Ё. У. СОАТОВ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

Икки жилдлик

2- жилд

збекистон Республикаси олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги олий
хника ўқув юртлари талабалари учун дарслик сифатида тавсия этган

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1994

Тақризчилар: Тошкент қишлоқ хўжалигини ирригациялаш ва механизациялаш муҳандислари институти «Олий математика» кафедраси; Тошкент кимё-технология институтининг «Олий математика» кафедраси.

Таҳрир ҳайъати: физика-математика фанлари номзодлари, доцентлар М. Жўраев (масъул), Ё. М. Ҳусанбоев (масъул), А. А. Ҳамдамов, А. Омонов (14- боб учун масъул).

Дарслик олий техника институтлари талабалари учун мўлжалланган. Бу ерда келтирилган маълумотлар олий ўқув юртларининг муҳандис-техник ва қишлоқ хўжалик мутахассисликлари учун математик фанларнинг амалдаги дастурига тўла мос келади.

Китоб «Олий математика» дарслигининг иккинчи жилди бўлиб, у ҳам биринчи жилд каби кўп миқдорда мисоллар билан таъминланган.

$С\ \frac{1602010000-292}{353\ (04)-94}\ 82-93$

ISBN 5—645—01 911—3

СЎЗ БОШИ

Китобхон эътиборига ҳавола қилинаётган мазкур «Олий математика» дарслигининг иккинчи жилдига қаторлар, Фурье алмаштиришлари, каррали интеграллар, эгри чизиқли ва сирт интеграллари, векторлар анализи, математик физика тенгламалари, эҳтимоллик назарияси ва математик статистика, асосий сонли усуллар киритилган.

Мустақил ечиш учун тавсия этилган машқларнинг тартиб рақамлари 9—12- бобларда Г. Н. Берманнинг «Сборник задач по курсу математического анализа», М., Наука, 1985 китобидан, 14- бобда эса «Сборник задач по математике для втузов. Теория вероятностей и математическая статистика» (под ред. А. В. Ефимова), М., 1990 китобидан кўрсатилган.

Дарсликнинг иккинчи жилдини ёзишда ҳам олий ўқув юртларининг муҳандис-техник ва қишлоқ хўжалик мутахассисликлари учун математик фанларнинг амалдаги «Дастур» ида тавсия қилинган асосий ва қўшимча адабиётлардан ҳамда ўзбек тилида чоп этилган дарслик ва ўқув қўлланмаларидан кенг фойдаланилди.

Мазкур дарсликни «Олий математика мисол ва масалаларда» учинчи жилди ва олий математика фанининг кенгайтирилган маълум қисмлари (чизиқли алгебра элементлари, ҳақиқий ўзгарувчининг вектор ва комплекс функциялари, дифференциал тенгламалар назарияси элементлари, Фурье қаторлари, параметрга боғлиқ бўлган интеграллар, Фурье алмаштиришлари, майдон назарияси, комплекс ўзгарувчили функция назарияси, операцион ҳисоб, математик физика тенгламалари, асосий ҳисоблаш усуллари, эҳтимоллик назарияси, математик статистика элементлари, дискрет математика асослари, оптималлаштириш усуллари, операциялар таҳлили)ни ўз ичига олган «Олий математикадан махсус маърузалар» ҳамда «Муҳандислик масалаларини математик моделлаш ва ЭҲМда ҳисоблаш усуллари» қисмларидан иборат тўртинчи ва бешинчи жилдлари билан тўлдириш кўзда тутилган.

Муаллиф дарсликнинг ушбу жилдини тузишда ва унга ки-

ритилган айрим қисмларини ёзишда берган маслаҳатлари ва ёрдамлари учун Тошкент меъморчилик-қурилиш институти «Олий ва амалий математика» кафедраси ўқитувчиларига, алоҳида доцент Э. Л. Айрапетовага, холисона тақриз, танқид, уни ёзишда йўл қўйилган камчиликларни кўрсатганлари учун Ургенч давлат университети профессори, физика-математика фанлари доктори Ш. Норимовга, Тошкент қишлоқ хўжалигини ирригациялаш ва механизациялаш муҳандислари институти «Олий математика» кафедраси мудири, профессор Э. Ф. Файзибоевга, Тошкент кимё-технология институти «Олий математика» кафедраси ўқитувчиларига ва унинг мудири, доцент Н. С. Раҳимовага, таҳрир ҳайъатининг аъзолари доцентлар А. Омонов, М. Жўраев, Ё. М. Ҳусанбоев, А. А. Ҳамдамовларга ўз миннатдорчилигини билдиради.

Айниқса, дарсликнинг «Эҳтимоллик назарияси ва математик статистика» бобини ёзишда доцентлар Ё. М. Ҳусанбоев ва А. Омоновларнинг беминнат ёрдамларини муаллиф эътироф этишни ўзининг бурчи деб билади.

Дарслик сифати ва мазмунини янада такомиллаштиришга қаратилган танқидий фикр ва мулоҳазалар билдирган ўртоқларга муаллиф олдиндан ўз ташаккурини билдиради.

9-боб

ҚАТОРЛАР. ФУРЬЕ АЛМАШТИРИШЛАРИ

1-§. Сонли қаторлар. Қаторнинг яқинлашиши ва йиғиндиси

Чексиз қаторлар математик анализнинг муҳим қисмларидан биридир. Улардан функциялар қийматларини тақрибий ҳисоблашлар, интеграллар қийматларини ҳисоблашлар билан боғлиқ бўлган ҳар хил амалий масалаларни ечишда кенг фойдаланилади.

Чексиз қаторлар билан боғлиқ асосий тушунчаларни қарашга киришамиз.

Элементлари сонлар (ҳақиқий ёки комплекс) ёки функциялар бўлган

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

чексиз кетма-кетликни қараймиз.

1-таъриф. Ушбу

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \qquad (1.1)$$

ифода чексиз қатор ёки тўғридан-тўғри *қатор* дейилади. (1.1) қаторни белгилаш учун бундай ёзувдан фойдаланилади:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$ кетма-кетликнинг элементлари *қаторнинг ҳадлари* дейилади.

Агар қаторнинг ҳадлари сонлардан (функциялардан) иборат бўлса, қатор *сонли қатор* (*функционал қатор*) дейилади; қаторнинг n- ҳадини унинг *умумий ҳади* дейилади.

1-мисол. Ушбу $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ қатор сонли қатордир, унинг умумий ҳади $\frac{1}{n}$ га тенг; бу қаторни қисқача бундай ёзиш мумкин: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

2-мисол. Ушбу $\frac{\sin x}{1\cdot 2}+\frac{\sin 2x}{2\cdot 3}+\frac{\sin 3x}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{\sin nx}{n(n+1)}+\ldots$ қатор функционал қатордир, унинг умумий ҳади $u_n=\frac{\sin nx}{n(n+1)}$ га тенг, бу қаторни қисқа бундай ёзиш мумкин: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(n+1)}$.

Ҳозирча сонли қаторларни қараш билан чекланамиз, функционал қаторларни эса 13-§ дан бошлаб қараймиз.

Ҳар бир қатор учун қўйиладиган асосий савол бу унинг яқинлашиши масаласидир.

2-таъриф. (1.1) қатор дастлабки n та ҳаднинг йиғиндиси

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$$

шу қаторнинг *n-хусусий йиғиндиси* дейилади. Шу хусусий йиғиндиларни қараймиз:

$$S_1=u_1,$$

$$S_2=u_1+u_2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n.$$

Равшанки, хусусий йиғиндилар S_1, S_2, $\ldots$, S_n, $\ldots$ чексиз сонли кетма-кетликни ҳосил қилади.

3-таъриф. Агар (1.1) қаторнинг хусусий йиғиндиларидан иборат кетма-кетлик $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ чекли лимитга эга бўлса, бу қатор *яқинлашувчи қатор* дейилади. Бу лимитнинг қиймати $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ (1.1) *қаторнинг йиғиндиси* дейилади. Бу ҳолда бундай ёзилади:

$$S=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

4-таъриф. Агар (1.1) қаторнинг хусусий йиғиндилари кетма-кетлиги **чекли лимитга эга бўлмаса**, бу қатор ***узоқлашувчи қатор*** дейилади.

Сонли қаторлар назариясининг мазмуни қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканлигини аниқлаш ва яқинлашувчи қаторлар йиғиндисини ҳисоблашдан иборат.

Энг содда мисол сифатида геометрик прогрессияни қараймиз.

2-§. Геометрик прогрессия

Чексиз геометрик прогрессия

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}+\ldots$$

энг содда, энг кўп учрайдиган қаторлардан биридир. Бунда a —

прогрессиянинг биринчи ҳади, q эса прогрессиянинг махражи дейилади.

Прогрессия дастлабки n та ҳадининг йиғиндиси S_n қуйидагига тенг:

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q},$$

бунда $q \neq 1$. q нинг мумкин бўлган қийматларини қараймиз:

1) Агар $|q| < 1$ бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ ва шунинг учун

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}.$$

Шундай қилиб, $|q| < 1$ да чексиз геометрик прогрессия йиғиндиси

$$S = \frac{a}{1 - q}$$

бўлган яқинлашувчи қатор ҳосил қилади.

2) Агар $|q| > 1$ бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ ва шунинг учун

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - aq^n}{1 - q} = \infty.$$

Шундай қилиб, $|q| > 1$ да чексиз геометрик прогрессия узоқлашувчи қатор ҳосил қилади.

3) Агар $q = 1$ бўлса, у ҳолда

$$a + a + a + \ldots + a + \ldots$$

қатор ҳосил бўлади, бу қаторнинг n-хусусий йиғиндиси $S_n = n \cdot a$ бўлади.

Равшанки,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a \cdot n = \infty,$$

яъни қатор узоқлашади.

4) Агар $q = -1$ бўлса, у ҳолда

$$a - a + a - \ldots$$

қатор ҳосил бўлади. Жуфт n номерли ҳар қандай хусусий йиғинди S_n нолга тенг, тоқ n номерли хусусий йиғинди S_n эса a га тенг. Шундай қилиб, бу ҳолда хусусий йиғиндилар кетма-кетлиги тебранувчи бўлиб, ҳеч қандай лимитга интилмайди, шу сабабли

$$a - a + a - \ldots$$

қатор узоқлашувчи.

Шундай қилиб, чексиз геометрик прогрессия $|q| < 1$ да яқинлашувчи ва $|q| \geqslant 1$ да узоқлашувчи қатор экан.

Биз қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканини яқинлашишнинг таърифидан ва n-хусусий йиғиндининг маълум формуласидан фойдаланиб аниқладик. Аммо ҳар доим ҳам S_n учун ва демак, S_n нинг лимити учун ҳам ихчам формула топиб бўлавермайди. Шу сабабли қатор яқинлашишини яқинлашишнинг баъзи белгилари (аломатлари) дан фойдаланиб аниқлаш муҳимдир.

3-§. Қатор яқинлашишининг зарурий шарти

Қатор яқинлашишининг зарурий шартини қараймиз, яъни шундай шартни аниқлаймизки, бу шарт бажарилмаганда қатор узоқлашади.

Теорема. *Агар қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда қаторнинг умумий ҳади n чексиз ўсганда нолга интилади.*

Исботи. Ушбу

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

қатор яқинлашувчи, яъни $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ лимит мавжуд бўлсин, бунда S — қаторнинг йиғиндиси (чекли сон). Аммо бу ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S,$$

чунки $n\to\infty$ да $(n-1)\to\infty$.

Қаторнинг умумий ҳади u_n ни хусусий йиғиндилар S_n ва S_{n-1} билан ифодалаймиз. Равшанки,

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Қатор умумий ҳадининг лимитини ҳисоблаймиз:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0.$$

Шундай қилиб, агар қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Натижа. Агар қаторнинг умумий ҳади $n\to\infty$ да нолга интилмаса, у ҳолда қатор узоқлашади.

Масалан,

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \ldots + \frac{n}{2n+1} + \ldots$$

қатор узоқлашувчи, чунки

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ тенглик ўринли бўладиган ҳар қандай қатор ҳам яқинлашувчи бўлавермайди. Бу шартнинг бажарилиши қатор яқинлашувчи бўлиши учун зарурий, аммо етарли шарт эмас, яъни қатор умумий ҳадининг нолга интилиши билан қаторнинг яқинлашувчи эканлиги келиб чиқавермайди, қатор узоқлашувчи бўлиши ҳам мумкин. Масалан, гармоник қатор деб аталувчи

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

қатор учун $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ бўлишига қарамай у яқинлашувчи эмаслигини исботлаймиз. Гармоник қаторнинг дастлабки бир неча ҳадини қуйидагидек гуруҳлаб ёзамиз:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$

Ҳар қайси қавс ичидаги қўшилувчиларни уларнинг кичиги билан алмаштирамиз. Натижада

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$

га эга бўламиз.

Ҳар қайси қавс ичидаги қўшилувчилар йиғиндиси кичиклашди ва 1/2 га тенг бўлди. Охирги қатор чексиз кўп қавсларга эга бўлганлиги сабабли уларнинг йиғиндиси чексизликка интилади. Демак, гармоник қаторнинг йиғиндиси албатта чексизликка интилади. Шундай қилиб, биз гармоник қаторнинг узоқлашувчи эканлигини исботладик.

4-§. Қаторлар устида содда амаллар бажариш: сонга кўпайтириш, қўшиш ва айириш

Қаторлар устида амаллар бажаришнинг баъзи қоидалари билан танишамиз.

1-теорема (қаторни сонга кўпайтириш ҳақида). *Агар*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{4.1}$$

қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси S га тенг бўлса, у ҳолда

$$\lambda u_1+\lambda u_2+\ldots+\lambda u_n+\ldots \tag{4.2}$$

қатор ҳам яқинлашувчи бўлади ва унинг йиғиндиси $\lambda\cdot S$ га тенг бўлади, бунда λ — тайин сон.

Исботи. (4.1) ва (4.2) қаторларнинг n-хусусий йиғиндиларини мос равишда S_n ва σ_n билан белгилаймиз. У ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$\sigma_n=\lambda u_1+\lambda u_2+\ldots+\lambda u_n=\lambda\ (u_1+u_2+\ldots+u_n)=\lambda\cdot S_n,$$

бундан:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}(\lambda\cdot S_n)=\lambda\cdot\lim_{n\to\infty}S_n=\lambda\cdot S.$$

Шундай қилиб, (4.2) қатор яқинлашувчи, унинг йиғиндиси $\lambda\cdot S$ га тенг. Теорема исботланди.

2-теорема (қаторларни қўшиш ҳақида). *Агар*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots, \tag{4.3}$$

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \tag{4.4}$$

қаторлар яқинлашувчи ва уларнинг йиғиндилари мос равишда s *ва* S *га тенг бўлса, у ҳолда*

$$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\ldots+(u_n+v_n)+\ldots \tag{4.5}$$

қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $s+S$ *га тенг бўлади.*

Исботи. (4.3), (4.4) ва (4.5) қаторларнинг n-хусусий йиғиндиларини мос равишда s_n, S_n ва σ_n деб белгилаймиз. У ҳолда

$$\sigma_n=(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\ldots+(u_n+v_n)=s_n+S_n.$$

Бундан:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}(s_n+S_n)=\lim_{n\to\infty}s_n+\lim_{n\to\infty}S_n=s+S.$$

Шундай қилиб, (4.5) қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $s+S$ га тенг.

3-теорема (қаторларни айириш ҳақида). *Агар*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots, \tag{4.6}$$

$$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots \tag{4.7}$$

қаторлар яқинлашувчи ва уларнинг йиғиндиси мос равишда s *ва* S *га тенг бўлса, у ҳолда*

$$(u_1-v_1)+(u_2-v_2)+\ldots+(u_n-v_n)+\ldots \tag{4.8}$$

қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $s-S$ *га тенг бўлади.*

Исботи. (4.7) қаторнинг ҳар бир ҳадини -1 га кўпайтирамиз (1-теоремага кўра бу қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $-S$ га тенг бўлади). Уни (4.6) қатор ҳадлари билан қўшамиз ва (4.8) қаторга эга бўламиз:

$$(u_1-v_1)+(u_2-v_2)+\ldots+(u_n-v_n)+\ldots,$$

бу қатор 2-теоремага кўра яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $s-S$ га тенг. Теорема исботланди.

Юқоридаги теоремалардан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Агар

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots,$$

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots$$

қаторлар яқинлашувчи ва уларнинг йиғиндилари мос равишда s ва S га тенг бўлса, у ҳолда

$$(\lambda u_1 + \mu v_1) + (\lambda u_2 + \mu v_2) + \ldots + (\lambda u_n + \mu v_n) + \ldots$$

қатор ҳам яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $\lambda s + \mu S$ га тенг, бунда λ, μ — тайин сонлар.

Шундай қилиб, яқинлашувчи қаторларни ҳадлаб қўшиш, айириш ва ўзгармас сонга кўпайтириш мумкин экан.

Яна битта муҳим теоремани исботлаймиз.

4-теорема. *Агар қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда берилган қаторга чекли сондаги ҳадларни қўшиш ёки унда чекли сондаги ҳадларни ташлаб юборишдан ҳосил бўлган қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.*

Исботи. Ушбу

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{4.6}$$

қатор яқинлашувчи, унинг йиғиндиси S га тенг бўлсин. (4.6) қатор дастлабки n та ҳадининг йиғиндисини S_n билан белгилаймиз, k $(k<n)$ та ташлаб юборилган ҳадлар йиғиндисини S_k билан, қолган $n-k$ та ҳадлар йиғиндисини σ_{n-k} билан белгилаймиз. Демак, $S_n = S_k + \sigma_{n-k}$, бунда S_k — n га боғлиқ бўлмаган чекли сон, шу сабабли:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (S_k + \sigma_{n-k}) = \lim_{n\to\infty} S_k + \lim_{n\to\infty} \sigma_{n-k}.$$

Бундан:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S_k + \lim_{n\to\infty} \sigma_{n-k}.$$

Шундай қилиб, агар $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ мавжуд бўлса (яъни берилган қатор яқинлашувчи бўлса), у ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{n-k}$ ҳам мавжуд бўлади (яъни ҳар қанча чекли сондаги ҳадларни ташлаб юборишдан ҳосил қилинган қатор ҳам яқинлашади). Чекли сондаги ҳадларни қўшишдан ҳосил бўлган қаторнинг яқинлашувчи бўлиши юқоридагидек кўрсатилади. Теорема исботланди.

5-§. Мусбат ҳадли қаторлар

Ҳамма ҳадлари бир хил ишорали бўлган қаторлар ўзгармас ишорали қаторлар дейилади. Аниқлик учун биз мусбат ҳадли қаторларни қараймиз.

Шуни қайд қиламизки, мусбат ишорали қаторда барча $n \geqslant 1$ лар учун $S_{n+1} > S_n$ тенгсизлик ўринли, яъни хусусий йиғиндилар ўсувчи кетма-кетлик ҳосил қилади. Бундай ҳолда $n \to \infty$ да иккита имконият мавжуд бўлади: ё хусусий йиғиндилар $S_n \to +\infty$ ва бу ҳолда қатор узоқлашади, ёки хусусий йиғиндилар кетма-кетлиги чегараланган ва бу ҳолда лимит мавжуд бўлади, демак қатор яқинлашувчи.

Шундай қилиб, мусбат ишорали қаторларнинг яқинлашишини исботлашда S_n хусусий йиғиндилар кетма-кетлигининг чегараланган эканини аниқлашнинг ўзи етарлидир. Мусбат ишорали қаторлар яқинлашувчи бўлишининг ҳар хил аломатларини, яъни S_n учун формула чиқармай ва S_n нинг лимитини ҳисобламай туриб қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканини аниқлаш имконини берадиган усулларни ўрганамиз.

6-§. Таққослаш теоремалари

Мусбат ишорали иккита

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{6.1}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{6.2}$$

қаторга эга бўлайлик. Булар учун қуйидаги теоремалар ўринли.

1-теорема (яқинлашувчанликнинг етарли шарти). *Агар (6.1) қаторнинг ҳадлари (6.2) қаторнинг мос ҳадларидан катта бўлмаса, яъни*

$$u_n \leqslant v_n \ (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{6.3}$$

бўлса ва (6.2) қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (6.1) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

Исботи. (6.1) ва (6.2) қаторлар n-хусусий йиғиндиларини мос равишда S_n ва σ_n билан белгилаймиз. (6.3) тенгсизликлардан $S_n \leqslant \sigma_n$ эканлиги келиб чиқади. (6.2) қатор яқинлашувчи эканлиги туфайли $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$ мавжуд. Бунда қаторнинг ҳадлари мусбат ишорали бўлгани учун $\sigma_n < \sigma$ тенгсизлик ўринли, демак, $S_n < \sigma$. Шундай қилиб, (6.1) мусбат ҳадли қатор хусусий йиғиндилари кетма-кетлиги чегараланган ва демак, бу қатор яқинлашувчи. Шу билан бирга бу қатор йиғиндиси (6.2) қатор йиғиндисидан катта бўлмайди.

2-теорема (узоқлашувчанликнинг етарли шарти). *Агар (6.2) қаторнинг ҳадлари (6.1) қаторнинг мос ҳадларидан кичик бўлмаса, яъни*

$$u_n \leqslant v_n \ (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{6.3}$$

бўлса ва (6.1) қатор узоқлашувчи бўлса, у ҳолда (6.2) қатор ҳам узоқлашувчидир.

Исботи. (6.1) ва (6.2) қаторларнинг n-хусусий йиғиндиларини мос равишда S_n ва σ_n билан белгилаймиз. (6.3) тенгсизликлардан $\sigma_n \geqslant S_n$ экани келиб чиқади. (6.1) қатор узоқлашувчи ва унинг хусусий йиғиндилари ортиб боргани сабабли $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Бу ҳолда $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$. Демак, (6.2) қатор узоқлашувчи. Теорема исботланди

Иккала теорема (6.3) тенгсизликлар барча n лар учун эмас, балки бирор $n=N$ дан бошлаб бажарилса ҳам ўринли бўлаверади. Бу шу бобнинг 4-§ идаги 4-теоремадан кўриниб турибди.

Иккала теоремани қисқача бундай ифодалаш мумкин: кичик бўлмаган ҳадли қаторнинг яқинлашувчанлигидан катта бўлмаган ҳадли қаторнинг яқинлашувчанлиги келиб чиқади, катта бўлмаган ҳадли қаторнинг узоқлашувчанлигидан кичик бўлмаган ҳадли қаторнинг узоқлашувчанлиги келиб чиқади.

1-мисол. Ушбу

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\ldots$$

қатор яқинлашувчи, чунки бу қаторнинг ҳадлари

$$\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\ldots$$

қаторнинг мос ҳадларидан катта эмас. Охирги қатор яқинлашувчи, чунки бу қаторнинг ҳадлари маҳражи $q=2/3$ га тенг, йиғиндиси эса 2 га тенг геометрик прогрессияни ташкил этади. Демак, берилган қатор ҳам яқинлашувчи бўлади, шу билан бирга унинг йиғиндиси 2 дан катта бўлмайди.

2-мисол. Ушбу

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

қатор узоқлашувчи, чунки унинг ҳадлари, иккинчи ҳадидан бошлаб,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

гармоник қаторнинг мос ҳадларидан катта, гармоник қатор эса, маълумки, узоқлашувчидир.

Амалда таққослаш аломатидан қуйидаги кўринишда фойдаланиш энг қулайдир:

3-теорема (таққослашнинг лимит аломати). *Агар $\frac{u_n}{v_n}$ нисбатнинг лимити мавжуд бўлса ва у нолга тенг бўлмаса, яъни $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A>0$ бўлса, у ҳолда* (6.1) *ва* (6.2) *қаторларнинг иккаласи ё яқинлашади, ёки узоқлашади.*

3-мисол. Ушбу

$$\mathrm{tg}\,1+\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}+\ldots+\mathrm{tg}\,\frac{1}{n}+\ldots$$

қаторни

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

гармоник қатор билан таққослаймиз. $\frac{u_n}{v_n}$ нисбатни тузамиз ва унинг лимитини топамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1>0,$$

чунки $n\to\infty$ да $\operatorname{tg}\frac{1}{n}\backsim\frac{1}{n}$.

Шундай қилиб, берилган қатор узоқлашувчи, чунки гармоник қатор узоқлашувчи.

4-мисол. Ушбу

$$\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{2^2}+\ldots+\sin\frac{1}{2^n}+\ldots$$

қаторни

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

қатор билан таққослаймиз, охирги қатор яқинлашувчи, чунки *унинг ҳадлари маҳражи* $q=1/2$ *бўлган геометрик прогрессия* ташкил қилади.

$\frac{u_n}{v_n}$ нисбатни тузамиз ва унинг лимитини топамиз: $n\to\infty$ да $\sin\frac{1}{2^n}\backsim\frac{1}{2^n}$ бўлгани учун: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin 2^{-n}}{2^{-n}}=1>0$. Шундай қилиб, берилган қатор яқинлашувчи.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Сонли қатор деб нимага айтилади? Қаторнинг умумий ҳади нима?
2. Қаторнинг яқинлашувчи ва узоқлашувчи бўлиши таърифларини айтинг. Қаторнинг йиғиндиси деб нимага айтилади?
3. Геометрик прогрессия ҳадларидан тузилган қаторнинг яқинлашувчанлигини текширинг.
4. Қатор яқинлашувчи бўлишининг зарурий шарти нимадан иборат? Бу шарт етарли шарт бўлмаслигини кўрсатувчи мисол келтиринг.
5. Қатор узоқлашувчи бўлишининг энг содда етарли шартини кўрсатинг.
6. Яқинлашувчи қаторларни қўшиш ҳақидаги теоремани исботланг.
7. Яқинлашувчи қатор ҳадларини ўзгармас сонга кўпайтириш ҳақидаги теоремани исботланг.
8. Қаторга чекли сондаги ҳадларни қўшиш ёки унда чекли сондаги ҳадларни ташлаб юборишдан қаторнинг яқинлашиши ўзгармаслиги ҳақидаги теоремани исботланг.
9. Мусбат ҳадли иккита қаторни таққослаш ҳақидаги теоремани ифодаланг ва уни исботланг.
10. 2727—2759- масалаларни ечинг.

7- §. Даламбер ва Коши аломатлари

Мусбат ҳадли қаторларнинг яқинлашиш ва узоқлашиш аломатларини ўрганишни давом эттирамиз.

1. Даламбер аломати

Теорема. *Агар*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \qquad (7.1)$$

мусбат қаторда $(n+1)$*-ҳаднинг* n*-ҳадга нисбати* $n\to\infty$ *да чекли* l *лимитга эга бўлса, яъни*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l \qquad (7.2)$$

бўлса, у ҳолда: а) $l<1$ *да қатор яқинлашади,* б) $l>1$ *да қатор узоқлашади.*

Исботи. Лимитнинг таърифидан ва (7.2) муносабатдан ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун n нинг бирор N номердан бошлаб барча қийматлари учун, бошқача айтганда $n\geqslant N$ учун

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-l\right|<\varepsilon \text{ ёки } -\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}-l<\varepsilon \qquad (7.3)$$

тенгсизлик ўринли бўлиши келиб чиқади.

$l<1$ ва $l>1$ бўлгандаги иккала ҳолни қараймиз.

а) $l<1$ бўлсин, у ҳолда (7.3) тенгсизликдан $\frac{u_{n+1}}{u_n}-l<\varepsilon$ ёки $\frac{u_{n+1}}{u_n}<l+\varepsilon$ экани келиб чиқади. Тенгсизлик барча $n\geqslant N$ лар учун бажарилади. $l+\varepsilon=q$ деб белгилаймиз. ε ни шундай кичик қилиб танлаймизки, q нинг қиймати $l<1$ да 1 дан кичик бўлсин, яъни $0<q<1$ тенгсизлик бажарилсин (1-шакл), демак,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<q. \qquad (7.4)$$

(7.4) тенгсизликни унга тенг кучли бўлган

$$u_{n+1}<q\cdot u_n$$

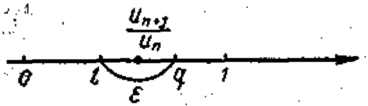
тенгсизлик билан алмаштирамиз. Охирги тенгсизликни n нинг N дан бошлаб турли қийматлари учун, яъни $n\geqslant N$ лар учун ёзиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\begin{aligned}&u_{N+1}<qu_N,\\&u_{N+2}<qu_{N+1}<q^2u_N,\\&u_{N+3}<qu_{N+2}<q^3u_N,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned} \qquad (7.5)$$

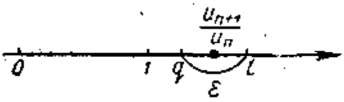
Иккита қаторни қараймиз.

$$u_1+u_2+\ldots+u_N+u_{N+1}+\ldots \qquad (7.1)$$

$$u_N+qu_N+\ldots \qquad (7.6)$$



1-шакл.



2- шакл.

(7.6) қаторнинг ҳадлари $q<1$ мусбат маҳражли геометрик прогрессия ташкил қилади. Демак, (7.6) қатор яқинлашади.

(7.5) тенгсизликлардан (7.1) қаторнинг ҳадлари u_{N+1} дан бошлаб (7.6) қаторнинг мос ҳадларидан кичик. 6- § даги 1-теоремага асосан ва 4- § даги 4-теоремага асосан берилган қатор (7.1) яқинлашувчи.

б) $l>1$ бўлсин. У ҳолда (7.3) тенгсизликлардан бирор номер N дан бошлаб

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}-l>-\varepsilon \text{ ёки } \frac{u_{n+1}}{u_n}>l-\varepsilon$$

эканлиги келиб чиқади. $l-\varepsilon=q$ деб белгилаймиз, ε ни шундай кичик қилиб танлаймизки, натижада $l>1$ да q нинг катталиги 1 дан катта бўлиб қолаверсин, яъни $l-\varepsilon=q>1$ (2- шакл) ва, демак,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>q,\ n\geqslant N. \tag{7.7}$$

(7.7) тенгсизликни унга тенг кучли

$$u_{n+1}>q\cdot u_n,\ n\geqslant N$$

тенгсизлик билан алмаштирамиз. Бу қаторнинг ҳадлари $(N+1)$ номердан бошлаб ўсишини билдиради, шу сабабли қаторнинг умумий ҳади нолга интилмайди. Қатор яқинлашишининг зарурий шарти бажарилмайди, шу сабабли (7.1) қатор узоқлашади.

1- эслатма. Агар $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$ бўлса, у ҳолда қатор узоқлашади, чунки бу ҳолда $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ ва $u_{n+1}>u_n$, яъни $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$ (зарурий шарт бажарилмайди).

2- эслатма. Агар $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ мавжуд ва бирга тенг бўлса ёки мавжуд бўлмаса, у ҳолда Даламбер аломати қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканини аниқлаш имконини бермайди. Бу масалани ҳал қилиш учун бошқа аломатдан фойдаланиш керак.

1- мисол. Қуйидаги қаторни яқинлашувчанликка текширинг:

$$\frac{2}{1^2}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{2^3}{3^2}+\ldots+\frac{2^n}{n^2}+\ldots$$

Ечиш. Бундан $u_n=\frac{2^n}{n^2}$, $u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot n^2}{(n+1)^2\cdot 2^n}=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=2>1,$$

демак, қатор узоқлашувчи.

2-мисол. Қуйидаги қаторни яқинлашувчанликка текширинг:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{(\sqrt{2})^2}+\frac{5}{(\sqrt{2})^3}+\dots+\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}+\dots$$

Ечиш. Бунда $u_n=\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$, $u_{n+1}=\frac{2n+1}{(\sqrt{2})^{n+1}}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(\sqrt{2})^n}{(\sqrt{2})^{n+1}(2n-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1,$$

демак, қатор яқинлашувчи.

3-мисол. Қуйидаги қаторни яқинлашувчанликка текширинг:

$$1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\dots$$

Ечиш. Бунда $u_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $u_{n+1}=\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n}{n+1}}=1\ (l=1).$$

Қаторнинг яқинлашиши ҳақида Даламбер аломати асосида хулоса чиқариш мумкин эмас. Таққослаш аломатини қўллаймиз. Узоқлашувчи

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$$

гармоник қаторнинг ҳадлари, иккинчи ҳадидан бошлаб, берилган қаторнинг мос ҳадларидан кичик, демак, 6-§ нинг 1-теоремасига биноан берилган қатор узоқлашувчи.

2. Коши аломати

Теорема. *Агар мусбат ҳадли*

$$u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots \tag{7.8}$$

қатор учун $\sqrt[n]{u_n}$ *миқдор* $n\to\infty$ *да чекли лимитга эга бўлса, яъни*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l \tag{7.9}$$

бўлса, у ҳолда

а) $l<1$ *да қатор яқинлашади,*

б) $l>1$ *да қатор узоқлашади.*

Исботи. Лимитнинг таърифидан ва (7.9) муносабатдан бирор N номердан бошлаб n нинг барча қийматлари учун, яъни $n\geqslant N$ дан бошлаб

$$\left|\sqrt[n]{u_n}-l\right|<\varepsilon \text{ ёки } -\varepsilon<\sqrt[n]{u_n}-l<\varepsilon \qquad (7.10)$$

тенгсизлик ўринли бўлади, бунда $\varepsilon>0$ олдиндан танланган кичик сон.

а) $l<1$ бўлсин. У ҳолда (7.10) тенгсизликдан $\sqrt[n]{u_n}-l<\varepsilon$ ёки $\sqrt[n]{u_n}<l-\varepsilon$ эканлиги келиб чиқади. Тенгсизлик бирор N дан бошлаб, яъни барча $n\geqslant N$ лар учун бажарилади. $l+\varepsilon=q$ деб белгилаймиз, ε ни шундай кичик қилиб танлаймизки, $l<1$ да q миқдор 1 дан кичик бўлиб қолаверсин, яъни $0<l+\varepsilon=q<1$, ва демак, барча $n\geqslant N$ лар учун

$$\sqrt[n]{u_n}<q \text{ ёки } u_n<q^n. \qquad (7.11)$$

Иккита қаторни қараймиз:

$$u_1+u_2+\ldots+u_N+u_{N+1}+u_{N+2}+\ldots, \qquad (7.8)$$

$$q^N+q^{N+1}+q^{N+2}+\ldots \qquad (7.12)$$

(7.12) қатор яқинлашувчи, чунки унинг ҳадлари махражи $q<1$ бўлган геометрик прогрессия ҳосил қилади.

(7.8) қаторнинг ҳадлари u_N дан бошлаб, (7.11) тенгсизликка биноан, (7.12) қаторнинг ҳадларидан кичик. Демак, (7.8) қатор 6-§ даги 1-теорема ва 4-§ даги 1-теорема асосида яқинлашувчи.

б) $l>1$ бўлсин. (7.10) тенгсизликдан $\sqrt[n]{u_n}-l>-\varepsilon$ ёки $\sqrt[n]{u_n}>l-\varepsilon$ эканлиги келиб чиқади. Тенгсизлик бирор N дан бошлаб бажарилади, яъни барча $n\geqslant N$ лар учун ўринли. $l-\varepsilon=q$ деб белгилаймиз. ε ни шундай кичик қилиб танлаб оламизки, $l>1$ да q миқдор 1 дан катталигича қолаверади, яъни $l-\varepsilon=q>1$ ва демак, бирор N дан бошлаб

$$\sqrt[n]{u_n}>q>1 \text{ ёки } \sqrt[n]{u_n}>1.$$

Аммо қаралаётган қаторнинг барча ҳади, u_N дан бошлаб, 1 дан катта бўлса, у ҳолда қатор узоқлашади, чунки унинг умумий ҳади нолга интилмайди.

Эслатма. Даламбер аломатидаги каби, $l=1$ бўлган ҳолда Коши аломати қўшимча текширишни талаб қилади.

4-мисол. Қуйидаги қаторни яқинлашувчанликка текширинг:

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots$$

Ечиш. Бунда

$$u_n=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1.$$

Қатор яқинлашади.

5-мисол. Қуйидаги қаторни яқинлашувчанликка текширинг:

$$\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{2}\right)^4+\left(\frac{4}{3}\right)^9+\ldots+\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}+\ldots$$

Ечиш. Бунда

$$u_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2},\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=e>1.$$

Қатор узоқлашувчи.

8-§. Қатор яқинлашишининг интеграл аломати

Теорема. *Агар*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{8.1}$$

қаторнинг ҳадлари мусбат ва ўсмайдиган бўлса, яъни

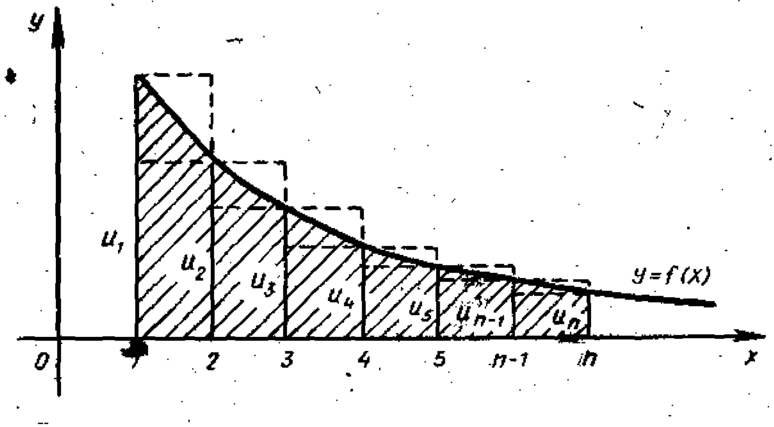
$$u_1\geqslant u_2\geqslant\ldots\geqslant u_n\geqslant\ldots$$

бўлса ва $f(x)$ *функция учун* $f(1)=u_1, f(2)=u_2, \ldots, f(n)=u_n, \ldots$ *тенгликлар ўринли бўлса, у ҳолда:*

1) *агар* $\int_1^\infty f(x)\,dx$ *хосмас интеграл яқинлашса, қатор яқинлашувчи,*

2) *агар* $\int_1^\infty f(x)\,dx$ *хосмас интеграл узоқлашувчи бўлса, қатор узоқлашувчи бўлади.*

Исботи. Юқоридан $y=f(x)$ эгри чизиқ билан чегараланган, асослари $x=1$ дан $x=n$ гача бўлган, бунда n — ихтиёрий бутун мусбат сон, эгри чизиқли трапецияни қараймиз (3-шакл). Бу трапецияга асослари $[1, 2]$, $[2, 3]$, ..., $[n-1, n]$ кесмалардан иборат ички ва ташқи зинапоясимон тўртбурчаклар чизамиз, бунда функциянинг



3-шакл.

$$u_2 = f(2),\ u_3 = f(3),\ \ldots,\ u_n = f(n)$$

қийматлари ички чизилган тўртбурчакларга,

$$u_1 = f(1),\ u_2 = f(2),\ \ldots,\ u_{n-1} = f(n-1)$$

қийматлари эса ташқи чизилган тўртбурчакларга баландлик бўлиб хизмат қилади.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз: S_n — қаторнинг n-хусусий йиғиндиси, $\overline{S}_n$ — эгри чизиқли трапециянинг юзи, $S_{\text{и.ч}}$, $S_{\text{т.ч}}$ — мос равишда ички ва ташқи чизилган зинапоясимон шаклларнинг юзлари. $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, $\overline{S}_n = \int\limits_1^n f(x)\,dx$ экани равшан. Шаклдан

$$S_{\text{и.ч}} < \overline{S}_n < S_{\text{т.ч}} \tag{8.2}$$

эканлиги келиб чиқади, бунда

$$S_{\text{и.ч}} = u_2 + u_3 + \ldots + u_n = S_n - u_1,$$
$$S_{\text{т.ч}} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} = S_n - u_n.$$

Шундай қилиб, (8.2) тенгсизликни бундай ёзиш мумкин:

$$S_n - u_1 < \overline{S}_n < S_n - u_n$$

ёки

$$S_n - u_1 < \int\limits_1^n f(x)\,dx < S_n - u_n.$$

Бундан иккита тенгсизликка эга бўламиз:

$$S_n < u_1 + \int\limits_1^n f(x)\,dx, \tag{8.3}$$

$$S_n > u_n + \int\limits_1^n f(x)\,dx. \tag{8.4}$$

$f(x)$ функция мусбат, шу сабабли n нинг ортиши билан $\int\limits_1^n f(x)\,dx$ интеграл ҳам катталашиб боради. Икки ҳол бўлиши мумкин:

1) $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи, яъни

$$\int\limits_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n f(x)\,dx = I$$

интеграл чекли сонга тенг бўлсин. У ҳолда $\int\limits_1^n f(x)\,dx < I$ ва (8.3) тенгсизликдан ҳар қандай n да $S_n < u_1 + I$ эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, бу ҳолда S_n хусусий йиғиндилар кетма-кетлиги чегараланган ва, демак, (8.1) қатор яқинлашади.

2) $\int_1^\infty f(x)\,dx$ хосмас интеграл узоқлашувчи бўлсин, яъни

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,dx = +\infty$$

бўлсин. (8.4) тенгсизликдан S_n хусусий йиғиндилар кетма-кетлиги чегараланмаганлиги келиб чиқади ва, демак, (8.1) қатор узоқлашади.

Мисол. Умумлашган гармоник қатор деб аталувчи

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

қаторнинг узоқлашувчи ёки яқинлашувчи эканини аниқланг.

Ечиш. $f(x)$ функциянинг $\frac{1}{x^p}$ дан иборатлиги равшан, бунда p— тайинланган сон. Ушбу

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^\infty = \frac{1}{1-p}\lim_{n\to\infty} x^{1-p}\Big|_1^n = \frac{1}{1-p}\lim_{n\to\infty}(n^{1-p}-1),\quad p\neq 1$$

хосмас интегрални ҳисоблаймиз. Агар $p>1$ бўлса, у ҳолда $\lim_{n\to\infty} n^{1-p} = 0$ ва $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$ — яқинлашувчи; агар $p<1$ бўлса, у ҳолда $\lim_{n\to\infty} n^{1-p}=\infty$ ва $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ — узоқлашувчи; агар $p=1$ бўлса, у ҳолда $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^\infty = \infty$ — узоқлашувчи. Шу сабабли умумлашган гармоник қатор $p>1$ да яқинлашувчи ва $p\leq 1$ да узоқлашувчи.

9-§. Қатор қолдиғини интеграл аломат ёрдамида баҳолаш

Яқинлашувчи

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{9.1}$$

қаторни қараймиз.

Таъриф. Қаторнинг йиғиндиси S билан унинг n-хусусий йиғиндиси S_n орасидаги айирма *қаторнинг n-қолдиғи* дейилади ва R_n билан белгиланади:

$$R_n = S - S_n.$$

Қаторнинг қолдиғи ҳам қатор бўлиб, у берилган (9.1) қатордан дастлабки n та ҳадни ташлаш натижасида ҳосил бўлади:

$$R_n = u_{n+1}+\ldots+u_{n+m}+\ldots$$

Бу қатор 4- § даги 4- теоремага кўра яқинлашувчи, шу теоремага кўра аксинчасини ҳам тасдиқлаш мумкин: агар қаторнинг қолдиғи яқинлашувчи бўлса, у ҳолда қатор яқинлашувчи бўлади.

Қатор қолдиғининг таърифига кўра

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

бўлиши равшан.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} (S - S_n) = S - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0.$$

Шу сабабли етарлича катта n лар учун

$$S \approx S_n$$

тақрибий тенгликка эга бўламиз, n катталашгани сари бу тенгликнинг аниқлиги орта боради. Қатор йиғиндиси S ни унинг хусусий йиғиндиси S_n билан алмаштирилгандаги абсолют хато, равшанки, қатор қолдиғининг модулига тенг:

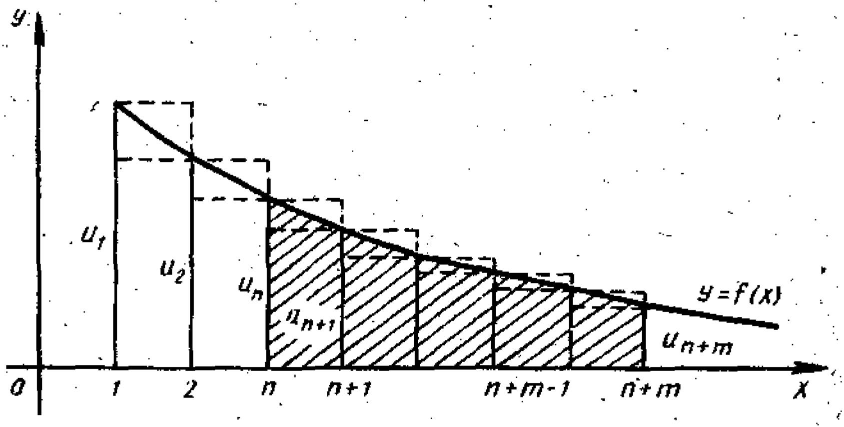
$$\Delta = |S - S_n| = |R_n|.$$

Шундай қилиб, агар қатор йиғиндисини $\varepsilon > 0$ гача аниқликда топиш талаб қилинса, у ҳолда шундай n сондаги дастлабки ҳадлар йиғиндисини олиш керакки, $|R_n| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилсин. Шунга қарамай кўп ҳолларда биз R_n қолдиқни аниқ топа олмаймиз. Шу сабабли қолдиқнинг модули берилган ε сондан катта бўлмайдиган қолдиқнинг n номерини қандай топиш кераклигини аниқлашимиз керак.

Мусбат ишорали қатор қолдиғини интеграл аломат ёрдамида баҳолаш ҳақидаги ушбу теорема айтилган саволга жавоб беради.

Теорема. *Агар мусбат ҳадли*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$



4- шакл.

қатор интеграл аломатнинг талабларига жавоб берса, у ҳолда унинг қолдиғи R_n қуйидаги тенгсизликларни қаноатлантиради:

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx < R_n < \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Исботи. 8- § даги (интеграл аломатдаги) шаклни қайта чизамиз (4- шакл). Бирор n номерни тайинлаймиз. Юқоридан $y=f(x)$ функция графиги билан чегараланган, асоси $x=n$ дан $x=n+m$ гача бўлган эгри чизиқли трапецияни қараймиз. 8- § дагига ўхшаш

$$S_{\text{и.ч}} < \int_{n}^{n+m} f(x)\,dx < S_{\text{т.ч}}$$

ёки $u_{n+1} + \ldots u_{n+m} < \int_{n}^{n+m} f(x)\,dx < u_n + \ldots + u_{n+m-1}$ тенгсизликларни тузиш мумкин. Равшанки, охирги тенгсизликни S_n, S_{n+m}, S_{n+m-1} хусусий йиғиндилар орқали ифодалаш мумкин:

$$S_{n+m} - S_n < \int_{n}^{n+m} f(x)\,dx < S_{n+m-1} - S_{n-1}.$$

Бундан қуйидаги иккита тенгсизликка эга бўламиз:

$$\int_{n}^{n+m} f(x)\,dx < S_{n+m-1} - S_{n-1} \text{ ва } \int_{n}^{n+m} f(x)\,dx > S_{n+m} - S_n. \quad (9.2)$$

Яқинлашувчи қаторлар учун $m \to \infty$ да (9.2) тенгсизликларда лимитга ўтамиз.

$$\lim_{m\to\infty} \int_{n}^{n+m} f(x)\,dx = \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx \text{ яқинлашувчи,}$$

$$\lim_{m\to\infty} S_{n+m-1} = S, \quad \lim_{m\to\infty} S_{n+m} = S,$$

(бунда S — қатор йиғиндиси) эканини ҳисобга олиб (9.2) ни бундай ёзиш мумкин:

$$\int_{n}^{\infty} f(x)\,dx < S - S_{n-1},$$

$$\int_{n}^{\infty} f(x)\,dx > S - S_n$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} &\int_{n}^{\infty} f(x)\,dx < R_{n-1}, \\ &\int_{n}^{\infty} f(x)\,dx > R_n. \end{aligned}\right\} \quad (9.3)$$

(9.3) нинг биринчи тенгсизлигида n ни $n+1$ билан алмаштириб, ушбу

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx < R_n \text{ ва } \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx > R_n$$

тенгсизликларга эга бўламиз. Бу тенгсизликларни қўш тенгсизлик шаклида бирлаштириб,

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx < R_n < \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

ифодага эга бўламиз. Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Мисол. Ушбу

$$S = 1 + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} + \ldots$$

қатор йиғиндисини 0,1 гача (яъни $\varepsilon = 0,1$) аниқликда топинг.

Ечиш. Яқинлашувчи (умумлашган гармоник, $p = 3 > 1$) қаторга эгамиз. Қаторнинг ҳадлари монотон камаювчи

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

функциянинг мос қийматларидан иборат. Шу сабабли қаторнинг n- қолдиғи

$$R_n = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \ldots$$

учун ушбу баҳога эгамиз:

$$R_n < \int_{n}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2n^2}.$$

$$R_n < \varepsilon \text{ ёки } \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{10}$$

тенгсизликни ечиб, $2n^2 > 10$ ёки $n > \sqrt{5} \approx 2,24$ тенгсизликка эга бўламиз. $n = 3$ деб қабул қиламиз. Шундай қилиб,

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} \approx 1,16.$$

Бу қийматни яхлитлаб қатор йиғиндисининг тақрибий қийматини топамиз: $S \approx 1,2$.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. *Даламбер аломати нимадан иборат? Уни исботланг. Мисоллар келтиринг.*
2. *Коши аломати нимадан иборат? Уни исботланг. Мисоллар келтиринг.*
3. *Интеграл аломат нимадан иборат? Уни исботланг.*
4. *Ушбу*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

қаторнинг $p>1$ да яқинлашувчи ва $p\leq 1$ да узоқлашувчи эканини аниқланг.

5. Мусбат ҳадли қаторнинг қолдиғи интеграл аломат билан қандай баҳоланади?

6. 2754—2770- масалаларни ечинг.

10- §. Ишоралари навбатлашувчи қаторлар

Ҳадларининг ишоралари ҳар хил бўлган қаторларни ўрганишга ўтамиз. Энг аввал *ишоралари навбатлашувчи қаторлар* деб аталувчи қаторларга тўхталамиз. Бундай қаторларда ҳар бир мусбат ҳаддан кейин манфий ҳад ва ҳар бир манфий ҳаддан кейин мусбат ҳад келади. Ишоралари навбатлашувчи қаторни бундай ёзиш мумкин:

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n,$$

бунда $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — мусбат сонлар.

1. Ишоралари навбатлашувчи қаторлар яқинлашишининг етарли шартини ўз ичига олган қуйидаги теоремани исботлаймиз.

1-теорема (Лейбниц теоремаси). *Агар ишоралари навбатлашувчи*

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots \qquad (10.1)$$

қаторда қатор ҳадларининг абсолют қийматлари камаювчи, яъни

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots \qquad (10.2)$$

бўлса, шу билан бирга u_n умумий ҳад нолга интилса:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0, \qquad (10.3)$$

у ҳолда (10.1) *қатор яқинлашувчи бўлади, шу билан бирга унинг йиғиндиси биринчи ҳадидан катта бўлмайди ва мусбат бўлади:* $0 < S < u_1$.

Исботи. Олдин жуфт индексли S_{2m} хусусий йиғиндилар кетма-кетлигини қараймиз, уларни ушбу кўринишда ёзамиз:

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Демак, $S_{2m} > 0$ ва S_{2m} хусусий йиғиндилар кетма-кетлиги ўсувчи. (10.2) шартдан ҳар бир қавс ичидаги ифоданинг мусбат экани келиб чиқади.

Энди S_{2m} хусусий йиғиндини бундай кўчириб ёзамиз:

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - \ldots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

(10.1) шартдан ҳар бир қавс ичидаги ифоданинг мусбат экани келиб чиқади. Шу сабабли бу қавсларни u_1 дан айириш натижасида биз u_1 дан кичик сонга эга бўламиз, яъни

$$S_{2m} < u_1.$$

Шундай қилиб, S_{2m} хусусий йиғиндилар кетма-кетлиги m бил биргаликда ўсувчи ва юқоридан чегараланган. Демак, у лимитга э яъни

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S,$$

шу билан бирга $0 < S < u_1$.

Энди тоқ индексли S_{2m+1} хусусий йиғиндилар ҳам S лимитга интилишини исботлаймиз. Ҳақиқатан ҳам,

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$$

бўлгани учун $m \to \infty$ да

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$$

га эга бўламиз, бунда (10.3) шартга кўра $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$. Шу билан биз жуфт n ларда ҳам, тоқ n ларда ҳам $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ эканини исботладик. Демак, (10.1) қатор яқинлашувчи, шу билан бирга унинг йиғиндиси мусбат ва қаторнинг биринчи ҳадидан катта бўлмайди, яъни

$$0 < S < u_1.$$

2. Қатор қолдиғини баҳолаш. Лейбниц теоремаси ишоралари навбатлашувчи қатор қолдиғини баҳолаш имконини берад

2-теорема. *Агар ишоралари навбатлашувчи*

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots \qquad (10.1)$$

қатор Лейбниц теоремаси шартини қаноатлантирса, у ҳолд унинг n-қолдиғи R_n абсолют қиймати бўйича ташлаб юборилган ҳадларнинг биринчисининг модулидан катта бўлмайди.

Исботи. Ишоралари навбатлашувчи (10.1) қатор Лейбниц теоремаси шартларини қаноатлантиргани учун у яқинлашувчи. У ҳолда қаторнинг n-қолдиғи

$$R_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots)$$

нинг ўзи ишоралари навбатлашувчи қаторнинг йиғиндиси бўлади. Лейбниц теоремасига кўра бу йиғинди абсолют қиймат бўйича қатор биринчи ҳади модулидан катта бўлмаслиги керак, яъни

$$|R_n| \leqslant u_{n+1} \qquad (10.4)$$

бўлиши керак.

Демак, қаторнинг S йиғиндисини S_n хусусий йиғинди билан алмаштиришда йўл қўйиладиган хато абсолют қиймати бўйича ташлаб юборилган ҳадларнинг биринчисидан катта бўлмайди. Охирги тенгсизликдан қолдиқнинг модули берилган аниқлик ε дан катта бўлмайдиган n номерни топишда фойдаланилади.

1-мисол. Ушбу

$$\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^2} + \ldots$$

қаторнинг яқинлашишини текширинг.

Ечиш. Қаторнинг ҳадлари абсолют қиймати бўйича камайиб боради:

$$\frac{1}{2^2} > \frac{1}{3^2} > \ldots > \frac{1}{(n+1)^2} > \ldots$$

ва

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0.$$

Шу сабабли қатор яқинлашувчи.

2-мисол. 1-мисолдаги қатор йиғиндисини $\varepsilon = 0{,}01$ гача аниқликда топинг. Қаторнинг n-қолдиғи

$$R_n = \pm\left(\frac{1}{(n+2)^2} - \frac{1}{(n+3)^2} + \ldots\right)$$

учун ушбу баҳога эгамиз:

$$|R_n| \leqslant \frac{1}{(n+2)^2}.$$

Ушбу

$$|R_n| < \varepsilon \text{ ёки } \frac{1}{(n+2)^2} < \frac{1}{100}$$

тенгсизликни ечиб

$$(n+2)^2 > 100 \text{ ёки } n > 8$$

га эга бўламиз. $n = 9$ деб оламиз.

Шундай қилиб,

$$S_9 = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \ldots + \frac{1}{10^2} \approx 0{,}182.$$

Бу қийматни юздан бирларгача яхлитлаб, қатор йиғиндисининг тақрибий қийматига эга бўламиз:

$$S \approx 0{,}18.$$

11-§. Ўзгарувчан ишорали қаторлар

Агар қаторнинг ҳадлари орасида мусбатлари ҳам, манфийлари ҳам бўлса, у ҳолда бундай қатор ўзгарувчан ишорали қатор дейилади:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

бунда $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ сонлар мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин (10-§ дагидан фарқли). Олдинги параграфда кўриб ўтилган ишоралари навбатлашувчи қаторлар ўзгарувчан ишорали қаторларнинг хусусий ҳолидир.

1. Абсолют ва шартли яқинлашувчи қаторлар. Ўзгарувчан ишорали қаторнинг абсолют ва шартли яқинлашуви каби муҳим тушунчаларни киритамиз.

1-таъриф. Ўзгарувчан ишорали

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{11.1}$$

қатор ҳадлари абсолют қийматларидан тузилган

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots \tag{11.2}$$

қатор яқинлашувчи бўлса, (11.1) *абсолют яқинлашувчи қатор* дейилади.

2-таъриф. Агар ўзгарувчан ишорали (11.1) қатор яқинлашувчи бўлиб, бу қаторнинг ҳадлари абсолют қийматларидан тузилган (11.2) қатор узоқлашувчи бўлса, у ҳолда берилган ўзгарувчан ишорали (11.1) қатор *шартли* ёки *ноабсолют яқинлашувчи қатор* дейилади.

1-мисол. Ишоралари навбатлашувчи

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$$

қатор шартли яқинлашувчи қатордир, чунки у яқинлашувчи (Лейбниц аломати бўйича), унинг ҳадлари абсолют қийматларидан тузилган

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

қатор эса узоқлашувчидир (гармоник қатор).

2-мисол. Ишоралари навбатлашувчи

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+\ldots$$

қатор абсолют яқинлашувчи қатордир, чунки у яқинлашувчидир (буни Лейбниц аломати бўйича текшириш осон), унинг ҳадлари абсолют қийматларидан тузилган

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

қатор ҳам яқинлашувчи (кўрсаткичи $p=2>1$ бўлган умумлашган гармоник қатор).

2. Абсолют яқинлашувчи қаторнинг яқинлашиши ҳақида теорема. Ўзгарувчан ишорали қатор яқинлашувчанлигининг муҳим етарли шартини келтирамиз.

Теорема. *Агар ўзгарувчан ишорали*

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{11.1}$$

қатор ҳадлари абсолют қийматларидан тузилган

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots \tag{11.2}$$

қатор яқинлашса, у ҳолда берилган ўзгарувчан ишорали (11.2) *қатор ҳам яқинлашади.*

Исботи. S_n ва σ_n мос равишда (11.1) ва (11.2) қаторларнинг n—хусусий йиғиндилари бўлсин. S_n^+ билан барча мусбат, S_n^- билан эса S_n хусусий йиғиндидаги барча манфий ишорали ҳадлар абсолют қийматлари йиғиндисини белгилаймиз. У ҳолда

$$S_n = S_n^+ - S_n^-, \quad \sigma_n = S_n^+ + S_n^-.$$

Шартга кўра (11.2) қатор яқинлашувчи, шу сабабли σ_n йиғинди σ лимитга эга. S_n^+ ва S_n^- лар эса мусбат ва ўсувчи, шу билан бирга $S_n^+ \leqslant \sigma_n < \sigma$ ва $S_n^- \leqslant \sigma_n < \sigma$ (чегараланган), демак, улар ҳам лимитга эга:

$$\lim_{n\to\infty} S_n^+ = S^+, \quad \lim_{n\to\infty} S_n^- = S^-.$$

$S_n = S_n^+ - S_n^-$ муносабатдан S_n ҳам лимитга эга эканлиги келиб чиқади:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_n^+ - \lim_{n\to\infty} S_n^- = S^+ - S^-.$$

Демак, ўзгарувчан ишорали қатор яқинлашади.

Абсолют яқинлашиш тушунчаси ёрдамида бу теорема кўпинча бундай ифодаланади: ҳар қандай абсолют яқинлашувчи қатор яқинлашувчи қатордир.

3-мисол. Ўзгарувчан ишорали

$$\frac{\sin\alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \dots \qquad (11.3)$$

қаторнинг яқинлашишини текширинг, бунда α- ихтиёрий ҳақиқий сон.

Ечиш. Берилган қатор билан бирга

$$\left|\frac{\sin\alpha}{1^2}\right| + \left|\frac{\sin 2\alpha}{2^2}\right| + \dots + \left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| + \dots \qquad (11.4)$$

қаторни қараймиз. Бу қаторни яқинлашувчи

$$1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \qquad (11.5)$$

гармоник қатор билан таққослаймиз.

(11.4) қаторнинг ҳадлари (11.5) қаторнинг мос ҳадларидан катта эмас, шу сабабли таққослаш аломатига кўра (11.4) қатор яқинлашувчи. Аммо у ҳолда, исботланган теоремага асосан, (11.3) қатор ҳам яқинлашувчи.

Абсолют ва шартли яқинлашувчи қаторларнинг қуйидаги хоссаларини қайд қиламиз:

а) агар қатор абсолют яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу қатор ҳадларининг ўрни ҳар қанча алмаштирилганда ҳам у абсолют яқинлашувчи бўлиб қолаверади; бунда қаторнинг йиғиндиси унинг ҳадлари тартибига боғлиқ бўлмайди (бу хосса шартли яқинлашувчи қаторлар учун сақланмайди);

б) агар қатор шартли яқинлашувчи бўлса, у ҳолда бу қатор ҳадларининг ўринларини шундай алмаштириб қўйиш мумкинки, натижада унинг йиғиндиси ўзгаради; бунинг устиг алмаштиришдан кейин ҳосил бўлган қатор узоқлашувчи қатор бўлиб қолиши мумкин.

Мисол учун шартли яқинлашувчи

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots$$

қаторни оламиз. Унинг йиғиндисини S билан белгилаймиз. Қатор ҳадларини ҳар бир мусбат ҳаддан кейин иккита манфий ҳад турадиган қилиб алмаштирамиз:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots.$$

Ҳар бир мусбат ҳадни ундан кейин келадиган манфий ҳад билан қўшамиз:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots.$$

Натижада ҳадлари берилган қатор ҳадларини 1/2 га кўпайтиришдан ҳосил бўлган қаторга эга бўламиз. Аммо 4-§даги 1-теоремага кўра бу қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $\frac{1}{2}S$ га тенг. Шундай қилиб, қатор ҳадларининг жойлашиш тартибини ўзгартириш билангина унинг йиғиндисини икки марта камайтирдик.

12-§. Комплекс ҳадли қаторлар

Қаторлар назариясининг кўпгина масалалари деярли ҳеч қандай ўзгаришларсиз ҳадлари комплекс сонлардан иборат бўлган қаторларга ўтказилади. Дастлаб

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ \ldots$$

комплекс сонлар кетма-кетлигининг лимити таърифини киритамиз, бунда:

$$z_n=x_n+iy_n,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

1-таъриф. Агар ҳар қандай $\varepsilon>0$ учун шундай N натурал сонни танлаш мумкин бўлсаки, барча $n\geqslant N$ лар учун

$$|z_n-z_0|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $z_0=a+ib$ комплекс сон $z_n=x_n+$ $+iy_n$ *комплекс сонлар кетма-кетлигининг лимити* дейилади.

$z_n-z_0=(x_n-a)+i(y_n-b)$ бўлгани учун $|z_n-z_0|=$

$\to \sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2}$. Шу сабабли $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ лимитнинг мавжудлиги ҳақиқий сонлар кетма-кетлигининг иккита лимити мавжудлигига тенг кучлидир:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b. \tag{12.1}$$

Бу таъриф қатор яқинлашишининг таърифини комплекс ҳадли қаторга ҳеч бир ўзгаришсиз ўтказиш имконини беради. Комплекс сонлардан иборат

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n + \dots \tag{12.2}$$

қаторни тузамиз, бунда

$$w_n = u_n + iv_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Бу қаторнинг дастлабки n та ҳади йиғиндисини қараймиз, уни S_n билан белгилаймиз:

$$S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n,$$

S_n — комплекс сон:

$$S_n = (u_1 + u_2 + \dots + u_n) + i(v_1 + v_2 + \dots + v_n). \tag{12.3}$$

2-таъриф. Агар (12.3) қаторнинг S_n хусусий йиғиндилари кетма-кетлигининг лимити

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = A + iB$$

мавжуд бўлса, у ҳолда (12.3) комплекс ҳадли қатор *яқинлашувчи қатор*, S эса унинг *йиғиндиси* дейилади.

(12.1) га асосан (12.2) қаторнинг яқинлашувчи эканидан ҳақиқий коэффицентли иккита

$$A = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

$$B = v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

қаторнинг яқинлашувчи экани келиб чиқади.

3-таъриф. Агар $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ мавжуд бўлмаса, у ҳолда комплекс ҳадли (12.2) қатор *узоқлашувчи қатор* дейилади.

(12.2) қаторнинг яқинлашишини текширишда ушбу теорема жуда муҳимдир.

Теорема. *Агар*

$$|w_1| + |w_2| + \dots + |w_n| + \dots,$$

бунда $|w_n| = \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$ *қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда* (12.2) *қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.*

Исботи. Мусбат ҳадли

$$|w_1| + |w_2| + \dots + |w_n| + \dots$$

қаторнинг яқинлашувчанлиги ва

$$|u_n| \leqslant \sqrt{u_n^2 + v_n^2} = |w_n|, \quad |v_n| \leqslant \sqrt{u_n^2 + v_n^2} = |w_n|$$

шартлардан, мусбат ҳадли қаторларни таққослаш аломати асосида (6-§, 1-теорема)

$$\begin{aligned} &|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots, \\ &|v_1| + |v_2| + \ldots + |v_n| + \ldots \end{aligned} \qquad (12.4$$

қаторларнинг яқинлашувчанлиги келиб чиқади. (12.4) қаторларнинг яқинлашишидан 11-§ даги теорема асосида

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

қаторларнинг яқинлашиши, ва демак,

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots$$

қаторнинг ҳам яқинлашиши келиб чиқади, шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Исботланган теорема комплекс ҳадли қаторларнинг яқинлашишини текшириш учун мусбат ҳадли қаторлар яқинлашишининг барча етарлилик аломатларини қўлланиш имконини беради.

4-таъриф. Агар комплекс ҳадли қаторнинг ҳадлари модулларидан тузилган қатор яқинлашувчи бўлса, бу комплекс ҳадли қатор *абсолют яқинлашувчи қатор* дейилади.

Комплекс ҳадли абсолют яқинлашувчи қаторлар ҳақиқий ҳадли абсолют яқинлашувчи қаторларнинг ҳамма хоссаларига эга.

1-мисол. Ушбу $\frac{\cos 1 + i \sin 1}{1^2} + \frac{\cos 2 + i \sin 2}{2^2} + \ldots +$ $+ \frac{\cos n + i \sin n}{n^2} + \ldots$ қатор абсолют яқинлашади, чунки унинг ҳадлари модулларидан тузилган

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

қатор яқинлашувчидир.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Ишоралари навбатлашувчи қатор деб қандай қаторга айтилади? Ўзгарувчан ишорали қатор деб-чи?
2. Ишоралари навбатлашувчи қатор учун Лейбниц аломати нимадан иборат? Исботланг.
3. Ишоралари навбатлашувчи қатор қолдиғи қандай баҳоланади? Мисоллар келтиринг.
4. Ўзгарувчан ишорали қатор учун яқинлашишнинг етарлилик шарти нима? Исботланг.
5. Абсолют яқинлашувчи ва шартли яқинлашувчи қаторларнинг таърифини беринг. Мисоллар келтиринг.

6. Абсолют яқинлашувчи қаторларнинг хоссасини ифодаланг.
7. Абсолют яқинлашувчи қаторнинг яқинлашиши ҳақидаги теоремани исботланг.
8. Комплекс сонлар кетма-кетлигининг лимити таърифини ва комплекс ҳадли яқинлашувчи қатор таърифини беринг.
9. Комплекс ҳадли қаторларнинг яқинлашиши қандай текширилади?
10. 2790 — 2801-масалаларни ечинг.

13-§. Функционал қаторлар. Яқинлашиш соҳаси

Ҳадлари функциялардан иборат бўлган қаторларни қарашга ўтамиз:

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \tag{13.1}$$

Бундай қаторлар *функционал қаторлар дейилади.* $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... функцияларнинг ҳаммаси бирор чекли ёки чексиз интервалда аниқланган ва узлуксиз.

Функционал қаторнинг ҳади, хусусан, ўзгармас бўлиши ҳам мумкин. Бундай ҳолда функционал қатор сонли қаторга айланади. Шундай қилиб, сонли қатор функционал қаторнинг хусусий ҳоли экан.

(13.1) ифодада x ўзгарувчига баъзи x_0, x_1, ... қийматларни бериб, у ёки бу сонли қаторга эга бўламиз:

$$\begin{aligned} &u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots, \\ &u_1(x_1)+u_2(x_1)+\ldots+u_n(x_1)+\ldots \end{aligned} \tag{13.2}$$

ва ҳ. к.

x ўзгарувчининг оладиган қийматига қараб (13.2) қатор яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлади.

x ўзгарувчининг (13.2) сонли қатор яқинлашувчи бўладиган қиймати (13.1) *функционал қаторнинг яқинлашиш нуқтаси* дейилади. x ўзгарувчининг (13.2) сонли қатор узоқлашувчи бўладиган қиймати (13.1) *функционал қаторнинг узоқлашиш нуқтаси* дейилади.

Таъриф. x ўзгарувчининг (13.2) қатор яқинлашувчи бўладиган ҳамма қийматлари тўплами (13.1) функционал қаторнинг *яқинлашиш соҳаси* дейилади.

Агар x ўзгарувчининг x_0 қиймати (13.1) функционал қаторнинг яқинлашиш соҳасига тегишли бўлса, у ҳолда бу қаторнинг $x=x_0$ нуқтадаги йиғиндиси ҳақида гапириш мумкин:

$$S(x_0)=u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots$$

Шундай қилиб, функционал қатор йиғиндисининг қиймати x ўзгарувчининг қийматига боғлиқ. Шу сабабли функционал қаторнинг йиғиндиси унинг яқинлашиш соҳасида x нинг бирор функцияси бўлади ва $S(x)$ билан белгиланади.

1-мисол. Ушбу

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

функционал қаторнинг ҳадлари махражи $q = x$ га тенг бўлган геометрик прогрессия ташкил қилади. Демак, унинг яқинлашиши учун $|x| < 1$ бўлиши керак ва $(-1,1)$ интервалда қаторнинг йиғиндиси $\frac{1}{1-x}$ га тенг. Шундай қилиб, $(-1, 1)$ интервалда берилган қатор

$$S(x) = \frac{1}{1-x}$$

функцияни аниқлайди, бу эса қаторнинг йиғиндисидир, яъни

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots .$$

2-мисол. Ушбу

$$\frac{1}{2+\sin x} + \frac{1}{3+\sin x} + \ldots + \frac{1}{n+1+\sin x} + \ldots$$

функционал қатор x нинг ҳар қандай қийматида узоқлашувчи. Ҳақиқатан, барча x лар учун $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, шунингдек, қаторнинг ҳадлари барча x лар учун мусбат. Шу сабабли мусбат ҳадли қаторларнинг таққослаш аломатини қўллаймиз, берилган қаторни

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

гармоник қатор билан таққослаймиз. Берилган қаторнинг ҳадлари гармоник қаторнинг мос ҳадларидан (учинчи ҳадидан бошлаб) кичик эмас, гармоник қатор эса, маълумки, узоқлашувчи. Демак, берилган қатор x нинг ҳар қандай қийматида узоқлашувчи, шуни исботлаш талаб қилинган эди.

(13.1) қаторнинг дастлабки n та ҳади йиғиндисини $S_n(x)$ билан белгилаймиз. Агар бу қатор x нинг бирор қийматида яқинлашса, у ҳолда

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x)$$

бўлади, бунда $S(x)$ — қаторнинг йиғиндиси,

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$$

$r_n(x)$ миқдор (13.1) *қаторнинг қолдиғи* дейилади. x нинг барча қийматлари учун қаторнинг яқинлашиш соҳасида

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$$

муносабат ўринли, шу сабабли $\lim\limits_{n\to\infty} (S(x) - S_n(x)) = 0$ ёки $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, яъни яқинлашувчи қаторнинг қолдиғи $n \to \infty$ да нолга интилади.

14-§. Текис яқинлашиш. Вейерштрасс аломати

13-§ да биз яқинлашиш соҳасида $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ эканини аниқладик. Бу ихтиёрий кичик $\varepsilon > 0$ сон учун ε ва x га боғлиқ шундай $N(\varepsilon, x)$ сон топилиб, барча $n > N(\varepsilon, x)$ ларда $|r_n(x)| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилишини билдиради.

Функционал қаторларнинг шундай синфи мавжудки, бу қаторлар учун юқоридаги тенгсизлик қаторнинг яқинлашиш соҳасига тегишли барча x лар учун $n \geqslant N$ бўлиши биланоқ бажарилади, бу ҳолда N фақат ε нинг ўзига боғлиқ, яъни $N = N(\varepsilon)$. Бу қаторлар текис яқинлашувчи қаторлар деб аталади.

Таъриф. Агар ихтиёрий исталганча кичик $\varepsilon>0$ сон учун фақат ε га боғлиқ, шундай $N(\varepsilon)$ сон топилиб, барча $n \geqslant N$ да кўрсатилган соҳага тегишли x лар учун

$$|r_n(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса,

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

функционал қатор кўрсатилган соҳада *текис яқинлашувчи қатор* дейилади.

Қатор текис яқинлашишининг амалда қулай бўлган етарлилик аломатини исботлаймиз.

Вейерштрасс аломати. *Агар*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{14.1}$$

функционал қаторнинг ҳадлари бирор $[a, b]$ соҳада абсолют қиймати бўйича бирор яқинлашувчи мусбат ишорали

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots \tag{14.2}$$

қаторнинг мос ҳадларидан катта бўлмаса, яъни

$$|u_n(x)| \leqslant c_n \tag{14.3}$$

бўлса (бунда $n = 1, 2, \ldots$), у ҳолда берилган функционал қатор кўрсатилган $[a, b]$ соҳада текис яқинлашади.

Исботи. (14.2) қатор йиғиндисини σ билан белгилаймиз:

$$\sigma = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots,$$

у ҳолда $\sigma = \sigma_n + \varepsilon_n$, бунда σ_n — n- хусусий йиғинди, ε_n эса бу қаторнинг n- қолдиғи, яъни

$$\varepsilon_n = c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots \tag{14.4}$$

(14.2) қатор яқинлашувчи бўлгани учун $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$ ва, демак, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

(14.1) функционал қатор йиғиндисини

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x)$$

кўринишда ёзамиз, бунда

$$S_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x),$$

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots$$

(14.3) шартдан

$$|u_{n+1}(x)| \leqslant c_{n+1}, \quad |u_{n+2}(x)| \leqslant c_{n+2}, \ldots$$

экани келиб чиқади ва шу сабабли (14.4) дан қаралаётган соҳанинг барча x лари учун

$$|r_n(x)| < \varepsilon_n$$

тенгсизлик бажарилади. Бу эса (14.1) қатор $[a, b]$ да текис яқинлашишини кўрсатади. Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

1-мисол. Ушбу

$$\frac{\sin 1^2 x}{1^2} + \frac{\sin 2^2 x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n^2 x}{n^2} + \ldots$$

функционал қатор x нинг барча ҳақиқий қийматлари учун текис яқинлашади, чунки барча x ва n ларда

$$\left|\frac{\sin n^2 x}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2},$$

ушбу

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

қатор эса, маълумки, яқинлашувчи, чунки бу кўрсаткичи $p=2>1$ бўлган умумлашган гармоник қатордир.

Текис яқинлашувчи функционал қаторлар учун функциялар чекли йиғиндиси хоссаларини татбиқ қилиш мумкин.

1-теорема. *Агар*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

функционал қаторнинг ҳар бир ҳади $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлиб, бу функционал қатор $[a, b]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда қаторнинг йиғиндиси $S(x)$ ҳам шу кесмада узлуксиз бўлади .

2-теорема (қаторларни ҳадлаб интеграллаш ҳақида). *Агар*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

функционал қаторнинг ҳар бир ҳади $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлиб, бу функционал қатор $[a, b]$ да текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)\,dx + \ldots$$

қатор ҳам яқинлашувчи бўлади ва унинг йиғиндиси $\int_a^b S(x)\,dx$ га тенг бўлади.

Юқоридаги теоремаларнинг исботини келтирмаймиз.

2-мисол. Ушбу

$$1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots$$

функционал қатор $|x| < 1$ да текис яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси (қаралаётган қатор ҳадлари геометрик прогрессия ташкил қилади) $S(x) = \frac{1}{1+x^2}$ эканини кўриш осон. Берилган қаторни 0 дан бирор $x < 1$ гача ҳадлаб интеграллаймиз, натижада

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

қаторга эга бўламиз, бу қатор $|x| < 1$ да текис яқинлашади ва унинг йиғиндиси қуйидагига тенг:

$$\int_0^x S(x)\,dx = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x \Big|_0^x = \operatorname{arc\,tg} x.$$

Шундай қилиб, $|x| < 1$ да текис яқинлашувчи

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

қаторга эга бўлдик.

3-теорема (қаторларни ҳадлаб дифференциаллаш ҳақида). *Агар*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

функционал қатор бирор $[a, b]$ *соҳада яқинлашувчи ва* $S(x)$ *йиғиндига эга бўлса, шу билан бирга унинг ҳадлари шу соҳада узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса ҳамда*

$$u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots$$

қатор $[a, b]$ *да текис яқинлашувчи бўлиб,* $\sigma(x)$ *йиғиндига эга бўлса, у ҳолда берилган қатор текис яқинлашувчи бўлади ва* $S'(x) = \sigma(x)$ *бўлади.*

Бу теореманинг исботини ҳам келтирмаймиз:

3-мисол. Шу параграфдаги 2-мисолни қараймиз:

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Бундан

$$x \cdot \operatorname{arc\,tg} x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+1} + \ldots \qquad (14.5)$$

экани келиб чиқади. Бунда ўнг томонда бирор қатор турибди. Шу қаторни ҳадлаб дифференциаллаб, қуйидагини топамиз:

$$2x - \frac{4x^3}{3} + \frac{6x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{(2n+2)x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Бу қаторга Даламбер аломатини қўллаймиз:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2n+2}{2n+1}x^{2n+1}}{\frac{2n}{2n-1}x^{2n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)(2n-1)}{(2n+1)2n}x^2 = x^2.$$

Шундай қилиб, қатор абсолют яқинлашувчи ва барча $|x|<1$ лар учун эса текис яқинлашувчи бўлади.

Демак, ҳосилаларнинг ёзилган қатори (14.5) қатор йиғиндисидан олинган ҳосилага яқинлашади:

$$\operatorname{arc\,tg} x + \frac{x}{1+x^2} = 2x - \frac{4x^3}{3} + \ldots + (-1)^n\frac{(2n+2)x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Бу яқинлашиш барча $|x| < 1$ да текисдир.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Қандай қатор функционал қатор дейилади?
2. Функционал қаторнинг яқинлашиш соҳаси деб нимага айтилади?
3. Қандай функционал қатор текис яқинлашувчи қатор дейилади?
4. Функционал қаторнинг текис яқинлашишининг Вейерштрасс аломати нима?
5. Текис яқинлашувчи қаторларнинг хоссаларини санаб чиқинг. Мисоллар келтиринг.
6. 2802—2820- масалаларни ечинг.

15-§. Даражали қаторлар

Таъриф. *Даражали қатор* деб

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots \quad (15.1)$$

кўринишдаги функционал қаторга айтилади, бунда $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ ўзгармас сонлар *даражали қаторнинг коэффициентлари* дейилади.

Хусусий ҳолда, агар $x_0=0$ бўлса, у ҳолда биз ҳадлари x нинг даражалари бўйича жойлашган

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \quad (15.2)$$

даражали қаторга эга бўламиз.

Биз бундан кейин (15.2) кўринишдаги даражали қаторларни ўрганамиз, чунки бундай қатор $x'=x-x_0$ алмаштириш билан (15.1) кўринишдаги қаторга келтирилади.

Қулайлик учун a_nx^n ҳадни, унинг $(n+1)$- ўринда туришига қарамай, қаторнинг n- ҳади дейилади. Қаторнинг озод ҳади a_0 қаторнинг *нолинчи ҳади* дейилади.

Даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси ҳар доим бирор интервалдан иборат, бу интервал, хусусий ҳолда нуқтага айланиб қолиши мумкин. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун даражали қаторлар назарияси учун муҳим бўлган қуйидаги теоремани исботлаймиз.

1. **Абель теоремаси.** *Агар*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \qquad (15.2)$$

даражали қатор $x_0 \neq 0$ нуқтада яқинлашса, у ҳолда бу қатор x нинг $|x| < |x_0|$ тенгсизликни қаноатлантирадиган барча қийматларида абсолют яқинлашади, яъни $(-|x_0|, |x_0|)$ интервалда яқинлашувчидир.

Исботи. Теореманинг шартига кўра

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n + \ldots$$

сонли қатор яқинлашувчи, шу сабабли унинг умумий ҳади нолга интилади:

$$\lim_{n\to\infty} a_nx_0^n = 0,$$

шунга кўра бу қаторнинг ҳамма ҳади чегараланган, яъни шундай $M>0$ ўзгармас мавжудки, барча n ларда

$$|a_nx_0^n| < M \qquad (15.3)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

(15.2) қаторни қуйидагича кўринишда ёзамиз:

$$a_0 + a_1x_0\left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2x_0^2\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots + a_nx_0^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \ldots \qquad (15.4)$$

Шундан кейин бу қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан

$$|a_0| + |a_1x_0|\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right| + \left|a_2x_0^2\right|\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + |a_nx_0|^n\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \qquad (15.5)$$

қаторни тузамиз ва шунингдек, ҳадлари махражи $q = \left|\frac{x}{x_0}\right|$ ва биринчи ҳади M га тенг бўлган геометрик прогрессиянинг ҳадларидан иборат қаторни қараймиз:

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \qquad (15.6)$$

Агар $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ ёки $|x| < |x_0|$ бўлса, у ҳолда (15.6) қатор яқинлашади. Шу сабабли абсолют қийматлардан иборат (15.5) қатор ҳам яқинлашувчи, чунки унинг ҳадлари (15.3) тенгсизликлар туфайли (15.6) яқинлашувчи қаторнинг мос ҳадларидан кичик. У ҳолда (15.4) ёки (15.2) қаторнинг ўзи ҳам абсолют яқинлашади.

Шундай қилиб, агар берилган қатор $x = x_0 \neq 0$ да яқинлашувчи бўлса, бу қатор $|x| < |x_0|$ учун абсолют яқинлашувчи бўлади. Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Натижа. Агар (15.2) даражали қатор $x = x_0$ да узоқлашувчи бўлса, у ҳолда бу қатор x нинг $|x| > |x_0|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳар қандай қийматида узоқлашувчи бўлади.

Исботи. Қатор бирор $|x_1| > |x_0|$ да яқинлашувчи деб фараз қилайлик, у ҳолда Абель теоремасига биноан у $|x| < |x_1|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи x ларда, хусусан $x = x_0$ да, абсолют яқинлашувчи, бу эса шартга зид. Демак, фаразимиз нотўғри, бу эса натижанинг тасдиғи тўғрилигини билдиради.

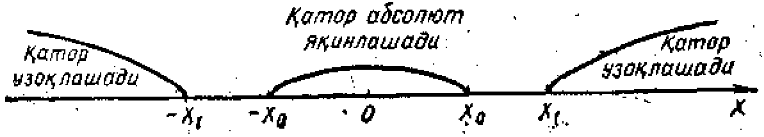
1-эслатма. Комплекс ўзгарувчининг

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n + \ldots \qquad (15.7)$$

даражали қатори учун Абель теоремаси тўғрилигича қолади, бунда a_0, a_1, ..., a_n, ... комплекс сонлар — қаторнинг коэффициентлари. Абель теоремасига кўра (15.7) қаторнинг бирор z_0 нуқтада яқинлашувчанлигидан унинг

$$|z| < |z_0|$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча z ларда абсолют яқинлашиши келиб чиқади.



5- шакл.

2. Ҳақиқий ҳадли қаторлар учун яқинлашиш доираси, интервали ва радиуси. Даражали қаторнинг яқинлашиш соҳасини аниқлашга киришамиз. Абель теоремаси даражали қаторнинг яқинлашиш ва узоқлашиш нуқталарининг жойлашишлари ҳақида мулоҳаза юритиш имконини беради. Ҳақиқатан, агар x_0 яқинлашиш нуқтаси бўлса, у ҳолда $(-|x_0|, |x_0|)$ интервалнинг ҳаммаси абсолют яқинлашиш нуқталари билан тўлдирилган. Агар x_1 нуқта узоқлашиш нуқтаси бўлса, у ҳолда $|x_1|$ дан ўнгдаги чексиз ярим тўғри чизиқнинг ва $-|x_1|$ дан чапдаги чексиз ярим тўғри чизиқнинг ҳаммаси узоқлашиш нуқтасидан иборат бўлади (5- шакл). Бундан шундай R сон мавжуд эканлиги ва $|x| < R$ да абсолют яқинлашиш, $|x| > R$ да эса узоқлашиш нуқталарига эга бўлишимиз келиб чиқади. Шундай қилиб, даражали қаторнинг *яқинлашиш соҳаси* маркази координаталар бошида бўлган интервалдан иборат.

2-таъриф. $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ *даражали қаторнинг яқинлашиш соҳаси* деб шундай $(-R, R)$ интервалга айтиладики, бу интервалнинг ичидаги ҳар қандай x нуқтада қатор *яқинлашади* ва шу билан бирга абсолют яқинлашади, ундан ташқарида ётувчи x нуқталарда қатор узоқлашади. R сони даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси дейилади (6- шакл).

Интервалнинг четки нуқталарида, яъни $x = R$ ва $x = -R$ нуқталарда берилган қаторнинг яқинлашиши ёки узоқлашиши масаласи қатор учун алоҳида ҳал қилинади.

Баъзи қаторлар учун яқинлашиш интервали нуқтага айла-

6- шакл.

ниб қолади, у ҳолда $R=0$ бўлади; баъзилари учун эса бутун Ox ўқини қамраб олади, яъни $R=\infty$ бўлади.

Даражали қатор яқинлашиш радиусини аниқлаш учун формула чиқарамиз. Яна

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \qquad (15.2)$$

қаторни қараймиз. Унинг ҳадларининг абсолют қийматларидан қатор тузамиз:

$$|a_0| + |a_1x| + |a_2x^2| + \ldots + |a_nx^n| + \ldots \qquad (15.8)$$

мусбат ҳадли қаторга эга бўламиз. (15.8) қаторнинг яқинлашишини аниқлаш учун Даламбер аломатини қўллаймиз.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| = l\cdot|x|$$

лимит мавжуд бўлсин. У ҳолда Даламбер аломатига кўра (15.8) қатор, агар $l\cdot|x| < 1$, яъни $|x| < \frac{1}{l}$ бўлса, яқинлашувчи, агар $l\cdot|x| > 1$, яъни $|x| > \frac{1}{l}$ бўлса, узоқлашувчи бўлади.

Демак, (15.2) қатор $|x| < \frac{1}{l}$ да абсолют яқинлашади ва $|x| > \frac{1}{l}$ да узоқлашади.

Юқоридагилардан $\left(-\frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$ интервал (15.2) қаторнинг яқинлашиш интервали экани келиб чиқади, яъни

$$R = \frac{1}{l} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \qquad (15.9)$$

Яқинлашиш интервалини аниқлаш учун шунингдек Коши аломатидан ҳам фойдаланиш мумкин, у ҳолда

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \qquad (15.10)$$

2-эслатма. (15.9) ва (15.10) формулалардан қатор ҳадлари тўла, яъни қатор коэффициентлари нолга айланмайдиган ҳолларда яқинлашиш радиусларини топиш учун фойдаланиш мумкин. Агар қатор фақат жуфт даражаларни ёки фақат тоқ даражаларни ўз ичига олса ёки даражалари каррали бўлса ва ҳ. к., у ҳолда яқинлашиш интервалини топиш учун бевосита Даламбер ёки Коши аломатидан, (15.9) ёки (15.10) формулаларни чиқаришда қилинганидек фойдаланиш керак.

3-эслатма. Ушбу

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

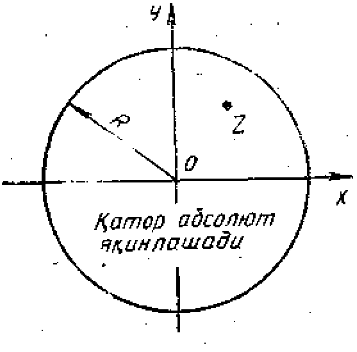
кўринишдаги даражали қаторлар учун юқорида айтилганларнинг ҳаммаси ўз кучида қолади, бунда фарқ шундан иборатки, энди яқинлашиш маркази $x=0$ нуқтада эмас, балки $x=x_0$ нуқтада ётади. Демак, яқинлашиш интервали (x_0-R, x_0+R) интервалдан иборат бўлади, бунда R (15.9) ёки (15.10) формулалар бўйича аниқланади, шу билан бирга 2-эслатма бу қаторлар учун ўз кучида қолади.

4-эслатма. Юқорида айтилганларнинг ҳаммаси комплекс ўзгарувчили

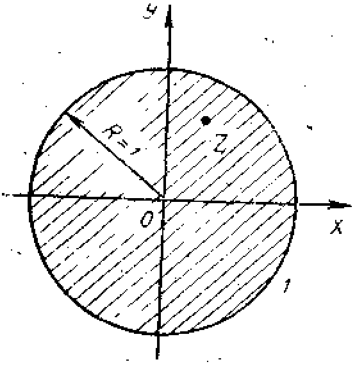
$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n + \dots \qquad (15.11)$$

даражали қатор учун ҳам ўз кучини сақлайди. Бу қаторнинг аниқланиш соҳаси z комплекс ўзгарувчи текислигидаги маркази координаталар бошида бўлган доирадан иборат. Бу доира яқинлашиш доираси дейилади. Яқинлашиш доираси ичида ётган нуқталарда (15.11) қатор абсолют яқинлашади. Яқинлашиш доирасининг радиуси даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси дейилади. Демак, яқинлашиш соҳаси радиуси R бўлган доирадан иборат бўлади: $|z| < R$, бунда (15.11) қатор абсолют яқинлашади (7-шакл).

1-мисол. Даражали қаторнинг яқинлашиш интервалини топинг:



7-шакл.



8-шакл.

$$\frac{2x}{1} - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{(2x)^n}{n} + \dots$$

Ечиш. Бунда

$$a_n=(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n},\quad a_{n+1}=(-1)^{n+2}\frac{2^{n+1}}{n+1}.$$

Шу сабабли

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(n+1)}{n\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}.$$

Демак, $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ интервал яқинлашиш интервали бўлади. $x=\frac{1}{2}$ да $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots$ қаторга эга бўламиз, бу қатор Лейбниц аломати бўйича яқинлашувчи. $x=-\frac{1}{2}$ да $-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots$ қаторга эга бўламиз, бу қатор гармоник қатор сифатида узоқлашувчи.

2-мисол. Қаторнинг яқинлашиш интервалини аниқланг:

$$\frac{x-1}{1\cdot 2}+\frac{(x-1)^2}{2\cdot 2^2}+\frac{(x-1)^3}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{(x-1)^n}{n\cdot 2^n}+\ldots$$

Ечиш. Бунда $a_n=\frac{1}{n\cdot 2^n}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)\,2^{n+1}}$, шу сабабли

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^{n+1}}{n\cdot 2^n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=2.$$

Яқинлашиш интервалининг маркази $x=1$ нуқтада, шу сабабли $(-1,\ 3)$ интервал қаторнинг яқинлашиш интервали бўлади. $x=-1$ да $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots$ қаторга эга бўламиз, бу қатор Лейбниц аломатига кўра яқинлашувчи, $x=3$ да $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ қаторга эга бўламиз, бу қатор гармоник қатор сифатида узоқлашувчи.

3-мисол. Қаторнинг яқинлашиш доирасини топинг:

$$1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots$$

Ечиш. Бунда $a_n=1$, $a_{n+1}=1$, $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$. Демак, радиуси $R=1$, маркази координаталар бошида бўлган доира яқинлашиш доираси бўлади, яъни $|z|<1$ доира яқинлашиш доираси бўлади. Бу доирада қатор абсолют яқинлашади (8-шакл).

4-мисол. Қаторнинг яқинлашиш доирасини топинг:

$$1+\frac{z-1}{1!}+\frac{(z-1)^2}{2!}+\ldots+\frac{(z-1)^n}{n!}+\ldots$$

Ечиш. Бунда $a_n=\frac{1}{n!}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$, шу сабабли

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty.$$

Демак, яқинлашиш доираси бутун комплекс текисликдан иборат бўлади.

16-§. Даражали қаторнинг текис яқинлашиши ҳақида теорема. Даражали қаторларнинг хоссалари

Яқинлашиш радиуси R га тенг бўлган

$$S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \qquad (16.1)$$

қаторни қараймиз. Бу қаторга нисбатан 11-§ даги натижаларни қўллаш учун қуйидаги теоремани исботлаймиз.

Теорема. *Даражали қатор яқинлашиш интервали ичида ётган ҳар қандай* $[-b, b]$ *оралиқда текис яқинлашувчидир.*

Исботи. x_0 нуқтани $b<x_0<R$ тенгсизлик ўринли бўладиган қилиб танлаймиз (9-шакл). Бу нуқта яқинлашиш интервали ичида ётади, шу сабабли Абель теоремасига биноан

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n + \ldots$$

сонли қатор абсолют яқинлашувчи бўлади. Ихтиёрий $x \in [-b, b]$ нуқта учун $|x| < |x_0|$ тенгсизлик ўринли, шунга кўра

$$|a_nx^n| < |a_nx_0^n|,$$

яъни ихтиёрий $x \in [-b, b]$ нуқта учун

$$|a_nx^n| < |a_n x_0^n|$$

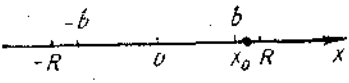
тенгсизлик ўринли, бошқача айтганда, (16.1) қаторнинг ҳадлари яқинлашувчи мусбат қаторнинг ҳадларидан кичик. Демак, Вейерштрасс теоремасига кўра (14-§) барча $x \in [-b, b]$ лар учун (16.1) қатор яқинлашувчи. Шу теоремага асосан, шунингдек, текис яқинлашувчи қаторларнинг хоссаларига биноан даражали қаторларнинг қуйидаги хоссалари ўринли.

1. **Йиғиндининг узлуксизлиги.** Даражали қаторнинг йиғиндиси шу қаторнинг яқинлашиш интервалида узлуксиз.

2. **Даражали қаторларни интеграллаш.** Даражали қаторни ўзининг яқинлашиш интервалида ҳадлаб интеграллаш мумкин.

$$\int_0^x S(x)\,dx = \int_0^x a_0\,dx + \int_0^x a_1x\,dx + \ldots + \int_0^x a_nx^n\,dx + \ldots =$$
$$= a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \ldots, \quad x \in (-R, R).$$

3. **Даражали қаторларни дифференциаллаш.** Даражали қаторни ўзининг яқинлашиш интервалида ихтиёрий сон марта ҳадлаб дифференциаллаш мумкин:



9-шакл.

$$S'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots,\ x \in (-R, R).$$

$$S''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots,$$

$$x \in (-R, R)$$

ва ҳ. к.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Қандай қатор даражали қатор дейилади?
2. Абель теоремасини ифодаланг ва исботланг.
3. Даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси ва интервалини аниқланг.
4. Даражали қаторнинг яқинлашиш радиусини ҳисоблаш формуласини чиқаринг.
5. Комплекс ўзгарувчи даражали қаторининг яқинлашиш радиуси ва доираси қандай аниқланади?
6. Даражали қаторнинг текис яқинлашиши ҳақидаги теоремани исботланг.
7. Даражали қаторнинг хоссаларини айтинг.
8. 2878—2889- масалаларни ечинг.

17-§. Тейлор қатори

3-бобнинг 21-§ ида (Олий математика, 1-жилд. 21-§.) $n+1$-тартиблигача ҳамма ҳосилаларига эга бўлган $f(x)$ функция учун $x = a$ нуқта атрофида

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(x) \quad (17.1)$$

Тейлор формуласи ўринли экани кўрсатилган эди, бунда қолдиқ ҳад деб аталувчи $R_n(x)$ ҳад

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \quad (17.2)$$

формула бўйича ҳисобланади, бу ерда $a < \xi < x$ ёки $x < \xi < a$ (10- шакл).

Агар $f(x)$ функция $x = a$ нуқта атрофида ҳамма тартибли ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда Тейлор формуласида n сонини исталганча катта қилиб олиш мумкин. Қаралаётган атрофда

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

деб фараз қилайлик.

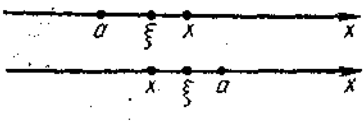
У ҳолда (17.1) формулада $n \to \infty$ да лимитга ўтиб, ўнгда чексиз қаторга эга бўламиз.

Таъриф. $f(x)$ функциянинг

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \ldots \quad (17.3)$$

кўринишдаги ифодаси бу функциянинг *Тейлор қатори* дейилади.

Охирги тенглик $n \to \infty$ да $R_n(x) \to 0$ бўлсагина ўринли. Бу ҳолда ўнг томондаги қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси берилган



10- шакл.

$f(x)$ функцияга тенг. Шуни кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, бунда

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Аммо шартга кўра, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, у ҳолда $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(x)$. Бироқ $R_n(x)$ (17.3) қаторнинг n- хусусий йиғиндиси, унинг лимити (17.3) нинг йиғиндисига тенг. Демак, бу (17.3) тенглик ўринли.

Шундай қилиб, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ бўлгандагина Тейлор қатори берилган функцияни ифодалайди.

1. Даражали қатор ёйилмасининг ягоналиги ҳақидаги теорема. Ҳар қандай функция ҳам Тейлор қаторига ёйила бермайди. Аммо функцияни бирор даражали қаторга ёйиш мумкин бўлса, бу ёйилма Тейлор қатори бўйича ёйилма бўлади.

1-теорема. *Агар*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots \qquad (17.4)$$

бўлса, ўнгда турган қатор $x \in [a-R, a+R]$ *лар учун* $f(x)$ *функцияга яқинлашади, шу сабабли бу қатор Тейлор қатори бўлади, яъни*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

бунда $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Исботи. (17.4) тенгликка даражали қаторларни n марта ҳадлаб дифференциаллаш хоссасини қўллаймиз. Натижада қуйидагиларга эга бўламиз:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + \ldots + na_n(x-a)^{n-1} + \ldots$$

$$f''(x) = 1\cdot 2a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3(x-a) + \ldots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x) = n!\,a_n + \ldots$$

Агар бу тенгликларда $x = a$ деб олинса, у ҳолда биринчисидан бошқа ҳамма қўшилувчилар нолга айланади ва биз

$$f'(a) = 1!\,a_1,\; f''(a) = 2!\,a_2,\; \ldots,\; f^{(n)}(a) = n!\,a_n, \ldots$$

тенгликларга эга бўламиз, бундан $n = 0, 1, 2, \ldots$ бўлганда

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad (17.5)$$

тенгликка эга бўламиз.

Бу теоремадан $f(x)$ функциянинг битта соҳанинг ўзида иккита

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

$$f(x)=b_0+b_1(x-a)+\dots+b_n(x-a)^n+\dots$$

қаторга ёйилмаси бўлса, у ҳолда бу иккала қатор битта Тейлор қаторининг ўзи бўлиши ва шу сабабли улар бир хил бўлиши, яъни

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ \dots,\ a_n=b_n,\ \dots$$

экани келиб чиқади.

2. Функциянинг Тейлор қаторига ёйилишининг етарлилик шартлари. Функциянинг Тейлор қаторига ёйилишининг қуйидаги аломати амалий қўлланишлар учун қулайдир.

2-теорема. *Агар $f(x)$ функция $x=a$ нуқтанинг бирор атрофида абсолют қиймати бўйича айнан бир соннинг ўзи билан чегараланган исталганча юқори тартибли ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда бу функция кўрсатилган $x=a$ нуқта атрофида Тейлор қаторига ёйилиши мумкин.*

Исботи. Биз $x=a$ атрофнинг ҳамма нуқталари учун $n\to\infty$ да R_n қолдиқ ҳаднинг нолга интилишини исботлашимиз керак. Теореманинг шартига кўра шундай мусбат ўзгармас сон $M>0$ мавжудки, кўрсатилган атрофдаги барча x лар учун

$$|f^{(n+1)}(x)|\leqslant M$$

тенгсизлик бажарилади. У ҳолда (17.2) шарт бўйича $f(x)$ функциянинг Тейлор ёйилмасидаги $R_n(x)$ қолдиғи учун ушбуга эга бўламиз:

$$R_n(x)=\left|(x-a)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right|\leqslant M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (17.6)$$

Бундан, $x=a$ атрофнинг барча нуқталари учун $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$, чунки $M\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}=0$, ($\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}=0$ яқинлашувчи қаторнинг умумий ҳади сифатида, 15-§ даги 4-мисолга қаранг). Теорема исботланди.

18-§. e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ функцияларни x нинг даражалари бўйича ёйиш.

Кўпинча функцияларнинг x нинг даражалари бўйича ёйилмаларидан фойдаланилади. Бу ҳолда (17.3) формулада $a=0$ деб олиб, ушбу қаторга эга бўлинади:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\dots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\dots \qquad (18.1)$$

Бу қатор Тейлор қаторининг хусусий ҳолидир, у Маклорен қатори деб аталади.

Элементар функцияларни Маклорен қаторига ёйишни кўришга ўтамиз.

1. e^x функциянинг x нинг даражалари бўйича ёйилмаси. $f(x)=e^x$ функцияни (18.1) Маклорен қаторига ёямиз. $f'(x)=f''(x)=\dots=f^{(n)}(x)=e^x$ бўлгани учун $x=0$ нуқтада

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

тенгликларга эгамиз. $[-N, N]$ оралиқни қараймиз, бунда N — ихтиёрий тайинланган сон. x нинг бу интервалдаги барча қийматлари учун

$$f^{(n)}(x) = e^x < e^N = M > 0.$$

Демак, бу оралиқда ҳосилаларнинг ҳаммаси битта $M = e^N$ соннинг ўзи билан чегараланган ва исботланган теоремага кўра

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Аммо фаразга кўра N исталган сон, демак, $f(x) = e^x$ функция x нинг ҳамма қийматларида, яъни Ox ўқининг ҳамма ерида Маклорен қаторига ёйилади.

Шундай қилиб,

$$e^x = 1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, \infty). \qquad (18.2)$$

2. $\sin x$ функцияни x нинг даражалари бўйича ёйиш. $f(x) = \sin x$ функцияни (18.1) Маклорен қаторига ёямиз.

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

бўлгани учун $x = 0$ нуқтада қуйидагиларга эга бўламиз:

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ f^{IV}(0) = 0$$

ва ҳ. к.

Ҳосилаларнинг қийматлари такрорланади ва

$$0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ \ldots$$

такрорланувчи кетма-кетликни ҳосил қилади. $\sin x$ функциянинг исталган ҳосиласи ҳамма x лар учун абсолют қиймати бўйича 1 дан катта бўлмайди, яъни

$$|f^{(n)}(x)| = \left|\sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right| < 1 \text{ ва } \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Демак, $f(x) = \sin x$ функция сонлар тўғри чизиғининг ҳамма нуқталарида Маклорен қаторига ёйилади:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (18.3)$$

$\sin x$ тоқ функция, қаторда x нинг тоқ даражалари қатнашади.

3. $\cos x$ функцияни x нинг даражалари бўйича ёйиш. Бу ёйилмани $\sin x$ функцияни қаторга ёйишда қўлланилган усулнинг ўзи билан ҳосил қилиш мумкин. Аммо $\sin x$ функциянинг (18.3) ёйилмаси ҳадма-ҳад дифференциалланса, $\cos x$ функция ёйилмасини осонроқ олиш мумкин (даражали қаторларнинг хоссаларига асосан):

$$(\sin x)' = x' - \left(\frac{x^3}{3!}\right)' + \ldots + (-1)^{n+1}\left(\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)' + \ldots$$

Демак,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots, \quad x \in (\infty, \infty).$$

$\cos x$ жуфт функция, қаторда x нинг жуфт даражалари қатнашади.

4. $\ln(1+x)$ функцияни x нинг даражалари бўйича ёйиш. $f(x) = \ln(1+x)$ функцияни Маклорен қаторига ёйиш учун чексиз камаювчи

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1)$$

геометрик прогрессиянинг йиғиндиси формуласидан фойдаланамиз. Даражали қаторларни яқинлашиш интервалида интеграллаш хоссасидан фойдаланамиз:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x dx - \int_0^x x\,dx + \int_0^x x^2dx - \ldots + (-1)^n \int_0^x x^n dx + \ldots$$

Бундан

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n+1} + $$
$$+ \ldots, \quad x \in (-1, 1).$$

5. $(1+x)^{\alpha}$ функцияни x нинг даражалари бўйича ёйиш. $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ функцияни Маклорен қаторига ёямиз, бунда α — ихтиёрий ҳақиқий сон. Бу ерда $R_n(x)$ қолдиқ ҳадни баҳолаш бирмунча мураккаблик қилади, шу сабабли берилган функцияни ёйишда бошқачароқ йўл тутамиз. $f(x)$ ни дифференциаллаймиз. Қуйидагиларга эга бўламиз:

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

$x = 0$ да

$$f(0) = 1,\ f'(0) = \alpha,\ f''(0) = \alpha(\alpha - 1),\ \ldots,\ f^{(n)}(0) = \\ = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)$$

ларга эга бўламиз. Ҳосилаларнинг топилган қийматларини (18.1) формулага қўямиз, натижада $(1 + x)^{\alpha}$ функциянинг Маклорен қаторига эга бўламиз:

$$1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \ldots + \\ + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n + \ldots \qquad (18.4)$$

Бу қатор биномиал қатор дейилади. Шу қаторнинг яқинлашиш интервалини топамиз:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)(n + 1)!}{n!\,\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)(\alpha - n)}\right| = \\ = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n + 1}{\alpha - n}\right| = 1.$$

Кўриб турибмизки, биномиал қатор $(-1, 1)$ интервалда абсолют яқинлашар экан.

Қолдиқ ҳадни баҳолашга киришамиз, бунда $0 < x < 1$ ҳол билан чекланамиз. Бу интервалда $(1 + x)^{\alpha - n - 1} = \frac{1}{(1 + x)^{n - (\alpha - 1)}} < 1$ (барча $n > \alpha - 1$ лар учун) ва шу сабабли

$$|f^{(n+1)}(x)| = |\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n)(1 + x)^{\alpha - n - 1}| < |\alpha(\alpha - \\ - 1)\ldots(\alpha - n)|.$$

Бу ерда функцияни Тейлор қаторига ёйишнинг етарли шарти ҳақидаги теоремадан (17-§, 2-теорема) фойдалана олмаймиз, чунки ҳосила учун топилган чегара n га боғлиқ. Шу сабабли (17.6) тенгсизликни қўллаймиз:

$$|R_n(x)| < \left|\frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n)}{(n + 1)!}x^{n+1}\right|.$$

Тенгсизликнинг ўнг қисми $|x| < 1$ да яқинлашувчи (18.4) даражали қатор $(n + 1)$-ҳадининг абсолют қийматидан иборатдир, айтилган қаторнинг яқинлашишини ҳозиргина юқорида исботладик. Демак,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Шундай қилиб, (18.4) биномиал қатор $(-1, 1)$ да $(1 + x)^{\alpha}$ функцияни ифодалайди:

$$(1 + x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \ldots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n + \ldots,$$

$$x\in(-1,\ 1).$$

α нинг турли қийматлари учун биномиал қаторларнинг бир нечта хусусий кўринишларини ҳосил қиламиз:

а) Агар $\alpha=\frac{1}{2}$ бўлса, у ҳолда биномиал қатор бундай ёзилади:

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot4}x^2+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n}x^n+$$
$$+\ldots,\ x\in[-1;1].$$

б) Агар $\alpha=-\frac{1}{2}$ бўлса, у ҳолда биномиал қатор бундай ёзилади:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\ldots+(-1)\cdot\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n}x^n+$$
$$+\ldots,\ x\in(-1;1].$$

Уз-ўзини текшириш учун саволлар

1. $f(x)$ функциянинг Тейлор қатори деб нимага айтилади? Тейлор қаторининг қолдиқ ҳади деб нимага айтилади?
2. Функциянинг даражали қаторга ёйилмасининг ягоналиги ҳақидаги теоремани исботланг.
3. Функциянинг Тейлор қаторига ёйилмасининг етарлилик шарти ҳақидаги теоремани исботланг.
4. e^x функцияни даражали қаторга ёйинг ва қолдиқ ҳад ёрдамида ҳосил бўлган қаторнинг берилган функцияга яқинлашишини исботланг.
5. $\cos x$ функцияни даражали қаторга ёйинг ва ҳосил бўлган қаторнинг берилган функцияга яқинлашишини қолдиқ ҳад ёрдамида исботланг.
6. $\sin x$ функцияни даражали қаторга ёйинг ва ҳосил бўлган қаторнинг берилган функцияга яқинлашишини қолдиқ ҳад ёрдамида исботланг.
7. $\ln(1+x)$ функцияни даражали қаторларни интеграллаш ҳақидаги теоремадан фойдаланиб қаторга ёйинг.
8. $(1+x)^{\alpha}$ функцияни даражали қаторга ёйинг ва ҳосил бўлган қаторнинг яқинлашиш интервалини топинг.
9. 2841—2868- масалаларни ечинг.

19- §. Дифференциал тенгламаларни ечишга даражали қаторларни татбиқ қилиш

Функцияларни даражали қаторларга ёйиш ёрдамида ҳар хил дифференциал тенгламаларни тақрибан интеграллаш мумкин. Мураккаб назарий тасаввурларга берилмасдан, хусусий ечимни топишнинг иккита усулини қараймиз.

Биринчи усул. Дифференциал тенглама ва хусусий ечимни аниқловчи бошланғич шартлар берилган бўлсин. Тенгламанинг ечимини бошланғич шартлар берилган x_0 нуқта атрофида $(x-x_0)$нинг даражалари бўйича жойлашган қаторга ёйиш мумкин:

$$y=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$$

Ҳозирча номаълум коэффициентли бу қаторни тенгламанинг тартиби қандай бўлса, шунча марта дифференциаллаймиз. Шундан кейин тенгламада номаълум функция ва унинг ҳосилалари ўрнига тегишли қаторларни қўйиб, айниятга эга бўламиз, ундан қаторнинг номаълум коэффициентларини аниқлаймиз. Бунда қаторнинг дастлабки коэффициентлари (уларнинг сони тенглама тартибига тенг) бошланғич шартлардан аниқланади. Айниқса чизиқли тенгламаларни бундай усул билан ечиш қулай.

1-мисол. Иккинчи тартибли чизиқли $y''=xy$ дифференциал тенгламани $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=0$ бошланғич шартларда ечинг.

Ечиш. $x_0=0$ бўлгани учун ечимни x нинг даражалари бўйича тузилган қатор кўринишида излаймиз:

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n+\dots \qquad (19.1)$$

Бу қаторни икки марта дифференциаллаймиз:

$$y'=a_1+2a_2x+\dots+na_nx^{n-1}+\dots \qquad (19.2)$$

$$y''=1\cdot 2a_2+\dots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\dots \qquad (19.3)$$

Бошланғич шартлардан фойдаланиб, $x=0$ қийматни (19.1) ва (19.2) қаторларга қўйиб, дастлабки коэффициентларни топамиз:

$$a_0=1,\ a_1=0.$$

Шундан кейин берилган тенгламадаги y ва y'' лар ўрнига уларнинг (19.1) ва (19.3) ёйилмаларини қўйиб

$$1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3x+\dots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\dots=$$
$$=a_0x+\dots+a_nx^{n+1}+\dots$$

айниятга эга бўламиз. x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб, топамиз:

$$\begin{aligned}&1\cdot 2a_2=0,\\&2\cdot 3a_3=a_0,\\&3\cdot 4a_4=a_1\\&\dots\dots\\&(n-1)na_n=a_{n-3}.\end{aligned}$$

Бундан $a_0=1$, $a_1=0$ эканини ҳисобга олиб, қуйидагиларни кўриш осон:

$$a_2=a_5=a_8=\dots=a_{3n-1}=0,$$

$$a_4=a_7=a_{10}=\dots=a_{3n+1}=0,$$

$$a_3=\frac{1}{2\cdot 3},\ a_6=\frac{1}{5\cdot 6}a_3,\ \dots,\ a_{3n}=\frac{1}{(3n-1)3n}\cdot a_{3n-3}.$$

Бошқача айтганда (19.1) қаторда

$$a_0 = 1,\ a_3 = \frac{1}{3!},\ a_6 = \frac{1\cdot 4}{6!},\ \ldots,\ a_{3n} = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{(3n)!},$$

бу қаторнинг қолган коэффициентлари эса нолга айланади.

Шундай қилиб, биз тенгламанинг қатор кўринишидаги ечимига эга бўламиз:

$$y = 1 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1\cdot 4}{6!}x^6 + \ldots + \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{(3n)!}x^{3n} + \ldots$$

Бу қатор x нинг ҳар қандай қийматида яқинлашувчи эканини Даламбер аломати ёрдамида кўрсатиш мумкин. Шуни қайд қиламизки, тенгламанинг тартиби уни қатор ёрдамида ечиш усулига ҳеч бир таъсир этмайди.

Иккинчи усул. Агар тенглама чизиқли бўлмаса, у ҳолда y ўрнига унинг қаторга ёйилмаси

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \tag{19.1}$$

ни қўйиш номаълум коэффициентларни аниқлаш учун мураккаб тенгламаларга олиб келади. Бундай ҳолларда қуйидагича иш кўриш фойдали. Тенгламада y ни x нинг функцияси деб қараб, уни бир неча марта дифференциалланади. Тенгламанинг ўзида ва унинг ҳосилаларида $x = x_0$ (x_0 учун бошланғич шартлар берилган) деб олиб ва бошланғич шартларни инобатга олган ҳолда (19.1) қатор коэффициентлари кетма-кет топилади.

2-мисол. $y'' = x^2 + y^2$ тенглама ечимининг даражали қаторга ёйилмасининг бир неча ҳадини $y|_{x=1} = 1,\ y'|_{x=1} = 0$ бошланғич шартларда топинг.

Ечиш. Ечимни

$$y = a_0 + a_1(x - 1) + \ldots + a_n(x - 1)^n + \ldots$$

қатор кўринишида излаймиз. Маълумки, бу қаторнинг коэффициентлари Тейлор коэффициентларидир, улар y функциянинг $x = 1$ нуқтадаги ҳосилалари орқали қуйидаги формулалар билан ифодаланади:

$$a_0 = y(1),\ a_1 = y'(1),\ a_2 = \frac{y''(1)}{2!},\ \ldots,\ a_n = \frac{y^{(n)}(1)}{n!},\ \ldots \tag{19.4}$$

Бунда ушбу белгилашлар киритилган: $y(1) = y|_{x=1},\ y'(1) = y'|_{x=1},\ \ldots,\ y^{(n)}(1) = y^{(n)}|_{x=1},\ \ldots$ Берилган тенгламани бир неча марта дифференциаллаймиз ва ҳосилаларнинг $x = 1$ нуқтадаги қийматларини ҳисоблаймиз. Шундай қилиб:

$$\begin{aligned} y'' &= x^2 + y^2, \\ y''' &= 2x + 2y\cdot y', \\ y^{\mathrm{IV}} &= 2 + 2y'^2 + 2yy'', \\ y^{\mathrm{V}} &= 6y'y'' + 2yy''', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(1) &= 1, \\ y'(1) &= 0, \\ y''(1) &= 2, \\ y'''(1) &= 2, \\ y^{\mathrm{IV}}(1) &= 6, \\ y^{\mathrm{V}}(1) &= 4 \end{aligned}$$

ва ҳ. к.

Ҳосилаларнинг топилган қийматларини қатор коэффициентларининг (19.4) формулаларига қўямиз. Қуйидаги қийматлар ҳосил бўлади:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = \frac{2}{2!} = 1,\ a_3 = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3},\ a_4 = \frac{6}{4!} = \frac{1}{4},$$

$$a_5 = \frac{4}{5!} = \frac{1}{30}, \ldots$$

Шундай қилиб, тенгламанинг

$$y = 1 + (x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{30}(x-1)^5 + \ldots$$

қатор кўринишидаги ечимига эга бўламиз. Ечишнинг бу усулин ҳар қандай тартибли тенгламага қўллай оламиз.

20-§. Тақрибий ҳисоблашлар

Тақрибий ҳисоблашларда ҳам даражали қаторлардан фойдаланилади. $f(x)$ функция қийматини $x=x_0$ да берилган аниқликда ҳисоблаш талаб қилинсин, дейлик. Функцияни $(a-R,\ a+R)$ интервалда Тейлор қаторига ёйиш мумкин ва $x=x_0$ нуқта берилган интервалга тегишли деб фараз қиламиз. У ҳолда $f(x)$ функциянинг бу нуқтадаги аниқ қиймати Тейлор қатори бўйича, тақрибий қиймати эса шу қаторнинг хусусий йиғиндиси бўйича ҳисобланиши мумкин, бошқача айтганда:

$$f(x_0) \approx S_n(x_0).$$

n нинг катталашиши билан бу тенгликнинг аниқлиги ортиб боради. Бу тақрибий тенгликнинг абсолют хатоси қатор қолдиғининг

$$|f(x_0) - S_n(x_0)| = |r_n(x_0)|$$

модулига тенг.

Агар $f(x_0)$ функция қийматини $\varepsilon > 0$ аниқликкача ҳисоблаш талаб қилинса, у ҳолда биз шундай дастлабки ҳадлар йиғиндисини олишимиз керакки,

$$|f(x_0) - S_n(x_0)| = |r_n(x_0)| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлсин.

Қатор қолдиғи мусбат ишорали қаторларга тааллуқли (19.2) интеграл аломат бўйича ёки ишоралари навбатлашувчи қаторларга тааллуқли (10.4) Лейбниц аломати бўйича баҳоланади.

Пайдо бўлган хатони Тейлор қаторининг қолдиқ ҳади билан баҳолаш мумкин. Бу ҳолда абсолют хато, яъни $|f(x_0) - S_n(x_0)|$ Тейлор қаторининг қолдиқ ҳади модулига тенг:

$$|f(x_0) - S_n(x_0)| = |R_n(x_0)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_0 - a)^{n+1}\right|,$$

бунда ξ қиймат a билан x орасида ётади.

Қолдиқни баҳолаш усули аниқ ҳолга қараб қўлланади.

1-мисол. e сонини 0,001 гача аниқликда ҳисобланг.

Ечиш. Маълумки, e^x нинг x даражалари бўйича қаторга ёйилмаси қуйидагича кўринишга эга:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

бу ҳар қандай x учун ўринли. $x = 1$ да

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

бўлади.

Дастлабки $(n + 1)$ та ҳадни олсак,

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

тақрибий тенгликка эга бўламиз. Яқинлашиш хатосини Маклорен қатори қолдиқ ҳади ёрдамида баҳолаймиз. $f^{(n+1)}(x) = e^x$ бўлгани учун қолдиқ ҳад

$$R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}$$

га тенг бўлади, бунда $0 < \xi < x$. $x = 1$ да $R_n(1) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}$, бунда $0 < \xi < 1$.

$e^\xi < e < 3$ эканини ҳисобга олиб,

$$R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$$

тенгсизликка эга бўламиз. Талаб қилинаётган аниқликка эришмоқ учун $n = 6$ деб олиш етарли эканини текшириш осон, яъни $R_6(1) <$ $< 0{,}001$.

Шундай қилиб, 0,001 аниқликдаги

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{6!}$$

тақрибий тенгликка эга бўламиз. Биз йўл қўйган хатога қўшилувчиларни яхлитлашда яна хато қўшилмаслиги учун ҳар қайси қўшилувчини биттадан эҳтиёт рақам билан ёзамиз:

$$e \approx 1{,}0000 + 1{,}0000 + 0{,}5000 + 0{,}1667 + 0{,}0417 + 0{,}0083 + \\ + 0{,}0014 = 2{,}7181.$$

Демак, e 0,001 гача аниқликда 2,718 га тенг, яъни $e \approx 2{,}718$.

2-мисол. $\sin 18°$ ни 0,0001 гача аниқликда ҳисобланг.

Ечиш. $\sin x$ учун x нинг ҳар қандай қийматида тўғри бўлган x нинг даражалари бўйича ушбу ёйилмага эгамиз:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

18° ни радианларда ифодалаймиз: $x = \frac{\pi}{10}$. Демак,

$$\sin 18^\circ = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3\cdot 3!} + \dots$$

Ҳадлари абсолют қиймати бўйича камаювчи ва умумий ҳади нолга интилувчи ишоралари навбатлашувчи қаторга эга бўлдик. Шу сабабли, қаторнинг қолдиғи (10.4) нинг ташлаб юборилган биринчи ҳадидан катта бўлмайди. $\frac{\pi^3}{10^3\cdot 3!} > 0{,}0001$, $\frac{\pi^5}{10^5\cdot 5!} < 0{,}0001$ бўлгани сабабли 0,0001 гача аниқликда

$$\sin 18^\circ \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3\cdot 3!}$$

тақрибий қийматга эга бўламиз. Ҳисоблашларнинг ҳаммасини битта ортиқ рақам билан бажарамиз:

$$\pi \approx 3{,}14159;\quad \pi^3 = 31{,}00620,$$

$$\sin 18^\circ \approx \frac{3{,}14159}{10} - \frac{31{,}00620}{6000} \approx 0{,}31416 - 0{,}00517 \approx 0{,}30899.$$

Шундай қилиб, 0,0001 гача аниқликда $\sin 18^\circ \approx 0{,}3090$.

Баъзан даражали қаторлар ёрдамида аниқ интегралларни ҳисоблаш мумкин, бу интеграллар юқори чегаранинг функцияси сифатида охир-оқибатда элементар функциялар билан ифодаланмайди. Бир нечта мисол қараймиз.

