Қ. Б. БОЙҚЎЗИЕВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Ўзбекистон ССР Маориф министрлиги педагогика институтларининг математика, физика- математика ва физика факультетлари студентлари учун ўқув қўлланмаси сифатида тавсия этган

ТОШКЕНТ — «ЎҚИТУВЧИ» — 1983

Тақризчилар: проф. *Қаримов Ж.*, доцент *Акбаров М.*, доцент *Насритдинов Ғ. Н.*

Махсус муҳаррир физика-математика фанлари кандидати, доцент *Ғ. Н. Насритдинов*

Ушбу китобда дифференциал тенгламалар назарияси педагогика институтлари программасига мослаб баён этилган. Ундаги айрим материаллардан юқори курс студентлари факультатив курс ишларида фойдаланишлари ҳам мумкин. Назарий материал билан бир қаторда кўплаб мисоллар ечилишлари билан берилган. Ҳар қайси бобда мустақил ечиш учун мисол ва масалалар келтирилган.

Китоб педагогика институтларининг студентларига мўлжалланган.

$$Б\ \frac{1702030000-168}{353(04)-83}\ 179-83$$

СЎЗ БОШИ

Партия ва ҳукуматимиз олий мактабни янада ривожлантириш ва мутахассислар тайёрлаш сифатини ошириш борасида муттасил ғамхўрлик қилиб келмоқда. Бу ўз навбатида республикамиз педагогика институтлари олдига ўз фанини пухта эгаллаган, юқори малакали ўқитувчилар тайёрлаш вазифасини қўяди. Бу улкан вазифани муваффақиятли ҳал этишда студентларнинг дарслик ва ўқув қўлланмалар билан таъминланганлиги муҳим роль ўйнайди. Ҳозирга қадар ўзбек тилида педагогика институтлари учун дифференциал тенгламаларга оид адабиёт мавжуд эмаслиги мазкур қўлланманинг ёзилишига озми-кўпми сабаб бўлди.

Қўлланма асосан педагогика институтларининг математика, физика ва физика-математика факультетларининг студентларига мўлжалланган. У ана шу факультетларнинг «Оддий дифференциал тенгламалар» курси бўйича тузилган программа материалини ўз ичига олади. Бундан ташқари китобдаги айрим материаллардан махсус курсларни ўқишда фойдаланиш мумкин.

Дифференциал тенгламаларга оид масалалар назариянинг тегишли қисмларини мустаҳкамлашда муҳим роль ўйнагани учун китобда кўпроқ мисол ва масалалар беришга ҳаракат қилинди. Керакли жойларда типик мисоллар ечилишлари билан берилди.

Математикадан физика, механика, астрономия соҳасида унумли фойдаланиб келинаётганлиги ҳаммага маълум. Ҳозирда математика экономикага, биологияга, медицинага, техникага ва бошқа соҳаларга чуқур кириб бормоқда.

Айтилган соҳаларда кўплаб жараёнлар дифференциал тенгламалар билан тавсифланади. Шунинг учун бундай тенгламаларни ўрганиш муҳим аҳамият касб этади.

Номаълум функциянинг ҳосиласи (ёки дифференциали) албатта қатнашадиган тенглама *дифференциал тенглама* дейилади.

Агар номаълум функция бир аргументли бўлса, тегишли тенглама о д д и й дифференциал тенглама, кўп аргументли бўлса, х у с у с и й ҳ о с и л а л и дифференциал тенглама дейилади.

Мисол сифатида қуйидаги дифференциал тенгламаларни келтириш мумкин:

1. $\frac{dx}{dt} = -kx,\ k>0$ (радиоктив парчаланиш тенгламаси),

2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4\pi\rho\,(x, y, z)$ (Пуассон тенгламаси),

3. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,\ \omega>0$ (чизиқли осциллятор тенгламаси).

4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a\frac{\partial u}{\partial t},\ a>0$ (иссиқликнинг тарқалиши тенгламаси).

Дифференциал тенгламада қатнашаётган номаълум функция ҳосилаларининг (дифференциалларининг) энг юқори тартиби шу дифференциал тенгламанинг т а р т и б и дейилади. Масалан, юқорида келтирилган тенгламалардан биринчиси 1-тартибли, учинчиси 2-тартибли оддий дифференциал тенглама бўлса, иккинчи ва тўртинчилари 2-тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалардир.

Агар тенгламада бир неча номаълум функцияларнинг ҳосиласи қатнашган бўлса, эркин ўзгарувчилар битта бўлганда оддий дифференциал тенгламалар системасига, ўзгарувчилар икки ва ундан ортиқ бўлса, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар системасига эга бўламиз. Жумладан, ушбу

1) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda_1 x + ay, \\ \frac{dy}{dt} = \lambda_2 y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - by, \\ \frac{dy}{dx} = bx + ay \end{cases}$

системалар биринчи тартибли дифференциал тенгламалар системаси бўлиб, қуйидаги

3) $\begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = f(x, y), \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - k^2\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \partial(x, y) \end{cases}$

система хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар системасидан иборатдир.

Мазкур китобда оддий дифференциал тенгламалар (биринчи ва n-тартибли), оддий дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси ва бундай тенгламалар учун Штурм—Лиувилль масалалари педагогика институтларининг программаси ҳажмида баён этилади. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ва уларнинг системалари ҳақида маълумотлар бериш бу китобда назарда тутилмаган.

Китобни ёзишда автор ўзининг Фарғона ва Қўқон Давлат педагогика институтларининг математика факультети студентларига кўп йиллар давомида ўқиган лекцияларини асос қилиб олди. Бундан ташқари рус тилида ёзилган мавжуд адабиётлардан ҳам фойдаланилди.

Автор китоб қўлёзмасини синчиклаб кўриб чиқиб, унда учраган камчиликларни бартараф этишга ёрдам берадиган фикр ва мулоҳазаларини билдирган ўртоқларга, айниқса, китобнинг махсус муҳаррири В. И. Ленин номидаги Тошкент Давлат университетининг доценти, физика-математика фанлари кандидати Ғ. Н. Насритдиновга ўз миннатдорчилигини билдиради.

Мазкур китоб шу соҳада яратилаётган илк қўлланмалардан бўлганлиги учун камчиликлардан холи эмас, албатта. Автор ҳамкасб ўртоқларнинг қўлланма ҳақидаги фикр ва мулоҳазаларини мамнуният билан қабул қилади.

Автор

1-боб

БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1-§. ҲОСИЛАГА НИСБАТАН ЕЧИЛГАН БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР. УМУМИЙ МАЪЛУМОТЛАР

Аввал баъзи белгилашлар киритайлик. I — бирор очиқ, ёпиқ ёки ярим очиқ (ярим ёпиқ) интервал бўлсин. $D_2 = \Gamma$ орқали текислик нуқталарининг очиқ (ёпиқ) боғланган* тўпламини, D_3 орқали эса уч ўлчовли фазонинг координаталари x, y, y' лар билан белгиланадиган нуқталарининг очиқ (ёпиқ) боғланган тўпламини белгилайлик. $F(x, y, y')$ функция D_3 тўпламда, $f(x, y)$ функция эса $D_2 = \Gamma$ тўпламда аниқланган бўлсин.

1-таъриф. Ушбу

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.1}$$

тенглама ҳосилага нисбатан *ечилмаган* биринчи тартибли оддий дифференциал тенглама дейилади.

Баъзи ҳолларда (1.1) тенгламани y' га нисбатан ечиш мумкин бўлади.

2-таъриф. Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1.2}$$

тенглама ҳосилага нисбатан *ечилган* биринчи тартибли оддий дифференциал тенглама дейилади.

Энди (1.1) ва (1.2) тенгламалар учун ечим тушунчасини киритайлик.

3-таъриф. Агар I интервалда** аниқланган $y = \varphi(x)$ функция учун

---

* Агар берилган тўпламнинг ихтиёрий икки нуқтасини туташтирувчи ва шу тўпламга тегишли бирор чизиқ мавжуд бўлса, бу тўплам боғланган дейилади. Кейинги мулоҳазаларда фақат боғланган тўпламлар қаралади.

** Агар I интервал ёпиқ бўлса, унинг учларида бир томонли ҳосилалар назарда тутилади. (Кейинги мулоҳазаларда ҳам шундай.)

1°. $(x, \varphi(x)) \in \Gamma$;
2°. $\varphi(x) \in C^1(I)$;
3°. $\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv f(x, \varphi(x)),\ x \in I$

шартлар бажарилса, $y = \varphi(x)$ функция (1.2) тенгламанинг I интервалда аниқланган *ечими* дейилади.

4-таъриф. Агар I интервалда аниқланган $y = \varphi(x)$ функция учун

1°. $\varphi(x) \in C^1(I)$;
2°. $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in D_3$;
3°. $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0,\ x \in I$

шартлар бажарилса, $y = \varphi(x)$ функция (1.1) тенгламанинг I интервалда аниқланган *ечими* дейилади.

$R^1 = R$ орқали барча ҳақиқий сонлар тўпламини, R^2 орқали бутун текисликни қоплайдиган нуқталар тўпламини белгилаймиз. Бу белгилашлардан кейинги мулоҳазаларда ҳам фойдаланамиз.

1-мисол. Ушбу $\frac{dy}{dx} = y$ тенглама учун $I = R^1,\ y \in R^1$, $\Gamma = \{(x, y): (x, y) \in R^2\}$ бўлиб, $\varphi(x) = e^x$ функция R^1 да аниқланган ечим бўлади. Ҳақиқатан, $(x,\ e^x) \in R^2$, $e^x \in C^1\ (R^1)$, $\frac{d}{dx}\ e^x \equiv e^x,\ x \in R^1$.

2-мисол. Ушбу $yy' - e^{2x} = 0$ тенглама учун $x \in R^1$. $D_3 = \{(x, y, y'): (x, y, y') \in R^3\}$, R^3 — уч ўлчовли фазо бўлиб, $\varphi(x) = e^x$ функция R^1 да аниқланган ечим бўлади. Буни бевосита текшириш қийин эмас.

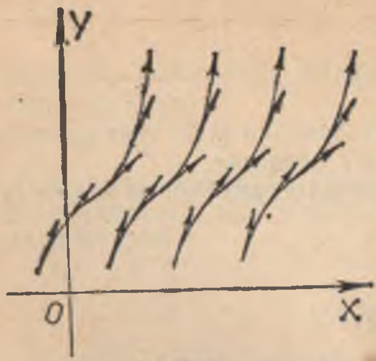
(1.2) тенгламанинг

$$y(x_0) = y_0 \qquad (1.3)$$

шартни қаноатлантирадиган ечимини топиш масаласи *Коши масаласи* дейилади. Коши масаласи қисқача, $\frac{dy}{dx} = f(x,\ y)$, $y(x_0) = y_0$, $(x_0, y_0) \in D_2$ каби ёзилади.

(1.1) ёки (1.2) тенглама ечими бўлган $y = \varphi(x)$ функциянинг графиги тегишли тенгламанинг *интеграл эгри чизиғи* ёки, қисқача, *интеграл чизиғи* дейилади.

Коши масаласининг ечимини топиш, равшанки, (1.2) тенгламанинг $(x_0, y_0) \in D_2$ нуқтадан ўтадиган интеграл чизиғини топишдан иборат (албатта, агар бундай интеграл чизиқ мавжуд бўлса). Юқорида кўрилган 1-мисолда $y = e^x$ функ-



1- чизма.

ция берилган тенгламанинг (0,1) нуқтадан ўтадиган интеграл чизиғидан иборат.

Дифференциал тенгламалар назариясида ва бу назариянинг амалий масалаларга татбиқларида, жумладан, (1.2) тенглама учун D_2 тўпламнинг ихтиёрий тайинланган (x_0, y_0) нуқтасидан ўтадиган интеграл чизиқ борми, агар бор бўлса, нечта? — деган саволлар муҳим аҳамият касб этади. Бу саволларга жавоб $f(x, y)$ функциянинг дифференциал хоссаларига боғлиқдир. Агар (x_0, y_0) нуқтадан фақат битта интеграл чизиқ ўтса, шу нуқтада *ягоналик* ўринли деб юритилади. Ҳар бир нуқтасида ягоналик ўринли бўлган ечим *хусусий ечим* дейилиб, акс ҳолда ундай ечим *махсус ечим* дейилади. Юқорида кўрилган мисолларда $y = e^x$ функция хусусий ечимдир. $\frac{dy}{dx} = y^{\frac{2}{3}}$ тенглама учун $y = 0$ ечим махсус ечим эканини текшириш қийин эмас.

Энди умумий ечим тушунчасини киритайлик. Бир параметрли силлиқ (дифференциалланувчи) чизиқлар оиласи

$$y = \varphi(x, C) \tag{1.4}$$

(C — мумкин бўлган қийматлар қабул қилувчи параметр) тенглама билан берилган бўлсин.

5-таъриф. Агар

$$y = \varphi(x, C), \tag{1.4}$$

$$y' = \varphi'_x(x, C) \tag{1.5}$$

муносабатлардан C параметрни йўқотиш мумкин бўлиб, натижада (1.2) тенглама ҳосил бўлса, у ҳолда (1.4) функция (1.2) тенгламанинг *умумий ечими* дейилади.

Силлиқ чизиқлар оиласига тегишли чизиқлар хусусий ечимлардан иборат. Жумладан, $y = kx$, $k = \text{const}$ чизиқлар координата бошидан ўтадиган тўғри чизиқлар оиласидан иборат. Ундан $y' = k$ ва $k = \frac{y}{x}$ бўлгани учун $y' = \frac{y}{x}$

2- чизма.

3- чизма.

келиб чиқади. Бу дифференциал тенглама учун (0,0) нуқтада $f(x, y) = \frac{y}{x}$ функция аниқланмаган. Демак, интеграл чизиқлар $y = kx$, $x \neq 0$ нурлардан иборат бўлиб, умумий ечим шу $y = kx$, $x \neq 0$ формула билан ёзилади. (0, 0) нуқта эса *махсус нуқта* дейилади.

Юқоридаги мулоҳазалардан равшанки, умумий ечим формуласида ихтиёрий ўзгармас C га бериладиган қийматлардан биронтасида ҳам махсус ечим ҳосил бўлмайди. Бунга мисоллар ёрдамида ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

(1.2) тенгламанинг ҳар бир $y = \varphi(x)$ ечимини геометрик нуқтаи назардан $y = \varphi(x)$ функциянинг графиги каби талқин этган эдик. Энди (1.2) тенгламанинг геометрик талқинини (интерпретациясини) кўрайлик. (1.2) тенглама учун Γ тўпламнинг ҳар бир (x, y) нуқтасидан $f(x, y)$ бурчак коэффициент билан $l_{(x, y)}$ тўғри чизиқ ўтказиб, шу нуқтада тегишли тўғри чизиқ бўйлаб вектор (стрелка) чизамиз. Натижада бутун Γ тўплам (соҳа) стрелкалар (йўналишлар) билан тўла қопланади. Натижада биз (1.2) тенгламанинг геометрик интерпретациясини берадиган *йўналишлар майдонига* эга бўламиз (1-чизма).

Ечим ва (1.2) дифференциал тенгламанинг геометрик интерпретациялари орасидаги боғланиш ҳар бир $y = \varphi(x)$ интеграл чизиқ ўзининг ҳар бир $(x, \varphi(x))$ нуқтасида $l_{(x, \varphi(x))}$ тўғри чизиққа уринишдан иборат. 2-ва 3-чизмаларда $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$ ва $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$, $x \neq 0$ дифференциал тенгламалар учун йўналишлар майдони чизилган.

Дифференциал тенгламанинг барча ечимларини топиш уни *интеграллаш* деб ҳам юритилади. ∎

2-§. ТЎЛИҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

Ушбу $g(x, y)$ ва $h(x, y)$ функциялар бирор $\Gamma \subset R^2$ тўпламда аниқланган ва $h(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in \Gamma$ бўлсин. Ўнг томони $g(x, y)$ ва $h(x, y)$ функцияларнинг нисбатидан иборат бўлган

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{h(x, y)} \tag{1.6}$$

тенгламани кўрайлик. Агар $h(x, y)\,dy - g(x, y)\,dx$ ифода Γ тўпламда тўлиқ дифференциалдан иборат бўлса, у ҳолда (1.6) тенглама *тўлиқ дифференциалли тенглама* дейилади.

(1.6) тенглама тўлиқ дифференциалли бўлсин. Бунинг маъноси шуки, Γ да ушбу

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = h(x, y), \qquad \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = -g(x, y) \tag{1.7}$$

шартларни қаноатлантирадиган $F(x, y)$ функция мавжуд бўлади. (1.6) тенгламани символик равишда

$$h(x, y)\,dy - g(x, y)\,dx = 0$$

кўринишда ёзишга келишиб оламиз.

1.1-теорема. *Агар (1.7) муносабатлар ўринли бўлса, (1.6) тенгламанинг ҳар бир* $y = \varphi(x)$ *ечими учун* $F(x, \varphi(x)) = \text{const}$ *айният ўринлидир ва аксинча (1.6) тенгламанинг бирор интервалда аниқланган ва*

$$F(x, y) = C \tag{1.8}$$

(C — ихтиёрий ўзгармас) тенгламадан ошкормас функция каби топиладиган ҳар бир $y = \varphi(x)$ *функция* (1.6) *тенгламанинг ечими бўлади.*

Исбот. Аввал 1.1-теореманинг биринчи қисмини исботлаймиз. $y = \varphi(x)$ функция (1.6) тенгламанинг I интервалда аниқланган ечими бўлсин. У ҳолда I дан олинган барча x лар учун

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{g(x, \varphi(x))}{k(x, \varphi(x))}$$

га эгамиз. Бундан топамиз:

$$h(x, \varphi(x))\,\frac{d\varphi(x)}{dx} - g(x, \varphi(x)) = 0.$$

(1.7) га кўра, бу тенгликнинг чап томони $F(x, \varphi(x))$ функциянинг x бўйича тўла ҳосиласидан иборат, яъни

$$\frac{d}{dx} F(x, \varphi(x)) = 0, \quad x \in I.$$

Математик анализнинг маълум теоремасига кўра $F(x, \varphi(x))$ функция бутун I интервалда ўзгармас бўлади.

Энди теореманинг иккинчи қисмини исбот этамиз. (1.8) тенгламанинг бирор интервалда аниқланган ечимини $y = \varphi(x)$ дейлик, демак, $F(x, \varphi(x)) = C$. Бу муносабатнинг икки томонини x бўйича дифференциаллаб, (1.7) га кўра топамиз:

$$h(x, \varphi(x)) \frac{d\varphi(x)}{dx} - g(x, \varphi(x)) = 0.$$

Бундан $y = \varphi(x)$ функция (1.6) тенгламанинг ечими экани келиб чиқади. Теорема тўла исбот бўлди.

Эслатма. (1.6) дифференциал тенгламанинг ҳар бир интеграл чизиғи (1.8) тенглама билан аниқланади.

Мисол. Ушбу $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{x^2}$, $\Gamma = \{(x, y): x > 0,\ y \in R\}$ дифференциал тенглама учун $g(x, y) = -2xy$, $h(x, y) = x^2$ бўлиб, $x^2\, dy - (-2xy)\, dx$ ифода $x^2 y$ функциянинг тўлиқ дифференциалидан иборат, яъни $d(x^2 y) = 0$. Бундан $F(x, y) = x^2 y$ ва $x^2 y = C$, $C = \text{const}$ келиб чиқади.

3-§. ЎЗГАРУВЧИЛАРИ АЖРАЛАДИГАН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Агар $f(x)$ функция I_x интервалда, $g(y)$ функция эса I_y интервалда аниқланган ва узлуксиз бўлиб, I_y да $g(y) \neq 0$ бўлса, ушбу

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\, g(y) \tag{1.9}$$

тенглама *ўзгарувчилари ажраладиган* дифференциал тенглама дейилади. (1.9) тенгламанинг ўнг томони $\Gamma = \{(x, y): x \in I_x,\ y \in I_y\}$ тўпламда аниқланган.

(1.9) ни яна символик равишда

$$\frac{dy}{g(y)} - f(x)\, dx = 0$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенглама тўлиқ дифференциалли тенглама бўлиб, тегишли $F(x, y)$ функция ушбу

$$F(x, y) = \int_{y_0}^{y} \frac{d\xi}{g(\xi)} - \int_{x_0}^{x} f(\tau)\, d\tau. \qquad (x_0, y_0) \in \Gamma, (x, y) \in \Gamma$$

кўринишга эга. 1.1-теоремага кўра (1.9) тенгламанинг ҳамма ечимлари ошкормас функциялар сифатида

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\xi}{g(\xi)} = \int_{x_0}^{x} f(\tau)\, d\tau + C$$

муносабатдан аниқланади. Бу муносабатни баъзан аниқмас интеграллар ёрдамида ҳам ёзилади.

Мисол. Ушбу $\frac{dy}{dx} = (1 + y^2)\cos x$ тенглама ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламадир. Уни $\frac{dy}{1+y^2} = \cos x dx$ кўринишда ёзамиз. Бундан умумий ечим учун $\operatorname{arc\,tg} y = \sin x + C$, $C = \mathrm{const}$ ёки $y = \operatorname{tg}(\sin x + C)$ келиб чиқади.

Эслатмалар. 1. Агар (1.9) тенгламада $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, $f_2(x) \neq 0$, $x \in I_x$, $g(y) = \frac{g_1(y)}{g_2(y)}$, $g_1(y) \neq 0$, $y \in I_y$ бўлса, биз ушбу $\frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy - \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx = 0$ символик тенгламани қарашимиз ва бу тенглама $f_2(x) g_2(y) dy - f_1(x) g_1(y) dx = 0$ тенгламадан уни $f_2(x) \cdot g_1(y)$ га бўлиш натижасида ҳосил бўлганини назарда тутишимиз лозим.

2. Агар (1.9) тенгламада $g(y) \equiv 1$ бўлса, $\frac{dy}{dx} = f(x)$ га эга бўламиз ва умумий ечим

$$y = \int_{x_0}^{x} f(\tau)\, d\tau + C$$

формула билан ёзилади.

Машқ. Ушбу дифференциал тенгламаларни интеграл ланг.

1. $xdy + ydx = 0.$
2. $ydy + xdx = 0.$
3. $x(1 + y^2)\, dx - y\,(1 + x^2)\, dy = 0.$
4. $\frac{dx}{dt} = 4t\sqrt{x}.$

4-§. ЎЗГАРУВЧИЛАРИ АЖРАЛАДИГАН ТЕНГЛАМАЛАРГА КЕЛТИРИЛАДИГАН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Баъзи дифференциал тенгламаларни ўзгарувчиларни алмаштириш йўли билан ўзгарувчилари ажраладиган тенгламаларга келтириш мумкин.

I. $\frac{dy}{dx} = f(ax + by)$

тенглама $z = ax + by$ алмаштириш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келади. Ҳақиқатан,

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \quad \text{ёки} \quad \frac{dz}{dx} = a + bf(z).$$

Бу — ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир.

Мисоллар. 1. $\frac{dy}{dx} = 2x + y$ тенгламада $z = 2x + y$ десак, ундан $\frac{dz}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$ ёки $\frac{dz}{dx} = 2 + z$ келиб чиқади. Уни интеграллаб қуйидагини топамиз:

$$z = -2 + Ce^x \quad \text{ёки} \quad y = Ce^x - 2x - 2.$$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x - y} + 1$ тенгламада $z = x - y$ десак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx} \quad \text{ёки} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z}.$$ Бундан:

$$z\,dz = -dx, \quad z^2 = -2x + C, \quad (x - y)^2 = -2x + C.$$

II. Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.10}$$

кўринишдаги тенглама биринчи тартибли *бир жинсли тенглама* дейилади. Бу тенглама $z = \frac{y}{x}$ алмаштириш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келади. $y = zx$ ва $\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$ га кўра (1.10) тенглама $x\frac{dz}{dx} + z = f(z)$ кўринишга келади. Бу — ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир.

III. Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{1.11}$$

тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтирилади. Ҳақиқатан, $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ва $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ бўлганда (1.11) тенглама ушбу $\xi = x - x_1$, $\eta = y - y_1$ алмаштириш ёрдамида бир жинсли тенгламага келтирилади, бу ерда (x_1, y_1) жуфтлик

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

системанинг ечимидан иборат.

Тегишли алмаштириш (1.11) тенгламани қуйидаги:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right)$$

ёки

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1 + b_1\dfrac{\eta}{\xi}}{a_2 + b_2\dfrac{\eta}{\xi}}\right) = \varphi\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$$

бир жинсли тенгламага олиб келади.

Агар $\Delta = 0$ бўлса, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = k$ деб белгилаб, (1.11) тенгламани биз танишган

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{(a_1x + b_1y)\ k + c_2}\right) = \varphi\ (a_1x + b_1y)$$

кўринишга келтириш мумкин. Агар $c_1 = c_2 = 0$ бўлса, биз бир жинсли тенгламага эга бўламиз ($\Delta \neq 0$ бўлганда).

Мисол. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - y + 1}{x + y - 3}$ тенглама учун: $\Delta = 1 + 1 = 2 \neq 0$. Ушбу

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечиб, $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ ни топамиз. Ушбу $\xi = x - 1$, $\eta = y - 2$ алмаштиришни бажарсак,

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi - \eta}{\xi + \eta}$$

ҳосил бўлади. Бу тенгламани ечишни биз биламиз, унда $\eta = z\xi$ алмаштириш бажарамиз. Натижада қуйидагилар келиб чиқади:

$$z + \xi\frac{dz}{d\xi} = \frac{1 - z}{1 + z}; \qquad \frac{(1 + z)\ dz}{1 - 2z - z^2} = \frac{d\xi}{\xi},$$

$$-\frac{1}{2}\ \ln|1-2z-z^2|=\ln|\xi|-\frac{1}{2}\ln C,$$

$$(1-2z-z^2)\,\xi^2=C,\quad \xi^2-2\xi\eta-\eta^2=C.$$

Бундан x ва y ўзгарувчиларга қайтиб ($\xi=x-1$, $\eta=y-2$ деб), берилган тенгламанинг умумий интеграли $x^2-2xy-y^2+2x+6y=C_1$ ни ҳосил қиламиз.

5-§. ТЎЛИҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛИ ТЕНГЛАМАЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ ТЕХНИКАСИ. ИНТЕГРАЛЛОВЧИ КЎПАЙТУВЧИ

Биз 2-§ да тўлиқ дифференциалли тенгламаларни ўргандик. Энди уларни интеграллаш техникаси билан танишамиз. Дифференциал тенглама қуйидаги кўринишда ёзилган бўлсин:

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0, \tag{1.12}$$

бунда $M(x, y)$, $N(x, y)$ функциялар Γ тўпламда аниқланган ва узлуксиз. Агар (1.12) тенглама тўлиқ дифференциалли бўлса, у ҳолда бирор $u(x, y)$ функция учун $du(x, y)=M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy$ айният ўринли бўлади. Бундан $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=M(x, y)$, $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=N(x, y)$ деб ёзиш мумкин. Агар $M(x, y)$ ва $N(x, y)$ функциялар Γ тўпламда узлуксиз дифференциалланувчи бўлса, биз ушбу

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{1.13}$$

айниятга эга бўламиз. Бу айниятнинг бажарилиши (1.10) тенглама тўлиқ дифференциалли бўлишининг зарурий ва етарли шартидир. Уни *Эйлер — Даламбер шарти* деб юритилади.

Агар (1.12) тенглама тўлиқ дифференциалли бўлса, яъни (1.13) айният бажарилса, у ҳолда (1.12) ни интеграллаш қуйидагича амалга оширилади: x бўйича ҳосиласи $M(x, y)$ га тенг бўлган $u(x, y)$ функцияни танлаш мумкин. Уни y бўйича ҳосиласи $N(x, y)$ га тенг қилиб танлай олсак, тегишли $u(x, y)$ функция қурилган бўлади. Ҳозир шундай функцияни қурамиз.

$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=M(x, y)$ ни x бўйича интеграллаб $u(x, y)=\int M(x, y)\,dx+\psi(y)$ га эга бўламиз. Охирги тенгламанинг икки томонидан y бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\int\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\,dx+\psi'(y),$$

ёки (1.13) га кўра

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \int \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} dx + \psi'(y)$$

ёки

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = N(x, y) + \varphi(y) + \psi'(y)$$

Агар $\varphi(y) + \psi'(y) = 0$ деб танласак, изланган функция қурилган бўлади.

Мисол. Ушбу $(x + y + 1)\,dx + (x - y^2 + 3)\,dy = 0$ тенгламани интегралланг.

Ечиш. $M(x, y) = x + y + 1$, $N(x, y) = x - y^2 + 3$ ва $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$ бўлгани учун берилган тенглама тўлиқ дифференциаллидир. Шунинг учун $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = x + y + 1$ дан $u(x, y) = \frac{x^2}{2} + (y + 1)\,x + \psi(y)$, сўнгра $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = x + \psi'(y)$ ва $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = x - y^2 + 3$ дан $x - y^2 + 3 = x + \psi'(y)$ ёки $\psi'(y) = -y^2 + 3$ га эгамиз. Бундан $\psi(y) = -\frac{y^3}{3} + 3y$ деб олсак бўлади. Шундай қилиб, $u(x, y) = \frac{x^2}{2} + (y + 1)\,x - \frac{y^3}{3} + 3y$ ва тенгламанинг умумий интеграли $\frac{x^2}{2} + (y + 1)\,x - \frac{y^3}{3} + 3y = C$ бўлади.

Агар (1.12) нинг чап томони тўлиқ дифференциалли бўлмаса, шундай $\mu(x, y) \geqslant 0$, $(x, y) \in \Gamma$ функция топиш мумкинки, тенгламанинг чап томонини унга кўпайтирсак, тўлиқ дифференциалли тенглама ҳосил бўлади, яъни

$$du = \mu M\,dx + \mu N\,dy.$$

Бу ерда μ *интегралловчи кўпайтувчи* дейилади.

Мисол. Ушбу

$$x\,dx + y\,dy + (x^2 + y^2)\,x^2\,dx = 0$$

тенгламани тўлиқ дифференциалли тенглама кўринишига келтиринг.

Ечиш. Агар тенгламани $\mu = \frac{1}{x^2 + y^2}$ интегралловчи кўпайтувчига кўпайтирсак, тенглама тўлиқ дифференциалли тенгламага айланади ва натижада

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} + x^2dx = 0$$

га эга бўламиз. Уни интеграллаб топамиз:

$$\frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2) + \frac{x^3}{3} = \ln C$$

ёки

$$(x^2 + y^2)\, e^{\frac{2}{3}x^3} = C.$$

Интегралловчи кўпайтувчини ҳамма вақт ҳам осонгина топиб бўлавермайди. Уни топиш учун биринчи тартибли хусусий ҳосилали (($\mu (x, y)$ га нисбатан)

$$\frac{\partial \mu M}{\partial x} = \frac{\partial \mu N}{\partial x}$$

тенгламанинг бирор ечимини топишимиз керак бўлади. Бу тенгламани очиб ёзсак,

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial x}\mu$$

ёки

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} M - \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \qquad (1.14)$$

ҳосил бўлади.

Баъзи хусусий ҳолларда, жумладан, интегралловчи кўпайтувчини фақат x га, y га, $x^2 + y^2$ га боғлиқ деб қараб (1.12) тенгламани интеграллаш мумкин.

Мисол учун $\mu = \mu (x)$ бўлсин. Бу ҳолда (1.14) тенглама соддалашиб, қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{d \ln \mu}{dx} N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Бундан $N (x, y) \neq 0$, $(x, y) \in \Gamma$ деб топамиз:

$$\ln \mu = - \int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N} dx + \ln C$$

$$\mu (x) = Ce^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}, \quad C>0. \qquad (1.15)$$

Агар $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$ фақат x нинг функцияси бўлса, у ҳолда x га боғлиқ бўлган интегралловчи кўпайтувчи $\mu(x)$ мавжуд бўлади ва у (1.15) формула билан аниқланади.

Чизиқли тенглама учун фақат x нинг функциясидан иборат интегралловчи кўпайтувчи мавжуд. Ҳақиқатан, биринчи тартибли чизиқли тенглама деб аталувчи (6-§ га қаранг) $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$ тенгламани символик равишда қуйидагича ёзамиз:

$$[P(x)y-f(x)]\,dx+dy=0.$$

Энди $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$ ифода x нинг функцияси эканлигини кўрсатиш кифоя.

Оддий ҳисоблашдан $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=P(x)$ келиб чиқади. Демак, фақат x га боғлиқ $\mu(x)$ мавжуд ва унинг қиймати (1.15) дан топилади:

$$\mu(x)=e^{\int P(x)\,dx}.$$

Мисоллар. 1. $xdx+ydy+xdy-ydx=0$ (1.16)
тенглама $\mu=\mu(x^2+y^2)$ кўринишдаги интегралловчи кўпайтувчига эгами?

Ечиш. $z=x^2+y^2$ деб белгилаймиз. У ҳолда (1.14) тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$2\,(My-Nx)\,\frac{d\ln\mu}{dz}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}.$$

Буни интегралласак:

$$\ln\mu=\frac{1}{2}\int\varphi(z)\,dz+\ln C$$

ёки

$$\mu=Ce^{\frac{1}{2}\int\varphi(z)\,dz}.$$

Бу ерда

$$\varphi(z)=\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{My-Nx}. \qquad (1.17)$$

Изланган кўринишдаги интегралловчи кўпайтувчи мавжуд бўлиши учун

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{My - Nx}$$

ифода фақат $x^2 + y^2 = z$ нинг функцияси бўлиши зарур ва етарлидир. Юқорида келтирилган (1.16) тенглама учун:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{My - Nx} = -\frac{2}{x^2 + y^2};$$

демак, интегралловчи кўпайтувчи $\mu\,(x^2 + y^2)$ мавжуд. $C = 1$ деб μ ни топамиз.

$$\mu = e^{-\int \frac{dz}{z}} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

(1.16) тенгламани $\mu = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ га кўпайтириб

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бундан

$$\frac{\frac{1}{2}\,d\,(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} + \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = 0$$

ёки

$$\frac{1}{2}\,d\ln(x^2 + y^2) + d\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} = 0.$$

Охирги тенгламани интеграллаб топамиз:

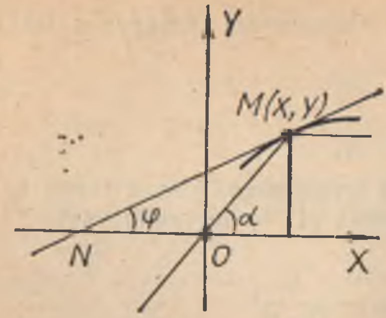
$$\ln\sqrt{x^2 + y^2} = -\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + \ln C$$

ёки

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}}.$$

2. Кўзгунинг шундай формасини топингки, унга берилган нуқтадан тушган ҳамма нурлар кўзгудан қайтганда берилган йўналишга параллел бўлсин.

Ечиш. Координата бошини берилган нуқтага кўчирамиз ва абсциссалар ўқини берилган йўналишга параллел



4- чизма.

қилиб оламиз. Нур кўзгунинг $M(x, y)$ нуқтасига тушсин дейлик.

Кўзгунинг M нуқтасига MN уринма ўтказамиз. Нурнинг тушиш бурчаги унинг қайтиш бурчагига тенг бўлганидан, MNO учбурчак тенг ёнли бўлади (4- чизма). Демак,

$$\operatorname{tg} \varphi = y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Махражни иррационалликдан қутқариб қуйидаги тенгламага келамиз:

$$xdx + ydy = \sqrt{x^2 + y^2}\, dx.$$

Бу тенглама учун интегралловчи кўпайтувчи $\mu = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ бўлиб, тенгламани унга кўпайтириш натижасида ушбу

$$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = dx$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Ундан $\sqrt{x^2 + y^2} = x + C$ ёки $y^2 = 2Cx + C^2$ (параболалар оиласи) ни топамиз.

6- §. БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Номаълум функция ва унинг ҳосиласига нисбатан чизиқли бўлган

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = f(x) \tag{1.18}$$

кўринишдаги тенглама биринчи тартибли *чизиқли* дифференциал тенглама деб аталади. Бу ердаги $P(x)$, $f(x)$ бирор I интервалда берилган функциялар бўлиб, уларни I да узлуксиз деб фараз қиламиз.

Агар $f(x) \equiv 0$ бўлса, (1.18) тенглама

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = 0 \tag{1.19}$$

кўринишни олади. Бу тенгламани берилган (1.18) тенгламага *мос бир жинсли тенглама* дейилади. Агар $f(x) \not\equiv 0$ бўлса

(1.18) ни *бир жинсли бўлмаган* чизиқли тенглама дейилади. (1.19) тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир. Ундан:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx$$

ёки

$$\ln|y| = -\int P(x)\,dx + \ln C, \quad C>0,$$

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}, \quad C>0. \qquad (1.20)$$

Биз y га бўлганимизда $y \equiv 0$ ечимни йўқотдик. Агар (1.20) да $C \geqslant 0$ десак, ўша ечимни ҳам қўшган бўламиз.

Бир жинсли бўлмаган (1.18) тенглама ечимини топиш учун Лагранж усулидан (ўзгармасни вариациялаш усулидан) фойдаланамиз.

Бир жинсли бўлмаган (1.18) тенгламанинг ечимини

$$y = C(x)\,e^{-\int P\,dx} \qquad (1.21)$$

кўринишда излаймиз, бу ерда $C(x)$ — номаълум дифференциалланувчи функция.

(1.21) дан ҳосила олиб (1.18) га қўйсак,

$$\frac{dC(x)}{dx} e^{-\int P\,dx} - C(x)P(x)e^{-\int P dx} + P(x)C(x)e^{-\int P dx} = f(x)$$

келиб чиқади. Бундан

$$\frac{dC(x)}{dx} = f(x)\,e^{\int P\,dx}$$

ёки

$$C(x) = \int f(x)\,e^{\int P\,dx}\,dx$$

га эга бўламиз. $C(x)$ нинг ифодасини (1.21) га қўйсак, (1.18) нинг умумий ечими учун

$$y = e^{-\int P\,dx}\left[C_1 + \int f(x)\,e^{\int P\,dx}\,dx\right] \qquad (1.22)$$

формула ҳосил бўлади.

Мисоллар. 1. Ушбу $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2$ чизиқли тенгламани интегралланг.

Ечиш. Олдин мос бир жинсли

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$$

тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Равшанки, $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ ёки $\ln|y| = \ln|x| + \ln C$, $C>0$. Бундан $y = Cx$.

Энди берилган тенгламанинг ечимини $y = C(x) \cdot x$ кўринишда излаймиз. Бу ердан:

$$y' = C'(x) + C(x).$$

Берилган тенглама қуйидаги кўринишга келади: $\frac{dC(x)}{dx} x + C(x) - C(x) = x^2$ ёки $d\,C(x) = x dx$. Бундан $C(x) = \frac{x^2}{2} + C_1$ ни топамиз. Шундай қилиб, берилган тенгламанинг умумий ечими:

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) x.$$

2. Ушбу $\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$ чизиқли тенгламани интегралланг.

Ечиш. Олдин мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = 0 \quad \text{дан} \quad \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

ёки $\ln|y| = \ln|\sin x| + \ln C$. Бундан $y = C \sin x$. Энди $y = C(x) \sin x$ десак, $y' = C'(x) \sin x + C(x) \cos x$ бўлади. Бу ифодаларни берилган тангламага қўйсак, $C'(x) \sin x + C(x) \cos x - C(x) \cos x = 2x \sin x$ ёки $C'(x) = 2x$ келиб чиқади. Бундан $C(x) = x^2 + C_1$. Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими $y = (x^2 + C_1) \sin x$ кўринишда ёзилади.

Баъзи дифференциал тенгламалар ўзгарувчиларни алмаштириш ёрдамида чизиқли тенгламага келтирилади. Бунга Бернулли тенгламаси мисол бўлади. Ушбу

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n, \quad n \in R \tag{1. 23}$$

кўринишдаги тенглама *Бернулли тенгламаси* дейилади. Агар (1. 23) да $n = 1$ бўлса, ўзгарувчилари ажраладиган $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y$ тенгламага, агар $n = 0$ бўлса, чизиқли $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$ тенгламага эга бўламиз. Бу ҳолларни эса кўрганмиз. Шунинг учун (1. 23) да $n \neq 0$, $n \neq 1$ деб қараймиз. Энди (1.23) да $y^{1-n} = z$ алмаштириш бажарамиз. Равшанки, $(1-n)y^{-n}y' = z'$. Аввал (1.23) ни $y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = f(x)$ кўринишда ёзиб, уни

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + P(x)z = f(x)$$

кўринишга келтирамиз. Бу эса чизиқли тенгламадир.

Мисол. Ушбу $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}$ Бернулли тенгламасини (бу ерда $n = -1$) чизиқли тенгламага келтиринг. Бу тенгламани $2y\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x} + x^2$ кўринишда ёзиб, $y^2 = z$, $2yy' = z'$ алмаштириш бажарсак, $z' = \frac{z}{x} + x^2$ чизиқли тенгламага келамиз.

Баъзи тенгламалар ўзгарувчини алмаштириш ёрдамида Бернулли тенгламасига келтирилади. Масалан, Риккати тенгламаси унинг битта хусусий ечими маълум бўлганда Бернулли тенгламасига келтирилади.
Ушбу

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + q(x)y^2 = f(x) \tag{1.24}$$

кўринишдаги тенглама *Риккати тенгламаси* дейилади. $y = y_1(x)$ функция (1.24) тенгламанинг хусусий ечими бўлсин. Агар $y = y_1(x) + z$ десак,

$$y_1' + z' + p(x)(y_1 + z) + q(x)(y_1 + z)^2 = f$$

келиб чиқади. $y_1' + py_1 + qy_1^2 = f$ эканлигини эътиборга олсак, ушбу

$$z' + [p(x) + 2q(x)y_1]z + q(x)z^n = 0$$

Бернулли тенгламасини ҳосил қиламиз.

Мисол. Ушбу $\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{2}{x^2}$ Риккати тенгламасини Бернулли тенгламасига келтиринг.

Ечиш. Бу тенгламанинг хусусий ечими $y_1 = \frac{1}{x}$ эканини кўриш қийин эмас. $y = z + \frac{1}{x}$ деб алмаштирсак, $y' = z' - \frac{1}{x^2}$ бўлади. Содда ҳисоблашларни бажарсак, z' —

$$-\frac{1}{x^2}=\left(z+\frac{1}{x}\right)^2-\frac{2}{x^2}$$ ёки $z'=z^2+2\frac{z}{x}$ — бу Бернулли тенгламасидир. Бу тенгламанинг умумий ечими

$$y=\frac{1}{x}+\frac{3x^2}{C-x^3}$$

функциядан иборат эканига тенгламани интеграллаб ишонч ҳосил қилиш мумкин.

7- §. $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ ТЕНГЛАМА ЕЧИМИНИНГ МАВЖУДЛИГИ ВА ЯГОНАЛИГИ ҲАҚИДА

Элементар функциялар ёки уларнинг интеграллари орқали ечими топиладиган дифференциал тенгламалар *квадратураларда интегралланадиган* тенгламалар дейилади. Агар дифференциал тенглама квадратураларда интегралланмаса, уни тақрибан ечишга тўғри келади. Бу ишда тақрибий ҳисоблаш методлари ёрдам беради. Аммо берилган бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечимни тақрибий ёки аналитик қуришдан аввал, аниқ ечимнинг мавжудлигига ишонч ҳосил қилиш зарур.

Коши масаласи ечимининг мавжудлиги ҳақида асосан теоремани эслатиб ўтиш мумкин, бу Коши, Пикар ва Пеано теоремаларидир. Биз қуйида Пикар теоремасини келтирамиз ва исбот этамиз.

1.2- теорема (Пикар теоремаси). *Агар*

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1.2}$$

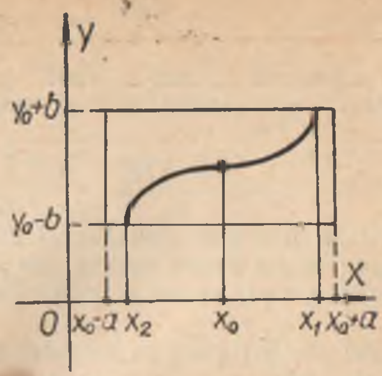
тенгламада $f(x,y)$ *функция* 1°) $D=\{(x,y): x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a,\ y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b\}$ *тўғри тўртбурчакда узлуксиз (демак, унда чегараланган, яъни* $|f(x,y)|\leqslant M,\ M>0$*) бўлса,* 2°) y *бўйича Липшиц шартини қаноатлантирса,* y *ҳолда* (1.2) *тенглама* (1.3) *шартни қаноатлантирадиган* ва $|x-x_0|\leqslant h,\ h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right)$ *интервалда аниқланган ягона ечимга эга бўлади.*

Эслатиб ўтамизки, агар D тўпламнинг ихтиёрий икки (x,y_1) ва (x,y_2) нуқтаси учун ушбу

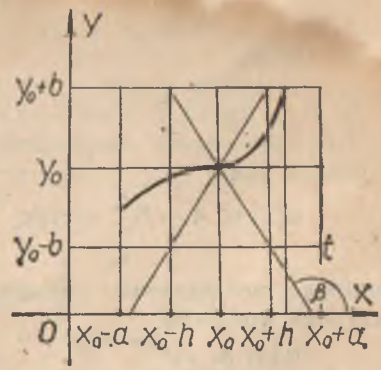
$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2| \tag{1.25}$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x,y)$ функция D да y *бўйича Липшиц шартини қаноатлантиради* дейилади, L эса *Липшиц ўзгармаси* дейилади.

Теорема шартларини бир оз тушунтириб ўтамиз. $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, $y(x_0)=$ $=y_0$ Коши масаласининг ечимидан иборат $y=y(x)$ функция $x_0-a\leqslant x\leqslant$ $\leqslant x_0+a$ оралиқда мавжуд деб бўлмайди, чунки $y=\bar{y}(x)$ интеграл чизиқ x нинг бирор $x=$ $=x_1$, $x_0-a<x_1<x_0+a$ қийматида D тўғри тўртбурчакнинг қуйи $y=$ $=y_0-b$ ёки юқори $y=$ $=y_0+b$ томонидан ташқарига чиқиб кетиши мумкин (5-чизма). Аниқ айтиш мумкинки, $y=y(x)$ интеграл чизиқ $x_0-h\leqslant$ $\leqslant x\leqslant x_0+h$ оралиқда D нинг ташқарисига чиқиб кетмайди (6-чизма), чунки изланаётган чизиқ уринмасининг бурчак коэффициенти M ва $-M$ орасида ётади.



5-чизма.



6- чизма.

Пикар теоремасининг исботига ўтишдан аввал зарур икки тасдиқни келтирамиз.

1. Эквивалентлик леммаси. *Агар $y=\varphi(x)$ функция x_0 нуқтани ўз ичига олган бирор I интервалда аниқланган бўлиб,* (1.2) — (1.3) *Коши масаласининг ечими бўлса, у ҳолда $y=\varphi(x)$ функция I интервалда*

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\tau,y(\tau))d\tau \tag{1.26}$$

интеграл тенгламанинг ечими бўлади, аксинча агар $y=$ $=\varphi(x)$ функция I интервалда узлуксиз бўлиб, (1.26) *тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда $y=\varphi(x)$ функция* (1.2) — (1.3) *Коши масаласининг ҳам ечими бўлади.*

Исбот. $y=\varphi(x)$ функция (1.2) тенгламанинг ечими бўлгани учун уни айниятга айлантиради, яъни:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv f(x, \varphi(x)).$$

Бу айниятни x_0 дан x гача $(x_0 \in I,\ x \in I)$ интеграллаймиз ($\varphi(x_0) = y_0$ эканини ҳисобга олиб):

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau.$$

Бундан $y = \varphi(x)$ функция (1.26) интеграл тенгламанинг ечими экани келиб чиқади. Энди $y = \varphi(x)$ функция (1.26) тенгламанинг ечими бўлсин. Ундан $\varphi(x_0) = y_0$ экани ва

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau\right) = 0 + \frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau\right) = f(x, \varphi(x))$$

дан $y = \varphi(x)$ функция (1.2) тенгламанинг ечими экани келиб чиқади.

Лемма исбот бўлди.

2. Гронуолл леммаси. *Агар $u(x)$ функция $[x_0, x_0 + h]$ интервалда манфиймас, узлуксиз бўлиб, шу интервалда ушбу*

$$u(x) \leqslant A + B\int_{x_0}^{x} u(\tau)\, d\tau, \quad A \geqslant 0,\ B \geqslant 0 \tag{1.27}$$

интеграл тенгсизликни қаноатлантирса, шу $u(x)$ функция учун қуйидаги

$$u(x) \leqslant Ae^{B(x - x_0)}, \qquad x \in [x_0, x_0 + h] \tag{1.28}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. Ушбу $u(x) = e^{B(x-x_0)}\, v(x)$ белгилашни киритамиз. Лемма шартига кўра $u(x) \geqslant 0$ бўлгани учун $v(x) \geqslant 0$ ва $v(x)$ ҳам $[x_0, x_0 + h]$ интервалда узлуксиз бўлади. Шунинг учун $v(x)$ функция ўша интервалнинг бирор x_1, $x_1 \in [x_0, x_0 + h]$ нуқтасида максимумга эришади. (1.27) муносабатга $u(x)$ функция учун ифодани қўйиб, $x = x_1$ деймиз:

$$e^{B(x_1 - x_0)}\, v(x_1) = u(x_1) \leqslant A + B\int_{x_0}^{x_1} e^{B(\tau - x_0)}\, v(\tau)\, d\tau \leqslant A + B\, v(x_1)\int_{x_0}^{x_1} e^{B(\tau - x_0)}\, d\tau = A + B\, v(x_1)\left[\frac{e^{B(\tau - x_0)}}{B}\right]_{x_0}^{x_1} = A + v(x_1)\, e^{B(x_1 - x_0)} - v(x_1).$$

Бундан $v(x_1) \leqslant A$ келиб чиқади. Демак, $u(x) = v(x)\, e^{B(x-x_0)} \leqslant$ $\leqslant v(x_1)\ e^{B(x-x_0)} \leqslant A e^{B(x-x_0)}$. Лемма исбот бўлди.

