P. Qurbonov, SH. Misirov

ANALITIK MEXANIKADAN MASALALAR YECHISH

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

P.QURBONOV, Sh.MISIROV

ANALITIK MEXANIKADAN MASALALAR YECHISH

Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan 5140100, 5460100- matematika, 5480100 amaliy matimatika, 5440200 mexanika, 5440100 fizika hamda texnika bakalavriat ta'lim yo'nalishlari talabalari uchun Analitik mexanika fanidan o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etgan

Cho'lpon nomidagi nashriyot-matbaa ijodiy uyi
Toshkent — 2005

Taqrizchilar:

fizika-matematika fanlari doktori, professor **M.Mirsoburov,**

fizika-matematika fanlari doktori, professor **Sh.Jo'rayev**

Mazkur o'quv qo'llanma Universitetlarning fizika, mexanika, matematika va amaliy matematika yo'nalishlarining o'quv dasturi asosida yozilgan.

O'quv qo'llanmada, e'tibor asosan analitik mexanikaning asosiy qonunlari va usullarini bayon etishga, bu qonun hamda usullarni masalalar yechishda qo'llashga qaratilgan.

Ushbu o'quv qollanmadan shu sohada tahsil olayotgan talabalar va texnika yo'nalishidagi ta'lim oluvchilar hamda muhandislar ham foydalanishlari mumkin.

Q.M $\frac{220203000 - 77}{360(04) - 2005}$ — qat'iy buyurtma, 2005

ISBN 5-8250-0974-4

So‘zboshi

Respublikamizda turli texnikaviy jarayonlarning rivojlanib borishi mexanik harakatning yangi-yangi muammolarini yechish va hal qilishga chorlamoqda.

Nazariy mexanika mexanika fanining asosiy qismi bo‘lib, uning qonunlari va usullari hozirgi zamon fan hamda texnikasining amaliy va nazariy masalalarini hal qilishning asosiy tekshirish vositasi bo‘lib qoldi. Shunday ekan, nazariy mexanikaning yakunlovchi qismi bo‘lgan analitik mexanikaning asosiy tushunchalari va qonunlari bayon qilingan mavzularni chuqur hamda mazmunli o‘rganish tabiat va texnika fanlarining ayniqsa, nazariy fizikaning navbatdagi bo‘limlarini muvaffaqiyatli o‘zlashtirish uchun zarurdir.

Analitik mexanikaning bunday mavzulariga: mexanikaning differensial va integral prinsiplari, Lagranjning I va II tur tenglamalari, siklik integrallar hamda saqlanish qonunlari, Gamiltonning kanonik tenglamalari va boshqalar kiradi. Analitik mexanika qonunlari va usullari universal xususiyatga ega. Uning usullari bilan faqatgina mexanik masalalar tekshirilib qolmasdan, balki elektr, elektromagnit, yorug‘lik, atom va atom yadrosi masalalari ham tekshiriladi. Shuning uchun ham analitik mexanikaning g‘oya va usullarini chuqur o‘zlashtirish muhim ahamiyatga ega.

Nazariy mexanika va uning qo‘llanilishiga doir muammolarni hal qilishda bu fanga tegishli bo‘lgan masalalarni turli usullar bilan yechish muhim ahamiyatga ega.

Mazkur o‘quv qo‘llanmani yozishdan maqsad — analitik mexanikaning asosiy qonunlari va usullarini bayon qilish, bu qonun hamda usullarni aniq masalalar yechishda qo'llashdan iborat.

Qo'llanmada ba'zi bir nazariy (dalillar) tushuncha (teorema)lar isbotsiz keltirilgan. Bu tushunchalar asoslangan manbalar adabiyotlar ro'yxatida ko'rsatilgan.

Ushbu kitobning har bir mavzusida oldin nazariy materiallar bayon qilingan, so'ngra o'rganilgan materialga oid masalalar yechilgan, keyin esa mavzuga oid savollar va masalalar berilgan.

Kitob ilk marta chop etilayotganligi sababli ayrim xato va kamchiliklardan holi deb bo'lmaydi.

Qo'llanmaning sifatini yaxshilash uchun bildirilgan fikr va mulohazalaringizni mamnuniyat bilan qabul qilamiz va oldindan minnatdorchilik bildiramiz.

Mualliflar

1- §. Mumkin bo‘lgan ko‘chishlar prinsipi

I. Nazariy qism

Bu mavzuda analitik mexanikaning predmeti, bog‘lanishlar va ularning klassifikatsiyasi, mexanik sistemaning mumkin bo‘lgan (virtual) ko‘chishi, sistemaning erkinlik darajasi, ideal bog‘lanishlar va mumkin bo‘lgan ko‘chishlar prinsipi haqida ma’lumot beriladi va masalalar yechiladi.

1. Shu vaqtga qadar Nyuton mexanikasining asoslarini o‘rgandik. Endi Lagranj mexanikasining asoslarini o‘rganishga o‘tamiz. Lagranj mexanikasi ko‘pincha analitik mexanika nomi bilan yuritiladi.

Analitik mexanika mexanik sistemalar bilan ish ko‘radi. Bir-biri bilan ma’lum munosabatda bog‘langan hamda har bir nuqtasining harakati boshqa nuqtalarining holati va harakatiga bog‘liq bo‘lgan moddiy nuqtalar to‘plamiga mexanik sistema deyiladi. Istalgan mashina yoki mexanizm mexanik sistemaga misol bo‘la oladi, chunki mashina va mexanizmlarning qismlari bir-birlari bilan sharnirlar, sterjenlar, tasmalar, tishli g‘ildirakli vositasida bog‘langan bo‘ladi. Bu holda sistema nuqtalariga bog‘lanishlar orqali beriladigan taranglik yoki o‘zaro bosim kuchlari ta’sir qiladi.

Mexanik sistema o‘zgarmas va o‘zgaruvchan sistemaga bo‘linadi.

Agar mexanik sistemani tashkil etuvchi nuqtalar orasidagi masofalar uning harakati davomida o‘zgarmasdan qolsa, bunday mexanik sistemaga o‘zgarmas mexanik sistema deyiladi

Masalan, aboslut qattiq jismni o‘zgarmas mexanik sistema deb qarash mumkin.

Endi erkin va erkin bo‘lmagan mexanik sistemalar tushuncha kiritiladi.

Agar mexanik sistemaning istalgan ikkita nuqtasi orasidagi masofasi uning harakati davomida o'zgarib tursa, bunday mexanik sistemaga o'zgaruvchan mexanik sistema deyiladi. Masalan, deformatsiyalanuvchi jism o'zgaruvchan mexanik sistemaga misol bo'la oladi.

Analitik mexanikada barcha mexanik sistemalarga qo'llab bo'ladigan harakat va muvozanatni o'rganishning umumiy va yagona metodlari o'rnatiladi. Mexanik sistemaning mumkin bo'lgan barcha harakatlarini o'rganish va tekshirishda matematik analiz metodlari asosiy vosita bo'lib xizmat qiladi.

Analitik mexanikada chiqariladigan harakat tenglamalari mexanik sistemaning ko'rinishiga, sistema harakatiga qo'yiladigan shartlarning xususiyatlariga bog'liq bo'lmaydi.

Analitik mexanikaning umumiy tenglamalari sistema harakatining xossalarini umumiy tekshirish uchun, shuningdek, mexanikada aniq nazariy va amaliy masalalar yechish uchun juda qulay.

Analitik mexanika metodlari faqatgina nazariy tekshirishlar uchun fundamental ahamiyatga ega bo'lmasdan balki, muhandislik amaliy hisoblash ishlarida ham muhim ahamiyatga ega.

Analitik mexanikaning barcha teoremalari va tenglamalari ba'zi bir asosiy tushunchalar va prinsiplarga asoslanib shakllantiriladi hamda chiqariladi.

2. Erkin va erkin bo'lmagan nuqta haqida nuqta dinamikasida to'liq tasavvurga ega bo'lgan edik.

Endi erkin va erkin bo'lmagan mexanik sistemalar tushunchasi kiritiladi.

Agar mexanik sistemaning har bir nuqtasi fazoda istalgan holatni egallab, istalgan tezlikka erishsa, u holda bunday mexanik sistema *erkin sistema* deb ataladi. Erkin mexanik sistemaga Quyosh-sayyoralar sistemasi misol bo'ladi. Barcha sayyoralar va Quyosh orasida tortishish kuchi mavjud bo'lib, sayyora va Quyoshning holatini va tezliklarini hech nima chegaralamaydi. Ular orbita bo'ylab erkin harakat qiladi. Agar mexanik sistemani tashkil qiluvchi nuqtalar va jismlar fazoda istalgan holatni egallab, istalgan tezlikka erisha olmasa, ya'ni uning holatiga va tezligiga to'sqinlik qiluvchi cheklashlar bo'lsa, u holda bunday mexanik sistema *erkinmas sistema* deyiladi. Mexanik sistema nuqtalarining koordinatalariga va ular tezliklariga qo'yilgan barcha cheklashlar *bog'lanishlar* deyiladi. Tevarak-atrofdagi istalgan mexanizm, qattiq jism, istalgan qurilma erkinmas jismga misol bo'la oladi. Bog'lanishning sistemaga ko'rsatgan ta'siri *bog'lanish reaksiya kuchi* deb ataladi.

Shunday qilib, bog'lanishlar sistema nuqtalarining koordinatalariga va tezliklarining o'zgarishiga cheklanishlar qo'yadi.

Analitik ravishda cheklanishlar tenglamalar yoki tengsizliklar ko'rinishida ifodalanib yoziladi.

Reaksiya kuchi sistema ko'chishga intilayotgan yo'nalishga qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'ladi. Reaksiya kuchining ta'sir qilayotgan kuchdan farqi shundaki, reaksiya kuchi jismni harakatga keltira olmaydi. Uning kattaligi va yo'nalishi jismga ta'sir qilayotgan kuchlarga bog'liq. Shuning uchun reaksiya kuchi oldindan ma'lum bo'lmaydi.

3. Sistemaga qo'yilgan bog'lanishlarning xususiyatlari faqatgina sistemaning harakatiga bog'liq bo'lmasdan balki sistema harakatini o'rganish uchun qo'llaniladigan usullarga ham bog'liq bo'ladi.

Shunday ekan bog'lanishlarni bir-biridan farqlash va ularni turlarga ajratish muhim ahamiyatga ega. Bog'lanishlarning muhim belgi va xususiyatlariga qarab turlarga bo'linadi. Bog'lanishlar birinchi navbatda ikkita sinfga bo'linadi: *golonomli* va *golonomsiz bog'lanishlar.* Agar bog'lanishlar koordinatalarga nisbatan chekli sondagi tenglamalar yoki tengsizliklar bilan ifodalanadigan bo'lsa, bunday bog'lanishga *golonomli bog'lanish* deyiladi. Golonomli bog'lanishlar koordinatalarga nisbatan integrallanuvchi differensial tenglamalar bilan ifodalanib yoziladi. Boshqacha aytganda, golonomli bog'lanishning ifodalari koordinatalarning vaqt bo'yicha hosilalarini o'z tarkibiga olmaydi. Bunday bog'lanishlarning ifodalari umumiy holda quyidagi ko'rinishga ega:

$$f(x_i, y_i, z_i, t) \gtreqless 0, \quad i = 1,\overline{n}. \tag{1}$$

Golonomli bog‘lanishlarni ko‘pincha geometrik bog‘lanishlar ham deyiladi. Golonom bog‘lanishli nuqta (jism) ma’lum bir sirt yoki egri chiziq bo‘ylab harakatlanadi.

Siqilmaydigan va cho‘zilmaydigan AB sterjenning nuqtalari uchun sterjen golonomli bog‘lanishdir.

Chunki sterjenning uchlaridagi nuqtalarining harakati bir-biriga bog‘liq bo‘lishi bilan birga, ular koordinatalarining barchasi ixtiyoriy bo‘lmasdan, quyidagi qonunga bo‘ysinadi:

$$|AB| = \sqrt{(x_{iB} - x_{iA})^2 + (y_{iB} - y_{iA})^2 + (z_{iB} - z_{iA})^2}\ , \quad i = 1,\overline{n}\ .$$

Agar bog‘lanish sistema nuqtalarining holatigagina emas, balki ularning tezliklariga ham chek qo‘ysa, bunday bog‘lanishga *golonomsiz bog‘lanish* deyiladi. Golonomsiz bog‘lanishlar koordinatalarga nisbatan integrallanmaydigan differensial tenglamalar bilan ifodalanadi. Golonomsiz bog‘lanishning tenglamalari nuqtalarning koordinatalari va ularning vaqt bo‘yicha hosilalarini bog‘laydi. Shunday qilib, golonomsiz bog‘lanishlar integrallanmaydigan, umumiy holda

$$\varphi(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0 \quad (i = 1,\overline{n}) \qquad (2)$$

ko‘rinishdagi differensial tenglamalar bilan tavsiflanadi. Integrallanmaslik shu ma’noda tushuniladiki, bog‘lanishni ifodalovchi tenglamaning chap tomonini koordinatalarga nisbatan birorta funksiyaning to‘liq differensialiga keltirish, ya’ni $df(x_i, y_i, z_i, t) = 0$ ko‘rinishda ifodalash mumkin emasligi tushuniladi.

Ko‘pincha golonomsiz bog‘lanishlarni kinematik bog‘lanishlar ham deyiladi. Kinematik bog‘lanishlarda sistema nuqtalarining koordinatalarigagina emas, balki ularning tezlik va tezlanishlariga ham chek qo‘yiladi. Agar (2) kinematik bog‘lanish tenglamasini integrallash yo‘li bilan (1) ko‘rinishga keltirish mumkin bo‘lsa, bunday bog‘lanish golonomli bo‘ladi.

Agar mexanik sistemaga k ta bog‘lanish qo‘yilgan bo‘lsa, u holda bog‘lanish tenglamalari soni k ta bo‘ladi:

$$f_j(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0 \qquad (3)$$

$$i = 1,\overline{n}, \quad j = 1,\overline{k}.$$

Agar bog'lanish golonomli bo'lsa, uning bog'lanish tenglamalari quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$f_j(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \tag{4}$$

$$i = 1,\overline{n}, \quad j = 1,\overline{k}.$$

Bog'lanishlar vaqtga oshkor bog'langan va bog'lanmagan bo'lishi mumkin.

Agar bog'lanish vaqt o'tishi bilan o'zgarmasa, ya'ni t vaqt bog'lanish tenglamasi (tengsizligi)da oshkor qatnashmasa, bunday bog'lanishni *statsionar bog'lanish* deyiladi.

Agar nuqta $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ tenglama bilan ifodalanuvchi ellipsoid sirtida yotsa, bu tenglama bog'lanishning ko'rinishi vaqt bilan o'zgarmasligini ko'rsatadi.

Nuqta esa doim bitta ellipsoidda yotib, fazoda ko'chmaydi va deformatsiyalanmaydi.

Agar bog'lanish vaqt o'tishi bilan o'zgarib tursa, ya'ni bog'lanish tenglamasida t vaqt oshkor qatnashsa, bunday bog'lanish *statsionar bo'lmagan bog'lanish* deyiladi. Masalan, agar sterjenning ℓ uzunligi berilgan qonun bo'yicha xususiy holda $\ell = \ell_0 + a\sin\omega t$, $(\ell_0 > a)$ qonun bo'yicha o'zgarsa, bunday holda bog'lanish tenglamasi

$$x^2 + y^2 + z^2 - (\ell_0 + a\sin\omega t)^2 = 0$$

ko'rinishga ega bo'lib, t vaqt bu bog'lanish tenglamasida oshkor qatnashadi. Agar bog'lanishlar tenglamalar bilan ifodalanadigan bo'lsa, bunday bog'lanishlarni *bo'shatuvchi*, agar bog'lanishlar tengsizliklar bilan ifodalanadigan bo'lsa, bunday bog'lanishlarni *bo'shatmovchi bog'lanishlar* deyiladi.

4. Analitik mexanikada keng qo'llaniladigan mumkin bo'lgan (virtual) ko'chish tushunchasini shakllantiramiz. Nuqta yoki sistemaning mumkin bo'lgan ko'chishi deb, sistema nuqtalarining bog'lanishlar tomonidan qo'yiladigan barcha cheklashlarini qanoatlantiradigan (buzmaydigan) yoki

bog'lanishlar bilan birgalikda bajaradigan cheksiz kichik ko'chishiga aytiladi. Ko'pincha cheksiz kichik mumkin bo'lgan ko'chishni *virtual ko'chish* deb ham ataladi.

Sistema nuqtalarining mumkin bo'lgan ko'chishlari quyidagi ikkita shartni qanoatlantirishi kerak: 1) mumkin bo'lgan ko'chish cheksiz kichik miqdor bo'lishi kerak. Chunki chekli ko'chishda sistema boshqa holatga o'tib, muvozanat shartlari boshqacha bo'lib qolishi ham mumkin;

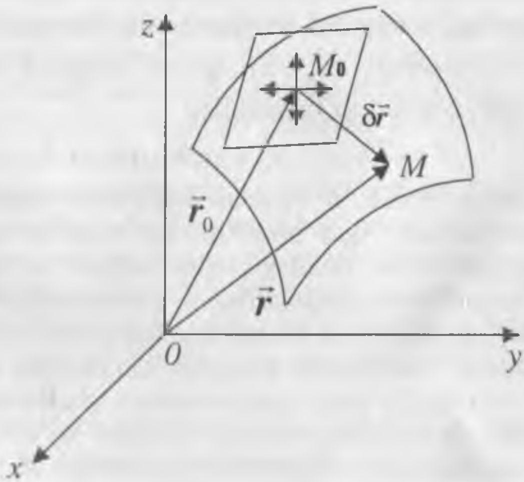
2) sistemaga qo'yilgan barcha bog'lanishlar saqlanishi kerak, bordi-yu bog'lanishlar buzilsa, sistemaning ko'rinishini o'zgartirgan bo'lamiz (sistema boshqacha sistema bo'lib qoladi).

Nuqta uchun mumkin bo'lgan ko'chish tushunchasini golonom bog'lanishli hol uchun qarab chiqiladi.

Biror $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqta

$$f(x, y, z, t) = 0$$

tenglama bilan aniqlanuvchi sirtda joylashgan bo'lib, uning holati t vaqtning tayinlangan t_0 qiymatiga mos keluvchi $\vec{r}_0 = x_0 \cdot \bar{i} + y_0 \cdot \bar{j} + z_0 \cdot \bar{k}$ radius-vektor bilan aniqlansin. M_0 nuqtaning cheksiz kichik $\delta\vec{r}$ atrofidagi holatlarini tekshi-



1- rasm.

ramiz, ya'ni uning atrofiga tegishli bo'lgan $M(x_0+\delta x, y_0+$ $+\delta y, z_0+\delta z)$ nuqtani qarasak uning holati (1- rasm).

$$\bar{r}(t)=\bar{r}_0(t)+\delta\bar{r}=(x_0+\delta x)\cdot\bar{i}+(y_0+\delta y)\cdot\bar{j}+(z_0+\delta z)\cdot\bar{k}$$

radius-vektor bilan aniqlanadi. Bunda $\delta x, \delta y, \delta z$ miqdorlar $\delta\bar{r}$ vektorning koordinata o'qlardagi proyeksiyalar bo'lib, $\delta\bar{r}=\delta x\cdot\bar{i}+\delta y\cdot\bar{j}+\delta z\cdot\bar{k}$ vektori $\bar{r}_0(t)$ radius-vektor bilan aniqlanuvchi nuqtaning $\bar{r}(t)$ radius-vektor bilan aniqlanuvchi holatga o'tishdagi ko'chishini, ya'ni $\bar{r}_0(t)$ radius-vektorning cheksiz kichik orttirmasini ifodalaydi. Ana shu $\delta\bar{r}$ vektor *mumkin bo'lgan ko'chish vektori* deb ataladi.

Ko'pincha $\delta\bar{r}$ vektorni $\bar{r}_0(t)$ vektorning variatsiyasi, uning $\delta x, \delta y, \delta z$ proyeksiyalarini esa koordinatalarning variatsiyasi deb ataladi.

$\bar{r}(t)$ vektorning

$$x_0+\delta x, y_0+\delta y, z_0+\delta z$$

koordinatalari bog'lanish tenglamasini, ya'ni sirt tenglamasini qanoatlantirishi kerak:

$$f(x_0+\delta x,\quad y_0+\delta y,\quad z_0+\delta z, t)=0. \qquad (5)$$

Bu tenglikning chap tomonini $\delta x, \delta y, \delta z$ ning darajalari bo'yicha qatorga yoyib, $\delta x^2, \delta y^2, \delta z^2, \delta x\delta y, \delta x\delta z, \delta y\delta z, \ldots$ miqdorlar qatnashgan hadlarni e'tiborga olmasdan, $f(x_0, y_0, z_0, t)=0$ ekanligi e'tiborga olinsa, koordinatalarning variatsiyalariga qo'yiladigan cheklashlar sharti hosil bo'ladi:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\delta x+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0\delta y+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0\delta z=0. \qquad (6)$$

(6) tenglikning geometrik ma'nosini tushuntiramiz.Sirtning qaralayotgan M_0 nuqtasining normali bo'yicha yo'nalgan birlik vektorni $\bar{n}$ desak, bu vektorning koordinata o'qlaridagi proyeksiyasi normalning yo'naltiruvchi kosinuslariga teng

bo'lib, yo'naltiruvchi kosinuslar esa $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ xususiy hosilalarga proporsional bo'ladi. Bunday holda (6) tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\bar{n} \cdot \delta\bar{r} = 0. \qquad (7)$$

Bu tenglikning chap tomoni $\bar{n}$ va $\delta\bar{r}$ vektorlarning skalar ko'paytmasini ifodalaydi. Bu skalar ko'paytmaning nolga tengligi esa $\bar{n}$ va $\delta\bar{r}$ vektorlarning o'zaro perpendikular bo'lishligini bildiradi. Demak, (7) tenglikdan $\delta\bar{r}$ vektorning $\bar{n}$ normalga perpendikular bo'lishligi kelib chiqadi. Bu esa $\delta\bar{r}$ mumkin bo'lgan ko'chish vektorining M_0 nuqta orqali o'tgan urinma tekislikda yotishligini bildiradi.

5. Analitik mexanikada harakatni va mexanik sistemaning muvozanatini tekshirish uchun qo'llaniladigan yana bir tushuncha mumkin bo'lgan ko'chishda moddiy nuqtaga qo'yilgan kuchning bajargan elementar ishi tushunchasidan foydalaniladi.

Kuchning elementar ko'chishdagi bajargan ishi skalar miqdor bo'lib, $\bar{F}$ vektor kuchning mumkin bo'lgan $\delta\bar{r}$ vektor ko'chishga bo'lgan skalar ko'paytmasiga teng bo'ladi. Elementar ishni δA orqali belgilansa, uning ifodasi

$$\delta A = \bar{F} \cdot \delta\bar{r} \qquad (8)$$

koordinata shaklida esa

$$\delta A = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z \qquad (9)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar mexanik sistema nuqtalariga $\bar{F}_1, \bar{F}_2, ..., \bar{F}_n$, kuchlar qo'yilgan bo'lib, ular bu kuchlar ta'sirida $\delta\bar{r}_1, \delta\bar{r}_2, ..., \delta\bar{r}_n$ mumkin bo'lgan ko'chishlar olsa, u holda bu kuchlarning virtual bajargan ishi sistemaning virtual ko'chishdagi ishi bo'ladi.

Bu ish $\delta A = \sum\limits_k \delta A_k = \sum\limits_k \bar{F}_k \delta\bar{r}_k$ koordinata shaklida quyidagi formula yordamida topiladi:

$$\delta A = \sum_k \left(F_{kx}\delta x_k + F_{ky}\delta y_k + F_{kz}\delta z_k \right). \qquad (10)$$

6. Moddiy nuqtalar sistemasining bog'lanish reaksiya kuchlarining istalgan mumkin bo'lgan ko'chishda bajargan ishlarining yig'indisi nolga teng bo'lsa, bunday bog'lanishga *ideal bog'lanish* deyiladi. Ideal bog'lanishlar uchun quyidagi tenglik o'rinli:

$$\delta A = \sum_k R_k \delta r_k = 0\,. \tag{11}$$

Ideal bog'lanishlarga absolut silliq tekislik, sirti absolut qattiq sterjen va hokazolar misol bo'ladi.

7. Mumkin bo'lgan ko'chishlar prinsipi. Agar moddiy nuqtalar sistemasi muvozanatda bo'lsa, u holda sistemaning har qanday mumkin bo'lgan ko'chishida faol kuchlarning bajargan ishi nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$\delta A^a = \sum_k \delta A_k^a = \sum_k \bar{F}_k^a \cdot \delta \bar{r}_k = 0\,. \tag{12}$$

Koordinata shaklida

$$\delta A^a = \sum_k (F_{xk}\delta x_k + F_{yk}\delta y_k + F_{zk}\delta z_k) = 0\,. \tag{13}$$

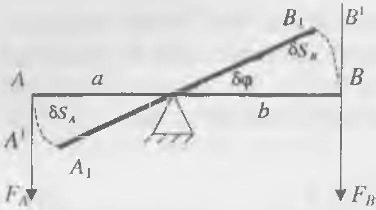
II. Masalalar yechish

1- masala. *AB* richagning yelkasiga F_A va F_B kuchlar normal ravishda ta'sir qiladi. 0 tayanch nuqtasiga nisbatan richag *A* va *B* nuqtalarining mumkin bo'lgan ko'chishlarini hisoblang va richagning muvozanatlik shartini o'rnating.

Yechish. 1) *AB* richagda mumkin bo'lgan ko'chish uning tayanch 0 nuqtasi atrofidagi $\delta\varphi$ cheksiz kichik burilish burchagidir.

Richag 0 tayanch nuqta atrofida burilganda *A* va *B* nuqtalar AA_1 va BB_1 aylana yoylari bo'ylab siljiydi. Taqriban bu siljishlarni to'g'ri chiziq kesmalariga almashtirib, *A* va *B* nuqtalarning mumkin bo'lgan ko'chishlarini hisoblash mumkin (2- rasm):

$$\delta S_A = OA \cdot \delta\varphi = a\delta\varphi;\ \delta S_B = OB \cdot \delta\varphi = b\delta\varphi.$$



2- rasm.

2). Richagning muvozana lik shartini o'rnatamiz. δS_A δS_B miqdorlar mos ravish F_A va F_B kuchlar qo'yilg A va B nuqtalarning mumk bo'lgan ko'chishlarini ifod laydi. Richagga ide bog'lanishli sterjen deb qar sak, mumkin bo'lgan ko'chish prinsipiga ko'ra quyida tenglik hosil bo'ladi:

$$F_A\delta S_A + F_B\delta S_B = 0\,.$$

Bunda $\delta S_A = a\delta\varphi$; $\delta S_B = -b\delta\varphi$. $F_A a\delta\varphi - F_B b\delta\varphi = 0 \Rightarrow$

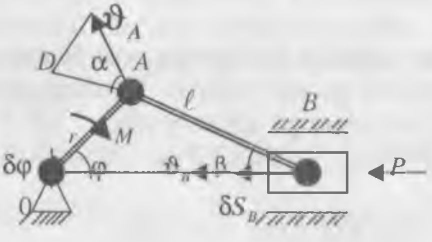
$$\Rightarrow (F_A \cdot a - F_B \cdot b)\delta\varphi = 0 \Rightarrow F_A \cdot a - F_B \cdot b = 0$$

$$\Rightarrow \forall\delta\varphi \neq 0\,,\ F_A a = F_B b\,.$$

Shunday qilib, richagning muvozanatlik shartini aylanish markaziga nisbatan qo'yilgan kuchlar momentlar ning tengligi ifodalaydi.

2- masala. Muvozanat holat vaqtida krivoship-shatu mexanizmining krivoshipiga ta'sir etuvchi juftning momenti bilan porshenga ta'sir etuvchi p bosim kuc orasidagi bog'lanishni toping. Krivoshipning uzunligi $OA =$ ga, shatunning uzunligi $AB = \ell$ ga teng (3- rasm).

Yechish. $\delta\varphi$ — krivoshipning M momentli juft ta'sir dagi mumkin bo'lgan burilish burchagi, δS_B esa p bosi kuchi ta'sirida porshe ning olgan mumk bo'lgan ko'chishi bo'lsi Shatun-krivoship mex nizmiga mumkin bo'lga ko'chish prinsipi qo'llanilsa



3- rasm.

$$P\delta S_B - M\delta\varphi = 0$$

tenglik hosil bo'lad

Bunda $\delta\varphi = \omega_{0A} dt$, $\delta S_B = \vartheta_B dt$ ekanligi e'tiborga olinsa quyidagi tenglik topiladi.

$$P\vartheta_B = M\omega_{0A}. \qquad (1)$$

Endi ϑ_B va ω_{0A} orasidagi bog'lanish o'rnatiladi. A nuqta $\vartheta_A = \omega_{0A} r$ tezlikka ega. Bu tezlik OA ga perpendikular yo'nalgan. B nuqtaning tezligi esa BO to'g'ri chiziq bo'ylab yo'nalgandir. Tezliklarning proyeksiyalari haqidagi teoremaga ko'ra

$$\vartheta_A \cos\alpha = \vartheta_B \cos\beta.$$

$\angle OAD - \Delta OAB$ uchun tashqi burchak bo'ladi: $\angle OAD - \varphi + \beta$. Bundan $\alpha = 90° - (\varphi + \beta)$ bo'lishligini topamiz va

$$\vartheta_B = \vartheta_A \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \omega_{0A} \cdot r \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos\beta} = \omega_{0A} \cdot r(\sin\varphi + \cos\varphi \cdot tg\beta)$$

β burchak topiladi. OAB uchburchakdan $\frac{\sin\beta}{r} = \frac{\sin\varphi}{\ell}$

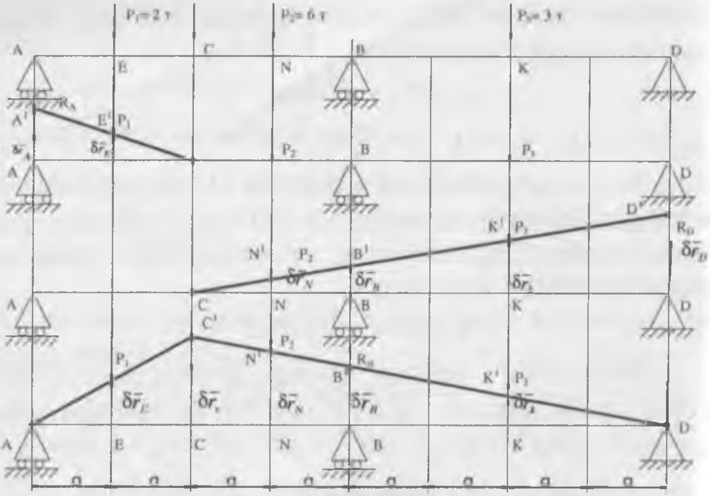
tenglik hosil bo'ladi. $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1 - \sin^2\beta}}$ formula e'tiborga olinsa, quyidagi natija kelib chiqadi:

$$\vartheta_B = \omega_{0A} r\left(1 + \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{\ell^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right)\sin\varphi. \qquad (2)$$

(2) ni (1) ga qo'yib, quyidagi izlanayotgan bog'lanish topiladi:

$$M = P_r\left(1 + \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{e^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right).$$

3- masala. Qismlardan tuzilib, uchta tayanchda turgan AD to'sin C nuqtada sharnirli biriktirilgan ikkita to'sindan iborat. To'singa 2 *t*, 6 *t* va 3 *t* vertikal yo'nalgan kuchlar ta'sir qiladi (4- rasm). O'lchovlar ko'rsatilgan. *A*, *B* va *D* nuqtalardagi tayanch reaksiyalarini aniqlang.



4- *rasm.*

Yechish. AD to‘sinni muvozanatdagi AC va CD to‘sinlardan iborat bo‘lgan ikki qattiq jismdan tashkil topgan sistema deb qaraymiz.

Mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipini qo‘llab, A, B va D tayanchlardagi reaksiya kuchlarini aniqlanadi.

1. R_A tayanch reaksiyani aniqlash uchun A tayanch bog‘lanishdan ozod qilinadi, ya’ni bu tayanchni uning R_A reaksiya kuchi bilan almashtiriladi. A nuqta vertikal yuqoriga yo‘nalgan δr_A mumkin bo‘lgan ko‘chish beriladi. Buning natijasida P_1 kuch qo‘yilgan E nuqta ham δr_E mumkin bo‘lgan ko‘chish oladi. $\delta \bar{r}_A$ va $\delta \bar{r}_E$ mumkin bo‘lgan ko‘chishlar orasidagi bog‘lanishni CEE' va CAA' uchburchaklarning o‘xshashligidan foydalanib o‘rnatiladi. O‘xshash uchburchaklarning mos tomonlari proporsional bo‘ladi:

$$\frac{EC}{AC} = \frac{EE'}{AA'} \Rightarrow \frac{a}{2a} = \frac{\delta r_E}{\delta r_A} \Rightarrow \delta r_E = \frac{1}{2}\delta r_A .$$

AC to‘singa mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipini qo‘llanilsa, quyidagi tengliklar hosil bo‘ladi:

$$-R_A \delta r_A + P_1 \delta r_E = 0$$

$$-R_A' \cdot \delta r_A + \frac{1}{2} P_1 \delta r_E = 0,$$

$$-R_A + \frac{1}{2} P_1 = 0,$$

$$R_A + \frac{1}{2} P_1 = \frac{1}{2} \cdot 2T = 1T.$$

2. *B* tayanchning reaksiya kuchini aniqlash uchun, bu tayanchni fikran olib tashlab, uning ta'siri R_B kuch bilan almashtiriladi. *C* sharnirga vertikal yuqoriga yo'nalgan $\delta \bar{r}_c$ mumkin bo'lgan ko'chish beramiz. P_1, P_2, R_B va P_3 kuchlar qo'yilgan *E*, *N*, *B* va *K* nuqtalarning mumkin bo'lgan ko'chishlarini mos ravishda $\delta \bar{r}_E, \delta \bar{r}_N, \delta \bar{r}_B$ va $\delta \bar{r}_K$ orqali belgilanadi. Bu mumkin bo'lgan ko'chishlarni uchburchaklarning o'xshashligidan foydalanib, $\delta \bar{r}_c$ mumkin bo'lgan ko'chish orqali ifodalanadi:

$$\delta \bar{r}_E = \frac{1}{2} \delta \bar{r}_c; \quad \delta \bar{r}_N = \frac{5}{6} \delta \bar{r}_c;$$

$$\delta \bar{r}_B = \frac{1}{2} \delta \bar{r}_c; \quad \delta \bar{r}_K = \frac{1}{3} \delta \bar{r}_c.$$

Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipiga ko'ra

$$P_1 \delta \bar{r}_E + P_2 \delta \bar{r}_N + R_B \delta \bar{r}_B + P_3 \delta \bar{r}_K = 0,$$

$$2 \frac{1}{2} \delta \bar{r}_c + 6 \cdot \frac{5}{6} \delta \bar{r}_c - R_B \cdot \frac{2}{3} \delta \bar{r}_c + 3 \cdot \frac{1}{3} \delta \bar{r}_c = 0,$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{5}{6} - \frac{2}{3} R_B + 3 \cdot \frac{1}{3} = 0,$$

$$1 + 5 - \frac{2}{3} R_B + 1 = 0,$$

$$18 - 2R_B + 3 = 0$$

$$2R_B = 21, \quad R_B = 10,5$$

3. Endi D nuqtaning tayanch reaksiyasini aniqlaymiz. Buning uchun D tayanch bog‘lanishdan ozod qilinadi, ya’ni uning reaksiyasini R_D kuch bilan almashtiriladi. D nuqtaga $\delta\bar{r}_D$ mumkin bo‘lgan ko‘chish beriladi. Natijada N, B va R nuqtalar ham mos ravishda $\delta\bar{r}_N$, $\delta\bar{r}_B$ va $\delta\bar{r}_K$ mumkin bo‘lgan ko‘chishlar oladi. Bu mumkin bo‘lgan ko‘chishlarni uchburchaklarning o‘xshashligidan foydalanib, δr_D mumkin bo‘lgan ko‘chish orqali ifodalanadi:

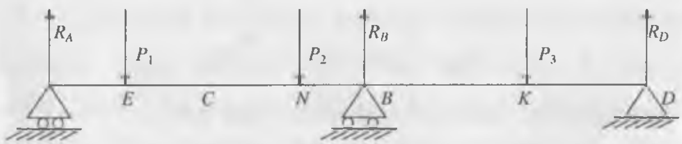
$$\delta\bar{r}_N = \frac{1}{6}\delta\bar{r}_D; \quad \delta\bar{r}_B = \frac{1}{3}\delta\bar{r}_D :; \quad \delta\bar{r}_K = \frac{2}{3}\delta\bar{r}_D .$$

Endi CD to‘singa mumkin bo‘lgan ko‘chish prinsipini qo‘llaymiz: $P\delta\bar{r}_N - R_B\delta\bar{r}_D + P_3\delta\bar{r}_k - R_D \cdot \delta\bar{r}_D = 0$.

$$6 \cdot \frac{1}{6}\delta r_D - 10,5 \cdot \frac{1}{3}\delta\bar{r}_D + 3 + \frac{3}{2}\delta\bar{r}_D - R_D \cdot \delta\bar{r}_D = 0,$$

$$1 - 3,5 + 2 = R_D \Rightarrow R_D = -0,5T.$$

Eslatma. R_D tayanchning reaksiyasini parallel kuchlarning muvozanatlik shartidan ham foydalanib topish mumkin (5-rasm):



5- rasm.

$$+R_A + P_1 + P_1 + R_B + P_3 + R_D = 0$$

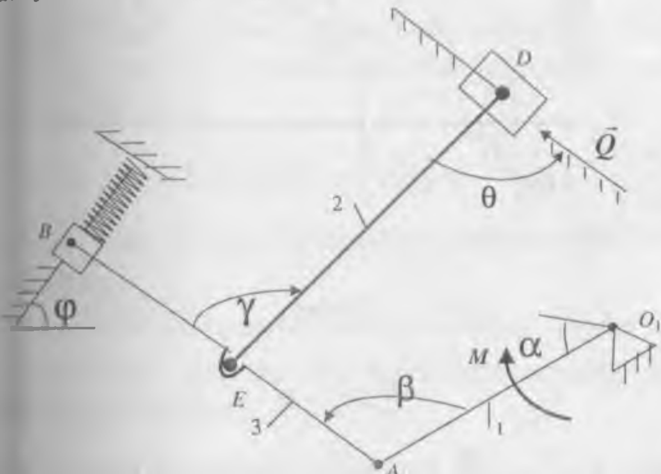
$$-1 + 2 + 6 + 3 - 10,5 - R_D = 0,$$

$$11 - 11,5 = R_D \Rightarrow R_D = -0,5 \text{ t}.$$

4- masala. Mexanizm gorizontal tekislikda kuchlar ta’sirida muvozanatda turibdi. Muvozanat holat esa $\alpha = 40°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 90°$, $\varphi = 90°$, $\theta = 60°$ burchaklar bilan aniqlanadi. Mexanizm sterjenlarining uzunliklar $\ell_1 = 0,4$ m, (ℓ_2

va ℓ_3 sterjenlarning uzunliklari ixtiyoricha); E nuqta sterjenning o'rtasida joylashgan. B sirpang'ichga $\bar{F}$ elastik kuchi ta'sir qiladi. Uning son qiymati $F = C\lambda$ formula bo'yicha topiladi, bunda c — prujinaning elastik koeffitsiyenti, λ — uning uzunligi (c =180 n/sm).

Bundan tashqari D sirpang'ichga $Q = 400H$ kuch, 0_1A krivoshipga esa $M = 100HM$ momentli juft kuch ta'sir qiladi. Mexanizm muvozanat holatda turganda prujinaning λ deformatsiyalanishini toping (6- rasm).

