за скобки, получим:

$$\dot{H}_x = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}} (-B_1 e^{-jkz} + B_2 e^{jkz}) \quad (14)$$

$$\dot{H}_y = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}} (A_1 e^{-jkz} - A_2 e^{jkz}) \quad (15)$$

Получим систему решений: $\dot{E}_x = A_1 e^{-jkz} + A_2 e^{jkz}$ (16)

$$\dot{H}_y = \frac{1}{z_c} (A_1 e^{-jkz} - A_2 e^{jkz}) \quad (17)$$

$$\dot{E}_y = B_1 e^{-jkz} + B_2 e^{jkz} \quad (18)$$

$$\dot{H}_x = \frac{1}{z_c} (-B_1 e^{-jkz} + B_2 e^{jkz}) \quad (19),$$

где $z_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}$, [Ом] — характеристическое сопротивление среды, определяющееся свойствами среды.

Пары (16)-(17) и (18)-(19) образуют вектор Пойнтинга, ориентированный по оси z. Полученные нами, решения представляют собой сумму двух слагаемых (так как решалось дифференциальное уравнение). Уточним физический смысл каждого слагаемого. Для этого в уравнении (16) перейдем от комплексных амплитуд к мгновенным значениям.

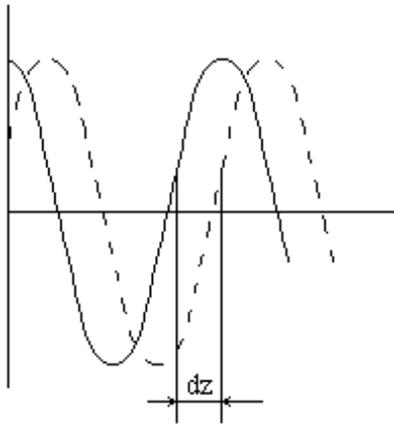
$$\bar{1}_x E_x(t) = \text{Re}(\bar{1}_x E_x e^{j\omega t})$$

$$E_x(t) = A_1 \cos(\omega t - kz) + A_2 \cos(\omega t + kz) \quad (20)$$

Аргумент первого слагаемого — $(\omega t - kz)$ (21)

Аргумент второго слагаемого — $(\omega t + kz)$

Рассмотрим аргументы и слагаемые для $t=t_1, z=z_1$, т.е. $\omega t_1 - kz_1, \omega t_1 + kz_1$. Дадим приращение времени $t=t_1 + dt$ и определим смещение точек $z=z_1 + dz$ этого волнового процесса с постоянными фазами $\omega t_1 - kz_1, \omega t_1 + kz_1$.



Для того, чтобы оценить это смещение, осуществляем следующие равенства:

$$\omega(t_1 + dt) - k(z_1 + dz) = \omega t_1 - k z_1 \quad (22)$$

$$\omega(t_1 + dt) + k(z_1 + dz) = \omega t_1 + k z_1 \quad (23)$$

Приводя подобные члены в соотношениях (22) и (23), получим:

$$\omega dt - k dz = 0 \quad (24)$$

$$\omega dt + k dz = 0 \quad (25)$$

Выражая $\frac{dz}{dt}$ в первом и втором случаях, получаем:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} \quad (26)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{\omega}{k} \quad (27)$$

Соотношение (26) определяет перемещения фиксированной фазы $(\omega t - kz)$, а соотношение (27) — $(\omega t + kz)$, т.е. соотношения (26) и (27) определяют фазовую скорость. Соотношение (26) определяет положительную фазовую скорость. Стало быть, компонента $A_1 \cos(\omega t - kz)$ и соответствующая ей $A_1 e^{-jkz}$ соответствуют плоской волне распространяющейся в положительном направлении оси z . Аналогично и соотношение (27).

Итак, в полученном нами решении (16) первое слагаемое для плоской волны в положительном направлении, второе слагаемое — в отрицательном.

Уточним физический смысл волнового числа k . Волновое число k показывает изменение фазы волны в радианах при прохождении волной пути в 1 метр.

Минимальное расстояние, на котором фаза волны изменяется на 2π называется длиной волны (пространственным периодом).

$$k\lambda = 2\pi \quad (28)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (29)$$

Проанализируем полученные решения на примере \dot{E}_x, \dot{H}_y .

$$\dot{E}_x = A_1 e^{-jkz} + A_2 e^{jkz}$$

$$\dot{H}_y = \frac{1}{Z_c} (A_1 e^{-jkz} - A_2 e^{jkz})$$

В этих общих решениях выделим слагаемые, которые соответствуют волне, распространяющейся в положительном направлении оси z :

$$\dot{E}_x = \dot{E}_0 e^{-jkz} \quad (30)$$

$$\dot{H}_y = \frac{\dot{E}_0}{Z_c} e^{-jkz} \quad (31)$$

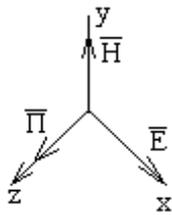
Перейдем к мгновенным значениям:

$$E_x(t) = E_0 \cos(\omega t - kz + \phi) \quad (32)$$

$$H_y(t) = \frac{E_0}{Z_c} \cos(\omega t - kz + \phi) \quad (33)$$

1. $z = \text{const}$ — поверхность равных фаз представляет собой плоскость.
2. поверхность равных амплитуд совпадает с поверхностью равных фаз (плоская волна однородная).
3. в направлении распространения отсутствуют составляющие поля (плоская, однородная, поперечная).
4. компоненты поля плоской волны взаимноортогональны и перпендикулярны направлению распространения волны.

Между составляющими поля плоской волны существует взаимосвязь.



$$\vec{E} = \bar{1}_x \dot{E}_x = z_c \begin{bmatrix} \bar{1}_y \\ \dot{H}_y \\ \bar{1}_z \end{bmatrix} = z_c \begin{bmatrix} \dot{H} \\ \bar{1}_z \end{bmatrix}$$

$$\dot{H} = \frac{1}{z_c} \begin{bmatrix} \bar{1}_z \\ \dot{E} \end{bmatrix}$$

Определим энергетические характеристики волны:

$$w_{cp}^{\text{Э}} = \frac{\epsilon_a \dot{E} \dot{E}^*}{4} = \frac{\epsilon_a E_0^2}{4} \text{ — объемная плотность электрической энергии.}$$

$$w_{cp}^{\text{М}} = \frac{\mu_a \dot{H} \dot{H}^*}{4} = \frac{\mu_a E_0^2}{4z_c^2} = \frac{\epsilon_a E_0^2}{4} \text{ — объемная плотность магнитной энергии.}$$

Так как среда однородная, изотропная и без потерь,

$$\bar{\Pi}_{cp} = \frac{1}{2} \text{Re} \begin{bmatrix} \dot{E} \dot{H}^* \end{bmatrix} = \frac{E_0^2}{2z_c} [\bar{1}_x \bar{1}_y] = \bar{1}_z \frac{E_0^2}{2z_c}.$$

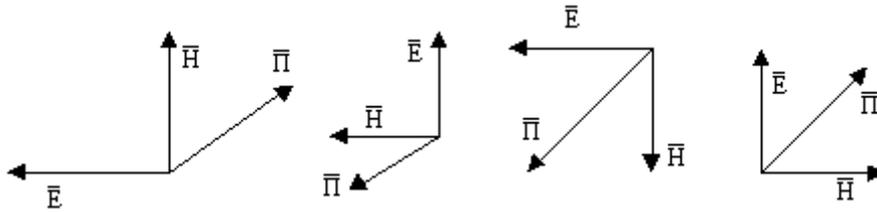
Определим скорость распространения энергии:

$$\bar{V}^{\text{Э}} = \frac{\bar{\Pi}_{cp}}{W_{cp}} = \bar{1}_z \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}} = \bar{1}_z \frac{E_0^2}{2 * z_c * \epsilon_a * E_0^2}.$$

Уравнение для фазовой скорости: $V_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}} = \bar{1}_z V_0$, где $k = \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a}$.

Тогда в случае среды без потерь: $V^{\text{Э}} = V_{\phi} = V_0$.