Гронуолл леммасидан натижа сифатида $A = 0$ бўлганда (1.28) га кўра $u(x) \equiv 0$, $x \in [x_0,\ x_0 + h]$ келиб чиқади.

3. **Пикар теоремасининг исботи.** **Мавжудлиги.** Эквивалентлик леммасига кўра Коши масаласи ((1.2)—(1.3) масала) ўрнига ушбу

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y)\, d\tau \tag{1.29}$$

интеграл тенгламани ечиш масаласини кўрамиз. Бу тенгламанинг ечимини Пикарнинг кетма-кет яқинлашиш методи билан излаймиз. $|x - x_0| \leqslant h$ интервалда аниқланган функциялар кетма-кетлигини қуйидагича қурамиз:

$$y_0(x) = y_0 \qquad \text{(нолинчи яқинлашиш)},$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau,\ y_0)\ d\tau \qquad \text{(1- яқинлашиш)},$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau,\ y_1(\tau))\ d\tau \qquad \text{(2- яқинлашиш)},$$

. . . .

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_{n-1}(\tau))\ d\tau \qquad (n\text{- яқинлашиш}),$$

. . . .

Шу функцияларнинг графиги $|x - x_0| \leqslant h$ интервалда

$$D_h = \{(x,\ y) : |x - x_0| \leqslant h,\ |y - y_0| \leqslant b\}$$

тўғри тўртбурчакдан чиқиб кетмайди, яъни $(x,\ y_n(x)) \in D_h$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Ҳақиқатан,

$$(x_0,\ y_0) \in D_h,$$

$$|y_1(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(\tau,\ y_0)\ d\tau\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(\tau,\ y_0)|\, d\tau\right| \leqslant M\,|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b,$$

$$|y_2(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(\tau, y_1(\tau))\, d\tau\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(\tau, y_1(\tau))|\, d\tau\right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b,$$

. . . .

$$|y_n(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_{n-1}(\tau))\, d\tau \right| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(\tau, y_{n-1}(\tau))|\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b.$$

Тасдиқлаб ўтамизки, $\{y_n(x)\}$ кетма-кетликнинг ҳадлари қурилаётган $|x - x_0| \leqslant y$ интервалда узлуксиз, ҳатто узлуксиз дифференциалланувчидир.

Энди қурилган $\{y_n(x)\}$ кетма-кетлик $|x - x_0| \leqslant h$ интервалда текис яқинлашувчи эканини исботлаймиз.

Ушбу

$$y_0 + [y_1(x) - y_0] + [y_2(x) - y_1(x)] + \ldots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)] + \ldots \tag{1.30}$$

функционал қаторни кўрамиз. Унинг n- хусусий йиғиндиси: $S_n(x) = y_n(x)$. Бундан $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$. Шунинг учун (1.30) қаторнинг текис яқинлашувчи эканини исбот қилиш етарли. (1.30) қаторнинг ҳар бир ҳадини баҳолаймиз ((1.25) тенгсизликни ҳисобга оламиз):

$$|y_1(x) - (y_0)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_0)\, d\tau \right| \leqslant M|x - x_0|.$$

$$|y_2(x) - y_1(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_0)]\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_0)|\, d\tau \right| \leqslant L \left| \int_{x_0}^{x} |y_1(\tau) - y_0|\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant LM \left| \int_{x_0}^{x} |\tau - x_0|\, d\tau \right| = LM\, \frac{|x - x_0|^2}{2!}.$$

Индукция усули билан:

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant L^{n-1} M\, \frac{|x - x_0|^n}{n!} \tag{1.31}$$

тенгсизлик ўринли бўлса, шу қонун (тенгсизлик) n дан $n+1$ га ўтганда ҳам ўринли эканини исбот қилиш мумкин:

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(\tau, y_n(\tau)) - f(\tau, y_{n-1}(\tau))]\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_{x_0}^{x} [f(\tau, y_n(\tau)) - f(\tau, y_{n-1}(\tau)] \, d\tau \right| \leqslant L \left| \int\limits_{x_0}^{x} |y_n(\tau) - y_{n-1}(\tau)| d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L^n M}{n!} \left| \int\limits_{x_0}^{x} |\tau - x_0|^n \, d\tau \right| = \frac{L^n M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}.$$

Шундай қилиб, (1.31) тенгсизлик ихтиёрий натурал n лар учун тўғри. Бундан (1.30) қаторнинг текис яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади. Ҳақиқатан, (1.31) га кўра

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant L^{n-1} M \frac{h^n}{n!}$$

ва $|y_0| + \sum\limits_{n=1}^{\infty} L^{n-1} M \frac{h^n}{n!}$ сонли қатор яқинлашувчидир, чунки Даламбер аломатига кўра:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L^n M \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}}{L^{n-1} M \frac{h^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} L \frac{h}{n+1} = 0 < 1.$$

Шундай қилиб, математик анализ курсидан маълум бўлган Вейерштрасс теоремасига кўра $\{S_n(x)\} = y_n(x)\}$ кетма-кетлик узлуксиз $\varphi(x)$ функцияга текис (ҳатто абсолют) яқинлашади. $\varphi(x)$ функциянинг узлуксизлиги ҳар бир $y_n(x) - y_{n-1}(x)$ айирма юқори лимити ўзгарувчи бўлган интегралдан иборатлигидан кўринади. Маълумки, бундай интеграл (интеграл остидаги функция ҳам узлуксиз) юқори лимитининг узлуксиз функциясидан иборатдир.

Энди топилган шу $y = \varphi(x)$ лимит функция (1.2) — (1.3) масаланинг ечими эканини исбот қиламиз. Бунинг учун $n \to \infty$ да

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y_n(\tau)) \, d\tau$$

тенгликдан

$$\varphi(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau)) \, d\tau \tag{1.32}$$

тенглик келиб чиқишини исботлаш лозим. Ҳақиқатан, равшанки,

$$\left| \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau)) \, d\tau - \int\limits_{x_0}^{x} f(\tau, y_n(\tau)) d\tau \right| \leqslant \left| \int\limits_{x_0}^{x} |f(\tau, \varphi(x)) - \right.$$

$$-f(\tau, y_n(\tau))|\,d\tau\Big| \leqslant L\Big|\int\limits_{x_0}^{x}|\varphi(\tau)-y_n(\tau)|\,d\tau\Big|.$$

$\{y_n(x)\}$ кетма-кетликнинг $\varphi(x)$ функцияга текис яқинлашувчи эканлигидан ихтиёрий $\varepsilon>0$ берилганда ҳам, шундай N номер топиладики, $n>N$ бўлганда $|\varphi(x)-y_n(x)|\leqslant \leqslant \frac{\varepsilon}{Lh}$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шунинг учун

$$L\Big|\int\limits_{x_0}^{x}(\varphi(\tau)-y_n(\tau)|d\tau| \leqslant L\cdot\frac{\varepsilon}{Lh}\Big|\int\limits_{x_0}^{x}d\tau\Big| = \frac{\varepsilon}{h}|x-x_0| \leqslant \frac{\varepsilon}{h}\cdot h=\varepsilon,$$

яъни $\Big|\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,\varphi(\tau))\,d\tau-\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,y_n(\tau))\,d\tau\Big|\leqslant\varepsilon$ тенгсизлик ўринли. Бундан

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,y_n(\tau))\,d\tau=\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,\lim_{n\to\infty}y_n(\tau))\,d\tau=\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Шундай қилиб,

$$\lim_{n\to\infty}y_{n+1}=\lim_{n\to\infty}(y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,y_n(\tau))\,d\tau)$$

дан (1.32) нинг ўринли экани келиб чиқади.

Ягоналиги. (1.2) тенгламанинг (1.3) шартни қаноатлантирадиган яна битта $y=\psi(x)$ ечими бор бўлсин. Унинг аниқланиш интервали $|x-x_0|\leqslant h$ бўлиб, $\varphi(x)$ ва ва $\psi(x)$ функциялар аниқланиш интервалларининг умумий қисми $|x-x_0|\leqslant h_0$ дан иборат бўлсин. У ҳолда $|x-x_0|\leqslant \leqslant h_0$ да $\varphi(x)\equiv\psi(x)$ эканини исбот этамиз. Шартга кўра

$$\varphi(x)\equiv y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,\varphi(\tau))\,d\tau,\ \ \psi(x)\equiv y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,\psi(\tau))\,d\tau$$

айниятларга эгамиз. Бундан $[x_0,\ x_0+h_0]$ учун:

$$|\varphi(x)-\psi(x)|=\Big|\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,(\tau))\,d\tau-\int\limits_{x_0}^{x}f(\tau,\psi(\tau))\,d\tau\leqslant L\int\limits_{x_0}^{x}|\varphi(\tau)-$$
$$-\psi(\tau)|\,d\tau,$$

яъни

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant L\int\limits_{x_0}^{x}|\varphi(\tau)-\psi(\tau)|\,d\tau$$

га эгамиз. Бу ердан Гронуолл леммасининг натижасига кўра $\varphi(x) \equiv \psi(x)$, $x \in [x_0, x_0 + h_0]$ келиб чиқади. $x \in [x_0 - h, x_0]$ учун ҳам мулоҳазалар шунга ўхшашдир. Ягоналик исбот этилди. Пикар теоремаси исбот бўлди.

Эслатма. Биз $y = \overline{y}(x)$ ечимни $x_0 - h_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h_0$ кесмадагина аниқладик, лекин бошланғич нуқта сифатида $(x_0 + h, y(x_0 + h_0))$ ни олиб, юқоридагидек мулоҳазалар юритиб, ечимни каттароқ кесмага давом эттириш мумкин эди, бунинг учун, албатта, янги бошланғич нуқтанинг атрофида Пикар теоремасининг шартлари бажарилиши керак.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\frac{dy}{dx} = x + y \quad y(0) = 0, \quad D = \{(x, y): -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ -1 \leqslant y \leqslant 1\}$$

масаланинг ечимига яқинлашувчи кетма-кетликнинг биринчи учта y_1, y_2, y_3 ҳадини топинг.

Ечиш. Бу масала учун $y(0) = 0$,

$$y = \int_0^x (x^2 + y^2)\, dx; \quad h = \min\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

эканини ҳисобга олиб, топамиз:

$$y_1 = \int_0^x x^2\, dx = \frac{x^3}{3}; \qquad y_2 = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{9}\right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63};$$

$$y_3 = \int_0^x \left[x^2 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{9 \cdot 7}\right)^2\right] dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}\left(1 + \frac{2x^4}{33} + \frac{x^8}{945}\right).$$

2. Ушбу

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = f(x); \quad y(x_0) = y_0$$

масала $P(x)$ ва $f(x)$ функциялар қандай бўлганда ягона ечимга эга бўлади?

Ечиш. Тенгламани

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)\, y + f(x) = f(x, y)$$

шаклда ёзамиз. Шу тенгламада $P(x)$ ва $f(x)$ функциялар бирор ёпиқ I интервалда узлуксиз бўлиши тегишли масала ягона ечимга эга бўлиши учун (Пикар теоремасига қаранг) етарли. Ҳақиқатан, I ёпиқ интервал бўлгани учун унда узлуксиз $P(x)$ функция ўзининг максимумига эришади, яъни $|P(x)| \leqslant P_0$. Шунинг учун $|-P(x) y_1 + f(x) + P(x) y_2 - f(x)| = |P(x)| |y_2 - y_1| \leqslant p_0$. Демак, Липшиц шарти $L = p_0$ учун бажарилади.

8- §. МАХСУС НУҚТАЛАР ВА МАХСУС ЕЧИМЛАР

Агар 1- § да кўрилган (1.2) дифференциал тенгламада $f(x, y)$ функция бирор $(x_0, y_0) \in \Gamma$ нуқтанинг атрофида чегараланмаган бўлса, икки ҳол юз бериши мумкин:

1. Агар $(x, y) \to (x_0, y_0)$ бўлса, $f(x, y) \to \infty$. Бунда $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{1}{f(x, y)} = 0$. Агар $\frac{1}{f(x_0, y_0)} = 0$ деб қабул қилсак,

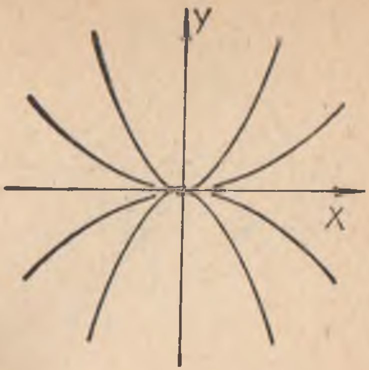
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$$

дифференциал тенгламани кўриш мумкин. Агар бу тенглама учун (x_0, y_0) нуқта атрофида мавжудлик ва ягоналик теоремасининг шартлари бажарилса, у ҳолда (x_0, y_0) дан ўтадиган ягона интеграл эгри чизиқ $x = \varphi(y)$ бўлади. Равшанки, $\frac{dx}{dy} = \frac{d\varphi(y)}{dy} = \frac{1}{f(\varphi(y), y)}$ ва $\frac{1}{f(\varphi(y_0), y_0)} = 0$, яъни $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = 0$. Бундан кўринадики, интеграл эгри чизиқ (x_0, y_0) нуқтада вертикал уринмага эга.

2. $f(x, y)$ функция $(x, y) \to (x_0, y_0)$ да ягона (∞ га тенг) лимитга эга эмас ва (x_0, y_0) атрофида ё $f(x, y)$, ё $\frac{1}{f(x, y)}$ функция узлуксиз ($(x, y) \neq (x_0, y_0)$ нуқталарда). Ушбу $\frac{ax+by}{cx+dy}$ функция юқорида айтилган функциялардандир. Агар $(x, y) \to (0, 0)$ ва $(x, y) \in \{(x, y): ax + by = 0\}$ бўлса, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ax+by}{cx+dy} = 0$ бўлади; агар (x, y) нуқта $cx + dx = 0$ тўғри чизиқда ётса, берилган каср-чизиқли функция (0, 0) да аниқланмаган. Умуман, бу функция $\frac{0}{0}$ типдаги ажралган махсус нуқтага эга дейилади.

$\frac{ax+by}{cx+dy}$ каср-чизиқли функция учун $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+dy}$ дифференциал тенгламанинг (0, 0) махсус нуқта атрофида интеграл эгри чизиқларини қуриш мумкин. Биз буни конкрет мисолларда кўрамиз.

Мисоллар 1. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$ тенглама учун $(0, 0)$ нуқта махсус бўлиб, унинг атрофида интеграл эгри чизиқлар $y = Cx^2$ параболаларнинг шохчаларидан иборат. Бундай махсус нуқта *тугун махсус нуқта* дейилади (7- чизма).



7- чизма.

2. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ тенглама учун $(0, 0)$ махсус нуқта атрофида интеграл эгри чизиқлар $y = \frac{C}{x}$ гиперболалардан иборат. Бундай махсус нуқта *эгар махсус нуқта* дейилади (9- чизма).

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$ тенглама учун $(0, 0)$ махсус нуқта атрофида интеграл эгри чизиқлар $\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$ ёки бари бир, $r = Ce^{\varphi}$ (r — радиус-вектор, φ — қутб бурчаги) логарифмик спираллардан иборат. Бунда биз *фокус махсус нуқтага* эгамиз (8- чизма).

8- чизма.

4. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ тенглама учун $(0, 0)$ махсус нуқта атрофида интеграл эгри чизиқлар $x^2 + y^2 = C^2$ концентрик айланалардан иборат. Бунда биз *марказ махсус нуқтага* эгамиз (10- чизма).

Кўриш қийин эмаски, юқоридаги мисолларда кўрилган ҳоллар каср- чизиқли функция коэффициентлари a, b, c, d дан тузилган $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$ матрицанинг хос сонлари 1) ҳақиқий ва бир хил ишорали; 2) ҳақиқий ва ҳар хил ишорали; 3) комплекс; 4) соф мавҳум бўлган ҳолларга тўғри келади.

9- чизма.

10- чизма.

Агар (1. 2) тенгламадаги $f(x, y)$ функция учун Пикар теоремасининг шартлари бажарилса, у ҳолда, маълумки, (x_0, y_0) нуқтадан (1. 2) тенгламанинг ягона интеграл эгри чизиғи ўтади. Агар Пикар теоремасининг шартлари бажарилмаса-чи? — деган савол туғилади. Бунда турли ҳоллар юз бериши мумкин. Улардан қизиқиш уйғотадигани ҳар бир нуқтасида ягоналик ўринли бўлмайдиган ечимларни излашдир.

Махсус ечим деб (1. 2) *дифференциал тенгламанинг ҳар бир нуқтасида ягоналик хоссаси ўринли бўлмайдиган ечимига айтилади.*

Бу таърифга мувофиқ махсус ечим графиги Пикар теоремасига кўра $f(x, y)$ функция бирор Γ соҳада узлуксиз бўлганда фақат Липшиц шарти бажарилмайдиган нуқталардан ўтиши мумкин. Липшиц шарти $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ ҳосила чексиз катта бўладиган нуқталардагина бажарилмайди.

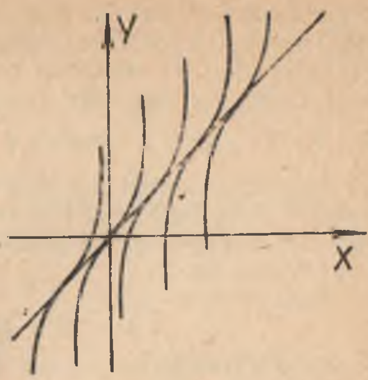
Қайд қиламизки, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \infty$ (аниқ ишорали чексиз) тенглама, умуман айтганда, қандайдир эгри чизиқни ифодалайди. У эгри чизиқ нуқталарида Коши масаласининг ечими ягона бўлмаслиги мумкин. Агар шу эгри чизиқнинг ҳамма нуқталарида ягоналик бузилса, уни биз махсус эгри чизиқ деймиз; агар бундан ташқари у интеграл эгри чизиқ бўлса, уни махсус интеграл эгри чизиқ деймиз.

Мисоллар. 1. $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ тенглама махсус ечимга эгами?

Ечиш. Пикар теоремасининг шартлари бутун R^2 текисликда бажарилади. Шунинг учун тенглама махсус ечимга эга эмас.

2. $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{(y-x)^2} + 5$

тенглама махсус ечимга эгами?



11- чизма.

Ечиш. Тенгламанинг ўнг томони R^2 да узлуксиз, лекин $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3}(y-x)^{-\frac{1}{3}}$ хусусий ҳосила $y \to x$ да чегараланмаган. Демак, $y = x$ тўғри чизиқда ечимнинг ягоналиги бузилиши мумкин. Лекин $y = x$ функция ечим эмас. Шунинг учун тенглама махсус ечимга эга эмас.

3. $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{(x-y)^2} + 1$

тенглама махсус ечимга эгами?

Ечиш. Юқоридаги мисолдагидек мулоҳаза юритиб, $y = x$ да $\frac{\partial f}{\partial y}$ чегараланмаганига ишонч ҳосил қиламиз. Аммо бу тенглама учун $y = x$ функция ечим экани равшан. Демак, $y = x$ — махсус эгри чизиқ. Берилган тенгламанинг умумий ечимини ҳам топиш қийин эмас. У $y - x = \frac{(x-c)^3}{27}$ эгри чизиқлар оиласидан иборат (11-чизма). 11- чизмадан $y = x$ чизиқнинг ҳар бир нуқтасидан чексиз кўп интеграл тўғри чизиқ ўтиши кўриниб турибди. Демак, $y = x$ чизиқнинг ҳар бир нуқтасида ягоналик бузилади. Шунинг учун $y = x$ чизиқ берилган дифференциал тенгламанинг махсус ечими бўлади.

9-§. ҲОСИЛАГА НИСБАТАН ЕЧИЛМАГАН ТЕНГЛАМАЛАР

Ҳосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.33}$$

кўринишда ёзилиши мумкин. Бундай тенглама учун ечим тушунчаси 1-§ нинг 4-таърифида берилган эди. Агар бу тенгламани y' га нисбатан ечиш мумкин бўлса, унинг ўрнига битта ёки бир неча тенгламага эга бўламиз:

$$y' = f_i(x, y), \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Бу тенгламаларнинг ҳар бирини интеграллаб, ечимлар тўпламини ҳосил қиламиз. Шу ечимлар тўплами (ҳар бир ечим тегишли тенгламадан топилади) берилган (1.33) тенгламанинг ечими бўлади.

Мисол учун

$$(y')^2 - (x + y)\, y' + xy = 0$$

тенгламани интеграллайлик. Бунинг учун уни y' га нисбатан ечамиз:

$$y' = x, \qquad y' = y.$$

Бу дифференциал тенгламаларни интеграллаб топамиз:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2} + C_1, \\ y = C_2\, e^x. \end{cases}$$

Бу — берилган тенгламанинг умумий ечими бўлади.

(1.33) тенгламани ҳамма вақт ҳам y' га нисбатан ечиш мумкин бўлавермайди. Шунинг учун (1.33) тенгламанинг квадратураларда интегралланадиган турлари муҳимдир. Қуйида уларнинг баъзилари билан танишамиз.

а) (1.33) тенглама қуйидаги

$$F(y') = 0 \tag{1.34}$$

кўринишга эга бўлиб, $F(k) = 0$ тенглама ақалли битта ҳақиқий k_i илдизга эга бўлсин.

(1.34) тенглама x ва y га боғлиқ бўлмагани учун k_i ўзгармас бўлади. Демак, $y' = k_i$ ни интеграллаб, $y = k_i x + C$ ёки $k_i = \dfrac{y - C}{x}$ ни ҳосил қиламиз. $F(k) = 0$ тенгламанинг ечими k_i бўлгани учун $F\left(\dfrac{y - C}{x}\right) = 0$ муносабат (1.34) тенгламанинг интеграли бўлади, масалан,

$$(y')^7 - (y')^5 + y' + 3 = 0$$

тенгламанинг интеграли

$$\left(\frac{y - C}{x}\right)^7 - \left(\frac{y - C}{x}\right)^5 + \frac{y - C}{x} + 3 = 0$$

бўлади.

б) (1.33) тенглама қуйидаги

$$F(x, y') = 0 \qquad (1.35)$$

кўринишга эга бўлсин.

Бунда бир неча ҳол юз бериши мумкин. Аввало (1.35) ни y' га нисбатан ечиш мумкин дейлик: $y' = a_i(x)$. Бундан $y = \int a_i(x)\,dx + C$.

Агар тенгламани y' га нисбатан ечиш қийин бўлса, у ҳолда параметр киритиш усулидан фойдаланамиз. Бунда параметр

$$x = \varphi(t), \qquad y' = \psi(t)$$

каби киритилади. Бундан $dy = y'\,dx$ бўлгани учун

$$dy = \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt, \qquad y = \int \varphi'(t)\,\psi(t)\,dt + C.$$

Демак, тенгламанинг интеграл эгри чизиқлари параметрик формада қуйидагича ифодаланади:

$$x = \varphi(t)$$
$$y = \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt + C.$$

Агар (1.35) тенгламани x га нисбатан ечиш осон бўлса, $y' = t$, $x = \varphi(y')$ каби параметр киритилади. Бу ҳолда $x = \varphi(t)$, $dy = y'dx = t\,\varphi'(t)\,dt$, $y = \int t\,\varphi'(t)\,dt + C$ келиб чиқади.

Мисоллар. **1.** $x = (y')^3 - y' - 1$ тенглама x га нисбатан ечилган. Шунинг учун $y' = t$, $x = t^3 - t - 1$ десак, $dy = y'dx = t(3t^2 - 1)\,dt$, $\quad y = \frac{3}{4}t^4 - \frac{t^2}{2} + C$ га эга бўламиз.

Демак, берилган тенгламанинг параметрик формадаги ечими

$$\begin{cases} x = t^3 - t - 1, \\ y = \frac{3}{4}t^4 - \frac{t^2}{2} + C \end{cases}$$

бўлади.

2. Ушбу $x\sqrt{1 + y'^2} = y'$ тенглама учун $y' = \operatorname{tg} t$ дейлик, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ интервал учун мулоҳазалар юритамиз. Равшанки, $x = \sin t$, чунки

$$x = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} = \frac{\operatorname{tg} t}{\sec t} = \sin t.$$

Энди қуйидагига эгамиз: $dy = y'\,dx = \operatorname{tg} t \cos t\,dt = \sin t dt$, бундан: $y = -\cos t + C$. y ва x ларнинг ифодаларидан параметр t ни чиқарсак (йўқотсак), $x^2 + (y - C)^2 = 1$ айланалар оиласига эга бўламиз.

в) (1.33) тенглама

$$F(y, y') = 0 \tag{1.36}$$

кўринишга эга бўлсин. Бунда икки ҳол бўлиши мумкин. (1.36) ни y' га нисбатан ечиш осон бўлса, уни $y' = f_i \cdot (y)$, $(i = \overline{1, k})$ деб ёзилади. Бу эса ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир.

Агар бу тенгламани y' га нисбатан ечиш қийин бўлса, юқоридаги сингари параметр киритиш мақсадга мувофиқдир. Параметрни $y = \varphi(t)$, $y' = \psi(t)$, $\psi(t) \neq 0$ каби киритсак, $dy = y'\,dx$ дан $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)}$; $x = \int \frac{\varphi'}{\psi}\,dt + C$ келиб чиқади. Шундай қилиб, (1.36) тенглама ечими параметрик формада

$$x = \int \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)} + C, \qquad y = \varphi(t)$$

каби ёзилади. Хусусий ҳолда, агар (1.36) тенгламани y га нисбатан ечиш осон бўлса, у ҳолда $y = \varphi(y')$, $y' = t$ деймиз. Бу ҳолда $y = \varphi(t)$, $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)\,dt}{t}$. Бундан $x = \int \frac{\varphi'(t)\,dt}{t} + C$ ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, ечимнинг параметрик кўриниши $x = \int \frac{\varphi'(t)\,dt}{t} + C$, $y = \varphi(t)$ дан иборат.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$y = (y')^5 + (y')^3 + y' + 5$$

тенглама y га нисбатан ечилган. Шунинг учун $y' = t$ деб, $y = t^5 + t^3 + t + 5$ ни ҳосил қиламиз. Энди равшанки,

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{5t^4 + 3t^2 + 1}{t}\,dt, \; x = \frac{5t^4}{4} + \frac{3}{2}t^2 + \ln|t| + C.$$

Демак, тенглама ечимининг параметрик формаси

$$\begin{cases} y = t^5 + t^3 + t + 5, \\ x = \frac{5}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + \ln|t| + C \end{cases}$$

каби бўлади.

2. $\dfrac{y}{\sqrt{1+y'}}=1$ тенглама учун $y'=\operatorname{sh} t$ деб $y=\operatorname{ch} t$,

$dx=\dfrac{dy}{y'}=\dfrac{\operatorname{sh} t\,dt}{\operatorname{sh} t}=dt$ ни ҳосил қиламиз. $y=\operatorname{ch} t$ ва $x=$ $=t+C$ лардан параметр t ни чиқарсак, $y=\operatorname{ch}(x-C)$ келиб чиқади.

г) Энди (1) тенгламани y га нисбатан ечиш мумкин бўлсин дейлик. Бирор ечимни (y бўйича)

$$y=f_i(x,\ y') \tag{1.37}$$

каби ёзайлик.

Бу ҳолда $y'=p$ каби параметр киритсак,

$$y=f(x,p),\quad dy=\frac{\partial f}{\partial x}\,dx+\frac{\partial f}{\partial p}\,dp$$

ёки

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\ \frac{dp}{dx},$$

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\ \frac{dp}{dx} \tag{1.38}$$

ни ҳосил қиламиз. Бундан уни интеграллаб (агар квадратураларда интеграллаш мумкин бўлса) $\Phi(x,p,C)=0$ га эга бўламиз. Шундай қилиб, кўрилаётган ҳолда ечимнинг параметрик кўриниши

$$\begin{cases}\Phi(x,p,C)=0,\\ y=f(x,\ p)\end{cases}$$

каби ёзилади.

(1.33) тенгламани x га нисбатан ечиш мумкин бўлганда ҳам худди шу каби мулоҳазалар юритиш мумкин.

Энди мисол сифатида ушбу

$$y=x\,\varphi(y')+\psi(y')$$

Лагранж тенгламасини кўрайлик. Бундан x бўйича ҳосила олиб, $y'=p$ десак,

$$p=\varphi(p)+x\,\varphi'(p)\ \frac{dp}{dx}+\psi'(p)\ \frac{dp}{dx} \tag{1.39}$$

ёки

$$[p-\varphi(p)]\frac{dx}{dp}=x\,\varphi'(p)+\psi'(p) \tag{1.40}$$

ни ҳосил қиламиз. Охирги тенглама x ва $\dfrac{dx}{dp}$ га нисбатан чизиқли, уни $p - \varphi(p) \neq 0$ бўлган ҳолда интеграллаб, $\Phi(x, p, C) = 0$ муносабатни топамиз. У ҳолда Лагранж тенгламаси интегралининг параметрик формаси

$$\Phi(x, p, C) = 0, \quad y = x\varphi(p) + \psi(p)$$

каби ёзилади.

(1.39) тенгламадан (1.40) тенгламага ўтишда $\frac{dp}{dx}$ га бўлдик. Бу вақтда биз $\frac{dp}{dx} = 0$ бўлган ечимни (агар бундай ечим мавжуд бўлса) йўқотдик. p ни ўзгармас десак, (1.39) тенглама қаноатланиши учун p сон $p - \varphi(p) = 0$ тенгламанинг илдизи бўлиши керак. Шундай қилиб, агар $p - \varphi(p) = 0$ тенглама ҳақиқий $p = p_i$ илдизга эга бўлса, Лагранж тенгламасининг ечимини

$$y = x\varphi(p) + \psi(p), \quad p = p_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

ёки

$y = x\varphi(p_i) + \psi(p_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ (тўғри чизиқ) каби ёзиш мумкин. $p - \varphi(p) \equiv 0$ бўлган ҳолни алоҳида текширамиз.

$\frac{dp}{dx}$ га бўлганимизда $p = C$ ечимни йўқотамиз. Бу ҳолда $y' = \varphi(y')$ бўлиб Лагранж тенгламаси $y' = \varphi(y')$ *(Клеро тенгламаси)* кўринишни олади. $y' = p$ деб, $y = xp + \psi(p)$ ни ҳосил қиламиз. Ундан x бўйича ҳосила оламиз.

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

ёки

$$[x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0.$$

Бундан ё $p' = 0$, $p = C$ ёки $x + \psi'(p) = 0$ келиб чиқади. Биринчи ҳолда p ни чиқариб

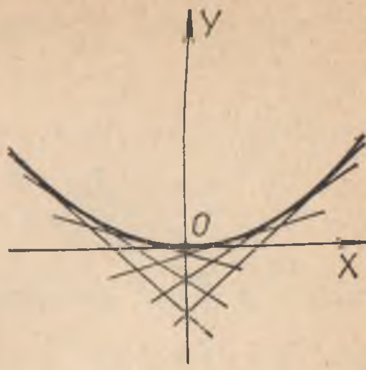
$$y = Cx + \psi(C) \tag{1.41}$$

интеграл тўғри чизиқлар оиласини ҳосил қиламиз. Иккинчи ҳолда Клеро тенгламасининг ечими

$$y = xp + \psi(p), \quad x + \psi'(p) = 0 \quad (p - \text{параметр}) \tag{1.42}$$

каби ёзилади. (1.42) тенгламалар билан аниқланган интеграл эгри чизиқ интеграл тўғри чизиқлар оиласи (1.41) нинг *ўрамасидан* иборатлигини кўриш қийин эмас. Ўрама таърифини эслатиб ўтамиз.

Таъриф. Ушбу $\Phi(x, y, C)=0$ тенглама бир параметрли силлиқ чизиқлар оиласидан иборат бўлсин. Агар бирор $y=\varphi(x)$ чизиқ берилган чизиқлар оиласининг ҳар бир чизиғига уриниб, шу уриниш нуқталаридан ташкил топган бўлса, у ҳолда $y=\varphi(x)$ чизиқ тегишли чизиқлар оиласининг *ўрамаси* дейилади.



12- чизма.

$\Phi(x, y, C)=0$ (C — параметр) бир параметрли эгри чизиқлар оиласи ўрамага эга бўлса, у ҳолда ўрама ушбу

$$\Phi(x, y, C)=0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial C}=0 \tag{1.43}$$

тенгламалар системаси билан тавсифланади. Аммо бу фақат зарурий шартдир. Биз кўраётган ҳолда $y=Cx+\psi(C)$ оиланинг ўрамаси

$$y=Cx+\psi(C), \quad x+\psi'(C)=0$$

тенгламалар билан аниқланади.

Мисоллар. 1. $y=xy'-y'^2$ — Клеро тенгламасини олайлик. Унинг умумий ечими бир параметрли интеграл тўғри чизиқлар оиласи $y=Cx-C^2$ дан иборат бўлади. Бундан ташқари, бу тўғри чизиқларнинг ўрамаси $\begin{cases} y=Cx-C^2, \\ x-2C=0 \end{cases}$ ҳам Клеро тенгламасининг интеграли бўлади. Охирги системадан C ни йўқотиб, $y=\frac{x^2}{4}$ параболани ҳосил қиламиз (12- чизма).

2. Ушбу

$y=2xy'-y'^3$ (Лагранж тенгламаси)

тенгламани олайлик. Унда

$$y'=p, \qquad y=2xp-p^3$$

деб, қуйидагига эга бўламиз:

$$p=2p+2x\frac{dp}{dx}-3p^2\frac{dp}{dx}.$$

Бундан $\frac{dp}{dx}\neq 0$ бўлганда

$$p\frac{dx}{dp}=-2x+3p^2$$

тенгламага келамиз. Бу чизиқли тенгламани интеграллаб,

$$x = \frac{C}{p^2} + \frac{3}{4}\, p^2$$

ни ҳосил қиламиз. Демак, интеграл эгри чизиқлар

$$\begin{cases} y = 2xp - p^3, \\ x = Cp^{-2} + \frac{3}{4}\, p^2 \end{cases}$$

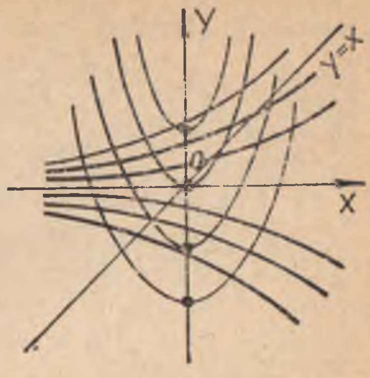
тенгламалар билан аниқланади. Юқорида $\frac{dp}{dx} \neq 0$ деган-эдик. Агар $p=0$ бўлса, $\frac{dp}{dx}=0$ бўлади, чунки $p-\varphi(p)=-p$. Шундай қилиб, $p=0$ дан $y'=0$ ва $y=\text{const}$ келиб чиқади. Агар $y=0$ бўлса, бу Лагранж тенгламасининг ечими бўлади.

10-§. ҲОСИЛАГА НИСБАТАН ЕЧИЛМАГАН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЕЧИМНИНГ МАВЖУДЛИГИ ВА ЯГОНАЛИГИ ҲАҚИДА

Биз 7-§ да $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$, $y(x_0)=y_0$ Коши масаласи ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақида Пикар теоремасини исбот қилган эдик. Худди шунга ўхшаш масалани $F(x, y, y')=0$ тенглама учун ҳам қўйиш мумкин. Лекин берилган (x_0, y_0) нуқтадан, умуман айтганда, $F(x, y, y')=0$ тенгламанинг бир неча интеграл эгри чизиғи ўтиши мумкин, чунки $F(x, y, y')=0$ тенгламани y' га нисбатан ечиб (агар y' га нисбатан ечиш осон бўлса) y' нинг бир неча қийматларини, яъни $y'=f_i(x, y)$ $(i=1, 2, \ldots)$ ни топамиз. Ҳар бир f_i учун y' миқдор йўналишини аниқлайди. Агар берилган (x_0, y_0) нуқта атрофида $f_i(x, y)$ функцияларнинг ҳар бири учун Пикар теоремасининг шартлари ўринли бўлса, у ҳолда ҳар бир $y'=f_i(x, y)$ тенгламанинг (x_0, y_0) нуқтадан ўтувчи ягона интеграл эгри чизиғи мавжуд бўлади. Шунинг учун $F(x, y, y')=0$; $y(x_0)=y_0$ масалани қараганимизда, унинг ечимининг ягоналиги берилган нуқтадан берилган йўналишда дифференциал тенгламанинг ягона интеграл эгри чизиғи ўтишини англатади.

Масалан, $y'^2-(x+y)y'+xy=0$ тенглама учун $x\neq y$ бўлганда ягоналик хоссаси бажарилади, чунки ҳар бир

(x_0, y_0) нуқтадан иккита интеграл чизиқ ўтиб, уларнинг йўналишлари ҳар хилдир. Ҳақиқатан, берилган тенгламадан $y' = x$, $y' = y$ ларни топамиз. Бундан $x \neq y$ бўлганда йўналишлар турли бўлиши кўриниб турибди. $(y')^2 - (x+y)y' + xy = 0$ тенглама учун ягоналик хоссаси $y = x$ тўғри чизиқ (биссектриса) нинг ҳамма нуқталарида бузилади.



13- чизма.

Равшанки, интеграл эгри чизиқлар $y = \frac{x^2}{2} + C$, $y = Ce^x$ оилалардан иборат (13-чизма).

1.3-теорема. *$F(x, y, y')$ функция (x_0, y_0, y_0') нуқтанинг ёпиқ атрофида қуйидаги шартларни қаноатлантирсин;*

1) $F(x, y, y')$ функция ҳамма аргументлари бўйича узлуксиз;

2) $\frac{\partial F}{\partial y'}$ ҳосила мавжуд ва нолга тенг эмас;

3) $\frac{\partial F}{\partial y}$ ҳосила мавжуд ва модули бўйича чегараланган, яъни

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \leqslant N.$$

У ҳолда

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.1}$$

тенгламанинг $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ (бунда y_0' миқдор $F(x_0, y_0, y') = 0$ тенгламанинг ҳақиқий илдизларидан бири) шартларни қаноатлантирадиган ҳамда $x_0 - h_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h_0$ (бунда h_0 — етарлича кичик миқдор) интервалда аниқланган ягона ечими мавжуд.

Исбот. (1.1) тенгламадан ошкормас функцияларнинг мавжудлиги ҳақидаги теоремага асосан мазкур теореманинг 1) ва 2) шартларига кўра (x_0, y_0) нуқта атрофида (1.1) нинг y' га нисбатан ягона узлуксиз ечими $y' = f(x, y)$ функция мавжудлиги келиб чиқади ва бу функция учун $y_0' = f(x_0, y_0)$ шарт ўринли бўлади. Энди $f(x, y)$ функция Липшиц шартини қаноатлантиришини кўрсатсак ёки унга қараганда қўполроқ $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant N$ шарт бажарилишини кўрсатсак, бу билан теорема исботланган бўлади. Ҳақиқатан, бу ҳолда $y' = f(x, y)$ тенглама учун Пикар теоремасининг шартлари бажарилади.

Ошкормас функциялар ҳақидаги теоремага асосан, 1), 2) ва 3) шартларнинг бажарилишидан $\frac{\partial f}{\partial y}$ ҳосиланинг мавжудлиги ва бу ҳосила ошкормас функцияни дифференциаллаш қоидаси бўйича ҳисобланиши мумкинлиги келиб чиқади. $F(x, y, y') = 0$ айниятни y бўйича дифференциаллаб ва $y' = f(x, y)$ эканини назарда тутиб $\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

ёки $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}$ ни ҳосил қиламиз. Бундан, 2) ва 3) шартларга асосан (x_0, y_0) нуқтанинг ёпиқ атрофида $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant N$ келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Ушбу

$$F(x, y, y') = 0$$

тенглама ечимининг ягоналиги бузиладиган нуқталар тўплами *махсус тўплам* дейилади.

Махсус тўпламнинг нуқталарида 1.3-теореманинг шартларидан бири бажарилмайди. Татбиқий масалаларда учрайдиган дифференциал тенгламаларда кўпинча 1) ва 3) шартлар бажарилиб, 2) шарт $\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0\right)$ бажарилмайди.

Агар 1) ва 3) шартлар бажарилса, махсус тўплам нуқталарида

$$F(x, y, y') = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \tag{1.44}$$

тенглама айниятга айланади. Бу тенгламалардан y' ни мумкин бўлганда йўқотсак, махсус тўплам нуқталари қаноатлантирадиган

$$\Phi(x, y) = 0 \tag{1.45}$$

тенглама келиб чиқади. Лекин (1.45) тенгламани қаноатлантирадиган ҳар бир нуқтада ҳам (1.1) тенглама ечимининг ягоналиги бузилавермайди, чунки 1.3-теореманинг шартлари етарли бўлиб, зарур эмасдир. (1.45) тенглама билан тавсифланадиган чизиқ *р-дискриминант чизиқ* дейилади. Шундай қилиб, махсус тўплам нуқталари фақат p-дискриминант чизиқ нуқталари ичида бўлиши мумкин.

Агар $\Phi(x, y) = 0$ эгри чизиқнинг бир тармоғи $y = \varphi(x)$ махсус тўпламга тегишли бўлса ва шу билан бирга интеграл эгри чизиқ бўлса, уни биз *махсус интеграл эгри чизиқ* деб атаймиз, $y = \varphi(x)$ функцияни эса *махсус ечим* деймиз.

Шундай қилиб, (1.1) тенгламанинг махсус ечимини топиш учун қуйидагича иш юритишимиз лозим: 1) ушбу

$$F(x, y, p) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial p} = 0$$

тенгламалар билан аниқланган p-дискриминант эгри чизиқни топиш; 2) p-дискриминант эгри чизиқнинг тармоқлари ичида интеграл эгри чизиқлар бор ёки йўқлигини аниқлаш; 3) шундай интеграл эгри чизиқ бор бўлса, шу эгри чизиқ нуқталарида ягоналик шарти бажарилиши ёки бажарилмаслигини текшириб кўриш. Агар p-дискриминант чизиқнинг интеграл эгри чизиқдан иборат бирор тармоғи нуқталарида ягоналик бузилса, ўша тармоқ махсус интеграл эгри чизиқ бўлади.

Мисоллар. **1.** Ушбу $y = 2xy' - (y')^2$ — Лагранж тенгламаси махсус ечимга эгами?

Ечиш. 1.3-теореманинг 1) ва 3) шартлари бажарилади. p-дискриминант эгри чизиқ қуйидаги

$$y = 2xp - p^2, \qquad 2x - 2p = 0$$

тенгламалар билан аниқланади. Улардан p ни чиқарсак, $y = x^2$ ни топамиз. $y = x^2$ парабола тенгламани қаноатлантирмагани учун у махсус ечим бўла олмайди.

2. Ушбу $x - y = \frac{4}{9}(y')^2 - \frac{8}{27}(y')^3$ (1.46)

Лагранж тенгламасининг махсус ечимини топинг.

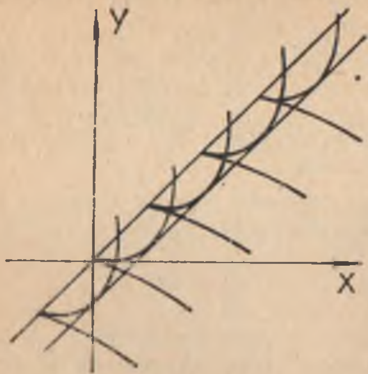
Ечиш. 1.3-теореманинг 1) ва 3) шартлари бажарилади. p — дискриминант эгри чизиқ

$$x - y = \frac{4}{9}p^2 - \frac{8}{27}p^3, \qquad \frac{8}{9}(p - p^2) = 0$$

тенгламалар билан аниқланади. Иккинчи тенгламадан $p = 0$ ёки $p = 1$ келиб чиқади, буларни тенгламага қўйиб,

$$y = x \qquad \text{ёки} \qquad y = x - \frac{4}{27}$$

ларни ҳосил қиламиз. Бу функциялардан фақат иккинчиси



14- чизма.

тенгламанинг ечими бўлади. Энди $y = x - \frac{4}{27}$ ечим махсус ёки махсус эмаслигини текширамиз. Унинг учун (1.46) тенгламани интеграллаб

$$(y - C)^2 = (x - C)^3 \quad (1.47)$$

ни ҳосил қиламиз.

(1.47) тенглама ва 14-чизмадан кўринадики, $y = x - \frac{4}{27}$ тўғри чизиқ (1.47) ярим кубик параболалар оиласининг ўрамасидир ва демак, $y = x - \frac{4}{27}$ тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтасида ечимнинг ягоналиги бузилади.

Шундай қилиб, $y = x - \frac{4}{27}$ ечим махсус.

Ушбу

$$\Phi\ (x,\ y,\ C) = 0 \quad (1.48)$$

бир параметрли силлиқ чизиқлар оиласи (1.1) тенгламанинг интеграл эгри чизиқлари бўлсин. Шу интеграл эгри чизиқларнинг ўрамаси доим махсус интеграл эгри чизиқ эканини исботлаш қийин эмас. Агар (1.48) интеграл эгри чизиқларнинг ўрамаси мавжуд бўлса, бу ўрама деб аталувчи эгри чизиқ c-дискриминант эгри чизиқлар деб юритиладиган ва ушбу

$$\Phi\ (x,\ y,\ C) = 0 \qquad \text{ва} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0$$

тенгламалар билан аниқланадиган чизиқлар ичида бўлади. c-дискриминант эгри чизиқнинг бирор тармоғи ўрама бўлиши учун, у тармоқда қуйидаги шартларнинг бажарилиши етарлидир:

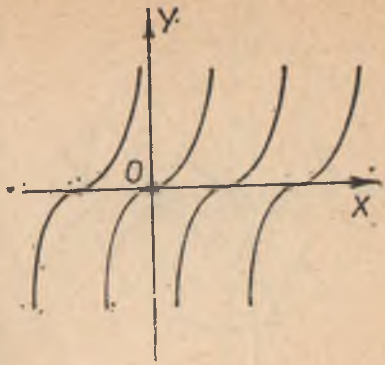
1) модули бўйича чегараланган хусусий ҳосилалар

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| \leqslant N_1, \qquad \left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right| \leqslant N_2$$

мавжуд;

2) $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \neq 0$ ёки $\frac{\partial \Phi}{\partial y} \neq 0$.

Бу шартлар фақат етарли бўлиб, зарур эмас. Шунинг учун бирор c-дискриминант эгри чизиқ нуқталарида бу шартлардан бирортаси бажарилмаса ҳам у эгри чизиқ бари бир ўрама бўлиши мумкин.



15- чизма.

Мисоллар. 1. Аввал кўрилган (1.46) тенгламанинг интеграл эгри чизиқлар оиласи $(y-C)^2=(x-C)^3$ берилган. (1.46) тенгламанинг махсус ечимини топинг.

Ечиш. Махсус ечимни юқорида айтилган усул билан топамиз. c-дискриминант эгри чизиқ

$$(y-C)^2=(x-C^3),\ 2(y-C)=3(x-C)^2$$

тенгламалар билан аниқланади. Булардан параметр C ни чиқарсак

$$y=x \qquad \text{ва} \qquad x-y-\frac{4}{27}=0$$

ни топамиз. $y=x-\frac{4}{27}$ функция берилган эгри чизиқлар оиласининг ўрамасидир, чунки у ўраманинг шартларини қаноатлантиради. $y=x$ функция эса тенгламани қаноатлантирмайди, шунинг учун ўрама эмас.

2. Бирор биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг интеграл эгри чизиқлари оиласи

$$y=(x-C)^5$$

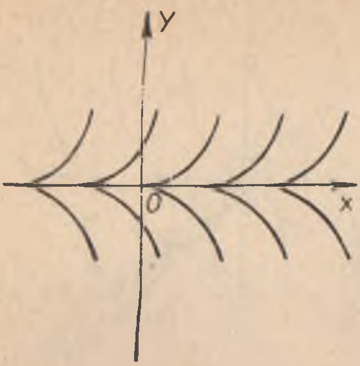
берилган. Ўша тенгламанинг махсус ечимини топинг.

Ечиш. Ўрама ҳақидаги ҳамма шартлар бажарилади. Ўрамани топиш учун аввало ушбу $y=(x-C)^5$, $5(x-C)^4=0$ тенгламаларга эгамиз. Булардан $x=C$ ва шунинг учун $y=0$ келиб чиқади. $y=0$ чизиқ берилган интеграл эгри чизиқлар оиласининг ўрамасидан иборат (15-чизма).

3. Бирор биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг интеграл эгри чизиқлари оиласи

$$y^2=(x-C)^3$$

берилган. Ўша тенгламанинг махсус ечимини топинг.



16- чизма.

Ечиш. c-дискриминант эгри чизиқ

$$y^2-(x-C)^3=0,$$
$$3\ (x-C)^2=0$$

тенгламалар билан аниқланади. Булардан C ни йўқотсак $y=0$ ни топамиз. Равшанки,

$$y=0 \text{ да } \frac{\partial \Phi}{\partial x}=0; \ \frac{\partial \Phi}{\partial y}=0$$

га эгамиз. Демак, $y=0$ берилган эгри чизиқлар оиласининг *қайтиш нуқталари* тўплами экан. Лекин $y=0$ нуқталар тўплами бу ерда интеграл эгри чизиқлар оиласининг ўрамаси ҳам бўлади (16- чизма).