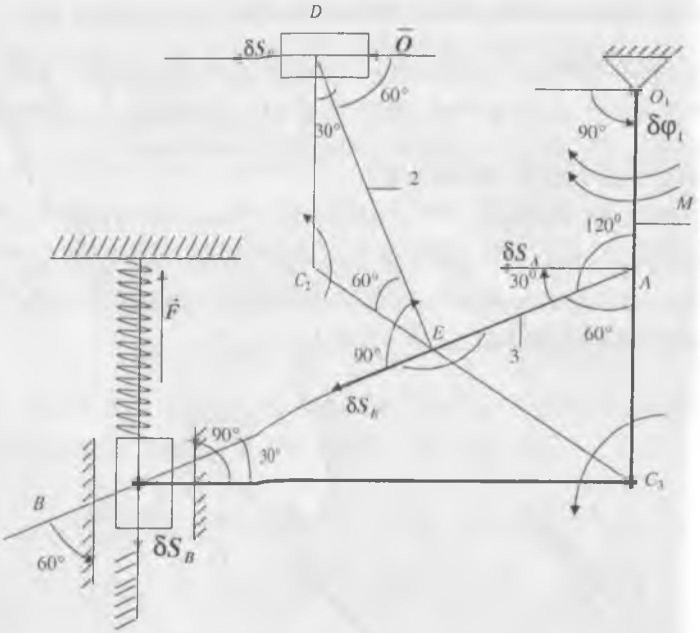


6- rasm.

Yechish. Berilganlarni e'tiborga olib, mexanizm chiziladi va chizmada mumkin bo'lgan ko'chishlar ham tasvirlaydi (7-rasm).

Mexanizmni berilgan burchaklar bo'yicha yasaymiz. Prujinani cho'ziladi deb hisoblasak, uning $F = C\lambda$ elastiklik kuchi yuqoriga yo'nalgan bo'ladi.

Mexanizm gorizontal tekislikda yotgani uchun, og'irlik kuchlarining bajargan ishi nolga teng bo'ladi. Masalani yechish uchun mumkin bo'lgan ko'chishlar prinsipidan foydalanamiz:



7- rasm.

$$\sum_k \delta A_k = 0, \qquad (1)$$

bunda δA_k — faol kuchlar va momentlarning bajargan elementar ishlari.

Mexanizmga ta'sir qiluvchi faol kuchlarni tasvirlaymiz: $\bar{Q}$ — sirpang'ichga ta'sir etuvchi kuch, $\bar{F}$ — prujinaning elastiklik kuchi va M momentli juft, $\bar{F}$ noma'lum kuch (1) tenglamadan foydalanib topiladi, $\bar{F}$ ni bilgan holda $F = c\lambda$ munosabatdan λ ni aniqlaymiz.

(1) tenglamani tuzish uchun mexanizmga mumkin bo'lgan ko'chish beriladi. $\delta\varphi_1$ — 1- sterjenning 0_1 o'q atrofida burilish burchagi δS_B va δS_D esa B va D sirpang'ichlarning mumkin bo'lgan ko'chishlari bo'lsin.

$\delta\varphi_1, \delta S_B$ va δS_D o'zaro bog'lanmagan mumkin bo'lgan ko'chishlardir. Mexanizm bir erkinlik darajaga ega bo'lganligi tufayli, erkli o'zgaruvchi sifatida u uchala miqdorlardan istalgan bittasini qabul qilishi mumkin. Erkli o'zgaruvchi sifatida $\delta\varphi_1$, burilish burchagi qabul qilinsa, $\delta S_A, \delta S_B, \delta S_D$ va δS_E mumkin bo'lgan ko'chishlar $\delta\varphi_1$ orqali ifodalanadi.

Avval δS_A topiladi va uning yo'nalishi aniqlanadi (δA_A ning yo'nalishini $\delta\varphi_1$ ning yo'nalishi aniqlaydi):

$$\delta S_A = \ell_1 \delta\varphi_1, \ \delta S_A \perp 0_1 A.$$

Endi δS_E ni topiladi. Bu ko'chish AB kesma bo'ylab yo'nalgan va δS_A ko'chishning AB to'g'ri chiziqdagi proyeksiyasiga teng:

$$\delta S_E = \delta S_A \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \delta S_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \ell_1 \delta\varphi_1.$$

Endi δS_A va δS_B ko'chishlar orasidagi bog'lanish o'rnatiladi:

$$\delta S_A \cos 30° = \delta S_B \cos 60° \Rightarrow \delta S_B = \sqrt{3}\delta S_A = \sqrt{3}\ell_1 \delta\varphi_1.$$

Shuningdek, δS_D va δS_A ko'chishlar orasidagi bog'lanish ham o'rnatiladi:

$$\delta S_D = \delta S_E \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \ell_1 \delta\varphi_1 = \frac{3}{4} \ell_1 \delta\varphi_1 = \frac{3}{4} \delta S_A. \quad (1)$$

Bulardan (1) tenglama tuziladi:

$$\sum_k \delta A_K = M\delta\varphi_1 + Q\delta S_D - F\delta S_B = 0, \ \delta\varphi_1 \neq 0$$

$$M\delta\varphi_1 + Q \cdot \frac{3}{4} \ell_1 \delta\varphi_1 - F \cdot \sqrt{3}\ell_1 \delta\varphi_1 = 0,$$

$$M + \frac{3}{4} \ell_1 Q - \sqrt{3}\ell_1 F = 0,$$

$$F = \frac{M + \frac{3}{4}\ell_1 Q}{\sqrt{3}\ell_1} = \frac{100 + \frac{3}{4} \cdot 0,4 \cdot 400}{\sqrt{3} \cdot 0,4} H = \frac{220}{0,4\sqrt{3}} H.$$

$$\lambda = \frac{F}{C} = \frac{220}{0,4\sqrt{3}\cdot 180}sm = \frac{220}{72\cdot 1,732}sm = \frac{220}{124,704}sm = 1,74sm$$

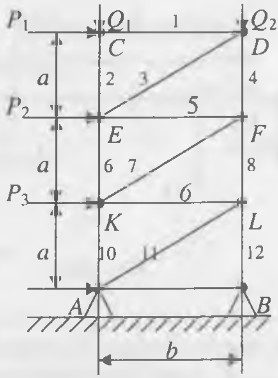
$$\lambda = 1,76sm.$$

III. Savol va masalalar

1. Analitik mexanikaning predmeti, asosiy tushunchalari va vazifalarini izohlang.
2. Bog'lanishlar deb nimaga aytiladi? Bog'lanishlarni klassifikatsiya qiling: golonomli va golonomsiz (geometrik va kinematik yoki integrallanuvchi va integrallanmaydigan, bo'shatadigan va bo'shatmaydigan) bog'lanishlar qanday bo'ladi? Misollar keltiring.
3. Mexanik sistemaning umumlashgan koordinatalari deb nimaga aytiladi?
4. Mexanik sistemaning erkinlik darajasi deb nimaga aytiladi?
5. Qanday holda sistema nuqtalarining dekart koordinatalari umumlashgan koordinatalarga bog'liq bo'lishi bilan bir qatorda vaqtga ham bog'liq bo'ladi?
6. Mexanik sistemaning mumkin bo'lgan ko'chishi deb nimaga aytiladi?
7. Mumkin bo'lgan ko'chish sistemaga ta'sir etuvchi kuchlarga bog'liq bo'ladimi?
8. Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipini qanday shakllantirish mumkin?
9. Ish tenglamasi qanday ko'rinishga ega bo'ladi?
10. Nima uchun mumkin bo'lgan ko'chish prinsipi bir qancha jismlardan tashkil topgan erkin bo'lmagan sistemaga qo'yilgan kuchlar sistemasining muvozanatlik shartlarini o'rnatishga va muvozanat tenglamalarini olishga juda qulay?
11. Bir qancha erkinlik darajaga ega bo'lgan mexanik sistemaga ta'sir qiluvchi kuchlar uchun ish tenglamalari qanday tuziladi?
12. Sodda mashinalarda harakatlantiruvchi kuch va qarshilik kuchi orasidagi bog'lanish qanday bo'ladi?
13. Mexanikaning «Oltin qoidasi» ni shakllantiring.
14. Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipi yordamida bog'lanishlarning reaksiyasi qanday aniqlanadi?
15. Mumkin bo'lgan ko'chish vektorining yo'nalishi qanday aniqlanadi?
16. Ideal bog'lanish deb qanday bog'lanishlarga aytiladi?
17. Egri chiziqli ko'chishlar miqdor va yo'nalish jihatidan qanday aniqlanadi?

18. Sodda mashinalarda (polispastlar), panoli press, vintli press, sterjenli press) mumkin bo'lgan ko'chish prinsipining qo'llanishlarini tushuntiring.

19. Mumkin bo'lgan ko'chishlar prinsipidan foydalanib, 8- rasmda tasvirlangan vertikal ferma 4, 5, 7 sterjenlarining zo'riqishlarini aniqlang.



8- rasm.

Javob: $T_4 = -\dfrac{P_1 a + Q_2 b}{b}$

(sterjen qisiladi)

$T_5 = -P_1 - P_2$

(sterjen qisiladi)

$T_7 = (P_1 + P_2)\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}$

(sterjen cho'ziladi).

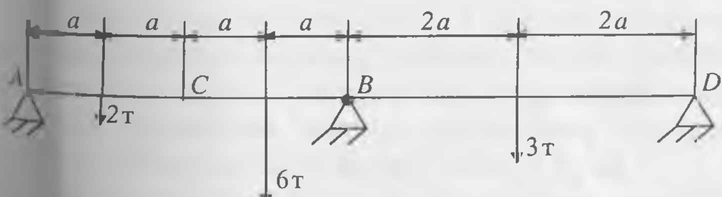
20. Richagning muvozanatlik shartini o'rnating.

21. *AB* bir jinsli to'sin *A* nuqtada qo'zg'almas sharnir bilan mahkamlangan. *B* nuqtada esa katokka (aravachaga) qo'yilgan. To'sinning og'irligi 300 *kg*. *B* nuqtadagi tayanch reaksiyasini aniqlang.

Javob: 150 kg.

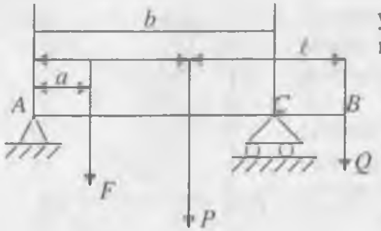
22. Uchta tayanchda yotgan *AD* to'sin, *B* nuqtada sharnir mahkamlangan ikkita to'sindan iborat. To'singa vertikal yo'nalishda — 2 *t*, 6*t* va 3 *t* kuchlar ta'sir qiladi. O'lchamlar 9- rasmda ko'rsatilgan. *A*, *B*, va *D* nuqtalardagi tayanch reaksiyalarini aniqlang.

Javob: $R_A = 1T;\ R_B = 10{,}5T;\ R_D = 0{,}5T$.



9- rasm.

23. Uzunligi 2ℓ va og'irligi *P* bo'lgan to'sin *A* nuqtada qo'zg'almas sharnirga, *A* nuqtadan *b* masofada turgan *C* nuqtada katokka qo'yilgan. To'singa *A* nuqtadan mos ravishda *a* va 2ℓ masofada turgan nuqtalarga *F* va *Q* vertikal kuchlar qo'yilgan. R_A va R_C ta-



10- rasm.

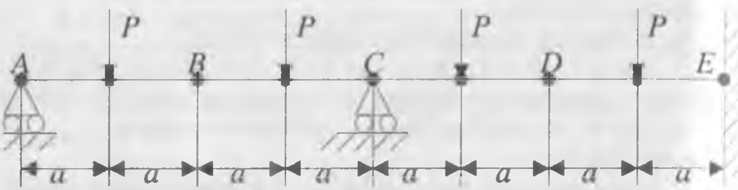
yanch reaksiyalarni aniqlang 10-rasm).

Javob: $R_C = \dfrac{Fa + P\ell + 2Q\ell}{b}$,

$$R_A = \frac{F(b-a) + P(b-\ell) - Q(2\ell - b)}{b}$$

24. *A* va *C* tayanchlarga qo'yilgan *AE* to'sin *B* va *D* nuqtalarda sharnirli biriktirilgan *AB*, *BD* va *DE* uchta to'sindan iborat. *DE* to'sin *E* nuqtada devorga mahkamlangan.

E nuqtadagi reaksiyaning vertikal tashkil etuvchisini aniqlang. To'singa to'rtta teng *P* vertikal kuchlar ta'sir qiladi. O'lchamlar 11-rasmda ko'rsatilgan.



Javob: $R = 0{,}5P$.

11- rasm.

2- §. Dalamber prinsipi. Dinamikaning umumiy tenglamasi

I. Nazariy qism

1. Shu vaqtga qadar moddiy nuqta va sistema dinamikasi masalalarini Nyuton qonunlariga asoslangan tenglamalardan yoki Nyuton qonunlarining natijalari bo'lib hisoblanadigan umumiy teoremalarga asoslangan usullardan foydalanib hal qilindi. Lekin bu usul yagona yo'l emas. Mexanik sistemaning harakat qonunlarini va muvozanatlik shartlarini Nyuton qonunlaridan emas, balki mexanik prinsiplarga asoslanib ham olish mumkin. Erkin bo'lmagan sistemaning harakatini o'rganish uchun Dalamber o'zining nomi bilan ataluvchi maxsus prinsipni tavsiya qildi.

Inersial sanoqning sistemasiga nisbatan faol va bog'lanish reaksiyasi kuchlari ta'siridagi *m* massali moddiy nuqtaning harakat tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R}. \qquad (1)$$

Bunda $\bar{F}$ — nuqtaga ta'sir qiluvchi faol kuchlarning teng ta'sir etuvchisi, $\bar{R}$ esa nuqtaga qo'yilgan bog'lanishlar reaksiya kuchlarining teng ta'sir etuvchisi, $\bar{a}$ esa inersial sanoq sistemasiga nisbatan nuqtaning tezlanishi. Miqdor jihatidan nuqtaning massasi bilan uning tezlanishi ko'paytmasiga teng, yo'nalishi esa tezlanish vektoriga qarama-qarshi yo'nalgan vektor kuch *inersiya kuchi* deyiladi, ya'ni $\bar{J} = -m\bar{a}$.

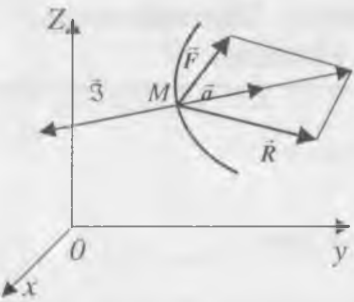
Endi (1) tenglamada $m\bar{a}$ hadni o'ng tomonga olib o'tiladi, natijada quyidagi tenglamalar hosil bo'ladi:

$$\bar{F} + \bar{R} - (m\bar{a}) = 0$$

yoki

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{J} = 0. \qquad (2)$$

(2) tenglik erkin bo'lmagan nuqta uchun Dalamber prinsipini ifodalaydi.



12- rasm.

Vaqtning har bir daqiqasida moddiy nuqtaga ta'sir qilayotgan faol, reaksiya va inersiya kuchlari birgalikda muvozanatlashuvchi kuchlar sistemasini tashkil qiladi (12-rasm).

2. Endi N ta nuqtadan iborat bo'lgan mexanik sistemani qaraymiz.

k — nuqtaga ta'sir qilayotgan faol kuchlarning teng ta'sir etuvchisini $\bar{F}_k$, bog'lanish reaksiya kuchlarining teng ta'sir etuvchisini $\bar{R}_k$ orqali, shu nuqtaning inersiya kuchini $\bar{J}_k = -m_k \bar{a}_k$ desak, bu nuqta uchun Dalamber prinsipi quyidagi tenglama bilan ifodalanadi:

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{J}_k = 0 \quad k = 1,2,...,N\,. \tag{3}$$

(3) ko'rinishdagi tenglamani sistemaning har bir nuqtasi uchun tuzib, ularni hadlab qo'shsak quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$\sum_k \bar{F}_k + \sum_k \bar{R}_k + \sum_k \bar{J}_k = 0\,, \tag{4}$$

yoki

$$\bar{R}^F + \bar{R}^N + \bar{R}^J = 0\,. \tag{4'}$$

Bunda $\bar{R}^F = \sum_k \bar{F}_k$ — faol kuchlarning bosh vektori;

$\bar{R}^N = \sum_k \bar{R}_k$ — bog'lanish reaksiya kuchlarining bosh vektori; $\bar{R}^J$ — sistema nuqtalari inersiya kuchlarining bosh vektori.

(4') tenglik mexanik sistema uchun Dalamber prinsipini ifodalaydi. Bog'lanishdagi mexanik sistema harakatining har bir daqiqasida sistemaning har bir nuqtasi uchun faol, reaksiya va inersiya kuchlari bosh vektorlarining yig'inidisi nolga teng bo'ladi.

Shunday qilib, Dalamber prinsipining mohiyati shundan iboratki, dinamika masalalarini yechishni formal ravishda statika masalalarini yechishga keltiradi. Shuning uchun ham Dalamber prinsipiga asoslangan usulni *kinetostatika usuli* deyiladi.

3. Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipi statik masalalarni yechishning umumiy usulini beradi. Dalamber prinsipi esa dinamik masalalarni yechishda statik usullardan foydalanish imkoniyatini beradi. Shunday ekan bu ikkita prinsipni bir vaqtda qo'llab, dinamika masalalarini yechishning umumiy usulini hosil qilish mumkin.

Ideal bog'lanishli moddiy nuqtalar sistemasi qarab chiqiladi. Ideal bog'lanishli mexanik sistemaning M_k nuqtasiga ta'sir qilayotgan faol va reaksiya kuchlarning teng ta'sir etuvchisini mos ravishda $\bar{F}_k$ va $\bar{R}_k$ desak, bu nuqtaga $\bar{F}_k$ va $\bar{R}_k$ kuchlar ta'sirida erkin harakatlanayotgan nuqta deb qarasak, unga Nyutonning ikkinchi qonuni qo'llanilsa, quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$m_k\bar{a}_k = \bar{F}_k + \bar{R}_k$$

yoki

$$\bar{F}_k - m_k\bar{a}_k + \bar{R}_k = 0, \quad (k = 1,\bar{n}). \qquad (5)$$

Fikran t vaqtga tayinlangan qiymatni berib, sistemaga $\delta\bar{r}_k$ $(k = 1,\bar{n})$ mumkin bo'lgan ko'chishni beriladi. (5)ning har bir tenglamasini $\delta\bar{r}_k$ ga skalar ko'paytirib, ularni hadlab qo'shiladi:

$$\sum_{k=1}^{n} (\bar{F}_k - m_k\bar{a}_k)\delta\bar{r}_k + \sum_{k=1}^{n} \bar{R}_k\delta\bar{r}_k = 0.$$

Ideal bog'lanishli sistemani qarayotganimiz uchun oxirgi yig'indi nolga teng bo'ladi. Natijada quyidagi tenglama kelib chiqadi:

$$\sum_{k=1}^{n} (\bar{F}_k - m_k\bar{a}_k)\delta\bar{r}_k = 0. \qquad (6)$$

(6) tenglama dinamikaning umumiy tenglamasi bo'lib, bu tenglama Lagranj—Dalamberning differensial-variatsion prinsipini ifodalaydi: Ideal bog'lanishli sistema harakatining har bir daqiqasida va sistemaning istalgan mumkin bo'lgan ko'chishida faol va inersiya kuchlari bajargan elementar ishlarning yig'indisi nolga teng bo'ladi.

Agar
$$\delta\bar{r}_k = \delta x_k \bar{i} + \delta y_k \bar{j} + \delta z_k \bar{k},$$
$$\bar{a}_k = \ddot{\bar{r}}_k = \ddot{x}_k \bar{i} + \ddot{y}_k \bar{j} + \ddot{z}_k \bar{k},$$
$$\bar{F}_k = F_{kx}\bar{i} + F_{ky}\bar{j} + F_{kz}\bar{k}$$
ekanligini e'tiborga olsak, (6) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(F_{kx} - m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2}\right)\delta x_k + \left(F_{ky} - m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2}\right)\delta x_k + \right.$$
$$\left. + \left(F_{kz} - m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2}\right)\delta x_k \right\} = 0 \qquad (7)$$

(7) dinamikaning umumiy tenglamasi ko'pgina dinamik masalalarni yechish uchun juda qulay, chunki bu tenglama noma'lum reaksiya kuchini o'zida saqlamaydi. Dalamber prinsipidan foydalanib masalalar yechayotganda, agar jism ilgarilanma harakat qilayotgan bo'lsa, inersiya kuchining yo'nalishi jismning tezlanishi yo'nalishiga qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'lib, jismning og'irlik markaziga qo'yilgan bo'ladi.

Qo'zg'almas o'q atrofida aylanayotgan jismning inersiya kuchi esa jism nuqtalari inersiya kuchlarining geometrik yig'indisiga teng. Har bir qo'shiluvchi kuch miqdori, zarra massasining uning urinma tezlanishiga bo'lgan ko'paytmasiga teng bo'lib, yo'nalishi esa urinma tezlanish yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalgan urinma inersiya kuchi bilan yo'nalishi normal tezlanish yo'nalishiga qarama-qarshi bo'lgan $m_k \omega^2 r_k$ normal inersiya kuchlarining geometrik yig'indisidan iborat bo'ladi. Dinamikaning umumiy tenglamasiga oid masalalarni yechishda quyidagi ish tartibiga rioya qilish tavsiya etiladi.

1. Berilgan mexanik sistemaning erkinlik darajasi aniqlanadi.

2. Sistemaga qo'yilgan barcha tashqi va bog'lanish reaksiya kuchlarini chizmada tasvirlash.

3. Sistema nuqtalariga qo'yilgan inersiya kuchlarining bosh vektorlari va bosh momentlarini aniqlash.

4. Koordinata boshi va o'qlarining yo'nalishlarini tanlash.

5. Sistemaga ta'sir qilayotgan kuchlar va inersiya kuchlari qo'yilgan nuqtalarining mumkin bo'lgan ko'chishlarini hisoblash.

6. Dinamikaning umumiy tenglamasini tuzish.

7. Tuzilgan tenglamalar sistemasidan izlanayotgan noma'lum miqdorlarni aniqlash.

Bu xil masalalarni ikki tipga ajratish mumkin.

a) Dalamber—Lagranj tenglamalari (prinsipi)ga asoslanib yechiladigan, erkinlik darajasi bitta bo'lgan masalalar;

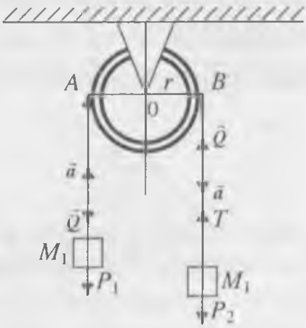
b) Dalamber—Lagranj tenglamalariga asoslanib yechiladigan, erkinlik darajasi bir nechta bo'lgan masalalar.

II. Masalalar yechish

5- masala. Blok orqali o'tgan cho'zilmaydigan ipga og'irligi P_1 bo'lgan M_1 yuk va og'irligi P_2 bo'lgan M_2 yuk mahkamlangan, $P_2 > P_1$.

Yukning a tezlanishi miqdorini va ipning T taranglik kuchini toping. Ip va blokning massalarini e'tiborga olmang.

Yechish. Masalani yechish uchun Dalamber prinsipi qo'llaniladi. M_1 va M_2 jismlarga qo'yilgan Q_1 va Q_2 inersiya kuchlarini hisobga olamiz. Sistemaning muvozanat tenglamasini 0 nuqtaga nisbatan momentlar tenglamasi ko'rinishida tuziladi (13- rasm):



13- rasm.

$$P_1 r - P_2 r + \frac{P_1}{g} ar + \frac{P_2}{g} ar = 0 .$$

Bu tenglikdan a ni quyidagicha topiladi:

$$a(P_1 + P_2) = Q(P_2 - P_1), \quad a = \frac{P_2 - P_1}{P_1 + P_2} \cdot Q.$$

Ipning T taranglik kuchini topish uchun o‘ng tomondagi M_2 jismni bog‘lanishdan ozod qilib, uni bog‘lanish reaksiyasi ta’sir kuchiga almashtiriladi. M_2 jismga P_2, Q_2 va T kuchlar ta’sir qiladi. M_2 jismning muvozanat tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$Q_2 + T - P_2 = 0.$$

Bundan T topiladi: $T = P_2 - Q_2$.

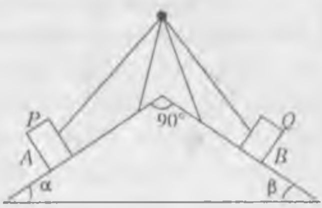
Q_2 inersiya kuchining miqdori topiladi:

$$Q_2 = m_2 a = \frac{P_2}{g} a = \frac{P_2}{g} g \frac{P_2 - P_1}{P_1 + P_2} = P_2 \frac{P_2 - P_1}{P_1 + P_2}.$$

Natijada ifoda ipning taranglik kuchi uchun quyidagicha yoziladi:

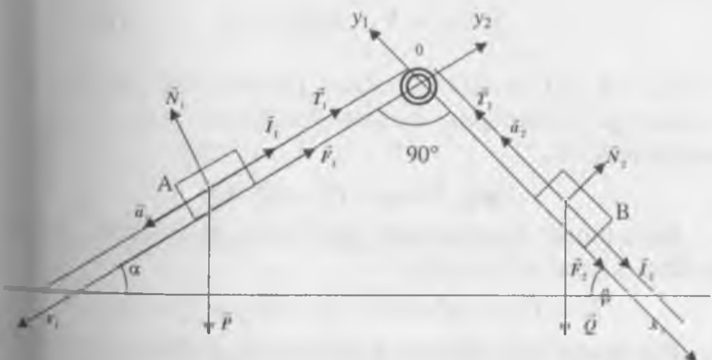
$$T = P_2 - P_2 \frac{P_2 - P_1}{P_1 + P_2} = P_2 \left(1 - \frac{P_2 - P_1}{P_1 + P_2} \right) = \frac{2 P_1 P_2}{P_1 + P_2}.$$

6- masala. Og‘irligi e’tiborga olinmaydigan blokdan o‘tkazilgan, cho‘zilmaydigan ip bilan bog‘langan og‘irliklari P va Q bo‘lgan ikkita jism to‘g‘ri burchakli prizmaning yoqlari bo‘ylab sirpana oladi. Jismlar bilan prizma yoqlari orasidagi ishqalanish koeffitsiyenti f ga teng. Prizmaning o‘tkir burchaklari α va β ga teng. Bu jismlar qanday tezlanish bilan siljishi va jismlarning prizma yon yoqlariga beradigan N_1 va N_2 bosim kuchlarini toping (14- rasm).



14- rasm.

Yechish. A va B jism (yuk)lar prizma yoqlari bo‘ylab ilgarilanma harakat qiladi. A jism a_1 tezlanish bilan pastga tushayapti deb qaraylik ($P > Q$). Jismlar cho‘zilmaydigan ip bilan bog‘langanligi uchun B jism ham miqdor jihatidan a_1 ga teng bo'lgan $\bar{a}_2$ tezlanish bilan yuqoriga ko'tarilib harakatlanadi, ya'ni $a_1 = a_2 = a$. Jismlarga og'irlik kuchlaridan tashqari inersiya va reaksiya kuchlari ta'sir qiladi. A jismga moduli $I_1 = \frac{P}{g}a$ ga teng bo'lgan, $\bar{a}_1$ tezlanishga qarama-qarshi tomonga yo'nalgan inersiya kuchi qo'yiladi. Shuningdek, B jismga ham moduli $I_2 = \frac{Q}{g}a$ ga teng bo'lgan, $\bar{a}_2$ tezlanishga qarama-qarshi yo'nalgan inersiya kuchini qo'yamiz. A jismga ta'sir qiladigan bog'lanish reaksiya kuchini $\bar{N}_1$, ipning taranglik kuchini $\bar{T}_1$ va ishqalanish kuchini esa $\bar{F}_1$ orqali, B jismga ta'sir qiladigan bog'lanish reaksiya kuchini $\bar{N}_2$, ipning taranglik kuchini $\bar{T}_2$ va ishqalanish kuchini $\bar{F}_2$ deylik. Endi barcha berilgan va izlanayotgan kattaliklarni chizmada tasvirlanadi (15- rasm.).



15- rasm.

Dalamber prinsipiga ko'ra sistema unga qo'yilgan kuchlar ta'sirida muvozanatda bo'ladi. Prizmaning og'irligi e'tiborga olinmagani uchun sistema ikkita erkinlik darajasiga ega. Sistemani ikkita qismga bo'lib qarab chiqiladi. Jismning joylashgan qismlari uchun alohida-alohida muvozanat tenglamalari tuziladi.

Koordinata o'qlarining yo'nalishlarini 15- rasmda ko'rsatilgandek belgilanadi. $\vec{T}_1$ va $\vec{T}_2$ kuchlar, ya'ni ipning taranglik kuchlari miqdor jihatdan teng:

$$T_1 = T_2 = T\,.$$

A jismga ta'sir etuvchi kuchlarni Ox_1y_1 koordinatalar sistemasi o'qlariga, B jismga ta'sir qiluvchi kuchlarni Ox_2y_2 koordinata sistemasi o'qlariga proyeksiyalab, har bir jism uchun ikkitadan muvozanat tenglamalari tuziladi:

A jism uchun $$\sum_i X_{i_1} = P\sin\alpha - F_1 - I_1 - T = 0\,. \qquad (1)$$

$$\sum_i y_{i_1} = N_1 - P\cos\alpha = 0\,, \qquad (2)$$

muvozanat tenglamalari, B jism uchun quyidagi muvozanat tenglamalari hosil bo'ladi:

$$\sum_i X_{i_2} = Q\sin\beta + F_1 + I_1 - T = 0\,, \qquad (3)$$

$$\sum_i y_{i_2} = N_2 - Q\sin\beta = 0\,. \qquad (4)$$

(2) va (4) tenglamalardan jismlarning prizma yon yoqlariga beradigan bosim kuchlarining miqdorini aniqlanadi:

$$N_1 = P\cos\alpha,\ \ N_2 = Q\cos\beta\,.$$

Ishqalanish kuchlarning miqdorini ishqalanish qonunlaridan foydalanib topiladi:

$$F_1 = fN_1 = fP\cos\alpha,\ \ F_2 = fN_2 = fQ\cos\beta,$$

Ishqalanish va inersiya kuchlarining topilgan ifodalarini (1) va (3) ga qo'ysak, quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$\frac{P}{g}a + T = P\sin\alpha - fP\cos\alpha = P(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,,$$

$$T - \frac{Q}{g}a = Q\sin\beta + fQ\cos\beta = Q(\sin\beta + f\cos\beta)\,.$$

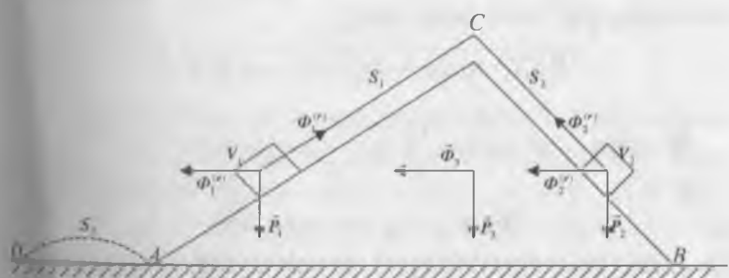
Tenglamalar sistemasidan a ni topish uchun birinchi tenglamadan ikkinchi tenglamani hadlab ayirib, T noma'-

lum kuch chiqarib tashlanadi va a jismlarning tezlanishini topiladi:

$$a = \frac{P(\sin\alpha - f\cos\alpha) - Q(\sin\beta + f\cos\beta)}{P + Q} g.$$

7- masala. Og'irligi P_1 ga teng bo'lgan bir jinsli uchburchakli prizma bir yon yog'i bilan gorizontal tekislikda turibdi. Boshqa ikkita yog'i gorizontal tekislik bilan α va β burchak tashkil qiladi, shuningdek, $\alpha + \beta = 90^\circ$. Bu yoqlarga og'irliklari P_1 va P_2 bo'lgan ikkita jism qo'yilgan bo'lib, ular bu yoqlar bo'ylab ishqalanishsiz siljishi mumkin. Prizma va yuklarning og'irlik markazlari prizma qirralariga perpendikular bo'lgan bir vertikal tekislikda bo'ladi. Prizmaning tezlanishini va jismlarning prizmaga nisbatan tezlanishlarini aniqlang.

Yechish. 16- rasmdagi vertikal tekislikda prizmaning ABC to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat bo'lgan kesimi tasvirlangan.



16- rasm.

Sistemaga Dalamber—Lagranj prinsipini, ya'ni dinamikaning umumiy tenglamasini qo'llaniladi. Jismlar sistemasi 3ta erkinlik darajaga ega. Umumlashgan koordinata sifatida $0A = S_3$ deb olinadi, 0 — qo'zg'almas nuqta; $CV_1 = S_1$ va $CV_2 = S_2$. Sistema uch qismga bo'linadi. Izlanayotgan $a_3 = \ddot{S}_3$, $a_1 = \ddot{S}_1$ va $a_2 = \ddot{S}_2$ tezlanishlarni topish uchun uchta tenglama tuziladi. Jismlar murakkab harakat qiladi. Ularning harakati prizmaga nisbatan qiladigan harakati bilan prizma bilan birgalikda qiladigan harakatlari yig'indisidan iborat bo‘ladi. Rasmda inersiya kuchlarining teng ta’sir etuvchilari tasvirlangan.

Prizma uchun $\Phi_3 = \frac{P_3}{g} \cdot \ddot{S}_3 = \frac{P}{g} a_3$.

Jismlarning tezlanishlari umumlashgan koordinatalarning o‘sish tomoniga yo‘nalgan deb qarab, ularning nisbiy va ko‘chirma harakatdagi inersiya kuchlarining teng ta’sir etuvchilari topiladi:

$$\Phi_1^{(r)} = \frac{P_1}{g} \cdot \ddot{S}_1 = \frac{P_1}{g} a_1, \quad \Phi_1^{(\ell)} = \frac{P_1}{g} a_3,$$

$$\Phi_2^{(r)} = \frac{P_2}{g} a_2, \quad \Phi_2^{(\ell)} = \frac{P_2}{g} a_3 .$$

Izlanayotgan miqdorlarni topish uchun sistemaga shunday mumkin bo‘lgan ko‘chish beriladiki, umumlashgan koordinatalardan faqat bittasi o‘zgarsin. S_1 koordinata o‘zgartirilganda berilgan va inersiya kuchlarining bajargan elementar ishlarining yig‘indisi nolga teng:

$$P_1 \delta S_1 \cdot \sin\alpha - \Phi_1^{(r)} \delta S_1 - \Phi_1^{(\ell)} \delta S_1$$

Bundan $\quad P_1 \sin\alpha - \frac{P_1}{g} a_1 + \frac{P_1}{g} a_3 \cos\alpha = 0$

yoki

$$g \sin\alpha - a_1 + a_3 \cos\alpha = 0 . \qquad (1)$$

Endi faqat umumlashgan koordinata S_2 ni o‘zgartirilsa, quyidagi tenglama topiladi:

$$g \cos\alpha - a_2 - a_3 \sin\alpha = 0 . \qquad (2)$$

Uchinchi muvozanat tenglamasini olish uchun sistemaga shunday mumkin bo‘lgan ko‘chish beriladi, faqat S_3 koordinata o‘zgarsin. Bajarilgan ishlar tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$-\frac{P_3}{g} a_3 \delta S_3 - \frac{P_1}{g} a_3 \delta S_3 - \frac{P_2}{g} a_3 \delta S_3 +$$

$$+\frac{P_1}{g} a_1 \delta S_3 \cos\alpha - \frac{P_2}{g} a_2 \delta S_3 \sin\alpha = 0 .$$

Bu tenglamadan

$$-(P_1 + P_2 + P_3)a_3 + P_1 a_1 \cos\alpha - P_2 a_2 \sin\alpha = 0 \qquad (3)$$

tenglama hosil bo‘ladi.

(1) va (2) tenglamalardan a_1 va a_2 ni a_3 orqali ifodalanadi:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= g\sin\alpha + a_3\cos\alpha, \\ a_2 &= g\cos\alpha - a_3\sin\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

(4) ni (3) ga qo‘yib, a_3 topiladi:

$$a_3 = \frac{(P_1 - P_2)g\sin\alpha\cos\alpha}{P_1\sin^2\alpha + P_1\cos^2\alpha + P_3}.$$

So‘ngra, (4) dan a_1 va a_2 topiladi:

$$a_1 = \frac{P_1 + P_3}{P_1\sin^2\alpha + P_1\cos^2\alpha + P_3} g\sin\alpha;$$

$$a_2 = \frac{P_2 + P_3}{P_1\sin^2\alpha + P_1\cos^2\alpha + P_3} g\cos\alpha.$$

8- masala. Mexanik sistema arqon bilan o‘ralgan pog‘onali bir jinsli 1 va 2 shkivlar, bu arqonga biriktirilgan 3—6 vaznsiz bloklardan iborat. Sistema $P_1 = 10H$, $P_2 = 0$, $P_3 = 20H$, $P_4 = 30H$, $P_5 = 40H$, $P_6 = 0$ og‘irlik kuchlari va shkivlardan biriga ta’sir etuvchi momenti $M = 10H.m$ bo‘lgan juft kuch ta’sirida vertikal tekislikda harakatlanadi (17- rasm).

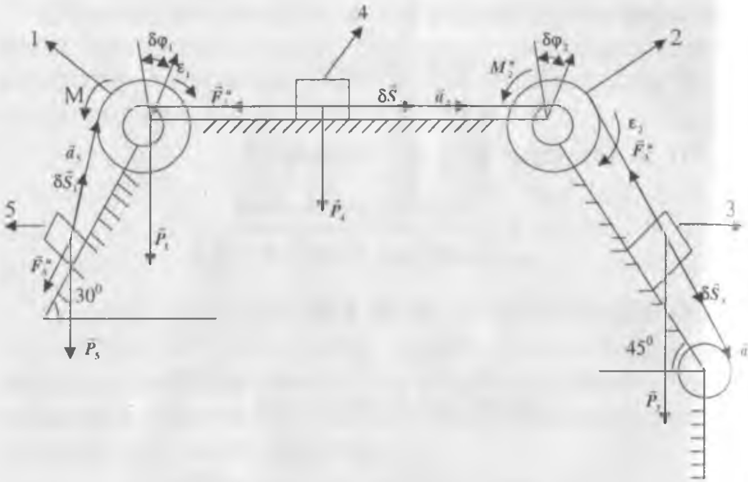
1- shkiv pog‘onalarining radiuslari $R_1 = 0,2m$, $r_1 = 0,1m$; 2- shkivniki esa $R_2 = 0,3m$, $r_2 = 0,15m$ ga teng; ularning aylanish o‘qlariga nisbatan inersiya radiuslari mos ravishda $\rho_1 = 0,1m$ va $\rho_2 = 0,2m$ ga teng.

Ishqalanishni nazarga olmay, eng og‘ir yukning tezlanishini aniqlang (og‘irliklari nolga teng bo‘lgan yuklarni chizmada tasvirlamang).

Yechish. Berilgan: $P_1 = 10H$; $P_2 = 0$; $P_3 = 20H$; $P_4 = 30H$; $P_5 = 40H$; $P_6 = 0$; $M = 10H.m$; $R_1 = 0,2m$; $r_1 = 0,1m$; $R_2 = 0,3m$; $r_2 = 0,15m$; $\rho_1 = 0,1m$; $\rho_2 = 0,2m$.

Ishqalanish hisobga olinmasdan eng og‘ir yukning, ya’ni og‘irligi $P_5 = 40H$ bo‘lgan yukning a_5 tezlanishini toping.

1. Avval masalada berilgan va izlangan miqdorlarni chizmada tasvirlanadi (17- rasm).



17- rasm.