Различные комбинации полного решения для плоской электромагнитной волны фактически соответствуют одной и той же плоской волне при различных ее ориентациях, относительно выбранной системы координат.

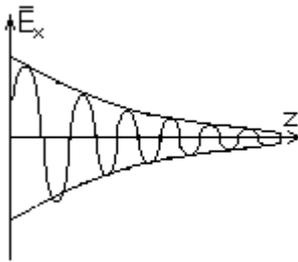


В среде с проводимостью отличной от нуля энергия электромагнитной волны частично расходуется на возбуждение и поддержание токов проводимости, т.е. волна в процессе распространения затухает. В общем случае наряду с джоулевыми потерями в среде могут присутствовать также диэлектрические и магнитные потери. В этом случае:

$$\nabla^2 \ddot{\vec{E}} + \gamma^2 \dot{\vec{E}} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla^2 \ddot{\vec{H}} + \gamma^2 \dot{\vec{H}} = 0 \quad (2)$$

$$\gamma = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a / \epsilon_0 \mu_0} \quad (3)$$



В этом случае решения по форме совпадают с решениями, полученными в предыдущем параграфе.

$$\dot{\vec{E}}_m = \dot{E}_o e^{-j\gamma z} \quad (4)$$

$$\dot{\vec{H}}_m = \dot{H}_o e^{-j\beta z} \quad (5)$$

$$\gamma = \beta - j\alpha \quad (6)$$

Перейдем для уяснения физического смысла к мгновенным значениям:

$$E(t) = \bar{1}_x E_o e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi) = \bar{1}_x E_m(z) \cos(\omega t - \beta z + \phi)$$

Степень убывания амплитуды:

$$\frac{E_x(z)}{E_x(z+1)} = e^{\alpha} \quad \text{-характеризует ослабление волны.}$$

$$\dot{E}_o = E_o e^{j\phi}$$

В некоторый фиксированный момент времени изобразим $E_m(z)$:

Отметим физический смысл: γ — комплексная постоянная распределения.

β — ее действительная часть, смысл тот же, что и у k , т.е. показывает изменение фазы волны в радианах при прохождении волной пути в 1 метр (фазовая постоянная); α — мнимая часть γ . Показывает во сколько раз уменьшается амплитуда волны на пути в 1 метр (постоянная затухания).

Уменьшение амплитуды волны в процессе распространения характеризуют величиной затухания:

$$L = \ln \left| \frac{E_m(z)}{E_m(z+1)} \right| = \alpha l, \text{ [Нп]} \quad (7)$$

$$L_{\text{дБ}} = 20 \lg \left| \frac{E_m(z)}{E_m(z+1)} \right| = 8,69 \alpha l, \text{ [дБ]}$$

Будем рассматривать случай, когда потери в среде вызваны конечной проводимостью (только Джоулевы потери):

$$\tilde{\mu}_a = \mu_a \text{ и } \tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a (1 - j \operatorname{tg} \delta), \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_a}$$

$$\gamma = \operatorname{Re} \gamma + j \operatorname{Im} \gamma = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a (1 - j \operatorname{tg} \delta)} \quad (8)$$

Хотим получить выражения для β и α . Возведем в квадрат и выделим реальные и мнимые величины. Получим:

$$(\operatorname{Re} \gamma)^2 - (\operatorname{Im} \gamma)^2 = \omega^2 \mu_a \varepsilon_a \quad (\nabla)$$

$$2 \operatorname{Re} \gamma \operatorname{Im} \gamma = -\omega^2 \mu_a \varepsilon_a \operatorname{tg} \delta$$

Выразим из второго уравнения мнимую часть и подставим в первое.

$$(\operatorname{Im} \gamma)^2 = \left| \frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a \operatorname{tg} \delta}{2 \operatorname{Re} \gamma} \right|^2$$

$$(\operatorname{Re} \gamma)^2 - \left(-\frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a \operatorname{tg} \delta}{2} \right) \frac{1}{(\operatorname{Re} \gamma)^2} - \omega^2 \mu_a \varepsilon_a = 0$$

$$((\operatorname{Re} \gamma)^2)^2 - \omega^2 \mu_a \varepsilon_a (\operatorname{Re} \gamma)^2 - \left(-\frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a \operatorname{tg} \delta}{2} \right)^2 = 0$$

Решаем квадратное уравнение:

$$(\operatorname{Re} \gamma)^2 = \frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} \right)^2 + \left(\frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \delta}$$

$$(\operatorname{Re} \gamma)^2 = \frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} \pm \frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}$$

Так как слева стоит квадрат, то в этом соотношении учитывается только знак

"+". Тогда:

$$(\operatorname{Re} \gamma)^2 = \frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} (1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta})$$

Откуда получаем:

$$\operatorname{Re} \gamma = \pm \beta = \pm \omega \sqrt{\frac{\mu_a \varepsilon_a}{2} (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1)} \quad (9)$$

Воспользуемся соотношением (V) из которого следует, что мнимая часть:

$$(\operatorname{Im} \gamma)^2 = -\omega^2 \mu_a \varepsilon_a + (\operatorname{Re} \gamma)^2$$

Подставим (9) в (V):

$$(\operatorname{Im} \gamma)^2 = -\frac{2\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} + \frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} \pm \frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}$$

$$(\operatorname{Im} \gamma)^2 = -\frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} \pm \frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}$$

Так как слева стоит квадрат, то правая часть не может быть отрицательной. Получаем:

$$(\operatorname{Im} \gamma)^2 = \frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} (-1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta})$$

$$\operatorname{Im} \gamma = \pm \alpha = \pm \omega \sqrt{\frac{\mu_a \varepsilon_a}{2} (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} - 1)} \quad (10)$$

Проанализируем экспоненциальный множитель $e^{\pm j\gamma z}$. Подстановка вместо $\gamma = \beta - j\alpha$. Можно получить: $e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$; $e^{-\alpha z} e^{j\beta z}$; $e^{\alpha z} e^{-j\beta z}$; $e^{\alpha z} e^{j\beta z}$. Физически реальными являются первое и последнее произведения. Первое из них соответствует затухающей волне, распространяющейся в положительном направлении оси z , а последнее — в отрицательном направлении оси z . Таким образом поле плоской волны, распространяющейся в среде с потерями, может быть представлено следующими соотношениями:

$$\vec{E}_m = \vec{E}_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (11)$$

$$\vec{H}_m = \frac{\vec{1}_z \vec{E}_0}{z_c} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (12)$$

В данном случае характеристическое сопротивление среды является комплексной величиной.

$$\begin{aligned} \dot{z}_c &= \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a(1-jtg\delta)}} = \sqrt{\frac{\mu_a(1+jtg\delta)}{\varepsilon_a(1+tg^2\delta)}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a} \left[\frac{1}{(1+tg^2\delta)} + j \frac{tg\delta}{(1+tg^2\delta)} \right]} = \\ &= \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a} \left[\frac{\cos^2 \delta}{\cos^2 \delta + \sin^2 \delta} + j \frac{\cos \delta \sin \delta}{\cos^2 \delta + \sin^2 \delta} \right]} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a} (\cos^2 \delta + j \cos \delta \sin \delta)} = \\ &= (\dot{Z}_C) e^{j\Psi} \end{aligned}$$

Целесообразно поступить следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_a}{\varepsilon_a} (\cos^2 \delta + j \cos \delta \sin \delta) &= \left| \dot{A} \right| e^{j\Psi} \\ \left| \dot{A} \right| &= \sqrt{\left(\frac{\mu_a}{\varepsilon_a} \right)^2 (\cos^4 \delta + \cos^2 \delta \sin^2 \delta)} = \frac{\mu_a}{\varepsilon_a} \cos \delta \\ tg\Psi &= \frac{\cos \delta \sin \delta}{\cos^2 \delta} = tg\delta; \Psi = \delta \\ \dot{z}_c &= \left| \dot{A} \right| e^{j\Psi} = \left| \dot{z}_c \right| e^{j\Psi} \\ \left| \dot{z}_c \right| &= \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a} \cos \delta}; \Psi = \delta/2 \quad (13) \end{aligned}$$

$$tg\delta = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_a}$$

Рассмотрим, как меняется фаза и $\left| \dot{z}_c \right|$ при изменении $\sigma = 0 \dots \infty$.

$$\sigma = 0: tg\delta = 0, \delta = 0, \Psi = 0, \left| \dot{Z}_C \right| = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon}}$$

$$\sigma = \infty: tg\delta = \infty, \delta = \frac{\pi}{2}, \Psi = \frac{\pi}{4}, \left| \dot{Z}_C \right| = 0$$

С ростом проводимости характеристическое сопротивление по модулю убывает.