11-§. ИЗОГОНАЛ ВА ОРТОГОНАЛ ТРАЕКТОРИЯЛАР

Бир параметрли ясси силлиқ чизиқлар оиласи

$$F\ (x,\ y,\ C)=0, \qquad C \text{ — параметр} \tag{1.49}$$

тенглама билан берилган бўлсин. Шу чизиқлар оиласининг ҳар бир чизиғини ўзгармас α бурчак билан кесиб ўтувчи чизиқ берилган оиланинг *изогонал траекторияси* дейилади. Хусусан, $\alpha=\frac{\pi}{2}$ бўлганда тегишли траектория *ортогонал траектория* дейилади.

Берилган чизиқлар оиласи ўзининг

$$\Phi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0 \tag{1.50}$$

дифференциал тенгламаси билан берилганда изогонал ва ортогонал траекторияларни, аниқроғи, шу траекторияларнинг дифференциал тенгламаларини топиш билан шуғулланамиз. Бунинг учун аввал $\mathrm{tg}\,\alpha=k$ деб белгилаймиз. Изогонал траектория ва (1.49) оила чизиқларидаги умумий нуқтадаги тегишли бурчак коэффициентлар

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy_1}{dx_1}-k}{k\,\frac{dy_1}{dx_1}+1} \tag{1.51}$$

формула билан боғланган бўлади. (x_1, y_1) деб изогонал траектория нуқталари белгиланган. (1.51) ни (1.50) га қўйсак, ушбу

$$\Phi\left(x_1,\ y_1\ \frac{\frac{dy_1}{dx_1}-k}{k\frac{dy_1}{dx_1}+1}\right)=0 \tag{1.52}$$

дифференциал тенгламага эга бўламиз. Равшанки, бу (1.52) тенглама изланган изогонал траекториянинг дифференциал тенгламасидир.

17- чизма.

Агар $\alpha=\frac{\pi}{2}$ бўлса, $\frac{dy}{dx}$ ва $\frac{dy_1}{dx_1}$ лар орасида $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}$ боғланиш мавжуд. Шунинг учун ортогонал траекторияларнинг дифференциал тенгламаси

$$\Phi\left(x_1, y_1, -\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}\right)=0 \tag{1.53}$$

каби ёзилади.

(1.52) ва (1.53) тенгламалардан фойдаланишда x, y ларнинг индексларини тушириб қолдириш мумкинлигини қайд қилиб ўтамиз.

Мисоллар. 1. $y=ax$, a — параметр, тўғри чизиқлар оиласининг ортогонал траекторияларини топинг.

Ечиш. Мазкур оила чизиқларининг дифференциал тенгламаси $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ дан иборат, чунки $a=\frac{dy}{dx}$ ва $a=\frac{y}{x}$. Шундай қилиб, ортогонал траекторияларнинг дифференциал тенгламаси $-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{y}{x}$ бўлади. Ундан $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ га эгамиз. Бу — ўзгарувчилари ажраладиган тенглама. Интеграллаш натижасида $x^2+y^2=C^2$ (C — ихтиёрий ўзгармас) — маркази координаталар бошида бўлган концентрик айланаларни ҳосил қиламиз (17- чизма).

18-чизма.

2. $y = ax, a$— параметр, тўғри чизиқлар оиласининг изогонал траекторияларини топинг.

Ечиш. Шарт бўйича $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = k$. Берилган чизиқлар оиласининг дифференциал тенгламаси $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ дан иборат (1-мисолга қаранг). Изогонал траекторияларнинг дифференциал тенгламаси

$$\frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}\frac{dy}{dx}} = k \qquad \text{ёки} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y + kx}{x - ky}$$

каби ёзилади. Биз биринчи тартибли бир жинсли дифференциал тенгламага келдик. Уни интеграллаш учун $y = ux$ алмаштириш бажарамиз. Натижада: $\frac{dy}{dx} = u'x + u$ ва $u'x + u = \frac{u + k}{1 - ku}$. Кейинги тенгламани соддароқ кўринишда ёзамиз:

$$u'x = \frac{u + k}{1 - ku} - u, \quad u'x = \frac{k + ku^2}{1 - ku} \quad \text{ёки} \quad \frac{du}{dx} = \frac{k(1 + u^2)}{1 - ku} \cdot \frac{1}{x}.$$

Бу — ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама. Уни интеграллаб, содда ҳисоблашлар ёрдамида $\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) = \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \ln C$ ёки $\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$ ларни ҳосил қиламиз. Ҳосил бўлган чизиқларнинг тасвирини чизиш учун қутб координаталарини киритиш мақсадга мувофиқ. Ҳақиқатан, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ десак, юқоридаги тенглама $r = Ce^{\frac{1}{k}\varphi}$ кўринишда ёзилади. Бу эса логарифмик спиралларнинг тенгламасидир (18- чизма).

1-бобга доир мисол ва масалалар

1. Ёруғлик манбаи O нуқтага жойлашган бўлсин. Кўзгуга тушаётган нурлар Ox ўқига параллел бўлиб қайтиш учун кўзгунинг формаси қандай бўлиши керак.

2. Тандирдан олинган ноннинг температураси 20 минутда 100° дан 60° гача пасаяди. Ҳавонинг температураси 25°. Тандирдан олингач, қанча вақтдан кейин ноннинг температураси 30° бўлади?

Кўрсатма. Ноннинг совиш жараёни Ньютон қонунига асосан

$$\frac{dT}{dt} = k\ (T - \tau)$$

дифференциал тенглама билан ифодаланади, бу ерда:

T — ноннинг температураси;

τ — ҳаво температураси ($\tau = \mathrm{const}$);

k — пропорционаллик коэффициенти;

$\frac{dT}{dt}$ — ноннинг совиш тезлиги.

3. Моторли қайиқ турғун сувда $v_0 = 20\ \frac{\text{км}}{\text{соат}}$ тезлик билан ҳаракат қилади. Юриб турган вақтда мотор ўчирилди ва 40 секунддан кейин қайиқнинг тезлиги $v_1 = 8$ км/соат бўлиб қолди. Сувнинг қаршилиги қайиқнинг ҳаракат тезлигига пропорционал деб, моторнинг тўхтагандан кейин 2 минут ўтгандаги тезлигини топинг.

4. $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\,\frac{dy}{dx} = 0$ тенгламанинг $y(0) = 1$ шартини қаноатлантирадиган ечимини топинг.

Қуйидаги тенгламаларни интегралланг.

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

6. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\ (1 + \ln y - \ln x)$.

7. $y^2 + x^2\,\frac{dy}{dx} = xy\,\frac{dy}{dx}$.

8. $3y - 7x + 7 = (3x - 7y - 3)\,\frac{dy}{dx}$.

9. $(x + 2y + 1)\,\frac{dy}{dx} = 2x + 4y + 3$.

10. $\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

11. $(x+y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2$.

12. $\cos x \frac{dy}{dx} = y \sin x + \cos^2 x$.

13. $\frac{dy}{dx} = 2xy - x^3 + x$.

14. $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1+x^2} y = \frac{1}{x(1+x^2)}$.

15. $xy' + y = xy^2 \ln x$.

16. Кетма-кет яқинлашиш усули билан

$$\frac{dy}{dx} = x - y^2; \qquad y(1) = 0$$

масала учун 3-яқинлашишни топинг.

17. $(2x^3 - xy^2)\, dx + (2y^3 - x^2y)\, dy = 0$.

18. $\frac{xdy}{x^2+y^2} = \left(\frac{y}{x^2+y^2} - 1\right) dx$.

19. $e^y\, dx + (xe^y - 2y)\, dy = 0$.

20. $yx^{y-1}\, dx + x^y \ln x dy = 0$.

21. $\frac{xdx + y'dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{ydx - xdy}{x^2}$.

22. $\frac{y + \sin x \cos^2(xy)}{\cos^2(xy)} dx + \frac{x}{\cos^2(xy)} dy + \sin y\, dy = 0$.

23. $(1 + x\sqrt{x^2+y^2})\, dx + (-1 + \sqrt{x^2+y^2})\, ydy = 0$.

24. $\left(\frac{1}{y} \sin \frac{x}{y} - \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + 1\right) dx + \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} - \right.$
$\left. - \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\right) dy = 0$.

25. $(x^2 + y)\, dx - xdy = 0$.

26. $y(1 + xy)\, dx - xdy = 0$.

27. $(x^2 + y^2 + 2x)\, dx + 2ydy = 0$.

28. $\frac{y}{x} dx + (y^3 - \ln x)\, dy = 0$.

29. $(x \cos y - y \sin y)\, dy + (x \sin y + y \cos y)\, dx = 0$.

Қуйидаги тенгламаларнинг умумий ва махсус ечимларини топинг.

30. $y = xy' + y'^2$.

31. $y = xy' + 3y'^3$.

32. $y = xy' + \frac{1}{y'}$.

33. $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$.

34. $y = xy' + \sin y'$,
35. $xy' - y = \ln y'$.
36. $y = y'^2 \ (x + 1)$.
37. $2yy' = x(y'^2 + 4)$.
38. $y = yy' + 2xy$.
39. $y = x \ (1 + y') + y'^2$.
40. $y = y'x + a^3 \sqrt{1 - y^3}$,
41. $x = y \left(\frac{1}{\sqrt{y'}} - \frac{1}{y'}\right)$.

42. $xy = C$ эгри чизиқлар оиласининг ортогонал траекториясини топинг.

43. $x^2 + y^2 = 2ax$ эгри чизиқлар оиласининг ортогонал траекториясини топинг.

44. $(2a - x)y^2 = x^3$ эгри чизиқлар оиласининг ортогонал траекториясини топинг.

45. $y = ax^2$ параболалар оиласининг ортогонал траекториясини топинг.

46. $x^2 + y^2 = a^2$ айланалар оиласининг ортогонал ва изогонал траекторияларини топинг.

2-боб

n-ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1-§. УМУМИЙ ТУШУНЧАЛАР

Ушбу

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{2.1}$$

кўринишдаги тенглама *n-тартибли дифференциал тенглама* дейилади, бунда $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ функция $(n+2)$ ўлчовли фазонинг бирор соҳасида аниқланган ва узлуксиз. Агар (2.1) тенгламани $y^{(n)}$ га нисбатан ечиш мумкин бўлса, (2.1) ўрнига битта ёки бир неча

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{2.2}$$

кўринишдаги дифференциал тенгламага эга бўламиз. (2.2) тенгламани юқори тартибли ҳосилага нисбатан ечилган n-тартибли дифференциал тенглама дейилади. (2.2) да $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ функция $(n+1)$ ўлчовли фазонинг бирор Q_{n+1} соҳасида аниқланган ва узлуксиз. Агар I интервалда аниқланган $y = \varphi(x)$ функция қуйидаги

1. $\varphi(x) \in C^n(I)$,
2. $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in Q_{n+1}$,
3. $\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)),\ x \in I$

шартларни қаноатлантирса, бу функция I интервалда (2.2) тенгламанинг *ечими* дейилади ((2.1) тенглама учун ечим тушунчаси ҳам шунга ўхшаш киритилади).

Агар $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ лар ихтиёрий берилган ўзгармас сонлар бўлиб, $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \in Q_{n+1}$ бўлса, (2.2) тенгламанинг

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{2.3}$$

шартларни қаноатлантирадиган ечимини топиш масаласи-

(2.2) тенглама учун *Коши масаласи* дейилади. (2.3) муносабатлар *бошланғич шартлар*, x_0, y_0, y'_0, ..., $y_0^{(n-1)}$ сонлар *бошланғич миқдорлар деб* юритилади.

(2.2) тенглама ечимининг xOy текисликдаги графиги *интеграл эгри чизиқ* дейилади. Коши масаласини ечиш шу тенгламанинг текисликнинг (x_0, y_0) нуқтасидан ўтадиган интеграл эгри чизиғини топишдан иборатдир.

Коши масаласи баъзи шартлар бажарилганда ягона ечимга эга бўлади. Бундай ечим *хусусий ечим* деб юритилади.

Агар n та ихтиёрий ўзгармасга боғлиқ бўлган

$$y = \varphi\,(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \qquad (2.4)$$

функция учун (унда $(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \in Q_{n+1}$):

1°. (2.4) функция (2.2) тенгламанинг ечими бўлса,

2°. (2.2) тенгламанинг ихтиёрий хусусий ечими C_1, C_2, ..., C_n ларнинг аниқ C_1°, C_2°, ..., C_n° қийматларида (2.4) функциядан ҳосил бўлса, бошқача айтганда, берилган бошланғич қийматлар учун қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \varphi\,(x_0, C_1, \ldots, C_n), \\ y'_0 &= \varphi'\,(x_0, C_1, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_0^{(n-1)} &= \varphi^{(n-1)}\,(x_0, C_1, \ldots, C_n) \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

система C_1, C_2, ..., C_n ларга нисбатан ягона ечимга эга бўлса, (2.4) функция (2.2) тенгламанинг *умумий ечими* дейилади.

(2.2) тенгламанинг барча ечимларини топиш уни *интеграллаш* деб юритилади.

Мисол. Ушбу $y''' = 2x$ тенгламани интегралланг.

Ечиш. Бу тенгламани $f = 2x$ функцияни кетма-кет интеграллаш билан интеграллаймиз:

$$y''' = \frac{d}{dx}\,(y'') = 2x, \quad y'' = x^2 + C_1;$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\,(y') = x^2 + C_1, \quad y' = \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2;$$

$$y = \frac{x^4}{12} + C_1\,\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Эслатма. $y^{(n)} = f\,(x)$ тенгламанинг умумий ечими функцияни n марта кетма-кет интеграллаш билан топилиши мумкин.

2-§. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ НОРМАЛ СИСТЕМАСИ ҲАҚИДА

Дифференциал тенгламаларнинг ушбу

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = f_1\ (x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n), \\ y_2' = f_2\ (x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n\ (x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) \end{array}\right| \qquad (2.6)$$

системаси тенгламаларнинг *нормал системаси* дейилади. Бу системада $y_1, \ldots, y_n$ лар x нинг номаълум функциялари, $f_1, \ldots, f_n$ лар эса $(n+1)$ ўлчовли фазонинг бирор Q_{n+1} соҳасида аниқланган ва узлуксиз функциялар.

Агар I интервалда аниқланган функцияларнинг $\varphi_1\ (x),\ \varphi_2\ (x),\ \ldots,\ \varphi_n\ (x))$ системаси учун

1. $(x,\ \varphi_1\ (x),\ \ldots,\ \varphi_n\ (x)) \in Q_{n+1}$,
2. $\varphi_i\ (x) \in C^1\ (I), \quad i = \overline{1,\ n}$,
3. $\varphi_i'\ (x) = f_i\ (x,\ \varphi_1\ (x),\ \ldots,\ \varphi_n\ (x)), \quad x \in I$

шартлар бажарилса, функцияларнинг берилган системаси (2.6) системанинг I интервалда аниқланган *ечими* дейилади.

Агар $t_0 \in I,\ y_1^\circ,\ y_2^\circ,\ \ldots,\ y_n^\circ$ лар ихтиёрий берилган ўзгармас сонлар бўлиб, $(t_0,\ y_1^\circ,\ y_2^\circ,\ \ldots,\ y_n^\circ) \in Q_{n+1}$ бўлса, (2.6) системанинг

$$\varphi_1\ (x_0) = y_1^\circ,\ \varphi_2\ (x_0) = y_2^\circ,\ \ldots,\ \varphi_n\ (x_0) = y_n^\circ \qquad (2.7)$$

шартларни қаноатлантирадиган ечимини топиш масаласи (2.6) система учун *Коши масаласи* дейилади. $t_0,\ y_1^\circ,\ \ldots,\ y_n^0$ миқдорлар *бошланғич қийматлар*, (2.7) шартлар эса *бошланғич шартлар* деб юритилади. Ечимнинг графиги $(n+1)$ ўлчовли фазода эгри чизиқни ифодалайди ва у *интеграл эгри чизиқ* деб аталади. Коши масаласининг геометрик маъноси $(n+1)$ ўлчовли фазонинг Q_{n+1} соҳасига тегишли $(t_0,\ y_1^\circ,\ \ldots,\ y_n^\circ)$ нуқтасидан ўтадиган интеграл эгри чизиқни топишдан иборатдир. (2.6) системада $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n$ функциялар баъзи шартларни қаноатлантирса, берилган нуқта учун Коши масаласи ягона ечимга эга бўлади. Бундай ечим *хусусий ечим* дейилади.

Агар n та ихтиёрий ўзгармасга боғлиқ бўлган

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \varphi_1 (x, C_1, \ldots, C_n), \\ y_2 = \varphi_2 (x, C_1, \ldots, C_n). \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n (x, C_1, \ldots, C_n) \end{array}\right| \qquad (2.8)$$

функциялар системаси учун (бу ерда $(x, C_1, \ldots, C_n) \in \in Q_{n+1}$):

1) функцияларнинг (2.8) системаси (2.6) системанинг ечими бўлса;

2) (2.6) системанинг ихтиёрий хусусий ечими $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ларнинг аниқ $C_1^{\circ}, C_2^{\circ}, \ldots, C_n^0$ қийматларида (2.8) дан ҳосил бўлса, бошқача айтганда, берилган бошланғич қийматлар учун қуйидаги

$$\left.\begin{array}{l} y_1^{\circ} = \varphi_1 (x_0, C_1, \ldots, C_n), \\ y_2^{\circ} = \varphi_2 (x_0, C_1, \ldots, C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{\circ} = \varphi_n (x_0, C_1, \ldots, C_n) \end{array}\right| \qquad (2.9)$$

система $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ларга нисбатан ягона ечимга эга бўлса, функцияларнинг (2.8) системаси (2.6) системанинг *умумий ечими* дейилади.

(2.6) системанинг барча ечимларини топиш уни *интеграллаш* дейилади.

Мисол. Ушбу

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$

система учун $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$ функциялар системаси ечим ва $y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, $y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$ система эса умумий ечим эканига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Умумий ечимда $C_1^{\circ} = 0$, $C_2 = 1$ бўлганда келтирилган хусусий ечим ҳосил бўлади.

Кўпинча (2.6), (2.7), (2.8) ва (2.9) лар учун вектор кўринишдаги ёзув қулай бўлади. Агар $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

$\dfrac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} \dfrac{dy_1}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} \end{pmatrix}$, $\quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ белгилашлар киритсак, *вектор-интеграл тенгламанинг ечими бўлади; аксинча, агар $y = \varphi\ (x)$ вектор-функция I интервалда узлуксиз бўлиб,* (2.12) *вектор тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда $y = \varphi\ (x)$ вектор-функция* (2.6) — (2.7) *Коши масаласининг ечими бўлади.*

Мазкур лемманинг исботи битта тенглама учун исботланган тегишли лемманинг исботига ўхшаш (1-бобнинг 7-§, 1-п. га қаранг).

2. Система учун Пикар теоремасининг исботи. Мавжудлиги. Юқорида келтирилган эквивалентлик леммасига кўра (2.6) — (2.7) масала (Коши масаласи) ўрнига ушбу

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_1^{\circ} + \int_{x_0}^{x} f_1\ (\tau,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)\ d\tau, \\ y_2 &= y_2^{\circ} + \int_{x_0}^{x} f_2\ (\tau,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)\ d\tau, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= y_n^{\circ} + \int_{x_0}^{x} f_n\ (\tau,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)\ d\tau \end{aligned}\right| \quad (2.13)$$

интеграл тенгламалар системасини ечиш масаласини қараймиз. $|x - x_0| \leqslant h$ интервалда қуйидаги вектор-функциялар кетма-кетлигини қурамиз:

$$\left.\begin{aligned} y_1^{\circ}\ (x) &= y_1^0, \\ y_2^{\circ}\ (x) &= y_2^0, \\ &\ldots\ldots \\ y_n^{\circ}\ (x) &= y_n^0; \end{aligned}\right| \quad \text{(нолинчи яқинлашиш)}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1^{(1)}\ (x) &= y_1^{\circ} + \int_{x_0}^{x} f_1\ (\tau,\ y_1^{\circ},\ y_2^{\circ},\ \ldots,\ y_n^{\circ})\ d\tau, \\ y_2^{(1)}\ (x) &= y_2^{\circ} + \int_{x_0}^{x} f_2\ (\tau.\ y_1^{\circ},\ y_2^{\circ},\ \ldots.\ y_n^{\circ})\ d\tau, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(1)}\ (x) &= y_n^{\circ} + \int_{x_0}^{x} f_n\ (\tau,\ y_1^{\circ},\ y_2^{\circ},\ \ldots,\ y_n^{\circ})\ d\tau; \end{aligned}\right| \quad \text{(биринчи яқинлашиш)}$$

. . . .

$$\left.\begin{aligned}
y_1^{(m)}(x) &= y_1^{\circ} + \int_{x_0}^{x} f_1(\tau, y_1^{(m-1)}(\tau), \ldots, y_n^{(m-1)}(\tau))\, d\tau, \\
y_2^{(m)}(x) &= y_2^{\circ} + \int_{x_0}^{x} f_2(\tau, y_1^{(m-1)}(\tau), \ldots, y_n^{(m-1)}(\tau))\, d\tau, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n^{(m)}(x) &= y_n^{0} + \int_{x_0}^{x} f_n(\tau, y_n^{(m-1)}(\tau), \ldots, y_n^{(m-1)}(\tau))\, d\tau.
\end{aligned}\right|$$

. . . .

(m- яқинлашиш)

Вектор белгилашлардан фойдалансак, юқорида келтирилган яқинлашиш формулаларини қулайроқ ёзиш мумкин:

$y^{\circ}(x) = y^{\circ}$ (нолинчи яқинлашиш),

$$y^{(1)}(x) = y^{\circ} + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y^{\circ})d\tau \qquad \text{(1- яқинлашиш)},$$

. . . .

$$y^{(m)}(x) = y^{\circ} + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y^{(m-1)}(\tau)d\tau \qquad (m\text{-яқинлашиш}).$$

Юқорида қурилган $y^{0}(x)$, $y^{(1)}(x), \ldots, y^{(m)}(x), \ldots$ вектор-функциялар $|x - x_0| \leqslant h$ интервалда узлуксизлиги равшан. Биринчи ва кейинги яқинлашишлар $|x - x_0| \leqslant h$ бўлганда $P_h = \{(x, y_1, \ldots, y_n) : |x - x_0| \leqslant h, |y_i - y_i^{\circ}| \leqslant b\}$ соҳадан чиқиб кетмаслигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, $(x_0, y^{\circ}) \in P_h$ экани равшан. Содда ҳисоблашлар кўрсатадики, $i = 1, 2, \ldots, n$ бўлганда

$$|y_i^{(1)}(x) - y_i^{\circ}| = \left|\int_{x_0}^{x} f_i(\tau, y_1^{\circ}, \ldots, y_n^{\circ})\, d\tau\right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant$$
$$\leqslant Mh \leqslant b.$$

$$|y_i^{(2)}(x) - y_i^{\circ}| = \left|\int_{x_0}^{x} f_i(\tau, y_1^{(1)}(\tau), \ldots, y_n^{(1)}(\tau)d\tau\right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant$$
$$\leqslant Mh \leqslant b.$$

. . . .

$$y_i^{(m)}(x) - y_i^{\circ}| = \left|\int_{x_0}^{x} f_i(\tau, y_1^{(m-1)}(\tau), \ldots, y_n^{(m-1)}(\tau)d\tau\right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant$$
$$\leqslant Mh \leqslant b.$$

Юқоридаги муносабатлардан $(x, y^{(1)}(x)) \in P_h$, ..., $(x, y^{(m)}(x)) \in P_h$, ... экани келиб чиқади. Шундай қилиб, ушбу $\{y^{(m)}(x)\}$ вектор-функциялар кетма-кетлигини ҳосил қилдик. Бу кетма-кетлик $|x - x_0| \leqslant h$ интервалда текис яқинлашувчи эканини исбот этамиз. Бунинг учун қуйидаги n та функционал қаторни тузамиз:

$$y_i^{\circ} + [y_i^{(1)}(x) - y_i^{\circ}] + [y_i^{2}(x) - y_i^{(1)}(x)] + \ldots + \\ + [y_i^{(m)}(x) - y_i^{(m-1)}(x)] + \ldots \qquad (2.14)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Бу қаторнинг m-хусусий йиғиндиси $S_i^{(m)}(x) = y_i^{(m)}(x)$. Шунинг учун $\lim\limits_{m\to\infty} S_i^{(m)}(x) = \lim\limits_{m\to\infty} y_i^{(m)}(x)$ ва $\{y^{(m)}(x)\}$ вектор кетма-кетликнинг текис яқинлашувчи эканини кўрсатиш учун (2.14) қаторнинг текис яқинлашувчи эканини исбот қилиш етарли.

(2.14) қаторнинг ҳар бир ҳадини баҳолаймиз ($i = \overline{1, n}$):

$$|y_i^{(1)}(x) - y_i^{0}| = \left|\int_{x_0}^{x} f_i(\tau, y^{\circ})d\tau\right| \leqslant M|x - x_0|,$$

$$|y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} [f_i(\tau, y^{(1)}(\tau)) - f_i(\tau, y^{\circ})]d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f_i(\tau, y^{(1)}(\tau)) - f_i(\tau, y^{\circ})|\,d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{j=1}^{n}|y_j^{(1)}(\tau) - y_j^{0}|\right)d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant LnM\left|\int_{x_0}^{x}|\tau - x_0|\,d\tau\right| = LnM\,\frac{|x - x_0|^2}{2},$$

шунга ўхшаш $|y_i^{(m-1)}(x) - y_i^{(m-2)}(x)|$ учун баҳо топилган деб қараб $|y_i^{(m)}(x) - y_i^{(m-1)}(x)|$ учун баҳо топиш мумкин:

$$|y_i^{(m)}(x) - y_i^{(m-1)}(x)| \leqslant (Lh)^{m-1} M\frac{|x - x_0|^m}{m!}.$$

Энди $|x - x_0| \leqslant h$ эканини ҳисобга олиб,

$$|y_i^{(m)}(x) - y_i^{(m-1)}(x)| \leqslant M(nL)^{m-1}\frac{h^m}{m!},\ i = \overline{1, n}$$

тенгсизликларга эга бўламиз. Агар ушбу

$$|y_i^\circ| + \sum_{m=1}^{\infty} M\,(nL)^{m-1}\frac{h^m}{m!}$$

мусбат ҳадли сонли қаторни кўрсак, бу қатор Даламбер аломатига кўра яқинлашувчи эканига ишонч ҳосил қиламиз. Ҳақиқатан,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{u_{m+1}}{u_m} = \lim_{m\to\infty}\frac{M\,(nL)^m\,h^{m+1}m!}{(m+1)!\,M\,(nL)^{m-1}\,h^m} = \lim_{m\to\infty}\frac{nL}{m+1} = 0 < 1.$$

(2.14) қаторнинг ҳадлари узлуксиз функциялардан иборат. Шунинг учун юқоридаги мулоҳазаларга кўра: 1) $\lim\limits_{m\to\infty} y^{(m)}(x)$ мавжуд, 2) бу лимит узлуксиз вектор-функциядан иборат. Уни $Y(x)$ деб белгилаймиз.

Топилган $Y(x)$ вектор-функция $|x-x_0|\leqslant h$ интервалда (2.6) — (2.7) масаланинг ечими эканини исботлаймиз. Ҳақиқатан, аввало $\lim\limits_{m\to\infty} y^{(m)}(x_0) = Y(x_0) = y^\circ$, яъни $Y(x)$ вектор-функция (2.7) бошланғич шартни қаноатлантиради. Энди бу $Y(x)$ функция (2.6) системанинг ечими эканини кўрсатамиз. Равшанки,

$$y_i^{(m)}(x) = y_i^\circ + \int_{x_0}^{x}[f_i(\tau, y^{(m-1)}(\tau)) - f_i(\tau, Y(\tau))]d\tau +$$

$$+\int_{x_0}^{x} f_i(\tau, Y(\tau))d\tau,\ i = \overline{1,n},$$

$$\left|\int_{x_0}^{x}[f_i(\tau, y^{(m-1)}(\tau)) - f_i(\tau, Y(\tau))]d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{x_0}^{x}|f_i(\tau, y^{(m-1)}(\tau)) - f_i(\tau, Y(\tau))|d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{j=1}^{n}|y_j^{(m-1)}(\tau) - Y_j(\tau)|\right)d\tau\right|.$$

$\{y^{(m-1)}(x)\}$ кетма-кетлик $|x-x_0|<h$ интервалда $Y(x)$ функцияга текис яқинлашувчилигидан келиб чиқадики, аввалдан берилган $\varepsilon>0$ учун шундай N номер топиладики, $m-1>N$ бўлганда $|x-x_0|<h$ интервалдан олинган ихтиёрий x учун

$$|y_i^{(m-1)}(x) - Y_i(x)| < \frac{\varepsilon}{nLh} \qquad (i=\overline{1,n})$$

тенгсизлик бажарилади. Шунинг учун охирги баҳоланаётган ифода ε дан кичик бўлади. Демак, $m \to \infty$ да лимитга ўтиб

$$Y(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, Y(\tau))d\tau$$

интеграл тенгламани ҳосил қиламиз. Бундан юқоридаги тасдиқнинг тўғрилиги келиб чиқади.

Ягоналиги. (2.6) системанинг (2.7) шартни қаноатлантирадиган яна битта $y = Z(x)$ (вектор-функция) ечими бор бўлсин. Унинг аниқланиш интервали $|x - x_0| \leqslant h_*$ бўлиб, $Y(x)$ ва $Z(x)$ ларнинг аниқланиш интервалларининг умумий қисми $|x - x_0| \leqslant h_0$ бўлсин дейлик. У ҳолда $|x - x_0| \leqslant h_0$ да $Y(x) \equiv Z(x)$ эканини кўрсатамиз. Шартга кўра ушбу:

$$Y(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, Y(\tau))\, d\tau, \qquad Z(x) \equiv y^0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, Z(\tau))d\tau$$

айниятларга эгамиз. Кейинги мулоҳазаларни олиб бориш учун вектор-функциянинг модули тушунчасини киритамиз. У қуйидагича аниқланади:

$$|\varphi(x)| = +\sqrt{\varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x) + \ldots + \varphi_n^2(x)}.$$

Бундан ташқари маълум

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Коши тенгсизлигини эслатиб ўтамиз. Бу тенгсизликнинг тўғрилигига ишонч ҳосил қилиш осон. Лагранж айниятига кўра топамиз:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i b_j - b_i a_j)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Энди $|f(x, Y(x)) - f(x, Z(x))|$ модулни баҳолаймиз: Юқоридаги тенгсизликдан ва Липшиц шартидан фойдаланиб топамиз:

$$|f_i(x, Y(x)) - f_i(x, Z(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} L|Y_j - Z_j| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} L^2} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |Y_j - Z_j|^2} = L\sqrt{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |Y_j - Z_j|^2}.$$

Охирги тенгсизликнинг икки томонини квадратга ошириб, i бўйича 1 дан n гача йиғиндини кўрамиз:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x,Y(x)) - f_i(x,Z(x))|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} L^2 n \left(\sum_{j=1}^{n} |Y_j - Z_j|^2\right) =$$

$$= n^2 L^2 \left(\sum_{j=1}^{n} |Y_j - Z_j|^2\right).$$

Энди икки томондан квадрат илдиз олсак,

$$|f(x,Y(x)) - f(x,Z(x))| \leqslant nL\,|Y(x) - Z(x)|$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Бу тенгсизликдан фойдаланиб, топамиз:

$$|Y(x) - Z(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(\tau, Y(\tau))d\tau - \int_{x_0}^{x} f(\tau, Z(\tau))d\tau\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(\tau, Y(\tau)) -\right.$$

$$\left. - f(\tau, Z(\tau))|\,d\tau\right| \leqslant nL\int_{x_0}^{x} |Y(\tau) - Z(\tau)|\,d\tau, \qquad x \in [x_0, x_0 + h_0].$$

Шундай қилиб, $[x_0,\ x_0 + h_0]$ интервалда

$$|Y(x) - Z(x)| \leqslant nL\int_{x_0}^{x} |Y(\tau) - Z(\tau)|\,d\tau$$

тенгсизликка эгамиз. Бундан Гронуолл леммасига кўра $[x_0,\ x_0 + h_0]$ да $Y(x) \equiv Z(x)$ экани келиб чиқади. Бу айният $[x_0 - h_0,\ x_0]$ интервалда ҳам юқоридагига ўхшаш исботланади. Бу билан ягоналик исботланди. Пикар теоремаси ҳам тўлиқ исбот этилди.

Эслатиб ўтамизки, битта тенглама учун ечимни давом эттириш тўғрисида айтилган мулоҳазалар бу ерда ҳам қайтарилиши мумкин.

3. **Чизиқли дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси учун ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги.**

Биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси деб

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ \ldots \ + a_{1n}(x)y_n + b_1(x), \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ \ldots \ + a_{2n}(x)y_n + b_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ \ldots \ + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{array}\right| \qquad (2.15)$$

кўринишда ёзилган системага айтилади. Бу ерда $a_{ij}(x)$, $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, n}$ функциялар бирор I интервалда аниқланган ва узлуксиз бўлган ҳол муҳимдир. Вектор-матрица кўринишида (2.15) ни

$$y' = A(x)y + b(x) \qquad (2.15)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $A(x) = (a_{ij}(x))$ квадрат матрицадан иборат, y ва $b(x)$ лар устун-векторлар.

Агар $b_i(x) \equiv 0$, $i = \overline{1,n}$ бўлса, (2.15) система чизиқли бир жинсли, акс ҳолда чизиқли бир жинсли бўлмаган система дейилади.

2. 2-теорема. *Агар* (2.15) *система берилган бўлиб, унда* $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ *функциялар бирор* I *интервалда узлуксиз,* x_0, y_1^0, $\ldots$, y_n^0 *сонлар ихтиёрий (аммо* $x_0 \in I$*) бошланғич қийматлар бўлса, (2.15) система*

$$\varphi_1(x_0) = y_1^0, \ \ldots \ , \ \varphi_n(x_0) = y_n^0$$

бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ва I *интервалда аниқланган ягона ечимга эга бўлади.*

Исбот. Қурилаётган система учун

$$f_i(x,y) = a_{i1}(x)y_1 + a_{i2}(x)y_2 + \ \ldots \qquad \ldots \ + a_{in}\,y_n + b_i(x).$$

Бу функция $P = \{x \in I, \ -\infty < y_i < \infty, \ i = \overline{1,n}\}$ соҳада аниқланган ва узлуксиз. Бундан ташқари $f_i(x, y)$ функция $y_1, y_2, \ldots, y_n$ аргументлари бўйича Липшиц шартини қаноатлантиради. Ҳақиқатан,

$$|a_{i1}(x)y_1' + \ \ldots \ + a_{in}\,y_n') - (a_{i1}(x)y_1'' + \ \ldots \ + a_{in}\,y_n'')| =$$
$$= |a_{i1}(x)(y_1' - y_1'') + \ \ldots \ + a_{in}(y_n' - y_n'')| \leqslant$$
$$\leqslant |a_{i1}(x)|\,|y_1' - y_1''| + \ \ldots \ + |a_{in}(x)|\,|y_n' - y_n''| \leqslant$$
$$\leqslant L\Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i' - y_i''|\Big),$$

бу ерда

$$L = \max\left\{\sup_{x\in I}|a_{i1}(x)|, \ \ldots \ , \sup_{x\in I}|a_{in}(x)|\right\}.$$

Шундай қилиб. 2.1-теореманинг барча шартлари бажарилади, демак, (2.15) система берилган бошланғич қийматларга эга бўлган ва I интервалда аниқланган ягона ечимга эга. Теорема исбот бўлди.

4-§. n-ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАНИ n ТА БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИГА КЕЛТИРИШ ВА МАВЖУДЛИК ТЕОРЕМАСИ

1. Биз (2.2) кўринишдаги дифференциал тенглама учун мулоҳазалар юритамиз. Аввал уни системага келтирамиз. Сўнгра система учун ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги теоремасидан фойдаланиб, (2.2) тенглама учун ҳам ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги теоремасини келтирамиз.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$y = y_1, \ y' = y_1' = y_2, \quad y'' = y_1'' = y_2' = y_3, \ \ldots,$$
$$y^{(n-2)} = y_{n-2}' = y_{n-1}, \quad y^{(n-1)} = y_{n-1}' = y_n, \quad y^{(n)} = y_n' =$$
$$= f(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Шундай қилиб, $y_1, \ldots, y_n$ ларга нисбатан ушбу

$$\left.\begin{aligned} & y_1' = y_2, \\ & y_2' = y_3, \\ & \ldots \\ & y_{n-1}' = y_n, \\ & y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}\right\} \qquad (2.16)$$

нормал системага келамиз.

Агар (2.2) тенгламанинг бирор ечими $y = \varphi(x)$ бўлса, у ҳолда бу ечимга (2.16) системанинг

$\begin{pmatrix} \varphi(x) = y_1 \\ \varphi'(x) = y_2 \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(x) = y_n \end{pmatrix}$ ечими мос келади. Аксинча, агар

$\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_n(x) \end{pmatrix}$ вектор-функция (2.16) нинг бирор ечими

бўлса, у ҳолда $y = \psi_1(x)$ функция (2.2) тенгламанинг

$$\psi_1'(x) = \psi_2(x), \quad \psi_2'(x) = \psi_3(x), \ \ldots, \ \psi_{n-1}'(x) = \psi_n(x),$$

5*

$\psi_n'(x)=f(x,\psi_1(x),\psi_2(x),\ \dots,\ \psi_n(x))$ муносабатларни қаноатлантирадиган (айниятга айлантирадиган) ечими бўлади. Айтилган маънода (2.16) система билан (2.2) тенглама эквивалент дейилади.

(2.16) системада $f_1=y_2,\ f_2=y_3,\ \dots,\ f_{n-1}=y_n$ функциялар $y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n$ лар бўйича Липшиц шартини қаноатлантириши равшан. Кўринадики, $f(x,y_1,\ \dots y_n)$ функциядан ҳам $y_1,\ \dots,\ y_n$ лар бўйича Липшиц шарти бажарилишини талаб этиш лозим.

2.3-теорема. *Агар (2.2) тенглама учун* $x_0,\ y_0,\ y_0',\ \dots,\ y_0^{(n-1)}$ *бошланғич қийматлар берилган бўлиб,* $(x_0,\ y_0,\ y_0',\ \dots,\ y_0^{(n-1)})\in Q_{n+1}$ *ва* $f(x,y',\ \dots,\ y^{(n-1)})$ *функция* Q_{n+1} *соҳанинг* $(x_0,\ y_0,\ y_0',\ \dots,\ y^{(n-1)})$ *нуқтасининг бирор атрофида барча аргументлари бўйича узлуксиз ва* $y,\ y',\ \dots,\ y^{(n-1)}$ *лар бўйича Липшиц шартини қаноатлантирса, у ҳолда (2.2) тенглама бирор* I *интервалда аниқланган* (2.3) *шартни қаноатлантирадиган ягона ечимга эга.*

Таъкидлаб ўтамизки, система учун олиб борилган тегишли мулоҳазалар ёрдамида Q_{n+1} соҳада яна P тўпламни кўриш ва ечимнинг

$$|x-x_0|\leqslant h\left(h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\},\ |x-x_0|\leqslant a,\ |y^{(i)}-y_0^{(i)}|\leqslant b,\right.$$

$$i=\overline{0,n-1},\ M=\max\{\max|f|,\ \max|y|,\ \max|y'|,\ \dots,\ \max|y^{(n-1)}|\}\Big)$$

интервалда мавжудлиги ва ягоналигини ҳам кўрсатиш мумкин.

2. Ушбу

$$y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\ \dots\ +a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=$$
$$=g(x) \qquad (2.17)$$

кўринишда ёзиладиган тенгламалар *n-тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар* дейилади. Бу ерда $a_1(x),\ \dots,\ a_n(x),\ f(x)$ функциялар I интервалда аниқланган ва узлуксиз деб қараймиз. Агар $g(x)=0$ бўлса, (2.17) тенглама n-тартибли чизиқли *бир жинсли*, акс ҳолда n-тартибли чизиқли *бир жинсли бўлмаган* дифференциал тенглама дейилади.

(2.17) тенгламани ушбу

$$y^{(n)} = -a_1(x)y^{(n-1)} - a_2(x)y^{(n-2)} - \dots - a_{n-1}(x)y' - \\ - a_n(x)y + g(x)$$

кўринишда ёзамиз. Бу тенгламанинг ўнг томони y, y', $\dots$ $y^{(n-1)}$ ларга нисбатан чизиқли. Шунинг учун $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = -a_1(x)y^{(n-1)} - \dots - a_n(x)y + g(x)$ функция y, y', $\dots$, $y^{(n-1)}$ ларга нисбатан Липшиц шартини қаноатлантиради. Шундай қилиб, қуйидаги теорема ўринли:

2.4-теорема. *Агар* (2.17) *тенгламада* $a_1(x), \dots, a_n(x)$, $g(x)$ *функциялар* I *интервалда аниқланган ва узлуксиз бўлса* (2.17) *тенглама ихтиёрий* $x_0 \in I$, y_0, y_0', $\dots$, $y^{(n-1)}$ *бошланғич қийматлар учун шу бошланғич қийматларга эга бўлган ва* I *интервалда аниқланган ягона ечимга эга бўлади.*

Эслатма. Юқорида келтирилган ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теоремаларда тегишли функциялардан маълум аргументлари бўйича Липшиц шартини қаноатлантириши (система учун $y_1, \dots, y_n$ лар бўйича, n-тартибли тенглама учун y, y', $\dots$, $y^{(n-1)}$ лар бўйича) талаб этилган эди. Агар маълум аргументлар бўйича тегишли функцияларнинг узлуксиз дифференциалланувчи бўлиши талаб этилса ҳам берилган бошланғич қийматларга эга бўлган ягона ечимнинг мавжудлиги исбот қилиниши мумкин.

Эслатилган шартлар қўйилиб айтиладиган теоремалар *Коши теоремаси* деб юритилади. Агар тегишли функцияларнинг фақат узлуксизлиги талаб этилган бўлса, у ҳолда берилган бошланғич қийматларга эга бўлган ечим мавжуд ва камида битта бўлади. Бундай шартлар билан айтилган теоремалар *Пеано теоремаси* деб юритилади. Бевосита текшириб кўриш мумкинки, n-тартибли чизиқли тенглама ва чизиқли система учун (коэффициентлари узлуксиз бўлганда) Коши теоремасининг шартлари (муҳими—узлуксиз дифференциалланувчилиги) бажарилади.

5-§. ТАРТИБИНИ ПАСАЙТИРИШ МУМКИН БЎЛГАН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

Баъзи хусусий ҳолларда тенгламалар тартибини пасайтириш мумкин бўлади.

1. Тенглама номаълум функция y ва унинг y', y'', $\ldots$, $y^{(k-1)}$ ҳосилаларини ўз ичига олмасин, яъни қуйидаги кўринишга эга бўлсин:

$$F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Бу ҳолда $y^{(k)} = z$ деб алмаштириб тенглама тартибини k бирликка пасайтирамиз, яъни тенглама

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0$$

кўринишга келади. Охирги тенгламани интеграллаб (агар квадратураларда интегралланса),

$$z = z(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$$

ечимни топамиз. Бундан

$$y^{(k)} = z(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}))$$

тенгламани кетма-кет k марта интеграллаш билан берилган тенгламанинг ечими топилади.

Мисол. $y^{(4)} - \frac{1}{x} y^{(3)} = 0$ тенглама учун $y^{(3)} = z$ десак, $z' - \frac{1}{x} z = 0$ тенглама келиб чиқади. Уни интеграллаб $z = Cx$ ни топамиз. Энди $y^{(3)} = Cx$ ни топамиз:

$$y = C_1 x^4 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

2. Тенглама эркли ўзгарувчини ўз ичига олмайди, яъни

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Бу ҳолда $y' = p(y)$ деб алмаштирсак, тенгламанинг тартиби биттага камаяди. Ҳақиқатан, $\frac{dy}{dx} = p(y)$ бўлгани учун

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}p\right)\frac{dy}{dx} = \frac{d^2p}{dy^2}p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p$$

ва юқори тартибли ҳосилалар ҳам шунга ўхшаш топилади. Бу тенгликлардан шу нарса кўриниб турибдики, $\frac{d^k y}{dx^k}$ ҳосила p дан y бўйича олинган тартиби $k-1$ дан ортиқ бўлмаган ҳосилалар орқали ифодаланади. Демак, тенгламанинг тартиби биттага пасаяди.

Мисол. Массаси m бўлган жисм x_0 нуқтага жойлашган бўлиб, Ox тўғри чизиқ бўйлаб $F(x)$ куч таъсирида v_0

бошланғич тезлик билан ҳаракат қилади. Агар жисмнинг бошланғич тезлиги v_0 бўлса, унинг ҳаракат қонунини топинг.

Бу масала қуйидаги математик масалага келтирилади:

$$\left.\begin{aligned} & m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=F(x), \\ & x(0)=x_0; \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=v_0. \end{aligned}\right|$$

Тенгламанинг ҳар иккала томонини $\frac{dx}{dt}dt$ га кўпайтириб, сўнгра интегралласак:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\int_{x_0}^{x}F(x)\,dx$$

ёки

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\int_{x_0}^{x}F(x)dx=\frac{1}{2}mv_0^2$$

келиб чиқади.

Тенгликнинг чап томонидаги биринчи $\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ қўшилувчи ҳаракатланаётган жисмнинг кинетик энергиясини, иккинчи қўшилувчи эса потенциал энергиясини ифодалайди. Охирги тенгликдан кўринадики, жисмнинг кинетик ва потенциал энергияларининг йиғиндиси ҳамма вақт ўзгармас бўлади. Юқоридаги тенглама ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир. Уни интеграллаб топамиз:

$$t=\pm\int_{x_0}^{x}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}m}\,dx}{\sqrt{\frac{1}{2}mv_0^2+\int_{x_0}^{x}F(x)dx}}$$

3. Ушбу $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$

тенгламанинг чап томони бирорта $(n-1)$-тартибли дифференциал $\Phi(x,y,y', \ldots, y^{(n-1)})$ ифоданинг ҳосиласидан иборат.

Бу ҳолда берилган тенгламанинг *биринчи интеграли* деб аталадиган ва битта ихтиёрий ўзгармасни ўз ичига олган $(n-1)$-тартибли

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})=C$$

дифференциал тенгламани топамиз. Шундай қилиб, тенгламанинг тартиби биттага пасаяди.

Мисол. Ушбу $y'' - xy' - y = 0$ тенгламанинг чап томони $y' - xy$ функциянинг x бўйича тўлиқ ҳосиласидан иборат. Шунинг учун тенгламанинг биринчи интеграли $y' - xy = C_1$ бўлади. Охирги тенглама эса биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламадир. Унинг умумий ечими:

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}\left(C_1\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx + C_2\right.$$

4. $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ тенгламада F функция y, y', $\ldots$, $y^{(n)}$ аргументларига нисбатан бир жинсли, яъни

$$F(x, ky, ky', \ldots, ky^{(n)}) = k^p F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}).$$

Бу ҳолда $y = e^{\int z dx}$ алмаштириш берилган тенгламанинг тартибини биттага пасайтиради. Ҳақиқатан, $y = e^{\int z dx}$ нинг ҳосилаларини ҳисоблайлик:

$$y' = e^{\int z dx} z,$$

$$y'' = e^{\int z dx}(z^2 + z'),$$

$$y''' = e^{\int z dx}(z^3 + 3zz' + z''),$$

$$y^{(k)} = e^{\int z dx}\Phi(z, z', \ldots, z^{(k-1)}).$$

Топилган ифодаларни тенгламага қўйиб, унинг бир жинслилигини эътиборга олсак,

$$e^{p\int z dx} f(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0$$

ёки

$$f(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0$$

тенгламага эга бўламиз.

Мисол. $yy'' - (y')^2 = 6xy^2$ тенглама учун $y = e^{\int z dx}$ деб оламиз ва y' ва y'' ларнинг ифодаларини берилган тенгламага қўямиз, натижада

$$e^{\int z dx} \cdot e^{\int z dx}(z^2 + z') - z^2 e^{2\int z dx} = 6xe^{2\int z dx}$$

ёки

$z^2 + z' - z^2 = 6x$ ёки $z' = 6x$ биринчи тартибли тенгламани ҳосил қиламиз. Ундан $z = 3x^2 + C_1$. Шунинг учун

$$y = e^{\int (3x^2 + C_1)dx} = C_2 e^{x^3 + C_1 x}.$$

Амалий масалаларни ечишда $F(x, y'') = 0$, $F(y, y'') = 0$ ва $F(y, y'') = 0$ кўринишдаги тенгламалар тез-тез учраб туришини қайд қилиб ўтамиз.

6-§. n-ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ БИР ЖИНСЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

Чизиқли бир жинсли тенгламалар назариясини ўрганишда дифференциал оператор киритиш кўп жиҳатдан фойдали бўлади. (2.17) тенгламанинг чап томонини $L[y] = y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n y$ деб белгилаймиз. Бунда L символи *n-тартибли чизиқли дифференциал оператор* деб аталади. L оператор қуйидаги хоссаларга эга:

1. $L[Cy] = CL[y]$, $\quad C = \text{const}$.

Ҳақиқатан, оператор L чизиқли бўлганидан, бу хоссанинг исботи

$(Cy)^{(\nu)} = Cy^{(\nu)}$ (ν — ҳосиланинг тартиби) тенгликдан келиб чиқади.

2. $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$.

Бу хоссанинг исботи эса

$$(y_1 + y_2)^{(\nu)} = y_1^{(\nu)} + y_2^{(\nu)}$$

тенгликдан келиб чиқади.

Бу хоссалардан қуйидаги натижа келиб чиқади:

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} C_i y_i\right] = \sum_{i=1}^{m} C_i L[y_i], \qquad C_i = \text{const}.$$

Чизиқли дифференциал операторнинг хоссаларидан фойдаланиб, чизиқли бир жинсли тенгламаларнинг ечимлари ҳақида қатор теоремаларни исботлаш мумкин.

