S. Irisqulov, K. Ismanova
M. Olimov, A. Imamov

SONLI USULLAR VA ALGORITMLAR

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA`LIM VAZIRLIGI

S. Irisqulov, K. Ismanova, M. Olimov, A. Imamov

SONLI USULLAR VA ALGORITMLAR

O'quv qo'llanma

Toshkent
"Innovatsiya-Ziyo"
2022

UO'K: 518.12
KBK: 22.19
I – 74

S.Irisqulov, K.Ismanova, M.Olimov, A.Imamov
Sonli usullar va algoritmlar / O'quv qo'llanma/. – Toshkent: "Innovatsiya-Ziyo", 2022, 264 b

Ushbu o'quv qo'llanma bakalavriatning informatika va informatsion texnologiyalar yo'nalishlari talabalari uchun mo'ljallangan bo'lib, unda «Sonli usullar va algoritmlar» fanidan nazariy va amaliy mashg'ulotlariga oid o'quv materiallari hamda o'qitishning innovasion texnologiyalari asosida darslarni tashkil etish bo'yicha ishlanmalardan na'munalar keltirilgan.

O'quv qo'llanmadan magistrantlar va ilmiy tadqiqotchilar ham foydalanishlari mumkin.

Taqrizchilar:

A.YA.Narmanov

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti «Geometriya va amaliy matematika» kafedrasining mudiri, f.-m.f.d., professor

A.Samadov

Namangan Davlat universiteti «Amaliy matematika va axborot texnologiyalari» kafedrasining dosenti, f.m.f.n.

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta`lim vazirligi tomonidan oliy o'quv yurtlari uchun o'quv qo'llanma sifatida tavsiya etilgan

ISBN 978-9943-6466-4-3

SO'Z BOSHI

Bugungi kunga qadar «Hisoblash usullari», «Hisoblash matematikasi», «Sonli usullar» kabi kitoblar xorij tillarida ko'plab chop etilgan. Lekin, o'zbek tilida, ayniqsa o'zbek tiliga asoslangan yangi lotin yozuvida yozilgan adabiyotlar esa juda kam. Shu bilan bir qatorda, yuqori texnologiyalar, fan va texnikaning rivojlangan bugungi kunida zamon talablariga javob beradigan, ta`lim yo'nalishlarining DTS va fan dasturlari asosida yozilgan darslik va o'quv qo'llanmalarga talab juda kattadir. Ayniqsa, raqobatbardosh kadrlar tayyorlashda hisoblash matematikasi yutuqlaridan, zamonaviy axborot va kommunikasiya texnologiyalari, dasturlash tillari va vositalarini qo'llab xalq ho'jaligining turli-tuman masalalarini kompyuter yordamida yechishni o'rgatishga bag'ishlangan o'quv qo'llanmalarni yaratilishi katta ahamiyat kasb etadi.

Mazkur o'quv qo'llanma kasb ta`limi «Informatika va axborot texnologiyalari» ta`lim yo'nalishida o'qitiladigan asosiy fanlardan biri bo'lgan «Sonli usullar va algoritmlar» fanini mukammal o'rganish, turli xil amaliy masalalarning matematik modellarini sonli usullarga asoslanib yechishni tashkil qilishni o'rgatishga bag'ishlangan.

O'quv qo'llanma o'zaro bir-birini to'ldiruvchi to'qqizta bobdan iborat.

Qo'llanmaning birinchi bobida amaliy masalalarni EHMda yechish bosqichlari to'liq tahlil qilib berilgan va masalalarni yechish jarayonida paydo bo'ladigan xatoliklar haqida batafsil ma`lumotlar keltirilgan.

Ikkinchi bobda amaliy hisob ishlarida juda ko'p uchrovchi chiziqsiz tenglamalar va ularning sistemalari, ularni taqribiy yechish usullari, usullarning geometrik ma`nolari, yechimlarning yaqinlashish shartlari va usullarning o'ziga xos tomonlari ochib berilgan.

Uchinchi bobda chiziqli algebraning masalalarini yechish bo'yicha to'g'ri va iteratsion usullar haqida ma`lumotlar berilgan. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli (bosh elementlarni tanlashga asoslangan), yuqori tartibli determinantlar hisobi va teskari matrisalarni topish yo'llari ko'rsatilgan.

To'rtinchi bobda interpolyatsiyalash masalasiga to'xtalib o'tilgan. Interpolyatsiya masalasi nima, uni amalda qo'llash qay tarzda kechadi degan savollarga javob izlangan. Lagranj va Nyuton interpolyatsiya (ko'phadli) formulalari keltirilgan.

Beshinchi bobda aniq integrallar, ularning geometrik ma`nosi, ularni taqribiy hisoblash usullari bo'yicha batafsil ma`lumotlar berilgan.

Oltinchi bobda oddiy differensial tenglamalar, ularni umumiy va xususiy yechimlari, boshlang'ich va chegaraviy shartlar haqida tushunchalar berilgan. Koshi va chegaraviy masalalar, ularni yechishning sonli-taqribiy va taqribiy-analitik usullari haqida ma`lumotlar keltirilgan.

Yettinchi bobda xususiy hosilali differensial tenglamalar (matematik-fizika tenglamalari)ni tiplarga ajratish, ularni yechishda to'r usulini qo'llash bo'yicha ma`lumotlar berilgan.

Sakkizinchi bobda mavjud matematik dasturiy vositalar, xususan Mathcad amaliy dasturlar paketi, uning imkoniyatlari tahlil etilib, qo'llanmada qaralgan barcha hisoblash usullari alohida paragraflarda Mathcad dasturiy ta'minotining ichki standart funksiyalari va hisoblash algoritmlari yordamida yechilgan va tahlil etilgan.

To'qqizinchi bob avvalgi boblardan mavzularning bayon qilish tuzilishi bilan tubdan farq qiladi. Chunki unda o'qitishning zamonaviy texnologiyalari, jumladan pedagogik texnologiyalar to'g'risida ma'lumotlar keltirilib, ulardan dars jarayonini tashkil qilishda foydalanish imkoniyatlari ochib berilgan.

O'quv qo'llanmada berilgan hisoblashning sonli usullari uchun ishlab chiqilgan algoritmlar blok-sxemalar tarzida dasturlashga qulay tarzda ifoda qilingan. Har bir usul uchun algoritm asosida Paskal dasturlash tili misolida standart dastur ta`minotlari yaratilgan. Ishlab chiqilgan algoritm va dasturning ishonchliligini baholash uchun ular yordamida «test misollari» yechib ko'rsatilgan. Olingan natijalar batafsil tahlil qilib berilgan.

O'quv qo'llanmadan foydalanish jarayonida talabaning mustaqil fikrlash qobiliyatini rivojlantirish maqsadida muammoli vaziyat(MV)lar hosil qilingan. Shu bilan birgalikda, muammoli savol (MS) va muammoli topshiriq(MT)lar ham berilganki, ular yordamida talabani faollashtirish ko'zda tutiladi.

Har bir bob yakuni talabaning mustaqil ishlari uchun nazariy va amaliy savol hamda topshiriqlar bilan jihozlangan. O'quv qo'llanmani tayyorlashda mashhur olimlar va taniqli professor-o'qituvchilar tomonidan yaratilgan adabiyotlardan, shu jumladan: A.A. Samarskiy, N.S. Baxvalov, G.I. Marchuk, N.N. Kalitkin, B.N. Demidovich, V.Q. Qobulov, M.I. Isroilov, F.B. Badalov, A.A. Abduqodirov, G.Shodmonov, T.X. Xolmatov, A.Axmedov, N.Toyloqov, B.X. Xo'jayorov, A. Boyzoqov, Sh.Qayumov, A.Siddiqov va boshqalarning darsliklari va risolalaridan foydalanildi.

1-BOB. HISOBLASH TAJRIBASI VA XATOLIKLAR

Hozirgi kunda tayyorlanayotgan bakalavrlarning matematik ma`lumoti oliy matematika fanida o'qitilayotgan an`anaviy bo'limlar bilan chegaralanib qolmasligi zarur. Ayniqsa, "Informatika va axborot texnologiyalari" yo'nalishi bo'yicha ta`lim olayotgan talabalardan zamonaviy matematikaning zarur bo'limlarini bilishni, birinchi galda esa, hisoblash matematikasining zamonaviy usullarini mustahkam egallashni va ulardan amaliy masalalarni yechishda foydalanishni hamda yechilayotgan masalani dasturini yaratib, zarur sonli yechimni olishga erisha olishlari talab etiladi.

Yangi texnika va texnologiyaning keskin o'sib borishi matematika fanining zamonaviy bo'limlarini xalq ho'jaligi masalalarini yechishga yanada ko'proq qo'llanila boshlagani amaliy masalalarni yechishga ixtisoslashtirilgan bakalavrlar va magistrlarni tayyorlashga bo'lgan talabni borgan sari orttirib bormoqda.