3-мисол. Ушбу $\int_0^a e^{-x^2}dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. e^{-x^2} нинг бошланғич функцияси элементар функция эмас. Бу интегрални ҳисоблаш учун интеграл остидаги e^{-x^2} функцияни қаторга ёямиз, e^x нинг (18.2) ёйилмасида x ни $(-x^2)$ билан алмаштирамиз:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \dots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{n!} + \dots$$

Бу тенгликнинг иккала қисмини 0 дан a гача чегарада интеграллаб, қуйидагини топамиз:

$$\int_0^a e^{-x^2}dx = \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1!\cdot 3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \dots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} + \right.$$

$$\left. + \dots\right)\Big|_0^a = \frac{a}{1} - \frac{a^3}{1!\cdot 3} + \frac{a^5}{2!\cdot 5} - \dots + (-1)^n\frac{a^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} + \dots$$

Бу тенглик ёрдамида ҳар қандай a да берилган интегрални исталган даражада аниқликда ҳисоблаш мумкин. Масалан, $\int_0^{1/3} e^{-x^2}dx$ интегрални 0,001 гача аниқликда ҳисоблаш керак. Изланаётган интеграл ишоралари навбатлашувчи қатор йиғиндисига тенг:

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2}dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{1!3\cdot 3^3} + \frac{1}{2!5\cdot 3^5} - \dots$$

$\frac{1}{2!5\cdot 3^5} < 0,001$, $\frac{1}{3\cdot 1!3^3} > 0,001$ бўлгани учун ишоралари навбатлашувчи ҳолида хатоликни баҳолаш қоидаси асосида 0,001 гача аниқликда қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} \approx 0,3333 - 0,0123 = 0,3210.$$

Шундай қилиб,

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2}dx \approx 0,321.$$

4-мисол. $\int_0^a \frac{\sin x}{x}dx$ ни ҳисобланг.

Ечиш. Интеграл остидаги $\frac{\sin x}{x}$ функцияни қаторга ёямиз.

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

тенгликдан барча x ларда яқинлашувчи

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \dots$$

қаторга эга бўламиз. Ҳадлаб интеграллаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}dx = a - \frac{a^3}{3!3} + \dots + (-1)^{n+1}\cdot\frac{a^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)} + \dots$$

Қатор йиғиндиси ҳар қандай a да исталган аниқликда осон ҳисобланади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Дифференциал тенгламаларни даражали қаторлар ёрдамида интеграллаш усули нимадан иборат? Мисоллар келтиринг.
2. Функциялар қийматларини қаторлар ёрдамида тақрибий ҳисоблаш усулини баён қилинг. Мисол келтиринг.
3. Интеграллар қийматларини қаторлар ёрдамида тақрибий ҳисоблаш усулини баён қилинг. Мисол келтиринг.

4. Қаторлар ёрдамида функцияларни интеграллаш усулини баён қилинг. Мисол келтиринг.

5. 2894—2914, 2920—2938, 4109—4116, 4246—4250- масалаларни ечинг.

21-§. Фурье қатори. Фурье коэффициентлари

Энди амалий фанларнинг ва математиканинг турли масалалари келтириладиган қаторлар синфини ташкил этувчи Фурье қаторларини ўрганишга киришамиз.

Ушбу

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\ldots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\ldots=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (21.1)$$

кўринишдаги қатор *тригонометрик қатор* деб аталади, бунда a_0, a_1, $b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ — ўзгармас сонлар, булар қаторнинг *коэффициентлари* дейилади.

Тригонометрик қаторлар иккинчи муҳим функционал қаторлар синфини ташкил қилади (даражали қаторлар синфи биринчи синф ҳисобланади).

(21.1) қатор x га каррали аргументларнинг синуслар ва косинусларини ўз ичига олганлиги учун улар 2π га тенг умумий даврга эга бўлади. Агар бу қатор яқинлашувчи қатор деб фараз қилинса, у ҳолда унинг йиғиндиси ҳам даври 2π га тенг бўлган даврий функция бўлади.

Ушбу масалани қўямиз: даври 2π га тенг бўлган берилган $f(x)$ функция учун шу функцияга яқинлашувчи тригонометрик қатор тузинг.

Олдиндан бир неча ёрдамчи формулаларни аниқлаб оламиз. Ҳар қандай $n\neq0$ да қуйидагиларга эгамиз:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx&=\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,\\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx&=-\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,\end{aligned} \qquad (21.2)$$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)\,dx=\pi,\\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx)\,dx=\pi.\end{aligned} \qquad (21.3)$$

Тригонометриянинг маълум ушбу

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$$

формулаларига биноан, шунингдек (21.2) ва (21.3) формулаларга биноан, ихтиёрий мусбат n ва m лар учун қуйидагилар ўринли бўлади:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx = \begin{cases}0, & \text{агар } m\neq n \text{ бўлса,}\\ \pi, & \text{агар } n=m \text{ бўлса,}\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx = \begin{cases}0, & \text{агар } m\neq n \text{ бўлса,}\\ \pi, & \text{агар } m=n \text{ бўлса,}\end{cases} \qquad (21.4)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx = 0.$$

Қўйилган масалага қайтамиз.

Даври 2π га тенг бўлган $f(x)$ даврий функция ўзига $(-\pi, \pi)$ интервалда яқинлашувчи тригонометрик қатор билан тасвирланадиган бўлсин, дейлик, яъни шу тригонометрик қатор йиғиндисидан иборат бўлсин, дейлик:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx). \qquad (21.5)$$

Бу қатор $x\in[-\pi, \pi]$ лар учун яқинлашувчи ва уни ҳадлаб интеграллаш мумкин деб фараз қилайлик. Бундан a_0 коэффициентни ҳисоблаш учун фойдаланамиз. (21.5) тенгликнинг иккала қисмини $-\pi$ дан π гача интеграллаймиз:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}a_0\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right).$$

(21.2) формулаларга биноан йиғинди белгиси остидаги интегралларнинг ҳаммаси нолга тенг. Демак,

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx = \pi a_0,$$

бундан

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx. \qquad (21.6)$$

$k\neq 0$ нинг бирор аниқ қийматида a_k коэффициентни топиш учун (21.5) тенгликнинг иккала қисмини $\cos kx$ га кўпайтирамиз ва ҳосил бўлган ифодани $-\pi$ дан π гача ҳадлаб интеграллаймиз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,dx + \right.$$

$$\left. + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\,dx\right).$$

(21.2) ва (21.4) формулаларни эътиборга олсак, ўнг томондаги a коэффициентли интегралдан бошқа ҳамма интегралларнинг нолга тен эканини кўрамиз.

Демак,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx = a_k\pi,$$

бундан

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx. \qquad (21.7)$$

b_k коэффициентни топиш учун (21.5) тенгликнинг иккала қисмини $\sin kx$ га кўпайтирамиз ва ҳосил бўлган тенгликни $-\pi$ дан π гача интеграллаймиз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin kx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin kx\,dx\right).$$

(21.2) ва (21.4) формулаларни ҳисобга олсак, ўнг томондаги b_k коэффициентли интегралдан бошқа ҳамма интегралларнинг нолга тенг эканини кўрамиз.

Шундай қилиб,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx = b_k\pi,$$

бундан

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx. \qquad (21.8)$$

(21.6), (21.7) ва (21.8) формулалар бўйича аниқланган коэффициентлар $f(x)$ функциянинг *Фурье коэффициентлари* дейилади. Шундай коэффициентли (21.1) тригонометрик қатор эса $f(x)$ функциянинг *Фурье қатори* дейилади.

Ҳосил қилинган тригонометрик қатор берилган $f(x)$ функцияга яқинлашиши масаласи ҳали аниқланмагани учун биз бу Фурье қатори $f(x)$ функция ёрдамида вужудга келтирилган дей оламиз, холос. $f(x)$ функция билан у ҳосил қилган Фурье қатори орасидаги боғланиш бундай белгиланади:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

бунда a_0, a_k, b_k лар (21.6), (21.7) ва (21.8) формулалар бўйича ҳисобланади.

Бундай ёзув $f(x)$ функцияга ўнг томонда ёзилган Фурье қатори мос келишинигина билдиради. Биз қаторнинг яқинлашишини ва унинг йиғиндиси $f(x)$ га тенглигини исботлаганимиздан кейингина $\sim$ белгини $=$ белги билан алмаштириш мумкин.

Бу масалани ҳал қилишдан олдин «ўртача яқинлашиш» тушунчаси билан танишамиз.

22-§. Уртача яқинлашиш. Фурье коэффициентларининг минималлик хоссаси

Агар бирор функция чексиз қатор шаклида тасвирланса, у ҳолда қаторни n-ҳадида узиш натижасида ҳосил бўлган *чекли йиғинди* ёйилаётган функциянинг *тақрибий ифодаси* дейилади. n нинг етарлича катта қийматини танлаш йўли билан уни исталганча аниқликда ҳосил қилиш мумкин.

Даври 2π га тенг $f(x)$ даврий функцияни

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

n-тартибли *тригонометрик кўпҳад* билан тақрибий тасвирлашда хато ўлчови учун

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_n(x))^2 \, dx \qquad (22.1)$$

тенглик билан аниқланувчи, ўрта квадратик четлашиш деб аталувчи δ_n^2 олинади. $f(x)$ функциянинг $T_n(x)$ тригонометрик кўпҳад билан бундай яқинлашиши ўртача (ёки ўрта маънода) яқинлашиш дейилади, бунда хато ўлчови учун δ_n^2 ўртача квадратик четлашиш олинади. Баъзи $T_n(x)$ тригонометрик кўпҳадлар учун δ_n^2 жуда катта бўлади ва бу ҳолда $T_n(x)$ кўпҳад $f(x)$ функцияни тақрибий тасвирлашга ярамайди, баъзи $T_n(x)$ лар учун у жуда кичик бўлади. Энди δ_n^2 хато энг кичик бўладиган $T_n(x)$-тригонометрик кўпҳадни излаш масаласи қўйилади, яъни шу кўпҳаднинг α_0, α_1, β_1, . . . , α_n, β_n

коэффициентларини топиш талаб қилинади. Масала $2n+1$ та α_0, α_1, $\beta_1, \ldots, \alpha_n$, β_n ўзгарувчига боғлиқ бўлган δ_n^2 функция минимумини топишга келтирилади.

Бу экстремал масаланинг ечилиш натижаси қуйидаги теоремада иборат бўлади.

Теорема. *n-тартибли тригонометрик кўпҳадлар ичида $(-\pi, \pi)$ интервалда $f(x)$ узлуксиз функцияга энг яхши ўрта яқинлашиш берадигани*

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (22.2)$$

тригонометрик кўпҳаддир, бунда a_0, a_k, b_k — Фурье коэффициентлари.

Равшанки, бу кўпҳад Фурье қаторининг n-хусусий йиғиндисидир. Айни шу $S_n(x)$ кўпҳад $f(x)$ функциядан энг кичик ўртача квадратик четлашишга эга бўлади; бу четлашишнинг катталиги қуйидагига тенг эканини исботлаш мумкин;

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - \frac{1}{2}\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right). \qquad (22.3)$$

n катталашгани сари δ_n^2 нинг миқдори камая боради, чунки унинг (22.3) ифодасида янги манфий қўшилувчилар қўшила боради. Шу сабабли n катталашгани сари (22.2) S_n кўпҳад қаралаётган $f(x)$ функцияга шунча «ўртача» яқин боради (бу (22.1) дан келиб чиқади).

(22.3) тенгликдан муҳим натижа келиб чиқади. $\delta_n^2 \geqslant 0$ бўлгани учун ҳар қандай n да:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \qquad (22.4)$$

Бу тенгсизликнинг ўнг қисми n га боғлиқ эмас, демак, қаторнинг

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

хусусий йиғиндилари $n \to \infty$ да чегараланганлигича қолади. Бу қатор мусбат ишорали бўлгани учун у яқинлашувчи бўлади. Шундай қилиб, узлуксиз функция Фурье қатори коэффициентлари квадратлари ҳар доим яқинлашувчи қатор ҳосил қилади. Хусусан, бундан $n \to \infty$ да узлуксиз функция учун доим қуйидагига эгамиз:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

Энди (22.4) тенгсизликни бундай ёзиш мумкин:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx. \qquad (22.5)$$

Бу муносабат *Бессель тенгсизлиги* дейилади.

23-§. Фурье тригонометрик қаторларининг ўртача яқинлашиши ва нуқтада яқинлашиши ҳақида теорема

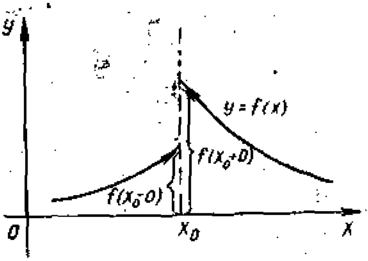
Энди $f(x)$ функциянинг Фурье қатори яқинлашувчи бўлиши ва бу қаторнинг йиғиндиси айнан шу функцияга тенг бўлиши учун $f(x)$ функция қандай хоссаларга эга бўлиши керак эканлиги ҳақидаги масалани қараймиз.

Бу хоссалар келтирилган теореманинг ифодасини баён қилишдан олдин баъзи таърифларни киритамиз.

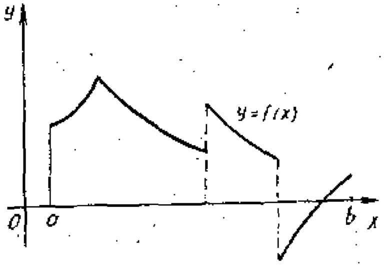
1-таъриф. Агар x_0 нуқтада $f(x)$ функциянинг чап ва ўнг лимитлари мавжуд бўлса-ю, (чекли сонлар) аммо ўзаро тенг бўлмаса, яъни

$$f(x_0-0)\neq f(x_0+0),\ \text{бунда}\ f(x_0-0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}f(x),$$

$$f(x_0+0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}f(x)$$



11-шакл.



12-шакл.

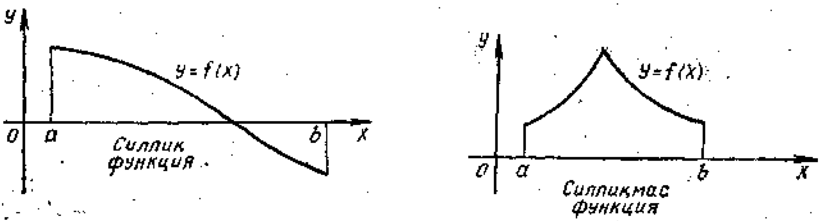
бўлса, у ҳолда x_0 нуқта $f(x)$ функция учун *биринчи тур узилиш нуқтаси* дейилади (11-шакл).

2-таъриф. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада фақат чекли сонда биринчи тур узилиш нуқталарига эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция шу кесмада *бўлакли узлуксиз функция* дейилади.

12-шаклда тасвирланган функция графиги иккита биринчи тур узилиш нуқтасига эга.

3-таъриф. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада биринчи ҳосиласи билан биргаликда узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функция шу кесмада *силлиқ функция* дейилади.

Геометрик нуқтаи назардан бу уринманинг эгри чизиқ бўйлаб силжишида уринманинг йўналиши сакрашларсиз узлуксиз



13- шакл.

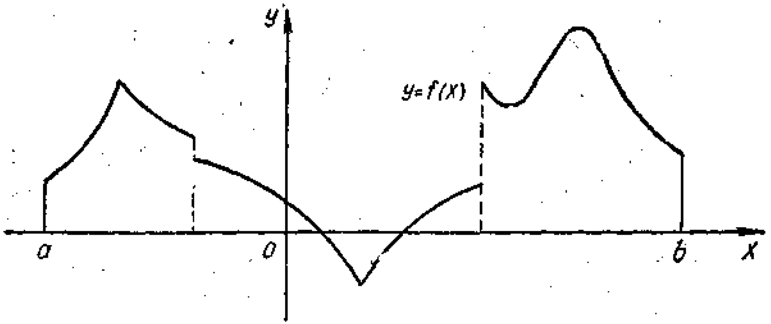
ўзгаришини билдиради. Силлиқ функция графиги бурчак нуқталари бўлмаган текис эгри чизиқдан иборат (13- шакл).

4-**таъриф.** Агар (a, b) интервални чекли сондаги қисм-интервалларга бўлиш мумкин бўлиб, бу қисм интервалларнинг ҳар бирида функция силлиқ функция бўлса, у ҳолда бу функция шу интервалда *бўлакли силлиқ функция* дейилади.

Бўлакли силлиқ функциянинг графиги чекли сондаги силлиқ ёйлардан иборат ва у чекли сондаги биринчи тур узилиш нуқталарига эга бўлиши мумкин (14- шакл).

Функцияни Фурье қаторига ёйишнинг мумкинлиги ҳақидаги теоремани ифодалаймиз.

Ўртача яқинлашиш ҳақидаги теорема. $(-\pi, \pi)$ *интервалда бўлакли узлуксиз* $f(x)$ *функциянинг Фурье қатори уни вужудга келтирган* $f(x)$ *функцияга ўртача яқинлашади, яъни Фурье қаторининг*



14- шакл.

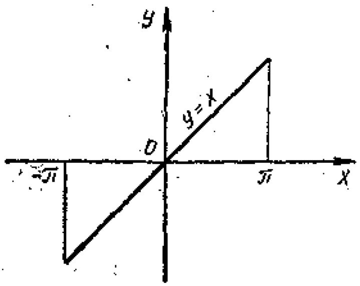
$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

хусусий йиғиндилари $n \to \infty$ *да* $f(x)$ *функцияга ўртача квадратик четлашиш маъносида интилади, бунда*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx$$

формула ўринли, бу формула Ляпунов — Парсеваль тенглиги дейилади (бу ерда a_0, a_k, b_k — $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентлари).

Нуқтада яқинлашиш ҳақида теорема. *$(-\pi, \pi)$ интервалда бўлакли силлиқ $f(x)$ функциянинг Фурье қатори шу интервалнинг ҳар бир нуқтасида яқинлашувчи. Шу билан бирга, $f(x)$ функция учун Фурье қаторининг йиғиндиси $S(x)$ бўлса, у ҳолда бу функция узлуксиз бўладиган нуқталарнинг ҳаммасида $S(x)=f(x)$, I тур узилишга эга бўлган нуқталарнинг ҳаммасида эса*



15- шакл.

$$S(x)=\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0)).$$

Бундан ташқари

$$S(\pi)=S(-\pi)=\frac{1}{2}(f(\pi-0)+f(-\pi+0)).$$

Бу теорема *Дирихле теоремаси* дейилади. Бу теореманинг шарти — функция бўлакли узлуксиз бўлиши кераклиги ушбу иккита шартга тенг кучли: функция чегараланган ва бўлакли монотон бўлиши керак.

Охирги шарт функция қаралаётган интервални чекли сондаги интервалларга бўлиш ва бу интервалларнинг ҳар бирида функция монотон бўлиши кераклигини билдиради.

Шундай қилиб, агар $f(x)$ функция $(-\pi, \pi)$ интервалда бўлакли монотон бўлса, у ҳолда бу функция учун нуқтада яқинлашиш теоремаси ўринли. Бу шартлар *Дирихле шартлари* дейилади.

Масалан, $y=x$ функция $(-\pi, \pi)$ интервалда Дирихле шартларини қаноатлантиради, чунки у чегараланган ва монотон (ўсувчи) (15- шакл).

24- §. Ортонормалланган система, системанинг тўлалиги тушунчалари, тўла система бўйича ёйиш

1-таъриф. Агар $\int\limits_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx=0$ (бунда $n\neq m$) бўлса, функцияларнинг $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ... чексиз системаси $[a, b]$ кесмада *ортогонал система* дейилади.

Биз тригонометрик функцияларнинг

$$1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

системаси билан иш кўрган эдик, бу система $[-\pi, \pi]$ кесмада ортогонал эди, чунки

$$\text{агар } m \neq n \text{ бўлса, } \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\, dx = 0,$$

$$\text{агар } m \neq n \text{ бўлса, } \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = 0,$$

$$\text{ҳар қандай } m \text{ ва } n \text{ учун } \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\, dx = 0.$$

Бу (21.4) дан келиб чиқади. Бошқа тригонометрик функцияларнинг ҳам ортогоналлигини исботлаш мумкин:

$$1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots\ [0, \pi] \text{ кесмада,}$$

$$\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx, \ldots\ [0, \pi] \text{ кесмада,}$$

$$1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{\pi nx}{l}, \sin\frac{\pi nx}{l}, \ldots\ [-l, l] \text{ кесмада.}$$

2-таъриф. Агар

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)\, dx = 1$$

бўлса, функцияларнинг

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$$

чексиз системаси $[a, b]$ кесмада *нормалланган система* дейилади. Функцияларнинг ҳар қандай ортогонал системасини нормаллаш мумкин. Бунинг маъноси қуйидагидек: ҳар доим $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots$ *ўзгармас сонларни*

$$\mu_0\varphi_0(x), \mu_1\varphi_1(x), \ldots, \mu_n\varphi_n(x), \ldots$$

функциялар системаси аввалгидек ортогонал, шу билан бирга, энди нормалланган бўладиган қилиб танлаш мумкин.

Ҳақиқатан, агар $\int_a^b \varphi_n^2(x)\, dx = \lambda_n^2$ (бунда $\lambda_n \neq 0$) бўлса, у ҳолда $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$. Шундан кейин

$$\int_a^b \mu_n^2\varphi_n^2(x)\, dx = \frac{1}{\lambda_n^2}\int_a^b \varphi_n^2(x)\, dx = \frac{1}{\lambda_n^2}\lambda_n^2 = 1$$

тенгликка эга бўламиз. λ_n миқдорни $\varphi_n(x)$ функциянинг нормаси деб атаймиз ва $\|\varphi_n\|$ кўринишда белгилаймиз. Шундай қилиб,

$$\|\varphi_n\| = \sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x)\, dx}.$$

Агар система нормалланган бўлса, у ҳолда равшанки, $\| \varphi \| = 1$ бўлади.

3-таъриф. Агар функцияларнинг

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots$$

чексиз системаси ортогонал ва нормалланган бўлса, бошқача айтганда, агар

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{агар } m \neq n \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } n = m \text{ бўлса} \end{cases}$$

бўлса, у ҳолда система $[a, b]$ кесмада *ортонормалланган система* дейилади. Масалан, функцияларнинг $1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$ системаси $[-\pi, \pi]$ кесмада ортогонал, аммо нормалланган эмас, чунки

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \pi, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi,$$

бу ҳар қандай $n \neq 0$ да (21.3) дан келиб чиқади. Бу системани нормаллаш учун ундаги функцияларнинг ҳар бирини $\sqrt{\pi}$ га бўлиш керак. Функциялар системасининг $[-\pi, \pi]$ кесмада ортонормалланган

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \ldots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ \ldots$$

системасига эга бўламиз.

Ихтиёрий $[a, b]$ кесмага қайтамиз. Бу кесмада функцияларнинг бирор

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \tag{24.1}$$

ортогонал системаси берилган бўлсин дейлик. Мақсадимиз $[a, b]$ кесмада аниқланган $f(x)$ функцияни (24.1) система функциялари бўйича

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots \tag{24.2}$$

кўринишдаги қаторларга ёйишдан иборат. Бу ёйилманинг коэффициентларини аниқлаш учун биз хусусий ҳолда (21-§ да) қилганимиздек ёйилманинг иккала қисмини $\varphi_k(x)$ га кўпайтириб, уни ҳадлаб интеграллаймиз:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_k(x)\,dx.$$

(24.1) система ортогонал бўлганлиги сабабли, ўнгдаги интегралларнинг биттасидан бошқа ҳаммаси нолга тенг бўлади ва

$$c_k = \frac{1}{\int_a^b \varphi_k^2(x)\,dx} \int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx \tag{24.3}$$

экани осонгина топилади.

Коэффициентлари (24.3) формулалар бўйича тузилган (24.2) қатор берилган $f(x)$ функциянинг *умумлашган Фурье қатори,* коэффициентларнинг ўзи эса функцияларнинг

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots$$

системасига нисбатан *умумлашган Фурье коэффициентлари* дейилади.

(21.6), (21.7) ва (21.8) формулалар (24.3) формулаларнинг хусусий ҳоллари ҳисобланади. Ортонормалланган система ҳолида (24.3) формулалар айниқса содда бўлади: $\int\limits_a^b \varphi_k^2(x)\,dx = 1$ бўлганда, $c_k = \int\limits_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx$ бўлади.

21-§ даги мулоҳазаларни такрорлаб, умумлашган Фурье қатори учун ўртача квадратик четлашиш қуйидаги кўринишга эга эканини кўрсатиш мумкин:

$$\delta_n^2 = \int\limits_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n} c_k^2\,\|\varphi_k\|^2. \tag{24.4}$$

Бу ифода, n катталашгани сари δ_n^2 миқдор мусбатлигича қолиб, фақат камайиши мумкин эканини, яъни n нинг ортиши билан Фурье қаторининг хусусий йиғиндилари $f(x)$ функциянинг аниқроқ тақрибий тасвирини беришини кўрсатади. $\delta_n^2 \geqslant 0$ бўлгани учун (24.4) дан

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^2\,\|\varphi_k\|^2 \leqslant \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$$

экани келиб чиқади. Бунда $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k^2\,\|\varphi_k\|^2$ йиғинди $n \to \infty$ да чекли лимитга эга, чунки у ўнгдан n га боғлиқ бўлмаган $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$ миқдор билан чегараланган. Шунинг учун

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2\cdot\|\varphi_k\|^2$$

қатор яқинлашувчи ва Бессель тенгсизлигига эга бўламиз:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2\,\|\varphi_k\|^2 \leqslant \int\limits_a^b f^2(x)\,dx.$$

Биз бу тенгсизликнинг хусусий ҳоли бўлган (22.5) тенгсизликни ҳосил қилган эдик.

4-**таъриф.** Агар квадрати билан интегралланувчи ихтиёрий $f(x)$ функция учун *Бессель тенгсизлиги ўрнига*

$$\int_a^b f^2(x)\ dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \| \varphi_k \|^2 \qquad (24.5)$$

тенглик ўринли бўлса, $[a,\ b]$ кесмада ортогонал бўлган

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \qquad (24.6)$$

функциялар системаси *тўла система* дейилади. Бунда c_k — $f(x)$ функциянинг Фурье коэффициентлари ((24.3) формула).

(24.5) тенглик (24.6) *системанинг тўлалик шарти* деб аталади. Бу шартни унга тенг кучли бўлган

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^2(x)dx - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \| \varphi_k \|^2\right) = 0$$

тенглик билан алмаштирамиз. Агар (24.4) формула ҳисобга олинса, охирги тенгликни $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n^2 = 0$ кўринишда ёзиш мумкин.

Шундай қилиб, (24.6) функциялар системаси $[a,\ b]$ да тўла бўлса, у ҳолда Фурье қатори $f(x)$ га ўртача яқинлашади дейилади.

Шуни қайд қилиш керакки, (24.6) функциялар системаси тўла бўлишига қарамай, Фурье қаторининг ўзини вужудга келтирган функцияга оддий нуқтавий яқинлашиши ҳар доим ўринли бўлавермайди. Шунга қарамай, тўла системалар учун ўртача яқинлашиш ҳар доим ўринли. Бизнинг таъкидимиз ўртача яқинлашиш тушунчасининг ишончли эканини яна бир марта кўрсатади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Қандай қатор тригонометрик қатор дейилади?
2. Даври 2π га тенг даврий функциянинг Фурье коэффициентлари учун формула чиқаринг.
3. Ўртача яқинлашиш нима? Ўртача квадратик четлашиш нима?
4. Тригонометрик кўпҳадлардан қайсиниси функцияга энг яхши яқинлашишни беради?
5. Тригонометрик қаторларнинг яқинлашиши (ўртача ва нуқтада яқинлашиш) ҳақидаги теоремани ифодаланг.
6. Функцияларнинг қандай системаси ортогонал система дейилади? Функцияларнинг қандай системаси нормалланган, қандай системаси ортонормалланган система дейилади?
7. Функцияни ортогонал система бўйича қаторга ёйиш масаласи нимадан иборат? Ёйилма коэффициентлари қандай изланади?
8. Функцияларнинг қандай системаси тўла система дейилади? Функцияни тўла система бўйича қаторга ёйишнинг хусусияти нимадан иборат?
9. Системаларнинг ортогоналлигини исботланг:

$1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \ldots$ нинг $[0,\ \pi]$ кесмада,
$\sin x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \sin nx,\ \ldots$ нинг $[0,\ \pi]$ кесмада.

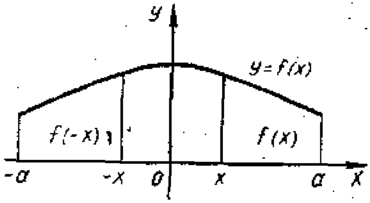
Шу системаларни ортонормалланг.

25-§. $(-\pi, \pi)$ интервалда берилган жуфт ва тоқ функцияларни Фурье тригонометрик қаторларига ёйиш

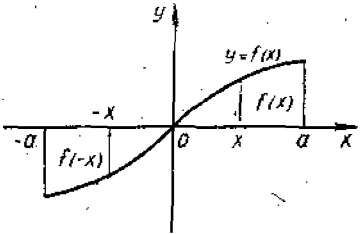
1. Жуфт ва тоқ функциялар. $f(x)$ функция сонлар ўқининг ҳамма ерида ёки координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган бирор интервалда аниқланган бўлсин. Тоқ ва жуфт функциялар таърифларини эслатиб ўтамиз.

Агар қаралаётган ҳамма x лар учун $f(-x)=f(x)$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция *жуфт функция* дейилади.

Жуфт функциянинг графиги ординаталар ўқига нисбатан симметрик (16-шакл).



16-шакл.



17-шакл.

Агар қаралаётган қийматларнинг ҳаммасида $f(-x)=-f(x)$ тенглик ўринли бўлса, $f(x)$ функция *тоқ функция* дейилади.

Тоқ функциянинг графиги координаталар бошига нисбатан симметрик (17-шакл).

Иккита жуфт функциянинг ёки иккита тоқ функциянинг кўпайтмаси жуфт функция, жуфт ва тоқ функцияларнинг кўпайтмаси тоқ функция.

Агар $f(x)$ функция $[-a, a]$ кесмада интегралланувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx. \tag{25.1}$$

Аммо x ни $-x$ билан алмаштиришда ўнг қисмдаги биринчи интеграл бундай ёзилади:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-x)\,d(-x) = -\int_{a}^{0} f(-x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx.$$

Бунинг қийматини (25.1) га қўйсак,

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]\,dx,$$

бундан

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \text{ — тоқ функциялар учун,}$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx \text{ — жуфт функциялар учун.}$$

Бу натижадан Фурье коэффициентларини ҳисоблашда фойдаланамиз.

2. Жуфт ва тоқ функциялар учун Фурье қатори. $f(x)$ функция даври 2π, $[-\pi, \pi]$ кесмада Дирихле шартларини қаноатлантирадиган жуфт функция бўлсин. Унинг Фурье қатори коэффициентлари учун қуйидаги формулаларни топамиз:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = 0.$$

Шундай қилиб, жуфт функциянинг Фурье қаторида синусли ҳадлар қатнашмайди, жуфт функциянинг Фурье қатори фақат косинусларни ўз ичига олади ва бундай кўринишда бўлади:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \tag{25.2}$$

бунда

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx.$$

Энди $f(x)$ даври 2π, $[-\pi, \pi]$ кесмада Дирихле шартларини қаноатлантирадиган тоқ функция бўлсин. Унинг Фурье қатори коэффициентлари учун қуйидаги формулаларни топамиз:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

Шундай қилиб, тоқ функциянинг Фурье қаторида озод ҳад ва косинусли ҳадлар қатнашмайди. Тоқ функциянинг Фурье қатори фақат синусли ҳадларни ўз ичига олади ва бундай кўринишда бўлади:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \tag{25.3}$$

бунда

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

Чиқарилган формулалар, аслида ҳар қандай даврий функция ҳам жуфт ёки тоқ функция бўлавермаслиги равшан бўлса-да, жуфт ва тоқ функцияларнинг Фурье коэффициентларини ҳисоблашни соддалаштириш имконини беради.

1-мисол. Даври 2π бўлган

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & x \in (-\pi, 0), \\ \frac{\pi}{4}, & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

функцияни Фурье қаторига ёйинг.

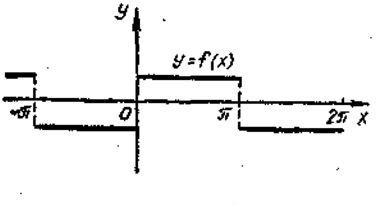
$x = \pi n$ (бунда $n \in Z$) нуқталарда $f(x) = 0$ бўлади, деб фараз қиламиз (18-шакл).

Функция тоқ, Дирихле шартларини қаноатлантиради, шунга кўра (25.3) тенглик асосида қуйидагига эга бўламиз:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi}{4}\sin kx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin kx\,dx = -\frac{\cos kx}{2k}\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{\cos 0 - \cos \pi k}{2k} = \frac{1}{2k}(1-(-1)^k) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{агар } k \text{ тоқ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } k \text{ жуфт бўлса.} \end{cases}$$

Демак,



18-шакл.

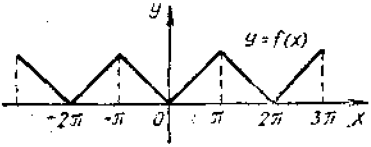
$$b_1 = 1, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{1}{3}, \quad b_4 = 0, \ \ldots$$

Изланаётган ёйилма

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots + \frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x + \ldots$$

дан иборат. Бундан $x=\frac{\pi}{2}$ да

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+$$
$$+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\ldots$$



19- шакл.

2-мисол. Даври 2π га тенг

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x, & \text{агар } x\in(-\pi,0) \text{ бўлса,}\\ x, & \text{агар } x\in[0,\pi) \text{ бўлса}\end{cases}$$

функцияни Фурье қаторига ёйинг (19-шакл).

Равшанки, $f(x)$ функция жуфт, Дирихле шартларини қаноатлантиради, шу сабабли (25.2) муносабатга асосан

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\pi,$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos kx\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin kx}{k}+\frac{\cos kx}{k^2}\right)\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{1}{k^2}(\cos\pi k-\cos 0)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{k^2}((-1)^k-1)=$$

$$=\begin{cases}-\frac{4}{\pi k^2}, & \text{агар } k \text{ тоқ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } k \text{ жуфт бўлса.}\end{cases}$$

Демак, $a_1=-\frac{4}{\pi}$, $a_2=0$, $a_3=\frac{-4}{9\pi}$, $a_4=0$, ...

Изланаётган ёйилма қуйидагидан иборат:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\ldots\right).$$

Бундан, хусусий ҳолда $x=0$ бўлганда қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots\right),$$

бундан

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$$

Бу қатор йиғиндисини билган ҳолда

$$S=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

ни топиш осон. Ҳақиқатан,

$$S=\left(1+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\right.$$

$$+\dots+\frac{1}{(2n)^2}+\dots\Big)=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{2^2}\Big(1+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots\Big)=$$

$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}S.$$

Демак,

$$S=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}S.$$

Бундан $S=\frac{\pi^2}{6}$, яъни

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots$$

26-§. [—l, l] кесмада берилган функцияларни Фурье қаторига ёйиш

Энди ихтиёрий $2l$ даврли, Дирихле шартларини қаноатлантирувчи $f(x)$ даврий функцияни қараймиз. $x=\frac{l}{\pi}t$ ўрнига қўйиш бизни 2π даврли $f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ функцияга олиб келади, бу функцияни Фурье қаторига ёямиз:

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt),$$

бунда $a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)dt,$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos kt\,dt,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\sin kt\,dt.$$

Қаторда ва Фурье коэффициентлари формулаларида янги t ўзгарувчидан эски x ўзгарувчига қайтиб ва $t=\frac{\pi}{l}x$, $dt=\frac{\pi}{l}dx$ эканини ҳисобга олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi kx}{l}+b_k\sin\frac{\pi kx}{l}\right), \qquad (26.1)$$

бунда

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx,$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi k x}{l}\,dx, \qquad (26.2)$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi k x}{l}\,dx.$$

Коэффициентлари (26.2) формулалар билан аниқланадиган (26.1) қатор ихтиёрий $2l$ даврли $f(x)$ функция учун Фурье қатори дейилади.

$2l$ даврли жуфт функция учун ҳамма $b_k = 0$ бўлади, демак, Фурье қатори фақат косинусларни ўз ичига олади:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{\pi k x}{l}, \qquad (26.3)$$

бунда

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi k x}{l}\,dx.$$

$2l$ даврли тоқ функция учун эса ҳамма $a_k = 0$ ва $a_0 = 0$ бўлади, демак, Фурье қатори фақат синусларни ўз ичига олади:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{\pi k x}{l}, \qquad (26.4)$$

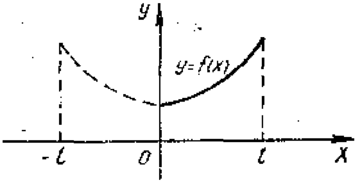
бунда

$$b_k = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi k x}{l}\,dx.$$

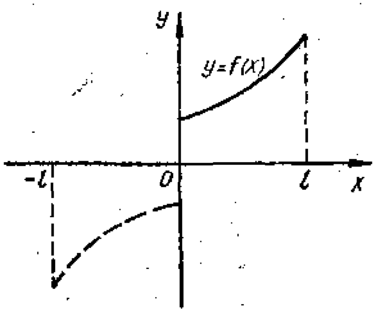
Кўпинча $[0, l]$ кесмада берилган $f(x)$ функцияни синуслар бўйича ёки косинуслар бўйича қаторга ёйиш масаласи талаб этилади.

$f(x)$ функцияни косинуслар бўйича қаторга ёйиш учун функция жуфтлигича $[0, l]$ кесмадан $[-l, 0]$ кесмага давом эттирилади (20-шакл). У ҳолда «давом эттирилган» жуфт функция учун Фурье қатори фақат косинусларни ўз ичига олади. Агар $f(x)$ функцияни қаторга синуслар бўйича ёйишни истасак, у ҳолда функцияни тоқлигича $[0, l]$ кесмадан $[-l, 0]$ кесмага давом эттирамиз, бунда $f(0) = 0$ деб олишимиз керак (21-шакл).

«Давом эттирилган» тоқ функция учун Фурье қатори фақат синусларни ўз ичига олади. Аслида кесмадан кесмага



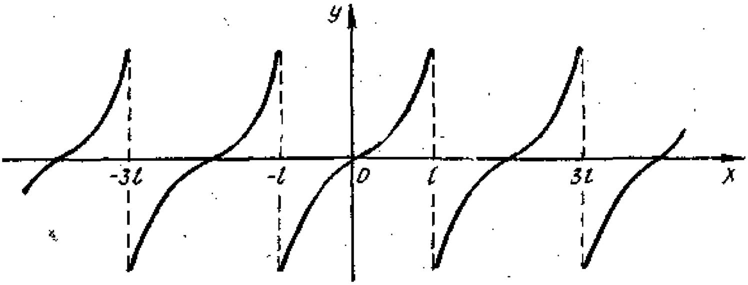
20- шакл.



21- шакл.

давом эттиришни амалга оширмаса ҳам бўлади, чунки Фурье коэффициентларини ҳисоблаш формулаларида жуфт ёки тоқ функция ҳолида $f(x)$ функциянинг $[0, l]$ кесмадаги қийматлари қатнашади.

1-мисол. $f(x)=x^2$ функцияни $[0, l]$ кесмада синуслар бўйича қаторга ёйинг.



22- шакл.

$f(x)$ функцияни $[-l, 0]$ кесмага тоқ давом эттириш ва ундан кейинги даврий давом эттириш графиги 22-шаклда кўрсатилган.

Функция тоқ ва у Дирихле шартларини қаноатлантиради. Шу сабабли қуйидагига эгамиз:

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l x^2 \sin\frac{\pi kx}{l}\,dx = \frac{2}{l}\left(-\frac{l}{\pi k}x^2\cos\frac{\pi kx}{l}\Big|_0^l + \right.$$

$$\left. + \frac{2l^2}{(\pi k)^2}x\sin\frac{\pi kx}{l}\Big|_0^l + \frac{2l^3}{(\pi k)^3}\cos\frac{\pi kx}{l}\Big|_0^l\right) = \frac{2}{l}\left(-\frac{l^3}{\pi k}\cos\pi k + \right.$$

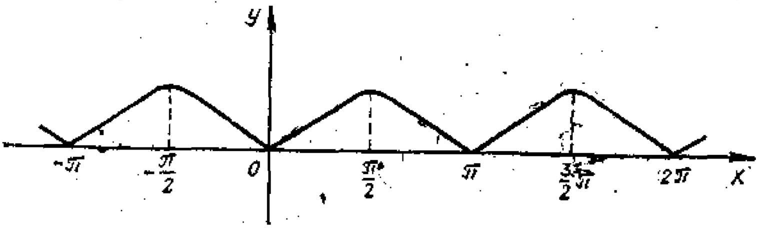
$$\left. + \frac{2l^3}{(\pi k)^3}(\cos\pi k - 1)\right) = \frac{2}{l}\left((-1)^{k+1}\frac{l^3}{\pi k} + \frac{2l^3}{(\pi k)^3}((-1)^k - 1)\right).$$

Изланаётган ёйилма қуйидаги кўринишга эга:

$$f(x)=\frac{2l^2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left((-1)^{k+1}\frac{1}{k}+\frac{2}{\pi^2k^3}((-1)^k-1)\right).$$

2- мисол. $f(x)=\sin x$ функцияни $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ кесмада косинуслар бўйича қаторга ёйинг.

Жуфт давом эттириш ва ундан кейинги даврий давом эттириш бўйича графикни ясаймиз (23- шакл). Функция жуфт функция, Дирихле шартларини қаноатлантиради. Бунда $l=\frac{\pi}{2}$. Шу сабабли, (26.3) га биноан қуйидагига эгамиз:



23- шакл.

$$a_0=2\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin x dx=\frac{4}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{4}{\pi};$$

$$a_k=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin x\cos 2kx\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(\sin(2k+1)x-$$

$$-\sin(2k-1)x)dx=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2k+1}\cos(2k+1)x+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2k-1}\cos(2k-1)x\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-1}\right)=-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{4k^2-1}.$$

Демак,

$$f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos 2x+\frac{1}{15}\cos 4x+\frac{1}{35}\cos 6x+\ \dots\right).$$

$x=0$ да қуйидагига эгамиз:

$$0=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}.$$

Бундан

$$\frac{1}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\ \dots$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt\right)\sin\alpha x\,d\alpha \qquad (27.7)$$

ёки

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}(a(\alpha)\cos\alpha x+b(\alpha)\sin\alpha x)\,d\alpha, \qquad (27.8)$$

бунда

$$a(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt,\quad b(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt.$$

Фурье қатори билан ўхшашликни пайқаш осон: йиғинди белгиси интеграл белгиси билан алмашди, бутун сонли k параметр ўрнига узлуксиз ўзгарувчи α параметр келади, $a(\alpha)$ ва $b(\alpha)$ функциялар Фурье коэффициентларини эслатади.

$f(x)$ функция жуфт ёки тоқ бўлган ҳолларда (27.7) Фурье интеграл формуласининг хусусий ҳолларини қараймиз. $f(x)$ жуфт функция бўлсин, у ҳолда $f(t)\cos\alpha t$ ҳам жуфт функция бўлади, $f(t)\sin\alpha t$ эса тоқ функция, биз қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt=0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt=2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt.$$

(27.7) формула жуфт функция учун бундай кўринишни олади:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt\right)\cos\alpha x\,d\alpha. \qquad (27.9)$$

Энди $f(x)$ — тоқ функция бўлсин. Бу ҳолда $f(t)\cos\alpha t$ — тоқ функция, $f(t)\sin\alpha t$ эса жуфт функция бўлади, биз қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt=0,\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt=2\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt.$$

Тоқ функция учун (27.1) формула бундай кўринишни олади:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt\right)\sin\alpha x\,d\alpha. \qquad (27.10$$

28-§. Фурье интегралининг комплекс шакли

Фурье интегралини комплекс шаклда ифодалаймиз. (27.8) формулага кўра:

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}(a(\alpha)\cos\alpha x+b(\alpha)\sin\alpha x)\,d\alpha, \qquad (28.1$$

бунда

$$a(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt,$$
$$b(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt. \tag{28.2}$$

Эйлернинг тригонометрик функцияларни кўрсаткичли функция билан боғловчи машҳур формуласидан фойдаланамиз:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad i^2 = -1.$$

Бу айниятдан осонлик билан

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

тengликларни ҳосил қилиш мумкин. Шу сабабли бундай ёзиш мумкин:

$$\cos\alpha x = \frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2},$$
$$\sin\alpha x = \frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{2i};$$

Буларни (28.1) формулага қўйиш қуйидагини беради:

$$f(x) = \int_{0}^{\infty}\left(a(\alpha)\frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2} + b(\alpha)\frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{2i}\right)d\alpha =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}(a(\alpha) - ib(\alpha))\,e^{i\alpha x} + (a(\alpha) + ib(\alpha))\,e^{-i\alpha x})\,d\alpha. \tag{28.3}$$

Бундай белгилаймиз:

$$c(\alpha) = \pi\,(a(\alpha) - ib(\alpha)).$$

(28.2) формулалар бўйича $a(\alpha)$, $b(\alpha)$ лар учун

$$c(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,(\cos\alpha t - i\sin\alpha t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\alpha t}\,dt \tag{28.4}$$

ни топамиз. Шундан кейин $\bar{c}(\alpha)$ қўшма комплекс сонни топамиз:

$$\bar{c}(\alpha) = \pi\,(a(\alpha) + ib(\alpha)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\alpha t}\,dt.$$

Агар $\bar{c}(\alpha) =$ [illegible]$(-\alpha)$ деб белгиланса, у ҳолда (28.4) формула барча α ларда, яъни мусбат α ларда ҳам, манфий α ларда ҳам $c(\alpha)$ ни аниқлайди. $c(\alpha)$ функцияни (28.3) Фурье интегралига қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(c(\alpha)e^{i\alpha x}+c(-\alpha)e^{-i\alpha x}\right)d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}c(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}c(-\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}c(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{-\infty}c(\alpha)e^{i\alpha x}d(-\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}c(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}c(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}c(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha.$$

Шундай қилиб,

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}c(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha, \qquad (28.5)$$

бунда

$$c(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\alpha t}dt.$$

Охирида Фурье интеграли бундай кўринишни олади:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha(t-x)}f(t)\,dt\right)d\alpha. \qquad (28.6)$$

(28.5) ва (28.6) формулаларнинг ўнг қисмлари *комплекс шаклдаги Фурье интеграллари* дейилади.

29-§. Фурье қаторининг комплекс шакли

Фурье қаторларини комплекс шаклда тасвирлаш ҳам Фурье интегралларини тасвирлагандек амалга оширилади. $f(x)$ функциянинг Фурье қаторига эга бўлайлик:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \qquad (29.1)$$

бунда

$$\left.\begin{aligned}a_k&=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx,\\ b_k&=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx.\end{aligned}\right\} \qquad (29.2)$$

Эйлернинг

$$\cos kx = \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}$$

формулалари бўйича алмаштиришларни бажарамиз. Бу ҳолда (29.1) ни бундай ёзамиз:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{ikx}(a_k - ib_k) + e^{-ikx}(a_k + ib_k)\right). \qquad (29.3)$$

$c_k = a_k - ib_k$ белгилашни киритамиз. У ҳолда (29.2) формулаларга кўра

$$c_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx - i\sin kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,dx. \qquad (29.4)$$

Агар (29.4) формулада k ни $-k$ билан алмаштирилса, ундан

$$\bar{c}_k = a_k + ib_k$$

комплекс сон келиб чиқади. Шу сабабли бундай белгилаш мумкин:

$$\bar{c}_k = c_{-k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{ikx}\,dx. \qquad (29.5)$$

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ бўлгани учун уни $k = 0$ да a_k нинг (29.2) формуласидан топиш мумкин. Шу сабабли $a_0 = c_0$ деб ёзиш мумкин. Киритилган алмаштиришларни ҳисобга олиб (29.3) қаторни ушбу

$$f(x) = \frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k\, e^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}\, e^{-ikx}\right)$$

ёки қисқароқ

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ikx}$$

кўринишда ёзиш мумкин, бунда $c_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,dx$. Шунинг ўзи Фурье қаторининг комплекс шаклидир.

Топилган натижани комплекс шаклдаги Фурье интеграли билан таққослаймиз. Унда c_k сонлар

$$c(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\alpha t}\, dt$$

функция билан алмашинади, бу функция α билан биргаликда ўзгаради,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\alpha x}$$

йиғинди эса қуйидаги

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha$$

интеграл билан алмашинади.

Комплекс шаклдаги интеграл

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\alpha t}dt\right] e^{i\alpha x}\, d\alpha$$

ёки қисқа

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} c(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha,$$

бунда $c(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-\alpha t}\, dt$, каби ёзилади. α тўлқин *сон* дейилади, y — ∞ дан $+\infty$ гача ҳамма қийматларни қабул қилади. $c(\alpha)$ функция *спектрал зичлик* ёки *спектрал функция* деб аталади.

30- §. Фурье алмаштириши

$f(t)$ функция берилган бўлсин.

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\alpha t}\, dt \qquad (30.1)$$

функция $f(t)$ функциянинг *Фурье алмаштириши дейилади.* Агар $f(x)$ функция учун комплекс шаклда олинган Фурьенинг интеграл формуласи ўринли бўлса, у ҳолда (28.6)га биноан:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha. \qquad (30.2)$$

Бу функция $F(\alpha)$ функция учун *Фурьенинг тескари алмаштириши* бўлади. $F(\alpha)$ функцияни (30.2) интеграл тенгламанинг ечими сифатида қараш мумкин ($f(x)$ функция берилган, $F(\alpha)$ функция изланади).

1. Фурьенинг синус ва косинус-алмаштиришлари.

$$\Phi(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt \qquad (30.3)$$

функцияни $f(t)$ функция учун *Фурьенинг синус-алмаштиришлари* дейишга келишиб оламиз. (27.10) формуладан

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\Phi(\alpha)\sin\alpha x d\alpha, \qquad (30.4)$$

яъни $f(x)$ функция ўз навбатида $\Phi(\alpha)$ функция учун синус-алмаштириш бўлади. Бошқача айтганда f ва Φ функциялар ўзаро синус-алмаштиришлардир.

Шунга ўхшаш,

$$F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt \qquad (30.5)$$

функцияни $f(t)$ функция учун Фурьенинг косинус-алмаштиришлари деймиз. Агар $f(x)$ функция учун Фурьенинг интеграл формуласи ўринли бўлса, у ҳолда (27.9) формуладан:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} F(\alpha)\cos\alpha x d\alpha, \qquad (30.6)$$

яъни $f(x)$ функция ўз навбатида $F(\alpha)$ учун *косинус-алмаштириш* бўлади. Бошқача айтганда f ва F функциялар ўзаро *косинус-алмаштиришлардир.* (30.3) функцияни (30.4) интеграл тенгламанинг ечими сифатида қараш мумкин ($f(x)$ — берилган, $\Phi(\alpha)$ — изланади), (30.5) функцияни эса (30,6) интеграл тенгламанинг ечими деб қараш мумкин ($f(x)$ — берилган, $F(\alpha)$ — изланади).

2. Фурье алмаштиришларининг хоссалари. Фурье алмаштиришларининг бир нечта хоссасини таъкидлаб ўтамиз.

а) Агар $f(x)$ функция $(-\infty,\infty)$ оралиқда абсолют интегралланувчи бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция барча x лар учун узлуксиз ва $|x|\to\infty$ да нолга интилади.

б) Агар $x^n f(x)$ $(n\in N)$ функция $(-\infty,\infty)$ оралиқда абсолют интегралланувчи бўлса, у ҳолда $F(x)$ нинг n марта ҳосиласи мавжуд, шу билан бирга

$$F^{(k)}(x)=\frac{(-i)^k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)t^k e^{-itx}dt, \quad k=\overline{1,n}$$

ва бу ҳосилаларнинг ҳаммаси $|x|\to\infty$ да нолга интилади.

в) Агар $f(x)$ функция $(-\infty, \infty)$ оралиқда абсолют интегралланувчи бўлиб, $|x| \to \infty$ да $\int_0^x f(t)\, dt \to 0$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^t f(\alpha)\, d\alpha \right) e^{-ixt}\, dt = \frac{-i}{x} F(x).$$

г) Агар $f(x)$ функция узлуксиз ва $|x| \to \infty$ да нолга интилса, $f'(x)$ эса $(-\infty, \infty)$ оралиқда абсолют интегралланувчи бўлса, у ҳолда

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-itx}\, dt = -\frac{x}{i} F(x).$$

Охирги икки формуладан қуйидаги хулосани чиқариш мумкин:

$f(x)$ функцияни *дифференциаллашга* унинг алмаштирилган $F(x)$ функциясининг $-\frac{x}{i}$ га кўпайтирилгани жавоб беради, интеграллашга эса унинг шу миқдорга бўлингани жавоб беради.

Мисол сифатида Фурье алмаштиришларини баъзи интегралларни ҳисоблашга қўллаймиз.

1-мисол. $f(x) = e^{-ax}$ $(a > 0,\ x \geqslant 0)$ функция берилган бўлсин. Бу функция барча $x \geqslant 0$ лар учун интегралланувчи ва ҳамма жойда ҳосилага эга. Бўлаклаб интеграллаш ёрдамида Фурьенинг синус ва косинус-алмаштиришларини топамиз:

$$F(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-au} \cos tu\, du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{a}{a^2 + t^2},$$

$$\Phi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-au} \sin tu\, du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{t}{a^2 + t^2}.$$

У ҳолда (30.6) ва (30.4) формулалар қуйидагиларни беради:

$$e^{-ax} = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos tx}{a^2 + t^2}\, dt,\ x \geqslant 0;$$

$$e^{-ax} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t \sin tx}{a^2 + t^2}\, dt,\ x > 0.$$

2-мисол.

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<a \quad \text{учун},\\ \frac{1}{2}, & x=a \quad \text{учун},\\ 0, & x>a \quad \text{учун}\end{cases}$$

лсин. Фурьенинг косинус-алмаштириши қуйидаги кўринишга эга ани равшан:

$$F(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a \cos tu\,du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin \alpha t}{t},$$

бундан (30.6) га биноан

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin at\cos xt}{t}\,dt=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<a \quad \text{учун},\\ \frac{1}{2}, & x=a \quad \text{учун},\\ 0, & x>a \quad \text{учун}.\end{cases}$$

Хусусан, $x=a$ да

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin 2at}{t}\,dt.$$

$a=\frac{1}{2}$ деб олинса, у ҳолда $\frac{\pi}{2}=\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt.$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Фурье интеграли деб нимага айтилади?
2. Функцияни Фурье интеграли билан тасвирлаш шартини кўрсатинг.
3. Жуфт ва тоқ функциялар учун Фурье интеграли қандай ёзилади?
4. Фурье интегралининг комплекс шаклини ёзинг.
5. Комплекс шаклдаги Фурье қаторини ёзинг.
6. Фурье алмаштиришларининг таърифини беринг.
7. Фурьенинг синус- ва косинус-алмаштиришлари нима?
8. Фурье алмаштиришларининг хоссаларини айтинг.

10-боб

ҚАРРАЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

1-§. Икки ўлчовли интеграл ва унинг хоссалари

Бир ўзгарувчининг функцияси дифференциал ҳисоби тушунчалари ва усуллари 7-бобда исталган сондаги ўзгарувчининг функцияси учун жорий қилинган эди. Интеграл ҳисобнинг асосий ғояларини ҳам кўп ўзгарувчили функцияларга кўчириш мумкин, бу фикр энг аввал интегралнинг аниқ турдаги йиғиндининг лимити эканлиги ҳақидаги ғояга тегишлидир.

Oxy текисликда L чизиқ билан (ёки бир неча чизиқ билан) чегараланган ёпиқ D соҳани қараймиз. Шу соҳада узлуксиз

$$z=f(P) \quad \text{ёки} \quad z=f(x, y)$$

функция берилган бўлсин. Қуйидаги амалларни бажарамиз:

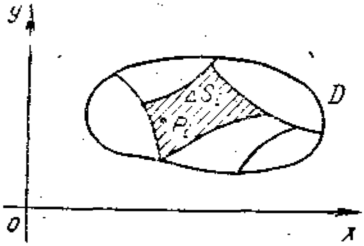
1) D соҳани ҳар қандай чизиқлар билан (хусусий ҳолда бу чизиқлар Ox ва Oy координата ўқларига параллел тўғри чизиқлар бўлиши мумкин) n ихтиёрий қисмга бўламиз:

$$\Delta S_1,\ \Delta S_2,\ \ldots,\ \Delta S_i,\ \ldots,\ \Delta S_n,$$

бу қисмларни *элементар юзчалар* деб атаймиз ва шу символларнинг ўзи билан тегишли юзчаларнинг юзларини белгилаймиз.

2) Бу ΔS_i юзчаларнинг ҳар бирида биттадан $P_i\ (x_i, y_i)$ нуқта оламиз, бу нуқта юзчага тегишли бўлиши шарт. n та нуқтага эга бўламиз (24-шакл):

$$P_1\ (x_1, y_1),\ P_2\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ P_i\ (x_i, y_i),\ \ldots,\ P_n\ (x_n, y_n).$$



24-шакл.

3) Танлаб олинган нуқталарда $z=f(P)=f(x, y)$ функция қийматларини ҳисоблаб, ушбуга эга бўламиз:

$$f(P_1)=f(x_1, y_1),\ f(P_2)=f(x_2, y_2),\ \ldots,$$
$$f(P_i)=f(x_i, y_i),\ \ldots,\ f(P_n)=f(x_n, y_n).$$

4) Ушбу кўринишдаги кўпайтмани тузамиз: $f(P_i)\Delta S_i = f(x_i, y_i)\cdot\Delta S_i$.

5) Бу кўпайтмаларни йиғамиз: $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta S_i = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot\Delta S_i$.

Бу йиғиндини $z=f(P)=f(x, y)$ функция учун D соҳада *интеграл йиғинди* деб атаймиз. Бу интеграл йиғинди бир хил n да D соҳани ΔS_i ларга бўлиш усулига ва ҳар бир қисм ичида P_i нуқтани танлашга боғлиқ.

Шундай қилиб, тайинланган n да интеграл йиғиндилар кетма-кетлигига эга бўламиз. $n\to\infty$ да ΔS_i юзчалар диаметрларининг энг каттаси нолга интилади деб фараз қиламиз (юзчанинг чегарасидаги нуқталар орасидаги масофалардан энг каттаси шу юзчанинг диаметри деб аталади). Қуйидаги тасдиқ ўринли.

Теорема. *Агар чегараланган ёпиқ D соҳада $z=f(P)=$ $=f(x, y)$ функция узлуксиз бўлса, у ҳолда бу соҳани қисмларга бўлиш сонини ΔS_i юзчалар диаметрларининг энг каттаси нолга интиладиган қилиб катталаштирилганда $(n\to\infty)$*

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i$$

кўринишдаги интеграл йиғиндиларнинг лимити мавжуд бўлади.

Бу теоремани исботсиз қабул қиламиз.

Бу лимит D соҳани ΔS_i қисмларга бўлиш усулига ҳам, ҳар қайси қисм ичида P_i нуқтани танлаш усулига ҳам боғлиқ бўлмайди, $z=f(P)=f(x, y)$ функциядан D соҳа бўйича олинган икки ўлчовли интеграл дейилади ва бундай белгиланади:

$$\iint\limits_D f(P)\,dS \quad \text{ёки} \quad \iint\limits_D f(x, y)\,dS.$$

Шундай қилиб, таъриф ва белгилашларга биноан ушбуга эгамиз:

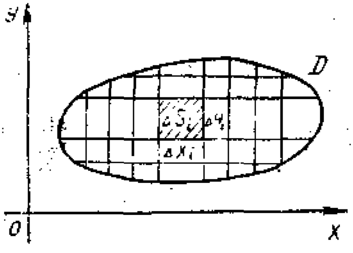
$$\iint\limits_D f(P)\,dS = \lim_{\max\operatorname{diam}\Delta S_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta S_i$$

ёки

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dS =$$

$$= \lim_{\max\operatorname{diam}\Delta S_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i.$$

Бунда D интеграллаш соҳаси, $f(P)=f(x, y)$ интеграл остидаги функция, $f(P)\,dS=f(x, y)\,dS$ интеграл остидаги ифода, x, y интеграллаш ўзгарувчилари, dS юз элементи дейилади.



25- шакл.

Икки ўлчовли интеграл D соҳани қисмларга бўлиш усулига бо лиқ бўлмаганлиги учун уни координаталар ўқларига параллел тў чизиқлар билан томонлари Δx_i, Δy_i га тенг бўлган тўғри тўртб чакларга бўлиш мумкин (25-шакл), бунда

$$\Delta S_i = \Delta x_i \, \Delta y_i.$$

Икки ўлчовли интегралнинг таърифига биноан:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dS = \lim_{\max \operatorname{diam} \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta x_i \, \Delta y_i.$$

Шунинг учун икки ўлчовли интегрални

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$$

каби белгилаш мумкин.

Шундай қилиб,

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx dy = \lim_{\max \operatorname{diam} \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta x_i \, \Delta y_i.$$

$dxdy$ ифода юзнинг декарт координаталаридаги элементи дейилади.

Икки ўлчовли интегралнинг геометрик маъносини аниқлаш учун қуйидаги тушунчани киритамиз.

Таъриф. D соҳа, тенгламаси $z=f(x, y)$ дан иборат σ сирт, йўналтирувчиси z ҳамда ясовчилари Oz ўққа параллел бўлган цилиндрик сирт билан чегараланган жисм *цилиндрик жисм* деб аталади.

Агар D соҳада $f(x, y) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда ҳар бир

$$f(P_i)\, \Delta S_i = f(x_i, y_i)\, \Delta S_i$$

қўшилувчини асоси ΔS_i дан, баландлиги эса $f(P_i) = f(x_i, y_i)$ дан иборат кичкина цилиндрик жисмнинг ҳажми сифатида геометрик тасвирлаш мумкин (26-шакл). Бу ҳолда

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\, \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta S_i$$

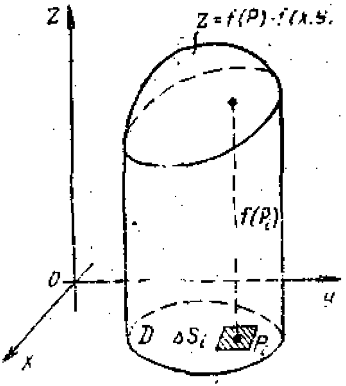
интеграл йиғинди кўрсатилган цилиндрик жисмларнинг ҳажмлари йиғиндисидан, бошқача айтганда, бирор зинапоясимон цилиндрик жисмнинг ҳажмидан иборат бўлади. $f(P)=f(x, y)$ функциядан D соҳа бўйича олинган икки ўлчовли интеграл қуйидан D соҳа билан, юқоридан эса $z=f(P)=f(x, y)$ сирт билан чегараланган цилиндрик жисмнинг V ҳажмига тенг бўлади:

$$V = \iint\limits_D f(P)\, dS = \iint\limits_D f(x, y)\, dS,$$

бунда D соҳа $z=f(P)=f(x, y)$ сиртнинг Oxy текисликдаги проекциясидир. Икки ўлчовли интегралнинг геометрик маъноси шундан иборат.

Агар D соҳада интеграл остидаги функция $f(P)=f(x, y) \equiv 1$ бўлса, у ҳолда икки ўлчовли интегралнинг қиймати сон жиҳатдан интеграллаш соҳаси D нинг S юзига тенг бўлади:

$$S=\iint\limits_{D} dS \quad \text{ёки} \quad S=\iint\limits_{D} dx\,dy. \tag{1.1}$$



26-шакл.

Агар интеграл остидаги функция $f(P)=f(x, y)$ соҳада масса тақсимланишининг зичлиги бўлса, у ҳолда икки ўлчовли интеграл D пластинкага жойлашган модда массаси m ни беради:

$$m=\iint\limits_{D} f(P)\,dS=\iint\limits_{D} f(x, y)\,dS. \tag{1.2}$$

Икки ўлчовли интегралнинг *механик маъноси* шундан иборат.

Икки ўлчовли интеграл аниқ интегралнинг ҳамма хоссаларига эга, икки ўлчовли интеграл аниқ интегралнинг бевосита умумлашмасидир. Икки ўлчовли интеграллар хоссаларининг исботи аниқ интегралнинг мос хоссаларини исботлагандек бажарилади. Шу сабабли икки ўлчовли интегралнинг хоссаларини, баъзи ҳолларда геометрик интерпритациялаш билан чекланиб, исботсиз келтирамиз.

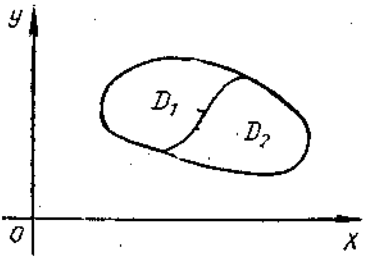
1-хосса. Ўзгармас кўпайтувчини икки ўлчовли интеграл белгисидан ташқарига чиқариш мумкин, яъни агар k — ўзгармас сон бўлса, у ҳолда:

$$\iint\limits_{D} k f(x, y)\,dS=k\iint\limits_{D} f(x, y)\,dS.$$

2-хосса. Бир неча функциянинг алгебраик йиғиндисидан олинган икки ўлчовли интеграл қўшилувчилардан олинган икки ўлчовли интегралларнинг алгебраик йиғиндисига тенг (иккита қўшилувчи бўлган ҳол билан чекланамиз):

$$\iint\limits_{D} (f(x, y) \pm \varphi(x, y))\,dS=\iint\limits_{D} f(x, y)\,dS \pm \iint\limits_{D} \varphi(x, y)\,dS.$$

3-хосса. Агар D интеграллаш соҳаси бир нечта қисмга бўлинса, у ҳолда бутун соҳа бўйича олинган икки ўлчовли интеграл ҳар қайси қисмдан олинган икки ўлчовли интеграллар



27- шакл.

йиғиндисига тенг (иккита қисм бўлган ҳол билан чекланамиз 27- шакл):

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dS = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\,dS + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\,dS.$$

4- хосса. Агар интеграллаш соҳасида интеграл остидаги функция ўз ишорасини ўзгартирмаса, у ҳолда икки ўлчовли интеграл шу ишорани сақлайди, бошқача айтганда, агар D соҳада $f(x, y) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда $\iint\limits_D f(x, y)\,dS \geqslant 0$; агар D соҳада $f(x, y) \leqslant 0$ бўлса, у ҳолда

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dS \leqslant 0.$$

5- хосса. Агар интеграллаш соҳасида иккита функция бирор тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда бу функциялардан олинган икки ўлчовли интеграллар ҳам шу тенгсизликни қаноатлантиради, бошқача айтганда, агар D соҳада $f(x, y) \geqslant \varphi(x, y)$ бўлса, у ҳолда

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dS \geqslant \iint\limits_D \varphi(x, y)\,dS.$$

Ўрта қиймат ҳақида теорема. *Агар $f(x, y)$ функция ёпиқ чегараланган D соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда бу соҳада шундай $P_0(x_0, y_0)$ нуқта мавжудки, D соҳа бўйича олинган икки ўлчовли интеграл интеграл остидаги функциянинг шу нуқтадаги қийматини D интеграллаш соҳасининг юзи S га кўпайтирилганига тенг:*

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dS = f(x_0, y_0)\cdot S.$$

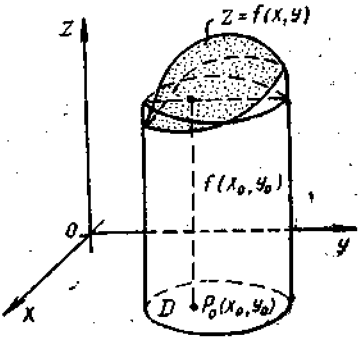
Бу теореманинг геометрик интерпритацияси қуйидагидан иборат: агар D соҳада $f(x, y) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда цилиндрик жисмнинг ҳажми шундай цилиндрнинг ҳажмига тенгки, бу цилиндрнинг асоси цилиндрик жисмнинг асоси D га, баландлиги эса интеграл остидаги $f(x, y)$ функциянинг D соҳанинг бирор $P_0(x_0, y_0)$ нуқтасидаги $f(x_0, y_0)$ қийматига тенг. Функциянинг

$$f(x_0, y_0) = \frac{\iint\limits_D f(x, y)\,dS}{S}$$

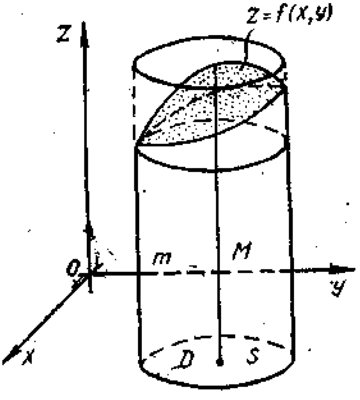
қиймати $f(x, y)$ функциянинг D соҳадаги ўрта қиймати дейилади (28- шакл).

Интегралнинг чегараланганлиги ҳақида теорема. *Агар $f(x, y)$ функция ёпиқ D соҳада узлуксиз ҳамда M ва m — унинг шу соҳадаги энг катта ва энг кичик қийматлари бўлса, у ҳолда икки ўлчовли интеграл энг кичик қийматнинг D интеграллаш соҳаси S юзига кўпайтмаси билан энг катта қийматнинг шу юзга кўпайтмаси орасида ётади* (яъни функция чегараланган бўлса, икки ўлчовли интеграл ҳам чегаралангандир):

$$m\cdot S \leqslant \iint\limits_{D} f(x, y)\, dS \leqslant M\cdot S.$$



28- шакл.



29- шакл.

Бу теореманинг геометрик интерпритацияси бундай: агар D соҳада $f(x, y)\geqslant 0$ бўлса, у ҳолда цилиндрик жисмнинг ҳажми асослари шу цилиндрик жисмнинг асоси D га, баландликлари эса мос равишда D соҳада энг кичик m ва энг катта M қийматларга тенг бўлган цилиндрлар ҳажми орасида ётади (29- шакл).

Мисол. Қуйидаги икки ўлчовли интегрални баҳоланг:

$$\iint\limits_{D} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dS,$$

бунда интеграллаш соҳаси D маркази координаталар бошида бўлиб, радиуси $r=1$ га тенг доирадан иборат. Шунингдек, интеграл остидаги $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ функциянинг D соҳадаги ўрта қийматини топинг.

Ечиш. Интеграл остидаги функция маркази координаталар бошида, радиуси $r=1$ бўлган юқори ярим сфера шаклида геометрик тасвирланади. Равшанки, бу соҳада $M=1$ ва $m=0$ га эгамиз. Интеграллаш соҳаси D доира бўлиб, бу доиранинг юзи $S=\pi r^2=\pi 1^2=\pi$ (кв. бирлик). Баҳолаш ҳақидаги теоремани қўллаб, қуйидагини топамиз:

$$0\cdot\pi \leqslant \iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dS \leqslant 1\cdot\pi.$$

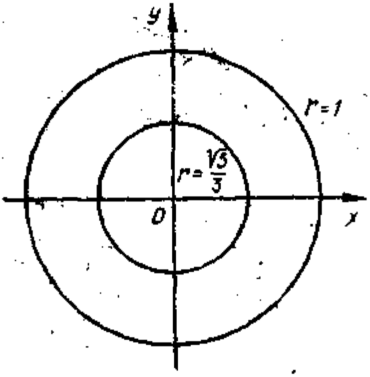
Демак, икки ўлчовли интегралнинг қиймати

$$0 \leqslant \iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dS \leqslant \pi$$

тенгсизликни қаноатлантиради.

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ функциянинг ўрта қиймати ҳақидаги масалани ечиш учун олдин маркази координаталар бошида, радиуси $r=1$ бўлган D доирада

$$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dS$$



30- шакл.

интегралнинг қийматини топамиз.

Икки ўлчовли интегралнинг геометрик маъносидан бу қиймат радиуси $r=1$ бўлган юқори ярим сферанинг ҳажмига тенг, шу сабабли

$$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dS = \frac{2}{3}\pi \text{ (куб. бирлик).}$$

Энди ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаб, функциянинг ўрта қийматини топамиз:

$$f(x_0,\ y_0)=\frac{\frac{2}{3}\pi}{\pi}=\frac{2}{3}.$$

Функция ўрта қийматларига эга бўладиган нуқталарни топиш ҳам қийин эмас:

$$\sqrt{1-x^2-y^2}=\frac{2}{3},\ \text{бундан}\ x^2+y^2=\frac{5}{9}.$$

Шундай қилиб, функция ўрта қийматига

$$x^2+y^2=\frac{5}{9}$$

айлана нуқталарида эришади (30- шакл).

2- §. Уч ўлчовли интеграл ва унинг хоссалари

Уч ўлчовли интеграл ҳам икки ўлчовли интегралга ўхшаш аниқланади. Энди фазонинг бирор ω соҳасида ва шу соҳанинг σ чегарасида аниқланган учта ўзгарувчининг узлуксиз функцияси

$$u = f(P) \text{ ёки } u = f(x, y, z)$$

ни қараймиз. Қуйидагиларни бажарамиз:

1) ω соҳани ҳар хил сиртлар (хусусан бу сиртлар координаталар текисликларига параллел текисликлар бўлиши мумкин) билан n та ихтиёрий жисмга бўламиз:

$$\Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \ldots, \Delta\omega_i, \ldots, \Delta\omega_n,$$

бу жисмларни биз элементар ҳажмлар деб атаймиз ва тегишли жисмларнинг ҳажмларини ҳам худди шундай белгилаймиз.

2) Ҳар бир $\Delta\omega_i$ $(i = \overline{1, n})$ элементар ҳажмдан биттадан $P_i(x_i, y_i, z_i)$ нуқта олиб, n та нуқтага эга бўламиз:

$$P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), \ldots,$$
$$P_i(x_i, y_i, z_i), \ldots, P_n(x_n, y_n, z_n).$$

3) Танлаб олинган нуқталарда $u = f(P) = f(x, y, z)$ функциянинг қийматларини ҳисоблаймиз:

$$f(P_1) = f(x_1, y_1, z_1), f(P_2) = f(x_2, y_2, z_2), \ldots,$$
$$f(P_i) = f(x_i, y_i, z_i), \ldots, f(P_n) = f(x_n, y_n, z_n).$$

4) Ушбу

$$f(P_i)\,\Delta\omega_i = f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta\omega_i$$

кўринишдаги кўпайтмаларни тузамиз.

5) Бу кўпайтмаларнинг йиғиндисини ҳосил қиламиз:

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta\omega_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta\omega_i.$$

Бу йиғиндини ω соҳада $u = f(P) = f(x, y, z)$ функциялар учун интеграл йиғинди деб атаймиз. n нинг тайинланган қийматларида бу интеграл йиғинди ω соҳани $\Delta\omega_i$ қисмларга бўлиш усулига ва ҳар бир бундай қисм ичида $P_i(x_i, y_i, z_i)$ нуқтани танлаш усулига боғлиқ. Шундай қилиб, тайинланган n да интеграл йиғиндилар кетма-кетлигига эга бўламиз. $\Delta\omega_i$ элементар ҳажмлар диаметрларининг энг каттаси ($\max\operatorname{diam}\Delta\omega_i$) $n \to \infty$ да нолга интилади деб фараз қиламиз ($\Delta\omega_i$ ҳажмнинг диаметри деб унинг чегарасидаги нуқталар орасидаги масофаларнинг энг каттасига айтилади). Қуйидаги тасдиқ ўринли.

Теорема. *Агар $u = f(P) = f(x, y, z)$ функция ёпиқ чегараланган ω соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда бу соҳани $\Delta\omega_i$ қисмларга бўлиш сонининг ортиши билан $(n \to \infty)$ элементар ҳажмлар диаметрларининг энг каттаси нолга интилса,*

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta\omega_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta\omega_i$$

кўринишдаги интеграл йиғиндиларнинг лимити мавжуд бўлади.

Бу лимит ω соҳани $\Delta\omega_i$ қисмларга бўлиш усулига ҳам, ҳар бир қисм ичидан P_i нуқтани танлашга ҳам боғлиқ эмас.

Бу лимит $u = f(P) = f(x, y, z)$ функциядан ω соҳа бўйича олинган уч ўлчовли интеграл дейилади ва бундай белгиланади:

$$\iiint\limits_{\omega} f(P)\, d\omega = \iiint\limits_{\omega} f(x, y, z)\, d\omega.$$

Шундай қилиб, таъриф ва белгилашларга мос равишда ушбуларга эгамиз:

$$\iiint\limits_{\omega} f(P)\, d\omega = \lim_{\max \operatorname{diam} \Delta\omega_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\, \Delta\omega_i$$

ёки

$$\iiint\limits_{\omega} f(x, y, z)\, d\omega = \lim_{\max \operatorname{diam} \Delta\omega_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta\omega_i.$$

Бунда ω — интеграллаш соҳаси, $f(P) = f(x, y, z)$ — интеграл остидаги функция, $f(P)\, d\omega = f(x, y, z)\, d\omega$ — интеграл остидаги ифода, $d\omega$ эса ҳажм элементи деб аталади.

Уч ўлчовли интеграл ω соҳани қисмларга бўлиш усулига боғлиқ бўлмагани учун уни икки ўлчовли интегралга ўхшаш бундай белгилаш ҳам мумкин:

$$\iiint\limits_{\omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

бунда $dx\, dy\, dz$ ифода декарт координаталаридаги ҳажм элементи дейилади. Уч ўлчовли интеграл содда геометрик маънога эга эмас. Аммо интеграл остидаги функция ω соҳада $f(P) = f(x, y, z) = 1$ бўлса, у ҳолда уч ўлчовли интегралнинг қиймати ω соҳанинг V ҳажмига тенг бўлади:

$$V = \iiint\limits_{\omega} d\omega \quad \text{ёки} \quad V = \iiint\limits_{\omega} dxdydz. \qquad (2.1)$$

Агар интеграл остидаги $f(P) = f(x, y, z)$ функция ω соҳада масса тақсимланишининг зичлиги бўлса, у ҳолда уч ўлчовли интеграл V ҳажмдаги модда массасини беради:

$$m = \iiint\limits_{\omega} f(P)\, d\omega = \iiint\limits_{\omega} f(x, y, z)\, d\omega. \qquad (2.2)$$

Уч ўлчовли интегралнинг механик маъноси шундан иборат. Олдинги параграфда икки ўлчовли интеграл учун айтиб ўтилган хоссалар уч ўлчовли интеграл учун тўлалигича кўчирилади.

1-хосса. Ўзгармас кўпайтувчини уч ўлчовли интеграл белгисидан ташқарига чиқариш мумкин, яъни k ўзгармас сон бўлса, у ҳолда:

$$\iiint\limits_{\omega} k f(x, y, z)\, d\omega = k \iiint\limits_{\omega} f(x, y, z)\, d\omega.$$

2-хосса. Бир неча қўшилувчининг алгебраик йиғиндисидан олинган уч ўлчовли интеграл қўшилувчилардан олинган уч ўлчовли интеграллар алгебраик йиғиндисига тенг (иккита қўшилувчи бўлган ҳол билан чекланамиз):

$$\iiint\limits_{\omega} (f(x, y, z) \pm \varphi(x, y, z))\, d\omega = \iiint\limits_{\omega} f(x, y, z)\, d\omega \pm$$

$$\pm \iiint\limits_{\omega} \varphi(x, y, z)\, d\omega.$$

3-хосса. Агар интеграллаш соҳаси ω бир неча қисмга бўлинса, у ҳолда бутун соҳа бўйича олинган уч ўлчовли интеграл ҳар қайси қисм бўйича олинган уч ўлчовли интегралларнинг йиғиндисига тенг бўлади (иккита қисм бўлган ҳол билан чекланамиз):

$$\iiint\limits_{\omega} f(x, y, z)\, d\omega = \iiint\limits_{\omega_1} f(x, y, z)\, d\omega + \iiint\limits_{\omega_2} f(x, y, z)\, d\omega.$$

4-хосса. Агар интеграллаш соҳасида интеграл остидаги функция ўз ишорасини ўзгартирмаса, у ҳолда уч ўлчовли интеграл худди шу ишорани сақлайди, чунончи: агар ω соҳада $f(x, y, z) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда $\iiint\limits_{\omega} f(x, y, z)\, d\omega \geqslant 0$, агар ω соҳада $f(x, y, z) \leqslant 0$ бўлса, у ҳолда $\iiint\limits_{\omega} f(x, y, z)\, d\omega \leqslant 0$.

5-хосса. Агар интеграллаш соҳасида иккита функция бирор тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда бу функциялардан олинган уч ўлчовли интеграл ҳам шу тенгсизликни қаноатлантиради, [бошқача айтганда, агар ω соҳада $f(x, y, z) \geqslant \varphi(x, y, z)$ бўлса, у ҳолда

$$\iiint\limits_{\omega} f(x, y, z)\, d\omega \geqslant \iiint\limits_{\omega} \varphi(x, y, z)\, d\omega.$$

Урта қиймат ҳақидаги теорема. *Агар $f(x, y, z)$ функция ёпиқ чегараланган ω соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда бу соҳада шундай $P_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқта мавжуд бўладики, ω соҳа бўйича олинган уч ўлчовли интеграл интеграл остидаги функциянинг шу нуқтадаги ўрта қийматини интеграллаш соҳаси ω нинг V ҳажмига кўпайтирилганига тенг:*

$$\iiint\limits_{\omega} f(x, y, z)\, d\omega = f(x_0, y_0, z_0)\cdot V.$$

Функциянинг

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{V} \iiint\limits_{\omega} f(x, y, z)\, d\omega$$

қиймати $f(x, y, z)$ функциянинг ω соҳадаги *ўрта қиймати* дейилади.

Интегралнинг чегараланганлиги ҳақида тео-

рема. *Агар $f(x, y, z)$ функция ёпиқ чегараланган ω соҳада узлуксиз ҳамда M ва m лар функциянинг шу соҳадаги энг катта ва энг кичик қиймати бўлса, у ҳолда уч ўлчовли интеграл функциянинг энг кичик қийматининг интеграллаш соҳасининг V ҳажмига кўпайтмаси билан энг катта қиймати M нинг ўша ҳажмга кўпайтмаси орасида ётади* (яъни функция чегараланган бўлса, уч ўлчовли интеграл ҳам чегаралангандир):

$$m \cdot V \leqslant \iiint_{\omega} f(x, y, z)\, d\omega \leqslant M \cdot V.$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Берилган функциядан берилган соҳа бўйича олинган икки ўлчовли интеграл деб нимага айтилади? Унинг геометрик ва механик маъноларини тушунтиринг.
2. Икки ўлчовли интегралнинг мавжудлиги ҳақидаги теорема нимадан иборат?
3. Ясси шакл юзини икки ўлчовли интеграл ёрдамида ҳисоблаш формуласини асосланг.
4. Икки ўлчовли интегралнинг хоссаларини айтиб беринг.
5. Икки ўлчовли интеграл учун ўрта қиймат ҳақидаги теоремани ва интегралнинг чегараланганлиги ҳақидаги теоремаларни ифодаланг, уларнинг геометрик маъносини кўрсатинг.
6. *Берилган функциядан* берилган соҳа бўйича олинган уч ўлчовли интеграл деб нимага айтилади? Унинг геометрик маъносини кўрсатинг.
7. Уч ўлчовли интегралнинг мавжудлиги ҳақидаги теорема нимадан иборат?
8. Жисм ҳажмини уч ўлчовли интеграл билан ҳисоблаш формуласини асосланг.
9. *Уч ўлчовли интегралнинг асосий хоссаларини айтиб беринг.*
10. Уч ўлчовли интеграл учун ўрта қиймат ҳақидаги ва интегралнинг чегараланганлиги ҳақидаги теоремаларни ифодаланг.
11. 3466—3476, 3513—3516- масалаларни ечинг.

3- §. Икки ўлчовли ва уч ўлчовли интегралларни кетма-кет интеграллаш билан ҳисоблаш

Икки ўлчовли ва уч ўлчовли интегралларнинг интеграл йиғиндиларнинг лимитлари сифатида берилган таърифлари ҳисоблаш усулларини ҳам кўрсатади. Аммо бу жараён ниҳоятда узундан-узоқ ва кўпгина қийинчиликлар билан боғлиқ. Икки ўлчовли ва уч ўлчовли интегралларни ҳисоблаш масаласи амалда мос равишда иккита ва учта аниқ интегрални кетма-кет ҳисоблашга келтирилади.

1. Икки ўлчовли интегрални ҳисоблаш. Олдин икки ўлчовли интегрални ҳисоблаш масаласини қараймиз:

$$\iint_{D} f(x, y)\, dx\, dy.$$

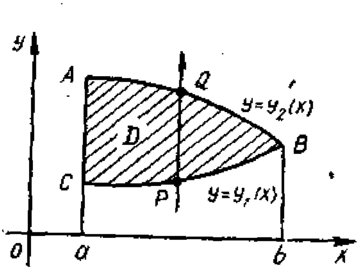
D соҳани қуйидагича деб фараз қиламиз: у $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ функцияларнинг графиклари ҳамда $x = a$ ва $x = b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган (31- шакл). D соҳанинг исталган ички нуқтаси орқали Oy ўқига параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ D соҳанинг L чегарасини иккита P ва Q нуқтада кесиб ўтади. CPB чегарани *кириш*, AQB чегарани эса *чиқиш чегараси* деймиз.

Таъриф. Агар D соҳа ушбу икки шартни қаноатлантирса, яъни

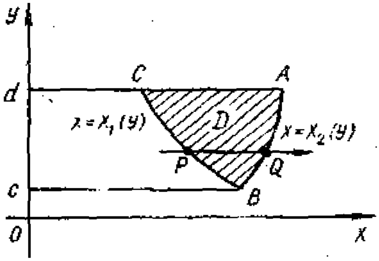
а) унинг ички нуқтасидан ўтувчи Oy ўққа параллел ҳар қандай тўғри чизиқ L контурни икки нуқтада кесиб ўтса;

б) кириш ва чиқиш контурларининг ҳар бири алоҳида тенглама билан берилса, бу соҳа Oy ўқи йўналиши бўйича *мунтазам соҳа* дейилади.

Oy ўқи йўналиши бўйича мунтазам бўлган соҳа тенгламалар системаси билан қуйидагича берилиши мумкин:



31- шакл.



32- шакл.

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), \end{cases}$$

бунда

$$y_1(x) \leqslant y_2(x).$$

Ox ўқи йўналиши бўйича мунтазам бўлган соҳани ҳам шунга ўхшаш аниқлаш мумкин. Бундай соҳа (32- шакл)

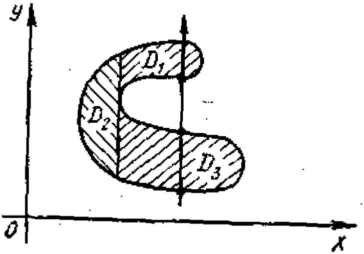
$$\begin{cases} c \leqslant y \leqslant d, \\ x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y) \end{cases}$$

тенгсизликлар системаси билан берилиши мумкин, бунда $x_1(y) \leqslant x_2(y)$.

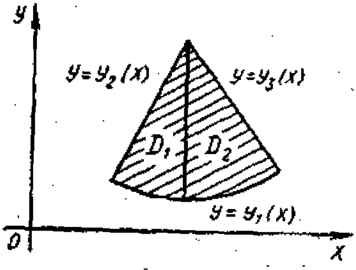
Агар таърифдаги шартлардан ақалли биттаси бузилса, у ҳолда соҳа у ёки бу йўналишда *номунтазам соҳа* дейилади. Бундай ҳолда соҳани Oy ёки Ox ўқига параллел тўғри чизиқлар билан ҳар бири у ёки бу йўналишга нисбатан мунтазам бўладиган қисмларга ажратиш мумкин.

33- шаклда Oy ўқи йўналиши бўйича номунтазам соҳа мисоли келтирилган, чунки бунда биринчи шарт бузилган: бунда соҳа чегарасини тўртта нуқтада кесадиган Oy ўқига параллел тўғри чизиқ мавжуд. Бу соҳани Oy ўқига параллел тўғри чизиқ билан учта D_1, D_2, D_3 мунтазам соҳага бўлиш мумкин.

34-шаклда Oy ўқига нисбатан номунтазам соҳа мисоли берилган, чунки бунда иккинчи шарт бузилган: чиқиш чегараси иккита тенглама билан берилган. Oy ўқига параллел тўғри чизиқ билан соҳани иккита D_1 ва D_2 мунтазам соҳага бўлиш мумкин. Соҳа бир йўналишда мунтазам, иккинчи йўналишда номунтазам бўлиши мумкин. Ҳар икки йўналишда мунтазам бўлган соҳа тўғридан-тўғри мунтазам соҳа дейилади.



33- шакл.



34- шакл.

Энди икки ўлчовли

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy$$

интегралга қайтамиз. D интеграллаш соҳаси Oy ўқи йўналишида мунтазам деб фараз қиламиз. Бундан ташқари интеграл остидаги функция $f(x, y)>0$ деб фараз қиламиз. Бу икки ўлчовли интегралнинг цилиндрик жисмнинг ҳажми сифатидаги геометрик мазмунидан фойдаланиш имконини беради, яъни

$$V=\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$$

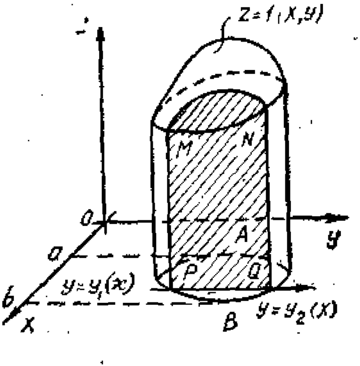
тенгликдан фойдаланиш имконини беради.

Энди цилиндрик жисмнинг V ҳажмини кўндаланг кесимлар усулидан (6- боб, 21- §) фойдаланиб ҳисоблаймиз (35- шакл).

Қаралаётган цилиндрик жисмни Ox ўқига перпендикуляр бўлган ихтиёрий $x=\text{const}$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ текислик билан кесамиз. Кесимда $MNQP$ эгри чизиқли трапецияга эга бўламиз, унинг $S(x)$ юзи x ўзгарувчининг функциясидир. Жисмнинг ҳажми, маълумки,

$$V=\int_a^b S(x)\, dx$$

формула билан ифодаланади. Шу формулани биз цилиндрик жисм ҳажмини ҳисоблашга қўллаймиз. Бунинг учун $MNQP$ эгри чизиқли трапециянинг юзи бўлмиш $S(x)$ функция кўринишини аниқлаш қолади. Маълумки, бу юзни аниқ интеграл ёрдамида ҳисоблаш мумкин, бу интегралнинг интеграл ости функцияси $z=f(x, y)$ сирт билан $x=const$ текисликнинг кесишишидан ҳосил бўлган MN чизиқ тенгламасидан иборат бўлади, шу билан бирга y ўзгарувчи ўзининг P нуқтадаги $y_1(x)$ ва Q нуқтадаги $y_2(x)$ қийматлари орасида ўзгаради:



35- шакл.

$$S(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy,$$

бу ерда $f(x, y)$ бир ўзгарувчининг функциясидир, чунки $x = \text{const}$.

Ҳосил қилинган формула цилиндрик жисм кўндаланг кесимининг $S(x)$ юзини ифодалайди. Энди жисмнинг ҳажмини топиш мумкин:

$$V=\int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy\right) dx.$$

Аммо иккинчи томондан цилиндрик жисмнинг ҳажми икки ўлчовли интегралга тенг: $V=\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$. Шу сабабли

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy=\int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy\right) dx$$

ки

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy. \qquad (3.1)$$

Ана шунинг ўзи икки ўлчовли интегрални ҳисоблаш учун изланаётган формуладир. Ўнгда турган интеграл *икки каррали интеграл* дейилади, шу билан бирга

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy$$

ички интеграл деб аталади, бунда x ўзгармас ҳисобланади, *интеграллаш y бўйича олиб борилади*, интеграллаш чегаралари эса умумий ҳолда x нинг функциялари бўлади (ўзгармас бўлишлари ҳам мумкин). Ички интегрални ҳисоблаш натижаси умумий ҳолда x нинг функцияси бўлади. Бу натижа ташқи интеграл учун интеграл ости функцияси бўлади, ташқи интеграл x ўзгарувчи бўйича a дан b гача чегараларда ҳисобланади.

(3.1) формула D соҳада на фақат $f(x, y)>0$ бўлгандагина, балки $f(x, y)<0$ бўлганда ҳам ёки $f(x, y)$ D соҳада ўз ишорасини ўзгартирганда ҳам тўғрилигича қолади.

1-эслатма. Агар D интеграллаш соҳаси Ox ўқи йўналиши бўйича мунтазам бўлса, яъни уни

$$\begin{cases} c \leqslant y \leqslant d, \\ x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y) \end{cases}$$

тенгсизликлар системаси билан бериш мумкин бўлса, у ҳолда икки ўлчовли интегрални ҳисоблаш учун қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx. \tag{3.2}$$

Бунда ички интеграллашда y ўзгарувчи ўзгармас деб ҳисобланади. Бу интеграллашнинг натижаси умумий ҳолда y ўзгарувчининг функцияси бўлади, шундан кейин уни c дан d гача чегарада y бўйича интеграллаш керак.

2-эслатма. Ташқи интегралнинг интегралланиш чегаралари доим ўзгармас бўлади.

3-эслатма. Агар D интеграллаш соҳаси номунтазам бўлса, уни бир неча мунтазам соҳаларга бўлиш, бу соҳаларнинг ҳар бирида икки ўлчовли интегрални ҳисоблаш ва шундан кейин натижаларни жамлаш керак. Мазкур бобнинг 1-§ идаги 3-хоссага кўра D соҳа бўйича олинган интеграл шу йиғиндига тенг бўлади.

4-эслатма. Агар интеграллаш соҳаси D

$$a \leqslant x \leqslant b,$$
$$c \leqslant y \leqslant d$$

тўғри тўртбурчакдан иборат бўлса, у ҳолда (3.1) ва (3.2) формулалар қуйидаги кўринишларни олади:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy, \tag{3.3}$$

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)\,dx. \tag{3.4}$$

1-мисол. Агар ρ зичлик пластинканинг исталган нуқтасида $\rho=x+y$ формула билан берилган бўлса,

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 1 \leqslant y \leqslant 3 \end{cases}$$

тенгсизликлар системаси билан берилган пластинканинг m массасини ҳисобланг.

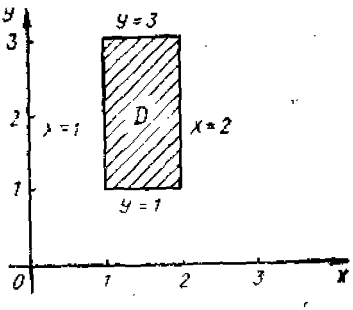
Ечиш. Икки ўлчовли интегралнинг механик маъносидан келиб чиқилса, бу масала ρ дан олинган икки ўлчовли интегралга тенг ((1.2) формула):

$$m=\iint\limits_{D}(x+y)\,dx\,dy,$$

бунда D — томонлари

$$x=1,\ x=2,\ y=1,\ y=3$$

бўлган тўғри тўртбурчак билан чегараланган соҳа.



36- шакл.

D интеграллаш соҳасини тасвирлаймиз, у Ox ўқи йўналиши бўйича ҳам, Oy ўқи йўналиши бўйича ҳам мунтазам. Интегрални ҳисоблаш учун (3.3) формулани қўллаймиз (36- шакл):

$$m=\iint\limits_{D}(x+y)\,dx\,dy=\int\limits_{1}^{2}dx\int\limits_{1}^{3}(x+y)\,dy.$$

Олдин ички интегрални ҳисоблаймиз, унда x ўзгармас деб ҳисобланади:

$$\int\limits_{1}^{3}(x+y)\,dy=\int\limits_{1}^{3}(x+y)\,d\,(x+y)=\frac{1}{2}\,(x+y)^2\,\Big|_1^3=$$

$$=\frac{1}{2}\,(x+3)^2-\frac{1}{2}\,(x+1)^2=2\,(x+2).$$

Демак,

$$m=\int\limits_{1}^{2}2\,(x+2)\,dx=(x+2)^2\,\Big|_1^2=4^2-3^2=7.$$

Биз (3.4) формуладан фойдаланганимизда ҳам шундай натижага эришган бўлардик:

$$m=\int\limits_{1}^{3}dy\int\limits_{1}^{2}(x+y)\,dx=7.$$

2-мисол. Қуйидаги сиртлар билан чегараланган жисм ҳажмини топинг:

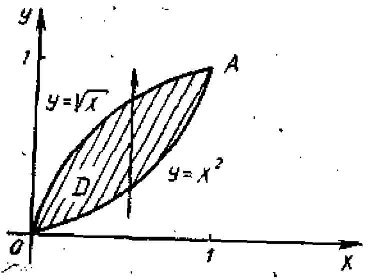
$$z=x^2+y^2,\ z=0,\ y=x^2,\ x=y^2.$$

Ечиш. Берилган жисм цилиндрик жисм: у юқоридан $z=x^2+y^2$ айланма параболоид, қуйидан $z=0$ координаталар текислиги, ён томонлардан ясовчилари Oz ўқига параллел бўлган $y=x^2$, $x=y^2$ параболик цилиндрлар билан чегараланган. Унинг ҳажми V ушбу

$$V=\iint\limits_{D}f\,(x,\,y)\,dx\,dy$$

формула бўйича ҳисобланади.

Жисмни юқоридан чегараловчи сиртнинг тенгламаси $z=x^2+y^2$ интеграл ости функцияси бўлади. D интеграллаш со-



37- шакл.

ҳаси эса $z=0$ текисликдаги $y=x^2$ ва $x=y^2$ параболалар билан чегараланган шаклдан иборат бўлади. Цилиндрик жисмни юқоридан чегараловчи $z=x^2+y^2$ параболоиднинг қисми худди шу соҳага проекцияланади (37-шакл).

D соҳа мунтазам, уни қуйидаги тенгсизликлар системаси билан бериш мумкин:

$$\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 1, \\ x^2\leqslant y\leqslant \sqrt{x} \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} 0\leqslant y\leqslant 1, \\ y^2\leqslant x\leqslant \sqrt{y}\,. \end{cases}$$

Шундай қилиб,

$$V=\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

интегрални ҳисоблаш учун (3.1) ва (3.2) формуладан исталганини қўллаш мумкин. (3.1) формулани қўллаймиз:

$$V=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y^2)\,dy.$$

Олдин ички интегрални ҳисоблаймиз, унда x ўзгармас деб ҳисобланади:

$$\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y^2)\,dy=\left(x^2y+\frac{1}{3}\,y^3\right)\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}}=x^{5/2}+\frac{1}{3}\,x^{3/2}-x^4-\frac{1}{3}\,x^6.$$

Демак, $V=\int\limits_0^1\left(x^{5/2}+\frac{1}{3}\,x^{3/2}-x^4-\frac{1}{3}\,x^6\right)dx=$

$$=\left(\frac{2}{7}\,x^{7/2}+\frac{2}{15}\,x^{5/2}-\frac{1}{5}\,x^5-\frac{1}{21}\,x^7\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{7}+\frac{2}{15}-\frac{1}{5}-\frac{1}{21}=\frac{6}{35}.$$

Шундай қилиб, берилган жисмнинг ҳажми: $V=\frac{6}{35}$ (куб бирлик).

(3.4) формуладан фойдаланилса ҳам шу натижага эришиш мумкин:

$$V=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^2+y^2)\,dx=\frac{6}{35}.$$

3-мисол. Ушбу

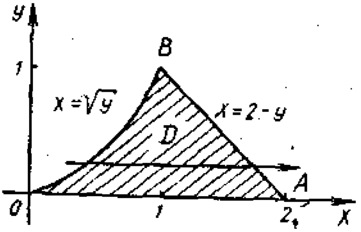
$$I=\iint\limits_D f(x,\,y)\,dx\,dy$$

икки ўлчовли интегрални икки каррали интегралга келтиринг, бунда D — $y=0$, $y=x^2$, $x+y=2$ чизиқлар билан чегараланган соҳа.

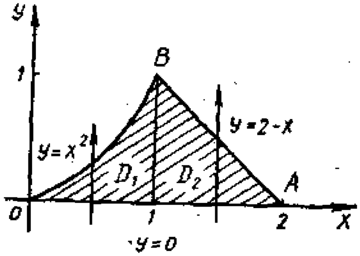
Ечиш. D интеграллаш соҳасини тасвирлаймиз (38- шакл). Бу Ox ўқи йўналишидаги мунтазам соҳа, уни

$$\begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ \sqrt{y} \leqslant x \leqslant 2-y \end{cases}$$

тенгсизликлар системаси билан бериш мумкин, шу сабабли (3.2) формулага биноан:



38- шакл.



39- шакл.

$$I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f\,(x,\,y)\,dx.$$

Агар интеграллаш тартиби ўзгартирилса, у ҳолда натижани бир интеграл кўринишида ёзиб бўлмайди, чунки D соҳа Oy ўқи йўналиши бўйича номунтазам соҳа (OBA чиқиш чегараси ҳар хил қисмда ҳар хил тенгламага эга). D соҳани иккита D_1 ва D_2 мунтазам соҳаларга бўламиз (39- шакл):

$$D_1: \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant x^2 \end{cases} \text{ ва } D_2: \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2-x. \end{cases}$$

Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$I = \iint\limits_D f\,(x,\,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f\,(x,\,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f\,(x,\,y)\,dx\,dy =$$

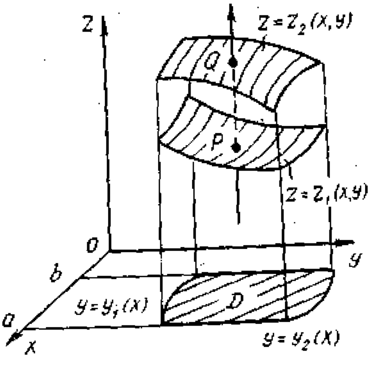
$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f\,(x,\,y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f\,(x,\,y)\,dy.$$

Бу мисол интеграллаш тартибини тўғри танлаш қанчалик муҳим эканини кўрсатади.

2. Уч ўлчовли интегрални ҳисоблаш. Уч ўлчовли

$$\iiint\limits_{\Omega} f\,(x,\,y,\,z)\,dx\,dy\,dz$$

интегрални ҳисоблаш учта аниқ интегрални кетма-кет интеграллашга келтирилади. ω интеграллаш соҳаси пастдан $z=z_1(x, y)$ сирт билан, юқоридан эса $z=z_2(x, y)$ сирт билан чегараланган деб фараз қиламиз. Бу жисм Oxy текисликдаги D соҳага проекциялансин. D соҳа $y=y_1(x)$ ва $y=y_2(x)$ чизиқлар билан (бунда $y_1(x) \leqslant y_2(x)$ ва $x=a$, $x=b$ $(a>b)$ тўғри чизиқлар билан чегараланган бўлсин. ω жисмнинг исталган ички нуқтаси орқали Oz ўқига параллел тўғри чизиқ ўтказамиз (40- шакл). У ω жисм чегарасини иккита P ва Q нуқтада кесиб ўтади. Уч ўлчовли интегралнинг қиймати



40- шакл.

$$\iiint\limits_{\omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_{b}^{a} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz$$

формула бўйича ҳисобланишини исботлаш мумкин.

Ўнгда турган интеграл *уч каррали интеграл* дейилади. Бу интегрални ҳисоблаш учун олдин икки интегрални, x ва y ни ўзгармас деб олиб, z ўзгарувчи бўйича интеграллаш керак. Ҳисоблаш натижаси x ва y га боғлиқ бўлган функциядир. Бу функция ўрта интеграл учун y бўйича интеграл ости функцияси бўлади, бунда x ўзгармас деб ҳисобланади. Ниҳоят, иккинчи интеграллаш натижаси фақат x га боғлиқ функция бўлади. Уни b дан a гача чегарада интеграллаб, уч ўлчовли интегралнинг қийматини топамиз.

4- мисол. Ушбу

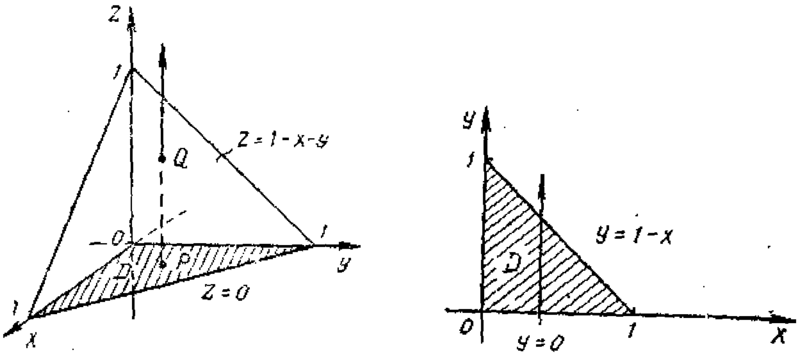
$$I = \iiint\limits_{\omega} (x + y + z)\, dx\, dy\, dz$$

уч ўлчовли интегрални ҳисобланг, бунда ω — координата текисликлари ва $x+y+z=1$ текислик билан чегараланган жисм.

Ечиш. ω интеграллаш соҳасини ва унинг Oxy текисликдаги D проекциясини ясаймиз (41- шакл). ω соҳада ушбу тенгсизликларга эга бўламиз:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x, \\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y. \end{cases}$$

Шундай қилиб, уч ўлчовли интеграл уч каррали интегралга



41- шакл.

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x + y + z)\, dz$$

формула орқали келтирилади. Ички интегрални ҳисоблаймиз, унда z интеграллаш ўзгарувчиси, x ва y ўзгармас деб ҳисобланади:

$$\int_0^{1-x-y} (x + y + z)\, dz = \frac{1}{2} (x + y + z)^2 \Big|_0^{1-x-y} =$$

$$= \frac{1}{2} (x + y + 1 - x - y)^2 - \frac{1}{2} (x + y)^2 = \frac{1}{2} (1 - (x + y)^2).$$

Энди ўрта интегрални ҳисоблаймиз, бунда y интеграллаш ўзгарувчиси, x эса ўзгармас деб ҳисобланади:

$$\frac{1}{2}\int_0^{1-x} (1 - (x + y)^2)\, dy = \frac{1}{2} \left(y - \frac{1}{3} (x + y)^3\right)\Big|_0^{1-x} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - x - \frac{1}{3} (x + 1 - x)^3\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} x^3\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - x - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} x^3\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} x^3 - x + \frac{2}{3}\right).$$

Ниҳоят, ташқи интегрални ҳисоблаймиз:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} x^3 - x + \frac{2}{3}\right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{2} x^2 +\right.$$

$$\left. + \frac{2}{3} x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{8}.$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Қандай соҳа мунтазам соҳа дейилади?
2. Икки ўлчовли интегрални мунтазам соҳа бўйича икки каррали интеграл ёрдамида ҳисоблаш формуласини чиқаринг.
3. Номунтазам соҳа бўлганда икки ўлчовли интеграл қандай ҳисобланади?
4. Уч ўлчовли интеграл уч каррали интеграл ёрдамида қандай ҳисобланади?
5. 3485—3497, 3506—3512, 3517—3524- масалаларни ечинг.

4- §. Икки ўлчовли интегралда ўзгарувчиларни алмаштириш

Биз аниқ интегралларни ҳисоблашда ўзгарувчиларни алмаштириш усули муҳим эканини биламиз. Шу усул ёрдамида интеграл остидаги ифодани бошқа осон интегралланадиган ифода билан алмаштириш мумкин. Икки ўлчовли интеграллар учун шундай усулни қараймиз.

$z=f(x, y)$ функция бирор ёпиқ чегараланган D соҳада узлуксиз бўлсин. Бундай функция учун икки ўлчовли

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \tag{4.1}$$

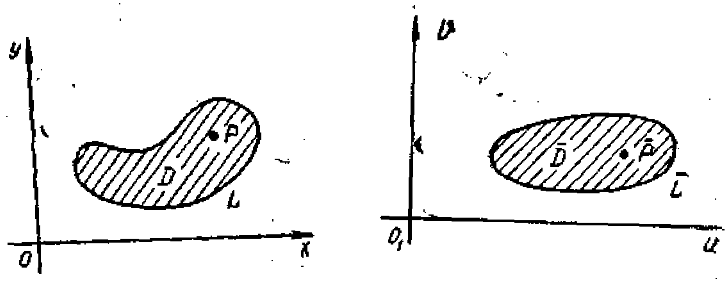
интеграл мавжуд.

Интегралда

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v) \tag{4.2}$$

формулалар ёрдамида янги u, v ўзгарувчиларга ўтамиз, (4.2) формулалардан u, v ўзгарувчиларни ягона усул билан топиш мумкин бўлсин:

$$u=u(x, y), \quad v=v(x, y). \tag{4.3}$$



42- шакл.

(4.3) формулалар ёрдамида D соҳанинг ҳар бир $P(x, y)$ нуқтасига (Oxy координаталар текислигининг) янги O_1uv тўғри бурчакли координаталар системасидан бирор $\overline{P}(u, v)$ нуқта мос келтирилади. Ҳамма $\overline{P}(u, v)$ нуқталарнинг тўплами $\overline{D}$ ёпиқ чегараланган соҳани ҳосил қилади (42- шакл). (4.2) формулалар координаталарни алмаштириш формулалари, (4.3) формулалар эса тескари алмаштириш формулалари дейилади.

Агар (4.2) функциялар D соҳада узлуксиз биринчи тартибли хусусий ҳосилаларга эга бўлса ва агар шу соҳада детерминант

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (4.4)$$

бўлса, у ҳолда (4.1) интеграл учун ўзгарувчиларни алмаштириш формуласи ўринли:

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_{\bar{D}} f(x(u, v),\ y(u, v))|I|\, dudv. \qquad (4.5)$$

I детерминант $x=x(u, v)$ ва $y=y(u, v)$ функцияларнинг u ва v ўзгарувчилар бўйича *функционал детерминанти* дейилади. У шунингдек немис математиги Якоби номи билан *якобиан* деб ҳам аталади.

1-мисол. Ушбу

$$\iint_D (2x-y)\, dx\, dy$$

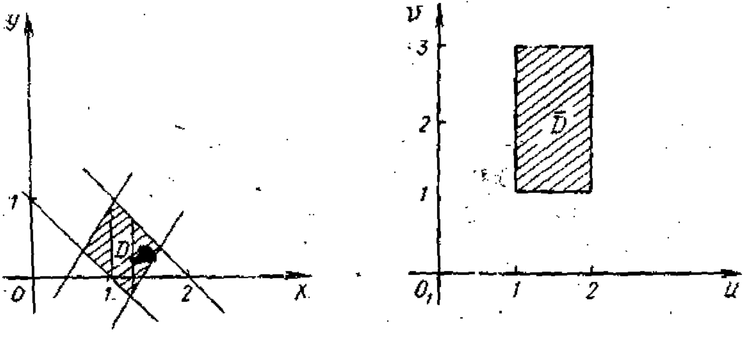
интегрални ҳисобланг, бунда D ушбу

$$x+y=1,\ x+y=2,\ 2x-y=1,\ 2x-y=3$$

тўғри чизиқлар билан чегараланган соҳа.

Ечиш. Интеграллаш соҳасини қараймиз, у Ox ўқ йўналиши бўйича ҳам, Oy ўқ йўналиши бўйича ҳам номунтазам соҳа. Шу сабабли интегрални ҳисоблаш узундан узоқ бўлади, чунки D соҳани мунтазам қисмларга бўлиш (улар учта бўлади), сўнгра эса шунга мос учта интегрални ҳисоблаш керак бўлади. Агар соддагина

$$\begin{cases} x+y=u, \\ 2x-y=v \end{cases} \qquad (4.6)$$



43- шакл.

алмаштиришлар бажарилса, интегрални ҳисоблаш анча осонлашади. Бундай алмаштириш асосида $x+y=1$ ва $x+y=2$ тўғри чизиқлар координаталарнинг янги O_1uv системасида $u=1$ ва $u=2$ тўғри чизиқларга ўтади, $2x-y=1$ ва $2x-y=3$ тўғри чизиқлар эса $v=1$ ва $v=3$ тўғри чизиқларга ўтади. D параллелограмм $\overline{D}$ тўғри тўртбурчак билан алмашади, бу эса содда интеграллаш соҳаси бўлади (43- шакл).

Энди I якобианни ҳисоблаш қолади. Бунинг учун x ва y ўзгарувчиларни (4.5) формула бўйича ифодалаймиз:

$$x=\frac{1}{3}(u+v),$$

$$y=\frac{1}{3}(2u-v).$$

u ва v ўзгарувчилар бўйича хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{3},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{2}{3},\quad \frac{\partial y}{\partial v}=-\frac{1}{3},$$

уларнинг қийматларини эса (4.4) формулага қўямиз:

$$I=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{vmatrix}=-\frac{1}{9}-\frac{2}{9}=-\frac{1}{3}.$$

(4.5) формула бўйича узил-кесил қуйидагига эга бўламиз:

$$\iint\limits_{D}(2x-y)\,dx\,dy=\iint\limits_{\overline{D}}v\cdot\frac{1}{3}\,du\,dv=\frac{1}{3}\int\limits_{1}^{2}du\int\limits_{1}^{3}v\,dv=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_{1}^{2}\frac{1}{2}v^{2}\Big|_{1}^{3}du=\frac{1}{6}\int\limits_{1}^{2}(9-1)\,du=\frac{8}{6}\,u\Big|_{1}^{2}=\frac{4}{3}.$$

Қутб координаталари. x ва y декарт координаталари

$$x=r\cos\varphi,$$

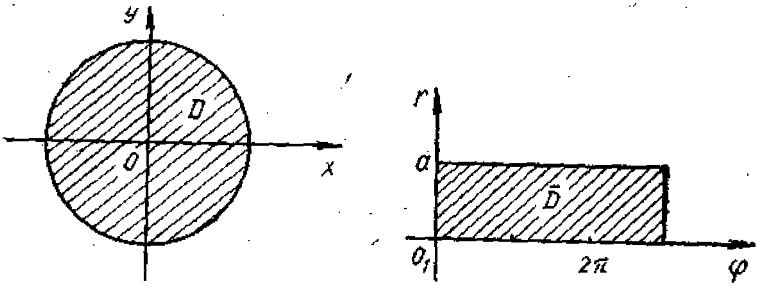
$$y=r\sin\varphi$$

формулалар ёрдамида қутб координаталари r ва φ билан алмашинадиган хусусий ҳолни қараймиз, бу амалий татбиқлар учун муҳимдир.

r ва φ ўзгарувчилар бўйича хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\varphi,\quad \frac{\partial x}{\partial\varphi}=-r\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial r}=\sin\varphi,\quad \frac{\partial y}{\partial\varphi}=r\cos\varphi,$$



44- шакл.

бундан

$$I = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

(4.5) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$\iint\limits_{D} f(x,\ y)\,dxdy = \iint\limits_{\bar{D}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,rdrd\varphi. \qquad (4.7)$$

$rdrd\varphi$ *ифода қутб координаталаридаги юз элементи* дейилади. (4.7) формула кўпинча D соҳа маркази координаталар бошида бўлган

$$x^2 + y^2 \leqslant a^2$$

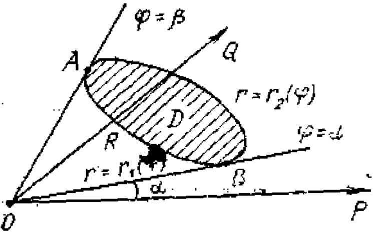
доирадан иборат бўлганда қўлланилади (44- шаклда чапда). Бу ҳолда $\bar{D}$ соҳа қуйидаги

$$0 \leqslant r \leqslant a,$$
$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

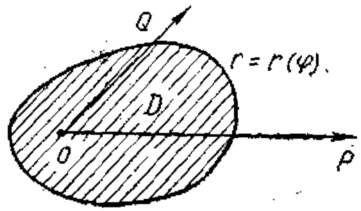
тенгсизликлар билан аниқланади. (4.7) икки ўлчовли интегрални ҳисоблаш r ва φ ўзгарувчилар бўйича икки ўлчовли интегрални ҳисоблашга келтирилади (44- шаклда ўнгда).

Қутб координаталар системасида қутбнинг жойлашишига боғлиқ ҳолда интеграллаш чегараларини жойлаштириш қоидасини кўрсатамиз.

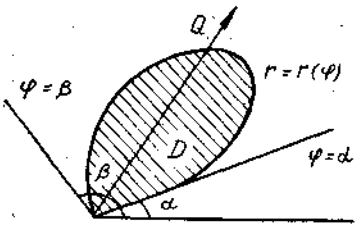
а) O қутб $\varphi=\alpha$ ва $\varphi=\beta$ нурлар орасида жойлашган D соҳада ётмасин, бунда $\varphi=\text{const}$ координата чизиқлари чегарани иккита нуқтада кесиб ўтсин (45- шакл).



45- шакл.



46- шакл.



47- шакл.

ARB ва AQB эгри чизиқларнинг қутб тенгламалари мос равишда $r=r_1(\varphi)$ва $r=r_2(\varphi)$ бўлсин. Берилган интеграллаш соҳаси учун икки ўлчовли интегрални ҳисоблаш формуласи қуйидаги кўринишни олади:

$$\iint\limits_D f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r dr d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r dr. \quad (4.8)$$

б) O қутб D интеграллаш соҳаси ичида ётсин ва $\varphi=\text{const}$ координата чизиқлари чегарани битта нуқтада кесиб ўтсин. Чегаранинг қутб тенгламаси $r=r(\varphi)$ бўлсин (46- шакл). Берилган интеграллаш соҳаси учун икки ўлчовли интегрални ҳисоблаш формуласи қуйидаги кўринишни олади:

$$\iint\limits_D f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r dr d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r dr. \quad (4.9)$$

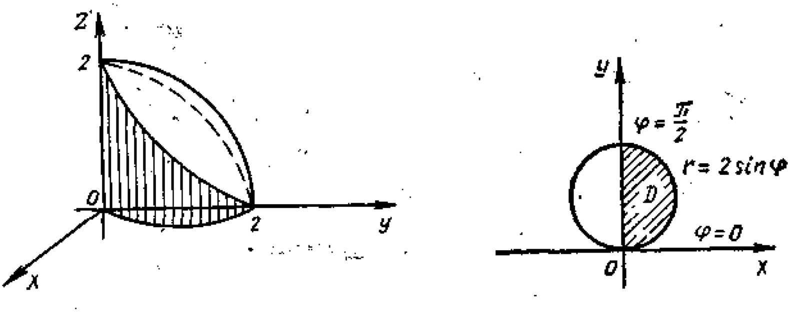
в) O қутб D интеграллаш соҳасининг чегарасига тегишли бўлсин, бунда D соҳа $\varphi=\alpha$ ва $\varphi=\beta$ нурлар орасида ётсин (47- шакл). Чегаранинг қутб тенгламаси $r=r(\varphi)$ бўлсин. Берилган интеграллаш соҳаси учун икки ўлчовли интегрални ҳисоблаш формуласи қуйидаги кўринишни олади:

$$\iint\limits_D f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r dr d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r dr. \quad (4.10)$$

Чиқарилган (4.8), (4.9), (4.10) формулаларда ички интеграллаш ўзгарувчиси r, ташқи интегрални ҳисоблаш ўзгарувчиси эса φ.

2-мисол. Устки ярим сфера $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $z=0$ текислик ва $x^2+y^2-2y=0$ доиравий цилиндр билан чегараланган жисм ҳажмини ҳисобланг.

Ечиш. Ҳажмини ҳисоблаш керак бўлган жисмни ва бу жисм проекцияланадиган интеграллаш соҳасини тасвирлаймиз (48- шакл).



48- шакл.

Изланаётган ҳажм: $V = 2\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy$. Бу интегрални, x ни $r\cos\varphi$ билан, y ни $r\sin\varphi$ билан, $dxdy$ ни $rdrd\varphi$ билан алмаштириб, (4.7) формула бўйича қутб координаталарида ёзамиз:

$$V = 2\iint\limits_D \sqrt{4-r^2}\;rdr\,d\varphi.$$

Интеграллаш соҳаси чегарасининг $x^2+y^2-2y=0$ тенгламаси қутб координаталар системасида $r=2\sin\varphi$ кўринишни олади. Қутб $\varphi=0$ ва $\varphi=\frac{\pi}{2}$ нурлари орасида жойлашган интеграллаш соҳасининг чегарасида жойлашганини пайқаган ҳолда интегралга (4.10) формулани қўллаб ҳисоблаймиз:

$$V = 2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} \sqrt{4-r^2}\,rdr = -2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^{2\sin\varphi}(4-r^2)^{\frac{1}{2}}d(4-$$

$$-r^2) = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2\sin\varphi}d\varphi = -\frac{2}{3}\int\limits_0^{\pi/2}[(4-4\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}}]\,d\varphi=$$

$$=-\frac{2}{3}\int\limits_0^{\pi/2}4^{\frac{3}{2}}[(1-\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}-1]\,d\varphi = -\frac{2}{3}\cdot 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3\varphi-1)\,d\varphi =$$

$$=-\frac{16}{3}\left[\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi - \int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\right] = -\frac{16}{3}\left[\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin^2\varphi)\,d(\sin\varphi)-\right.$$

$$\left.-\varphi\Big|_0^{\pi/2}\right] = -\frac{16}{3}\left[\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi-\varphi\right]\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{16}{3}\left(1-\frac{1}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{16}{3}\left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{16}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

Шундай қилиб, изланаётган ҳажм: $V=\frac{16}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$ (куб. бирлик).

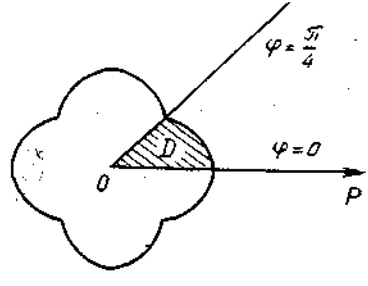
3-мисол. Ушбу

$$(x^2+y^2)^3 = x^4+y^4$$

чизиқ билан чегараланган шакл юзини топинг.

Ечиш. Чизиқ тенгламасида x ни $r\cos\varphi$ билан, y ни $r\sin\varphi$ билан алмаштириб, қутб координаталарида ёзамиз:

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{3+\cos 4\varphi}\,.$$



49- шакл.