Вывод: По определению $\dot{E}_m = \dot{z}_c \dot{H}_m$. В среде с проводимостью отличной от нуля при постоянной напряженности электрического поля $\dot{E}_m = \text{const}$ с ростом проводимости увеличивается амплитуда магнитной компоненты \dot{H}_m .

Физически это можно объяснить:

в среде с проводимостью равной нулю присутствуют только токи смещения $\vec{j}^{cm} = j\omega\epsilon_a \vec{E}_m$. Если проводимость равна нулю, то в среде появляются проводящие токи. Причем при неизменной напряженности электрического поля и диэлектрической проницаемости среды плотность тока остается неизменной.

Проанализируем полученный результат. Пусть \vec{E} имеет только икс-овую составляющую, тогда вектор \vec{H} будет иметь одну составляющую, ориентированную по оси y, если волна распространяется вдоль оси z. Будем предполагать, что амплитуда \vec{E} является действительной величиной.

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \bar{1}_x E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \\ \vec{H} &= \bar{1}_y \frac{E_0}{Z_c} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}\end{aligned}$$

Перейдем к мгновенным значениям: $\bar{E}(t) = \bar{1}_x E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$

$$\bar{H}(t) = \bar{1}_y \frac{E_0}{|Z_c|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \delta/2)$$

Проанализируем. Поверхность равных фаз определяется уравнением $z = \text{const}$. Поверхность равных амплитуд совпадает с поверхностью равных фаз, т.е. рассмотренный процесс является плоской однородной волной.

Имеются составляющие поля, взаимно ортогональные и перпендикулярные направлению распространения волны, т.е. она является и поперечной.

Амплитуда волны экспоненциально убывает в процессе ее распространения. В данном случае магнитная составляющая поля отстает от электрической на

угол $\delta/2$.

Проанализируем основные характеристики электромагнитной волны. Фазовая скорость равна:

$$V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_a \epsilon_a}{2} (\sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta} + 1)}}$$

Из этого уравнения следует, что так как $\beta > k$, то фазовая скорость в среде с потерями меньше фазовой скорости в среде без потерь, так как $\text{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_a}$.

В данном случае фазовая скорость является функцией частоты. С ростом частоты $\operatorname{tg}\delta$ убывает и фазовая скорость возрастает. Фазовая скорость зависит от проводимости среды. С ростом проводимости $\operatorname{tg}\delta$ увеличивается и фазовая скорость убывает.

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{1}{f \sqrt{\frac{\mu_a \varepsilon_a}{2} (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1)}}$$

Из соотношения видно, что λ в среде с потерями меньше λ в среде без потерь. С ростом проводимости $\operatorname{tg}\delta$ увеличивается и λ убывает.

Распространение волны сопровождается переносом энергии. Вектор Пойнтинга:

$$\dot{\vec{\Pi}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\vec{E} \dot{\vec{H}}^* \right] = \bar{1}_z \frac{E_o^2}{2 |\vec{E}_c|} e^{-2\alpha z} e^{j\delta/2}$$

$$\bar{\Pi}_{cp} = \bar{1}_z \frac{E_o^2}{2 |\vec{E}_c|} e^{-2\alpha z} \cos(\delta/2)$$

Среднее за период значение:

Если мы попытаемся вычислить скорость распространения энергии, то все

$$\bar{V}_v = \frac{\operatorname{Re} \dot{\vec{\Pi}}}{w_{cp}}$$

данные есть:

После подстановки получим, что $V_v = V_\phi$.

$$\begin{aligned} z_c = f(\omega) &\rightarrow \omega \uparrow \rightarrow \operatorname{tg}\delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_a} \downarrow \rightarrow |z_c| \uparrow \\ \omega \rightarrow \infty, \operatorname{tg}\delta &\rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, |z_c| \rightarrow \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \\ z_c = f(\sigma) &\rightarrow \sigma \uparrow \rightarrow \operatorname{tg}\delta \uparrow \rightarrow \delta \uparrow \rightarrow |z_c| \downarrow \\ \sigma \rightarrow \infty; \operatorname{tg}\delta &\rightarrow \infty, \delta \rightarrow \pi/2 \rightarrow |z_c| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

По рассмотренным результатам можно отметить, что характеристики плоских волн в среде с потерями и без потерь существенно отличаются. Главное принципиальное отличие состоит в том, что V_ϕ , V_ε , z_c в среде без потерь неизменны при любых частотах и определяются только электродинамическими параметрами среды. В среде с потерями эти же параметры являются функциями частоты. Явление зависимости параметров электромагнитной волны от частоты называется дисперсией, а соответствующие среды называются диспергирующими. Дисперсия

возможна и в средах без потерь, если хотя бы один из электродинамических параметров частоты.

Рассмотрим два является функцией характерных случая распределения электромагнитных волн в реальных средах, т.е. определим параметры плоской волны в реальных диэлектриках и металлах.

Тема-59. Распространение электромагнитных волн в диэлектрике.

План:

2. Распространение волн в реальных диэлектриках.

1. Распространение волн в реальных металлах..

Распространение волн в реальных диэлектриках.

Для реальных диэлектриков $tg \delta \ll 1$. $\gamma = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} (1 - jtg \delta)^{1/2}$ (1)

Используя неравенство, скобку можно представить в виде ряда Маклорена:

$$x \ll 1: (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots$$

$$(1 - jtg \delta)^{1/2} = 1 + \frac{1/2}{1!}(-jtg \delta) + \frac{1/2(-1/2)}{2!}(-jtg \delta)^2 + \dots \quad (2)$$

Ограничиваясь тремя элементами разложения, пренебрегая всеми остальными, получаем:

$$\gamma \cong \beta - j\alpha \cong \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \left[1 + \frac{1}{8}tg^2 \delta - j\frac{1}{2}tg \delta \right] \quad (3)$$

Приравнивая реальную и мнимую части, получим:

$$\beta = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \left[1 + \frac{1}{8}tg^2 \delta \right]$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \frac{1}{2}tg \delta = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \frac{\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \sigma}{2\omega \varepsilon_a} \quad (4,5)$$

Используя выражение для β , получим:

$$V_\phi = V^e = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \left[1 + \frac{1}{8}tg^2 \delta \right]} = \frac{\left[1 - \frac{1}{8}tg^2 \delta \right]}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \left[1 - \frac{1}{64}tg^4 \delta \right]} \approx V_0 \left[1 - \frac{1}{8}tg^2 \delta \right] \quad (6)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{1}{f \sqrt{\mu_a \varepsilon_a} \left[1 + \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \delta \right]} \cong \frac{V_0}{f} \left[1 - \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \delta \right]$$

V_0 — скорость света в среде.

Из результатов следует, что параметры плоской волны в реальных диэлектриках мало отличаются от параметров в среде без потерь. Постоянная затухания λ в реальных диэлектриках является очень малой величиной и в первом приближении не зависит от частоты. В реальных диэлектриках дисперсионные свойства проявляются слабо.

2. Распространение волн в реальных металлах.

В проводящих средах $\operatorname{tg} \delta \gg 1$. Общее выражение:

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu_a \varepsilon_a}{2} (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1)} \quad (1)$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu_a \varepsilon_a}{2} (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} - 1)} \quad (2)$$

Пренебрегая единицей, получим (α, β линейным образом зависят от частоты):

$$\alpha = \beta \approx \sqrt{\frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a}{2} \operatorname{tg} \delta} = \sqrt{\frac{\omega^2 \mu_a \varepsilon_a \sigma}{2 \omega \varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_a \sigma}{2}} \quad (3)$$

β и α не линейно зависят от ω , следовательно, с изменением ω они будут существенно изменяться.