"Informatika va axborot texnologiyalari" yo'nalishi bo'yicha ta`lim olayotgan bakalavrlar amaliy masalalarni kompyuterda yechishlari uchun ikkita asosiy yo'nalish bo'yicha yetarlicha chuqur bilimga ega bo'lishlari kerak. Birinchidan, ular biror zamonaviy algoritmik tilda ma`lum algoritm asosida dastur tuzishni yoki matematik dasturlar asosida hisoblash jarayonini tashkil etishni bilishlari, ikkinchidan amaliy masalalarni yechishning sonli-taqribiy usullari haqida ham yetarlicha bilimga ega bo'lishlari kerak. Mazkur o'quv qo'llanma ham ana shu yo'nalishlar bo'yicha nazariy va amaliy bilimlar berishga mo'ljallab yozilgan.

1-§. Masalani kompyuterda yechish bosqichlari

Tayanch so'z va atamalar

Matematik model, hisoblash tajribasi bosqichlari, amaliy masala, algoritm, dastur, sonli usullar, modul-dastur, amaliy dasturlar bog'lami.

Zamonaviy hisoblash texnikasini unumli ishlatish taqribiy va sonli analiz usullaridan oqilona foydalanishsiz mumkin emas. Shuning uchun, rivojlangan chet el mamlakatlarida va davlatimizda hisoblash matematikasiga bo'lgan qiziqish keskin ortib bormoqda. Kompyuterlarning oxirgi paytlarda rivojlanib borishi esa sonli-taqribiy usullarning amalga tadbiqiga keng istiqbol yaratdi.

Ma`lumki, amaliy jarayonlarni o'rganish ularni ifodalovchi matematik modelni tuzishdan boshlanadi, ya`ni uning asosiy o'ziga xos xususiyatlari ajratiladi va ular o'rtasida matematik munosabat o'rnatiladi. Hayotda uchraydigan barcha jarayonlarning matematik modellarini tuzish mumkin. Bu modellar o'rganilayotgan jarayonning asosiy xususiyatlarini o'zida iloji boricha to`laroq, to'kisroq mujassam qilishi kerak. Bu esa matematik modellarning ilojsiz murakkablashuviga sabab bo'ladi. Bunday matematik modellarni ishlatish, ular asosida qaralayotgan jarayon ko'rsatkichlarining xususiyatlarini tasvirlovchi yechim olish ham o'z navbatida murakkablashadi. Demak, izlanuvchi oldida bir-biriga zid ikki masala ko`ndalang bo'ladi: matematik modellar yetarli darajada mukammal va murakkab bo'lishi kerak, lekin bunday modellarni ishlatish qator qiyinchiliklarni ham keltirib chiqaradi.

Matematik model tuzilgach, ya`ni masala matematik ko'rinishda ifodalangach, uni ma`lum matematik usullar bilan tahlil qilish mumkin. Matematik modellarni tashkil qiluvchi algebraik, chiziqsiz, differensial, integral, integro-differensial va boshqa tenglamalarni yechish uchun matematika kurslarida keltirilayotgan aniq, analitik usullar faqat hususiy ko`rinishdagi, sodda tenglamalarning yechimini topish imkonini beradi, xolos. Shuning uchun, umumiyroq, murakkab tenglamalarning yechimlarini aniqlashga imkoniyat yaratuvchi sonli-taqribiy usullarni o'rganish va ulardan amaliy masalalarni yechishda unumli foydalanish dolzarb masalalardan hisoblanadi.

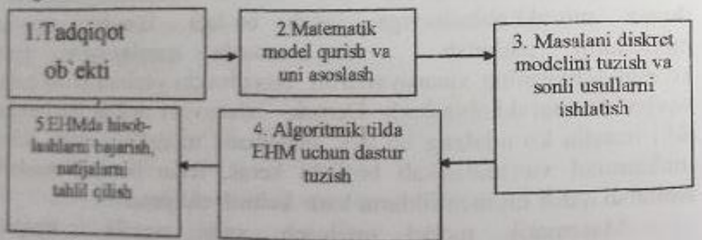
Matematik model hech qachon qaralayotgan ob`ektning xususiyatlarini aynan, to'la o'zida mujassam qilmaydi. U har xil faraz va cheklanishlar asosida tuzilgani uchun taqribiy xarakterga ega, demak uning asosida olinadigan natijalar ham taqribiy bo'ladi.

Modelning aniqligi, natijalarning ishonchlilik darajasini baholash masalasi matematik modellashtirishning asosiy masalalaridan biridir.

Amaliy masalalarni xal qilish jarayoni turli xil vositalar yordamida ifodalanishi mumkin. Bu vositalar funksional analiz elementlarini ishlatib, differensial va integral tenglamalar tuzishdan to hisoblash algoritmi va EHM dasturlarini yozishgacha bo'lgan bosqichlarni o'z ichiga oladi. Har bir bosqich yakuniy natijaga o'ziga xos ta`sir ko'rsatadi va ulardagi yo'l qo'yiladigan xatoliklar oldingi bosqichlardagi xatoliklar bilan ham belgilanadi.

Ob`ektning matematik modelini tuzish, uni EHMda bajariladigan hisoblashlar asosida tahlil qilish "hisoblash tajribasi" deb ataladi.

"Hisoblash tajribasi"ning umumiy sxemasi 1-rasmda ko'rsatilgan.



1-rasm

Birinchi bosqichda masalaning aniq qo'yilishi, berilgan va izlanuvchi miqdorlar, ob`ektning matematik model tuzish uchun ishlatish lozim bo'lgan boshqa xususiyatlari tasvirlanadi.

Ikkinchi bosqichda fizik, mexanik, ximiyaviy va boshqa qonuniyatlar asosida matematik model tuziladi. U asosan algebraik, chiziqsiz, differensial, integral va boshqa turdagi tenglamalardan iborat bo'ladi. Tizimda o'rganilayotgan jarayonga ta`sir ko'rsatuvchi

omillarning barchasini bir vaqtning o'zida hisobga olib bo'lmaydi, chunki matematik model juda murakkablashib ketadi. Shuning uchun, model tuzishda eng kuchli ta`sir etuvchi asosiy omillargina hisobga olinadi.

Uchinchi bosqichda masalaga mos diskret modellar tuzish va tenglamalar yechish uchun usullar aniqlanishi lozim. Masalan, matematik model differensial tenglama bilan tasvirlangan bo'lsa, sonli usullar yordamida u chekli sondagi nuqtalarda aniqlangan chekli-ayirmali tenglamalar bilan almashtiriladi.

To'rtinchi bosqichda sonli usullar yordamida aniqlangan algoritm asosida biror - bir algoritmik tilda EHMda ishlatish uchun dastur tuziladi. Dasturni tuzish ham o'ta murakkab va ma`suliyatli jarayon bo'lib, bunda qator talablar hisobga olinishi lozim. Masalan, u umumiylik xususiyatiga ega bo'lishi kerak, ya`ni matematik modelda ifodalangan masala parametrlarining yetarlicha katta sohada o'zgaruvchi qiymatlarida dastur ishonchli natija berishi kerak.

Keyingi paytlarda dastur tuzmasdan masalalarni analitik yoki taqribiy yechish imkoniyatini beradigan matematik dasturlar (Mathcad, Maple, Mathematika, Matlab kabi) ishlab chiqildi. Ularda qo'yilgan masalaning yechimini olish uchun buyruqlar (Maple, Matlab) yoki hisoblash jarayonini tashkil etuvchi formulalar (Mathcad) ketma-ketligidan foydalaniladi.

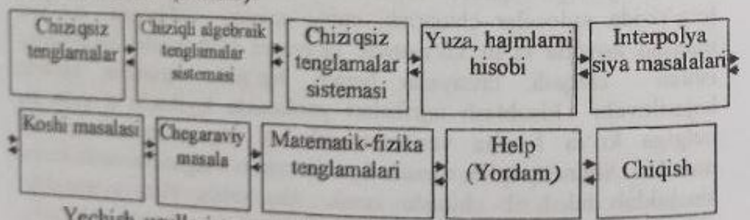
Oxirgi bosqichda mazkur dasturiy vositalar yordamida olingan natijalar bilan taqribiy usulda olingan sonli natijalar chuqur tahlil qilinib, baholanadi.