Шу чизиқ билан чегараланган соҳани тасвирлаймиз (49-шакл). Бу соҳанинг симметриклиги ҳамда (1.1) формулага биноан изланаётган юз бундай ифодаланади:

$$S = 8\iint_D dx\,dy.$$

Қутб координаталарида $dx\,dy = r\,dr\,d\varphi$, шу сабабли:

$$S = 8\iint_D r\,dr\,d\varphi = 8\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{3+\cos 4\varphi}} r\,dr =$$

$$= 8\int_0^{\pi/4} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{2}\sqrt{3+\cos 4\varphi}} d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4}(3+\cos 4\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (3+\cos 4\varphi)\,d\varphi = \left(3\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{4}\pi.$$

Шундай қилиб, изланаётган юз $S = \frac{3\pi}{4}$ (кв. бирлик).

5-§. Уч ўлчовли интегралда ўзгарувчиларни алмаштириш

Уч ўлчовли интегралда ўзгарувчиларни алмаштириш ҳам икки ўлчовли интегралдагидек амалга оширилади. $f(x, y, z)$ функция фазонинг бирор чегараланган ёпиқ ω соҳасида узлуксиз бўлсин. Бундай функция учун уч ўлчовли

$$\iiint_\omega f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz \qquad (5.1)$$

интеграл мавжуд. Ушбу

$$x = x(u,\ v,\ w),\ y = y(u,\ v,\ w),\ z = z(u,\ v,\ w) \qquad (5.2)$$

формулалар ёрдамида интегралда янги u, v, w ўзгарувчиларга ўтамиз. (5.2) формулалардан u, v, w ларни ягона усул билан аниқлаш мумкин бўлсин:

$$u = u(x,\ y,\ z),\ v = v(x,\ y,\ z),\ w = w(x,\ y\ z). \qquad (5.3)$$

(5.3) формулалар ёрдамида ω соҳанинг ҳар бир $P(x,y,z)$ нуқтасига координаталарнинг O_1uvw системасидан бирор $\overline{P}(u, v, w)$ нуқта мос қўйилади. Ҳамма $\overline{P}(u, v, w)$ нуқталарнинг тўплами фазонинг чегараланган ёпиқ $\overline{\omega}$ соҳасини ташкил қилади. (5.2) формулалар *координаталарни алмаштириш формулалари,* (5.3) формулалар эса тескари *алмаштириш формулалари* дейилади. Шу фаразларда исботлаш мумкинки, агар (5.2) функциялар $\overline{\omega}$ соҳада биринчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлса ва бу соҳада детерминант

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (5.4)$$

бўлса, у ҳолда (5.1) интеграл учун ўзгарувчиларни алмаштириш формуласи ўринли:

$$\iiint\limits_{\omega} f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{\overline{\omega}} f(x(u,\ v,\ w),\ y(u,\ v,\ w),\ z(u,\ v,\ w))\cdot|I|\,du dv\,dw. \qquad (5.5)$$

I детерминант $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$ функцияларнинг u, v, w ўзгарувчилар бўйича *функционал детерминанти* ёки *якобиан* деб аталади.

1. Цилиндрик координаталар. $Oxyz$ координаталар системасида M нуқтани қараймиз. P нуқта M нинг Oxy текисликдаги проекцияси бўлсин. M нуқтанинг фазодаги ҳолатини P нуқтанинг қутб координаталарини Oxy текисликда бериш ва M нуқтанинг z аппликатасини бериш билан аниқлаш мумкин. Бу r, φ ва z сонлар (учта сон) M нуқтанинг *цилиндрик координаталари* дейилади. 50- шаклдан нуқтанинг цилиндрик координаталари унинг декарт координаталари билан қуйидаги муносабатлар билан боғланганини кўринади:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases} \qquad (5.6)$$

бунда $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. r, φ, z бўйича хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1,$$

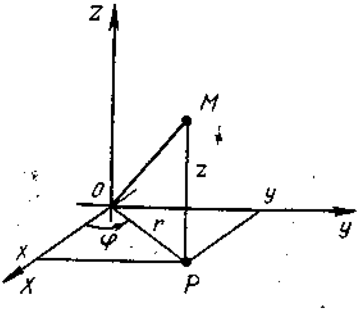
бундан:

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

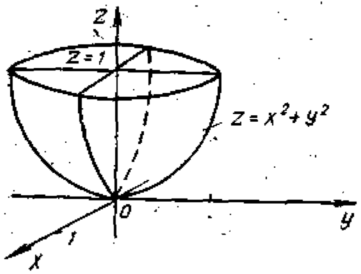
(5.5) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$\iiint\limits_{\omega} f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz = \qquad (5.7)$$

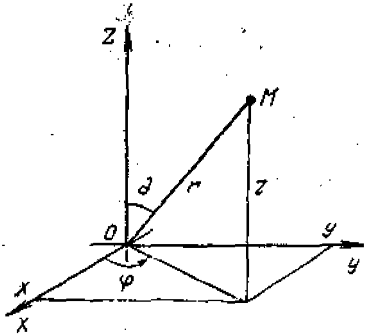
$$= \iiint\limits_{\overline{\omega}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)\,r dr\,d\varphi\,dz.$$



50- шакл.



51- шакл.



52- шакл.

1-мисол. Уч ўлчовли

$$\iiint_{\omega} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

интегрални ҳисобланг, бунда ω соҳа $z=x^2+y^2$ параболоид ва $z=1$ текислик билан чегараланган.

Ечиш. ω интеграллаш соҳаси ва унинг Oxy текисликдаги D проекциясини ясаймиз (51-шакл).

Интегралда цилиндрик координаталарга ўтамиз: интеграл остидаги $f(x, y, z)=x^2+y^2$ функция $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)=r^2$ кўринишни олади, ω соҳа чегарасининг $z=x^2+y^2$ ва $z=1$ тенгламалари бундай ёзилади: $z=r^2$ ва $z=1$, D соҳа чегарасининг $x^2+y^2=1$ тенгламаси $r=1$ бўлади. Шундай қилиб, уч ўлчовли интегрални цилиндрик координаталарда ёзиш ва (5.7) бўйича ҳисоблаш мумкин:

$$\iiint_{\omega} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$=\iiint_{\omega} r^2\cdot r\,dr\,d\varphi\,dz=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 dr\int_{r^2}^1 r^3dz=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 (r^3\cdot z)\Big|_{r^2}^1 dr=$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 r^3(1-r^2)\,dr=\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)d\varphi=\frac{1}{12}\int_0^{2\pi} d\varphi=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}.$$

2. Сферик координаталар. $Oxyz$ координаталар системасида M нуқтани қараймиз. M нуқтанинг фазодаги ҳолати унинг координаталар бошигача бўлган масофаси (M нуқта радиус-вектори узунлиги), радиус-вектор билан Oz ўқ орасидаги θ бурчак ҳамда нуқта радиус-векторининг Oxy ўққа проекцияси билан Ox орасидаги φ бурчак орқали аниқланади. Бу учта r, φ, θ сон M нуқтанинг сферик координаталари дейилади. 52-шаклдан M нуқтанинг сферик координаталари унинг x, y, z декарт координаталари билан қуйидаги муносабатлар орқали боғланганлиги кўриниб турибди:

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,$$

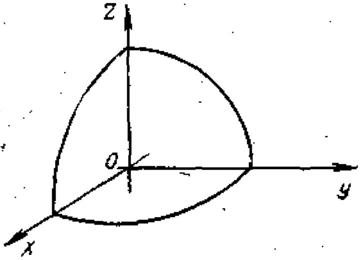
$$y = r\sin\theta\sin\varphi,$$

$$z = r\cos\theta,$$

бунда $r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Алмаштириш якобиани

$$I = r^2\sin\theta$$

эканини ҳисоблаш мумкин, шу сабабли (5.5) формула қуйидаги кўринишни олади:



53- шакл.

$$\iiint\limits_{\omega} f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{\omega} f(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta. \qquad (6.8)$$

2- мисол. Радиуси R га тенг шар ҳажмини ҳисобланг.

Ечиш. (2.1) формулага биноан ва изланаётган ҳажми V га тенг жисмнинг симметриклиги туфайли ҳажм қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$V = 8\overline{V} = 8\iiint\limits_{\omega} dx\,dy\,dz = 8\iiint\limits_{\omega} r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta,$$

бунда $\overline{V}$ — шар ҳажмининг саккиздан бир қисми (53- шакл):

$$0 \leqslant r \leqslant R,$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Демак,

$$V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{R} r^2\sin\theta\,dr =$$

$$= 8\int_0^{\pi/2} d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cdot\frac{r^3}{3}\Big|_0^R d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3\sin\theta\,d\theta =$$

$$= -\frac{8}{3}R^3\int_0^{\pi/2}\cos\theta\Big|_0^{\pi/2} d\varphi = -\frac{8}{3}R^3\int_0^{\pi/2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right)d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3}R^3\int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{8}{3}R^3\cdot\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Шундай қилиб, радиуси R га тенг шар ҳажми

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ (куб бирлик)}$$

дан иборат.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Икки ўлчовли интегралда ўзгарувчи қандай алмаштирилади? Алмаштириш якобиани нима?

2. Икки ўлчовли интеграл қутб координаталарида қандай ифодаланади? Декарт координаталарини қутб координаталарига алмаштириш якобиани нимага тенг?

3. Қутб координаталарида икки ўлчовли интеграл икки каррали интеграл ёрдамида қандай ҳисобланади?

4. Уч ўлчовли интегралда ўзгарувчилар қандай алмаштирилади? Алмаштириш якобиани нима?

5. Уч ўлчовли интеграл цилиндрик координаталарга қандай алмаштирилади? Декарт координаталарини цилиндрик координаталарга алмаштириш якобиани нимага тенг?

6. Уч ўлчовли интеграл сферик координаталарга қандай алмаштирилади? Декарт координаталари сферик координаталарга қандай алмаштирилади? Декарт координаталарини сферик координаталарга алмаштириш якобиани нимага тенг?

7. 3525—3540, 3547—3558- масалаларни ечинг.

11-боб

ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ИНТЕГРАЛЛАР ВА СИРТ ИНТЕГРАЛЛАРИ

1-§. Эгри чизиқли интегралларга олиб келадиган масалалар

Интеграллаш соҳаси бирор эгри чизиқ кесмаси бўлган ҳол учун аниқ интеграл тушунчасини умумлаштирамиз. Бу турдаги интеграллар эгри чизиқли интеграллар дейилади. Улар математиканинг турли бўлимларида қўлланилади. Эгри чизиқли интегралларнинг икки тури фарқ қилинади: биринчи турдаги ва иккинчи турдаги эгри чизиқли интеграллар. Бу тушунчаларга келтирувчи масалаларни қараб чиқамиз.

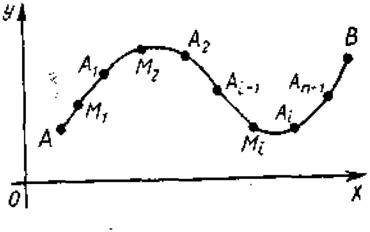
1. Эгри чизиқнинг массасини ҳисоблаш ҳақидаги масала. Фараз қилайлик, бирор AB ясси эгри чизиқда масса узлуксиз тақсимланган бўлсин. Агар эгри чизиқнинг ҳар бир M нуқтасидаги ρ зичлиги маълум бўлса, яъни $\rho = \rho(M)$ бўлса (бунда $\rho = \rho(M)$ — M нуқтанинг берилган узлуксиз функцияси), AB эгри чизиқнинг m массасини топамиз. Бунинг учун AB эгри чизиқни $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_i, \ldots, A_{n-1}$ нуқталар билан n та ёйга (қисмга) ажратамиз (54-шакл). AB эгри чизиқни бўлиш натижасида ҳосил бўлган ёй узунлигининг энг каттасини d билан белгилаймиз ва бўлиниш диаметри деб атаймиз. Агар диаметр $d \to 0$ бўлса, у ҳолда ёйларга бўлиш сони $n \to \infty$ бўлади. $\overset{\smile}{A_{i-1}A_i}$ ёйларнинг ҳар бирида ихтиёрий равишда биттадан $M_i(\overline{x_i}, \overline{y_i})$ нуқта танлаб оламиз ва унда эгри чизиқнинг зичлигини ҳисоблаймиз:

$$\rho_i = \rho(M_i) = \rho(\overline{x_i}, \overline{y_i}).$$

Агар эгри чизиқнинг ҳар бир қисмидаги ҳамма нуқталарда зичлиги ўзгармас ва унинг M_i нуқтадаги қийматига тенг бўлади деб фараз қилинса, у ҳолда ҳар бир ёйнинг m_i массаси тақрибан қуйидагига тенг бўлади:

$$m_i \approx \rho(M_i)\,\Delta l_i = \rho(\overline{x_i}, \overline{y_i})\,\Delta l_i,$$

бунда Δl_i катталик $\overset{\smile}{A_{i-1}A_i}$ ёйнинг узунлиги. Ҳамма ёйларнинг массаларини қўшиб, AB эгри чизиқ m массасининг тақрибий қийматини ҳосил қиламиз:



54-шакл.

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)\Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(\overline{x_i}, \overline{y_i})\Delta l_i. \qquad (1.1)$$

Эгри чизиқ қанчалик кичикроқ бўлакларга ажратилса, бу тенглик шунчалик аниқ бўлади. Моддий эгри чизиқнинг массаси бўлиниш диаметри d нолга интилганда (1.1) тенглик ўнг қисмининг лимитига тенг бўлади, яъни

$$m = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)\Delta l_i = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i)\Delta l_i, \qquad (1.2)$$

бунда

$$d = \max \Delta l_i.$$

Шундай қилиб, эгри чизиқнинг массасини ҳисоблаш масаласи (1.2) лимитни ҳисоблаш масаласига олиб келинди.

2. Кучнинг эгри чизиқ бўйлаб бажарган иши ҳақидаги масала. Фараз қилайлик, M моддий нуқта AB ясси эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланганда координата ўқларида ўзининг P ва Q проекциялари билан берилган $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$ куч таъсирида, яъни

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j} \qquad (1.3)$$

куч таъсирида A ҳолатдан B ҳолатга ўтган бўлсин. $\vec{F}$ кучнинг $\overrightarrow{AB}$ кўчиришда бажарган W ишини топамиз. AB эгри чизиқни A, A_1, A_2, . . . , A_{i-1}, A_i, . . . , A_{n-1}, B нуқталар билан яна n та қисмга (ёйга) бўламиз. Энг катта ёйнинг узунлигини d билан белгилаймиз ва уни бўлиниш диаметри деб атаймиз. Ҳар қайси қисмда (ёйда) ихтиёрий $M_i(\overline{x_i}, \overline{y_i})$ нуқтани танлаймиз ва унда $\vec{F_i} = \{P_i, Q_i\}$ кучнинг қийматини топамиз, бунда

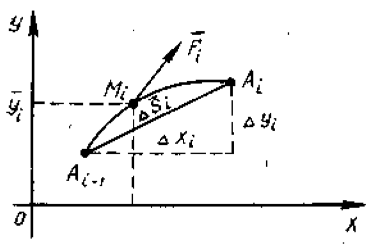
$$\vec{F_i} = \vec{F_i}(\overline{x_i}, \overline{y_i}),\ P_i = P(\overline{x_i}, \overline{y_i}),\ Q_i = Q(\overline{x_i}, \overline{y_i}).$$

Куч ёйнинг нуқталарида ўзгармас сақланади ва унинг таъсирида нуқта ёй бўйича эмас, балки бу ёйнинг ватари $\Delta\vec{S_i} = \overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \{\Delta x_i, \Delta y_i\}$ бўйлаб кўчади деб фараз қиламиз. Ҳар бир ёйдаги ишнинг тақрибий қиймати куч вектори $\vec{F_i}$ ва кўчиш вектори $\Delta\vec{S_i}$ нинг скаляр кўпайтмасига тенг (55-шакл):

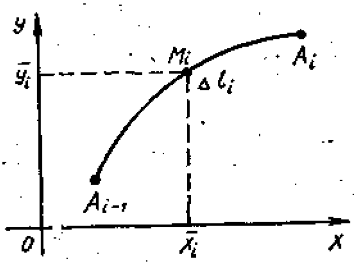
$$W_i = \vec{F_i}\cdot\Delta\vec{S_i} = P(\overline{x_i}, \overline{y_i})\Delta x_i + Q(\overline{x_i}, \overline{y_i})\Delta y_i.$$

Ҳосил қилинган қисм ишларни жамлаб AB эгри чизиқ бўйлаб $\vec{F}$ куч бажарган тўлиқ ишнинг тақрибий қийматини ҳосил қиламиз:

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} [P(\overline{x_i}, \overline{y_i})\Delta x_i + Q(\overline{x_i}, \overline{y_i})\Delta y_i]. \qquad (1.4)$$



55- шакл.



56- шакл.

Моддий нуқтани AB эгри чизиқ бўйлаб кўчиришда $\overrightarrow{F}$ куч бажарган иш учун d бўлиниш диаметри нолга интилганда (1.4) йиғиндининг *лимитини қабул қиламиз*, яъни

$$W = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} [P(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta x_i + Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta y_i]. \tag{1.5}$$

Бу ерда ҳам кучнинг бажарган ишини ҳисоблаш масаласи (1.5) лимитни ҳисоблашга келди.,

Кейинчалик (1.2) ва (1.5) формулаларнинг ўнг қисмлари AB эгри чизиқ бўйлаб биринчи ва иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар эканини кўрамиз.

2-§. Биринчи тур эгри чизиқли интеграл

1. Таърифи ва асосий хоссалари. *Оху* текисликда ҳар бир нуқтасида $f(x, y)$ функция берилган бирор AB силлиқ эгри чизиқни қараб чиқамиз. Бу эгри чизиқни $A, A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_i, \ldots, A_{n-1}, B$ нуқталар билан n та бўлакка (ёйларга) ажратамиз ва ҳар бир ёйда биттадан $M_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ нуқта танлаб оламиз. Бу нуқталарда берилган $f(x, y)$ функциянинг қийматларини ҳисоблаймиз ва қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta l_i, \tag{2.1}$$

бунда Δl_i катталик $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ ёйнинг узунлиги (56- шакл). (2.1) кўринишдаги йиғиндилар $f(x, y)$ функция учун AB ясси эгри чизиқ бўйлаб олинган *биринчи тур интеграл йиғиндилар* деб аталади.

Таъриф. Бўлиниш қисмларининг энг катта Δl_i узунлиги (уни d диаметр деб атаймиз) нолга интилган шартда (2.1) интеграл йиғиндининг лимити *биринчи тур эгри чизиқли интеграл* дейилади (ёки ёй *узунлиги бўйича эгри чизиқли интеграл* дейилади) ва

$$\int_{AB} f(x, y)\, dl$$

каби белгиланади. Шундай қилиб,

$$\int\limits_{AB} f(x,\ y)\,dl = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i,\ \bar{y}_i)\,\Delta l_i, \qquad (2.2)$$

бу ерда AB эгри чизиқни контур ёки интеграллаш йўли деб атаймиз. Агар $f(x,\ y)$ функция AB контурнинг ҳамма нуқталарида узлуксиз бўлса, бу лимит мавжуд бўлади. Биринчи тур эгри чизиқли интеграл AB интеграллаш йўлининг йўналишига боғлиқ бўлмайди, чунки Δl_i ёйнинг узунлиги A_{i-1} ёки A_i нуқталардан қайси бири ёйнинг боши учун ва қайси бири охири учун қабул қилинганига боғлиқ бўлмайди, яъни

$$\int\limits_{AB} f(x,\ y)\,dl = \int\limits_{BA} f(x,\ y)\,dl.$$

(2.2) ва (1.2) формулаларни таққослаб, зичлиги $\rho(x,\ y)$ бўлган моддий AB эгри чизиқнинг m массаси $\rho\ (x,\ y)$ зичликдан AB эгри чизиқ бўйича олинган биринчи тур эгри чизиқли интегралга тенг, яъни

$$m = \int\limits_{AB} \rho(x,\ y)\,dl \qquad (2.3)$$

бўлишини кўрамиз.

Агар AB контурнинг ҳамма нуқталарида интеграл остидаги $f(x,y) \equiv 1$ бўлса, у ҳолда биринчи тур (2.2) эгри чизиқли интегралнинг қиймати сон жиҳатдан AB эгри чизиқнинг L узунлигига тенг бўлади, яъни

$$L = \int\limits_{AB} dl. \qquad (2.4)$$

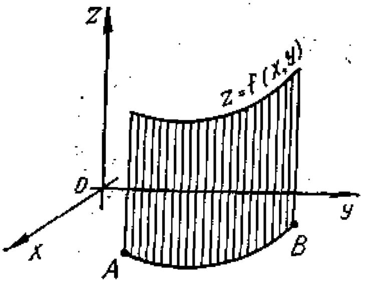
Агар AB эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасида интеграл остидаги функция $f(x,y) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда (2.2) эгри чизиқли интеграл сон жиҳатидан ясовчилари Oz ўқига параллел бўлган цилиндрик сирт бўлагининг S юзига тенг бўлади. Бу сиртнинг йўналтирувчиси AB контур бўлади, у юқоридан $z=f(x,y)$ сирт билан, пастдан $z=0$ текислик билан чегараланган (57- шакл). Шундай қилиб,

$$S = \int\limits_{AB} f(x,\ y)\,dl. \qquad (2.5)$$

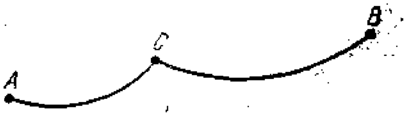
Ясси AB эгри чизиқ бўйича олинган эгри чизиқли интегралнинг геометрик маъноси ана шундан иборат.

Эгри чизиқли интегралнинг асосий хоссаларини биз санаб ўтамиз холос, чунки уларнинг исботи аниқ интегралнинг мос хоссалари исботига ўхшашдир.

1-хосса. Ўзгармас кўпайтувчини эгри чизиқли интеграл ишорасидан ташқарисига чиқариш мумкин, яъни агар k ўзгармас сон бўлса,



57- шакл.



58- шакл.

$$\int\limits_{AB} k f(x,\ y)\, dl = k \int\limits_{AB} f(x,\ y)\, dl.$$

2- хосса. Бир неча функциянинг алгебраик йиғиндисидан олинган эгри чизиқли интеграл қўшилувчилардан олинган (иккита қўшилувчи билан чеклнамиз) эгри чизиқли интегралларнинг алгебраик йиғиндисига тенг:

$$\int\limits_{AB} [f(x,\ y) \pm \varphi(x,\ y)]\, dl = \int\limits_{AB} f(x,\ y)\, dl \pm \int\limits_{AB} \varphi(x,\ y)\, dl.$$

3- хосса. Агар интеграллаш йўли AB бир неча қисмга бўлинса, у ҳолда бутун йўл бўйича олинган эгри чизиқли интеграл ҳар бир қисм бўйича (икки қисм билан чекланамиз) олинган эгри чизиқли интеграллар йиғиндисига тенг бўлади (58- шакл).

$$\int\limits_{AB} f(x,\ y)\, dl = \int\limits_{AC} f(x,\ y)\, dl + \int\limits_{CB} f(x,\ y)\, dl.$$

Пировардида шуни қайд қиламизки, агар AB фазовий эгри чизиқ ва унда $f(x, y, z)$ функция аниқланган бўлса, у ҳолда ясси эгри чизиққа ўхшаш ҳолда бу фазовий эгри чизиқ бўйлаб биринчи тур эгри чизиқли интегрални аниқлаш мумкин, у қуйидагича белгиланади:

$$\int\limits_{AB} f(x,\ y,\ z)\, dl. \qquad (2.6)$$

2. Биринчи тур эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш. $\int\limits_{AB} f(x,\ y)\, dl$ эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш аниқ интегрални ҳисоблашга келтирилади. Фараз қилайлик, ясси силлиқ AB эгри чизиқнинг параметрик тенгламаси

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

кўринишда бўлсин, шу билан бирга x'_t, y'_t узлуксиз ҳосилалар мавжуд бўлсин. Фараз қилайлик, t параметр α дан β гача ўзгарадиган бўлсин, шу билан бирга $\alpha < \beta$. У ҳолда ёйнинг дифференциали

$$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt.$$

ва эгри чизиқли интеграл аниқ интеграл орқали

$$\int\limits_{AB} f(x,\, y)\, dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),\ y(t)) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt \qquad (2.7)$$

формула бўйича ифодаланади. Жумладан, агар AB силлиқ эгри чизиқ $y = y(x)$ ошкор тенглама билан берилган бўлса (бунда $a \leqslant x \leqslant b$),

$$\int\limits_{AB} f(x,\, y)\, dl = \int\limits_{a}^{b} f(x,\, y(x)) \sqrt{1 + y'^2}\, dx \qquad (2.8)$$

бўлади.

(2.6) фазовий эгри чизиқ бўйича олинган биринчи тур эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш техникаси ясси эгри чизиқ бўйича олинган интегрални ҳисоблаш техникасидан фарқ қилмайди, хусусан:

$$\int\limits_{AB} f(x,\, y,\, z)\, dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),\, y(t),\, z(t)) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\, dt, \qquad (2.9)$$

бу ерда $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ тенгламалар AB эгри чизиқнинг параметрик тенгламалари, шу билан бирга t параметр α дан β гача ўзгаради ($\alpha < \beta$).

1-мисол. Ушбу

$$\int\limits_{AB} (x + y + z)\, dl$$

интегрални ҳисобланг, бунда AB — қуйидаги параметрик тенгламалар билан берилган винт чизиқ ўрамининг ёйи:

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t, \text{ бунда } 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Ечиш. (2.9) формулага кўра қуйидагиларни топамиз;

$$\int\limits_{AB} (x + y + z)\, dl = \int\limits_{0}^{\pi/2} (\cos t + \sin t + t) \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2}\, dt =$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{8}\right) - \sqrt{2}(\sin 0 - \cos 0 + 0) =$$

$$= \sqrt{2}\left(1 + 1 + \frac{\pi^2}{8}\right) = \sqrt{2}\left(2 + \frac{\pi^2}{8}\right).$$

2-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$\int\limits_{AB} x^2\, dl,$$

бунда AB — $1 \leqslant x \leqslant 2$ бўлганда, $y = \ln x$ текис эгри чизиқнинг ёйи.

Ечиш. (2.8) формуладан фойдаланиб, ҳосил қиламиз:

$$\int\limits_{AB} x^2\, dl = \int\limits_1^2 x^2 \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\, dx = \int\limits_1^2 x\sqrt{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \sqrt{x^2+1}\, d(x^2+$$

$$+1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(5^{3/2}-2^{3/2}) = \frac{1}{3}(\sqrt{5^3}-\sqrt{2^3}).$$

3-§. Иккинчи тур эгри чизиқли интеграл

1. Таърифи ва асосий хоссалари. Фараз қилайлик, Oxy текисликда йўналтирилган AB силлиқ эгри чизиқ берилган бўлсин, унда унинг A боши ва B охири ҳамда шу эгри чизиқдаги $P(x, y)$ функция кўрсатилган бўлсин. Бу эгри чизиқни

$$A,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{i-1},\ A_i,\ \ldots,\ A_{n-1},\ B$$

нуқталар билан A дан B га қараб йўналишда ихтиёрий узунликдаги n та бўлакка (ёйга) бўламиз (59-шакл). Ҳар бир ёйда M_i $(\overline{x}_i,\ \overline{y}_i)$ нуқтани танлаб оламиз. $P(x, y)$ функциянинг шу нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз. Ҳар бир ёй учун

$$P(\overline{x}_i,\ \overline{y}_i)\,\Delta x_i$$

кўпайтмани ҳисоблаймиз, бунда Δx_i — $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ ёйнинг Ox ўқдаги проекцияси. *Ёйнинг Ox ўқдаги проекцияси деганда бу ёй ватарининг Ox ўқидаги проекцияси тушунилади,* яъни

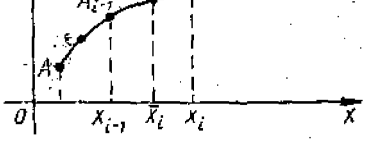
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

бунда x_i ва x_{i-1} — $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ ватарнинг A_i охири ва A_{i-1} бошининг абсциссалари. Ҳосил қилинган кўпайтмаларни қўшамиз:

$$\sum_{i=1}^{n} P(\overline{x}_i,\ \overline{y}_i)\,\Delta x_i. \tag{3.1}$$

(3.1) кўринишдаги йиғинди $P(x, y)$ функция учун AB эгри чизиқ бўйича x координатага нисбатан иккинчи тур интеграл йиғинди дейилади. Иккинчи тур (3.1) интеграл йиғиндининг биринчи тур (2.1) интеграл йиғиндидан фарқи шундан иборатки, у ерда функциянинг қиймати бўлиниш қисмининг узунлигига кўпайтирилади, бу ерда эса бу қисмнинг Ox ўқдаги проекциясига кўпайтирилади.

Таъриф. Энг катта бўлиниш қисмининг узунлиги нолга интилганда (3.1) интеграл йиғиндининг лимити *иккинчи тур эгри чизиқли интеграл* (ёки *x координата бўйича эгри чизиқли интеграл*) дейилади ва бундай белгиланади:



59-шакл.

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx \qquad (3.2)$$

Бу ерда *AB* контур ёки интеграллаш йўли дейилади ва *A* нуқта шу контурнинг бошланғич, *B* эса охирги нуқтаси дейилади.

(3.1) интеграл йиғиндининг тузилишидан иккинчи тур эгри чизиқли интеграл ўз қийматини *AB* интеграллаш йўли ўзгарганда қарама-қаршисига алмаштириши келиб чиқади, яъни

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx = -\int_{BA} P(x, y)\, dx. \qquad (3.3)$$

Ҳақиқатан ҳам, агар эгри чизиқнинг йўналиши ўзгартирилса, у ҳолда (3.1) *йиғиндидаги* Δx_i *проекцияларнинг ишоралари* ҳам ўзгаради. Демак, йиғиндининг ўзи ва унинг (3.2) лимити ишорасини ўзгартиради.

y координата бўйича иккинчи тур эгри чизиқли интеграл ҳам шунга ўхшаш аниқланади, у бундай белгиланади:

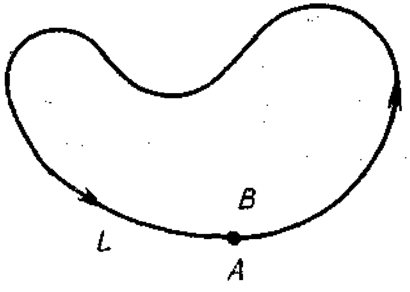
$$\int_{AB} Q(x, y)\, dy. \qquad (3.4)$$

(3.2) ва (3.4) эгри чизиқли интегралларнинг йиғиндиси иккинчи тур умумий эгри чизиқли интеграл (ёки координаталар бўйича эгри чизиқли интеграл) дейилади ва бундай белгиланади:

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx + Q(x, y) dy. \qquad (3.5)$$

Агар $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$— $\vec{F}$ кучнинг координаталар ўқидаги проекцияси бўлса, у ҳолда (1.5) муносабатдан иккинчи тур умумий эгри чизиқли интеграл шу кучнинг *AB* йўлдаги ишини ифодалаши келиб чиқади. Иккинчи тур эгри чизиқли интегралнинг механик маъноси шундан иборат.

Иккинчи тур эгри чизиқли интеграл биринчи тур эгри чизиқли интегралнинг ҳамма хоссаларига эга бўлади, бундан қуйидаги мустасно: интеграллаш контури йўналиши ўзгарганда интеграл (3.3) нинг ишораси ўзгаради.



60- шакл.

Агар контурнинг охирги *B* нуқтаси бошланғич *A* нуқтаси билан устма-уст тушса, *AB* эгри чизиқ ёпиқ бўлади (60- шакл). Бу ҳолда (3.5) интегралда *AB* ёпиқ контур ҳар доим мусбат йўналишда айланиб ўтилади, бунда шу контур ичида ётувчи соҳа айланиб ўтувчи нуқтага нисбатан чап томонда қолади деб ҳисоблаймиз. Контурни айланиб ўтишнинг қарама-қарши йўналишини *манфий йўналиш* деб атаймиз.

Эгри чизиқли интегрални L ёпиқ контур бўйича белгилаш учун

$$\oint_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \tag{3.6}$$

белгидан фойдаланилади.

Пировардида, агар AB — фазовий эгри чизиқ ва унда $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ функциялар аниқланган бўлса, ясси эгри чизиқ ҳолига ўхшаш бу фазовий эгри чизиқ бўйича олинган иккинчи тур эгри чизиқли интегрални аниқлаш мумкин. Интеграл бундай белгиланади:

$$\int_{AB} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz. \tag{3.7}$$

2. Иккинчи тур эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш. Иккинчи тур эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш ҳам аниқ интегрални ҳисоблашга келтирилади.

Фараз қилайлик, AB силлиқ ясси эгри чизиқ

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин, бунда t параметрнинг α дан β гача ўзгаришига эгри чизиқ бўйлаб бошланғич A нуқтадан охирги B нуқтага қараб ҳаракат мос келади. Бу ерда α миқдор β дан кичик бўлиши шарт эмас. У ҳолда $\int_{AB} P(x, y)\,dx$ эгри чизиқли интеграл

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t))x'(t)\,dt \tag{3.8}$$

формула бўйича аниқ интеграл билан ифодаланади. $\int_{AB} Q(x, y)\,dy$ интеграл учун ҳам худди шунга ўхшаш формулани ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, иккинчи тур умумий эгри чизиқли интеграл қуйидаги формулага кўра аниқ интеграл билан ифодаланади:

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t))x'(t) + + Q(x(t), y(t))\,y'(t)]\,dt. \tag{3.9}$$

Агар ясси эгри чизиқ ушбу

$$y = y(x), \quad a \leqslant x \leqslant b$$

ошкор тенглама билан берилган бўлса, у ҳолда (3.9) тенглик

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_{a}^{b} [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))\,y'(x)]\,dx \tag{3.10}$$

кўринишни олади, бу ерда a ва b катталиклар AB ёйининг A ва учларининг абсциссалари. Иккинчи тур эгри чизиқли интеграли (3.7) эгри чизиқ бўйича ҳисоблаш техникаси ясси эгри чизиқ бўйи интегрални ҳисоблаш техникасидан фарқ қилмайди:

$$\int_{AB} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) +$$
$$+ Q(x(t), y(t), z(t))\,y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))\,z'(t)]\,dt, \qquad (3.11)$$

бу ерда $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — AB эгри чизиқнинг параметрик тенгламалари, t параметр α дан β гача ўзгаради, бу эса эгри чизиқ бўйича A нуқтадан B нуқтагача йўналишга мос келади.

1-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$\int_{AB} (x + y)\,dx + (x - z)dy + (y + z)\,dz,$$

бу ерда AB — тўғри чизиқнинг $A(-1;\ 2;\ 0)$ нуқтадан $B(3;\ 1;\ 2)$ нуқтагача оралиқдаги кесмаси.

Ечиш. Аввал икки A ва B нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузамиз:

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}.$$

Бу эгри чизиқнинг параметрик тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлиши равшан:

$$x = 4t - 1,\quad y = -t + 2,\quad z = 2t.$$

Бунда A нуқта параметрнинг $t = 0$ қийматига мос келади, B нуқта эса параметрнинг $t = 1$ қийматига мос келади. Шундан сўнг $x'(t) = 4$, $y'(t) = -1$, $z'(t) = 2$ ларга эга бўламиз. (3.1) формуладан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$\int_{AB} (x + y)dx + (x - z)dy + (y + z)\,dz = \int_0^1 [(4t - 1 - t + 2)4 +$$
$$+ (4t - 1 - 2t)(-1) + (-t + 2 + 2t)\,2]\,dt = \int_0^1 [(3t + 1)4 -$$
$$-(2t - 1) + (t + 2)\,2]\,dt = \int_0^1 (12t + 9)\,dt = (6t^2 + 9t)\Big|_0^1 = 6 + 9 = 15.$$

2-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$\int_{AB} xy^2\,dx + x^2y\,dy,$$

бунда AB — $y = x^2$ параболанинг $A(1;\ 1)$ нуқтасидан $B(2,\ 4)$ нуқтасигача бўлган ёйидир.

Ечиш. x ни параметр учун қабул қилиб, (3.10) формулага кўра қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_{AB} xy^2\,dx + x^2y\,dy = \int_1^2 (x\cdot x^4 + x^2\cdot x^2 2x)dx = 3\int_1^2 x^5 dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^6\Big|_1^2 = \frac{63}{2}.$$

3-**мисол.** Ёпиқ контур бўйича олинган қуйидаги эгри чизиқли интегрални ҳисобланг:

$$\oint_L (x^2+y^2)\,dy,$$

бунда L — учлари $A(0;\,0)$, $B(2;\,0)$, $C(2;\,4)$; $D(0;\,4)$ нуқталарда жойлашган (нуқталар айланиб ўтиш тартибида жойлаштирилган) тўртбурчакнинг контури.

Ечиш. L контурни айланиб ўтиш йўналиши шаклда кўрсатилган (61-шакл).

Интеграллаш контури L ни тўрт қисмга бўлиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\oint_L (x^2+y^2)\,dy = \int_{AB}(x^2+y^2)\,dy + \int_{BC}(x^2+y^2)dy + \int_{CD}(x^2+y^2)dy +$$

$$+\int_{DA}(x^2+y^2)dy.$$

Ҳосил бўлган ифоданинг ўнг томонидаги ҳар бир интегрални ҳисоблаб чиқамиз: $\int_{AB}(x^2+y^2)\,dy = 0$, чунки AB контурда $y=0$ ва $dy=0$. BC контурнинг тенгламаси $x=2$ бўлади, y параметр 0 дан 4 гача ўзгаради, шунинг учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\int_{BC}(x^2+y^2)\,dy = \int_0^4 (4+y^2)dy = \left(4y+\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^4 = 16+\frac{64}{3} = \frac{112}{3}.$$

$\int_{CD}(x^2+y^2)dy = 0$, чунки CD контурда $y=4$ ва $dy=0$. DA контурнинг тенгламаси $x=0$ бўлади, y параметр 4 дан 0 гача ўзгаради, шунинг учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

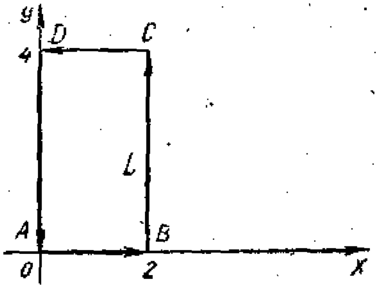
$$\int_{DA}(x^2+y^2)dy = \int_4^0 (0+y^2)dy = \frac{1}{3}y^3\Big|_4^0 = -\frac{64}{3}.$$

Шундай қилиб, натижада қуйидагини ҳосил қиламиз:

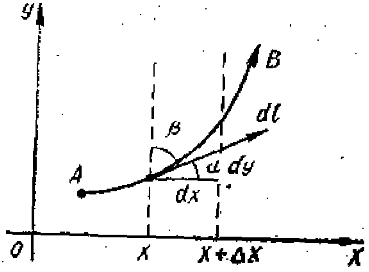
$$\oint_L (x^2+y^2)dy = \frac{112}{3} - \frac{64}{3} = 16.$$

Пировардида биринчи ва иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар орасидаги боғланишни кўрамиз.

AB эгри чизиққа $M(x,\,y)$ нуқтада ўтказилган йўналтирилган уринманинг координата ўқлари билан ҳосил қилган бур-



61- шакл.



62- шакл.

чакларни α ва β орқали белгилаймиз (уринманинг мусбат йўналиши учун нуқтанинг A дан B га қараб эгри чизиқ бўйлаб ҳаракат йўналишини қабул қиламиз) (62- шакл).

Шаклдан

$$dx = \cos\alpha \cdot dl, \quad dy = \cos\beta \cdot dl$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Иккинчи тур эгри чизиқли интегралларда dx ва dy ни олинган муносабатлар билан алмаштириб, уларни биринчи тур эгри чизиқли интегралларга алмаштирамиз:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx = \int\limits_{AB} P(x, y)\cos\alpha\, dl, \quad \int\limits_{AB} Q(x, y)dy = \int\limits_{AB} Q(x, y)\cos\beta\, dl,$$

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{AB} (P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\cos\beta)dl. \quad (3.12)$$

Шундай қилиб, биз биринчи ва иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар орасидаги боғланишни ифодаловчи формулаларни ҳосил қилдик.

AB фазовий эгри чизиқ бўлган ҳол учун ҳам шунга ўхшаш формула ўринли бўлади:

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int\limits_{AB} [P(x, y, z)\cos\alpha +$$
$$+ Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma]dl, \quad (3.13)$$

бу ерда α, β, γ — AB эгри чизиққа ўтказилган йўналтирилган уринманинг координата ўқлари билан ташкил этган бурчаклари.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Эгри чизиқнинг массаси қандай аниқланади?
2. Нуқтанинг куч таъсирида эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланишида бажариладиган иш қандай аниқланади?
3. Берилган чизиқ бўйича биринчи тур эгри чизиқли интеграл деб нимага айтилади?
4. Биринчи тур эгри чизиқли интегралнинг хоссаларини санаб ўтинг.
5. Интеграллаш контури йўналиши биринчи тур эгри чизиқли интегралнинг катталигига таъсир қиладими, тушунтиринг.
6. Агар интеграллаш контури тенгламаси параметрик кўринишда берилган бўлса, биринчи тур эгри чизиқли интеграл қандай ҳисобланади? Формулани келтиринг.

7. Агар интеграллаш контури тенгламаси $y=y\ (x)$ ёки $x=x\ (y)$ кўринишда ошкор берилган бўлса, биринчи тур эгри чизиқли интеграл қандай ҳисобланади? Мисоллар келтиринг.

8. Эгри чизиқ бўйлаб олинган иккинчи тур эгри чизиқли интеграл деб нимага айтилади?

9. Интеграллаш контури йўналиши иккинчи тур эгри чизиқли интегралнинг катталигига қандай таъсир кўрсатади?

10. Интеграллаш контури ёпиқ бўлган ҳолда айланиб ўтишнинг мусбат йўналиши қандай белгиланади?

11. Агар интеграллаш контури тенгламаси параметрик кўринишда берилган бўлса, иккинчи тур эгри чизиқли интеграл қандай ҳисобланади? Формуласини келтиринг.

12. Агар интеграллаш контури тенгламаси $y=y\ (x)$ ёки $x=x\ (y)$ кўринишда ошкор берилган бўлса, иккинчи тур эгри чизиқли интеграл қандай ҳисобланади? Мисоллар келтиринг.

13. Биринчи ва иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар ўзаро қандай боғланган?

14. 3770—3799, 3806—3821, 3869—3875- масалаларни ечинг.

4- §. Грин формуласи

Бу параграфда ёпиқ контур бўйича олинган иккинчи тур эгри чизиқли интеграл ҳамда шу контур билан чегараланган соҳа бўйича олинган икки ўлчовли интеграл орасидаги боғланишни кўрамиз.

Теорема. *Агар $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функциялар D соҳада ўзларининг биринчи тартибли хусусий ҳосилалари билан узлуксиз бўлса, у ҳолда*

$$\oint_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \qquad (4.1)$$

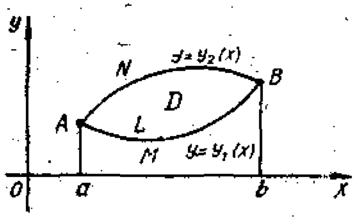
формула ўринли бўлади, бу ерда L — D соҳанинг чегараси (L бўйича интеграллаш мусбат йўналишда амалга оширилади). (4.1) формула *Грин формуласи* дейилади.

Исботи. Фараз қилайлик, L контур билан чегараланган D соҳа мунтазам бўлсин (10- боб, 3- §). Бу соҳа қуйидан AMB эгри чизиқ билан (унинг тенгламаси $y=y_1\ (x)$) юқоридан ANB эгри чизиқ билан чегараланган (унинг тенгламаси $y=y_2(x)$) бўлсин, шу билан бирга $y_1(x) \geqslant y_2(x)$ ва $a \leqslant x \leqslant b$ (63- шакл). Бундай D соҳани қуйидаги тенгсизликлар системаси кўринишида ифодалаш мумкин:

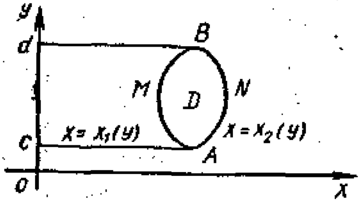
$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x). \end{cases}$$

Иккала AMB ва ANB эгри чизиқлар биргаликда $AMBNA$ ёпиқ контурни ташкил этади.

Аввал $\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy$ икки ўлчовли интегрални қараб чиқамиз ва уни эгри чизиқли интегралга алмаштирамиз. Бунинг учун уни икки каррали интеграл кўринишида ифодалаймиз:



63- шакл.



64- шакл.

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int\limits_a^b P(x,\ y)\Bigg|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \int\limits_a^b [P(x,\ y_2(x)) -$$

$$-P(x,\ y_1(x))]dx = \int\limits_a^b P(x,\ y_2(x))\,dx - \int\limits_a^b P(x,\ y_1(x))dx. \qquad (4.2)$$

(4.2) нинг ўнг қисмида турган интегралларнинг ҳар бири иккинчи тур эгри чизиқли интеграл бўлиб, улар тегишли эгри чизиқ бўйича олинган:

$$\int\limits_a^b (P(x,\ y_2(x))\,dx = \int\limits_{ANB} P(x,\ y)\,dx = -\int\limits_{BNA} P(x,\ y)dx,$$

$$\int\limits_a^b P(x,\ y_1(x))dx = \int\limits_{AMB} P(x,\ y)\,dx.$$

Шундай қилиб, (4.2) ифодани бундай ёзиш мумкин:

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\left[\int\limits_{BNA} P(x,\ y)\,dx + \int\limits_{AMB} P(x,\ y)\,dx\right] = -\int\limits_{BNAMB} P(x,\ y)dx,$$

яъни

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\oint\limits_L P(x,\ y)dx. \qquad (4.3)$$

Ушбу

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \oint\limits_L Q(x,\ y)\,dy \qquad (4.4)$$

формула ҳам худди шунга ўхшаш исботланади. Бу ерда L контур билан чегараланган D соҳа (64-шакл) қуйидаги тенгсизликлар системалари билан ифодаланади:

$$\begin{cases} c \leqslant y \leqslant d, \\ x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y). \end{cases}$$

(4.4) тенгликдан (4.3) тенгликни ҳадма-ҳад айириб, изланаётган (4.1) формулани ҳосил қиламиз.

Грин формуласини исботлашда биз D соҳани мунтазам деб фараз қилган эдик. Бу формула чекли сондаги мунтазам соҳаларга ажратиш мумкин бўлган ҳар қандай ёпиқ D соҳа учун ҳам ўринли бўлиб қолади.

Мисол. Грин формуласи ёрдамида қуйидаги эгри чизиқли интегрални ҳисобланг:

$$\oint_L (x-y)\,dx+(x+y)\,dy,$$

бунда L — $x^2+y^2=R^2$ айланадир.

Ечиш. $P(x, y)=x-y$, $Q(x, y)=x+y$ функциялар ва уларнинг $\frac{\partial P}{\partial y}=-1$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=1$ хусусий ҳосилалари буту текисликда узлуксиз, демак, $x^2+y^2\leqslant R^2$ ёпиқ доирада ҳам узлуксиздир. Бинобарин, исботланган теоремага кўра Грин формуласи берилган интегралда қўлланилиши мумкин. Шунинг учун қуйидагига эга бўламиз:

$$\oint_L (x-y)dx+(x+y)\,dy=\iint_D(1-(-1))\,dx\,dy=$$

$$=2\iint_D dx\,dy=2\cdot S=2\pi R^2,$$

чунки $\iint_D dx\,dy=S$, бунда S — интеграллаш соҳасининг юзи. Бизнинг ҳолда бу доиранинг юзидир: $S=\pi R^2$.

Олинган натижани берилган интегрални бевосита ҳисоблаш билан текшириш мумкин. Бунинг учун айлананинг тенгламасини (интеграллаш контурини) параметрик кўринишда ёзамиз:

$$x=R\cos t,\quad y=R\sin t,$$

бунда $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

(3.9) формула бўйича эгри чизиқли интегрални ҳисоблаймиз:

$$\oint_L (x-y)dx+(x+y)\,dy=\int_0^{2\pi}[(R\cos t-R\sin t)(-R\sin t)+$$

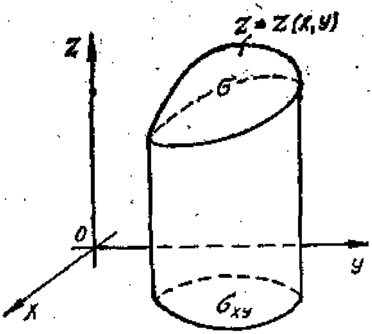
$$+(R\cos t+R\sin t)R\cos t]dt=R^2\int_0^{2\pi}(-\cos t\sin t+\sin^2 t+$$

$$+\cos^2 t+\sin t\cos t)\,dt=R^2\int_0^{2\pi}dt=2\pi R^2.$$

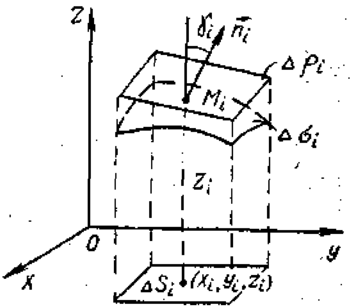
5- §. Биринчи тур сирт интеграли

1. Сиртнинг юзи. Сирт интеграли деб аталувчи тушунчани киритишдан олдин σ сиртнинг юзини ҳисоблаш ҳақидаги масалани ҳал қиламиз.

Фараз қилайлик, σ сирт $z=z(x, y)$ тенглама билан берилган бўлсин, унинг Oxy текисликдаги проекцияси σ_{xy} соҳа бўлади. Бу соҳада $z=z(x, y)$ функция узлуксиз ва $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ узлуксиз ху-



65- шакл.



66- шакл.

сусий ҳосилаларга эга бўлсин. Сиртнинг юзини аниқлаш учун σ_{xy} соҳани ихтиёрий ΔS_i, $i=\overline{1,n}$ юзли n та қисмга бўламиз.

Сиртнинг Oxy текисликдаги проекцияси ΔS_i бўлган қисмини $\Delta\sigma_i$ билан белгилаймиз (65- шакл). Шундай қилиб, σ сирт ҳам n та бўлакка бўлинган бўлади. Ҳар бир ΔS_i қисмда биттадан ихтиёрий (x_i, y_i) нуқта танлаб оламиз, σ сиртда унга $M_i(x_i, y_i, z_i)$ нуқта мос келади, бунда $z_i = z(x_i, y_i)$. M_i нуқта орқали сиртга уринма текислик ўтказамиз (7- бобдаги (9.4) формула) (66- шакл):

$$z'_x(x_i, y_i)(x-x_i) + z'_y(x_i, y'_i)(y-y_i) - (z-z_i) = 0,$$

бунда x, y, z — текислик исталган нуқтасининг координаталари, x_i, y_i, $z_i = z(x_i, y_i)$ — уриниш нуқтасининг координаталари, $\vec{n}_i = \{z'_x(x_i, y_i), z'_y(x_i, y_i), -1\}$ текисликка перпендикуляр вектор (шу текисликнинг нормал вектори). Агар нормал $\vec{n}_i$ вектор билан Oz ўқ орасидаги бурчакни γ_i билан белгиласак, у ҳолда маълум формулага кўра

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{1+[z'_x(x_i, y_i)]^2+[z'_y(x_i, y_i)]^2}}$$

ни ҳосил қиламиз ($\cos\gamma_i > 0$, чунки γ_i — ўткир бурчак).

M_i нуқтадаги уринма текисликнинг ΔS_i га проекцияланадиган қисмининг юзини $\Delta\rho_i$ билан белгилаймиз, у ҳолда

$$\Delta S_i = \Delta\rho_i \cdot \cos\gamma_i,$$

бундан

$$\Delta\rho_i = \frac{\Delta S_i}{\cos\gamma_i} = \sqrt{1+[z'_x(x_i, y_i)]^2+[z'_y(x_i, y_i)]^2}\cdot\Delta S_i.$$

Ҳосил қилинган юзларни қўшиб, уринма текисликларнинг ҳамма бўлаклари ташкил қилган сиртнинг юзини ҳосил қиламиз:

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[z'_x(x_i, y_i)]^2+[z'_y(x_i, y_i)]^2}\cdot\Delta S_i. \qquad (5.1)$$

Бу йиғиндини σ сиртнинг юзига тақрибан тенг деб ҳисоблаш мумкин. σ сирт юзининг аниқ қиймати учун ясалган сиртнинг ΔS_i юзчаларнинг энг катта d диаметри нолга интилган шартдаги (5.1) юзининг лимити олинади. Агар бу юзнинг катталигини S билан белгиласак,

$$S=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[z'_x(x_i, y_i)]^2+[z'_y(x_i, y_i)]^2}\cdot\Delta S_i$$

га эга бўламиз. Лимит белгиси остида турган йиғинди

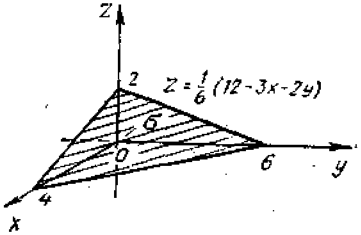
$$\sqrt{1+[z'_x(x, y)]^2+[z'_y(x, y)]^2}$$

$$S=\iint_{\sigma_{xy}}\sqrt{1+(z'_x(x, y))^2+(z'_y(x, y))^2}\,dx\,dy. \qquad (5.2)$$

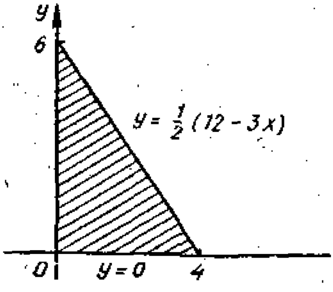
Шундай қилиб, (5.2) муносабат $z=z(x, y)$ тенглама билан берилган сиртнинг юзи ҳисобланадиган формулани ифодалайди. Бу ерда σ_{xy} — бу сиртнинг Oxy текисликдаги проекцияси.

1-мисол. $3x+2y+6z=12$ текисликнинг биринчи октантда жойлашган қисмининг юзини ҳисобланг.

Ечиш. Қуйидагига эгамиз (67-шакл):



67-шакл.



68-шакл.

$$z=\frac{1}{6}(12-3x-2y),$$

$$z'_x=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}, \qquad z'_y=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}.$$

σ_{xy} соҳа Ox, Oy координата ўқлари ҳамда $y=\frac{1}{2}(12-3x)$ тўғри чизиқ билан чегараланган учбурчакдан иборат (68-шакл). Изланаётган S юзни (5.2) формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$S=\iint_{\sigma_{xy}}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}\,dx\,dy=\iint_{\sigma_{xy}}\sqrt{\frac{49}{36}}\,dx\,dy=$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z(x_i, y_i)) \sqrt{1+[z'_x(x_i, y_i)]^2+[z'_y(x_i, y_i)]^2}\, \Delta S_i. \qquad (5.6)$$

Бу тенгликнинг ўнг қисмида σ_{xy} соҳада узлуксиз бўлган

$$f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + [z'_x(x, y)]^2 + [z'_y(x, y)]^2}$$

функциядан олинган каррали интеграл учун интеграл йиғинди жойлашган. Шунинг учун (5.6) тенглама ўнг қисмининг лимити биринчи тур сирт интегралига тенг:

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, d\sigma.$$

Бинобарин (5.6) тенгликда $\Delta\sigma_i$ диаметрлардан энг каттасининг нолга интилгандаги лимитига ўтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma =$$

$$= \iint_{\sigma_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + [z'_x(x, y)]^2 + [z'_y(x, y)]^2}\, dxdy. \qquad (5.7)$$

Бу формула σ сирт бўйича сирт интегралининг σ сиртнинг Oxy текисликка σ_{xy} проекцияси бўйича олинган каррали интеграл орқали ифодасини беради.

σ сирт бўйича олинган интегрални шу сиртнинг Oyz ёки Oxz текисликларга σ_{yz} ёки σ_{xz} проекциялари бўйича олинган каррали интеграллар орқали ифодаловчи формулалар ҳам худди шунга ўхшаш ҳосил қилинади.

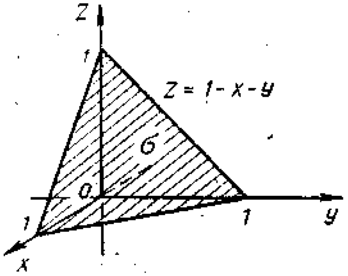
2-мисол. Биринчи тур сирт интегралини ҳисобланг:

$$\iint_{\sigma} \frac{d\sigma}{(x+z+1)^2},$$

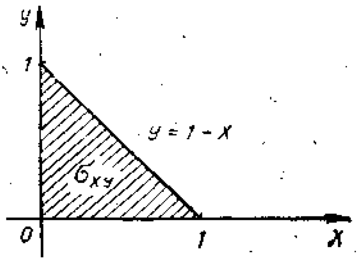
бунда σ сирт $x + y + z = 1$ текисликнинг биринчи октантда жойлашган қисми.

Ечиш. σ сирт

$$z = 1 - x - y$$



70-шакл.



71-шакл.

тенглама билан берилган (70-шакл). Бундан $z'_x = -1$, $z'_y = -1$ га эга бўламиз. Ox, Oy координата ўқлари ва $y = 1 - x$ тўғри чизиқ билан чегараланган учбурчак σ_{xy} интеграллаш соҳаси бўлади (71-шакл). Изланаётган интегрални (5.7) формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$\iint\limits_{\sigma} \frac{d\sigma}{(x+z+1)^2} = \iint\limits_{\sigma_{xy}} \frac{\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}}{(x+1-x-y+1)^2}\,dxdy = \sqrt{3}\iint\limits_{\sigma_{xy}} \frac{dxdy}{(2-y)^2} =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(2-y)^2} = \sqrt{3}\int_0^1 \frac{1}{2-y}\bigg|_0^{1-x} dx = \sqrt{3}\int_0^1 \left(\frac{1}{2-1+x} -\right.$$

$$\left.- \frac{1}{2}\right)dx = \sqrt{3}\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\right)dx = \sqrt{3}\Big(\ln|1+x| -$$

$$\left.- \frac{1}{2}x\Big)\right|_0^1 = \sqrt{3}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}(\ln 4 - 1)}{2}.$$

3-мисол. Агар

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad (0 \leqslant z \leqslant 1)$$

конуссимон сиртнинг зичлиги ρ сиртнинг ҳар бир нуқтасида бу нуқтанинг конус ўқигача масофасига пропорционал бўлса, шу конуссимон сиртнинг массасини топинг (72-шакл).

Ечиш. Конуснинг исталган $M(x_i, y_i)$ нуқтасидан унинг ўқигача масофа

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

формула бўйича ҳисобланади, шунинг учун ρ зичлик

$$\rho = k\sqrt{x^2 + y^2}$$

кўринишда ёзилади, бунда k — пропорционаллик коэффициенти, доимий сон.

Шундай қилиб, юқоридаги конуссимон сиртнинг m массаси (5.4) формула бўйича ҳисобланади:

$$m = \iint\limits_{\sigma} \rho(x, y, z)d\sigma = \iint\limits_{\sigma} k\sqrt{x^2 + y^2}\,d\sigma.$$

σ конуссимон сирт

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

тенглама билан берилгани учун

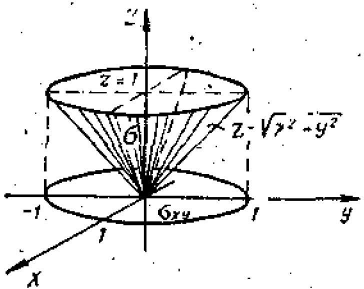
$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

га эга бўламиз.

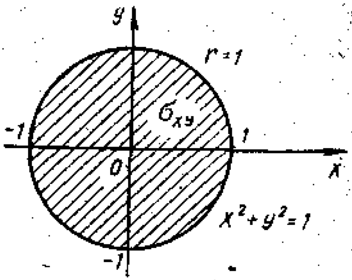
Изланаётган интеграл (5.7) формула бўйича ҳисобланади:

$$m = \iint\limits_{\sigma} k\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma = \iint\limits_{xy} k\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy =$$

$$= k\iint\limits_{\sigma_{xy}} \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}\,dxdy = k\sqrt{2}\iint\limits_{\sigma_{xy}} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,$$



72- шакл.



73- шакл.

бу ерда σ_{xy} — радиуси 1 га тенг бўлган доира (73-шакл).

σ_{xy} соҳа бўйича ҳосил қилинган каррали интегралда x ни $r\cos$ га, y ни $r\sin\varphi$ га, $dxdy$ ни $rdrd\varphi$ га алмаштириб, қутб координаталарига ўтамиз. Шундай қилиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$m=k\sqrt{2}\iint\limits_{\sigma_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=k\sqrt{2}\iint\limits_{\sigma_{xy}}\sqrt{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}\,rdrd\varphi=$$

$$=k\sqrt{2}\iint\limits_{\sigma_{xy}}r^2drd\varphi=k\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 r^2dr=k\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{r^3}{3}\Big|_0^1 d\varphi=$$

$$=\frac{k\sqrt{2}}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}k.$$

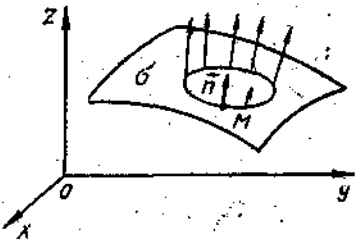
Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Грин теоремасини ифодаланг ва исботланг.
2. Каррали интеграл ёрдамида сиртнинг юзини ҳисоблаш формуласини келтириб чиқаринг.
3. Биринчи тур сирт интегралининг таърифини айтинг.
4. Биринчи тур сирт интегралининг хоссаларини санаб ўтинг.
5. Биринчи тур сирт интеграли қандай ҳисобланади?
6. 3626—3639, 3822—3825, 3876—3886- масалаларни ечинг.

6 §. Иккинчи тур сирт интеграли

1. Бир томонлама ва икки томонлама сиртлар. Аввал сиртнинг томони тушунчасини киритамиз. σ силлиқ сиртда ихтиёрий M нуқтани оламиз ва ундан сиртга нормал қилиб $\vec{n}$ векторни ўтказамиз. M нуқтадан ўтувчи ва сиртнинг чегаралари билан умумий нуқтага эга бўлмаган бирор ёпиқ контурни қараб чиқамиз. Агар M нуқтани шу контур бўйича $\vec{n}$ вектор билан бирга бу вектор σ сиртга доим нормал бўладиган қилиб (74-шакл) узлуксиз кўчирилса, у ҳолда M нуқта бошланғич вазиятига нормалнинг ўша йўналиши билан ёки унга қарама-қарши йўналиши билан қайтиб келади.

Биринчи ҳолда сирт икки томонлама сирт, иккинчи ҳолда бир томонлама сирт дейилади. Текислик, сфера, эллипсоид, ва умуман, $z = z(x, y)$ тенглама билан ифодаланган (бунда $z(x, y)$, $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ — Oxy текисликнинг бирор D соҳасидаги узлуксиз функциялар) исталган текислик икки томонлама сиртга мисол бўлади.



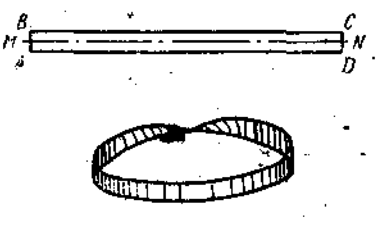
74- шакл.

Мёбиус япроғи бир томонлама сиртга энг содда мисол бўлади. Бу сиртни ҳосил қилиш учун $ABCD$ тўғри тўртбурчакда AB ва CD томонларни A ва B нуқталар мос равишда, C ва D нуқталар билан устма-уст тушадиган қилиб елимланади (75-шакл). Мёбиус япроғининг нормал вектори унинг ўрта чизиғи бўйлаб айланиб чиқишда йўналишини қарама-қаршисига ўзгартиради.

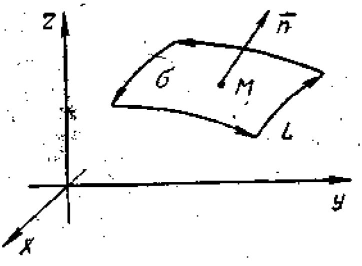
Бундан кейин биз фақат икки томонлама сиртларнигина қараймиз. Сиртнинг маълум томонини танлаш *сиртни ориентация қилиш дейилади.* Агар сирт ориентацияси танланган бўлса, у ҳолда сирт *ориентацияланган* дейилади.

Сирт чегарасининг ориентацияси тушунчаси сиртнинг томони тушунчаси билан боғлиқ. Агар σ — L контур билан чегараланган ориентацияланган, ўзини кесиб ўтадиган нуқталари бўлмаган сирт бўлса (76-шакл), у ҳолда бу контурни айланиб чиқиш йўналишини мусбат деб ҳисоблаймиз, агар бу контур бўйича ҳаракатланишда σ сирт айланаётган нуқтага нисбатан *чап томонда қолса, юриш йўналишини мусбат деб ҳисоблаймиз* (бунда $\vec{n}$ нормалнинг охиридан контурни айланиб ўтиш соат милига қарши кузатилади). Контурни айланиб ўтишнинг қарама-қарши йўналиши манфий йўналиш дейилади.

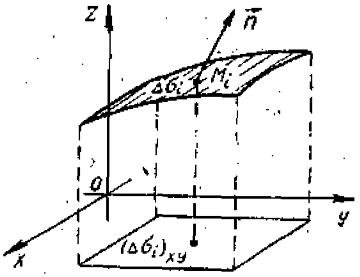
2. Асосий таърифлар ва хоссалар. Энди иккинчи тур сирт интегралининг таърифига ўтамиз. Фараз қилайлик σ — силлиқ чегараланган ориентацияланган сирт бўлсин. Агар нормаллар Oz ўқи билан ўткир бурчаклар ташкил этса, у ҳолда сиртнинг устки томони танланган деймиз, агар ўтмас бурчаклар ташкил этса, сиртнинг ост-



75- шакл.



76- шакл.



77- шакл.

ки томони танланган деймиз. Бу сиртда $R(x, y, z)$ чекланган функцияни қараймиз (77- шакл). Бу сиртни ихтиёрий n та $\Delta\sigma_i$ қисмларга ажратамиз ва $\Delta\sigma_i$ сиртнинг Oxy текисликдаги проекциясининг юзини $(\Delta\sigma_i)_{xy}$ билан белгилаймиз. Ҳар бир $\Delta\sigma_i$ қисм сиртда ихтиёрий $M_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ нуқтани белгилаймиз, бу нуқталарда $R(x, y, z)$ функциясининг қийматини ҳисоблаймиз ва қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$\sum_{i=1}^{n} R(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\,(\Delta\sigma_i)_{xy}, \qquad (6.1)$$

бунда агар σ сиртнинг устки томони танланган бўлса, $(\Delta\sigma_i)_{xy}$ ифода мусбат ишора билан олинади, агар сиртнинг остки томони танланган бўлса, у ҳолда бу ифода манфий ишора билан олинади. (6.1) кўринишдаги йиғинди σ сиртда R (x, y, z) функция учун иккинчи тур сирт интеграли йиғиндиси дейилади. Иккинчи тур (6.1) интеграл йиғиндининг биринчи тур (5.3) интеграл йиғиндидан фарқи шундаки, у ерда функциянинг қиймати қисмий сиртнинг юзига кўпайтирилса, бу ерда эса функциянинг қиймати қисмий сирт юзининг Oxy текисликдаги проекциясига (мусбат ёки манфий ишора билан) кўпайтирилади.

Таъриф. (6.1) интеграл йиғиндининг $\Delta\sigma_i$ юзлар энг катта d диаметрининг узунлиги нолга интилгандаги лимити σ сиртнинг танланган томони бўйича x ва y координаталар бўйича R (x, y, z) функциядан олинган *иккинчи тур сирт интеграли дейилади* ҳамда бундай белгиланади:

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z)\,dx\,dy. \qquad (6.2)$$

P (x, y, z) функциядан y ва z координаталар бўйича олинган ва Q (x, y, z) функциядан x ва z координаталар бўйича олинган иккинчи тур сирт интеграли шунга ўхшаш аниқланади:

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z)\,dy\,dz, \quad \iint_{\sigma} Q(x, y, z)\,dx\,dz. \qquad (6.3)$$

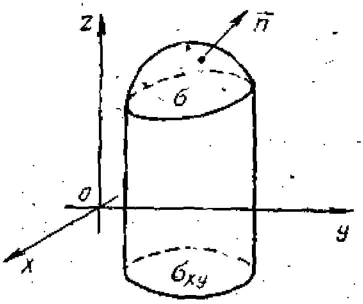
Бу интегралларнинг

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z)\,dy\,dz + \iint_{\sigma} Q(x, y, z)\,dz\,dx + \iint_{\sigma} R(x, y, z)\,dx\,dy$$

йиғиндиси координаталар бўйича иккинчи тур умумий сирт интеграли дейилади ва бундай белгиланади:

$$\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+$$
$$+R(x,y,z)\,dx\,dy. \qquad (6.4)$$

Иккинчи тур сирт интеграли биринчи тур сирт интеграли эга бўлган хоссаларга эга, бироқ биринчи тур сирт интегралидан фарқли равишда сиртнинг томони ўзгарганда (яъни ориентация ўзгарганда) у ишорасини ўзгартиради.



78- шакл.

3. Иккинчи тур сирт интегралларини ҳисоблаш. Иккинчи тур сирт интеграллари каррали интегралларга келтирилиб ҳисобланади. Фараз қилайлик ориентация қилинган (устки томонини танлаб оламиз) σ силлиқ сирт $z = z(x, y)$ тенглама билан ифодаланган бўлсин, бу ерда $z(x, y)$ функция σ_{xy} ёпиқ соҳада аниқланган бўлсин, σ_{xy} соҳа σ сиртнинг Oxy текисликдаги проекцияси, $R(x, y, z)$ эса шу сиртнинг ҳар бир нуқтасидаги узлуксиз функция (78- шакл).

σ сиртни ихтиёрий n та $\Delta\sigma_i$ қисмга ажратамиз ва бу бўлинишни Oxy текисликка проекциялаймиз. σ_{xy} соҳа мос ҳолда ΔS_i, $i=\overline{1, n}$ юзли n та қисмга бўлинади. Қуйидаги интеграл йиғиндини тузамиз.

$$\sum_{i=1}^{n} R(\overline{x_i}, \overline{y_i}, \overline{z_i})\Delta S_i,$$

бунда ΔS_i ифода — $\Delta\sigma_i$ нинг Oxy текисликдаги проекциясининг юзи. $\overline{z_i} = z(\overline{x_i}, \overline{y_i})$ бўлгани учун

$$\sum_{i=1}^{n} R(\overline{x_i}, \overline{y_i}, \overline{z_i})\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} R(\overline{x_i}, \overline{y_i}, z(\overline{x_i}, \overline{y_i}))\,\Delta S_i \qquad (6.5)$$

бўлади.

(6.5) тенгликнинг ўнг қисмида σ_{xy} соҳада узлуксиз бўлган $R(x, y, z(x, y))$ функция каррали интегралининг интеграл йиғиндиси жойлашган. (6.5) да $d \to 0$. да лимитга ўтиб

$$\iint\limits_{\sigma} R(x, y, z)dx\,dy = \iint\limits_{\sigma_{xy}} R(x, y, z(x,y))dx\,dy \qquad (6.6)$$

формулани ҳосил қиламиз, бу формула x ва y координаталар бўйича иккинчи тур сирт интегрални каррали интеграл орқали ифодалайди. Агар сиртнинг пастки қисми танланса, (6.6) нинг ўнг томонидаги интеграл олдида манфий ишора пайдо бўлади.

Қуйидаги формулаларнинг тўғрилиги ҳам худди шундай исботланади:

$$\iint\limits_{\sigma} P(x, y, z)\,dy\,dz = \iint\limits_{\sigma_{yz}} P(x(y,z), y, z)\,dy\,dz,$$

$$\iint\limits_{\sigma} Q(x, y, z)\,dx\,dz = \iint\limits_{\sigma_{xz}} Q(x, y\,(x, z), z)dx\,dz,$$

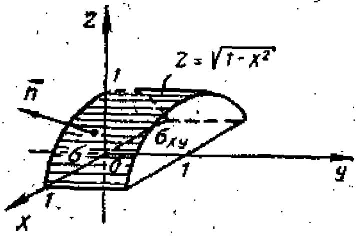
бу ерда σ сирт мос равишда $x = x\,(y, z)$ ёки $y = y\,(x, z)$ тенглама билан ифодаланган; σ_{yz} ва σ_{xz} — σ сиртнинг Oyz ва Oxz текисликлардаги проекциялари.

1-мисол. Интегрални ҳисобланг:

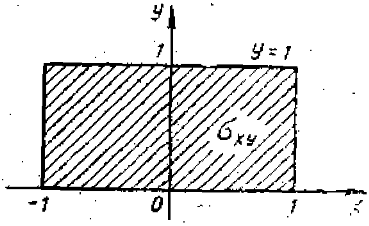
$$\iint\limits_{\sigma} (y^2 + z^2)\,dx\,dy,$$

бунда σ ифодаларда $z = \sqrt{1 - x^2}$ цилиндрнинг $y = 0$ ва $y = 1$ текисликлар билан кесиб олинган устки томони (79- шакл).

Ечиш. Берилган σ сиртнинг Oxy текисликдаги σ_{xy} проекцияси



79- шакл.



80- шакл.

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

тенгсизликлар билан аниқланувчи тўғри тўртбурчак бўлади (80- шакл). (6.6) формула бўйича қуйидагиларни топамиз:

$$\iint\limits_{\sigma}(y^2 + z^2)\,dxdy = \iint\limits_{\sigma_{xy}}[y^2 + (\sqrt{1 - x^2})^2]dx\,dy =$$

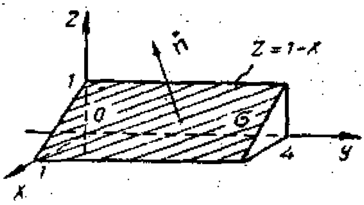
$$\iint\limits_{\sigma_{xy}} (y^2 + 1 - x^2)\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{1} (y^2 + 1 - x^2)\,dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{y^3}{3} + y - x^2 y\right)\Big|_0^1 dx = \int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{4}{3} - x^2\right)dx = \left(\frac{4}{3}\,x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = 2.$$

2-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$\iint\limits_{\sigma} x dy\,dz + y dz\,dx + z dx\,dy,$$

бунда σ сирт $x+z-1=0$ текисликнинг $y=0$, $y=4$ текисликлар билан кесиб олинган ва биринчи октантда ётган қисмининг устки томони (81-шакл).



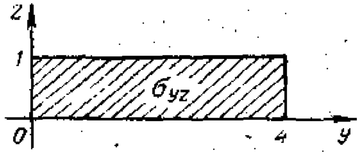
81-шакл.

Ечиш. Таърифга кўра

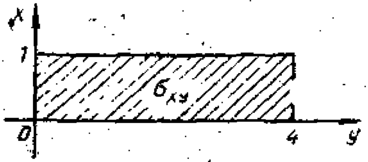
$$\iint_\sigma xdy\,dz + ydz\,dx + z\,dx\,dy = \iint_\sigma x\,dy\,dz + \iint_\sigma y\,dz\,dx + \iint_\sigma z\,dx\,dy.$$

Ўнг томондаги интегралларнинг ҳар бирини ҳисоблаймиз (82, 83-шакллар):

$$\iint_\sigma xdy\,dz = \iint_{\sigma_{yz}}(1-z)\,dy\,dz = \int_0^4 dy\int_0^1 (1-z)\,dz = 2.$$



82-шакл.



83-шакл.

$$\iint_\sigma ydz\,dx = 0,$$

чунки σ сирт Oy ўқига параллелдир;

$$\iint_\sigma z\,dx\,dy = \iint_{\sigma_{xy}}(1-x)dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{1-x} (1-x)\,dx = 2.$$

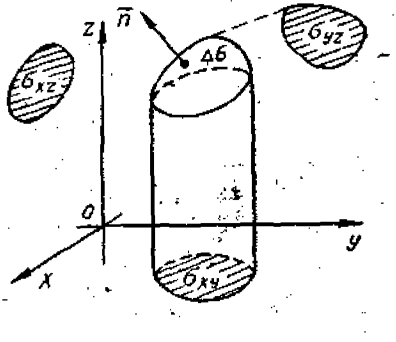
Шундай қилиб, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\iint_\sigma xdy\,dz + ydx\,dz + zdx\,dy = 2+0+2=4.$$

Пировардида биринчи ва иккинчи тур сирт интеграллари орасида боғланиш ўрнатамиз.

84-шаклдан $\Delta\sigma\cos\gamma$ кўпайтма $\Delta\sigma$ юзнинг Oxy текисликдаги проекцияси экани, яъни

$$\Delta\sigma_{xy} = \Delta\sigma\cos\gamma$$



84-шакл.

келиб чиқади. Шунга ўхшаш:

$$\Delta\sigma_{xz} = \Delta\sigma\cos\beta,\ \Delta\sigma_{yz} = \Delta\sigma\cos\alpha,$$

бу ерда $\Delta\sigma_{xy}$, $\Delta\sigma_{xz}$, $\Delta\sigma_{yz}$ ифодалар $\Delta\sigma$ юзчанинг тегишли координата текислигидаги проекциялари. Олинган (6.4) формулалар асосида иккинчи тур сирт интегралини биринчи тур сирт интеграли шаклида ёзиш мумкин:

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z)\,dy\,dz + Q(x, y, z)\,dz\,dx + R(x, y, z)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{\sigma} (P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma)\,d\sigma. \quad (6.7)$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Қандай сирт икки томонли сирт дейилади? Қандайлари бир томонли сиртлар дейилади? Мисоллар келтиринг.
2. Сиртнинг ориентацияси қандай аниқланади?
3. Иккинчи тур сирт интегралининг таърифини айтинг.
4. Иккинчи тур сирт интеграли қандай ҳисобланади?
5. Биринчи ва иккинчи тур сирт интеграллари ўзаро қандай боғланган?
6. 3887—3893- масалаларни ечинг.

12-боб

ВЕКТОР АНАЛИЗИ

1-§. Скаляр майдон

Физикада, механикадаги кўпгина масалаларда скаляр ва вектор катталиклар билан иш кўришга тўғри келади.

Скаляр катталик ўзининг сон қиймати билан тўла ифодаланади (масалан, ҳажм, масса, зичлик, ҳарорат ва ҳоказолар).

Таъриф. Фазонинг бирор қисми (ёки бутун фазонинг) ҳар бир M нуқтасида бирор u скаляр миқдорнинг сон қиймати аниқланган бўлса, бу миқдорнинг скаляр майдони берилган дейилади. Масалан, ҳарорат майдони, бир жинслимас муҳитда зичлик майдони, куч майдон потенциали.

Агар u катталик t вақтга боғлиқ бўлмаса, бу катталик *стационар* (ёки *барқарор) катталик* дейилади. Акс ҳолда майдон *ностационар* (ёки *барқарор бўлмаган) майдон* дейилади. Биз фақат стационар майдонларни қараб чиқамиз. Шундай қилиб, u скаляр катталик t вақтга боғлиқ бўлмасдан, балки фақат M нуқтанинг фазодаги ўрнига боғлиқ бўлади, яъни u катталик M нуқтанинг функцияси сифатида қаралади ва $u=u(M)$ кўринишда белгиланади. Бу функцияни *майдон функцияси* деб атаймиз.

Агар фазода $Oxyz$ координаталар системасини киритсак, у ҳолда ҳар бир M нуқта маълум x, y, z координаталарга эга бўлади ва u скаляр функция шу координаталарнинг функцияси бўлади:

$$u=u(x, y, z).$$

Шундай қилиб, биз уч ўзгарувчили функциянинг физик талқинига келдик.

Текисликнинг қисмида (ёки бутун текисликда) аниқланадиган скаляр майдонни ҳам қараб чиқиш мумкин, унинг ҳар бир M нуқтасига u скаляр катталикнинг сон қиймати мос келади, яъни $u=u(M)$.

Агар текисликнинг Oxy координаталар системаси киритилса, у ҳолда ҳар бир M нуқта маълум x, y координаталарга эга бўлади ва u скаляр функция шу координаталарнинг функцияси бўлади:

$$u = u(x, y).$$

Скаляр майдонларнинг хоссаларини сатҳ сиртлари ёки сатҳ чизиқлари ёрдамида ўрганиш мумкин, улар шу майдонларнинг геометрик тасвири ҳисобланади.

1. Сатҳ сиртлари.

Таъриф. Скаляр майдоннинг *сатҳ сирти* деб фазонинг шундай нуқталари тўпламига айтиладики, унда майдон функцияси $u = u(x, y, z)$ ўзгармас қийматга эга бўлади.

Бу сиртлар

$$u(x, y, z) = C$$

тенглама билан аниқланиши равшан, бунда C — ўзгармас сон.

C га турли қийматлар бериб, сатҳ сиртлари оиласини ҳосил қиламиз. Бу сиртларда скаляр функция ўзгармас бўлиб қолади.

Агар, масалан, майдон

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

функция билан ифодаланган бўлса, у ҳолда маркази координаталар бошида бўлган

$$x^2 + y^2 + z^2 = C \quad (C > 0)$$

сфера сатҳ сирти вазифасини бажаради.

2. Сатҳ чизиқлари. Ясси скаляр майдон геометрик жиҳатдан сатҳ чизиқлари ёрдамида тасвирланади.

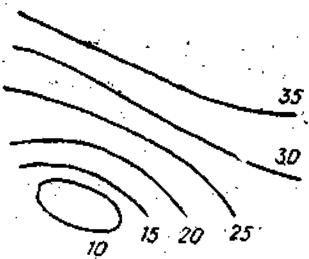
Таъриф. Ясси скаляр майдоннинг *сатҳ чизиғи* деб текисликнинг шундай нуқталари тўпламига айтиладики, унда $u = u(x, y)$ майдон функцияси ўзгармас қийматга эга бўлади.

Бу чизиқлар

$$u(x, y) = C$$

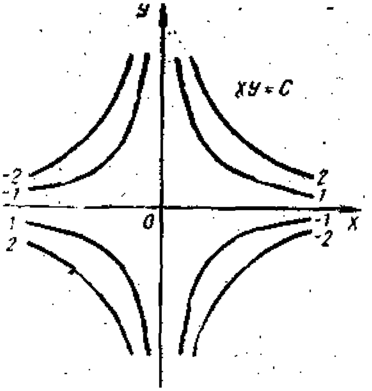
тенглама билан аниқланади, бунда C — ўзгармас сон.

C га турли қийматлар бериб, сатҳ чизиқлари оиласини ҳосил қиламиз. Бу чизиқларда скаляр функция доимий бўлиб қолади. Шаклда сатҳ чизиқларининг бир-биридан тенг оралиқлардан кейин келадиган u нинг маълум қийматларига мосларини чизиш қабул қилинган, масалан, $u = 10$, $u = 15$, $u = 20$, $u = 25$, $u = 30$, $u = 35$ (85-шакл). Сатҳ чизиқлари бир-бирига қанчалик яқин қилиб чизилган бўлса, u шунчалик тез ўсиб боради.

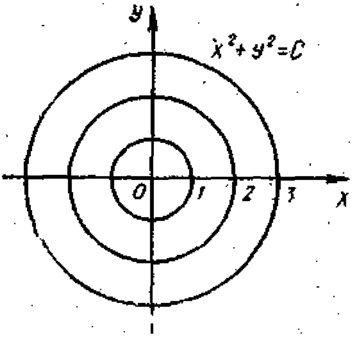


85-шакл.

Агар, масалан, скаляр майдонлар $u = xy$ ёки $u = x^2 + y^2$ функциялар билан берилган бўлса, улар учун сатҳ чизиқлари вазифасини мос равишда гиперболалар ва концентрик айланалар оиласи бажаради (86, 87-шакллар).



86- шакл.



87- шакл.

2-§. Берилган йўналиш бўйича ҳосила

Скаляр майдоннинг муҳим тушунчаси берилган йўналиш бўйича ҳосиладир. Фараз қилайлик, скаляр майдоннинг дифференциалланувчи функцияси $u=u\ (x,\ y,\ z)$ берилган бўлсин.

Бу майдондаги бирор $M\ (x,\ y,\ z)$ нуқтани ва шу нуқтадан чиқувчи бирор $\vec{l}$ нурни қараймиз. Бу нурнинг Ox, Oy, Oz ўқлари билан ташкил қилган бурчакларини α, β, γ орқали белгилаймиз (88- шакл). Агар $\vec{l_0}$ бирлик вектор бу нур бўйича йўналган бўлса, у ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$\vec{l_0}=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\cos\beta+\vec{k}\cos\gamma.$$

Фараз қилайлик, бирор $M_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$ нуқта шу нурда ётган бўлсин. M ва M_1 нуқталар орасидаги масофани Δl билан белгилаймиз: $\Delta l=|\overrightarrow{MM_1}|$. Скаляр майдон функцияси қийматлари айирмасини шу функциянинг $\vec{l_0}$ йўналишда шу нуқталардаги орттирмаси деб айтамиз ва $\Delta_l u$ билан белгилаймиз. У ҳолда

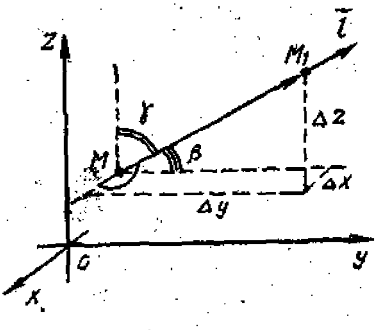
$$\Delta_l u=u(M_1)-u(M)$$

ёки

$$\Delta_l u=u(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)-u\ (x,\ y,\ z).$$

Таъриф. $u=u(x,y,z)$ функциянинг $\vec{l}$ йўналиш бўйича $M\,(x,\ y,\ z)$ *нуқтадаги ҳосиласи* деб

$$\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta_l u}{\Delta l}$$



88- шакл.

лимитга айтилади, бу лимит $\frac{\partial u}{\partial l}$ тарзида белгиланади. Шундай қилиб,

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta_l u}{\Delta l}.$$

Агар M нуқта тайинланган бўлса, у ҳолда ҳосиланинг катталиги фақат $\vec{l}$ нурнинг йўналишигагина боғлиқ бўлади.

$\vec{l}$ йўналиш бўйича ҳосила хусусий ҳосилаларга ўхшаш u функциянинг мазкур йўналишдаги ўзгариш тезлигини характерлайди. Ҳосиланинг $\vec{l}$ йўналиш бўйича абсолют миқдори $\left|\frac{\partial u}{\partial l}\right|$ тезликнинг катталигини аниқлайди, ҳосиланинг ишораси эса u функция ўзгаришининг характерини аниқлайди: агар $\frac{\partial u}{\partial l}>0$ бўлса, у ҳолда функция бу йўналишда ўсади, агар $\frac{\partial u}{\partial l}<0$ бўлса, камаяди.

Берилган йўналиш бўйича ҳосилани ҳисоблаш қуйидаги теорема ёрдамида амалга оширилади.

Теорема. *Агар $u(x, y, z)$ функция дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда унинг ихтиёрий $\vec{l}$ йўналиш бўйича ҳосиласи мавжуд ва қуйидагига тенг:*

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

бунда $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — $\vec{l}$ *векторнинг йўналтирувчи косинуслари.*

Исботи. u функция теореманинг шартига кўра дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда унинг $M(x, y, z)$ нуқтадаги Δu орттирмасини

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+\varepsilon \qquad (2.1)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бунда ε катталик $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик миқдор, яъни $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\varepsilon}{\rho}=0$ (7-боб, 4-§ га қаранг).

Агар функция орттирмаси $\vec{l}$ вектор йўналишидаги нур бўйлаб қаралса, у ҳолда

$$\Delta u=\Delta_l u,\ \rho=\Delta l,$$

$$\Delta x=\Delta l\cos\alpha,\ \Delta y=\Delta l\cdot\cos\beta,\ \Delta z=\Delta l\cdot\cos\gamma$$

бўлиши равшан. У ҳолда (2.1) тенглик бундай кўринишни олади:

$$\Delta_l u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta l\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta l\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta l\cos\gamma+\varepsilon.$$

Тенгликнинг иккала қисмини Δl га бўламиз ва $\Delta l\to 0$ да лимитга ўтамиз. Натижада

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (2.2)$$

чунки

$$\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\varepsilon}{\Delta l} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\varepsilon}{\rho} = 0,$$

$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ хусусий ҳосилалар ва йўналтирувчи косинуслар Δl га боғлиқ бўлмайди.

Шундай қилиб, теорема исботланди. (2.2) формулада, агар $\vec{l}$ йўналиш координаталар ўқининг йўналишларидан бири билан бир хил бўлса, у ҳолда бу йўналиш бўйича ҳосила тегишли хусусий ҳосилага тенг, масалан, агар $\vec{l} = \vec{i}$ бўлса, у ҳолда $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$ бўлади, шунинг учун $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = \cos\gamma = 0$ ва бинобарин,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

(2.2) формуладан кўринадики, $\vec{l}$ йўналишга қарама-қарши $\vec{l'}$ йўналиш бўйича ҳосила $\vec{l}$ йўналиш бўйича тескари ишора билан олинган ҳосиласига тенг.

Ҳақиқатан бунда, α, β, γ бурчаклар π га ўзгариши керак, натижада қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\pi + \alpha) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\pi + \beta) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(\pi + \gamma) =$$

$$= -\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha - \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta - \frac{\partial y}{\partial z}\cos\gamma = -\frac{\partial u}{\partial l}.$$

Бу йўналиш қарама-қаршисига ўзгарганда u функциянинг ўзгариш тезлигининг абсолют миқдори ўзгармайди, унинг фақат йўналиши ўзгаради холос.

Агар, масалан, $\vec{l}$ йўналишда функция ўсса, у ҳолда қарама-қарши $\vec{l'}$ йўналишда у камаяди, ва аксинча.

Агар майдон текис бўлса, у ҳолда $\vec{l}$ нурнинг йўналиши унинг абсциссалар ўқига оғиш бурчаги α билан тўла аниқланади. $\vec{l}$ йўналиш бўйича ҳосила учун формулани текис майдон ҳолида (2.2) формуладан олиш мумкин, бунда

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \gamma = \frac{\pi}{2}$$

деб олинади. У ҳолда

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha.$$

Мисол. $u = xyz$ функциянинг $M(-1, 2, 4)$ нуқтада, шу нуқтадан $M_1(-3, 4, 5)$ нуқтага томон йўналишдаги ҳосиласини топинг.

Ечиш. $\overrightarrow{MM_1}$ векторни топамиз:

$$\overrightarrow{MM_1} = (-3+1)\vec{i} + (4-2)\vec{j} + (5-4)\vec{k} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

ва унга мос бирлик векторни ҳам топамиз:

$$\vec{l}_0 = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{|\overrightarrow{MM_1}|} = \frac{-2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}.$$

Шундай қилиб, $\vec{l}_0$ вектор қуйидаги йўналтирувчи косинусларга эга.

$$\cos\alpha = -\frac{2}{3}, \quad \cos\beta = \frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{3}.$$

Энди xyz функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy$$

ва уларни $M\ (-1,\ 2,\ 4)$ нуқтада ҳисоблаймиз:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 8, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = -4, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = -2.$$

Хусусий ҳосилаларнинг ва йўналтирувчи косинусларнинг топилган қийматларини (2.2) формулага қўямиз:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 8\left(-\frac{2}{3}\right) - 4\cdot\frac{2}{3} - 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}(-8-4-1) = -\frac{26}{3}.$$

«—» ишора берилган йўналишда $u=xyz$ функция камайишини кўрсатади.

3- §. Скаляр майдон градиенти. Градиентни инвариант аниқлаш

Таъриф: $u=u(x,\ y,\ z)$ дифференциалланувчи функция билан берилган скаляр майдоннинг $M(x,\ y,\ z)$ *нуқтадаги градиенти* деб, $\operatorname{grad} u$ билан белгиланувчи векторга айтилиб, унинг проекциялари вазифасини шу функциянинг хусусий ҳосилалари қийматлари бажаради, яъни

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \tag{3.1}$$

Градиентнинг проекциялари $M\ (x,\ y,\ z)$ нуқтани танлашга боғлиқ бўлади ва шу нуқтанинг координаталари ўзгариши билан ўзгаради. Бинобарин, $u\ (x,\ y,\ z)$ функция билан берилган скаляр майдоннинг ҳар бир нуқтасига маълум бир вектор — шу функциянинг градиенти мос қўйилади

Градиентнинг таърифидан фойдаланиб, $\vec{l}$ йўналиш бўйича ҳосилани ифодаловчи (2.2) формулани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u \cdot \vec{l}_0. \tag{3.2}$$

бунда $\vec{l}_0 = \cos\alpha\cdot\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j} + \cos\gamma\cdot\vec{k}$ — $\vec{l}$ йўналишдаги бирлик вектор. Демак, берилган $\vec{l}$ йўналиш бўйича ҳосила функция градиенти билан шу u йўналишнинг $\vec{l}_0$ бирлик вектори кўпайтмасига тенг. Скаляр кўпайтма таърифидан фойдаланиб, (3.2) формулани

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\mathrm{grad}\, u|\cdot|\vec{l}_0|\cos\varphi$$

кўринишда ифодалаш мумкин, бунда φ — бирлик вектор $\vec{l}_0$ билан градиент орасидаги бурчак (89- шакл). $|\vec{l}_0| = 1$ бўлгани учун

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\mathrm{grad}\, u|\cos\varphi \tag{3.3}$$

бўлади. Бундан йўналиш бўйича ҳосила $\cos\varphi = 1$ бўлганда, яъни $\varphi = 0$ да энг катта қийматга эришади. Шу билан бирга бу энг катта қиймат $|\mathrm{grad}\, u|$ га тенг, яъни бу ҳолда

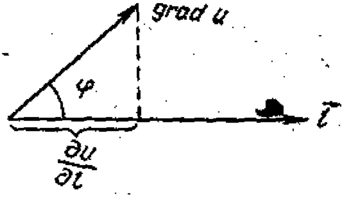
$$\max\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right) = |\mathrm{grad}\, u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}. \tag{3.4}$$

Шундай қилиб, $|\mathrm{grad}\, u|$ катталик $\frac{\partial u}{\partial l}$ ҳосиланинг M нуқтадаги мумкин бўлган энг катта қиймати бўлади, $\mathrm{grad}\, u$ нинг йўналиши эса M нуқтадан чиқувчи шундай нурнинг йўналиши билан мос тушадики, у бўйлаб функция ҳаммасидан кўра тезроқ ўзгаради, яъни градиентнинг йўналиши функциянинг энг тез ортишидаги йўналишидир. Бу юқорида келтирилган градиентнинг координаталар системасидан фойдаланилган таърифи ўрнига энди бошқа, координаталар системасини танлашга боғлиқ бўлмаган инвариант таърифини беришга имкон беради.

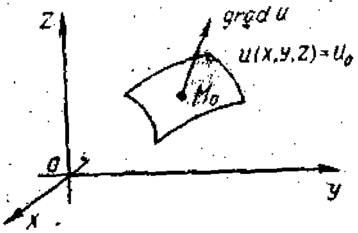
Таъриф. $u\ (x, y, z)$ скаляр майдоннинг *градиенти* деб, бу майдон ўзгаришининг энг катта тезлигини ифодаловчи векторга айтилади.

Агар $\cos\varphi = -1$ $(\varphi = \pi)$ бўлса, у ҳолда йўналиш бўйича ҳосила $|\mathrm{grad}\ u|$ га тенг энг кичик қиймат бўлади. Бу йўналишда (қарама-қарши йўналишда) u функция ҳаммасидан тезроқ камаяди.

Агар $\cos\varphi = 0$ $\left(\varphi = \pm\frac{\pi}{2}\right)$ бўлса, йўналиш бўйича ҳосила нол-



89- шакл.



90- шакл.

га тенг. Энди скаляр майдоннинг градиенти йўналиши билан сатҳ сиртлари орасидаги боғланишни ўрганамиз.

$u=u(x,y,z)$ функциянинг майдоннинг ҳар бир нуқтасидаги градиентининг йўналиши шу нуқтадан ўтувчи скаляр майдоннинг сатҳ текислигига ўтказилган нормалнинг йўналиши билан мос тушишини исботлаймиз. Бунинг учун ихтиёрий $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтани танлаб оламиз (90- шакл). Бу нуқтадан ўтувчи сатҳ сирти тенгламаси

$$u(x,y,z)=u_0$$

кўринишда ёзилади, бунда $u_0=u(x_0, y_0, z_0)$.

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтадан шу текисликка ўтказилган нормалнинг тенгламасини тузамиз:

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}}.$$

Бундан,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}$$

проекцияларга эга бўлган нормалнинг йўналтирувчи вектори $u(x,y,z)$ функциянинг $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтадаги градиенти бўлади.

Шундай қилиб, ҳар бир нуқтадаги градиент берилган нуқтадан ўтувчи сатҳ сиртига ўтказилган уринма текисликка перпендикуляр бўлади, яъни унинг текисликка проекцияси нолга тенг. Демак, берилган нуқтадан ўтувчи сатҳ сиртига уринма бўлган истаган йўналиш бўйича ҳосила нолга тенг. Яққоллик учун олинган натижани геометрик жиҳатдан тасвирлаймиз (91- шакл). Бунинг учун $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтада grad u векторни ва бу вектор диаметр бўладиган сферани ясаймиз, M_0 нуқта — $u(x,y,z)=u_0$ сатҳ сирти билан уриниш нуқтаси. Қуйидагилар равшан:

$$\varphi<\frac{\pi}{2} \text{ бўлганда } \frac{\partial u}{\partial l}=|\operatorname{grad} u|\cos\varphi=|\overrightarrow{M_0M_1}|;$$

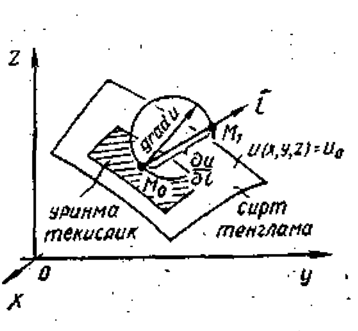
$$\varphi=\frac{\pi}{2} \text{ бўлганда } \frac{\partial u}{\partial l}=0,$$

чунки бу ҳолда $\vec{l}$ йўналиш сатҳ сиртига ўтказилган уринманинг йўналиши билан мос тушади:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=|\operatorname{grad} u|, \text{ бунда } \varphi=0,$$

чунки бу ҳолда $\vec{l}$ йўналиш нормалнинг ёки сатҳ сиртига ўтказилган grad u нинг йўналишига мос келади.

Функция градиентининг баъзи хоссаларини кўрсатамиз:



91- шакл.

1) $\operatorname{grad} Cu = C \operatorname{grad} u$, бунда C — ўзгармас катталик.

2) $\operatorname{grad}(u_1 + u_2) = \operatorname{grad} u_1 + \operatorname{grad} u_2$,

3) $\operatorname{grad} u_1 \cdot u_2 = u_1 \operatorname{grad} u_2 + u_2 \operatorname{grad} u_1$;

4) $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$

Бу хоссалар функциянинг ҳосиласини топиш қоидалари билан мос тушиши равшан.

Мисол. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ функциянинг $M(x, y, z)$ нуқтадаги градиентини ҳисобланг.

Ечиш. Аввал хусусий ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{u};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{u};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{z}{u}.$$

(3.1) формулага мувофиқ ихтиёрий $M(x, y, z)$ нуқтадаги градиентнинг ифодаси қуйидагича бўлади:

$$\operatorname{grad} u = \frac{x}{u}\vec{i} + \frac{y}{u}\vec{j} + \frac{z}{u}\vec{k}.$$

Скаляр майдоннинг сатҳ сиртлари концентрик сфералардан иборат бўлгани учун grad$u$ унинг радиуси бўйлаб йўналган бўлади, шу билан бирга

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{u^2} + \frac{z^2}{u^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{u} = \frac{u}{u} = 1,$$

яъни u функция ўсишининг энг катта тезлиги 1 га тенг.

4-§. Вектор майдони

Кўпгина масалаларни ечишда скаляр катталиклардан ташқари вектор катталикларга ҳам мурожаат қилишга тўғри келади. Агар скаляр катталик ўзининг сон қиймати билан тўла ифодаланса, вектор катталик учун бу етарли бўлмайди. Уни ифодалаш учун яна бу катталикнинг йўналишини ҳам (масалан, тезлик, куч) билиш зарур. Скаляр майдон тушунчасига ўхшаш вектор майдон тушунчаси ҳам киритилади.

Таъриф. Ҳар бир M нуқтасига бирор $\vec{a}$ вектор мос қўйилган фазонинг бирор қисми (ёки бутун фазо) *вектор майдон* дейилади.

Куч майдони (оғирлик кучи майдони), электр майдони, электромагнит майдон, оқаётган суюқликнинг тезликлари майдони вектор майдонга мисол бўла олади. Биз $\vec{a}$ вектор фақат M нуқтанинг вазиятига боғлиқ бўладиган ва вақтга боғлиқ бўлмайдиган $\vec{a} = \vec{a}(M)$ стационар майдонларни қараб чиқамиз.

Агар фазода $Oxyz$ координаталар системаси киритилса, у ҳолда ҳар бир M нуқта маълум x, y, z координаталарга эга бўлади ва $\vec a$ вектор бу координаталарнинг функцияси бўлади, яъни $\vec a = \vec a(x, y, z)$. $\vec a$ векторнинг координаталар ўқидаги проекцияларини P, Q, R билан белгилаймиз. Улар ҳам координаталарнинг функциялари ҳисобланади, яъни

$$P = P(x, y, z),\quad Q = Q(x, y, z),\quad R = R(x, y, z).$$

Шундай қилиб, бундай ёзиш мумкин:

$$\vec a = \vec a(M) = \vec a(x, y, z) = P\vec i + Q\vec j + R\vec k.$$

Агар P, Q, R — ўзгармас катталиклар бўлса, у ҳолда $\vec a$ вектор ўзгармас бўлади, бундай вектор майдон бир жинсли дейилади, масалан, оғирлик кучи майдони бир жинслидир.

Агар майдон текисликда берилган бўлса, яъни унинг проекцияларидан бири нолга тенг бўлиб, қолган проекциялари эса тегишли координатага боғлиқ бўлмаса, у ҳолда *текис (ясси) майдонни* ҳосил қиламиз, масалан,

$$\vec a(x, y) = P(x, y)\vec i + Q(x, y)\vec j.$$

Вектор чизиқлар. Вектор найчалари.

Таъриф. $\vec a(M)$ вектор майдоннинг *вектор чизиғи* деб шундай чизиққа айтиладики, унинг ҳар бир нуқтасида уринманинг йўналиши шу нуқтага мос келган $\vec a(M)$ векторнинг йўналиши билан бир хил бўлади.

Аниқ майдонларда вектор чизиқлар маълум физик маънога эга бўлади. Агар $\vec a(M)$ оқаётган суюқликнинг тезликлари майдони бўлса, у ҳолда вектор чизиқлар суюқликнинг оқиш чизиқлари бўлади, яъни суюқликнинг заррачалари ҳаракатланаётган чизиқлар бўлади.

Агар $\vec a(M)$ электр майдон бўлса, у ҳолда вектор чизиқлар бу майдоннинг *куч чизиқлари* бўлади (92-шакл).

σ сирт бўлагининг нуқталари орқали ўтувчи ҳамма вектор чизиқлар тўплами *вектор найчалари* дейилади.

Вектор чизиқлар тенгламасини келтириб чиқарамиз.

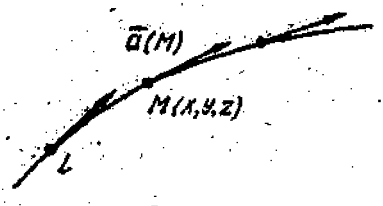
Фараз қилайлик, вектор майдон

$$\vec a = \vec a(M) = P\vec i + Q\vec j + R\vec k$$

функция билан аниқланган бўлсин, бунда P, Q, R лар x, y, z координаталарнинг функциялари. Агар вектор чизиқ ушбу

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

параметрик тенгламага эга бўлса, у ҳолда бу чизиққа ўтка-



92-шакл.

зилган уринманинг йўналтирувчи вектори проекциялари $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ ҳосилаларга ёки dx, dy, dz дифференциалларга пропорционал бўлади.

$\vec{a}(M)$ векторнинг ва вектор чизиққа уринма қилиб йўналтирилган векторнинг колленеарлик шартини ёзиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \qquad (4.1)$$

(4.1) тенгламалар системаси $\vec{a}(M)$ майдоннинг вектор чизиқлари оиласи дифференциал тенгламалари системасини ифодалайди.

Шундай қилиб, $\vec{a}(M)$ майдоннинг вектор чизиқларини топиш ҳақидаги масала (4.1) системадаги интеграл эгри чизиқларни топишга тенг кучли.

(4.1) тенгламалар $\vec{a}(M)$ майдонинг *вектор чизиқлари дифференциал тенгламалари* дейилади.

Мисол. Майдоннинг вектор чизиқларини топинг:

$$\vec{a}(M) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Ечиш. Вектор чизиқларнинг дифференциал тенгламалари бундай кўринишга эга:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

ёки

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}, \\ \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{z}. \end{cases}$$

Бу системани интеграллаб, ҳосил қиламиз:

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C_1,$$
$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_2,$$

бундан:

$$y = C_1x, \quad z = C_2x,$$

бунда C_1, C_2 — ихтиёрий доимийдир.

Координаталар бошидан чиқаётган нурлар вектор чизиқлари бўлиши равшан. Бу чизиқларнинг кононик тенгламалари бундай кўринишга эга:

$$x = \frac{y}{C_1} = \frac{z}{C_2}.$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Скаляр майдон деб нимага айтилади?
2. Сатҳ сирти, сатҳ чизиғи деб нимага айтилади?
3. Йўналиш бўйича ҳосила учун формулани келтириб чиқаринг.

4. Скаляр майдон градиентининг таърифини координата шаклида ифодаланг.

5. Йўналиш бўйича ҳосила градиент орқали қандай ифодаланади?

6. Градиентнинг инвариант таърифини айтинг.

7. Градиентнинг хоссаларини санаб ўтинг.

8. Вектор майдон деб нимага айтилади?

9. Вектор чизиқ деб нимага айтилади? Вектор найча деб нимага айтилади?

10. Вектор чизиқларнинг дифференциал тенгламаларини келтириб чиқаринг.

11. 3439—3444, 3451—3459, 4401—4404- масалаларни ечинг.

5- §. Сирт орқали ўтадиган вектор майдон оқими. Унинг тезликлар майдонидаги физик маъноси

Фараз қилайлик, *Oxyz* фазонинг *V* соҳасида

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

вектор майдон берилган бўлсин, бунда $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ — шу соҳада узлуксиз бўлган функциялар.

Бу соҳада ориентирланган σ сиртни оламиз, унинг ҳар бир нуқтасида нормалнинг мусбат йўналиши

$$\vec{n}_0 = \cos\alpha\cdot\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j} + \cos\gamma\cdot\vec{k}$$

бирлик вектор орқали аниқлансин, бунда α, β, γ — нормал $\vec{n}_0$ нинг координаталар ўқлари билан ташкил қилган бурчаклари.

Таъриф. $\vec{a}(M)$ векторнинг σ сирт орқали ўтувчи *П оқими* деб қуйидаги иккинчи тур сирт интегралига айтилади:

$$\Pi = \iint_{\sigma} P(x, y, z)\,dy\,dz + Q(x, y, z)\,dz\,dx + R(x, y, z)\,dx\,dy. \quad (5.1)$$

II- бобдаги (6.7) муносабатни ҳисобга олиб, (5.1) формулани

$$\Pi = \iint_{\sigma} \left[P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma\right]d\sigma$$

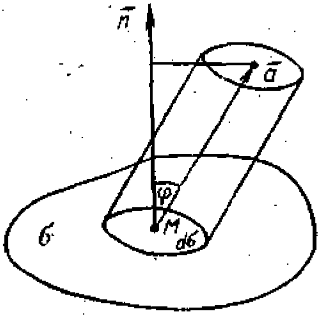
кўринишда ёки янада соддароқ

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{a}\cdot\vec{n}_0\,d\sigma \quad (5.2)$$

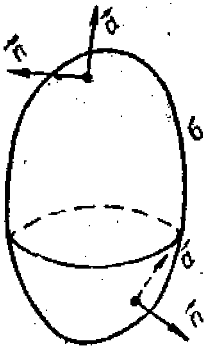
кўринишда ёзиш мумкин, чунки $P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma = \vec{a}\cdot\vec{n}_0$.

Бу ерда $d\sigma$ ифода σ сирт юзининг элементи. (5.2) формула $\vec{a}$ векторнинг *П* оқимини вектор ёзувида ифодалайди.

Вектор майдон оқимининг физик маъносини аниқлаймиз. Фараз қилайлик, $\vec{a}(M)$ вектор оқаётган суюқликнинг тезликлари майдонини σ сирт орқали аниқласин. Бу тезлик вектори ҳар бир *M* нуқтада суюқлик заррачаси интилаётган йўналиш, вектор чизиқлари эса суюқликнинг оқим чизиқлари бўлади (93- шакл). σ сирт орқали вақт бирлиги ичида оқиб ўтадиган



93- шакл.



94- шакл.

суюқлик миқдорини ҳисоблаймиз. Бунинг учун сиртда M нуқтани ва сиртнинг $d\sigma$ элементини қайд қиламиз.

Вақт бирлигида бу элемент орқали оқиб ўтган суюқлик миқдори асоси $d\sigma$ ва ясовчиси $\vec{a}$ бўлган цилиндрнинг ҳажми билан аниқланади. Бу цилиндрнинг баландлиги унинг ясовчисини $\vec{n}_0$ нормал бирлик векторига проекциялаш йўли билан ҳосил қилинади. Шунинг учун цилиндрнинг ҳажми

$$\vec{a}\cdot\vec{n}_0\cdot d\sigma$$

катталикка тенг бўлади. Вақт бирлиги ичида бутун σ сирт бўйича оқиб ўтган суюқликнинг тўлиқ ҳажми ёки суюқлик миқдори σ бўйича интеграллаш натижасида ҳосил бўлади:

$$\iint\limits_{\sigma}\vec{a}\cdot\vec{n}_0 d\sigma.$$

Бу натижани (5.2) формула билан таққослаб, бундай хулоса чиқарамиз: σ сирт орқали ўтаётган $\vec{a}$ тезлик вектори Π оқими шу сирт орқали вақт бирлиги ичида сирт ориентацияланган йўналишда оқиб ўтган суюқлик миқдоридир. Векторлар оқимининг физик маъноси ана шундан иборат. σ сирт фазонинг бирор соҳасини чегараловчи ёпиқ сирт бўлган ҳол айниқса катта қизиқиш уйғотади. Бу ҳолда $\vec{n}_0$ нормал векторини доим фазонинг ташқи қисмига йўналтиришга шартлашиб оламиз (94-шакл). Нормал томонига қараб ҳаракат сиртнинг тегишли жойида суюқлик ω соҳадан оқиб чиқишини англатади, нормалнинг қарама-қарши томонига қараб ҳаракат эса суюқлик сиртнинг тегишли жойида шу соҳага *оқиб киришини* англатади. σ ёпиқ сирт бўйича олинган интегралнинг ўзи эса

$$\Pi=\oint\!\!\oint\limits_{\sigma}\vec{a}\cdot\vec{n}_0 d\sigma$$

кўринишда белгиланади ва ω сиртдан оқиб чиқаётган суюқлик билан унга оқиб кираётган суюқлик орасидаги фарқни беради.

Бунда, агар $П=0$ бўлса, ω соҳага ундан қанча суюқлик оқиб чиқиб кетса, шунча суюқлик оқиб киради.

Агар $П>0$ бўлса, у ҳолда ω соҳадан унга оқиб кирадиган суюқликдан кўпроқ сув оқиб чиқади.

Агар $П<0$ бўлса, бу ҳол қурдум(сток)лар борлигини кўрсатади, яъни суюқлик оқимдан узоқлашадиган жойлар борлигини кўрсатади (масалан, буғланади). Шундай қилиб, $\oint\limits_{\sigma}\oint \vec{a}\,\vec{n}_0\, d\sigma$ интеграл манбаларнинг ва қурдумларнинг умумий қувватини беради.

6- §. Вектор майдоннинг ёпиқ сирт бўйича оқимини ҳажм бўйича олинган интеграл орқали ифодалаш ҳақидаги Остроградский теоремаси

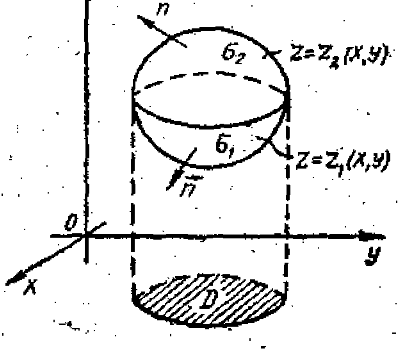
Ёпиқ сирт бўйича олинган сирт интеграли (вектор майдон оқими) ҳамда шу сирт билан чегараланган фазовий соҳа бўйича олинган уч каррали интеграл орасидаги боғланишни аниқлаймиз.

Теорема. *Агар*

$$\vec{a}(M)=P(x,\,y,\,z)\vec{i}+Q(x,\,y,\,z)\vec{j}+R(x,\,y,\,z)\vec{k}$$

вектор майдон проекциялари ω соҳада ўзининг биринчи тартибли хусусий ҳосиласи билан бирга узлуксиз бўлса, у ҳолда σ ёпиқ сирт орқали $\vec{a}$ вектор оқимини шу сирт билан чегараланган ω ҳажм бўйича уч каррали интегрални қуйидаги формула бўйича шакл алмаштириш мумкин:

$$\oint\limits_{\sigma}\oint P(x,\,y,\,z)dy\,dz+Q(x,\,y,\,z)\,dz\,dx+R(x,\,y,\,z)dx\,dy=$$
$$=\iiint\limits_{\omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz, \qquad (6.1)$$



95- шакл.

бу ерда интеграллаш σ сиртнинг ташқи томони бўйича амалга оширилади (сиртга ўтказилган нормал фазонинг ташқи қисмига йўналган).

(6.1) формула *Остроградский формуласи* дейилади.

Исботи. Фараз қилайлик. D соҳа — σ сиртнинг (ва ω соҳанинг) Oxy сиртдаги проекцияси бўлсин, $z=z_1(x,\,y)$ ва $z=z_2(x,\,y)$ эса шу сиртнинг σ_1 пастки ва σ_2 юқоридаги қисмларининг тенгламаси бўлсин (95- шакл). Ушбу

$$\iiint\limits_{\omega} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$$

уч каррали интегрални сирт интегралига алмаштирамиз.

Бунинг учун уни икки каррали интегралга келтирамиз ва z бўйича интеграллаймиз. Бундан:

$$\iiint\limits_{\omega} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D}\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz\right)dx\,dy = \iint\limits_{D}\left(R(x,\,y,\,z)\,\Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\right)dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{D} R(x,y,z_2(x,y))\,dx\,dy - \iint\limits_{D} R(x,\,y,\,z_1(x,y))\,dx\,dy. \qquad (6.2)$$

D соҳа ҳам σ_1 сиртнинг, ҳам σ_2 сиртнинг Oxy текисликдаги проекцияси бўлгани учун (6.2) формуладаги икки каррали интегралларни уларга тенг бўлган 11-бобдаги (6.6) сирт интеграллари билан алмаштириш мумкин. Натижада қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\iiint\limits_{\omega} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\sigma_2} R(x,\,y,\,z)\,dx\,dy - \iint\limits_{\sigma_1} R(x,\,y,\,z)\,dx\,dy.$$

Иккинчи қўшилувчида σ_1 сиртнинг ташқи томонини ичкисига алмаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\iiint\limits_{\omega} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\sigma_2} R(x,\,y,\,z)dx\,dy + \iint\limits_{\sigma_1} R(x,\,y,\,z)\,\overline{dx}\,dy =$$

$$= \oint\!\!\oint\limits_{\sigma} R\,(x,\,y,\,z)\,dx\,dy, \qquad (6.3)$$

бу ерда σ ёпиқ сиртнинг ташқи томони олинади.

Қуйидаги формулалар ҳам худди шунга ўхшаш ҳосил қилинади:

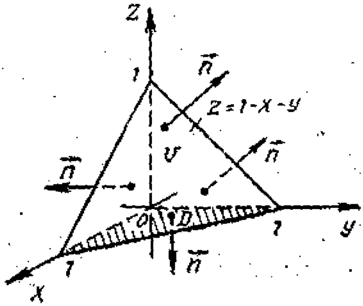
$$\iiint\limits_{\omega} \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \oint\!\!\oint\limits_{\sigma} P(x,\,y,\,z)\,dy\,dz, \qquad (6.4)$$

$$\iiint\limits_{\omega} \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \oint\!\!\oint\limits_{\sigma} Q\,(x,y,\,z)\,dx\,dz. \qquad (6.5)$$

(6.3), (6.4), (6.5) тенгликларни ҳадма-ҳад қўшиб, Остроградскийнинг (6.1) формуласига келамиз, шуни исботлаш талаб қилинган эди. Бу формула теореманинг шартини қаноатлантирувчи соҳаларга бўлиш мумкин бўлган исталган ω фазовий соҳа учун тўғри бўлади. Бу формула ёрдамида ёпиқ сиртлар бўйича сирт интегралларини ҳисоблаш қулай бўлади.

Мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$\oint\!\!\oint\limits_{\sigma} x dy\,dz + y dz\,dx + z\,dx\,dy;$$



96- шакл.

бунда σ қуйидаги

$$x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$$

текисликлар билан чегараланган пирамиданинг ташқи томони (96-шакл).

Ечиш. Остроградский формуласидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\iint_\sigma x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy=$$

$$=\iiint_\omega(1+1+1)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=3\iiint_\omega dx\,dy\,dz=3\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}dz=3\int_0^1dx\int_0^{1-x}z\Big|_0^{1-x-y}dy=$$

$$=3\int_0^1dx\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy=3\int_0^1\left(y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x}dx=$$

$$=3\int_0^1\left(1-x-x(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right)dx=3\int_0^1\left((1-x)^2-\frac{(1-x)^2}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^1(1-x)^2\,dx=-\frac{3}{2}\,\frac{(1-x)^3}{3}\Big|_0^1=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

7- §. Вектор майдон дивергенцияси

Oxyz фазонинг ω соҳасида

$$\vec a(M)=P(x,\ y,\ z)\,\vec i+Q(x,\ y,\ z)\,\vec j+R(x,\ y,\ z)\,\vec k$$

вектор майдон берилган бўлсин, унда $P(x,\ y,\ z)$, $Q(x,\ y,\ z)$, $R(x,\ y,\ z)$ функциялар дифференциалланувчи функциялар.

Таъриф. $\vec a\,(M)$ вектор майдоннинг *дивергенцияси* (*узоқлашувчиси*) деб M нуқтанинг скаляр майдонига айтилади, у $\operatorname{div}\vec a\,(M)$ кўринишда ёзилади ва

$$\operatorname{div}\vec a\,(M)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\tag{7.1}$$

формула билан аниқланади, бунда хусусий ҳосилалар M нуқтада ҳисобланади.

Дивергенциядан фойдаланиб, Остроградскийнинг (6.1) формуласини вектор шаклида қайта ёзиш мумкин:

$$\oint\!\!\!\oint_\sigma\vec a\,\vec n_0\,d\sigma=\iiint_\omega\operatorname{div}\vec a\,(M)\,d\omega.\tag{7.2}$$

Уни бундай ифодалаш мумкин: ёпиқ сирт орқали ўтувчи (бу сирт ташқи $\vec{n}$ нормали йўналишида ориентирланган) $\vec{a}$ вектор майдон оқими шу сирт билан чегараланган ҳажм бўйича майдон дивергенциясидан олинган уч каррали интегралга тенг.

Дивергенцияни ҳисоблашда қуйидаги хоссалардан фойдаланилади:

1) $\operatorname{div}(\vec{a}(M)+\vec{b}(M))=\operatorname{div}\vec{a}(M)+\operatorname{div}\vec{b}(M)$;

2) $\operatorname{div}C\cdot\vec{a}(M)=C\operatorname{div}\vec{a}(M)$, бунда C — ўзгармас сон;

3) $\operatorname{div}u(M)\cdot\vec{a}(M)=u(M)\operatorname{div}\vec{a}(M)+\vec{a}(M)\operatorname{grad}u(M)$,

бунда $u(M)$ — скаляр майдонни аниқловчи функция.

1. Дивергенциянинг инвариант таърифи. Дивергенцияни (7.1) формула ёрдамида аниқлаш координата ўқларини танлаш билан боғлиқ. Остроградскийнинг (7.2) формуласидан фойдаланиб, дивергенциянинг координаталар ўқларини танлаш билан боғлиқ бўлмаган бошқа таърифини бериш мумкин.

Бу формуланинг ўнг қисмида уч каррали интеграл турибди. Ўрта қиймат ҳақидаги маълум теоремага кўра (10-боб, 2-§) бу интеграл V ҳажм билан интеграл ости функциясининг ω соҳанинг бирор M_1 нуқтасидаги қиймати кўпайтмасига тенг. Шунинг учун (7.2) Остроградский формуласини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\iint_{\sigma}\vec{a}\vec{n}d\sigma=V\operatorname{div}\vec{a}(M_1)$$

ёки

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_1)=\frac{1}{V}\iint_{\sigma}\vec{a}\,\vec{n}\,d\sigma.$$

Агар ω соҳа M нуқтага тортилса ёки $V\to 0$ бўлса, у ҳолда M_1 нуқта M га интилади. Натижада лимитга ўтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\lim_{M_1\to M}\operatorname{div}\vec{a}(M_1)=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint\!\!\!\oint_{\sigma}\vec{a}\,\vec{n}\,d\sigma.$$

ёки

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\lim_{V\to 0}\frac{\iint_{\sigma}\vec{a}\,\vec{n}\,d\sigma}{V}=\lim_{V\to 0}\frac{\Pi}{V}. \qquad (7.3)$$

Энди дивергенциянинг координата ўқларини танлаш билан боғлиқ бўлмаган инвариант таърифини бериш мумкин.

