Topologik fazo. Ochiq va yopiq to’plamlar va ularning hossalari.

1.1.Таъриф. Топологик фазо деб X тўплам ва шу тўпламнинг қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи τ қисм тўпламлар оиласидан иборат (X,τ) жуфтликка айтилади.

(O1) $\varnothing \in \tau$ ва $X \in \tau$.

(O2) Агар $U_1 \in \tau$ ва $U_2 \in \tau$ бўлса, у ҳолда $U_1 \cap U_2 \in \tau$ бўлади.

(O3) Агар $A \subset \tau$ бўлса, у ҳолда $\cup A \in \tau$ бўлади.

Бунда X тўплам фазо деб, унинг элементлари эса фазонинг нуқталари деб аталади; X тўпламнинг τ оилага тегишли элементлари X фазонинг очиқ тўпламлари, τ оиланинг ўзи эса X даги топология деб аталади.

Очиқ тўпламлар оиласининг (O1) - (O3) хоссаларини қуйидаги кўринишда ҳам келтириш мумкин:

(O1$'$) Бўш тўплам ва бутун фазо очиқ тўпламлардир.

(O2$'$) Иккита очиқ тўламнинг кесишмаси яна очиқ тўпламдир.

(O3$'$) Ихтирий сондаги очиқ тўпламлар бирлашмаси яна очиқ тўпламдир.

(O2$'$) дан, ихтиёрий чекли сондаги очиқ тўпламлар кесишмаси яна очиқ тўплам эканлиги келиб чиқади.

Бирор $x \in X$ нуқта ва бирор $U \subset X$ очиқ тўплам учун $x \in U$ бўлса, у ҳолда U тўплам x нуқтанинг атрофи дейилади.

1.1. Мисол. $X = \{a,b\}$ - иккита элементдан иборат тўплам берилган бўлсин. Бу тўпламда бир қанча усуллар билан топология киритиш мумкин:

а) $\tau_1 = \{\varnothing, X\}$, б) $\tau_2 = \{\varnothing, \{a\}, X\}$, в) $\tau_3 = \{\varnothing, \{b\}, X\}$, г) $\tau_4 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, X\}$.

(X,τ_i), $i = 1,2,3,4$ топологик фазо эканлигини текшириш мумкин.

1.2. Мисол. Зарисский топологияси. Ихтиёрий X - чексиз тўплам ва бу тўпламнинг тўлдирмаси $X \setminus U$ чекли бўладиган барча U қисм тўпламларидан ҳамда бўш тўпламдан иборат τ оилани қараймиз. Осонгина текшириш мумкинки, τ оила X да топология ташкил қилади. Бу топологияга Зарисский топологияси дейилади.

1.1. Тасдиқ Агар V тўпламнинг ихтиёрий нуқтаси шу тўпламга тегишли бирор Ux атрофга эга бўлса ва фақат шу ҳолда V тўплам очиқ тўплам бўлади.

Ҳақиқатан, V - очиқ тўплам бўлсин. Ихтиёрий $x \in V$ нуқта учун $Ux = V$ деб оламиз. Аксинча, ихтиёрий $x \in V$ нуқта учун V га тегишли бўлган Ux атроф мавжуд бўлсин. (O3) шартга кўра $V = \bigcup\{Ux : x \in V\}$ - очиқ тўплам бўлади. 1.1 тасдиқ исботланди
очиқ тўплам топилиб, $x \in U_\alpha \subset V$ ўринли бўлади.

Етарлилиги. Бизга V - бўш бўлмаган очиқ тўплам (X, τ) топлогик фазода берилган бўлсин. Шартга кўра ихтиёрий $x \in V$ нуқта учун шундай $U_x \in B$ очиқ тўплам топилиб, $x \in U_x \subset V$ шарт ўринли бўлади. Агар x нуқтани V очиқ тўплам бўйича силжитиб чиқсак, у ҳолда
$\{U_x : x \in V, U_x \in B\}$.

1.9.Таъриф. Айтайлик (X, τ) - топологик фазо бўлсин. Агар бирор F тўпламнинг тўлдирмаси $X \setminus F$ - очиқ тўплам бўлса, у ҳолда бу F тўпламга (X, τ) фазода *ёпиқ тўплам* дейилади.

Юқорида аниқланган барча ёпиқ тўпламлар оиласини ξ билан белгилаймиз. Де Морган қонуни ва (O1) – (O3) хоссаларни инобатга олсак барча ёпиқ тўпламлар оиласи ξ учун қуйидаги хоссаларга эга бўламиз:

(C1) $X \in \xi$ ва $\varnothing \in \xi$.