Natijalarga qarab, mutaxassis tahlil qilinayotgan jarayon to'g'risida xulosalar chiqaradi, uning amalga oshishiga ma`lum maqsad asosida ta`sir ko'rsatadi, jarayonni boshqarish vositalarini ishlab chiqadi, tavsiyalar beradi. Ko'plab variantlar asosida bajariluvchi hisoblash tajribalari yordamida loyihachi u yoki bu belgiga ko'ra barcha variantlar ichidan eng ma`qulini tanlashi mumkin. Shunday qilib, masalani yechuvchi o'z algoritmi va dasturini sinchiklab tekshirib chiqishi kerak. Aks xolda, Piter aytganidek: «Kompyuter hisoblovchining nochorligini ko'p martaga oshiradi», degan xodisa ro'y berishi mumkin.

1990 yillardan boshlab zamonaviy EHMlarning ishlab chiqilishi, ularni ilmiy va o'quv jarayonlariga kirib kelishi, ma`lum bir yutuqlardan tashqari ba`zi noqulayliklarni ham yuzaga keltirdi. Bu noqulaylik shaxsiy kompyuterlardan ilmiy, texnik va ijodiy masalalarni yechishda foydalanuvchilar uchun ancha sezilarli bo'ldi. Bunga asosiy sabab, shaxsiy kompyuterlarda katta EHMlar uchun yaratilgan tadbiqiy masalalarni yechish uchun mo'ljallangan dasturlar kutubxonasini mavjud emasligidir. Shuning uchun, hozirda ana shu kamchilikni bartaraf qilish yo'lida turli xil izlanishlar olib borilmoqda. Shulardan biri sifatida ma'lum bir sinf masalalarini yechishga mo'ljallangan amaliy dasturlar bog'lamlari(ADB)ni yaratishni ko'rsatish mumkin.

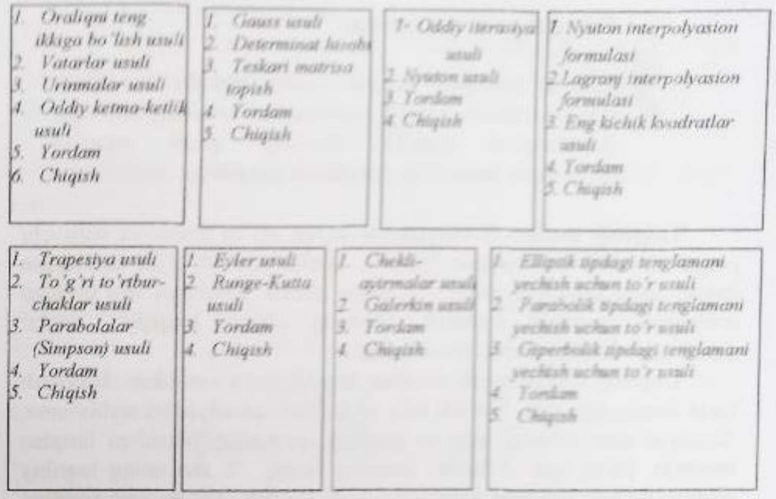
Ma'lumki, biror jarayonni hisob ishlarini bajarib beruvchi standart dastur o'z ichiga bir necha modul-dasturni olishi mumkin. Bu modul - dasturlar aniq bir masalani yechishga mo'ljallangan bo'ladi. Unga beriladigan va undan olinadigan ma'lumotlar tiplari, ko'rinishlari oldindan aniqlanib qo'yiladi. Modul-dastur prosedura yoki prosedura-funksiya ko'rinishida aniqlanilib, kompilyasiya qilinadi va foydalanuvchi yaratayotgan umumiy dasturning bosh qismida ***unit*** fayllari ro'yhatiga kiritib qo'yiladi (biz dasturlash tili sifatida Paskal tilidan foydalanganligimiz uchun barcha ko'rsatmalar shu tilga nisbatan aytiladi). Shunday qilib, dasturchi o'zining dasturlar kutubxonasiga ega bo'ladi va bu dasturlardan istalgan masalani yechish dasturida foydalanishi mumkin.

ADBni menyu prinsipida ishlashini tashkil etish dasturdan foydalanish unumdorligini keskin orttiradi. Bu holda asosiy menyuda yechiladigan masalalar sinfi ko'rsatilsa (2-rasm), menyu osti menyusida esa mos ravishda sanab o'tilgan masalalarga mos yechish usullari tanlanadi (3-rasm).



Yechish usullari menyusida zarur bo'lgan usul tanlangach, shu usulga mos kompilyasiya qilingan fayl o'z ishini davom ettiradi. Bu fayl standart holatda modulli prinsipda tuzilgan ishchi dasturni o'z ichiga oladi. Faylni ishlashi uchun zarur ma'lumotlar berilgach,

masalaning natijalari kompyuter ekraniga, printerga yoki ko'rsatilgan yo'l bo'yicha diskka yozilishi mumkin.



Nazorat savollari

1. Matematik model nima?
2. Matematik model qanday ko'rinishlarda bo'ladi?
3. Qanday usullarni sonli usullar deb ataymiz?
4. Hisoblash tajribasi qanday bosqichlardan iborat?
5. Amaliy dasturlar bog'lami nima?

2-§. Xatoliklar va ularni baholash

Tayanch so'z va atamalar

Xatolik, absolyut xatolik, nisbiy xatolik, xatoliklar ustida amallar, xatolik manbaalari, usulning xatoligi, boshlang'ich xatolik, bartaraf qilish mumkin bo'lmagan xatoliklar, hisoblash xatoliklari.

Taqribiy sonlar. Kompyuterda sonlar qo'zg'almas va suzuvchi vergul shaklida tasvirlanadi. Haqiqiy sonlar cheksiz o'nli kasrlardan iborat, lekin kompyuterning xotirasida chekli xonalarga ega bo'lgan sonlargina yozilishi mumkin. Shuning uchun, haqiqiy sonlar monitorda taqribiy tarzda tasvirlanadi.

Taqribiy sonlar ustida amallar bajarilganda xatolikni baholash katta ahamiyatga ega. Xatolik ikki xil bo'ladi: absolyut va nisbiy xato. Absolyut xato sonning aniq va taqribiy qiymatlari orasidagi farqdan iboratdir, ya'ni agar $\bar{X}$-biror sonning aniq, X esa uning taqribiy qiymati bo'lsa, absolyut xato $\Delta X = |X - \bar{X}|$ bo'ladi. Nisbiy xato sonning absolyut xatosini uning taqribiy qiymatiga nisbatiga teng, ya'ni $\delta_x = \Delta X/|\bar{X}| \approx \Delta X/|X|$. Sonlarning aniq qiymati ko'p masalalarni yechishda noma'lum bo'ladi. Shuning uchun, pirovard (chegara, limit) absolyut xato tushunchasi kiritiladi: u absolyut xatolarning yuqori chegarasidir, ya'ni $\Delta_x \ge \Delta X$. Sonning aniq qiymati quyidagi oraliqda bo'ladi:

$$X - \Delta_X \le \bar{X} \le X + \Delta_X$$

Arifmetik amallar bajarishda absolyut va nisbiy xatolarning o'zgarishini ko'rib chiqaylik.

Yig'indi (ayirma) xatoligi. Ikkita $\bar{X} = X + \Delta_X, \bar{Y} = Y + \Delta_Y$ son berilgan bo'lsa, ularning yig'indisi

$$\bar{X} + \bar{Y} = X + Y + \Delta_X + \Delta_Y$$

bo'ladi. Yig'indining absolyut xatoligi:

$$\Delta_{X+Y} = \Delta_X + \Delta_Y$$

Xuddi shunday, ayirmaning absolyut xatoligi quyidagicha bo'ladi:

$$\Delta_{X-Y} = \Delta_X + \Delta_Y .$$

Ko'paytma xatoligi. Ko'paytmaning xatoligi quyidagicha topiladi:

$$\bar{X} \cdot \bar{Y} = (X + \Delta_X)(Y + \Delta_Y) = X \cdot Y + X \cdot \Delta_Y + Y \cdot \Delta_X + \Delta_X \cdot \Delta_Y$$

$\Delta_X \cdot \Delta_Y$ miqdor ikkinchi darajali kichik miqdordir, uni e'tiborga olmaymiz. Demak, ko'paytmaning absolyut xatoligi quyidagicha bo'ladi:

$$\Delta_{XY} = X \cdot \Delta_Y + Y \cdot \Delta_X$$

Bo'linma xatoligi. Nisbatning absolyut xatosini topish uchun ushbu:

$$\frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = \frac{X + \Delta_X}{Y + \Delta_Y} = \frac{X + \Delta_X}{|Y|(1 + \Delta_Y/|Y|)} = \frac{X + \Delta_X}{|Y|}\left[1 - \frac{\Delta Y}{|Y|} + \left(\frac{\Delta Y}{|Y|}\right)^2 - \ldots\right]$$

almashtirishlarni bajaramiz. Bu yerda $\Delta Y/|Y| << 1$ ekanligidan foydalanib $(1 + \Delta Y/|Y|)^{-1}$ ifodani qatorga yoydik. Ikkinchi va undan yuqori darajali kichik miqdorlarni hisobga olmagan holda ushbu formulalarga ega bo'lamiz:

$$\frac{\bar{X}}{\bar{Y}} \approx \frac{X}{Y} + \frac{\Delta_X}{|Y|} - \frac{X}{|Y|^2}\Delta_Y \rightarrow \Delta_{X/Y} = \frac{\Delta_X}{|Y|} + \frac{X}{|Y|^2}\Delta_Y$$