2.5-теорема. *Агар $y = \varphi(x)$, $x \in I$ функция $L[y] = 0$ тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда $C\varphi(x)$, $C = \text{const}$ ҳам шу тенгламанинг ечими бўлади.*

Исбот. $L[\varphi(x)] \equiv 0$ айниятга эгамиз. Шунинг учун:

$$L[C\varphi(x)] \equiv CL[\varphi(x)] \equiv 0.$$

2.6-теорема. *Агар $\varphi_1(x)$ ва $\varphi_2(x)$ функциялар $L[y] = 0$ тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ функция* ҳам шу тенгламанинг ечими бўлади.

Исбот. $L[\varphi_1(x)] = 0$, $L[\varphi_2(x)] = 0$ айниятларга кўра:

$$L[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)] = L[\varphi_1(x)] + L[\varphi_2(x)] = 0.$$

Бу теоремалардан қуйидаги натижа келиб чиқади:

Агар $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ функциялар $L[y] = 0$ тенгламанинг ечимлари бўлса, у ҳолда $\sum_{i=1}^{m} C_i \varphi_i(x)$, $C_i = \text{const}$ ҳам шу тенгламанинг ечими бўлади.

2.7-теорема. *Агар $a_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ коэффициентлари ҳақиқий функциялардан иборат бўлган чизиқли бир жинсли $L[y] = 0$ тенглама комплекс $y = u(x) + iv(x)$ ечимга эга бўлса, у ҳолда шу ечимнинг ҳақиқий қисми $u(x)$ ва мавҳум қисми $v(x)$ лар ҳам шу тенгламанинг ечимлари бўлади.*

Исбот. $L[u(x) + iv(x)] = 0$ айниятга кўра

$$L[u(x) + iv(x)] = L[u] + iL[v] = 0$$

муносабатдан $L[u](x)] = 0$ ва $L[v(x)] = 0$ келиб чиқади.

Қуйида функцияларнинг чизиқли боғлиқлиги ва эрклилиги ҳақида икки муҳим таъриф келтирамиз:

Агар камида биттаси нолга тенг бўлмаган шундай α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ўзгармас сонлар мавжуд бўлсаки, улар учун $a \leqslant x \leqslant b$ интервалда ушбу

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$$

айният ўринли бўлса, у ҳолда $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ функциялар шу интервалда *чизиқли боғлиқ* дейилади. Агар бу айният фақат $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ бўлгандагина бажарилса, $y_1(x)$, $y_2(x). \ldots, y_n(x)$ функциялар $a \leqslant x \leqslant b$ интервалда *чизиқли эркли* дейилади.

Мисоллар. 1. $1, x, x^2, \ldots, x^n$ функциялар ихтиёрий $a \leqslant x \leqslant b$ интервалда чизиқли эркли, яъни ушбу

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n \equiv 0$$

айният фақат $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ бўлгандагина бажарилади.

Ҳақиқатан, берилган функциялар учун юқоридаги айният бажарилмайди, чунки у n-тартибли тенгламадир. Алгебранинг асосий теоремасига кўра бу тенглама n тадан ортиқ илдизга эга бўла олмайди.

2. $e^{k_1x}, e^{k_2x}, \ldots, e^{k_nx}$, $k_i \neq k_j$, $i \neq j$ функциялар ихтиёрий $a \leqslant x \leqslant b$ интервалда чизиқли эркли, яъни

$$\alpha_1 e^{k_1x} + \alpha_2 e^{k_2x} + \ldots + \alpha_n e^{k_nx} \equiv 0$$

айният фақат $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ бўлгандагина бажарилади. Аввал $\alpha_n = 0$ лигини кўрсатайлик. Бунинг учун айниятнинг иккала томонини e^{k_1x} га бўламиз ва ҳосила оламиз:

$$\alpha_2 (k_2 - k_1) e^{(k_2-k_1)x} + \ldots + \alpha_n (k_n - k_1) e^{(k_n-k_1)x} \equiv 0.$$

Бу айниятнинг ҳар иккала томонини $e^{(k_2-k_1)x}$ га бўлиб, яна ҳосила оламиз. Бу процессни $n-1$ марта такрорлаб

$$\alpha_n (k_n - k_1)(k_n - k_2) \ldots (k_n - k_{n-1}) e^{(k_n - k_{n-1})x} \equiv 0$$

айниятни ҳосил қиламиз. Бундан $\alpha_n = 0$ келиб чиқади. $\alpha_n = 0$ ни бошланғич айниятга қўйиб, яна юқоридаги жараённи такрорласак, $\alpha_{n-1} = 0$ ни топамиз. Шу усулни кетма-кет қўллаб, $\alpha_{n-2} = \ldots = \alpha_2 = \alpha_1 = 0$ ларни ҳосил қиламиз.

3. Ушбу

$$\begin{array}{l} e^{k_1x}, xe^{k_1x}, \ldots, x^{n_1-1} e^{k_1x}, \\ e^{k_2x}, xe^{k_2x}, \ldots, x^{n_2-1} e^{k_2x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{k_px}, xe^{k_px}, \ldots, x^{n_p-1} e^{k_px} \quad k_i \neq k_j, \ i \neq j \end{array}$$

функциялар ихтиёрий $a \leqslant x \leqslant b$ интервалда чизиқли эркли.

Бу ерда $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$ деб белгилаймиз. Равшанки,

$$\sum_{i=1}^{p} (\alpha_{1i} + \alpha_{2i} x + \ldots + \alpha_{n_i i} x^{n_i-1}) e^{k_ix} \equiv 0$$

айният фақат $\alpha_{1i} = \alpha_{2i} = \ldots = \alpha_{n_i i} = 0$ бўлгандагина бажарилади. Буни кўрсатиш учун аввал 2-мисолда фойдаланилган усулни қўллаб,

$$P_i(x) = \alpha_{1i} + \alpha_{2i} x + \ldots + \alpha_{n_i} x^{n_i-1}$$

кўпҳаднинг айнан нолга тенг эканлигини, сўнгра эса 1-мисолга асосан $P_i(x) \equiv 0$ айниятдан

$$\alpha_{1i} = \alpha_{2i} = \ldots = \alpha_{n_i i} = 0, \quad i = \overline{1, p}$$

тенгликларни келтириб чиқариш мумкин.

2.8-теорема. *Агар $y_1, y_2, \ldots, y_n$ функциялар $a \leqslant x \leqslant b$ интервалда чизиқли боғлиқ бўлса, шу интервалда Вронский детерминанти*

$$W(x) = W[y_1, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

айнан нолга тенг бўлади.

Исбот. $a \leqslant x \leqslant b$ интервалда бир вақтда нолга тенг бўлмаган $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ лар учун

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0$$

айниятга эгамиз. Шу айниятни $n-1$ марта дифференциаллаб, топамиз:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n \equiv 0, \\ \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \ldots + \alpha_n y_n' \equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \alpha_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)} \equiv 0. \end{cases}$$

Бу α_i ларга нисбатан чизиқли бир жинсли системадир. Бу система нолдан фарқли ечимга эга, чунки α_i лардан камида биттаси нолдан фарқли. Демак, юқоридаги системанинг детерминанти $a \leqslant x \leqslant b$ интервалда нолга тенг.

2.9-теорема. *Агар чизиқли эркли $y_1, y_2, \ldots, y_n$ функциялар коэффициентлари $a \leqslant x \leqslant b$ интервалда узлуксиз бўлган чизиқли бир жинсли*

$$L[y] = 0$$

тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда тегишли Вронский детерминанти $a \leqslant x \leqslant b$ интервалнинг бирорта ҳам нуқтасида нолга айланмайди.

Исбот. Вронский детерминанти $a \leqslant x \leqslant b$ интервалнинг бирор x_0 нуқтасида 0 га тенг бўлсин дейлик, яъни

$W(x_0) = 0$. Бир вақтда нолга тенг бўлмаган α_i ларни шундай танлаймизки, бу α_i лар ушбу

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^{(\nu)}(x_0) = 0 \qquad (\nu = \overline{0, n-1})$$

системанинг ечими бўлсин. Бу системанинг детерминанти $W(x_0) = 0$. Шунга кўра

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x)$$

функция

$$y^{(\nu)}(x_0) = 0, \quad \nu = \overline{0, n-1}$$

бошланғич шартларни қаноатлантиради. Чизиқли бир жинсли тенгламанинг юқоридаги бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими мавжудлик ва ягоналик теоремасига асосан айнан ноль бўлади, демак,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x) \equiv 0,$$

яъни $y_1, y_2, \ldots, y_n$ лар чизиқли боғлиқ. Бу эса теорема шартига зиддир. Шу билан теорема исботланди.

Эслатма. Чизиқли эркли $y_1, \ldots, y_n$ функциялар $L[y] = 0$ тенгламанинг ечими бўлмаса, 2.9-теорема, умуман айтганда, ўринли эмас.

n-тартибли чизиқли бир жинсли тенгламанинг ихтиёрий n та чизиқли эркли ечимларини шу *тенглама ечимларининг фундаментал системаси* дейилади.

2.10-теорема. *Коэффициентлари $a \leqslant x \leqslant b$ интервалда узлуксиз бўлган ҳар қандай чизиқли бир жинсли тенглама ечимларнинг фундаментал системасига эга.*

Исбот. Ечимларнинг фундаментал системасини тузиш учун ихтиёрий n^2 та $y_i^{(k)}(x_0)$ $(i = \overline{1, n};\ k = \overline{0, n-1})$ сон оламиз, бу сонлар

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

шартни қаноатлантирсин, бу ерда $a \leqslant x_0 \leqslant b$. Бу ҳолда $y_i^{(k)}(x_0)$ $(i=\overline{1, n};\ k=\overline{0, n-1})$ бошланғич қийматларга эга бўлган ечимлар, яъни $y_i(x)$, $i=\overline{1, n}$ ечимлар ечимларнинг фундаментал системаси бўлади, чунки уларнинг Вронский детерминанти $x=x_0$ нуқтада нолга тенг эмас. Демак, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ечимлар чизиқли эркли.

2.11-теорема. *Агар $y_1, y_2, \ldots, y_n$ функциялар $L[y]=0$ тенглама ечимларининг фундаментал системаси бўлса, бу тенгламанинг умумий ечими*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

формула билан аниқланади, бу ерда C_i лар ихтиёрий ўзгармас сонлар.

Исбот. Агар C_i ларни танлаш йўли билан ихтиёрий

$$y^{(\nu)}(x_0) = y_0^{(\nu)}, \quad a \leqslant x_0 \leqslant b, \quad (\nu = \overline{1, n-1})$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимни топиш мумкин бўлса, $y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$ ечим умумий ечим бўлади. $y=y(x)$ ечим охирги бошланғич шартларни қаноатлантиришини талаб қилиб, C_i ларга нисбатан чизиқли бўлган

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(\nu)}(x_0) = y_0^{(\nu)} \quad (\nu = \overline{0, n-1})$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу системанинг детерминанти $L[y]=0$ тенгламанинг чизиқли эркли y_1, $y_2, \ldots, y_n$ ечимларидан тузилган Вронский детерминантидир, шунинг учун ҳам у нолга тенг эмас. Демак, бу система ўнг томони ихтиёрий бўлганда ҳар қандай $x_0 \in [a, b]$ учун C_i ларга нисбатан ягона ечимга эга. Шу билан теорема исботланди.

Натижа: *Чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама чизиқли эркли ечимларининг максимал сони тенгламанинг тартибига тенг.*

Мисол. $y''-y=0$ тенгламанинг хусусий ечимлари $y_1=e^{x}$, $y_2=e^{-x}$. Улар чизиқли эркли, чунки Вронский детерминанти

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}=-2\neq 0.$$

Демак, тенгламанинг умумий ечими:

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}.$$

Ечимларнинг фундаментал системасига ягона дифференциал тенглама мос келади. Бунга ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

Ечимларининг фундаментал системаси $y_1, y_2, \dots, y_n$ бўлган дифференциал тенглама тузайлик. Изланаётган тенгламанинг ихтиёрий ечими (уни y деб белгилаймиз) $y_1, y_2, \dots, y_n$ ларга чизиқли боғлиқ бўлади, шунинг учун уларнинг Вронский детерминанти $W[y_1, y_2, \dots, y_n, y]=0$ бўлади. Охирги тенгламани очиб ёзсак:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n & y^{(n)} \end{vmatrix}=0$$

ҳосил бўлади. Бу тенглама чап томонидаги детерминантни охирги устун элементлари бўйича ёйсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$W[y_1, y_2, \cdots, y_n]\, y^{(n)}-\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} y^{(n-1)}+\dots=0$$

Бу эса изланаётган дифференциал тенгламадир. Ҳосил бўлган тенгламанинг иккала томонини $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0$ га бўлсак, уни одатдаги

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$$

кўринишда ёзиш мумкин. Равшанки, $a_1(x) = -\dfrac{W'[y_1, \ldots, y_n]}{W[y_1, \ldots, y_n]}$. Ҳақиқатан, ушбу

$$W'[y_1, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

формула ўринли. Буни кўрсатиш учун детерминантдан ҳосила олиш қоидасига асосан, $W'(x)$ ҳосила n та n-тартибли детерминантлар йиғиндиси кўринишида ёзилади. Уларнинг i-си Вронский детерминантидан шу билан фарқ қиладики, унда Вронский детерминантининг i-қаторидан ҳосила олиниб, қолганлари ўзгаришсиз қолади. Бунда $i = n$ бўлган охирги қўшилувчи қолиб, қолган қўшилувчилар 0 га тенг бўлади, чунки уларда i-ва $i+1$-қаторлар тенгдир. Бундан охирги формуланинг ўринлилиги келиб чиқади. Шундай қилиб, биз

$$a_1(x) = -\frac{W'(x)}{W(x)}$$

формулани келтириб чиқардик. Охирги муносабат $W(x)$ га нисбатан биринчи тартибли (ўзгарувчилари ажраладиган) дифференциал тенгламадир. Уни интеграллаб

$$W(x) = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(x)\, dx}$$

ни ҳосил қиламиз. $x = x_0$ бўлганда $C = W(x_0)$. Шунинг учун

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(x)\, dx} \qquad (2.18)$$

(2.18) формула *Остроградский — Лиувилль формуласи* деб юритилади.

Агар ушбу

$$y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = 0$$

иккинчи тартибли дифференциал тенгламанинг битта ечими маълум бўлса, унинг умумий ечимини Остроградский — Лиувилль формуласи ёрдамида топиш мумкин. Остроградский — Лиувилль формуласига асосан берилган тенгламанинг ечими

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = Ce^{-\int a_1(x)\,dx}$$

ёки

$$y_1 y' - y_1' y = Ce^{-\int a_1(x)\,dx}$$

тенгламанинг ечими бўлади. Бу тенгламани интеграллаш учун унинг ҳар икки томонини $\frac{1}{y_1^2}$ га кўпайтириб,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{C_1}{y_1^2} e^{-\int a_1(x)\,dx}$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бундан

$$\frac{y}{y_1} = \int \frac{C_1 e^{-\int a_1(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx + C_2$$

ёки

$$y = C_2 y_1 + C_1 y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx$$

келиб чиқади.

Мисоллар. 1. Ечимларининг фундаментал системаси x, x^2 бўлган тенглама тузинг.

Ечиш. Изланаётган тенглама

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & y \\ 1 & 2x & y' \\ 0 & 2 & y'' \end{vmatrix} = 0$$

ёки $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ бўлади.

2. $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$ тенгламанинг битта ечими $y_1 = \frac{\sin x}{x}$ бўлса, унинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Юқорида чиқарилган формулага асосан топамиз:

$$y=\frac{\sin x}{x}\left(C_2+C_1\int\frac{x^2e^{-\int\frac{2}{x}dx}}{\sin^2 x}\,dx\right)=\frac{\sin x}{x}(C_2-C_1\operatorname{ctg}x).$$

7-§. n-ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ БИР ЖИНСЛИ БЎЛМАГАН ТЕНГЛАМАЛАР

n-тартибли бир жинсли чизиқли бўлмаган тенгламалар тушунчасини 4-§ да киритган эдик ((2.17) га қаранг). 6-§ да киритилган L оператор ёрдамида (2.17) тенглама

$$L[y]=g(x) \tag{2.19}$$

кўринишда ёзилиши мумкин. Унга мос бир жинсли тенглама

$$L[y]=0 \tag{2.20}$$

кўринишида ёзилиши аввалдан маълум.

Чизиқли оператор L нинг хоссаларидан фойдаланиб, (2.19) тенглама учун қуйидаги тасдиқларини исботлаш мумкин.

2.12-теорема. *Агар $\bar{y}$ функция* (2.19) *тенгламанинг, y_1 функция эса* (2.20) *тенгламанинг ечими бўлса, $\bar{y}+y_1$ функция* (2.19) *тенгламанинг ечими бўлади.*

Исбот. L операторнинг тегишли хоссаси (чизиқлилиги) тасдиқни исботлайди, яъни $L[\bar{y}+y_1]=L[\bar{y}]+L[y_1]=g(x)$.

2.13-теорема. *Агар y_i функция $L[y]=g_i(x)$, $(i=\overline{1,m})$ тенгламанинг ечими бўлса,*

$y=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i$ *функция* $L[y]=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i g_i$ ($\alpha_i=\mathrm{const}$) *тенгламанинг ечими бўлади.*

Исбот. L операторнинг хоссасидан фойдаланиб ёзамиз:

$$L\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i\right]=\sum_{i=1}^{m}L[\alpha_i y_i]=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i L[y_i].$$

$L[y]=g_i$ бўлгани учун

$$L\left[\sum_{m=1}^{m}\alpha_i y_i\right]=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i g_i.$$

Теорема исбот бўлди.

2.14-теорема. *Агар* $L[y]=U(x)+iV(x)$ *тенгламанинг коэффициентлари* $a_i(x)$ *бўлса, ҳамда* $U(x)$ *ва* $V(x)$ *функциялар ҳақиқий функциялар бўлиб, бу тенглама* $y=u(x)+iv(x)$ *ечимга эга бўлса, шу ечимнинг ҳақиқий қисми* $u(x)$ *ва мавҳум қисми* $v(x)$ *мос равишда* $L[y]=U(x)$, $L[y]=V(x)$ *тенгламаларнинг ечимлари бўлади.*

Исбот. Шартга кўра $L[u(x)+iv(x)]=U(x)+iV(x)$. Бундан $L[u]+iL[v]=U(x)+iV(x)$, демак, $L[u]=U(x)$; $L[v]=V(x)$ келиб чиқади.

Теорема исбот бўлди.

2.15-теорема. (2.19) *тенгламанинг умумий ечими унга мос бир жинсли* (2.20) *тенгламанинг умумий ечими* $y_*=\sum_{i=1}^{n} C_i y_i$ *билан бир жинсли бўлмаган* (2.19) *тенгламанинг бирор хусусий ечими* $\bar{y}$ *нинг йиғиндиси кўринишида ёзилиши мумкин.*

Исбот. Теоремани исбот қилиш учун (2.19) нинг умумий ечими

$$y=\sum_{i=1}^{n} C_i y_i+\bar{y}, \qquad C_i=\text{const} \tag{2.21}$$

формула билан ёзилишини кўрсатишимиз лозим. Бунинг учун (2.19) нинг ихтиёрий

$$y^{(\nu)}(x_0)=y_0^{(\nu)} \qquad (\nu=\overline{0,n-1}) \tag{2.22}$$

бошланғич шартларини қаноатлантирадиган ечимга C_i ларнинг ягона қийматн мос келишини кўрсатиш кифоя. $y=y(x)$ функция (2.19) нинг бирор ечими бўлиб, (2.22) шартларини қаноатлантиради дейлик.

(2.21) формулада $y=y(x)$ деб кетма-кет ҳосилалар олиш ва $x=x_0$ дейиш билан қуйидаги тенгламалар системасига келамиз:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\, y^{(\nu)}(x_0)+\bar{y}^{(\nu)}(x_0)=y_0^{(\nu)},\ (\nu=\overline{0,\,n-1}). \tag{2.23}$$

Агар $y(x)=\bar{y}(x)$ деб олинган бўлса, $\sum_{i=1}^{n} C_i\, y^{(\nu)}(x_0)=0$, $\nu=\overline{0,n-1}$ система ҳосил бўлади. Бу системанинг детерминанти $W(x_0)\neq 0$. Шунинг учун фақат тривиал $C_1=0,\ \ldots,\ C_n=0$ ечимга эга. Агар $y(x)\neq\bar{y}(x)$ деб олинган бўлса, (2.23) система C_i ларга нисбатан чизиқли бир жинсли бўлмаган системадир. Унинг детерминанти $W(x_0)\neq 0$ бўлгани учун тегишли система ягона ечимга эга. Теорема исбот бўлди.

Мисол. Ушбу $y''+y=x$ тенгламанинг хусусий ечими $\bar{y}=x$ эканига бевосита текшириш орқали ишонч ҳосил қилиш мумкин. Мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими $y=C_1\cos x+C_2\sin x$ каби ёзилади, чунки $\cos x$ ва $\sin x$ функциялар берилган тенгламанинг иккита чизиқли эркли ечимларидир. Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x$ кўринишда ёзилади.

Бир жинсли бўлмаган (2.19) тенгламанинг умумий ечими ўзгармасни вариациялаш методи (Лагранж методи) билан ҳам изланиши мумкин. Бу метод хусусий ечимни топиш қийин бўлганда ҳам қўлланаверилади. Лагранж методининг моҳияти қуйидагидан иборат. Бир жинсли (2.20) тенгламанинг умумий ечими $y=\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\, y_i$ бўлсин. Бир жинсли бўлмаган (2.19) тенглама умумий ечимини

$$y=\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i \tag{2.24}$$

кўринишда излаймиз. Бу ерда $C_i(x)$ лар номаълум функциялар бўлиб, уларни шундай танлаймизки, натижада (2.24) функция (2.19) тенгламанинг ечими бўлсин. Шу (2.24) функцияни ечим деб фараз этишнинг ўзи $C_i(x)$ ларни топиш учун битта тенгламани беради. Қолган $n-1$ та тенгламаларни қуйидагича топамиз: равшанки,

$$y'=\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i'(x)+\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i(x).$$

Бу ерда $C_i'(x)$ лар учун

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i(x)=0$$

муносабат бажарилишини талаб этамиз. Унда $y'=$ $=\sum\limits_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i'(x)$ бўлади. Худди шунга ўхшаш

$$y''=\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i''(x)+\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i'(x)$$

формулада

$$\sum_{i=1}^{n} C'_i(x)\, y'_i(x) = 0$$

муносабат бажарилишини талаб этамиз. Худди шу усул билан (2.24) дан кетма-кет ҳосилалар олиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$y^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} C_i\,(x)\, y^{(k)}\,(x), \qquad k = \overline{0, n-1},$$

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y^{(n)}\,(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y^{(n-1)}\,(x),$$

$$\sum_{i=1}^{n} C'_i\,(x)\,\, y_i^{(\nu)}\,(x) = 0, \qquad (\nu = \overline{0, n-2}). \qquad (2.25)$$

(2.25) [тенгламалар сони $n-1$ та. n-тенгламани топиш учун юқорида y_1, y', . . . , $y^{(n)}$ лар учун топилган ифодаларни (2.19) га қўямиз:

$$\sum_{i=1}^{n} C'_i\, y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i^{(n)} + a_1\,(x) \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i^{(n-1)} + \ldots +$$

$$+ a_n\,(x) \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i = g\,(x)$$

ёки

$$\sum_{i=1}^{n} C'_i\, y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i\,[y_i^{(n)} + a_1\, y_i^{(n-1)} + \ldots +$$

$$+ a_n\,(x)\, y_i] = g\,(x).$$

Маълумки, $L\,[y_i\,(x)] = 0$. Шунинг учун охирги муносабатдан

$$\sum_{i=1}^{n} C'_i\,(x)\, y_i^{(n-1)} = g\,(x)$$

келиб чиқади. Шундай қилиб, $C_i\,(x)$ ларни аниқлаш учун $C'\,(x)$ ларга нисбатан қуйидаги

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(\nu)} = 0, \qquad (\nu = \overline{0, n-2})\\ &\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, y_i^{(n-1)} = g(x)\end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

чизиқли бир жинсли бўлмаган алгебраик тенгламалар системасига эга бўлдик. Бу системанинг детерминанти Вронский детерминантидан иборат бўлиб, у нолдан фарқли. Шунинг учун (2.26) система ягона $C_i'(x) = \varphi_i(x)$ ечимга эга, буни интеграллаб топамиз: $C_i(x) = \int \varphi_i(x)\, dx + \overline{C}_i$ Топилган ифодани (2.24) га қўямиз:

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i \int \varphi_i(x)\, dx + \sum_{i=1}^{n} \overline{C}_i\, y_i.$$

Мисоллар. 1. Ушбу $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ тенгламани интегралланг.

Ечиш. Энг олдин бир жинсли $y'' + y = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топамиз: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Берилган тенгламанинг умумий ечимини

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$$

кўринишда излаймиз. Бунда $C_1(x)$ ва $C_2(x)$ лар (2.26) системадан аниқланади:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Бу системани ечиб топамиз:

$$\begin{cases} C_1'(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x}, \\ C_2'(x) = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} C_1(x) = \ln|\cos x| + \overline{C_1}, \\ C_2(x) = x + \overline{C_2}. \end{cases}$$

Топилган ифодаларни ўз ўрнига қўйиб, берилган тенгламанинг умумий ечимини ёзамиз:

$$y = \overline{C_1} \cos x + \overline{C_2} \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x.$$

2. Ушбу $y'' + a^2 y = g(x)$ тенгламани интегралланг.

Ечиш. Бу ерда $g(x)$ функция бирор I интервалда узлуксиз. Мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими маълум:

$$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax.$$

Берилган тенглама ечимини аввалги мисолдагига ўхшаш

$$y = C_1(x) \cos ax + C_2(x) \sin ax$$

кўринишда излаймиз. $C_1(x)$ ва $C_2(x)$ ларни

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos ax + C_2'(x) \sin ax = 0, \\ -a\, C_1'(x) \sin ax + a\, C_2'(x) \cos ax = g(x) \end{cases}$$

системадан топамиз:

$$\begin{cases} C_1'(x) = -\dfrac{1}{a}\, g(x) \sin ax, \\ C_2'(x) = \dfrac{1}{a}\, g(x) \cos ax, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1(x) = -\dfrac{1}{a} \displaystyle\int_0^x g(t) \sin at\, dt + \overline{C_1}, \\ C_2(x) = \dfrac{1}{a} \displaystyle\int_0^x g(t) \cos at\, dt + \overline{C_2}. \end{cases}$$

Топилган ифодаларни ҳисобга олиб, умумий ечимни ёзамиз:

$$y(x) = \overline{C_1} \cos ax + \overline{C_2} \sin ax + \frac{\sin ax}{a} \int_0^x g(t) \cos at\, dt -$$

$$- \frac{\cos ax}{a} \int_0^x g(t) \sin at\, dt = \overline{C_1} \cos ax + \overline{C_2} \sin ax +$$

$$+ \frac{1}{a} \int_0^x g(t) \sin a(x-t)\, dt.$$

Эслатиб ўтамизки, умумий ечим формуласидаги интеграл қўшилувчи берилган тенгламанинг $y(0) = y'(0) = 0$ шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимидан иборат. Ҳақиқатан, $\overline{y} = \frac{1}{a} \int_0^x g(t) \sin a(x-t)\, dt$ деб $\overline{y'}$ ва $\overline{y''}$ ларни топамиз:

$$\overline{y'} = \int_0^x g(t) \cos a(x-t)\, dt, \quad \overline{y''} = g(x) -$$

$$- a\int_0^x g(t) \sin a(x-t)\, dt.$$ $\overline{y'}$ ва $\overline{y''}$ ларнинг ифодасини берилган тенгламага қўйиб, $g(x) - a \int_0^x g(t) \sin a(x - t)\, dt + a^2 \cdot \frac{1}{a} \int_0^x g(t) \sin a(x-t)\, dt \equiv g(x)$ айниятни ҳосил қиламиз.

8-§. ХУСУСИЙ ЕЧИМНИ ТОПИШ УЧУН КОШИ МЕТОДИ

Бу методда ҳам (2.20) тенгламанинг умумий ечими $y = \sum_{n=1}^{n} C_i y_i$ маълум деб қаралади. Методнинг моҳияти шундан иборатки, бир жинсли (2.20) тенгламанинг битта t параметрга боғлиқ бўлган ва қуйидаги

$$K(t, t) = K'(t, t) = \ldots = K^{(n-2)}(t, t) = 0, \quad (2.27)$$

$$K^{(n-1)}(t, t) = 1 \quad (2.28)$$

шартларни қаноатлантирадиган $K(x, t)$ ечими маълум деб фараз этилади. Бу ҳолда ушбу

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} K(x, t)\, g(x)\, dt \quad (2.29)$$

функция бир жинсли бўлмаган (2.19) тенгламанинг қуйидаги

$$y^{(\nu)}(x_0) = 0, \qquad \nu = \overline{0, n-1}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечими бўлади. Ҳақиқатан, (2.29) ни дифференциаллаб (2.27) ва (2.28) ларни эътиборга олсак,

$$\left.\begin{aligned} y^{(\nu)}(x) &= \int_{x_0}^{x} K^{(\nu)}(x, t)\, g(t)\, dt, \quad \nu = \overline{0, n-1}, \\ y^{(n)}(x) &= \int_{x_0}^{x} K^{(n)}(x, t)\, g(t)\, dt + f(x) \end{aligned}\right|$$

ифодаларни топамиз. Бу ифодаларни (2.19) га қўйиб ва $L\,[K(x,t)]=0$ ни эътиборга олиб топамиз:

$$\int_{x_0}^{x} L\,[K(x,t)]\,g(t)\,dt+g(x)\equiv g(x).$$

Юқорида қайд қилинган $K(x,t)$ ечим $y=\sum\limits_{n=1}^{n} C_i y_i$ умумий ечимдан $C_1, \ldots, C_n$ ларни (2.27) ва (2.28.) шартлар бажариладиган қилиб танлаш билан ҳосил қилиниши мумкин.

Мисол ўрнида 7-§ да кўрилган ушбу

$$y''+a^2y=g(x)$$

тенгламани оламиз ва унинг $K(x,t)$ хусусий ечимини топамиз. Маълумки, $y''+a^2y=0$ тенгламанинг умумий ечими қуйидагидан иборат:

$$y=C_1\cos ax+C_2\sin ax.$$

(2.27) ва (2.28) шартлар

$$\begin{cases} C_1\cos at+C_2\sin at=0, \\ -C_1\sin at+a\,C_2\cos at=1 \end{cases}$$

тенгламалар системасига олиб келади. Бу системадан

$$C_1=-\frac{\sin at}{a}, \qquad C_2=\frac{\cos at}{a}$$

ларни топамиз. Демак, изланган ечим

$$K(x,t)=\frac{1}{a}\sin a(x-t)$$

бўлади. (2.29) формулага кўра (2.19) тенгламанинг тегишли хусусий ечими

$$y(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\sin a\,(x-t)\,g(t)\,dt$$

кўринишда ёзилади. Бу хусусий ечим $x_0=0$ бўлганда юқорида 7-§ да ўзгармасни вариациялаш методи билан топилган эди.

9-§. ЧИЗИҚЛИ БИР ЖИНСЛИ ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ТЕНГЛАМАЛАР ВА ЭЙЛЕР ТЕНГЛАМАСИ

1. Чизиқли бир жинсли ўзгармас коэффициентли тенгламалар. Чизиқли бир жинсли ўзгармас коэффициентли (яъни коэффициентлари ўзгармас бўлган) тенглама

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0, \ a_i = \text{const} \quad (2.30)$$

кўринишга эга. Биз $0 \neq a_0, a_1, \ldots, a_n$ коэффициентлар ҳақиқий бўлган ҳолни кўрамиз. Бу тенгламанинг хусусий ечимлари

$$y = e^{kx}, \quad k = \text{const}$$

кўринишда изланиши мумкин. Агар кетма-кет ҳосилалар олсак,

$$y = e^{kx}, \ y' = k e^{kx}, \ \ldots, \ y^{(n)} = k^n e^{kx}$$

ифодаларга эга бўламиз. Уларни (2.30) га қўйиб, қуйидаги

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0 \qquad (2.31)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Уни (2.30) тенгламанинг *характеристик тенгламаси* дейилади.

Характеристик тенглама n та $k_1, k_2, \ldots, k_n$ (ҳақиқий ва комплекс) илдизларга эга. Бу илдизларнинг ҳар бири ($e^{k_i x}$ функция) (2.30) тенгламанинг ечими бўлади. Шу илдизларга қараб (2.30) тенгламанинг умумий ҳақиқий ечимини ёзиш мумкин. Биз бир неча ҳолни алоҳида кўрамиз.

а) (2.31) тенглама илдизларининг ҳаммаси ҳақиқий ва ўзаро тенг эмас. Бу ҳолда $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}$ лар (2.30) тенгламанинг чизиқли эркли ечимлари бўлади (2-бобнинг 6-§ идаги 2-мисолга қаранг). У ҳолда (2.30) тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}$$

бўлади (бу ерда C_i — ихтиёрий ўзгармас сонлар).

Мисоллар. 1. Ушбу $y'' - 5y' + 6y = 0$ тенгламани интеграллаңг.

Ечиш. Бу тенгламага мос характеристик тенглама $k^2 - 5k + 6 = 0$ бўлиб, унинг илдизлари: $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. Демак, тенгламанинг умумий ечими:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

2. Ушбу $y''' - 4y' = 0$ тенгламани интегралланг.

Ечиш. Мос характеристик тенглама $k^3 - 4k = 0$ дан иборат бўлиб, унинг илдизлари: $k_1 = 0$, $k_2 = 2$, $k_3 = -2$. Берилган тенгламанинг умумий ечими:

$$y = C_1 + C_2 e^{2k} + C_3 e^{-2k}.$$

б) характеристик тенгламанинг илдизлари ўзаро тенг эмас, лекин уларнинг ичида комплекс илдизлар бор.

Бу ҳолда (2.31) тенгламанинг коэффициентлари ҳақиқий бўлганидан характеристик тенглама учун $\alpha + i\beta$ ва $\alpha - i\beta$ лар илдиз бўлади. Ушбу $k_i = \alpha + i\beta$, $k_j = \alpha - i\beta$ қўшма комплекс илдизларга

$$e^{(\alpha + i\beta)x}, \quad e^{(\alpha - i\beta)x}$$

қўшма комплекс ечимлар мос келади. Бу ечимларнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини ажратамиз. Унинг учун Эйлер формуласидан фойдаланамиз:

$$e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x \pm i \sin \beta x).$$

Бундан $u(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ ва $v(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$ ўзаро чизиқли эркли ечимларга эга бўламиз. Ҳар бир қўшма комплекс илдиз учун ҳам шунга ўхшаш мулоҳаза юритилади.

Мисоллар. 1. $y'' + 2y' + 2y = 0$ тенгламани интегралланг.

Ечиш. Мос характеристик тенглама $k^2 + 2k + 2 = 0$ нинг илдизлари: $k_1 = -1 + i$, $k_2 = -1 - i$. Демак, тенгламанинг умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

2. $y'' + a^2 y = 0$ тенгламани интегралланг.

Ечиш. Мос характеристик тенглама $k^2 + a^2 = 0$ нинг илдизлари: $k_{1,2} = \pm ia$. Демак, умумий ечим қуйидагича бўлади:

$$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax.$$

3. $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0$ тенгламани интегралланг.

Ечиш. Мос характеристик тенглама $k^3 + 5k^2 + 9k + 5 = 0$ нинг илдизлари: $k_1 = -1$; $k_{2,3} = -2 \pm i$. Демак, умумий ечим:

$$y = C_1 e^{-x} + e^{-2x}(C_2 \cos x + C_3 \sin x).$$

в) (2.31) тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва улар ичида ўзаро тенглари бор. Бу ҳолда e^{kx}

кўринишдаги чизиқли эркли ечимлар сони n тадан кам бўлади. Биз n та чизиқли эркли ечимларни топишимиз лозим.

Агар характеристик тенгламанинг k_i-илдизи α_i ($i = 1, \ldots, m$) каррали ($\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n$) бўлса, берилган тенглама учун $e^{k_i x}$, $xe^{k_i x}$, $\ldots$, $x^{\alpha_i - 1}$, $e^{k_i x}$ функциялар ечим бўлади. Буни исботлаш учун ҳозирча $k_i = 0$ илдиз α_i каррали бўлсин деймиз. У ҳолда характеристик тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-\alpha_i} k^{\alpha_i} = 0$$

Бунга мос келувчи бир жинсли дифференциал тенглама

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-\alpha_i} y^{(\alpha_i)} = 0$$

кўринишда бўлиб, $1, x, x^2, \ldots, x^{\alpha_i - 1}$ хусусий ечимларга эга бўлади, чунки охирги тенглама тартиби α_i дан кам бўлган ҳосилаларни ўз ичига олмайди. Шундай қилиб, α_i каррали $k_i = 0$ илдизга α_i та чизиқли эркли $1, x, x^2, \ldots, x^{\alpha_i - 1}$ ечимлар мос келади.

Агар α_i каррали илдиз $k_i \neq 0$ бўлса, у ҳолда $y = e^{k_i x} z$ деб алмаштирамиз. Натижада z учун ҳосил бўлган дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси нолга тенг ва α_i каррали илдизга эга бўлади. Бунга бевосита ҳисоблаш ёрдамида ишонч ҳосил қилиш мумкин. z бўйича айтилган дифференциал тенгламанинг чизиқли эркли хусусий ечимлари $1, x, \ldots, x^{\alpha_i - 1}$ бўлади. Демак, берилган тенгламанинг α_i каррали $k_i \neq 0$ илдизига ушбу

$$e^{k_i x}, \; xe^{k_i x}, \; \ldots, \; x^{\alpha_i - 1} e^{k_i x}$$

чизиқли эркли ечимлар мос келади ($i = 1, 2, \ldots, m$). Бу ечимларнинг чизиқли эркли эканини биз 2-бобнинг 6-§ идаги 3-мисолда кўрганмиз.

Шундай қилиб, берилган (2.30) тенгламанинг умумий ечими

$$y = \sum_{i=1}^{m} (C_{0i} + C_{1i} x + \ldots + C_{\alpha_i - 1,i} x^{\alpha_i - 1}) e^{k_i x}$$

бўлади (бу ерда C_{si} лар — ихтиёрий ўзгармас сонлар).

Мисол. Ушбу $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ тенгламани интегралланг.

Ечиш. Мос характеристик тенглама $k^3-3k^2+3k-1=0$ уч каррали $k=1$ илдизга эга, бинобарин, умумий ечим қуйидагича бўлади:

$$y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^x.$$

г) агар характеристик тенглама α каррали $p+iq$ комплекс илдизга эга бўлса, у тенглама албатта α каррали $p-iq$ қўшма комплекс илдизга ҳам эга бўлади.

Шунинг учун α каррали $p\pm iq$ қўшма комплекс илдизларга

$$e^{(p\pm iq)x},\quad xe^{(p\pm iq)x},\ \ldots,\ x^{\alpha-1}e^{(p\pm iq)x}$$

комплекс ечимлар мос келади. Бу ечимларнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари ҳам берилган тенгламанинг ечимлари бўлади. Бу ечимларни ёзамиз:

$$e^{px}\cos qx,\ xe^{px}\cos qx,\ \ldots,\ x^{\alpha-1}e^{px}\cos qx,$$

$$e^{px}\sin qx,\ xe^{px}\sin qx,\ \ldots,\ x^{\alpha-1}e^{px}\sin qx.$$

Шундай қилиб, α каррали $p\pm iq$ қўшма комплекс илдизларга 2α та чизиқли эркли ечимлар мос келади.

Мисол. Ушбу $y^{\mathrm{IV}}+2y''+y=0$ тенгламани интегралланг.

Ечиш. Мос характеристик тенглама $k^4+2k^2+1=0$ икки каррали $\pm i$ илдизларга эга, демак, тенгламанинг умумий ечими бундай ёзилади:

$$y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x.$$

2. Эйлер тенгламаси. Коэффициентлар деб аталувчи $a_0, \ldots, a_n$ лар ўзгармас бўлганда ушбу

$$a_0x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy'+a_ny=0 \quad (2.32)$$

тенглама *Эйлер тенгламаси* дейилади.

Эйлер тенгламаси $x=e^t$ ($x>0$ бўлганда) ёки $x=-e^t$ ($x<0$ бўлганда) алмаштириш ёрдамида коэффициентлари ўзгармас бўлган чизиқли бир жинсли тенгламага келтирилади.

Ҳақиқатан,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}e^{-t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=$$

$$= e^{-t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}e^{-t} - e^{-t}\frac{dy}{dt}\right) = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$

. . . .

$$\frac{d^ky}{dx^k} = e^{-kt}\left(\beta_1\frac{dy}{dt}+\beta_2\frac{d^2y}{dt^2}+\dots+\beta_k\frac{d^ky}{dt^k}\right),$$

бунда $\beta_1, \dots, \beta_k$ — ўзгармас сонлар.

Бу охирги формуланинг тўғрилигини математик индукция методи ёрдамида исботлаш мумкин. Бунинг учун формула бирор k учун ўринли деб, унинг $k+1$ учун ҳам ўринли эканини кўрсатамиз. Бунга содда ҳисоблашлар ёрдамида ишонч ҳосил қилиш мумкин:

$$\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}} = \frac{d}{dt}\left[\left(\beta_1\frac{dy}{dt}+\dots+\beta_k\frac{d^ky}{dt^k}\right)e^{-kt}\right]\frac{1}{\frac{dx}{dt}} =$$

$$= e^{-t}\left[-ke^{-kt}\left(\beta_1\frac{dy}{dt}+\dots+\beta_k\frac{d^ky}{dt^k}\right)+e^{-kt}\left(\beta_1\frac{d^2y}{dt^2}+\dots+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\beta_k\frac{d^{k+1}y}{dt^{k+1}}\right)\right] = e^{-(k+1)t}\left[(-\beta_1 k)\frac{dy}{dt}+(\beta_1-k\beta_2)\frac{d^2y}{dt^2}+\right.$$

$$\left.+\dots+\beta_k\frac{d^{k+1}y}{dt^{k+1}}\right].$$

Юқорида $\frac{d^ky}{dx^k}$ лар учун топилган ифодаларни (2.32) тенгламага қўйиб $x^k = e^{kt}$ ни эътиборга олсак, ушбу чизиқли бир жинсли ўзгармас коэффициентли тенгламани ҳосил қиламиз:

$$b_0\frac{d^ny}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n+1}}y+\dots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_ny=0. \qquad (2.33)$$

Эйлер тенгламасининг чизиқли эркли хусусий ечимларини топиш учун $x=e^t$ алмаштириш бажариб, уни ўзгармас коэффициентли тенгламага келтириш шарт эмас, чунки ҳосил бўладиган хусусий ечимлари $y=e^{kt}=x^k$ кўринишда бўлганидан, Эйлер тенгламасининг хусусий ечимларини $y=x^k$ кўринишда излаш кифоя. Агар $y=x^k$ функциядан зарур ҳосилаларни олиб, (2.32) тенглама қўйсак, бу тенглама x^k га қисқартириш натижасида ушбу алгебраик тенгламага келади:

$$a_0 k (k-1) \dots (k-n+1) +$$
$$+ a_1 k (k-1) \dots (k-n+2) + \dots + a_n = 0. \qquad (2.34)$$

Бу тенглама Эйлер тенгламасининг характеристик тенгламаси дейилади. Бу (2.34) тенгламанинг α_i каррали k_i илдизи учун (2.33) тенгламанинг қуйидаги

$$x^{k_i}, \ x^{k_i} \ln x, \ \dots, \ x^{k_i} (\ln x)^{\alpha_i - 1}$$

ечимлари мос келади, ёки барибир, (2.32) тенгламанинг ушбу

$$x^{k_i}, \ x^{k_i} \ln x, \ \dots, \ x^{k_i} (\ln x)^{\alpha_i - 1}$$

чизиқли эркли ечимлари мос келади. (2.34) тенгламанинг α каррали $p \pm iq$ қўшма комплекс илдизларига (2.33) тенгламанинг ушбу

$$e^{pt} \cos qt, \ te^{pt} \cos qt, \ \dots, \ t^{\alpha_i - 1} e^{pt} \cos qt,$$
$$e^{pt} \sin qt, \ te^{pt} \sin qt, \ \dots, \ t^{\alpha_i - 1} e^{pt} \sin qt$$

ечимлари мос келади, ёки барибир, (2.32) тенгламанинг ушбу

$$x^p \cos(q \ln x), \ln x \cdot x^p \cos(q \ln x), \dots, (\ln x)^{\alpha - 1} x^p \cos(q \ln x),$$
$$x^p \sin(q \ln x), \ \ln x \cdot x^p \sin(q \ln x), \dots, \ln x)^{\alpha - 1} x^p \sin(q \ln x).$$

чизиқли эркли ечимлари мос келади. Барча чизиқли эркли ечимлар, яъни фундаментал система маълум бўлса, тегишли теоремага кўра умумий ечимни ёзишни биламиз.

Мисоллар. 1. $x^2y'' + 5xy' - 5y = 0$ тенгламани интегралланг.

Ечиш. Тенглама ечимларини $y = x^k$ кўринишда излаб, $k(k-1) + 5k - 5 = 0$ характеристик тенгламани топамиз. Бу тенгламанинг ечимлари $k_1 = 1$, $k_2 = 5$ дан иборат. Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими ($x > 0$ бўлганда) $y = C_1 x + C_2 x^{-5}$ бўлади.

2. $x^2 y'' - xy' + y = 0$ тенгламани интегралланг.

Ечиш. Мос характеристик тенглама $k(k-1) - k + 1 = 0$ ёки $(k-1)^2 = 0$ кўринишда бўлади. Унинг илдизлари: $k_{1,2} = 1$. Демак, тенгламанинг умумий ечими ($x > 0$ бўлганда) $y = (C_1 + C_2 \ln x)\, x$ бўлади.

3. $x^2 y'' + xy' + y = 0$ тенгламани интегралланг.

Ечиш. Мос характеристик тенглама $k(k-1) + k + 1 = 0$ кўринишга эга бўлиб, унинг илдизлари $k_{1,2} = \pm i$ дан иборат. Демак, тенгламанинг умумий ечими ($x > 0$ бўлганда) $y = C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x$ бўлади.

Эслатма. Ушбу

$a_0\ (ax+b)^n y^{(n)} + a_1\ (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ \ldots\ + a_n (ax+b)\ y' + a_n\ y = 0$ тенглама ҳам Эйлер тенгламаси дейилади. Унда эркли ўзгарувчини $ax+b=\tau$ деб алмаштирсак, (2.32) кўринишдаги тенглама ҳосил бўлади. Бу ҳолда хусусий ечим $y=(ax+b)^k$ кўринишда изланади.

10-§. ЧИЗИҚЛИ БИР ЖИНСЛИ БЎЛМАГАН ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ТЕНГЛАМАЛАР ВА ЭЙЛЕР ТЕНГЛАМАСИ

1. Чизиқли бир жинсли бўлмаган ўзгармас коэффициентли тенгламалар. Чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламаларнинг хусусий ечимлари $q\ (x)$ функция ихтиёрий узлуксиз бўлганда ўзгармасни вариациялаш *усули* билан топилади. $q\ (x)$ функция баъзи махсус кўринишга эга бўлганда, хусусий ечимни излаш осонроқ йўл билан олиб борилиши мумкин. Биз қуйида баъзи ҳолларни кўриб чиқамиз.

а) $q\ \ (x) = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ldots + A_s$ бўлсин. Бу ҳолда ушбу

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \ldots + A_s \quad (2.35)$$

тенгламанинг хусусий ечимини излаш лозим бўлади (бу ерда a_i ва A_i лар ўзгармас сонлар).

Агар $a_n \neq 0$ бўлса, тенгламанинг хусусий ечими,

$$y = B_0\, x^s + \ \ldots + B_s \quad (2.36)$$

кўринишда изланади (бу ерда B_i лар номаълум ўзгармас сонлар). (2.36) ни (2.35) га қўйиб, сўнгра x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаштириб, B_i ларни топиш учун ҳамма вақт ечимга эга бўлган

$$\begin{cases} a_n\ B_0 = A_0, \\ a_n\ B_1 + sa_{n-1}\ B_0 = A_1, \\ a_n\ B_2 + (s-1)\ a_{n-1}\ B_1 + s\ \ (s-1)\ a_{n-2}B_0 = A_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n\ B_s + \ldots = A_s \end{cases}$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Булардан кетма-кет $B_0,\ B_1,\ \ldots\ ,\ B_s$ лар топилади.

Энди $a_n = 0$, $a_{n-1} = a_{n-2} = \ldots = a_{n-\alpha+1} = 0$, $a_{n-\alpha} \neq 0$ бўлсин. У ҳолда (2.35) тенглама

$$a_0 y^{(n)} + \ldots + a_{n-\alpha} y^{(\alpha)} = A_0 x^s + \ldots + A_s \quad (2.37)$$

кўринишга эга бўлади. Бу тенгламада $y^{(\alpha)} = z$ дейилса, ҳосил бўладиган тенглама $z = y^{(\alpha)} = B_0 x^s + \ldots + B_s$ кўринишдаги хусусий ечимга эга бўлади. Бундан (2.37) тенгламанинг хусусий ечимини

$$y = x^{\alpha} (D_0 x^s + \ldots + D_s), \ D_i = \text{const}$$

кўринишда излаш лозимлиги келиб чиқади.

Мисоллар. 1. $y'' + y = x^2 + x$ тенгламани интеграллаиг.