1, 2, 3, 4, 5 jismlardan tashkil topgan sistemani qarab chiqamiz. Bu jismlar arqonlar bilan biriktirilgan. Sistema bitta erkinlik darajaga ega. Sistemaga qo‘yilgan bog‘lanishlar ideal.

a_5 ni topish uchun dinamikaning umumiy tenglamasidan foydalanamiz:

$$\sum_k \delta A_k^a + \sum_k \delta A_k^u = 0\,. \qquad (1)$$

bunda $\sum\limits_k \delta A_k^a$ — faol kuchlarning bajargan ishi; $\sum\limits_k \delta A_k^u$ — inersiya kuchlarining bajargan ishi.

2. Chizmada P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, faol kuchlar va M momentli juft tasvirlanadi. 5- jismning tezlanishi va a_5 ning yo‘nalishini belgilab, F_3^u, F_4^u, F_5^u inersiya kuchlarini va M_1^u hamda M_2^u momentli inersiya juftlari ham tasvirlanadi.

Ularning miqdorlari quyidagi formulalar yordamida topiladi:

$$F_3^u = \frac{P_3}{g} a_3, \quad F_4^u = \frac{P_4}{g} a_4, \quad F_5^u = \frac{P_5}{g} a_5,$$

$$M_1^u = \frac{P_1}{g} \rho_1^2 \varepsilon_1, \quad M_2^u = \frac{P_2}{g} \rho_2^2 \varepsilon_2. \qquad (2)$$

Bunda $M_2^u = 0$ bo'ladi, chunki $P_2 = 0$.

3. Sistemaga mumkin bo'lgan ko'chishni berib, (1) tenglama tuziladi:

$$\left(P_3 \sin 45° - F_3^u\right)\delta S_3 - M_2^u \delta\varphi_2 - F_4^u \delta S_4 - M\delta\varphi_1 - M_1^n \delta\varphi_1 -$$

$$\left(P_5 \sin 30° - F_5^u\right)\delta S_5 = 0. \qquad (3)$$

Barcha ko'chishlar $\delta\varphi_2$ orqali ifodalanadi:

$$\delta S_3 = R_2 \delta\varphi_2; \quad \delta S_4 = r_2 \delta\varphi_2; \quad \delta\varphi_1 = \frac{r_2}{R_1}\delta\varphi_2;$$

$$\delta S_5 = R_1 \delta\varphi_1 = \frac{R_1 r_2}{R_1}\delta\varphi_2 = r_2 \delta\varphi_2; \qquad (4)$$

(2) va (4)ni (3) tenglamaga qo'yilsa, quyidagi ko'rinishdagi tenglama hosil bo'ladi:

$$\left[P_3\left(\sin 45° - \frac{a_3}{g}\right)R_2 - \frac{P_4}{g} a_4 r_2 - M\frac{r_2}{R_1} - \frac{P_1}{g}\rho_1^2 \varepsilon_1 \frac{r_2}{R_1} -\right.$$

$$\left. P_5\left(\sin 30° - \frac{a_5}{g}\right) r_2\right]\delta\varphi_2 = 0. \qquad (5)$$

(5) tenglikdagi a_3, a_4 va ε_1 miqdorlar a_5 orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$\varepsilon_1 = \frac{a_5}{R_1}, \quad \varepsilon_1 = \frac{a_5}{R_1} a_4 = \varepsilon_1 r_1 = \frac{a_5}{R_1} r_1 = \frac{r_1}{R_1} a_5.$$

$$\left.\begin{aligned} a_3 &= \varepsilon_2 R_2, \\ a_4 &= \varepsilon_2 r_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{a_3}{R_2} = \frac{a_4}{r_2} \Rightarrow a_3 = \frac{R_2}{r_2} a_4 = \frac{R_2}{r_2} \cdot \frac{r_2}{R_2} a_5. \qquad (6)$$

(6) ni (5)ga qo'yib, $\delta\varphi_2 \neq 0$ bo'lishligini e'tiborga olinsa, a_5 ni topishga imkon beradigan tenglik kelib chiqadi:

$$P_3\left(\sin 45^\circ - \frac{R_2 r_1}{R_1 r_2 g} a_5\right) R_2 - \frac{P_4}{g} \cdot \frac{r_1}{R_1} a_5 r_2 - M\frac{r_2}{R_1} - \frac{P_1}{g}\rho_1^2 \frac{a_5}{R_1} \times$$

$$\times \frac{r_2}{R_1} - P_5\left(\sin 30^\circ - \frac{a_5}{g}\right) r_2 = 0 .$$

Bu tenglamani a_5 ga nisbatan yechilsa, tubandagi ifoda vujudga keladi:

$$a_5 = \frac{P_3 R_2 \sin 45^\circ - M\dfrac{r_2}{R_1} - P_5 r_2 \sin 30^\circ}{\dfrac{R_2^2}{R_1 r_2 g} + \dfrac{P_4}{g} \cdot \dfrac{r_1 r_2}{R_1} + \dfrac{P_1}{g}\rho_1^2 \dfrac{r_1}{R_1^2} - \dfrac{P_5}{g} r_2}.$$

Bu ifodaga berilgan son qiymatlarni qo'yib, a_5 ning qiymati topiladi:

$$a_5 = \frac{20 \cdot 0,3 \cdot 0,71 - 10 \cdot \dfrac{0,15}{0,2} - 40 \cdot 0,15 \cdot 0,5}{\dfrac{0,09 \cdot 0,1}{0,2 \cdot 0,15 \cdot 10} + \dfrac{30}{10} \cdot \dfrac{0,1 \cdot 0,15}{0,2} + \dfrac{10}{10} \cdot 0,01 \cdot \dfrac{0,15}{0,04} - \dfrac{40}{10} \cdot 0,15} \times$$

$$\times \frac{m}{s^2} = \frac{4,26 - 7,5 - 3}{0,03 + 0,225 + 0,0375 - 0,6} \cdot \frac{m}{s^2} = \frac{-6,24}{-0,3075} \cdot \frac{m}{s^2} =$$

$$= 20\frac{m}{s^2}.$$

III. Savol va masalalar

1. Dalamber prinsipining mohiyati nimadan iborat:

a) moddiy nuqta uchun; b) mexanik sistema uchun; d) erkin bo'lmagan mexanik sistema uchun?

2. Mexanik sistema inersiya kuchlari bosh vektorining moduli va yo'nalishi qanday aniqlanadi?

3. Qattiq jism nuqtalarining inersiya kuchlarini qanday qilib sodda ko'rinishga keltirish mumkin:

a) jismning ilgarilanma harakatida; b) simmetrik tekislikka ega bo'lib, bu tekislikka perpendikular bo'lmagan qo'zg'almas o'q atrofida aylanayotgan jism nuqtalarida; d) simmetrik tekislikka ega bo'lib, yassi parallel harakat qilayotgan jism nuqtalarida.

4. Qanday shartlarda aylanuvchi jismning tayanchga beradigan dinamik bosimi nolga teng bo'ladi?

5. Dalamber—Lagranjning differensial-variatsion prinsipining mohiyatini izohlab bering.

6. Dinamikaning umumiy tenglamasini keltirib chiqaring.

7. Umumlashgan koordinatalar va umumlashgan tezliklar deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.

8. Umumlashgan kuchlar nima va ular qanday hisoblanadi?

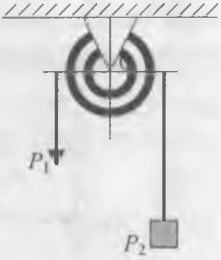
9. Sistemaning muvozanatlik shartlarini umumlashgan koordinatalarda o'rnating.

10. Dinamikaning umumiy tenglamasini umumlashgan koordinatalarda chiqaring. Har bir mexanik sistema uchun bunday tenglamalarning soni nechta bo'ladi?

11. Umumlashgan kuchlar bo'yicha dinamikaning umumiy tenglamasidan olinadigan, mexanik sistemaga qo'yiladigan kuchlar muvozanat shartlarining ko'rinishlari qanday bo'ladi?

12. Potensialli kuchlar uchun dinamikaning umumiy tenglamasini keltirib chiqaring.

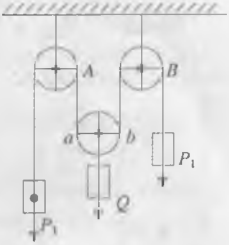
13. Blok orqali o'tgan cho'zilmaydigan ipning bir uchiga P_1 og'irlikdagi yuk, ikkinchi uchiga P_2 og'irlikdagi yuk mahkamlangan va $P_2 > P_1$ (18- rasm). Yuklar tezlanishlarining a miqdori va ipning taranglik kuchini toping. Ip va blokning massasi hisobga olinmasin.



18- rasm.

Javob: $a = g\dfrac{P_2 - P_1}{P_1 + P_2}$, $T = \dfrac{2P_1P_2}{P_1 + P_2}$.

14. Qo'zg'almas o'qli A va B bloklar orqali o'tgan arqon Q og'irlikdagi yuk osilgan qo'zg'aluvchan S blokni tutib turadi (19- rasm). Arqonning uchlariga P_1 va P_2 yuklar osilgan. Blok va arqonning massasini, shuningdek, o'qlardagi ishqalanishni ham hisobga olmasdan, agar $P_1 + P_2 > Q$ bo'lsa, barcha yuklarning tezlanishlarini aniqlang.



19- rasm.

Javob: $a_1 = g\dfrac{4P_1P_2 - Q(3P_2 - P_1)}{4P_1P_2 + Q(P_1 + P_2)}$,

$$a_2 = \frac{4P_1P_2 - Q(3P_1 - P_2)}{4P_1P_2 + Q(P_1 + P_2)}, \quad a = g\frac{4P_1P_2 - Q(P_1 + P_2)}{4P_1P_2 + Q(P_1 + P_2)}.$$

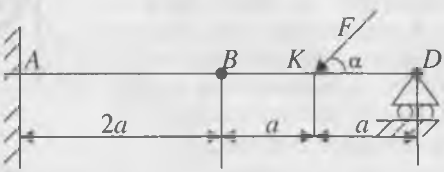
15. Og'irligi Q ga teng bo'lgan yuk gorizontal tekislikda yotibdi. Bu yukka bir uchiga P og'irlikdagi tosh osilgan ip blok orqali bog'langan. Agar jism bilan tekislik orasidagi ishqalanish koeffitsiyenti f ga teng bo'lsa, yukning tezlanishini va ipning taranglik kuchini toping.

Javob: $a = g\dfrac{P - fQ}{P + Q}, \quad T = \dfrac{PQ(1 + f)}{P + Q}.$

16. Uchta P_1, P_2, P_3 og'irlikdagi jismlar absolut silliq gorizontal tekslikda og'irliksiz va cho'zilmaydigan arqonlar bilan biriktirilgan holda yotibdi. Arqonga Q og'irlikdagi yuk osilgan. Sistemaning a tezlanishini hamda P_1 va P_2 yuklar orasidagi arqonning taranglik kuchini toping.

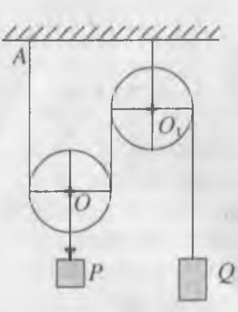
Javob: $a = g\dfrac{Q}{P_1 + P_2 + P_3 + Q}, \quad T = \dfrac{P_1 Q}{P_1 + P_2 + P_3 + Q}.$

17. Ikkita AB va BD gorizontal to'sin B nuqtada silindrik sharnir bilan biriktirilgan. D uchi katokda yotibdi, A uchi esa devorga mahkamlangan. BD to'singa K nuqtada gorizont bilan α burchak tashkil qiluvchi F kuch qo'yilgan. O'lchamlar 20- rasmda ko'rsatilgan. A mahkamlangan kesimda reaksiyaning tashkil etuvchilarini va juftning m_P reaktiv momentini aniqlang. To'sinning massasini hisobga olmang.



20- rasm.

Javob: $R_{Ax} = F\cos\alpha, R_{Ay} = \dfrac{1}{2}F\sin\alpha, m_P = Fa\sin\alpha.$



21- rasm.

18. Arqonning bir uchi A nuqtada mahkamlangan bo'lib, P yuk osilgan O qo'zg'aluvchan blok va O_1 qo'zg'almas blok orqali o'tadi. Arqonning boshqa uchiga $Q > \dfrac{P}{2}$ yuk osilgan. Bloklar massasini e'tiborga olmasdan Q yukning a tezlanishini aniqlang (21- rasm).

Javob: $a = 2g\dfrac{2Q - P}{4Q + P}.$

3- §. Lagranjning birinchi tur tenglamalari

I. Nazariy qism

Nuqtaning erkin bo'lmagan harakati uchun dinamika masalalarini ilgari ham qaragan edik. Agar nuqtaga ta'sir qilayotgan barcha faol va bog'lanish reaksiya kuchlarining teng ta'sir etuvchilarini mos ravishda $\bar{F}$ va $\bar{R}$ orqali belgilasak, u holda moddiy nuqta uchun dinamikaning asosiy tenglamasi

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R} \qquad (1)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Agar (1) vektor tenglamaning ikkala qismini $Oxyz$ koordinatalar sistemasining o'qlariga proyeksiyalasak, nuqtaning harakati uchun quyidagi skalar tenglamalar hosil bo'ladi:

$$m\ddot{x} = F_x + R_x, \quad m\ddot{y} = F_y + R_y \quad m\ddot{z} = F_z + R_z. \qquad (2)$$

(2) tenglamalardan foydalanib, erkin bo'lmagan nuqta uchun dinamika masalalarini hal qilaylik:

1) nuqtaning harakat qonuni va unga ta'sir qilayotgan faol kuchlarni bilgan holda bog'lanishning reaksiya kuchini aniqlaylik;

2) nuqtaga ta'sir qilayotgan faol kuchlarni bilgan holda:

a) nuqtaning harakat qonunini;

b) nuqtaga qo'yilgan bog'lanishning reaksiya kuchini aniqlaylik.

Agar moddiy nuqta biror qo'zg'almas sirt yoki egri chiziq bo'yicha harakat qilayotganda (2) tenglamalar bir vaqtning o'zida nuqtaning faol kuchlar ta'siridagi harakat qonunini va bog'lanish reaksiya kuchini aniqlash imkonini bermaydi. Chunki bu uchta tenglama 6 ta noma'lumni o'zida saqlaydi: nuqtaning x, y, z koordinatalarini va reaksiya kuchining o'qlardagi R_x, R_y, R_z proyeksiyalarini.

Nuqta biror sirt bo'yicha harakatlanar ekan, uning koordinatalari sirt tenglamasini qanoatlantirishi kerak.

Natijada

$$f(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Lekin bu uchta tenglama ham 6 ta noma'lumni aniqlash uchun yetarli emas. Yetishmayotgan uchta tenglama ideal bog'lanish shartidan foydalanib, keltirib chiqariladi.

Nuqta harakatlanayotgan sirt ideal silliq bo'lganligi uchun bunday holda reaksiya kuchi sirtning normali bo'yicha yo'nalgan bo'ladi.

$f(x, y, z)$ skalar funksiyaning $\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}$

vektor gradiyenti ham sirtning normali bo'yicha yo'nalgan bo'ladi.

$\bar{R}$ va $\operatorname{grad} f$ vektorlarning kollinearlik shartidan yetishmayotgan ikkita tenglama hosil bo'ladi:

$$\frac{R_x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{R_y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{R_z}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \tag{4}$$

Shunday qilib, (2)—(4) tenglamalar nuqtaning qo'zg'almas sirt bo'yicha harakati haqidagi masalalarni yechishga imkon beradi.

(2) va (4) tenglamalardan bog'lanishlarning reaksiyasini chiqarib tashlash mumkin. Buning uchun (4) teng nisbatlarni λ orqali belgilasak, ya'ni

$$\frac{R_x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{R_y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{R_z}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \lambda$$

desak, bog'lanish reaksiya kuchining $Oxyz$ koordinatalar sistemasining o'qlaridagi proyeksiyalari uchun ifodalar topiladi:

$$R_x = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad R_y = \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \quad R_z = \lambda\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{5}$$

Bunday holda (2) tenglamalar quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$m\ddot{x} = F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}. \qquad (6)$$

Bu tenglamalarga (3) bog‘lanish tenglamasini qo‘shib, to‘rtta x, y, z va λ noma’lumlarga nisbatan to‘rtta tenglama sistemasi kelib chiqadi.

Bu noma’lumlar topilgandan keyin (5) formulalar bo‘yicha bog‘lanish reaksiya kuchining proyeksiyalari aniqlaniladi. Reaksiyaning moduli

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_x^2 + R_x^2} = |\lambda|\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \qquad (7)$$

formula bo‘yicha topiladi. Reaksiya esa

$$\bar{R} = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k}\right) = \lambda \operatorname{grad} f$$

ifoda bo‘yicha aniqlanadi.

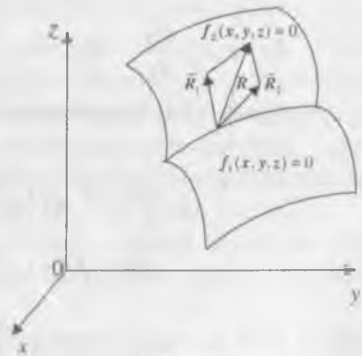
(6) tenglamalarga Lagranjning birinchi tur tenglamalari, λ ga esa *Lagranj ko‘paytuvchisi* deyiladi.

Bu izohlangan usul Lagranjning noaniq ko‘paytuvchilar usuli nomi bilan ataladi.

Bordi-yu moddiy nuqta qo‘zg‘almas chiziq bo‘yicha harakatlanayotgan bo‘lsa, bunday holda bog‘lanish tenglamalari

$$f_1(x, y, z) = 0, \; f_2(x, y, z) = 0 \qquad (8)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bunda $f_1(x, y, z) = 0$ va $f_2(x, y, z) = 0$ sirt tenglamalari bo‘lib, bu sirtlarning kesishish chizig‘i, nuqta trayektoriyasini aniqlaydi (22- rasm).



22- rasm.

Bunday holda (1) tenglamadagi $\bar{R}$ reaksiya qo‘yilgan ikkita bog‘lanishlarning ta’sirlariga almashinuvchi $\bar{R}_1$ va $\bar{R}_2$ reaksiyalarning geometrik yig‘indisidan tashkil topadi:

$$\bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{R}_2. \qquad (9)$$

Nuqta harakatining tenglamalari esa

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + R_{1x} + R_{2x}, \\ m\ddot{y} &= F_y + R_{1y} + R_{2y}, \\ m\ddot{z} &= F_z + R_{1z} + R_{2z} \end{aligned}\right| \qquad (10)$$

ko'rinishni oladi. Bu tenglamalar 9 ta noma'lumni o'z tarkibiga oladi: nuqtaning uchta koordinatasi va reaksiyalarning 6 ta proyeksiyalarini, (10) tenglamalarga (8) bog'lanish tenglamalarini va bog'lanishlarning

$$\frac{R_{1x}}{\frac{\partial f_1}{\partial x}} = \frac{R_{1y}}{\frac{\partial f_1}{\partial y}} = \frac{R_{1z}}{\frac{\partial f_1}{\partial z}} \qquad (11)$$

va

$$\frac{R_{2x}}{\frac{\partial f_2}{\partial x}} = \frac{R_{2y}}{\frac{\partial f_2}{\partial y}} = \frac{R_{2z}}{\frac{\partial f_2}{\partial z}} \qquad (12)$$

ideallik shartlarini ifodalovchi tenglamalarni qo'shib olib, 9 ta noma'lumli 9 ta tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Bu tenglamalardan reaksiya kuchlarining proyeksiyalarini keltirib chiqarish mumkin. Buning uchun (11) va (12) teng nisbatlarni mos ravishda λ_1 va λ_2 orqali belgilansa, quyidagi ifodalar hosil bo'ladi:

$$R_{1x} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad R_{1y} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad R_{1z} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z}. \qquad (13)$$

$$R_{2x} = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad R_{2y} = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad R_{2z} = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}. \qquad (14)$$

Natijada (10) tenglamalar quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}, \end{aligned}\right| \qquad (15)$$

(15) sistema (8) bog'lanish tenglamalari bilan birgalikda 5 ta x, y, z, λ_1 va λ_2 noma'lumli 5 ta tenglamalar sistemasini tashkil qiladi. $\vec{R}_1$ va $\vec{R}_2$ reaksiyalar

$$\vec{R}_1 = \lambda_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \vec{k} \right) = \lambda_1 \operatorname{grad} f_1$$

$$\vec{R}_2 = \lambda_2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \vec{k} \right) = \lambda_2 \operatorname{grad} f_2$$

formulalar bilan aniqlanadi.

Bu reaksiyalarning modullari esa

$$R_1 = |\lambda_1| \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} \right)^2} \qquad (16)$$

$$R_2 = |\lambda_2| \sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial z} \right)^2} \qquad (17)$$

formulalardan aniqlanadi.

Erkin bo'lmagan moddiy nuqtalar sistemasi uchun Lagranjning birinchi tur tenglamalari sistemasi

$$m_i a_i = F_i + \sum_{i=1}^{S} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

bog'lanishlarning tenglamalari esa

$$f_j(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n, t) = 0, \quad (j = 1, 2, ..., s)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Bu tenglamalar sistemalari yordamida mexanik sistema nuqtalarining koordinatalari vaqtning funksiyasi sifatida va barcha bog'lanishlarning reaksiyalari aniqlanadi. Lagranjning birinchi tur tenglamalaridan foydalanib masalalar yechishda quyidagi ish tartibini tavsiya qilish mumkin:

1. Lagranjning birinchi tur tenglamalarini tuzish va ular tarkibiga kiruvchi ikkinchi tartibli hosilalar uchun ifodalar aniqlash.

2. Bog'lanish tenglamalarini vaqt bo'yicha ikki marta differensiallash.

3. Lagranj tenglamalaridan aniqlangan ikkinchi tartibli hosilalarning ifodalarini bog'lanishlarning differensiallangan tenglamalariga qo'yish.

4. Olingan munosabatlardan Lagranjning noaniq ko'paytuvchilarining qiymatlarini va bog'lanish reaksiyasini topish.

5. λ_i ko'paytuvchilarning qiymatlarini Lagranjning birinchi tur tenglamalariga qo'yib, ularni integrallab, sistemaning harakatini aniqlash.

Lagranjning birinchi tur tenglamalarini integrallash masalasi murakkab bo'lib, Lagranjning noaniq ko'paytuvchilari usulidan asosan sistema nuqtalarining harakat qonunini aniqlash uchun emas, balki bosh masala bog'lanishlarning reaksiyalarini aniqlashda foydalaniladi.

II. Masalalar yechish

9- masala. m massali M moddiy nuqta og'irlik kuchi maydonida $Ax + By + Cz + D = 0$ tenglama bilan berilgan silliq tekislikda harakatlanmoqda. Nuqta boshlang'ich paytda $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtada tinch turibdi deb hisoblab, M nuqta harakatining tenglamalarini va bog'lanish reaksiyasini aniqlang.

Yechish. Nuqta erkin bo'lmagan harakat qiladi. Uning harakati berilgan tekislikda sodir bo'ladi. Bu tekislik nuqta uchun geometrik, statsionar, golonomli bog'lanish hisoblanadi. Bog'lanish tenglamasi faqatgina nuqtaning koordinatalariga nisbatan chek qo'yadi. Bog'lanish tenglamasi koordinatalarning vaqt bo'yicha hosilalarini o'z tarkibiga olmaydi. Shuning uchun bog'lanish tenglamasi $f(x, y, z) = Ax + By + Cz + D = 0$ tenglik bilan ifodalanib, o'z tarkibiga vaqtni oshkor va koordinatalarning vaqt bo'yicha hosilalarini olmaydi.

Nuqtaga ta'sir qilayotgan yagona faol kuch — mg og'irlik kuchidir, shuning uchun faol kuchning o'qlardagi proyeksiyalarini (Oz o'qni vertikal yo'naltirilsa) aniqlash mumkin:

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -mg. \qquad (1)$$

Endi Lagranjning birinchi tur tenglamalari to'liq sistemasi tuziladi:

$$m\ddot{x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = -mg + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \qquad (2)$$

$$f(x, y, z) = Ax + By + Cz + D = 0.$$

$f(x, y, z)$ funksiyaning koordinatalar bo'yicha xususiy hosilalari topiladi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(Ax + By + Cz - D) = A,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(Ax + By + Cz + D) = B,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(Ax + By + Cz + D) = C. \qquad (3)$$

(3)ni (2)ga qo'yib, quyidagi x, y, z va λ noma'lumlarga nisbatan 4ta tenglama sistemasi hosil bo'ladi:

$$m\ddot{x} = \lambda A, \quad m\ddot{y} = \lambda B, \quad m\ddot{z} = -mg + \lambda C,$$

$$Ax + By + cz + D = 0. \qquad (4)$$

Bu tenglamalar sistemasi qo'yilgan masalani oxirigacha yechish imkoniyatini beradi. λ Lagranjning noaniq ko'paytuvchisi qo'yilgan masala uchun topiladi. Buning uchun bog'lanish tenglamasi ikki marta vaqt bo'yicha differensiallanadi va hosil bo'lgan tenglikning ikkala tomoni m ga ko'paytiriladi:

$$A\ddot{x} + B\ddot{y} + C\ddot{z} = 0 \Rightarrow Am\ddot{x} + Bm\ddot{y} + Cm\ddot{z} = 0.$$

Hosil bo'lgan tenglikka (4) sistema dastlabki uchtasidagi $m\ddot{x}, m\ddot{y}, m\ddot{z}$ ning ifodalari qo'yiladi va quyidagi ifoda kelib chiqadi:

$$A^2\lambda + B^2\lambda + C^2\lambda - Cmg = 0$$

Bu tenglikdan λ ni topamiz $\lambda = \dfrac{cmg}{A^2 + B^2 + C^2}$. λ ning topilgan ifodasini Lagranj tenglamalariga qo'yiladi. Natijada nuqta harakatining differensial tenglamalari quyidagicha hosil bo'ladi:

$$m\ddot{x} = \frac{ACmg}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad m\ddot{y} = \frac{BCmg}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$m\ddot{z} = -mg + \frac{C^2 mg}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Bu sistema tenglamalarining har biri bir-biriga bog'liqsiz ravishda integrallanadi. Ularni alohida-alohida integrallab, nuqta harakatining umumiy qonuni topiladi:

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{ACg}{A^2 + B^2 + C^2} t^2 + C_1 t + C_2,$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{BCg}{A^2 + B^2 + C^2} t^2 + C_3 t + C_4, \qquad (5)$$

$$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + \frac{\frac{1}{2} \cdot C^2 g}{A^2 + B^2 + C^2} t^2 + C_5 t + C_6, .$$

Nuqta erkin bo'lmagan harakat qilgani uchun (5) umumiy harakat tenglamalariga kirganini integrallash doimiylari o'zaro bog'langan bo'ladi. Ular orasidagi bog'lanishlarni hosil qilish maqsadida (5) bog'lanish tenglamasiga qo'yiladi:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{A^2 Cmg}{A^2 + B^2 + C^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{B^2 Cg}{A^2 + B^2 + C^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{C^3 g}{A^2 + B^2 + C^2} - \frac{Cg}{2} \right) t^2 +$$

$$+ (AC_1 + BC_3 + CC_5)t + (AC_2 + BC_2 + CC_2 - D) = 0.$$

Olingan tenglikning chap tomoni faqatgina

$$AC_1 + BC_3 + C \cdot C_5 = 0 \text{ va } AC_2 + BC_4 + C \cdot C_6 - D = 0$$

tengliklar bajarilgandagina nolga aylanadi.

Agar $t = 0$ desak, (5) harakat tenglamalaridan $C_2 = x_0$, $C_4 = y_0$, $C_6 = z_0$ bo'lishligi kelib chiqadi.

Berilgan M_1 nuqta berilgan tekislikda yotgani uchun uning koordinatalari tekislik tenglamasini qanoatlantirishi kerak:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \quad AC_1 + BC_3 + C \cdot C_5 = 0$$

tenglik esa faqatgina $C_1 = C_3 = C_5 = 0$ bo'lgandagina bajariladi.

Natijada nuqta harakatining tenglamalari hosil bo‘ladi:

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{ACg}{A^2 + B^2 + C^2} t^2 + x_0,$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{BCg}{A^2 + B^2 + C^2} t^2 + y_0,$$

$$z(t) = \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{C^2}{A^2 + B^2 + C^2} - 1 \right) t^2 + z_0.$$

Reaksiya kuchining proyeksiyalari esa

$$R_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{ACmg}{A^2 + B^2 + C^2}; \quad R_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{BCmg}{A^2 + B^2 + C^2};$$

$$R_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{C^2 mg}{A^2 + B^2 + C^2}$$

formulalar bo‘yicha topiladi. Bu munosabatlardan foydalanib, reaksiya kuchining moduli va yo‘nalishini topish mumkin.

10- masala. (I.V.Mesherskiy masalalar to‘plamidagi 31.10- masala, 1986- yil).

Sferik mayatnik uzunligi ℓ bo‘lgan MO ipdan va og‘irligi P bo‘lgan og‘ir M nuqtadan iborat, MO ipning bir uchi qo‘zg‘almas 0 nuqtaga, ikkinchi uchi esa M nuqtaga biriktirilgan. M nuqta muvozanat holatidan shunday og‘dirilganki, uning koordinatalari $t = 0$ bo‘lganda $x = x_0$, $y = 0$ bo‘lib qoladi, bundan tashqari nuqtaga $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y} = \vartheta_0$, $\dot{z}_0 = 0$ boshlang‘ich tezlik berilgan. Boshlang‘ich shartlar orasida qanday munosabat bo‘lganda M nuqta gorizontal tekislikda aylana chizadi va shu aylanani u nuqta qancha vaqtda bir marta aylanib chiqadi?

Yechish. M nuqtaning sfera bo‘ylab qiladigan harakatining differensial tenglamalarini tuziladi:

$$m\ddot{x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = my + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}, \qquad (1)$$

bunda $\lambda = \dfrac{R}{\Delta f}$.

(1)nuqta harakatining differensial tenglamalariga bog'lanish, ya'ni sirtning

$$f(x,y,z) = \ell^2 - x^2 - y^2 - z^2 \qquad (2)$$

tenglamasi qo'shib olinsa, natijada to'rt noma'lumli 4ta tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

Δf uchun ifoda topamiz:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y\,, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2z\,.$$

$$\Delta f = 2\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} = -2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\ell,$$

bunda $\qquad \ell = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ va $\frac{\partial f}{\partial z}$ ning topilgan ifodalarini (1)ga qo'yib, nuqta harakatining differensial tenglamalariga quyidagicha ko'rinish oladi:

$$m\ddot{x} = -2\lambda x\,, \quad m\ddot{y} = -2\lambda y\,, \quad m\ddot{z} = mg - 2\lambda z\,. \qquad (3)$$

Nuqtaning harakat qonunini topish uchun (3) tenglamalarni qo'yilgan boshlang'ich shartlarga ko'ra integrallash kerak. (3) tenglamalarda noma'lum λ ning hosilalari qatnashmaydi. Shu sababli λ ni (3) tenglamalardan chiqarish mumkin.

(3) tenglamalarni chekli ko'rinishda integrallash juda qiyin, ular taqriban integrallanadi. z ning ifodasida $\frac{x}{\ell}, \frac{y}{\ell}$ miqdorlarning birinchi darajasini saqlab, yuqori darajalari e'tiborga olinmaydi:

$$z = \sqrt{\ell^2 - (x^2 + y^2)} = \ell\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{\ell^2}} = \ell\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{\ell^2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \ell\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2\ell^2}\right) = \ell\,.$$

(3)ning uchinchi tenglamasi $t=0$ paytida $z_0=\ell$ va $\dot{z}_0=\ell$ va $z_0=0$ deb, λ topiladi:

$$mg-2\lambda\ell=0\Rightarrow\lambda=\frac{mg}{2\ell}.$$

Bog'lanish reaksiya kuchining miqdori topiladi:

$$N=\lambda\Delta f=\frac{mg}{2\ell}2\ell=mg\ .$$

λ ning topilgan ifodalarini (3)ning dastlabki ikkita tenglamasiga qo'yilsa, quyidagilar hosil bo'ladi:

$$\ddot{x}+\frac{g}{\ell}x=0,\ \ \ddot{y}+\frac{g}{\ell}y=0.$$

Bu tenglamalarning umumiy yechimlari quyidagicha bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned}x(t)&=c_1\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t+c_2\right),\\ y(t)&=c_3\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t+c_4\right)\end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Bu funksiyalar t vaqt bo'yicha differensiallanadi:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=c_1\sqrt{\frac{g}{\ell}}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t+c_2\right),\\ \dot{y}&=c_3\sqrt{\frac{g}{\ell}}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t+c_4\right)\end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Boshlang'ich shartlardan, (4) va (5) munosabatlardan foydalanib, C_1, C_2, C_3 va C_4 doimiy sonlar aniqlanadi:

$$\left.\begin{aligned}&x_0=c_1\sin c_2,\ \ 0=c_3\sin c_4,\\ &0=c_1\sqrt{\frac{g}{\ell}}\cos c_2,\vartheta_0=c_3\sqrt{\frac{g}{\ell}}\cos c_4\end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

(6)ning 2- va 3- tenglamalaridan $C_4 = 0$ va $C_2 = \frac{\pi}{2}$ bo‘lishligi topiladi. Topilgan qiymatlarni (6)ning 1- va 4-tenglamalariga qo‘yib, C_1 va C_3 topiladi:

$$c_1 = x_0 \quad C_3 = \vartheta_0\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Natijada M nuqtaning harakat qonunlari quyidagicha bo‘ladi:

$$x(t) = x_0 \sin\sqrt{\frac{g}{\ell}}t, \quad y = \vartheta_0\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right), \quad z = \ell.$$

Endi masala talablariga javoblar topiladi. Agar topilgan harakat tenglamalaridan t vaqtni chiqarib tashlansa, trayektoriya tenglamasini koordinata shakli hosil bo‘ladi:

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{\frac{\ell\vartheta_0^2}{g}} = 1, \quad z = \ell.$$

Demak, M nuqtaning trayektoriyasi markazi Oz o‘qida bo‘lgan va $z = \ell$ tekislikda yotgan ellipsdan iboratdir.

Trayektoriya aylana bo‘lishligi uchun boshlang‘ich qiymatlar orasidagi munosabat

$$x_0^2 = \frac{\ell\vartheta_0^2}{g}, \quad z_0 = \ell, \quad \vartheta_0 = x_0\sqrt{\frac{g}{z_0}}$$

ko‘rinishda bo‘lishi kerak. Nuqtaning aylanish davri esa

$T = 2\pi\sqrt{\frac{z_0}{g}}$ bo‘ladi.

11- masala. m massali M nuqta og‘irlik kuchi ta’sirida r radiusli bo‘sh silindrning ichki silliq sirtida harakat qiladi. Boshlang‘ich paytda nuqtaning og‘ish burchagi $\varphi_o = 90°$ ga, burchak tezligi esa nolga teng. $\varphi = 30°$ bo‘lganda M nuqtaning tezligini va silindr sirtining reaksiyasini aniqlang.

Yechish. M nuqtaga ikkita kuch ta'sir qiladi; nuqtaning $P = mg$ og'irligi va ipning R reaksiya kuchi. M nuqta harakatining Eyler shakldagi tenglamalari

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = P_\tau = -mg\sin\varphi,$$

$$\frac{m\vartheta^2}{r} = P_n + R = -mg\cos\varphi + R$$

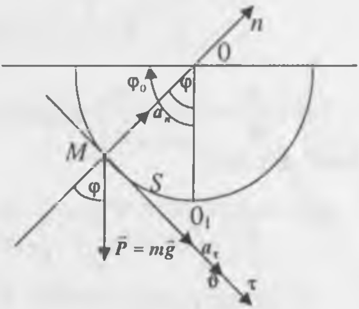
ko'rinishga ega. S egri chiziqli koordinataning boshlang'ich nuqtasi uchun M nuqtaning 0_1 eng pastki holati qabul qilinadi (23- rasm).

Bunday holda $S = 0$, $m = \ell\varphi = r\varphi$ bo'lib, $\dfrac{d^2S}{dt^2} = r\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ bo'ladi.

Natijada nuqta ipining og'ish burchagi va reaksiya uchun quyidagi munosabatlar hosil bo'ladi:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{r}\sin\varphi = 0\,, \quad (1)$$

$$R = \frac{m\vartheta^2}{r} + mg\cos. \quad (2)$$



23- rasm.

R reaksiyaning miqdorini topish uchun M nuqtaning ϑ tezligini bilish kerak. ϑ ni aniqlash uchun (1) tenglamaning shaklini

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\cdot\frac{d\omega}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi}$$

bog'lanish yordamida o'zgartiriladi. Bunday holda (1) tenglama

$$\omega d\omega = -\frac{g}{r}\sin\varphi d\varphi$$

ko'rinishni oladi. Bu tenglamani integrallab, quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{r}\cos\varphi + C\,. \quad (3)$$

Masala shartiga ko'ra $t_0 = 0$ boshlang'ich paytda mayatnikning burchak tezligi nolga teng, mayatnik ipining og'ish burchagi $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ ga teng. Bu boshlang'ich qiymatlarni (3)ga qo'yib, C doimiy topiladi:

$$C = -\frac{g}{r}\cos\varphi_0 .$$

Shunday qilib, ω burchak tezlik uchun ifoda quyidagicha bo'ladi:

$$\omega^2 = 2gr(\cos\varphi - \cos\varphi_0) .$$

Bu tenglikning ikkala tomoni r^2 ga ko'paytirilib, ϑ tezlik uchun quyidagi ifoda topiladi:

$$\vartheta^2 = 2\frac{g}{\ell}(\cos\varphi - \cos\varphi 0).$$

$\varphi = \frac{\pi}{6}$ va $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ bo'lganda ϑ ning miqdori uchun formula hosil bo'ladi:

$$\vartheta = \sqrt{2gr\cos\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2gr\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{gr\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}\sqrt{gr} .$$

R reaksiyaning moduli (2) tenglamadan aniqlanadi:

$$R = \frac{m\vartheta^2}{r} + mg\cos\varphi = \frac{m\sqrt{3}gr}{r} + mg\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= mg\sqrt{3} + \frac{mg\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}mg.$$

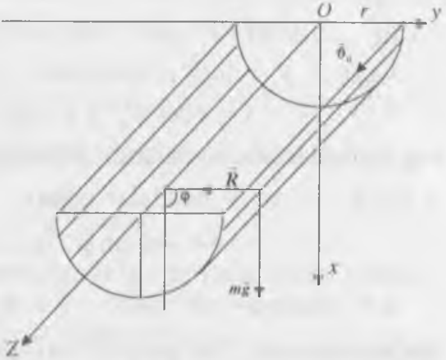
$$R = \frac{3\sqrt{3}}{2}mg.$$

12- masala. 11- masalaning umumlashgan holini qaraymiz. O'qi gorizontal joylashgan r radiusli silindrning ichki sirti bo'ylab m massali M og'ir nuqta harakat qilmoqda. Koordinatalar boshini silindr o'qining qandaydir nuqtasiga joylashtirib, Ox o'qni vertikal pastga, Oy o'qni silindrning radiusi bo'ylab gorizontal va Oz o'qni esa silindrning o'qi bo‘ylab yo‘naltirib, M og‘ir nuqtaning harakat qonunini va silindr sirtining reaksiyasini toping.

(Nuqtaning boshlang‘ich tezligi silindr o‘qi bilan parallel yo‘nalgan deb qaraladi.)

Yechish. Masala shartiga ko‘ra, boshlang‘ich paytda nuqtaning holati $x = 0, y = r, z = 0$ koordinatalar bilan aniqlanadi (24- rasm).

Nuqtaning boshlang‘ich tezligi silindr o‘qiga parallel yo‘nalgan bo‘lib, u ϑ_0 ga teng bo‘lsin. Demak, boshlang‘ich paytda $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0, \dot{z} = \vartheta_0$ bo‘ladi.



24- rasm.