Arifmetik amallarning nisbiy xatolar (δ) quyidagicha topiladi:

$$\delta_{X+Y} = \frac{\Delta_{X+Y}}{|X+Y|} = \frac{X}{|X+Y|} \cdot \frac{\Delta_X}{X} + \frac{Y}{|X+Y|} \cdot \frac{\Delta Y}{Y} = \frac{X}{|X+Y|} \cdot \delta_X + \frac{Y}{|X+Y|} \cdot \delta_Y;$$

$$\delta_{X-Y} = \frac{\Delta_{X-Y}}{|X-Y|} = \frac{X}{|X-Y|} \cdot \delta_X + \frac{Y}{|X-Y|} \cdot \delta_Y;$$

$$\delta_{XY} = \frac{\Delta_{XY}}{|XY|} = \frac{X \cdot \Delta_Y}{|XY|} + \frac{Y \cdot \Delta_X}{|XY|} = \delta_X + \delta_Y;$$

$$\delta_{X/Y} = \frac{\Delta_{X/Y}}{|X/Y|} = \left(\frac{\Delta X}{|Y|} + \frac{\Delta Y}{|Y|^2}X\right)\frac{|Y|}{|X|} = \delta_X + \delta_Y$$

Yuqorida keltirilgan formulalar arifmetik amallar bajarishda yo'l qo'yiladigan absolyut va nisbiy xatolarni baholash imkoniyatini beradi.

Biror $u = u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ funksiyada $x = (x_1, \ldots, x_n)$ argumentlar $\Delta_x = (\Delta_{x_1}, \ldots, \Delta_{x_n})$ xatoliklar bilan berilgan bo'lsa, funksiyaning absolyut va nisbiy xatoliklari quyidagi ko'rinishda aniqlanadi:

$$\Delta_u = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}\right|\Delta_{x_i}, \qquad (1)$$

$$\delta_u = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial \ln u(x_1,\dots,x_n))}{\partial x_i}\right|\Delta_{x_i}. \quad (2)$$

Yuqoridagi barcha formulalar shu umumiy formulalardan keltirib chiqarilishi mumkin.

Misol 1. $u = x_1 + \dots + x_n$, $\partial u/\partial x_i = 1$, $\Delta_u = \Delta_{x_1} + \dots + \Delta_{x_n}$.

Misol 2. $u = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$, $\partial \ln u/\partial x_i = 1/x_i$, $\delta_u = \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_n}$.

Izoh. Xatoliklarni hisoblashda, avval algebraik yig'indining absolyut xatosini, so'ng ko'paytmaning nisbiy xatosini hisoblash qulay.

Hisoblash xatoliklari. Masalani EHMda yechish jarayonida muayyan xatoliklarga yo'l qo'yish mumkin. Quyida ulardan ayrimlarini keltirib o'tamiz.

1. Bartaraf qilish mumkin bo'lmagan xatoliklar. Bu xildagi xatoliklar masalani yechishda tuzilgan matematik modelda yo'l qo'yilgan taxminlar, farazlar va shuning oqibatida modelda paydo bo'lgan ayrim kamchiliklar va qusurlar bilan aniqlanadi. Masalan, matematik model unga kiruvchi o'zgaruvchilar va parametrlarning o'zgarish sohasining ma'lum bir qismida yaxshi natijalar berib, boshqa bir qismida esa yaroqsiz yechim berishi mumkin. Shuning uchun, matematik modelning "ishlash" sohasini topish masalani yechish bosqichlaridagi hal qilinishi lozim bo'lgan asosiy vazifalardan biridir.

Bartaraf qilish mumkin bo'lmagan xatoliklarga matematik modellarda ishlatiluvchi parametrlarning dastlabki berilgan qiymatlarining xatoliklari ham kiradi. Parametrlarning bu qiymatlarini har xil fizik, texnik, kimyoviy tajribalar, muhandislik izlanishlari asosida topiladi. Ayrim parametrlar esa dastlabki hisob-kitoblar orqali asoslanadiki, shu bosqichning o'zidayoq ularga hisoblash xatoliklari qo'shiladi. Tajribalar aniqligini oshirib bu xatoliklarni kamaytirish mumkin, lekin ularni batamom bartaraf etib bo'lmaydi. Hisoblashlarda matematik modelda qatnashuvchi parametrlarning dastlabki qiymatlari bir-biriga yaqin tartibdagi xatoliklarga ega bo'lishiga erishish zarur. Chunki ma'lum parametrlarning juda yuqori tartibdagi aniqlik bilan olinishi yakuniy natijalarni ham shunday aniqlikda olishga hamma vaqt imkoniyat yaratmaydi.

2. Matematik usullarning xatoliklari. Matematik modeldagi tenglamalarni hamma vaqt ham aniq usullar bilan yechib bo'lmaydi. Faqat, ayrim hususiy hollardagina buning imkoniyati mavjud. Lekin, olingan yechim ko'pincha juda murakkab ko'rinishda bo'ladi, ular asosida topilgan ko'rsatkichlarning son qiymatlarini EHMda hisoblash o'z navbatida oson masala emas. Bunday hollarda masala taqribiy usullar yordamida yechiladi. Tabiiyki, bunda aniq yechim emas, balki taqribiy yechim hosil qilinadi.

Taqribiy usullarning asosini sonli usullar tashkil qiladi. Sonli usullarning aniqligini ma'lum darajada oshirish mumkin, lekin, bu usulning EHMda ishlashiga ketadigan vaqt miqdorini keskin ko'paytirib yuboradi. Sonli usul aniqligini o'ta oshirish hamma vaqt ham natijalarning aniqligini oshiravermaydi. Shuning uchun, sonli usullarning aniqligini matematik modelga kiruvchi parametrlar aniqligidan bir-ikki tartib yuqoriroq olish bilan cheklanish mumkin.

Sonli usullarga qo'yiladigan talablar. Matematik modeldagi tenglamalarni har xil sonli usullar bilan yechish mumkin. Lekin, hamma usullar ham kerakli aniqlikdagi yechimni beravermaydi. Ayniqsa, masala hozirgi zamon EHMlarida yechilganda hisoblash algoritmi turli, o'ziga xos shartlarni bajarishi kerak. Sonli usullarga qo'yiladigan talablar ikki guruhga bo'linadi. Birinchi guruhga sonli usullar qo'llanishi natijasida xosil qilingan diskret(uzuq-uzuq) masalaning matematik modeldagi dastlabki masalaga mos kelish shartlari kiradi.

Sonli usullarning yaqinlashishi, diskret masalalarda saqlanish qonunlarining bajarilishi, turg'unlik, korrektlik kabi talablar birinchi guruhga kiradi. Shulardan ayrimlarini qarab o'tamiz.

Matematik modeldagi parametrlarning dastlabki qiymatlaridagi xatolikni bartaraf etish mumkin bo'lmagan xatolik ekanligini yuqorida ko'rsatgan edik. Bu xatolikni masala yechimiga ko'rsatadigan ta'sir darajasini bilish katta ahamiyatga ega. Sonli usullarning bunday sezuvchanligini (ta'sirchanligini) turg'unlik degan tushuncha yordamida tekshirish mumkin.

Agar quyidagi shartlar bajarilsa, masala korrekt qo'yilgan deyiladi: 1)yechim mavjud; 2)yagona; 3)turg'un. Ko'rsatilgan shartlardan birortasi bajarilmasa, masala korrekt qo'yilmagan deyiladi. Bunday masalalarga sonli usullarni qo'llash foydasizdir, chunki bunda yetarli darajadagi shartlarni qanoatlantiruvchi sifatli yechimni olish imkoniyati yo'qdir. Shuni ham aytish kerakki, ayrim korrekt qo'yilmagan masalalarni yechish usullari ham yaratilgan. Bu usullar dastlabki qo'yilgan masalani emas, unga korrekt qilib qo'yilgan yordamchi masalani yechishga asoslangandir. Yordamchi masalada qo'shimcha α parametr qatnashadi. Shunday yo'l bilan dastlabki masala regulyarlashtiriladi. Agar $\alpha \to 0$ bo'lsa, yordamchi masalaning yechimi dastlabki masalaning yechimiga intilishi kerak.