Получим выражение для фазовой скорости:

$$V^\varphi = V_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{\omega^2 2}{\omega \mu_a \sigma}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_a \sigma}} \quad (4)$$

Тема-60. Теорема Умова – Пойнтинга.

План:

1. Теорема Умова–Пойнтинга. Применени теоремы Теорема Умова – Пойнтинга.
2. Электрическое поле постоянного тока.
3. Основные понятия. Интегральное выражение теоремы Теорема Умова – Пойнтинга.

Теорема Умова-Пойтинга.

Поток вектора Пойтинга, входящий в замкнутую поверхность S , равен сумме двух мощностей, одна из которых

$$\int_V \gamma E^2 dV = P_{\text{тепл}}$$

Является мощностью тепловых потерь внутри объёма V , ограниченного поверхностью S , а другая

$$\frac{\partial W_{\text{ЭМ}}}{\partial t} = P_{\text{ЭМ}}$$

Соответствует изменению энергии электромагнитного поля в том же объёме. Мощность тепловых потерь всегда положительна. Мощность $P_{\text{ЭМ}}$, соответствующая изменению энергии электромагнитного поля, может быть и положительной и отрицательной. Если она положительна, то электромагнитная энергия внутри объёма V увеличивается. Положительная нормаль к замкнутой поверхности и вектор $d\mathbf{S}$ направлены в наружную сторону. Поэтому для того чтобы поток вектора $\mathbf{\Pi}$, входящий через поверхность S был положительным, вектор $\mathbf{\Pi}$ должен быть направлен внутрь объёма V (угол между $\mathbf{\Pi}$ и $d\mathbf{S}$ должен быть тупым).

Вектор Пойтинга можно определить как величину, которая равна энергии проходящей в 1сек сквозь поверхность равную 1м^2 , перпендикулярную к направлению $\mathbf{\Pi}$.

Если в объёме имеются источники, то теорему можно записать в виде

$$P_{\text{ист}} = \oint \mathbf{\Pi} dS + \int_V \gamma E^2 dV + \frac{\partial W_{\text{ЭМ}}}{\partial t}$$

Мощность источников в объёме V равна сумме мощностей: тепловых потерь, мощности изменения энергии электромагнитного поля в объёме V и мощности энергии, выходящей через граничную поверхность S рассмотренного объёма.

Теорема Умова-Пойтинга.

Она выражает закон сохранения энергии в электромагнитном поле. Она связывает изменение энергии в каком-либо объёме с потоком её через поверхность, ограничивающую этот объём. Энергия электромагнитного поля

$$W_{\text{ЭМ}} = \int_V \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} dV + \int_V \frac{\mu \mu_0 H^2}{2} dV$$

Увеличение энергии в указанном объёме

$$\frac{\partial W_{\text{ЭМ}}}{\partial t} = \int_V \varepsilon_0 E \frac{\partial E}{\partial t} dV + \int_V \mu \mu_0 H \frac{\partial H}{\partial t} dV$$

Для $\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$

$$\text{rot} H = \gamma E + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\text{rot} E = -\mu \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$

Из этих уравнений найдём

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \text{rot} H - \gamma E$$

$$\mu \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} = -\text{rot} E$$

Тогда изменение энергии электромагнитного поля может быть выражена

$$\frac{\partial W_{\text{ЭМ}}}{\partial t} = \int_V E \text{rot} H dV - \int_V \gamma E^2 dV - \int_V H \text{rot} E dV$$

Из курса векторного анализа

$$\text{Div}[\mathbf{EH}] = H \text{rot} E - E \text{rot} H$$

Следовательно

$$\frac{\partial W_{\text{ЭМ}}}{\partial t} = - \int_V \text{div}[\mathbf{EH}] dV - \int_V \gamma E^2 dV$$

Обозначим $[\mathbf{EH}] = \boldsymbol{\pi}$ его называют вектором Пойтинга, в системе СИ $[\boldsymbol{\pi}] = [\text{Вт}/\text{м}^2]$

По теореме Остроградского

$$\int_V \text{div} \boldsymbol{\pi} dV = \oint_S \boldsymbol{\pi} dS$$

И следовательно

$$- \oint_S \boldsymbol{\pi} dS = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{\partial W_{\text{ЭМ}}}{\partial t}$$

1. Электрическое поле постоянного тока.

В области, в которой нет сторонних ЭДС, роль постоянного тока потенциальна.

Потенциал и напряженность тока в такой области связаны соотношением:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi$$

Так как постоянный ток непрерывен, поле не имеет источников

$$\text{div } \vec{\delta} = 0$$

По закону Ома

$$\vec{\delta} = \gamma \vec{E}$$

В среде с постоянной проводимостью

$$\gamma = \text{const}$$

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

Подставив значение \vec{E} , получим:

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

Следовательно, для определения потенциала поля в рассматриваемой области необходимо решить уравнение Лапласа и учесть граничные условия. Электростатическое поле тоже описывается уравнением Лапласа. Поэтому, если две одинаково ограниченные области, проводящая (без сторонних ЭДС) и диэлектрическая (без свободных зарядов) имеют на ограниченной поверхности одинаковое распределение потенциала, то внутри каждой из этих областей распределение потенциала будет также одинаковым. Это обстоятельство позволяет пользоваться формулами, полученными при расчете электрических полей, в случае постоянного тока. При этом, ёмкость следует заменить проводимостью, ” ϵ “ заменить проводимостью ” γ “. Так, например, ёмкость кабеля

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln \frac{b}{a}}$$

Произведя замену, можно легко получить

$$G = \frac{1}{R} = \frac{2\pi\gamma l}{\ln \frac{b}{a}}$$

Тема-61. Запаздывающие потенциалы переменного электромагнитного поля переменного тока.

План:

1. Определения переменного электромагнитного поля.
2. Комплексная форма записи запаздывающего векторного потенциала.
3. Уравнение Максвелла для изменчивой среды. Первое уравнение Максвелла. Второе уравнение Максвелла.

Определения переменного электромагнитного поля.

Ранее мы изучали постоянное поле, создаваемое покоящимися зарядами, а также — переменное поле, но в отсутствие зарядов. Теперь мы займемся изучением переменных полей при наличии произвольно движущихся зарядов.

Выведем уравнения, определяющие потенциалы поля, создаваемого движущимися зарядами. Это удобно сделать в четырехмерном виде, повторив произведенный ранее вывод с той лишь разницей, что надо использовать уравнения Максвелла

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i$$

с отличной от нуля правой частью. Такая же правая часть появится и в уравнении $\text{div } \mathbf{A} = 0$, и после наложения на потенциалы условия Лоренца

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = 0, \text{ т.е. } \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \mathbf{A} = 0,$$

получим

$$\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^i.$$

Это и есть уравнение, определяющее потенциалы произвольного электромагнитного поля. В трехмерном виде оно записывается в виде двух уравнений — для \mathbf{A} и для φ :

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho.$$

Для постоянного поля они сводятся к уже известным нам уравнениям и , а для переменного поля без зарядов — к однородным волновым уравнениям.

Решение неоднородных линейных уравнений может быть представлено, как известно, в виде суммы решения этих же уравнений без правой части и частного интеграла уравнений с правой частью. Для нахождения этого частного интеграла разделим все пространство на бесконечно малые участки и определим поле, создаваемое зарядом, находящимся в одном из таких элементов объема. Вследствие линейности уравнений истинное поле будет равно сумме полей, создаваемых всеми такими элементами.

2. Комплексная форма записи запаздывающего векторного потенциала.