Таъриф. M нуқта[illegible] вектор майдоннинг *дивергенцияси* деб, M нуқтани ўраб олган ёпиқ сирт орқали ўтувчи майдон оқимининг шу сирт билан чегараланган қисмнинг V ҳажмига нисбатининг бу ҳажм нуқтага тортилгандаги, яъни $V\to 0$ даги лимитига айтилади.

2. Дивергенциянинг физик маъноси. (7.3) дивергенция тушунчасига физик талқин берамиз.

Фараз қилайлик, ω соҳада оқаётган суюқликнинг тезликлари майдони $\vec{a}\,(M)$ берилган бўлсин. 5- § да $\vec{a}\,(M)$ векторнинг σ ёпиқ сирт орқали ташқи нормал йўналишидаги П оқими шу сирт билан чегараланган вақт бирлиги ичида оқиб кирган ва оқиб чиққан суюқлик миқдорлари орасидаги айирмани ифодалаши аниқланган эди.

Ушбу

$$\frac{\Pi}{V}=\frac{\oint\!\!\oint_{\sigma}\vec{a}\,\vec{n}\,d\sigma}{V}$$

нисбат ҳажм бирлигига бўлинган суюқлик миқдорини аниқлайди, яъни манбанинг ($\Pi>0$ бўлганда) ёки қурдум ($\Pi<0$ бўлганда) ўртача ҳажмий қувватини ифодалайди. Бу нисбатнинг лимити

$$\lim_{V\to 0}\frac{\oint\!\!\oint_{\sigma}\vec{a}\,\vec{n}\,d\sigma}{V}=\operatorname{div}\vec{a}\,(M)$$

(7.3) дивергенция бўлиб, у берилган нуқтадаги суюқлик сарфининг ҳажм бирлигига нисбатини ифодалайди.

Агар $\operatorname{div}\vec{a}\,(M)>0$ бўлса, суюқлик сарфи мусбат, яъни M нуқтани ўраб олган чексиз кичик сирт орқали ташқи нормал йўналишида суюқлик оқиб кирганидан кўпроқ оқиб чиқиб кетади. Бунда M нуқта манба бўлади.

Агар $\operatorname{div}\vec{a}\,(M)<0$ бўлса, у ҳолда M нуқта қурдум бўлади. $\operatorname{div}\vec{a}\,(M)$ катталик манбанинг ёки қурдумнинг қувватини ифодалайди.

Агар $\operatorname{div}\vec{a}\,(M)=0$ бўлса, у ҳолда M нуқтада на манба ва на қурдум бўлади. (7.2) вектор шаклида ёзилган Остроградский теоремаси оқаётган суюқликнинг тезликлари майдонида ёпиқ сирт орқали оқувчи суюқликнинг оқими ҳамма манбалар ва қурдумлар қувватларининг йиғиндисига тенг бўлишини, яъни қаралаётган соҳада вақт бирлиги ичида пайдо бўладиган суюқлик миқдорига тенг бўлишини ифодалайди.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Сирт орқали ўтувчи вектор оқими деб нимага айтилади?
2. Суюқликнинг тезликлари майдонида вектор оқимининг физик маъноси қандай?
3. Остроградский теоремасини ифодаланг ва исботланг.
4. Вектор майдон дивергенциясига координата шаклида таъриф беринг.
5. Дивергенциянинг хоссаларини санаб ўтинг.
6. Дивергенциянинг физик маъноси қандай?
7. Дивергенцияга инвариант таъриф беринг.
8. Остроградский теоремасини вектор шаклида ифодаланг ва унинг физик маъносини кўрсатинг.
9. 3896—2900, 4405—4408- масалаларни ечинг.

8- §. Соленоидли найчасимон майдонлар. Соленоидли майдоннинг таърифи ва асосий хоссалари

7-§ да истаган $\vec{a}$ вектор майдон div $\vec{a}$ ёрдамида скаляр майдонни вужудга келтириши аниқланган эди.

Таъриф. $\vec{a}(M)$ вектор майдоннинг дивергенцияси ω соҳанинг ҳар бир нуқтасида нолга тенг бўлса, яъни

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=0$$

бўлса, бу вектор майдон шу соҳада *соленоидли* (ёки *найчасимон*) майдон дейилади.

Шунинг учун соленоидли майдон учун Остроградский формуласига кўра

$$\oint\!\!\oint_{\sigma} \vec{a}\,\vec{n}_0\,d\sigma=0, \qquad (8.1)$$

формулани ҳосил қиламиз, бунда σ — ёпиқ сирт бўлиб, ω соҳани чегараловчи ташқи нормал йўналишида ориентирланган. Бу майдонда бирор σ_0 юзчани оламиз ва унинг чегарасининг ҳар бир нуқтасидан вектор чизиқлар ўтказамиз (97-шакл). Бу чизиқлар фазонинг вектор-найча деб аталувчи (12-боб, 4-§) қисмини чегаралайди. Агар $\vec{a}(M)$ вектор оқаётган суюқликнинг тезликлари майдонини ташкил этса, у ҳолда суюқлик оқиши давомида бундай найча бўйлаб уни кесиб ўтмасдан ҳаракатланади.

σ_0 юзча бирор σ_1 кесим ва найчанинг σ ён сирти билан чегараланган шундай найчанинг бирор қисмини кўриб чиқамиз. (8.1) тенглик бундай ёпиқ сирт учун қуйидаги кўринишни олади:

$$\iint_{\sigma_0}\vec{a}\,\vec{n}_0\,d\sigma+\iint_{\sigma_1}\vec{a}\,\vec{n}_0 d\sigma+\iint_{\sigma}\vec{a}\,\vec{n}_0\,d\sigma=0, \qquad (8.2)$$

бу n_0 — ташқи нормал бўйича йўналган бирлик вектор.

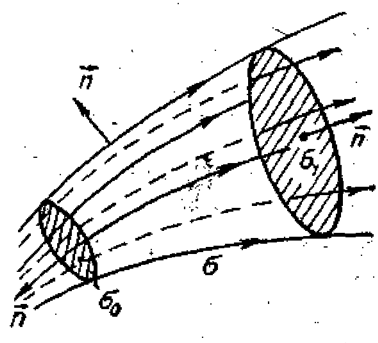
Найчанинг ён сиртида нормаллар $\vec{a}$ вектор майдонига перпендикуляр бўлгани учун

$$\vec{a}\cdot\vec{n}_0=0$$

бўлади ва (8.2) тенгликдаги учинчи қўшилувчи нолга тенг:

$$\iint_{\sigma}\vec{a}\,\vec{n}_0\,d\sigma=0.$$

Шунинг учун (8.2) формула бундай кўринишни олади:



97- шакл.

$$\iint\limits_{\sigma_0} \vec{a}\,\vec{n}_0 d\sigma + \iint\limits_{\sigma_1} \vec{a}\,\vec{n}_0 d\sigma = 0,$$

бундан

$$\iint\limits_{\sigma_0} \vec{a}\,\vec{n}_0 d\sigma = -\iint\limits_{\sigma_1} \vec{a}\cdot\vec{n}_0\, d\sigma$$

келиб чиқади. σ_0 юзчадаги нормалнинг йўналишини ташқидан ичкига алмаштириб,

$$\iint\limits_{\sigma_0} \vec{a}\,\vec{n}_0 d\sigma = \iint\limits_{\sigma_1} \vec{a}\,\vec{n}_0 d\sigma$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Бу соленоидли майдонда вектор найчанинг ҳар бир кесимидан ўтказилган вектор чизиқлар йўналишидаги векторлар оқими бир хил бўлади, яъни манбасиз ва қурдумсиз майдонда (чунки $\mathrm{div}\,\vec{a}(M)=0$) вектор найчанинг ҳар бир кесимидан бир хил миқдорда суюқлик оқиб ўтади. Соленоидли майдондаги вектор чизиқлар ҳеч қаерда йўқолмайди ва янгиси пайдо ҳам бўлмайди.

9- §. Вектор майдондаги чизиқли интеграл. Куч майдони бажарган иш. Вектор майдони циркуляцияси

Фараз қилайлик, ω соҳада вектор майдон

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

вектор орқали ҳосил қилинган бўлсин. Бу соҳада бирор L чизиқни оламиз ва унда маълум йўналишни танлаймиз.

Таъриф. Йўналган L чизиқ бўйича олинган ушбу

$$\int\limits_L P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

иккинчи тур эгри чизиқли интеграл ёки вектор шаклидаги

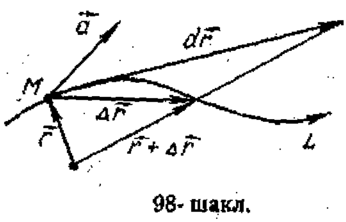
$$\int\limits_L \vec{a}\,d\vec{r}$$

интеграл $\vec{a}(M)$ векторнинг L чизиқ бўйича олинган *чизиқли интеграли* дейилади (98- шакл).

Агар $\vec{a}(M)$ вектор куч майдони ҳосил қилса, $\vec{a}$ векторнинг L чизиқ бўйича чизиқли интеграли маълум йўналишда L чизиқ бўйича бажариладиган ишга тенг бўлади.

Таъриф. Ёпиқ L контур бўйича чизиқли интеграл вектор циркуляцияси дейилади ва Ц билан белгиланади, яъни

$$Ц = \oint\limits_L \vec{a}\,d\vec{r} = \oint P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz.$$



98- шакл.

10-§. Стокс теоремаси

II-бобдаги сирт интеграллари учун (4.1) Грин формуласига ўхшаш формула ўринли бўлиб, интегрални σ сирт бўйича ҳисоблаш масаласини бу сиртни чегараловчи L контур бўйича иккинчи тур эгри чизиқли интегрални ҳисоблашга келтиришга имкон беради.

Теорема. *Агар $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ функциялар ўзларининг биринчи тартибли хусусий ҳосилалари билан бирга σ соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда қуйидаги формула ўринли бўлади:*

$$\oint_L P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz =$$

$$= \iint_\sigma \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\sigma, \qquad (10.1)$$

бу ерда $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — бирлик вектор $\vec{n}_0$ нормалининг σ сиртга йўналтирувчи косинуслари, L — бу сиртнинг чегараси.

(10.1) формула *Стокс формуласи* дейилади (99-шакл). Бу формулада L контур бўйича интеграллаш йўналиши σ сиртнинг танланган томони билан қуйидаги қоида бўйича мослаштирилади: n_0 нормалнинг охиридан контурни айланиб ўтиш соат милига қарши йўналишда кузатилади (айланиб ўтишнинг бундай йўналиши II-бобдаги 6-§ да мусбат йўналиш деб аталган).

Исботи. σ сирт ҳамма координата текисликларига бир қийматли проекциялансин. Бу сиртнинг тенгламаси

$$z = z(x, y),$$

бу ерда $z(x, y)$ функция D_1 соҳада дифференциалланувчи функция бўлиб, у σ сиртнинг Oxy текисликдаги проекцияси бўлади.

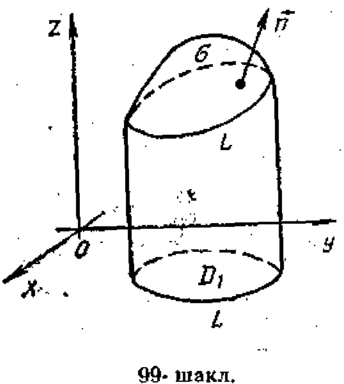
D_1 соҳанинг чегарасини L_1 билан белгилаймиз, шу билан бирга L_1 контур L нинг Oxy текисликдаги проекцияси бўлади.

σ сиртнинг юқори томонини танлаб оламиз, бунга мос ҳолда ундаги ориентацияни ҳам танлаб оламиз.

Ушбу

$$\oint_L P(x, y, z)\,dx$$

эгри чизиқли интегрални аввал



99-шакл.

L_1 контур бўйича, кейин эса Грин формуласидан фойдаланиб D_1 соҳа бўйича каррали интегралга алмаштирамиз ва ниҳоят, σ сирт бўйича сирт интегралига алмаштирамиз.

Чегара σ сиртга тегишли бўлгани учун L контур нуқталарининг координаталари $z=z(x, y)$ тенгламани қаноатлантиради ва бинобарин, $P(x, y, z)$ функциянинг L даги қийматлари $P(x, y, z(x, y))$ функциянинг L_1 даги мос қийматларига тенг. L ва L_1 мос бўлинишларининг Ox ўқидаги проекциялари мос тушади, демак, L ва L_1 контур бўйича иккинчи тур эгри чизиқли интеграллар учун интеграл йиғиндилар ҳам мос тушади. Шунинг учун

$$\oint_L P(x, y, z)\,dx = \oint_{L_1} P(x, y, z(x, y))\,dx.$$

Бунинг ўнг қисмига 11-бобдаги (4.1) Грин формуласини ва мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидасини қўллаб,

$$\oint_L P(x, y, z)\,dx = -\iint_{D_1}\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx\,dy$$

ни топамиз. $dx\,dy$ ни $dx\,dy = \cos\gamma\,d\sigma$ формула бўйича $d\sigma$ сиртнинг элементи орқали алмаштириб, D_1 соҳа бўйича каррали интегрални сирт бўйича интегралга келтирамиз:

$$\oint_L P(x, y, z)\,dx = -\iint_\sigma\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cos\gamma\,d\sigma. \quad (10.2)$$

Маълумки (7-боб, 9-§),

$$\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} - \vec{k}$$

вектор $z = z(x, y)$ сиртга перпендикуляр, ва бинобарин, $\vec{n}_0$ нормалнинг бирлик векторига коллинеар:

$$\vec{n}_0 = \cos\alpha\cdot\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j} + \cos\gamma\cdot\vec{k}.$$

Шунинг учун бу векторларнинг коллинеарлик шарти бажарилиши керак:

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{\cos\beta}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\cos\gamma}{-1}.$$

Демак,

$$\frac{\partial z}{\partial y}\cos\gamma = -\cos\beta.$$

Бу муносабатдан фойдаланиб, (10.2) ифодани бундай кўринишда қайта ёзамиз:

$$\oint_L P(x, y, z)\,dx = \iint_\sigma\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)d\sigma. \quad (10.3)$$

Қуйидаги формулалар шунга ўхшаш ҳосил қилинади:

$$\oint\limits_L Q(x,\ y,\ z)\,dy = \iint\limits_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)d\sigma, \qquad (10.4)$$

$$\oint\limits_L R(x,\ y,\ z)\,dz = \iint\limits_\sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)d\sigma. \qquad (10.5)$$

(10.3), (10.4), (10.5) формулаларни қўшиб, Стокс формуласига келамиз:

$$\oint\limits_L P(x,\ y,\ z)\,dx + Q(x,\ y,\ z)\,dy + R(x,\ y,\ z)\,dz = \iint\limits_\sigma \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\sigma. \qquad (10.6)$$

Уни қуйидаги кўринишда қайта ёзиш мумкин:

$$\oint\limits_L P(x,\ y,\ z)\,dx + Q(x,\ y,\ z)\,dy + R(x,\ y,\ z)\,dz = \iint\limits_\sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy. \qquad (10.7)$$

Хусусан, агар σ соҳа L контур билан чегараланган Oxy текисликнинг соҳаси бўлса, у ҳолда $dzdx$ ва $dydz$ бўйича интеграллар нолга айланади ва Стокс формуласи (11-бобдаги) (4.1) Грин формуласига ўтади.

Стокс формуласи эгри чизиқли интегралларни ёпиқ контур бўйича сирт интеграллари ёрдамида ҳисоблашга имкон беради.

Мисол. Ушбу

$$\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$$

вектор майдоннинг $2x-3y+4z-12=0$ текисликнинг координата текисликлари билан кесишиш чизиғи бўйича Ц циркуляциясини ҳисобланг.

Ечиш. σ текисликнинг юқори томонини шунингдек, шу томонга мос келган $ABCA$ берк контурни айланиб чиқиш йўналишини қараб чиқамиз (100-шакл). Ушбуга эга бўламиз:

$$P = xy,\quad Q = yz,\quad R = xz,$$

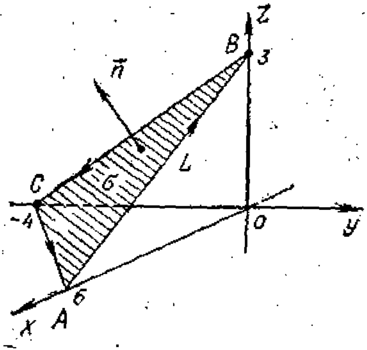
хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$P'_y = x,\quad P'_z = 0,\quad Q'_x = 0,\quad Q'_z = y,\quad R'_x = z,\quad R'_y = 0.$$

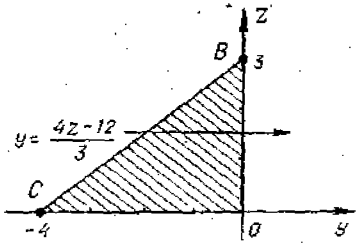
Бу ифодаларни (10.7) Стокс формуласига қўямиз:

$$Ц = \oint\limits_L xy\,dx + yz\,dy + xz\,dz = -\iint\limits_\sigma y\,dy\,dz + z\,dx\,dz + x\,dx\,dy.$$

σ сирт бўйича олинган интегрални бу сиртнинг координата те-



100- шакл.



101- шакл.

кисликларидаги проекциялари бўлган каррали интеграллар билан ифодалаймиз:

$$\iint\limits_{\sigma} y\,dy\,dz = \iint\limits_{\Delta BCO} y\,dy\,dz = \int\limits_0^3 dz \int\limits_{\frac{4z-12}{3}}^{0} y\,dy = \int\limits_0^3 \frac{y^2}{2}\Bigg|_{\frac{4z-12}{3}}^{0} dz =$$

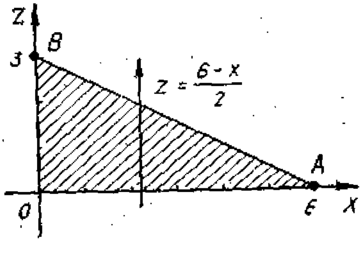
$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^3 \left(\frac{4z-12}{3}\right)^2 dz = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\,4^2\int\limits_0^3 (z-3)^2\,dz =$$

$$= -\frac{8}{9}\,\frac{(z-3)^3}{3}\Bigg|_0^3 = -\frac{8}{27}\cdot 27 = -8 \quad (101\text{- шакл}).$$

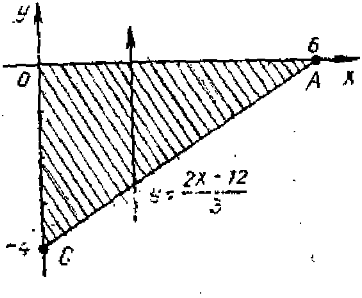
$$\iint\limits_{\sigma} z\,dx\,dz = -\iint\limits_{\Delta ABO} z\,dx\,dz = -\int\limits_0^6 dx\int\limits_0^{\frac{6-x}{2}} z\,dz = -\int\limits_0^6 \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{6-x}{2}} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^6 \frac{(6-x)^2}{4}\,dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{(6-x)^3}{3}\Bigg|_0^6 = -\frac{6^3}{8\cdot 3} = -9 \quad (102\text{- шакл}).$$

$$\iint\limits_{\sigma} x\,dx\,dy = \iint\limits_{\Delta ACO} x\,dx\,dy = \int\limits_0^6 dx\int\limits_{\frac{2x-12}{3}}^{0} x\,dy = \int\limits_0^6 xy\Bigg|_{\frac{2x-12}{3}}^{0} dx =$$



102- шакл.



103- шакл.

$$= -\int_0^6 \frac{x(2x-12)}{3}\,dx = -\frac{1}{3}\int_0^6 (2x^2-12x)\,dx = -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x^3-6x^2\right)\Big|_0^6 =$$

$$= -\frac{1}{3}(4\cdot 36-36\cdot 6) = \frac{1}{3}\cdot 36\cdot 2 = 24 \quad (103\text{-шакл}).$$

Шундай қилиб,

$$Ц = -(-8-9+24) = -7.$$

11-§. Вектор майдон уюрмаси

Фараз қилайлик, *Oxyz* фазонинг ω соҳасида қуйидаги вектор майдон берилган бўлсин:

$$\vec a(M) = P(x,\ y,\ z)\vec i + Q(x,\ y,\ z)\vec j + R(x,\ y,\ z)\vec k.$$

Таъриф. $\vec a\,(M)$ вектор майдоннинг *уюрмаси* (ёки *ротори*) деб *M* нуқтанинг [rot $\vec a\,(M)$ билан белгиланадиган ва

$$\mathrm{rot}\,\vec a\,(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec i + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec k \quad (11.1)$$

формула билан аниқланадиган вектор майдонига айтилади, бунда хусусий ҳосилаларни $M\ (x,\ y,\ z)$ нуқтада топамиз.

Мисол. Ушбу

$$\vec a\,(M) = z^2\vec i + x^2\vec j + y^2\vec k$$

вектор майдоннинг уюрмасини топинг.

Ечиш. $P = z^2$, $Q = x^2$, $R = y^2$ га эгамиз. Хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z} = 2y,\quad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x} = 2z,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y} = 2x.$$

Демак,

$$\mathrm{rot}\,\vec a = 2y\vec i + 2z\vec j + 2x\vec k.$$

Уюрма тушунчасидан фойдаланиб, (10.7) Стокс формуласини вектор шаклида қайта ёзиш мумкин:

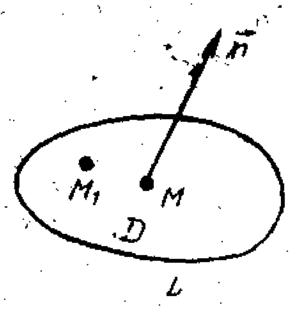
$$\oint_L \vec a\,d\vec r = \iint_\sigma \vec n\,\mathrm{rot}\,\vec a\,d\sigma \quad (11.2)$$

ва бундай ифодалаш мумкин: $\vec a$ векторнинг σ сиртни чегараловчи *L* контурни айланиб чиқишнинг мусбат йўналиши бўйича циркуляцияси rot $\vec a$ векторнинг шу сирт орқали ўтадиган оқимига тенг.

Уюрманинг таърифидан фойдаланиб, қуйидаги хоссаларнинг тўғри эканига ишонч ҳосил қилиш мумкин:

1) $\mathrm{rot}(\vec a+\vec b) = \mathrm{rot}\,\vec a + \mathrm{rot}\,\vec b$;

2) $\mathrm{rot}(C\vec a) = C\,\mathrm{rot}\,\vec a$, бунда C — ўзгармас скаляр.



104- шакл.

3) $\operatorname{rot}(u\vec{a})=u\operatorname{rot}\vec{a}+(\operatorname{grad}u)\times\vec{a}$, бунда $u=u(M)$ скаляр майдонни аниқловчи функция.

1. Уюрманинг инвариант таърифи. Уюрманинг юқорида берилган таърифи координаталар системасини танлашга боғлиқ. Энди уюрмали майдонга инвариант таъриф берамиз:

Фараз қилайлик, $\vec{n}$ — ихтиёрий белгиланган бирлик вектор ва D эса M нуқтани ўз ичига олган L чегарали ясси шакл бўлиб, у $\vec{n}$ векторга перпендикуляр бўлсин. (11.2) Стокс формуласини

$$\oint_L \vec{a}\,d\vec{r} = \iint_D \operatorname{rot}_n\vec{a}\,d\sigma$$

кўринишда ёзамиз, чунки $\vec{n}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}=\operatorname{rot}_n\vec{a}$ (104- шакл).

Ўрта қиймат ҳақидаги теоремага мувофиқ:

$$\oint_L \vec{a}\,d\vec{r} = S\operatorname{rot}_n\vec{a}(M_1),$$

бундан $\operatorname{rot}_n\vec{a}(M_1)=\frac{1}{S}\oint_L\vec{a}\,d\vec{r}$, бу ерда S юз — D соҳанинг юзи, M_1 — бу соҳадаги бирор нуқта.

Охирги тенгликда D соҳани M нуқтага тортиб (ёки $S\to0$ да), лимитга ўтамиз, бунда M_1 нуқта M нуқтага интилади:

$$\lim_{M_1\to M}\operatorname{rot}_n\vec{a}(M_1)=\lim_{S\to0}\frac{1}{S}\oint_L\vec{a}\,d\vec{r}$$

ёки

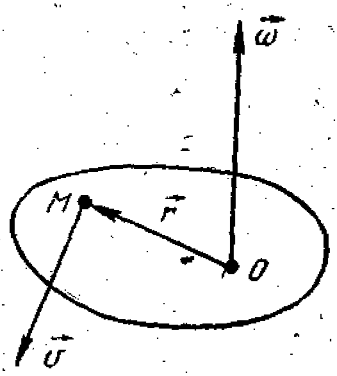
$$\operatorname{rot}_n\vec{a}(M)=\lim_{S\to0}\frac{1}{S}\oint_L\vec{a}\,d\vec{r}=\lim_{S\to0}\frac{Ц}{S}.$$

Таъриф. Вектор майдон *уюрмаси* деб, шундай векторга айтиладики, унинг бирор йўналишга бўлган проекцияси шу йўналишга перпендикуляр бўлган D ясси юзнинг L контур бўйича вектор майдон циркуляциясининг S юзнинг катталигига нисбатига тенг, бунда юзнинг ўлчамлари нолга интилади ($S\to0$), юзнинг ўзи эса нуқтага тортилади.

2. Уюрманинг физик маъноси. Вектор майдон уюрмаси тушунчасининг физик талқинини берамиз. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги ҳаракатини қараб чиқамиз. Кинематикада тезликлар майдони $\vec{v}$ исталган моментда

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

формула билан аниқланади, бунда $\vec{\omega}$ оний бурчак тезлик, $\vec{r}$ — жисмнинг ихтиёрий M нуқтасининг радиус-вектори (105- шакл).



105- шакл.

Агар

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

$$\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}$$

экани маълум бўлса, у ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_y z - \omega_z y)\vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z)\vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x)\vec{k}.$$

Энди $\mathrm{rot}\,\vec{v}$ векторнинг проекцияларини топамиз:

$$\text{пр}_x(\mathrm{rot}\,\vec{v}) = \frac{\partial}{\partial y}(\omega_x y - \omega_y x) - \frac{\partial}{\partial z}(\omega_z x - \omega_x z) = \omega_x + \omega_x = 2\omega_x,$$

$$\text{пр}_y(\mathrm{rot}\,\vec{v}) = \frac{\partial}{\partial z}(\omega_y z - \omega_z y) - \frac{\partial}{\partial x}(\omega_x y - \omega_y x) = \omega_y + \omega_y = 2\omega_y,$$

$$\text{пр}_z(\mathrm{rot}\,\vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x}(\omega_z x - \omega_x z) - \frac{\partial}{\partial y}(\omega_y z - \omega_z y) = \omega_z + \omega_z = 2\omega_z.$$

Шундай қилиб,

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = 2\omega_x\vec{i} + 2\omega_y\vec{j} + 2\omega_z\vec{k} = 2\vec{\omega}$$

эканини ҳосил қилдик.

Демак, $\vec{v}$ тезлик майдони уюрмаси қаттиқ жисм айланишининг оний бурчак тезлиги векторига коллинеар вектордир:

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = 2\vec{\omega}.$$

Уз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Қандай майдон соленоидли майдон дейилади?
2. Соленоидли майдоннинг хоссасини ифодаланг.
3. Чизиқли интеграл деб нимага айтилади?
4. Векторнинг циркуляцияси деб нимага айтилади?
5. Стокс теоремасини ифодаланг ва исботланг.
6. Вектор майдон уюрмасини координата шаклида таърифланг.
7. Вектор майдон уюрмасининг таърифини айтинг.
8. Стокс теоремасини вектор шаклида ифодаланг.
9. Вектор майдон уюрмасининг физик маъноси қандай?
10. 3894—3895, 4450—4465- масалаларни ечинг.

12-§. Чизиқли интегралнинг интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслиги шартлари

Фараз қилайлик, қуйидаги вектор майдон берилган бўлсин:

$$\vec{a} = P(x,\ y,\ z)\vec{i} + Q(x,\ y,\ z)\vec{j} + R(x,\ y,\ z)\vec{k}.$$

Бундан кейин P, Q, R функциялар ўзларининг биринчи тартибли хусусий ҳосилалари билан бирга ёки $Oxyz$ фазонинг ҳаммасида, ёки фазонинг бирор ω соҳасида узлуксиз бўлади деб фараз қиламиз.

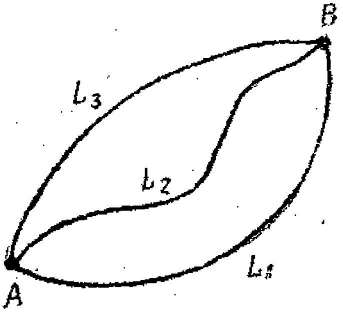
Фараз қилайлик A ва B нуқталар ω соҳанинг иккита ихтиёрий нуқтаси бўлсин. ω соҳада ётувчи ва A ҳамда B нуқталарни туташтирувчи турли эгри чизиқларни қараб чиқамиз (106-шакл). Агар

$$\int\limits_L P(x,\ y,\ z)\,dx + Q(x,\ y,\ z)\,dy + R(x,\ y,\ z)\,dz$$

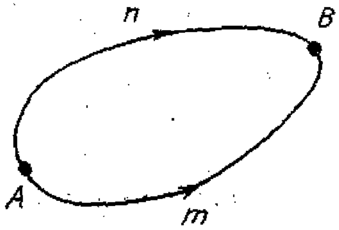
чизиқли интеграл бу йўлларнинг ихтиёрийси бўйича айни бир хил қийматлар қабул қилса, у интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмайди дейилади.

Чизиқли интегралнинг интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслик шартлари қуйидаги теоремалар билан берилади.

1-теорема. *Ушбу*



106-шакл.



107-шакл.

$$\int\limits_L P(x,\ y,\ z)\,dx + Q(x,\ y,\ z)\,dy + R(x,\ y,\ z)\,dz$$

чизиқли интеграл бирор ω соҳада интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслиги учун бу соҳада ётган истаган ёпиқ контур бўйича олинган интеграл нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Исботи. Етарлилиги. Фараз қилайлик, ω соҳада ётувчи истаган L ёпиқ контур учун

$$\oint\limits_L P(x,\ y,\ z)\,dx + Q(x,\ y,\ z)\,dy + R(x,\ y,\ z)\,dz = 0$$

бўлсин. Чизиқли интегралнинг интеграллаш йўлига боғлиқ эмаслигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан, A ва B нуқталар ω соҳага тегишли бўлган нуқталар бўлсин. Бу нуқталарни ω соҳада ётувчи иккита турли AmB ва AnB эгри чизиқлар билан туташтирамиз (107-шакл). Қуйидагича бўлишини кўрсатамиз:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AmB}} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = \int\limits_{\overset{\smile}{AnB}} P(x, y, z)\,dx + $$
$$+ Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz.$$

$\overset{\smile}{AnB}$ ва $\overset{\smile}{AmB}$ ёйлар $AmBnA$ ёпиқ контурни ҳосил қилади. Эгри чизиқли интегралларнинг хоссаларини ҳисобга олиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\oint\limits_{AmBnA} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = \int\limits_{\overset{\smile}{AmB}} P(x, y, z)\,dx +$$
$$+ Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz + \int\limits_{\overset{\smile}{BnA}} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy +$$
$$+ R(x, y, z)\,dz = \int\limits_{\overset{\smile}{AmB}} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz -$$
$$- \int\limits_{\overset{\smile}{AnB}} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz,$$

чунки

$$\int\limits_{\overset{\smile}{BnA}} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz =$$
$$= - \int\limits_{\overset{\smile}{AnB}} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz.$$

Бироқ

$$\oint\limits_{AmBnA} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = 0$$

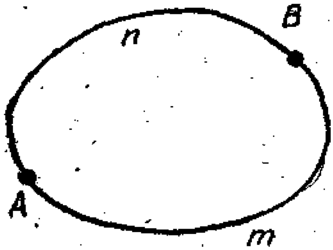
интеграл ёпиқ контур бўйича олинган интегралдир. Демак,

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AmB}} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz - \int\limits_{\overset{\smile}{AnB}} P(x, y, z)\,dx +$$
$$+ Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = 0.$$

Бундан

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AmB}} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz =$$
$$= \int\limits_{\overset{\smile}{AnB}} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

эканини ҳосил қиламиз.



108- шакл.

Шундай қилиб, чизиқли интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслигини исботладик.

Зарурлиги. Фараз қилайлик ω соҳада

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

чизиқли интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмасин.

Шу соҳада ётувчи истаган ёпиқ контур бўйича олинган интеграл нолга тенг бўлишини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан ω соҳада ётувчи ихтиёрий ёпиқ контурни қараб чиқамиз ва унда иккита ихтиёрий A ва B нуқтани оламиз (108-шакл). У ҳолда

$$\oint_{AmBnA} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{AmB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz + \int_{BnA} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{AmB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz - \int_{AnB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0,$$

чунки шартга кўра

$$\int_{AmB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{AnB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Шундай қилиб, истаган ёпиқ контур бўйича олинган интеграл нолга тенг. Теорема исботланди.

Қуйидаги теорема амалда қўлланиш учун қулай бўлган шартларни беради, бу шартлар бажарилганда чизиқли интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмайди.

Теоремани ифодалашдан олдин фазода бир боғламли соҳа тушунчасини киритамиз.

Таъриф. Агар ω соҳада ётувчи ихтиёрий L ёпиқ контур учун шу соҳада ётувчи σ сирт мавжуд бўлиб, унинг учун L контур чегара бўлса, фазонинг ω соҳаси *бир боғламли соҳа* дейилади. Бу ҳолда L контурга ω соҳага тўла тегишли бўлган σ сиртни тортиш мумкин дейилади. Масалан, куб, шар, бутун фазо бир боғламли соҳа бўлади. Торнинг («тешкулча») ичи бир боғламли бўлмаган соҳа ҳисобланади.

2-теорема: $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ *вектор-функциянинг*

$$\int_L P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz \qquad (12.1)$$

чизиқли интеграли бир боғламли ω *соҳада интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслиги учун бу соҳанинг ҳамма жойида*

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0} \qquad (12.2)$$

бўлиши зарур ва етарлидир.

Етарлилигини исботлаш билан чегараланамиз.

Исботи. Етарлилиги.

Фараз қилайлик, ω соҳада $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$ бўлсин.

ω соҳада ётувчи исталган L ёпиқ контур бўйича олинган ушбу чизиқли интеграл нолга тенг бўлсин:

$$\oint_L P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = 0.$$

ω соҳада L контур билан чегараланган σ сиртни қараймиз (соҳанинг бир боғламлилиги сабабли бундай соҳа доим топилади). Стокс формуласига кўра

$$\oint_L \vec{a}\,d\vec{r} = \iint_\sigma \vec{n}\operatorname{rot}\vec{a}\,d\sigma$$

ω соҳада, жумладан, σ сиртда $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$ тенглик ўринли бўлади. Шунинг учун

$$\iint_\sigma \vec{n}\operatorname{rot}\vec{a}\,d\sigma = 0,$$

демак,

$$\oint_L \vec{a}\,d\vec{r} = 0$$

ёки

$$\oint_L P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = 0.$$

Шундай қилиб, ω соҳада исталган L ёпиқ контур бўйича олинган чизиқли интеграл нолга тенг. 1-теоремага асосан чизиқли интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ эмаслигини хулоса қиламиз,

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

бўлгани учун 2-теоремани қуйидагича ифодалаш мумкин: *ушбу*

$$\int_L P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

чизиқли интеграл бир боғламли соҳада интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслиги учун шу соҳанинг ҳар бир нуқтасида

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \tag{12.3}$$

муносабат бажарилиши зарур ва етарлидир.

1-мисол. Ушбу

$$\int\limits_L (2xy+z^2)\,dx+(x^2+z)\,dy+(y+2xz)\,dz$$

чизиқли интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ бўлиш-бўлмаслигини текширинг.

Ечиш. 2-теореманинг (12.2) ёки (12.3) шартларини текширамиз. Бундан қуйидагига эга бўламиз:

$$P=2xy+z^2, \quad Q=x^2+z, \ R=y+2xz.$$

Бундан

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial R}{\partial x}=2z,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=2z, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}=1, \quad \frac{\partial R}{\partial y}=1.$$

Бинобарин

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}=1, \quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}=2z, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=2x,$$

бундан

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\vec{0}.$$

Шунинг учун берилган чизиқли интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмайди.

2-мисол. Ушбу

$$\int\limits_L ydx-xdy+zdz$$

чизиқли интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ бўлиши ёки бўлмаслигини текширинг.

Ечиш. (12.2) ёки (12.3) шартларни текширамиз. $P=y$, $Q=-x$, $R=z$ га эгамиз. Бундан:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-1, \quad \frac{\partial R}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial R}{\partial y}=0.$$

Бинобарин,

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x},$$

бундан ушбуга эга бўламиз:

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}=-2\vec{k}\neq\vec{0}.$$

Шунинг учун берилган чизиқли интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ бўлади.

13-§. Потенциал майдон. Потенциаллик шартлари

Таъриф. Агар

$$\vec{a}(M)=P(x,\ y,\ z)\vec{i}+Q(x,\ y,\ z)\vec{j}+R(x,\ y,\ z)\vec{k}$$

вектор майдоннинг уюрмаси ω соҳанинг ҳамма нуқталарида нолга тенг бўлса, бу майдон шу соҳада *потенциал* (ёки *градиентли*, ёки *уюрмасиз) майдон* дейилади.

Потенциал майдоннинг таърифига кўра майдоннинг ҳар бир нуқтаси учун

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+$$
$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}=\vec{0} \qquad (13.1)$$

бўлади, яъни қуйидаги айниятлар ўринли бўлади:

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}. \qquad (13.2)$$

Шунинг учун (13.2) айниятларнинг бажарилиши вектор майдоннинг потенциаллиги шарти бўлади.

Шу айниятлар (12.1) чизиқли интегралнинг L ёпиқ контур бўйича нолга айланиши учун зарур ва етарлидир, шунингдек, унинг интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслигининг зарурий ва етарли шартидир.

Таъриф. Градиенти $\vec{a}\,(x,\ y,\ z)$ скаляр майдонни вужудга келтирувчи $u(x,\ y,\ z)$ скаляр функция шу вектор майдоннинг *потенциал функцияси* (ёки *потенциали*) дейилади.

Шундай қилиб, потенциал майдон

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}=\vec{a}$$

муносабат билан ифодаланади, бунда

$$\vec{a}=P(x,\ y,\ z)\vec{i}+Q(x,\ y,\ z)\vec{j}+R(x,\ y,\ z)\vec{k}$$

бўлиб, шу билан бирга $\operatorname{rot}\vec{a}=\vec{0}$ ёки $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u=\vec{0}$.

Мисол. Ушбу

$$\vec{a}=(x^2-2yz)\cdot\vec{i}+(y^2-2xz)\cdot\vec{j}+(z^2-2xy)\vec{k}$$

майдон потенциал майдон бўлиши ёки бўлмаслигини текширинг.

Ечиш. $P=x^2-2yz$, $Q=y^2-2xz$, $R=z^2-2xy$ бўлгани учун бу ердан хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2z,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-2z,\quad \frac{\partial R}{\partial x}=-2y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=-2y,\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=-2x,\quad \frac{\partial R}{\partial y}=-2x.$$

Қуйидагилар равшан,

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}=-2x;\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}=-2y,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-2z,$$

яъни (13.2) шарт бажарилади, шунинг учун берилган майдон потенциал майдондир.

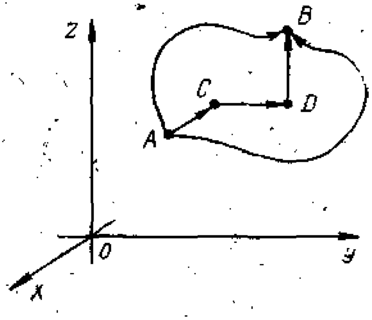
14-§. Потенциал майдон ҳолида чизиқли интегрални ҳисоблаш

Агар ω фазовий соҳа бир боғламли бўлса, у ҳолда потенциал майдондаги чизиқли интеграл интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмасдан, балки шу йўлнинг бошланғич A ҳамда охирги B нуқталарининг координаталарига боғлиқ бўлади ва $u(x, y, z)$ функциянинг шу нуқталардаги орттирмасига тенг бўлади, яъни

$$\int_{AB} P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy+R(x, y, z)\,dz=$$
$$=u(x_B, y_B, z_B)-u(x_A, y_A, z_A), \qquad (14.1)$$

бу ерда AB йўл — $A(x_A, y_A, z_A)$ нуқтадан $B(x_B, y_B, z_B)$ нуқтагача ихтиёрий интеграллаш йўли. Одатда бундай йўл тарзида $ACDB$ синиқ чизиқ олинади, унинг AC, CD ва DB бўғинлари координаталар ўқига параллел (109-шакл). Бу ҳолда потенциални ҳисоблаш формуласи қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$u(x, y, z)=\int_A^B P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy+R(x, y, z)\,dz=$$



109-шакл,

$$=\int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)\,dy+$$
$$+\int_{z_0}^{z} R(x, y, z)\,dz, \qquad (14.2)$$

бунда

$$A(x_0, y_0, z_0),\quad C(x, y_0, z_0),$$
$$D(x, y, z_0),\quad B(x, y, z),$$
$$\overrightarrow{AC}=(x-x_0)\overrightarrow{i},\quad \overrightarrow{CD}=(y-y_0)\overrightarrow{j},$$
$$\overrightarrow{DB}=(z-z_0)\overrightarrow{k}.$$

Агар потенциал майдон куч майдони бўлса, у ҳолда бундай майдонда нуқтани кўчиришда бажарилган иш майдоннинг бир A нуқтасидан иккинчи B нуқтасига кўчириш йўлига боғлиқ бўлмайди ва (14.1) формула бўйича ҳисобланиши мумкин.

Потенциал вектор майдонда бир-боғламли соҳада ётган ҳар қандай L ёпиқ эгри чизиқ бўйича циркуляция нолга тенг. Куч майдони учун бу майдон кучларининг ҳар қандай L ёпиқ эгри чизиқ бўйича бажарган иши нолга тенг бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\vec{a}=(x^2-2yz)\vec{i}+(y^2-2xz)\vec{j}+(z^2-2xy)\vec{k}$$

майдоннинг потенциалини топинг.

Ечиш. Бу векторнинг майдони потенциал эканини кўрсатган эдик (13-§ даги мисолда).

$u\ (x,\ y,\ z)$ потенциални (14.2) формула бўйича топамиз:

$$u(x,\ y,\ z)=\int\limits_{x_0}^{x}(x^2-2y_0z_0)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y}(y^2-2xz_0)\,dy+\int\limits_{z_0}^{z}(z^2-2xy)\,dz=$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3-2y_0z_0x\right)\Big|_{x_0}^{x}+\left(\frac{1}{3}\ y^3-2xz_0y\right)\Big|_{y_0}^{y}+\left(\frac{1}{3}z^3-2xyz\right)\Big|_{z_0}^{z}=$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{3}z^3\right)-2y_0z_0x-2xz_0y-2xyz-\frac{1}{3}x_0^3+$$

$$+2y_0z_0x_0-\frac{1}{3}y_0^3+2xz_0y_0-\frac{1}{3}z_0^3+2xyz_0=\left[\frac{1}{3}(x^3+y^3+\right.$$

$$\left.+z^3)-2xyz\right]-\left[\frac{1}{3}(x_0^3+y_0^3+z_0^3)-2x_0y_0z_0\right].$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Чизиқли интегралнинг интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслиги нимани билдиради?
2. Чизиқли интегралнинг интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслиги унинг исталган контур бўйича нолга тенглигига эквивалент эканини кўрсатинг.
3. Чизиқли интегралнинг интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаслигининг зарурий ва етарли шарти ҳақидаги теоремани ифодаланг ва исботланг.
4. Қандай майдон потенциал майдон дейилади?
5. Майдон потенциаллигининг шартлари қандай?
6. Потенциал деб нимага айтилади? У қандай ҳисобланади?
7. 4430—4437-масалаларни ечинг.

15-§. Гамильтон оператори (Набла оператори)

Вектор анализнинг grad, div, rot дифференциал амалларини символик ∇ вектор ёрдами[illegible] (Набла-вектор — Гамильтон оператори) ифодалаш қулайдир:

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Бу векторни у ёки бу (скаляр ёки вектор) катталикка қўлланишни бундай тушунмоқ керак: вектор алгебра қоидаларига кўра бу векторни берилган катталикка кўпайтириш амалини бажариш лозим, сўнгра $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ символларнинг бу катталикка кўпайтиришни тегишли ҳосилани топиш сифатида қараш керак.

Бу вектор билан амаллар бажариш қоидаларини қараб чиқамиз:

1. ∇ набла векторнинг $u(M)$ скаляр функцияга кўпайтмаси шу функциянинг градиентини беради:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \operatorname{grad} u.$$

Шундай қилиб, $\nabla u = \operatorname{grad} u$.

2. ∇ набла-векторнинг

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

вектор функция билан скаляр кўпайтмаси шу функциянинг дивергенциясини беради:

$$\nabla \cdot \vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot (P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{a}.$$

Шундай қилиб, $\nabla \cdot \vec{a} = \operatorname{div} \vec{a}$.

3. ∇ набла-векторнинг

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

вектор функцияга вектор кўпайтмаси шу функциянинг уюрмасини беради:

$$\nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = \operatorname{rot} \vec{a}.$$

Шундай қилиб, $\nabla \times \vec{a} = \operatorname{rot} \vec{a}$.

Градиент, дивергенция, уюрмани олиш амаллари биринчи тартибли дифференциал вектор амаллардир.

16-§. Вектор майдонидаги иккинчи тартибли амаллар

Вектор майдонидаги иккинчи тартибли амалларни кўрамиз. Шуни айтиб ўтиш керакки, $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{rot}\vec{a}$ амаллари вектор майдонларни вужудга келтиради, $\operatorname{div}\vec{a}$ амали эса скаляр майдонни вужудга келтиради. Кўрсатилган амалларнинг қуйидаги комбинациялари бўлиши мумкин: $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$, $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a}$, булар иккинчи тартибли амаллар дейилади. Улардан энг муҳимларини қараб чиқамиз.

1. $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0$.

Ҳақиқатан ҳам, агар вектор майдон

$$\vec{a} = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}$$

бўлса, у ҳолда иккинчи тартибли аралаш ҳосилаларнинг тенглиги учун

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial z\,\partial y} = 0$$

бўлади. Шу натижанинг ўзини набла-оператор

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{a})$$

ёрдамида ҳам олиш мумкин, чунки бу ерда учта векторнинг аралаш кўпайтмасини ҳосил қиламиз: ∇, ∇ ва $\vec{a}$, буларнинг иккитаси бир хил. Бундай кўпайтма нолга тенг бўлиши равшан.

2. $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0$.

Ҳақиқатан,

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

бўлгани учун иккинчи тартибли аралаш кўпайтмаларнинг тенглиги туфайли:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \vec{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \vec{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + \vec{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\right) +$$

$$+ \vec{k}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\right) = \vec{0}.$$

Шу натижанинг ўзини ∇ набла-оператор ёрдамида ҳам ҳосил қилиш мумкин:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = \nabla\times\nabla u = (\nabla\times\nabla)\,u = \vec{0},$$

чунки бир хил векторларнинг вектор кўпайтмаси нол векторга тенг.

3. $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Ҳақиқатан ҳам,

$$\mathrm{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

бўлгани учун

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (16.1)$$

бўлади.

(16.1) тенгликнинг ўнг томони символик тарзда бундай белгиланади:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ёки

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u.$$

Бунда

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (16.2)$$

символ *Лаплас оператори* дейилади. Бу операторни ∇ векторнинг скаляр квадрати тарзида қараш табиийдир.

Ҳақиқатан ҳам

$$\nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \Delta.$$

Шунинг учун (16.2) тенглик ∇ оператор ёрдамида

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad} u = \nabla (\nabla u) = \nabla^2 u$$

кўринишда ёзилади. Шуни айтиб ўтиш керакки,

$$\Delta u = 0$$

тенглама *Лаплас тенгламаси* дейилади. $\Delta u = 0$ шартни бажарувчи $u(x, y, z)$ скаляр майдон *Лаплас майдони* ёки *гармоник майдон* дейилади.

17-§. Лаплас оператори, унинг цилиндрик ва сферик координаталарда ифодаланиши

Аввалги параграфда биз Лаплас операторининг декарт координаталаридаги ифодасини ҳосил қилган эдик:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (17.1)$$

Бу операторнинг цилиндрик координаталардаги ифодасини топамиз:

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad z = z.$$

Бунинг учун $u = u(x, y, z)$ мураккаб функциядан (бунда $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$) эркли ўзгарувчилар бўйича олинган биринчи ва иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi, \tag{17.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x} r\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\varphi, \tag{17.2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\varphi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\cos\varphi\sin\varphi, \tag{17.3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2\sin^2\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r^2\cos^2\varphi - \frac{\partial u}{\partial x} r\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial y} r\sin\varphi -$$

$$-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} r^2\sin\varphi\cos\varphi. \tag{17.4}$$

(17.3) ни r^2 га кўпайтириб ва (17.4) билан қўшиб,

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) r^2 - r\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\right)$$

ифодани ҳосил қиламиз, у эса (17.1) ни қўллланилгандан сўнг қуйидаги кўринишни олади:

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} = r^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

ёки

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Бундан,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

келиб чиқиши равшан. Энди Лаплас операторини цилиндрик координаталарда ёзиш мумкин:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{17.5}$$

Худди шунга ўхшаш Лаплас оператори учун ифодани сферик координаталарда келтириб чиқариш мумкин:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = r\cos\theta.$$

$u = u(x, y, z)$ мураккаб функциядан эркли ўзгарувчилар бўйича биринчи ва иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\theta =$$

$$= \sin\theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\right) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\theta, \qquad (17.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x} r\sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial y} r\sin\theta\cos\varphi =$$

$$= r\sin\theta\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi\right), \qquad (17.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} r\cos\theta\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\theta\sin\varphi - \frac{\partial u}{\partial z} r\sin\theta =$$

$$= r\cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\right) - \frac{\partial u}{\partial z} r\sin\theta, \qquad (17.8)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \sin^2\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\cos^2\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\varphi\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\theta +$$

$$+ 2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial z} +$$

$$+ 2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}. \qquad (17.9)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = r^2\sin^2\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin^2\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\varphi\right) -$$

$$- r\sin\theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\right) - 2r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}. \qquad (17.10)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -r\sin\theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} r^2\sin^2\theta -$$

$$- \frac{\partial u}{\partial z} r\cos\theta + r^2\cos^2\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\varphi\right) +$$

$$+ 2r^2\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - 2r^2\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} -$$

$$- 2r^2\cos\theta\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}. \qquad (17.11)$$

(17.10) ни $r^2\sin^2\theta$ га, (17.11) ни r^2 га бўлиб, ва натижани (17.9) билан қўшиб, қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} -$$

$$- \frac{1}{r}\left[\sin\theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\right) + \cos\theta\frac{\partial u}{\partial z}\right] -$$

$$- \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\right).$$

Бу ифода (17.6), (17.8) лар татбиқ қилингандан сўнг

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} +$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

кўринишни олади. Бундан

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} +$$

$$+ \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

келиб чиқади. Энди Лаплас операторини сферик координаталарда ёзиш мумкин:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} +$$

$$+ \frac{2}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Гамильтон оператори нима?
2. Гамильтон оператори билан амал қоидаларини кўрсатинг.
3. Иккинчи тартибли ҳамма мумкин бўлган дифференциал вектор амалларни санаб ўтинг.
4. Лаплас оператори нима?
5. Лаплас операторининг цилиндрик координаталардаги ифодасини келтириб чиқаринг.
6. Лаплас операторининг сферик координаталардаги ифодасини келтириб чиқаринг.

13-боб

МАТЕМАТИК ФИЗИКА ТЕНГЛАМАЛАРИ

1-§. Математик физика тенгламаларининг асосий турлари

Математик физиканинг иккинчи тартибли асосий дифференциал тенгламалари икки ўзгарувчили номаълум $u(x, y)$ функция ва унинг хусусий ҳосилаларига нисбатан чизиқли бўлиб, бундай тенгламаларнинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=f(x, y), \quad (1.1)$$

бу ерда A, B, C, D, E ва F лар умуман x ва y ларга боғлиқ бўлиб, хусусан ўзгармаслардир, $f(x, y)$ эса берилган функция. Агар тенгламанинг ўнг қисмидаги $f(x, y)$ функция нолга тенг бўлса, у ҳолда бу тенглама иккинчи тартибли бир жинсли чизиқли хусусий ҳосилали тенглама дейилади:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=0. \quad (1.2)$$

Агар (1.2) тенгламанинг берилган соҳасида:

$B^2—4Ac>0$ бўлса, (1.2) тенглама гиперболик,

$B_2—4AC=0$ бўлса, (1.2) тенглама параболик,

$B^2—4AO<0$ бўлса, (1.2) тенглама эллиптик турга тегишли бўлади.

Торнинг кўндаланг тебраниши, металл стерженнинг узунасига тебраниши, симдаги электр тебранишлар, айланувчи цилиндрдаги айланма тебранишлар, газнинг тебранишлари каби масалалар гиперболик турдаги энг содда тўлқин тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.3)$$

га олиб келади.

Иссиқликнинг тарқалиш жараёни, ғовак муҳитда суюқлик ва газнинг оқиши масаласи, эҳтимоллар назариясининг баъзи масалалари параболик турдаги энг содда иссиқлик тарқалиш тенгламаси (Фурье тенгламаси)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.4)$$

га олиб келади.

Электр ва магнит майдонлари ҳақидаги масалаларни, стационар иссиқлик ҳолат ҳақидаги масалаларни, гидродинамика, диффузия ва шунга ўхшаш масалаларни ечиш эллиптик турдаги Лаплас тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1.5}$$

га олиб келади.

Биз (1.3), (1.4) ва (1.5) тенгламаларда изланаётган функция u иккита ўзгарувчига боғлиқ бўлган ҳолни келтирдик. Агар изланаётган функция учта эркли ўзгарувчига боғлиқ бўлса, тўлқин тенгламаси:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1.3'}$$

иссиқлик тарқалиш тенгламаси:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1.4'}$$

Лаплас тенгламаси эса:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{1.5'}$$

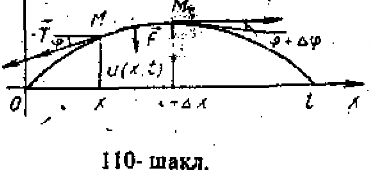
кўринишда бўлади. Умуман кўп ўзгарувчили функция учун тегишли бўлган тенгламаларни қараш мумкин.

Келтирилган (1.3)—(1.5) тенгламаларга нисбатан қўйиладиган масалаларнинг турлари, умумий ва хусусий ечимларининг (мавжудлиги, ягоналиги, устворлиги) хусусияти, бериладиган бошланғич ва чегаравий шартларнинг моҳиятлари қуйида келтирилган параграфларда кўриладиган масалалар орқали тушунтирилади.

2- §. Тор тебранишлари тенгламасини келтириб чиқариш. Бошланғич ва четки шартлар

Узунлиги l га тенг бўлган эгилувчан ва эластик ип (тор) берилган бўлиб, унинг учлари тўғри бурчакли декарт координаталарида $x=0$ ва $x=l$ нуқталарга бириктирилган деб фараз қиламиз. Агар таранг тортилган торни дастлабки ҳолатидан четлаштириб, сўнгра ўз ҳолатига қўйиб юборсак ёки унинг нуқталарига бирор тезлик берсак, у ҳолда торнинг нуқталари ҳаракатга келади, яъни тор тебрана бошлайди. Биз исталган моментда тор шаклини аниқлаш ҳамда торнинг ҳар бир нуқтаси вақтга боғлиқ равишда қандай қонун билан ҳаракатланишини аниқлаш масаласини кўрамиз.

Тор нуқталари бошланғич ҳолатидан кичик четланишларга эга деб қараб, тор нуқталарининг ҳаракати Ox ўққа перпендикуляр ва бир текисликда вужудга келади, деб фараз қиламиз. У ҳолда торнинг тебраниш жараёни битта $u(x, t)$ функция орқали ифода этилади, бунда x тор нуқта-



110- шакл.

сининг t моментдаги силжиш миқдорини билдиради (110-шакл). Торнинг барча нуқталарида таранглик T бир хил деб фараз қиламиз. Торнинг MM' элементига таъсир этувчи кучларнинг Ou ўқдаги проекцияси:

$$T\sin(\varphi+\Delta\varphi)-T\sin\varphi\approx T\,\mathrm{tg}(\varphi+\Delta\varphi)-T\,\mathrm{tg}\,\varphi=$$

$$=T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]=T\frac{\partial^2 u(x+\theta\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x\approx$$

$$\approx T\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}dx,\ 0<\theta<1 \qquad (2.1)$$

(бу ерда бурчак φ кичик бўлгани учун $\mathrm{tg}\varphi\approx\sin\varphi$ ва квадрат қавсдаги ифодага Лагранж теоремасини татбиқ этдик). Ҳаракат тенгламасини ҳосил қилиш учун MM' элементига қўйилган ташқи кучни инерция кучига тенглаш керак. Торнинг MM' элементга t моментда тенг таъсир этувчи куч

$$F\approx g(x,t)\overset{\smile}{MM'}\approx g(x,t)dx. \qquad (2.2)$$

Бу ерда $\overset{\smile}{MM'}\approx x_2-x_1=dx$, $g(x,t)$ — тор бўйлаб узлуксиз тақсимланган, Ou ўқига параллел кучлар зичлиги. Торнинг чизиқли зичлиги ρ бўлса, MM' элементининг массаси $\rho\overset{\smile}{MM'}=\rho dx$ бўлади. Элементнинг тезланиши $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ га тенг. Демак, Даламбер принципига кўра (2.1) ва (2.2) формулаларни ҳисобга олиб, ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$\rho dx\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx+g(x,t)\,dx.$$

dx га қисқартириб ва тенгликнинг иккала қисмини ρ га бўлиб ҳамда $\frac{T}{\rho}=a^2$ деб белгилаб, ҳаракатнинг қуйидаги тенгламасига келамиз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho}g(x,t). \qquad (2.3)$$

Бу тенглама торнинг *мажбурий тебраниш тенгламаси* ёки *бир ўлчовли тўлқин тенгламаси* дейилади.

Агар $g(x,t)\equiv 0$ бўлса, (2.3) тенглама ташқи куч таъсир этмагандаги *бир жинсли эркин тебраниш тенгламаси* дейилади.

Оддий дифференциал тенгламаларда умумий ечимдан хусусий ечимларни олиш учун ихтиёрий ўзгармасларни аниқлаш керак эди. Бунинг учун бошланғич шартлардан фойдаланар эдик. Бу ерда ҳам тор ҳаракатини тўла аниқлаш учун

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (2.4)$$

тенгламанинг ўзигина етарли эмас. Яна қўшимча иккита чегаравий ($x=0$ ва $x=l$) шарт ҳамда бошланғич ($t=0$) моментдаги шарт берилиши керак. Чегаравий ва бошланғич шартлар тўплами *четки шартлар* деб аталади. Масалан, $x=0$ ва $x=l$ да торнинг учлари қўзғалмас бўлсин. У ҳолда t қандай бўлганда ҳам ушбу тенгликлар бажарилиши керак:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \tag{2.5}$$

Бу тенгликлар масаланинг чегаравий шартларидир. Бошланғич момент ($t=0$) да тор маълум шаклга эга бўлиб, унинг ҳар бир нуқтаси тезлиги аниқланган бўлсин, яъни

$$u(x, 0) \equiv u\Big|_{t=0} = f(x),$$

$$u'_t(x, 0) \equiv \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x). \tag{2.6}$$

Бу шартлар тенгламанинг бошланғич шартларидир.

3-§. Торнинг тебраниш тенгламасини Даламбер усули билан ечиш

Биз юқорида торнинг учлари қўзғалмас деб фараз қилган эдик, яъни торнинг узунлиги чекланган эди. Энди торнинг узунлиги жуда катта бўлсин. Унинг ўртасидан бирор тезлик берсак, ўнг ва чап томонга тўлқинлар йўналади. Натижада торнинг учларига тўғри тўлқинлар бориб, сўнг тескари тўлқинлар қайтади. Биз аксланган тескари тўлқинларни ҳисобга олмаймиз, яъни чексиз бўлган торнинг тебраниш масаласини кўрамиз. Бир жинсли (2.4) тенгламани (2.6) бошланғич шартларда ечамиз. Бу ерда $f(x)$ ва $F(x)$ функциялар бутун сонлар ўқида берилган. $u(x, t)$ функция учун чегаравий шартлар бўлмайди. Масалада фақат бошланғич шартлар берилса, бундай масала Коши масаласи дейилади. Уни Даламбер усули билан ечамиз. Тенгламанинг умумий ечимини иккита ихтиёрий функциялар йиғиндиси сифатида қидирамиз:

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at). \tag{3.1}$$

Бу φ ва ψ функцияларнинг иккинчи тартибли ҳосилалари мавжуд бўлсин. У вақтда, кетма-кет ҳосилалар олсак,

$$u'_x = \varphi'(x - at) + \psi'(x + at), \quad u''_{xx} = \varphi''(x - at) + \psi''(x + at),$$

$$u'_t = -a\varphi'(x - at) + a\psi'(x + at),$$

$$u''_{tt} = a^2\varphi''(x - at) + a^2\psi''(x + at)$$

лар ҳосил бўлиб, натижа (2.4) тенгламани қаноатлантиради. Демак, (3.1) функция умумий ечим бўлади. (2.6) бошланғич шартлардан фойдаланиб, φ ва ψ номаълум функцияларни топамиз:

$t = 0$ да

$$\begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x), \\ -a\varphi'(x) + a\psi'(x) = F(x) \end{cases} \tag{3.2}$$

системага келамиз. Иккинчи тенгламани 0 дан x гача бўлган оралиқда интегралласак,

$$-a\,[\varphi(x)-\varphi(0)]+a\,[\psi(x)-\psi(0)]=\int_0^x F(x)\,dx$$

ёки

$$-\varphi(x)+\psi(x)=\frac{1}{a}\int_0^x F(x)\,dx+C \qquad (3.3)$$

кўринишдаги ифодага келамиз. Бу ерда $C=-\varphi(0)+\psi(0)$ — ўзгармас сон. (3.2) ва (3.3) тенгламалардан $\varphi(x)$, $\psi(x)$ номаълум функцияларни аниқлаймиз:

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x F(x)\,dx-\frac{C}{2},\\ \psi(x)&=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x F(x)\,dx+\frac{C}{2}.\end{aligned} \qquad (3.4)$$

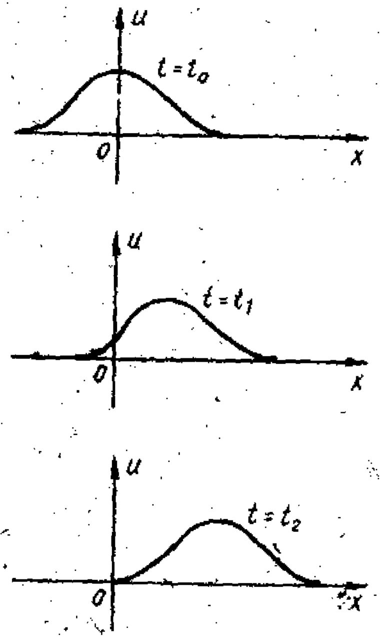
Бу формулаларда аргумент x ни $x-at$ ва $x+at$ ларга алмаштириб, (3.1) формулага қўйсак, $u(x,t)$ функция топилади:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}f(x-at)-$$

$$-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at} F(x)\,dx+\frac{1}{2}f(x+at)+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at} F(x)dx=\frac{f(x-at)+f(x-at}{2})+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(x)\,dx. \qquad (3.5)$$



111-шакл.

Бу (3.5) формулага тор тебраниш тенгламаси учун Коши масаласининг Даламбер усули билан ечилиши дейилади.

Олинган (3.5) ечимнинг физик маъносини англаш учун $u(x,t)$ ечимга кирган $\varphi(x-at)$ ва $\varphi(x+at)$ функцияларни алоҳида-алоҳида текширамиз. $\varphi(x-at)$ функцияни олиб, t га $t=t_0$, $t=t_1$, $t=t_2$ ва ҳоказо ўсувчи қийматларни бериб, унинг графигини ясаймиз (111-шакл).

Шаклдан кўринадики, иккинчи график биринчисига нисбатан at_1 миқдорга, учинчиси at_2 ва ҳоказо миқдорга ўнг томонга сурилган. Агар бу графикларнинг проекцияларини навбат билан экранга туширсак, гўё уларнинг юқоридаги биринчиси ўнг томонга «чопиб» ўтаётгандек бўлади. Торнинг бундай четланиши *тўлқин* деб аталади. Тенгламадаги $a=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ коэффициент эса *тўлқинларнинг тарқалиш тезлиги* дейилади. Энди $\psi(x+at)$ функцияни кўрайлик. t га $t_2<t_1<t_0$ қийматларни берсак, 111- шаклдаги графикларда биринчиси пастдагиси бўлиб, тўлқин ўнгдан чапга a тезлик билан тарқалади. Энди Даламбер формуласи (3.5) ёрдамида олинган ечимни текширамиз. Икки ҳолни кўрамиз. Биринчисида тор нуқталарининг бошланғич тезлиги нолга тенг бўлиб, тор бошланғич четлатиш ҳисобига тебрансин, яъни $F(x)=0$ деб олсак, (3.5) формуладан қуйидаги ечимни ҳосил қиламиз:

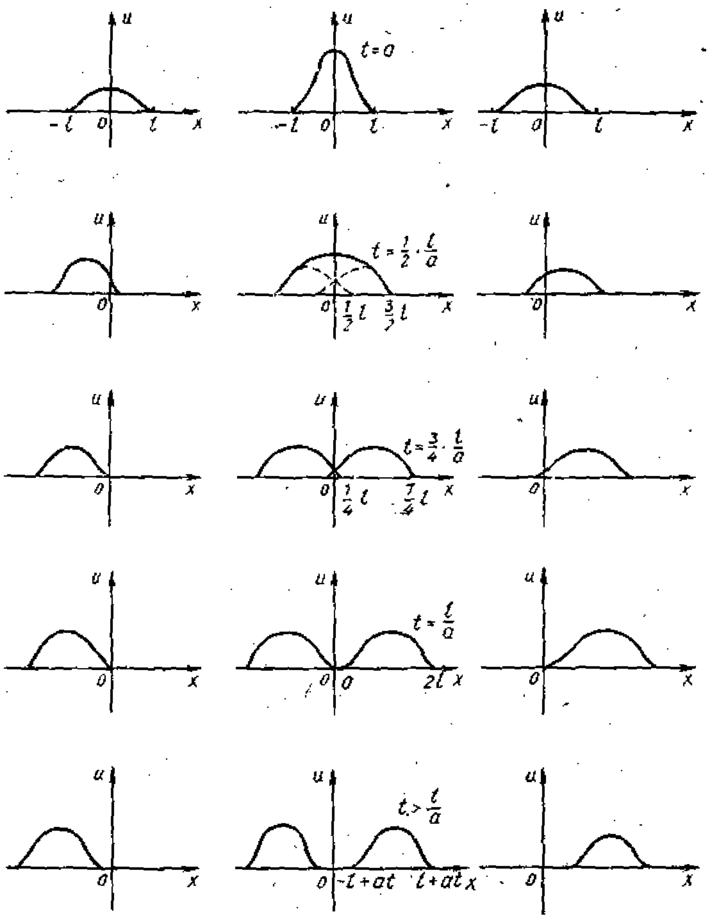
$$u(x,t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}. \qquad (3.6)$$

Бу ерда $f(x)$ берилган функциядир. Формуладан кўринадики, ечим $u(x,t)$ икки та тўлқин йиғиндисидан иборат: биринчи $\frac{1}{2}f(x-at)$ тўлқин a тезлик билан ўнг томонга, иккинчи $\frac{1}{2}f(x+at)$ тўлқин шу тезлик билан чап томонга тарқаладиган тўлқинлардир.

$\frac{1}{2}f(x-at)$ тўғри тўлқин, $\frac{1}{2}f(x+at)$ эса тескари тўлқин деб аталади. Бошланғич $t=0$ моментда иккала тўлқин профили устма-уст тушади. Фараз қиламиз, бошланғич моментда $f(x)$ функция $(-l, l)$ интервалда нолга тенг бўлмасин ҳамда жуфт функция бўлсин. 112-шаклдаги чап устунда $\frac{1}{2}f(x+at)$ тўлқиннинг чап томонга тарқалиши, ўнг устунда эса вақтнинг турли моментларида $\frac{1}{2}f(x-at)$ тўлқиннинг ўнг томонга тарқалиши, ўртадаги устунда эса тўлқинлар йиғиндиси, яъни тор нуқталари умумий четланиши кўрсатилган. $t<\frac{l}{a}$ моментда иккала тўлқинлар бир-бири билан устма-уст тушади; $t=\frac{l}{a}$ моментдан бошлаб бу тўлқинлар устма-уст тушмайди ва турли томонга қараб узоқлашади.

Энди иккинчи ҳолни кўрамиз. Торнинг бошланғич четланиши нол бўлсин ва бошланғич моментда тор нуқталари бошланғич тезлик олиши натижасида тебрансин. Бу ҳолда тор бўйлаб импульс тўлқинлар тарқалади. (3.5) формулага $f(x)=0$ ни қўйиб, $u(x,t)$ функция учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(x)\,dx=\Phi(x+at)-\Phi(x-at), \qquad (3.7)$$



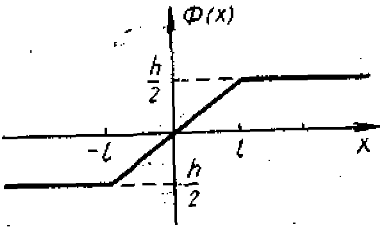
112- шакл.

бу ерда

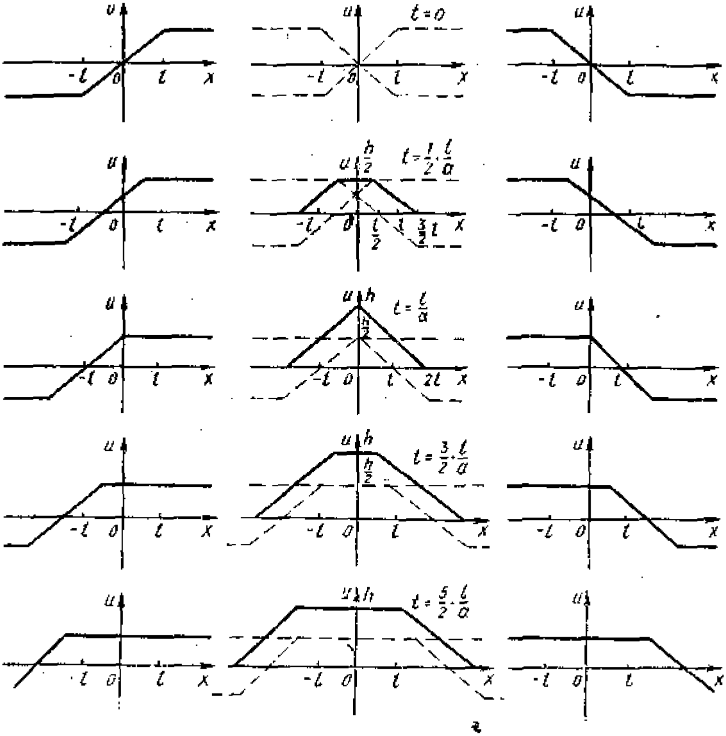
$$\Phi(x) = \frac{1}{2a}\int_0^x F(x)\,dx. \qquad (3.8)$$

Бу формуладан кўринадики, ечим $u(x, t)$ юқоридаги каби, тўғри $u_1 = -\Phi(x-at)$ ва тескари $u_2 = \Phi(x+at)$ тўлқинлардан иборат экан. Бошланғич $t=0$ моментда $u_1 = -\Phi(x)$, $u_2 = \Phi(x)$ бўлиб, $u(x, 0) = 0$ бўлади. Агар $F(x)$ $(-l, l)$ интервалда аниқланган бўлиб, $F(x) = v_0$ бошланғич ўзгармас тезликка эга бўлса, у вақтда $\Phi(x) = \frac{1}{2a}\int_0^x v_0\,dx = \frac{v_0}{2a}x$ бўлиб, бу ерда $-l \leqslant x \leqslant l$ бўлади.

$x > l$ қийматларда $\Phi(x) = \frac{1}{2a}\int_0^l v_0\,dx = \frac{v_0 l}{2a} = \frac{h}{2}$ ва $x < -l$ қийматларда $\Phi(x) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^{-l} v_0\,dx = -\frac{v_0 l}{2a} = -\frac{h}{2}$ бўлади. Бу ерда $h = \frac{v_0 l}{a}$ бўлиб, $\Phi(x)$ узлуксиз ва тоқ функциядир (113-шакл).



113- шакл.

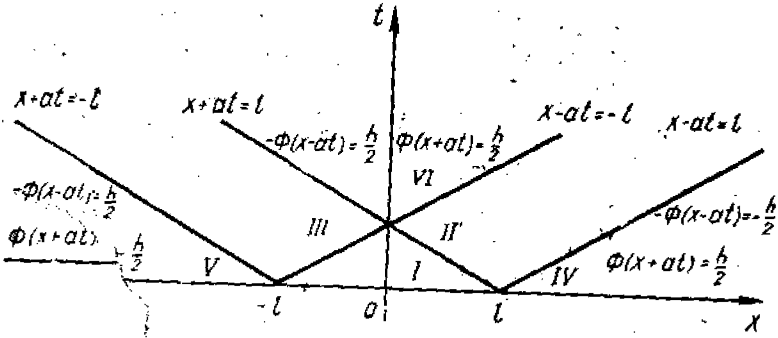


114- шакл.

Энди $u(x, t)$ ечимнинг t нинг турли қийматларидаги графигини ясаймиз. 114-шаклда чап устунда тескари тўлқин $u_2 = \Phi(x + at)$ нинг турли моментдаги ҳолати, ўнг устунда тўғри тўлқин $u_1 = -\Phi(x - at)$ нинг графиги, ўрта устунда эса тор нуқталари умумий четланиш графиги келтирилган. Биринчи ҳолдан фарқли ўлароқ, $t = 0$ да $u(x, 0) = 0$ бўлиб, t катталашиши билан нуқта юқорига кўтарилади, чунки (3.7) формуладаги интеграллаш интервали кенгаяди. $t = \frac{l}{a}$ бўлганда

$$u\left(0, \frac{l}{a}\right) = \frac{1}{2a}\int_{-l}^{l} v_0\,dx = \frac{v_0 l}{a} = h$$

ҳосил бўлади. $t > \frac{l}{a}$ бўлганда ҳам $u\ (0, t) = h$ бўлади, чунки $(-l, l)$ дан ташқарида $F\ (x)$ нолга тенг. Шунинг учун четлашиш функцияси $u\ (0, t)$ шаклда ўзгармас бўлиб қолади. Мисол учун $x_1 = \frac{l}{2}$ бўлсин. У ҳолда t нинг $\frac{l}{2a}$ дан кичик қийматларида тескари ва тўғри тўлқинларнинг биргаликда таъсири натижасида нуқта кўтарилиб боради. $t > \frac{l}{2a}$ моментда тескари тўлқин четлашиши бу нуқтада доимий $\frac{h}{2}$ га тенг бўлиб, нуқта тўғри тўлқин таъсирида юқорига кўтарилишни давом этади. $t > \frac{3l}{2a}$ моментда иккала тўлқиннинг четланиши $\frac{h}{2}$ га тенг бўлади ва $u\left(\frac{l}{2}, t\right)$ функциянинг қиймати h га тенг бўлади. Шундай қилиб, $u\ (x, t)$ функциянинг графиги t нинг турли қийматларида қуйидагича бўлар экан: $t = 0$ да $u = 0$ — тўғри чизиқ; $0 < t < \frac{l}{a}$ да чизиқ профили трапеция шаклида бўлиб, унинг юқори асоси кўтарилиб, катталиги камаяди; $t = \frac{l}{a}$ да профил учбурчак ва $t > \frac{l}{a}$ да профили кенгаядиган трапеция кўринишда бўлади (114-шакл). Шундаі қилиб, торга берилган $(-l, l)$ интервалдаги бошланғич тезланиш натижасида тор тебраниб, h баландликка кўтарилади ва вақт ўтиш и билан шу баландликда қолади (силжишининг қолдиғи) Oxt текис игини олиб, $x - at = \pm l$ ва $x + at = \pm l$ — характеристик тўғри чизиқларни юқори ярим текисликда чизамиз (115-шакл). $\Phi\ (x)$ ф функциянинг ифодасидан фойдаланиб, тескари тўлқин $\Phi\ (x + at)$



115-шакл.

нинг II, IV ва VI зоналардаги четланиши $\frac{h}{2}$ ўзгармасга тенглиги келиб чиқади. III, V ва VI зоналарда тўғри тўлқин $-\Phi(x-at)$ нинг четланиши ҳам $\frac{h}{2}$ га тенг. Шунинг учун VI зона силжиш қолдиғидан иборат бўлиб, бу зонага мос келган функциямиз $u(x, t) = \Phi(x+at) - \Phi(x-at) = h$ бўлади. IV зонада тўғри тўлқин четланиши $-\frac{h}{2}$ га тенг; шунақа четланиш V зонада тескари тўлқинда мавжуд. Шунинг учун IV ва V зоналар тор нуқталари учун сокин зоналар бўлади. Нуқта текисликнинг IV зонасидан VI зонасига ўтганда тўғри тўлқиннинг четланиши $-\frac{h}{2}$ дан $\frac{h}{2}$ гача ўзгаради.

Шу мулоҳазалардан фойдаланиб, $x_0 > l$ бўлганда $u(x_0, t)$ функциянинг қуйидаги ифодасини ёзамиз:

$$u(x_0, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < \frac{x_0 - l}{a}, \\ \frac{h}{2}\left(1 - \frac{x_0 - at}{l}\right), & \frac{x_0 - l}{a} < t < \frac{x_0 + l}{a}, \\ h, & t > \frac{x_0 - l}{a}. \end{cases}$$

1-мисол. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламани $u\Big|_{t=0} = x^2$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$ бўлган бошланғич шартларда ечинг:

Ечиш. Бу ерда $a = 1$, $f(x) = x^2$, $F(x) = 0$ эканини ва (3.5) формулани ҳисобга олиб ёзамиз:

$$u(x, t) = \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2},$$

аммо $f(x) = x^2$ бўлганлиги учун $f(x-t) = (x-t)^2$, $f(x+t) = (x+t)^2$ бўлиб, $u(x, t) = \frac{(x-t)^2 + (x+t)^2}{2} = x^2 + t^2$ бўлади.

2-мисол. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламани $u\Big|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = x$ шартларда ечинг.

Ечиш. Бу ерда $a = 2$, $f(x) = 0$, $F(x) = x$ эканини ҳисобга олиб, (3.5) формулани ёзамиз:

$$u(x, t) = \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} z dz = \frac{1}{8} z^2 \Big|_{x-2t}^{x+2t} = \frac{1}{8}\left[(x+2t)^2 - (x-2t)^2\right] = xt.$$

4-§. Торнинг тебраниш тенгламасини ўзгарувчиларни ажратиш усули (Фурье усули) билан ечиш

Биз икки томонидан маҳкамланган торнинг эркин тебраниш тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (4.1)$$

нинг бошланғич шартлар

$$u\Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x) \tag{4.2}$$

ва четки шартлар

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0 \tag{4.3}$$

берилгандаги хусусий ечимини топамиз. Бунинг учун Фурье усулидан фойдаланамиз. (4.1) тенгламанинг (айнан нолга тенг бўлмаган) хусусий ечимини иккита $X(x)$ ва $T(t)$ функциялар кўпайтмаси шаклида қидирамиз:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t). \tag{4.4}$$

Бу қийматлардан ҳосилалар олиб, (4.1) тенгламага қўйиб, ушбуни *ҳосил қиламиз*:

$$X(x)\, T''(t) = a^2 X''(x)\, T(t)$$

ва бу тенгликнинг ҳадларини a^2XT га бўлиб,

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \tag{4.5}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу тенглик ўзгармас сонга тенг бўлгандагина ўринли бўлади. Уни $-\lambda$ билан белгилаймиз. Шундай қилиб,

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Бу тенгликлардан иккита тенглама ҳосил бўлади:

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{4.6}$$

$$T'' + a^2 \lambda T = 0. \tag{4.7}$$

Бу тенгламаларнинг умумий ечимларини топамиз. Характеристик тенгламанинг илдизлари комплекс бўлганлиги учун

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda}\, x + B \sin \sqrt{\lambda}\, x, \tag{4.8}$$

$$T(t) = C \cos a \sqrt{\lambda}\, t + D \sin a \sqrt{\lambda}\, t \tag{4.9}$$

ечимларга эга бўламиз. Бунда A, B, C, D — ихтиёрий ўзгармас сонлар. $X(x)$ ва $T(t)$ лар учун топилган ифодаларни (4.4) тенгликка қўямиз:

$$u(x, t) = (A \cos \sqrt{\lambda}\, x + B \sin \sqrt{\lambda}\, x)\, (C \cos a \sqrt{\lambda}\, t + D \sin a \sqrt{\lambda}\, t). \tag{4.10}$$

Энди A ва B ўзгармас сонларни (4.3) шартлардан фойдаланиб топамиз. (4.8) га $x = 0$ ва $x = l$ қийматларни қўйсак,

$$0 = A \cdot 1 + B \cdot 0, \quad 0 = A \cos \sqrt{\lambda}\, l + B \sin \sqrt{\lambda}\, l$$

тенгламалар ҳосил бўлиб, биринчисидан $A = 0$, иккинчисидан $B \sin \sqrt{\lambda}\, l = 0$ эканлиги келиб чиқади. $B \neq 0$, чунки акс ҳолда $X \equiv 0$ бўлиб, $u \equiv 0$ бўлиб қолади. Бу шартга зид. Шунинг учун

$$\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$$

бўлиши керак, бундан $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ хос қийматларни топамиз. Уларга мос келадиган хос функциялар

$$X = B\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{4.11}$$

тенглик билан ифодаланади. Топилган $\sqrt{\lambda}$ нинг ифодасини (4.9) га қўйсак, у

$$T(t) = C\cos\frac{an\pi}{l}t + D\sin\frac{an\pi}{l}t\ (n = 1, 2, \ldots) \tag{4.12}$$

кўринишни олади. n нинг ҳар бир қиймати учун топилган ифодаларни (4.4) га қўйиб, чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $u_n(x, t)$ ечимларни ҳосил қиламиз:

$$u_n(x, t) = \left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t + D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Тенглама чизиқли ва бир жинсли бўлгани учун ечимларнинг йиғиндиси ҳам ечим бўлади ва шунинг учун

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{an\pi}{l}t + D_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{4.13}$$

қатор билан ёзилган функция ҳам (4.1) тенгламанинг ечими бўлади. C_n ва D_n ўзгармас сонларни аниқлаш учун бошланғич (4.2) шартдан фойдаланамиз. $t = 0$ бўлганда

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{4.14}$$

бўлиб, $f(x)$ функциянинг $(0, l)$ интервалда Фурье қаторига ёйилмаси мавжуд деб фараз қилсак,

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \tag{4.15}$$

га тенг бўлади. (4.13) тенгликдан t бўйича ҳосила олиб, $t = 0$ да

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\frac{an\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу қаторнинг Фурье коэффициентларини аниқлаймиз:

$$D_n\frac{an\pi}{l} = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

ёки

$$D_n = \frac{2}{an\pi}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx. \qquad (4.16)$$

Шундай қилиб, биз C_n ва D_n коэффициентларни аниқладик, демак чегаравий ва бошланғич шартларни қаноатлантирувчи (4.1) тенгламанинг ечими бўлган $u(x, t)$ функцияни аниқладик. Фурье усули математик физиканинг кўп масалаларини ечишда жуда қўл келади.

Изоҳ. Агар юқорида $-\lambda$ ўрнига $+\lambda = k^2$ ифодани олсак, тенгламанинг умумий ечими (4.8):

$$X = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

бўлиб, чегаравий (4.2) шартларни қаноатлантирмайди.

Хос функцияни $u_k(x, t) = \left(C_n\cos\frac{ak\pi}{l}t + D_n\sin\frac{ak\pi}{l}t\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$ кўринишда ҳосил қилган эдик. Уни шаклан ўзгартирсак,

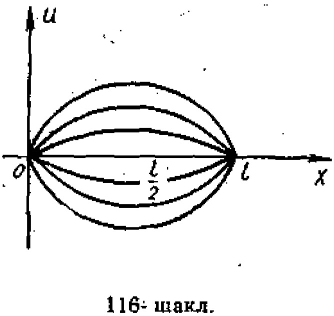
$$u_k(x, t) = F_k\sin\frac{k\pi x}{l}\cdot\sin\left(\frac{k\pi a}{l}t + \varphi_k\right) \qquad (4.17)$$

кўринишга келади. Бу ерда $F_k = \sqrt{C_k^2 + D_k^2}$ ва $\operatorname{tg}\varphi_k = \frac{C_k}{D_k}$. (4.17) формуладан кўринадики, торнинг барча нуқталари бир хил $\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$ частота ва φ_k фаза билан гармоник тебранар экан. Тебранишнинг амплитудаси $F_k\sin\frac{k\pi x}{l}$ га тенг бўлиб, у x га боғлиқ экан. $k = 1$ бўлганда (4.17) формуладан биринчи гармоника учун

$$u_1(x, t) = F_1\sin\frac{\pi x}{l}\sin\left(\frac{\pi a}{l}t + \varphi_1\right)$$

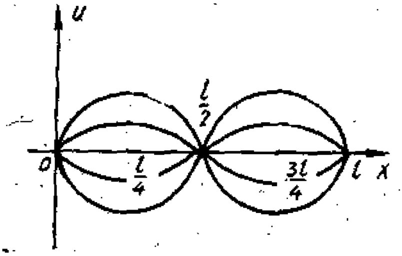
формулани ҳосил қиламиз. $x = 0$ ва $x = l$ бўлганда қўзғалмас нуқталар торнинг четлари бўлиб, $x = \frac{l}{2}$ да торнинг четланиши энг катта бўлиб, F_1 га тенг бўлади (116-шакл). $k = 2$ бўлганда

$$u_2(x, t) = F_2\sin\frac{2\pi x}{l}\sin\left(\frac{2\pi a}{l}t + \varphi_2\right)$$

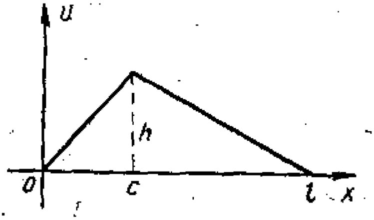


116-шакл.

бўлиб, қўзғалмас нуқта учта бўлади: $x = 0$, $x = \frac{l}{2}$, $x = l$. Амплитуда энг катта қийматига иккита $x = \frac{l}{4}$ ва $x = \frac{3l}{4}$ нуқтада эришади (117-шакл). Умуман $\sin\frac{k\pi x}{l} = 0$ тенгламанинг илдизлари қанча бўлса, $[0, l]$ кесмада шунча қўзғалмас нуқталар бўлади



117- шакл.



118- шакл.

(улар тугун нуқталар дейилади). Туғун нуқталар орасида шундай битта нуқта мавжуд бўладики, бу нуқтада четланиш максимумга эришади; бундай нуқталар «тутамлик» нуқталари дейилади. Торнинг энг кичик ўз частотаси

$$\omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{4.18}$$

га тенг бўлади, бунда T — тор таранглиги, ρ — зичлиги.

(4.18) формуладан кўринадики, таранглик T қанча катта бўлиб, тор қанча енгил (l ва ρ лар кичик) бўлса, овоз шунча юқори бўлар экан. Қолган ω_k частоталарга мос келган овозлар обертон ёки гармоникалар дейилади.

1-мисол. Четлари $x = 0$ ва $x = l$ маҳкамланган тор берилган бўлиб, тор нуқталарининг бошланғич тезлиги нолга тенг. Бошланғич четланиши учи (c, h) нуқтада бўлган учбурчак шаклида бўлса (118-шакл), торнинг тебранишини топинг (T_0 — таранглик, ρ — зичлик ва $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$ лар берилган).

Ечиш. $f(x) = u|_{t=0}$ функциянинг аналитик ифодаси берилган (118-шакл):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{hx}{c}, & 0 \leqslant x \leqslant c, \\ \frac{h(l-x)}{l-c}, & c \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Масаланинг шарти бўйича $F(x) = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$, демак (4.16) га асосан ечимда барча D_k коэффициентлар нолга тенг. C_k коэффициентларни (4.15) формула ёрдамида топамиз:

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\left[\frac{h}{c}\int_0^c x\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx + \right.$$

$$\left. + \frac{h}{l-c}\int_c^l (l-x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx\right].$$

Ҳар бир интегрални бўлаклаб интеграллаймиз ва ушбу натижага келамиз:

$$\int_0^c x \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx = -\frac{lx}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l}\Big|_0^c + \frac{l^2}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi x}{l}\Big|_0^c =$$

$$= -\frac{lc}{k\pi} \cos \frac{k\pi c}{l} + \frac{l^2}{k^2\pi^2} \sin \frac{k\pi c}{l},$$

$$\int_c^l (l-x) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx = \frac{l(l-c)}{k\pi} \cos \frac{k\pi c}{l} + \frac{l^2}{k^3\pi^2} \sin \frac{k\pi c}{l}.$$

Шундай қилиб,

$$C_k = \frac{2hl^2}{k^2\pi^2 c(l-c)} \sin \frac{k\pi c}{l}$$

эканини аниқладик. C_k нинг ифодасини (4.13) формулага қўямиз ва ушбу ечимни оламиз:

$$u(x,\ t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi c}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{k\pi at}{l}.$$

Агар торнинг ўртасидан тортилган бўлса, яъни $c = \frac{l}{2}$ бўлса, $\frac{k\pi c}{l} = \frac{k\pi}{2}$ бўлиб, k нинг барча жуфт қийматларида $\frac{l}{2}$ нуқта қўзғалмас нуқта бўлади. Шунинг учун ечимда тоқ гармоникалар бўлади, яъни

$$u(x,\ t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l} \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi at}{l}.$$

2-мисол. Юқоридаги 1-мисол шартида торнинг бошланғич шакли парабола бўлиб, у тор ўртаси $\frac{l}{2}$ га нисбатан симметрик ва максимал четланиши h га тенг (119-шакл). Тор тебранишини аниқланг.

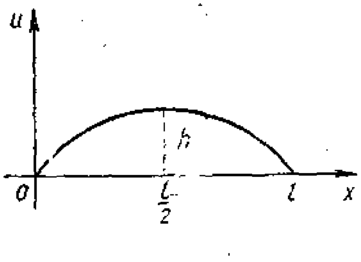
Ечиш. Параболанинг тенгламаси

$$f(x) = \frac{4h}{l^2} x(l-x)$$

бўлиб, (4.13) формуладаги коэффициентлардан $D_k = 0$, C_k эса қуйидаги формула ёрдамида ҳисобланади:

$$C_k = \frac{8h}{l^3} \int_0^l x(l-x) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx.$$

Бу интегрални икки марта бўлаклаб интеграллаймиз ва ушбу натижага келамиз:



119-шакл.

$$C_k = \frac{16h}{k^3\pi^3}(1-\cos k\pi).$$

Бундан кўринадики k жуфт бўлса, $C_k = 0$. $k = 2n+1$ тоқ бўлса,

$$C_{2n+1} = \frac{32h}{(2n+1)^3\pi^3}; \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ечим эса қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$u(x, t) = \frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}$$

5-§. Торнинг мажбурий тебраниши

Юқорида кўрилган Фурье усули торнинг мажбурий тебраниш тенгламаси (2.3) ни ҳам ечиш учун қулай эканлигини кўрамиз. Торнинг ташқи куч таъсирида мажбурий тебраниши масаласи бир жинсли бўлмаган тебранма ҳаракат тенгламасига олиб келган эди (2-§):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G(x, t). \tag{5.1}$$

Бу ерда $G(x, t) = \frac{1}{\rho}g(x, t)$ белгилаш киритдик.

Бошланғич ва чегаравий шартларни торнинг эркин тебранишидаги каби қабул қиламиз:

$$u\Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x)$$

ва

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0.$$

Чизиқли бир жинсли бўлмаган иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларни ечишга ўхшаш, (5.1) тенгламанинг ечимини иккита функциянинг йиғиндиси кўринишда қидирамиз:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t). \tag{5.2}$$

Бу ердаги $v(x, t)$ функцияни шундай танлаб оламизки, у бир жинсли $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ тенгламани бошланғич $v\Big|_{t=0} = f(x)$, $\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x)$ ва чегаравий $v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0$ шартларда қаноатлантирсин. $w(x, t)$ функция эса бир жинсли эмас.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G(x, t) \tag{5.3}$$

тенгламани ва қуйидаги бошланғич ҳамда чегаравий

$$w\Big|_{t=0} = \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0$$

шартларни қаноатлантирсин. $v(x, t)$ торнинг эркин тебранишини ифодалагани учун унинг тенгламасини юқоридаги бошланғич ва чегаравий шартларида ечишни баён этдик (4- § га қаранг). Биз бир жинсли бўлмаган тенгламадан $w(x, t)$ функцияни аниқлашни кўрсатамиз. $w(x, t)$ функцияни бир жинсли масала ечимидаги хос $\sin\frac{k\pi x}{l}$ функциялар бўйича қатор кўринишда излаймиз.

$$w(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{5.4}$$

бу ерда $\gamma_k(t)$ ҳозирча номаълум t га боғлиқ функция. $w(x, t)$ функция чегаравий шартларни қаноатлантиради. Ҳақиқатан, $x=0$ да $w(0, t)=0$. $x=l$ да ҳам $w(l, t)=0$. Барча (5.4) даги хос функциялар нолга тенг бўлади.

Агар (5.4) қаторда $\gamma_k(0)=0$ ва $\gamma_k'(0)=0$ бўлсин деб талаб қилинса, $w(x, t)$ функция учун бошланғич шартлар ҳам бажарилади.

(5.4) қатордан x ва t лар бўйича икки марта хусусий ҳосилалар олиб, (5.3) тенгламага қўямиз. Натижада

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\gamma_k''(t)+\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}\gamma_k(t)\right]\sin\frac{k\pi x}{l}=G(x, t). \tag{5.5}$$

Энди $G(x, t)$ функцияни $(0, l)$ интервалда x аргументли синуслар бўйича Фурье қаторига ёямиз:

$$G(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{5.6}$$

бу ерда

$$g_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l G(x, t)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx \tag{5.7}$$

(интегралда t ўзгармас).

Агар $G(x, t)=G(x)$ бўлса, $g_k(t)$ функция ўзгармас бўлади. Агар $G(x, t)=G(t)$ бўлса,

$$g_k(t)=\frac{2G(t)}{l}\int_0^l\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=\begin{cases}\frac{4}{k\pi}G(t), & k\text{ — тоқ бўлса,}\\ 0, & k\text{ — жуфт бўлса.}\end{cases} \tag{5.8}$$

(5.5) ва (5.6) ёйилманинг хос функциялари олдидаги коэффициентларини тенглаштирамиз ва номаълум $\gamma_k(t)$ функциялар учун ушбу тенгламаларга эга бўламиз:

$$\gamma_k''(t)+\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}\gamma_k(t)=g_k(t). \tag{5.9}$$

Бу тенгламани

$$\gamma_k(0)=0,\quad \gamma_k'(0)=0 \qquad (5.10)$$

бошланғич шартларда ечамиз. (5.9) га мос келган бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$A_k\cos\frac{k\pi at}{l}+B_k\sin\frac{k\pi at}{l}$$

кўринишда бўлади. Бир жинсли бўлмаган (5.9) тенгламанинг хусусий ечимини $g_k(t)$ функцияга қараб, танлаб олиш усули, яъни аниқмас коэффициентлар усули ёки ўзгармасни вариациялаш усули ёрдамида аниқлаш мумкин. Натижада, бошланғич шартлардан фойдаланиб, ушбу ечимга эга бўламиз:

$$\gamma_k(t)=\frac{l}{k\pi a}\int_0^t g_k(\tau)\sin\frac{k\pi a(t-\tau)}{l}\,d\tau. \qquad (5.11)$$

Топилган $\gamma_k(t)$ ларни (5.4) га қўйиб, қидирилаётган $w(x, t)$ функцияни аниқлаймиз.

1-мисол. Оғирлик кучи таъсирида торнинг мажбурий тебранишини топинг.

Ечиш. Бу ҳолда $G(x, t)=-g$ бўлиб, масала соддалашади. (5.8) формулага кўра

$$g_k=-\frac{2g}{l}\int_0^l\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=-\frac{2g}{k\pi}(1-\cos k\pi),$$

бундан

$$g_{2n}=0,\quad g_{2n+1}=-\frac{4g}{(2n+1)\pi}.$$

(5.9) тенглама иккига ажралади:

Жуфт индекслар учун

$$\gamma_{2n}''+\frac{(2n)^2\pi^2a^2}{l^2}\gamma_{2n}=0,\quad \gamma_{2n}\big|_{t=0}=0 \text{ ва } \gamma_{2n}'\big|_{t=0}=0.$$

Тоқ индекслар учун

$$\gamma_{2n+1}''+\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{l^2}\gamma_{2n+1}=-\frac{4g}{(2n+1)\pi}. \qquad (5.12)$$

Юқоридаги тенгламадаги $\gamma_{2n}(t)$ функциянинг берилган бошланғич шартлардаги ечими айнан нол бўлади. Иккинчи (5.12) тенгламанинг хусусий ечими

$$-\frac{4gl^2}{(2n+1)^3\pi^3a^2}$$

га, умумий ечими эса

$$A_{2n+1}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}+B_{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi at}{l}-\frac{4gl^2}{(2n+1)^3\pi^3a^2}$$

га тенг бўлади. (5.10) бошланғич шартлардан фойдаланиб, A_{2n+1} ва B_{2n+1} ларни топамиз:

$$A_{2n+1} = \frac{4gl^2}{(2n+1)^3 \pi^3 a^2}, \quad B_{2n+1} = 0.$$

Натижада $\gamma_{2n+1}(t)$ ушбу кўринишни олади:

$$\gamma_{2n+1}(t) = -\frac{4gl^2}{(2n+1)^3 \pi^3 a^2}\left[1 - \cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\right]. \tag{5.13}$$

Топилган (5.13) ифодани (5.4) формулага қўйсак, масаланинг жавобига эга бўламиз:

$$w(x, t) = -\frac{4gl^2}{\pi^3 a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\left[1 - \cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\right]\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

Ечимдаги айирув ишораси тебраниш бошланишида тор нуқталари пастга четланишини кўрсатади.

$x = \frac{l}{2}$ ва $t = \frac{l}{a}$ да

$$\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}\cdot\frac{l}{2} = (-1)^n, \quad \cos\frac{(2n+1)\pi a}{l}\cdot\frac{l}{a} = -1$$

эканлигини ҳисобга олсак,

$$|w|_{\max} = \left|w\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{a}\right)\right| = \frac{8gl^2}{\pi^3 a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{8gl^2}{\pi^3\cdot a^2}\cdot\frac{\pi^3}{32} = \frac{gl^2}{4a^2}$$

ҳосил бўлади. Торнинг ўртасида $t = \frac{l}{a}$ моментда энг катта четланиш юз берар экан. Кейинги энг катта четланиш тор ўртасида $t = \frac{3l}{a}$ моментда юз беради ва ҳоказо.

2-мисол. Зичлик функцияси $g(x, t) = A\rho\sin\omega t$. x га боғлиқ бўлмаган (ρ — торнинг чизиқли зичлиги) текис тақсимланган куч торга таъсир этади. Бошланғич силжишсиз ва тезликсиз бўлган торнинг мажбурий тебранишини топинг.

Ечиш. $G(x, t) = \frac{g(x, t)}{\rho} = A\sin\omega t$ бўлиб, y x га боғлиқ бўлмаганлиги учун (5.8) формуладан фойдаланамиз. У ҳолда

$$g_{2n}(t) = 0, \quad g_{2n+1}(t) = \frac{4A}{(2n+1)\pi}\sin\omega t.$$

Юқоридаги биринчи мисол каби бу ерда ҳам $\gamma_{2n}(t) = 0$ бўлиб, $\gamma_{2n+1}(t)$ эса (5.11) формулага кўра қуйидагига тенг:

$$\gamma_{2n+1}(t) = \frac{4lA}{(2n+1)^2\pi^2 a}\int_0^t \sin\omega\tau\sin\frac{(2n+1)\pi a(t-\tau)}{l}\,d\tau.$$

$\frac{(2n+1)\pi a}{l} = \omega_{2n+1}$ деб белгилаш киритамиз ва интеграллаш амалини бажарамиз. У вақтда

$$\gamma_{2n+1}(t) = \frac{4Al}{(2n+1)^2 \pi^2 a} \cdot \frac{\omega_{2n+1} \sin \omega t - \omega \sin \omega_{2n+1} t}{\omega_{2n+1}^2 - \omega^2}$$

ифодага эга бўламиз. Бу ерда барча n лар учун $\omega_{2n+1} \neq \omega$ (резонанс ҳолати қатнашмайди) деб фараз қиламиз. $\gamma_{2n+1}(t)$ нинг топилган ифодасини умумий формула (5.4) га қўйиб, масала ечимига келамиз:

$$w(x, t) = \frac{4lA}{\pi^2 a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \frac{\omega_{2n+1} \sin \omega t - \omega \sin \omega_{2n+1} t}{\omega_{2n+1}^2 - \omega^2} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Йиғиндининг бирор k қийматида частоталар $\omega_{2k+1} = \omega$ га тенг бўлиб қолса, ўша ҳадни

$$-\frac{2lA}{\pi^2 a\,(2k+1)^2} \frac{\omega_{2k+1} t \cos \omega_{2k+1} t - \sin \omega_{2k+1} t}{\omega_{2k+1}} =$$

$$= \frac{2l^2 A}{\pi^3 a^2 (2k+1)^3} (\sin \omega_{2k+1} t - \omega_{2k+1} t \cos \omega_{2k+1} t)$$

ҳад билан алмаштириш керак. Мустақил текшириб кўришни ўқувчига ҳавола қиламиз.

6-§. Қаршилик кўрсатувчи муҳитда торнинг тебраниши

Шу вақтгача торнинг тебранишида атроф-муҳитнинг қаршилигини ҳисобга олмасдан келган эдик. Натижада сўнмайдиган тебранишлар ҳосил бўлган эди. Энди торнинг қаршилик кўрсатувчи муҳитдаги тебранишини кўрайлик. Қаршилик кучи ҳаракат тезлигига пропорционал деб қабул қиламиз. У вақтда торнинг MM' чексиз кичик бўлагига (2-§, 110-шаклга қаранг) таъсир этувчи қаршилик кучи қуйидаги кўринишда бўлади:

$$F_{\text{қарши}} = \alpha \frac{\partial u}{\partial t} dx, \tag{6.1}$$

бу ерда α — пропорционаллик коэффициенти. Бу ерда ҳам (2.3) тенгламани келтириб чиқаришдаги мулоҳазаларни такрорлаб, фақат қаршилик кучини ҳаракат йўналишига тескари йўналганлигини ҳисобга олиб, ушбу тенгламага келамиз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2m \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} g(x,t). \tag{6.2}$$

Бу ерда $2m = \frac{\alpha}{\rho}$ (қолган белгилашлар (2.3) тенгламадагининг ўзидир). Эркин тебранишлар билан чегаралансак, у ҳолда (6.2) тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (6.3)$$

Бошланғич ва четки шартлар аввалги кўринишда қолади, яъни

$$u\Big|_{t=0} = f(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x),\ u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=l} = 0. \qquad (6.4)$$

(6.3) тенгламанинг ечимини (6.4) шартларда Фурье усули билан қидирамиз. Тенгламанинг ечимини $u(x, t)=X(x)\,T(t)$ кўринишда ёзиб, 4-§ даги каби амалларни бажариб, ушбу тенгликка келамиз:

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{T''+2mT'}{T}\right) = \frac{X''}{X}. \qquad (6.5)$$

Бу ердаги $X(x)$ функция учун четки шартлар қаршиликсиз муҳитдаги каби ўзгаришсиз қолганлиги учун (6.5) тенглик ўринли бўлиши мумкин, агар икки томони $-\lambda_k^2$ га тенг бўлса, демак $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ хос сонларга мос келган $X_k(x)$ хос функциялар (4.11) га кўра (коэффициентлар бирга тенг деб олинди)]

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (6.6)$$

формула билан аниқланади. $T_k(t)$ функцияни аниқлаш учун ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$T_k'' + 2mT_k' + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k = 0. \qquad (6.7)$$

Унинг характеристик тенгламаси

$$r^2 + 2mr + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 = 0$$

нинг илдизлари $r_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 - \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2}$ бўлади. Ишқаланиш коэффициенти етарлича кичик бўлганлиги учун $\left(m < \frac{\pi a}{l}\right)$ дискриминат манфий бўлади.

$\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 - m^2 = q_k^2$ деб белгиласак, $r_{1,2} = -m \pm iq_k$ бўлади. У вақтда (6.7) тенгламанинг умумий ечими қуйидагига тенг:

$$T_k(t) = e^{-mt}(a_k\cos q_k t + b_k\sin q_k t).$$

Топилган $X_k(x)$ ва $T_k(t)$ лардан хусусий ечимлар тузамиз:

$$u_k(x, t) = e^{-mt}(a_k\cos q_k t + b_k\sin q_k t)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Бундан кўринадики, ҳар бир тўлқин e^{-mt} га кўпайтирилганлиги учун сўнувчан бўлади. Хусусий ечимлар йиғиндиси

$$u(x, t) = e^{-mt}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos q_k t + b_k \sin q_k t) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

ни оламиз ва a_k, b_k коэффициентларни берилган (6.4) шартлардан фойдаланиб аниқлаймиз. $t=0$ бўлганда

$$u\Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{l} = f(x)$$

бўлиб, бу ердан

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Энди $\frac{\partial u}{\partial t}$ ҳосилани ҳисоблаб, t ўрнига нол қўямиз:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty}(-ma_k + b_k q_k) \sin\frac{k\pi x}{l} = F(x)$$

бўлиб, бундан

$$-ma_k + b_k q_k = \frac{2}{l}\int_0^l F(x) \sin\frac{k\pi x}{l} dx$$

бўлади ва

$$b_k = \frac{2}{q_k l}\int_0^l F(x) \sin\frac{k\pi x}{l} dx + \frac{m}{q_k} a_k.$$

Мисол. 4-§ даги 1-мисолни муҳит қаршилигини ҳисобга олиб ечинг. Мисолни ечганда ишқаланиш коэффициенти $m = \frac{\alpha}{\rho} < \frac{\pi a}{l}$ бўлсин.

Ечиш. Бошланғич тезлик $F(x) = 0$ бўлганлиги учун $b_k = \frac{m}{q_k} a_k$ бўлади. Бу ерда $q_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 - m^2}$. Энди a_k ни ҳисоблаймиз:

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin\frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2}{l}\left[\frac{h}{c}\int_0^c x \sin\frac{k\pi x}{l} dx + \right.$$

$$\left. + \frac{h}{l-c}\int_c^l (l-x) \sin\frac{k\pi x}{l} dx\right].$$

Бўлаклаб интеграллаймиз. Натижада

$$a_k = \frac{2hl^2}{k^2\pi^2 c(l-c)}\sin\frac{k\pi c}{l}.$$

Масаланинг ечими қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$u(x,t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)}\cdot e^{-mt}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi c}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\left(\cos q_k t + \frac{m}{q_k}\sin q_k t\right)$$

7-§. Металл стерженда иссиқлик тарқалиш тенгламаси

Узунлиги l га тенг бир жинсли металл стерженни қараймиз (120-шакл). Металл стерженнинг ён сирти ташқи муҳитга иссиқлик ўтказмайди ҳамда кўндаланг кесимининг барча нуқталарида иссиқлик бир хил деб фараз қиламиз. Абсцисса ўқини металл стержен ўқи бўйлаб йўналтирамиз. У ҳолда u иссиқлик x координата ва t вақтнинг функцияси бўлади. $\frac{\partial u}{\partial x}$ хусусий ҳосила эса Ox бўйлаб йўналган иссиқликнинг ўзгариш тезлигини билдиради. Абсциссалари x_1 ва x_2 $(x_2 - x_1 = \Delta x)$ бўлган кесимлар орасидаги кичик бўлагини кўрамиз. x_1 кесимдан Δt вақтда ўтадиган иссиқлик миқдори:

$$\Delta Q_1 = -k\frac{\partial u}{\partial x}\Bigg|_{x=x_1} S\Delta t. \tag{7.1}$$

x_2 абсциссали кесим учун ўша миқдорнинг ўзи

$$\Delta Q_2 = -k\frac{\partial u}{\partial x}\Bigg|_{x=x_2} S\Delta t \tag{7.2}$$

бўлади. Бу формула тажриба йўли билан топилган бўлиб, унда k — иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти, S — қаралаётган металл стержен кўндаланг кесими юзи.

Δt вақтда металл стерженнинг Δx бўлагига оқиб кирган иссиқлик миқдори $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$ га тенг бўлади, яъни

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = \left|-k\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1} S\Delta t\left| - \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2} S\Delta t\right| \approx$$

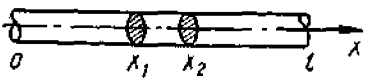
$$\approx k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x S\Delta t \tag{7.3}$$

$\left(\text{бу ерда } \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1}\right.$ айирмага нисбатан Лагранж теоремасини қўлладик). Шу Δt вақт ичида металл стержен Δx бўлакчасининг иссиқлиги Δu га кўтарилади. Иссиқлик оқими қуйидагига тенг:

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = c\rho\Delta x S\Delta u$$

ёки

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 \approx c\rho\Delta x S\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t. \tag{7.4}$$



120- шакл.

Бунда c—металл стержен ясалган модданинг иссиқлик сиғими, ρ— металл стержен ясалган модданинг зичлиги ($\rho\Delta xS = \rho\Delta V$ — металл стержен элементининг массаси).

(7.3) ва (7.4) формулаларни тенглаштириб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta xS\Delta t = c\rho\Delta xS\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t$$

ёки

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (7.5)$$

Бу ерда $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ деб белгиланган. (7.5) тенглама бир жинсли металл стерженда иссиқликнинг тарқалиш тенгламаси дейилади. Бу тенгламанинг ечими тўла аниқ бўлиши учун $u(x, t)$ функция масаланинг физик шартларига мос четки шартларни қаноатлантириши керак. Четки шартлар турлича бўлиши мумкин. Масалан, $0 \leqslant t \leqslant T$ учун бошланғич шарт:

$$u(x, 0) \equiv u\big|_{t=0} = f(x). \qquad (7.6)$$

$f(x)$ — берилган функция. Четки шартлар $x=0$ ва $x=l$ бўлганда металл стержен учларида доимий ҳарорат сақланса:

$$u(0, t) \equiv u\big|_{x=0} = \tilde{u}_0, \quad u\big|_{x=l} = \tilde{u}_l \qquad (7.7)$$

бўлади. $\bar{u}_0$ ва $\tilde{u}_l$ лар берилган сонлар. Агар металл стержен учларида муҳит билан ҳарорат алмашиб турса, четки шартлар қуйидагича бўлади:

$$k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = h_0\left\{u\Big|_{x=0} - \tilde{u}_0\right\},$$

$$-k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = h_l\left\{u\Big|_{x=l} - \tilde{u}_l\right\}, \qquad (7.8)$$

бу ерда $\tilde{u}_0(t)$, $\bar{u}_l(t)$ — ташқи муҳитнинг берилган ҳароратлари, h_0 ва h_l — ташқи иссиқлик алмашиниш коэффициентлари. h_0 — металл стерженнинг чап охиридаги, h_l — ўнг охиридаги коэффициентлар.

Агар металл стерженнинг баъзи бўлакларида иссиқлик ҳосил бўлса ёки иссиқлик ютилса, у ҳолда металл стержен ичида иссиқлик манбаи мавжуд бўлади. Иссиқлик ҳосил бўлиши (ёки ютилиши)ни иссиқлик манбаининг зичлиги $F(x, t)$ орқали ифодалаш мумкин, яъни кичик Δx бўлагидан кичик Δt вақт оралиғида қуйидаги миқдорда иссиқлик ажралиб чиқади:

$$F(x, t)\,\Delta x\,\Delta t. \qquad (7.9)$$

(Агар $F(x, t) < 0$ бўлса, иссиқлик ютилади). Масалан, металл стержендан доимий электр токи ўтказилганда ундан иссиқлик ажралади ва бу ҳолда $F(x, t) = \text{const} = I^2R$. Бунда I — ток, R — металл стержен узунлик бирлигидаги қаршилик.

Шундай қилиб, иссиқлик тарқалиш тенгламасини келтириб чиқаришда (7.9) ифодани ҳам ҳисобга олсак, кўрилаётган бўлакда иссиқлик баланси тенгламаси қуйидагича бўлади ((7.5) г қаранг):

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x S\Delta t + F(x, t)\Delta x\Delta t = c\rho\Delta xS\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t.$$

Тенгликнинг иккала қисмини $S\Delta x\Delta t$ га бўлсак,

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{S}F(x, t)$$

ҳосил бўлади. Энди бу тенгликни $c\rho$ га бўлиб, $\frac{1}{c\rho S}F(x, t) = g(x, t)$ деб белгиласак, бир жинсли бўлмаган

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t) \tag{7.10}$$

тенгламага келамиз. Бу ерда $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$ — ҳарорат ўтказувчанлик коэффициенти.

8-§. Чегараланмаган металл стерженда иссиқлик тарқалиши

Ингичка, ён сирти иссиқдан изоляцияланган, етарли даражада узун, иссиқлик ўтказувчи металл стержен тенгламаси, иссиқлик манбаларисиз бўлганда, ушбу кўринишга эга бўлади:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{8.1}$$

Бу тенгламада фақат бошланғич шарт берилади:

$$u|_{t=0} = f(x). \tag{8.2}$$

$f(x)$ функция бутун сонлар ўқида $(-\infty<x<\infty)$ аниқлангандир. $u(x, t)$ функция учун четки шарт қўйилмайди. (8.1) тенгламани (8.2) шартда ечиш масаласи *Коши масаласи* дейилади ёки *бошланғич шарти берилган масала* дейилади.

(8.1) тенгламани соддалаштирамиз. Бунинг учун t ўрнига янги ўзгарувчини киритамиз:

$$\tau = a^2 t. \tag{8.3}$$

У ҳолда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau}\cdot\frac{d\tau}{dt} = a^2\frac{\partial u}{\partial \tau}$$

бўлади ва (8.1) тенглама ушбу кўринишни олади:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{8.4}$$

Бу тенглама металл стерженнинг физик хоссасига боғлиқ эмас. $l=0$ бўлганда $\tau=0$ бўлганлиги учун бошланғич шарт

$$u|_{\tau=0}=f(x) \tag{8.5}$$

бўлади. Бу тенгламани ечиш учун Фурьенинг ўзгарувчиларни ажратиш усули ва хусусий ечимлар суперпозициясидан фойдаланамиз. Бу усул икки қисмдан иборат. Аввал (8.4) тенгламанинг ечимини $X(x)\cdot T(\tau)$ кўринишда қидирамиз. Бу кўпайтмадан ҳосилалар олиб, (8.4) тенгламага қўйсак,

$$\frac{T'(\tau)}{T(\tau)}=\frac{X''(x)}{X(x)} \tag{8.6}$$

тенглик ҳосил бўлади. Тенгликнинг ўнг қисми τ га, чап қисми x га боғлиқ бўлмагани учун бу тенглик ўзгармас c га тенг бўлганда ўринли бўлади. У ҳолда (8.6) тенглама қуйидаги иккита тенгламага ажралади:

$$\frac{T'(\tau)}{T(\tau)}=c, \quad \frac{X''(x)}{X(x)}=c. \tag{8.7}$$

Булардан биринчисининг умумий ечими:

$$T(\tau)=Ce^{c\tau}.$$

Металл стерженнинг бирорта кесимида $u(x,t)=X(x)\cdot T(\tau)$ иссиқлик чексизга интилиши ($\tau\to\infty$ да) мумкин эмас. Шунинг учун $c=-\lambda^2$ деб оламиз:

$$T(\tau)=Ce^{-\lambda^2\tau}.$$

Иккинчи $X''(x)+\lambda^2X(x)=0$ тенгламанинг умумий ечими

$$X(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x.$$

Демак, (8.4) тенгламанинг хусусий ечими қуйидагига тенг:

$$u=(\alpha\cos\lambda x+\beta\sin\lambda x)e^{-\lambda^2\tau}. \tag{8.8}$$

Бу ерда $\alpha=AC$ ва $\beta=BC$, λ лар ихтиёрий ўзгармас сонлар. (8.8) формула λ нинг аввалдан берилган ҳар бир қийматида (8.4) тенгламанинг ечими бўлади. Демак, λ нинг ҳар бир қийматида турли α ва β ларни аниқлаш мумкин, яъни α ва β лар λ нинг ихтиёрий функциялари $\alpha=\alpha(\lambda)$, $\beta=\beta(\lambda)$ бўлади. У ҳолда хусусий ечимлар оиласи ушбу кўринишни олади:

$$u_\lambda(x,\tau)=[\alpha(\lambda)\cos\lambda x+\beta(\lambda)\sin\lambda(x)]e^{-\lambda^2\tau}. \tag{8.9}$$

Бу ерда λ параметр $-\infty$ дан $+\infty$ гача қийматларни олади. Шу ерда Фурье усулининг биринчи қисми ниҳоясига етади. Фурье усулининг иккинчи қисми—хусусий ечимлар $u_\lambda(x,\tau)$ суперпозицияси қуйидагидан иборат.

Берилган (8.4) тенглама чизиқли ва бир жинсли. Унинг чексиз кўп хусусий ечимлари мавжуд ва бу ечимлар узлуксиз ўзгарувчи λ параметрга боғлиқ эканини юқорида кўрсатдик.

$u_\lambda(x, \tau)$ — хусусий ечимларнинг интеграли ҳам (8.4) тенгламанинг ечими бўлади.

$$u(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u_\lambda(x, \tau)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(\lambda)\cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x]\, e^{-\lambda^2\tau}\, d\lambda. \qquad (8.10)$$

Бошланғич (8.5) шартдан фойдаланиб, номаълум $\alpha(\lambda)$ ва $\beta(\lambda)$ ларни аниқлаймиз:

$$u\Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda = f(x). \qquad (8.11)$$

Бу ерда берилган $f(x)$ функцияни бутун Ox ўқида абсолют интегралланувчи ва $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ яқинлашувчи деб қараш мумкин. ($f(x)$ функция — иссиқликнинг бошланғич тақсимоти.) Иккинчи талаб ҳам ўринли, чунки стерженнинг иссиқлик энергияси чекли, хосмас интеграл яқинлашувчи. У ҳолда, $f(x)$ функциянинг Фурье интеграли:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda(\xi - x)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda\xi\, d\xi \right) \cos \lambda x + \left(\frac{1}{2\pi} f(\xi) \sin \lambda\xi\, d\xi \right) \sin \lambda x \right\} d\lambda.$$

Бу тенгликни (8.11) билан таққослаб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda\xi\, d\xi, \\ \beta(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda\xi\, d\xi. \end{aligned} \qquad (8.12)$$

$f(x)$ — чегараланган бўлганлиги учун $\alpha(\lambda)$ ва $\beta(\lambda)$ лар ҳам чегараланган:

$$|\alpha(\lambda)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)|\, d\xi, \qquad |\beta(\lambda)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)|\, d\xi.$$

(8.12) дан топилган $\alpha(\lambda)$ ва $\beta(\lambda)$ ларни (8.10) ечимга қўйсак, (8.4) тенглама ва (8.5) бошланғич шартни қаноатлантирувчи функцияни ҳосил қиламиз:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) [\cos \lambda x \cos \lambda \xi + \sin \lambda x \sin \lambda\xi]\, e^{-\lambda^2\tau}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda (x - \xi)\, e^{-\lambda^2\tau}\, d\xi. \qquad (8.13)$$

Шу билан чегараланмаган металл стерженда иссиқликнинг тарқалиш масаласи ечилади.

Энди (8.13) интегралларда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз:

$$u(x,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2\tau}\cos\lambda(x-\xi)\,d\lambda\right\}d\xi. \qquad (8.14)$$

Катта қавс ичидаги интегрални ҳисоблаймиз: $\lambda=\frac{\sigma}{\sqrt{\tau}}$ алмаштириш бажарамиз ва $\frac{x-\xi}{\sqrt{\tau}}=\omega$ деб белгилаш киритамиз, натижада

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2\tau}\cos\lambda(x-\xi)d\lambda=\frac{1}{\sqrt{\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sigma^2}\cos\sigma\omega\,d\sigma=\frac{1}{\sqrt{\tau}}I(\omega)$$

ҳосил бўлади. Бу ерда

$$I(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sigma^2}\cos\sigma\omega\,d\sigma$$

бўлиб, $I(0)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma=\sqrt{\pi}$ — Пуассон интегралидир. $I(\omega)$ функциядан ҳосила олиб, интегрални бўлаклаб интеграллаcак, қуйидаги дифференциал тенгламага келамиз: $I'(\omega)=-\frac{\omega}{2}I(\omega)$. Тенгламанинг умумий ечими $I(\omega)=Ce^{-\frac{\omega^2}{4}}$ га тенг бўлиб, ихтиёрий $I(0)=\sqrt{\pi}=C$ ўзгармасни топиб, ўрнига қўйсак, $I(\omega)=\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$ бўлади. Интеграл эса

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda^2\tau}\cos\lambda(x-\xi)d\lambda=\frac{1}{\sqrt{\tau}}I(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}}$$

га тенг бўлади. Бу қийматни (8.14) формулага қўямиз:

$$u(x,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}}d\xi. \qquad (8.15)$$

Энди $\tau=a^2t$ эканини ҳисобга олсак,

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi \qquad (8.16)$$

бўлиб, берилган $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламанинг $u|_{t=0}=f(x)$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими бўлади.