Ечиш. Бу тенгламанинг хусусий ечимини

$$y = B_0 x^2 + B_1 x + B_2$$

кўринишда излаш мумкин. B_0, B_1, B_2 лар учун мос тенгламаларни ечиб, $B_0 = 1$, $B_1 = 1$, $B_2 = 2$ ларни ва хусусий ечим $\overline{y} = x^2 + x - 2$ дан иборат эканини топамиз. Энди берилган тенгламанинг умумий ечимини ёзиш мумкин, у қуйидагича бўлади:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 + x - 2.$$

2. $y'' + y' = x - 2$ тенгламанинг хусусий ечимини топинг.

Ечиш. Хусусий ечимни $y = x\,(B_0 x + B_1)$ кўринишда излаш лозим. Тегишли тенгламалардан B_0 ва B_1 ни топамиз: $B_0 = \frac{1}{2}$, $B_1 = -3$. Демак, хусусий ечим $\overline{y} = x\left(\frac{1}{2}x - 3\right)$ бўлади.

Мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими: $y_* = C_1 + C_2 e^{-x}$, чунки характеристик тенгламанинг илдизлари $k_1 = 0$, $k_2 = -1$. Умумий ечим қуйидагича бўлади:

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + x\left(\frac{1}{2}x - 3\right),$$

б) $g(x) = e^{px} (A_0 x^s + \ldots + A_s)$. Бу ҳолда ушбу

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = e^{px} (A_0 x^s + \ldots + A_s) \quad (2.38)$$

тенгламанинг хусусий ечимини топиш билан шуғулланамиз. Бунинг учун $y = e^{px} z$ алмаштириш қиламиз. Ҳосил бӯладиган (z га нисбатан) тенглама (2.35) кӯринишда бӯлади.

Шунинг учун агар p сон характеристик тенгламанинг илдизи бӯлмаса, (2.38) тенгламанинг хусусий ечими

$$\overline{y} = e^{px} (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ldots + B_s)$$

кӯринишда изланади.

Агар p сон мос характеристик тенгламанинг α каррали илдизи бӯлса, у ҳолда (2.38) тенгламанинг хусусий ечими

$$\overline{y} = x^\alpha e^{px} (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ldots + B_s)$$

кӯринишда изланади.

Юқоридагилардан қуйидаги қоида келиб чиқади:

1) агар p сон мос характеристик тенгламанинг илдизи бӯлмаса, (2.38) тенгламанинг хусусий ечими

$$\overline{y} = e^{px} (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ldots + B_s)$$

кӯринишда изланади;

2) агар p сон мос характеристик тенгламанинг α каррали илдизи бӯлса, у ҳолда (2.38) тенгламанинг хусусий ечими

$$\overline{y} = x^\alpha e^{px} (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + \ldots + B_s)$$

кӯринишда изланади.

Мисоллар. 1. $y'' + 9y = e^{5x}$ тенгламанинг хусусий ечими $\overline{y} = Be^{5x}$ кӯринишда изланади, чунки $p = 5$ сон $k^2 + 9 = 0$ тенгламанинг илдизи эмас.

2. $y'' + 2y = e^x (x + 1)$ тенгламанинг хусусий ечимини $\overline{y} = e^x (B_0 x + B_1)$ кӯринишда излаш лозим.

3. $y'' - y = e^x (x^2 + 1)$ тенгламанинг хусусий ечимини $\overline{y} = xe^x (B_0 x^2 + B_1 x + B_2)$ кӯринишда излаш керак, чунки $p = 1$ сон мос характеристик тенгламанинг оддий илдизи.

4. $y'' + 2y' + y = e^{-x} (x + 5)$ тенгламанинг хусусий ечимини $\overline{y} = x^2 e^{-x} (B_0 x + B_1)$ кӯринишда излаш лозим, чунки $p = -1$ сон мос характеристик тенгламанинг икки каррали илдизи.

Эслатма. Юқоридаги мулоҳазалар p сон комплекс бӯлганда ҳам ӯз кучини сақлайди. Агар берилган тенгламанинг ӯнг томони

$$e^{px} [P_s (x) \cos qx + Q_s (x) \sin qx]$$

кўринишга эга бўлса (бу ерда $P_S(x)$, $Q_S(x)$ лар тартиби s дан катта бўлмаган кўпҳадлар), бу функцияни Эйлер формуласи ёрдамида

$$e^{(p+qi)x} R_S(x) + e^{(p-qi)x} T_S(x)$$

кўринишга келтириш мумкин (бу ерда $R_S(x)$ ва $T_S(x)$ лар s-тартибли кўпҳадлар). Бу ҳолда хусусий ечим аввалги мулоҳазалар ёрдамида изланади.

Хусусий ечимни излашнинг якуний қоидаси қуйидагичадир:

а) агар $p \pm iq$ характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаса, хусусий ечим

$$\bar{y} = e^{px}[\bar{P}_S(x)\cos qx + \bar{Q}_S(x)\sin qx]$$

кўринишда изланади (бу ерда $\bar{P}_S(x)$ ва $\bar{Q}_S(x)$ лар коэффициентлари номаълум бўлган s-тартибли кўпҳадлар).

Шуни эслатиб ўтиш керакки, $P_S(x)$ ёки $Q_S(x)$ лардан бирининг тартиби s дан кичик бўлса ҳам, $\bar{P}_S(x)$ ва $\bar{Q}_S(x)$ кўпҳадлар s-тартибли қилиб изланади.

б) агар $p \pm iq$ характеристик тенгламанинг α каррали илдизи бўлса, хусусий ечим

$$\bar{y} = x^{\alpha} e^{px}[\bar{P}_S(x)\cos qx + \bar{Q}_S(x)\sin qx]$$

кўринишда изланади.

Мисоллар. 1. $y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$ тенглама учун $p \pm iq = \pm 2i$ сон мос характеристик тенгламанинг илдизи бўлмагани учун хусусий ечим

$$\bar{y} = A\cos 2x + B\sin 2x$$

кўринишда изланади.

2. $y^{\mathrm{IV}} + 2y'' + y = \cos x$ тенглама учун $p \pm iq = \pm i$ мос характеристик тенгламанинг икки каррали илдизи бўлгани учун хусусий ечим

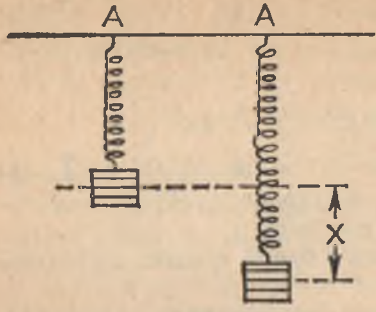
$$\bar{y} = x^2 (A\cos x + B\sin x)$$

кўринишда изланади.

3. $y'' + 2y' + y = e^{-x}(x\cos x + 3\sin x)$ тенглама учун $p \pm iq = -1 \pm i$ сон мос характеристик тенгламанинг оддий илдизи бўлгани учун хусусий ечим

$$\bar{y} = xe^{-x}[(A_0x + A_1)\cos x + (B_0x + B_1)\sin x]$$

кўринишда изланиши лозим.



19 чизма.

2. Бир жинсли бўлмаган Эйлер тенгламаси, Агар $a_i =$ $= \mathrm{const}$, $i = \overline{0, n}$ бўлиб, $g(x) \neq 0$ функция бирор I интервалда узлуксиз бўлса, ушбу

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + + \ldots + a_n y = g(x)$$

тенгламани бир жинсли бўлмаган Эйлер тенгламаси дейилади. Бу тенгламанинг умумий ечимини топиш учун энг аввал мос бир жинсли Эйлер тенгламасининг умумий ечимини топиб, сўнгра ўзгармасни вариациялаш методини қўллаш мумкин. Бу умумий йўл. Агар $x = e^t$ алмаштириш натижасида $g(e^t) = h(t)$ функция махсус кўринишдаги функциядан иборат бўлса, хусусий ечимни ҳам махсус кўринишда излаш мақсадга мувофиқ.

11-§. ТЕБРАНИШЛАРНИ ЎРГАНИШДА ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ АҲАМИЯТИ

Кўплаб тебраниш жараёнлари чизиқли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар билан тавсифланади. Тенгламаларнинг татбиқида эркли ўзгарувчи вақтни англатгани учун уни t орқали, унинг функциясини эса x орқали белгиланади.

Массаси m бўлган жисм A нуқтага маҳкамланган пружинага осилган. Пружинанинг эластиклик кучи билан жисмнинг оғирлик кучи ўзаро мувозанатда. Шу жисмнинг вертикал тебраниш қонунини топиш талаб қилинади.

x орқали жисмнинг мувозанат ҳоли билан иккинчи ҳолати орасидаги масофани белгилайлик (19-чизма). Жисм ҳаракатланаётган муҳитнинг қаршилиги $x'(t)$ тезликка пропорционал бўлсин деб фараз қилайлик.

Жисмга қуйидаги кучлар таъсир этади:

1) жисмни мувозанат ҳолига келтириш учун ҳаракат қилувчи пружинанинг ички кучи (уни $x(t)$ масофага пропорционал деб қабул қиламиз);

2) муҳитнинг қаршилик кучи (у жисмнинг ҳаракатига тескари йўналган бўлиб, тезликка тўғри пропорционал).

Ньютоннинг иккинчи қонунига* асосан бу тебранишнинг тенгламаси

$$m\,\frac{d^2x\,(t)}{dt^2} = -\,b\,\frac{dx}{dt} - Cx$$

ёки

$$mx''\,(t) + bx'\,(t) + Cx\,(t) = 0$$

кўринишда ёзилади (бу ерда m, b ва C лар ўзгармас сонлар).

Охирги тенгламани

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\,\frac{dx}{dt} + k^2x = 0 \qquad (2.39)$$

кўринишда ёзса ҳам бўлади. Бу ерда h муҳитнинг қаршилик коэффициенти, k^2 эса жисмни ўз ҳолатига қайтариш коэффициенти ёки қисқача тиклаш коэффициенти дейилади.

Агар жисмга $g\,(t)$ ташқи куч таъсир этса, бундай тебранишнинг тенгламаси

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\,\frac{dx}{dt} + k^2x = g\,(t) \qquad (2.40)$$

кўринишда ёзилади.

Энди (2.39) тенгламанинг умумий ечимини топишга ўтайлик. Унинг ечими эркин тебранишни ифодалайди, чунки жисмга ташқи куч таъсир этмайди. Мос характеристик тенглама

$$r^2 + 2hr + k^2 = 0 \qquad (2.41)$$

бўлади, бу тенгламанинг илдизлари:

$$r_{1;\,2} = -\,h \pm \sqrt{h^2 - k^2}.$$

Турли ҳолларни кўриб чиқамиз.

1. $h^2 - k^2 < 0$, яъни муҳитнинг қаршилик коэффициенти h тиклаш коэффициенти k дан кичик бўлсин, бу ҳодиса жуда кўп ҳолларда ўринли бўлади.

$h^2 - k^2 = -p^2 < 0$ деб олайлик, демак, $r_{1;\,2} = -\,h \pm pi$. Шунинг учун (2.39) тенгламанинг умумий ечими

$$x\,(t) = e^{-ht}\,(C_1 \cos pt + C_2 \sin pt)$$

---

* Ньютоннинг иккинчи қонунини эслатамиз: жисм массасининг унинг тезланишига кўпайтмаси у жисмга таъсир этаётган барча кучлар йиғиндисига тенг.

бўлади. Агар $C_1 = A \sin \varphi$, $C_2 = A \cos \varphi$ десак, бу ечимни яна

$$x = Ae^{-ht} \sin (\varphi t + \varphi)$$

кўринишда ҳам ёза оламиз. Агар $p = \frac{2\pi}{\tau}$ бўлса,

$$x(t) = Ae^{-ht} \sin \left(\frac{2\pi t}{\tau} + \varphi\right) \qquad (2.42)$$

келиб чиқади. (Бу ерда τ — эркин тебранишнинг даври, A — бошланғич амплитудаси ва φ — бошланғич фазаси дейилади.)

Агар муҳитнинг қаршилигини эътиборға олмасак, $h=0$ бўлади. У ҳолда (2.39) тенглама

$$x'' + k^2x = 0$$

кўринишга келиб, унинг умумий ечими

$$x(t) = A \sin (kt + \varphi)$$

бўлади. Бундай қонун бўйича рўй берадиган тебраниш *гармоник тебраниш* дейилади. (2.42) формула *сўнувчи тебранишни* ифодалайди, e^{-ht} кўпайтувчи эса *сўниш тезлигини* билдиради.

2. $h^2 - k^2 = q^2 > 0$, $q > 0$ бўлсин. У ҳолда (2.39) тенгламанинг умумий ечими

$$x(t) = C_1e^{(q-h)t} + C_2e^{-(q+h)t}$$

бўлади. Равшанки, $q < h$. Шунинг учун t катталашиб борганда, $x(t)$ функция кичиклашиб боради ва $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$ бўлади.

3. $h^2 - k^2 = 0$ бўлсин. Бу ҳолда характеристик тенгламанинг илдизлари ўзаро тенг бўлади, яъни $r_1 = r_2 = -h$. Берилган тенгламанинг ечими

$$x(t) = e^{-ht} (C_1 + C_2t)$$

кўринишга эга. Бундан $\lim\limits_{t\to+\infty} t \cdot e^{-ht} = 0$ $(h > 0)$ келиб чиқади.

Энди мажбурий тебранишнинг (2.40) тенгламасини кўрайлик.

1. $q(t) = \lambda \sin \omega t$ ва $h = 0$ бўлсин. У ҳолда (2.40) тенглама

$$x'' + k^2x = \lambda \sin \omega t$$

кўринишга келади. Мос характеристик тенгламанинг илдизлари $\pm ki$ бўлиб, $p \pm iq = \pm i\omega$ дан иборат. Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин.

а) $\omega \neq k$. Бу ҳолда хусусий ечим

$$x\ (t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t$$

кўринишга эга. Буни тенгламага қўйиб, $\sin \omega t$ ва $\cos \omega t$ лар олдидаги коэффициентларни мос равишда тенгласак, $B_1 = 0$, $B_2 = \frac{\lambda}{k^2 - \omega^2}$ қийматларни топамиз. Натижада умумий ечим қуйидаги

$$x\ (t) = A\sin(kt + \varphi) + \frac{\lambda}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

формула билан ифодаланади.

б) $\omega = k$. Бу ҳолда хусусий ечимни

$$x = t\ (B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t)$$

кўринишда излаймиз. $x\ (t)$ ва $x''\ (t)$ ларни тенгламага қўйиб топамиз: $B_1 = -\frac{\lambda}{2k}$; $B_2 = 0$.

Умумий ечим

$$x\ (t) = A \sin\ (kt + \varphi) - \frac{\lambda}{2k}\ t \cos\ kt$$

формула билан аниқланади. Бу формуладан кўринадики, вақт ўтиши билан тебранишнинг амплитудаси чексиз ортиб боради. Бу ҳодиса *резонанс ҳодисаси* деб юритилади. Резонанс ҳодисаси эркин тебраниш частотаси k таъсир этаётган куч частотаси ω га тенг бўлган ҳолдагина рўй беради.

2. $q\ (t) = \lambda \sin \omega t$; $h \neq 0$, $h < k$, h — етарли кичик. Бу ҳолда (2.40) тенглама

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = \lambda \sin \omega t \tag{2.43}$$

кўринишга келади. $h<k$ бўлгани учун $k^2 - h^2 > 0$. Мос характеристик тенгламанинг илдизлари $-h \pm i\sqrt{k^2 - h^2}$ лардан иборат.

Хусусий ечим ушбу

$$x\ (t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t$$

кўринишда изланиши лозим. Бу ердан $x'\ (t)$ ва $x''\ (t)$ ларни топиб, $x\ (t)$, $x'\ (t)$, $x''\ (t)$ ларнинг ифодасини (2.43) га қўямиз. Сўнгра мос коэффициентларни тенглаб топамиз:

$$B_1 = \frac{-2\ h\omega\ \lambda}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}; \qquad B_2 = \frac{(k^2 - \omega^2)\ \lambda}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\ \omega^2}.$$

Изланган хусусий ечим қуйидагича бўлади:

$$x = \frac{-2h\,\omega\lambda\cos\omega t + (k^2 - \omega^2)\,\lambda\sin\omega t}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}.$$

(2.43) нинг умумий ечимини ҳам ёзамиз:

$$x(t) = Ae^{-ht}\sin\left(\sqrt{k^2 - h^2 t} + \varphi\right) + \frac{-2h\,\omega\,\lambda\cos\omega t + (k^2 - \omega^2)\,\lambda\sin\omega t}{(k^2 - \omega^2) + 4h^2\omega^2}.$$

Вақт ўтиши билан биринчи қўшилувчи кичиклашиб боради. Демак, вақт ўтиши билан тебранишни фақатгина иккинчи қўшилувчи — мажбурий тебраниш аниқлайди. Унинг частотаси тебратувчи $g(x)$ кучнинг частотасига тенг, амплитудаси эса тебратувчи кучнинг амплитудасига пропорционал бўлиб, $k = \omega$ бўлганда резонанс ҳодисаси рўй беради.

Иккинчи бобга доир мисол ва масалалар

1. Турли дифференциал тенгламалар

Қуйидаги тенгламаларнинг умумий єчимини тспинг.

1. $xy'' = y'$.
2. $y'' = y' + x$.
3. $y'' = \frac{y'}{x} + x$.
4. $(1 + x^2)\,y'' + (y')^2 + 1 = 0$.
5. $xy'' = y'\ln\frac{y'}{x}$.
6. $(y'')^2 = y'$.
7. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$.
8. $y'' - 2\,\mathrm{ctg}\,xy' = \sin^3 x$.
9. $1 + (y')^2 = 2yy''$.
10. $(y')^2 + 2yy' = 0$.
11. $a^2y'' - y = 0$.
12. $y'' = \frac{1}{\sqrt{4y}}$.
13. $y'' + \frac{2}{1-y}\,(y')^2 = 0$.
14. $yy'' + (y')^2 = 1$.
15. $2yy'' - 3\,(y')^2 = 4y^2$.
16. $\cos y\,\frac{d^2y}{dx^2} + \sin y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{dy}{dx}$.
17. $y'y''' = 3\,(y'')^2 = 0$.

18. $x^2y''' = (y'')^2$.
19. $xy^{(5)} = y^{(4)}$.
20. $y^{\circ} y''' = y' y''$.
21. $y''' \, [1 + (y')^2] = 3y' \, (y'')^2$.

Берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимларни топинг.

22. $y'' \, (x^2 + 1) = 2xy'; \quad y|_{x=0} = 1. \quad y'|_{x=0} = 3$.

23. $y'' x + x \, (y')^2 - y' = 0; \; y|_{x=2} = 2, \quad y'|_{x=2} = 1$.

24. $yy'' - (y')^2 - (y')^3; \; y|_{x=1} = 1, \quad y'|_{x=1} = -1$.

25. Эгрилик радиусининг Oy ўқидаги проекцияси ўзгармас a сонга тенг бўлган эгри чизиқни топинг.

II. Чизиқли дифференциал тенгламалар

26. x^3 ва x^4 функциялар қандайдир иккинчи тартибли бир жинсли тенгламанинг ечимлари. Уларнинг фундаментал система ташкил қилишига ишонч ҳосил қилинг ва тегишли дифференциал тенгламани тузинг.

27. Ечимларининг фундаментал системаси x, x^3, e^x бўлган дифференциал тенглама тузинг.

28. $(1 - x^2) \; y'' - 2xy' + 2y = 0$ тенгламанинг битта хусусий ечими $y_1 = x$. Унинг умумий ечимини топинг.

29. $(2x - x^2) \; y'' + (x^2 - 2) \; y' + 2 \; (1 - x) \; y = 0$ тенглама $y_1 = e^x$ хусусий ечимга эга. Бу тенгламанинг $y|_{x=1} = 0$, $y'|_{x=1} = 1$ бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини топинг.

30. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$ тенглама учун $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ функциялар ечим. Унинг умумий ечимини топинг.

III. Чизиқли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар

Қуйидаги тенгламаларнинг умумий ечимини топинг.

31. $y'' + y' - 2y = 0$.
32. $y'' - 9y = 0$.
33. $y'' - 4y' = 0$.
34. $y'' - 2y' - y = 0$.
35. $3y'' - 2y' - 8y = 0$.
36. $y'' + y = 0$.
37. $y'' + 6y' + 13y = 0$.
38. $4y'' - 8y' + 5y = 0$.
39. $y'' - 2y' + y = 0$.
40. $4x''(t) - 20x'(t) + 25x(t) = 0$.
41. $y''' + 9y' = 0$.
42. $y^{(4)} - 13y'' + 36y = 0$.
43. $y^{(4)} = 8y'' - 16y$.
44. $y^{(4)} = 16y$.
45. $y^{(III)} - 13y' - 12y = 0$.
46. $y''' = 3y'' + 3y' - y = 0$.
47. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0$.
48. $y^{(n)} = y^{(n-2)}$.
49. $y^{(4)} + y = 0$.

Қуйидаги масалаларда тенгламаларнинг берилган бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини топинг.

50. $y'' - 4y' + 3y = 0;$ $\quad y\big|_{x=0} = 6,$ $\quad y'\big|_{x=0} = 10.$

51. $y'' + 4y' + 29y;$ $\quad y\big|_{x=0} = 0,$ $\quad y'\big|_{x=0} = 15.$

52. $y''' = -y';\ y\big|_{x=0} = 2,$ $\quad y'\big|_{x=0} = 0,$ $\quad y''\big|_{x=0} = -1.$

Қуйидаги бир жинсли бўлмаган тенгламаларнинг умумий ечимини топинг.

53. $2y'' + y' - y = 2e^x.$

54. $y'' - 7y' + 6y = \sin x.$

55. $y'' + 2y' + 5y = -\frac{7}{12}\cos 2x.$

56. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3.$

57. $y'' - 2' + 2y = 2x$

58. $y'' + 4y' - 5y = 1.$

59. $y'' - 3y' + 2y = g(x).$

бу ерда $g(x)$: 1) $10e^{-x}$; 2) $3e^{2x}$; 3) $2\sin x$; 4) $2x^3 - 30$; 5) $2e^x\cos\frac{x}{2}$; 6) $x - e^{-2x} + 1$; 7) $e^x(3 - 4x)$;

8) $3x + 5\sin 2x$, 9) $\mathrm{sh}\,x$.

60. $2y'' + 5y' = g(x)$, бу ерда $g(x)$: 1) $5x^2 - 2x - 1$; 2) e^x; 3) $29\cos x$; 4) $\cos^2 x$;

5) $29x\sin x$; 6) $100xe^{-x}\cos x$.

61. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3.$

62. $y''' - 3y' + 2y = e^{-x}(4x^2 + 4x - 10).$

63. $y^{(4)} + 8y'' + 16y = \cos x.$

64. $y^{(4)} + 2a^2y'' + a^4y = \cos ax.$

65. $y^{(4)} - y = xe^x + \cos x.$

Қуйидаги Эйлер тенгламаларининг умумий ечимини топинг.

66. $x^2y'' - 9xy' + 21y = 0.$

67. $x^2y'' + xy' + y = x.$

68. $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}.$

69. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3 - x.$

3-боб

ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ НОРМАЛ СИСТЕМАСИ

2-бобда дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси ҳақида дастлабки маълумотлар берилган эди. Мазкур бобда чизиқли дифференциал тенгламаларнинг нормал системасига бирмунча кенгроқ тўхталамиз. Бундай системалар учун ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теорема ҳам 2-бобда берилган эди (2-бобда кўрилган (2.15) системага ва 2.2-теоремага қаранг).

Маълумки, чизиқли тенгламалар системаси ушбу

$$y' = A(x)y + b(x) \tag{2.15}$$

вектор-матрицали кўринишида ёзилади, бунда $A(x)$ матрица ва $b(x)$ устун-вектор I интервалда аниқланган ва узлуксиз. (2.15) тенглама чизиқли бир жинсли бўлмаган,

$$y' = A(x)y \tag{3.1}$$

тенглама эса, чизиқли бир жинсли тенглама (вектор матрицали) деб юритилади.

1-§. ЧИЗИҚЛИ БИР ЖИНСЛИ ВЕКТОР-МАТРИЦАЛИ ТЕНГЛАМА

1. Чизиқли оператор ва ечимнинг хоссалари. Биз (3.1) кўринишдаги вектор-матрицали тенгламани ўрганамиз. Бунинг учун ушбу

$$L[y] = \frac{dy}{dx} - A(x)y$$

операторни киритамиз. Шу оператор ёрдамида (3.1) тенглама

$$L[y] = 0, \tag{3.1'}$$

(2.15′) тенглама эса

$$L[y] = b(x) \tag{3.2}$$

кўринишда ёзилиши мумкин.

L операторнинг баъзи хоссалари билан танишамиз.

1°. $L[Cy]=CL[y]$, $C=\text{const}\neq 0$.

Исбот. Равшанки, $L[Cy]=\frac{d(Cy)}{dx}-A(x)(Cy)=C\frac{dy}{dx}-$

$$-C\cdot A(x)y=C\left(\frac{dy}{dx}-A(x)y\right)=CL[y].$$

2.° $L[y^{(1)}+y^{(2)}]=L]y^{(1)}]+L[y^{(2)}]$.

Исбот. L операторнинг таърифига кўра

$$L[y^{(1)}+y^{(2)}]=\frac{d}{dx}(y^{(1)}+y^{(2)})-A(x)(y^{(1)}+y^{(2)})=$$

$$=\left[\frac{dy^{(1)}}{dx}-A(x)y^{(1)}\right]+\left[\frac{dy^{(2)}}{dx}-A(x)y^{(2)}\right]=L[y^{(1)}]+L[y^{(2)}].$$

Бу икки хоссадан қуйидаги натижа келиб чиқади:

$$L\left[\sum_{j=1}^{k}C_j y_j\right]=\sum_{j=1}^{k}C_jL[y_j],\ C_j=\text{const}.$$

Ҳақиқатан,

$$L\left[\sum_{j=1}^{k}C_j y_j\right]=\sum_{j=1}^{k}L[C_j y_j]=\sum_{j=1}^{k}C_jL[y_j].$$

Энди L операторнинг бу хоссаларидан фойдаланиб, (3.1) тенгламанинг ечимлари ҳақида баъзи тасдиқларни келтирамиз.

3.1-теорема. *Агар $y=\varphi(x)$, $x\in I$ вектор-функция* (3.1′) *тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда $y=C\varphi(x)$, $C=$ $=\text{const}$ функция ҳам шу* (3.1′) *тенгламанинг ечими бўлади.*

Исбот. Шарт бўйича $L[\varphi(x)]\equiv 0$, $x\in I$. Шунинг учун 1° хоссага кўра $L[C\varphi(x)]=CL[\varphi(x)]\equiv 0$. Теорема исбот бўлди.

3.2-теорема. *Агар $y=\varphi^{(1)}(x)$, $x\in I_1$ ва $y=\varphi^{(2)}(x)$, $x\in I_2$ функциялар* (3.1′) *тенгламанинг тегишли интервалларда аниқланган ечимлари бўлса, у ҳолда $y=$ $=\varphi^{(1)}(x)+\varphi^{(2)}(x)$ функция* (3.1′) *тенгламанинг $I=I_1\cap I_2$ интервалда аниқланган ечими бўлади.*

Исбот. 2° хоссага кўра I интервалда қуйидагига эгамиз:

$$L[\varphi^{(1)}(x)+\varphi^{(2)}(x)]=L[\varphi^{(1)}(x)]+L[\varphi^{(2)}(x)].$$

Шарт бўйича I интервалда $L[\varphi^{(1)}(x)] = 0$, $L[\varphi^{(2)}(x)] = 0$ айниятлар ўринли. Шунинг учун $L[\varphi^{(1)}(x)] + \varphi^{(2)}(x)] = 0$ экани келиб чиқади.

Натижа. *Агар* $y = \varphi^{(1)}(x)$, $x \in I_1, \ldots, y = \varphi^{(k)}(x)$, $x \in I_k$ *вектор-функциялар* (3.1′) *тенгламанинг тегишли интервалларда аниқланган ечимлари бўлса, у ҳолда* $y = \sum_{j=1}^{k} C_j \varphi^{(j)}(x)$, $C_j = \text{const}$ функция $I = \bigcap_{j=1}^{k} I_j$ *интервалда аниқланган ечим бўлади.*

Исбот. Ҳақиқатан, 1°, 2° хоссаларга ва 3.1 — 3.2-теоремаларга кўра қуйидагига эгамиз ($x \in I$ бўлганда):

$$L\left[\sum_{j=1}^{k} C_j \varphi^{(j)}(x)\right] = \sum_{j=1}^{k} L\left[C_j \varphi^{(j)}(x)\right] = \sum_{j=1}^{k} C_j L[\varphi^{(j)}(x)] \equiv 0.$$

3.3-теорема. *Агар* $A(x)$ *матрицаси ҳақиқий бўлган* (3.1′) *тенглама* $y = u(x) + iv(x)$, $x \in I$ *комплекс ечимга эга бўлса, у ҳолда* $u(x)$ *ва* $v(x)$ *функцияларнинг ҳар бири* (3.1) *тенгламанинг ечими бўлади.*

Исбот. Шарт бўйича $L[u(x) + iv(x)] \equiv 0$. 2° хоссага кўра $L[u(x) + iv(x)] = L[u(x)] + iL[v(x)] \equiv 0$. Бундан $L[u(x)] \equiv 0$, $L[v(x)] \equiv 0$ келиб чиқади.

2. Векторларнинг чизиқли боғлиқлиги ва эрклилиги. Вронский детерминанти. Агар I интервалда аниқланган $\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ $\left(\text{бунда } \varphi^{(j)}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{1j}(x) \\ \varphi_{2j}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{nj}(x) \end{pmatrix}\right)$ вектор-функциялар учун бир вақтда нолга тенг бўлмаган шундай $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ўзгармас сонлар мавжуд бўлсаки, шу сонлар учун $x \in I$ да

$$\alpha_1\varphi^{(1)}(x) + \alpha_2\varphi^{(2)}(x) + \ldots + \alpha_n\varphi^{(n)}(x) \equiv 0 \qquad (3.3)$$

айният ўринли бўлса, у ҳолда берилган $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ вектор-функциялар I интервалда *чизиқли боғлиқ* дейилади. Агар (3.3). айният $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ бўлгандагина ўринли бўлса, берилган $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ вектор-функциялар I интервалда *чизиқли эркли* дейилади.

Равшанки, (3.3) вектор-айният $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ларга нисбатан n та номаълумли n та чизиқли тенгламалар системасидан иборат. Унинг детерминантини $W(x) = W[\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}]$ деб белгилаймиз. Шундай қилиб,

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \ldots & \varphi_{(1n)}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \ldots & \varphi_{(2n)}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1}(x) & \ldots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} \qquad (3.4)$$

Бу детерминант система учун Вронский детерминанти дейилади.

3.4-теорема. *Агар (3.1′) вектор-матрицали тенгламанинг $A(x)$ матрицаси I интервалда узлуксиз бўлиб, шу тенгламанинг $\varphi^{(1)}(x)$, $\varphi^{(2)}(x)$, $\ldots$, $\varphi^{(n)}(x)$ ечимларидан тузилган (3.4) Вронский детерминанти I интервалнинг камида битта $x = x_0$ нуқтасида нолга тенг бўлса, у ҳолда $\varphi^{(1)}(x)$, $\varphi^{(2)}(x)$, $\ldots$, $\varphi^{(n)}(x)$ вектор-функциялар (ечимлар) I интервалда чизиқли боғлиқ бўлади, бошқача айтганда I да $W(x) \equiv 0$ бўлади.*

Исбот. $A(x)$ матрица узлуксиз бўлгани учун ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги 2.2-теореманинг шартлари бажарилади. Жумладан, $y(x_0) = 0$ бошланғич шарт ягона ечимни аниқлайди. У ечим $y(x) \equiv 0$ тривиал ечимдан иборат. Теорема шарти бўйича $W(x_0) = 0$. Шунинг учун бир вақтда нолга тенг бўлмаган C_1, C_2, $\ldots$, C_n сонлар учун

$$C_1\varphi^{(1)}(x_0) + C_2\varphi^{(2)}(x_0) + \ldots + C_n\varphi^{(n)}(x_0) = 0$$

айният ўринли. Энди $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi^{(j)}(x)$ вектор-функцияни кўрайлик. Аввало, L операторнинг хоссасига кўра:

$$L[\varphi(x)] = L\Big[\sum_{j=1}^{n} C_j\varphi^{(j)}(x)\Big] = \sum_{j=1}^{n} C_j L[\varphi^{(j)}(x)] \equiv 0,$$

яъни $y = \varphi(x)$ вектор-функция (3.1′) тенгламанинг ечимидан иборат. Сўнгра, $\varphi(x_0) = \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi^{(j)}(x_0) = 0$ га эгамиз. Шу бошланғич шартга эга бўлган ечим тривиал ечим $y(x) \equiv 0$ дан иборат эди, демак, $\varphi(x) \equiv y(x)$. Бундан

$\sum_{j=1}^{n} C_j \varphi^{(j)}(x) \equiv 0 \left(\sum_{j=1}^{n} C_j^2 \neq 0\right)$ экани, яъни $\varphi^{(1)}(x), \ldots,$ $\varphi^{(n)}(x)$ вектор-функциялар I интервалда чизиқли боғлиқ экани, яъни $W(x) \equiv 0$ экани келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\varphi^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 2e^x \end{pmatrix}, \quad \varphi^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 2e^{2x} \end{pmatrix}$$

векторлар $-\infty < x < +\infty$ интервалда чизиқли эркли. Ҳақиқатан, бу векторлар учун

$$\alpha_1 \varphi^{(1)}(x) + \alpha_2 \varphi^{(2)}(x) \equiv 0$$

ёки

$$\begin{cases} \alpha_1 e^x + 2\alpha_2 e^{2x} \equiv 0, \\ 2\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} \equiv 0 \end{cases}$$

айниятлар $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ бўлгандагина ўринли.

Эслатиб ўтамизки, $W[\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x)] = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ 2e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} =$ $= 2e^{3x} - 2e^{3x} \equiv 0$. Хулоса шуки, кўрилаётган векторлар учун Вронский детерминанти айнан нолга тенг, аммо улар чизиқли эркли. Юқоридаги 3.4-теоремага кўра бу векторлар бир вақтда битта дифференциал тенгламанинг ечими бўла олмайди.

2. Ушбу $\varphi^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \varphi^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$ векторлар $-\infty < x < +\infty$ интервалда $y_1' = y_2$, $y_2' = -y_1$ системанинг чизиқли эркли ечимларидан иборат.

Ҳақиқатан, бу векторлар учун

$$C_1\varphi^{(1)}(x) + C_2\varphi^{(2)}(x) \equiv 0 \text{ ёки } \begin{cases} C_1 \sin x + C_2 \cos x \equiv 0, \\ C_1 \cos x - C_2 \sin x \equiv 0 \end{cases}$$

айниятлар $C_1 = C_2 = 0$ бўлгандагина ўринли. Сўнгра берилган $\varphi^{(1)}(x)$ ва $\varphi^{(2)}(x)$ вектор-функциялар тегишли системанинг ечими эканига бевосита текшириш орқали ишонч ҳосил қилиш мумкин. Энди Вронский детерминантини ҳисоблайлик:

$$W[\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x)] = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} =$$

$$= -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0.$$

3. **Ечимларнинг фундаментал системаси ва умумий ечим.** Берилган (3.1′) тенгламанинг n та чизиқли эркли ечимлари системаси мавжуд. Ҳақиқатан,

$$\varphi^{(1)}(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \varphi^{(n)}(x_0) = $$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимлар чизиқли эркли ечимлар системасини ташкил этади.

Бу тасдиқни умумийроқ ҳолда исбот этамиз.

3.5-теорема. *Агар* $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{x}(x)$ *ечимлар учун* $W(x_0) \neq 0$, $x_0 \in I$ бўлса, $W(x) \neq 0$, $x \in I$ бўлади.

Исбот. $W(x)$ детерминантдан устун бўйича ҳосила оламиз:

$$W'(x) = \begin{vmatrix} \varphi'_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \ldots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi'_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \ldots & \varphi_{2n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi'_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} +$$

$$\vdots$$

$$+ \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi'_{12}(x) & \ldots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi'_{22}(x) & \ldots & \varphi_{2n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi'_{n2}(x) & \ldots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} +$$

$$+\ \dots\ +\begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi'_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}x & \dots & \varphi'_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi'_{nn}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= W_1(x) + W_2(x) + \dots + W_n(x).$$

Бундан кўринадики, $W'(x)$ ҳосила n та детерминант йиғиндисидан иборат. Улардан биринчисини оламиз. Унда $\varphi'_{11}(x)$, $\varphi'_{21}(x)$, $\dots$, $\varphi'_{n1}(x)$ ҳосилаларни тегишли ифодалари орқали ифодалаймиз:

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} \varphi'_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi'_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi'_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}\varphi_{11}(x) + a_{12}\varphi_{12}(x) + \dots + a_{1n}\varphi_{1n}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ a_{11}\varphi_{21}(x) + a_{12}\varphi_{22}(x) + \dots + a_{1n}\varphi_{2n}(x) & \varphi_{22}(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11}\varphi_{n1}(x) + a_{12}\varphi_{n2}(x) + \dots + a_{1n}\varphi_{nn}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} \varphi_{11}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(\varphi) \\ \varphi_{21}(x) & \varphi_{22}(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} +$$

$$+a_{12}\begin{vmatrix} \varphi_{12}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{22}(x) & \varphi_{22}(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n2}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+a_{1n}\begin{vmatrix} \varphi_{1n}(x) & \varphi_{12}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{2n}(x) & \varphi_{22}(x) & \dots & \varphi_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{nn}(x) & \varphi_{n2}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}W(x) + a_{12}\cdot 0 + \dots + a_{1n}\cdot 0 = a_{11}W(x).$$

Шундай қилиб, $W_1(x) = a_{11}W(x)$. Шунга ўхшаш ушбу $W_2(x) = a_{22}W(x), \dots, W_n(x) = a_{nn}W(x)$ формулаларни ҳам исботлаш мумкин. Демак, биз

$$W'(x) = (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})W(x)$$

формулага эгамиз. Уни $W(x)$ га нисбатан ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама каби (x_0 дан x гача) интегралласак,

$$W(x) = W(x_0)e^{\int\limits_{x_0}^{x}(a_{11}+\dots+a_{nn})dx} \tag{3.5}$$

формулага келамиз. Бундан $W(x_0) \neq 0$ бўлганда $W(x) \neq 0$, $x \in I$ экани келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Агар $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{jj}(x) = SpA(x)$ ($SpA(x)$ берилган $A(x)$ матрицанинг бош диагонал элементларининг йиғиндисини англатиб, *матрицанинг изи* деб аталади) деб белгиласак,

$$W(x) = W(x_0)e^{\int\limits_{x_0}^{x} SpA(x)dx} \tag{3.6}$$

формулага эга бўламиз. Уни система учун *Остроградский—Лиувилль* формуласи дейилади.

Равшанки, (3.1′) тенгламанинг ихтиёрий $n+1$ та ечими чизиқли боғлиқ. Буни кўрсатиш учун ихтиёрий ечим берилган чизиқли эркли ечимларининг чизиқли комбинацияси орқали ёзилиши мумкинлигини кўрсатиш етарли. Бошқача айтганда, берилган ечимдан иборат вектор қолган чизиқли эркли вектор-ечимлар бўйича ёйилиши мумкинлигини кўрсатиш етарли. Бу қуйидаги теоремада исботланган.

3.6-теорема. *Агар* $\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ *вектор-функциялар* I *интервалда аниқланган чизиқли эркли ечимлардан иборат бўлса, у ҳолда қаралаётган* (3.1′) *тенгламанинг ихтиёрий* $\varphi(x)$ *ечими қуйидаги*

$$\varphi(x) = C_1\varphi^{(1)}(x) + C_2\varphi^{(2)}(x) + \ldots + C_n\varphi^{(n)}(x) \qquad (3.7)$$

формула билан ($C_1, C_2, \ldots, C_n$ *ўзгармасларнинг ягона қийматлари учун*) *ёзилади.*

Исбот. Агар $\varphi^{(1)}(x_0) = \varphi_0^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}(x_0) = 0, \varphi_0^{(n)}$ ва $\varphi(x_0) = \varphi_0$ бошланғич шартлар берилган бўлса, (3.7) формулада $x = x_0$ деб $C_1, \ldots, C_n$ ларга нисбатан чизиқли система ҳосил қиламиз. Агар $\varphi(x) \equiv 0$, $\varphi_0 = 0$ бўлса, бир жинсли

$$\sum_{j=1}^{n} C_j\varphi^{(j)}(x_0) = \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_0^{(j)} = 0$$

системадан $W(x_0) \neq 0$ бўлгани учун $C_1 = \ldots = C_n = 0$ келиб чиқади. Агар $\varphi(x) \neq 0$ бўлса, $\varphi_0 \neq 0$ бўлгани учун бир жинсли бўлмаган

$$\sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_0^{(j)} = \varphi_0$$

системадан ($W(x_0) \neq 0$ бўлгани учун) $C_1, \ldots, C_n$ ларнинг ягона қийматларини топамиз. Демак, (3.7) ёйилма коэффициентлари ягона. Теорема исбот бўлди.

(3.7) ёйилма ихтиёрий $\varphi(x)$ ечим учун ёзилиши мумкин. Шунинг учун (3.7) формула *умумий ечим формуласи* деб юритилади.

Шундай қилиб, (3.1′) тенглама чизиқли эркли ечимларининг сони аниқ n та экан. Шу чизиқли эркли ечимлар системасини *ечимларнинг фундаментал системаси* дейилади.

Юқорида исботланган (3.6) теоремага кўра берилган фундаментал система бўйича умумий ечимни ёзиш мумкин. Демак, (3.1′) чизиқли бир жинсли системанинг умумий ечимини топиш масаласи унинг фундаментал системасини топишдан иборат.

Мисоллар. 1. Ушбу

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$

системани интегралланг.

Ечиш. Юқорида кўрилиши бўйича $\varphi^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$, $\varphi^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}$ вектор-функциялар берилган системанинг ечими ва ҳатто улар чизиқли эркли. Демак, улар фундаментал системани ташкил этади. Умумий ечим

$$y = C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

кўринишда ёзилади.

2. Ушбу

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_1 + 2y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= 2y_1 + y_2 \end{aligned}\right\}$$

системани интегралланг.

Ечиш. Текшириб кўриш мумкинки, $\varphi^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}$, $\varphi^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix}$ вектор-функциялар система учун ечимлардан иборат. Бу вектор-функциялар фундаментал системани ташкил этади. Ҳақиқатан,

$$W[\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}] = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-x} \\ e^{3x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{2x} - e^{2x} = -2e^{2x} \neq 0.$$

Шундай қилиб, умумий ечим

$$y = C_1 \begin{pmatrix} e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix}$$

кўринишда ёзилади.

Эслатма. Юқорида кўрилган мисолларда ечимлар қандай топилганлиги айтилмаган. Биз бу масалага чизиқли (бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган) ўзгармас коэффициентли системаларни ўрганишда қайтамиз.

2-§. ЧИЗИҚЛИ БИР ЖИНСЛИ БЎЛМАГАН ВЕКТОР МАТРИЦАЛИ ТЕНГЛАМА

1. Умумий ечим ҳақида. Энди аввалги параграфда эслатиб ўтилган (3.2) тенгламани ўрганишга ўтамиз.

3.7-теорема. *Агар $y=\bar{\varphi}(x)$, $x \in I$ вектор-функция берилган (3.2) чизиқли бир жинсли бўлмаган вектор-матрицали тенгламанинг ечими, $y=\varphi^{(1)}(x)$, $x \in I$ эса мос бир жинсли тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда $y=\varphi^{(1)}(x)+\bar{\varphi}(x)$ функция (3.2) тенгламанинг I интервалда аниқланган ечими бўлади.*

Исбот. Теорема шартига кўра:

$$L\,[\bar{\varphi}(x)] \equiv b(x), \quad L\,[\varphi^{(1)}(x)] \equiv 0.$$

Бундан $L[\bar{\varphi}(x)+\varphi^{(1)}(x)] = L[\bar{\varphi}(x)] + L[\varphi^{(1)}(x)] \equiv b(x)$. Теорема исбот бўлди.

3.8-теорема (умумий ечим ҳақида). *Агар $b(x)$ вектор ва $A(x)$ матрица I интервалда узлуксиз бўлиб, $y=\sum_{j=1}^{n} C_j\varphi^{(j)}(x)$ функция мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими ва $y=\bar{\varphi}(x)$ функция эса тегишли бир жинсли бўлмаган тенгламанинг ечими бўлса, у ҳолда бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими*

$$y=\sum_{j=1}^{n} C_j\varphi^{(j)}(x)+\bar{\varphi}(x) \tag{3.8}$$

формула билан ёзилади.

Исбот. Шарт бўйича $L\,[\bar{\varphi}(x)] \equiv b(x), L\left[\sum_{j=1}^{n} C_j\varphi^{(j)}(x)\right] \equiv 0$. Шунинг учун $L\left[\sum_{j=1}^{n} C_j\varphi^{j}(x)+\bar{\varphi}(x)\right] \equiv 0$, демак, (3.8) формула билан берилган функция (3.2) тенгламанинг ечимидир. (3.2) тенгламанинг ихтиёрий $y=g(x)$, $g(x)\not\equiv\bar{\varphi}(x')$ ечимини олайлик. $x=x_0$ бўлганда ушбу

$$g(x_0)=\sum_{j=1}^{n} C_j\,\varphi^{j}(x_0)+\bar{\varphi}(x_0) \tag{3.9}$$

системага эгамиз. Унда $g(x_0) \neq \overline{\varphi}(x_0)$ бўлгани учун (3.9) система $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ларга нисбатан бир жинсли бўлмаган чизиқли системадир. Унинг детерминанти $W(x_0)$ Вронский детерминантидан иборат, у ҳолда равшанки, $W(x_0) \neq 0$. Шунинг учун (3.9) системадан ягона $C_1^0, \ldots, C_n^0$ ларни топамиз. Демак, $g(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j^0 \varphi^{(j)}(x) + \overline{\varphi}(x)$. Бу эса (3.8) формула умумий ечим формуласи эканини исбот этади. Теорема исбот бўлди.

2. Ўзгармасни вариациялаш методи (Лагранж методи). Агар (3.2) тенгламага мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими маълум бўлса, у ҳолда бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечимини топиш мумкин. Бу — ўзгармасни вариациялаш методи билан амалга оширилади. Қуйида шу методнинг моҳияти билан танишамиз.

Айтайлик, $y = \sum_{j=1}^{n} C_j \varphi^{(j)}(x)$ функция (3.1′) тенгламанинг умумий ечими бўлсин. Бу формулада $C_1, \ldots C_n$ лар ихтиёрий ўзгармаслар экани маълум. Энди (3.2) тенгламанинг ечимини шунга ўхшаш

$$y = \sum_{j=1}^{n} g_j(x) \varphi^{(j)}(x), \quad g_j(x) \in C^1(I) \tag{3.10}$$

кўринишда излаймиз. (3.10) функция (3.2) тенгламанинг ечими бўлсин дейлик. У ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$y' = \sum_{j=1}^{n} g_j'(x) \varphi^{(j)}(x) + \sum_{j=1}^{n} g_j(x) \frac{d}{dx}(\varphi^{(j)}(x)).$$

Топилган ифодани (3.2) га қўямиз:

$$\sum_{j=1}^{n} g_j'(x) \varphi^{(j)}(x) + \sum_{j=1}^{n} g_j(x) \frac{d}{dx}(\varphi^{(j)}(x)) =$$

$$= A(x)\left[\sum_{j=1}^{n} g_j(x) \varphi^{(j)}(x)\right] + b(x).$$

Бундан $\frac{d}{dx}\left(\varphi^{(i)}(x)\right) = A(x)\varphi^{(i)}(x)$ эканини ҳисобга олиб қуйидагига эга бўламиз:

$$\sum_{j=1}^{n} g_j'(x)\,\varphi^{(j)}(x) + \sum_{j=1}^{n} g_j(x)\ [A(x)\,\varphi^{(j)}(x)] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} g_j(x)\,[A(x)\,\varphi^{(j)}(x)] + b(x)$$

ёки

$$\sum_{j=1}^{n} g_j'(x)\,\varphi^{(j)}(x) = b(x). \qquad (3.11)$$

Топилган (3.11) система учун $b(x) \not\equiv 0$ бўлганидан у $g_j'(x)$ ларга нисбатан чизиқли бир жинсли бўлмаган системадан иборат. Унинг детерминанти: $W[\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}] \neq \neq 0$, $x \in I$. Демак, (3.11) дан $g_j'(x)$ ларнинг ягона ифодаларини топамиз:

$$g_j'(x) = h_j(x).$$

Бундан $g_j(x) = \int h_j(x)\,dx + \overline{C}_j$. Бу ифодани (3.10) га қўямиз:

$$y = \sum_{j=1}^{n} \overline{C}_j\,\varphi^{(j)}(x) + \sum_{j=1}^{n} \varphi^{(j)}(x) \int h_j(x)\ dx, \qquad (3.12)$$

бу ерда $\overline{C}_j$ лар ихтиёрий ўзгармаслар.