M moddiy nuqtaga mg og‘irlik kuchi va radius bo‘ylab yo‘nalgan R reaksiya kuchi ta’sir qiladi. To‘g‘ri silindrning kanonik tenglamasi — bog‘lanish tenglamasini ifodalaydi.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

$$F_x = mg\ , \quad F_x = F_z = 0\ , \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \text{ va } \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

ifodalarni Lagranjning bir jinsli tenglamalariga qo‘yilsa, nuqta harakatining tenglamalari quyidagicha bo‘ladi:

$$m\ddot{x} = mg + 2\lambda x, \quad m\ddot{y} = 2\lambda y, \quad m\ddot{z} = 0\,. \qquad (1)$$

Bu tenglamalar sistemasining oxirgi tenglamasini integrallab, boshlang‘ich shartlarini e’tiborga olib, quyidagi ifoda topiladi:

$$Z = \vartheta_0 t\,.$$

Oxy boshlang‘ich tekislikdan boshlangan masofa t vaqtga proporsional o‘sib boradi.

(1) sistemaning 1- tenglamasini y ga, 2- tenglamasini esa x ga ko'paytirib, 1- tenglamadan 2- tenglamani hadlab ayirib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$m(y\ddot{x} - x\ddot{y}) = mgy\,. \qquad (2)$$

Endi (1) sistemaning 1- tenglamasini $x$ga, 2- tenglamasini esa y ga ko'paytirib, ularni hadlab qo'shib, quyidagi ifoda topiladi:

$$m(x\ddot{x} + y\ddot{y}) = mgx + 2\lambda\left(x^2 + y^2\right). \qquad (3)$$

Agar x, y, z to'g'ri burchakli koordinatalardan

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = z$$

bog'lanishlardan foydalanib, silindrik koordinatalarga o'tilsa, $\dot{x}$ va $\dot{y}$, $\ddot{x}$ va $\ddot{y}$ hosilalar uchun

$$\dot{x} = -r\dot{\varphi}\sin\varphi\,, \quad \dot{y} = r\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\ddot{x} = -r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi, \qquad \ddot{y} = r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

ifodalar topiladi. Natijada (2) va (3)tenglamalar mos ravishda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{r}\sin\varphi = 0, \qquad (4)$$

$$-mr^2\dot{\varphi}^2 = mgr\cos\varphi + 2\lambda r^2\,. \qquad (5)$$

(4) tenglamaning birinchi integrali topiladi. Buning uchun (4) tenglamaning tartibi

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\omega}{dt}\right) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi} = \dot{\varphi}\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}$$

bog'lanishdan foydalanib pasaytiriladi.

Bunday holda (4) tenglama

$$\dot{\varphi}d\dot{\varphi} = -\frac{r}{g}\sin d\varphi$$

ko'rinishni oladi. Bu tenglamani integrallab, quyidagi ifoda topiladi:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{g}{r}\cos\varphi + C\,.$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ bo'lganligi tufayli, $\dot{\varphi} = 0$ bo'lib, $t = 0$ bo'lganda $C = 0$ bo'lishligi topiladi. Natijada birinchi tartibli chiziqsiz tenglama kelib chiqadi:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{r}\cos\varphi. \qquad (6)$$

Bu tenglamadan ravshanki, tanlangan boshlang'ich shartlarda nuqtaning harakati $\cos\varphi > 0$ shartda, ya'ni $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ sohada sodir bo'ladi. (6) ni (5)ga qo'yib, Lagranjning λ noaniq ko'paytuvchisi topiladi:

$$\lambda = -\frac{3mg}{2r}\cos\varphi.$$

Natijada bog'lanish reaksiyasining proyeksiyalari uchun

$$R_x = \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = -3mg\cos^2\varphi,$$

$$R_y = \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = -3mg\sin\varphi\cos\varphi, \quad R_z = 0$$

ifodalar hosil bo'ladi. Bu ifodalar yordamida $\bar{R}$ reaksiyaning moduli va yo'nalishini aniqlash mumkin $R = 3mg\cos\varphi$.

Agar $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ bo'lsa, R reaksiya nolga teng bo'ladi. Maksimal qiymatga esa $\varphi = 0$ bo'lganda erishadi va $R = 3mg$ bo'ladi.

Endi φ burchakning o'zgarish qonunini aniqlash uchun (4) tenglamani integrallash kerak.

(4) tenglamada $\frac{g}{r} = k^2$ deb, uni

$$\ddot{\varphi} + k^2\sin\varphi = 0$$

ko'rinishga keltiriladi. Matematik tahlil kursidan ma'lumki, $\lim\limits_{\varphi\Rightarrow 0}\frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1$ limitik o'tishni isbotlab, $\sin\varphi \approx \varphi$ taqribiy formula o‘rnatilgan edi. Bu hol uchun harakatning differensial tenglamasi

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$$

ko‘rinishni oladi.

Shunday qilib, og‘ir nuqtaning harakat tenglamasi erkin chiziqli tebranishlarning differensial tenglamasining shakli bilan bir xil bo‘lar ekan.

Bu tenglamani nuqtaning chiziqli tebranma harakatlariga bag‘ishlangan mashg‘ulotda batafsil tekshirilgan edi.

φ burchak $\varphi(t) = \varphi_0 \cos kt + \frac{\varphi_0}{k} \sin kt$ garmonik qonun bo‘yicha o‘zgaradi.

Nuqta kichik tebranishlarining davri esa $T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$ formula bo‘yicha topiladi, ya’ni kichik og‘ishlarda tebranish davri φ_0 boshlang‘ich og‘ishga bog‘liq bo‘lmas ekan.

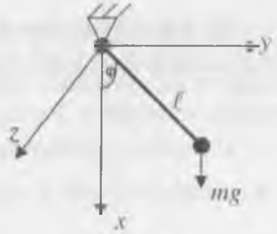
III. Savol va masalalar

1. Erkin bo‘lmagan jism uchun dinamika masalalarining qo‘yilishi va yechilishini izohlang hamda tushuntiring.
2. Moddiy nuqtaning sirt bo‘yicha harakatini tasvirlovchi differensial tenglamalarni keltirib chiqaring.
3. Lagranjning birinchi tur tenglamalarini nuqta sirt bo‘yicha harakatlanganda keltirib chiqaring.
4. Nima uchun Lagranjning noaniq ko‘paytuvchisi kiritiladi? Bu ko‘paytuvchi qanday aniqlanadi?
5. Modiiy nuqta silliq chiziq bo‘ylab qilgan harakati uchun Lagranjning birinchi tur tenglamalarini keltirib chiqaring.
6. Tabiiy koordinatalar sistemasida silliq chiziq bo‘yicha harakatlanayotgan nuqtaning differensial tenglamalari qanday bo‘ladi? Bunday harakatda nuqtaning harakat qonuni va bog‘lanish reaksiya kuchining miqdori hamda yo‘nalishi qanday aniqlanadi?
7. Lagranjning birinchi tur tenglamalaridan foydalanib masalalar yechishning tartibini izohlang.
8. 25- rasmda tasvirlangan matematik mayatnik harakatining differensial tenglamasini va ipning taranglik kuchini aniqlang

$(\varphi|_{t=0} = 0, \dot{\varphi}|_{t=0} = \dot{\varphi}_0)$. Mayatnik harakati xOy vertikal tekislikda sodir bo‘ladi deb qaraladi.

Javob:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0,\ R = m\ell\left|\dot{\varphi}_0 - \frac{g}{\ell}(2 - 3\cos\varphi)\right|.$$



25- rasm.

9. Modiiy nuqta m massaga ega bo‘lib, og‘irlik kuchi maydonida $3y + 5z - 5 = 0$ silliq tekslikda ko‘chadi. Agar boshlang‘ich paytda nuqta (1; 0; 1) holatda bo‘lib, uning tezligi nolga teng bo‘lsa, nuqta harakat tenglamasini va bog‘lanish reaksiya kuchini toping.

Javob: $x = x_0 = 1;\quad y = \dfrac{15}{68}gt^2;\quad z = 1 - \dfrac{9}{68}gt^2;$

$$R_x = 0;\quad R_y = \frac{15}{34}mg;\quad R_z = \frac{25}{34}mg.$$

10. m massali moddiy nuqta ℓ radiusli sferik sirt bo‘ylab harakatlanmoqda. Lagranj ko‘paytuvchisini va bog‘lanish reaksiya kuchini aniqlang.

Javob:

$$\lambda = -\frac{3mgz + C}{\ell^2};\ x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2;\ f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 = 0$$

$$N_x = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, N_y = \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, N_z = \lambda\frac{\partial f}{\partial z}.$$

11. m massali M moddiy nuqta og‘irlik kuchi maydonida $Ax + By + Cz + D = 0$ tenglama bilan berilgan silliq tekislikda harakatlanmoqda. Nuqta boshlang‘ich paytda $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtada tinch turadi deb hisoblab, M nuqta harakatining tenglamasini va bog‘lanish reaksiyasini aniqlang.

Javob: $x(t) = \dfrac{ACg}{A^2 + B^2 + C^2}t^2 + x_0;\quad R_x = \dfrac{ACmg}{A^2 + B^2 + C^2};$

$$y(t) = \frac{BCg}{A^2 + B^2 + C^2}t^2 + y_0;\quad R_y = \frac{BCmg}{A^2 + B^2 + C^2};$$

$$z(t) = \frac{g}{2}\left(\frac{C^2}{A^2 + B^2 + C^2} - 1\right)t^2 + z_0;\quad R_z = \frac{C^2 mg}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

12. Tekislik berilgan qonun bo'yicha vertikal yo'nalishda gorizont bilan o'zgarmas α burchak tashkil qilib harakatlanadi. Tekislikda ishqalishsiz m massali moddiy nuqta siljimoqda. Harakatni tekshiring va tekislikning reaksiyasini toping.

Ko'rsatma. Qaralayotgan holda tekislik tenglamasi $z = kx + b(t)$ ko'rinishga ega. Bunda $k = \operatorname{tg}\alpha$.

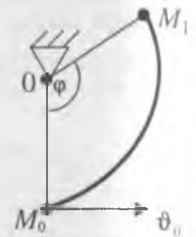
Javob: $x = x_0 - \sin^2 2\alpha \cdot \dfrac{gt^2}{2}$, $z = z_0 - \cos^2\alpha \cdot \dfrac{gt^2}{2}$

$N_x = -mg\sin 2\alpha$, $N_z = mg(\cos 2\alpha + 1)$

13. Yuk uzunligi $\ell = 70sm$ bo'lgan ipga osilgan. Yukning eng pastki holatida unga $\vartheta_0 = 4{,}9m/sek$ gorizontal tezlik berilgan. Quyidagilarni aniqlang (26- rasm):

a) ip qanday holatda bo'lganda yukni tutib tura olmaydi va yuk erkin nuqtadek harakatlanadi?

b) qanday gorizontal eng kichik $\vartheta_0^{\min}$ boshlang'ich tezlikda yuk to'liq aylana chizadi?



26- rasm.

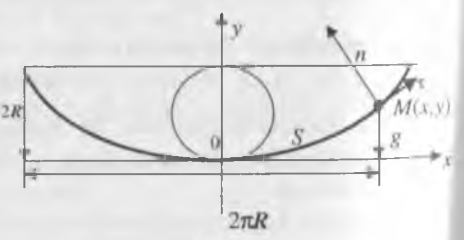
Javob: $\varphi = 120°$, $\vartheta_0^{\min} = \sqrt{5g\ell}$

14. $x = R(\theta + \sin\theta)$, $y = R(1 - \cos\theta)$ tenglamalar bilan aniqlanuvchi sikloida bo'ylab harakatlanuvchi og'ir nuqta (sikloidal mayatnik)ning tebranish davrini aniqlang (27- rasm).

Javob:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

bunda



27- rasm.

15. Uzunligi ℓ ga teng bo'lgan konik mayatnik gorizontal tekislikda harakatlanib a radiusli aylana chizadi. Konik mayatnikning aylanish davrini aniqlang.

Javob: $T = \dfrac{2\pi\sqrt[4]{\ell^2 - a^2}}{\sqrt{g}}$.

4- §. Lagranjning ikkinchi tur tenglamalari

I. Nazariy qism

Mexanik sistemaning umumiy tenglamasining umumlashgan koordinatalardagi ifodasini olish uchun oldin chiqarilgan dinamikaning umumiy

$$\sum_k \delta A_k^F + \sum_k \delta A_k^I = 0 \qquad (1)$$

tenglamasidan foydalanamiz. Umumiylik uchun sistemaga qo'yilgan barcha bog'lanishlarni ideal desak, (1)ning dastlabki yig'indisiga faol kuchlarning shuningdek, ishqalanish kuchining bajargan virtual ishlari kiradi.

Faraz qilaylik, sistema S ta erkinlik darajaga ega bo'lsin, ya'ni sistemaning holati S ta umumlashgan koordinatalar bilan aniqlansin.

Ma'lumki, (1)ning har bir qo'shiluvchisini umumlashgan kuchlar va umumlashgan koordinatalarning variatsiyalari orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\left.\begin{aligned} \sum_k \delta A_k^F &= Q_1^F \delta q_1 + Q_2^F \delta q_2 + \dots + Q_s^F \delta q_s, \\ \sum_k \delta A_k^I &= Q_1^I \delta q_1 + Q_2^I \delta q_2 + \dots + Q_s^I \delta q_s, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

bunda

$$\left.\begin{aligned} Q_1^F &= \sum_k F_k \frac{\partial r_k}{\partial q_1}, \quad Q_2^F = \sum_k F_k \frac{\partial r_k}{\partial q_2}, \dots, \\ Q_1^I &= \sum_k I_k \frac{\partial r_k}{\partial q_1}, \quad Q_2^I = \sum_k I_k \frac{\partial r_k}{\partial q_2}, \dots, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

bunda $\vec{r}_i = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k} = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s)$ — sistema nuqtalarining holatini aniqlovchi radius-vektordir. (2) ni (1)ga qo'yilsa, quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$\left(Q_1^F + Q_1^J\right)\delta q_2 + \ldots + \left(Q_S^F + Q_S^J\right)\delta q_S = 0.$$

Bunda δq_1, $\delta q_2,...,\delta q_S$ o'zaro bog'lanmagan ixtiyoriy miqdorlar. Shuning uchun olingan tenglik faqat va faqat

$$Q_1^F + Q_1^J = 0,\ Q_2^F + Q_1^J = 0,...,Q_S^F + Q_S^J = 0 \qquad (4)$$

bo'lgandagina bajariladi. Hosil bo'lgan tenglamalardan to'g'ridan-to'g'ri dinamika masalalarini yechishda foydalanish mumkin.

Bir nechta amaliy masalalarni yechishda (4) ko'rinishdagi tenglamalarni tuzish ularga kirgan umumlashgan inersiya kuchlarini va umumlashgan impulsni-kinetik energiya orqali ifodalash bilan yanada soddalashadi.

Sistema kinetik energiyasidan umumlashgan tezlik bo'yicha olingan hosilaga *umumlashgan impuls* deyiladi. Q_1^J miqdorning ko'rinishini o'zgartiramiz. Ma'lumki sistema istalgan nuqtasining inersiya kuchi $I_k = -m_k a_k = -m_k \dfrac{d\vartheta_k}{dt}$ formula bo'yicha topiladi. Bunday holda (3)ning 2- satrining 1- formulasi quyidagicha ifodalanadi:

$$-Q_k^I = \sum_k m_k \frac{d\vartheta_k}{dt} \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_1}. \qquad (5)$$

Q_1^J miqdorni kinetik energiya orqali ifodalash maqsadida (5)tenglikning o'ng qismi shakli quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{d\vartheta_k}{dt} \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\vartheta_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_1}\right) - \vartheta_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_k}{\partial q_1}\right). \qquad (6)$$

Lagranj tengligidan foydalanib o'zgartiramiz. Bundan tashqari $\dfrac{dr_k}{dt} = \dot{r}_k = \vartheta_k$, $\dfrac{dq_1}{dt} = \dot{q}_1$ ekanligi e'tiborga olinadi. Bunda $\vartheta_k - r_k$ radius-vektorga mos keluvchi sistema nuqtasining tezligi, $\dot{q}_1$ esa q_1 umumlashgan koordinataga mos tushuvchi umumlashgan tezlik.

(6) tenglikka kiruvchi r_k ning hosilasi uchun quyidagi ikkita natija o'rinli:

1) t bo'yicha to'la differensiallash va q_1 bo'yicha xususiy differensiallash operaesiyalari o'rin almashtirish xossasiga ega (aralash hosilaning tengligi)

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial r_k}{\partial q_1}\right)=\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{dr_k}{dq_1}\right)=\frac{\partial \vartheta_k}{\partial q_1}. \tag{7}$$

2) r_k dan q_1 bo'yicha olingan hosila $(\Delta r_k)_1$ xususiy orttirmaning Δq_1 orttirmaga bo'lgan nisbatining limitiga teng.

$$\frac{\partial r_k}{\partial q_1}=\lim\frac{\Delta r_k}{\Delta q_1}=\lim\left(\frac{\frac{d(\Delta r_k)}{dt_1}}{\frac{dq_1}{dt}}\right)=\lim\frac{\Delta\left(\frac{dr_k}{dt}\right)}{\Delta\left(\frac{dq_1}{dt}\right)}=\lim\left(\frac{\Delta\dot{r}_k}{\Delta\dot{q}_1}\right)=\frac{\partial\dot{r}_k}{\partial q_1}$$

$$\frac{\partial r_k}{\partial q_1}=\frac{\partial\dot{r}_k}{\partial\dot{q}_1}=\frac{\partial\vartheta_k}{\partial\dot{q}_1} \tag{8}$$

(7) va (8) munosabatlardan foydalanib, (6) tenglik quyidagicha o'zgartiriladi:

$$\frac{d\vartheta_k}{dt}\cdot\frac{\partial r_k}{\partial q_1}=\frac{d}{dt}\left(\vartheta_k\frac{\partial\vartheta_k}{\partial\dot{q}_1}\right)-\vartheta_k\frac{\partial\vartheta_k}{\partial q_1}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\vartheta_k^2}{\partial\dot{q}_1}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial\vartheta_k^2}{\partial q_1}.$$

Bunday holda (5) ifoda (massasining o'zgarmasligini va hosilalar yig'indisi yig'indidan olingan hosilaga tengligini e'tiborga olinsa) quyidagi ko'rinishga keladi:

$$-Q_1^I=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_1}\left(\sum_k\frac{m_k\vartheta_k^2}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\sum_k\frac{m_k\vartheta_k^2}{2}\right)=$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}.$$

Bundagi $T=\sum_k\frac{m_k\vartheta_k^2}{2}$ — sistemaning kinetik energiyasi. (4)dagi qolgan umumlashgan inersiya kuchlari uchun ham yuqoridagiga o‘xshash ifodalar topib, natijada (4) tenglamalar quyidagi ko‘rinishga keltiriladi:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1, \\ \dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial q_2}=Q_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s \end{array}\right| , \qquad (9)$$

(9) tenglamalar umumlashgan koordinatalarda sistema harakatining differensial tenglamalarini ifodalaydi. Bu tenglamalar Lagranjning 2- tur tenglamalari nomi bilan yuritiladi Ravshanki,bu tenglamalarning soni sistema erkinlik darajasining soniga teng. Lagranj tenglamalari dinamik masalalarni yechishning yagona va yetarlicha sodda usulini beradi. Tenglamalarning eng muhim afzalligi shundaki, ularning ko‘rinishi va soni qaralayotgan sistemaga kiruvchi jismlarning soniga va shu jismlarning qanday harakat qilishiga bog‘liq bo‘lmasdan, faqat sistemaning erkinlik darajasi soniga bog‘liqdir.

(9) Lagranj tenglamalarining vujudga kelishi faqatgina nazariy mexanika va uning tarmoqlarini rivojlantirib qolmasdan, balki boshqa nazariy fizika va uning tarkibiga kiruvchi fanlarning rivojlanishiga ham yo‘l ochib berdi. Endi potensialli kuchlar uchun Lagranj tenglamalari va funksiyasini qarab chiqamiz.

Agar sistemaga ta’sir qiluvchi barcha kuchlar potensialli bo‘lsa, u holda sistema uchun shunday faqat koordinatalarga bog‘liqli $U(x_k, y_k, z_k)$ $(k=1,2,....,n)$ kuch funksiyasi mavjud bo‘lib, umumlashgan kuchlar uchun $Q_i=\dfrac{\partial u}{\partial q_i}$ $(i=1,2,....,s)$ ifodani olsak, Lagranjning tenglamalari esa

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=\frac{\partial u}{\partial q_i} \quad (i=1,2,....,s) \qquad (10)$$

ko'rinishni oladi. Ma'lumki, u kuch funksiyasi $\dot{q}_1$ umumlashgan tezliklarga bog'liq emas. Shuning uchun

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial (T+u)}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1,2,...s)$$

ayniyat o'rinli bo'lib, Lagranjning har bir tenglamasi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T+u)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial (T+u)}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1,2,...s) \tag{11}$$

ko'rinishni oladi.

$L = T + u$ belgilash kiritiladi. L Lagranj funksiyasi nomi bilan yuritilib, bu funksiya umumlashgan koordinatalar va tezliklarning funksiyalaridir. $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Bunday holda Lagranj tenglamalari quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1,2,....,s). \tag{12}$$

Bu tenglamalar potensialli maydonda sistema harakatining differensial tenglamalarini ifodalaydi. Tenglamalardagi L Lagranj funksiyasi sistemasining E to'liq energiyasi bo'la olmaydi.

$$E = T - U = T + \Pi,$$
$$L = T + U = T - \Pi$$

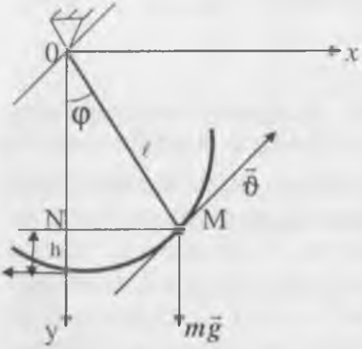
bunda Π — sistemasining potensial energiyasi bo'lib, U — kuch funksiyasi bo'yicha topiladi: $U = -\Pi$.

II. Masalalar yechish

Nuqta va nuqtalar sistemasining harakat tenglamalarini faqatgina Nyuton qonunlari va bu qonunlarning natijalari bo'lgan dinamikaning umumiy teoremalaridan foydalanib chiqarish yagona yo'l emas. Balki bu tenglamalarni mexanikaning umumiy prinsiplaridan foydalanib ham tuzish mumkin. Yuqorida nuqta va sistemaning dinamikasida matematik hamda fizik mayatniklarning kichik tebranishlari ko'rib chiqilgan edi. Mayatniklar holatini tavsiflovchi differensial tenglamalarni mexanika prinsiplari, ya'ni Lagranjning II tur tenglamalaridan foydalanib chiqarish mumkin.

13- masala. Ipining uzunligi ℓ va sharchasining massasi m bo'lgan matematik mayatnikning harakatini tavsiflovchi differensial tenglamani keltirib chiqaring.

Yechish. Umumlashgan koordinata sifatida mayatnik ipining muvozanat holatdan og'ish burchagi φ ni qabul qilamiz.



28- rasm.

m massali nuqta (sharcha)ning koordinatalarini topiladi (28-rasm):

$$x = \ell \sin\varphi, \quad y = \ell\cos\varphi.$$

Sharchaning kinetik va potensial energiyalarini hisoblaymiz.

M nuqta (sharcha)ning kinetik energiyasi hisoblanfdi:

$$\vartheta = \ell\varphi;$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2.$$

Mayatnikning potensial energiyasi esa u muvozanat vaziyatdan siljiganda mg og'irlik kuchining bajargan ishiga teng (Oy o'q bo'ylab):

$$\Delta NOM \text{ dan } \frac{ON}{OM} = \cos\varphi, \quad ON = \ell\cos\varphi.$$

$$h = OM_0 - ON = \ell - \ell\cos\varphi = \ell(1-\cos\varphi).$$

Mayatnik $\Pi = mgh = mg\ell(1-\cos\varphi)$ potensial energiyaga ega. Qaralayotgan masala uchun Lagranj tenglamasi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = \frac{\partial\Pi}{\partial\varphi}, \quad Q_1 = \frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} \tag{13}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bunda

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = m\ell^2\dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) = m\ell^2\ddot{\varphi}; \quad \frac{\partial T}{\partial\varphi} = 0;$$

$$Q_1 = +\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = +\frac{\partial}{\partial \varphi}(mg\ell(1-\cos\varphi)) = mg\ell \sin\varphi.$$

Natijada mayatnik harakatining differensial tenglamasini

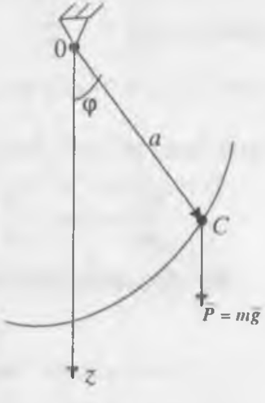
$\varphi + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0$ ko'rinishga keltiriladi.

Agar $1-\cos\varphi = 0\sin^2\frac{\varphi}{2} \approx 2\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{\varphi^2}{2}$ taqribiy formuladan foydalanilsa, $\Pi = \frac{1}{2}mg\ell\varphi^2$ va $\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mg\ell\varphi$ bo'lib, mayatnik kichik tebranishlarining differensial tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0.$$

14- masala. Lagranj tenglamalaridan foydalanib, fizik mayatnik tebranishlarining tenglamasini tuzing.

Yechish. Fizik mayatnikni uning massa (og'irlik) markazi orqali o'tadigan vertikal tekislik bilan kesganda hosil bo'ladigan kesimi bilan tasvirlaymiz C — fizik mayatnikning massa markazi, P — uning og'irligi, $OC = a$ — massa markazidan uning qo'yilish nuqtasigacha bo'lgan masofa (29- rasm).



29- rasm.

I_0 — qo'yilish nuqta orqali o'tuvchi gorizontal o'qqa nisbatan fizik mayatnikning inersiya momenti, mayatnikning holati OC to'g'ri chiziqning vertikaldan og'ish burchagi φ bilan to'liq va bir qiymatli aniqlanadi:

$$I_0 = ma^2, \quad \dot{\varphi} = \omega, \quad \vartheta = \omega a$$

bo'lishini e'tiborga olib, fizik mayatnikning kinetik energiyasi topiladi:

$$T=\frac{1}{2}m\vartheta^2=\frac{1}{2}m(\omega a)^2=\frac{1}{2}ma^2\omega^2=\frac{1}{2}I_0\omega^2=\frac{1}{2}I_0\dot{\varphi}^2.$$

Q_1 umumlashgan kuch topiladi. φ ga $\delta\varphi$ variatsiyani beramiz. Bu ko‘chishda faqatgina P og‘irlik kuchi ish bajaradi.

$\delta A_1=Q_1\delta\varphi=(-Pa\sin\varphi)\delta\varphi,\ Q_1=-Pa\sin\varphi$.

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi}=0;\quad \frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=I_0\dot{\varphi};\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)=I_0\ddot{\varphi}.$$

Bu ifodalar

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q_1$$

tenglamaga qo‘yilsa, fizik mayatnikning differensial tenglamasi

$$\ddot{\varphi}+\frac{Pa}{I_0}\sin\varphi=0 \qquad (14)$$

ko‘rinishda hosil bo‘ladi.

Og‘irlik kuchi potensialli bo‘lganligi tufayli mayatnikning tenglamasini Lagranj funksiyasini tuzib (12) tenglamalar yordamida ham olish mumkin. Oz o‘qni vertikal pastga yo‘naltirib, mayatnik potensial energiyasi uchun $\Pi=-Pz=-Pa\cos\varphi$ ifoda topiladi. Natijada L Lagranj funksiyasi uchun

$$L=T-\Pi=\frac{1}{2}I_0\dot{\varphi}^2+Pa\cos\varphi$$

ifoda hosil bo‘ladi. Bundan

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=I_0\dot{\varphi};\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)=I_0\ddot{\varphi};\quad \frac{\partial L}{\partial\varphi}=-Pa\sin\varphi.$$

Bu ifodalarni potensialli kuch maydoni uchun

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0.$$

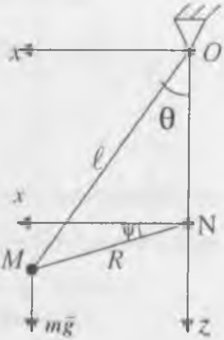
Lagranj tenglamasiga qo‘yilsa, (14) tenglama hosil bo‘ladi:

$$I_0\ddot{\varphi}+Pa\sin\varphi=0.$$

15- masala. Sferik (konik) mayatnik harakatining differensial tenglamalarini tuzing.

Yechish. *O* nuqtada *OM* ipga biriktirilgan *m* massali *M* moddiy nuqtani qaraymiz. Ipning uzunligi ℓ bo‘lsin.

M nuqtaning holati 30- rasmda ko‘rsatilgan ψ va θ burchaklar bilan aniqlanadi. *Oz* o‘q vertikal, *Nx* o‘q esa qo‘zg‘almas *Ox* o‘qqa parallel joylashtirilgan, *MN* to‘g‘ri chiziq esa *Oz* o‘qqa perpendikulardir (30- rasm).



30- rasm.

Sferik mayatnikning kinetik va potensial energiyalarini topamiz:

$$T = \frac{m\vartheta^2}{2}, \quad \vartheta^2 = \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2, \text{ bunda}$$

$$R = \ell\sin\theta, \quad \vartheta_1 = \dot{\theta}\ell, \quad \vartheta_2 = \dot{\Psi}R = \dot{\Psi}\ell\sin\theta.$$

$$T = \frac{1}{2}m\ell^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\Psi}^2\sin^2\theta\right),$$

$$\Pi = -mgh = -mg\ell\cos\theta.$$

$g_1 = \theta$, $g_2 = \Psi$ deb, Lagranjning II tur

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial\theta} = -\frac{\partial \Pi}{\partial\theta}, \quad \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial\psi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial\psi} \tag{15}$$

tenglamalaridan foydalanib, sferik mayatnikning differensial tenglamalari tuziladi:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta}; \quad \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = m\ell^2\ddot{\theta}; \quad \frac{\partial T}{\partial\theta} m\ell^2\dot{\psi}^2\sin\theta\cdot\cos\theta;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial\theta} = mg\ell\sin\theta; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial\psi} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} = m\ell^2\dot{\psi}\sin^2\theta; \quad \frac{\partial T}{\partial\psi} = 0;$$

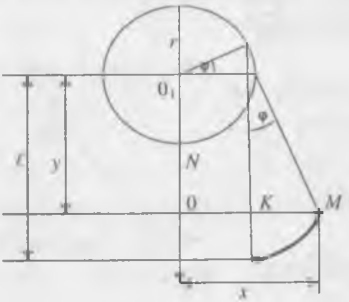
$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} = m\ell^2\ddot{\psi}\sin^2\theta; \quad \frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} = -2m\ell^2\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\cos\theta.$$

Topilgan ifodalarni (15)ga qo‘yilsa, sferik mayatnikning differensial tenglamalari

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\frac{g}{\ell}\sin\theta + \dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta \\ \ddot{\psi} &= -2\dot{\theta}\dot{\psi}ctg\theta \end{aligned} \qquad (16)$$

ko'rinishda hosil bo'ladi.

16- masala. r radiusli qo'zg'almas silindrga o'ralgan ipga osilgan m massali moddiy nuqtadan iborat mayatnik harakatining tenglamasini tuzing. Muvozanat vaziyatida ipining osilib turgan qismining uzunligi ℓ. Ip massasini hisobga olmang.



31- rasm.

Yechish. Lagranj tenglamalaridan foydalanib, mayatnik tebranishlarining tenglamasini tuzamiz. M nuqtaning koordinatalarini aniqlaymiz (31- rasm).

$$x = Ok + kM = r\cos\varphi + (\ell + r\varphi)\sin\varphi;$$

$$y = OO_1 = (\ell + r\varphi)\sin\varphi - r\sin\varphi.$$

Sistemaning kinetik va potensial energiyasi topiladi:

$$\dot{x} = (\ell + r\varphi)\cos\varphi\cdot\dot{\varphi},$$

$$\dot{y} = -(\ell + r\varphi)\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}, \quad \vartheta^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2, \quad \vartheta^2 = (\ell + r\varphi)^2\dot{\varphi}^2;$$

$$T = \frac{m}{2}(\ell + r\varphi)^2\dot{\varphi}^2;$$

$$\Pi = -mq[(\ell + r\varphi)\cos\varphi - r\sin\varphi].$$

Lagranj funksiyasi tuziladi:

$$L = \frac{m}{2}(\ell + r\varphi)^2\dot{\varphi}^2 + mg[(\ell + r\varphi)\cos\varphi - r\sin\varphi].$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = m(\ell + r\varphi)r\dot{\varphi}^2 + mg[r\cos\varphi - (\ell + r\varphi)\cos\varphi - r\sin\varphi] =$$

$$= m(\ell + r\varphi)r\dot{\varphi}^2 - mg(\ell + r\varphi)\sin\varphi.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m(\ell + r\varphi)^2 \dot\varphi; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) = 2m(\ell + r\varphi)r\dot\varphi^2 + (\ell + r\varphi)^2 \ddot\varphi.$$

Bu hosilalar uchun topilgan ifodalarni

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

tenglamaga qo'yib, mayatnik harakatining differensial tenglamasi olinadi:

$$2m(\ell + r\varphi)r\dot\varphi^2 + m(\ell + r\varphi)^2 \ddot\varphi - m(\ell + r\varphi)r\dot\varphi^2 +$$

$$+ mg(\ell + r\varphi)\sin\varphi = 0,$$

$$(\ell + r\varphi)\ddot\varphi + r\dot\varphi^2 + g\sin\varphi = 0.$$

17- masala. Massasi m bo'lgan va ipining uzunligi ixtiyoriy va $\ell = \ell_0 + \ell_1 \sin \nu t$, $\ell(t) = \ell_0 + ct$ qonunlar bo'yicha o'zgaradigan mayatnikning harakat tenglamasini tuzing.

Yechish. Mayatnik harakatining tenglamasi

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0. \tag{17}$$

Lagranj tenglamasidan foydalanib yoziladi. Buning uchun Lagranj funksiyasini tuziladi (32- rasm):

$$x = \ell \sin\varphi, \quad \dot x = \dot\ell \sin\varphi + \ell\cos\varphi \cdot \dot\varphi,$$

$$y = \ell\cos\varphi, \quad \dot y = \dot\ell\cos\varphi - \ell\sin\varphi \cdot \dot\varphi,$$

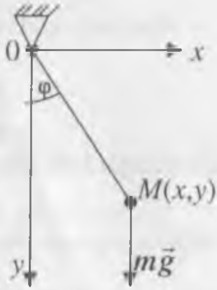
$$\vartheta^2 = \dot x^2 + \dot y^2 = \dot\ell^2 + \ell^2\dot\varphi^2.$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot\ell^2 + \ell^2\dot\varphi^2\right), \quad \Pi = -mg\ell\cos\varphi.$$

$$L = T - \Pi = \frac{m}{2}\left(\dot\ell^2 + \ell^2\dot\varphi^2\right) + mg\ell\cos\varphi.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mg\ell\sin\varphi; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = -m\ell^2\dot\varphi;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) = 2m\ell\dot\ell\dot\varphi + m\ell^2\ddot\varphi.$$



32- rasm.

Hosilalar uchun topilgan ifodani Lagranj tenglamasiga keltirib qo‘yilsa, mayatnik harakatining differensial tenglamasi hosil bo‘ladi:

$$m\ell\ddot{\varphi} + 2m\dot{\ell}\ell\dot{\varphi} + mg\ell\sin\varphi = 0,$$

$$\ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{\ell}}{\ell}\dot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0. \qquad \text{(a)}$$

Agar mayatnik ipining uzunligi $\ell(t) = \ell_\circ + \ell_1 \sin\gamma t$ qonun bo‘yicha o‘zgarsa, mayatnik harakatining differensial tenglamasi

$$\ddot{\varphi} + \frac{2\upsilon\ell_1\cos\gamma t}{\ell_0 + \ell_1\sin\gamma t}\dot{\varphi} + \frac{g}{\ell_0 + \ell_1\sin\gamma t}\sin\varphi = 0$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Agar mayatnik ipining uzunligi $\ell = \ell_0 + ct$, $c = \text{const}$ qonun bo‘yicha o‘zgarsa, (a) tenglamalardan foydalanib va $\ell(t)$ ni erkli o‘zgaruvchi sifatida qarab, mayatnik harakatining differensial tenglamasini hosil qilish mumkin. Buning uchun $\varphi(t)$ og‘ish burchagidan vaqt bo‘yicha olingan hosilalarni $\varphi(t)$ funksiyadan $\ell(t)$ bo‘yicha olingan hosilalar bo‘yicha ifodalash kerak:

$$\frac{d\ell}{dt} = c, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\ell}{dt} = c\frac{d\varphi}{d\ell};$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{d}{d\ell}\left(c\frac{d\varphi}{d\ell}\right)\frac{d\ell}{dt} = c^2\frac{d^2\varphi}{d\ell^2}.$$

Natijada izlanayotgan tenglama

$$\frac{d^2\varphi}{d\ell^2} + 2\frac{1}{\ell}\frac{d\varphi}{d\ell} + \frac{q}{c^2\ell}\sin\varphi = 0$$

ko‘rinishga keltiriladi. Bu tenglama kichik og‘ish burchaklar uchun,

ya’ni $\sin\varphi \approx \varphi$ shartda esa $\frac{d^2\varphi}{d\ell^2} + \frac{2}{\ell}\frac{d\varphi}{d\ell} + \frac{q}{c^2\ell}\varphi = 0$ ko‘rinishni oladi. Bu tenglama yechimlari, ya’ni mayatnikning harakat qonuni Bessel va Neyman funksiyalari orqali ifodalanadi.

18- masala. Uzunligi ℓ bo'lgan cho'zilmaydigan ipga osilgan m massali moddiy nuqtadan iborat mayatnikning osilgan nuqtasi gorizontal bilan α burchak tashkil qilgan og'ma to'g'ri chiziq bo'ylab, berilgan $\xi = \xi_0(t)$ qonunga muvofiq harakat qiladi. Mayatnik harakatining tenglamasini tuzing.

Yechish. 33- rasmda hosil bo'lgan ΔOKC dan:

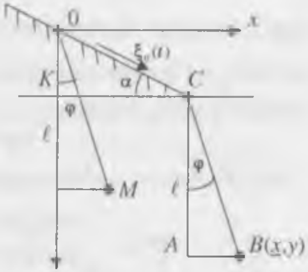
$CK = \xi\cos\alpha,\ \ OK = \xi\sin\alpha$.

ΔABC dan esa:

$AB = \ell\sin\varphi,\ \ AC = -\ell\cos\varphi$,

$x = KC + AB = \ell\sin\varphi + \xi\cos\alpha$,

$y = OK + (+AC) = \xi\sin\alpha - \ell\cos\varphi$.



33- rasm.

Mayatnikning kinetik va potensial energiyasini topamiz:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

$$\Pi = mg(\xi\sin\alpha - \ell\cos\varphi)$$

$$\dot{x} = \ell\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} + \dot{\xi}\cos\alpha, \quad \dot{y} = \ell\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} + \dot{\xi}\sin\alpha;$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \ell^2\dot{\varphi}^2\left(\cos^2\varphi + \cos^2\varphi\right) + \dot{\xi}^2\left(\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\right) +$$

$$2\ell^2\dot{\varphi}\dot{\xi}\left(\cos\varphi\cdot\cos\alpha + \sin\varphi\cdot\sin\alpha\right) = \ell^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\xi}^2 + 2\ell^2\dot{\varphi}\dot{\xi}\cos(\varphi - \alpha).$$

Lagranj funksiyasi tuziladi:

$$L = T - \Pi = \frac{m}{2}\left[\ell^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\xi}^2 + 2\ell\dot{\xi}\dot{\varphi}\cos(\varphi - \alpha)\right] +$$

$$+ mg\ell\cos\varphi - mg\xi\sin\alpha.$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{m}{2}\left[2\ell^2\dot{\varphi} + 2\ell^2\dot{\xi}\cos(\varphi - \alpha)\right];$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) = m\ell^2\ddot{\varphi} + m\ell\ddot{\xi}\cos(\varphi - \alpha) - m\ell^2\dot{\xi}\sin(\varphi - \alpha)\cdot\dot{\varphi};$$

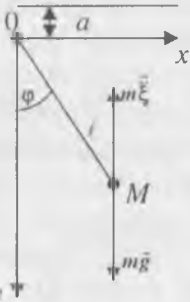
$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = -m\ell\dot{\varphi}\dot{\xi}\sin(\varphi - \alpha) - mg\ell c\sin\varphi.$$

Hosilalar uchun topilgan ifodalarni (17) tenglamaga qo‘yilsa, mayatnik harakatining differensial tenglamasi hosil bo‘ladi:

$$m\ell^2\ddot{\varphi} + m\ell\ddot{\xi}\cos(\varphi-\alpha) - m\ell\dot{\xi}\dot{\varphi}\sin(\varphi-\alpha) + m\ell\dot{\varphi}\dot{\xi}\sin(\varphi-\alpha) +$$
$$+mg\ell\sin\varphi = 0\ ,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi + \frac{\ddot{\xi}}{\ell}\cos(\varphi-\alpha) = 0.$$

19- masala. Qo‘yilish nuqtasi vertikal yo‘nalishda $\xi(t) = a\cos\gamma t$ qonun bo‘yicha tebranuvchi, ipining uzunligi ℓ bo‘lgan m massali yassi mayatnik kichik tebranishlarining tenglamasini toping.