Агар $|x-x_0|<\varepsilon$ қийматда $f_\varepsilon(x)=u_0$ ўзгармас, $|x-x_0|>\varepsilon$ 0 га тенг бўлса, яъни бошланғич иссиқлик тақсимоти иссиқлик импульсидан иборат бўлса, у ҳолда қуйидаги интеграл ҳосил бўлади ва унга ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллаб, ушбуга эга бўламиз

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi=\frac{2\varepsilon u_0}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\bar{\xi})^2}{4a^2t}}=$$

$$=\frac{\theta_0}{S\rho c}\cdot\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot e^{-\frac{(x-\bar{\xi})^2}{4a^2t}}.$$

Бу ерда $\bar{\xi}$ $x_0-\varepsilon<\bar{\xi}<x_0+\varepsilon$ интервалдаги ихтиёрий нуқта $\left(2\varepsilon u_0=\frac{\theta_0}{S\rho c}\right.$ га тенг$\left.\right)$. Агар юборилган иссиқлик миқдори $\theta_0=S\rho c$ бўлса,

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\bar{\xi})^2}{4a^2t}}. \qquad (8.17)$$

$\varepsilon\to 0$ да $\bar{\xi}\to x_0$ ва (8.17) ечим нуқтали иссиқлик импульсига ўтади, яъни параметр $\xi=x_0$ қийматдаги фундаментал ечимга айланади:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}.$$

Бу функциянинг графигини t нинг берилган турли мусбат қийматларида чизсак, Гаусс эгри чизиқларини ҳосил қиламиз ($u(x,t)$ функция ва унинг графиги эҳтимоллар назариясида муҳим рол ўйнайди).

1- мисол. Иссиқликнинг бошланғич тақсимоти:

$$f(x)=\begin{cases}u_0, & \text{агар } x_1<x<x_2 \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x<x_1 \text{ ёки } x>x_2 \text{ бўлса}\end{cases}$$

(121- шакл).

(8.16) формуладан фойдаланиб, масаланинг ечимини ёзамиз:

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi. \qquad (8.18)$$

121- шакл.

Бу функцияни қуйидаги эҳтимоллар интеграли орқали ифодалаймиз (14-бобга қ.):

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{-\mu^2}\,d\mu. \qquad (8.19)$$

Ҳақиқатан, (8.18) ечимда $\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}=\mu$

алмаштириш бажарамиз. $d\xi = -2a\sqrt{t}\,d\mu$ эканини ҳисобга олиб, ушбуга эга бўламиз:

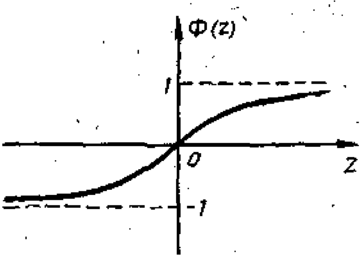
$$u(x,t) = -\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2}\,d\mu = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2}d\mu - \frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2}\,d\mu =$$

$$= \frac{u_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right)\right]. \qquad (8.20)$$

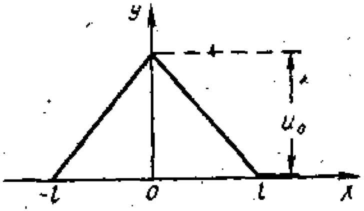
$\Phi(z)$ функция учун махсус жадвал мавжуд. Унинг графиги 122-шаклда берилган.

2-мисол. Иссиқликнинг бошланғич тақсимоти:

$$f(x) = \begin{cases} u_0\left(1 - \frac{x}{l}\right), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u_0\left(2 + \frac{x}{l}\right), & -l \leqslant x \leqslant 0, \\ 0, & |x| \geqslant l \text{ ва } |x| \leqslant -l \end{cases}$$



122- шакл.



123- шакл.

бўлсин (123-шакл). У ҳолда (8.16) формуладан:

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-l}^{0}\left(1+\frac{\xi}{l}\right)e^{\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi + \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{l}\left(1-\frac{\xi}{l}\right)e^{\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi.$$

$\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}} = \mu$, $d\xi = -2a\sqrt{t}\,d\mu$ алмаштириш бажарамиз. Натижада ечим қуйидаги кўринишга келади:

$$u(x,t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\left\{\left(1+\frac{x}{l}\right)\int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2}\,d\mu + \left(1-\frac{x}{l}\right)\int\limits_{\frac{x-l}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2}\,d\mu -\right.$$

$$-2\frac{a}{l}\sqrt{t}\int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}}\mu e^{-\mu^2}\,d\mu+2\frac{a}{l}\sqrt{t}\int\limits_{\frac{x-l}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}\mu e^{-\mu^2}\,d\mu\Bigg\}=$$

$$=\frac{u_0}{2}\left\{\left(1+\frac{x}{l}\right)\left[\Phi\left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]+\right.$$

$$+\left(1-\frac{x}{l}\right)\left[\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}}\right)\right]\Bigg\}+u_0\frac{a}{l}\sqrt{\frac{t}{\pi}}\left\{e^{-\frac{(x+l)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{x-l}{4a^2t}}\right\}=\frac{u_0}{2}\left\{\left(1+\frac{x}{l}\right)\Phi\left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right)-\right.$$

$$\left.-2\frac{x}{l}\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)-\left(1-\frac{x}{l}\right)\Phi\left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}}\right)\right\}+$$

$$+u_0\frac{a}{l}\sqrt{\frac{t}{\pi}}\left\{e^{-\frac{(x+l)^2}{4a^2t}}-2e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2t}}\right\}.$$

9- §. Фазода иссиқликнинг тарқалиши

Уч ўлчовли фазода нотекис қиздирилган жисм берилган бўлсин. Унинг ҳар бир нуқтасидаги иссиқлик t пайтда $u(x, y, z, t)$ функция орқали аниқланади. Иссиқлик майдони — скаляр майдон бўлиб, биз анализда унинг стационар майдон бўлган ҳолини кўрган эдик, яъни иссиқлик вақтга боғлиқ эмас эди. Бу ерда скаляр майдон ностационар бўлган ҳолни, яъни t га боғлиқ бўлган ҳолни кўрамиз. Агар t нинг тайин қийматида $u(x, y, z, t)$ иссиқлик бир хил қийматларни қабул қилса, изотермик сирт (юксаклик сирти) ҳосил бўлади. Бу сирт вақт ўзгариши билан ўзгаради. Иссиқлик u нинг энг катта ўзгариш тезлиги u функция градиенти йўналишида бўлади:

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Изотермик сиртнинг ҳар бир нуқтасида градиент шу сиртга ўтказилган ва иссиқликнинг ортиб бориши томонига қараб йўналган нормал билан устма-уст тушади ва унинг модули қуйидагига тенг бўлади:

$$|\operatorname{grad} u|=\frac{\partial u}{\partial n}.$$

Изотермик сиртнинг кичик бўлаги $\Delta\sigma$ дан Δt вақт ичида ўтадиган иссиқлик оқими

$$\Delta Q=-k\frac{\partial u}{\partial n}\Delta\sigma\cdot\Delta t \qquad (9.1)$$

формула билан аниқланади: бунда $k=\text{const}$ — қаралаётган муҳитнинг иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти (жисмни бир жинсли ва изотроп деб ҳисоблаймиз). Майдон назариясидан маълумки, нормал вектор йўналиши бўйича олинган ҳосила $\text{grad}\, u$ нинг шу нормалга туширилган проекциясига тенг, яъни

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \text{grad}\, u \cdot \vec{n}.$$

$\vec{n}$ — нормал бўйича йўналган бирлик вектор. $\frac{\partial u}{\partial n}$ нинг ифодасини (9.1) формулага қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\Delta Q = -k\vec{n}\cdot \text{grad}\, u\, \Delta\sigma \cdot \Delta t. \qquad (9.2)$$

Бу формулада $-k\,\text{grad}\, u = \vec{A}$ деб олсак, $A_n = \text{пр}_n \vec{A} = -k\vec{n}\ \text{grad}\, u$ бўлиб, иссиқлик оқими $\Delta Q = A_n \Delta\sigma \Delta t$ бўлади. Жисм S сирт билан чегараланган бўлса, ундан чиқаётган иссиқлик оқими Δt вақтда қуйидагига тенг бўлади:

$$Q = \Delta t \cdot \oint\!\!\oint_S A_n d\sigma, \qquad (9.3)$$

бунда A_n $\vec{A}$ векторнинг ташқи нормалга проекцияси (124-шакл).

(9.3) формуладаги сирт интегралига Остроградский — Гаусс теоремасини қўллаймиз:

$$\oint\!\!\oint_S A_n d\sigma = \iiint_V \text{div}\, \vec{A}\, dV.$$

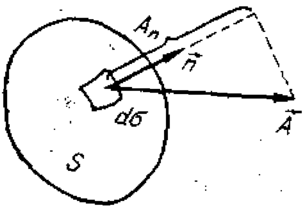
Бу ерда V S сирт билан чегараланган жисмнинг ҳажми ва $\text{div}\, \vec{A} = -k\,\text{div}\text{grad}\, u = -k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = -k\Delta u$. $\Delta = \frac{\partial^2}{dx^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — *Лаплас оператори* дейилади.

V ҳажмга кирувчи Q_1 иссиқлик миқдори бу ҳажмдаги модда ҳароратини кўтаришга кетади ((9.3) формуладаги Q нинг ишорасига тескари бўлади) ва ушбуга тенг бўлади:

$$Q_1 = \iiint_V k\Delta u\, dV. \qquad (9.4)$$

Фараз қилайлик, жисмда иссиқлик манбалари мавжуд бўлсин. Уларнинг зичлиги $F(x, y, z, t)$ бўлсин. У ҳолда $(t, t+\Delta t)$ оралиқда жисмнинг қаралаётган қисмидан Q_2 миқдорда иссиқлик ажралади ва бу иссиқлик (юқори тартибли чексиз кичик миқдор аниқлигида)

$$Q_2 = \Delta t \iiint_V F(x, y, z, t) dV \qquad (9.5)$$



124-шакл.

формула ёрдамида аниқланади. У ҳолда ΔV ҳажмдаги иссиқлик миқдори Q_1+Q_2 йиғиндига тенг бўлади. Бу иссиқлик миқдорини бошқача йўл билан, S сирт билан чегараланган жисм нуқтасидаги иссиқликнинг ўзгаришини ҳисобга олган ҳолда ҳисоблаймиз. (x, y, z) нуқтада Δt вақт оралиғида иссиқлик қуйидаги миқдорга ўзгаради:

$$u(x, y, z, t+\Delta t)-u(x, y, z, t)=\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t.$$

ΔV элементар ҳажмни қараймиз. Δt вақтда нуқтанинг ҳарорати $\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t$ га кўтарилган бўлса, ΔV элемерт ҳароратини шу даражага кўтаришга сарф бўлган иссиқлик миқдори қуйидагига тенг бўлиши равшан:

$$c\rho\Delta V\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t,$$

бунда c — модданинг солиштирма иссиқлик сиғими, ρ — зичлиги. V ҳажмда ҳарорат кўтарилишига сарф бўлган иссиқликнинг умумий миқдори бундай бўлади:

$$Q_3=\Delta t\iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dV=Q_1+Q_2. \tag{9.6}$$

Демак,

$$\iiint\limits_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dV=\iiint\limits_V k\Delta u\,dV+\iiint\limits_V F(x, y, z, t)\,dV.$$

Бундан

$$\iiint\limits_V\left(c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-k\Delta u-F\right)dV=0 \tag{9.7}$$

бўлиб,

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-k\Delta u-F=0 \tag{9.8}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Икки томонини $c\rho$ га бўлиб юборамиз, у ҳолда

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+\frac{1}{c\rho}F \tag{9.9}$$

чизиқли бир жинсли бўлмаган иссиқлик тарқалиш тенгламасига келамиз. Агар жисмда иссиқлик манбалари мавжуд бўлмаса, $F=0$ бўлиб, тенглама бир жинсли тенгламага айланади:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{9.10}$$

Бу ерда $a=\sqrt{\frac{k}{c\rho}}$ — ҳарорат ўтказувчанлик коэффициенти. Бу тенгламанинг бошланғич шарти

$$u(x,\ y,\ z,\ 0) = u\Big|_{t=0} = f(x,\ y,\ z), \qquad (9.11)$$

чегаравий шарти

$$-k\,\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = h\,[u|_{\Gamma} - \bar{u}]. \qquad (9.12)$$

кўринишда бўлиши мумкин. Бу ерда Γ — сиртнинг чегараси, h — иссиқлик алмашиниш коэффициенти, $\bar{u}$ — ташқи муҳит ҳарорати.

Агар жисм иссиқликдан изоляцияланган бўлса, $h=0$ бўлиб, чегаравий шарт

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0. \qquad (9.13)$$

Агар иссиқлик алмашиниш коэффициенти жуда катта бўлса ($h \to \infty$ бўлса), (9.12) формуладан

$$u|_{\Gamma} = \bar{u} \qquad (9.14)$$

келиб чиқади, яъни жисм чегарасидаги иссиқлик ташқи муҳит ҳароратига тенг бўлади.

(9.10) тенгламадан ҳарорат z га боғлиқ бўлмаса, текисликда иссиқлик тарқалиш тенгламаси

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

ҳосил бўлади. Агар u функция z га ҳам, y га ҳам боғлиқ бўлмаса, металл стерженда иссиқлик тарқалиш тенгламаси ҳосил бўлади:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

10-§. Лаплас тенгламасига келтириладиган масалалар. Четки масалаларни ифодалаш

Бу параграфда

$$\Delta u = 0 \qquad (10.1)$$

Лаплас тенгламасига келтириладиган баъзи масалалар қаралади. Тенгламанинг декарт, цилиндрик ва сферик координаталаридаги кўриниши қуйидагича:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \qquad (10.2)$$

$$\Delta u = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \qquad (10.2')$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) +$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \qquad (10.2'')$$

Лаплас тенгламасини қаноатлантирувчи u функциялар *гармоник функциялар* деб аталади.

I. Бир жинсли жисмда иссиқликнинг стационар тақсимоти масаласи. σ сирт билан чегараланган бир жинсли V ҳажмли жисм берилган бўлсин. Жисмнинг турли нуқталарида иссиқлик манбалари бўлмаса, $F=0$ бўлиб, (9.10) тенглама

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

ни ҳосил қилган эдик. Агар жараён стационар (ўрнашган) бўлса, яъни ҳарорат вақтга боғлиқ бўлмасдан, балки жисм нуқталарининг координаталарига боғлиқ бўлса, у ҳолда $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ бўлади ва u ҳарорат Лаплас тенгламаси

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{10.3}$$

ни қаноатлантиради. Бу (10.3) тенгламанинг четки масаласида σ сиртдаги ҳарорат берилиши керак:

$$u\Big|_{\sigma}=f(M).$$

Шундай қилиб, V ҳажм ичида (10.3) тенгламани қаноатлантирувчи ва σ сиртнинг ҳар бир M нуқтасида берилган

$$u\Big|_{\sigma}=f(M) \tag{10.4}$$

қийматни қабул қилувчи $u(x, y, z)$ функцияни топиш керак. Бу масала *Дирихле масаласи* ёки (10.3) тенглама учун *биринчи четки масала* деб аталади.

Агар сиртнинг ҳар бир нуқтасида ҳарорат эмас, балки иссиқлик оқими берилган бўлиб, у $\frac{\partial u}{\partial n}$ (нормал вектор йўналишдаги ҳосила) га пропорционал бўлса, сиртда (10.4) четки шарт ўрнига қуйидаги шартга эга бўламиз:

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\sigma}=g(M). \qquad (10.5$$

(10.3) тенгламанинг (10.5) четки шартни қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласи *Нейман масаласи ёки иккинчи четки масала* деб аталади.

Агар иссиқлик тарқалиши z га боғлиқ бўлмаса, масала текисликдаги Лаплас тенгламасига келади. Четки шартлар текисликдаги контурда бажарилади.

II. Суюқлик ёки газнинг потенциал оқими. Узлуксизлик тенгламаси. σ сирт билан чегараланган Ω ҳажм ичида суюқлик оқадиган бўлсин. ρ — суюқлик зичлиги бўлсин. Суюқлик тезлигини

$$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k} \tag{10.6}$$

билан белгилаймиз, бунда v_x, y_y, v_z — вектор $\vec{v}$ нинг координата ўқларидаги компоненталари. Ω ҳажмдан s сирт билан чегараланган кичик ω ҳажм ажратамиз. У ҳолда Δt вақт ичидаги s сиртнинг ҳар бир Δs элементи орқали $\Delta Q = \rho \vec{v} \vec{n} \Delta s \ \Delta t$ миқдорда суюқлик оқиб ўтади. Суюқликнинг умумий Q миқдори қуйидаги интеграл билан ифодаланади:

$$Q = \Delta t \iint_s \rho \vec{v}\, d\vec{s}. \tag{10.7}$$

Бунда $d\vec{s} = \vec{n}\, ds$ бўлиб, $\vec{n}$ — ташқи нормал бўйича йўналган бирлик вектордир. Иккинчи томондан t пайтда ω ҳажмдаги суюқлик миқдори бундай бўлади:

$$\iiint_\omega \rho\, d\omega.$$

Δt вақт ичида суюқлик миқдори, зичликнинг ўзгаришига биноан, қуйидаги миқдорга ўзгаради:

$$Q = \iiint_\omega \Delta \rho\, d\omega \approx \Delta t \iiint_\omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\omega. \tag{10.8}$$

ω ҳажмда манбалар йўқ деб фараз қилсак, (10.7) ва (10.8) ифодаларни тенглаш мумкин. Δt га қисқартириб, ушбуга эга бўламиз:

$$\iint_s \rho \vec{v}\, d\vec{s} = \iiint_\omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\omega. \tag{10.9}$$

Тенгликнинг чап қисмидаги сирт интегралини Остроградский формуласига кўра алмаштирсак, (10.9) тенглик бундай кўринишни олади:

$$\iiint_\omega \operatorname{div}(\rho \vec{v})\, d\omega = \iiint_\omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\omega$$

ёки

$$\iiint_\omega \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho \vec{v})\right) d\omega = 0.$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \tag{10.10}$$

бўлиб, $\operatorname{div}(\rho \vec{v})$ ни очиб ёзсак,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} - \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0 \tag{10.10'}$$

сиқиладиган суюқлик оқимининг узлуксизлик тенгламаси ҳосил бўлади. $\vec{v}$ ни қуйидагича қабул қиламиз:

$$\vec{v} = -\frac{k}{\rho}\operatorname{grad} p,$$

бунда p — босим, k — ўтказувчанлик коэффициенти, $\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx \lambda \frac{\partial p}{\partial t}$, $\lambda = \mathrm{const}$. Буни (10.10) узлуксизлик тенгламасига қўйсак,

$$-\lambda \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

ни ҳосил қиламиз. Агар k ўзгармас сон бўлса, тенглама

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{k}{\lambda}\Delta p \qquad (10.11)$$

кўринишни олади. Бу иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасига ўхшайди. (10.10) тенгламада суюқлик сиқилмаса, $\rho = \mathrm{const}$ ва $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ бўлиб, тенглама

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

кўринишни олади. Агар ҳаракат потенциал бўлса,

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi$$

бўлиб, (10.10) тенглама ушбу кўринишни олади:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$$

ёки

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \qquad (10.12)$$

яъни $\vec{v}$ тезликнинг φ потенциал функцияси Лаплас тенгламасини қаноатлантирар экан.

Кўпинча $\vec{v}$ тезликни $\vec{v} = -k_1 \operatorname{grad} p$ деб қабул қилиш мумкин, бунда p — босим, k_1 — ўзгармас сон. У ҳолда p босимга нисбатан Лаплас тенгламаси ҳосил бўлади:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \qquad (10.13)$$

(10.12) ёки (10.13) тенгламалар учун четки шартлар қуйидагича берилиши мумкин:

1. σ сиртда изланаётган p функциянинг қийматлари — босимлар берилади:

$$p\big|_{\sigma} = f(M).$$

Бу Дирихле масаласи.

2. σ сиртда $\frac{\partial p}{\partial n}$ — нормал бўйича ҳосила қийматлари берилади — оқим сирт орқали берилади:

$$\frac{\partial p}{\partial n}\bigg|_{\sigma} = g(M).$$

Бу Нейман масаласи.

3. σ сиртнинг бир қисмида p — босимлар, яна бир қисмида ҳосила $\frac{\partial p}{\partial n}$ берилади. Бу Дирихле — Нейман масаласи.

III. **Стационар электр токининг потенциали.** Бирор V ҳажмни тўлдирувчи бир жинсли муҳитдан ҳар бир нуқтасидаги зичлиги $\vec{I}(x, y, z)$ вектор бўлган электр токи ўтсин. Ток зичлиги вақтга боғлиқ эмас ва V ҳажмда ток манбалари йўқ деб фараз қиламиз. У вақтда $\vec{I}$ векторнинг оқими нолга тенг бўлади:

$$\oint\!\!\oint_S \vec{I}\, d\vec{S} = 0.$$

Остроградский формуласини қўллаб,

$$\oint\!\!\oint_S \vec{I}\, d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{I}\, dV = 0 \text{ дан } \operatorname{div} \vec{I} = 0 \qquad (10.14)$$

деган хулосага келамиз. Агар муҳитнинг ўтказувчанлигини λ деб, электр кучини $\vec{E}$ деб белгиласак, ток зичлиги умумлашган Ом қонунига кўра:

$$\vec{I} = \lambda \vec{E} \qquad (10.15)$$

бўлади. Жараён стационар бўлгани учун векторлар майдони $\vec{E}$ уюрмасиздир, яъни $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$, демак, векторлар майдони потенциал майдондир. Шундай скаляр функция мавжудки, ушбу тенглик ўринли бўлади:

$$\vec{E} = \operatorname{grad} \varphi. \qquad (10.16)$$

(10.15) га (10.16) ифодани қўямиз:

$$\vec{I} = \lambda \operatorname{grad} \varphi. \qquad (10.17)$$

(10.17) ни (10.14) га қўйиб,

$$\lambda \operatorname{div} (\operatorname{grad} \varphi) = 0$$

ёки

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \qquad (10.18)$$

Лаплас тенгламасини ҳосил қиламиз. Уни берилган четки шартларда ечиб, φ скаляр функцияни, сўнгра (10.16) дан $\vec{E}$ ни, (10.15) дан $\vec{I}$ ни топамиз.

11-§. Дирихле масаласини ҳалқа учун ечиш

$k_1: x^2+y^2 = R_1^2$ ва $k_2: x^2 + y^2 = R_2^2$ айланалар билан чегараланган D соҳада (ҳалқада) Лаплас тенгламасининг ушбу

$$u\Big|_{R_1} = u_1, \qquad (11.1)$$

$$u\Big|_{R_2} = u_2 \tag{11.2}$$

чегаравий шартлари берилгандаги ечимини топамиз, бунда u_1 ва u_2 — ўзгармас сонлар.

Лаплас тенгламасининг цилиндрик координаталарда ёзилган *(10. 2′) тенгламасидан z ва φ ларга боғлиқ бўлмаган* тенгламани ёзамиз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

Бу тенгламани интеграллаб, ушбуни топамиз:

$$u = c_1 \ln r + c_2. \tag{11.3}$$

(11.1) ва (11.2) чегаравий шартларда c_1 ва c_2 ларни топамиз:

$$\begin{cases} u_1 = c_1 \ln R_1 + c_2 \\ u_2 = c_1 \ln R_2 + c_2. \end{cases}$$

Системадан $c_1 = \dfrac{u_2 - u_1}{\ln \dfrac{R_2}{R_1}}$, $c_2 = \dfrac{u_1 \ln R_2 - u_2 \ln R_1}{\ln \dfrac{R_2}{R_1}}$ ларнинг қийматини (11.3) га қўйиб, масаланинг ечимини ҳосил қиламиз:

$$u = \frac{u_2 \ln \dfrac{r}{R_1} - u_1 \ln \dfrac{r}{R_2}}{\ln \dfrac{R_2}{R_1}}. \tag{11.4}$$

12-§. Дирихле масаласини доира учун ечиш

$x^2+y^2=R^2$ доира берилган бўлиб, унинг айланасида бирор $f(\varphi)$ функция берилган бўлсин (φ— қутб бурчаги).

Лаплас тенгламасини қутб координаталарида ((10.2′) да $z=0$ деб) ёзамиз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{12.1}$$

Функциянинг доира айланасидаги қиймати берилган:

$$u\Big|_{r=R} = f(\varphi). \tag{12.2}$$

Ечимни

$$u = \Phi(\varphi)\cdot R(r) \tag{12.3}$$

деб фараз қилиб, Фурье усулидан фойдаланамиз. Ҳосилалар олиб, (12.1) тенгламага қўямиз:

$$r^2 \Phi(\varphi) R''(r) + r\Phi(\varphi) R'(r) + \Phi''(\varphi) R(r) = 0.$$

Ўзгарувчиларни ажратамиз:

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -k^2. \tag{12.4}$$

Бундан иккита тенглама ҳосил бўлади:

$$\Phi''(\varphi) + k^2 \Phi(\varphi) = 0, \qquad (12.5)$$

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - k^2 R(r) = 0. \qquad (12.6)$$

Биринчи (12.5) тенгламанинг умумий ечими:

$$\Phi(\varphi) = A \cos k\varphi + B \sin k\varphi, \qquad (12.7)$$

иккинчи (12.6) тенгламанинг ечимини $R(r) = r^m$ кўринишда излаймиз. Бу ерда m ни топиш керак. r^m ни (12.6) тенгламага қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$r^2 m(m-1) r^{m-2} + rm r^{m-1} - k^2 r^m = 0$$

ёки

$$m^2 - k^2 = 0.$$

Бундан $m = \pm k$ экани кўринади. Хусусий ечимлар r^k ва r^{-k} бўлиб, умумий ечим:

$$R = Cr^k + Dr^{-k} \qquad (12.8)$$

бўлади. (12.7) ва (12.8) ларни (12.3) формулага қўйсак, ушбу ҳосил бўлади:

$$u_k = (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi)(C_k r^k + D_k r^{-k}). \qquad (12.9)$$

Биз доирада узлуксиз ва чекли ечимни излаймиз. $r = 0$ бўлганда (12.9) формулада $D_k = 0$ бўлиши керак. Агар $k = 0$ бўлса, (12.5), (12.6) тенгламалардан:

$$\Phi''(\varphi) = 0, \quad r R''(r) + R'(r) = 0.$$

Буларни интеграллаймиз ва $u_0 = (A_0 + B_0 \varphi)(C_0 + D_0 \ln r)$ ни ҳосил қиламиз, (12.9) билан $k = 0$ да солиштириб, $B_0 = 0$, $D_0 = 0$ эканини топамиз. У вақтда $u_0 = \frac{a_0}{2}$ бўлади. Бу ерда $\frac{a_0}{2} = A_0 C_0$ деб белгиладик. $k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ мусбат қийматлар билан чегараланамиз.

Ечимлар йиғиндиси яна ўз навбатида ечим бўлгани учун

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) r^n. \qquad (12.10)$$

Бу ерда $a_n = C_n \cdot A_n$, $b_n = C_n \cdot B_n$ деб белгилаш киритдик. Энди ихтиёрий a_n ва b_n ўзгармасларни четки (12.2) шартдан топамиз: $r = R$ да (12.10) дан

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) R^n. \qquad (12.11)$$

Бу тенгликдан

$$a_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt \qquad (12.1$$

коэффициентларни аниқлаб, (12.10) га қўямиз. Тригонометрик алмаштиришни бажариб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$u(r,\ \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(t-\varphi)\,dt\left(\frac{r}{R}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n(t-\varphi)\right]dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big[1 +$$

$$+ 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in(t-\varphi)} + e^{-in(t-\varphi)}}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^n\Big]dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big[1 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{re^{i(t-\varphi)}}{R}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\cdot e^{-i(t-\varphi)}\right)^n\Big]dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[1 + \frac{\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}}{1-\frac{r}{R}e^{i(t-\varphi)}} + \frac{\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}}{1-\frac{r}{R}e^{-i(t-\varphi)}}\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}{1-2\frac{r}{R}\cos(t-\varphi)+\left(\frac{r}{R}\right)^2}\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\varphi)+r^2}\,dt. \qquad (12.13)$$

Бу (12.13) формула *Пуассон интеграли* дейилади. Дирихленинг доира учун қўйилган масаласининг $u(r, \varphi)$ ечими Пуассон интегралига келди. Бу формула (12.1) тенгламани қаноатлантиради ҳамда $r \to R$ да $u(r, \varphi) \to f(\varphi)$, яъни ечим бўлади.

Уз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Иккинчи тартибли бир жинсли хусусий ҳосилали тенгламаларнинг турларини айтинг.
2. Бошланғич ва четки шартлар нима?
3. Даламбер усулини баён қилинг.
4. Фурье усулини тушунтириб беринг.
5. Тенглама учун Коши масаласини тушунтириб беринг.
6. Дирихле масаласини ифодаланг.
7. Нейман масаласи қандай қўйилади?
8. Тенгламани Фурье усули билан ечишда ечим қандай кўринишда бўлади?

14-боб

ЭҲТИМОЛЛИК НАЗАРИЯСИ ВА МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА

1-§. Ҳодисалар алгебраси

Эҳтимоллик назарияси асосида математиканинг бошқа бўлимларидаги каби бирор бошланғич тушунчалар ва таърифлар ётади. Унда ишлатиладиган асосий тушунчалардан бири ҳодисадир.

Эҳтимоллик назариясида ҳодиса деб синов (тажриба) натижасида, яъни маълум шартлар мажмуи амалга ошиши натижасида рўй бериши мумкин бўлган ҳар қандай фактни айтилади. Ҳодисаларни одатда A, B, C ва ҳ. к. ҳарфлари билан белгиланади.

Ҳодисаларга мисоллар:

1. Тўпдан бир марта ўқ отишда нишонга теккизиш (тажриба — ўқ отиш, ҳодиса — ўқнинг нишонга тегиши).

2. Тангани уч марта ташлашда икки марта герб тушиши (тажриба — тангани уч марта ташлаш, ҳодиса — икки марта герб тушиши).

3. Бирор физик катталикни ўлчашда берилган чегараларда ўлчаш хатолигининг пайдо бўлиши (тажриба — физик катталикни ўлчаш, ҳодиса — берилган чегараларда хатоликнинг юз бериши).

Берилган тажрибада рўй бериши мумкин бўлган барча ҳодисалар тўплами ҳодисалар майдони S дейилади. S га яна бу тажрибада муқаррар рўй берадиган U ҳодиса ва бу тажрибада рўй бериши мумкин бўлмаган V ҳодиса ҳам киритилади. Масалан, битта ўйин соққасини ташлашда U камида бир очко чиқиши, V етти очко чиқиши.

Агар A ҳодиса рўй берганида B ҳодиса муқаррар рўй берса, A ҳодиса B ҳодисани эргаштиради ёки A дан B келиб чиқади деб айтилади, бу факт бундай белгиланади:

$$A \subset B. \tag{1.1}$$

Тажриба 36 қартали дастадан битта қартани тортишдан иборат бўлсин. A ҳодиса «ғиштин» қарта, B ҳодиса эса қизил белгили қартанинг чиқишидан иборат бўлсин. У ҳолда равшанки, $A \subset B$.

Агар $A\subset B$ ва бир вақтда $B\subset A$ бўлса, у ҳолда A ва B ҳодисалар эквивалент ёки тенг кучли деб аталади. Бу факт бундай белгиланади:

$$A=B. \qquad (1.2)$$

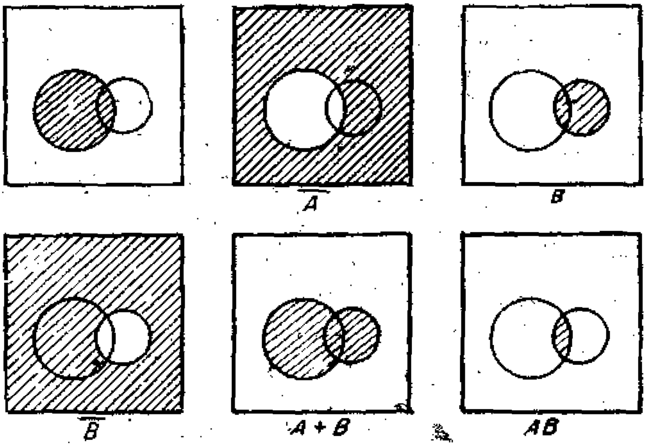
A ҳодисанинг рўй бермаслигидан иборат ҳодиса унга тескари ҳодиса *деб аталади ва* $\bar{A}$ *билан белгиланади. А билан* $\bar{A}$ ҳодисалар *қарама-қарши ҳодисалар* дейилади.

Қарама-қарши ҳодисаларга мисоллар: ўқ узишда нишонга теккизиш ва хато кетказиш, асбобнинг бирор вақт интервали ичида ишдан чиқиши ва шу вақт интервалида бузилмасдан ишлаши.

Ҳодисалар майдонида қўшиш ва айириш амаллари аниқланади. Иккита A ва B ҳодисадан камида биттасининг рўй беришидан иборат ҳодиса уларнинг *йиғиндиси* деб аталади ва $A+B$ билан белгиланади.

A ва B ҳодисаларнинг биргаликда рўй беришидан иборат ҳодиса уларнинг *кўпайтмаси* деб аталади ва AB билан белгиланади.

1-мисол. Тажриба дастадан битта қартани тортиш ҳодисасидан иборат. A ҳодиса «дама» қартасининг, B ҳодиса эса «чилдин» қартасининг чиқишидан иборат бўлсин. У ҳолда $C=A+B$ ҳодиса чиққан қарта «дама» ёки «чилдин» бўлишини, $E=AB$ эса чиққан қарта «чилдин дама» бўлишини билдиради.



125- шакл.

2-мисол (Вьенн диаграммаси). Тажриба квадрат (125-шакл) ичида таваккалига нуқта танлашдан иборат. A орқали «танланган нуқта чапдаги айлана ичида ётибди» ҳодисасини, B орқали эса «танланган нуқта ўнгдаги айлана ичида ётибди», ҳодисасини белгилаймиз. У ҳолда A, $\bar{A}$, B, $\bar{B}$, $A+B$ ва AB ҳодисалар танланган нуқтанинг тегишли шакллардаги штрихланган соҳаларга тушишини билдиради.

Ҳодисаларни қўшиш ва кўпайтириш амаллари қуйидаги хоссаларга эга:

1) $A+B=B+A$; $AB=BA$.
2) $(A+B)+C=A+(B+C)$; $(AB)C=A(BC)$.
3) $A(B+C)=AB+AC$;
4) $A+V=A$; $A\cdot U=A$.
5) $A+\bar{A}=U$; $A\bar{A}=V$.
6) $\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$; $\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$.

Шундай қилиб, ҳодисалар алгебрасида қўшиш ва айиришнинг одатдаги барча хоссалари бажарилади, шу билан бирга нол ролини V мумкин бўлмаган ҳодиса, бир ролини эса U муқаррар ҳодиса бажаради.

1-таъриф. S ҳодисалар майдонидаги A ва B ҳодисалар учун $AB=V$, яъни уларнинг бир вақтда рўй бериши мумкин бўлмаса, улар *биргаликдамас ҳодисалар* деб аталади.

Мисол. Тажриба ўйин соққасини ташлашдан иборат. A ҳодиса 4 очко чиқиши, B ҳодиса эса 3 га каррали очколар чиқиши бўлсин. Бу ҳодисаларнинг биргаликдамаслиги равшан.

2-таъриф. Агар $A_1+A_2+\ldots+A_n=U$, яъни бу тажрибада $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ҳодисалардан ҳеч бўлмаганда биттаси рўй берса, бу ҳодисалар *ҳодисаларнинг тўла гуруҳини ҳосил қилади* дейилади.

Ҳар иккитаси биргаликдамас ҳодисалар тўла гуруҳини, яъни $A_1+A_2+\ldots+A_n=U$, $A_iA_j=V(i\neq j)$ тенгликлар билан аниқланадиган ҳодисалар гуруҳини энг кўп текширишга тўғри келади.

2-§. Эҳтимолликнинг классик таърифи

Эҳтимоллик назариясида ҳодисалар гуруҳидаги ҳар бир A ҳодисага тайин $P(A)$ сон — бу ҳодиса рўй бериш имконининг объектив даражасини акс эттирадиган A ҳодиса эҳтимоллиги мос қўйилади. *Эҳтимолликлар S дан биргаликдамас* ва тенг имкониятли $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар тўла гуруҳини ажратиш мумкин бўлган ва классик схема деб аталадиган ҳолда энг оддий аниқланади. Тенг имкониятлилик шуни билдирадики, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисаларнинг ҳеч бири рўй беришда қолганларидан ҳеч бир объектив устунликка эга эмас (масалан, ўйин соққасининг симметрик ва бир жинслигидан 1, 2, 3, 4, 5, 6 очколардан исталганининг чиқиши тенг имкониятлилиги келиб чиқади). Айтилган $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар тажрибанинг элементар натижалари (ёки имкониятлари, ҳоллари) деб аталади.

Эҳтимолликнинг классик таърифи. A ҳодиса A_1, A_2,

…, A_n лардан бирор m таси амалга ошганида рўй берсин. У ҳолда

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{2.1}$$

сон A ҳодисанинг *эҳтимоллиги* деб аталади. Бошқача айтганда, A ҳодисанинг эҳтимоллиги тажрибанинг қулайлик берувчи натижалари сонини унинг барча натижалари сонига нисбатига тенг.

Бу ердан, хусусан, исталган A ҳодиса учун

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1 \tag{2.2}$$

бўлиши келиб чиқади ва, бундан ташқари,

$$P(U)=1;\ P(V)=0. \tag{2.3}$$

Бу хоссаларнинг исботини ўқувчига машқ сифатида тавсия қиламиз.

1-мисол. Иккита ўйин соққаси ташланади. Чиққан очколар сонининг 7 га тенг бўлиш эҳтимоллиги қанча?

Ечиш. Ўйин соққаси олтита турли усул билан тушиши мумкин. Уларнинг ҳар бири иккинчи соққа тушишидаги олтита усул билан комбинацияланади. Шундай қилиб, жами элементар натижалар сони $6\cdot 6=36$ га тенг. A ҳодисага (очколар сони 7 га тенг) қулайлик туғдирувчи элементар натижалар сонини санаймиз. Агар биринчи ва иккинчи соққаларда мос равишда 1 ва 6, 2 ва 5, 3 ва 4, 4 ва 3, 5 ва 2, 6 ва 1 очколар чиқса, очколар йиғиндиси 7 га тенг бўлади, яъни A ҳодисага қулайлик туғдирувчи жами 6 та натижа бор. Демак, изланаётган эҳтимоллик қуйидагига тенг: $P(A)=6/36=1/6$.

2-мисол. Танланма ҳақида масала. N та буюмдан иборат партияда M та стандарт буюм бор. Партиядан таваккалига n та буюм олинади. Бу n та буюм ичида роса m та стандарт буюм борлигининг эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Тажрибанинг мумкин бўлган элементар натижалари жами N та буюмдан n тасини олиш мумкин бўлган усуллар сонига, яъни N та элементдан n тадан гуруҳлашлар сони C_N^n га тенг. Таваккалига олинган n та буюм ичида m та стандарт буюм чиқиш ҳодисасини A орқали белгилаймиз. Стандарт буюмлар M та бўлганлиги учун m та стандарт буюмни олиш усуллари сони C_M^n га тенг. Қолган $n-m$ та буюм эса ностандарт бўлиши лозим: $n-m$ та ностандарт буюмни $N-M$ та ностандарт буюмлар ичидан эса C_{N-M}^{n-m} усул билан олиш мумкин. Демак, A ҳодисага қулайлик туғдирувчи натижалар сони $C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}$ га тенг. Шунинг учун изланаётган эҳтимоллик қуйидагига тенг:

$$P=\frac{C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \tag{2.4}$$

3- §. Геометрик эҳтимоллик

Эҳтимолликнинг классик таърифида элементар натижалар сони чекли деб фараз қилинади. Амалиётда эса кўпинча мумкин бўлган натижалари сони чексиз бўлган тажрибалар учрайди. Бундай ҳолларда классик таърифни қўлланиб бўлмайди. Бироқ бундай ҳолларда баъзан эҳтимолликни ҳисоблашнинг бошқача усулидан фойдаланиш мумкин бўлиб, бунда ҳам аввалгидек баъзи ҳодисаларнинг тенг имкониятлилик тушунчаси асосий аҳамиятга эга бўлиб қолаверади.

Эҳтимолликнинг геометрик таърифи деб аталадиган усулдан тасодифий нуқтанинг бирор соҳанинг исталган қисмига тушиш эҳтимоллиги бу соҳанинг ўлчовига (узунлигига, юзига, ҳажмига) пропорционал бўлиб, унинг шакли ва жойлашишига боғлиқ бўлмаган ҳолда фойдаланиш мумкин.

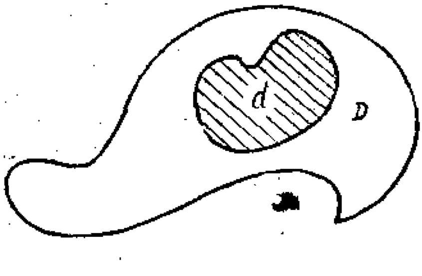
Аниқлик мақсадида икки ўлчовли ҳол билан чекланамиз. Текисликда юзи S_Dга тенг бирор D соҳа берилган бўлиб, унда юзи S_d га тенг d соҳа жойлашган бўлсин (126- шакл). D соҳага таваккалига нуқта ташланади. Бунда бу нуқтанинг D соҳанинг исталган қисмига тушиш эҳтимоллиги бу соҳанинг юзига тўғри пропорционал ва унинг шакли, жойлашишига эса боғлиқ эмас деб фараз қилинади. Бундай ҳолда бу нуқтанинг S_d соҳага тушиш эҳтимоллиги

$$P=\frac{S_d}{S_D} \tag{3.1}$$

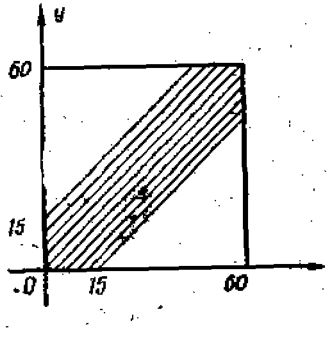
формула билан аниқланади.

1-мисол. Квадратга ички доира чизилган. Квадратга таваккалига ташланган нуқтанинг доира ичига тушиш эҳтимоллиги қанча?

Ечиш. r орқали доира радиуси узунлигини белгилаймиз. У ҳолда унинг юзи $S_д=\pi r^2$ га, квадратнинг юзи эса $S_{кв}=4r^2$ га тенг. Изланаётган эҳтимоллик эса $P=\pi/4$ га тенг.



126- шакл.



127- шакл.

2-мисол. Учрашув ҳақидаги масала. A ва B кишилар бирор жойда соат 12 билан соат 13 орасида учрашувга келишишди. Учрашув жойига келган киши шеригини 15 минут давомида кутади, кейин эса кетиб қолади. Агар кўрсатилган соат давомида улардан ҳар бирининг келиш пайтлари тасодифий ва боғлиқмас бўлса, яъни бирининг келиш пайти иккинчисининг келиш пайтига таъсир этмаса, бу кишиларнинг учрашиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. A кишининг келиш вақтини x орқали, B кишининг келиш вақтини эса y орқали белгилаймиз. Учрашув бўлиши учун

$$|y-x| \leqslant 15$$

бўлиши зарур ва кифоядир. x ва y ни текисликда декарт координаталари сифатида ифодалаймиз (127-шакл), масштаб бирлиги сифатида 1 минутни танлаймиз. Барча мумкин бўлган натижалар томони 60 га тенг квадратнинг нуқталари билан тасвирланди, учрашувга қулайлик туғдирувчи натижалар эса штрихланган соҳада жойлашади. Изланаётган эҳтимоллик эса штрихланган соҳа юзининг бутун квадрат юзига нисбатига тенг, яъни

$$P=\frac{60^2-2\cdot 0,5\cdot 45^2}{60^2}=0,4375.$$

4-§. Ҳодисанинг нисбий частотаси

n та бир хил тажрибалар кетма-кет ўтказилган бўлиб, уларнинг ҳар бирида A ҳодиса рўй берган ёки рўй бермаган бўлсин.

Таъриф. A ҳодисанинг берилган тажрибалар кетма-кетлигидаги *нисбий частотаси* деб A ҳодиса рўй берган тажрибалар сонининг ўтказилган барча тажрибалар сонига нисбати айтилади.

A ҳодисанинг нисбий частотасини $P^*(A)$ орқали белгиласак,

$$P^*(A)=\frac{m}{n} \tag{4.1}$$

бўлади, бу ерда m — шу A ҳодисанинг n та тажрибада рўй бериш сони, n — жами тажрибалар сони.

Мисол. Буюмлар сифатини назорат қилиш учун партиядан таваккалига 100 та буюм олинди, улар ичида 4 та буюм яроқсиз чиқди. Яроқсизлик нисбий частотасини топинг.

Ечиш. A орқали яроқсиз буюм чиқишидан иборат ҳодисани белгиласак, қуйидагига эга бўламиз: $m=4$, $n=100$ ва $P^*(A)=0{,}04$.

Нисбий частотанинг баъзи хоссаларини исботсиз келтириб ўтамиз:

1) Исталган ҳодисанинг нисбий частотаси бирдан ортиқ бўлмаган манфиймас сон, шу билан бирга $P^*(U)=1$, $P^*(V)=0$.

2) $P^*(A+B)=P^*(A)+P^*(B)$, бу ерда A ва B — биргаликдамас ҳодисалар.

Ҳодисанинг тажрибадан олдин аниқланадиган эҳтимоллигидан фарқли ўлароқ ҳодисанинг нисбий частотаси тажрибадан кейин топилади.

5-§. Эҳтимолликнинг статистик таърифи

Айтайлик, бирор тажриба чекланишсиз такрорланади ва ҳар бир тажрибадан сўнг қаралаётган ҳодисанинг нисбий частотаси барча ўтказилган тажрибалар серияси бўйича ҳисобланади. Бунда ушбу нарса пайқалади: бошида, ўтказилган тажрибалар бўлганида, ҳар бир тажрибанинг тасодифий натижаси ҳодиса нисбий частотасини сезиларли ўзгартиради. Бироқ тажрибалар сони ортиб бориши билан ҳар бир янги тажриба натижасининг таъсири камая боради. Масалан, мингинчи тажрибанинг натижаси нисбий частотани 0,001 дан камга ўзгартиради. Ҳодисанинг нисбий частотаси гўё тасодифий бўлмай қолади ва бирор сон атрофида турғунлашади. Ана шу сонни қаралаётган ҳодисанинг статистик эҳтимоллиги деб аталади.

Масалан, агар биз бир ёки бир неча оила ва ҳатто бирор қишлоқ аҳолисини ўрганиш билан чекланадиган бўлсак, янги туғилган чақалоқларнинг жинси бўйича тақсимоти ҳар қандай бўлиши мумкин. Аҳолиси кўп бўлган катта ҳудудни ўрганиладиган бўлса, иш бутунлай бошқача бўлади. Бунда қиз ва ўғил болалар туғилиши нисбий частотасининг турғунлиги тўлиқ намоён бўлади, шу билан бирга у турли ҳудудлар учун бир хил бўлиб чиқади.

Швед статистикаси маълумотлари бўйича 1935 йилда қиз болалар туғилиши нисбий частотаси ойлар бўйича ушбу жадвалда кўрсатилганидек тақсимланган.

Ой	Туғилган қиз болалар нисбий частотаси
Январ	0,486
Феврал	0,489
Март	0,490
Апрел	0,471
Май	0,482
Июн	0,478
Июл	0,462
Август	0,484
Сентябр	0,485
Октябр	0,491
Ноябр	0,482
Декабр	0,478
Йил бўйича	0,4826

Бу нисбий частоталар 0,482 сони атрофида тебраниб туради. Юқорида баён қилинганига асосан 0,482 сонини қиз болалар туғилиши статистик эҳтимоллиги деб ҳисоблаш мумкин.

6-§. Амалда мумкинмас ҳодисалар

Амалда мумкинмас ҳодиса деб, эҳтимоллиги нолга аниқ тенг бўлмаган, бироқ унга жуда яқин бўлган ҳодисага айтилади.

Амалда мумкинмас ҳодисалар эҳтимоллик назариясида катта аҳамиятга эга, бу фаннинг барча амалий татбиқлари аҳа шуларга асосланади, бунда амалий ишонч принципи деган қоидага амал қилиниб, уни бундай таърифлаш мумкин:

Агар *A* ҳодисанинг берилган тажрибада эҳтимоллиги жуда кичик бўлса, у ҳолда бу тажрибани бир марта ўтказилганида *A* ҳодиса рўй бермайди деб амалий ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Бошқача айтганда, агар *A* ҳодисанинг эҳтимоллиги берилган тажрибада жуда кичик бўлса, бу тажрибани ўтказишга киришаётганда гўё бу ҳодиса умуман мумкинмас деб, яъни унинг рўй беришига кўз тутмасдан иш олиб бораверишкерак.

Амалий ишонч принципи математика воситалари билан исботланиши мумкин эмас; у инсониятнинг бутун амалий тажрибаси билан тасдиқланади.

Ҳодисани амалда мумкинмас деб ҳисоблаш мумкин бўлиши учун унинг эҳтимоллиги қанчалик кичик бўлиши керак деган масалани ҳар бир алоҳида ҳолда тадқиқотчининг ўзи амалий мулоҳазалардан келиб чиқиб ҳал қилади.

Масалан, отишда портлатгичнинг ишламай қолиш эҳтимоллиги 0,01 бўлса, биз портлатгичнинг ишламай қолишини амалда мумкинмас ҳодиса деб ҳисоблашимиз мумкин. Бироқ сакрашда парашютнинг очилмай қолиш эҳтимоллиги ҳам 0,01 га тенг бўлса, биз уни амалда мумкинмас ҳодиса деб қарамаслигимиз лозим ва парашютни катта ишончли қилишга ҳаракат қилишимиз зарур.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Қандай ҳодисалар тасодифий, муқаррар ва мумкинмас ҳодисалар деб аталади? Бундай ҳодисаларга мисоллар келтиринг.
2. Ҳодисалар тўла гуруҳи таърифини айтиб беринг ва мисоллар келтиринг.
3. Ҳодисаларнинг биргаликдамаслик таърифини айтинг ва мисоллар келтиринг.
4. Қандай ҳодисалар эквивалент ҳодисалар деб аталади?
5. Ҳодисаларнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси деб нимага айтилади? Мисоллар келтиринг.
6. Вьенн диаграммасини ифодалайдиган мисолни баён қилинг.
7. Ҳодисаларни қўшиш ва кўпайтириш амалларининг асосий хоссаларини кўрсатинг.
8. Эҳтимолликнинг классик таърифини айтиб беринг. Унинг асосий хоссаларини ифодаланг.
9. Тенланма ҳақидаги масаланинг қўйилишини таърифланг ва бу масаланинг ечимини берадиган формулани ёзинг.
10. Геометрик эҳтимоллик таърифини айтиб беринг.
11. Учрашув ҳақидаги масалани баён қилинг ва унинг ечилиш усулини кўрсатинг.
12. Ҳодисанинг нисбий частотаси деб нимага айтилади? Мисол келтиринг.
13. Нисбий частотанинг хоссаларини кўрсатинг.
14. Статистик эҳтимоллик тушунчаси қандай киритилади?
15. Ҳодисаларнинг амалда мумкинмаслик принципи нимадан иборат? Мисол келтиринг.
16. *Амалий ишонч принципи нимадан иборат? Мисол келтиринг.*
17. 14.35—14.41, 14.66—14.159- масалаларни ечинг.

7-§. Биргаликдамас ҳодисалар учун эҳтимолликни қўшиш теоремаси

1-теорема. *Иккита биргаликдамас A ва B ҳодиса йиғиндисининг эҳтимоллиги бу ҳодисалар эҳтимолликлари йиғиндисига тенг, яъни*

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (7.1)$$

Бу теоремани синовлар схемаси учун исботлаймиз. Тажрибанинг мумкин бўлган натижалари n та синовда келтирилсин, биз уларни яққол бўлиши учун n та нуқта кўринишда тасвирлаймиз:

Бу n та ҳолдан m таси A ҳодисага, k таси B ҳодисага қулайлик туғдирсин. У ҳолда

$$P(A)=\frac{m}{n}, \quad P(B)=\frac{k}{n}.$$

A ва B ҳодисалар биргаликдамаслиги сабабли, бир вақтда A ҳодисага ҳам, B ҳодисага ҳам қулайлик туғдирувчи ҳоллар йўқ. Демак, $A+B$ ҳодисага $m+k$ та ҳол қулайлик туғдиради ва

$$P(A+B)=\frac{m+k}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=P(A)+P(B),$$

ана шуни исботлаш талаб этилган эди.

1-мисол. Агар қабул қилиш шартларига кўра 50 та буюмдан кўпи билан битта буюм яроқсиз бўлганда қабул қилиш мумкин бўлса, ичида 5 та яроқсизи бўлган 100 та буюмдан таваккалига ярми олиб текширилганда бу партиянинг ҳаммаси қабул қилиниш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. A орқали 50 та буюмни текширилганда битта ҳам яроқсиз буюм чиқмаганлиги ҳодисасини, B орқали эса фақат битта яроқсиз буюм чиққанлиги ҳодисасини белгилаймиз.

Қабул шартларига кўра, агар $A+B$ ҳодиса юз берса, буюмлар партияси қабул қилинади. A ва B ҳодисаларнинг биргаликдамаслигини ҳамда (2.4) формулани ҳисобга олсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P=P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}+\frac{C_5^1\cdot C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}}\approx 0{,}181.$$

Шундай қилиб, қабу[illegible] шартлари бўйича бу буюмлар партияси 0,181 эҳтимоллик билан қабул қилиниши мумкин.

Қўшиш теоремаси ихтиёрий сондаги биргаликдамас ҳодисалар бўлган ҳолга ҳам умумлаштирилиши мумкин.

2-теорема. *Агар $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисаларнинг ҳар иккитаси биргаликдамас бўлса, у ҳолда ушбу формула ўринли:*

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n). \qquad (7.2)$$

Исботи. Учта биргаликдамас A_1, A_2, A_3 ҳодисани қарайлик. 1-теоремага кўра

$$P(A_1+A_2+A_3)=P((A_1+A_2)+A_3)=P(A_1+A_2)+$$
$$+P(A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3).$$

Умумий ҳолда теорема математик индукция усули билан исботланиши мумкин.

1-натижа. Агар $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар ҳар иккитаси биргаликдамас ҳодисалар тўла гуруҳини ҳосил қилса, у ҳолда улар эҳтимолликлари йиғиндиси 1 га тенг:

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1. \qquad (7.3)$$

Исботи. Бир томондан, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар гуруҳи тўла бўлганлиги учун

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(U)=1.$$

Иккинчи томондан, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисаларнинг ҳар иккитаси биргаликдамаслиги сабабли

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Бу иккита формулани таққослаб,

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$$

ни ҳосил қиламиз, шуни исботлаш талаб қилинган эди.

2-натижа. Қарама-қарши ҳодисалар эҳтимолликлари йиғиндиси 1 га тенг :

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \qquad (7.4)$$

Бу натижа 1-натижанинг хусусий ҳоли, дарҳақиқат, A ва $\overline{A}$ ҳодисалар тўла гуруҳ ҳосил қилади ва биргаликдамас.

Эҳтимоллик назариясининг амалий татбиқларида 2-натижа муҳим аҳамиятга эга.

Амалиётда кўпинча A ҳодисанинг эҳтимоллигини ҳисоблашдан кўра $\overline{A}$ ҳодисанинг эҳтимоллигини ҳисоблаш осонроқ бўлади. Бу ҳолларда $P(\overline{A})$ ни ҳисобланади ва

$$P(A)=1-P(\overline{A}) \qquad (7.5)$$

ни топилади.

2-мисол. 7 та оқ ва 3 та қора шар солинган идишдан тасодифан... тавакалига 5 та шар олинади. Олинган шарлар ичида ҳеч бўлмаганда битта қора шар бўлиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. A орқали олинган 5 та шар ичида ҳеч бўлмаганда биттаси қора шар бўлиши ҳодисасини белгилаймиз. У ҳолда $\overline{A}$ ҳодиса олинган шарлар ичида битта ҳам қора шар йўқлигини билдиради. $P(\overline{A})$ ни топамиз. Мавжуд шарлар ичидан 5 та шарни C_{10}^5 та усул билан олиш мумкин. 7 та оқ шардан 5 та шарни C_7^5 та усул билан олиш мумкин. Шу сабабли

$$P(\overline{A}) = \frac{C_7^5}{C_{10}^5} = 0{,}083,$$

бундан $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}917.$

8-§. Биргаликда ҳодисалар учун эҳтимолликларни қўшиш теоремаси

Биргаликдамас ҳодисалар учун эҳтимолликларни қўшиш теоремасидан фойдаланиб, биргаликда ҳодисалар учун эҳтимолликларни қўшиш теоремасини исботлаймиз.

Теорема. *Иккита биргаликдаги ҳодисадан ҳеч бўлмаганда бирининг рўй бериш эҳтимоллиги бу ҳодисалар эҳтимолликлари йиғиндисидан уларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимоллигини айирилганига тенг:*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (8.1)$$

Исботи. A, B ва $A+B$ ҳодисаларни қуйидагича биргаликдамас ҳодисалар йиғиндиси кўринишида ифодалаймиз:

$$A = A(B+\overline{B}) = AB + A\overline{B}, \quad B = B(A+\overline{A}) = AB + \overline{A}B,$$

$$A + B = AB + \overline{A}B + A\overline{B}.$$

Биргаликдамас ҳодисалар учун эҳтимолликларни қўшиш теоремасига кўра

$$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}),$$

$$P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B),$$

$$P(A+B) = P(AB) + P(\overline{A}B) + P(A\overline{B}).$$

Бу учта тенгликдан (8.1) формулани осон ҳосил қиламиз:

$$P(A+B) = P(AB) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = P(AB) + P(\overline{A}B) +$$

$$+ P(\overline{A}B) + P(AB) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Теорема исбот қилинди.

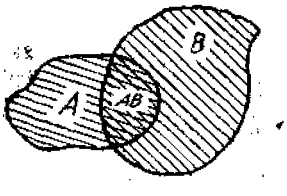
(8.1) формула содда геометрик талқинга эга (128-шакл).

Учта биргаликдамас ҳодиса йиғиндисининг эҳтимоллиги ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) +$$

$$+ P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) +$$

$$+ P(ABC).$$



128-шакл.

9- §. Эҳтимолликларни кўпайтириш теоремаси

Эҳтимолликларни кўпайтириш теоремасини баён этишдан аввал боғлиқмас ва боғлиқ ҳодисалар ҳақидаги ушбу муҳим тушунчани баён этамиз.

1-таъриф. Агар A ҳодисанинг эҳтимоллиги B ҳодисанинг рўй берган ёки рўй бермаганлигига боғлиқ бўлмаса, *A ҳодиса B ҳодисага боғлиқмас* дейилади.

2-таъриф. Агар A *ҳодисанинг эҳтимоллиги* B *ҳодисанинг* рўй берган ёки бермаганлигига боғлиқ равишда ўзгарса, *A ҳодиса B ҳодисага боғлиқ* дейилади.

1-мисол. Омборда 500 дона *лампа бўлиб*, улардан 100 таси бир заводда ва 400 таси бошқа заводда тайёрланган. Биринчи заводда тайёрланган лампаларнинг 80 фоизи маълум стандартни қаноатлантирсин, иккинчи завод маҳсулоти учун бу 60 фоиз бўлсин. A ҳодисанинг — омбордан тасодифий олинган битта лампанинг стандарт шартларини қаноатлантириш эҳтимоллигини топинг.

Стандарт лампалар жами сони биринчи заводда тайёрланган 80 та лампадан ва иккинчи заводда тайёрланган $400 \cdot 0{,}60 = 240$ та лампадан иборат, яъни 320 га тенг, демак, $P(A) = 320 : 500 = 0{,}64$.

Ҳисоблашда олинган лампа қайси завод маҳсулоти эканлиги ҳақидаги ҳеч қандай тахмин қилинмади. Агар бу хилдаги тахмин қилинса, у ҳолда бизни қизиқтираётган эҳтимоллик ўзгаради. Масалан, олинган лампа биринчи заводда тайёрланган (B ҳодиса) деб фараз қилайлик. Бу ҳолда унинг стандарт бўлиш эҳтимоллиги энди 0,64 эмас, балки 0,80 бўлади. Бундан A ҳодиса B ҳодисага боғлиқ деб хулоса чиқарамиз.

3-таъриф. A ҳодисанинг B ҳодиса рўй берди деган шартда ҳисобланган эҳтимоллиги *A ҳодисанинг B ҳодиса рўй бериш шартидаги шартли эҳтимоллиги* деб аталади ва $P(A/B)$ билан белгиланади.

Олдинги мисолда $P(A) = 0{,}64$, $P(A/B) = 0{,}80$.

A ҳодисанинг B ҳодисага боғлиқмаслик шартини ушбу

$$P(A/B) = P(A) \tag{9.1}$$

формула орқали, боғлиқлик шартини эса

$$P(A/B) \neq P(A) \tag{9.2}$$

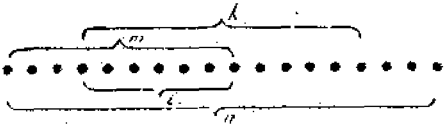
формула орқали ёзиш мумкин.

Кўпайтириш теоремаси. *A ва B ҳодисалар кўпайтмасининг эҳтимоллиги бу ҳодисалардан бирининг эҳтимоллигини иккинчи ҳодисанинг биринчи ҳодиса рўй берди деган шартда шартли эҳтимоллигига кўпайтмасига тенг:*

$$P(AB) = P(A)P(B/A). \tag{9.3}$$

Исботи. Теоремани классик схема учун исбот қиламиз.

Биз уларни кўргазмали бўлиши учун нуқталар кўринишида тасвирлаймиз.



A ҳодисага m та ҳол, B ҳодисага эса k та ҳол қулайлик туғдирсин. Бу A ва B ҳодисалар биргаликда деб фараз қилайлик, демак, умуман айтганда, A ҳодисага ҳам, B ҳодисага ҳам қулайлик туғдирадиган ҳоллар бор. Бундай ҳоллар сони l та бўлсин. У ҳолда

$$P(AB)=\frac{l}{n}, \quad P(A)=\frac{m}{n}.$$

$P(B/A)$ ни, яъни B ҳодисанинг A ҳодиса рўй берди деган шартдаги шартли эҳтимоллигини ҳисоблаймиз.

Агар A ҳодиса рўй берган бўлса, у ҳолда илгариги мумкин бўлган n та ҳолдан A ҳодисага қулайлик туғдирадиган фақат m та ҳол қолади. Улардан l та ҳол B ҳодисага қулайлик туғдиради. Демак,

$$P(B/A)=\frac{l}{m}.$$

Энди теореманинг исботини якунлаймиз:

$$P(AB)=\frac{l}{n}=\frac{m}{n}\cdot\frac{l}{m}=P(A)P(B/A).$$

Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Изоҳ. $AB=BA$ эканини ҳисобга олсак, (9.3) формулани бундай кўринишда ёзиш ҳам мумкин:

$$P(AB)=P(B)P(A/B). \tag{9.4}$$

Кўпайтириш теоремасидан келиб чиқадиган натижаларни келтирамиз.

1-натижа. Агар A ҳодиса B ҳодисага боғлиқ бўлмаса, у ҳолда B ҳодиса ҳам A ҳодисага боғлиқ бўлмайди.

Исботи. (9.3) ва (9.4) формулаларни таққослаб,

$$P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)$$

ни ҳосил қиламиз.

$P(A/B)=P(A)$ эканини ҳисобга олсак, бу ердан

$$P(A)P(B/A)=P(B)\,P(A)$$

ни ҳосил қиламиз. Бу тенгликдан $P(A)\neq 0$ деб фараз қилиб,

$$P(B/A)=P(B)$$

ни ҳосил қиламиз, бу эса B ҳодиса A ҳодисага боғлиқ эмаслигини билдиради.

Бу натижадан ҳодисаларнинг биргаликда ва биргаликдамаслиги ўзаро эквивалент эканлиги келиб чиқади. Шу муносабат билан бундай таърифни киритамиз.

4-таъриф. Агар иккита ҳодисадан бирининг рўй бериши иккинчисининг рўй бериш эҳтимоллигини ўзгартирмаса, бу ҳодисалар *боғлиқмас* деб аталади.

2-натижа. Иккита боғлиқмас ҳодиса кўпайтмасининг рўй бериш эҳтимоллиги бу ҳодисалар эҳтимолликларининг кўпайтмасига тенг:

$$P(AB)=P(A)P(B). \tag{9.5}$$

Исботи. $P(AB)=P(A)P(B/A)=P(A)P(B)$, шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Агар A ва B ҳодисалар боғлиқмас бўлса, у ҳолда эҳтимолликларни қўшиш умумий қоидаси (8- § даги (8.1) формула) A ва B ҳодисаларнинг йиғиндиси эҳтимоллигини бевосита A ва B ҳодисаларнинг эҳтимолликлари орқали топиш имконини беради:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B). \tag{9.6}$$

2-мисол. Иккита мерган бир-бирига боғлиқмас равишда битта нишонга қарата ўқ узишмоқда. Нишонга теккизиш эҳтимоллиги биринчи мерган учун $P(A_1)=0{,}9$, иккинчи мерган учун $P(A_2)=0{,}8$. Агар нишоннинг яксон қилиниши учун битта ўқнинг тегиши кифоя қилса, нишоннинг яксон қилиниш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. A_1 ва A_2 ҳодисалар (нишонни биринчи ва иккинчи мерган уриши) боғлиқмас, шунинг учун изланаётган эҳтимолликни ҳисоблашда (9.6) формулани қўллаймиз:

$$P(A_1+A_2)=0{,}9+0{,}8-0{,}9\cdot 0{,}8=0{,}98.$$

Эҳтимолликларни кўпайтириш теоремаси исталган сондаги эҳтимолликлар учун умумлаштирилиши мумкин, чунончи ушбу теорема ўринли.

1-теорема. Қуйидаги формула ўринли

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1\cdot A_2\ldots$$
$$\ldots P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}). \tag{9.7}$$

Теореманинг исботи математик индукция усули билан бажарилади.

3-мисол. 100 та деталдан иборат гуруҳ танланма назорат қилинмоқда. Бутун гуруҳнинг яроқсизлик шарти текширилаётган бешта деталдан ҳеч бўлмаганда биттасининг яроқсиз бўлишидир. Агар гуруҳда 5% яроқсиз детал бор бўлса, бу гуруҳнинг қабул қилинмаслик эҳтимоллиги қанча?

Ечиш. Деталлар гуруҳи қабул қилинишидан иборат қарама-қарши A ҳодисанинг эҳтимоллигини топамиз. Бу ҳодиса бешта ҳодисанинг кўпайтмаси бўлади: $A=A_1A_2A_3A_4A_5$, бу ерда A_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) текширилган k-детал сифатли эканлигини билдиради.

Сўнгра $P(A_1)=95/100$ га эгамиз, чунки барча деталлар 100 та, яроқлилари эса 95 та, A_1 ҳодиса рўй берганидан сўнг 99 та детал қолади, улар орасида 94 таси яроқли, шунинг учун $P(A_2/A_1)=94/99$. Шунга ўхшаш, қуйидагиларни топамиз: $P(A_3/A_1A_2)=93/98$, $P(A_4/A_1A_2A_3)=92/97$ ва $P(A_5/A_1A_2A_3A_4)=$ $=91/96$. (9.7) формуладан $P(A)=\frac{95}{100}\cdot\frac{94}{99}\cdot\frac{93}{98}\cdot\frac{92}{97}\cdot\frac{91}{96}=0,77.$

Изланаётган эҳтимоллик: $p=P(\bar{A})=1-P(A)=0,23$. Энди ушбу таърифни киритамиз:

5-таъриф. Бир неча ҳодисалардан исталган бири қолганларининг исталган тўпламининг кўпайтмасига боғлиқ бўлмаса, бу ҳодисалар *биргаликда боғлиқмас* деб аталади.

Бу таърифга асосан (9.7) формуладан ушбу теоремани ҳосил қиламиз:

2-теорема. *Агар A_1, A_2, ..., A_n ҳодисалар биргаликда боғлиқмас бўлса, у ҳолда бу ҳодисалар кўпайтмасининг эҳтимоллиги улар эҳтимолликларининг кўпайтмасига тенг:*

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n). \tag{9.8}$$

Хусусий ҳолда, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар бир хил p эҳтимолликка эга бўлганда (9.8) формула қуйидагини беради:

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=p^n. \tag{9.9}$$

10-§. Ҳеч бўлмаганда битта ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги

Бу эҳтимолликни биз аслида (8.2) формула орқали ҳисоблашимиз мумкин. Бироқ ҳодисалар сони ҳали унча катта бўлмагандаёқ, бу формуладан фойдаланиш катта ҳисоблаш ишлари билан боғлиқ. Шу сабабли бу эҳтимолликни ҳисоблаш учун бошқа формуладан фойдаланилади.

Теорема. *Биргаликда боғлиқмас бўлган A_1, A_2, ..., A_n ҳодисаларнинг ҳеч бўлмаганда биттасининг рўй беришидан иборат A ҳодисанинг эҳтимоллиги*

$$P(A)=P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-q_1q_2\ldots q_n \tag{10.1}$$

га тенг, бунда $q_i=P(\bar{A}_i)$

Исботи. $A=A_1+A_2+\ldots+A_n$ бўлганлиги учун $\bar{A}=\bar{A}_1\bar{A}_2\ldots\bar{A}_n$. (7.5) ва (9.8) формулалардан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз: $P(A)=1-P(\bar{A})=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\ldots\bar{A}_n)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\ldots P(\bar{A}_n)=$ $=1-q_1q_2\ldots q_n$. Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Хусусан, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ҳодисалар p га тенг бир хил эҳтимолликка эга бўлса, у ҳолда улардан ҳеч бўлмаганда биттасининг рў бериш эҳтимоллиги

$$P(A) = 1 - q^n \quad (q = 1 - p) \qquad (10.2)$$

га тенг.

1-мисол. Учта тўпдан отишда нишонга текизиш эҳтимоллиги мос равишда $p_1=0,4$, $p_2=0,6$, $p_3=0,7$, нишон яксон қилиниши учун битта ўқнинг тегиши кифоя қилса, учала тўпдан бир йўла отишда нишоннинг яксон қилиниш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. A_1, A_2 ва A_3 ҳодисалар нишонни мос равишда биринчи, иккинчи ва учинчи тўплардан уришни билдирсин. Бу ҳодисалар биргаликда боғлиқмаслиги равшан (ҳар бир тўпдан нишонга теккизиш эҳтимоллиги бошқа тўплардан отиш натижаларига боғлиқмас). Сўнгра $q_1=1-p_1=0,6$, $q_2=1-p_2=0,4$, $q_3=1-p_3=0,3$. Изланаётган эҳтимолликни (10.1) формуладан топамиз:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0,6\cdot 0,4\cdot 0,3 = 0,928.$$

2-мисол. Системада муҳим қурилма бўлиб, у n та элементдан иборат ва уларнинг ҳар бирининг бузилмасдан ишлаш эҳтимоллиги (ишончлилиги) p га тенг. Агар бу элементлардан ҳеч бўлмаганда биттаси ишласа, қурилма ишлайди. Бу қурилманинг ишончлилиги берилган P дан ортиқ бўлиши учун у нечта элементга эга бўлиши керак?

Ечиш. Бу қурилманинг фақат барча элементлари ишдан чиққанидагина унинг бузилиши рўй беради. Элементларнинг ишдан чиқишини боғлиқмас ҳодисалар деб, n та элементнинг ҳаммасини ишдан чиқиш эҳтимоллигини топамиз: у $(1-p)^n$ га тенг. Шунинг учун қурилманинг бузилмасдан ишлаш эҳтимоллиги $1-(1-p)^n$ га тенг. Энди масала $1-(1-p)^n > P$ тенгсизликни қаноатлантирадиган n сонни топишдан иборат, бу тенгсизлик

$$n > \frac{\lg(1-P)}{\lg(1-p)}$$

га тенг кучли. Масалан, элементнинг ишончлилиги $p=0,8$ га, система қурилмасининг талаб қилинаётган ишончлилиги эса $P=0,99$ га тенг бўлса, у ҳолда

$$n > \frac{\lg 0.01}{\lg 0,2} = \frac{-2}{-0,699}, \text{ яъни } n \geqslant 3.$$

Шундай қилиб, бу шартларда система учта элементга эга бўлиши кифоя.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Биргаликдамас ҳодисалар учун эҳтимолликларни қўшиш теоремасини таърифлаб беринг.
2. Биргаликдамас ҳодисалар учун эҳтимолликларни қўшиш теоремасининг асосий натижаларини айтиб беринг.

3. Биргаликда ҳодисалар учун эҳтимолликларни қўшиш теоремасини таърифлаб беринг.

4. Ҳодисанинг шартли эҳтимоллиги деб нимага айтилади?

5. Иккита ҳодисанинг боғлиқмаслиги таърифини айтиб беринг. Қандай ҳодисалар биргаликда боғлиқмас деб аталади?

6. Эҳтимолликларни кўпайтириш теоремасини айтиб беринг.

7. Кўпайтириш теоремасининг натижасини айтинг ва мисол келтиринг.

8. Ҳеч бўлмаганда битта ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллигини ҳисоблаш ҳақидаги теоремани айтиб беринг. Мисол келтиринг.

9. 14.160—14.224- масалаларни ечинг.

11- §. Тўла эҳтимоллик формуласи

Бирор A ҳодиса биргаликдамас ҳодисаларнинг тўла гуруҳини ҳосил қиладиган H_1, H_2, $\ldots$, H_n ҳодисаларнинг (улар гипотезалар деб аталади) бири билан рўй бериши мумкин бўлсин. Бу гипотезаларнинг эҳтимолликлари маълум, яъни $P(H_1)$, $P(H_2)$, $\ldots$, $P(H_n)$ берилган. *Бу гипотезаларнинг ҳар бири амалга ошганида* A ҳодисанинг рўй бериш шартли эҳтимолликлари ҳам маълум, яъни $P(A/H_1)$, $P(A/H_2)$, $\ldots$, $P(A/H_n)$ эҳтимолликлар берилган. A ҳодисанинг эҳтимоллигини ҳисоблаш талаб қилинади.

Бу ҳолда ушбу формула ўринли бўлишини исботлаймиз:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n). \quad (11.1)$$

Исботи. H_1, H_2, $\ldots$, H_n гипотезалар тўла гуруҳ бўлганлиги учун $A = AU = A(H_1 + H_2 + \ldots + H_n) = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n$. H_1, H_2, $\ldots$, H_n гипотезалар биргаликдамас, шунинг учун AH_1, AH_2, $\ldots$, AH_n ҳодисалар ҳам биргаликдамас. Буларга қўшиш теоремаси, кейин кўпайтириш теоремасини қўллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(AH_n) =$$
$$= P(H_1)P(A/H_1) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n),$$

ана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Мисол. Имтиҳон билетлари ичида талаба билмайдиганлари ҳам бор. Қайси ҳолда талаба учун у биладиган билетни олиши эҳтимоллиги катта бўлади: у билетни биринчи бўлиб олгандами ёки иккинчи бўлиб олгандами?

Ечиш. n — барча билетлар сони ва k — талаба биладиган билетлар сони бўлсин. A орқали талаба ўзи биладиган билетни олиш ҳодисасини белгилаймиз. Агар талаба билетни биринчи бўлиб оладиган бўлса, у ҳолда бизни қизиқтираётган эҳтимоллик $P(A) = k/n$ га тенг.

Агар «бизнинг» талабамиз билетни иккинчи бўлиб оладиган бўлса, биз бу ерда табиий ушбу иккита гипотезани қўямиз:

H_1 — биринчи талаба «бизнинг» талаба биладиган билетни олди.

H_2 — биринчи талаба «бизнинг» талаба билмайдиган билетни олди.

Бу гипотезаларнинг эҳтимолликларини топамиз:

$$P(H_1) = \frac{k}{n}, \quad P(H_2) = \frac{n-k}{n}.$$

A ҳодисанинг H_1 ва H_2 гипотезалардаги шартли эҳтимолликлари

$$P(A/H_1) = \frac{k-1}{n-1}, \quad P(A/H_2) = \frac{k}{n-1}$$

га тенг. (11.1) формулага кўра A ҳодисанинг тўла эҳтимоллигини топамиз:

$$P(A) = \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} + \frac{n-k}{n} \cdot \frac{k}{n-1} = \frac{k}{n}.$$

Шундай қилиб, бизни қизиқтираётган эҳтимоллик иккала ҳолда ҳам бир хил экан.

12-§. Гипотезалар теоремаси (Бейес формулалари)

Масаланинг қўйилиши. Биргаликдамас $H_1, H_2, \ldots, H_n$ гипотезалар тўла гуруҳи берилган. Бу гипотезаларнинг ҳар бирининг эҳтимоллиги $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$ маълум. Тажриба ўтказилади ва унинг натижасида A ҳодиса рўй беради, бу ҳодисанинг ҳар бир гипотеза бўйича эҳтимоллиги, яъни $P(A/H_1), P(A/H_2), \ldots, P(A/H_n)$ маълум. A ҳодиса рўй бериши муносабати билан гипотезаларнинг эҳтимолликларини қайта баҳолаш, бошқача айтганда, $P(H_1/A), P(H_2/A), \ldots, P(H_n/A)$ шартли эҳтимолликларни топиш талаб қилинади.

Бу қўйилган масалага ушбу гипотезалар теоремаси жавоб беради.

Гипотезалар теоремаси. *Масала шартларидаги синовдан кейинги гипотезалар эҳтимолликлари ушбу формулалар бўйича ҳисобланади:*

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A/H_k)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{12.1}$$

Исботи. Кўпайтириш теоремасидан:

$$P(AH_i) = P(A)P(H_i/A) \text{ ва } P(AH_i) = P(H_i)P(A/H_i).$$

Бу формулаларни таққослаб,

$$P(A)P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i)$$

ни ҳосил қиламиз, бундан

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}.$$

$P(A)$ ни (11.1) тўла эҳтимоллик формуласи ёрдамида ифодалаб, исботланаётган формулани ҳосил қиламиз:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)\,P(A/H_k)} \quad (i=1,2,\ \ldots,n).$$

Хусусан, тажриба ўтказилишидан олдин барча гипотезалар тенг эҳтимоллик, яъни $P(H_1)=P(H_2)=\ldots=P(H_n)$ бўлса, у ҳолда (12.1) формула ушбу кўринишни олади:

$$P(H_i/A)=\frac{P(A/H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(A/H_k)}.$$

Мисол. **Телевизорга ўрнатилган лампа иккита партиядан бирига $p_1=0,4$ ва $p_2=0,6$ эҳтимоллик билан тегишли бўлсин. Лампанинг t соат давомида ишлаш вақти бу партиялар учун мос равишда 0,9 ва 0,7 га тенг. Телевизорга ўрнатилган лампа t соат бузилмасдан ишлаган бўлса, унинг биринчи партияга тегишли бўлиш эҳтимоллигини топинг.**

Ечиш. Иккита гипотезани қараймиз:

H_1 — лампа биринчи партияга тегишли;

H_2 — лампа иккинчи партияга тегишли.

Тажрибадан олдин бу гипотезаларнинг эҳтимолликлари:

$$P(H_1)=0,4;\ P(H_2)=0,6.$$

Тажриба натижасида A ҳодиса рўй берган — лампа t соат бузилмасдан ишлаган. A ҳодисанинг H_1 ва H_2 гипотезалардаги шартли эҳтимолликлари қуйидагига тенг:

$$P(A/H_1)=0,9;\quad P(A/H_2)=0,7.$$

(12.1) формуладан H_1 гипотезанинг тажрибадан кейинги эҳтимоллигини топамиз:

$$P(H_1/A)=\frac{0,4\cdot 0,9}{0,4\cdot 0,9+0,6\cdot 0,7}=0,462.$$

13-§. Боғлиқмас синовлар кетма-кетлиги. Бернулли формуласи

Таъриф. Такрорланадиган синовлардан ҳар бирининг у ёки бу натижасининг эҳтимоллиги бошқа синовларда қандай натижалар бўлганлигига боғлиқ бўлмаса, улар *боғлиқмас синовлар кетма-кетлигини ҳосил қилади* дейилади.

Мисол. Уйин соққасини ташлашдан иборат тажриба ўтказилмоқда. Ҳар бир ташлашда у ёки бу сонда очколар чиқиш эҳтимоллиги бошқа ташлашларда қандай очко чиққанлигига боғлиқмаслиги равшан, бинобарин биз бу ерда боғлиқмас синовлар кетма-кетлигига эгамиз.

Энди қуйидагича қўйилган масалани қарайлик: бир хил ша-

роитда ўтказиладиган n та боғлиқмас синовнинг ҳар бирида A ҳодиса $P(A)=p$ эҳтимоллик билан рўй берса, унинг бу n та синовда роса m марта рўй бериш эҳтимоллигини топинг.

Изланаётган эҳтимолликни $P_n(m)$ билан белгилаймиз. Масалан, $P_3(2)$ — боғлиқмас 3 та синовда A ҳодиса роса 2 марта рўй бериш эҳтимоллигидир. Бу эҳтимолликни бевосита ҳисоблаш мумкин:

$$P_3(2)=P(AA\bar{A}+A\bar{A}A+A\bar{A}A=P(AA\bar{A})+P(A\bar{A}A)+P(\bar{A}AA)=3p^2q.$$

Умумий ҳолда $P_n(m)$ эхтимоллик Бернулли формуласи деб аталадиган ушбу формула билан ҳисобланади:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (13.1)$$

бу ерда $q=1-p$. Бу формулани исботлаймиз.

n та боғлиқмас синовда A ҳодисанинг роса m марта маълум тартибда, масалан,

$$\underbrace{AA\ldots A}_{m}\underbrace{\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}}_{n-m}$$

комбинацияда рўй бериш эҳтимоллиги боғлиқмас ҳодисаларни кўпайтириш теоремасига кўра $p^m q^{n-m}$ га тенг. Равшанки, A ҳодисанинг яна m марта, бироқ бошқача тартибда рўй бериш эҳтимоллиги яна шундай бўлади. A ҳодиса m марта турли тартибда учрайдиган бунга ўхшаш комбинациялар сони гуруҳлашлар сони C_n^m га тенг. Бизни қизиқтираётган B ҳодиса — A ҳодисанинг n та боғлиқмас синовда роса m марта рўй бериши ажраладиган бу комбинацияларнинг ҳаммаси биргаликдамас ҳодисалардир. Шунинг учун биргаликдамас ҳодисаларни қўшиш теоремасига кўра

$$P_n(m)=P(B)=C_n^m p^m q^{n-m},$$

ана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Хусусан, $P_n(n)=p^n$ ва $P_n(0)=q^n$, буларни боғлиқмас ҳодисаларни кўпайтириш теоремасига кўра ҳам бевосита ҳосил қилиш мумкин эди.

1-мисол. Ҳар бир деталнинг стандарт бўлиш эҳтимоллиги $p=0{,}8$ бўлса, таваккалига олинган 5 та деталдан роса 2 тасининг стандарт бўлиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Изланаётган эҳтимолликни $n=5$, $m=2$, $p=0{,}8$ ва $q=0{,}2$ **да Бернулли формуласидан топамиз:**

$$P_6(2)=C_5^2\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2^3=\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 0{,}00512=0{,}0512.$$

2-мисол. Автобаза нормал ишлаши учун йўлда камида 8 та автомашина юриши керак. Базада 10 та машина бор. Ҳар бир автомашинанинг йўлга чиқмаслик эҳтимоллиги 0,1 га тенг. Автобазанинг эртага нормал ишлаш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Агар йўлга 8 та машина (A ҳодиса), ёки тўққизта машина (B ҳодиса), ёки 10 та машина (C ҳодиса) чиқса, авто-

база нормал ишлайди (E ҳодиса). Эҳтимолликларни қўшиш теоремасига кўра $P(E)=P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)$. Ҳар бир қўшилувчини Бернулли формуласи бўйича топиб, натижада қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$P(E)=C_{10}^{8}\cdot 0{,}9^{8}\cdot 0{,}1^{2}+C_{10}^{9}\cdot 0{,}9^{9}\cdot 0{,}1+0{,}9^{10}=$$

$$=0{,}1937+0{,}3874+0{,}3487=0{,}9298.$$

3-мисол. Бирор корхонада битта деталнинг нуқсонли бўлиш эҳтимоллиги 0,005 га тенг. 10 000 та деталдан иборат партияда: а) роса 40 та нуқсонли детал; б) кўпи билан 70 та нуқсонли детал бўлиш эҳтимоллиги қанча?

Биринчи саволга бевосита $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$ формула орқали жавоб берилади ва бунда $p=0{,}005$, $q=0{,}995$, $n=10\,000$, $m=$ $=40$ деб олинади; демак, изланаётган эҳтимоллик

$$P_n(m)=\tilde{P}_{10\,000}(40)=\frac{10\,000!}{40!\cdot 9960!}\cdot(0{,}005)^{40}\cdot(0{,}0995)^{9960}.$$

Иккинчи саволга жавоб бериш учун эҳтимолликларни қўшиш теоремасидан фойдаланамиз. Изланаётган эҳтимоллик ушбу йиғинди билан ифодаланади:

$$P(0\leqslant m\leqslant 70)=P(m=0)+P(m=1)+\ldots+P(m=70)=$$

$$=\sum_{m=0}^{70}P_{10\,000}(m)=\sum_{m=0}^{70}C_{10\,000}^{m}(0{,}005)^{m}\cdot(0{,}995)^{10\,000-m}.$$

Шундай қилиб, биз иккала саволга ҳам жавобни олдик. Бироқ бу ерда талаб қилинадиган ҳисоблашларни амалда бажариш жуда қийин. Бу ва бунга ўхшаш масалалар Муавр — Лапласнинг локал ва интеграл теоремаларида бериладиган формулалар ёрдамида ечилади.

14-§. Муавр — Лапласнинг лимит теоремалари

Муавр—Лапласнинг локал теоремаси. *Агар A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги ҳар бир синовда ўзгармас ва $p(0<p<1)$ га тенг бўлса, у ҳолда етарлича катта n лар учун*

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),\tag{14.1}$$

бу ерда

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^{2}/2},\quad x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

Муавр—Лапласнинг интеграл теоремаси. *Агар A ҳодисанинг n та боғлиқмас синовда рўй бериш эҳтимоллиги ўзгармас ва $p(0<p<1)$ га тенг бўлса, у ҳолда етарлича катта n ларда A ҳодисанинг m_1 тадан m_2 тагача рўй бериш эҳтимоллиги $P(m_1\leqslant m\leqslant m_2)$ тақрибан*

$$P(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \qquad (14.2)$$

га тенг, бу ерда

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt, \ x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \ x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Бу иккала теоремани исботсиз қабул қиламиз.

1-изоҳ. Синовлар сони қанчалик катта бўлса, (14.1) ва (14.2) формулалар шунчалик яхшироқ яқинлашишлар беради.

2-изоҳ. $\varphi(x)$ ва $\Phi(x)$ функциялар учун жадваллар бор, лекин улар фақат аргументнинг мусбат қийматлари учун тузилган, чунки $\varphi(x)$ жуфт, $\Phi(x)$ эса тоқ функциядир.

Мисол. (14.1) ва (14.2) формулалардан фойдаланиб, олдинги параграф 3-мисолидаги эҳтимолликни ҳисобланг.

Ечиш. Масаланинг биринчи қисми учун: $p = 0{,}005$, $q = 0{,}995$, $n = 10\,000$, $m = 40$ га эгамиз. Шу сабабли

$$\sqrt{npq} = \sqrt{10\,000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995} = 7{,}05; \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} =$$

$$= \frac{40 - 10\,000 \cdot 0{,}005}{7{,}05} = -1{,}42;$$

$$\varphi(-1{,}42) = \varphi(1{,}42) = 0{,}1456.$$

Шундай қилиб,

$$P_{10000}(40) = \frac{0{,}1456}{7{,}05} = 0{,}0206.$$

Масаланинг иккинчи қисми учун $p = 0{,}005$, $q = 0{,}995$, $n = 10\,000$, $m_1 = 0$, $m_2 = 70$ га эгамиз. Шунинг учун

$$\sqrt{npq} = 7{,}05; \ x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 10\,000 \cdot 0{,}005}{7{,}05} =$$

$$= -7{,}09; \ x_2 = \frac{70 - 50}{7{,}05} = 2{,}84.$$

Шундай қилиб,

$$P(0 \leqslant m \leqslant 70) = P_{10\,000}(0;\, 70) = \Phi(2{,}84) - \Phi(-7{,}09) =$$

$$= \Phi(2{,}84) + \Phi(7{,}09) = 0{,}4977 + 0{,}5 = 0{,}9977.$$

15- §. Полиномиал схема

Полиномиал схема биномиал схеманинг (Бернулли схемасининг) умумлашмасидир. Агар Бернули схемасида 2 та ҳодиса: A ва $\overline{A}$ қаралган бўлса, полиномиал схемада n та ҳодиса қаралади.

Масаланинг қўйилиши. Тажриба шундан иборатки, ўзгармас шароитларда n та боғлиқмас синов ўтказилади ва уларнинг ҳар бирида тўла гуруҳ ҳосил қиладиган k та $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ҳодисанинг фақат биттаси рўй бериши мумкин, бунда бу ҳодисаларнинг эҳтимолликлари маълум: $p_1 = P(A_1)$, $p_2 = P(A_2)$, $\dots$, $p_n = P(A_n)$. A_1 ҳодиса роса m_1 марта, A_2 ҳодиса роса m_2 марта, $\dots$, A_k ҳодиса роса m_k марта рўй бериш эҳтимоллиги $P_n(m_1, m_2, \dots, m_k)$ ни топинг, бунда $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$.

Ечиш. A_i^j ҳодиса j-синовда $(j = 1, 2, \dots, n)$ A_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ ҳодиса рўй беришини билдирсин. Бизни қизиқтираётган B ҳодиса турли усуллар билан рўй бериши мумкин. B ҳодисанинг рўй бериш вариантларидан бири, масалан,

$$A_1^1 A_1^2 \dots A_1^{m_1} A_2^{m_1+1} \dots A_2^{m_1+m_2} \dots A_2^{m_1+m_2+\dots+m_k}.$$

B ҳодиса рўй беришининг барча вариантларини бу комбинациядан *қуйи* индексларнинг барча мумкин бўлган ўрин алмаштиришларини *бажариб ҳосил қилиш мумкин*. Бундай комбинациялар сони $\frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \dots m_k!}$ га тенг, улардан ҳар бирининг эҳтимоллиги эса кўпайтириш теоремасига кўра $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}$ га тенг. Шунинг учун биргаликдамас ҳодисаларнинг эҳтимолликларини қўшиш теоремасига кўра

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2 \dots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}. \quad (15.1)$$

Хусусий ҳолда $k = 2$ бўлганда (13.1) формулани ҳосил қиламиз.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Тўла эҳтимолликни ҳисоблашда масаланинг қўйилишини баён қилинг.
2. Тўла эҳтимолликни ҳисоблаш учун формулани ёзинг. Мисол келтиринг.
3. Гипотезалар теоремаси масаласининг қўйилишини баён қилинг.
4. Гипотезалар эҳтимоллигини ҳисоблаш учун формулани ёзинг. Мисол келтиринг.
5. Гипотезалар теоремасининг натижасини айтиб беринг.
6. Бернулли формуласини ёзинг. Бернулли формуласи қандай масалаларни ечишда қўлланилади?
7. Муавр — Лапласнинг локал теоремасини таърифланг. Бу теореманинг вазифаси нимадан иборат?
8. Муавр — Лапласнинг интеграл теоремасини таърифланг. Унинг вазифаси нимадан иборат?
9. Полиномиал-схемадаги масаланинг қўйилишини баён қилинг ва талаб қилинадиган эҳтимолликни ҳисоблаш учун формулани ёзинг.
10. 14.225—14.256, 14.312—14.316, 14.346—14.351, 14.556—14.570-масалаларни ечинг.

16-§. Тасодифий миқдорнинг таърифи

Тасодифий миқдор тушунчаси эҳтимоллик назариясининг марказий тушунчаларидан биридир.

Таъриф. Тажриба натижасида олдиндан маълум мумкин бўлган қийматлардан бирини қабул қиладиган миқдор *тасодифий миқдор* деб аталади.

Тасодифий миқдорлар одатда лотин алфавитининг бош ҳарфлари X, Y, $\dots$ билан, уларнинг мумкин бўлган қийматлари эса тегишли кичик ҳарфлари x, y, $\dots$ билан белгиланади.

Амалиётда дуч келинадиган тасодифий миқдорлардан ушбу икки хилини ажратиш мумкин: дискрет тасодифий миқдорлар ва узлуксиз тасодифий миқдорлар.

Дискрет тасодифий миқдор деб мумкин бўлган қийматлари чекли ёки чексиз сонли кетма-кетликдан иборат миқдорга айтилади.

Дискрет тасодифий миқдорларга мисоллар келтирамиз.

1. X тасодифий миқдор —100 та буюмдан иборат гуруҳдаги нуқсонли буюмлар сони. Бу миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари бундай бўлади:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ \dots,\ x_{101} = 100.$$

2. Y тасодифий миқдор тангани тўрт марта ташлагандаги гербли томони тушиш нисбий частоталари. Унинг мумкин бўлган қийматлари бундай:

$$y_1 = 0,\ y_2 = 0{,}25,\ y_3 = 0{,}50,\ y_4 = 0{,}75,\ y_5 = 1.$$

3. Z тасодифий миқдор нишонга биринчи марта теккизишгача бўлган ўқ узишлар сони. Бу ерда мумкин бўлган қийматлар чексиз сонли кетма-кетлик ҳосил қилади: $z_1 = 1$, $z_2 = 2$, $z_3 = 3, \dots$.

Узлуксиз тасодифий миқдор деб, мумкин бўлган қийматлари сон ўқининг бирор (чекли ёки чексиз) оралиғини бутунлай тўлдирадиган миқдорга айтилади.

Келгусида биз бу таърифни бироз аниқлаштирамиз.

Узлуксиз тасодифий миқдорларга мисоллар.

1. X тасодифий миқдор — бирор физик катталикни ўлчаш натижаси.

2. T тасодифий миқдор — асбобнинг бузилмасдан ишлаш вақти.

3. Y тасодифий миқдор — нишоннинг марказидан ўқ теккан жойгача масофа.

17- §. Дискрет тасодифий миқдор эҳтимолликларининг тақсимот қонуни

Дискрет тасодифий миқдорни тавсифлаш учун энг аввало унинг барча мумкин бўлган қийматларини кўрсатиш лозим. Бироқ X дискрет тасодифий миқдор учун унинг фақат мумкин бўлган қийматлари $x_1, x_2, \dots$ нигина эмас, балки $X = x_1$, $X = x_2$, $\dots$ ҳодисаларнинг эҳтимолликларини ҳам, яъни

$$p_i = P(X = x_i)\ (i = 1, 2, \dots, n) \tag{17.1}$$

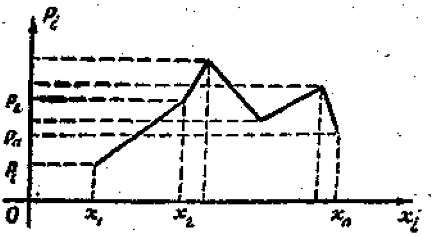
ни кўрсатиш лозим.

1-таъриф. Тасодифий миқдорнинг қийматлари билан уларнинг эҳтимолликлари орасидаги боғланишни *тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни* деб аталади.

Тасодифий миқдор тақсимот қонунини ифодалаш усуллари ва шакллари турлича бўлиши мумкинлигини айтиб ўтамиз.

X дискрет тасодифий миқдор тақсимот қонуни берилишининг энг содда шакли жадвал бўлиб, бу миқдорнинг барча мумкин бўлган қийматлари ёзилган ва уларга мос эҳтимолликлар кўрсатилган бўлади:

$$X = \left| \frac{x_1 \mid x_2 \mid \cdots \mid x_n \ldots}{p_1 \mid p_2 \mid \cdots \mid p_n \ldots} \right. \qquad (17.2)$$



129- шакл.

$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ қийматлар одатда ортиб бориш тартибида ёзилади. Бундай жадвал тасодифий миқдорнинг тақсимот қатори номи билан юритилади Жадвалнинг юқори сатрида X миқдорнинг барча мумкин бўлган қийматлари ёзилганлиги ва $X = x_i (i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ ҳодисаларнинг ҳар икки таси биргаликдамаслиги сабабли $p_1 + p_2 + + \ldots + p_n = 1$.

Абсциссалар ўқида тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари, ординаталар ўқида эса уларга мос эҳтимолликларни қўйилади. (x_1, p_1), (x_2, p_2); ... нуқталарни кесмалар билан туташтирилади. Бунда ҳосил бўлган шакл тақсимот кўпбурчаги деб аталади (129- шакл).

Дискрет тасодифий миқдор ва унинг тақсимот қонунига доир бир неча мисол кўрамиз.

1-мисол. Битта тажриба ўтказилади, унда A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги p га тенг, яъни $P(A) = p$. Бу A ҳодисанинг рўй бериш сонидан иборат X тасодифий миқдор қаралади. Унинг тақсимот қаторини тузинг.

Ечиш. X миқдор фақат иккита қиймат қабул қилади: 0 ва 1. A ҳодиса p эҳтимоллик билан рўй берганлиги учун X тасодифий миқдор 1 га тенг қийматни ўша эҳтимоллик билан қабул қилади. $\bar{A}$ ҳодиса ва у билан бирга $(X = 0)$ ҳодиса $q = 1 - p$ эҳтимолликка эга. Шунинг учун X миқдорнинг тақсимот қонуни бундай бўлади:

$$X = \left\{ \frac{0}{q} \,\middle|\, \frac{1}{p} \right.$$

2-мисол. Идишда 10 та шар бор, улардан 3 таси оқ. Идишдан таваккалига 3 та шар олинади. X тасодифий миқдор — олинган оқ шарлар сони. Унинг тақсимот қонунини ёзинг.

Ечиш. X тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари қуйидагича: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. (2.4) формулага асосан $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$ ва $X = 3$ ҳодисаларнинг эҳтимолликларини топамиз:

$$P(X = 0) = \frac{C_3^0 \, C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{35}{120}, \qquad P(X = 1) = \frac{C_3^1 \, C_7^2}{C_{10}^3} = \frac{63}{120},$$

$$P(X=2)=\frac{C_3^2 C_7^1}{C_{10}^3}=\frac{21}{120}, \qquad P(X=3)=\frac{C_3^3 C_7^0}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}.$$

Энди X миқдорнинг тақсимот қаторини ёзишимиз мумкин:

$$X=\left\{\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \frac{35}{120} & \frac{63}{120} & \frac{21}{120} & \frac{1}{120} \end{array}\right.$$

Текшириш: $\frac{35}{120}+\frac{63}{120}+\frac{21}{120}+\frac{1}{120}=1.$

2-таъриф. X тасодифий миқдорнинг энг катта эҳтимоллик қиймати унинг *модаси* деб аталади.

Биз кўрган 2-мисолдаги тасодифий миқдорнинг модаси 1 га тенг.

18-§. Дискрет тасодифий миқдорлар устида амаллар

1. **Тасодифий миқдорнинг функцияси.** X тақсимот қонуни маълум бўлган тасодифий миқдор бўлсин:

$$X=\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ \hline p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{array}\right.$$

$y=f(x)$ эса бу миқдорнинг барча мумкин бўлган қийматлари ётадиган соҳада аниқланган монотон функция бўлсин. У ҳолда $Y=f(X)$ янги дискрет миқдор бўлади, унинг мумкин бўлган қийматлари $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... бўлиб, шу билан бирга Y тасодифий миқдорнинг $f(x_i)$ қийматни қабул қиладиган эҳтимоллиги X тасодифий миқдорнинг X_i қийматни қабул қиладиган эҳтимоллигига тенг. Шундай қилиб, $Y=f(X)$ тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни бундай бўлади:

$$Y=f(X)=\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c} f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_n) & \cdots \\ \hline p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{array}\right. \qquad (18.1)$$

1-мисол. Агар X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни

$$X=\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c} -1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ \hline 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}15 & 0{,}25 \end{array}\right.$$

бўлса, $Y=4X$ тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ёзинг.

Ечиш. (18.1) формулага асосан қуйидагига эгамиз:

$$Y=4X=\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c} -4 & 0 & 4 & 12 & 20 \\ \hline 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}15 & 0{,}25 \end{array}\right..$$

Агар $f(x)$ номонотон функция бўлса, у ҳолда у X нинг турли қийматларида бир хил қийматлар қабул қилиши мумкин. Бу ҳолда олдин (18.1) кўринишидаги ёрдамчи жадвал тузиб олинади, кейин эса Y тасодифий миқдорнинг бир хил қийматлари устунлари бирлашттирилади, бунда мос эҳтимолликлар қўшилади.

2-мисол. Агар X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни

$$X = \left\{\begin{array}{c|c|c|c} -3 & -2 & 1 & 3 \\ \hline 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{array}\right.$$

бўлса, $Y = X^2$ тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ёзинг.

Ечиш. $Y = X^2$ учун ёрдамчи жадвал бундай бўлади:

$$Y = \left\{\begin{array}{c|c|c|c} 9 & 4 & 1 & 9 \\ \hline 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{array}\right. \text{ Демак, } Y = X^2 = \left\{\begin{array}{c|c|c} 1 & 4 & 9 \\ \hline 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5 \end{array}\right.$$

II. Иккита тасодифий миқдорнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси. Ушбу иккита тасодифий миқдор берилган бўлсин:

$$X = \left\{\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hline p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}\right. \text{ ва } Y = \left\{\begin{array}{c|c|c|c} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \hline q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{array}\right. .$$

1-таъриф. X ва Y тасодифий миқдорларнинг *йиғиндиси* деб, $z_{ij} = x_i + y_i$ кўринишдаги қийматларни $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ эҳтимоллик билан қабул қиладиган Z тасодифий миқдорга айтилади.

Бунда $p_{ij} = P(X = x_1, Y = y_j)$ ифода X миқдор x_i қийматни, Y миқдор эса y_j қийматни қабул қилиш эҳтимоллигини, ёки бошқача айтганда, $X = x_i$ ва $Y = y_j$ ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимоллигини ифодалайди.

Шундай қилиб, агар барча мумкин бўлган қийматлар турлича бўлса, у ҳолда $Z = X + Y$ тасодифий миқдор ушбу кўринишдаги тақсимотга эга бўлади:

$$Z = X + Y = \left\{\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_1 + y_1 & x_1 + y_2 & x_2 + y_1 & x_1 + y_3 & x_2 + y_2 & \cdots \\ \hline p_{11} & p_{12} & p_{21} & p_{13} & p_{22} & \cdots \end{array}\right. \quad (18.2)$$

Агар бир хил қийматли йиғиндилар бор бўлса, у ҳолда (18.2) кўринишдаги ёрдамчи жадвал тузиб олинади ва бир қийматли устунлар мос эҳтимолликларни қўшиш билан бирлаштирилади.

Тасодифий миқдорларнинг кўпайтмаси қўшишга ўхшаш аниқланади, бироқ бунда (18.2) жадвалнинг юқори сатрида йиғиндилар ўрнида мос кўпайтмалар туради.

2-таъриф. Агар X ва Y тасодифий миқдорлар учун исталган $X = x_i$ ва $Y = y_j$ ҳодисалар жуфти боғлиқмас бўлса, у ҳолда X ва Y *боғлиқмас тасодифий миқдорлар* деб аталади.

Узлуксиз X ва Y тасодифий миқдорларнинг боғлиқмаслиги исталган $X < a$ ва $Y < b$ ҳодисалар жуфтининг боғлиқмаслигини билдиради.

Агар дискрет тасодифий миқдорлар боғлиқмас бўлса, у ҳолда эҳтимолликларни кўпайтириш теоремасига асосан $p_{ij} = p_i q_j$, бу ерда $p_i = P(X = x_i)$, $q_j = P(Y = y_j)$.

3-мисол. $U=X+Y$ ва $V=XY$ тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонунларини тузинг, бунда X ва Y боғлиқмас тасодифий миқдорлар бўлиб, уларнинг тақсимот қонунлари қуйидагича:

$$X=\left\{\begin{array}{c|c} -1 & 1 \\ \hline 0{,}4 & 0{,}6 \end{array}\right., \qquad Y=\left\{\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{array}\right..$$

Ечиш. Йиғинди учун ушбу ёрдамчи жадвални тузамиз:

$$U=\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c|c} -1+1 & -1+2 & -1+3 & 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ \hline 0{,}4\cdot 0{,}5 & 0{,}4\cdot 0{,}3 & 0{,}4\cdot 0{,}2 & 0{,}6\cdot 0{,}5 & 0{,}6\cdot 0{,}3 & 0{,}6\cdot 0{,}2 \end{array}\right..$$

Бир хил қийматли йиғиндилар турган устунларни бирлаштириб, ва бунда мос эҳтимолликларни қўшиб, ушбу тақсимот қонунини ҳосил қиламиз:

$$U=X+Y=\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0{,}20 & 0{,}12 & 0{,}38 & 0{,}18 & 0{,}12 \end{array}\right..$$

Текшириш: $0{,}20+0{,}12+0{,}38+0{,}18+0{,}12=1$.

Кўпайтма учун қуйидагига эгамиз:

$$V=\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c|c} -1\cdot 1 & -1\cdot 2 & -1\cdot 3 & 1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot 3 \\ \hline 0{,}4\cdot 0{,}5 & 0{,}4\cdot 0{,}3 & 0{,}4\cdot 0{,}2 & 0{,}6\cdot 0{,}5 & 0{,}6\cdot 0{,}3 & 0{,}6\cdot 0{,}2 \end{array}\right..$$

Бир хил қийматли кўпайтмалар турган устунларни бирлаштириб ва бунда мос эҳтимолликларни қўшиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$V=XY=\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c|c} -3 & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0{,}08 & 0{,}12 & 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}18 & 0{,}12 \end{array}\right..$$

Текшириш: $0{,}08+0{,}12+0{,}20+0{,}30+0{,}18+0{,}12=1$.

19-§. Тақсимот функцияси

Тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни ҳар доим ҳам (18.2) жадвал билан берилавермаслиги мумкин. Масалан, узлуксиз тасодифий миқдор учун унинг барча мумкин бўлган қийматларини санаб чиқиш мумкин эмас.

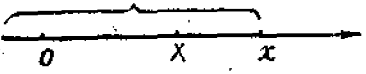
1-таъриф. Ҳар бир $x\in]-\infty, +\infty[$ учун X тасодифий миқдорнинг x дан кичик қандайдир қиймат қабул қилиш эҳтимоллигини берадиган

$$F(x)=P(X<x) \qquad (19.1)$$

функция X тасодифий миқдорнинг *тақсимот функцияси* ёки *интеграл тақсимот функцияси* деб аталади.

Агар X тасодифий миқдорни Ox ўқда тажриба натижасида у ёки бу вазиятни эгаллайдиган тасодифий нуқта деб қаралса, у ҳолда $F(x)$ тақсимот функцияси x нинг ҳар бир аниқ қиймати учун тажриба натижасида X тасодифий нуқтанинг x нуқтадан чапга тушиш эҳтимоллигини билдиради (130-шакл).

Таърифдан яна тақсимот функцияси узлуксиз тасодифий миқдорлар учун ҳам, дискрет тасодифий миқдорлар учун ҳам мавжудлиги келиб чиқади.



130- шакл.

Энди узлуксиз тасодифий миқдорнинг аниқ таърифини берамиз.

2-таъриф. Агар X тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси ҳамма ерда узлуксиз, бу функциянинг ҳосиласи эса исталган чекли оралиқдаги чекли сондаги нуқталарни истисно этганда, барча нуқталарда узлуксиз бўлса, X *узлуксиз тасодифий миқдор* деб аталади.

Тақсимот функциясининг умумий хоссаларини кўриб чиқамиз.

1-хосса. $F(x)$ тақсимот функцияси манфиймас функция бўлиб, унинг қийматлари нол ва бир орасида жойлашган:

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1. \qquad (19.2)$$

Бу исталган x қиймат учун $F(x)$ функция бирор эҳтимолликни аниқлашидан келиб чиқади.

2-хосса. X тасодифий миқдорнинг $[\alpha, \beta[$ оралиққа тушиш эҳтимоллиги тақсимот функциясининг бу оралиқдаги орттирмасига тенг, яъни

$$P(\alpha \leqslant X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \qquad (19.3)$$

Исботлаш учун ушбу учта ҳодисани қараймиз: Тажриба натижасида X тасодифий миқдор β дан кичик қийматни қабул қилишидан иборат, яъни $X<\beta$ бўлган A ҳодиса, $X<\alpha$ дан иборат бўлган B ҳодиса, $\alpha \leqslant X < \beta$ бўлган C ҳодиса.

B ва C ҳодисалар биргаликдамас ва $A = B + C$ эканлиги равшан Қўшиш теоремасига кўра $P(A) = P(B) + P(C)$ ёки $P(X<\beta) = P(X<\alpha) + P(\alpha \leqslant X < \beta)$. Бундан қуйидагини ҳосил қиламиз: $P(\alpha \leqslant X < \beta) = P(X < \beta) - P(X < \alpha) = F(\beta) - F(\alpha)$.

1-натижа. Тақсимот функцияси камаймайдиган функция, яъни $x_2 \geqslant x_1$ бўлса, у ҳолда $F(x_2) \geqslant F(x_1)$. Ҳақиқатан, (19.3) формуладан $F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \leqslant X_2 < x_2)$ эканлиги келиб чиқади, бундан эса $F(x_2) - F(x_1) \geqslant 0$ ёки $F(x_2) \geqslant F(x_1)$.

2-натижа. Узлуксиз тасодифий миқдорнинг тайин қийматни қабул қилиш эҳтимоллиги нолга тенг.

Исботи. $P(X=\alpha) = \lim\limits_{\beta\to\alpha} P(\alpha \leqslant X < \beta) = \lim\limits_{\beta\to\alpha} (F(\beta) - F(\alpha)) = 0$,

чунки $F(x)$ функция α нуқтада узлуксиз.

Бу натижадан қуйидаги келиб чиқади:

$$P(\alpha \leqslant X < \beta) = P(\alpha < \text{[illegible]} \leqslant \beta) = P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = P(\alpha < X < \beta) =$$
$$= F(\beta) - F(\alpha). \qquad (19.4)$$

Масалан, $P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = P(\alpha \leqslant X < \beta) + P(X = \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

3-хосса. *Тақсимот функцияси —∞ да 0 га тенг, +∞ да эса 1 га тенг*, яъни

$$F(-\infty)=0;\quad F(+\infty)=1. \qquad (19.5)$$

Ҳақиқатан, x нуқта чапга томон чексиз силжиганида X тасодифий нуқтанинг x дан чапроққа тушиши мумкинмас ҳодисага айланади, шунинг учун $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$.

Шунга ўхшаш, x нуқта ўнгга томон чексиз силжиганида X тасодифий нуқтанинг x дан чапроққа тушиши муқаррар ҳодисага айланади. Шунинг учун $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.

1-мисол. X тасодифий миқдор ушбу тақсимот функциясига эга:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x<0 \text{ бўлса},\\ \dfrac{x^2}{16}, \text{ агар } 0\leqslant x<2 \text{ бўлса},\\ x-\dfrac{7}{4}, \text{ агар } 2\leqslant x<\dfrac{11}{4} \text{ бўлса},\\ 1, \text{ агар } x>\dfrac{11}{4} \text{ бўлса}. \end{cases}$$

а) Унинг графигини ясанг; б) X тасодифий миқдорнинг $[1{,}6;\ 3]$ оралиққа тушиш эҳтимоллигини ҳисобланг.

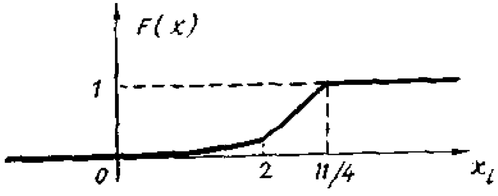
Ечиш. $F(x)$ функциянинг графигини ясаймиз (131-шакл). Изланаётган эҳтимолликни (19.4) формула бўйинча ҳисоблаймиз:

$$P(1{,}6\leqslant X\leqslant 3)=F(3)-F(1{,}6)=1-(1{,}6)^2/16=0{,}84.$$

2-мисол. X дискрет тасодифий миқдор

$$X=\left\{\begin{array}{c|c|c} -1 & 3 & 5\\ \hline 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{array}\right.$$

жадвал билан берилган. Унинг тақсимот функциясини топинг ва графигини ясанг.

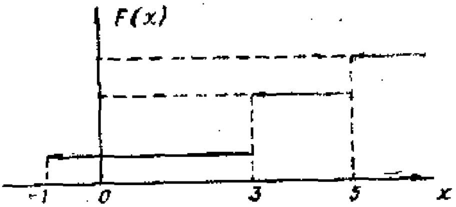


131-шакл.

Ечиш. Равшанки, $\forall\, x\in\,]-\infty;\ -1]$ учун $F(x)=0$, чунки бу ҳолда $X<x$ ҳодиса мумкин бўлмаган ҳодиса бўлади. $-1<x<3$ бўлсин. У ҳолда $\forall\, x\in\,]-1;3]$ учун $F(x)=P(X<x)=P(X=-1)=$ $=0{,}2$; $3<x\leqslant 5$ бўлсин, у ҳолда $\forall\, x\in\,]3;\ 5]$ учун $F(x)=P(X<x)=P(X=$ $=-1)+P(X=3)=$ $=0{,}2+0{,}5=0{,}7$; $x>5$ бўлсин. У ҳолда $F(x)=$ $=P(X<x)=1$ бўлади, чунки $\forall\, x>5$ учун $X<x$ ҳодиса муқаррар ҳодиса бўлади.

Энди биз $F(x)$ тақсимот функциясининг аналитик ифодасини ёзишимиз ва унинг графигини ясашимиз мумкин (132- шакл).

$$F(X)=\begin{cases}0, & x\leqslant -1 \text{ да},\\ 0{,}2, & -1<x\leqslant 3 \text{ да},\\ 0{,}7, & 3<x\leqslant 5 \text{ да},\\ 1, & x>5 \text{ да}.\end{cases}$$



132- шакл.

Кўрамизки, график поғонавий чизиқдан иборат. x ўзгарувчи X узлукли миқдорнинг мумкин бўлган қийматларидан бири орқали ўтишида $F(x)$ функция сакраб ўзгаради, бунда сакраш катталиги бу қийматнинг эҳтимоллигига тенг.

20- §. Эҳтимолликнинг тақсимот зичлиги

X узлуксиз тасодифий миқдор бўлсин.

Таъриф. *X тасодифий миқдор эҳтимоллик тақсимотининг дифференциал функцияси* деб,

$$f(x)=F'(x) \qquad (20.1)$$

формула билан аниқланадиган $f(x)$ функцияга айтилади.

(20.1) формуладан

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x\leqslant X\leqslant x+\Delta x)}{\Delta x}$$

келиб чиқади. $P(x\leqslant X\leqslant x+\Delta x)$ сурат X тасодифий миқдор $[x, x+\Delta x]$ оралиқда ётган қийматни қабул қилиш эҳтимоллиги «массаси»ни билдиради.

Демак, $\frac{P(x\leqslant X\leqslant x+\Delta x)}{\Delta x}$ эҳтимолликнинг $[x, x+\Delta x]$ оралиқдаги ўртача зичлигини, $f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{P(x\leqslant X\leqslant x+\Delta x)}{\Delta x}$ эса X тасодифий миқдорнинг x нуқтадаги эҳтимоллиги зичлигини билдиради. Шу муносабат билан тақсимот дифференциал функциясини тақсимот зичлиги, унинг графигини эса тақсимот эгри чизиғи дейилади.

Тақсимот зичлигининг асосий хоссаларини келтирамиз.

1-хосса. Тақсимот зичлиги манфиймас, яъни

$$f(x)\geqslant 0. \qquad (20.2)$$

Бу хосса $f(x)$ камаймайдиган $F(x)$ тақсимот функциясининг ҳосиласи эканлигидан келиб чиқади.

2-хосса. $F(x)$ тақсимот функцияси маълум бўлган $f(x)$ тақсимот зичлигидан

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \qquad (20.3)$$

формула бўйича топилиши мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, Ньютон—Лейбниц формуласига асосан:

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = F(t)\Big|_{-\infty}^{x} = F(x) - F(-\infty) = F(x).$$

3- хосса. Ушбу формула ўринли:

$$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx. \qquad (20.4)$$

Исботи.

$$P(\alpha \leqslant x \leqslant \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx - \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

Исботланган бу хосса, геометрик нуқтаи назардан, X тасодифий миқдорнинг $[\alpha, \beta]$ кесмага тушиш эҳтимоллиги сон жиҳатдан Ox ўқ, тақсимот эгри чизиғи ва $x = \alpha$, $x = \beta$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапеция юзига тенглигини билдиради (133 -шакл).

4- хосса. Ушбу формула ўринли:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1. \qquad (20.5)$$

Исботи. Ньютон—Лейбниц умумлашган формуласига асосан

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty) = 1,$$

ана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Изоҳ. Агар X тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари $[a, b]$ оралиқ бўлса, у ҳолда (20.5) формула ушбу кўринишни олади:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = 1. \qquad (20.6)$$

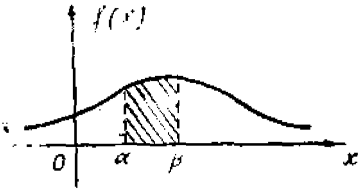
Бу формула геометрик нуқтаи назардан Ox ўқ, тақсимот эгри чизиғи ва $x=a$, $x=b$ тўғри чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапециянинг юзи 1 га тенглигини билдиради.

Мисол: X тасодифий миқдорнинг тақсимот зичлиги

$$f(x) = \frac{A}{x^2+1}$$

бўлсин. а) A коэффициентни топинг; б) X тосадифий миқдор $]0; 5[$ интервалдан қиймат қабул қилиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. A коэффициентни (20.5) шартдан топамиз: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Adx}{x^2+1} = 1.$



133- шакл.

Бу ердан $A \operatorname{arc tg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi A = 1 \Rightarrow A = 1/\pi$.

б) (20.4) формулага асосан:

$$P(0 < X < 5) = \int\limits_0^5 \frac{dx}{\pi(x^2+1)} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc tg} x \Big|_0^5 = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} 5 \approx 0{,}437.$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Дискрет тасодифий миқдор таърифини беринг. Мисоллар келтиринг.
2. Узлуксиз тасодифий миқдор таърифини айтиб беринг. Мисоллар келтиринг.
3. Эҳтимоллик тақсимот қонуни деб нимага айтилади? Мисоллар келтиринг.
4. Тақсимот кўпбурчаги нима?
5. Дискрет тасодифий миқдорнинг функцияси нима ва унинг тақсимот қонуни қандай аниқланади? Мисоллар келтиринг.
6. Дискрет тасодифий миқдорлар учун қўшиш ва айириш амаллари қандай таърифланади? Мисоллар келтиринг.
7. Тасодифий миқдорларнинг боғлиқмаслик таърифини айтиб беринг.
8. Эҳтимоллик тақсимоти функцияси таърифини айтиб беринг.
9. Тақсимот функциясининг асосий хоссаларини айтиб беринг.
10. Дискрет тасодифий миқдор тақсимот функцияси графигининг хусусияти нимада?
11. Эҳтимоллик тақсимоти зичлиги деб нимага айтилади? Тақсимот зичлигининг механик маъноси ва хоссаларини айтиб беринг.

21-§. Тасодифий миқдорнинг сонли характеристикалари ҳақида тушунча ва уларнинг вазифаси

X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини билиш эҳтимоллик нуқтаи назаридан X миқдор ҳақида тўлиқ маълумот беради. Амалиётда эса кўпинча бундан анча кам нарсани билиш кифоя қилади, чунончи тақсимотни тавсифлайдиган баъзи сонларнигина билиш кифоядир, булар тасодифий миқдорнинг сонли характеристикалари деб аталади ва уларнинг вазифаси тасодифий миқдорнинг энг муҳим хусусиятларининг қисқа шаклда ифодалашидир.

22-§. Математик кутилиш

I. Математик кутилишнинг таърифи ва белгиланиши.

Ушбу дискрет тасодифий миқдор берилган бўлсин:

$$X = \left\{ \frac{x_1}{p_1} \middle| \frac{x_2}{p_2} \middle| \frac{\cdots}{\cdots} \middle| \frac{x_n}{p_n} \right.$$

1-таъриф. *X дискрет тасодифий миқдорнинг математик кутилиши* ($M(X)$ ёки m_x билан белгиланади) деб, X миқдорнинг мумкин бўлган қийматларини мос эҳтимолликларга кўпайтмалари йиғиндисига тенг сонга айтилади, яъни

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n=\sum_{k=1}^{n}x_kp_k. \qquad (22.1)$$

X тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари сони чексиз, яъни X миқдор

$$X=\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ \hline p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{array}\right.$$

тақсимотга эга бўлган ҳолда унинг математик кутилиши

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ \ldots+x_np_n+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k \qquad (22.2)$$

формула билан аниқланади. Бунда (22.2) қатор абсолют яқинлашади деб фараз қилинади. Акс ҳолда бу тасодифий миқдор математик кутилишга эга бўлмайди.

Математик кутилиш тасодифий миқдор билан бир хил ўлчовга эга бўлишини айтиб ўтамиз.

1-мисол. Ушбу тасодифий миқдорнинг математик кутилишини топинг:

$$X=\left\{\begin{array}{c|c|c} -2 & 4 & 6 \\ \hline 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{array}\right..$$

Ечиш. (22.1) формулага асосан $M(X)=-2\cdot0{,}3+4\cdot0{,}2+$ $+6\cdot0{,}5=3{,}2.$

2-мисол. X — нишонга биринчи марта теккунга қадар отиладиган ўқлар сони, бундан ҳар бир ўқ узишда нишонга теккизиш эҳтимоллиги ўзгармас ва p га тенг. $M(X)$ни топинг.