Yuqoridagiga o'xshash sonli usullarning korrektlik tushunchasi kiritilgan. Agar masaladagi parametrlarning barcha qiymatlarida sonli yechim mavjud, yagona va turg'un bo'lsa, u korrekt deyiladi.

Sonli usullar bilan topilgan yechim masalaning haqiqiy yechimiga yaqin bo'lishi kerak. Buni sonli usullarning yaqinlashishi tushunchasi yordamida tahlil qilishimiz mumkin. Diskretlashgan masalalar misolida yaqinlashish tushunchasini quyidagicha berishimiz mumkin. Agar diskretlashtirilgan masalaning yechimi diskretlashtirish parametri nolga intilganda dastlabki uzluksiz masalaning yechimiga intilsa, sonli usul yaqinlashadi deyiladi.

Sonli usullar ichida eng ko'p ishlatiladiganlari ayirmali usullardir. Bu usullar yordamida uzluksiz matematik modellardan diskret modellar xosil qilinadi. Buning uchun, masala qaralayotgan soha diskret nuqtalar majmuasi- to'r bilan almashtiriladi, tenglamadagi, chegaraviy va boshlang'ich shartlardagi xossalardan chekli ayirmalarga o'tiladi. Natijada, to'rning tugun nuqtalarida aniqlangan funksiyalarga nisbatan algebraik tenglamalar sistemasi xosil qilinadi. Ma`lumki, matematik modellar asosida yotuvchi tenglamalar aksariyat hollarda fizika, mexanikadagi saqlanish qonunlari asosida tuziladi. Bu qonunlar matematik modeldagi tenglamalar diskret tenglamalar-chekli ayirmali sxemalar bilan almashtirilganda ham bajarilishi kerak. Bunday chekli ayirmali sxemalarga konservativ sxemalar deyiladi. Konservativ sxemalar tenglamalar yechimini fizik nuqtai-nazardan to'g'ri olish imkoniyatini beradi. Shuning uchun, chekli ayirmali sxemalarning konservativlik sharti masalalar yechishda boshqa shartlar qatori tekshirilishi kerak.

Sonli usullarga qo'yiladigan talablarning ikkinchi guruhini diskret modelni kompyuterda o'tkazish imkoniyatlari tashkil qiladi. Sonli usullar shunday algoritmlarga olib kelishi kerakki, kompyuterning xotira qurilmasi ular uchun yetarli bo'lishi va hisob-

kitob vaqti iloji boricha kam bo'lishi lozim. Hisoblash algoritmlari yetarli samaradorlikka ega bo'lishi uchun algoritmdagi arifmetik va mantiqiy amallar soni iloji boricha kam bo'lib, xotira qurilmasida kam hajmni egallashi kerak.

Nazorat savollari

1. Xatolikning qanday turlari mavjud?
2. Absolyut xatolik nima?
3. Nisbiy xatolik nima?
4. Xatolikning manbalari qaerda?
5. Sonli usullarga qanday talablar qo'yiladi?

XULOSA

✓Mazkur bobda matematik model tushunchasi, uni amaliy masalalarni yechishdagi o'rni, modelni tuzishdagi asosiy omillar, modelning aniqligi, uning ishonchlilik darajasini baholash haqida mulohazalar keltirildi.

✓Hisoblash tajribasi va uning bosqichlari strukturasi tavsiya qilinib, har bir bosqichning vazifasi tahlil etildi.

✓Modul- dastur tushunchasi, dasturlar kutubxonasi, amaliy dastur ta`minoti, asosiy menyular haqida umumiy ma`lumotlar berilib, amaliy masalalarni yechishda qo'llanadigan sonli usullarning turli xil guruhlari strukturasi menyu osti bo'limlari sifatida shakllantirildi.

✓Xatoliklar, ularning turlari, yig'indi xatoligi, ko'paytma va bo'linma xatoliklarini baholashda qo'llanadigan formulalar keltirildi.

✓Bartaraf qilish mumkin bo'lmagan xatoliklar va matematik usullarning xatoliklari haqida mulohazalar yuritildi.

✓Sonli usullarda topilgan yechimning haqiqiy yechimga yaqinlashish masalasi, masalani korrektligi, diskret modelni kompyuterda o'tkazish imkoniyatlari tahlil etildi.

?! Bobga doir muammoli vaziyatlar!

- *Matematik modelni tuzishda izlanuvchi o'rganilayotgan jarayonning barcha xususiyatlarini hisobga olish imkoniga egami? Bu matematik modelga qanday ta`sir qiladi?*
- *Matematik modelni yechishda olingan natijalarning taqribiy bo'lishiga sabab bo'luvchi boshlang'ich omilni ko'rsata olasizmi?*
- *Matematik modellashtirishda modelning aniqligi va natijalarning ishonchlilik darajasini baholash masalasi qanday hal etiladi?*
- *Masalani yechish bosqichlarini ifodalovchi ketma-ketlikni o'zgartirish uchun takliflaringiz bormi? Aksincha bo'lsa nima uchun?*
- *Algoritmlar asosida dastur tuzish masalasida qaysi talablarga rioya etish zarur deb hisoblaysiz? Dastur ishonchli natija berishi uchun qanday tavsiyalar berasiz?*
- *Amaliy masalalarning matematik modellarini sonli usullar bilan hisoblash zururiyati qaerdan kelib chiqadi?*
- *Haqiqiy sonlarni, xususan "juda katta" va "juda kichik" sonlarni monitorda aks ettirish imkoniyatini tushuntira olasizmi?*
- *"Hayotda barcha o'lchov natijalari nisbiydi" degan fikrga Siz qanday qaraysiz? Fikringizni izohlang.*
- *Bartaraf qilish mumkin bo'lmagan xatoliklar haqida nima deya olasiz. Ularning asosiy manbaalari qaerda deb o'ylaysiz?*
- *Qo'yilgan masalani yechishda sonli usullarning aniqligini juda oshirish imkoni tug'ildi deylik, undan to'liq foydalanasizmi? Bu ijobiy samara beradi deb o'ylaysizmi?*
- *Sonli usullarni qo'llashda kerakli aniqlikdagi yechimni olish uchun qanday talablarga rioya etishni tavsiya qilasiz? Bu talablarni bajarmaslik qanday oqibatlarga olib keliishi mumkin?*
- *Masala korrekt qo'yilmaganligini qachon aniqlash mumkin, uni "yaxshilash" bo'yicha yo'l-yo'riqlar bera olasizmi?*

2-BOB. CHIZIQSIZ TENGLAMA VA TENGLAMALAR SISTEMASINI TAQRIBIY YECHISh

Fizika, mexanika, texnika va tabiatshunoslikning xilma-xil masalalari chiziqli bo'lmagan tenglamalarni yechishga olib keladi. Masalan, noma`lumlarni yo'qotish yo'li bilan murakkab algebraik va geometrik munosabatlar ikkinchi yoki yuqori darajali algebraik tenglamalarga keltiriladi. Shu bois, chiziqli bo'lmagan tengla-malarni va tenglamalar sistemasini yechish matematik analizning muhim masalalaridan hisoblanadi.Ushbu bobda chiziqli bo'lmagan har qanday tenglama va tenglamalar sistemasini taqribiy yechish imkoniyatlari tahlil etiladi, bir nechta taqribiy usullar va ularning geometrik ma`nolari, mohiyati tushuntirilib, usulga mos ishchi algoritmlar va dastur ta`minotlari tavsiya qilinadi.

1-§. Umumiy tushunchalar

Tayanch so'z va atamalar

Tenglama, chiziqsiz tenglama, transsendent tenglama, tenglamaning yechimi, ildizning mavjudlik sharti, oraliqni ajratish usullari, grafik usul, analitik usul, algoritmik usul .

Chiziqli bo'lmagan tenglamalarni umumiy holda quyidagi shaklda ifodalash mumkin:

$$f(x) = 0 \qquad (2.1)$$

Chiziqli bo'lmagan tenglamalarni ikki xilga bo'lish mumkin: algebraik va transsendent. Algebraik tenglamalar deb algebraik (butun, rasional, irrasional) funksiyalardan tashkil topgan tenglamalarga aytiladi. Agar tenglamada boshqa funksiyalar (trigonometrik, ko'rsatkichli, logarifmlik va h.k) qatnashsa, bunday tenglamaga transsendent tenglama deyiladi.