Ўзгармасни вариациялаш методининг моҳияти ана шундан иборат. Топилган (3.12) формулага диққат билан эътибор қилсак, бу формула мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими $\sum_{j=1}^{n} \overline{C}_j\,\varphi^{(j)}(x)$ билан бир жинсли бўлмаган тенгламанинг ечими (хусусий ечими) $\sum_{j=1}^{n} \varphi_x^{(j)}(x) \int h_j(x)\ d\tau$ йиғиндисидан иборат. Бу функция ҳақиқатан ҳам хусусий ечим эканини кўрсатиш қийин эмас. Бунинг учун (3.2) тенглама айниятга айланишини кўрсатамиз:

$$y' = \frac{d}{dx}\left[\sum_{j=1}^{n} \varphi^{(j)}(x) \int h_j(x)\,dx\right] = \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{d}{dx}\,\varphi^{(j)}(x)\right)\int h_j x dx +\right.$$

$$+\varphi^{(i)}(x)h_i(x)\Big] = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dx}\varphi^{(i)}(x)\right)\int g_i'(x)dx + b(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dx}(\varphi^{(i)}(x))\right)\int [g_i'(x)] + b(x) = \sum_{i=1}^{n} A(x)(\varphi^{(i)}(x))[g_i(x)] +$$

$$+ b(x) = A(x)\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\varphi^{(i)}(x) + b(x) = A(x)y + b(x).$$

Бу содда ҳисоблашлар юқоридаги тасдиқни исботлайди.

Мисол. Ушбу

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + \dfrac{1}{\cos x}, \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$

системани интегралланг.

Ечиш. Мос бир жинсли системанинг умумий ечими (1-§ даги 3-п., 1-мисолга қаранг)

$$y = C_1\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}$$

кўринишда ёзилади. Системани ўзгармасни вариациялаш методи билан интеграллаймиз. Ечимни

$$y = g_1(x)\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix} + g_2(x)\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}$$

кўринишда излаймиз. $g_1'(x)$ ва $g_2'(x)$ ларни топиш учун ушбу

$$\begin{cases} g_1'(x)\cos x + g_2'(x)\sin x = \dfrac{1}{\cos x}, \\ -g_1'(x)\sin x + g_2'(x)\cos x = 0 \end{cases}$$

системага эгамиз. Ундан $W = 1$, $g_1'(x) = 1$, $g_2'(x) = \operatorname{tg} x$ ва $g_1(x) = x + \bar{C}_1$, $g_2(x) = -\ln|\cos x| + \bar{C}_2$ келиб чиқади. Шундай қилиб, умумий ечимни қуйидагича ёзамиз:

$$y = \bar{C}_1\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix} + \bar{C}_2\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix} + x\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix} - \ln|\cos x|\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}.$$

3-§. ЧИЗИҚЛИ ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ВЕКТОР-МАТРИЦАЛИ ТЕНГЛАМА

1. Чизиқли бир жинсли ўзгармас коэффициентли тенглама. Агар (3.1′) да $A(x) = \mathrm{const}$ бўлса, бу

$$y' = Ay \tag{3.13}$$

тенгламани чизиқли бир жинсли ўзгармас коэффициентли тенглама дейилади. Агар (3.2) да $A(x) = \text{const}$ бўлса, ҳосил бўлган

$$y' = Ay + b(x) \tag{3.14}$$

тенгламани чизиқли бир жинсли бўлмаган ўзгармас коэффициентли тенглама деб аталади. Қуйида (3.14) кўринишдаги вектор-матрицали тенгламаларни интеграллаш билан шуғулланамиз.

(3.13) вектор-матрицали тенглама ечимини

$$y = \alpha e^{kx} \tag{3.15}$$

кўринишда излаймиз, бунда $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ бирор ҳақиқий

ёки комплекс сон. (3.15) га кўра $y_1 = \alpha_1 e^{kx}$, $y_2 = \alpha_2 e^{kx}$. . . . , $y_n = \alpha_n e^{kx}$. Бу функциялардан ҳосила олиб, уларни (3.13) га қўямиз:

$$\alpha k e^{kx} = e^{kx} A \alpha$$

ёки

$$\alpha k = A \alpha.$$

Бундан

$$(A - kE)\alpha = 0, \; E \text{ — бирлик матрица } (*).$$

Қайд қиламизки, биз (3.13) тенгламанинг тривиал бўлмаган ечимини излаймиз, яъни (3.15) да $\alpha \neq 0$ (ёки барибир, $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0$) бўлсин. Бу бир жинсли тенгламанинг тривиал ечими бор экани равшан. Шундай қилиб, охирги муносабат $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ларга нисбатан чизиқли бир жинсли системадир. Бу система тривиал бўлмаган (яъни $\alpha \neq 0$ бўлган) ечимга ҳам эга бўлиши учун унинг детерминанти нолга тенг бўлиши зарур ва етарли. Демак, кўрилаётган ҳолда $|A - kE| = 0$ ($|A - kE|$ — бу $A - kE$ матрицанинг детерминанти) муносабат бажарилади. Бу k га нисбатан n-тартибли алгебраик тенгламадан иборат бўлиб, уни (3.13) тенгламага мос *характеристик тенглама* дейилади.

Характеристик тенгламани яна

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0 \quad (3.16)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенглама алгебранинг асосий теоремасига кўра n та илдизга эга. Биз a_{ij} элементлар ҳақиқий бўлган ҳолни кўрамиз. Бунда илдизлар ичида комплекслари бўлса, уларга қўшма бўлган комплекс сонлар ҳам илдиз бўлади.

Ҳар бир илдизга мос (3.15) ечимни топиш лозим. (3.16) тенгламанинг ўзаро фарқли илдизлари n та бўлиши ҳам, n тадан кам бўлиши ҳам мумкин. Шу ҳолларни алоҳида кўрамиз.

1) Характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил. Бу ҳолда ҳар бир $k=k_j$, $j=\overline{1,n}$ ни (*) тенгламага қўйиб, мос $\alpha^{(j)}$ векторни топамиз. Шу билан n та

$$y^{(j)}=\alpha^{(j)}e^{k_j x}, \quad j=\overline{1,n}$$

ечимни топамиз. Бу ечимлар чизиқли эркли, чунки $C_1(\alpha^{(1)}e^{k_1x})+C_2(\alpha^{(2)}e^{k_2x})+\dots+C_n(\alpha^{(n)}e^{k_nx})=0$ айният фақат $C_1=C_2=\dots=C_n=0$ бўлгандагина ўринли бўлади. Демак, топилган векторлар ечимларнинг фундаментал системасини ташкил этади. Шунинг учун умумий ечимни ёзиш мумкин бўлади.

Мисол. Ушбу

$$\begin{cases} y_1'=y_1+2y_2, \\ y_2'=2y_1+y_2 \end{cases}$$

системани интегралланг (1-§, 3-п., 2-мисолга қаранг).

Ечиш. Бу ҳолда $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ бўлиб, характеристик тенглама $\begin{vmatrix}1-k & 2\\ 2 & 1-k\end{vmatrix}=0$ ёки $(1-k)^2-4=0$ кўринишга эга. Тенгламани ечиб, $k=-1$, $k_2=3$ илдизларни топамиз. Илдизлар ҳақиқий ва ҳар хил. Аввал $k_1=-1$ га мос ечимни қурамиз:

$$y^{(1)}=\alpha^{(1)}e^{-x}=\begin{pmatrix}\alpha_1^{(1)}\\ \alpha^{(1)}\end{pmatrix}e^{-x}.$$

Бунда $\alpha_1^{(1)}$ ва $\alpha_2^{(1)}$ ларни топиш учун

$$\begin{cases}[1-(-1)]\alpha_1^{(2)}+2\alpha_2^{(1)}=0,\\ 2\alpha_1^{(1)}+[1-(-1)]\alpha_2^{(1)}=0\end{cases}$$

системага эгамиз. Уни соддароқ

$$\begin{cases}2\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0,\\ 2\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0\end{cases}\quad \text{ёки}\quad \alpha^{(1)}+\alpha_2^{(1)}=0$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бундан $\alpha_1^{(1)}=C_1$, $\alpha_2^{(1)}=-C_1$ деб олса бўлади, бу ерда — C_1 — ихтиёрий ўзгармас. Шундай қилиб, $y^{(2)}=\begin{pmatrix}C\\ -C_1\end{pmatrix}e^{-x}$. Агар $k_2=3$ бўлса, қуйидагига эгамиз:

$$y^{(2)}=\alpha^{(2)}e^{3x}=\begin{pmatrix}\alpha_1^{(2)}\\ \alpha_2^{(2)}\end{pmatrix}e^{3x}$$

ва

$$\begin{cases}(1-3)\alpha_1^{(2)}+2\alpha_2^{(2)}=0,\\ 2\alpha_1^{(2)}+(1-3)\alpha_2^{(2)}=0\end{cases}\quad \text{ёки}\quad \begin{cases}-2\alpha_1^{(2)}+2\alpha_2^{(2)}=0,\\ 2\alpha_1^{(2)}-2\alpha_2^{(2)}=0.\end{cases}$$

Бу системадан $\alpha_1^{(2)}=\alpha_2^{(2)}=C_2$ келиб чиқади, бу ерда C_2 — ихтиёрий ўзгармас. Шундай қилиб, $y^{(2)}=\begin{pmatrix}C_2\\ C_2\end{pmatrix}e^{3x}$. Умумий ечимни

$$y=C_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}e^{-x}+C_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^{3x}$$

кўринишда ёки координаталар бўйича

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}, \\ y_2 = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} \end{cases}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

2) характеристик тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва уларнинг ичида каррали илдизлар ҳам бор. Каррали бўлмаган оддий илдизларга мос ечимларни аввалги ҳолдаги каби топилади. Энди $k = k_S$ илдиз γ_S каррали бўлсин дейлик. Бу ҳолда мос ечим

$$y^{(S)} = (\alpha_0^{(S)} + \alpha_1^{(S)} x + \ldots + \alpha_{\gamma_S - 1}^{(S)} x^{\gamma_S - 1}) e^{k_S x} \quad (3.17)$$

кўринишга изланади, бу ерда

$$\alpha_0^{(S)} \begin{pmatrix} \alpha_{10}^{(S)} \\ \alpha_{20}^{(S)} \\ \vdots \\ \alpha_{n0}^{(S)} \end{pmatrix}, \ldots, \alpha_j^{(S)} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j}^{(S)} \\ \alpha_{2j}^{(S)} \\ \vdots \\ \alpha_{nj}^{(S)} \end{pmatrix}, \quad j = 0, \gamma_S - 1.$$

Мисол. Ушбу

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 4y_2, \\ y_2' = y_1 - y_2 \end{cases}$$

системани интеграллanг.

Ечиш. Аввал характеристик тенгламани тузамиз:

$$\begin{vmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -1-k \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ёки} - (3-k)(1+k) + 4 = 0.$$

Бундан:

$k^2 - 2k + 1 = 0$. Бу тенгламанинг илдизлари ўзаро тенг ва $k_{1,2} = 1$. Демак, $k = 1$ илдиз ҳақиқий ва икки каррали. Мос ечимни

$$y_1 = (a_1 + b_1 x)e^x,$$
$$y_2 = (a_2 + b_2 x)e^x$$

кўринишда излаймиз. Бундан: $y_1' = (a_1 + b_1 + b_1 x)e^x$, $y_2' = (a_2 + b_2 + b_2 x)e^x$. Энди бу ифодаларни берилган системага қўйсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\begin{cases} (a_1 + b_1 + b_1 x)e^x = 3(a_1 + b_1 x)e^x - 4(a_2 + b_2 x)e^x, \\ (a_2 + b_2 + b_2 x)e^x = (a_1 + b_1 x)e^x - (a_2 + b_2 x)e^x. \end{cases}$$

Бу ердан:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + b_1x = 3a_1 - 4a_2 + (3b_1 - 4b_2)x, \\ a_2 + b_2 + b_2x = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)x. \end{cases}$$

Мос коэффициентларни таққослаб топамиз:

$$x^0 : a_1 + b_1 = 3a_1 - 4a_2;\ a_2 + b_2 = a_1 - a_2.$$
$$x : b_1 = 3b_1 - 4b_2;\ b_2 = b_1 - b_2.$$

Охирги иккита тенгламадан $b_1 = 2b_2$ келиб чиқади. Шунинг учун $b_2 = C_2$ ни ихтиёрий ўзгармас деб олсак, $b_1 = 2C_2$, $b_2 = C_2$ бўлади. Биринчи икки тенгламадан $a_1 = 2a_2 + b_2$ келиб чиқади. Бунда a_2 ихтиёрий бўлиб қолади. Агар $a_2 = C_1$ десак, $a_1 = 2C_1 + C_2$ га эга бўламиз. Шундай қилиб, ечимни

$$y_1 = [2C_1 + C_2 + 2C_2x]e^x, \quad y_2 = (C_1 + C_2x)e^x$$

кўринишда ёзиш мумкин.

3) характеристик тенгламанинг илдизлари ичида оддий ва каррали комплекс илдизлар ҳам бор. Масалан, $k = a \pm ib$ илдизлар оддий илдиз бўлсин. Бу ҳолда мос ечимлар

$$y^{(1)} = \alpha^{(1)} e^{ax} \cos bx, \quad y^{(2)} = \alpha^{(2)} e^{ax} \sin bx,$$

$$\alpha^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha_n^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \alpha^{(2)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(2)} \\ \vdots \\ \alpha_n^{(2)} \end{pmatrix}$$ кўринишда изланади.

Агар $k = a \pm ib$ сон γ каррали комплекс илдиз бўлса, у ҳолда ечим

$$y^{(1)} = [\alpha_0^{(1)} + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{\gamma-1}^{(1)} x^{\gamma-1}]\, e^{ax} \cos bx,$$
$$y^{(2)} = [\alpha_0^{(2)} + \alpha_1^{(2)} x + \ldots + \alpha_{\gamma-1}^{(2)} x^{\gamma-1}]\, e^{ax} \sin bx$$

кўринишда изланади.

2. Чизиқли бир жинсли бўлмаган ўзгармас коэффициентли тенглама. Аввало эслатамизки, биз (3.14) кўринишдаги вектор-матрицали тенгламага эгамиз ва унинг умумий ечимини мос бир жинсли тенглама умумий ечими бўйича ўзгармасни вариациялаш методи билан топишимиз мумкин. Баъзи ҳолларда $b(x)$ вектор-функция махсус кўринишга эга бўлади. Бу махсус кўринишдаги функция квазикўпҳаддан иборат бўлиб, бундай функция $g(x)e^{kx}$ кўринишга эга ва $g(x)$ — бирор тартибли вектор-кўпҳад, k — ҳақиқий ёки комплекс сон бўлади. Агар k — комплекс сон бўлса,

$e^{kx} = e^{(k_1+ik)}x = e^{k_1x}(\cos k_2x + i\sin k_2x)$ формулага кўра вектор-матрицали тенгламанинг ўнг томони ўрнида $g(x)e^{k_1x}\cos k_2x$ ва $g(x)e^{k_1x}\sin k_2x$ вектор-функциялар олинади.

1) агар k сон характеристик тенгламанинг оддий илдизи бўлса, мос ечим $h(x)e^{kx}$ кўринишда изланади, бунда $h(x)$ — коэффициентлари номаълум бўлган, тартиби эса $g(x)$ вектор-кўпҳаднинг тартиби билан бир хил бўлган вектор-кўпҳаддир.

2) агар k сон характеристик тенгламанинг γ каррали илдизи бўлса, мос ечим $x^{\gamma-1}h(x)e^{kx}$ кўринишда изланади.

Мисол. Ушбу

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + e^x, \\ y_2' = 2y_1 + y_2 + e^{3x} \end{cases}$$

системани интегралланг.

Ечиш. Аввал характеристик тенгламани тузамиз ва ечамиз. У тенглама

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 2 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ёки} \quad (1-k)^2 - 4 = 0$$

кўринишга эга. Бундан: $k^2 - 2k + 1 - 4 = 0$ ёки $k^2 - 2k - 3 = 0$. Унинг илдизлари: $k_1 = 3$, $k_2 = -1$. Берилган системада $b_1(x) = e^x$, $b_2(x) = e^{3x}$ бўлиб, бунда $k_1 = 3$ характеристик тенгламанинг 1 каррали илдизидир. Буни ҳисобга олган ҳолда хусусий ечимни

$$y_1 = b_1e^x + (b_2 + b_3x)e^{3x},$$
$$y_2 = a_1e^x + (a_2 + a_3x)e^{3x}$$

кўринишда излаймиз. Тегишли ҳосилалар олиб, уларни берилган системага қўямиз ва сўнгра содда ўзгартиришлар бажарамиз:

$$y_1' = b_1e^x + (b_3 + 3b_2 + 3b_3x)e^{3x},$$
$$y_2' = a_1e^x + (a_3 + 3a_2 + 3a_3x)e^{3x},$$

$$\begin{cases} b_1e^x + (b_3 + 3b_2 + 3b_3x)e^{3x} = b_1e^x + (b_2 + b_3x)e^{3x} + \\ + 2(a_2 + a_3x)e^{3x} + e^x, \\ a_1e^x + (a_3 + 3a_2 + 3a_3x)e^{3x} = 2b_1e^x + 2(b_2 + b_3x)e^{3x} + \\ + a_1e^x + (a_2 + a_3x)e^{3x} + e^{3x}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = b_1 + 2a_1 + 1, & b_3 + 3b_2 + 3b_3x = b_2 + b_3x + 2a_2 + 2a_3x, \\ a_1 = 2b_1 + a_1, & a_3 + 3a_2 + 3a_3x = 2b_2 + 3b_3x + a_2 + a_3x + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 1 = 0, & b_3 + 3b_2 = b_2 + 2a_2, & 3b_3 = b_3 + 2a_3; \\ 2b_1 = 0, & a_3 + 3a_2 = 2b_2 + a_2 + 1, & 3a_3 = 2b_3 + a_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2}; \quad b_1 = 0; \\ b_3 + 2b_2 = 2a_2; \\ 2b_3 = 2a_3, \\ 2b_2 = a_3 + 2a_2 - 1; \end{cases}$$

Охирги тенгламалардан $a_3 = b_3 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $b_2 = 0$ келиб чиқади. Шундай қилиб, берилган системанинг хусусий ечими $y_1 = \frac{1}{2} xe^{3x}$, $y_2 = -\frac{1}{2} e^x + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} x\right) e^{3x}$ кўринишга эга бўлади.

Мос бир жинсли системанинг умумий ечимини ҳам топиш қийин эмас. Ушбу

$$\begin{cases} y_1 = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}, \\ y_2 = C_1e^{3x} - C_2e^{-x} \end{cases}$$

вектор-функция тегишли умумий ечим эканлигини бевосита текшириб кўриш мумкин. Шундай қилиб, берилган бир жинсли бўлмаган системанинг умумий ечими

$$y_1 = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{2} xe^{3x},$$

$$y_2 = C_2e^{3x} - C_2e^{-x} - \frac{1}{2} e^x + \left(\frac{1}{4} + \frac{x}{2}\right) e^{3x}$$

вектор-функциядан иборат.

3- § га доир мисоллар

I. Қуйидаги бир жинсли системаларни интегралланг:

1. $\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_1; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y_1' = -5y - y_2, \\ y_2 = 2y_1 - 3y_2; \end{cases}$ 3. $\begin{cases} y_1' = -5y_1 - y_2, \\ y_2 = y_1 - 3y_2; \end{cases}$

4. $\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_2 + 4y_3, \\ y_3' = y_1 - 4y_3; \end{cases}$ 5. $\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_3, \\ y_3' = y_1 + y_2; \end{cases}$

6. $\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 - y_2 + y_3, \\ y_3' = y_1 + y_2 - y_3. \end{cases}$

II. Қуйидаги бир жинсли бўлмаган системалар учун хусусий ечим қандай кўринишда изланади:

7. $\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_1 + e^x; \end{cases}$ 8. $\begin{cases} y_1' = -5y_1 - y_2 + 3e^x - 7, \\ y_2' = 2y_1 - 3y_2 - 3e^x; \end{cases}$

9. $\begin{cases} y_1' = -y_2 + \cos x, \\ y_2' = -y_1 + \sin x; \end{cases}$

10. $\begin{cases} y_1' = -5y_1 - y_2 + e^x, \\ y_2' = y_1 - 3y_2 + e^{2x}; \end{cases}$ 11. $\begin{cases} y_1' = ay_1 - by_2 + e^{ax}\cos x, \\ y_2' = by_1 + ay_2 + e^{ax}\sin x; \end{cases}$

12. $\begin{cases} y_1' = ay_1 - by_2 + 2\cos x, \\ y_2' = by_1 + ay_2 + e^x; \end{cases}$ 13. $\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3 + 5, \\ y_2' = y_1 + y_3 + x, \\ y_3' = y_1 + y_2 - 7; \end{cases}$

14. $\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 + y_3 + 2x, \\ y_2' = y_1 - y_2 + y_3 + 7, \\ y_3' = y_1 + y_2 - y_3 - \sin x; \end{cases}$ 15. $\begin{cases} y_1' = -y_1 - y_2 + x^2, \\ y_2' = -y_2 - y_3 + 2x. \\ y_3' = -y_3 + x? \end{cases}$

III. Қуйидаги бир жинсли бўлмаган системаларнинг умумий ечимини ўзгармасни вариациялаш методи билан топинг:

1. $\begin{cases} y_1' = y_2 + 1, \\ y_2' = y_1 + \frac{1}{\sin x}; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y_1' = -5y_1 - y_2 + \frac{1}{\cos x}, \\ y_2' = 2y_1 - 3y_2 - 3; \end{cases}$

3. $\begin{cases} y_1' = -5y_1 - y_2 + x, \\ y_2' = y_1 - 3y_2 + \sin^2 x; \end{cases}$ 4. $\begin{cases} y_2' = y_2 + \cos^2 x, \\ y_2' = -y_1 - x; \end{cases}$

5. $\begin{cases} y_1' = y_2 + \cos x, \\ y_2' = -y_1 + 1; \end{cases}$ 6. $\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -\omega^2 y_1 + \cos\omega_1 x, \quad \omega \neq \omega_1; \end{cases}$

7. $\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -\omega^2 y_1 + \cos\omega x; \end{cases}$ 8. $\begin{cases} y_1' = ay_1 - by_2 + xe^{ax}\sin x, \\ y_2' = by_1 + ay_2 + 5e^{ax}\cos x. \end{cases}$

4-§. АВТОНОМ СИСТЕМАЛАР. УМУМИЙ ХОССАЛАР

Дифференциал тенгламаларнинг нормал системасини (2-бобнинг 2-§ даги (2.6) га қаранг) ушбу

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{array}\right|$$

кўринишда ёзган эдик. Агар (2.6) системада $f_1(x, y_1, \ldots, y_n)$, $f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$ функциялар x га ошкор боғлиқ бўлмаса, у ҳолда бу система

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, \ldots, y_n), \\ y_2' &= f_2(y_1, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= f_n(y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

кўринишда ёзилади. (3.18) кўринишда ёзилган нормал системани биринчи тартибли дифференциал тенгламаларнинг *нормал автоном* (ёки *динамик*) системаси дейилади.

Жуда кўп татбиқий масалаларни ечишда (3.18) кўринишдаги автоном системалар билан тавсифланадиган жараёнларни ўрганишга тўғри келади. Шу жиҳатдан автоном системалар муҳим аҳамият касб этади. Назарий жиҳатдан ҳам автоном системаларнинг бошқа системалардан фарқ қиладиган характерли хоссалари мавжуд.

Қайд қилиб ўтамизки, ихтиёрий нормал системани тенгламалари сонини биттага ошириш ҳисобига автоном системага келтириш мумкин. Ҳақиқатан, (2.6) системада $x = y_{n+1}$ деб, $y'_{n+1} = 1$ тенгламани ҳосил қилиш мумкин. Бунда (2.6) система ўрнига

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_{n+1}, y_1, \ldots, y_n), \\ y_2' &= f_2(y_{n+1}, y_1, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= f_n(y_{n+1}, y_1, \ldots, y_n), \\ y'_{n+1} &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

автоном системага эга бўламиз.

Автоном системанинг баъзи муҳим хоссаларига тўхталамиз.

1-лемма. *Агар $y = \varphi(x)$, $x \in I$ функция (3.18) системанинг ечими бўлса, у ҳолда шундай ўзгармас C лар топиш мумкинки, $y = \varphi(x+C)$ функция ҳам бу системанинг ечими бўлади.*

Исбот. Ҳақиқатан, равшанки,

$$\frac{d\varphi(x+C)}{dx} = \frac{d\varphi(x+C)}{d(x+C)} = f(\varphi(x+C)),$$

бу ерда $\varphi(x)$ ва $f(y)$ лар n ўлчовли устун-векторлар. Лемма исбот бўлди.

Агар $y = \varphi(x)$, $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$ вектор-функция (3.18) системанинг I интервалда аниқланган ечими бўлса, у ҳолда ушбу $\{y : y = \varphi(x),\ x \in I\}$ тўплам n ўлчовли R^n фазода эгри чизиқни тавсифлайди. $y = \varphi(x)$, $x \in I$ эса бу чизиқнинг параметрик тенгламасидан иборат. Шу эгри чизиқни автоном системанинг *ҳолат траекторияси*, тегишли фазони эса автоном системанинг *ҳолатлар фазоси* деб юритилади. Ҳолатлар фазосининг характерли хусусиятларидан бири шуки, $n+1$ ўлчовли R^{n+1} фазода чизилган интеграл эгри чизиқни абсцисса ўқи бўйлаб R^n фазога ортогонал проекцияласак, ҳосил бўлган эгри чизиқ ҳолат траекториясидан иборат бўлади.

Кўпинча ҳолат траекториясини ўрганиш интеграл эгри чизиқлар ҳақида тўла тасаввурга эга бўлиш учун етарли бўлади.

2-лемма. *Автоном системанинг иккита ҳолат траекторияси ё битта ҳам умумий нуқтага эга эмас, ёки улар ўзаро устма-уст тушади.*

Исбот. Автоном системанинг иккита ҳолат траекториясини $y = \varphi(x)$ ва $y = \psi(x)$ деб белгилайлик. $x_1 \neq x_2$ бўлганда $\varphi(x_1) = \psi(x_2) = y_0$ бўлсин дейлик. Агар $x_1 = x_2$ бўлса, $\varphi(x_1) = \psi(x_1) = y_0$ дан x_1 нинг бирор атрофида $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ экани келиб чиқади (мулоҳазаларимизда автоном система учун ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теореманинг шартлари бажарилади деб фараз қиляпмиз). Шунинг учун $x_1 \neq x_2$ ҳолни кўриш лозим. Ушбу $y = \psi(x + x_2 - x_1) \equiv \eta(x)$ вектор-функцияни кўрамиз. Бу функция $\eta(x_1) = \psi(x_1 + x_2 - x_1) = \varphi(x_2) = y_0$ бўлгани учун 1-леммага кўра (3.18) системанинг ечимидан иборат. Аммо $\varphi(x_1) = y_0$ бўлгани учун $\eta(x) \equiv \varphi(x)$, яъни $\varphi(x) \equiv \psi(x + x_2 - x_1)$. Лемма исбот бўлди.

Навбатдаги хоссаларни келтиришдан аввал қуйидаги муҳим таърифни киритамиз:

Таъриф. Агар $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R^n$ нуқта учун

$$f(a) = 0$$

вектор-тенглик ўринли бўлса, у ҳолда a нуқта (3.18) системанинг *мувозанат ҳолати* дейилади.

3-лемма. *Агар $y = a$ нуқта* (3.18) *системанинг мувозанат ҳолати бўлса, $y(x) \equiv a$ вектор-функция шу системанинг $-\infty < x < +\infty$ интервалда аниқланган ечими бўлади.*

Исбот. Ҳақиқатан, $y = a$ бўлса, $\frac{dy}{dx} = \frac{da}{dx} = 0$ ва $f(y(x)) = f(a) = 0$ дан $\frac{da}{dx} \equiv f(a)$ келиб чиқади.

4-лемма. *Агар $y=a$ нуқта* (3.18) *системанинг мувозанат ҳолати бўлса, у ҳолда $y(x)=a$ шу системанинг ҳолат траекторияси бўлади.*

Исботи равшан. Қайд қиламизки, агар a нуқта (3.18) системанинг мувозанат ҳолати бўлиб, бирор $x=x_0$ учун R^nфазода $y(x)$ нуқта $y=a$ нуқтада бўлса, у ҳолда x нинг қолган барча $x \in I$ қийматлари учун ҳам $y(x)$ нуқта шу мувозанат ҳолатида бўлади. Шу фикрнинг маъносидан эркли ўзгарувчи x вақт ролини ўйнаётгани кўриниб турибди. Кейинги мулоҳазаларимизда x ни вақт t га алмаштириб ёзамиз. Шундай қилиб, агар бирор моментда нуқта мувозанат ҳолатида бўлса, у қолган вақт давомида ҳам шу ҳолатда бўлади, яъни ҳаракат қилмайди.

5-лемма. *Нуқтадан фарқ қиладиган ҳолат траекторияси силлиқ эгри чизиқдан иборат.*

Исбот. Ҳақиқатан, агар $y=\varphi(t)$ функция (3.18) системанинг ечими бўлиб, мувозанат ҳолатидан фарқ қилса, у ҳолда $t=t_0$ да $y^0=\varphi(t_0)$ нуқтада уринма бектор $\frac{d\varphi(t_0)}{dt}$ га тенг. Аммо $\frac{d\varphi(t_0)}{dt}=f(\varphi(t_0))=f(y^0)$. Энди $\varphi(t_0)=y^0$ нуқта ихтиёрий эканидан лемманинг исботи келиб чиқади.

Қуйида ҳолат траекторияларининг турларини ажратиб берадиган муҳим теоремани келтирамиз.

3.9-теорема. (3.18) *автоном системанинг ҳолат траекторияси қуйидаги уч типдан биронтасига мансуб бўлади:*

1) *ўзини-ўзи кесмайдиган нуқтадан фарқли силлиқ эгри чизиқ;*

2) *ёпиқ силлиқ чизиқ (цикл);*

3) *нуқта.*

Агар $y=\varphi(t)$ ечимга мос ҳолат траекторияси силлиқ ёпиқ эгри чизиқдан иборат бўлса, бу ечим $T>0$ даврли функция бўлади.

Исбот. Агар ҳолат траекторияси мувозанат ҳолатидан фарқ қилса, бу чизиқ 5-леммага кўра силлиқ эгри чизиқ бўлади ва у ё ёпиқ бўлади, ёки ёпиқ бўлмайди.

$y=\varphi(t)$ ечимга мос ёпиқ ҳолат траекториясини Γ деб белгилайлик. Бу ечим даврий эканини исбот қиламиз. Бирор $a \in \Gamma$ ни оламиз. 1-леммага кўра $a=\varphi(0)$ деб олса бўлади. Шу траекториянинг элементар ёйи узунлиги қуйидагича топилади:

$$ds=|dx|=\left|\frac{dy}{dt}\right|dt=|f(\varphi(t))|dt. \qquad (3.20)$$

$f(\varphi(t))$ функция Γ да қуйидан ва юқоридан чегараланган, чунки Γ — нуқталарнинг чегараланган тўплами деб қаралиши мумкин, яъни $0<m\leqslant|f(y)|\leqslant M<\infty$, $y\in\Gamma$. Энди (3.20) ни 0 дан t гача интеграллаймиз ва тегишли ёй узунлигини $l(t)$ деб белгилаймиз:

$$l(t)=\int_0^t |f(\varphi(\tau)|d\tau.$$

Бундан $l(t)=\int_0^t |f(\varphi(\tau))|d\tau\geqslant mt$, яъни $l(t)\geqslant mt$. Демак, $l(t)$ функция t нинг монотон ўсувчи функциясидир. Шундай қилиб, $l(T)=l$ бўладиган ягона $T>0$ мавжуд. Шунинг учун равшанки, $\varphi(T)=\varphi(0)$. Бу муносабат биринчи марта бажариладиган T нинг қийматини топиш учун ушбу

$$l=\int_0^T |f(\varphi(\tau))|\,d\tau \tag{3.21}$$

тенгламанинг энг кичик мусбат ечимини (илдизини) топиш лозим бўлади. Теорема исбот бўлди.

Мисол. Ушбу

$$\begin{cases} y_1'=y_2, \\ y_2'=-y_1 \end{cases}$$

системанинг мувозанат ҳолати ва даврий ечимларини топинг. Сўнгра (1,0) нуқтадан ўтадиган ёпиқ ҳолат траекторияси ёйи узунлигини ҳисобланг.

Ечиш. Маълумки, юқоридаги системанинг умумий ечими

$$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1\sin t-C_2\cos t \\ C_1\cos t+C_2\sin t \end{pmatrix}$$

дан иборат. Бу ечимни яна

$$y_1=A\cos(t+\alpha),$$
$$y_2=A\sin(t+\alpha),$$

($A>0$, α — ихтиёрий ўзгармас) кўринишда ҳам ёзиш мумкин. Равшанки, $y_1^2+y_2^2=A^2$. Маркази координаталар бошида бўлган концентрик айланалар оиласи ҳосил бўлди.

Бу айланалар ичида (1,0) нуқтадан ўтадигани $y_1^2 + y_2^2 = 1$ айланадир, унинг радиуси: $A=1$. Бир томондан, бу айлана ёйининг узунлиги 2π га тенг. Иккинчи томондан, $A=1$ бўлганда шу айлананинг параметрик тенгламаси

$$y_1 = \cos(t+\alpha) \quad (= \varphi_1(t)),$$
$$y_2 = \sin(t+\alpha) \quad (= \varphi_2(t))$$

каби ёзилади. Шунинг учун $|f(\varphi(t))| = \sqrt{f_1^2(\varphi(t)) + f_2^2(\varphi(t))} =$

$= \sqrt{\sin^2(t+\alpha) + \cos^2(t+\alpha)} = 1$. Демак, $2\pi = \int\limits_0^T 1 \cdot d\tau$ дан $T = 2\pi$ келиб чиқади. Энг кичик давр $T = 2\pi$ дан иборат. Шу билан бирга $k\cdot 2\pi$, $k = \pm 2, \pm 3, \ldots$ сонлар ҳам давр бўлади.

5-§. ЧИЗИҚЛИ БИР ЖИНСЛИ ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ СИСТЕМАНИНГ ҲОЛАТЛАР ТЕКИСЛИГИ

Чизиқли бир жинсли ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли системани кўрайлик. Бундай система

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned}\right| \qquad (3.22)$$

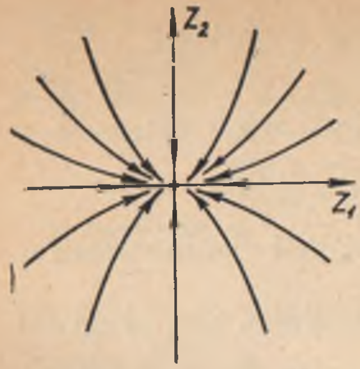
кўринишда ёзилади ($a_{ij} = \text{const}$). Бу системанинг мувозанат ҳолати

$$\left\{\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 &= 0, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 &= 0 \end{aligned}\right. \qquad (3.23)$$

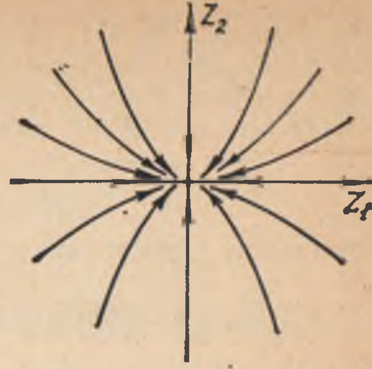
системанинг тривиал ечими $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ дан иборат бўлиб, ҳолатлар текислигида координаталар бошидан иборат. Бизни шу мувозанат ҳолат атрофида ҳолат траекторияларининг кўриниши (тасвири) қизиқтиради. Бу эса $|A| = \det(a_{ij})$ детерминантга боғлиқ бўлади, чунки мос характеристик тенглама

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.24)$$

кўринишда ёзилиши маълум. (3.24) тенглама k га нисбатан квадрат тенглама бўлиб, унинг илдизлари k_1, k_2 ҳақиқий ёки комплекс бўлиши мумкин. Эслатиб ўтамизки, a_{ij} лар ҳақиқий ўзгармаслардир.



20- чизма.



21- чизма.

I. k_1 *ва* k_2 ҳақиқий, ҳар хил ва нолдан фарқли.

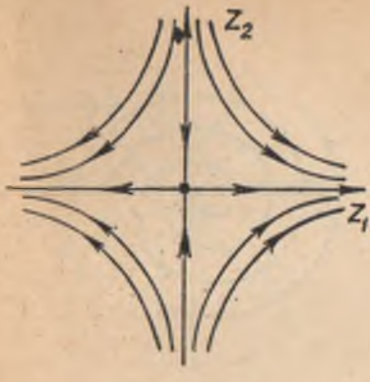
1) k_1 ва k_2 лар бир хил ишорага эга. Шу ҳолга ва умуман, I ҳолга тегишли мулоҳазаларни (3.22) системани соддароқ кўринишга келтириб олиб борилса қулай бўлади. Эслатилган I ҳолда ўзгарувчиларни шундай алмаштириш мумкинки, натижада ҳосил бўлган система

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = k_1 z_1, \\ \dfrac{dz_2}{dt} = k_2 z_2 \end{cases} \tag{3.25}$$

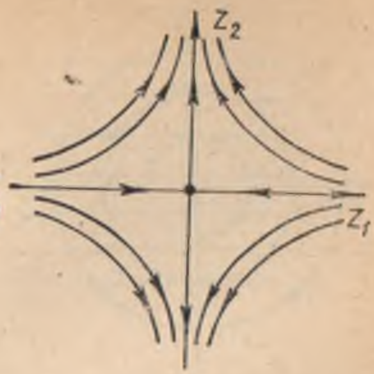
кўринишга келади. Бундан $z_1 = C_1 e^{k_1 t}$, $z_2 = C_2 e^{k_2 t}$. Бу (z_1, z_2) текисликда ҳолат траекторияларининг параметрик тенгламасидир.

Агар $k_1 < 0$, $k_2 < 0$ бўлиб, $k_1 > k_2$ бўлса, траекториялар 20- чизмадагидек бўлади; агар $k_1 < 0$, $k_2 < 0$, $k_1 < k_2$ бўлса, траекториялар 21- чизмадагидек бўлади. Ҳар икки ҳолда ҳам ҳосил бўлган картина *тургун тугун картинаси* (ҳамма траекториялар бўйича ҳаракат $t \to +\infty$ да мувозанат ҳолати томон йўналган) дейилади. Агар $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ бўлса, биз яна юқоридаги картинанинг ўзига — фақат йўналиши тескари бўлган ҳолда — эга бўламиз. Бундай картина *тургунмас тугун картинаси* дейилади.

2) k_1 ва k_2 лар турли ишораларга эга. Агар $k_2 < 0 < k_1$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда биз *эгар* картинасига эгамиз. Бу 22- чизмада тасвирланган. Агар $k_1 < 0 < k_2$ бўлса, картина 23- чизмадагидек бўлади.



22- чизма.



23- чизма.

II. k_1 ва k_2 комплекс сонлар. Бу ҳолда шундай алмаштириш топиладики, натижада янги номаълумларга нисбатан

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = az_1 - bz_2, \\ \dfrac{dz_2}{dt} = bz_1 + az_2, \ b \neq 0 \end{cases} \tag{3.26}$$

система ҳосил бўлади. Юқорида $k_1 = a + ib$, $k_2 = a - ib$ деб қаралди. (3.26) системанинг умумий ечимини

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= Re^{at}\cos(bt + \alpha), \\ z_2 &= Re^{at}\sin(bt + \alpha), \ R > 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

деб ёзиш мумкин. Бу эса ҳолат траекторияларининг параметрик тенгламаларидир. Траекторияларни чизиш учун $r = Re^{at}$, $\varphi = bt + \alpha$ қутб координаталарини киритамиз.

Топамиз: $t = \dfrac{\varphi - \alpha}{b}$ ва $r = Re^{a \cdot \frac{\varphi - \alpha}{b}} = Re^{-\frac{a}{b}\alpha} \cdot e^{\frac{a}{b}\varphi} = P \times$ $\times e^{\frac{a}{b}\varphi}$. Шундай қилиб, $r = P \cdot e^{\frac{a}{b}\varphi}$, $P = Re^{-\frac{a}{b}\alpha}$ тенгламага эгамиз. Охирги тенглама қутб координаталар системасида берилган *спиралдан* иборат. Агар $a = 0$ бўлса, $r = P$ — маркази координаталар бошида бўлган концентрик айланаларга эгамиз. Бу ҳолда картина *марказ картинаси* дейилади (24- чизма). Агар $a \neq 0$ бўлса, *фокус картинасига* эгамиз. Бу картина $a < 0$, $b > 0$ бўлганда турғун

24- чизма.

25- чизма.

фокус, $a > 0$, $b > 0$ бўлганда эса турғунмас фокус дейилади (25- чизма).

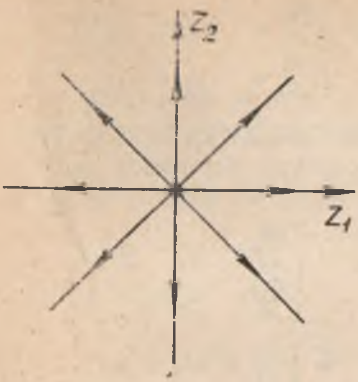
III. Агар система

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = z_1, \\ \dfrac{dz_2}{dt} = z_2 \end{cases}$$

кўринишга эга бўлса, $k_1 = k_2 = 1$ бўлган ҳолга эгамиз. Бу ҳолда $z_1 = C_1 e^t$, $z_2 = C_2 e^t$ ва $z_2 = \frac{C_2}{C_1} z_1$ муносабатлар келиб чиқади. Охирги тенглама координаталар бошидан ўтадиган тўғри чизиқлар дастасидан иборат (26- чизма).

Агар $\frac{dz_1}{dt} = z_1$, $\frac{dz_2}{dt} = 0$ бўлса, $z_1 = C_1 e^t$, $z_2 = C_2$ келиб чиқади. Агар $z_1 = 0$ бўлса, ордината ўқи мувозанат ҳолатлари тўпламидан иборат бўлади (27- чизма). Юқоридагига ўхшаш $\frac{dz_1}{dt} = 0$, $\frac{dz_2}{dt} = z_2$; $\frac{dz_1}{dt} = z_1 + a_{12} z_2$, $\frac{dz_2}{dt} = z_2$; ... ва бошқа системаларни ҳам текшириб, ҳолат траекторияларини картинасини чизиш мумкин.

Эслатма. Ҳолат траекторияларининг ҳолат текислигидаги картинаси z_1, z_2 ўзгарувчиларнинг декарт координата текислигида чизилди. 5- § да чизилган чизмаларда z_1 ва z_2 координата ўқлари ўзаро перпендикуляр. Улар хос сонларга мос келган хос векторлар йўналишига эга. Берилган A матрицага мос $|A - kE| = 0$ тенгламанинг (характеристик тенгламанинг) илдизлари шу матрицанинг



26- чизма.

27- чизма.

хос сонлари дейилади. Берилган k хос сонга мос h хос вектор деб $Ah = kh$ тенгламанинг ечимига айтилади. Қуйида берилган машқда ҳолат траекторияларининг картинасини чизиш учун аввал хос векторларни (уларнинг йўналишини хос йўналишлар дейилади) топиш лозим. Сўнгра хос векторлар йўналиши бўйича y_1 ва y_2 ларнинг декарт координата текислигида чизмани ясаш лозим. Бу ҳолда тугун, фокус, марказ ва бошқа картиналар бир оз «эзилган» кўринишни олади.

5- § га доир машқ

I. Қуйидаги системаларнинг ҳолат траекториялари картинасини чизинг.

1. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 2y_1, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_2; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_1, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 2y_2, \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -2y_1, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -y_2; \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -y_1, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -2y_2; \end{cases}$ 5. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -3y_1; \end{cases}$ 6. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -2y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1; \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 2y_1 - y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 + 2y_2; \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 3y_1 + y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -2y_1 + y_2; \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -y_1 + 2y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 + y_2; \end{cases}$ 10. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -y_1 + 3y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -y_1 + y_2. \end{cases}$

II. Параметр α нинг қандай қийматларида қуйидаги системаларнинг ҳолат траекториялари картинаси тугун, фокус ёки марказ бўлади:

1. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = -3y_1 + \alpha y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 2y_1 + y_2; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 3y_1 + \alpha y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -2y_1 + y_2; \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \alpha y_1 + (1-\alpha) y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 + y_2; \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \alpha y_1 + y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -y_1 + (1-\alpha) y_2. \end{cases}$

4-боб

ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

1- §. ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР ҲАҚИДА УМУМИЙ ТУШУНЧА

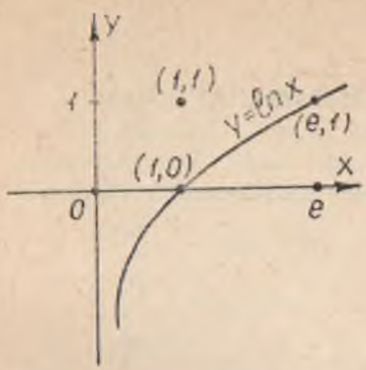
Аввал кўрилган дифференциал тенгламалар ёки уларнинг системалари учун Коши масаласи билан танишганмиз. Содда қилиб айтганда, Коши масаласи берилган нуқтадан ўтадиган интеграл эгри чизиқни излашдан иборат эди. Агар интеграл эгри чизиқнинг берилган икки нуқтадан ўтиши талаб этилса, бу масала Коши масаласидан фарқ қилиб, берилган икки нуқтанинг ҳар бири учун алоҳида олинган Коши масаласи ечимга эга бўлса ҳам, бу қўйилган масала ечимга эга бўлмаслиги мумкин.

Биринчи тартибли дифференциал тенглама учун масала қисқача

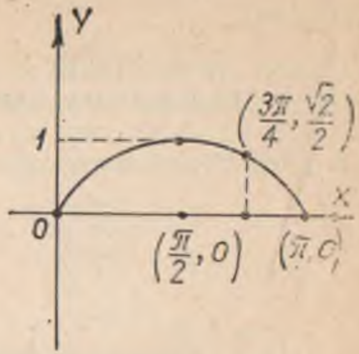
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \ y(x_0) = y_0, \ y(x_1) = y_1 \qquad (4.1)$$

каби ёзилиши мумкин. Агар $y(x_0) = y_0$ шартни қаноатлантирадиган ечим мавжуд бўлса, у ечим $y(x_1) = y_1$ шартни ҳам қаноатлантирадими ёки йўқми? деган саволга жавоб бериш лозим бўлади. Бу ҳолда тегишли саволга бевосита текшириш билан жавоб бериш мумкин. Масалан, $y' = \frac{1}{x}$, $x > 0$, $y(e) = 1$, $y(1) = 1$ масала ечимга эга эмас. Ҳақиқатан, $y = \ln x + C$ берилган тенгламанинг умумий ечими, $y(e) = 1$ шартга кўра $1 = \ln e + C$ ва $C = 0$. Демак, $y = \ln x$ ечим $y(e) = 1$ шартни қаноатлантиради. Аммо бу функция $y(1) = 1$ шартни қаноатлантирмайди, чунки $y(1) = \ln 1 = 0 \neq 1$. Шунга ўхшаш, ушбу $y' = \frac{1}{x}$, $x > 0$, $y(e) = 1$, $y(1) = 0$ масала ечимга эга. Бу юқоридаги мулоҳазалардан кўриниб турибди (28- чизма).

Иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар учун $y'' = f(x, y, y')$, $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ масала қўйилиши мумкин. Бу масалада интеграл эгри чизиқ (x_0, y_0) нуқта-



28- чизма.



29 - чизма.

дан қандай y_0' — бурчак коэффициент билан ўтиши аввалдан берилган эмас. Мисол сифатида ушбу

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(x_1) = y_1$$

масалани текширайлик. Берилган тенглама характеристик тенгламасининг илдизлари $\pm i$ ва умумий ечим $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ дан иборат. Бундан $y(0) = 0$ шартни қаноатлантирадиган ечим $y = C_2 \sin x$, $C_1 = 0$ экани келиб чиқади. Агар $x_1 = k\pi$ (k — берилган ихтиёрий бутун сон) бўлса, $y(k\pi) = C_2 \sin k\pi = 0$ (C_2 — ихтиёрий бўлганда ҳам). Агар $x_1 \neq k\pi$ бўлса, у ҳолда $y_1 = C_2 \sin x_1$ дан $C_2 = \frac{y_1}{\sin x_1}$, $\sin x_1 \neq 0$. Тегишли ечим $y = \frac{y_1}{\sin x_1} \cdot \sin x$ дан иборат. Қурилаётган масала ечимга эга. Аммо $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ шартларни қаноатлантирадиган тривиал бўлмаган ечим эса мавжуд эмас. Бунинг исботи $C_2 \neq 0$ бўлганда $C_2 \sin\frac{\pi}{2} = C_2 \neq 0$ дан кўринади. Агар берилган чизиқли тенгламанинг тривиал $y = 0$ ечимини олсак, бу ечим учун $y(0) = 0$, $y(x_1) = 0$ (x_1 — берилган ихтиёрий сон) шартлар қаноатлантирилади (29- чизма).

Юқорида қўйилган ва Коши масаласидан фарқ қиладиган масала икки нуқтали чегаравий ёки барибир, четки масала деб юритилади. Масала бундан умумийроқ кўринишда ҳам қўйилиши мумкин.

2- §. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

1. Икки нуқтали чегаравий масала. Ушбу

$$y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = \varphi(x) \tag{4.2}$$

тенгламанинг

$$y(x_0) = y_0, \ y(x_1) = y_1 \tag{4.3}$$

шартларни қаноатлантирадиган ечимини топиш масаласи (4.2) тенглама учун *икки нуқтали чегаравий масала* деб юритилади. (4.2) — (4.3) масалани ўзгарувчини алмаштириш билан соддалаштириш мумкин. Чунончи,

$$z = y - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) - y_0, \ x_0 \neq x_1$$

деб алмаштириш бажарсак $z(x_0) = 0$, $z(x_1) = 0$ га эга бўламиз. Бу алмаштириш натижасида (4.2) тенглама яна иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламага ўтади. Бунга бевосита ҳисоблаш билан ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Кўпинча (4.2) тенгламани текширишга қулай бўлган бошқа кўринишда ёзилади. Агар (4.2) нинг икки томонини $e^{\int p_1(x)\,dx}$ функцияга кўпайтирсак,

$$\frac{d}{dx}(p(x)\, y') + q(x)\, y = f(x) \tag{4.4}$$

кўринишдаги тенгламага эга бўламиз. Юқоридаги мулоҳазани эътиборга олиб, (4.4) тенглама учун

$$y(x_0) = 0, \ y(x_1) = 0 \tag{4.5}$$

шартни қаноатлантирадиган ечимни топиш масаласини қўйишимиз мумкин.