Заряд de в заданном элементе объема является, вообще говоря, функцией от времени. Если выбрать начало координат в рассматриваемом элементе объема, то плотность заряда $\rho = de(t)\delta(\mathbf{R})$, где \mathbf{R} — расстояние от начала координат. Таким образом, нам надо решить уравнение

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi de(t)\delta(\mathbf{R}).$$

Везде, кроме начала координат, $\delta(\mathbf{R})=0$, и мы имеем уравнение

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Очевидно, что в рассматриваемом случае φ обладает центральной симметрией, т.е. есть функция только от R . Поэтому, если написать оператор Лапласа в сферических координатах, то приобретет вид

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Для решения этого уравнения сделаем подстановку $\varphi = \chi(R,t)/R$. Тогда для χ мы получим

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0.$$

Но это есть уравнение плоских волн, решение которого имеет вид

$$\chi = f_1 \left(t - \frac{R}{c} \right) + f_2 \left(t + \frac{R}{c} \right).$$

Поскольку мы ищем только частный интеграл уравнения, то достаточно взять только одну из функций f_1 и f_2 . Обычно бывает удобным выбирать $f_2=0$ (см. об этом ниже). Тогда потенциал φ везде, кроме начала координат, имеет вид

$$\varphi = \frac{\chi(t - R/c)}{R}$$

Функция χ в этом равенстве пока произвольна; выберем ее теперь так, чтобы получить верное значение для потенциала также и в начале координат. Иначе говоря, мы должны подобрать χ так, чтобы в начале координат удовлетворялось уравнение. Это легко сделать, заметив, что при $R \rightarrow 0$ сам потенциал стремится к бесконечности, а потому его производные по координатам растут быстрее, чем производные по времени.

Следовательно, $R \rightarrow 0$ в уравнении можно пренебречь членом $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ по сравнению с $\Delta \varphi$. Тогда оно переходит в известное уже нам уравнение, приводящее к закону Кулона. Таким образом, вблизи начала координат формула должна переходить в закон Кулона, откуда следует, что $\chi(t) = de(t)$, т.е.

$$\varphi = \frac{de(t - R/c)}{R}.$$

3. Уравнение Максвелла для изменчивой среды. Первое уравнение Максвелла. Второе уравнение Максвелла.

Отсюда легко перейти к решению уравнения для произвольного распределения зарядов $\rho(x, y, z, t)$. Для этого достаточно написать $de = \rho dV$ (dV — элемент объема) и проинтегрировать по всему пространству. К полученному таким образом решению неоднородного уравнения можно прибавить еще решение φ_0 этого же уравнения без правой части. Таким образом, общее решение имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{1}{R} \rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c} \right) dV' + \varphi_0,$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad dV' = dx'dy'dz',$$

где $\mathbf{r}=(x,y,z)$, $\mathbf{r}'=(x',y',z')$; R есть расстояние от элемента объема dV' до «точки наблюдения», в которой мы ищем значение потенциала. Мы будем писать это выражение коротко в виде

$$\varphi = \int \frac{\rho_{t-R/c}}{R} dV + \varphi_0,$$

где индекс показывает, что значение ρ надо брать в момент времени $t-R/c$, а штрих у dV опущен.

Аналогичным образом имеем для векторного потенциала:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{t-R/c}}{R} dV + \mathbf{A}_0,$$

где \mathbf{A}_0 — решение уравнения без правой части.

Выражения (без φ_0 и \mathbf{A}_0) называются *запаздывающими потенциалами*.

В случае неподвижных зарядов (т.е. не зависящей от времени плотности ρ) формула переходит в известную уже нам формулу для потенциала электростатического поля; формула же в случае стационарного движения зарядов переходит (после усреднения) в формулу для векторного потенциала постоянного магнитного поля.

Величины φ_0 и \mathbf{A}_0 определяются так, чтобы удовлетворить условиям задачи. Для этого, очевидно, было бы достаточно задать начальные условия, т.е. поле в начальный момент времени. Однако с такими начальными условиями обычно не приходится иметь дела. Вместо этого задаются условия на больших расстояниях от системы зарядов в течение всего времени. Именно, задается падающее на систему внешнее излучение. Соответственно этому поле, возникающее в результате взаимодействия этого излучения с системой, может отличаться от внешнего поля только излучением, исходящим от системы. Такое исходящее от системы излучение на больших расстояниях должно иметь вид волны, распространяющейся по направлению от системы, т. е. в направлении возрастающих R . Но этому условию удовлетворяют именно запаздывающие потенциалы. Таким образом, последние представляют собой поле, исходящее от системы, а φ_0 и \mathbf{A}_0 надо отождествить с внешним полем, действующим на систему.

Тема-17. Излучение электромагнитной энергии.

План:

1. Общие понятия. Излучение электромагнитного поля.
2. Расчет поля реальных излучателей. Излучение магнитного диполя

1. Общие понятия. Излучение электромагнитного поля.

Существование электромагнитных волн было теоретически предсказано великим английским физиком Дж. Максвеллом в 1864 году. Максвелл проанализировал все известные к тому времени законы электродинамики и сделал попытку применить их к изменяющимся во времени электрическому и магнитному полям. Он обратил внимание на асимметрию взаимосвязи между электрическими и магнитными явлениями. Максвелл ввел в физику понятие вихревого электрического поля и предложил новую трактовку закона электромагнитной индукции, открытой Фарадеем в 1831 г.:

Всякое изменение магнитного поля порождает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле, силовые линии которого замкнуты.

Максвелл высказал гипотезу о существовании и обратного процесса:

Изменяющееся во времени электрическое поле порождает в окружающем пространстве магнитное поле.

Рис. 2.6.1 и 2.6.2 иллюстрируют взаимное превращение электрического и магнитного полей.

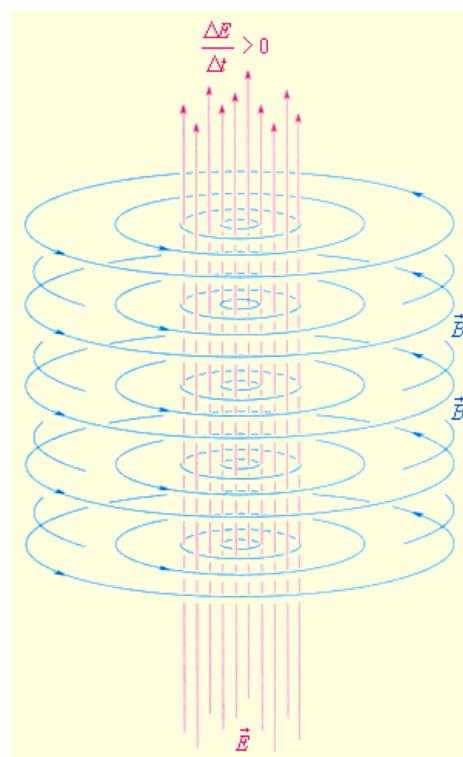
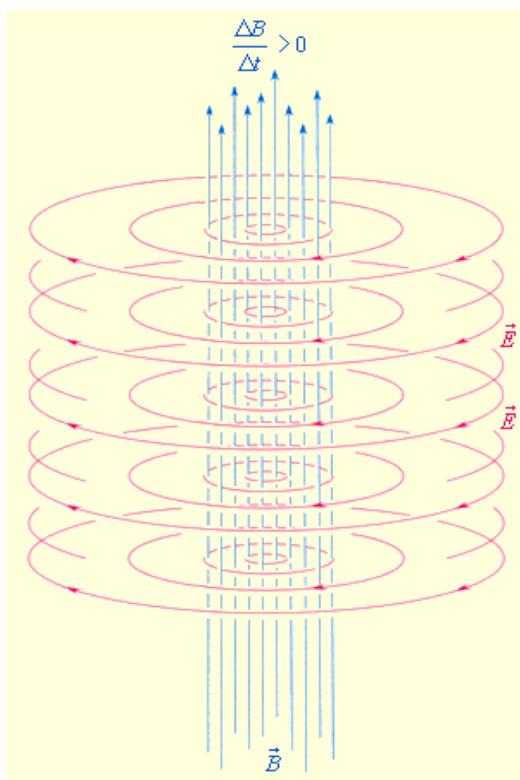


Рисунок 2.6.1.
Закон электромагнитной индукции в трактовке Максвелла

Рисунок 2.6.2.
Гипотеза Максвелла. Изменяющееся электрическое поле порождает магнитное поле

Эта гипотеза была лишь теоретическим предположением, не имеющим экспериментального подтверждения, однако на ее основе Максвеллу удалось записать непротиворечивую систему уравнений, описывающих взаимные превращения электрического и магнитного полей, т. е. систему уравнений **электромагнитного поля** (уравнений Максвелла). Из теории Максвелла вытекает ряд важных выводов:

1. Существуют электромагнитные волны, то есть распространяющееся в пространстве и во времени электромагнитное поле. Электромагнитные

волны **поперечны** – векторы \vec{E} и \vec{B} перпендикулярны друг другу и лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны (рис. 2.6.3).