Ечиш. X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ёзамиз:

$$X=\left\{\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & 3\ \cdots & n\ \cdots \\ \hline p & pq & pq^2\ \cdots & pq^{n-1}\ldots \end{array}\right.$$

(22.2) формулага кўра

$$M(X)=1\cdot p+2pq+3pq^2+\ldots+npq^{n-1}+\ldots=p(1+2q+$$
$$+3q^2+\ldots+nq^{n-1}+\ldots)=p(q+q^2+\ldots+q^n+\ldots)'=$$
$$=p\left(\frac{q}{1-q}\right)'=p\cdot\frac{1-q+q}{(1-q)^2}=p\cdot\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}.$$

2-таъриф. Мумкин бўлган қийматлари $(a,\ b)$ интервалга тегишли бўлган X узлуксиз тасодифий миқдорнинг *математик кутилиши* деб

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx \qquad (22.3)$$

аниқ интегралга айтилади, бунда $f(x)$ — тақсимот зичлиги. Бу формула (22.1) формуланинг интеграл шаклидир.

Агар X миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари бутун Ox ўқни қопласа, у ҳолда унинг математик кутилиши ушбу формула билан ифодаланади:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx. \qquad (22.4)$$

Бунда хосмас интеграл абсолют яқинлашади деб фараз қилинади. Акс ҳолда X миқдор математик кутилишга эга бўлмайди.

3-мисол. X тасодифий миқдор $[0,1]$ кесмада $f(x)=3x^2$ зичлик билан берилган, бу кесмадан ташқарида $f(x)=0$. $M(X)$ни топинг.

Ечиш. (22.3) формулага асосан

$$M(X)=\int_0^1 x\cdot 3x^2dx = 0{,}75x^4\Big|_0^1 = 0{,}75.$$

II. Математик кутилишнинг эҳтимоллик маъноси. X тасодифий миқдор устида n та синов ўтказилган бўлсин. Синов натижалари ушбу жадвалга келтирилган:

$$X=\left\{\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ \hline n_1 & n_2 & \cdots & n_k \end{array}\right..$$

Юқори сатрда X миқдорнинг кузатилган қийматлари, пастки сатрда эса мос қийматларнинг частоталари кўрсатилган, яъни масалан, n_1 сон n_1 та синовда X миқдор x_1 га тенг қиймат қабул қилганлигини билдиради ва ҳ.к.

$\overline{X}$ орқали кузатилган барча қийматларнинг ўрта арифметигини белгилайлик, у ҳолда

$$\overline{X}=\frac{x_1\cdot n_1+x_2\cdot n_2+\ldots+x_k\cdot n_k}{n}$$

ёки $\overline{X}=x_1\frac{n_1}{n}+x_2\frac{n_2}{n}+\ldots+x_k\frac{n_k}{n}=x_1p_1^*+x_2p_2^*+\ldots+x_kp_k^*$,

бу ерда $p_1^*, p_2^*, \ldots, p_k^*$—мос равишда $x_1, x_2, \ldots, x_k$ қийматларнинг нисбий частоталари. Синовлар сони етарлича катта бўлганда $p_1^*\approx p_1, \ldots, p_k^*\approx p_k$ бўлади. (Бу 33-§ да исботланади.) Шунинг учун

$$\overline{X}\approx M(X), \qquad (22.5)$$

яъни X тасодифий миқдорнинг математик кутилиши унинг кузатиладиган қийматлари ўрта арифметигига тақрибан тенг.

III. Математик кутилишнинг хоссалари

1-хосса. Узгармас миқдорнинг математик кутилиши шу ўзгармаснинг ўзига тенг, яъни

$$M(C)=C. \qquad (22.6)$$

Исботи. C ўзгармас миқдорни ягона C қийматни 1 га тенг эҳтимоллик билан қабул қиладиган тасодифий миқдор деб қараш мумкин. Шу сабабли $M(C)=C\cdot 1=C$.

2- хосса. Чекли сондаги тасодифий миқдорлар йиғиндисининг математик кутилиши, улар математик кутилишларининг йиғиндисига тенг, яъни

$$M(X_1+X_2+\ldots+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n). \quad (22.7)$$

3- хосса. Чекли сондаги боғлиқмас тасодифий миқдорлар кўпайтмасининг математик кутилиши улар математик кутилишларининг кўпайтмасига тенг, яъни

$$M(X_1X_2\ldots X_n)=M(X_1)M(X_2)\ldots M(X_n). \quad (22.8)$$

2- ва 3- хоссаларни исботсиз қабул қиламиз.

4- хосса. $M(aX+b)=aM(X)+b.$ (22.9)

Исботи. Ҳақиқатан, $M(aX+b)=M(aX)+M(b)=M(a)M(X)+$ $+b=aM(X)+b.$

(22.9) формуладан, хусусан, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M(X-C)=M(X)-C \quad (22.10)$$

ва

$$M(X-M(X))=0. \quad (22.11)$$

$X=X-M(X)$ тасодифий миқдор X тасодифий миқдорни ўзининг математик кутилишидан четланиши (оғиши) деб аталади.

Шундай қилиб, (22.11) формула ушбу фактни ифодалайди: тасодифий миқдорнинг ўзининг математик кутилишидан четланишининг математик кутилиши нолга тенг.

23- §. Тасодифий миқдорнинг дисперсияси. Ўртача квадратик четланиш

1. Таърифлар ва белгилашлар.

Кўпчилик ҳолларда тасодифий миқдорнинг ўзини билиш уни етарли даражада тавсифлаш учун кифоя қилмайди.

Мисол келтирамиз. X ва Y тасодифий миқдорлар ушбу тақсимот қонунлари билан берилган бўлсин:

$$X=\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c} -0{,}1 & -0{,}01 & 0 & 0{,}01 & 0{,}1 \\ \hline 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{array}\right.; \quad Y=\left\{\begin{array}{c|c|c|c|c} -20 & -10 & 0 & 10 & 20 \\ \hline 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{array}\right.$$

$M(X)=0$ ва $M(Y)=0$ эканлигини ҳисоблаш осон. Бироқ улар тақсимотларининг моҳияти турлича: X миқдорнинг мумкин бўлган қийматлари унинг математик кутилишидан ҳам фарқ қилади, шу билан бир вақтда Y миқдорнинг қийматлари унинг математик кутилишидан жуда фарқ қилади. Жумладан икки жойда бир йил давомида ёққан ёғиннинг ўртача миқдори бир хил бўлганлигидан бу жойлардаги иқлим бир хил деб айтиб бўлмайди. Шунга ўхшаш, ўртача иш ҳақи юқори ва кам иш ҳақи оладиган ишчиларнинг сони ҳақида фикр юритиш имкснини бермайди. Бошқача айтганда, математик кутилишни билиш ундан қандай четланишлар бўлиши мумкинлиги ҳақида ҳукм юритишга ҳам имкон бермайди.

X тасодифий миқдор қийматларининг $M(X)$ математик кутилиш атрофида сочилишни $x_i - M(X)$ айирмалар тавсифлайди. Бироқ уларнинг ўртача қиймати (22.11) формулага асосан нолга тенг. Шу сабабли бу четланишларнинг квадратлари қаралади. Уларнинг ўртача қиймати тасодифий миқдор қийматларини ўзининг математик кутилиши атрофида сочилиш даражасини тавсифлаши равшан.

1-таъриф. *X тасодифий миқдорнинг дисперсияси ($D(X)$* ёки DX орқали белгиланади) деб, унинг математик кутилишидан четланиши квадратининг математик кутилишига айтилади, яъни

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \tag{23.1}$$

Дискрет тасодифий миқдор учун (23.1) формула ушбу кўринишни олади:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2 \cdot p_i, \tag{23.2}$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - m_x)^2 \cdot p_i. \tag{23.3}$$

Узлуксиз тасодифий миқдор учун (23.1) формула ушбу кўринишни олади:

$$D(X) = \int_a^b (x - m_x)^2 f(x)\,dx. \tag{23.4}$$

Дисперсиянинг ўлчови тасодифий миқдор квадратининг ўлчови билан бир хил бўлиши равшан.

2-таъриф. *X тасодифий миқдорнинг ўртача квадратик четланиши* ($\sigma(X)$ ёки σ_x билан белгиланади) деб дисперсиядан олинган квадрат илдизнинг арифметик қийматига айтилади, яъни

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{23.5}$$

1-мисол. Шу параграфнинг бошида қаралган X ва Y тасодифий миқдорларнинг дисперсиялари ва ўртача квадратик четланишларини топинг.

Ечиш. (23.2) формулага асосан,

$$D(X) = (-0{,}1 - 0)^2 \cdot 0{,}1 + (-0{,}01 - 0)^2 \cdot 0{,}2 + (0-0)^2 \cdot 0{,}4 + \\ + (0{,}01 - 0)^2 \cdot 0{,}2 + (0{,}1-0)^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}00204;$$

$$D(Y) = (-20 - 0)^2 \cdot 0{,}3 + (-10 - 0)^2 \cdot 0{,}1 + (0-0)^2 \cdot 0{,}2 + \\ + (10-0)^2 \cdot 0{,}1 + (20-0)^2 \cdot 0{,}3 = 260.$$

(23.5) формулага асосан:

$$\sigma(X) = \sqrt{0{,}00204} = 0{,}04517, \quad \sigma(Y) = \sqrt{260} \approx 16{,}12.$$

Шундай қилиб, математик кутилишлар бир хил бўлгани ҳолда X миқдорнинг дисперсияси анча кичик, Y миқдорнинг дисперсияси эса анча катта. Бу юқорида уларнинг тақсимотида кўринган фарқнинг натижасидир. Умумий ҳолда, агар X тасодифий миқдорнинг дисперсияси кичик бўлса, у ҳолда (23.2) йиғиндининг барча ҳадлари манфиймас бўлгани учун уларнинг ҳаммаси ҳам кичик. Шу сабабли математик кутилишдан жуда фарқ қиладиган қийматлар мавжуд бўлса-да, улар кичик эҳтимолликдир. Агар дисперсия анча катта бўлса, бу нарса тасодифий миқдорнинг математик кутилишдан катта четланадиган анча катта эҳтимоллик қийматлари мавжудлигини кўрсатади.

2-мисол. Агар A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги p га тенг бўлса, у ҳолда A ҳодисанинг битта синовда рўй бериш сонининг математик кутилиши, дисперсияси ва ўртача квадратик четланишини топинг.

Ечиш. X тасодифий миқдор A ҳодисанинг бу синовда рўй бериш сони бўлсин. У ҳолда унинг тақсимот қатори ушбу кўринишда бўлади:

$$X = \left\{ \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline p & q \end{array} \right. .$$

Шунинг учун

$$M(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p,$$

$$D(X) = (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot q = q^2 p + p^2 q = qp(q+p) = pq,$$

$$\sigma(x) = \sqrt{pq}.$$

Тасодифий миқдорнинг дисперсияси унинг квадрати ўлчовига, ўртача квадратик четланиши эса тасодифий миқдорнинг ўлчовига эга бўлишини айтиб ўтамиз.

24-§. Дисперсияни ҳисоблаш учун формула

Дисперсияни ҳисоблаш учун кўпинча ушбу формуладан фойдаланиш қулай бўлади:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X), \tag{24.1}$$

яъни дисперсия тасодифий миқдор квадрати математик кутилиши билан унинг математик кутилиши квадрати орасидаги айирмага тенг.

Исботи. $D(X) = M(X - M(X))^2 = M(X^2 - 2X \cdot M(X) + M^2(X)) = M(X^2) - M(2X \cdot M(X)) + M(M^2(X)) = M(X^2) - 2 \cdot M^2(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X)$.

Исботда биз математик кутилишнинг хоссаларидан ҳамда $M(X)$ ва $M^2(X)$ нинг ўзгармас сонлар эканлигидан фойдаландик.

Мисол. X тасодифий миқдорнинг дисперсиясини (24.1) формула бўйича ҳисобланг:

$$X = \left\{ \begin{array}{c|c|c} -2 & 4 & 6 \\ \hline 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{array} \right.$$

Ечиш. $M(X) = -2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}5 = 3{,}2,$

$M(X^2) = 4 \cdot 0{,}3 + 16 \cdot 0{,}2 + 36 \cdot 0{,}5 = 22{,}4,$

$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 22{,}4 - 10{,}24 = 12{,}16.$

Дисперсиянинг хоссалари.

1-хосса. Ўзгармас миқдорнинг дисперсияси нолга тенг, яъни

$$D(C) = 0. \qquad (24.2)$$

Исботи. C ўзгармас миқдорни 22-§ даги каби C га тенг ягона қийматни 1 га тенг эҳтимоллик билан қабул қиладиган тасодифий миқдор деб қараймиз. Унинг математик кутилиши ўзига, яъни C га тенг. Шу сабабли $D(C) = (C - C)^2 \cdot 1 = 0.$

2-хосса. Ўзгармас кўпайтувчини квадратга кўтариб дисперсия белгисидан ташқарига чиқариш мумкин, яъни ушбу формула ўринли:

$$D(kX) = k^2 D(X). \qquad (24.3)$$

Исботи: $D(kX) = M(kX - M(kX))^2 = M(kX - kM(X))^2 =$
$= M(k(X - M(X)))^2 = M(k^2(X - M(X))^2) = k^2 M(X - M(X))^2 =$
$= k^2 D(X).$

3-хосса. Чекли сондаги боғлиқмас тасодифий миқдорлар йиғиндисининг дисперсияси улар дисперсияларининг йиғиндисига тенг:

$$D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n). \qquad (24.4)$$

Исботни иккита боғлиқмас X ва Y тасодифий миқдорлар учун ўтказамиз. (24.1) формулага асосан ва математик кутилишнинг хоссаларидан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} D(X+Y) &= M(X+Y)^2 - M^2(X+Y) = M(X^2 + 2XY + Y^2) - \\ &- (M(X) + M(Y))^2 = M(X^2) + 2M(X)\,M(Y) + M(Y^2) - M^2(X) - \\ &- M^2(Y) - 2M(X)\,M(Y) = (M(X^2) - M^2(X)) + \\ &+ (M(Y^2) - M^2(Y)) = D(X) + D(Y), \end{aligned}$$

ана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

4-хосса. Боғлиқмас тасодифий миқдорлар айирмасининг дисперсияси улар дисперсияларининг йиғиндисига тенг, яъни

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y). \qquad (24.5)$$

Исботи. $D(X - Y) = D(X + (-1)Y) = D(X) + D((-1)Y) =$
$= D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y).$

25-§. Бошланғич ва марказий моментлар

1-таъриф. *X тасодифий миқдорнинг s-тартибли бошланғич моменти деб,* X^s миқдорнинг математик кутилишига айтилади, яъни

$$\alpha_s = M(X^s). \qquad (25.1)$$

Дискрет тасодифий миқдор учун бу формула

$$\alpha_s = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i \tag{25.2}$$

кўринишда, узлуксиз тасодифий миқдор учун эса

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)\,dx \tag{25.3}$$

кўринишда бўлади.

Хусусан, $\alpha_1 = M(X)$, $\alpha_2 = M(X^2)$ ва, демак, (24.1) формулани бундай ёзиш мумкин:

$$D(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2. \tag{25.4}$$

Марказий момент таърифини беришдан олдин янги «марказланган тасодифий миқдор» тушунчасини киритамиз.

m_x математик кутилишли X тасодифий миқдор берилган бўлсин. X тасодифий миқдорга мос марказланган $\overset{\circ}{X}$ тасодифий миқдор деб, X миқдорнинг ўзининг математик кутилишидан четланишига айтилади, яъни

$$\overset{\circ}{X} = X - m_x. \tag{25.5}$$

$M(\overset{\circ}{X}) = 0$ эканини таъкидлаб ўтамиз ((22.11) формулага қаранг).

2-таъриф. *X тасодифий миқдорнинг s-тартибли марказий моменти* деб, марказланган $\overset{\circ}{X}$ тасодифий миқдорнинг s-тартибли бошланғич моментига айтилади, яъни

$$\beta_s = M(\overset{\circ}{X})^s = M(X - m_x)^s. \tag{25.6}$$

Дискрет тасодифий миқдор учун бу формула

$$\beta_s = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^s p_i \tag{25.7}$$

кўринишни, узлуксиз тасодифий миқдор учун эса

$$\beta_s = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^s f(x)\,dx \tag{25.8}$$

кўринишни олади. Хусусан $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = D(X)$.

β_3 марказий момент амалиётда асимметрияни тавсифлаш учун, β_4 эса тақсимотнинг «қиялигини» тавсифлаш учун ишлатилади.

Бошланғич ва марказий моментларни боғловчи ушбу муносабатларни келтириб чиқариш қийин эмас:

$$\beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2,$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3, \tag{25.9}$$

$$\beta_4 = \alpha_4 - 3\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4.$$

Бу формулаларни келтириб чиқаришни машқ сифатида ўқувчига тавсия қиламиз.

Изоҳ. Бу параграфда қаралган моментларни кузатиш маълумотлари бўйича ҳисобланган моментлардан (уларни эмпирик моментлар деб аталади) фарқли ўлароқ назарий моментлар деб аталади.

26- §. Биномиал тақсимот

1. Агар X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни

$$X = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & \ldots & k & n \\ \hline q^n & npq^{n-1} & \ldots & C_n^k p^k q^{n-k} & p^n \end{array} \right. \qquad (26.1)$$

кўринишда бўлса, X биномиал қонун бўйича тақсимланган дейилади. $q^n + npq^{n-1} + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + p^n = (p+q)^n = 1$ бўлишини айтиб ўтамиз.

Бернулли схемасида X тасодифий миқдор ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги бир хил ва p га тенг бўлган n та боғлиқмас синовда A ҳодисанинг рўй беришлар сонини ифодаласин. Бу ҳолда, илгари кўрсатилганидек, $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, яъни X миқдор биномиал тақсимотга эга.

1-мисол. Нишонга қарата учта ўқ узилди. Битта ўқ узишда нишонга теккизиш эҳтимоллиги $p = 0{,}4$. X тасодифий миқдор — нишонга тегишлар сони. Унинг тақсимот қонунини ёзинг.

Ечиш. X тасодифий миқдор биномиал тақсимотга эга ва унинг мумкин бўлган қийматлари 0, 1, 2 ва 3. Шунинг учун

$$P(X = k) = \frac{3!}{k!\,(3-k)!} \cdot (0{,}4)^k \cdot (0{,}6)^{3-k}.$$

Бундан

$$P(X = 0) = 0{,}216;\ P(X = 1) = 0{,}432;\ P(X = 2) = 0{,}288;$$
$$P(X = 3) = 0{,}064.$$

X тасодифий миқдорнинг тақсимоти ушбу кўринишда бўлади:

$$X = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0{,}216 & 0{,}432 & 0{,}288 & 0{,}064 \end{array} \right. .$$

II. Асосий сонли характеристикалари. Биномиал тақсимланган X тасодифий миқдорни ҳар бирида A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги p га тенг бўлган n та боғлиқмас синовда рўй беришлар сони деб қараш мумкин бўлганлиги учун уни боғлиқмас тасодифий миқдорлар йиғиндиси кўринишида бундай ифодалаймиз:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

бу ерда X_i — шу A ҳодисанинг i-синовда рўй бериши сони

($i = 1, 2, \ldots, n$). Илгари биз $M(X_i) = p$, $D(X_i) = pq$ бўлишини кўрсатган эдик. Шу сабабли

$$M(X) = M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots +$$
$$+ M(X_n) = p + p + \ldots + p = np,$$
$$D(X) = D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots +$$
$$+ D(X_n) = pq + pq + \ldots + pq = npq,$$
$$\sigma(X) = \sqrt{npq}.$$

Пировардида қуйидагини исботсиз таъкидлаб ўтамиз: биномиал тақсимланган тасодифий миқдорнинг энг эҳтимоллик сони, агар $np + p$ бутун сон бўлмаса, $\mu = [np + p]$ га тенг; агарда $np + p$ бутун сон бўлса, у ҳолда X тасодифий миқдор қуйидаги иккита энг эҳтимоллик қийматга (модага) эга: $\mu_1 = np + p$ ва $\mu_2 = \mu_1 - 1$.

Масалан, $p = 0,6$ ва $n = 10$ бўлса, у ҳолда $np + p = 6,6$, $\mu = [6, 6] = 6$. Агар $p = 0,5$ ва $n = 9$ бўлса, у ҳолда $pn + p = 5$. Шу сабабли $\mu_1 = 5$ ва $\mu_2 = 4$.

27-§. Пуассон тақсимоти

I. Агар X тасодифий миқдор $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ қийматларни

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (\lambda > 0) \qquad (27.1)$$

эҳтимолликлар билан қабул қилса, яъни унинг тақсимоти

$$X = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 1 & 2 \ldots & \ldots & k \ldots & \ldots \\ \hline e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} & \ldots & \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & \ldots \end{array} \right.$$

кўринишда бўлса, у Пуассон қонуни бўйича тақсимланган деб аталади.

Эҳтимолликлар йиғиндиси 1 га тенглигини текшириш қийин эмас:

$$e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \ldots = e^{-\lambda} \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \right.$$
$$\left. + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!} + \ldots \right) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Қуйидагини исботлаш мумкин: агар Бернулли схемасида синовлар сони n етарлича катта, p эҳтимоллик эса кичик ($p \leqslant 0,1$) бўлса, у ҳолда ушбу тақрибий формула ўринли:

$$P(X = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ бунда } \lambda = np. \qquad (27.2)$$

Шундай қилиб, биномиал тақсимот синовлар сони катта бўлганда Пуассон тақсимотига яқинлашади.

Мисол. 800 та урчуқнинг ҳар бирида τ вақт ичида ипнинг

узилиш эҳтимоллиги 0,005 га тенг. Кўрсатилган вақт ичида роса 4 та ип узилиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Бу масалани ечишда (27.2) формулани қўллаш мумкин: чунки $n=800$ сонини катта, $p=0{,}005$ эҳтимолликни эса кичик деб ҳисоблаш мумкин. Бу формуладан фойдаланиб топамиз, $\lambda=np=800\times 0{,}005=4$;

$$P_{800}(4)\approx\frac{4^4}{4!}e^{-4}=\frac{256}{24}\cdot 0{,}0183=0{,}1952.$$

Аниқ формула бўйича ҳисоблаш 0,1959 ни беради, демак, Пуассон формуласини қўлланишдаги хатолик 0,0007 бўлади. Лаплас локал формуласи бўйича ҳисоблаш билан эса 0,2000 ни ҳосил қиламиз, демак хатолик 0,0051 бўлади, яъни Пуассон формуласидан фойдаланилганидан кўра 6 марта ортиқ бўлади.

II. Асосий сонли характеристикалари.

$$M(X)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=$$

$$=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda,$$

$$M(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\cdot P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}=$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}((k-1)+1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\left(\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right)=\lambda e^{-\lambda}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+e^{\lambda}\right)=$$

$$=\lambda e^{-\lambda}(\lambda e^{\lambda}+e^{\lambda})=\lambda^2+\lambda.$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=(\lambda^2+\lambda)-\lambda^2=\lambda,\ \sigma(X)=\sqrt{\lambda}.$$

Шундай қилиб, $M(X)=\lambda$, $D(X)=\lambda$, $\sigma(X)=\sqrt{\lambda}$.

Пуассон тақсимотида тасодифий миқдорнинг дисперсияси унинг математик кутилишига тенг.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Дискрет тасодифий миқдор математик кутилишининг таърифини беринг. Мисол келтиринг.
2. Узлуксиз тасодифий миқдор математик кутилишининг таърифини беринг. Мисол келтиринг.
3. Математик кутилишнинг эҳтимоллик маъносини айтиб беринг.
4. Математик кутилишнинг асосий хоссаларини айтиб беринг.
5. Тасодифий миқдорнинг дисперсияси деб нимага айтилади? Унинг вазифаси нимадан иборат?
6. Дисперсиянинг асосий хоссаларини айтиб беринг.
7. Ўртача квадратик четланиш деб нимага айтилади?
8. Дисперсияни ҳисоблаш формуласини ёзинг.

9. Биномиал тақсимот қонунини ёзинг ва унинг асосий сонли характеристикаларини ҳисобланг.

10. Қандай эҳтимолликлар тақсимоти Пуассон тақсимоти деб аталади ва унинг асосий сонли характеристикалари нимадан иборат?

11. 14.258—14.268, 14.317—14.326, 14.352—14.355- масалаларни ечинг.

28- §. Текис тақсимот

I. Таъриф. *Текис тақсимланган X узлуксиз тасодифий миқдор* деб зичлиги бирор $[a, b]$ кесмада ўзгармас ва $1/(b-a)$ га тенг, бу кесмадан ташқарида эса нолга тенг, яъни

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ агар } x < a \text{ бўлса}, \\ \dfrac{1}{b-a}, \text{ агар } a \leqslant x \leqslant b \text{ бўлса}, \\ 0, \text{ агар } x > b \text{ бўлса (134- шакл).} \end{cases}$$

бўлган тасодифий миқдорга айтилади.

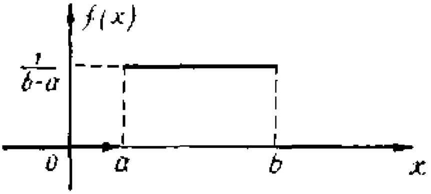
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ эканлигини текшириш осон. Ҳақиқатан,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot x \Big|_a^b = \frac{1}{b-a}\cdot(b-a) = 1.$$

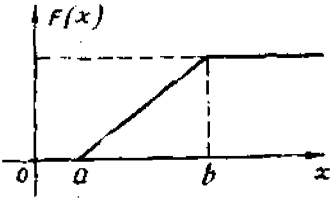
Текис тақсимот учун $F(x)$ тақсимот функциясини топамиз. Агар $a \leqslant x \leqslant b$ бўлса, у ҳолда $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int\limits_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\,dt =$

$$= \frac{1}{b-a}\, t \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

Равшанки, $x < a$ да $F(x) = 0$, $x > b$ да $F(x) = 1$. Шундай қилиб,



134- шакл.



135- шакл.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ агар } x < a \text{ бўлса}, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{ агар } a \leqslant x \leqslant b \text{ бўлса}, \\ 1, \text{ агар } x > b \text{ бўлса (135- шакл).} \end{cases}$$

II. Асосий сонли характеристикалари:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx=\int_a^b x\,\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{1}{2(b-a)}\,x^2\Big|_a^b=\frac{a+b}{2},$$

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{1}{3(b-a)}\,x^3\Big|_a^b=\frac{a^2+ab+b^2}{3},$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(a-b)^2}{12},$$

$$\sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

III. Пировардида айтиб ўтамизки, биз текис тақсимот билан ўлчаш амалиётида ўлчаш натижасини шкаланинг энг яқин бутун бўлинмасига яхлитлашда дуч келамиз. Яхлитлашдаги хатолик текис тақсимланган тасодифий миқдор бўлиб, унинг мумкин бўлган қийматлари шкала бўлинмасининг —0,5 дан +0,5 гача *оралиғида жойлашган бўлади.*

Текис тақсимот яна тасодифий тебранишлар фазаси учун ҳам хосдир. Амалиётнинг кўпгина масалаларида тасодифий амплитудали ва фазали гармоник тебранишларни ўрганишга тўғри келади. Бундай ҳолларда фаза тебраниш даври чегараларида текис тақсимланган тасодифий миқдор бўлади.

29- §. Кўрсаткичли тақсимот

I. Таъриф. Тақсимот зичлиги

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & \text{агар } x\geqslant 0 \text{ бўлса},\\ 0, & \text{агар } x<0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

кўринишда бўлган X тасодифий миқдор *кўрсаткичли тақсимотга эга* дейилади, бу ерда λ — бирор тайин мусбат сон (136- шакл).

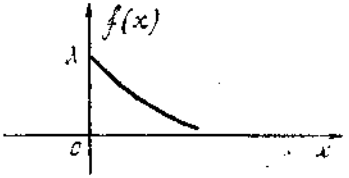
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$ шартнинг бажарилишини текширамиз. Ҳақиқатан,

$$\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\,dx=-\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}\,d(-\lambda x)=-e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=0+1=1$$

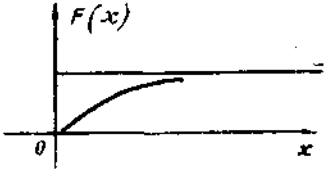
кўрсаткичли тақсимотнинг интеграл функцияси қуйидаги кўринишда эканлигини текшириш осон:

$$F(x)=\begin{cases}\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt=1-e^{-\lambda x}, & \text{агар } x\geqslant 0 \text{ бўлса},\\ 0, \text{ агар } x<0 \text{ бўлса (137- шакл).} & \end{cases}$$

II. Асосий сонли характеристикалари: а) математик кутилишни топамиз:



136- шакл.



137- шакл.

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx=\lambda\int_{0}^{+\infty} xe^{-\lambda x}\,dx.$$

Бўлаклаб интеграллаш қоидасини татбиқ этиб ва $u=x$, $dv=e^{-\lambda x}\,dx$ деб олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M(X)=x\left(-e^{-\lambda x}\right)\Big|_{0}^{+\infty}-\int_{0}^{+\infty}\left(-e^{-\lambda x}\right)dx=$$

$$=\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_{+\infty}^{0}=\frac{1}{\lambda}.$$

Шундай қилиб,

$$M(X)=1/\lambda. \qquad (29.1)$$

б) Дисперсияни ва ўртача квадратик четлашишни топамиз:

$$D(X)=M(X^2)-m_x^2=\int_{0}^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx-m_x^2=-xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}+$$

$$+2\int_{0}^{+\infty} xe^{-\lambda x}\,dx-m_x^2=2\cdot\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Шундай қилиб,

$$D(X)=1/\lambda^2, \qquad (29.2)$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=1/\lambda. \qquad (29.3)$$

III. Бирор қурилманинг (элементнинг) бузилмасдан ишлаш вақтидан иборат тасодифий миқдорни T билан белгилаймиз. Ушбу

$$R(t)=P(T\geqslant t) \qquad (29.4)$$

формула билан аниқланадиган функция ишончлилик функцияси деб аталади.

Ишончлилик функцияси ҳар бир t қиймат учун элементнинг t вақт давомида бузилмасдан ишлаш эҳтимоллигини беришини айтиб ўтамиз. Уни бундай ифодалаш мумкинлиги равшан: $R(t)=1-P(T<t)$ ёки

$$R(t)=1-F(t). \qquad (29.5)$$

Амалиётда T тасодифий миқдор кўрсаткичли тақсимотга эга бўлган масалалар жуда кўп учрайди. Бу ҳолда ишончлилик функцияси бундай кўринишда бўлади:

$$R(t)=1-F(t)=e^{-\lambda t}\,(t\geqslant 0). \qquad (29.6)$$

Мисол. T тасодифий миқдор — бирор элементнинг бузилмасдан ишлаш вақти кўрсаткичли тақсимотга эга бўлсин. Агар элементнинг ўртача ишлаш вақти 1000 соат бўлса, унинг ишлаш вақти 800 соатдан кам бўлмаслик эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Масала шартига кўра T тасодифий миқдорнинг математик кутилиши 1000 соатга тенг, демак, $\lambda=0{,}001$, $R(t)=e^{-0{,}001t}$. Шунинг учун изланаётган эҳтимоллик қуйидагига тенг:

$$P(T>800)=e^{-0{,}001\cdot 800}=e^{-0{,}8}=0{,}45.$$

30-§. Нормал тақсимот (Гаусс тақсимоти)

I. Таъриф. X тасодифий миқдорнинг тақсимот зичлиги

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\quad(\sigma>0) \qquad (30.1)$$

кўринишда бўлса, у *нормал қонун бўйича тақсимланган* деб аталади.

$f(x)$ функциянинг мусбатлиги равшан. (26.3) шартнинг бажарилишини, яъни

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx=1$$

тенгликнинг тўғрилигини текширамиз. Бу интегралда ўзгарувчини $t=\frac{x-a}{\sigma}$ деб ўзгартирамиз. У ҳолда $x=\sigma t+a$, $dx=\sigma\,dt$

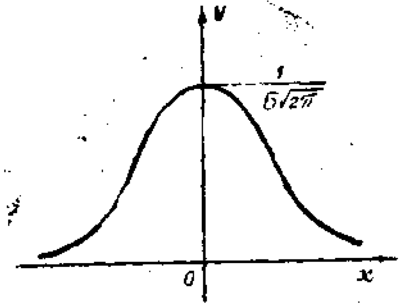
$$\text{ва}\quad\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}=1.$$

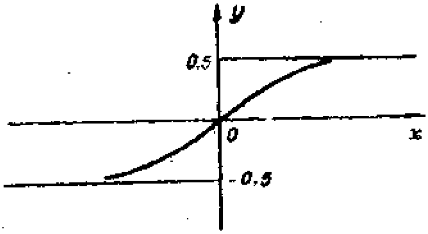
Нормал тақсимланган X тасодифий миқдорнинг тақсимот зичлиги иккита параметр — a ва σ га боғлиқлиги (30.1) формуладан кўриниб турибди.

$f(x)$ функцияни $a=0$ бўлганда қараймиз:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2\sigma^2}$$



138-шакл.



139-шакл.

ва унинг асосий хоссаларини аниқлаймиз (138-шакл).

1. Бу функция бутун сон ўқида аниқланган, узлуксиз ва мусбат.

2. Бу функция жуфт ва, демак, Oy ўқига нисбатан симметрик.

3. 0 дан $+\infty$ гача камаювчи, $-\infty$ дан 0 гача ўсувчи.

4. $x \to \pm\infty$ да графиги Ox ўққа асимптотик яқинлашади.

5. $x=0$ нуқтада функция $1/\sigma\sqrt{2\pi}$ га тенг бўлган ягона максимумга эга. σ нинг ортиши билан максимумнинг қиймати камаяди, бу функция графиги ва абсциссалар ўқи билан чегараланган юза 1 га тенг бўлганлиги учун σ ортиши билан зичлик эгри чизиғи ясситаниб боради, у аста-секин Ox ўққа яқинлашади, σ камайиши билан эса зичлик эгри чизиғи Ox ўқнинг кичик қисмида ўзининг максимуми атрофида юқорига чўзилади, кейин эса унга (Ox ўққа) тез тортилади.

6. Функция графиги $x=\sigma$ ва $x=-\sigma$ да бурилиш нуқталарига эга эканлигини иккинчи ҳосила ёрдамида аниқлаш осон.

$a \neq 0$ бўлганда $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$ зичлик графиги юқорида ясалган графикдан, агар $a > 0$ бўлса, a қадар ўнгга, агар $a < 0$ бўлса, $|a|$ қадар чапга суриш билан ҳосил қилинади.

$a=0$ ва $\sigma=1$ параметрли нормал тақсимот нормаланган нормал тақсимот деб аталади. Унинг зичлиги

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \tag{30.2}$$

га тенг. Бу функциянинг қийматлари жадвали тузилган.

II. $f(x)$ тақсимот зичлиги ва $F(x)$ тақсимот функцияси орасидаги боғланишдан қуйидагига эгамиз:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(t-a)^2/2\sigma^2} dt. \tag{30.3}$$

Нормаланган нормал тақсимот учун $F(x)$ функция ушбу кўринишга эга:

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2/2}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}} \int_{0}^{x} e^{-t^2/2}\, dt = 0{,}5 + \Phi(x).$$

Ушбу

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2/2}\, dt \qquad (30.4)$$

функция *Лаплас функцияси* деб аталади.

Қуйидаги хоссаларни кўрсатиш осон (139- шакл):

1) бу функция бутун сон ўқида аниқланган ва узлуксиз;

2) бу функция тоқ, демак, унинг графиги координаталар бошига нисбатан симметрик;

3) функция бутун сон ўқида ўсувчи;

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = 0{,}5;\ \lim\limits_{x \to -\infty} \Phi(x) = -0{,}5.$

$\Phi(x)$ функция қийматлари жадвали тузилган.

III. Асосий сонли характеристикалари.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}\, dx =$$

$$= |(x-a)/\sigma = t,\ x = \sigma t + a,\ dx = \sigma dt| =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + a)\, e^{-t^2/2}\, dt = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2/2}\, dt +$$

$$+ \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\sigma \cdot 0 + a\sqrt{2\pi}) = a.$$

Шундай қилиб,

$$M(X) = a. \qquad (30.5)$$

Сўнгра

$$D(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}\, dx = \sigma^2. \qquad (30.6)$$

Биз бу ерда $D(X)$ни ҳисоблашни келтирмасдан, уни мустақил машқ сифатида қолдирдик.

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ бўлганлиги учун $\sigma(X) = \sigma$, яъни X нормал тасодифий миқдорнинг ўртача квадратик четланиши σ параметрга тенг.

IV. Нормал тақсимланган X тасодифий миқдорнинг $[\alpha, \beta]$ интервалдаги қийматни қабул қилиш эҳтимоллигини ҳисоблаймиз:

$$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$= \left| \frac{x-a}{\sigma} = t,\ x = \sigma t + a,\ dx = \sigma\,dt \quad \begin{array}{c|c|c} x & \alpha & \beta \\ \hline t & (\alpha - a)/\sigma & (\beta - a)/\sigma \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-\alpha}{\sigma}} e^{-t^2/2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\alpha-a)/\sigma}^{0} e^{-t^2/2}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-t^2/2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-t^2/2}\,dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{(x-a)/\sigma} e^{-t^2/2}\,dt.$$

Узил-кесил қуйидагига эгамиз:

$$P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \tag{30.7}$$

бу ерда $\Phi(x)$— (30.4) формула билан аниқланадиган Лаплас функцияси.

V. Берилган четланишнинг эҳтимоллигини ҳисоблаш талаб қилинсин, яъни нормал тақсимланган тасодифий миқдорнинг математик кутилмасидан четланиши абсолют қиймати бўйича бирор мусбат сондан кичиклиги эҳтимоллигини ҳисоблаш лозим бўлсин.

(30.7) формуладан фойдаланамиз.

$$P(|X - a| < \delta) = P(a - \delta < X < a + \delta) = \Phi\left(\frac{a + \delta - a}{\sigma}\right) -$$

$$- \Phi\left(\frac{a - \delta - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) +$$

$$+ \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Шундай қилиб,

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \tag{30.8}$$

$\delta = \sigma t$ деб оламиз. У ҳолда (30.8) формуладан

$$P(|X - a| < \sigma t) = 2\Phi(t)$$

ни ҳосил қиламиз. Хусусан $t = 3$ бўлганда

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973 \tag{30.9}$$

га эгамиз, яъни нормал тақсимланган тасодифий миқдор четланишининг абсолют қиймати бўйича учланган ўртача квадратик четланишдан кичик бўлиш эҳтимоллиги 0,9973 га тенг. Демак, четланиш абсолют қийматининг учланган ўртача квадратик четланишдан ортиқ бўлиш эҳтимоллиги 0,0027 га тенг. Бундай ҳодисаларни кичик эҳтимоллик ҳодисаларнинг мумкинмаслик принципига асосан амалда мумкин бўлмаган ҳодисалар деб ҳисоблаш мумкин. Бошқача айтганда, агар тасодифий миқдор нормал тақсимланган бўлса, у ҳолда битта синов натижасида унинг четланишининг абсолют қиймати ўртача квадратик четланишнинг уч баробаридан ортиқ бўлмайди деб ишониш мумкин. Бу тасдиқ «уч сигма» қоидаси деб аталади.

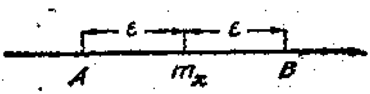
Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Текис тақсимланган тасодифий миқдор таърифини айтиб беринг.
2. Текис тақсимланган тасодифий миқдорнинг асосий сонли характеристикалари қийматларини кўрсатинг.
3. Текис тақсимланган тасодифий миқдорларга амалий мисоллар келтиринг.
4. Қандай тақсимот нормал тақсимот деб аталади?
5. Кўрсаткичли тақсимотнинг зичлик ва тақсимот функцияларининг графикларини ясанг.
6. Кўрсаткичли тақсимотнинг асосий сонли характеристикалари қийматларини кўрсатинг.
7. 14.282—14.307, 14.361—14.377- *масалаларни ечинг.*
8. Ишончлилик функцияси таърифини айтиб беринг. Кўрсаткичли тақсимотнинг ишончлилик функциясини ёзинг.
9. Қандай тақсимот нормал тақсимот деб аталади?
10. Нормал тақсимот зичлигининг графигини ясанг ва бу зичликнинг асосий *хоссаларини кўрсатиб беринг.*
11. Нормал тақсимланган тасодифий миқдор асосий сонли характеристикаларининг қийматларини кўрсатиб беринг.
12. Нормал тақсимланган тасодифий миқдорнинг берилган интервалга тушиш эҳтимоллигини ҳисоблаш учун формулани кўрсатинг.
13. Берилган четланиш эҳтимоллигини ҳисоблаш учун формулани ёзинг.
14. «Уч сигма» қоидасининг моҳияти нимадан иборат?

31-§. Чебишев тенгсизлиги

Оммавий тасодифий ҳодисаларнинг турғунлик хоссаси инсониятга жуда қадимдан маълум. У қайси соҳада намоён бўлмасин, мазмуни қуйидагича: ҳар бир айрим ҳодисанинг аниқ хусусиятлари бундай ҳодисалар мажмуининг ўртача натижасига деярли таъсир этмайди; ўртача натижадан ҳар бир айрим ҳодисада бўладиган тасодифий четланишлар ўзаро йўқотилади, силлиқланади. Айни шу ўртача натижалар турғунлиги кенг маънода тушуниладиган ушбу «катта сонлар қонунининг мазмунини ташкил қилади: катта сондаги тасодифий ҳодисаларда уларнинг ўртача натижаси тасодифийлигини йўқотади ва уни катта муқаррарлик билан башорат қилиш мумкин.

Эҳтимоллик назариясида «катта сонлар қонуни» дейилганда тор маънода бир қатор математик теоремалар тушунилади ва



140- шакл.

уларнинг ҳар бирида катта сондаги тажрибалар ўртача характеристикаларининг у ёки бу шартларда бирор маълум ўзгармас миқдорларга яқинлашиш факти белгиланади.

Катта сонлар қонуни эҳтимоллик назариясининг амалиётга татбиқлари учун назарий асос бўлади.

Чебишев тенгсизлиги. *Чекли дисперсияга эга бўлган исталган X тасодифий миқдор учун ҳар бир $\varepsilon>0$ да*

$$P(|X-m_x|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{D(X)}{\varepsilon^2}\qquad(31.1)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исботи. X тасодифий миқдор узлуксиз, $f(x)$ унинг тақсимот зичлиги бўлсин. Сонлар ўқида $AB=[m_x-\varepsilon,\ m_x+\varepsilon]$ оралиқ ажратамиз (140- шакл). У ҳолда

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^2 f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-m_x|^2 f(x)\,dx\geqslant$$

$$\geqslant\int_{|x-m_x|>\varepsilon}(x-m_x)^2 f(x)\,dx,$$

бу ерда интеграл остидаги $|x-m_x|>\varepsilon$ ёзув интеграллаш AB кесманинг ташқи қисми бўйича бажарилишини билдиради. Интеграл остидаги $(x-m_x)$ ни ε га алмаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D(X)\geqslant\int_{|x-m_x|>\varepsilon}\varepsilon^2 f(x)\,dx=\varepsilon^2\int_{|x-m_x|>\varepsilon}f(x)\,dx=\varepsilon^2 P(|X-m_x|>\varepsilon),$$

бу ердан эса узлуксиз тасодифий миқдор учун Чебишев тенгсизлиги келиб чиқади.

Дискрет тасодифий миқдор учун исбот шунга ўхшаш бўлади.

Мисол. Математик кутилиши m_x ва дисперсияси σ_x^2 бўлган X тасодифий миқдор берилган бўлсин. X миқдор ўзининг математик кутилишидан камида $3\sigma_x$ га четланиш эҳтимоллигини юқоридан баҳоланг.

Ечиш. Чебишев тенгсизлигида $\varepsilon=3\sigma_x$ деб оламиз:

$$P(|X-m_x|\geqslant3\sigma_x)\leqslant\frac{D(X)}{9\sigma_x^2}=\frac{1}{9}.$$

Бу мисолдан кўриниб турибдики, Чебишев тенгсизлиги анча қўпол баҳо берганлиги учун унинг амалиёт учун аҳамияти чекланган (нормал тақсимот учун биз юқорида аниқлаган эҳтимоллик аслида 0,003 га тенг, яъни жуда кичик).

Чебишев тенгсизлиги бошқача шаклда — қарама-қарши ҳодисага нисбатан ҳам ёзилиши мумкин: тасодифий миқдорнинг математик кутилишидан четланишининг $\varepsilon>0$ дан кичик бўлиши эҳтимоллиги

$$P(|X-m_x|<\varepsilon) \geqslant 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (31.2)$$

32-§. Боғлиқмас тасодифий миқдорлар учун катта сонлар қонуни. Чебишев теоремаси

Чебишев теоремасини кўриб чиқишдан олдин ушбу таърифни берамиз.

Таъриф. Агар исталган $\varepsilon>0$ (ҳатто исталганча кичик) учун

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n-a|<\varepsilon)=1 \qquad (32.1)$$

тенглик ўринли бўлса, $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги *a ўзгармас миқдорга эҳтимоллик бўйича яқинлашади* дейилади, яъни $\delta>0$ сонни қанчалик кичик қилиб олинмасин, шундай $N(\varepsilon, \delta)$ сон топиладики, кетма-кетликнинг барча $n>N$ номерли ҳадлари учун

$$P(|X_n-a|<\varepsilon)>1-\delta \qquad (32.2)$$

тенгсизлик бажарилади.

Чебишевнинг умумлашган теоремаси. *Агар $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ кетма-кетлик ҳар иккитаси боғлиқмас бўлган тасодифий миқдорлардан иборат бўлиб, уларнинг дисперсиялари текис чегараланган, яъни шундай C сон мавжудки, $D(X_1) \leqslant C$, $D(X_2) \leqslant \leqslant C, \ldots, D(X_n) \leqslant C, \ldots$, бўлса, у ҳолда тасодифий миқдорлар*

$$Y_n=\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}, \quad n=1, 2, \ldots \qquad (32.3)$$

кетма-кетлиги $\dfrac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}$ *сонга эҳтимоллик бўйича яқинлашади, яъни*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\right.$$

$$\left.<\varepsilon\right)=1. \qquad (32.4)$$

Бошқача айтганда, теорема бундай даъво қилади: дисперсиялари текис чегараланган етарлича катта сондаги боғлиқмас тасодифий миқдорлар учун бу тасодифий миқдорлар ўрта арифметигининг улар математик кутилишлари ўрта арифметигидан четланишининг абсолют қиймати истаганча кичик бўлишини амалда муқаррар ҳодиса деб ҳисоблаш мумкин.

Исботи. Боғлиқмас тасодифий миқдорлар йиғиндисининг математик кутилиши ва дисперсиясини топиш қоидалари бўйича қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$M(Y_n)=M\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)=\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n},$$

$$D(Y_n)=D\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)=\frac{D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n)}{n^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C+C+\ldots+C}{n^2}=\frac{C}{n}.$$

Чебишев тенгсизлигини Y_n тасодифий миқдорга татбиқ қилиб,

$$P(|Y_n - M(Y_n)| < \varepsilon) \geqslant 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу ерда эҳтимоллик 1 дан катта бўла олмаслигини ҳисобга олсак

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right)=1$$

бўлади. Теорема исбот қилинди.

Чебишев умумлашган теоремасининг таърифида биз тасодифий миқдорлар, умуман айтганда турли математик кутилишга эга деб тахмин қилдик. Амалда эса кўпинча, барча тасодифий миқдорлар бир хил математик кутилишга ва текис чегараланган дисперсияларга эга бўлади. Агар бу миқдорлардан ҳар бирининг математик кутилишини a билан белгиласак, у ҳолда уларнинг математик кутилишларининг ўрта арифметиги ҳам, равшанки a га тенг бўлади. Энди биз хусусий Чебишев теоремасини таърифлашимиз мумкин.

Чебишев теоремаси. $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *ҳар иккитаси боғлиқмас бўлган тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги бўлиб, биргаликда чегараланган дисперсияларга (истаган i учун $D(X_i) \leqslant C$) ва бир хил $M(X_i)=a$ математик кутилишларга эга бўлсин. У ҳолда $\varepsilon > 0$ қандай бўлмасин*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-a\right| < \varepsilon\right)=1 \qquad (32.5)$$

тенглик ўринли.

Бу теорема махсус исботни талаб қилмаслиги равшан.

(32.5) формуланинг моҳияти қуйидагича: теорема шартлари бажарилганда етарлича катта сондаги боғлиқмас тасодифий миқдорларнинг ўрта арифметиги тасодифий миқдор характерини йўқотади ва «деярли» нотасодифий миқдор бўлиб қолади, чунки у a га истаганча яқин қийматларни муқаррарликка яқин эҳтимоллик билан қабул қилади.

Пировардида бу хусусий Чебишев теоремасининг амалиёт учун фавқулодда муҳимлигини таъкидлаб ўтамиз: у ўлчашлар назариясида доимо ишлатиладиган ўрта арифметик қиймат қоидасига асос бўлади. Бунинг маъносини тушунтирайлик. Бирор физик катталикнинг ҳақиқий қиймати a ни (масалан, бирор деталнинг ўлчамини) топиш талаб қилинаётган бўлсин. Бунинг учун бир қатор бир-бирига боғлиқмас ўлчашлар ўтказамиз. Ҳар қандай ўлчаш бирор хатолик билан бўлади. Шунинг учун ҳар бир мумкин бўлган қиймат X_i (i — ўлчаш номери) тасодифий миқдордир. Ҳар бир ўлчашда систематик хатоликлар йўқ деб фараз қиламиз, яъни a ҳақиқий қийматдан у ёки бу томонга четланишлар тенг эҳтимолликдир. Бу ҳолда барча X_i тасодифий миқдорларнинг математик кутилиши бир хил ва a га тенг, яъни $M(X_i)=a$. Ниҳоят, ўлчашлар бирор кафолатли аниқлик билан ўтказилади, деб фараз қиламиз. Бу барча ўлчашлар учун $D(X_i)\leqslant C$ демакдир. Шундай қилиб, хусусий Чебишев теоремаси шартлари бажарилади, шу сабабли агар ўлчашлар сони етарлича катта бўлса, у ҳолда амалда муқаррарлик билан бундай тасдиқлаш мумкин: ўлчаш натижаларининг ўрта арифметик қиймати a ҳақиқий қийматдан истаганча кам фарқ қилади.

33- §. Я. Бернулли теоремаси

Я. Бернулли теоремаси катта сонлар қонунининг жуда муҳим ва тарихан биринчи шаклидир. У ҳодисанинг нисбий частотаси билан унинг эҳтимоллиги орасидаги боғланишни аниқлайди.

Бернулли теоремаси. *Бир хил шароитлардаги боғлиқмас синовлар сони чексиз ортганида қаралаётган A ҳодисанинг p^* нисбий частотаси унинг ҳар бир айрим синовдаги эҳтимоллиги p га эҳтимоллик бўйича яқинлашади, яъни*

$$\lim_{n\to\infty} P(|p^* - p| < \varepsilon) = 1, \qquad (33.1)$$

бу ерда $p^* = \frac{m}{n}$ — шу A ҳодисанинг биринчи n та синовдаги нисбий частотаси.

Бошқача айтганда, етарлича катта n ларда кузатилган p^* қиймат p эҳтимолликнинг тақрибий қийматини юқори даражада аниқлик билан беради, деб амалда ишониш мумкин.

Исботи. Ушбу тасодифий миқдорларни киритамиз:

X_1 — қаралаётган A ҳодисанинг 1- синовда рўй бериш сони;

X_2 — қаралаётган A ҳодисанинг 2- синовда рўй бериш сони ва ҳ. к. Бу тасодифий миқдорларнинг ҳаммаси бир хил тақсимот қонунига эга бўлиб, у ушбу қатор кўринишда бўлади:

$$X_i = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline p & q \end{array} \right.,$$

бу ерда $q = 1 - p$.

Уларнинг ҳар бирининг математик кутилиши p га тенг, дисперсияси эса pq га тенг (23- §, 2- мисолга қ.). Сўнгра

$$pq = p\,(1 - p) = -(p^2 - p) = 0{,}25 - (p - 0{,}5)^2 \leqslant 0{,}25,$$

яъни дисперсиялари чегараланган. Шу сабабли Чебишев теоремасига кўра

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

$p^* = \frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}$ эканини ҳисобга олсак, $\lim\limits_{n\to\infty} P(|p^*-p| < \varepsilon) = 1.$

Теорема исбот қилинди.

Пуассон теоремаси. *Боғлиқмас синовлар ўтказилаётган бўлсин ва A ҳодисанинг i- синовда рўй бериш эҳтимоллиги p_i га тенг бўлсин. У ҳолда синовлар сони чексиз ортганида A ҳодисанинг нисбий частотаси $p_1, p_2, \dots, p_n$ эҳтимолликларнинг ўрта арифметигига эҳтимоллик бўйича яқинлашади, яъни ушбу тенглик ўринли:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|p^* - \frac{p_1+p_2+\dots+p_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Бернулли теоремаси Чебишев хусусий теоремасидан қандай келтириб чиқарилган бўлса, Пуассон теоремаси Чебишев умумлашган теоремасидан шундай келтириб чиқарилади.

Марказий лимит теорема. Марказий лимит теоремалар тасодифий миқдорлар йиғиндилари кетма-кетликларининг қачон нормал тақсимотга бўйсунишини аниқлаб берувчи теоремалардир. Улар бир-бирларидан йиғиндини ҳосил қиладиган тасодифий миқдорлар тақсимот қонунларига қўйиладиган шартлар билан фарқ қилади.

Бу ерда биз марказий лимит теореманинг энг содда шаклини таърифлаймиз, у қўшилувчилар бир хил тақсимланган ҳол учун хосдир.

Теорема. *Агар $X_1, X_2, \dots, X_n$ — боғлиқмас тасодифий миқдорлар бўлиб, математик кутилиши m ва дисперсияси σ^2 бўлган бир хил тақсимот қонунига эга бўлса, у ҳолда n чексиз ортганида*

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - nm}{\sqrt{n}\,\sigma}$$

нинг тақсимот қонуни математик кутилиши 0 ва дисперсияси 1 бўлган нормал тақсимотга яқинлашади.

Муавр — Лапласнинг локал теоремаси бу теореманинг хусусий ҳоли эканини айтиб ўтамиз.

Мисол. Ҳар бири [0,4] кесмада текис тақсимланган 75 та боғлиқмас тасодифий миқдорлар қўшилмоқда. Бу тасодифий миқдорлар йиғиндисининг зичлиги учун тақрибий ифодани ёзинг ва йиғинди 120 дан 160 гача оралиқда бўлиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. $X = \sum\limits_{k=1}^{75} X_k$, бунда X_k лар [0,4] оралиқда текис тақсимланган тасодифий миқдорлар. У ҳолда

$$m_x = M(X_k) = \frac{4+0}{2} = 2,\quad D(X_k) = \frac{(4-0)^2}{12} = \frac{4}{3}.$$

Марказий лимит теореманинг шартлари бажарилмоқда. Шунинг учун тасодифий миқдор тақсимот зичлиги $f(x)$ тақрибан ормал тақсимот зичлигига тенг бўлади, яъни

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}},$$

у ерда

$$m_x=M\left(\sum_{i=1}^{75}X_i\right)=\sum_{i=1}^{75}M(X_i)=75\cdot 2=150,$$

$$\sigma_x^2=D\left(\sum_{i=1}^{75}X_i\right)=75\cdot\frac{4}{3}=100$$

ва, демак,

$$f(x)\approx\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-150)^2}{200}}.$$

Энди изланаётган эҳтимолликни ҳисоблаймиз:

$$P(120\leqslant X\leqslant 160)=\Phi\left(\frac{160-150}{10}\right)-\Phi\left(\frac{120-150}{10}\right)=$$

$$=\Phi(1)+\Phi(3)=0{,}3413+0{,}49865\approx 0{,}84.$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Катта сонлар қонунининг моҳияти нимадан иборат?
2. Чебишев тенгсизлигини ёзинг.
3. Эҳтимоллик бўйича яқинлашиш таърифини айтиб беринг.
4. Чебишев умумлашган теоремасини айтиб беринг. Уни исботланг.
5. Чебишев хусусий теоремасини айтиб беринг ва унинг амалиёт учун фавқулодда муҳимлиги нимадан иборатлигини кўрсатиб беринг.
6. Бернулли теоремасини айтиб беринг. Уни исботланг.
7. Пуассон теоремасини айтиб беринг.
8. Марказий лимит теореманинг мазмуни нимадан иборат? Унинг энг содда шаклини айтиб беринг.
9. 14.542—14.572- масалаларни ечинг.

34- §. Тасодифий аргументнинг функцияси

I. Эҳтимолликлар назариясининг бир қатор амалий масалаларида X тасодифий миқдор билан боғланган

$$Y=\varphi(X)$$

тасодифий миқдорни ўрганишга тўғри келади, бу ерда $y=\varphi(x)$ берилган функция. Масалан, автоматик системанинг чиқишидаги сигнал бу система бирор параметри тасодифий қийматининг функцияси, квадратнинг юзи $Y=X^2$ (бунда X — квадрат томонини ўлчаш натижаси) — тасодифий функция.

II. X — дискрет тасодифий миқдор бўлсин:

$$X = \left\{ \frac{x_1}{p_1} \middle| \frac{x_2}{p_2} \middle| \frac{\cdot\ \cdot\ \cdot}{\cdot\ \cdot\ \cdot} \middle| \frac{x_n}{p_n} \right. .$$

У ҳолда $Y=\varphi(X)$ тасодифий миқдорнинг математик кутилиши ва дисперсияси ушбу формулалар билан аниқланади:

$$m_y = M\,(Y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi\,(x_i)\; p_i, \qquad (34.1)$$

$$D(Y) = M\,(Y - m_y)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\varphi\,(x_i) - m_y)^2\; p_i. \qquad (34.2)$$

X узлуксиз тасодифий миқдор бўлган ҳолда эса $Y=\varphi(X)$ тасодифий миқдорнинг математик кутилиши ва дисперсияси ушбу формулалар билан аниқланади:

$$m_y = M\,(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\,(x)\, f\,(x)\, dx, \qquad (34.3)$$

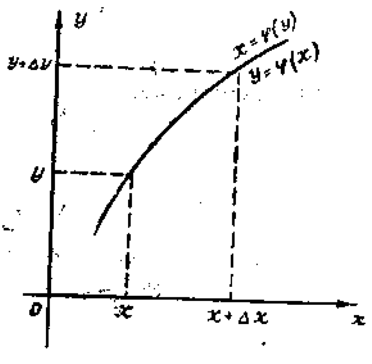
$$D(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi\,(x) - m_y)^2\, f\,(x)\, dx. \qquad (34.4)$$

III. Амалиётнинг кўпгина масалаларида, айниқса, математик статистикада, тасодифий аргумент функциясининг математик кутилиши ва дисперсиясини топишнинг ўзи кўпинча етарли бўлмайди, унинг тақсимот қонунини ҳам топиш зарур бўлади. X аргумент дискрет тасодифий миқдор бўлган ҳолни 22- § да кўриб ўтган эдик.

Бу ерда бундай масала қўйилади: тақсимот зичлиги маълум ва $f(x)$га тенг бўлган X тасодифий миқдор берилган; бошқа Y тасодифий миқдор у билан $Y=\varphi(X)$ функционал боғланиш орқали боғланган, бу ерда $\varphi(X)$— шу X миқдорнинг барча мумкин бўлган қийматлари жойлашган бирор $]a, b[$ оралиқда узлуксиз функция ($a=-\infty$, $b=+\infty$ бўлиши истисно қилинмайди). Y тасодифий миқдорнинг $g(y)$ тақсимот зичлигини топиш талаб қилинади.

Бу масалани ҳал этишда икки ҳолни қараймиз:

1) Монотон функция бўлган ҳол. Аввал $\varphi(x)$ функция юқорида кўрсатилган оралиқда монотон ўсувчи ва унга тескари $x=\psi(y)$ функция тегишли оралиқда монотон ўсувчи, узлуксиз ва дифференциалланувчи функция бўлсин. Oy ўқда $(y, y+\Delta y)$ интервални оламиз ва уни $x=\psi(y)$ функция ёрдамида



141- шакл.

Ox ўққа акслантирамиз: $(x, x+\Delta x)$ интервални ҳосил қиламиз (141- шакл).

$(y < Y < y + \Delta y)$ ва $(x < X < x + \Delta x)$ ҳодисалар эквивалент, яъни $P(y < Y < y + \Delta y) = P(x < X < x + \Delta x)$ ва, демак,

$$g(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{P(y < Y < y + \Delta y)}{\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left(\frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) = f(x) \cdot x'_y = f(x) \cdot \psi'(y).$$

Агар $f(x)$ функция монотон камаювчи бўлса, у ҳолда юқоридаги мулоҳазалар каби

$$g(y) = f\,\psi(y) \cdot |\psi'(y)|$$

ни ҳосил қиламиз. Иккала ҳолни бирлаштирамиз:

$$g(y) = f(\psi(y))\, |\psi'(y)|. \qquad (34.5)$$

1- мисол. X тасодифий миқдор $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ интервалда текис тақсимланган. $Y = \sin X$ тасодифий миқдорнинг $g(y)$ тақсимот зичлигини топинг.

Ечиш. X тасодифий миқдорнинг $f(x)$ зичлигини топамиз. X миқдор $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ интервалда текис тақсимланган, шунинг учун бу интервалда

$$f(x) = \frac{1}{\pi/2 - (-\pi/2)} = \frac{1}{\pi},$$

бу интервалдан ташқарида эса $f(x) = 0$. $y = \sin x$ $\left]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right[$ интервалда ўсувчи ва, демак, изланаётган зичликни топиш учун (34.5) формулани қўлланиш мумкин. $\psi(y) = \arcsin y$ бўлганлиги учун $\psi'(y) = 1/\sqrt{1-y^2}$. Сўнгра $f(x) = 1/\pi$ бўлгани сабабли $f(\psi(y)) = 1/\pi$. (34.5) формулага асосан $y \in]-1, 1[$ интервалда

$$g(y) = 1/\pi\sqrt{1-y^2},$$

бу интервалдан ташқарида $g(y) = 0$.

Текшириш: $\int\limits_{-1}^{1} g(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} =$

$$= \frac{2}{\pi} \arcsin y \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1.$$

2) Номонотон функция бўлган ҳол. Зичлиги $f(x)$ бўлган узлуксиз X тасодифий миқдор ва $y = \varphi(x)$ функция X миқдорнинг барча мумкин бўлган қийматлари жойлашган $]a, b[$ оралиқда дифференциалланувчи ва бўлакли-узлуксиз бўлсин.

$]a, x_1[$, $]x_1, x_2[$, $\ldots$, $]x_{k-1}, b[$ шу $\varphi(x)$ функциянинг монотонлик оралиқлари ва $\psi_1(y)$ функция $\varphi(x)$ функцияга $]a, x_1[$ оралиқда тескари функция, $\psi_2(y)$ функция $\varphi(x)$ функцияга $]x_1, x_2[$ оралиқда тескари функция бўлсин ва ҳоказо. У ҳолда $Y=\varphi(X)$ тасодифий миқдорнинг зичлиги

$$g(y)=f(\psi_1(y))\,|\psi_1'(y)|+f(\psi_2(y))\,|\psi_2'(y)|+\ldots+$$
$$+f(\psi_n(y))\,|\psi_n'(y)| \qquad (34.6)$$

формула бўйича ҳисобланиши мумкин. Бу даъвони биз исботсиз қабул қиламиз.

2-мисол. X тасодифий миқдор m_x ва σ_x параметрли нормал тақсимланган. $Y=X^2$ тасодифий миқдорнинг зичлигини топинг.

Ечиш. Бу ҳолда $\varphi(x)=x^2$, $a=-\infty$, $b=+\infty$. $y=\varphi(x)=x^2$ функция $]-\infty;\ +\infty[$ оралиқда монотон эмас. Бироқ $x\in\ ]-\infty,\ 0[$ оралиқда камаяди ва $\psi_1(y)=-\sqrt{y}$ тескари функцияга эга, $]0,+\infty[$ оралиқда эса ўсади ва $\psi_2(y)=\sqrt{y}$ тескари функцияга эга. X тасодифий миқдорнинг зичлиги

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

кўринишда эканлигини ҳисобга олиб ва (34.6) формулани татбиқ этиб, қуйидагини хосил қиламиз:

$$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2}}\cdot\left|\frac{-1}{2\sqrt{y}}\right|+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}}\cdot\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}\quad (y>0).$$

35-§. Нормал тақсимланган аргумент чизиқли функциясининг хусусиятлари

X тасодифий миқдор

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

зичлик билан нормал тақсимланган бўлсин, Y тасодифий миқдор эса у билан $Y=aX+b$ чизиқли функционал боғланиш билан боғланган бўлсин. Y тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини топиш талаб этилади. Ечимни ушбу жадвалда икки устунда жойлаштирамиз: чапдаги устунда масаланинг умумий ечимида қабул қилинган функциялар, ўнгдаги устунда эса қаралаётган масалага мос аниқ функциялар жойлаштирилган.

$f(x)$	$\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$
$y=\varphi(x)$	$y=ax+b$
$x=\psi(y)$	$x=\frac{y-b}{a}$
$\psi'(y)$	$\frac{1}{a}$
$\lvert\psi'(y)\rvert$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}$
$g(y)=f(\psi(y))\,\lvert\psi'(y)\rvert$	$g(y)=\frac{1}{\lvert a\rvert\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-m_x\right)^2}{2\sigma_x^2}}$

$g(y)$ ифодани алмаштирамиз:

$$g(y)=\frac{1}{|a|\,\sigma_x\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{[y-(am_x+b)]^2}{2a^2\sigma_x^2}}.$$

Бу эса

$$m_y=am_x+b$$
$$\sigma_y=|a|\,\sigma_x \qquad (35.1)$$

параметрли нормал қонуннинг ўзидир.

Шундай қилиб, нормал қонунга бўйсунадиган тасодифий аргументнинг чизиқли функцияси ҳам (35.1) формулалар билан аниқланадиган нормал қонунга бўйсунади.

36-§. Боғлиқмас тасодифий миқдорлар йиғиндисининг тақсимоти

Илгари биз шу бобнинг 14-§ ида иккита дискрет X ва Y тасодифий миқдорнинг

$$Z=X+Y$$

йиғиндисини ўрганиб, унинг тақсимот қонунини топган эдик. Агар X ва Y узлуксиз ва боғлиқмас тасодифий миқдорлар бўлиб, уларнинг зичликлари маълум ва мос равишда $f_1(x)$ ва $f_2(y)$ га тенг бўлса, у ҳолда $Z=X+Y$ тасодифий миқдорнинг $g(z)$ зичлик функцияси

$$g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\, f_2(z-x)\, dx \quad \text{ёки} \quad g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z-y)\, f_2(y)\, dy$$

формулаларнинг исталган биридан топилиши мумкин. Агарда X ва Y тасодифий миқдорларнинг мумкин бўлган **қийматлари манфиймас бўлса, у ҳолда** $g(z)$**ни ушбу формулалар орқали топилади:**

$$g(z)=\int_{0}^{z} f_1(x)\, f_2(z-x)\, dx \quad \text{ёки} \quad g(z)=\int_{0}^{z} f_1(z-y)\, f_2(y)\, dy.$$

Боғлиқмас тасодифий миқдорлар йиғиндисининг тақсимот зичлигини тақсимот қонунлари *композицияси* деб аталади.

Эҳтимолликлар тақсимот қонунлари композицияси яна фақат параметрлари билан фарқланадиган ўша қонуннинг ўзи бўлса, бундай тақсимот қонуни турғун тақсимот деб аталади. Нормал қонун турғунлик *хоссасига эга эканлигини* кўрсатиш қийин эмас: **нормал қонунлар композицияси яна нормал тақсимотга эга бўлади** (бу композициянинг математик кутилиши ва дисперсияси қўшилувчиларнинг мос равишда математик кутилишлари ва дисперсиялар йиғиндиларига тенг). Масалан, X ва Y боғлиқмас тасодифий миқдорлар бўлиб, нормал тақсимланган ҳамда математик кутилишлари ва дисперсиялари мос равишда $a_1=2$, $a_2=3$, $D_1=1$, $D_2=1{,}5$ бўлса, у ҳолда бу миқдорларнинг композицияси (яъни $Z=X+Y$ йиғиндининг тақсимот зичлиги) ҳам нормал тақсимланган, бунда композициянинг математик кутилиши ва дисперсияси мос равишда $a=2+3=5$, $D=1+1{,}5=2{,}5$ бўлади.

Мисол: X ва Y боғлиқмас тасодифий миқдорлар кўрсаткичли тақсимот қонунларига эга:

$$f_1(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<0,\\ \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}, & 0\leqslant x<+\infty;\end{cases} \qquad f_2(y)=\begin{cases}0, & -\infty<y<0,\\ \frac{1}{4}e^{-\frac{y}{4}}, & 0\leqslant y<+\infty.\end{cases}$$

Бу қонунларнинг композициясини, яъни $Z=X+Y$ тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ёзинг.

Ечиш. X ва Y тасодифий миқдорларнинг мумкин бўлган қийматлари манфиймас. Шу сабабли $g(z)=\int_0^z f_1(x)\, f_2(z-x)\, dx=$

$$=\int_0^z \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{4}e^{-(z-x)/4}\, dx=\frac{1}{12}e^{-z/4}\int_0^z e^{-x/12}\, dx=e^{-z/4}\left(1-e^{-z/12}\right).$$

Шундай қилиб,

$$g(z)=\begin{cases}0, & -\infty<z<0,\\ e^{-z/4}\left(1-e^{-z/12}\right), & 0\leqslant z<+\infty.\end{cases}$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Тасодифий аргументнинг функциясига доир мисоллар келтиринг.
2. Тасодифий аргумент функциясининг математик кутилиши ва дисперсияси қандай аниқланади?
3. Битта тасодифий аргумент монотон функциясининг тақсимот зичлиги қандай топилади?
4. Битта тасодифий аргумент номонотон функциясининг тақсимот зичлигини ёзинг.
5. Нормал тақсимланган аргумент чизиқли функциясининг тақсимот қонуни қандай?
6. Иккита боғлиқмас тасодифий миқдор йиғиндисининг тақсимот зичлигини ёзинг.
7. Тақсимот қонунининг турғунлик таърифини айтиб беринг.
8. 14.498—14.511, 14.528—14.536- масалаларни ечинг.

37- §. Тасодифий миқдорлар системаси ҳақида тушунча. Икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдор эҳтимоллигининг тақсимот қонуни

Шу вақтга қадар биз ҳар бири битта сон билан аниқланадиган тасодифий миқдорларни ўргандик. Бундай миқдорлар бир ўлчовли деб аталади: нуқсонли буюмлар сони, тешик диаметри, снаряднинг учиш узоқлиги ва бошқалар.

Бир ўлчовли тасодифий миқдорлардан ташқари, мумкин бўлган қийматлари иккита, учта, ..., n та сонлар билан аниқланадиган тасодифий миқдорлар ҳам ўрганилади. Бундай миқдорлар мос равишда икки, уч, ..., n ўлчовли тасодифий миқдорлар деб аталади.

Икки ўлчовли тасодифий миқдор (X, Y) орқали белгиланади. X ва Y миқдорларнинг ҳар бири ташкил этувчилар (компонентлар) деб аталади. Бу иккала тасодифий миқдор бир вақтда қаралганида иккита тасодифий миқдор системасини ҳосил қилади. Шунга *ўхшаш*, уч ўлчовли (X, Y, Z) тасодифий миқдор учта X, Y, Z тасодифий миқдор системасини аниқлайди.

1- мисол. Станокда пўлат қуймалар штампаланади. Агар назорат қилинадиган ўлчамлар унинг бўйи X ва эни Y бўлса, у ҳолда икки ўлчовли (X, Y) тасодифий миқдорга, агар бунга қўшимча Z баландлиги ҳам назорат қилинса, у ҳолда уч ўлчовли (X, Y, Z) тасодифий миқдорга эга бўламиз.

Икки ўлчовли (X, Y) тасодифий миқдорни геометрик нуқтаи назардан текисликдаги $M(X, Y)$ тасодифий нуқта сифатида, яъни координаталари тасодифий нуқта сифатида талқин этиш мумкин.

Икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни деб, бу миқдорнинг барча мумкин бўлган қийматлари ва уларнинг эҳтимоллари $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ рўйхатига айтилади. Тақсимот қонуни одатда жадвал шаклида берилади.

x_i y_j	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	p_{31}	...	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	p_{32}	...	p_{n2}
...		...	...	...	...
y_m	p_{1m}	p_{2m}	p_{3m}	...	p_{nm}

$(X = x_i,\ Y = y_j)\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$ ҳодисалар ҳар иккитаси биргаликда бўлмаган ҳодисаларнинг тўла гуруҳини ҳосил қилгани учун

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1.$$

Икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини билган ҳолда уни ташкил этувчиларининг ҳар бирининг тақсимот қонунини топиш мумкин. Ҳақиқатан,

$$(X = x_1;\ Y = y_1),\ (X = x_1;\ Y = y_2),\ \ldots,\ (X = x_1;\ Y = y_m)$$

ҳодисалар биргаликда бўлмаганлиги учун қўшиш теоремасига кўра

$$p(x_1) = P(X = x_1) = P(X = x_1;\ Y = y_1) +$$
$$+ P(X = x_1;\ Y = y_2) + \ldots + P(X = x_1;\ Y = y_m).$$

$p(x_2)$, $p(x_3)$, $\ldots$, $p(x_n)$ эҳтимолликларни ҳам шунга ўхшаш ҳисоблаймиз.

Y ташкил этувчининг тақсимот қонуни ҳам шунга ўхшаш топилади.

Мисол. Ушбу жадвал билан берилган икки ўлчовли (X, Y) тасодифий миқдорнинг X ташкил этувчисининг тақсимот қонунини топинг:

X Y	1	4	7	8
0	0,10	0,05	0,10	0,15
−1	0,07	0,12	0,10	0,06
4	0,05	0,03	0,07	0,10

Юқорида айтилганларга асосан X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни бундай бўлади:

x_i	1	4	7	8
p_i	0,22	0,20	0,27	0,31

Текшириш: $0{,}22 + 0{,}20 + 0{,}27 + 0{,}31 = 1.$

38- §. Иккита тасодифий миқдор системасининг тақсимот функцияси

Таъриф. Икки ўлчовли (X, Y) тасодифий миқдорнинг *тақсимот функцияси* деб, у ҳар бир (x, y) сонлар жуфти учун X тасодифий миқдор x дан кичик қийматни ва бунда Y тасодифий миқдор y дан кичик қийматни қабул қилиш эҳтимоллигига айтилади, яъни

$$F(x, y)=P(X<x, Y<y) \qquad (38.1)$$

Геометрик нуқтаи назардан, $F(x, y)$ функция ҳар бир (x, y) нуқта учун (X, Y) тасодифий миқдорнинг учи шу (x, y) нуқтада бўлган пастки чап квадрантга тушишини билдиради (142- шакл).

$F(x, y)$ тақсимот функциясининг асосий хоссаларини келтирамиз.

1- хосса. $0\leqslant F(x, y,)\leqslant 1$.

Бу хосса $F(x, y)$ функция ҳар бир (x, y) нуқта учун бирор эҳтимолликни ифодалаши, эҳтимоллик эса 0 ва 1 орасида бўлишидан келиб чиқади.

2- хосса. $F(x, y)$ функция аргументларнинг ҳар бири бўйича камаймайдиган функция, яъни

$$F(x_2, y)\geqslant F(x_1, y), \text{ агар } x_2>x_1 \text{ бўлса,}$$

$$F(x, y_2)\geqslant F(x, y_1), \text{ агар } y_2>y_1 \text{ бўлса.}$$

Бу хосса геометрик нуқтаи назардан жуда аён. Ҳақиқатан, x ортиши билан (квадрант чегарасининг ўнгга сурилиши билан) ёки y нинг ортиши билан (квадрант чегарасининг юқорига сурилиши билан) (X, Y) тасодифий нуқтанинг бундай квадрантга тушиш эҳтимоллиги, яъни $P(X<x;\ Y<y)=F(x,y)$ эҳтимоллик камаймайди.

3- хосса. Ушбу тенгликлар ўринли:

$$F(-\infty, y)=0,\ F(x, -\infty)=0,\ F(-\infty, -\infty)=0.$$

Ҳақиқатан ҳам, $F(-\infty, y)=P(X<-\infty, Y<y)=0$, чунки $(X<-\infty)$ мумкин бўлмаган ҳодиса бўлганлиги сабабли $(X<-\infty, Y<y)$ ҳодиса ҳам мумкин бўлмаган ҳодиса.

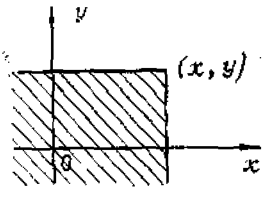
Қолган икки тенглик ҳам шунга ўхшаш исботланади.

4- хосса. Ушбу тенглик ўринли:

$$F(+\infty;\ +\infty)=1.$$

Ҳақиқатан, $(X<+\infty,\ Y<+\infty)$ муқаррар ҳодиса, шунинг учун

$$F(+\infty;\ +\infty)=P(X<+\infty;\ Y<+\infty)=1.$$



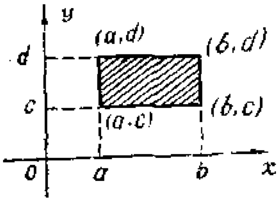
142- шакл.

5- хосса. Ушбу тенгликлар ўринли:

$$F(x;\ +\infty)=F_1(x),\ F(+\infty;\ y)=F_2(y),$$

бу ерда $F_1(x)$ икки ўлчовли тасодифий

миқдор X ташкил этувчисининг тақсимот функцияси, $F_2(y)$ эса Y ташкил этувчисининг тақсимот функцияси.



143- шакл.

Ҳақиқатан ҳам, $Y < +\infty$ муқаррар ҳодиса. Шунинг учун

$$F(x, +\infty) = P(X < x;\ Y < +\infty) = \\ = P(X < x) = F_1(x).$$

Юқоридаги тенгликларнинг иккинчиси ҳам шунга ўхшаш исботланади.

6- х о с с а. (X, Y) тасодифий миқдорнинг $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$ тўғри чизиқлар билан чегараланган тўғри тўртбурчакка (143- шакл) тушиш эҳтимоллиги

$$P(a < X < b;\ c < Y < d) = F(b,\ d) - F(a,\ d) - \\ - F(b,\ c) + F(a,\ c) \qquad (38.2)$$

формула орқали ҳисобланиши мумкин.

39- §. Икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдорнинг тақсимот зичлиги

Тақсимот функцияси $F(x, y)$ бўлган (X, Y) икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдорни қарайлик.

Т а ъ р и ф. Ушбу

$$f(x,\ y) = \frac{\partial^2 F(x,\ y)}{\partial x\, \partial y} = F'_{xy}(x,\ y)$$

тенглик билан аниқланадиган $f(x, y)$ функция икки ўлчовли узлуксиз (X, Y) тасодифий миқдор биргаликдаги тақсимотининг *зичлиги* ёки (X, Y) система тақсимотининг *зичлик функцияси* деб аталади.

Бунда $F(x, y)$ функция иккинчи тартибли аралаш $F''_{xy}(x, y)$ ҳосилага эга ва бу ҳосила бутун Oxy текисликда, чекли сондаги эгри чизиқларни истисно этганда, узлуксиз деб фараз қилинади.

Лагранж теоремасидан фойдаланиб,

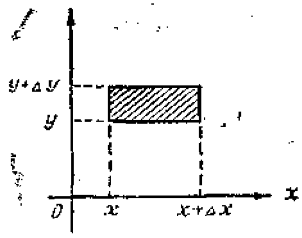
$$f(x,\ y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{F(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - F(x,\ y+\Delta y) - F(x+\Delta x,\ y) + F(x,\ y)}{\Delta x \Delta y}$$

эканини исботлаш қийин эмас. Шунинг учун (38.2) га асосан

$$f(x,\ y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(x < X < x+\Delta x,\ y < Y < y+\Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y}. \qquad (39.1)$$

Шундай қилиб, $f(x, y)$ функция ҳар бир (x, y) нуқтада сон жиҳатидан (X, Y) тасодифий нуқтанинг элементар тўғри тўртбурчакка тушиш эҳтимоллигининг унинг юзига нисбатини бу

тўғри тўртбурчак (x, y) нуқтага тортилгандаги лимитига тенг (144-шакл).



144- шакл.

(39.1) формуладан қуйидагини ҳосил қиламиз: (X, Y) тасодифий нуқтанинг учи (x, y) нуқтада ва томонлари Δx, Δy бўлган элементар тўғри тўртбурчакка тушиш эҳтимоллиги бундай ёзилиши мумкин:

$$P(x<X<x+\Delta x;\ y<Y<y+\Delta y)=$$
$$=(f(x, y)+\varepsilon)\Delta x\cdot\Delta y, \qquad (39.2)$$

бу ерда $\Delta x\to 0$ ва $\Delta y\to 0$ да $\varepsilon\to 0$.

Шунинг учун (X, Y) нуқтанинг Oxy текисликдаги бирор D соҳага тушиш эҳтимоллиги ушбу тенглик билан ифодаланади:

$$P((X, Y)\in D)=\iint\limits_{D} f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (39.3)$$

(38.2) формуладан фойдаланиб ва $F(x, y)$ функция ҳар бир (x, y) нуқтада (X, Y) тасодифий нуқтанинг учи (x, y) нуқтада бўлган пастки чап квадрантга тушиш эҳтимоллигини беришини ҳисобга олиб, $F(x, y)$ тақсимот функциясини ($f(x, y)$ тақсимот зичлиги орқали бундай ифодалашимиз мумкин:

$$F(x, y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u, v)\,du\,dv. \qquad (39.4)$$

Энди иккита тасодифий миқдор системаси тақсимот зичлигининг асосий хоссаларини келтирамиз.

1-хосса. Тақсимот зичлиги манфиймас функция, яъни

$$f(x, y)\geqslant 0.$$

Бу (39.2) формуладан айнан кўриниб турибди, чунки $\Delta x>0$, $\Delta y>0$, $\varepsilon\to 0$, тенгликнинг чап томони эса манфиймас.

2-хосса. Тақсимот зичлигидан олинган икки каррали интеграл бирга тенг:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx\,dy=1.$$

Ҳақиқатан, (39.4) формулага асосан, қуйидагига эгамиз:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx\,dy=F(+\infty;\ +\infty)=1.$$

Мисол. $x^2+y^2\leqslant 4$ доирада тақсимот зичлиги $f(x, y)=C\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right)$ формула билан берилган; доирадан ташқарида $f(x, y)=0$. а) C ўзгармасни топинг; б) (X, Y) тасодифий нуқтанинг маркази координаталар бошида бўлган радиуси бирга тенг доира ичига тушиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. а) Тақсимот зичлигининг иккинчи хоссасидан фойдаланамиз:

$$\iint\limits_{x^2+y^2<4} C(2-\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy = 1.$$

Бундан

$$C = \frac{1}{\iint\limits_{x^2+y^2<4}(2-\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy}.$$

Қутб координаталарга ўтиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$C = \frac{1}{\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 (2-\rho)\rho\, d\rho} = \frac{3}{8\pi}.$$

Шундай қилиб,

$$f(x,\ y) = \begin{cases} \frac{3}{8\pi}(2-\sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2 \leqslant 4, \\ 0, & x^2+y^2 > 4. \end{cases}$$

б) Тасодифий нуқтанинг айтилган доирага (D соҳа) тушиш эҳтимоллигини (38.3) формула бўйича топамиз:

$$P((X, Y) \in D) = \frac{3}{8\pi} \iint\limits_{x^2+y^2<1} (2-\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy.$$

Қутб координаталарга ўтиб, изланаётган эҳтимолликни топамиз:

$$P = \frac{3}{8\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (2-\rho)\rho\, d\rho = \frac{1}{2}.$$

(X, Y) системанинг тақсимот зичлигини билган ҳолда ташкил этувчиларнинг тақсимот зичлигини топиш мумкин, чунончи:

$$f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\,dy, \quad f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\,dx,$$

бу ерда $f_1(x)$ — тасодифий X миқдорнинг тақсимот зичлиги, $f_2(y)$ эса тасодифий Y миқдорнинг тақсимот зичлиги.

Қуйидагига эгамиз:

$$F_1(x) = F(x,\ +\infty) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u,\ v)\,du\,dv,$$

бундан

$$f_1(x) = F_1'(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ v)\,dv.$$

Иккинчи тенглик ҳам шунга ўхшаш топилади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Тасодифий миқдорлар системаси таърифини айтиб беринг. Мисоллар келтиринг.

2. Икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ёзинг. Ташкил этувчиларнинг тақсимот қонунлари қандай ёзилади?

3. Икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси таърифини айтинг. У геометрик нуқтаи назардан нимани англатади?

4. Тақсимот функциясининг асосий хоссаларини айтиб беринг. Уларни исботланг.

5. Икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдорнинг тақсимот зичлиги қандай таърифланади?

6. Икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдорнинг берилган соҳага тушиш эҳтимоллигини ҳисоблаш формуласини ёзинг.

7. Тақсимот функцияси зичлик функцияси орқали қандай ифодаланади?

8. Икки ўлчовли тасодифий миқдор тақсимот зичлигининг асосий хоссаларини айтиб беринг.

9. Икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдор ташкил этувчиларидан ҳар бирининг зичлик тақсимоти қандай аниқланади?

10. 14.378—14.382, 14.389—14.399, 14.404—14.413- масалаларни ечинг.

40-§. Икки ўлчовли тасодифий миқдор ташкил этувчиларининг шартли тақсимотлари

а) (X, Y) тақсимот қонуни маълум бўлган икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдор бўлсин:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	...	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	...	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	...	p_{n2}
...	...	...	...	...
y_m	p_{1m}	p_{2m}	...	p_{nm}

Айтайлик, синов натижасида X тасодифий миқдор x_i қийматни қабул қилган бўлсин; бунда Y тасодифий миқдор ўзининг мумкин бўлган $y_1, y_2, \ldots, y_m$ қийматларидан исталган бирини бирор эҳтимоллик билан қабул қилиши мумкин. Бу эҳтимоллик, умуман айтганда, $p(y_j) = P(Y = y_j)$ (бунда $j = 1, 2, \ldots, m$) эҳтимолликдан фарқ қилади.

Кўпайтириш теоремасига кўра:

$$p(x_i, y_j) = P(X = x_i; Y = y_j) = P(X = x_i) P(Y = y_j | X = x_i) =$$
$$= p(x_i) p(y_j | x_i),$$

бунда $p(x_i, y_j)$ — шу $X = x_i$ ва $Y = y_j$ ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимоллиги, $p(y_j | x_i)$ эса $Y = y_j$ ҳодисанинг $X = x_i$ ҳодиса кузатилгандаги шартли эҳтимоллиги. Бу формуладан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$p(y_j|x_i)=\frac{p(x_i\,,\,y_j)}{p(x_i\,)^j}\,.$$

Ушбу

Y	y_1	y_2	$\dots$	y_m
$P(Y|X=x_i\,)$	$p(y_1|x_i)$	$p(y_2|x_i\,)$	$\dots$	$p(y_m|x_i\,)$

Жадвал Y ташкил этувчининг $X=x_i$ даги шартли тақсимоти деб аталади.

Шартли эҳтимолликлар йиғиндиси бирга тенглигини айтиб ўтамиз:

$$p(y_1|x_i)+p(y_2|x_i)+\dots+p(y_m|x_i)=\frac{p(x_i,\,y_1)}{p(x_i\,)}+\frac{p(x_i\,,\,y_2)}{p(x_i\,)}+$$

$$+\dots+\frac{p(x_i\,,\,y_m)}{p(x_i\,)}=\frac{p(x_i\,)}{p(x_i\,)}=1.$$

Шунга ўхшаш, X миқдорнинг тайинланган $Y=y_j\,(j=1,\,2,\,\dots,\,m)$ қийматдаги шартли тақсимот қонунларини қарашимиз мумкин:

$$p(x_i|y_j)=\frac{p(x_i\,,\,y_j\,)}{p(y_j\,)}\,.$$

1-мисол. Икки ўлчовли $(X,\ Y)$ тасодифий миқдор берилган:

$Y \backslash X$	1	4	7	8
0	0,10	0,05	0,10	0,15
—1	0,07	0,12	0,10	0,06
4	0,05	0,03	0,07	0,10

X ташкил этувчининг Y ташкил этувчи $Y=4$ қиймат қабул қилди деган шартдаги шартли тақсимот қонунини топинг.

Ечиш. $p(y_3)=p(x_1,\ y_3)+p(x_2,\ y_3)+p(x_3,\ y_3)+p(x_4,\ y_3)=$ $=0{,}05+0{,}03+0{,}07+0{,}10=0{,}25.$

$$p(x_1|y_3)=\frac{p(x_1,\,y_3)}{p(y_3)}=\frac{0{,}05}{0{,}25}=0{,}20,$$

$$p(x_2|y_3)=\frac{p(x_2,\,y_3)}{p(y_3)}=\frac{0{,}03}{0{,}25}=0{,}12,$$

$$p(x_3|y_3)=\frac{p(x_3,\,y_3)}{p(y_3)}=\frac{0{,}07}{0{,}25}=0{,}28,$$

$$p(x_4|y_3)=\frac{p(x_4,\,y_3)}{p(y_3)}=\frac{0{,}10}{0{,}25}=0{,}40.$$

Текшириш: $0{,}20+0{,}12+0{,}28+0{,}40=1.$

Жавоби.

X	1	4	7	8
$P(X\mid Y=4)$	0,20	0,12	0,28	0,40

б) (X, Y) икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдор бўлсин. Ушбу

$$f_x(x/y) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{P(x<X<x+\Delta x \mid y<Y<y+\Delta y)}{\Delta x}$$

формула билан аниқланадиган $f(x|y)$ функцияни X ташкил этувчининг берилган $Y=y$ қийматдаги шартли зичлиги деб аталади. Унинг суратида X тасодифий миқдорнинг Y миқдор $]y,\ y+\Delta y[$ оралиқдан қиймат қабул қилди деган шартда $]x,\ x+\Delta x[$ оралиқда қиймат қабул қилиш эҳтимоллиги турибди.

Кўпайтириш теоремасига асосан:

$$f(x|y) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{P(x<X<x+\Delta x|y<Y<y+\Delta y)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{P(x<X<x+\Delta x;\ y<Y<y+\Delta y)}{\Delta x\cdot P(y<Y<y+\Delta y)} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{P(x<X<x+\Delta x;\ y<Y<y+\Delta y)}{\Delta x\,\Delta y}\cdot \frac{1}{\dfrac{P(y<Y<y+\Delta y)}{\Delta y}} = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}.$$

Шундай қилиб

$$f(x|y) = \frac{f(x,\ y)}{f_2(y)}. \tag{40.1}$$

Шунга ўхшаш,

$$f(y|x) = \frac{f(x,\ y)}{f_1(x)} \tag{40.2}$$

ни ҳосил қиламиз. Бу икки формуладан

$$\begin{aligned} f(x,\ y) &= f_2(y)\,f(x|y),\\ f(x,\ y) &= f_1(x)\,f(y|x) \end{aligned} \tag{40.3}$$

муносабатларни ҳосил қиламиз.

Шартли зичлик шартсиз тақсимот зичлигининг барча хоссаларига эга, хусусан,

$$f(x|y) \geqslant 0,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x|y)\,dx = 1;$$

$$f(y|x) \geqslant 0,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(y|x)\,dy = 1.$$

Бу хоссаларнинг тўғрилигини текшириб кўришни ўқувчига тавсия қиламиз.

41-§. Боғлиқ ва боғлиқмас тасодифий миқдорлар

Тасодифий миқдорларнинг боғлиқлик ва боғлиқмаслик т шунчалари эҳтимоллик назариясининг энг муҳим тушунчалардан биридир.

Узлуксиз тасодифий миқдорлар учун Y нинг X га боғлиқмаслик шарти исталган y да

$$f(y|x)=f_2(y) \qquad (41.1)$$

кўринишда ёзилиши мумкин. Агарда Y тасодифий миқдор X тасодифий миқдорга боғлиқ бўлса, у ҳолда

$$f(y|x)\neq f_2(y).$$

Тасодифий миқдорнинг боғлиқлиги ёки боғлиқмаслиги доимо ўзаролигини, яъни агар Y миқдор X га боғлиқ бўлмаса, у ҳолда X миқдор Y миқдорга боғлиқмаслигини (40.3) формулалардан фойдаланиб кўрсатамиз.

Ҳақиқатан, Y миқдор X га боғлиқ бўлмасин. У ҳолда (41.1) тенглик ўринли. Иккинчи томондан, (40.3) формулаларга асосан

$$f_2(y)f(x|y)=f_1(x)f(y|x),$$

бундан, (41.1) ни эътиборга олсак,

$$f(x|y)=f_1(x),$$

ана шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Тасодифий миқдорлар боғлиқмаслигининг содда аломатини келтирамиз, у ушбу теорема шаклида ифодаланади.

Теорема. *X ва Y тасодифий миқдорлар боғлиқмас бўлиши учун (X, Y) системанинг тақсимот зичлиги ташкил этувчи тасодифий миқдорлар зичликларининг кўпайтмасига тенг бўлиши зарур ва етарлидир:*

$$f(x,\ y)=f_1(x)\cdot f_2(y). \qquad (41.2)$$

Исботи. Зарурлиги. X ва Y боғлиқмас тасодифий миқдорлар бўлсин. У ҳолда

$$f(x,\ y)=f_1(x)\cdot f(y|x)=f_1(x)\cdot f_2(y).$$

Етарлилиги $f(x,\ y)=f_1(x)f_2(y)$ бўлсин. У ҳолда (40.1) ва (40.2) тенгликлардан фойдаланиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$f_1(x)=\frac{f(x,\ y)}{f_2(y)}=f(x|y);\quad f_2(y)=\frac{f(x,\ y)}{f_1(x)}=f(y|x).$$

Теорема исбот қилинди.

Натижа. Агар $f(x,\ y)$ тақсимот зичлигини бири фақат x га боғлиқ, иккинчиси эса фақат y га боғлиқ иккита функциянинг кўпайтмаси кўринишида ифодалаш мумкин бўлса, у ҳолда X ва Y тасодифий миқдорлар боғлиқмасдир.

Исботи. $f(x,\ y)=\alpha(x)\cdot\beta(y)$ бўлсин. У ҳолда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)\beta(y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(y)\,dy = 1;$$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)\beta(y)\,dy = \alpha(x)\int_{-\infty}^{+\infty} \beta(y)\,dy;$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)\beta(y)\,dx = \beta(y)\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)\,dx.$$

Бундан $f_1(x)\cdot f_2(y) = \alpha(x)\int_{-\infty}^{+\infty} \beta(y)\,dy\cdot\beta(y)\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)\,dx =$

$$= \alpha(x)\cdot\beta(y)\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)\,dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} \beta(y)\,dy = \alpha(x)\cdot\beta(y) = f(x,\ y).$$

Шундай қилиб, биз $f(x,\ y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$ ни ҳосил қилдик, бу эса X ва Y тасодифий миқдорларнинг боғлиқмаслигини англатади, ана шуни исботлаш керак эди.

2-мисол. Икки ўлчовли $(X,\ Y)$ тасодифий миқдор ушбу

$$f(x,\ y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2+y^2+x^2y^2)}$$

тақсимот зичлиги билан берилган. X ва Y тасодифий миқдорларнинг боғлиқ ёки боғлиқмаслигини аниқланг.

Ечиш. Бу тақсимот зичлигини ушбу кўпайтма кўринишида ифодалаш мумкин:

$$f(x,\ y) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\cdot\frac{1}{\pi(1+y^2)} = f_1(x)\cdot f_2(y).$$

У ҳолда натижага асосан X ва Y миқдорлар боғлиқмас.

3-мисол. Икки ўлчовли дискрет $(X,\ Y)$ тасодифий миқдор берилган:

X / Y	2	4	5
1	0,03	0,07	0,10
3	0,20	0,10	0,50

X ва Y тасодифий миқдорларнинг боғлиқмаслигини кўрсатинг.

Ечиш. $X=2$, $X=4$, $X=5$ ҳодисаларнинг эҳтимолликларини топамиз:

$$P(X=2|Y=1) = \frac{P(X=2;\ X=1)}{P(Y=1)} = \frac{0{,}03}{0{,}03+0{,}07+0{,}10} = 0{,}15,$$

$$P(X=4|Y=1)=\frac{P(X=4;\ Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{0,07}{0,03+0,07+0,10}=0,35,$$

$$P(X=5|Y=1)=\frac{P(X=5;\ Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{0,10}{0,03+0,07+0,10}=0,50.$$

Олинган натижаларни ушбу жадвалга ёзамиз:

x	2	4	5
$P(X=x_i)$	0,23	0,17	0,60
$P(X=x_i \mid Y=1)$	0,15	0,35	0,50

Жадвалдан кўриниб турибдики, $P(X=x_i) \neq P(X=x_i \mid Y=1)$.

Бу эса X ва Y тасодифий миқдорлар боғлиқ деб хулоса чиқариш учун етарлидир.

42-§. Корреляция моменти ва корреляция коэффициенти

Таъриф. X ва Y тасодифий миқдорларнинг корреляция моменти (ёки *ковариацияси*) деб, қуйидаги сонга айтилади:

$$K_{xy}=M((X-m_x)(Y-m_y)). \tag{42.1}$$

Дискрет X ва Y тасодифий миқдорлар учун бу формула ушбу кўринишни олади:

$$K_{xy}=\sum_{i,j}(x_i-m_x)(y_j-m_y)p_{ij}.$$

X ва Y узлуксиз тасодифий миқдорлар учун формула бундай бўлади: $K_{xy}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)(y-m_y)f(x,\ y)\,dx\,dy.$

Корреляция моменти ифодаси математик кутилиш хоссалари асосида бундай алмаштирилиши мумкин:

$$M((X-m_x)(Y-m_y))=M(X\cdot Y-m_x\cdot Y-m_yX+m_x\cdot m_y)=$$
$$=M(XY)-M(m_xY)-M(m_yX)+M(m_x\cdot m_y)=M(X\cdot Y)-$$
$$-m_xM(Y)-m_y\cdot M(X)+m_xm_y=M(XY)-M(X)M(Y)-$$
$$-M(Y)\cdot M(X)+M(X)\cdot M(Y)=M(XY)-M(X)M(Y).$$

Шундай қилиб,

$$K_{xy}=M(XY)-M(X)\cdot M(Y). \tag{42.2}$$

K нинг маъноси ва вазифасини ойдинлаштирамиз. K_{xy} корреляция моменти X ва Y тасодифий миқдорлар орасидаги боғланишни тавсифлашини кўрсатамиз. Шу мақсадда ушбу теоремани исботлаймиз.

Теорема. *Боғлиқмас тасодифий миқдорлар учун корреляция моменти нолга тенг.*

Исботи. Боғлиқмас тасодифий миқдорлар учун $M(XY)$—$M(X).M(Y)$ эканлигини ҳисобга оладиган бўлсак, теореманинг исботи (42.2) формуладан дарҳол келиб чиқади.

K_{xy} миқдор X ва Y миқдорларни ифодалайдиган ўлчов бирликларига боғлиқ, шу сабабли унинг ўзи боғланиш кўрсаткичи бўла олмайди. Шу муносабат билан корреляция моментининг бу миқдорлар ўртача квадратик четланишлари кўпайтмасига нисбатидан иборат бўлган ўлчамсиз миқдордан фойдаланилади:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}. \tag{42.3}$$

Бу нисбат корреляция коэффициенти деб аталади.

Корреляция коэффициенти абсолют қиймати бўйича бирдан ортиқ бўлмаслигини, яъни

$$-1 \leqslant r_{xy} \leqslant 1 \tag{42.4}$$

ни исботсиз келтирамиз.

Корреляция коэффициенти таърифидан ва олдинги теоремадан ушбу теорема келиб чиқади.

Теорема. *Агар X ва Y тасодифий миқдорлар боғлиқмас бўлса, у ҳолда уларнинг корреляция коэффициенти нолга тенг.*

Бироқ бунга тескари хулоса қилиш мумкин эмаслигини айтиб ўтамиз: миқдорлар ҳатто функционал боғланган бўлса ҳам, лекин уларнинг корреляция коэффициенти нолга тенг бўлиши мумкин. Масалан, X миқдор тақсимоти ординаталар ўқига нисбатан симметрик жойлашган бўлсин, демак, $M(X)=0$. Сўнгра $Y=X^2$ бўлсин. У ҳолда X нинг симметриклигига асосан,

$$M(YX) = M(X^3) = 0 = M(X) \cdot M(Y)$$

ва, демак, Y миқдор X нинг функцияси бўлишига қарамасдан, $K_{xy} = 0$ ҳамда $r_{xy} = 0$.

Таъриф. Корреляция моменти (ва, демак, корреляция коэффициенти ҳам) нолга тенг тасодифий миқдорлар *корреляцияланмаган миқдорлар* деб аталади.

Сўнгги теоремадан кўринадики, тасодифий миқдорларнинг боғлиқмаслигидан уларнинг корреляцияланмаганлиги келиб чиқади, ундан кейин келтирилган мисолдан эса тескари тасдиқнинг, умуман айтганда, тўғри эмаслиги келиб чиқади.

Пировардида яна бир теоремани келтирамиз, у тасодифий миқдорлар орасидаги боғланишни тавсифлашда корреляция коэффициентининг аҳамиятини яна ҳам батафсил ойдинлаштириб беради.

Теорема. *Агар Y тасодифий миқдор X тасодифий миқдорнинг чизиқли функцияси, яъни $Y = aX + b$ бўлса, у ҳолда агар $a > 0$ бўлса, $r_{xy} = 1$, агарда $a < 0$ бўлса, у ҳолда $r_{xy} = -1$ бўлади.*

Исботи. Қуйидагига эгамиз: $K_{xy} = M((X - m_x)(Y - m_y)) =$ $= M((X - m_x)(aX + b - am_x - b)) = aM((X - m_x)^2) = aD_{(X)};$

$$D(Y) = D(aX + b) = a^2 \cdot D(X) = a^2 \sigma_x^2; \quad \sigma_y = |a| \cdot \sigma_x.$$

Бу натижаларни (42.3) формулага қўйиб, қуйидагини оламиз:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \ \sigma_y} = \frac{a \cdot \sigma_x^2}{|a| \, \sigma_x^2} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1, & a > 0 \text{ да,} \\ - & a < 0 \text{ да.} \end{cases}$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Икки ўлчовли дискрет тасодифий миқдор ташкил этувчиларининг шартли тақсимотлари қандай топилади? Мисол келтиринг.
2. Икки ўлчовли узлуксиз тасодифий миқдор ташкил этувчиларининг шартли тақсимотлари қандай топилади?
3. Қандай тасодифий миқдорлар боғлиқ, қандай тасодифий миқдорлар боғлиқмас деб аталади?
4. Узлуксиз тасодифий миқдорлар боғлиқмаслигининг зарурий ва етарлилик шартини ва ундан келиб чиқадиган натижани айтиб беринг.
5. Корреляция моменти таърифини айтиб беринг. Корреляция коэффициенти деб нимага айтилади?
6. Боғлиқмас тасодифий миқдорлар учун корреляция коэффициенти нимага тенг?
7. Корреляция коэффициенти қайси чегараларда ўзгариши мумкинлигини кўрсатинг. Чизиқли боғлиқ тасодифий миқдорлар учун корреляция коэффициенти нимага тенг?
8. Қандай тасодифий миқдорлар корреляцияланмаган деб аталади? Тасодифий миқдорларнинг корреляцияланмаганлиги билан боғлиқмаслиги орасида қандай боғланиш борлигини кўрсатинг.
9. 14.389—14.403, 14.416—14.422- масалаларни ечинг.

43- §. Марков занжирлари. Ўтиш эҳтимолликлари

26- § да боғлиқмас синовлар кетма-кетлиги, хусусан Бернулли схемаси ва полиномиал схема қаралган эди.

Энди боғлиқ синовлар кетма-кетликлари билан танишамиз. $E_1, E_2, \dots, E_k, \dots$ идишлар тўплами берилган ва ҳар бир идишга $E_1, E_2, \dots, E_k, \dots$ белгили шарлар солинган бўлсин. j- идишдан E_k белгили шарни олиш эҳтимоллиги p_{jk} бўлсин.

Биринчи синовда битта идиш танланади. E_l идишни танланиш эҳтимоллиги p_l га тенг. Биринчи танланган идишдан шар тасодифий олинади, агар бу шар E_j белгили бўлса, у ҳолда кейинги шар E_j идишдан олинади ва ҳоказо.

Равшанки, $(E_{k_0} \ E_{k_1} \dots E_{k_n})$ идишлар кетма-кетлигининг пайдо бўлиш эҳтимоллиги

$$P\{(E_{k_0} E_{k_1} \dots E_{k_n})\} = p_{k_0} \, p_{k_0 k_1} \, p_{k_1 k_2} \dots p_{k_{n-1} k_n}. \qquad (43.1)$$

Бу идиш моделини умумлаштирамиз. Синовнинг мумкин бўлган натижалари тўплами $E_1, E_2, \dots, E_k, \dots$ ни қарайлик. Синов бошида

$E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$ натижаларнинг эҳтимолликлари мос равишда $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ бўлсин.

Таъриф. *Бир жинсли Марков занжири* деб, ҳар бир навбатдаги синовнинг натижаси фақат ундан олдинги синовнинг натижасигагина боғлиқ бўлган синовлар кетма-кетлигига айтилади.

Шундай қилиб, ҳар бир синовлар жуфти (E_i, E_k) га p_{ik} шартли эҳтимоллик мос келади, яъни бирор синовда E_k натижанинг олдинги синовда E_i натижа рўй берди деган шартда рўй беришининг шартли эҳтимоллиги p_{ik} га тенг.

У ҳолда иккита, учта, тўртта ва ҳоказо синовлар мос натижалар кетма-кетликларининг эҳтимолликлари ушбу формулалар билан берилади:

$$\begin{gathered} P\{(E_i, E_k)\} = p_i p_{ik}, \\ P\{(E_i, E_j, E_k)\} = p_i p_{ij} p_{jk}, \qquad (43.2) \\ P\{(E_i, E_j, E_k, E_r)\} = p_i p_{ij} p_{jk} p_{kr}, \\ P\{(E_{i_0}, E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_n})\} = p_{i_0} p_{i_0 i_1} \ldots p_{i_{n-1}, i_n}. \end{gathered}$$

1-мисол. Тасодифий кўчишлар. Тўғри чизиқда иккала томонга чексиз давом этадиган бутун нуқталар кетма-кетлиги ...—2, 1, 0, 1, 2,... да кўчишни қарайлик. Бир қадамда зарра фақат қўшни бутун нуқтага кўчиши мумкин бўлсин. Бундай тасодифий кўчиш Марков занжири бўлади, шу билан бирга бунда $k \neq i + 1$ бўлса, $p_{ik} = 0$.

Агар $E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$ натижалар тўплами тўла гуруҳ ҳосил қилса, у ҳолда биринчи синовда E_k нинг рўй бериш эҳтимоллиги ушбу шартни қаноатлантиради:

$$\sum_k p_k = 1, \quad p_k \geqslant 0 \text{ барча } k \text{ лар учун.} \qquad (43.3)$$

Агар бирор синовда E_i натижа рўй берган бўлса, у ҳолда кейинги синовда $E_1, E_2, \ldots$ натижаларнинг исталган бири рўй бериши мумкин, демак, $p_{i1} + p_{i2} + \ldots + p_{ik} + \ldots = 1$, $p_{ik} \geqslant 0$, исталган i да.

Мумкин бўлган E_k натижалар одатда системанинг мумкин бўлган ҳолатлари деб аталади. Агар n-синов натижасида E_k рўй берган бўлса, у ҳолда n-қадам E_k ҳолатга келтирди деб айтилади, p_{ik} эҳтимоллик E_i дан E_k га ўтиш эҳтимоллиги дейилади.

Исталган натижалар кетма-кетлигининг эҳтимоллигини (43.2) формула бўйича ҳисоблаш учун эҳтимолликларнинг бошланғич тақсимоти p_i ларни ва E_j ҳолатдан E_k ҳолатга ўтиш эҳтимолликлари p_{jk} ларни билиш лозим.

p_{jk} эҳтимолликлар ўтиш эҳтимолликлари деб аталади ва у ўтиш эҳтимолликлари матрицасини ҳосил қилади:

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1k} & \dots \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2k} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{j1} & p_{j2} & \dots & p_{jk} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \qquad (43$$

Утиш эҳтимолликлари матрицаси квадрат матрицадир. Б матрицанинг элементлари манфиймас ҳамда ҳар бир сатрдаг элементлар йиғиндиси (43.3) шартга асосан 1 га тенг.

Элементлари бу шартларни қаноатлантирадиган матриц стохастик матрица деб аталади. Истаган стохастик матриц ўтиш матрицаси бўлиб хизмат қилиши мумкин.

2-мисол. Система иккита ҳолат: E_1 ва E_2 дан фақат биттасини олиши мумкин бўлсин. E_1 ҳолатдан E_2 ҳолатга ўтиш эҳтимоллиги p га тенг, E_2 ҳолатдан эса E_1 ҳолатга ўтиш эҳтимоллиги q га тенг, у ҳолда ўтиш эҳтимолликлари матрицаси

$$P=\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

кўринишда бўлади, чунки ҳар бир сатрдаги элементлар йиғиндиси 1 га тенг бўлиши керак.

Мазкур схема ушбу тасодифий кўчишлар модели орқали амалга оширилиши мумкин.

Зарра бирор тўғри чизиқ бўйлаб ўзгармас тезлик билан ҳаракатланади, бироқ ҳаракат йўналиши тўсатдан ўзгариши мумкин, шу билан бирга агар зарра ўнгга томон ҳаракатланаётган бўлса, у ҳолда ҳаракат йўналишининг ўзгариш эҳтимоллиги вақтнинг ҳар бир моментида ўзгармас ва p га тенг. Агар зарра чапга томон ҳаракатланаётган бўлса, у ҳолда ҳаракат йўналишининг ўзгариш эҳтимоллиги вақтнинг ҳар бир моментида q га тенг. Шунга мувофиқ, ҳаракат йўналишининг сақланиш эҳтимолликлари ўнг томон ҳаракатда $1-p$ га, чапга томон ҳаракатда эса $1-q$ га тенг.

3-мисол. Ютилишли тасодифий кўчиш. $E_0, E_1, \dots, E_N, \dots$ системанинг барча мумкин бўлган ҳолатлари бўлсин. E_0 ва E_N ҳолатлардан ташқари исталган E_i ҳолатдан ё E_{i+1} ҳолатга p эҳтимоллик билан, ёки E_{i-1} ҳолатга $1-p=q$ эҳтимоллик билан ўтиш мумкин.

Агар $k \neq i \pm 1$ бўлса, система E_i ҳолатдан E_k ҳолатга ўта олмайди.

Агар система E_0 ёки E_N ҳолатга тушган бўлса, у доимо ўзгармай қолади.

Бу ҳолда ўтиш эҳтимолликлари матрицаси қуйидагича бўлади:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (43.5)$$

Бундай схема зарранинг $[O, N]$ кесманинг нуқталари бўйича кўчиш модели орқали амалга оширилади, бунда зарра исталган ички нуқтадан битта қадамда фақат қўшни нуқталарга кўчиши мумкин, кесманинг охирларида эса зарранинг ютилиши юз беради. Агар зарранинг ҳаракати берилган $k \in [O, N]$ нуқтада бошланса, у ҳолда бошланғич эҳтимоллик тақсимоти ушбу кўринишда бўлади:

$$p_k = 1; \ p_i = 0, \ i \neq k.$$

Агар бошланғич ҳолат тасодифий танланса, у ҳолда бошланғич эҳтимоллик тақсимоти $p_k = \frac{1}{N+1}$ формула билан берилади.

44-§. Лимит эҳтимолликлар ҳақидаги теорема. Стационар ҳолатлар

p_{ij} эҳтимолликлар системанинг битта қадамда E_i ҳолатдан E_j ҳолатга ўтиш эҳтимоллигини белгилайди. Системанинг E_i ҳолатдан E_j ҳолатга роса n та қадамда ўтиш эҳтимоллигини $p_{ij}^{(n)}$ орқали белгилаймиз. У ҳолда $p_{ij}^{(n)}$ эҳтимоллик системанинг бошланғич ҳолати E_i бўлган шартида n-қадамда E_j ҳолатга тушишининг шартли эҳтимолидир.

Эҳтимолликларни қўшиш теоремасига асосан $p_{ij}^{(n)}$ эҳтимоллик E_i дан E_j га олиб борадиган барча n та қадамли йўллар эҳтимолликлари йиғиндисига тенг. Чунончи

$$p_{ij}^{(1)} = p_{ij},$$

$$p_{ij}^{(2)} = p_{i1} p_{1j} + p_{i2} p_{2j} + \ldots + p_{ik} p_{kj} + \ldots + p_{in} p_{nj} = = \sum_{k=1}^{N} p_{ik} p_{kj}.$$

Математик индукция усули бўйича ушбу умумий формулани исбот қилиш мумкин:

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{N} p_{ik} p_{kj}^{(n)}. \qquad (44.1)$$

Ана шу математик индукция усулидан яна бир марта фойдаланиб,

$$p_{ij}^{(n+m)}=\sum_{k=1}^{N}p_{ik}^{(n)}p_{kj}^{(m)} \tag{44.2}$$

эканлигини исботлаш мумкин. Бу тенгликни бундай талқин этиш мумкин: агар система биринчи n та қадамдан сўнг оралиқ E_k ҳолатга эришган бўлса, у ҳолда E_k ҳолатдан кейинги E_j ҳолатга ўтиш эҳтимоллиги E_k ҳолатга қандай эришилганлигига боғлиқ эмас.

Ушбу матрица ҳам стохастик матрица бўлади:

$$P(n)=\begin{pmatrix} p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & \dots & p_{1N}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{N1}^{(n)} & p_{N2}^{(n)} & \dots & p_{NN}^{(n)} \end{pmatrix}. \tag{44.3}$$

(44.1), (44.2) ва (44.3) тенгликларни матрица шаклида ёзиб, қуйидагини оламиз:

$$P(1)=P,$$
$$P(2)=P\cdot P=P^2$$
$$\dots\dots\dots$$
$$P(n+1)=P\cdot P^n=P^{n+1},$$
$$\dots\dots\dots$$
$$P(n+m)=P^mP^n=P^{n+m}.$$

Шундай қилиб,

$$P(n)=P^n. \tag{44.4}$$

1-теорема. *Агар бирор n_0 дан бошлаб P^{n_0} матрицанинг барча $p_{ij}^{(n_0)}$ элементлари мусбат бўлса, у ҳолда ушбу лимитлар мавжуд:*

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=u_j. \tag{44.5}$$

(44.5) сонлар *лимит эҳтимолликлар* деб аталади.

2-теорема. *u_k лимит эҳтимолликлар ушбу тенгламалар системасини қаноатлантиради;*

$$\sum_{k=1}^{N}u_k=1,$$
$$u_k=\sum_{i=1}^{N}u_i\,p_{ik},\quad k=\overline{1,N}. \tag{44.6}$$

Эслатма. (44.6) тенгламалар матрица шаклида ушбу кўринишга эга:

$$U=U\cdot P,\ \text{бу ерда}\ U=(u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_N), \tag{44.7}$$

Таъриф. $u_1, u_2, \dots, u_N$ эҳтимолликлар тақсимоти *стационар тақсимот* деб аталади.

5-мисол. $p_1, \ldots, p_N$ бошланғич эҳтимоллик тақсимоти бўлсин, яъни p_i — нолинчи синовда E_i натижанинг эҳтимоллиги. У ҳолда системанинг n-қадамда E_k ҳолатга ўтишининг шартсиз эҳтимоллиги тўла эҳтимоллик формуласига кўра

$$p_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{N} p_i\, p_{ik}^{(n)} \tag{44.8}$$

га тенг.

Жараён тайинланган E_i ҳолатдан бошланади деб ҳисоблаймиз, у ҳолда $p_i = 1$; $p_k = 0$, $k \neq i$. У ҳолда (44.8) формулага асосан $p_k^{(n)} = p_{ik}^{(n)}$. n ортиши билан бошланғич тақсимотнинг таъсири сусайиб боришини сезиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, 1-теоремадан ушбу лимитларнинг мавжудлиги келиб чиқади:

$$\lim_{n\to\infty} p_k^{(n)} = \lim_{n\to\infty} p_{ik}^{(n)} = u_k.$$

Бирор шартларда бошланғич тақсимотдан қатъи назар E_k ҳолатнинг эҳтимоллиги u_k га интилади.

Иккинчи томондан, агар бошланғич тақсимот стационар, яъни $p_k = u_k$, $k = \overline{1, N}$ бўлса, у ҳолда (44.8) дан

$$p_k^{(1)} = u_k \text{ ва } p_k^{(n)} = u_k$$

бўлиши келиб чиқади.

Стационар жараённинг физик маъносини англаб олиш учун бир хил турдаги тасодифий кўчадиган N та заррачани тасаввур этайлик. n-қадамда E_k ҳолатда бўладиган заррачалар ўртача сони $N \cdot p_k^{(n)}$ га тенг. Лимит теоремага кўра $n \to \infty$ да

$$Np_k^{(n)} \to Nu_k.$$

Агар вақтни дискрет ва $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ қийматларни қабул қилади деб ҳисобласак, у ҳолда узоқ вақт ўтиши билан зарралар тўплами мувозанат ҳолатга келади, яъни ҳар бир алоҳида зарра доимо кўчиб турса-да ва бу якка тартибдаги жараён учун лимит теорема ҳеч қандай натижа бермаса-да, лекин ҳар бир дискрет вақт моменти t да E_k ҳолатларнинг ҳар бирида бўлган зарралар сони амалда ўзгармас бўлади ва тақрибан Nu_k га тенг.

6-мисол. Ютилишли тасодифий кўчишни қараймиз. Ўтиш эҳтимоллари матрицаси ушбу кўринишда бўлади (3-мисол):

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{44.9}$$

Лимит теореманинг қўлланилиш шарти $p_{ij}^{(n_0)} > 0$ ни текшириш жуда қийин. Бироқ бу қаралаётган мисолда стационар эҳтимолликларни топиш учун (44.6) тенгламаларни ошкор кўринишда ёзиш мумкин. (44.7) формулага асосан $U = U \cdot P$, бу ерда P — (44.9) матрица. Ушбу тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= u_1 + qu_2,\\
u_2 &= q \cdot u_3,\\
u_3 &= pu_2 + qu_4,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
u_N &= pu_{N-1} + u_N.
\end{aligned}
$$

$\sum\limits_{k=1}^{N} u_i = 1$ бўлганлиги учун бу система $U = (u_1, 0, 0, \ldots, u_N)$ ечимга эга: u_1 ва u_N лар $u_1 + u_N = 1$ шартдан танланади. Шундай қилиб, ютилишли тасодифий кўчиш албатта стационар ҳолатга эга бўлади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Бир жинсли Марков занжири таърифини айтиб беринг.
2. Ўтиш эҳтимолликлари матрицаси нимага тенг?
3. Бир жинсли Марков занжирига мисол келтиринг.
4. Стохастик матрица қандай аниқланади?
5. E_i ҳолатдан n та қадамда E_j ҳолатга ўтиш шартли эҳтимоллигини ҳисоблаш учун формулани келтиринг.
6. Лимит эҳтимолликларнинг мавжудлиги ҳақидаги теоремани айтиб беринг.
7. Қандай тақсимот стационар тақсимот деб аталади?
8. Лимит эҳтимолликларни ҳисоблаш ҳақидаги теоремани айтиб беринг.
9. Бир жинсли Марков занжирининг бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга бир қадамда ўтиш эҳтимолликлари матрицаси

$$
P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}
$$

бўлса, уни бир ҳолатдан 2-ҳолатга 4 қадамда ўтиш эҳтимолликлари матрицасини топинг.

45-§. Бош тўплам. Танланма ва уни ҳосил қилиш усуллари

Математик статистика — статистик маълумотларни тўплаш, гуруҳларга ажратиш (агар улар жуда кўп бўлса), уларни таҳлил қилиш усулларини ишлаб чиқиш ва шулар асосида хулосалар чиқаришдан иборатдир. У ёки бу ҳодисаларни (жараёнларни) математик статистика усуллари билан ўрганиш фан ва техника илгари сурадиган жуда кўп масалаларни ҳал этишда муҳим омил бўлиб хизмат қилади.

Бирор аломатига кўра текшириш лозим бўлган бир жинсли объектларнинг катта бир гуруҳини қараймиз. Масалан, маълум турдаги маҳсулот стандартликка текшириляпти. Равшанки, назорат учун шу турдаги маҳсулотнинг ҳаммасини ёппасига текшириш кўп ҳолларда мақсадга мувофиқ эмас, чунки текшириш натижасида маҳсулот исроф бўлиши ёки яроқсизланиши мумкин. Бошқа бир мисол сифатида аҳолининг сони, уларнинг ёши бўйича тақсимланиши, миллий таркиби тўғрисида маълумотларни талаб қилувчи ижтимоий-иқтисодий тадбирларни режалаштиришни олиш мумкин. Бу маълумотларни йиғиш учун ҳар 10 йилда аҳоли рўйхатга олинади, яъни ялпи текшириш ўтказилади, қолган вақтларда эса зарур маълумотни йиғиш учун танланма сўровлар ўтказилади. Текширишнинг бундай усули *танланма усул* дейилади.

Текширилаётган аломат бўйича ўрганиладиган барча объектлар тўплами *бош тўплам* дейилади. Бош тўпламдаги объектлар сони унинг *ҳажми* дейилади. Бош тўпламнинг ҳажми чекли ёки чексиз бўлиши мумкин.

Танланма тўплам ёки *танланма* деб текшириш учун олинган объектлар тўпламига айтилади. Танланмадаги объектлар сони унинг *ҳажми* дейилади.

Агар танланма тўплам бош тўпламнинг деярли барча хусусиятларини ўзида сақласа, у ҳолда бундай танланма *репрезентатив (ваколатли) танланма* дейилади.