34- rasm.

Yechish. Yassi mayatnikning qo‘yilish 0 nuqtasi $\xi(t) = a\cos\gamma t$ qonun bo‘yicha vertikal tekislikda to‘g‘ri chiziqli tebranma harakat qiladi (34- rasm).

Mayatnik harakatining differensial tenglamasini tuzish uchun Lagranj funksiyasi tuziladi. M nuqtaning koordinatalari hisoblanadi.

$$x = \ell\sin\varphi,\ y = a\cos\gamma t + \ell\cos\varphi$$

(agar mayatnikning qo‘yilish nuqtasi $a\cos\gamma t$ qonun bo‘yicha Ox o‘q bo‘ylab tebranma harakat qilsa, u holda M nuqtaning koordinatalari $x = a\cos\gamma t + \ell\sin\varphi,\ y = \ell\cos\varphi,$ formulalar bilan hisoblanadi). Qaralayotgan sistema uchun L Lagranj funksiyasi $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \Pi(x, y)$ ko‘rinishga ega bo‘ladi. U hol uchun esa

$$L = \frac{m}{2}\dot{\varphi}^2 + m\ell a\gamma^2\cos\gamma t\cos\varphi + mg\ell\cos\varphi\,.$$

Potensialli kuch maydonida Lagranj tenglamasi olinadi:

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial\dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,\quad q = \varphi,\quad \dot{q} = \dot{\varphi}\,.$$

Mayatnik harakatining differensial tenglamasi quyidagicha tuziladi:

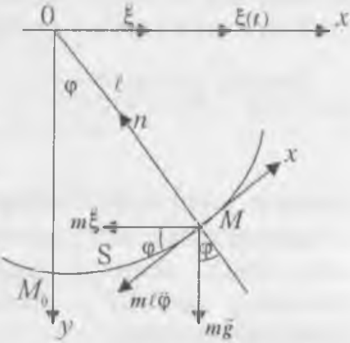
$$m_2\ddot{\varphi} + \left(mg\ell + m\ell a\gamma^2 \cos\gamma t\right)\sin\varphi = 0.$$

Agar $\sin\varphi \approx \varphi$ taqribiy formuladan foydalanilsa, mayatnik kichik tebranishlarining differensial tenglamasi hosil bo'ladi:

$$\ell\ddot{\varphi} + \left(g + a\gamma^2 \cos\gamma t\right)\varphi = 0.$$

20- masala. Qo'yilish nuqtasi gorizontal to'g'ri chiziq bo'ylab $\xi = \xi(t)$ ma'lum qonunga muvofiq harakatlanuvchi, ipining uzunligi ℓ bo'lgan m massali mayatnik harakatining qonunini toping.

Yechish. Qo'yilish nuqta harakatining yo'nalishi Ox o'q musbat yo'nalishi bilan bir xil bo'lsin. Qo'yilish nuqtaning $m\ddot{\xi}$ inersiya kuchi $\ddot{\xi}$ tezlanishga qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi. mg og'irlik kuchining urinma tashkil etuvchisi topiladi (35- rasm):



35- rasm.

$$P_\tau = -mg\sin\varphi.$$

$m\ddot{\xi}$ inersiya kuchining ham urinma o'qdagi proyeksiyasi topiladi:

$$J\tau = -m\ddot{\xi}\cos\varphi\,.$$

Mayatnik harakatining differensial tenglamasini tuzamiz

$$m\vec{a}_\tau = \sum_k \vec{F}_{\tau k},$$

bunda

$$S = \ell\varphi, a\tau = \frac{d^2S}{dt^2} = \ell\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ell\ddot{\varphi}.$$

Natijada mayatnik harakatining differensial tenglamasi quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$m\ell\ddot{\varphi} + mg\sin\varphi + m\ddot{\xi}\cos\varphi = 0 .$$

Og‘ish burchagi yetarlicha kichik, ya’ni $\lim\limits_{\varphi \Rightarrow 0} \dfrac{\sin\varphi}{\varphi} = 1$ bo‘lganda $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$ taqribiy munosabatlar o‘rinli bo‘lib, mayatnik harakatining differensial tenglamasi quyidagi ko‘rinishga keltiriladi:

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = -\frac{\ddot{\xi}}{g}, \; k^2 = \frac{g}{\ell}. \tag{1}$$

(1) tenglamaning umumiy yechimi, ya’ni mayatnik harakatining umumiy qonuni Lagranjning ixtiyoriy o‘zgarmaslarni variatsiyalash usulidan foydalanib topiladi.

Buning uchun $\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$ bir jinsli tenglamaning

$$\varphi(t) = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$$
(2)

umumiy yechimi kelib chiqadi. Bundagi C_1 va C_2 sonlarni o‘zgarmas emas, balki ularni o‘zgarishiga qarab (variatsiyalab), ularni shunday tanlaymizki, (2) bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi, (1) tenglamaning umumiy yechimiga aylansin:

$$\varphi(t) = C_1(t)\sin kt + C_2(t)\cos kt . \tag{3}$$

(3)ning hosilasi topiladi:

$$\dot{\varphi} = \dot{C}_1(t)\sin kt + \dot{C}_2(t)\cos kt + C_1(t)k\cos kt - C_2(t)k\sin kt .$$

Tanlanmoqchi bo‘lgan $C_1(t)$ va $C_2(t)$ uchun

$$\dot{C}_1(t)\sin kt + \dot{C}_2(t)\cos kt = 0 \tag{4}$$

bo‘lsin deb qaraladi. Natijada

$$\dot{\varphi}(t) = C_1(t)k\cos kt - C_2(t)k\sin kt . \tag{5}$$

(5) tenglikning har ikkala tomoni differensiallanadi.

$$\ddot{\varphi}(t) = \dot{C}_1(t)k\cos kt - \dot{C}_2(t)k\sin kt - C_1(t)^2(t)k^2\sin kt - \\ -C_2(t)k^2\cos kt. \tag{6}$$

III. Savol va masalalar

1. Mexanik sistemaning kinetik va potensial energiyalari umumlashgan koordinatalar hamda umumlashgan tezliklar orqali qanday ifo-dalanadi? Kinetik va potensial energiyalar uchun ularning kanonik ifo-dalari qanday bo'ladi?

2. Lagranjning II tur tenglamalarini keltirib chiqaring. Har bir me-xanik sistema uchun bunday tenglamalarning soni qancha bo'ladi?

3. Agar mexanik sistemaga bir vaqtda konservativ va konservativ bo'lmagan kuchlar ta'sir qilsa, Lagranjning II tur tenglamalari qanday ko'rinishda biladi?

4. Elastiklik kuchi ta'siridagi mexanik sistemaning potensial energiyasi qanday aniqlanadi?

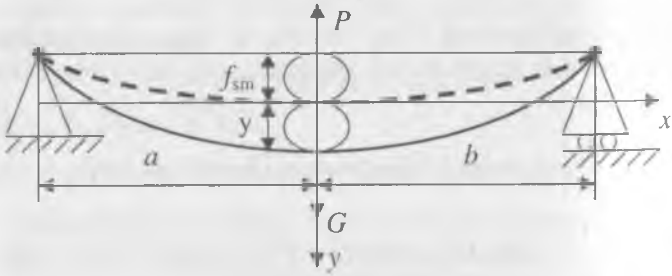
5. Lagranj funksiyasi va uning xossalarini izohlang.

6. Lagranjning II tur tenglamalaridan foydalanib, matematik va fizik mayatniklar tebranishlarining differensial tenglamasini tuzing.

7. Matematik va fizik mayatniklar uchun Lagranj funksiyalarini tuzing.

8. Lagranj tenglamasi qanday ko'rinishga ega? Bu tenglamaning qo'llanilishini izohlang.

9. Ikkita tayanchga ega bo'lgan to'sinda yotgan *G* og'irlikdagi yuk kichkina erkin tebranishlarining siklik chastotasi va davrini aniqlang. Yuk tayanchlardan *a* va *b* masofada joylashgan. To'sin materialining elastiklik moduli *E*, ko'ndalang kesimining inersiya momenti esa *I* ga teng. To'sin og'irligini hisobga olmang (36- rasm).



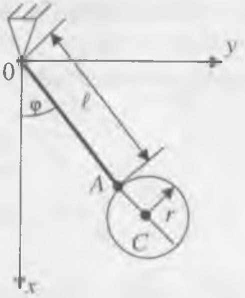
36- rasm.

Javob: $T = 2\pi a\ell\sqrt{\dfrac{G}{3EI(a+b)}}$, $K = \dfrac{1}{a\ell}\sqrt{\dfrac{3EI(a+b)}{G}}$.

10. *M* massali bir jinsli *r* radiusli diskka *A* nuqtada ℓ uzunlikdagi sterjen qattiq mahkamlangan. Sterjenning boshqa uchi mayatnikning

qo'yilish nuqtasini ifodalaydi. Sterjenning massasini e'tiborga olmasdan fizik mayatnik harakatining tenglamasini tuzing (37- rasm).

Javob: $\ddot{\varphi} + \dfrac{2g(\ell + r)}{r^2 + 2(\ell + r)^2}\sin\varphi = 0$.



37- rasm.

11. m massali moddiy nuqta $S = 4a\sin\varphi$ tenglama bilan ifodalangan sikloidal yo'nalish bo'ylab og'irlik kuchi ta'sirida harakat qiladi. Bundagi S — 0 nuqtadan hisoblanadigan yoy, φ — sikloidaga o'tkazilgan urinma bilan gorizontal o'q orasidagi burchak. Nuqta harakatining tenglamasini toping (38- rasm).

Javob: $S = A\sin\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{g}{a}}t + \varphi_0\right)$

bunda A va φ_0 — integrallash doimiylari.

38- rasm.

12. m massali nuqta va uzunligi $\ell = \ell(t)$ qonun bo'yicha o'zgaradigan ipdan tashkil topgan matematik mayatnikning tenglamasini tuzing.

Javob: $\ddot{\varphi} + 2\dfrac{\dot{\ell}}{\ell}\dot{\varphi} + \dfrac{g}{\ell}\sin\varphi = 0$, bunda φ — ipning vertikaldan og'ish burchagi.

13. Massasi m bo'lgan moddiy nuqta va chizilmaydigan ℓ ipdan tashkil topgan matematik mayatnikning qo'yilish nuqtasi gorizont bilan α burchak tashkil qiluvchi og'ma to'g'ri chiziq bo'ylab $\xi = \xi(t)$ qonun bo'yicha harakat qilmoqda. Mayatnik harakatining tenglamasini tuzing.

Javob: $\ddot{\varphi} + \dfrac{g}{\ell}\sin\varphi + \dfrac{\ddot{\xi}}{\ell}\cos(\varphi - \alpha) = 0$.

14. Massasi m bo'lgan moddiy nuqta gorizontal tekislik bo'ylab harakat qilmoqda. Nuqtaning harakat tenglamalarini qutb koordinatalarida tuzing.

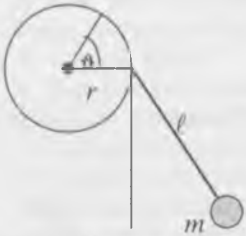
Javob: $m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = F_r$, $\quad m\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{dr}{dt}\right) = F_\varphi$.

15. *m* massali nuqta harakatining tenglamalarini sferik koordinatalarda tuzing.

Javob: $$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2 + g\cos\theta = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta} - \sin\theta\cdot\cos\theta\cdot r^2\dot{\varphi}^2 - gr\sin\theta) = 0.$$



39- rasm.

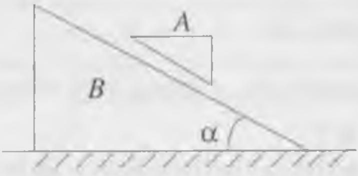
16. *r* radiusli qo'zg'almas silindrga o'ralgan ipga osilgan *m* massali moddiy nuqtadan iborat mayatnik harakatining tenglamasini tuzing (39- rasm).

Muvozanat holatda ipning osilib turgan qismining uzunligi ℓ. Ipning massasini hisobga olmang.

Javob: $(\ell + r\vartheta)\ddot{\vartheta} + r\dot{\vartheta}^2 + g\sin\vartheta = 0$,

bunda φ — ipning vertikaldan og'ish burchagi.

17. *m* massali *A* prizma m_1 massali *B* prizmaning gorizont bilan α burchak tashkil qilgan silliq yog'i bo'ylab siljimoqda. *B* prizmaning tezlanishini toping. *B* prizma bilan gorizontal tekislik orasidagi ishqalanishni hisobga olmang (40- rasm).



40- rasm.

5- §. Siklik koordinatalar va integrallar. Energiya integrali

I. Nazariy qism

Potensialli kuchlar uchun Lagranjning ikkinchi tur tenglamasi berilgan bo'lsin:

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, \quad (i=1,2,3,...,s). \qquad (1)$$

Bunda $L=T+U=T-\Pi$ — *Lagranj funksiyasi* yoki *kinetik potensial* deb ataladi; T va Π — mos ravishda sistemaning kinetik va potensial energiyasi, $U=-\Pi$ kuch funksiyasi.

Lagranj funksiyasi umumlashgan koordinatalar, umumlashgan tezlik va vaqtning funksiyasidir, ya'ni $L=L(q_i,\dot{q}_i,t)$.

$L=T+U$ Lagranj funksiyasi tarkibiga kirmagan q_k umumlashgan koordinatalarga *mexanik sistemaning siklik koordinatalari* deyiladi.

Faraz qilaylik, sistemaning S ta umumlashgan koordinatalaridan K tasi $(K < S)$ siklik koordinatalari bo'lsin. q_k umumlashgan koordinatalar U kuch funksiyasiga, shuningdek, T kinetik energiya ifodasiga ham kirmaydi. T kinetik energiyaning ifodalariga faqat q_k umumlashgan koordinatalarning $\dot{q}_k$ umumlashgan tezliklari kiradi. q_k umumlashgan koordinatalar L Lagranj funksiyasi ifodasiga kirmaganligi tufayli $\frac{\partial L}{\partial q_k}\equiv 0$ bo'ladi. Bunday holda siklik koordinatalar uchun Lagranj tenglamasi

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=0, \; (k=1,2,3,...,i, i<s) \qquad (2)$$

kirinishga ega bo‘ladi. Oxirgi tenglamadan quyidagi ifoda kelib chiqadi:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = C_k\,, \quad (k = 1,2,3,...,i, i < s)\,. \qquad (3)$$

Agar $L = T + U$ bo‘lishligi va kuch funksiyasining $\dot{q}_k$ umumlashgan tezlikka bog‘liq bo‘lmasligi e’tiborga olinsa, (3) tenglik

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = C_k$$

ko‘rinishni oladi. Bu tenglikning chap tomoni $\dot{q}_k$ bo‘yicha differensiallanib, sistemaning T kinetik energiyasi uchun

$T = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_i$ ko‘rinishdagi ifoda topiladi.

Bunday holda (3) tenglik

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i + b_k = C_k$$

ko‘rinishni oladi.

Shunday qilib, Lagranj tenglamasining q_i siklik koordinataga mos keluvchi birinchi integrali uchun ifoda topiladi. Topilgan birinchi integralga *siklik integral* deyiladi. Siklik integral umumlashgan tezliklarga nisbatan chiziqli funksiya bo‘ladi.

Lagranj tenglamalari sistemasini to‘liq integrallash uchun bu sistemaning $2n$ ta birinchi integrallarini topish zarur va yetarli, ya’ni Lagranj tenglamalarini qanoatlantiruvchi $2n$ ta

$$f_s(\dot{q}_i q_i, t) = C_s\,, \quad (s = 1,2,...,2n) \qquad (4)$$

ko‘rinishdagi munosabatlar topish kerak.

(4) tenglamadan barcha $\dot{q}_i q_i$ miqdorlarni t vaqtning funksiyasi ko‘rinishida yetarli sondagi ixtiyoriy sonlarga bog‘lab topiladi. Ixtiyoriy doimiylar boshlang‘ich shartlardan foydalanib aniqlanadi.

Mexanik sistemalarda chiziqli koordinatalarga mos keluvchi siklik integrallar sistema harakat miqdorining saqlanish qonuni bilan, burchak koordinatalarga mos keluvchi siklik integrallar bilan esa harakat miqdori momentining saqlanish qonuni bog'langandir.

Asosiy mexanik sistemalarda xususiy holda konservativ sistemalar uchun energiya integrali mavjud bo'lib, harakat davomida sistemaning to'liq mexanik energiyasining o'zgarmas miqdori bo'lishini ifodalaydi:

$$T + \Pi = h .$$

Bu integralni ideal bog'lanishli sistemalar uchun Lagranj tenglamalaridan faol kuchlar t vaqtga bog'liq bo'lmaganda, shuningdek, kuch funksiyasi vaqtga bog'liq bo'lmagan hollarga olish mumkin. Shunday qilib, t vaqtga siklik koordinata sifatida qarasaq, konservativ sistema harakati tenglamalarining birinchi integrali integral energiyani ifodalar ekan.

Lagranj funksiyasidan umumlashgan tezliklar bo'yicha olingan xususiy hosilalar *umumlashgan impuls* deyiladi. Umumlashgan impulsni p orqali belgilasak, quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$P_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

Agar sistemaning n ta umumlashgan koordinatasidan S tasi siklik koordinatalar bo'lsa, ($S < n$) u holda L Lagranj funksiyasi $2n - S + 1$ ta o'zgaruvchiga bog'liq bo'lib (umumiy holda t vaqt o'zgaruvchi bo'lib kiradi), bu sistemaning S ta umumlashgan impulsi uning harakati davomida o'zgarmas qiymatni saqlaydi.

II. Masalalar yechish

21- masala. Fazoda m massali nuqtaning holati uchta x, y, z to'g'ri burchakli koordinatalar bilan to'liq aniqlanadi. Erkin nuqtaning x, y, z to'g'ri burchakli koordinatalarini umumlashgan koordinatalar deb qabul qilib, gorizontal tekislikda nuqta proyeksiyasi harakatining sodir bo'lish qonuniyatlarini o'rnating.

Yechish. Og'irlik kuchi maydonida harakatlanayotgan nuqtaning kinetik va potensial energiyalari uchun quyidagi ifodalar topiladi:

$$T = \frac{1}{2}m\vartheta^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right); \ \Pi = gz = mgz.$$

Lagranj funksiyasi tuziladi:

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz.$$

L Lagranj funksiyasi x va y koordinatalarga bog'liq emas, ya'ni ularni *siklik koordinatalar* deyish mumkin. Bu siklik koordinatalarga mos keluvchi siklik integrallar:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = \text{const} \quad \text{yoki} \quad \dot{x} = c_1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = \text{const} \quad \text{yoki} \quad \dot{y} = c_2.$$

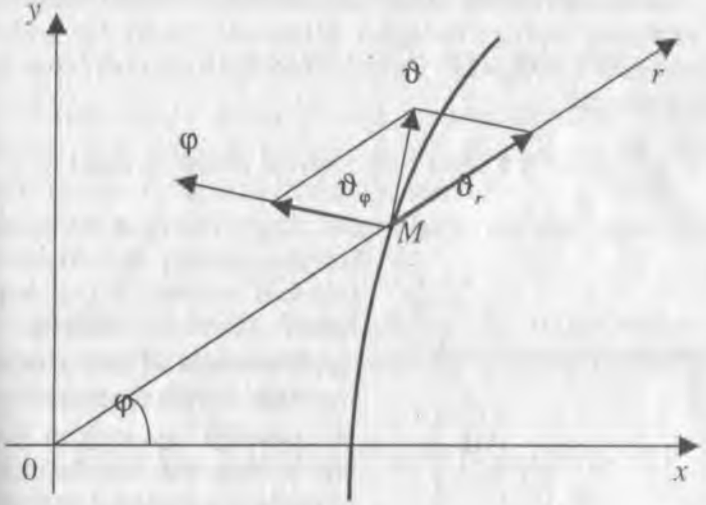
Bu ifodalar gorizontal o'qlardagi nuqta tezligining proyeksiyalari o'zgarmas miqdor bo'lishligini ko'rsatadi, ya'ni nuqta proyeksiyasi harakati gorizontal tekislikda tekis va to'g'ri chiziqli qonun bo'yicha sodir bo'ladi. $\dot{x} = 0$ va $\dot{y} = 0$ bo'lganda nuqtaning proyeksiyasi gorizontal tekislikda o'zgarmasdan qoladi, ya'ni nuqta vertikal bo'ylab harakatlanadi.

22- masala. 21- masalani markaziy kuch maydonida qaraymiz. Faraz qilaylik, m massali moddiy nuqta markaziy kuch ta'sirida harakatlanayotgan bo'lsin. Markazga nisbatan moddiy nuqta harakat miqdori momentining saqlanish qonunini o'rnating.

Yechish. Faraz qilaylik, markaziy kuch qandaydir markazga qarab yo'nalgan bo'lsin. Markaziy kuch moduli nuqtadan markazgacha bo'lgan masofaning funksiyasi bo'ladi.

Qutb koordinatalari sistemasidan foydalanamiz. Nuqtaning qutb koordinatalari bo'lgan r qutb radiusini va φ qutb burchagini umumlashgan koordinatalar deb qaraymiz.

Nuqtaning kinetik energiyasi topiladi. Buning uchun nuqta ϑ tezligi modulini uning qutb koordinatalari o'qlaridagi ϑ_r va ϑ_φ proyeksiyalar orqali ifodalanadi (41- rasm):



41- rasm.

$$\vartheta^2 = \vartheta_r^2 + \vartheta_\varphi^2, \quad \vartheta_r = \dot{r}, \ \vartheta_\varphi = r\omega, \quad \omega = \dot{\varphi}.$$

$$T = \frac{m\vartheta^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\vartheta_r^2 + \vartheta_\varphi^2\right) =$$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right).$$

Moddiy nuqtaning poten-sial energiyasi uchun ifoda topiladi. Markaziy kuch ta'siridagi nuqtaning potensial energiyasi ham Nyuton tortishish kuchi maydonida joylashgan nuqtaning potensial energiyasi singari hisoblanadi, ya'ni nuqtaning potensial energiyasi nuqtadan markazgacha bo'lgan masofaning funksiyasi bo'ladi:

$$\Pi = f(r).$$

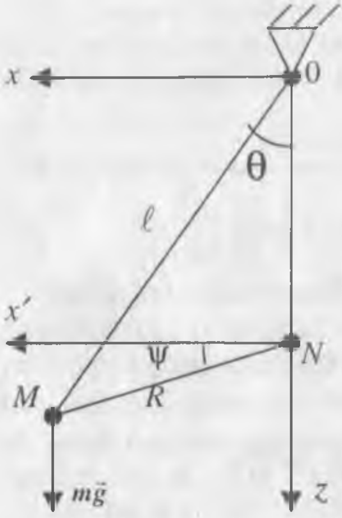
Nuqta uchun Lagranj funksiyasi quyidagicha tuziladi:

$$L = T - \Pi = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - f(r).$$

Bu ifodadan ravshanki, L Lagranj funksiyasida φ burchak koordinata uning ifodasiga kirmaydi, ya'ni bu siklik koordinatani ifodalaydi. Bu siklik koordinataga mos keluvchi siklik integral

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mr^2\dot\varphi = \text{const} \quad \text{yoki} \quad mr(r\dot\varphi) = mr\vartheta_\varphi = \text{const}$$

ko'rinishga ega. Bu oxirgi tenglik oldin o'rnatilgan markazga nisbatan moddiy nuqta harakat miqdori momentining saqlanish qonunini ifodalaydi.



42- rasm.

23- masala. Holati θ va ψ burchaklar bilan aniqlanuvchi, uzunligi ℓ ga teng bo'lgan sferik mayatnik harakatining birinchi integrallarini toping.

Yechish. m massali M nuqtani qarab chiqamiz. Bu nuqta og'irligi e'tiborga olinmaydigan $\ell = OM$ ipga osilgan. M nuqtaning holati θ va ψ burchaklar bilan to'liq aniqlanadi. Sferik harakat qilayotgan nuqtaning kinetik va potensial energiyalari quyidagicha hisoblanadi (42-rasm):

$$T = \frac{m\vartheta^2}{2}, \quad \vartheta^2 = \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2, \quad \vartheta_1 = \dot\theta\ell, \quad \vartheta_2 = \dot\psi R = \dot\psi\ell\sin\theta,$$

$$\Pi = -mg|ON|, \quad |ON| = \ell\cos\theta.$$

Shunday qilib, nuqtaning kinetik va potensial energiyalari uchun quyidagi ifodalar topiladi:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\ell^2\left(\dot\theta^2 + \dot\psi^2\sin^2\theta\right), \\ \Pi &= -mg\ell\cos\theta. \end{aligned}\right\}$$

Sferik mayatnik uchun Lagranj funksiyasi tuziladi:

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} m\ell^2 \left(\theta^2 + \psi^2 \sin^2 \theta\right) + mg\ell \cos\theta .$$

Ravshanki, L ning ifodasi ψ koordinataga oshkor bog'liq emas, ya'ni ψ burchak siklik koordinatadir. ψ siklik koor-dinataga mos keluvchi siklik integral

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \psi \sin^2 \theta = C$$

ko'rinishga ega bo'lib, mayatnikning Oz o'qqa nisbatan harakat miqdori momentining saqlanish qonunini ifodalaydi.

Energiya integrali esa

$$T + \Pi = h \Rightarrow \frac{1}{2} m\ell^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta\right) - mg\ell \cos\theta = C$$

yoki $$\dot{\theta}^2 + \psi^2 \sin^2 \theta - 2\frac{g}{\ell} \cos\theta = h$$

ko'rinishga ega. Bunda $h = \dfrac{2C}{m\ell^2}$.

III. Savol va masalalar

1. Konservativ sistemalar uchun Lagranjning II tur tenglamalari qanday ko'rinishga ega?
2. Elastiklik kuchi ta'siridagi mexanik sistemaning potensial energiyasi qanday aniqlanadi?
3. Qanday umumlashgan koordinatalarga siklik koordinatalar deyiladi?
4. Siklik koordinatalar uchun Lagranj tenglamasi qanday ko'rinishga ega? Uning birinchi integrallarini toping.
5. Qanday integralga siklik integral deyiladi?
6. Siklik integralning ifodasi umumlashgan tezliklarga nisbatan qanday funksiya bo'ladi?
7. Mexanik sistemalarda chiziqli koordinatalarga mos keluvchi siklik integrallar bilan sistema harakat miqdorining saqlanish qonuni qanday bog'langanligini izohlang.
8. Burchak koordinatalarga mos keluvchi siklik integrallar sistema harakat miqdori momentining saqlashni qonuni bilan qanday bog'langan bo'ladi?

9. Konservativ sistemalar uchun energiya integrallari mavjud bo'lishini va harakat davomida sistemaning to'liq mexanik energiyasining saqlanishini tushuntiring.

10. Lagranj funksiyasi va boshlang'ich shartlar bo'yicha nuqta harakatining tenglamalarini integrallang:

1. $L = \frac{1}{2}t^2\dot{x}^2,\ x|_{t=1} = 0;\ \dot{x}|_{t=0} = 1.$ *Javob:* $x = 1 - \frac{1}{t}$.

2. $L = \frac{\dot{x}^2}{2} + t^2 x^2,\ x|_{t=0} = 0;\ \dot{x}|_{t=0} = 1.$ *Javob:* $x = t - \frac{t^3}{3}$.

3. $L = \sqrt{t^2 + \dot{x}^2},\ x|_{t=3} = 0;\ \dot{x}|_{t=3} = 1.$ *Javob:* $x = \frac{t^2}{6}$.

4. $L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{x},\ x\big|_{t=t_0} = 0;\ y\big|_{t=t_0} = y_0,\ \dot{x}\big|_{t=t_0} = 0,\ \dot{y}\big|_{t=t_0} = 0.$

Javob:

$$x = \frac{4E}{P_y^2}\cos^2\frac{P_y(t - t_0)}{4},\ y = \frac{E}{P_y}(t - t_0) + \frac{2E}{P_y^2}\sin\frac{P_y(t - t_0)}{2} + y_0.$$

11. Matematik mayatnikning qo'yilish nuqtasi ϑ_0 o'zgarmas tezlik bilan r radiusli vertikal joylashgan aylana bo'ylab harakatlanadi. Agar mayatnik massasi m, ipining uzunligi ℓ bo'lsa, mayatnik uchun Gamilton funksiyasini tuzing.

Javob: $H = \frac{1}{2}m\ell^2\left[\frac{P}{m\ell^2} - \frac{\vartheta_0}{\ell}\cos\left(\varphi - \frac{\vartheta_0}{r}t\right)\right]^2 - \vartheta_0^2 - mg\ell\cos\varphi$.

12. Agar Lagranj funksiyasi berilgan bo'lsa, Gamilton funksiyasini toping.

1. $L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}$. *Javob:* $H = C\sqrt{C^2P^2 + m^2C^2}$.

2. $L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + a(x\dot{y} - y\dot{x})$.

Javob: $H = \frac{1}{2m}\left[\left(P_x + ay\right)^2 + \left(P_y - ax\right)^2 + P_z^2\right]$.

13. Massasi $m = 1$ bo'lgan matematik mayatnikning harakat tenglamalari

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial H}{\partial P},\quad \frac{dP}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q},\quad H=\frac{P^2}{2}-\frac{g}{\ell}\cos q$$

($q=\varphi$ mayatnikning vertikaldan og'ish burchagi, ℓ mayatnik ipi-ning uzunligi) ko'rinishda bo'lishligini ko'rsating.

14. Harakatlanuvchi nuqta uchun silindrik koordinatalarda Lagranj funksiyasini tuzing.

Javob: $L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2\right)-\Pi(r,\varphi,z)$.

15. Og'irlik kuchi maydonida R radiusli sferik sirtda harakatlanuvchi m massali nuqta uchun Lagranj funksiyasini tuzing.

Javob: $L=\frac{m}{2}R^2\left(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2\right)+mgR\cos\theta$.

6- §. Gamilton funksiyasi. Mexanikaning kanonik tenglamalari

I. Nazariy qism

1. Kanonik o'zgaruvchilar. Agar mexanik sistemaning harakati $L = L(q_j, \dot{q}_j, t)$ Lagranj funksiyasi yordamida tasvirlansa, u holda harakat tenglamalari Lagranjning ikkinchi tur tenglamalari ko'rinishida bo'ladi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, 2, ..., s). \tag{1}$$

(1) Lagranj tenglamalarining har biri umumlashgan koordinatalarga nisbatan ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalardan iborat bo'lgan S ta tenglamalar sistemasidan iborat. Gamilton tomonidan shunday usul tavsiya etilganki, (1) Lagranjning S ta tenglamalar sistemasini bu sistemaga teng kuchli bo'lgan Gamiltonning kanonik tenglamalari deb ataluvchi $2S$ ta birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarga keltirish mumkin. (1) sistemani kanonik ko'rinishga keltirish uchun q_j umumlashgan koordinatalar va $\dot{q}_j$ umumlashgan tezliklar o'rniga q_j (umumlashgan koordinatalar) va

$p_j = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ (umumlashgan impulslar) yangi o'zgaruvchilar

kiritiladi. q_j va p_j o'zgaruvchilarni *kanonik o'zgaruvchilar* deb ataladi. Ular $2S$ o'lchovli fazo tashkil qiladi.

(1) Lagranj tenglamalari P_j umumlashgan impulslar yordamida

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2, ..., s) \tag{2}$$

ko'rinishni oladi. $p_1, p_2, ..., p_s$ umumlashgan impulslar

$$P_j = \sum_{k=1}^{s} a_{kj}\dot{q}_k + b_j\ , \quad (j = 1,2,...,s) \tag{3}$$

formulalar bilan aniqlanadi.

2. Gamilton funksiyasi. (1) Lagranj tenglamalarining har birini $\dot{q}_j$ ga ko‘paytirib, ularni hadlab qo‘shilsa, quyidagi ifoda hosil bo‘ladi:

$$\sum_{j=1}^{s}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j\right\} = 0 . \tag{4}$$

Agar $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j$ ayniyatdan foydalanilsa, u holda (4)

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right) = 0 \tag{5}$$

ko‘rinish oladi.

Agar L Lagranj funksiyasi t vaqtga oshkor bog‘liq bo‘lmasa, ya’ni $L = L(q_1,\ q_2,....,\ q_s,\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2,....,\ \dot{q}_s)$ ko‘rinishda bo‘lsa, uning vaqt bo‘yicha hosilasi

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right) \tag{6}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

(6)ni (5)ga qo‘yilsa, quyidagi tenglama kelib chiqadi:

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) - L\right\} = 0 .$$

Bundan $$H = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) - L = \text{const} \tag{7}$$

bo‘lishligi kelib chiqadi. H ga *Gamilton funksiyasi* deyiladi.

Gamilton funksiyasini kanonik o‘zgaruvchilar orqali ifodalash mumkin. H funksiyaning (7) ifodasiga umumlashgan koordinatalar va tezlik o'rniga q_j va P_j kanonik o'zgaruvchilar olinsa, H funksiyaning kanonik o'zgaruvchilar orqali ifodalangan formulasi hosil bo'ladi:

$$H = \sum_{j=1}^{s} P_j \dot{q}_j - L. \tag{8}$$

3. Konservativ sistemalar uchun mexanikaning kanonik tenglamalari. Gamilton funksiyasining kanonik o'zgaruvchilar orqali ifodasi (8) ko'rinishga ega. (3) tenglamalar sistemasini $\dot{q}_j$ ga nisbatan yechib, quyidagi ifodalar topiladi:

$$\dot{q}_k = f(q_1, q_2, ..., q_s, p_1, p_2, ..., p_s, t), \quad (j = 1, 2, ..., s).$$

Bunday holda H Gamilton funksiyasi $2S$ ta q_j va P_j kanonik o'zgaruvchilarning va t vaqtning funksiyasi bo'ladi:

$$H = H(q_1, q_2, ..., q_s, p_1, p_2, ..., p_s, t). \tag{9}$$

H Gamilton funksiyasining P_j umumlashgan impulslar bo'yicha xususiy hosilalari hisoblaniladi:

$$\frac{\partial H}{\partial P_j} = \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial P_j} - \sum_{j=1}^{S} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial P_j}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = P_j$$

ekanligini e'tiborga olinsa,

$$\frac{\partial H}{\partial P_j} = \dot{q}_j + \sum_{k=1}^{s} P_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial P_j} - \sum_{j=1}^{S} P_j \frac{\partial \dot{q}_j - \partial \dot{q}_j}{\partial P_j} = \dot{q}_j$$

bo'ladi.

Shunday qilib,

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_j}. \tag{9'}$$

(8)dan L Lagranj funksiyasini H Gamilton funksiyasi orqali ifodalanadi:

$$L = \sum_{j=1}^{s} P_j \dot{q}_j - H.$$

Lagranj funksiyasining q_j umumlashgan koordinatalar bo'yicha xususiy hosilalari topiladi:

$$\frac{\partial L}{\partial P_j}=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial P_k}{\partial q_j}\dot{q}_k-\frac{\partial H}{\partial q_j}-\sum_{j=1}^{S}\frac{\partial H}{\partial P_k}\cdot\frac{\partial P_k}{\partial q_j}=$$
$$=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial P_k}{\partial q_j}\dot{q}_k-\frac{\partial H}{\partial q_j}-\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial P_k}{\partial q_j}\dot{q}_k=-\frac{\partial H}{\partial q_j}. \tag{10}$$

(2) va (10) taqqoslansa, tubandagi tenglama kelib chiqadi:

$$\frac{dP_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_j}. \tag{11}$$

(9^1) va (11) ni birlashtirilsa, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dq_i}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial P_j},\\ \frac{dP_j}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial q_j}\end{aligned}\right|\quad (j=1,2,\dots,s). \tag{12}$$

(12) tenglama sistemasi *mexanikaning kanonik tenglamalari* yoki *Gamilton tenglamalari* deb ataladi. Gamilton tenglamalari birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasidan iborat. Bu tenglamalarni integrallab, $2S$ ta $q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s$ miqdorlarini t vaqtning va $2S$ ta ixtiyoriy o‘zgarmas sonlarning funksiyasi sifatida aniqlaniladi. Bu tenglamalarni konservativ sistemalar uchun Lagranjning ikkinchi tur tenglamalaridan keltirib chiqardik. Shuning uchun ularni konservativ sistemalarning harakatini o‘rganishga qo‘llanish mumkin.

Endi Gamilton funksiyasining ba’zi bir xossalarini o‘rganamiz. Gamilton funksiyasining vaqt bo‘yicha hosilasi topiladi:

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial q_j}\dot{q}_j+\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial P_j}\dot{P}_j.$$

(12) kanonik tenglamalar e’tiborga olinsa, bu hosila quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial H}{\partial P_j}+\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial H}{\partial P_j}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial H}{\partial t}. \quad (13)$$

Shunday qilib, Gamilton funksiyasining t vaqt bo'yicha to'liq hosilasi bu funksiyaning vaqt bo'yicha xususiy hosilasiga teng. Agar sistemaga qo'yilgan bog'lanishlar t vaqtga oshkor bog'liq bo'lmasa, bunday holda Gamilton funksiyasi ham t vaqtga oshkor bog'liq bo'lmaydi. Bunday holda $\frac{\partial H}{\partial t}=0$ bo'lib, (13) tenglikka ko'ra $\frac{\partial H}{\partial t}=0$ bo'ladi. Bundan

$$H=\text{const} \quad (14)$$

bo'lishligi kelib chiqadi.

Statsionar bog'lanishlarda sistemaning kinetik energiyasi umumlashgan tezliklarning kvadratik funksiyasi bo'ladi. Bunday hol uchun Eylerning bir jinsli funksiyalar haqidagi teoremasiga ko'ra:

$$\sum_{j=1}^{s}P_j\dot{q}_j=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\dot{q}_j=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\dot{q}_j=2T$$

bo'ladi. Bunday hol uchun H Gamilton funksiyasi

$$H=\sum_{j=1}^{s}P_j\dot{q}_j-L=2T-(T-\Pi)=T+\Pi \quad (15)$$

mexanik sistemaning to'liq energiyasini ifodalaydi.

II. Masalalar yechish

24- masala. Inersiyasi bo'yicha harakatlanayotgan erkin mexanik sistema nuqtalarining harakat tenglamalarini aniqlang.

Yechish. Erkin sistema nuqtalarining to'g'ri burchakli koordinatalari x_i, y_i, z_i $(i=1,\overline{n})$ bo'lsin. Inersiyasi bo'yicha harakatlanayotgan erkin mexanik sistema uchun Lagranj funksiyasi sistemaning kinetik energiyasidan iborat bo'ladi:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\left(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2\right).$$

Ravshanki, sistema nuqtalarining to'g'ri burchak x_i, y_i, z_i $(i = 1,\overline{n})$ koordinatalari Lagranj funksiyasining ifodalariga oshkor kirmaydi. Shuning uchun ular sikl koordinatalar bo'ladi.