Агар $f(x) \not\equiv 0$ бўлса, (4.4) — (4.5) масала *бир жинсли бўлмаган*, $f(x) \equiv 0$ бўлганда эса *бир жинсли* масала деб юритилади.

2. (4.4) — (4.5) масала учун Грин функцияси. Икки аргументли $G(x, s)$ функция қуйидаги тўртта шартни қаноатлантирсин:

1°. $G(x, s)$ функция x бўйича $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ интервалда узлуксиз бўлиб, s — тайинлаган ва $x_0 < s < x_1$;

2°. $G(x, s)$ функция $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ интервалда $x = s$ дан бошқа барча нуқталарда ушбу

$$(py')' + qy = 0$$

бир жинсли тенгламанинг ечимидан иборат;

3°. $G(x, s)$ функция

$$G(x_0, s) = G(x_1, s) = 0$$

чегаравий шартларни қаноатлантиради;

4°. $x = s$ нуқтада $G'_x(x, s)$ ҳосила биринчи тур узилишга эга бўлиб, унинг сакраши $\frac{1}{p(s)}$ га тенг, яъни

$$G'_x(s+0, s) - G'_x(s-0, s) = \frac{1}{p(s)}$$

ёки

$$G'_x(s, s+0) - G'_x(s, s-0) = -\frac{1}{p(s)}.$$

Бу ҳолда $G(x, s)$ функция қўйилган (4.4) — (4.5) чегаравий масаланинг *Грин функцияси* деб аталади.

4.1 - теорема. *(Гильберт теоремаси). Агар (4.4) — — (4.5) масаланинг Грин функцияси маълум бўлса, бу масаланинг ечими*

$$y = \int_{x_0}^{x_1} G(x, s) f(s)\, dx \tag{4.6}$$

формула билан ёзилади, аксинча агар $y = y(x)$ функция қўйилган масаланинг ечими бўлса, уни (4.6) кўринишда ифодалаш мумкин (бу ерда $f(x)$ — узлуксиз функция).

Исбот. Ҳақиқатан, (4.6) формула билан аниқланган $y(x)$ функция $y(x_0) = y(x_1) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантиради, чунки Грин функциясининг таърифига кўра $G(x_0, s) = G(x_1, s) = 0$ ва $y(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} G(x_0, s) f(s)\, ds = 0$, $y(x_1) = \int_{x_0}^{x_1} G(x_1, s) f(s)\, ds = 0$. Энди (4.6) формула билан аниқланган $y(x)$ функция (4.4) тенгламанинг ечими эканини кўрсатамиз. Бунинг учун аввал (4.6) ни қуйидагича ёзамиз:

$$y = \int_{x_0}^{x} G(x, s) f(s)\, ds + \int_{x}^{x_1} G(x, s) f(s)\, ds.$$

Бундан $y'(x)$, $y''(x)$ ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$y'(x) = \int_{x_0}^{x} G'_x(x, s) f(s)\, ds + \int_{x}^{x_1} G'_x(x, s) f(s)\, ds + G(x, x -$$

$$-0)f(x)-G(x,x+0)f(x)=\int_{x_0}^{x_1} G'_x(x,s)f(s)\,ds+$$

$$+\int_x^{x_1} G'_x(x,s)f(s)\,ds=\int_{x_0}^{x_1} G'_x(x,s)f(s)\,ds;\quad y''(x)=$$

$$=\int_{x_0}^{x_1} G''_{xx}(x,s)f(s)\,ds+\int_x^{x_1} G''_{xx}(x,s)f(s)\,ds+$$

$$+[G'_x(x,x-0)-G'_x(x,x+0)]f(x)=$$

$$=\int_{x_0}^{x} G''_{xx}(x,s)f(x)\,ds+\frac{1}{p(x)}f(x).$$

$y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ ларнинг қийматини (4) га қўйсак,

$$\int_{x_0}^{x_1}[p(x)G''_{xx}(x,s)+p'(x)G'_x(x,s)+qG(x,s)]f(s)\,ds+$$

$$+f(x)\equiv f(x).$$

Энди қўйилган (4.4) — (4.5) масаланинг ечими мавжуд бўлса, уни (4.6) формула билан ёзилишини исботлайлик. $y(x)$ қўйилган (4.4) — (4.5) масаланинг ечими бўлсин, бу масаланинг Грин функциясини (мавжудлигини кейинроқ кўрсатамиз) $G(x,s)$ билан белгилайлик. (4.4) тенгламани $G(x,s)$ га,

$$(p(x)G'_x)'+q(x)G=0$$

тенгламани $y(x)$ га кўпайтириб, биринчисидан иккинчисини айирамиз:

$$[(p(x)y')'G-(p(x)G'_x)'y]=G(x,s)f(x)$$

ёки

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'G-p(x)G'_x y]=G(x,s)f(x).$$

Бу тенгликнинг ҳар иккала томонини x_0 дан x_1 гача интеграллаймиз (бунда $G'_x(x,s)$ функция $x=s$ бўлганда биринчи тур узилишга эга ва $y(x)$, $G(x,s)$ функциялар (4.5) чегаравий шартларни қаноатлантиради):

$$[p(x)y'G-y(x)p(x)G'_x(x,s)]\Big|_{x_0}^{s-0}+$$

$$+[p(x)y'G-y(x)p(x)G'_x(x,s)]\Big|_{s+0}^{x_1}=-\int_{x_0}^{x_1}G(x,s)f(x)\,dx.$$

Бундан чегаравий шартлар ва Грин функциясининг хссасини эътиборга олиб

$$-y(s)\,p(s)\,G'_x(s-0,\,s)+y(s)\,p(s)\,G'_x(s+0,\,s)=$$

$$=\int_{x_0}^{x_1} G(x,\,s)\,f(x)\,dx$$

ёки

$$y(s)=\int_{x_0}^{x_1} G(x,\,s)\,f(x)\,ds$$

ни ҳосил қиламиз.

s ни x билан алмаштирсак:

$$y(x)=\int_{x_0}^{x_1} G(s,\,x)\,f(s)\,ds$$

ҳосил бўлади.

Қуйилган масаланинг Грин функцияси G ўз аргументларига нисбатан симметрикдир, яъни

$$G(x,\,s)=G(s,\,x).$$

Буни эътиборга олсак, охирги муносабатдан (4.6) келиб чиқади. Энди $G(x,\,s)$ нинг симметриклигини кўрсатиш қолди. Бунинг учун

$$L[y]=\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)+qy=f(x),\ \ L(z)=\frac{d}{dx}\left(p\frac{dz}{dx}\right)+qz=g(x)$$

белгилашларни киритамиз. Ихтиёрий $y\in C^2$, $z\in C^2$ функциялар учун қуйидаги

$$zL(y]-yL[z]=\frac{d}{dx}\,[p(zy'-yz')]=f(x)\,z-g(x)\,y \quad (4.7)$$

Грин формуласи ўринли бўлади. Бу формулада $z=G(x,\ \xi)$, $y=G(x,\,s)$ десак $L[y]=L[z]=0$ бўлади. Интеграллаш соҳаси $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ ни 3 бўлакка, яъни $x_0\leqslant x\leqslant s$, $s\leqslant x\leqslant \xi$, $\xi\leqslant x\leqslant x_1$ га бўлиб, (4.7) ни интеграллсак:

$$p[G(x,\,\xi)\,G'_x,\ (x\ \ s)-G(x,\,s)\,G'_x(x,\,\xi)]\Big|_{x_0}^{s-0}+p[G(x,\xi)\,G'_x(x,s)-$$

$$-G(x,s)\,G'_x(x,\,\xi)]\Big|_{s+0}^{\xi-0}+p[G(x,\,\xi)\,G'_x(x,\,s)-$$

$$-G(x,s)\,G'_x(x,\xi)]\Big|_{\xi+0}^{x_1}=0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бу ердан Грин функциясининг хоссаларини эътиборга олсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$p[G(x,\xi)\,G'_x(x,s)-G(x,s)\,G'_x(x,\xi)]\Big|_{\xi+0}^{s-0}+p[G(x,\xi)\,G'_x(x,s)-$$

$$-G(x,s)\,G'_x(x,\xi)]\Big|_{s+0}^{\xi-0}=0$$

ёки

$$p(s)\,G(x,\xi)\,[G'_x(s-0,s)-G'_x(s+0,s)]-$$
$$-p(s)\,G(s,s)\,[G'_x(s,\xi)-G'_x(s,\xi)]+p(\xi)\,G(\xi,\xi)\,[G'_x(\xi,s)-$$
$$-G'_x(\xi,s)]-p(\xi)\,G(\xi,s)\,[G'_x(\xi-0,\xi)-G'_x(\xi+0,\xi)]=0$$

ёки

$$p(s)\,G(s,\xi)\left(\frac{1}{p(s)}-p(\xi)\,G(\xi,s)\left(\frac{1}{p(s)}\right)=0.\right.$$

Бундан

$$G(s,\xi)=G(\xi,s).$$

Шу билан 4.1- теорема тўла исбот бўлди.

Энди қўйилган масаланинг Грин функциясини тузиш билан шуғулланамиз. Бундан Грин функциясининг мавжудлигини таъминлайдиган етарли шартлар келиб чиқади.

Ушбу

$$(py')'+qy=0 \tag{4.8}$$

бир жинсли тенгламанинг $y(x_0)=y(x_1)=0$ чегаравий шартларни қаноатлантирадиган ечими $y\equiv 0$ бўлсин.

(4.8) тенгламанинг $y(x_0)=0$, $y'(x_0)=y_0\neq 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирадиган ечимини $y_1(x)$ деб белгилайлик, бундай ечим мавжуд, чунки p, p' ва q лар x_0 нуқта атрофида узлуксиз. Бу ечим, умуман олганда, иккинчи $y(x_1)=0$ чегаравий шартни қаноатлантирмайди.

Маълумки, $y=C_1y_1(x)$ (бу ерда C_1 — ихтиёрий ўзгармас сон) функция $y(x_0)=0$ чегаравий шартни қаноатлантиради. Худди шунга ўхшаш тенгламанинг $y(x_1)=0$ чегаравий шартни қаноатлантирадиган тривиал бўлмаган ечими $y_2(x)$ ни топамиз. $C_2y_2(x)$ ҳам $y_2(x_1)=0$ чегаравий шартни қаноатлантиради (бу ерда C_2 — ихтиёрий ўзгармас сон).

Грин функциясини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1 y_1(x), & x_0 \leqslant x \leqslant s, \\ C_2 y_2(x), & s \leqslant x \leqslant x_1. \end{cases}$$

Бу ердаги C_1 ва C_2 ларни шундай топамизки, натижада Грин функцияси 1° ва 4° шартларни қаноатлантирсин, яъни 1) $G(x, s)$ функция тайинланган s учун x бўйича узлуксиз бўлсин, хусусий ҳолда $x = s$ да узлуксиз:

$$C_1 y_1(s) - C_2 y_2(s) = 0 \tag{4.9}$$

ва 2) $G'_x(x, s)$ функция $x = s$ нуқтада узилишга эга бўлиб, унинг сакраши $\frac{1}{p(s)}$ га тенг бўлсин:

$$C_2 y'_2 - C_1 y'_1(s) = \frac{1}{p(s)}. \tag{4.10}$$

Равшанки, $y_1(x)$ функция билан чизиқли боғлиқ бўлган функциялар $C_1 y_1(x)$ кўринишга эга бўлади. $y_1(x_1) \neq 0$ бўлганидан $C_1 y(x_1) \neq 0$, $(C_1 \neq 0)$ бўлади. Шу билан бирга $y_2(x_1) = 0$. Булардан $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ларнинг чизиқли эрклилигн келиб чиқади. Демак, мсс Вронский детерминанти

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

текширилаётган $x = s$ нуқтада нолдан фарқли бўлади. Шунинг учун (4.9), (4.10) системадан C_1 ва C_2 ларни топамиз:

$$C_1 = \frac{y_2(s)}{W(s)\,p(s)}; \quad C_2 = \frac{y_2(s)}{W(s)\,p(s)}.$$

Буларни эътиборга олсак, Грин функцияси

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{y_2(s)\, y_1(x)}{W(s)\, p(s)}, & x_0 \leqslant x \leqslant s, \\[2ex] \dfrac{y_1(s)\, y_2(x)}{W(s)\, p(s)}, & s \leqslant x \leqslant x_1 \end{cases}$$

кўринишға эга бўлади. (4.7) формуладан $W(s)\,p(s) = \text{const}$ эканлиги келиб чиқади. $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ хусусий ечимларни шундай танлаш мумкинки, натижада $W(s)\,p(s) = 1$ бўлади. Бу ҳолда қуйилган масаланинг Грин функцияси

$$G(x, s) = \begin{cases} y_2(s)\, y_1(x), & x_0 \leqslant x \leqslant s, \\ y_1(s)\, y_2(x), & s \leqslant x \leqslant x_1 \end{cases}$$

формула билан берилади. Бу формуладан қўйилган масала учун Грин функциясининг симметриклиги кўриниб турибди.

Мисол. Қуйидаги

$$y'' + y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

чегаравий масаланинг Грин функциясини топинг.

Ечиш. Энг аввал $y'' + y = 0$ тенгламанинг $y(0) = 0$ шартни қаноатлантирувчи $y_1 = C_1 \sin x$ ечимини топамиз. Сўнгра шу бир жинсли тенгламанинг $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ шартни қаноатлантирувчи $y_2 = C_2 \cos x$ ечимини топамиз. Грин функциясини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1 \sin x, & 0 \leqslant x \leqslant s, \\ C_2 \cos x, & s \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Грин функцияси $x = s$ нуқтада узлуксиз бўлгани учун

$$C_1 \sin s - C_2 \cos s = 0$$

муносабатга, ҳосиласи эса $x = s$ нуқтада узилишга эга бўлгани учун $p(x) = 1$ ни ҳисобга олсак,

$$-C_2 \sin s - C_1 \cos s = 1$$

муносабатга эгамиз. Бу икки тенглама системасидан $C_1 = -\cos s, C_2 = -\sin s$ ларни ҳосил қиламиз. Демак, қўйилган масаланинг Грин функцияси

$$G(x, s) = \begin{cases} -\cos s \sin x, & 0 \leqslant x \leqslant s \\ -\sin s \cos x, & s \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

формула билан ифодаланади.

Эслатма. Биз $(py')' + qy = 0$ тенгламанинг $y(x_0) = y(x_1) = 0$ шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечими мавжуд эмас деб фараз қилдик. Бу шарт қўйилган (4.4) — (4.5) масала ечимининг мавжудлигини ва ягоналигини таъминлаш билан бирга, қўйилган масала Грин функциясининг ягоналигини ҳам таъминлайди.

Ҳақиқатан, қўйилган (4.4) — (4.5) масаланинг иккита $G_1(x, s)$, $G_2(x, s)$ Грин функциялари мавжуд деб фараз қилсак, мос равишда иккита ҳар хил ечимни ёзиш мумкин:

$$y_1(x) = \int_{x_0}^{x} G_1(x, s) f(s)\, ds,$$

$$y_2(x) = \int_{x_0}^{x_1} G_2(x, s) f(s)\, ds.$$

Буларнинг айирмасидан иборат ушбу

$$\int_{x_0}^{x_1} [G_1(x, s) - G_2(x, s)] f(s)\, ds$$

функция бир жинсли тенгламани ва (4.5) чегаравий шартларни қаноатлантиради, бу эса фаразимизга қарғма-қаршидир. Демак, $G_1 = G_2$. Энди юқорида қўйилган чегаравий масаланинг Грин функцияси $G(x, s)$ га ва масаланинг ушбу

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, s) f(s)\, ds$$

ечимига физик маъно берамиз. Бунинг учун эркли ўзгарувчи x ни t билан белгилаймиз.

Физиканинг кўп масалаларида

$$(p(t)\, y'(t))' + q(t)\, y(t) = f(t) \tag{4.4'}$$

тенгламанинг $y(t)$ ечими бирор механик системанинг $[x_0, x_1]$ интервалда узлуксиз тақсимланган $f(t)$ куч таъсири остида силжишини ифодалайди (бу ерда t — вақт).

Фараз қилайлик, $t < s$ бўлганда система тинч турган бўлсин, уни $f_\varepsilon(t)$ куч таъсирида силжитайлик, бу ерда $f_\varepsilon(t)$ куч фақат $s < t < s + \varepsilon$ оралиғида нолдан фарқли бўлиб, қолган нуқталарда нолга тенг, шу билан бирга куч импульси 1 га тенг:

$$\int_{x}^{x+\varepsilon} f_\varepsilon(t)\, dt = 1.$$

Энди $y_\varepsilon(t)$ орқали

$$(p(t)\, y'(t))' + q(t)\, y(t) = f_\varepsilon(t),$$
$$y(x_0) = y(x_1) = 0$$

чегаравий масаланинг ечимини белгилаймиз. Демак,

$$y_\varepsilon(t) = \int\limits_{x_1}^{x_\varepsilon} G(t, s)\, f_\varepsilon(s)\, ds$$

формула ўринли. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремани қўллансак:

$$y_\varepsilon(t) = G(t, s+\varepsilon^*) \int\limits_{s}^{s+\varepsilon} f_\varepsilon(\tau)\, d\tau = G(t, s+\varepsilon^*),\ 0 < \varepsilon^* < \varepsilon.$$

Демак,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(t) = G(t, s).$$

3. Умумлашган Грин функцияси. Биз юқорида $L[y]=0$, $y(x_0)=y(x_1)=0$ масала тривиал бўлмаган ечимга эга эмас деб қабул қилдик. Кўп ҳолларда бу масаланинг тривиал бўлмаган ечими мавжуд бўлади, яъни шундай $y_0(x)\not\equiv 0$ функция топиладики, $L[y_0(x)]=0$, $y_0(x_0)=y_0(x_1)=0$ бўлади. Бу ҳолда оддий Грин функциясини тузиш мумкин бўлмай, *умумлашган Грин функцияси* деб аталадиган функцияни тузишга тўғри келади. Кейинги мулоҳазаларда $y_0(x)$ деб юқорида эслатилган масаланинг тривиалмас ечимини белгилаймиз, $G(x, s)$ функция қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1°. $G(x, s)$ функция x аргументи бўйича $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ интервалда узлуксиз, s — тайинланган ва $x_0 < s < x_1$;

2°. $G(x, s)$ функция x бўйича $[x_0, s)$ ва $(s, x_1]$ интервалларнинг ҳар бирида

$$L[y] = y_0(x)\, y_0(s)$$

тенгламани қаноатлантиради;

3°. $G(x_0, s) = G(x_1, s) = 0$;

4°. $G_x'(s+0, s) - G_x'(s-0, s) = \frac{1}{p(s)}$

ёки

$$G_x'(s, s+0) - G_x'(s, s-0) = -\frac{1}{p(s)}.$$

5°. $\int\limits_{x_0}^{x_1} G(x, s)\, y_0(x)\, dx = 0.$

($G(x,s)$ ва $y_0(x)$ функцияларнинг ортогоналлик шарти).

Юқорида келтирилган 1° — 5° шартларни қаноатлантирувчи функция берилган (4.4) — (4.5) масаланинг *умумлашган Грин функцияси* деб аталади.

Умумлашган Грин функциясини тузиш оддий Грин функциясини тузиш каби бажарилади.

$y_0(x)$ функция $L[y]=0$ тенгламани ва $y(x_0)=y(x_1)=0$ чегаравий шартларни қаноатлантирадиган нормаллашган $\left(\int\limits_{x_0}^{x_1} y_0^2(x)\,dx=1\right)$ ечим бўлсин. $y_1(x)$ эса $L[y]=y_0(x)\,y_0(s)$ тенгламанинг бирор хусусий ечими бўлсин. У ҳолда охирги тенгламанинг умумий ечимини

$$y(x)=y_1(x)+\alpha\,y_0(x)+\beta\,z(x)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда $z(x)$ функция $L[y]=0$ тенгламанинг $y_0(x)$ билан чизиқли эркли ечими. $z(x)$ ни шундай танлаш мумкинки,

$$p(x)\,[y_0(x)\,z'(x)-z(x)\,y_0'(x)]=1$$

тенглик ўринли бўлади.

Грин функциясини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$G(x,s)=\begin{cases} y_1(x)+\alpha_1 y_0(x)+\beta_1 z(x), & x<t,\\ y_1(x)+\alpha_2\,y_0(x)+\beta_2\,z(x), & x>t.\end{cases}$$

Бу ерда β_1 ва β_2 номаълум ўзгармаслар чегаравий шартлардан фойдаланиб аниқланади. $G(x,s)$ нинг $x=s$ нуқтада узлуксизлигидан α_2 миқдор α_1 миқдор орқали ифодаланади. Шундай қилиб, Грин функциясида фақат α_1 номаълум қолади. Уни топиш учун эса 5° шартдан фойдаланиш лозим.

Умумлашган Грин функцияси симметрикдир, яъни

$$G(x,s)=G(s,x).$$

Ҳақиқатан, ушбу

$$L[G(x,s)]=y_0(x)\,y_0(s)$$

тенгликни $-G(x,t)$ га,

$$L[G(x,t)]=y_0(x)\,y_0(t)$$

тенгликни эса $G(x,s)$ га кўпайтириб қўшамиз. Сўнгра Грин формуласидан ва Грин функциясининг ҳамма хоссаларидан фойдаланиб, ҳосил бўлган тенгликни x_0 дан s гача, s дан t гача ва t дан x_1 гача интеграллаймиз. Натижада

$$p(x)\,[G(x,s)\,G_x'(x,t)-G(x,t)\,G_x'(x,t)]\Big|_{x_0}^{s-0}+$$

$$+ p(x)[G(x,s)G'_x(x,t) - G(x,t)G'_x(x,s)]\Big|_{s+0}^{t-0} +$$

$$+ p(x)[G(x,s)G'_x(x,t) - G(x,t)G'_x(x,s)]\Big|_{t+0}^{x} =$$

$$= y_0(t)\int_{x_0}^{x_1} G(x,s)y_0(x)\,dx - y_0(s)\int_{x_0}^{x_1} G(x,t)y_0(x)\,dx = 0$$

тенгликни ёки

$$p(x)[G(x,s)G'_x(x,t) - G(x,t)G'_x(x,s)]\Big|_{s+0}^{s-0} +$$

$$+ p(x)[G(x,s)G'_x(x,t) - G(x,t)G'_x(x,s)]\Big|_{t+0}^{t-0} = 0$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан изланган симметрикликнинг ўринли эканига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

Қуйидаги лемма ўринли.

Лемма. (4.4) — (4.5) *чегаравий масала ечимга эга бўлиши учун* $f(x)$ *функция билан мос бир жинсли тенгламанинг* (3.5) *шартларни қаноатлантирадиган тривиалмас ечими ўзаро ортогонал бўлиши зарур.*

Лемманинг исботи (4.7) формуладан бевосита келиб чиқади.

Эслатма. Агар (4.5) шартлар ўрнига ушбу

$$\begin{aligned} a_1 y(x_0) + b_1 y'(x_0) &= C_1, \\ a_2 y(x_1) + b_2 y'(x_1) &= C_2 \end{aligned} \tag{4.11}$$

шартлар қўрилса, у ҳолда $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ бўлиб, $C_1 = C_2 = 0$ бўлса, (4.4) — (4.11) масала бир жинсли чегаравий шартли масала дейилади. $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$ бўлганда эса тегишли масала бир жинсли бўлмаган чегаравий шартли масала деб юритилади. Ҳар икки ҳолда (4.4) — (4.5) масала учун юритилган мулоҳазаларни олиб бориш, мос Грин функциясини киритиш мумкин.

3- §. ШТУРМ — ЛИУВИЛЛЬ МАСАЛАСИ

1. Масаланинг қўйилиши. Штурм — Лиувилль масаласи қуйидагича қўйилади.

Параметр λ нинг шундай қийматлари топилсинки, у қийматларда ушбу

$$L[y] = -\lambda y, \quad y(x_0) = y(x_1) = 0 \tag{4.12}$$

чегаравий масала айнан нолга тенг бўлмаган ечимга эга бўлсин.

Параметр λ нинг тегишли қийматлари мавжуд бўлса, уни (4.12) масаланинг хос сонлари, унга мос ечимни эса хос функциялари деб аталади.

Штурм — Лиувилль масаласига битта мисол келтирамиз. Ушбу

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = y(1) = 0 \tag{4.13}$$

масала қўйилган бўлсин.

а) $\lambda > 0$ бўлсин. Маълумки $y'' + \lambda y = 0$ тенгламанинг умумий ечими

$$y = A\cos\sqrt{\lambda}\; x + B\sin\sqrt{\lambda}\; x$$

бўлади. $y(0) = 0$ чегаравий шартдан $A = 0$ келиб чиқади. $y(1) = 0$ чегаравий шартдан $\sin\sqrt{\lambda} = 0$, $\lambda_n = n^2\pi^2\,(n = 0, 1, 2, \ldots)$ келиб чиқади. Бу ҳолда масаланинг ечими ($n \neq 0$ бўлганда ечим тривиалмас)

$$y_n = B_n \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, \ldots$$

бўлади.

б) $\lambda = 0$ бўлсин. (4.13) тенгламанинг умумий ечими $y = Ax + B$ бўлади. $y(0) = y(1) = 0$ чегаравий шартлардан $A = B = 0$ келиб чиқади. Демак, тегишли ечим $y \equiv 0$ бўлади. Шундай қилиб, (4.13) тенгламанинг тегишли шартларни қаноатлантирадиган тривиалмас ечими мавжуд эмас.

в) $\lambda < 0$ бўлсин. (2) тенгламанинг умумий ечими

$$y = A e^{\sqrt{-\lambda x}} + B e^{-\sqrt{-\lambda}\, x}$$

бўлади. Чегаравий шартлардан

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A e^{\sqrt{-\lambda}} + B e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0 \end{cases}$$

келиб чиқади. Бу системадан $A = B = 0$ ни топамиз. Демак, ечим: $y \equiv 0$. Юқорида кўрилган учта ҳолга кўра қуйидаги хулосага келамиз: агар $\lambda_n = n^2\pi^2\,(n = 1, 2, \ldots)$ бўлса, (4.13) масала чексиз кўп $y_n = B_n \sin n\pi x$ ечимларга эга. Агар $\lambda_n \neq n^2\pi^2$ бўлса, (4.13) масала фақат тривиал ечимга эга. $\lambda_n\,(n = 1, 2, \ldots)$ лар (4.12) масаланинг хос қийматлари, уларга мос келувчи $y_n (n = 1, 2, \ldots)$ функциялар эса (4.13) масаланинг хос функциялари бўлади.

Лекин ҳамма вақт ҳам қўйилган Штурм — Лиувилль масаласини осонгина ечиб бўлавермайди.

Штурм — Лиувилль масаласини умумий ҳолда ечиш билан шуғулланамиз.

$L[y]$ дифференциал операторнинг оддий Грин функцияси $G(x, s)$ мавжуд дейлик. У ҳолда Гильбертнинг фундаментал теоремасига асосан (4.6) формулада $f(x) = -\lambda y(x)$ деб (4.12) Штурм – Лиувилль масаласига эквивалент бўлган бир жинсли интеграл тенглама деб юритиладиган

$$y(x) = -\lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x, s)\, y(s)\, ds \tag{4.14}$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Эслатиб ўтамизки номаълум функция интеграл белгиси остида албатта қатнашадиган тенгламалар интеграл тенглама дейилади.

Интеграл тенгламаларга оид баъзи тушунчаларни (4.14) тенгламага нисбатан айтиб ўтамиз.

(4.14) интеграл тенгламанинг $y = \varphi(x)$ ечими деб $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ интервалда аниқланган, узлуксиз ва тенгламани

$$\varphi(x) = -\lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x, s)\, \varphi(s)\, ds$$

айниятга айлантирадиган функцияга айтилади. (4.14) тенгламани чизиқли бир жинсли интеграл тенглама деб аталади.

(4.14) чизиқли бир жинсли тенглама ҳар доим ечимга эга. Ҳақиқатан, (4.14) учун тривиал $\varphi(t) \equiv 0$ ечим мавжуд. Аммо бу тенглама тривиалмас ечимларга ҳам эга бўлиши мумкин. Агар $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$ функцияларнинг ҳар бири (4.14) учун ечим бўлса, у ҳолда $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} C_i \varphi_i(x)$ функция ҳам ечим бўлади. Ҳақиқатан, шарт бўйича $\varphi_i(x) \equiv -\lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x, s)\, \varphi_i(s)\, ds$. Бундан $C_i \varphi_i(x) =$

$$= -\lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x, s) (C_i \varphi_i(s))\, ds$$ келиб чиқади. Энди i бўйича йиғинди оламиз:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} C_i \varphi_i(x) = -\sum_{i=1}^{k} [\lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x, s) (C_i \varphi_i(s))\, ds] =$$

$$= -\lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x, s) \left[\sum_{i=1}^{k} C_i \varphi_i(s)\right] ds = -\lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x, s) \varphi(s)\, ds.$$

Бу эса тасдиқни исботлайди.

Берилган (4.14) интеграл тенглама учун λ нинг шу тенглама тривиалмас ечимга эга бўладиган қийматлари $G(x, s)$ ядронинг *характеристик* қийматлари (сонлар) дейилади. Агар $\lambda = \lambda_0$ характеристик қиймат бўлиб, $y = \varphi_0(x)$ функция унга мос тривиалмас ечим бўлса, у ҳолда шу $y = \varphi_0(x)$ функция $G(x, s)$ ядронинг λ_0 га мос хос функцияси дейилади.

Қуйида муҳим теоремани келтирамиз.

4.2-теорема. *Агар* $L[y] = (p(x) y')' + q(x) y$ *дифференциал ифодада* $0 < p(x) \in C^1[x_0, x_1]$, $q(x) \in C[x_0, x_1]$ *бўлиб, параметрнинг* $\lambda = 0$ *қиймати* (3.11) *масаланинг хос сони бўлмаса ҳамда* $G(x, s)$ *функция* (4.4)—(4.5) *масаланинг Грин функцияси бўлса, у ҳолда Штурм — Лиувилль масаласи (яъни (4.11) масала) (4.14) интеграл тенгламани ечиш масаласига эквивалент бўлади, яъни 1) агар* λ *сон (4.12) масаланинг мос хос функцияси* $y = \varphi(x)$ *бўлган хос сонидан иборат бўлса, у ҳолда шу* λ *(4.14) интеграл тенгламанинг мос хос функцияси* $y = \varphi(x)$ *бўлган характеристик сони бўлади;* 2) *агар* λ *сон* (4.12) *интеграл тенгламанинг мос хос функцияси* $y = \varphi(x)$ *дан иборат характеристик сони бўлса, у ҳолда* $\varphi(x) \in C^2[x_0, x_1]$ *ва* λ, $\varphi(x)$ *лар (4.12) масаланинг бир-бирига мос хос сони ҳамда хос функцияси бўлади.*

Исбот. 1) ҳақиқатан, агар λ ва $\varphi(x)$ лар шундай бўлсаки, улар учун

$$p(x) \varphi'(x))' + q(x) \varphi(x) = -\lambda \varphi(x), \ \varphi(x_0) = \varphi(x_1) = 0$$

бўлса, 4.1-теоремага кўра қуйидагига эгамиз:

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, s) (-\lambda \varphi(s))\, ds = -\lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x, s) \varphi(s)\, ds.$$

Бундан λ характеристик сон экани, $\varphi(x)$ эса мос хос функция экани келиб чиқади.

2) энди

$$\varphi(x) = -\lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x, s)\,\varphi(s)\,ds$$

айният ўринли бўлсин. Бу айниятнинг ўнг томонидаги функция икки марта узлуксиз дифференциалланувчи (Гильберт теоремасига кўра) бўлиб, $L[y] = f$ айниятни $f(x) = -\lambda\varphi(x)$ бўлганда қаноатлантиради. $G(x, s)$ функция (4.4) — (4.5) масаланинг Грин функцияси бўлгани учун $\varphi(x_0) = -\lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x_0, s)\,\varphi(s)\,ds = 0$, $\varphi(x_1) = -\lambda \int_{x_0}^{x_1} G(x_1, s)\,\varphi(s)\,ds = 0$. Демак, λ ва $\varphi(x)$ лар (4.12) масаланинг мос равишда хос сони ва хос функциясидан иборат. Теорема исбот бўлди.

2. Штурм — Лиувилль масаласи хос сонлари ва хос функцияларнинг хоссалари. Агар $L[y] = [p(x)\,y']' + q(x)\,y$ дифференциал ифодада $0 < p(x) \in C'[x_0, x_1]$, $q(x) \in C[x_0, x_1]$ бўлиб, параметрнинг $\lambda = 0$ қиймати (4.12) масаланинг хос сони бўлмаса ҳам $G(x, s)$ тегишли масаланинг Грин функцияси бўлса, у ҳолда Штурм — Лиувилль масаласи хос сонлари ва функциялари қуйидаги хоссаларга эга бўлади.

1°. Штурм — Лиувилль масаласининг хос функциялари $[x_0, x_1]$ интервалда икки марта узлуксиз дифференциалланувчи.

2°. Штурм — Лиувилль масаласининг хос қийматлари симметрик $G(x, s)$ ядрога эга бўлган (4.14) интеграл тенгламанинг характеристик қийматлари билан устма-уст тушади.

3°. Штурм — Лиувилль масаласининг хос қийматлари ҳақиқий сонлардан иборат.

4°. Штурм — Лиувилль масаласининг хос қийматлари оддий хос қийматлардир (эслатиб ўтамизки, характеристик қийматга мос келган чизиқли эркли хос функцияларнинг максимал сони s тегишли характеристик соннинг *карраси* дейилади. (Шундай таъриф хос қийматлар учун ҳам киритилади.)

Исбот. L оператор учун λ хос қиймат бўлиб, у оддий бўлмасин, бошқача айтганда λ сонига иккита чизиқли эркли $u(x)$, $v(x)$ хос функциялар мос келсин дейлик. Бу ҳолда шу функциялардан тузилган Вронский детерминанти

$$W[u(x), v(x)] = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix}$$

x нинг $[x_0, x_1]$ интервалдан олинган ихтиёрий қийматида нолдан фарқли. Жумладан $W(x_0) \neq 0$, $W(x_1) \neq 0$ бўлиши керак. Аммо $u(x)$, $v(x)$ функциялар (4.11) масаланинг ечимлари бўлгани учун $u(x_0) = u(x_1) = 0$, $v(x_0) = v(x_1) = 0$. Бундан $W(x_0) = 0$, $W(x_1) = 0$ келиб чиқади. Бу эса $u(x)$, $v(x)$ ларнинг $[x_0, x_1]$ да чизиқли эркли бўлсин дейилган фаразга зид.

5°. Штурм — Лиувилль масаласининг модуллари камаймайдиган қилиб жойлаштирилган, яъни

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_n| \leqslant \ldots,$$

хос қийматлари $+\infty$ га узоқлашувчи кетма-кетликни ташкил этади.

4- §. ГРИН ФУНКЦИЯСИНИ ТУЗИШГА ДОИР МИСОЛЛАР

Қуйида оддий ва умумлашган Грин функциясини тузишга доир мисоллар кўрамиз.

Мисоллар. 1. Ушбу $L[y] = y''$ дифференциал ифоданинг $y(0) = y(1) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирадиган Грин функциясини тузинг.

Ечиш. Грин функциясини

$$G(x,s) = \begin{cases} C_1 x, & x < s, \\ C_2(1-x), & x > s \end{cases}$$

кўринишда излаймиз.

$x = s$ нуқтада $G(x,s)$ функция узлуксиз, лекин унинг биринчи тартибли ҳосиласи $G_x'(x,s)$ узилишга эга бўлгани учун

$$\begin{cases} C_1(s)s = C_2(s)\ (1-s), \\ C_1(s) + C_2(s) = \frac{1}{p(s)} = 1 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Бу системани ечиб $C_1 = 1 - s$, $C_2 = s$ ларни топамиз. Демак, изланаётган Грин функцияси қуйидагича ёзилади:

$$G(x,s) = \begin{cases} (1-s)x, & x < t, \\ (1-x)s, & t < x. \end{cases}$$

2. Ушбу $L[y]=y''$ дифференциал ифоданинг $y(0)=0$, $y'(1)=0$ чегаравий шартларни қаноатлантирадиган Грин функциясини тузинг.

Ечиш. Грин функциясини қуйидаги

$$G(x,s)=\begin{cases} C_1(x), & x<s, \\ C_2(x), & s<x \end{cases}$$

кўринишда излаймиз. Грин функциясининг таърифи бўйича

$$\begin{cases} C_1(s)s=C_2(s), \\ C_1(s)=1 \end{cases}$$

системага ва $C_1=1$, $C_2=s$ га эгамиз.

Демак, изланаётган Грин функцияси қуйидагича ёзилади:

$$G(x,s)=\begin{cases} x, & x<s, \\ s, & s<x. \end{cases}$$

3. Ушбу $L[y]=y''$ дифференциал ифоданинг $y(-1)=$ $=y(1)=0$ чегаравий шартларни қаноатлантирадиган Грин функциясини қуйидаги

$$G(x,s)=\begin{cases} C_1(1+x), & x<s, \\ C_2(1-x), & x>s \end{cases}$$

кўринишда излаймиз. C_1 ва C_2 ларни топиш учун ушбу

$$\begin{cases} C_1(1+s)=C_2(1-s), \\ C_1+C_2=1 \end{cases}$$

системага эгамиз. Бу системадан $C_1=\frac{1-s}{2}$ ва $C_2=\frac{1+s}{2}$ ни топамиз. Демак, Грин функцияси қуйидагича ёзилади:

$$G(x,s)=\begin{cases} \frac{(1-s)(1+x)}{2}, & x<s \\ \frac{(1+s)(1-x)}{2}, & x>s. \end{cases}$$

4. Ушбу $L[y]=y''$ дифференциал ифоданинг $y(0)=$ $=-y(1)$, $y'(0)=-y'(1)$ чегаравий шартларни қаноатлантирадиган Грин функциясини тузинг.

Ечиш. $y'' = 0$ тенгламанинг умумий ечими $y = \alpha x + \beta$ кўринишга эга бўлгани учун мос Грин функциясини

$$G(x,s) = \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1, & x < s. \\ \alpha_2 x + \beta_2, & x > s \end{cases}$$

кўринишда излаймиз.

Чегаравий шартлардан $\beta_1 = -(\alpha_2 + \beta_2), \alpha_1 = -\alpha_2$ келиб чиқади. Грин функциясининг узлуксизлиги ва ҳосиласининг 1-тур узилишга эгалиги шарти бўйича ушбу

$$\begin{cases} -\alpha_2(1 + s) - \beta_2 = \alpha_2 s + \beta_2, \\ -\alpha_2 - \alpha_1 = 1 \end{cases}$$

системага эгамиз. Бу системани ечиб $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$; $\beta_2 = \frac{1 + 2s}{4}$ ларни ҳосил қиламиз. Топилганларни ўрнига қўйиб, сўнгра ихчамлаштирсак, Грин функцияси учун

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x-s) + \frac{1}{4}, & x < s, \\ \frac{1}{2}(s-x) + \frac{1}{4}, & s < x \end{cases}$$

ёки

$$G(x,s) = -\frac{1}{2}|x - s| + \frac{1}{4}$$

ифодани топамиз.

5. Ушбу $L[y] = (xy')'$ дифференциал ифоданинг $|y(0)| < \infty$, $y(1) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирадиган Грин функциясини тузинг.

Ечиш. $L[y] = 0$ дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = \alpha \ln x + \beta, \quad x > 0$$

бўлганидан, Грин функциясини қуйидагича излаймиз:

$$G(x,s) = \begin{cases} \alpha_1 \ln x + \beta_1 & x < s. \\ \alpha_2 \ln x + \beta_2, & x > s. \end{cases}$$

Энди $|y(0)| < \infty$ дан $\alpha_1 = 0$, $y(1) = 0$ дан $\beta_2 = 0$ келиб чиқади. $G(x,s)$ нинг узлуксизлигидан ва $G_x(x, s)$ нинг $x = s$ нуқтада узилишга эга эканидан

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_2 \ln s \\ -\alpha_2 \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \end{cases}$$

система келиб чиқади. Бундан $\alpha_2 = -1$, $\beta_1 = \ln s$ ларни топамиз. Шундай қилиб, Грин функцияси қуйидагича ёзилади:

$$G(x,s) = \begin{cases} -\ln s, & x < s, \\ -\ln x, & x > s. \end{cases}$$

6. Ушбу

$$L[y] = (xy')' - \frac{n^2}{x} y$$

дифференциал ифоданинг $|y(0)| < \infty$, $y(1) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирадиган Грин функциясини топинг.

Ечиш. $L[y] = 0$ тенгламанинг иккита чизиқли эркли ечими x^n ва x^{-n} бўлишини бевосита текшириб билиш мумкин. Шунинг учун $L[y] = 0$ тенгламанинг умумий ечими

$$y = \alpha x^n + \beta x^{-n}$$

бўлади (бу ерда α ва β ихтиёрий ўзгармаслар).

Грин функциясини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$G(x,s) = \begin{cases} \alpha_1 x^n + \beta_1 x^{-n}, & x < s, \\ \alpha_2 x^n + \beta_2 x^{-n}, & x > s. \end{cases}$$

$|y(0)| < \infty$ чегаравий шартдан $\beta_1 = 0$ топилади. $y(1) = 0$ шартга кўра $\alpha_2 = -\beta_2$ келиб чиқади. Шундай қилиб, Грин функцияси

$$G(x,s) = \begin{cases} \alpha_1 x^n & x < s, \\ \alpha_2 (x^n - x^{-n}), & x > s \end{cases}$$

кўринишда изланиши лозим.

$G(x,s)$ нинг $x=s$ нуқтада узлуксизлигидан, $G'_x(x,s)$ ҳосиланинг узилишга эгалигидан фойдаланиб,

$$\begin{cases} \alpha_1 s^n - \alpha_2 (s^n - s^{-n}) = 0, \\ n\alpha_1 s^{n-1} - \alpha_2 n (s^{n-1} + s^{-n-1}) = \frac{1}{s} \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Бу системани ечиб, $\alpha_1 = \frac{s^{-n} - s^n}{2n}$ ва $\alpha_2 = -\frac{s^n}{2n}$ ларни топамиз. Демак, изланаётган

Грин функцияси ушбу

$$G(x,s)=\begin{cases} -\dfrac{s^n-s^{-n}}{2n}x^n, & x<s,\\ -\dfrac{x^n-x^{-n}}{2n}s^n, & x>s \end{cases}$$

формула билан аниқланади.

7. Ушбу $L[y]=((1-x^2)y')'-\dfrac{h^2}{1-x^2}y$ дифференциал ифоданинг $|y(-1)|<\infty$, $|y(1)|<\infty$ чегаравий шартларни қаноатлантирадиган Грин функциясини тузинг.

Ечиш. $L[y]=0$ тенгламанинг $x=-1$ да чекли бўладиган ечим $C_1\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{h/2}$ дан иборат; худди шунга ўхшаш, $x=+1$ да чекли бўлгадиган ечим $C_2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{h/2}$ бўлади. Бу ҳолда Грин функциясини

$$G(x,s)=\begin{cases} C_1\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{h/2} & x<s,\\ C_2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{h/2} & x>s \end{cases}$$

кўринишда излаймиз. Энди $x=s$ да $G(x,s)$ нинг узлуксизлигидан ва $G'_x(x,s)$ ҳосиланинг узилишга эгалигидан фойдаланиб, қуйидаги

$$\begin{cases} C_1\left(\dfrac{1+s}{1-s}\right)^{h/2}=C_2\left(\dfrac{1-s}{1+s}\right)^{h/2},\\ C_1\dfrac{h}{2}\left(\dfrac{1+s}{1-s}\right)^{\frac{h}{2}-1}\cdot\dfrac{2}{(1-s)^2}+C_2\dfrac{h}{2}\left(\dfrac{1-s}{1+s}\right)^{\frac{h}{2}-1}\dfrac{2}{(1+s)^2}=\dfrac{1}{1-s^2} \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Бу системани ечиб

$$C_1=\frac{1}{2h}\left(\frac{1-s}{1+s}\right)^{\frac{h}{2}};\quad C_2=\frac{1}{2h}\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^{\frac{h}{2}}$$

ларни топамиз. Демак, изланаётган Грин функцияси

$$G(x,s)=\begin{cases}\frac{1}{2h}\left(\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1-s}{1+s}\right)^{\frac{h}{2}}, & x<s,\\ \frac{1}{2h}\left(\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1+s}{1-s}\right)^{\frac{h}{2}}, & x>s\end{cases}$$

кўринишга эга.

Бу метод $h=0$ бўлганда ярамайди, чунки $h=0$ бўлганда $L[y]=0$ тенглама $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ нормаллашган ечимга эга бўлиб, бу ечим чегаравий шартларни ҳам қаноатлантиради.

Бу ерда оддий Грин функцияси мавжуд эмас, шунинг учун умумлашган Грин функциясини тузишимиз керак. Бунинг учун

$$((1-x^2)y')'=\frac{1}{2}$$

тенгламанинг умумий ечимини топамиз (3- § нинг 3- п.га) қаранг):

$$y=-\frac{1}{4}\ln(1-x^2)+\frac{\alpha}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\beta$$

(бу ерда α ва β лар ихтиёрий ўзгармас сонлар). Энди Грин функциясини қуйидагича излаймиз:

$$G(x,s)=\begin{cases}-\frac{1}{4}\ln(1-x^2)+\frac{\alpha_1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\beta_1, & x<s,\\ -\frac{1}{4}\ln(1-x^2)+\frac{\alpha_2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\beta_2, & x>s.\end{cases}$$

$|y(-1)|<\infty$ шартдан $\alpha_1=\frac{1}{2}$, $|y(1)|<\infty$ шартдан эса $\alpha_2=-\frac{1}{2}$ келиб чиқади. α_1 ва α_2 ларнинг қийматини эътиборга олсак,

$$G(x,s)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\ln(1-x)+\beta_1, & x<s,\\ -\frac{1}{2}\ln(1+x)+\beta_2, & x>s\end{cases}$$

ҳосил бўлади.

Грин функциясининг узлуксизлигидан қуйидаги

$$-\frac{1}{2}\ln(1-s)\beta_1 = -\frac{1}{2}\ln(1+s)+\beta_2$$

муносабатга эгамиз. Бундан

$$\beta_1 = -\frac{1}{2}\ln(1+s)+C, \ \beta_2 = -\frac{1}{2}\ln(1-s)+C$$

ларни топиб, Грин функциясини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$G(x,s) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\ln[(1-x)(1+s)]+G, & x<s, \\ -\frac{1}{2}\ln[(1+x)(1-s]+C, & x>s. \end{cases} \qquad (*)$$

Бу ердаги ихтиёрий ўзгармас C ни

$$\int_{-1}^{1} G(x,s)\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx = 0$$

шартдан аниқлаймиз:

$$0 = \int_{-1}^{1} G(x,s) = \int_{1}^{s}\left[-\frac{1}{2}\ln(1-x)(1+s)+C\right]dx+$$

$$+\int_{t}^{1}\left[-\frac{1}{2}\ln(1-s)(1+x)+C\right]dx = -\ln 2+\frac{5+1}{2}-$$

$$-\frac{s}{2}\ln(1-s)+\frac{1}{2}\ln(1-s)-\frac{1}{2}(1+s)\ln(1+s)+C(s+1)+$$

$$+\frac{1}{2}(1+s)\ln(1+s)+\frac{1}{2}(1-s)-\frac{1}{2}\ln(1-s)(1-s)-\ln 2+$$

$$+C(1-s).$$

Бундан $-2\ln 2+1+2C=0$ тенгламага эгамиз. Уни ечиб $C=\ln 2-\frac{1}{2}$ ни топамиз. Демак, қўйилган масаланинг умумлашган Грин функцияси (*) формула билан берилиб, унда $C=\ln 2-\frac{1}{2}$ бўлади.

8. Ушбу $L[y]=y''$ дифференциал ифоданинг $y(-1)=$ $=y(+1)$; $y'(-1)=y'(+1)$ шартларни қаноатлантирадиган Грин функциясини тузинг.

Ечиш. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ функция $L[y]=0$ тенгламани ва чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечим бўлгани учун умумлашган Грин функциясини тузишга тўғри келади. Бунинг учун

$$y''=\frac{1}{2}$$

тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Бундай ечим осонгина топилади: $y=\frac{1}{4}x^2+\alpha x+\beta$. Демак, умумлашган Грин функциясини

$$G(x,s)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^2+\alpha_1 x+\beta_1, & x<s,\\ \frac{1}{4}x^2+\alpha_2 x+\beta_2, & x>s\end{cases}$$

кўринишда излаймиз.