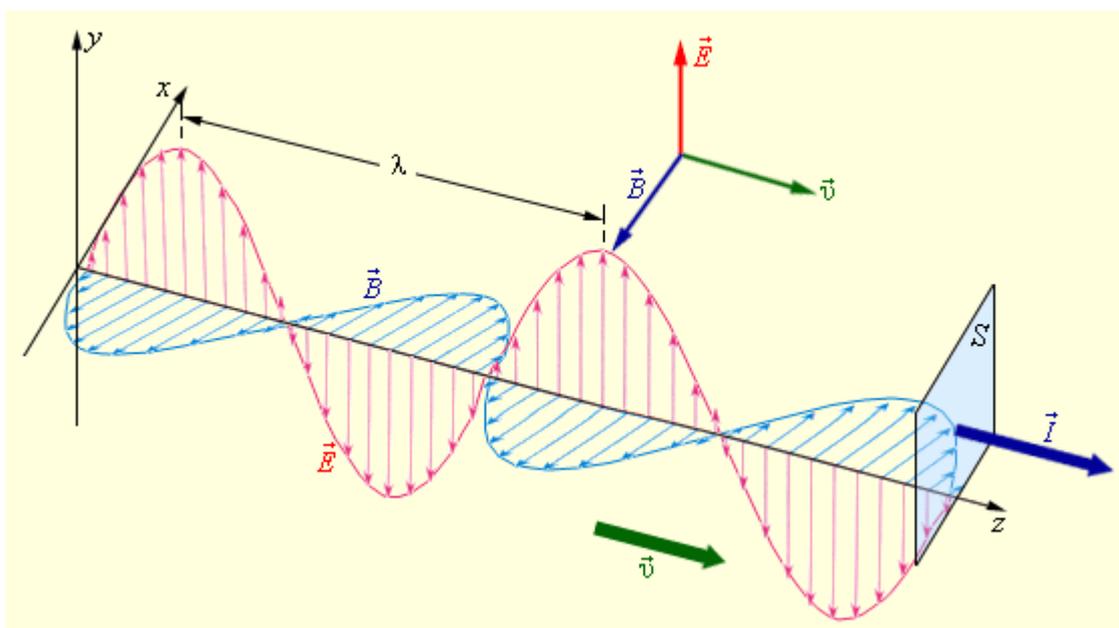


Рисунок 2.6.3.
Синусоидальная (гармоническая) электромагнитная волна.

Векторы \vec{E} , \vec{B} и \vec{v} взаимно перпендикулярны

2. Электромагнитные волны распространяются в веществе с **конечной скоростью**

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}$$

Здесь ϵ и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости вещества, ϵ_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные: $\epsilon_0 = 8,85419 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $\mu_0 = 1,25664 \cdot 10^{-6}$ Гн/м.

Длина волны λ в синусоидальной волне связана со скоростью v распространения волны соотношением $\lambda = vT = v/f$, где f – частота колебаний электромагнитного поля, $T = 1/f$.

Скорость электромагнитных волн в вакууме ($\epsilon = \mu = 1$):

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ м/с} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Скорость c распространения электромагнитных волн в вакууме является одной из фундаментальных физических постоянных.

Вывод Максвелла о конечной скорости распространения электромагнитных волн находился в противоречии с принятой в то время *теорией дальнего действия*, в которой скорость распространения электрического и магнитного полей принималась бесконечно большой. Поэтому теорию Максвелла называют теорией **близкого действия**.

3. В электромагнитной волне происходят взаимные превращения электрического и магнитного полей. Эти процессы идут одновременно, и электрическое и магнитное поля выступают как равноправные «партнеры». Поэтому объемные плотности электрической и магнитной энергии равны друг другу: $w_э = w_м$.

$$\frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} = \frac{B^2}{2 \mu \mu_0}.$$

Отсюда следует, что в электромагнитной волне модули индукции магнитного поля \vec{B} и напряженности электрического поля \vec{E} в каждой точке пространства связаны соотношением

$$B = \frac{\sqrt{\epsilon \mu}}{c} E.$$

4. Электромагнитные волны переносят энергию. При распространении волн возникает поток электромагнитной энергии. Если выделить площадку S (рис. 2.6.3), ориентированную перпендикулярно направлению распространения волны, то за малое время Δt через площадку протечет энергия $\Delta W_{эм}$, равная

$$\Delta W_{эм} = (w_э + w_м) v S \Delta t.$$

Плотностью потока или **интенсивностью** I называют электромагнитную энергию, переносимую волной за единицу времени через поверхность единичной площади:

$$I = \frac{1}{S} \frac{\Delta W_{\text{эм}}}{\Delta t} = (w_{\text{э}} + w_{\text{м}})v.$$

Подставляя сюда выражения для $w_{\text{э}}$, $w_{\text{м}}$ и v , можно получить:

$$I = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} \cdot E^2 = \frac{EB}{\mu\mu_0}.$$

Поток энергии в электромагнитной волне можно задавать с помощью вектора \vec{I} , направление которого совпадает с направлением распространения волны, а модуль равен $EB / \mu\mu_0$. Этот вектор называют **вектором Пойнтинга**.

В синусоидальной (гармонической) волне в вакууме среднее значение $I_{\text{ср}}$ плотности потока электромагнитной энергии равно

$$I_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2,$$

где E_0 – амплитуда колебаний напряженности электрического поля.

Плотность потока энергии в СИ измеряется в **ваттах на квадратный метр** ($\text{Вт}/\text{м}^2$).

5. Из теории Максвелла следует, что электромагнитные волны должны оказывать давление на поглощающее или отражающее тело. Давление электромагнитного излучения объясняется тем, что под действием электрического поля волны в веществе возникают слабые токи, то есть упорядоченное движение заряженных частиц. На эти токи действует сила Ампера со стороны магнитного поля волны, направленная в толщу вещества. Эта сила и создает результирующее давление. Обычно давление электромагнитного излучения ничтожно мало. Так, например, давление солнечного излучения, приходящего на Землю, на абсолютно поглощающую поверхность составляет примерно 5 мкПа. Первые эксперименты по определению давления излучения на отражающие и поглощающие тела, подтвердившие вывод теории Максвелла, были выполнены П. Н. Лебедевым в 1900 г. Опыты Лебедева имели огромное значение для утверждения электромагнитной теории Максвелла.

Существование давления электромагнитных волн позволяет сделать вывод о том, что электромагнитному полю присущ **механический импульс**. Импульс электромагнитного поля в единичном объеме выражается соотношением

$$g = \frac{w_{эм}}{c},$$

где $w_{эм}$ – объемная плотность электромагнитной энергии, c – скорость распространения волн в вакууме. Наличие электромагнитного импульса позволяет ввести понятие электромагнитной массы.

Для поля в единичном объеме

$$p_{эм} = \frac{g}{c} = \frac{w_{эм}}{c^2}.$$

Отсюда следует:

$$w_{эм} = p_{эм} c^2.$$

Это соотношение между массой и энергией электромагнитного поля в единичном объеме является универсальным законом природы. Согласно специальной теории относительности, оно справедливо для любых тел независимо от их природы и внутреннего строения.

Таким образом, электромагнитное поле обладает всеми признаками материальных тел – энергией, конечной скоростью распространения, импульсом, массой. Это говорит о том, что электромагнитное поле является одной из форм существования материи.