Qaralayotgan masalada barcha umumlashgan impulslar o'zgarmas bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned} P_{x_i} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i = \alpha_i, \\ P_{y_i} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = m_i \dot{y}_i = \beta_i, \\ P_{z_i} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} = m_i \dot{z}_i = \gamma_i \end{aligned}\right| \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

H Gamilton funksiyasi tuziladi:

$$H = L = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2m_i}(\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2)$$

sistema nuqtalari harakatining differensial tenglamalari tuziladi:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \alpha_i}, \\ \frac{dy_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \beta_i}; \\ \frac{dz_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \gamma_i} \end{aligned}\right| \Rightarrow \left|\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\alpha_i}{m_i}, \\ \frac{dy_i}{dt} &= \frac{\beta_i}{m_i}, \\ \frac{dz_i}{dt} &= \frac{\gamma_i}{\partial \gamma_i}. \end{aligned}\right.$$

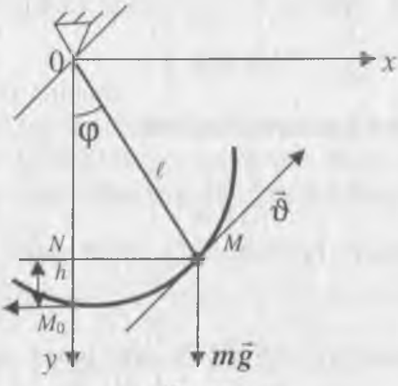
Oxirgi tenglamalar sistemasini integrallab, sistema nuqtalari harakatining tenglamalari to'g'ri burchakli koordinatalarda olinadi:

$$x_i = \frac{\alpha_i}{m_i}t + a_i, \ y_i = \frac{\beta_i}{m_i}t + b_i, \ z_i = \frac{\gamma_i}{m_i}t + c_i, \ (i = 1, 2, ..., n).$$

Bu olingan natija sistemaga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlarning bosh vektori nolga teng bo'lganda, sistemaning harakat miqdori modul va yo'nalish bo'yicha o'zgarmas bo'lgandagi olingan natija bilan ustma-ust tushadi.

Sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema bir xususiy holda, sistema harakatining differensial tenglamalarini chekli ko'rinishda integrallashga imkoniyat yaratgan edi.

25- masala.(M.49.7) Massasi m ga, ipining uzunligi ℓ ga teng bo'lgan, holati esa vertikaldan og'ish burchagi φ bilan aniqlanuvchi matematik mayatnik uchun Gamilton funksiyasini va mayatnik harakatining kanonik tenglamalarini tuzing. Olingan tenglamalar odatdagi matematik mayatnik harakatining differensial tenglamasi bilan teng kuchli bo'lishligini tekshiring (43- rasm).



43- rasm.

Yechish. Matematik mayatnikning kinetik va potensial energiyalari hisoblaniladi:

$$T = \frac{m\vartheta^2}{2},\ \Pi = mgh,\ |OM| = \ell,\ \angle M_0OM = \varphi,\ \vartheta = \ell\dot{\varphi}.$$

To'g'ri burchakli uchburchak NOM dan

$$\frac{|ON|}{|OM|} = \cos\varphi \Rightarrow |ON| = \ell\cos\varphi.$$

$$h = |OM| - |ON| = \ell - \ell\cos\varphi = \ell(1 - \cos\varphi).$$

$$T = \frac{m\ell^2}{2}\dot{\varphi}^2,\ \Pi = -mg\ell\cos\varphi.$$

Mayatnik harakati uchun Lagranj funksiyasi tuziladi:

$$L = T - \Pi = \frac{m\ell^2 \dot{\varphi}}{2} + m\ell\varphi \cos\varphi .$$

Umumlashgan P impuls uchun quyidagi ifoda topiladi:

$$P = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\ell^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{P}{m\ell^2} . \qquad (1)$$

H Gamilton funksiyasi tuziladi:

$$H = P\dot{\varphi} - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - L = m\ell^2 \dot{\varphi} \cdot \dot{\varphi} - \frac{m\ell^2}{2} \dot{\varphi} -$$

$$-m\ell\varphi \cos\varphi = \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\varphi} - m\ell\varphi \cos\varphi = \frac{1}{2} \frac{P}{m\ell^2} - m\ell\varphi \cos\varphi.$$

Mayatnik harakatining boshqa bir kanonik tenglamasi topiladi:

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial t} \Rightarrow \frac{dP}{dt} = -mg\ell \sin\varphi .$$

Shunday qilib, matematik mayatnik uchun Gamilton funksiyasi $H = \frac{1}{2} \frac{P}{m\ell^2} - m\ell\varphi \cos\varphi$ ko'rinishga ega.

Uning harakatining kanonik tenglamalari esa

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{P}{m\ell^2}, \quad \frac{dP}{dt} - m\ell\varphi \sin\varphi \qquad (2)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar (1) tenglikni t vaqt bo'yicha differensiallansa, $\ddot{\varphi} = \frac{\dot{P}}{m\ell^2}$ topiladi. $\dot{P} = m\ell^2 \ddot{\varphi}$ ni (2) ga qo'yilsa, mayatnikning φ og'ish burchagiga nisbatan quyidagi klassik tenglamasi hosil bo'ladi:

$$m\ell^2 \ddot{\varphi} - m\ell\varphi \sin\varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \sin\varphi = 0$$

26- masala. Markaziy kuchlar maydonida harakatlanayotgan m massali nuqta uchun Gamilton funksiyasini toping va nuqta harakatining kanonik tenglamalarini tuzing.

Yechish. Markaziy kuch ta'siridagi nuqta markazi orqali o'tgan tekislikda harakatlanadi. Bunday nuqtaning harakatini qutb koordinatalarida o'rganish juda qulay. Umumlashgan koordinatalar sifatida nuqtaning r qutb koordinatalarini qabul qilsa bo'ladi.

Bog'lanish statsionar bo'lgani tufayli H Gamilton funksiyasi sistemaning to'liq mexanik energiyasiga teng bo'ladi:

$$H = T + \Pi(r) = \frac{m\vartheta^2}{2} + \Pi(r), \ (L = T - \Pi).$$

Qutb koordinatalarida $\vartheta^2 = \dot{r}^2 + r\dot{\varphi}^2$ bo'lishligi e'tiborga olinsa, nuqtaning kinetik energiyasi uchun ifoda $T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$ ko'rinishni oladi. r va φ koordinatalarga mos keluvchi umumlashgan impulslar quyidagicha topiladi:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial H}{\partial r} = m\dot{r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}.$$

Bundan $\dot{r} = \frac{P_r}{m}$, $\dot{\varphi} = \frac{P_\varphi}{mr^2}$.

H Gamilton funksiyasi kanonik o'zgaruvchilarga nisbatan

$$H = \frac{1}{2m}\left(P_r^2 + \frac{P_\varphi^2}{r^2}\right) + \Pi(r)$$

ko'rinishni oladi.

Nuqta harakatining kanonik tenglamalari tuziladi (tekshirilayotgan masalalar uchun ular to'rtta bo'ladi):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_r} = \frac{P_r}{m}, \quad (1) \qquad \frac{dP_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{P_\varphi^2}{r^3} - \frac{\partial \Pi}{\partial r},$$

(3)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_\varphi} = \frac{P_\varphi}{mr^2}, \quad (2) \qquad \frac{dP_\varphi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0. \quad (4)$$

Endi masalalarni bir xil xususiy holda yechamiz.

Agar markaziy tortishish kuchining miqdori $P = k\frac{m}{r^2}$ bo'lsa, u holda:

1) H Gamilton funksiyasi $\left(\Pi = -P_r = -k\dfrac{km}{r}\right)$.

$$H = T + \Pi = m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{km}{r} = \frac{1}{2m}\left(P_r^2 + \frac{P_\varphi^2}{r^2}\right) - \frac{km}{r}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

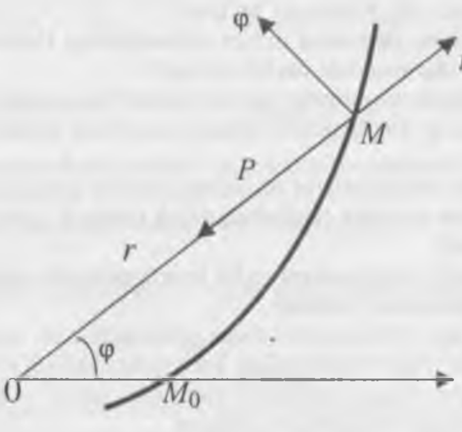
Nuqta harakatining kanonik tenglamalari esa quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_r} = \frac{P_r}{m}, \quad \frac{dr}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{P_\varphi^2}{r^3} - \frac{mk}{r^2}, \qquad (3^1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_\varphi} = \frac{P_\varphi}{mr^2}, \quad \frac{dP_\varphi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0.$$

Bu tenglamalardan r, φ, P_r va P_φ koordinatalarni t vaqtning funksiyasi sifatida aniqlash mumkin (44- rasm).

(4) tenglamadan $P_\varphi = \alpha$ bo'lishligi kelib chiqadi. Bundan $\alpha = \text{const} \cdot P_\varphi$ ning bu qiymatini (2) ga qo'yilsa, quyidagi tenglama hosil bo'ladi:



44- rasm.

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\alpha}{m}.$$

Bu tenglama esa markaziy kuch ta'siridagi nuqtaning radius-vektori chizgan yuza t vaqtga proporsional ravishda o'zgarishini ifodalovchi yuzalar tenglamasining o'zginasidir.

(1) tenglamadan $P_r = m\dfrac{dr}{dt}$ topiladi. (3) tenglama esa

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{\alpha^2}{r^3} + \frac{km}{r^2}$$ ko'rinishni oladi.

Bu topilgan tenglamadan nuqtaning radius bo'ylab qilayotgan harakatini aniqlash mumkin.

III. Savol va masalalar

1. Ixtiyoriy golonom bog'lanishli sistema uchun kinetik energiyaning ifodasi qanday bo'ladi?
2. Statsionar bog'lanishli mexanik sistema uchun kinetik energiyaning ifodasi qanday bo'ladi?
3. Statsionar va statsionar bo'lmagan mexanik sistema uchun kinetik potensial (Lagranj funksiyasi) ifodasi qanday bo'ladi?
4. H Gamilton funksiyasining mazmunini tushuntiring va u qanday argumentlarning funksiyasi bo'ladi?
5. Konservativ sistemalar uchun mexanikaning kinetik tenglamalari qanday va ularning soni nechta bo'ladi?
6. Gamilton funksiyasining vaqt bo'yicha to'liq hosilasi nimaga teng?
7. Statsionar bog'lanishlar uchun Gamilton funksiyasi qanday bo'ladi?
8. Kanonik tenglamalarni tuzishning usullari qanday bo'ladi?
9. Gamilton kanonik tenglamalarining integrali qanday shartlarni qanoatlantiradi?
10. Kanonik tenglamalarni siklik koordinatalarda integrallashning o'ziga xos xususiyatini izohlang.
11. m massali erkin moddiy nuqta potensialli kuch maydonida harakatlanmoqda. Agar maydonning kuch funksiyasi $u(x, y, z)$ ga teng bo'lsa, bu nuqta uchun Gamilton funksiyasini tuzing va bu nuqta harakatining kanonik tenglamalarini toping.

Javob: $\frac{dx}{dt}=\frac{P_1}{m}$, $\frac{dP_1}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}$, $H=\frac{1}{2m}(P_1^2+P_2^2+P_3^2)-u(x,y,z)$

$\frac{dy}{dt}=\frac{P_2}{m}$, $\frac{dP_2}{dt}=\frac{\partial u}{\partial y}$,

$\frac{dz}{dt}=\frac{P_3}{m}$, $\frac{dP_3}{dt}=\frac{\partial u}{\partial z}$.

12. *(Nyuton masalasi)* m massali moddiy nuqta Nyuton kuchlari markaziy maydonida M massali qo'zg'almas jism ta'sirida harakat qilayotgan bo'lsin. Qo'zg'almas (tortuvchi) jismni bir jinsli shar deb qarab, ya'ni maydonning barcha kuchlari tortuvchi jismning markaziga yo'nalgan deb hisoblab, nuqta harakatining kanonik tenglamalarini tuzing. Qutb koordinatalarida nuqtaning trayektoriyasini $r=f(\varphi)$ ko'rinishda toping.

Javob: $\dot r=\frac{P_1}{m}$, $\dot\varphi=\frac{P_2}{mr^2}$, $\dot P_1=\frac{P_2^2}{r^3}+\gamma\frac{Mm}{r^2}$, $\dot P_2=0$.

13. Gamilton tenglamalarini toping, agar:

1. $H=\frac{1}{2m}(P_r^2+\frac{P_\varphi^2}{r^2\sin^2\varphi}+\sin\varphi)$.

Javob: $\dot r=P_2$; $\dot\varphi=\frac{P_\varphi^2}{r^2\sin^2\varphi}$; $\dot P_r=\frac{P_\varphi^2}{r^2\sin^2\varphi}$. $\dot P_\varphi=\frac{P_\varphi^2\cos\varphi}{r^2\sin^2\varphi}-\cos\varphi$.

2. $H=\sqrt{1+P^2}+r$. *Javob:* $\dot r=\frac{P}{\sqrt{1+P^2}}$, $\dot P=-1$.

3. $H=\frac{1}{2}\left(1-P^2\right)^2$. *Javob:* $\dot r=P-r^2$, $\dot P=2r(P-r^2)$.

14. Gamilton funksiyasini r,φ,z siklik koordinatalarda ifodalang.

Javob: $H=\frac{1}{2m}(P_r^2+\frac{1}{r^2}P_\varphi^2+P_z^2)+\Pi(r,\varphi,z)$.

15. Gamilton funksiyasini r,θ,φ sferik koordinatalarda toping.

Javob: $H=\frac{1}{2m}(P_r^2+\frac{1}{r^2}P_\theta^2+\frac{1}{r^2\sin\theta}P_\varphi^2)+\Pi(r,\theta,z)$.

16. Gorizontal reyka vertikal o'q atrofida aylanadi, reyka bo'ylab esa m massali yuk harakatlanadi. Yukka ta'sir qiluvchi kuch Π (r) potensialga ega, bunda r — yukdan aylanish o'qigacha bo'lgan masofa. Siste-

maning kinetik energiyasi

$$T = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + (r^2 + d^2)\dot{\varphi}^2\right]$$

ga teng. Sistema uchun Gamilton funksiyasini toping va sistema ha-raka-tining kanonik tenglamalarini tuzing.

Javob:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{P_r}{m}; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{P_\varphi}{m(r^2 + d^2)}; \quad \frac{dP_r}{dt} = \frac{rP_\varphi^2}{m(r^2 + d^2)^2} - \Pi'(r), \quad \frac{P_\varphi}{dt} = 0.$$

17. Gorizontal disk o'zining markazi orqali o'tuvchi vertikal o'q atrofida aylanadi. m massali sharcha gardish diametri bilan mos tu-shuvchi yarim slindrsimon ariqchada harakatlanadi. Sharchaga silin-drik ariqcha bo'ylab yo'nalgan va sharchadan aylanish o'qigacha bo'lgan r masofaga bog'liq bo'lgan kuch ta'sir qiladi. Sharchaga moddiy nuq-ta deb qarab, uning uchun Gamilton funksiyasini tuzing va har-akati-ning kanonik tenglamalarini toping.

Javob: $H = T - u = \frac{1}{2}\left(\frac{P_r^2}{m} + \frac{P_r^2}{I_{cz} + mr^2}\right) - u(r)$,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{P_r}{m}, \quad \frac{dP_r}{dt} = \frac{mrP_\varphi^2}{\left(I_{cz} + mr^2\right)^2} + \frac{\partial u(r)}{\partial z}; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{P_\varphi}{I_{cz} + mr^2}, \quad \frac{dP_\varphi}{dt} = 0.$$

7- §. Klassik mexanikaning variatsion-integral prinsiplari

I. Nazariy qism

Klassik mexanikaning variatsion prinsiplari deb, mexanik sistemaning kinematik mumkin bo‘lgan barcha harakatlari to‘plamidan berilgan kuch maydonida sodir bo‘ladigan haqiqiy harakatni ajratib olishga imkon beradigan va bunday harakatning xossalari haqidagi umumiy qonunlarga aytiladi.

Mexanikaning variatsion prinsiplari differensial va integral prinsiplarga bo‘linadi.

Differensial prinsiplar haqiqiy harakat kriteriysini oniy vaqtda, ya’ni qaralayotgan vaqt atrofida, integral prinsiplar esa chekli oraliqda o‘rnatadi.

Klassik mexanikaning eng muhim va eng umumiy differensial prinsiplaridan biri biz o‘rgangan mumkin bo‘lgan ko‘chishlar prinsipi hisoblanadi.

Klassik mexanikaning eng muhim integral prinsiplari biz o‘rganmoqchi bo‘layotgan, Gamilton—Ostrogradskiy prinsipi (eng kichik ta’sir prinsipi) va Mapertyun—Lagranjning statsionar ta’sir prinsipi hisoblanadi.

Mexanik sistemaning haqiqiy harakatini uning mumkin bo‘lgan barcha harakatlari to‘plamidan integral variatsion prinsip asosida tahlil qilib tanlab olish mumkin.

Konservativ sistema uchun Lagranj tenglamalarini qarab chiqamiz:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0,\ \ (k=1,2,...,s) \qquad (1)$$

bunda $L=T-\Pi$ Lagranj funksiyasi.

Harakatlanuvchi sistemaning ikkita holatini qaraymiz: sistema t_1 paytda (A) holatda, $t_2(t_2>t_1)$ paytda esa (B)

holatda bo‘lsin. Sistemaning $t_2 - t_1$ vaqt oralig‘ida (A) holatdan (B) holatga o‘tishdagi haqiqiy ko‘chishi (1) tenglamaning yechimi bo‘lgan

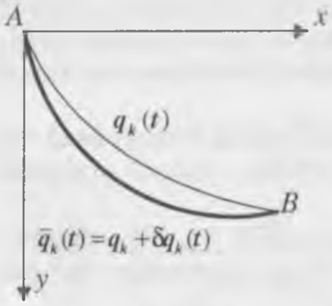
$$q_k = q_k(t) \quad (k = 1,2,....,s) \qquad (2)$$

funksiya bilan aniqlanadi.

Sistemaning (A) holatdan (B) holatga o‘tishdagi haqiqiy ko‘chishi bilan bir qatorda (2) ko‘chishdan cheksiz kichik miqdorga farq qiluvchi o‘sha $t_2 - t_1$ vaqt oralig‘ida sistemaning (A) holatdan (B) holatga o‘tishida sodir bo‘ladigan

$$\bar{q}_k = q_k(t) + \delta q_k(t), \quad (k = 1,2,....,s) \qquad (3)$$

tenglama bilan aniqlanadigan ko‘chishi ham qaraladi (45-rasm).



45- rasm.

Bundagi δq_k cheksiz kichik miqdorlar bo‘lib, $q_1, q_2, ..., q_s$ koordinatalarning variatsiyalaridir. (2)va (3) tenglamalar bilan aniqla-nuvchi ko‘chishlar bir vaqtda jismning (A) holatida bosh-lanadi va bir vaqtda jismning (B) holatida tugaydi. Bunday holatlar uchun

$$\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0 \qquad (4)$$

bo‘ladi.

Bog‘lanishlar bilan birgalikda topilgan bunday ko‘chishlar uchun

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt (L = T - \Pi) \qquad (4^I)$$

integral qaraladi.

S miqdor sistemaning harakati davomida T kinetik va Π potensial energiyalar orasidagi munosabatni xarakterlaydi. Bu integralning son qiymati sistema ko‘chishini aniqlovchi $q_k(t)$ funksiyalarga bog‘liq bo‘ladi. Bu integral $q_k(t)$ va $\dot{q}_k(t)$ funksiyalarga bog‘liq bo‘lgan funksionaldir.

S miqdor ishning vaqtga bo‘lgan ko‘paytmasidan iborat. Fizikada bunday miqdorni *«ta'sir»* deyiladi.

S funksional shunday maxsus ta’sirni ifodalaydiki, bunday ta’sirni Gamilton—Ostrogradskiy ta’siri ham deb ataladi. Haqiqiy ko‘chishda S miqdorning ta’sir qiymatini (3) ko‘chishlarning qiymatlari bilan taqqoslash maqsadida

$$S(\dot{q}_1+\delta\dot{q}_1,\quad \dot{q}_2+\delta\dot{q}_2,\ldots\ldots,\dot{q}_s+\delta\dot{q}_s,\quad q_1+\delta q_1,\ldots\ldots,q_s+\delta q_s,t)-$$
$$-S(\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_s,\quad q_1,\ldots,q_s,t)$$

ayirma qaraladi. Bu ayirmani δq_k va $\delta\dot{q}_k$ ning darajalari bo‘yicha qatorga yoyilsa, bu yoyilmada birinchi tartibli hadlar to‘plami S miqdorning birinchi variatsiyasidan iborat bo‘ladi:

$$\delta S=\sum_{k=1}^{s}\left[\frac{\partial S}{\partial\dot{q}_k}\delta\dot{q}_k+\frac{\partial S}{\partial q_k}\delta q_k\right]=\sum_{k=1}^{s}\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\delta\dot{q}_k+\frac{\partial L}{\partial q_k}\right]dt$$

Birinchi qo‘shiluvchini bo‘laklab integrallansa, quyidagi ifoda hosil bo‘ladi:

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\partial\dot{q}_k dt=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\partial q_k\Bigg|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\right)\delta q_k dt.$$

(4) shartlarga ko‘ra o‘ng tomondagi birinchi qo‘shiluvchi nolga teng, natijada δS variatsiya uchun

$$\delta S=\sum_{k=1}^{s}\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\right)\right]\delta q_k dt$$

ifoda kelib chiqadi.

Inegrallash yo‘lida (1) tenglik bajariladi. Demak, bu yo‘lda S ta’sirning variatsiyasi nolga teng:

$$\delta S=0. \tag{5}$$

Funksional birinchi variatsiyasining nolga aylanishi uning statsionar miqdor bo‘lishining zaruriy shartini ifodalaydi.

Shunday qilib, S ta’sir (haqiqiy ko‘chishni boshqa ko‘-chishlardagi qiymatlari bilan taqqoslaganda statsionar qiymatga ega bo‘ladigan) sistemani t_2-t_1 vaqt oralig‘ida boshlang‘ich $(t=t_1)$ va oxiri, $(t=t_2)$ holatlari bir xil bo‘lgan bir holatdan boshqa bir holatga o‘tkazsa, bunday holda S ta’sirning miqdori haqiqiy ko‘chishda boshqa ko‘chishlardagi qiymatlari bilan taqqoslaganda statsionar qiymatga ega bo‘ladi.

Bu xulosa Gamilton—Ostrogradskiy prinsipining mazmunini tashkil qiladi.

Bu prinsipni quydagicha ham izohlash mumkin: Lagranj tenglamalarini qanoatlantiruvchi, ya’ni berilgan kuchlar ta’siridagi sistemaning haqiqiy ko‘chishini ifodalovchi q_k va $\dot{q}_k$ funksiyalarning shunday qiymatlari mavjudki, shu paytda sistemani boshlang‘ich holatdan $(t = t_1)$ oxirgi holatga $(t = t_2)$ o‘tkazuvchi Gamilton ta’sirida uning shunday harakati topiladiki, bu harakatdagi q_k va $\dot{q}_k$ funksiyalarning qiymatlarini boshqa barcha mumkin bo‘lgan unga yaqin harakatlardagi qiymatlari bilan taqqoslaganda (4[1]) egri chiziqli integral ekstremal qiymat (maksimum yoki minimum) qabul qilishning zaruriy sharoitlarini ham qanoatlantiradi.

Gamilton—Ostrogradskiy prinsipini ma’lum vaqt oralig‘ida mexanik sistema harakatini o‘rganishga qo‘llanish egri chiziqli integralning ekstrimum qiymatlarini aniqlash masalalari bilan bog‘liqdir.

Gamilton—Ostrogradskiy prinsipidan foydalanib, Lagranjning ikkinchi tur va Gamiltonning kanonik tenglamalarini keltirib chiqarish mumkin.

Lagranjning ikkinchi tur tenglamalarini Gamilton—Ostrogradskiy prinsipidan foydalanib chiqaraylik. Bu prinsip bilan bir xil vaqt oralig‘ida sodir bo‘ladigan harakatlar taqqoslanadi, ya’ni

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A)dt = 0 \qquad (6)$$

egri chiziqli integralning ekstremal qiymatga erishish sharti o‘rnatiladi. (6)da $\delta A = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + ... + Q_s\delta q_s$ bo‘lgani uchun u quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + ... + Q_s\delta q_s)\,dt = 0 . \qquad (7)$$

Bunda T kinetik energiyaning δT variatsiyasi

$$\delta T = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j\right)$$

formula bo‘yicha topiladi. δT ning bu ifodasini (7) ga qo‘yilsa, quyidagi tenglama hosil bo‘ladi:

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j + Q_j\delta q_j\right)dt = 0.$$

$\delta \dot{q}_j$ qatnashgan hadni $\delta \dot{q}_j = \delta\dfrac{dq_j}{dt} = \dfrac{d\delta q_j}{dt}$ bo‘lishligini e’tiborga olib, bo‘laklab integrallanadi:

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j dt = \left[\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\cdot\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j dt .$$

Integrallash oralig‘ining chegaralarida $\delta q_j = 0$ bo‘lishligi e’tiborga olinsa, $\left[\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right]_{t_1}^{t_2} = 0$ bo‘ladi.

$\delta \dot{q}_j$ qatnashgan barcha hadlarda yuqoridagi singari almashtirishlarni bajarib, quyidagini olamiz:

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{s}\left[\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) + Q_j\right]\delta q_j dt = 0\cdot$$

Bu tenglik bajarilishi uchun, ya’ni integral ostidagi funksiya nolga teng bo‘lishligi uchun δq_j variatsiyaning barcha qiymatlarida bu variatsiyalar oldidagi koeffitsiyentlar nolga teng bo‘lishi zarur, ya’ni

$$\frac{\partial T}{\partial q_j}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)+Q_j=0\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j\quad(j=\overline{1,s}).$$

Olingan tenglamalar Lagranjning ikkinchi tur tenglamalari bo'lib, (6) integralning ekstremal qiymatga ega bo'lishi shartini ifodalaydi. Gamilton—Ostrogradskiyning statsionar ta'sir prinsipi integralning statsionar qiymat qabul qilish shartiga asoslanib o'rnatiladi:

$$\int_{t_1}^{t_2}(T-\Pi)dt.$$

Bunda T va Π sistemaning kinetik va potensial energiyasi.

Bu prinsipdan foydalanib, to'g'ri chiziqli sterjen tebranishlarining tenglamasi chiqariladi. Ox o'qi sterjen bo'ylab yo'naltiriladi. Sterjen muvozanat holatda turibdi deb hisoblanadi. Sterjenning muvozanat holatdan og'ishi x va t vaqtga bog'liq bo'lsin: $u=u(x;t)$. ℓ uzunlikdagi sterjenning kinetik energiyasi

$$T=\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\rho u_t'^2dx.$$

(ρ — sterjen materialining zichligi) formula bo'yicha topiladi. Sterjen cho'zilmaydi deb qaraladi. Egriligi o'zgarmas bo'lgan elastik sterjenning potensial energiyasi egriligining kvadratiga proporsional bo'ladi. Sterjen potensial energiyasining $d\Pi$ differensiali quyidagicha ko'rinishga ega:

$$d\Pi=\frac{1}{2}k\left[\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left(1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]^2.$$

Sterjenning barcha potensial energiyasi quyidagi ifodadan hisoblaniladi:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left[\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left(1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx.$$

Bu ifodada sterjenning muvozanat holatidan og‘ishini sezilarsiz deb hisoblanib, maxrajdagi $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ miqdor e’tiborga olinmadi.

Gamilton—Ostrogradskiy integralining

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^{\ell}\left[\frac{1}{2}\rho u_t'^2 - \frac{1}{2}ku_{xx}''^2\right]dxdt.$$

statsionar qiymat qabul qilish shartidan elastik sterjenning erkin tebranishlarini tavsiflovchi $\dfrac{\partial}{\partial t}(\rho u_t') + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(ku_{xx}'') = 0$ tenglama hosil bo‘ladi. Agar k doimiy, ya’ni sterjen bir jinsli bo‘lsa, sterjen tebranishlarining harakat tenglamasi quiydagicha ko‘rinish oladi:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

Agar sterjenga $F(t,x)$ tashqi kuch ta’sir qilsa, uning harakat tenglamasi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k}{\rho}\cdot\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(t,x)\quad\left(f(t,x) = \frac{1}{\rho}F(t,x)\right)$$

ko‘rinish oladi.

II. Savol va masalalar

1. Funksiyaning qanday o‘zgarishi uning differensiali va variatsiyasini ifodalaydi?

2. Differensiallash va variatsiyalash operatsiyalari o‘rin almashtirish qonuniga bo‘ysinadimi?

3. Aniq integralning to‘liq variatsiyasi nimaga teng?

4. S ta erkinlik darajaga ega bo‘lgan mexanik sistema kinetik energiyasining variatsiyasi qanday formula bilan hisoblanadi?

6. Gamilton va Lagranj bo‘yicha ta’sirlar orasidagi bog‘lanishni izohlab bering. Ularning ta’sir ifodalari qanday bo‘ladi?

7. Gamilton—Ostrogradskiy prinsipining mazmunini izohlab bering.

8. Lagranjning statsionar ta’sir prinsipining mohiyati nimadan iborat?

9. Lagranj va Gamilton—Ostrogradskiy prinsiplari bir-biridan qanday farq qiladi?

10. Gamilton—Ostrogradskiy prinsiplaridan foydalanib:

1) torning erkin tebranish tenglamasini keltirib chiqaring.

Javob: $\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

2) torning majburiy tebranish tenglamasini keltirib chiqaring.

Javob: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{k}{\rho}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x)$.

11. Quyidagi funksionallarning ekstremal qiymatlarini toping:

1. $\Phi(y(x)) = \int\limits_{x_0}^{x_1} \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx$,

Javob: $(x-a)^2 + y^2 = R^2$.

2. $\Phi(y(x)) = \int\limits_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2yy' - 16y^2)dx$.

Javob: $y = a\sin(4x - 6)$.

12. Quyidagi funksionallar uchun Gamilton—Ostrogradskiy tenglamalarini yozing:

1) $\Phi(z(y,x)) = \iint\limits_D \left[\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$,

Javob: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

2) $\Phi(u(y,x,z))=\iiint\limits_D\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2u(x,y,z)\right]dxdydz\,.$

Javob: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z)\,.$

3) $\Phi(u(y,x))=\iint\limits_D\left[\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdy\,.$

Javob: $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0\,.$

8- §. Mexanik sistemaning kichik chiziqli tebranishlari

I. Nazariy qism

Agar mexanik sistemaning fazodagi holatini to‘liq va bir qiymatli aniqlaydigan parametrlar soni bitta bo‘lsa, u holda bunday sistemaning erkinlik darajasi bitta bo‘lgan sistema deb ataladi. Boshqacha aytganda, bunday sistemaning holati bitta yagona q umumlashgan koordinata bilan to‘liq hamda bir qiymatli aniqlanadi hamda uning harakati bitta

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial T}{\partial q}=Q\,. \qquad (1)$$

Lagranj tenglamasi bilan tavsiflanadi.

Aniq masalalarni yechayotganda (1) tenglamani integrallash masalasi ko‘p jihatdan Q umumlashgan kuchning tabiatiga, (1) tenglamani tuzish esa kinetik va potensial (potensialli kuch maydonida) energiyalarning qanday ifodalanishiga bog‘liq bo‘ladi.

Q umumlashgan kuchning strukturasi quyidagicha bo‘lgan hollarni qaraymiz:

$$Q=Q^{\Pi}+Q^{Q}+Q^{T}\,. \qquad (2)$$

Bunda Q^{Π} — potensialli kuchlarning umumlashgan kuchi (ko‘pincha muvozanat holatga qaytaruvchi kuch yoki konservativ kuch nomi bilan yuritiladi). Bu kuch potensialli kuch maydonida potensial energiya orqali ifodalanadi:

$$Q^{\Pi}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q}\,.$$

Bunda Q^{k} — qarshilik kuchlarining umumlashgan kuchi (biz chiziqli qarshilik kuchini, ya’ni sistema nuqtalarining qarshilik kuchi nuqtalar tezliklarining birinchi darajasiga proporsional bo'lib, yo'nalishlari tezliklarning yo'nalishlariga qarama-qarshi bo'lgan holni qaraymiz).

Q^T — sistemaning majburiy tebranishlarini vujudga keltiruvchi, t vaqtga bog'liqli (biz vaqtda sinusoidal qonun bo'yicha o'zgaruvchi kuchni qaraymiz) tashqi kuchlarning umumlashgan kuchlari. (1) Lagranj tenglamasidan sistema tebranishlarining chiziqli tenglamalarini olish uchun sistemaning kinetik va potensial energiyalarining ifodalari muvozanat holat atrofida, ya'ni $q = 0$ ($\dot{q} = 0$) nuqta atrofida darajali qatorlarga yoyilib, kanonik ifodalar topiladi.

Mexanik sistema n ta nuqtadan iborat bo'lib, bog'lanish tenglamalari

$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q) = x_i(q)\bar{i} + y_i(q)\bar{j} + z_k(q)\bar{k}$ ko'rinishga ega bo'lsin. Sistemaning kinetik energiyasi hisoblaniladi:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \vartheta_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i^1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

bunda $\dot{r}_i = \dfrac{\partial r_i}{\partial q}\cdot \dot{q};\ \dot{x}_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial q}\cdot \dot{q};\ \dot{y}_i = \dfrac{\partial y_i}{\partial q}\cdot \dot{q};\ \dot{z}_i = \dfrac{\partial z_i}{\partial q}\cdot \dot{q}.$

Bunday holda sistemaning kinetik energiyasi uchun quyidagi ifoda topiladi:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial r_i}{\partial q}\right)^2 \dot{q}^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1} m_i \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_i}{\partial q}\right)^2\right] q^2 = \frac{1}{2}A(q)\dot{q}^2. \quad (3)$$

Bunda $A(q) = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\dfrac{\partial r_i}{\partial q}\right)^2$ umumlashgan koordinatalarning musbat funksiyasi.

$A(q)$ funksiyani $q = 0$ nuqta atrofida darajali qatorga quyidagicha yoyiladi:

$$A(q) = A(o) + A^{1}(o)q + \frac{1}{2}A^{11}(o)q^2 + \ldots \qquad (4).$$

(4)ni (3)ga qo‘yilsa, tubandagi ifoda hosil bo‘ladi:

$$T = \frac{1}{2}A(o)\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\left[A^{1}(o)q + \frac{A^{11}(o)}{2}q^2 + \ldots\right]\dot{q}^2. \qquad (5)$$

(5) dagi q va $\dot{q}$ ni kichik miqdorlar deb qarab, uchinchi va undan yuqori tartibli darajalari qatnashgan hadlarni $q \cdot \dot{q}^2$, $q \cdot \dot{q}^2$ va hokazo miqdorlar qatnashgan hadlarni tashlab yuborib, T kinetik energiya uchun $A(0) = a$ belgilashni kiritilsa,

$$T = \frac{1}{2}A(o)\dot{q}^2 = \frac{1}{2}a\dot{q}^2 \qquad (6)$$

kanonik ifoda hosil bo‘ladi.

Statsionar bog‘lanishlarda sistemaning potensial energiyasi q umumlashgan koordinataning funksiyasi bo‘ladi: $\Pi = \Pi(q)$. Bu funksiyani ham muvozanat holat atrofida, ya’ni $q = 0$ nuqta atrofida darajali qatorga yoyamiz:

$$\Pi(q) = \Pi(o) + \Pi^{1}(o)q + \frac{1}{2}\Pi^{11}(o)q^2 + \ldots \qquad (7)$$

$q = 0$ muvozanat holatda potensial energiyani $\Pi = (o) = o$ deb hisoblansa, $\Pi^{1}(o)$ miqdor esa sistemaning muvozanat holatida Q umumlashgan kuchning qiymatiga teng bo‘ladi. Lagranj—Dirixle teoremasiga ko‘ra $\Pi^{1}(o) = o$ bo‘ladi (ekstremumning zaruriy shartiga ko‘ra). $\Pi^{11}(o) = c$ belgilashni kiritib, $q^3, q^4 \ldots$. miqdorlari qatnashgan hadlarni tashlab yuborib, potensial energiya uchun

$$\Pi(q) = \frac{1}{2}cq^2 \qquad (8)$$

kanonik ifoda kelib chiqadi. (6) va (8) formulalarga ko‘ra

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\dot{q}; \quad \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = a\ddot{q}; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q} = cq \quad \left(Q = -\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right).$$

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k \dot{r}_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k \upsilon_k^2}{2} \tag{12}$$

Bundagi Φ ga *dissipativ* yoki *Reley funksiyasi* deyiladi. Bu funksiyaning strukturasi sistemaning kinetik energiyasi ifodasiga o'xshash, uning ifodasida massa o'rnida qarshilik koeffitsiyenti keladi. Q^k umumlashgan qarshilik kuchi Φ funksiyadan $\dot{q}$ umumlashgan tezlik bo'yicha olingan hosilaning «–» ishora bilan olingan qiymatiga teng $Q^{(k)} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}$.

Φ ni q va $\dot{q}$ orqali ifodalaymiz:

$$r_k = r_k(q), \quad \dot{r}_k = \frac{\partial r_k}{\partial q} \dot{q}$$

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k \dot{r}_k^2}{2} = \frac{\dot{q}^2}{2} \sum_{k=1}^{n} \mu_k \left(\frac{\partial r_k}{\partial q} \right)^2 = \frac{1}{2} \mathrm{B}(q) \dot{q}^2 . \tag{12'}$$

Bunda $B(q) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \left(\frac{\partial r_k}{\partial q} \right)^2$ belgilash kiritildi.

B funksiya faqat q ga bog'liq bo'lib, $\dot{q}$ ga bog'liq emas, chunki $\frac{\partial r_k}{\partial q}$ miqdor q ga bog'liq emas, Φ funksiya uchun kanonik ifoda topish maqsadida $B(q)$ funksiyani $q = 0$ nuqta atrofida q ning darajalari bo'yicha qatorga yoyiladi:

$$B(q) = B(0) + B'(0) + B''(0) \cdot \frac{q^2}{2} + \ldots.$$

Bu yoyilmaning 1- hadi bilan chegaralanib va $\mu = B(0)$ belgilash kiritilsa, Φ funksiya uchun kanonik ifoda quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\Phi = \frac{1}{2} B(0) \dot{q}^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{q}^2 . \tag{13}$$

Agar $\frac{\partial T}{\partial q} = 0,\ \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot q} = a\ddot q;\ Q^{\Pi} = -\frac{\partial T}{\partial q} = -cq;$

$Q^k = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot q} = -\mu\dot q$ bo'lishligi e'tiborga olinsa, qaralayotgan holda, ya'ni qarshilik ko'rsatuvchi muhitda sistema harakatining (10) tenglamasi

$$\ddot q + 2n\dot q + k^2 q = 0 \qquad (14)$$

ko'rinishni oladi. Bunda $k^2 = \frac{c}{a};\ 2n = \frac{\mu}{a};\ k = \sqrt{\frac{c}{a}}.$

k doimiy son bo'lib, sistema tebranishlarining qarshilik e'tiborga olinmagandagi doiraviy chastotasi.

$n = \frac{\mu}{2a}$ — miqdor esa so'nish koeffitsiyenti deb ataladi. (14) tenglama ham oldin o'rganilgan moddiy nuqta so'nuvchi tebranishlarini tavsiflovchi $\ddot x + 2r\dot x + \omega^2 x = 0$ tenglamaga o'xshash. Shunday ekan (14) tenglamani integrallash va tahlil qilish masalasi yechilgan ekan.