Tenglamaning yechimi deb x noma`lumning shunday qiymat-lariga aytiladiki, ularni (2.1) tenglamaga qo'yganda, tenglama qanoatlantiriladi. Lekin, amalda bunday tenglamalarning aniq yechimlarini topish juda qiyin yoki umuman mumkin emas. Bunday hollarda, yechimni taqribiy qiymatini topishga imkon beruvchi taqribiy hisoblash usullari qo'llaniladi. Chiziqsiz tenglamalarni yechish usullari ikkita guruhga bo'linadi: aniq (to'g'ri) va iteratsion (taqribiy) usullar. Aniq usul yordamida tenglamaning yechimi formulalar orqali aniqlanadi. Masalan, kvadrat tenglamaning yechimini topishni shu usulga misol sifatida ko'rsatish mumkin:

$ax^2+bx+c=0$ -chiziqsiz tenglamani yechimlari Viet formulalari orqali beriladi (Kordano, Ferrari formulalari):

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Lekin, bunday formulalar 3-, 4-darajali algebraik tenglamalar uchun mavjud xolos.

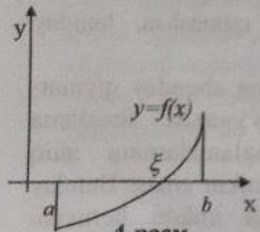
Taqribiy yechish uchun qo'llaniladigan ko'pgina usullarda tenglamaning ildizlari ajratilgan, ya`ni shunday kichik atrofchalar topilganki, bu atrofchalarda tenglamaning bittagina ildizi joylashadi, deb faraz qilinadi. Bu atrofning biror nuqtasini dastlabki yaqinlashish sifatida qabul qilib, taqribiy usullardan birortasini qo'llab, izlanayotgan yechimni berilgan aniqlik bilan hisoblash mumkin. Demak, chiziqsiz tenglamani taqribiy yechish ikki bosqichda olib boriladi:

1. Ildizni ajratish, ya`ni iloji boricha shunday kichik oraliq olinadiki, natijada shu oraliqda tenglamani bitta va faqat bitta haqiqiy ildizi mavjud bo'lsin.
2. Dastlabki yaqinlashish ma`lum bo'lsa, ildizni berilgan aniqlik bilan hisoblash.

Masalaning birinchi qismi ikkinchisiga qaraganda ancha murakkabdir. Chunki umumiy holda ildizni ajratishning samarali usuli mavjud emas.

Quyidagi teoremalar ildiz yotgan oraliqlarni ajratishga yordam beradi:

1-teorema: Agar uzluksiz $f(x)$ funksiya biror (a,b) oraliqning chetki nuqtalarida har xil ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u vaqtda bu oraliqda (2.1) tenglamaning hech bo'lmaganda bitta haqiqiy ildizi mavjuddir. Ya`ni, shunday ξ son $\xi\in(a,b)$ topiladiki, $f(\xi)=0$ bo'ladi (4-rasm).



4-расм

Agar shu bilan birga, birinchi tartibli hosila $f'(x)$ mavjud bo'lib, u o'zining

ishorasini shu oraliqda saqlasa, u vaqtda bu oraliqda olingan ildiz yagonadir.

2-teorema: $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqning chetki nuqtalarida har xil ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u vaqtda tenglamani a va b nuqtalar orasida yotadigan ildizlar soni toqdir. Agar $f(x)$ funksiya oraliqning chetki nuqtalarida bir xil ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u vaqtda tenglama ildizi oraliqda mavjud emas yoki ularning soni juftdir.

Ildizlarni ajratishning turli usullari mavjud. Amalda analitik, grafik va algoritmik usullardan keng foydalaniladi. Ularni qisqacha tavsiflaymiz:

1) **Analitik usul**- bunda $f(x)$ funksiyaning ishorasi o'zgaradigan oraliqlari topiladi. Albatta, $f'(x)=0$ tenglama yordamida. Bu oraliqlarda tenglamaning yagona ildizlari yotadi.

2) **Algoritmik usul**- bunda ildiz aniqlanadigan kesma uzunligi $[a,b]$ iloji boricha kattaroq qilib tanlab olinadi. Oraliqqa tegishli har bir kichik $[x_i,x_{i+1}]$ kesmalarda funksiya ishoralari o'zgaradigan oraliqlar va ularning soni aniqlanadi. Har safar $f(x_i)\cdot f(x_{i+1})<0$ sharti tekshiriladi. Agar shart bajarilmasa, navbatdagi kesma tekshirib borilaveradi. Bu jarayon kes-malar $[a,b]$ oraliqni to'liq qoplab olmagunicha davom ettiriladi. Bunda topilgan oraliqlarda ildizning yagonaligiga ham, ba`zi bir ildizlarni aniqlanmay qolishligiga ham asos bor. Chunki, $[a,b]$ yetarlicha katta bo'lganda funksiya ishoralari har xil bo'lgan oraliqda u abssissa o'qini bir necha marta kesib o'tgan ham, aslida ishora o'zgarganu, lekin oraliq chetlarida bir xil ishorali bo'lib qolgan va ildizi yo'qotilgan bo'lishi mumkin. Shuning uchun, olingan natijalarni tekshirish maqsadida ularni $[a,b]$ning har xil qiymatlarida olib ko'rish maqsadga muvofiqdir. Agar natijalar barcha holda takrorlansa ularni haqiqatga yaqin deb hisoblash mumkin.

3) **Grafik usul**-bu usul haqiqiy ildizni ajratishda katta yordam beradi. Buning uchun, $y=f(x)$ funksiyaning grafigini taqribiy ravishda chizib olamiz. Grafikning OX o'qi bilan kesishgan nuqtalarining absissalari ildizning taqribiy qiymatlari deb olinadi. Agar $f(x)$ning ko'rinishi murakkab bo'lib, uning grafigini chizish qiyin bo'lsa, u vaqtda grafik usulni boshqacha tarzda qo'llash kerak. Buning uchun, $f(x)=0$ tenglamani unga teng kuchli bo'lgan $f_1(x)=f_2(x)$

ko'rinishda tasvirlanadi. Keyin $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalarning grafiklari alohida-alohida chizilib, ikkala grafikning kesishish nuqtalari topiladi. Bu nuqtalarning abssissalari ildizlarning taqribiy qiymatlari deb qabul qilinadi. Shunday qilib, taqribiy yagona ildiz yotgan $[a,b]$ kesmani haqiqatda to'g'ri olinganligini analitik yo'l bilan tekshirib ko'rish mumkin. Buning uchun, yana ildizning mavjudlik sharti $f(a)\cdot f(b)<0$ dan foydalanamiz. Agar shart bajarilsa oraliq to'g'ri tanlangan bo'ladi.

muammo **Oraliqni tekshirish jarayonida $f(a)f(b)=0$ sharti bajarilsa, siz bu vaziyatda qanday xulosalarga kelasiz?**

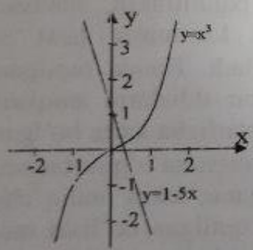
Oraliqni grafik usulda ajratish jarayonini misol bilan tushuntiramiz.

Misol. Ushbu

$$f(x)=x^3+5x-1$$

tenglamaning taqribiy ildizi yotgan oraliqni ajrating.

Yechish. Buning uchun $f_1(x)=x^3$ va $f_2(x)=1-5x$ funksiyalarning grafigini chizib olamiz (5-rasm).



5-rasm

Grafikdan ko'rinib turibdiki, chiziqsiz tenglama faqat bitta ildizga ega va u $[0,1]$ oraliqda bo'lishi mumkin. Chunki x=0 va x=1 nuqtalarda $f(x)$ funksiya har xil ishorali qiymatlarga ega: $f(0)=-1<0$, $f(1)=5>0$. Demak, ildiz $[0,1]$ kesmada yotadi. Oraliq aniqlangach, turli usullardan birini ishlatib, kerakli aniqlikdagi yechimni olish mumkin.

Algebraik va transsendent tenglamalarni taqribiy yechishda yo'l qo'yiladigan xatoni umumiy holda baholashda quyidagi teoremadan foydalanamiz:

3-teorema: Agar (a,b) kesmada ξ soni $f(x)=0$ tenglamaning aniq, x esa taqribiy yechimi va ularning ikkalasi ham $a\le x\le b$ kesmada joylashgan bo'lib, $|f'(x)|\ge m_1>0$ bo'lsa, u holda quyidagi baho o'rinlidir. $|x-\xi|\le\dfrac{f(x)}{m_1}$.

Keyingi mavzularda chiziqsiz tenglamalarni yechishning iteratsion usullarining ayrimlari batafsilroq keltiriladi.

Nazorat savollari

1. Qanday tenglamani chiziqsiz tenglama deb ataladi?
2. Chiziqsiz tenglamaning nechta yechimi mavjud?
3. Chiziqsiz tenglamani yechishda oraliqni qanday ajratiladi?
4. Oraliqni ajratishning grafik usulini tushuntirib bering.
5. Oraliqni ajratishning analitik usulida qaysi formula qo'llaniladi ?
6. Algebraik va transsendent tenglamalarni taqribiy yechishda yo'l qo'yiladigan xatolikni umumiy holda baholashda qaysi teoremadan foydalaniladi?