6. Первое экспериментальное подтверждение электромагнитной теории Максвелла было дано примерно через 15 лет после создания теории в опытах Г. Герца (1888 г.). Герц не только экспериментально доказал существование электромагнитных волн, но впервые начал изучать их свойства – поглощение и преломление в разных средах, отражение от металлических поверхностей и т. п. Ему удалось измерить на опыте длину волны и скорость распространения электромагнитных волн, которая оказалась равной скорости света.

Опыты Герца сыграли решающую роль для доказательства и признания электромагнитной теории Максвелла. Через семь лет после этих опытов электромагнитные волны нашли применение в беспроводной связи (А. С. Попов, 1895 г.).

7. Электромагнитные волны могут возбуждаться только **ускоренно движущимися зарядами**. Цепи постоянного тока, в которых носители заряда движутся с неизменной скоростью, не являются источником электромагнитных волн. В современной радиотехнике излучение электромагнитных волн производится с помощью антенн различных конструкций, в которых возбуждаются быстропеременные токи.

Простейшей системой, излучающей электромагнитные волны, является небольшой по размерам электрический диполь, дипольный момент $p(t)$ которого быстро изменяется во времени.

Такой элементарный диполь называют *диполем Герца*. В радиотехнике диполь Герца эквивалентен небольшой антенне, размер которой много меньше длины волны λ (рис. 2.6.4).

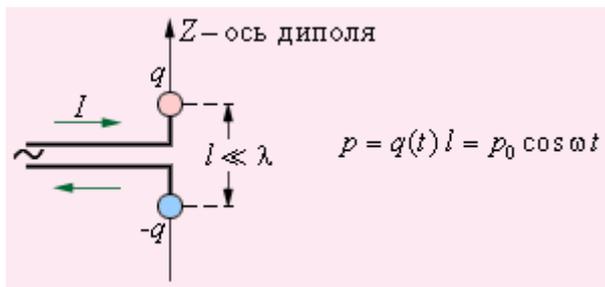


Рисунок 2.6.4.
Элементарный совершающий колебания диполь, гармонические

Рис. 2.6.5 дает представление о структуре электромагнитной волны, излучаемой таким диполем.

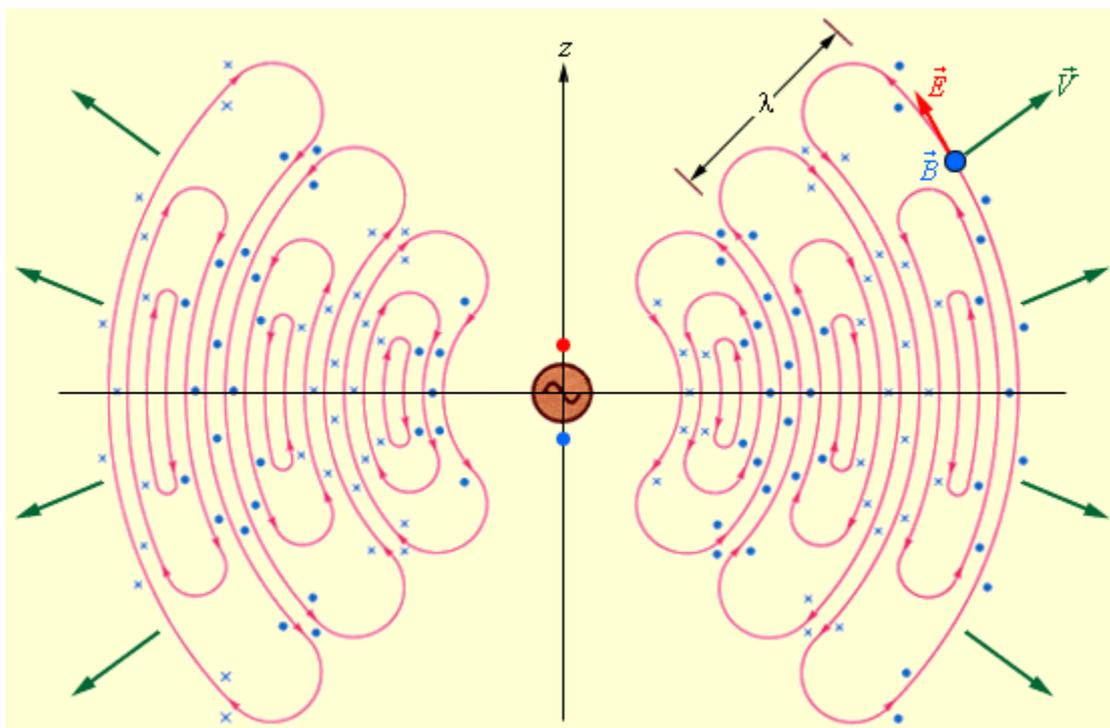


Рисунок 2.6.5.
Излучение элементарного диполя

Следует обратить внимание на то, что максимальный поток электромагнитной энергии излучается в плоскости, перпендикулярной оси диполя. Вдоль своей оси диполь не излучает энергии. Герц использовал элементарный диполь в качестве излучающей и приемной антенн при экспериментальном доказательстве существования электромагнитных волн.

Тема-63. Экранирование в переменном электромагнитном поле.

, амплитудное значение, мгновенное значение, электрическая линия, токи и напряжения.

План:

1. Экранирование в переменном электромагнитном поле.
2. Сопоставление принципов экранирования в электростатическом, магнитном и электромагнитном полях.

Экранирование в переменном электромагнитном поле.

В технике проводной связи и радиотехнике важно уметь ограничить распространение в пространстве электрического и магнитного полей и, в особенности, защитить элементы электрических цепей, электронных устройств, электроизмерительных приборов и другого оборудования от помехонесущего поля.

В этих и подобных им случаях область, в которую поле не должно проникать, экранируется при помощи металлической оболочки от области, где имеется поле. Если такой оболочкой окружить источник переменного электромагнитного поля, то можно исключить влияние его излучения на расположенные вне оболочки устройства. Подобные оболочки носят название электромагнитных экранов. Экранирующее действие экрана из немагнитного материала в переменном электромагнитном поле определяется наведенными в толще стенок экрана токами и возбужденным этими токами магнитным полем. Очевидно, экранирующее действие возрастает при увеличении частоты и толщины стенок экрана.

Для получения эффективного экранирующего действия толщину стенок экрана следует взять, равной длине волны в веществе экрана (5.6) поскольку при проникновении электромагнитной волны в проводящее полупространство на глубину l , как было показано выше, наблюдается ослабление поля в $e^{2p} = 540$ раз, т.е. на этом расстоянии волна фактически полностью затухает. Практически считают, что волна затухает уже на расстоянии, в два-три раза меньшем по сравнению с длиной волны. Как видно из формулы (5.6), с увеличением частоты уменьшается длина волны (глубина проникновения) электромагнитного поля в проводнике.

Поэтому при экранировании полей высокой частоты (радиочастоты) нет необходимости применять для экранов ферромагнитные материалы, которые нежелательны вследствие зависимости их магнитной проницаемости m от напряженности магнитного поля и явления гистерезиса. Обычно применяют экраны из хорошо проводящего материала, например, меди или алюминия. При промышленной частоте $f=50$ Гц медный экран оказывается эффективным лишь при значительной толщине стенок (так как длина волны в меди на этой частоте составляет около 6 см). В этом случае целесообразно использовать экран из ферромагнитного материала, в котором вследствие его высокой магнитной проницаемости электромагнитная волна затухает значительно быстрее, чем в меди.

Следует отметить, что значительные потери в электромагнитных экранах часто ограничивают возможности их применения. Ферромагнитный экран оказывает экранирующее действие и при постоянном поле, так как магнитный поток внешнего поля проходит в основном по стенкам экрана, которые имеют меньшее магнитное сопротивление, и почти не проникает в его полость. При переменном поле его экранирующее действие значительно возрастает вследствие дополнительного экранирующего эффекта токов, возникающих в стенках экрана.