Endi bitta erkinlik darajali sistemaga potensialli kuch va $Q^T = H\sin(Pt + \delta)$ garmonik qo'zg'atuvchi kuch ta'sir qilayotgan bo'lib, muhitning qarshilik kuchini e'tiborga olmaganda, kinetik va potensial energiya uchun (6) va (8) formulalar kuchida sistemaning harakati

$$\ddot q + k^2 q = h\sin(Pt + \delta). \qquad (15)$$

$$k^2 = \frac{c}{a};\ h = \frac{H}{a}$$

ko'rinishdagi tenglama bilan, qarshilik kuchini e'tiborga olganda esa

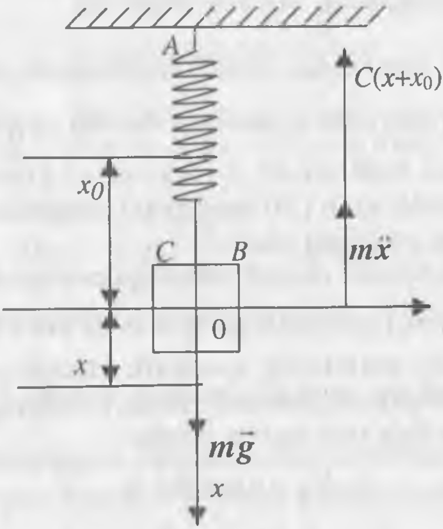
$$\ddot q + 2h\dot q + k^2 q = h\sin(Pt + \delta) \qquad (16)$$

tenglama bilan tavsiflanadi.

(15) va (16) ko'rinishdagi tenglamalar ham oldin o'rganilgan va tahlil qilingan.

27- masala. *AB* prujinaning bir uchi *A* nuqtaga shunday mahkamlanganki, uning ikkinchi *B* uchiga 20 *g* statik kuch qo‘yilganda u 1 *sm* ga cho‘zilsin. Prujina deformatsiyalanmagan paytda uning pastdagi *B* uchiga og‘irligi 100 *g* bo‘lgan *C* toshni osib, u boshlang‘ich tezliksiz qo‘yib yuborilgan. Prujinaning keyingi harakati tenglamasini toping va amplituda hamda tebranish davrini ko‘rsating. Toshning harakatini uning statik muvozanat holatidan vertikal pastga yo‘nalgan o‘qqa nisbatan oling.

Yechish. Tosh harakatining differensial tenglamasini tuzamiz (46- rasm).

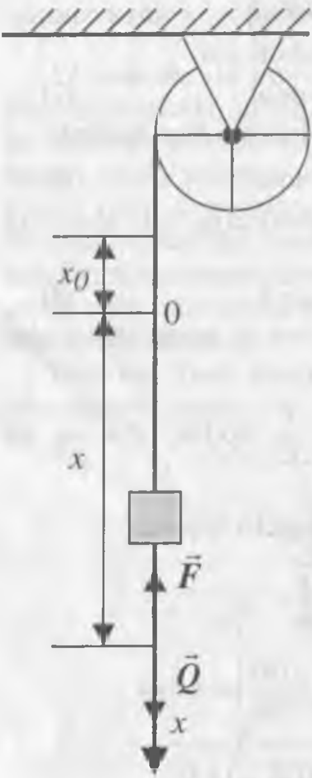


46- rasm.

$$m\ddot{x} + c(x + x_0) - mg = 0\,.$$

Muvozanat holatda $cx_0 = mg$ bo‘ladi. Bunday holda toshning harakat tenglamasi

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0\,, \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \qquad (1)$$



47- rasm.

Yechish. Masala mazmunidan $x|_{t=0} = 0, \quad \vartheta|_{t=0} = \vartheta_0 = 5\frac{m}{s}$ bo‘lishligi kelib chiqadi. $Q = 2\ m$, $c = 4\frac{m}{sm}$.

Yuk harakatining differensial tenglamasi quyidagicha tuziladi (47-rasm):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = Q - C(x_{cm} + x).$$

Muvozanat vaqtida $Q = cx_{cm}$ bo‘ladi.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{cg}{Q}x = 0, \quad \omega^2 = \frac{cg}{Q}$$

harakat tenglamasi kelib chiqadi.

Bu tenglamaning yechimi

$$x = a\sin(\omega t + \varphi)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. $x|_{t=0} = 0$ shartda va $\omega = \sqrt{\frac{cq}{Q}}$ bo‘lishini e’tiborga olinsa, quyidagi tenglama hosil bo‘ladi:

$$a = \sqrt{x_\circ^2 + \frac{\vartheta_\circ^2}{\omega^2}} = \frac{\vartheta_\circ}{\omega} = \vartheta_\circ\sqrt{\frac{Q}{cg}}, \quad \varphi = arc\,\mathrm{tg}\frac{\omega x_\circ}{\vartheta_\circ} = arc\,\mathrm{tg}\,0 = 0.$$

Yukning harakat tenglamasi $x = \vartheta_0\sqrt{\frac{Q}{cg}}\sin\sqrt{\frac{Q}{cg}}t$ ko‘rinishni oladi. Agar $\sin\sqrt{\frac{Q}{cg}}t = 1$ bo‘lsa, $x = x_{\max} = \vartheta_0\sqrt{\frac{Q}{cg}}$ bo‘ladi. Sim arqonning eng katta zo‘riqishi

$$F_{max} = Q + cx_{max} = Q + \vartheta_0\sqrt{\frac{cQ}{g}}$$

formula bo'yicha topiladi.

$$F_{max} = 2m + 5m/s\sqrt{\frac{400\frac{m}{u}\cdot 2m}{9,8\frac{m}{s^2}}}m = 2m + 5\sqrt{81,4} =$$

$$= 2m + 5\cdot 9,02m = 2m + 45,1m = 47,1m.$$

29- masala. Bir uchiga 100 g og'irlikdagi yuk osilgan prujina suyuqlikda harakatlanmoqda. Prujinaning qattiqlik koeffitsiyenti $c = 20g/sm$ ga teng. Suyuqlikning yukka ko'rsatadigan qarshilik kuchi tezlikning birinchi darajasiga proporsional: $R = \alpha\vartheta$, bunda $\alpha = 3,5g.s/sm$.

Agar boshlang'ich paytda yuk statik muvozanat holatdan $x_0 = 1$ sm ga siljigan va unga siljish yo'nalishiga qarshi yo'nalishda 50 sm/s boshlang'ich tezlik berilgan bo'lsa, yuk harakatining tenglamasini toping va ko'chishning vaqtga bog'lanishli grafigini chizing.

Yechish. Sanoq boshi qilib yuk statik muvozanat holati qabul qilinadi. Ax o'qi prujina bo'ylab vertikal pastga yo'naltiriladi. Yuk harakatining boshlang'ich shartlari quyidagicha yoziladi.

$$x|_{t=0} = x_0 = 1\ sm,\ \dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0 = -50\frac{sm}{s}.$$

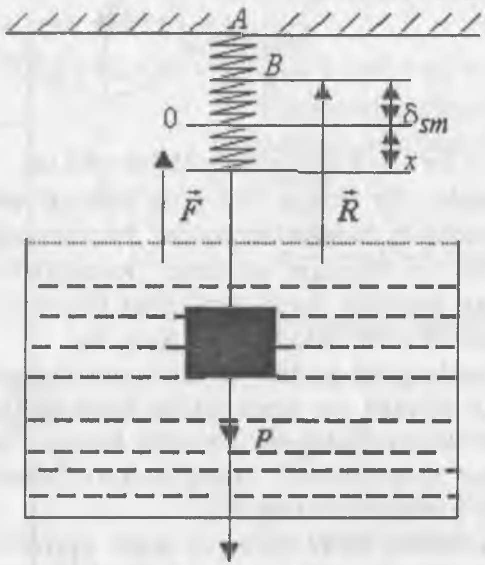
$\dot{x}_0$ ning ishorasi manfiy, chunki uning yo'nalishi yuk ko'chish yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalgan.

Yuk uning absissasi musbat bo'lgan holda tasvirlanadi. Prujina qo'yilgan kuchlar ta'sirida $\Delta = \Delta_{sm} + x$ ga ko'chadi.

Prujinaning elastik kuchi Ax o'qi bo'ylab vertikal ravishda yuqoriga yo'nalgan bo'ladi. Uning Ax o'qdagi proyeksiyasini topamiz.

$$F_x = -c(\Delta_{sm} + x). \quad (1)$$

Yuk x abssissasining o'sishi tomoniga harakat qilsin desak, R qarshilik kuchi tezlikka qarama-qarshi tomonga, ya'ni vertikal yuqoriga yo'nalgan bo'ladi. F va R kuchlardan boshqa yukka uning P og'irlik kuchi ham ta'sir qiladi. Yuk harakatining differensial tenglamasi tuziladi (48-rasm):



48- rasm.

$$m\ddot{x} = P + F_x + R_x .$$

Bu formulaga $R_x = -\alpha\vartheta_x = -\alpha\dot{x}$ ni va F_x ning (1) ifodasi qo'yiladi:

$$\frac{P}{g}\ddot{x} = P - c\Delta_{sm} - cx - \alpha\vartheta_x . \qquad (2)$$

Muvozanat holatda

$$P - c\Delta_{sm} - = 0 \qquad (3)$$

tenglik bajariladi.

Haqiqatan statik muvozanat holatda yukka uning P og'irlik kuchi, bu kuch vertikal pastga yo'nalgan, prujinaning $F_x = c\Delta_{sm}$ statik elastik kuchi, bu kuch vertikal yuqoriga yo'nalgan kuchlar ta'sir qiladi. Yuk muvozanat holatda bo'lganda $P - F_{sm} = 0$ bo'ladi, ya'ni (3) formula o'rinli. (2)

differensial tenglama o'ng qismidagi birinchi ikkita qo'shiluvchining yig'indisi (3) ga ko'ra nolga teng. ϑ_x ni x ga almashtirib, yuk harakatining differensial tenglamasi kelib chiqadi:

$$P\ddot{x} + cgx + \alpha g\dot{x} = 0,$$
$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0, \qquad (4)$$

bunda $k = \sqrt{\dfrac{cg}{P}}$, $n = \dfrac{\alpha g}{2P}$.

Ifodadagi kattaliklar o'rniga sonli qiymatlarini qo'yib, k va n hisoblab topiladi:

$$k = \sqrt{\frac{20\frac{g}{sm}980\frac{sm}{s^2}}{100g}} = \sqrt{196} = 14s^{-1};$$

$$n = \frac{3,5\frac{g\cdot s}{sm}\cdot 980\frac{sm}{s^2}}{2\cdot 100g}\frac{0,7\cdot 980}{40}s^{-1} = 17,1675s^{-1}.$$

Bundan ravshanki, $k < n$ (katta qarshilik bo'lgan hol). (4) tenglamaning yechimini $x = e^{\lambda t}$ ko'rinishda izlab, λ noma'lum songa nisbatan, unga mos keluvchi xarakteristik tenglama hosil bo'ladi:

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0 .$$

Bu tenglamani yechib, quyidagilar topiladi:

$$\lambda_1 = -n - \sqrt{n^2 - k^2},\ \lambda_2 = -n + \sqrt{n^2 - k^2}. \qquad (5)$$

$n > k$ bo'lgani uchun λ_1 va λ_2 ildizlar haqiqiy bo'ladi. Yukning harakat tenglamalari quyidagicha bo'ladi:

$$x(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}, \qquad (6)$$

$$\dot{x}(t) = c_1\lambda_1e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2e^{\lambda_2 t} . \qquad (7)$$

Agar (6) tenglamada $t = 0$, $x = x_0$, (7) tenglamada $t = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$ bo'lishligi e'tiborga olinsa, c_1 va c_2 doimiy sonlarni topishga imkon beradigan tenglamalar sistemasi kelib chiqadi:

$$c_1 + c_2 = x_0\,,\quad \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = \dot{x}_0\,.$$

Bu sistemadan c_1 va c_2 topiladi:

$$c_1 = \frac{-\lambda_2 x_0 + \dot{x}_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\,,\quad c_2 = \frac{\lambda_1 x_0 - \dot{x}_0}{\lambda_1 - \lambda_2}\,.$$

(6)dagi c_1 va $c_2$ni ularning topilgan ifodalariga almashtirib, quyidagi ifoda olinadi:

$$x(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\cdot\left[(\lambda_1 x_0 - \dot{x}_0)e^{\lambda_2 t} - (\lambda_2 x_0 - \dot{x}_0)e^{\lambda_1 t}\right]. \quad (8)$$

(8)ga (5)ni qo'yilsa, quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

$$x(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}e^{-nt}\left[(\lambda_1 x_0 - \dot{x}_0)e^{\sqrt{n^2-k^2}\,t} - \right.$$

$$\left. -(\lambda_2 x_0 - \dot{x}_0)e^{-\sqrt{n^2-k^2}\,t}\right]. \quad (9).$$

$$n = 17{,}15s^{-1},\ k = 14s^{-1},\ x_0 = 1sm,\ \dot{x}_0 = -50sm/s$$

bo'lgandagi hisoblashlar bajariladi:

1) $\sqrt{n^2 - k^2} = \sqrt{17{,}15^2 - 14^2} = \sqrt{294{,}12 - 196} =$
$= \sqrt{98{,}12} = 9{,}95;$

2) $\lambda_2 = -m + \sqrt{n^2 - k^2} = -17{,}15 + 9{,}95 = -7{,}2;$

3) $\lambda_1 = -n - \sqrt{n^2 - k^2} = -17{,}15 - 9{,}95 = -27{,}1;$

4) $\lambda_1 x - \dot{x}_0 = -27{,}1\cdot 1 + 50 = 22{,}9;$

5) $\lambda_1 x - \dot{x}_0 = -7{,}2\cdot 1 + 50 = 42{,}8;$

6) $\lambda_1 - \lambda_2 = -27{,}1 + 7{,}2 = -19{,}9;$

7) $\dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 x - \dot{x}_0) = \dfrac{22{,}9}{-19{,}9} = -1{,}15;$

8) $\dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_2 x - \dot{x}_0) = \dfrac{42{,}8}{19{,}9} = -2{,}15.$

Topilgan son qiymatlarni (9) ga qo‘yilsa, yukning izlanayotgan harakat tenglamasi hosil bo‘ladi:

$$x(t) = e^{17,15t}\left(-1,15e^{9,95t} + 2,15e^{-9,95t}\right) sm. \qquad (10)$$

Endi yukning statik muvozanat holatdan o‘tish yoki o‘tmasligini aniqlaymiz. Buning uchun x ning (10) ifodasini nolga tenglashtirib, olingan tenglamani t vaqtga nisbatan yechiladi:

$$e^{-17,15t}\left(-1,15e^{9,95t} + 2,15\cdot e^{-9,95t}\right) = 0.$$

Bunda $e^{-17,15t} \neq 0$. Yukning statik muvozanat holatdan o‘tish payti

$$-1,15e^{9,95t} + 2,15e^{-9,95t} = 0$$

tenglamadan aniqlanadi. Bu vaqt quyidagicha topiladi:

$$2,15e^{-9,95t} = 1,1e^{9,95t} \Rightarrow \frac{43}{23} = e^{19,9t} \Rightarrow e^{19,9t} = 1,87 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 19,9t = \ln 1,87 \Rightarrow t_1 \frac{\ln 1,87}{19,9} = \frac{\ln 1,87\cdot\ln 10}{19,9} = \frac{0,2718\cdot 2,3}{19,9} =$$

$$= \frac{0,6251}{19,9} \approx 0,03s.$$

Demak, yuk $t_1 = 0,003s$ paytda statik muvozanat holatdan o‘tadi. $t \Rightarrow \infty$ da $e^{-17,15t} \Rightarrow 0$. t vaqtning $t = \infty$ qiymati harakatning so‘nishiga mos keladi. Ox o‘qi funksiya grafigi uchun gorizontal asimptota bo‘ladi.

(10) funksiyaning ekstremum nuqtasini topamiz. Buning uchun (10) funksiyaning hosilasini topib, uni nolga tenglashtirib, olingan tenglamani t ga nisbatan yechiladi:

$$x(t) = -17,15e^{17,15t}\left(-1,15e^{9,95t} + 2,15e^{-9,95t}\right) +$$

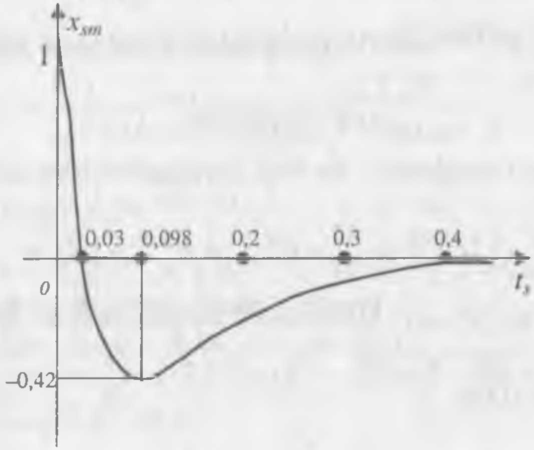
$$+\left(-1,15\cdot 9,95e^{9,95t} - 2,15\cdot 9,95e^{-9,95t}\right) = 0.$$

$$(17,15\cdot 1,15 - 1,15\cdot 9,95)e^{9,95t} - (15,15\cdot 2,15 + 9,95\cdot 2,15)e^{-9,95t} = 0,$$

$$e^{19,9t} = \frac{0,43 \cdot 27,1}{0,23 \cdot 7,2} \Rightarrow e^{19,9t} = 7,04 \Rightarrow 19,9t = \ln 7,04 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{1,94948}{19,9} = 0,098 \approx 0,1s.$$

(10) funksiya $(0;0,1)$oraliqda kamayadi, $(0,1;\infty)$ oraliqda o'sadi. Bu funksiya $t = 0,1$ nuqtada minimumga ega $x_{\min} = -0,42$ (49- rasm).



49- rasm.

30- masala. Bir uchiga 100 *g* og'irlikdagi yuk osilgan prujina suyuqlikda harakatlanmoqda. Prujinaning qattiqlik koeffitsiyenti $c = 20$ *g/sm* ga teng. Suyuqlikning yukka ko'rsatadigan qarshilik kuchi tezlikning birinchi darajasiga proporsional: $R = \alpha\vartheta$, bunda $\alpha = 3,5\frac{g.s}{sm}$.

Agar boshlang'ich paytda yuk statik muvozanat holatdan $x_0 = 5sm$ ga siljigan va unga siljish yo'nalishida $10sm/s$ boshlang'ich tezlik berilgan bo'lsa, yuk harakatining tenglamasini toping va ko'chishning vaqtga bog'lanishli grafigini chizing.

Yechish. Bu masalaning mazmuni oldingi masalaning mazmuni singari, lekin yukka berilgan boshlang'ich tezlik oldingi masalada ko'chish yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalgan bo'lsa, bu masalada esa yukka berilgan boshlang'ich tezlik ko'chish yo'nalishi bilan mos tushadi. Bu masala uchun boshlang'ich shartlar quyidagicha bo'ladi:

$$x\big|_{t=0} = x_0 = 5sm, \quad \dot{x}\big|_{t=0} = \dot{x}_0 = 10\frac{sm}{s}.$$

Yuk harakatining tenglamasini topish uchun oldingi masalada chiqarilgan (9) Koshi shaklidagi yuk harakatining umumiy tenglamasidan foydalaniladi:

$$x(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-nt}\left[(\lambda_1 x_0 - \dot{x}_0)e^{\sqrt{n^2 k^2}t} - (\lambda_2 x_0 - \dot{x}_0)e^{\sqrt{n^2 k^2}t}\right] \qquad (1)$$

bunda $n = 17{,}15s^{-1}$, $k = 14s^{-1}$, $x_0 = 5sm$, $\dot{x}_0 = 10sm/s$

1) $\sqrt{n^2 - k^2} = \sqrt{98{,}12} = 9{,}95$;

2) $\lambda_1 = -27{,}1$; 3) $\lambda_2 = -7{,}2$;

4) $\lambda_1 x - x_0 = -27{,}1 \cdot 1 - 10 = -135{,}5 - 10 = 145{,}5$;

5) $\lambda_2 x - x_0 = -7{,}2 \cdot 5 - 10 = -36 - 10 = 46$;

6) $\lambda_1 - \lambda_2 = -27{,}1 + 7{,}2 = -19{,}9$;

7) $\dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 x - \dot{x}_0) = \dfrac{-145{,}5}{-19{,}9} = 7{,}30$;

8) $\dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_2 x - \dot{x}_0) = \dfrac{-46}{-19{,}9} = 2{,}30$.

Topilgan son qiymatlarni (1)ga qo'yilsa, yukning harakat tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$x(t) = -e^{-17{,}15t}\left(7{,}30e^{9{,}95t} - 2{,}30e^{-9{,}95t}\right)sm. \qquad (2)$$

Yukning statik muvozanat holatdan o'tish vaqtini aniqlaymiz. Buning uchun $7{,}30 \cdot e^{9{,}95t} - 2{,}30e^{-9{,}95t} = 0$ tenglamani t ga nisbatan yechiladi:

$$e^{19,9t}=\frac{23}{72}\Rightarrow e^{19,9t}=0,32\Rightarrow t\Rightarrow\frac{\ln 0,32}{19,9}=\frac{\lg 0,32\cdot\ln 10}{19,9}=$$

$$=\frac{1,5251\cdot 2,3}{19,9}=\frac{-1,15}{19,9}=-0,05.$$

Yuk statik muvozanat holatdan o'tmaydi. Chunki $t=-0,05<0$.

Endi (2) funksiyaning ekstremum nuqtasi topiladi. Buning uchun (2) funksiyaning t vaqt bo'yicha hosilasini topib, uni nolga tenglashtirib, olingan tenglamani t ga nisbatan yechiladi:

$$e^{-17,15t}\left(-7,30\pm\cdot 7,2\cdot e^{9,95t}+2,30\cdot 27,1\cdot e^{-9,95t}\right)=0$$

Bunda $e^{-17,15t}\neq 0$. Demak,

$$-7,30\cdot 7,2\cdot e^{9,95t}+2,30\cdot 27,1\cdot e^{-9,95t}=0,$$

$$-7,30\cdot 7,2e^{9,95t}+2,30\cdot 27,1\cdot e^{-9,95t}=0,$$

$$-7,30\cdot 7,2e^{19,9t}=-2,30\cdot 27,1.$$

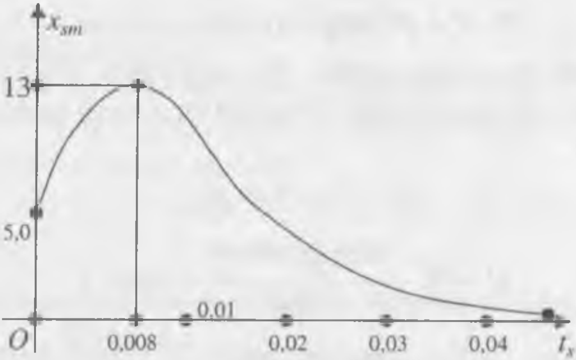
$$e^{19,9t}=\frac{23\cdot 271}{72\cdot 73}\Rightarrow e^{19,9t}=\frac{6233}{5256}\Rightarrow e^{19,9t}=1,185\Rightarrow 19,9t=$$

$$=\ln 1,185\Rightarrow t=\frac{\ln 1,185}{19,9}=\frac{\ln 1,185\cdot\ln 10}{19,9}=$$

$$=\frac{0,0737\cdot 2,3}{19,9}\frac{0,16951}{19,9}\approx 0,008.$$

(2) funksiya (0;0,008) oraliqda o'sadi, (0,008;∞) oraliqda kamayib Ot o'qqa asimptotik yaqinlashib boradi. Ot o'q (2) funksiya grafigining gorizontal asimptotasi bo'ladi. (2) funksiya $t=0,008$ nuqtada maksimum qiymatga erishadi. $x_{max}=13sm$. Tekshirish natijalarini e'tiborga olib, (2) funksiyaning grafigi chiziladi (50- rasm).

31- masala. Og'irligi 200 *g* bo'lgan yuk qattiqlik koeffitsiyenti $c=1\,{}^{kg}\!/_{sm}$ bo'lgan prujinaga osilgan va $S=H\sin pt$ kuch ta'sirida turibdi.



50- rasm.

Bunda $H = 2kg$, $P = 70s^{-1}$. Boshlang'ich paytda $x_0 = 2sm$, $\dot{x}_0 = 10\ sm/s$. Koordinata boshi sifatida yukning statik muvozanat holatini tanlab, yuk harakatining tenglamasini toping.

Yechish. *Ox* o'qini vertikal pastga yo'naltirib, koordinata boshi sifatida yukning 0 muvozanat holatini tanlaymiz.

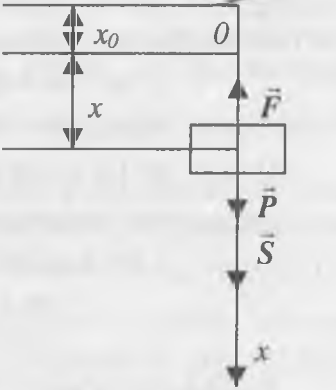
$\bar{S}$ qo'zg'atuvchi kuch *Ox* o'qning musbat yo'nalishi bo'yicha yo'nalgan bo'lsin.

Yukka *P* og'irlik kuchi, $\bar{F}$ prujinaning elastiklik kuchi va $\bar{S}$ qo'zg'atuvchi kuch ta'sir qiladi (51- rasm).

Yuk harakatining differensial tenglamasi tuziladi:

$$m\ddot{x} = \sum_k F_{kx};$$

$$\sum_k F_{kx}; = P - F + S.$$



51- rasm.

$$P - F = P - c(x_0 + x) = (p - cx_0) - cx.$$

Statik muvozanat holatda $P = cx_0$ bo‘ladi. $P - F = -cx$. Natijada yuk harakatining differensial tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin pt. \qquad (1)$$

bunda $$k^2 = \frac{cg}{P} = \frac{1000\frac{G}{sm}\cdot 980\frac{sm}{s^2}}{200G} = 4960 s^{-2};$$

$$h = \frac{gH}{P} = \frac{980\cdot\frac{sm}{s^2}\cdot 200G}{200G} = 980\, m/s^2.$$

Bu qiymatlarni (1)ga qo‘yilsa, quyidagi tenglama kelib chiqadi:

$$\ddot{x} + 4900x = 9800\sin pt. \qquad (2)$$

Qo‘zg‘atuvchi kuchning $P = 70s^{-1}$ chastotasi yuk tebranishlarining $k = 70s^{-1}$ chastotasi bilan ustma-ust tushadi. Demak, sistemada rezonans hol yuz beradi.

Yuk tebranishlari

$$x_1 = c_1\cos 70t + c_2\sin 70t$$

tenglama bilan aniqlanadi. Yukning majburiy tebranishlarini

$$x_2 = At\cos 70t \qquad (3)$$

ko‘rinishda izlaymiz. x_2 ning t vaqt bo‘yicha hosilalari topiladi:

$$\dot{x}_2 = tA\cos 70t - 70At\sin 70t,$$

$$\ddot{x}_2 = -70A\sin 70t - 70A\sin 70t - 4900t\cos 70t. \qquad (4)$$

(3) va (4)ni (2) ga qo‘yib, A aniqlaniladi:

$$-140A\sin 70t - 4900t70t + 4900t70t = 9800\sin 70t,$$
$$-140A\sin 70t = 9800\sin 70t,$$
$$-140A = 9800,$$
$$A = -70.$$

Natijada qo‘zg‘atuvchi kuch ta’sirida hosil bo‘ladigan tebranishlarni

$$x_2 = -70t\cos 70t$$
ko‘rinishda topamiz.

Yukning umumiy harakat tenglamasi tuziladi:

$$x = x_1 + x_2 = c_1\cos 70t + c_2\sin 70t - 70t\cos 70t\,. \quad (5)$$

Yukning tezligi topiladi:

$$\vartheta = \dot{x} = -70c_1\cos 70t + 70c_2\sin 70t - 70\cos 70t +$$
$$+4900t\sin 70t\,. \quad (6)$$

$x|_{t=0} = x_0 = 2sm$ boshlang‘ich shart va (5) tenglamadan C_1 aniqlaniladi: $C_1 = 2sm$; $\dot{x}|_{t=0} = \dot{x}_0 = 10m/sm$ boshlang‘ich shart va (6) tenglamadan C_2 topiladi: $C_2 = \frac{8}{7} \approx 1{,}14sm$.

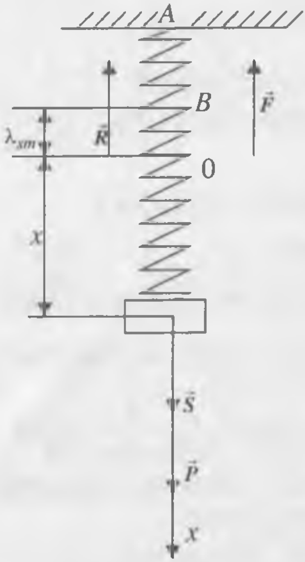
C_1 va C_2 ning topilgan qiymatlari (5)ga qo‘yilib, yuk harakatining izlanayotgan tenglamasi olinadi:

$$x(t) = (2\cos 70t + 1{,}14\sin 70t - 70t\cos t)sm\,.$$

32- masala. Og‘irligi $P = 2k\,G$ bo‘lgan yuk qattiqlik koeffitsiyenti $C = 0{,}4\frac{kg}{sm}$ bo‘lgan prujinaga osilgan. Yukka $S = 0{,}1\sin 30t$ qo‘zg‘atuvchi kuch va tezlikning birinchi darajasiga proporsional bo‘lgan $R = 0{,}1\sqrt{cm}\dot{x}\ kg$ qarshilik kuchi ta’sir qiladi. Agar boshlang‘ich paytda yukning holati va tezligi $x = 2sm$, $\dot{x}_0 = 3\frac{sm}{sek}$ bo‘lsa, yuk harakatining tenglamasini toping. Koordinata boshi sifatida yukning statik muvozanat holatini oling.

Yechish. Avval masala shartini aks ettiruvchi shakl chiziladi. Yukni x abssissasi musbat bo‘lgan holatda tasvirlanadi. Prujina bunday holatda $\lambda = \lambda_{sm} + x = x_0 + x$ uzayadi. Ox o‘qida $\bar{F}$ elastiklik kuchi vertikal yuqoriga yo‘nalgan, uning Ox o‘qdagi proyeksiyasi topiladi (52-rasm):

$$F_x = -c(x_0 + x)\,.$$



52- rasm.

$\bar{R}$ qarshilik kuchi ham vertikal yuqoriga, ya'ni yuk harakatiga qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi. $\bar{F}$ va $\bar{R}$ kuchlardan tashqari yukka $\bar{P}$ og'irlik va $\bar{S}$ qo'zg'atuvchi kuch ta'sir qiladi. Bu kuchlar Ox o'q bo'yicha, ya'ni yukning harakati bo'yicha yo'nalgan bo'ladi. Yuk harakatining differensial tenglamasi tuziladi:

$$m\ddot{x} = P + S + F_x + R_x .$$

Bu tenglamaga S, F_x va R_x kuchlarning berilgan va topilgan ifodalarini qo'yilsa, quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

$$m\ddot{x} = P + 0,1\sin 30t - 0,1\sqrt{cm}\dot{x} - c(x_0 + x) .$$

Statik muvozanat holatda $P - c\lambda_{cm} = P - cx_0 = 0$ bo'lishligini e'tiborga olinsa, yukning harakat tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$m\ddot{x} + 0,1\sqrt{cm}\dot{x} - cx = 0,1\sin 30t ,$$

$$\ddot{x} + 0,1\sqrt{\frac{c}{m}}\dot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{0,1}{m}\sin 30t ,$$

bunda $$\frac{c}{m} = \frac{cg}{P} \approx \frac{0,4\frac{kg}{sm}\cdot 980\frac{sm}{s^2}}{2kg} = 196s^{-2} ;$$

$$0,1\sqrt{\frac{c}{m}} = 0,1\cdot\sqrt{196}s^{-1} = 1,4s^{-1} ;$$

$$\frac{0,01}{m} = \frac{0,1g}{P} = \frac{0,1\cdot 980}{2} = 49 .$$

Natijada yuk harakatining tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\ddot{x} + 1,4\dot{x} + 196x = 49\sin 30t \qquad (1)$$

(1) tenglamaning umumiy yechimi

$$\ddot{z} + 1,4\dot{z} + 196z = 0 \qquad (2)$$

bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bilan o‘zining qandaydir xususiy yechimi yig‘indisiga teng bo‘ladi.

(2) tenglamaning umumiy yechimi topiladi. Buning uchun uning yechimini $z = \ell^{rt}$ ko‘rinishda izlab, uning xarakteristik tenglamasi tuzilib, yechiladi:

$$r^2 + 1,4r + 196 = 0.$$

$$r_{1,2} = -0,7 + \sqrt{0,49 - 196} = -0,7 + i\sqrt{196 - 0,49} = -0,7 +$$

$$+i\sqrt{195,51} = -0,7 + i13,98$$

(2) tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$z(t) = e^{-0,7t}(C_1\cos 13,98t + C_2\sin 13,98t)\,. \qquad (3)$$

(1) tenglamaning xususiy yechimini esa noaniq koeffitsiyentlar usulidan foydalanib topiladi. Uning xususiy yechimini

$$x_1(t) = A\cos 30t + B\cos 30t \qquad (4)$$

ko‘rinishda izlanadi. (4) ning $\dot{x}_1$ va $\ddot{x}_2$ hosilalari topiladi:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -30A\cos 30t + 30B\cos 30t, \\ \ddot{x}_2(t) &= -900(A\cos 30t - B\sin 30t \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

(4) va (5) ni (1) ga qo‘yilsa quyidagilar hosil bo‘ladi:

$$-900\underline{A\cos 30t} - 900\underline{\underline{B\sin 30t}} - 42\underline{\underline{A\sin 30t}} + 42\underline{\underline{B\cos 30t}} +$$

$$+196\underline{A\cos 30t} + 196\underline{\underline{B\sin 30t}} = 49\sin 30t.$$

$$(-704A + 42B)\cos 30t + (-42A - 704B)\sin 30t = 49\sin 30t.$$

Bu tenglikning ikkala qismidagi $\cos 30\ t$ va $\sin 30\ t$ garmonikalar oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirilsa, A va B koeffitsiyentlarni bir qiymatli aniqlashga imkon beradigan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi kelib chiqadi:

$$\begin{cases} -704A + 42B = 0 \\ -42A - 704B = 49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -352A + 21B = 0 \\ -42A - 704B = 49. \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, A va B ni topiladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -352 & 21 \\ -42 & -704 \end{vmatrix} = 352 \cdot 704 + 42 \cdot 21 = 247808 + 882 = 248690;$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 0 & 21 \\ 49 & -704 \end{vmatrix} = -49 \cdot 21 = -1029;$$

$$\Delta B = \begin{vmatrix} -352 & 0 \\ -42 & 49 \end{vmatrix} = -352 \cdot 49 = -17248.$$

$$A = \frac{\Delta_A}{\Delta} = \frac{-1029}{248690} = -0{,}004; \quad B = \frac{\Delta_B}{\Delta} = \frac{-17248}{248690} = -0{,}07.$$

Izlanayotgan xususiy yechim:

$$x_1 = -0{,}004 \cos t - 0{,}07 \sin 30t\ .$$

Yuk harakatining umumiy tenglamasi

$$x(t) = e^{-0{,}7t}\left(c_1 \cos 13{,}98t + c_2 \sin 13{,}98t\right) -$$

$$-\left(0{,}004 \cos 30t + 0{,}07 \sin 30t\right) \qquad (6)$$

ko'rinishda bo'ladi.

C_1 va C_2 integrallash doimiylarini topish maqsadida $x(t)$ ning $x(t)$ hosilasi topiladi:

$$x(t) = -0{,}7e^{-0{,}7t}(c_1 \cos 13{,}98t + c_2 \sin 13{,}98t) +$$

$$+13{,}98e^{-0{,}7t}(-c_1 \sin 13{,}98t + c_2 \cos 13{,}98t) -$$

$$-(-0{,}12 \sin 30t + 2{,}1 \cos 30t). \qquad (7)$$

$t = 0$, $x_0 = x = 2$ bo'lganda (6) tenglamadan; $t = 0$, $\dot{x}_0 = \dot{x} = 3$ bo'lganda (7) tenglamadan C_1 va C_2 ni aniqlashga imkon beradigan tenglamalar kelib chiqadi:

$$\begin{cases} 2 = C_1 - 0{,}004, \\ 3 = -0{,}7C_1 + 13{,}98C_2 = -2{,}1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2{,}004, \\ -0{,}7C_1 + 13{,}98C_2 \end{cases}$$

$$C_1 = 2{,}004 \quad C_2 = -0{,}265.$$

Natijada izlanayotgan yuk harakatining tenglamasi quyidagicha topiladi:

$$x(t) = e^{-0,7t}(2,004\cos 13,98t - 0,265\sin 13,98t) -$$
$$-(0,004\cos 30t + 0,07\sin 30t).$$

III. Savol va masalalar

1. Sistemaning kinetik energiyasi qanday formula va aniqlikda hisoblanadi?
2. Sistemaning inersiya koeffitsiyenti qanday parametrlarga bog'liq bo'ladi va qanday hisoblanadi?
3. Bitta erkinlik darajaga ega bo'lgan sistema erkin tebranishlari-ning amplitudasi va boshlang'ich fazosi qanday aniqlanadi?
4. Sistema erkin tebranishlarining chastotasi va davri qanday parametrlarga bog'liq bo'ladi?
5. Bitta erkinlik darajaga ega bo'lgan sistema erkin tebranishlarining asosiy xossalarini izohlang va tahlil qiling.
6. Qanday qarshilikda amplituda ko'rsatkichli qonun (geometrik progressiya) bo'yicha kamayadi? Qanday qarshilikda amplituda arifmetik progressiya qonuni bo'yicha kamayadi?
7. Erkinlik darajasi bitta bo'lgan sistema majburiy tebranishlarining differensial tenglamasi qanday ko'rinishga ega? Uning umumiy yechimi qanday ko'riladi?
8. Majburiy tebranishlar differensial tenglamasi umumiy yechimi-ning har bir qo'shiluvchisini izohlang.
9. Kichik qarshilikni e'tiborga olganda davriy qo'zg'atuvchi kuch ta'siridagi bitta erkinlik darajaga ega bo'lgan sistema majburiy tebranishlarining differensial tenglamasi va uning umumiy yechimi qanday ko'rinishga ega?
10. Tezlikka bog'liq bo'lgan qarshilik sistema erkin tebranishlarining davriga qanday ta'sir qiladi?
11. Tezlikka proporsional bo'lgan qarshilik sistema majburiy tebranishlarining amplitudasiga, fazosiga, chastotasi va davriga qanday ta'sir qiladi?

12. Qanday shartlarda j- tartibli rezonans vujudga keladi? Qanday chastotalar kritik chastotalar deb ataladi?

13. Qarshilik kuchini e'tiborga olganda rezonans hollar uchun sistema majburiy tebranishlarining ko'rinishi qanday bo'ladi?

14. Majburiy tebranishlar amplitudasining maksimal qiymati qanday aniqlanadi?

15. So'nish koeffitsiyentining qanday qiymatida majburiy tebranishlar amplitudasining maksimumi mavjud bo'lmaydi?

16. Rezonans holda qarshilik e'tiborga olinmaganda sistema majburiy tebranishlarining amplitudasi qanday qonun bo'yicha o'zgaradi?

17. Qanday shartda «Tepkili tebranish» hodisasi yuz beradi va bu hodisaning grafigi qanday bo'ladi?

18. Tezlikka proporsional bo'lgan qarshilik «Tepkili tebranish» hodisasiga qanday ta'sir qiladi? Bunday tebranishlarning grafigi qanday bo'ladi?

19. Dinamiklik koeffitsiyenti deb nimaga aytiladi va u qanday aniqlanadi?

20. Oniy impulsli kuch ta'sirida bitta erkinlik darajaga ega bo'lgan sistemaning majburiy tebranishlari qanday tenglama bilan aniqlanadi?

21. To'satdan sistemaga qo'yilgan o'zgarmas kuchning dinamik ta'siri qanday bo'ladi?

22. Qattiqlik koeffitsiyentlari C_1 va C_2 bo'lgan prujinalarga P og'irlikdagi yuk osilgan.

a) yuk prujinalardan bir tomonda (pastda);

b) yuk prujinalar oralig'ida yotganda uning tebranish davrini toping.

Javob: $T = 2\pi\sqrt{\frac{p}{g}\cdot\frac{c_1+c_2}{c_1c_2}}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{p}{g(c_1+c_2)}}$.

23. Og'irligi $20H$ bo'lgan yuk prujinaga osilgan. Prujinaning og'irlik kuchi ta'siridagi uzayishi $\lambda_{sm} = 5\ sm$. Agar boshlang'ich paytda prujinaning uzayishi $\Delta\ell = 8\ sm$, yukning boshlang'ich tezligi $\vartheta_0 = 10\frac{m}{s}$ bo'lsa, yukning harakatini aniqlang.

Javob: $q = 3{,}08\sin(14t + 1{,}34)sm.$

24. Og'irligi $20H$ bo'lgan yuk prujinaga osilgan. Prujinaning yuk ta'siridagi statik uzayishi $\lambda_{sm} = 5\ sm$ ga teng. Yukka $S = 20\sin 14tH$

qo‘zg‘atuvchi garmonik kuch ta’sir qiladi. Boshlang‘ich paytda prujina $\Delta\ell = 6$ *sm* ga cho‘zilgan va yukka $\vartheta_0 = 10\dfrac{m}{s}$ tezlik berilgan. Yukning harakatini aniqlang.

Javob: $q = 3,35\sin(14t + 0,305) + 35t\sin\left(14t - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

25. 0,4 *kg* massali jism qattiqligi $C = 4\dfrac{kg}{m}$ bo‘lgan prujinaga mahkamlangan. Bu jismga $S = 40\sin 5tH$ qo‘zg‘atuvchi kuch va $R = -\alpha\vartheta\left(\alpha = 25\dfrac{Hc}{m},\ \vartheta \text{ — jism tezligi}\right)$ qarshilik kuchi ta’sir qiladi. Boshlang‘ich paytda jism statik muvozanat holda turibdi. Jismning harakat qonunini toping.

Javob:

$$q = 0,647e^{-31,25t}\sin(95t - 46°55') + 1,23\sin(50t - 22°36')sm.$$

9- §. Erkinlik darajasi chekli bo‘lgan sistemaning tebranishlari

I. Nazariy qism

1. Chekli erkinlik darajaga ega bo‘lgan konservativ sistema erkin tebranishlarining differensial tenglamalarini quyidagi Lagranj tenglamalaridan olish mumkin:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad (j=1,2,...,s)$$

bundagi s — qaralayotgan sistema erkinlik darajasining soni.

Sistemaning kinetik va potensial energiyalari mos ravishda

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j\,; \quad \Pi=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}c_{ij}q_iq_j$$

formulalar yordamida topiladi.

Agar $\dfrac{\partial T}{\partial q_j}=0;\quad \dfrac{\partial \Pi}{\partial q_j}=c_{j1}q_1+c_{j2}q_2+....+c_{js}q_s$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)=a_{j1}\ddot{q}_1+a_{j2}\ddot{q}_2+...+a_{js}\ddot{q}_s \quad (j=1,2,...,s)$$

bo‘lishligi e’tiborga olinsa, Lagranj tenglamalaridan quyidagi chiziqli bir jinsli ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli differensial tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi:

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}\ddot{q}_1+a_{12}\ddot{q}_2+...+a_{1s}\ddot{q}_s+c_{11}q_1+c_{12}q_2+....+c_{1s}q_s=0\\
a_{21}\ddot{q}_1+a_{22}\ddot{q}_2+...+a_{2s}\ddot{q}_s+c_{21}q_1+c_{22}q_2+....+c_{2s}q_s=0\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_{s1}\ddot{q}_1+a_{s2}\ddot{q}_2+...+a_{ss}\ddot{q}_s+c_{s1}q_1+c_{s2}q_2+....+c_{ss}q_s=0
\end{array}\right\} \quad (1)$$

(1) tenglamalar sistemasi erkinlik darajasi S ga teng bo'lgan sistemaning erkin tebranishlarini tavsiflaydi. Bundagi $a_{ij} = a_{ji}$ miqdorlar inersiya koeffitsiyentlari, $c_{ij} = c_{ji}$ esa qattiqlik koeffitsiyentlari deb ataladi.

Bu tenglamalarning xususiy yechimlari

$$q_j = A_j \sin(kt + \beta) = \mu_j A_1 \sin(kt + \beta)$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

q_j ning ifodalarini (1) tenglamalarga qo'yilsa, $\mu_j (j = 1,\overline{s})$ noma'lum sonlarga nisbatan quyidagi chiziqli va bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\left.\begin{array}{l}
\left(c_{11} - a_{11}k^2\right)\mu_1 + \left(c_{12} - a_{12}k^2\right)\mu_2 + \ldots\ldots + \left(c_{1s} - a_{1s}k^2\right)\mu_s = 0; \\
\left(c_{21} - a_{21}k^2\right)\mu_1 + \left(c_{22} - a_{22}k^2\right)\mu_2 + \ldots\ldots + \left(c_{2s} - a_{2s}k^2\right)\mu_s = 0; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\left(c_{1s} - a_{1s}k^2\right)\mu_1 + \left(c_{s2} - a_{s2}k^2\right)\mu_2 + \ldots\ldots + \left(c_{ss} - a_{ss}k^2\right)\mu_s = 0
\end{array}\right\} \quad (2)$$

Bunday sistema nol bo'lmagan yechimlarga ega bo'lishligi uchun $\mu_j (j = 1,\overline{s})$ noma'lumlar oldida turgan koeffitsiyentlardan tuzilgan determinantning nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

$$\Delta(k^2) = \begin{vmatrix}
c_{11} - a_{11}k^2 & c_{12} - a_{12}k^2 \ldots\ldots & c_{1s} - a_{1s}k^2 \\
c_{21} - a_{21}k^2 & c_{22} - a_{22}k^2 \ldots\ldots & c_{2s} - a_{2s}k^2 \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
c_{s1} - a_{s1}k^2 & c_{s2} - a_{s2}k^2 \ldots\ldots & c_{ss} - a_{ss}k^2
\end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

(3) sistemaning xarakteristik yoki chastotalar tenglamasi deb ataladi. Bu tenglama k^2 ga nisbatan s- darajali tenglamadir.

Bu tenglamani yechib, erkin tebranishlarning barcha $k_j(j=1,\overline{s})$ chastotalari topiladi.

$k_j^2(j=1,\overline{s})$ — tenglama ildizlari haqiqiy va musbat. k_j^2-ning barcha topilgan qiymatlarini (2) tenglamalarga qo'yilsa, $\mu_j^{(1)},\mu_j^{(2)},......,\mu_j^{(s)}$ $(j=1,2,...s)$ koeffitsiyentlarni aniqlashga imkon beradigan algebraik tenglamalar sistemasi kelib chiqadi:

$$\left.\begin{array}{l}
\left(c_{11}-a_{11}k_j^2\right)\mu_1^{(j)}+(c_{12}-a_{12})\mu_2^{(j)}+......+\left(c_{1s}-a_{1s}k^2\right)\mu_s^{(j)}=0;\\
\left(c_{21}-a_{21}k_j^2\right)\mu_1^{(j)}+\left(c_{22}-a_{22}k_j^2\right)\mu_2^{(j)}+......+\left(c_{2s}-a_{2s}k^2\right)\mu_s^{(j)}=0;\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\left(c_{1s}-a_{1s}k_j^2\right)\mu_1^{(j)}+(c_{s2}-a_{s2}k)\mu_2^{(j)}+......+\left(c_{ss}-a_{ss}k_j^2\right)\mu_s^{(j)}=0
\end{array}\right|\quad(4)$$

(4) sistemani $\mu_j^{(k)}$ ga nisbatan yechilsa, quyidagi tenglik hosil bo'ladi:

$$\mu_j^{(1)}=\frac{\Delta_{j1}(k_1^2)}{\Delta_{11}(k_1^2)};\mu_j^{(2)}=\frac{\Delta_{j1}(k_2^2)}{\Delta_{11}(k_2^2)};........,\mu_j^{(s)}=\frac{\Delta_{j1}(k_s^2)}{\Delta_{11}(k_s^2)}.$$

Natijada (1) sistema erkin tebranishlarini tavsiflovchi differensial tenglamalarning xususiy yechimlari quyidagicha bo'ladi:

$$q_j^{(1)}=\mu_j^{(1)}A_1^{(1)}\sin(k_1t+\beta_1),$$

$$q_j^{(2)}=\mu_j^{(2)}A_1^{(2)}\sin(k_2t+\beta_2),.....,q_j^{(s)}=\mu_j^{(s)}A_1^{(s)}\sin(k_st+\beta_s)$$

$$(j=1,\overline{s}).$$

2. Agar sistema nuqtalariga $\Pi=\Pi(q_1,q_2,...q_s)$ potensialga ega bo'lgan qaytaruvchi kuchdan tashqari t vaqtga bog'liqli $\bar{F}_i(t)$ qo'zg'atuvchi kuchlar ta'sir qilsa, u holda sistema

murakkab harakat qiladi. Bu murakkab harakat esa sistemaning erkin va majburiy tebranishlaridan iborat bo'ladi. Qaralayotgan hol uchun Lagranj tenglamasi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)=-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}+Q_j(t), \quad (j=1,2,...,s)$$

bundagi $Q_j(t)$ umumlashgan kuch

$$Q_j(t)=\sum_{i=1}^{k}\vec{F}_i(t)\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_i}, \quad (j=1,2,...,s)$$

formula bo'yicha topiladi. S sistema erkinlik darajasining soni, k esa $\vec{F}_i(t)$ qo'zg'atuvchi kuchlarning soni.

Lagranj tenglamalariga kinetik va potensial energiyalarning

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \quad \Pi=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}c_{ij}q_iq_j$$

ifodalarini qo'yib, sistema majburiy tebranishlarini tasvirlovchi differensial tenglamalar sistemasini qarshilik kuchini hisobga olinmasa, quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1+a_{12}\ddot{q}_2+....+a_{1s}\ddot{q}_s+c_{11}q_1+c_{12}q_2+....+c_{1s}q_s=Q_1(t); \\ a_{21}\ddot{q}_1+a_{22}\ddot{q}_2+....+a_{2s}\ddot{q}_s+c_{21}q_1+c_{22}q_2+....+c_{2s}q_s=Q_2(t); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}\ddot{q}_1+a_{s2}\ddot{q}_2+....+a_{ss}\ddot{q}_s+c_{s1}q_1+c_{s2}q_2+....+c_{ss}q_s=Q_s(t). \end{cases} \tag{5}$$

(5) sistemaning umumiy yechimi (1) sistemaning umumiy yechimi bilan o'zining qandaydir xususiy yechimi yig'indisiga teng

$$q_j=q_j^{(1)}+q_j^{(2)}+....+q_j^{(s)}. \tag{6}$$

Bundagi $q_j^{(1)}$ qo'shiluvchi (yechim) sistemaning erkin tebranishlarini ifodalaydi. Ma'lumki, sistemaning erkin tebranishlari qarshilik tufayli tez so'nuvchi tebranishlardir.

Ko'pchilik holatlarda sistemaning majburiy tebranishlarini ifodalovchi $q_j^{(2)}$ xususiy yechimlarni topish katta amaliy ahamiyatga ega bo'ladi.

(5) sistemaning xususiy yechimlarini qo'zg'atuvchi umumlashgan kuchlar garmonik qonun bo'yicha o'zgargan hol uchun topiladi, ya'ni $Q_j(t) = Q_j \sin(pt + \delta)$ $(j = 1,\overline{s})$, bundagi P — tashqi kuch chastotasi, δ — ularning boshlang'ich fazasi.

Qaralayotgan holda xususiy yechim quyidagi ko'rinishda topiladi:

$$q_j^{(2)} = A_j \sin(pt + \delta), \quad (j = 1,2,...,s). \qquad (7)$$

(7)ni (5)ga qo'yilsa, majburiy tebranishlarning Aj $(j = 1,2,...,s)$ noma'lum amplitudalariga nisbatan quyidagi bir jinsli bo'lmagan chiziqli algebraik sistema hosil bo'ladi:

$$\left.\begin{array}{l} \left(c_{11} - a_{11}p^2\right)A_1 + \left(c_{12} - a_{12}p^2\right)A_2 + ... + \left(c_{1s} - a_{1s}p^2\right)A_s = Q_1, \\ \left(c_{21} - a_{21}p^2\right)A_1 + \left(c_{22} - a_{22}p^2\right)A_2 + ... + \left(c_{2s} - a_{2s}p^2\right)A_s = Q_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(c_{1s} - a_{1s}p^2\right)A_1 + \left(c_{s2} - a_{s2}p^2\right)A_2 + ... + \left(c_{ss} - a_{ss}p^2\right)A_s = Q_s \end{array}\right| \qquad (8)$$

Agar bu sistema uchun

$$\Delta(p^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}p^2 & c_{12} - a_{12}p^2 .... & c_{1s} - a_{1s}p^2 \\ c_{21} - a_{21}p^2 & c_{22} - a_{22}p^2 .... & c_{2s} - a_{2s}p^2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ c_{s1} - a_{s1}p^2 & c_{s2} - a_{s2}p^2 .... & c_{ss} - a_{ss}p^2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (9)$$

bo'lsa, u holda A_j majburiy tebranishlarning amplitudasi quyidagicha bo'ladi:

$$A_j = \frac{\sum_{i=1}^{s} Q_i \Delta_{ji}(p^2)}{\Delta(p^2)} \tag{10}$$

bundagi $\Delta_{ji}(p^2)$ $(i, j = 1, 2, ..., s)$ determinant $\Delta(p^2)$ determinantning j- ustun va i- campu elementlarining $(-1)^{i+j}$ ishora bilan olingan minorlaridir.

$\Delta(p^2)$ determinant $\Delta(k^2)$ determinantdan k^2 ni p^2 ga almashtirib olingan desa ham bo'ladi.

Agar P majburiy tebranishlar chastotasi bosh tebranishlarning birorta k_i chastotasi bilan ustma-ust tushib qolsa, ya'ni $p = k_i$ bo'lsa, u holda sistemada j tartibli rezonans vujudga keladi. Bu holda

$$\Delta(p^2) = \Delta(k_j^2) = 0$$

bo'ladi.

Rezonans vaqtida qarshilik e'tiborga olinmaganda majburiy tebranishlarning amplitudasi vaqt o'tishi bilan chegarasiz o'sadi. Qarshilikni e'tiborga olganda esa bu amplitudalar chekli bo'lib, kichkina qarshiliklar uchun juda katta qiymatlarga ega bo'lishi mumkin.

Olingan natijalarni ixtiyoriy davrli qo'zg'atuvchi kuchlar uchun qo'llash mumkin. Agar qo'zg'atuvchi kuch $T_m = \dfrac{2\pi}{p}$ davrli bo'lsa, u holda $Q_i(t)$ umumlashgan qo'zg'atuvchi kuch Fure qatoriga yoyiladi:

$$Q_i(t) = Q_{j0} + \sum_{r=1}^{\infty} Q_{jr} \sin(p_r t + \delta_r) \tag{11}$$

bunda $p_r = rp(r = 1, 2, ..., \infty)$

(11) yoyilmadagi Q_{j0} doimiy had tebranishlarga ta'sir qilmaydi. Qo'zg'atuvchi kuchlarning r garmonikasiga mos keluvchi majburiy tebranishlarning amplitudasi

$$A_j^{(r)} = \frac{\sum_{i=1}^{s} Q_{ir}\Delta_{ij}(p_2^2)}{\Delta(p_2^2)} \tag{12}$$

$$(j = 1,2,....,s, \quad r = 1,2,....,\infty)$$

formulasi bo'yicha aniqlanadi.

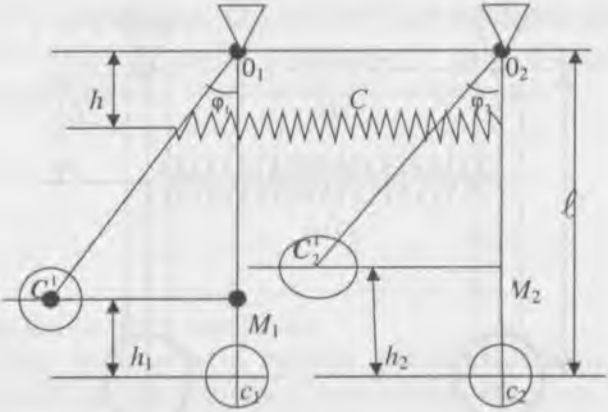
Agar qo'zg'atuvchi kuchlar garmonikalaridan birortasining chastotasi sistema bosh tebranishlarining birorta chastotasi bilan ustma-ust tushib qolsa, ya'ni $p_r = k_j$ bo'lsa, u holda sistemada rezonans hodisasi yuz beradi. $p_r = k_j$ $(r = 1,2,...)$ chastotalar *kritik chastotalar* deb ataladi.

II. Masalalar yechish

33- masala. (M-554, 1986). Uzunliklari ℓ va massalari m bo'lgan ikkita bir xil mayatnik qattiqligi s bo'lgan, uchlari mayatniklarning sterjenlariga mahkamlangan prujina bilan h balandlikda bir-biriga bog'langan. Mayatniklardan biri muvozanat holatdan α burchakka og'dirilgandan keyin sistemaning mayatniklar muvozanati tekisligida qiladigan kichik tebranishlarini aniqlang; mayatniklarning boshlang'ich tezliklari nolga teng. Qarshilik, mayatniklar sterjenlarining massalari va prujinaning massasini hisobga olmang (53- rasm).

Yechish. Umumlashgan koordinatalar sifatida mayatniklarning vertikaldan og'ish burchaklari φ_1 va φ_2 qabul qilinadi. Sistemaning kinetik energiyasi quyidagiga teng:

$$T = \frac{1}{2} m\ell^2 \left(\dot{\varphi}_1^2 + \ddot{\varphi}_2^2\right).$$



54- rasm.

mulalardan foydalanilsa, Π_1 potensial energiya uchun quyidagi ifoda topiladi:

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} mg\ell\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right).$$

Deformatsiyalangan prujinaning Π_2 potensial energiyasini hisoblash uchun prujinaning cho'zilishi hisoblanadi:

$$\Delta\ell_1 = h\sin\varphi_1, \quad \Delta\ell_2 = h\sin\varphi_2 \Rightarrow \Delta\ell_1 = h\varphi_1, \Delta\ell_2 = h\varphi_2 .$$

$$\Pi_2 = A_{(M_0M_1)} = \frac{c}{2}\left[\Delta\ell_2^2 - \Delta\ell_1^2\right] = \frac{1}{2} ch^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 .$$

Sistemaning potensial energiyasi uchun quyidagi ifodalar topiladi:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = mg\ell(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{1}{2} ch^2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(mg\ell + ch^2\right)\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right) - 2ch^2\varphi_1\varphi_2\right].$$

T kinetik va *Π* potensial energiyalar uchun topilgan ifodalarni ularning ikkita erkinlik darajaga ega bo'lgan hol uchun topilgan

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}q_1^2 + 2a_{12}q_1q_2 + a_{22}q_2^2),$$

$$T = \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2)$$

ifodalari bilan taqqoslansa,

$$a_{11} = a_{22} = m\ell^2, \quad a_{12} = 0;$$

$$c_{11} = c_{22} = mg\ell + ch^2, \quad c_{12} = -2ch^2.$$

Bu topilgan koeffitsiyentlarni

$$\left(c_{11} - a_{11}k^2\right)\left(c_{22} - a_{22}k^2\right) - \left(c_{12} - a_{12}k^2\right)^2 = 0 \tag{13}$$

chastotalar tenglamasiga qo'yilsa,

$$\left(mg\ell + ch^2 - m\ell^2k^2\right)^2 - c^2d^4 = 0$$

tenglama kelib chiqadi. Bu tenglamani k^2 ga nisbatan yechilsa,

$$k_1^2 = \frac{g}{\ell}, \quad k_2^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{2ch^2}{m\ell^2}.$$

$\mu_j = \frac{q_2}{q_1} = \frac{A_2}{A_1}$ koeffitsiyentlarni topish uchun (2) sistemadan foydalaniladi. Ikkita erkinlik darajaga ega bo'lgan sistema uchun (2) sistema

$$\begin{cases}(c_{11} - a_{11}k^2) + \mu(c_{12} - a_{12}k^2) = 0 \\ (c_{12} - a_{12}k^2) + \mu(c_{22} - a_{22}k^2) = 0\end{cases}$$

ko'rinishni oladi. Bundan μ uchun ifoda topiladi. k_1^2 va k_2^2 mos keluvchi μ_1 va μ_2 hisoblanadi:

$$\mu_1 = -\frac{c_{11} - a_{11}k^2}{c_{12} - a_{12}k^2} = -\frac{mg\ell + ch^2 - \frac{g}{\ell}m\ell^2}{-ch^2} = 1.$$

$$\mu_2 = \frac{c_{11} - a_{11}k_2^2}{c_{12} - a_{12}k_2^2} = -\frac{mg\ell + ch^2 - m\ell^2\left(\frac{g}{\ell} + \frac{2ch^2}{m\ell^2}\right)}{-ch^2} = -1.$$

$\mu_1 = 1, \mu_2 = -1$ bo'lganligi tufayli mayatniklar $\mu = 1$ bo'lganda vertikaldan bir tomonga og'adi; $\mu = -1$ bo'lganda esa ular vertikaldan qarama-qarshi tomonga og'ishadi, ya'ni mayatniklar harakati davomida φ_1 va φ_2 og'ish burchaklari uchun $\varphi_1^{(1)} = \varphi_2^{(1)}, \varphi_1^{(2)} = -\varphi_1^{(2)}$ tengliklar o'rinli bo'ladi.

Birinchi bosh tebranishda hamma vaqt $\varphi_1^{(1)} = \varphi_2^{(1)}$ tenglik saqlanadi. Mayatniklarni bog'lovchi prujina deformatsiyalanmasdan qoladi, ya'ni prujina mayatniklarning harakatiga ta'sir qilmaydi. Bu holda mayatniklar tebranishlarining k_1 chastotasi bog'lanishlar bo'lmaganidek bo'lib, mayatniklardan birining tebranish chastotasiga teng bo'ladi.

Mayatniklar harakatini tavsiflovchi differensial tenglamalarning umumiy yechimi xususiy yechimlarining yig'indisi singari topiladi:

$$\varphi_1 = \varphi_1^{(1)} + \varphi_1^{(2)} = A_1 \sin(k_1 t + \beta_1) + A_2 \sin(k_2 t + \beta_2);$$

$$\varphi_2 = \varphi_2^{(1)} + \varphi_2^{(2)} = \mu_1 A_1 \sin(k_1 t + \beta_1) + \mu_2 A_2 \sin(k_1 t + \beta_2).$$

φ_1 va φ_2 ning vaqt bo'yicha hosilalari ham topiladi:

$$\varphi_1 = k_1 A_1 \sin(k_1 t + \beta_1) + k_2 A_2 \cos(k_2 t + \beta_2);$$

$$\dot{\varphi}_2 = \mu_1 A_1 \sin(k_1 t + \beta_1) + \mu_2 A_2 \sin(k_2 t + \beta_2).$$

A_1, A_2, β_1 va β_2 o'zgarmas sonlarni boshlang'ich shartlardan foydalanib topiladi:

$t = 0$ bo'lganda $\varphi_{10} = \alpha, \varphi_{20} = 0, \dot{\varphi}_{10} = 0, \dot{\varphi}_{20} = 0.$

Shuningdek $\mu_1 = +1$, $\mu_2 = -1$ bo'lishligini e'tiborga olinsa, A_1, A_2, β_1 va $\beta_2$ni aniqlash uchun quyidagi tenglamalar sistemasi topiladi:

$$A_1 \sin\beta_1 + A_2 \sin\beta_2 = \alpha; \quad A_1 \sin\beta_1 - A_2 \sin\beta_2 = 0;$$

$$k_1 A_1 \sin\beta_1 + k_2 A_2 \sin\beta_2 = 0; \quad k_1 A_1 \sin\beta_1 - k_1 A_2 \sin\beta_2 = 0.$$

Bu sistemadan

$$k_1 A_1 \sin\beta_1 = k_2 A_2 \sin\beta_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\beta_1 = \cos\beta_2 = 0 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \frac{\pi}{2}.$$

$$2A_1 \sin\beta_1 = 2A_2 \sin\beta_2 = \alpha \Rightarrow A_1 = A_2 = \frac{\alpha}{2}.$$

Natijada mayatniklarning harakat qonunlari quyidagicha hosil bo'ladi:

$$\varphi_1 = \frac{\alpha}{2}\left[\sin\left(k_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(k_2 t + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\alpha}{2}(\cos k_1 t + \cos k_2 t) =$$

$$= \alpha\cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}t\right).$$

$$\varphi_2 = \frac{\alpha}{2}\left[\sin\left(k_1 t + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(k_2 t + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\alpha}{2}(\cos k_1 t - \cos k_2 t) =$$

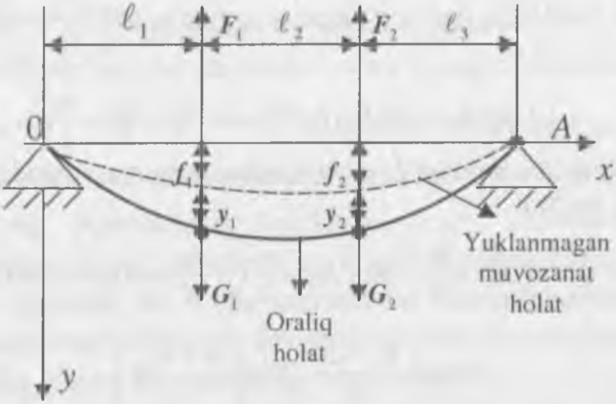
$$= \alpha\sin\left(\frac{k_1 + k_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{k_2 - k_1}{2}t\right).$$

Javob: $\varphi_1 = \alpha\cos\dfrac{k_1 + k_2}{2}t \cdot \cos\dfrac{k_1 - k_2}{2}t, \quad k_1 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}};$

$$\varphi_2 = \alpha\sin\frac{k_1 + k_2}{2}t \cdot \sin\frac{k_2 - k_1}{2}t, \quad k_2 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

34- masala. (M-55.30, 1986). Ikki tayanchda erkin yotuvchi ℓ uzunlikdagi to'sin bosh ko'ndalang tebranishlarining shakllari va chastotalarini toping. To'singa $x = \frac{1}{2}\ell$ va $x = \frac{2}{2}\ell$ nuqtalarda Q og'irlikdagi ikkita teng yuk qo'yilgan. To'sin ko'ndalang kesimning inersiya momenti I, elastiklik moduli E. To'sin massasini hisobga olmang.

Yechish. Avval qo'yilgan masalani umumiy holda yechamiz. Umumiy yechimni olish uchun G_1 va G_2 yuklar to'sinning tayanch nuqtalaridan turli masofada qo'yilgan bo'lsin (55-rasm).



55- rasm.

Qaralayotgan sistema ikkita erkinlik darajaga ega. Sistemaning umumlashgan koordinatalari sifatida yuklarning muvozanat holatdan y_1 va y_2 vertikal og'ishlari qabul qilinadi. Bunday holda sistemaning kinetik energiyasi

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1 \dot{y}_1^2 + m_2 \dot{y}_2^2\right)$$

formula bo'yicha topiladi.

Sistemaning P potensial energiyasi esa elastik deformatsiyalanadigan to'sinning Π_1 potensial energiyasi bilan G_1 va G_2 yuklarning og'irlik kuchi maydonidagi Π_2 potensial energiyalarining yig'indisiga teng.

Π_1 — elastik deformatsiyalangan to'sinning potensial energiyasini to'sinning qaralayotgan holatdagi potensial energiyasi bilan muvozanat holatdagi potensial energiyasi ayirmasi sifatida topiladi:

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} F_1 (f_1 + y_1) - \frac{1}{2} F_1^0 f_1 + \frac{1}{2} F_2 (f_2 + y_2) - \frac{1}{2} F_2^0 f_2 \, ,$$

bunda $$F_1 = c_{11}(f_1 + y_1) - c_{12}(f_2 + y_2).$$
$$F_2 = c_{12}(f_2 + y_2) - c_{22}(f_1 + y_1).$$

Muvozanat holat vaqtidagi to'sinning yuklar qo'yilgan nuqtalaridagi egilishini mos ravishda f_1 va f_2 desak, elastiklik kuchlari muvozanat holatda

$$F_1^0 = c_{11}f_1 - c_{12}f_2 = G_1; \quad F_2^0 = c_{22}f_2 - c_{21}f_1 = G_2$$

formulalardan aniqlanadi.

G_1 va G_2 yuklarning potensial energiyasi og'irlik kuch maydonida

$$\Pi_2 = -G_1y_1 - G_2y_2$$

formula bo'yicha topiladi.

Sistema Π potensial energiyasi uchun

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \frac{1}{2}[F_2(f_1 + y_1) + F_2(f_2 + y_2)] -$$
$$-\frac{1}{2}(G_1f_1 + G_2f_2) - G_1y_1 - G_2y_2$$

ifoda topiladi.

F_1 va F_2 ning ifodalarini bu topilgan ifodaga qo'yib va muvozanat holat atrofida

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\Pi_1}\right)_0 = \frac{1}{2}(c_{12} - c_{21})f_2 = 0;$$
$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y_2}\right)_0 = \frac{1}{2}(c_{21} - c_{12})f_1 = 0.$$

shartlarning bajarilishini e'tiborga olinsa, potensial energiya uchun

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}y_1^2 - 2\frac{c_{12} + c_{21}}{2}y_1y_2 + c_{22}y_2^2)$$

ifoda topiladi.

T va Π uchun topilgan ifodalardan sistemaning inersiya va qattiqlik koeffitsiyentlarini aniqlash mumkin:

$$a_{11} = m_1 = \frac{G_1}{g}, a_{12} = 0; a_{22} = m_2 = \frac{G_2}{g}$$

$$c_{11} = c_{11}; c_{12} = \frac{c_{12} + c_{21}}{2}; c_{22} = c_{22}.$$

Inersiya va qattiqlik koeffitsiyentlarining topilgan ifodalarini (13) chastotalar tenglamasiga qo'yilsa, quyidagi tenglama kelib chiqadi:

$$\left(c_{11} - \frac{G_1}{g}k^2\right)\left(c_{22} - \frac{G_2}{g}k^2\right) - \left(\frac{c_{12} + c_{21}}{2}\right)^2 = 0.$$

Ba'zi bir almashtirishlardan keyin bu tenglama

$$k^4 - \frac{g}{G_1G_2}(c_{11}G_2 + c_{22}G_1)k^2 + \frac{g^2}{4G_1G_2}\left[4c_{11}c_{22}(c_{12} + c_{21})^2\right] = 0$$

ko'rinishga keladi.

Bu tenglama yechilsa, quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$k_{1,2}^2 = \frac{g}{2G_1G_2}\left\{c_{11}F_2 + c_{22}G_1 \mp \sqrt{(c_{11}G_2 + c_{22}G_1)^2 - \right.$$

$$\left. \overline{-G_1G_2\left[4c_{11}c_{22} - (c_{12} + c_{21})^2\right]}\right\}.$$

Biz qarayotgan holda:

$$\ell_1 = \ell_2 = \frac{\ell}{3}; G_1 = G_2 = G; c_{11} = c_{22}; c_{12} = c_{21}; f_1 = f_2$$

bo'lishligini e'tiborga olinsa,

$$\left.\begin{aligned} k_1^2 &= \frac{g(c_{11} - c_{12})}{G} \\ k_2^2 &= \frac{g(c_{11} + c_{12})}{G} \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} k_1 &= \sqrt{\frac{g(c_{11} - c_{12})}{G}} \\ k_2 &= \sqrt{\frac{g(c_{11} + c_{12})}{G}}. \end{aligned}$$

k_1 va k_2 ni bilgan holda μ_1 va μ_2 koeffitsiyentlar hisoblaniladi:

4. Erkinlik darajasi ikkita bo'lgan sistema erkin tebranishlarining chastotalari qanday aniqlanadi?

5. Sistema bosh tebranishlarini aniqlovchi tenglamalarni keltiring.

6. Erkinlik darajasi ikkita bo'lgan sistema bosh tebranishlarining shakllari qanday aniqlanadi?

7. Erkinlik darajasi ikkita bo'lgan sistemaning natijalovchi harakatlari garmonik tebranishlar bo'ladimi?

8. Qanday shartlarda «TEPKILI TEBRANISH» hodisasi sodir bo'ladi va bu hodisaning fizik mazmunini izohlang.

9. Sistemaning qanday koordinatalariga bosh koordinatalar deyiladi va ular ixtiyoricha tanlangan umumlashgan koordinatalar bilan qanday bog'langan bo'ladi?

10. Bosh koordinatalarda sistema erkin tebranishlarining differensial tenglamalarining o'ziga xos xususiyati qanday bo'ladi?

11. Sistema erkin tebranishlarining chastotasi umumlashgan koordinatalarning tanlanishiga bog'liq bo'ladimi?

12. Sistema bosh koordinatalarining har biri qanday qonun bo'yicha o'zgaradi?

13. Erkinlik darajasi ikkita bo'lgan sistemaning erkin tebranishlariga qarshilik qanday ta'sir qiladi?

14. Erkinlik darajasi ikkita bo'lgan sistema majburiy tebranishlarining amplitudasi qanday aniqlanadi?

15. Erkinlik darajasi ikkita bo'lgan sistema majburiy tebranishlarining chastota va fazasi qanday aniqlanadi?

16. Rezonans vaqtida erkinlik darajasi ikkita bo'lgan sistema majburiy tebranishlarining shakllari qanday bo'ladi?

17. Sistema rezonans tebranishlarini so'ndirib bo'ladimi? Bunday tebranishlarni so'ndirishning fizik mazmunini tushuntiring.

18. Chekli erkinlik darajaga ega bo'lgan sistema erkin tebranishlarining differensial tenglamalarini chiqaring va ularning umumiy yechimini toping.

19. Chekli erkinlik darajaga ega bo'lgan sistema erkin tebranishlarini tekshirishda $2S$ ta noma'lum doimiy sonlar qanday aniqlanadi?

20. Sistema bosh tebranishlarining chastotasi uning holatini aniqlovchi umumlashgan koordinatalarga bog'liq bo'ladimi?

21. Ikki qatlam mayatnik uzunliklari bir xil bo'lgan, og'irliklari ham bir xil $G_1 = G_2 = G$ bo'lgan OA va AB bir jinsli sterjenlardan iborat. OA sterjen O o'q atrofida, AB sterjen esa A sharnir atrofida aylanadi. Bu mayatnikning bosh tebranishlarining chastotalarini va shakllarini aniqlang.

Javob: $k_1 = 0,86\sqrt{\frac{g}{\ell}}; \quad k_2 = 2,29\sqrt{\frac{g}{\ell}}.$

$\mu_1 = 1,43; \qquad \mu_2 = 2,09.$

22. 21- masalada qaralgan ikkita mayatnik sistemaning bosh koordinatalarini aniqlang.

Javob: $$\xi_1 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = c_1 \sin(k_1 t + \alpha_1);$$
$$\xi_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = c_2 \sin(k_2 t + \alpha_2).$$

23. M massali g‘ildirak to‘g‘ri chiziqli rels bo‘ylab sirpanmasdan aylanmoqda. G‘ildirak markaziga ℓ uzunlikdagi sterjen sharnir mahkamlangan. Sterjenning bir uchiga m massali yuk ham mahkamlangan. Sterjenning massasini hisobga olmasdan mayatnik kichik tebranishlarining davrini toping.

Javob: $T = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{3M + 2m} \cdot \frac{\ell}{g}}.$

24. Har xil C_1va C_2 qattiqlikka ega bo‘lgan ikkita parallel prujinaga osilgan sterjen bosh tebranishlarini tekshiring.

25 Gorizontal konsol to‘sin uchlariga uning tayanchlaridan bir xil ℓ masofada biriktirilgan ikkita bir xil Q yuk bosh tebranishlarining shakllari va chastotasini toping. Uzunligi 3 ℓ bo‘lgan to‘sin bir-biridan ℓ masofada turgan ikki tayanchda erkin yotadi; to‘sin ko‘ndalang kesimining inersiya momenti I; to‘sin materialining Yung moduli E. To‘sin massasini hisobga olmang.

Javob: $k_1 = \sqrt{\frac{6EIg}{5Q\ell^3}}; \quad k_2 = \sqrt{\frac{2EIg}{Q\ell^3}}.$

Foydalanilgan адабиётлар

1. *Н.В.Бутенин* и другие. Курс теоретической механики. Том 2, М., «Наука», 1979.

2. *Н.В.Бутенин.* Введение в аналитическую механику. М., «Наука», 1971.

3. *В.В. Довронравов* и другие. Курс теоретической механики. М., «Высшая школа», 1974.

4. *И.В.Мецерский.* Сборник задач по теоретической механике. М., «Наука», 1986.

5. *С.М.Тарг.* Краткий курс теоретической механики. М., «Наука», 1972.

6. *P.Shohaydarova* va boshqalar. Nazariy mexanika. T., «O'qituvchi», 1981.

7. *P.Qurbonov.* Matematik mayatnik va parametrik tebranishlar. T., «O'qituvchi», 1990.

8. *В.А.Юрисов.* Задачник — практикум по аналитической механике. М., «Просвещение», 1969.

9. *А.Яблонский.* Курс теоретической механики. М., «Высшая школа», ч. 11, 1971.

10. Теоретическая механика. Методическая указания и контрольные задания. (Под.реддакцией проф. С.М. Тарга). М., «Высшая школа» 1989.

11. *Н.А.Кильчевский.* Курс теоретической механики . Том 2. М., «Наука», 1977.

12. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике (Под общей редакцией проф. А.А.Яблонского). М., «Высшая школа» 1985.

13. *L.I.Boymurodova, F.B.Ziyayev.* Nazariy mexanika. Metodik ko'rsatmalar va nazorat topshiriqlari. T., 1985.

14. *P.Qurbonov, Sh.Misirov, Ch.Saidov.* Nazariy mexanikadan savollar va masalalar echish. T., 2003.

MUNDARIJA

7- §. Klassik mexanikaning variatsion-integral prinsiplari

8- §. Mexanik sistemaning kichik chiziqli tebranishlari

9- §. Erkinlik darajasi chekli bo'lgan sistemaning tebranishlari

PARDA QURBONOV
SHIRAZI MISIROV

Analitik mexanikadan masalalar yechish

O'quv qo'llanma

Muharrir *X. Po'latxo'jayev*
Passom *Sh. Odilov*
Texnik muharrir *Ye. Tolochko*
Dizayner *A.Tillaxo'jayev*
Musahhih *M. Usmonova*

IB№ 09—193

Bosishga ruxsat etildi 12.12.2005. Bichimi 84x108 $^1/_{32}$. Times garniturasi. Ofset bosma usulida bosildi. Shartli b. t. 8,4. Nashr. b. t. 10,8. Shartnoma № 77—2005. Adadi 1000 nusxa. № 171 buyurtma.

Cho'lpon nomidagi nashriyot-matbaa ijodiy uyi. 700129, Toshkent, Navoiy ko'chasi, 30- uy.

„Arnaprint" MChJ bosmaxonasida chop etildi. 700182, Toshkent, H. Boyqaro ko'chasi, 41- uy.

22.21
Q80

Qurbonov P.

Q80 Analitik mexanikadan masalalar yechish: (O'quv qo'llanma)/ P.Qurbonov, Sh.Misirov; O'zbekiston Respublikasi oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi. —T.; Cho'lpon nomidagi nashriyot-matbaa ijodiy uyi, 2005. — 160 b.

I. Muallifdosh.

BBK 22.21ya7