2-§. Oraliqni teng ikkiga bo'lish (biseksiya) usuli

Tayanch so'z va atamalar

Kesmaning o'rtasi, ildizning mavjudlik sharti, ildizga yaqinlashish formulasi, usulning geometrik ma'nosi, ishchi algoritm, dastur matni, usulning xatoligi

Bu usul iteratsion usullar ichida eng soddasidir. Uni ishlatish uchun maxsus shartlarning bajarilishi talab qilinmaydi. Faqat $f(x)=0$ chiziqsiz tenglamaning izlanayotgan ildizi ajratilgan bo'lishi kerak, ya'ni xqs ildiz $[a,b]$ kesmada yotgan bo'lsin. Kesmaning o'rtasi $c_0=\frac{a+b}{2}$ da $f(c_0)$ni hisoblaymiz. Berilgan $[a,b]$ kesmani ikkita teng $[a,c_0]$, $[c_0,b]$kesmalarga bo'lib, shu kesmalarning chetlarida $f(x)$ funksiyaning ishoralarini tekshiramiz. Qaysi kesmaning chetki nuqtalarida $f(x)$ har xil ishorali qiymatlarni qabul qilsa, $x=c$ ildiz o'sha kesmada bo'ladi. U yoki bu kesmada shunday bo'lishi aniq, chunki ildiz $[a,b]$ kesmada yotadi. Ildiz yotmagan $[a,c_0]$, yoki $[c_0,b]$ kesmani tashlab yuborib, qolgan kesmani yana ikkiga bo'lamiz. Masalan $f(a)\cdot f(c_0)<0$ bo'lsa, $c_1=\frac{a+c_0}{2}$ deb olib, $f(c_1)$ ni hisoblaymiz. Yana $[a,c_1]$, yoki $[c_1,c_0]$ kesmalarda $f(x)$ning ishoralari tekshiriladi va hokazo. Shunday qilib, har bir iteratsiyadan so'ng yechim yotgan kesma uzunligi ikki baravar qisqarib boradi.

Bu jarayonni to kesma uzunligi ε dan kichik bo'lguncha davom ettiriladi. Bunda ε - yechim aniqligini ifodalovchi musbat, o'ta kichik son. Oxirgi kesmaning ixtiyoriy nuqtasi taqribiy yechim sifatida qabul qilinadi. Demak, biz usulni qo'llash natijasida bir-birini ichida joylashgan cheksiz $(a_1,b_1)...(a_n,b_n)$ kesmalar ketma-ketligini hosil qilamiz va oxirgi toraygan kesma

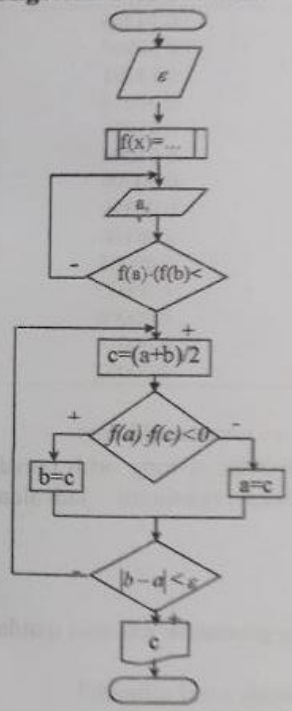
$$b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)$$

ga teng bo'ladi. Bunda yo'l qo'yilgan xatolik $\Delta x_n=\frac{b-a}{2^n}$ talab qilingan ε aniqlik bilan solishtirib chiqiladi. Agar $\Delta x_n<\varepsilon$ shart bajarilsa, masala yechilgan bo'ladi.

Yuqorida qayd qilingan ijobiy hislatlari bilan birga biseksiya, ya'ni kesmani ikkiga bo'lish usulining asosiy kamchiligi, uning o'ta sekin yaqinlashishini ham aytib o'tish lozim. Shuning uchun, bu usul ketma-ket yaqinlashishlarning yuqori tezligi talab qilinmagan hollarda ishlatiladi.

Endi usul algoritmini blok-sxemalarda ifoda etib, u asosida dastur ta'minotini yarataylik va algoritm hamda dasturning ishga yaroqlilik holatini «test» misol orqali baholaylik.

Algoritm blok-sxemasi



Dastur matni

```
Program Teng_bolish;
label L1;
var
  k:integer;
  a, b, c, eps : real;
function f(x:real):real;
begin f:=sqrt(x+2)+0.7*x;
end ;
begin
  k:=0;
  L1: writeln('a,b='); readln( a,
b);
  if f(a)*f(b)>0 then goto L1;
  readln(eps);
  while abs(b-a)>eps do
   begin
    C:=(a+b)/2; k:=k+1;
    writeln (k,  c:6:5, f(c):8:5);
    if f(a)*f(c)<0 then b:=c else
  a:=c;
  end;
end.
```

<u>Misol</u>. Oraliqni teng ikkiga bo'lish usuli yordamida

$$\sqrt{x+2}+0.7x=0$$

tenglamani biror ildizini 0,001 aniqlikda toping.

Yechish. Dastlab, tenglamaning ildizi yotgan oraliqni yuqorida berilgan usullar yordamida ajratamiz. Grafik usulni qo'llab tenglamaning yagona ildizi (-2,-1)oraliqda ekanligini ko'rishimiz mumkin:

$$f(-2) = -1.4 < 0, \quad f(-1) = 0.3 > 0$$

a=-2, b=-1, ε=0.001 boshlang'ich qiymatlarni kiritamiz va oraliqni teng ikkiga bo'lishlar yordamida yechimga yaqinlashuvchi algoritmni dastur bo'yicha qo'llab, quyidagi natijalarga erishamiz.

n	C_n	$f(C_n)$
1	-1.50000	0.34289
2	-1.25000	0.00897
3	-1.12500	0.14791
4	-1.18750	0.07014
5	-1.21875	0.03076
6	-1.23438	0.01094
7	-1.24219	0.00099
8	-1.24609	0.00399
9	-1.24414	0.00150
10	-1.24316	0.00025
11	-1.24268	0.00037
12	-1.24292	0.00006
13	-1.24304	0.00010
14	-1.24298	0.00002

Olingan natijalardan ko'rinib turibdiki, $\varepsilon = 0{,}001$ aniqlikdagi x=-1,24414 taqribiy yechimga n=9 da erishdik. n ning ortib borishi bilan yechim aniqligi ham ortib borayotganligini jadvaldan kuzatishimiz mumkin.

Nazorat savollari

1. Oraliqni teng ikkiga bo'lish usulining geometrik ma'nosi qanday ifodalanadi?
2. Usulga mos asosiy ishchi formula qanday xosil qilinadi?
3. Oraliqni teng ikkiga bo'lish usulining afzalligi nimada?
4. Bu usulda dastlabki yaqinlashishni aniqlash kerakmi?
5. Oraliqni teng ikkiga bo'lish usulining xatoligi qanday baholanadi?

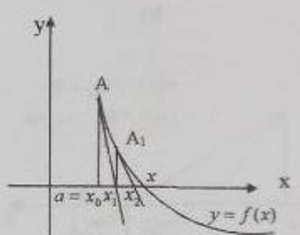
3-§. Urinmalar (Nyuton) usuli

Tayanch so'z va atamalar

Dastlabki yaqinlashish, dastlabki yaqinlashishni aniqlovchi shart, usulning geometrik ma'nosi, asosiy ishchi formula, N'yuton usulining xatoligi, usulning ishchi algoritmi, dastur matni.

Oraliqni teng ikkiga bo'lish usulidagi amallar sonining ko'pligi urinmalar usulida deyarli uchramaydi. Agar dastlabki yaqinlashish to'g'ri tanlansa, bu usulda taqribiy yechim juda tez topiladi. Usulning mohiyati quyidagicha:

$f(x)=0$ tenglama $[a,b]$ oraliqda bitta taqribiy ildizga ega deb faraz qilaylik.



6-расм

Dastlabki yaqinlashish sifatida a yoki b nuqtalardan birini olishimiz mumkin va shu tanlangan nuqtadan urinma o'tkazamiz. Aytaylik urinma $A(a, f(a))$ nuqtadan o'tsin (6-rasm). Urinmaning OX o'qi bilan kesishgan nuqtasi x_1 ga mos nuqtani A_1 deb olib, endi $A_1(x_1, f(x_1))$ nuqtadan urinma o'tkazamiz, va h. Urinmaning OX o'qi bilan kesishgan nuqtalari ildizga yetarli aniqlikkacha yaqinlashguncha jarayon davom etadi.