Действие экрана характеризуется коэффициентом экранирования K_3 , который равен отношению напряженности поля H_i внутри экрана к напряженности стороннего (первоначального) поля H_0 .

$$K_3 = H_i / H_0$$

Чем лучше экран, тем меньше будет коэффициент экранирования K_3 . Часто эффект экранирования характеризуется еще одной величиной, которая носит название экранного затухания и определяется по формуле

$$b_3 = \ln(1/K_3).$$

В реальных экранах коэффициент экранирования зависит не только от параметров материала (удельной проводимости g и магнитной проницаемости m), частоты и толщины стенок, но и от других конструктивных особенностей. Так, например, если поместить бесконечно длинный цилиндрический экран в поперечное однородное магнитное поле (рис. 5.2), то можно получить следующее выражение для коэффициента экранирования:

$$K_3 = \frac{1}{\operatorname{ch}(k_1 d) + \frac{1}{2} \left(K_1 + \frac{1}{K_1} \right) \cdot \operatorname{sh}(k_1 d)},$$

(5.7)

где d – толщина стенки экрана; $k^2 = j\omega m g$; $k_1 = \sqrt{k^2 + 1/R^2}$; R – наружный радиус экрана; j – мнимая единица; $K_1 = k_1 R m_0 / m$.

Как видно из выражения (5.7), коэффициент экранирования представляет собой комплексное число и зависит также от радиуса экрана.

Обычно экраны выполняют таким образом, чтобы соблюдалось условие $kR \gg 1$, поскольку в противном случае действие экрана будет ничтожным. Поэтому в выражении для коэффициента экранирования (5.7) можно положить $k_1 = k$.

Существенно отметить, что внутреннее поле (внутри экрана) так же как и внешнее поле, однородно и имеет то же направление.

При предельном значении частоты, равном нулю, для железных экранов ($m \gg m_0$), будет наблюдаться так называемое магнитостатическое экранирование. Коэффициент экранирования при этом определяется при помощи следующего выражения:

$$K_3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{\mu}{\mu_0} \frac{d}{R}}$$

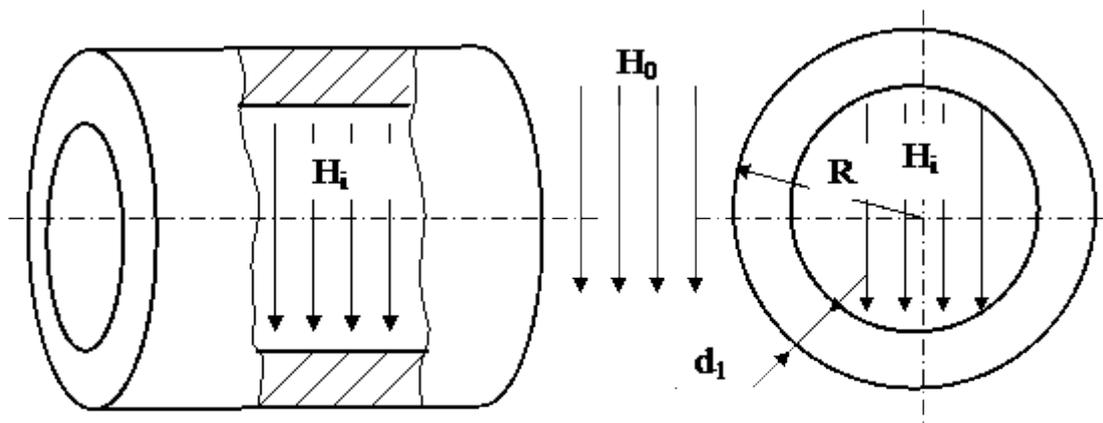


Рис. 5.2

Экран не только оказывает экранирующее действие, но и влияет на внешнее поле в области вне экрана. Степень влияния определяется при помощи так называемого коэффициента обратного действия экрана W_3 . Например, если рассматривать выше приведенный экран в цилиндрической системе координат, расположив оси координат так, как показано на рис. 5.3, то вне экрана ($r >$

R) обе составляющие напряженности магнитного поля можно определить следующим образом:

$$H_r = H_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \cdot W_3 \right) \sin \varphi,$$

$$H_\varphi = H_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \cdot W_3 \right) \cos \varphi$$

При этом коэффициент обратного действия определяется равенством

$$W_3 = \frac{1}{2} - K_3 \left(K_1 - \frac{1}{K_1} \right) \text{sh}(k_1 d).$$

Все вышеприведенные выражения получены путем аналитического решения задачи по расчету электромагнитного поля. Однако такой расчет существенно усложняется, если вместо бесконечно длинного цилиндрического экрана рассматривать экран конечной длины. В этом случае формулы для расчета коэффициента экранирования и коэффициента обратного действия можно использовать с определенными оговорками только для средней части экрана, поскольку по длине экрана эти коэффициенты будут изменяться. Более того, обратное действие экрана конечной длины таково, что вблизи торцов вне экрана напряженность поля будет возрастать.

Технически экраны конструируются обычно из отдельных элементов, так что в их стенках всегда находятся стыки, в которых возможны зазоры.

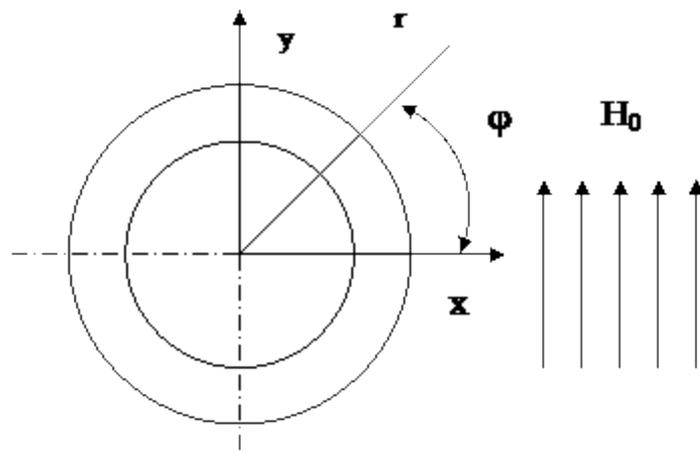


Рис. 5.3

Электромагнитный экранирующий эффект металлической оболочки, как было отмечено выше, обусловлен действием вихревых токов, наведенных в стенках оболочки переменным помехонесущим полем. Эти токи возбуждают поле, которое, взаимодействуя с помехонесущим полем в стенках оболочки, ослабляет его действие. Наведенные экранирующие токи протекают в плоскостях, перпендикулярных направлению помехонесущего поля. Если стыки в экранах расположены так, что экранному току приходится их огибать, то эти токи ослабляются, а следовательно, уменьшается и их экранирующее действие. Говорят, что электромагнитное поле проникает внутрь экрана сквозь щель. Коэффициент экранирования такого экрана зависит от положения щели (угла α) по отношению к направлению силовых линий стороннего магнитного поля (рис. 5.4)

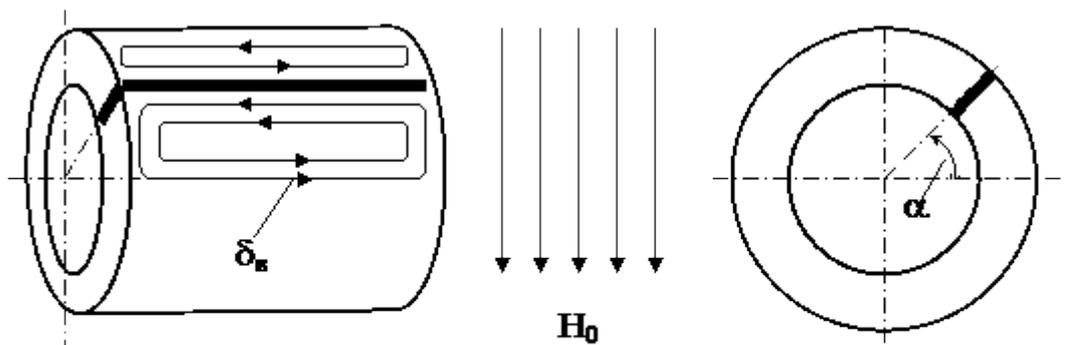


Рис. 5.4

Расчет поля и коэффициентов экранирования таких экранов достаточно сложен, поэтому часто используют экспериментальные методы.