(C2) Агар $F_1 \in \xi$ ва $F_2 \in \xi$ бўлса, у ҳолда $F_1 \cup F_2 \in \xi$ бўлади.

(C3) Агар $A \subset \xi$ бўлса, у ҳолда $\cap A \in \xi$ бўлади.

Бу хоссаларни қуйидагича ҳам ифода қилиш мумкин:

(C1') Бутун фазо ва бўш тўплам ёпиқ тўпламдир.

(C2') Иккита ёпиқ тўпламнинг бирлашмаси яна ёпиқ тўплам бўлади.

(C3') Ихтиёрий сондаги ёпиқ тўпламларнинг кесишмаси яна ёпиқ тўплам бўлади.

Исботи. (C1') нинг исботи. (O1) шартга кўра $\varnothing \in \tau$ ва $X \in \tau$ эди. Қуйидагини қараймиз, $X \setminus \varnothing = X$ ва $X \setminus X = \varnothing$ бўлгани учун $X \in \xi$ ва $\varnothing \in \xi$ бўлади.

(C2') хоссани исботлаш учун де Морган формуласидан фойдаланамиз. Айтайлик $F_1, F_2 \in \xi$ берилган бўлсин. Таърифга кўра, ҳар бир $i = 1,2$ учун шундай $U_i = X \setminus F_i, i = 1,2$ очиқ тўплам топилади. Бундан $F_1 \cup F_2 = X \setminus (U_1 \cap U_2)$ ни қараймиз. Иккита очиқ тўпламнинг кесишмаси (O2) шартга кўра $U_1 \cap U_2$ - очиқ тўплам эканлигидан $F_1 \cup F_2 = X \setminus (U_1 \cap U_2)$ ёпиқ тўплам эканлиги келиб чиқади.

(C3') нинг исботи. Ихтиёрий $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ - ёпиқ тўпламлар оиласи берилган бўлсин. 1.9 таърифга асосан ихтиёрий $\alpha \in A$ учун $U_\alpha = X \setminus F_\alpha$ очиқ тўплам бўлади. Де Морган формуласига фойдалансак, у ҳолда $\cap\{F_\alpha : \alpha \in A\} = \cap\{X \setminus U_\alpha : \alpha \in A\} = X \setminus (\cup\{U_\alpha : \alpha \in A\})$ бўлади. (O3) хоссага кўра $\cup\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ тўплам очиқ бўлганлиги учун $\cap\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ - кесишманинг ёпиқ тўплам эканлиги келиб чиқади, яъни $\cap\{F_\alpha : \alpha \in A\} \in \xi$ бўлади.

1**.10.Таъриф** Бир вақтнинг ўзида ҳам очиқ, ҳам ёпиқ бўлган тўпламлар *очиқ-ёпиқ тўпламлар* дейилади.

1.11**.Таъриф** Агар x нуқтанинг ҳар бир Ox атрофи $M \subset X$ тўпламнинг камида битта нуқтасини ўз ичига олса, яъни $M \cap Ox \neq \varnothing$ бўлса, x нуқта M тўпламнинг уриниш нуқтаси дейилади. (X, τ) топологик фазодаги M тўпламнинг барча уриниш нуқталари тўплами $[M]_X$ орқали ёки $[M]$ каби белгиланади.

Таърифдан кўринадики, M тўпламнинг ҳар бир нуқтаси шу тўпламнинг учун уриниш нуқтаси бўлади, яъни $M \subseteq [M]$.

1.3.Тасдиқ. M тўпламнинг ёпиқ бўлиши учун $M=[M]$ шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Исбот. Зарурлиги. Айтайлик, M тўплам (X,τ) топологик фазодаги бирор ёпиқ тўплам бўлсин. У ҳолда $X\setminus M=G$ тўплам (X,τ) топологик фазода очиқ тўплам бўлади. Ихтиёрий $x\in G$ нуқта ички нуқта эканлигидан бу нуқтанинг шундай Ox атрофи мавжудки, $Ox\subset G$ бўлади. Бу эса ихтиёрий $x\in X\setminus M$ нуқтанинг M тўплам учун уриниш нуқтаси эмаслигини билдиради. Демак, $M=[M]$ экан.