Катта сонлар қонунидан танланма репрезентатив бўлиши учун у тасодифий бўлишлиги келиб чиқади. Агар танланма репрезентатив бўлмаса, у ҳолда танланма устида чиқарилган хулосани бош тўпламга татбиқ қилиш нотўғри хулосага олиб келиши мумкин.

Танланмалар тузилишига кўра иккига бўлинади: такрорий ва нотакрорий танланмалар. Агар танланган объект кузатиш ўтказилгандан сўнг бош тўпламга қайтарилса, танланма *такрорий танланма* дейилади. Бунда ҳар бир танланган объект кейинги танлашда такрор иштирок этиши мумкин.

Агар кузатиш учун танланган объект бош тўпламга қайтарилмаса, танланма *нотакрорий танланма* дейилади.

Танлаш усулларига кўра танланма тасодифий, механик, типик ва серияли танланмаларга бўлинади.

Бош тўпламдан объектлар таваккалига битталаб олинадиган танланма *тасодифий танланма* дейилади. Тасодифий танланмани қуйидагича ҳосил қилиш мумкин: агар бош тўплам ҳажми чекли бўлса, унга кирувчи объектлар номерлаб чиқилади. Сўнгра номерлар ёзилган карточкалар яхшилаб аралаштирилади, кейин таваккалига битталаб, n га карточка олинади. Бош тўпламнинг танланган номерли ҳадлари тасодифий танланмани ташкил этади.

Номерланган n та карточкани танлаш учун, шунингдек, тасодифий сонлар жадвалидаги кетма-кет келадиган n та сондан ҳам фойдаланиш мумкин.

Бош тўпламдаги объектлар механик равишда бир нечта гуруҳга бўлиниб, сўнгра ҳар бир гуруҳдан биттадан объект олиш орқали ҳосил қилинган танланма *механик танланма* дейилади.

Механик танланма кўпинча репрезентатив бўлмайди. Масалан, технологик жараённинг ўзига хослиги туфайли ҳар бир ўнинчи деталь энг сифатсиз бўлса, у ҳолда бош тўпламдан олинган 10% ли механик танланма мазкур партиядаги яроқсиз деталларнинг аниқ пропорциясини нотўғри акс эттиради.

Бош тўпламдаги объектлар намунавий ўзаро кесишмайдиган «сериялар»га ажратилган бўлиб, ҳар бир сериядан тасодифий танланма олинган бўлса, бундай танланма *намунавий танланма* дейилади.

Масалан, пахта тозалаш заводига 100 та бригададан пахта келтирилади. Агар келтирилган пахтанинг сифатини текшириш учун ҳар бир бригаданинг маҳсулотидан таваккалига 5% дан олинса, биз намунавий танланмага эга бўламиз.

Бош тўпламдаги объектлар ўзаро кесишмайдиган «сериялар»га ажратилган бўлиб, танланма бир нечта сериялардан иборат бўлса, ундай танланма *серияли танланма* дейилади.

Масалан, юқорида келтирилган мисолда 5% бригада танлаб олиниб, уларнинг ялпи маҳсулоти текширилса, бунда серияли танланмага эга бўламиз.

46- §. Математик статистиканинг асосий масалалари

Айтайлик, бош тўпламнинг X белгисини ўрганиш талаб қилинаётган бўлсин. Бу X белги тасодифий миқдор сифатида талқин қилинади. Агар миқдорий белги ўрганилаётган бўлса, X тасодифий миқдорнинг қиймати белги қиймати билан бир хил бўлади, агар сифат белгиси ўрганилаётган бўлса, X тасодифий миқдорнинг қиймати 0 ва 1 қийматларни қабул қилиши мумкин, масалан:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{агар «сифатли» бўлса,} \\ 0, & \text{агар «сифатсиз» бўлса,} \end{cases}$$

Фараз қилайлик, X белгили бош тўпламнинг тақсимот функцияси $F(x)$ бўлсин. У ҳолда n ўлчовли $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ тасодифий вектор n ҳажмли танланма бўлиб, унда X_i тасодифий миқдорлар (кўпинча) ўзаро боғлиқмас ва бир хил $F(x)$ тақсимотга эгадир. Танланманинг тажрибада кузатилган қийматини $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ билан белгилаймиз.

Энди математик статистиканинг асосий масалалари билан танишиб чиқамиз.

1. $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ танланманинг кузатилган қийматидан фой-

аланиб, X белгили бош тўпламнинг номаълум тақсимот функциясини баҳолаш.

Математик статистиканинг ушбу масалани ечиш билан шуғулланувчи бўлими *нопараметрик баҳолаш назарияси* деб аталади.

2. Фараз қилайлик, X белгили бош тўпламнинг тақсимот функцияси k та номаълум параметрга боғлиқ бўлган аниқ кўринишдаги функция бўлсин. $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ танланманинг кузатилган қийматидан фойдаланиб, k та ноъмалум параметрларни баҳолаш математик статистиканинг навбатдаги масаласидир.

Математик статистикада бу масалани ечиш билан шуғулланувчи бўлим *параметрик баҳолаш назарияси* дейилади.

3. Фараз қилайлик, баъзи мулоҳазаларга асосланиб X белгили бош тўпламнинг тақсимот функциясини $F(x)$ деб ҳисоблаш мумкин бўлсин, шу $F(x)$ функция ҳақиқатан ҳам X белгили бош тўпламнинг тақсимот функциясими ёки йўқми деган савол статистик гипотеза ҳисобланади.

У ёки бу гипотезани текшириш учун танланманинг кузатилган $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ қийматидан фойдаланилади. Агар олинган маълумотлар ҳақиқатан ҳам назарий жиҳатдан кутилган маълумотлар билан мос келса, у вақтда ўша гипотезани қабул қилиш учун асос бўлади, акс ҳолда гипотезани қабул қилишга асос бўлмайди.

Математик статистиканинг бу масалани ечиш билан шуғулланувчи бўлими *статистик гипотезалар назарияси* дейилади.

47-§. Вариацион қатор. Эмпирик тақсимот функцияси

Фараз қилайлик, X белгили бош тўпламнинг тақсимот функцияси $F(x)$ бўлиб, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тўпламдан олинган танланманинг кузатилган қиймати бўлсин. Кузатилган x_i қийматлар варианталар дейилади. Ўсиб бориш тартибида ёзилган варианталар кетма-кетлиги

$$x_1^* \leqslant x_2^* \leqslant \ldots \leqslant x_n^*$$

вариацион қатор дейилади.

Агар танланмада x_1 варианта n_1 марта, x_2 варианта n_2 марта, $\ldots$, x_k варианта n_k марта (бу ерда $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$) кузатилган бўлса, у ҳолда $n_1, n_2, \ldots, n_k$ сонлар *частоталар*, $W_i = \frac{n_i}{n}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ сонлар *нисбий частоталар* дейилади.

Танланманинг *статистик ёки эмпирик тақсимоти* деб варианталар, уларга мос частоталар ёки нисбий частоталар рўйхатига айтилади:

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\ldots$	n_k

ёки

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
W_i	W_1	W_2	$\ldots$	W_k

1-мисол. Танланма частоталарининг эмпирик тақсимоти берилган:

x_i	-1	0	1	2
n_i	5	3	7	5

Нисбий частоталар эмпирик тақсимотини топинг.

Ечиш. $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 5 + 3 + 7 + 5 = 20$.

$$W_1 = \frac{5}{20} = 0{,}25;\ W_2 = \frac{3}{20} = 0{,}15;\ W_3 = \frac{7}{20} = 0{,}35;\ W_4 = \frac{5}{20} = 0{,}25.$$

x_i	-1	0	1	2
W_i	0,25	0,15	0,35	0,25

Шу билан бирга

$$0{,}25 + 0{,}15 + 0{,}35 + 0{,}25 = 1.$$

Таъриф. Варианталарнинг x сондан кичик бўлган қийматлари нисбий частотаси

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

эмпирик *тақсимот функцияси* дейилади, бу ерда n — танланманинг ҳажми, n_x — x дан кичик бўлган варианталар сони.

2-мисол. Қуйидаги эмпирик тақсимот берилган:

x_i	-1	0	1	2
W_i	0,25	0,15	0,35	0,25

Эмпирик тақсимот функциясини тузинг ва унинг графигини чизинг.

Ечиш:

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, \text{ агар } x \leqslant -1 \text{ бўлса}, \\ 0{,}25, \text{ агар } -1 < x \leqslant 0, \text{ бўлса}, \\ 0{,}25 + 0{,}15 = 0{,}4, \text{ агар } 0 < x \leqslant 1 \text{ бўлса}, \\ 0{,}25 + 0{,}15 + 0{,}35 = 0{,}75, \text{ агар } 1 < x \leqslant 2 \text{ бўлса}, \\ 0{,}25 + 0{,}15 + 0{,}35 + 0{,}25 = 1, \text{ агар } x > 2 \text{ бўлса}. \end{cases}$$

Топилган қийматлар асосида графикни ясаймиз (145-шакл).

Эмпирик тақсимот функцияси X белгили бош тўпламнинг номаълум $F(x)$ тақсимот функциясининг тақрибий қиймати сифатида қаралиши мумкин.

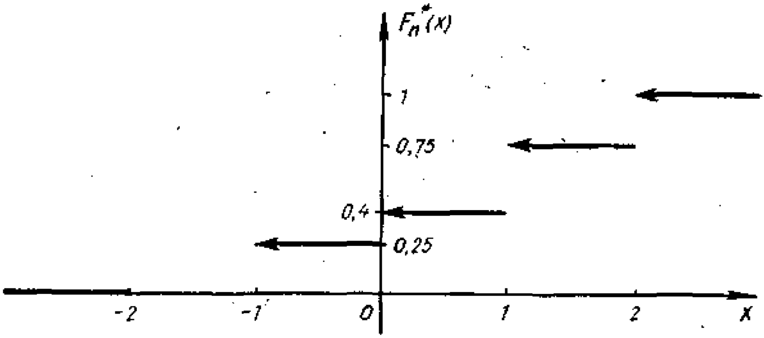
Ҳақиқатан ҳам, Бернулли теоремасига кўра

$$\lim_{n\to\infty}(P(|F_n^*(x) - F(x)| < \varepsilon) = 1$$

экани келиб чиқади.

Эмпирик тақсимот функцияси, тақсимот функциясининг барча *хоссаларига эга:*

1. $0 \leqslant F_n^*(x) \leqslant 1$.



145- шакл.

2. $F_n^*(x)$ монотон камаймайдиган функция.

3. Агар x_1 энг кичик варианта ва x_k энг катта варианта бўлса, у ҳолда

$$F_n^*(x)=\begin{cases}0, \text{ агар } x\leqslant x_1 \text{ бўлса,}\\ 1, \text{ агар } x>x_k \text{ бўлса}\end{cases}$$

бўлади.

48- §. Полигон ва гистограмма

Частоталар полигони деб кесмалари $(x_1^*,\ n_1)$, $(x_2^*,\ n_2)$, ..., $(x_k^*,\ n_k)$ нуқталарни туташтирувчи синиқ чизиққа айтилади. Частоталар полигонини ясаш учун абсциссалар ўқига x_i^* ларни, ординаталар ўқига эса уларга мос n_i частоталарни қўямиз. Сўнгра $(x_i^*,\ n_i)$ нуқталарни кетма-кет туташтириб, частоталар полигонини ҳосил қиламиз.

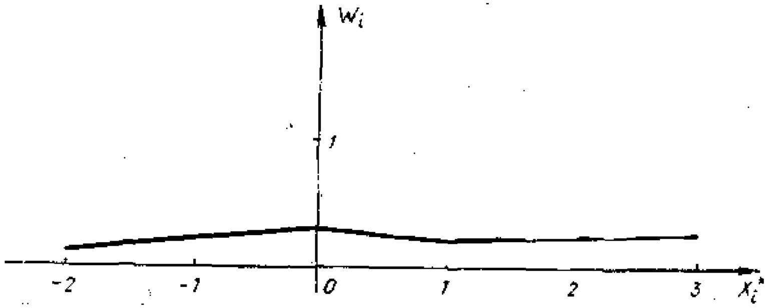
Нисбий частоталар полигони деб кесмалари $(x_1^*,\ W_1)$, $(x_2^*,\ W_2)$, ..., $(x_k^*,\ W_k)$ нуқталарни туташтирувчи синиқ чизиққа айтилади. Нисбий частоталар полигонини ясаш учун абсциссалар ўқига x_i^* ларни, ординаталар ўқига эса мос равишда W_i нисбий частоталарни қўямиз. Сўнгра $(x_i^*,\ W_i)$ нуқталарни кетма-кет туташтириб, нисбий частоталар полигонини ҳосил қиламиз.

1-мисол. Ушбу эмпирик тақсимотнинг нисбий частоталар полигонини ясанг:

x_i^*	−2	0	1	3
W_i	0,1	0,3	0,2	0,4

Ечиш. Берилганларга асосланиб полигонни ҳосил қиламиз (146- шакл).

Кузатишлар сони катта бўлганда ёки X узлуксиз белги бўлган-



146- шакл.

да гистограмма ясаш мақсадга мувофиқдир. Бунинг учун X белгининг кузатиладиган қийматлари тушадиган оралиқ бир хил h узунликдаги Δ_i интервалларга бўлинади ва ҳар бир интервал учун n_i— Δ_i интервалга тушган варианталар сони топилади.

Частоталар гистограммаси деб асослари h узунликдаги интерваллардан, баландликлари эса $\frac{n_i}{h}$, $i=\overline{1,k}$ дан иборат бўлган тўғри тўртбурчаклардан тузилган поғонасимон шаклга айтилади.

Нисбий частоталар гистограммаси деб асослари h узунликдаги интерваллардан, баландликлари эса $\frac{W_i}{h}=\frac{n_i}{nh}$, $i=\overline{1,\ k}$ дан иборат бўлган тўғри тўртбурчаклардан тузилган поғонасимон шаклга айтилади.

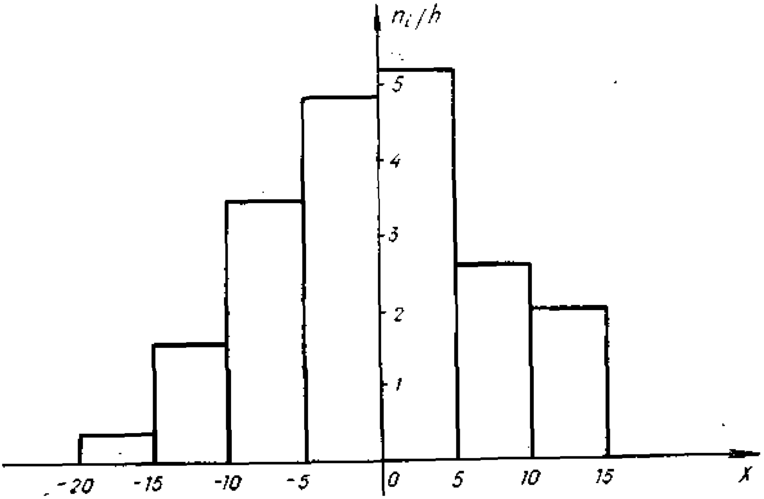
2- мисол. Ушбу танланманинг частоталар ва нисбий частоталар гистограммасини ясанг:

Δ_i	(—20; —15)	(—15; —10)	(—10, —5)	(—5; 0)	(0; 5)	(5; 10)	(10; 15)
n_i	2	8	17	24	26	13	10
W_i	0,02	7,08	0,17	0,24	0,26	0,13	0,1

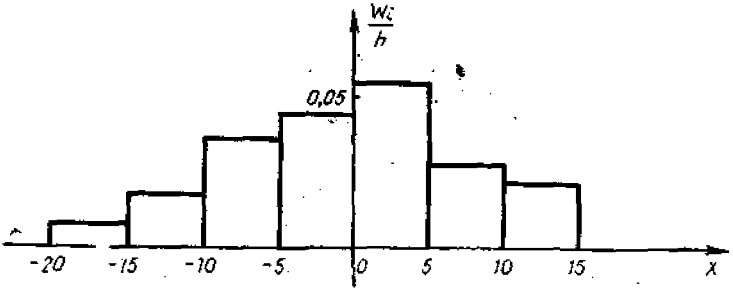
Ечиш. $h=5$

Δ_i	(—20; —15)	(—15; —10)	(—10;—5)	(—5; 0)	(0; 5)	(5; 10)	(10; 15)
$\frac{n_i}{h}$	0,4	1,6	3,4	4,8	5,2	2,6	2
$\frac{W_i}{h}$	0,004	0,016	0,034	0,048	0,052	0,026	0,020

Берилган танланмалар асосида частоталарнинг (147- шакл) ва нисбий частоталарнинг (148- шакл) гистограммасини ҳосил қиламиз.



147- шакл.



148- шакл.

Таърифга кўра нисбий частоталар гистограммасининг юзи

$$S=\sum_{i=1}^{k} h\cdot\frac{W_i}{h}=\sum_{i=1}^{k} W_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i=\frac{1}{n}\cdot n=1$$

эканини кўрамиз.

Равшанки, агар нисбий частоталар гистограммасининг учларини силлиқ чизиқ билан туташтириб чиқсак, бу чизиқ тақрибан X белгининг тақсимот функциясига мос келувчи тақсимот зичлигининг графигини акс эттиришини кўрамиз.

Агар танланма ҳажмини орттириб, интерваллар узунлиги h ни нолга интилтирсак, тақсимот зичлигининг графигига борган сари яқинлашамиз.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Бош тўплам нима?
2. Танланмага таъриф беринг.
3. Танланманинг қандай турларини биласиз?
4. Вариацион қаторга мисол келтиринг.
5. Эмпирик тақсимот функциясига таъриф беринг.
6. Эмпирик тақсимот функциясининг графиги қандай кўринишга эга?
7. Полигон ва гистограмма қандай ясалади?
8. 15.1—15.21- масалаларни ечинг.

49- §. Тақсимот функцияси параметрларининг нуқтавий баҳолари

Фараз қилайлик, X белгили бош тўпламнинг тақсимот функцияси $F(x, \theta)$ бўлиб, θ — номаълум параметр бўлсин. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ шу бош тўпламдан олинган танланма бўлиб, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ танланманинг кузатилган қиймати бўлсин.

Таъриф. Танланманинг ихтиёрий $L(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ функцияси *статистика* дейилади.

Қуйида кўп учрайдиган статистикаларга мисоллар келтирамиз.

1- мисол. $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ — *танланманинг ўрта қиймати.*

2- мисол. $\overline{S^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ — тенгламанинг дисперсияси.

Нуқтавий баҳолашда номаълум θ параметр учун шундай $L(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ статистика қидириладики, $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ни θ параметр учун тақрибий қиймат деб олинади. Бу ҳолда $L(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ статистика θ параметрнинг *баҳоси* дейилади.

3- мисол. $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ — танланманинг ўрта қиймати X белгили бош тўплам математик кутилиши $a = M(X)$ нинг баҳоси сифатида қаралиши мумкин. Бу ҳолда a нинг тақрибий қиймати сифатида $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ олинади.

50- §. Баҳоларнинг асослилиги ва силжимаганлиги тўғрисида тушунчалар

$L(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ статистика номаълум θ параметрнинг баҳоси бўлсин. Бундан маълумки, номаълум параметр учун кўпгина баҳолар мавжуд экан. Бу баҳолардан қайси бири θ параметрга яқинроқ эканини билиш учун баҳоларнинг айрим талабларни қаноатлантириши текширилиши лозим.

1- таъриф. Агар $ML(X_1, \ldots, X_n) = \theta$ шарт бажарилса, $L(X_1, \ldots, X_n)$ баҳо θ параметр учун *силжимаган баҳо* дейилади.

Силжимаган баҳо систематик хатолардан ҳоли бўлишга кафолат беради.

1-теорема. $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ баҳо X белгили бош тўплам математик кутилишининг силжимаган баҳосидир.

Исботи. $M(X)=a$ бўлсин. $X_1, X_2, \dots, X_n$ лар ўзаро боғлиқмас ва бир хил тақсимланганлиги учун $M(X_1)=M(X_2)=\dots=$ $=M(X_n)=a$ бўлади.

Математик кутилишнинг хоссаларидан фойдаланиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$M(\overline{X})=M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}M\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)=\frac{1}{n}\cdot na=a,$$

демак, $M(\overline{X})=a$, яъни $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ баҳо $a=M(X)$ учун силжимаган баҳо бўлади.

Силжимаган баҳо баҳоланаётган параметр учун ҳар доим ҳам яхши яқинлашишлар беравермайди. Шунинг учун баҳога, шунингдек, асослилик ва самаралилик талаблари ҳам қўйилади.

2-таъриф Агар $L(X_1, X_2, \dots, X_n)$ θ параметр учун баҳо бўлса ва ҳар қандай $\varepsilon>0$ учун

$$\lim_{n\to\infty}P(|L(X_1, \dots, X_n)-\theta|\leqslant\varepsilon)=1 \qquad (50.1)$$

тенглик бажарилса, $L(X_1, X_2, \dots, X_n)$ баҳо θ параметр учун *асосли баҳо* дейилади.

2-теорема. *$L(X_1, \dots, X_n)$ баҳо θ параметрнинг асосли баҳоси бўлиши учун*

$$M(L(X_1, \dots, X_n))=\theta, \qquad (50.2)$$

$$\lim_{n\to\infty}D(L(X_1, \dots, X_n))=0 \qquad (50.3)$$

бўлиши етарлидир

Теореманинг исботи Чебишев теоремасидан келиб чиқади.

3-теорема. *$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ баҳо $a=M(X)$ учун асосли баҳо бўлади.*

Исботи. Юқорида 1- теоремада $M(\overline{X})=a$ бўлишини кўрсатган эдик. Шундай қилиб, (50.2) шарт бажарилади. Сўнгра, дисперсиянинг хоссаларидан фойдаланиб,

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{1}{n^2}\cdot n\, D(X) = \frac{D(X)}{n}$$

ни ҳосил қиламиз.

Бу ердан $\lim\limits_{n\to\infty} D(\overline{X}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{D(X)}{n} = 0$

экани келиб чиқади, яъни $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ баҳо $a = M(X)$ учун асосли баҳодир.

3-таъриф. Агар

$$\lim_{n\to\infty} M(L(X_1, \ldots, X_n)) = \theta$$

ўринли бўлса, $L(X_1, \ldots, X_n)$ баҳо θ параметрнинг *асимптотик силжимаган баҳоси* дейилади.

4-теорема. $\overline{S^2} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ *баҳо X белгили бош тўпламнинг дисперсияси учун асимптотик силжимаган баҳосидир.*

Исботи. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ тасодифий миқдорлар ўзаро эркли ва бир хил тақсимланган, яъни

$$M(X_i) = a, \quad D(X_i) = \sigma^2, \quad i = \overline{1, n}$$

бўлгани учун ҳамда математик кутилиш ва дисперсиянинг хоссаларидан

$$M(\overline{S^2}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2 \cdot \frac{n-1}{n} \qquad (50.4)$$

эканини, яъни $\overline{S^2}$ σ^2 дисперсия учун асимптотик силжимаган баҳо

$$\lim_{n\to\infty} M(\overline{S^2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$$

бўлишини кўрамиз.

4-таъриф. θ параметрнинг иккита силжимаган $L_1(X_1, \ldots, X_n)$ ва $L_2(X_1, \ldots, X_n)$ баҳолари берилган бўлиб,

$$D(L_1(X_1, \ldots, X_n)) < D(L_2(X_1, \ldots, X_n))$$

тенгсизлик бажарилса, $L_1(X_1, \ldots, X_n)$ баҳо $L_2(X_1, \ldots, X_n)$ баҳога нисбатан *самаралироқ баҳо* дейилади.

Берилган n ҳажмли танланмада энг кичик дисперсияга эга бўлган баҳо *самарали баҳо* дейилади.

51-§. Танланманинг тузатилган дисперсияси

Олдинги параграфнинг 4-теоремасида $\overline{S^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ баҳо бош тўплам дисперсияси учун асимптотик силжимаган баҳо экани кўрсатилган эди.

У ерда

$$M(\overline{S^2}) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

формула исботланган эди.

Бош тўплам дисперсияси учун силжимаган баҳони ҳосил қилишда тузатилган танланма дисперсиядан фойдаланилади:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2. \qquad (51.1)$$

Ҳақиқатан ҳам

$$M(S^2) = M\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right) =$$

$$= M\left(\frac{n}{n-1}\overline{S^2}\right) = \frac{n}{n-1}\cdot M(\overline{S^2}) = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2 = \sigma^2$$

бўлади. Шунинг учун S^2 баҳо σ^2 параметр учун силжимаган баҳо бўлади. Худди $\overline{S^2}$ баҳо каби S^2 баҳонинг ҳам σ^2 учун асосли баҳо эканини кўрсатиш мумкин.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Нуқтавий баҳога таъриф беринг.
2. Қандай баҳо силжимаган баҳо дейилади.
3. Силжимаган баҳога мисол келтиринг.
4. Асосли баҳога таъриф беринг.
5. Асимптотик силжимаган баҳога таъриф беринг.
6. Асосли баҳога мисол келтиринг.
7. Танланманинг тузатилган дисперсияси қандай аниқланади?
8. 15.24—15.54-масалаларни ечинг.

52-§. Математик кутилиш ва дисперсия учун ишончли интерваллар ҳақида тушунча

1. Ишончли интервал тушунчаси. Нуқтавий баҳо тегишли параметрнинг танланма маълумотларига кўра сонли қийматини беради, лекин у мазкур баҳонинг аниқлиги ва ишончлилиги тўғрисида фикр юритишга имкон бермайди. Шунинг учун баҳонинг ишончлилиги тушунчасини киритиш маънога эгадир.

$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ X белгили бош тўпламнинг танланмаси бўлиб, унинг тақсимоти бирорта θ параметрга боғлиқ бўлсин.

$Z(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ θ параметр учун баҳо бўлсин.

Таъриф. Агар исталган $\alpha > 0$ учун шундай $\delta > 0$ топиш мумкин бўлсаки, унинг учун

$$P(|Z(X_1, X_2, \ldots, X_n) - \theta| < \delta) = 1 - \alpha \qquad (52.1)$$

бўлса, у ҳолда $]Z - \delta, Z + \delta[$ тасодифий интервал θ *параметрнинг* $1 - \alpha$ *ишончлилик даражали ишончли интервали* дейилади

$]Z - \delta, Z + \delta[$ ишончли интервал, шунингдек, ишончли баҳо деб ҳам аталади. δ сон баҳонинг аниқлиги дейилади.

$]Z - \delta, Z + \delta[$ ишончли интервал θ параметрни $1 - \alpha$ эҳтимол билан қоплайди деб айтилади.

Берилган α учун δ қанчалик кичик бўлса, Z баҳо шунчалик аниқроқ бўлади, α қанчалик кичик бўлса, бу баҳонинг ишончлилиги шунчалик катта бўлади.

2. Математик кутилиш *a* учун ишончли интервал. X белгиси нормал тақсимланган бош тўпламни қараймиз, бу тақсимотнинг σ^2 дисперсияси маълум бўлсин.

Бу тақсимотнинг математик кутилиши a учун ишончли интервални топамиз.

X белги нормал тақсимланган бўлгани учун $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ҳам нормал тақсимланган, шу билан бирга, X учун параметрлар қуйидагича:

$$M(\overline{X}) = a; \; D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Нормал тақсимланган тасодифий миқдорнинг берилган интервалга тушиш эҳтимоли қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma).$$

Бу формулани $\overline{X}$ тасодифий миқдор учун қўллаб, топамиз:

$$P(|\overline{X} - a| < \delta) = 2\Phi\left(\delta \Big/ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right). \qquad (52.2)$$

$t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$ деймиз, у ҳолда $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ бўлиб, (52.2) формула

$$P\left(|\overline{X} - a| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t)$$

ёки

$$P\left(\overline{X} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) \qquad (52.3)$$

кўринишга келади.

Шундай қилиб, ишончли интервал

$$\left]\overline{X} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \; \overline{X} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right[\qquad (52.4)$$

дан иборат бўлади. Бу ердан $\left]\bar{X}-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right[$ тасодифий интервал a параметрни $1-\alpha=2\Phi(t)$ эҳтимол билан $\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ аниқликда қоплаши келиб чиқади.

Ҳосил қилинган формулалар танланма ҳажми ортиши билан баҳолаш аниқлиги ошишини кўрсатади. Бунда агар $1-\alpha$ ишончлилик орттирилса, натижада t параметр ортади ва демак, баҳолаш аниқлиги камаяди.

Мисол. Нормал тақсимланган бош тўпламдан олинган танланма берилган, бунда $\sigma=1$.

i	x_i	i	x_i	i	x_i	i	x_i
1	—1,90	9	0,40	17	0,98	25	—0,32
2	1,37	10	0,69	18	—1,38	26	—0,42
3	—0,89	11	—0,90	19	1,48	27	0,77
4	—0,13	12	0,15	20	—0,65	28	0,08
5	0,15	13	0,90	21	1,10	29	0,17
6	—0,79	14	0,82	22	0,30	30	0,87
7	—0,96	15	1,53	23	—0,13		
8	1,55	16	—0,34	24	—1,90		

Математик кутилиш учун $\alpha=0{,}04$ ишончлилик даражали ишончли интервални топинг.

Ечиш. $\bar{X}=0{,}087$ ни топамиз. $1-\alpha=2\Phi(t)$ тенгликдан $\Phi(t)=0{,}48$ ни ҳосил қиламиз. Жадвал бўйича: $t=2{,}06$. Шунингдек, $n=30$, $\sigma=1$, у ҳолда

$$\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{2{,}06\cdot 1}{\sqrt{30}}=0{,}376.$$

Шундай қилиб, ишончли интервал $]-0{,}289;\ 0{,}463[$ дан иборат. Бу — параметрнинг ҳақиқий қиймати 0,96 эҳтимол билан ҳосил қилинган интервалда ётишини билдиради.

Агар бош тўплам нормал тақсимотга эга бўлмаса (52.3) формула тўғри бўлмай қолади, бироқ $n\to\infty$ да марказий лимит теоремага кўра $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ тасодифий миқдор тақсимоти X_i нинг дисперсиялари чегараланган ва σ^2 га тенг бўлса, нормал тақсимотга интилади. Бу — n катта бўлганда (52.4) ишончли интервал a математик кутилиш учун ишончли интервалнинг яқинлашиши бўлиб хизмат қилиши мумкинлигини билдиради.

Агар σ^2 номаълум бўлса, n катта бўлганда (52.3) формулаларда σ^2 ни унинг баҳоси S^2 билан алмаштириш мумкин ва ишончли интервалнинг яқинлашиши сифатида

$$\left]\bar{X}-\frac{t_{n-1,\alpha}S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+\frac{t_{n-1,\alpha}S}{\sqrt{n}}\right[$$

интервални қараш мумкин, бу ерда $t_{n-1,\alpha}$ Стъюдент тақсимотининг жадвалидан олинади.

53- §. Назарий тақсимотни танлаш

Тақсимот қонуни номаълум бўлган X белгили бош тўпламнинг етарлича катта n ҳажмли танланмаси берилган бўлсин.

Биз X белги билан бир хил тақсимланган ўзаро боғлиқмас компонентларга эга бўлган тасодифий вектор сифатида қаралаётган $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ танланма назарий тақсимотнинг математик кутилиши ва дисперсияси учун баҳолар олишга имкон беришини кўрсатган эдик. Умумий мулоҳазалардан фойдаланиб, назарий тақсимотнинг кўриниши тўғрисида фикр пайдо қилишимиз керак.

Марказий лимит теорема X белгининг нормал тақсимотга бўйсуниши учун зарур бўладиган шартларни таърифлашга имкон яратади, у ҳолда бу қонунни топиш масаласи иккита α ва σ параметрни аниқлаш билан ечилади. Бу параметрлар учун танланманинг ўрта қийматини ва танланманинг тузатилган дисперсиясини қабул қилиш мумкин.

Агар X белги фақат мусбат бутун сон қийматларни қабул қилса, танланманинг ўрта қиймати ва танланманинг тузатилган дисперсияси бир-биридан унча фарқ қилмаса, X тасодифий миқдор Пуассон қонуни бўйича тақсимланган деб фараз қилиш мумкин, у битта λ параметр билан аниқланади. Бу ҳолда λ учун танланманинг ўрта қиймати $\overline{X}$ ни олиш керак.

Белги узлуксиз бўлган ҳолда гистограммани ясаш керак. Маълумки, у тақсимот зичлиги эгри чизиғи тўғрисида тушунча беради. Баъзан гистограмма назарий тақсимот маълум бўлган қонунларнинг бирортаси билан бир хил бўлади деб фараз қилишга имкон беради.

54- §. Эмпирик тақсимотларни текислаш

X белгисининг тақсимоти номаълум бўлган бирор бош тўпламдан n ҳажмли танланма ажратамиз. X тасодифий миқдор бирор $F(x)$ қонун бўйича тақсимланган дейишга асос бор деб фараз қиламиз.

m_i *назарий частота* деб $X = x_i$, $i = \overline{1, k}$ ҳодисанинг

$$p_i = P(X = x_i)$$

эҳтимоллик билан n та эркли синовларда рўй бериш сонининг математик кутилишига айтилади.

Эркли синовлар (тажрибалар) схемасига кўра тасодифий $X = x_i$ ҳодисанинг n та эркли синовларда рўй бериш сони биномиал қонун бўйича тақсимланган, унинг математик кутилиши эса қуйидагига тенг:

$$m_i = M(X) = np_i.$$

$m_1, m_2, \ldots, m_k$ частоталар *назарий* ёки *текисловчи частоталар* дейилади.

X белги узлуксиз бўлган ҳолда белгининг қийматлари ўзгариш интервали ўзаро кесишмайдиган

$$[\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], \ldots, [\alpha_i, \beta_i], \ldots, [\alpha_k, \beta_k]$$

интервалларга бўлинади. Мос ҳолда

$$p_i = P(\alpha_i < X < \beta_i)$$

деб белгилаймиз. Танланма олдингидагидек чекли ва n ҳажмга эга бўлгани учун назарий частоталарни

$$m_i = np_i = n(F(\beta_i) - F(\alpha_i))$$

каби ҳисоблаймиз.

1-мисол. Бош тўпламнинг X белгиси нормал тақсимланган деб фараз қилишга асос бўлсин. Текисловчи m_i частоталарни топиш талаб қилинади.

Ечиш. Таърифга кўра

$$m_i = np_i = P(\alpha_i < X < \beta_i).$$

Нормал тақсимот учун тасодифий миқдорнинг берилган интервалга тушиш эҳтимоли

$$P(\alpha_i < X < \beta_i) = \Phi\left(\frac{\beta_i - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha_i - a}{\sigma}\right)$$

формула билан ҳисобланади, a ва σ миқдорлар номаълум бўлгани учун уларни мос равишда $\overline{X}$ ва S баҳолар билан алмаштирамиз. Натижада узил-кесил қуйидагига эга бўламиз:

$$m_i \approx n\left(\Phi\left(\frac{\beta_i - \overline{X}}{S}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha_i - \overline{X}}{S}\right)\right).$$

Назарий частота m_i ларни топиш учун нормал тақсимотнинг зичлиги формуласидан фойдаланиш мумкин.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

у ҳолда

$$P(\alpha_i < X < \beta_i) = hf(x_i),$$

бу ерда x_i — i- интервалнинг ўрта нуқтаси. У ҳолда

$$f(x_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - a)^2}{2\sigma^2}},$$

бу ерда a ва σ ларни мос равишда уларнинг танланма баҳолари $\overline{X}$ ва S^2 билан алмаштириб, қуйидагига эга бўламиз:

$$m_i = \frac{n h_l}{S} \varphi(u_i),$$

бу ерда

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}, \quad u_i = \frac{\alpha_i + \beta_i - 2\overline{X}}{2S}.$$

2-мисол. Мингта хотин-қизнинг бўйига кўра тақсимоти берилган:

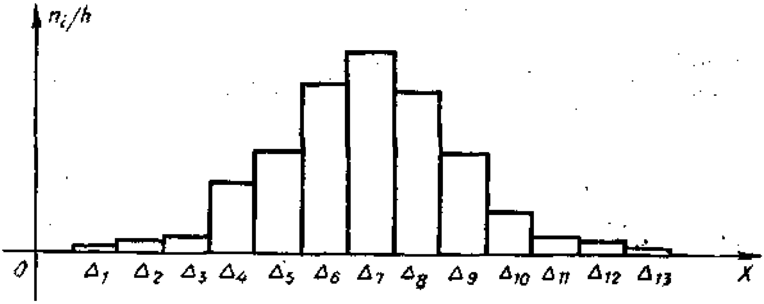
Бўйи (см)	Хотин-қизлар сони	Бўйи (см)	Хотин-қизлар сони
134—137	1	155—158	186
137—140	4	158—161	121
140—143	16	161—164	53
143—146	53	164—167	17
146—149	121	167—170	5
149—152	193	170—173	1
152—155	229	Жами	1000

Тақсимотнинг назарий қонунини танланг, унинг параметрларини топинг ва частоталарнинг назарий қаторини ҳисобланг.

Ечиш. Тақсимотнинг гистограммасини ясаймиз (149-шакл).

Белгининг қиймати учун интервалларнинг ўрталарини олиб, танланманинг ўртача қийматини ҳисоблаймиз:

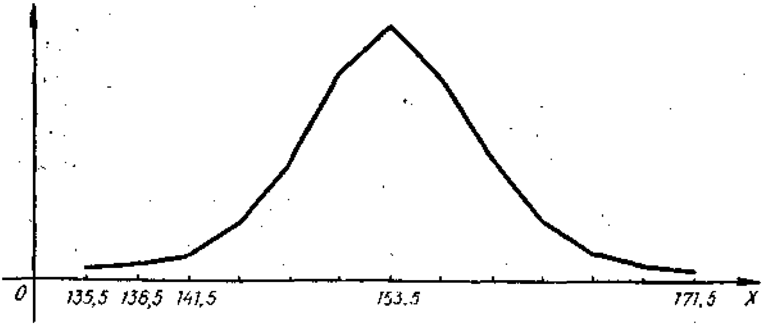
$$\overline{X} = 153{,}5;\ S^2 = 28{,}1;\ S = 5{,}3.$$



149- шакл.

Берилган белги нормал қонун бўйича тақсимланган деб назарий частоталарни ҳисоблаймиз:

x_i	n_i	$x_i - \bar{X}$	$u_i = \frac{x_i - \bar{X}}{S}$	$\varphi(u_i)$	$m_i = \frac{nh_i}{S}\varphi(u_i)$
135,5	1	—18	—3,4	0,0012	1
138,5	4	—15	—2,83	0,0073	4
141,5	16	—12	—2,26	0,0310	17
144,5	53	—9	—1,7	0,0940	53
147,5	121	—6	—1,13	0,2107	119
150,5	193	—3	—0,57	0,3410	193
153,5	229	0	0	0,3989	226
156,5	186	3	0,57	0,3410	193
159,5	121	6	1,13	0,2107	119
162,5	53	9	1,7	0,0940	53
165,5	17	12	2,26	0,0310	17
168,5	5	15	2,83	0,0073	4
171,5	1	18	3,4	0,0012	1



150- шакл.

Эмпирик частоталар полигонини ва назарий нормал эгри чизиқни ясаймиз (150- шакл).

Қаралган мисолда эмпирик ва назарий частоталарнинг бир хил эмаслигини кўрамиз.

Бу бир хил бўлмасликларнинг қайси бирини муҳим, қайсиларини муҳим эмас деб ҳисоблаш керак?

Бунда мос келмаслик кузатиш натижаларининг тасодифийлиги ёки назарий тақсимотнинг танланиши билан тушунтириладими? Назарий тақсимот қонуни тўғри танланганлигини қандай текшириш мумкин?

Бу саволларга қуйида жавоб беришга ҳаракат қиламиз.

55- §. Математик статистикада фойдаланиладиган тақсимотлар

1. Озодлик даражалари k бўлган χ^2 тақсимот.

Таъриф. Агар k та ўзаро боғлиқмас нормаланган X тасодифий миқдорлар нормал тақсимотга эга бўлса, у ҳолда уларнинг квадратлари йиғиндиси $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} X_i^2$ нинг тақсимоти *озодлик даражалари* *бўлган χ^2 тақсимот* дейилади. χ^2 тақсимотнинг зичлиги:

$$P_k(x) = \begin{cases} 0, \; x \leqslant 0 \text{ да} \\ \dfrac{1}{2^{k/2}\,\Gamma(k/2)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k}{2}-1}, \; x > 0 \text{ да}, \end{cases}$$

бу ерда $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ — гамма-функция.

$k \to \infty$ да χ^2 тақсимот математик кутилиши k ва дисперсияси $2k$ бўлган асимптотик нормалдир. $Y = \frac{1}{k} \chi^2$ тасодифий миқдорнинг тақсимоти $k \to \infty$ да математик кутилиши ва дисперсияси $\frac{2}{k}$ бўлган асимптотик нормалдир. $Y = \sqrt{2\chi^2}$ нинг тақсимоти $k \to \infty$ да математик кутилиши $\sqrt{2k-1}$ ва дисперсияси 1 бўлган асимптотик нормалдир. χ^2 тақсимотнинг озодлик даражалари $k \leqslant 30$ бўлса, унинг қийматлари жадвалдан топилади, агар озодлик даражалари $k > 30$ бўлса, уни нормал қонун билан етарлича аниқликда алмаштириш мумкин.

2. Стъюдент тақсимоти. X — нормаланган нормал тақсимланган тасодифий миқдор, Y эса озодлик даражалари k бўлган χ^2 тақсимотга эга тасодифий миқдор. Агар X ва Y боғлиқмас бўлса, у ҳолда

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{k}}}$$

тасодифий миқдор t- тақсимот (ёки k озодлик даражали Стъюдент тақсимоти) га эга дейилади. t тақсимот $k \to \infty$ да асимптотик нормалдир. t- тақсимотнинг зичлиги:

$$P_k(x) = \frac{\Gamma(k+1/2)}{\sqrt{\pi k}\,\Gamma(k/2)} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}.$$

3. Фишер тақсимоти. Агар X ва Y — боғлиқмас тасодифий миқдорлар бўлиб, улар k_1 ва k_2 озодлик даражали χ^2 қонун бўйича тақсимланган бўлса, у ҳолда

$$F = \frac{X/k_1}{Y/k_2}$$

тасодифий миқдор F тақсимотга (ёки k_1 ва k_2 озодлик даражали Фишер тақсимотига) эга дейилади. F тақсимотнинг зичлиги:

$$P_{k_1,\, k_2}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ C_0\,\dfrac{x^{(k_1-2)/2}}{(k_1x+k_2)^{(k_1+k_2)/2}}, & x>0,\end{cases}$$

бу ерда $x>0$ да $C_0=\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{k_1+k_2}{2}\right)k_1^{k_1/2}\,k_2^{k_2/2}}{\Gamma\,(k_1/2)\;\Gamma\,(k_2/2)}$.

$z=\log\sqrt{F}$ тақсимот $(k_1,\, k_2)$ озодлик даражали z-тақсимот дейилади.

56-§. Дисперсия учун ишончли интервал

Айтайлик, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ X белгили бош тўпламдан олинган танланма бўлиб, номаълум σ^2 дисперсияли нормал тақсимотга эга бўлсин.

Ушбу

$$\chi^2=\frac{nS^2}{\sigma^2}$$

тасодифий миқдор $(n-1)$ озодлик даражали χ^2 тақсимотга эга эканини, шу билан бирга бу тақсимот X тасодифий миқдорнинг математик кутилишига боғлиқ бўлмаслигини исботлаш мумкин.

Энди χ^2 тақсимотнинг жадваллари бўйича берилган α ва озодлик даражалари сони $n-1$ бўйича шундай x' ва x'' ларни топамизки:

$$P\left(\frac{nS^2}{\sigma^2}<x'\right)=P\left(\frac{nS^2}{\sigma^2}>x''\right)=\frac{\alpha}{2}. \qquad (56.1)$$

У ҳолда

$$P\left(x'<\frac{nS^2}{\sigma^2}<x''\right)=1-\alpha. \qquad (56.2)$$

Сўнгра қуйидагига эга бўламиз:

$$P\left(x'<\frac{nS^2}{\sigma^2}<x''\right)=P\left(\frac{nS^2}{x''}<\sigma^2<\frac{nS^2}{x'}\right)=$$

$$=P\left(S\sqrt{\frac{n}{x''}}<\sigma<S\sqrt{\frac{n}{x'}}\right)=1-\alpha. \qquad (56.3)$$

(56.3) дан σ параметр $\left]S\sqrt{\dfrac{n}{x''}},\, S\sqrt{\dfrac{n}{x'}}\right[$ ишончли интервалга эга бўлиши келиб чиқади, бу ерда x' ва x'' лар (56.1) тенгликлардан аниқланади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Ишончлилик интервалига таъриф беринг.
2. Назарий тақсимот қандай танланади?
3. Назарий частоталар қандай ҳисобланади?
4. Математик кутилиш учун ишончли интервални кўрсатинг.

5. Дисперсия учун ишончли интервални кўрсатинг.
6. Назарий нормал эгри чизиқ қандай ясалади?
7. 15.151—15.205- масалаларни ечинг.

57- §. Гипотезаларни статистик текшириш

Кўпинча X белгили бош тўпламнинг номаълум тақсимот қонунини билиш керак бўлади. Агар тақсимот қонуни бирор тайин $F(x)$ кўринишга эга деб тахмин қилишга асос бўлса, у ҳолда қуйидаги гипотеза илгари сурилади: X белгили бош тўплам *аниқ $F(x)$ кўринишли тақсимот қонунига эга.*

Агар тақсимот қонунининг кўриниши маълум, аммо унда номаълум параметр бўлса, номаълум θ параметр тайин θ_0 қийматга тенг деган гипотезани қўйиш мумкин. Шундай қилиб, бу гипотезада гап тақсимотнинг номаълум параметри ҳақида боради.

Статистик гипотеза деб номаълум тақсимотнинг кўриниши ҳақидаги ёки маълум тақсимотнинг номаълум параметрлари ҳақидаги гипотезага айтилади. *Нолинчи* (асосий) *гипотеза* деб илгари сурилган H_0 гипотезага, *конкурент (зид) гипотеза* деб эса нолинчи гипотезага зид бўлган H_1 гипотезага айтилади.

Асосий гипотеза тўғри ёки нотўғри бўлиши мумкин.

Статистик критерий деб нолинчи (асосий) гипотезани қабул қилиш ёки қабул қилмаслик ҳақидаги қоидага айтилади.

Бу қоида қуйидагидан иборат. Бунинг учун қандайдир $Z(X_1, \ldots, X_n)$ статистика олиниб, унинг (аниқ ёки тақрибий) тақсимоти асосий гипотеза ўринли бўлганда топилади. Сўнгра статистиканинг қийматлар соҳаси иккига ажратилади. Агар статистиканинг кузатилган $Z(x_1, \ldots, x_n)$ қиймати бу соҳаларнинг биринчисига тушса, H_0 гипотеза қабул қилинади, агар иккинчисига тушса H_0 гипотеза қабул қилинмайди. Биринчи соҳа *гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси,* иккинчиси эса *критик соҳа* дейилади.

$Z(X_1, \ldots, X_n)$ статистиканинг қабул қилиши мумкин бўлган барча қийматлари бирор интервалга тегишли бўлади. Шу сабабли критик соҳа ва гипотезанинг қабул қилиниш соҳаси ҳам интерваллар бўлади. Уларни нуқталар ажратиб туради. Бу нуқталар *критик нуқталар* дейилади ва $Z_{кр}$ билан белгиланади.

Критик соҳалар қуйидагича бўлиши мумкин:

а) ўнг томонлама критик соҳа:

$$Z > Z_{кр};$$

б) чап томонлама критик соҳа:

$$Z < Z_{кр};$$

в) икки томонлама критик соҳа:

$$|Z| > Z_{кр}.$$

$Z(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ статистиканинг критик соҳага тушиш эҳтимоли α унинг *аниқлилик даражаси* дейилади.

Гипотезани статистик текшириш натижасида икки хил хатога йўл қўйиш мумкин.

Биринчи тур хато шуки, бунда тўғри гипотеза рад этилади. Иккинчи хато шуки, бунда нотўғри гипотеза қабул қилинади.

Критерийнинг қуввати деб конкурент гипотеза ўринли бўлиш шартида Z критерийнинг критик соҳага тушиш эҳтимолига айтилади. Критерийнинг қуввати қанча катта бўлса, иккинчи тур хатога йўл қўйиш эҳтимоли шунча кичик бўлади.

58- §. Пирсоннинг мувофиқлик критерийси ва унинг қўлланилиши

$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ танланма берилган бўлиб, унинг асосида бош тўпламнинг $F(x)$ тақсимот функциясини аниқлаш керак бўлсин.

Мувофиқлик критерийси деб тақсимот функциясининг умумий кўриниши ҳақидаги H_0 гипотезани қабул қилиш ёки рад этишга имкон берадиган критерийга айтилади.

Мувофиқлик критерийларидан бири — Пирсон критерийсини қуриш учун X белги қийматларининг ўзгариш соҳасини $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ интервалларга бўламиз.

p_i — тасодифий миқдор X нинг Δ_i интервалга тушишининг назарий эҳтимоли бўлсин: $p_i = P(X \in \Delta_i)$. Бу эҳтимол H_0 гипотезадан келиб чиққан ҳолда ҳисобланади, яъни X тасодифий миқдор $F(x)$ тақсимот функциясига эга деб фараз қилинади.

n_i — ҳажми n бўлган $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ танланмада X белгининг Δ_i интервалга тушган қийматларининг сони бўлсин. Бунда

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1,$$

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n.$$

Мазкур ҳолда n_i ҳодисанинг, агар унинг эҳтимоли p_i га тенг бўлса, n та синовдаги частотасини билдиради. n_i математик кутилиши np_i ва дисперсияси $np_i q_i = np_i(1 - p_i)$ бўлган биномиал қонун бўйича тақсимланган.

Агар танланманинг ҳажми етарлича катта ($n>30$) бўлса, тақсимотни тақрибан нормал тақсимот деб олиш мумкин.

Ушбу

$$\xi_i = \frac{n_i - np_i}{\sqrt{np_i}}, \quad i = \overline{1,k}$$

тасодифий миқдорларни қараймиз.

Бу тасодифий миқдорлар асимптотик нормал тақсимланган ва ўзаро қуйидаги муносабат билан боғланган:

$$\sum_{i=1}^{k} \xi_i \sqrt{p_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i - np_i}{\sqrt{n}} = 0.$$

Қуйидаги теоремани исбот қилиш мумкин:

Теорема. *Агар H_0 гипотеза тўғри бўлса ва $np_i > 5$ бўлса, у ҳолда $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \xi_i^2$ тасодифий миқдор $(k-1)$ озодлик даражали χ^2 тақсимот бўйича тақсимлангандир.*

$n \to \infty$ да χ^2 тақсимот асимптотик нормалдир.

Энди Пирсоннинг мувофиқлик критерийсини қуйидагича таърифлаш мумкин.

Берилган α аниқлилик даражаси ва χ^2 тақсимот учун жадваллардан x_α нинг

$$P(\chi^2 > x_\alpha) = \alpha$$

бўладиган критик қийматлари топилади. Танланма маълумотларига кўра χ^2 критерийнинг кузатилган қиймати ҳисобланади, агар у қиймат қабул қилиш соҳасига тушса, яъни $\chi^2 < x_\alpha$ бўлса, H_0 гипотеза қабул қилинади ва бош тўплам $F(x)$ тақсимот функциясига эга деб ҳисобланади, агар $\chi^2 > x_\alpha$ бўлса, у ҳолда H_0 гипотеза рад этилади.

Агар $n > 30$ бўлса, x_α критик қиймат нормал тақсимотдан фойдаланиб топилади.

Эслатма. Агар назарий частоталарни ҳисоблашда a ва σ^2 ўрнига уларнинг $\overline{X}$ ва S^2 баҳоларидан фойдаланиладиган бўлса, у ҳолда

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

статистика тақрибан $(k—3)$ озодлик даражали χ^2 тақсимот бўйича тақсимланади.

59- §. Колмогоров критерийси

X белгили бош тўплам ва хажми n га тенг бўлган $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ танланма берилган бўлсин.

F_n^* эмпирик тақсимот функцияси бўлсин.

H_0 гипотеза бош тўплам $F(x)$ тақсимот функциясига эга деган гипотезадан иборат.

Қуйидаги статистикани қарайлик:

$$D_n = \max_x |F(x) - F_n^*(x)|.$$

А. Н. Колмогоров исталган узлуксиз $F(x)$ функция учун

$$\lim_{n\to\infty} P\left(D_n < \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) = K(\lambda)$$

тенглик ўринли бўлишини исбот қилди, бу ерда

$$K(\lambda)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}.$$

Колмогоров критерийси қуйидагича татбиқ қилинади:

$K(\lambda)$ учун жадваллардан берилган α аниқлилик даражасига мос шундай λ_α топиладики, унинг учун $K(\lambda_\alpha)=1-\alpha$ бўлади. Сўнгра танланма маълумотларига кўра D_n нинг қиймати топилади.

Агар $D_n<\frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}}$ бўлса, H_0 гипотеза қабул қилинади.

Агар $D_n>\frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{n}}$ бўлса, $F(x)$ — бош тўпламнинг тақсимот функцияси деган гипотеза рад этилади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Критерий тушунчасига таъриф беринг.
2. Гипотезаларни текшириш нимадан иборат?
3. Гипотезаларни статистик текширишда қандай хатоларга йўл қўйиш мумкин?
4. Пирсоннинг мувофиқлик критерийси нимадан иборат?
5. Колмогоров критерийси қандай таърифланади?
6. 15.296—15.311- масалаларни ечинг.

60- §. Функционал ва статистик боғланишлар

34- § да тасодифий миқдорлар орасидаги функционал боғланиш қаралган эди.

Амалда тасодифий миқдорлар орасидаги қатъий функционал боғланиш жуда камдан-кам ҳолларда кузатилади, чунки тасодифий миқдорларнинг қийматлари кўпгина тасодифий омилларга боғлиқдир.

X ва Y тасодифий миқдорларга таъсир этадиган тасодифий омиллар ичида умумий омиллар бўлган ҳоллар тез-тез учраб туради.

X — тасодифий омиллар: $z_1, z_2, \ldots, z_k, u_1, \ldots, u_n$ ларнинг функцияси, Y эса $z_1, z_2, \ldots, z_k, v_1, \ldots, v_m$ тасодифий омилларнинг функцияси бўлсин, яъни

$$X=f(z_1, z_2, \ldots, z_k, u_1, \ldots, u_n)$$

$$Y=g(z_1, z_2, \ldots, z_k, v_1, \ldots, v_m).$$

Бундай ҳолда X ва Y тасодифий миқдорлар *статистик (ёки стохастик) боғланган* дейилади.

Статистик боғланишда тасодифий миқдорлардан бирининг ўзгариши бошқа тасодифий миқдор тақсимот қонунининг ўзгаришига олиб келади. Тасодифий миқдорлар орасидаги статистик боғланишлар корреляция назарияси усуллари ёрдамида ўрганилади. Корреляция назариясининг иккита асосий масаласи бор.

1. Корреляцион боғланиш шаклини аниқлаш.
2. Корреляцион боғланишнинг зичлигини (кучини) аниқлаш.

Хусусан, X тасодифий миқдорнинг ўртача қийматлари тақсимотини бошқа Y тасодифий миқдор қийматларига боғлиқ равишда ўрганиш алоҳида қизиқиш уйғотади.

61-§. Регрессия чизиқлари

Икки ўлчовли (X, Y) тасодифий миқдорни қараймиз. Бир тасодифий миқдорнинг бошқа тасодифий миқдорнинг ўзгаришига таъсирини текшириш учун X тасодифий миқдор тақсимотининг шартли қонуниятлари Y тасодифий миқдорнинг тайинланган қийматларида ва аксинча, қаралади.

(X, Y) дискрет тасодифий миқдор ушбу тақсимот жадвали орқали берилган бўлсин:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\sum\limits_{i=1}^{n} p(x_i, y_k)$
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	$\ldots$	$p(x_n, y_1)$	$p(y_1)$
y_2	$p(x_1, y_2)$	$p(x_2, y_2)$	$\ldots$	$p(x_n, y_2)$	$p(y_2)$
$\cdot$ $\cdot$ $\cdot$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\cdot$ $\cdot$ $\cdot$
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	$\ldots$	$p(x_n, y_m)$	$p(y_m)$
$\sum\limits_{k=1}^{m} p(x_i, y_k)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\ldots$	$p(x_n)$	

Ягона $X = x_i$ қийматга мос $p(y_1 | x_i), \ldots, p(y_m | x_i)$ шартли эҳтимоллар Y нинг $X = x_i$ даги *шартли тақсимоти* дейилади.

$$p(y_k | x_i) = P(Y = y_k | X = x_i) = \frac{p(x_i, y_k)}{p(x_i)} \qquad (61.1)$$

ва

$$\sum_{k=1}^{m} p(x_i, y_k) = p(x_i). \qquad (61.2)$$

Шартли тақсимотнинг энг муҳим характеристикалари тайинланган x_i, $i = \overline{1, n}$ да шартли математик кутилиш $M(Y | x_i)$ ва шартли дисперсия $\sigma^2 (Y | x_i)$ дир.

У ҳолда

$$M\,(Y|x_i) = \sum_{k=1}^{m} y_k\, p\,(y_k|\,x_i),\quad i = \overline{1,\, n},$$

$$\sigma^2\,(Y|x_i) = M\,((Y - M\,(Y|x_i))^2|x_i).$$

$\sigma^2\,(Y|x_i)$ ни яна Y нинг X га қолдиқ дисперсияси деб ҳам аталади. x_i ўзгариши билан $M\,(Y|x_i)$ ҳам ўзгаради, яъни $\bar{y}\,(x) = M\,(Y|\,x)$ функцияни қараш мумкин, бу ерда X аргумент $x_1, \ldots, x_n$ қийматларни қабул қилиши мумкин.

Бу функция Y нинг X бўйича *регрессия функцияси* дейилади. (61.1) ва (61.2) формулалардан фойдаланиб, топамиз:

$$\bar{y}\,(x) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} y_k\, p\,(x,\, y_k)}{\sum\limits_{k=1}^{m} p\,(x,\, y_k)}. \tag{61.3}$$

X нинг Y га регрессияси ҳам худди шундай аниқланади:

$$\bar{x}\,(y) = M\,(X|\,y) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, p\,(x_i,\, y)}{\sum\limits_{i=1}^{n} p\,(x_i,\, y)}. \tag{61.4}$$

Узлуксиз тақсимотлар бўлган ҳолда (40.1) ва (40.2) формулалардан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\bar{y}\,(x) = M\,(Y|\,x) = \int_{-\infty}^{\infty} yp\,(y|\,x)\,dy =$$

$$= \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} y\, p\,(x,\, y)\,dy}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} p\,(x,\, y)\,dy}; \tag{61.5}$$

$$\bar{x}\,(y) = M\,(X|y) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} xp\,(x,\, y)\,dx}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} p\,(x,\, y)\,dx}. \tag{61.6}$$

62-§. Регрессиянинг асосий хоссаси

Теорема. *Агар $(X,\, Y)$ — тасодифий вектор бўлиб, $MY^2 < \infty$ бўлса, у ҳолда $\Delta = M\,((Y - u\,(x))^2|\,X)$ шартли ўртача квадратик четланиш ҳақиқий узлуксиз $u\,(x)$ функциялар синфидаги энг ки-*

чик қийматини $u(x)=\bar{y}(x)$ бўлганда қабул қилади ва бу энг кичик қиймат $\sigma^2(Y|x)$ га тенг.

Исбот ушбу айниятдан келиб чиқади:

$$M\,[(Y-u(x))^2|X]=M\,[((Y-\bar{y}(x))+$$

$$+(\bar{y}(x)-u(x)))^2/X]=M\,[((Y-\bar{y}(x))^2+$$

$$+2\,(Y-\bar{y}(x))\;(\bar{y}(x)-u(x))+(\bar{y}(x)-u(x))^2)|X]=$$

$$=\sigma^2\,(Y|x)+M\,[(\bar{y}(x)-u(x))^2|X].$$

Шундай қилиб, Δ минимумга $u(x)=\bar{y}(x)$ да эришади ва у $\sigma^2\,(Y|x)$ га тенг.

Агар $\bar{y}(x)$ ва $\bar{x}(y)$ регрессия функциялари чизиқли бўлса, у ҳолда X ва Y тасодифий миқдорлар *чизиқли корреляцияланган дейилади.*

X ва Y тасодифий миқдорлар чизиқли корреляцияланганми-йўқми деган масала ва яна умумийроқ $\bar{y}(x)$ ёки $\bar{x}(y)$ регрессия функциясининг қайси функциялар синфига тегишлилиги камдан-кам ҳолларда аниқ кўрсатилиши мумкин.

Хусусан, қуйидаги теоремани исбот қилиш мумкин:

Теорема. Агар $(X,\,Y)$ — *зичлик функцияси*

$$f\,(x,\,y)=\frac{1}{2\,\pi\,\sigma_1\,\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\,e^{-\frac{1}{2}Q\,(x,\,y)}$$

дан иборат икки ўлчовли нормал тақсимотга эга тасодифий миқдор бўлса, у ҳолда $\bar{y}(x)$ регрессия функцияси чизиқли функция бўлади:

$$\bar{y}\,(x)=a_2+\rho\,\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\,(x-a_1).$$

Бу ерда

$$Q\,(x,\,\bar{y})=\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}-2\,\rho\,\frac{(x-a_1)\,(y-a_2)}{\sigma_1\,\sigma_2}\right].$$

a_1, a_2 — X ва Y тасодифий миқдорларнинг математик кутилишлари, σ_1, σ_2 — ўртача квадратик оғишлар, ρ — корреляция коэффициенти.

Назарий текшириш мумкин бўлмаган ҳолларда танланма усуллардан ва регрессиянинг эмпирик чизиғини ясашдан фойдаланиш керак.

63-§. Чизиқли регрессия танланма тенгламасининг параметрларини энг кичик квадратлар усули бўйича топиш

X ва Y белгили икки ўлчовли бош тўпламдан n ҳажмли танланма оламиз.

$(x_i,\;y_k)$ жуфтларнинг кузатилган қийматларини тегишли частоталари билан ушбу корреляцион жадвалга жойлаштирамиз:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_m	$\sum\limits_j n_{i,j}$	$\overline{y}(x)$
x_1	n_{11}	n_{12}	$\dots$	n_{1m}	n_{x_1}	$\overline{y}(x_1)$
x_2	n_{21}	n_{22}	$\dots$	n_{2m}	n_{x_2}	$\overline{y}(x_2)$
$\vdots$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot\;\cdot\;\cdot$	$\cdot$	$\vdots$	$\vdots$
x_l	n_{l1}	n_{l2}	$\dots$	n_{lm}	n_{x_l}	$\overline{y}(x_l)$
Σn_{ij}	n_{y_1}	n_{y_2}	$\dots$	n_{y_m}		
$\overline{x}(y_j)$	$\overline{x}(y_1)$	$\overline{x}(y_2)$	$\dots$	$\overline{x}(y_m)$		

Жадвалдаги маълумотлар бўйича Oxy текисликда (x_i, y_k) координатали нуқталарни белгилаб тарқоқлик диаграммасини тузиш мумкин (151-шакл).

Бу диаграммани ҳар бир нуқтасида n_{ik} масса жойлашган (x_i, y_k) нуқталар тўплами деб талқин этиш мумкин.

У ҳолда

$$\overline{y}(x_i) = \frac{\sum\limits_k y_k n_{ik}}{\sum\limits_k n_{ik}}.$$

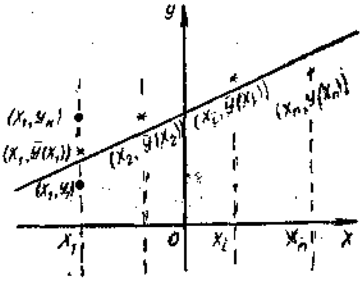
ни $X = x_i$ вертикал тўғри чизиқда жойлашган ва y_k ординатага эга бўлган n_{ik} массаларнинг маркази сифатида талқин этиш мумкин. Барча $(x_i, \overline{y}(x_i))$ нуқталарни туташтириб, Y нинг X га регрессиясининг эмпирик чизиғини ҳосил қиламиз.

X нинг Y га регрессиясининг эмпирик чизиғи ҳам худди шундай ясалади, бунда унинг ҳар бир нуқтаси $y = y_k$ горизонтал тўғри чизиқларда ётиб, x_i абсциссага эга бўлади.

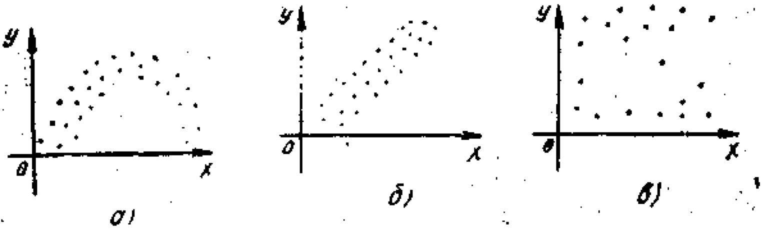
Шу тарзда регрессия чизиғининг умумий кўриниши ҳақида тасаввур ҳосил қилиб, регрессиянинг эмпирик функцияси тенгламасини энг кичик квадратлар усули билан топиш мумкин.

Масалан, қуйидаги тарқоқлик диаграммаларини кўрайлик (152-шакл).

Бу ерда а) ҳолда, равшанки, регрессия чизиғи парабола, б) ҳолда тўғри чизиқ, в) ҳолда эса корреляция афтидан мавжуд эмас деб фараз қилиш мумкин.



151- шакл.



152- шакл.

Y нинг X га регрессия функцияси чизиқли функция, яъни

$$\overline{y}(x)=ax+b$$

деб фараз қилишга асос бўлсин.

a ва b коэффициентларни энг кичик квадратлар усули бўйича топамиз.

Ордината бўйича $(x_i, \overline{y}_k)$, $i=\overline{1,m}$; $k=\overline{1,l}$ координатали нуқталарнинг тўғри чизиқдаги мос нуқталардан четланиш квадратларининг йиғиндисини қараймиз:

$$\Delta(a,b)=\sum_{i=1}^{m}(ax_i+b-\overline{y}_i)^2\, n_{x_i}. \qquad (63.2)$$

$\Delta(a,b)$ ни икки ўзгарувчининг функцияси сифатида қараб, a ва b учун шундай қийматлар топамизки, $\Delta(a,b)$ нинг қиймати энг кичик бўлсин.

Бир неча ўзгарувчили функция учун экстремум мавжуд бўлишининг зарурий шартлари унинг барча ўзгарувчилар бўйича хусусий ҳосилаларининг нолга тенг бўлишидан иборатдир. Бу шартни Δ га қўллаймиз:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial a}=\sum_{i=1}^{m}2(ax_i+b-\overline{y}_i)\,x_i\,n_{x_i}, \qquad (63.3)$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial b}=\sum_{i=1}^{m}2\,(ax_i+b-\overline{y}_i)\,n_{x_i}. \qquad (63.4)$$

Ҳар иккала тенгламани $2n$ га бўлиб ва a ҳамда b га эга ҳадларни гуруҳлаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{cases} a\,\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}x_i\,n_{x_i}}{n}+b\,\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}n_{x_i}}{n}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}\overline{y}_i\;n_{x_i}}{n}, \\ a\,\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}x_i^2\;n_{x_i}}{n}+b\,\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}x_i\;n_{x_i}}{n}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}x_i\,\overline{y}_i\;n_{x_i}}{n}. \end{cases} \qquad (63.5)$$

изга маълумки,

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} n_{x_i}}{n}=1,\qquad \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i\, n_{x_i}}{n}=\overline{x},$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \overline{y}_i\, n_{x_i}}{n}=\overline{y},\qquad \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2\, n_{x_i}}{n}=\overline{x^2}, \tag{63.6}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i\,\overline{y}_i\; n_{x_i}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i\, n_{x_i}\,\frac{\sum\limits_{k=1}^{l} y_k\, n_{i_k}}{n_{x_i}}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i\sum_{k=1}^{l} y_k\, n_{i_k}=\frac{\sum\limits_{i}\sum\limits_{k} x_i\, y_k\, n_{i_k}}{n}=\overline{xy}. \tag{63.7}$$

У ҳолда (63.5) тенгламалар ушбу кўринишга келади:

$$\begin{cases} a\overline{x}+b=\overline{y}, \\ a\overline{x^2}+b\overline{x}=\overline{xy}. \end{cases} \tag{63.8}$$

Ҳосил бўлган системани ечиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$y-\overline{y}=\rho_{y|x}\,(x-\overline{x}), \tag{63.9}$$

бу ерда $\rho_{y|x}=\frac{\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{\sigma}_x^2}$ — Y нинг X га регрессия коэффициенти, σ_x — танланма ўртача квадратик четланиши.

(63.9) тенглама Y нинг X га регрессияси тўғри чизиғининг *танланма тенгламаси* дейилади.

X нинг Y га регрессияси тўғри чизиғининг танланма тенгламасини худди шунга ўхшаш қуйидаги кўринишда ҳосил қилиш мумкин:

$$x-\overline{x}=\rho_{x/y}\,(y-\overline{y}), \tag{63.10}$$

бу ерда $\rho_{x/y}=\frac{\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{\sigma}_y^2}$, $\overline{\sigma}_y$ — танланма ўртача квадратик четланиши.

Кўрамизки, танланма регрессия тўғри чизиқлари $(\overline{x}, \overline{y})$ координатали нуқтадан, яъни массалар марказидан ўтади ва регрессия коэффициентлари бир хил ишорага эга, бинобарин, танланма регрессия тўғри чизиқларининг бурчак коэффициентлари бир хилдир.

Илгари, корреляция коэффициентига таъриф берилган эди, шундан фойдаланиб танланма корреляция коэффициенти тушунчасини киритамиз:

$$r_{\text{т}}=\frac{\overline{xy}-\overline{x}\,\overline{y}}{\overline{\sigma}_x\,\overline{\sigma}_y}.$$

Танланма корреляция коэффициенти $r_т$ корреляция коэффициенти

$$r_{xy} = \frac{M(XY) - M(X)\ M(Y)}{\sigma_x\ \sigma_y}$$

нинг баҳоси бўлишини исбот қилиш мумкин.

$r_т$ ни (63.9) ва (63.10) га қўйиб,

$$\rho_{y/x} = r_т \frac{\overline{\sigma}_y}{\overline{\sigma}_x} \tag{63.11}$$

ва

$$\rho_{x/y} = r_т \frac{\overline{\sigma}_x}{\overline{\sigma}_y} \tag{63.12}$$

ларни топамиз.

У ҳолда танланма регрессия тўғри чизиқларининг (63.11) ва (63.12) тенгламаларини қуйидаги симметрик шаклда ёзиш мумкин:

$$\frac{y - \overline{y}}{\overline{\sigma}_y} = r_т \frac{x - \overline{x}}{\overline{\sigma}_x} \tag{63.13}$$

ва

$$\frac{x - \overline{x}}{\overline{\sigma}_x} = r_т \frac{y - \overline{y}}{\overline{\sigma}_y}. \tag{63.14}$$

Мисол. Тўғри тўртбурчак плиткаларнинг узунликлари x (*см*) ва массалари y (*кг*) бўйича тақсимоти қуйидаги жадвалда берилган:

x \ y	6	8	10	12	14	n_x
30	2	17	9	3	—	31
35	—	10	17	9	—	36
40	—	3	24	16	13	56
45	—	—	6	24	12	42
50	—	—	2	11	22	35
n_y	2	30	58	63	47	200

Регрессия тўғри чизиқларининг танланма тенгламаларини тузинг.

Ечиш. Агар формулаларда ўзгарувчиларни қуйидагича алмаштирсак, барча коэффициентларнинг ҳисобланиши анча соддалашади:

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1}, \quad v_i = \frac{y_i - C_2}{h_2}.$$

C_1 ва C_2 — мос равишда x ва y ўзгарувчиларнинг вариацион қаторнинг тахминан ўртасида жойлашган қийматлари;

h_1 ва h_2 — мос равишда x ва y ўзгарувчиларнинг қўшни қийматлари орасидаги масофа.

$C_1=40$, $h_1=5$; $C_2=10$, $h_2=2$ деб оламиз, натижада қуйидаги жадвалга эга бўламиз:

v u	−2	−1	0	1	2	n_u
−2	2	17	9	3	—	31
−1	—	10	17	9	—	36
0	—	3	24	16	13	56
1	—	—	6	24	12	42
2	—	—	2	11	22	35
n_v	2	30	58	63	47	200=n

Жадвал ёрдамида қуйидагиларни ҳисоблаймиз:

$$\overline{u}=\frac{\sum u\cdot n_u}{n}=\frac{-2\cdot31-1\cdot36+0\cdot56+1\cdot42+2\cdot35}{200}=0{,}07;$$

$$\overline{v}=\frac{\sum vn_v}{n}=\frac{-2\cdot2-1\cdot30+0\cdot58+1\cdot63+2\cdot47}{200}=0{,}62;$$

$$\overline{u^2}=\frac{\sum u^2\,n_u}{n}=1{,}71,\quad \overline{v^2}=\frac{\sum v^2n_v}{n}=3{,}16.$$

$$\overline{\sigma}_u=\sqrt{\overline{u^2}-(\overline{u})^2}=1{,}3,$$

$$\overline{\sigma}_v=\sqrt{\overline{v^2}-(\overline{v})^2}=1{,}67.$$

$\sum n_{uv}uv$ йиғиндини ҳисоблаш учун ушбу ҳисоблаш жадвалини тузамиз:

v u	−2	−1	0	1	2	$V=\sum vn_{uv}$	$u\cdot V$
−2	−4 2 −4	−17 17 −34	0 9 −18	3 3 −6	—	−18	36
−1	—	−10 10 −10	0 17 −17	9 9 −9	—	−1	1
0	—	−3 3 0	0 24 0	16 16 0	26 13 0	39	0
1	—	—	0 6 6	24 24 24	24 12 12	48	48
2	—	—	0 2 4	11 11 22	44 22 44	55	110
$U=\sum un_{uv}$	−4	−44	−25	31	56		195
$v\cdot U$	8	44	0	31	112	195	

Корреляцион жадвал ҳар бир катагининг юқоридаги ўнг бурчагига vn_{uv} кўпайтмани ёзамиз. Катакнинг қуйи чап бурчагига un_{uv} кўпайтмани ёзамиз.

Барча катакларнинг юқоридаги ўнг бурчагида ва қуйидаги чап бурчагида жойлашган сонларни қўшиб, $V=\sum vn_{uv}$ ва $U=\sum un_{uv}$ қийматларни ҳосил қиламиз. Барча uV ва vU кўпайтмаларни ҳисоблаб, натижаларни қўшимча сатр ва устунга ёзамиз, бунда $\sum Vu=\sum Uv$ кўпайтма назорат учун хизмат қилади. У ҳолда

$$\sum n_{uv}uv=\sum Vu=\sum Uv.$$

Ушбу формула бўйича танланма корреляция коэффициентини ҳисоблаймиз:

$$r_т=\frac{\sum n_{uv}uv-n\bar{u}\bar{v}}{n\bar{\sigma}_u\bar{\sigma}_v}=\frac{195-200\cdot 0{,}07\cdot 0{,}062}{200\cdot 1{,}3\cdot 1{,}67}=0{,}43.$$

Энди регрессия тўғри чизиқларининг тенгламаларини тузамиз:

$$\bar{y}_x-\bar{y}=r_т\frac{\bar{\sigma}_v}{\bar{\sigma}_x}(x-\bar{x}),$$

$$\bar{x}_y-\bar{x}=r_т\frac{\bar{\sigma}_x}{\bar{\sigma}_y}(y-\bar{y}).$$

$\bar{x}$ ва $\bar{y}$ лар учун $\bar{x}=\bar{u}h_1+C_1$, $\bar{y}=\bar{v}h_2+C_2$ формулаларни осонгина ҳосил қилиш мумкин. Шунинг учун

$$\bar{x}=0{,}07\cdot 5+40=40{,}35,$$

$$\bar{y}=0{,}62\cdot 2+10=11{,}24,$$

$$\bar{\sigma}_x=h_1\bar{\sigma}_u=6{,}5,$$

$$\bar{\sigma}_y=h_2\sigma_v=3{,}34.$$

У ҳолда Y нинг X га танланма регрессия тўғри чизиғи тенгламаси

$$\bar{y}_x-11{,}24=0{,}43\,\frac{3{,}34}{6{,}5}\,(x-40{,}35)$$

ёки

$$\bar{y}_x=0{,}22x+2{,}32$$

кўринишда, X нинг Y га танланма регрессия тўғри чизиғи тенгламаси эса

$$\bar{x}_y=0{,}84y+30{,}94$$

кўринишда бўлади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Қандай боғланишлар функционал боғланишлар дейилади?
2. Қандай боғланишлар статистик боғланишлар дейилади?
3. Регрессия тўғри чизиғи қандай топилади?

4. Регрессиянинг асосий хоссаларини таърифланг.
5. Энг кичик квадратлар усулини баён қилинг.
6. Танланма регрессия тўғри чизиғи коэффициентлари қандай аниқланади?
7. 15.322—15.349- масалаларни ечинг.

64- §. Танланма корреляция коэффициентининг боғланиш зичлигига таъсири

Танланма корреляция коэффициенти қуйидаги тенглик билан аниқланади:

$$r_т = \frac{\sum\limits_{i,j} n_{i,j} x_i \ y_j - n \bar{x} \bar{y}}{n \ \bar{\sigma}_x \ \bar{\sigma}_y}, \qquad (64.1)$$

бу ерда $(x_i, \ y_j)$ — белгиларнинг кузатилган қийматлари, n_{ij} — $(x_i y_j)$ жуфтнинг частотаси, n — танланма ҳажми, $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$ — танланма ўртача квадратик четланишлари, $\bar{x}$, $\bar{y}$ — танланманинг ўрта қиймати.

(64.1), шунингдек, (63.11) ва (63.12) ларни эътиборга олиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$r_т = \pm \sqrt{\rho_{y/x} \ \rho_{x/y}} \qquad (64.2)$$

Теорема. $r_т = \pm 1$ *шартнинг бажарилиши ўртача квадратик регрессия тўғри чизиқлари устма-уст тушиши учун зарур ва етарлидир.*

Исботи (63.13) ва (63.14) тенгламаларни қарашдан келиб чиқади.

Бу тенгликдан $r_т$ коэффициент ± 1 га қанчалик яқин бўлса, X ва Y ўртасида чизиқли боғланиш мавжудлигидан далолат беради.

Агар $r_т = 0$ бўлса, X ва Y орасидаги чизиқли боғланиш йўқлиги ҳақида фараз қилишга асос бўлади.

Юқорида агар X ва Y лар боғлиқмас бўлса, у ҳолда $r = 0$, агар $r = \pm 1$ *бўлса*, X ва Y чизиқли боғлиқ бўлиши исбот қилинган эди.

Танланма корреляция коэффициенти $r_т$ корреляция коэффициенти r нинг асосли баҳоси бўлса-да, корреляция коэффициентининг нолдан фарқли бўлиши бош тўплам корреляция коэффициентининг нолдан фарқли бўлишини билдирмайди. Бундай ҳолда танланма корреляция коэффициентининг қийматлилиги ҳақидаги гипотезани текшириб кўриш керак.

Агар корреляция коэффициентининг нолга тенглиги ҳақидаги гипотеза рад этилса, у ҳолда X ва Y миқдорлар корреляцияланган ва танланма корреляция коэффициенти X ва Y орасидаги боғланиш ўлчови бўлиб хизмат қилади.

Бирга яқин бўлган $|r_т|$ X ва Y лар зич боғланишини билдирса, 0 га яқин бўлган $|r_т|$ X ва Y лар ё жуда бўш боғланишини, ё бундай боғланишнинг йўқлигини билдиради.

65- §. Нормал тақсимланган тасодифий миқдорларнинг корреляцияси

Айтайлик, икки ўлчовли (X, Y) бош тўплам нормал тақсимланган бўлсин. Бу тўпламдан n ҳажмли танланма оламиз ва танланма корреляция коэффициенти $r_т$ ни ҳисоблаймиз. Бу ҳолда $r_т$ коэффициентни (r_{xy}, σ_r) параметрли (бу ерда r_{xy} — назарий корреляция коэффициенти, $\sigma_r = \frac{1-r_{xy}^2}{\sqrt{n}}$) нормал тақсимланган деб ҳисоблаш мумкин.

Назарий корреляция коэффициенти r_{xy} учун ишончлилик даражаси $q\%$ бўлган ишончли интервал қуйидаги кўринишга эга:

$$r_т - t_q\frac{1-r_т^2}{\sqrt{n}} < r_{xy} < r_т + t_q\frac{1-r_т^2}{\sqrt{n}},$$

бу ерда t_q нормал тақсимот жадвалидан топилади.

$r_т$ нолдан фарқли бўлиб чиқсин. $r_т$ нинг қийматлилиги ҳақидаги гипотезани текширамиз.

Нолинчи гипотеза қуйидагича бўлсин:

$$H_0: r_{xy} = 0.$$

У ҳолда конкурент гипотеза $H_1: r_{xy} \neq 0$ бўлади. Агар нолинчи гипотеза рад этилса, яъни конкурент гипотеза қабул қилинган бўлса, бу танланма корреляция коэффициенти қийматлилигини X ва Y орасидаги чизиқли боғланиш зичлигини ифодалаши мумкинлигини билдиради.

Агар нолинчи гипотеза қабул қилинса, у ҳолда X ва Y чизиқли боғланиш билан боғланмаган.

Агар $H_0: r_{xy} = 0$ гипотеза ўринли бўлса,

$$T = \frac{r_т\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_т^2}}$$

тасодифий миқдор озодлик даражаси $n-2$ бўлган Стъюдент тақсимоти билан тақсимлангандир.

Берилган α аниқлик даражаси ва озодлик даражалари сони $k = n-2$ бўйича Стъюдент тақсимоти критик нуқталари жадвали ёрдамида икки томонли критик соҳа учун $t_\alpha(\alpha, k)$ критик нуқта топилади.

Агар $|T| < t_\alpha$ бўлса, нолинчи гипотезани рад этишга асос йўқ.

Агар $|T| > t_\alpha$ бўлса, нолинчи гипотеза рад этилади.

Мисол. 63- § даги мисолда топилган танланма $r_т$ корреляция коэффициентининг $\alpha = 0,05$ аниқлик даражасида қийматлилигини текширинг.

Ечиш. 63- § даги мисолда топилган $r_т$ корреляция коэффициенти 0,43 га тенг.

Критерийнинг танланма қийматини топамиз:

$$T=\frac{r_т\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_т^2}}=\frac{0,43\sqrt{198}}{\sqrt{1-0,43^2}}=6,72.$$

Берилган $\alpha=0,05$ аниқлик даражаси ва $k=198$ бўйича $t_\alpha=$ $=1,96$ критик нуқтани топамиз. $T>t_\alpha$ бўлгани учун нолинчи гипотеза рад этилади.

Демак, бош тўпламнинг корреляция коэффициенти $r_{xy}\neq 0$ экан.

66-§. Чизиқли бўлмаган корреляция

Тасодифий миқдорлар орасида чизиқли бўлмаган корреляцион боғланишлар ҳам мавжуд бўлиши мумкин.

Иккита тасодифий миқдор орасида чизиқли бўлмаган корреляцион боғланиш мавжуд бўлганда чизиқли бўлмаган регрессия тенгламаси регрессия тўғри чизиқлари тенгламасини излагандек изланади.

Икки ўлчовли (X, Y) бош тўпламдан n ҳажмли танланма олинган бўлсин. Ҳар бир x_i учун шартли ўртача $\overline{y_i}$ ларни ҳисоблаймиз (153- шакл).

(x_i, y_i) нуқталар тахминан параболада жойлашган деб фараз қиламиз. Y нинг X га параболик ўртача квадратик тенгламасини

$$\overline{y}(x)=ax^2+bx+c$$

кўринишда излаймиз.

a, b, c коэффициентларни топиш учун энг кичик квадратлар усулидан фойдаланамиз.

$$\Delta(a, b, c)=\sum_i(ax_i^2+bx_i+c-y_i)^2n_{x_i} \qquad (66.1)$$

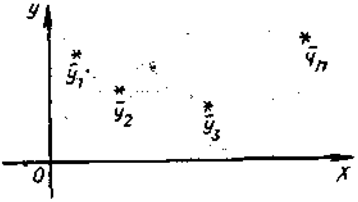
бўлсин. Δ нинг экстремумини топиш учун $\frac{\partial\Delta}{\partial a}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial b}$ ва $\frac{\partial\Delta}{\partial c}$ ларни нолга тенглаймиз. Гуруҳлашлардан сўнг қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$a\sum_i x_i^2\,n_{x_i}+b\sum_i x_i\,n_{x_i}+c\sum_i n_{x_i}=\sum_i\overline{y}_i\,n_{x_i},$$

$$a\sum_i x_i^3\,n_{x_i}+b\sum_i x_i^2\,n_{x_i}+c\sum_i x_i\,n_{x_i}=\sum_i x_i\overline{y_i}\,n_{x_i},$$

$$a\sum_i x_i^4\,n_{x_i}+b\sum_i x_i^3\,n_{x_i}+c\sum_i x_i^2\,n_{x_i}=\sum_i x_i^2\overline{y}_i\,n_{x_i}.$$

Ҳосил қилинган бу системани ечиб, $\Delta(a, b, c)$ четланишлар квадратларининг йиғиндисига энг кичик қиймат берадиган a, b, c коэффициентларни топамиз.



153- шакл.

X ва Y орасидаги боғланиш масалан, $y=\frac{1}{x}$ ёки $y=ax^3+bx^2+$

$+cx+d$ функциялар орқали ифодаланади дейишга асос бўлган ҳолларда ҳам худди шундай йўл тутилади.

67- §. Корреляцион боғланиш тўғрисида тушунча

Чизиқли корреляцион боғланишнинг зичлигини баҳолаш учун корреляция коэффициенти r_{xy} дан фойдаланилади.

Чизиқли бўлмаган боғланиш зичлигини баҳолаш учун ушбу янги характеристикаларни киритамиз:

η_{yx} — Y нинг X га корреляцион муносабати ва η_{xy} — X нинг Y га корреляцион муносабати.

Бу кўрсаткичлар регрессиянинг $\overline{y}(x)$ ва $\overline{x}(y)$ эгри чизиқлари атрофида тақсимланишнинг зичлигини ифодалайди.

Таърифга кўра

$$\eta^2_{yx}=\frac{M(\overline{y}(x)-M(X))^2}{\sigma^2_y}, \qquad (67.1)$$

$$\eta^2_{xy}=\frac{M(\overline{x}(y)-M(Y))^2}{\sigma^2_x}. \qquad (67.2)$$

Қуйидаги айниятни исбот қилиш мумкин:

$$\sigma^2_y=\sigma^2_{y/x}+M(\overline{y}(x)-M(y))^2,$$

бу ерда σ^2_y — Y нинг дисперсияси, $\sigma^2_{y/x}=M(Y-\overline{y}(X))^2$ шартли дисперсияларнинг ўртачаси. У ҳолда (67.1) ва (67.2) ифодалар қуйидаги кўринишга келади:

$$\eta^2_{yx}=1-\frac{\sigma^2_{y/x}}{\sigma^2_y}, \qquad (67.3)$$

$$\eta^2_{xy}=1-\frac{\sigma^2_{x/y}}{\sigma^2_x}. \qquad (67.4)$$

(67.3) ва (67.4) тенгликлардан корреляцион муносабат қуйидаги тенгсизликларни қаноатлантириши келиб чиқади:

$$0\leqslant\eta_{xy}\leqslant 1,$$

$$0\leqslant\eta_{yx}\leqslant 1.$$

$\sigma^2_{y/x}=0$ бўлганда ва фақат шундагина $\eta^2_{yx}=1$ бўлади, яъни бутун тақсимот Y нинг X га регрессия эгри чизиғида тўпланган, ва шундай қилиб, X ва Y орасида функционал боғланиш мавжуд.

Сўнгра, $\sigma^2_{y/x}=\sigma^2_y$ бўлганда, яъни $M(Y-\overline{y}(x))^2=M(Y-M(Y))^2$, яъни $\overline{y}(x)=M(Y)=\text{const}$ бўлганда ва фақат шундагина $\eta^2_{yx}=0$, яъни Y нинг X га регрессия чизиғи тақсимот марказидан ўтувчи горизонтал тўғри чизиқдан иборатдир. Бу ҳолда X ва Y корреляцияланмаган дейилади.

η_{xy} корреляцион муносабатнинг хоссалари ҳам худди шундай текширилади.

η_{xy} ва η_{yx} кўрсаткичлар ўзаро содда муносабат билан боғланмаган.

Агар $\eta_{xy} = \eta_{yx} = 1$ бўлса, у ҳолда Y нинг X га боғланишини ифодаловчи функция тескариланувчи, ва демак, монотондир. Доимо $|r_{xy}| < \eta_{yx}$ эканини исботлаш мумкин. Агар $\eta_{yx} \to 0$ бўлса, у ҳолда $\sigma^2_{y/x} \to 0$, яъни шартли дисперсия нолга интилади, демак, Y нинг X билан боғланиши зичлашиб бориб, $\eta_{yx} = 1$ да функционал боғланишга ўтади.

Корреляцион муносабатнинг корреляция коэффициентига нисбатан афзаллиги шундан иборатки, корреляцион муносабат ҳар қандай, шу жумладан, чизиқли боғланишнинг зичлигини баҳолайди.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Танланма корреляция коэффициенти нимани ифодалайди?
2. Танланма корреляция коэффициентининг хоссаларини айтиб беринг.
3. Нормал тақсимланган тасодифий миқдор корреляцияси ҳақидаги теоремани баён қилинг.
4. Чизиқли бўлмаган корреляция тушунчасини таърифланг.
5. Корреляцион муносабат қандай аниқланади?
6. Корреляцион муносабат нимани ифодалайди?
7. 15.267—15.273- масалаларни ечинг.

68- §. Регрессия параметрларини танланма бўйича аниқлаш

Регрессия масаласининг қўйилиши. Y тасодифий миқдор k та $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ўзгарувчиларга боғлиқ бўлсин. $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ўзгарувчилар, умуман айтганда, тасодифий миқдорлар бўлмай, кузатишларнинг ҳар бир сериясида олдиндан режалаштирилган аниқ қийматларни қабул қилишлари мумкин.

Y тасодифий миқдор $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ларга боғлиқ бўлмаган σ^2 дисперсия билан нормал тақсимланган деб фараз қилинади.

Y тасодифий миқдорнинг математик кутилиши $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ўзгарувчиларга чизиқли боғлиқ, яъни

$$M(Y) = \overline{y} = \alpha + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k \qquad (68.1)$$

деб фараз қилинади.

Бундай ҳолда x_i ўзгарувчилар Y ни фақат ўртача аниқлайди деб айтилади.

1- мисол. Техникада кўпинча

$$Y = \alpha + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \ldots + \beta_k t^k + z(t)$$

кўринишдаги тасодифий миқдорлар учрайди, бу ерда t — вақт, $z(t)$ эса математик кутилиши $a = 0$ ва ўртача квадратик четланиши σ бўлган нормал тақсимотга эга тасодифий функция. У ҳолда $x_i = t^i$, $i = \overline{1, k}$ деб (68.1) турдаги тасодифий миқдорни ҳосил қиламиз.

2- **мисол.** Кўпгина физик масалалар ушбу кўринишдаги тасодифий миқдорларни ўрганишга олиб келади:

$$Y = \alpha + \beta_1 \cos(k_1 t + \varphi_1) + \ldots + \beta_i \cos(k_i t + \varphi_i) + z(t),$$

бу ерда t ва $z(t)$ лар 1- мисолнинг шартларини қаноатлантиради, k_i, φ_i — маълум сонлар.

$x_i = \cos(k_i t + \varphi_i)$ деб, (68.1) турдаги тасодифий миқдорни ҳосил қиламиз. Регрессия масаласи n та $(y_i, x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ki})$, $i = \overline{1, n}$ боғлиқмас синовлар сериялари ёрдамида (68.1) муносабатга кирувчи номаълум $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_k$ параметрларни баҳолашдан иборатдир.

Агар параметрларни баҳолаш масаласи ҳал этилса, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ номаълумлар ўзгариши билан Y тасодифий миқдорнинг тавсифини бирор ишончлилик билан олдиндан айтиб бериш имкони пайдо бўлади.

Масалан, $M(Y)$ математик кутилиш учун ишончли интервални кўрсатиш мумкин бўлади.

Дастлаб битта омилга боғлиқ бўлган ҳолни қараймиз.

Y тасодифий миқдор x аргументга «ўртача» чизиқли боғлиқ бўлсин, яъни

$$M(Y|x) = \alpha + \beta x. \tag{68.2}$$

$x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ деб n та эркли кузатишлар ўтказамиз, натижада кузатилган n та $y_1, y_2, \ldots, y_n$ қийматларни ҳосил қиламиз.

Чизиқлиликдан оғишлар $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ хатоликлар билан берилади деб ҳисоблаб,

$$y_i = M(Y|x_i) = \alpha + \beta x_i + \delta_i \tag{68.3}$$

каби ёза оламиз

Ўлчаш хатоликлари $\delta_i = y_i - \alpha - \beta x_i$ ушбу шартларга бўйсунади деб, фараз қиламиз:

1) $M\delta_i = 0$, $i = \overline{1, n}$,

2) $D\delta_i = M\delta_i^2 = \sigma^2$, $i = \overline{1, n}$ (X га боғлиқ эмас),

3) δ_i тасодифий миқдорлар ўзаро боғлиқмас ва нормал тақсимланган.

У ҳолда $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ тасодифий миқдорлар системасининг тақсимот зичлиги қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\frac{e^{-\frac{\delta_1^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot \frac{e^{-\frac{\delta_2^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot \ldots \cdot \frac{e^{-\frac{\delta_n^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i^2}{2\sigma^2}}.$$

Демак, кузатилган y_i миқдорларнинг тақсимот зичлиги қуйидагига тенг:

$$P(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \alpha,\ \beta,\sigma^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\sigma^{-n}\ e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i^2}{2\sigma^2}}=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\sigma^{-n}\ e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\alpha-\beta x_i)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (68.4)$$

α, β, σ^2 параметрларни баҳолаш учун ҳақиқатга энг катта ўхшашлик усулидан фойдаланамиз.

Усул номаълум параметрларни баҳолаш учун бу параметрларнинг ҳақиқатга ўхшашлик функциясининг (68.4) максимумга эриштирадиган қийматларидан фойдаланишдан иборатдир.

Яъни σ^2 берилганда α ва β лар учун баҳони топишда

$$\begin{cases}\dfrac{\partial p}{\partial\alpha}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial p}{\partial\beta}=0\end{cases} \qquad (68.5)$$

системани ечиш керак.

Кўрсаткичли функция нолга айланмаганлиги учун қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases}-2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\alpha-\beta x_i)=0,\\ -2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\alpha-\beta x_i)x_i=0.\end{cases} \qquad (68.6)$$

Бу системанинг шаклини ўзгартирамиз:

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i-\alpha\cdot n-\beta\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-\alpha\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-\beta\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=0.\end{cases} \qquad (68.7)$$

(68.7) системани ечишда $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$ деб, яъни x нинг қийматлари системаси марказлашган деб фараз қиламиз.

У ҳолда (68.7) тенгламалар қуйидаги кўринишга келади:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i = n\alpha, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \beta \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \end{cases}$$

Бу ердан α ва β параметрларнинг баҳоларини топамиз:

$$\widehat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, \quad \widehat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{68.8}$$

Агар $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ шарт бажарилмаган бўлса, у ҳолда $\widehat{\alpha}$ ва $\widehat{\beta}$ баҳолар учун анча мураккаб ифодаларни ҳосил қиламиз:

$$\widehat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - \beta \sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad \widehat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) y_i}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}. \tag{68.9}$$

Сўнгра топилган $\widehat{\alpha}$ ва $\widehat{\beta}$ қийматларда σ^2 нинг баҳоси S^2 ни топиш учун (68.4) ни σ^2 бўйича дифференциаллаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$nS^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} x_i)^2$$

ёки

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} x_i)^2, \tag{68.10}$$

бу ерда $\widehat{\alpha}$ ва $\widehat{\beta}$ лар (68.8) ёки (68.9) формулалар бўйича аниқланади.

Энди α, β ва σ^2 параметрларнинг (68.9) ва (68.10) баҳоларининг аниқлиги ва ишончлилигини баҳолаймиз.

Яна $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ бўлсин, у ҳолда

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha + \beta x_i + \delta_i) = n\alpha + \sum_{i=1}^{n} \delta_i$$

ёки

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} \delta_i}{n} = \widehat{\alpha} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_i,$$

ъни

$$\hat{\alpha}-\alpha=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i. \qquad (68.11)$$

Худди шундай топамиз:

$$\hat{\beta}-\beta=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i\;x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}. \qquad (68.12)$$

(68.11) ва (68.12) тенгликларнинг ўнг томонлари бир хил қонун бўйича нормал тақсимланган тасодифий миқдорларнинг чизиқли функцияларидан иборат, ва демак, $\hat{\alpha}-\alpha$ ва $\hat{\beta}-\beta$ оғишлар нормал тақсимланган.

69-§. Регрессиянинг умумий масаласи

Y тасодифий миқдор k та $x_1, x_2, \ldots, x_k$ параметрга «ўртача» боғлиқ бўлсин, яъни

$$M(Y)=\alpha+\beta_1x_1+\ldots+\beta_kx_k. \qquad (69.1)$$

$\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ параметрлар учун баҳоларни топамиз. $x_1, x_2, \ldots, x_k$ аргументлар қийматларининг n та системасини оламиз:

$$\begin{gathered}x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ \ldots,\ x_k^{(1)},\\ x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ \ldots,\ x_k^{(2)},\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \ldots,\ x_k^{(n)}.\end{gathered}$$

Ҳар бир $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_k^{(i)}$ система учун $Y=y_i$ тасодифий миқдорнинг қийматини ўлчаймиз.

Ҳисоблашларни соддалаштириш учун (69.1) муносабатни

$$\bar{y}=\alpha+\beta_1(x-\bar{x}_1)+\ldots+\beta_k(x_k-\bar{x}_k) \qquad (69.2)$$

кўринишда ёзамиз, бу ерда $\bar{x}_i=\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}x_i^{(j)}$ — x_i нинг n та тажрибадаги ўрта арифметик қиймати.

Олдинги параграфдаги мулоҳазалардан фойдаланиб, α ва β параметрларнинг баҳоларини ҳосил қиламиз:

$$\hat{\alpha}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=\bar{y}:$$

Қуйидагича белгилаймиз:

$$l_{rs}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_r^{(i)}-\overline{x}_r)(x_s^{(i)}-\overline{x}_s)(1\leqslant r\leqslant s\leqslant k),$$

шу билан бирга

$$l_{rr}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_r^{(i)}-\overline{x}_r)^2.$$

Энди

$$L=\begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1k} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{k1} & l_{k2} & \dots & l_{kk} \end{vmatrix}$$

бўлсин. L'_s — L дан s- устунни $l_{01}, l_{02}, \dots, l_{0k}$ ҳадлар билан [(бу ерда $l_{0s}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})(x_s^{(i)}-\overline{x}_s)$ алмаштиришдан ҳосил бўлган детерминант бўлсин. У ҳолда β параметр учун

$$\hat{\beta}=\frac{L'_s}{L}$$

баҳони ҳосил қиламиз.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Регрессия масаласини таърифланг.
2. Чизиқли регрессия қандай аниқланади?
3. Тажриба маълумотлари бўйича чизиқли регрессия параметрларини топиш усулини кўрсатинг.
4. Умумий регрессия масаласини таърифланг.
5. 15.350—15.384- масалаларни ечинг.

70- §. Тажрибани ортогонал режалаштириш. Икки ва уч омилли тажрибанинг режа матрицаси

Амалиётнинг кўпгина масалаларида қаралаётган аломат (белги)га у ёки бу омил (фактор)нинг таъсири қанчалик муҳим эканлиги масаласи катта аҳамиятга эгадир.

Бир нечта бир хил турдаги станок ва бир неча турдаги хом ашё бор деб фараз қилайлик. Турли станокларнинг ва турли партиялардаги хом ашё сифатининг ишлов бериладиган деталларнинг сифатига таъсири сезиларлими ёки йўқми эканини аниқлаш талаб қилинади.

Бу ҳолда иккита омил — станокларнинг таъсири ва хом ашёнинг таъсири текширилади, шу билан бирга омилларнинг ҳар бири бир нечта даражаларга эга (яъни бир нечта станок ва хом ашёнинг бир неча партияси).

Омилларнинг текширилаётган белгига таъсирини текшириш ва баҳолаш учун n та кузатиш ўтказилади, уларнинг натижалари кузатиш матрицасига ёзилади.

m даражага эга бўлган битта омил бўлган ҳолда n та кузатишлар натижаларини қуйидаги жадвалга жойлаштириш мумкин:

F омил даражаси \ Кузатишлар номери	1	2	. . .	n
F_1	$x_1^{(1)}$	$x_1^{(2)}$	. . .	$x_1^{(n)}$
F_2	$x_2^{(1)}$	$x_2^{(2)}$	. . .	$x_2^{(n)}$
⋮	. . .	. . .	. . .	. . .
F_m	$x_m^{(1)}$	$x_m^{(2)}$	. . .	$x_m^{(n)}$

Энди иккита A ва B омил бўлган ҳолни қараймиз.

A \ B	B_1	B_2	. . .	B_v
A_1	$x_{11}^{(1)}, x_{11}^{(2)}, \ldots,$ $x_{11}^{(n)}$	$x_{12}^{(1)}, x_{12}^{(2)}, \ldots,$ $x_{12}^{(n)}$	. . .	$x_{1v}^{(1)}, x_{1v}^{(2)}, \ldots,$ $x_{1v}^{(n)}$
A_2	$x_{21}^{(1)}, x_{21}^{(2)}, \ldots,$ $x_{21}^{(n)}$	$x_{22}^{(1)}, x_{22}^{(2)}, \ldots,$ $x_{22}^{(n)}$	. . .	$x_{2v}^{(1)}, x_{2v}^{(2)}, \ldots,$ $x_{2v}^{(n)}$
⋮	⋮	⋮	. . .	⋮
A_r	$x_{r1}^{(1)}, x_{r1}^{(2)}, \ldots,$ $x_{r1}^{(n)}$	$x_{r2}^{(1)}, x_{r2}^{(2)},$ $\ldots, x_{r2}^{(n)}$	. . .	$x_{rv}^{(1)}, x_{rv}^{(2)},$ $\ldots, x_{rv}^{(n)}$

Ҳар бир (i, j) ячейкага n та кузатишлар натижаларини жойлаштирамиз. Агар ячейкалардаги кузатишлар сони ўзаро тенг бўлса, бундай комплекс ортогоналдир.

Учта A, B, D омил бўлган ҳолда қуйидаги кузатишлар матрицасини тузиш мумкин:

A		A_1			A_2			. . .	A_r		
B		B_1	. . .	B_v	B_1	. . .	B_v	. . .	B_1	. . .	B_v
D	D_1	x_{111}	. . .	x_{1v1}	x_{211}	. . .	x_{2v1}		x_{r11}	. . .	x_{rv1}
	D_2	x_{112}	. . .	x_{1v2}	x_{212}	. . .	x_{2v2}		x_{r12}	. . .	x_{rv2}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		
	D_t	x_{11t}	. . .	x_{1vt}	x_{21t}	. . .	x_{2vt}	.	x_{r1t}	. . .	x_{rvt}

Ҳар бир (i, j, k) ячейкага x_{ijk} миқдорни кузатиш натижаларини ёзамиз.

71-§. Математик моделнинг айрим ташкил этувчиларининг қийматлилигини баҳолаш

Бир вақтда таъсир қилувчи турлича омилларга боғлиқ бўлган кузатишлар натижаларини таҳлил қилиш, энг муҳим омилларни танлаш ва уларнинг таъсирини баҳолашнинг статистик усули дисперсион таҳлил (анализ) дейилади.

Дисперсион таҳлилнинг ғояси тасодифий миқдорнинг умумий дисперсиясини у ёки бу омилнинг, ёки уларнинг ўзаро таъсирини тасвирловчи боғлиқмас тасодифий қўшилувчиларга ажратишдан иборатдир.

Масалан, X — текширилаётган тасодифий миқдор, A ва B — унга таъсир этадиган омиллар, $\bar{x}$ — X миқдорнинг ўртача қиймати бўлсин. X нинг четланишини қуйидагича тасвирлаш мумкин бўлсин:

$$X - \bar{x} + \alpha + \beta + \gamma, \tag{71.1}$$

бу ерда

α — A омил келтириб чиқарган четланиш,

β — B омил келтириб чиқарган четланиш,

γ — бошқа сабаблар келтириб чиқарган тасодифий четланиш.

α, β, γ лар боғлиқмас тасодифий миқдорлар деб фараз қиламиз. X, α, β, γ ларнинг дисперсияларини мос равишда σ_x^2, σ_α^2, σ_β^2, σ_γ^2 орқали белгилаймиз. У ҳолда

$$\sigma_x^2 = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_\gamma^2. \tag{71.2}$$

σ_α^2, σ_β^2 ларни σ_γ^2 билан таққослаб, A ва B омилларнинг таъсир даражасини ҳисобга олинмаган омилларга нисбатан аниқлаш мумкин. σ_α^2, σ_β^2 ларни бир-бири билан таққослаб, A ва B омилларнинг X га таъсирини таққослаш мумкин.

Тақсимот нормал деб фараз қилинганда дисперсион таҳлил танланмалар асосида σ_α^2, σ_β^2, σ_γ^2 ларнинг қийматини аниқлашга, шунингдек, тегишли критерийлардан фойдаланиб, уларнинг текширилаётган миқдорга таъсирининг муҳимлигини баҳолашга имкон беради.

A ва B омилларга боғлиқ X тасодифий миқдор учун кузатишлар матрицаси мавжуд бўлсин. Соддалик учун ҳар бир ячейкада фақат битта кузатиш бўлган ҳолни қараймиз:

B \ A	B_1	B_2	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_v	$\bar{x}_{i*}$
A_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1j}	$\cdots$	x_{1v}	$\bar{x}_{1*}$
A_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2j}	$\cdots$	x_{2v}	$\bar{x}_{2*}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\cdot$	$\cdots$	$\cdots$	
A_i	x_{i1}	x_{i2}	$\cdots$	x_{ij}	$\cdots$	x_{iv}	$\bar{x}_{i*}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\cdot$	$\cdots$	$\cdots$	
A_r	x_{r1}	x_{2r}	$\cdots$	x_{rj}	$\cdots$	x_{rv}	$\bar{x}_{r*}$
$\bar{x}_{*j}$	$\bar{x}_{*1}$	$\bar{x}_{*2}$	$\cdots$	$\bar{x}_{*j}$	$\cdots$	$\bar{x}_{*v}$	$\bar{x}$

Кузатишлар матрицасида r сатр A омилнинг r даражасига, v устун эса B омилнинг v даражасига мос келади. (i, j) ячейкага A ва B омилларни мос ҳолда i- ва j- даражаларда бир вақтда текширишда ҳосил қилинган кузатишлар ёзилади.

Ҳар қайси устун ва сатр бўйича ўрта қиймат ва умумий ўртачани ҳисоблаймиз. Энди ўрта қийматларнинг сатрлар бўйича тенглиги ва ўрта қийматларнинг устунлар бўйича тенглиги ҳақидаги гипотезани текширамиз.

Айтайлик,

$$\overline{x}_{i*} = \frac{1}{v}\sum_{j=1}^{v} x_{ij}; \quad \overline{x}_{*j} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} x_{ij};$$

$$\overline{x} = \frac{1}{rv}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v} x_{ij}. \qquad (71.3)$$

У ҳолда x_{ij} нинг $\overline{x}$ дан четланиш квадратларининг йиғиндисини топамиз, яъни

$$Q = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v} (x_{ij} - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v} (x_{ij} - \overline{x}_{i*} - \overline{x}_{*j} + \overline{x} +$$

$$+ \overline{x}_{i*} - \overline{x} + \overline{x}_{*j} - \overline{x})^2 = v\sum_{i=1}^{v} (\overline{x}_{i*} - \overline{x})^2 +$$

$$+ r\sum_{j=1}^{v} (\overline{x}_{*j} - \overline{x})^2 + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v} (x_{ij} - \overline{x}_{i*} - \overline{x}_{*j} + \overline{x})^2 =$$

$$= Q_1 + Q_2 + Q_3. \qquad (71.4)$$

Q_1 қўшилувчи сатрлар бўйича ўрта қийматлар билан умумий ўрта қийматлар орасидаги айирмаларнинг квадратлари йиғиндисидан иборат бўлиб, X белгининг A омил бўйича ўзгаришини характерлайди.

Худди шунга ўхшаш, Q_2 қўшилувчи X белгининг B омил бўйича дисперсиясини характерлайди. Q_3 қўшилувчи квадратларнинг қолдиқ йиғиндиси дейилади ва ҳисобга олинмаган омилларнинг таъсирини тавсифлайди.

Дисперсия учун қуйидаги баҳоларга эгамиз:

$$S^2 = \frac{1}{rv-1}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{v} (x_{ij} - \overline{x})^2 = \frac{Q}{rv-1};$$

$$S_1^2 = \frac{1}{r-1}\, v \sum_{i=1}^{r} (\overline{x}_{i*} - \overline{x})^2 = \frac{Q_1}{r-1},$$

$$S_2^2 = \frac{Q_2}{v-1}; \quad S_3 = \frac{Q_3}{(r-1)(v-1)}. \qquad (71.5$$

Маълумки, агар X тасодифий миқдор нормал тақсимланган бўлса, у ҳолда танланма дисперсияларнинг нисбати F тақсимотга эга бўлади.

Шундай қилиб, танланма маълумотлари бўйича ҳисоблаб

$$F_A = \frac{S_1^2}{S_3^2} \text{ ва } F_B = \frac{S_2^2}{S_3^2}$$

ҳамда танланган q аниқлик даражасида ($F_A < F_{r-1,(r-1)(v-1),q}$ ва $F_B < F_{v-1,(r-1)(v-1);q}$ да) ўртача қийматларнинг тенглиги тўғрисидаги нолинчи гипотеза рад этилмаслигини кўрамиз, яъни A ва B омилларнинг текширилаётган белгига таъсири катта эмас.

Иккита омилли дисперсион таҳлилнинг умумий схемаси қуйидаги жадвал кўринишида берилиши мумкин:

Дисперсиянинг компонентаси	Квадратлар йиғиндиси	Озодлик даражаси сони	Дисперсиянинг баҳоси
Сатрлар бўйича	$Q_1 = v\sum_{i=1}^{r}(\overline{x}_{i\bullet} - \overline{x})^2$	$r-1$	$S_1^2 = \frac{Q_1}{r-1}$
Устунлар бўйича	$Q_2 = r\sum_{j=1}^{v}(\overline{x}_{\bullet j} - \overline{x})^2$	$v-1$	$S_2^2 = \frac{Q_2}{v-1}$
Қолдиқ	$Q_3 = \sum_i\sum_j(x_{ij} - x_{i\bullet} - x_{\bullet j} + \overline{x})^2$	$(r-1)(v-1)$	$S_3^2 = \frac{Q_3}{(r-1)(v-1)}$
Тўлиқ	$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$	$rv-1$	$S^2 = \frac{Q}{rv-1}$

Юқорида олинган натижалар X белгининг нормал тақсимотга эга бўлишини талаб қилишини эсда тутиш лозим.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Тажрибани ортогонал режалаштириш қандай амалга оширилади?
2. Иккита ва учта омилли кузатишлар матрицасини тузинг.
3. Дисперсион таҳлил масаласини баён қилинг.
4. Умумий дисперсиянинг ташкил этувчилари қандай ҳисобланади?
5. Ҳар бир омилнинг X белгига таъсири қандай баҳоланади?
6. 15.284—15.291- масалаларни ечинг.

15-боб

АСОСИЙ СОНЛИ УСУЛЛАР

1-§. Миқдорларнинг тақрибий қийматлари

1. Хатоликлар. Хатоликларнинг манбалари. Миқдорларнинг сонли қийматларини *аниқлашда кўпинча уларнинг тақрибий қийматларигина* топилади. Бунда агар x сон берилган миқдорнинг ҳақиқий қиймати a га яқин бўлса, x сон шу a миқдорнинг тақрибий қиймати ёки яқинлашиши деб аталади ва бундай ёзилади: $a \approx x$.

Масалан, $\pi \approx 3,14159$; $e \approx 2,71828$; $\frac{1}{3} \approx 0,3333$. Қисқалик учун миқдорнинг тақрибий қиймати тақрибий сон, унинг ҳақиқий қиймати эса *аниқ сон деб аталади.*

Тақрибий сонлар одатда чекли ўнли касрлар кўринишида тасвирланади.

Амалий масалаларни ҳал этишда пайдо бўладиган хатоликларнинг ва, демак, *тақрибий сонларнинг* ушбу асосий манбаларини айтиб ўтамиз.

1. Моделнинг хатолиги — моделлаштирилаётган ҳодисага таъсир этаётган барча омил (фактор)ларнинг етарлича тўла ҳисобга *олинмаслиги. Бу омилларнинг* ҳаммасини амалда ҳисобга олишнинг иложи йўқ ва мақсадга мувофиқ ҳам эмас. Масалан, физик ҳодиса бўлган ҳолда биз баъзан ишқаланиш, муҳит қаршилигини, ҳароратни ва шунга ўхшашларни эътиборга *олмаймиз, шу сабабли* ҳам модель тақрибий хатоликлар билан бўлади.

2. Бошланғич маълумотлардаги хатоликлар — масала шартига кирувчи миқдорлар (параметрлар)нинг қийматларини ўлчаш *натижасида ҳосил бўлади* ва, демак, тақрибий характерда бўлади.

3. Услубий хатоликлар. Бу қабул қилинган ўлчаш услуби натижаси бўлиб, унда одатда тақрибий формулалардан *фойдаланилади.*

4. Амал хатолиқлари — булар фойдаланиладиган ҳисоблаш воситалари билан боғлиқ, хусусан, ЭҲМлар чекли ўнли касрлар устида, демак, тақрибий сонлар устида амаллар бажаради (маълумотлар ва оралиқ амаллар натижалари яхлитлана-

ди, бунинг натижасида у ёки бу даражада хатоликлар тўпланади).

Тайин бир масалани ечишда у ёки бу хатоликлар баъзан бўлмаслиги ёки уларнинг таъсири ҳаддан зиёд кичик бўлиши мумкин. Бироқ хатоликларни тўла таҳлил этиш учун уларнинг барча турларини тўла ҳисобга олиш лозим.

2. Абсолют ва нисбий хатоликлар. Тақрибий сонларнинг асосий характеристикалари абсолют ва нисбий хатоликлардир. Бирор миқдорнинг тақрибий қиймати x, аниқ қиймати эса a бўлсин.

1-таъриф. $a-x$ айирма x тақрибий соннинг *яқинлашиш хатолиги* ёки *хатолиги* деб аталади.

Агар $x<a$ бўлса, x сон a соннинг ками билан олинган тақрибий қиймати деб аталади ва бу ҳолда хатолик $a-x>0$ бўлади.

Агар $x>a$ бўлса, x сон a соннинг ортиғи билан олинган тақрибий қиймати деб аталади ва бу ҳолда хатолик $a-x<0$ бўлади.

1-мисол. $\sqrt{2}$ сони учун 1,41 ками билан олинган, 1,42 эса ортиғи билан олинган тақрибий қийматлар бўлади, чунки $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$.

Агар $x<a$ бўлса, x сон a соннинг ками билан олинган тақрибий қиймати бўлади, чунки $\pi>3{,}14$.

3-мисол. 2,72 сони e сонининг ортиғи билан олинган тақрибий қиймати бўлди, чунки $e<2{,}72$.

2-таъриф. $a\approx x$ яқинлашишнинг абсолют хатолиги Δ деб, хатоликнинг абсолют қийматига айтилади, яъни

$$\Delta=|a-x|.$$

Бундан $a-x=\Delta$ ёки $a-x=-\Delta$ эканлиги келиб чиқади, яъни $a=x+\Delta$ ёки $a=x-\Delta$. Бундай ҳолларда қуйидагича ёзилади:

$$a=x\pm\Delta.$$

a нинг тақрибий қиймати кўпинча номаълум бўлганлиги сабабли яқинлашиш хатолигини баҳолаш учун чегаравий абсолют хатолик тушунчаси киритилади.

3-таъриф. $a\approx x$ яқинлашишнинг чегаравий абсолют хатолиги деб, шундай мусбат Δ_a сонни айтиладики, Δ абсолют хатолик ундан катта бўла олмайди, яъни

$$\Delta=|x-a|\leqslant\Delta_a.$$

«Чегаравий» сўзи кўпинча тушириб қолдирилади. Бу тенгликдан

$$x-\Delta_a\leqslant a\leqslant x+\Delta_a$$

бўлиши келиб чиқади, демак, $x-\Delta_a$ — ками билан яқинлашиш, $x+\Delta_a$ — *ортиғи билан яқинлашиш.*

Агар чегаравий абсолют хатолик Δ_a берилган бўлса, у ҳолда x

ни a нинг Δ_a гача аниқликдаги тақрибий қиймати деб аталади ва бундай ёзилади: $a = x \pm \Delta_a$.

Тақрибий сонларни уларнинг кўриниши абсолют хатоликни кўрсатиб турадиган қилиб ёзиш қабул қилинган.

Ўнли каср кўринишида ёзилган x тақрибий соннинг рақами $a \approx x$ яқинлашишнинг Δ абсолют хатолиги бу рақам турган хона бирлигидан ортиқ бўлмаса, бу рақам ишончли рақам деб аталади. Акс ҳолда уни шубҳали рақам дейилади.

Барча математик жадвалларда, физика ва техникада сонларни фақат ишончли рақамлари билан ёзишдан фойдаланилади (агар хатолик кўрсатилмаган бўлса, шундай келишилган). Бу ҳолда тақрибий соннинг ёзувидан яқинлашиш хатолигини аниқлаш мумкин. Масалан, 3,1416 соннинг ёзуви унинг абсолют хатолиги 0,0001 дан ортиқмаслигини кўрсатади. 370 сони учун унинг абсолют хатолиги 1 дан ортиқ эмас. Агарда бу сон 0,01 дан кичик абсолют хатоликка эга бўлса, уни энди бундай ёзиш лозим: 370,00. Шундай қилиб, 370; 370,0; 370,00 тақрибий сонлар турли аниқлик даражасига эга; уларнинг чегаравий абсолют хатоликлари 1; 0,1; 0,01 га тенг.

Агар бутун сон охирида нолларга эга бўлиб, улар ишончли рақамлар бўлмаса, бу нолларни 10^n кўпайтувчи билан алмаштирилади, бунда n — шундай ноллар сони. Масалан, Ердан Қуёшгача бўлган масофа $1495 \cdot 10^5$ км тақрибий сони билан ифодаланади, бу ерда биринчи тўртта рақам ишончли, қолган барча ноллар эса шубҳали (чегаравий абсолют хатолик 100 000 км).

Одатда ишончли рақамли тақрибий сонларни стандарт шаклда бундай ёзилади:

$$x = a_0,a_1a_2 \ldots a_k \cdot 10^n, \text{ бу ерда } n \in Z,\ 1 \leqslant a_0 < 10,$$

бу ерда n — соннинг тартиби деб аталади.

Масалан, $\Delta_a = 100$ бўлган 40000 сони стандарт шаклда бундай ёзилади: $4{,}00 \cdot 10^4$.

Тақрибий соннинг хатолигини у нечта ишончли қийматдор рақамга эгалигини кўрсатиш йўли билан баҳолаш мумкин.

4-таъриф. Соннинг ўнлик ёзувидаги нолдан фарқли биринчи рақамдан чапда турган барча ишончли рақамлар қийматдор рақамлар деб аталади.

Масалан, ишончли рақамлар билан ёзилган 0,002080 сони тўртта қийматдор рақам; 2, 0, 8, 0 га эга; 1 дюйм=2,5400 см сони бешта қийматдор рақамга эга; 370,0 сони тўртта қийматдор рақамга эга, $3{,}7 \cdot 10^2$ сони иккита қийматдор рақамга эга.

Агар тақрибий сон кўп миқдорда қийматдор рақамларга эга бўлса, уларни яхлитлаш лозим.

Сонни яхлитлаш — уни кам миқдордаги қийматдор рақамлар билан ёзиладиган сонга алмаштириш демакдир.

Тақрибий сонни яхлитлашда ушбу яхлитлаш қоидасига риоя қилган ҳолда ортиқча ёки шубҳали рақамлар ташлаб юборилади:

— агар ташлаб юбориладиган рақамлардан биринчиси 4 дан кичик бўлса, у ҳолда охирги қолдириладиган рақам ўзгартирилмайди.

— агар ташлаб юбориладиган рақамлардан биринчиси 5 га тенг ёки ундан катта бўлса, у ҳолда қолдириладиган охирги рақам 1 га орттирилади.

— агар фақат 5 рақами ёки 5 билан ноллар ташлаб юбориладиган бўлса, у ҳолда қолдириладиган охирги рақам жуфт бўлса, ўзгартирилмайди, агар у тоқ бўлса, 1 га орттирилади.

4-мисол. Агар $\Delta_a = 0{,}001$ бўлса, $x = 10{,}5478$ ни 4 та ишончли рақамгача яхлитланг.

Ечиш. $x = 10{,}548$.

5-мисол. Агар $\Delta_a = 0{,}01$ бўлса, $x = 3{,}875$ ни 3 та ишончли рақамгача яхлитланг.

Ечиш. $x = 3{,}88$.

Абсолют хатолик ҳисоблаш аниқлигини тавсифлай олмайди. Ҳисоблаш натижалари аниқлигининг ҳақиқий кўрсаткичи унинг нисбий хатолигидир.