Чегаравий шартлардан ва Грин функциясининг узлуксизлигидан фойдаланиб

$$\begin{cases}\alpha_2+\alpha_1=\beta_1-\beta_2,\\ \alpha_2-\alpha_1=-1,\\ \beta_1-\beta_2=s(\alpha_2-\alpha_1)\end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Бу системани ечиб топамиз: $\alpha_1=\frac{1-s}{2}$; $\alpha_2=-\frac{1+s}{2}$; $\beta_1=\beta_2-s$. Шунинг учун

$$G(x,s)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^2+\frac{1-s}{2}x-s+\beta_2, & x<s,\\ \frac{1}{4}x^2-\frac{1+s}{2}x+\beta_2, & x>s.\end{cases}$$

Бу ердаги β_2 ни $\int\limits_{-1}^{1}G(x,s)dx=0$ шартдан топамиз:

$$0=\int\limits_{-1}^{1}G(x,s)dx=\int\limits_{-1}^{s}\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1-s}{2}x-s+\beta_2\right]dx+$$

$$+\int\limits_{s}^{1}\left[\frac{1}{4}x^2-\frac{1+s}{2}x+\beta_2\right]dx=-\frac{1}{3}+2\beta_2-s-\frac{s^2}{2}.$$

Биз β_2 га нисбатан биринчи тартибли тенгламага эгамиз. Уни ечиб β_2 ни топамиз:

$$\beta_2 = \frac{s^2}{4} + \frac{s}{2} + \frac{1}{6}.$$

Буни эътиборга олсак, тегишли Грин функцияси учун узил-кесил қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-s)^2 + \frac{s-x}{2} + \frac{1}{6}, & x < s, \\ \frac{1}{2}(x-s)^2 + \frac{s-x}{2} + \frac{1}{6}, & x > s. \end{cases}$$

9. Ушбу $L[y] = y''$ дифференциал ифоданинг $y'(0) = y'(1) = 0$ шартларни қаноатлантирадиган Грин функциясини тузинг.

Ечиш. Бу ерда оддий Грин функцияси мавжуд эмас. Чунки $y = 1$ функция $y'' = 0$ тенгламани ва чегаравий шартларни қаноатлантиради. Демак, биз, $y'' = 1$ тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \alpha x + \beta.$$

Бу ҳолда Грин функцияси қуйидаги кӯринишда изланади:

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, & x < s, \\ \frac{1}{2}x^2 + \alpha_2 x + \beta_2, & x > s. \end{cases}$$

Равшанки, чегаравий шартлардан $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$ келиб чиқади. Грин функциясининг узлуксизлигидан

$$\beta_1 - \beta_2 = -s$$

ни топамиз. Бу ҳолда Грин функцияси

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - s + \beta_2, & x < s, \\ \frac{1}{2}x^2 - x + \beta_2, & x > s \end{cases}$$

кӯринишга эга бӯлади. Бу ерда β_2 ни $\int\limits_0^1 G(x,s)dx = 0$ шартдан топилади: $0=\int\limits_0^1 G(x,s)\,dx=\int\limits_0^s\left(\frac{1}{2}x^2-s+\beta_2\right)dx+$

$$+\int\limits_0^1\left(\frac{1}{2}x^2-x+\beta_2\right)dx^0=\beta_2-\frac{s^2}{2}-\frac{1^0}{3}.$$ Бундан $\beta_2=\frac{s^2}{2}+$

$+\frac{1}{3}$. Демак, Грин функцияси қуйидаги кўринишга келади:

$$G(x,s)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}s^2-s+\frac{1}{s}, & x<s,\\ \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}s^2-x+\frac{1}{s}, & x>s.\end{cases}$$

5-§. ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

Юқори тартибли оддий дифференциал тенгламалар учун қўйилган чегаравий масалани ечишда янги қийинчиликлар деярли келиб чиқмайди. Шунинг учун битта типик мисолни текшириш билан чегараланамиз. Қуйидаги

$$y^{(4)}=\lambda y,\ \lambda \text{ — параметр}$$

дифференциал тенглама берилган бўлсин. $L[y]=y^{(4)}$ дифференциал ифоданинг Грин функцияси тушунчасини киритамиз. Икки аргументли $G(x,s)$ функция қуйидаги шартларни қаноатлантирсин.

1°. $G(x,s)$ функция $G'_x(x,s)$, $G''_{xx}(x,s)$ функциялар s нинг ҳамма қийматларида узлуксиз;

2°. $G(x,s)$ функция бир жинсли чегаравий шарт деб аталадиган

$$y(x_0)=0,\ y(x_1)=0,\ y'(x_0)=0;\ y'(x_1)=0 \qquad (4.15)$$

шартларни қаноатлантиради:

3°. x нинг s дан бошқа ҳамма қийматларида $G'''_{x^3}(x,s)$, $G^{(4)}_{x^4}(x,s)$ ҳосилалар узлуксиз, лекин $x=s$ нуқтада учинчи тартибли ҳосила биринчи тур узилишга эга бўлиб, унинг сакраши—1 га тенг, яъни

$$[G'''_x(s+0,s)-G'''_x(s-0,s)]=+1$$

ёки

$$G'''_x(s,s+0)-G'''_x(s,s-0)=-1;$$

4°. $G(x,s)$ функция x нинг s дан бошқа ҳамма қийматларида $y^{(4)}=0$ тенгламани қаноатлантиради.

Бу ҳолда $G(x,s)$ функция $L[y]=y^{(4)}$ дифференциал операторнинг (4.15) чегаравий шартларни қаноатлантирадиган Грин функцияси дейилади.

Грин функциясининг энг характерли хусусиятларидан бири унинг учун Гильбертнинг фундаментал теоремасининг ўринлигидир, яъни агар $y(x)$ функция $L[y]=y^{(4)}=$ $=f(x)$ тенгламани ва (4.15) чегаравий шартларни (4.16) қаноатлантирса, уни

$$y(x)=-\int_{x_0}^{x_1}G(x,s)f(s)ds \qquad (4.17)$$

кўринишда ифодалаш мумкин, ва аксинча, (4.17) формула билан берилган $y(x)$ функция (4.16) тенглама ва (4.15) чегаравий шартни қаноатлантиради (бу ерда $f(x)[x_0, x_1]$ да узлуксиз функция). Берилган $L[y]=y^{(4)}$ дифференциал оператор учун ҳам тегишли Штурм—Лиувилль масаласини қўйиш мумкин. Хос сонлар ва хос функциялар тушунчасини ҳам мос равишда киритиб, уларнинг хоссаларини ўрганиш мумкин. Аммо тегишли тушунча ва хулосалар иккинчи тартибли дифференциал оператор учун тушунча ва хулосалардан фарқ қилмагани учун, биз уларнинг тўла баёнига тўхталиб ўтирмаймиз.

Эслатиб ўтамизки, (4.15) чегаравий шартлар ўрнига умумий чегаравий шартлар ҳам кўрилиши мумкин. Масалан, қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} g_1(y(x_0),\ y'(x_0),\ y''(x_0),\ y'''(x_0))=0,\\ g_2(y(x_0),\ y'(x_0),\ y''(x_0),\ y'''(x_0))=0,\\ h_1(y(x_1),\ y'(x_1),\ y''(x_1),\ y'''(x_1))=0,\\ h_2(y(x_1),\ y'(x_1),\ y''(x_1),\ y'''(x_1))=0 \end{aligned}\right| \qquad (4.18)$$

чегаравий шартлар берилган бўлса, ундан $g_1=y(x_0)$, $g_2=$ $=y'(x_0)$, $h_1=g(x_1)$, $h_2=y'(g_1)$ бўлганда (4.15) шартлар ҳосил бўлади. Умуман айтганда, чегаравий шартлар (4.18) дан умумийроқ кўринишда берилганда ҳам тегишли натижа ва хулосалар келтириб чиқарилади.

6-§. 4-ТАРТИБЛИ ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ГРИН ФУНКЦИЯСИНИ ТУЗИШГА ДОИР МИСОЛЛАР

1. Ушбу $L[y]=y^{(4)}(x)$ дифференциал операторнинг $y(0)=y''(0)$, $y(1)=y''(1)=0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи Грин функциясини тузинг.

Ечиш. Энг аввал $L[y]=0$ тенгламанинг умумий ечимини топамиз.

Равшанки,

$$y=C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4.$$

Агар $L[y]=0$ бир жинсли тенгламанинг бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими $y=0$ бўлса, оддий Грин функцияси тузилади. $L[y]=0$ тенгламанинг умумий ечими ва чегаравий шартлардан $C_1=C_2=C_3=C_4=0$ келиб чиқади. Демак, биз оддий Грин функциясини тузишимиз лозим.

Грин функциясини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$G(x,s)=\begin{cases}\alpha_1x^3+\alpha_2x^2+\alpha_3x+\alpha_4, & x<s,\\ \beta_1x^3+\beta_2x^2+\beta_3x+\beta_4, & x>y.\end{cases}$$

Чегаравий шартлардан ушбу

$$\begin{cases}\alpha_4=0,\\ \alpha_2=0,\\ \beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4=0,\\ 6\beta_1+2\beta_2=0\end{cases}$$

система келиб чиқади. Бу системадан $\beta_2=-3\beta_1$ ва $\beta_4=2\beta_1-\beta_3$. Энди Грин функцияси қуйидаги кўринишга келади:

$$G(x,s)=\begin{cases}\alpha_1x^3+\alpha_3x, & x<s,\\ \beta_1(x^3-3x^2+2)+\beta_3(x-1), & x>s.\end{cases}$$

Грин функциясининг биринчи ва учинчи шартларига кўра қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$x=s \text{ да } \begin{cases}\alpha_1s^3+\alpha_3s=\beta_1(s^3-3s^2+2)+\beta_3(s-1),\\ 3\alpha_1s^2+\alpha_3=\beta_1(3s^2-6s)+\beta_3,\\ 6\alpha_1=\beta_1(6s-6),\\ 6\beta_1-6\alpha_1=-1.\end{cases}$$

Системани ечиб топамиз:

$$\alpha_1=\frac{1-s}{6};\quad \alpha_3=\frac{s^2}{2}-\frac{s^3}{6};\quad -\frac{s}{3}$$

$$\beta_1=-\frac{s}{6};\quad \beta_3=-\frac{s^3+2s}{6}.$$

Топилганларни ўрнига қўйсак, қуйидаги

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{1-s}{6}x^3+\left(\dfrac{s^2}{2}-\dfrac{s^3}{6}-\dfrac{s}{3}\right)x, & x<s,\\ -\dfrac{s}{6}(x^3-3x^2+2)-\dfrac{s+2s}{6}(x-1), & x>s\end{cases}$$

функция ҳосил бўлади, бу берилган масаланинг Грин функциясидан иборат.

2. Ушбу $L[y]=y^{(4)}(x)$ дифференциал операторнинг $y'(0)=y'''(0)=0,\ y'(1)=y'''(1)=0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи Грин функциясини тузинг. Маълумки, $y^{(4)}=0$ тенгламанинг умумий ечими

$$y=C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$$

кўринишда ёзилади. Бундан: $y'=3C_1x^2+2C_2x+C_3, y''=$ $=6C_1x+2C_2,\ y'''=6C_1$.

Чегаравий шартлардан фойдаланиб

$$\begin{cases}C_3=0,\\ C_1=0,\\ 3C_1+2C_2+C_3=0\end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Бундан $C_2=0$. Шундай қилиб, $y^{(4)}=0$ тенгламанинг бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими: $y=C_4$. Агар $C_4=0$ бўлса, тривиал ечимга, $C_4\neq 0$ бўлса, тривиал бўлмаган ечимга эгамиз. Шунинг учун умумлашган Грин функциясини тузиш лозим бўлади. $y=C_4\neq 0$ ечимни нормаллаштирсак, $y=1$ келиб чиқади. Энди $L[y]=1$ тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$y=\frac{x^4}{4!}+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4.$$

Умумлашган Грин функциясини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{x^4}{4!}+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4, & x<s,\\ \dfrac{x^4}{4!}+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4, & x>s.\end{cases}$$

Чегаравий шартлардан фойдалансак,

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ a_1 = 0, \\ \frac{1}{3!} + 3b_1 + 2b_2 + b_3 = 0, \\ 1 + 6b_1 = 0 \end{cases}$$

система келиб чиқади. Бундан $b_1 = -\frac{1}{6}$; $b_3 = \frac{1}{3} - 2b_2$. Шунга кўра умумлашган Грин функцияси қуйидаги кўринишга келади:

$$\begin{cases} \frac{x^4}{4!} + a_2x^2 + a_4 \quad x < s, \\ \frac{x^4}{4!} - \frac{x^3}{6} + (x^2 - 2x)b_2 + \frac{x}{2} + b_4, \; x > s. \end{cases}$$

Умумлашган Грин функцияси таърифининг биринчи шартидан

$$\begin{cases} a_2s^2 + a_4 = \frac{s^3}{6} + \frac{s}{6} + (s^2 - 2s)b_2 \neq b_4, \\ 2a_2s = -\frac{s^2}{2} + (2s - 2)\, b_1 + \frac{1}{3}, \\ 2a_2 = -s + 2b_2 \end{cases}$$

системани ҳосил қиламиз. Бу системани ечиб, қуйидагиларни топамиз:

$$a_2 = \frac{s^2}{4} - \frac{s}{2} + \frac{1}{6}; \quad b_2 = \frac{s^2}{4} + \frac{1}{6}, \; a_4 = b_4 - \frac{s^3}{6}.$$

У ҳолда умумлашган Грин функцияси

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{x^4}{4!} + \frac{s^2x^2}{4} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^2s}{2} - \frac{s^3}{6} + b_4, \; x < s, \\ \frac{x^4}{4!} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2s^2}{4} + \frac{x^2}{6} - \frac{s^2x}{2} + b_4, \; x > s \end{cases}$$

кўринишга келади. b_4 ни топиш учун умумлашган Грин функциясининг нормаллашган ечим билан ортогонал бўлиши шартидан фойдаланамиз, яъни

$$\int_0^1 G(x, s)dx = 0$$

тенгликдан фойдаланамиз. Бундан

$$b_4 = \frac{s^4}{24} - \frac{1}{4s} + \frac{s^2}{6}$$

ни топамиз. b_4 нинг қийматини ўрнига қўйсак, берилган масаланинг умумлашган Грин функцияси ҳосил бўлади:

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + s^4}{24} + \dfrac{x^2 s^2}{4} - \dfrac{s^3}{6} + \dfrac{x^2 + s^2}{6} - \dfrac{x^2 s}{2} - \dfrac{1}{45}, & x < s, \\ \dfrac{s^4 + x^4}{24} + \dfrac{s^2 x^2}{4} - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{s^2 + x^2}{6} - \dfrac{s^2 x}{2} - \dfrac{1}{45}, & x > s. \end{cases}$$

5-боб

ЧЕГАРАДА БУЗИЛАДИГАН ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

1-§. ЧЕГАРАДА БУЗИЛАДИГАН ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

Кейинги мулоҳазаларни назарда тутиб, $L[y]$ деб $(p(x)y')'$ дифференциал ифодани белгилаймиз. Агар $p(x)$ функция $[0,1]$ интервалда узлуксиз бўлиб, $p(0)=0$ бўлса, ушбу

$$-(p(x)\ y')'=f(x) \tag{5.1}$$

тенглама чегарада бузиладиган иккинчи тартибли дифференциал тенглама дейилади (бунда $f(x)$ функция ҳам $[0,1]$ интервалда узлуксиз). Кўпинча $p(x)$ функция учун $p(x) \geqslant p_0x^\alpha$, $p_0=\text{const}>0$, $\alpha \geqslant 0$ тенгсизлик бажарилади деб қаралади.

(5.1) тенглама учун қуйидаги чегаравий шартларни қўйиш мумкин: Агар $0 \leqslant \alpha < 1$ бўлса, $y(0)=y(1)=0$; (5.2)

Агар $1 \leqslant \alpha < 2$ бўлса, $|y(0)|<\infty$, $y(1)=0$. (5.3)

1. Масаланинг Грин функцияси ва унинг хоссалари.

Энг аввал (5.2) масаланинг ечимини топамиз. Агар (5.2) масаланинг ечими

$$y(x)=\int_0^x G(x,s)f(s)\,ds$$

формула билан ифодаланса, $G(x,s)$ функцияни (5.2) масаланинг Грин функцияси деб атаймиз. $G(x,s)$ функцияни тузишга киришамиз. Бунинг учун (5.1) тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$-y(x)=\int_0^x \frac{ds}{p(s)}\int_0^s f(t)\,\alpha t+C_1\int_0^x \frac{\alpha s}{p(s)}+C_2$$

ёки Дирихле формуласидан фойдалансак,

$$-y(x)=\int_0^x f(t)\,\alpha t\int_t^x \frac{\alpha s}{p(s)}+C_1\int_0^x\frac{\alpha s}{p(s)}+C_2 \tag{5.4}$$

келиб чиқади. $y(0)=0$ чегаравий шартдан $C_2=0$, $y(1)=$ $=0$, чегаравий шартдан эса

$$b(1)\,C_1=-\int_0^1 f(t)\,dt\int_t^1\frac{ds}{p(s)}$$

топилади, бу ерда

$$b(x)=\int_0^x\frac{ds}{p(s)}.$$

Топилганларни (4.4) га қўямиз:

$$-y(x)=\int_0^x f(t)\,dt\int_t^x\frac{ds}{p(s)}-\frac{b(x)}{b(1)}\int_0^1 f(t)\,dt\int_t^1\frac{ds}{p(s)}=$$

$$=\int_0^x f(t)dt\left[b(x)-b(t)-\frac{b(x)}{b(1)}(b(1)-b(t))\right]-\frac{b(x)}{b(1)}\int_x^1 f(t)dt\int_t^1\frac{ds}{p(s)}=$$

$$=-\int_0^1 G(x,t)\,f(t)\,dt,$$

бу ерда

$$-G(x,t)=\begin{cases}-\dfrac{1}{b(1)}\,b(x)\displaystyle\int_t^1\frac{dx}{p(x)}, & x<t,\\[2ex] b(x)-b(t)-\dfrac{b(x)}{b(1)}(b(1)-b(t)), & x>t\end{cases}$$

функция қўйилган (5.1) — (5.2) масаланинг Грин функциясидир. Бу функциянинг $x>t$ бўлгандаги ифодасини қуйидагича ўзгартирамиз: $b(x)-b(t)-\frac{b(x)}{b(1)}(b(1)-b(t))=$

$$=\frac{1}{b(1)}\left[b(t)\,b(1)-b(t)\,b(x)\right]=-\frac{b(t)}{b(1)}[b(1)-b(x)]=$$

$$=-\frac{b(t)}{b(1)}\int_x^1\frac{ds}{p(s)}.$$

Шундай қилиб, Грин функциясини қуйидаги симметрик ҳолга келтирдик:

$$G(x, t) = \begin{cases} +\dfrac{1}{b(1)} \displaystyle\int_0^x \frac{ds}{p(s)} \int_t^1 \frac{ds}{p(s)}, & x < t, \\ +\dfrac{1}{b(1)} \displaystyle\int_0^t \frac{ds}{p(s)} \int_x^1 \frac{ds}{p(s)}, & x > t. \end{cases}$$

Энди Грин функциясининг хоссаларига тўхталамиз:

1) Грин функцияси $0 \leqslant x,\ t \leqslant 1$ соҳада узлуксиз;

2) $x \neq t$ бўлганда $(pG_x^{'})' = 0$ бўлади;

3) Грин функцияси (5.2) чегаравий шартларни қаноатлантиради;

4) $G_x^{'}\ (t+0,t) - G_x^{'}\ (t-0t) = \dfrac{1}{p(t)}$.

Бу хоссаларнинг исботи (5.5) формуладан келиб чиқади.

Энди (5.1), (5.3) масаланинг ечимини топамиз.

(5.1) тенгламанинг умумий ечими (5.4) формула билан аниқланади. $|y(0)| < \infty$ чегаравий шартдан $C_1 = 0_1$ келиб чиқади. $y(1) = 0$ чегаравий шартдан эса $C_2 = -\int_0^1 f(t)\,dt \int_t^1 \frac{ds}{p(s)}$ топилади.

Топилганларни (5.4) га қўйсак,

$$-y(x) = \int_0^x f(t)\ dt \int_t^x \frac{ds}{p(s)} - \int_0^1 f(t)\ dt \int_t^1 \frac{dx}{p(s)} = -$$

$$-\int_0^x f(t)dt \int_x^1 \frac{ds}{p(s)} - \int_x^1 f(t)\ dt \int_t^1 \frac{ds}{p(s)} = -\int_0^1 G(x,t)\ f(t)\ dt,$$

бу ерда

$$G(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_t^1 \frac{ds}{p(s)}, & x < t \\ \displaystyle\int_x^1 \frac{ds}{p(s)}, & x > t \end{cases}$$

функция (5.1) — (5.3) масаланинг Грин функциясидир.

Ҳозир шу функциянинг хоссаларига тўхталамиз:

1) Грин функцияси $\{0 < \delta \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1 (\delta = \text{const})\}$ тўғри тўртбурчакда узлуксиз ва $\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 G^2 \ (x,t) \quad dx\, dt < \infty$, агар $0 < \alpha < 1,\ 1 < \alpha < 2$ бўлса).

Функциянинг узлуксизлиги равшан. Охирги тенгсизликни исботлаймиз. Содда ўзгартиришлар ёрдамида ҳисоблаймиз:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 G^2 dx\ dt = 2\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x G^2\ dt = 2\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \left[\int\limits_x^1 \frac{ds}{p\ (s)} \right]^2 dt =$$

$$= 2\int\limits_0^1 dx \left(\int\limits_0^1 \frac{ds}{p\ (s)} \right)^2 x = 2\int\limits_0^1 x \left(\int\limits_0^1 \frac{ds}{p\ (s)} \right)^2 dx \leqslant 2\int\limits_0^1 x \left(\int\limits_x^1 \frac{ds}{p_0 s^{\alpha}} \right)^2 dx =$$

$$= \frac{2}{p_0^2\ (1-x)^2} \int\limits_0^1 x\ (1-x)^{1-\alpha}\ dx = \frac{2}{p_0^2\ (1-\alpha)^2} \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3-\alpha} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\ (2-\alpha)} \right] < \infty;$$

2) $x \neq t$ бўлганда $(p\ G_x')' = 0$;

3) Грин функцияси (5.3) чегаравий шартларни қаноатлантиради:

4) $G_x' \ (t+0,t) - G_x^t \ (t-0,t) = -\frac{1}{p\ (t)}$.

Кейинги 2), 3) ва 4) хоссаларнинг исботи тегишли Грин функциясининг кўринишидан бевосита келиб чиқади. Фақат қайд қиламизки, яна баъзи қўшимча шартлар қўйилганда (1) хосса α нинг $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$ тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматлари учун ҳам ўринли бўлади. Жумладан, агар $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{p\ (x)}$ интеграл яқинлашувчи бўлса, $0 \leqslant \alpha < 2$ тенгсизликдан олинган α лар учун $\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 G^2 \ (x,s)\, dxdt < \infty$ бўлади.

2. Штурм — Лиувилль масаласи.

Энди қуйидаги

$$
\left.\begin{aligned}
-(p(x)\,y')' - \lambda y,\ y(0) = y(1) = 0;\quad 0 \geqslant \alpha \leqslant 1\\
|y(0)| < \infty,\ y(1) = 0;\ 1 \leqslant \alpha < 2
\end{aligned}\right\} \quad (5.7)
$$

Штурм — Лиувилль масаласини ўрганамаз

Бу масала қуйидаги

$$y(x) = \lambda \int_0^1 G(x, t)\,y(t)\,dt \qquad (5.8)$$

интеграл тенгламага тенг кучли.

Штурм — Лиувилль масаласининг ечими, хос сонлари ва хос функциялари ҳақида, унинг Грин функцияси ҳақида тўла тўхталмаймиз.

2-ЧЕГАРАНИНГ ҲАММА ЕРИДА БУЗИЛАДИГАН ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА

1. Масаланинг Грин функцияси ва унинг хоссалари

Бизга

$$L[y] = -(p\,y')' = f(x) \qquad (5.1)$$

тенглама берилган бўлсин. Агар $p(x)$ ва $f(x)$ функциялар $[-1, 1]$ интервалда узлуксиз бўлиб, $p(-1) = p(+1) = 0$ бўлса, у ҳолда (5.1) тенглама чегаранинг ҳамма ерида бузиладиган 2-тартибли дифференциал тенглама дейилади. Кўпинча $p(x) > 0$, $p(x) \geqslant p_0 (x-1)^{\alpha} (x+1)^{\beta}$, $p = \mathrm{const} > 0$, $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$, $1 \leqslant \beta < 2$ ҳоллар кўрилади. Шу тенглама учун ҳам (5.2) ёки (5.3) чегаравий шартлар қўйилиши мумкин. Ҳозир (4.1) тенгламанинг

$$|y(\pm 1)| < \infty \qquad (5.9)$$

шартни қаноатлантирадиган ечимини топамиз.

$L[y] = 0$ тенгламанинг $|y(\pm 1)| < \infty$ шартни қаноатлантирадиган тривиалмас ечими $y = C \neq 0$ бўлгани учун бу ерда оддий Грин функциясини тузиб бўлмайди. Лекин умумлашган Грин функциясини тузиш мумкин. Бунинг учун $y = C$ ечимни нормаллаштирамиз. У ҳолда $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ бўлади. Энди қуйидаги

$$L[y] = \frac{1}{2}$$

тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$y = \frac{1}{2} \int \frac{s + C_1}{p(s)}\,ds + C_2.$$

Қўйилган масаланинг Грин функциясини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{1}^{x}\dfrac{s+C_1'}{p(s)}\,ds+C_2', & x>t,\\[2ex] \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{-1}^{x}\dfrac{s+C_1''}{p(s)}\,ds+C_2'', & x<t.\end{cases}$$

$|G(x,t)|<\infty$ бўлганидан $C_1'=-1$, $C_1''=+1$ бўлади. Грин функциясининг $x=t$ да узлуксизлигидан

$$\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{t}\frac{s-1}{p(s)}\,ds+C_2'=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{t}\frac{s+1}{p(s)}\,ds+C_2''$$

тенгликни топамиз. Бундан:

$$C_2'=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{t}\frac{s+1}{p(s)}\,ds+\gamma,\quad C_2''=\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{t}\frac{s-1}{p(s)}\,ds+\gamma,$$

бу ерда γ — ихтиёрий ўзгармас.

Топилганларни Грин функциясига қўйсак,

$$G(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{1}^{x}\dfrac{s-1}{p(s)}\,ds+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{-1}^{t}\dfrac{s+1}{p(s)}\,ds+\gamma, & x>t,\\[2ex] \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{-1}^{x}\dfrac{s+1}{p(s)}\,ds+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{1}^{t}\dfrac{s-1}{p(s)}\,ds+\gamma, & x<t.\end{cases}\tag{5.10}$$

Номаълум ўзгармас γ ни $\int\limits_{-1}^{1}G(x,t)\,dx=0$ шартдан топамиз:

$$\int\limits_{-1}^{t}\Big[\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{x}\frac{s+1}{p(s)}\,ds+\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{t}\frac{s-1}{p(s)}\,ds+\gamma\Big]\,dx+\int\limits_{t}^{1}\Big[\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{x}\frac{s-1}{p(s)}\,ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{t}\frac{s+1}{p(s)}\,ds+\gamma\Big]\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{t}dx\int\limits_{-1}^{x}\frac{s+1}{p(s)}\,ds+\frac{t+1}{2}\int\limits_{1}^{t}\frac{s-1}{p(s)}\,ds+$$

$$+(t+1)\,\gamma+\frac{1-t}{2}\int\limits_{-1}^{t}\frac{s+1}{p(s)}\,ds+\frac{1}{2}\int\limits_{t}^{1}dx\int\limits_{1}^{x}\frac{s-1}{p(s)}\,ds+$$

$$\gamma\,(1-t)=0.$$

Бундан

$$-2\gamma=\frac{1}{2}\int_{1}^{t} dx\int_{-1}^{x}\frac{s+1}{p(s)}\,ds+\frac{t+1}{2}\int_{1}^{t}\frac{s-1}{p(s)}\,ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x}^{1} dx\int_{1}^{x}\frac{s-1}{p(s)}\,ds+\frac{1-t}{2}\int_{1}^{t}\frac{s+1}{p(s)}\,ds.$$

Икки каррали интегралларга Дирихле формуласини татбиқ этиб, қуйидагини топамиз:

$$-2\gamma=\frac{1}{2}\int_{-1}^{t}\frac{(s+1)\ (t-s)}{p\ (s)}ds+\frac{t+1}{2}\int_{1}^{t}\frac{s-1}{p\ (s)}\,ds-\frac{1}{2}\int_{1}^{t}\frac{(s-1)\ (t-s)}{p\ (s)}ds+$$

$$+\frac{1-t}{2}\int_{-1}^{t}\frac{s+1}{p\ (s)}\,ds=\frac{1}{2}\int_{-1}^{t}\frac{(s+1)\ (1-s)}{p\ (s)}ds+\frac{1}{2}\int_{1}^{t}\frac{(s-1)\ (1+s)}{p(s)}ds=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{(1+s)\ (1-s)}{p\ (s)_{+1}}\,ds.$$

$$\text{Демак, }\ \gamma=-\frac{1}{4}\int_{-1}^{+1}\frac{(1+s)\ (1-s)}{p\ (s)}\,ds. \tag{5.11}$$

Шундай қилиб, қўйилган масаланинг умумлашган Грин функцияси (5.10) кўринишда берилиб, унда γ миқдор (5.11) формула билан аниқланади.

Энди Грин функциясининг хоссаларига тўхталамиз.

1) Грин функциясининг квадрати $G^2\ (x,\ t)$ ушбу $-1\leqslant x,\ t\leqslant 1$ соҳада интегралланувчидир.

Ҳақиқатан,

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} G^2\ (x,t)\ dx\ dt=2\int_{-1}^{1} dx\int_{-1}^{x} G^2\ (x,\ t)\ dt=$$

$$=2\int_{-1}^{1} dx\int_{-1}^{x}\left[\frac{1}{2}\int_{1}^{x}\frac{s-1}{p\ (s)}\,ds+\frac{1}{2}\int_{-1}^{t}\frac{s+1}{p\ (s)}\,ds+\gamma\right]^2 dt\leqslant$$

$$< \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{x} \left[\left(\int_{1}^{x} \frac{s-1}{p(s)}\, ds \right)^2 + \left(\int_{-1}^{t} \frac{s+1}{p(s)}\, ds \right)^2 + 4\gamma^2 \right] dt =$$

$$= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{x} \left(\int_{1}^{x} \frac{s-1}{p(s)}\, ds \right)^2 dt + \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{x} \left(\int_{1}^{t} \frac{s+1}{p(s)}\, ds \right)^2 dt +$$

$$+ 6\gamma^2 \int_{-1}^{1} (x+1)\, dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} (x+1) \left(\int_{1}^{x} \frac{s-1}{p(s)}\, ds \right)^2 dx +$$

$$+ \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{x} \left(\int_{-1}^{t} \frac{s+1}{p(s)}\, ds \right)^2 dt.$$

α ва β лар 2 дан кичик бўлганда $p(x) \geqslant p_0 \ (x - p^{\alpha} (x+1)^{\beta}$ тенгсизликка кўра бу тенгсизликнинг ўнг томони чегараланган. Хосса исбот этилди.

2) $G'_x(t+0,t) - G'_x(t-0,t) = -\frac{1}{p(t)}$. Бу тенгликнинг исботи Грин функциясининг кўринишидан келиб чиқади.

3) Грин функцияси (4.9) чегаравий шартларни қаноатлантиради.

2. Штурм — Лиувилль масаласи

Параметр γ нинг қуйидаги

$$-(py')' = \gamma y, \ |y(\pm 1)| < \infty \tag{5.12}$$

масала тривиалмас ечимга эга бўладиган қийматларини топинг.

(5.12) масала қуйидаги

$$y(x) = \lambda \int_{-1}^{1} G(x,t)\, y(t)\, dt \tag{5.13}$$

интеграл тенгламага тенг кучлидир.

Яна аввалги параграфлардагидек (5.13) интеграл тенгламанинг характеристик сонлари ва хос функциялари ҳақида гапириш ҳамда бунга мос равишда (5.12) масала учун хос сонлар ва хос функциялар ҳақида гапириш мумкин. Биз бунга тўхталмаймиз.

3-§. ЧЕГАРАДА БУЗИЛАДИГАН ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА

1. Масаланинг қўйилиши

Бизга

$$(-1)^n \ (p(x)\, y^{(n)})^{(n)} = f(x) \tag{5.14}$$

тенглама берилган бўлсин. Бу ерда $p(x)$ ва $f(x)$ функциялар $[0,1]$ интервалда узлуксиз функциялар. Шу билан бирга
$$p(0)=0 \text{ ва } 0<x\leqslant 1 \text{ да } p(x)\geqslant p_0 x^{\alpha},$$
$$p_0=\text{const}>0, \quad n\leqslant \alpha \leqslant 2n.$$

(5.14) тенгламанинг ушбу
$$|y^{(\mu)}(0)|<\infty, \ \mu=\overline{0,2n-[\alpha]-1}; \ y^{(\mu)}(1)=0, \ \mu=\overline{1, \ n-1} \qquad (5.15)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирадиган ечимини топиш масаласини қўямиз.

Агар (5.14) — (5.15) масаланинг ечими
$$y(x)=\int_0^1 G(x,t) f(t)\,dt$$

формула билан аниқланса, у ҳолда $G(x,t)$ функция (5.14)— —(5.15) масаланинг Грин функцияси дейилади.

Юқоридаги масалани $0<\alpha<n$ интервал учун ҳам қўйиш мумкин. Биз қуйида юқоридаги масалага батафсил тўхтаб ўтирмаймиз. Аммо бир неча мисолларда 4-тартибли дифференциал тенгламалар учун Грин функциясини тузиш билан шуғулланамиз.

2. Чегарада бузиладиган 4-тартибли дифференциал тенгламалар учун Грин функциясини тузишга доир мисоллар

Мисоллар. 1. Ушбу $L[y]=(x^{\alpha}y'')''$ $0\leqslant\alpha<1$ дифференциал операторнинг
$$\begin{cases} y(0)=y'(0)=0, \\ y''(0)=y'''(1)=0 \end{cases}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи Грин функциясини тузинг.

Ечиш. Энг аввал $L[y]=0$ тенгламанинг умумий ечимини топамиз:
$$y=C_1\frac{x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)}+C_2\frac{x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}+C_3x+C_4.$$

Агар $L[y]=0$ бир жинсли дифференциал тенгламанинг бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими

$y \equiv 0$ бўлса, у ҳолда оддий Грин функцияси тузилади. Буни текширайлик. Чегаравий шартлардан қуйидаги

$$\begin{cases} C_4 = 0, \\ C_3 = 0, \\ C_1 + C_2 = 0, \\ C_1\ (1-\alpha) - C_2\alpha = 0 \end{cases}$$

алгебраик тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Бу системани ечсак, $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ келиб чиқади. Демак, чегаравий шартларни фақат тривиал ечим, яъни $y \equiv 0$ қаноатлантиради. Шунинг учун оддий Грин функциясини тузамиз. Грин функциясини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$G\ (x, s) = \begin{cases} a_1 \dfrac{x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)\ (3-\alpha)} + a_2\ \dfrac{x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)\ (2-\alpha)} + a_3x + a_4, & x < s, \\ b_1 \dfrac{x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)\ (3-\alpha)} + b_2\ \dfrac{x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)\ (2-\alpha)} + b_3x + b_4, & x > s. \end{cases}$$

Чегаравий шартлардан топамиз: $a_4 = 0$, $a_3 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$. Бу ҳолда Грин функцияси

$$G\ (x, s) = \begin{cases} a_1 \dfrac{x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)\ (3-\alpha)} + a_2\ \dfrac{x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)\ (2-\alpha)}; & x < s, \\ b_3x + b_4, & x > s \end{cases}$$

кўринишга келади. Грин функциясининг биринчи ва учинчи шартларидан $x = s$ бўлганда

$$\begin{cases} a_1\ \dfrac{s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)\ (3-\alpha)} + a_2\ \dfrac{s^{2-\alpha}}{(1-\alpha)\ (2-\alpha)} = b_3s + b_4, \\ a_1\ \dfrac{s^{2-\alpha}}{2-\alpha} + a_2\ \dfrac{s^{1-\alpha}}{1-\alpha} = b_3, \\ a_1\ s^{1-\alpha} + a_2s^{-\alpha} = 0, \\ -a_1\ (1-\alpha)\ s^{-\alpha} + a_2\alpha s^{-\alpha} = -\dfrac{1}{s^{\alpha}} \end{cases}$$

система келиб чиқади. Системани ечиб қуйидагиларни топамиз:

$$a_1 = 1;\ a_2 = -s,\ b_2 = \frac{s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)\ (3-\alpha)};\ b_3 = -\frac{s^{2-\alpha}}{(1-\alpha)\ (2-\alpha)}.$$

Топилганларни $G\ (x, s)$ га қўйсак, ҳосил бўлган

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} - \dfrac{s \cdot x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}, & x < s, \\ \dfrac{s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} - \dfrac{x \cdot s^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}, & x > s \end{cases}$$

функция қўйилган масаланинг Грин функцияси бўлади.

2. Ушбу $L\ [y] = (x^{\alpha} y'')''$ дифференциал операторнинг $y\ (0) = 0$, $|y'\ (0)| < \infty$, $y\ (1) = y''\ (1) = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи Грин функциясини тузинг.

Ечиш. Энг аввал $L\ [y] = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$y = C_1 \frac{x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} + C_2 \frac{x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + C_3 x + C_4.$$

Чегаравий шартлардан $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ келиб чиқади. Демак, оддий Грин функциясини тузиш лозим. Грин функциясини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$G(x, s) = \begin{cases} a_1 \dfrac{x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} + a_2 \dfrac{x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + a_3 x + a_4, & x < s, \\ b_1 \dfrac{x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)} + b_2 \dfrac{x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + b_3 x + b_4, & x > s. \end{cases}$$

Чегаравий шартларга асосан қуйидаги

$$\begin{cases} a_4 = 0, \\ a_2 = 0, \\ b_1 \dfrac{1}{(2-\alpha)(3-\alpha)} + b_2 \dfrac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + b_3 + b_4 = 0 \\ b_1 + b_2 = 0 \end{cases}$$

системага эга бўламиз. Бу системани ечиб топамиз:

$$b_1 = -b_2,$$
$$b_4 = b_1 \frac{2}{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)} + b_3.$$

У ҳолда Грин функциясининг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$G(x, s) = \begin{cases} a_1 \dfrac{x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)\ (3-\alpha)} + a_3 x, \quad x < s, \\ b_1 \dfrac{x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)\ (3-\alpha)} - b_1 \dfrac{x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)\ (2-\alpha)} + \\ b_3 x \dfrac{2b_1}{(1-\alpha)\ (2-\alpha)\ (3-\alpha)}; \quad x > s. \end{cases}$$

Грин функциясининг биринчи ва учинчи шартларидан $s = x$ бўлганда

$$\begin{cases} a_1 \dfrac{s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)\ (3-\alpha)} + a_3 s = b_1 \dfrac{s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)\ (3-\alpha)} - b_1 \dfrac{s^{2-\alpha}}{(1-\alpha)\ (2-\alpha)} + \\ \qquad + b_3 x + b_3 + \dfrac{2b_1}{(1-\alpha)\ (2-\alpha)\ (3-\alpha)}, \\ a_1 \dfrac{s^{2-\alpha}}{2-\alpha} + a_3 = b_1 \dfrac{s^{2-\alpha}}{2-\alpha} - b_1 \dfrac{s^{1-\alpha}}{1-\alpha} + b_3, \\ a_1 s^{1-\alpha} = b_1 s^{1-\alpha} - b_1 s^{-\alpha}, \\ b_1\ (1-\alpha)\ s^{-\alpha} + b_1 \alpha s^{-(\alpha+1)} - a_1 s^{-\alpha}\ (1-\alpha) = \dfrac{1}{s^{\alpha}} \end{cases}$$

система келиб чиқади. Уни ечамиз:

$$a_1 = 1 - s,$$

$$a_3 = \frac{2 \cdot s^{2-\alpha}}{(1-\alpha)\ (2-\alpha)} + \frac{2s}{(1-\alpha)\ (2-\alpha)\ (3-\alpha)} - \frac{s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)\ (3-\alpha)},$$

$$b_3 = \frac{2s}{(1-\alpha)\ (2-\alpha)\ (3-\alpha)} - \frac{s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)\ (3-\alpha)},$$

$$b_4 = \frac{s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)\ (3-\alpha)}.$$

Топилганларни ўрнига қўйсак, қуйидаги

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{(1-s)\ (x^{3-\alpha})}{(2-\alpha)\ (3-\alpha)} + \dfrac{s^{2-\alpha} x}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + \dfrac{2sx}{(1-\alpha)\ (2-\alpha)\ (3-\alpha)} - \\ \qquad - \dfrac{x s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)\ (3-\alpha)}; \quad x < s \text{ да}; \\ \dfrac{(1-x)\ s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)\ (3-\alpha)} + \dfrac{s x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)\ (2-\alpha)} + \dfrac{2sx}{(1-\alpha)\ (2-\alpha)\ (3-\alpha)} - \\ \qquad - \dfrac{s x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)\ (3-\alpha)}; \quad x > s \text{ да}; \end{cases}$$

функция ҳосил бўлади. Бу қўйилган масаланинг Грин функциясидан иборат.

3. Ушбу $L\ [y] = (x^{\alpha} y'')\,''$ дифференциал операторнинг

$$y(0)=0;\quad |y'(0)|<\infty,$$
$$y''(1)=0;\ y'''(1)=0$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи Грин функциясини тузинг.

Ечиш. Энг аввал $L[y]=0$ тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$y=C_1\frac{x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)}+C_2\frac{x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}+C_3x+C_4.$$

Чегаравий шартларга асосан $C_1=0,\ C_2=0,\ C_3\neq 0,\ C_4=0$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $L[y]=0$ тенгламанинг бир жинсли чегаравий шартларни қаноатлантирувчи тривиалмас ечими $y=C_3x$ мавжуд. Шунинг учун умумлашган Грин функциясини тузамиз. Бунинг учун аввал $y=C_3x$ функцияни нормаллаштирсак, $y=\sqrt{3}x$ функция келиб чиқади. Энди $L[y]=\sqrt{3}x\cdot\sqrt{3}s=3xs$ тенгламанинг умумий ечимини топамиз:

$$y=\frac{sx^{5-\alpha}}{2(4-\alpha)(5-\alpha)}+C_1\frac{x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)}+C_2\frac{x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}+$$
$$+C_3x+C_4.$$

Умумлашган Грин функциясини қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{sx^{5-\alpha}}{2(4-\alpha)(5-\alpha)}+a_1\dfrac{x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)}+\\ +a_2\dfrac{x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}+a_3x+a_4;\ x<s,\\ \dfrac{sx^{5-\alpha}}{2(4-\alpha)(5-\alpha)}+b_1\dfrac{x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)(3-\alpha)}+\\ +b_2\dfrac{x^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}+b_3x+b_4;\ x>s.\end{cases}$$

Чегаравий шартлардан қуйидаги

$$a_4=0,$$
$$a_2=0,$$
$$b_1=\frac{s}{2},$$
$$b_3=-s$$

натижалар келиб чиқади. Буларни ўрнига қўйсак, умумлашган Грин функцияси қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{sx^{5-\alpha}}{2\,(4-\alpha)\,(5-\alpha)}+a_1\frac{x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)\,(3-\alpha)}+a_3x,\quad x<s,$$

$$\frac{sx^{5-\alpha}}{2\,(4-\alpha)\,(5-\alpha)}+\frac{sx^{3-\alpha}}{2\,(2-\alpha)\,(3-\alpha)}-\frac{sx^{2-\alpha}}{(1-\alpha)\,(2-\alpha)}+b_3x+b_4;$$
$$x>s.$$

Умумлашган Грин функциясининг шартидан $x=s$ бўлганда

$$a_1\frac{s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)\,(3-\alpha)}+a_3s=\frac{s^{4-\alpha}}{2\,(2-\alpha)\,(3-\alpha)}-\frac{s^{3-\alpha}}{(1-\alpha)\,(2-\alpha)}+b_3s+$$
$$+b_4,$$
$$a_1\frac{s^{2-\alpha}}{2-\alpha}+a_3=\frac{s^{3-\alpha}}{2\,(2-\alpha)}-\frac{s^{2-\alpha}}{1-\alpha}+b_3,$$
$$a_1s^{1-\alpha}=\frac{s^{2-\alpha}}{2}-s^{1-\alpha}$$

система келиб чиқади. Системани ечиб қуйидагиларга эга бўламиз:

$$a_1=\frac{s}{2}-1,\quad a_3=\frac{s^{2-\alpha}}{(1-\alpha)\,(2-\alpha)}+b_3;\quad b_4=-\frac{s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)\,(3-\alpha)}.$$

Энди топилган ифодаларни Грин функцияси ифодасига қўйиб, узил-кесил

$$G\,(x,s)=\begin{cases}\dfrac{sx^{5-\alpha}}{2\,(4-\alpha)\,(5-\alpha)}+\dfrac{sx^{3-\alpha}}{2\,(2-\alpha)\,(3-\alpha)}-\dfrac{x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)\,(3-\alpha)}-\\ \qquad-\dfrac{xs^{2-\alpha}}{(1-\alpha)\,(2-\alpha)}+b_3x,\quad x>s,\\ \dfrac{sx^{5-\alpha}}{2\,(4-\alpha)\,(5-\alpha)}+\dfrac{sx^{2-\alpha}}{2\,(2-\alpha)\,(3-\alpha)}-\dfrac{sx^{3-\alpha}}{(1-\alpha)\,(2-\alpha)}+\\ \qquad+\dfrac{s^{2-\alpha}}{(2-\alpha)\,(3-\alpha)}+b_3x,\quad x>s\end{cases}$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу формулада b_3 ни умумлашган Грин функциясининг ортогоналлик шартидан, яъни

$$\int_0^1 G\,(x,s)\,xdx=0$$

муносабатдан топамиз. Содда ҳисоблашлар ёрдамида

$$b_3=\frac{s}{2\,(4-\alpha)\,(5-\alpha)\,(7-\alpha)}-\frac{s}{(1-\alpha)\,(2-\alpha)\,(4-\alpha)}+\frac{s^{5-\alpha}}{(4-\alpha)(5-\alpha)^2}$$

эканига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Энди b_3 ниг қийматини ўрнига қўйсак, қўйилган масаланинг умумлашган Грин функциясини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} \dfrac{sx^{5-\alpha}+xs^{5-\alpha}}{2\,(4-\alpha)\,(5-\alpha)}+\dfrac{sx^{3-\alpha}}{2\,(2-\alpha)\,(3-\alpha)}-\dfrac{x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)\,(3-\alpha)}- \\ -\dfrac{xs^{2-\alpha}}{(1-\alpha)\,(2-\alpha)}-\dfrac{sx\,(\alpha^2+27\alpha+68)}{2\,(4-\alpha)\,(5-\alpha)\,(7-\alpha)\,(1-\alpha)\,(2-\alpha)}; & x<s, \\ \dfrac{sx^{5-\alpha}+xs^{5-\alpha}}{2\,(4-\alpha)\,(5-\alpha)}+\dfrac{xs^{3-\alpha}}{2\,(2-\alpha)\,(3-\alpha)}-\dfrac{s^{3-\alpha}}{(2-\alpha)\,(3-\alpha)}- \\ -\dfrac{sx^{2-\alpha}}{(1-\alpha)\,(2-\alpha)}-\dfrac{sx\,(\alpha^2+27\alpha+68)}{2\,(4-\alpha)\,(5-\alpha)\,(7-\alpha)\,(1-\alpha)\,(2-\alpha)}; & x>s. \end{cases}$$

АДАБИЁТ

1. Ловитт У. В Линейные интегральные уравнения. Гостехиздат, 1957.

2. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. Физматгиз, 1959.

3. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. «Наука», М., 1969.

4. Пономарёв К. К. Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач. Учпедгиз, 1962.

5. Степанов В. В Курс дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1953.

6. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том II. Гостехиздат, 1954; том IV. Физматгиз, 1958; том V, Физматгиз, 1959.

7. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. «Наука» М. 1965.

8. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения, «Наука», М. 1969.

9. Лизоркин П. И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. «Наука», М. 1981.

10. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. «Наука», М. 1980.

11. Гутер Р. С., Янпольский А. Р. Дифференциал тенгламалар. «Ўқитувчи», Тошкент, 1978.

12. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. «Наука» М., 1979.

МУНДАРИЖА

2-боб

n-ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

3-боб

ЧИЗИҚЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРНИНГ НОРМАЛ СИСТЕМАСИ

4-боб

ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

5-боб

ЧЕГАРАДА БУЗИЛАДИГАН ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАЛАР

На узбекском языке

КУЧҚАР БАЙКУЗИЕВИЧ БАЙКУЗИЕВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие для студентов педагогических институтов

Ташкент —«Ўқитувчи»— 1983

Редактор *Х. Алимов*
Расмлар редактори *С. Соин*
Техредактор *Ш. Вахидова*
Корректор *З. Мирхаликова*

ИБ № 2731

Теришга берилди 6. 04. 1982 й. Босишга рухсат этилди 9.06.1983 й. Формат 84×108 $^1/_{32}$. Тип. қоғози №3. Кегли 10 шпонсиз. Гарнитура «Литературная». Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л, 10.08. Нашр. л. 8,8. Тиражи 5000. Зак № 2537. Баҳоси 65 т.

«Ўқитувчи» нашриёти, Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 9—13 — 82.

Ўзбекистон ССР нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари Давлат комитети. Тошкент «Матбуот» полиграфия ишлаб чиқариш бирлашмасининг Бош корхонаси, Тошкент, Навоий кўчаси, 30. 1983 й.

Головное предприятие ТППО «Матбуот» Государственного комитета УзССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Ташкент, ул. Навои 30.

Б 81

Бойқўзиев Қ. Б.
Дифференциал тенгламалар: Пед, ин-тларининг мат. физ.-мат. ва физ. фак. студентлари учун ўқув қўлланмаси (Г. Н. Насритдинов таҳрири остида) 1-е изд. — Т.: Уқитувчи, 1983. — 192 б.

Байкузиев К. Дифференциальные уравнения.

51
ББК 22.161.6

Қ.Б. БОЙҚЎЗИЕВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР