Sh.Murodov, L.Xakimov, A.Xolmurzayev, M.Jumayev, A.To'xtayev

CHIZMA GEOMETRIYA

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan oliy o'quv yurtlari uchun darslik sifatida tavsiya etgan

Professor Sh.Murodovning umumiy tahriri ostida

TOSHKENT – 2006

22.151.3

Sh.Murodov, L.Xakimov, A.Xolmurzayev, M.Jumayev, A.To‘xtayev. «Chizma geometriya». Oliy texnika o‘quv yurtlari uchun darslik. Toshkent, 2005.

Mazkur darslik O‘zbekiston Respublikasi Oliy va maxsus o‘rta ta’lim vazirligi tomonidan texnika oliy o‘quv yurtlari uchun tasdiqlangan «Chizma geometriya va muhandislik grafikasi» fani Namunaviy dasturi asosida o‘zbek tilida yozilgan.

Darslikda nuqta, to‘g‘ri chiziq va tekisliklarning to‘g‘ri burchakli proyeksiyalarini yasashning nazariy asoslari keltirilgan. Egri chiziq, sirtlarning hosil bo‘lishi va ularning chizmada tasvirlanishi asoslari bayon etilgan.

Geometrik shakllarning o‘zaro va proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan vaziyatlari bilan bog‘liq pozision va metrik masalalarni yechish, aksonometrik proyeksiyalar hamda sirtlarning yoyilmalarini yasashga oid masalalar ko‘rilgan.

Darslik barcha oliy o‘quv yurtlari bakalavr va magistrlari uchun mo‘ljallangan bo‘lib, undan loyiha-konstruktorlik tashkilotlari xodimlari ham foydalanishlari mumkin.

22.151.3

Ш.Муродов, Л.Хакимов, А.Холмурзаев, М.Жумаев, А.Тўхтаев. «Начертательная геометрия». Учебник для втузов. Ташкент, 2005.

Учебник написан на узбекском языке в соответствии с типовой программой по начертательной геометрии и муҳандисной графики, утвержденной Министерством высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан.

В учебнике излагаются теоретические основы построения прямоугольных проекций точек, прямых линий, плоскостей, а также образование поверхностей и кривых линии и их задание на чертежах.

Рассмотрены вопросы о расположении геометрических фигур относительно плоскостей проекций, приведены методы решения позиционных и метрических задач, связанные с взаимными расположениями различных геометрических фигур.

Изложены случаи проведения касательных плоскостей к поверхностям и методы построения разверток поверхностей. Приведена теория аксонометрических проекций и их применение для решения различных позиционных задач.

Настоящий учебник предназначен для студентов бакалавриата и магистратуры вузов. Учебником моугт пользоваться сотрудники проектно-конструкторских организаций.

22.151.3

Sh.Murodov, L.Hakimov, A.Holmurzayev, M.Zhumayev, A.Tohtayev. "Descriptive geometry". The textbook for high schools. Tashkent, 2005.

The textbook is written in the Uzbek language according to the typical Program on Descriptive Geometry and Engineering Design, authorized by the Ministry of Higher and Secondary Education of the Republic of Uzbekistan.

In the textbook theoretical bases of construction of rectangular projections of points, direct are stated to a line, planes, and also formation of surfaces and by a curve and their task for drawings.

Questions on an arrangement of geometrical figures concerning planes of projections are considered, methods of the decision of the item and metric tasks, connected with relative positioning of various geometrical figures are given.

Cases of realization of tangents of planes to surfaces and methods of construction of development of surfaces are stated. The theory of axonometric projections and their application for the decision of various item tasks are given.

For students of the bachelor and a magistracy of high schools.

MUNDARIJA

SO‘Z BOSHI

Oliy o‘quv yurtlari oldida turgan asosiy vazifalardan biri O‘zbekiston Respublikasida qabul qilingan «Kadrlar tayyorlash Milliy Dasturi»da belgilangan talablar asosida fanlar bo‘yicha zamonaviy mukammal darsliklar yaratish va shu asosida talabalarga chuqur nazariy bilimlar berib, ularni puxta amaliy malakalarga ega bo‘lgan mutaxassislar qilib tayyorlab yetishtirishdir.

Zamonaviy texnikaga doir bilimlarni mukammal egallashning shartlaridan biri grafik savodxonlikni oshirish, ya’ni chizmalarni o‘qish va bajarishni bilishdir. Shu boisdan chizmalar chizishning asosi bo‘lgan – chizma geometriya fanini mukammal o‘rganishni talab etadi.

Keyingi yillarda fundamental fanlarni, shu jumladan, «Chizma geometriya» fanini o‘qitishda va uning asoslarini texnika va qurilishda qo‘llash bilan bog‘liq bo‘lgan ko‘pgina masalalar darslikka kiritilgan. Endilikda shu o‘zgartirishlarni hisobga olgan holda, oliy texnika o‘quv yurtlarida o‘qitilib kelingan «Chizma geometriya kursi»ni ham ba’zi yangi materiallar bilan to‘ldirish va grafik ishlarni kompyuterlashtirish bilan bog‘liq bo‘lgan darslik yaratish zaruriyati tug‘ildi.

Kitobdagi barcha materiallar, jumladan, geometrik shakllarni proyeksiyalash va ularning o‘zaro vaziyatlarini aniqlashga doir masalalar hozirgi zamon geometriyasi taraqqiyotini hisobga olgan holda bayon etilgan.

Inson faoliyatining turli sohalarida axborot va kompyuter texnologiyalarining keng qo‘llanilayotganini hisobga olib, ba’zi paragraflarda chizmalar grafik usul bilan bir qatorda, analitik usulda ham berilgan. Bu kompyuterlar vositasida chizmalarni ba’zi elementlarini yoki butun bir chizmalarni bajarish imkoniyatini beradi.

Chizma geometriya fani matematikaning bir tarmog‘i hisoblanib, u uch o‘lchamli fazodagi ob’ektlarning tekislikdagi grafik modelini qurish asoslarini o‘rganadi. Shu tufayli, chizmani fazodagi geometrik shaklning tekislikdagi grafik modeli deb qarash mumkin. Bu esa chizma geometriyani Oliy texnika ta’lim tizimidagi o‘rnini aniqlaydi. Darslikda muhandislik amaliyotida ishlab chiqarish bilan bog‘liq bo‘lgan misollar keltirilgan. Kursning asosiy qonun-qoidalari ta’riflar yoki teoremalar tarzida berilgan.

Geometrik shakllar uchun darslikda qabul qilingan shartli belgilar va simvollar kitobning o‘qilishini va tushunishni osonlashtiradi.

Chizmalarning hosil bo‘lish jarayoni va bajarish algoritmi fazoda va proyeksiyalarda bir xil tartibda berilgan.

Mazkur darslikni tayyorlashda «Chizma geometriya fanini keyingi yillarda erishilgan nazariy, amaliy va uslubiy yutuqlari, o‘qitishning yangi pedagogik texnologiyalaridan, shuningdek, mualliflarning uzoq yillar shu sohadagi pedagogik tajribalaridan foydalanildi. Shuningdek, darslikdagi barcha chizmalar kompyuterda rangli qilib bajarildi.

Darslikning kirish bo‘limi, shuningdek, I, VIII, XII boblari va ilova bo‘limi professor Sh.K.Murodov (TDPU), III, IV va V boblari TAYI professori, L.Q.Xakimov, VI, VII va XI boblari dosent A.A.Xolmurzayev (FarPI) va II, IX, X boblari TAYI katta o‘qituvchilari M.J.Jumayev va A.T.To‘xtayevlar hamda XIII bobi M.J.Jumayev tomonidan yozilgan.

Mualliflar

Qabul qilingan shartli belgilar

Belgilanishi	Nomlanishi
H, V, W	gorizontal, frontal, profil proyeksiyalar tekisliklari
$H_1, H_2, \ldots$ $V_1, V_2, \ldots$	gorizontal, frontal va profil proyeksiyalar tekisliklarining bir va ikki marta almashtirilgan vaziyatlari
$A, B, C, D, E, \ldots$ va $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$	fazodagi nuqtalar
$A', B', \ldots,$ $A'', B'', \ldots,$ $A''', B''', \ldots,$	fazodagi A, B, ... nuqtalarning gorizontal, frontal, profil proyeksiyalari
$A_P, B_P, C_P, \ldots$	fazodagi A, B, C, ... nuqtalarning P tekislikdagi proyeksiyalari
$a, b, c, d, e, \ldots$ k, m, n	fazodagi to‘g‘ri yoki egri chiziqlar
$a', b', n', \ldots$ $a'', b'', n'', \ldots$ a''', b''', n'''	fazodagi a, b, n, ... to‘g‘ri yoki egri chiziqlarning gorizontal, frontal, profil proyeksiyalari
H	gorizontal to‘g‘ri chiziqlar
F	frontal to‘g‘ri chiziqlar
P	profil to‘g‘ri chiziqlar
$P, Q, T, G, \ldots$	fazodagi umumiy vaziyatdagi tekisliklar
$H_1, H_2, H_3, \ldots$	gorizontal tekisliklar
$V_1, V_2, V_3, \ldots$	frontal tekisliklar
$W_1, W_2, W_3, \ldots$	profil tekisliklar
$P_H, Q_H,$ $P_V, Q_V,$ P_W, Q_W	fazodagi P va Q tekisliklarining gorizontal, frontal, profil izlari
(ABC) ; $a \parallel b$; $c \cap d$	geometrik elementlar bilan berilgan tekisliklar
$\Delta, \theta, \Sigma, \Omega, \ldots$	grek alfavitining bosh harflari bilan fazodagi sirtlar
$\theta', \Delta', \ldots$ $\theta'', \Delta'', \ldots$ $\theta'''', \Delta''', \ldots$	fazodagi θ va Δ sirtlarning gorizontal, frontal, profil proyeksiyalari
$\alpha^o, \beta^o, \gamma^o, \delta^o, \ldots$	grek alfavitining kichik harflari bilan burchaklar
$A_0, B_0, \ldots 1_0, 2_0, \ldots$	sirtlarning yoyilmalaridagi nuqtalar

Qabul qilingan simvollar

Belgilanishi	Nomlanishi	Misol
$\in$ ($\notin$)	tegishli (tegishli emas)	Masalan, $A\in\Phi$ ($A\notin\Phi$) – A nuqta Φ shaklga tegishli (tegishli emas) yoki Φ shakl A nuqta orqali o‘tadi (o‘tmaydi).
$\equiv$ ($\not\equiv$)	ustma-ust tushgan (ustma-ust tushmagan).	Masalan, $A\equiv B$ – A va B nuqtalar ustma-ust tushadi ($\Phi_1\not\equiv\Phi_2$ – Φ_1 va Φ_2 shakllar ustma-ust tushmaydi)
$\cap$	kesishgan.	Masalan, $a\cap b$ – a va b to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro kesishadi
$\dot{-}$	ayqash to‘g‘ri chiziqlar	Masalan, $a\dot{-}b$ – a va b to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro ayqash
$\parallel$ ($\nparallel$)	parallel (parallel emas).	Masalan, $a\nparallel b$ – a va b to‘g‘ri chiziqlar parallel emas
$\perp$	perpendikulyar	Masalan, $a\perp b$ – a va b to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro perpendikulyardir
$\angle$	tekis yoki ikki yoqli burchak	Masalan, $\angle BAC$ – AB va AC to‘g‘ri chiziqlari orasidagi burchak
a^b	ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak	Masalan, a^b – a va b to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak
a^P	to‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak	Masalan, a^P – a to‘g‘ri chiziq va P tekislik orasidagi burchak
P^Q	tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchak	Masalan, P^Q – P va Q tekisliklari orasidagi ikki yoqli burchak
$\measuredangle$ yoki $\llcorner$	to‘g‘ri burchak belgisi	

KIRISH

1-§. Chizma geometriya fanining maqsadi va vazifalari

Chizma geometriya umumiy geometriyaning bir shoxobchasi bo'lib, u narsalarni tasvirlash usullari yordamida ularning shakllari, o'lchamlari va o'zaro joylashishlariga tegishli pozision va metrik masalalarni yechishni o'rganadi.

Chizma geometriya boshqa geometriyalardan o'zining asosiy usuli tasvirlash usuli bilan farq qiladi va u matematika fanlari bilan uzviy bog'liq bo'lib, umumtexnika fanlaridan hisoblanadi. U o'zining tasvirlash usullari yordamida o'quvchining fazoviy tasavvurini kengaytiradi. Tasvirlarni yasash va oldindan yasalgan tasvirlarni o'qiy bilish, hamda amaliyotdagi turli muhandislik masalalarini yechishga yordam beradi. Chizma geometriya qonun va qoidalari bilan nafaqat mavjud narsalarni, balki tasavvur qilinadigan narsalarni ham tasvirlashi mumkin.

Fazodagi shakllarning tekislikdagi chizmalari chizma geometriya usullari bilan ma'lum qonun-qoidalar asosida hosil qilinadi. Bu chizmalar orqali buyumning fazoviy shaklini chizish va o'lchamlarini aniqlash mumkin. Chizmalar yordamida geometrik shakllarga tegishli stereometrik masalalar yechiladi. Chizmalarsiz fan va texnika taraqqiyotini tasavvur qilib bo'lmaydi. Arxitektorlar va muhandislar o'z ijodiy fikrlarini faqat chizmalar yordamida to'liq bayon eta oladilar.

Chizmalar bo'yicha barcha muhandislik inshootlari quriladi, mashinalar, mashina qismlari, medisina asboblari va xokazo buyumlar ishlab chiqariladi.

Shakllarning bizga ma'lum bo'lgan barcha geometrik xossalarini ularning chizmalaridan olingan ma'lumotlardan ham aniqlasa bo'ladi. Shuning uchun ham buyumlarning chizmalarini ularning geometrik xususiyatlarini o'zida aks ettiruvchi tekis geometrik modellar deb atash mumkin.

Chizma geometriya fanida quyidagilar o'rganiladi:

1. Fazoviy shakllarning tekislikdagi tasvirlarini, ya'ni tekis modellari (chizmalari)ni yasash usullari;
2. Tekis chizmada geometrik masalalarni grafik yo'l bilan yechish usullari;
3. Shakllarning berilgan tekis chizmalari bo'yicha ularning fazoviy ko'rinishini va vaziyatini tasavvur qilish hamda ularning yaqqol tasvirlarini yasash usullari;
4. Geometrik shakllarning chizmalarini bajarish va o'qish orqali o'quvchining fazoviy tasavvurini rivojlantirish usullari.

Ma'lumki, geometrik shaklning xossalarini analitik va grafik usullarda tekshirish mumkin. Figuralarning grafik modeliga asosan ularning analitik usulda berilishini va aksincha, figuralarning analitik ko'rinishidan ularning chizmalarini yasash usullarini chizma geometriyada ham ko'rish mumkin.

Loyihalanadigan buyumlarni faqatgina grafik usulda tasvirlash hozirgi zamon ishlab chiqarishi talablarini qanoatlantirmaydi. Shuning uchun chizmalarni bajarishda grafik usullar bilan birgalikda analitik usullardan ham foydalaniladi.

Keyingi yillarda buyumlarning chizmalarini kompyuter grafikasi vositalari yordamida tayyorlashda avtomatlashtirilgan loyihalash tizimlarining kirib kelishi chizma geometriya fanining rivojlanishtirishda yangicha mazmun kasb etmoqda.

2-§. Asosiy geometrik tushunchalar va shakllar

Geometriyaning asosiy tushunchalaridan biri shakl (figura) lardir.

Ta'rif. Har qanday tartibda joylashgan nuqtalar to'plami **geometrik shakl (figura)** deyiladi.

Geometrik shakllarni tashkil qiluvchi nuqtalar to'plami bir nechta va cheksiz ko'p nuqtalardan tuzilgan bo'lishi mumkin.

Geometrik shakllar juda ko'p. Ammo shulardan eng asosiylari to'g'ri chiziq va tekislikdir. Nuqtalar, to'g'ri chiziqlar va tekisliklar orasida ma'lum munosabat o'rnatilgan bo'lib, buni yotishlilik yoki *tegishlilik* deb yuritiladi. Masalan, A nuqta a to'g'ri chiziqqa tegishli – $A \in a$; A nuqta P tekislikka tegishli – $A \in P$; a to'g'ri chiziq P tekislikka tegishli – $a \in P$ va xokazo.

2.1. Nuqta. Nuqta eng boshlang'ich geometrik tushuncha bo'lib, u hajmsiz, yuzasiz, uzunlikka ega bo'lmagan geometrik element deb qabul qilingan. Nuqtani chizmalarda shartli ravishda kichkina aylanacha ko'rinishida belgilanadi.

2.2. To'g'ri chiziq. Berilgan ikki nuqtadan o'tgan yagona geometrik shakl bu faqat to'g'ri chiziq bo'ladi. To'g'ri chiziqni bitta nurda yotuvchi nuqtalar to'plami deb ham qarash mumkin. To'g'ri chiziqning uzunligini haqiqiy miqdor bilan o'lchash mumkin emas. To'g'ri chiziq uzunligi cheksiz (∞) miqdordir. To'g'ri chiziq ikki nuqta bilan chegaralansa, to'g'ri chiziq kesmasi hosil bo'ladi. To'g'ri chiziq kesmasi haqiqiy miqdor o'lchoviga egadir.

To'g'ri chiziq ustidagi nuqtalar to'plamini ikki qismga – xos (chekli) va xosmas (cheksiz) nuqtalarga ajratish mumkin:

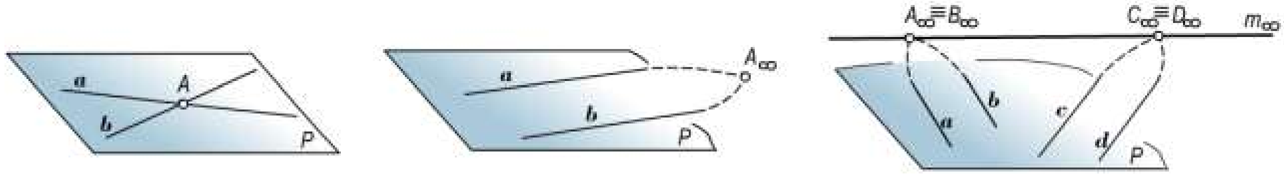
- Xos A_1, A_2, A_3,… nuqtalarni berilgan a to'g'ri chiziq ustida belgilab yoki tanlab bo'ladi (1-rasm).
- Cheksiz uzoqlikda joylashgan xosmas A_∞ nuqtalarni a to'g'ri chiziq ustida belgilab yoki tanlab bo'lmaydi.
- Har bir to'g'ri chiziqda faqat bitta xosma nuqta mavjuddir.

1-rasm.

2.3. Tekislik. Tekislik ustida cheksiz ko'p nuqtalar va to'g'ri chiziqlar mavjuddir. Shunga ko'ra, tekislikni nuqtalar yoki to'g'ri chiziqlar to'plamidan iborat deb qarash mumkin. Aniq sonli nuqtalar yoki to'g'ri chiziqlar berilganda tekislik berilgan hisoblanadi.

Tekislikda yotuvchi to'g'ri chiziqlarni ham ikki turga – xos (chekli) va xosmas (cheksiz) larga ajratish mumkin:

- Xos to'g'ri chiziqlarni tekislikda chizish va vaziyatini belgilash mumkin (2,a-rasm).
- Tekislikka tegishli bo'lgan har qanday ikki to'g'ri chiziq umuman kesishadi. Agar bu to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'lsalar, u holda ular xosmas nuqtada (2,b-rasm), agar parallel bo'lmasalar, u holda xos nuqtada (2,a-rasm) kesishadilar.
- Tekislikning xosmas chizig'i tekislikda yotuvchi ikki ixtiyoriy to'g'ri chiziqning xosmas nuqtalarini tutashtirish bilan hosil qilinadi (2,v-rasm).



a) **b)** **v)**

2-rasm.

Ma’lumki, tekislikdagi har bir to‘g‘ri chiziq bitta xosmas nuqtaga ega.

Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqlarning xosmas nuqtalarining geometrik o‘rni tekislikning *xosmas chizig‘i* deyiladi (2,a-rasmdagi m_∞ chiziq). Tekislikning istalgan to‘g‘ri chizig‘i uning xosmas chizig‘i bilan bir nuqtada kesishadi. Tekislikdagi parallel to‘g‘ri chiziqlar bitta xosmas nuqtada kesishadi (2,b-rasmdagi A_∞ nuqta). To‘g‘ri chiziq va tekisliklarning xosmas elementlari nazariy masalalarni talqin qilishda va perspektiv tasvirlarni yasashda qo‘llaniladi.

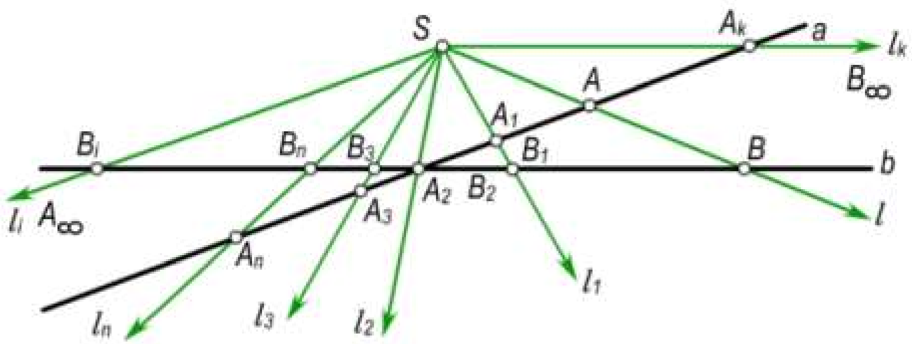
2.4. Geometrik fazo. Geometriyada bir jinsli (bir xil) ob’ektlarning to‘plami *geometrik* *fazo* deb yuritiladi.

Geometrik fazoni nuqtalar, chiziqlar yoki sirtlar to‘plamlaridan tuzilgan deb qarash mumkin. Ma’lumki, chiziqlar va sirtlar nuqtalardan tashkil topadi. Nuqta esa birinchi va boshlang‘ich geometrik tushunchadir. Demak, geometrik fazoni shakl deb qarash mumkin.

Real ob’ektlarni o‘rganish xossalariga qarab geometrik fazolar ham turlicha bo‘ladi. Masalan, real ob’ektni yevklid aksiomalari sistemasi bo‘yicha o‘rganilsa, yevklid fazosi hosil bo‘ladi. yevklid fazosi uch o‘lchamli (R_3) fazodir. Tekislik yevklid fazosida ikki o‘lchamli (R_2) bo‘ladi. Biz o‘rganayotgan geometriya yevklid geometriyasi deb yuritiladi. yevklid fazosining kengaytirilgan modelini birinchi bo‘lib ulug‘ rus geometri N.I.Lobachevskiy (1792-1856) yaratdi. Bu model *Lobachevskiy geometriyasi* deb yuritiladi va bu geometriyaning o‘ziga xos aksiomalar sistemasi mavjud.

3-§. Geometrik shakllarda o‘zaro bir qiymatli moslik

Biror R tekislikdagi *a* va *b* to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsin (3-rasm). R tekislikda ixtiyoriy S nuqta olamiz. Bu nuqtadan ixtiyoriy *l* to‘g‘ri chiziq o‘tkazilsa, bu to‘g‘ri chiziq *a* to‘g‘ri chiziqni *A* va *b* to‘g‘ri chiziqni *B* nuqtada kesadi. Xuddi shuningdek, S nuqtadan $l_1, l_2, l_3,\ldots,l_n$ to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilsa, unda ular *a* to‘g‘ri chiziqni A_1, A_2, A_3,…,A_n nuqtalariga va *b* to‘g‘ri chiziqni B_1, B_2, B_3, …B_n nuqtalarini kesib o‘tadi. Bunda *a* to‘g‘ri chiziqning har bir nuqtasiga *b* to‘g‘ri chiziqning nuqtalari mos keladi. *a* va *b* to‘g‘ri chiziqlarni o‘zaro kesishgan D nuqtasi o‘zi o‘ziga mos keladi.



3-rasm.

Shunday qilib, *a* va *b* to‘g‘ri chiziqlarga tegishli nuqtalar orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatiladi. *a* va *b* to‘g‘ri chiziqlarga shunday nuqtalar mavjudki, bir to‘g‘ri chiziqning xos nuqtasiga ikkinchi to‘g‘ri chiziqning xosmas nuqtasi mos keladi va aksincha. Masalan, *a* to‘g‘ri chiziqning A_k nuqtasiga *b* to‘g‘ri chiziqni B_∞ xosmas nuqtasi, *b* to‘g‘ri chiziqning B_i nuqtasiga *a* to‘g‘ri chiziqning A_∞ xosmas nuqtasi mos keladi.

Xuddi shuningdek, to‘g‘ri chiziq bilan tekislik yoki ikki tekislik uchun ham o‘zaro bir qiymatli moslikni o‘rnatish mumkin. Bu xulosalarni turli geometrik masalalarni yechishdagi grafik yasashlarda qo‘llash mumkin.

4-§. Chizma geometriyaning pozision, metrik va konstruktiv masalalari

Geometrik shakllarning chizmada o‘zaro joylashish vaziyatlariga qarab ularga oid masalalarni uchta guruhga bo‘lish mumkin.

4.1. Pozision masalalar. Pozision masalalarda berilgan ikki geometrik shakllarning o‘zaro joylashish vaziyatiga nisbatan ularning kesishuvi natijasida hosil bo‘lgan uchinchi geometrik shaklning vaziyati aniqlanadi yoki vaziyati aniqlanadigan geometrik shakllarga tegishli masalalar ko‘riladi. Pozision masalalarga to‘g‘ri chiziq bilan to‘g‘ri chiziq va tekislikning tekislik bilan tekislikning, tekislik bilan sirtning kesishishi, sirtlarning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasash kabi masalalar kiradi.

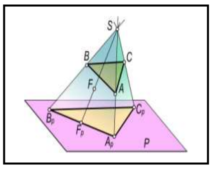
4.2. Metrik masalalar. Metrik masalalarga berilgan geometrik shakllarning o‘zaro vaziyatidan hosil bo‘lgan shaklning metrikasi aniqlanadi yoki oldindan berilgan biror shakl metrikasiga asosan shakllarning o‘zaro vaziyatlarini aniqlanadi yoki o‘lchamlari aniqlanadigan geometrik masalalar kiradi. Metrik masalalarga to‘g‘ri chiziq bilan to‘g‘ri chiziq va to‘g‘ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchaklarni aniqlash, o‘zaro perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar va tekisliklar yasash, berilgan sirtga urinmalar va normallar o‘tkazish, kesim yuzalarining haqiqiy kattaliklarini aniqlash, sirtlar yoyilmalarini yasash, tekislikning ma’lum bir bo‘lagini egib sirt yasash kabi masalalar kiradi.

Geometrik shakllarning o‘zaro joylashishi yoki metrikasining berilishiga qarab metrik masalalar ikkiga bo‘linadi.

4.2.1. To‘g‘ri metrik masalalar. Bunda ikki geometrik shakllarning o‘zaro vaziyatlariga nisbatan, ularning kesishuvidan hosil bo‘lgan shaklning metrikasi (o‘lchamlari) aniqlanadi.

4.2.2. Teskari metrik masalalar. Bunda oldindan berilgan biror metrikaga va geometrik shaklga nisbatan ikkinchi geometrik shaklning birinchiga nisbatan vaziyati aniqlanadi. Faqat berilgan metrikaga asosan birgina geometrik shaklni aniqlash mumkin emas. Buning uchun qo‘shimcha shartlar berilishi kerak.

4.2.3. Konstruktiv masalalar. Konstruktiv masalalarga oldindan berilgan biror shartni qanoatlantiruvchi geometrik shakllarni hosil qilish kiradi. Konstruktiv masalalar guruhiga oldindan berilgan biror burchak bo‘yicha to‘g‘ri chiziqlar yoki tekisliklar yasash yoki ma’lum bir texnik talablarni qanoatlantiruvchi egri chiziq va sirtlar hosil qilish, yoyilmalar yasash kabi masalalar kiradi.



I bob. TASVIRLASH USULLARI

1.1-§. Umumiy ma'lumotlar

Muhim geometrik tushunchalardan biri – shakllarni tasvirlashdir. Geometrik tasvirlash bu biror Φ shaklning nuqtalari bilan ikkinchi Φ shaklning nuqtalari orasida bir qiymatli moslik o'rnatishdir.

Chizma geometriyada uch o'lchamli R_3 fazoning (tekislikning) har bir nuqtasini ikki o'lchamli R_2 fazoning (tekislikning) har bir nuqtasiga aniq grafik qoidalar asosida mos keltirib, bir qiymatli moslik o'rnatiladi. Shuning uchun chizma geometriyani fazoni tekislikda aks ettiruvchi grafik tasvirlash geometriyasi deb yuritish mumkin.

Geometrik fazoni nuqtalar to'plami deb qaralib, ularni proyeksiyalash yo'li bilan tekislikda aks ettiriladi. Masalan, fazoda biror S nuqta tanlab, shu nuqtani fazoning hamma nuqtalari bilan birlashtiriladi. Unda markazi S nuqtada bo'lgan to'g'ri chiziqlar dastasi hosil bo'ladi. Shu fazoda biror P tekislikni kiritamiz. Unda S markazli chiziqlar dastasi bilan P tekislik kesishib, nuqtalar to'plamini hosil qiladi. Tekislikdagi bu nuqtalarni fazodagi nuqtalarning tasviri (proyeksiyasi) deb yuritiladi. Bunda fazodagi nuqtalari bilan P tekislik nuqtalar orasida bir qiymatli moslik o'rnatiladi. Agar S markazli chiziqlar dastasi fazosiga biror sirt kiritilsa, u holda bu sirtda fazodagi nuqtalarning tasviri hosil bo'ladi va fazo nuqtalari bilan sirt nuqtalari orasida bir qiymatli moslik o'rnatiladi.

Chizma geometriyada fazodagi shakllar markaziy yoki parallel proyeksiyalash usullari bilan biror tekislikda tasvirlanadi. Bu tekislikni proyeksiyalar tekisligi deb yuritiladi. Shakllarning proyeksiyalar tekisligidagi tasvirini yasash esa ma'lum qonun va qoidalarga asoslanib bajariladi.

1.2-§. Markaziy proyeksiyalash usuli

Markaziy proyeksiyalash usuli geometrik shakllarni tekislikda proyeksiyalashning umumiy holidir.

Markaziy proyeksiyalashda proyeksiyalar markazi S va proyeksiyalar tekisligi P beriladi (1.1-rasm). S va P sistemasida fazodagi biror A nuqta berilgan bo'lsin. A nuqtani S markaz orqali proyeksiyalar tekisligi P ga proyeksiyalaymiz. Buning uchun S markaz bilan A nuqtani to'g'ri chiziq orqali birlashtirib, uni davom ettiramiz. Hosil bo'lgan SA proyeksiyalovchi nur proyeksiyalar tekisligi P bilan A_P nuqtada kesishadi (ya'ni $A_P=SA\cap P$). Bunda A_P nuqta A nuqtaning S markaz bo'yicha proyeksiyalar tekisligidagi markaziy proyeksiyasi deb yuritiladi.

Fazodagi ikkinchi biror ixtiyoriy B nuqta ham A nuqta singari proyeksiyalanib, $SB\cap P=B_P$ nuqtaning P proyeksiyalar tekisligidagi vaziyati aniqlanadi. Agar biror S nuqtani P proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalovchi SS nur P tekislikka parallel bo'lsa ($SS\parallel P$), u holda bu nur P tekisligi bilan cheksiz uzoqlikda kesishib, $S_{P\infty}$ xosmas nuqtani hosil qiladi. SA, SB, SS,... to'g'ri chiziqlar proyeksiyalovchi nurlar deb yuritiladi.

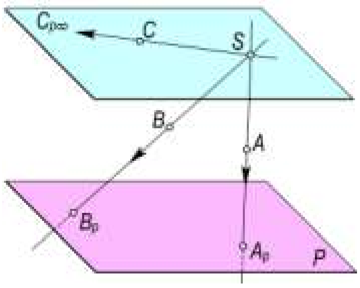
Fazodagi biror nuqtalar to'plamini proyeksiyalash markazi S orqali P proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalanganda S markazli to'g'ri chiziqlar dastasi hosil bo'ladi. Bu dastani proyeksiyalar tekisligi P bilan kesishuvidan hosil bo'lgan nuqtalar to'plami fazodagi ma'lum bir nuqtalar to'plamining tasviri bo'ladi. Masalan, ABD uchburchakning markaziy proyeksiyasi $A_PB_PD_P$ uchburchak bo'ladi (1.2-rasm).

Proyeksiyalar tekisligining ostida joylashgan E nuqtaning E_P proyeksiyasi $SE\cap P=E_P$ bilan aniqlanadi. Proyeksiyalar tekisligida yotgan K nuqtaning K_P markaziy proyeksiyasi nuqtaning o'zi bilan ustma-ust ($K\equiv K_P$) tushadi.

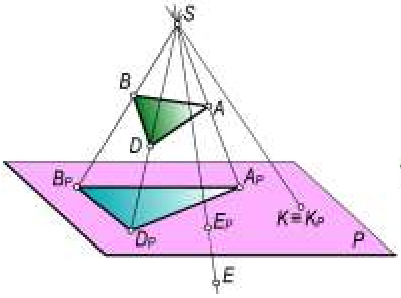
Markaziy proyeksiyalash konusli yoki qutbli proyeksiyalash, yoxud perspektiva deb ham yuritiladi. Masalan, markaziy proyeksiyalash apparatida biror *m* egri chiziq berilgan bo'lsin (1.3-

rasm). m egri chiziqning nuqtalari to‘plamini proyeksiyalar tekiligiga S markaz orqali proyeksiyalansa, uning proyeksiyasi m_P egri chiziq hosil bo‘ladi. U holda S markazdan o‘tuvchi proyeksiyalovchi nurlar to‘plami konus sirtini hosil qiladi.

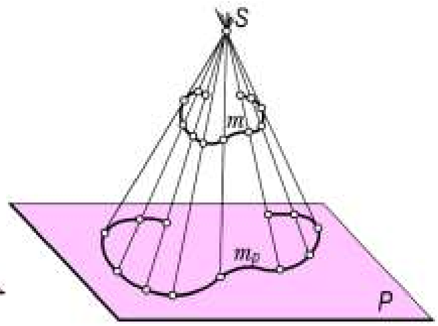
Markaziy proyeksiyalashda proyeksiyalash markazi va buyumning proyeksiyasiga qarab uning fazodagi vaziyatini aniqlab bo‘lmaydi.



1.1-rasm.



1.2-rasm.



1.3-rasm

Markaziy proyeksiyalashning xossalari

Markaziy proyeksiyalashda geometrik shakllar quyidagicha tasvirlanadi.

1-xossa. Nuqtaning markaziy proyeksiyasi nuqta bo‘ladi.

2-xossa. SA nurda yotuvchi A, A_1, A_2, A_3,… nuqtalarning markaziy proyeksiyalari A_P nuqta bilan ustma-ust tushadi(1.4- rasm).

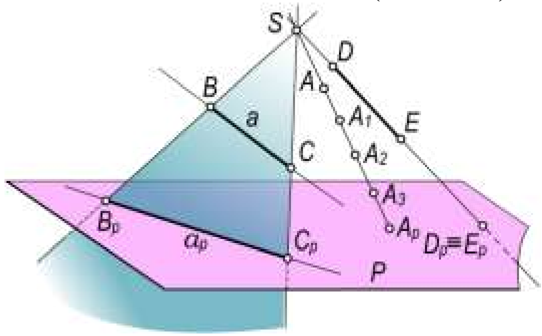
3-xossa. Proyeksiyalash markazidan o‘tmaydigan to‘g‘ri chiziq kesmasining proyeksiyasi kesma bo‘ladi.

Biror a to‘g‘ri chiziq BS kesmasi orqali berilgan bo‘lsin (1.4-rasm) BS kesma S markaz orqali proyeksiyalar tekisligi P ga proyeksiyalanganda SBS proyeksiyalovchi tekislik hosil bo‘ladi. Bu proyeksiyalovchi tekislik P bilan B_PS_P kesma bo‘yicha kesishadi. $BS \in a$ bo‘lgani uchun $B_PS_P \in a_P$ bo‘ladi.

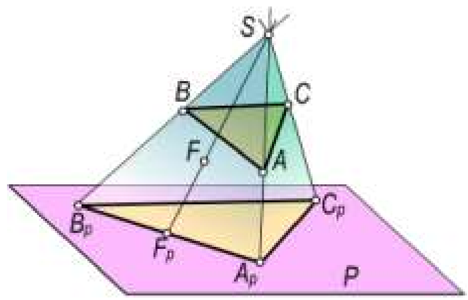
Proyeksiyalash markazi S dan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning markaziy proyeksiyasi nuqta bo‘ladi. Masalan, DE to‘g‘ri chiziq kesmasining markaziy proyeksiyasi $D_P \equiv E_P$ nuqta bo‘ladi (1.4-rasm).

4-xossa. S markazdan o‘tmaydigan tekislikning markaziy proyeksiyasi tekislik bo‘ladi.Masalan,ABS uchburchak tekisligining nuqtalar to‘plamini S markaz bo‘yicha proyeksiyalar tekisligi P ga proyeksiyalanganda (1.5-rasm) SABS proyeksiyalovchi piramida xosil bo‘ladi. Bu piramidaning proyeksiyalar tekisligi P bilan kesishuvidan $A_PB_PS_P$ uchburchak hosil bo‘ladi.

S markazdan o‘tuvchi tekislik va unga tegishli geometrik shakllarning markaziy proyeksiyalari bitta to‘g‘ri chiziqqa proyeksiyalanadi. Masalan, SAB tekisligi va unga tegishli F nuqtaning proyeksiyasi $A_PF_PB_P$ kesmada bo‘ladi (1.5-shakl).



1.4-rasm.



1.5-rasm

5-xossa. Agar biror tekis shakl proyeksiyalar tekisligiga parallel bo‘lsa, uning proyeksiyasi o‘ziga o‘xshash shakl bo‘ladi.

6-xossa. S proyeksiyalash markazidan o‘tuvchi va proyeksiyalar tekisligi P ga parallel bo‘lgan nurlar ustidagi nuqtalarning markaziy proyeksiyasi P ning xosmas chizig‘i ustida bo‘ladi.

Markaziy proyeksiyalashda S markaz, proyeksiyalar tekisligi P va proyeksiyalanuvchi shaklning o‘zaro vaziyatlariga ko‘ra quyidagi xossalarni keltirish mumkin.

7-xossa. Proyeksiyalanuvchi shaklning proyeksiyalar markazi bilan proyeksiyalar tekisligiga nisbatan joylashuviga qarab uning proyeksiyasi o‘ziga nisbatan katta yoki kichik bo‘lishi mumkin.

1.3-§. Parallel proyeksiyalash usuli

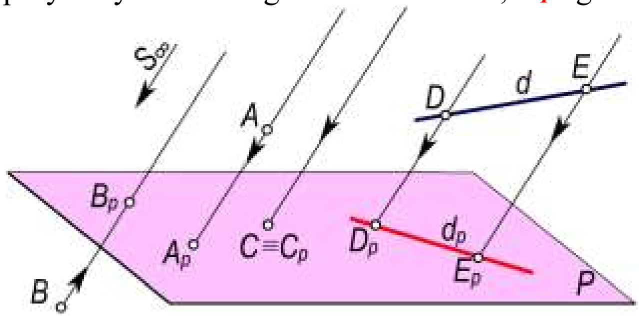
Markaziy proyeksiyalashdagi S markazni biror yo‘nalishda cheksiz uzoqlashtirilsa,u holda SA, SB,… proyeksiyalovchi nurlar o‘zaro parallel bo‘ladilar (1.6-rasm). Bunday proyeksiyalash parallel proyeksiyalash deb yuritiladi. Demak, parallel proyeksiyalashni markaziy proyeksiyalashning xususiy holi deb qarash mumkin.

Parallel proyeksiyalashda proyeksiyalar tekisligi P va proyeksiyalash yo‘nalishi beriladi. P va S sistemasida fazodagi biror A nuqta berilgan bo‘lsin (1.6-rasm). Bu nuqtaning proyeksiyasini yasash uchun A nuqtadan ***s*** yo‘nalishga parallel qilib nur o‘tkaziladi. Bu nurning proyeksiyalar tekisligi P bilan kesishgan nuqtasi A_P bo‘ladi. A_P nuqtani fazodagi A nuqtaning ***s*** yo‘nalish bo‘yicha P dagi parallel proyeksiyasi deb yuritiladi. Proyeksiyalar tekisligining ostida joylashgan fazodagi ixtiyoriy biror B nuqtaning ***s*** yo‘nalish bo‘yicha parallel proyeksiyasi B_P bo‘ladi. Bunda B va A nuqtalarning proyeksiyalovchi nurlari o‘zaro parallel bo‘lib, faqat ularning yo‘nalishlari qarama-qarshidir. AA_P, BB_P to‘g‘ri chiziqlar proyeksiyalovchi nurlar deb yuritiladi. Proyeksiyalar tekisligi P ga tegishli S nuqtaning proyeksiyasi shu nuqtaning o‘zida bo‘ladi. Fazodagi ixtiyoriy d to‘g‘ri chiziqni proyeksiyalar tekisligi P ga ***s*** yo‘nalish bo‘yicha proyeksiyalash uchun shu to‘g‘ri chiziq ustidagi istalgan ikki D va E nuqtalar proyeksiyalari yasalsa kifoyadir (1.6-rasm). Bunda *d* to‘g‘ri chiziq nuqtalari orqali o‘tuvchi parallel nurlar to‘plami proyeksiyalovchi tekislikni hosil qiladi.

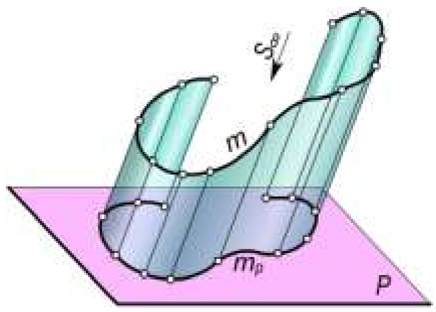
Parallel proyeksiyalashda ***s*** proyeksiyalash yo‘nalishning berilishi shartdir. Chunki ***s*** proyeksiyalash yo‘nalishi berilmagan holda ixtiyoriy A nuqtaning P proyeksiyalar tekisligidagi proyeksiyasini cheksiz ko‘p hosil qilish mumkin.

Buyumning birgina parallel proyeksiyasi uning fazodagi ko‘rinishi va uning o‘lchamlari haqida to‘liq ma’lumot bera olmaydi. Buning uchun qo‘shimcha shartlar berilishi lozim.

Parallel proyeksiyalashni silindrik proyeksiyalash deb ham yuritiladi. Masalan, biror *m* egri chiziq berilgan bo‘lsin (1.7-rasm). Bu egri chiziq nuqtalaridan o‘tuvchi ***s*** proyeksiyalash yo‘nalishiga parallel bo‘lgan proyeksiyalovchi nurlar to‘plami silindrik sirt hosil qiladi. Bu silindrik sirt proyeksiyalar tekisligi P bilan kesishib, $\boldsymbol{m_P}$ egri chiziqni hosil qiladi.



1.6-rasm .



1.7-shakl

Parallel proyeksiyalash ikki xil bo‘ladi:

- Qiyshiq burchakli parallel proyeksiyalash. Bunda S proyeksiyalash yo‘nalishi P proyeksiyalar tekisligi bilan o‘tkir yoki o‘tmas burchak tashkil qiladi.
- To‘g‘ri burchakli parallel proyeksiyalash. Bunda proyeksiyalash yo‘nalishi S proyeksiyalar tekisligi P ga perpendikulyar bo‘ladi.

Parallel proyeksiyalashning xossalari

Geometrik shakllarni parallel proyeksiyalashning quyidagi xossalari mavjud:

1-xossa. Nuqtaning parallel proyeksiyasi nuqta bo‘ladi.

2-xossa. Proyeksiyalovchi nurda yotuvchi barcha nuqtalarning proyeksiyalari bitta nuqtada bo‘ladi.

3-xossa. Proyeksiyalash yo‘nalishiga parallel bo‘lmagan to‘g‘ri chiziqning proyeksiyasi to‘g‘ri chiziq bo‘ladi. Masalan,1.8-rasmda ***s*** proyeksiya yo‘nalishiga parallel bo‘lmagan AB to‘g‘ri chiziq kesmasi proyeksiyalar tekisligi P ga parallel proyeksiyalangan. Bunda AB kesma nuqtalaridan o‘tuvchi nurlar proyeksiyalovchi Q tekislikni hosil qiladi. Bu proyeksiyalovchi tekislik bilan P proyeksiyalar tekisligi A_PB_P kesma bo‘yicha kesishadi.

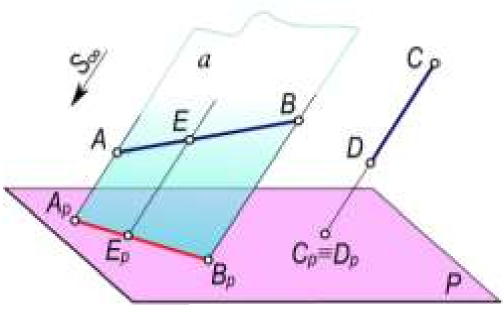
Proyeksiyalash yo‘nalishiga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning parallel proyeksiyasi nuqta bo‘ladi. 1.8-rasmda SD to‘g‘ri chiziq kesmasi proyeksiya yo‘nalishi **s** ga parallel. Uning P dagi proyeksiyasi $S_P \equiv D_P$ nuqta bo‘ladi.

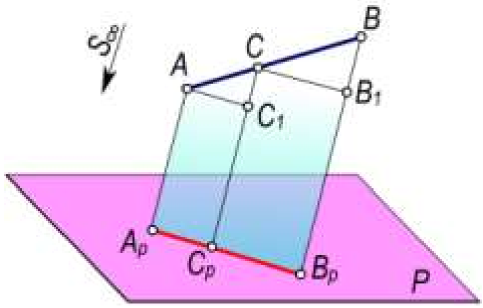
4-xossa. AB to‘g‘ri chiziq kesmasiga tegishli E nuqtaning parallel proyeksiyasi E_P shu to‘g‘ri chiziq proyeksiyasi A_PB_P kesmaning ustida bo‘ladi (1.8-rasm).

5-xossa. Agar nuqta to‘g‘ri chiziq kesmasini biror nisbatda bo‘lsa, bu nuqtaning proyeksiyasi ham kesma proyeksiyasini shunday nisbatda bo‘ladi.

Biror S nuqta AB kesmani $AS{:}SB=\boldsymbol{r{:}q}$ nisbatda bo‘lsa, unda S_P nuqta A_PB_P kesmani ham $A_PS_P{:}S_PB_P=\boldsymbol{r{:}q}$ nisbatda bo‘ladi (1.9-rasm).

AB to‘g‘ri chiziq kesmasini ***s*** yo‘nalish bo‘yicha proyeksiyalar tekisligi P ga proyeksiyalaymiz. Bunda proyeksiyalovchi tekislik bilan proyeksiyalar tekisligi P kesishib, A_PB_P kesmani hosil qiladi. Unda 4-xossaga asosan $S \in AB$ bo‘lgani uchun $S_P \in A_PB_P$ bo‘ladi.





1.8-rasm. **1.9-rasm**

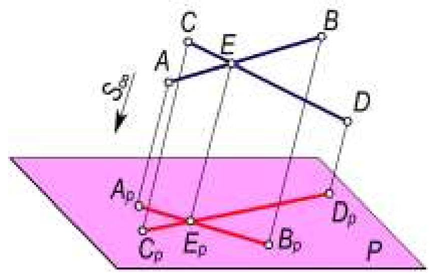
AB kesmaning proyeksiyalovchi tekislikdagi A va S nuqtalaridan $AS_1 \| A_PB_P$ va $SB_1 \| A_PB_P$ kesmalarni o‘tkazamiz. Unda hosil bo‘lgan ASS_1 va SBB_1 uchburchaklar o‘zaro o‘xshash bo‘ladilar. Bu uchburchaklarning o‘xshashligidan $AS{:}AS_1=SB{:}SB_1$ yoki $AS{:}SB=AS_1{:}SB_1$ bo‘ladi. $AS_1=A_PS_P$ va $SB_1=S_PB_P$ bo‘lgani uchun $AS{:}SB=A_PS_P{:}S_PB_P=\boldsymbol{r{:}q}$ bo‘ladi.

6-xossa. To‘g‘ri chiziqlarning kesishuv nuqtasining proyeksiyasi ularning proyeksiyalarining kesishish nuqtasida bo‘ladi. Ya’ni $AB \cap SD=E$ bo‘lsa, $A_PB_P \cap S_PD_P=E_P$ bo‘ladi (1.10-rasm).

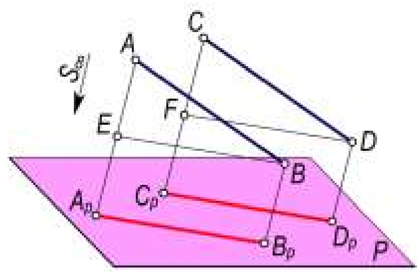
Proyeksiyalash yo‘nalishi bo‘yicha AB va SD kesmalarining A_PB_P va S_PD_P proyeksiyalarini proyeksiyalar tekisligi P dagi proyeksiyalarni yasaymiz. Kesmalarni proyeksiyalovchi tekisliklar o‘zaro EE_P to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesadi, bunda $EE_P \| S$ bo‘lib,u E nuqtani proyeksiyalovchi nuri bo‘ladi. AB va SD kesmalarining kesishuvidan hosil bo‘lgan E nuqtaning proyeksiyalar tekisligi P dagi proyeksiyasi E_P bo‘ladi. 3-xossaga asosan $E \in AB$ va $E \in SD$ bo‘lgani uchun $E_P \in A_PB_P$ va $E_P \in S_PD_P$ bo‘lishi shart. Demak, E_P nuqta A_PB_P va S_PD_P kesmalar uchun umumiy nuqtadir.

7-xossa. Parallel to‘g‘ri chiziqlarning tekislikdagi proyeksiyalari ham parallel bo‘ladi. Agar $AB \| SD$ bo‘lsa, $A_PB_P \| S_PD_P$ bo‘ladi. 1.11-rasmda $\boldsymbol{s}$ yo‘nalish bo‘yicha AB va SD to‘g‘ri chiziq kesmalarining proyeksiyalar tekisligidagi A_PB_P va S_PD_P proyeksiyalari yasalgan. Hosil bo‘lgan AB va SD to‘g‘ri chiziq kesmalarining proyeksiyalovchi tekisliklari proyeksiyalar tekisligi P bilan kesishganda $A_PB_P \| S_PD_P$ kesmalar hosil bo‘ladi.

8-xossa. Parallel to‘g‘ri chiziq kesmalarining nisbati bu kesmalar proyeksiyalarining nisbatiga teng bo‘ladi. Ya’ni $AB \| SD$ bo‘lib, $AB:SD=q$ bo‘lsa, $A_PB_P:S_PD_P=q$ bo‘ladi (1.11-rasm). Bunda 3-xossaga asosan $A_PB_P \| S_PD_P$ xosil bo‘ladi. AB va SD to‘g‘ri chiziq kesmalarining proyeksiyalovchi tekisliklarida $AE(AE \| A_PB_P)$ va $SF(SF \| S_PD_P)$ kesmalarni o‘tkazamiz. U holda ABE va SDF uchburchaklarning parallelligi va o‘xshashligidan $AB:AE=SD:SF$ yoki $AB:SD=AE:SF=\boldsymbol{q}$ kelib chiqadi. Demak, $AB:SD=A_PB_P:S_PD_P=\boldsymbol{q}$ bo‘ladi.



1.10-rasm



1.11-rasm

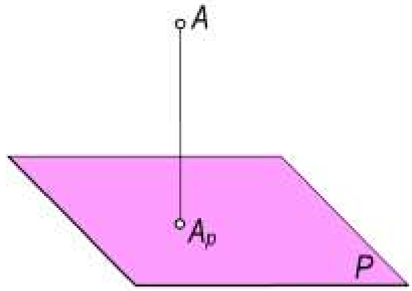
Parallel proyeksiyalashning yuqorida keltirilgan xossalaridan darslikning keyingi boblarida keng foydalaniladi.

1.4-§. To‘g‘ri burchakli proyeksiyalash

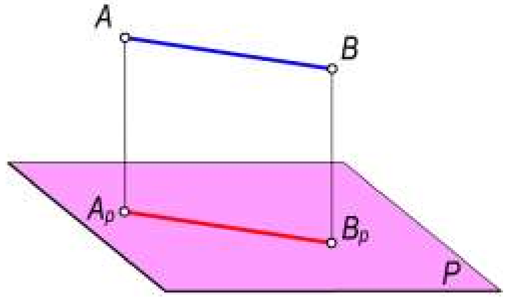
Ta’rif. Proyeksiyalovchi nur proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo‘lsa, bunday parallel proyeksiyalashni **to‘g‘ri burchakli proyeksiyalash** deyiladi.

To‘g‘ri burchakli proyeksiyalashni **ortogonal proyeksiyalash** deb ham yuritiladi.

Ortogonal proyeksiyalashda proyeksiyalovchi nur yo‘nalishi ko‘rsatilmaydi. Masalan, proyeksiyalar tekisligi P va fazodagi biror A nuqta berilgan bo‘lsin. A nuqtani P tekislikka ortogonal proyeksiyalash uchun A nuqtadan perpendikulyar tushiriladi. Bu perpendikulyarning P tekislikdagi asosi A_P nuqta fazodagi A nuqtaning ortogonal proyeksiyasi bo‘ladi.



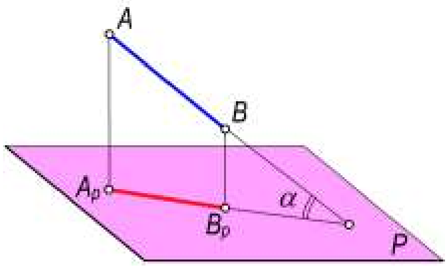
1.12-rasm



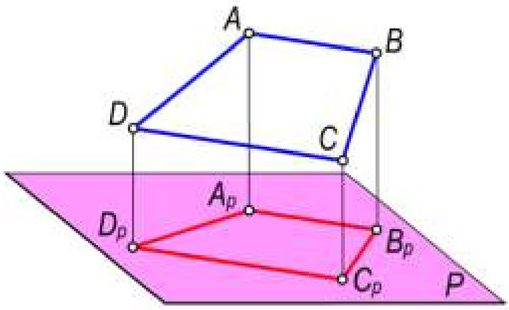
1.13-rasm

To‘g‘ri burchakli proyeksiyalashda geometrik shakl fazoda proyeksiyalar tekisligiga nisbatan ixtiyoriy holatda joylashgan bo‘lsa, uning proyeksiyasida shaklning metrik (uzunligi, burchagi va boshqa) o‘lchamlari o‘zgaradi. Masalan, ortogonal proyeksiyalashda to‘g‘ri chiziq kesmasining proyeksiyasi o‘zidan kichik yoki teng bo‘ladi:

- Agar to‘g‘ri chiziq kesmasi proyeksiyalar tekisligiga parallel bo‘lsa, uning proyeksiyasining uzunligi kesmaning fazodagi uzunligiga teng bo‘ladi (1.13-rasm).
- Agar to‘g‘ri chiziq kesmasi proyeksiyalar tekisligiga parallel bo‘lmasa, uning proyeksiyasining uzunligi o‘zidan kichik bo‘ladi, ya’ni $A_PB_P<AB$ bo‘lib, $AB=A_PB_P/\cos\alpha$ bo‘ladi. Bunda $\alpha=AB$^P (1.14-rasm).



1.14-rasm



1.15-rasm

Fazoda berilgan biror ABSD trapesiya (1.15-rasm) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo‘lmasa, uning burchaklari va tomonlarining haqiqiy o‘lchamlari saqlanib qolmaydi. Lekin trapesiyaning $A_PB_PS_PD_P$ proyeksiyasi orasidagi ayrim xususiyatlari o‘zgarmaydi. Masalan, trapesiyaning bir-biriga parallel bo‘lgan AB va SD asoslarining A_PB_P va S_PD_P proyeksiyalari ham o‘zaro parallel bo‘ladi. Geometrik shakllarning proyeksiyalanish jarayonida o‘zgarmagan xususiyatlari ularning ***invariant xossalari*** deb yuritiladi.

1.3-§ da keltirilgan parallel proyeksiyalarning barcha xossalari ortogonal proyeksiyalar uchun ham o‘rinlidir.

Ortogonal proyeksiyalashda biror shaklni barcha nuqtalaridan o‘tuvchi nurlar o‘zaro parallel bo‘lib, ular berilgan geometrik shaklni proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalaydilar. Buyumning bitta ortogonal proyeksiyasi bilan uning fazodagi vaziyatini aniqlab bo‘lmaydi. Buning uchun biror ko‘shimcha shart kiritish zarur. Bunday qo‘shimcha shart sifatida birinchi proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan ikkinchi tekislikka buyumning tasvirini olish mumkin. Bu ikki proyeksiyalar tekisligidagi tasvirlar buyumning fazodagi vaziyatini aniqlaydi.

Ortogonal proyeksiyalash usuli texnik chizmalarni chizishda, inshootlarni loyihalashda eng ko‘p qo‘llaniladi. Bu usul tasvirning yaqqolligini bermasa ham, grafik ishlarni qulayroq qilib, aniq bajarilishini ta’minlaydi va buyumlarning tekislikdagi tasvirlari orqali ularning o‘lchamlarini oson va qulay aniqlaydi.

Texnik chizmalarni tuzishda proyeksiyalanuvchi buyumni o‘zaro perpendikulyar tekisliklarga nisbatan shunday joylashtirish kerakki, unda buyumning asosiy o‘lchamlari va elementlari qulay holda tasvirlansin. Faqat shundagina buyum tasvirlariga qarab uning fazodagi ko‘rinishini tasavvur etish mumkin.

Nazorat savollari

1. Nuqtaning markaziy proyeksiyasi qanday yasaladi?
2. Qanday holda to‘g‘ri chiziqning markaziy proyeksiyasi nuqta bo‘ladi?
3. Markaziy proyeksiyalashda nimalar berilgan bo‘ladi?
4. Parallel proyeksiyalash usuli qanday bajariladi?
5. Parallel proyeksyalashda nimalar berilgan bo‘ladi?

6. To‘g‘ri chiziqning parallel proyeksiyasi qanday yasaladi?
7. Parallel to‘g‘ri chiziqlarning proyeksiyalari qanday joylashgan bo‘ladi?
8. Qanday holda to‘g‘ri chiziqning parallel proyeksiyasi nuqta bo‘ladi?
9. «Ortogonal» so‘zi nimani anglatadi?
10. To‘g‘ri chiziqqa tegishli nuqtalarning proyeksiyalari qanday joylashgan bo‘ladi?

2.1- §. Nuqtaning ikki o‘zaro perpendikulyar tekisliklardagi proyeksiyalari

Biror buyumning tasviriga qarab uni o‘qilishini ikkita o‘zaro parallel bo‘lmagan proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalash orqali ta’minlash mumkin.

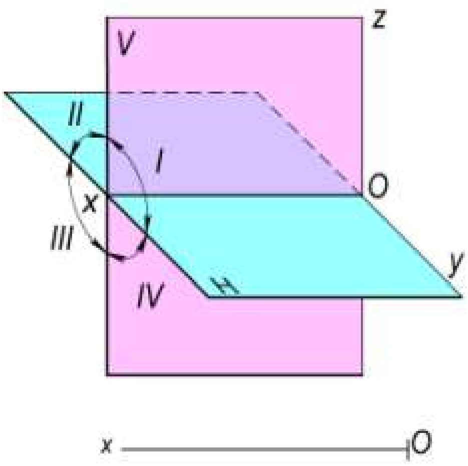
Proyeksiyalar tekisliklarini o‘zaro perpendikulyar vaziyatda tanlab olinishi buyum tasvirini o‘qilishini osonlashtiradi.

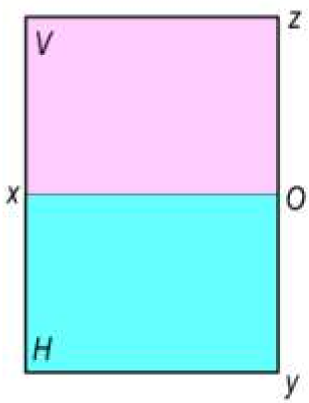
O‘zaro perpendikulyar bo‘lgan ikki tekislik bir–biri bilan kesishib fazoni to‘rt qismga – kvadrantlarga (choraklarga) bo‘ladi. Fazoda gorizontal vaziyatda joylashgan (2.1–rasm) H tekislik *gorizontal proyeksiyalar tekisligi,* vertikal joylashgan V tekislik *frontal proyeksiyalar tekisligi* deb ataladi. H va V proyeksiyalar tekisliklari o‘zaro perpendikulyar bo‘lib, ularning kesishgan Ox chizig‘i *proyeksiyalar o‘qi* deyiladi. Bunda H va V tekisliklar *proyeksiyalar tekisliklari sistemasini* hosil qiladi.

Proyeksiyalar tekisliklari sistemasining bunday fazoviy modelida turli geometrik shakllar, shuningdek, detallar, mashina va inshootlarni joylashtirib, so‘ngra ularning chizmalarini yasash katta noqulayliklar tug‘diradi va zaruriyati ham bo‘lmaydi.

Buyumlarning chizmalarini bajarishda bu tekisliklarning bir tekislikka joylashtirilgan (jipslashtirilgan) tekis tasvirlaridan foydalaniladi. Shu maqsadda V proyeksiyalar tekisligi qo‘zg‘almasdan, H gorizontal proyeksiyalar tekisligini Ox proyeksiyalar o‘qi atrofida pastga 90º ga aylantirib, V tekislik bilan ustma–ust tushirib jipslashtiriladi (2.2–rasm). Natijada, H va V tekisliklarda bajarilgan barcha yasashlar asosiy chizma tekisligi sifatida qabul qilingan V frontal proyeksiyalar tekisligiga joylashtiriladi. Bunda nuqta yoki geometrik shaklning bitta tekislikda joylashtirilgan ikki – gorizontal va frontal tasvirlari –*tekis chizma* yoki *kompleks chizma – epyur* hosil qilinadi. Bu usulni birinchi marta fransuz geometri Gaspar Monj (1746-1818) tavsiya etgan. Shuning uchun bu tekis chizmani Monj chizmasi deb ham yuritiladi.

Amalda geometrik shakllarning to‘g‘ri burchakli proyeksiyalarini yasashda asosan proyeksiyalar o‘qlaridan foydalaniladi. Shuning uchun chizmada proyeksiyalar tekisliklarining konturini tasvirlash shart emas (2.3–rasm).





2.1-rasm **2.2-rasm**

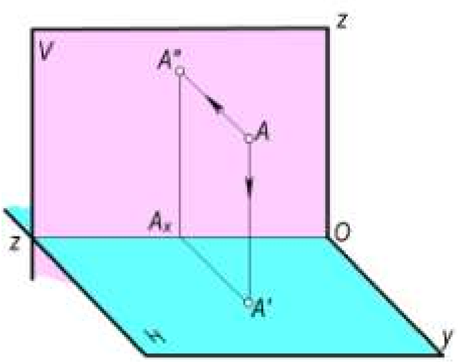
2.3-rasm

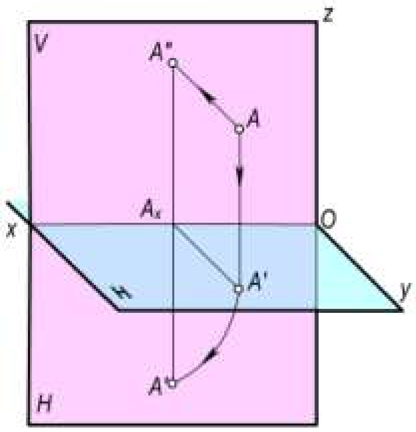
Ma’lumki, barcha buyumlar nuqtalar to‘plamidan tashkil topgan. Shuning uchun proyeksiyalashni nuqtadan boshlash maqsadga muvofiq bo‘ladi. Biror nuqta yoki geometrik shakl fazoning turli choraklarida joylashuvi mumkin.

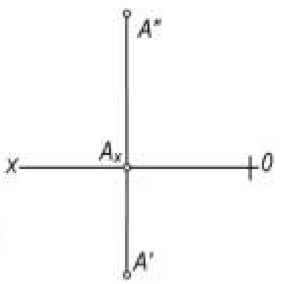
2.1.1. Birinchi chorakda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodagi A nuqta birinchni chorakda joylashgan bo‘lsin (2.4–rasm). Uning H va V tekisliklardagi proyeksiyalarini yasash uchun bu nuqtadan mazkur tekisliklarga perpendikulyarlar o‘tkazamiz va ularning bu tekisliklar bilan kesishish nuqtalarini aniqlaymiz. Faraz qilaylik, A nuqtadan H tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosi A' bo‘lsin. A nuqtadan V tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosi A'' ni aniqlash uchun A' dan Ox o‘qiga perpendikulyar o‘tkazamiz va A_x nuqtani aniqlaymiz. V tekislikka tushirilgan perpendikulyarlar bilan Ox o‘qidagi A_x nuqtadan o‘tkazilgan perpendikulyar bilan kesishtirib A'' nuqtasini topamiz.

A nuqtadan H va V tekisliklarga o‘tkazilgan perpendikulyarlarning A' va A'' asoslari A nuqtaning *to‘g‘ri burchakli proyeksiyalari* deb yuritiladi. Bu yerda A' – A nuqtaning *gorizontal proyeksiyasi*, A'' – uning *frontal proyeksiyasi* deb ataladi va $A(A',A'')$ ko‘rinishda yoziladi. Shakldagi AA' va AA'' chiziqlar *proyeksiyalovchi nurlar* yoki *proyeksiyalovchi chiziqlar* deyiladi.

A nuqtaning chizmasini tuzish uchun tekisliklarning fazoviy modelini yuqorida qayd qilingan qoidaga muvofiq V tekislikka jipslashtiramiz (2.5–rasm). Bunda A nuqtaning A'' frontal proyeksiyasi V tekislikda bo‘lgani uchun uning vaziyati o‘zgarmay qoladi. Gorizontal A' proyeksiyasi H tekislik bilan Ox o‘qi atrofida pastga 90º ga buriladi va V tekislikning davomida jipslashadi. Natijada, A nuqtaning A' gorizontal hamda A'' frontal proyeksiyalari Ox o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan bitta chiziqda joylashadi (2.6–rasm). Bunda $A'A''\perp Ox$ bo‘lib, uni proyeksiyalarni bog‘lovchi chiziq deb yuritiladi.







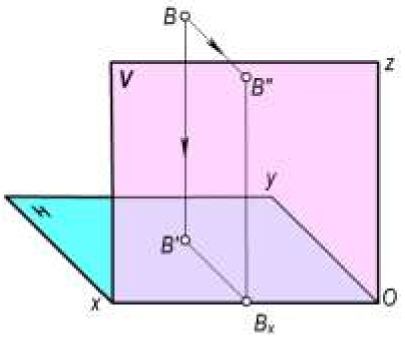
2.4-rasm **2.5-rasm** **2.6-rasm**

Fazoning *I choragida joylashgan har qanday nuqtaning gorizontal proyeksiyasi Ox o‘qining ostida, frontal proyeksiyasi uning yuqorisida joylashgan bo‘lib, ular Ox o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan bitta proyeksiyalarni bog‘lovchi chiziqda* yotadi.

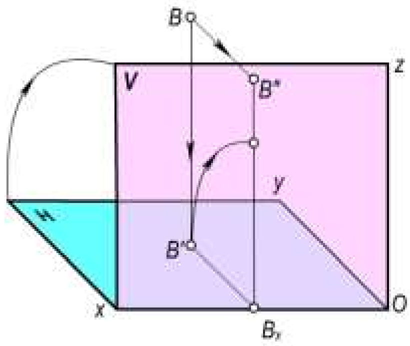
2.1.2. Ikkinchi chorakda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodagi biror B nuqta II-chorakda joylashgan bo‘lsin (2.7–rasm). Uning proyeksiyalarini yasash uchun bu nuqtadan H va V tekisliklarga perpendikulyarlar o‘tkazamiz. Bu perpendikulyarlarning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan B' va B'' asoslari B nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalari bo‘ladi. B nuqtaning chizmasini tuzish uchun H tekislikni 2.8–rasmda ko‘rsatilganidek V tekislikka jipslashtiramiz. Bunda B nuqtaning B'' frontal proyeksiyasining vaziyati o‘zgarmay qoladi. Uning

H tekislikdagi B′ gorizontal proyeksiyasi esa V tekislikning yuqori qismi bilan jipslashadi va Ox o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan $B''B_x$ proyeksiyalarni bog‘lovchi chiziqda bo‘ladi (2.9–rasm).

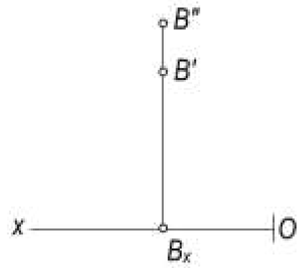
Fazoning *II-choragida joylashgan har qanday nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalari Ox o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan bitta proyeksiyalarni bog‘lovchi chiziqda va Ox o‘qining yuqorisida joylashadi.*



2.7-rasm

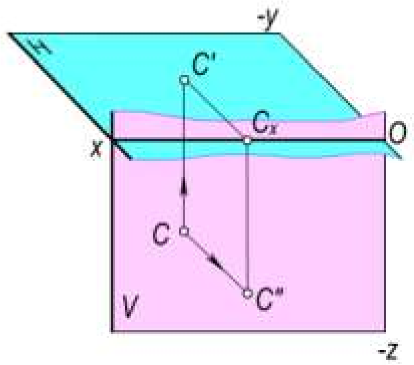


2.8-rasm

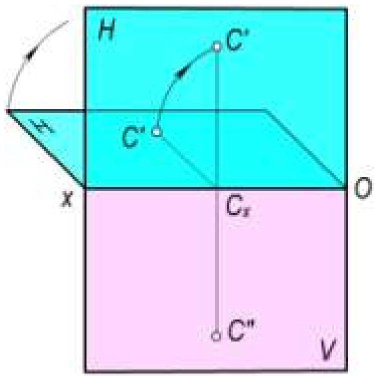


2.9-rasm

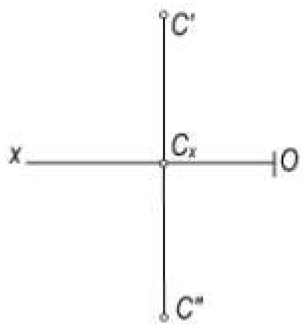
2.1.3. Uchinchi chorakda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodagi biror C nuqta III-chorakda joylashgan bo‘lsin (2.10–rasm). Bu nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalarini yasash uchun H va V tekisliklarga perpendikulyar tushiramiz. Bu perpendikulyarlarning H va V tekisliklardagi C′ va C″ asoslari C nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalari bo‘ladi. Nuqtaning chizmasini yasash uchun H tekislikni V tekislikning davomida jipslashtiramiz (2.11–rasm). Bunda C nuqtaning C″ frontal proyeksiyasi V tekislikda bo‘lgani uchun o‘z vaziyatini o‘zgartirmaydi. Uning C′ gorizontal proyeksiyasi esa H tekislik bilan birga V tekislikning yuqori qismida jipslashadi va 2.12–rasmda ko‘rsatilgan vaziyatni egallaydi.



2.10-rasm



2.11-rasm



2.12-rasm

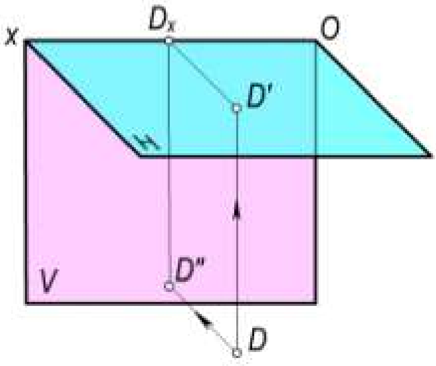
Fazoning *III-choragida joylashgan har qanday nuqtaning gorizontal proyeksiyasi Ox o‘qining yuqorisida, frontal proyeksiyasi esa uning ostida, Ox o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan bitta proyeksiyalarni bog‘lovchi chiziqda yotadi.*

2.1.4. To‘rtinchi chorakda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodagi biror D nuqta fazoda IV chorakda joylashgan bo‘lsin (2.13–rasm). Uning H va V tekisliklardagi proyeksiyalarini yasash uchun D nuqtadan bu tekisliklarga perpendikulyar o‘tkazamiz.

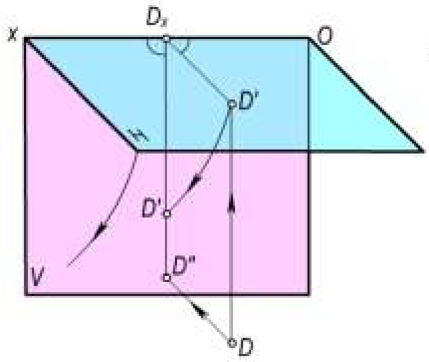
Perpendikulyarlarning H va V tekisliklar bilan kesishgan D′ va D″ asoslari D nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalari bo‘ladi.

D nuqtaning chizmasini tuzish uchun H tekislikni Ox o‘qi atrofida pastga 90° ga aylantiramiz va V tekislik davomi bilan jipslashtiramiz (2.14–rasm). Bunda D nuqtaning D″ frontal proyeksiyasining vaziyati o‘zgarmaydi. Gorizontal D′ proyeksiyasi esa H tekislik bilan harakatlanib, Ox o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan, D″ nuqta bilan bitta proyeksiyalarni bog‘lovchi chiziqda yotadi (2.15–rasm).

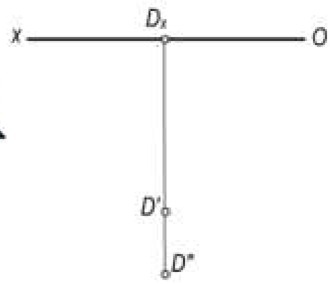
Fazodaning *IV choragida joylashgan har qanday nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalari Ox o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan bitta proyeksiyalarni bog‘lovchi chiziqda va Ox o‘qining ostida bo‘ladi.*



2.13-rasm



2.14-rasm

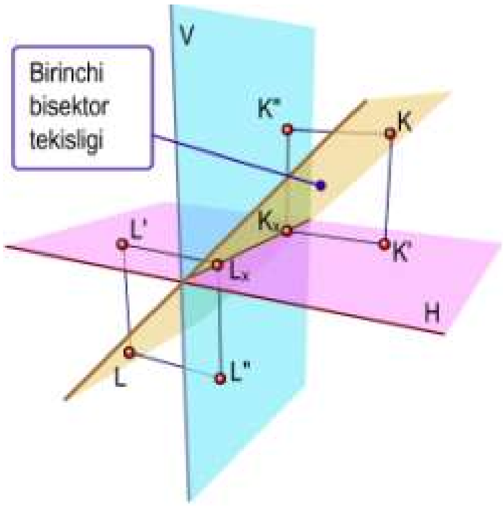


2.15-rasm

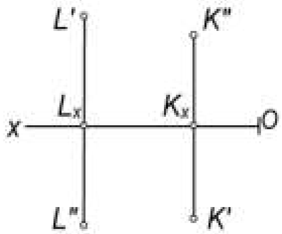
2.1.5. Bissektor tekisliklarda joylashgan nuqtalarning chizmalari. Fazoning birinchi va uchinchi choraklarini teng ikkiga bo‘luvchi tekislik *birinchi bissektor tekisligi,* shuningdek, ikkinchi va to‘rtinchi choraklarini teng ikkiga bo‘luvchi tekislik *ikkinchi bissektor tekisligi* deb ataladi.

Agar fazodagi nuqtalar proyeksiyalar tekisliklaridan teng uzoqlikda joylashlashgan bo‘lsa, bunday nuqtalar bissektor tekisliklarga tegishli nuqtalar bo‘ladi. 2.16-rasmda birinchi bissektor tekislikda joylashgan K va L nuqtalarning, 2.18-rasmda esa ikkinchi bissektor tekislikda joylashgan E va F nuqtalarning fazodagi vaziyati va epyurlari ko‘rsatilgan. Chizmada birinchi bissektor tekislikda joylashgan K va L nuqtalarning proyeksiyalari (K′, K″ va L′, L″) Ox o‘qidan baravar uzoq- likda joylashadi (2.17-rasm). Ikkinchi bissektor tekislikda joylashgan E va F nuqtalarning proyeksiyalari (E′, E″ va F′, F″) chizmada ustma–ust tushadi (2.19-rasm).

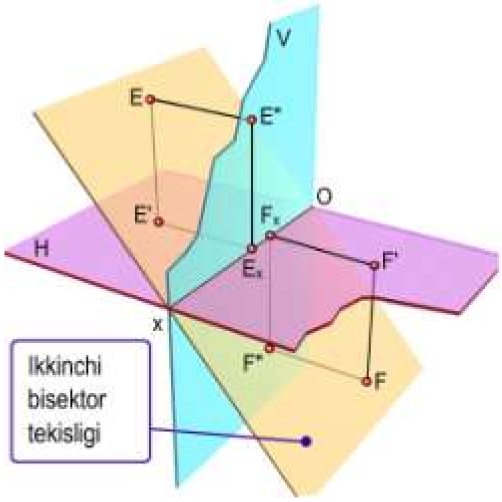
2.1.6. Proyeksiyalar tekisligida va koordinatlar o‘qida joylashgan nuqtalarning chizmalari. Fazoda biror nuqta proyeksiyalar tekisligida yoki proyeksiyalar o‘qida joylashishi mumkin. Masalan, A∈H bo‘lsin (2.20–rasm). Bunda A nuqtaning gorizontal proyeksiyasi A′ nuqtaning o‘ziga (A≡A′), frontal proyeksiyasi A″ esa Ox o‘qiga proyeksiyalanadi (2.21–rasm). Shuningdek, nuqta Ox proyeksiyalar o‘qida ham joylashishi mumkin. Masalan, B∈Ox bo‘lsa, bu nuqtaning B′ gorizontal va B″ frontal proyeksiyalari shu B nuqtaning o‘ziga proyeksiyalanadi, ya’ni B′≡B″≡B bo‘ladi (2.21-rasm).



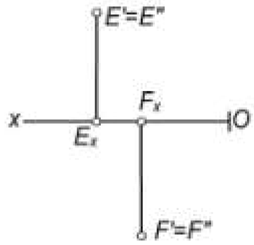
2.16-rasm



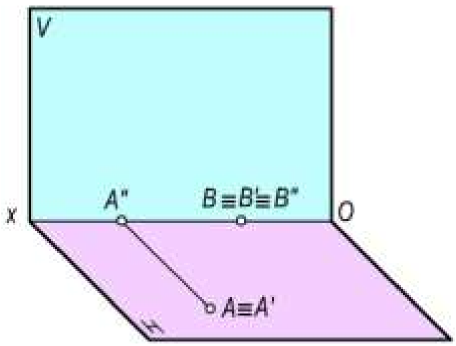
2.17-rasm



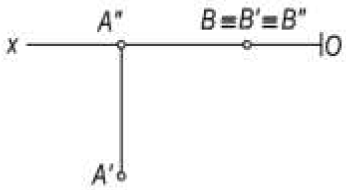
2.18-rasm



2.19-rasm



2.20-rasm



2.21-rasm

Turli choraklarda joylashgan nuqtalarni H va V proyeksiyalar tekisliklariga proyeksiyalash va ularning chizmalarini tuzishdan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin:

- Nuqtaning fazodagi vaziyatini uning ikki ortogonal proyeksiyasi to‘la aniqlaydi. Haqiqatan ham, A nuqtaning berilgan A′ gorizontal va A″ frontal proyeksiyalaridan perpendikulyar chiqarilsa, ularning kesishish nuqtasi A nuqtaning fazodagi vaziyatini aniqlaydi (2.4–rasm).

- Fazodagi har qanday nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalari Ox o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan bir bog‘lovchi chiziqda joylashadi. Masalan, A nuqtaning (2.6–rasm) chizmasini yasash uchun H tekislik V tekislik bilan jipslashtirilganda $A'A_x \perp Ox$ va $A''A_x \perp Ox$ bo‘lgani uchun bu nuqtaning A' va A'' proyeksiyalari Ox o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan bir to‘g‘ri chiziqda bo‘lib qoladi.
- Fazodagi har qanday nuqtaning H va V proyeksiyalar tekisliklaridan uzoqliklarini nuqta gorizontal va frontal proyeksiyalarining Ox o‘qigacha bo‘lgan masofalari aniqlaydi. Haqiqatan, A nuqtadan H tekislikkacha bo‘lgan masofa (2.4–rasm) $AA'=A''A_x$ va V tekislikkacha bo‘lgan masofa $AA''=A'A_x$. Demak, A nuqtaning H tekislikkacha bo‘lgan masofasini $A''A_x$ va V tekislikkacha bo‘lgan masofani $A'A_x$ masofalar aniqlaydi.

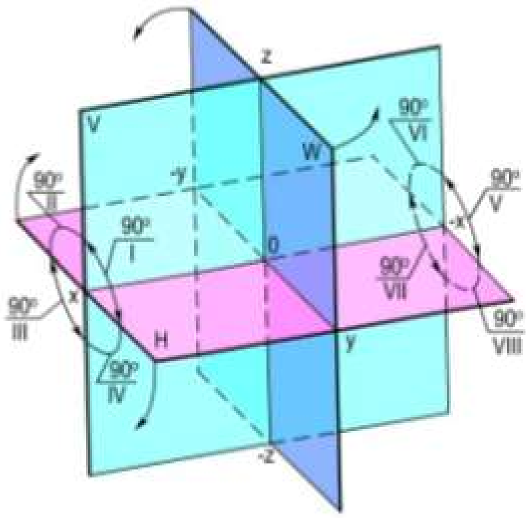
2.2–§. Nuqtaning uchta tekislikdagi proyeksiyalari

O‘zaro perpendikulyar bo‘lgan uchta proyeksiyalar tekisligi kesishib, fazoni 8 qismga – oktantlarga bo‘ladi (2.22–rasm). Ma’lumki, H tekislik – gorizontal proyeksiyalar tekisligi, V – frontal proyeksiyalar tekisligi deyiladi. Tasvirdagi W tekislik *profil proyeksiyalar tekisligi* deb ataladi. Uchta proyeksiyalar tekisliklar o‘zaro perpendikulyar joylashgan bo‘ladilar, ya’ni $H\perp V\perp W$. Buni H, V va W proyeksiyalar tekisliklari sistemasi deb yuritiladi.

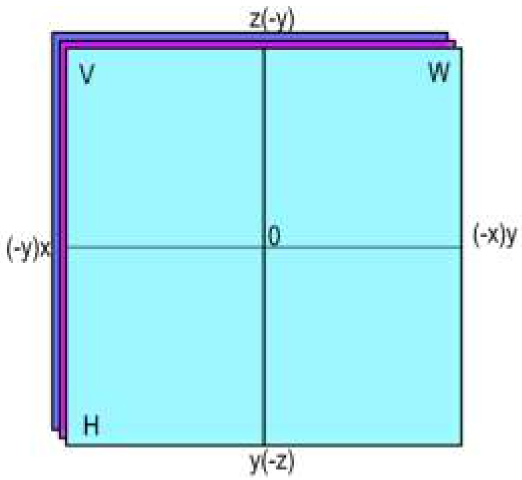
Tekisliklarning o‘zaro kesishishi natijasida hosil bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar proyeksiyalar yoki koordinata o‘qlari deyiladi va Ox, Oy, Oz harflari bilan belgilanadi. Proyeksiyalar o‘qlarini tashkil qiluvchi Ox – *abssissalar o‘qi,* Oy – *ordinatalar o‘qi* va Oz – *applikatalar* o‘qi deb ataladi. Buni H, V va W proyeksiyalar tekisliklari sistemasi deb yuritiladi.

Uchta proyeksiyalar tekisligining o‘zaro kesishish nuqtasi O koordinatlar boshi deyiladi.

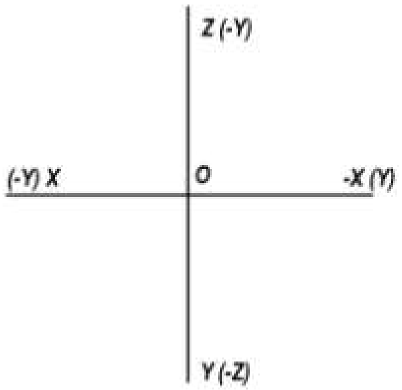
Bu sistemada musbat miqdor Ox o‘qiga (2.22–rasm) koordinatlar boshi O dan chapga, Oy o‘qiga kuzatuvchi tomonga vo Oz o‘qiga yuqoriga qaratib qo‘yiladi. Bu o‘qlarning qarama–qarshi tomonlari manfiy miqdorlar yo‘nalishi bo‘lib hisoblanadi.



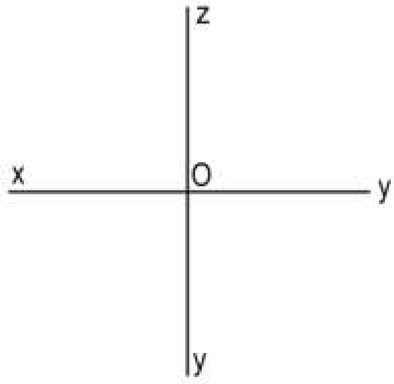
2.22-rasm.



2.23-rasm



2.24-rasm



2.25-rasm

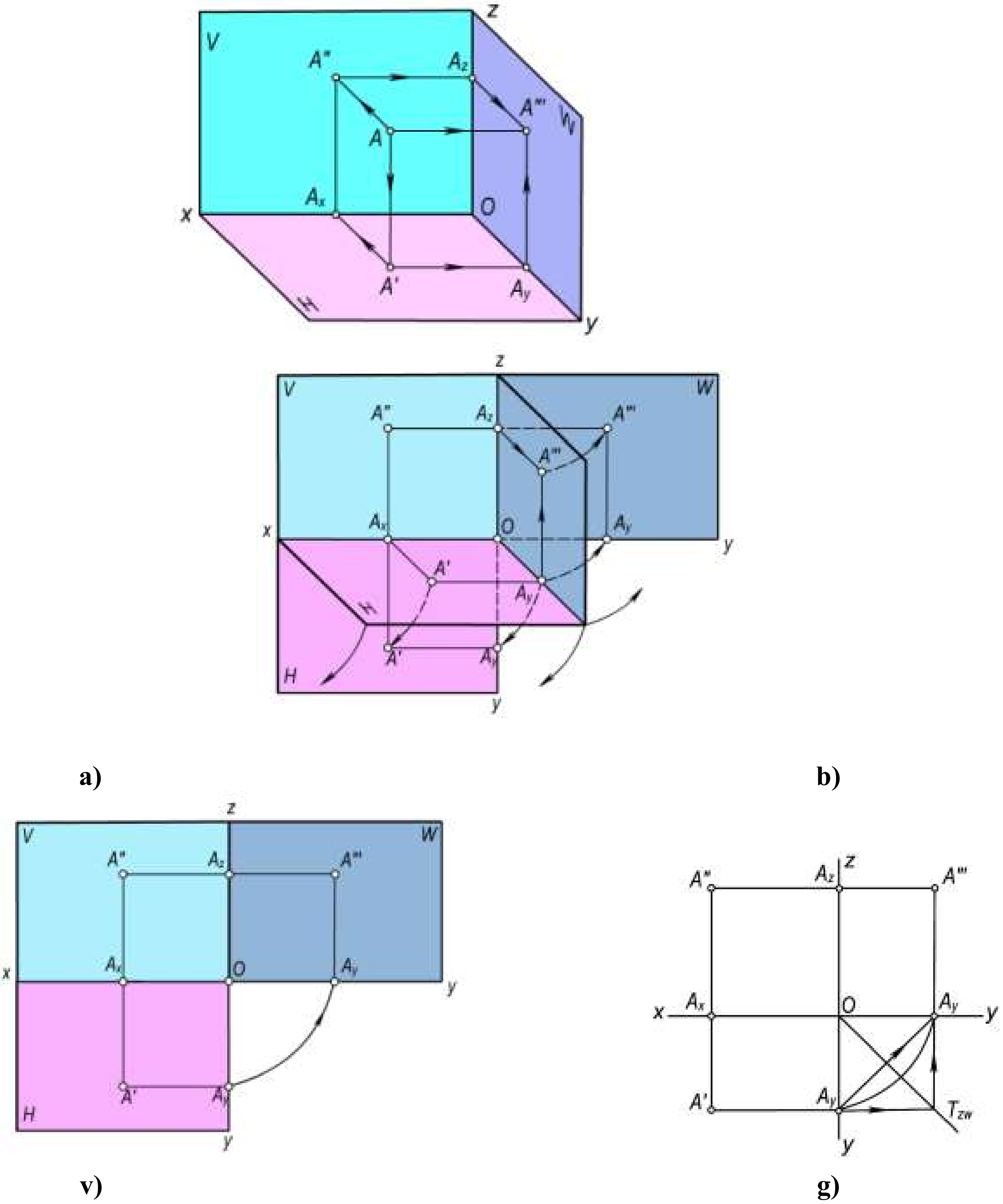
Proyeksiyalar tekisliklarida geometrik shakllarning ortogonal proyeksiyalarini yasashni osonlashtirish uchun, odatda, bu tekisliklarning bir tekislikka jipslashtirilgan tekis tasviridan foydalaniladi. Shu maqsadda H tekislikni Ox o‘qi atrofida pastga 90° ga va W tekislikni Oz o‘qi atrofida o‘ngga 90° ga aylantirib, V tekislikka jipslashtiriladi (2.23–rasm). Bunda Ox va Oz proyeksiyalar o‘qlarining vaziyati o‘zgarmay qoladi (2.24–rasm). H tekislik V tekislikka jipslashtirilganda Oy o‘qining musbat yo‘nalishi Oz o‘qining manfiy yo‘nalishi bilan, Oy o‘qining manfiy yo‘nalishi esa Oz o‘qining musbat yo‘nalishi ustma–ust tushadi. Shuningdek, profil proyeksiyalar tekisligi W frontal proyeksiyalar tekisligi V bilan jipslashtirilganda Oy o‘qining musbat yo‘nalishi Ox o‘qining manfiy yo‘nalishi bilan, uning manfiy yo‘nalishi Ox o‘qining musbat yo‘nalishi bilan ustma–ust joylashadi.

Geometrik shaklning ortogonal proyeksiyalari yasashda asosan H, V va W proyeksiyalar tekisliklari sistemasining koordinatalar o‘qlaridan foydalaniladi. Shuning uchun chizmada proyeksiyalar tekisliklarini tasvirlash shart emas (2.24–rasm). Shuningdek, tasvirni soddalashtirish uchun koordinata o‘qlarining manfiy yo‘nalishlarini chizmada hamma vaqt ham ko‘rsatilmaydi (2.25-rasm). Koordinata o‘qlarining manfiy yo‘nalishlari nuqtaning qaysi oktantga tegishligiga qarab belgilanadi.

Amaliyotda nuqta va geometrik shakllarning fazoviy vaziyati va ularning ortogonal proyeksiyalariga oid masalalarni asosan I–IV oktantlarda yechish bilan chegaralaniladi. Nuqtaning proyeksiyalari, uning fazoni qaysi oktantida joylashuviga qarab, proyeksiyalar o‘qlariga nisbatan turlicha joylashadi.

2.2.1. Birinchi oktantda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodaning I oktantida joylashgan A nuqta va o‘zaro perpendikulyar H, V va W proyeksiyalar tekisliklari sistemasi berilgan (2.26,a–rasm). A nuqtaning ortogonal proyeksiyalarini yasash uchun bu nuqtadan proyeksiyalar tekisliklariga perpendikulyarlar o‘tkazamiz.

Faraz qilaylik, A nuqtadan H tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosi A′ bo‘lsin. Mazkur nuqtadan V tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosini aniqlash uchun A′ dan Ox ga perpendikulyar o‘tkazamiz va bu o‘qda A_x ni topamiz. So‘ngra A_x dan Ox ga perpendikulyar qilib o‘tkazilgan chiziqning A nuqtadan V tekislikka tushirilgan perpendikulyar bilan kesishgan A″ nuqtasini topamiz.



2.26-rasm

A nuqtadan W tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosini (2.26,a–rasm) aniqlash uchun A' dan Oy o‘qiga tushirilgan perpendikulyar o‘tkazamiz va A_y ni belgilaymiz. So‘ngra A_y dan Oy ga perpendikulyar qilib o‘tkazilgan chiziqning A nuqtadan W ga tushirilgan perpendikulyar bilan kesishgan A''' nuqtasini topamiz. A nuqtadan W tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosi A''' ni A'' dan Oz o‘qigacha o‘tkazilgan perpendikulyar orqali ham aniqlash mumkin.

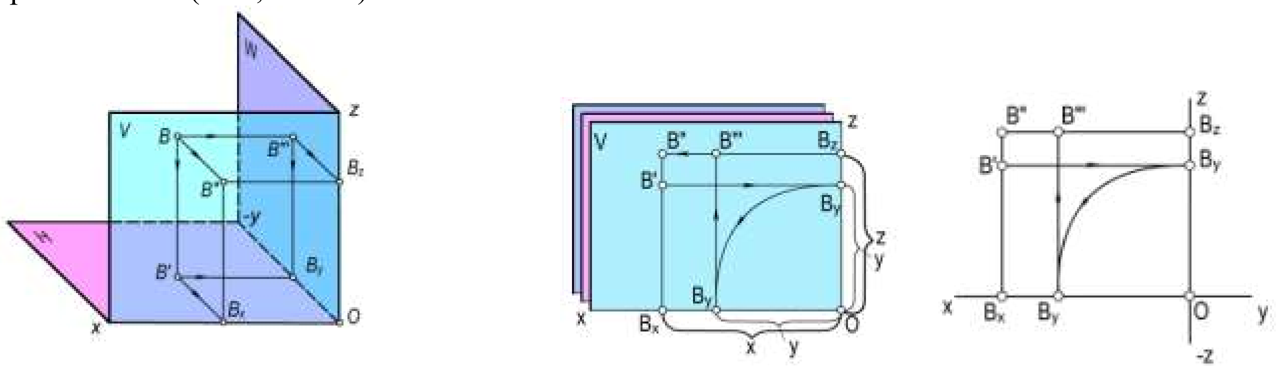
A nuqtadan H, V va W tekisliklariga o‘tkazilgan perpendikulyarlarning asoslari A', A'' va A''' nuqtaning ortogonal proyeksiyalari deyiladi. Bunda A' – nuqtaning gorizontal proyeksiyasi, A'' – frontal proyeksiyasi va A''' – profil proyeksiyasi deyiladi va $A(A',A'',A''')$ ko‘rinishida yoziladi. A nuqtaning chizmasini tuzish uchun V tekislikni qo‘zg‘atmasdan H va W proyeksiyalar tekisliklarini V tekislikka jipslashtiramiz (2.26,b–rasm). A nuqtaning A'' frontal proyeksiyasi V tekislikka tegishli bo‘lgani uchun uning vaziyati o‘zgarmay qoladi. Gorizontal A' va profil A'''

proyeksiyalar H va W tekisliklariga mos ravishda tegishli bo‘lgani uchun bu tekisliklar Ox va Oz o‘qlar atrofida pastga va o‘ngga 90° ga buriladi va 2.26,b,v–rasmda ko‘rsatilgan vaziyatni egallaydi. A nuqtaning hosil qilingan chizmasida uning A' va A'' proyeksiyalari Ox ga perpendikulyar bo‘lgan bir proyeksion chiziqda, frontal A'' va A''' profil proyeksiyalari esa Oz o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan ikkinchi proyeksion chiziqda joylashadi.

Har qanday nuqtaning frontal va profil proyeksiyalari Oz o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan bitta proyeksion bog‘lovchi chiziqda yotadi.

Shuningdek, 2.26–rasmdan $A_xA'=OA_y=A_zA'''$ ekanligini aniqlash mumkin. Demak, chizmada A nuqtaning A' gorizontal va A''' profil proyeksiyalari orasidagi proyeksion bog‘lanish chizig‘i, markazi O nuqtada bo‘lgan radiusi OA_u ga teng yoy yoki A_u nuqtadan 45° da o‘tkazilgan chiziq yordamida hosil qilinadi. Shuningdek, A' va A''' proyeksiyalar orasidagi proyeksion bog‘lanishni chizmaning doimiy chizig‘i A_yOA_y burchak A_y bissektrisasi T_{zW} chiziq yordami bilan $A'A_0A'''$ to‘g‘ri burchak orqali ham hosil qilish mumkin.

2.2.2. Ikkinchi oktantda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodagi B nuqta II-oktantda joylashgan bo‘lsin. Nuqtaning proyeksiyalarini yasash uchun bu nuqtadan H, V va W proyeksiyalar tekisliklariga perpendikulyarlar o‘tkazamiz (2.27,a–rasm). Bu perpendikulyarlarning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan B', B'' va B''' asoslari B nuqtaning gorizontal, frontal va profil proyeksiyalari bo‘ladi. B nuqtaning chizmasini tuzish uchun H va W tekisliklarni V tekislikka jipslashtiramiz (2.27,b–rasm).

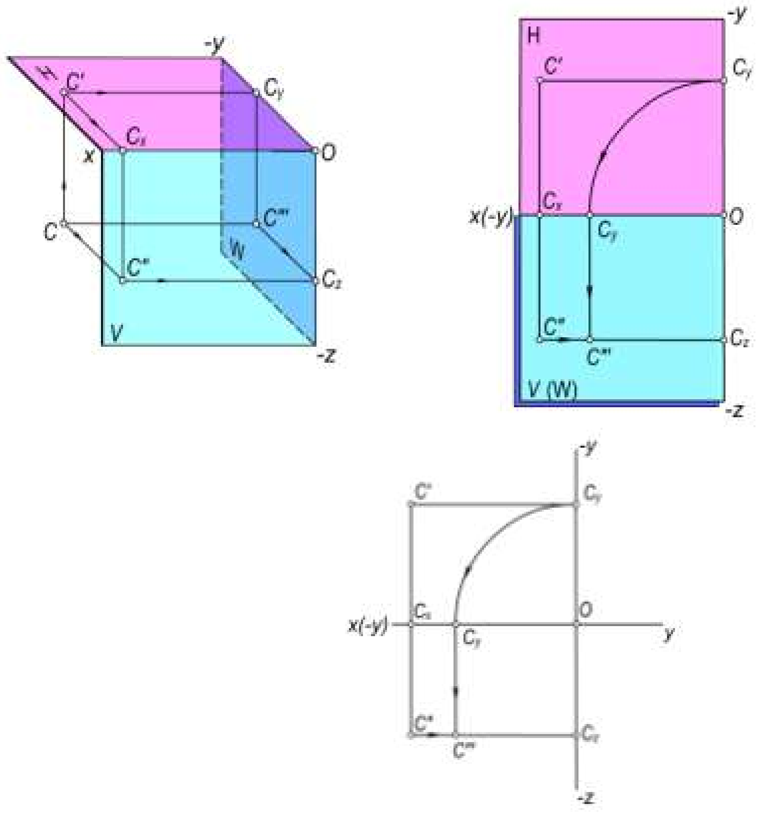


a) b) v)

2.27–rasm.

B nuqtaning B'' frontal proyeksiyasi V tekislikda bo‘lgani uchun uning vaziyati o‘zgarmay qoladi. Bu nuqtaning B' gorizontal va B''' profil proyeksiyalari H va W tekisliklariga tegishli bo‘lgani uchun Ox va Oz o‘qlari atrofida 90° ga harakatlanib, 2.27,v-rasmda ko‘rsatilgan vaziyatni egallaydi.

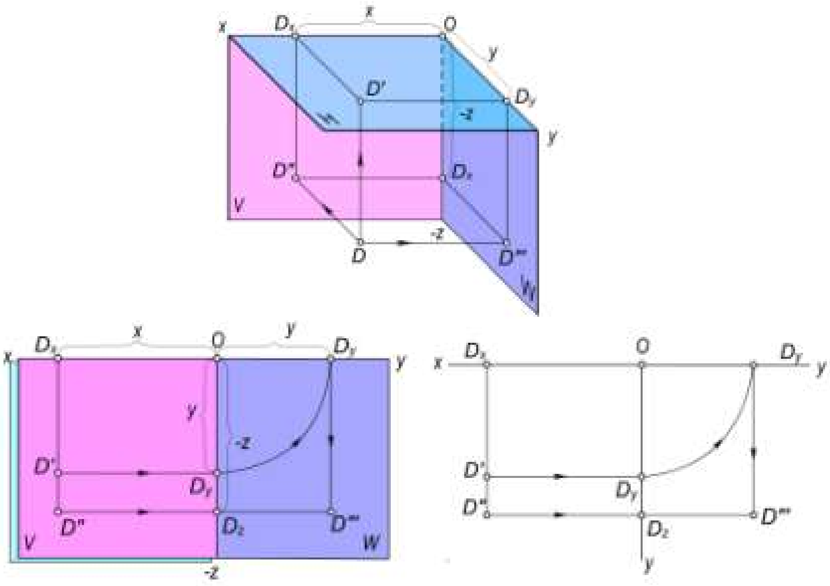
2.2.3. Uchinchi oktantda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodagi C nuqta III-oktantda joylashgan bo‘lsin (2.28,a–rasm). Bu nuqtaning H, V va W tekisliklardagi proyeksiyalari C', C'' va C''' bo‘ladi. Nuqtaning chizmasini yasash uchun H va W proyeksiyalar tekisliklarini V tekislik bilan jipslashtiramiz. Bunda H tekislik 90° yuqoriga, W tekislik esa Oz o‘qi atrofida 90° ga soat strelkasi yo‘nalishiga teskari yo‘nalishda harakatlantirilib, V tekislikka jipslashtiriladi (2.28,b–rasm). C nuqtaning C'' frontal proyeksiyasi V tekislikda bo‘lgani uchun uning vaziyati o‘zgarmaydi. Gorizontal C' va profil C''' proyeksiyalari Ox va Oz o‘qlari atrofida harakatlanib, 2.28,v–rasmda ko‘rsatilgan vaziyatni egallaydi.



a) b) v)

2.28–rasm.

2.2.4. To‘rtinchi oktantda joylashgan nuqtaning chizmasi. Fazodagi D nuqta IV-oktantda joylashgan bo‘lsin (2.29,a–rasm). Mazkur nuqtaning H, V va W tekisliklardagi proyeksiyalari D', D'' va D''' bo‘ladi. Nuqtaning chizmasini yasash uchun H va W tekisliklarini V tekislik bilan jipslashtiramiz (2.29,b–rasm). H tekislik Ox o‘qi atrofida 90° yuqoriga ko‘tarilganda V tekislik bilan jipslashadi, W tekislik Oz o‘qi atrofida 90° ga soat strelkasi yo‘nalishiga teskari yo‘nalishda harakatlantirib, V tekislik vaziyatiga keladi. D nuqtaning D'' frontal proyeksiyasi V tekislikda bo‘lgani uchun uning vaziyati o‘zgarmay qoladi, uning D' gorizontal va D''' profil proyeksiyalari Ox va Oz o‘qlari bo‘yicha harakatlanib, 2.29,b–rasmda tasvirlangan vaziyatni egallaydi. IV oktantda joylashgan D nuqta proyeksiyalarining koordinata o‘qlari sistemasiga nisbatan joylashuvi 2.29,b–rasmda tasvirlangan.



a) b) v)

2.29–rasm.

2.2.5. Proyeksiyalar tekisliklar va koordinata o'qlarida joylashgan nuqtalarning chizmalari. Biror E nuqta H proyeksiyalar tekisligiga tegishli bo'lsin (2.30,a–rasm). Bu nuqtaning gorizontal proyeksiyasi mazkur nuqtada ($E' \equiv E$), qolgan ikkita proyeksiyasi esa proyeksiyalar o'qlariga proyeksiyalanadi (2.30,a,b –rasmlar)

Shuningdek, nuqta koordinata o'qlaridan birida, masalan, E nuqta Oz koordinatlar o'qida joylashgan bo'lsa, chizmada uning frontal va profil proyeksiyalari shu nuqtaning o'zida, gorizontal proyeksiyasi esa koordinata boshida bo'ladi (2.30,a,b–rasmlar)

Shunday qilib, nuqtani H, V va W proyeksiyalar tekisliklariga proyeksiyalash va uning tekis chizmasini tuzishdan quyidagi xulosalarga kelish mumkin:

Fazoda berilgan har qanday nuqtaning:

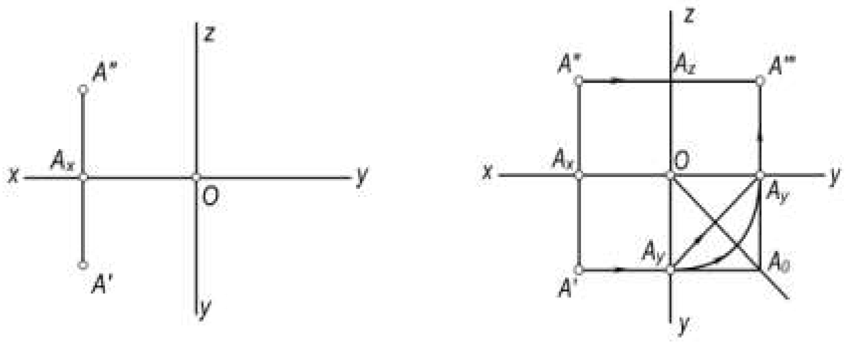
- gorizontal va frontal proyeksiyalari Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan bir proyeksiyalarni bog'lovchi chiziqda joylashadi;
- gorizontal va profil proyeksiyalari Oy o'qiga perpendikulyar bo'lgan bir proyeksiyalarni bog'lovchi chiziqda joylashadi;
- frontal va profil proyeksiyalari Oz o'qiga perpendikulyar bo'lgan bir proyeksiyalarni bog'lovchi chiziqda joylashadi;
- Nuqtaning berilgan har qanday ikki ortogonal proyeksiyasi orqali uning uchinchi proyeksiyasini yasash mumkin.

Masalani biror A (A', A'') nuqtaning (2.31.a,b-rasm) A''' proyeksiyasini yasash uchun:

- Nuqtaning gorizontal proyeksiyasidan Ox –ga parallel qilib chiziq o'tqiziladi va uni Oy o'qi bilan kesishgan A_y nuqtasi aniqlanadi.
- OA_y ni radius qilib A_y nuqtasi W tekislikni aylanish xarakatiga mos ravishda 90^0 ga buriladi va hosil bo'lgan, A_y ning yangi vaziyatidan Oz ga parallel chiziq chiqariladi.
- A'' nuqtadan Oz ga perpendikulyar chiqarilib, ularning o'zaro kesishuvi A''' nuqta belgilanadi.

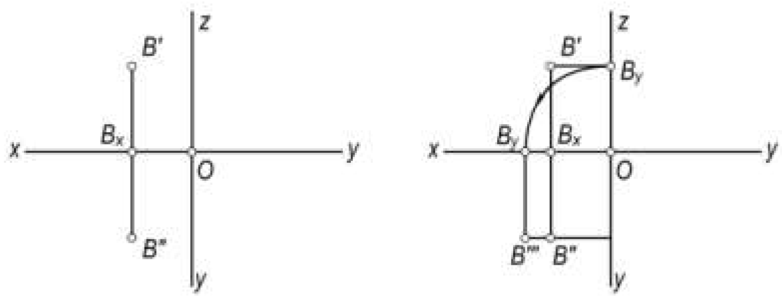
a) b)

2.30–rasm.



a) b)

2.31–rasm.



a) b)

2.32–rasm.

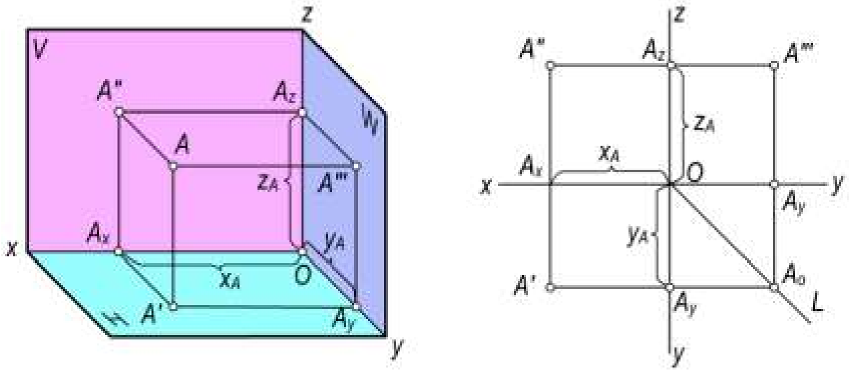
2.3-§. Nuqtaning to‘g‘ri burchakli koordinatalari va proyeksiyalari orasidagi bog‘lanish

Geometriyada har qanday nuqta va shakllarning fazodagi vaziyatini o‘zaro perpendikulyar uchta koordinatalar tekisliklari sistemasiga nisbatan aniqlash qabul qilingan. Bu metodni fransuz matematigi va faylasufi Rene Dekart (1506–1650 yy) ixtiro qilgani uchun ***dekart koordinatalar sistemasi*** deb yuritiladi.

Bu sistemada nuqtaning fazodagi vaziyatini uning x, y va z koordinatalari aniqlaydi. Masalan, fazoda berilgan biror A nuqtaning koordinatalari x_A, y_A va z_A bo‘ladi (2.33,a–rasm). Ammo Dekart koordinatalar sistemasida stereometrik masalalarni geometrik yasashlar fikran bajariladi va chizma asboblari yordamida konkret geometrik shakllarni yasash va ularni grafik usullar bilan tahlil qilish imkoniyatini bermaydi.

Fransuz geometri va muxandisi G.Monj dekart koordinatalar sistemasi asosida fazodagi har qanday nuqtaning uchta koordinatasini proyeksiyalar tekisliklari sistemasida ortogonal proyeksiyalari bilan o‘zaro grafik bog‘ladi.

Haqiqatan, ortogonal proyeksiyalar sistemasida biror nuqtaning berilgan koordinatalari orqali uning proyeksiyalar tekisliklaridan uzoqligini aniqlash mumkin. Masalan biror A nuqtaning (2.33,a,b–rasmlar) W profil proyeksiyalar tekisligidan uzoqligini z_A abssissasi, V frontal proyeksiyalar tekisligidan uzoqligini y_A ordinatasi va H gorizontal proyeksiyalari tekisligidan uzoqligini z_A appilikatasi kabi koordinatalari aniqlaydi.



a) b)

2.33–rasm.

Biror nuqta berilgan koordinatalariga asosan fazoning turli oktantlaridan birida joylashgan bo‘lishi mumkin. Buni aniqlash uchun koordinata o‘qlarining yo‘nalishi (2.22-rasm) ishoralariga asosan quyidagi 1-jadvalni keltiramiz.

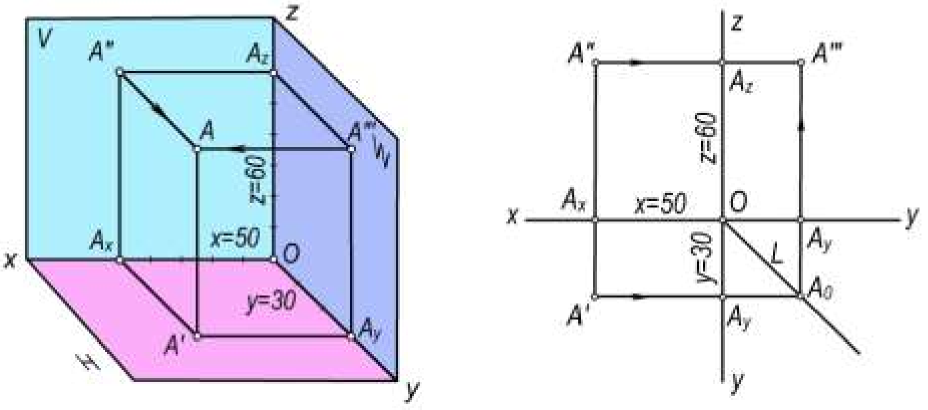
1-jadval

Oktantlar	Koordinatalar		
	x	y	z
I	+	+	+
II	+	-	+
III	+	-	-
IV	+	+	-
V	-	+	+
VI	-	-	+
VII	-	-	-
VIII	-	+	-

Bu jadvaldan foydalanib, nuqtaning berilgan koordinatalarining ishoralari orqali uning qaysi oktantda joylashganligini aniqlash mumkin. Quyida koordinatalari bilan berilgan nuqtalarning fazodagi vaziyati va chizmasini yasashni ko‘rib chiqamiz.

1–masala. $A(50,30,60)$ nuqtaning berilgan koordinatalari bo‘yicha uning fazoviy vaziyati va chizmasi yasalsin.

Echish. A nuqta koordinatalari ishoralariga asosan u I oktantda joylashgan (1-jadvalga qarang). Shuning uchun I oktantning proyeksiyalar tekisliklarining fazoviy modelini va proyeksiyalar o‘qlari sistemasini chizamiz (2.34,a–rasm). Koordinata boshi O dan Ox o‘qiga x_a=50 mm, Oy o‘qiga y_a=30 mm va Oz o‘qiga z_a=60 mm o‘lchab qo‘yamiz va A_x , A_y va A_z nuqtalarni belgilaymiz. A nuqtaning gorizontal A' proyeksiyasini yasash uchun A_x va A_y nuqtalardan Ox va Oy o‘qlarga perpendikulyarlar o‘tkazamiz. Bu perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi A nuqtaning gorizontal proyeksiyasi A' bo‘ladi. Xuddi shuningdek, A_x va A_z nuqtalardan Ox va Oz o‘qlariga o‘tkazilgan perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi A'' uning frontal proyeksiyasi A_y va A_z nuqtalardan Oy va Oz o‘qlarga o‘tkazilgan. Perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi A nuqtaning profil proyeksiyasi A''' bo‘ladi. A nuqtaning fazodagi vaziyatini aniqlash uchun uning A' , A'' va A''' proyeksiyalaridan H, V va W tekisliklariga perpendikulyarlar o‘tkazamiz. Bu perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi A nuqtaning fazodagi o‘rni bo‘ladi. Umuman, A nuqtaning har qanday ikki proyeksiyasidan o‘tkazilgan perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi A nuqtaning fazoviy o‘rnini aniqlaydi.



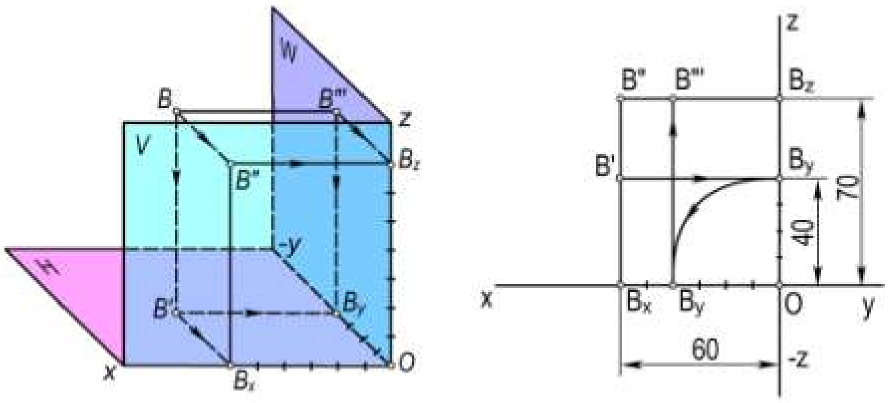
a) b)

2.34–rasm.

A nuqtaning chizmasini yasash uchun proyeksiyalar o‘qlari sistemasida (2.34,b–rasm) Ox o‘qiga 40 mm, Oy o‘qiga 30 mm va Oz o‘qiga 60 mm o‘lchamlarni qo‘yamiz va A_x, A_y va A_z nuqtalarga ega bo‘lamiz. Bu nuqtalardan Ox, Oy va Oz proyeksiyalar o‘qlariga o‘tkazilgan perpendikulyarlarning kesishish nuqtalari A nuqtaning A′ , A″ va A‴ proyeksiyalarini beradi, ya’ni A(A′, A″, A‴).

2–masala. B(60, –40, 70) nuqtaning berilgan koordinatalari bo‘yicha fazoviy vaziyati va chizmasi yasalsin.

Echish. B nuqta koordinatalari ishoralariga asosan II oktantda joylashgan. Nuqtaning proyeksiyalarini yasash uchun proyeksiyalar tekisliklarining fazoviy modelida (2.35,a–rasm) koordinata o‘qlariga berilgan x_v=60, y_v=–40, z_v=70 qiymatlarini qo‘yamiz va hosil bo‘lgan nuqtalarni B_x , B_y va B_z bilan belgilaymiz. So‘ngra B_x va B_y nuqtalardan Ox va Oy o‘qlarga, B_x va B_z dan Ox va Oz o‘qlarga, B_y va B_z dan Oy va Oz o‘qlarga perpendikulyarlar o‘tkazamiz va ularning kesishgan B′, B″ va B‴ proyeksiyalaridan tegishlicha H, V va W tekisliklarga perpendikulyarlar o‘tkazamiz. Bu perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi izlangan B nuqta bo‘ladi.



a) b)

2.35–rasm.

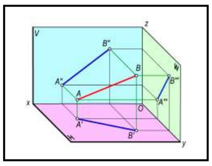
Nuqtaning chizmasini yasash uchun proyeksiyalar o‘qlari sistemasini (koordinatalarning ishoralarini nazarda tutgan holda) chizamiz (2.35,b–rasm). Koordinata boshi O nuqtadan Ox o‘qi bo‘ylab x_B=60 mm, Oy o‘qi bo‘ylab y_B=-40 mm va Oz o‘qi bo‘ylab z_B=70 mm masofalarni o‘lchab qo‘yib, B_x, B_y va B_z nuqtalarga ega bo‘lamiz. So‘ngra yuqorida qayd qilingan tartibda, B_x va B_y dan

Ox va Oy o‘qiga, B_x va B_y dan Ox va Oy o‘qiga, B_x va B_z dan Ox va Oz o‘qiga perpendikulyarlar o‘tkazib, B' va B'' proyeksiyalarini aniqlaymiz.

Nuqtaning profil B''' proyeksiyasini yasash uchun B_y nuqtani Oz o‘qiga jipslashgan Oy o‘qidan Ox o‘qiga jipslashgan Oy o‘qiga ko‘chiramiz. Bu B_y nuqtadan Oy o‘qiga va B_y nuqtadan Oz o‘qiga o‘tkazilgan perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi B''' bo‘ladi. Shunday qilib, B nuqtaning berilgan koordinatalariga ko‘ra uning ortogonal proyeksiyasi yasaldi, ya’ni B (B', B'', B''').

Nazorat savollari

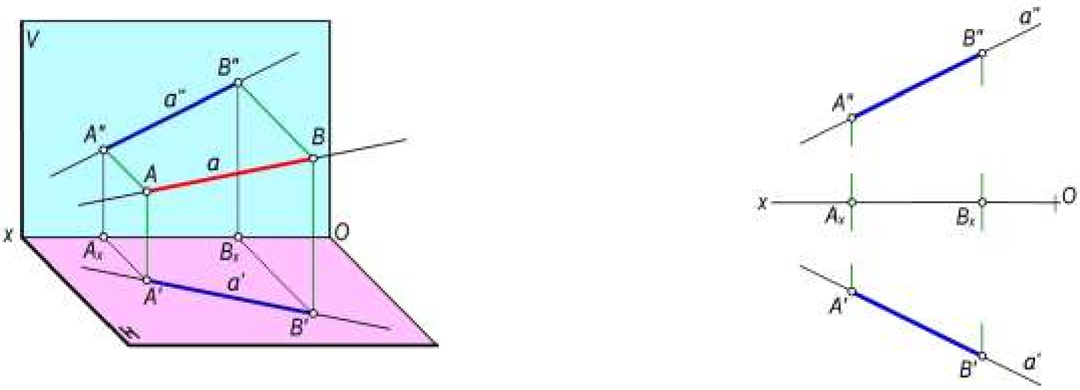
1. Fazo kvadrantlari va choraklari nima?
2. Tekis yoki kompleks chizma nima?
3. Nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalari tekis chizmada qanday joylashadi?
4. Nuqtaning frontal va profil proyeksiyalari tekis chizmada qanday joylashadi?
5. Bissektor tekisliklari nima va ularga tegishli nuqtalarning proyeksiyalari chizmada qanday joylashadi?
6. Proyeksiyalar tekisliklariga tegishli nuqtalarning proyeksiyalari chizmada qanday tasvirlanadi?
7. Nuqtaning berilgan ikki proyeksiyasiga asosan uchinchi proyeksiyasi qanday yasaladi?
8. Uchinchi, to‘rtinchi, beshinchi, oltinchi oktantlarda joylashgan nuqtalarning koordinata qiymatlari ishorasi qanday bo‘ladi?



3.1-§. Umumiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziqning ortogonal proyeksiyalari

To‘g‘ri chiziq eng oddiy geometrik shakl hisoblanadi. Bir-biridan farqli ikki nuqta orqali faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin. Agar fazodagi bir-biridan farqli ikkita *A* va *B* nuqtalarni o‘zaro tutashtirib, uni ikki qarama-qarshi tomonga cheksiz davom ettirilsa, *a* to‘g‘ri chiziq hosil bo‘ladi (3.1-rasm).

To‘g‘ri chiziqning ikki nuqta bilan chegaralangan qismi shu *to‘g‘ri chiziq kesmasi* deyiladi.



a) b)

3.1-rasm

To‘g‘ri chiziqlar *a*, *b*, *c* kabi yozma harflar bilan belgilanadi. Agar to‘g‘ri chiziqlar chegaralangan bo‘lsa, u holda *AB*, *CD*, *EF*,... tarzida belgilanadi. To‘g‘ri chiziqning proyeksiyalar tekisliklardagi proyeksiyalari holatini uning ikki ixtiyoriy nuqtasining proyeksiyalari aniqlaydi. Masalan, 3.1,a-rasmda berilgan *a* to‘g‘ri chiziqning ortogonal proyeksiyalarini yasash uchun bu chiziqqa tegishli ikki *A* va *B* nuqtalarning ortogonal A', A'' va B', B'' proyeksiyalari yasaladi. Bu ikki nuqtaning bir nomli proyeksiyalarini tutashtiruvchi a' va a'' chiziqlar fazoda berilgan *a* to‘g‘ri chiziqning gorizontal va frontal proyeksiyalari bo‘ladi. Shuningdek, *AB* kesma va uning $A'B'$ va $A''B''$ proyeksiyalari *a* to‘g‘ri chiziqning fazodagi vaziyatini va uning a', a'' proyeksiyalarini aniqlaydi (3.1,b-rasm).

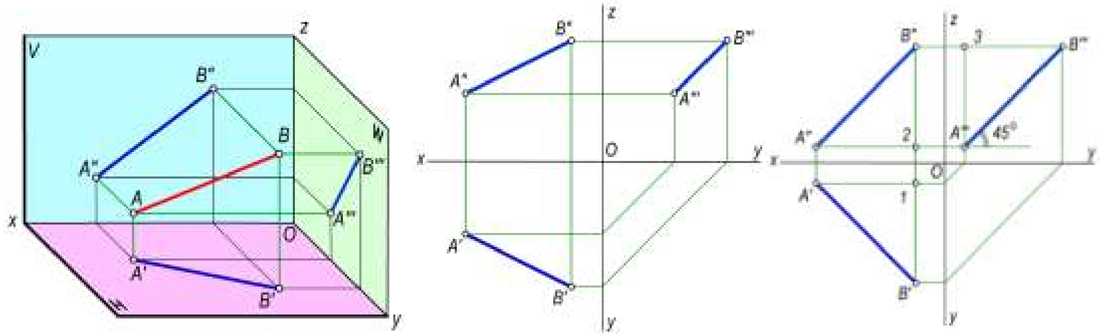
Ta’rif. Proyeksiyalar tekisliklarining birortasiga parallel yoki perpendikulyar bo‘lmagan to‘g‘ri chiziq **umumiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziq** deyiladi.

To‘g‘ri chiziqning gorizontal va frontal proyeksiyalariga asosan uning profil proyeksiyasini ham yasash mumkin. Buning uchun uning yuqorida tanlab olingan *A* va *B* nuqtalarning profil proyeksiyalari yasaladi va ular o‘zaro tutashtiriladi (3.2-rasm).

To‘g‘ri chiziq proyeksiyalari faqat uning kesmasi proyeksiyalari orqaligina emas, balki ixtiyoriy qismi bilan ham berilishi mumkin. Umumiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziqning ortogonal proyeksiyalari to‘g‘ri chiziq bo‘ladi va ular proyeksiyalar o‘qlariga nisbatan ixtiyoriy burchaklarni tashkil etadi. Bu burchaklar α, β, γ harflari bilan belgilanadi.

Bu α, β, γ burchaklar AB kesmaning H, V, W proyeksiyalar tekisliklari bilan mos ravishda hosil qilgan burchaklaridir, ya’ni α=AB^H, β=AB^V, γ=AB^W.

Umumiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziq kesmasi proyeksiyalar tekisliklariga qisqarib proyeksiyalanadi.Uning haqiqiy uzunligini aniqlash keyingi paragraflarda ko‘riladi.



a) b) v)

3.2-rasm

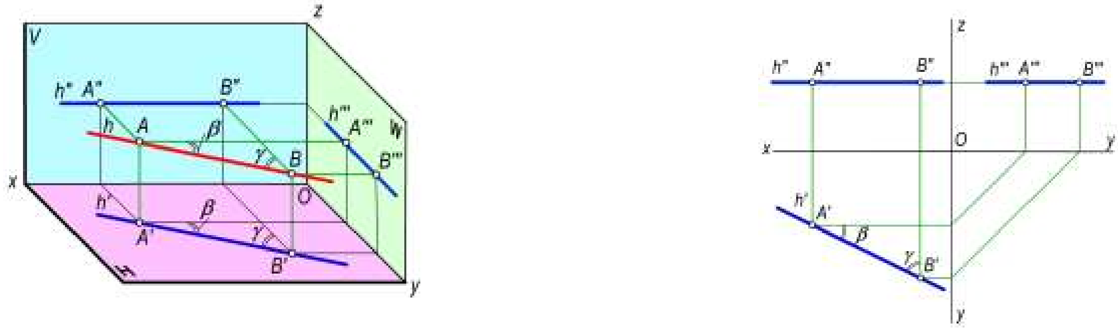
Proyeksiya tekisliklari bilan bir xil burchak tashkil qilgan to‘g‘ri chiziqlar. Agar biror to‘g‘ri chiziq fazoda H, V va W lar bilan bir xil burchak hosil qilib joylashgan bo‘lsa, uning AB kesmasining uchala proyeksiyalari o‘zaro teng, ya’ni AB^H=AB^V=AB^W bo‘lsa, $A'B'=A''B''=A'''B'''$ bo‘ladi. Bunda $A'B'=B''A''$ teng yonli trapesiyadan $1B'=2B''=3A'''$ va $1B'=3B'''$, demak $3A'''=3B'''$ bo‘lgani uchun $\angle 3A''B''=45^\circ$ bo‘ladi. Shu bilan birga $A'''B'''\|A''B''$ bo‘lib, $\Delta x=\Delta y=\Delta z$ bo‘ladi.

3.2-§. Xususiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziqlarning proyeksiyalari

Ta’rif. Proyeksiyalar tekisligiga parallel yoki perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq xususiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziq deyiladi.

3.2.1. Proyeksiyalar tekisligiga parallel to‘g‘ri chiziqlar

Gorizontal to‘g‘ri chiziq. Gorizontal proyeksiyalar tekisligi *H* ga parallel to‘g‘ri chiziq *gorizontal chiziq* (yoki *gorizontal*) deb ataladi (3.3-*a,b* rasm).



a) b)

3.3-rasm

Gorizontalning barcha nuqtalari *H* tekislikdan baravar masofada ($AA'=BB'$) bo‘lgani uchun chizmada uning h'' frontal proyeksiyasi *Ox* o‘qiga, h''' profil proyeksiyasi esa *Oy* o‘qiga parallel bo‘ladi. Gorizontalning h' gorizontal proyeksiyasi ixtiyoriy vaziyatda bo‘ladi. Bu chiziq kesmasining gorizontal proyeksiyasi o‘zining haqiqiy o‘lchamiga teng bo‘lib proyeksiyalanadi. Chizmadagi β va γ burchaklar *h* gorizontalning V va W tekisliklari bilan mos ravishda hosil qilgan burchaklarining haqiqiy kattaligi bo‘ladi

$h\|H \Rightarrow h''\|Ox$ va $h'''\|Oy$, $A'B'=|AB|$, $\beta = h$^V va $\gamma = h$^W bo‘ladi.

Frontal to‘g‘ri chiziq. Frontal proyeksiyalar tekisligi V ga parallel to‘g‘ri chiziq f*rontal to‘g‘ri chiziq* (yoki f*rontal*) (3.4,a,b-rasm) deb ataladi. Frontalning barcha nuqtalari V tekislikdan baravar masofada bo‘lgani uchun chizmada uning f′ gorizontal proyeksiyasi *Ox* o‘qiga, f‴ profil proyeksiyasi esa *Oz* o‘qiga parallel bo‘ladi. Frontalning frontal f″ proyeksiyasi ixtiyoriy vaziyatda bo‘ladi.

a) b)

3.4-rasm

Mazkur chiziq kesmasining frontal proyeksiyasi uning haqiqiy o‘lchamiga teng bo‘lib proyeksiyalanadi. Chizmadagi α va β burchaklar f frontalni *H* va *W* proyeksiyalar tekisliklari bilan mos ravishda hosil etgan burchaklarning haqiqiy kattaligi bo‘ladi, ya’ni:

$$f \| V \Rightarrow f' \| Ox \text{ va } f''' \| Oz,\ A''B''=|AB|,\ \alpha = f \wedge H \text{ va } \gamma = f \wedge W \text{ bo‘ladi.}$$

Profil to‘g‘ri chiziq. Profil proyeksiyalar tekisligi W ga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq *profil to‘g‘ri chiziq* (yoki *profil*) deb ataladi (3.5,a,b-rasm). Profilning barcha nuqtalari W tekislikdan baravar masofada bo‘lgani uchun chizmada uning gorizontal proyeksiyasi *Oy* o‘qiga parallel, frontal proyeksiyasi *Oz* o‘qiga parallel bo‘ladi.

a) b)

3.5-rasm

Profilning profil proyeksiyasi ixtiyoriy vaziyatda joylashgan bo‘ladi. Mazkur, chiziq kesmasining profil proyeksiyasi o‘zining haqiqiy o‘lchamiga teng bo‘lib proyeksiyalanadi.

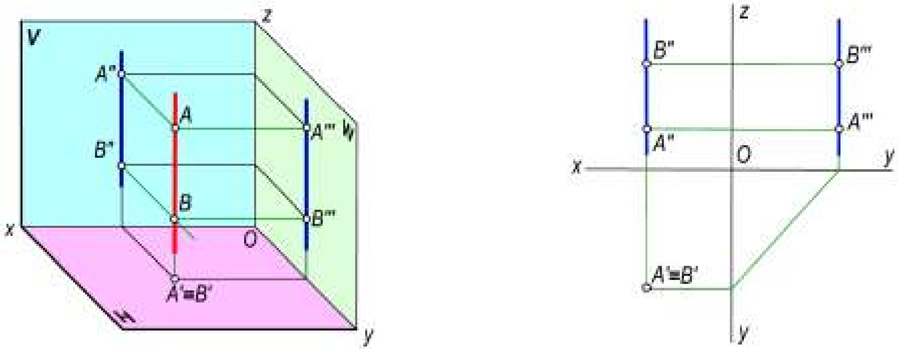
Chizmadagi α va β burchaklar profil chiziqning H va V tekisliklar bilan mos ravishda tashkil etgan burchaklarining haqiqiy kattaligi bo‘ladi, ya’ni:

$$p \| W \Rightarrow p' \| Oy \text{ va } p'' \| Oz,\ A'''B'''=|AB|,\ \alpha = p \wedge H \text{ va } \beta = p \wedge V \text{ bo‘ladi.}$$

3.2.2. Proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar. Proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar *proyeksiyalovchi to‘g‘ri chiziqlar* deb ataladi.

Gorizontal proyeksiyalovchi to‘g‘ri chiziqlar. Gorizontal proyeksiyalar tekisligiga perependikulyar to‘g‘ri chiziq *gorizontal proyeksiyalovchi to‘g‘ri chiziq* deb ataladi (3.6,a,b-rasm). Bu to‘g‘ri chiziq *H* tekislikka nuqta bo‘lib proyeksiyalanadi. Uning frontal va profil proyeksiyalari

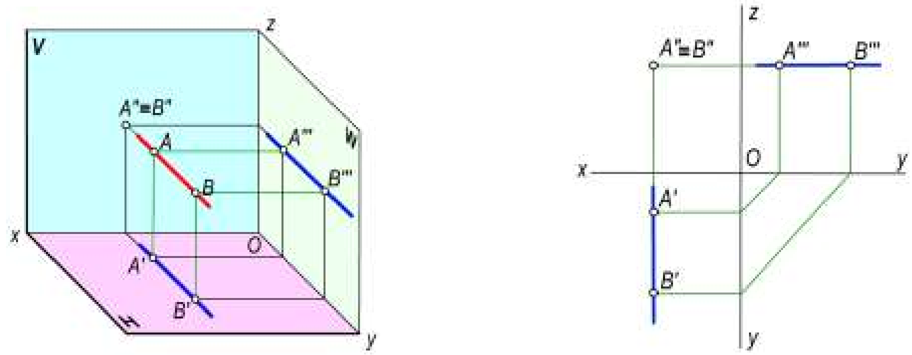
Oz o‘qiga parallel bo‘ladi. Bu to‘g‘ri chiziq kesmasi V va W ga o‘zining haqiqiy o‘lchami bo‘yicha proyeksiyalanadi.



a) b)

3.6-rasm.

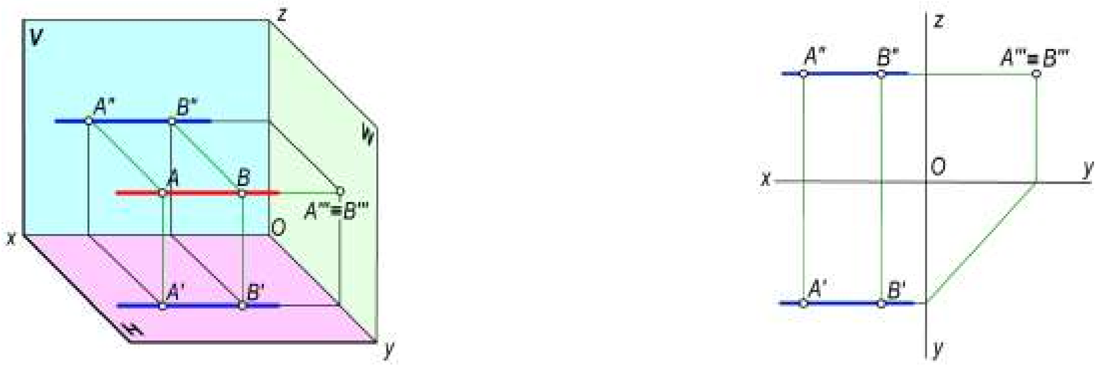
Frontal proyeksiyalovchi to‘g‘ri chiziqlar. Frontal proyeksiyalar tekisligiga perependikulyar to‘g‘ri chiziqlar f*rontal proyeksiyalovchi to‘g‘ri chiziqlar* deb ataladi (3.7,a,b-rasm). Bunday to‘g‘ri chiziq V tekisligiga nuqta bo‘lib proyeksiyalanadi. Uning gorizontal va profil proyeksiyalari Oy o‘qiga parallel bo‘ladi. Bu to‘g‘ri chiziq kesmasi H va W proyeksiyalar tekisliklariga o‘zining haqiqiy o‘lchami bo‘yicha proyeksiyalanadi.



a) b)

3.7-rasm

Profil proyeksiyalovchi to‘g‘ri chiziq. Profil proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar *profil proyeksiyalovchi to‘g‘ri chiziqlar* deb ataladi (3.8,a,b-rasm). Bu to‘g‘ri chiziqlar profil tekisligiga nuqta bo‘lib proyeksiyalanadi. Uning gorizontal va frontal proyeksiyalari Ox o‘qiga parallel bo‘ladi. Bu to‘g‘ri chiziq kesmasi H va V ga o‘zining haqiqiy o‘lchami bo‘yicha proyeksiyalanadi.



a) b)

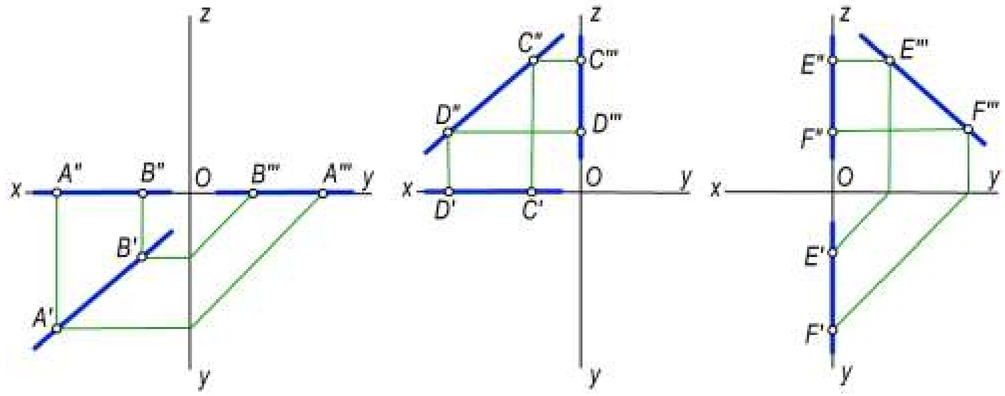
3.8-rasm

3.2.3. Proyeksiyalar tekisliklari va koordinata o‘qlariga tegishli to‘g‘ri chiziqlar. To‘g‘ri chiziqlar H, V va W proyeksiyalar tekisliklariga va Ox, Oy, Oz proyeksiyalar o‘qlariga tegishli bo‘lishi mumkin.

Agar to‘g‘ri chiziq biror proyeksiyalar tekisligiga tegishli bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziqning bir proyeksiyasi bevosita to‘g‘ri chiziqning o‘ziga, qolgan ikki proyeksiyasi esa koordinatalar o‘qiga proyeksiyalanadi. Masalan, CD(C′D′, C″D″) to‘g‘ri chiziq frontal proyeksiyalar tekisligi V ga tegishli bo‘lgani uchun (3.9,b- rasm), uning C″D″ frontal proyeksiyasi mazkur to‘g‘ri chiziqqa, gorizontal C′D′ proyeksiyasi Ox o‘qiga, profil C‴D‴ proyeksiyasi esa Oz o‘qiga proyeksiyalanadi.

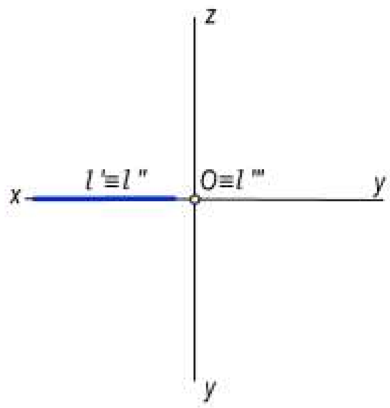
Shuningdek, 3.9,a-rasmda H tekislikka tegishli AB(A′B′,A″B″) to‘g‘ri chiziqning, va 3.9,v-rasmda esa W tekislikka tegishli EF(E′F′,E″F″) to‘g‘ri chiziqlar proyeksiyalarining joylashishi ko‘rsatilgan.

To‘g‘ri chiziq koordinata o‘qlariga tegishli bo‘lsa, uning ikki proyeksiyasi shu o‘qning o‘ziga proyeksiyalanadi, bir proyeksiyasi esa koordinata boshi O ga nuqta bo‘lib proyeksiyalanadi. Masalan, ℓ∈Ox to‘g‘ri chiziqning ℓ′ gorizontal ℓ″ frontal proyeksiyalari Ox o‘qida, uning ℓ‴ profil proyeksiyasi esa koordinata boshi O ga proyeksiyalanadi (3.10- rasm).



a) b) v)

3.9-rasm



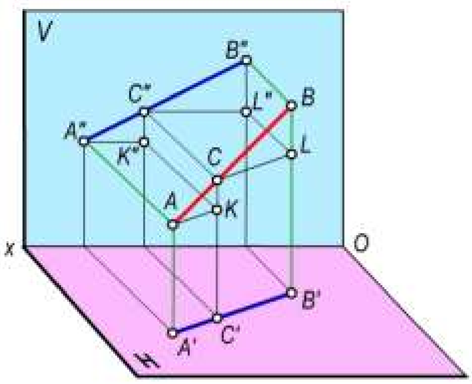
3.10-shakl

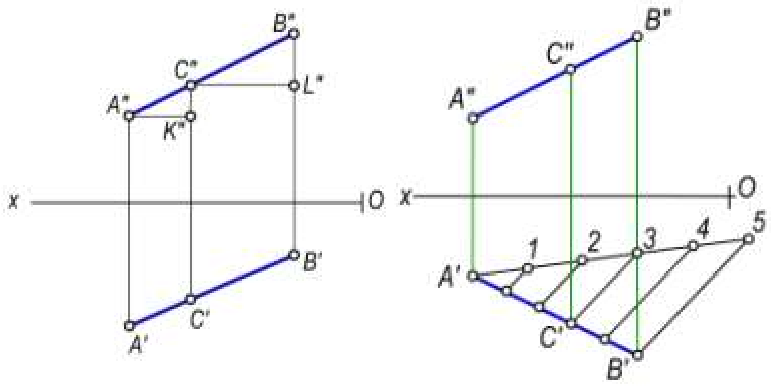
3.3-§. To‘g‘ri chiziq kesmasini berilgan nisbatda bo‘lish

Parallel proyeksiyalashning xossasiga asosan biror nuqta fazodagi to‘g‘ri chiziq kesmasini qanday nisbatda bo‘lsa, uning bir nomli proyeksiyalari to‘g‘ri chiziq kesmasining proyeksiyalarini ham shunday nisbatlarga bo‘ladi.

3.11-rasmda berilgan chizmaga asosan C nuqta AB kesmani AC:CB nisbatda bo‘lgan deb qabul qilinsin. Yuqoridagi xossaga binoan, C nuqtani proyeksiyalari *AB* kesmaning proyeksiyalarini xuddi shunday nisbatlarda bo‘ladi, ya’ni AC:CB=A′C′:C′B′=A"C":C"B".

To‘g‘ri chiziqqa tegishli nuqtaning bunday xususiyatidan foydalanib, har qanday to‘g‘ri chiziq kesmasini ixtiyoriy nisbatda proporsional bo‘laklarga bo‘lish mumkin. Masalan 3.12-rasmda berilgan *AB(A'B', A"B")* to‘g‘ri chiziq kesmasini teng 5 bo‘lakka bo‘lish uchun kesmaning ixtiyoriy, masalan, gorizontal proyeksiyasining A′ uchidan ixtiyoriy burchakda yordamchi *a* to‘g‘ri chiziq o‘tkaziladi. Bu to‘g‘ri chiziqqa ixtiyoriy o‘lchamli teng kesmalar besh marta qo‘yib chiqiladi. So‘ngra *5* va *B′* nuqtalarni o‘zaro tutashtirilib, *4, 3, 2* va *1* nuqtalardan *5B′* chiziqqa parallel chiziqlar o‘tkaziladi.





a) b)

3.11-rasm **3.12-rasm**

Natijada, *A′B′* kesma *5* ta teng bo‘lakka bo‘linadi. To‘g‘ri chiziq kesmasining gorizontal *A′B′* proyeksiyasidagi bu nuqtalardan foydalanib kesmaning *A″B″* frontal proyeksiyasini proyeksion bog‘lanish chiziqlari yordamida teng 5 bo‘lakka bo‘lish qiyin emas. Chizmadagi C nuqta AB to‘g‘ri chiziq kesmasini *AC:CB=3:2* nisbatda bo‘ladi.

3.4-§. To‘g‘ri chiziqning izlari

Ta’rif. To‘g‘ri chiziqning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishish nuqtalari **to‘g‘ri chiziqning izlari** deyiladi.

Umumiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziq hamma proyeksiyalar tekisliklarini kesib o‘tadi. Biror *a* to‘g‘ri chiziqning gorizontal proyeksiyalar tekisligi bilan kesishgan nuqtasi uning *gorizontal izi*, frontal proyeksiyalar tekisligi bilan kesishgan nuqtasi f*rontal izi* deyiladi. Shuningdek, to‘g‘ri chiziqning profil proyeksiyalar tekisligi bilan kesishgan nuqtasi uning *profil izi* deyiladi:

$$a \cap H = a_H,\ a \cap V = a_V \text{ va } a \cap W = a_W.$$

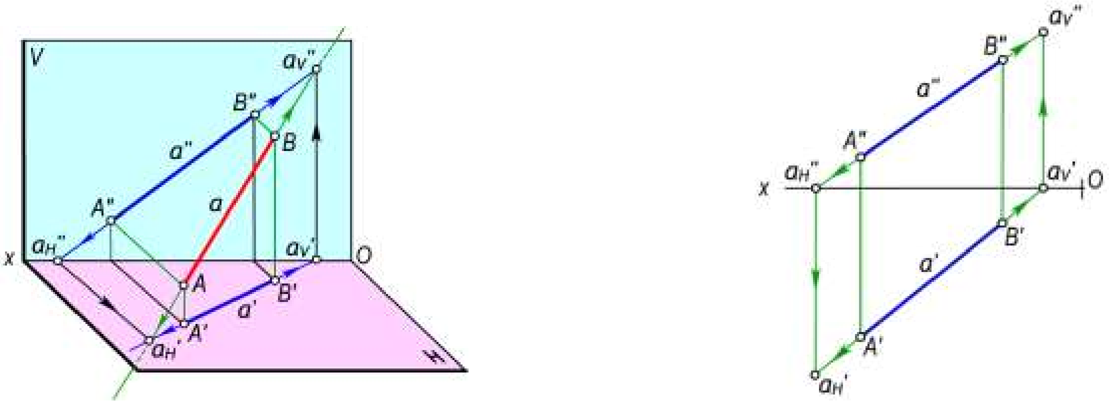
3.13,a-rasmda, *a* to‘g‘ri chiziq izlarini yasashning fazoviy modeli ko‘rsatilgan.

To‘g‘ri chiziqning gorizontal izini proyeksiyalarini chizmada aniqlash uchun quyidagi yasash algoritmlari bajariladi (3.13-rasm):

- To‘g‘ri chiziqni frontal a'' proyeksiyasining Ox o‘qi bilan kesishish nuqtasi $a''_H = a'' \cap Ox$ topiladi;
- a''_H nuqtadan Ox o‘qiga perpendikulyar o‘tkaziladi;
- To‘g‘ri chiziqning gorizontal proyeksiyasi a' bilan perpendikulyarning kesishish nuqtasi to‘g‘ri chiziqning gorizontal izining gorizontal proyeksiyasi $a'_H \equiv a_H$ bo‘ladi.

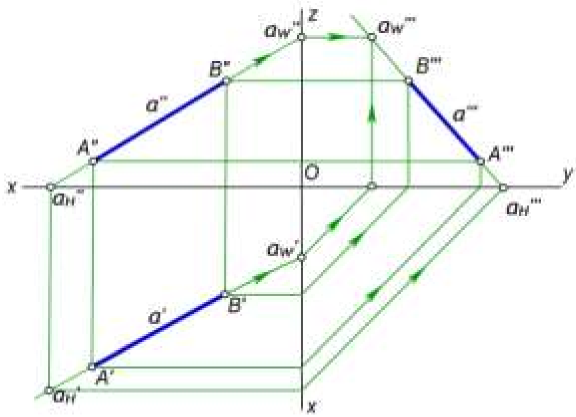
To‘g‘ri chiziq frontal izining proyeksiyalarini chizmada aniqlash uchun:

- To‘g‘ri chiziq gorizontal a' proyeksiyasining Ox o‘qi bilan kesishish nuqtasi $a'_V = a' \cap Ox$ topiladi;
- Bu nuqtadan Ox o‘qiga perpendikulyar o‘tkaziladi;
- To‘g‘ri chiziqning frontal proyeksiyasi a'' bilan perpendikulyarning kesishish nuqtasi uning frontal izining frontal proyeksiyasi $a_V'' \equiv a_V$ bo‘ladi.



a) b)

3.13-rasm



3.14-rasm

To‘g‘ri chiziqning profil izini yasash uchun:

- Uning frontal proyeksiyasini Oz o‘qi bilan kesishguncha davom ettiriladi.
- Hosil bo‘lgan a_W'' nuqtadan Oz ga perpendikulyar chiqariladi.
- To‘g‘ri chiziqning profil proyeksiyasi bu perpendikulyar bilan kesishguncha davom ettiriladi va $a_W \equiv a_W'''$ aniqlanadi yoki to‘g‘ri chiziqning a' gorizontal proyeksiyasi Oy o‘qi bilan kesishguncha davom ettiriladi.
- Hosil bo‘lgan nuqtadan y o‘qiga perpendikulyar chiqariladi.
- Uni a_V'' dan Oz ga chiqarilgan perpendikulyar bilan kesishish nuqtasi a to‘g‘ri chiziqning profil izining profil proyeksiyasi bo‘ladi.

Shakldagi a'_W a''_W nuqtalar mazkur a to‘g‘ri chiziq profil izining gorizontal va frontal proyeksiyalari bo‘ladi. a'''_W nuqta a to‘g‘ri chiziq profil izining profil proyeksiyasidir.

3.5-§. Umumiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziq kesmasining haqiqiy uzunligini va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash

Umumiy vaziyatda joylashgan to‘g‘ri chiziq kesmasining proyeksiyalari orqali uning haqiqiy o‘lchamini aniqlash va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash masalasi amaliyotda ko‘p uchraydi.

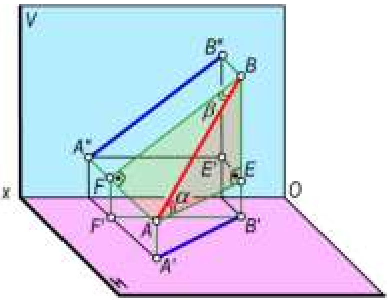
AB to‘g‘ri chiziq kesmasi hamda uning H, V va W tekisliklardagi proyeksiyalari berilgan bo‘lsin (3.15-*a*,rasm). Kesmaning *A* nuqtasidan $AE \| A'B'$ to‘g‘ri chiziq o‘tkaziladi va to‘g‘ri burchakli $\triangle ABE$ ni hosil qilinadi. Bunda $BE=BB'-AA'$, bu yerda $AA'=EB'$ bo‘lgani uchun $BE=BB'-EB'=\Delta z$ bo‘ladi.

To‘g‘ri burchakli *ABE* uchburchakning *AB* gipotenuzasi *AE* katet bilan α burchak hosil qiladi. Bu burchak *AB* kesmaning *H* tekislik bilan hosil qilgan burchagi bo‘ladi.

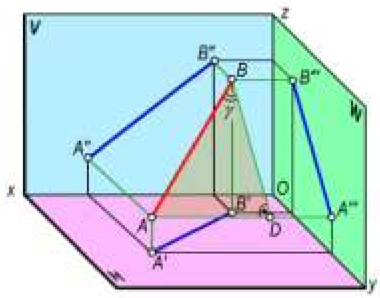
To‘g‘ri chiziq kesmasining V proyeksiyalar tekisligi bilan hosil qilgan β burchagini aniqlash uchun to‘g‘ri burchakli *ABF* uchburchakdan foydalanamiz. Bu uchburchakning *BF* kateti *AB* kesmasining frontal proyeksiyasi $A''B''$ ga, ikkinchi *AF* kateti uning *A* va B uchlarining V tekislikdan uzoqliklarining ayirmasiga teng bo‘ladi. Bunda $AF=AA''-BB''$, bo‘lib, $BB''=FA''$ bo‘lgani uchun $AF=AA''-FA''=\Delta y$ bo‘ladi.

To‘g‘ri burchakli *ABF* ning *AB* gipotenuzasi *BF* katet bilan hosil qilgan β burchak *AB* kesmaning V tekislik hosil qilgan burchagi bo‘ladi.

3.15-*b,* rasmda *AB* kesmaning W tekislik bilan hosil qilgan γ burchagini aniqlash ko‘rsatilgan. Bu burchakni aniqlash uchun to‘g‘ri burchakli D*ABF* dan foydalanamiz. Bu uchburchakning bir kateti *AB* kesmasining profil $A'''B'''$ proyeksiyasiga, ikkinchi *A*D kateti *A* va *B* uchlarining W tekislikdan uzoqliklari ayirmasiga teng bo‘ladi. Bunda $AD=AA'''-BB'''$, bo‘lib, $BB'''=DA'''$ bo‘lgani uchun $AD=AA'''-DA'''=\Delta x$ bo‘ladi.



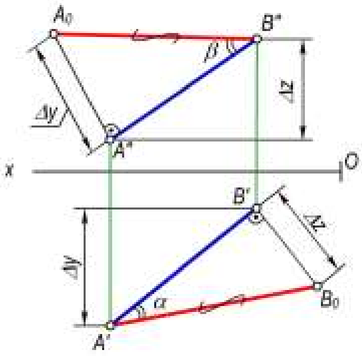
a)



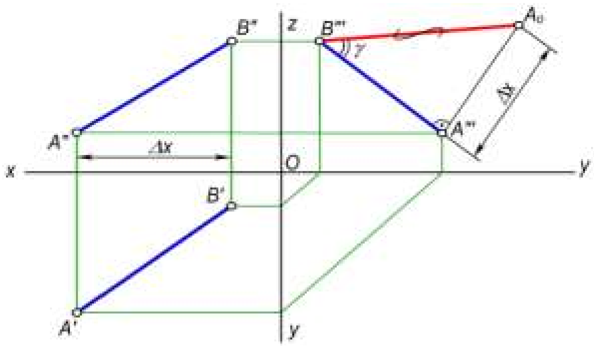
b)

3.15-rasm

Chizmada kesmaning berilgan proyeksiyalari orqali uning haqiqiy uzunligi va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash uchun yuqoridagi fazoviy model asosida to‘g‘ri burchakli uchburchaklar yasaladi. Shuning uchun bu usulni **to‘g‘ri burchakli uchburchak usuli** deb yuritiladi.



a)



b)

3.16-rasm

Masalan, *AB* kesmaning $A'B'$, $A''B''$ va $A'''B'''$ proyeksiyalarga asosan uning (3.16-a, shakl) haqiqiy o‘lchami va H bilan hosil qilgan α burchagini aniqlash uchun to‘g‘ri burchakli $A'B'B_0$ uchburchak yasaladi. Bu uchburchakning bir kateti kesmaning gorizontal proyeksiyasiga, ikkinchi kateti esa kesmaning *A* va B uchlarining applikatalari ayirmasi Δz ga teng bo‘ladi. Bu uchburchakning $A'B_0$ gipotenuzasi AB kesmaning haqiqiy o‘lchami, $A'B_0=AB$ bo‘lib, AB^H=$\angle B'A'B_0=\alpha$ bo‘ladi.

Kesmaning V tekislik bilan hosil qilgan β burchagini aniqlash uchun to‘g‘ri burchakli $\triangle A''B''A_0$ ni yasaladi. Bu uchburchakning bir kateti kesmaning frontal $A''B''$ proyeksiyasiga, ikkinchi kateti esa AB kesma uchlari ordinatalari ayirmasi Δy ga teng bo‘ladi. Hosil bo‘lgan $B''A_0=AB$ bo‘lib, AB^V=$\angle A''B''A_0=\beta$ bo‘ladi.

AB kesmaning W tekislik bilan hosil etgan burchagini aniqlash uchun esa to‘g‘ri burchakli $\triangle A'''B'''A_0$ ni yasaymiz (3.16,b-rasm). Bu uchburchakning bir kateti kesmaning profil $A'''B'''$ proyeksiyasi, ikkinchi kateti kesma uchlarning W tekislikdan uzoqliklarning absissalar ayirmasi Δx bo‘ladi. Hosil bo‘lgan $B'''A_0=AB$ bo‘lib, AB^W=$\angle A'''B'''A_0=\gamma$ teng bo‘ladi.

3.6-§. Ikki to‘g‘ri chiziqning o‘zaro vaziyatlari

Ikki to‘g‘ri chiziq fazoda o‘zaro parallel, kesuvchi yoki ayqash vaziyatlarda bo‘lishi mumkin.

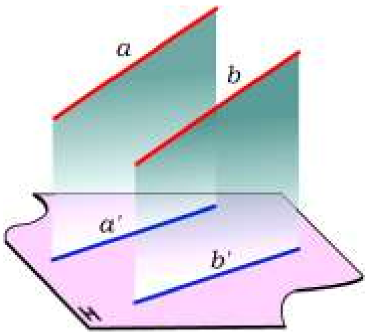
3.6.1. Parallel to‘g‘ri chiziqlar

Ta’rif. Agar ikki to‘g‘ri chiziqning kesishuv nuqtasi bo‘lmasa (yoki umumiy xosmas nuqtaga ega bo‘lsa), ularni **parallel to‘g‘ri chiziqlar** deyiladi.

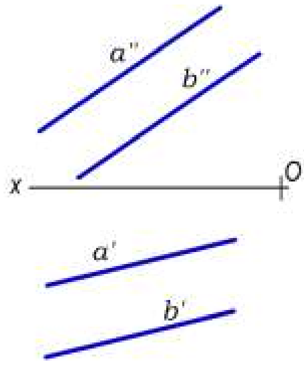
Parallel proyeksiyalarning xossasiga asosan parallel to‘g‘ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari ham o‘zaro parallel bo‘ladi (3.17,a,b-rasm), ya’ni $a\|b$ bo‘lsa, u holda $a'\|b'$, $a''\|b''$, $a'''\|b'''$ bo‘ladi.

Fazodagi umumiy vaziyatda joylashgan parallel to‘g‘ri chiziqlarning ikkita bir nomli proyeksiyalari o‘zaro parallel bo‘lsa, ularning uchinchi proyeksiyalari ham o‘zaro parallel bo‘ladi.

Ammo to‘g‘ri chiziqlar biror proyeksiyalar tekisligiga parallel bo‘lsa, u holda yuqorida keltirilgan shart bajarilmaydi. Masalan, W tekislikka parallel bo‘lgan profil to‘g‘ri chiziq kesmalarning bir nomli gorizontal va frontal proyeksiyalari (p_1 va p_2) ning o‘zaro parallel bo‘lishi yetarli bo‘lmaydi (3.18,a-rasm). Bunday hollarda to‘g‘ri chiziqlarning profil proyeksiyalarini yasash zarur. Bunda $p_1'''\|p_2'''$ bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel bo‘ladi. Agar $p_1'''\cap p_2'''$, bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziqlar ayqash bo‘ladi. Shuningdek, bu to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro vaziyatini profil proyeksiyalaridan foydalanmasdan ham aniqlash mumkin.



a)



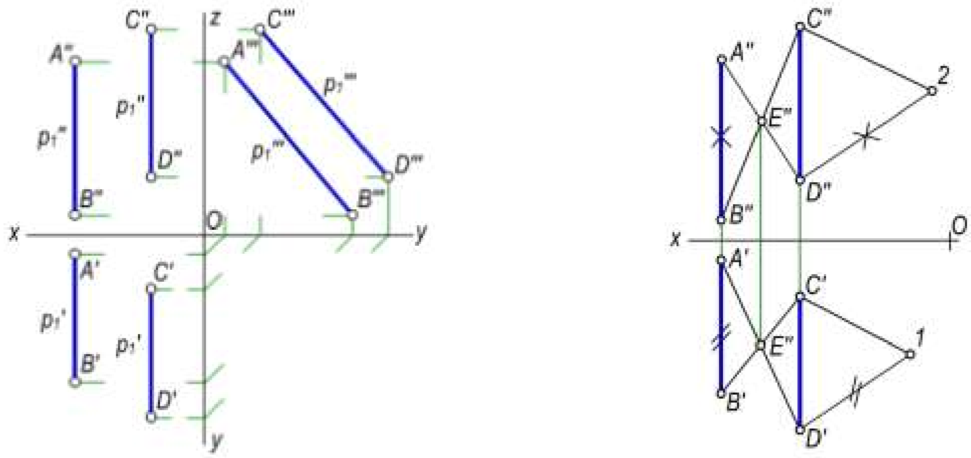
b)

3.17-rasm

Buning uchun:

- to‘g‘ri chiziq kesmalarining bir nomli proyeksiyalarining nisbatlari tengligini aniqlaymiz. Kesmaning biror, masalan, D′, D″ nuqtasidan ixtiyoriy (o‘tkir burchak ostida) parallel chiziqlar o‘tkazib, D′1=A′B′ va D″2=A″B″ kesmalarni qo‘yiladi (3.18-b,rasm). So‘ngra 1 va 2 nuqtalarni C′ va C″ bilan tutashtiramiz. Agar C′1‖C″2 bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel bo‘ladi. Aks holda bu to‘g‘ri chiziqlar ayqash to‘g‘ri chiziqlar ekanligini isbotlanadi;

- to‘g‘ri chiziq kesmalarining bir nomli nuqtalarini o‘zaro kesishadigan qilib to‘g‘ri chiziqlar bilan tutashtiramiz (3.18-b,rasm). Agar chiziqlarning kesishish nuqtasining E′ va E″ proyeksiyalari bir bog‘lovchi chiziqda bo‘lsa, u holda CD va AB to‘g‘ri chiziqlar bir tekislikka tegishli va o‘zaro parallel bo‘ladi.



a) b)

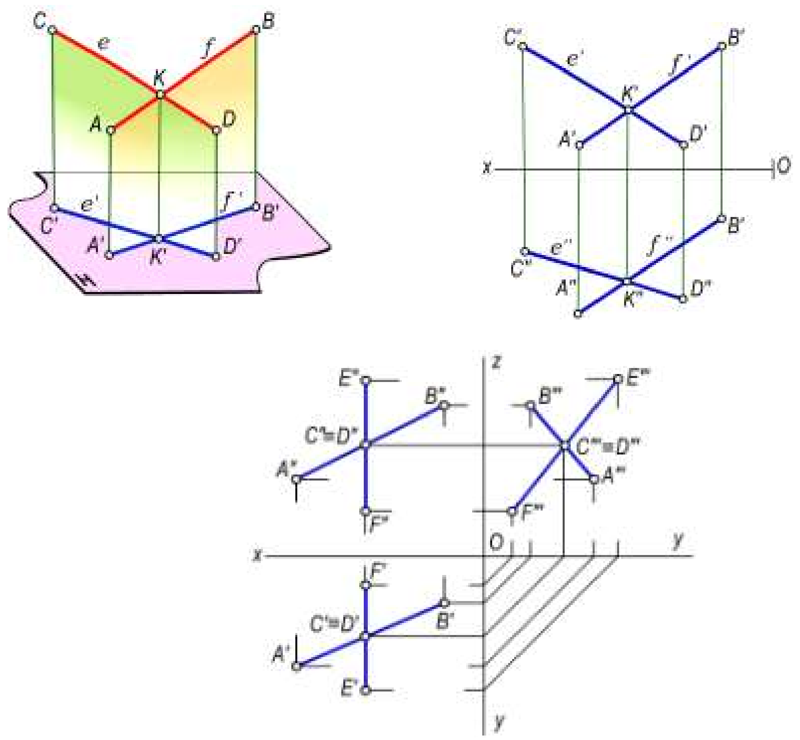
3.18-rasm

3.6.2. Kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar

<u>Ta’rif</u>. Agar ikki to‘g‘ri chiziq fazoda umumiy bir (xos) nuqtaga ega bo‘lsa, ularni **kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar** deyiladi.

Fazodagi to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasining proyeksiyasi shu to‘g‘ri chiziqlar proyeksiyalarining kesishish nuqtasida bo‘ladi (3.19-rasm). Kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari ham chizmada o‘zaro kesishadi va kesishish nuqta proyeksiyalari bir proyeksion bog‘lovchi chiziqda bo‘ladi.

Fazoda umumiy vaziyatda kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziqlarning faqat ikkita bir nomli proyeksiyalarining kesishishi kifoya qiladi.



a) **b)** **v)**

3.19-rasm

Agar kesishuvchi chiziqlarning biri proyeksiyalar tekisligining birortasiga parallel bo‘lsa, u holda ularning ikkita bir nomli proyeksiyalarining o‘zaro kesishuvi yetarli bo‘lmaydi. Masalan, *AB* va *EF* to‘g‘ri chiziq kesmalarining biri *EF* kesma *W* tekislikka parallel joylashgan (3.19,v-rasm). Bu chiziqlarning o‘zaro vaziyatini ularning profil proyeksiyalarini yasash bilan aniqlash mumkin. Agar kesishish nuqtasining proyeksiyalari bir bog‘lovchi chiziqda joylashsa, bu to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro kesishadi, aks holda to‘g‘ri chiziqlar kesishmaydi.

3.6.3. Ayqash to‘g‘ri chiziqlar

<u>Ta’rif</u>. Ikki to‘g‘ri chiziq o‘zaro parallel bo‘lmasa yoki kesishmasa ular **ayqash to‘g‘ri chiziqlar** deyiladi.

Ma’lumki, parallel va kesuvchi to‘g‘ri chiziqlar bitta tekislikka tegishli bo‘ladi. Uchrashmas to‘g‘ri chiziqlar esa bir tekislikda yotmaydi (3.20,a,b-rasm). Uchrashmas to‘g‘ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari chizmada o‘zaro kesishsa ham, ammo kesishish nuqtalari bir bog‘lovchi chiziqqa tegishli bo‘lmaydi.

Masalan, 3.20-rasmda AB(A′B′, A″B″) va EF(E′F′, E″F″) uchrashmas chiziqlar berilgan. Bu to‘g‘ri chiziqlar proyeksiyalarining $1'\equiv2'$ va $3''\equiv4''$ kesishish nuqtalari fazoda bu to‘g‘ri chiziqlarning har biriga tegishli ikki nuqtaning proyeksiyalari bo‘lmay, aksincha, $1\in EF$, $2\in AB$ va $3\in EF$, $4\in AB$ bo‘ladi.

a) **b)**

3.20-rasm

3.7-§. To‘g‘ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatlari

> **Teorema**. Agar to‘g‘ri burchakning bir tomoni tekislikka parallel bo‘lib, ikkinchi tomoni bu tekislikka perpendikulyar bo‘lmasa, mazkur to‘g‘ri burchak shu tekislikka haqiqiy kattalikda proyeksiyalanadi.

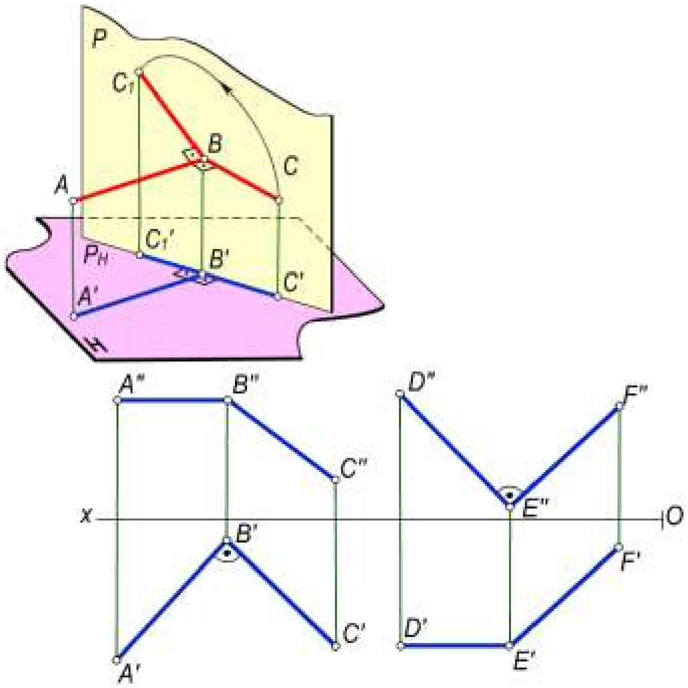
Bu teoremani isbotlash uchun 3.21,a-rasmdan foydalanamiz. Shakldagi $\angle ABC=90^{\circ}$ ga teng va uning ikki tomoni H tekislikka parallel vaziyatda joylashgan deb faraz qilamiz. Bu vaziyatda uning gorizontal proyeksiyasining qiymati o‘ziga teng bo‘lib proyeksiyalanadi, ya’ni $\angle A'B'C'=90^{\circ}$ bo‘ladi.

To‘g‘ri burchakning BC tomonidan H tekislikka perpendikulyar qilib P tekislik o‘tkazamiz. U holda $AB\perp P$ bo‘lib, $H\cap P= P_H$ hosil bo‘ladi. Agar to‘g‘ri burchakning BC tomonini AB tomoni atrofida aylantirib, ixtiyoriy BC_1 vaziyatga keltirsak ham uning bu tomonining proyeksiyasi P_H bilan ustma-ust tushadi. Shunga ko‘ra $\angle ABC_1=\angle A'B'C'=90^{\circ}$ bo‘ladi. Demak:

$$\angle ABC=90^{\circ} \text{ bo‘lib, } AB\parallel H \text{ va } BC\parallel H \text{ bo‘lsa, } \angle A'B'C'=90^{\circ} \text{ bo‘ladi.}$$

Chizmada $\angle ABC(AB\parallel H)$ va $\angle DEF(DE\parallel V)$ to‘g‘ri burchaklarning tasvirlanishi 3.21,*b* va 3.21,*v*-rasmlarda keltirilgan.

To‘g‘ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatidan chizma geometriyada metrik masalalarni yechishda keng foydalanadi.



a) **b)** **v)**

3.21-rasm

3.8–§. Chizmalarda ko‘rinishlikni aniqlash

Geometrik figuraning fazodagi o‘zaro vaziyatlariga oid masalalar yechishda tasvirlarni yaqqolashtirish maqsadida ularning ko‘rinadigan va ko‘rinmaydigan qismlarini aniqlashga to‘g‘ri keladi.

Faqat birinchi oktantda joylashgan geometrik shakllarning kuzatuvchiga nisbatan yaqin turgan elementlari ko‘rinadi, uning orqasidagi elementlari ko‘rinmaydi. Boshqa oktantlarda joylashgan shakl yoki uning tarkibiy qismi ko‘rinmas deb hisoblanadi.

Geometrik shakllarning kuzatuvchiga nisbatan chizmada ko‘rinishligi konkurent nuqtalardan foydalanib aniqlanadi.

Ta’rif. Bitta proyeksiyalovchi nurda (to‘g‘ri chiziqda) joylashgan nuqtalar **konkurent nuqtalar** deyiladi.

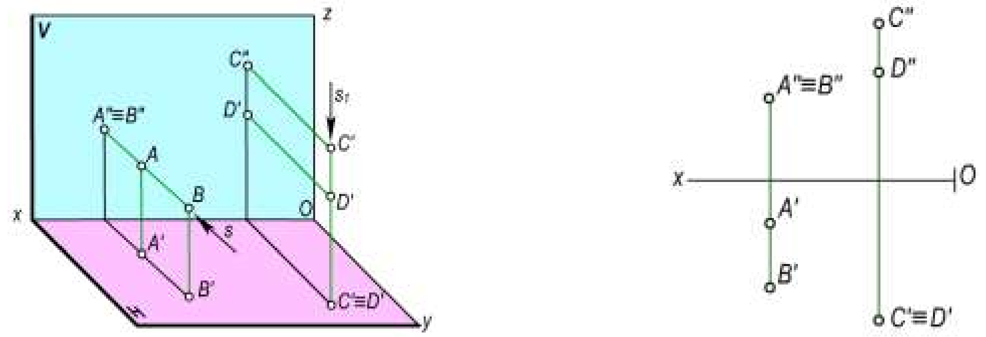
Agar kuzatuvchi proyeksiyalovchi nur yo‘nalishida konkurent nuqtalarga qarasa, u o‘ziga yaqin bo‘lgan nuqtani yoki proyeksiyalar tekisligidan uzoqroq joylashgan nuqtani ko‘radi.
Masalan, 3.22,a-rasmda berilgan bir proyeksiyalovchi nurda joylashgan va V ga nisbatan konkurent bo‘lgan *A* va *B* nuqtalarga s yo‘nalish bo‘yicha qaralganda, kuzatuvchiga yaqin bo‘lgan yoki V tekislikdan uzoqroq joylashgan *B* nuqta ko‘rinadi. Shuningdek, H ga nisbatan konkurent bo‘lgan C va D nuqtalarga s_1 yo‘nalish bo‘yicha qaralsa, H tekislikdan uzoqroq joylashgan C nuqta ko‘rinadi.

Chizmada konkurent nuqtalarning ko‘rinishligini ularning koordinatalari orqali aniqlash ham mumkin. Konkurent nuqtalarning H tekislikka nisbatan ko‘rinishligi z applikatasi, V tekislikka nisbatan y ordinatasi va W tekislikka nisbatan x absissasi aniqlaydi.

H tekislikka nisbatan applikatasi eng katta bo‘lgan konkurent nuqta kuzatuvchiga ko‘rinadi.

3.22,b–rasmda A(A′, A″), B(B″, B″), va C(C′, C″), D(D′, D″) konkurent nuqtalarning proyeksiyalari berilgan. Bunda $y_A<y_B$ va $z_S>z_D$ bo‘lgani uchun V tekislikka nisbatan B nuqta, H tekislikka nisbatan C nuqta ko‘rinuvchi nuqtalar bo‘ladi.

Fazoda turli vaziyatlarda joylashgan geometrik shakllarning chizmada koʻrinishligi ularga tegishli boʻlgan ayrim konkurent nuqtalarning koʻrinishligini tekshirish yoʻli bilan aniqlanadi.



a) b)

3.22-rasm 3.23,*a*-rasmda *a(a′, a″)* va *b(b′, b″)* uchrashmas toʻgʻri chiziqlar berilgan. Bu toʻgʻri chiziqlar gorizontal proyeksiyalarning oʻzaro kesishgan va H ga nisbatan konkurent boʻlgan nuqtalari 1′≡2′ ustma-ust proyeksiyalangan. Bu nuqtalardan qaysi birini koʻrinishligini aniqlash uchun ularning gorizontal proyeksiyasidan proyeksiyalovchi chiziq oʻtkazib, toʻgʻri chiziqlarning frontal *a″* va *b″* proyeksiyalarida 1″ va 2″ nuqtalar belgilanadi va $z_1>z_2$ ekanligi aniqlanadi. Natijada, *a* chiziqqa tegishli 1 nuqta kuzatuvchiga koʻrinadi, *b* chiziqqa tegishli 2 nuqta esa uning ostida boʻladi. Demak, *a(a′, a″)* va *b(b′, b″)* toʻgʻri chiziqlarga yuqoridan qaraganda *a* toʻgʻri chiziq *b* toʻgʻri chiziqqa nisbatan kuzatuvchiga yaqin joylashgan.

a) b)

3.23-rasm

3.23,b-rasmda ham c(c′, c″) va d(d′, d″) chiziqlarni V ga nisbatan qaraganda $y_3>y_4$ boʻlgani uchun 3 nuqta kuzatuvchiga koʻrinadi. Shuning uchun c(c′, c″) va d(d′, d″) toʻgʻri chiziqlarga oldidan qaraganimizda d toʻgʻri chiziq c toʻgʻri chiziqqa nisbatan kuzatuvchiga yaqinroq joylashgan.

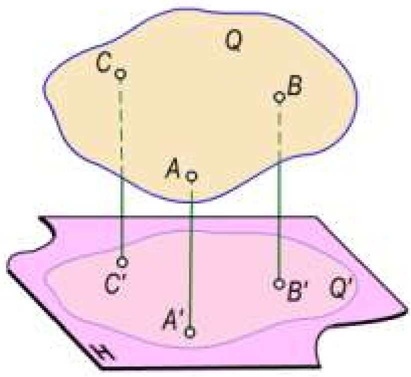
Nazorat savollari

1. Toʻgʻri chiziqning proyeksiyalari qanday hosil boʻladi?
2. Umumiy vaziyatdagi toʻgʻri chiziq nima?
3. Toʻgʻri chiziqning izlari nima?
4. Qanday xususiy vaziyatdagi toʻgʻri chiziqlarni bilasiz?
5. Umumiy vaziyatdagi toʻgʻri chiziq kesmasining haqiqiy uzunligi qanday yasaladi?
6. Oʻzaro parallel toʻgʻri chiziqlarning proyeksiyalari qanday boʻladi?
7. Kesishuvchi va ayqash toʻgʻri chiziqlarning proyeksiyalari bir-biridan qanday farqlanadi?
8. Toʻgʻri burchakning proyeksiyalanishi haqidagi teoremani tushuntirib bering.

9. Ko‘rinishlikni aniqlashda konkurent nuqtalardan qanday foydalaniladi?

4.1-§. Tekislikning berilishi

Tekislik birinchi tartibli sirt hisoblanadi. Chunki u birinchi darajali algebraik tenglama bilan ifodalanadi, ya'ni $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1$.



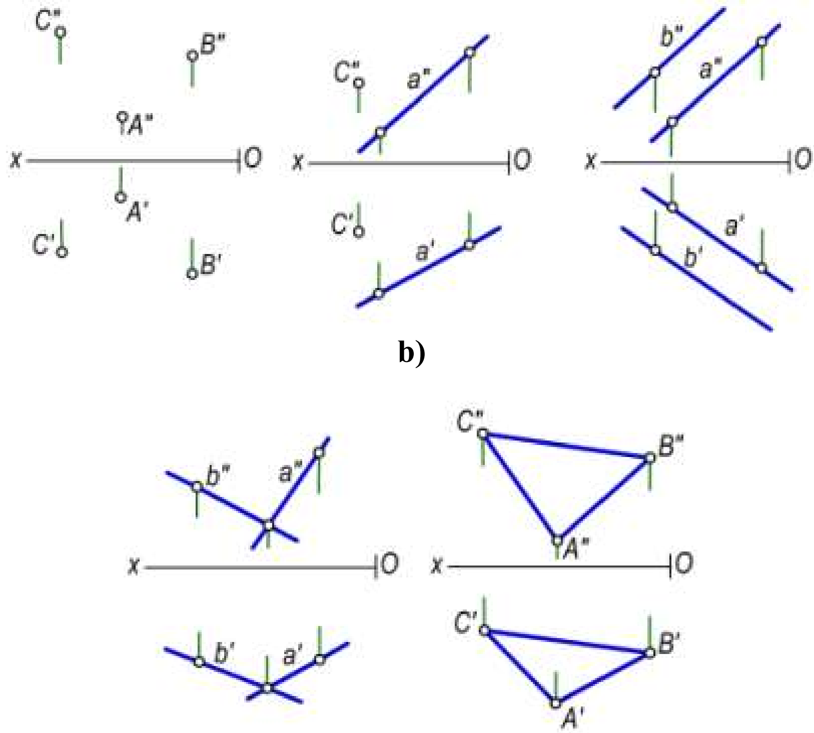
4.1-rasm

Ortogonal proyeksiyalarda tekislikning fazodagi vaziyati uni berilishini ta'minlovchi elementlarning proyeksiyalari orqali aniqlanadi. Umumiy holda tekislikning fazoviy vaziyatini bir to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lmagan uchta nuqta aniqlaydi. Haqiqatdan, 4.1-rasmdagi *A*, *B* va *C* nuqtalar fazoda biror *Q* tekislikning vaziyatini aniqlaydi. Bu nuqtalardan har birining fazoviy o'rni o'zgarishi bilan tekislikning vaziyati ham fazoda o'zgaradi.

Uchta nuqtaning ikkitasi orqali hamma vaqt bir to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin. Shuningdek, uchta nuqta yordamida ikki parallel va kesishuvchi chiziqlar o'tkazish yoki tekis geometrik shakl, (masalan, uchburchak) hosil qilish mumkin.

Chizma geometriyada tekisliklar qo'yidagi hollar bilan beriladi:

- bir to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lmagan uchta nuqtaning proyeksiyalari bilan (4.2–*a*, rasm);



a) b) v)

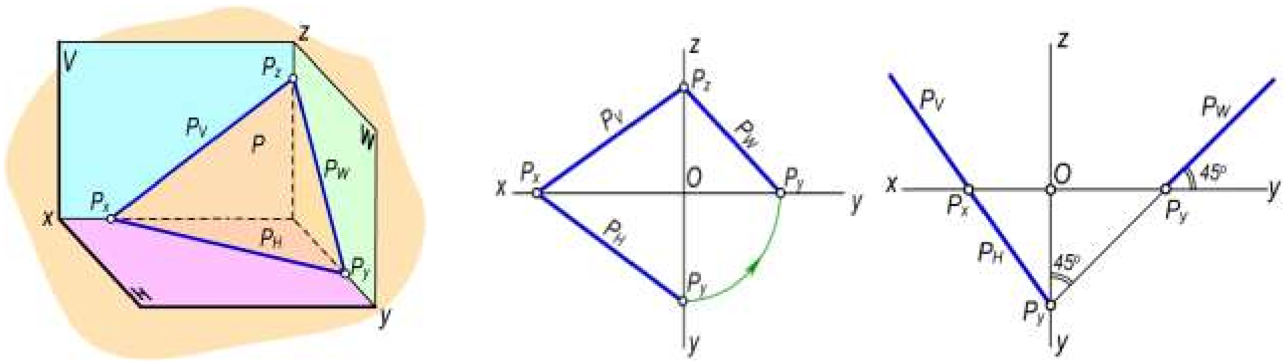
g) d)

4.2-rasm

- bir to‘g‘ri chiziq va unga tegishli bo‘lmagan nuqtaning proyeksiyalari bilan (4.2,*b*-rasm);
- ikki parallel to‘g‘ri chiziq proyeksiyalari bilan (4.2,*v*-rasm);
- ikki kesishuvchi to‘g‘ri chiziq proyeksiyalari bilan (4.2,*g*-rasm);
- tekis geometrik shakllarning ortogonal proyeksiyalari orqali berilishi ham mumkin (4.2,*d*-rasm).

Shuningdek, tekislik proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishish chiziqlari orqali berilishi ham mumkin. Masalan 4.3-rasmda, P tekislik H, V va W proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan P_H, P_V, P_W chiziqlar orqali berilishi ko‘rsatilgan.

Agar biror tekislik proyeksiyalar tekisliklari bilan bir xil og‘ish burchak hosil qilsa, uning ikkita izi bir to‘g‘ri chiziqda yotadi. Uchinchi izi esa proyeksiyalarini o‘qi bilan 45° burchak hosil qiladi (4.3,v-rasm).



a) b) v)

4.3-rasm

4.2-§. Tekislikning izlarini yasash

> **Ta’rif**. Tekislikning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan chiziqlari **tekislikning izlari** deyiladi.

P tekislikning H tekislik bilan kesishgan $P_H=P\cap H$ chizig‘i uning gorizontal izi, V tekislik bilan kesishgan $P_V=P\cap V$ chizig‘i frontal izi va W tekislik bilan kesishgan $P_W=P\cap W$ chizig‘i ***profil izi*** deb ataladi.

Tekislik shu tarzda berilsa, uni izlari bilan berilgan tekislik deb yuritiladi va $P(P_H, P_V, P_W)$ tarzida yoziladi.

Tekislikni chizmada izlari bilan tasvirlash ancha qulay va afzaldir. Tekislikning Ox, Oy va Oz koordinata o‘qlari bilan kesishgan nuqtalari P_x, P_y, P_z bilan belgilanadi, ya’ni $P_x=P\cap Ox$, $P_u=P\cap Oy$, $P_z=P\cap Oz$.

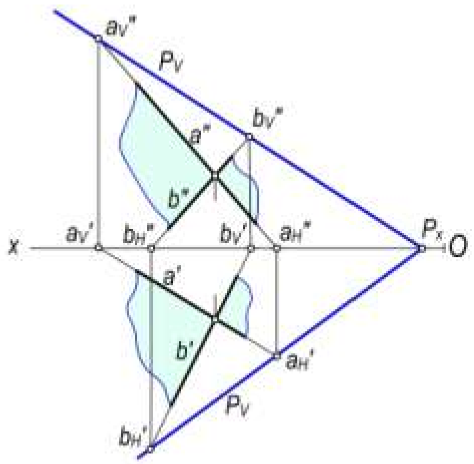
Bu nuqtalar tekislikninng ikkita izining kesishishidan hosil bo‘ladi.

Tekislik qanday tarzda berilishidan qat’iy nazar, uning izlarini ortogonal proyeksiyalarda yasash mumkin.

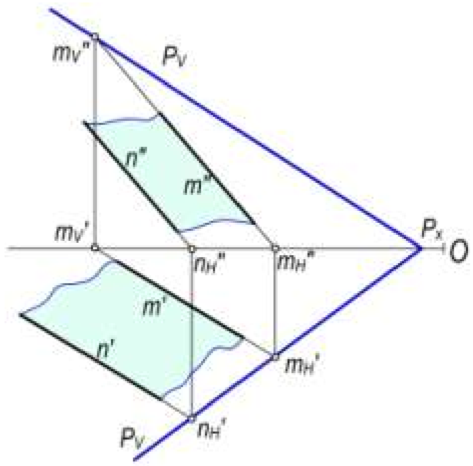
Har qanday geometrik shakllar orqali berilgan tekislikning izlarini yasash mazkur tekislikka tegishli bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar izlarini yasash bilan bajariladi. Bunig uchun to‘g‘ri chiziqning tekislikka tegishlilik xususiyatidan foydalaniladi.

4.4-rasmda $a\cap b$ kesuvchi chiziqlar bilan berilgan tekislikning gorizontal izini yasash uchun to‘g‘ri chiziqlar gorizontal izlarining a'_H, a''_H, va b'_H b''_H proyeksiyalarini topamiz. Agar to‘g‘ri chiziqlarning gorizontal izlarining gorizontal a'_H va b'_H proyeksiyalarini o‘zaro tutashtirsak, tekislikning P_H gorizontal izini hosil qilamiz. Xuddi shu tarzda tekislikning P_V frontal izini yasash uchun kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar frontal izlarining $a'_V\ a_V''$ va $b'_V\ b_V''$ proyeksiyalarini yasaymiz. So‘ngra to‘g‘ri chiziqlarning frontal izlarining frontal a''_V va b''_V proyeksiyalarini tutashtirsak, tekislikning P_V frontal izini hosil qilamiz. Tekislikning P_H va P_V izlarining P_x kesishish nuqtasi Ox o‘qida bo‘lishi shart.

Ikki $m\|n$ parallel chiziqlar bilan berilgan tekislikning P_H va P_V izlari ham to‘g‘ri chiziqlarining izlarini yasash yo‘li bilan aniqlanadi (4.5-rasm). Umuman, turli geometrik shakllar bilan berilgan tekisliklarning izlari mazkur shaklga tegishli bo‘lgan ikki kesuvchi yoki parallel chiziqlarning izlarini yasash yo‘li bilan aniqlanadi.



4.4-rasm



4.5-rasm

4.3-§. Tekisliklarning proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan vaziyatlari

Tekislik fazoda proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan umumiy va xususiy vaziyatlarda joylashishi mumkin.

Umumiy vaziyatdagi tekisliklar. Agar tekislik proyeksiyalar tekisliklarining birortasiga parallel yoki perpendikulyar bo‘lmasa, uni *umumiy vaziyatdagi tekislik* deyiladi (4.3,*a*-rasm). Chizmada umumiy vaziyatdagi tekislikning izlari proyeksiyalar o‘qlari bilan ixtiyoriy burchak hosil qiladi. Agar biror P tekislik proyeksiyalar tekisliklari bilan bir xil burchak hosil qilsa, uning P_H va P_V izlari Ox o‘qi bilan bir xil burchak hosil qiladi.

Xususiy vaziyatdagi tekisliklar. Agar tekislik proyeksiyalar tekisligining biriga perpendikulyar yoki parallel bo‘lsa, uni *xususiy vaziyatdagi tekislik* deb ataladi.

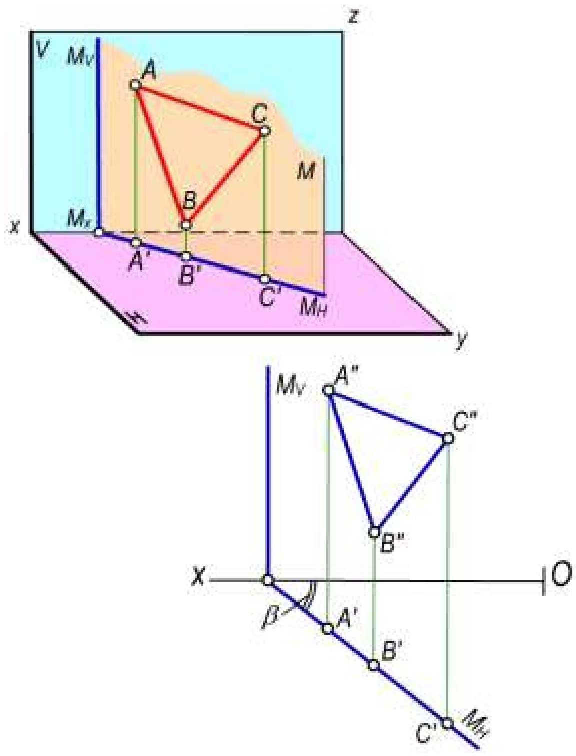
Proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan tekisliklar *proyeksiyalovchi tekisliklar* deyiladi.

Gorizontal proyeksiyalovchi tekislik

Ta’rif. Gorizontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar tekislik **gorizontal proyeksiyalovchi tekislik** deyiladi.

Gorizontal proyeksiyalovchi $M(M_H, M_V)$ tekislikning M_V frontal izi Ox o‘qiga perpendikulyar bo‘ladi (4.6,*a*,*b*-rasm), M_H gorizontal izi esa Ox o‘qiga nisbatan ixtiyoriy burchakda joylashgan bo‘ladi. Bu tekislik gorizontal izi M_H va Ox o‘q orasidagi β burchak, M va V tekisliklar orasidagi burchakning haqiqiy qiymatiga teng bo‘ladi.

Gorizontal proyeksiyalovchi tekislikka tegishli tekis geometrik shakllarning gorizontal proyeksiyalari to‘g‘ri chiziq bo‘ladi va tekislikning gorizontal izi bilan ustma-ust tushadi (4.6-*b*, rasm).



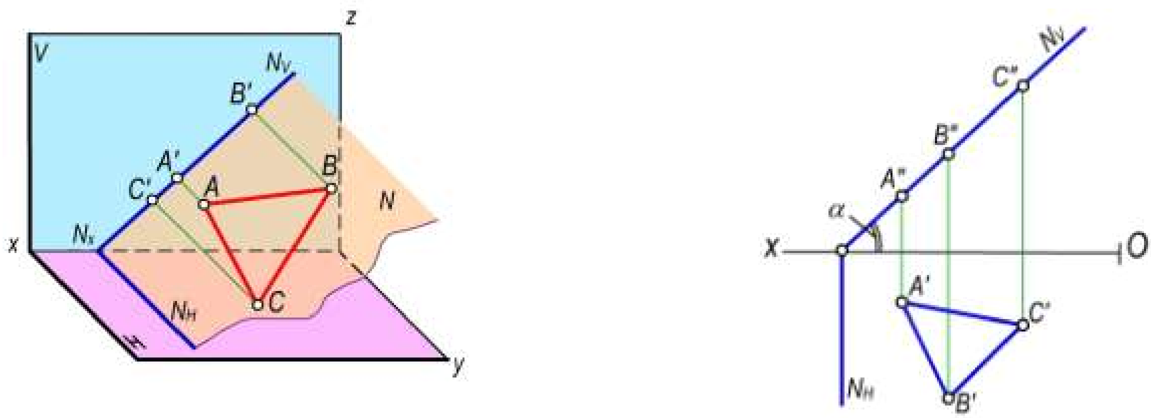
a) *b*)

4.6-rasm

Frontal proyeksiyalovchi tekislik

Ta'rif. Frontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan tekislik **frontal proyeksiyalovchi tekislik** deyiladi.

Frontal proyeksiyalovchi $N(N_H, N_V)$ tekislikning gorizontal N_H izi Ox o'qiga perpendikulyar bo'ladi (4.7- *a*, rasm), frontal N_V izi esa ixtiyoriy burchakda joylashgan bo'ladi. Frontal proyeksiyalovchi tekislikning frontal N_V izining Ox o'qi bilan hosil qilgan α burchagi N va H tekisliklar orasidagi burchakning haqiqiy qiymatiga teng. Frontal proyeksiyalovchi tekislikka tegishli bo'lgan tekis shakllarning frontal proyeksiyalari to'g'ri chiziq bo'ladi va tekislikning frontal izi bilan ustma-ust tushadi (4.7-rasm).



a) b)

4.7-rasm

Profil proyeksiyalovchi tekislik

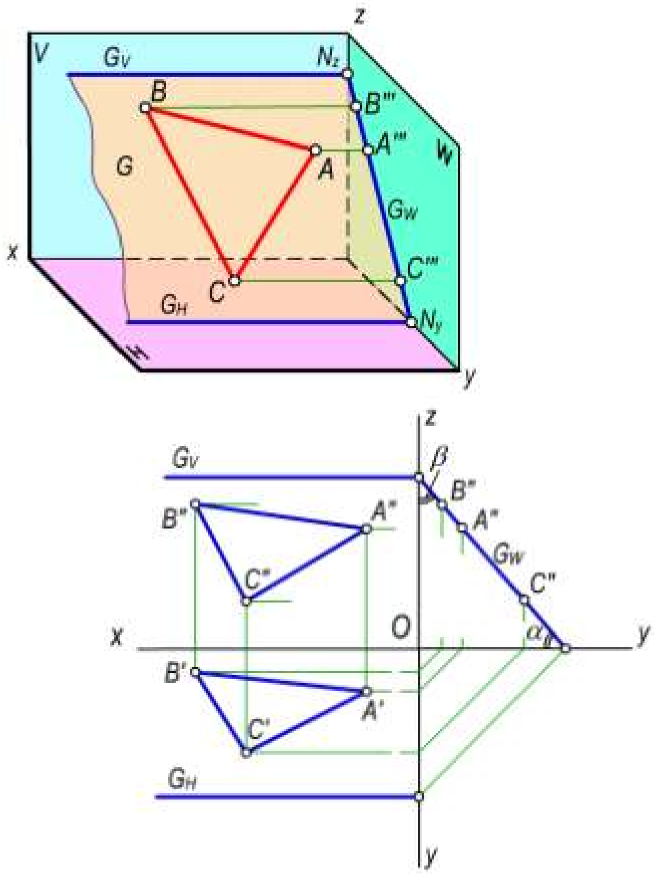
> **Ta'rif**. Profil proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar tekislik **profil proyeksiyalovchi tekislik** deb ataladi.

Bu tekislikning gorizontal G_H va frontal G_V izlari Ox o'qiga parallel bo'ladi (4.8-*a,* rasm).

G profil proyeksiyalovchi tekislikning *H* va *V* tekisliklar bilan hosil qilgan α va β burchaklari 4.8-*b,*rasmda ko'rsatilganidek haqiqiy kattalikda proyeksiyalanadi.

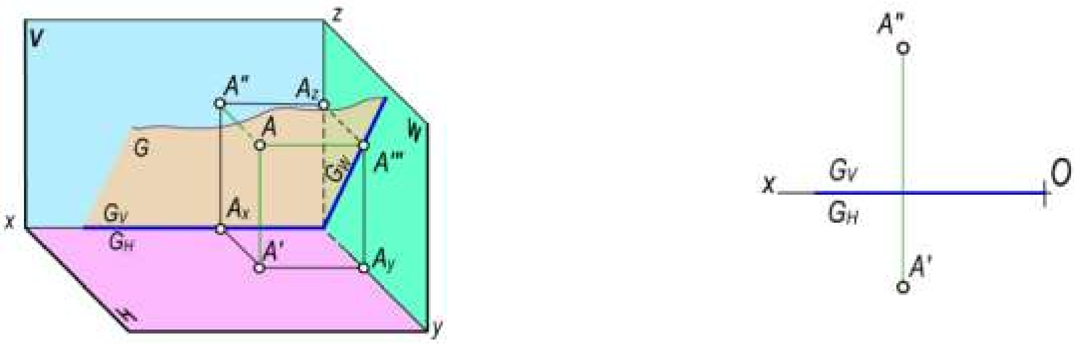
Shuningdek, profil proyeksiyalovchi tekislik proyeksiyalar o'qi Ox dan ham o'tishi mumkin (4.9,*a*-rasm). U holda *G* tekislikning gorizontal G_H va frontal G_V izlari Ox o'qida bo'ladi va tekislikning fazoviy vaziyatini aniqlab bo'lmaydi. Shuning uchun bunday hollarda mazkur tekislikning profil izi yoki shu tekislikka tegishli bo'lgan biror $A(A', A'')$ nuqtaning ikki proyeksiyasi beriladi (4.9-,*b* rasm). Bu nuqtaning A''' proyeksiyasi orqali tekislikning profil izini yasash mumkin (4.10-rasm).

Proyeksiyalovchi tekislikning ikkita izini chizmada tasvirlash shart emas. Tekislikning bitta izi, aynan gorizontal proyeksiyalovchi tekislikning gorizontal izi M_H, frontal proyeksiyalovchi tekislikning frontal izi N_V, profil proyeksiyalovchi tekislikning profil izi G_W, orqali ham ularning vaziyatini aniqlash mumkin (4.11-rasm).



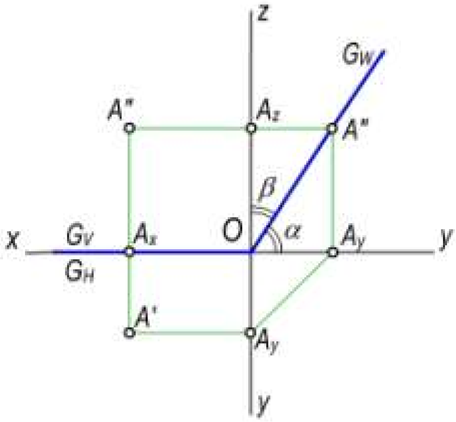
a) b)

4.8-rasm

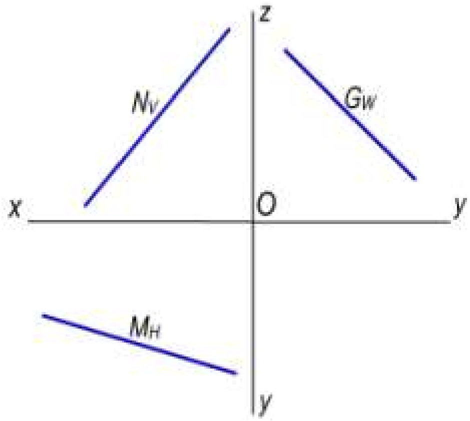


a)   b)

4.9-rasm



4.10-rasm



4.11-rasm

Proyeksiyalar tekisligiga parallel tekisliklar

Gorizontal tekislik

Ta'rif. Gorizontal proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislik **gorizontal tekislik** deyiladi.

Bu tekislik bir vaqtda *V* va *W* tekisliklarga perpendikulyar bo'ladi. Tekislikning vaziyatini uning frontal H_{1V} izi aniqlaydi (4.12-*a*,*b*, rasm).

Frontal tekislik

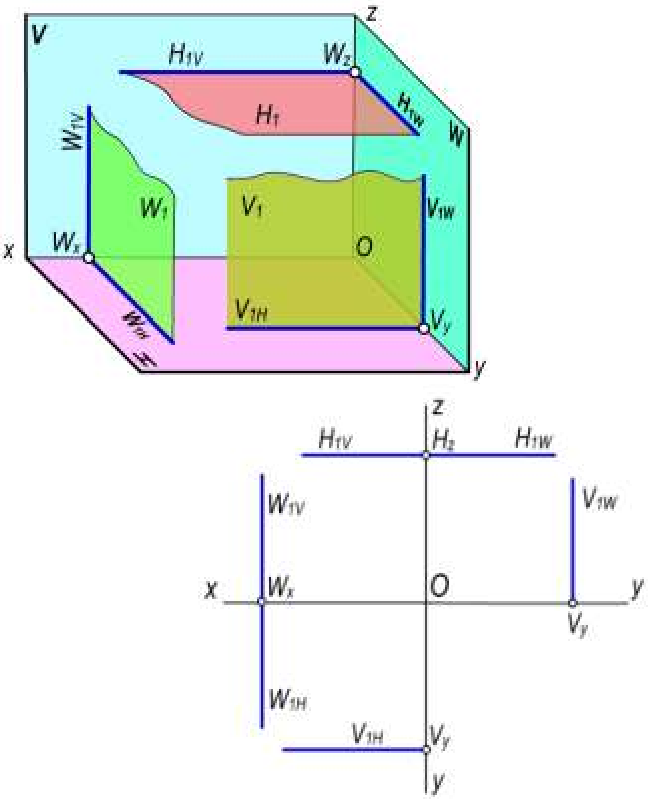
Ta'rif. Frontal proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislik **frontal tekislik** deyiladi.

Bu tekislik bir vaqtda *H* va *W* tekisliklarga perpendikulyar bo'ladi. Tekislikning vaziyatini uning frontal V_{1H} izi aniqlaydi (4.12-*a*,*b*, rasm).

Profil tekislik

Ta'rif. Profil proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislik **profil tekislik** deyiladi.

Profil W_1 tekislik bir vaqtda H gorizontal va V frontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo‘ladi. Tekislikning fazoviy vaziyatini uning W_{1H} gorizontal va W_{1V} frontal izlari aniqlaydi (4.12-*a*,*b*, rasm).



a) *b*)

4.12-rasm

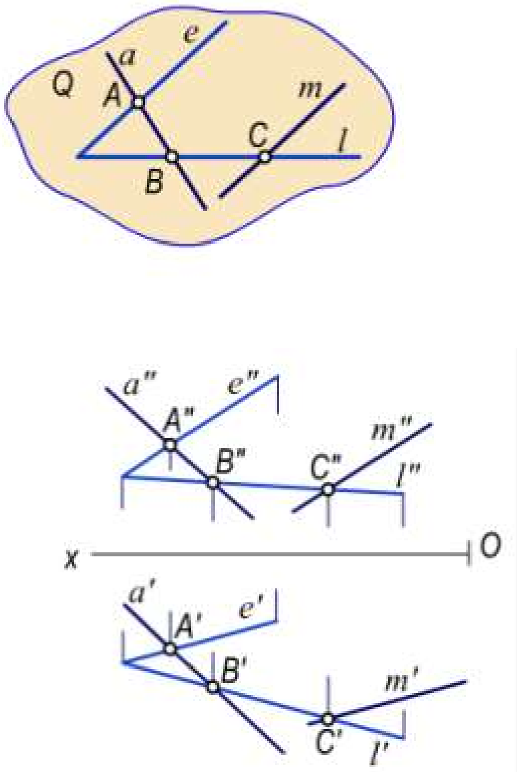
4.4-§. Tekislik va to‘g‘ri chiziqning o‘zaro vaziyatlari

To‘g‘ri chiziq va tekislik fazoda o‘zaro quyidagi vaziyatlarda bo‘lishi mumkin:

- to‘g‘ri chiziq tekislikka tegishli
- to‘g‘ri chiziq tekislik bilan kesishadi
- to‘g‘ri chiziq tekislikka parallel
- to‘g‘ri chiziq tekislikka perpendikulyar

Tekislikka tegishli to‘g‘ri chiziq va nuqta. Quyidagi xollarda to‘g‘ri chiziq tekislikka tegishli bo‘ladi:

- agar to‘g‘ri chiziqning ikki nuqtasi tekislikka tegishli bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziq tekislikka tegishli bo‘ladi. Masalan, a to‘g‘ri chiziqning A va B nuqtalari (4.13-rasm) Q tekislikka tegishli bo‘lganligi uchun a to‘g‘ri chiziq Q tekislikka tegishli bo‘ladi;
- agar m to‘g‘ri chiziqning bir nuqtasi tekislikka tegishli bo‘lib, mazkur tekislikka tegishli yoki unga parallel biror to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziq tekislikka tegishli bo‘ladi. Masalan, m to‘g‘ri chiziqning C nuqtasi Q tekislikka tegishli va bu to‘g‘ri chiziq mazkur tekislikka tegishli to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, u holda m to‘g‘ri chiziq Q tekislikka tegishli bo‘ladi.

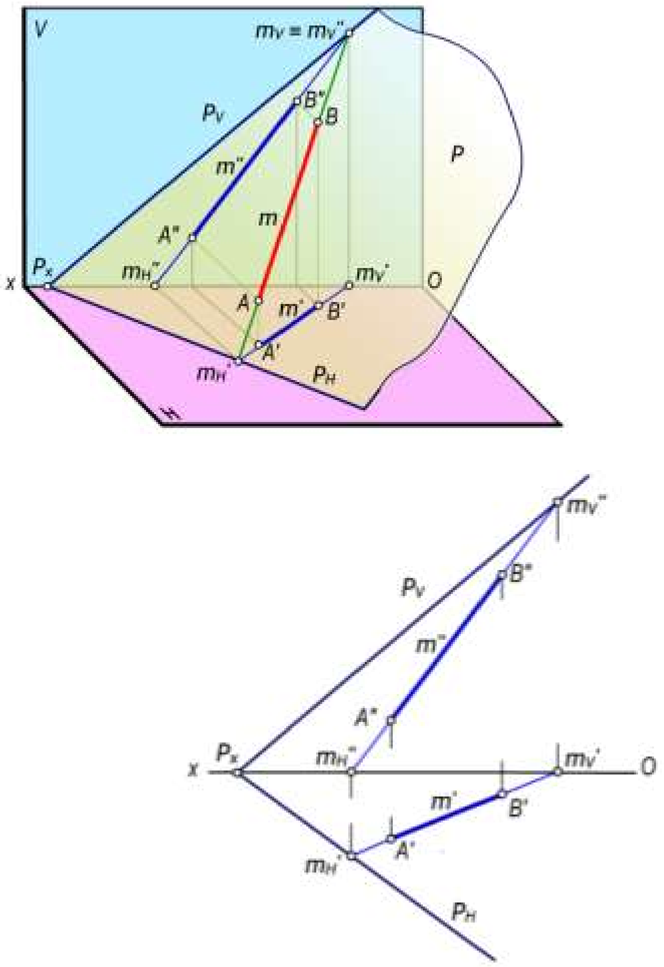


a) b)

4.13-rasm

To‘g‘ri chiziqning tekislikka tegishli bo‘lish shartlaridan quyidagi xulosalarga kelish mumkin.

1-xulosa. Agar to‘g‘ri chiziq tekislikka tegishli bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziqning bir nomli izlari tekislikning bir nomli izlariga tegishli bo‘ladi (4.14-rasm).



a) b)

4.14-rasm

P tekislikka tegishli *m* to'g'ri chiziqning M_H gorizontal izi tekislikning P_H gorizontal izida, to'g'ri chiziqning M_V frontal izi tekislikning P_V frontal izida joylashgan. Demak, *m* to'g'ri chiziq *P* tekislikka tegishli bo'ladi, ya'ni $m \subset P$.

2-xulosa. Agar nuqta tekislikka tegishli bo'lsa, bu nuqta tekislikning biror to'g'ri chizig'iga tegishli bo'ladi.

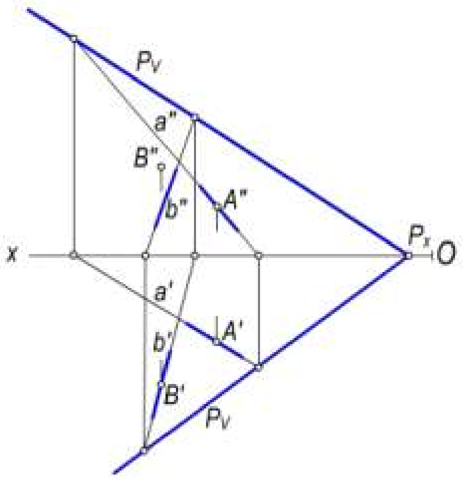
4.15-rasmda $P(P_H, P_V)$ tekislik bilan $A(A', A'')$ va $B(B', B'')$ nuqtalarning o'zaro joylashuvini ko'rsatilgan. Buning uchun:

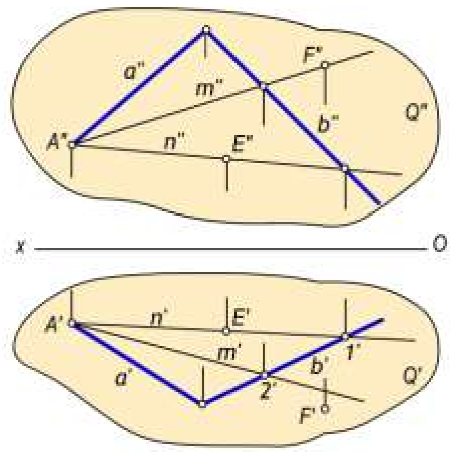
- nuqtaning gorizontal A' (yoki frontal A'') proyeksiyasidan o'tuvchi va tekislikka tegishli *a* to'g'ri chiziqning gorizontal a' (yoki frontal a'') proyeksiyasi o'tkaziladi.
- to'g'ri chiziqning frontal a'' (yoki gorizontal a') proyeksiyasi yasaladi.
- *A* nuqtaning A' gorizontal va A'' frontal proyeksiyalari *a* to'g'ri chiziqning bir nomli a' va a'' proyeksiyalarida joylashgan uchun $A \in P$ bo'ladi.

Xuddi shu tartibda $P(P_H, P_V)$ tekislik bilan $B(B', B'')$ nuqtaning o'zaro vaziyatini tekshirganimizda $B' \in b'$ va $B'' \notin b''$ bo'lgani uchun $B \notin P$ bo'ladi.

4.16-rasmda *a* va *b* kesishuvchi chiziqlar orqali berilgan *Q* tekislik bilan *E* va *F* nuqtalarning o'zaro vaziyati *m* va *n* chiziqlar yordami bilan aniqlangan:

- $E' \in n'$ va $E'' \in n''$ bo'lgani uchun $E \in Q$ bo'ladi.
- $F' \notin m'$ va $F'' \in m''$ bo'lgani uchun esa $F \notin Q$ bo'ladi.





4.15-rasm **4.16-rasm**

4.5-§. Tekislikning bosh chiziqlari

Tekislikning bosh chiziqlariga uning gorizontali, frontali va eng katta og‘ish chiziqlari kiradi.

Tekislikning gorizontali

<u>Ta’rif</u>. Tekislikka tegishli to‘g‘ri chiziq *H* tekisligiga parallel bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziq **tekislikning gorizontali** deyiladi.

Bunda $h \in P$ hamda $h \| H$ bo‘lsa, h to‘g‘ri chiziq P tekislikning gorizontal chizig‘i bo‘ladi.

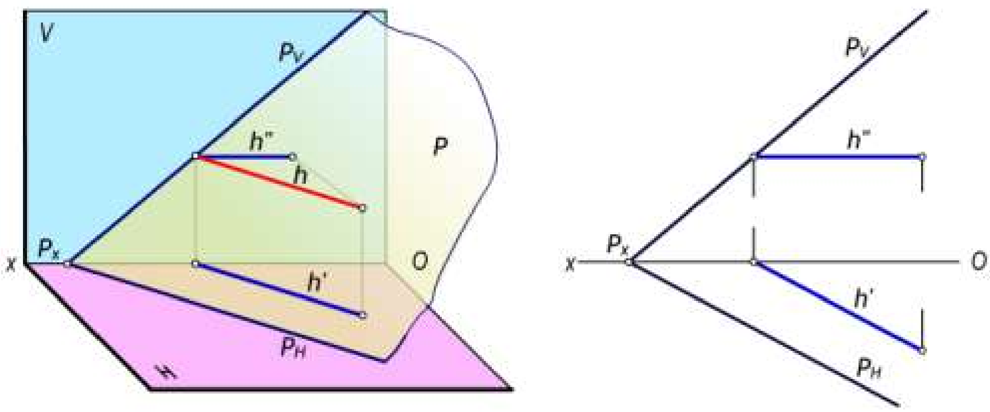
Chizmada tekislik gorizontalining frontal proyeksiyasi Ox ga parallel, ya’ni $h'' \| Ox$ bo‘ladi, tekislik gorizontalining gorizontal proyeksiyasi esa tekislikning P_H iziga parallel, ya’ni $h' \| P_H$ bo‘ladi (4.17-rasm).

Tekislikning frontali

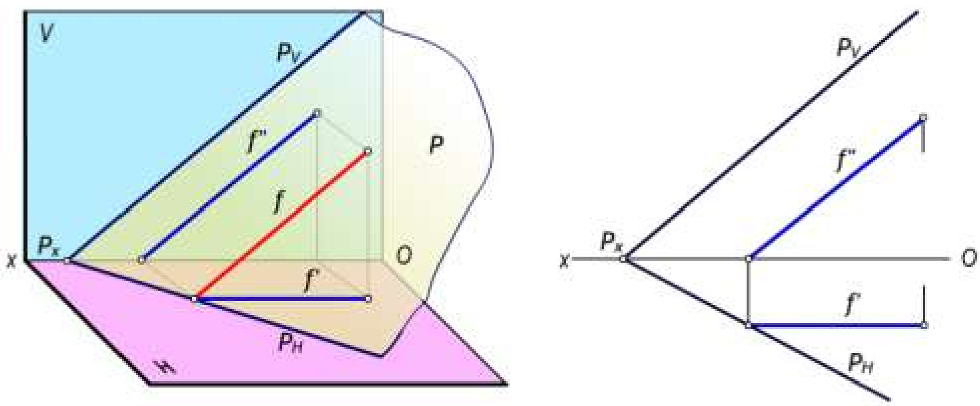
<u>Ta’rif</u>. Tekislikka tegishli to‘g‘ri chiziq *V* tekisligiga parallel bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziq tekislikning frontali deyiladi.

Bunda $f \in P$ hamda $f \| V$ bo‘lsa, f to‘g‘ri chiziq P tekislikning frontal chizig‘i bo‘ladi.

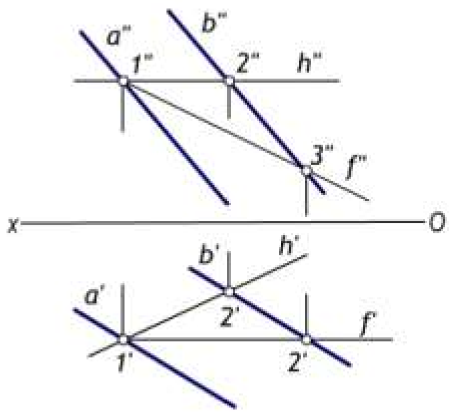
Chizmada tekislik frontalining gorizontal proyeksiyasi proyeksiyalar o‘qi Ox ga parallel bo‘ladi, ya’ni $f' \| Ox$, tekislik frontalining frontal proyeksiyasi esa tekislikning P_H iziga parallel, ya’ni $f'' \| P_V$ bo‘ladi (4.18-rasm).



4.17-rasm



4.18-rasm.



4.19-rasm.

4.19-rasmda $a \cap b$ chiziqlar bilan berilgan tekislikning h gorizontal va f frontallarini yasash tasvirlangan.

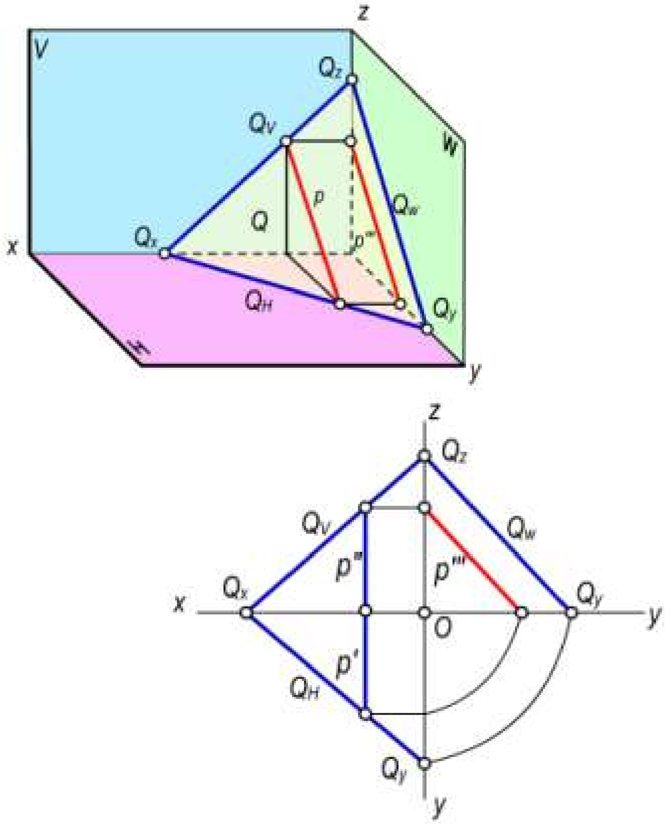
Umuman, chizmada tekislikning cheksiz ko‘p bosh chiziqlarini o‘tkazish mumkin. Tekislikning bir nomli bosh chiziqlari (masalan, gorizontallari) hamma vaqt bir-biriga parallel bo‘ladi. Ammo proyeksiyalar tekisligidan talab qilingan masofada tekislikning faqat bitta bosh chizig‘ini o‘tkazish mumkin.

Tekislikning profil chizig‘i

Ta’rif. Agar tekislikka tegishli to‘g‘ri chiziq profil proyeksiyalar tekisligiga parallel bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziq tekislikning **profil chizig‘i** yoki **profili** deyiladi.

Bunda $p \in Q$ bo‘lib va $p \| W$ bo‘lsa, p to‘g‘ri chiziq Q tekislikning profili bo‘ladi (4.20,*a*,b-rasm).

Chizmada tekislik profil chizig‘ining gorizontal va frontal proyeksiyasi Ox o‘qiga perpendikulyar bo‘ladi. Profil proyeksiyasi esa, proyeksiyalar o‘qlariga nisbatan turlicha joylashuvi mumkin. Agar tekislik izlari bilan berilgan bo‘lsa, profilning profil proyeksiyasi tekislikning profil iziga parallel bo‘ladi (4.20-b, rasm).



a) **b)**

4.20-rasm

Chizmada tekislikning cheksiz ko‘p asosiy chiziqlarini o‘tkazish mumkin. Tekislikning bir nomli bosh chiziqlari doimo o‘zaro parallel bo‘ladilar. Ammo proyeksiyalar tekisligidan talab qilingan masofada tekislikning faqat bitta bosh chizig‘ini o‘tkazish mumkin.

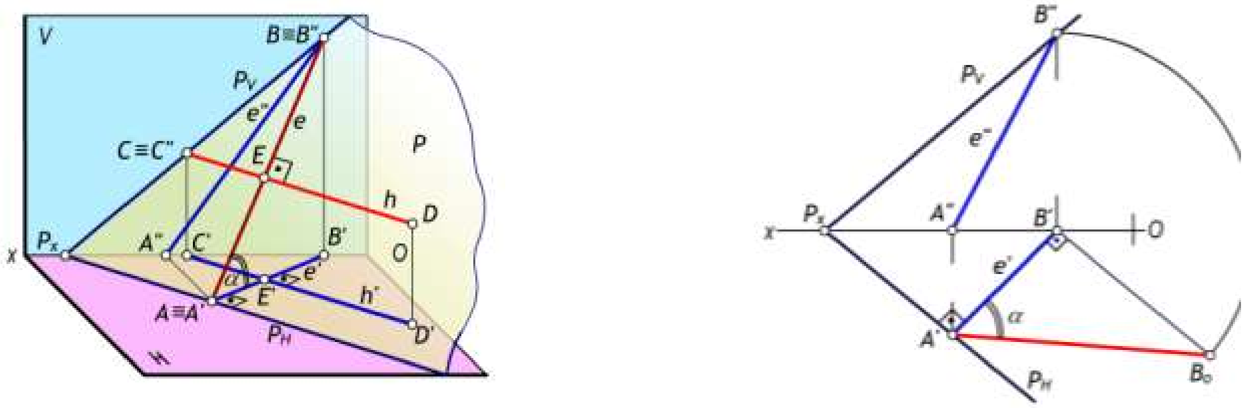
Tekislikning eng katta og‘ma chizig‘i

Ta’rif. Tekislikka tegishli va tekislikning bosh chiziqlaridan biri (gorizontal yoki frontal)ga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq **tekislikning eng katta og‘ma chizig‘i** deb ataladi.

Agar P tekislikka tegishli $\boldsymbol{e}$ to‘g‘ri chiziq tekislikning gorizontaliga perpendikulyar bo‘lsa, u holda $\boldsymbol{e}$ to‘g‘ri chiziqni P tekislikning H tekislikka nisbatan **eng katta og‘ma chizig‘i** deyiladi.

4.21-rasmda P tekislikning H tekislikka eng katta og‘ma chizig‘i tasvirlangan. Bu yerda $h \subset P$ va $h \| H$. To‘g‘ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatidan: $\angle BED = 90°$ va $ED \| H$ bo‘lgani uchun $\angle B'E'D' = 90°$ bo‘ladi.

Tekislikning eng katta og‘ma chizig‘i orqali uning proyeksiyalar tekisligi bilan hosil qilgan ikki yoqli burchagi aniqlanadi (4.21,b-rasm). P tekislikning H tekislikka nisbatan eng katta og‘ma chizig‘i P va H tekisliklar orasidagi $\angle B_0A'B'$ chiziqli burchakni ifodalaydi. Chunki $AB\perp P_H$ va $A'B'\perp P_H$ bo‘lgani uchun bu ikki yoqli α burchakning qiymatini aniqlaydi.

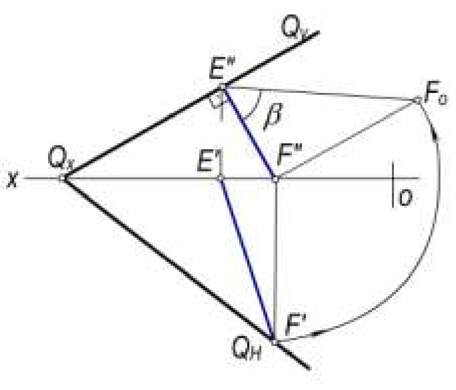


a) b)

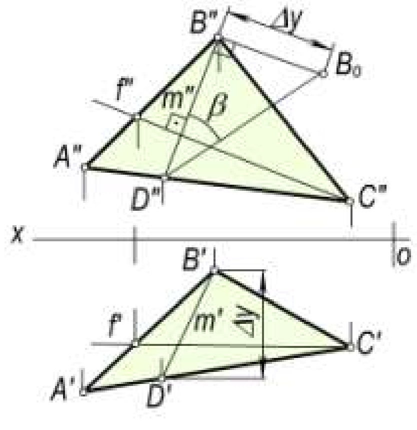
4.21-rasm

P tekislikning H proyeksiyalar tekisligiga nisbatan eng katta og‘ma chizig‘ini yasash uchun P_H gorizontal izida ixtiyoriy A nuqta tanlab olinadi. Bu nuqtadan $e\in P$ to‘g‘ri chiziqning gorizontal proyeksiyasini $e'\perp P_H$ qilib, P tekislikning H tekislikka eng katta og‘ma chizig‘ining gorizontal proyeksiyasini o‘tkaziladi va Ox o‘qida $e'\cap Ox=B'$ nuqtani aniqlanadi. So‘ngra bu chiziqning frontal e'' proyeksiyasi A'' va B'' nuqtalar yordamida yasaladi. Hosil bo‘lgan $e\in P$ to‘g‘ri chiziqning e' va e'' proyeksiyalari P tekislikning H tekislikka nisbatan eng katta og‘ma chizig‘ining proyeksiyalari bo‘ladi. Bu chiziqning H tekislik bilan hosil qilgan α burchagi aniqlanadi. Buning uchun to‘g‘ri burchakli uchburchak $\Delta A'B'B_0$ dan foydalanilgan (4.21,b-rasm).

Xuddi shunday $Q(Q_H, Q_V)$ tekislikning V tekislik bilan hosil etgan β burchagini yasash uchun (4.22-rasm) Q tekislikning frontal Q_V izida ixtiyoriy $E''\subset Q_V$ nuqta tanlab olinadi. Bu nuqta orqali Q_V ga perpendikulyar qilib tekislikning V tekislikka nisbatan eng katta og‘ma chizig‘ining frontal proyeksiyasi $E''F''\perp Q_V$ o‘tkaziladi va uning $E'F'$ gorizontal proyeksiyasi yasaladi. Bu chiziqning V tekislik bilan hosil qilgan β burchagi to‘g‘ri burchakli $\Delta E''F''F_0$ orqali aniqlanadi. Bu burchak Q va V tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchakning haqiqiy qiymatiga teng bo‘ladi: $\beta=Q$^V.



4.22-rasm



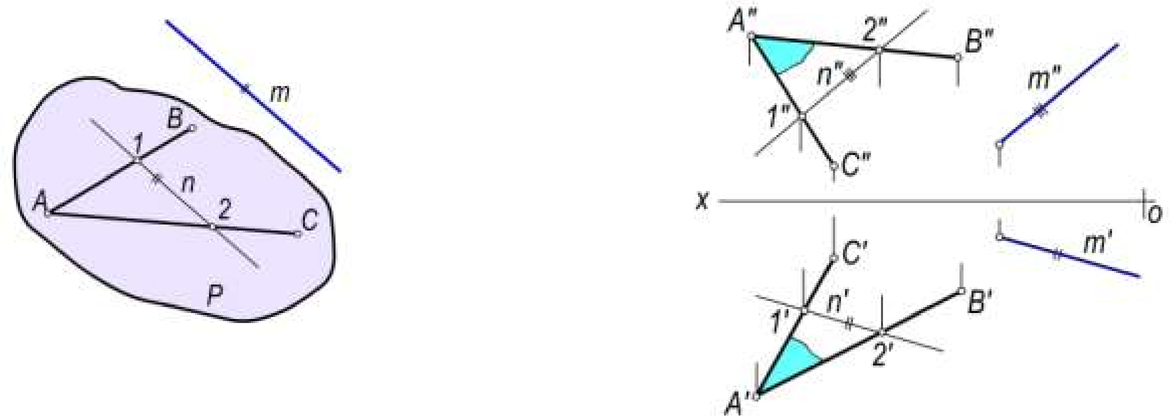
4.23-rasm

4.23-rasmda $\Delta ABC(\Delta A'B'C', \Delta A''B''C'')$ orqali berilgan tekislikning V tekislik bilan hosil qilgan burchagi aniqlangan. Buning uchun ABC tekislikning f(f′,f″) frontalini olamiz va unga perpendikulyar qilib berilgan tekislikning V tekislikka nisbatan eng katta og‘ma chizig‘i $m(m', m'')$ dan foydalanamiz.

4.6-§. To‘g‘ri chiziq va tekisliklarning o‘zaro parallelligi

Ta’rif. Agar fazodagi *m* to‘g‘ri chiziq *P* tekislikka tegishli biror n to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, u holda bu to‘g‘ri chiziq tekislikka parallel bo‘ladi.

Bunda $n \subset P$ bo‘lib, $m \parallel n$ bo‘lsa, $m \parallel P$ bo‘ladi (4.24,*a*,b-rasm).



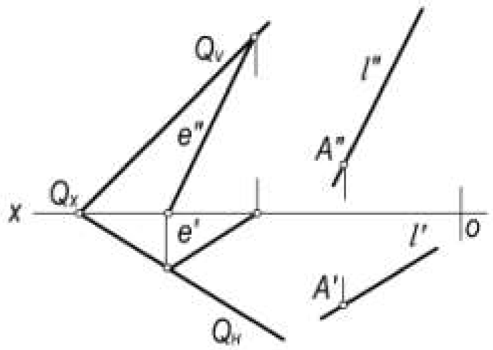
a) **b)**

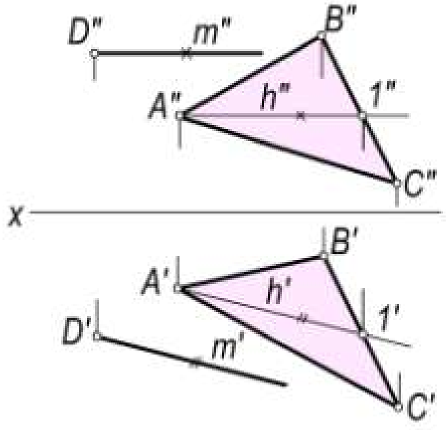
4.24-rasm

1-masala. A (A', A'') nuqtadan Q (Q_H, Q_V) tekislikka parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazish talab qilinsin (4.25-rasm).

Echish. A nuqtadan Q tekislikka parallel qilib cheksiz ko‘p to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazish mumkin. Shunday to‘g‘ri chiziqlarning ixtiyoriy bittasini o‘tkaziladi.

Buning uchun Q tekislikka tegishli ixtiyoriy ye *(e′, e″)* to‘g‘ri chiziq tanlanadi. Bu to‘g‘ri chiziqning bir nomli proyeksiyalariga parallel qilib A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan izlangan to‘g‘ri chiziqning l' va l'' proyeksiyalarini o‘tkaziladi, ya’ni ye (e′, ye″) $\subset Q$ (Q', Q'') bo‘lib, $l' \in A'$, $l'' \in A''$ bo‘lganda $l \parallel Q$ bo‘ladi.



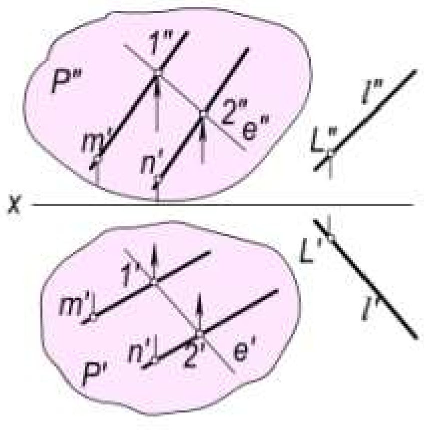


4.25-rasm **4.26-rasm**

2-masala. D (D′, D″) nuqtadan *ABC* (*A′B′C′*, *A″B″C″*) tekisligi va gorizontal proyeksiyalar tekisligi *H* ga parallel *m* to‘g‘ri chiziq o‘tkazilsin (4.26-rasm).

Echish. ∆*ABC* tekisligida *H* ga parallel, qilib uning gorizontali *h* (*h′*, *h″*) to‘g‘ri chiziq o‘tkaziladi. So‘ngra D nuqtaning D′ va D″ proyeksiyalaridan *m′* ‖ *h′* va *m″*‖ *h″* qilib izlangan to‘g‘ri chiziqning proyeksiyalari o‘tkaziladi.

3-masala. *P* (*m* ‖ ***n***) tekislik va ***l*** **(*l′*, *l″*)** to‘g‘ri chiziqning o‘zaro vaziyati aniqlansin (4.27-rasm).



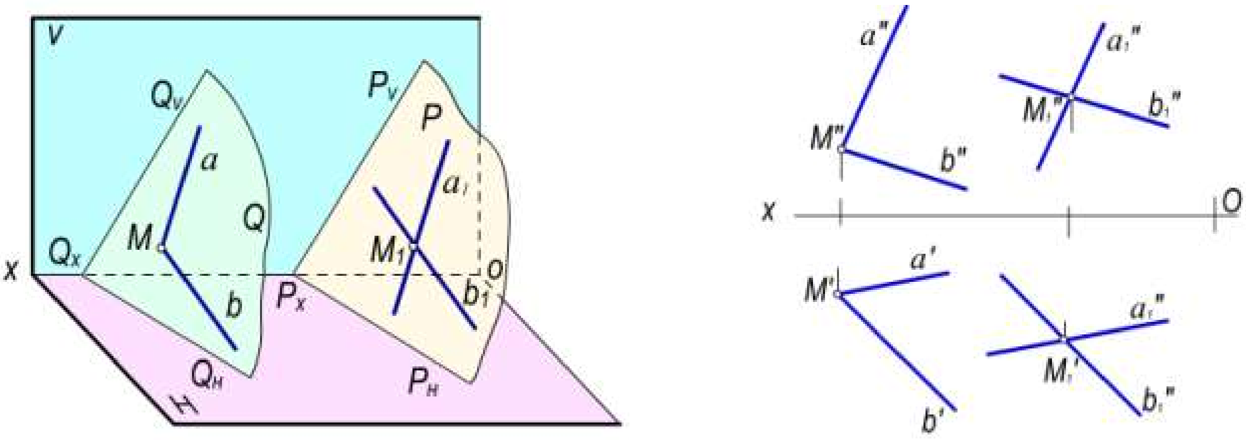
4.27-rasm

Echish. To‘g‘ri chiziq va tekislikning o‘zaro vaziyatini aniqlash uchun *P* tekislikda ye′ ‖ *l′* qilib to‘g‘ri chiziqning gorizontal proyeksiyasini o‘tkaziladi va uning frontal ye″ proyeksiyasini yasaladi.Chizmada *e″* to‘g‘ri chiziq *l″* ga paralell bo‘lmagani uchun *l* to‘g‘ri chiziq tekislikka paralell bo‘lmaydi. *l* va *P* larni o‘zaro paralelligini *l″*‖*e″* qilib o‘tkazish bilan ham bajarish mumkin.

4.7-§. Tekisliklarning o‘zaro parallelligi

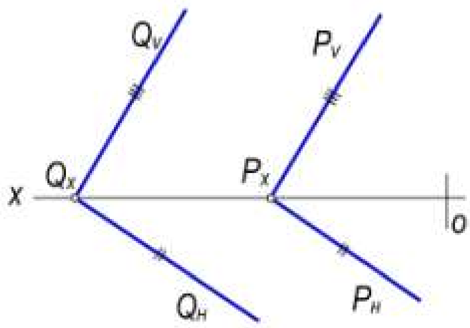
Ta’rif. Agar bir tekislikka tegishli o‘zaro kesishuvchi ikki to‘g‘ri chiziqlar ikkinchi tekislikka tegishli o‘zaro kesishuvchi ikki to‘g‘ri chiziqlarga mos ravishda parallel bo‘lsa, bu tekisliklar ham o‘zaro parallel bo‘ladilar.

Agar Q tekislikka tegishli $a \cap b$ kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar ikkinchi P tekislikka tegishli $a_1 \cap b_1$ kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlarga mos ravishda o‘zaro parallel bo‘lsa, bu tekisliklar ham o‘zaro parallel bo‘ladi. Ya’ni $a \subset Q$, $b \subset Q$ bo‘lib, $a \cap b$ bo‘lsa va $a_1 \subset P$ va $b_1 \subset P$ bo‘lib $a_1 \cap b_1$ bo‘lsa hamda $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$ bo‘lganda $Q \parallel P$ bo‘ladi (4.28-rasm).

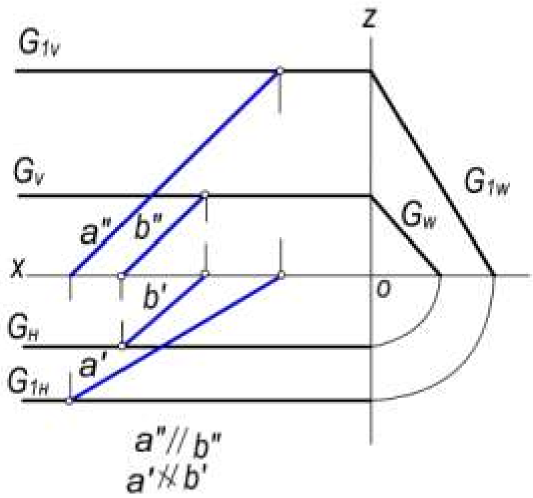


4.28-rasm

Agar fazodagi ikki tekislik bir-biriga parallel bo‘lsa, chizmada bu tekisliklarning bir nomli izlari ham o‘zaro parallel bo‘ladi, ya’ni: $Q \| P$ bo‘lsa $Q_H \| P_H$, $Q_V \| P_V$ va $Q_W \| P_W$ bo‘ladi (4.29-rasm).



4.29-rasm



4.30-rasm

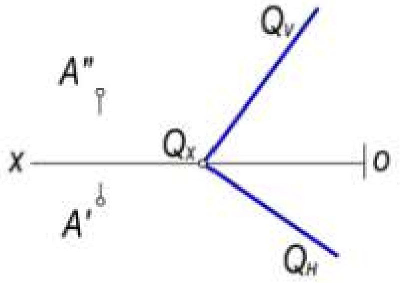
Chizmada profil proyeksiyalovchi tekisliklar uchun ularning gorizontal va frontal izlari parallel bo‘lishi yetarli bo‘lmaydi. Masalan, 4.30-rasmda berilgan G va G_1 tekisliklarda $G_H \| G_{1H}$ va

$G_V \| G_{1V}$ bo‘lib, $G_W \nparallel G_{1W}$ bo‘lgani uchun $G \nparallel G_1$ bo‘ladi. Bu tekisliklarning o‘zaro vaziyatini tekisliklarga tegishli a va b to‘g‘ri chiziqlar yordami bilan ham aniqlash mumkin, bunda $a \subset G_1$ va $b \subset G$ bo‘lgan holda $a'' \| b''$ bo‘lsa, $a' \nparallel b'$ bo‘lgani uchun $a \nparallel b$ va $G \nparallel G_1$ bo‘ladi.

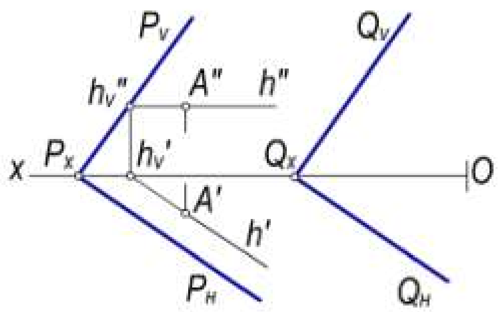
Fazodagi ixtiyoriy nuqta orqali berilgan tekislikka faqat bitta parallel tekislik o‘tkazish mumkin.

1-masala. A (A', A'') nuqtadan Q (Q_H, Q_V) tekislikka parallel P(P_H, P_V) tekislik o‘tkazish talab qilinsin (4.31-*a*, rasm).

Echish. Tekisliklarning parallellik xususiyatlariga ko‘ra P tekislikning izlari $P_H \| Q_H$ va $P_Y \| Q_Y$ $P_W \| Q_W$ bo‘lishi shart. Misolni yechish uchun to‘g‘ri chiziq va tekislikning parallellik shartlaridan foydalanib, A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan Q tekislikka parallel qilib ixtiyoriy to‘g‘ri chiziq, jumladan h (h', h'') gorizontali o‘tkaziladi (4.31-b, rasm).



a)

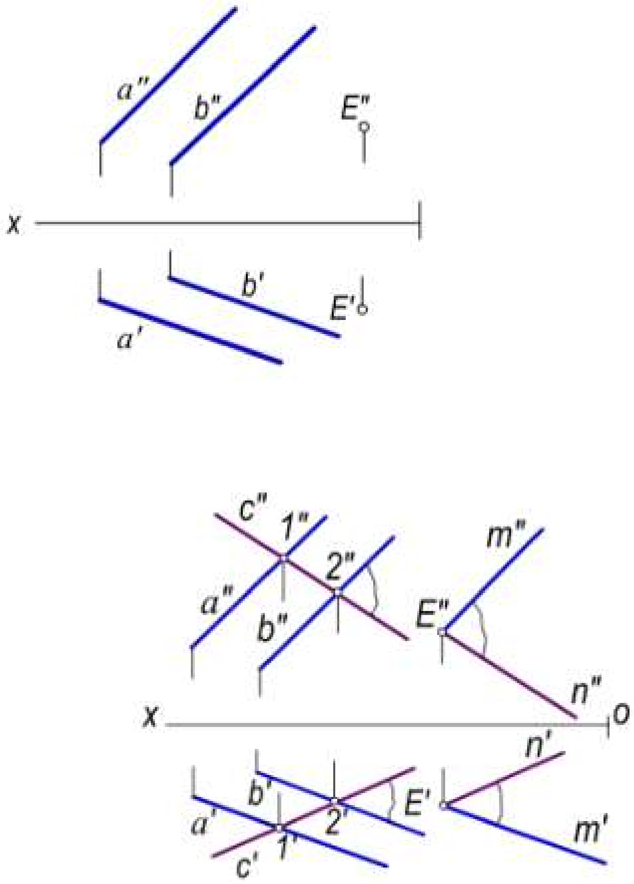


b)

4.31-rasm

Bu gorizontalning frontal izi h''_V yasalib, undan izlangan P tekislikning P_V izini berilgan tekislikning Q_V iziga parallel qilib o‘tkaziladi. So‘ngra $P_V \cap Ox = P_X$ nuqtasidan Q tekislikning Q_H iziga parallel qilib izlangan tekislikning P_H izi o‘tkaziladi.

2-masala. E(E', E'') nuqtadan a(a', a'') va b(b', b'') parallel chiziqlar bilan berilgan tekislikka parallel tekislik o‘tkazish talab qilinsin (4.32-*a*, rasm).



a) **b)**

4.32-rasm

Echish. Berilgan $(a \| b)$ tekislikka tegishli ixtiyoriy $c(c', c'')$ to‘g‘ri chiziqni o‘tkazib, so‘ngra E nuqtaning E' va E'' proyeksiyalaridan a va s chiziqlar proyeksiyalariga mos ravishda parallel qilib o‘tkazilgan $m' \cap n'$, $m'' \cap n''$ kesishuvchi chiziqlar proyeksiyalari izlangan tekislik proyeksiyasi bo‘ladi.

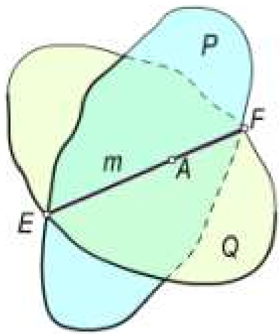
Tekislikka tegishli bo‘lmagan nuqtadan mazkur tekislikka parallel bo‘lgan cheksiz ko‘p to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazish mumkin. Bunday to‘g‘ri chiziqlar to‘plami berilgan tekislikka parallel bo‘lgan tekislikni ifodalaydi.

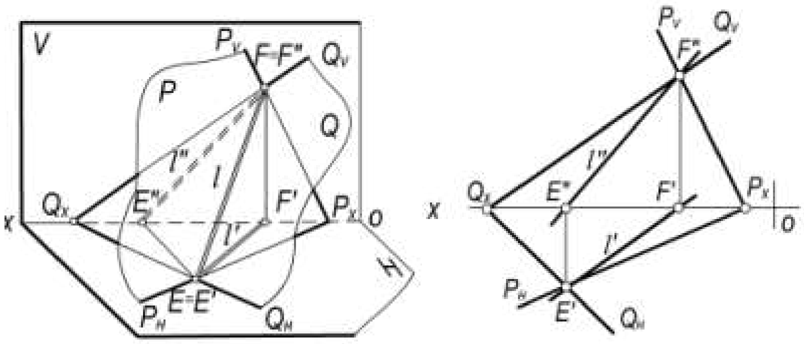
4.8-§. Tekisliklarning o‘zaro kesishuvi

Ta’rif. Agar ikki tekislik umumiy umumiy to‘g‘ri chiziqqa ega bo‘lsa, bu tekisliklar **o‘zaro kesishuvchi tekisliklar** deyiladi.

Ikki P va Q tekisliklar m to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi, ya’ni $Q \cap P = m$. Demak tekisliklarning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasash uchun har ikkala tekislikka tegishli bo‘lgan ikki E va F umumiy nuqtalarini aniqlash kifoya qiladi (4.33-rasm).

4.34-*a*,b rasmda P va Q kesishuvchi tekisliklar berilgan. Tasvirdan yaqqol ko‘rinib turibdiki, bu tekisliklarga umumiy bo‘lgan E va F nuqtalar tekisliklarning bir nomli izlarining kesishish nuqtalari bo‘ladi: $E = Q_H \cap P_H$ va $F = Q_V \cap P_V$.





a) **b)**

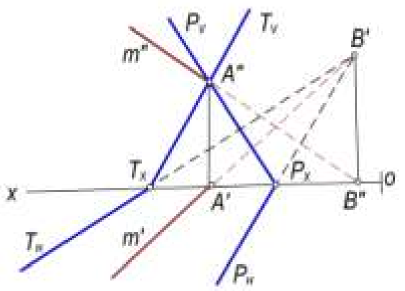
4.33-rasm
4.34-rasm

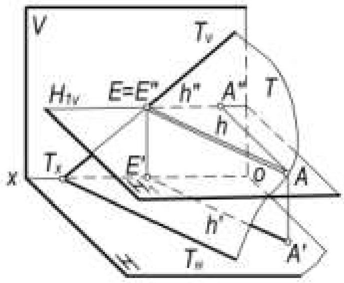
Bu nuqtalar o‘zaro tutashtirilsa *Q* va *P* tekisliklarning $\boldsymbol{l}$ kesishuv chizig‘i hosil bo‘ladi: $\boldsymbol{l} = Q \cap P$.

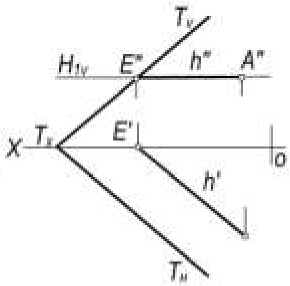
Chizmada (4.34-b,rasm) bu tekisliklarning kesishish chizig‘ining proyeksiyalarini yasash uchun tekisliklarning bir nomli izlarining kesishish *E* va *F* nuqtalarining E', E'' va F', F'' proyeksiyalari aniqlanadi va nuqtalarning bir nomli proyeksiyalari o‘zaro tutashtiriladi. Natijada, hosil bo‘lgan $\boldsymbol{l'}$ va $\boldsymbol{l''}$ to‘g‘ri chiziqlar *Q* va *P* tekisliklarning kesishish chizig‘ining proyeksiyalari bo‘ladi. Agar tekisliklarning izlari birinchi oktantda kesishmasa u holda bir nomli izlarini davom ettirib ularning kesishuv nuqtasini boshqa oktantda topish bilan kesishuv chizig‘i nuqtalarining proyeksiyalarini yasash mumkin.

Masalan, T (T_H, T_V) va P (P_H, P_V) tekisliklarning (4.35-rasm) gorizontal izlari T_n va P_n ikkinchi oktantda kesishadi.

Kesishuvchi tekisliklarning biri gorizontal tekislik bo‘lsa, bu tekisliklar gorizontal chiziq bo‘yicha kesishadi.







a) b)

4.35-rasm **4.36-rasm**

4.36-*a*,b-rasmda umumiy vaziyatdagi T tekislik bilan H_1 gorizontal tekislikning kesishish chizig‘i *h* gorizontal bo‘ladi. haqiqatdan, H_1 gorizontal tekislikning har bir nuqtasi *H* tekislikdan baravar uzoqlikda joylashgani uchun, tekisliklarning kesishuvchi chizig‘i $h||H$ bo‘ladi. Agar umumiy vaziyatdagi tekislik frontal tekislik bilan kesishgan bo‘lsa, bu tekisliklar frontal bo‘yicha kesishadi.

Ammo kesishuvchi tekisliklarning biri proyeksiyalovchi tekislik bo‘lsa, proyeksiyalovchi tekislikning xossasiga muvofiq, ularning kesishish chizig‘ining proyeksiyalaridan biri proyeksiyalovchi tekislikning izida bo‘ladi (4.37-rasm).

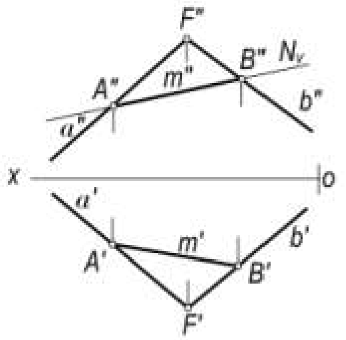
Kesishuvchi tekisliklarning bir nomli izlari chizma chegarasida kesishmasa, ularning kesishish chizig‘ini yordamchi tekisliklar vositasida aniqlash mumkin. Masalan, umumiy vaziyatdagi $P(P_H, P_V)$ va $T(T_H, T_V)$ tekisliklarning kesishish chizig‘ini yasash uchun H_1 gorizontal va V_1 frontal tekisliklardan foydalaniladi (4.38-rasm).

H_1 gorizontal tekislikning frontal izini $H_{1V}||H$ qilib o‘tkaziladi. Bu tekislik *P* tekislikni $h_1(h_1', h_1'')$, T tekislikni $h_2(h_2', h_2'')$ gorizontallar bo‘yicha kesadi. Bu gorizontallarning kesishgan $E(E',E'')$ nuqtasi $E'=h_1'\cap h_2'$ va $E''=h_1''\cap h_2''$ *P* va *T* tekisliklarning kesishish chizig‘ining umumiy nuqtalaridan biri bo‘ladi.

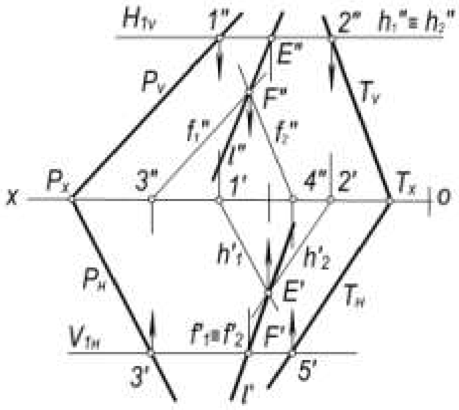
Frontal tekislikni $V_{1H}||V$ qilib o‘tkaziladi. Bu tekislik *P* va *T* tekisliklarni $f_1(f_1',f_1'')$ va $f_2(f_2',f_2'')$ frontallar bo‘yicha kesadi. Bu frontallarning kesishish $F(F', F'')$ nuqtasi *P* va T tekisliklarning kesishish chizig‘ining umumiy nuqtalaridan ikkinchisi bo‘ladi: $F'' = f_1''\cap f_2'$ va $F'= f_1'\cap f_2''$ bo‘ladi. Natijada, *E* va *F* nuqtalarning E', F' va E'', F'' proyeksiyalarini o‘zaro tutashtirsa *P* va *T* tekisliklarning *l* kesishish chizig‘ining l' va l'' proyeksiyalari hosil bo‘ladi.

4.39-*a*,b-rasmdagi umumiy vaziyatdagi $a||b$ va $c\cap d$ chiziqlar bilan berilgan *Q* va *P* tekisliklarning kesishish chizig‘ini yasash uchun gorizontal H_1 va H_2 tekisliklar o‘tkazilgan.

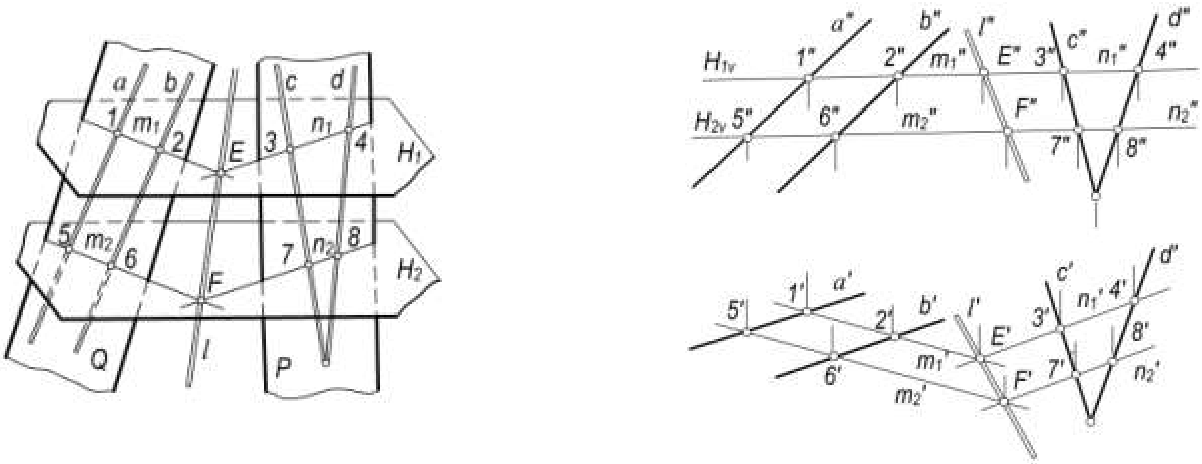
Dastalab H_1 tekislikning *Q* va *P* tekisliklar bilan kesishish chiziqlarini aniqlash uchun tekisliklarni *a*, *b* va *c*, *d*, chiziqlarini 1, 2 va 3, 4 nuqtalarda kesganligi belgilanadi. Bu nuqtalarni o‘zaro tutashtirganda, m_1 va n_1 chiziqlar hosil bo‘ladi, ya’ni: $H_1\cap Q=m_1$ va $H_1\cap P=n_1$ bo‘ladi. m_1 va n_1 to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi $E=m_1\cap n_1Q$ va *P* tekisliklarga umumiy bo‘lgan birinchi nuqtadir.



4.37-rasm



4.38-rasm



a) **b)**

4.39-rasm

Xuddi shu tartibda Q va P tekisliklarning H_2 gorizontal tekislik bilan kesishish chizig‘ini aniqlanadi. Chizmada H_2 tekislik a, b va c, d chiziqlarni 5, 6 va 7, 8 nuqtalarda kesadi. Natijada: $H_2 \cap Q = m_2$ va $H_2 \cap P = n_2$ hosil bo‘ladi. Rasmda $H_2 \parallel H_1$ bo‘lgani uchun $m_2 \parallel m_1$ va $n_2 \parallel n_1$ bo‘ladi. Q va P tekisliklarning ikkinchi umumiy F nuqtasi bo‘lib u m_1 va n_2 chiziqlarning o‘zaro kesishish nuqtasi bo‘ladi: $F = m_2 \cap n_2$.

Har ikkala P va Q tekisliklar uchun umumiy bo‘lgan E va F nuqtalarni o‘zaro tutashtirsak, tekisliklarning kesishish chizig‘i hosil bo‘ladi.

Chizmada (4.39-b, rasm) Q va P tekisliklarning kesishish chizig‘ini yasash uchun H_1 gorizontal tekislikning H_{1V} izini o‘tkazib uni a'', b'' va s'', d'' chiziqlarning frontal proyeksiyalarini kesuvchi $1''$, $2''$ va $3''$, $4''$ nuqtalar belgilanadi. Bu nuqtalarning gorizontal $1'$, $2'$ va $3'$, $4'$ proyeksiyalarini aniqlab o‘zaro tutashtiriladi. m_1' va n_1' chiziqlar Q va P tekisliklarning H_1 tekislik bilan kesishgan chiziqlarning gorizontal proyeksiyalari bo‘ladi. Kesishuvchi chiziqlarning frontal m_1'' va n_1'' proyeksiyalari H_1 tekislikning H_{1V} izida bo‘ladi. hosil bo‘lgan m_1' va n_1' chiziqlarning kesishgan E' nuqtasi Q va P tekisliklarining kesishuv chizig‘iga tegishli E nuqtaning gorizontal proyeksiyasi $E'=m_1'\cap n_1'$ bo‘ladi. Bu nuqtaning E'' frontal proyeksiyasi esa H_1 tekislikning H_{1V} izida bo‘ladi: $E''\in H_{1V}$.

Xuddi shu tartibda Q va P tekisliklarning kesishish chizig‘iga tegishli, ikkinchi F nuqtasining F' va F'' proyeksiyalarini H_2 gorizontal tekislikning H_{2V} izini H_{1V} ga parallel qilib o‘tkazib aniqlanadi .

Chizmadagi E', F' va E'', F'' proyeksiyalarni o‘zaro tutashtiruvchi l' va l'' chiziqlar Q va P tekisliklar kesishish chizig‘ining proyeksiyalari bo‘ladi.

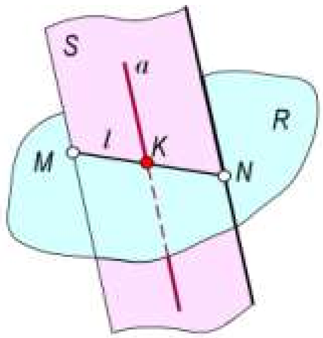
4.9-§. To‘g‘ri chiziqning tekislik bilan kesishishi

Agar to‘g‘ri chiziq tekislikka parallel yoki tegishli bo‘lmasa bu to‘g‘ri chiziq tekislik bilan kesishadi.

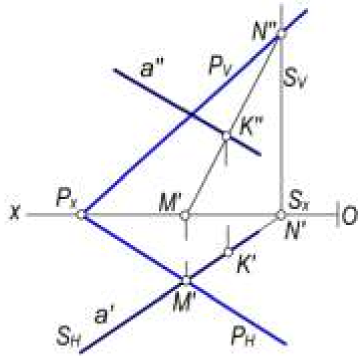
To‘g‘ri chiziq tekislik bilan kesishishi natijasida nuqta hosil bo‘ladi.

Bu nuqtani aniqlash uchun qo‘yidagi yasash algoritmlaridan foydalanadi (4.40-rasm)

- Berilgan *a* to‘g‘ri chiziqdan yordamchi *S* tekislik o‘tkaziladi: $a \subset S$
- *P* va *S* tekisliklarning kesishish *l* chizig‘i yasayladi: $S \cap R = l$
- *a* to‘g‘ri chiziqning *l* bilan kesishgan nuqtasi $K = a \cap l$ bo‘ladi.
-



4.40-rasm



4.41-rasm

Natijada, *K* nuqta *a* to‘g‘ri chiziqqa va *P* tekislikka tegishli umumiy nuqta bo‘ladi. Odatda, yordamchi *S* tekislikni proyeksiyalovchi vaziyatda o‘tkaziladi.

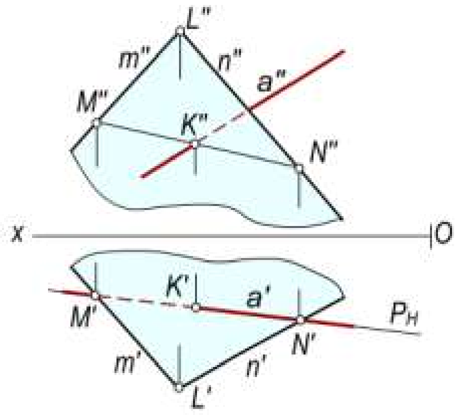
Chizmada $a(a', a'')$ to‘g‘ri chiziqning $P(P_H, P_V)$ tekislik bilan kesishish nuqtasi *K* ning K' va K'' proyeksiyalarini yuqorida keltirilgan yasash algoritmlari bo‘yicha aniqlaymiz (4.41-rasm). Buning uchun:

- To‘g‘ri chiziqning a' proyeksiyasidan yordamchi gorizontal proyeksiyalovchi *S* tekislikning S_H izini o‘tkaziladi.
- *S* va *P* tekisliklarning kesishuv chizig‘ining l' va l'' proyeksiyalarni yasaladi. Buning uchun tekisliklar izlarining kesishish nuqtalarining proyeksiyalari M', M'' va N', N'' dan foydalaniladi.
- *a* to‘g‘ri chiziqning frontal a'' proyeksiyasi S va *P* tekisliklarning kesishish chizig‘i *l* ning frontal l'' proyeksiyasi bilan kesishib *K* nuqtaning K'' proyeksiyasi aniqlanadi: $K''=a''\cap l''$.

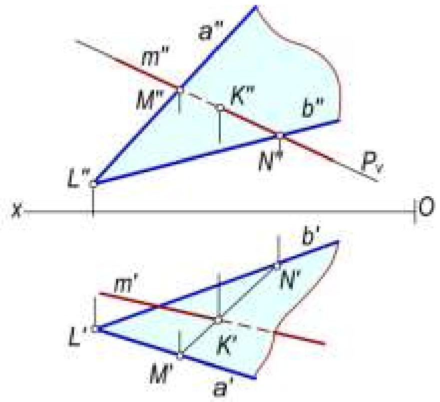
K nuqtaning K' proyeksiyasi tekislikning S_H iziga yoki *a* to‘g‘ri chiziqning a' proyeksiyasiga tegishli bo‘ladi: $K' \in a'$ va $K' \in S_H$.

Yuqoridagi misolni *a* to‘g‘ri chiziq orqali frontal proyeksiyalovchi tekislik o‘tkazish yo‘li bilan ham yechish mumkin.

$P(m \cap n)$ tekislik bilan *a* to‘g‘ri chiziqning K kesishish nuqtasining proyeksiyalari 4.42-rasmda *a* to‘g‘ri chiziq orqali $S(S_H)$ gorizontal proyeksiyalovchi tekislik o‘tkazish bilan aniqlangan. 4.43-rasmda *m* to‘g‘ri chiziq orqali $S(S_V)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik o‘tkazish yo‘li bilan aniqlangan.

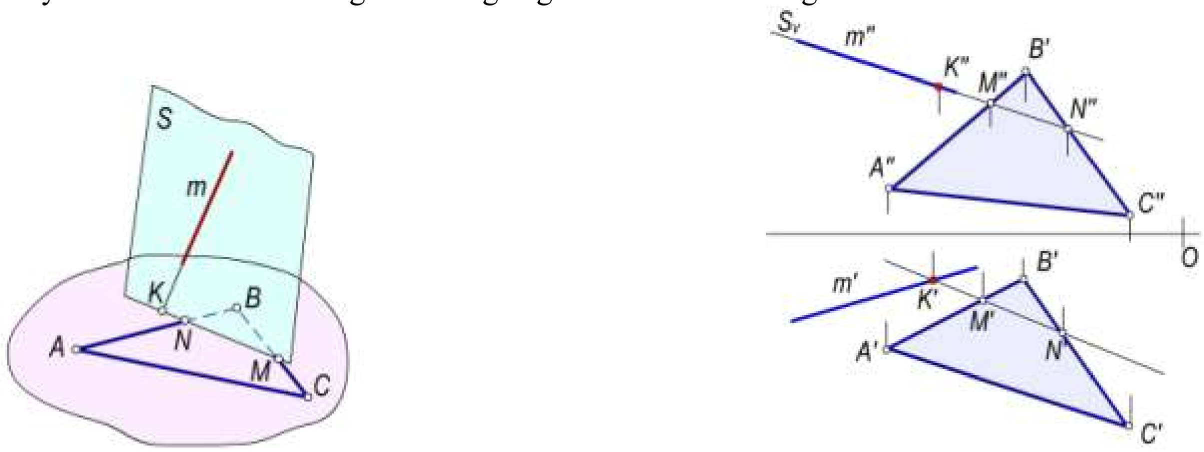


4.42-rasm



4.43-rasm

Ayrim hollarda to‘g‘ri chiziqning tekislik bilan kesishish nuqtasi mazkur tekislikni ifodalovchi chegaralangan *ABC* tekis shaklning tashqarisida bo‘lishi mumkin (4.44-*a*, b rasm). Bunday hollarda tekislikni chegaralanmagan geometrik sirt ekanligini esda tutish lozim.



a) b)

4.44-rasm

To‘g‘ri chiziqning tekislik bilan kesishish nuqtasini yasash algoritmidan foydalanib, turli gemetrik tekis shakllarning o‘zaro kesishish chiziqlarini yasash mumkin. Masalan, 4.45-rasmda *ABC* (*A′B′C′*, *A″B″C″*) va D*EF* (D*′E′F′*, D*″E″F″*) uchburchaklar bilan berilgan tekisliklarning o‘zaro kesishish chizig‘ining proyeksiyalari *KL(K′L′, K″L″)* yasalgan.

Δ*ABC* va ΔD*EF* tekisliklarning kesishish chizig‘ining yasash uchun ulardan birini, masalan, ΔD*EF* ning *EF* va *E*D tomonlarining Δ*ABC* tekislik bilan kesishish *K*(*K′*, *K″*) va *L(L′, L″)* nuqtalarini aniqlanadi.

Buning uchun uchburchakning *EF* tomonidan yordamchi $T(T_V)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik o‘tkaziladi. Bu tekislikni Δ*ABC* tekislik bilan kesishish *12* chizig‘ining proyeksiyalari *1′2′* va *1″2″* bo‘ladi. Uchburchakning *EF* tomonini *12* bilan yoki Δ*ABC* tekislik bilan kesishish nuqtasi *K* ning proyeksiyalari *K′* va *K*" aniqlanadi.

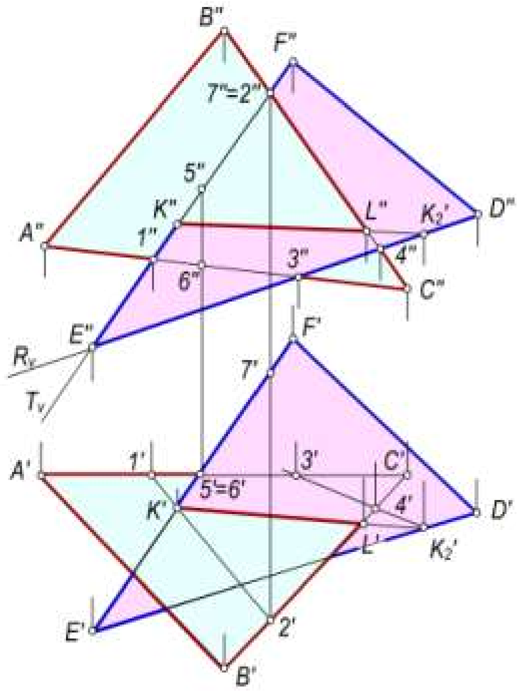
Xuddi shu tartibda D*EF* uchburchakning *E*D tomonning Δ*ABC* tekislik bilan kesishish nuqtasi *M* ning *M′* va *M*" proyeksiyalarini yordamchi $S(S_V)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik vositasida aniqlanadi.

Chizmada hosil bo‘lgan *K′* bilan *L′* va *K″* bilan *L″* proyeksiyalarni o‘zaro tutashtirilsa, uchburchaklar kesishish chizig‘ining proyeksiyalari hosil bo‘ladi. Uchburchaklar chegaralangan shakllar bo‘lgani uchun ularning kesishish chizig‘ining proyeksiyalari *K′L′* va *K″L″* chegarasida bo‘ladi.

Uchburchaklarning proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan ko‘rinadigan yoki ko‘rinmaydigan qismlarini aniqlash uchun ularning tomonlariga tegishli konkurent nuqtalaridan foydalaniladi.

Masalan, *H* tekislikka nisbatan ko‘rinishlikni aniqlash uchun ΔABC va ΔDEF larning *AC* va *EF* tomonlarning konkurent *5≡6(5′6′, 5″6″)* nuqtalarning applikatalar Z_5, Z_6 qiymatlari taqqoslanadi.

Agar *5(5′, 5″)* nuqta *EF*(*E′F′*, *E″F″*) tomonga, *6(6′, 6″)* nuqta *AC*(*A′C′*, *A″C″*) tomonga tegishli, ya’ni $5\in EF$ va $6\in AC$ bo‘lsa, chizmada $z_5>z_6$ bo‘lgani uchun *5* nuqta kuzatuvchiga ko‘rinadi. *5* nuqta *H* tekislikdan *6* nuqtaga nisbatan yuqorida joylashganligi aniqlanadi. Demak, *H* tekislikda *EF* tomonning *F′K′* qismi kuzatuvchiga ko‘rinadi, *E′K′* ning bir qismi esa ΔABC ostida qoladi. U holda ΔABC ni *AB* tomonining *A′B′* proyeksiyasi to‘liq va *BC* tomoni *B′C′* proyeksiyasining *B′L′* qismi ko‘rinadi. ΔDEF ning *ED* tomonining *E′D′* gorizontal proyeksiyasining bir qismi ΔABC ning gorizontal *A′B′C′* proyeksiyasi ostida qoladi.



4.45-rasm

Uchburchakning *V* tekislikka nisbatan ko‘rinishligi aniqlash uchun *VC* va *EF* tomonlariga tegishli *2* va *7* konkurent nuqtalarining *2′, 7′* va *2″, 7″* proyeksiyalaridan foydalanamiz. Agar $2\in VC$ va $7\in EF$ bo‘lsa, chizmada $y_2>y_7$ bo‘lgani uchun *2* nuqta kuzatuvchiga ko‘rinadi. Shuning uchun *2(2′, 2″)* nuqta tegishli *VC* tomonning *B″L″* va *EF* tomonning *E″K″* qismi ko‘rinadi. Shuningdek, *AC* tomoni *A″C″* proyeksiyasining *1″3″* qismi ko‘rinmaydi. U holda uchburchakning *ED* tomonning *E″D″* proyeksiyasi to‘liq ko‘rinadi.

4.10-§. To‘g‘ri chiziqning tekislikka perpendikulyarligi

Ta’rif. Agar to‘g‘ri chiziq tekislikdagi ikki o‘zaro kesishuvchi to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziq tekislikka ham perpendikulyar bo‘ladi.

Bunda $b\subset P$ va $c\subset P$, $b\cap c$ hamda $a\perp b$ va $a\perp c$ bo‘lsa, $a\perp P$ bo‘ladi (4.46-rasm). Demak, tekislika perpendikulyar bulgan to‘g‘ri chiziq tekislikning asosiy chiziqlariga ham perpendikulyar bo‘ladi. Faraz qilaylik, *a* to‘g‘ri chiziq tekislikning *h* gorizontali va f frontaliga perpendikulyar bo‘lsin (4.47-*a*, rasm).

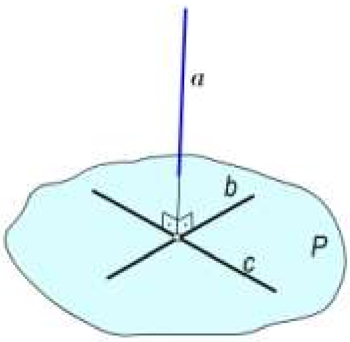
To‘g‘ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatiga muvofiq $\angle AKD=90^o$ bo‘lib, $KD\parallel H$ bo‘lgani uchun bu to‘g‘ri burchakning gorizontal proyeksiyasi $\angle A'K'D'=90^o$ bo‘ladi. Demak, $A'K'\perp C'D'$ yoki $a'\perp h'$ bo‘ladi.

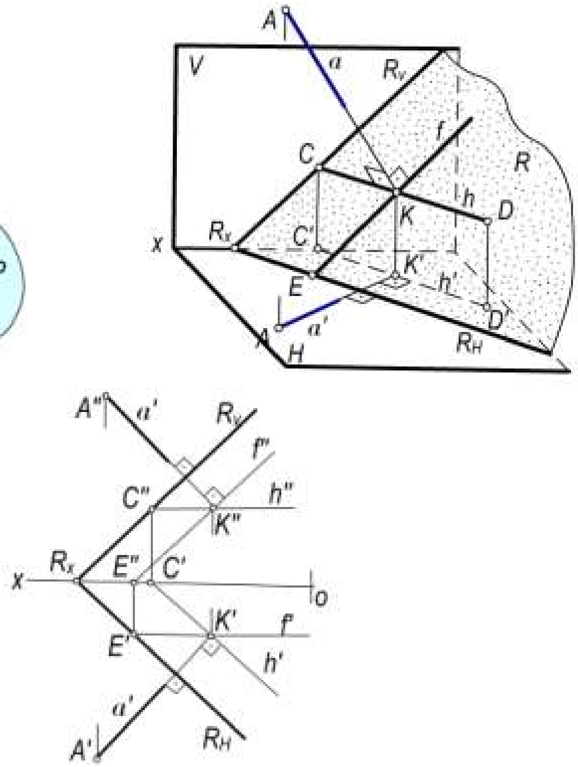
P tekislikning *h* gorizontalini gorizontal proyeksiyasi $h'\parallel P_H$ bo‘lgani uchun $a'\perp P_H$ bo‘ladi. Shuningdek, $a''\perp f''$ yoki $a''\perp P_V$ bo‘lishini isbotlash qiyin emas (4.47,a-rasm). Demak, $a\perp P$ bo‘lsa, $a'\perp h'$ va $a''\perp f''$ yoki $a'\perp P_H$ va $a''\perp P_V$ bo‘ladi (4.47,b-rasm).

Fazoda to‘g‘ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo‘lishi uchun, uning gorizontal proyeksiyasi tekislik gorizontalining gorizontal proyeksiyasiga, frontal proyeksiyasi esa tekislik frontalining frontal proyeksiyasiga va profil proyeksiyasi tekislik profilining profil proyeksiyasiga perpendikulyar bo‘lishi kerak.

Agar tekislik chizmada izlari bilan berilgan bo‘lsa, unga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning bir nomli proyeksiyalari tekislikning bir nomli izlariga mos ravishda perpendikulyar bo‘ladi (4.48-rasm).

To‘g‘ri chiziq va tekislikning o‘zaro perpendikulyarlik shartidan foydalanib ko‘pgina metrik masalalarni yechish mumkin.





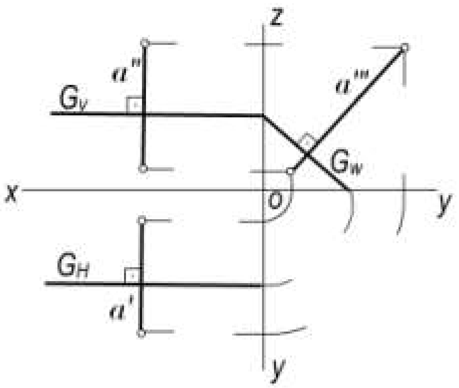
a) b)

4.46-rasm **4.47-rasm**

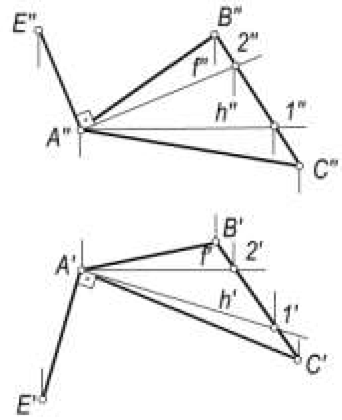
1-masala. ΔABC bilan berilgan tekislikning A uchidan unga perpendikulyar o‘tkazilsin (4.49-rasm).

Echish. Masalani quyidagi algoritm bo‘yicha yechamiz.

1. ΔABC ($\Delta A'B'C'$, $\Delta A''B''C''$) tekislikning h(h', h'') gorizontali va f(f', f'') frontali o‘tkaziladi.
2. Tekislikning A nuqtasining A' va A'' proyeksiyalaridan ixtiyoriy uzunlikda $A'E' \perp h'$ va $A''E'' \perp f''$ qilib perpendikulyarning proyeksiyalarini yasaladi.



4.48-rasm



4.49-rasm

2-masala. $A(A', A'')$ nuqta orqali $l(l', l'')$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar tekislik o‘tkazilsin (4.50-rasm).

Echish. Buning uchun:

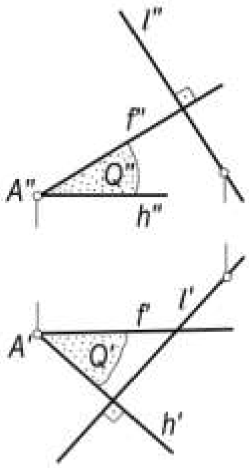
- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan $h' \perp l'$ va $h'' \parallel Ox$ qilib izlangan tekislik gorizontalining proyeksiyalarini o‘tkaziladi;
- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan $f' \parallel Ox$ va $f'' \perp l''$ qilib tekislik frontalining proyeksiyalarini o‘tkaziladi;
- hosil bo‘lgan $h \cap f(h' \cap f' \wedge h'' \cap f'')$ kesishuvchi chiziqlar izlangan tekislikni ifoda qiladi.

Tekislikning gorizontali $h \perp l$ va frontali $f \perp l$ bo‘lgani uchun bu tekislik l to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘ladi.

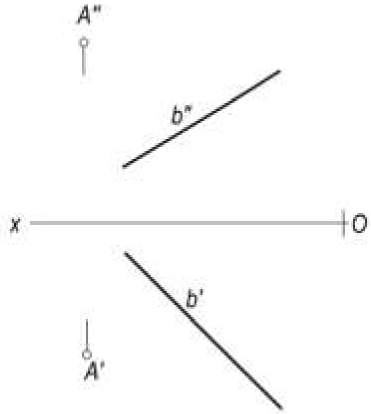
3-masala. $A(A', A'')$ nuqta orqali o‘tuvchi va $b(b', b'')$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan tekislikning izlari qurilsin (4.51–rasm).

Echish.

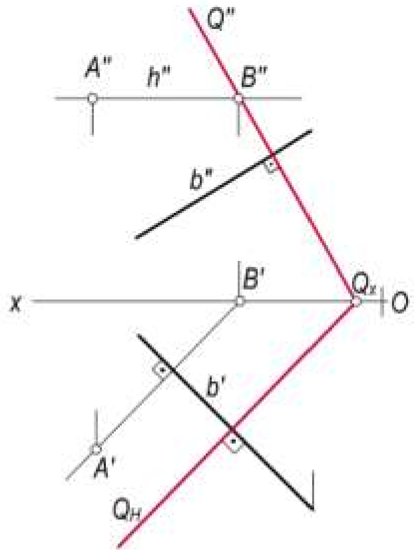
- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan $h' \ni A'$ va $h' \perp b'$ va $h'' \ni A''$ va $h'' \parallel Ox$ qilib tekislikning gorizontali o‘tkaziladi (4.52-rasm).
- gorizontalning frontal B izining B' va B'' proyeksiyalarini yasaladi.
- Q tekislikning Q_V frontal izini $Q_V \ni B''$ va $Q_V \perp b''$ qilib o‘tkaziladi. Tekislikning Q_H gorizontal izini esa Q_X dan $Q_H \ni Q_X$ va $Q_H \perp b'$ (yoki $Q_H \parallel h'$) qilib o‘tkaziladi.



4.50-rasm

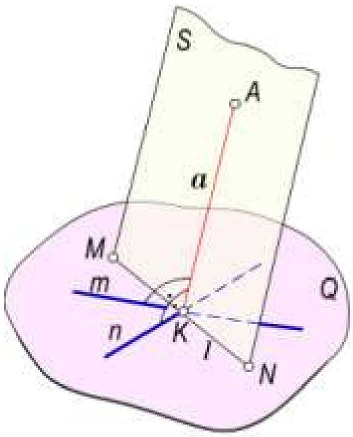


4.51-rasm



4.52-rasm

Natijada, $Q_H \perp b'$ va $Q_V \perp b''$ bo‘lgani uchun $Q \perp b$ bo‘ladi. Bu misolni tekislikning frontal chizig‘ini o‘tkazish yo‘li bilan ham yechish mumkin.



4.53-rasm

Nuqta va tekislik orasidagi masofani aniqlash. Nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikulyarning uzunligi bilan aniqlanadi. Bu perpendikulyarning uzunligini aniqlash uchun uning tekislikdagi asosini yasash zarur.

Nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofani qo‘yidagi yasash algoritmi bo‘yicha aniqlanadi (4.53-rasm).

- A nuqtadan Q tekislikka a perpendikulyar o‘tkaziladi: $a \ni A$ va $a \perp Q$.
- Bu perpendikulyarning Q tekislik bilan kesishgan K nuqtasi (asosi) aniqlanadi: $K = a \cap Q$.

Buning uchun:

- a perpendikulyardan o‘tuvchi yordamchi $S \supset a$ tekislik o‘tkaziladi;
- Q va S tekisliklarning l kesishish chizig‘i yasaladi;
- a perpendikulyarning tekisliklarning kesishish chizig‘i l bilan kesishgan K nuqtasi topiladi: $K = a \cap l$. Chizmadagi AK kesma A nuqtadan Q tekislikkacha bo‘lgan izlangan masofa bo‘ladi.

1-masala. Berilgan A (A', A'') nuqtadan Q (Q_H, Q_V) tekislikkacha bo‘lgan masofani aniqlansin (4.54-rasm).

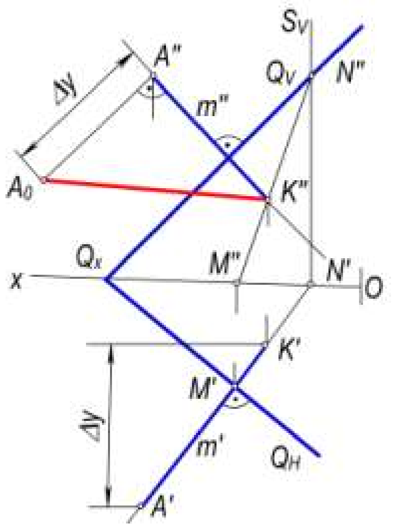
Yechish. Yuqorida keltirilgan yasash algoritmiga asosan:

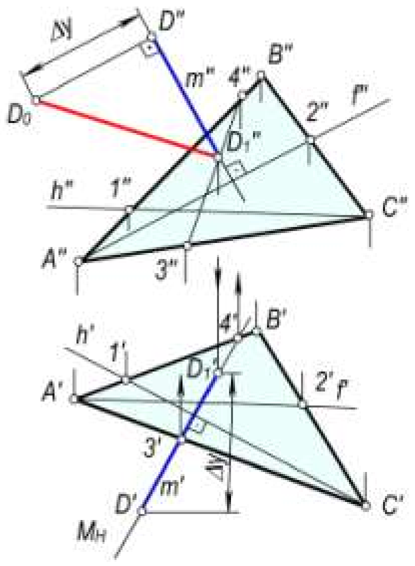
- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan Q tekislikning Q_H va Q_V izlariga mos ravishda perpendikulyarning a' va a'' proyeksiyalari o‘tkaziladi: $a' \ni A'$, $a' \perp Q_H$ va $a'' \ni A''$, $a'' \perp Q_V$.
- Bu perpendikulyarning Q tekislik bilan kesishish nuqtasining proyeksiyalarini aniqlash uchun:
  - a perpendikulyardan yordamchi gorizontal proyeksiyalovchi $S(S_H, S_V)$ tekislik o‘tkaziladi;
  - Q va S tekisliklarning kesishish chizig‘i $MN(M'N', M''N'')$ bilan $a(a', a'')$ perpendikulyarning kesishish nuqtasi K ning K' va K'' proyeksiyalarini aniqlanadi.
- Chizmada hosil bo‘lgan $A'K'$ va $A''K''$ izlangan masofaning proyeksiyalari bo‘ladi. Bu masofaning haqiqiy o‘lchami to‘g‘ri burchakli $\Delta A_0A''K''$ ning A_0K'' gipotenuzasi bo‘ladi.

2-masala. D(D′, D″) nuqtadan $\Delta ABC(\Delta A'B'C', \Delta A''B''C'')$ tekislikkacha bo‘lgan masofa aniqlansin (4.55-rasm).

Yechish. Masalani quyidagi yasash algoritmi asosida yechiladi.

- ΔABC tekislikning gorizontal va frontal chiziqlarining proyeksiyalari o‘tkaziladi.
- D nuqtaning D′ va D″ proyeksiyalaridan perpendikulyarning m' va m'' proyeksiyalari $m' \ni D'$, $m' \perp h'$ va $m'' \ni D''$, $m'' \perp f''$ qilib o‘tkaziladi.
- Perpendikulyarning ΔABC tekislik bilan kesishgan nuqtasi D_1 ning D_1' va D_1'' proyeksiyalarini aniqlanadi.

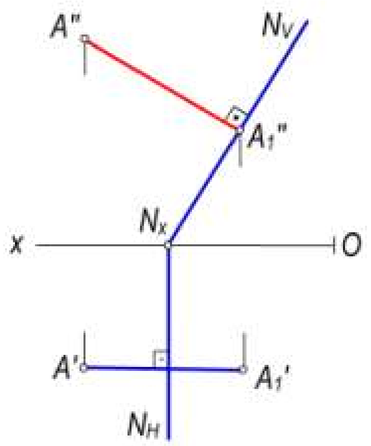


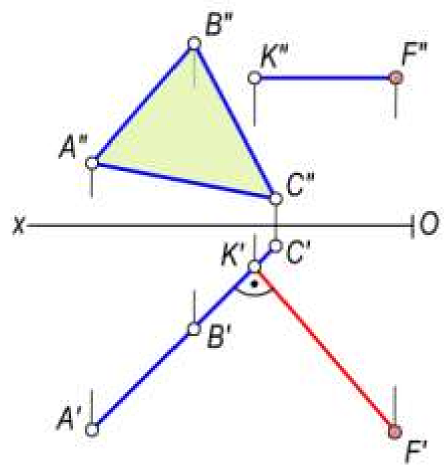


4.54-rasm **4.55-rasm**

- m perpendikulyardan yordamchi gorizontal proyeksiyalovchi $M(M_H, M_V)$ tekislik o‘tkaziladi;
- ΔABC va M tekisliklarning kesishish chizig‘ining $3'4'$ va $3''4''$ proyeksiyalarini yasaladi;
- tekisliklarning kesishish chizig‘i proyeksiyalari $3'4'$ va $3''4''$ bilan m', m'' perpendikulyarning kesishish D_1 nuqtasining D_1' va D_1'' proyeksiyalarini aniqlanadi: $D_1''=m''\cap 3''4''$ va $D''\in m''$

Chizmada hosil bo‘lgan $D'D_1'$ va $D''D_1''$ proyeksiyalar izlangan DD_1 masofaning proyeksiyalari bo‘ladi. Uning haqiqiy o‘lchami to‘g‘ri bo‘rchakli $\Delta D_0D''D_1''$ning D_0D_1'' gipotenuzasidan iborat bo‘ladi.



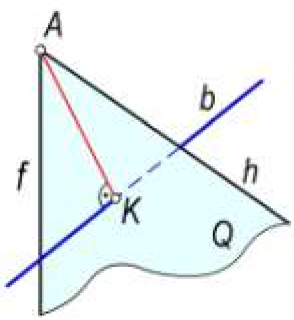


4.56-rasm **4.57-rasm**

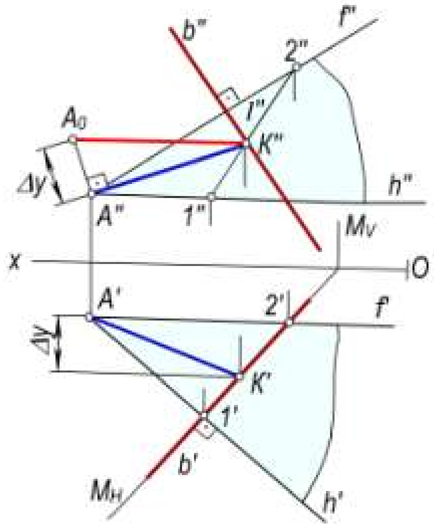
Agar tekislik xususiy vaziyatda berilsa, u holda berilgan nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofani aniqlash uchun qo‘shimcha yasashlar talab qilinmaydi. Masalan, $A(A', A'')$ nuqtadan $N(N_H, N_V)$ frontal proyeksiyalovchi tekislikkacha bo‘lgan masofaning haqiqiy o‘lchami (4.56-rasm) nuqtaning frontal A'' proyeksiyasidan tekislikning N_V frontal iziga tushirilgan perpendikulyarning $A''K''$ frontal proyeksiyasiga teng bo‘ladi.

4.57-rasmda $F(F', F'')$ nuqtadan gorizontal proyeksiyalovchi $\Delta ABC(\Delta A'B'C', \Delta A''B''C'')$ tekislikkacha bo‘lgan masofani aniqlash tasvirlangan.

Nuqta va to‘g‘ri chiziq orasidagi masofani aniqlash. To‘g‘ri chiziq va unga tegishli bo‘lmagan nuqta orasidagi masofa shu nuqtadan mazkur to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning uzunligi bilan o‘lchanadi.



a)



b)

4.58-rasm

Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani quyidagi tartibda aniqlanadi (4.58,a-rasm).

- A nuqtadan b to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar qilib Q tekislik o‘tkaziladi: $Q \ni A$, $Q \perp b$.
- Berilgan b to‘g‘ri chiziqning Q tekislik bilan kesishish K nuqtasini aniqlanadi: $A_1 = b \cap Q$.
- A va K nuqtalarni o‘zaro tutashtirilsa hosil bo‘lgan AK kesma A nuqtadan b to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa bo‘ladi.

Chizmada $A(A',A'')$ nuqtadan $b(b',b'')$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani (4.58,b-rasm) aniqlash uchun:

- A nuqtadan b to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar Q tekislik o‘tkazish uchun bu tekislikning $h(h',h'')$ gorizontali va f(f', f ″) frontalini $A(A', A'')$ nuqtadan $b(b',b'')$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar qilib o‘tkaziladi: ya’ni $h' \ni A'$, $h' \perp b'$ va $h'' \ni A''$, $h'' \| Ox$ hamda $f' \ni A'$, $f'' \| Ox$ va $f' \ni A'$, $f'' \perp b''$.
- Berilgan b to‘g‘ri chiziqning Q tekislik bilan kesishish nuqtasi K ning K' va K'' proyeksiyalari aniqlash uchun $b(b', b'')$ to‘g‘ri chiziqdan yordamchi gorizontal proyeksiyalovchi $M(M_H, M_V)$ tekislik o‘tkaziladi. Q va M tekisliklarning kesishish chizig‘i $12 = Q \cap M$ ning $1'2'$, $1''2''$ proyeksiyalari yasaladi.
- Chizmada b to‘g‘ri chiziqning 12 chiziq bilan kesishgan K nuqtasining frontal proyeksiyasi $K'' = b'' \cap 1''2''$ bilan aniqlanadi. Uning K' gorizontal proyeksiyasi esa b' chiziqqa tegishli bo‘ladi.
- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalarini K nuqtaning K' va K'' proyeksiyalari bilan tutashtiriladi. Hosil bo‘lgan $A'K'$ va $A''K''$ kesmalar A nuqtadan b to‘g‘ri chiziqqacha masofaning proyeksiyalari bo‘ladi.

Chizmadagi A_0K'' kesma A nuqtadan b to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofaning haqiqiy o‘lchami bo‘lib, u to‘g‘ri burchakli $\Delta A_0A''K''$ yasash yo‘li bilan aniqlangan.

Shunindek, bu turdagi misolni $A(A', A'')$ nuqtadan o‘tuvchi $b(b', b'')$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan Q tekislikni izlari orqali o‘tkazish yo‘li bilan ham yechish mumkin.

4.11-§. Tekisliklarning o‘zaro perpendikulyarligi

Ta’rif. Tekislikka perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi barcha tekisliklar berilgan tekislikka **perpedikulyar** bo‘ladi.

Bu ta’rifdan quyidagi xulosaga kelish mumkin, ya’ni tekislikka tegishli to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan har qanday tekislik mazkur tekislikning o‘ziga ham perpendikulyar bo‘ladi (4.59 -rasm).

Demak, bir-biriga perpendikulyar bo‘lgan tekisliklarni yasash ikki usul bilan bajarilishi mumkin:

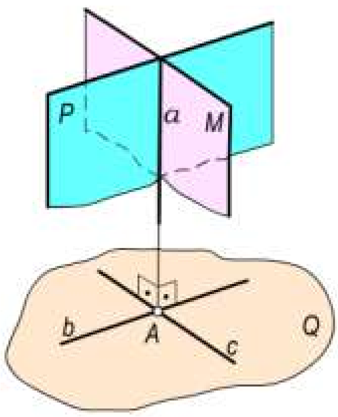
- Tekislikka perpedikulyar to‘g‘ri chiziqdan tekislik o‘tkazish
- Tekislikka tegishli to‘g‘ri chiziqqa perpedikulyar tekislik o‘tkazish.

Tekislikning ikki tekislikka perpendikulyarligi

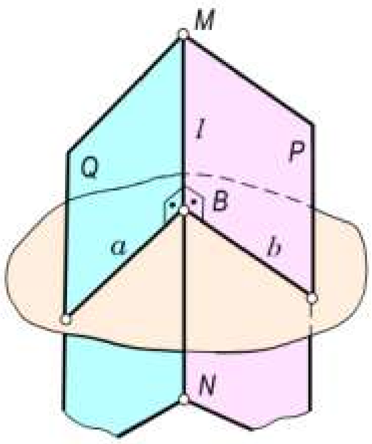
Ta’rif. Agar biror tekislik ikki tekislikka umumiy bo‘lgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lsa, u holda bu **tekislik har ikkala tekisliklarga ham perpendikulyar** bo‘ladi.

Ma’lumki, *Q* va *P* tekisliklarga umumiy bo‘lgan to‘g‘ri chiziq ularning *l* kesishish chizig‘i bo‘ladi. Tekisliklarning *l* kesishish chizig‘ida ixtiyoriy *B* nuqta tanlab olamiz (4.60-rasm). Bu nuqtadan *l* ga perpendikulyar qilib *a* va *b* chiziqlarni o‘tkazamiz. Natijada $a \cap b$ kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar *T* tekislikni hosil qiladi. Bu tekislik esa berilgan *Q* va *P* tekisliklarga perpendikulyar bo‘ladi.

Demak, berilgan *T* tekislikka perpedikulyar bo‘lgan *l* to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi har qanday tekislik unga perpendikulyar bo‘ladi.



4.59-rasm



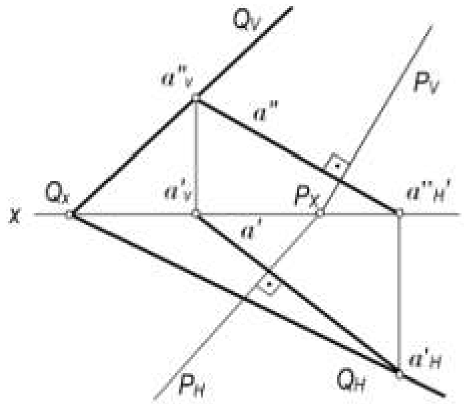
4.60-rasm

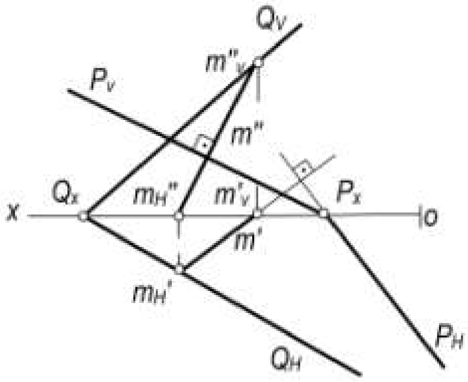
1-masala. $P(P_H, P_V)$ tekislikka perpendikulyar va Q_x dan o‘tuvchi *Q* tekislik izlari bilan o‘tkazilsin (4.61 -rasm).

Echish.

- *P* tekislikka perpendikulyar bo‘lgan ixtiyoriy *a* to‘g‘ri chiziq o‘tkaziladi.
- Bu to‘g‘ri chiziqning a_H', a_H'' va a_V', a_V'' izlarining proyeksiyalarini yasaladi.
- Izlangan *Q* tekislikning gorizontal Q_H izini $Q_H \supset a_H'$ va $Q_H \supset Q_x$ qilib o‘tkaziladi, uning frontal Q_V izini $Q_V \supset a_V''$ va $Q_V \supset Q_x$ qilib o‘tkaziladi.

Bu masalani quyidagicha yechish ham mumkin: *Q* tekislikka perpendikulyar va P_x dan o‘tuvchi tekislikni o‘tkazish uchun (4.62 -rasm) *Q* tekislikda ixtiyoriy $m \supset Q$ to‘g‘ri chiziq olamiz. *P* tekislikning izlarini P_x dan $P_H \perp m'$ va $P_V \perp m''$ qilib o‘tkaziladi. Natijada, $P \perp Q$ bo‘ladi.





4.61-rasm **4.62-rasm**

2-masala. Kesishuvchi $a \cap b$($a' \cap b'$, $a'' \cap b''$) chiziqlar bilan berilgan tekislikka d (d', d'') to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi perpendikulyar tekislik o‘tkazish talab qilinsin (4.63 -rasm).

Echish:

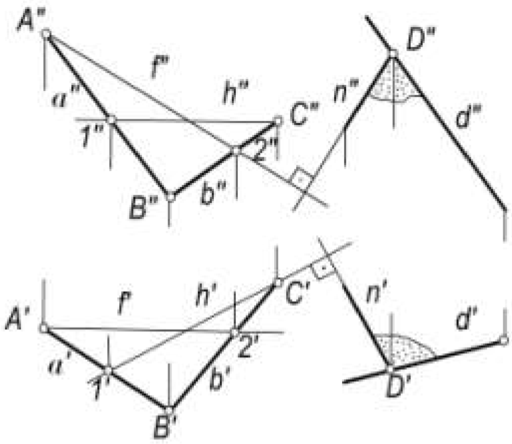
- berilgan tekislikning gorizontali va frontalining h', h'' va f′, f″ chiziqlari o‘tkaziladi;
- d to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy D(D′, D″) nuqtasidan $n(n', n'')$ to‘g‘ri chiziqning proyeksiyalarini $n' \perp h'$ va $n'' \perp f''$ qilib o‘tkaziladi. Hosil bo‘lgan $d' \cap n'$ va $d'' \cap n''$ kesishuvchi chiziqlar hosil qilgan tekislik berilgan tekislikka perpendikulyar tekislikning proyeksiyalari bo‘ladi.

3-masala. A(A', A'') nuqtadan Q(Q_H, Q_V) va P(P_H, P_V) tekisliklarga perpendikulyar bo‘lgan T(T_H, T_V) tekislik o‘tkazish talab qilinsin (4.64 -rasm).

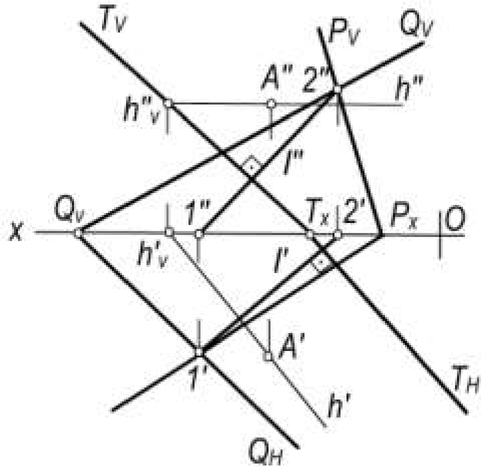
Yechish:

- Q va P tekisliklarning kesishish chizig‘ining l', l'' proyeksiyalarni yasaladi;
- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan izlangan tekislikning gorizontali (yoki frontali) ni tekisliklarning kesishish chizig‘iga perpendikulyar qilib o‘tkaziladi: $h' \perp l'$ Λ $h' \ni A'$ va $h'' \| Ox$ Λ $h'' \ni A''$ va uning izlarning h_V', h_V'' proyeksiyalarni yasaladi;
- izlangan tekislikning frontal izini $T_V \supset h''$, $T_V \perp l''$ $T_H \ni T_X$, $T_H \perp l'$ qilib o‘tkaziladi.

Natijada, berilgan ikki tekislikka perpendikulyar bo‘lgan uchinchi tekislik yasaladi: $T \perp Q$ va $T \perp P$.



4.63-rasm



4.64-rasm

4.12-§. To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak aniqlash

Ta’rif. To‘g‘ri chiziq bilan uning tekislikdagi ortogonal proyeksiyasi orasidagi burchak shu **to‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak** deyiladi.

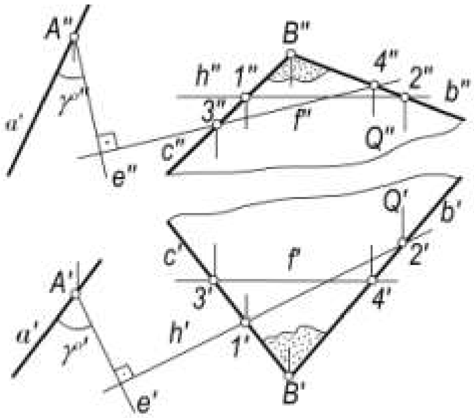
a) **b)**

4.65-rasm

To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak 4.65,*a*-rasmda ko‘rsatilgan. Bu fazoviy modeldan foydalanib quyidagi yasash algoritmlarini keltirish mumkin:

- Berilgan *a* to‘g‘ri chiziqni *Q* tekislik bilan kesishish nuqtasi aniqlanadi: $L=a\cap Q$.
- To‘g‘ri chiziqda ixtiyoriy *B* nuqta tanlab olinadi. Bu nuqtadan berilgan *Q* tekislikka *n* perpendikulyarni tushirib, uning *Q* tekislik bilan kesishuv nuqtasini aniqlanadi: $B' = n\cap Q$.
- So‘ngra *L* va *B* nuqtalarni o‘zaro tutashtirish natijasida hosil bo‘lgan burchak *a* to‘g‘ri chiziq va *Q* tekislik orasidagi φ burchak bo‘ladi.

Chizmada to‘g‘ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni aniqalsh uchun yuqorida keltirilgan yasash algoritmlarni to‘g‘ri chiziq bilan tekislikning perpendikulyarligi va kesishishi qoidalaridan foydalanib bajariladi. Bunda φ burchak *a* to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy *B* nuqtasidan *Q* tekislikka tushirilgan perpendikulyar orasidagi γ burchak orqali aniqlanadi (4.65-*a*,b rasm). $\varphi° + \gamma° = 90°$ bo‘lgani uchun $\varphi° = 90° - \gamma^0$ bo‘ladi.



4.66-rasm

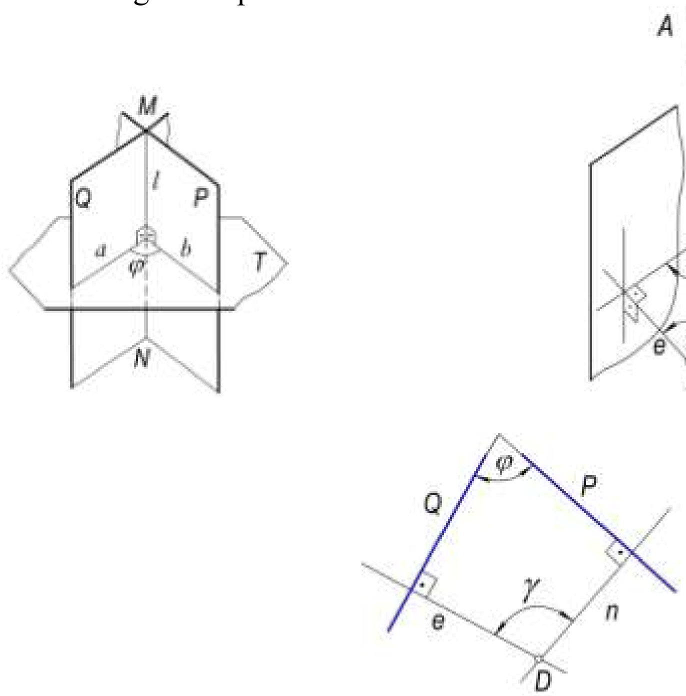
Masala. $Q(b \cap c)$ tekislik va a to‘g‘ri chiziq orasidagi φ burchakni aniqlansin (4.66-rasm).

Yechish:

- tekislikning h (h', h'') gorizontali va f (f', f'') frontali o‘tkaziladi;
- to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy A(A', A'') nuqtasidan tekislikning gorizontali va frontaliga *e(e', e'')* perpendikulyar o‘tkaziladi. Bunda: $e' \ni A'$, $e' \perp h'$ va $e'' \ni A''$, $e'' \perp f''$ bo‘ladi.
- a va e to‘g‘ri chiziqlar orasidagi $\gamma(\gamma', \gamma'')$ burchak belgilanadi. Natijada, $\varphi° = 90° - \gamma°$ aniqlanadi.

4.13-§. Ikki tekislik orasidagi burchak

Ikki tekislik orasidagi burchak ularning kesishish chizig‘iga perpendikulyar bo‘lgan ikki to‘g‘ri chiziqlar orasidagi chiziqli burchak bilan o‘lchanadi.



a) b) v)

4.67-rasm

Bu chiziqli burchakni quyidagi yasash algoritmlari bilan aniqlanadi (4.67- *a*, rasm).

- P va Q tekisliklarning l kesishish chizig‘ini yasaladi.
- Tekisliklarning l kesishish chizig‘iga tegishli ixtiyoriy $A \ni l$ nuqtadan perpendikulyar qilib T tekislik o‘tkaziladi. Bu tekislik Q va P tekisliklarga ham perpendikulyar bo‘ladi.
- T tekislikning Q va P tekisliklar bilan kesishish a va b chiziqlar yasaladi: $a = Q \cap T$ va $b = P \cap T$.

- Tekisliklarning kesishish chiziqlari orasidagi $a^{\wedge}b=\varphi$ izlangan burchak bo‘ladi.

P va *Q* ikki tekisliklar orasidagi burchakni quyidagicha ham aniqlash mumkin (4.67-b, rasm):

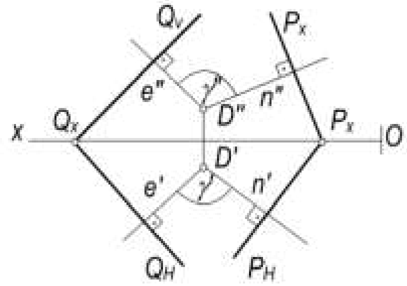
Fazoning ixtiyoriy D nuqtasidan berilgan *Q* va *P* tekisliklarga ye va *n* perpendikulyarlar tushirib, bu perpendikulyarlar orasidagi γ burchak orqali φ burchakning qiymati $\varphi=180^{o}-\gamma$ formula orqali aniqlanadi.

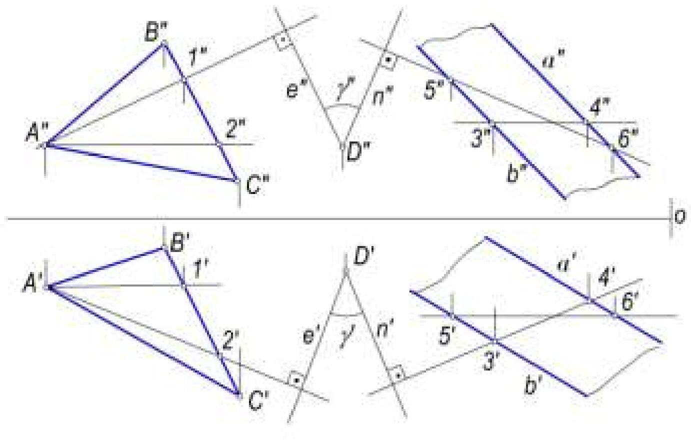
1-masala. $Q(Q_H, Q_V)$ va $P(P_H, P_V)$ tekisliklar orasidagi burchakni aniqlansin (4.68-rasm).

Yechish. Ixtiyoriy D(D′,D″) nuqtani tanlab olamiz (4.68-rasm) va uning D′, D″ proyeksiyalaridan ye va *n* perpendikulyarlarning proyeksiyalarini $e'\perp Q_H$ Λ $e''\perp Q_V$ va $n'\perp P_H$ Λ $n''\perp P_V$ qilib o‘tkaziladi. Chizmada hosil bo‘lgan γ burchakning γ′ va γ″ proyeksiyalari orqali uning haqiqiy qiymatini aniqlab, φ burchakni $\varphi=180^{o}-\gamma$ formula orqali topamiz.

2-masala. Δ*ABC* va *a*||*b* to‘g‘ri chiziqlarning proyeksiyalari bilan berilgan tekisliklar orasidagi burchakni aniqlansin.

Yechish. Ixtiyoriy D(D′, D″) nuqta tanlab olinadi (4.69-rasm). Uning D′ va D″ proyeksiyalaridan tekisliklarning gorizontallari va frontallariga $ye'\perp h_1''$, $e''\perp f_1''$ va $n'\perp h_2'$, $n''\perp f_2''$ qilib perpendikulyarlar o‘tkaziladi. Natijada, hosil bo‘lgan γ(γ′, γ″) burchakning haqiqiy o‘lchamini aniqlab, so‘ngra $\varphi=180°-\gamma°$ burchak aniqlanadi.





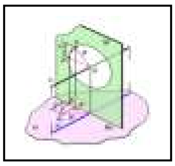
4.68-rasm

4.69-rasm

Nazorat savollari

1. Tekislik chizmada qanday berilishi mumkin?
2. Tekislikning izi deb nimaga aytiladi?
3. Qanday tekisliklar proyeksiyalovchi deyiladi?
4. Gorizontal va gorizontal proyeksiyalovchi hamda frontal va frontal proyeksiyalovchi tekisliklarning farqi nimada?
5. Qanday chiziqlar tekislikning bosh chiziqlari deyiladi?

6. Tekislikning eng katta og‘ma chiziqlari yordamida qanday burchaklarni aniqlanish mumkin?
7. Ikki tekislikning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasashning umumiy algoritmi qanday?
8. To‘g‘ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasini yasashning umumiy algoritmi nimadan iborat?
9. Tekislikka parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq qanday ketma-ketlikda o‘tkaziladi?
10. Tekis chizmada berilgan ikki tekislikning o‘zaro parallelligi qanday tekshiriladi?
11. Tekislikka perpendikulyar to‘g‘ri chiziqning proyeksiyalari qanday vaziyatda bo‘ladi?
12. Qanday tekisliklar o‘zaro perpendikulyar deyiladi?
13. To‘g‘ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak qanday tartibda aniqlanadi?
14. Ikki tekislik orasidagi burchak qanday tartibda aniqlanadi?



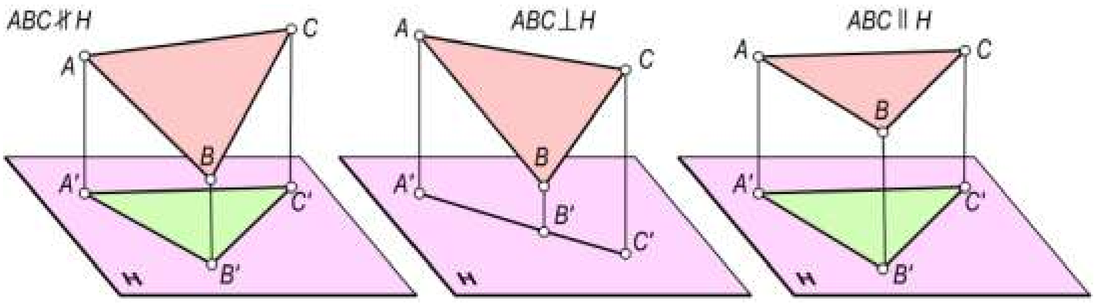
V bob. ORTOGONAL PROEKSIYALARNI QAYTA TUZISH USULLARI

5.1-§. Umumiy ma'lumotlar

Geometrik shaklning proyeksiyalaridagi holatlari uning fazoda proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan joylashuviga bog'liq. Umumiy vaziyatdagi geometrik shakllarning proyeksiyalari proyeksiyalar tekisliklariga qisqarib proyeksiyalash (5.1,a,b–rasm).

Agar geometrik shaklning proyeksiyasi originaliga teng bo'lib proyeksiyalansa, bu shaklga oid metrik xarakteristikalarni tomonlarining haqiqiy o'lchamlari, uchlaridagi burchaklarning qiymatlari va boshqa xarakteristikalarni aniqlash mumkin (5.1,v–rasm).

Demak, shunday xulosaga kelish mumkinki, agar geometrik shakl proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan fazoda xususiy vaziyatda berilsa yoki umumiy vaziyatda berilgan geometrik shakl xususiy vaziyatga keltirilsa, bu bilan metrik va pozision masalalarni yechish mumkin. Shuning uchun ayrim hollarda umumiy vaziyatda berilgan geometrik shakllarning berilgan ikki proyeksiyasi asosida maqsadga muvofiq ravishda yangi xususiy vaziyatga keltirilgan proyeksiyalari tuziladi.



a) **b)** **v)**

5.1-rasm.

Geometrik shaklning berilgan ortogonal proyeksiyalari asosida yangi proyeksiyalarini yasash *ortogonal proyeksiyalarni qayta tuzish* deyiladi.

Umumiy vaziyatda berilgan geometrik shakllarni xususiy vaziyatga keltirish asosan ikki usulda bajariladi.

1. Umumiy vaziyatda berilgan geometrik shaklni fazoda harakatlantirib, proyeksiyalar tekisligiga nisbatan xususiy vaziyatga keltirish *tekis–parallel harakatlantirish usuli* deyiladi.
2. *Aylantirish usuli*. Bunda proyeksiyalar tekisliklari o'z holatlarini o'zgartirmaydi. Proyeksiyalanuvchi shakl ularga qulay holga kelguncha biror o'q atrofida aylantiriladi.
3. Geometrik shaklning fazoviy vaziyati o'zgartirilmasdan proyeksiyalar tekisliklari sistemasini unga nisbatan xususiy vaziyatga kelguncha yangi proyeksiyalar tekisliklari bilan almashtirish - *proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuli* deyiladi.

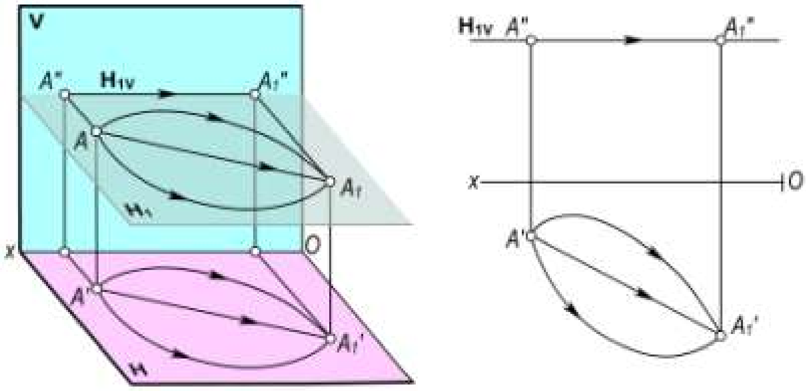
Quyida bu usullarni alohida ko'rib chiqamiz.

5.2-§. Tekis-parallel harakatlantirish usuli

Tekis–parallel harakatlantirish usulida geometrik shaklni proyeksiyalar tekisliklari sistemasiga nisbatan vaziyati maqsadga muvofiq ravishda o'zgartirish uchun uning barcha nuqtalarining harakatlanish trayektoriyalari bir–biriga parallel tekisliklarda harakatlantirish yo‘li bilan bajariladi.

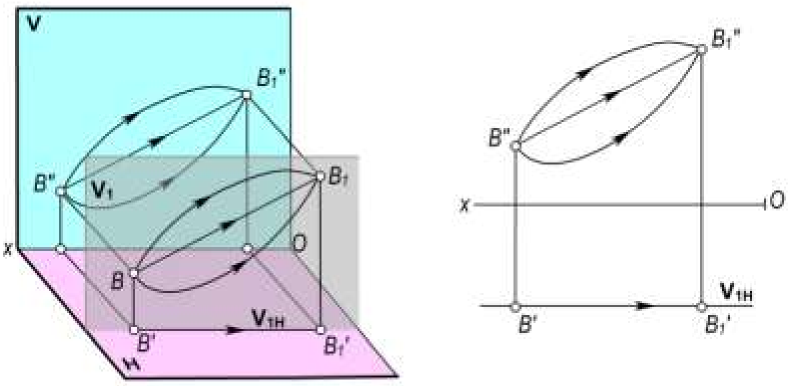
Harakatlantirish tekisliklarining vaziyati va geometrik shakl nuqtalari harakatlanish trayektoriyasining xarakteriga qarab tekis–parallel harakatlantirish usuli *parallel harakatlantirish* va *aylantirish* usullariga bo‘linadi.

Parallel harakatlantirish usuli. Bu usulda fazoda berilgan geometrik shaklning har bir nuqtasi proyeksiyalar tekisligiga parallel bo‘lgan gorizontal yoki frontal tekisliklarda harakatlantiriladi. Shuning natijasida hosil bo‘lgan yangi proyeksiyasi proyeksiyalar tekisligiga nisbatan vaziyati o‘zgaradi. 5.2,a,b–rasmda A nuqta H_1 gorizontal tekislikda harakatlantirilib A_1 vaziyatga keltirilgan. Bunda A nuqta A_1 vaziyatga qanday trayektoriya (to‘g‘ri yoki egri chiziqlar) bo‘ylab harakatlantirilishidan qat’iy nazar, uning A'' frontal proyeksiyasi (A_1'' vaziyatga) tekislikning H_{1V} izi bo‘yicha harakatlanadi. Shuningdek 5.3,a,b–rasmdagi B nuqta V_1 frontal tekislikda B_1 vaziyatga har qanday trayektoriya bo‘yicha harakatlantirilmasin, uning B' proyeksiyasi V_{1H} izi bo‘yicha harakatlanib, B'_1 vaziyatni egallaydi.



a) b)

5.2-rasm.



a) b)

5.3-rasm.

Yuqorida bayon etilganlardan quyidagi xulosaga kelish mumkin:

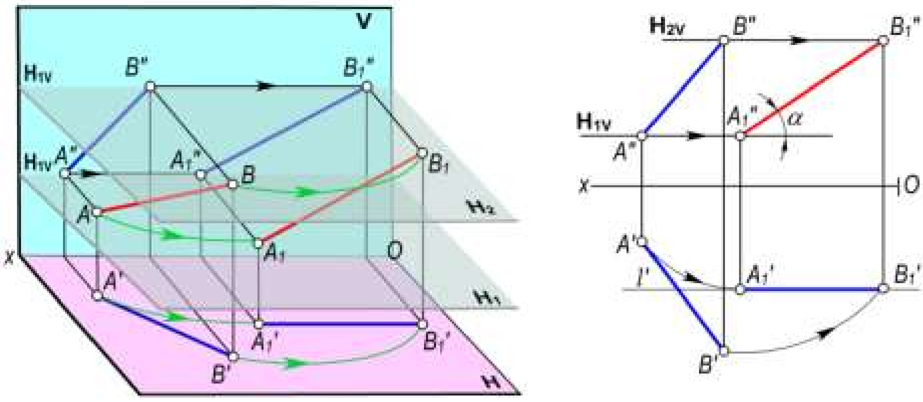
- Fazoda nuqtani gorizontal proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislikda har qanday trayektoriya bo‘yicha harakatlantirilsa ham, uning frontal proyeksiyasi Ox o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq bo‘yicha harakatlanadi.
- Fazoda nuqtani frontal proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislikda har qanday trayektoriya bo‘yicha harakatlantirilsa ham, uning gorizontal proyeksiyasi Ox o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq bo‘yicha harakatlanadi.

Parallel harakatlantirish usulining bu xususiyatlaridan foydalanib ayrim masalalarning yechilishini ko‘rib chiqamiz.

1–masala. Umumiy vaziyatda berilgan AB kesmani V tekislikka parallel vaziyatga keltirilsin (5.4,a,b–rasm).

Yechish. $AB \| V$ bo‘lishi uchun chizmada $A'B' \| Ox$ bo‘lishi kerak. Demak, bu misolni yechish uchun H tekislikda (5.4,a–rasm) ixtiyoriy A_1' nuqta tanlab, u orqali Ox o‘qiga parallel l' to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz va unga $A_1'B_1'=A'B'$ kesmani o‘lchab qo‘yamiz. Kesmaning yangi frontal proyeksiyasini parallel harakatlantirish xususiyatiga muvofiq aniqlaymiz: kesmaning A'' va B'' proyeksiyalari mos ravishda H_{1V} va H_{2V} bo‘yicha Ox o‘qiga parallel ravishda harakatlanadi va A_1'', B_1'' vaziyatlarga keladi. Natijada, V tekislikka parallel $A_1B_1(A_1'B_1',A_1''B_1'')$ to‘g‘ri chiziq kesmasining proyeksiyalari hosil bo‘ladi.

Shuningdek, AB kesma V tekislikka parallel bo‘lishi bilan birga uning haqiqiy o‘lchami va H tekislik bilan tashkil etgan α burchagi aniqlanadi.

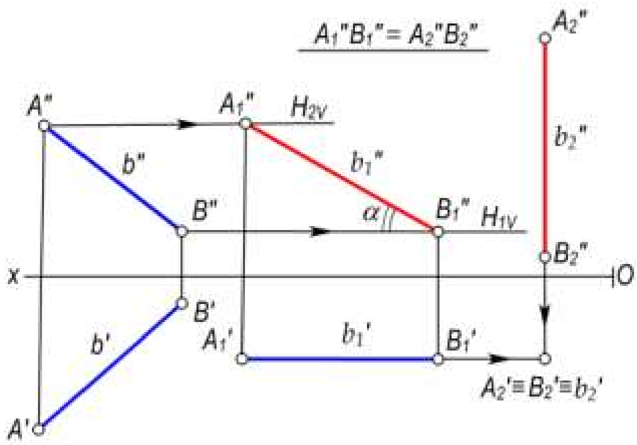


a) **b)**

5.4-rasm.

2–masala. Umumiy vaziyatdagi $AB(A'B',A''B'')$ kesma H tekislikka perpendikulyar vaziyatga keltirilsin (5.5–rasm).

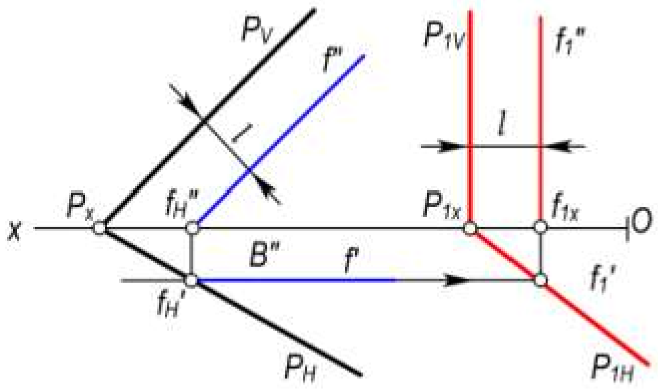
Yechish. Dastlab AB kesmani harakatlantirib, V tekislikka parallel $A_1B_1(A'_1B'_1,A_1''B_1'')$ vaziyatga keltiramiz. So‘ngra ixtiyoriy B_2'' nuqta tanlab olamiz va bu nuqtadan $b_2'' \perp Ox$ to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz va unga $A_2''B_2''=A_1''B_1''$ kesmani o‘lchab qo‘yamiz. Kesmaning gorizontal proyeksiyasi b_1'chiziq bo‘yicha harakatlanib, $A_2''\equiv B_2''\equiv\ b_2''$ bo‘lib proyeksiyalanadi.



5.5-rasm.

3–masala. Umumiy vaziyatda berilgan $P(P_H,\ P_V)$ tekislik H tekisligiga perpendikulyar vaziyatga keltirilsin (5.6–rasm).

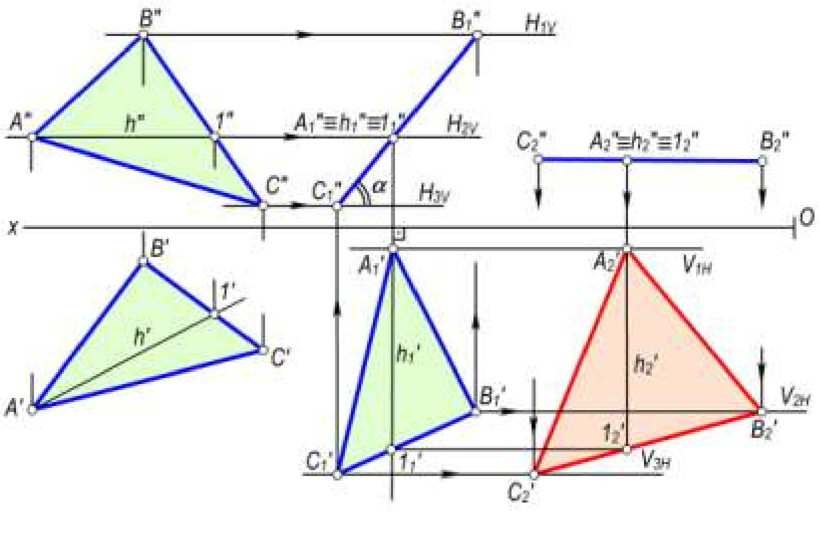
Yechish. P tekislikning ixtiyoriy f(f′, f″) frontali o‘tkaziladi. So‘ngra Ox o‘qida ixtiyoriy nuqtadan $f_1'' \perp Ox$ qilib o‘tkazamiz va chizmada ko‘rsatilgan ℓ masofada tekislikning frontal izi $P_{1V} \perp Ox$ (yoki $P_{1V} \| f_1''$) qilib o‘tkazamiz. Tekislikning P_{1H} gorizontal izi P_{1x} va f_1' nuqtalardan o‘tadi.



5.6-rasm

4–masala. Umumiy vaziyatdagi $\Delta ABC(\Delta A'B'C',\ \Delta A''B''C'')$ tekislikni H tekislikka parallel vaziyatga keltirilsin (5.7–rasm).

Echish. 1. ΔABC ni avval V tekislikka perpendikulyar vaziyatga keltiramiz. Buning uchun uchburchakning h(h′, h″) gorizontalini o‘tkazamiz. Chizmada ixtiyoriy A'_1 nuqta tanlab, bu nuqtadan $h'_1 \perp Ox$ qilib $\Delta A'_1B'_1C'_1 = \Delta A'B'C'$ yangi gorizontal proyeksiyasini yasaymiz.



5.7-rasm.

2. ΔABC ning yangi vaziyati V tekislikka perpendikulyar bo‘lgani uchun uning frontal proyeksiyasi $C_1''A_1''B_1''$ kesma tarzida proyeksiyalanadi.

3. Ixtiyoriy C_2'' nuqta tanlab, bu nuqtadan Ox o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz va unga $C_2''A_2''B_2'' = C_1''A_1''B_1''$ bo‘lgan kesmani o‘lchab qo‘yamiz. Parallel harakatlantirishning qoidasiga muvofiq uchburchak gorizontal proyeksiyasining A_2' B_2' va C_2' nuqtalari mos ravishda V_{1N}, V_{2N} va V_{3N} frontal tekisliklarning izlari bo‘yicha harakatlanishidan $\Delta A_2'B_2'C_2'$ hosil bo‘ladi. Natijada,

$\Delta A_2B_2S_2$ H ga parallel bo‘ladi va berilgan uchburchakning haqiqiy o‘lchamiga teng bo‘lgan proyeksiyasi hosil bo‘ladi.

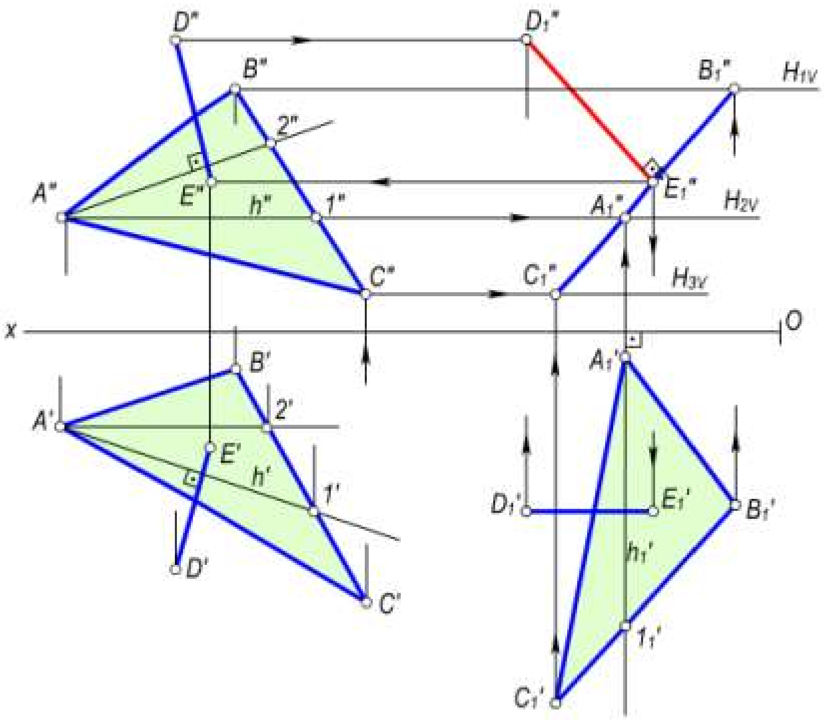
Chizmadagi α burchak ΔABC ning H tekislik bilan hosil qilgan burchagini ko‘rsatadi.

4–masala. D(D′, D″) nuqtadan $\Delta ABC(\Delta A'B'C', \Delta A''B''C'')$ tekislikkacha bo‘lgan masofa aniqlansin (5.8,a–rasm).

Yechish.

1. ΔABC ni parallel harakatlantirib, proyeksiyalar tekisliklarining biriga, masalan, V tekislikka perpendikulyar vaziyatga keltiramiz. Buning uchun mazkur uchburchakni h(h′, h″) gorizontalini V tekislikka perpendikulyar vaziyatga keltirib, $A_1'1_1'=A'1'$ va $\Delta A_1'B_1'S_1'=\Delta A'B'S'$ qilib yasaladi. D′ nuqtaning D_1' vaziyati ham planimetrik yasashlarga asosan yasaladi. Bunda uchburchakning yangi frontal proyeksiyasi $C_1''A_1''B_1''$ kesma tarzida proyeksiyalanadi. Parallel harakatlantirishning qoidalariga asosan D nuqtaning yangi D'_1 va D''_1 proyeksiyalarini aniqlaymiz.

2. Masofaning haqiqiy o‘lchami D_1'' nuqtadan $C_1''A_1''B_1''$ kesmaga tushirilgan $D_1''E_1''$ perpendikulyar bilan o‘lchanadi. Izlangan masofaning gorizontal proyeksiyasi $D_1'E_1'$ esa Ox o‘qiga parallel bo‘ladi.



5.8-rasm.

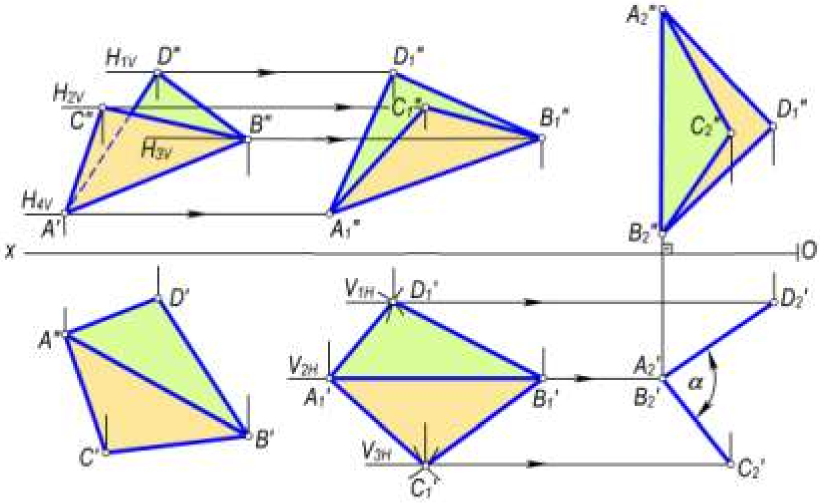
3. Izlangan masofaning proyeksiyalarini tekislikning berilgan proyeksiyalarida yasash uchun D nuqtaning D′ va D″ proyeksiyalaridan tekislikning h(h′, h″) gorizontali va f (f′, f″) frontaliga tushirilgan perpendikulyarlar proyeksiyalari bilan aniqlanadi. Parallel harakatlantirishning qoidasiga muvofiq E nuqtaning E'' va E' proyeksiyalarini ko‘rsatilgan yo‘nalish bo‘yicha D′ va D″ proyeksiyalardan tekislikka tushirilgan perpendikulyarning proyeksiyalarida topamiz.

5–masala. CABD($C'A'B'$D′, $C''A''B''$D″) ikki yoqli burchakning haqiqiy kattaligi parallel harakatlantirish usulidan foydalanib aniqlansin (5.9–rasm).

Yechish:

1. AB qirrani V tekislikka parallel qilib joylashtiriladi. Buning uchun chizma maydonining ixtiyoriy joyida $A'B'–A_1'B_1'$ va $A_1'B_1' \parallel Ox$ qilib joylashtiriladi.
2. A_1' va B_1' nuqtalarga nisbatan D_1', C_1' nuqtalarni planimetrik yasashlardan foydalanib yasaymiz. Hosil bo‘lgan A_1, C_1', B_1' va D_1' nuqtalar yangi gorizontal proyeksiya bo‘ladi.

3. Parallel harakatlantirish qoidasiga asosan A″, C'', B'' va D″ nuqtalar Ox o‘qiga parallel chiziq bo‘yicha harakat qilganligidan A_1'', C_1'', B_1'' va D_1'' yangi frontal proyeksiyalari yasaladi.
4. AB qirrani H tekisligiga perpendikulyar qilib joylashtiriladi. Buning uchun $A_1''B_1''=A_2''B_2''$ ni chizmaning ixtiyoriy joyida $A_2'B_2''\perp Ox$ qilib joylashtiramiz. $A''_2B''_2$ yangi frontal proyeksiya bo‘ladi.
5. C_2'' va D_2'' nuqtalar esa A_2'' va B_2'' nuqtalarga nisbatan planimetrik yasashlar bilan yasaladi.
6. Parallel ko‘chirish qoidasiga asosan A'_1 , C'_1, B'_1 va D'_1 nuqtalar Ox ga parallel harakat qilib, $A''_2\equiv B''_2$, C'_2 va D'_2 nuqtalarning yangi gorizontal proyeksiyalarini hosil qiladi.
7. Bu nuqtalar o‘zaro tutashtirilsa, $\angle D_2'A_2'C_2'=\alpha$ chiziqli burchak AB qirradagi ikki yoqli burchakni o‘lchaydi. Bu misolni AB qirrani H ga parallel qilib olishdan boshlab ham yechish mumkin.



5.9-rasm.

5.3-§. Aylantirish usuli

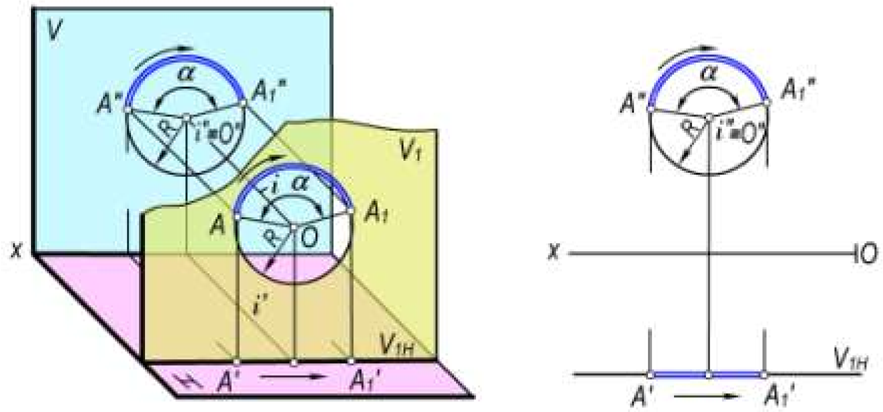
Aylantirish usuli parallel harakatlantirish usulining xususiy holi hisoblanadi. Bu usulda geometrik shaklga tegishli nuqtaning trayektoriyasi ixtiyoriy bo‘lmay, balki berilgan biror o‘qqa nisbatan aylana bo‘yicha harakatlanadi. Aylana markazi berilgan o‘qda joylashgan bo‘lib, aylanish radiusi esa harakatlanuvchi nuqta bilan aylanish o‘qi orasidagi masofaga teng bo‘ladi yoki aylanish tekisligini aylanish o‘qi bilan kesishgan nuqtasi bo‘ladi.

Aylanish o‘qlari proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan perpendikulyar, parallel, shuningdek, proyeksiyalar tekisligiga tegishli va boshqa vaziyatlarda bo‘lishi mumkin.

Quyida turli vaziyatlarda joylashgan aylanish o‘qlari atrofida aylantirish usullarni ko‘rib chiqamiz.

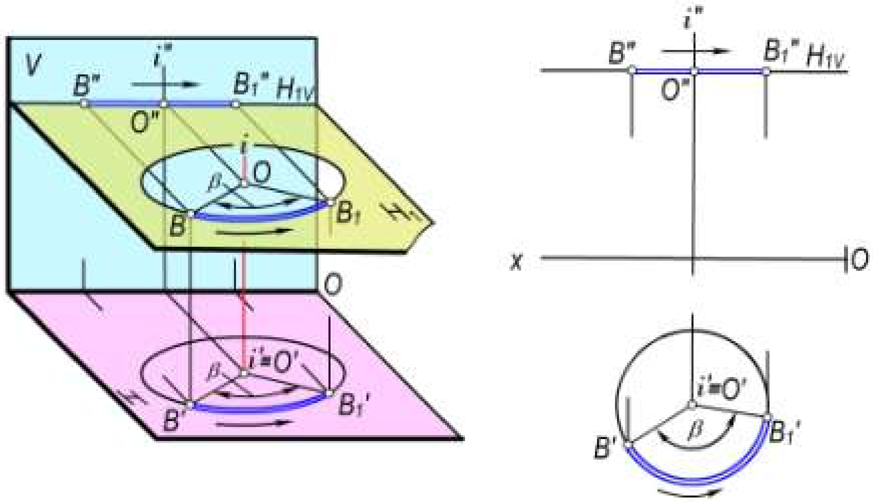
5.3.1. Geometrik shakllarni proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o‘q atrofida aylantirish. Nuqtani aylantirish. H va V tekisliklar sistemasida ixtiyoriy A nuqta va i aylanish o‘qi berilgan bo‘lsin (5.10 a–rasm). Agar A nuqtani $i\perp V$ aylanish o‘qi atrofida harakatlantirsak, mazkur nuqta V tekislikka parallel V_1 tekislikda radiusi OA ga teng aylana bo‘yicha harakatlanadi. Shuningdek, A nuqtaning harakatlanish trayektoriyasining gorizontal proyeksiyasi V_1 tekislikning V_{1N} izi bo‘yicha harakat qiladi. Chizmada V_1 tekislik V tekislikka parallel bo‘lgani uchun A nuqtaning frontal proyeksiyasi aylana bo‘yicha, gorizontal proyeksiyasi $V_{1N}\|Ox$ bo‘yicha harakat qiladi (5.11–rasm, *b*).

B nuqtaning *H* tekislikka perpendikulyar *i* o‘qi atrofida aylantirilishi 5.11–rasm, a da ko‘rsatilgan. *B* nuqta B_1 vaziyayatga radiusi *OB* ga teng aylana bo‘yicha *H* tekislikka parallel bo‘lgan N_1 tekislikda harakatlanadi. Bunda N_1 tekislik *H* tekislikka parallel bo‘lgani uchun *B* nuqta harakatlanish trayektoriyasining gorizontal proyeksiyasi aylana bo‘yicha, frontal proyeksiyasi N_1 tekislikning N_{1V} izi bo‘yicha Ox ga parallel bo‘lib harakatlanadi. (5.12,b–rasm).



a) **b)**

5.10-rasm.



a) **b)**

5.11-rasm.

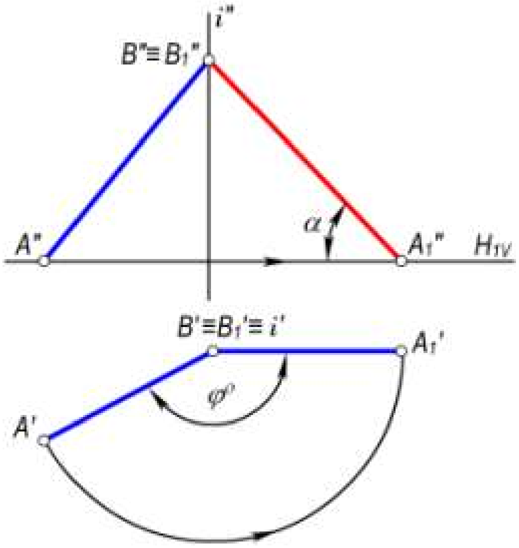
Yuqorida bayon qilinganlardan quyidagi xulosalarga kelamiz:

1-xulosa. Agar *A* nuqta frontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o‘q atrofida aylantirilsa, mazkur nuqtaning frontal proyeksiyasi aylana bo‘yicha, gorizontal proyeksiyasi *Ox* o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq bo‘yicha harakatlanadi.

2-xulosa. Agar nuqta gorizontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o‘q atrofida aylantirilsa, nuqtaning gorizontal proyeksiyasi aylana bo‘yicha, frontal proyeksiyasi *Ox* o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq bo‘yicha harakatlanadi.

Nuqtani proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o‘q atrofida aylantirish qoidalariga asosan umumiy vaziyatda joylashgan geometrik shakllarni xususiy yoki talab qilingan vaziyatga keltirish mumkin.

1–masala. Umumiy vaziyatdagi $AB(A'B', A''B'')$ kesmani *V* tekislikka parallel vaziyatga keltirilsin. (5.12–rasm).



5.12-rasm.

Yechish. AB kesmaning biror, masalan B uchidan $i\perp H$ aylantrish o‘qi o‘tkaziladi. So‘ngra bu o‘q atrofia kesmaning $A'B'$ gorizontal proyeksiyasini $A'B'\|Ox$ vaziyatga kelguncha aylantiramiz. Bunda AB kesmaning A'' nuqtasi $N_{1V}\|Ox$ bo‘yicha harakatlanib, A''_1 vaziyatni egallaydi. Shaklda hosil bo‘lgan AB kesmaning yangi $A'_1B'_1$ va $A''_1B''_1$ proyeksiyalari uning V tekislikka parallelligini ko‘rsatadi. Shakldagi α burchak AB kesmani H tekislik bilan hosil etgan burchagi bo‘ladi.

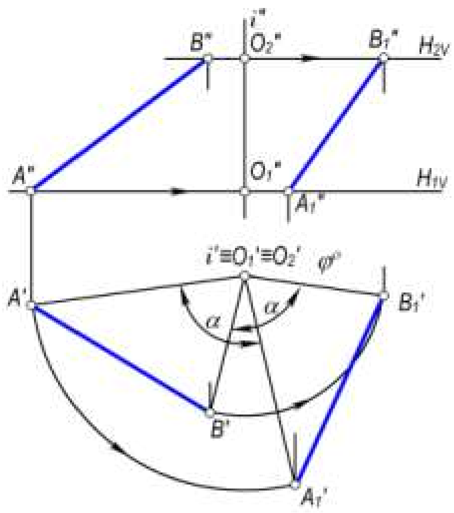
2–masala. $AB(A'B',\ A''B'')$ kesmani $i\perp H$ o‘q atrofida α burchakka aylantirish talab qilinsin (5.13–rasm).

Yechish. Kesmani α burchakka aylantirish uchun uning A' va B' proyeksiyalarini berilgan i o‘qi atrofida $A'O'_1$ va $B'O'_2$ radiuslari bo‘yicha α burchakka aylantirish kifoya qiladi.

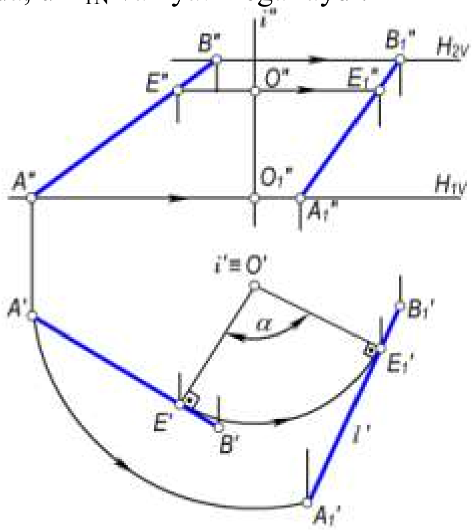
Aylantirish usulining qoidasiga muvofiq kesma uchlarining A'' va B'' proyeksiyalari $N_{1V}\|Ox$ va $N_{2V}\|Ox$ bo‘yicha harakatlanadi. Natijada, hosil bo‘lgan $A_1B_1(A'_1B'_1, A''_1B''_1)$kesma AB kesmaning α burchakka aylantirilgan vaziyati bo‘ladi. Bu misolni quyidagicha yechish ham mumkin: AB kesmaning $A'B'$ gorizontal proyeksiyasiga i aylanish o‘qining gorizontal proyeksiyasi i' dan unga perpendikulyar o‘tkaziladi. (5.14–rasm). Hosil bo‘lgan $E'O'$ aylantirish radiusni talab qilingan α burchakka aylantiriladi va E'_1O' ga perpendikulyar qilib, ℓ' chiziq o‘tkaziladi. Bu chiziqqa shakldagi $A'E'=A'_1E'_1$ va $E'B'=E'_1B'_1$ kesmalar o‘lchab qo‘yiladi. So‘ngra A'_1 B'_1 ning frontal proyeksiyasi $A''_1B''_1$ yasaladi. Natijada AB kesmaning α burchakka aylantirilgan vaziyatining yangi $A'_1B'_1$ va $A''_1B''_1$ proyeksiyalari hosil bo‘ladi.

3–masala. Izlari bilan berilgan umumiy vaziyatdagi P tekislikni $i\perp H$ o‘qi atrofida α burchakka aylantirilish talab qilinsin (5.15-rasm).

Yechish. P tekislikning h(h′, h″) gorizontali i aylanish o‘qi orqali o‘tkaziladi va $h\cap i$=>O(O′,O″) aniqlanadi. So‘ngra O′ nuqtadan P_N ga $O'E'$ perpendikulyar tushiriladi. Hosil bo‘lgan $O'E'$ berilgan P tekislikni i o‘q atrofida aylantirish radiusi bo‘ladi. Tekislikning P_N gorizontal izi $O'E'$ radius bo‘yicha α burchakka aylantirilganda, u P_{1N} vaziyatni egallaydi.



5.13-rasm.

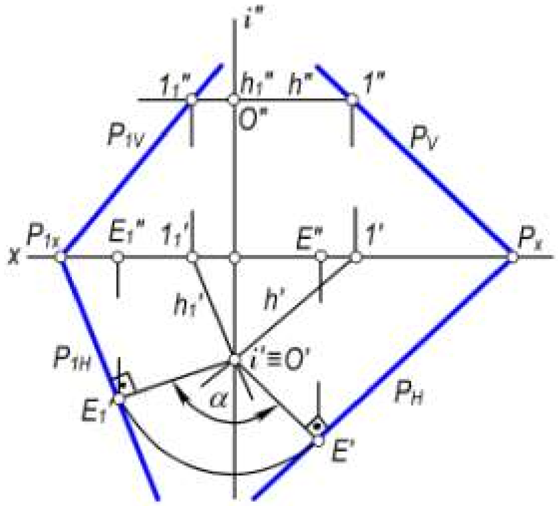


5.14-rasm.

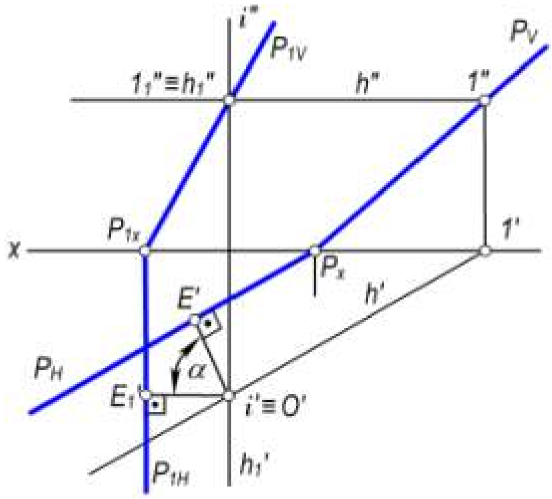
Tekislikning yangi P_{1V} frontal izini aniqlash uchun uning gorizontalidan foydalanamiz. Ma'lumki, P tekislik α burchakka aylantirilganda uning h(h′, h″) gorizontali $h_1(h_1', h_1'')$ vaziyatni egallaydi. Shuning uchun tekislikning P_{1V} izini yasashda P_{1x} va $1_1''$ nuqtalar tutashtiriladi.

4–masala. Umumiy vaziyatdagi $P(P_H, P_V)$ tekislikni $i(i', i'')\perp H$ o'q atrofida aylantirib frontal proyeksiyalovchi tekislik vaziyatiga keltirish talab etilsin (5.16–shakl).

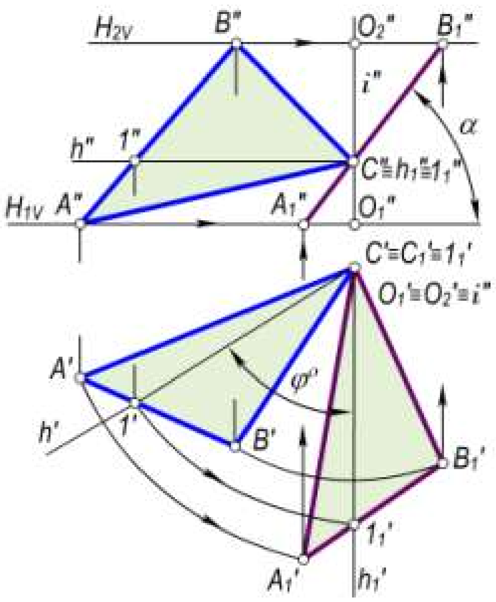
Yechish. P tekislikning h(h′,h″) gorizontali $i(i', i'')$ o'qi orqali o'tkaziladi va gorizontalning i' o'qi bilan kesishish nuqtasi O(O′,O″) topiladi. Tekislik bilan uning h(h′,h″) gorizontali O′ atrofida aylantirilib, proyeksiyalovchi, ya'ni $h_1'\perp Ox$ vaziyatga keltiriladi. Gorizontalning h″ frontal proyeksiyasi esa $h_1''\equiv 1_1''$ vaziyatda bo'ladi. Tekislikning yangi P_{1V} frontal izi P_{1X} va $1_1''$ nuqtalardan o'tadi.



5.15-rasm.



5.16-rasm.



5.17-rasm.

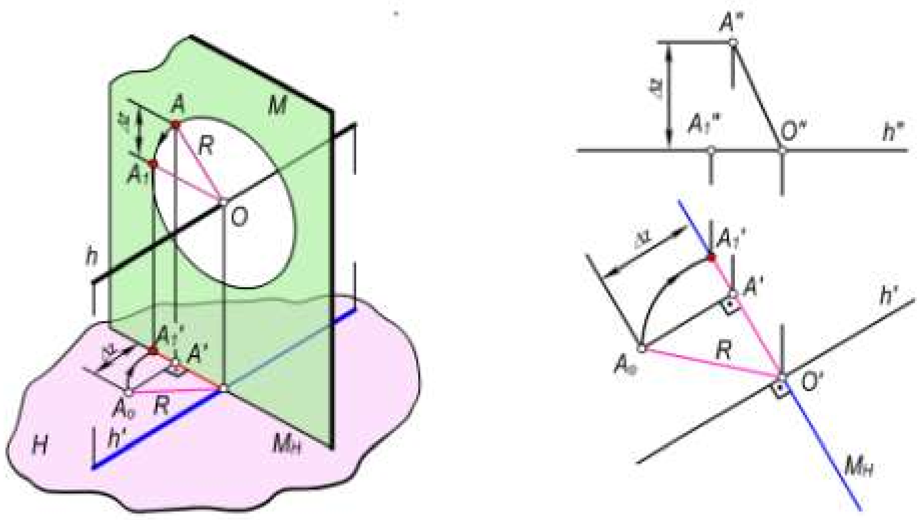
5–masala. $\Delta ABC(\Delta A'B'C', \Delta A''B''C'')$ tekislikning H tekislik bilan tashkil etgan α burchagini aniqlansin (5.17–rasm).

Yechish. Izlangan α burchakni aniqlash uchun berilgan ΔABC tekislikni frontal proyeksiyalovchi vaziyatga keltirish kerak bo'ladi. Buning uchun uchburchakning biror, masalan, C nuqtasidan $i'\perp H$ aylanish o'qi o'tkaziladi va bu o'q atrofida uchburchakni $h_1\perp V$ (epyurda $h'_1\perp V$) vaziyatga kelguncha aylantiriladi. Bunda, uchburchakning A, B va C nuqtalari ham φ^o burchakka harakatlanadi. Chizmada uchburchak uchlarning yangi A'_1, B'_1 va C'_1 proyeksiyalari orqali uning $A''_1B''_1C''_1$ frontal proyeksiyalarini aniqlanadi. Bu nuqtalar o'zaro tutashtirilsa, $A''_1B''_1C''_1$ kesma (uchburchakning yangi frontal proyeksiyasi) hosil bo'ladi. Bu kesmaning Ox o'qi bilan tashkil etgan α burchagi ΔABC ni H tekislik bilan hosil etgan burchagiga teng bo'ladi.

5.3.2. Geometrik shaklni proyeksiyalar tekisligiga parallel o'q atrofida aylantirish. Umumiy vaziyatda joylashgan tekis geometrik shakllarni proyeksiyalar tekisliklariga parallel bo'lgan o'qlar atrofida aylantirib, ba'zi metrik masalalarni yechish mumkin. Bunda, aylanish o'qi sifatida umumiy vaziyatda joylashgan geometrik shaklning asosiy chiziqlari – gorizontal yoki frontallaridan foydalaniladi. Geometrik shaklni uning gorizontali atrofida aylantirib, H tekislikka parallel vaziyatga, shuningdek, uni frontali atrofida aylantirib, V tekislikka parallel vaziyatga keltirish mumkin.

Geometrik shakl proyeksiyalar tekisligiga parallel o‘q atrofida aylantirilganda uning har bir nuqtasi aylanish o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan tekislikda aylana bo‘ylab harakatlanadi. Masalan, A nuqtani h gorizontal atrofida aylantirilganda radiusi OA ga teng aylana bo‘yicha $M\perp$h tekislikda harakatlanadi (5.18,a–rasm). Bunda, uning gorizontal proyeksiyasi gorizontalning h′ gorizontal proyeksiyasiga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq bo‘yicha harakatlanadi.

Chizmada tasvirlangan $A(A', A'')$ nuqtani $A_1(A_1', A_1'')$ vaziyatga kelguncha aylantirish uchun aylanish markazi $O(O', O'')$ nuqtani aniqlash kerak (5.18,b–rasm). Bu nuqta aylanish o‘qi h ning M tekislik bilan kesishish nuqtasi bo‘ladi. Chizmada aylantirish radiusi R ning haqiqiy o‘lchamni aniqlash uchun H tekislikda to‘g‘ri burchakli $\Delta O'A'A_0$ yasaymiz. Buning uchun AO radiusning $A'O'$ gorizontal proyeksiyasini to‘g‘ri burchakli uchburchakning bir kateti, OA kesma uchlari applikatalarining Δz ayirmasini ikkinchi kateti qilib olamiz. Bu uchburchakning gipotenuzasi izlangan aylantirish radiusi R bo‘ladi. A nuqtaning aylantirilgandan keyingi yangi vaziyatining A'_1 gorizontal proyeksiyasi aylanish markazi O' nuqtada bo‘lgan va $O'A_0$=R radiusli aylana yoyining $M(M_H)$ tekislikning izi bilan kesishgan A_1' nuqtasi bo‘ladi. A nuqtaning yangi A_1'' frontal proyeksiyasi esa h″ to‘g‘ri chiziqda bo‘ladi.

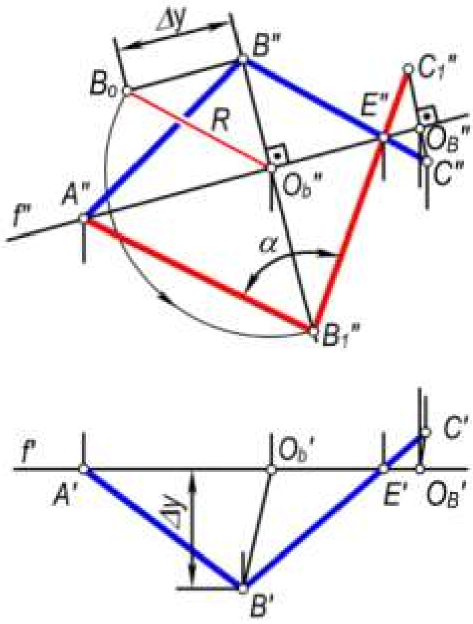


a) b)

5.18-rasm.

1–masala. Umumiy vaziyatdagi $\angle ABC(\angle A'B'C', \angle A''B''C'')$ ning haqiqiy o‘lchami aniqlansin (5.19–rasm).

Echish. Berilgan burchakning gorizontali yoki frontalidan foydalaniladi. Mazkur burchakning haqiqiy o‘lchamini aniqlash uchun chizmada uning f(f′, f″) frontali o‘tkazilgan. Rasmda hosil bo‘lgan $\angle ABE(\angle A'B'E', \angle A''B''E'')$ ning haqiqiy o‘lchamini aniqlash uchun B nuqtani aylantirish radiusining haqiqiy o‘lchamini aniqlash kifoya. Buning uchun B'' nuqtadan f″ ga perpendikulyar o‘tkaziladi va aylanish markazining $O_B(O'_B, O''_B)$, so‘ngra aylantirish radiusining $BO_B(B'O'_B, B''O''_B)$ proyeksiyalari aniqlanadi. To‘g‘ri burchakli $\Delta O''_B B''B''_O$ yasash bilan radiusning haqiqiy o‘lchami $O''_B B''_1$=R aniqlanadi. B nuqtaning yangi vaziyatini yasash uchun O''_B dan R radius bilan $O''_B B''_1$ perpendikulyarning davomi bilan kesishguncha yoy o‘tkaziladi va hosil bo‘lgan B''_1 bilan A'' va E'' nuqtalarni tutashtiriladi. Chizmada hosil bo‘lgan α berilgan burchakning haqiqiy o‘lchami bo‘ladi.

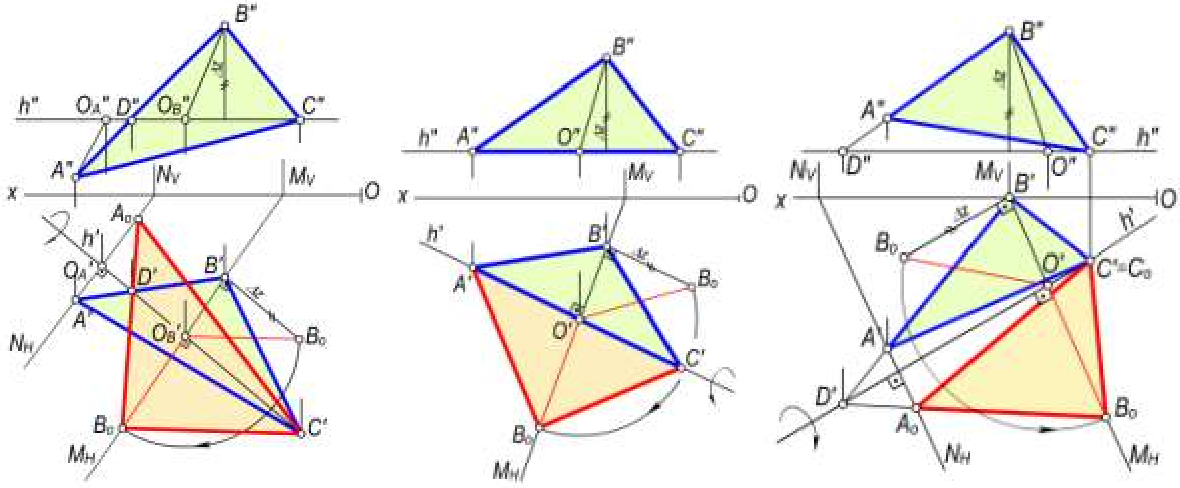


5.19-rasm.

2–masala. Umumiy vaziyatdagi $\Delta ABC(\Delta A'B'C', \Delta A''B''C'')$ ning haqiqiy o‘lchami aniqlansin.

Yechish. Uchburchak gorizontali h(h′, h″) o‘tkaziladi. ΔABC ning haqiqiy o‘lchamini aniqlash uchun uning $B(B',B'')$ va $C(C', C'')$ uchlari aylantirish radiuslarining haqiqiy o‘lchamlari aniqlanadi.

Chizmada B nuqtaning aylantirish radiusini aniqlash uchun uning $O'B'$ va $O''B''$ proyeksiyalaridan foydalanib, to‘g‘ri burchakli $\Delta O'_oB'B'_o$ ni yasaymiz. Bu uchburchakning $O'B'_o$ gipotenuzasi B nuqtaning aylantirish radiusi bo‘ladi. B nuqtaning yangi vaziyati aylantirish markazining gorizontal proyeksiyasi O' dan radiusi $O'B_o$ ga teng qilib o‘tkazilgan yoyning harakat tekisligining M_H izi bilan kesishgan B_o nuqtasi bo‘ladi.



a) b) v)

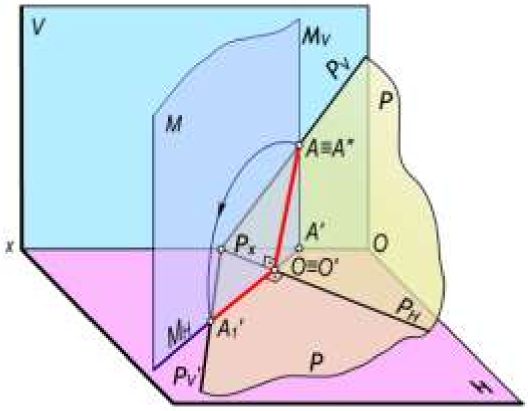
5.20-rasm.

Uchburchakning S va D nuqtalari aylanish o‘qiga tegishli bo‘lgani uchun ularning fazoviy vaziyatlari o‘zgarmaydi. Uchburchak A nuqtasi aylantirish radiusining haqiqiy o‘lchamini ham B nuqta aylantirish radiusining haqiqiy o‘lchamini topish kabi aniqlash mumkin. Ammo uchburchakning A nuqtasi h o‘qi atrofida B nuqta kabi harakatlanganda $N(N_H)$ tekislikka va uchburchakning AB tomoniga tegishli bo‘lib qoladi. Uchburchakning AB tomoni esa qo‘zg‘almas D nuqtadan o‘tadi. Shuning uchun chizmada A nuqtaning yangi vaziyatini aniqlash uchun B_0 va D′ nuqtalar o‘zaro tutashtiriladi va A' nuqtadan C'D′ ga tushirilgan perpendikulyar bilan kesishguncha davom ettirilib, A_0 nuqta topiladi. Agar A_0, B_0 va C' nuqtalar o‘zaro tutashtirilsa, uchburchakning haqiqiy kattaligi hosil bo‘ladi.

Agar uchburchakning biror tomoni (masalan, *AC*) gorizontal vaziyatda berilgan bo'lsa, masala 5.20,b-rasmda ko'rsatilgan kabi yechiladi.

5.20,v-rasmda aylanish o'qi gorizontal bo'lib, uchburchak konturidan tashqarida *C* nuqta orqali o'tkazilgan. Bu holda uchburchakning haqiqiy kattaligi uning gorizontal proyeksiyasi bilan ustma-ust tushmaydi, natijada, masalaning yechimi yaqqolroq bo'ladi.

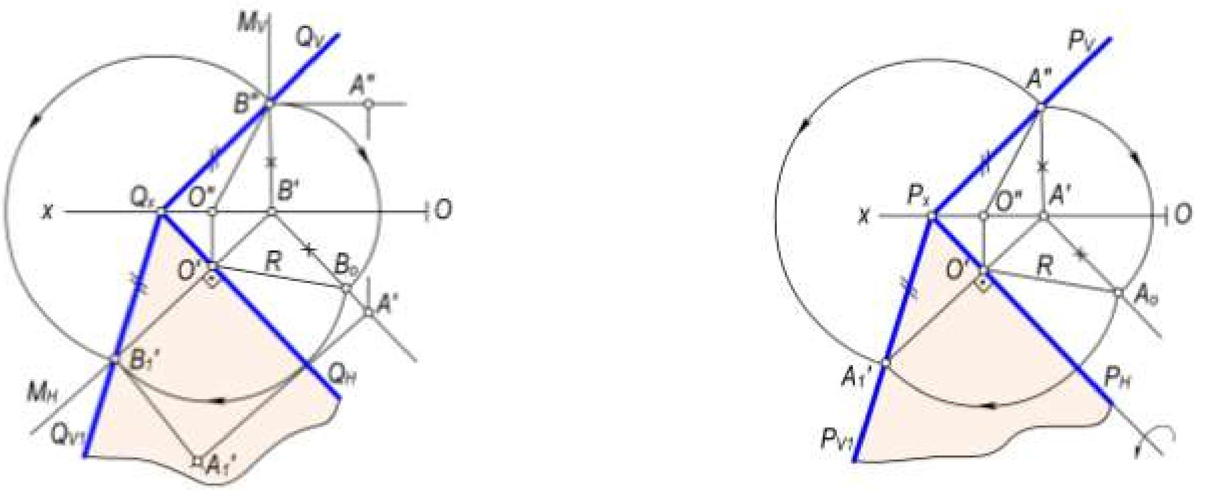
5.3.3. Geometrik shaklni proyeksiyalar tekisliklariga tegishli o'q atrofida aylantirish yoki tekislikning izi atrofida aylantirish. Aylanish o'qi sifatida umumiy vaziyatdagi tekislikning gorizontal yoki frontal izlaridan biri qabul qilinadi (5.21–rasm). Bu holda tekislik biror izi atrofida aylantirilib, proyeksiyalar tekisliklarining biriga jipslashtiriladi. Agar aylanish o'qi sifatida tekislikning gorizontal izi qabul qilinsa, bu tekislikni gorizontal proyeksiyalar tekisligi bilan jipslashtirish mumkin. Shuningdek, tekislikni frontal izi atrofida aylantirib, uni frontal proyeksiyalar tekisligiga jipslashtiriladi.



5.21-rasm.

Tekisliklarni proyeksiyalar tekisligiga jipslashtirish yo'li bilan mazkur tekislikka tegishli bo'lgan tekis shakllarning haqiqiy o'lchamini aniqlash mumkin yoki umumiy vaziyatida berilgan tekislikka tegishli bo'lgan har qanday geometrik masalalarni yechish mumkin.

5.22,a–rasmda umumiy vaziyatdagi Q tekislikni Q_N gorizontal izi atrofida aylantirib, *H* tekislikka jipslashtirish ko'rsatilgan. Tekislikning gorizontal izi aylanish o'qi sifatida qabul qilingani uchun uning vaziyati o'zgarmaydi. Bu tekislikni *H* tekislikka jipslashtirish uchun mazkur tekislikka tegishli biror nuqtaning *H* tekislikka jipslashtirish kifoya. Bunday nuqta sifatida tekislikning frontal iziga tegishli *B(B',B")* nuqtani olish mumkin. Bu nuqta orqali Q_N ga perpendikulyar M gorizontal proyeksiyalovchi tekislik o'tkaziladi. B nuqta $O'B_o$=R radiusli yoy bo'yicha M_N iz bilan kesishguncha aylantiriladi. Natijada, hosil bo'lgan B'_1 nuqta bilan Q_x ni o'zaro tutashtirsak, *Q* tekislikni *H* tekislikka jipslashtirilgan vaziyatiga ega bo'lamiz. Tekislikni bunday jipslashtirganda unga tegishli geometrik shakllar *H* tekislikka jipslashib, haqiqiy o'lchamlarida proyeksiyalanadi.



a) **b)**

5.22-rasm.

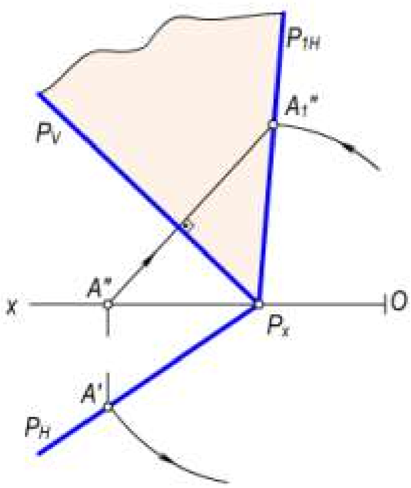
5.22,a–rasmdan shuni aniqlash mumkinki, Q tekislikni Q_N izi atrofida aylantirib, uni *H* tekislikka jipslashtirishda Q_V iziga tegishli Q_xB_1 kesma o‘zining haqiqiy o‘lchamiga teng bo‘lgani uchun $Q_xB''=Q_xB'_1$ bo‘ladi. Demak, chizmada $Q(Q_N, Q_V)$ tekislikni *H* tekislikka jipslashtirish uchun uning Q_V izida tanlab olingan $B \equiv B''$ nuqtani va Q_X markazdan Q_x B'' radius bilan yoy chizib, M tekislikning M_N izi bilan kesishgan B_1 nuqta aniqlanadi. So‘ngra B_1 va Q_X nuqtalardan tekislikning Q_{V1} izi o‘tkaziladi.

Chizmada $P(P_N, P_V)$ tekislikni P_N izi atrofida aylantirib, *H* tekislikka jipslashtirish uchun aylantirish radiusining haqiqiy o‘lchamini aniqlash zarur bo‘lsin (5.22,b–rasm). Ma’lumki, aylantirish radiusi tekislikning aylanish o‘qiga perpendikulyar bo‘ladi. To‘g‘ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatiga ko‘ra, tekislikning P_V izida olingan $A(A', A'')$ nuqtaning A' proyeksiyasidan tekislikning P_N iziga perpendikulyar o‘tkaziladi va O' hamda O'' nuqtalarni topamiz. Chizmada hosil bo‘lgan $O'A'$ va $O''A''$ aylantirish radiusining proyeksiyalari, $O'A_0$ esa uning haqiqiy o‘lchami bo‘ladi.

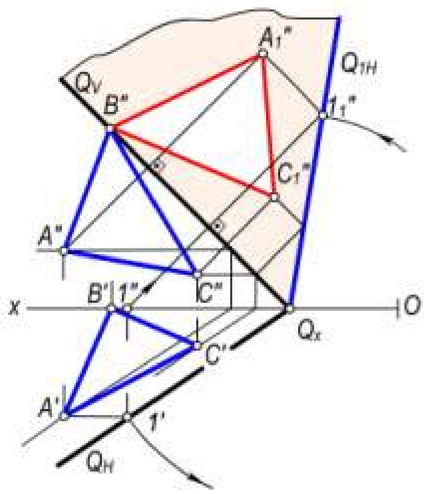
Xuddi shuningdek $P(P_H, P_V)$ tekislikni *V* tekislikka ham jipslashtirish mumkin (5.23–rasm). Buning uchun berilgan P tekislikning P_H gorizontal izida ixtiyoriy *A* nuqta tanlab, uning aylantirish radiusi P_X A' aniqlanadi va tekislikning P_N izini P_V izi atrofida aylantirib, tekislikka jipslashtiriladi. Chizmadan ko‘rinib turibdiki, *P* tekislikni P_N izi atrofida aylantirilganda P_xA' kesma $P_xA''_1$ ga teng bo‘ladi.

Umumiy vaziyatda berilgan tekislikka tegishli geometrik shaklning haqiqiy o‘lchamini aniqlash uchun uning xarakterli nuqtalarini proyeksiyalar tekisligiga jipslashtirish yo‘li bilan aniqlanadi. Masalan, $Q(Q_N, Q_V)$ tekislikka tegishli $\Delta ABC(A'B'C', A''B''C'')$ ning (5.24–rasm) haqiqiy o‘lchami uning *A*, *B* va *C* nuqtalarini *V* tekislikka jipslashtirish yo‘li bilan aniqlanadi.

Tekislikning jipslashgan holati berilgan bo‘lsa, uning dastlabki vaziyatini tiklash mumkin. Tekislikning dastlabki vaziyatini aniqlash natijasida tekislikka tegishli bo‘lgan shakllarning ham proyeksiyalarini aniqlash mumkin.



5.23-rasm.

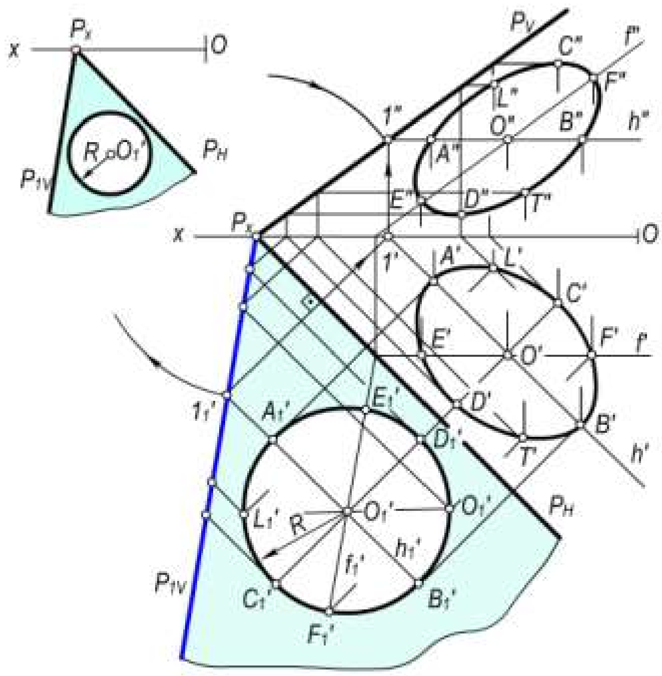


5.24-rasm.

Masalan, *P* tekislikning *H* tekislikka jipslashtirilgan vaziyati P_H, P_V, P_{1V} izlari va shu tekislikka tegishli O_1 markaz va R radiusli aylana berilgan bo‘lsin (5.25–rasm).

Bu aylananing *P* tekislikdagi proyeksiyalarini yasash uchun aylana markazidan tekislikning h'_1 gorizontali o‘tkaziladi va $1'_1$ nuqta aniqlanadi. Bu nuqtadan tekislikning P_N iziga perpendikulyar o‘tkazib, *Ox* proyeksiyalar o‘qiga tegishli $1'$ nuqta topiladi. Bu nuqtadan h'_1 ning h' proyeksiyasi o‘tkaziladi. So‘ngra P_x markazdan $P_x1'_1$ radius bilan o‘tkazilgan yoyning $1'$ dan *Ox* o‘qiga o‘tkazilgan perpendikulyar bilan kesishgan $1''$ nuqtasi topiladi. Bu nuqtadan h'_1 ning h'' proyeksiyasini o‘tkaziladi. So‘ngra $1''$ va P_x nuqtalar tutashtirilib, tekislikning P_V izi hosil qilinadi. Aylana markazining proyeksiyalarini yasash uchun O'_1 dan P_N ga perpendikulyar o‘tkazib, h' bilan kesishgan O' nuqtani va h'' da O'' nuqta topiladi. Shuningdek, bu gorizontalda joylashgan aylananing A'_1 va B'_1 nuqtalarining A', A'' va B', B'' proyeksiyalari aniqlanadi.

Tekislikning f'_1 frontalini aylananing markazi O'_1 dan P_{1V} ga parallel qilib o‘tkazilib, aylananing E'_1 va F'_1 nuqtalarning E', E'' va F', F'' proyeksiyalari yasaladi.



5.25-rasm.

Xuddi shu tarzda aylananing L'_1 va T'_1, C'_1 va D'_1 nuqtalarning proyeksiyalari tekislikning gorizontallari yordamida aniqlanadi. Bu nuqtalarning bir nomli proyeksiyalarini mos ravishda o‘zaro tutashtirsak, aylananing gorizontal va frontal proyeksiyalari – ellipslar hosil bo‘ladi.

5.4-§. Proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuli

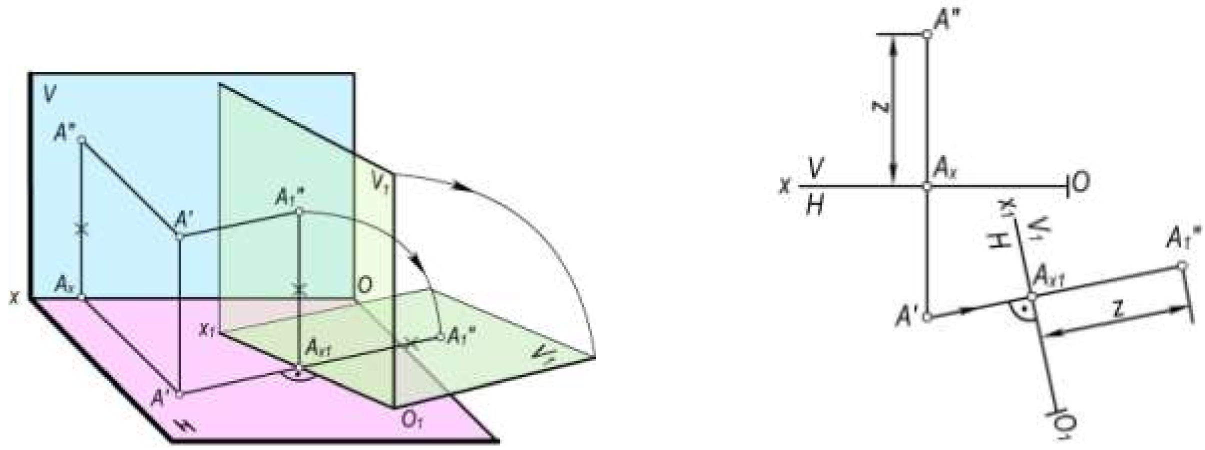
Proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usulida geometrik shaklning dastlabki fazoviy vaziyati saqlanib qoladi. Proyeksiyalar tekisliklari berilgan geometrik shaklga nisbatan xususiy (parallel yoki perpendikulyar) vaziyatda bo‘lgan yangi proyeksiyalar tekisliklari bilan almashtiriladi. Bunda dastlabki va yangi proyeksiyalar tekisliklarining o‘zaro perpendikulyarlik sharti bajarilishi talab qilinadi.

Bu usulda geometrik shaklning fazoviy vaziyati o‘zgarmaydi, balki proyeksiyalash yo‘nalishi yangi proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar qilib olinadi.

Geometrik masalada qo‘yilgan shartga ko‘ra, proyeksiyalar tekisliklari bir yoki ikki marta ketma-ket almashtirish mumkin.

Proyeksiyalar tekisliklarining ikki marta almashtirilganda, ular ketma-ket ravishda, masalan, avval geometrik shaklga nisbatan parallel, so‘ngra unga perpendikulyar yoki aksincha qilib almashtiriladi.

Proyeksiyalar tekisliklarining bittasini almashtirish. Fazodagi biror A nuqta va uning H va V proyeksiyalar tekisliklardagi A' va A'' ortogonal proyeksiyalari berilgan bo‘lsin (5.26,a–rasm). Agar V tekislikni V_1 tekislik bilan almashtirsak, $\frac{V_1}{H}$ yangi proyeksiyalar tekisliklari tizimi hosil bo‘ladi. A nuqtaning V_1 tekislikdagi proyeksiyasini yasash uchun berilgan nuqtadan mazkur tekislikka perpendikulyar o‘tkazib, yangi frontal proyeksiyasi A''_1 topiladi.



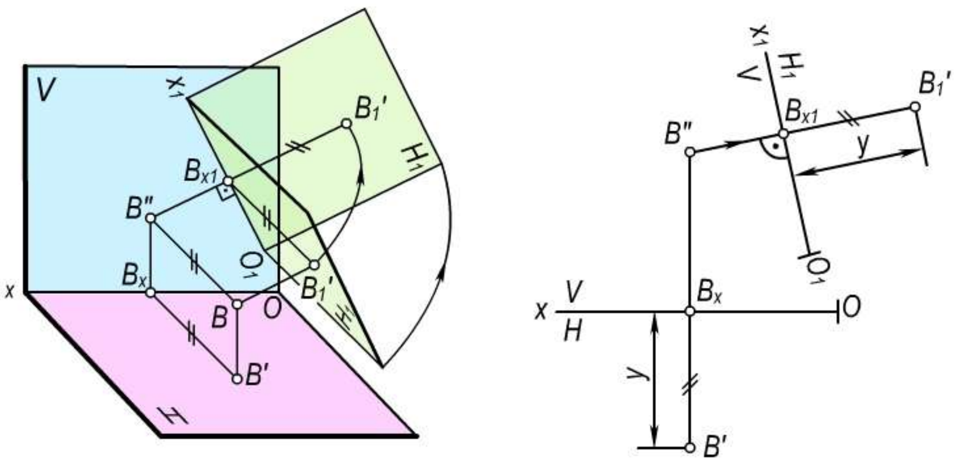
a) **b)**

5.26-rasm.

Rasmdagi yasashlardan ko‘rinishicha, A'' nuqtadan Ox o‘qigacha bo‘lgan masofa A''_1 nuqtadan O_1x_1 o‘qigacha bo‘lgan masofaga tengdir, ya’ni $A''_1A_{x1}=A''A_x$.

Nuqtaning yangi proyeksiyalar tizimidagi chizmasini yasash uchun yangi proyeksiyalar tekisligi dastlabki proyeksiyalar tekisligi bilan jipslashtiriladi.

Chizmada A nuqtaning yangi A''_1 proyeksiyasini yasash uchun A nuqtadan O_1x_1 ga perpendikulyar tushiriladi (5.26,b–rasm). Uning davomiga $A''A_x$ masofa qo‘yiladi. Natijada, hosil bo‘lgan A' va A''_1 lar A nuqtaning yangi $\frac{V_1}{H}$ tekisliklar sistemasidagi proyeksiyalari bo‘ladi. Frontal proyeksiyalar tekisligi yangi proyeksiyalar tekisligi bilan almashtirilganda nuqtaning z koordinatasi o‘zgarmaydi.



a) **b)**

5.27-rasm.

H va V proyeksiyalar tekisliklari tizimida B nuqta B' va B'' proyeksiyalari berilgan bo‘lsin (5.27,a–rasm). H tekislikni $H_1\perp V$ tekislik bilan almashtirsak, $\frac{V}{H_1}$ yangi tekisliklar tizimiga ega bo‘lamiz. B nuqtadan H tekislikka perpendikulyar o‘tkazib, bu nuqtaning B'_1 proyeksiyasini yasaymiz. Nuqtaning yangi tekisliklar tizimidagi chizmani yasash uchun (5.27,b–rasm) H_1 tekislikni V tekislik bilan jipslashtiramiz. Chizmada B nuqtaning yangi proyeksiyasini yasash uchun uning B'' proyeksiyasidan O_1x_1 ga o‘tkazilgan perpendikulyarning davomiga $B'_1B_{x1}=B^1B_x$ masofa qo'yiladi. Natijada hosil bo'lgan B'_1 va B'' yangi $\frac{V}{H_1}$ tekisliklar tizimidagi B nuqtaning chizmasi bo'ladi. Demak, gorizontal proyeksiya tekisligi almashtirilganda, nuqtaning yangi gorizontal proyeksiyasida y koordinatasi o'zgarmaydi.

Proyeksiyalar tekisliklarini ketma-ket ikki marta almashtirish. Ayrim geometrik masalalarni yechishda proyeksiyalar tekisliklarini ketma-ket ikki marta almashtirish zarur bo'ladi.

5.28–rasmda A nuqtaning $\frac{V}{H}$ tizimida berilgan A' va A'' proyeksiyalari orqali uning yangi A'_1 va A''_1 proyeksiyalarini yasash ko'rsatilgan. Buning uchun avval V tekislikni V_1 tekislik bilan almashtirib, $\frac{V_1}{H}$ tizimi hosil qilinadi. Buning uchun chizmada ixtiyoriy vaziyatda O_1x_1 proyeksiyalar o'qi tanlab olinadi, A nuqtaning yangi A''_1 proyeksiyasini yasash uchun uning A' proyeksiyasidan O_1x_1 proyeksiyalar o'qiga perpendikulyar o'tkazib, uning davomiga $A''A_x$ masofa qo'yiladi. Natijada, A nuqtaning $\frac{V}{H_1}$ tizimidagi yangi A''_1 proyeksiyasi hosil bo'ladi. A nuqtaning A'_1 proyeksiyasini yasash uchun $\frac{V_1}{H}$ tizimdan $\frac{V_1}{H_1}$ tizimga o'tiladi. Buning uchun ixtiyoriy vaziyatda joylashgan O_2x_2 o'qi olinadi va nuqtaning A''_1 proyeksiyasidan O_2x_2 ga perpendikulyar o'tkazib, uning davomiga $A'A_{X1}$ masofa qo'yiladi. Shunday qilib O_2x_2 tizimda A nuqtaning A''_1 va A'_1 yangi proyeksiyalari hosil bo'ladi.

5.29–rasmda B nuqtaning $\frac{V}{H_1}$ tizimdan $\frac{V_1}{H}$ va $\frac{V_1}{H_1}$ tizimga o'tish natijasida hosil bo'ladigan yangi B''_1 va B'_1 proyeksiyalarini yasash ko'rsatilgan.

Nuqtaning yangi proyeksiyalarini yasash qoidalariga asoslanib, geometrik shakllarning yangi, maqsadga muvofiq bo'lgan proyeksiyalarini yasash mumkin.

1–masala. Umumiy vaziyatda berilgan $AB(A'B', A''B'')$ kesmaning haqiqiy uzunligi aniqlash talab etilsin (5.30-rasm).

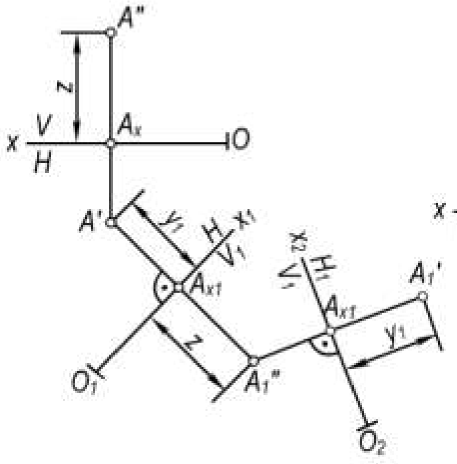
Yechish. Buning uchun umumiy vaziyatda berilgan AB kesmaga parallel qilib gorizontal yoki frontal proyeksiyalar tekisligini yangi proyeksiyalar tekisligi bilan almashtiriladi. Chizmada masalani yechish uchun uning yangi O_1x_1 proyeksiyalar o'qini kesmaning biror, masalan, $A'B'$ gorizontal proyeksiyasiga parallel qilib olinadi. Hosil bo'lgan $\frac{V_1}{H}$ proyeksiyalar tekisliklari tizimida AB kesma V_1 proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'ladi va bu tekislikda u haqiqiy uzunligiga teng bo'lib proyeksiyalanadi.

2–masala. Umumiy vaziyatdagi $P(P_N, P_V)$ tekislikni frontal proyeksiyalovchi tekislik vaziyatiga keltirish talab etilsin (5.31–rasm).

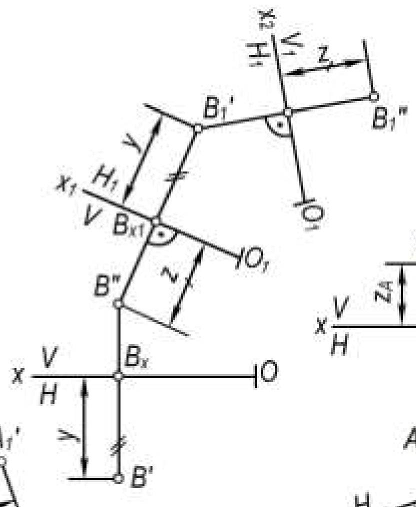
Yechish. Ma'lumki, frontal proyeksiyalovchi tekislikning gorizontal izi Ox o'qiga perpendikulyar bo'ladi. Shuning uchun umumiy vaziyatdagi P tekislikni frontal proyeksiyalovchi vaziyatga keltirish uchun yangi O_1x_1 proyeksiyalar o'qini tekislikning P_N gorizontal iziga ixtiyoriy joydan perpendikulyar qilib olinadi.

Tekislikning yangi P_{V1} izining yo'nalishini aniqlash uchun tekislikning P_V iziga tegishli biror, masalan, $A(A',A'')$ olib, uning yangi A''_1 frontal proyeksiyasi yasaladi. Tekislikning yangi P_{1V} izini P_{x1} va A''_1 nuqtalardan o'tkaziladi. Chizmada ko'rsatilgan α burchak P tekislikning H tekislik bilan tashkil etgan burchagi bo'ladi.

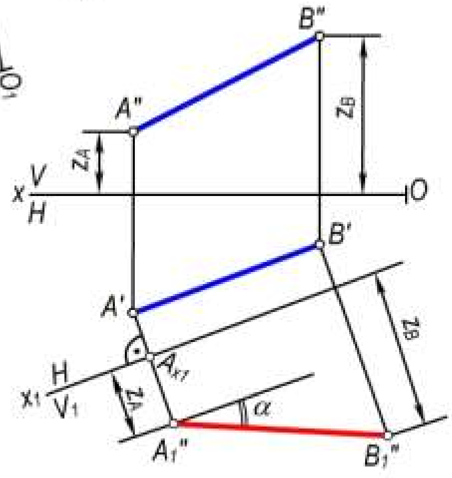
3–masala. $AB(A'B', A''B'')$ to'g'ri chiziqning umumiy vaziyatdagi $Q(Q_H, Q_V)$ tekislik bilan kesishish nuqtasi yasalsin (5.32–rasm).



5.28-rasm.



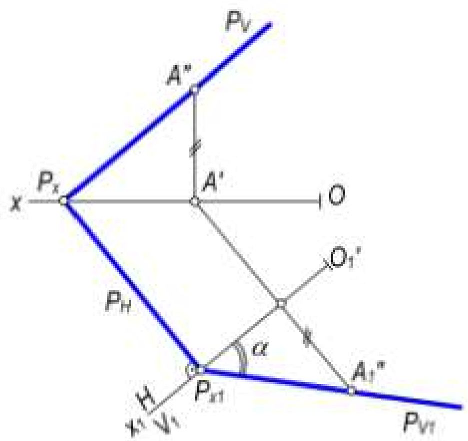
5.29-rasm.



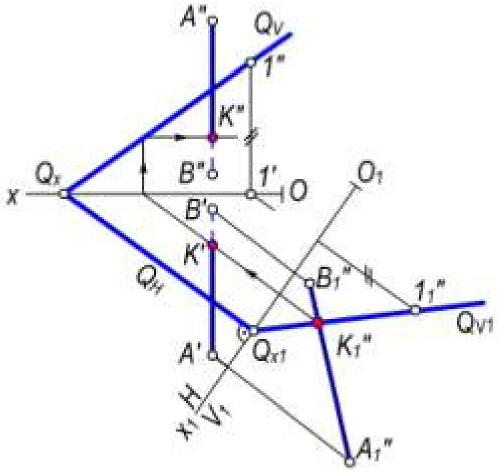
5.30-rasm.

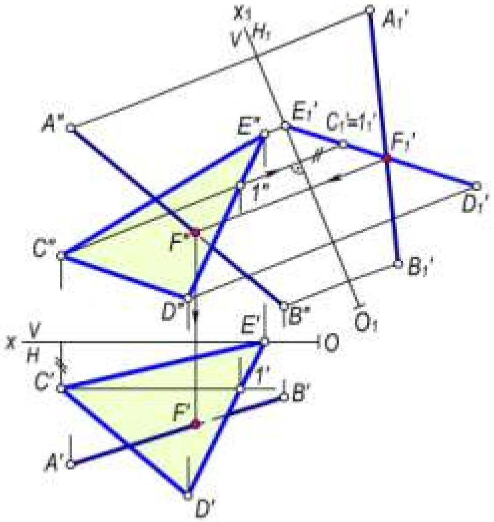
Yechish. Masalani yechish uchun Q tekislikni gorizontal yoki frontal proyeksiyalovchi tekislik vaziyatiga keltiramiz. Buning uchun yangi O_1x_1 proyeksiyalar o‘qini tekislikning biror iziga masalan, Q_H ga perpendikulyar qilib o‘tkaziladi. Natijada, tekislikning yangi Q_{V1} izini hamda to‘g‘ri chiziqning A''_1 B''_1 proyeksiyasi yasaladi. Hosil bo‘lgan kesmaning A''_1 B''_1 proyeksiyasi bilan tekislik Q_{V1} izining kesishgan K''_1 nuqtasi AB kesmaning Q tekislik bilan kesishish nuqtasi bo‘ladi. Bu nuqtani teskari yo‘nalishda proyeksiyalab, berilgan to‘g‘ri chiziq kesmasi bilan tekislikning kesishish nuqtasining K′ va K″ proyeksiyalari yasaladi.

Xuddi shu usul bilan AB($A'B'$, $A''B''$) to‘g‘ri chiziqning ΔCDE(ΔC′D′E′, ΔC″D″E″), bilan kesishish nuqtasining F′ va F″ proyeksiyalarini yasaladi (5.33–rasm). Bunda mazkur uchburchak tekislik proyeksiyalovchi tekislik vaziyatga keltiriladi. Buning uchun chizmada ΔCDE tekislikning biror bosh chizig‘iga, masalan, C1(C′1′,C″1″) frontaliga perpendikulyar qilib yangi O_1x_1 proyeksiyalar o‘qini o‘tkaziladi. Uchburchakning $C'_1D'_1E'_1$ to‘g‘ri chiziq kesmasi tarzida proyeksiyalangan proyeksiyasi va kesmaning $A'_1B'_1$ yangi proyeksiyalari yasaladi. Ularning o‘zaro kesishgan F'_1 nuqtasi belgilanadi, so‘ngra F nuqtaning frontal F″ va gorizontal F′ proyeksiyalarini yasaladi.



5.31-rasm.

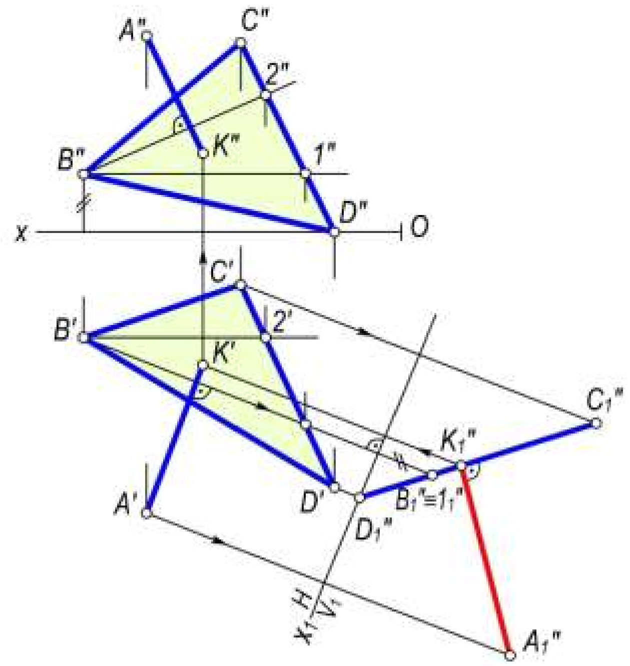




5.32-rasm. **5.33-rasm.**

4–masala. $A(A',A'')$ nuqtadan $\Delta BCD(\Delta B'C'D',\Delta B''C''D'')$ tekislikkacha bo‘lgan masofani aniqlansin (5.34–rasm).

Echish. Bu masofa A nuqtadan ΔBCD tekislikka tushirilgan perpendikulyar bilan o‘lchanadi. Masalani yechish uchun chizmada yangi proyeksiyalar o‘qini uchburchak tekisligining asosiy chiziqlaridan biriga, masalan, gorizontaliga perpendikulyar, ya’ni $O_1x_1 \perp B'1'$ qilib o‘tkaziladi. So‘ngra uchburchakning to‘g‘ri chiziq kesmasi shakldida proyeksiyalangan yangi proyeksiyalovchi $D''_1B''_1C''_1$ vaziyatini va nuqtaning A''_1 proyeksiyasi yasaladi. Izlangan masofaning haqiqiy uzunligi A''_1 dan $D''_1B''_1C''_1$ kesmaga o‘tkazilgan $A''_1K''_1$ perpendikulyar bo‘ladi. Bu masofaning gorizontal va frontal proyeksiyalari teskari proyeksiyalash bilan K' va K'' proyeksiyalarni aniqlanadi. Mazkur K' va K'' nuqtalar A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan uchburchakning gorizontal hamda frontallariga mos ravishda tushirilgan perpendikulyarning proyeksiyalarida bo‘ladi.



5.34-rasm.

5–masala. Δ*ABC*(Δ*A′B′C′*, Δ*A″B″C″*) va ΔEFD(ΔE′F′D′, ΔE″F″D″) tekisliklar kesishish chizig‘ining proyeksiyalari va uchburchaklarning ko‘rinishligi aniqlansin. (5.35–rasm).

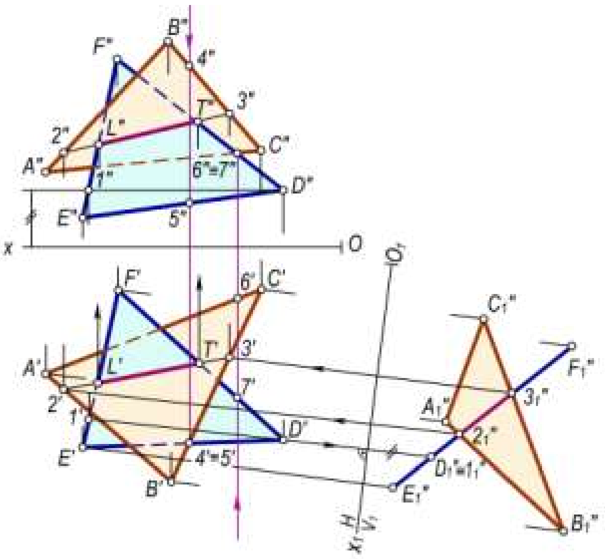
Yechish. Masalani yechish uchun berilgan uchburchaklarning biri, masalan, ΔEFD ni proyeksiyalovchi vaziyatga keltiriladi. Buning uchun chizmada ΔEFD ning D′1′ va D″1″ gorizontalining proyeksiyalarini hamda unga perpendikulyar, ya’ni $O_1X_1 \perp D'1'$ qilib yangi proyeksiyalar o‘qini o‘tkaziladi. So‘ngra uchburchaklarning yangi $A''_1B''_1C''_1$ va $E''_1F''_1D''_1$ proyeksiyalari yasaladi. Bunda ΔEFD ning mazkur proyeksiyasi to‘g‘ri chiziq kesmasi shaklida proyeksiyalanadi. Proyeksiyalar tekisliklarining yani tizimida ikki uchburchaklar $2''_13''_1$ to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi. Kesishish chizig‘ining 2′3′ gorizontal va 2″3″ frontal proyeksiyalarini teskari proyeksiyalash bilan uchburchaklarning dastlabki berilgan proyeksiyalari aniqlanadi. So‘ngra chizmada topilgan 2′3′ va 2″3″ kesmalarni ΔEFD ning E′F′, E″F″ va D′F′, D″F″ tomonlari bilan kesishgan L′, L″ va T′, T″ nuqtalar aniqlanadi. Natijada, hosil bo‘lgan L′T′ va L″T″ chiziqlar ikki uchburchak kesishish chizig‘ining proyeksiyalari bo‘ladi.

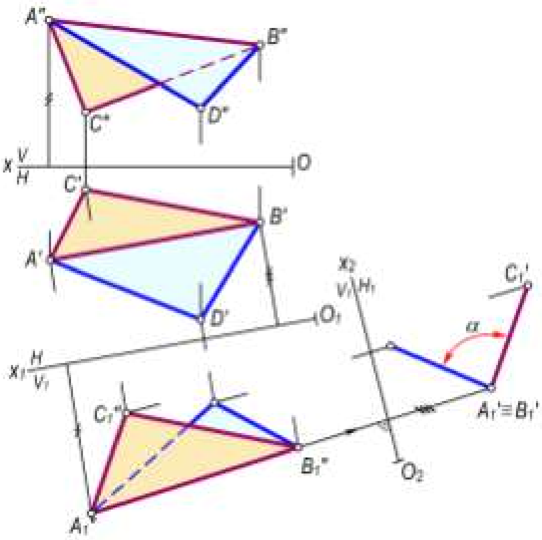
Chizmada uchburchaklarning ko‘rinishligini aniqlash uchun ulardagi 4′, 4″ va 5′, 5″, shuningdek, 6′, 6″ va 7′, 7″ konkurent nuqtalardan foydalaniladi.

6–masala. Δ*ABC*(*A′B′C′*, *A″B″C″*) va Δ*AB*D(*A′B′*D′, *A″B″*D″) tekisliklari orasidagi ikki yoqli burchakning haqiqiy kattaligi aniqlansin (5.36–rasm).

Yechish. Bu burchak berilgan Δ*ABC* va Δ*AB*D tekisliklariga perpendikulyar bo‘lgan tekisliklar orasidagi chiziqli burchak bilan o‘lchanadi. Shuning uchun ham yangi proyeksiyalar tekisligini ikki tekislikning umumiy *AB* kesishish chizig‘iga perpendikulyar qilib olinadi. Lekin *AB* qirra umumiy vaziyatda bo‘lgani uchun Ox, $\frac{V}{H}$ proyeksiyalar tekisliklari tizimini avval O_1X_1, $\frac{V_1}{H} \parallel AB$ qilib (chizmada $O_1X_1 \parallel A'B'$), so‘ngra O_2X_2, $\frac{V_1}{H_1} \perp AB$ qilib (chizmada $O_2X_2 \perp A''_1B''_1$) ketma–ket almashtiriladi.

Natijada, Δ*ABC* va Δ*AB*D yangi H_1 proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar vaziyatda bo‘lib qoladi va o‘zaro kesishuvchi kesmalar shaklida proyeksiyalanadi. Bu kesmalar orasidagi α chiziqli o‘tkir burchak izlangan burchak bo‘ladi.

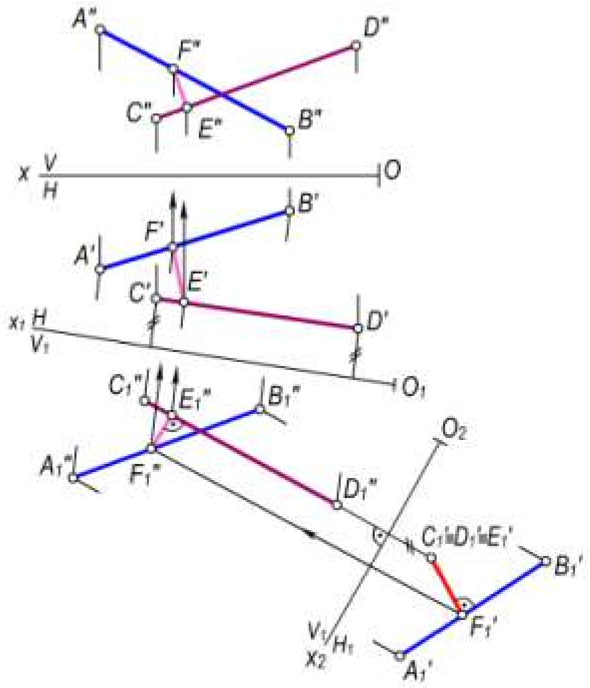




5.35-rasm. **5.36-rasm.**

7–masala. $AB(A'B', A''B'')$ va $CD(C'D', C''D'')$ uchrashmas to‘g‘ri chiziq kesmalari orasidagi masofani aniqlansin (5.37–rasm).

Yechish. Bunda CD kesmaga parallel qilib yangi V_1 frontal proyeksiyalar tekisligi o‘tkaziladi. Bu tekislikda CD va AB kesmalarning yangi frontal proyeksiyalari $C''_1D''_1$va $A''_1B''_1$ lar yasaladi. So‘ngra $C''_1D''_1$ kesmaga perpendikulyar qilib N_1 tekislik o‘tkaziladi. Bu tekislikda $C''_1D''_1$va A''_1 B''_1 larning yangi gorizontal proyeksiyalari topiladi. Bunda CD kesma $C'_1\equiv D'_1$ nuqta ko‘rinishida proyeksiyalanadi. Bu nuqtadan A'_1 B'_1 kesmaga tushirilgan E'_1 F'_1 kesmaning uzunligi CD va AB lar orasidagi masofa bo‘ladi. Teskari proyeksiyalash bilan E va F nuqtalarning E', E'' va F', F'' proyeksiyalari yasalgan.



5.37-rasm.

Yuqoridagi masalani, birinchidan, V_1 tekislikni *AB* kesmaga parallel va H_1 tekislikni uning yangi proyeksiyasiga perpendikulyar qilib o'tkazib yechsa, ikkinchidan esa *AB* yoki *C*D kesmalardan biriga parallel qilib avval *H* tekislikni, so'ngra ularning proyeksiyalaridan biriga perpendikulyar qilib *V* ni almashtirsa ham bo'ladi.

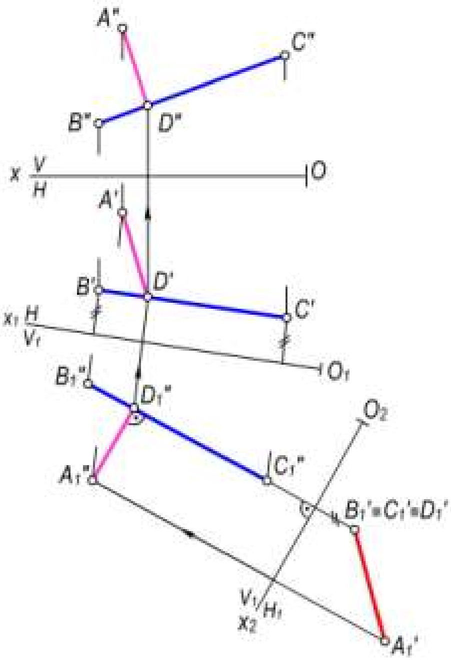
8–misol. Berilgan *A*(*A*′,*A*″) nuqtadan *BC*(*B*′*C*′, *B*″*C*″) kesmagacha bo'lgan masofa aniqlansin (5.38–rasm).

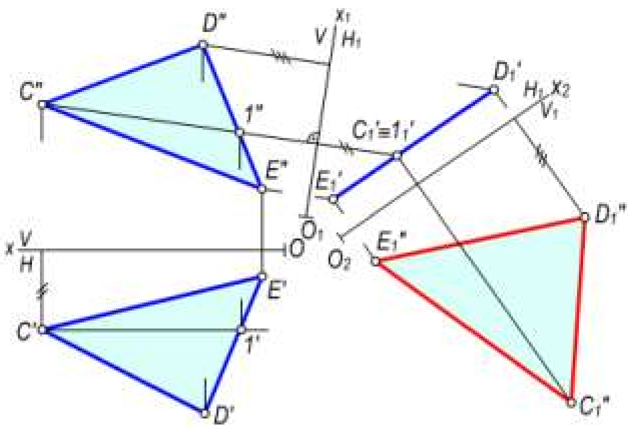
Yechish. Buning uchun *V* tekislikni *BC* kesmaga parallel bo'lgan V_1 tekislik bilan almashtiramiz, ya'ni $V_1 \| B'C'$ sharti bajarilsin. *BC* kesma va *A* nuqtaning V_1 tekislikdagi yangi $B''_1C''_1$ va A''_1 frontal proyeksiyalari hosil qilinadi. So'ngra *H* tekislikni H_1 tekislik bilan almashtiriladi. Bunda $H_1 \perp B''_1C''_1$ bo'lishi kerak.

H_1 tekislikda *BC* va *A* larning yangi gorizontal proyeksiyalari yasaladi. Hosil bo'lgan A'_1 va $B'_1 \equiv C'_1$ nuqtalar orasidagi masofa *A* nuqtadan *BC* kesmagacha bo'lgan masofa bo'ladi. Bu misolni *H* ni $H_1 \| B''C''$, so'ngra *V* ni $V_1 \| B'_1C'_1$ qilib almashtirish yo'li bilan ham yechish mumkin.

9–masala. ΔCDE(ΔC′D′*E*′, Δ*C*″D″E″) uchburchakning proyeksiyalariga asosan uning haqiqiy kattaligi aniqlansin (5.39–rasm).

Yechish. Bunda *H* tekislikni H_1 tekislikka shunday almashtiramizki, $H_1 \perp \Delta CDE$ bo'lsin. Buning uchun $H_1 \perp C''1''$ (uchburchak frontalining frontal proyeksiyasi) bo'lsa kifoya qiladi. Uchburchakning uchlarini H_1 tekislikka proyeksiyalab, yangi $C'_1D'_1E'_1$ gorizontal proyeksiyani to'g'ri chiziq ko'rinishida hosil qilinadi. So'ngra *V* tekislikni V_1 tekislik bilan shunday almashtiramizki, $V_1 \| C'_1D'_1E'_1$ bo'lsin. *C*, D, *E* nuqtalarning V_1 tekislikdagi yangi $C''_1D''_1E''_1$ frontal proyeksiyalari yasaladi. Bu nuqtalarni o'zaro tutashtirib, ΔC″D″E″=ΔCDE haqiqiy kattaligini hosil qilamiz. Bu misolni uchburchakning gorizontalini o'tkazib va unga avval V_1 ni perpendikulyar qilib tekislik o'tkazish va hosil bo'lgan kesmaga (uchburchakning proyeksiyasi) H_1 tekislikni parallel qilib o'tkazish yo'li bilan ham yechish mumkin.



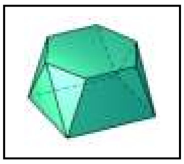


5.38-rasm. **5.39-rasm.**

Nazorat savollari

1. Proyeksiyalarni qayta qurishning qanday usullari mavjud?
2. Tekis-parallel harakatlantirish usulining ma’nosi nimadan iborat?
3. Aylantirish usulining ma’nosi nimadan iborat?
4. Gorizontal (yoki frontal) proyeksiyalovchi o‘q atrofida aylanayotgan nuqtaning proyeksiyalari qanday harakatlanadi?
5. Nuqtaning aylanish radiusi, markazi va aylanish harakat tekisliklari deganda nimalar tushuniladi?
6. Kesmaning haqiqiy uzunligini yasash uchun uni qanday vaziyatga kelguncha aylantirish kerak.?
7. Uchburchakni gorizontal (yoki frontal) proyeksiyalovchi holga keltirish uchun uni qaysi o‘q atrofida aylantirish kerak?
8. Izlari bilan berilgan tekislikni aylantirib frontal proyeksiyalovchi holga keltirish uchun nima qilish kerak?

9. Tekislikni izlari atrofida aylantirishdan ko‘zlangan maqsad nima?
10. Proyeksiyalar tekisliklarni almashtirish usulining mohiyati nimadan iborat?
11. Umumiy vaziyatdagi uchburchakning haqiqiy kattaligini yasash uchun proyeksiyalar tekisliklari ketma-ket qanday vaziyatlarda almashtiriladi.



VI bob. KO‘PYOQLIKLAR

6.1-§. Umumiy ma’lumotlar

Ta’rif. Hamma tomonidan
tekis ko‘pburchaklar bilan chegaralangan geometrik rasm - **ko‘pyoqlik** deyiladi.

Tekis ko‘pburchaklarning o‘zaro kesishuvidan hosil bo‘lgan kesmalar, ko‘pyoqlikning-qirralari va qirralar orasidagi ko‘pburchaklarni uning yoqlari deb ataladi. Qirralarning o‘zaro kesishuv nuqtalari ko‘pyoqlikning uchlari deb yuritiladi (6.1, 6.2-rasmlar).

Ko‘pyoqlikning barcha yon yoqlarining yig‘indisi uning sirti deb ataladi. Ko‘pyoqlikning uchlari va qirralari uning *aniqlovchilari* hisoblanadi (6.1-rasm). Ko‘pyoqlikning bir yon yog‘ida yotmagan ikki uchini birlashtiruvchi kesma uning *diagonali* deb ataladi (6.2-rasm). Ko‘pyoqlik aniqlovchilari uning istalgan yon yog‘iga (tekislikka) nisbatan bir tomonda joylashsa, uni *qabariq ko‘pyoqlik*, aksincha *botiq ko‘pyoqlik* deb yuritiladi. Ko‘pyoqliqlarining bir necha turlari mavjud bo‘lib, ulardan quyidagilarni ko‘rib chiqamiz:

Piramida

Ta’rif. YOqlaridan biri tekis ko‘pburchak bo‘lib, qolgan yoqlari esa umumiy uchga ega bo‘lgan uchburchaklardan tuzilgan ko‘pyoqlik **piramida** deyiladi

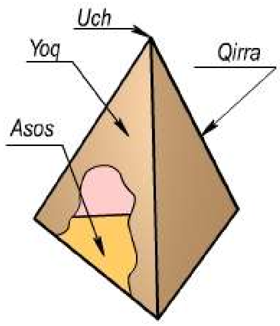
Ko‘pburchak piramidaning asosi va uchburchaklar esa uning yon yoqlari deb ataladi. YOn yoqlarining umumiy uchi piramidaning ham uchi hisoblanadi va u asos tekisligida yotmaydi. Asosi muntazam ko‘pburchakli piramida *muntazam piramida* deb ataladi. Piramida balandligi asosining markazidan o‘tib, unga perpendikulyar bo‘lsa, uni to‘g‘ri piramida, perpendikulyar bo‘lmasa og‘ma piramida deb yuritiladi (6.1-rasm).

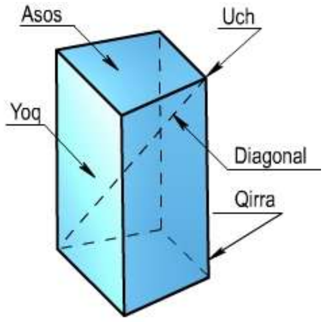
Prizma

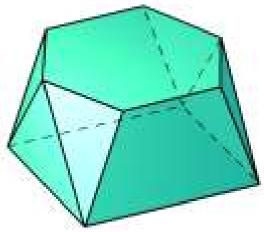
Ta’rif. YOn yoqlari to‘rt burchaklardan va asosi ko‘p burchakdan iborat bo‘lgan ko‘pyoqlik **prizma** deyiladi.

Yon yoqlarning kesishuv chiziqlari – prizma *qirralari*, qirralar orasidagi ko‘p burchaklining yoqlari deyiladi (6.2-rasm). Prizmani barcha qirralarini kesuvchi parallel tekisliklarda hosil bo‘lgan ko‘pburchaklar–prizmaning asoslari deb ataladi. YOn qirralari asosiga nisbatan og‘ma yoki perpendikulyar bo‘lsa, prizma ham mos ravishda *og‘ma* yoki *to‘g‘ri prizma* deb atladi. Asosi muntazam ko‘pburchak bo‘lgan prizma, *muntazam prizma* deb yuritiladi.

Asoslari o‘zaro parallel tekisliklarda yotgan ikkita ko‘pburchakdan va yon yoqlari esa asos uchlaridan o‘tuvchi uchburchaklar va trapesiyalardan iborat bo‘lgan ko‘pyoqlik *prizmatoid* deyiladi (6.3-rasm). Ko‘pyoqliklar bir jinsli qabariq, bir jinsli botiq, yulduzsimon hamda ularning birlashishidan hosil bo‘lgan murakkab ko‘pyoqliklarga bo‘linadi. Bir jinsli qabariq ko‘pyoqliklar muntazam va yarim muntazam ko‘pyoqliklarga ajraladi. Muntazam qabariq ko‘pyoqliklar o‘zaro teng bir xil muntazam ko‘pburchaklardan iborat yoqlarga, o‘zaro teng ikki yoqli burchaklarga va o‘zaro teng qirralarga ega bo‘ladi. Bu ko‘pyoqliklar asosan besh xil bo‘lib *Platon jismlari* deb yuritiladi (6.1-jadval).







6.1-rasm **6.2-rasm**

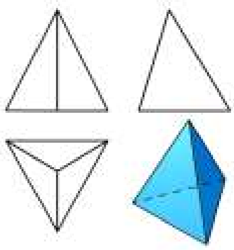
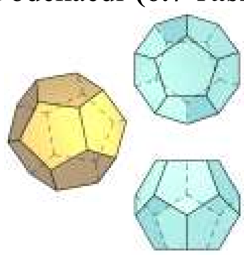
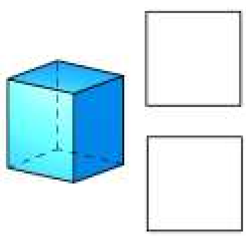
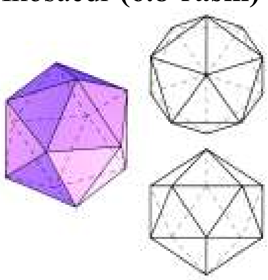
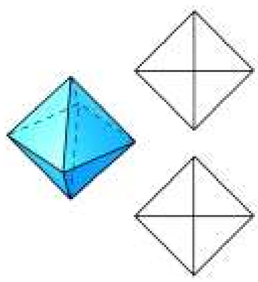
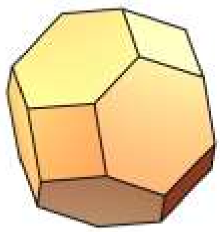
6.3-rasm

Ko‘pyoqliklarning muhim xossalaridan birini Eyler quyidagicha bayon etgan:

> **Eyler teoremasi.** Har qanday qavariq ko‘pyoqlikda yoqlar bilan uchlar sonining yig‘indisidan qirralar sonining ayirmasi ikkiga teng bo‘ladi (ya’ni **YO+U-Q=2**).

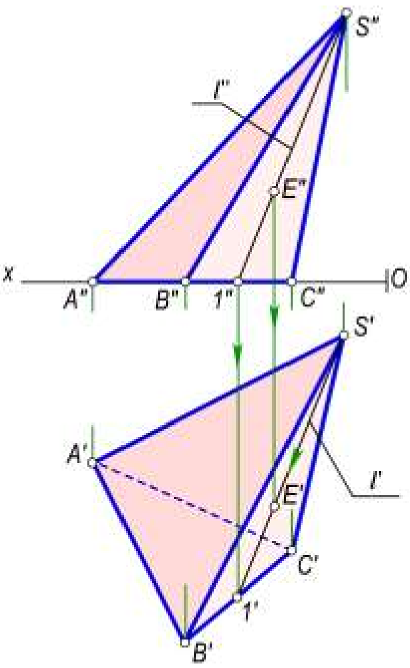
6.1-jadval

Muntazam ko‘pyoqliklar

Tetraedr **(6.4-rasm)** 	Dodekaedr **(6.7-rasm)** 	Kub – geksaedr **(6.5-rasm)** 
Ikosaedr **(6.8-rasm)**  YO + U - Q = 2 YO – yoqlar soni U – uchlar soni Q – qirralar soni	Oktaedr **(6.6-rasm)** 	Kesik oktaedr (**6.9-rasm)** 

YOn yoqlari turli rasmdagi muntazam ko‘pburchaklardan iborat bo‘lgan ko‘pyoqlikni *yarim muntazam ko‘pyoqlik* deb yuritiladi. Bu ko‘pyoqliklar 18 xil bo‘lib, ular *Arximed jismlari* deb yuritiladi. 6.9-rasmda Arximed jismlaridan biri bo‘lgan kesik oktaedrning yaqqol tasviri keltirilgan.

Ko‘pyoqliklar texnikada turli ko‘rinishdagi mashina detallari, ko‘pyoqli linzalar yasashda, hamda arxitektura va qurilish ishlarida keng ishlatiladi. Masalan, devor va poydevor bloklari, tom, ko‘priklarning temir-beton panellari va inshootning boshqa qismlari ko‘pyoqliklardan iborat bo‘ladi. Ko‘pyoqliklardan yana «*geodezik*» gumbazlar yasashda, keng oraliqli binolarni ustunsiz yopishda keng foydalaniladi. Qadimiy binolarda esa gumbaz, gumbaz osti, bino gumbazidan prizmatik qismiga o‘tish joylarida bezak-ornament sifatida ham qo‘llanilgan.



6.10-rasm

Ko‘pyoqlikning tekis chizmada tasvirlanishi. Ko‘pyoqlik chizmada o‘z aniqlovchilarining to‘g‘ri burchakli proyeksiyalari orqali beriladi. 6.10–rasmda *SABC* piramidaning tekis chizmasi o‘z aniqlovchilari: $S(S'S'')$ uchi, asosi $ABC(A'B'C', \; A''B''C'')$ uchburchakning proyeksiyalari orqali tasvirlangan. *SA*, *SB*, … qirralarning proyeksiyalari *S,A,B,C* uchlarining bir nomli proyeksiyalarini birlashtiruvchi $S'A'$ va $S''A''$, $S'B'$ va $S''B''$ va x.k. kesmalar bo‘ladi. YOqlarining proyeksiyalari esa qirralarning proyeksiyalari bilan chegaralangan $S'A'B'$ va $S''A''B''$, $S'A'C'$ va $S''A''C''$,… tekis rasmlardan iborat bo‘ladi. Ko‘pyoqlik sirtidagi ixtiyoriy ye(E'') nuqtaning yetishmagan E' proyeksiyasi yon tekislikka tegishli ixtiyoriy $\ell(\ell', \; \ell'')$ to‘g‘ri chiziq vositasida yasaladi (6.10-rasm).

6.2-§. Ko‘pyoqliklarning tekislik bilan kesishishi

Ko‘pyoqliklarni tekislik bilan kesilganda kesimda ko‘pburchak hosil bo‘ladi. Hosil bo‘lgan ko‘pburchakning uchlari, ko‘pyoqlik qirralarining kesuvchi tekislik bilan kesishgan nuqtalari bo‘ladi.

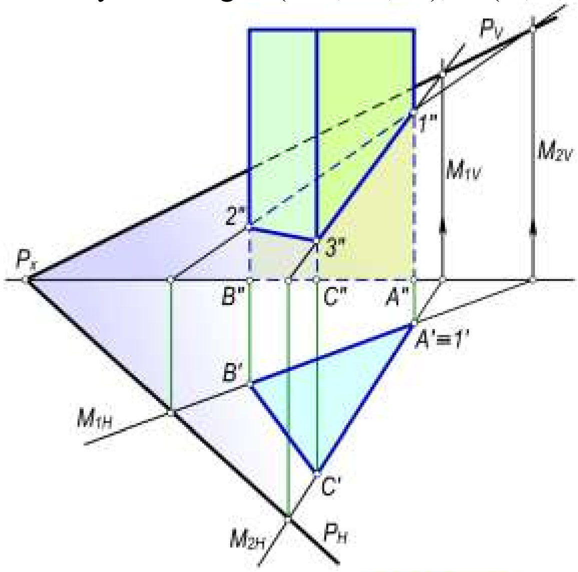
Kesimning tomonlari esa ko‘pyoqlik yoqlarining kesuvchi tekislik bilan kesishish chiziqlari bo‘ladi. Ko‘pyoqlikning tekislik bilan kesilgan qismini quyidagi uch usul bilan yasash mumkin:

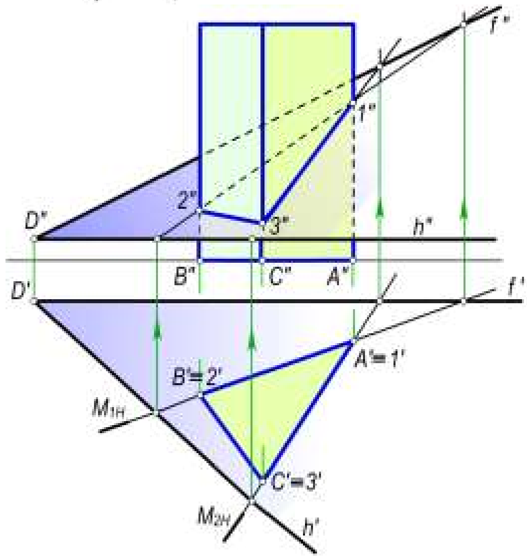
- kesim tomonlarini, ya’ni ko‘pyoqlik yoqlarining kesuvchi tekislik bilan kesishish chizig‘ini, yasash usuli.
- kesim uchlarini, ya’ni ko‘pyoqlik qirralarining kesuvchi tekislik bilan kesishgan nuqtasini yasash usuli.
- aralash usul, bunda yuqoridagi ikkala usuldan foydalaniladi.

Bu usullardan qaysi birini qo‘llash ko‘pyoqlik va tekislikni tekis chizmada berilishiga qarab tanlanadi.

6.2.1. Kesim tomonlarini yasash usuli. Bu usul ikki tekislikning kesishish chizig‘ini yasash algoritmini bir necha marta takrorlash asosida bajariladi. Bu usuldan proyeksiyalovchi vaziyatdagi prizmaning tekislik bilan kesishish chizig‘ini yasashda foydalanish juda qulaydir. 6.11-rasmda uch yoqlik to‘g‘ri prizmaning umumiy vaziyatdagi $P(P_H,P_V)$ tekislik bilan kesishuvidan hosil bo‘lgan kesimining proyeksiyalari yasalgan.

Bunda prizmaning yon yoqlari orqali $M_1(M_{IH}, M_{IV})$ va $M_2(M_{2H}, M_{2V})$ gorizontal proyeksiyalovchi tekisliklar o‘tkazilgan. Bu tekisliklarni berilgan *P* tekislik bilan kesishgan chiziqlari yordamida kesim yuzasining $12(1'2', 1'',2'')$, $13(1',3', 1''3'')$ tomonlari aniqlangan.

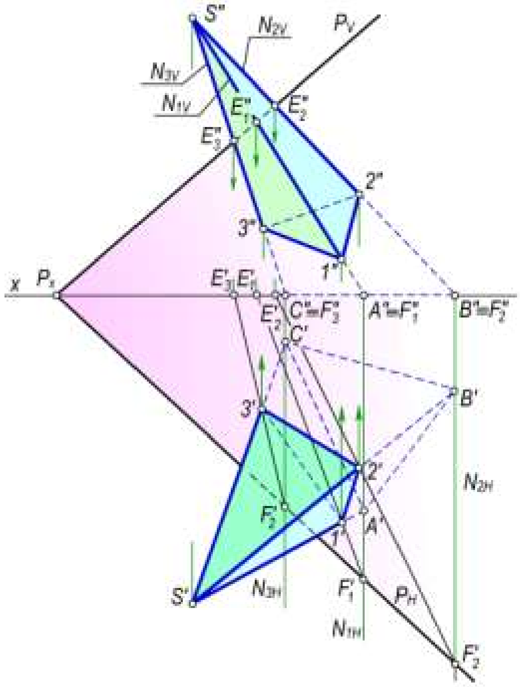


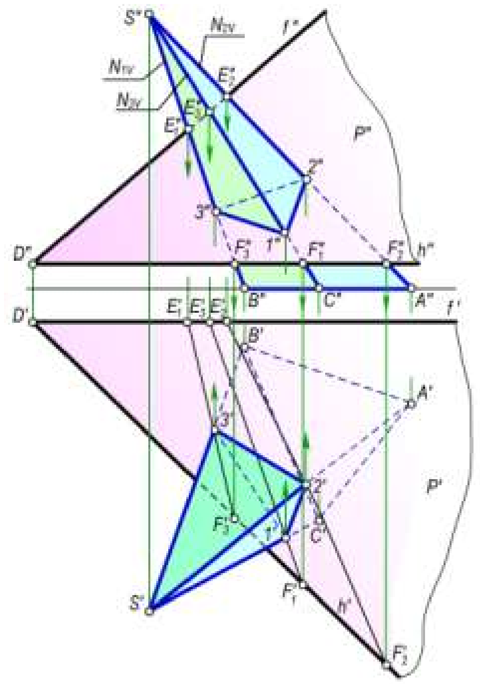


6.11-rasm **6.12-rasm**

Aynan shu prizmani, o‘zaro kesishuvchi $h(h',h'')$ va $f(f',f'')$ to‘g‘ri chiziqlar orqali berilgan $P(P',P'')$ tekislik bilan kesishuv chizig‘ini yasash 6.12-rasmda ko‘rsatilgan. Bunda kesishish chiziqlari prizma yoqlari orqali o‘tkazilgan $M_1(M_{1H})$ va $M_2(M_{2H})$ gorizontal proyeksiyalovchi tekisliklar vositasida kesim yuzasining $\Delta 123(1'2'3',1''2''3'')$ proyeksiyalari yasalgan.

6.2.2. Kesim uchlarini yasash usuli. Bu usul 1-usulga nisbatan umumiyroq hisoblanib, to‘g‘ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasini yasash algoritmi asosida bajariladi. 6.13, 6.14-rasmlarda asosi N proyeksiyalar tekisligida bo‘lgan SABC ($S'A'B'C'$, $S''A''B''C''$) piramidani, izlari orqali berilgan $R(P_V,P_H)$ tekislik va kesishuvchi chiziqlar (h va f) proyeksiyalari orqali berilgan umumiy vaziyatdagi $P(P',P'')$ tekislik bilan kesishishdan hosil bo‘lgan kesimini yasash ko‘rsatilgan.





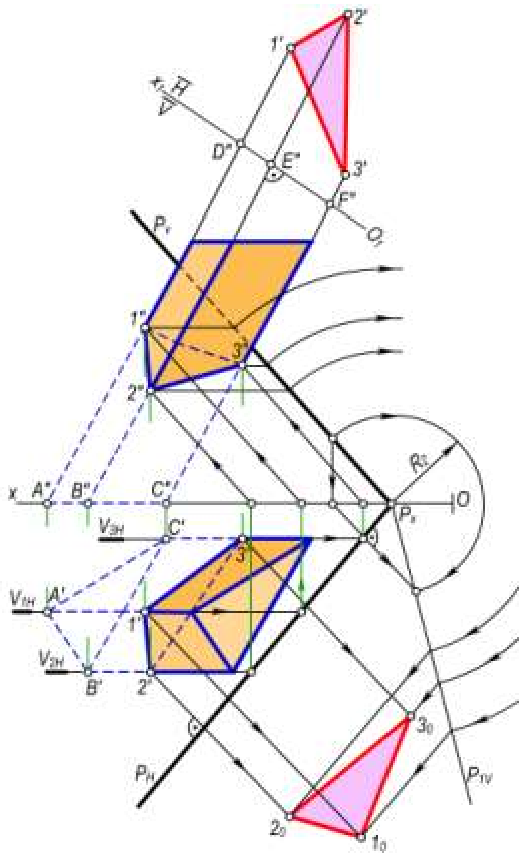
6.13-rasm **6.14-rasm**

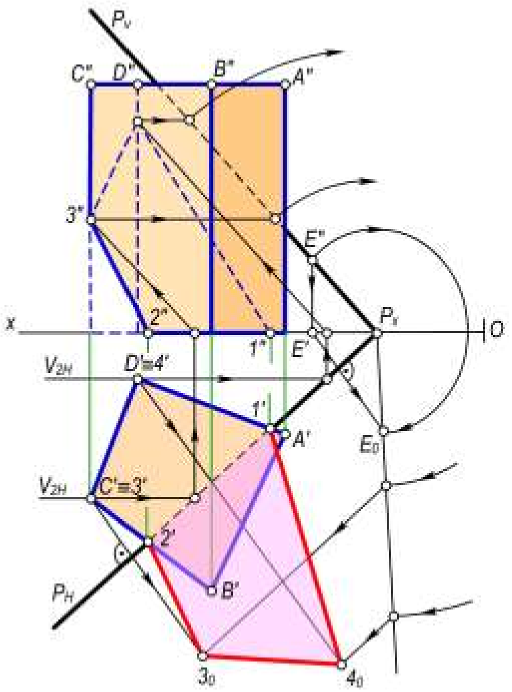
Bunda kesim proyeksiyalari $\Delta 1'2'3'$ va $\Delta 1''2''3''$ ni yasash algoritmi quyidagicha bo‘ladi:

- *SA, SB, SC* qirralar orqali yordamchi N_1, N_2, N_3 frontal proyeksiyalovchi tekisliklar o‘tkaziladi;
- bu tekisliklarning P tekislik bilan kesishgan chiziqlari E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3 ning proyeksiyalari yasaladi;
- kesishuv chiziqlari E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3 bilan piramida qirralari *SA, SB, SC* ning mos ravishda kesishuv nuqtalari *1, 2, 3* larni proyeksiyalari aniqlanadi;
- hosil qilingan *1, 2, 3* nuqtalar o‘zaro birlashtirilib, kesim yuzasining proyeksiyalari $\Delta 1'2'3'$ va $\Delta 1''2''3''$ yasaladi.

6.15-rasmda aynan shu usul bilan og‘ma prizmaning umumiy holatdagi $P(P_V,P_H)$ tekislik bilan kesishish chizig‘ini proyeksiyalarini yasash prizma qirralari orqali V_1, V_2 va V_3 yordamchi frontal tekisliklar o‘tkazish bilan aniqlash ko‘rsatilgan. Kesim yuzasi $\triangle 123$ ning haqiqiy kattaligi P ni P_H izi atrofida aylantirib H ga jipslashtirish usuli bilan aniqlangan.

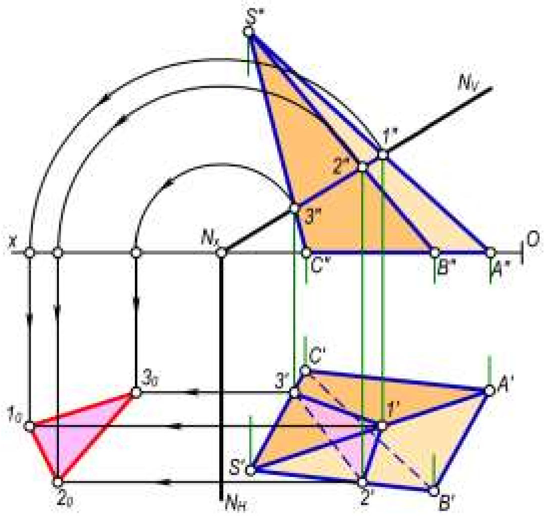
6.16-rasmda to‘g‘ri prizmaning umumiy vaziyatdagi R(P_V,P_H) tekislik bilan kesishish chizig‘ining proyeksiyalarini yasash ko‘rsatilgan. Kesimning 1(1′,1′′) va 2(2′,2′′) nuqtalari bevosita prizma asosi bilan R tekislikning P_n izi kesishgan nuqtalarida yotadi. C va D qirralar orqali o‘tkazilgan yordamchi kesuvchi V_1(V_{1H}), V_2(V_{2H}) frontal tekisliklar vositasida 3,4 nuqtalar proyeksiyalari aniqlangan. Kesim yuzasining haqiqiy kattaligi R tekislikni uning P_N izi atrofida aylantirib N ga jipslashtirish usulida yasalgan.



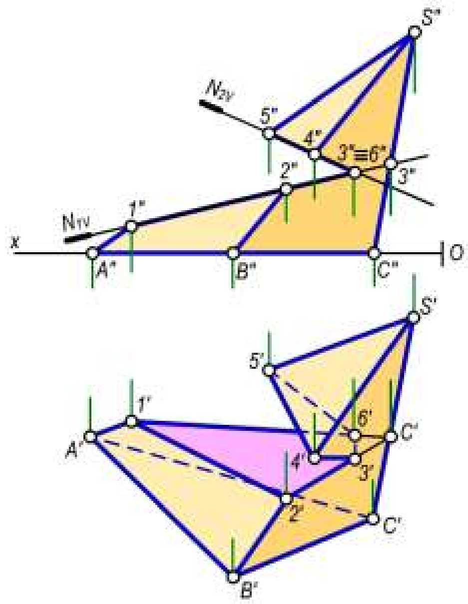


6.15-rasm **6.16-rasm**

Agar ko‘pyoqliklar proyeksiyalovchi tekisliklar bilan kesishsa, ularning kesim yuzasini proyeksiyalarini yasash yanada osonlashadi, chunki bunda kesim yuzaning bir proyeksiyasi proyeksiyalovchi tekislik izida bo‘ladi 6.17-rasmda og‘ma piramidaning frontal proyeksiyalovchi $N(N_H\ ,N_V)$ tekislik bilan kesishgan va kesim yuzasini va uning haqiqiy kattaligini yasash ko‘rsatilgan. 6.18-rasmda uchyoqli piramidani $N_1(N_{1V})$ va $N_1(N_{2V})$ frontal proyeksiyalovchi tekisliklar bilan kesib, kesimda hosil bo‘lgan o‘yiq qismining gorizontal proyeksiyasini yasash ko‘rsatilgan. Kesim yuzasi proyeksiyalarini yasash yo‘llarini chizmadan tushunib olish qiyin emas.



6.17-rasm



6.18-rasm

6.3-§. Ko‘pyoqlikning to‘g‘ri chiziq bilan kesishishi

To‘g‘ri chiziq kavariq ko‘pyoqlikning yoqlari bilan ikki nuqtada kesishadi. Bu nuqtalarning biri *kirish* ikkinchisi *chiqish* nuqtalari deb yuritiladi. To‘g‘ri chiziq bilan ko‘pyoqlik sirtining kesishish nuqtalarini yasashda quyidagi usullardan foydalaniladi:

- to‘g‘ri chiziq orqali xususiy vaziyatdagi tekislik o‘tkazish usuli;
- to‘g‘ri chiziq orqali umumiy vaziyatdagi tekislik o‘tkazish usuli.

Quyida to‘g‘ri chiziq bilan ko‘pyoqlikning kesishish nuqtalarini yasashga oid bir necha misollarni ko‘rib chiqamiz.

1-usul: To‘g‘ri chiziq bilan ko‘pyoqlik sirtining o‘zaro kesishish nuqtalarini xususiy vaziyatdagi tekislik vositasida yasash, qo‘yidagi yasash algoritm asosida bajariladi:

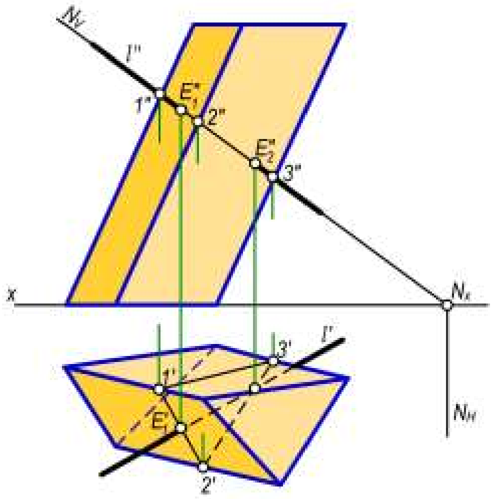
- berilgan to‘g‘ri chiziq orqali xususiy vaziyatdagi tekislik o‘tkaziladi;
- xususiy vaziyatdagi tekislik bilan berilgan ko‘pyoqlikning o‘zaro kesishuvidagi kesim yuza chizig‘i aniqlanadi;
- kesim yuza chizig‘i bilan berilgan to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtalari belgilanadi.

6.19–rasmda $\ell(\ell',\ell'')$ to‘g‘ri chiziqning uch yoqli $\Phi(\Phi',\Phi'')$ prizma sirti bilan kesishish nuqtalarini yasash tasvirlangan.

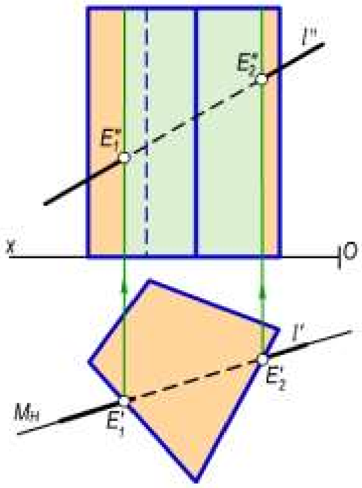
Yasash algoritmi qo‘yidagicha:

- ℓ to‘g‘ri chiziq orqali frontal proyeksiyalovchi $N(N_H,N_V)$ tekislik o‘tkaziladi; $\ell''\subset N_V$ va $N_H\perp Ox$;

- N tekislik bilan Φ prizmaning kesishishidagi kesim yuza chizig‘i proyeksiyalari $1'2'3'$ va $1''2''3''$ yasaladi. N∩Φ⇒=23;
- Kesim yuza chizig‘i Δ123 bilan ℓ to‘g‘ri chizig‘ining uchrashish nuqtalari E_1 va E_2 belgilanadi. $12 \cap \ell = E_1$ va $23 \cap \ell = E_2$. Bunda avvalo $1'2'3 \cap \ell' = E'_1$ va E'_2 lar aniqlanib, so‘ngra proyeksion bog‘lanish chizig‘i orqali E''_1 va E''_2 lar holati aniqlanadi.



6.19-rasm.



6.20-rasm

Agar ko‘pyoqlikning yon yoqlari proyeksiyalovchi tekisliklar bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq bilan bunday sirtning kesishish nuqtalarini yasash juda soddalashadi.

6.20–rasmda to‘rt yoqlik to‘g‘ri prizma sirti bilan $\ell(\ell',\ell'')$ to‘g‘ri chiziqning o‘zaro kesishish $E_1(E'_1,E''_1)$, $E_2(E'_2,E''_2)$ nuqtalarini yasash tasvirlangan.

Bunda prizmaning yon yoqlari proyeksiyalovchi tekisliklardan iborat bo‘lgani uchun ℓ orqali $M(M_N)$ gorizontal proyeksiyalovchi tekislik o‘tkaziladi, kesishuv nuqtalari proyeksiyalari E'_1 va E'_2 belgilanadi. So‘ngra ularning E''_1 va E''_2 proyeksiyalari yasaladi.

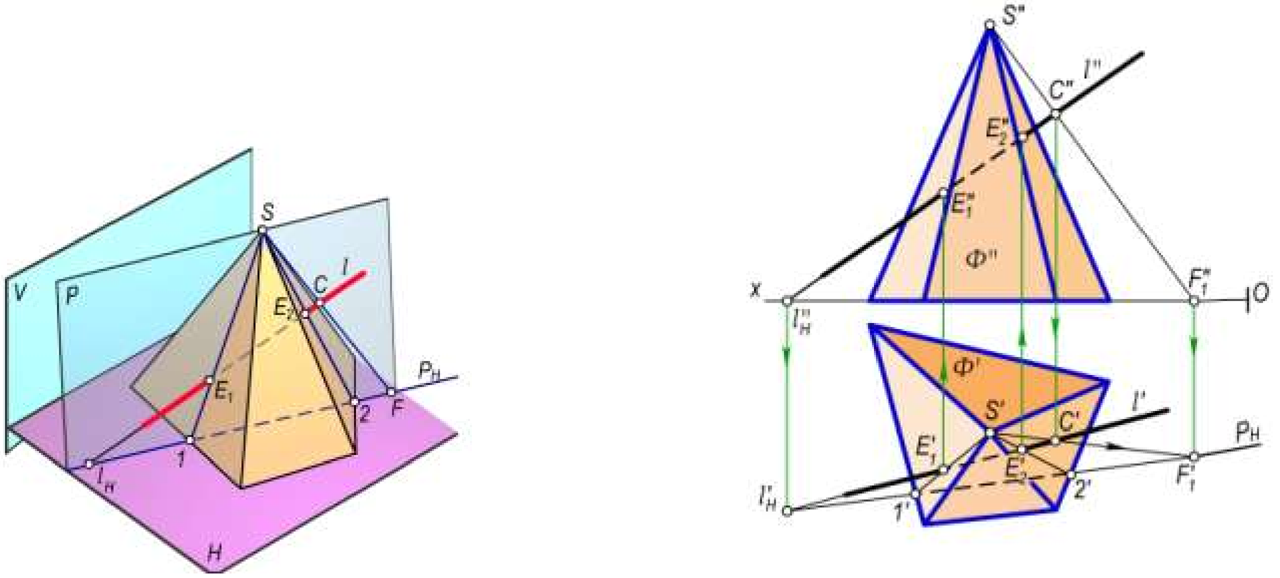
2-usul: To‘g‘ri chiziq bilan ko‘pyoqlik sirtining o‘zaro kesishish nuqtalarini, umumiy vaziyatdagi yordamchi tekislik vositasida yasash. Bunda umumiy vaziyatdagi tekislik o‘tkazish uchun markaziy yoki qiyshiq burchakli parallel proyeksiyalash usullarining biridan foydalaniladi. Bunda to‘g‘ri chiziqni ko‘pyoqlik sirtiga kirish va chiqish nuqtalarini yasash algoritmi quyidagicha:

- berilgan to‘g‘ri chiziq orqali sirtning asosini kesuvchi umumiy vaziyatdagi yordamchi tekislik o‘tkaziladi;
- yordamchi tekislik bilan sirt asosi tomonlarining kesishish nuqtalari belgilanadi;
- bu nuqtalar orqali yordamchi tekislik bilan sirt yon yoqlarining kesishish chiziqlari aniqlanadi;
- bu chiziqlar berilgan to‘g‘ri chiziq bilan kesishib sirtga tegishli kirish va chiqish nuqtalarni hosil qiladi.

6.21a,b–rasmda $\ell(\ell',\ell'')$ to‘g‘ri chiziq bilan $\Phi(\Phi'\Phi'')$ piramidaning o‘zaro kesishish nuqtasini yasash tasvirlangan. Bunda piramidaning S uchi va ℓ to‘g‘ri chiziq orqali o‘tuvchi umumiy vaziyatdagi P tekislikning R_N izini o‘tkazish uchun:

- berilgan ℓ to‘g‘ri chiziqning gorizontal ℓ'_H izi yasaladi;
- piramidaning S uchidan ℓ to‘g‘ri chiziqni ixtiyoriy $S(C',C'')$ nuqtada kesib o‘tuvchi $SC(S'C',S''C'')$ to‘g‘ri chiziq o‘tkazib uning ham gorizontal F'_1 izi yasaladi;

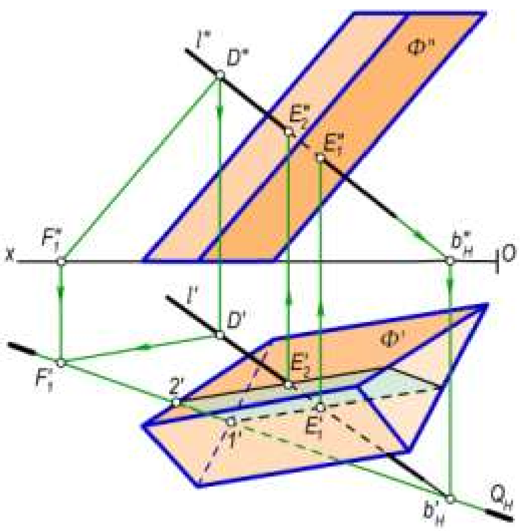
- ℓ'_H va F'_1 izlar orqali piramidani asosini kesuvchi umumiy vaziyatdagi *P* tekislikning gorizontal P_H izini o‘tkazamiz. P_H bilan piramida asosining kesishish nuqtalari *1′* va *2′* ni belgilanadi.
- *S′* nuqtani *1′* va *2′* nuqtalar bilan birlashtirib, *P* tekislik bilan piramidaning kesishish chizig‘i Δ S′1′2′ ni yasaladi;
- ΔS′1′2′ bilan ℓ' to‘g‘ri chiziqning o‘zaro uchrashish E'_1 va ye'_2 nuqtalarini belgilanadi. Bu nuqtalardan foydalanib ularning frontal E''_1 va ye''_2 proyeksiyalari aniqlanadi. Hosil bo‘lgan E_1 va ye_2 nuqtalar ℓ to‘g‘ri chiziq bilan Φ piramida sirtining kesishishidagi kirish va chiqish nuqtalari bo‘ladi.



6.21-rasm

Yuqorida bayon etilgan usulni yordamchi markaziy proyeksiyalash usuli deb ham ataladi. Bu usuldan to‘g‘ri chiziq bilan konus sirtining kesishish nuqtalarini yasashda ham foydalaniladi. Prizma yoki silindr sirtlari bilan to‘g‘ri chiziqning kesishuv nuqtalarini yasashda ham umumiy vaziyatdagi tekisliklaridan foydalangan qulay. Bunda berilgan to‘g‘ri chiziq bilan ko‘pyoqlik sirtining o‘zaro kesishish nuqtalari berilgan to‘g‘ri chiziq orqali ko‘pyoqlikning yon qirralariga parallel qilib o‘tkazilgan umumiy vaziyatdagi tekislik vositasida aniqlanadi.

Proyeksiyalash yo‘nalishi ko‘pyoqlik qirralariga parallel bo‘lgani uchun uni *qiyshiq burchakli yordamchi parallel proyeksiyalash usuli* deb ham ataladi.



6.22-расм

6.22-rasmda og‘ma vaziyatdagi Φ*(*Φ′,Φ″*)* prizma sirti bilan *b(b′,b″)* to‘g‘ri chiziqning o‘zaro kesishish nuqtalarini yasash tasvirlangan. Bu misolni chizmada yechish algoritmi quyidagicha:

- berilgan *b* to‘g‘ri chiziqning gorizontal $b_h(b'_h, b''_h)$ izi yasaladi;
- *b* to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy D(D′,D″) nuqtasidan prizmaning yon qirralariga parallel qilib to‘g‘ri chiziq o‘tkaziladi va

uning ham gorizontal $F_1(F'_1,F''_1)$ izi aniqlanadi.

- b'_h va F'_1 izlar orqali, prizmaning qirralariga parallel kesuvchi umumiy vaziyatdagi Q tekislikning Q_H izi o‘tkaziladi. Bu tekislik prizmaning asosini $1'$ va $2'$ nuqtalarda kesadi. Ushbu nuqtalaridan prizma qirralariga parallel o‘tkazilgan kesim chiziqlari l' to‘g‘ri chiziqni E'_1 *va* ye'_2 nuqtalarida kesadi. Bu nuqtalarning frontal proyeksiyalari E''_1 va ye''_2 nuqtalar, l'' to‘g‘ri chiziqda aniqlanadi. Natijada, to‘g‘ri chiziqni prizma sirti bilan kesishishidagi kirish va chiqish nuqtalari hosil bo‘ladi.

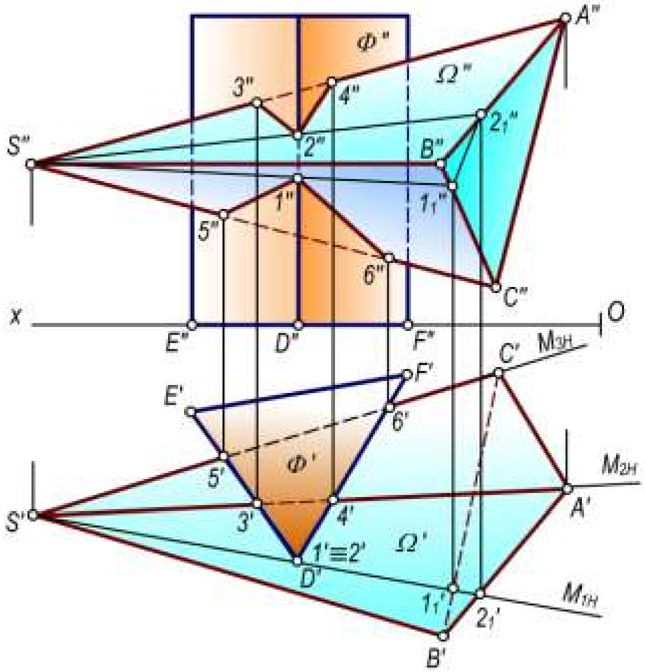
6.4-§. Ko‘pyoqliklarning o‘zaro kesishishi

Ko‘pyoqliklar fazoda bir-biriga nisbatan o‘zaro joylashuviga qarab, to‘la, qisman kesishgan yoki butunlay kesishmagan vaziyatlarda uchraydilar. Ko‘pyoqliklar o‘zaro kesishganda bir yoki bir necha yopiq fazoviy yoki tekis siniq chiziqlar hosil bo‘ladi. Bu siniq chiziq uchlarini, ko‘pyoqlikning to‘g‘ri chiziq bilan kesishish nuqtalarini yasash usuli yordamida aniqlanadi. Agar kesishuvchi ko‘pyoqliklardan birini va ikkinchisini deb belgilasak, ularning kesishgan chizig‘ini yasash qo‘yidagi algoritm bilan bajariladi:

- Φ ko‘pyoqlik qirralarining Ω ko‘pyoqlik sirti yoqlari bilan kesishish nuqtalari yoki Ω ko‘pyoqlik qirralarining Φ ko‘pyoqlik yoqlari bilan kesishish nuqtalari aniqlanadi;
- Φ va Ω qo‘pyoqlarning yon yoq tekisliklarini o‘zaro kesishish chiziqlari yasaladi.

Hosil bo‘lgan kesishish nuqtalarini yoki chiziqlarni tegishli tartibda birlashtirilsa berilgan ko‘pyoqliklarning kesishish chizig‘i hosil bo‘ladi. Ko‘pyoqliklarning o‘zaro kesishish chiziqlarini yasashda avvalo ularning kesishishida qatnashmaydigan qirralari aniqlanadi; so‘ngra ko‘pyoqliklarning ko‘rinar, ko‘rinmas qirralarini aniqlanib va ularning ko‘rinar qismlarini asosiy tutash chiziqlarda yurg‘izib chiqiladi.

6.23-rasmda tasvirlangan prizma va piramida sirtlarining o‘zaro kesishish chizig‘ini yasash algoritmi qo‘yidagicha bo‘ladi:



6.23 – rasm.

- prizma qirralarining piramida sirti bilan kesishgan nuqtalari yasalgan. Rasmdan ko‘rinib turibdiki, prizmaning faqat oldingi D qirrasigina piramida sirtini *1* va *2* nuqtalarda kesib o‘tgan. Bu nuqtalar D nuqta orqali o‘tgan $M_1(M_{1N})$ gorizontal proyeksiyalovchi tekislik yordamida yasalgan;

- piramida qirralarining prizma sirti bilan kesishgan *3,4,5,6* nuqtalari yasalgan. Piramidaning faqat *SA* va *SC* qirralari prizma bilan kesishadi. *SA* va *SC* qirralarining prizma bilan kesishgan $3(3',3'')$, $4(4',4'')$, $5(5',5'')$, $6(6',6'')$ nuqtalari 6.20-rasmda ko‘rsatilganidek $M_2(M_{2H})$ va $M_3({}_{3H})$ gorizontal proyeksiyalovchi tekisliklar yordamida topilgan;
- Aniqlangan $1'',2'',3'',4'',5'',6''$ nuqtalarni rasmda ko‘rsatilganidek, ko‘rinar-ko‘rinmas qismlarini e’tiborga olib, tartib bilan birlashtirib chiqilsa, ikki sirtning o‘zaro kesishish siniq chizig‘ining frontal proyeksiyasi hosil bo‘ladi.

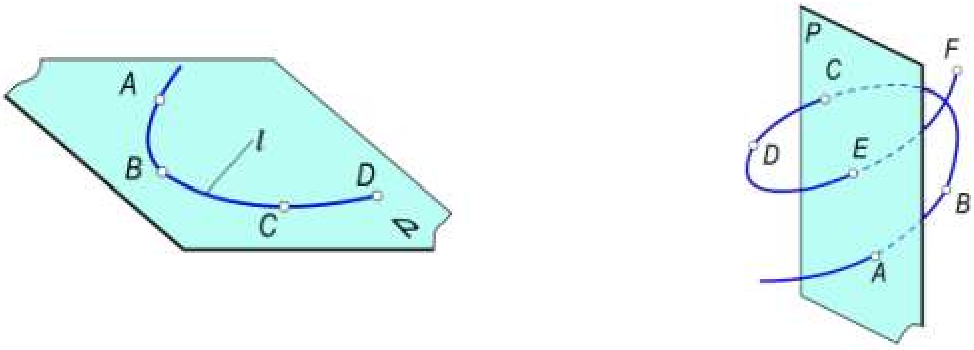
Nazorat savollari

1. Ko‘pyoqlik deb nimaga aytiladi?
2. Ko‘pyoqlikning aniqlovchilariga nimalar kiradi?
3. Qanday ko‘pyoqlikni piramida deb ataladi?
4. Qanday ko‘pyoqlikni prizma deb ataladi?
5. Qanday ko‘pyoqlikni to‘g‘ri, ko‘pyoqlik deb ataladi?
6. Qanday ko‘pyoqlikni muntazam ko‘pyoqlik deb yuritiladi?
7. Eyler teoremasida ko‘pyoqlikning qaysi xossalari keltirilgan?
8. Tekislik bilan ko‘pyoqlikning kesishishidagi kesim yuzani yasashda qanday usullardan foydalaniladi?
9. To‘g‘ri chiziq bilan ko‘pyoqlikning kesishish nuqtalarini yasashda qanday usullardan foydalaniladi?
10. Ikki ko‘pyoqlikning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasashda qanday usullardan foydalaniladi?

7.1-§. Umumiy tushunchalar

Chizma geometriyada egri chiziqlarning geometrik va mexanik xususiyatlaridan grafik ravishda amaliy foydalanish e'tiborga olinib, ularga oddiy kinematik ta'rif berish. Shuning uchun egri chiziqni fazoda yoki tekislikda ma'lum yo'nalishda uzluksiz harakatlanuvchi biror nuqtaning izi sifatida qabul qilinadi.

Egri chiziqlar tekis (7.1,a-rasm) va fazoviy (7.1,b-rasm) egri chiziqlarga bo'linadi.



a) b)

7.1-rasm

Egri chiziqlar qonuniy va qonunsiz egri chiziqlarga bo'linadilar. Egri chiziqni tashkil kiluvchi nuqtalar to'plami ma'lum biror qonunga buysunsa u *qonuniy*, aksincha nuqtalar to'plami xech qanday qonunga asoslanmagan bo'lsa, bunday egri chiziq *qonunsiz egri chiziq* deyiladi. Qonuniy egri chiziqlarning dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamalariga qarab algebraik va transsendent egri chiziqlarga bo'linadilar. Tenglamasi algebraik funksiya orqali ifodalangan egri chiziq *algebraik,* transsendent funksiya bilan ifodalangan egri chiziq esa *transsendent* egri chiziq deyiladi.

Algebrik egri chiziqlar tartib va klass tushunchalari bilan xarakterlanadi. Egri chiziqlarning tartibi uni ifodalovchi tenglamaning darajasiga teng bo'ladi.

Grafik jihatdan tekis egri chiziqlarning tartibi uning to'g'ri chiziq bilan, fazoviy egri chiziqning tartibi esa uning biror tekislik bilan maksimum kesishish nuqtalar soni orqali aniqlash.

Tekis egri chiziqning klassi unga shu tekislikning ixtiyoriy nuqtasidan o'tkazilgan urinmalar soni bilan, fazoviy egri chiziqning klassi unga biror to'g'ri chiziq orqali o'tkazilgan urinma tekisliklar soni bilan aniqlash.

Egri chiziqning tartibi va klassi har xil bo'ladi. Faqat ikkinchi tartibli egriliklarning tartibi va klassi bir xil bo'lib, u 2 ga teng bo'ladi.

7.2-§. Tekis egri chiziqlar. Ularga urinma va normal o'tkazish

Ta'rif. Hamma nuqtalari bitta tekislikda yotgan egri chiziq **tekis egri chiziq** deyiladi.

Tekis egri chiziqlar analitik va grafik ko'rinishlarda berilishi mumkin. Analitik ko'rinishda quyidagi xollar bilan beriladi:

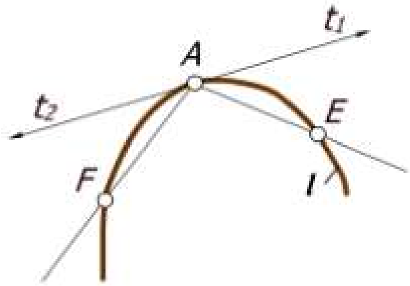
- dekart koordinatalar sistemasida f(x,u)=0 koʻphad bilan;
- qutb koordinatalar sistemasida r=f(φ) bilan;
- parametrik koʻrinishda x=x(t) va u=u(t) bilan.

Egri chiziqlarning grafik koʻrinishda berilishining turli xil usullari mavjud.

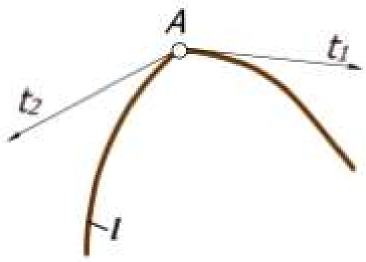
Tekislikka tegishli biror nuqtaning uzluksiz harakati natijasida tekis egri chiziq hosil boʻladi. Tekis egri chiziqning har bir nuqtasidan unga bitta urinma va bitta normal oʻtkazish.

7.2-rasmda berilgan ℓ tekis egri chizigʻiga uning biror A nuqtasida urinma va normal oʻtkazish koʻrsatilgan. Buning uchun A nuqta orqali egri chiziqni kesuvchi AE va AF toʻgʻri chiziqlarni oʻtkazamiz. ye nuqtani A nuqtaga egri chiziq buylab yaqinlashtira boshlaymiz. Natijada, AE kesuvchi A nuqta atrofida burila boshlaydi. ye nuqta A nuqta bilan ustma-ust tushganda AE kesuvchi t_1 urinmani xosil qiladi. Uni ℓ egri chiziqning berilgan nuqtasida oʻtkazilgan ***yarim urinma*** deyiladi. F nuqtani ham egri chiziq ustida harakatlantirib A nuqta bilan ustma-ust tushiramiz. AF kesuvchi t_2 yarim urinmani xosil qiladi. Qarama-qarshi yoʻnalgan t_1 va t_2 yarim urinmalar xosil qilgan toʻgʻri chiziq egri chiziqqa berilgan nuqtada oʻtkazilgan ***urinma*** deyiladi. Shunday nuqtalardan tashkil topgan egri chiziq ***ravon egri chiziq*** deyiladi.

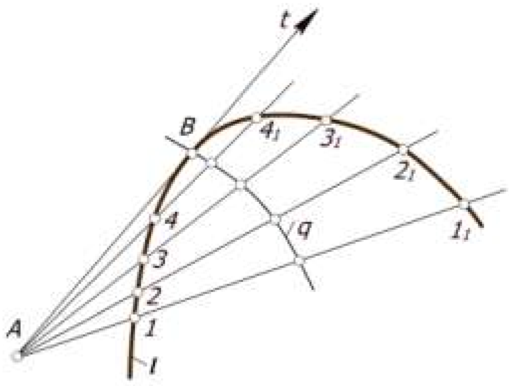
Egri chiziqning A nuqtadagi t urinmaga oʻtkazilgan perpendikulyar **n** toʻgʻri chiziq uning normali deb ataladi. Baʼzan yarim urinmalar oʻzaro ustma-ust tushmasdan oʻzaro kesishishi mumkin. Bunday nuqtalar ***sinish nuqtasi*** deyiladi (7.3-rasm). Amaliyotda egri chiziqlarga urinma va normal oʻtkazish masalalari koʻp uchraydi, shuning uchun urinma va normal oʻtkazishning baʼzi bir grafik usullarini kurib chikamiz.



7.2-rasm



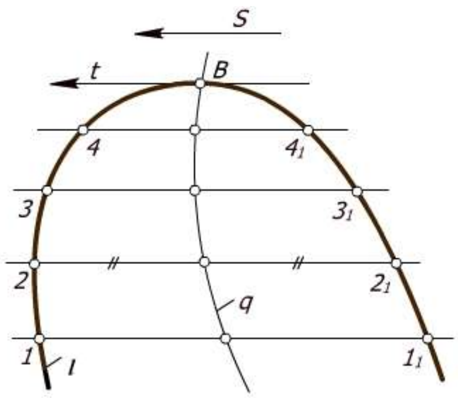
7.3-rasm



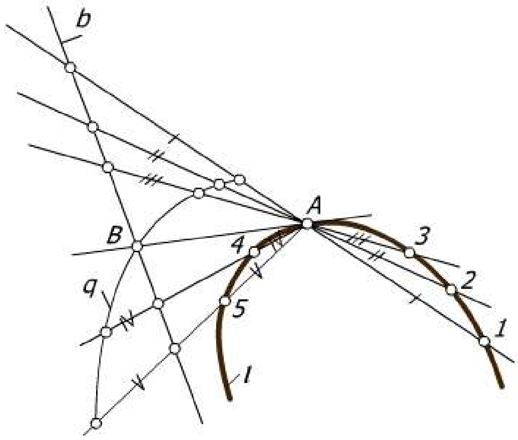
7.4-расм

7.2.1. Egri chiziqqa undan tashqari olingan nuqta orqali urinma oʻtkazish. iror ℓ egri chiziq va undan tashqarida olingan A nuqta berilgan (7.4-rasm) A nuqtadan ℓ egri chiziqqa urinma oʻtkazish talab qilinsin. Buning uchun A nuqta orqali ℓ egri chiziqni kesuvchi toʻgʻri chiziqlar oʻtkaziladi. Xosil boʻlgan vatarlarning uchlarini 11_1, 22_1, 33_1,… nuqtalar bilan belgilab, har bir vatarning oʻrta nuqtalari topiladi. Vatarlarning oʻrta nuqtalarini birlashtirib q egri chiziqni xosil qilinadi. Bu egri chiziq *xatoliklar egri chizigʻi* deyiladi va uning ℓ egri chizigʻi bilan kesishish B nuqtasi A nuqtadan oʻtuvchi urinmaning egri chiziqqa urinish nuqtasi boʻladi. A va B nuqtalarni toʻgʻri chiziq bilan birlashtirilsa, *t* urinma xosil boʻladi.

7.2.2. Berilgan yoʻnalishga parellel urinma oʻtkazish. Biror ℓ egri chiziqqa berilgan s yoʻnalishga parallel urinma oʻtkazish uchun ℓ egri chiziqni s yoʻnalishga parallel chiziqlar bilan kesiladi va xosil boʻlgan ***11***$_1$, ***22***$_1$, ***33***$_1$,… vatarlarni teng ikkiga buluvchi nuqtalar orqali q xatoliklar egri chizigʻini oʻtkaziladi (7.5-rasm). q egri chiziqning ℓ bilan kesishish nuqtasi B ni topiladi. B nuqta orqali berilgan s yo‘nalishga parallel qilib t urinmani o‘tkaziladi.

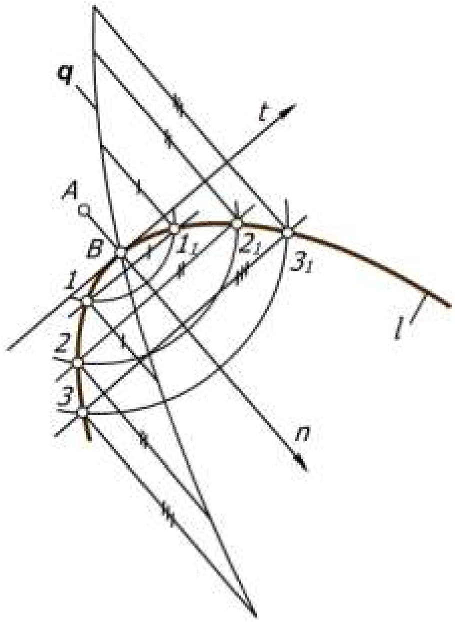


7.5-rasm



7.6-rasm

7.2.3. Egri chiziq ustida yotgan nuqta orqali unga urinma o‘tkazish. Berilgan ℓ egri chiziqni uning ustida yotgan A nuqtadan chikuvchi to‘g‘ri chiziqlar bilan kesiladi (7.6-rasm). A nuqtadan o‘tuvchi urinmaning taxminiy yo‘nalishiga perpendikulyar qilib b to‘g‘ri chiziqni o‘tkaziladi. kesuvchi nurlarga b to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tgan nuqtalardan boshlab usha chiziqning ℓ dagi vatar uzunligi o‘lchab quyiladi. Nuqtalar to‘plami q egri chiziqni xosil qiladi. q egri chiziqning b bilan kesishish nuqtasi B ni A nuqta bilan birlashtirganda t urinmaga xosil bo‘ladi.



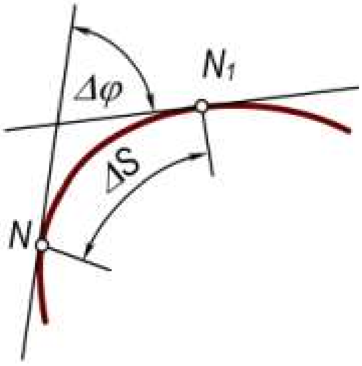
7.7-rasm

7.2.4. Egri chiziqdan tashqarida olingan nuqtadan unga normal o‘tkazish. ℓ egri chiziqdan tashqaridagi A nuqtani konsentrik aylanalarning markazi sifatida qabul qilib (7.7-rasm), undan berilgan egri chiziqni kesuvchi bir necha aylanalar chiziladi. Bu aylanalar ℓ egri chiziqni 11_1, 22_1, 33_1, …nuqtalarda kesadi. Mos nuqtalarni o‘zaro birlashtirib, egri chiziqning 11_1, 22_1, 33_1,… vatarlarini xosil qilinadi. Vatarlar uchlaridan qarama-qarshi yo‘nalishda unga perpendikulyar chiziqlar chiqariladi va ularga vatarlar uzunliglarini o‘lchab quyiladi. Bu kesmalarning uchlarini tartib bilan birlashtirib q chiziq xosil qiladi. q va ℓ egri chiziqlar o‘zaro B nuqtada kesishadilar. A va B nuqtalarni birlashtiruvchi n to‘g‘ri chiziq ℓ egri chiziqning normali bo‘ladi.

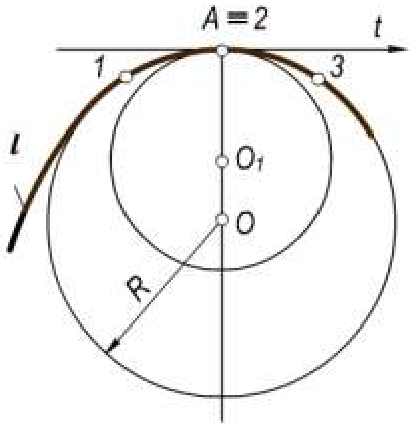
7.3-§. Tekis egri chiziqning egriligi

Qo‘shni yarim urinmalar orasidagi α burchakni ular orasidagi s yoy uzunligiga nisbatining limiti *egri chiziqning egriligi* deyiladi (7.8-rasm). Egrilikni *k* bilan belgilasak, u quyidagicha ifodalanadi:

$$k = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta S}.$$



7.8-rasm



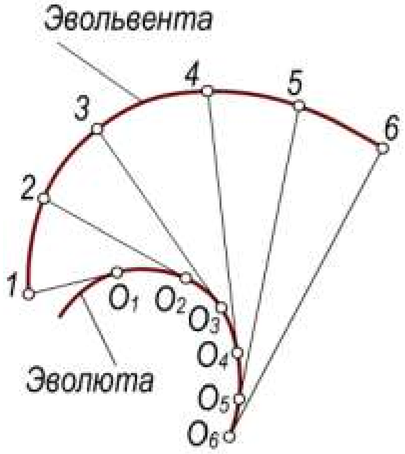
7.9-rasm

Bunda φ burchak qancha katta bo‘lsa, egri chiziq shuncha ko‘p egilgan va, aksincha, qanchalik kichik bo‘lsa, egri chiziq shuncha kam egilgan bo‘ladi. Egrilik qiymati egri chiziqning har bir nuqtasida har xil bo‘ladi. Aylananing hamma nuqtasidagi egrilik bir xildir, to‘g‘ri chiziqda esa egrilik nolga teng. Har qanday egri chiziqning egriligi aylana yordamida aniqlanadi. Bu aylana egri chiziqdagi cheksiz yaqin uchta 1, 2, 3 nuqtalardan o‘tadi. Uning radiusi, ***egrilik radiusi,*** markazi esa ***egrilik markazi*** deyiladi. Egrilik radiusi R va egrilik miqdori *k* o‘zaro teskari proporsionaldir: k=1/R, ya’ni egrilik radiusi R qancha katta bo‘lsa, *k* egrilik shuncha kichik va, aksincha, egrilik radiusi qancha kichik bo‘lsa *k* egrilik shuncha katta bo‘ladi. Masalan, to‘g‘ri chiziqda egrilik radiusi cheksiz katta bo‘lganligi tufayli egrilik nolga teng.

7.4-§. Evolyuta va evolventa

Biror ℓ egri chiziqning hamma nuqtalari uchun egrilik markazlari yasalsa, ularning to‘plami ℓ_1 egri chiziqni hosil qiladi. Bu ℓ_1 egri chiziq berilgan ℓ egri chiziqning *evolyutasi* deb ataladi (7.10-rasm). ℓ egri chiziq ℓ_1 evolyutaga nisbatan evolventa deyiladi).

Evolyutaning urinmalari ℓ evolventaning normallaridir. Evolyuta urinmalarida cheksiz ko‘p evolventalar joylashgan bo‘lishi mumkin. Shuning uchun egri chiziqning evolyutasi o‘z evolventasini aniqlay olmaydi, lekin uning evolventasi o‘z evolyutasini aniqlay oladi.



7.10-rasm

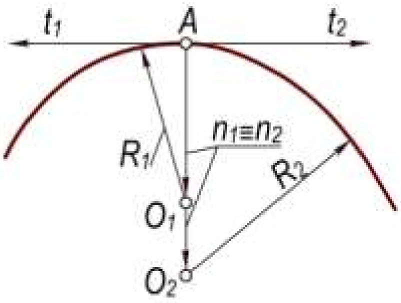
7.5-§. Tekis egri chiziq nuqtalarining klassifikasiyasi

Tekis egri chiziqlar *monoton* va *ulama* chiziqlarga bo‘linadi. Monoton egri chiziqning qator nuqtalarida egrilik radiusi uzluksiz o‘sib yoki kamayib boradi. Monoton egri chiziq yoylaridan tashkil topgan chiziq *ulama* chiziq deyiladi. Bu yoylarning ulanish nuqtalari ulama chiziqning *uchlari,* ulanuvchi yoylarning o‘zi esa ulama chiziqning tomonlari deb ataladi. YOylarning ulanish xarakteriga qarab, ulama chiziqning uchlari *oddiy* va *maxsus* nuqtalar bo‘lishi mumkin. Egri chiziqning oddiy nuqtasida yarim urinmalar qarama-qarshi yo‘nalishda bo‘lib, bitta to‘g‘ri chiziq ustida yotadi va egrilik markazlari ustma-ust tushadi. Egri chiziqlarning maxsus nuqtalari quyidagilardan iborat:

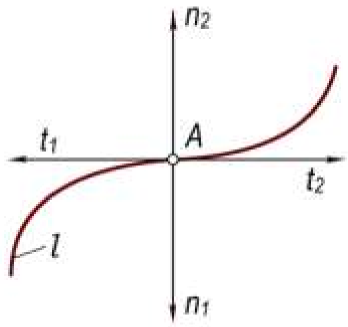
Qo‘sh nuqta. Yarim urinmalar qarama-qarshi yo‘nalishga ega, normallar ustma-ust tushadi, egrilik markazlari esa har xil joylashuvi (7.11-rasm).

Egilib o‘tish nuqtasi. Yarim urinmalar ham, normallar ham qarama-qarshi yo‘nalishda bo‘ladi (7.12-rasm).

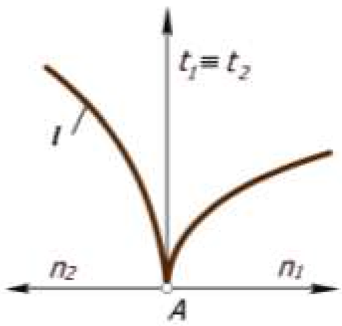
Birinchi turdagi qaytish nuqtasi. Yarim urinmalar ustma-ust tushadi va bir xil yo‘nalishda bo‘ladi, normallar qarama-qarshi yo‘nalishda bo‘lib, bir chiziq ustida yotadi (7.13-rasm).



7.11-rasm



7.12-rasm

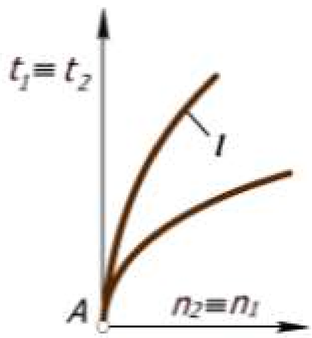


7.13-rasm

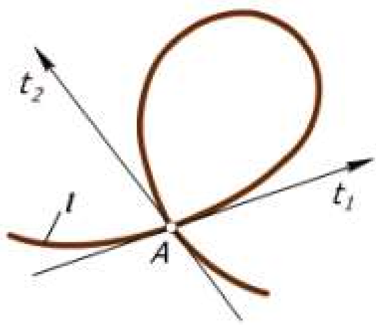
Ikkinchi turdagi qaytish nuqtasi. Yarim urinmalar va normallar juft-juft bo‘lib bir xil yo‘nalishga ega bo‘ladi (7.14-rasm);

Sinish nuqtasi. Yarim urinmalar va normallar har xil yo‘nalishda bo‘ladi (7.13-rasm);

Tugun nuqta. Tugun nuqtada egri chiziq o‘zini-o‘zi bir va bir necha marta kesib o‘tadi (7.15-rasm).



7.14-rasm



7.15-rasm

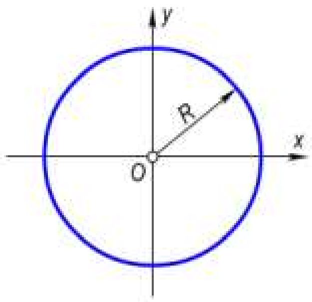
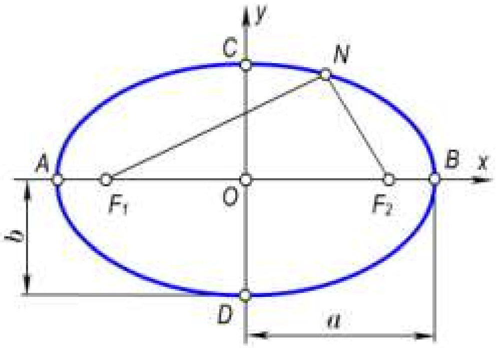
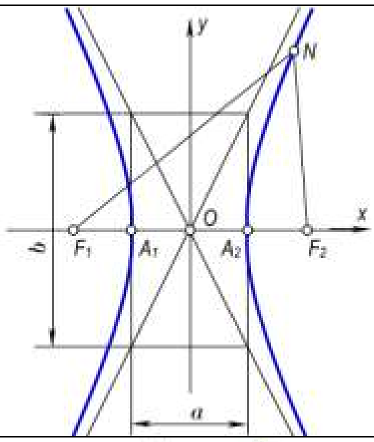
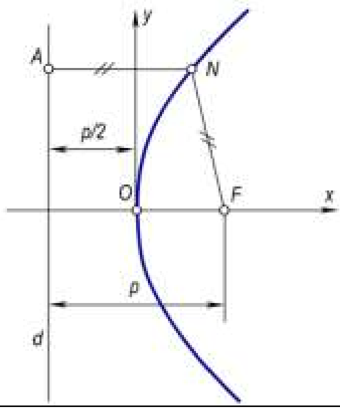
7.6-§. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar

Ta’rif. Ikkinchi darajali tenglamalar bilan ifodalanuvchi egri chiziqlar **ikkinchi tartibli egri chiziqlar** deyiladi.

Bunday chiziqlar to‘g‘ri chiziq bilan eng ko‘pi ikki nuqtada kesishadi.Ikkinchi tartibli egri chiziqlar va ularning xususiyatlaridan mashinasozlikda, binokorlikda, umuman muhandislik amaliyotining barcha tarmoqlarida keng foydalanish. Shu boisdan ham 2-tartibli egri chiziqlari mukammal oʻrganilgan. Ularga aylana, ellips, parabola, giperbola va ularning xususiy hollari kiradi. Bu egri chiziqlarning tenglamalari va ularning shakllarini aniqlovchi parametrlari analitik geometriyada toʻliq oʻrganiladi. Chizmachilikda va chizma geometriyada esa ularni yasash va hosil boʻlish usullari oʻrganiladi.

Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning nomi, ta’rifi, tenglamasi va ularning shakllari 7.1-jadvalda keltirilgan.

7.1-jadval

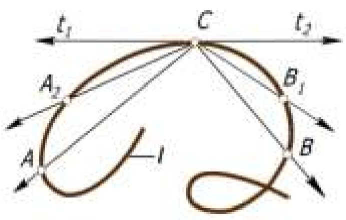
<table>
<tr><td>Aylana
Berilgan nuqtadan teng masofalarda joylashgan nuqtalarning toʻplami aylana deyiladi.
Kanonik tenglamasi
$x^2 + y^2 = R^2$
Parametrik tenglamasi
$x = R \cdot \cos t$
$y = R \cdot \sin t$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Ellips
Berilgan ikki F_1 va F_2 nuqtadan uzoqliklarining yigʻindisi oʻzgarmas miqdor boʻlgan nuqtalarning toʻplami ellips deyiladi. $F_1N + F_2N = AB = const$
Kanonik tenglamasi
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Parametrik tenglamasi $x = a \cos t$
$y = b \sin t$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Giperbola
Berilgan F_1 va F_2 ikki nuqtadan uzoqliklarining ayirmasi oʻzgarmas miqdor boʻlgan nuqtalarining toʻplami giperbola deyiladi.$F_1N - F_2N = A_1A_2 = const$
Kanonik tenglamasi
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Parametrik tenglamasi $x = a \sec t$
$y = b \operatorname{tg} t$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Parabola
Berilgan nuqtadan va d toʻgʻri chiziqdan teng masofalarda joylashgan nuqtalarning toʻplami parabola deyiladi. FN=AN
Kanonik tenglamasi $y^2=2px$
Parametrik tenglamasi
$x=t$, $y=\sqrt{2pt}$ yoki $y=t$, $x=t^2/2p$</td><td>
</td></tr>
</table>

7.7-§. Fazoviy egri chiziqlar. Ularga urinma va normallar o‘tkazish

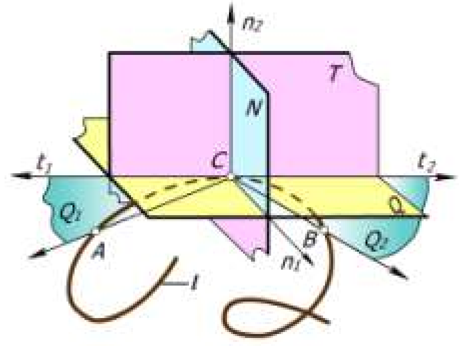
> **Ta’rif**. Hamma nuqtalari bitta tekislikda yotmagan egri chiziq **fazoviy egri chiziq** deyiladi.

Fazoviy egri chiziqni ikki xil egrilikka ega chiziq ham deb yuritiladi, 7.16-rasmda tasvirlangan fazoviy ℓ egri chiziqqa uning S nuqtasida urinma o‘tkazish ko‘rsatilgan. Egri chiziq ustidagi S nuqta orqali SA va SB kesuvchi to‘g‘ri chiziqlarni o‘tkazamiz. So‘ngra A nuqtani egri chiziq buylab S nuqtaga yaqinlashtira boramiz.

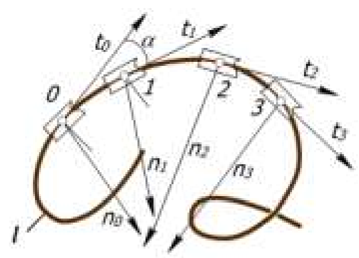
A nuqta S nuqtaga cheksiz yaqinlashganda SA kesuvchining limiti ℓ egri chiziqning S nuqtasidagi t_1 urinmaga aylanadi. Bunda t_1 urinma ℓ egri chiziqning S nuqtasida o‘tkazilgan yarim urinma deyiladi. S nuqta orqali o‘tuvchi t_2 yarim urinma ham SB kesuvchi orqali xuddi shunday yasaladi. U o‘zining limit vaziyatida t_1 yarim urinma bilan bitta ℓ to‘g‘ri chiziqda yotadi (7.17-rasm). ℓ fazoviy egri chiziqqa o‘tkazilgan urinma orqali tekisliklar dastasi o‘tadi. Egri chiziqning xarakterini aniqlash uchun ana shu tekisliklar dastasidan yopishma, to‘g‘rilovchi va ularga perpendikulyar bo‘lgan normal deb ataluvchi tekisliklar muhim rol o‘ynaydi.



7.16-rasm



7.17-rasm



7.18-rasm

Egri chiziqning ***yopishma*** tekisligi quyidagicha yasaladi. Berilgan ℓ fazoviy egri chiziqda yotgan S nuqta orqali unga t_1, t_2 yarim urinmalar o‘tkazilgan bo‘lsin. 7.17-rasmda SA va SB kesuvchi to‘g‘ri chiziqlarni o‘tkazib t_1SA (Q_1) va t_2SB (Q_2) kesuvchi tekisliklarni hosil qilamiz. A va B nuqtalarni S nuqtaga yaqinlashtirganda Q_1 va Q_2 tekisliklar t_1 va t_2 yarim urinmalar atrofida aylanib, ular ustma-ust tushib, Q tekisligini hosil qiladi. Q tekislik ℓ fazoviy egri chiziqqa uning berilgan S nuqtasida o‘tkazilgan ***yopishma*** tekisligi deyiladi.

Fazoviy egri chiziqning berilgan nuqtasida unga cheksiz ko‘p normal o‘tkazish mumkin. Normallar to‘plami hosil kilgan N tekislik egri chiziqning berilgan nuqtasida o‘tkazilgan *normal tekisligi* deyiladi.

Normallar to‘plamidagi chiziqlardan biri n_1 yopishma tekislik ustida yotadi ($n_1 \in Q$), boshqa biri n_2 esa unga perpendikulyar joylashgan ($n_2 \perp Q$) bo‘ladi. Shulardan birinchisi n_1–bosh normal, ikkinchisi n_2 – binormal deyiladi. Binormal n_2 va urinma t hosil kilgan T tekislik to‘g‘rilovchi (rostlovchi) *tekislik* deb ataladi.

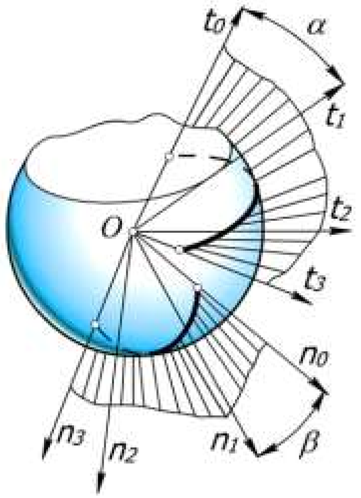
O‘zaro perpendikulyar N, Q, T tekisliklar uchyoqlikni tashkil qiladi. Buni 1847 yilda birinchi bo‘lib taklif qilgan fransuz matematigi Jan Frederik Frene nomi bilan *Frene uchyoqligi* deb yuritiladi. Frene uchyoqligidan fazoviy egri chiziqni proeksiyalash uchun tekisliklar sistemasi o‘rnida foydalaniladi. Shuningdek, Q-gorizontal, T-frontal va N-profil proeksiyalar tekisliklari sifatida qabul qilinadi. Biror fazoviy egri chiziq xossalari uning Frene uchyoqlik tekisliklaridagi proeksiyalari bo‘yicha tekshiriladi.

7.8-§. Fazoviy egri chiziqlarning tabiiy koordinatalarda berilishi

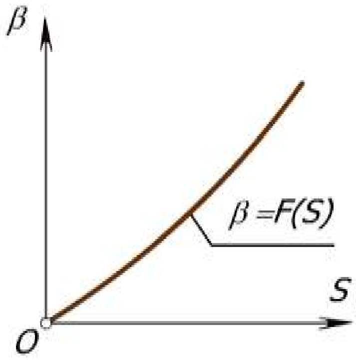
7.18-rasmda berilgan ℓ fazoviy egri chiziqning 0, 1, 2, … nuqtalarida unga o‘tkazilgan t_0, t_1, t_2,… urinmalar va n_0, n_1, n_2,… binormallar tasvirlangan. Fazoviy egri chiziq bo‘ylab harakatlanuvchi nuqta uzluksiz o‘zgaruvchi quyidagi uchta miqdor bilan bevosita bog‘liq bo‘ladi:

- tanlab olingan 0 nuqtadan boshlab qo‘shni nuqtalar orasidagi s masofa;
- t yarim urinmaning burilish burchagi α;
- qo‘shni binormallar orasidagi β burchak.

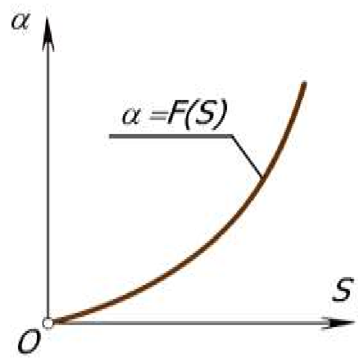
Yarim urinmalar orasidagi α burchak ***qo‘shni burchak,*** binormallar orasidagi $\beta°$ burchak ***burilish burchagi*** deyiladi. s, α va β miqdorlar fazoviy egri chiziqning tabiiy koordinatalari deb yuritiladi.



7.19-rasm



7.20-rasm



7.21-rasm

Fazoviy egri chiziqning α qo‘shni burchagi va β burilish burchagini quyidagicha aniqlash mumkin (7.19-rasm). Ixtiyoriy tanlab olingan biron 0 nuqtadan yarim urinmalarga va binormallarga parallel qilib t_0, t_1, t_2,… va n_0, n_1, n_2,… to‘g‘ri chiziqlar chiqaramiz. Bu to‘g‘ri chiziqlar to‘plami ikki konus sirtini: ***yarim urinmalar yo‘naltiruvchi konusi va binormallar yo‘naltiruvchi konusini*** tashkil qiladi. 0 nuqtani sferaning markazi sifatida qabul qilib biror R radiusi sfera o‘tkazamiz. Bu sfera yarim urinmalar va binormallar yo‘naltiruvchi konuslarini yarim urinmalar va binormallar sferik ***indikatrisalari*** deb ataluvchi egri chiziqlar bo‘yicha kesadi. α va β burchaklar miqdorlari bo‘yicha (masalan, radianda) indikatrisa yoy uzunliklari o‘lchanadi. Fazoviy egri chiziqning s uzunligi va unga mos ravishda α qo‘shni burchak va β burilish burchagi o‘lchanib quyidagicha bog‘liqliklar tuziladi: $\alpha=f(s)$, $\beta=f(s)$ va ular fazoviy egri chiziqning tabiiy koordinatalaridagi tenglamalari deb ataladi. 7.20 va 7.21-rasmlarda shu tenglamalarning grafiklari yasalgan.

Fazoviy egri chiziqning egriligi. $\alpha=f(s)$ tenglamaning grafigi bo‘yicha $\Delta\alpha/\Delta s$ nisbatning $\Delta s \rightarrow 0$ dagi limitini aniqlash mumkin. Bu esa egri chiziqning berilgan nuqtasidagi egrilik radiusini aniqlaydi, ya’ni $R = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ bo‘ladi.

R ning miqdori egri chiziqning cheksiz yaqin uchta nuqtasi orqali o‘tuvchi aylana radiusiga teng.

Egrilik radiusi qanchalik kichik bo‘lsa, chiziq shuncha ko‘p egilgan bo‘ladi. Egrilik radiusiga teskari miqdor K_1 fazoviy egri chiziqning birinchi egriligi deyiladi. U quyidagicha ifodalanadi: $K_1 = \frac{1}{R}$.

Fazoviy egri chiziqda uning o‘z o‘qi atrofida burilib harakatlanishi hisobiga ikkinchi xil egilish hosil bo‘ladi. Burilish burchagi yopishma tekislikning burilishini ifodalaydigan β burchak bilan o‘lchanadi.

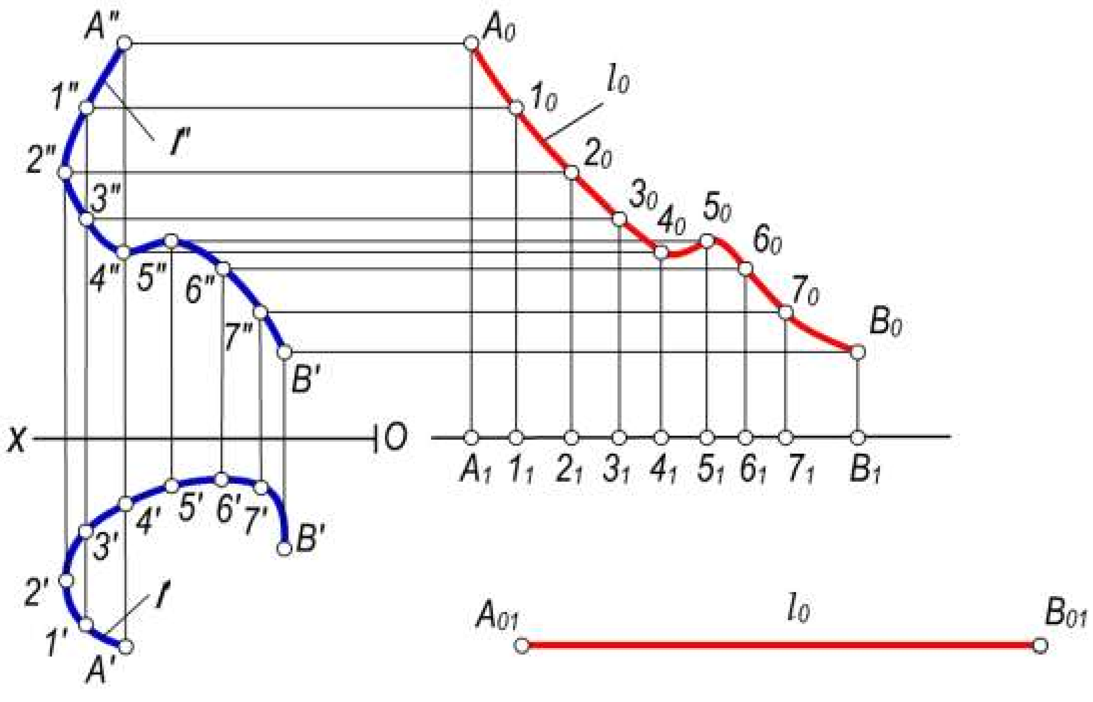
β=f(s) bog‘lanish grafigi bo‘yicha Δβ/Δs nisbatini aniqlash mumkin. Δβ/Δs nisbatning Δs→0 dagi limiti fazoviy egri chiziqning berilgan nuqtasidagi vint parametri deyiladi: $P = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta s}$.

Vint parametriga teskari K_2 miqdor fazoviy egri chiziqning ikkinchi egriligi yoki burilish egriligi deyiladi. Uning qiymati $K_2 = \frac{1}{P}$ bo‘ladi.

Fazoviy egri chiziqning berilgan nuqtasidagi to‘la egriligi $K^2 = K_1^2 + K_2^2$ ifodasi bilan aniqlanadi.

7.9- §. Fazoviy egri chiziqning uzunligini uning to‘g‘ri burchakli proeksiyalariga asosan aniqlash

Biror fazoviy ℓ egri chiziqning ℓ′ va ℓ″ to‘g‘ri burchakli proeksiyalari berilgan bo‘lsin. (7.22-rasm). Uning uzunligini grafik usulda aniqlash uchun quyidagi yasash algoritmlari bajariladi.



7.22-rasm

Egri chiziqning ℓ′ - gorizontal proeksiyasi A′B′ ni har bir bo‘lagini ixtiyoriy tanlangan *a* to‘g‘ri chiziqning A_1 nuqtadan boshlab unga ketma-ket quyib chiqiladi. Xosil bo‘lgan A_1, B_1 kesma A′B′ gorizontal proeksiyani to‘g‘rilangani yoki uni uzunligini o‘lchovchi kesma bo‘ladi.

So‘ngra *a* to‘g‘ri chiziqning A_1, 1_1, 2_1, 3_1,… V_1 nuqtalaridan unga perpendikulyarlar chiqariladi. Bu perpendikulyarlarga ixtiyoriy tanlangan gorizontal Ox chiziqdan ℓ"(A″B″) nuqtalarigacha bo‘lgan masofalar o‘lchanib qo‘yiladi. Natijada $ℓ_0$ egri chiziq hosil qilinadi.

Chizmaning ixtiyoriy bo‘sh joyida ℓ_{01} to‘g‘ri chiziq olinib, bu to‘g‘ri chiziqqa ℓ_0 egri chiziq nuqtalari ketma-ket o‘lchab qo‘yiladi, ya’ni ℓ_0 to‘g‘rilanadi.

Hosil bo‘lgan $A_{01}B_{01}$ kesma ℓ fazoviy egri chiziqning AB(A′B′, A″B″) bo‘lagining uzunligi bo‘ladi.

7.10-§. Vint chiziqlari

Silindrik vint chiziqlar

Ta’rif. Nuqtaning silindrik sirt bo‘ylab aylanma va ilgarilanma harakati natijasida hosil bo‘lgan traektoriyasi silindrik **vint chizig‘i** deyiladi.

7.23,a-rasmda A_0C_0 yasovchining bir necha holatlari A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3,… tasvirlangan. Bunda yoylar $A_0B_1=B_1B_2=B_2B_3=$… o‘zaro teng bo‘lib, ularning har biri πd/n ga teng bo‘ladi. Bunda d – silindr diametri, n – silindr asosi bo‘laklarini sonidir.

Agar A_0 nuqtaning holatlari A_1, A_2, A_3, … deb belgilansa, uning har bir ko‘tarilishi $A_2B_2=2\cdot A_1B_1$, $A_3B_3=3\cdot A_1B_1$ va x.k. bo‘lib, A_0A_{12} yasovchi bir marta aylanma harakat qilganda $A_{12}V_{12}=12\cdot A_1V_1$ bo‘ladi. A_0A_{12} – masofa vint chizig‘ining qadami, *i* - vint chizig‘ining o‘qi, A nuqtadan *i* gacha bo‘lgan masofa vint chizig‘ining radiusi deb yuritiladi.

Vint chizig‘i chizilgan silindrning diametri va vint chizig‘ining qadami uning parametrlari deyiladi. A nuqta yana bir marta aylanma harakatidan vint chizig‘ining ikkinchi o‘rami hosil bo‘ladi.

7.23,b-rasmda silindrik vint chizig‘ining yasalishi ko‘rsatilgan. Buning uchun o‘qi N ga perpendikulyar, asos diametri d ga va balandligi 2h ga teng bo‘lgan silindrning gorizontal va frontal proeksiyalari yasaladi. Silindr asosi bo‘lgan aylanani teng 12 bo‘lakka bo‘linadi.

Xuddi shuningdek, vint chizig‘ining qadami h ga teng bo‘lgan $A_0''A_{12}''$ kesma ham 12 bo‘lakka bo‘linadi. Vint chizig‘ini hosil bo‘lish jarayoniga asosan, ya’ni A nuqtani silindr yasovchisi bo‘yicha harakati va bu yasovchini o‘q atrofida aylanma harakatiga asosan aylananing har bir bo‘lagidan. Yasovchilar va 1-12 kesmaning har bir bo‘lagidan o‘qqa perpendikulyar kesmalar (nuqtani aylanma harakatini frontal proeksiyasi) chiqarilsa ℓ" vint chizig‘ining frontal proeksiyasi hosil bo‘ladi. Uning gorizontal proeksiyasi aylana bilan ustma-ust tushadi. Vint chizig‘ining frontal proeksiyasi sinusoidagi o‘xshash chiziq bo‘ladi.

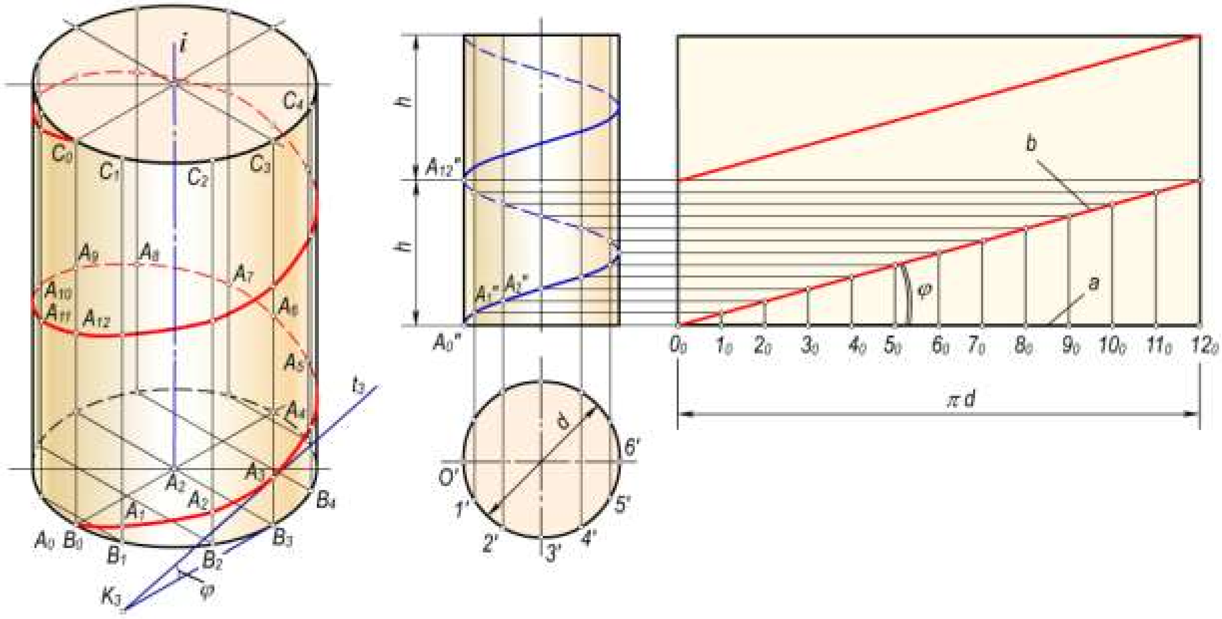
Silindrik vint chizig‘ining yoyilmasi 7.23,b-rasmda keltirilgan. Buning uchun biror *a* to‘g‘ri chiziqqa silindr asosi aylanasining yoy uzunligi πd qo‘yiladi va u 12 ta teng bo‘lakka bo‘linadi. Hosil bo‘lgan 0_0, 1_0, 2_0,….12_0 nuqtalardan *a* ga perpendikulyar chiziqlar chiqariladi. Bu perpendikulyarga vint chizig‘i nuqtalarining applikatalari mos ravishda o‘lchab qo‘yiladi. Hosil bo‘lgan nuqtalar to‘plami b to‘g‘ri chiziqni hosil qiladi. Bu to‘g‘ri chiziqni *a* bilan tashkil qilgan φ burchagi og‘ish burchagi bo‘ladi. Vint chizig‘ining A_1 nuqtasidan boshlab hosil bo‘lgan ikkinchi bo‘lagini aylanmasi ham b_1 to‘g‘ri chiziq shaklida ko‘rsatilgan.

Vint chizig‘ining ko‘tarilish burchagi tg φ=h/πd formula bilan va uning bir o‘ramining uzunligi $l=\sqrt{h^2+(\pi d)^2}$ formula bilan aniqlanadi.

Silindrning vint chizig‘ini uning **geodezik chizig‘i** deyiladi. Geodezik chiziqlar yordamida sirtdagi ixtiyoriy ikki nuqta orasidagi eng qisqa masofada o‘lchanadi.

Silindrik vint chiziqlar o‘ng va chap yo‘nalishda bo‘ladi. Nuqtaning ko‘tarilishida harakat chapdan o‘ng tomonga bo‘lsa, yoki tushishida o‘ngdan chapga bo‘lsa, hosil bo‘lgan chiziq **o‘ng yo‘nalishli vint chiziq** deyiladi.

Nuqtaning ko‘tarilishida harakat o‘ngdan chap tomonga bo‘lsa, yoki tushishida chapdan o‘ngga bo‘lsa, hosil bo‘lgan chiziq **chap yo‘nalishli vint chiziq** deyiladi.



a) b)

7.23-rasm.

Silindrik vint chiziqlar mashinasozlikda va qurilishda keng qo‘llaniladi.

Vint chizig‘iga o‘tkazilgan urinmalarning barchasi uning o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan tekislik bilan bir xil φ burchak hosil qiladi (7.23,a–rasm). Shuning uchun silindrik vint chiziqni **bir xil qiyalikdagi chiziq** deyiladi.

Silindrik vint chizig‘iga o‘tkazilgan urinmalarning N tekislikdagi izlarining geometrik o‘rni silindrik **sirt asosining evolventasi** bo‘ladi. Asos aylanasi esa **evolyuta** hisoblanadi.

Agar silindr sirtdagi boshlang‘ich A_0 nuqtaning ilgarilanma va aylanma harakati o‘zaro proporsional bo‘lmasa, o‘zgaruvchi qadamli vint chiziq xosil bo‘ladi.

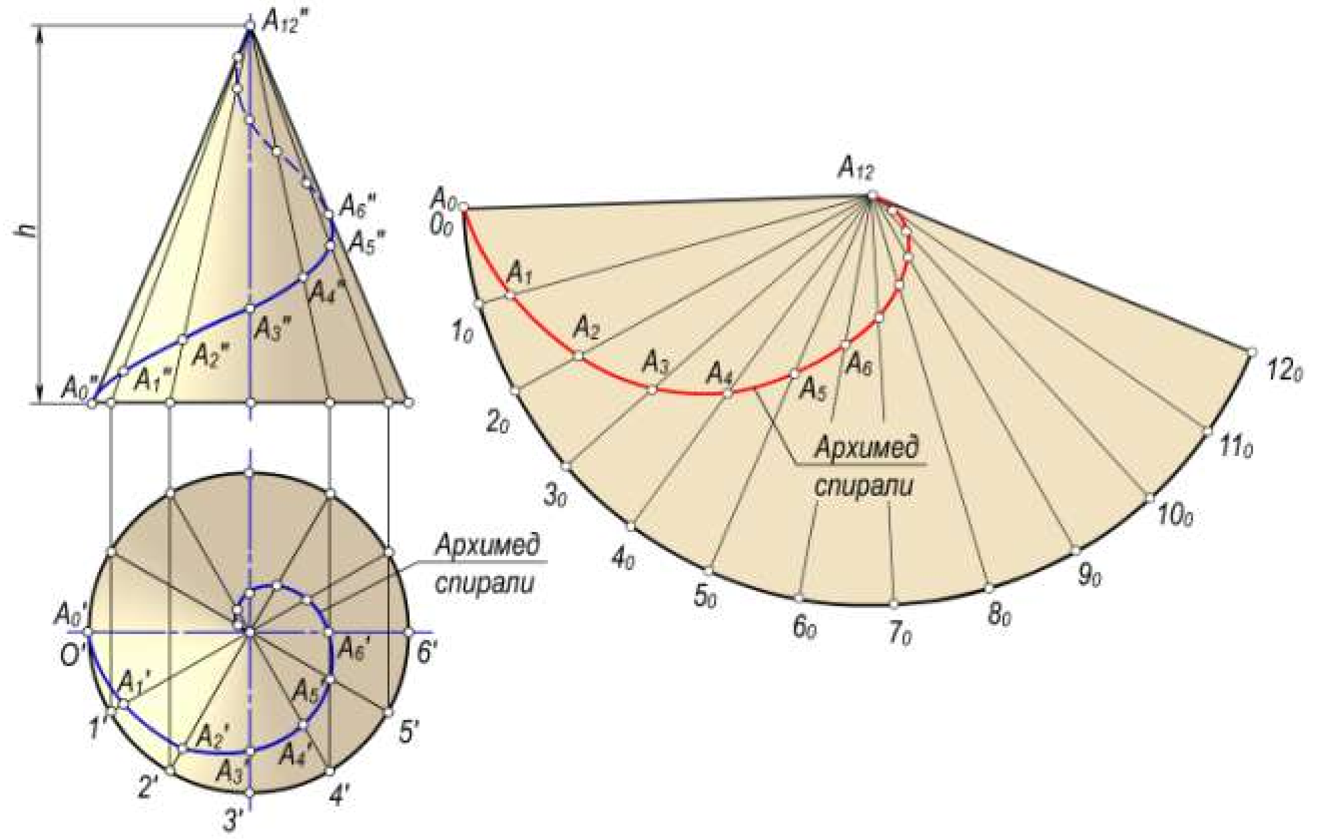
Konus vint chizig‘i

Ta’rif. To‘g‘ri doiraviy konus sirtidagi A nuqta ilgarilanma va aylanma harakat qilsa, unda A nuqta konus sirtiga fazoviy vint chiziq chizadi. Bu chiziq **konus vint chizig‘i** deb yuritiladi.

Nuqtaning konus yasovchisi buylab harakati shu yasovchining aylanish burchagiga proporsionaldir. 7.24,a–rasmda konusning 12 ta yasovchilarining holatlari chizilgan va ularga nuqtalarning holatlari mos ravishda belgilangan. *A* nuqtaning konus sirti buylab bir marta aylanishidan hosil bo‘lgan *h* masofa **konus vint chizig‘ining qadami** deb yuritiladi.

Konus vint chizig‘ining konus o‘qiga parallel tekislikdagi frontal proeksiyasi to‘lqin balandligi kamayuvchi sinusoidaga o‘xshash egri chiziq bo‘ladi. Uning konus o‘qiga perpendikulyar tekislikdagi proeksiyasi Arximed spirali bo‘ladi.

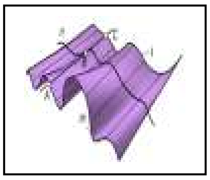
7.24,b-rasmda aylanma konus yoyilmasi va unda konus vint chizig‘ining yoyilmadagi holati yasalagan. Bu chiziq yoyilmada Arximed spirali ko‘rinishida bo‘ladi.



7.24-rasm.

Nazorat savollari

1. Tekis va fazoviy egri chiziqlarning farqi nimada?
2. Egri chiqqa urinma deb nimaga aytiladi.
3. Egri chiziqning egriligi deb nimaga aytiladi?
4. Egri chiziqning evolyutasi deb nimaga aytiladi?
5. Egri chiziqning biror nuqtasida unga normal qanday o‘tkaziladi?
6. Tekis egri chiziqlarning maxsus nuqtalarini aytib bering?
7. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar deb nimaga aytiladi va ularning turlarini aytib bering?
8. Silindrik va konussimon vint chiziqlari qanday xosil bo‘ladi?
9. Vint chizig‘ining qadami nima?
10. Qanday chiziqni geodezik chiziq deyiladi?

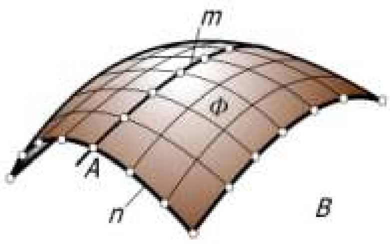


VIII bob. SIRTLARNING HOSIL BO‘LISHI VA ULARNING TEKIS CHIZMADA BERILISHI

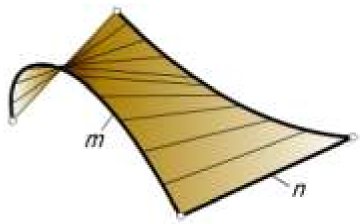
8.1-§. Umumiy ma’lumotlar

Biror chiziqning fazodagi uzluksiz harakati natijasida sirtlar hosil bo‘ladi. Sirtlarning hosil qilishning turli usullari ma’lum.

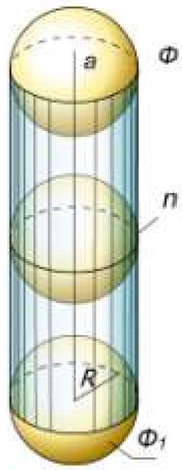
Fazoda m egri chiziq va uni A nuqtada kesib o‘tuvchi n egri chiziq berilgan (8.1-rasm). Agar n egri chiziqni m egri chiziq buylab uzluksiz harakatlantirilsa, uning qator vaziyatlarining to‘plamidan iborat biror Φ sirtni hosil bo‘ladi. Bunda Φ sirtdagi m egri chiziq sirtning yo‘naltiruvchisi, n egri chiziq uning yasovchisi deb ataladi. Aksincha, n egri chiziqni yo‘naltiruvchi, m egri chiziqni yasovchi sifatida qabul qilish ham mumkin. Bunda m egri chiziq n egri chiziq bo‘yicha harakatlangan bo‘ladi.



8.1-rasm.



8.2-rasm.



8.3-rasm.

Yasovchilarning turiga qarab egri chiziqli yasovchi hosil qilgan sirt ***egri chiziqli sirt*** (8.1-rasm), to‘g‘ri chiziqli yasovchi hosil qilgan sirt ***chiziqli sirt*** (8.2-rasm) deb ataladi.

Ixtiyoriy sirtni uzluksiz harakatlantirish natijasida ham sirt hosil qilish mumkin. Bunda hosil bo‘lgan Φ sirt harakatlanuvchi Φ_1 yasovchi sirtning har bir vaziyatida u bilan eng kamida bitta umumiy n chiziqqa ega bo‘ladi. Masalan, o‘zgarmas R radiusli sfera markazini (8.3-rasm) $\boldsymbol{a}$ to‘g‘ri chiziq bo‘ylab uzluksiz harakatlantirilsa, Φ doiraviy silindr sirti hosil bo‘ladi.

Sirt yasovchisi harakat davomida o‘z shaklini uzluksiz o‘zgartirib borishi yoki o‘zgartirmasligi mumkin.

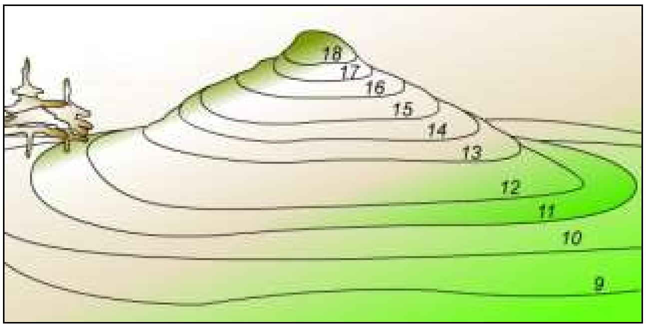
Sirtlar hosil bo‘lish jarayoniga qarab qonuniy va qonunsiz sirtlarga bo‘linadi. Sirtning hosil bo‘lishi biror matematik qonunga asoslangan bo‘lsa, bunday sirt *qonuniy sirt* deyiladi. Doiraviy silindr, konus, sfera ikkinchi tartibli va hokazo sirtlar bunga misol bo‘la oladi.

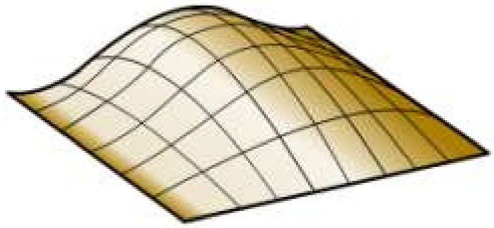
Sirtning hosil bo‘lishi xech qanday qonunga asoslanmagan bo‘lsa, bunday sirt *qonunsiz sirt* deb ataladi. Bunga topografik (8.4-rasm) va empirik (tajriba asosida olingan) sirtlar (8.5-rasm) kiradi.

Qonuniy sirtlar o‘z navbatda algebraik va transsendent sirtlarga bo‘linadi.

Algebraik tenglamalar bilan ifodalangan sirt ***algebraik,*** transsendent tenglamalar bilan ifodalangan sirt ***transsendent*** sirt deyiladi**.** Sirtlarning tartibi va klassi mavjud.

Chizma geometriyada sirtning tartibi uni tekislik bilan kesganda hosil bo‘lgan kesimning tartibi bilan aniqlanadi. Biror to‘g‘ri chiziq orqali o‘tib, sirtga uringan tekisliklar soni sirtning klassini aniqlaydi.





8.4-rasm.
8.5-rasm

Qonuniy sirtlar analitik yoki grafik usulda berilishi mumkin. Qonunsiz sirtlar faqat grafik va jadval usulida beriladi.

8.2-§. Sirtlarning berilish usullari

Chizma geometriyada sirtlar asosan analitik, kinematik va karkas usullarda beriladi.

8.2.1. Sirtlarning analitik usulda berilishi. Analitik geometriyada sirtni bitta xususiyatga ega bo‘lgan nuqtalar to‘plami sifatida talqin qilinadi.

Sirtdagi biror ixtiyoriy *A* nuqtaning ***x, u, z*** koordinatalari orasidagi bog‘lanish orqali undagi hamma nuqtalarga tegishli xususiyatni ifodalovchi tenglama *sirtning tenglamasi* deyiladi.

Uch o‘lchamli fazoda sirt analitik usulda berilishi mumkin.

Sirt umumiy ko‘rinishdagi oshkormas funksiya tenglamasi orqali quyidagicha beriladi:

$$F(x, u, z)=0. \qquad (1)$$

8.6,a-rasmdagi sfera sirtida yotgan *A* nuqtaning ***x, u, z*** koordinatalari orasidagi bog‘lanishni aniqlaydigan tenglama sferaning tenglamasini ifodalaydi. Markazi koordinata boshida joylashgan sferaning tenglamasi quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$x^2 + u^2 + z^2 - R^2 = 0. \qquad (2)$$

Sirtni funksiyaning grafigi sifatida aniqlaydigan oshkor ko‘rinishda berish mumkin

$$z=f\,(x, u). \qquad (3)$$

Sferaning tenglamasini *z* applikataga nisbatan

$$z=\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \qquad (4)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Sirt parametrlari orqali berilishi mumkin.

Sirtni $r = r\,(u, v)$ vektorlar orqali ifodalab, uni quyidagicha yozish mumkin:

$$x=x\,(u, v),\ u=u\,(u, v),\ z=z\,(u, v) \qquad (5)$$

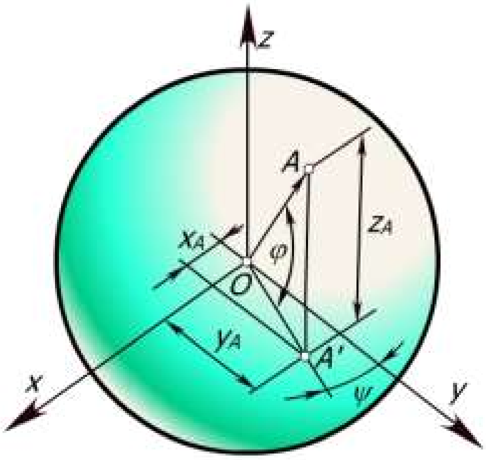
Bu tenglamalardagi ***u*** va ***v*** parametrlar bo‘lib, ular ***(u, v)*** tekislikning ma’lum qismini uzluksiz bosib o‘tadi.

Sferaning parametrik tenglamasi ***φ*** kenglik va ***ψ*** uzunlik (8.6-rasm) parametrlari orqali quyidagicha yoziladi:

$$\begin{aligned} x&=R\cos\varphi\cos\psi,\\ u&=R\cos\varphi\sin\psi, \qquad (6)\\ z&=R\sin\varphi \end{aligned}$$

Agar (6) tenglamalar ***φ*** va *ψ* parametrlardan ozod qilinsa, sferaning ***x, u, z*** koordinatalar orqali ifodalangan (2) tenglamasiga ega bo‘linadi.

Sirtlarning analitik usulda berilishi ularning chizmalarini kompyuterlarda chizish, sirtlarning differensial geometrik xossalarini tekshirish, shu jumladan, ularning yoyilmalarini aniq bajarish kabi imkoniyatlar.



8.6-rasm.

8.2.2. Sirtlarning kinematik usulda berilishi. Biror chiziqning fazodagi uzluksiz harakatidan kinematik sirt hosil bo‘lishi, unda sirtning o‘zi ham uzluksiz bo‘ladi. Kinematik harakatning oddiy asosiy turlari: ilgarilanma, aylanma va bu ikki harakatning yig‘indisi vintsimon harakatlari.

Ta’rif. Yasovchisining kinematik harakati natijasida xosil bo‘lgan sirt **kinematik sirt** deyiladi.

Xarakatning turiga qarab, ilgarilanma harakat natijasida hosil bo‘lgan sirt ***tekis parallel ko‘chirish sirti,*** aylanma harakatdan hosil bo‘lgan sirt ***aylanish sirti*** va vintsimon harakat natijasida hosil bo‘lgan sirt ***vint sirti*** deb ataladi.

Chizma geometriyada, ko‘pincha, sirtlarning kinematik usulda hosil bo‘lishidan foydalanish va kinematik sirtlarning ko‘inishi uning yasovchisining shakliga va fazodagi harakat qonuniga bog‘liq bo‘lishi, chiziqli sirtlarda yasovchining shakli to‘g‘ri chiziq bo‘ylab, uning fazodagi harakat qonunini sirtning yo‘naltiruvchisi belgilashi, aylanish sirtlarida yasovchining shakli ixtiyoriy chiziq bo‘lib, hosil bo‘lish qonuni uning ma’lum o‘q atrofida aylanishi.

Vint sirtlarda yasovchining shakli to‘g‘ri yoki egri chiziq bo‘lib, hosil bo‘lish qonuni vintsimon (aylanma va ilgarilama) harakatdir.

Tekis parallel ko‘chirish sirtlari

Ta’rif. Yasovchining ma’lum yo‘naltiruvchi bo‘yicha doimo o‘z-o‘ziga parallel ravishda harakatlanishidan hosil bo‘lgan sirt **tekis parallel ko‘chirish sirti** deyiladi

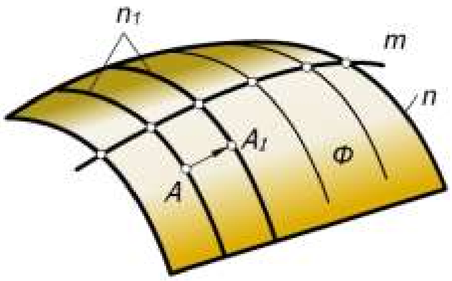
8.7–rasmda **n** tekis egri chiziqli yasovchining **m** egri chiziq buylab doimo o‘z-o‘ziga parallel ravishda ilgarilanma harakatlanishi natijasida hosil bo‘lgan Φ sirti ko‘rsatilgan. Bu sirt tekis parallel ko‘chirish sirtidir. **n** yasovchining hamma nuqtalari harakat davomida **m** yo‘naltiruvchiga o‘xshash tekis egri chiziqlar hosil qiladi.

Agar **m** egri chiziqni $\mathbf{n_1}$ egri chiziq bo‘ylab harakatlantirilsa, uning nuqtalari ham $\mathbf{n_1}$ egri chizig‘iga o‘xshash egri chiziqlar hosil qiladi. Bu chiziqlar nuqtalarning yo‘llari deyilib, sirt ustida to‘r hosil qiladi.

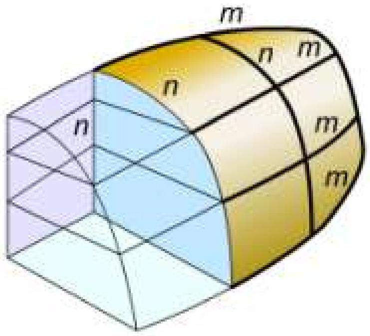
Kinematik sirt yasovchilarining uzluksiz harakati va sirtning o‘zining uzluksizligidan quyidagi muhim xulosa kelib chiqadi: ***kinematik sirtning ixtiyoriy nuqtasidan shu sirtda yotuvchi va to‘r oilalarga kiruvchi ikkita egri chiziq o‘tkazish mumkin.***

Agar **m** yo‘naltiruvchi to‘g‘ri chiziq bo‘lsa, silindr sirti hosil bo‘ladi.

Biror parabolani boshqa parabola bo‘yicha tekis siljitilsa, giperbolik paraboloid sirti hosil bo‘ladi. Demak, bu sirtlar ham tekis parallel ko‘chirish sirtlari turiga kiradi.



8.7-rasm



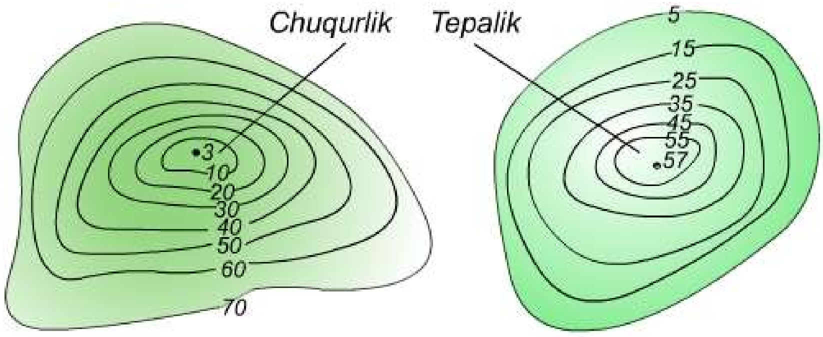
8.8-rasm

8.2.3. Sirtlarning karkas usulida berilishi. Ba’zi bir sirtlarini aniq geometrik qonuniyatlar bilan berib bo‘lmaydi. Bunday sirtlar shu sirt ustida yotuvchi bir nechta nuqtalar yoki chiziqlar bilan beriladi.

Sirtni uning ustidagi bir necha nuqtalar yoki chiziqlar bilan berilishi uning *karkas usulida berilishi* deb yuritiladi. Sirt ustida tanlangan chiziqlar to‘plami *sirtning karkaslari* deyiladi (8.8-rasm).

Sirtlarni uzluksiz karkaslar orqali hosil qilish qulaydir. Sirtlarning karkaslari fazoviy egri chiziqlar to‘plamidan iborat bo‘lishi mumkin. Ammo sirtlarni tekis egri chiziqlar (kesimlar) dan iborat karkaslari bilan berish qulayrokdir. Sirtlarning karkaslari bir, ikki va uch tekis kesimlari to‘plamidan iborat bo‘lishi mumkin (8.9-rasm). Bunda har bir to‘plam sirtning asosiy karkasi bo‘lib, qolganlari unga qo‘shimcha karkas sifatida olinadi.

Har bir sirt bir parametrli tekis egri chiziqlardan tashkil topgan bo‘lib, bu egri chiziqlarning joylashishi va xossalari sirtni xossalarini aniqlaydi.



8.9-rasm

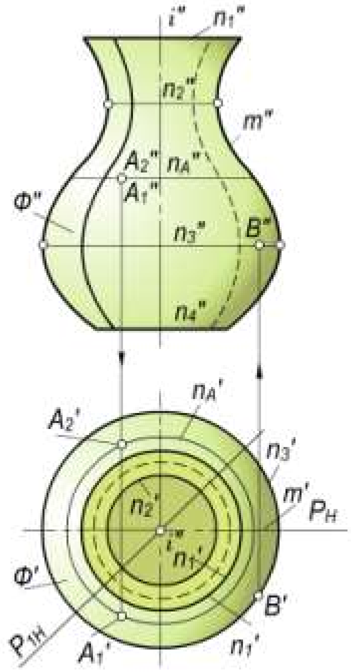
Sirt nuqtali karkas yoki chiziqli karkaslari bilan berilishi mumkin. Sirt nuqtali karkas bilan berilsa bu nuqtalar to‘plami shunday tanlanishi kerakki, unga asosan sirtning va uning har bir bo‘lagining ko‘rinishi va shaklini tasavvur qilish mumkin bo‘lsin.

8.3-§. Aylanish sirtlari

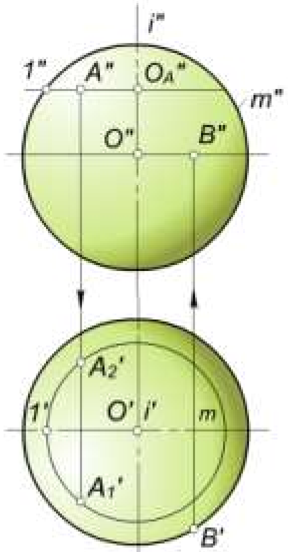
Ta’rif. Biror tekis yoki fazoviy chiziqning qo‘zg‘almas to‘g‘ri chiziq atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt **aylanish sirti** deb ataladi.

Harakatlanuvchi chiziq sirtning *yasovchisi*, qo‘zg‘almas to‘g‘ri chiziq esa uning *aylanish o‘qi* deyiladi. Yasovchi va aylanish o‘qi aylanish sirtning aniqlovchilarini tashkil qiladi. 8.10–rasmda **m(m′, m″)** egri chiziqning ***i*(*i′*, *i″*)** aylanish o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan umumiy ko‘rinishdagi aylanish sirti tekis chizmada tasvirlangan. Yasovchi va aylanish o‘qi ma’lum bo‘lsa, aylanish sirti to‘la berilgan hisoblanadi. Sirtning berilishini uning aniqlovchilari orqali **Φ(m,** ***i*****)** ko‘rinishida yozish mumkin.

Tekis chizmada aylanish sirti **Φ′(m′,** ***i*****′)** va **Φ″ (m″,** ***i*****″)** proyeksiyalari bilan hamda aniqlovchilarning istalgan ikki proyeksiyasi bilan berilgan. Aylanish jarayonida yasovchining hamma nuqtalari aylanalar bo‘yicha harakat qilib, bu aylanalar sirtning *parallellari* deyiladi. Aylanish o‘qidan o‘tgan barcha tekisliklar *meridian tekisliklari,* ularning aylanish sirti bilan kesishish chiziqlari esa *sirtning meridianlari* deyiladi. Sirtning barcha meridianlari kongruent bo‘ladilar. Frontal meridian tekisligi *bosh meridian tekisligi* hisoblanib, uning sirt bilan kesishish chizig‘i *bosh meridian chizig‘i yoki* sirtning f*rontal ocherki* deb ataladi. 8.10–rasmdagi umumiy ko‘rinishdagi aylanish sirtning aylanish o‘qi gorizontal proyeksiyalar tekisligi N ga perpendikulyar joylashganligi uchun sirtdagi parallellarning (**n_1'', n_2'', n_3'',….**) frontal proyeksiyalari to‘g‘ri chiziq kesmasi ko‘rinishida, gorizontal proyeksiyalari esa haqiqiy kattalikda, ya’ni aylana ko‘rinishida tasvirlanadi. Tekis chizmada ***P*****(*****P_H*****)** bosh va ***P_1*****(*****P_{1H}*****)** oddiy meridian tekisliklari hosil qilgan meridian kesimlari ko‘rsatilgan. Bosh meridian **V** ga parallel bo‘lganligi uchun uning frontal proyeksiyasi o‘zining haqiqiy kattaligiga teng bo‘ladi.



8.10-rasm



8.11-rasm

Agar parallelning bosh meridian bilan kesishish nuqtasidan bosh meridianga o‘tkazilgan urinma aylanish o‘qiga parallel bo‘lsa, bu parallel *ekvator yoki buyin chizig‘i* deyiladi. Bu parallel ikki yen qo‘shni parallellardan katta bo‘lsa, *ekvator,* agar ulardan kichik bo‘lsa, *buyin chizig‘i* deyiladi. Demak, biror aylanish sirtida bir necha ekvator va buyin chiziqlari bo‘lishi mumkin. 8.10-rasmdagi aylanish sirtda parallellardan n_2(n_2',n_2'') buyin, n_3(n_3',n_3'') esa ekvator chizig‘i hisoblanadi.

Boshqa sirtlar singari aylanish sirti ham cheksiz ko‘p nuqtalar to‘plamidan iboratdir. Bu nuqtalarni to‘la to‘kis chizmada tasvirlab bo‘lmaydi. Shuning uchun ham **H** va **V** ga perpendikulyar qilib aylanish sirtiga urinma silindrlar o‘tkaziladi. urinma silindrlarning N bilan kesishish chizig‘i sirtning ***gorizontal ocherki,*** V bilan kesishish chizig‘i esa uning **f*****rontal ocherki*** deyiladi. Aylanish sirtlari, ko‘pincha, o‘zining gorizontal va frontal ocherklari bilan tasvirlanadi. 8.10-rasmdagi aylanish sirtning frontal ocherki bosh meridian **m''** va **n_1'', n_4''** parallellari bilan, gorizontal ocherki **n_2'** va **n_3'** parallellari bilan tasvirlangan.

Gorizontal va frontal ocherklar sirt proyeksiyalarining ko‘rinadigan va ko‘rinmaydigan qismlarini aniqlashga ham yordam beradi.

Parallellar yordamida sirt ustida nuqtalarning proyeksiyalari topiladi. Masalan, aylanish sirtiga tegishli A_1 va A_2 nuqtalarning frontal proyeksiyalari A_1'' va A_2'' larning 8.10-rasm gorizontal proyeksiyalari A_1' va A_2'' n_A parallelning gorizontal proyeksiyasi n'_A da aniqlangan.

Ekvatorda yotuvchi B nuqtaning gorizontal B' proyeksiyasi berilgan. Uning B'' frontal proyeksiyasi ekvatorning n_3'' frontal proyeksiyasida bo‘ladi.

Aylanish sirtlari mashinasozlikda va qurilish amaliyotida keng qo‘llaniladi. Chunki, ko‘pchilik mexanizmlar aylanma harakat qiladi va aylanish sirtlari esa stanokda osongina yasaladi.

Sirtning eng katta paralleli uning ***ekvatori*** va eng kichik paralleli uning ***bo‘yini*** deb ataladi.

Loyihalanadigan mashina mexanizmlarining vazifasi, unga quyiladigan texnik talablar va shakliga qarab, aylanish sirtining yasovchisi tanlanadi.

8.3.1. Ikkinchi tartibli aylanish sirtlari

Ta’rif. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning o‘z o‘qlaridan biri atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt **ikkinchi tartibli aylanish sirtlari** deyiladi.

Ikkinchi tartibli aylanish sirtlaridan quyidagilarni ko‘rib chiqamiz.

Sfera

Ta’rif. Aylananing o‘z diametrlaridan biri atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt **sfera** deb ataladi.

8.11–rasmda tasvirlangan sfera ustidagi A nuqtaning A'' frontal va B nuqtaning B' gorizontal proyeksiyalari berilgan. A nuqtaning A_1' va A_2' gorizontal proyeksiyalarini yasash uchun u orqali $O_A''1''$ radiusli parallel o‘tkaziladi. A nuqtaning gorizontal proyeksiyalari ana shu parallelning gorizontal proyeksiyasida yotadi. A nuqta sferaning oldingi yoki orka yarmida joylashgan bo‘lishi mumkin. Shuning uchun uning gorizontal proyeksiyalari A_1' va A_2' nuqtalar parallelning gorizontal proyeksiyasida topiladi. B nuqta sfera ekvatorida yotganligi uchun uning B'' frontal proyeksiyasi bir qiymatli bo‘lib, u ekvatorning frontal proyeksiyasida topiladi.

Markazi koordinatalar boshida bo‘lgan sferaning kanonik tenglamasi quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$x^2 + u^2 + z^2 = R^2,\ R \neq 0$$

Markazi ixtiyoriy A (x_1, y_1, z_1) nuqtada bo‘lgan sfera tenglamasi

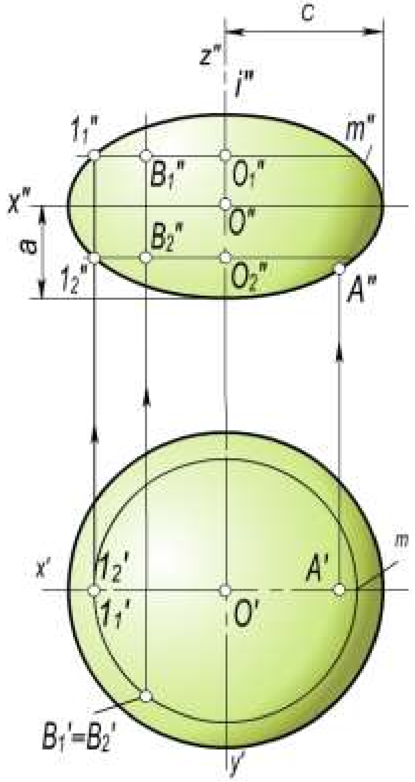
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R^2 \quad \textbf{bo‘ladi.}$$

Aylanma ellipsoid sirt

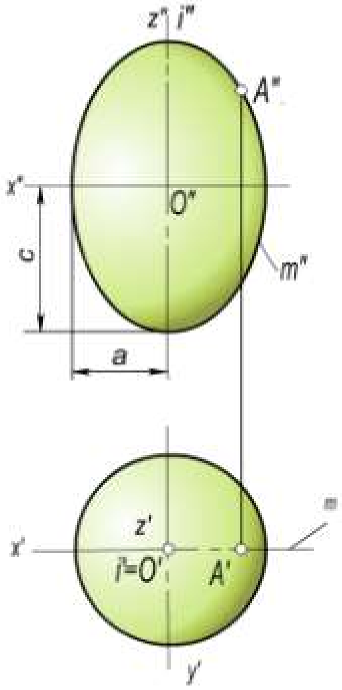
Ta’rif. Ellipsning o‘z o‘qlaridan biri atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt **aylanma ellipsoid** deyiladi.

Bunda $\mathbf{m}(\mathbf{m}', \mathbf{m}'')$ – ellips va $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{i}'')$ aylanish o‘qi y ellips o‘qi bilan ustma-ust tushadi va sirt $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{i}, \mathbf{m})$ ko‘rinishda yoziladi.

Ellipsning kichik o‘qi atrofida aylanishidan *siqiq aylanma ellipsoid* (8.12-rasm), katta o‘qi atrofida aylanishidan *cho‘ziq aylanma ellipsoid* hosil bo‘ladi (8.13-rasm). 8.12- va 8.13-rasmlarda ellipsoidlar ustida berilgan A va B nuqtalarning bitta proyeksiyasi bo‘yicha ularning yetishmaydigan proyeksiyalarini yasash ko‘rsatilgan. Nuqtalarning yetishmaydigan proyeksiyalari parallel, meridian va proyeksion bog‘lanish chiziqlari yordamida aniqlangan.



8.12-rasm.



8.13-rasm.

Markazi koordinatalar boshida bo‘lgan va katta o‘qi aylanish o‘qi bo‘lgan ellipsning aylanishidan hosil bo‘lgan aylanish ellipsoidining kanonik tenglamasi quyidagi ko‘rinishda yoziladi: $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Bunda $c \neq a$ bo‘ladi.

Er sharining shakli siqilgan ellipsoid – geoidni eslatadi.

Aylanma paraboloid sirt

Ta’rif. Parabolaning o‘z o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt **aylanma paraboloid** deyiladi.

8.14–rasmda **m(m′, m″)** parabolani ***i*(*i′*, *i″*)** o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan **Φ(*i′*, m)** aylanma paraboloidning proyeksiyalari berilgan va uning ustida nuqta tanlash ko‘rsatilgan.

Uchi koordinatalar boshida bo‘lgan va o‘qi O*z* bo‘lgan aylanma paraboloidning kanonik tenglamasi quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

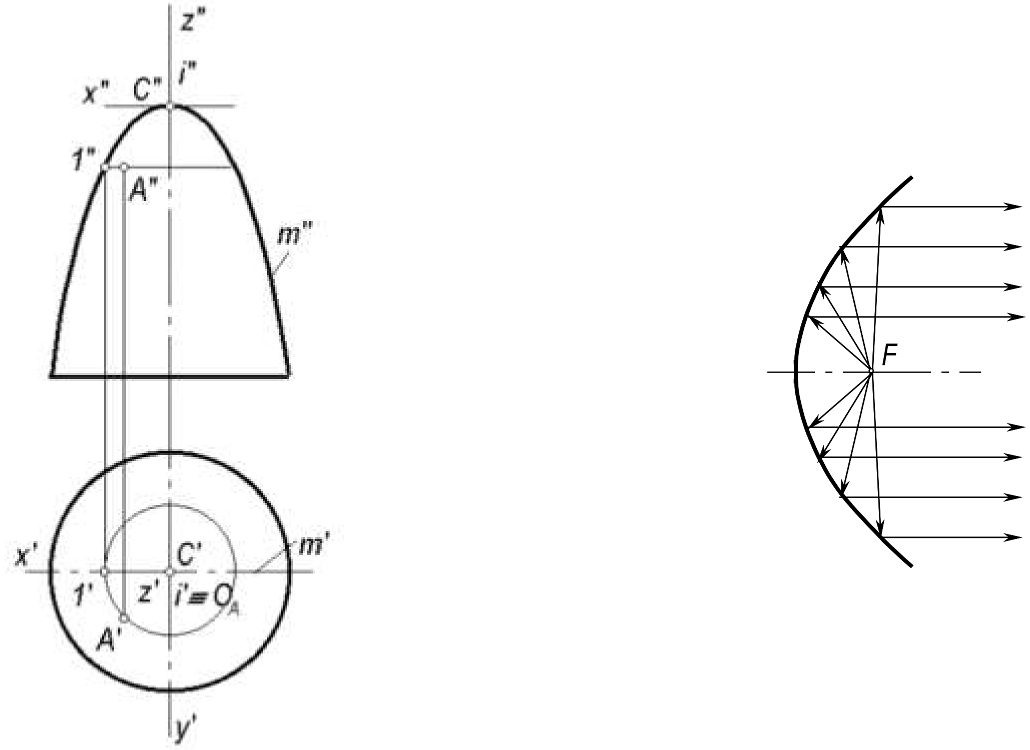
$$x^2 + u^2 = -2pz, \quad \text{bunda } p \neq 0.$$

Aylanma paraboloid parabolik oynalar sirti hisoblanib, projektorlar, parabolik antennalar va avtomobil faralari uchun ishlatiladi. Bunda parabolaning fokal xossasiga asosan parabola fokusida o‘rnatilgan nur manbaidan chiquvchi nurlar parabola sirtida sinib, o‘zaro parallel bo‘lib qaytadi (8.14,b-rasm). Parabolaning ushbu xossasiga nur yig‘ish sirtlari, tovush ushlagichlar, radiolokatorlarni konstruksiyalash ham asoslangan.

Aylanma giperboloid sirt

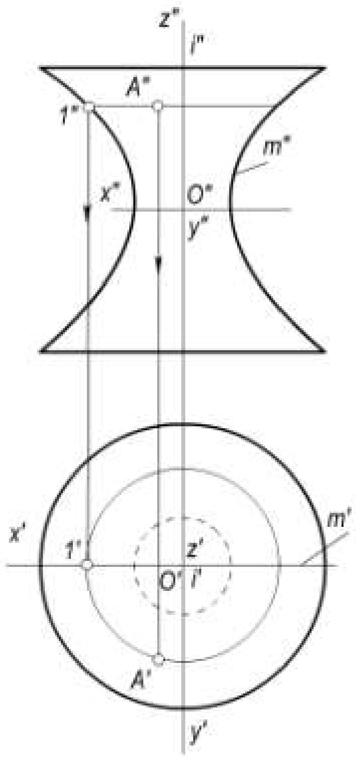
Ta’rif. Giperbolaning o‘z mavhum yoki haqiqiy o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt **aylanma giperboloid** deyiladi.

Giperbolaning mavhum o‘q atrofida aylanishidan ***bir pallali aylanma giperboloid*** hosil bo‘ladi. 8.15–rasmda ***i*****(*i′*, *i″*)** o‘qi atrofida **m(m′, m″)** giperbolaning aylanishidan hosil bo‘lgan bir pallali **Φ(*i*, m)** giperboloid va uning ustida nuqta tanlash ko‘rsatilgan.

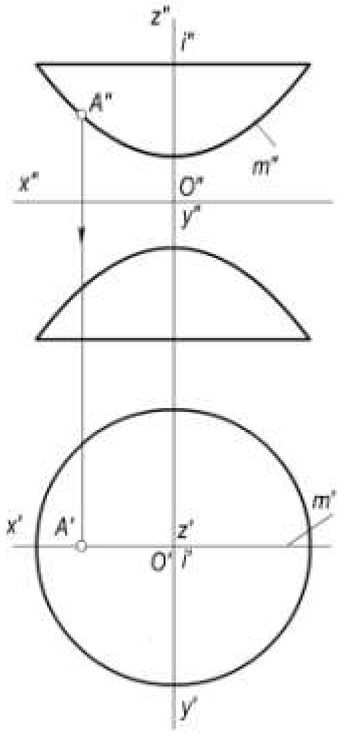


a) **b)**

8.14-rasm



8.15-rasm



8.16-rasm

Markazi koordinatalar boshida bo‘lgan bir pallali aylanma giperboloidning kanonik tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi: $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Bunda $c \neq a$ bo‘ladi.

Giperbolaning o‘z haqiqiy o‘qi atrofida aylanishidan ***ikki pallali aylanma giperboloid*** hosil bo‘ladi. Bu sirt qabariq tubi bilan bir-biriga qaratilgan qozonlarni eslatadi. Bunday sirt 8.16-rasmda tasvirlangan. **Φ (*i*, m)** ikki pallali giperboloid ustida *A* nuqtaning proyeksiyalari ko‘rsatilgan. Ikki pallali aylanma giperboloidning tenglamasi quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \text{ Bunda } c \neq a \text{ bo‘ladi.}$$

8.3.2. To‘g‘ri chiziqning aylanishidan hosil bo‘lgan ikkinchi tartibli aylanish sirtlari

To‘g‘ri chiziqni biror to‘g‘ri chiziq atrofida aylanishidan ham 2-tartibli aylanish sirti hosil bo‘lishi mumkin.

1. Aylanish o‘qi ***i*(*i*′, *i*″)** atrofida u bilan ayqash ***a*(*a*′, *a*″)** to‘g‘ri chiziqning aylanishi natijasida bir pallali aylanma giperboloid sirti **Φ (*i*, *a*)** hosil bo‘ladi (8.17-rasm).

2. Yasovchi ***a*** to‘g‘ri chiziq aylanish o‘qi ***i*** bilan kesishsa, ikkinchi tartibli aylanma konus sirti **Φ (*i*, *a*)** xosil bo‘ladi (8.18-rasm).

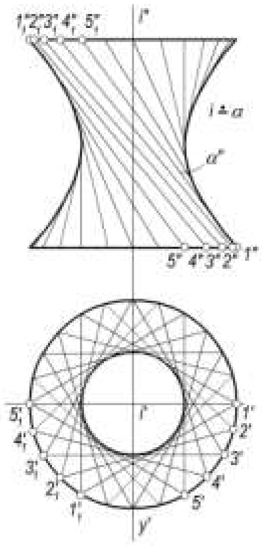
Uchi koordinata boshida bo‘lgan aylanma konus sirtining kanonik tenglamasi quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

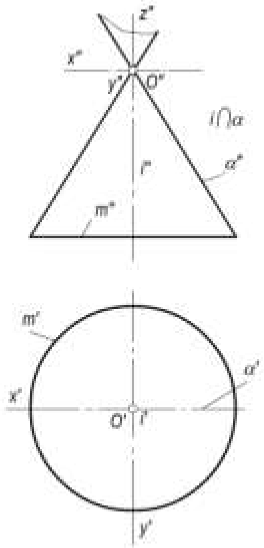
3. ***a(a′, a″)*** yasovchi to‘g‘ri chiziq ***ℓ(ℓ′, ℓ″)*** o‘qqa parallel bo‘lsa, ikkinchi tartibli aylanma silindr sirti **Φ(*i*, *a*)** hosil bo‘ladi (8.19-rasm).

Bu silindrning tenglamasi $x^2 + y^2 = R^2$ bo‘ladi. **R** miqdor ***a*** va ***i*** to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofadir.

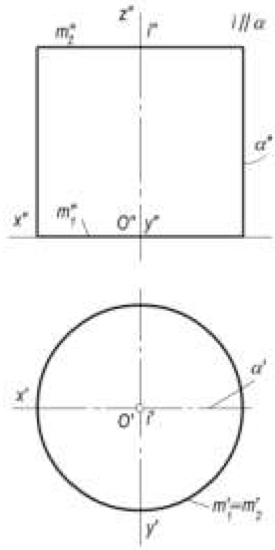
Bir pallali giperboloid, konus, silindr sirtlari ham aylanish, ham chiziqli sirtlar turiga kiradi.



8.17-rasm



8.18-rasm



8.19-rasm

8.3.3. Tor sirti

Ta’rif. Biror aylananing shu aylana tekisligida yotuvchi, ammo aylana markazidan o‘tmaydigan, ixtiyoriy *i* o‘q atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt **tor sirti** deyiladi.

Yasovchi **m** aylana radiusi **r** va aylana markazidan ***i*** o‘qqacha bo‘lgan **R** masofalarning o‘zaro nisbatiga ko‘ra tor sirtlari turlicha bo‘ladi.

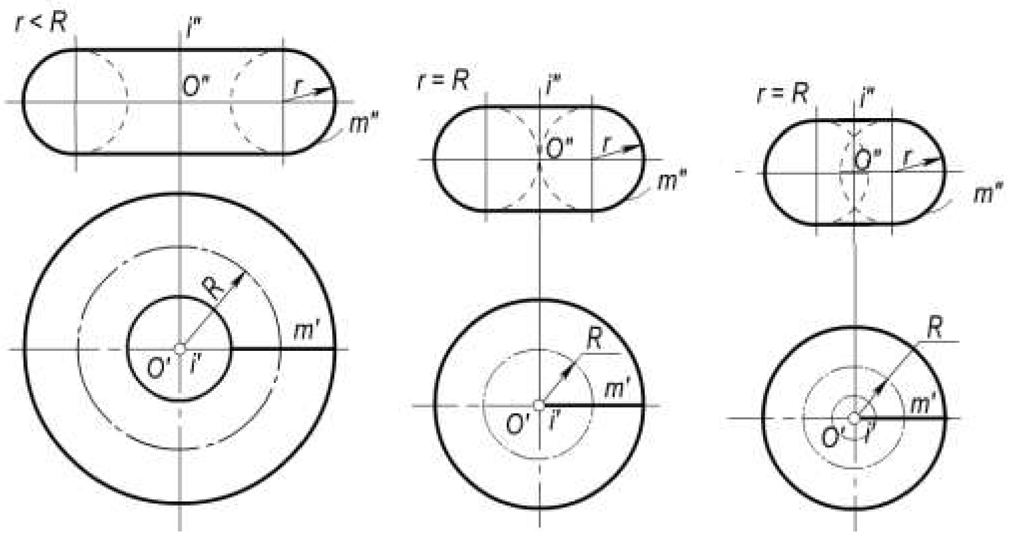
- **r<R** bo‘lganda yasovchi **m(m′, m″)** aylana aylanish o‘qi ***i*(*i*′, *i*″)** ni kesmaydi va hosil bo‘lgan tor ochiq tor yoki halqa deyiladi (8.20,a-rasm).
- **r=R** bo‘lganda yasovchi **m(m′, m″)** aylana aylanish o‘qi ***i*(*i*′, *i*″)** ga urinadi. Bunday tor yopiq tor deb ataladi (8.20,b-rasm).
- **r>R** bo‘lganda yasovchi **m(m′, m″)** aylana aylanish o‘qi ***i*(*i*′, *i*″)** ni kesadi. Bu holda xosil bo‘lgan tor ham yopiq tor deyiladi (8.20,v-rasm).

Tor sirtning aniqlovchilari ***i*** aylanish o‘qi va **m** yasovchi aylana bo‘ladi va **Φ (*i*, *a*)** tarzida yoziladi.

Ixtiyoriy tekislik torni 4-tartibli egri chiziq bo‘yicha kesadi, shuning uchun tor 4-tartibli sirtdir.

Markazi koordinatalar boshida va **r=R** bo‘lgan tor sirtining tenglamasi quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

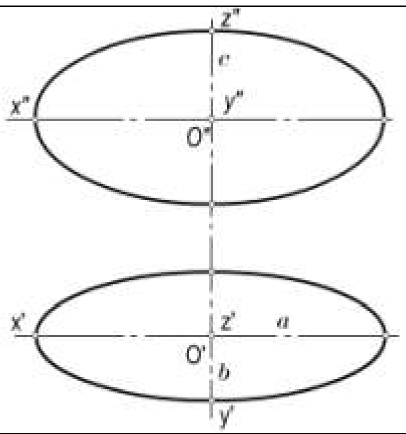
$$(z^2 + x^2 + y^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0.$$

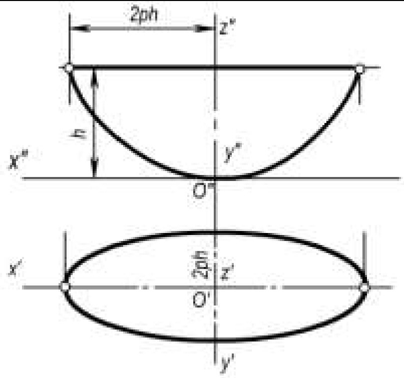
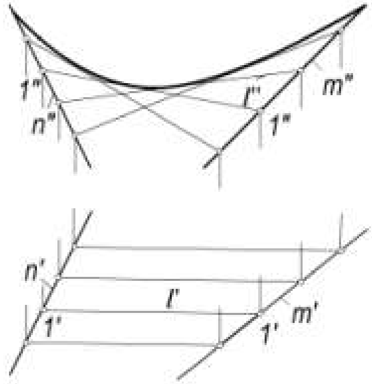
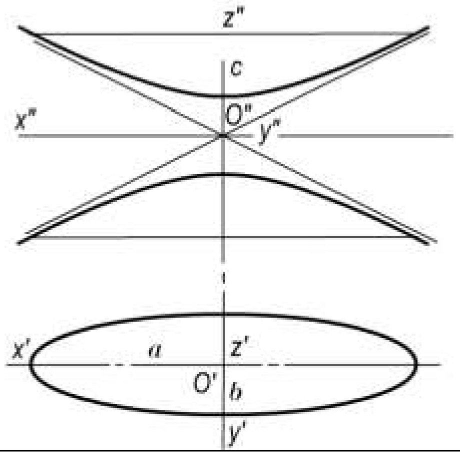
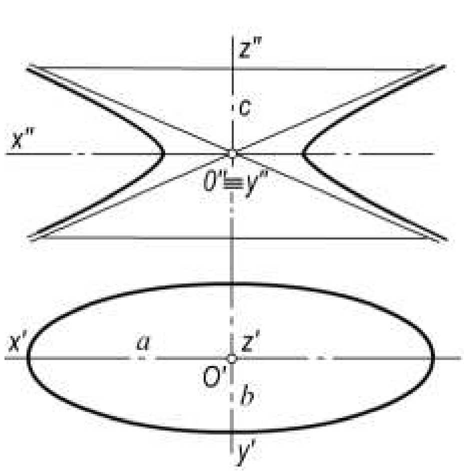


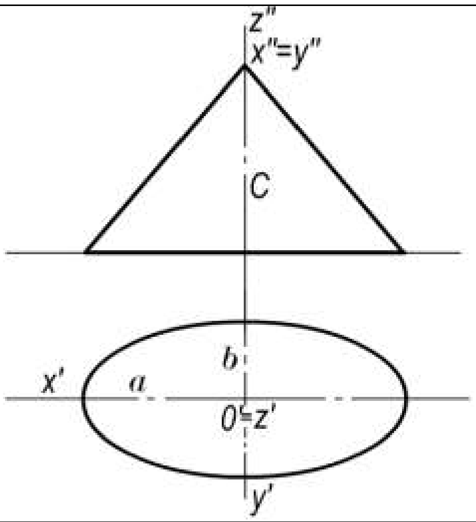
a) **b)** **v)**

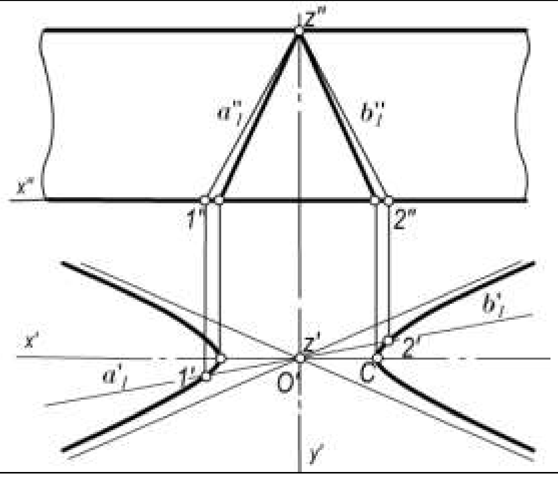
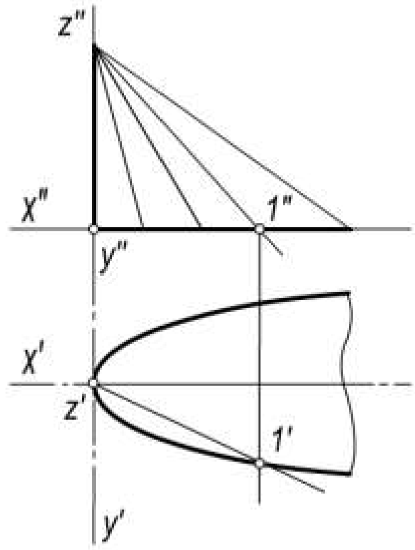
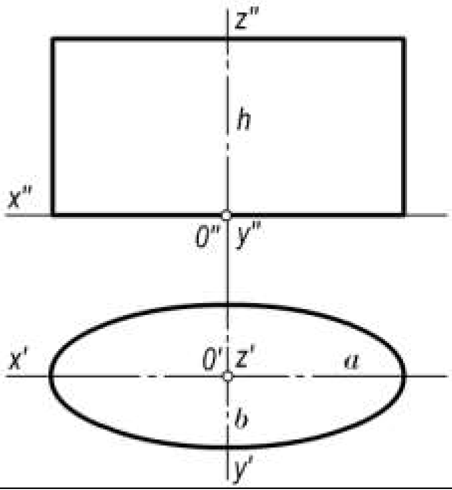
8.20-rasm

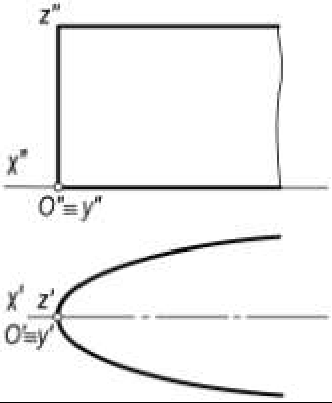
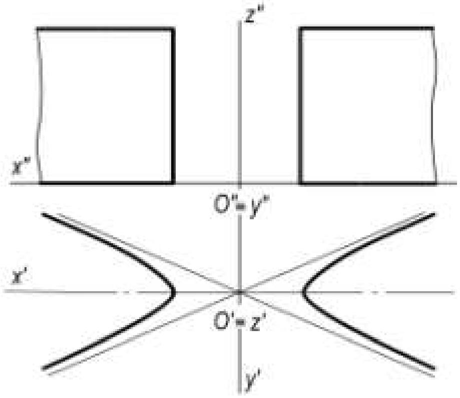
8.1-jadval

№	Nomi	Monj chizmasidagi tasviri	Analitik berilishi
1.	Uch o‘qli ellipsoid		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ a>c>b c>a>b a>b>c b>a>c c>b>a b>c>a

2.	Elliptik paraboloid		$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{p}=2Z$ p>q yoki p<q
3.	Giperbolik paraboloid		$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{p}=2z$ p>q yoki p<q
4.	Ikki pallali giperboloid		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ $0<c<\infty$ $a>b$
5.	Bir pallali giperboloid		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $0<c<\infty$ $a>b$

6.	Elliptik konus		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ $0<c<\infty$ $a>b$

№	Nomi	Monj chizmasidagi tasviri	Analitik berilishi
7.	Giperbolik konus		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ $a>b$ $0<c<\infty$
8.	Parabolik konus		$x^2-2py=z^2$ $p\neq 0$
9.	Elliptik silindr		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $z=h$ $a>b$

10.	Parabolik silindr		$y^2 = 2px$ $z = h$ $p \neq 0$
11.	Giperbolik silindr		$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $z = h$ $a > b$

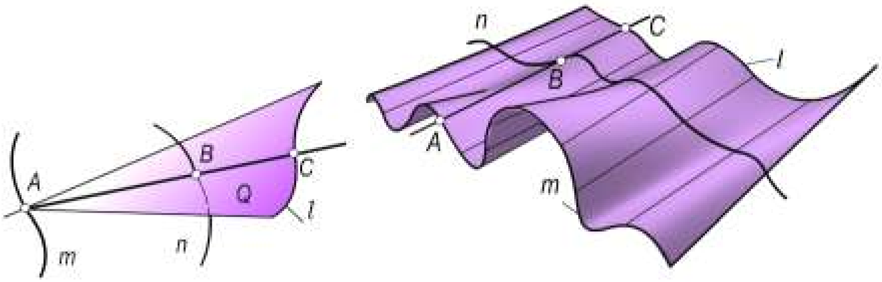
8.5-§. Chiziqli sirtlar

<u>Ta'rif</u>. To'g'ri chiziqning fazoda berilgan uchta (m, n va ℓ) yo'naltiruvchi chiziqlarni kesib o'tib, uzluksiz harakatlanishidan hosil bo'lgan sirt **chiziqli sirt** deyiladi.

Bu sirtni uch yo'naltiruvchi chiziqli sirt deb yuritiladi. Bu chiziqli sirt aniqlovchi parametrlar orqali **Φ(m, n, ℓ)** ko'rinishda yoziladi.

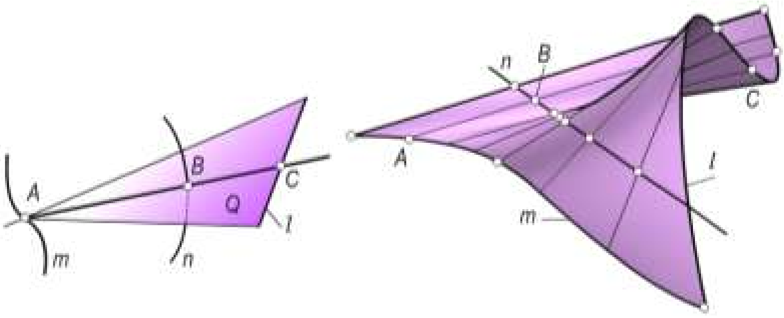
8.21,a-rasmda umumiy holdagi chiziqli sirtni hosil qilish ko'rsatilgan. Chiziqli sirtning bunday umumiy holi *qiyshiq silindr* deyiladi. 8.21,b–rasmda qiyshiq silindrning yaqqol tasviri ko'rsatilgan.

Bu sirtning hosil bo'lish jarayoni quyidagichadir. **m, n** va ***ℓ*** egri chiziqli yo'naltiruvchilar berilgan bo'ladi **m** chiziqda ixtiyoriy ***A*** nuqta tanlaymiz (8.21,a-rasm). ***ℓ*** chiziqni yo'naltiruvchi qilib, (***A***, ***ℓ***) konus sirti hosil kilamiz. Bu konus **n** chiziq bilan biror ***B*** nuqtada kesishadi. ***A***,***B***,***C*** nuqtalarni tutashtiruvchi to'g'ri chiziq uch yo'naltiruvchi sirt(qiyshiq silindr)ning yasovchilaridan biri bo'ladi. Shuningdek, **m** ga tegishli bo'lgan barcha nuqtalarni konuslarning uchi deb qabul qilib, ***ℓ*** chiziq shu konuslarning yo'naltiruvchisi bo'lganda, bu konuslar **n** chiziq bilan kesishib, uning ustida konusga tegishli nuqtalar hosil qiladi. Bu nuqtalardan o'tuvchi chiziqlar qiyshiq silindr sirtining to'g'ri chiziqli yasovchilari to'plamini hosil qiladi.



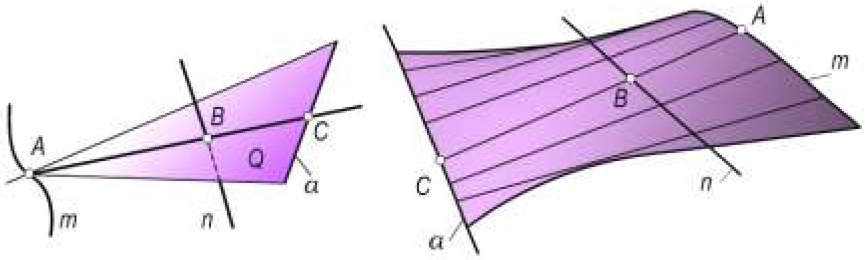
a) b)

8.21-rasm



a) b)

8.22-rasm



a) b)

8.23-rasm

Xususiy xollarda yo‘naltiruvchi **m, n** va ℓ egri chiziqlarning ba’zilari yoki hammasi to‘g‘ri chiziq bo‘lishi mumkin.Bu to‘g‘ri chiziqlardan birontasi cheksiz uzoqlikda (xosmas) bo‘lishi yoki ba’zilari nuqta ko‘rinishida bo‘lishi ham mumkin.

Cheksiz uzoqlikda bo‘lgan to‘g‘ri chiziqli yo‘naltiruvchining vaziyati biror tekislik bilan beriladi va sirtning barcha yasovchilari unga parallel bo‘ladi. Bu tekislik *parallellizm tekisligi* deyiladi.

Cheksiz uzoqlashtirilgan nuqtaning vaziyati biror to‘g‘ri chiziq bilan beriladi va sirtning barcha yasovchilari uning yo‘nalishiga parallel bo‘ladi.

Agar fazoda ixtiyoriy biror S nuqta tanlab u orqali Φ_2 qiyshiq silindr sirtining yasovchilariga parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilsa, biror Φ_1 konus sirti xosil bo‘ladi. Bu konus sirt ***yo‘naltiruvchi konus*** deb yuritiladi. Demak, qiyshiq silindr sirtini ikki egri chiziqdan iborat yo‘naltiruvchilar (**m, n**) va yo‘naltiruvchi konus Φ_1 bilan ham berish mumkin. Bunday holda sirtni yasash algoritmi quyidagicha bo‘ladi. **m** va **n** egri chiziqli yo‘naltiruvchilar hamda S uchli Φ_1 yo‘naltiruvchi konus berilgan bo‘lsin (8.23-rasm). **m** chiziq ustidagi ixtiyoriy ***A*** nuqtani biror Φ_2 konusning uchi deb olib, $\Phi_2 \| \Phi_1$ konus yasaladi. So‘ngra $\Phi_2 \cap n = B$ nuqta aniqlanadi. ***A*** va ***B*** nuqtalar to‘g‘ri chiziq orqali tutashtirilib, qiyshiq silindrning to‘g‘ri chiziqli yasovchisi hosil qilinadi. ***A*** nuqtani **m** egri chiziq bo‘yicha harakatlantirib, **n** chiziq ustida ***B*** nuqta singari qator nuqtalar xosil qilish mumkin.

Qiyshiq silindrning bu usul bilan hosil bo‘lishini geometrik tomondan quyidagicha analiz qilish mumkin. Sirtning **m** va **n** egri chiziqli yo‘naltiruvchilari xos chiziqlar bo‘lib, ***ℓ*** yo‘naltiruvchi egri chiziq cheksiz uzoqlashtirilgan bo‘ladi. Cheksiz uzoqlashtirilgan ***ℓ*** yo‘naltiruvchining vaziyati yo‘naltiruvchi konus orqali beriladi, ya’ni sirtning har bir to‘g‘ri chiziqli yasovchisi ***m*** va ***n*** chiziqlarni kesib, yo‘naltiruvchi konusning mos yasovchisi bilan cheksiz uzoqlikda kesishadi.

Chiziqli sirtlar yoyiladigan va yoyilmaydigan sirtlarga bo‘linadi.

Ta’rif. Cheksiz yaqin turgan ikki qo‘shni yasovchilar (to‘g‘ri chiziq) o‘zaro parallel yoki kesishuvchi bo‘lib, tekis element hosil kilsa, bunday chiziqli sirtlar *yoyiladigan sirtlar* deyiladi

Yoyiladigan sirtlarga konus, silindr sirtlarni misol bo‘la oladi.

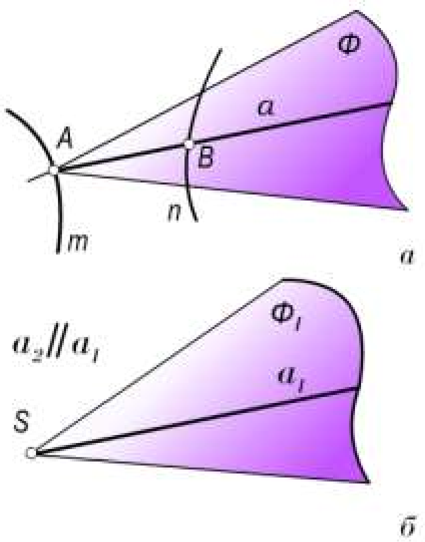
Agar cheksiz yaqin turgan ikki qo‘shni yasovchi (to‘g‘ri chiziq) o‘zaro uchrashmas vaziyatda bo‘lsa, bunday chiziqli sirtlar *yoyilmaydigan sirtlar* deyiladi.

8.6-§. Yoyilmaydigan chiziqli sirtlar

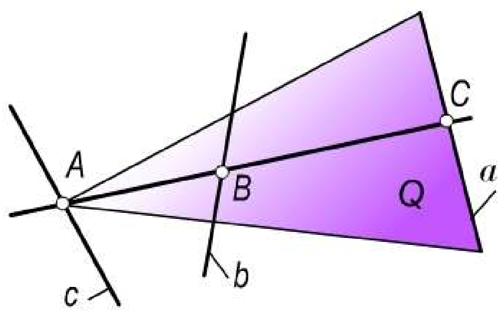
Yoyilmaydigan chiziqli sirtlarga quyidagilar kiradi:

8.6.1 Qiyshiq silindr. Qiyshiq silindr uchchala yo‘naltiruvchisi ham egri chiziq ko‘rinishida bo‘lganda hosil bo‘ladi. Uning aniqlovchilari ***m, n, a*** egri chiziqlardan iborat bo‘lib **Φ(*m, n, a*)** ko‘rinishida yoziladi. Bu sirtlarning tasviri 8.21, *a,b*-rasmda berilgan.

8.6.2. Ikki marta qiyshiq silindroid. Ikki marta qiyshiq silindroid yo‘naltiruvchilarning ikkitasi **m, n** egri chiziq va uchinchisi ***a*** to‘g‘ri chiziq bo‘lgan hollarda hosil bo‘ladi. 8.22,*a*,*b*-rasmda bunday sirtning chizmalari berilgan. Bu sirt aniqlovchilar bilan **Φ(*m, n, a*)** ko‘rinishida yoziladi.



8.24-rasm



8.25-rasm

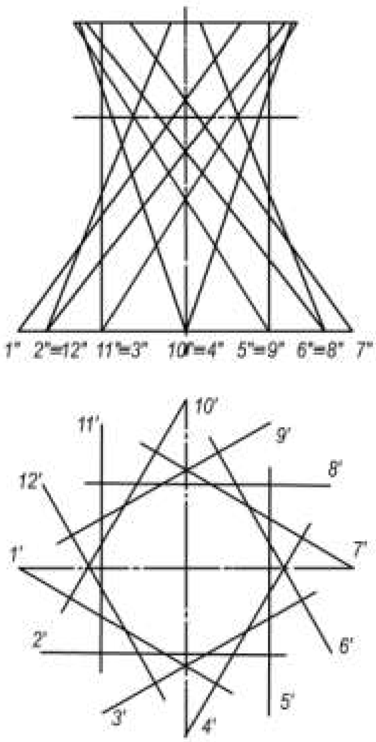
8.6.3. Ikki marta qiyshiq konoid. Ikki marta qiyshiq konoid (8.23,a,b-rasm) yo‘naltiruvchilarning ikkitasi ***a, n*** to‘g‘ri chiziq bo‘lib, uchinchisi **m** egri chiziq bo‘lgan holda hosil bo‘ladi.8.23- rasmda ikki marta qiyshiq konoidning fazoviy tasviri ko‘rsatilgan. Bu sirt aniqlovchilar bilan Φ(m, ***a, b***) ko‘rinishida yoziladi.

8.6.4. Bir pallali giperboloid. Bir pallali giperboloid (8.25-rasm). Bu sirt yo‘naltiruvchilarining uchalasi ham bir tekislikda yotmaydigan ***a, b, c*** to‘g‘ri chiziqlarda iborat bo‘lgan holda xosil bo‘ladi.

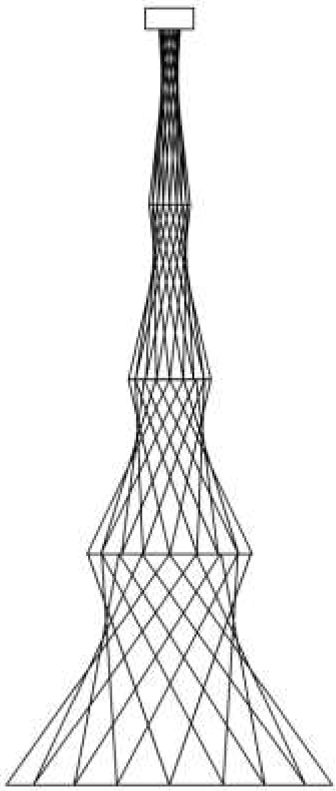
Bir pallali giperboloid sirtida ikki to‘g‘ri chiziqlar oilasi mavjud bo‘lib, ularning har biriga mansub biror to‘g‘ri chiziq ikkinchi oiladagi hamma to‘g‘ri chiziqlarini kesib o‘tadi.

Teorema. Bir pallali giperboloidning har bir nuqtasidan uning **ikkita to‘g‘ri chiziqli yasovchisi** o‘tadi.

Sirtning yo‘naltiruvchilari sifatida bitta oilaga mansub bo‘lgan xohlagan uchta to‘g‘ri chiziqni qabul qilish mumkin. Sirt aniqlovchilari bilan $\Phi(a, b, c)$ ko‘rinishida yoziladi. 8.26–rasmda bir pallali giperboloid o‘zining ikki oilaga mansub bo‘lgan to‘g‘ri chiziqli yasovchilari bilan tekis chizmasida tasvirlangan. Bu sirt yasovchilarining xossalaridan qurilish texnikasida foydalanishni birinchi marta akademik V.G.Shuxov (1853-1939) tavsiya qilgan. Bir pallali aylanma giperboloiddan radio-machta, suv minorasi kabi inshootlarni konstruksiyalashda foydalanilgan. Bu konstruksiyalar o‘zining mustahkamligi va yengilligi tufayli qurilish texnikasida keng tarqalgan. 1921 yili Moskvada V.G.Shuxov loyihasi asosida 160 metrli 6 seksiyali (6 ta giperboloid) radio-machta qurildi (8.27-rasm). Hozirgi kunlarda ham bu sirtdan qurilish amaliyotida keng foydalaniladi.



8.26-rasm



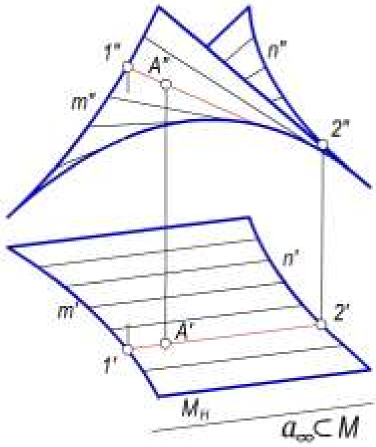
8.27-rasm

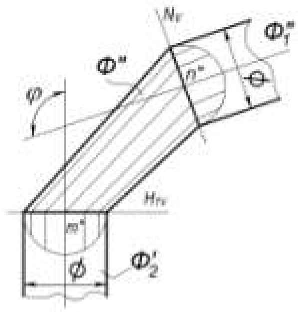
8.6.5. Silindroid. Ikki yo‘naltiruvchi **m**, **n** xos egri chiziq bo‘lib, uchinchisi a cheksiz uzoqlashtirilgan, ya’ni xosmas a_∞ to‘g‘ri chiziq bo‘lsa, hosil bo‘lgan chiziqli sirt *silindroid* deyiladi. Silindroid ikki marta qiyshiq silindroidning xususiy holidir. Sirtning hamma to‘g‘ri chiziqli yasovchilari xosmas to‘g‘ri chiziqli yasovchining vaziyatini aniqlaydigan parallelizm tekisligiga parallel bo‘ladi. silindroidni aniqlovchilari bilan $\Phi(\mathbf{m}, \mathbf{n}, a_\infty)$ yoki $\Phi(\mathbf{m}, \mathbf{n}, P)$ ko‘rinishda yozish mumkin.

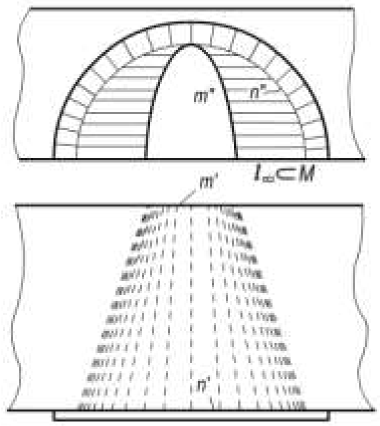
8.28-rasmda **m** va **n** yo‘naltiruvchilari egri chiziqlar va gorizontal proyeksiyalovchi parallelizm tekisligi $M(M_H)$ bilan berilgan silinroid sirti chizmasida tasvirlangan. Silindroid sirti ustidagi ixtiyoriy $A(A', A'')$ nuqtaning A' proyeksiyasiga asosan uning iuuinchi A'' proyeksiyasi vaziyatini aniqlash uchun shu nuqta orqali sirtning parallelizm tekisligiga parallel bo‘lgan yasovchisi o‘tkaziladi. So‘ngra yasovchining ikkinchi proyeksiyasi va uning ustida berilgan A nuqtaning A'' proyeksiyasi yasaladi.

Silindroid sirtlari mashinasozlikda va qurilish amaliyotida keng qo‘llaniladi. Truboprovodlarning o‘tish qismlarini ulash konstruksiyalarida (8.29-rasm), plug agdarchilari sirtlarini hosil qilishda, ba’zi bir gumbaz va arkalarni loyihalashda (8.30-rasm) silindroidlardan foydalanish mumkin.

8.29-rasmda bir xil diametrli va o‘qlari **φ** burchak hosil kiluvchi Φ_1 va Φ_2 aylanma silindrlarning Φ silindroid sirti orqali birlashtirilishi chizmada tasvirlangan. Bunda H_{IV} va N_V tekisliklarda yotuvchi **m** va **n** aylanalar-silindroid sirtining yo‘naltiruvchilari, V tekislik uning parallelizm tekisligidir. Bu silindroid sirtining chizmasini yasash qulay bo‘lishi uchun **m** va **n** yo‘naltiruvchilarni teng 12 bo‘lakka bo‘lish yo‘li bilan sirtning yasovchilari o‘tkazilgan.







8.28-rasm **8.29-rasm** **8.30-rasm**

8.30-rasmda **n(n′, n″)** aylana va **m(m′, m″)**ellips yo‘naltiruvchilari proyeksiya tekisliklariga nisbatan frontal joylashgan hamda **N** tekislik parallelizm tekisligi bo‘lgan silindroid sirti tasvirlangan. Bu tipdagi silindroidlar tonellar, arkalar va gumbazlarni qurishda qo‘llaniladi.

8.6.6. Konoid. Konoid ikki marta qiyshiq konoidning xususiy holi bo‘lib, u to‘g‘ri chiziqli yo‘naltiruvchilarning birini cheksiz uzoqlashtirganda hosil bo‘ladi. Konoidning to‘g‘ri va egri chiziqli xos yo‘naltiruvchilarini kesib o‘tuvchi yasovchilari parallelizm tekisligiga parallel bo‘ladi, ya’ni parallelizm tekisligini xosmas chizig‘ini ham kesib o‘tadi. 8.31–rasmda a to‘g‘ri chiziq va **m** egri chiziqli yo‘naltiruvchilar hamda $M(M_H)$ parallelizm tekisligi bilan berilgan konoid chizmada tasvirlangan.

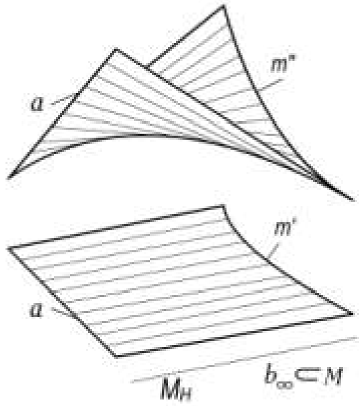
Konoid sirti aniqlovchilari bilan $\Phi(m, a, b_\infty)$ yoki $\Phi(m, a, M)$ ko‘rinishida yoziladi. a to‘g‘ri chiziq ixtiyoriy vaziyatda berilishi, **m** egri chiziq tekis yoki fazoviy qilib olinishi mumkin. Ular bir tekislikda yotmasligi shart, aks holda sirt tekislikka aylanadi.

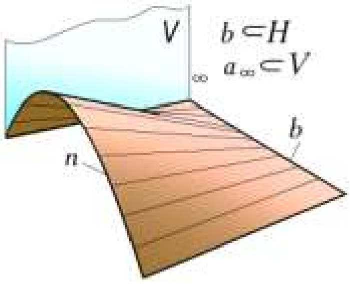
Agar yo‘naltiruvchi ***a*** to‘g‘ri chiziq proyeksiyalar tekisliklarining birortasiga perpendikulyar bo‘lsa, hosil bo‘lgan sirtni *to‘g‘ri konoid* deb va perpendikulyar bo‘lmasa, *og‘ma konoid* deb yuritiladi.

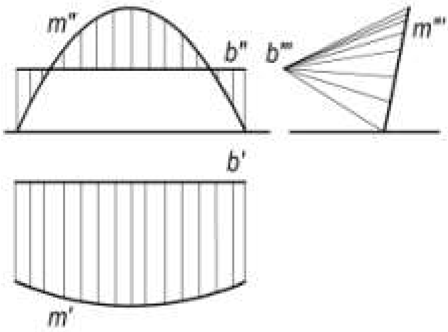
8.32-rasmda **n** parabola va ***b*** to‘g‘ri chiziqli yo‘naltiruvchilari bilan berilgan konoidning yaqqol tasviri berilgan. Bu sirt uchun **V** tekisligi parallelizm tekisligi vazifasini o‘taydi. Konoidning bunday xususiy hollari ba’zi bino va inshootlar yopmalarida ishlatiladi.

8.33-rasmdagi chizmada tasvirlangan konoid YuNESKOning binosiga kirishdagi ayvonchaning sxematik ko‘rinishidir. Bunda konoid sirtini hosil qiluvchi aniqlovchilar ***b*** to‘g‘ri chiziq va **n** egri chiziq bo‘lib, uning tekisligi **W** ga perpendikulyardir.

8.6.7. Giperbolik paraboloid. Qiyshiq tekislik sirti - giperbolik paraboloid. Giperbolik paraboloid sirti bir pallali giperboloid sirtining xususiy holi bo‘lib, bunda to‘g‘ri chiziqli yo‘naltiruvchilarning bittasi cheksiz uzoqlashtirilganda (xosmas to‘g‘ri chiziq) hosil bo‘ladi. Giperbolik paraboloid sirti aniqlovchilar bilan $\Phi(a, b, c_\infty)$ yoki $\Phi(a, b, M)$ ko‘rinishida yoziladi. Bu sirt 8.34-rasmda tasvirlangan. Giperbolik paraboloid sirtini biror parabolaning ikkinchi parabola bo‘yicha harakatlanishidan ham hosil qilish mumkin.



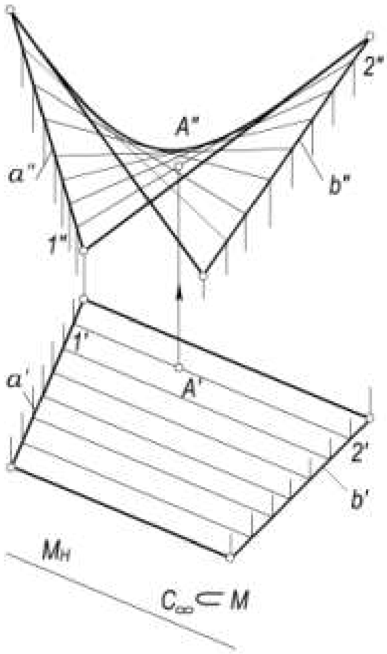


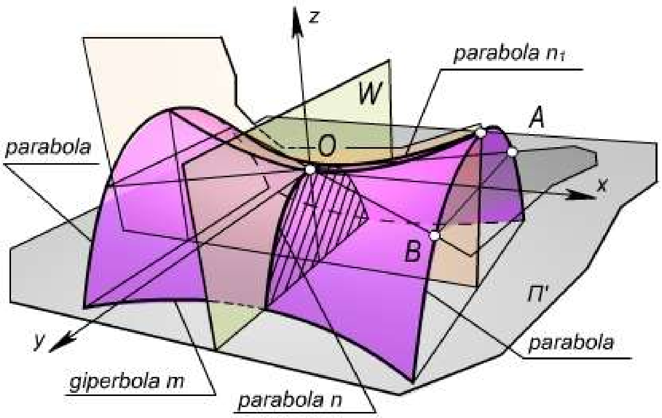


8.31-rasm **8.32-rasm**

8.33-rasm

8.35-rasmda tasvirlangan giperbolik paraboloid sirti **n** parabolaning yOz tekisligiga parallel bo‘lib, uchi doim $\mathbf{n_1}$ parabola bo‘yicha harakatlanishidan hosil bo‘lgan yoki bu sirtni xOy tekisligiga parallel tekisliklardagi **m** giperbolalarning karkasidan hosil bo‘lgan deyish ham mumkin. Shunga ko‘ra bu sirtni giperbolik paraboloid yoki parabolik giperboloid deb yuritiladi.





8.34-rasm **8.35-rasm**

Bu sirtning kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z\,,\qquad \text{bunda } \boldsymbol{p \neq q}. \qquad (1)$$

Tenglamadan ko‘rinishicha, bu sirt ikkinchi tartiblidir.

Darhaqiqat, (1) sirtning xOz (y=0) va yOz (x=0) tekisliklar bilan kesishganda xosil bo‘lgan bosh kesimlari quyidagi parabolalar bo‘ladi.

$$\boldsymbol{x^2=2pz} \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{u^2=-\,2qz} \qquad (3)$$

Sirtni xOy(z=0) tekislik bilan kesganda

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0 \qquad (4)$$

tenglama xosil bo‘ladi. Bu esa quyidagi ikki to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi:

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0 \text{ va } \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0\,.$$

Sirtni $\boldsymbol{xOy}$ tekisliklariga parallel, ya’ni $\boldsymbol{z=h}$ tekisliklar bilan kesganda, kesimda

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2h \qquad (5)$$

giperbola hosil bo‘ladi.

Giperbolik paraboloid sirtidan qurilish amaliyotida, arxitektura binolari va inshootlarining yopmalari sifatida keng foydalaniladi.

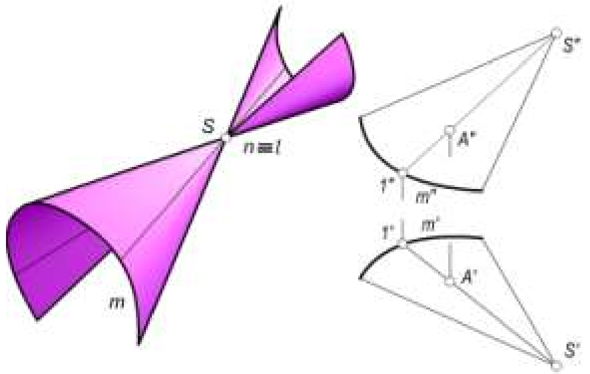
Parallelizm tekisligiga ega bo‘lgan sirtlarni Belgiyalik geometr olim nomi bilan ***Katalan sirtlari*** deb yuritildi.

8.7-§. Yoyiladigan chiziqli sirtlar

> **<u>Ta’rif</u>**. Cheksiz yaqin yasovchilari o‘zaro kesishgan yoki o‘zaro parallel bo‘lgan sirt **yoyiluvchi sirt** deyiladi.

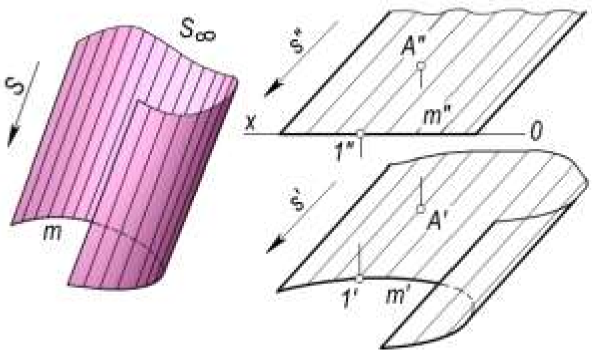
Uch yo‘naltiruvchi sirtning **m, n, ℓ** yo‘naltiruvchilardan **n** va **ℓ** nuqta bo‘lib, ular ustma-ust tushsa, uning yasovchilari konus sirtini hosil qiladi (8.36,a-rasm). Shuning uchun konus **m** egri chiziq va **S** nuqta bilan beriladi. Uning aniqlovchilari **Φ(m, S)** bo‘ladi. 8.36,b–rasmda **m(m′, m″)** yo‘naltiruvchi va **S(S′, S″)** uchi bilan berilgan konusning tekis chizmada berilishi va sirtda nuqta tanlash ko‘rsatilgan.

Agar **S** nuqtani biror **s** yo‘nalishda cheksiz uzoqlashtirilsa, **m** egri chizig‘ini kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar (yasovchilar) **s** yo‘nalishiga parallel bo‘lib qoladi. Konusning bu xususiy holi *silindr* deb yuritiladi (8.37,a-rasm). 8.37,b–rasmda silindrning tekis chizmada berilishi ko‘rsatilgan. Demak, silindr o‘z yo‘naltiruvchisi va yasovchisining yo‘nalishi bilan beriladi: 8.36,a-rasmdagi **m** yo‘naltiruvchi siniq chiziq bo‘lsa, hosil bo‘lgan sirt piramida (8.38,a-rasm) deb yuritiladi. 8.38,b–rasmda piramidaning ortogonal proyeksiyalarda berilishi ko‘rsatilgan. Agar uchi biron **s** yo‘nalishda cheksiz uzoqlashtirilsa, piramidaning qirralari o‘zaro parallel bo‘lib qoladi va bu sirt *prizma* deb ataladi (8.39,a-rasm). Prizmaning chizmada berilishi 8.39,b-rasmda ko‘rsatilgan.



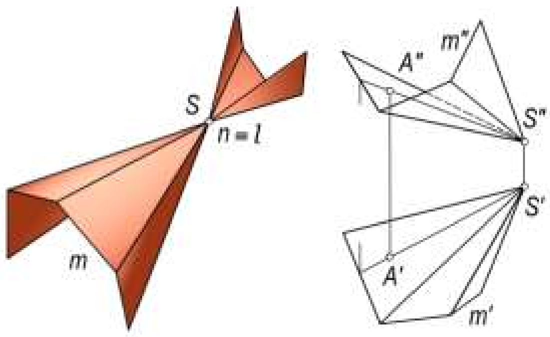
a) b)

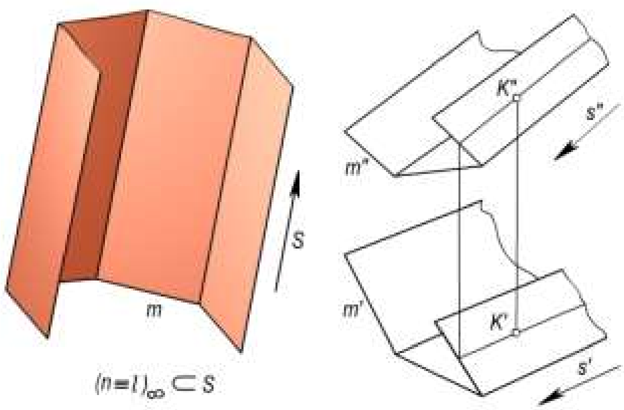
8.36-rasm



a) b)

8.37-rasm





a) b) a) b)

8.38-rasm 8.39-rasm

8.7.1. Qaytish qirrali yoyiladigan chiziqli sirtlar. Torslar

Ta’rif. Biror fazoviy egri chiziqqa urinib o‘tuvchi chiziqlar to‘plamidan hosil bo‘lgan sirt **qaytish qirrali sirt** deb ataladi.

Qaytish qirrali sirtlar torslar deb ham ataladi. Bunda, fazoviy egri chiziq sirtning yo‘naltiruvchisi, urinma chiziqlar esa uning yasovchilari bo‘ladi (8.40-rasm). Sirtning cheksiz ikki yaqin urinma chiziqlari o‘zaro kesishganligi uchun qaytish qirrali sirt yoyiluvchi bo‘ladi. Tors ham 8.40-rasmdagi umumiy holda berilgan chiziqli sirtning xususiy holidir. Bunda **m** va **n** egri chiziqlar ustma-ust tushadi va ℓ cheksiz uzoqlashgan, ya’ni xosmas ℓ_∞ egri chiziq bo‘lib, uning vaziyati yo‘naltiruvchi konus orqali beriladi. Tors sirtini yasash uchun yo‘naltiruvchi konusni shunday tanlash mumkinki, bunda konusning yasovchilariga mos ravishda parallel qilib yo‘naltiruvchi egri chiziqqa urinma qilib sirtning yasovchilari o‘tkaziladi. Bunga yoyiluvchi gelikoid (8.41-rasm) misol bo‘la oladi. Torsni to‘g‘ri chiziqning egri chiziqqa uzluksiz urinib harakatlanishi davomida qoldirgan izi sifatida qaraladi. Tors sirtning qaytish qirrasi biror chekli nuqta bo‘lganda konus sirti hosil bo‘ladi. Sirtning hamma yasovchilari chekli nuqtadan o‘tadi va u konusning uchi hisoblanadi.

Qaytish qirrasi biror cheksiz nuqta bo‘lsa, silindrik sirt hosil bo‘ladi. Silindrik sirtning hamma yasovchilari o‘zaro parallel bo‘ladi.

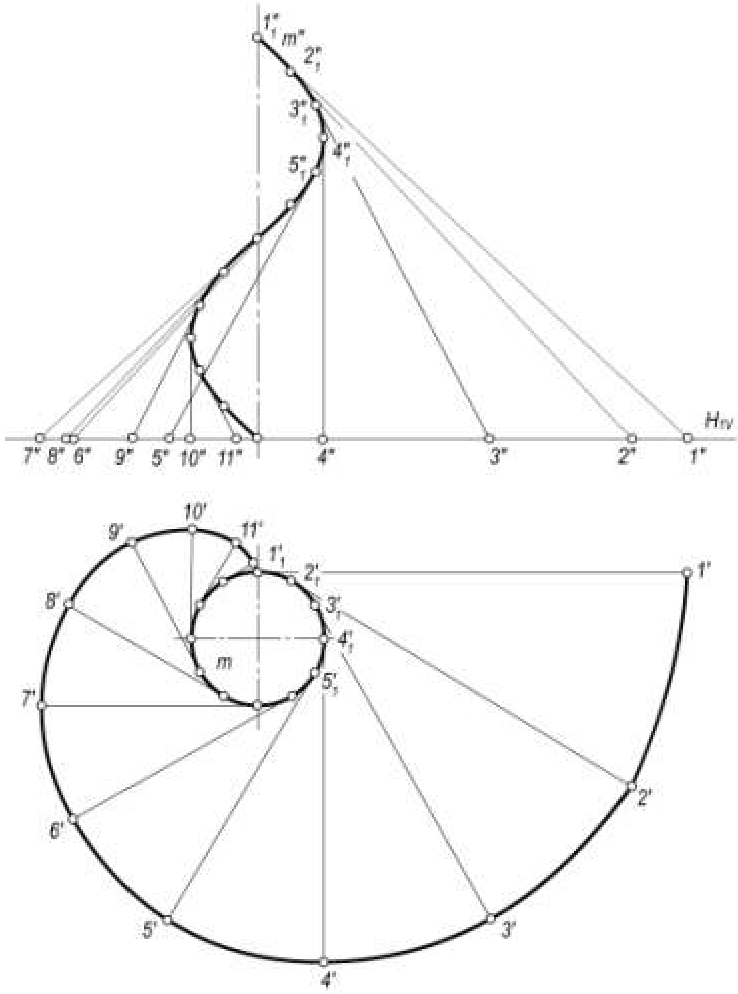
8.7.2. Vint sirtlar

Biror doimiy o‘qqa parallel holda ilgarilanma va shu o‘qqa nisbatan aylanma harakatlar natijasida hosil bo‘lgan harakat vintsimon harakat deyiladi.

Ta’rif. Biror chiziqning vintsimon harakati natijasida hosil bo‘lgan sirt **vint sirti** deyiladi.

Vintsimon harakatlanuvchi chiziq sirtning yasovchisi bo‘ladi. Chiziqning ilgarilanma harakati va burilish burchagi $\Delta \mathbf{h}=\mathbf{k}\,\hat{}\,\beta$ bog‘lanishda bo‘ladi. Bunda $\Delta \mathbf{h}$ – yasovchining $\Delta \mathbf{t}$ vaktdagi chiziqli va $\Delta\beta$ burchakli siljishlari, **k** – proporsionallik koeffisientidir. Agar **k** koeffisient o‘zgarmas (yoki o‘zgaruvchi) miqdor bo‘lsa, o‘zgarmas (yoki o‘zgaruvchi) qadamli vint sirt hosil bo‘ladi.

Yasovchining bir marta to‘la aylanishida bosib o‘tgan **h** masofa vint sirtining qadami deb ataladi.



8.40-rasm

Vintsimon harakat davomida yasovchining har bir nuqtasi vint chizig‘ini hosil qilib, ular vint sirtining parallellari deb ataladi. Bu vint parallellarining qadami o‘zaro teng bo‘ladi va ayni bir vaqtda vint sirtining qadamiga ham tengdir.

Vint sirtining karkasini yasovchi egri chiziqlar oilasi va vint parallellari oilasi bilan berish mumkin.

Vint sirtini uning o‘qiga perpendikulyar tekisliklar bilan kesganda hosil bo‘lgan kesimlari *sirtning normallari* deyiladi. Sirt o‘qidan o‘tuvchi tekisliklar dastasi bilan kesganda hosil bo‘lgan kesimlar *sirtning meridianlari* deb yuritiladi. Vint sirtining aniqlovchilari ***i*** – o‘q**,** ***ℓ*** – yasovchi *va* ***h*** – qadam bo‘lib, **Φ(*i, ℓ, h*)** yoki **Φ(*i, ℓ, r*)** ko‘rinishida yoziladi.

Bunda ***r*** vint sirtining parametri bo‘lib, $r = \frac{h}{2\pi}$ bo‘ladi.

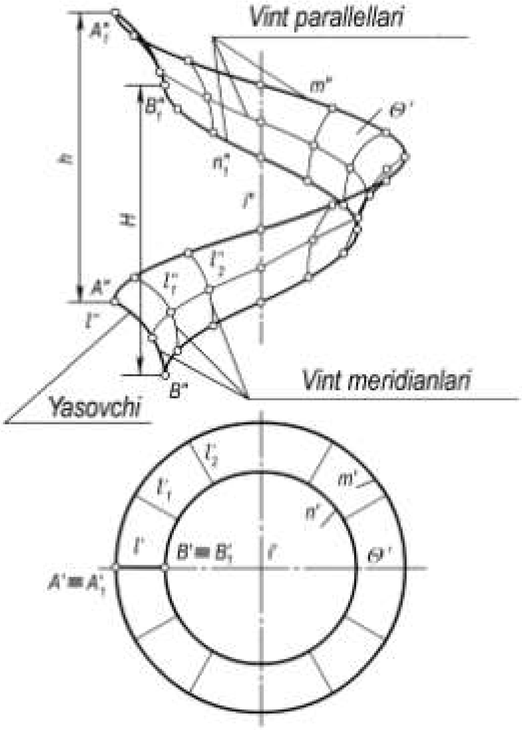
8.41-rasmda *i(i′, i″) o‘q* chizig‘i va u orqali o‘tuvchi tekislikda yotgan ***l(l′,l″)*** egri chizig‘i berilgan. ***ℓ*** yasovchining vintsimon harakati natijasida hosil bo‘lgan ***θ(θ′,θ″)*** vint sirti chizmada tasvirlangan. ***ℓ*** yasovchining ***A(A′,A″)*** va ***B(B′,B″)*** uchlari hosil qilgan vint parallellarining ***h*** qadami o‘zaro tengdir.

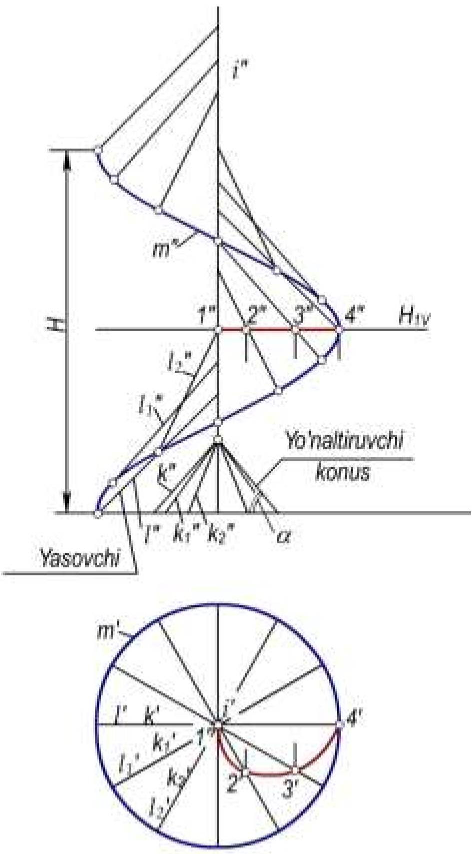
To‘g‘ri chiziqning vintsimon harakati natijasida hosil bo‘lgan vint sirtlari *gelikoid* deb yuritiladi.

Vint sirtining yasovchi to‘g‘ri chizig‘i uning o‘qini kesib o‘tsa, yopiq vint sirt va kesmasa ochiq vint sirt deb yuritiladi.

Yasovchi to‘g‘ri chiziq vint sirtining o‘qiga perpendikulyar bo‘lsa, to‘g‘ri va perpendikulyar bo‘lmasa, og‘ma vint sirt deb yuritiladi. Vint sirtining yasovchi to‘g‘ri chiziqlarini uning o‘qiga nisbatan joylashishiga qarab arximed, evolventa va konvolyuta vint sirtlari deb yuritiladi.

8.42-rasmda sirtni aniqlovchi yo‘naltiruvchilar sifatida ***i*** *o‘q* chiziq, **m** vint chizig‘i va yo‘naltiruvchi konus sirt berilgan.





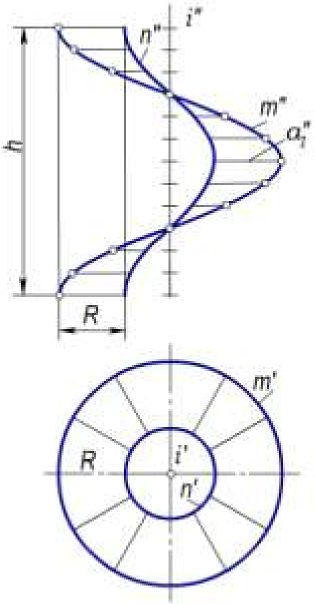
8.41-rasm **8.42-rasm**

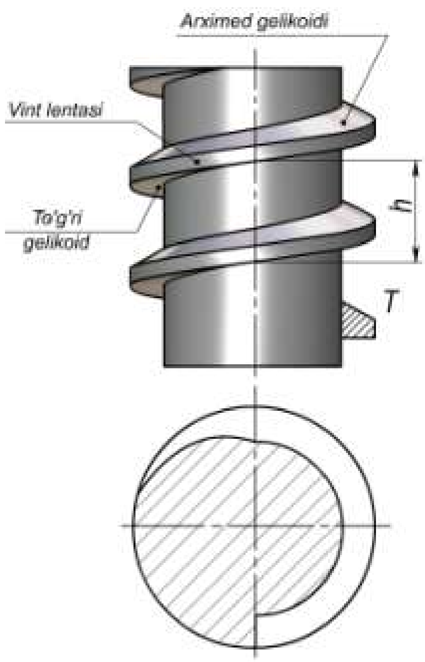
Uchinchi yo‘naltiruvchining vaziyati yasovchilari gorizontal tekislik bilan α burchak hosil qiluvchi konus orqali berilgan. Bu konus ***yo‘naltiruvchi konus*** deyiladi. α burchak vint chizig‘ining ko‘tarilish burchagi β ga teng emas **($\alpha \neq \beta$).** ℓ yasovchining – ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3,... vaziyatlari yo‘naltiruvchi konusning k_1, k_2, k_3, yasovchilariga mos ravishda parallel o‘tkazish orqali yasaladi. Bu gelikoidni uning o‘qiga perpendikulyar biror gorizontal $H_1(H_{1V})$ tekisligi Arximed spirali bo‘yicha kesadi (8.42-rasm). Shuning uchun ham bu sirtni arximed vint sirti deyiladi.

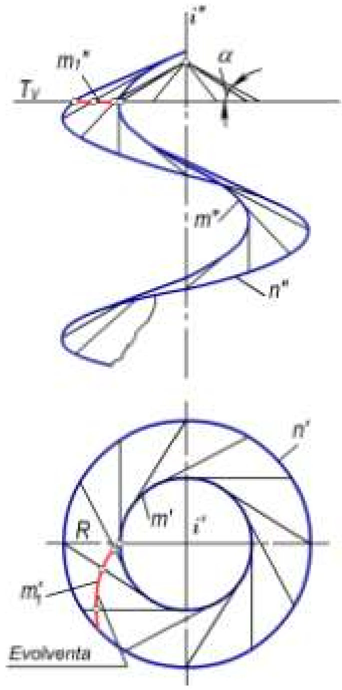
Parallelizm tekisligiga ega to‘g‘ri gelikoid 8.43-rasmda ko‘rsatilgan. U ikki silindr bilan cheklangan. Bunda, fazoviy egri chiziq sirtning yo‘naltiruvchisi, urinma chiziqlar esa uning yasovchilari bo‘ladi. Sirtning cheksiz ikki yaqin urinma chiziqlari o‘zaro kesishganligi uchun qaytish qirrali sirt yoyiluvchi bo‘ladi.Silindr yasovchilari orasidagi masofa bo‘lgan R kesmaga vintsimon harakat berilsa, uning ikki uchi $m(m'm'')$ va $n(n',n'')$ chiziqlari hosil qiladi. Silindrlar orqali sirtidagi ana shu ikki vint chizig‘i bilan cheklangan qismini ***vint lentasi*** deyiladi.

O‘q tekisligida yotgan T trapesiyaga silindr bo‘ylab vintsimon harakat berilsa, u vint hosil qiladi (8.44-rasm). Bu vint Arximed gelikoidi, vint lentasi, to‘g‘ri gelikoidlar bilan cheklangan bo‘ladi.

8.45–rasmda ochiq og‘ma gelikoid tasvirlangan. Bunda yo‘naltiruvchi konusning gorizontal tekislik bilan hosil qilgan burchak vint chizig‘ining (**m** yo‘naltiruvchining) ko‘tarilish burchagi β ga teng ($\alpha=\beta$). Shuning uchun ham yasovchilar hamma vaziyatlarida yo‘naltiruvchi vint chizig‘iga urinadi. Bunday holda yo‘naltiruvchi vint chiziq qaytish qirrasi bo‘ladi. Hosil bo‘lgan sirt esa yoyiladigan chiziqli sirtga (torsga) aylanadi. Bunday gelikoid ***tors-gelikoid*** deyiladi. Uning o‘qiga perpendikulyar $T(T_v)$ tekislik sirt bilan $m(m_1', m_1'')$ evolventa egri chizig‘i bo‘yicha kesishadi. Shuning uchun bu sirtni *evolventali gelikoid ham* deb ataladi.







8.43-rasm **8.44-rasm**

8.45-rasm

Agar yo‘naltiruvchi konus yasovchilarining H bilan hosil qilgan burchagi vintaviy yo‘naltiruvchi chiziqning ko‘tarilish burchagiga teng bo‘lmasa (ya’ni $\alpha\neq\beta$ va $\alpha\neq 90°$) hosil bo‘lgan vint sirti *konvolyutli gelikoid* deyiladi.

Vint sirtlari kurilish va texnikada keng qo‘llaniladi. Ulardan vint, shnek, burg‘u, prujina, trubina parraklarining yassi sirti, ventilyator, kema va havo vintlarining ish organlari, zinalar va hokazolarni loyihalashda foydalaniladi.

8.8-§. Siklik sirtlar

> **Ta'rif**. Aylana markazi biror chiziq bo'ylab harakatlanishdan hosil bo'lgan sirt **siklik sirt** deyiladi.

Siklik sirtlarda harakatlanuvchi aylana siklik ***sirtning yasovchisi***, yasovchi aylananing markazi harakatlanadigan chiziq sirtning ***yo'naltiruvchi chizig'i*** yoki sirtning ***markazlar chizig'i*** deb yuritiladi. Harakat davomida yasovchi aylananing radiusi o'zgaruvchan va o'zgarmas bo'lishi mumkin.

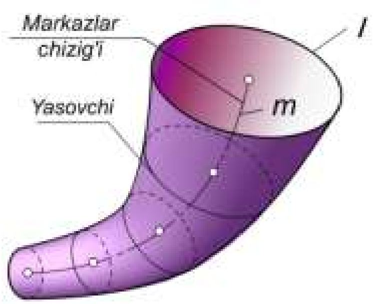
Siklik sirt aniqlovchilari bilan **Φ(m, R)** ko'rinishida yoziladi.

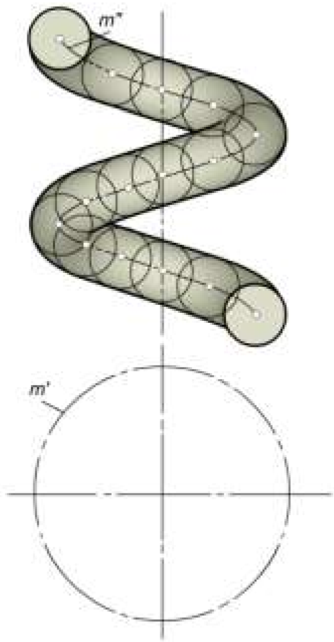
Siklik sirtni berish uchun uning yasovchisi markazining harakat qonuni va radiusining o'zgarish funksiyasi berilgan bo'lishi zarur. Siklik sirtlarning karkasi aylanalardan iborat.

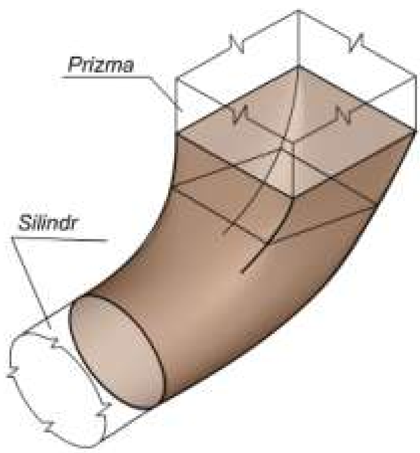
Aylanish sirtlari ham siklik sirtlar turiga kiradi.

Aylanish sirtlarining o'zgaruvchi yoki o'zgarmas parallellari siklik sirtning yasovchilari bo'ladi. aylanish o'qi sirtning markazlar chizig'i hisoblanadi.

Ikkinchi tartibli aylanish sirtlarini va doiraviy kesimga ega bo'lgan umumiy holdagi ikkinchi tartibli sirtlarni ham siklik sirt deb qarash mumkin.







8.46-rasm **8.47-rasm**

8.48-rasm

Agar yasovchi aylananing tekisligi yo'naltiruvchi **m** chiziqqa doim perpendikulyar bo'lsa, hosil bo'lgan sirt *naysimon sirt* bo'ladi (8.46-rasm). Naysimon sirt siklik sirtning xususiy holidir. O'zgaruvchan radiusli naysimon sirtni berish uchun markazlar chizig'i **m** va yasovchi ***ℓ*** aylana radiusining o'zgarish qonuniyati berilgan bo'lishi zarur.

Naysimon sirt yasovchisining radiusi o'zgarmas bo'lsa, hosil bo'lgan sirtni *truba* deb yuritiladi (8.47-rasm).

Aylanma silindrni o'qi to'g'ri chiziq bo'lgan trubali sirt deyish mumkin. Sferaning vint chizig'i bo'yicha harakatidan vintli truba sirti hosil bo'ladi (8.47-rasm). Vintsimon trubali sirtga prujina misol bo'la oladi.

Siklik sirtning yana bir turi ***kanal sirtdir.*** Kanal sirtning rasmi bir tekis uzluksiz shakli o'zgarib boruvchi yopik chiziqning harakatidan hosil bo'ladi.

8.48-rasmda ikkinchi tartibli silindr va to'rtburchakli prizma sirtlarini ulaydigan mufta vazifasini bajaruvchi kanal sirtning yaqqol tasviri ko'rsatilgan.

Nazorat savollari

1. Sirtlar qanday hosil bo'ladi?
2. Sirtning yasovchisi va yo'naltiruvchisi nima?
3. Sirtlarni hosil bo'lishining qanday usullari mavjud?
4. Sirtlarni hosil qilishning kinetik usulini tushuntirib bering.
5. Aylanish sirtlari nima va ularga misollar keltiring.
6. Aylanish sirtlarining xarakterli chiziqlari nimalar?
7. Chiziqli va chiziqli bo'lmagan sirtlarning farqi nimada?
8. Qanday sirtlar yoyiladigan sirtlar deyiladi?
9. Vint sirtini hosil bo'lishini tushuntirib bering.
10. Bir pallali va ikki pallali giperboloid sirtlar qanday hosil bo'ladi?
11. Siqiq va cho'ziq ellipsoidlarning farqi nimada?
12. To'g'ri chiziq kesmasini aylantirish yo'li bilan qanday sirtlar hosil bo'lishi mumkin?
13. Ikkinchi tartibli sirtlarga qanday sirtlar kiradi?
14. Sirtga tegishli bo'lgan yuzidagi nuqta qanday aniqlanadi?
15. Tor va tors sirtlarning farqi nimada?

IX bob. SIRTLARNING TEKISLIK VA TO‘G‘RI CHIZIQ BILAN KESISHISHI

9.1-§. Umumiy ma’lumotlar

Sirtlarning tekislik bilan kesishish chizig‘i to‘g‘ri chiziq, siniq chiziq va egri chiziq tarzidagi tekis shakllardan iborat bo‘lishi mumkin. Bu xol tekislik bilan qanday sirtning kesishishiga va sirt bilan tekislikning o‘zaro vaziyatiga bog‘liqligi.

Sirt bilan tekislikni kesishish chizig‘ining shaklini uni yasashdan oldin bilish mumkin. Ana shunga ko‘ra uni yasashning biror usuli tanlash. Agar kesishish chizig‘i to‘g‘ri chiziq bo‘lsa, uning ikki nuqtasini, siniq chiziq bo‘lsa, uning sinish nuqtalari (uchlari) ni, egri chiziq bo‘lsa, uning tayanch (xarakterli) va bir necha ixtiyoriy nuqtalarini topib, ular o‘zaro tutashtirish.

Egri chiziqli sirtlarning tekislik bilan kesishish chizig‘i, umumiy holda, egri chiziqdan iborat bo‘ladi. bu chiziqni yasash uning tayanch nuqtalarini topishdan boshlanadi. Tayanch nuqtalarga sirtlarning chetki yasovchilari – ocherklariga tegishli nuqtalar va proyeksiyalar tekisliklaridan eng uzoq va eng yaqin masofalarda bo‘lgan nuqtalar kiradi. Qolgan nuqtalar oraliq nuqtalar hisoblanadi.

Yuqorida kayd qilingan nuqtalar sirtga tegishli bo‘lganligi sababli bu nuqtalar shu sirtning yasovchilari, karkaslari, parallellari, meridianlari va x.k. chiziqlariga ham tegishli bo‘ladi. Shuning uchun sirtning tekislik bilan kesishish chizig‘ini yasash uchun sirtning shu chiziqlari bilan tekislikning kesishish nuqtalarini topishdan iborat bo‘ladi.

Chiziqli sirtning tekislik bilan kesishish chizig‘ini yasash uchun sirtning har bir yasovchisi bilan tekislikning kesishish nuqtalarini aniqlash lozim.

Tekislikning ko‘pyoqlik yoki egri chiziqli sirtlar bilan kesishish chizig‘ini yasash to‘g‘ri chiziq yoki egri chiziqning tekislik bilan kesishish nuqtalarini topishga asoslanadi.

9.2-§. Sirtlarning proyeksiyalovchi tekisliklar bilan kesishishi

Odatda, kesim chizig‘i konturining proyeksiyalarini yasash uning tayanch nuqtalarini topishdan boshlanadi.

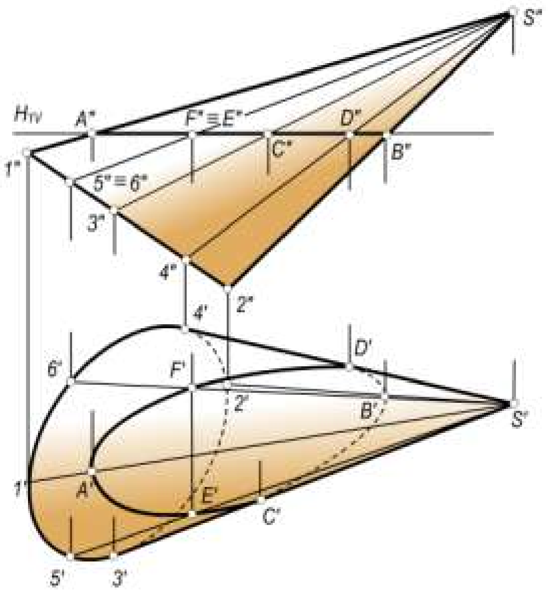
Agar sirtni kesuvchi tekislik proyeksiyalovchi bo‘lsa, kesim chizig‘ining proyeksiyalarini yasash soddalashadi, chunki bu holda kesishish chizig‘ining proyeksiyalaridan biri to‘g‘ri chiziq kesmasidan iborat .

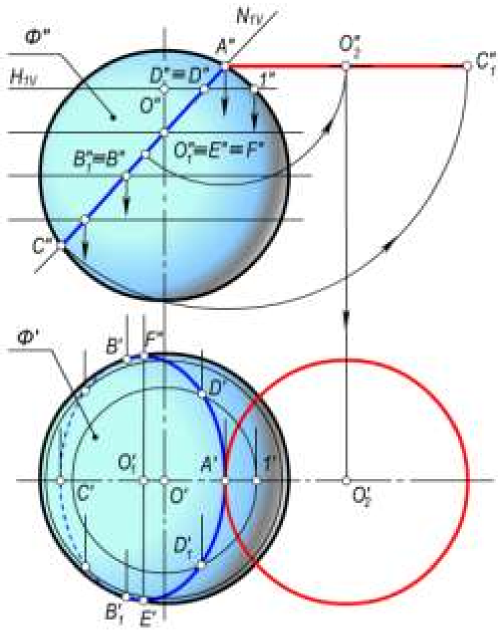
Quyida ba’zi sirtlarning proyeksiyalovchi tekisliklar bilan kesishishini ko‘rib chiqamiz.

1-masala. Og‘ma elliptik konusning $H_1(H_{1V})$ gorizontal tekislik bilan kesishish chizig‘i yasalsin (9.1-rasm).

Echish. Konusning bir necha yasovchilari o‘tkaziladi va ularning kesuvchi tekislik bilan kesishish nuqtalari belgilanadi.

Kesishish chizig‘ining A″B″ frontal proyeksiyasi kesuvchi tekislikning frontal izi bilan ustma-ust tushadi. A(A′, A″) va B(B′, B″) nuqtalar kesimni o‘ng va chap tomondan chegaralovchi nuqtalardir. Ularning A′ va B′ gorizontal proyeksiyasi ular orqali o‘tuvchi S1 va S2 yasovchilarning gorizontal proyeksiyalari S′1′ va S′2′ larda bo‘ladi. Konusning gorizontal ocherk yasovchilari S′3′, S′4′ bilan H_1 tekislikning kesishish nuqtalarini yasash uchun bu yasovchilarning frontal S″3″ va S″4″ proyeksiyalari bilan tekislikning H_{1V} izining kesishish nuqtalari C″ va D″ lar belgilab olinadi. Bu nuqtalardan proyeksion bog‘lanish chiziqlari o‘tkaziladi va ularning S′3′ , S′4′ yasovchilar bilan kesishgan nuqtalari C′ va D′ nuqtalar topiladi.





9.1-rasm. **9.2-rasm.**

Kesimning oraliq nuqtalarini yasash uchun $A''B''$ kesmada ixtiyoriy $E''≡F''$ nuqtalar belgilab olinadi. Bu nuqtalar orqali $S''5''≡S''6''$ yasovchilarning frontal proyeksiyalari oʻtkaziladi, soʻngra ularning $S'5'$ va $S'6'$ gorizontal proyeksiyalari ustida E' va F' belgilab olinadi. Shu tarzda yana bir necha nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari yasaladi.

Gorizontal proyeksiyada kesimning koʻrinishligi quyidagicha aniqlanadi. Konusning 4′, 6′, 1′, 5′ va 3′ nuqtalaridan oʻtgan yasovchilarga tegishli D', F', A', E' va C' nuqtalar koʻrinadi. Qolgan nuqtalar esa koʻrinmaydi. Shunga asosan kesimning D', F', A', E', C' qismi uzluksiz tutash chiziq bilan, D', B', C' qismi esa shtrix chiziq bilan tekis tutashtiriladi.

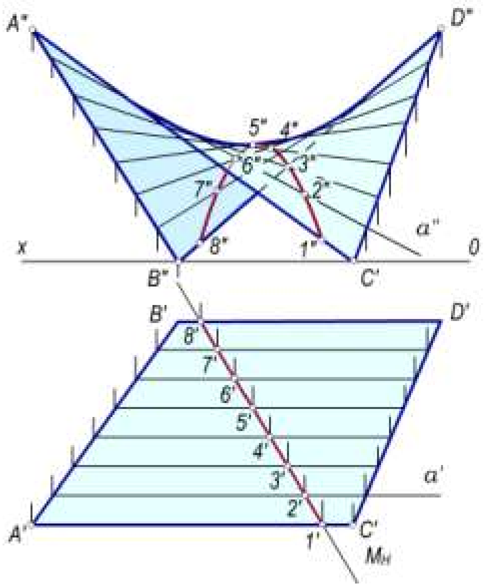
2-masala. Sferaning N frontal proyeksiyalovchi tekislik bilan kesishuv chizigʻi proyeksiyalari yasalsin (9.2-rasm).

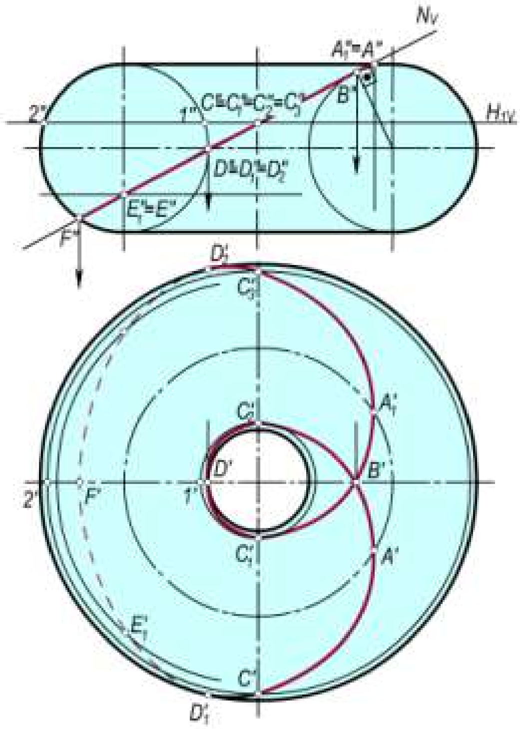
Echish. Kesimning $A''C''$ frontal proyeksiyasi tekislikning N_V frontal izi bilan ustma-ust tushadi. Kesimning gorizontal proyeksiyasi esa nuqtalarning sferaga tegishlilik shartiga koʻra yasaladi. B va B_1 nuqtalar sferaning ekvatoriga tegishli boʻlganligi uchun ularning B' va B_1' gorizontal proyeksiyalari gorizontal proyeksiyaning ocherkida belgilab olinadi. A va C nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari A' va C' nuqtalar esa sfera bosh meridianining gorizontal proyeksiyasida yotadi.

Kesimga tegishli ixtiyoriy D va D_1 nuqtalarning D' va D_1' gorizontal proyeksiyalarini yasash uchun $D''\equiv D_1''$ nuqta orqali gorizontal tekislikning H_{IV} frontal izi o'tkaziladi. Bu tekislik sferani radiusi $0''1''$ ga teng bo'lgan aylana bo'yicha kesadi. Bu aylanani gorizontal proyeksiyasida D' va D'_1 nuqta xosil qilinadi. Oraliqdagi boshqa ixtiyoriy nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari ham xuddi shunday yasaladi. Gorizontal proyeksiyada sferaning ekvatoridan yuqorida joylashgan hamma nuqtalar ko'rinadi, ekvatordan pastki qismida joylashgan nuqtalar esa ko'rinmaydi. Shunga ko'ra ekvatordan yuqorida joylashgan A, D, D_1, E, F, B va B_1 nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari A', D', D_1', E', F', B' va B_1' nuqtalar ko'rinadi. Qolgan nuqtalar esa ekvatorning pastki qismida yotganligi uchun ko'rinmaydi. Bu yerda A, B, B_1 va C lar tayanch nuqtalar bo'ladi. Rasmda kesim yuzining haqiqiy kattaligini yasash aylantirish usulida bajarib ko'rsatilgan.

3-masala. V parallellizm tekisligiga ega bo'lgan giperbolik paraboloidning $M(M_H)$ gorizontal proyeksiyalovchi tekislik bilan kesishish chizig'i proyeksiyalari yasalsin (9.3-rasm).

Yechish. Kesishish chizig'ining gorizontal proyeksiyasi tekislikning M_H izi bilan ustma-ust tushadi. Uning frontal proyeksiyasini yasash uchun giperbolik paraboloid (qiyshiq tekislik) ning bir necha yasovchilari o'tkazilib, ularning M tekislik bilan kesishish nuqtalari belgilanadi. Masalan, qiyshiq tekislik ***a(a', a'')*** yasovchisining M tekislik bilan kesishish nuqtasini yasash uchun a' yasovchi va kesuvchi tekislikning M_H gorizontal izining kesishish nuqtasi $2'$ belgilab olinadi. So'ngra $2'$ nuqtadan proyeksion bog'lanish chizig'i chiqarilib ***a***$''$ dagi frontal proyeksiyasi $2''$ aniqlanadi. Kesimning $3(3', 3'')\ldots7(7', 7'')$ nuqtalarini yasash $2(2', 2'')$ nuqtani yasash kabi bajariladi.





9.3-rasm. **9.4-rasm.**

4-masala. Torning frontal proyeksiyalovchi $N(N_V)$ tekislik bilan kesishish chizig‘i proyeksiyalari yasalsin (9.4-rasm).

Yechish. Kesishish chizig‘ining frontal proyeksiyasi tekislikning frontal izi N_V bilan ustma-ust tushgan. Uning gorizontal proyeksiyasini yasash uchun frontal proyeksiyada tayanch nuqtalarning $A''\equiv A_1''$, B'', $D''\equiv D_1''\equiv D_2''$ va F'' frontal proyeksiyalari belgilab olinadi. Bu nuqtalar torga tegishli bo‘lganligi uchun ularning gorizontal proyeksiyalarini yasash qiyin emas. Oraliqdagi ixtiyoriy nuqtalarning proyeksiyalari esa quyidagicha yasaladi. Kesimning frontal proyeksiyasida ixtiyoriy $C''\equiv C_1''\equiv C_2''\equiv C_3''$ nuqtalar belgilanadi. Keyin ular orqali yordamchi gorizontal H_1 tekislikning H_{1V} izi o‘tkaziladi. Bu tekislik torni radiuslari $0''1''$ va $0''2''$ kesmalarga teng bo‘lgan aylanalar (parallellar) bo‘yicha kesadi. Bu aylanalarning gorizontal proyeksiyalarini yasab, $C''\equiv C_1''\equiv C_2''\equiv C_3''$ nuqtalardan tushirilgan proyeksion bog‘lovchi chiziq bilan kesishish nuqtalari C', C'_1, C'_2 va C_3' lar belgilab olinadi.Xuddi shuningdek boshqa oraliq nuqtalar ham yasaladi. Hosil bo‘lgan nuqtalarning ko‘rinishligini torning ekvatoriga nisbatan aniqlab, ularni tekis egri chiziq bilan tutashtirsak, bu holda ***Paskal chig‘anog‘i*** deb nomlangan egri chiziq hosil bo‘ladi.

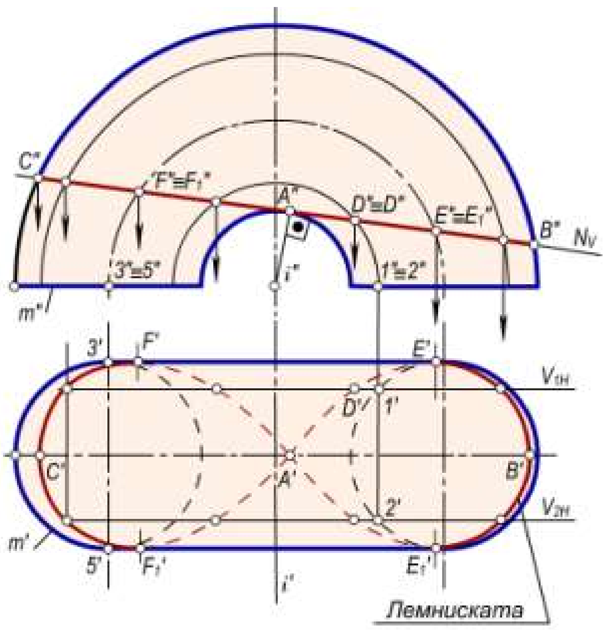
5-masala. Berilgan tor sirtining N(N_V) tekislik bilan kesishish chizig‘i proyeksiyalari yasalsin (9.5-rasm).

Yechish. Chizmadan ko‘rinib turibdiki, kesuvchi tekislik torning ichki konturiga urinma vaziyatda o‘tkazilgan. Bu holda torning bunday kesimi ***lemniskata*** egri chizig‘i deb yuritiladi.

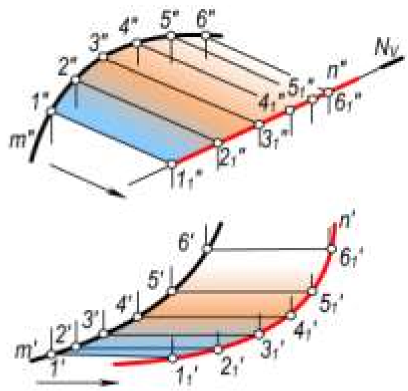
Kesishish chizig‘ining frontal proyeksiyasi kesuvchi tekislikning N_V frontal izi bilan ustma-ust tushadi. Uning gorizontal proyeksiyasini yasash uchun torni V_1, V_2 yordamchi frontal tekisliklar bilan kesiladi. Hosil bo‘lgan parallellarni N(N_V) tekislik bilan kesishish nuqtalari A″,B″,C″,D″,E″ va F″ lar belgilanadi. So‘ngra bu nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari tegishli tekisliklar izlarida topiladi va o‘zaro silliq chiziq bilan tutashtiriladi. Gorizontal proyeksiyada kesishuv chizig‘ining ko‘rinishligi aniqlanadi. Bu lemniskata deb nomlangan egri chiziqdir. Bunda tor yasovchisi *m(m′*, *m″*) ning *m′* gorizontal proyeksiyasiga tegishli 3′,4′,5′… nuqtalardan o‘tgan parallellardagi F_1',C′,F′ va E_1',B′,E′ nuqtalar ko‘rinadi. Qolgan nuqtalar esa ko‘rinmaydi.

6-masala. Ixtiyoriy silindrik sirtning *m(m′*, *m″*) yo‘naltiruvchisi va yasovchilarining yo‘nalishi bilan berilgan. Mazkur sirtning N(N_V) frontal proyeksiyalovchi tekislik bilan kesishish chizig‘i proyeksiyalari yasalsin (9.6-rasm).

Yechish. Bu sirtning N(N_V) tekislik bilan kesishish chizig‘ining proyeksiyalarini yasash uchun ***m(m′, m″)*** yo‘naltiruvchi chiziqda ixtiyoriy 1(1′, 1″), 2(2′, 2″), 3(3′, 3″)… nuqtalarni belgilab, ular orqali silindrning yasovchilari o‘tkazilib, bu yasovchilarning berilgan N(N_V) tekislik bilan kesishish nuqtalari $1_1(1_1', 1_1'')$, $2(2_1', 2_1'')$, $3(3_1', 3_1'')$… lar belgilab olinadi va ular n(n′,n″) tekis egri chiziq bilan tutashtiriladi.



9.5-shakl.



9.6-shakl.

9.3-§. Konus kesimlari

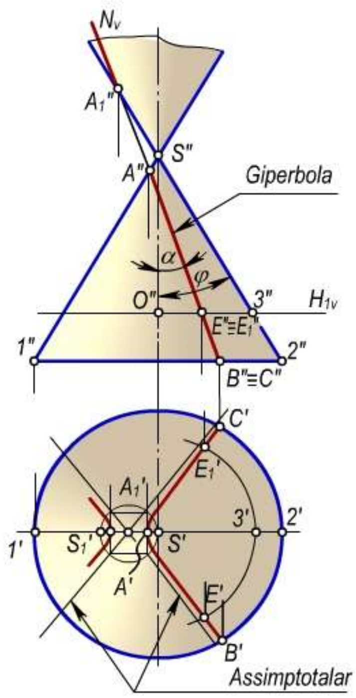
Doiraviy konus sirtning tekislik bilan kesishishidan hosil bo‘lgan chiziqlar konus kesimlari yoki ikkinchi tartibli chiziqlar bu chiziqlar oilasiga o‘zaro kesuvchi ikki to‘g‘ri chiziqlar aylana parabola, giperbola, ellips kiradi bu oilaga mansub chiziqlarning hosil bo‘lishi kesuvchi tekislikning konus o‘qiga va uning yasovchilariga nisbatan vaziyatiga bog‘liqmi. bo‘ladi.

Kesuvchi tekislik konusning uchidan o‘tib, yasovchilardan birortasi bilan kesishmasa, u holda kesimda nuqta hosil bo‘ladi (9.7-rasm).

Kesuvchi tekislik konus o‘qi orqali o‘tsa, kesimda o‘zaro kesuvchi ikki to‘g‘ri chiziq hosil bo‘ladi (9.7-rasm).

Kesuvchi tekislik konus o‘qiga perpendikulyar bo‘lib, uning uchidan o‘tmasa, kesimda aylana hosil bo‘ladi (9.7-rasm).

Teorema. Aylanma konusning tekislik bilan kesishuvidan hosil bo‘lgan kesimning konus o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan tekislikdagi to‘g‘ri burchakli proyeksiyasi 2-tartibli egri chiziq bo‘lib, uning fokuslaridan biri konus uchining shu tekislikdagi proyeksiyasi bo‘ladi.



9.7-расм

Elliptik kesim. Kesuvchi tekislik bilan konus o‘qi orasidagi ***α*** burchak konus yasovchilari va o‘qi orasidagi ***φ*** burchakdan katta (***α*** > ***φ***) bo‘lsa, kesimda ***ellips*** hosil bo‘ladi.

Kesuvchi tekislik konusning barcha yasovchilarini kesib, ***α ≠ 90°*** bo‘lsa, kesimda ***ellips*** hosil bo‘ladi (9.7-rasm).

To‘g‘ri doiraviy konusning N(N_V) frontal proyeksiyalovchi tekislik bilan kesishish chizig‘ini yasash kerak bo‘lsin (9.7-rasm).

Kesuvchi tekislik frontal proyeksiyalovchi bo‘lganligi sababli ellipsning frontal proyeksiyasi to‘g‘ri chiziq kesmasi A″B″ dan iborat bo‘ladi. Ayni vaqtda A″B″ kesma ellipsning katta o‘qi bo‘ladi. Uning kichik o‘qi C′D′ kesma katta o‘qi A′B′ ga perpendikulyar bo‘lib, kesishish nuqtasida har ikkala o‘q bir-birini teng ikkiga bo‘ladi.

A va B nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari A′ va B′ bevosita S′3′ va S′4′ yasovchilarda belgilab olinadi. C va D nuqtalarning gorizontal proyeksiyalarini topish uchun C″≡D″ nuqta orqali H_1(H_{1V}) gorizontal tekislik o‘tkaziladi. Radiusi 0″1″ kesmaga teng bo‘lgan aylana 0′ markaz bo‘yicha chiziladi. C″≡D″nuqtadan proyeksion bog‘lanish chizig‘i o‘tkazilib, uning 0″1″=0′1′radiusli aylana bilan kesishish nuqtalari C′va D′ lar belgilab olinadi. Gorizontal proyeksiyada ellipsni katta (A′B′) va kichik (C′D′) o‘qlari bo‘yicha yasash mumkin. Kesimga tegishli oraliq nuqtalardan bir nechtasi yasalib, ular o‘zaro tutashtirilsa ellips hosil bo‘ladi. Shunday nuqtalardan E′va F′ larni yasashni ko‘rib chiqaylik. A″va B″ nuqtalar orasida ixtiyoriy E″≡ F″ nuqta olib, u orqali H_2(H_{2V}) gorizontal tekislik o‘tkaziladi. Bu tekislikning konus bilan kesishish chizig‘i bo‘lgan aylananing gorizontal proyeksiyasi bo‘lgan 0″2″ radiusli aylana chiziladi. Bu aylana bilan E″≡F″ nuqtadan tushirilgan proyeksion boglanish chizig‘ining o‘zaro kesishishidan E′va F′ nuqtalar hosil bo‘ladi. Bu nuqtalarni konusning S4(S′4′,S″4″) va S5(S′5′, S″5″) yasovchilari orqali ham topish mumkin.

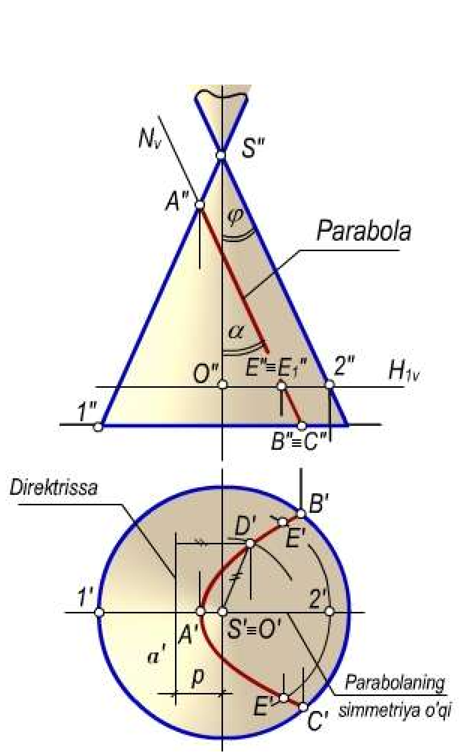
Parabolik kesim. Kesuvchi tekislik konusning yasovchilaridan biriga paralel qilib o‘tkazilsa, kesimda ***parabola*** hosil bo‘ladi (9.8-rasm).

Kesuvchi tekislik konusning uchidan o‘tmagan va ***α=φ*** bo‘lgan holda ham kesimda ***parabola*** hosil bo‘ladi.

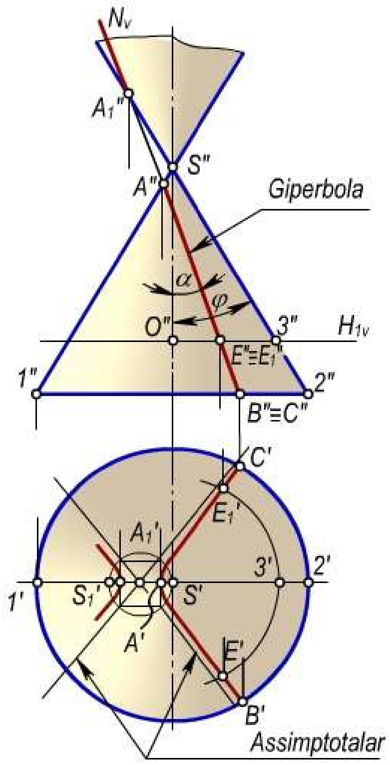
Rasmda to‘g‘ri doiraviy konus bilan N(N_V) tekislikning kesishuvi ko‘rsatilgan. Kesuvchi tekislik frontal proyeksiyalovchi bo‘lganligi sababli parabolaning frontal proyeksiyasi tekislikning N_V frontal izi bilan ustma-ust tushadi. Uning gorizontal proyeksiyasi parabola bo‘lganligi uchun uni A′ uchi, S′ fokusi hamda ***a′*** direktrissasi bo‘yicha yasash mumkin. A′ nuqtani bevosita S′1′ yasovchida belgilab olinadi, uning chap tomonida A′S′ masofada ***a′*** direktrissasi parabolaning simmetriya o‘qiga perpendikulyar qilib o‘tkaziladi.

Kesimga tegishli ixtiyoriy nuqtalarni quyidagicha topish ham mumkin. A″B″ kesimda ixtiyoriy E″≡E₁″ nuqta belgilab olinadi. Bu nuqta orqali H_1 gorizontal tekislikning frontal H_{1V} izi o‘tkaziladi. Bu tekislik konusni R=0″2″ radiusli aylana bo‘yicha kesadi. Bu aylananing gorizontal proyeksiyasi bilan $E''\equiv E_1''$ nuqtadan tushirilgan proyeksion boglanish chizig‘i o‘zaro kesishib E′ va E′ nuqtalarni hosil qiladi.

Giperbolik kesim. Kesuvchi tekislik konusning ikkita yasovchisiga parallel bo‘lsa, u konusni ***giperbola*** bo‘yicha kesib o‘tadi. Bunda $\alpha^\circ < \varphi^\circ$ bo‘ladi. Bunday tekisliklar xususiy holda konus o‘qiga parallel bo‘ladi (9.9-rasm).



9.8-расм



9.9-расм.

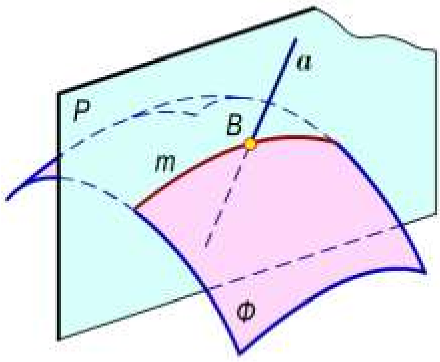
Rasmda berilgan to‘g‘ri doiraviy konusning $N(N_V)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik bilan kesishishi ko‘rsatilgan. Bu holda ham kesuvchi tekislik frontal proyeksiyalovchi bo‘lganligi uchun giperbolaning frontal proyeksiyasi tekislikning N_V frontal izi bilan ustma-ust tushadi. A′ va A_1' nuqtalar giperbolaning uchlari bo‘lib, ular S′1′ va S′2′ yasovchilarda belgilab olinadi. S′ va S_1' nuqtalar giperbolaning fokuslaridir. Giperbolani uchlari, fokuslari va asimptotalari bo‘yicha yasash mumkin. Kesim (giperbola) ga tegishli ixtiyoriy E′ va E_1'nuqtalar konusni aylana bo‘yicha kesuvchi yordamchi H_1 gorizontal tekislik o‘tkazish bilan topilgan.

9.4-§. Sirtlarni to‘g‘ri chiziq bilan kesishishi

To‘g‘ri chiziq bilan sirtlarning kesishish nuqtalari sirtlarning tekislik bilan kesishish chizig‘ini yasashga asoslanib topiladi. Umuman, biror to‘g‘ri chiziq bilan sirtning kesishish nuqtasi aniqlanadi (9.10-rasm):

- Berilgan ***a*** to‘g‘ri chiziq orqali ixtiyoriy yordamchi P tekislik o‘tkaziladi. $P \supset a$.
- Φ sirt bilan P tekislikning kesishish chizig‘i ***m*** yasaladi. $\Phi \cap P = m$.
- ***m*** chiziq bilan berilgan ***a*** to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtasi B belgilab olinadi: $a \cap m = B$.

Ma'lumki, berilgan to'g'ri chiziq orqali istalgancha tekislik o'tkazish mumkin. Masalalarni osonroq yechish uchun to'g'ri chiziq orqali yordamchi tekislik proyeksiyalovchi vaziyatda o'tkaziladi. Bu holda masalaning yechilishi soddalashadi. Berilgan sirt silindrik yoki konus sirt bo'lganda, to'g'ri chiziq orqali silindr yasovchilariga parallel yoki konus uchidan umumiy vaziyatdagi tekislik o'tkazish qulay.



9.10-rasm

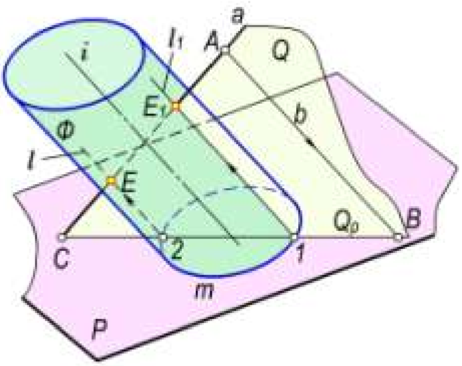
1-masala. Berilgan ***a*** to'g'ri chiziq bilan Φ og'ma elliptik silindrning kesishish nuqtalari yasalsin (9.11, 9.12-rasmlar).

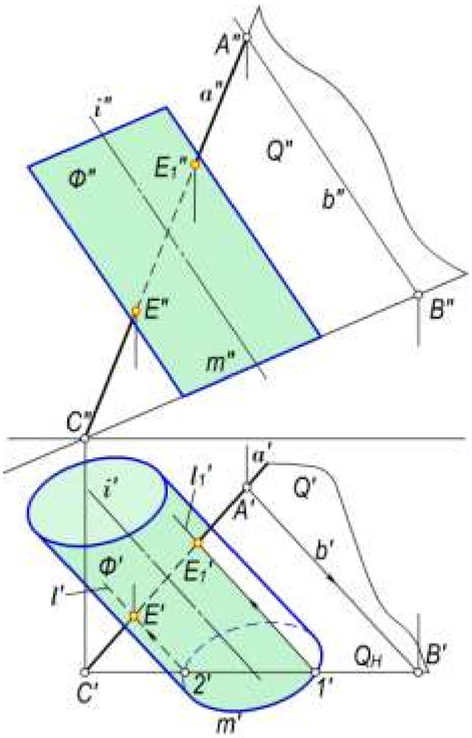
Yechish. Kesishish nuqtalari E va E_1 larni yasash quyidagicha bajariladi:

- berilgan ***a*** to'g'ri chiziq orqali silindrning yasovchilariga parallel qilib ixtiyoriy Q tekislik o'tkaziladi. Buning uchun ***a*** to'g'ri chiziqqa tegishli ixtiyoriy A nuqtani belgilab olib, u orqali ***b*** to'g'ri chiziqni silindrning yasovchilariga parallel qilib o'tkaziladi. Kesishuvchi ***a*** va ***b*** to'g'ri chiziqlar yordamchi Q tekislikni ifodalaydi;
- Q tekislik bilan Φ silindrning kesishish chiziqlari ℓ va ℓ_1 yasovchilar yasaladi. Buning uchun Q tekislik va silindrning asos tekisligi P ning o'zaro kesishish chizig'i BC yasaladi. BC to'g'ri chiziqning silindr asosi ***m*** bilan kesishish nuqtalari 1 va 2 orqali ℓ va ℓ_1 yasovchilar (kesishish chiziqlari) o'tkaziladi;
- berilgan ***a*** to'g'ri chiziq bilan ℓ va ℓ_1 yasovchilarning kesishish nuqtalari E va E_1 belgilab olinadi.

2-masala. Asosi H tekislikka tegishli bo'lgan to'g'ri doiraviy konus sirti bilan ***a*** to'g'ri chiziqning kesishish nuqtalari aniqlansin (9.13, 9.14-rasmlar).

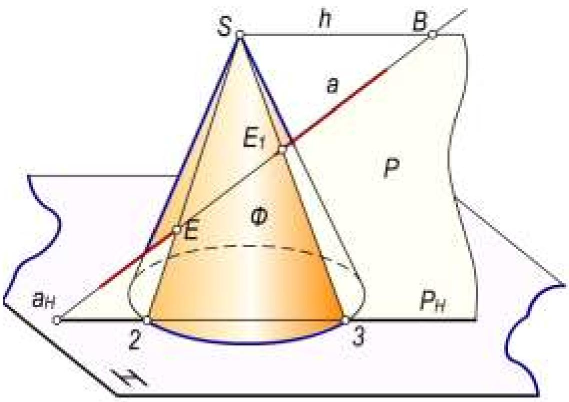
Yechish. Bu holda ***a*** to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi yordamchi tekislik konusning uchidan o'tkaziladi.

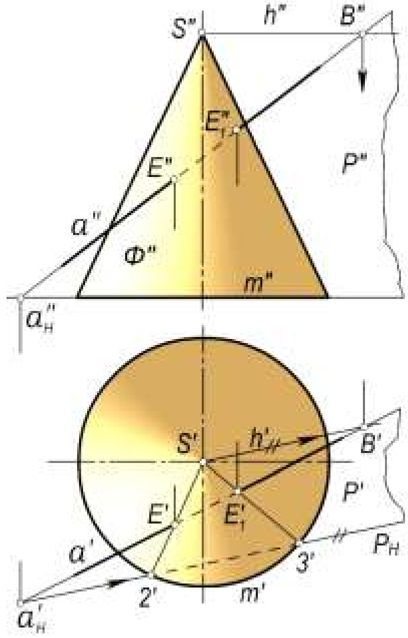




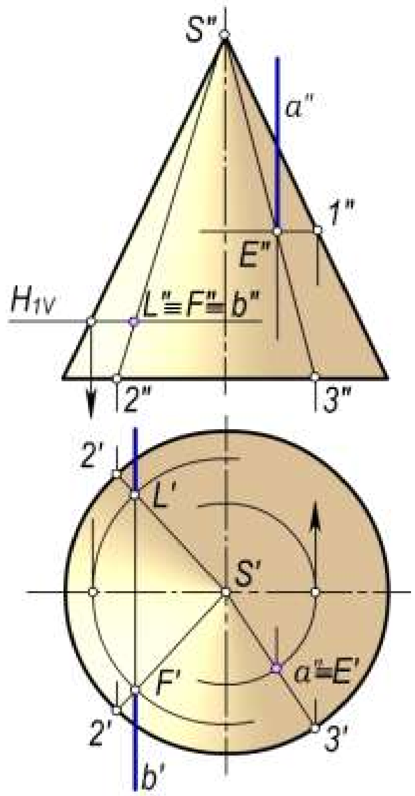
9.11-rasm **9.12-rasm**

Rasmlarda bunday P tekislik o‘zaro kesishuvchi ***a*** va ***h*** to‘g‘ri chiziqlar orqali berilgan. Bunda ***h*** gorizontal to‘g‘ri chiziq konusning S uchidan o‘tkazilgan: $h \ni S$. Ushbu ***h*** gorizontal to‘g‘ri chiziq berilgan ***a*** to‘g‘ri chiziq bilan B nuqtada kesishadi.





9.13-rasm **9.14-rasm**



9.15-расм

P tekislikning P_H gorizontal izini yasab olamiz. Buning uchun ***a*** to‘g‘ri chiziqning a_H (a_H', a_H'') gorizontal izini topib, u orqali gorizontalning gorizontal proyeksiyasi ***h*** ga parallel qilib P_H iz o‘tkaziladi. Konusning ***m′*** asosi tekislikning P_H izi bilan 2′ va 3′ nuqtalarda kesishadi. 2′ va 3′ nuqtalarni S′ bilan tutashtirib, S′2′ va S′3′ yasovchilar hosil qilinadi. Bu yasovchilar ***a′*** to‘g‘ri chiziq bilan kesishib, E′va E_1' nuqtalarni xosil qiladi. E′ va E_1' nuqtalardan proyeksion bog‘lanish chiziqlari o‘tkazilib, ***a″*** to‘g‘ri chiziq bilan kesishish nuqtalari E″ va E_1'' belgilab olinadi.

3-masala. Xususiy holda berilgan ***a(a′, a″)*** va ***b(b′, b″)*** to‘g‘ri chiziqlarning to‘g‘ri doiraviy konus bilan kesishish nuqtalari aniqlansin (9.15-rasm).

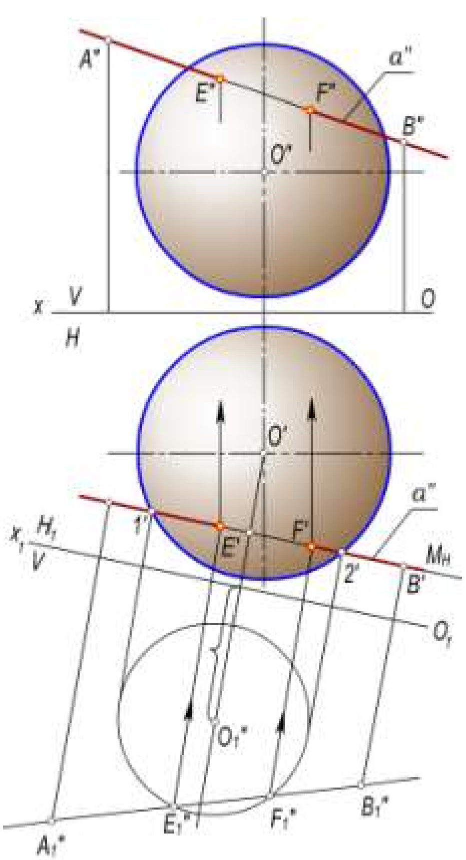
Yechish. Berilgan ***a*** to‘g‘ri chiziq gorizontal proyeksiyalovchi, ***b*** to‘g‘ri chiziq frontal proyeksiyalovchi bo‘lganligi sababli kesishish nuqtalarining bittadan proyeksiyalari E′ va F″≡L″ (mos ravishda gorizontal va frontal proyeksiyalari) ma’lum bo‘lib qoladi. Bu nuqtalar orqali o‘tuvchi yasovchilarning avvalo S′3′, S″2″≡S″$2_1''$, so‘ngra S″3″, S′2′ va S′$2_1'$ proyeksiyalari o‘tkaziladi. ***a″*** va S″3″ larning o‘zaro kesishish nuqtasi E″ hamda *b′* bilan S′2′ va S′21′ larning kesishish nuqtalari F′ va L′ belgilab olinadi.

4-masala. To‘g‘ri chiziqning sfera bilan kesishish nuqtalari aniqlansin (9.16-rasm).

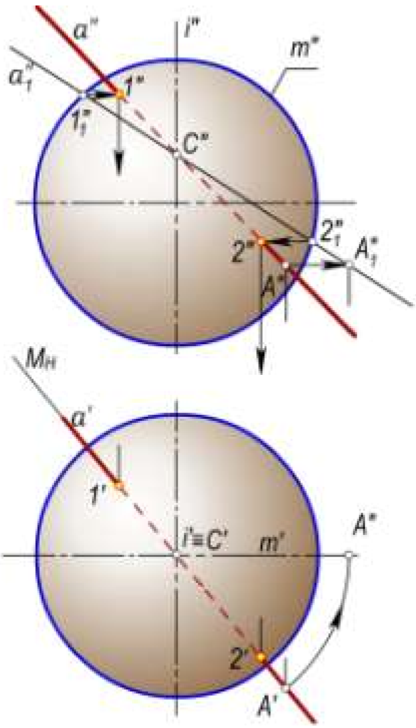
Yechish. Berilgan ***a(a′, a″)*** to‘g‘ri chiziqning sfera bilan kesishish nuqtalarini yasash uchun bu to‘g‘ri chiziq orqali M(Mn) gorizontal proyeksiyalovchi tekislik o‘tkaziladi. Bu tekislik sferani diametri 1′2′ kesmaga teng bo‘lgan aylana bo‘yicha kesadi. 1′2′ diametrli aylananing gorizontal proyeksiyasi tekislikning M_H izi bilan ustma-ust tushadi: **1′2′≡M_H**.

Berilgan ***a*** to‘g‘ri chiziq bilan 12 diametrli aylananing kesishish nuqtalari E va F larning proyeksiyalari quyidagicha yasaladi: V tekislik M ga parallel bo‘lgan ixtiyoriy V_1 tekislik bilan almashtiriladi. Berilgan ***a*** to‘g‘ri chiziq va 12 diametrli aylanani V_1 tekislikka proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuliga asosan proyeksiyalanadi. Hosil bo‘lgan $0_1''$ markazli aylana va ***a″*** to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtalari E″ va F″ lar belgilab olinadi. Bu nuqtalardan O_1X_1 proyeksiyalar o‘qiga perpendikulyarlar o‘tkazilib, ularning ***a′*** to‘g‘ri chiziq bilan kesishish nuqtalari E′ va F′ lar aniqlanadi. Bu nuqtalardan esa OX o‘qiga perpendikulyarlar chiqarilib, ularning ***a″*** to‘g‘ri chiziq bilan kesishish nuqtalari E″ va F″ lar belgilab olinadi.

Agar ***a(a′, a″)*** to‘g‘ri chiziq biror aylanish sirtining aylanish o‘qi bilan kesishadigan vaziyatda berilgan bo‘lsa (9.17-rasm), u holda to‘g‘ri chiziqni bu o‘q atrofida aylantirib, uning aylanish sirti bilan kesishish nuqtalarini osongina yasash mumkin. Berilgan ***a(a′, a″)*** to‘g‘ri chiziq orqali o‘tgan gorizontal proyeksiyalovchi $M(M_H)$ tekislik sferani ***m(m′, m″)*** meridiani (aylana) bo‘yicha kesadi (chizmada ***m″*** ko‘rsatilmagan). Bu meridian frontal tekislikka ellips bo‘lib proyeksiyalanadi. Bu ellipsni chizmaslik maqsadida ***m(m′, m″)*** meridian va ***a(a′, a″)*** to‘g‘ri chiziq sirtning ***i(i′, i″)*** o‘qi atrofida frontal vaziyatga kelguncha aylantiriladi. U holda ***a(a′, a″)*** to‘g‘ri chiziq ***a_1(a_1', a_1'')*** vaziyatga, ***m(m′, m″)*** meridian esa ***m_1(m_1', m_1'')*** vaziyatga keladi. ***a_1″*** to‘g‘ri chiziq bilan ***m_1″*** bosh meridianning kesishish nuqtalari $1_1''$, $2_1''$ lar yordamida *1″*, *2″* hamda *1′, 2′* nuqtalar belgilab olinadi.



9.16-rasm.



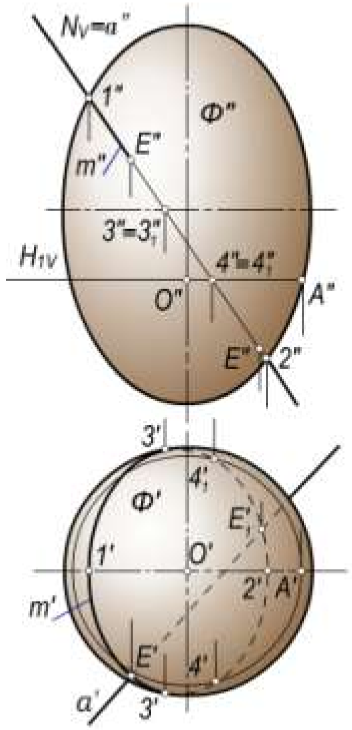
9.17-rasm.

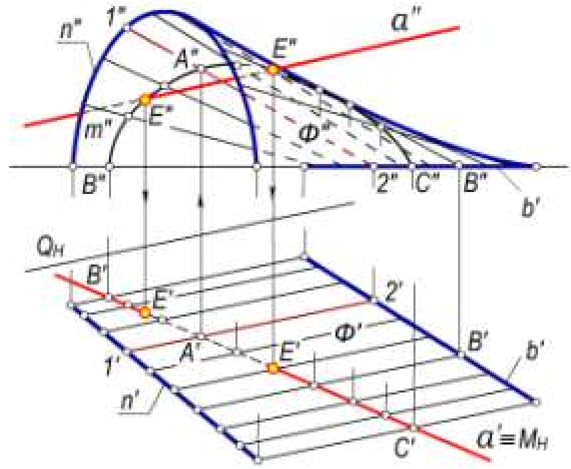
5-masala. Umumiy vaziyatdagi ***a(a′,a″)*** to‘g‘ri chiziqning *Φ(Φ′,Φ″)* aylanma ellipsoid bilan kesishish nuqtalari *E(E′,E″)*, $E_1(E_1′,E_1″)$ aniqlansin (9.18-rasm).

Yechish. Bunda ***a*** to‘g‘ri chiziqning ellipsoid aylanish o‘qi bilan kesishmaydigan vaziyati berilgan. Agar berilgan *a* to‘g‘ri chiziq ellipsoidning aylanish o‘qi bilan kesishadigan bo‘lsa, u holda bunday masalani 9.17-rasmda ko‘rsatilgandek yechishimiz mumkin. Berilgan *a* to‘g‘ri chiziqning ellipsoid bilan kesishish nuqtalari *E* va E_1 larni yasash uchun to‘g‘ri chiziq orqali frontal proyeksiyalovchi N(N_V) tekislik o‘tkaziladi. N(N_V) tekislikning ellipsoid bilan kesishish chizig‘i ***m(m′, m″)*** yasaladi. Bu chiziqning berilgan to‘g‘ri chiziq bilan kesishuvida izlanayotgan nuqtalar hosil bo‘ladi. Tekislikning N_V frontal izi, to‘g‘ri chiziqning ***a″*** frontal proyeksiyasi va kesishish chizig‘ining frontal proyeksiyasi ***m″*** lar ustma-ust tushadi. Kesishish chizig‘ining ***m′*** gorizontal proyeksiyasini yasash uchun ***m″*** ga tegishli ixtiyoriy nuqtalarni belgilab, ularning gorizontal proyeksiyasini topish va ularni tekis egri chiziq bilan tutashtirish kerak. Ellipsoidning frontal konturiga tegishli 1(1′,1″) va 2(2′,2″) nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari 1′ va 2′ nuqtalar bevosita belgilab olinadi. Ixtiyoriy olingan 4(4′,4″) va $4_1(4_1′,4_1″)$ nuqtalarning 4′ va $4_1′$ gorizontal proyeksiyalarini yasash uchun 4″= $4_1″$ nuqta orqali gorizontal tekislikning frontal izi H_{1V} o‘tkaziladi. So‘ngra gorizontal proyeksiyada radiusi 0′A′=0″A″ bo‘lgan aylana chizamiz. 4=$4_1″$ nuqtadan proyeksion bog‘lanish chizig‘ini tushirib, 0′A′ radiusli aylana bilan kesishish nuqtalari 4′ va $4_1′$ lar belgilab olinadi. Qolgan nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari ham xuddi shunday yasaladi. ***a*** to‘g‘ri chiziq va *m* kesishish chizig‘ining gorizontal proyeksiyalari *a′****,*** *m′* o‘zaro kesishib E′ va $E_1′$ nuqtalarni xosil qiladi. E′ va $E_1′$ nuqtalardan proyeksion bog‘lanish chiziqlarini chiqarib, ularning *a″* frontal proyeksiya bilan kesishuvida *E″* va $E_1″$ nuqtalar hosil qilinadi.

6-masala. ***n(n′,n″)*** va ***b(b′,b″)*** yo‘naltiruvchilari va Q(Qn) parallellizm tekisligi bilan berilgan konoidning ***a(a′,a″)*** to‘g‘ri chiziq bilan kesishish nuqtalarini proyeksiyalari yasalsin (9.19-rasm).

Yechish. Bunda berilgan to‘g‘ri chiziq orqali gorizontal proyeksiyalovchi M(Mn) tekislik o‘tkaziladi. Uning konoid bilan kesishish chizig‘i ***m(m′,m″)*** yasaladi. ***a(a′,a″)*** to‘g‘ri chiziq va ***m(m′,m″)*** chiziqning o‘zaro kesishish nuqtalari ***E(E′,E″)*** va ***E_1($E_1′$,$E_1″$)*** lar belgilab olinadi.





9.18-rasm. **9.19-rasm.**

9.5-§. Sirtlarning umumiy vaziyatdagi tekisliklar bilan kesishishi

Sirtlarning umumiy vaziyatdagi tekislik bilan kesishish chiziqlari quyidagi algoritm asosida bajariladi:

- berilgan Φ sirt va Q tekislik yordamchi kesuvchi P_1 tekislik bilan kesiladi (9.20-rasm). P_1 yordamchi tekislikni shunday o‘tkazish kerakki, uning Φ sirt bilan kesishiish chizig‘i to‘g‘ri chiziq yoki aylana singari sodda chiziq bo‘lsin.
- yordamchi P_1 tekislik bilan Φ sirtning kesishish chizig‘i $\boldsymbol{m_1}$ yasaladi: $\Phi \cap P_1 = \boldsymbol{m_1}$
- berilgan Q va P_1 tekisliklarning o‘zaro kesishish to‘g‘ri chizig‘i yasaladi: $Q \cap P_1 = \boldsymbol{a_1}$;
- $\boldsymbol{a_1}$ va $\boldsymbol{m_1}$ chiziqlarning kesishish nuqtasi A_1 ni belgilab, ($A_1 = \boldsymbol{a_1} \cap \boldsymbol{m_1}$) olinadi. $\boldsymbol{a_1}$ va $\boldsymbol{m_1}$ chiziqlarining kesishish nuqtalari bitta yoki ko‘p bo‘lishi mumkin.

Yuqorida bayon qilingan yasashlarga asosan P_2, P_3,… tekisliklar o‘tkazilib A_2, A_3,… nuqtalar xolati aniqlanadi.

Bu nuqtalar o‘zaro tutashtirilib, Φ sirt bilan Q tekislikning kesishishidan hosil bo‘lgan tekis egri chizig‘i ℓ hosil qilinadi.

Φ sirtning Q tekislik bilan kesishish chizig‘ini shu sirt yasovchilarning tekislik bilan kesishish nuqtalarini topish orqali ham yasash mumkin.

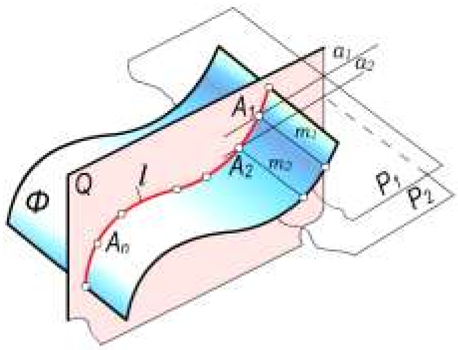
1-masala. To‘g‘ri doiraviy silindrning $Q(Q',Q'')$ tekislik bilan kesishish chizig‘ini proyeksiyalari yasalsin.

Yechish. Bunda $A(A',A'')$ yuqori va $B(B',B'')$ quyi nuqtalarni topish ikki xil usulda ko‘rsatilgan. Bu usullardan biri-urinma gorizontallar o‘tkazishdir. Yuqori va quyi nuqtalar kesuvchi tekislikning silindrga urinma vaziyatda o‘tkazilgan h_1 va h_2 gorizontallarga tegishli bo‘ladi.

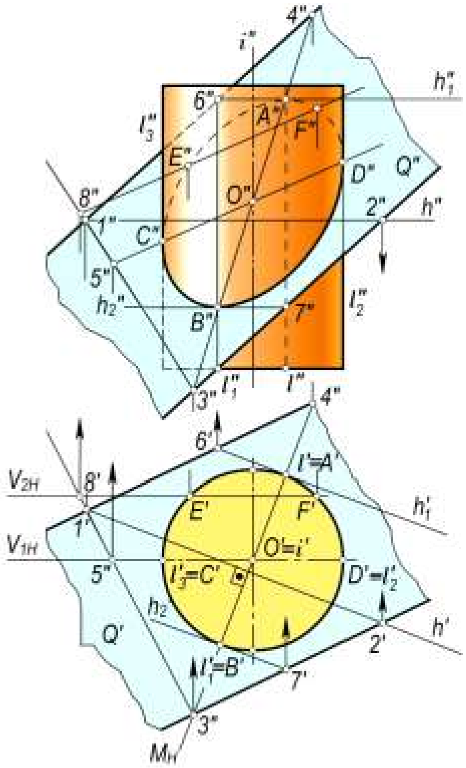
Ikkinchisi A va B nuqtalarni silindrning $i(i',i'')$ o‘qi orqali o‘tuvchi va Q tekislikka perpendikulyar bo‘lgan $M(M_H)$ tekislik yordamida ham topish mumkin. Buning uchun Q tekislikning ixtiyoriy h gorizontali o‘tkaziladi. Uning h' gorizontal proyeksiyasiga perpendikulyar ravishda silindirning i o‘qi orqali M tekislikning gorizontal Mn izi o‘tkaziladi. Bu tekislik silindrni ℓ va ℓ_1 yasovchilari bo‘yicha, berilgan Q tekislikni esa 34 to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesadi. 34

kesishish chizig‘i va l, l_1 yasovchilarning frontal proyeksiyalari $3''4''$ hamda l', l'' larning o‘zaro kesishuvidan A'' va B'' nuqtalar hosil bo‘ladi. Yuqori va quyi nuqtalarning A' va B' proyeksiyalari silindr asosining proyeksiyasiga tegishli bo‘ladi.

Silindr ocherkiga tegishli C va D nuqtalar shu ocherkni ifodalovchi l_2, va l_3 yasovchilarning Q tekislik bilan kesishuvida hosil bo‘lgan, oraliqdagi E va F nuqtalar esa C hamda D nuqtalar singari topiladi.



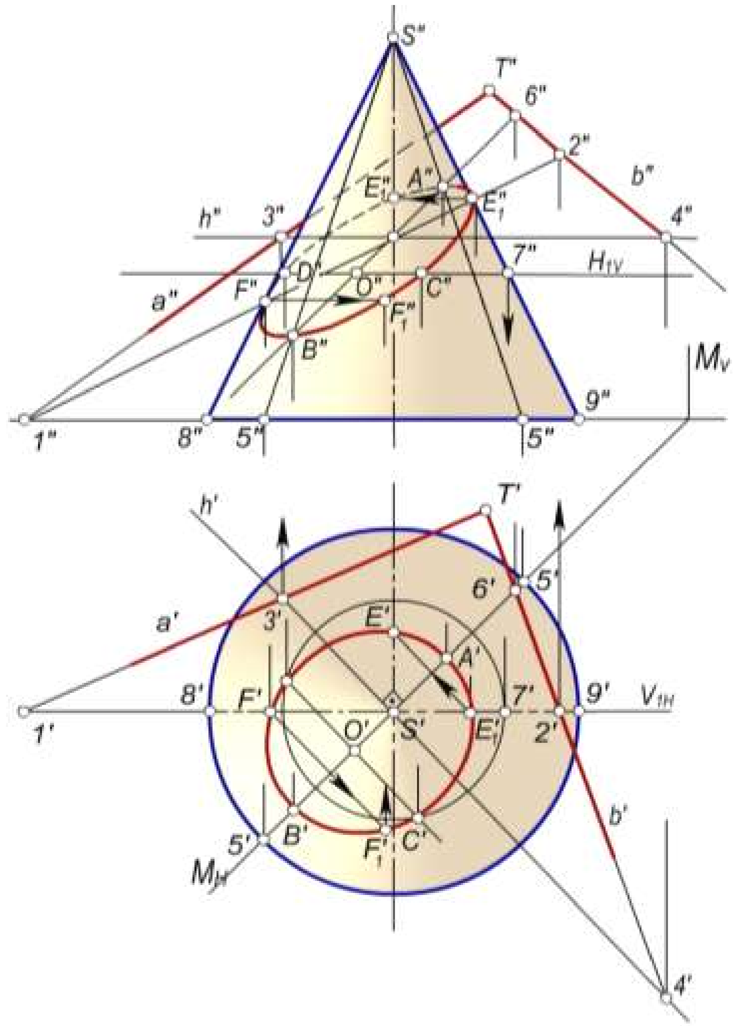
9.20-расм.



9.21-расм.

2-masala. To‘g‘ri doiraviy konusning berilgan tekislik bilan kesishuvidagi kesim yuza proyeksiyalari yasalsin (9.22-rasm).

Yechish. Kesuvchi tekislik o‘zaro kesishuvchi $a(a',a'')$ va $b(b',b'')$ to‘g‘ri chiziqlar bilan berilgan. Dastlab tayanch nuqtalarning topilishini ko‘rib chiqamiz. Kesishish chizig‘ini konus ocherkiga tegishli, ya’ni konus chetki yasovchilari S9 va S8 larning berilgan tekislik bilan kesishish nuqtalari E, F lar quyidagicha topiladi: S9 va S8 yasovchilar orqali yordamchi V_{H1} frontal tekislik o‘tkaziladi. U berilgan $(a\cap b)$ tekislikni 12 ($1'2'$, $1''2''$) to‘g‘ri chiziq, konusni esa S8($S'8'$, $S''8''$) va S9($S'9'$, $S''9''$) yasovchilar bo‘yicha kesadi.12 to‘g‘ri chiziq bilan S8 va S9 yasovchilarning kesishuvidan E(E', E'') va F(F',F'') nuqtalar hosil bo‘ladi.

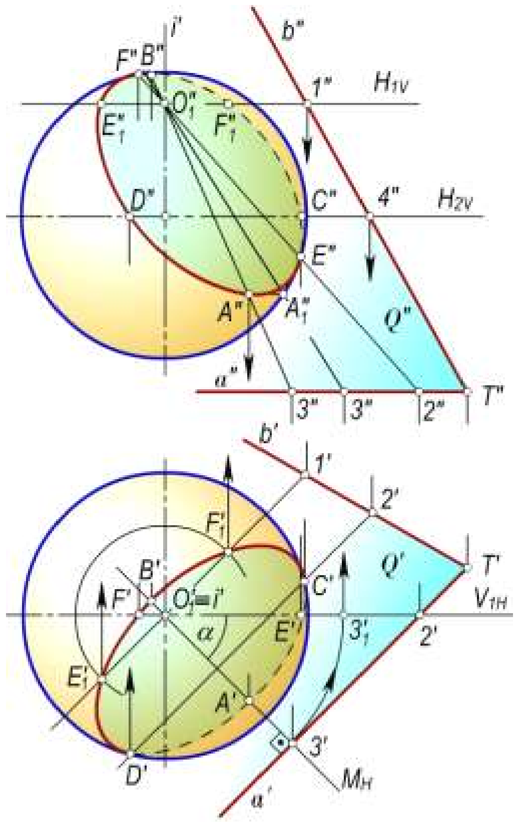


9.22-rasm.

Kesimning yuqori va quyi nuqtalar esa konusning i o‘qi orqali o‘tuvchi va berilgan tekislikka perpendikulyar bo‘lgan yordamchi M(M_H) tekislikdan foydalanib topiladi. Buning uchun berilgan tekislikning ixtiyoriy *h(h′,h″)* gorizontali o‘tkaziladi. Bu gorizontalning h_1' proyeksiyasiga perpendikulyar qilib, *S′* nuqta orqali yordamchi M tekislikning M_H izini o‘tkazamiz. M tekislikning konus bilan kesishishi chiziqlari S5 va $S5_1$ yasovchilar hamda berilgan tekislik bilan kesishish chizig‘i S_16($S_1'6'$, $S_1''6''$) larning frontal proyeksiyalari o‘tkaziladi. Ular o‘zaro kesishib, mos ravishda quyi B va yuqori A nuqtalarning frontal proyeksiyalari B″ va A″ nuqtalarni hosil qiladi. A va B nuqtalar orasidagi masofa kesim yuza – ellipsning katta o‘qi bo‘ladi. Uning kichik o‘qi CD ni topish uchun AB kesmani teng ikkiga bo‘luvchi O_1 nuqta orqali AB ga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq o‘tkaziladi. Bu holda CD kichik o‘q gorizontal vaziyatdagi to‘g‘ri chiziq bo‘lib uning proyeksiyasini yordamchi H_1(H_{1V}) tekislikdan foydalanib topamiz. Gorizontal proyeksiyada kesuvchi tekislikning M_H izi kesishish chizig‘ining simmetriya o‘qi bo‘ladi. Oraliqdagi E_1 va F_1 nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari E_1' va F_1' nuqtalar shu simmetriya o‘qiga asoslanib yasalgan. So‘ngra ular orqali E_1'' va F_1'' nuqtalar topilgan. Hosil bo‘lgan nuqtalarning ko‘rinishligi V_{1H} simmetriya tekisligi frontal bo‘yicha aniqlanib, tekis egri chiziq bilan tutashtiriladi.

3-masala. Shar sirtining Q(***a***∩***b***) tekislik bilan kesishishidagi kesim yuzaning proyeksiyalari yasalsin (9.23-rasm).

Yechish. Kesishish chizig‘ining quyi va yuqori nuqtalarini aylantirish usuli bilan topish qulay. Dastavval sferaning markazidan o‘tuvchi yordamchi M(M_H) tekislik berilgan Q(Q′,Q″) tekislikka perpendikulyar qilib o‘tkaziladi.

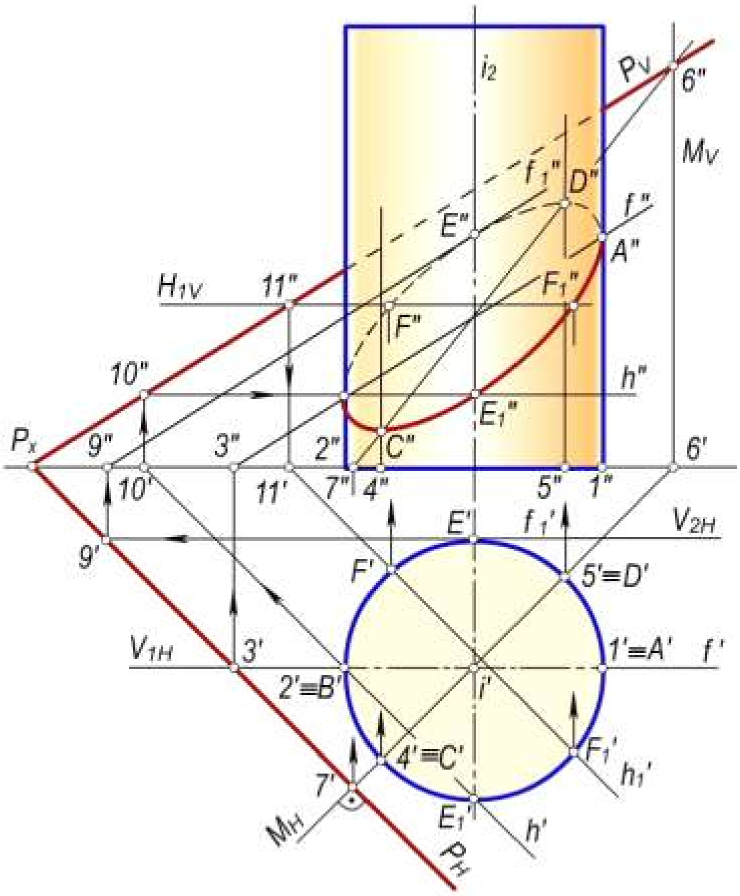


9.23-rasm.

So‘ngra M(M_H) yordamchi tekislikning sfera va berilgan *Q(Q′,Q″*) tekislik bilan kesishish chiziqlari sferaning i*(i′,i″*) o‘qi atrofida frontal vaziyatga kelguncha aylantiriladi. Bu holda M(M_H) tekislikning sfera bilan kesishish chizig‘i (aylana) ning frontal proyeksiyasi sferaning ocherki bilan ustma-ust tushadi. M va berilgan tekislikning kesishish chizig‘i 0_13 ning frontal proyeksiyasi $0_1''3''$ esa $0_1''3_1''$ vaziyatni egallaydi. Demak, sferaning frontal proyeksiyadagi ocherki bilan $0_1''3_1''$ to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtalarini belgilab (rasmda faqat A_1'' nuqta belgilangan), ularni teskari yo‘nalishda α burchakka burish kerak bo‘ladi. Buning uchun A_1'' nuqtadan gorizontal vaziyatda to‘g‘ri chiziq o‘tkazib, uning $0_1''3''$ to‘g‘ri chiziq bilan kesishish nuqtasi A'' ni belgilash yetarli bo‘ladi. B'' nuqta ham xuddi shunday topiladi. Ocherklarning berilgan tekisliklar bilan kesishish nuqtalari C, D, E va F lar H_2 hamda V_1 tekisliklar yordamida topilgan. Oraliqdagi ixtiyoriy nuqtalardan E_1 va E_2 lar esa yordamchi H_1 tekislikdan foydalanib topilgan.

4-masala. H tekislikda joylashgan to‘g‘ri doiraviy silindrning ixtiyoriy vaziyatdagi P(P_H, P_V) tekislik bilan kesishishidagi kesim yuza proyeksiyalari yasalsin (9.24-rasm).

Yechish. Kesim yuzasining gorizontal proyeksiyasi silindrning gorizontal proyeksiyasi (asosi) bilan ustma-ust tushadi. Shuning uchun kesimning faqat frontal proyeksiyasi topiladi.



9.24-rasm.

Dastlab silindrning chetki 1, 2 yasovchilari bilan P tekislikning kesishish nuqtalari A va B ning frontal proyeksiyalari A″ va B″ nuqtalari topiladi. Buning uchun chetki yasovchilar orqali $V_1(V_{1H})$ frontal tekislik o‘tkaziladi. Bu tekislik berilgan P tekislikni frontal chiziq bo‘yicha kesadi. Kesishish chizig‘ining frontal proyeksiyasi *f″* silindr chetki yasovchilarining frontal proyeksiyalari bilan kesishib, A″ va B″ nuqtalarni hosil qiladi.

Kesimning eng yuqori va eng quyi nuqtalarning frontal proyeksiyalari D″ va C″ nuqtalarni topish uchun silindrning o‘qidan o‘tuvchi va P tekislikka perpendikulyar bo‘lgan $M(M_H, M_V)$ gorizontal proyeksiyalovchi tekislik o‘tkaziladi: $i \subset M_H \perp H$. Bu tekislik silindrni *4(4′,4″)* va *5(5′,5″)* yasovchilari, P tekislikni esa *67(6′7′,6″7″)* to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesadi. Yasovchilarning frontal proyeksiyalari *6″7″* to‘g‘ri chiziq bilan kesishib, D″ va *C″* nuqtalarni hosil qiladi.

Kesimning boshqa nuqtalarini kesuvchi tekislikning gorizontal yoki frontal chiziqlaridan foydalanib topish mumkin. Masalan, E nuqtaning frontal proyeksiyasi *E″* ni topish uchun *E* nuqtadan o‘tkazilgan $V_2(V_{2H})$ tekislik silindrni yasovchisi bo‘yicha, P tekislikni $f_1(f_1', f_1'')$ frontal chiziq bo‘yicha kesadi. Frontalning frontal proyeksiyasi f_1'' va *E′* nuqtadan o‘tuvchi yasovchi o‘zaro kesishib, *E″* nuqtani hosil qiladi. *F′* va F_1'' nuqtalar ixtiyoriy $H_1(H_{1V})$ gorizontal yordamchi tekislik o‘tkazish yo‘li bilan topiladi. YOrdamchi tekislikning H_{1V} izi *C″* va D″ nuqtalar oraligida o‘tkaziladi. Bu tekislik silindrni aylana bo‘yicha kesadi. Bu aylananing gorizontal proyeksiyasi silindrning asosi bilan ustma-ust tushadi. Berilgan $P(P_H, P_V)$ tekislik $H_1(H_{1V})$ tekislik bilan $1_1(1_1', 1_1'')$ nuqtadan o‘tuvchi $h(h_1', h_1'')$ gorizontal bo‘ylab kesishadi.

h_1 gorizontalning gorizontal proyeksiyasi h_1' va silindrning asosi o‘zaro kesishib, F′ va F_1' nuqtalarni hosil qiladi. Bu nuqtalardan proyeksion bog‘lanish chiziqlari o‘tkazilib, H_{IV} izda F″ va F_1'' nuqtalar belgilab olinadi.

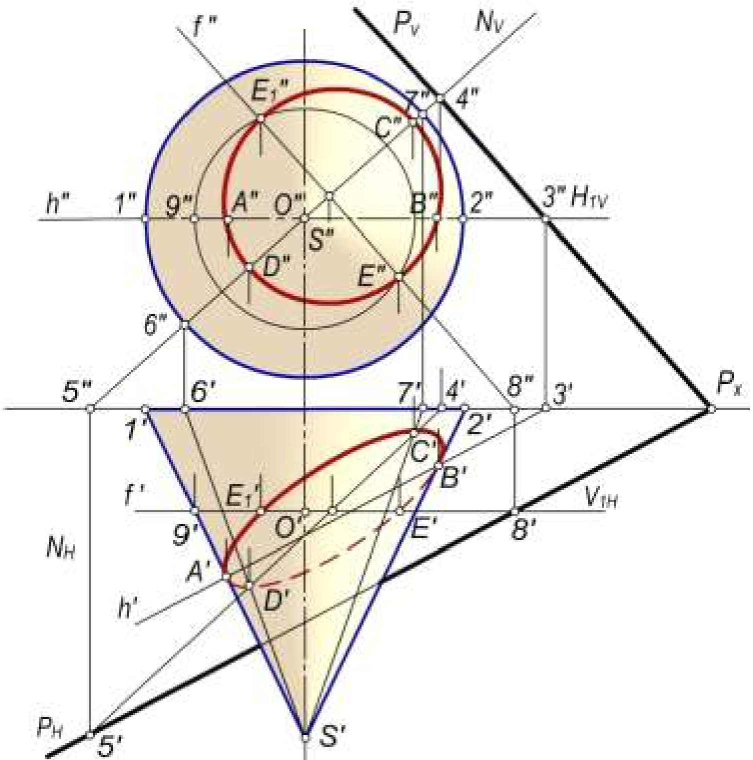
Silindrning kuzatuvchiga karatilgan oldingi yarim qismi ko‘rinadi, orqa tomondagi qismi esa ko‘rinmaydi. Shunga asosan, kesimning frontal proyeksiyasidagi $A''F_1''E_1''C''B''$ qismi ko‘rinadi, B″F″E″D″A″ qismi esa ko‘rinmaydi. Bu nuqtalarni tartibi bilan tutashtirib, tekis egri chiziq - ellips hosil qilinadi.

5-masala. Asosi V tekislikda joylashgan to‘g‘ri doiraviy konusning P(P_H, P_V) tekislik bilan kesishishidagi kesim yuza proyeksiyalari yasalsin (9.25-rasm).

Yechish. Kesim yuza – ellipsning proyeksiyalarini yasash konusning S1(S′1′, S″1″) va S2(S′2′, S″2″) yasovchilari bilan P(P_H, P_V) tekislikning kesishish nuqtalari A(A′, A″) va B(B′, B″) larni topishdan boshlanadi. S1 va S2 yasovchilarning frontal proyeksiyalari S″1″ va S″2″ lar orqali H_1(H_{1V}) gorizontal tekislik izi o‘tkaziladi. Bu tekislik berilgan P tekislikni 3(3′, 3″) nuqtadan o‘tgan *h(h′, h″)* gorizontal chiziq bo‘yicha kesadi. Bu gorizontalning *h′* gorizontal proyeksiyasi konusning S′1′ va S′2′ chetki yasovchilari bilan kesishib, A′ va B′ nuqtalarni hosil qiladi. Bu nuqtalardan proyeksion bog‘lanish chizig‘ini o‘tkazib, S″1″ va S″2″ yasovchilarda A″ va B″ nuqtalar belgilab olinadi.

V tekislikka eng yaqin C(C′,C″) va eng uzoq D(D′,D″) nuqtalarning proyeksiyalari quyidagicha topiladi. Konusning o‘qi orqali o‘tuvchi va berilgan P(P_H, P_V) tekislikka perpendikulyar bo‘lgan N(N_H, N_V) frontal proyeksiyalovchi tekislik o‘tkaziladi. Bu tekislik konusni S6(S′6′, S″6″) va S7(S′7′, S″7″) yasovchilari bo‘yicha kesadi. P(P_H, P_V) va N(N_H, N_V) tekisliklar esa 45(4′5′, 4″5″) to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi, ya’ni P∩N=45.

Bu to‘g‘ri chiziqning 4′5′ gorizontal proyeksiyasi S6 va S7 yasovchilarning gorizontal proyeksiyalari S′6′ va S′7′ lar bilan kesishib, D′ va C′ nuqtalarni hosil qiladi. Bu nuqtalardan proyeksion bog‘lanish chiziqlari o‘tkazilib, S″6″ va S″7″ yasovchilarda D″ va C″ nuqtalar belgilab olinadi.



9.25-rasm.

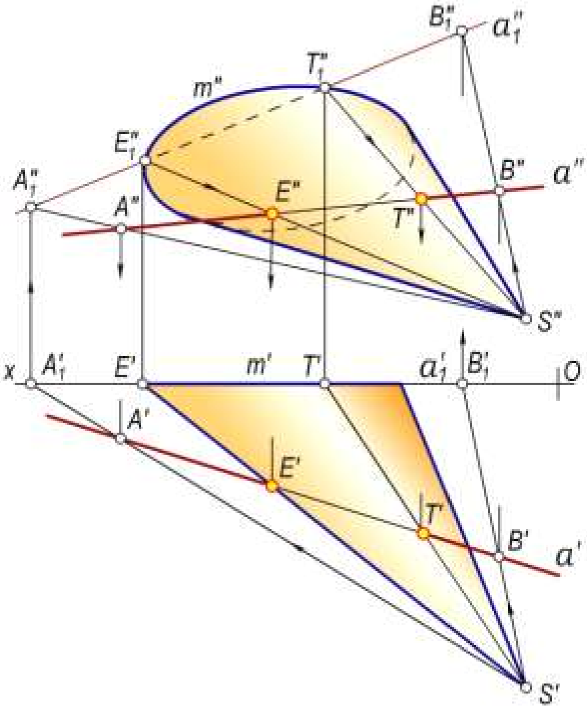
Oraliqdagi ixtiyoriy nuqtalar esa konusning o‘qiga perpendikulyar yordamchi frontal tekisliklar o‘tkazish bilan topiladi. Masalan, C′ va D′ nuqtalar oraligida V_1 frontal tekislikning V_{1H} gorizontal izi o‘tkaziladi. Bu tekislik konusni radiusi 0′9′ ga teng aylana bo‘yicha, P tekislikni esa 8(8′, 8″) nuqtadan o‘tuvchi f*(*f′*,* f″*)* frontal bo‘yicha kesadi. Frontal proyeksiyada chizilgan 0′9′=0″9″ radiusli aylana va f″ to‘g‘ri chiziq o‘zaro kesishib, E″ va E_1″ nuqtalarni hosil qiladi. Bu nuqtalardan proyeksion bog‘lanish chiziqlari o‘tkazilib, f′ to‘g‘ri chiziqda E′ va E_1′ nuqtalar belgilab olinadi. Hosil bo‘lgan nuqtalar silliq tutuashtirilib kesim yuza – ellips chiziladi. Frontal proyeksiyada kesimga tegishli bo‘lgan hamma nuqtalar ko‘rinadi. Gorizontal proyeksiyada esa konusning yuqori yarimda joylashgan kesimning $A'E_1'C'B'$ qismi ko‘rinadi, $B'E'D'A'$ qismi esa ko‘rinmaydi. Bu nuqtalarni tartibi bilan tutashtirib, tekis egri chiziq ellipsni hosil qilamiz.

9.6-§. Sirtlarning to‘g‘ri chiziq va tekislik bilan kesishuvini yasashda ba’zi qo‘shimcha usullar

Piramida yoki konus sirtlar qatnashgan pozision masalalarni yechishda markaziy proyeksiyalashdan foydalanish maqsadga muvofiq bo‘ladi.

1-masala. Konus sirt bilan ixtiyoriy $a(a', a'')$ to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtalarini yasash kerak bo‘lsin (9.26-rasm).

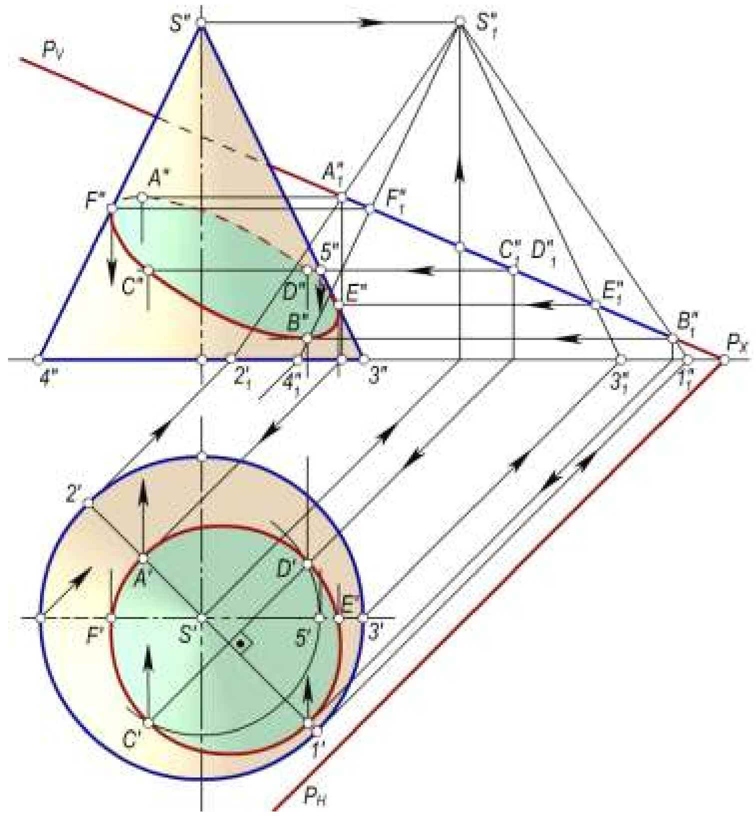
Yechish. Konusning V asos tekisligini proyeksiyalar tekisligi, konusning uchi S nuqtani esa proyeksiyalash markazi deb qabul qilamiz. U holda konus sirtning V dagi markaziy proyeksiyasi uning $m(m', m'')$ asosi bilan ustma-ust tushadi. $a(a', a'')$ to‘g‘ri chiziqning V tekislikdagi markaziy proyeksiyasi $a_1(a_1', a_1'')$ esa $A(A', A'')$ va $B(B', B'')$ nuqtalar orqali aniqlanadi. Konusning m'' asosi va a_1'' to‘g‘ri chiziqning o‘zaro kesishish nuqtalari E_1'' va T_1'' lar izlanayotgan kesishish nuqtalarining markaziy proyeksiyalari bo‘ladi. E_1'' va T_1'' nuqtalarni S proyeksiyalash markazining frontal proyeksiyasi S'' bilan tutashtiriladi. Natijada ular a'' bilan kesishib E'' va T'' nuqtalarni hosil qiladi. E'' va T'' nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari E' va T', a' to‘g‘ri chiziq ustida aniqlanadi.



9.26-rasm.

2-masala. To‘g‘ri doiraviy konusning umumiy vaziyatdagi $P(P_H, P_V)$ tekislik bilan kesishish chizig‘ini yasash talab qilinsin (9.27-rasm).

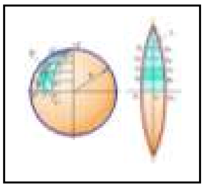
Echish. Konus va P tekislik V frontal proyeksiyalar tekisligiga P tekislikning gorizontali yo‘nalishi bo‘yicha proyeksiyalangan. Bunday proyeksiyalashda kesishish chizig‘ining yordamchi proyeksiyasi A_1'' B_1'' kesma bo‘lib, u tekislikning P_V izi bilan ustma-ust tushadi. Kesishish chizig‘ining A_1'', B_1'', $C_1''\equiv D_1''$, E_1'' va F_1'' nuqtalari orqali konusning yordamchi yasovchilari o‘tkaziladi. So‘ngra bu yasovchilarning gorizontal va frontal proyeksiyalari yasalib, ularga izlanayotgan nuqtalarning avval A'', B'', C'', D'', E'', F'' frontal proyeksiyalari, so‘ngra A', B', C', D', E', F' gorizontal proyeksiyalari aniqlanadi. Bunda A - kesishuv chizig‘ining yuqori, B - quyi, E va F nuqtalar esa konusning ocherkiga tegishli nuqtalardir. Kesishish chizig‘i AB kesma ellipsning katta o‘qi buylab, kichik o‘qi esa CD kesma bo‘ladi.



9.27-rasm.

Nazorat savollari

1. Sirtlarni tekislik bilan kesishish chizig‘ini yasashning umumiy algoritmi nimalardan iborat?
2. Sferani tekislik bilan kesganda qanday shakl hosil bo‘ladi va uning proyeksiyalari qanday yasaladi?
3. Silindrni tekislik bilan kesishuvidan qanday shakllar hosil bo‘lishi mumkin?
4. Konus kesimlari nimalardan iborat?
5. Sirtning tekislik bilan kesishish chizig‘idagi maxsus nuqtalar nimalardan iborat?
6. Sirtlarni qanday tekisliklar bilan kesilsa, kesimning bitta proyeksiyasi to‘g‘ri chiziq kesmasi bo‘ladi?
7. Qanday tekisliklar tor sirtini aylanalar bo‘yicha kesadi?
8. To‘g‘ri chiziq bilan sirtning kesishish nuqtalarini yasash qanday bajariladi?
9. To‘g‘ri chiziq bilan konusning kesishish nuqtalarini yasashda, yordamchi kesuvchi tekislikni qanday vaziyatda o‘tkazish maqsadga muvofiq bo‘ladi?
10. To‘g‘ri chiziq aylanish sirtlarning aylanish o‘qini kesib o‘tsa, ularning kesishish nuqtalarini qanday usulda yasash osonroq bo‘ladi?



X bob. SIRTLARNING YOYILMALARINI YASASH

10.1-§. Umumiy ma'lumotlar

Sirtni egilish deformasiyasi yordamida tekislikka aylantirish mumkin bo'lsa, bunday sirt **yoyiladigan sirt** deyiladi. Sirtning biror bo'lagi tekislikning ma'lum bir sohasiga yoyilishi mumkin. Masalan, silindrik sirt tekislikning o'zaro parallel ikki to'g'ri chizig'i orasidagi sohasida yoyiladi. Konus sirti esa tekislikka tegishli ikki kesishuvchi to'g'ri chiziqlar orasidagi sohada yoyiladi.

Ta'rif. Sirtning biror bo'lagining cho'zilmasdan, yirtilmasdan tekislikka yoyilishidan hosil bo'lgan tekis shakl uning **yoyilmasi** deyiladi.

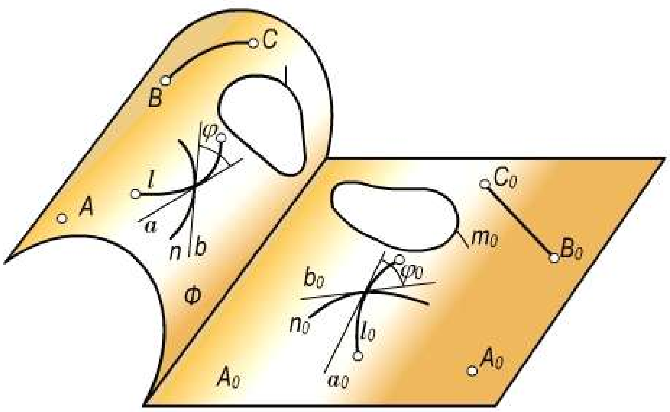
Yoyiladigan sirtlarga to'g'ri chiziqli sirtlardan faqat yondosh yasovchilari xos yoki xosmas nuqtalarda kesishadigan sirtlar kiradi.

Torslarda yondosh yasovchilarning kesishish nuqtalari qaytish qirrasida, konus sirtlarda esa uning uchida va silindrik sirtlarda cheksiz uzoqlikdagi nuqtada bo'ladi.

Sirtlarning yoyilmalarini yasash muhandislik amaliyotida katta ahamiyatga ega. Mashinasozlik, samolyotsozlik va qurilishda turli-tuman konstruksiyalarning shakllarini hosil hilish uchun yaxlit listlarda sirtlarning yoyilmalari yasalib, ishlab chiqarish uchun zarur bo'lgan turli andozalar yasaladi.

Sirtlarning yoyilmalarini yasashda uchburchaklar, dumalatish va normal kesim usullari mavjud.

Uchburchaklar usuli bilan qirrali sirtlar, konus va tors sirtlarning yoyilmalari yasaladi. Dumalatish usuli bilan proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan og'ma vaziyatda berilgan qirrali, konus va silindrik sirtlarning yoyilmalarini yasash qulaydir. Yasovchilari yoki qirralari proyeksiya tekisliklariga nisbatan og'ma vaziyatda bo'lgan silindrik yoki prizmatik sirtlarning yoyilmalarini normal kesim usulida yasash osonroqdir.



10.1-rasm

Yoyilmaydigan sirtlarning yoyilmalari taqriban yasaladi.

Sirt va uning yoyilmasi elementlari orasida qo'yidagi o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan bo'lishi kerak, ya'ni sirtga tegishli har bir nuqta va shaklga, shu sirt yoyilmasiga tegishli nuqta va shakl mos keladi yoki aksincha, yoyilmaga tegishli har bir nuqta va shaklga sirtga tegishli nuqta va figura mos kelishi kerak (10.1-rasm). Bu moslikka asosan qo'yidagi xossalarni keltirish mumkin.

1-xossa. Sirt va uning yoyilmasiga tegishli mos yoylarning uzunliklari o‘zaro teng bo‘ladi: $l = l_0$.

Natija. Sirt va uning yoyilmasiga tegishli mos yopiq egri chiziqlar bir xil yuzaga ega bo‘ladi: $S_m = S_{mo}$.

2-xossa. Sirtga tegishli ikki chiziq orasidagi burchak yoyilmaga tegishli mos chiziqlar orasidagi burchakka tengdir: $\varphi = \varphi_0$.

3-xossa. Sirtga tegishli to‘g‘ri chiziqqa yoyilmada ham to‘g‘ri chiziq mos keladi. Ammo yoyilmaga tegishli to‘g‘ri chiziqqa sirtning biror to‘g‘ri chizig‘i hamma vaqt ham mos kelmaydi.

4-xossa. Sirtga tegishli o‘zaro parallel to‘g‘ri chiziqlarga yoyilmada ham o‘zaro parallel to‘g‘ri chiziqlar mos keladi.

5-xossa. Agar sirtga tegishli egri chiziqqa yoyilmada to‘g‘ri chiziq mos kelsa, bunday chiziq sirtning ***geodezik chizig‘i*** deyiladi. 10.1-rasmda ko‘rsatilgan sirtning *BC* chizig‘i uning geodezik chizig‘i bo‘la oladi.

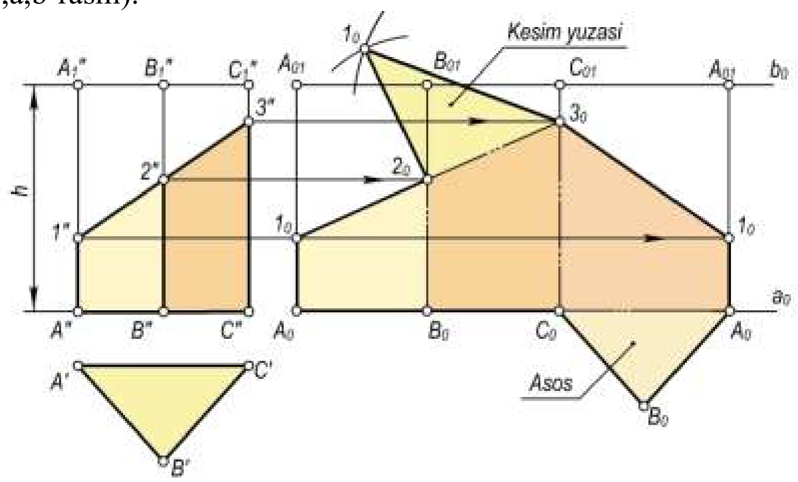
Ta’rif. Sirtga tegishli ikki nuqta orasidagi eng qisqa masofada tutashtiruvchi chiziq sirtning ***geodezik chizig‘i*** deb ataladi.

Sirtning yoyilmasini yasash deganda uni yirtmasdan, uzmasdan yoki g‘ijimlamasdan faqat egib bir tekislikka jipslashtirish tushuniladi. Albatta bunday jarayon sirtning biror chizig‘i (qirrasi, yasovchilari va shu kabilar) bo‘yicha kesib amalga oshirilishi mumkin. Lekin amaliyotda sirtlarning yoyilmalari yasalib, so‘ngra egish deformasiyasi yordamida bu yoyilmalardan kerakli konstruksiyalar yasaladi. Shuning uchun ham srtlarning yoyilmalarini tekislik (qog‘oz) da yasash muhim kasb etadi.

10.2-§. Ko‘pyoqliklar yoyilmalari

Ko‘pyoqliklar to‘la yoyilmasini yasash uchun uning yon yoqlari va asoslarining yoyilmalari yasaladi. Bunday yoqlar (uchburchak yoki ko‘pburchak) ni yoyilmada yasash ularga teng bo‘lgan yoqlarni yasash demakdir. Bunday yoqlarni yoyilmada yasash uchun tomonlari ya’ni qirralarining xaqiqiy uzunliklari bo‘lishi kerak. Agar ularning xaqiqiy uzunliklari chizmada bo‘lmasa, ularni turli usullar orqali yasash mumkin.

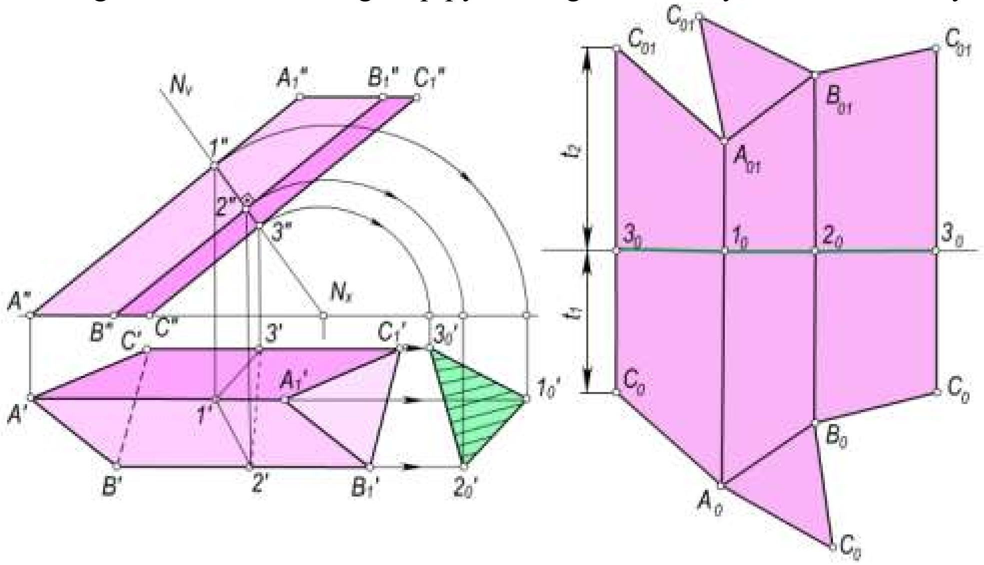
1-masala. Asosi H tekislikda yotgan uchburchakli to‘g‘ri prizmaning yoyilmasini yasash talab qilinsin (10.2,a,b-rasm).



10.2-rasm

Yechish. Prizmaning yon qirralari frontal proyeksiyada, asosidagi qirralari esa gorizontal proyeksiyada xaqiqiy uzunlikda tasvirlangan. Prizmaning yoyilmasini yasash uchun dastlab uning biror masalan, AA_1 qirrasi bo‘ylab xayolan kesish kerak. So‘ngra uchta to‘g‘ri to‘rtburchaklar (yon yoqlar) yonma-yon qo‘yib yasaladi. Bu to‘rburchaklarning balandligi prizmaning balandligi h ga, asoslari esa mos ravishda $A'B'$, $B'A'$ va $C'A'$kesmalarga teng bo‘ladi. Hosil bo‘lgan yon sirtning yoyilmasiga asoslari qo‘shiladi va prizmaning to‘la yoyilmasi hosil bo‘ladi.

10.3,a,b-rasmlarda berilgan uch yoqli og‘ma prizmaning yon qirralari frontal vaziyatda bo‘lgani uchun ularning haqiqiy uzunliklari $A''A_1''$, $B''B_1''$ va $C''C_1''$ kesmalarga teng bo‘ladi. Asoslari gorizontal vaziyatda bo‘lganligi uchun asos qirralarining haqiqiy qiymati $A'B'$, $B'A'$ va $C'A'$ kesmalarga teng bo‘ladi. Bunday og‘ma prizmaning yoyilmasini normal kesim usulida yasash qulay hisoblanadi. Buning uchun og‘ma prizmaning yon qirralariga perpendikulyar qilib ixtiyoriy $N(N_V)$ tekislik o‘tkaziladi. Normal kesim 123 uchburchakning proyeksiyalari ($1'2'3'$, $1''2''3''$) ni hosil qilinadi. So‘ngra normal kesimning haqiqiy kattaligi $\Delta 1_0 2_0 3_0$ aylantirish usulida yasaladi



10.3-rasm

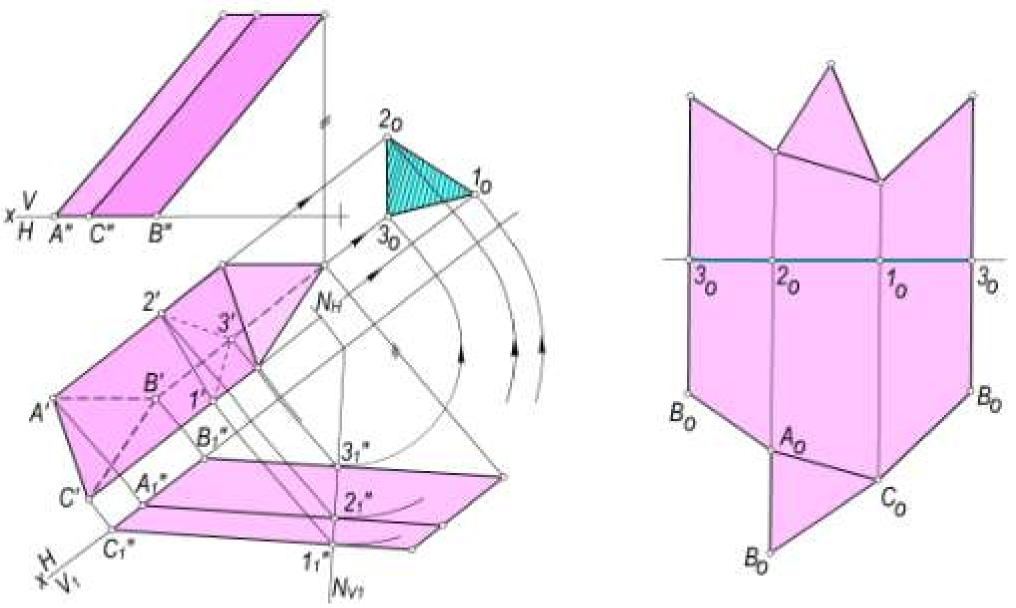
. Yoyilmani yasash uchun ixtiyoriy (bo‘sh) joyda a_0 – yordamchi chiziqni ingichka qilib o‘tkaziladi. Bu chiziqqa normal kesim tomonlarning haqiqiy uzunliklari biror (masalan, 3_0) nuqtadan boshlab o‘lchab qo‘yiladi (10.3,b-rasm). Hosil bo‘lgan 3_0, 1_0, 2_0 va 3_0 nuqtalardan a_0 chiziqqa perpendikulyar vaziyatda chiziq o‘tkaziladi. Bu chiziqlarga qirralarning haqiqiy uzunliklari o‘lchab qo‘yiladi. YOyilmada $C''3''=C_0 3_0$ va $3''C''=3_0 C_0$ qirraning o‘lchab qo‘yilishi ko‘rsatilgan. Hosil bo‘lgan qirralarning uchlari o‘zaro tutashtiriladi. Prizma yon sirti va asosining haqiqiy kattaligi yoyilmasi qo‘shilib to‘la yoyilma hosil bo‘ladi.

2-masala. Berilgan yon qirralari umumiy vaziyatda bo‘lgan uch yoqli prizmaning yoyilmasini yasash talab etilsin (10.4,a-rasm).

Yechish. Mazkur masala yuqorida keltirilgan masala asosida yechiladi. Dastlab prizma qirralari va normal kesimining haqiqiy uzunliklarni yasash kerak bo‘ladi. Buni esa proyeksiyalar tekisliklarini (prizma qirralariga parallel vaziyatda) almashtirish bilan amalga oshirish maqsadga muvofiqdir. Chizmadagi qolgan yasashlar va yoyilmaning hosil qilinishi ortiqcha tushuntirishlarni talab qilmaydi (10.4,b-rasm).

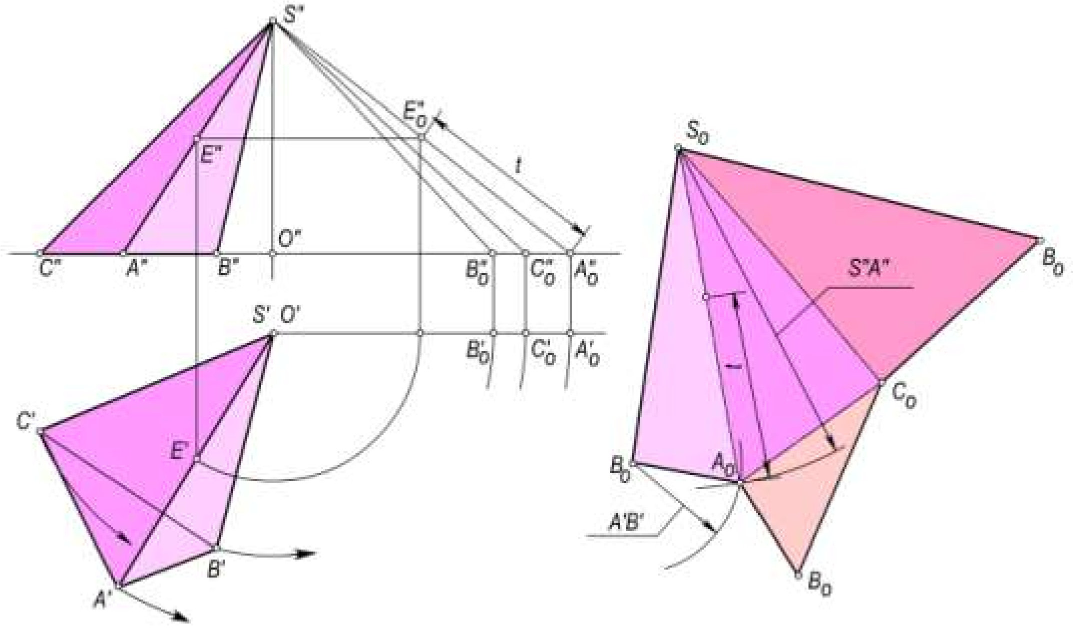
3-masala. Asosi H tekislikka tegishli bo‘lgan uch yoqli og‘ma piramidaning to‘la yoyilmasi yasalsin (10.5,a-rasm).

Yechish. Piramida kabi sirtlarning yoyilmalarini yasashda ***uchburchak usulidan*** foydalaniladi. Buning uchun dastlab piramida yon qirralarining haqiqiy uzunliklari yasaladi. Chizmada ular aylantirish usuli yordamida topilgan. Asos qirralarining haqiqiy uzunliklari $A'B'$, $B'C'$ va $C'A'$ kesmalarga teng bo‘ladi. Piramida yon sirtining yoyilmasini yasash uchun chizmaning ixtiyoriy (bo‘sh) joyida S_0 nuqta belgilab olinadi (10.5,b-rasm). Bu nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqqa $S_0B_0=S''B''$ kesma o‘lchab qo‘yiladi. Chunki piramida SB qirrasi bo‘yicha kesilgan deb faraz qilinadi. So‘ngra markazi B_0 nuqtada, radiusi $B_0A_0=B'A'$ bo‘lgan va markazi S_0 nuqtada, radiusi $S_0A_0=S''A_0''$ bo‘lgan ikkita yoy chiziladi. Bu yoylarning kesishuvidan A_0 nuqta hosil bo‘ladi. $S_0B_0A_0$ nuqtalar o‘zaro tutashtirilib ΔABC ning yoyilmadagi o‘rni hosil qilinadi. Qolgan yon yoqlarning yoyilmalari ham shu tarzda yasaladi. Hosil bo‘lgan yon sirtning yoyilmasiga piramida asosining yoyilmadagi o‘rni qo‘shilsa, piramida to‘la sirtining yoyilmasi hosil bo‘ladi.



a) b)

10.4-rasm



a) b)

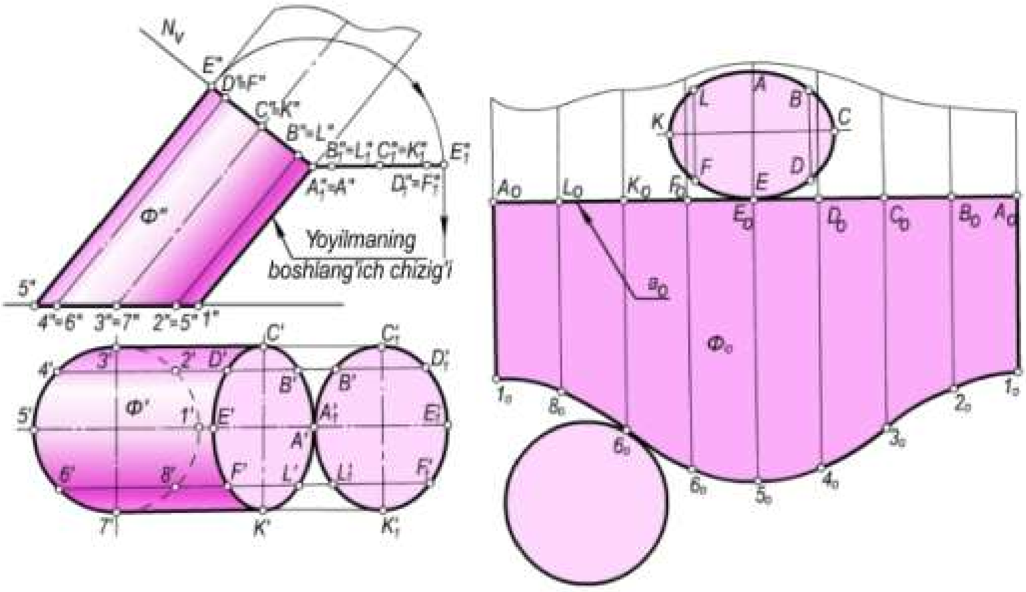
10.5-rasm

10.3-§. Silindrik sirtlarning yoyilmalarini yasash

Silindrik sirtlarning yoyilmalarini yasashda nog‘mal kesim va dumalatish usullaridan foydalaniladi. Har ikkala usul bilan ham yoyilmani yasashda silindrik sirtni approksimasiya qilib prizmatik sirtga keltiriladi va masala prizmaning yoyilmasini yasash kabi bajariladi.

Umuman biror silindrning yoyilmasini yasash uchun: silindr yoyilmasida qatnashadigan yasovchilarning haqiqiy uzunliklari aniqlanadi; qo‘shni yasovchilar orasidagi asos yoylarining haqiqiy uzunliklari topiladi; planimetrik yasashlarga asosan silindr elementlari ketmaket yoyilmada yasaladi.

10.6,a-rasmda yasovchilari frontal vaziyatda va asosi *H* tekislikda yotgan og‘ma, elliptik silindr tasvirlangan. Bunday silindrning yoyilmasi (10.6,b-rasm) normal kesim usulida bajarilgan. Silindrik sirt prizmatik sirtga approksimasiya qilinadi. Buning uchun silindr asosini ixtiyoriy bo‘laklarga bo‘linadi (rasmda 8 ta teng bo‘lakka bo‘lingan).



10.6-rasm

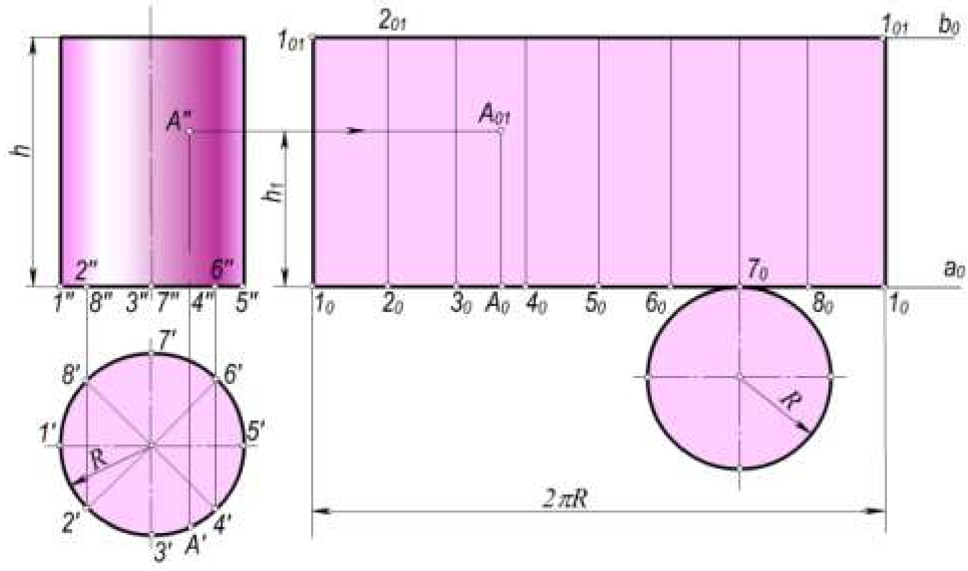
Bu holda silindrni *8* yoqli prizmaga almashtiriladi. Silindrning yasovchilariga perpendikulyar bo‘lgan $N(N_V)$ tekislik bilan kesishish chizig‘i yasaladi. Kesishish chizig‘i, ya’ni normal kesimning haqiqiy kattaligi aylantirish usuli bilan topiladi.

Silindrik sirtning yoyilmasini yasash uchun chizma qog‘ozining bo‘sh joyida ixtiyoriy a_o to‘g‘ri chiziq o‘tkaziladi. Yoyilmaning boshlanish chizig‘i deb 1A yasovchi olingan. a_o to‘g‘ri chiziqqa uzunligi nog‘mal kesimning perimetriga teng bo‘lgan $[A_0A_0]$ kesma o‘lchab qo‘yiladi. Bu kesmaga A_0 nuqtadan boshlab $A_oL_o=A_o'L_o'$, $L_oK_o=L_o'K_o'$, $K_oF_o=K_o'F_o'$,... kesmalar o‘lchab qo‘yilib oraliqdagi L_o, K_o, F_o, ... nuqtalar aniqlanadi. Bu nuqtalar orqali a_0 to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyarlar o‘tkaziladi. 10.6, a-rasmda silindr yasovchilarining frontal proyeksiyalari o‘z haqiqiy uzunliklariga teng ekanligini ko‘rish mumkin. Shuning uchun yasovchilarning frontal proyeksiyadagi uzunliklari o‘lchab olinib, yoyilmadagi mos perpendikulyarlarga qo‘yiladi. O‘lchab qo‘yilgan kesmalarning ikkinchi uchlari tekis egri chiziq bilan tutashtiriladi. Hosil bo‘lgan Φ_0 figura Φ silindr yon sirtining yoyilmasi bo‘ladi. Φ_0 figura silindrning asosi va normal kesimning haqiqiy kattaligi bilan to‘ldirilib, to‘la yoyilma hosil qilinadi

Asoslari aylanish o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri doiraviy silindr yon sirtining yoyilmasi to‘g‘ri to‘rtburchakdan iborat bo‘lib, bunday to‘rtburchakning tomonlari $2\pi R$ va h_0 ga teng bo‘ladi (10.7,a,b-rasm). Bu yerda R – asosning radiusi, *h* – silindrning balandligi. Asosi H tekisligiga tegishli va o‘qi unga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri doiraviy silindrning to‘la yoyilmasini yasash 10.7,b-rasmda ko‘rsatilgan.

Bunda silindrning 1_o2_o $(1'2', 1''2'')$ yasovchisi yoyilmaning boshlanish chizig‘i deb olingan.

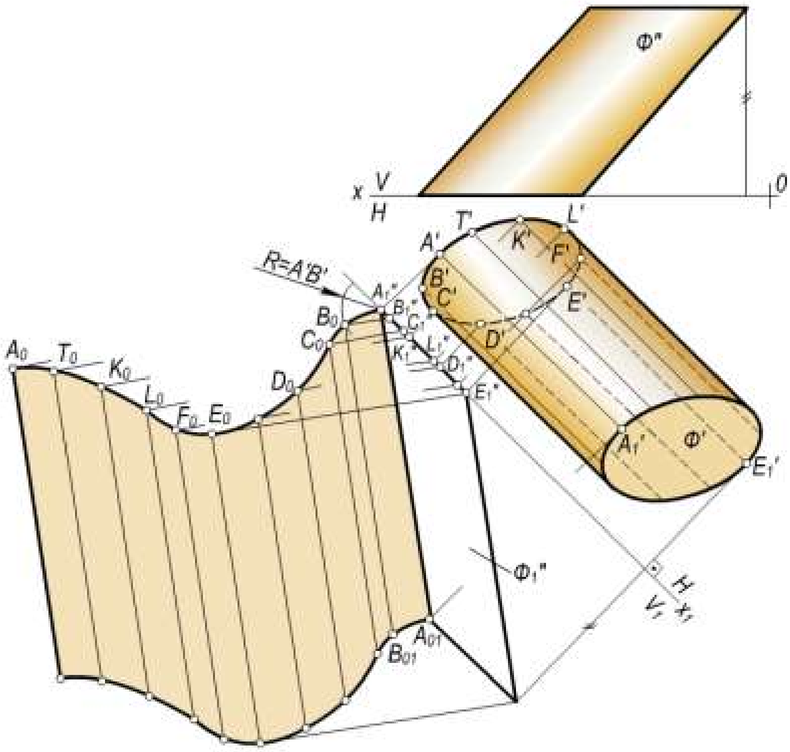
Ixtiyoriy a_0 to‘g‘ri chiziq o‘tkazib, unga $[1_01_0] - 2\pi R$ kesma o‘lchab qo‘yiladi va u teng 8 bo‘lakka bo‘linadi. Kesmaning har ikkala uchidan a_0 to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyarlar chiqarilib, ularga $1_01_{01}=h$ kesma, ya’ni silindrning balandligiga teng kesmalar o‘lchab kuyiladi. Hosil bo‘lgan $1_01_{01}1_{01}1_0$ to‘g‘ri to‘rtburchak berilgan silindr yon sirtining yoyilmasi bo‘lib, to‘la yoyilmani yasash uchun 1_01_{01} va 2_02_{01} tomonlarga urinuvchi qilib silindrning asoslari chiziladi. Sirtga tegishli A nuqtaning yoyilmadagi o‘rnini aniqlash 10.7,a,b-rasmdan ko‘rinib turibdi. Bunda $3'\frown A'=3_0A_0$, $A_0A_{01}=h_1$, ya’ni A nuqtaning applikatasiga teng bo‘ladi.



a) **b)**

10.7-rasm.

10.8-rasmda tasvirlangan og‘ma elliptik silindr yon sirtining yoyilmasi dumalatish usulida bajarilgan. Dastavval silindr uning yasovchilariga parallel bo‘lgan V tekislikka, proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuli bilan proyeksiyalanadi.



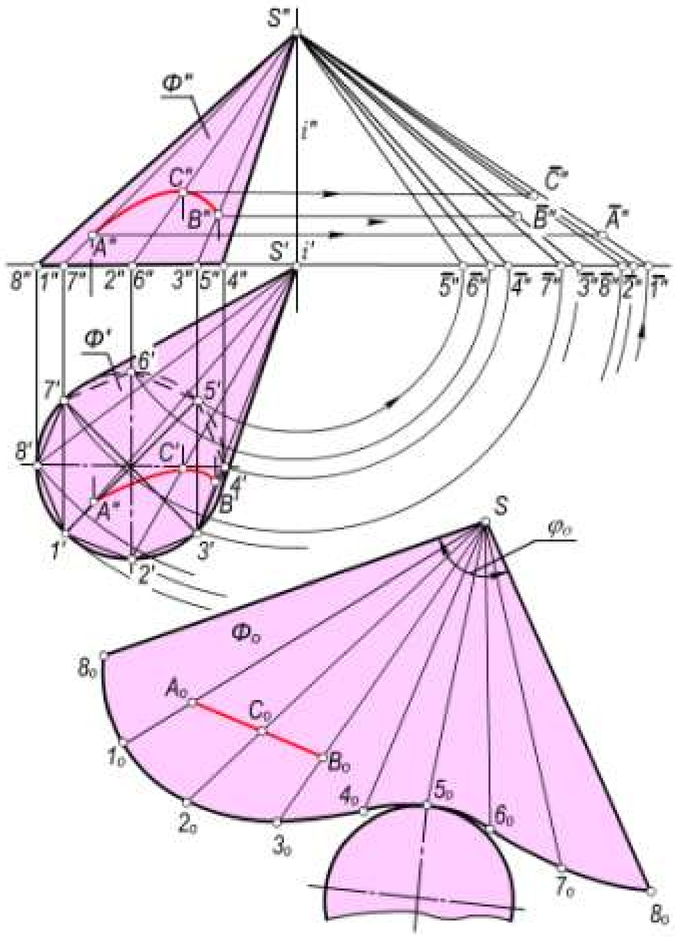
10.8-rasm.

Silindrning AA_1($A'A'_1$, $A''A''_1$) yasovchisi yoyilmaning boshlanish chizig‘i deb olingan. Φ silindr o‘zining AA_1 yasovchisi orqali o‘tgan tekislikka yoyiladi. Buning uchun silindrik sirt yana prizmatik sirtga approksimasiya iqilinadi va prizmaning yoyilmasini yasash kabi bajariladi. Silindr yasovchilaridan biri BB_1($B'B'_1$,$B''B''_1$) ning yoyilmadagi o‘rni B_0B_{01} ni yasashni ko‘rib chiqaylik. Markazi A_1'' nuqtada va radiusi $A'B'$ ga teng bo‘lgan aylana yoyi chiziladi. B_1'' nuqtadan esa $A_1''A_{01}''$ yasovchiga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq o‘tkaziladi. Ular o‘zaro kesishib, yoyilmaga tegishli B_0 nuqtani hosil qiladi. B_0 nuqta orkqali $A_1''A_{01}''$ ga parallel qilib B_0B_{01} ($B_0B_{01}=A_1''A_{01}''$) yasovchi o‘tkaziladi. Yoyilmadagi C_0, D_0, ... nuqtalar va ular orqali o‘tuvchi yasovchilar ham B_0 nuqta va B_0B_{01} yasovchi singari yasaladi.

10.4-§. Konus sirtlarning yoyilmalarini yasash

Umumiy holdagi konus sirtining yoyilmasi ham piramida yoyilmasini yasashdagidek, uchburchaklar usuli bilan bajariladi. Buning uchun konus o‘ziga ichki chizilgan ko‘pyoqlik piramidaga approksimasiya qilinadi va shu piramidaning yoyilmasi konus sirtining yoyilmasi deb qabul qilinadi. Ichki chizilgan ko‘pyoqlik piramidaning yoqlari qanchalik ko‘p bo‘lsa, konus sirtining yoyilmasi shunchalik aniq bo‘ladi. Umuman, konusni yoyish uchun uning bir necha yasovchilarining haqiqiy uzunliklari va yunaltiruvchi egri chizig‘i (yoki uning bo‘laklarining) — asosining haqiqiy uzunligi topiladi. so‘ngra konus yasovchilari va asosining bo‘laklari birin ketin yoyilmaga ko‘chiriladi.

10.9,a-rasmda asosi H tekislikka tegishli Φ og‘ma konus tasvirlangan. Bu konusning yoyilmasini yasashda uchburchaklar usulidan foydalanamiz. Konusni o‘ziga ichki chizilgan piramidaga approksimasiyalaymiz. Konus yasovchilari yoki ichki chizilgan piramida qirralarining xaqiqiy uzunliklarini yasash rasmda aylantirish usulida bajarilgan.

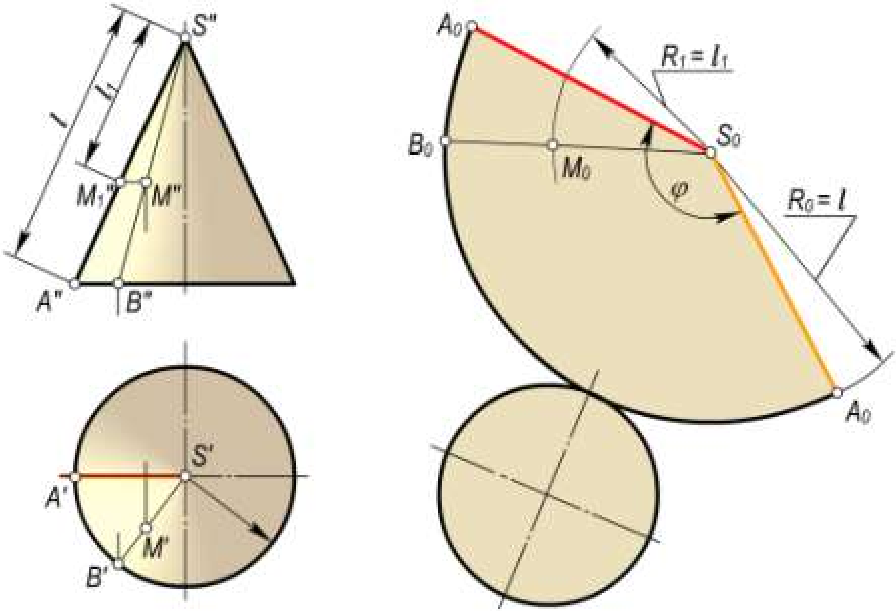


10.9-rasm

S8 yasovchini yoyilmaning boshlanish chizig‘i deb olamiz. Chizma qog‘ozining bo‘sh joyida ixtiyoriy S_0 nuqtani belgilaymiz (10.9,b-rasm). 10.9,a-rasmdan S8 yasovchining haqiqiy uzunligi bo‘lgan $S''8_1''$ kesmani o‘lchab va uni S_0 nuqtadan chiqarilgan ixtiyoriy a_0 to‘g‘ri chiziqqa qo‘yib, 8_0 nuqtani hosil qilamiz. So‘ngra S_0 nuqtani markaz, $S''1_1''$ ni radius qilib yoy chizamiz. Markazi 8_0

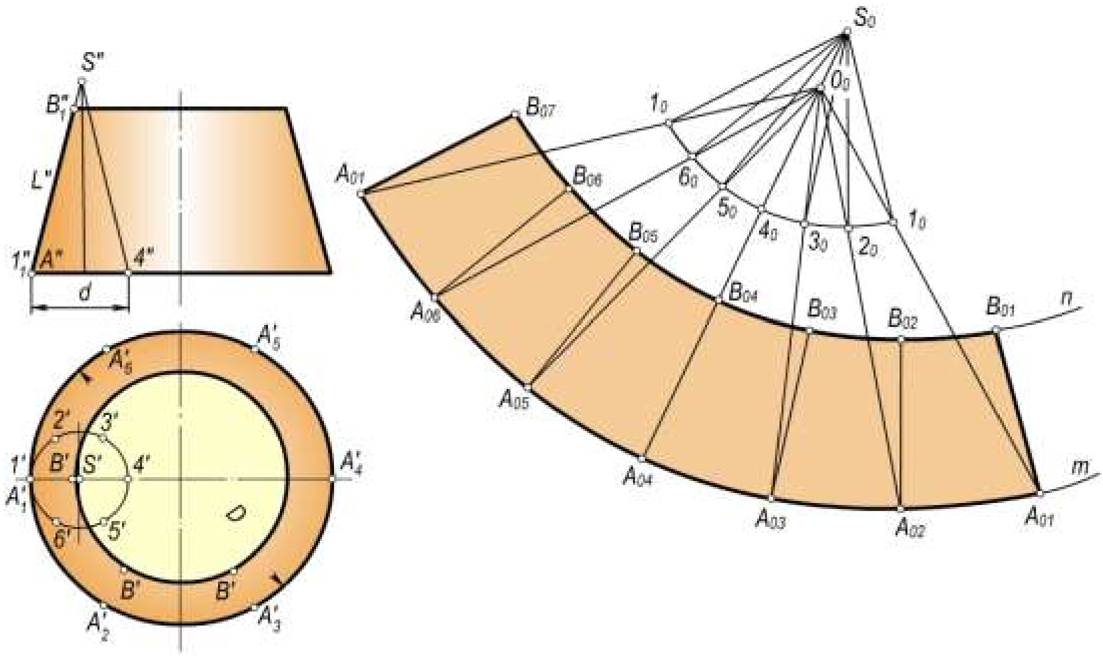
nuqtada va radiusi $8'1'$ bo‘lgan ikkinchi yoy chizamiz. Har ikkala yoylar o‘zaro kesishib 1_0 nuqtani hosil qiladi. Yoyilmaning qolgan 2_0, 3_0, 4_0, ... nuqtalari ham shu tartibda yasaladi. Hosil bo‘lgan Φ_0 figura berilgan konus yon sirtining yoyilmasi bo‘ladi. Uni konusning asosi – ellips bilan to‘ldirib, to‘la yoyilmani hosil qilamiz. $\Phi(\Phi',\Phi'')$ konus sirtidagi *AB* egri chiziqqa Φ_0 figurada A_0B_0 to‘g‘ri chiziq mos kelgan. Shuning uchun *AB* – konusning geodezik chizig‘i bo‘ladi. Shuningdek, konusning hamma yasovchilari uning geodezik chizig‘i bo‘la oladi.

10.10,a,b-rasmda asosi H tekislikka tegishli va o‘qi unga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri doiraviy $\Phi(\Phi',\Phi'')$ konus Monj chizmasida berilgan. Bunday konus yon sirtining yoyilmasi doira sektoridan iborat bo‘ladi.



a) b)

10.10-rasm



10.11-rasm

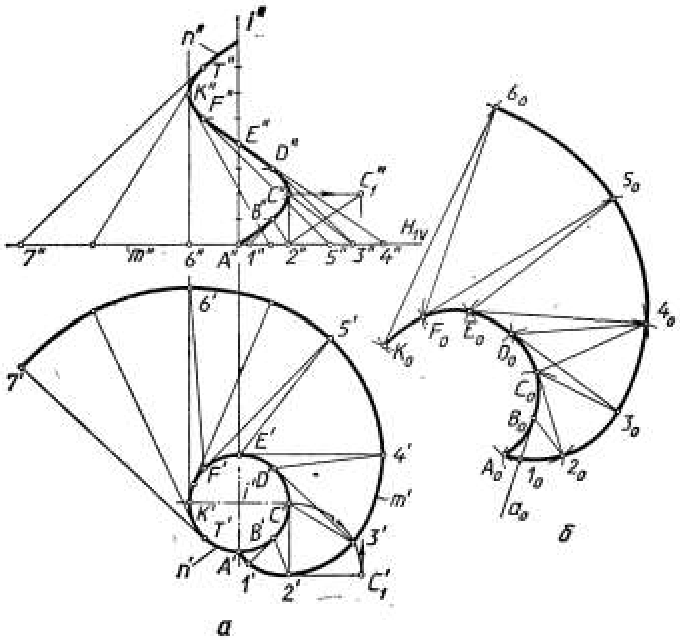
Doiraviy sektorning radiusi konus yasovchisining uzunligi L ga teng, markaziy burchagi $\omega = \frac{r}{l}360°$ bo‘ladi. Bu yerda r – konus asosining radiusi, l – konusning yasovchisi.

10.11,a,b-rasmda uchi chizma maydonidan tashqarida joylashgan kesik konus tasvirlangan. Bunday konusning yoyilmasini yasash uchun shunday yordamchi konus chizish kerakki, unda K $= \frac{d}{D}$ nisbat butun son orqali ifodalansin. Bunda D – berilgan kesik konus katta asosining diametri, d – yordamchi konusning diametri. Rasmda bu nisbat 3 ga teng qilib olingan.

Dastlab yordamchi konusning yoyilmasini yasaymiz (10.11,b-rasm). Keyin $\angle 1_0S_01_0$ ning bissektrisasiga tegishli ixtiyoriy O_0 nuqta orqali O_o1_0, O_02_0 O_03_0,... nurlarni o‘tkazamiz. Bu nurlarga O_0 nuqtadan boshlab O_0A_{01}=K×O_01_0, O_0A_{02}=K×O_02_0, O_0A_{03}=K×O_03_0, . . . kesmalarni o‘lchab qo‘yamiz. Hosil bo‘lgan A_{01},A_{02},A_{03},… nuqtalarni tekis egri chiziq bilan tutashtiramiz. Amalda bunday egri chiziqni markazi O_0 nuqtada radiusi O_0A_{01} bo‘lgan aylana yoyi ko‘rinishida chiziladi. So‘ngra A_{01}, A_{02}, A_{03},… nuqtalar orqali S_01_0, S_02_0, S_03_0,... yasovchilarga mos ravishda parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazib, ularga kesik konusning A″B″ yasovchisiga teng bo‘lgan $A_{01}B_{01}$, $A_{02}B_{02}$, $A_{03}B_{03}$,... kesmalarni o‘lchab qo‘yamiz. Hosil bo‘lgan B_{01}, B_{02}, B_{03},... nuqtalarni tekis egri chiziq bilan tutashtirib, kesik konus yon sirtining yoyilmasini hosil qilamiz.

10.5-§. Qaytish qirrali sirtlarning yoyilmalarini yasash

Qaytish qirrali sirtlarning yoyilmalarini yasash ham konus sirtlarning yoyilmalarini yasashdagidek uchburchaklar usulida bajariladi. 10.12,a-rasmda yoyiladigan gelikoid va 10.12,b-rasmda uning yoyilmasini yasash ko‘rsatilgan. qaytish qirrasi silindrik vint chizig‘ida A, B, C,... nuqtalarni belgilab olamiz.



10.12-rasm.

Ular orqali vint chizig‘iga urinmalar o‘tkazib, sirt yasovchilarini hosil qilamiz. Sirtning o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan H_1 tekislik bilan sirtni kesamiz. Bu holda berilgan sirt n — vint chizig‘i va *m* — evolventa bilan chegaralangan bo‘ladi. Urinmalarning H_1(H_{1V}) tekislik bilan kesishish nuqtalari *1, 2,* 3, ... ni belgilab olamiz. Sirtning qo‘shni yasovchilari orasidagi bo‘laklarining, ya’ni egri chiziqli to‘rtburchaklarning bittadan diagonallarini o‘tkazib, ularni ikkita uchburchakka ajratamiz. Masalan, BC21 bo‘lakning B2 diagonalini o‘tkazib, uni B12 va B2C uchburchaklarga ajratamiz. Agar *A, B, C,* ... nuqtalar orasidagi masofalar qisqa bo‘lsa, uchburchaklarning egri chiziqli tomonlari

Shunday qilib, qaytish qirrali sirt ko‘pyoqlik sirtga approksimasiya qilinadi. Bu holda sirt yoyilmasini yasash ko‘pyoqlik sirtining yoyilmasini yasash kabi bajariladi. Buning uchun uchburchaklarning uchala tomonlarining haqiqiy uzunliklari yasaladi. Shunday tomonlardan biri, masalan, *C2* ning haqiqiy uzunligini yasash 10.12,a-rasmda aylantirish usulida bajarilib ko‘rsatilgan. Uchburchaklar tomonlarining haqiqiy uzunliklari bo‘yicha yoyilmada uchburchaklar ketma-ket yasaladi. 10.12,b-rasmda yoyilma $A_0B_01_0$ uchburchakni yasashdan boshlangan. Bu uchburchak quyidagicha yasaladi: ixtiyoriy a_0 to‘g‘ri chiziq o‘tkazib, unga B1 tomonning haqiqiy uzunligiga teng bo‘lgan B_01_0 kesma o‘lchab qo‘yiladi. Markazlari 1_0 va B_0 nuqtalarda bo‘lgan va radiuslari mos ravishda A1, AB tomonlarning haqiqiy uzunliklariga teng bo‘lgan ikki aylana yoylari chiziladi. Bu yoylarning o‘zaro kesishuvidan A_0 nuqta hosil bo‘ladi.

Qolgan uchburchaklarning haqiqiy kattaliklari ham shu tarzda bir-biriga yondashtirib yasaladi.

10.6-§. Yoyilmaydigan sirtlarning taqribiy yoyilmalarini yasash

Muhandislik amaliyotida ko‘pgina hollarda yoyilmaydigan sirtlar yoki ularning bo‘laklaridan ba’zi konstruksiyalarni yasashga to‘g‘ri keladi. Ammo ularning faqat taqribiy yoyilmalarini yasash mumkin. Taqribiy yoyilmalarni yasashning umumiy usuli shundan iboratki, berilgan sirt yoyiladigan sirtlardan biriga (ko‘pyoqlik, silindrik yoki konussimon) approksimasiya qilinadi.

Sirtlarning yoyilmalarini taqribiy yasashning uch usuli:

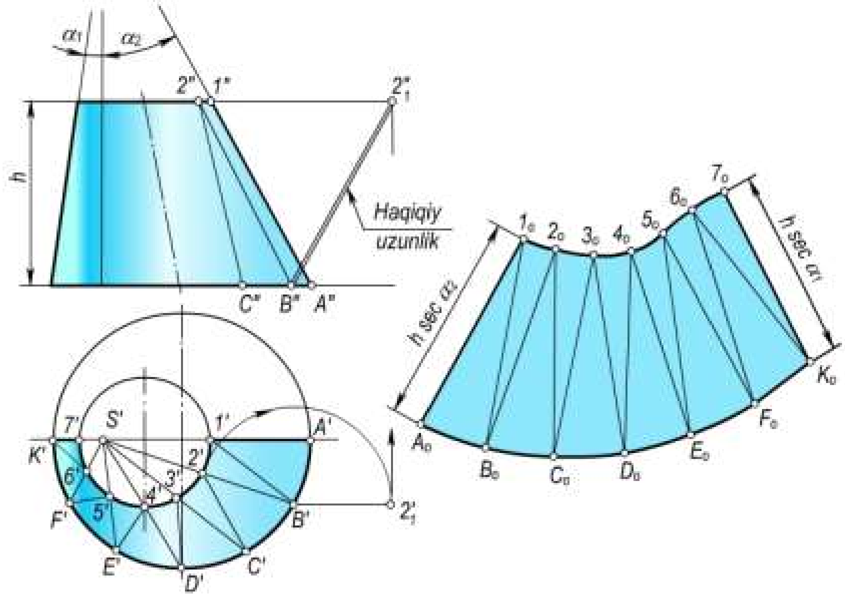
- Yordamchi uchburchaklar usuli.
- Yordamchi silindrik sirtlar usuli.
- Yordamchi konus sirtlar usuli mavjud.

Yordamchi uchburchaklar usuli. Bu usulning mohiyati qo‘yidagidan iborat. Dastlab yoyilmaydigan sirt uchburchaklarga bo‘lib chiqiladi, yaoni berilgan sirt ko‘pyoqlik sirtga approksimasiya qilinadi. Keyin ko‘pyoqlik sirtning yoyilmasi yasaladi. Buning uchun uchburchak tomonlarining haqiqiy uzunliklari proyeksiyalarda yasaladi. Har bir uchbuchakning yoyilmadagi vaziyati uchala tomonining haqiqiy uzunliklari bo‘yicha yasaladi.

Amalda og‘ma konus sirtlarning yoyilmalari umuman taqribiy usulda yasaladi. 10.13,a-rasmda Monj chizmasida og‘ma konus tasvirlangan. Uning yoyilmasini yasash uchun berilgan konus sirti A1B, B12, B2C,... uchburchaklarga ajratiladi. Bu uchburchaklarning bittadan tomonlari konusning uchidan o‘tadigan qilib olinadi. Uchburchaklar tomonlarining haqiqiy uzunliklari yasaladi. Ulardan biri *B2* ning haqiqiy uzunligi aylantirish usulida yasalgan. YOyilmani hosil qiluvchi uchburchaklarni ularning uchala tomonlarining haqiqiy uzunliklari bo‘yicha yasash qiyin emas. Bunda yoyilmadagi uchburchaklar tomonlarining o‘zaro joylashuv tartibi proyeksiyadagi joylashuv tartibi bilan bir xil bo‘lishi kerak. 10.13,b-rasmda og‘ma konus yon sirti yoyilmasining yarmi ko‘rsatilgan. 10.14,a-rasmda tasvirlangan sirt silindrik trubadan to‘rtburchakli trubaga o‘tish elementi bo‘lib, u ikkita I ko‘rinishdagi, ikkita II ko‘rinishdagi tekis uchburchaklardan hamda to‘rtta III ko‘rinishdagi elliptik konus sirtlardan tashkil topgan. Bunday sirtning yoyilmasini yasash uchun dastlab konus sirtlarni piramida sirtlariga approksimasiya qilamiz (rasmda faqat bitta konus sirtining piramidaga approksimasiya qilinishi ko‘rsatilgan). Buning uchun konusning asosida bir necha *A, B, C,* D, *E* nuqtalarni belgilab olib, ularni konusning uchi bilan tutashtiramiz. Hosil bo‘lgan uchburchaklar tomonlarining haqiqiy uzunliklarini yasaymiz. 10.14,a-rasmda SE tomonning haqiqiy uzunligini yasash ko‘rsatilgan. Bu sirt yoyilmasini yasash uchun tomonlarning haqiqiy uzunliklari bo‘yicha uchburchaklar yasaymiz.

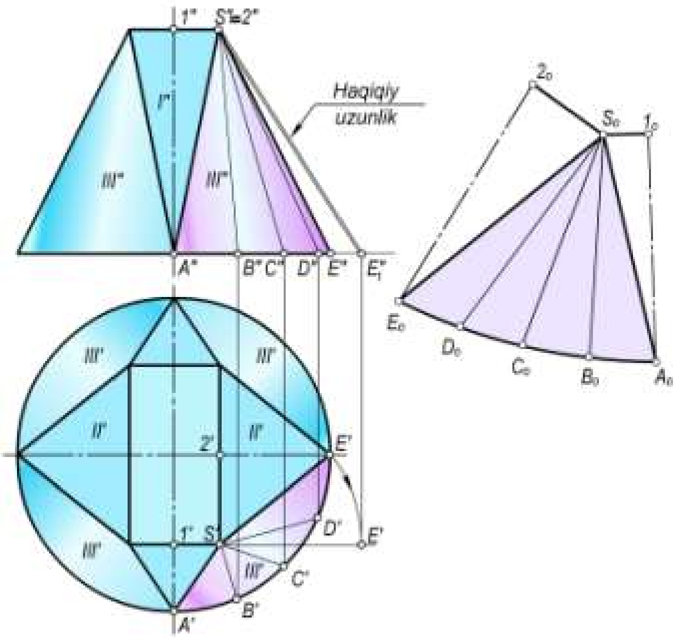
Berilgan sirtning *S2EA1* choragining yoyilmasini yasash 10.14,b-rasmda ko‘rsatilgan. Qolgan choraklarining yoyilmasi ham yuqorida bayon qilinganidek yasaladi.

Yordamchi silindrik sirtlar usuli. Bu usul yoyilmaydigan aylanish sirtlarining taqribiy yoyilmalarini yasashda qulay. Uning mohiyati qo‘yidagidan iborat. Berilgan sirtni meridianlari bo‘yicha bir necha o‘zaro teng bo‘laklarga bo‘lib chiqiladi. Bu bo‘laklar o‘z navbatida silindrik sirtlar bilan almashtiriladn. Bunday silindrik sirtlar berilgan sirtga har bo‘lagining o‘rta meridiani bo‘yicha urinib o‘tishi shart. 10.15,a-rasmda proyeksiyalari bilan berilgan sferik sirt bo‘lagining taqribiy yoyilmasi 10.15,b-rasmda tasvirlangan.



a) b)

10.13-rasm.

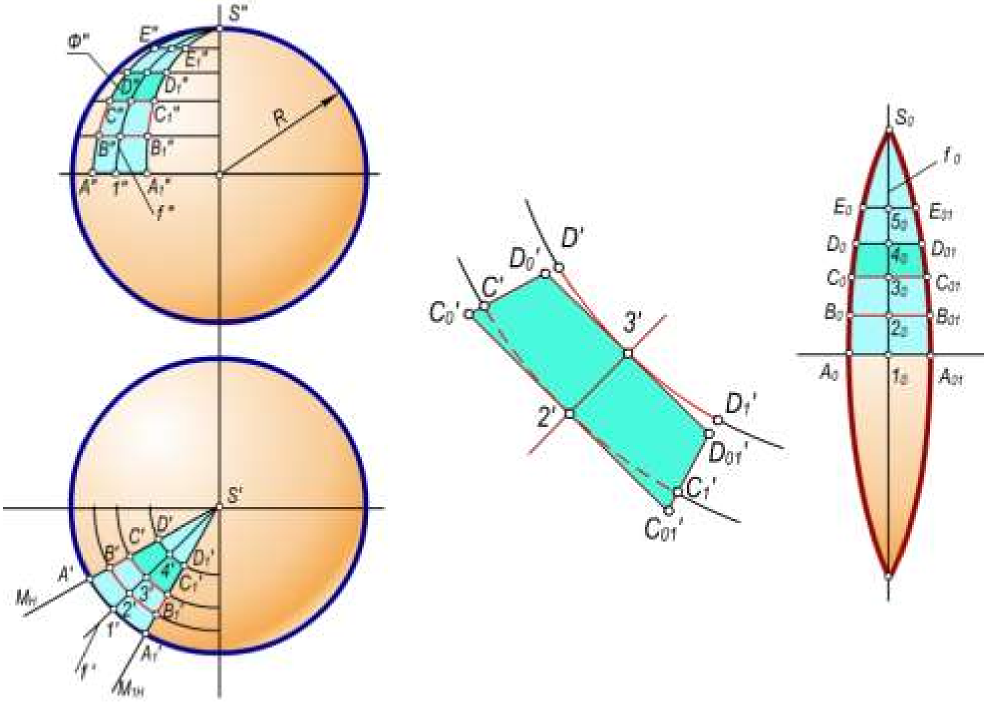


a) b)

10.14-rasm.

Dastavval sferik sirtni meridianlar bo‘yicha kesuvchi V_1, M, M_1 va W_1 tekisliklar bilan teng bo‘laklarga bo‘lamiz. Bunda bo‘laklar soni qancha ko‘p bo‘lsa, sferaning yoyilmasi shuncha aniqroq bo‘ladi. M va M_1 tekisliklar orasidagi sferaning $\Phi(\Phi',\Phi'')$ bo‘lagi yoyilmasini yasashni ko‘rib chiqamiz. Bu bo‘lakni silindrik sirt bilan almashtiramiz. Bunday almashtirish 10.15,v-rasmda kattalashtirib ko‘rsatilgan. M va M_1 meridional tekisliklar orasidagi masofalar silindrik sirt yasovchilarining uzunliklari bo‘ladi. Demak, bu yasovchilar gorizontal vaziyatdagi kesmalar bo‘lib, ularning gorizontal proyeksiyalari haqiqiy uzunliklarida tasvirlanadi. Bunday silindrik sirt Φ bo‘lakning o‘rta meridiani f bo‘yicha urinuvchi bo‘ladi. Φ bo‘lakning yoyilmasini yasash uchun gorizontal vaziyatda ixtiyoriy t_o to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. Unga A_01_0 va 1_0A_{01} kesmalarni o‘lchab qo‘yamiz. Bu kesmaning o‘rtasidan unga perpendikulyar qilib f_o to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Bu to‘g‘ri chiziq o‘rta meridional kesim uzunligining yarmi $\frac{\pi D}{2}$ ni 1_0 nuqtadan boshlab o‘lchab qo‘yib, S_0 nuqtani belgilab olamiz. 1, 2, 3 4, 5 va S nuqtalar orasidagi masofalarning haqiqiy uzunliklarini aniqlab f_0 to‘g‘ri chiziqqa 1_0, 2_0, 3_0, 4_0 va 5_0 nuqtalarni belgilaymiz. Bu nuqtalar orqali gorizontal to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazib, ularga f_0 vertikal to‘g‘ri chiziqdan boshlab har ikkala tomonga $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ va $5'$ nuqtalar orqali o‘tgan yasovchilarning yarmini o‘lchab qo‘yamiz. Hosil bo‘lgan A_0,

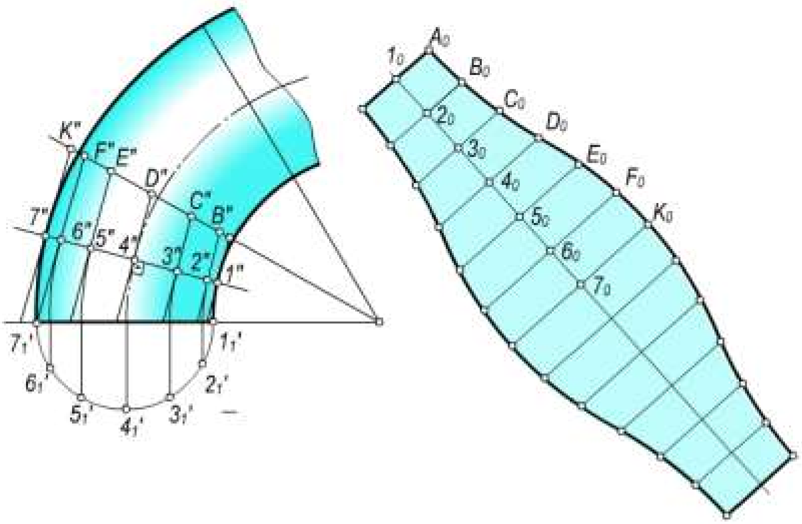
B_0, C_0, D_0, E_0, S_0 va S_{01}, A_{01}, B_{01}, C_{01}, D_{01}, E_{01} nuqtalarni tekis egri chiziq bilan tutashtiramiz. $A_0S_0A_{01}$ figura Φ bo‘lak yoyilmasining yarmi hisoblanadi. Ikkinchi yarmining yoyilmasi ham xuddi shu tarzda yasaladi. Sfera sirtining to‘la yoyilmasini hosil qilish uchun shunday yoyilmadan yana n–1 tasini yasash kerak bo‘ladi. Bunda p – sferik sirt bo‘laklarining soni. Yuqorida ko‘rilgan hol uchun n = 12.



a) b)

v)

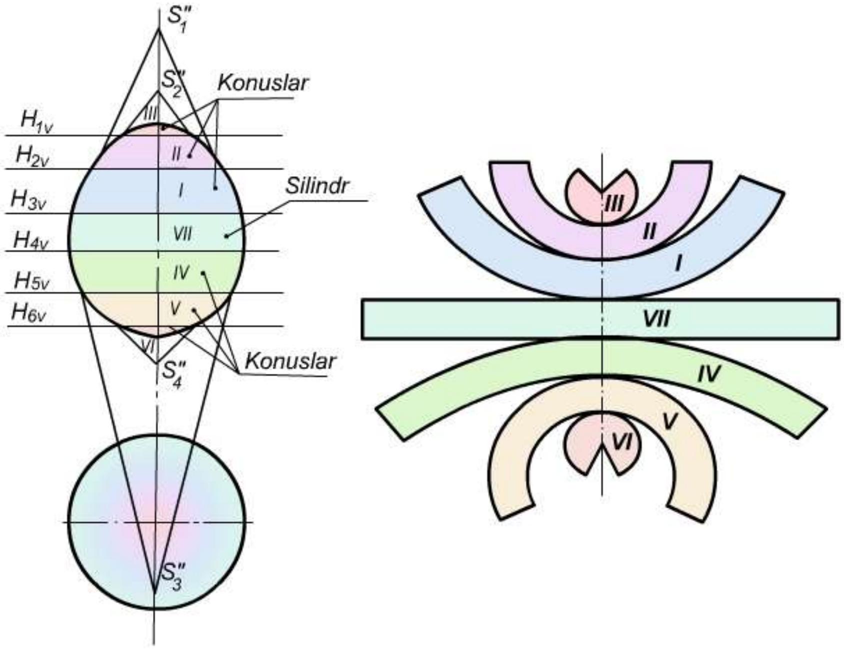
10.15-rasm.



10.16-rasm

10.16,a-rasmda tasvirlangan tor halqaning taqribiy yoyilmasini yasash uchun uni 12 teng bo‘lakka bo‘lib, bir bo‘lagining yoyilmasini yasaylik (10.16,b-rasm). Torning bu bo‘lagini tashqi chizilgan yordamchi silindrik sirt bilan almashtiramiz. Bunday silindrik sirt halqa bo‘lagining o‘rta meridiani yoki normal kesimi bo‘yicha urinadi. YOyilmani yasash uchun gorizontal vaziyatda a_0 to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz (10.16,b-rasm) va unga normal kesimning uzunligini o‘lchab qo‘yamiz. Keyin bu to‘g‘ri chiziqda 1_0, 2_0, 3_0,... nuqtalarni belgilab, ular orqali a_0 to‘g‘ri chiziqda perpendikulyar qilib yordamchi silindrning yasovchilarini o‘tkazamiz. Bularga yasovchilarning uzunliklarini o‘lchab qo‘yamiz. Hosil bo‘lgan A_0, B_0, C_0,... nuqtalarni tekis egri chiziq bilan tutashtirib yoyilmani hosil qilamiz. Bu esa halqa 1/12 qismining yoyilmasi bo‘ladi.

Yordamchi konussimon sirtlar usuli. Bu usul bilan konturi egri chiziqli aylanish sirtlarining taqribiy yoyilmasi yasaladi. Berilgan sirt aylanish o‘qiga perpendikulyar tekisliklar bilan kesiladi. Sirtning har bir bo‘lagi konussimon yoki silindrik sirtlarga approksimasiya qilinadi va bu sirtlarning yoyilmalari yasaladi. 10.17,a-rasmda Monj chizmasida berilgan aylanish sirtlari aylanish o‘qiga perpendikulyar tekisliklar bilan bir necha bo‘laklarga bo‘linadi. Bu bo‘laklar konussimon (I, II, III, IV, V , VI) va silindrik (VII) sirtlarga approksimasiya qilinadi.



a) b)

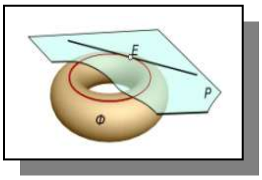
10.17-rasm

10.17,b-rasmda konussimon va silindrik sirtlarga approksimasiya qilingan sirt bo‘laklarining yoyilmalari ko‘rsatilgan. Bu yoyilmalar to‘g‘ri doiraviy silindr va konus snrtlarining yoyilmalarini yasashga asoslanib bajarilgan.

10.17,b-rasmda hosil qilingan yoyilma bo‘yicha berilgan sirtning aynan o‘zini yasab bo‘lmaydi. Bunda yoyilmadagi I, II, III, IV, V va VI, VII bo‘laklar orasida ochiq joylar mavjud bo‘lib, ular berilgan sirtning aynan o‘zini yasash imkoniyatini bermaydi. Shuning uchun ham bunday yoyilmalar taqribiy yoyilmalar deyiladi.

Nazorat savolari

1. Sirtning yoyilmasi deb nimaga aytiladi?
2. Yoyiladigan sirtlar deb nimaga aytiladi?
3. Qanday ko‘pyoqliklarning yoyilmalari uchburchaklar usuli bilan yasaladi?
4. Normal kesim usuli bilan qanday sirtlarning yoyilmalari yasaladi?
5. To‘g‘ri doiraviy silindrning yoyilmasi nimadan iborat?
6. Og‘ma silindrining yoyilmalari qanday usulda yasaladi va yasash algoritmi nimalardan iborat?
7. To‘g‘ri doiraviy konusning yoyilmasi nimadan iborat?
8. Og‘ma konusning yoyilmasi qanday yasaladi?
9. Yoyilmaydigan sirtlarning yoyilmalari qanday yasaladi?
10. Taqribiy yoyilmalarni yasashning treangulyasiya usuli nimadan iborat?
11. Elliptik konusning yoyilmasi qanday yasaladi?
12. Sferaning taqribiy yoyilmasi qanday yasaladi?



XI bob. SIRTGA URINMA TEKISLIKLAR

11.1-§. Umumiy ma'lumotlar

Sirtning biror nuqtasi orqali shu sirtga cheksiz ko‘p urinma to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazish mumkin. Bu urinma to‘g‘ri chiziqlar to‘plami shu nuqtadagi sirtning urinma tekisligini tashkil qiladi (11.1-rasm).

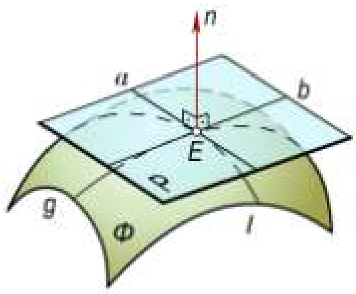
Sirtga urinma tekislikning urinish nuqtasidan o‘tib, bu tekislikka perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq sirtning shu nuqtadagi *normali* deyiladi (11.1-rasm).

Berilgan sirtlarni shakliga qarab, urinma tekisliklar sirtning nuqtasiga (11.1-rasm), yoki to‘g‘ri chizig‘iga (11.2-rasm), yoki aylanasiga (11.3-rasm) yoki boshqa geometrik shakllariga urinadi.

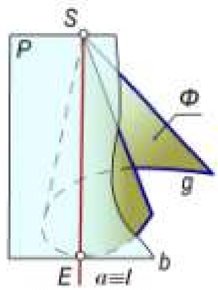
Berilgan sirtga yagona yoki chekli sondagi urinma tekislik quyidagi hollarda o‘tkazilishi mumkin:

- sirt ustidagi nuqta orqali;
- sirt tashqarisidagi nuqta orqali;
- berilgan to‘g‘ri chiziq orqali;
- berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel;
- berilgan tekislikka parallel;
- berilgan ikki sirtga urinma va hokazo.

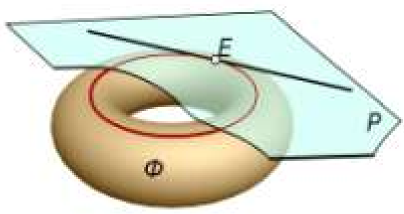
Bu shartlar tekislikning berilish usullari bilan uzviy bog‘liq bo‘lib, sirtlarning turiga qarab tanlanadi. Masalan, ikkinchi holda, S nuqtadan shar sirti uchun cheksiz urinma tekisliklarni o‘tkazish imkonini beradi (11.4-rasm). Shar sirti uchun chekli urinma tekislik hosil qilish masalasi faqat 1-, 3-, 5- hollar qo‘yilganda hal bo‘ladi (11.5-rasm). Boshqa sirtlar uchun ham xuddi shunday mulohaza yuritish mumkin.



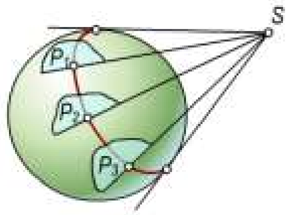
11.1-rasm



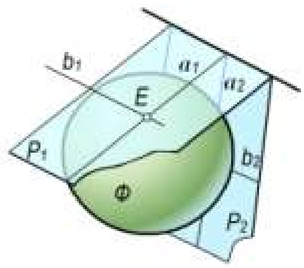
11.2-rasm



11.3-rasm



11.4-rasm



11.5-rasm

11.2-§. Urinma tekislikning chizmada berilishi

Urinma tekislik, chizmada tekisliklarni berilish usullari singari, bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uch nuqta; to‘g‘ri chiziq va unda yotmagan nuqta; ikki kesishuvchi to‘g‘ri chiziq; parallel to‘g‘ri chiziqlar va boshqa tekis shakllarining proyeksiyalari orqali berilishi mumkin. Tekislikning berilishida qatnashuvchi nuqtalar va to‘g‘ri chiziqlar urinish nuqtalari yoki urinish chiziqlarini ifodalashi mumkin. Masalan, konus sirtiga uringan tekislik kesishuvchi ikki to‘g‘ri chiziq ko‘rinishida berilishi mumkin va bu chiziqlarning biri urinish chizig‘i bo‘lib xizmat qiladi (11.2-rasm).

Urinma tekislik, sirtga qanday urinishidan qat’iy nazar, urinish chiziqlariga tegishli nuqtalar elliptik, parabolik, giperbolik nuqtalarga bo‘linadi.

Sirtning elliptik nuqtasi

Ta’rif: Agar urinma tekislik sirt bilan bitta umumiy nuqtaga ega bo‘lsa va shu nuqta orqali o‘tuvchi sirtning barcha kesim chiziqlari urinma tekislikning bir tomonda qolsa, sirtning bunday urinish nuqtasi *elliptik nuqta* deyiladi (11.1-rasm).

Bunga ellipsoid, paraboloid, shar sirtlarining nuqtalari misol bo‘la oladi.

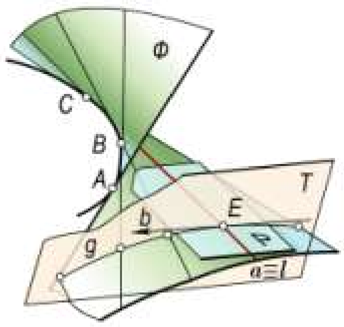
Sirtning parabolik nuqtasi

Ta’rif: Agar urinma tekislik sirt bilan to‘g‘ri chiziq hosil qilib urinsa, bu urinish chizig‘ining nuqtalari *parabolik nuqtalar* deyiladi (11.2-rasm).

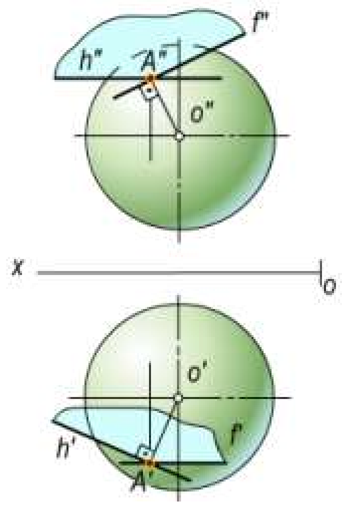
Bunga konus, silindr kabi sirtlar misol bo‘ladi.

Sirtning giperbolik nuqtasi

Ta’rif: Agar urinma tekislik sirtga urinib, uni kessa, hosil bo‘lgan kesishish chizig‘iga oid sirtining nuqtasi *giperbolik nuqta* deyiladi (11.6-rasm).



11.6-rasm.



11.7-rasm.

Bunday sirtlarga bir pallali giperboloid, giperbolik paraboloid kabi sirtlarning nuqtalari misol bo‘la oladi.

Urinma tekisliklar amaliy va nazariy jihatdan katta ahamiyatga ega. Nazariy jihatdan, urinma tekisliklardan differensial geometriyada sirtlarning urinish nuqtasi atrofidagi xossalarini o‘rganishda keng foydalaniladi. Urinish nuqtasidagi normalning yo‘nalishini aniqlashdan esa muxandislik amaliyotida keng foydalaniladi. Bundan tashqari, urinma tekisliklardan arxitektura va rassomchilik amaliyotida sirtlarning o‘z soyasi yoki tushgan soyasining chegaralarini aniqlashda, chizma geometriyada sirtlarning ocherklarini yasashda keng qo‘llaniladi.

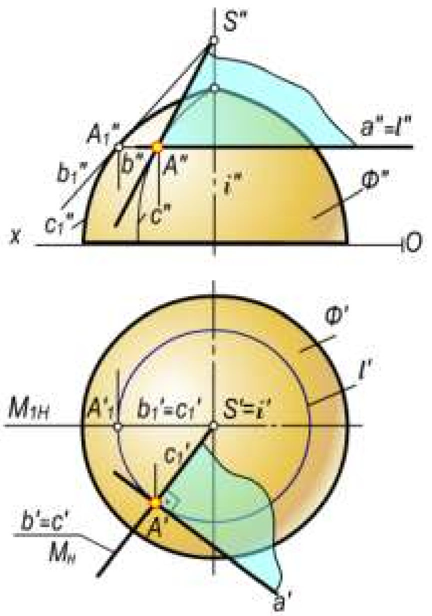
11.3-§. Sirtning ixtiyoriy nuqtasi orqali urinma tekislik o‘tkazish

Sirtdagi ixtiyoriy nuqtadan yagona urinma tekislik o‘tadi. Bu tekislik sirtning urinish nuqtasiga o‘tkazilgan bir juft kesishuvchi urinma to‘g‘ri chiziqlarning proyeksiyalari orqali tasvirlanadi. Sirtning ixtiyoriy nuqtasiga urinma tekislik o‘tkazishga doir bir necha misollarini ko‘rib chiqamiz.

1-masala. Sferaning A(A′, A″) nuqtasi orqali urinma tekislik o‘tkazilsin (11.7-rasm).

Echish. Izlagan urinma tekislik urinish nuqtasi A(A′,A″) orqali o‘tkazilgan OA(O′A′,O″A″) radiusga perpendikulyar bo‘ladi. Shunga ko‘ra, to‘g‘ri chiziq va tekislikning o‘zaro perpendikulyarlik shartiga asosan, A nuqtadan sferaning OA radiusiga perpendikulyar qilib, ikkita urinma to‘g‘ri chiziq, ya’ni gorizontal h(h′,h″) va frontal f(f′,f″) chiziqlar o‘tkaziladi. Bu chiziqlar birgalikda izlangan urinma tekislikni ifodalaydi;

2-masala. Φ(Φ′,Φ″) aylanish sirtining ixtiyoriy A(A′, A″) elliptik nuqtasi orqali unga urinma tekislik o‘tkazilsin (11.8-rasm).



11.8-расм.

Echish. Izlangan urinma tekislikni sirtning A nuqtasi orqali o‘tgan paralleli va meridianiga urinma bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar orqali ifodalash qulaydir. Urinma tekislikni ifodalovchi chiziqlarni yasash algoritmi quyidagicha bo‘ladi:

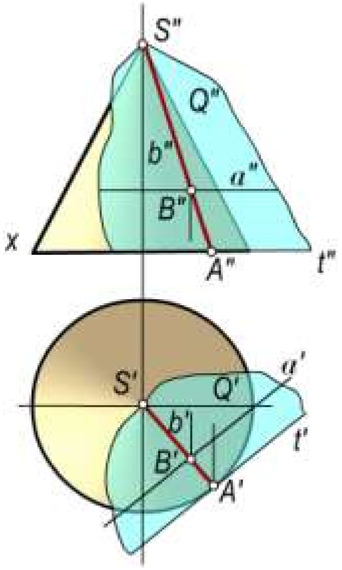
- A(A′,A″) nuqtadan sirtning $N(N_V)$ tekislikdagi ℓ (ℓ′, ℓ″) paralleli va $M(M_H)$ tekislikdagi *c*(*c*′,*c*″) meridiani o‘tkaziladi;
- ℓ(ℓ′,ℓ″) parallelning A(A′,A″) nuqtasidan *a*(*a*′,*a*″) urinma o‘tkaziladi; Bu urinma, tekislikning gorizontali bo‘ladi.
- *c*(*c*′,*c*″) meridian chizig‘iga o‘tkazilgan urinmaning gorizontal proyeksiyasi *b*′ ni *a*′ ga perpendikulyar qilib o‘tkaziladi.
- *b* urinma chiziqning frontal proyeksiyasi *b*″ ni yasash uchun aylanish o‘qi *i*(*i*′, *i*″) va A(A′, A″) urinish nuqtasidan iborat *M* meridian tekisligini V proyeksiyalar tekisligiga parallel bo‘lgunga qadar *i* atrofida burib, A nuqtaning, yangi $A_1(A'_1,A''_1)$ vaziyati aniqlanadi;
- A urinish nuqtasining yangi A''_1 frontal proyeksiyasidan sirtning frontal proyeksiyasi chegara chizig‘i c''_1 ga urinma o‘tkazib, *i*′ o‘qi bilan kesishgan joyda S″ nuqta aniqlanadi;
- S″ va A″ nuqtalarni birlashtirib, *b*″ ni hosil qilinadi. Natijada hosil bo‘lgan kesishuvchi *a*(*a*′, *a*″) va *b*(*b*′, *b*″) urinma chiziqlar izlangan urinma tekislikni ifodalaydi.

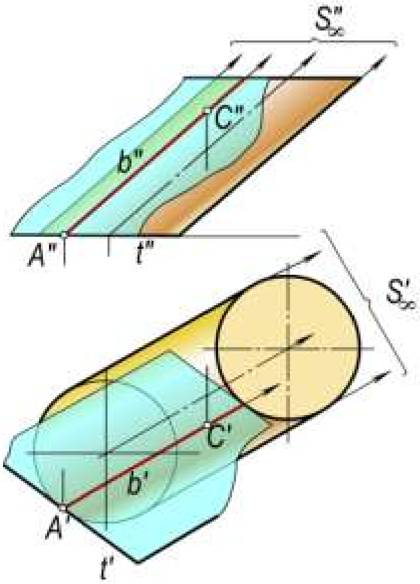
3 masala. Konus sirtining ixtiyoriy B(B′,B″) parabolik nuqtasi orqali urinma tekislik o‘tkazilsin (11.9-rasm).

Echish. Izlangan tekislik konus sirti bilan, to‘g‘ri chiziq bo‘ylab urinadi. Uni yasash algoritmi quyidagicha:

- Konus uchi S(S′, S″) bilan berilgan B(B′, B″) nuqtani o‘zaro birlashtirib, urinish chizig‘ining *b*′ va *b*″ proyeksiyalari aniqlanadi;

- $b(b',b'')$ chiziqning konus asosi bilan kesishgan $A(A', A'')$ nuqtasidan konus asosiga urinma to‘g‘ri chiziq $t(t', t'')$ o‘tkaziladi; Bunda $t' \perp b'$ bo‘ladi.
- Hosil bo‘lgan kesishuvchi $b(b', b'')$ va $t(t', t'')$ to‘g‘ri chiziqar izlangan urinma tekislikni ifodalaydi. Konus uchi orqali cheksiz ko‘p urinma tekisliklar o‘tadi, chunki S dan o‘tuvchi cheksiz yasovchi-urinish chiziqlari mavjuddir.





11.9-rasm. **11.10-rasm.**

Silindr sirtiga urinma tekislik o‘tkazish, 3-misoldagidek bo‘lib, faqat urinish chizig‘ini silindr yasovchilariga parallel qilib o‘tkazish yetarlidir. (11.10-rasm)

11.4-§. Sirt tashqarisidagi nuqta orqali urinma o‘tkazish

Sirt tashqarisidagi nuqtadan faqat chiziqli sirtlargagina chekli sondagi urinma tekislik o‘tkazish mumkin. Quyida ixtiyoriy nuqtadan konus sirtlariga urinuvchi tekisliklar yasashni ko‘rib chiqamiz.

1-masala. Konus sirtida yotmagan E nuqta orqali konus sirtiga urinma tekislik yasalsin (11.11-shakl).

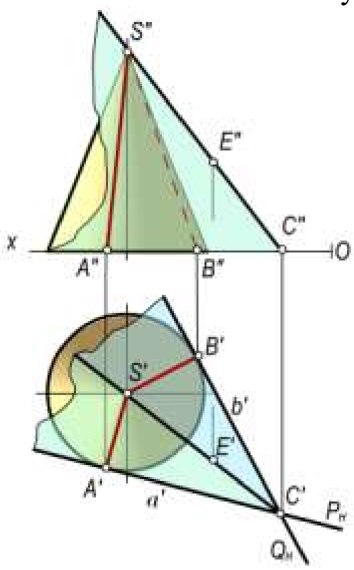
Yechish. Urinma tekislikning vaziyatni berilgan nuqta va urinish chizig‘i aniqlaydi. Buning uchun konus uchi $S(S',S'')$ bilan $E(E',E'')$ nuqta tutashtirilsa, bu to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi va konus sirtiga urinuvchi tekisliklar dastasi hosil bo‘ladi. Bu tekisliklar SE qirrada o‘zaro kesishib, ikki yoqli burchak hosil qiladi. Urinma tekisliklarni yasash algoritmi quyidagicha.

- S′ va E′, S″ va E″ nuqtalarni o‘zaro birlashtirib uning gorizontal izi C(C′, C″) yasaladi;
- SE qirraning gorizontal izi C′ dan konus asosiga A′ va B′ nuqtalarda urinuvchi P va Q tekisliklarning P_H va Q_H izlari o‘tkaziladi;
- S′ uch bilan A′ va B′ nuqtalar birlashtirilib, konus yasovchilari bo‘lgan SA va SB urinish chiziqlarining gorizontal S′A′ va S′B′ proyeksiyalari aniqlanadi;
- SA va SB urinish chiziqlarining frontal S″A″ va S″B″ proyeksiyalari yasaladi. Natijada P va Q urinma tekisliklarning proyeksiyalari ΔS′A′C′ va ΔS″A″C″, ΔS′B′C′ va ΔS″B″C″hosil bo‘ladi. Bu tekisliklar masalaning ikkita yechimga ega ekanligini tasdiqlaydi.

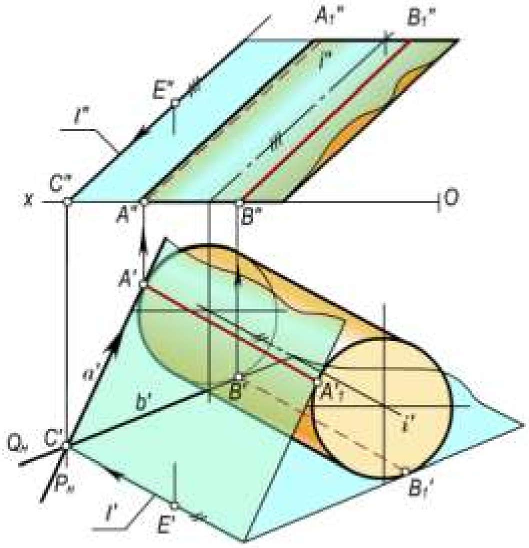
2-masala. Silindr sirtidan tashqarida yotgan E nuqta orqali unga urinib o‘tuvchi tekislik yasalsin (11.12-rasm).

Yechish. Algoritmi quyidagicha:

- E(E′,E″) nuqtadan silindr yasovchisiga parallel ℓ (ℓ′, ℓ″) to‘g‘ri chiziq o‘tkaziladi va uning gorizontal izi C(C′,C″) yasaladi;
- ℓ to‘g‘ri chiziqning gorizontal izi C′ orqali silindrning H tekislikdagi asosiga urinib o‘tuvchi P va Q tekisliklarning $P_H(a)$ va $Q_H(b)$ izlarini o‘tkazib, A(A′,A″) va B(B′,B″) urinish nuqtalarini aniqlaymiz.
- Bu nuqtalardan esa P va Q tekisliklarning sirtga urinish chiziqlari $AA_1(A'A_1', A''A_1'')$ va $BB_1(B'B_1', B''B_1'')$ lar o‘tadi.
- Natijada, kesishuvchi $\ell \cap a$ va $\ell \cap b$ to‘g‘ri chiziqlar P va Q urinma tekisliklarini ifodalaydi. Bu masala ham ikkita yechimga ega bo‘ladi.



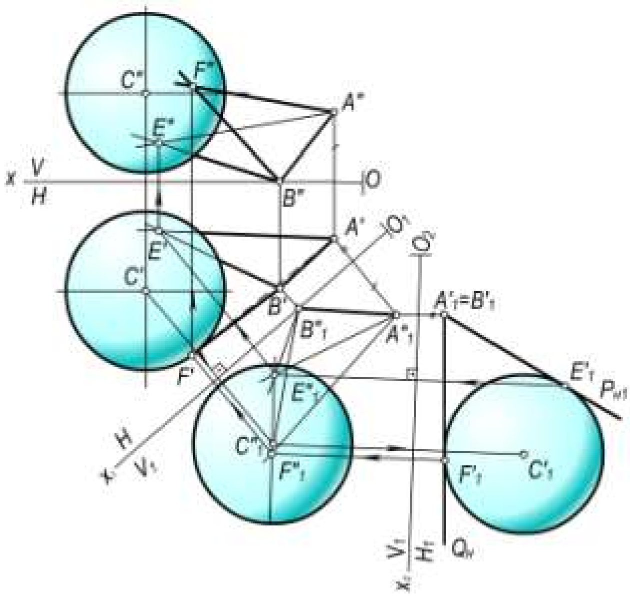
11.11-rasm



11-12-rasm

11.5-§. Berilgan to‘g‘ri chiziq orqali urinma tekislik o‘tkazish

Berilgan to‘g‘ri chiziq orqali sirtga urinma tekislik o‘tkazish masalasi tekislikning nuqta, shu nuqtadan o‘tmagan to‘g‘ri chiziq orqali berilish usuli bilan bog‘liqdir, ya’ni tekislik sirtga bitta nuqtasi bilan urinishi mumkin.



11.13-rasm.

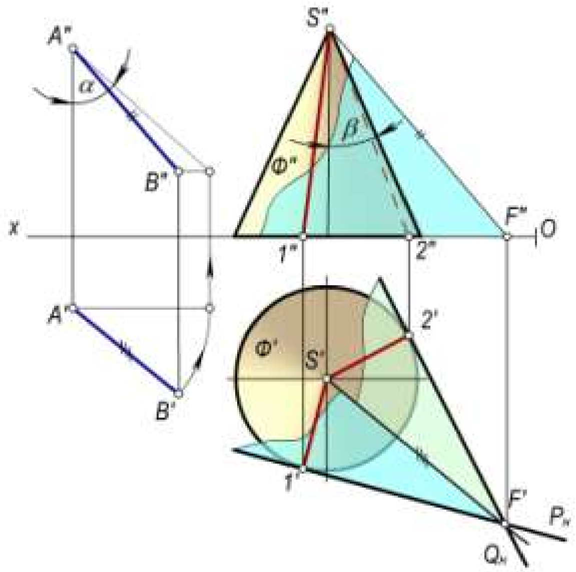
Shar tashqarisida olingan AB to‘g‘ri chiziq orqali shar sirtiga urinma tekislik o‘tkazish 11.13-rasmda tasvirlangan.

Ma’lumki, berilgan AB to‘g‘ri chiziq orqali sharga ikkita: P va Q urinma tekisliklar o‘kazish mumkin. Yasash algoritmi qo‘yidagicha:

- Berilgan AB to‘g‘ri chiziqni proyeksiyalar tekisliklarini ikki martta almashtirish usuli yordamida uni proyeksiyalovchi $A_1'\equiv B_1'$ vaziyatga nuqta ko‘rinishida keltiriladi.
- Yangi tekisliklar sistemasidagi sharning proyeksiyasi konturiga urinma qilib P_{H1} va Q_{H1} urinma tekislik izlarini o‘tkaziladi va E_1', F_1' urinish nuqtalari aniqlanadi;
- So‘ngra E_1' va F_1' nuqtalarni teskari proyeksiyalash yo‘li bilan dastlab ularning E_1'', F_1'', so‘ngra E', F' va E'', F'' proyeksiyalari aniqlanadi. Bu nuqtalarni tegishli A va B nuqtalar bilan tutashtirish natijasida izlangan P(AB,E), Q(AB,F) urinma tekisliklarning ($A'B'$,E'), ($A''B''$,E'') va ($A'B'$,F'), ($A''B''$,F'') proyeksiyalari hosil bo‘ladi.
- Agar AB to‘g‘ri chiziq shar sirti bilan kesishsa, u holda masala yechimga ega bo‘lmaydi.

11.6-§. Berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan urinma tekislik o‘tkazish

Berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel qilib sirtga urinma tekislik o‘tkazish masalasi faqat chiziqli sirtlar uchun o‘rinli bo‘lib, urinma tekislikni kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar ko‘rinishida tasvirlanadi. Masalan, konusga urinma tekislik o‘tkazganda berilgan to‘g‘ri chiziqning konus o‘qi bilan hosil qilgan α burchagi, konus yasovchisi bilan o‘qi orasidagi β burchagiga teng yoki undan katta bo‘lishi lozim. Aks holda urinma tekislik yasab bo‘lmaydi $\alpha\geq\beta$ shartni qanoatlantiruvchi AB to‘g‘ri chiziqqa parallel hamda berilgan Φ konus sirtiga urinuvchi tekislik yasashni ko‘rib chiqamiz (11.14-rasm). Buning uchun konus uchi S(S',S'')dan berilgan AB($A'B'$, $A''B''$)to‘g‘ri chiziqqa parallel SF($S'F'$,$S''F''$) to‘g‘ri chiziq o‘tkazib, uning gorizontal izi F(F',F'')ni yasaymiz. Qolgan yasashlar xuddi 11.4-§ dagi 1-masala kabi bajariladi. To‘g‘ri chiziq bilan tekislikning parallellik shartiga asosan yasalgan P(SF1) va Q(SF2) urinma tekisliklar berilgan AB to‘g‘ri chiziqqa paralleldir, chunki SF to‘g‘ri chiziq ikkala urinma tekislik uchun umumiy bo‘lib, AB to‘g‘ri chiziqqa paralleldir.



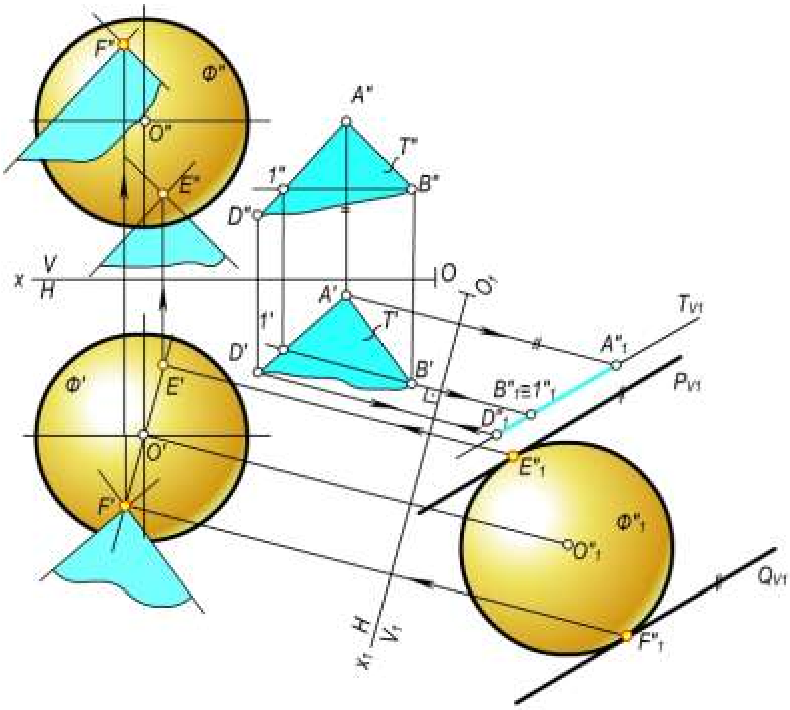
11.14-rasm.

11.7-§. Berilgan tekislikka parallel bo‘lgan urinma tekislik o‘tkazish

Berilgan tekislikka parallel va sirtga urinuvchi tekislik o‘tkazish masalalari asosan egri chiziqli sirtlarga bogliqligi.

Berilgan T(AD∩AB) tekislikka parallel qilib va Φ shar sirtiga urinma tekislik o‘tkazish 11.15-rasmda keltirilgan. Izlangan urinma tekislik ikkita bo‘lib, ularni ikkita kesishuvchi to‘g‘ri chiziq tarzida tasvirlash qulaydir. Urinma tekislikni yasash uchun proyeksiyalar tekisliklarini bir marta almashtirish usuli yordamida berilgan T tekislik proyeksiyalovchi tekislik vaziyatga keltiriladi. Sharning ham yangi almashtirilgan proyeksiyasi yasalib, so‘ngra izlangan urinma tekisliklarning izlarini berilgan tekislikning yangi vaziyatiga parallel qilib, o‘tkazish yetarlidir. Yasash algoritmi quyidagicha:

- Berilgan T tekislikning B1 gorizontalining B′1′ va B″1″ proyeksiyalari yasaladi;
- B′1′ ga perpendikulyar qilib, yangi proyeksiyalar O_1x_1 o‘qi o‘tkaziladi va T tekislikning V_1 dagi yangi frontal proyeksiyasi $A_1″D_1″B_1″$ hamda sharning $O_1″$ marakazli proyeksiyasi hosil qilinadi;
- $A_1″D_1″B_1″$ to‘g‘ri chiziqqa parallel qilib, markazi $O_1″$ nuqtadagi shar proyeksiyasiga izlangan urinma tekisliklarning P_{V1} va Q_{V1} izlari o‘tkaziladi va ularni sharga urinish nuqtalari $E_1″$ va $F_1″$ belgilanadi;
- teskari proyeksiyalash yo‘li bilan, urinish nuqtalarining E′, E″ va F′, F″ proyeksiyalari aniqlanadi;
- E va F nuqtalardan berilgan tekislikning AD va AB tomonlariga parallel qilib to‘g‘ri chiziqlar o‘tkaziladi. Natijada, izlangan urinma parallel tekisliklarning proyeksiyalari hosil qilinadi. Yasashdan ko‘rinib turibdiki, masala ikkita urinma tekislikka ega.



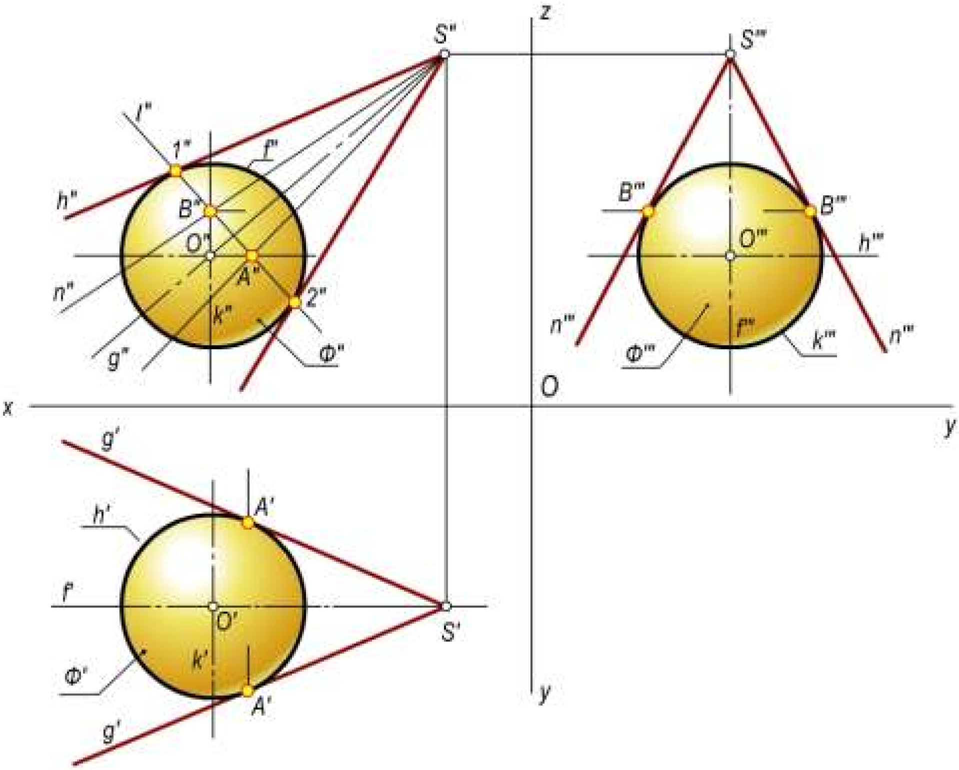
11.15-rasm.

11.8-§. Sirt proyeksiyalarining ocherklarini yasash

Ta'rif. Kuzatuvchiga nisbatan sirtning aniq shaklini belgilovchi tashqi konturiga sirtning ocherki deyiladi.

O'qi frontal vaziyatda bo'lgan S(S′,S″) uchli og'ma doiraviy konusning, frontal proyeksiyasiga asosan uning gorizontal va profil ocherklarini yasash talab qilinadi (11.16-rasm). Doiraviy konusning S uchi orqali o'tuvchi uning o'qi SO(S′O′, S″O″) frontal proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgani uchun konusning frontal tekislikdagi ocherki teng yonli uchburchak bo'ladi.

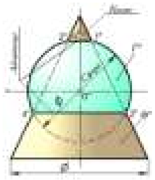
Qolgan ocherk proyeksiyalarini yasash quyidagicha bajariladi: Konusning o'qida ixtiyoriy O′ (O′,O″,O‴) nuqtani markaz qilib olib, konus sirtiga urinma yordamchi Φ(Φ′,Φ″) sfera chiziladi. Ushbu sferaning h(h′,h″) ekvatori, va f(f′,f″,f‴) bosh meridini va k(k′, k″, k‴) profil meridiani bo'lgan aylanalar chiziladi. Φ sfera frontal proyeksiyasida konus sirtiga 1″2″ aylana bo'yicha urinadi. Bu 1″2″ aylana sferaning h(h′,h″) ekvatori bilan kesishib - A(A′,A″), K″ profil meridiani bilan kesishib B″ nuqtalarni hosil qiladi. A nuqtaning gorizontal A′ proyeksiyasi h′ ekvatorida yotadi. B nuqtaning B‴ profil proyeksiyasi K‴ da aniqlanadi. Natijada, gorizontal proyeksiyada A′ nuqta orqali o'tuvchi S′g′ va profil proyeksiyada B‴ nuqta orqali o'tuvchi S‴n‴ chiziqlar konusning chetki yasovchilari proyeksiyalari bo'lib, uning ocherklarini hosil qiladi.



11.16-rasm.

Nazorat savollari

1. Urinma tekislik deb nimaga aytiladi?
2. Qanday chiziq sirtning normali deyiladi?
3. Berilgan sirtga urinma tekislik qanday shartlar asosida o‘tkaziladi?
4. Qanday nuqtalar sirtning elliptik, parabolik va giperbolik nuqtalari deyiladi?
5. Sirt tashqarisidagi nuqtadan unga qanday qilib urinma tekislik o‘tkazish mumkin?
6. Sirt tashqarisidagi to‘g‘ri chiziq orqali unga nechta va qanday qilib urinma tekislik o‘tkazish mumkin?
7. Berilgan tekislikka parallel qilib nechta urinma tekislik o‘tkazish mumkin?
8. Sirtning ocherki deb nimaga aytiladi?
9. Berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel qilib hamma vaqt konus sirtiga urinuvchi tekislik o‘tkazsa bo‘ladimi?



XII bob. SIRTLARNING O‘ZARO KESISHISHI

12.1-§. Umumiy ma’lumotlar

Insoniyat o‘zining amaliy faoliyatida konus, silindr, shar, ko‘pyoqliklar yoki boshqa ko‘rinishdagi sirtlar va ularning o‘zaro kesisishidan turli xil ko‘rinishdagi arkalar, gumbazlar va muhandislik inshootlari qurilishida foydalanib kelgan.

Kesishuvchi sirtlar asosida o‘zaro kesishgan trubalar, keng oraliqli binolarning ustunsiz tomlari, neft va gaz saqlanadigan sisternalar, rezervuarlar, medisina asboblari, mashinasozlik detallari, qurilish inshootlari elementlari va hokazolar tayyorlash. Shu bois muhandislardan sirtlarning o‘zaro kesishish chiziqlarini aniq yasash va ularni sirt yoyilmasida aniq tasvirlay bilish bilimi talab qilinadi. Shu maqsadda ushbu bobda turlicha shakldagi sirtlarning o‘zaro kesishish chiziqlarini yasash usullari bayon qilinadi.

Ta’rif. Ikki sirtning kesishish chizig‘i deb, ular uchun umumiy bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rniga aytiladi.

Kesishuvchi sirtlarning hosil bo‘lishiga qarab ularning kesishish chizig‘i quyidagi ko‘rinishlarda uchraydi:

- Kesishuvchi sirtlar egri chiziqli yoki to‘g‘ri chiziqli sirtlar bo‘lsa, ularning kesishish chizig‘i umumiy holda fazoviy egri chiziq .
- Kesishuvchi sirtlarning biri egri chiziqli ikkinchisi ko‘pyoklik sirt bo‘lsa, u holda ularning kesishish chizig‘i tekis egri chiziqlar.
- Kesishuvchi sirtlarning ikkalasi ham ko‘pyoqlik sirt bo‘lsa, ularning kesishish chizig‘i fazoviy yoki tekis siniq chiziq.

Kesishuvchi sirtlar analitik usulda o‘z tenglamalari bilan berilsa, ularni birga yechib, kesishish chiziqlarining tenglamasi hosil qilinadi.

Kesishish chizig‘ining tartibi umumiy holda kesishuvchi sirtlarning tartibiga qarab belgilanadi. Agar sirtlardan biri ***m*** tartibli, ikkinchisi ***n*** tartibli bo‘lsa, ularning kesishish chizig‘ining tartibi $m \times n$ ga teng bo‘ladi, ya’ni $\Phi_1^m \cap \Phi_2^n = a^{m.n}$.

Kesishuvchi sirtlarning ikkalasi ham 2-tartibli bo‘lsa, ular 4-tartibli egri chiziq bo‘yicha kesishadi, ya’ni $\Phi_1^2 \cap \Phi_2^2 = a^4$.

Kesishuvchi sirtlardan biri 2-tartibli va ikkinchisi ko‘pyoqli sirt bo‘lsa, ular 2-tartibli egri chiziqlar bo‘yicha kesishadilar, ya’ni $\Phi_1^2 \cap \Phi_2^{q.s} = ka^2$. Bunda, k 2-tartibli egri chiziqlarlar soni. Buni ko‘pyoqli sirtning yoqlari soni orqali aniqlanadi.

12.2-§. Sirtlar kesishish chizig‘ini yasashning umumiy algoritmi

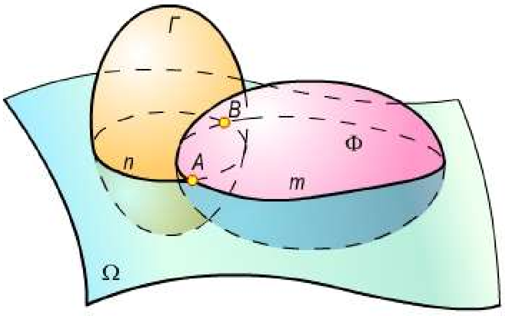
Ikki sirtning kesishish chizig‘i, odatda kesishish chizig‘ining nuqtalarini ketma-ket yasash yo‘li bilan hosil qilinadi. Kesishish chizig‘ining nuqtalari ikkala sirtga ham taaluqli bo‘lib, yordamchi kesuvchi sirtlar yordamida yasaladi. Yordamchi kesuvchi sirtlar sifatida tekislik, sfera, konus va silindr sirtlarini olish mumkin. Yordamchi kesuvchi sirtlar shunday tanlanishi kerakki, u berilgan sirtlar bilan kesishganida kesimda chizilishi oddiy va qulay chiziqlar-to‘g‘ri chiziq yoki aylanalar hosil bo‘lsin.

Yordamchi kesuvchi sirtlar kitobning oldingi boblarida yordamchi kesuvchi tekislik ko‘rinishida ishlatilgan edi. Masalan, to‘g‘ri chiziq bilan tekislikning kesishuv nuqtasini yasashda, tekisliklarning kesishish chizig'ini yasashda, tekislik bilan sirtlarning kesishuvida, to'g'ri chiziq bilan sirtlarning kesishuvida yordamchi kesuvchi tekisliklar o'tkazilgan edi.

Yordamchi kesuvchi sirtlar usulida yasash algoritmi quyidagicha bo'ladi (12.1-rasm):

- Berilgan ikki Γ va Φ sirtlar kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalari yasaladi. Bu nuqtalar o'z navbatida yordamchi kesuvchi sirtlarni o'tkazish chegarasini aniqlaydi.
- Yordamchi kesuvchi Ω sirt o'tkaziladi. Bunda Γ va Ω sirtlar o'zaro kesishib n ($\Gamma\cap\Omega=n$) chiziqni, Φ sirt bilan Ω sirt kesishib m ($\Phi\cap\Omega=m$) chiziqni hosil qiladi.
- n va m chiziqlar kesishib ($n\cap m=A, B,\ldots$) A, B,…nuqtalarni hosil qiladi.

Bu nuqtalar berilgan Φ va Γ sirtlar kesishish chizig'ining nuqtalaridir. Bunday yasash algoritmi yetarli marta takrorlansa, kesishish chizig'ini yasash uchun yetarli nuqtalari hosil qilinadi. Bu nuqtalar ma'lum tartibda lekalo yordamida silliq tutashtirilsa, berilgan ikki sirtning kesishish chizig'i hosil bo'ladi.



12.1-rasm

Agar yordamchi kesuvchi sirt tekislik bo'lsa, xosmas o'qli tekisliklar dastasi hosil bo'ladi. Agar yordamchi kesuvchi sirt sferadan iborat bo'lsa, konsentrik yoki ekssentrik sferalar oilasi hosil bo'ladi. Shunga ko'ra ikki kesishuvchi sirtning kesishish chiziqlarini yasashda yordamchi kesuvchi tekisliklar dastasi, yordamchi kesuvchi konsentrik va ekssentrik sferalar usullari hosil bo'ladi. Bu usullarining qo'llanilishi to'g'risida keyinchalik batafsil to'xtab o'tamiz.

12.3-§. Umumiy o'qqa ega bo'lgan aylanish sirtlarining o'zaro kesishishi

Ta'rif. Umumiy o'qqa ega bo'lgan aylanish sirtlari chekli sondagi aylanalar bo'yicha kesishadi.

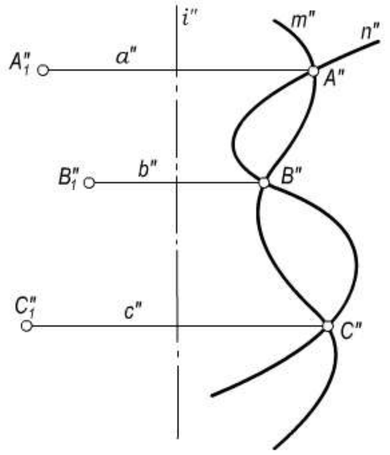
Isboti. Ikkita aylanish sirtning $m(m'')$ va $n(n'')$ meridianlari (yasovchilari) hamda ular uchun umumiy bo'lgan $i(i'')$ o'q berilgan bo'lsin (12.2-rasm). m'' va n'' meridianlarning kesishish nuqtalarini A'', B'', C'',… harflar bilan belgilaymiz. Agar m va n egri chiziqlar i o'q atrofida aylantirilsa, Φ va Γ aylanish sirtlari hosil bo'ladi (shaklda bu sirtlar tasvirlanmagan). Unda m'' va n'' egri chiziqlarning aylanishi natijasida ularga umumiy bo'lgan A'', B'', C'',… nuqtalar a'', b'', c'',… aylanalar chizadi. Bu aylanalar esa ikkala sirt uchun umumiydir. Demak, a'', b'', c'',… aylanalar umumiy o'qli Φ va Γ aylanish sirtlarining kesishish chiziqlari bo'ladi.

12.3-rasmda umumiy o'qqa ega bo'lgan aylanma ellipsoid va bir pallali giperboloidlarning kesishish chiziqlari a'' va b'' aylanalar frontal proyeksiyada ko'rsatilgan. 12.4 va 12.5–rasmlarda sferaning doiraviy silindr va doiraviy konus sirtlari bilan kesishish chiziqlari tasvirlangan. Bu sirtlarning o'qlari proyeksiyalar tekisliklarining biriga perpendikulyar qilib olingan.

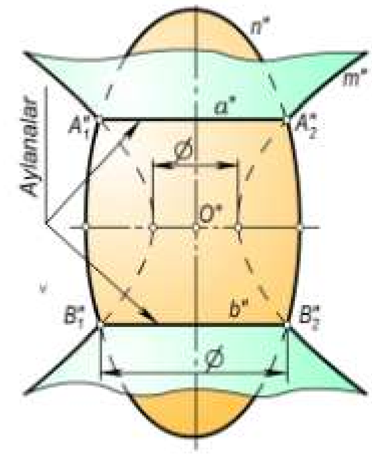
Yuqoridagi teoremadan quyidagi natijani chiqarish mumkin:

Natija: Markazi aylanish sirtining o'qida bo'lgan har qanday $\Gamma(\Gamma'')$ sfera shu aylanish sirti bilan aylanalar bo'ylab kesishadi (12.6-rasm).

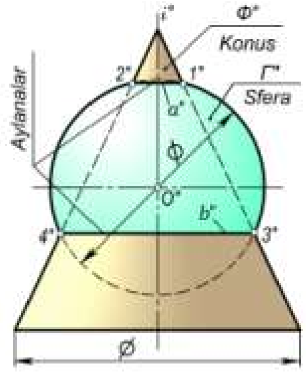
Haqiqatan, $\Phi(\Phi'')$ aylanish sirti $i(i'')$ o'qining ixtiyoriy $O(O'')$ nuqtasini markaz qilib olib, Γ'' sfera chizilgan. Φ va Γ sirtlar a'' va b'' aylanalar bo'yicha kesishgan (tasvirlar faqat frontal proyeksiyada keltirilgan). Yuqorida keltirilgan xulosalar va misollar aylanish sirtlari kesishish chizig‘ini yasashda qo‘llaniladigan konsentrik va ekssentrik sferalar usullarining asosi hisoblanadi.

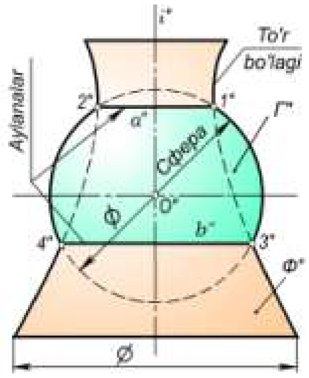


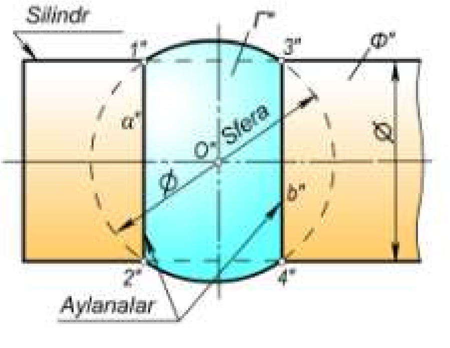
12.2-rasm



12.3-rasm







12.4-rasm 12.5-rasm.

12.6-rasm

12.4-§. O‘qlari umumiy nuqtaga ega bo‘lgan aylanish sirtlarining o‘zaro kesishuvi. Yordamchi sferalar usuli

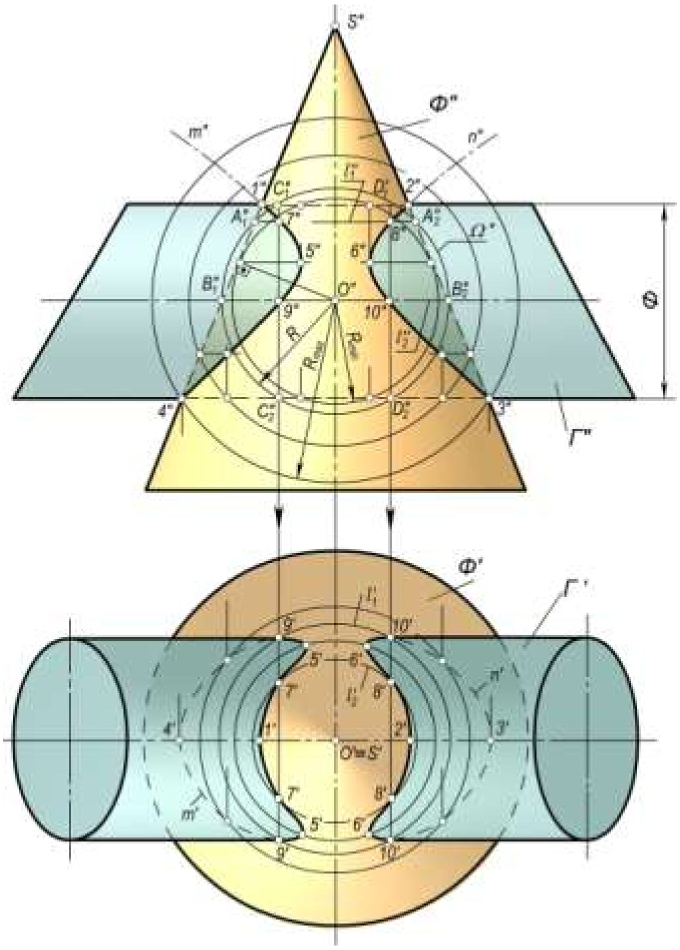
Markazi biror aylanish sirtining o‘qida bo‘lgan sfera bu sirtni chekli sondagi aylanalar bo‘yicha kesadi. Bu aylanalar proyeksiyalar tekisliklarining biriga to‘g‘ri chiziq kesmasi shaklida, ikkinchisiga aylana yoki ellips ko‘rinishida proyeksiyalash. Aylanish sirtlari bilan sferaning o‘zaro kesishish chizig‘i haqidagi bu muhim xulosa ikkita aylanish sirtining o‘zaro kesishish chiziqlarini yasashga imkon beradi.

Yordamchi kesuvchi sferalar to‘plami konsentrik yoki ekssentrik ko‘rinishlarda bo‘ladi. Kesishuvchi sirtlarning xarakteriga qarab, yordamchi kesuvchi sferalarning biror usuli ishlatiladi.

Konsentrik sferalar usuli. Ikki aylanish sirtining o‘qlari umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, bu o‘qlar bitta tekislikni tashkil qiladi. Bu tekislik har ikkala sirt uchun simmetriya tekisligi bo‘ladi.

Yordamchi kesuvchi konsentrik sferalar usulini quyidagi shartlar qanoatlantirgan hollardagina qo‘llash mumkin:

- o‘zaro kesishuvchi sirtlar aylanish sirtlari bo‘lishi shart;
- aylanish sirtlarining o‘qlari o‘zaro kesishgan bo‘lishi kerak;
- aylanish sirtlarining o‘qlari (yoki simmetriya tekisligi) proyeksiyalar tekisliklarining biriga parallel bo‘lishi yoki sirt o‘qlarining biri proyeksiyalar tekisliklarining biriga parallel, ikkinchi o‘q esa ikkinchi proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo‘lishi kerak.



12.7-rasm.

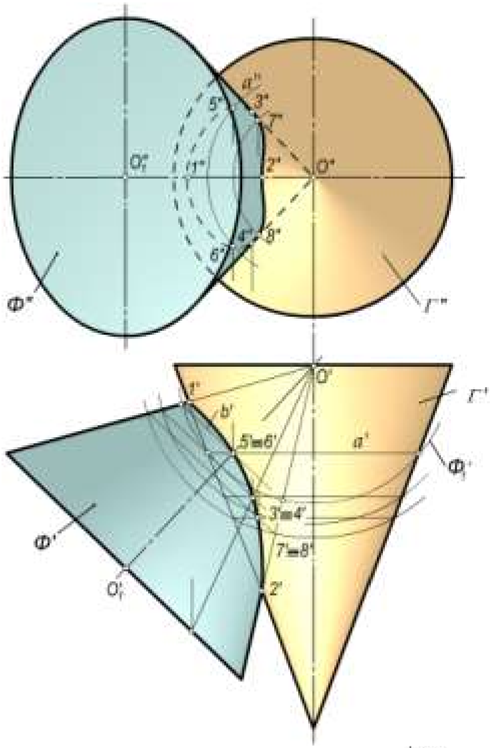
Yordamchi kesuvchi konsentrik sferalarning markazi sirtlarning o‘qlari kesishgan nuqtasida bo‘ladi. 12.7–rasmda o‘qlari umumiy $O(O', O'')$ nuqtada kesishuvchi va simmetriya tekisligi V ga parallel bo‘lgan $\Phi(\Phi', \Phi'')$ aylanma konus va $\Gamma(\Gamma', \Gamma'')$ silindr sirtlari berilgan. Bu sirtlarning kesishish chizig‘ini yasash uchun O'' nuqtani markaz qilib, R radiusli $\Omega(\Omega'')$ sfera chiziladi. Ω sfera Φ sirt bilan umumiy o‘qqa ega bo‘lgani uchun ular $l_1(l_1', l_1'')$ va $l_2(l_2', l_2'')$ aylanalar bo‘yicha kesishadi. Shaklda bu aylanalarning V tekislikdagi proyeksiyalari $A_1'' A_2''$ va $B_1'' B_2''$ kesmalar tarzida tasvirlangan. Shuningdek, bu sfera Γ sirt bilan umumiy o‘qqa ega bo‘lgani uchun $C_1' C_2''$ va $D_1'' D_2''$ kesmalar ko‘rinishidagi aylanalar bo‘yicha kesishadi. Bu aylanalarning o‘zaro kesishish $7''$, $8''$, $9''$ va $10''$ nuqtalari har ikkala Φ va Γ sirtlar uchun umumiy bo‘lgan nuqtalarning frontal proyeksiyalari bo‘ladi. Xuddi shuningdek, O'' nuqtani markaz qilib, konsentrik sferalar chiziladi, ular yordamida Φ va Γ sirtlar uchun umumiy bo‘lgan nuqtalarini yasash mumkin. Bu nuqtalarning geometrik o‘rni bo‘lgan m'' va n'' egri chiziqlar Φ va Γ sirtlarning kesishish chiziq bo‘ladi. Φ va Γ sirtlarning frontal ocherklarining $1''$, $2''$, $3''$, $4''$ kesishish nuqtalari bu sirtlar kesishish chizig‘ining xarakterli nuqtalaridan hisoblanadi. O'' nuqtadan eng uzoqda joylashgan $4''$ xarakterli nuqtadan o‘tuvchi sferaning radiusi R_{max} bo‘ladi. Kesishish chizig‘ining xarakterli nuqtalaridan yana bir juftini Φ va Γ

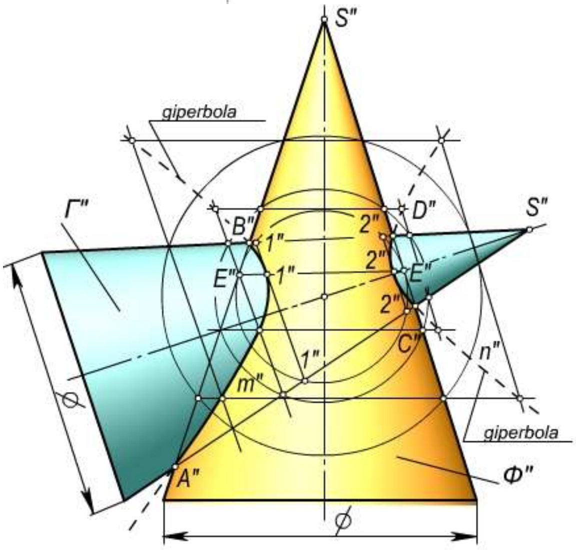
sirtlarining birortasiga R_{min} radiusli urinma sfera o‘tkazish bilan aniqlanadi. Eng kichik sferaning R_{min} radiusi quyidagicha aniqlanadi (12.7-rasm): O'' nuqtadan berilgan sirtlarning birini chekka yasovchisiga $O''E''$ va $O''F''$ perpendikulyarlar o‘tkaziladi. Bunda $O''E''>O''F''$ bo‘lsa $R_{min}=O''E''$ bo‘ladi. Agar $O''E'' < O''F''$ bo‘lsa, $R_{min}=O''F''$ bo‘ladi, $O''E''=O''F''=R_{min}$ bo‘lgan holda eng kichik sfera ikkala sirtga urinib, kesishish chizig‘i ikkita tekis egri chiziqqa ajraladi. Shunday qilib, urinma sferani shunday o‘tkazish kerakki, u sirtlarning biriga urinsin va ikkinchisini kesib o‘tsin. 12.7–rasmda Γ sirtga urinma bo‘lgan R_{min} radiusli sfera o‘tkazish bilan yasalgan egri chiziqning 5, 6 xarakterli nuqtalari aniqlangan. Bu nuqtalarda egrilik buriladi yoki yo‘nalishini o‘zgartiradi. Kesishish chizig‘ining boshqa nuqtalari R_{max} va R_{min} radiusli sferalar orasida ixtiyoriy sferalar o‘tkazish bilan aniqlanadi. Konus va silindrlarning o‘zaro kesishish chizig‘i m(m″) va n larga tegishli nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari konus o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan parallel kesuvchi gorizontal tekisliklar orqali aniqlanadi. Shunday qilib, konsentrik sferalar usuli bilan ikki aylanish sirtining kesishish chiziqlarini yasash quyidagi sxema bo‘yicha bajariladi:

- ikki aylanish sirti o‘qlarining kesishish nuqtasi konsentrik sferalar markazi sifatida qabul qilinadi;
- sirtlarning frontal (yoki gorizontal) ocherklarining kesishish nuqtalari xarakterli nuqtalar sifatida belgilanadi va R_{max} radiusli sfera aniqlanadi;
- eng kichik *Rmin* radiusli sfera chiziladi. Natijada yana bir juft xarakterli nuqtalar aniqlanadi;
- R_{max} va R_{min} lar orasida sferalar o‘tkazilib, oraliq nuqtalar topiladi.

12.8-rasmda o‘qlar $O(O', O'')$ nuqtada kesishuvchi va simmetriya tekisligi H proyeksiyalar tekisligiga parallel bo‘lgan ikki doiraviy konusning kesishish chizig‘i konsentrik sferalar usuli bilan yasalgan. Bunda avvalo kesishish chizig‘ining xarakterli 1(1′, 1″) va 2(2′, 2″) nuqtalari aniqlanadi. So‘ngra O' nuqtani markaz qilib olib, ikkala konusni kesadigan qilib Φ_1' sfera o‘tkaziladi. Φ_1' sfera Γ' konus bilan a' aylana bo‘yicha, Φ' konus bilan b' aylana bo‘yicha kesishadi. Bu aylanalarning kesishish nuqtalari 5′=6′ ikki konusning kesishish chizig‘ia tegishli bo‘ladi. a aylananing a'' proyeksiyasi yasalib, uning ustida 5″ va 6″ nuqtalar yasaladi. Kesishish chizig‘ining qolgan nuqtalari ham yuqoridagidek yasaladi va ular o‘zaro tutashtiriladi.

12.9-rasmda simmetriya tekisligi proyeksiyalar tekisligi V ga parallel bo‘lgan ikki aylanma konusning kesishish chizig‘i konsentrik sferalar usuli bilan frontal proyeksiyalar tekisligida tasvirlangan.



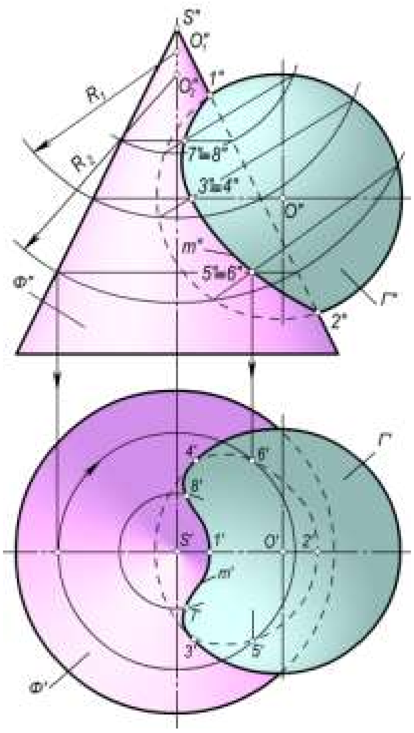


12.8-rasm
12.9-rasm

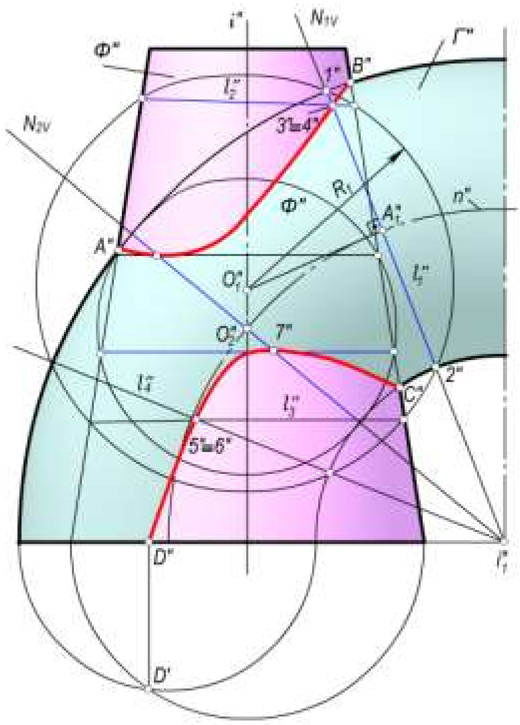
12.4.2. Ekssentrik sferalar usuli. Markazlari biror aylanma sirt o‘qini turli nuqtalarida joylashgan sferalar ekssentrik sferalar deb yuritiladi. 12.10–rasmda konus o‘qi va sfera markazi O (O', O'') bitta frontal simmetriya tekisligida joylashgan.

Bu ikki sirtning kesishish chizig‘ini yasash uchun avvalo ularning frontal ocherklarning kesishishdagi xarakterli nuqtalari 1″ va 2″ belgilanadi. Ma’lumki, har qanday ikki sfera aylana bo‘yicha kesishadi. Markazi konus o‘qida bo‘lgan sfera ham konus bilan aylana bo‘yicha kesishadi. Shuning uchun konus o‘qining biror nuqtasini markaz qilib olib, ixtiyoriy radius bilan yordamchi sferalar yasash yo‘li bilan bu ikki sirtning kesishish chizig‘i yasaladi. Konus o‘qidagi O_1'' nuqtani markaz qilib olib, R_1 radiusli sfera yordamida kesishish chizig‘ining 3(3′, 3″)≡4(4′, 4″) nuqtalari yasalgan. Shuningdek, konus o‘qidagi O_2'' nuqtani markaz qilib olib, R_2 radiusli sfera yordamida 5(5′, 5″)≡6(6′, 6″) nuqtalarning vaziyati aniqlangan. Xuddi shu tarzda konus o‘qidagi ixtiyoriy nuqtalarni markaz qilib olib, ixtiyoriy radiuslar bilan sferalar chizish yordamida ikkala sirtning kesishish chizig‘i $\boldsymbol{m}(m'')$ yasalgan. m ning gorizontal m' proyeksiyasi konus o‘qiga perpendikulyar bo‘lgan pallel kesuvchi gorizontal tekisliklar orqali aniqlanadi.

Aylanma kesik konus va tor sirtlarning kesishish chizig‘ini yasash frontal proyeksiya tekisligida ko‘rsatilgan (12.11-rasm). Konusning o‘qi i'' va tor yasovchilarining markazlari yotuvchi n'' chiziq bitta frontal tekislikda joylashgan. Bu sirtlarning kesishish chizig‘ini yasash uchun torning frontal proyeksiya tekisligidagi i_1'' o‘qi orqali N_{IV} frontal proyeksiyalovchi tekislikning izi o‘tkaziladi. Bu tekislik torni n'' markazlar chizig‘ini ixtiyoriy A_1'' nuqtada kesadi. Bunda N_{1V} tekislik torni l_1'' aylana bo‘yicha kesadi. l_1'' aylananing markazi A_1'' nuqtadan aylana tekisligiga perpendikulyar chiqariladi. Uning aylanma konus o‘qi i'' bilan kesishish nuqtasi O_1'' belgilanadi. O_1'' nuqtani markaz qilib olib, torning l_1'' aylanasidan o‘tuvchi R_1 radiusli sfera chiziladi. Bu yordamchi sfera konus bilan l_2'' va l_3'' aylanalar bo‘yicha va tor sirti bilan l_1'' va l_4'' aylanalar bo‘yicha kesishadi. l_1'' va l_2'' aylanalarning kesishish nuqtalari $3''\equiv4''$ hamda l_3'' va l_4'' aylanalarning kesishish nuqtalari $5''\equiv6''$ izlanayotgan egri chiziqning nuqtalari bo‘ladi. Chunki $3''\equiv4''$ va $5''\equiv6''$ nuqtalar konus va tor sirtlari uchun umumiy nuqtalardir.



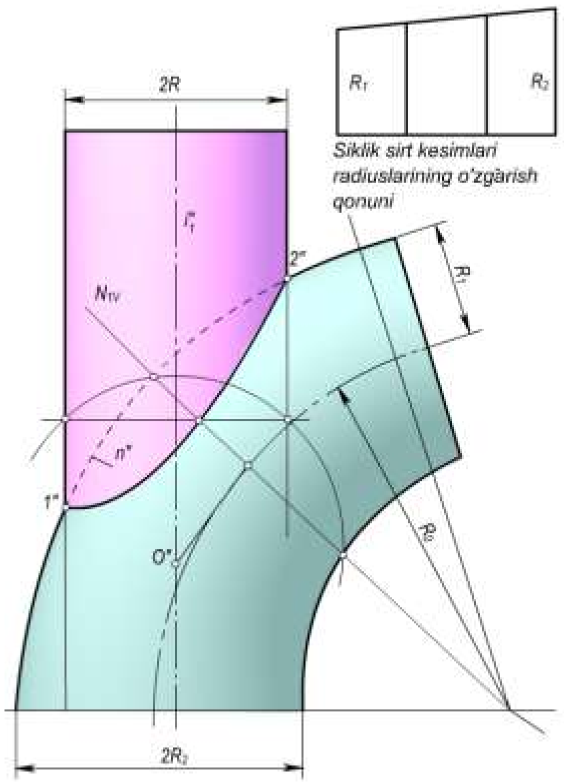
12.10-rasm.



12.11-rasm

Aylanma konus va tor sirtlar kesishish chizig‘ining xarakterli A'', B'' va C'' nuqtalari bu sirtlarni frontal ocherklarining kesishish nuqtalari yordamida aniqlangan. Sirtlar o‘qlarining kesishish nuqtasi O_2'' orqali tor sirtga urinma qilib o‘tkazilgan Φ'' sfera sirti orqali A'' va $7''$ xarakterli nuqtalar aniqlangan. Bu nuqtalar egrilikning burilish nuqtalari bo‘ladi.

Torning i_1'' aylanish o‘qi orqali bir necha frontal proyeksiyalovchi tekisliklar izlarini o‘tkazib va bu tekisliklarda hosil bo‘lgan aylanalar orqali markazi konus o‘qida turlicha joylashgan yordamchi sferalar o‘tkazib, egri chiziqning qolgan oraliq nuqtalari yasaladi.

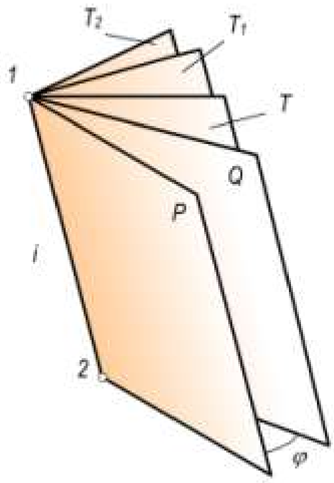


12.12-rasm

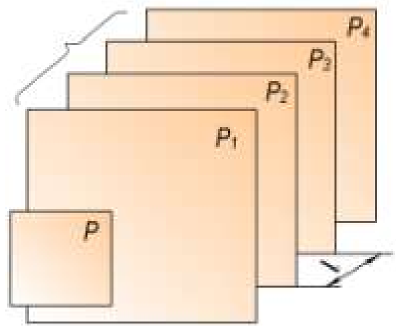
12.12-rasmda siklik va silindrik sirtlardan tashkil topgan truboprovodning bir qismi frontal proyeksiyada tasvirlangan. Bunda aylanish silindri bilan naysimon siklik sirtning n'' kesishish chizig‘ini yasash ekssentrik sferalar usuli bilan ko‘rsatilgan. Har ikkala sirt uchun umumiy bo‘lgan n'' egri chiziqning barcha nuqtalarini yasash yuqorida keltirilgan misolga asosan bajarilgan.

12.5-§. Sirtlarning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasash. Kesuvchi tekisliklar dastasi usuli

12.5.1. Tekisliklar dastasi. Birta to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekisliklarni tekisliklar dastasi deyiladi. To‘g‘ri chiziq tekisliklar dastasining o‘qi deb yuritiladi. Tekisliklar dastasi xos (12.13-rasm) yoki xosmas o‘qqa (12.14-rasm) ega bo‘ladi. Xos o‘qli tekisliklar dastasining chizmadagi bir ismli izlari bir nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasini tashkil qiladi (12.15-rasm). Shu izlar dastasining 1″ va 2″ nuqtalari tekisliklar dastasi i o‘qining izlaridan iborat bo‘ladi. Dasta tekisliklarining vaziyati esa, bitta parametr, ya’ni aylanish burchagi φ ning kattaligi orqali aniqlanadi.



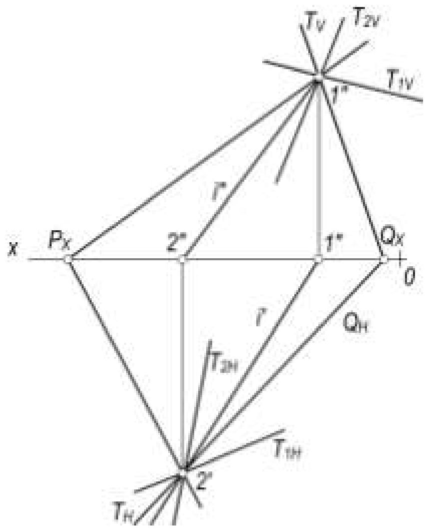
12.13-rasm



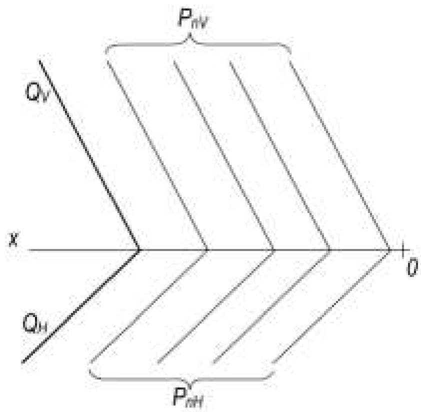
12.14-rasm

Xosmas o‘qqa ega bo‘lgan tekisliklar dastasining chizmadagi bir ismli izlari o‘zaro parallel to‘g‘ri chiziqlar dastasidan iborat bo‘ladi (12.16-rasm). Bu dasta tekisliklarning vaziyati bitta parametr, ya’ni tekisliklar orasidagi l masofa bilan aniqlanadi. Xosmas o‘qqa ega bo‘lgan tekisliklar dastasining yo‘nalishi esa biror Q yo‘naltiruvchi tekislik orqali beriladi. Bu tekislik parallelizm tekisligi deb ham yuritiladi.

Tekisliklar dastasi, asosan, tekislik bilan sirtning, sirt bilan sirtning va sirt bilan ko‘pyoqlik sirtining o‘zaro kesishish chiziqlarini yasashda yordamchi kesuvchi tekisliklar dastasi usuli nomi bilan ishlatiladi.

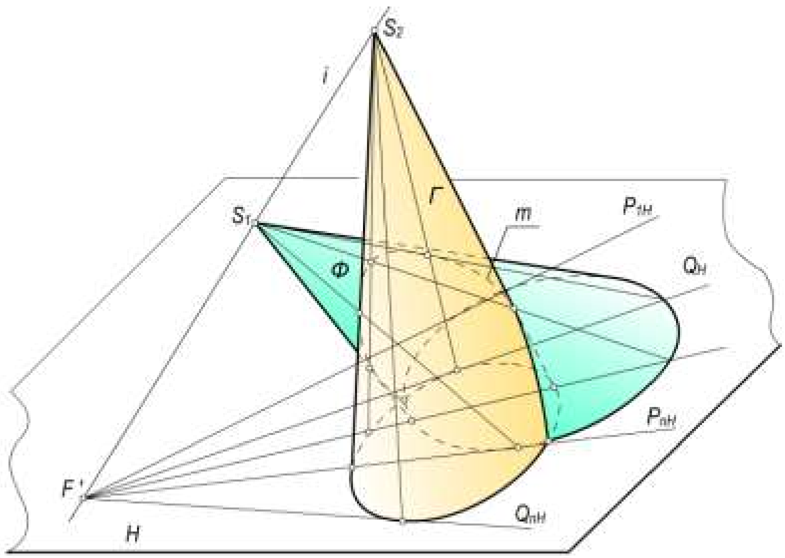


12.15-rasm



12.16-rasm

12.5.2. Chiziqli sirtlarning o‘zaro vaziyatini ularning kesishish chiziqlarini yasamasdan aniqlash. Har bir chiziqli sirtning yasovchilari orqali o‘tgan tekisliklar dastasi sirtning asos tekisligida izlar dastasi to‘plamini hosil qiladi. Bu izlar dastasi sirt asosiga urinuvchi izlari orasida bo‘ladi.

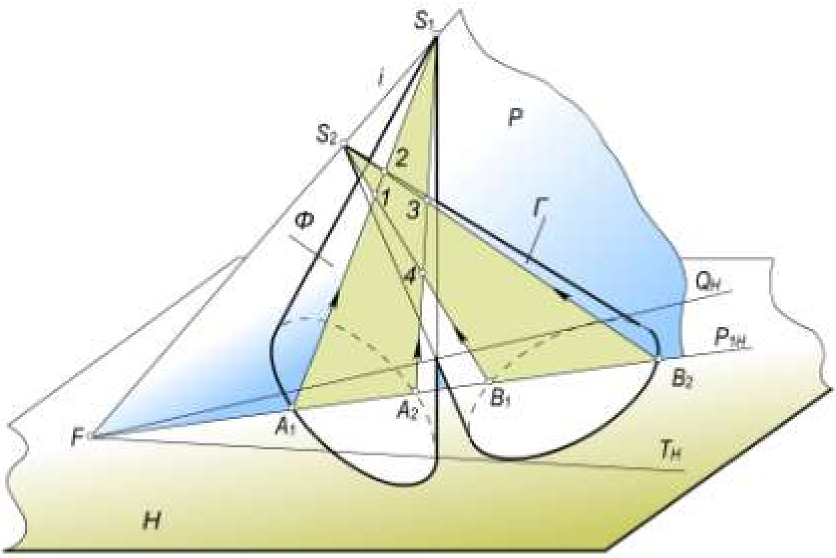


12.17-rasm

Asoslari bir tekislikda yotgan sirtlarning o‘zaro vaziyatini shu sirtlarning yasovchilari orqali o‘tgan, umumiy o‘qli kesuvchi tekisliklar dastasi izlari to‘plamining o‘zaro vaziyati aniqlaydi. Agar izlar dastasi o‘zaro kesishsa, sirtlar ham kesishadi. Ular kesishmasa, sirtlar ham kesishmaydi. 12.17–rasmda asoslari H tekislikda yotgan ikki konus sirtining o‘zaro vaziyati aniqlangan. S_1 va S_2 konus uchlari orqali o‘tgan kesuvchi tekisliklar $P_{1H}…P_{nH}$ va $Q_{1H}…Q_{nH}$ izlar to‘plamini hosil qilgan. Bu to‘plamlar qisman kesishgani uchun konus sirtlari ham qisman kesishib, bitta m fazoviy egri chiziq hosil qilgan. Izlar to‘plamining bu xususiyati, berilgan o‘zaro kesishuvchi sirtlarning kesishish chiziqlarini yasamasdan oldin uning xarakterini aniqlash imkonini beradi. Buni asoslari bir tekislikda (masalan, H da) yotgan kesishuvchi sirtlarning 12.1-jadvalda keltirilgan sxematik chizmalardan kuzatish mumkin.

12.5.3. Sirtlarning kesishish chiziqlarini yordamchi kesuvchi tekisliklar dastasi usuli bilan yasashning umumiy algoritmi

- Ikki sirtning proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan vaziyatiga qarab kesuvchi tekisliklar dastasining vaziyati tanlanadi. Bunda kesuvchi sirtlarning hosil bo‘lish qonuniyatlariga asosan ular berilgan sirtlar bilan kesishganda kesimda to‘g‘ri chiziqlar yoki aylanalar to‘plami hosil bo‘ladigan qilib tanlanadi.
- Sirtlarning asoslari yotgan tekislikda kesuvchi tekisliklar izlarining dastasi yasaladi.
- Kesishuvchi sirtlar asoslarining o‘zaro vaziyati va kesuvchi tekisliklar izi dastasining vaziyati 12.1-jadvalga asosan aniqlanadi.
- Kesishuvchi sirtlar kesishish chizig‘ining xarakterli nuqtalari belgilanadi.
- Kesishish chizig‘ining oraliq nuqtalari yasaladi.
- Hosil bo‘lgan nuqtalar ketma-ket ravon tutashtiriladi.
-

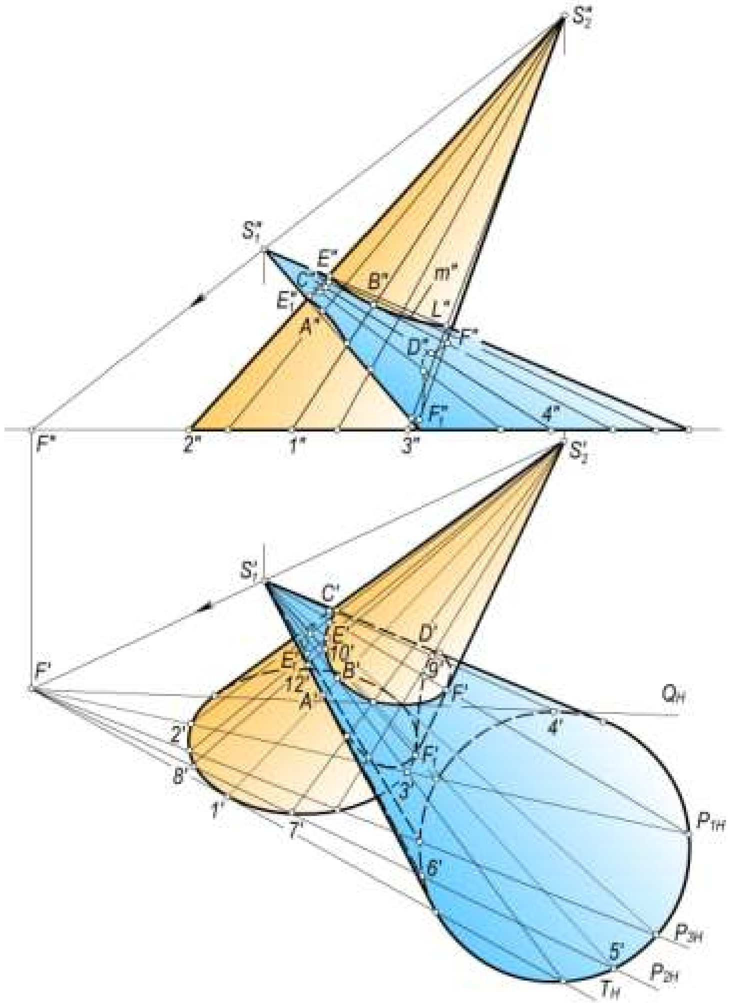


12.18-rasm

12.5.4. Konus bilan konusning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasash. (12.18-12.19-rasmlar). Konus uchidan o‘tgan har qanday tekislik konusni yasovchilari bo‘yicha kesadi. Berilgan Φ va Γ konuslarni kesib o‘tuvchi tekisliklar dastasining i o‘qi kesishuvchi konuslarning S_1 va S_2 uchlaridan o‘tuvchi S_1S_2 to‘g‘ri chiziq bo‘ladi (12.18-rasm). i o‘qi orqali o‘tkazilgan P tekislik yordamida ikki sirtga umumiy bo‘lgan 1,2,3 va 4 nuqtalarni yasash ko‘rsatilgan. Bu konuslarning asosi va xos o‘qli yordamchi kesuvchi tekisliklar dastasining izlari 12.1-jadvalning 1-punktidagidek bo‘ladi. Shuning uchun berilgan Φ va Γ sirtlar qisman kesishib, ikkita fazoviy egri chiziq hosil qilishini oldindan jadval yordamida aniqlab olamiz.

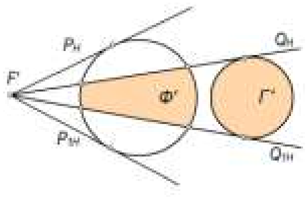
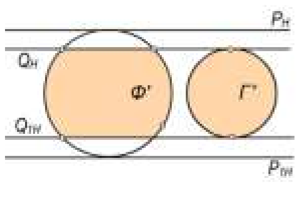
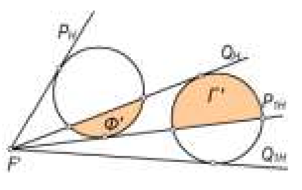
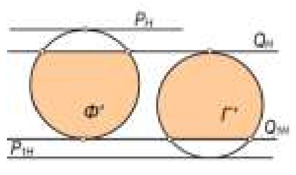
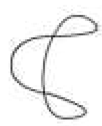
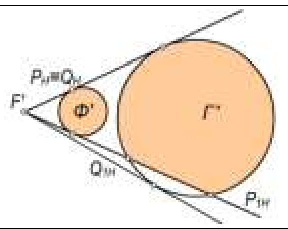
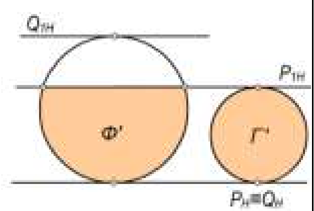
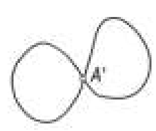
12.19-rasmda asoslari H tekislikda yotgan ikki konusning kesishish chizig‘ini yasash tekis chizmada ko‘rsatilgan. Bunda avvalo kesishish $A(A',A'')$, $B(B',B'')$, $C(C',C'')$, D(D′,D″) nuqtalari yasaladi. Kesishish chizig‘ining A va B, C va D nuqtalari T_H va Q_H urinma tekisliklar yordamida aniqlab, ular $S_2'1'$ va $S_1'4'$ yasovchilarning nuqtalaridir E', E_1' va F', F_1' nuqtalar kesishuvchi konus sirtlarning gorizontal proyeksiyasidagi ixtiyoriy yasovchilar ustidagi nuqtalardir. Bu nuqtalar esa kesuvchi tekisliklar dastasining P_{1H}, P_{2H}, P_{3H}, … kabi izlari yordamida hosil qilingan.

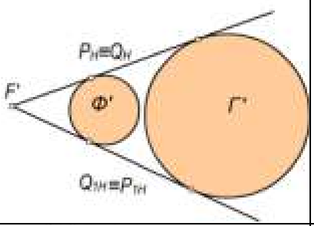
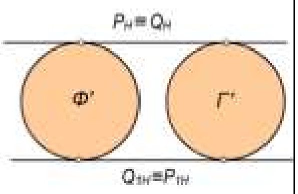
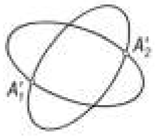
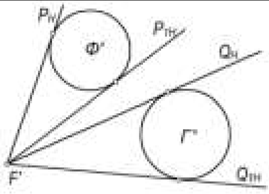
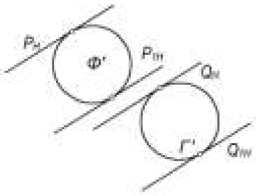
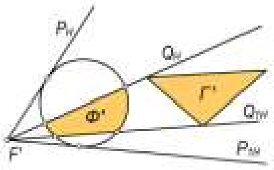
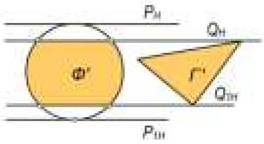
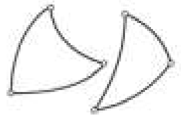
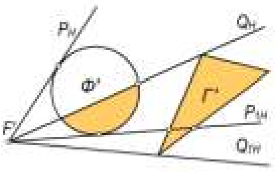
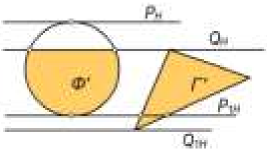
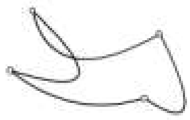
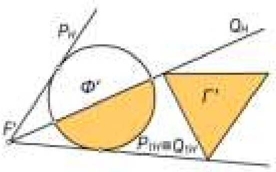
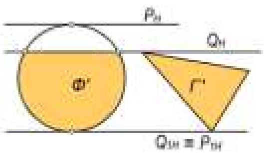
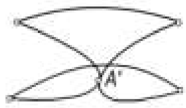
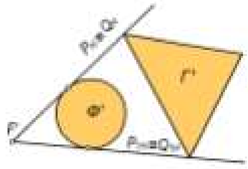
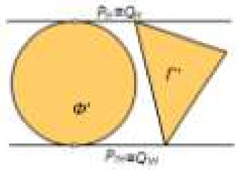
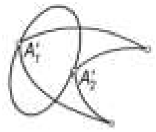
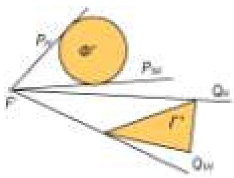
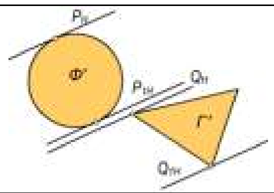
Konus sirtlarning joylashishi 12.1-jadvalning 2-punktiga to‘g‘ri kelgani uchun ularning kesishish chizig‘i bitta fazoviy egri chiziq bo‘ladi.



12.19-rasm

12.1-jadval

№	Kesishuvchi sirtlar asoslarining o‘zaro vaziyati va kesuvchi tekisliklar dastasining izlari		Kesishish chiziqining sxematik ko‘rinishi	Kesishuvchi sirtlarning o‘zaro vaziyati
	Xos o‘qli	Xosmas o‘qli		
1.				Φ va Γ sirtlar o‘zaro to‘liq kesishib, ikkita fazoviy egri chiziq hosil qiladi.
2.				Φ va Γ sirtlar o‘zaro qisman kesishib, bitta fazoviy egri chiziq hosil qiladi.
3.				Φ va Γ sirtlar o‘zaro qisman kesishib, bitta kesishish nuqtasiga ega bo‘lgan bitta yopiq egri chiziq hosil qiladi. A nuqta sirtlarning urinish nuqtasi bo‘ladi.

4.				Φ va Γ sirtlar o‘zaro to‘liq kesishib, ikkita tekis egri chiziq hosil qiladi. Kesishish chiziqlari A'_1 va A'_2 nuqtalarda bir – biri bilan kesishadi. A'_1 va A'_2 nuqtalar Φ va Γ sirtining urinish nuqtalari bo‘ladi.
5.				Φ va Γsirtlar o‘zaro kesishmaydi.
6.				Φ sirt bilan Γ ko‘pyoqlik sirti o‘zaro to‘liq kesishib, ikkita fazoviy chiziq siniq egri chiziq hosil qiladi.
7.				Φ sirt bilan Γ ko‘pyoqlik sirti qisman kesishib, bitta fazoviy siniq egri chiziq hosil qiladi.
8.				Φ sirt bilan Γ ko‘pyoqlik sirti qisman kesishib, urinish nuqtasiga ega bo‘lgan bitta fazoviy siniq egri chiziq hosil qiladi, A nuqta Φ va Γ sirtlarning o‘zaro urinish nuqtasi bo‘ladi.
9.				Φ sirt bilan Γ ko‘pyoqlik sirti o‘zaro to‘liq kesishib, A_1 va A_2 urinish nuqtalariga ega bo‘lgan ikkita fazoviy siniq chiziq hosil qiladi. A_1 va A_2 nuqtalar Φ va Γ sirtlarning o‘zaro urinish nuqtalari bo‘ladi.
10.				Φ sirt bilan Γ ko‘pyoqlik o‘zaro kesishmaydi.

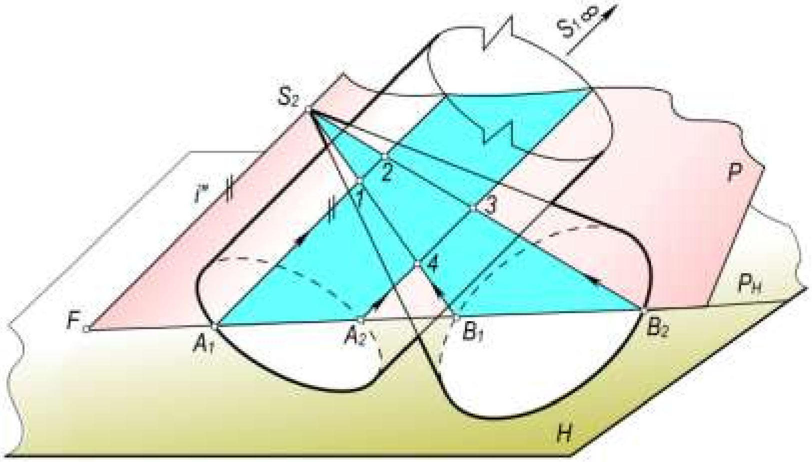
Kesishish chizig‘ining oraliq nuqtalarini yasash uchun yordamchi kesuvchi tekisliklarning istalgan birini, masalan, P_{2H} tekislik har ikkala konuslarda $S_1'5'6'$ va $S_1'7'8'$ uchburchaklar hosil qiladi. Bu uchburchaklar o‘zaro kesishib 9′, 10′, 11′ va 12′ kesishish nuqtalarini hosil qiladi. Bu nuqtalarning frontal proyeksiyalari mos yasovchilarning frontal proyeksiyalari ustida topiladi. Xuddi shu yasash tartibini boshqa kesuvchi tekisliklar uchun yetarli marta takrorlansa, ikki konus sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ining qolgan nuqtalari ham xosil bo‘ladi.

Hosil bo‘lgan barcha kesishish nuqtalari yasovchilarning ko‘rinishligi qoidasiga amal qilgan holda ketma-ket ravon tutashtiriladi.

12.5.5. Konus bilan piramidaning o‘zaro kesishish chiziqlarini yasash. Konus bilan piramida sirtlari fazoviy siniq egri chiziq hosil qilib kesishadi. Bu sirtlarning o‘zaro vaziyati 12.1-jadvaldan foydalanib aniqlanadi. Kesishish chizig‘ining sinish nuqtalari piramida qirralarining konus sirti bilan kesishgan nuqtalardir. Kesishish chizig‘ining tekis egri chiziqlari piramida yoqlarining konus sirti bilan kesishgan chiziqlaridir. Bu chiziqlar ikkinchi tartibli tekis egri chiziqlar hisoblanib, tekislik bilan sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasash algoritmidan foydalanib yasalsa ham bo‘ladi. Konus bilan piramida sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasash algoritmi umuman olganda, konus bilan konusning kesishish chizig‘ini yasash algoritmining o‘zginasidir. Фaqat xarakterli nuqtalar qatoriga piramida qirralarining konus sirti bilan kesishgan nuqtalarini ham yasashni kiritish yetarli.

12.5.6. Konus bilan silindrning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasash. Konus bilan silindr sirtlari o‘zaro kesishganda fazoviy, xususiy hollarda esa tekis egri chiziq hosil bo‘ladi.

Asosi bir tekislikda yotuvchi konus va silindr sirtlarini kesishish chizig‘ini yasash uchun konusning S_2 uchidan silindr yasovchilariga parallel qilib kesuvchi tekisliklar dastasining i o‘qi o‘tkaziladi (12.20-rasm).



12.20-rasm

Bu dastaning istalgan P tekisligi konusni $S_2B_1B_2$ uchburchak va silindrni esa A_1, A_2 nuqtalardan o‘tuvchi yasovchilari bilan kesadi. Bularni o‘zaro kesishishi natijasida kesishish chizig‘ining 1, 2, 3, 4 nuqtalari hosil bo‘ladi.

12.21-rasmda asoslari H tekislikda yotgan konus bilan silindr sirtlarining kesishish chizig‘ini yasash tekis chizmada ko‘rsatilgan. Buning uchun sirtlarga urinuvchi yordamchi kesuvchi P_1, P_4 tekisliklarning P_{1H}, P_{4H} izlari yasaladi.

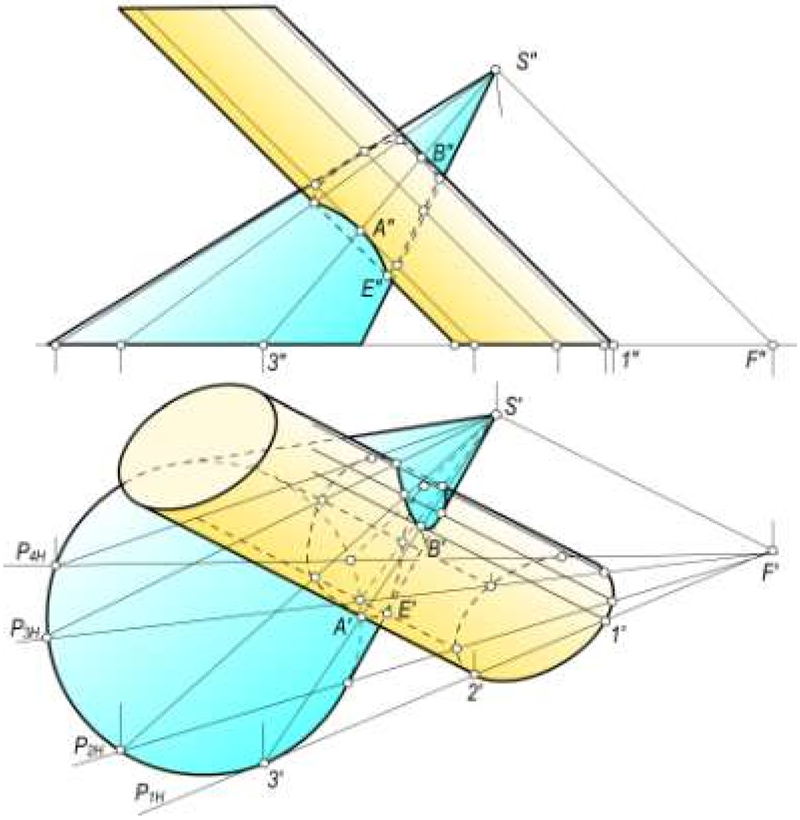
12.1-jadvalning 2-punktiga asosan konus va silindrning butunlay kesishib, bitta yopiq egri chiziq hosil qilinishi aniqlanadi.

Konus bilan silindrning xarakterli nuqtalarini aniqlash 12.19-rasmda ko‘rsatilgan konus bilan konusning o‘zaro kesishganidek bajariladi.

Kesishish chizig‘ining oraliq nuqtalari P_1 va P_4 tekisliklar orasidagi yordamchi tekisliklar orqali yasaladi. Hosil bo‘lgan barcha kesishish nuqtalari ketma-ket ravon tutashtiriladi.

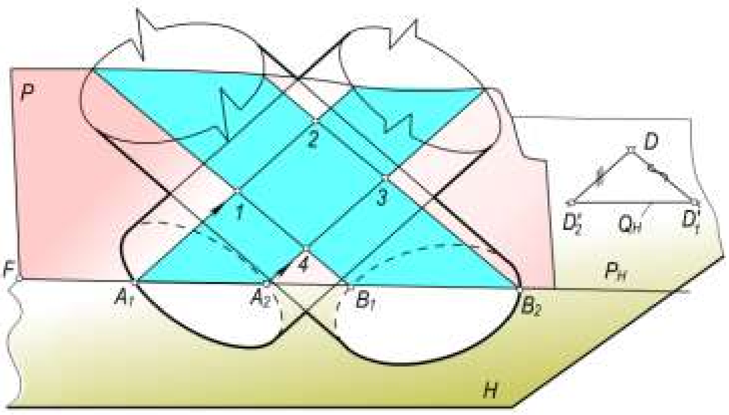
12.5.7. Konus bilan prizmaning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasash. Konus bilan prizma sirti o‘zaro kesishib, fazoviy siniq egri chiziq hosil qiladi. Bu kesishish chizig‘ining sinish nuqtalari prizma qirralarining konus sirti bilan kesishish nuqtalaridir. Kesishish chizig‘ining tekis egri chiziqlari prizma yoqlarining konus sirti bilan kesishuvidan hosil bo‘ladi.

Xususiy holda konus bilan prizmaning kesishish chizig‘ini tekislik bilan sirtning kesishish chizig‘ini yasash algoritmini bir necha marta qo‘llash yo‘li bilan aniqlanadi. Umumiy holda esa, konus bilan prizmaning kesishish chizig‘ini yasash algoritmi konus bilan silindrning kesishish chizig‘ini yasash algoritmining o‘zginasi bo‘lib, faqat xarakterli nuqtalar soniga qo‘shimcha ravishda prizma qirralarining konus bilan kesishish nuqtalarini yasash kifoyadir.



12.21-rasm

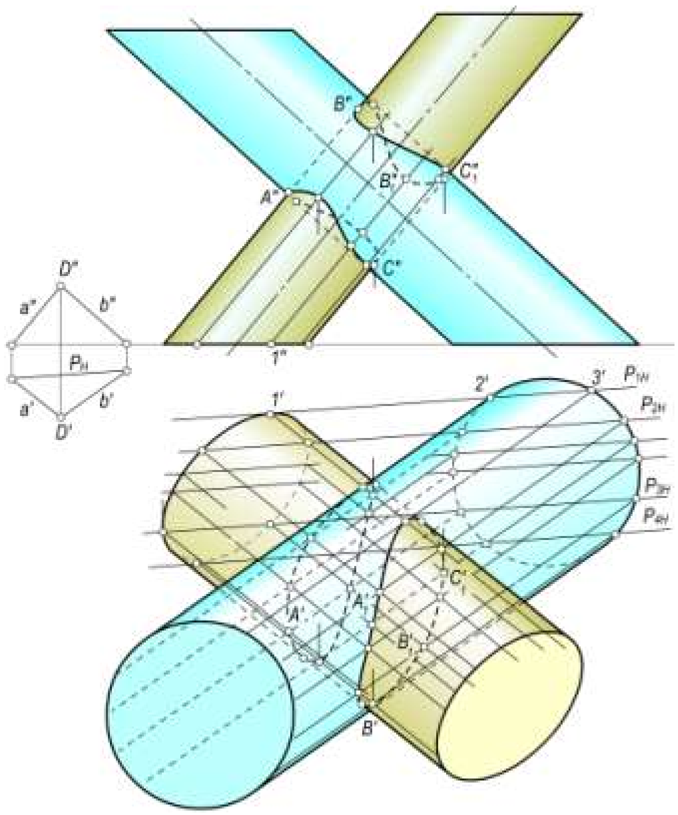
12.5.8. Silindr bilan silindrning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasash. Silindr bilan silindr sirti o‘zaro kesishib, fazoviy egri chiziq xosil qiladi. Bu silindrlarning to‘g‘ri chiziqli yasovchilari orqali o‘tgan kesuvchi yordamchi tekisliklar dastasi o‘zaro parallel bo‘lib, xosmas o‘qqa ega bo‘ladi. Bunda yordamchi tekisliklar dastasining yo‘nalishi berilgan silindrlar yasovchilariga parallel bo‘lgan yo‘naltiruvchi tekislikni aniqlaydi va bu tekislik parallelizm tekisligi deb yuritiladi. Berilgan silindrlarning o‘zaro vaziyati 12.1-jadvaldan aniqlab olinadi. 12.22–rasmda ikki silindr sirti kesishish chizig‘ining 1,2,3,4 nuqtalarini yasash ko‘rsatilgan. Bu nuqtalar Q tekislikka parallel bo‘lgan ixtiyoriy yordamchi va ikki silindrni kesuvchi P tekislikni o‘tkazish yo‘li bilan yasalgan.



12.22-rasm

12.23-rasmda asoslari H tekislikda yotgan ikki silindrning kesishish chizig‘ini yasash tekis chizmada ko‘rsatilgan. Silindr sirtlarining biriga urinib, ikkinchisini kesuvchi yordamchi P_1 va P_4 tekisliklar dastasining gorizontal P_{1H}, P_{4H} izlari o‘tkaziladi. Bunda $P_{1H} \| P_{4H} \| Q_H$ bo‘ladi.

Silindrlarning o‘zaro vaziyati 12.1-jadvalning 1-punktiga mos kelgani uchun bu silindrlar qisman kesishib, ikkita fazoviy egri chiziq hosil qiladi.



12.23-rasm.

Kesishish chizig‘ining xarakterli nuqtalari xuddi konus bilan konusning yoki konus bilan silindr kesishish chizig‘ining xarakterli nuqtalari kabi bo‘ladi. Bu $A(A',A'')$, $B(B',B'')$, $C(C',C'')$ nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari P_{2H}, P_{3H}..., tekislik izlari yordamida yasaladi.

Kesishish chizig‘ining boshqa oraliq nuqtalari P parallel yordamchi tekisliklar o‘tkazish yo‘li bilan yasaladi. Hosil bo‘lgan barcha kesishish nuqtalari o‘zaro ravon birlashtiriladi.

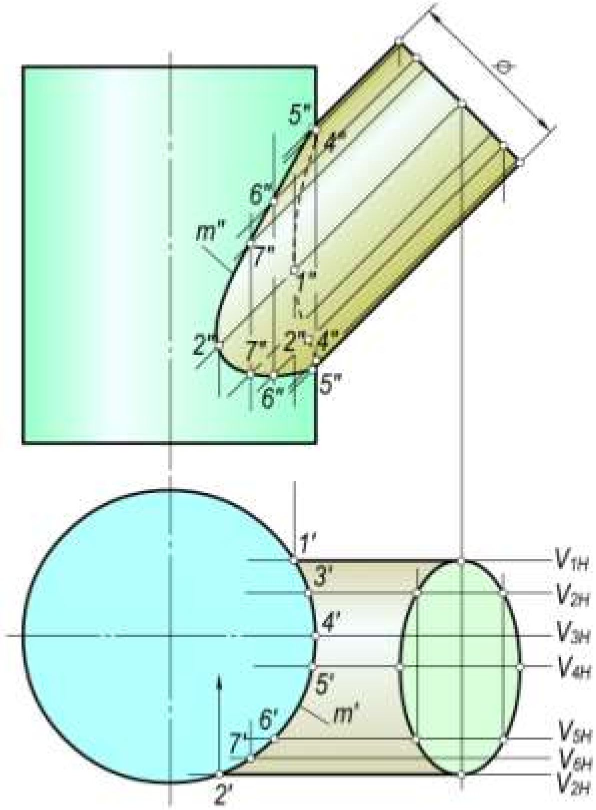
Prizma bilan silindrning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasash algoritmi xuddi yuqorida bayon etilgan ketma-ketlikda bo‘ladi.

12.6-§. O‘qlari bir tekislikda yotmaydigan aylanish sirtlarining o‘zaro kesishishi. Parallel kesuvchi tekisliklar usuli

Agar ikki kesishuvchi sirtlarning o‘qlari o‘zaro kesishmasdan, ulardan biri biror proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo‘lib, ikkinchi sirtning o‘qi ikkinchi proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar yoki parallel bo‘lsa, u holda bu sirtlarning kesishish chizig‘ini yasashda parallel kesuvchi tekisliklar usulidan foydalanish. Parallel kesuvchi tekisliklarni proyeksiyalar tekisliklaridan birortasiga parallel qilib olinadi.

Parallel kesuvchi tekisliklar usulining qulayligi shundaki, bunda yordamchi kesuvchi tekisliklar kesishuvchi sirtlarni aylanalar va to‘g‘ri chiziqlar bo‘yicha kesadi. Parallel kesuvchi tekisliklar usulida tekisliklar dastasining o‘qi xosmas bo‘ladi. Parallel kesuvchi tekisliklar usuli bilan yechiladigan bir necha sirtlarning o‘zaro kesishuvini ko‘rib chiqamiz.

12.6.1. Ikki silindrning o‘zaro kesishishi. 12.24–rasmda kesishuvchi silindrlarning biri gorizontal proyeksiyalovchi, ikkinchisining o‘qi frontal proyeksiyalar tekisligiga parallel bo‘lgan holda silindrlar tasvirlangan.



12.24-rasm

Bu sirtlarning kesishish chizig‘ini yasashda yordamchi kesuvchi tekisliklar V tekislikka parallel bo‘ladi. Ularning o‘zaro vaziyati chizmaning gorizontal proyeksiyasidan ko‘rinib turibdi. Kesishish chizig‘ining xarakterli 1(1′,1″), 2(2′,2″), 4(4′,4″), 5(5′,5″) nuqtalari yordamchi kesuvchi frontal V_{1H}, V_{2H}, V_{3H},… tekisliklar yordamida hosil qilingan. Bunda yordamchi parallel tekisliklar har ikkala silindrni yasovchilari bo‘yicha kesadi. Bir tekislikda yotuvchi ikki silindrga mansub bo‘lgan yasovchilarning kesishish nuqtalari ikkala sirt uchun umumiy bo‘lib, yasaladigan m (m', m'') egri chiziqning nuqtalari bo‘ladi. m egri chiziqning kolgan nuqtalari V_{1H} va V_{2H} tekisliklar orasida yordamchi kesuvchi tekisliklar o‘tkazish yo‘li bilan yasalgan. Kesishish chizig‘ining frontal silindrning V_5 simmetriya tekisligidan kuzatuvchi tomondagi nuqtalari ko‘rinadi, uning orqasidagi nuqtalari esa ko‘rinmaydi.

12.6.2. O‘qlari uchramas va H yoki V ga perpendikulyar bo‘lgan aylanish sirtlarining o‘zaro kesishish chizig‘ini yasash (12.25-rasm). Kesishuvchi sirtlardan doiraviy silindr o‘qi V tekislikka va doiraviy konus o‘qi H tekislikka perpendikulyar bo‘lganda yordamchi parallel kesuvchi tekisliklar gorizontal tekisliklar bo‘ladi. Bu tekisliklar konusni aylanalar va silindrni yasovchilari bo‘yicha kesadi. Hosil bo‘lgan aylana va yasovchilar o‘zaro kesishib, kesishish chizig‘ining nuqtalarini hosil qiladi.

Kesishish chizig‘ining A(A',A''), B(B',B''), C(C',C''), nuqtalari xarakterli nuqtalardir. Ular bevosita sirtlar frontal ocherklarining kesishish nuqtalarida belgilanadi. Qolgan nuqtalar kesuvchi tekisliklar yordamida yasaladi. Masalan, 1,2,3,4,5 nuqtalar $H_1 \| H$,… va $H_5 \| H$ tekisliklar o‘tkazib, gorizontal proyeksiyadagi q' va q_1' aylanalarning va a', b', c' va d' to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan to‘rtburchak kesimlarining kesishuvidan hosil qilingan. Qolgan nuqtalar ham shu tartibda hosil qilinadi.

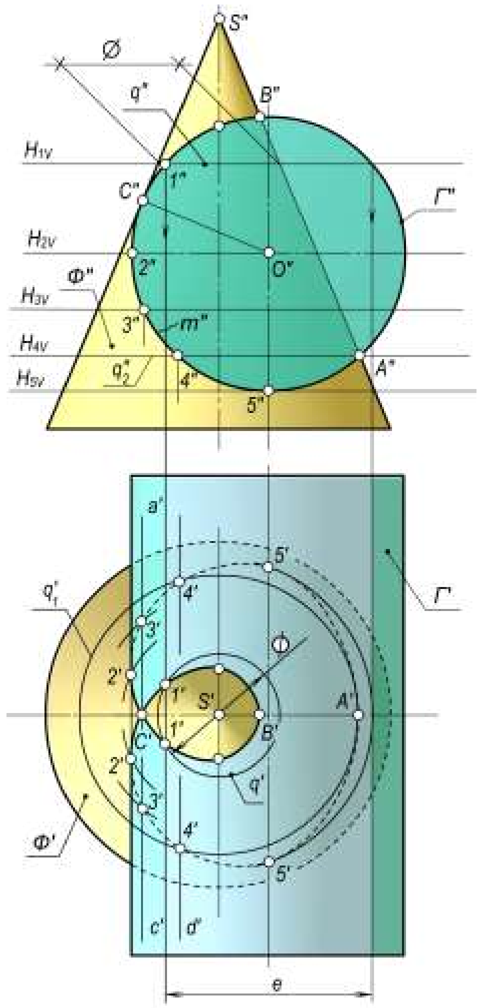
2(2′,2″) xarakterli nuqta Γ silindrning H_2(H_{2V}) simmetriya tekisligini o‘tkazish yo‘li bilan topiladi. Kesishish chizig‘ining ko‘rinadigan va ko‘rinmaydigan nuqtalari ham H_2 simmetriya tekisligi yordamida aniqlanadi.

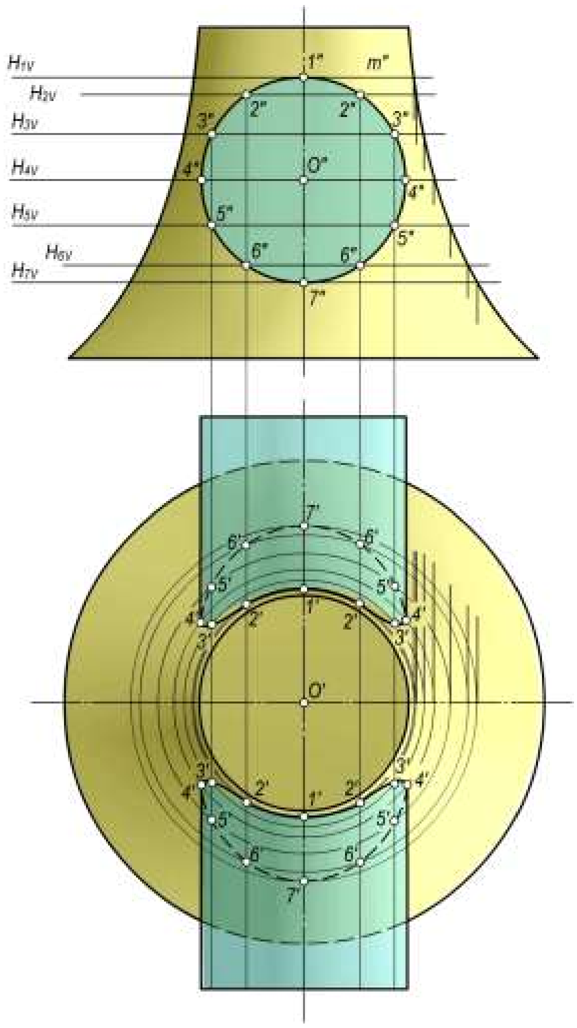
12.26-rasmda o‘qlari kesishib o‘zaro perpendikulyar bo‘lgan aylanish silindri bilan tor sirti bo‘lagining kesishish chizig‘ini yasash tasvirlangan. Kesishish egri chizig‘ini yasash H_1(H_{1V}),…

gorizontal kesuvchi tekisliklar o‘tkazish yo‘li bilan yasalgan. Bunday holda sirtlarning kesishish egri chizig‘i ikkita simmetrik bo‘lakdan iborat bo‘ladi. 1, 4, 7 xarakterli nuqtalarni yasash H_{1V}, H_{4V} va H_{7V} tekisliklar yordamida yasalgan. Kesishgan egri chiziqning gorizontal proyeksiyasini ko‘rinadigan va ko‘rinmaydigan qismlari H_4 simmetriya tekisligi yordamida aniqlanadi.

12.6.3. Yarim sfera bilan uchburchakli to‘g‘ri prizmaning o‘zaro kesishishi. Sfera bilan prizma sirti fazoda siniq egri chiziq bo‘yicha kesishadi. 12.27-rasmda yarim sfera va qirralari H tekislikka perpendikulyar bo‘lgan uchburchakli prizma tasvirlangan. YOrdamchi kesuvchi tekisliklar frontal tekisliklardan iborat bo‘ladi. Bu tekisliklar sferani parallellari bo‘yicha, prizmani esa yon qirralariga parallel to‘g‘ri chiziqlar bo‘yicha kesadi.

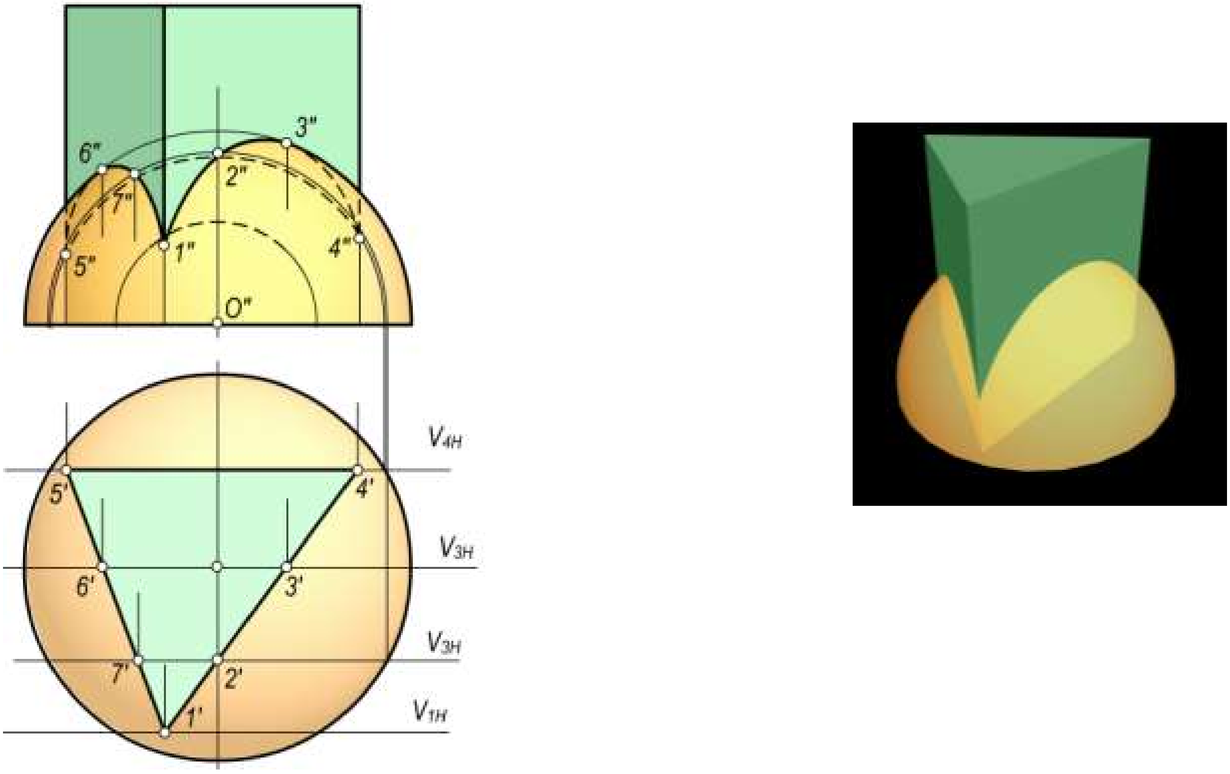
Rasmdan ko‘rinib turibdiki, prizma sirti sharni to‘la kesadi va uchta aylanalar hosil bo‘ladi. Ularning V dagi proyeksiyalari ellipslar va aylana bo‘lib proyeksiyalanadi. Shar va prizma sirti o‘zaro kesishish chizig‘ining xarakterli 1,4,5,6 va 3 nuqtalari frontal $V_1(V_{1H})$, $V_4(V_{4H})$ va $V_3(V_{3H})$ tekisliklar yordamida yasaladi. 1,4,5 nuqtalar kesishish chizig‘ining sinish nuqtalari bo‘lib, prizma qirrasining sfera bilan kesishgan nuqtalaridir. V_3 tekislik sharning simmetriya tekisligidir, undagi 3 va 6 nuqtalar frontal proyeksiyada kesishish chizig‘ining ko‘rinadigan qismini ajratib turuvchi nuqtalardir. Kolgan yasashlar rasmdan ko‘rinib turibdi. Bu misolda yordamchi parallel kesuvchi tekisliklarni gorizontal tekislik qilib olsa ham bo‘ladi.


S"
Ø
q"
B"
H1V
1"
C"
Г"
H2V
2"
O"
Ф"
H3V
3"
m"
H4V
A"
q2"
H5V
4"
5"
a'
5'
4'
q1'
Г'
3'
2'
1'
S'
A'
C'
B'
q'
Ф'
c'
d'
e



12.25-rasm. **12.26-rasm.**

12.6.4. O‘qlari o‘zaro parallel bo‘lgan aylanish sirtlarining o‘zaro kesishishi. O‘qlari parallel bo‘lgan Φ siqiq aylanma ellipsoid bilan Γ aylanish sirti 12.28–shaklda tasvirlangan. Bu sirtlarning o‘qlari H tekisligiga perpendikulyar joylashgan. Sirtlarning fazoda bunday berilishida yordamchi kesuvchi tekisliklarni berilgan sirtlarning o‘qlariga perpendikulyar qilib o‘tkaziladi. Dastlab kesishuv chizig‘ining 1(1′,1″) va 6(6′,6″) xarakterli nuqtalari belgilanadi. Qolgan nuqtalar $H_2(H_{2V})$, $H_3(H_{3V})$ … kesuvchi tekisliklar yordamida yasaladi. Kesuvchi gorizontal yordamchi tekisliklar berilgan ikkala aylanish sirtini aylanalar bo‘yicha kesadi. Kesimlarda hosil bo‘lgan bu aylanalar o‘zaro kesishib, ikkala sirtlarga oid bo‘lgan kesishish chizig‘ining nuqtalarini beradi. Masalan, 12.28-rasmda 2(2′,2″), $2_1(2_1', 2_1'')$ nuqtalarni hosil qilishda H_{2V} tekisligi o‘tkazilgan. Bu tekislik sirtlarning birini $l(l',l'')$ ikkinchisini $n(n',n'')$ aylanalar bo‘yicha kesgan. Hosil bo‘lgan l va n aylanalar o‘zaro kesishib, 2(2′,2″) va $2_1(2_1',2_1'')$ nuqtani hosil qiladi, ya’ni gorizontal proyeksiyalar tekisligidagi l' va n' aylanalarning kesishidan 2′ va $2_1'$ nuqtalar hosil bo‘ladi so‘ngra ularning V dagi proyeksiyalari H_{2V} – da yasaladi. Qolgan barcha nuqtalar shu usulda aniqlanadi.



12.27-rasm.

12.7-§. Ikkinchi tartibli sirtlarning o‘zaro kesishishidagi maxsus hollari

Ikkinchi tartibli sirtlarning o‘zaro kesishishi ko‘pgina geometrik va muhandislik amaliyotidagi masalalarni o‘z ichiga oladi.

Ikkinchi tartibli sirtlar algebrik sirtlar turkumiga kiradi. Shuning uchun ularning kesishish chiziqlari ham algebraik egri chiziqlar bo‘ladi.

Ta’rif. Ikki sirt kesishish chizig‘ining tartibi sirtlar tartibining ko‘paytmasiga tengdir.

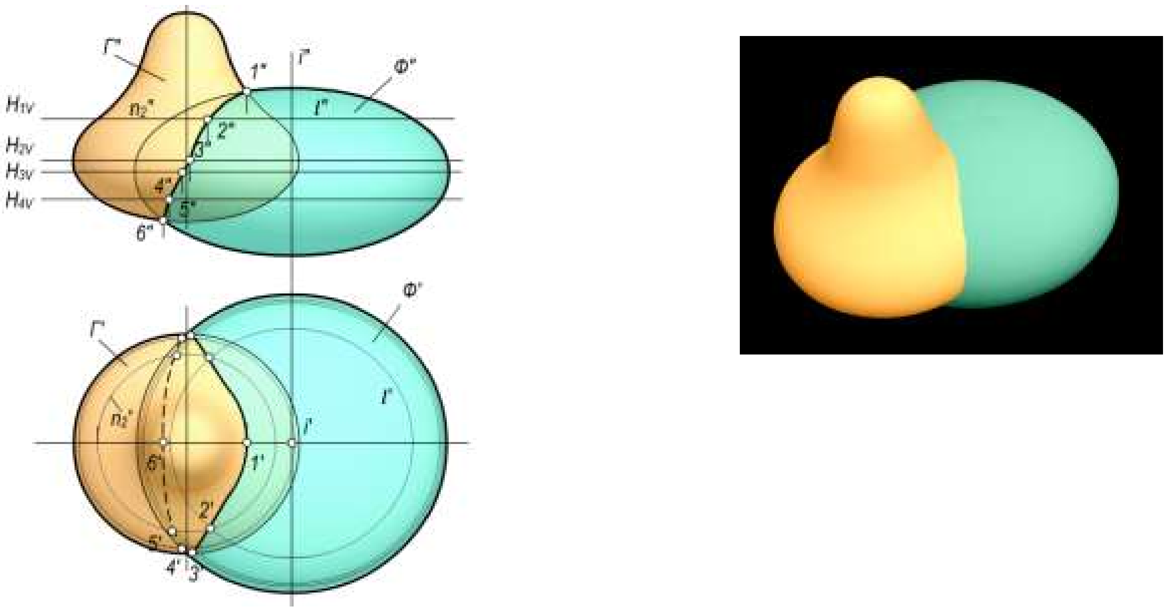
Shunga ko‘ra, ikkita ikkinchi tartibli sirt kesishganda to‘rtinchi tartibli kesishish chizig‘i hosil bo‘ladi . Sirtlarning kesishish chizig‘i, kesishuvchi sirtlarning vaziyati va shakliga qarab, turli tartibli egriliklarga ajraladi.

Masalan, 4-tartibli egri chiziq

$$4=3+1, 4=2+1+1, 4=2+2, \quad 4=1+1+1+1$$

tartibdagi egri chiziqlarga ajralishi mumkin. Bularning geometrik ma’nosi quyidagicha:

- To‘rtinchi tartibli egri chiziq bitta uchinchi tartibli egri chiziqqa va to‘g‘ri chiziqqa ajralgan. Umumiy to‘g‘ri chiziqli yasovchiga ega bo‘lgan har qanday chiziqli ikkinchi tartibli ikki sirtning kesishuvida bu holni ko‘rish mumkin.
- To‘rtinchi tartibli egri chiziq bitta ikkinchi tartibli egri chiziqqa va ikkita to‘g‘ri chiziqqa ajraladi.
- To‘rtinchi tartibli egri chiziq ikkita ikkinchi tartibli egri chiziqqa ajralgan. Bu holni keyinrok batafsil ko‘rib chikamiz.
- To‘rtinchi tartibli egri chiziq to‘rtta to‘g‘ri chiziqqa ajraladi. Bu holni umumiy o‘qqa ega bo‘lgan aylanma va elliptik silindrlar misolida ko‘rish mumkin.



12.28-rasm.

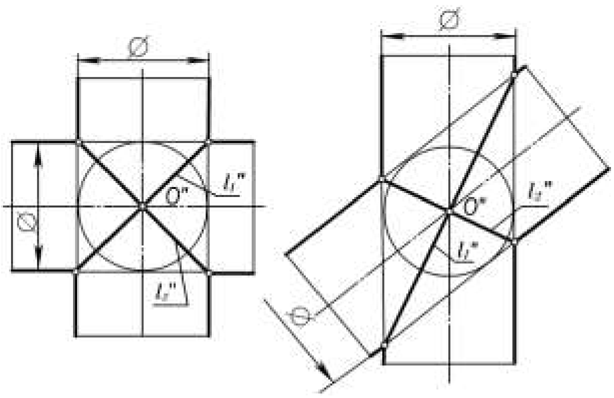
12.7.1. Monj teoremasi va uning xususiy xollari

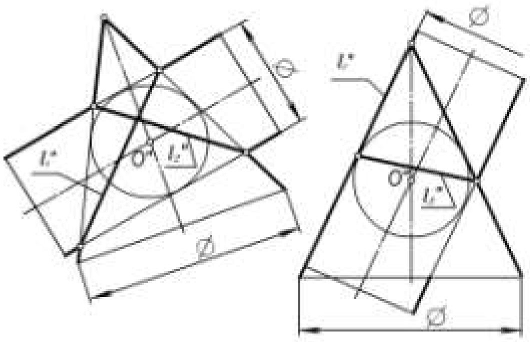
Teorema: Agar ikki o‘zaro kesishuvchi ikkinchi tartibli sirtlarning tashqarisida yoki ichkarisida biror uchinchi ikkinchi tartibli sirtni urinma vaziyatda chizish mumkin bo‘lsa, u holda berilgan sirtlar ikkita tekis egri chiziqlar bo‘yicha kesishadi. Egri chiziqlarning tekisliklari urinish nuqtalarini tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziq orqali o‘tadi.

Monj teoremasi muhandislik amaliyotida ikkinchi tartibli ikki sirtning tashqarisida yoki ichkarisida sfera chizish mumkin bo‘lgan hollarda ularning kesishish chizig‘ini yasash uchun qo‘llaniladi. Monj teoremasiga doir bir necha misollarni ko‘ramiz. Chizmalarni frontal proyeksiyalar tekisligidagi tasvirlar orqali berilgan.

Masalan, 12.29-rasmda o‘qlari kesishuvchi holda joylashgan ikki aylanma kesishuvchi silindrlar ichiga sferalar chizilgan. Teoremaga asosan bu silindrlar ikki l_1'' va l_2'' ellipslar bo‘yicha kesishadi. 12.30–rasmda aylanma silindr bilan konusning kesishish chizig‘ini yasash ko‘rsatilgan. Bunda silindr va konusga urinuvchi sirt sfera, sirtlarning kesishish chiziqlari l_1'' va l_2'' ellipslardir.

Monj teoremasining truboprovodlarni loyihalashda qo‘llanilishi mumkin. O‘qlari o‘zaro O'' nuqtada kesishuvchi har xil diametrli ikki silindrik I va II trubalar berilgan. Ularni tutashtiruvchi oraliq trubalar yasash kerak bo‘lsin (12.31-rasm). Buning uchun avvalo trubaning i_1'' va i_2'' o‘qlarini l'' aylana yoyi bilan tutashtiramiz. Co‘ngra bu yoyni teng bo‘laklarga bo‘lib, bo‘linish nuqtalarini sferalarning markazi sifatida qabul qilamiz. r va R radiuslarni proporsional o‘zgartirilgan holda sferalar chiziladi. Har ikki yonma-yon sferalarga urinmalar o‘tkazib, konuslar hosil qilinadi. Ikkita yonma-yon konuslar umumiy ichki sferaga ega bo‘lgan uchun ellipslar bo‘yicha kesishadi. Ular chizmada kesma tarzida tasvirlangan.



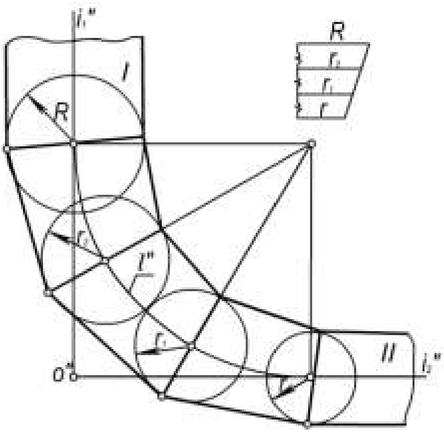


a) b)

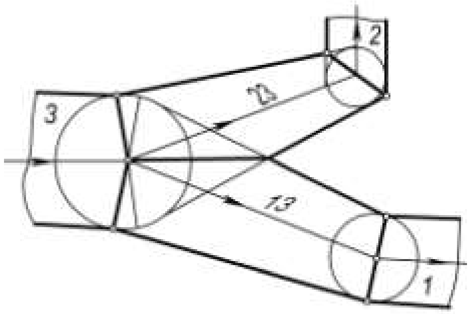
a) b)

12.29-rasm 12.30-rasm

12.32-rasmda xuddi 12.31-rasmdagidek va Monj teoremasiga asosan har xil diametrli uchta 1, 2 va 3 aylanma silindrlarning bir-biriga 13 va 23 konus sirti orqali oʻtishi koʻrsatilgan.



12.31-rasm

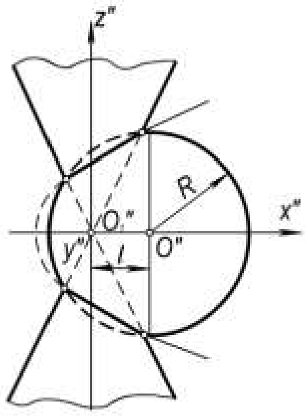


12.32-rasm

12.7.2. Umumiy simmetriya tekisligiga ega boʻlgan ikkinchi tartibli sirtlarning kesishuvi

Teorema: Agar kesishuvchi ikkinchi tartibli ikki sirt umumiy simmetriya tekisligiga ega boʻlsa, u holda ularning kesishish chizigʻi simmetriya tekisligida ikkinchi tartibli chiziq boʻlib proyeksiyalanadi

Isboti. Umumiy simmetriya tekisligiga ega boʻlgan ikkinchi tartibli ikki sirt berilgan boʻlsin. Ma’lumki, ular toʻrtinchi tartibli m^4 egri chiziq boʻyicha kesishadi. Sirtlarning simmetriya tekisligi ularning kesishish chizigʻining ham simmetriya tekisligi boʻladi. Bu tekislikka perpendikulyar boʻlgan biror tekislik bilan toʻrtinchi tartibli egri chiziq kesilsa, unda toʻrtta nuqta hosil boʻladi. Shu nuqtalardan bir jufti simmetriya tekisligining bir tomonida, ikkinchi jufti uning ikkinchi tomonida yotadi. Bu nuqtalar ham simmetrik joylashgan boʻladi. Demak, toʻrtinchi tartibli egri chiziqning shunday ikki nuqtasi mavjudki, ular simmetriya tekisligiga nisbatan simmetrik joylashadi. Shuning uchun ularning simmetriya tekisligidagi ortogonal proyeksiyalari ustma-ust tushadi. Toʻrtinchi tartibli egri chiziqning hamma nuqtalari shu tarzda proyeksiyalansa, ikkinchi tartibli egri chiziq hosil boʻladi.



12.33-расм

Bu teoremaning isbotini analitik usulda ham ko‘rsatish mumkin. Umumiy frontal simmetriya tekisligiga ega bo‘lgan aylanma konus va sfera berilgan bo‘lsin (12.33-rasm). Bu ikki sirt ham ikkinchi tartibli bo‘lgani uchun ular to‘rtinchi tartibli egri chiziq bo‘yicha kesishadi.

$z = kx$ yasovchi to‘g‘ri chiziq Oz o‘q atrofida aylantirilsa, aylanma konus sirti hosil bo‘ladi. U holda, bu konusning tenglamasi

$$z^2=k^2 (x^2 + y^2) \tag{1}$$

ko‘rinishda yoziladi. Markazi Ox o‘qi bo‘yicha l masofaga siljigan sferaning tenglamasini

$$(x-l)^2 + y^2 + z^2=R^2 \tag{2}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. (1) va (2) tenglamalar birgalikda bitta sistemaga olinsa, ular konus bilan sfera sirtlarining kesishish chizig‘ini ifodalaydi:

$$\begin{cases} z^2 = k^2(x^2+y^2) \\ (x-l)^2 + y^2 + z^2 = R^2 \end{cases} \tag{3}$$

yoki

$$\begin{cases} y^2 = \dfrac{z^2}{k^2} - x^2 \\ (x-l)^2 + y^2 + z^2 = R^2 \end{cases} \tag{4}$$

4-sistemaning ikkinchi tenglamasida u^2 o‘rniga birinchi tenglamadagi y^2 ning qiymati quyilsa, unda kesishish chizig‘ining xOz, ya’ni V tekisligidagi (simmetriya tekisligidagi) proyeksiyasi hosil bo‘ladi:

$$(x-l)^2 + z^2 / k^2 - x^2 + z^2=R^2 \tag{5}$$

Ba’zi soddalashtirishlardan so‘ng (5) ni quyidagi ko‘rinishda yoziish mumkin.

$$z^2 = 2\frac{lk^2}{1+k^2}x + \frac{k^2}{1+k^2}(R^2 - l^2) \tag{6}$$

Bu yerda $\dfrac{lk^2}{1+k^2} = p$, $\dfrac{k^2}{1+k^2}(R^2-l^2) = q$ deb belgilansa, (6) tenglamani

$$z^2=2px + q \tag{7}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Natijada, umumiy simmetriya tekisligiga ega bo‘lgan aylanma konus va sfera sirtlari kesishish chizig‘ining shu tekislikdagi proyeksiyasi parabola (7) ekanligi kelib chiqadi.

(5) tenglamada $z = 0$ deb olinsa, parabola uchining koordinatasi topiladi:

$$x_0 = \frac{l^2 - R^2}{2l}. \tag{8}$$

Agar l=0 deb olinsa, sferaning markazi aylanma konus uchi bilan bir nuqtada bo‘ladi, u holda (6) tenglamaning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$z^2 = \frac{R^2k^2}{1+k^2} \tag{9}$$

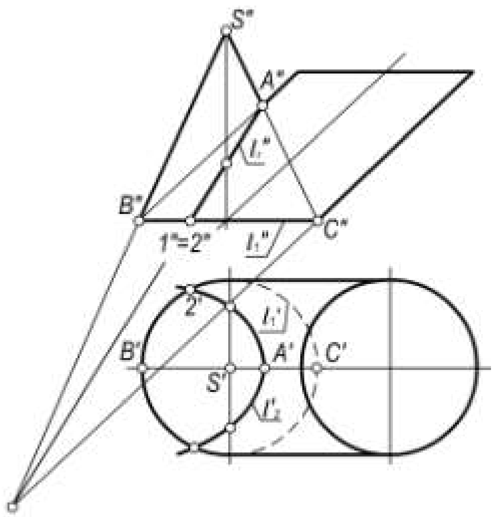
yoki

$$z = \pm\frac{Rk}{\sqrt{1+k^2}} \tag{10}$$

Bu tenglama (10) ikkita parallel to‘g‘ri chiziq tenglamasini ifodalaydi. Bu holda (6) parabola frontal tekislikda ikki parallel to‘g‘ri chiziqqa ajralgan bo‘ladi, ya’ni 4-tartibli egri chiziq ikkita aylanaga ajraladi. Haqiqatan, umumiy o'qqa ega bo'lgan ikki aylanma sirt doim aylanalar bo'yicha kesishadi.

12.8-§. Ikkinchi tartibli sirtlarning o'zaro kesishishiga oid teoremalar

1-teorema: Agar ikkinchi tartibli ikki sirt bitta tekis egri chiziq bo'yicha kesishsa, u holda ular yana biror egri chiziq bo'yicha kesishadi va bu ham tekis egri chiziq bo'ladi.



12.34-расм.

Isboti. Teorema birinchi qismining shartiga asosan ikkinchi tartibli ikki sirt bitta tekis egri chiziq bo'yicha kesishadi. Bu egri chiziq faqat ikkinchi tartibli bo'lishi mumkin. Chunki ikkinchi tartibli sirtlarni ixtiyoriy tekislik bilan kesganda ham ikkinchi tartibli chiziq xosil bo'ladi. Ikkita ikkinchi tartibli sirt to'rtinchi tartibli egri chiziq bo'yicha kesishgani uchun ikkinchi noma'lum bo'lgan egri chiziq ham Monj teoremasiga asosan ikkinchi tartibli egri chiziq bo'ladi. 12.34–rasmda umumiy asosi aylana bo'lgan silindr va konus sirtlari berilgan. Kesishuvchi bu sirtlar ikkinchi tartibli va bitta umumiy aylana bo'yicha kesishgan. Teorema shartiga asosan bu sirtlarga tegishli yana bitta tekis egri chiziq bo'lishi lozim. Izlanayotgan ikkinchi tekis egri chiziq ellips $\ell_2(\ell_2', \ell_2'')$ bo'ladi. Shunday qilib, konus va silindr sirtlari bir aylana va bir ellips bo'yicha kesishadi.

Teoremaning natijasi sifatida quyidagilarni keltirish mumkin.

Ta'rif. Agar sfera biror sirt bilan aylana bo'yicha kesishsa, u holda bu sfera shu sirt bilan yana bir aylana bo'yicha kesishadi.

12.35,a,b-rasmda sfera bilan konusning kesishishi V tekislikka tasvirlangan. Bunda sfera va konus uchun umumiy bo'lgan tekis egri chiziqlardan biri sferaning katta l_1'' gorizontal kesimidir. Teorema shartiga ko'ra, yana bir tekis kesim mavjud. Izlangan tekis keim l_2'' aylana bo'ladi.

Ikkinchi tartibli sirtlarning kesishuvidagi to'rtinchi tartibli egri chiziq ikkita tekis chiziqqa ajraladigan va ulardan biri mavhum bo'lgan hollar ham uchraydi. 12.36–rasmda har xil diametrli sferalarning kesishishi tasvirlangan. Ular bitta tekis egri chiziq – $A''B''$ aylana bo'yicha kesishgan. Bunda ikkinchi tekis egri chiziq mavhum deb qaraladi.

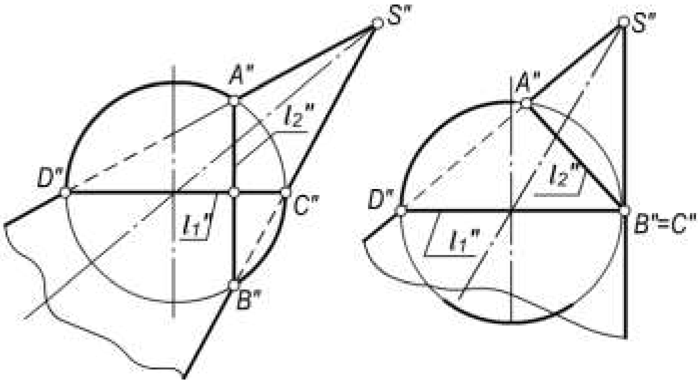
O'qlari parallel bo'lgan ikkinchi tartibli ikki aylanma silindr ikkita parallel yasovchi (yoki bitta tekis egri chiziq) bo'yicha kesishadi. Ikkinchi tekis egri chiziq (ikkita yasovchi) mavhumdir (12.37-rasm).

2-teorema. Agar ikkinchi tartibli ikki sirt ikkita nuqtada urinsa, u holda ularning kesishish chiziqlari ham ikkinchi tartibli ikki tekis egri chiziqqa ajraladi.

Bu tekis egri chiziqlarning tekisliklari urinish nuqtalarini tutashtiruvchi to'g'ri chiziq orqali o'tadi.

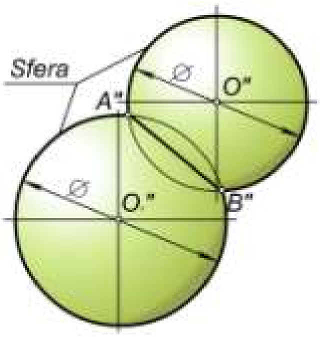
12.38-rasmda ikkita urinish nuqtasiga ega bo'lgan aylanma va elliptik silindrlarning kesishishi tasvirlangan. Bu sirtlar l_1'' va l_2''ellipslar bo'yicha kesishadi. 12.39–rasmda ikkita urinish nuqtasiga ega bo‘lgan elliptik konus va sferaning kesishishi tasvirlangan. Teorema shartiga ko‘ra, bu sirtlar l_1'' va l_2'' aylanalar bo‘yicha kesishadi, chunki sferaning tekis kesimlari faqat aylanalardir.

2-teorema shartidan foydalanib, umumiy ko‘rinishdagi ikkinchi tartibli sirtlarning doiraviy kesimlari yo‘nalishlarini aniqlash mumkin. 12.39-rasmda G_{1W} va G_{2W} profil proyeksiyalovchi tekisliklarning yo‘nalishi elliptik konus doiraviy kesimlarining yo‘nalishini aniqlaydi.

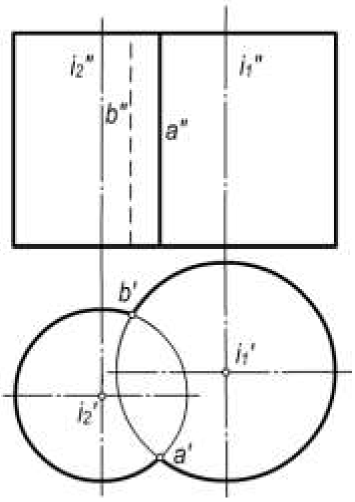


a) b)

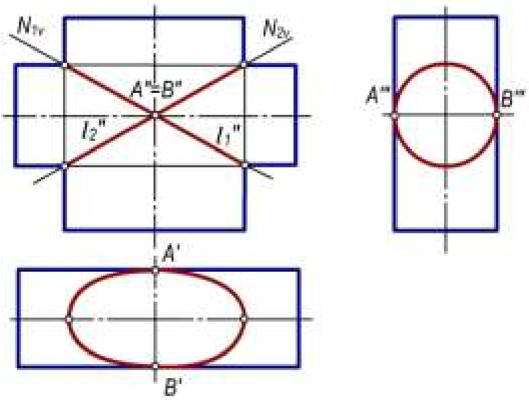
12.35-rasm



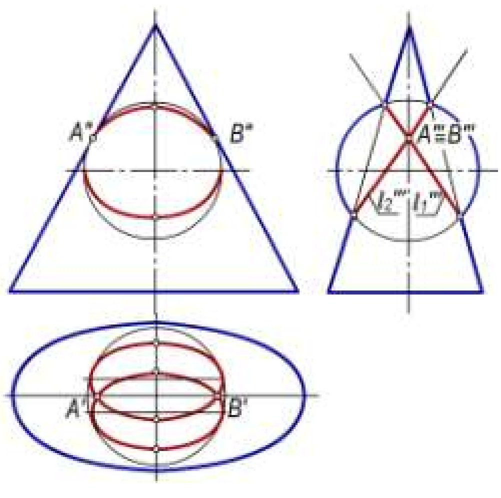
12.36-rasm



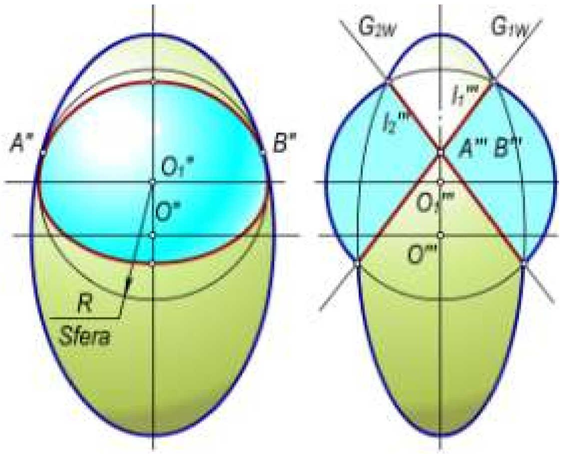
12.37-rasm



12.38-rasm



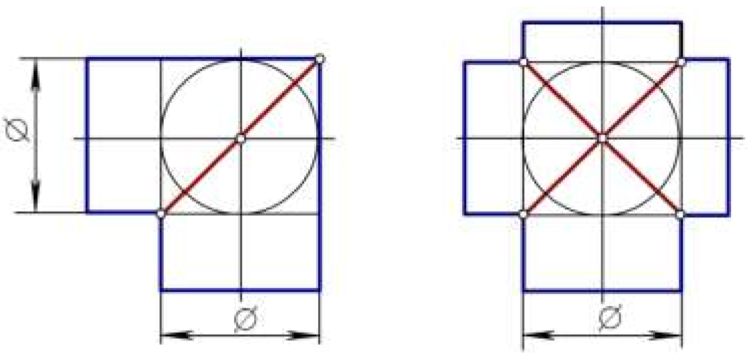
12.39-rasm



12.40-расм

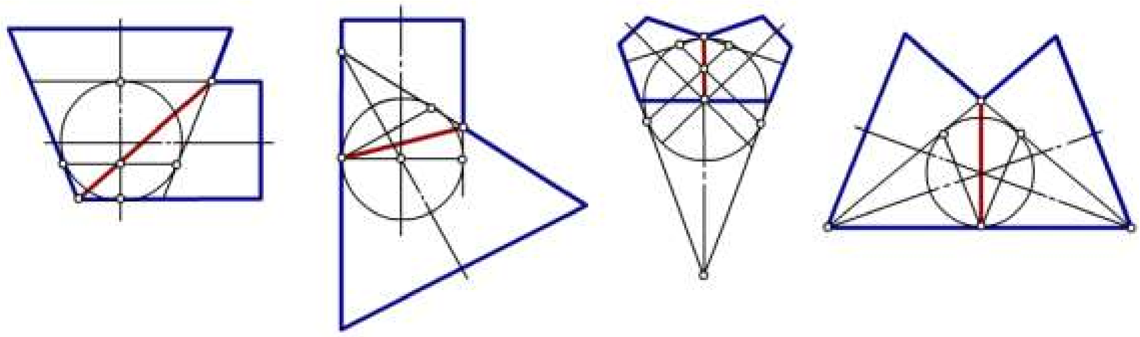
12.40-rasmda uch o'qli ellipsoid doiraviy kesimlarining yo'nalishi aniqlangan. Bunda berilgan ellipsoidning ichida ikki A'' va B'' nuqtalarga urinuvchi ixtiyoriy R radiusli sfera chiziladi. 2-teorema shartiga asosan sfera va ellipsoid sirtlari l_1'' va l_2''aylanalar bo'yicha kesishadi. G_{1W} va G_{2W} aylanalar tekisliklarining yo'nalishi uch o'qli ellipsoid doiraviy kesimlarining yo'nalishi bo'ladi.

12.41,a,b-rasmlarda shar atrofida chizilgan ikki aylanma silindrning kesishishi V tekislikka tasvirlangan. Silindrik sirtlar ikki tekis egri chiziqlari ellipslar bo'yicha kesishadi. Qurilish amaliyotida silindrlarning shunday vaziyatda kesishishi *novali gumbaz* deb yuritiladi. 12.42, a,b,v,g–rasmlarda o'qlari o'zaro kesishgan o'tish trubalarini yasash misollari ko'rsatilgan.



a) b)

12.41-rasm



a) b)

v) g)

12.42-rasm

3-teorema. Ikkinchi tartibli sirtlarning ocherki (konturi) ikkinchi tartibli egri chiziqdan iboratdir.

Bu teorema ikkinchi tartibli sirtlarni tasvirlashda alohida ahamiyatga ega, chunki ikkinchi tartibli sirtlar ko'pincha, chizmada o'zlarining ocherklari bilan beriladi.

Isboti. 1. Parallel proyeksiyalashda ikkinchi tartibli sirtlarning xossasiga asosan uni har qanday tekislik bilan kesganda ikkinchi tartibli tekis egri chiziq hosil bo‘ladi. Bu egri chiziqning ixtiyoriy vaziyatdagi tekislikdagi parallel proyeksiyasi umumiy holda ikkinchi tartibli egri chiziq bo‘ladi.

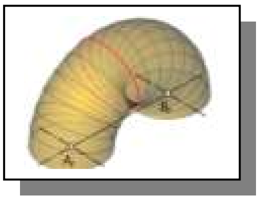
Kesuvchi tekislik ikkinchi tartibli sirtning simmetriya tekisligi bo‘lib, asosiy proyeksiyalar tekisliklarining biriga parallel bo‘lsa, kesimning shu proyeksiyasi tekisliklaridagi parallel proyeksiyalari o‘ziga kongruent bo‘ladi.

2. Markaziy proyeksiyalashda S markaz bo‘yicha biror ikkinchi tartibli Φ sirtni proyeksiyalar tekisligi P ga proyeksiyalaymiz. Bunda proyeksiyalovchi nurlar to‘plami o‘rovchi konus sirtini hosil qiladi. O‘rovchi konus sirti berilgan Φ sirt bilan bitta tekis egri chiziq bo‘yicha urinadi. Bu egri chiziq berilgan sirtning S markaz bo‘yicha ocherki hisoblanadi.

Hosil bo‘lgan proyeksiyalovchi konus sirtini ixtiyoriy P tekislik bilan kesganda kesimda ikkinchi tartibli egri chiziq hosil bo‘ladi.

Hazorat savollari

1. Ikki sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasashning umumiy algoritmi nimadan iborat?
2. Ikki sirtning kesishish chizig‘ini yasashda qanday yordamchi sirtlardan foydalaniladi?
3. Sirtlarning o‘zaro kesishish chizig‘ida qanday nuqtalari xarakterli deyiladi?
4. Umumiy o‘qqa ega bo‘lgan aylanish sirtlarining o‘zaro kesishish chizig‘ini qanday egri chiziqlar bo‘ladi?
5. Konsentrik va ekssentrik sferalardan qanday hollarda foydalaniladi?
6. Sferaning har qanday aylanma sirt bilan kesishuvidan nima hosil bo‘ladi va u qanday aniqlanadi?
7. Monj teoremasi va undan kelib chiqadigan xususiy hollarni aytib bering.
8. Bitta sferaga tashqi chizilgan silindr va konusning o‘zaro kesishishidan qanday chiziqlar hosil bo‘ladi?
9. YOrdamchi kesuvchi tekisliklar dastasi usulining mohiyati nimadan iborat?
10. Silindr bilan prizmaning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasashda yordamchi tekislik qanday vaziyatda o‘tkaziladi?
11. O‘qlari kesishmaydigan og‘ma silindr va konuslarni kesish chizig‘ini yasashda kesuvchi tekislik qanday o‘tkaziladi?



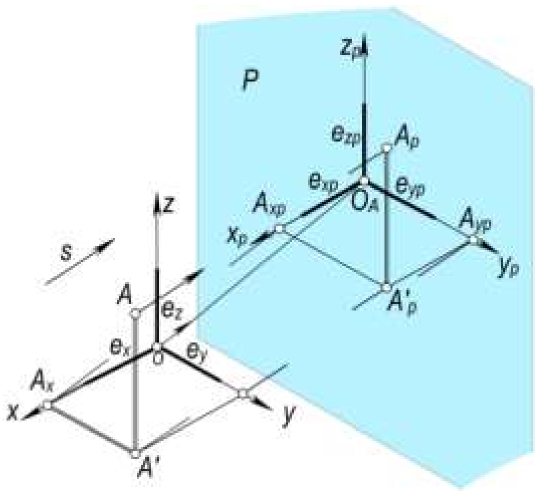
XIII bob. AKSONOMETRIK PROEKSIYALAR

13.1-§ Umumiy ma'lumotlar

Ortogonal proyeksiyalarda chizmalarni chizish birmuncha qulay bo'lib, buyumning metrik xarakteristikalari ham saqlanadi, chunki ortogonal proyeksiyalashda buyum proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan qulay holda joylashtirilishi. Ortogonal proyeksiyalash usulida tuzilgan chizmalarda qirqim va kesimlardan foydalanib buyumning ichki va tashqi ko'rinishini yetarlicha aniqlash mumkin. Ammo ortogonal proyeksiyalardagi chizmalariga ko'ra ularning fazoviy shakllarini tasavvur qilish qiyin. Bunday hollarda buyum chizmasini uning yaqqol tasviri bilan to'ldirish zaruriyati tug'iladi.

Bunday tasvirlar aksonometrik proyeksiyalar bo'la oladi. Lekin aksonometrik proyeksiyalarning hammasi ham yaqqol bo'lavermaydi. Buyumni yaqqol qilib tasvirlash proyeksiyalash yo'nalishi va proyeksiyalar tekisliginig vaziyatlariga bog'liq bo'ladi. Aksonometrik proyeksiya qisqacha aksonometriya deb yuritiladi (**aksonometriya** grekcha so'z bo'lib, **axon** – o'q, **metrien** – o'lchayman, ya'ni o'qlar bo'yicha o'lchash degan ma'noni bildiradi.)

Ta'rif. Dekart koordinatalar sistemasida joylashtirilgan buyum va uning proyeksiyalari shu sistema bilan birgalikda berilgan s yo'nalish bo'yicha ixtiyoriy olingan biror R tekislikdagi proyeksiyasi uning **aksonometriyasi** deyiladi.



13.1-rasm

R tekislik aksonometriya tekisligi deb yuritiladi (13.1-rasm). Aksonometrik proyeksiyalar ikki xil bo'ladi:

- Parallel proyeksiyalash asosida qurilgan aksonometrik proyeksiyalar.
- Markaziy proyeksiyalash asosida qurilgan aksonometrik proyeksiyalar yoki ular perspektiv proyeksiyalar deb ham yuritiladi.

Parallel aksonometrik proyeksiyalar to'g'ri burchakli va qiyshiq burchakli bo'ladi. s proyeksiyalash yo'nalishi bilan R tekislik orasidagi burchak $\varphi=90°$ bo'lsa, to'g'ri burchakli; agar $0°<\varphi°\neq 90°$ bo'lsa, qiyshiq burchakli aksonometriya deb ataladi.

Biror figuraning aksonometrik proyeksiyasini yasash uchun figuraning o'zi va uning ortogonal proyeksiyalaridan birini aksonometrik proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalash yetarlidir. Masalan, fazodagi A nuqta ortogonal proyeksiyalaridan biri A′ proyeksiyasi bilan birga R aksonometriya tekisligiga tasvirlangan (13.1-rasm). Bunda A_r nuqta A nuqtaning aksonometrik proyeksiyasi bo‘ladi. A'_p nuqta esa A nuqtaning *ikkilamchi proyeksiyasi* deb yuritiladi. Shakldagi $OA_xA'A$ siniq chiziq tomonlari A nuqtaning x, y va *z* koordinatalaridan iborat bo‘lganligi uchun uni *koordinatalar siniq chizig‘i* deb yuritiladi. Uning aksonometrik proyeksiyasi $O_rA_{xp}A'_rA_r$ bo‘ladi.

O_rx_r, O_ry_r, O_rz_r lar aksonometrik proyeksiyalar o‘qlari, O_r esa O koordinatalar boshining aksonometriyasi bo‘ladi.

Aksonometrik proyeksiyalar parallel proyeksiyalar turiga mansub bo‘lganligi sababli ular parallel proyeksiyalarning hamma xossalariga ega.

Shunga ko‘ra $AA'\|OZ$, $A'A_x\|OY$, $A'A_u\|OX$ bo‘lganligi uchun $A_rA'_r\|O_pZ_p$, $A'_rAx_r\|\ O_pY_p$, $A'_pAy_p\|O_pX_p$ bo‘ladi.

13.2-§ Aksonometrik o‘qlar va ular bo‘yicha o‘zgarish koeffisientlari

Dekart koordinatalar sistemasidagi uchala koordinata o‘qlari uchun umumiy bo‘lgan ye uzunlikni masshtab birligi sifatida qabul qilamiz (13.1-rasm). Buni ***natural masshtab birligi*** deb ataymiz. Natural masshtab birligi *e* kesmani O*x*, Oy va Oz koordinata o‘qlariga qo‘yib, ularni R tekislikka proyeksiyalasak, e_x, e_y, e_z, kesmalar hosil bo‘ladi. Bu kesmalar aksonometrik masshtab birliklari deb yuritiladi. Ularning ye ga nisbatlari aksonometrik o‘qlar bo‘yicha o‘zgarish koeffisientlari deb yuritiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\frac{e_x}{e} = k_x, \quad \frac{e_y}{e} = k_y, \quad \frac{e_z}{e} = k_z, \tag{1}$$

13.1-rasmdan

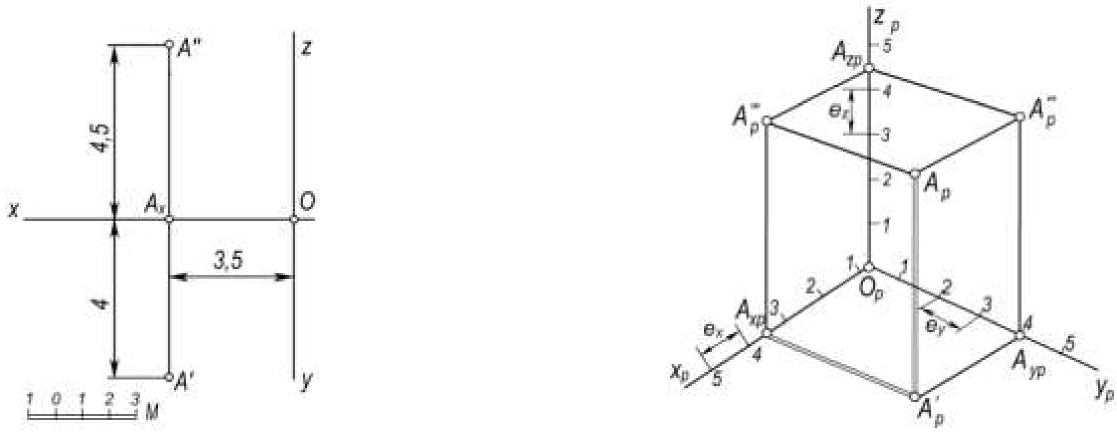
$$\frac{O_pA_{xp}}{OA_x} = \frac{e_x}{e} = k_x, \quad \frac{O_pA_{yp}}{OA_y} = \frac{e_y}{e} = k_y, \quad \frac{O_pA_{zp}}{OA_z} = \frac{e_z}{e} = k_z, \tag{2}$$

tengliklarni yozish mumkin.

Demak, A nuqtaning dekart va aksonometrik koordinatalari orasidagi bog‘lanishni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$\frac{x_p}{x} = k_x \text{ yoki } x_p=k_xx, \qquad \frac{y_p}{y} = k_y \text{ yoki } y_p=k_yy, \qquad \frac{z_p}{z} = k_z \text{ yoki } z_p=k_zz. \tag{3}$$

Aksonometrik o‘qlarning vaziyatlari va shu o‘qlar bo‘yicha o‘zgarish koeffisientlari berilgan bo‘lsa, fazodagi xar qanday nuqtaning aksonometriyasini yasash mumkin. Buning uchun nuqtaning x, y va *z* koordinatalarini mos o‘zgarish koeffisientlariga ko‘paytirib, aksonometrik o‘qlar bo‘yicha (yoki ularga parallel) o‘lchab qo‘yiladi va uch zvenoli koordinatalar siniq chizig‘ining aksonometriyasi yasaladi. Masalan, fazodagi koordinatalari 3,5; 4 va 4,5 sonlarga teng bo‘lgan A nuqtaning aksonometriyasini yasash kerak bo‘lsin (13.2,*a*-rasm). Buning uchun O_pX_p o‘qiga O_p nuqtalardan boshlab $O_pA_{xp}=3{,}5e_x$ kesmani o‘lchab qo‘yiladi va A_{xp} nuqtani belgilab olinadi (13.2,*b*-rasm). Bu nuqtadan O_pY_p o‘qiga parallel qilib $A_{xp}A'_p=4e_y$ kesmani o‘lchab qo‘yiladi va hosil bo‘lgan A'_p nuqtadan O_pZ_p o‘qiga parallel qilib $A'_pA_p=4{,}5e_z$; kesmani o‘lchab qo‘yiladi. Hosil bo‘lgan A_p nuqta A nuqtaning aksonometrik proyeksiyasi, A'_p esa A nuqtaning ikkilamchi proyeksiyasi bo‘ladi.



***a*)** ***b*)**

13.2-rasm.

Aksonometrik proyeksiyalar uch turga bo‘linadi.

- Agar uchala o‘qlar bo‘yicha o‘zgarish koeffisientlari o‘zaro teng bo‘lsa, ya’ni $k_x=k_y=k_z$ bo‘lganda hosil bo‘lgan aksonometriya *izometrik proyeksiyalar* deyiladi.
- Agar o‘zgarish koeffisientlaridan ikkitasi o‘zaro teng bo‘lib, uchinchisi ulardan farkli bo‘lsa, ya’ni $k_x=k_y\neq k_z$, $k_z=k_y\neq k_x$, yoki $k_x=k_z\neq k_y$ bo‘lganda, hosil bo‘lgan aksonometriya *dimetrik proyeksiyalar* deyiladi
- Uchala o‘qlar bo‘yicha o‘zgarish koeffisienti turlicha bo‘lgan aksonometriyalar ($k_x=k_y\neq k_z$ bo‘lsa), trimetrik *proyeksiyalar* deyiladi.

13.3-§. Aksonometriyaning asosiy teoremasi

Qiyshiq burchakli aksonometrik proyeksiyada aksonometrik o‘qlar va ular bo‘yicha o‘zgarish koeffisientlari ixtiyoriy tanlab olinishi mumkin. Aksonometrik proyeksiyalardagi bunday xususiyatni 1853 yilda avstriyalik matematik Karl Polke aniqlab, quyidagi xulosaga kelgan:

Teorema. Tekislikka tegishli bitta nuqtadan chiquvchi ixtiyoriy uchta kesma fazoda joylashgan bitta nuqtadan chiquvchi o‘zaro perpendikulyar va teng uchta kesmaning parallel proyeksiyasi bo‘lishi mumkin.

1864 yilda K.Polkening shogirdi G.A.Shvars bu teoremani umumlashtirdi va uning sodda isbotini berdi. Keyinchalik aksonometriyaning bu teoremasini Polke-Shvars nomi bilan yuritiladigan asosiy teoremasi quyidagicha ta’riflanadi.

Teorema. Diagonalari bilan berilgan har qanday tekis to‘rtburchakni ixtiyoriy olingan tetraedrga o‘xshash tetraedrning parallel proyeksiyasi deb qabul qilish mumkin.

Ushbu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi:

Natija: *Bir nuqtadan chiqqan uchta har qanday to‘g‘ri chiziq aksonometrik o‘qlar bo‘la oladi.*

Bu teoremaga binoan aksonometriya o‘qlari orasidagi burchaklarni va ular bo‘yicha o‘zgarish koeffisientlarini, umuman ixtiyoriy olish mumkin. Ammo buyumning har qanday aksonometrik tasviri uning tabiiy ko‘rinishiga butunlay o‘xshamay qolishi yoki juda oz o‘xshashi mumkin. Shuning uchun ham buyumning aksonometriyasi tabiiy ko‘rinishiga mumkin qadar ko‘proq o‘xshash bo‘lishi, hamda aksonometriyani osonroq yasash maqsadida, amalda, aksonometriyaning ba’zi xususiy turlariginа qo‘llaniladi.

Ular *standart aksonometrik proyeksiyalar* deb yuritiladi. Bunday aksonometrik proyeksiyalar kitobning 13.7-§ va 13.8-§ paragraflarida ko‘riladi.

13.4-§. O‘zgarish koeffisientlari va proyeksiyalash burchagi orasidagi o‘zaro bog‘lanish

Aksonometriyaning asosiy teoremasiga asosan aksonometrik proyeksiyalar o‘qlari va ular bo‘yicha o‘zgarish koeffisientlarini ixtiyoriy olish mumkin.Ammo ular bir-biri bilan o‘zaro uzviy bog‘liq bo‘ladi.

Ox, Oy va Oz koordinatalar o‘klarini R aksonometrik proyeksiyalar tekisligiga φ burchak ostida proyeksiyalaymiz (13.3-rasm). Bunda koordinatalar boshi O nuqtaning R tekislikdagi proyeksiyasi O_r bo‘ladi. Bunday qiyshiq burchakli aksonometrik proyeksiyalashning proyeksiyalanish burchagi φ ni chizmada hosil qilish uchun O nuqtadan R tekislikka OO_0 perpendikulyarni tushiramiz. OO_p va O_rO_o to‘g‘ri chiziqlar orasidagi φ burchak proyeksiyalash burchagi bo‘ladi.

1-teorema. Qiyshiq burchakli aksonometrik proyeksiyada o‘qlar bo‘yicha o‘zgarish koeffisientlari kvadratlarining yig‘indisi 2 soni bilan proyeksiyalash burchagi kotangensi kvadratining yig‘indisiga teng.

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 2 + ctg^2\varphi \tag{1}$$

Ushbu teoremani isboti Sh.Murodov va boshqalarning «Chizma geometriya kursi», 1988 yil chop etilgan kitobida keltirilgan.

2-teorema. To‘g‘ri burchakli aksonometrik proyeksiyalashda o‘qlar bo‘yicha o‘zgarish koeffisientlari kvadratlarining yig‘indisi 2 ga teng.

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 2. \tag{2}$$

Isboti. 13.4-rasmda P aksonometrik proyeksiyalar tekisligi va OXYZ – Dekart koordinatalar sistemasi keltirilgan.

O koordinatalar boshini P tekislikdagi ortogonal proyeksiyasi O_P nutqani A,B,C nuqtalar bilan tutashtirilsa, O_PA, O_PB, O_PC aksonometriya o‘qlari hosil bo‘ladi. Bu o‘qlarni Ox, Oy va Oz hosil qilgan burchaklarini mos ravishda α, β va γ bilan belgilaymiz. Bunda OO_PA, OO_PB, OO_PC lar to‘g‘ri burchakli uchburchaklar bo‘lganligi uchun

$O_PA:OA=\cos\alpha$, $O_PB:OB=\cos\beta$ va $O_PC:OC=\cos\gamma$ bo‘ladi. (3)

OO_P proyeksiyalash yo‘nalishi bilan Ox, Oy va Oz o‘qlar orasidagi burchaklar α_1, β_1 va γ_1 yo‘naltiruvchi burchaklar deyiladi.

Analitik geometriyadan ma’lumki, aylantiruvchi burchaklar kosinuslari kvadratlarining yig‘indisi 1 ga teng, ya’ni

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1 \tag{4}$$

Chizmadan ko‘rinib turibdiki, $\alpha_1 = 90 - \alpha$, $\beta_1 = 90 - \beta$ va $\gamma_1 = 90 - \gamma$ bo‘lgani uchun ularni (4) ifodaga qo‘yib soddalashtirilsa,

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1 \text{ bo‘ladi.} \tag{5}$$

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$, $\sin^2\beta=1-\cos^2\beta$, $\sin^2\gamma=1-\cos^2\gamma$ ekanligini e’tiborga olgan holda (5) ifodani soddalashtirishdan so‘ng quyidagicha yozish mumkin:

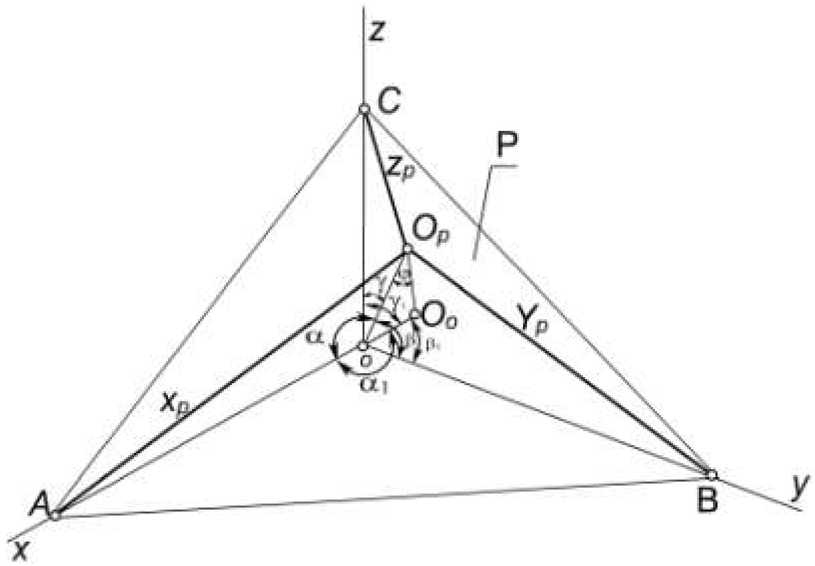
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2 \tag{6}$$

$K_x=O_PA:OA = \cos\alpha$; $K_y=O_PB:OB=\cos\beta$ va $K_z=O_PC:OC = \cos\gamma$ bo‘lgani uchun (2) ifodaning to‘g‘riligi isbotlandi.

To‘g‘ri burchakli aksonometrik proyeksiyalarda keltirilgan o‘zgarish koeffisientlari

Aksonometrik masshtablardan foydalanmasdan aksonometrik proyeksiyalar yasash juda ko‘p vaqtni oladi. Chunki dekart koordinatalar o‘qlariga parallel bo‘lgan har bir kesma aksonometriyalarning uzunliklarini hisoblab topishga to‘g‘ri keladi. Shuning uchun keltirilgan o‘zgarish koeffisientlaridan foydalaniladi. Masalan, ixtiyoriy to‘g‘ri burchakli trimetrik proyeksiyalar quyidagi o‘zgarish koeffisientlari bilan berilgan bo‘lsin:

$k_x=0.92$, $k_y=0.47$, $k_z=0.96$;



a) **b)**

13.3-rasm.

Bularni (2) ifodaga qo‘yilsa,

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=(0.92)^2+(0.47)^2+(0.96)^2=1.9889\approx 2$$

hosil bo‘ladi.

Bu koeffisientlarni $\frac{1}{0.92}=1.09$ ga ko‘paytirsak, k_x=1,0028, k_y=0,5123, k_z=l,0464 bo‘ladi. Bularni yaxlitlab $k_x^к=1$ $k_y^к=0.5$ va $k_z^к=1$ deb olsak, $k_x^к=k_x\cdot 1.09,\quad k_y^к=k_y\cdot 1.09,\quad k_z^к=k_z\cdot 1.09$ bo‘ladi. Bunda K_x^k, K_y^k va K_z^k o‘qlar bo‘yicha keltirilgan o‘zgarish koeffisientlari deb belgilangan. Bunda 1,09 keltirish koeffisienti bo‘lib, uni ***m*** bilan belgilaymiz. U holda

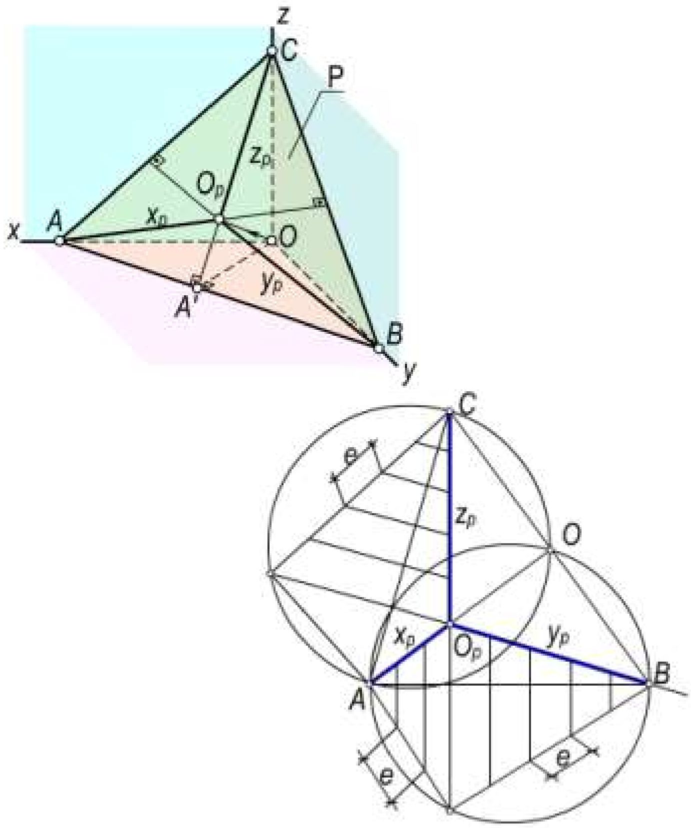
$$k_x=\frac{k_x^к}{m},\quad k_y=\frac{k_y^к}{m},\quad k_z=\frac{k_z^к}{m},\ \text{yoki}\ (k_x^к)^2+(k_y^к)^2+(k_z^к)^2=2m^2$$

hosil bo‘ladi.

Demak, keltirilgan koeffisientlari bo‘yicha bajarilgan aksonometrik proyeksiyalarda o‘qlar bo‘yicha aksonometrik masshtablar keltirish koeffisientiga proporsional ravishda o‘zgaradi.

13.5-§. To‘g‘ri burchakli aksonometriyada izlar uchburchagi va aksonometriya o‘qlari

Dekart koordinatlar sistemasi OXYZ da P aksonometriya tekisligini joylashtirganda u koordinata tekisliklari bilan kesishib ABC uchburchakni hosil qiladi. (13.4, a-rasm). Bu uchburchak aksonometriyada *izlar uchburchagi* deb yuritiladi.



a) **b)**

13.4-rasm

1-teorema. To‘g‘ri burchakli aksonometriyada aksonometriya o‘qlari izlar uchburchagining balandliklari bo‘ladi.

Isboti: Oz koordinatalar o‘qi XOY tekislikka perpendikulyar va $OO_p \perp P$ bo‘lganligi sababli $A'OC$ uchburchak tekisligi XOY va P tekisliklarga ham perpendikulyar bo‘ladi. $\Delta A'OC \perp XOY$ bo‘lganligi uchun $A'C \perp AB$ yoki $z_p \perp AB$ bo‘ladi. Xuddi shuningdek, $y_p \perp AC$ va $x_p \perp BC$ ekanligini ham isbot qilish mumkin.

2-teorema. To‘g‘ri burchakli aksonometriyada izlar uchburchagi o‘tkir burchakli uchburchakdir.

Isboti: XOY, XOZ va Y*O*Z koordinatalar tekisliklari to‘g‘ri burchakli uchyoqlikni hosil qiladi (13.4,*a*-rasm). Bu uchyoqliklarning P tekislik bilan kesishuvidan hosil bo‘lgan ABC uchburchakda

$A'C \perp AB$ bo'lishi 1-teoremadan ma'lum. Demak, $AA'C$ uchburchak to'g'ri burchakli bo'lganligi sababli $\angle CAA' < 90°$ bo'ladi. Shuningdek, $\angle A'BC < 90°$ va $\angle ACB < 90°$ bo'ladi.

3-teorema. To'g'ri burchakli aksonometriyada aksonometriya o'qlari orasidagi burchaklar o'tmas burchaklardir.

Isboti: 1-teoremada aksonometriya o'qlari izlar uchburchagining balandliklari, 2-teoremada esa izlar uchburchagining o'tkir burchakli bo'lishini isbot qilingan edi. Planimetriyadan ma'lumki, har qanday o'tkir burchakli uchburchakning balandliklari o'zaro o'tmas burchak ostida kesishadi.

To'g'ri burchakli aksonometriyada izlar uchburchagi teng tomonli uchburchak bo'lsa, bunday aksonometriya izometriya bo'ladi, teng yonli uchburchak bo'lsa - **dimetriya**, tomonlari har xil bo'lgan uchburchak bo'lsa - **trimetriya** bo'ladi.

Izlar uchburchagi ABC berilgan bo'lsa, O_pA, O_pB va O_pC, kesmalarning uzunliklarini aniqlash mumkin. (13.4,b-rasm). Izlar uchburchagida x_p, y_p va z_p o'qlar o'tkazilgan. Bunday chizmani XOY, XOZ, YOZ tekisliklar bilan ifodalangan uchyoqlikning P tekislikka to'g'ri burchakli proyeksiyasi deyish mumkin (13.5,a-rasmga qarang). Jipslashtirish usulidan foydalanib, AO_pB uchburchakning proyeksiyasiga ko'ra, uning haqiqiy kattaligi AO_pB ni yasaymiz. Buning uchun $\angle AOB = 90°$ bo'lganligi uchun diametri AB ga teng bo'lgan aylana chizamiz. O_p nuqta dan ABga perpendikulyar tushirib, O_1 nuqta ni belgilab olamiz. Uni A va V nuqtalar bilan tutashtiramiz.

$\frac{O_PA}{O_1A}$ va $\frac{O_PB}{O_1B}$ nisbatlar x_p va y_p o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffisientlari hisoblanadi:

$$k_x = \frac{O_PA}{O_1A}, \qquad k_y = \frac{O_PB}{O_1B}.$$

Xuddi shuningdek, O_2 nuqta ni aniqlab, Z_p o'q bo'yicha o'zgarish koeffisenti $k_y = \frac{O_P}{O_2C}$, ni aniqlash mumkin. Agar AO_1B va AO_2S uchburchaklarning tomonlariga O_1 va O_2 nuqtalardan boshlab natural uzunlik birliklarni qo'yib, ularning mos aksonometrik o'qlardagi proyeksiyalarini aniqlash bilan aksonometrik masshtablarni yasash mumkin.

13.6-§. Aylananing aksonometriyasi

Aylana tekisligining aksonometriya tekisligiga nisbatan vaziyatiga qarab aylana aksonometriyasi ellips, aylana yoki to'g'ri chiziq kesmasidan iborat bo'lishi mumkin. Umumiy hollarda aylananing aksonometriyasi ellips bo'ladi.

Ta'rif. Aylananing har qanday o'zaro perpendikulyar diametrlarining aksonometriyasi - ellipsning qo'shma diametrlaridan iborat bo'ladi.

Aksonometriya o'qlariga parallel bo'lgan qo'shma diametrining uzunligi aylana diametrininig mos o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffisientiga ko'paytirilganiga teng.

Qiyshiq burchakli aksonometriyada ellips kichik o'qining uzunligi 0 (nol) dan aylana diametri *d* gacha, katta o'qining uzunligi *d* dan ∞ gacha o'zgarishi mumkin.

To'g'ri burchakli aksonometriyalarda ellips katta o'qining uzunligi *d* ga, kichik o'qining uzunligi $d \cdot cos\varphi$ ga, teng. Bu yerda φ aylana tekisligi bilan aksonometrik proyeksiyalar tekisligi orasidagi burchak.

Aylananing to'g'pi bypchakli akconometpiyaci. Chizmachilikda aylananing to'g'ri burchakli aksonometriyasi bo'lgan ellipsni chizish ko'p hollarda uchraydi.

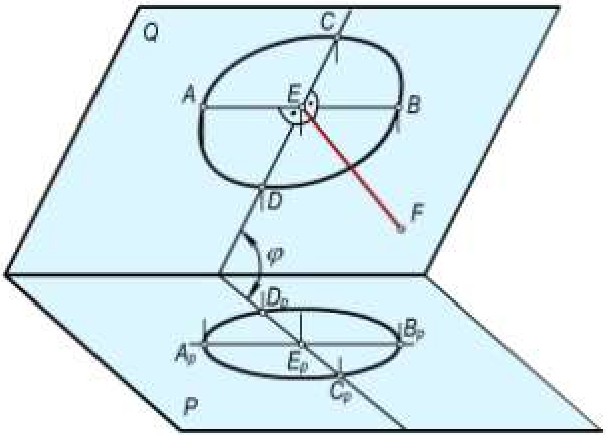
Aylana tekisligi Q aksonometrik proyeksiyalar tekisligi R bilan o‘zaro o‘tkir burchak $\varphi°$ hosil qilib kesishganda aylananing aksonometriyasi ellips bo‘ladi (13.5-rasm). Bu ellipsning katga o‘qi A_pB_p aylananing AB diametriga, kichik o‘qi C_pD_p esa aylana diametrini φ burchak kosinusiga ko‘paytirilganiga teng bo‘ladi.

$$A_pB_p=AB,\ C_pD_p=CD\cos\varphi.$$

Parallel proyeksiyalarning xossalariga ko‘ra elipsning A_pB_p katta o‘qi Q va P tekisliklarning o‘zaro kesishish chizig‘i *a* ga parallel, C_pD_p kichik o‘qi esa bu to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘ladi,ya’ni:

$$A_PB_P \parallel a,\ \ C_pD_p \perp a.$$

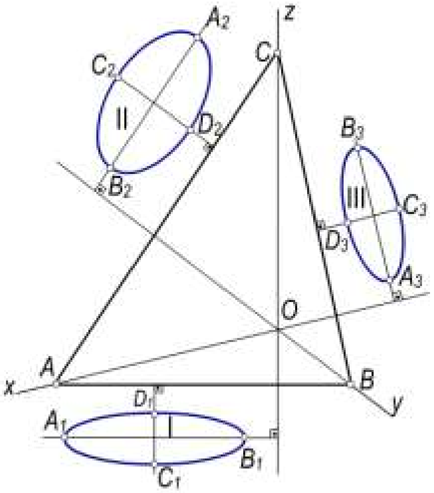
Shunday qilib, aylananing aksonometrik proyeksiyasini yasash uchun aylana markazining proyeksiyasi ye_r nuqta yasalib va bu nuqtadan ellipsning katta va kichik o‘qlari o‘tkaziladi. Ellipsni uning katta va kichik o‘qlari bo‘yicha yasash qiyin emas.



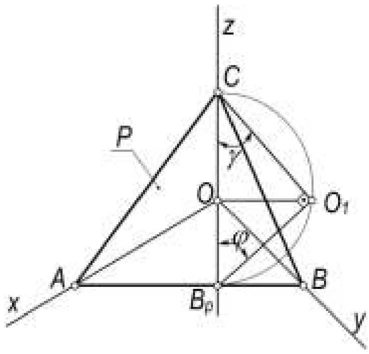
13.5-rasm.

Ko‘pincha, N , V, W yoki ularga parallel tekisliklarda yotuvchi aylanalarning aksonometrik proyeksiyalarini yasashga to‘g‘ri keladi. Bunday aylanalar aksonometriyalarini yasashni batafsil ko‘rib chiqamiz.

Ma’lumki, to‘g‘ri burchakli aksonometriyada P aksonometrik proyeksiyalar tekisligi N, V, W tekisliklar bilan kesishadi. P tekislikning bu tekisliklar bilan kesishish chiziqlari izlar uchburchagining tomonlaridan iborat bo‘ladi. Demak, N tekislikka tegishli aylanani P tekislikka proyeksiyalashdan hosil bo‘ladigan **I** ellipsning katta o‘qi izlar uchburchagining **AB** tomoniga, **V** tekislikka tegishli aylana proyeksiyasi - **II** ellipsning katta o‘qi **AC** tomoniga, **W** tekislikka tegishli aylana proyeksiyasi - **III** ellipsning katta o‘qi BC tomoniga parallel bo‘ladi (13.6-rasm). To‘g‘ri burchakli aksonometriyada aksonometriya o‘qlari izlar uchburchagining balandligidan iborat bo‘ladi. Shunga ko‘ra, **I** ellips uchun $A_pB_p \perp O_pC$, (Oz) **II** ellips uchun $A_pB_p \perp O_pB$ (Ou), **III** ellips uchun $A_pB_p \perp O_pA$ (Ox) bo‘ladi. Ellipslarning C_pD_p kichik o‘qlari A_pB_p katta o‘qlariga doim perpendikulyar bo‘ladi.



13.6-rasm.



13.7-rasm.

To‘g‘ri burchakli aksonometriyada ellipsning katta o‘qi doim tegishli aylanalarning diametrlariga teng bo‘ladi. Kichik o‘qlari aksonometriyaning turiga qarab o‘zgaradi. Kichik o‘qining uzunliklarini hisoblash mumkin. Buning uchun 13.7-rasmga murojaat qilamiz. Oz o‘qidan o‘tuvchi va izlar uchburchagining AB tomoniga perpendikulyar qilib o‘tkazilgan tekislik P tekislikni CB_p to‘g‘ri chiziq bo‘yicha, XOY tekislikni esa eng katta og‘ma chizig‘i O_1B_p bo‘yicha kesib o‘tadi. Natijada CO_1B_p to‘g‘ri burchakli uchburchakni hosil qilinadi. Bu uchburchakning CO_1B_p jipslashgan vaziyati rasmda ko‘rsatilgan. Buning uchun diametri CB_p kesma bo‘lgan yarim aylana chiziladi va O_r nuqtadan Oz o‘qqa perpendikulyar chiqarib, uning yarim aylana bilan kesishish nuqtasi O_1 ni belgilab olinadi. O_1 nuqtani C va B_p nuqtalar bilan tutashtirib γ va φ burchaklar aniqlanadi. Bu burchaklar mos ravishda P tekislik bilan Oz o‘qi va XOY tekislik orasidagi burchaklar bo‘ladi. Bundan Oz o‘qi bo‘yicha o‘zgarish koeffisienti k_z=cos γ ekanligini ma’lum. XOY tekislikning eng katta qiyalik chizig‘i O_1B_p ning yo‘nalishi bo‘yicha o‘zgarish koeffisienti k_{xoy}=cos φ bo‘ladi. To‘g‘ri burchakli CO_1B_p uchburchakdan $\cos^2\varphi = 1-\cos^2\gamma$ bo‘lgani uchun

$$k_{xOy} = \sqrt{1-k_z^2}$$

bo‘ladi.

Xuddi shuningdek, xOz va yOz tekisliklarining eng katta qiyalik chiziqlari yo‘nalishlari bo‘yicha o‘zgarish koeffisientlarining qiymatlarini keltirib chiqarish mumkin:

$$k_{xOz} = \sqrt{1-k_y^2}\ , \quad k_{yOz} = \sqrt{1-k_x^2}\ .$$

Yuqorida ellipsning kichik o‘qi C_pD_p = CDcos φ ekanligini ko‘rib chiqqan edik. Bunda CD – proyeksiyalanayotgan aylananing diametri, φ esa aylana tekisligi bilan P tekislik orasidagi burchakdir. Shunga ko‘ra:

- *XOY* tekislikka tegishli aylanani proyeksiyasi bo‘lgan ellips uchun

$$C_pD_p = CD\cdot\sqrt{1-k_z^2};$$

- *XOZ* tekislikka tegishli aylananing proyeksiyasi uchun

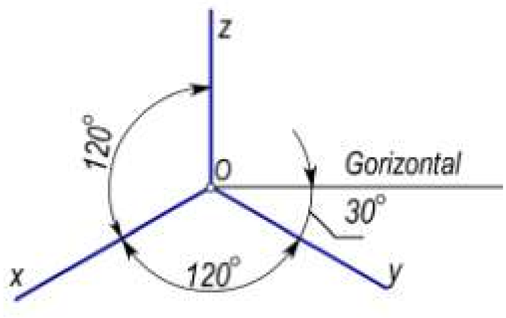
$$C_pD_p = CD\cdot\sqrt{1-k_y^2};$$

- *YOZ* tekislikka tegishli aylanani proyeksiyasi uchun

$$C_pD_p = CD\cdot\sqrt{1-k_x^2};$$

bo‘ladi.

13.7-§. To‘g‘ri burchakli standart aksonometriyalar



13.8-расм.

13.7.1. To‘g‘ri burchakli standart izometriya. To‘g‘ri burchakli aksonometriyada aksonometrik proyeksiyalar tekisligi R koordinatalar tekisliklari bilan bir xil burchak xosil qilsa, izlar uchburchagi teng tomonli bo‘lib, uning balandligi bissektrissasi xam bo‘ladi. Shuning uchun to‘g‘ri burchakli izometiryada aksonometrik o‘qlar orasidagi burchaklar 120° ga teng (13.8-rasm). Bu xolda o‘qlar bo‘yicha o‘zgarish koeffisientlari $k_x=k_y=k_z$ bo‘lib, $k_x^2+k_y^2+k_Z^2=2$ tenglikdan $3k_x^2=2$ yoki $k_x=\sqrt{\frac{2}{3}}=0.82$ hosil bo‘ladi. Demak, $k_x=k_y=k_z=0.82$ bo‘lib, u natural o‘zgarish koeffisienti deyiladi. Buyumning aniq izometriyasini yasash uchun dastlab undagi xar bir nukgani *x, y, z* koordinatalari yoki uning eni, bo‘yi va balandligini 0,82 ga ko‘paytirib, chizishga to‘g‘ri keladi.

Lekin buyumlarinig to‘g‘ri burchakli izometriyasini yasashda o‘qlar bo‘yicha o‘zgarish koeffisientlari 1 ga teng qilib olinsa, chizish sur’ati tezlashadi. Bu holda $k_x=k_y=k_z=1$ bo‘lib, ular izometriyada keltirilgan o‘zgarish koeffisientlari deb yuritiladi. Bunda keltirish koeffisienti $m=\frac{1}{0.82}=1.22$ ga teng bo‘lib, buyumning aksonometriyasi asliga nisbatan 1,22 marta kattalashadi.

13.9-rasmda kub va uning yoqlariga ichki chizilgan aylanalarning izometriyalari bo‘lgan ellipslar tasvirlangan. Aylananing tekisliklari (kubning yoqlari) H, V va W proyeksiyalar tekisliklariga parallel. Natural o‘zgarish koeffisientlari 0,82 bo‘yicha ellipslarning katta va kichik o‘qlari quyidagicha bo‘ladi:

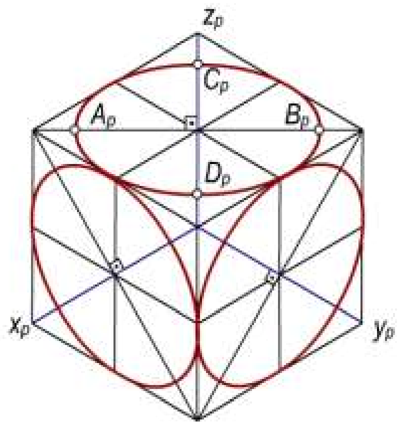
$$A_pB_p=d,\quad C_PD_P=\sqrt{1-0.82^2}\,d=0.58\cdot d$$

Bunda *d* - berilgan aylana diametri.

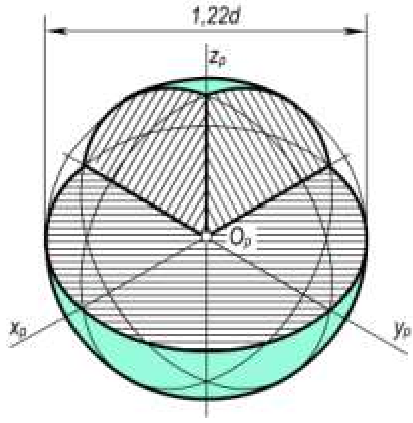
Keltirilgan o‘zgarish koeffisientlari bo‘yicha stardant izometriyada ellipslarning katta o‘qlari A_pV_r= l,22*d* ga kichik o‘qlari C_pD_p=1,22 0,58*d* = 0,71*d* ga teng bo‘ladi.

Shunday qilib, diametri *d* ga teng bo‘lgan aylanalar gorizontal, frontal va profil yoki ularga parallel bo‘lgan tekisliklarda joylashgan bo‘lsa, bunday aylanalarning izometriyasidagi ellipslarning A_pB_p katta o‘qi *d* ga, C_pD_p kichik o‘qi esa 0,58*d* ga teng, keltirilgan o‘zgarish koeffisientlar bo‘yicha esa A_pB_p=l,22*d*, C_pD_p= 0,71*d* bo‘ladi.

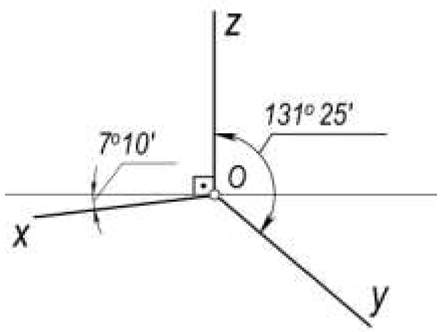
13.10-rasm to‘g‘ri burchakli izometriyada tasvirlangan sferaning diametri l,22*d* ga teng. Bunda *d* sferaning diametri.



13.9-rasm.



13.10-rasm.



13.11-расм.

13.7.2. To‘g‘ri burchakli standart dimetriya. Agar aksonometrik proyeksiyalar tekisligi koordinatalar tekisliklaridan ikkitasi bilan bir xil burchak hosil qilsa, bunday aksonometriya to‘g‘ri burchakli dimetriya deyiladi. Bunda o‘qlar bo‘yicha o‘zgarish koeffisientlari $k_x=k_u\neq k_z$, $k_x= k_z \neq k_y$ yoki $k_y=k_z\neq k_x$ bo‘lishi mumkin.

To‘g‘ri burchakli dimetriyaning juda ko‘p turlari mavjud bo‘lib, ulardan aksonometrik o‘qlarning o‘zaro joylashuvi 13.11-rasmda ko‘rsatilgan vaziyatdagi holati standartda tavsiya qilingan. Bu o‘qlarni α va β burchaklarning tangenslari orqali oson yasash mumkin, chunki $tg\alpha=\frac{1}{8}$, $tg\beta=\frac{7}{8}$. Standart dimetriyada o‘qlar bo‘yicha o‘zgarish koeffisientlarining $k_x=k_z\neq k_y$ holi qabul qilinib $k_x= k_z =2k_y$ yoki $k_y = 1/2\ k_x$ deb olingan. U holda $k^2_x+k^2_y+k^2_z=2$ tenglikka yuqoridagi qiymatlarni qo‘yib, $k_x^2+k_x^2+\frac{k_x^2}{4}=2$ yoki $9k_x^2=8$ ga ega bo‘lamiz. Bundan, $k_x=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx 0.94$ ni hosil qilamiz. Demak, $k_x\approx0,94$; $k_z\approx0,94$; $k_y\approx0,47$ hosil bo‘ladi.

Amaliyotda to‘g‘ri burchakli dimetrik proyeksiyalarni yasash uchun quyidagi keltirilgan o‘zgarish koeffisientlaridan foydalaniladi:

$$k_x=1,\quad k_x=1,\quad k_x=0.5$$

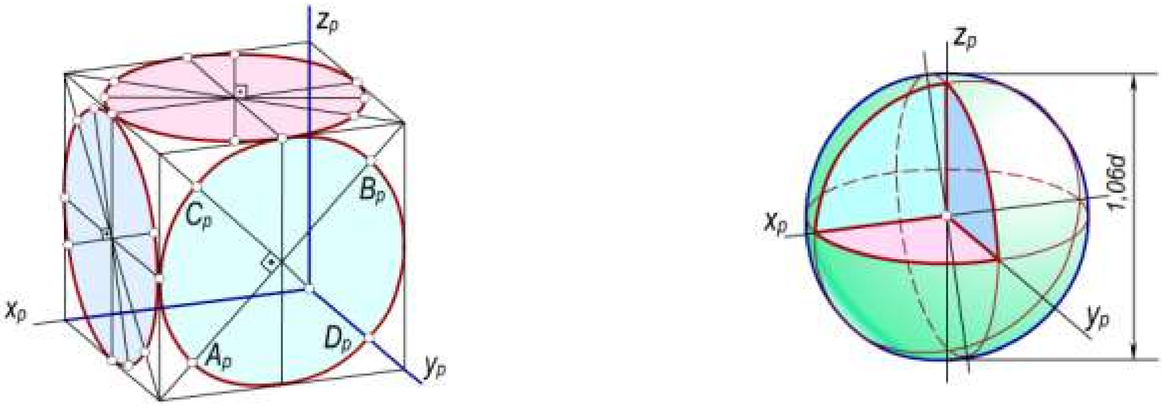
U holda keltirish koeffisienti $m=\frac{1}{0.94}=1.06$ bo‘ladi. Bu holda buyumning aksonometriyasi asliga nisbatan 1,06 marta kattalashadi.

13.12,a-rasmda to‘g‘ri burchakli dimetriyada kub va uning yoqlarida ichki chizilgan aylanalarning dimetrik proyeksiyalari bo‘lgan ellipslar tasvirlangan.

To‘g‘ri burchakli standart dimetriya uchun $k_x= k_z =0,94$ va $k_Y =0,47$ bo‘lganligi uchun H(XOY) hamda W(YOZ) tekisliklarga tegishli aylananing proyeksiyalari bo‘lgan ellipslar uchun

$$C_pD_p=CD\cdot\sqrt{1-0.94^2}=0.33\cdot d$$

bo‘ladi. V(XOZ) tekislikka tegishli aylananing proyeksiyasi ellips uchun esa $C_pD_p = d\sqrt{1-0.47^2} = 0.88 \cdot d$ bo‘ladi.



a) **b)**

13.12-rasm.

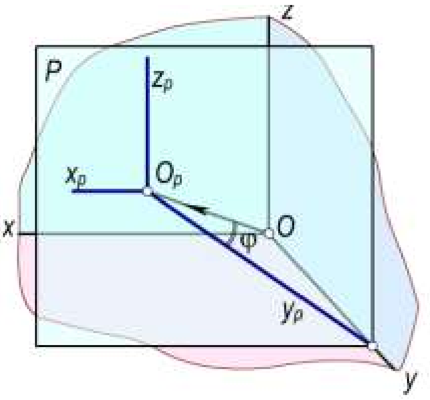
Keltirilgan o‘zgirish koeffisientlari bo‘yicha XOY va YOZ tekisliklariga parallel bo‘lgan yoqlardagi ellipslar (aylananing dimetriyasi) uchun katta o‘qlar A_pB_p=l,06*d*, kichik o‘qlar C_pD_p=0,35*d* bo‘ladi. Chunki C_pD_p=1,06×0,33*d*. XOZ tekislikka parallel bo‘lgan yoqdagi ellips uchun A_pB_p=l,06*d*, C_pD_p=0,93*d*. Chunki C_pD_p=l,06×0,88*d*=0,93*d*.

Sferani to‘g‘ri burchakli dimetriyasini keltirilgan o‘zgarish koeffisientlari bo‘yicha chizish, 13.12,b-rasmda ko‘rsatilgan. Sferaning dimetriyasi D_1 diametrli aylana bo‘lib, D_1 = 1,06*d* ga teng.

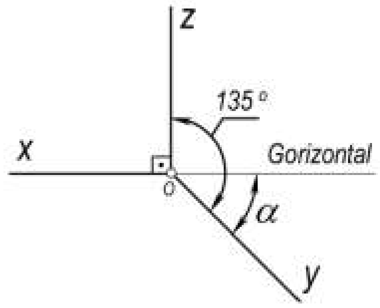
Diametri *d* ga teng aylanalar gorizontal va profil tekisliklarda joylashgan bo‘lsa, ularning dimetriyasidagi ellipslarning katta va kichik o‘qlari mos ravishda 1,06*d* va 0,35*d* ga teng. Agar diametri *d* ga teng aylana frontal tekisliqda joylashgan bo‘lsa, bunday aylananing dimetriyasidagi ellipsning katta va kichik o‘qlari mos ravishda 1,06*d* va 0,94*d* ga teng bo‘ladi.

13.8-§. Qiyshiq burchakli standart aksonometriyalar

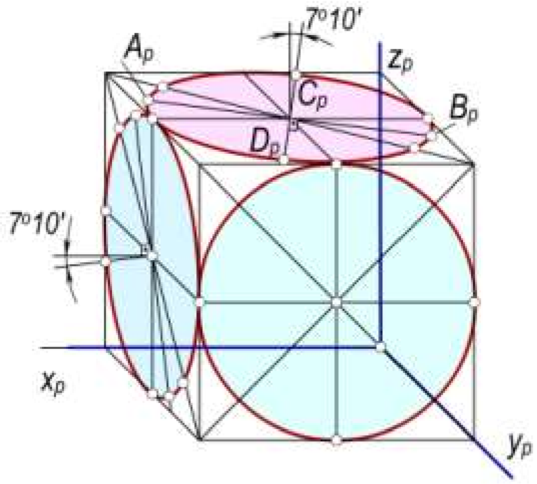
13.8.1. Qiyshiq burchakli standart frontal dimetriya. Buyumlarning yaqqol tasvirlarini qiyshiq burchakli aksonometriyada yasash uchun qiyshiq burchakli standart izometriya va dimetriyalardan foydalaniladi. Bunda R aksonometrik proyeksiyalar tekisligini xususiy xolda, ya’ni koordinata tekisliklarining birortasiga parallel qilib olinadi. Bu holda proyeksiyalash yo‘nalishini aksonometrik tekislikka perpendikulyar qilib olib bo‘lmaydi. Chunki bunda koordinata o‘qlaridan biri nuqta bo‘lib proyeksiyalanadi. Bu esa tasvir yaqqoligini ta’minlamaydi. Agar R aksonometriya tekisligini xOz koordinatalar tekisligiga parallel qilib olinsa (13.13-rasm) $O_rx_r \| Ox$, $O_pz_p \| Oz$, bo‘lganligi uchun, O_rx_r va O_pz_p o‘qlar o‘zaro perpendikulyar bo‘lib, bu o‘qlar bo‘yicha o‘zgarish koeffisientlari k_x=k_z=1 bo‘ladi, k_y esa OO_rV to‘g‘ri burchakli uchburchaqdan topiladi va $k_y = \dfrac{OO_p}{OB} = ctg\,\varphi$ ga teng bo‘ladi. Bu holda xOz koordinatalar tekisligi va unga parallel bo‘lgan barcha tekisliklarda joylashgan shakllar aksonometriya tekisligiga o‘zining kattaligicha proyeksiyalanadi. Bu esa predmet yaqqol tasvirini yasashni osonlashtiradi.



13.13-rasm.



13.14-rasm.



13.15-расм.

Agar φ=45° bo‘lsa, k_y=ctg45°=l bo‘lgani uchun aksonometriya o‘qlari bo‘yicha o‘zgarish koeffisientlari k_x=k_z= 1 va k_y= 1 bo‘ladi. Bu xolda qiyshiq burchakli frontal izometriya hosil bo‘ladi.

Amalda O_py_p o‘qi O_pX_p o‘qining davomidagi gorizontal to‘g‘ri chiziq bilan hosil qilgan burchagi α ning 30° 45°, 60° vaziyatlari olinadi (13.14-rasm) va bu o‘q bo‘yicha o‘zgarish koeffisienti k_y=0,5 qabul qilingan k_x=k_z=1, k_y=0,5 bo‘yicha chizilgan aksonometriyalar *qiyshiq burchakli frontal dimetriyalar yoki kabinet proyeksiyalar* deyiladi.

Qiyshiq burchakli frontal dimetriyada aksonometriya o‘qlarining vaziyati 13.14-rasmda ko‘rsatilganidek qabul qilingan, ya’ni XOZ=90°, YOZ=135° O‘zgarish koeffisienlari esa k_x=k_z=1 va k_y = 0,5 bo‘ladi.

13.15-rasmda kub va uning yoqlaridagi ichki chizilgan aylanalarning aksonometriyalari qiyshiq burchakli frontal dimetrik proyeksiyada tasvirlangan. Bunda xOz tekislikka parallel yoqda yotgan aylana dimetriyadaga aylanaga teng bo‘lib proyeksiyalanadi. Qolgan yoqlardagi aylanalar, ellipslar bo‘lib proyeksiyalanadi. Bu ellipslar o‘qlar keltirilgan o‘zgarish koeffisientlari bo‘yicha 1,06 d va 0,33d ga teng bo‘ladi.

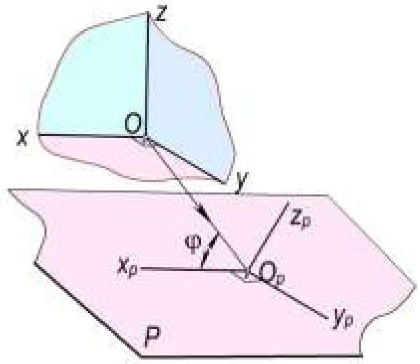
13.8.2. Qiyshiq burchakli standart frontal izometriya. Qiyshiq burchakli frontal izometriyada k_x=k_z=k_y=1 bo‘lganligi uchun $k_x^2+k_y^2+k_z^2=2+ctg^2\varphi$ dan $1^2+1^2+1^2=2+stg^2\varphi$ yoki $ctg^2\varphi$ =1 bo‘ladi.

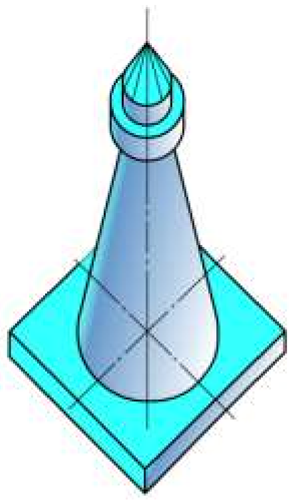
Bundan φ°=arcctg1=45°. Demak, qiyshiq burchakli izometriyada φ proyeksiyalash burchagi 45° ga teng ekan.

Qiyshiq burchakli dimetriya uchun k_x=k_z=1 va k_y=0,5 bo‘lgani uchun, $1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2=2+ctg^2\varphi$ yoki $ctg^2\varphi=\frac{1}{4}$; bundan $ctg^2\varphi=\frac{1}{4}$; bo‘lib, $\varphi^\circ=arcctg\frac{1}{2}\approx 63^\circ$ bo‘ladi.

Qiyshiq burchakli dimetriyada proyeksiyalash burchagi φ=63° ga teng bo‘ladi.

13.8.3. Qiyshiq burchakli gorizontal izometriya (zenit aksonometriyasi). Agar P aksonometriya tekisligi XOY koordinatalar tekisligiga parallel bo‘lsa, u holda hosil bo‘lgan tasvir gorizontal izometriya (zenit aksonometriyasi) deyiladi (13.16-rasm). Bunda φ burchak ixtiyoriy bo‘lishi mumkin.





13.16-rasm. **13.17-rasm.**

O_pX_p va O_pY_p o‘qlar bo‘yicha o‘zgarish koeffisientlari k_x=k_y=1 bo‘lib, O_pz_p o‘q bo‘yicha o‘zgarish koeffisienti k_z- esa 0,7 dan 1 gacha deb olinishi mumkin. Ko‘p hollarda k_z=l deb olinadi.

Zenit aksonometriyasi juda katta qurilish maydonida joylashgan binolar, yo‘llar, aerodromlar va hokazolarning o‘zaro joylashuvini kichik masshtabda ko‘rsatish uchun foydalaniladi. 13.17-rasmda minoraning zenit aksonometriyasi tasvirlangan. Minoraning plani α burchakka burilgan.

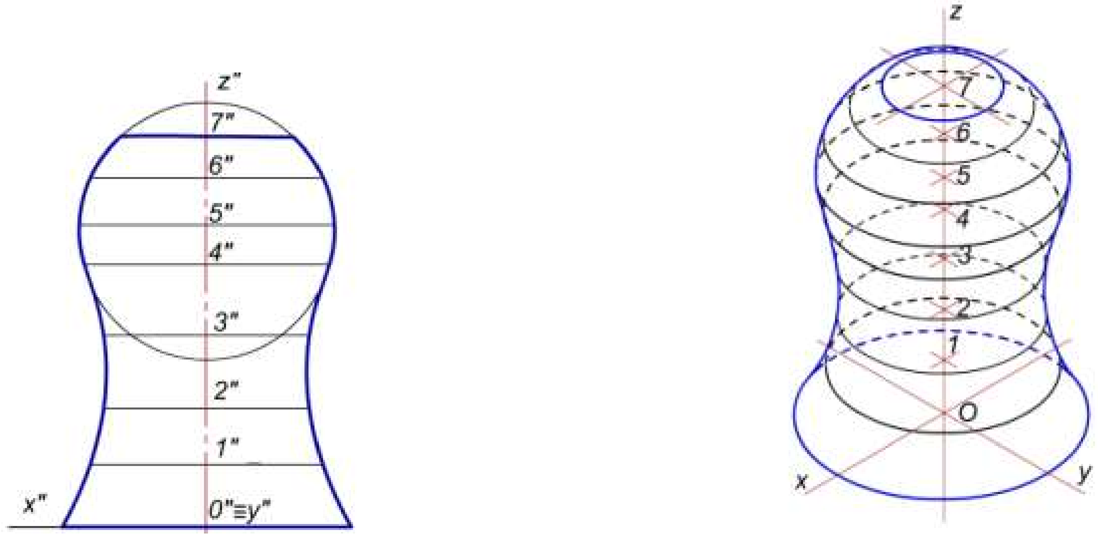
13.9-§. Aylanish sirtlarining ocherklarini aksonometriyada yasash

13.9.1. Parallellar usuli. Bu usul asosan aylanish o‘qi bo‘ylab cho‘zilgan aylanish sirtlarning aksonometriyalarini yasash uchun qo‘llaniladi. 13.18,*a*-rasmdagi chizmada berilgan aylanish sirtining bir necha paralellari (aylanalari) o‘tkaziladi. Bu paralellarining aksonometriyalari bo‘lgan ellipslar chiziladi. Bu ellipslarni o‘rab oluvchi *m* egri ch*iziq* aylanish sirtining ocherki bo‘ladi. Sirtning aksonometriyasi 13.18,b-rasmda to‘g‘ri burchakli izometriyada yasalgan.

13.9.2. Meridianlar usuli. Aylanish o‘qlari bo‘yicha siqiq bo‘lgan sirtlarning aksonometriyasini yasashda bu usuldan foydalanish mumkin. Sirtning bir necha meridianlari o‘tkazilib, ularning aksonometriyasi yasaladi. 13.19,*a*-rasmda tor sirtining aksonometriyasi to‘g‘ri burchakli izometriyada ko‘rsatilgan. Bunda tor meridianlari(aylana)larning aksonometriyalari bo‘lgan ellipslarni o‘rab oluvchi chiziq aylanish sirtining ocherkini ifodalaydi.

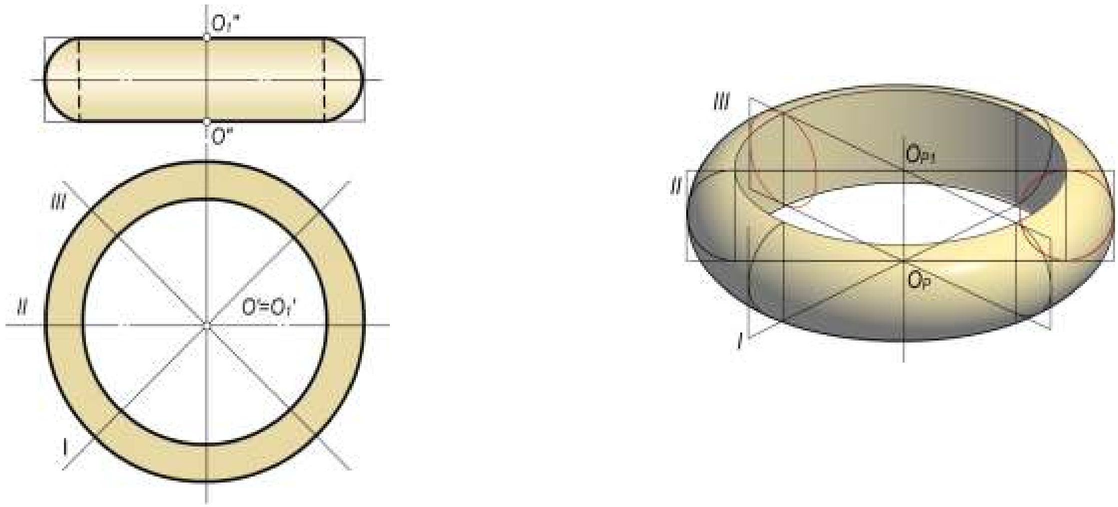
13.20,*a*-rasmda berilgan yarim tor (halqa) ning aksonometriyasini yasash 13.20,*b*-rasmda to‘g‘ri burchakli izometriyada bajarilgan.

Bunday torning aksonometriyasini yasash uchun,dastlab H tekislikka tegishli bo‘lgan,markazlari A(A′,A″) va B(B′,B″) nuqtalarda bo‘lgan ikki yasovchi aylananing aksonometriyalari bo‘lgan ellipslar chiziladi. So‘ngra bu ellipslar markazlari A_p va B_p nuqtalar orqali o‘tuvchi frontal vaziyatdagi A″B″ yarim aylananing aksonometriyasi chiziladi. Bu yarim aylana tor yasovchilari markazlari harakat qiluvchi chiziq bo‘lib, unda bir necha (etarli miqdorda) nuqtalar olinadi. Markazlari mazkur nuqtalarda bo‘lgan m(m′,m″) kabi bo‘lgan ellipslar yasovchi aylanalarning aksonometriyalari chiziladi. Ushbu aylanalar aksonometriyalarini o‘rab (qamrab) oluvchi egri chiziq torning konturi hisoblanadi. Yasovchi aylanalarning aksonometriyalari o‘rniga ushbu markazlar bo‘yicha radiusi yasovchi aylana radiusi bilan bir xil bo‘lgan sferalarning aksonometriyalari (aylanalar) chizilsa ham bo‘ladi.



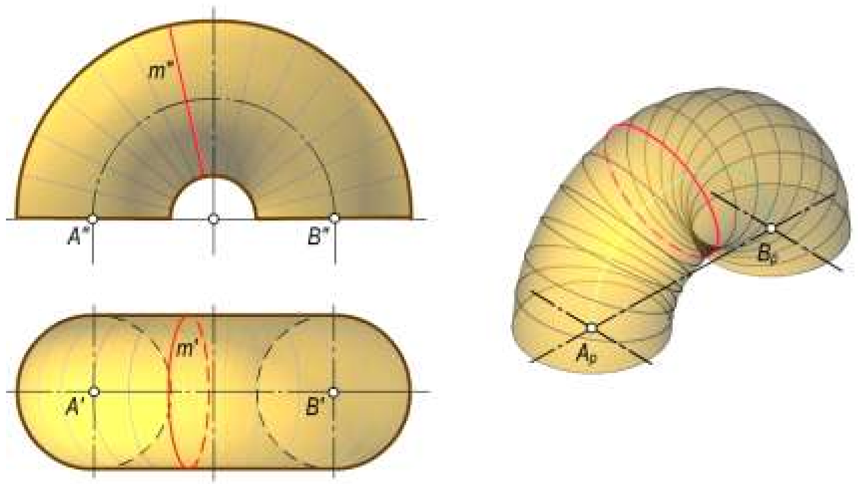
a) b)

13.18-rasm.



a) b)

13.19-rasm.



a) b)

13.20-rasm.

13.10-§. Aksonometriyada pozision masalalarni yechish

Aksonometrik proyeksiyalarda geometrik figuralarning o‘zaro joylashuviga qarab turli pozision masalalar ortogonal proyeksiyalardagi qoidalarga asoslanib yechish.

Bunda geometrik figuralarning aksonometriyasi hamda ularning ikkilamchi proyeksiyalaridan biri berilishi kerak. Ko‘pincha figuralarning gorizontal tekislikdagi ikkilamchi proyeksiyalaridan foydalaniladi.

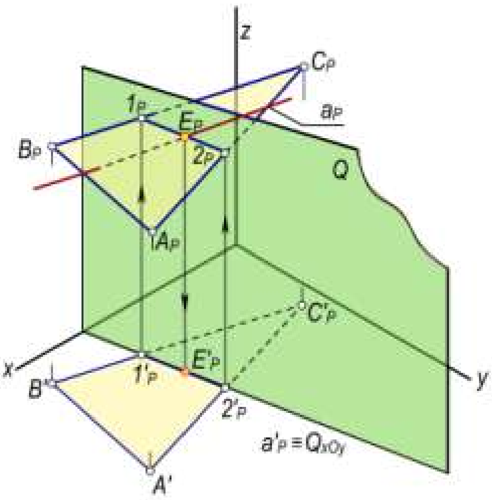
1-masala. Berilgan *a* to‘g‘ri chiziqning Q tekiclik bilan kesishish nuqtasini yasalsin.

Yechish. ABC uchburchak tekisligining $A_pB_pC_p$ va *a* to‘g‘ri chiziqning a_p proyeksiyasi hamda ularning ikkilamchi proyeksiyalari $A_pB_pC_p$, a'_p berilgan bo‘lsin (13.21- rasm). Ularning kesishish nuqtasini yasash algoritmi quyidagicha bo‘ladi:

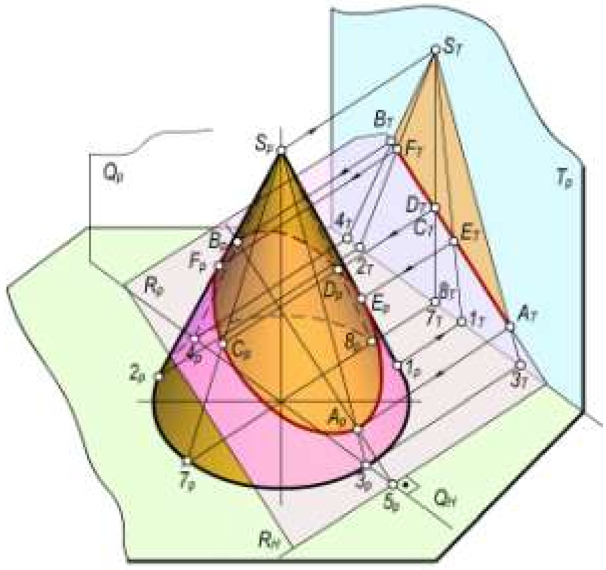
- a_p (a_p') to‘g‘ri chiziq orqali $Q_p$tekislikni O_Pz_P o‘qqa parallel qilib o‘tkaziladi;
- Bu tekislik ABC tekislikning $A_PB_PC_P$ ikkilamchi proyeksiyasi bilan $1_p{}'$va $2_p{}'$ nuqtalarda kesishadi. Bu nuqtalardan O_pz_p o‘qqa parallel chiziqlar chiqarib, 1_p va 2_p nuqtalarni B_pC_p va A_pB_p tomonlar ustida belgilanib, ular o‘zaro tutashtiriladi;
- So‘ngra a_p va 1_p 2_p to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro kesishuv nuqtasi ye_p belgilab olinadi. Uning ikkilamchi proyeksiyasi ye_R' nuqta bo‘ladi.

2-masala. Konusning tekislik bilan kesishish chizig‘i yasalsin.

Yechish. To‘g‘ri burchakli izometriyada tasvirlangan F konusning R tekislik bilan kesishish chizig‘ini yasash algoritmi qo‘yidagicha bajariladi. T⊥P tekislikka proyeksiyalanadi (13.22-rasm). U holda kesishish chizig‘ining T_P tekislikdagi proyeksiyasi A_TB_T to‘g‘ri chiziq kesmasi bo‘ladi. Bu kesmada ixtiyoriy $C_T \equiv D_T$ nuqtalarni belgilab, ular orqali $C_T7_T=C_T8_T$ yasovchilar o‘tkaziladi. Bu yasovchilarning C_P8_P aksonometriyalari o‘tkazilib, ularda C_T va D_T nuqtalar belgilab olinadi. Boshqa nuqtalarning aksonometriyalari ham xuddi shunday topiladi. Kesishish chizig‘ining konus ocherkiga urinish nuqtalari ye_R va F_P lar quyidagicha topiladi. Konusning ocherkini ifodalovchi C_Pl_P va C_P2_P yasovchilarning T_P tekislikdagi C_Tl_T va C_T2_T preksiyalarini o‘tkaziladi. Ularning A_TB_T kesma bilan kesishish nuqtalari E_T va F_T larni belgilab olinadi. Ye_T va F_T nuqtalardan teskari yo‘nalishda nurlar o‘tkazib, ularning mos ravishda C_P1_P va C_P2_P yasovchilar bilan kesishish nuqtalari E_P va F_P larni belgilab olinadi. Kesimning A_P - quyi va B_P - yuqori nuqtalarni ortogonal proyeksiyalarga oid qoidalarga asoslanib topish mumkin. Buning uchun konusning i_P o‘qidan o‘tuvchi va berilgan P_P tekislikka perpendikulyar Q_P tekislikdan foydalanamiz. Bu tekislik konusni C_P3_P va C_P4_P yasovchilari, berilgan tekislikni esa 5_P6_P to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesadi. C_P3_P va C_P4_P yasovchilarning 5_P6_P to‘g‘ri chiziq bilan kesishishidan A_P va B_P nuqtalar hosil bo‘ladi. Hosil bo‘lgan nuqtalarni tekis egri chiziq bilan tutashtirib, konusning P tekislik bilan kesishish chizig‘ini yasaladi.



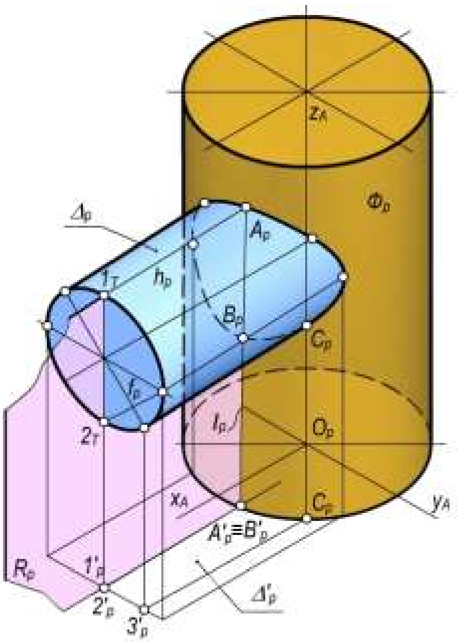
13.21-rasm.



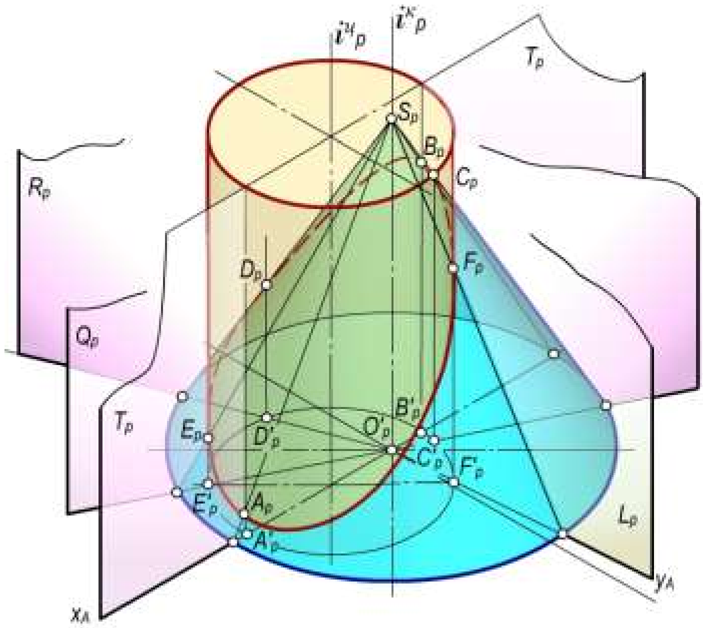
13.22-rasm.

Sirtlarning o‘zaro kesishish chiziqlarini yasash. Ortogonal proyeksiyalardagi singari aksonometriyada ham sirtlarning o‘zaro kesishish chiziqlarini yasashda yordamchi kesuvchi tekisliklardan foydalanish. Bunda kesuvchi tekisliklar berilgan sirtlar bilan oddiy chiziqlar bo‘yicha kesishadi. Bu oddiy chiziqlar o‘zaro kesishib sirtlarning kesishish chizig‘iga tegishli nuqta larni hosil qiladi.

Yordamchi tekislikni yasalishi oson bo‘lgan chiziqlar hosil bo‘ladigan qilib tanlanadi. Bu shartga ko‘ra ba’zi masalalarni yechishda qo‘shimcha proyeksiyalashdan ham foydalanish mumkin . Quyidagi 13.23 va 13.24-rasmlarda tasvirlangan ikki sirtning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasashda yordamchi kesuvchi tekisliklardan foydalanilgan. 13.23-rasmda gorizontal va vertikal vaziyatda joylashgan silindrlarning o‘zaro kesishuv chizig‘ini yasash ko‘rsatilgan. Bu holatda yordamchi kesuvchi tekisliklar har ikkala silindrni yasovchilari bo‘yicha kesadigan qilib o‘tkazilgan. Silindrlar yasovchilari o‘zaro kesishib izlanayotgan egri chiziqqa tegishli nuqtalarini hosil qiladi. 13.24-rasmda esa aylanish o‘qlari o‘zaro parallel bo‘lgan vertikal vaziyatdagi silindr va konuslarning aksonometriyalari berilgan. Ularning o‘zaro kesishish chizig‘ini yasash uchun ham yordamchi tekisliklar ularning yasovchilari bo‘yicha kesishadigan qilib o‘tkazilgan. Bu tekisliklar konus sirtini o‘qidan o‘tkazilgan. Ular konus va silindrni yasvochilari orqali kesadi. Bu yasovchilarning kesishish o‘zaro nuqtalari ikki sirtning kesishi chizig‘iga tegishli nuqtalar bo‘ladi.



13.23-rasm.



13.24-rasm.

Nazorat savollari

1. Aksonometrik proyeksiyalar qanday qanday hosil qilinadi?
2. Aksonometriya asosiy teoremasining mohiyati nimadan iborat?
3. O‘qlar bo‘yicha o‘zgarish koeffisientlarini ta’riflab bering.
4. Haqiqiy va keltirilgan o‘zgarish koeffisientlarning farqini tushuntiring.
5. Izlar uchburchagi nima va u haqidagi teoremalarning qaysi birini bilasiz?
6. Proyeksiyalash burchagi va o‘zgarish koeffisientlari orasida qanday bog‘lanish bor?
7. Aylananing aksonometriyasi haqida nimalar bilasiz?
8. Standart aksonometriyaning qanday turlarini bilasiz?
9. To‘g‘ri burchakli standart izometriya haqida nimalarni bilasiz?
10. To‘g‘ri burchakli standart dimetriyani ta’riflab bering?
11. Qiyshiq burchakli standart dimetriya (kabinet proyeksiya) haqida nimalar bilasiz?
12. Zenit aksonometrik proyeksiyalar qanday maqsadlarni ko‘zlab chiziladi?
13. Aksonometrik proyeksiyalarda pozision masalalarni yechish uchun nimalarga e’tibor beriladi?

ILOVA

Mazkur kitobning ilova bo‘limida Chizma geometriyada masalalar echishda qo‘llaniladigan geometrik o‘rinlar Chizma geometriya fanining rivojlanishidagi qisqacha tarixiy ma’lumotlar va darslikda uchraydigan atamalar va tushunchalarga izohli lug‘atlar berilgan.

1-§. GEOMETRIK O‘RINLAR

Ba’zi bir geometrik masalalarni echish geometirik o‘rinlarni qo‘llash bilan bajariladi.

Nuqta, to‘g‘ri chiziq, egri chiziq va sirtlarga tegishli bo‘lgan pozitsion va metrik masalalar shartlarini qanoatlantiruvchi masalani berilish shartiga geometrik o‘rinlar tanlanadi.

Ta’rif. Fazodagi elementlarning (nuqta, to‘g‘ri chiziq, tekislik,) geometrik o‘rni deb biror aniq shartlarni qanoatlantiruvchi shu elementlarning to‘plamiga aytiladi.

Quyida ba’zi bir geometrik o‘rinlarni keltiramiz.

1. Berilgan elementlardan bir xil uzoqlikdagi masofadagi geometrik o‘rinlar.

1.1. Berilgan O nuqtadan bir xil L uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni: tekislikda markazi O nuqtada bo‘lgan va radiusi R masofasiga teng bo‘lgan aylana bo‘ladi. Fazoda esa markazi O nuqtada bo‘lgan R radiusli sfera bo‘ladi.

1.2. Berilgan ikki A va B nuqtalardan bir µil uzoqlikdagi nuqalarning geometrik o‘rni: tekislikda berilgan ikki nuqtani tutashtiruvchi AB kesmani o‘rtasidan o‘tuvchi perpendikulyar to‘g‘ri chiziq bo‘ladi. Fazoda esa AB kesma o‘rtasidan o‘tuvchi va unga perpendikulyar tekislik bo‘ladi.

1.3. Bir to‘g‘ri chiziqda yotmovchi uchta nuqtadan bir xil uzoqlikdagi nuqtaning geometrik o‘rni: tekislikda berilgan uch nuqtadan o‘tuvchi aylana markazi bo‘ladi. Fazoda esa berilgan uch nuqtadan o‘tuvchi aylana markazidan o‘tib, aylana tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan hamda nuqtalarni birlashtiruvchi vatarlarini o‘rtasidan o‘tuvchi ikki tekislikni kesishish chiziq bo‘ladi.

1.4. Bir tekislikda yotmovchi to‘rtta nuqtadan bir xil uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni berilgan nuqtalar yotgan shar sirtining markazi bo‘ladi.

1.5. Berilgan to‘g‘ri chiziqdan L masofadagi nuqtalarning geometrik o‘rni bu o‘qi berilgan to‘g‘ri chiziq bo‘lgan aylanma silindr sirtining nuqtalari bo‘ladi.

1.6. Ikki parallel to‘g‘ri chiziqlardan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni: tekislikda berilgan to‘g‘ri chiziqlarni ixtiyoriy ikki nuqtasini tutashtiruvchi kesmalarning o‘rtasidan o‘tuvchi va berilgan to‘g‘ri chiziqlarga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq bo‘ladi.

1.6a. Fazoda berilgan to‘g‘ri chiziqlarni ixtiyoriy ikki nuqtasini tutashtiruvchi kesmalarning o‘rtasidan o‘tuvchi va parallel to‘g‘ri chiziqlar tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan tekislik bo‘ladi.

1.7. Uchta o‘zaro parallel to‘g‘ri chiziqlardan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni, yasovchilari shu to‘g‘ri chiziqlar bo‘lgan aylanma silindr sirtining o‘qi bo‘ladi.

1.8. Ikki kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlardan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni: tekislikda to‘g‘ri chiziqlar tashkil qilgan qo‘shni burchaklarning perpendikulyar bissektrissalari bo‘ladi. Fazoda ikki kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar tashkil qilgan qo‘shni burchaklar bissektrisalaridan o‘tuvchi va to‘g‘ri chiziqlar tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan ikki o‘zaro perpendikulyar tekislik bo‘ladi.

1.9. Bir nuqtada o‘zaro kesshuvchi to‘g‘ri chiziqlardan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni; uchi berilgan to‘g‘ri chiziqlarni kesishish nuqtasi bo‘lgan aylanma konusning o‘qi bo‘ladi.

1.10. Berilgan tekislikdan barobar masofadagi nuqlarning geometrik o‘rni, bu-ikki o‘zaro parallel tekislik bo‘lib, ular berilgan tekislikdan berilgan masofada joylashgan bo‘ladilar.

1.11. Ikki parallel tekisliklardan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni, bu berilgan tekisliklarga parallel bo‘lgan tekislik bo‘lib, u berilgan tekisliklarning ihtiyoriy ikki nuqtasini birlashtiruvchi kesmalarning o‘rtasidan o‘tadi.

1.12. Ikki kesishuvchi tekisliklardan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni: tekisliklar tashkil qilgan ikki yoqli burchaklarni teng ikkiga bo‘luvchi o‘zaro perpendikulyar bo‘lgan 2 ta tekislik bo‘ladi.

1.13. R radiusli aylanadan L masofadagi nuqtalarning geometrik o‘rni R<L bo‘lganda R+L va R>L bo‘lganda R–L radiusli konsentrik aylanalar bo‘ladi.

1.14. R_1 Radiusli sferadan masofadagi nuqtalarning geometrik o‘rni $R_1<L_1$ bo‘lganda R_1+L_1 va $R_1>L_1$ bo‘lganda, R_1-L_1 radiusli konsentrik sferalar bo‘ladi.

1.15. Berilgan a to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lib, undan L masofadagi to‘g‘ri chiziqlarning geometrik o‘rni, o‘qi a to‘g‘ri chiziq bo‘lib va radiusi R=L bo‘lgan aylanma silindrning yasovchilari bo‘ladi.

1.16. Berilgan A nuqtadan bir xil h masofadagi parallel to‘g‘ri chiziqlarning geometrik o‘rni, radiusi R=L bo‘lgan aylanma silindrining yasovchilari bo‘ladi.

1.17. Berilgan a to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lmagan va undan h masofadagi to‘g‘ri chiziqlarning geometrik o‘rni, o‘qi a to‘g‘ri chiziq bo‘lib va radiusi R=L bo‘lgan aylanma silindrga urinma bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar bo‘ladi.

1.18. Berilgan A nuqtadan o‘tib, berilgan a to‘g‘ri chiziqdan L masofadagi to‘g‘ri chiziqlarning geometrik o‘rni o‘qi a to‘g‘ri chiziq bo‘lgan radiusi R=L bo‘lgan aylanma silindrga berilgan A nuqtadan urinib o‘tuvchi ikki tekislik bo‘ladi.

1.19. Berilgan R tekislikdan L masofadagi to‘g‘ri chiziqlarning geometrik o‘rni, R-dan L masofada joylashgan ikki o‘zaro parallel tekislik bo‘ladi.

1.20. Berilgan O nuqtadan bir xil L masofadagi tekisliklarning geometrik o‘rni, markazi O nuqtada bo‘lgan va radiusi R=L bo‘lgan shar sirtiga urinma tekisliklar to‘plami bo‘ladi.

1.21. Berilgan A. nuqtadan o‘tuvchi va biror O nuqtadan bir xil L masofadagi tekisliklarning geometrik o‘rni, A nuqtadan o‘tuvchi, markazi O nuqtada va radiusi RqL bo‘lgan shar sirtiga urinma bo‘lgan tekisliklar to‘plami bo‘ladi.

1.22. Berilgan *a* to‘g‘ri chiziqqa parallel va undan bir xil masofadagi tekisliklarning geometrik o‘rni o‘qi a to‘g‘ri chiziq radiusi R=L bo‘lgan aylanma silindr sirtiga urinuvchi tekisliklar to‘plami bo‘ladi.

2. Berilgan to‘g‘i chiziq va tekislikka bir xil qiyalikdagi to‘g‘ri chiziq va tekisliklarning geometrik o‘rinlari.

2.1. Berilgan A nuqtadan o‘tib biror a to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlarning geometrik o‘rni to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar tekislik bo‘ladi.

2.2. Berilgan A nuqtadan o‘tib, ℓ to‘g‘ri chiziq bilan α burchak tashkil qiluvchi to‘g‘ri chiziqlarning geometrik o‘rni uchi A nuqtada bo‘lgan aylanma konus sirtining yasovchilari to‘plami bo‘ladi.

2.3. Berilgan A nuqtadan o‘tuvchi va biror P tekislik bilan α burchak tashkil qiluvchi to‘g‘ri chiziqlarning geometrik o‘rni o‘qi A nuqtadan o‘tib P tekislikka perpendikulyar bo‘lgan va yasovchilarni P tekislik bilan α burchak tashkil qilgan aylanma konus sirtining yasovchilar to‘plami bo‘ladi.

2.4. Ikki kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlarga bir xil qiyalikdagi to‘g‘ri chiziqlarning geometrik o‘rni berilgan to‘g‘ri chiziqlar tashkil qilgan qo‘shni burchaklar bissektrisalaridan o‘tuvchi va to‘g‘ri chiziqlar tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan ikkita o‘zaro perpendikulyar tekisliklar bo‘ladi.

2.5. Ikki ayqash to‘g‘ri chiziqlarga bir xil qiyalikdagi to‘g‘ri chiziqlarning geometrik o‘rni ikki o‘zaro perpendikulyar tekisliklar bo‘ladi.

2.6. Ikki kesishuvchi tekisliklarga bir xil qiyalikdagi to‘g‘ri chiziqlarning geometrik o‘rni tekisliklar tashkil qilgan ikki yoqli burchaklarning teng ikkiga bo‘luvchi ikkita o‘zaro perpendikulyar tekisliklar bo‘ladi.

2.7.Bir nuqtada kesishuvchi uchta tekisliklarga bir xil qiyalikdagi to‘g‘ri chiziqlarning geometrik o‘rni kesishuv nuqtasidan o‘tuvchi har bir juft bissektor tekisliklarning kesishuvidan hosil bo‘lgan 4 ta to‘g‘ri chiziq bo‘ladi.

2.8.Berilgan A nuqtadan o‘tib, berilgan burchak tashkil qiluvchi tekislilarning geometrik o‘rni bu uchi A nuqtada va o‘qi to‘g‘ri chiziq bo‘lgan yasovchilari u bilan berilgan burchak hosil qilgan aylanma konus sirtiga urinma tekisliklar to‘plami bo‘ladi.

2.9. Berilgan A nuqtadan o‘tib biror P tekislik bilan α burchak hosil qilgan tekisliklarning geometrik o‘rni, uchi A nuqtada o‘qi R tekislikka perpendikulyar bo‘lgan va yasovchilari P ga α burchakka o‘qishgan aylanma konus sirtiga urinma tekisliklar to‘plami bo‘ladi.

3. Geometrik elementlarning boshqa ba’zi bir geometric o‘rinlari.

3.1. To‘g‘ri burchakli uchburchakning to‘g‘ri burchagi uchining geometrik o‘rni sfera sirtining nuqtalari bo‘lib, uning diametri to‘g‘ri burchakning gipotenuzasiga teng bo‘ladi.

3.2. Konus va silindr sirtlariga nisbatan bir xil qiyaligida nuqtalarning Geometrik o‘rni bu sirtlarning o‘qlari bo‘ladi.

3.3. Berilgan aylanadan o‘tuvchi sferalar markazlarining geometrik o‘rni shu aylana markazidan o‘tuvchi va aylana tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq bo‘ladi.

3.4. Berilgan A nuqtadan o‘tib, berilgan a to‘g‘ri chiziqni kesuvchi to‘g‘ri chiziqlarning geometrik o‘rni tekislik bo‘ladi.

3.5. Berilgan A nuqtadan o‘tib, berilgan P tekislikka parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning geometrik o‘rni R tekislikka parallel bo‘lgan tekislik bo‘ladi.

3.6. Sfera sirtida berilgan A nuqtalan o‘tib, sirtga urinuvchi to‘g‘ri chiziqlarning geometrik o‘rni shu nuqtada urinma tekislik bo‘lib, u sferaning A nuqtasidagi radiusiga perpendikulyar bo‘ladi.

3.7. Fazoda berilgan 3 ta, to‘g‘ri chiziqni kesuvchi to‘g‘ri chiziqlarning geometrik o‘rni bir kovakli elliptik yoki aylanma giperboloidning to‘g‘ri chiziqli yasovchilari bo‘ladi. Bunda berilgan to‘g‘ri chiziqlar sirtining birinchi oila yasovchilari bo‘lib, aniqlangan to‘g‘ri chiziqlar sirtining ikkinchi oila yasovchilari bo‘ladi.

3.8. Berilgan 2 ta to‘g‘ri chiziqni kesuvchi va biror R. tekislikka parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlarning geometrik o‘rni giperbolik paraboloidning to‘g‘ri chiziqli yasovchilari to‘plami bo‘ladi.

2-§. CHIZMA GEOMETRIYA TARAQQIYOTI HAQIDAGI QISQACHA TARIXIY MA'LUMOTLAR.

Geometrik qonuniyatlar asosida tasvirlarni hosil qilish bilan amaliyotda turli inshootlarni qurishda foydalanilgan.

Xitoy, Hindiston, Misr, Gretsiya va boshqa qadimiy mamlakatlarda saqlangan turli yodgorliklar qoldiqlaridan ma'lumki, ularni qurishda chizmalardan foydalanilgan.

Keyinchalik sanoat va texnikani rivojlanishi bilan tasvirlarni yasash usullari rivojlanib borilgan. Qadimgi inshootlar qoldiqlaridan ma'lum bo‘lishicha ularni qurishda proektsion tasvirlar asosida bajarilgan inshootlar planlari va boshqa chizmalardan milloddan avval foydalanilgan.

Rim arxitektori Mark Vitruviyning «Arxitektura haqida o‘nta kitob» asarida (mil.av. I.a.) proektsion tasvirlar haqida ma'lumotlar berilgan. Bu asarda u narsalarni gorizontal va frontal proektsiyalarini proeksion bog‘lanishsiz keltiradi va bu tasvirlarni bunday berilishi qadimgi Misr inshootlarini qurishda ularni alohida-alohida bajarilgan plani va fasadlaridan foydalanilganliklari haqida bayon qilgan. Vitruviy rasmlar chizishda markaziy proektsiyalashdan foydalanish, perspektiv tasvirlar yasashda «Bosh nuqta» va «Ko‘rish nuqtasi» haqidagi ma'lumotlarni bergan.

Uyg‘onish davrida (XV-XVI asrlar) fan va san'atni Evropa mamlakatlarida tez taraqqiy qilishi bilan bir qatorda tasvirlash usullarini geometrik asosda rivojlanishiga asos solindi.

Italiyalik olim Leon Alberti (1404-1472) o‘zining «Rasomchilik haqida», «Me'morchilik haqida» asarlarida perspektiv yasashlarning bajarish usullarini matematik tomondan asoslaydi. Alberti perspektiv yasashlarda setka usulini ishlab chiqadi va uni amaliyotda qo‘llash qulayligini ko‘rsatadi.

Italiyalik rassom, olim va injener Leonardo da Vinchi (1452-1519) o‘zining amaliy va nazariy ish faoliyatida perspektiv yasashlarni ko‘pgina masalalarda qo‘llash bilan birga uni nazariyasini kengaytirib, «kuzatish» perspektivasini rivojlantirdi. Leonardo da Vinchi narsalarning soyalarini yasashga doir tushunchalarni kengaytirib boyitdi. Ularni «Birinchi», «Murakkab», «Sodda» turlarga ajratadi.

Nemis rassomi Albrext Dyurer (1471-1528) o‘zining «Qo‘llanma» kitobida ko‘pgina tekis va ba'zi bir fazoviy egri chiziqlarni yasash usullari keltirilgan. «Dyurer usuli» deb nomlanuvchi perspektiv yasashlarning yangi usulini yaratgan. Narsalarni gorizontal va frontal proektsiyalariga asosan soyalar yasash usullarini yaratgan.

Italiyalik olim Gvido Ubaldi (1545-1607) «Perspektiva haqida olti kitob» asarida o‘zidan oldingi olim-rassomlarning perspektiv yasashlarga doir ishlarini nazariy asoslab bergan.

Fransuz matematigi Jerar Dezarg (1593-1662) o‘zining «Narsalar perspektivasini yasashda umumiy usul» asarida perspektiv yasashlarda koordinatalar usuliga asos soladi.

Angliyalik matematik Teylor (1685-1731) asosiy pozitsion masalalarning yechishni perspektiv tasvir asosida bajarib, so‘ngra ularning xossalarini original bilan solishtirgan.

Nemis geometri Lambert (1728-1777) elementar geometriya masalalarini perspektiv yasashlar asosida grafik usulda yechilish usullarini tavsiya qilgan. Perspektiv yasashlarda proportsional sirkul va boshqa asboblardan foydalanishni afzalligini ko‘rsatgan. Lambert perspektiv yasashlarda teskari masalalarni yechishga ya'ni, markaziy proektsiyada bajarilgan ob'ekt chizmasiga asosan uni rekonstruktsiya qilish masalasiga katta e'tibor bergan. Uning bu usuli hozirgi davrda fotogrammetriyada keng qo‘llaniladi.

Fransuz harbiy injeneri Freze (1682-1773) toshlarni yo‘nib tekislash (tarashlash) ishlarida tasvirlash usullarini qo‘llagan. U konus kesimlarini yasashning murakkab hollarini va egri chiziqlarni botiq va kabariq sirtlarda proektiv metodlar bilan yasash usulini tavsiya qilgan.

Shunday qilib, XVIII asr oxirlarida tasvirlash nazariyasi sohasida va ularni amaliyotda qo‘llash uchun chizmalar hosil qilishda ancha tajribalar yig‘ilgan.

Chizma geometriyani fan sifatida rivojlanishiga buyuk hissa qo‘shgan shaxs bu frantsuz geometri va injeneri Gospar Monj (1746-1818) hisoblanadi. Fazoviy predmetlarni tekislikda tasvirlash nazariyasi va ularni amaliyotda qo‘llanishi masalalarini G.Monj o‘zigacha bo‘lgan ma'lumotlarni bir sistemaga solib, chizma geometriya fanini yaratdi. Bunda G. Monj birinchi bo‘lib, fazodagi figuralarni ikki o‘zaro perpendikulyar tekisliklardagi ortogonal proektsiyalarida, tekisliklarni birini ularning kesishuv chizig‘i atrofida aylantirish bilan turli geometrik masalalar yechish mumkinligini ko‘rsatib berdi.

1795 yilda Monj «Chizma geometriya» fanidan qisqa konspekt yozib, uni chop etib, Mezer injenerlik maktabida o‘qita boshlagan. Shu yillarda u «Geometriyada matematik analizning qo‘llanishi» nomli asarni yozib, bunda u sirtlarni hosil bo‘lishiga doir geometrik masalalarni matematik (algebraik) usullarini beradi.

1798 yilda chop etilgan G.Monjning «Geometue Descriptive» kitobida fazodagi figuralarni tekislikka tasvirlashning sistematik bayon etilishi, chizma geometriyani ilmiy fan ekanligi isbotlandi. G.Monj asarida chizma geometriyada birinchi marta bayon etilgan quyidagi yo‘nalishlarni keltirsh mumkin.

Fazoviy figuralardan ularni tekislikdagi tasvirlariga o‘tishda geometrik almashtirishlar nazariyasining tadbig‘i.

Son belgili proektsiyallashning ba'zi bir nazariy masalalari.

Egri chiziqlar va sirtlarni mukammal tekshirish. Qaytish qirrali va bir xil qiyalikdagi yoyiluvchi sirtlarning batafsil hosil bo‘lish asoslari.

Sirtlarni o‘zaro kesishish chizig‘ini yasashda yordamchi kesuvchi tekisliklar va yordamchi sferalar usullari.

Chiziqlar va tekis figuralar haqiqiy kattaliklarni aniqlashda aylantirish va proektsiyalar tekisliklarini oʻzgartirish usullarini oʻzgartirish usullari keltirgan.

G.Monjning «Chizma geometriya» kitobini paydo boʻlishi bilan tasvirlash usulini yanada rivojlantirish uchun bu sohadagi ilmiy tadqiqot ishlari kengaydi va chizma geometriya fani politexnika maktablari oʻquv rejalarida asosiy fanlar qatoriga oʻqitila boshlandi.

Aksonometrik proektsiyalash usulini asoslashda Berlin sanoat va qurilish akademiyasi professori Karl Polke (1810-1876)ning 1853 yilda «aksonometriyaning asosiy teoremasi»ni kashf qilishi aloxida ahamiyatga ega. 1864 yilda bu teoremani umumlashtirib, uning elementar isbotini nemis geometrii G.A. Shvarts bergani uchun uni Polke-shvarts teoremasi deb yuritiladi. Teoremaning yanada sodda isbotini 1917 yilda Moskva universiteti professori A.K.Vlasov bergan. Aksonometriyaning asosiy teoremasi boʻyicha sovet olimlaridan professorlar N.A.Glagolov, N.F.Chetvruxin va boshqalar ham shugʻullanganlar.

Eramizdan (miloddan) avvalgi IV-III asrlarda yashab oʻtgan mashhur donishmandlar: Menexm (IV a.), Evklid (Sh a.), Arximed (287-212 mil. av.), Apoloniy Peretskiy (260-170 mil.av.) va hokazolarning ishlarida geometrik izlanishlar toʻgʻrisida ma'lumotlar ham mavjud. Ammo ularning izlanishlari tasvirlash usullariga etarlicha yaqin boʻlmagani uchun ularni alohida tarixiy izlanishlarga kiritish mumkin.

Asrimizning IX-XI davrlarida yashagan Oʻrta Osiyo buyuk allomalari, qomusiy olimlari Muhammad al-Xorazmiy (780-850), Abu Nasr Farobiy (873-950), Ahmad Fargʻoniy (?-861), Abu Rayhon Beruniy (973-1048), Abu Ali ibn Sino (980-1037) va boshqalarning «Geometriya» va «Astronomiya» asarlarida ayrim tasvirlash usullari keltirilgan. Bular haqida chuqur izlanishlar olib borib, keyinchalik kitobxonlarga tavsiya etilishi mumkin.

Amir Temur (1336-1405) va temuriylar davrida va undan oldin Oʻrta Osiyo hududi va Hindistonda muhtasham binolar, masjid va madrasalar qad koʻtardi. Ilm-ma'rifat, me'morchilik, hunarmandchilik bilan bir qatorda grafika, naqqoshlik ham keskin rivojlandi. Bu davr «Uygʻonish davri» deb yuritilib, barpo etilgan binolar albatta, aniq chizmalar asosida qurilgan. Bajarilgan chizmalar esa maxsus chizmachilik asboblari yordamida bajarilganligi haqida koʻpgina ma'lumotlar bor. Bular va shu davrdagi tasvirlash usullari haqida toʻliqroq ma'lumotlar yigʻib, ularni bir tizimga solish mumkin.

Rossiyada chizma geometriya fanining oʻqitilish tarixi. Rossiyada chizma geometriyani oʻqitish 1810 yildan boshlangan. Bu fan birinchi marta Peterburg yoʻl-injenerlari korpusi institutida (hozirgi Peterburg temir yoʻllar trasporti instituti) frantsuz tilida oʻqitilgan. Fanni oʻqitish uchun Frantsiyadan mutaxasislar taklif qilingan. Bulardan birinchisi K.Pote boʻlib, u Mezer injenerlik maktabining oʻquvchisi G.Monjning shogirdlaridan biri boʻlgan. Pote 1816 yilda Rossiyada birinchi boʻlib, chizma geometriyadan frantsuz tilida darslik chop ettirdi va u shu fandan birinchi professorlik unvonini olgan olim hisoblanadi. Uning bu darsligi shu yilning oʻzida Potening shogirdi Ya.A.Sevostyanov rus tilida tarjima qildi va uni «Yoʻl injenerlari instituti talabalari uchun chizma geometriya asoslari» deb nomladi. Darslik Rossiyada birinchi rus tilidagi kitob hisoblanadi. Bu darslikda birinchi marta chizma geometriyada ishlatiladigan barcha lugʻat va atamalar rus tilida oʻz oʻrnini topdi.

1814 yil Ya.A.Sevostyanov (1796-1849) institutni bitirib, shu institutda chizma geometriya fanidan shogirdlikka qoldiriladi. Uni 1818 yilda institut oʻqituvchiligiga qabul qilinadi va chizma geometriyadan dars bera boshlaydi. 1821 yilda Ya.A.Sevostyanov «Chizma geometriya asoslari» darsligini chop etdi. Bu kitob rus tilidagi birinchi original darslik hisoblanadi. Uning boblari va paragriflarini muallif oʻzining ilmiy izlanishlari bilan boyitadi. Shuning uchun bu kitob bir necha marta qayta nashr qilingan va har bir nashrida lugʻat va atamalarida tuzatishlar kiritilgan. Bu kitob oʻz davrida evropadagi barcha «Chizma geometriya» kitoblaridan oʻzining ancha ustunligi bilan farq qilgan. Ya.A.Sevostyanov chizma geometriyadan ilmiy tadqiqot ishlarini ham rivojlantirib, rassomchilikda, chiziqli va fazoviy perspektiva yasashda, soyalar yasashda, kartalar chizishda kabi masalalarni yechishda geometrik tadbiqlarni amalga oshirgan. Unga 1824 yilda ruslardan birinchi professorlik unvoni beriladi.

Chizma geometriyani Rossiyada yanada rivojlantirishda mamlakatda texnika va inshootlar qurilishlarini rivojlanishi hamda san'at va rassomchilikning taraqqiyoti bilan olib borilgan.

Ya.A.Sevostyanovning shogirdi professor A.X.Reder (1809-1872) chizma geometriyadan bir necha ilmiy ishlar yaratdi. Bulardan «Aksonometrik proektsiyalar haqida» gi kitobi rus tilida birinchi marta nashr qilingan. 1858 yilda chop etilgan «Rasm chizishda chizma geometriyani qo‘llash», «To‘g‘ri burchakli izometrik proektsiyalash» va «Son belgili proektsiyalar» kabi izlanishlar bilan chizma geometriyani amaliyotda qo‘llanishini ko‘satilgan.

Mashhur rus pedagogi, professor N.I. Makarov (1824-1904)ning 1870 yilda chop etgan «Chizma geometriyaning to‘liq kursi» fanning nazariyasi va ularning amaliyoti qo‘llanishi bayon etilgan. Bu kitob bir necha marta chop etilgan va chizma geometriyaning barcha boblarini o‘z ichiga olib, texnika oliy-o‘quv yurtlari uchun asosiy darslik hisoblangan. N.I.Makarovning «Chiziqli perspektiva kursi», «Soyalar nazariyasi», «Chiziqli palafon perspektiva», «Izometrik proektsiyalar usullari» kitoblari ham chop etilgan.

Peterburg yo‘l-injenerlari korpusi instituti professori V.I.Kurdyumov (1853-1904) ning tasvirlash sohasidagi ishlari o‘zining nazariy tomondan chuqurligi ilmiy asoslarining to‘liqligi bilan ajralib turadi. Uning ishlari 1886-1905 yillarda chop etilgan. «Ortogonal proektsiyalar», «Egri chiziqlar va sirtlar», «Perspektiva», «Son belgili proektsiyalar», «Aksonometriya» ishlari chizma geometriyani barcha bo‘limlarini nazariy tomondan ancha boyitgan. U barcha nazariy masalalarni yechishda muhandislik amaliyotidagi misollardan keng foydalangan. 1893-1897 yillarda yozilgan «Chizma geometriya kursi» kitobi rus klassik darsligi hisoblanadi. V.I.Kurdyumov «Chizma geometriya chizmaning grammatikasidir» deb ta'kidlagan.

Akademik Fedorov E.S. (1853-1919) chizma geometriyani rivojlantirishda mashhur rus olimi bo‘lib, ko‘pgina ilmiy tekshirish ishlari tasvirlash usullariga bag‘ishlangan. U o‘zining ilmiy ishlari bo‘yicha Rossiya va chet ellarda taniqli olim hisoblanadi. E.S.Fedorov vektorli chizma geometriya yaratib, bu yo‘nalish hozirgi vaqtda ham ilmiy tekshirish ishlarida keng qo‘llanib kelinmoqda. «Vektorli proektsiyalar» Fedorov proektsiyasi deb ham yuritiladi. Chunki bu metodni u nazariy kristallogiyada keng qo‘llagan. E.S.Fedorovning «Yangi geometriyaning chizmachilik asosi», «Fazo nuqtalarini tekislikka aniq tasvirlari», «Yangi chizma geometriya»va boshqa asarlarida sonlar o‘rniga vektorlardan foydalanilgan.

Moskva universiteti professorlari A.K.Vlasov va N.A.Glagolevlar chizma geometriya proektiv yo‘nalish bo‘yicha o‘qitish tarafdorlaridan hisoblanadilar. A.K.Vlasov (1869-1921) o‘z faoliyatida chizma geometriyani o‘qitishda proektiv qonun qoidalardan keng foydalangan. Lomonosov universitetining fizika matematika fakulteti, Moskva pedagogika instituti va keyinroq ba'zi bir oliy texnika o‘quv yurtlarida chizma geometriya kursini proektiv geometriya asosida o‘qigan.

Texnika fanlari doktori professor N.A.Rinin (1877-1943) tasvirlash usullari sohasida ko‘pgina asarlar yozgan olim hisoblanadi. Uning «Chizma geometriya», «Son belgili proektsiyalar», «Perspektiva», «Chiziqli perspektiva elementlari» kitoblari chizma geometriyani rivojlantirishda katta ahamiyatga ega. N.A.Rinin «Chizma geometriyaning ahamiyati va uning metodlarini taqqoslash, «Tasvirlash metodlari», «Tekis figuralar transformatsiyasi» kabi ko‘p ilmiy asarlar yozib qoldirgan. N.A.Rinin «Chizma geometriya masalalar to‘plami», «Proektiv geometriya elementlar va ularni aerofotos’emkada qo‘llanishi», «Kinematografiya», «Kino perspektiva va uni aviatsiyada qo‘llanilishi», «Aksonometriya va uni mexanikada qo‘llanilishi» va boshqa bir necha asarlarni yaratish bilan grafika fanini rivojlantirgan hamda uni boshqa fanlarga tadbig‘ini keng ko‘rsatib bergan.

Professor D.I.Kargin (1880-1945) o‘zining ko‘p sonli ilmiy tekshirish ishlari bilan chizma geometriya va injenerlik grafikasi faniga katta xissa qo‘shgan olim. U grafik hisoblashlar va yasashlarni aniq bajarish bo‘yicha ilmiy ishlar olib borgan. Shrift grafikasi bo‘yicha buyuk mutaxassis bo‘lgan. D.I.Kargin grafika fani bo‘yicha birinchi fan doktori hisoblanadi. G.Monjning 1947 yilda rus tiliga tarjima qilingan kitobida D.I.Kargin chizma geometriya tarixi maqolasini yozgan. Bir necha yillar davomida Leningrad ilmiy seminariga rahbarlik qilgan.

M.Ya.Gromov (1884-1963) uning ilmiy ishlarining asosiy yo‘nalishi egri chiziqlar va sirtlarni hosil bo‘lish nazariyasini boyitishdan iborat. U ittifoqda birinchilar qatorda «Chizma geometriyada egri chiziqlar va sirtlarning kinematik asoslari» mavzusida doktoralik dissertatsiyasini himoya qilib, texnika fanlari doktori bo‘lgan. U chizma geometriya kursini egri chiziq va sirtlarga tegishli nazariy bilimlarni differentsial geometriya usullari bilan boyitdi. U tekis va fozaviy egri chiziqlarni tabiiy koordinatalar bilan berilishini, egri chiziqlarni konform almashtirish usullarini, yoyiluvchi sirtlar bo‘lagining yuzasi va hajmini grafik usulda aniqlash kabi masalalarni hal qilgan. Uning «Chizma geometriya» darsligi (1951 yilda 1-qism, 1954 yilda 2-qism) o‘zining oddiyligi bilan va ko‘pgina nazariy masalalarni o‘z ichiga olishi bilan boshqa darsliklardan farq qiladi.

Professor N.A.Glagolev (1888-1945) atoqli sovet geometri bo‘lib, Sovet davridagi proektiv maktabning rahbarlaridan biri hisoblanadi. 1922-23 yillarda Moskvadagi Bauman nomli oliy texnika o‘quv yurtining injener quruvchi fakulteti talabalariga chizma geometriya kursini proektiv geometriya asosida o‘qigan. 1923 yilda shu kurs asosida konspekt chop etgan. U nomografiya va yasashlarni mexanizatsiyalashtirish kabi ishlarni chizma geometriya faniga kiritgan. Uning chizma geometriya fanidan original darslgida pozitsion va metrik masalalarni rodstva mosligi yoki o‘zaro bir qiymatli moslik asosida chop etgan.

Pedagogika fanlari akademiyasi haqiqiy a'zosi, fizika-matematika fanlari doktori professor N.F.Chetveruxin (1891-1974) Sovet davrining mashhur geometrlaridan hisoblanadi. U chizma geometriya va muhandislik grafikasi ekspert komissiyasining bir necha yillar davomida raisi bo‘lgan. O‘zining «Shartli tasvirlash nazariyasi», «To‘liq va to‘liqsiz bo‘lgan tasvirlar» «Tasvirlarni parametr usullari bilan tekshirish», «Geometriya kursida fazoviy shakllar chizmasi», «Proektsion chizmalarda steriometrik masalalar» va h.k. asarlari bilan tasvirlash nazariyasiga eng ko‘p hissa qo‘shgan olimdir. 1954 yilda chop etilgan «Aksonometriya» (E.A.Glazunov bilan hammualliflikda) kitobi shu sohada kapital asar hisoblanadi. Ko‘p yillar davomida u Moskva va boshqa shaharlar ilmiy seminarlarini boshqardi. Ittifoq miqyosida o‘tkazilgan bir necha ilmiy koferentsiyalarda asosiy nazariyotchi sifatida umumiy ma'ruzachi bo‘lib kelgan. N.F.Chetveruxin rahbarigida 1947, 1955 yillarda «Chizma geometriya usullari va ularning tadbig‘i» nomli ilmiy maqolalar to‘plamlari chop etilgan. Chetveruxinning «Oliy geometriya», «Proektiv geometriya», «Chizma geometriya kursi» darsliklari bir necha marta qayta nashr qilinib, oliy o‘quv yurtlari talabalari tomonidan keng foydalanib kelinmoqda. U Moskva aviatsiya institutida «Amaliy geometriya» kafedrasini boshqarib, o‘zi tashkil qilgan ilmiy maktab orqali 30 dan ortiq fan nomzodlari va doktorlarni tayyorlagan.

Professor V.O.Gordon (1892-1971) chizma geometriya va injenerlik grafikasi fanlarini o‘qitish metodikasi bo‘yicha ittifoqda buyuk mutaxassis hisoblanadi. U RSFSR da xizmat ko‘rsatgan fan va texnika arbobi. Uning chizmachilik fani bo‘yicha umumta'lim maktablari uchun yozgan darsligi bir necha yillar davomida millionlab o‘quvchilarga darslik bo‘lib kelgan. Uning «Chizma geometriya kursi» kitobi yarim asrdan ko‘proq vaqtdan beri 24 marta qayta nashr etilib, barcha texnika o‘quv yurtlari uchun asosiy darsliklar bo‘lib kelmoqda. Uning darslik va o‘quv qo‘llanmalari metodik nuqtai nazardan ancha mukammal va to‘liqroq yozilgan. V.O.Gordon o‘zining ba'zi bir ilmiy tekshirish ishlari natijalarini darsliklariga kiritgan.

Professor A.I.Dobryakov (1895-1948) tomonidan chop etilgan «Chizma geometriya kursi» ancha mukammal darslik hisoblanib, arxitektura-qurilish institutlari uchun yozilgan bo‘lib, kitobda arxitektura fragmentlarining turli elementlarida soyalar va perspektiv yasashlar to‘liq ko‘rsatilgan. Bu klassik darslikda chizma geometriyaning barcha bo‘limlari nazariy tomondan berilgan bo‘lib, ularning tadbig‘i qurilishning turli injenerlik sohalarida keltirilgan. Professor A.I.Dobryakov tomonidan sirtlarni kesishish usullari, sirtlarni klassifikatsiyasining nazariyasi kabi ishlanishlar ham bajarilgan. A.I.Dobryakov Oliy ta'lim vazirligi qoshidagi chizma geometriyadan ekspert komissiyasiga N.A.Ro`nindan keyin raislik qilgan.

Ukrainada xizmat ko‘rsatgan fan va texnika arbobi, texnika fanlari doktori, professor S.M.Kolotov (1880-1965) ning tasvirlash usullarini rivojlantirish sohasidagi xizmatlari alohida o‘rin tutadi. 1916-1926 yillarda Kiev arxitektura institutida 1-prorektor, Chizma geometriya kafedrasi mudiri bo‘lib ishlagan. 1925 yilda unga professor unvoni berilgan. Shu yillarda u nazariy va amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan «Predmet perspektivasini uni ortogonal proektsiyasi asosida yasash» ishini yaratdi. 1926-1944 yillarda O'zbekistonning turli qurilish tashkilotlarida va paxta zavodlarini qayta tiklash ishlari bilan hamda O'rta Osiyo industrial instituti Chizma geometriya va arxitektura loyihalash kafedralarida ishlab, 1933 yila «Chizma geometriya kursi» darsligini chop etdi. Bu darslikda u «Yordamchi proektsiyalash» usulining qulayligini isbotlaydi. 1944 yildan umrining oxirigacha Kiev qurilish injenerlari institutida ishlab u erda ilmiy maktab yaratdi. Bu ilmiy maktabda u 30 dan ortiq fan nomzodlarini tayyorladi. 1963 yilda uning rahbarligida tashkil qilingn «Chizma geometriya va muhandislik grafikasi» ilmiy maqolalar to'plami hozirgacha doimiy ravishda chop etilib, uning 74 soni chiqdi. Bu to'plam dunyoning ko'pgina mamlakatlarida eng ko'p tarqalgan to'plam hisoblanadi. S.M.Kolotovdan keyin ilmiy maktabning davomchilari uning shogirdlari texnika fanlari doktorlari, professorlar V.E.Mixaylenko, A.L.Padgorniy, V.S.Obuxova va boshqalar Ukraina ilmiy maktabida 30 dan ortiq fan doktorlari va 250 dan ortiq fan nomzodlarini tayyorladilar. S.M.Kolotovning «Chizma geometriya kursi» (1958 y.–hammualliflikda), «Yordamchi proetsiyalash» (1956 y.), «Soyalar yasashning yangi nazariyasi» (1947 y.) kabi kitoblarida u tasvirlash usullarini kengaytirishning yangi sohalari mavjudligini ko'rsatgan. Chizma geometriya va muhandislik grafikasini rivojlantirishda o'zlarining eng ko'p xissalalarini qo'shgan Sovet geometrlaridan Rossiya professorlari I.I.Kotov, N.N.Ro`jov, S.A.Frolov, A.V.Bubennikov va boshqalarning xizmatlari juda kattadir.

O'zbekistonda chizma geometriyani rivojlanish tarixi haqida. O'zbekistonda hozirgi vaqtda oliy o'quv yurtlarida o'qitiladigan «Chizma geometriya» fani 1918 yilda O'rta Osiyoda birinchi tashkil qilingan Toshkentdagi Turkiston Xalq Universitetining (hozirgi O'zbekiston Milliy Universiteti) injener-meliorativ fakulteti talabalariga o'qitishdan boshlangan. Dastlab Chizma geometriya va chizmachilik fanlari birgalikda o'qitilib, chizmalarni chizish va ularni o'qiy olishga qaratilgan.

1929 yilda Turkiston Xalq Universiteti tarkibidagi injener-meliorativ fakulteti asosida O'rta Osiyo paxta irrigatsiya, politexnika instituti va 1930-34 yillarda Universitet tarkibidan bir necha Oliy texnika o'quv yurtlari ajralib chiqib, bu institutlarda «Chizma geometriya va chizmachilik» kafedralari tashkil qilindi va chizma geometriya, chizmachilik umuminjenerlik fanlari qatorida to'liq o'qitila boshlandi. Dastlabki yillarda fanni o'qitish uchun uning o'qitish metodikasiga, talabalar bajaradigan chizmalar (topshiriqlar) to'plamlari tuzish va yosh o'qituvchilarni pedagogik mahoratini oshirish kabi ishlarga katta e'tibor berilgan.

Toshkent Oliy texnika o'quv yurtlarida Sovet davrining mashhur olimlaridan S.M.Kolotov, M.Ya.Gromov va V.O.Gordonlar Chizma geometriya va chizmachilikdan dars berish bilan bir qatorda o'zlarini ba'zi bir ilmiy ishlarini Toshkentda olib borish bilan bir qatorda yosh grafika o'qituvchilarini bilim malakalarini oshirishga, kafedralarning ilmiy metodik faoliyatini yaxshilashga ancha ishlar qilganlar.

1926-1944 yillarda professor S.M.Kolotov (1985-1965) O'zbekistonda yashab turli inshootlarni loyihalashda, qurilish va sanoatni qayta tiklash ishlarida faol qanashib, O'rta Osiyo Industrial Instituti (hozirgi Toshkent texnika universiteti)da chizma geometriya va arxitektura loyihalash fanlardan mashg'ulotlar olib borgan. 1933 yilda u «Chizma Geometriya kursi» darsligini yozib «yordamchi proektsiyalash» usulini nazariy tomondan asoslab, usulni pozitsion va metrik masalalarni yechishdagi qulay tadbig'ini ko'rsatgan soyalar yasash, perspektiv tasvirlar yasashga ham bir necha ilmiy ishlar yaratgan.

1935-1941 va 1945-1946 yillarda professor M.Ya. Gromov (1884-1963) Toshkent To'qimachilik va engil sanoat instituti «Chizma geometriya va chizmachilik» kafedrasida mudirlik qilgan. Shu davrlarda u kafedrada ilmiy va metodik ishlarni rivojlantirib, yoyiluvchi chiziqli sirtlar nazariyasi va konform almashtirish usullarini yaratdi va chizma geometriyani egri chiziqlar, sirtlar va ularni yoyilmalari bo'limlariga yangi nazariy asoslar kiritdi. 1937 yilda rus tilida «proeksion chizmachilik» bo'yicha masalalar to'plami kabi o'quv qo'llanmalar yaratdi.

M.Ya.Gromov 1941-1945 yillarda Toshkent Irrigatsiya va qishloq xo'jaligini mexanizatsiyalash injenerlar instituti (hozirgi Irrigatsiya va Meliratsiya instituti) «Chizma geometriya va mashinasozlik chizmachiligi» kafedrasida mudir bo'lib ishlab, u shu yillarda O'rta Osiyo politexnika institutiga (hozirgi Toshkent Texnika universiteti) chizma geometriyadan lektsiyalar o‘qigan. Bu davrda u o‘zining «Chizma geometriya» darsligining 1 va 2 qismlariga tegishli nazariy va amaliy ma'lumotlarni yaratdi.

1941-1945 yillarda professor V.O.Gordon (1892-1971) Toshkent To‘qimachilik va engil sanoat instituti «Chizma geometriya va chizmachilik» kafedrasiga rahbarlik qildi. U shu davrda o‘zining ilmiy va pedagogik faoliyati bilan Chizma geometriya fanini nazariy va umumta'lim maktablarida o‘qitiladigan «Chizmachilik» predmetini metodik tomondan rivojlantishga katta hissa qo‘shgan. Shu yillarda V.O. Gordon «Chizma geometriya kursi» kitobini yozib tugatgan va keyinchalik uni chop ettirdi. Hozirgi kunda bu kitob 24 martda qayta nashr qilinib, Rossiya oliy texnika o‘quv yurtlari uchun asosiy klassik darsliklardan biri hisoblanada.

O‘zbekistonda Chizma geometriya fani pedagoglaridan birinchi bo‘lib Rahim Xorunov (1911-1992) Chizma geometriyadan «Parallel proektsiyalashda yaqqol tasvirlar yasashning ba'zi bir masalalari» mavzusida 1953 y. Leningradda nomzodlik dissertatsiyasini himoya qiladi va Toshkent Temir yo‘llar transporti institutida kafedra mudiri (1953-1983 y) bo‘lib ishlab, keyinchalik ilmiy maktab – aspirantura tashkil qildi va bir necha fan nomzodlarini tayyorladi.

R.Xorunov tomonidan 1961 yilda o‘zbek tilida «Chizma geometriya kursi» dan kichik hajmdagi qisqa darslik chop etildi. Bu darslikning yaratilishi bilan chizma geometriya fani terminologiya tizimining o‘zbek tilidagi varianti majmuasi hosil qilindi. 1964 yilda darslikning ikkinchi nashri chop etildi. Bunda muallif chizma geometriya fani namunaviy dasturida belgilangan barcha boblarini kiritib, kitobni Oliy texnika o‘quv yurtlarining qurilish va arxitektura mutaxassislari uchun mo‘ljallab tayyorladi. Fan terminlari, darslik va adabiy tili metodik tomondan yanada takomillashtirildi.

1961, 1966, 1971 yillarda R.Xorunov rahbarligida «Chizma geometriya va muhandislik grafikasining nazariy va amaliy masalalari» bo‘yicha Toshkentda Butun ittifoq konferentsiyalari o‘tkazilib, unda ittifoqning barcha Respublikalaridan olimlar o‘z mavzulari bilan qatnashdilar. Konferentsiyalar materiallari ilmiy to‘plamlar ko‘rinishida chop etilib, fanni Respublikada rivojlanishiga salmoqli hissa qo‘shildi. 1966 yilda R.Xorunovga professorlik unvoni, davlat tilida darslik va o‘quv qo‘llanmalar yaratgani va yuqori malakali ilmiy pedagogik xodimlar va ko‘p sonli injenerlar tayyorlagani uchun 1981 yil O‘zbekiston Respublikasida xizmat ko‘rsatgan fan arbobi unvoni berildi.

Yusuf Qirg‘izboev (1912-1995) Toshkent to‘qimachilik va engil sanoat institutida 1951-1978 yillarda kafedra mudiri bo‘lib faol ishlab, o‘zbek tilida birinchi marta 1958 yilda mexanika ixtisoslari uchun «Chizma geometriya» darsligi chop etdi. Darslikdagi ayrim chizmalarning berilishi bilan o‘zining uslubiy tomonlariga ko‘ra boshqa adabiyotlardan farq qiladi. Yu. Qirg‘izboevning kitobida tasvirlash usullarida o‘zbek tilida birinchi marta ishlatiladigan atamalar tizimi yaratildi. U Nizomiy nomli Toshkent Davlat pedagogika universitetidagi Chizma geometriya, chizmachilik va uni o‘qitish metodikasi kafedrasining asoschisi sifatida esga olinadi. Shu kafedrani pedagog kadrlar bilan ta'minlashda arzigulik shogird o‘qituvchilar tayyorlagan.

O‘zbek tilida Chizma geometriya fanidan birinchi o‘quv adabiyotlari yaratgani uchun unga 1961 yilda Yu.Qirg‘izboevga dotsentlik unvoni berilgan.

1963 yildan boshlab Respublikamiz pedagogilaridan Sh.K.Murodov birinchi bo‘lib Kiyevdagi prof. S.M.Kolotov ilmiy maktabiga aspranturaga o‘qishga kirishi tufayli Ukraina olimlari bilan ilmiy bog‘lanishlar paydo bo‘ldi. Kiev ilmiy maktabining hozirgi rahbari Ukrainada xizmat ko‘rsatgan fan arbobi texnika fanlari doktori, professor V.E.Mixaylenkoning 1968 yilda Buxoro va Samarqand Oliy o‘quv yurtlariga kelib ma'ruzalar o‘qishi va undan keyingi yillarda Toshkent, Samarqand, Buxoro, Urganch, Qo‘qon, Chimkent va Jambul shaharlariga bir necha bor kelishi va har kelganida ilmiy seminarlar o‘tkazib izlanuvchi va aspirantlar tanlanishi O‘zbekiston va qo‘shni respublikalarda fanni rivojlanishiga asosiy sabablardan biri bo‘ldi. Natijada Respublikamizda mavjud 25 fan nomzodlaridan 23 tasi shu ilmiy maktabda dissertatsiya himoya qilganlar va ulardan 3 tasi professor va bittasi fan doktori bo‘ldilar[1].

[1] Murodov Sh.K, Tojiyev R.J. Xolmirzayev A.A. «В.Е Михайленко выдающийся ученый и человек с большой буквы». Фергана, 1997.

Moskva olimlaridan fan doktorlari, professorlar: I.I.Kotovning Toshkent aviatsiya zavodiga kelishi, S.A.Frolov va V.A.Yakuninlarning Toshkent politexnika institutiga kelib ilmiy seminarlar va olimpiadalar o‘tkazishlari O‘zbekiston va Rossiya olimlari orasidagi ilmiy bog‘lanishlar va ulardan tegishli ilmiy metodik maslahatlar olinishi chizma geometriyani Respublikada rivojlantirishga o‘z ta'sirini ko‘rsatgan.

3–§. CHIZMA GEOMETRIYADAGI ATAMALAR VA TUSHUNCHALAR BO‘YICHA YIG‘MA LUG‘AT.

A

Algebraik egri chiziq	tenglamasi algebraik funksiya orqali ifodalangan egri chiziq
Algebraik sirt	algebraik tenglamalar bilan ifodalangan sirt
Algebraik sirt klassi	ixtiyoriy to‘g‘ri chiziqdan o‘tib sirtga urinuvchi teksliklarning eng ko‘p soni bilan aniqlanadi
Algebraik sirt tartibi	sirtni to‘g‘ri chiziq bilan kesishishidan hosil bo‘lgan nuqtalarning eng ko‘p soni bilan aniqlanadi yoki sirtni ifodalovchi tenglama darajasi
Algoritm	masalani yechish rejasi yoki ketma-ketligi
Arximed jismlari	muntazam ko‘pyoqliklarning uchlari kesilganda hosil bo‘lgan yarim muntazam ko‘pyoqliklar Arxemed jismlari deb yuritiladi
Aylanish o‘qi	fazodagi shaklni biror proyeksiyalar tekisligiga qulay holga keltirishda uni aylantirish uchun tanlangan to‘g‘ri chiziq.
Aylanish radiusi	aylanish markazidan harakatlanuvchi nuqtagacha bo‘lgan masofa.
Aylanma yoki aylanish sirt	biror to‘g‘ri chiziqni, tekis yoki fazoviy egri chiziqni qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt
Aylantirish markazi	aylanish o‘qi bilan aylantirish tekisligining kesishuv nuqtasi.
Aylantirish tekisligi	biror shaklning nuqtasi orqaliqali o‘tuvchi va aylanish o‘qiga perpendikulyar tekislik.
Aylantirish usuli	proyeksiyalar tekisliklarini o‘zgartirmay, berilgan shaklni biror o‘q atrofida aylantirib, proyeksiyalar tekisliklartga nisbatan qulay holatga keltirish.

B

Binormal	fazoviy chizig‘ning biror nuqtasidan unga o‘tkazilgan yopishma tekislik va urinmaga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq.
Bir pallali giperboloid	uch yo‘naltiruvchisi xos to‘g‘ri chiziq bo‘lgan chiziqli sirt.

Birinchi turdagi qaytish nuqtasi	bu nuqtada egri chiziqning yarim urinmalari ustma-ust tushadi va bir xil yo‘nalishda bo‘ladi.
Bissektor tekisligi	H vaV proektsiyalar tekisliklaridan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o‘rni yoki H va V tekisliklar orasidagi bissektor tekislik. Bissektor tekisligi I, III choraklar va II, IV choraklarni teng ikkiga bo‘ladi.
Bo‘yin chizig‘i	aylanish sirtining eng kichik paralleli bo‘lib, uning bosh meridiani bilan kesishgan nuqtasida bosh meridianga o‘tkazilgan urinma aylanish o‘qiga parallel bo‘ladi.
Bosh meridian	aylanish sirtining bosh meridian tekisligi bilan kesishgan chizig‘i.
Bosh meridian tekisligi	aylanish o‘qi orqali o‘tgan frontal kesuvchi tekislik.
Bosh normal	fazoviy chizig‘ning biror nuqtasidan unga o‘tkazilgan yopishma tekislikda yotuvchi va urinmaga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq.
D	
Diskret karkas	uzuq-uzuq karkas
Dodekaedr	yon yoqlari 12 muntazam uchburchaklardan iborat bo‘lgan qavariq ko‘pyoqlik sirt yoki muntazam o‘n ikki yoqlik
E	
Egri chiziq	fazoda yoki tekislikda ma’lum yo‘nalishda uzluksiz xarakatlanuvchi biror nuqtaning qoldirgan izi
Egri chiziq klassi	fazoviy egri chiziqlarda biror to’g‘ri chiziq orqali unga o‘tkazilagan eng ko’p urinma tekisliklar soni bilan aniqlanadi. Tekis egri chiziqlarda tekislikdagi biror nuqtadan unga o‘tkazilgan eng ko‘p urinmalar soni bilan aniqlanadi.
Egri chiziq normali	egri chiziqning urinish nuqtasidan urinmaga o‘tkazilgan perpendikulyar to‘g‘ri chiziq
Egri chiziq tartibi	fazoviy egri chiziqlarda tekislik bilan egri chiziqning eng ko‘p kesishish nuqtalar soni bilan aniqlanadi. Tekis egri chiziqlarda to‘g‘ri chiziq bilan egri chiziqni eng ko’p kesishish nuqtalar soni bilan aniqlanadi
Egri chiziq urinmasi	egri chiziq bilan umumiy nuqtaga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziq
Egri chiziqning egriligi	egri chiziq da o‘tkazilgan qo‘shni yarim urinmalar orasidagi burchakning ular orasidagi yoy uzunligiga nisbatining limiti
Ekssentrik sferalar usuli	murakkab aylanma sirtlarning kesishuv chizig‘ini

	aniqlashda qo‘llaniladigan usul
Ekvator	aylanish sirtidagi eng katta parallel bo‘lib, uning bosh meridian bilan kesishishuv nuqtasida bosh meridianga o‘tqazilgan urinmalar aylanish o‘qiga parallel bo‘ladi
Elliptik kesim	konusni barcha yasovchilarini kesib, uning o‘qiga perpendikulyar bo‘lmagan tekslik kesishishidan hosil bo‘lgan shakl
Epyur	fransuz so‘zi bo‘lib, chizma degan ma’noni bildiradi.
Evolventa	evolyutani hosil qilgan egri chiziq unga nisbatan evolventa deb ataladi. Evolyuta urinmalarida cheksiz ko‘p evalventalar hosil qilish mumkin.
Evolyuta	egri chiziqning hamma nuqtalari uchun yasalgan egrilik markazlarining geometrik o‘rni
F	
Fazoviy egri chiziq	hamma nuqtalari bitta tekislikda yotmagan egri chiziq
Frene uch yoqligi	o‘zaro perpendikulyarlar yopishma, normal va rostlovchi tekisliklardan iborat uch yoqlik
Frontal proyeksiyalovchi tekislik	frontal (V) proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan tekislik.
Frontal proyeksiyalovchi to‘g‘ri chiziq	frontal (V) proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq.
Frontal tekislik	frontal (V) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo‘lgan tekislik.
Frontal to‘g‘ri chiziq	frontal (V) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq.
G	
Giperbolik kesim	konusni ikkita yasovchiga parallel tekislik bilan kesishishidan hosil bo‘lgan shakl
Giperbolik nuqtalar	sirtning bunday nuqtasida unga o‘tkazilgan urinma tekislik sirtni kesib o‘tadi.
Gorizontal proyeksiyalar tekisligi	shaklning gorizontal proyeksiyalari yotgan gorizontal tekislik (H).
Gorizontal proyeksiyalovchi tekislik	gorizontal (H) proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan tekislik.
Gorizontal proyeksiyalovchi to‘g‘ri chiziq	gorizontal (H) proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq.
Gorizontal tekislik	gorizontal (H) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo‘lgan tekislik.
Gorizontal to‘g‘ri chiziq	gorizontal (H) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq.

Geksoedr	muntazam 6 yoqlik
I	
Ikki karra qiyshiq kanoid	ikki yo‘naltiruvchisi xos to‘g‘ri chiziq va uchinchi yo‘naltiruvchisi xos egri chiziq bo‘lgan chiziqli sirt
Ikki karra qiyshiq silindroid	ikki yo‘naltiruvchisi xos egri chiziq va uchinchi yo‘naltiruvchisi xos to‘g‘ri chiziq bo‘lgan chiziqli sirt
Ikkinchi qaytish nuqtasi	egri chiziqning bunday nuqtasida urinmalar va normallar ustma-ust tushib bir tomonga yo‘nalgan bo‘ladi
Ikkinchi tartibli aylanish sirtlar	ikkinchi tartibli egri chiziqlarning o‘z o‘qlaridan biri atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirtlar
Ikkinchi tartibli sirtlar	biror to‘g‘ri chiziq bilan maksimum ikki nuqtada kesishgan sirtlar yoki tenglamasining darajasi ikkiga teng sirtlar.
Ikosoedr	yon yoqlari 20 muntazam uchburchaklardan iborat bo‘lgan qavariq ko‘pyoqlik sirt yoki muntazam 20 yoqlik.
J	
Jipslashtirish usuli	aylantirish usulining xususiy holi bo‘lib, bunda aylantirish o‘qi sifatida tekislikning biror izi qabul qilinadi va uning atrofida aylantirib tekislik shu proyeksiyalar tekisligiga jipslashtiriladi.
K	
Kanal sirti	tekis kesimlardan iborat uzluksiz karkasdan tashkil topgan sirt. Tekis kesim fazoda ma'lum yo‘nalishga ega bo‘lib, harakat jarayonida o‘z shaklini bir me'yorda o‘zgartirishi mumkin.
Karkas	sirtlarni aniqlaydigan nuqtalar yoki chiziqlar to‘plami.
Kinematik sirt	yasovchisining knematik harakatlanishi natijasida hosil bo‘lgan sirt
Kirish va chiqish nuqtalari	to‘g‘ri chiziqlarni sirt bilan kesishish nuqtalari
Ko‘pyoq	bir necha tekisliklarni kesishuvidan hosil bo‘lgan shakl
Ko‘pyoq qirrasi	ko‘pyoqlik yoqlarining kesishuv chiziqlari
Ko‘pyoqlik	tomonlari tekis uchburchak yoki ko‘pburchaklar bilan chegaralangan qirrali sirt
Ko‘pyoqlik uchi	ko‘pyoqlik qirralarining kesishuv nuqtalari
Konkurent nuqtalar	bir proyeksiyalovchi nurda yotgan nuqtalar
Konsentrik sferalar usuli	aylanma sirtlarning o‘zaro kesishuv chizig‘ini yasashda qo‘llaniladigan usul

Konus kesimilari	konus sirtini biror tekslik bilan kesishishidan hosil bo‘lgan kesim yuza
Koordinata o‘qlari	proyeksiyalar tekisliklarining kesishgan chiziqlari.
Kub	yoqlari 6 ta kvadratlardan iborat bo‘lgan qavariq ko‘pyoqlik sirt
M	
Markaziy proektsiyalash	proeksiyalash markazi nuqta bo’lib u orqali tekislikda hosil qilingan proektsiya
Monotonlik egri chiziq	egriligi bir me'yordan oshib yoki kamayib boruvchi egri chiziq
Muntazam ko‘pyoqlik	muntazam ko‘pburchaklardan iborat yoqlarga va o‘zaro teng qirralarga ega bo‘lgan ko‘pyoqlik
Meridian	aylanish o‘qi orqali o‘tgan tekislikning aylanish sirti bilan kesishgan chizig‘i
Meridian tekislik	aylanish o‘qi orqali o‘tgan tekislik
Metrik masala	berilgan shakllarni o‘zaro vaziyatiga nisbatan ularni metrikasini aniqlash yoki oldidan berilgan metrik shartni qanoatlantiruvchi shakllarni o‘zaro vaziyatini aniqlash.
N	
Normal	egri chiziqning biror nuqtasida unga o‘tkazilgan urinmaga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq. Sirtning normali uning biror nuqtasiga unga o‘tkazilgan urinma tekislikka perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq.
Normal kesim	biror sirtni uning o‘qiga perpendikulyar tekislik bilan kesganda hosil bo’lgan kesim
Normal tekislik	fazoviy egri chiziqning biror nuqtasida unga o‘tkazilgan urinmaga perpendikulyar bo‘lgan normallar
O	
Oktaedr	asosi kvadrat va yon yoqlari 8 ta muntazam uchburchaklardan iborat bo‘lgan qavariq ko‘pyoqlik sirt
Oktant	uchta o‘zaro perpendikulyar tekisliklarning fazoni fazoni 8ta bo’lakka bo’lishi.
Ortogonal proyeksiyalarni almashtirish	masala yechishda grafik amallarni soddalashtirish uchun qo‘llaniladigan chizmani qayta tuzish usullari.
Ortogonal proyeksiyalash	to‘g‘ri burchakli proyeksiyalash.
P	
Parabolik kesim	konusni bitta yasovchisiga parallel tekslik

	kesishishidan hosil bo‘lgan shakl
Parabolik nuqtalar	urinma tekislik sirtga to‘g‘ri chiziq bo‘yicha urinsa bu urinish chiziqining nuqtalari
Parallel proektsiyalash	proyektsiyalovchi nurlar o‘zaro parallel bo‘lgan proektsiyalash
Parametr	narsaning holati va shaklini aniqlashda qatnashadigan ko‘rsatkichlar
Parametrlashtirish	narsalar to‘plamining holati va shakl parametrlarini aniqlash.
Piramida	asosi uchburchak yoki ko‘pburchak yon yoqlari umumiy uchga ega bo‘lgan uchburchaklardan iborat bo‘lgan qirrali sirt
Platon jismlari	muntazam ko‘pburchaklardan iborat yonlarga, o‘zaro teng ikki yoqli burchaklarga va o‘zaro teng qirralarga ega bo‘lgan (tetraedr, kub, oktaedr, dodekaedr, ikosaedr) qavariq ko‘pyoqlik sirtlar
Pozision masala	berilgan shakllarni o‘zaro tegishliligini, ya’ni o‘zaro umumiy elementlarni aniqlaydigan masala
Prizma	asoslari o‘zaro parallel bo‘lib, uchburchak yoki ko‘pburchaklardan yon yoqlari to‘rtburchaklardan iborat qirrali sirt
Prizmatoid	asoslari parallel tekisliklarda yotgan ikkita ko‘pburchakdan yon yoqlari esa ikkala asos uchlaridan iborat uchburchaklar va trapetsiyalardan iborat bo‘lgan qavariq ko‘pyoqlik sirt
Profil proyeksiyalovchi tekislik	profil (W) proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan tekislik.
Profil proyeksiyalovchi to‘g‘ri chiziq	profil (W) proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq.
Profil tekislik	profil (W) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo‘lgan tekislik.
Profil to‘g‘ri chiziq	profil (W) proyeksiyalar tekisligiga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq.
Proyeksiya	narsani proyeksiyalovchi nurlarning proyeksiyalar tekisligi bilan kesishuvidan hosil bo‘lgan tasvir.
Proyeksiyalar tekisligi	proyeksiyalar yotgan tekislik
Proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish	narsaning holatini o‘zgartirmasdan, balki unga nisbatan proyeksiyalar tekisliklarining holatini qulay qilib o‘zgartirish.
Proyeksiyalash	bu jarayon bo‘lib, unda proyeksiyalanuvchi ob’ekt nuqtalari orqali nurlar o‘tkazib ularning proyeksiyalar tekisligi bilan kesishuv nuqtalari aniqlanadi.

Proyeksiyalash markazi	proyeksiyalovchi nurlar chiqadigan xos yoki xosmas nuqta
Proyeksiyalash nuri	proyeksiyalanuvchi nuqta bilan proyeksiyalash markazini bog‘lovchi to‘g‘ri chiziq.

Q

Qavariq ko‘pyoqlik	yoqlari bir tomonida joylashgan ko‘pyoqlik
Qirrali sirt kesim yuzasi	qirrali sirt bilan tekslik kesishishidan hosil bo‘lgan shakl
Qiyshiq burchakli proektsiyalash	proeksiyalovchi nurlar proektsiyalar tekisligiga perpendikulyar bo‘lmagan holda hosil bo‘lgan proektsiyalash.
Qo‘sh nuqta	egri chiziqningbu nuqtasida yarim urinmalar bir to‘g‘ri chiziqni tashkil qilib, qarama-qarshi yo‘nalishga ega, normallar esa ustma-ust tushib bir yo‘nalishga ega bo‘ladi
Qonuniy egri chiziq	muayyan biror qonunga bo‘ysunuvchi nuqtalar to‘plami
Qonuniy sirt	hosil bo‘lishi jarayoni biror qonunga asoslangan sirt
Qonunsiz egri chiziq	o‘z harakati bilan biror qonunga bo‘ysunuvchi nuqtalar to‘plami.
Qonunsiz sirt	hosil bo‘lishi jarayoni biror qonunga asoslanmagan sirt

R

Ravon egri chiziq	hamma nuqtalarida qarama-qarshi yo‘nalgan yarim urinmalar bir to‘g‘ri chiziqda yotuvchi egri chiziq.
Rostlovchi tekislik	fazoviy egri chiziqning biror nuqtasida urinma va binormal orqali o‘tuvchi tekislik

S

Siklik sirt	markazlari egri chiziqli yo‘naltiruvchi bo‘ylab harakatlanuvchi aylana hosil qilgan sirt
Sinish nuqtasi	egri chiziqning bu nuqtasida yarim urinmalar o‘zaro burchak hosil qiladi
Sirt	biror chiziq yoki sirtning fazoda uzluksiz harakatlanishi natijasida hosil bo‘lgan geometrik shakl.
Sirt kesim yuzasi	biror sirt bilan tekislikning kesishishidan hosil bo‘lgan shakl
Sirt yasovchisi	o‘z harakati bilan sirtni hosil qiluvchi chiziq yoki sirt
Sirt yo‘naltiruvchisi	sirt yasovchisining harakatlanishini belgilovchi

	chiziq
Sirtga urinma tekislik	sirtning biror nuqtasidan o‘tgan ikki kesim chizig‘iga o‘tkazilgan urinmalardan tashkil bo‘lgan tekislik
Sirtlarning o‘zaro kesishish chizig‘i	ikki kesishuvchi sirtlar uchun umumiy bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rni
Sirtning klassi	biror to‘g‘ri chiziqdan sirtga o‘tkazilgan urinma tekisliklarning eng ko‘p soni bilan aniqlanadi
Sirtning normali	sirtning biror nuqtasida unga o‘tkazilgan urinma tekislikka perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq
Sirtning tartibi	biror to‘g‘ri chiziq bilan sirtni kesishgan nuqtalarining eng ko‘p soni bilan aniqlanadi
T	
Tekis egri chiziq	hamma nuqtalari bitta tekislikda yotgan egri chiziq
Tekis parallel ko‘chirish sirti	yasovchisi o‘z harakati davomida o‘z-o‘ziga parallel bo‘lib qoladigan sirt
Tekis parallel ko‘chirish usuli	aylantirish usulining xususiy holi bo‘lib, unda aylanish o‘qining holati ko‘rsatilmaydi.
Tekislikka perpendikulyar to‘g‘ri chiziq	tekislikdagi o‘zaro kesishuvchi ikki to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar to‘g‘ri chiziq.
Tekisliklar dastasi	bir to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekisliklar to‘plami
Tekislikning eng katta og‘ish chizig‘i	tekislikka tegishli bo‘lib, uning gorizontallari va frontallariga yoki profillariga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq.
Tekislikning frontali	tekislikda yotgan va V ga parallel to‘g‘ri chiziq.
Tekislikning gorizontali	tekislikda yotgan va N ga parallel to‘g‘ri chiziq.
Tekislikning izlari	tekislikning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan chiziqlari.
Tekislikning profili	tekislikda yotgan va W ga parallel to‘g‘ri chiziq.
Tetraedr	yoqlari to‘rta muntazam uchburchaklardan iborat bo‘lgan piramida
To‘g‘ri burchakli proektsiyalash	proektsiyalovchi nurlarning proektsiyalar tekisligiga perpendikulyar holda hosil bo‘lgan proektsiyalash
To‘g‘ri burchakli uchburchak usuli	kesmaning proyeksiyalari bo‘yicha uning haqiqiy uzunligini va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarni aniqlashda qo‘llaniladigan usul. Uchburchakning bir kateti sifatida kesmaning proyeksiyasi, ikkinchi kateti sifatida esa kesma uchlarining shu tekislikdan uzoqliklar ayirmasi olinadi.
To‘g‘ri burchakning proyeksiyalanish xususiyati	to‘g‘ri burchakning bir tomoni tekislikka parallel bo‘lib, ikkinchi tomoni unga perpendikulyar

	bo‘lmasa, uning proyeksiyasi ham to‘g‘ri burchak bo‘ladi.
To‘g‘ri chiziqning izlari	to‘g‘ri chiziqning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan nuqtalari.
To‘g‘ri chiziqning tekislikka paralleligi	tekislikda yotgan biror to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq.
To‘g‘ri kanoid	bitta yo‘naltiruvchisi xos egri chiziq ikkinchisi to‘g‘ri chiziq va uchinchisi xosmas to‘g‘ri chiziq bo‘lgan chiziqli sirt
To‘g‘ri silindroid	ikki yo‘naltiruvchisi xos egri chiziq uchinchisi esa xosmas to‘g‘ri chiziq bo‘lgan chiziqli sirt
Tors	fazoviy egri chiziqqa urinuvchi to‘g‘ri chiziqlar hosil qilgan yoyiluvchi chiziqli sirt
Transsendent egri chiziq	transsendent tenglama bilan ifodalangan egri chiziq
Transsendent sirt	transsendent tenglamalar bilan ifodalangan sirt
Triangulyatsiya	sirkul yordamida uchburchakdan foydalanib yasash usuli
Trubasimon sirt	egri chiziqli yunaltiruvchisi bo‘yicha unga perpendikulyar harakatlanuvchi yoki doimiy radiusga ega aylana hosil qilgan sirt

U

Umumiy vaziyatdagi tekislik	proyeksiyalar tekisliklarinng birortasiga ham parallel yoki perpendikulyar bo‘lmagan tekislik.
Umumiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziq.	proyeksiyalar tekisliklarining birortasiga ham parallel yoki perpendikulyar bo‘lmagan to‘g‘ri chiziq.

V

Vint chizig‘i	silindr yoki konus sirtida bir me'yorda aylanma va ilgarilama harakat qiluvchi nuqtaning troektoriyasi
Vint sirti	biror chiziq yoki sirtning vintsimon harakati natijasida hosil bo‘lgan sirt

X

Xatolar egri chizig‘i	egri chiziqni kesuvchi vatarlarning o‘rta nuqtalardan o‘tgan egri chiziq.undan urinma o‘trazishda foydalaniladi
Xosmas nuqta	to‘g‘ri chiziqning cheksiz uzoqlashgan nuqtasi.
Xosmas tekislik	uch o‘lchamli fazoning cheksiz uzoqlashgan nuqtalar to‘plami.
Xosmas to‘g‘ri chiziq	tekislikning cheksiz uzoqlashgan chizig‘i.
Xususiy vaziyatdagi tekislik	proyeksiyalar tekisliklarining biriga parallel yoki perpendikulyar bo‘lgan tekislik.

Xususiy vaziyatdagi to‘g‘ri chiziq	proyeksiyalar tekisliklarining biriga parallel yoki perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq.

YO

Yopishma tekislik	fazoviy egri chiziq ustida yotgan nuqta va unga cheksiz yaqin bo‘lgan ikki nuqtadan o‘tgan tekislik.
Yordamchi proyeksiyalash	asosiy proyeksiyalash yo‘nalishiga qo‘shimcha ravishda bajariladigan proyeksiyalash.
Yoyilmaydigan sirt	cheksiz yaqin qo‘shni ikki yasovchisi o‘zaro ayqash bo‘lgan chiziqli sirt.
Yoyiluvchi sirt	cheksiz yaqin qo‘shni ikki yasovchisi o‘zaro kesishgan chiziqli sirt.

Ch

Chiziq	nuqtaning tekislik yoki fazodagi harakatlanishtidan qoldirgan troektoriyasi
Chiziqli sirt	uchta fazoviy egri chiziqni bir vaqtda kesib harakatlanuvchi to‘g‘ri chiziq hosil qilgan sirt
Chorak	Ikki o‘zaro perpendikulyar tekisliklarning fazoni 4 ta bo’lakka bo’lishi.

O‘

O‘zaro parallel tekisliklar	bir tekislikda yotgan va o‘zaro kesishgan ikki chiziq ikkinchi tekislikda yotgan va o‘zaro kesishuvchi ikki to‘g‘ri chiziqqa mos ravishda parallel bo‘lgan tekisliklar.
O‘zaro perpendikulyar tekislik	bir tekislikda yotgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan tekislik yoki tekislik perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekislik.

ADABIYOTLAR

1. Alijonov O.I., Xolmurzaev A.A. Muhandislk grafikasi. Farg‘ona, Texnika nashriyoti, 2005, -216 b.
2. Бубенников А.В. Начертательная геометрия. - М. : Высшая школа, 1985.-288 с.
3. Гордон В.Ю. и др. Начертательная геометрия. Под ред. Крылова Н.Н. М., Высшая школа, 2000. 224-ст. усл. Печ. л. 18,45.
4. Ismatullaev R. Chizma geometriya. Toshkent, 2003, -111 b.
5. Михайленко В.Е., Пономарев А.М. Инженерная графика. Учебник. Киев. Выща школа, 1990. -303 с.
6. Murodov Sh. Xakimov L., Odilov P., Shomuradov A.U., Jumayev M. Chizma geometriya kursi. - Toshkent.: O‘qituvchi, 1988. -363 s.
7. Фролов С.А. Начертательная геометрия. -М.: Машиностроение, 1983.- 240 б.
8. Xorunov R. Chizma geometriya kursi. -Toshkent: O‘qituvchi, 1995.- 230 b.
9. Чекмарев А.А. Начертательная геометрия и черчение. М., Высшая школа, Учебник. 1999. 470-ст. усл. печ. л. 29,5.
10. Murodov Sh. Gidrotexniklar uchun chizma geometriya. Toshkent: O‘qituvchi, 1991. -297 b,