5-таъриф. Берилган миқдор x тақрибий қийматининг δ нисбий хатолиги деб, бу сон абсолют хатолигининг x тақрибий қиймат модулига нисбатини айтилади, яъни

$$\delta = \frac{\Delta}{|x|}.$$

x тақрибий қиймат a дан кам фарқ қилганлиги учун амалиётда бундай ҳам олинади:

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}.$$

Нисбий хатолик берилган яқинлашишнинг сифат кўрсаткичи бўлиб, уни кўпинча фоизларда ифодаланади.

6-таъриф. $a \approx x$ яқинлашишнинг чегаравий нисбий хатолиги деб, δ нисбий хатолик катта бўла олмайдиган δ_a мусбат сонни айтилади, яъни

$$\delta = \frac{\Delta}{|x|} \leqslant \delta_a, \text{ бу ерда } \Delta \leqslant \delta_a |x|.$$

Шундай қилиб, чегаравий нисбий хатолик учун

$$\Delta_a = |x| \cdot \delta_a$$

ни олиш мумкин. Демак, a аниқ сонни бундай ёзиш мумкин:

$$a = x \pm |x| \delta_a.$$

6-мисол. Ушбу тенгликлардан қайси бирининг аниқлиги катта:

$$x = \sqrt{46} = 6{,}78 \text{ ми ёки } y = \frac{7}{13} = 0{,}54 \text{ ми?}$$

Ечиш.

$$x=\sqrt{46} \text{ учун } \Delta_a=0{,}01; \quad \delta_a=\frac{0{,}01}{6{,}78}=0{,}0015\,(=0{,}15\,\%),$$

$$y=\frac{7}{13} \text{ учун } \Delta_a=0{,}01, \quad \delta_a=\frac{0{,}01}{0{,}54}=0{,}019\,(=1{,}9\,\%).$$

$0{,}15\,\% < 1{,}9\,\%$. Биринчи тенгликнинг аниқлиги юқори.

3. Тақрибий сонлар устида амаллар. Тақрибий сонлар устида амаллар натижаси яна тақрибий сон бўлади. Натижанинг хатолиги дастлабки маълумотларнинг хатоликлари орқали ушбу қоидалар ёрдамида топилиши мумкин.

1. Алгебраик йиғиндининг чегаравий абсолют хатолиги қўшилувчиларнинг чегаравий абсолют хатоликлари йиғиндисига тенг.

2. Алгебраик йиғиндининг нисбий хатолиги қўшилувчиларнинг нисбий хатоликларидан энг каттасига тенг (қиймати бир-бирига яқин бўлган сонлар айирмаси бундан мустасно).

3. Кўпайтма ва бўлинманинг нисбий хатолиги кўпайтувчиларнинг ёки мос равишда бўлинувчи ва бўлинманинг нисбий хатоликлари йиғиндисига тенг.

4. Тақрибий сон n-даражасининг нисбий хатолиги асоснинг нисбий хатолигини тақрибий соннинг даража кўрсаткичига кўпайтмасига тенг.

Масалан, тақрибий сонлар кўпайтмаси: $x=25{,}3\cdot 4{,}12=104{,}236$; кўпайтувчиларнинг чегаравий абсолют хатоликлари мос равишда 0,1 ва 0,01 га тенг. Кўпайтувчиларнинг барча рақамлари ишончли деб олсак, чегаравий нисбий хатолик бундай бўлади:

$$\delta_a=\frac{0{,}1}{25{,}3}+\frac{0{,}01}{4{,}12}=0{,}0039+0{,}0024=0{,}0063.$$

У ҳолда кўпайтманинг чегаравий абсолют хатолиги қуйидагича:

$$\Delta_a=\delta_a|x|=0{,}0063\cdot 104{,}236=0{,}657<1.$$

Демак, жавобда фақат учта ишончли рақамни қолдириш лозим: $25{,}3\cdot 4{,}12=104$.

Амалиётда тақрибий сонлар устида оммавий ҳисоблаш ишларида ушбу соддароқ қоидалардан фойдаланилади; улар иш ҳажмини камайтириб, етарлича аниқликка эришиш имконини беради.

1. Ўнли касрларни қўшиш ва айиришда ўнлик белгилари энг кам бўлган сонда нечта ўнлик белги бўлса, натижада шунча ўнлик белги қолдирилади (соннинг ўнлик белгилари деб, вергулдан ўнгда турган барча рақамларни айтилади).

2. Бутун сонларни қўшиш ва айиришда уларни стандарт шаклда ёзилади ва ўннинг энг юқори даражасини қавсдан ташқарига чиқариб, юқоридаги қоидадан фойдаланилади.

3. Тақрибий сонларни кўпайтириш ва бўлишда энг кичик сонда нечта қийматдор рақам бўлса, натижада шунча қийматдор рақам қолдирилади.

4. Квадратга ва кубга кўтаришда даража асосида нечта қийматдор рақам бўлса, натижада ҳам шунча қийматдор рақам қолдирилади.

5. Квадрат ва куб илдиз чиқаришда илдиз остидаги ифодада нечта қийматдор рақам бўлса, натижада ҳам шунча қийматдор рақам қолдирилади.

6. Оралиқ ҳисоблашларда юқоридаги қоидаларда тавсия қилганидан битта ортиқ рақам қолдирилади. Якуний натижада бу рақам яхлитланади.

7. Агар маълумотлар турли сондаги ўнлик белгиларга эга бўлса (қўшиш ва айиришда) ёки турли сондаги қийматдор рақамларга эга бўлса (қолган амалларда), уларни энг кичик аниқликдаги сонгача битта қўшимча рақам билан яхлитланади, бу рақам якуний натижада яхлитланади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Хатоликларнинг қандай манбалари бор?
2. Тақрибий сон деб нимага айтилади?
3. Яқинлашиш хатолиги деб нимага айтилади?
4. Яқинлашишнинг абсолют хатолиги деб нимага айтилади?
5. Яқинлашишнинг чегаравий абсолют хатолиги деб нимага айтилади?
6. Яқинлашишлар сифатини уларнинг абсолют хатоликлари бўйича таққослаш мумкинми?
7. Нисбий хатолик деб нимага айтилади?
8. Чегаравий нисбий хатолик деб нимага айтилади?
9. Ушбу ўлчаш натижаларидан қайсиниси аниқроқ? 0,0025 м ми ёки 0,372 м ми?
10. Қайси яқинлашиш аниқроқ: 2,56±0,01 ми ёки 376±1 ми?
11. Тақрибий соннинг қандай рақами ишончли рақам деб аталади? Шубҳали рақам деб-чи?
12. Соннинг қийматдор рақами деб нимага айтилади?
13. Соннинг ўнлик рақами деб нимага айтилади?
14. Тақрибий сонлар қачон ва қандай яхлитланади?
15. Қуйидаги тақрибий сонларнинг ёзувида неча ўнлик белги бор: $a=0{,}37$; $b=0{,}04551$; $c=0{,}003072$; $d=0{,}056890$? Уларнинг ҳар бирида нечта қийматдор рақам бор?
16. Ўнлик белгилари сони: а) қийматдор рақамлари сонидан ортиқ; б) қийматдор рақамлари сонидан кичик; в) қийматдор рақамлари сонига тенг бўлган тақрибий сонларга мисоллар келтиринг.
17. Битта қийматдор рақамга, иккита қийматдор рақамга, учта қийматдор рақамга эга бўлган сонларнинг чегаравий нисбий хатоликлари қанча бўлади?
18. 273,521, 0,03984, 1,0053 сонларини: а) иккита қийматдор рақамгача; б) иккита ўнлик белгигача яхлитланг.
19. Қуйидаги сонларнинг чегаравий нисбий хатоликларини топинг: а) 2; 0,2; 0,02; б) 17; 1,7; 0,17; в) 3,71; 37,1; 371.

2- §. Тенгламаларни тақрибий ечиш

1. Умумий маълумотлар. Ушбу

$$f(x)=0 \tag{2.1}$$

тенгламани ечиш x аргументнинг (2.1) тенгламага қўйилганда уни тўғри тенгликка айлантирадиган барча қийматларини топиш демакдир. x аргументнинг бу қийматлари (2.1) тенгламанинг илдизлари ёки $f(x)$ функциянинг илдизлари (нолла-

ри) деб аталади. Бундай тенгламаларни ечишнинг ушбу уч усули мавжуд: аналитик усул, график усул ва сонли усул.

Аналитик усул дейилганда шундай формуланинг мавжудлиги тушуниладики, изланаётган илдизлар унинг ёрдамида (2.1) тенгламанинг чап томонига кирадиган ўзгармас миқдорлар (улар параметрлар деб аталади) орқали ифодаланади (бунга намунавий мисол — квадрат тенглама илдизларининг маълум формуласи). Аналитик усулнинг асосий устунлиги шундаки, илдизлар бу кўрсатилган формула орқали исталган аниқликда ҳисобланиши мумкин. Бироқ муҳандислик амалиётида учрайдиган ҳамма тенгламалар ҳам аналитик усулда ечилавермайди. Баъзан (2.1) тенгламани ёки яна ҳам умумийроқ

$$f_1(x)=f_2(x) \qquad (2.2)$$

тенгламани ечиш учун ушбу график усулдан фойдаланилади: текисликда $y=f_1(x)$ ва $y=f_2(x)$ функцияларнинг графиклари ясалади, у ҳолда бу графиклар кесишиш нуқталарининг абсциссалари ана шу (2.2) тенгламанинг илдизлари бўлади((2.1) тенглама учун $y=f_2(x)$ функциянинг графиги $y=0$ абсциссалар ўқи бўлади).

Бу усулнинг ижобий томони унинг универсаллиги, исталган турдаги *тенгламаларга қуллаб бўлишлиги ва кўргазмалигидан* иборат бўлиб, салбий томони эса анча сермеҳнат иш ва одатда жуда кам аниқликда бўлишидир.

Тенгламаларни сонли ечиш усуллари иккита жуда муҳим ижобий хоссага эга: улар график усул каби универсал ва аниқ (яъни илдизларни исталганча юқори аниқлик билан ҳосил қилиш мумкин).

(2.1) тенгламани сонли ечиш асосий усулларининг ҳар бири ушбу иккита босқичга бўлинади:

а) илдизларни яккалаш, яъни $f(x)$ нинг аниқланиш соҳасига кирадиган ҳамда битта ва фақат битта илдизни ўз ичига оладиган $[\alpha, \beta]$ кесмани ажратиш. Бундай кесма илдизнинг яккаланиш оралиғи деб аталади;

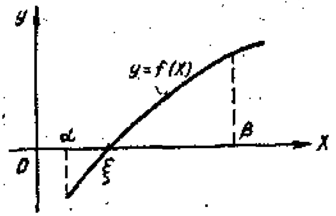
б) илдизларни аниқлаштириш, яъни илдизни исталганча *юқори аниқлик билан ҳосил қилиш учун яккаланиш оралиғини* торайтириш.

Турли сонли усуллар бир-биридан иккинчи босқичда фарқ қилади, биринчи босқич — илдизларни яккалаш эса барча усуллар учун умумийдир.

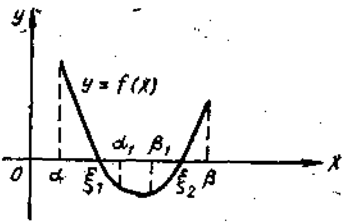
2. Илдизларни яккалаш. Узлуксиз функцияларнинг хоссаларидан келиб чиқадики, бундай функциянинг $[\alpha, \beta]$ кесмада *илдизи мавжуд бўлиши шарти*

$$f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$$

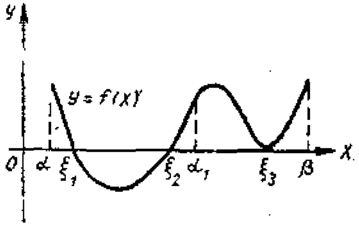
дан, яъни функция ишорасининг бу кесмада ўзгаришидан иборат: 154-шаклда $[\alpha, \beta]$ кесма, 155-шаклда $[\alpha, \alpha_1]$ ва $[\beta_1, \beta]$ кесмалар.



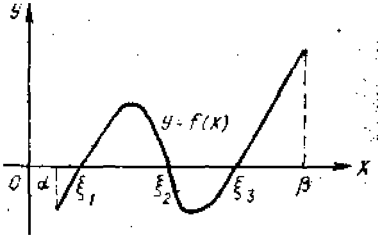
154- шакл.



155- шакл.



156- шакл.



157- шакл.

Бироқ бу шарт зарурий шарт эмас. Масалан, 156- шаклда шарт бажарилмайди, бироқ функция $[\alpha, \beta]$ кесмада илдизларга эга ва ҳатто $[\alpha, \alpha_1]$ кесмада иккита илдизга эга. Бундан ташқари, бу шартнинг бажарилиши илдизнинг ягоналигига кафолат бермайди (157- шаклдаги $[\alpha, \beta]$ кесма).

$[\alpha, \beta]$ кесма узлуксиз $f(x)$ функция илдизининг яккалаш оралиғи бўлиши учун юқорида келтирилган $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ шартдан ташқари бу функциянинг $[\alpha, \beta]$ кесмада монотон бўлиш талаби бажарилиши, яъни дифференциалланувчи $f(x)$ функция учун унинг ҳосиласи $[\alpha, \beta]$ кесмада ишорасини сақлаши лозим: 154- шаклда $[\alpha, \beta]$ кесма, 155- шаклда $[\alpha, \alpha_1]$ ва $[\beta_1, \beta]$ кесмалар.

Бироқ шуни айтиб ўтамизки, бу талаблар ҳар доим ҳам бажарилавермайди: жуфт каррали илдизлар деб аталадиган шундай илдизлар мавжудки (156- шаклдаги ξ_3 каби илдизлар), улар учун юқорида келтирилган иккала талаб ҳам бажарилмайди. Муҳандислик амалиётида жуфт каррали илдизлар жуда кам учрайди.

Шундай қилиб, икки марта дифференциалланувчи $f(x)$ функциянинг илдизларини ажратиш учун қуйидаги ишларни бажариш лозим:

а) $[\alpha, \beta]$ кесмани топиш (масалан, график усул билан ёки қуйида келтириладиган синов усули билан);

б) $f'(x)$ ҳосилани ва унинг илдизларини (ҳосиланинг ишора ўзгармаслик оралиқларини) топиш. Агар $[\alpha, \beta]$ кесма ҳосиланинг ишора ўзгармаслик оралиғида бутунлай жойлашган бўлса, у ҳолда $[\alpha, \beta]$ илдизнинг яккаланиш оралиғи бўлади. Акс ҳолда оралиқни торайтириш лозим.

Энди тақрибий илдизнинг хатолиги баҳосини берамиз. $[\alpha, \beta]$ кесма $f(x)=0$ тенглама илдизининг яккаланиш оралиғи бўлсин: ξ бу тенгламанинг аниқ илдизи, x эса тақрибий илдизи, шу билан бирга $f'(x)$ ва $f''(x)$ ўз ишорасини $[\alpha,\beta]$ кесмада сақласин ҳамда $|f'(x)| \geqslant m_1$ бўлсин (m_1 учун $f'(x)$ нинг $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ даги энг кичик қийматини оламиз). Бу шартларда ушбу баҳо ўринли:

$$|\bar{x}-\xi| \leqslant \frac{|f(\bar{x})|}{m_1}.$$

Бу тенгсизликнинг тўғрилигини исботлаш учун Лагранжнинг $[\bar{x}, \xi]$ ёки $[\xi, \bar{x}]$ кесмадаги чекли орттирмалар формуласи

$$f(\bar{x})-f(\xi)=f'(c)(\bar{x}-\xi), \text{ бунда } \bar{x}<c<\xi$$

ни татбиқ қиламиз. Сўнгра

$$|f(\bar{x})-f(\xi)|=|f(\bar{x})| \geqslant m_1|\bar{x}-\xi|,$$

бундан

$$|\bar{x}-\xi| \leqslant \frac{|f(\bar{x})|}{m_1}, \qquad (2.3)$$

бу ерда m_1 шу $f'(x)$ ҳосиланинг $[\alpha, \beta]$ даги энг кичик қиймати.

(2.3) формула яқинлашиш аниқлигининг баҳосини беради.

1-мисол. $x^3-3x-6=0$ тенглама илдизини ажратинг.

Ечиш. $y=x^3-3x-6=f(x)$ функцияни қараймиз. Осонгина кўриш мумкинки, $f(0)=-6<0$, $f(3)=12>0$, яъни $f(0)\cdot f(3)<0$ бўлганлиги учун $[0; 3]$ кесмада илдиз бор. Ҳосилани топамиз: $y'=3x^2-3$, унинг илдизлари $x_1=1$ ва $x_2=-1$. Кўриш осонки, $x \in (-1, 1)$ да $y'<0$ ва $x \in \{(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\}$ да $y'>0$. Топилган $[0, 3]$ кесма бу соҳаларнинг ҳеч бирига бутунлай кирмайди. Уни торайтирамиз: $\alpha \doteq 1$ деб оламиз, у ҳолда $f(1)=-8<0$ ва $f(3)=12>0$. $[1, 3]$ кесма изланаётган илдизнинг яккаланиш оралиғи, бу ерда $f'(x)>0$ ва $f(1)\cdot f(3)<0$.

2-мисол. $x \lg x = 1$ тенглама илдизининг яккаланиш оралиғини топинг.

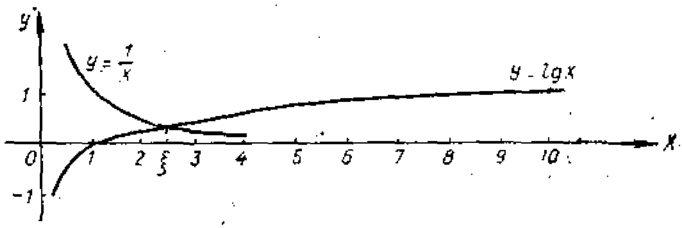
Ечиш. Бу тенгламани унга тенг кучли

$$\lg x = \frac{1}{x}$$

тенгламага алмаштирамиз ҳамда $y=\lg x$ ва $y=\frac{1}{x}$ функцияларнинг графикларини ясаймиз (158-шакл).

Изланаётган илдизнинг яккаланиш оралиғи $[2, 3]$.

Тенгламани тақрибий ечишнинг иккинчи босқичига — илдизни аниқлаштириш, яккаланиш оралиғини торайтиришга ўтамиз. Синов усули, ватарлар, уринмалар ва итерациялар усулларини кўриб чиқамиз.



158- шакл.

3. Ярмидан бўлиш (ёки синов) усули. Ушбу

$$f(x)=0$$

тенглама берилган бўлиб, $[\alpha, \beta]$ — илдизнинг яккаланиш оралиғи, яъни $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ ва $f'(x)$ ҳосила $[\alpha, \beta]$ да ишорасини сақласин. Равшанки, изланаётган ξ илдиз

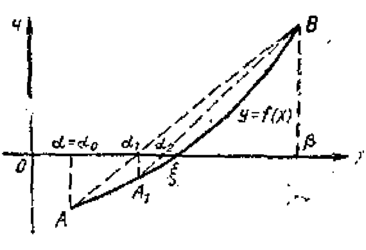
$$\alpha<\xi<\beta$$

тенгсизликни қаноатлантиради. Илдизнинг биринчи яқинлашиши сифатида $\frac{\alpha+\beta}{2}$ сонни, яъни $[\alpha, \beta]$ кесманинг ўртасини олиш мумкин.

Агар $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$ бўлса, $\xi=\frac{\alpha+\beta}{2}$ изланаётган илдиз бўлади. Агар $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\neq 0$ бўлса, у ҳолда $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ ёки $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ оралиқларнинг қайси бирининг охирларида функция қарама-қарши ишораларга эга бўлса, шунисини оламиз. Янги торайтирилган оралиқни (уни $[\alpha_1, \beta_1]$ билан белгилаймиз) яна тенг иккига бўламиз, яъни унинг ўртасини топамиз ва жараённи шу тартибда давом эттирамиз. Баъзан кесманинг ўртасини эмас, балки илдизнинг яккаланиш оралиғининг бирор ихтиёрий нуқтасини олиш қулай бўлади (уни танлашда $f(x)$ функциянинг хусусиятлари ҳисобга олинади). Аниқлик баҳоси учун формула аввалгининг ўзи бўлади:

$$|\bar{x}-\xi|\leqslant\frac{|f(\bar{x})|}{m_1},$$

бу ерда m_1 — шу $f'(x)$ нинг энг кичик қиймати, x эса илдизнинг тақрибий қиймати.



159- шакл.

4. Ватарлар усули (чизиқли интерполяциялаш усули). $f(x)=0$ тенгламанинг илдизини ярмидан бўлиш усули билан аниқлаштириш усулининг ғояси оддий бўлса ҳам, лекин у муҳим камчиликка эга: етарлича юқори даражада аниқликка эришиш учун анча катта сондаги қадам талаб этилади ва демак, ҳисоблаш иши ҳажми ҳам катта бўлади. Ватарлар усули эса одатда анча кам сондаги қадамларни талаб этади.

Геометрик нуқтаи назардан бу усул $y = f(x)$ функциянинг ξ илдизининг $[\alpha, \beta]$ яккаланиш оралиғидаги графигини AB тўғри чизиқ билан алмаштиришдан иборат (159 шакл). AB ватар тенгламасини $A(\alpha; f(\alpha))$ ва $B(\beta, f(\beta))$ нуқталар орқали ўтадиган тўғри чизиқ тенгламаси сифатида ёзамиз:

$$\frac{y - f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)} = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}.$$

ξ илдизнинг биринчи яқинлашиши сифатида α_1 ни — AB нинг Ox ўқ билан кесишиш нуқтаси абсциссасини оламиз. Бу $(\alpha_1; 0)$ нуқтанинг координаталарини тўғри чизиқ тенгламасига қўямиз:

$$\frac{0 - f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)} = \frac{\alpha_1 - \alpha}{\beta - \alpha},$$

бундан

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{f(\alpha)(\beta - \alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}.$$

$\alpha = \alpha_0$, $\Delta\alpha_0 = \alpha_1 - \alpha_0$ деб белгилаб, бу тенгсизликни бундай қайта ёзиб оламиз:

$$\Delta\alpha_0 = -\frac{f(\alpha_0)(\beta - \alpha_0)}{f(\beta) - f(\alpha_0)}.$$

Натижада биринчи яқинлашиш учун

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \Delta\alpha_0$$

формулани ҳосил қиламиз. $[\alpha_1, \beta]$ оралиққа яна шу ватарлар усулини қўлланиб, биз илдизнинг ушбу иккинчи яқинлашишини ҳосил қиламиз:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta\alpha_1, \qquad \Delta\alpha_1 = -\frac{f(\alpha_1)(\beta - \alpha_1)}{f(\beta) - f(\alpha_1)}.$$

Ватарлар усулини кетма-кет n марта такрорлаб, ушбу яқинлашишлар кетма-кетлигини ҳосил қиламиз:

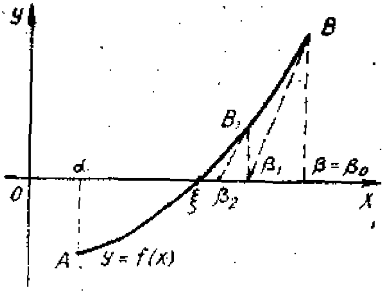
$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_n,$$

бу ерда

$$\alpha_k = \alpha_{k-1} + \Delta\alpha_{k-1}, \quad \Delta\alpha_{k-1} = -\frac{f(\alpha_{k-1})(\beta - \alpha_{k-1})}{f(\beta) - f(\alpha_{k-1})}.$$

Илдизнинг тақрибий қийматларини берилган ε аниқликда ҳисоблашни иккита қўшни яқинлашиш орасидаги айирма модули бўйича ε дан ортиқ бўлмаган заҳоти, яъни $|\alpha_n - \alpha_{n-1}| < \varepsilon$ бўлган заҳоти тўхтатиш мумкин.

5. Уринмалар усули (Ньютон усули). $f(x) = 0$ тенгламани уринмалар усули билан ечиш учун ξ илдизнинг яккаланиш оралиғи $[\alpha, \beta]$ да $f(x)$ функция ушбу шартларни қаноатлантиришини талаб қиламиз:



160- шакл.

$f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$; $f'(x)$ ва $f''(x)$ нинг ишоралари ўзгармасдан қолсин. Сўнгги шарт илдизнинг яккаланиш оралиғида функция графигининг букилиш нуқталари йўқлигини билдиради (қавариқлик ёки ботиқлик йўналишининг ўзгармаслиги).

Уринмалар усули геометрик нуқтаи назардан $f(x)$ функция ξ илдизининг яккаланиш оралиғи $[\alpha, \beta]$ да унинг графигини бу графикка β абсциссали нуқтадан ўтказилган уринма билан алмаштиришни билдиради (160- шаклда бу *B* нуқта).

Графикка $B(\beta, f(\beta))$ нуқтада ўтказилган уринма *тенгламасини* *B* нуқтадан ўтадиган ва $k = f'(\beta)$ бурчак коэффициентли тўғри чизиқ тенгламаси кўринишида ёзамиз:

$$y - f(\beta) = f'(\beta)(x - \beta).$$

ξ илдизнинг *биринчи яқинлашиши* сифатида β_1 ни — уринманинг *Ox* ўқ билан кесишиш нуқтаси абсциссасини оламиз. Бу $(\beta_1, 0)$ нуқтанинг координаталарини уринма тенгламасига қўямиз:

$$0 - f(\beta) = f'(\beta)(\beta_1 - \beta).$$

Бу ердан

$$\beta_1 = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$$

га эга бўламиз. $\beta = \beta_0$ деб белгилаб, сўнгги тенгликни бундай қайта ёзамиз:

$$\Delta\beta_0 = -\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}.$$

Натижада *биринчи яқинлашиш учун*

$$\beta_1 = \beta_0 + \Delta\beta_0$$

формулани ҳосил қиламиз. $[\alpha, \beta_1]$ *оралиқда яна шу уринмалар усулини* татбиқ қиламиз ва ушбу иккинчи яқинлашишни ҳосил қиламиз:

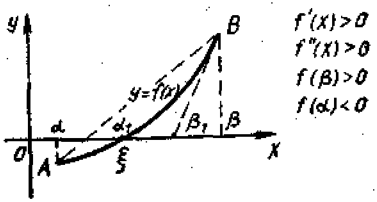
$$\beta_2 = \beta_1 + \Delta\beta_1, \text{ бу ерда } \Delta\beta_1 = -\frac{f(\beta_1)}{f'(\beta_1)}.$$

Уринмалар усулини кетма-кет *n* марта татбиқ қилиб, ушбу яқинлашишлар кетма-кетлигини ҳосил қиламиз:

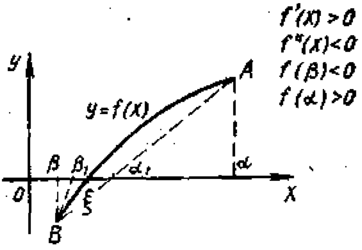
$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k, \ldots, \beta_n,$$

бу ерда

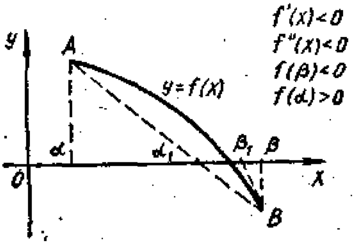
$$\beta_k = \beta_{k-1} + \Delta\beta_{k-1}, \text{ бунда } \Delta\beta_{k-1} = -\frac{f(\beta_{k-1})}{f'(\beta_{k-1})}.$$



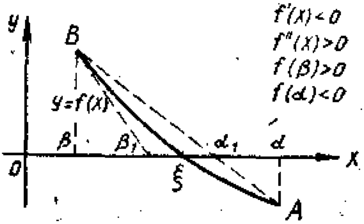
161- шакл.



162- шакл.



163- шакл.



164- шакл.

Илдизнинг тақрибий қийматини берилган ε аниқликда ҳисоблашни иккита қўшни яқинлашиш орасидаги айирманинг абсолют қиймати ε дан кичик бўлган заҳоти, яъни $|\beta_n - \beta_{n-1}| < \varepsilon$ бўлганда тўхтатиш мумкин.

6. Ватарлар ва уринмалар аралаш усули. $f(x) = 0$ тенгламанинг изланаётган ξ илдизи $[\alpha, \beta]$ яккаланиш оралиғида ётган бўлсин ва юқорида келтирилган илдизнинг яккаланиш шартлари бажарилсин, яъни $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$; $f'(x)$ ва $f''(x)$ нинг ишоралари бу оралиқда ўзгармайди. $y = f(x)$ функция биринчи ва иккинчи ҳосилалари ишораларининг барча мумкин бўлган комбинацияларини кўриб чиқамиз (161 — — 164- шакллар). 161 — 164- шаклларда бундан буён β орқали яккаланиш оралиғининг $f(x)$ ва $f''(x)$ бир хил ишорага эга бўладиган охирини белгилаймиз. Бу охирда уринмалар усулини қўллаймиз. Бу ҳолда $y = f(x)$ эгри чизиққа $B(\beta, f(\beta))$ нуқтадаги уринма Ox ўқни β нуқта билан ξ илдиз орасида кесиб ўтади, AB ватар эса эгри чизиқни α нуқта билан ξ илдиз орасида кесиб ўтади. Ватар ва уринманинг Ox ўқ билан кесишиш нуқталари α ва β ларга қараганда яхшироқ яқинлашишни беради. Иккала усулнинг аралаш ишлатилиши илдизга яқинлашишни тезроқ беради. α_n ва β_n яқинлашишлар учун ҳисоблаш формулалари ушбу кўринишда бўлади:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} - \frac{f(\alpha_{n-1})(\beta_{n-1} - \alpha_{n-1})}{f(\beta_{n-1}) - f(\alpha_{n-1})} = \alpha_{n-1} + \Delta\alpha_{n-1},$$

$$\beta_n = \beta_{n-1} - \frac{f(\beta_{n-1})}{f'(\beta_{n-1})}.$$

Жараён ниҳоясига етганидан сўнг ξ илдизнинг қиймати сифатида яхшиси сўнгги қийматларнинг ўрта арифметик қийматини олиш лозим:

$$\xi = \frac{1}{2}(\alpha_n + \beta_n).$$

Мисол сифатида 1-мисолда $x^3 - 3x - 6 = 0$ тенглама учун ҳосил қилинган илдизни аниқлаштирамиз, яъни [1, 3] яккаланиш оралиғини торайтирамиз. Шундай қилиб, $f(x) = x^3 - 3x - 6$, $f(1) = -8 < 0$, $f(3) = 12 > 0$ ва [1, 3] яккаланиш оралиғида $f'(x) = 3(x^2 - 1) > 0$, яна шу оралиқда $f''(x) = 6x > 0$. β сифатида $\beta = 3$ ни оламиз, чунки $f(3) > 0$ ва $f''(x) > 0$ бўлганлиги учун бу оралиқда уринмалар усулини қўлланиш мумкин. Ҳисоблашларни юқорида келтирилган формулалар бўйича бажарамиз. Натижаларни жадвалга ёзамиз. Илдиз 0,001 гача аниқликда топилади.

Якинлашиш	$f(x) = x^3 - 3x - 6$				$\frac{\beta-\alpha}{f(\beta)-f(\alpha)}$	$\Delta\alpha = -\frac{(\beta-\alpha)\cdot f(\alpha)}{f(\beta)-f(\alpha)}$ $\Delta\beta = -\frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$	$f'(x) = 3(x^2 - 1)$			$\alpha+\Delta\alpha$ $\beta+\Delta\beta$
	x	x^3	$-3x$	$f(x)$			x^2	x^2-1	$f'(x)$	
α_0	1	1	—3	—8	2	0,8	—	—	—	1,8
β_0	3	27	—9	12	20	—0,5	9	8	24	2,5
α_1	1,8	5,8320	—5,4	—5,5680	0,7	+0,5066	—	—	—	2,3066
β_1	2,5	15,6250	—7,5	2,1250	7,6930	—0,1349	6,25	5,25	15,75	2,3651
α_2	2,3036	12,2720	—6,9108	—0,6478	0.0585	0,0484	—	—	—	2,3550
β_2	2,3651	13,2297	—7,0953	0,1344	0.7822	—0,0098	5,5937	4,5937	13,7811	2,3554
α_3	2,3550				0,0005					
β_3	2,3555									

Изланаётган илдиз

$$2{,}3550 < \xi < 2{,}3555$$

интервалда ётади. Ҳисоблаш $|\beta_3 - \alpha_3| = 0{,}0005 < 0{,}001$ бўлганлиги сабабли тўхтатилган. Илдиз 0,001 гача аниқликда қуйидагига тенг:

$$\xi \approx \frac{\alpha_3 + \beta_3}{2} = 2{,}3552 \approx 2{,}355.$$

7. Итерация усули. Тенгламаларни сонли ечишнинг энг муҳим усулларидан бири итерация усули ёки кетма-кет яқинлашишлар усулидан иборат. Усулнинг моҳияти қуйидагича.

1. Ҳисоблаш формуласи. Ушбу тенглама берилган бўлсин:

$$f(x) = 0, \tag{2.4}$$

бу ерда $f(x)$ — узлуксиз функция. Бу тенгламанинг ҳақиқий илдизини топиш керак. (2.4) тенгламани унга тенг кучли

$$x=\varphi(x) \qquad (2.5)$$

тенглама билан алмаштирамиз. Бирор-бир усул билан илдизнинг x_0 тақрибий қийматини танлаймиз, уни (2.5) тенгламанинг ўнг томонига қўйсак, бирор

$$x_1=\varphi(x_0)$$

сонни ҳосил қиламиз. Сўнгра (2.5) тенгламанинг ўнг томонига олинган x_1 сонни қўйсак,

$$x_2=\varphi(x_1)$$

сонни ҳосил қиламиз. Бу жараённи давом эттириб,

$$x_1=\varphi(x_0),\ x_2=\varphi(x_1),\ \ldots,\ x_n=\varphi(x_{n-1})$$

сонли кетма-кетликни ҳосил қиламиз. Агар бу

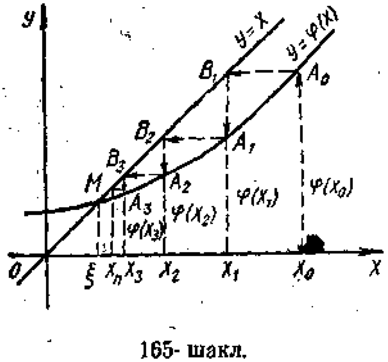
$$\{x_n=\varphi(x_{n-1})\} \qquad (2.6)$$

кетма-кетлик яқинлашувчи, яъни $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ мавжуд бўлса, у ҳолда (2.6) тенгликда лимитга ўтиб (бунда $\varphi(x)$ функция узлуксиз деб фараз қилиб),

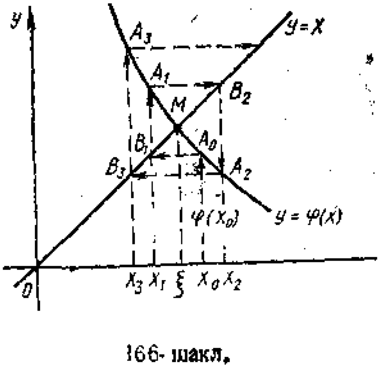
$$\lim_{n\to\infty} x_n=\varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) \text{ ёки } \xi=\varphi(\xi)$$

ни топамиз. Шундай қилиб, ξ (2.5) тенгламанинг илдизи бўлади. У (2.6) формула бўйича исталган аниқликда топилиши мумкин.

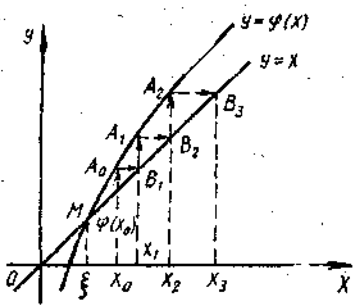
2. **Геометрик талқини.** Итерация усулини геометрик нуқтаи назардан бундай тушунтириш мумкин. *Oxy* текисликда $y=x$ ва $y=\varphi(x)$ функцияларнинг графикларини ясаймиз. (2.5) тенгламанинг ҳар бир ξ илдизи $y=f(x)$ эгри чизиқнинг $y=x$ тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтаси M нинг абсциссаси бўлади. Бирор $A_0(x_0, y_0)$ нуқтани танлаб, $A_0B_1A_1B_2A_2$ синиқ чизиқни («зинани») ясаймиз: унинг бўғинлари Ox ўққа ва Oy ўққа параллел, A_0, A_1, A_2 ..., учлари $y=\varphi(x)$ тўғри чизиқда, B_1, B_2, ... учлари эса $y=x$ тўғри чизиқда ётади. A_1 ва B_1, A_2 ва



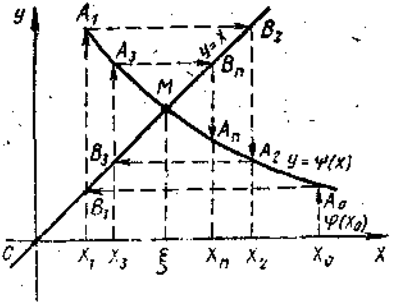
165- шакл.



166- шакл.



167- шакл.



168- шакл.

$B_2, \ldots$ нуқталарнинг умумий абсциссалари эса ξ илдизнинг мос равишда кетма-кет $x_1, x_2, \ldots$ яқинлашишлари бўлади.

165- шаклда эгри чизиқ ботиқ, яъни $|\varphi'(x)|<1$ ва итерация жараёни яқинлашади.

Синиқ чизиқнинг бошқача кўриниши —«спирал» чизиқ ҳам бўлиши мумкин (166- шакл.)

Чизмадан кўриш осонки, $\varphi'(x)>0$ бўлганда (165- шакл) ечим «зина» кўринишида, $\varphi'(x)<0$ бўлганда эса (166- шакл) ечим «спирал» шаклида ҳосил бўлади.

Агар $|\varphi'(x)|>1$ бўлган ҳолни (тик эгри чизиқ) қарасак, итерация жараёни узоқлашиши мумкин, бу 167—168- шакллардан кўриниб турибди.

3. Итерация жараёнининг яқинлашувчанлиги. Итерация усулининг амалда қўлланилиши учун итерация жараёни яқинлашишининг етарлилик шартларини келтирамиз.

Теорема. $\varphi(x)$ *функция* $[a, b]$ *кесмада аниқланган ва дифференциалланувчи, шу билан бирга унинг барча қийматлари* $[a, b]$ *га тегишли бўлсин. У ҳолда шундай* q *тўғри каср мавжудки,* $x \in [a, b]$ *да*

$$\varphi'(x) \leqslant q < 1 \qquad (2.7)$$

бўлса, у ҳолда:

а) $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$ *итерация жараёни* $x_0 \in [a, b]$ *бошланғич қиймат қандай бўлишидан қатъий назар яқинлашади.*

б) $\xi = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ *қиймат* $x = \varphi(x)$ *тенгламанинг* $[a, b]$ *кесмадаги ягона илдизи бўлади.*

1-эслатма. q сон сифатида ҳосила модулининг, яъни $\varphi'(x)$ нинг $x \in [a, b]$ даги энг кичик қийматини ёки қуйи чегарасини олиш мумкин.

2-эслатма. Агар $\varphi(x)$ функция барча $x \in (-\infty, +\infty)$ учун аниқланган ва дифференциалланувчи ва бунда барча x лар учун (2.7) тенгсизлик бажарилса, теорема тўғрилигича қолади.

3-эслатма. Теорема шартларида итерация усули x_0 бошланғич қиймат $[a, b\}$ дан ҳар қандай танланганида ҳам яқинлашади, яъни ҳисоблашларда йўл қўйилган $[a, b]$ дан четга чиқмайдиган айрим хатолик якуний натижага таъсир этмайди, чунки хато қийматни янги x_0 бошланғич қиймат деб қараш мумкин, шу сабабли бу усул ўз-ўзини тўғрилайдиган усулдир. Бундай ўз-ўзини тўғрилаш усули итерация усулининг энг ишончли ҳисоблаш усулларидан бири эканлигини билдиради.

4. Яқинлашиш аниқлигининг баҳоси. Ушбу тенгсизлик тўғрилигини исботлаш мумкин:

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}|, \tag{2.8}$$

бу ерда ξ — (2.4) ёки (2.5) тенгламанинг илдизи, x_{n-1}, x_n эса иккита яқинлашиш, q эса $|\varphi'(x)|$ нинг $[a, b\}$ даги энг кичик қиймати.

Бу тенгсизликдан яқинлашишни баҳолаш учун фойдаланамиз.

Агар илдизни ε аниқликда ҳисоблаш талаб этилса, у ҳолда равшанки,

$$|\xi - x_n| < \varepsilon \text{ ёки } \frac{q}{1-q} |x_n \rightarrow x_{n-1}| < \varepsilon,$$

бундан

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-q}{q} \varepsilon \tag{2.9}$$

ни ҳосил қиламиз. Демак, итерация жараёнини иккита кетма-кет яқинлашиш x_{n-1} ва x_n учун (2.9) тенгсизлик бажарилганига қадар давом эттириш лозим. Хусусан, $q = \frac{1}{2}$ бўлса, у ҳолда $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$.

Мисол. $x^3 + x = 1000$ тенгламанинг энг катта мусбат илдизини 0,0001 гача аниқликда топинг.

Ечиш. Аввал изланаётган ξ илдиз ётадиган оралиқни топамиз. $f(x) = x^3 + x - 1000$ деб белгилаймиз ва бу функциянинг қийматини иккита нуқтада ҳисоблаймиз: $f(9) = -262 < 0$ ва $f(10) = 10 > 0$. Равшанки, илдиз $\xi \in (9, 10)$ (Бу интервалнинг ўзини Oxy текисликда $y = x^3$ ва $y = 1000 - x$ функцияларнинг графикларини ясаб ҳам топиш мумкин эди). Берилган тенгламани ушбу кўринишда унга тенг кучли тенгламага алмаштирамиз:

$$x = 1000 - x^3 = \varphi(x), \quad \text{ёки} \quad x = \frac{1000}{x^2} - \frac{1}{x} = \varphi(x),$$

ёки

$$x = \sqrt[3]{1000 - x} = \varphi(x).$$

Биринчи ифодаланиш ноқулай чунки бу ҳолда $|\varphi'(x)| = 3x^2 > 1$ бўлиб, бундан барча $x \in (9, 10)$ учун $\varphi'(x) = -3 \cdot x^2$ бўлади, бу эса итерация жараёни узоқлашишини билдиради.

Охирги ифодалаш қулайдир:

$$x = \sqrt[3]{1000 - x} = \varphi(x).$$

чунки бу ҳолда $\varphi'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(1000-x)^2}}$, бу ердан (9, 10) интервалда қуйидагига эгамиз:

$$|\varphi'(x)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1000-x)^2}} < \frac{1}{3\sqrt[3]{990^2}} \approx \frac{1}{300} = q < 1.$$

Теорема шартлари бажарилди, шу сабабли итерация жараёни яқинлашувчи. Кетма-кет яқинлашишларни

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{1000 - x_n}$$

формула бўйича битта қўшимча қийматдор рақамни сақлаб ҳисоблаймиз. $y_n = 1000 - x_n$, $x_{n+1} = \sqrt[3]{y_n}$ деб белгилаб, натижаларни жадвалга ёзамиз:

n	x_n	y_n
0	10	990
1	9,96655	990,03345
2	9,96666	990,03334
3	9,96667	

$q = \frac{1}{300} < \frac{1}{2}$ бўлганлиги учун $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ да $\varepsilon = 0{,}0001$ гача аниқликда тенгламанинг ξ илдизини

$$\xi = x_3 = 0{,}96667 \approx 0{,}9667$$

деб олиш мумкин.

Эслатма. Ушбу $f(x) = 0$ тенгламани (2.5) кўринишдаги

$$x = \varphi(x) \tag{2.10}$$

тенгламага келтириш учун (2.4) тенгламанинг чап ва ўнг қисмларини ҳозирча номаълум λ сонга кўпайтириш ва ҳосил бўлган тенгликнинг чап ва ўнг қисмларига x ни қўшиб, (2.4) тенгламани унга эквивалент

$$x = x + \lambda f(x) \tag{2.11}$$

шаклда ёзиш кифоя. Энди $\varphi(x) = x + \lambda f(x)$ деб олиб, (2.10) дан $x = \varphi(x)$ га эга бўламиз. λ параметрни (2.11) функция итерация жараёнининг яқинлашиши учун етарли бўлган (2.8) шартни қаноатлантирадиган қилиб, топиш мумкин:

$$|\varphi'(x)| = |1 + \lambda f'(x)| < 1. \tag{2.12}$$

Агар $1 + \lambda f(x_0)$ деб олинадиган бўлса, x_0 яқинлашиш атрофида (2.12) тенгсизлик ўз-ўзидан бажарилади, бу ердан $f'(x_0) \neq 0$ бўлганда $\lambda = -\frac{1}{f'(x_0)}$.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Тенгламани ечиш нимани билдиради?

2. Тенгламанинг илдизи деб нимага айтилади?

3. Сизга тенгламаларни ечишнинг қандай асосий усуллари маълум?

4. Бу усулларнинг ҳар бирининг афзаллик ва камчилик томонлари нималардан иборат?

5. Илдизнинг яккаланиш оралиғи нима ва уни қандай топилади?

6. Синов усули нимадан иборат?

7. Ватарлар усули нимадан иборат?

8. Ватарлар усулининг синов усулидан афзаллиги нимадан иборат?

9. Уринмалар усули нимадан иборат?

10. Функциянинг илдизини топишда уринмалар усулини қўллаш мумкин бўлиши учун бу функция унинг илдизини яккаланиш оралиғида қандай шартларни қаноатлантириши лозим?

11. Аралаш усулнинг ватар усули ва уринмалар усулидан афзаллиги нимадан иборат?

12. Қуйидаги тенгламалар ечимини $\varepsilon=0{,}01$ гача аниқликда синов усули билан ечинг:

а) $\sin x - x + 1 = 0$; б) $\ln x + x - 2 = 0$; в) $\ln x = \sin x$.

13. Ушбу тенгламаларнинг ҳақиқий илдизини 0,01 гача аниқликда аралаш усул билан топинг:

а) $2x - \ln x - 4 = 0$; б) $x \ln x - 14 = 0$; в) $4x - \cos x = 0$,

бунда аввал бу илдизларнинг яккаланиш оралиқларини синов усули билан ёки график усулда ажратинг.

14. Итерация усули нимадан иборат?

15. Итерация жараёнининг яқинлашиши учун етарлилик шартлари ҳақидаги теоремани айтиб беринг.

16. Итерация усулида эришиладиган аниқликни баҳолаш учун формулани ёзинг.

17. Ечилаётган тенгламани итерация жараёни албатта яқинлашадиган қилиб қандай алмаштириш мумкин?

18. Нолинчи яқинлашишни график усул билан топиб, ушбу тенгламаларнинг ҳақиқий илдизларини $\varepsilon=0{,}01$ гача аниқликда топинг:

а) $x^3 - 2x + 1 = 0$; б) $x \ln x - 15 = 0$;
в) $3x - 5\cos x = 0$; г) $e^x + x = 0$.

3-§. Чизиқли тенгламалар системаларини ечиш усуллари

1. Умумий маълумотлар. Чизиқли тенгламалар системаларини ечиш усулларини асосан икки гуруҳга ажратиш мумкин:

1) аниқ усуллар — бу усулларга олий математика курсидан маълум бўлган Крамер қоидаси, Гаусс усули, тескари матрицалар усули киради. Бу усуллар системаларни ечиш учун система коэффициентларига боғлиқ бўлган формулаларни ҳосил қилиш имконини беради;

2) итерацион усуллар — улар қаторига итерация усули, Зейдель усули ва ҳоказолар киради. Бу усуллар системанинг берилган аниқликдаги ечимини топиш имконини беради.

2. Жордано — Гаусс усули. Чизиқли тенгламалар системаларини детерминантлар ёрдамида сонли ечиш (Крамер қоидаси) икки ва учта тенглама системаларини ечишда қулайдир. Катта сондаги тенгламалар системаларини ечишда эса Гаусс усулидан фойдаланиш анча қулайдир. Маълумки, бу усул номаълумларни кетма-кет йўқотишдан иборатдир.

Жордано — Гаусснинг модификацияланган усули билан танишамиз. Мулоҳазаларнинг умумийлигига зарар етказмаган ҳолда фақат тўрт номаълумли тўртта тенглама системасини қараш билан чекланамиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = d_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = d_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = d_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = d_4, \end{cases} \qquad (3.1)$$

бу ерда x_1, x_2, x_3, x_4 — номаълум сонлар, a_{ik} $(i = \overline{1,4}$ ва $k = \overline{1,4})$ — *система коэффициентлари*, d_1, d_2, a_3, d_4 — *озод ҳадлар*.

Таъриф. (3.1) системанинг *ечими* деб номаълумларнинг шундай қийматлари тизмасига айтиладики, уларни система тенгламаларига қўйганда тўғри тенгликлар ҳосил бўлади.

(3.1) системанинг ечимини топиш учун қуйидагича иш тутамиз. Бирор $a_{ik} \neq 0$ коэффициентни, масалан, $a_{11} \neq 0$ ни танлаймиз. Уни *ҳал қилувчи элемент* деб атаймиз. (3.1) системанинг биринчи тенгламасини a_{11} га бўлиб, кейин ҳосил бўлган тенгламани кетма-кет a_{i1} $(i = \overline{2,4})$ ларга кўпайтириб ва (3.1) системанинг мос i-тенгламасини айириб, биз биринчи тенгламадан ташқари, барча тингламалардан x_1 номаълумни йўқотамиз. Натижада (3.1) системага тенг кучли қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = d_1, \\ \qquad\qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 = d'_2, \\ \qquad\qquad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + a'_{34}x_4 = d'_3, \\ \qquad\qquad a'_{42}x_2 + a'_{43}x_3 + a'_{44}x_4 = d'_4. \end{cases} \qquad (3.2)$$

(3.2) системанинг a'_{ik} $(i = \overline{1,4})$ коэффицентларини ҳосил қилиш қоидасини кейинроқ кўрсатамиз.

Агар $a'_{22} \neq 0$ бўлса, у ҳолда жараён такрорланади, натижада биз (4.2) системанинг биринчи тенгламасидан ташқари барча тенгламаларидан x_2 номаълумни йўқотамиз (Жордано усулининг Гаусснинг маълум усулидан фарқи ҳам шундан иборат) ва (3.2) системага тенг кучли қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + \qquad\qquad a'_{13}x_3 + a'_{14}x_4 = d'_1, \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 = d'_2, \\ \qquad\qquad\qquad a''_{33}x_3 + a''_{34}x_4 = d''_3, \\ \qquad\qquad\qquad a''_{43}x_3 + a''_{44}x_4 = d''_4. \end{cases} \qquad (3.3)$$

(3.3) системанинг янги коэффицентларини ва озод ҳадларини ҳосил қилиш қоидасини параграфнинг охирида баён қиламиз.

Жараённи ($a''_{33} \neq 0$ бўлса) шунга ўхшаш давом эттириб, учинчи тенгламасидан ташқари барча тенгламаларидан x_3 номаълум йўқотилган тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} a''_{11}x_1 + \qquad\qquad\qquad\quad a''_{14}x_4 = d''_1, \\ \qquad\quad a''_{22}x_2 + \qquad\quad\; a''_{24}x_4 = d''_2, \\ \qquad\qquad\qquad a''_{33}x_3 + a''_{34}x_4 = d''_3, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; a'''_{44}x_4 = d'''_4 \end{cases} \tag{3.4}$$

Ва, ниҳоят, (3.4) системанинг тўртинчи тенгламасидан ташқари барча тенгламаларидан x_4 номаълумни йўқотиб қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\begin{aligned} a'''_{11}x_1 &= d'''_1, \\ a'''_{22}x_2 &= d'''_2, \\ a'''_{33}x_3 &= d'''_3, \\ a'''_{44}x_4 &= d'''_4. \end{aligned}$$

Бу системадан x_1, x_2, x_3, x_4 номаълумларнинг қийматлари топилади. Тенгламалар системасини ечишнинг номаълумларни кетма-кет йўқотишга асосланган баён этилган мазкур усули Жордано — Гаусс усули деб аталади.

Бу усулни тенгламалар системасига эмас, балки шу системанинг элементар алмаштиришлар ёрдамида диагонал кўринишга келувчи кенгайтирилган матрицасига қўлланиш қулайроқдир.

Шундай қилиб, системанинг кенгайтирилган матрицаси қуйидаги кўринишга эга бўлсин:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & d_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & d_4 \end{array}\right)$$

Ҳал қилувчи элемент сифатида бош диагоналда турган элемент олинади (a_{ii}; $i = \overline{1,4}$). Ҳал қилувчи элементда кесишувчи сатр ва устун мос равишда *ҳал қилувчи сатр* ва *ҳал қилувчи устун* деб аталади.

Кенгайтирилган A матрицадан эквивалент матрицага ўтиш (яъни (3.1) системадан (3.2) системага ўтиш) учун

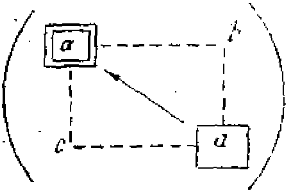
1) ҳал қилувчи элементни танлаш (масалан, $a_{11} \neq 0$);

2) эквивалент матрицада ҳал қилувчи сатрни ўзгаришсиз қолдириш;

3) эквивалент матрицада ҳал қилувчи устунни (ҳал қилувчи элементдан ташқари) ноллар билан алмаштириш;

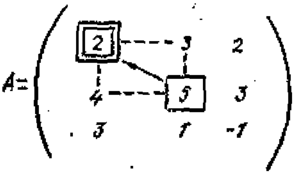
4) эквивалент матрицанинг қолган элементларини эса «тўғри тўртбурчак» қоидаси деб аталувчи қоида бўйича қайта санаш керак.

Бу қоида қуйидагидан иборат: учида ҳал қилувчи элемент жойлашган тўғри тўртбурчак тузамиз. Ҳал қилувчи элементни α билан, дастлабки матрицанинг алмаштирилаётган элементини a билан, ҳал қилувчи сатр ва ҳал қилувчи устунда жойлашган элементларни b ва c билан белгилаймиз. Янги a' элементни a, α, b, c элементлар бўйича топиш схемаси қуйидагича бўлади:



$$a' = \frac{a \cdot \alpha - bc}{\alpha}.$$

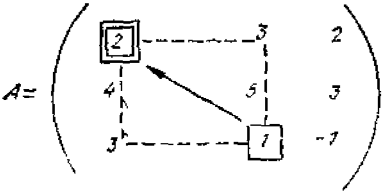
Масалан, ушбу



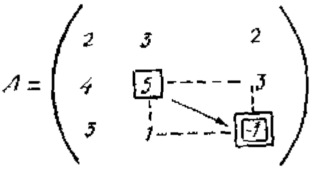
матрицада ҳал қилувчи элемент сифатида $a_{11} = 2$ ни оламиз. У ҳолда a_{22} элемент a'_{22} элементга қуйидаги формула бўйича алмаштирилади:

$$a'_{22} = \frac{2 \cdot 5 - 4 \cdot 3}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

a_{32} элемент $a'_{32} = \dfrac{2 \cdot 1 - 3 \cdot 3}{2} = -\dfrac{7}{2}$ элементга алмаштирилади:



Агар ҳал қилувчи элемент сифатида $a_{33} = -1$ олинса, у ҳолда a_{22} элемент $a'_{22} = \dfrac{5 \cdot (-1) - 3 \cdot 1}{-1} = 8$ элементга алмаштирилади:



1-мисол. Чизиқли тенгламалар системасини Жордано — Гаусс усули билан ечинг:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 \qquad\quad - x_4 = -6, \\ \qquad\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \qquad = 6. \end{array}\right.$$

Ечиш. Кенгайтирилган A матрицани тузамиз, ва юқорида баён этилган қоидалардан фойдаланиб, сатрлар устида элементар алмаштиришларни амалга оширамиз:

1) Ҳал қилувчи элемент сифатида $a_{11} = 1 \neq 0$ ни оламиз. Ҳал қилувчи сатрни қайта ёзамиз, янги матрицанинг ҳал қилувчи устунига эса (ҳал қилувчи элементдан ташқари) нолларни қўямиз Қолган коэффициентларни «тўғри тўртбурчак» қоидаси бўйича алмаштирамиз:

$$A = \left(\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & -12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & -5 & 8 & -4 & -6 \end{array}\right).$$

2) Иккинчи сатрни (-3) га бўламиз. Ҳал қилувчи элемент сифатида $a_{22} = 1 \neq 0$ ни оламиз ва жараённи такрорлаймиз:

$$A = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & -5 & 8 & -4 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 14 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Натижада системанинг қуйидаги ечимига эга бўламиз:

$$x_1 = 8,\ x_2 = 6,\ x_3 = 4,\ x_4 = 2.$$

Жордано — Гаусс усулини юқори тартибли детерминантларни ҳисоблашга қўлланиш мумкин.

2-мисол. Жордано — Гаусс усули ва шунингдек детерминантлар хоссасидан фойдаланиб детерминантни ҳисобланг:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2 & 4\\ -1 & 3 & 2 & 1\\ 4 & -2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & -1 & 3\end{vmatrix}.$$

Ечиш. Ҳал қилувчи элемент сифатида $a_{11} = 1$ ни оламиз.

$$\Delta=\begin{vmatrix}\boxed{1} & 3 & 2 & 4\\ -1 & 3 & 2 & 1\\ 4 & -2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2 & 4\\ 0 & 6 & 4 & 5\\ 0 & -14 & -5 & -11\\ 0 & 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=$$

(иккинчи ва тўртинчи сатр элементларининг ўринларини алмаштирамиз ва (—1) кўпайтувчини учинчи сатрдан ташқарига чиқарамиз).

$$=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2 & 4\\ 0 & \boxed{1} & -1 & 3\\ 0 & 14 & 5 & 11\\ 0 & 6 & 4 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 5 & -5\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & \boxed{19} & -31\\ 0 & 0 & 10 & -13\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{60}{19}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{26}{19}\\ 0 & 0 & 19 & -31\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\frac{63}{19}}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 19 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{63}{19}\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot19\cdot\frac{63}{19}=63.$$

Жордано — Гаусс усулини, шунингдек, яна A хосмас квадрат матрицага тескари матрицани топишга қўллаш мумкин. Бунда қуйидаги ишлар бажарилади: A матрицага худди шундай тартибли E бирлик матрицани бириктириш билан тўғри бурчакли матрицани тузамиз:

$$(A|E).$$

Сатрлар устида элементар алмаштиришлар бажариш билан тузилган матрицани $(E|B)$ кўринишга келтирамиз. Агар A — хосмас матрица бўлса (яъни унинг детерминанти нолга тенг бўлмаса), буни амалга ошириш мумкин. У ҳолда $B=A^{-1}$ бўлади.

3-мисол. Берилган матрицага тескари матрицани топинг:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 0\\ 4 & 5 & -2\end{pmatrix}.$$

Ечиш. $|A|=-1$ эканини текшириш осон. Ёрдамчи матрицани тузамиз:

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}\boxed{\boxed{1}} & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 3 & -3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 2 & -4 & 0 & 1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \boxed{\boxed{1}} & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{3}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{15} & \frac{11}{15} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{3}\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0\\ 0 & 0 & \boxed{\boxed{1}} & -11 & -3 & 5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -6 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -11 & -3 & 5\end{array}\right).$$

Демак, ушбу

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -6 & -2 & 3\\ -11 & -3 & 5\end{pmatrix}$$

матрица берилган

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 0\\ 4 & 5 & -2\end{pmatrix}$$

матрицага тескари матрица экан.

3. Чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг итерация усули. Номаълумлар сони катта бўлганда Гаусс усулининг аниқ ечимлар берувчи чизиқли система схемаси жуда мураккаб бўлиб қолади. Бундай ҳолларда система илдизларини топиш учун баъзан тақрибий сонли усуллардан фойдаланиш қулайдир. Шундай усуллардан бири *итерация усулидир.*

Айтайлик, қуйидаги тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3.5}$$

Қуйидаги матрицаларни киритамиз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

У ҳолда (3.5) система матрица шаклида қуйидаги кўринишни олади:

$$Ax = b.$$

Диагонал коэффициентлар нолдан фарқли (яъни a_{11}, a_{22}, ..., $a_{nn} \neq 0$) деб фараз қилиб, (5.1) системанинг биринчи тенгламасини x_1 га нисбатан, иккинчи тенгламасини x_2 га нисбатан, учинчисини x_3 га нисбатан ечамиз. Натижада (3.5) системага тенг кучли қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + 0 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + 0 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1} + 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Ушбу

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 0 & \dots & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ ва } \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

матрицаларни киритиш билан (3.6) тенгламалар системасини матрица шаклида қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x = \beta + \alpha \cdot x. \tag{3.7}$$

(3.7) системани кетма-кет яқинлашишлар усули билан ечамиз. Нолинчи яқинлашиш сифатида, масалан, озод ҳадлар устунини қабул қиламиз.

$$x^{(0)} = \beta.$$

$x^{(0)}$ ни (3.7) нинг ўнг томонига қўйиб, $x^{(1)}$ биринчи яқинлашишга эга бўламиз:

$$x^{(1)} = \beta + \alpha x^{(0)}.$$

Кейин $x^{(1)}$ ни (3.7) нинг ўнг томонига қўйиб, $x^{(2)}$ иккинчи яқинлашишга эга бўламиз:

$$x^{(2)} = \beta + \alpha x^{(1)}.$$

Жараённи такрорлаб

$$x^{(n-1)} = \beta + \alpha x^{(n)} \tag{3.8}$$

формула бўйича ҳосил қилинувчи қуйидаги яқинлашишлар кетма-кетлигига эга бўламиз:

$$x^{(0)},\ x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(n)}.$$

Бу кетма-кетликнинг лимити, агар у мавжуд бўлса, (3.5) системанинг изланаётган ечими бўлади. n номаълумли n та тенглама системаси учун жараённинг яқинлашувчи бўлишининг етарлилик шартини исботсиз келтирамиз:

Теорема. *Агар келтирилган* (3.6) *система учун ушбу*

$$\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1\ (i = \overline{1, n}) \text{ ёки } \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1\ (j = \overline{1, n})$$

шартлардан камида биттаси бажарилса, у ҳолда (3.8) *итерация жараёни бу системанинг бошланғич яқинлашишни танлашга боғлиқ бўлмаган ягона ечимига яқинлашади.*

Бу шартлардан келиб чиққан ҳолда ушбу натижани ҳосил қилиш мумкин.

Натижа. Агар қуйидаги тенгсизликлар бажарилса, (3.5) тенгламалар системаси учун итерация усули яқинлашувчи бўлади:

$$\begin{cases} |a_{11}| > \sum\limits_{j=1}^{n}{}' |a_{1j}|, \\ |a_{22}| > \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{2j}|, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ |a_{nn}| > \sum\limits_{j=1}^{n}{}' |a_{nj}|, \end{cases}$$

яъни (3.5) системанинг ҳар бир тенгламаси учун диагонал коэффициентлар модули, озод ҳадларни ҳисобга олмаганда, тенгламанинг бошқа барча коэффициентлари модуллари йиғиндисидан катта.

Мисол. Уч номаълумли учта тенглама системасининг ечимини топинг:

$$\begin{cases} 4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 = 8, \\ 0,09x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 = 9, \\ 0,04x_1 - 0,08x_2 + 4x_3 = 20. \end{cases} \tag{3.9}$$

Ечиш. Жараён яқинлашувчи бўлишининг сўнгги шарти бажарилади:

$$|a_{11}| = 4 > |0,24| + |-0,08| = 0,32,$$
$$|a_{22}| = 3 > |0,09| + |-015| = 0,24,$$
$$|a_{33}| = 4 > |0,04| + |-0,08| = 0,12.$$

Шунинг учун итерация жараёни яқинлашувчи бўлади. (3.5) системани унга тенг кучли қуйидаги система билан алмаштирамиз:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 0{,}06\,x_2 + 0{,}02\,x_3, \\ x_2 = 3 - 0{,}03\,x_1 + 0 + 0{,}05\,x_3, \\ x_3 = 5 - 0{,}01\,x_1 + 0{,}02\,x_2 + 0. \end{cases} \tag{3.10}$$

Системанинг матрица шаклидаги ёзуви қуйидагича:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ёки $x = \beta + \alpha x$, бу ерда

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нолинчи яқинлашиш сифатида қуйидагини оламиз:

$$x^{(0)} = \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ ёки } x_1^{(0)} = 2, \ x_2^{(0)} = 3, \ x_3^{(0)} = 5.$$

$x^{(0)}$ ни (3.10) системанинг ўнг томонига қўйиб, $x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$ биринчи яқинлашишга эга бўламиз:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 2 - 0{,}06 \cdot 3 + 0{,}02 \cdot 5 = 1{,}92, \\ x_2^{(1)} &= 3 - 0{,}03 \cdot 2 + 0{,}05 \cdot 5 = 3{,}19, \quad \text{ёки } x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1{,}92 \\ 3{,}19 \\ 5{,}04 \end{pmatrix}. \\ x_3^{(1)} &= 5 - 0{,}01 \cdot 2 + 0{,}02 \cdot 3 = 5{,}04 \end{aligned}$$

$x^{(1)}$ ни (3.10) системанинг ўнг томонига қўйиб, иккинчи яқинлашишга эга бўламиз:

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= 1{,}9094, \\ x_2^{(2)} &= 3{,}1944, \quad \text{ёки } x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1{,}9094 \\ 3{,}1944 \\ 5{,}0446 \end{pmatrix}. \\ x_3^{(2)} &= 5{,}0446 \end{aligned}$$

$x^{(3)}$ ни шунга ўхшаш топамиз:

$$\begin{aligned} x_1^{(3)} &= 1{,}90923, \\ x_2^{(3)} &= 3{,}19495, \quad \text{ёки } x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1{,}90923 \\ 3{,}19495 \\ 5{,}04485 \end{pmatrix}. \\ x_3^{(3)} &= 5{,}04485 \end{aligned}$$

Натижаларни қуйидаги жадвалга ёзамиз:

Яқинлашишлар	x_1	x_2	x_3
0	2	3	5
1	1,92	3,19	5,04
2	1,9094	3,1944	5,0446
3	1,90923	3,19495	5,04485

Шундай қилиб, илдизларнинг тақрибий қийматлари қуйидагилар экан:

$$x_1 = 1{,}90923; \quad x_2 = 3{,}19495; \quad x_3 = 5{,}04485.$$

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Тенгламалар системасининг ечими деб нимага айтилади?

2. Чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг Жордано — Гаусс усулини баён этинг.

3. Чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг итерация усулини баён этинг.

4. Чизиқли система итерация жараёнининг яқинлашиш шарти нимадан иборат?

5. Қуйидаги системани Жордано — Гаусс усули билан ечинг:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 + 4 \cdot x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -10, \\ 3x_2 + 2x_3 = 1, \end{cases}$

6. Қуйидаги дитерминантни ҳисобланг:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -4 & 9 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 & -4 \\ 3 & -1 & -6 & -4 \\ 2 & 3 & 9 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}$.

7. Қуйидаги матрицага тескари A^{-1} матрицани топинг:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

8. Қуйидаги системани итерация усули билан ечинг:

$$\begin{cases} 4x_1 - 0{,}2x_2 - 0{,}2x_3 = 4, \\ 0{,}2x_1 - 4x_2 + 0{,}4x_4 = -8, \\ -0{,}2x_1 + 5x_3 - 0{,}1x_4 = 5, \\ 0{,}4x_2 - 0{,}1x_3 - 5x_4 = 15. \end{cases}$$

4- §. Интерполяциялаш

1. Масаланинг қўйилиши. Энг содда интерполяциялаш масаласи қуйидагича ифодаланади:

$[a, b]$ кесмада $n + 1$ та нуқта берилган:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n,$$

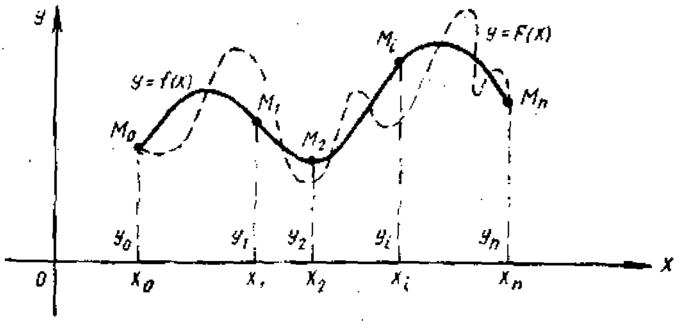
бу нуқталар *интерполяция тугунлари* деб аталади. Бирор $f(x)$ функциянинг бу нуқталардаги қиймати қуйидагилар бўлади:

$$f(x_0) = y_0,\ f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2,\ \ldots,\ f(x_i) = y_i,\ \ldots,\ f(x_n) = y_n.$$

Маълум синфга тегишли бўлган ва интерполяция тугунларида $f(x)$ функция қабул қилган қийматларни, яъни

$$F(x_0) = y_0,\ F(x_1) = y_1,\ F(x_2) = y_2,\ \ldots,\ F(x_i) = y_i,\ \ldots,\ F(x_n) = y_n$$

қийматларни қабул қилувчи $F(x)$ функцияни (интерполяцияланувчи функцияни) ясаш талаб этилади. Геометрик нуқтаи назардан бу берилган нуқталарнинг қуйидаги тизмаси орқали ўтувчи бирор маълум турдаги $y=F(x)$ эгри чизиқни топишни англатади (169- шакл):



169- шакл.

$$M_0(x_0,\ y_0),\ M_1(x_1,\ y_1),\ M_2(x_2,\ y_2),\ \ldots,\ M_i(x_i,\ y_i),\ \ldots,\ M_n(x_n,\ y_n).$$

Масаланинг бундай умумий қўйилиши чексиз кўп ечимга эга бўлиши (айтиб ўтилган нуқталар орқали чексиз кўп эгри чизиқ ўтказиш мумкин, 169- шакл) ёки умуман ечимга эга бўлмаслиги мумкин.

Бироқ, агар ихтиёрий $F(x)$ функция ўрнига қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи n- даражали $P_n(x)$ кўпҳад изланса, бу масала бир қийматли бўлиб қолади:

$$P_n(x_0)=y_0,\ P_n(x_1)=y_1,\ P_n(x_2)=y_2,\ \ldots,\ P_n(x_i)=y_i,\ \ldots,\ P_n(x_n)=y_n.$$

Ҳосил қилинган интерполяция формуласи одатда берилган $f(x)$ функциянинг x аргументнинг интерполяция тугунларидан фарқли қийматларидаги қийматларини тақрибий ҳисоблаш учун қўлланилади. Бундай амал $f(x)$ функцияни интерполяциялаш ($x \in [x_0,\ x_n]$ бўлганда) ва экстрополяциялаш ($x \overline{\in} [x_0,\ x_n]$ бўлганда) деб аталади.

2. Чекли айирмалар. Интерполяция формулаларини тузиш ҳақидаги масалани муҳокама қилишга ўтишдан олдин чекли айирмалар тушунчаси билан танишиб чиқамиз.

Айтайлик, $y=f(x)$ — берилган функция, аргументнинг Δx орттирмаси — тайинланган миқдор бўлсин.

1-таъриф. Ушбу

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

айирма $y=f(x)$ функциянинг *биринчи чекли айирмаси* (ёки *биринчи тартибли чекли айирма*) деб аталади.

Юқори тартибли чекли айирмалар ҳам шунга ўхшаш таърифланади:

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y), \text{ бу ерда } n = 2,\ 3,\ \ldots$$

1-мисол. Иккинчи тартибли чекли айирмани ҳисобланг:

Ечиш. Таърифга кўра қуйидагига эга бўламиз:

$$\Delta^2 y = \Delta(\Delta y) = \Delta(f(x+\Delta x) - f(x)) = [f(x+\Delta x+\Delta x) -$$
$$- f(x+\Delta x)] - [f(x+\Delta x) - f(x)] = f(x+2\Delta x) -$$
$$- 2f(x+\Delta x) + f(x).$$

Шундай қилиб, иккинчи тартибли чекли айирма учун қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$\Delta^2 y = f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x).$$

Учинчи тартибли чекли айирмани ҳам шунга ўхшаш ҳосил қилиш мумкин:

$$\Delta^3 y = f(x+3\Delta x) - 3f(x+2\Delta x) + 3f(x+\Delta x) - f(x)$$

ва ҳоказо.

2-мисол. $P(x) = x^3$ функция учун чекли айирмаларни тузинг, бунда $\Delta x = 1$ деб ҳисобланг.

Ечиш. $P(x) = x^3$ га эгамиз, бундан

$$\Delta P(x) = P(x+\Delta x) - P(x) = (x+\Delta x)^3 - x^3 = (x+1)^3 -$$
$$- x^3 = 3x^2 + 3x + 1.$$

$$\Delta^2 P(x) = [3(x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) + 1] -$$
$$- [3x^2 + 3x + 1] = [3(x+1)^2 + 3(x+1) + 1] - [3x^2 +$$
$$+ 3x + 1] = 6x + 6,$$
$$\Delta^3 P(x) = [6(x+\Delta x) + 6] - [6x+6] = [6(x+1)+6] -$$
$$- [6x+6] = 6.$$

$$\Delta^n P(x) = 0 \text{ (барча } n \geqslant 4 \text{ учун).}$$

Учинчи даражали кўпҳаднинг учинчи тартибли чекли айирмаси ҳар доим x га боғлиқ бўлмаслигини таъкидлаб ўтамиз. Учинчи даражали кўпҳадлар учун тартиби учдан юқори бўлган барча чекли айирмалар эса нолга тенг. Ва умуман қуйидаги тасдиқ ўринли:

Теорема. *Агар $P_n(x)$ n-даражали кўпҳад бўлса, у ҳолда унинг n-чекли айирмаси ўзгармас ва у қуйидагига тенг:*

$$\Delta^n P_n(x) = a_0 \cdot n! \ (\Delta x)^n,$$

тартиби n дан катта барча чекли айирмалари эса нолга тенг (бу ерда Δx — ўзгармас, a_0 — кўпҳаднинг бош коэффициенти, n — кўпҳаднинг даража кўрсаткичи).

2-**таъриф.** Δ орттирма символини $y=f(x)$ функцияни унинг қуйидаги чекли айирма функциясига мос қўювчи оператор *сифатида қараш мумкин:*

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x),$$

бу ерда Δx — ўзгармас.

Бу Δ операторнинг асосий хоссаларини текшириш осон:

1) $\Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v$,

2) $\Delta(Cu) = C\Delta u$, C — const.

3) $\Delta^m(\Delta^n y) = \Delta^{m+n} y$,

бу ерда y, u, v — функциялар, m, n — номанфий сонлар, бунда $\Delta^0 y = y$ деб фараз қилинади.

3. Чекли айирмалар жадвали. Тенг масофаларда ётувчи

$$x_0, \ x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_i, \ \ldots, \ x_n, \ \ldots$$

(бу ерда $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = h$ — const, h ни қадам деб атаймиз) нуқталар учун ушбу

$$y_0, \ y_1, \ y_2, \ \ldots, \ y_i, \ \ldots, \ y_n, \ \ldots$$

жадвал қийматлар билан берилган $y=f(x)$ функцияни қараймиз, бунда

$$\begin{gathered} f(x_0) = y_0, \\ f(x_1) = f(x_0+h) = y_1, \\ f(x_2) = f(x_0+2h) = y_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f(x_i) = f(x_0+ih) = y_i, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{gathered}$$

Чекли айирмалар қуйидаги муносабатлар билан аниқланади:

$$\begin{gathered} \Delta y_0 = y_1 - y_0; \ \Delta^2 y_0 = \Delta(\Delta y_0) = \Delta(y_1 - y_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0; \\ \Delta^3 y_0 = \Delta(\Delta^2 y_0) = \Delta(\Delta y_1 - \Delta y_0) = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0, \\ \Delta y_1 = y_2 - y_1; \ \Delta^2 y_1 = \Delta(\Delta y_1) = \Delta(y_2 - y_1) = \Delta y_2 - \Delta y_1; \\ \Delta^3 y_1 = \Delta(\Delta^2 y_1) = \Delta(\Delta y_2 - \Delta y_1) = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1, \\ \Delta y_2 = y_3 - y_2; \ \Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2; \ \Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2, \\ \cdot \end{gathered}$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i; \ \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i; \ \Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i$$

ва ҳоказо $\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$.

Турли тартибли чекли айирмаларни икки хил кўринишдаги жадваллар шаклида жойлаштириш қулай: айирмалари горизонтал жадваллар (1 ва 2-жадваллар) ва айиришлари диагонал жадваллар (3-жадвал).

1-жадвал

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_2$
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_3$	$\Delta^4 y_3$
x_4	y_4	Δy_4	$\Delta^2 y_4$	$\Delta^3 y_4$	$\Delta^4 y_4$

Жадвални тўлдириш n-чекли айирмалар ўзгармаслар бўлиб қолгунча ёки улар бир-биридан абсолют қийматлари бўйича ε дан ҳам кичик сонга фарқ қилгунича давом эттирилади, бу ерда ε — берилган аниқлик.

3-мисол. Ушбу

$$y = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

функциянинг чекли айирмалар жадвалини бошланғич $x_0 = 0$ қиймат бўйича ва қадамни $h = 1$ деб қабул қилиб тузинг.

Ечиш. $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ деб фараз қилиб, функциянинг мос қийматларини топамиз: $y_0 = -1$, $y_1 = 2$, $y_2 = 13$. Берилган функция учинчи даражали кўпҳад бўлгани учун учинчи чекли айирма ўзгармас ва $\Delta^3 y = 2 \cdot 3!\, h^3 = 12$ га тенг, юқори тартибли барча чекли айирмалар эса нолга тенг. Чекли айирмалар жадвалини тузамиз:

2-жадвал

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	—1	2 — (—1)=3	11 — 3 = 8	12	0
1	2	13 — 2 = 11	20 ↓	12	0
2	13	31 ↓	32	12	
3	44 ↓	63	44		
4	107	107			
5	214				

Жадвални бундан буён тўлдиришни энди қўшиш ёрдамида амалга ошириш мумкин.

Тузилган жадвални диагонал шаклда ҳам ёзиш мумкин:

3-жадвал

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	—1				
1	2	3	8		
2	13	11	20	12	0
3	44	31	32	12	0
4	107	63	44	12	
5	214	107			

4. Умумлашган даража. Келгусида бизга умумлашган даража тушунчаси зарур бўлади. Шу тушунча билан танишамиз. x ва h берилган бўлсин.

3-таъриф. *x сонининг умумлашган n-даражаси деб биринчиси x га тенг бўлиб, ҳар бир кейинги ўзидан олдингисидан h қадар кичик бўлган n та кўпайтувчининг кўпайтмасига айтилади:*

$$x^{[n]} = x(x-h)(x-2h)\ldots(x-(n-1)h),$$

бу ерда $x^{[n]}$ умумлашган n-даража. $x^{[0]} = 1$ деб фараз қилинади.

$h = 0$ бўлганда умумлашган даража одатдаги даражага мос келади: $x^{[n]} = x^n$.

$\Delta x = h$ деб фараз қилиб, умумлашган даражалар учун чекли айирмаларни ҳисоблаймиз.

Биринчи айирма учун қуйидагига эгамиз: $y = x^{[n]}$.

$$\Delta y = \Delta x^{[n]} = (x+h)^{[n]} - x^{[n]} = (x+h)x(x-h)(x-2h)\ldots(x-(n-2)h) -$$
$$- x(x-h)(x-2h)\ldots(x-(n-2)h)(x-(n-1)h) =$$
$$= x(x-h)(x-2h)\ldots(x-(n-2)h)(x+h-x+(n-1)h) =$$
$$= x^{[n-1]}\cdot nh,$$

яъни $\Delta x^{[n]} = n\cdot h\, x^{[n-1]}$.

Иккинчи айирмани ҳисоблаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\Delta^2 x^{[n]} = \Delta(nh\cdot x^{[n-1]}) = nh\,\Delta x^{[n-1]} =$$
$$= n\cdot h\cdot(n-1)hx^{[n-2]} = n(n-1)h^2x^{[n-2]},$$

яъни

$$\Delta^2 x^{[n]} = n(n-1)h^2x^{[n-2]}.$$

Амалларни такроран бажариб, қуйидаги натижани оламиз:

$$\Delta^k x^{[n]} = h^k n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{[n-k]}.$$

Хусусан $k = n$ бўлганда $\Delta^n x^{[n]} = n!\,h^n$; $k > n$ бўлганда $\Delta^k x^{[k]} = 0$ бўлади.

5. Ньютоннинг биринчи интерполяция формуласи. Айтайлик, $y = f(x)$ функциянинг эркли ўзгарувчининг тенг узоқликда ётувчи $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ (бунда $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h, \ldots, x_n = x_0 + nh$ ва h — интерполяциялаш қадами) қийматлари учун ушбу

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$$

қийматлари берилган бўлсин. x_i нуқталарда

$$y_i = P_n(x_i)\ (i = \overline{0,n}) \qquad (4.1)$$

қийматлар қабул қилувчи даражаси n дан катта бўлмаган $P_n(x)$ кўпҳадни танлаш талаб этилади.

(4.1) шарт қуйидагига эквивалент:

$$\Delta^m P_n(x_0) = \Delta^m y_0 \quad (m = \overline{0,n}). \tag{4.2}$$

Кўпҳадни қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots + a_n(x - x_0)(x -$$
$$- x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Умумлашган даражадан фойдаланиб (4.2) ифодани бундай ёзамиз

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^{[1]} + a_2(x - x_0]^{[2]} + a_3(x - x_0)^{[3]} +$$
$$+ \ldots + a_n(x - x_0)^{[n]}. \tag{4.3}$$

Масала $P_n(x)$ кўпҳаднинг $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ коэффициентларини топишдан иборат.

(4.3) тенгликда $x = x_0$ деб фараз қилиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$P_n(x_0) = y_0 = a_0, \text{ бундан } a_0 = y_0.$$

a_1 коэффициентни топиш учун $P_n(x)$ кўпҳаднинг биринчи чекли айирмасини тузамиз:

$$\Delta P_n(x) = a_1 h + a_2 \cdot 2h(x - x_0)^{[1]} + 3a_3 h(x - x_0)^{[2]} +$$
$$+ \ldots + a_n nh(x - x_0)^{[n-1]}.$$

Бу ерда $x = x_0$ деб фараз қилиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\Delta P_n(x_0) = \Delta y_0 = a_1 h, \text{ бундан } a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

a_2 коэффициентни топиш учун иккинчи чекли айирмани тузамиз:

$$\Delta^2 P_n(x) = a_2 \cdot 2!\, h^2 + a_3 \cdot 3! \cdot h^2 (x - x_0)^{[1]} + a_4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot h^2 (x - x_0)^{[2]} +$$
$$+ \ldots + a_n \cdot n(n - 1) h^2 (x - x_0)^{[n-2]}.$$

$x = x_0$ деб фараз қилиб, ушбуга эга бўламиз:

$$\Delta^2 P_n(x_0) = \Delta^2 y_0 = a_2 \cdot 2!\, h^2, \text{ бундан } a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!\, h^2}.$$

Жараённи кетма-кет такрорлай бориб, биз

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!\, h^2} \quad (i = \overline{0,n})$$

эканини топамиз, бу ерда $0! = 1$ ва $\Delta^0 y_0 = y_0$ деймиз.

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ коэффициентларининг топилган қийматларини (4.3) ифодага қўйиб, Ньютоннинг интерполяция кўпҳадини ҳосил қиламиз:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!\, h}(x - x_0)^{[1]} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\, h^2}(x - x_0]^{[2]} + \ldots +$$

$$+\frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x-x_0)^{[n]}. \qquad (4.4)$$

(4.4) кўпҳад қўйилган масаланинг талабларини бутунлай қаноатлантиради. Ньютоннинг (4.4) интерполяция формуласини амалда қўллаш учун у янги $q=\frac{x-x_0}{h}$ ўзгарувчини киритиш билан шаклан алмаштирилган кўринишда ёзилади. У ҳолда

$$\frac{(x-x_0)^{[i]}}{h^i}=\frac{x-x_0}{h}\cdot\frac{x-x_0-h}{h}\cdot\frac{x-x_0-2h}{h}\cdots\frac{x-x_0-(i-1)\,h}{h}=$$

$$=q\,(q-1)\,(q-2)\ldots(q-i+1),\ \text{бу ерда } i=\overline{0,n}.$$

Бу ифодани (4.4) га қўйиб, қуйидагига эга бўламиз.

$$P_n(x)=y_0+q\,\Delta y_0+\frac{q\,(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{q\,(q-1)\,(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0+\ldots+$$

$$+\frac{q\,(q-1)\,(q-2)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \qquad (4.5)$$

бу ерда $q=\frac{x-x_0}{h}$ x_0 нуқтадан чиқиб x нуқтага етгунча зарур бўлган қадамлар сонини ифодалайди. (4.5) формула Ньютоннинг якуний биринчи интерполяция формуласидир. Бу формуладан функцияни бошланғич x_0 қийматнинг атрофида интерполяциялашда фойдаланиш қулай, бу ерда q — абсолют қиймати бўйича кичик сон.

$n=1$ бўлганда чизиқли интерполяциялаш формуласига эга бўламиз:

$$P_1(x)=y_0+q\,\Delta y_0.$$

$n=2$ бўлганда параболик ёки квадратик интерполяциялаш формуласига эга бўламиз:

$$P_2(x)=y_0+q\,\Delta y_0+\frac{q\,(q-1)}{2}\Delta^2 y_0.$$

4-мисол. Жадвалда берилган $y=f(x)$ функция учун Ньютон формуласини ёзинг:

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	5,2	8	10,4	12,4	14,0	15,2

Ечиш. Чекли айирмалар жадвалини тузамиз:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	5,2	2,8	—0,4	0
1	8	2,4	—0,4	0
2	10,4	2	—0,4	0
3	12,4	1,6	—0,4	
4	14,0	1,2		
5	15,2			

Жадвалдан фойдаланиб, Ньютоннинг (4.5) формуласини тузамиз:

$$P_n(x) = 5{,}2 + q\cdot 2{,}8 + \frac{q(q-1)}{2!}(-0{,}4),$$

бу ерда $q = \frac{x-0}{1} = x$. Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$P_n(x) = 5{,}2 + 2{,}8x - \frac{x(x-1)}{2!}\,0{,}4.$$

Изланаётган функциянинг якуний кўриниши қуйидагича:

$$P_2(x) = 5{,}2 + 3x - 0{,}2x^2.$$

Эслатма. $y = f(x)$ функциянинг $\bar{x}$ нуқтадаги қийматини тақрибан ҳисоблаш учун $y \approx P_n(x)$ деб фараз қилинади, бу ерда $\bar{x}$ нуқта x_0 га яқин нуқта.

6. Ньютоннинг иккинчи интерполяция формуласи. Ньютоннинг биринчи интерполяция формуласи функцияни бошланғич x_0 нуқтага яқин нуқталарда интерполяциялаш учун қулай, лекин охирги x_n нуқтага яқин нуқталарда эса ноқулайдир. Бундай ҳолларда, одатда, Ньютоннинг иккинчи интерполяция формуласи қўлланилади.

Функциянинг аргументнинг тенг масофаларда ётувчи

$$x_0,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h,\ \ldots,\ x_n = x_0 + nh$$

(бу ерда h — интерполяциялаш қадами) қийматлари учун қуйидаги қийматлари системасига эга бўлайлик:

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \ldots,\ y_n = f(x_n).$$

Интерполяцияланувчи кўпҳадни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots +$$
$$+ a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1). \qquad (4.6)$$

Олдинги банддагига ўхшаш амалларни такрорлаб, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ коэффициентларни топамиз. (4.6) кўпҳаднинг топилган коэффициентлар билан якуний ёзилиши қуйидаги кўринишга эга:

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!\,h}(x - x_n)^{[1]} + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,h^2}(x - x_{n-1})^{[2]} +$$
$$+ \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!\,h^3}(x - x_{n-2})^{[3]} + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_1)^{[n]}. \qquad (4.7)$$

Янги $q = \frac{x - x_n}{h}$ ўзгарувчини киритамиз ва (4.4) формулани қайта ёзамиз:

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!}q + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}q(q+1) + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!}q(q+1)(q+$$
$$+2) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}q(q+1)(q+2) + \ldots + (q+n-1). \qquad (4.8)$$

(4.8) формула Ньютоннинг иккинчи интерполяция кўпҳадидир.

5-мисол. $y = \lg x$ функциянинг қийматлари жадвали берилган:

x	1000	1010	1020	1030	1040	1050
y	3,00000	3,00432	3,00860	3,01283	3,01703	3,02119

lg 1044 ни топинг.

Ечиш. Чекли айирмалар жадвалини тузамиз:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
1000	3,00000	0,00432	−0,00004	−0,00001	0,00003	−0,00006
1010	3,00432	0,00428	−0,00005	+0,00002	−0,00003	
1020	3,00860	0,00423	−0,00003	−0,00001		
1030	3,01283	0,00420	−0,00004			
1040	3,01703	0,00416				
1050	3,02119					

$$q = \frac{x - x_n}{h} = \frac{1044 - 1050}{10} = -0{,}6,$$

$$y \approx 3{,}02119 + \frac{0{,}00416}{1!}(-0{,}6) - \frac{0{,}00004}{2!}(-0{,}6)(-0{,}6 + 1) -$$

$$-0{,}00001 \cdot \frac{(-0{,}6)(-0{,}6 + 1)(-0{,}6 + 2)}{3!} - \ldots \approx 3{,}01870.$$

7. Лагранжнинг интерполяция формуласи. Ньютоннинг интерполяция формулалари фақат тенг масофаларда ётувчи интерполяциялаш тугунлари ҳоли учун яроқли. *Ихтиёрий* равишда берилган интерполяциялаш тугунлари учун Лагранжнинг интерполяция формуласи деб *аталувчи* анчагина умумийроқ бўлган формуладан фойдаланилади.

Айтайлик, аргументнинг $n + 1$ та турли

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

қийматлари ва $f(x)$ функция учун маълум бўлган унга мос

$$f(x_0) = y_0,\ f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2,\ \ldots,\ f(x_n) = y_n$$

қийматлар берилган бўлсин. Даражаси n дан юқори бўлмаган ва берилган x_i тугун нуқталарда $f(x)$ функция қабул қилган қийматларга эга бўлган, яъни

$$L_n(x_i) = y_i \quad (i = \overline{0,n})$$

бўлган $L_n(x)$ кўпҳадни ясаш талаб этилади.

Лагранжнинг изланаётган $L_n(x)$ кўпҳадини келтириб чиқармасдан қабул қиламиз:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}. \qquad (4.9)$$

Агар интерполяция тугунлари тенг масофаларда ётса, у ҳолда Лагранжнинг (4.9) интерполяция формуласи Ньютоннинг интерполяция формуласи билан устма-уст тушади.

Хусусан, (4.9) формула

$$n=1 \text{ бўлганда } L_1(x)=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0};$$

$$n=2 \text{ бўлганда } L_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+$$
$$+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

кўринишни олади.

8. Лагранж коэффициентларини ҳисоблаш. (4.4) формулани соддалаштирамиз. Бундай белгилаш киритамиз:

$$\Pi_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n). \qquad (4.10)$$

Ҳосилани топамиз:

$$\Pi'_{n+1}(x)=(x-x_1)\ldots(x-x_n)+(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)+$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)+\ldots$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)+$$
$$+\ldots+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Бу ерда $x=x_i$, $i=\overline{0,n}$ деб ҳисоблаб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\Pi'_{n+1}(x_i)=(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-$$
$$-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n). \qquad (4.11)$$

(4.10) ва (4.11) ифодаларни (4.9) формулага қўямиз:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\Pi_{n+1}(x)}{\Pi'_{n+1}(x_i)(x-x_i)}\,y_i. \qquad (4.12)$$

(4.12) формуладаги y_i лар олдидаги коэффициентлар Лагранж коэффициентлари деб аталади ва қуйидагича белгиланади:

$$L_n^{(i)}(x)=\frac{\Pi_{n+1}(x)}{\Pi'_{n+1}(x_i)(x-x_i)}.$$

Бунда Лагранжнинг (4.12) формуласи қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i\, L_n^{(i)}(x).$$

Лагранж формуласини қўллаш учун $x_i - x_k$ айирмалар жадвалини тузамиз:

0	0	1	2	3	i	n	D	y_0	y/D
0	$\underline{x-x_0}$	x_0-x_1	x_0-x_2	x_0-x_3	x_0-x_i	x_0-x_n	D_0	y_0	y_0/D_0
1	x_1-x_0	$\underline{x-x_1}$	x_1-x_2	x_1-x_3	x_1-x_i	x_1-x_n	D_1	y_1	y_1/D_1
2	x_2-x_0	x_2-x_1	$\underline{x-x_2}$	x_2-x_3	x_2-x_i	x_2-x_n	D_2	y_2	y_2/D_2
3	x_3-x_0	x_3-x_1	x_3-x_2	$\underline{x-x_3}$	x_3-x_i	x_3-x_n	D_3	y_3	y_3/D_3
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	
i	x_i-x_0	x_i-x_1	x_i-x_2	x_i-x_3	$\underline{x-x_i}$	x_i-x_n	D_i	y_i	y_i/D_i
	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .				
n	x_n-x_0	x_n-x_1	x_n-x_2	x_n-x_3	x_n-x_i	$\underline{x-x_n}$	D_n	D_n	y_n/D_n

Жадвалда $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_n$ — мос сатрлар кўпайтмаси:

$$D_i=(x_i-x_0)(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots(x-x_i)\ldots(x_i-x_n).$$

$\Pi_{n+1}(x)$ — остига чизилган диагонал кўпайтувчилар кўпайтмаси:

$$\Pi_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_i)\ldots(x-x_n).$$

Демак,

$$L_n^{(i)}(x)=\frac{\Pi_{n+1}(x)}{D_i},\quad i=\overline{0,n}$$

ва коэффициентлар топилди.

Демак,

$$L_n(x)=\Pi_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{D_i},$$

бу ерда $\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{D_i}=S_{n+1}$ — жадвалнинг охирги устуни йиғиндиси. Шундай қилиб,

$$L_n(x)=\Pi_{n+1}(x)\,S_{n+1}.$$

6-мисол. $f(x)$ функциянинг қийматлари жадвали берилган:

x	81	85	87	88	89	90
y	0,012346	0,011765	0,011494	0,011364	0,011236	0,011111

$f(84)$ ни топинг.

Ечиш. Жадвал тузамиз.

i	x_i	x_i-x_0	x_i-x_1	x_i-x_2	x_i-x_3	x_i-x_4	x_i-x_5	D_i	y_i	y_i/D_i
0	81	$\underline{3}$	—4	—6	—7	—8	—9	—36288	0,12346	$-0{,}340223\cdot 10^{-6}$
1	85	4	$\underline{-1}$	—2	—3	—4	—5	—480	0,11765	$-24{,}510416\cdot 10^{-6}$
2	87	6	2	$\underline{-3}$	—1	—2	—3	216	0,11494	$53{,}21296\cdot 10^{-6}$
3	88	7	3	1	$\underline{-4}$	—1	—2	—168	0,011364	$-67{,}642857\cdot 10^{-6}$
4	89	8	4	2	1	$\underline{-5}$	—1	320	0,011236	$35{,}1125\cdot 10^{-6}$
5	90	9	5	3	2	1	$\underline{-6}$	—1620	0,011111	$-6{,}858642\cdot 10^{-6}$
		$\Pi_6 = 3\cdot(-1)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)\cdot(-6) = -1080$							$S_6 = \sum\limits_{i=0}^{5} y_i/D_i =$ $= -11{,}036678\cdot 10^{-6}$	

$$f\,(84) \approx \Pi_6\cdot S_6 = -1080\cdot(-11{,}036676)\cdot 10^{-6} \approx 0{,}011920.$$

9. Интерполяция формулалари хатоликларини баҳолаш. Биз x_0, x_1, x_2, . . ., x_n нуқталарда берилган y_0, y_1, y_2, . . ., y_n қийматларни қабул қилувчи (бунда $y_0 = f\,(x_0)$, $y_1 = f\,(x_1)$, . . ., $y_n = f\,(x_n)$) $f\,(x)$ функция учун Лагранжнинг $L_n\,(x)$ интерполяция кўпҳадини туздик. Тузилган кўпҳад қолган нуқталарда $f\,(x)$ функцияга қанчалик яқинлашади, яъни $R_n\,(x) = f\,(x) - L_n\,(x)$ қолдиқ ҳад қанчалик катта? Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

Теорема. *Агар $y = f\,(x)$ функция ўзининг $(n+1)$-тартибгача ($(n+1)$-тартиблиси ҳам) барча ҳосилалари билан бирга узлуксиз бўлса, у ҳолда Лагранжнинг қолдиқ ҳади қуйидаги кўринишга эга бўлади:*

$$R_n\,(x) = \frac{f^{(n+1)}\,(\xi)}{(n+1)!}\,\Pi_{n+1}\,(x), \tag{4.13}$$

бу ерда ξ — x_0 ва x_n нуқталар орасида жойлашган нуқта,

$$\Pi_{n+1}\,(x) = (x-x_0)\,(x-x_1)\,\ldots\,(x-x_n).$$

Агар $[x_0,\ x_n]$ кесмада $M = \max\,|f^{(n+1)}\,(x)|$ деб белгиласак, у ҳолда Лагранжнинг интерполяция формуласининг абсолют хатолиги учун қуйидаги баҳога эга бўламиз:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M\cdot \Pi_{n+1}\,(x)}{(n+1)!}.$$

Агар x_0, x_1, x_2, . . ., x_n интерполяциялаш тугунлари тенг масофаларда жойлашган ва бунда $x_{i+1} - x_i = h$ бўлса, у ҳолда (4.13) формулада $\frac{x-x_0}{h} = q$ деб фараз қилиб, Ньютоннинг биринчи формуласининг қолдиқ ҳадига эга бўламиз:

$$R_n^!(x) = h^{n+1}\,\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\xi),$$

бу ерда $x_0 < \xi < x_n$.

Шунга ўхшаш, (4.13) формулада $q = \frac{x - x_n}{h}$ деб фараз қилиб, Ньютоннинг иккинчи формуласининг қолдиқ ҳадига эга бўламиз:

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q+1)\ldots(q+n)}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\xi).$$

Исботлаш мумкинки, агар интерполяциялашда интерполяциялаш тугунлари x нинг зарур қиймати атрофида етарлича зич танланса, у ҳолда интерполяция формулаларидан олинган қийматлар, жадвал маълумотлар неча хонага эга бўлса, шунча аниқ хона бирлигига эга бўлади.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Интерполяциялаш масаласи нимадан иборат?
2. 1-, 2-, n- тартибли чекли *айирма* деб нимага *айтилади?*
3. Чекли айирмалар жадвали қандай тузилади?
4. *Умумлашган даража* деб нимага *айтилади?*
5. Ньютон формулалари ва Лагранж формуласи қачон қўлланилади?
6. Ньютоннинг биринчи интерполяция формуласининг хулосасини келтиринг.
7. Қуйидаги жадвал кўринишида берилган функция учун Ньютоннинг иккала интерполяция кўпҳадини ва Лагранж кўпҳадини тузинг. Кўпҳадларни *таққосланг:*

$$a)\ \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 1 & 1 & 3 \end{array};\qquad б)\ \begin{array}{c|cccc} x & 0 & 1 & 3 & 4 \\ \hline y & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array};$$

$$в)\ \begin{array}{c|cccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & 1 & -2 & 0 & 3 \end{array}$$

8. 7-саволдаги б) жадвал учун Ньютоннинг интерполяция кўпҳадини тузиш мумкинми?

5-§. Биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар учун Коши масаласини ечишнинг тақрибий усуллари

1. Масаланинг қўйилиши. Биринчи тартибли ушбу дифференциал тенгламани қараймиз:

$$y' = f(x, y). \tag{5.1}$$

Бу тенгламанинг ечими деб, уни тўғри тенгликка айлантирувчи исталган $y = y(x)$ функцияга айтилишини эслатиб ўтамиз. Бу ечимни топиш жараёнини дифференциал тенгламани интеграллаш деб атаган эдик. Ечимнинг графиги интеграл эгри чизиқ бўлади.

Техникага оид кўпгина масалалар бошланғич шартлар деб аталувчи берилган ушбу

$$y|_{x=x_0} = y_0 \text{ ёки } y(x_0) = y_0 \tag{5.2}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимларни топиш керак бўлганда (5.1) тенглама учун Коши масаласини ечишга келтирилади. Геометрик нуқтаи назардан бу берилган (x_0, y_0) нуқтадан ўтувчи $y=\varphi(x)$ интеграл эгри чизиқни топиш кераклигини англатади. Лекин ихтиёрий дифференциал тенгламанинг бундай ечимини топишнинг умумий усули мавжуд эмас. Одатда бундай ечишни фақат тенгламанинг баъзи хусусий ҳоллари учун (масалан, бизга маълум бўлган чизиқли, бир жинсли, Бернулли ва баъзи бошқа тенгламалар учун) топиш мумкин бўлади. Шунинг учун муҳандислик амалиётида Коши масаласини ечишнинг тақрибий усулларига **мурожаат этилади.**

Улардан асосийларини икки гуруҳга ажратиш мумкин.

1) аналитик яқинлашиш усуллари — бунда ечим тақрибий формула кўринишида ҳосил бўлади (масалан, қаторлар ёрдамида);

2) сонли яқинлашиш усуллари — бунда хусусий ечимларнинг тақрибий қийматлари жадвали тузилади (масалан, Эйлер усули, Рунге — Кутта усули).

Энди бу усулларни батафсил баён этишга ўтамиз.

2. Дифференциал тенгламаларни қаторлар ёрдамида интеграллаш. Айтайлик, ушбу

$$y' = f(x, y) \tag{5.3}$$

дифференциал тенгламанинг қуйидаги

$$y|_{x=x_0} = y_0 \text{ ёки } y(x_0) = y_0 \tag{5.4}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб этилаётган бўлсин.

$y = y(x)$ ечим мавжуд ва $x—x_0$ нинг даражалари бўйича жойлашган Тейлор қатори кўринишида ифодаланган деб фараз қилайлик:

$$y = y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 +$$

$$+\frac{y'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots \tag{5.5}$$

Қаторнинг коэффициентларини топиш учун бундай иш тутамиз.

$y(x_0)$ нинг қиймати бизга (5.4) шартдан маълум. $y'(x_0)$ ни топиш учун (5.3) тенгламанинг ўнг томонида x ва y нинг ўрнига уларнинг $x=x_0$ бўлгандаги қийматларини қўямиз. Натижада қуйидагига эга бўламиз: $y'(x_0)=f(x_0, y_0)$.

$y''(x_0)$ ни топиш учун дастлаб y ни x нинг функцияси деб қараб, (5.3) тенгламанинг иккала томонини x ўзгарувчи бўйича дифференциаллаймиз:

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot y', \tag{5.6}$$

кейин эса ҳосил бўлган (5.6) ифодага y ва y' нинг $x=x_0$ бўлгандаги қийматларини қўямиз. Шу билан $y''(x_0)$ топилади.

(5.6) тенгликни x бўйича яна бир марта дифференциаллаб ва ҳосил бўлган ифодага y, y', y'' ларнинг $x=x_0$ бўлгандаги қийматларини қўйиб, $y'''(x_0)$ ни топамиз ва ҳоказо. Ҳосилаларнинг ҳосил қилинган қийматларини Тейлорнинг (5.5) қаторига қўямиз. У x нинг бу қатор яқинлашувчи бўлган қийматлари учун (5.1) тенгламанинг ечимини ифодалайди.

Бу усул исталган тартибли тенгламани тақрибан ечиш учун яроқлидир.

1-мисол. Ушбу

$$y'=xy^2+1 \tag{5.7}$$

тенгламанинг

$$y(1)=0 \tag{5.8}$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. Бу тенгламанинг ечимини Тейлор қатори кўринишида излаймиз:

$$y=y(1)+\frac{y'(1)}{1!}(x-1)+\frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2+$$

$$+\frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3+\ldots \tag{5.9}$$

$y(1)$ коэффициент (5.8) бошланғич шарт билан берилган, иккинчи $y'(1)$ коэффициентни топиш учун берилган (5.7) тенгламанинг ўнг ва чап томонларига $x=1$ ва $y(1)=0$ қийматларни қўямиз. Натижада $y'(1)=1$ га эга бўламиз. Қолган коэффициентларни топиш учун олдин (5.7) тенгламани x бўйича бир неча марта дифференциаллаймиз:

$$y''=y^2+2xyy',$$

$$y'''=2yy'+2yy'+2xy'^2+2xyy''=4yy'+2xy'^2+2xyy'',$$

$$y^{\mathrm{IV}}=4y'^2+4yy''+2y'^2+4y'y''x+2yy''+2xy'y''+2xyy'''=$$

$$=6y'^2+6yy''+6xy'y''+2xyy''' \text{ ва ҳ. к.}$$

Энди бу тенгликларга y, y', y'', y''' ларнинг $x=1$ бўлгандаги қийматларини кетма-кет қўйиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$y''(1)=0,\quad y'''(1)=2,\quad y^{\mathrm{IV}}(1)=6 \text{ ва ҳоказо.}$$

Коэффициентларнинг топилган қийматларини (5.9) қаторга қўямиз:

$$y=(x-1)+\frac{(x-1)^3}{3}+\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots .$$

2-мисол. Ушбу

$$y''=2xy'+4y$$

тенгламанинг

$$y(0)=0,\quad y'(0)=1$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. Тенгламанинг ечимини Маклорен қатори кўринишида излаймиз (чунки $x_0=0$):

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Қаторнинг дастлабки иккита коэффициенти бошланғич шартларда берилган: $y(0)=0$, $y'(0)=1$. Учинчи $y''(0)$ коэффициентни берилган тенглама ва бошланғич шартлардан топамиз: $y''(0)=0$. Қолган коэффициентларни, берилган тенгламани олдин бир неча марта дифференциаллаш билан топамиз:

$$y''' = 2y' + 2xy'' + 4y' = 6y' + 2xy'',$$
$$y^{\text{IV}} = 6y'' + 2xy''' + 2y'' = 8y'' + 2xy''',$$
$$y^{\text{V}} = 8y''' + 2y''' + 2xy^{\text{IV}} = 10y''' + 2xy^{\text{IV}},$$
$$y^{\text{VI}} = 10y^{\text{IV}} + 2y^{\text{IV}} + 2xy^{\text{V}} = 12y^{\text{IV}} + 2xy^{\text{V}},$$
$$y^{\text{VII}} = 14y^{\text{V}} + 2xy^{\text{VI}} \text{ ва ҳоказо.}$$

Ҳосилалар учун топилган ифодаларга $y, y', y'', y''', \dots$ ларнинг $x=0$ бўлгандаги қийматларини қўямиз. Натижада қуйидагиларга эга бўламиз

$$y'''(0)=6;\ y^{\text{IV}}(0)=0;\ y^{\text{V}}(0)=60;\ y^{\text{VI}}(0)=0;\ y^{\text{VII}}(0)=60\cdot 14 \text{ ва ҳ. к.}$$

Топилган коэффициентларни Маклорен қаторига қўйиб, ечимга эга бўламиз:

$$y = x + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{n!} + \dots$$

3. Эйлер усули. Бу усулнинг моҳияти қуйидагидан иборат. Берилган $[x_0, x_n]$ кесмада биринчи тартибли

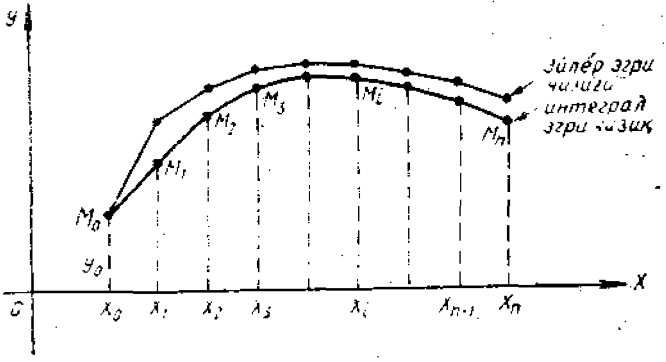
$$y' = f(x, y) \qquad (5.10)$$

дифференциал тенгламанинг

$$y(x_0) = y_0 \qquad (5.11)$$

шартни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб этилаётган бўлсин. Геометрик нуқтаи назардан бу (5.10) дифференциал тенглама учун $M(x_0, y_0)$ нуқтадан ўтувчи $y=y(x)$ интеграл эгри чизиқни ясаш кераклигини англатади. $[x_0, x_n]$ кесмани n та тенг қисмга бўламиз (170- шакл), $x_0<x_1<x_2<\dots<x_n$ бўлиниш нуқталари бўлсин. Бу нуқталар орқали Oy ўқига параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. Маълумки, (5.10) тенглама Oxy текисликда йўналишлар майдонини аниқлайди, яъни (5.10) тенгламанинг ҳар қайси интеграл эгри чизиғи унинг исталган нуқтасида бурчак коэффициенти k бўлган уринмага эга. k нинг қиймати $f(x, y)$ функциянинг шу нуқтадаги қийматига тенг, яъни

$$k = f(x, y).$$



170- шакл.

Шунинг учун изланаётган ҳусусий ечимга мос келувчи интеграл эгри чизиқни тақрибан ясаш учун бошланғич $M(x_0,y_0)$ нуқта орқали $k=f(x_0, y_0)$ бурчак коэффициентли тўғри чизиқ ўтказамиз ва уни $x=x_1$ тўғри чизиқ билан кесишгунча давом эттирамиз. У ҳолда y_1 ординатасини қуйидаги муносабатдан топиш мумкин бўлган M_1 (x_1, y_1) нуқтага эга бўламиз:

$$y_1-y_0=f(x_0, y_0)(x_1-x_0). \qquad (5.12)$$

Кейин $M_1(x_1, y_1)$ нуқта орқали $k=f(x_1, y_1)$ бурчак коэффициентли тўғри чизиқ ўтказамиз ва уни $x=x_2$ тўғри чизиқ билан кесишгунча давом эттирамиз. Бундан y_2 ординатасини қуйидаги муносабатдан топиш мумкин бўлган $M_2(x_2, y_2)$ нуқтага эга бўламиз:

$$y_2-y_1=f(x_1, y_1)(x_2-x_1). \qquad (5.13)$$

Шунга ўхшаш, M_2 (x_2, y_2) нуқтанинг координаталарини билган ҳолда $M_3(x_3,y_3)$ нуқтанинг координаталарини топамиз ва ҳоказо. Шундай қилиб, x ўзгарувчининг ҳар бир кичик оралиқдаги ўзгариши тўғри чизиқ (уринма) кесмаси билан алмаштирилади. Натижада интеграл эгри чизиқни тақрибан алмаштирувчи ва Эйлер синиқ чизиғи деб аталувчи синиқ чизиққа эга бўламиз.

Эйлер синиқ чизиғидаги исталган $M_i(x_i, y_i)$ нуқтанинг y_i ординатасини (5.12) ва (5.15) муносабатларга ўхшаш ушбу

$$y_i-y_{i-1}=f(x_{i-1}, y_{i-1})(x_i-x_{i-1}) \qquad (5.14)$$

муносабатдан топиш мумкин. $[x_0, x_n]$ кесма тенг қисмларга ажратилганлиги учун $x_1-x_0=x_2-x_1= \ldots =(x_i-x_{i-1})=h$, бу ерда h — бирор доимий сон. У ҳолда $M(x_i, y_i)$ нуқтанинг x_i абсциссасини қуйидаги

$$x_i=x_0+ih \qquad (5.15)$$

формула бўйича, изланаётган хусусий ечимнинг унга мос тақрибий қийматини

$$y_i = y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1})h \qquad (5.16)$$

формула бўйича ҳисоблаш мумкин.

Натижаларни жадвалга ёзамиз. (5.15) ва (5.16) муносабатлардаги h доимий жадвал қадами деб аталади.

3-мисол. Эйлер усулидан фойдаланиб, ушбу

$$y' = 0{,}5\,xy \qquad (5.17)$$

тенгламанинг [0,1] кесмада $h = 0{,}1$ қадам билан

$$y(0) = 1$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимларининг тақрибий қийматлари жадвалини тузинг.

Ечиш. (5.15) ва (5.16) формула бўйича $x_1 = 0{,}1$ ва $y_1 = 1$ қийматларни, кейин x_2 ва y_2 қийматларни ва ҳоказо ҳисоблаймиз. Ҳисоблашлар натижаларини қуйидаги жадвалга ёзамиз:

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	$f(x_i, y')h$
0	0	1	0,	0
1	0,1	1	0,05	0,005
2	0,2	1,005	0,1005	0,0100
3	0,3	1,0150	0,1522	0,0152
4	0,4	1,0303	0,2061	0,0206
5	0,5	1,0509	0,2627	0,0263
6	0,6	1,0772	0,3232	0,0323
7	0,7	1,1095	0,3883	0,0388
8	0,8	1,1483	0,4593	0,0459
9	0,9	1,1942	0,5374	0,0537
10	1,0	1,2479		

Шундай қилиб, $y(1) = 1{,}2479$. Таққослаш учун аниқ ечимни ҳам топиш қийин эмас ((5.17) тенглама — чизиқли тенглама): $y = e^{\frac{x^2}{4}}$. Бу ердан $y(1) = e^{\frac{1}{4}} = 1{,}2840$.

4. Рунге — Кутта усули. Эйлер усули ҳисоблаш учун жуда осон, лекин камчиликка эга: x нинг сезиларли ўзгаришларида y нинг тақрибий қийматлари аниқ қийматдан катта фарқ қилиши мумкин, чунки хатолик ҳар бир қадамда ортиб боради (170-шаклга қ.). Эйлер усулида қуйидагидан иборат тенглаштиришни қўллаб, анча яхши натижаларни олиш мумкин. (5.16) формулада ҳисобланган y_i қийматни y_i' орқали белгилаймиз ва бу қийматни қуйидаги формула бўйича аниқлаймиз:

$$y_i^{(2)} = y_{i-1} + \frac{1}{2}[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, y_i^{(1)})]h. \qquad (5.18)$$

Топилган қийматни яна (5.18) муносабатга ўхшаш қуйидаги формула бўйича аниқлаш мумкин.

$$y_i^{(3)} = y_{i-1} + \frac{1}{2}[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, y_i^{(2)})]h \qquad (5.19)$$

ва ҳоказо. Бу жараённи берилган аниқлик чегараларида иккита кетма-кет ҳисоблашлар натижалари устма-уст тушгунча давом эттирамиз. Кейин шу усул билан y_{i+1} ни ҳисоблаймиз ва ҳоказо.

4-мисол. Рунге — Кутта усулидан фойдаланиб, 3-мисолни ечинг. Ҳисоблашларни 0,0001 гача аниқлик билан бажаринг.

Ечиш. 3-мисолдаги жадвалдан фойдаланамиз. Қуйидагиларга эга бўламиз:

$$y_0 = 1,\ f(x_0, y_0) = 0,$$

$$y_1^{(1)} = 1,\ f(x_1, y_1^{(1)}) = 0{,}5 \cdot 0{,}1 \cdot 1 = 0{,}05.$$

(5.18) формула бўйича қуйидагини топамиз:

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{1}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(1)})] \cdot h =$$

$$= 1 + 0{,}5(0 + 0{,}05) \cdot 0{,}1 = 1{,}0025.$$

Қуйидагини ҳисоблаймиз: $f(x_1,\ y_1^{(2)}) = 0{,}5 \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}0025 = 0{,}0501$. У ҳолда (5.19) формула бўйича ушбуга эга бўламиз:

$$y_1^{(3)} = y_0 + 0{,}5[f(x_0, y_0) + f(x_1,\ y_1^{(2)})]h =$$

$$= 1 + 0{,}5(0 + 0{,}0501) \cdot 0{,}1 = 1{,}0025.$$

Шундай қилиб, 0,001 гача аниқликда

$$y_1^{(2)} = y_1^{(3)} = 1{,}0025.$$

Ҳисоблашларни давом эттирамиз ва натижаларни қуйидаги жадвалга ёзамиз:

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	$f(x_i, y_i)h$	$e^{x_i^2/4}$
0	0	$y_0 = 1$	0	0	1
1	0,1	$y_1^{(2)} = y_1^{(3)} = y_1 = 1{,}0025$	0,0501	0,0050	1,0025
2	0,2	$y_2^{(1)} = y_2^{(2)} = y_2 = 1{,}0100$	0,1010	0,0101	1,0100
3	0,3	$y_3^{(1)} = y_3^{(2)} = y_3 = 1{,}0227$	0,1534	0,0153	1,0227
4	0,4	$y_4^{(3)} = y_4^{(4)} = y_4 = 1{,}0408$	0,2661	0,0266	1,0645
5	0,5	$y_5^{(2)} = y_5^{(3)} = y_5 = 1{,}0646$	0,3283	0,0328	1,0942
6	0,6	$y_6^{(2)} = y_6^{(3)} = y_6 = 1{,}0943$	0,3283	0,0328	1,0942
7	0,7	$y_7^{(2)} = y_7^{(3)} = y_7 = 1{,}1305$	0,3957	0,0396	1,1303
8	0,8	$y_8^{(2)} = y_8^{(3)} = y_8 = 1{,}1738$	0,4695	0,0470	1,1735
9	0,9	$y_9^{(2)} = y_9^{(3)} = y_9 = 1{,}2248$	0,5512	0,0551	1,2244
10	1,0	$y_{10}^{(3)} = y_{10}^{(4)} = y_{10} = 1{,}2845$			1,2840

Берилган $y' = 0,5\,xy$ тенгламанинг аниқ қийматини топиш мумкин (ўзгарувчилари ажралган тенглама). У $y = e^{x^2/4}$ кўринишга эга, бу функциянинг қийматлари тузилган жадвалнинг охирги устунига жойлаштирилган. y_i нинг иккала жадвалдаги қийматларини (Эйлер усули ва Рунге — Кутта усули) таққослаб, Рунге — Кутта усули Эйлер усулига қараганда яхшироқ натижа олишга имкон беради, деган хулосага келамиз.

Уз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Дифференциал тенгламанинг ечими деб нимага айтилади?
2. Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар учун Коши масаласи нимадан иборат?
3. Эйлер усулини баён этинг.
4. Рунге — Кутта усулини баён этинг.
5. Эйлер ва Рунге — Кутта усулларидан фойдаланиб, қуйидаги тенгламанинг $[0, 1]$ кесмадаги 0,1 қадам билан хусусий ечимларининг тақрибий қийматлари жадвалини тузинг:

а) $y' = x^2 - 0,3\,y^2 + 1,\ y(0) = 0$

(0,01 гача аниқлик билан);

б) $y' = -2\,xy^2,\ y\,(0) = 1$

(0,001 гача аниқлик билан).

АДАБИЁТ

Асосий адабиёт

1. Я. С. Бугров. С. М. Никольский. Дифференциальные уравнения. Кратние интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М., «Наука», 1981, 1985.
2. Н. С. Пискунов. Дифференциал ва интеграл ҳисоб. 2-том. Т., «Ўқитувчи», 1974.
3. Сборник задач по математике для втузов. Теория вероятностей и математическая статистика (Под ред. А. В. Ефимова). М., «Наука», 1990.
4. В. С. Пугачев. Теория вероятностей и математическая статистика. М., «Наука» 1979.
5. В. Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., «Высшая школа», 1978.
6. Т. А. Азларов, Ҳ. Мансуров. Математик анализ. 2-қисм. Т., «Ўқитувчи», 1989.
7. В. Қ. Қобулов. Функционал анализ ва ҳисоблаш математикаси. Т., «Ўқитувчи», 1976.
8. С. Х. Сирожиддинов, М. М. Маматов. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. Т., «Ўқитувчи», 1980.
9. Ё. У. Соатов. Олий математика. 1-жилд. Т., «Ўқитувчи» 1992.
10. М. Исроилов. Ҳисоблаш методлари. Т., «Ўқитувчи», 1988.
11. И. И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного. М., «Наука», 1977.
12. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. «Уравнения математической физики». М., «Наука», 1967.

Қўшимча адабиёт

1. В. И. Смирнов. Курс высшей математики. М., «Наука», 1974, Т. 2.
2. А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. Теория функций комплексного переменного. М., «Наука» 1979.
3. Н. Н. Қалиткин. Численные методы. М., «Наука», 1978.
4. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М., «Физматгиз», 1961.
5. О. С. Ивашев-Мусатов. Теория вероятностей и математическая статистика. М., «Наука», 1979.

6. Г. Н. Берман. Сборник задач по математическому анализу. М., «Наука», 1985.
7. А. В. Ефимов, Ю. Г. Золотарев, В. М. Терпигорева. Математический анализ (специальные разделы). М., «Высшая школа», 1980., ч. 1, 2.
8. Г. И. Агапов. Задачник по теории вероятностей. М., «Высшая школа», 1986.
9. А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко. Сборник задач по уравнениям математической физики. М., «Наука», 1985.
10. Н. Тешабоева. Математик физика методлари. Т., «Ўқитувчи», 1980.
11. И. Г. Араманович, В. И. Левин. Уравнения математической физики, М., «Наука», 1969.

МУНДАРИЖА

ЕЛҚИН УЧҚУНОВИЧ СОАТОВ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

2- ЖИЛД

Олий техника ўқув юртлари талабалари учун дарслик

Тошкент «Ўқитувчи» 1994

Таҳририят мудири *Ў. Ҳусанов*
Муҳаррир *Н. Ғоипов*
Расмлар муҳаррири *Т. Қаноатов*
Тех. муҳаррир *Т. Скиба*
Мусаҳҳиҳ *А. Одилов*

ИБ № 6076

Теришга берилди 22.10.93. Босишга рухсат этилди 8.02.94. Бичими $60\times90^1/_{16}$. Тип. қоғози. Кегли 10 шпонсиз. Литературная гарнитураси. Юқори босма усулида босилди. Шартли б.л. 26. Шартли кр.-отт 26,19. Нашр. л 19,72. 4500 нусхада босилди. Буюртма № 2640.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 09—248—92.

Ўзбекистон Республикаси Давлат Матбуот комитетининг Тошполиграфкомбинати. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. 1994.

22.11
С 73

Соатов Ё. У.
Олий математика: Олий техника ўқув юртлари талабалари учун дарслик: Икки жилдлик. 2-жилд / [Таҳрир ҳайъати М. Жўраев ва бошқ.].— Т.: Ўқитувчи, 1994.—416 б.

22.11я73