Етарлилиги. Фараз қилайлик, M - тўплам ўзининг ёпиғи билан устма-уст тушсин, яъни $M=[M]$ бўлсин. Бу тўпламнинг ёпиқ эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун тўлдирма тўпламдан ихтиёрий $y\in X\setminus M=X\setminus[M]$ - нуқтани оламиз. Бу y - нуқта $X\setminus M$ тўпламнинг уриниш нуқтаси эмаслигидан, шундай Oy атроф мавжудки, $Oy\subset X\setminus M$ бўлади. y нуқтанинг ихтиёрийлигидан $X\setminus M$ тўпламнинг очиқ эканлиги келиб чиқади. Демак, M - ёпиқ тўплам экан. 1.3 тасдиқ исботланди.

Айтайлик A ва B тўпламлар (X,τ) топологик фазонинг қисм тўпламлари бўлиб $A\subset B$ шарт бажарилсин. У ҳолда $[A]\subseteq[B]$ муносабат ўринли бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $A\subset B$ эканлигидан A тўпламнинг барча уриниш нуқталари B тўпламнинг ҳам уриниш нуқталари бўлади. Демак, $[A]\subseteq[B]$ муносабат ўринли экан.

1.2. Таъриф. (X,τ) топологик фазонинг ихтиёрий очиқ тўпламини $B\subset\tau$ оилага тегишли тўпламларнинг бирлашмаси кўринишида ифодалаш мумкин бўлса, B оилага X фазонинг базаси дейилади.

1.4.Тасдиқ. Ихтиёрий (X,τ) топологик фазо ва ихтиёрий $A\subset X$ тўплам берилган бўлсин. У ҳолда $A\subset X$ тўплам учун қуйидаги шартлар тенг кучли:

1) x нуқта $[A]$ тўпламга тегишли;

2) x нуқтадаги ихтиёрий $B(x)$ база ва ихтиёрий $U\in B(x)$ элементи учун $U\cap A\neq\varnothing$ ўринли;

3) x нуқтада шундай $B(x)$ база мавжудки, бу базанинг ихтиёрий $U\in B(x)$ элементи учун $U\cap A\neq\varnothing$ шарт бажарилади.

Исботи. $1)\Rightarrow 2)$. Тескарисидан фараз қилайлик, яъни x нуқтадаги $B(x)$ база учун шундай $U\in B(x)$ элемент топилиб, $U\cap A=\varnothing$ бўлсин. U элемент x нуқтанинг очиқ атрофи бўлади. Бу эса x нуқта A тўпламнинг уриниш нуқтаси эмаслиги келиб чиқади. Демак, $x\notin[A]$ экан. Бу эса 1) шартга зид.

$2)\Rightarrow 3)$ нинг исботи оддий. $3)\Rightarrow 1)$ нинг исботи уриниш нуқта таърифидан бевосита келиб чиқади. 1.4 тасдиқ исботланди.

Тасдиқ. Агар U - очиқ тўплам ва $U\cap A=\varnothing$ бўлса, у ҳолда $U\cap[A]=\varnothing$. Хусусан, агар U ва V ўзаро кесишмайдиган очиқ тўпламлар бўлса, у ҳолда $U\cap[V]=\varnothing=[U]\cap V$ бўлади.

Исботи. Тескарисини фараз қиламиз. Айтайлик, шундай x нуқта мавжуд бўлсинки, $x\in U\cap[A]$ бўлсин. Бундан $x\in U$ ва $x\in[A]$ га эга бўламиз. бундан $U\cap A\neq\varnothing$ келиб чиқади. Бу эса қилган фаразимизга зид.

1.5. Тасдиқ. Ёпилма оператори қуйидаги хоссаларга эга:

(CO1) $[\varnothing]=\varnothing$.

(CO2) $A\subset[A]$.

(CO3) $[A\cup B]=[A]\cup[B]$.

(CO4) $[[A]]=[A]$.

(CO4) хоссани кўрсатамиз. $A\subset[A]$ эканлигидан $[A]\subset[[A]]$ келиб чиқади. Тескарисини кўрсатамиз. Айтайлик $x\in[[A]]$ бўлсин. У ҳолда x нуқтанинг ихтиёрий Ox атрофи $[A]$ тўплам билан кесишади, яъни $Ox\cap[A]\neq\varnothing$ бўлади. Ихтиёрий $x_1\in Ox\cap[A]$ нуқтани оламиз. Бу x нуқтанинг атрофи сифатида Ox атрофни оламиз. У ҳолда $Ox\cap A\neq\varnothing$ бўлади. Бундан $x\in[A]$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $[[A]]\subset[A]$. 1.5 тасдиқ исбот бўлди.