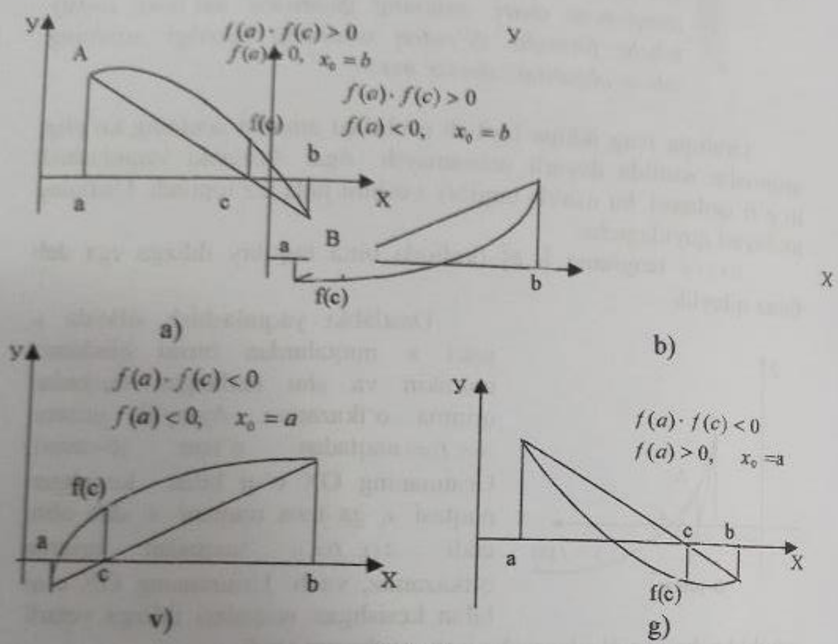
Bu usulda $x_0$ni to'g'ri tanlash juda muhimdir. Shuning uchun, dastlabki yaqinlashish x_0 ni tanlash masalasiga alohida e'tibor beramiz. Buning uchun $(a, f(a))$ va $(b, f(b))$ nuqtalardan o'tuvchi vatarni OX o'qi bilan kesishish nuqtasi c ning qiymatini shu ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasidan aniqlaymiz.

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

Vataning OX o'qi bilan kesishish nuqtasi c_0 da $x = c_0$, $y = 0$ bo'ladi, u holda yuqoridagi ifodadan quyidagi ko'rinishga ega bo'lgan formulani xosil qilamiz:

$$c = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a)$$

c ma`lum bo'lgach, $f(c)$ning qiymatini hisoblash mumkin. $C(c, f(c))$ nuqtani yechimga nisbatan joylashishi mumkin bo'lgan barcha hollarni ko'rib chiqaylik (7-rasm).



7-rasm

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

dan urinma OX o'qi bilan kesishgani uchun $y(x_1)=0$ deb olib $x_1=x_0-f(x_0)/f'(x_0)$ tenglikni va bu formulani umumlashtirib usulga mos ishchi formulani hosil qilamiz:

Ushbu ko'rinishlarga mos ravishda usul uchun dastlabki yaqinlashish tanlanadi:

1) $f(a)>0$ va $f(a)f(c)>0$ bo'lsa $x_0=b$;
2) $f(a)<0$ va $f(a)f(c)>0$ bo'lsa $x_0=b$;
3) $f(a)<0$ va $f(a)f(c)<0$ bo'lsa $x_0=a$;
4) $f(a)>0$ va $f(a)f(c)<0$ bo'lsa $x_0=a$;

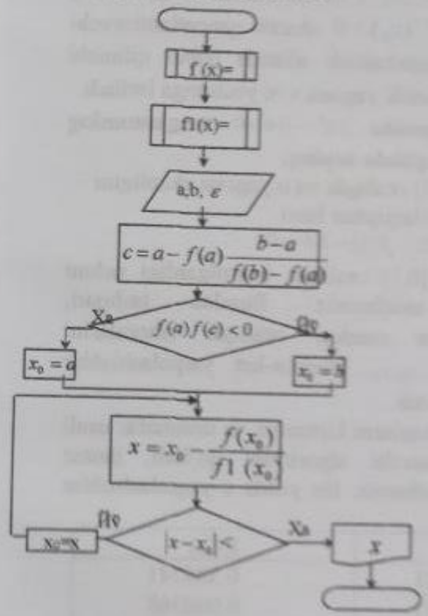
Shartlarni umumlashtirib olib, $f(a)f(c)$ ko'paytmaning ishorasi musbat-manfiyligiga qarab, a yoki b qiymatlardan birini urinmalar usulida dastlabki yaqinlashish sifatida olish mumkin degan xulosalarga kelamiz. Endi $(x_n,\ f(x_n))$ nuqtaga o'tkazilgan urinma tenglamasi

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Hosil bo'lgan ishchi formula urinmalar usulining asosiy formu-lasi bo'lib, hisoblashlar $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$ sharti bajarilguncha davom ettiriladi.

Endi usul algoritmining blok-sxemasi va dasturini keltiramiz va ular asosida chiziqsiz tenglamaning taqribiy ildizlarini aniqlaymiz.

Algoritm blok-sxemasi



Dastur matni

```
Program Urinma;
Label L1;
Var
 a,b,x,x0,eps,c:real;
 k:integer;
 Function f(x:real):real;
  Begin f:=2*x*x*x-0.4; end;
 Function f1(x:real):real;
  Begin f1:=6*x*x; end;
Begin
 k:=0;
 writeln('a,b='); readln(a,b);
 writeln('aniqlikni kiriting');
 readln( eps);
 c:=a-f(a)*(b-a)/(f(a)-f(b));
 if f(a)*f(c)<0 then x0:=a
 else x0:=b;
 L1: x:=x0-f(x0)/f1(x0);
 if abs(x-x0)>eps then
 begin
  writeln(k, x:6:5, f(x):8:6);
  x0:=x; k:=k+1; Goto l1;
 end;
end
```

Demak, yechim aniq ildizga monoton yaqinlashuvchi ketma-ketlik limitidan iborat bo'ladi: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$

n-yaqinlashishda x_n taqribiy ildiz uchun Nyuton usulining xatoligi quyidagicha baholanadi:

$$|\xi - x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{m}$$

Bu yerda m soni (a,b) kesmadagi $|f'(x)|$ ning eng kichik qiymati.

Yaqinlashish jarayoni bu usulda boshqa usullarga qaraganda juda tez bo'lgani uchun undan amalda ko'p qo'llaniladi. Endi Nyuton usulini hamma vaqt ham ishlatish mumkinmi degan savolga javob beramiz:

__4-teorema.__ Agar (a,b) kesmada $f'(x)$, $f''(x)$ lar noldan farqli bo'lib, ishorasini o'zgartirmasa, $f(c_0)\cdot f''(c_0) > 0$ shartni qanoatlantiruvchi $c_0 \in [a,b]$ nuqta boshlang'ich yaqinlashish sifatida qabul qilinishi mumkin va shunda $c_0, c_1 ...$ ketma-ketlik yagona x=c yechimga intiladi.

Misol. Urinmalar usuli yordamida $2x^3 - 0.4 = 0$ tenglamaning biror haqiqiy ildizini 0,0001 aniqlikda toping.

__Yechish.__ Tenglamaning ildizi (0,1) oraliqda va u yagona ekanligini grafik usulni qo'llab aniqlaymiz. Haqiqatan ham

$$f(0) = -0.4 < 0, \quad f(1) = 1.6 > 0$$

Ildizning mavjudlik sharti (0,1) oraliqda bajarilganligi uchun yechimni shu oraliqdan aniqlaymiz. Bundan tashqari, $f'(x) = 6x^2, f''(x) = 12x$ hosilalar mazkur oraliqda ishoralarini o'zgartirishmaydi. Demak, $c_0, c_1, c_2, c_3 ...$ ketma-ket yaqinlashishlar tenglamaning yagona ildiziga intiladi.

$a = 0$, $b = 1$, ε=0,0001 qiymatlarni kiritamiz va urinmalar usuli yordamida yechimga yaqinlashuvchi algoritmni qo'llab, dastur bo'yicha quyidagi natijalarga erishamiz. Bu yerda n-yaqinlashishlar soni.

n	C_n	$f(C_n)$
1	0.73333	0.388741
2	0.61286	0.060368
3	0.58607	0.002600
4	0.58481	0.000006

Natijalardan ko'rinib turibdiki, ishlab chiqilgan algoritm asosida taqribiy yechim juda tez, aniqrog'i to'rtta yaqinlashish bilan topildi. Zero, avvalgi oraliqni teng ikkiga bo'lish usulida 0,001 aniqlik uchun ham taqribiy yechimga yaqinlashishlar soni 10 tadan ortiq edi. Bunday farq urinmalar usulining yechimni tez topish imkoniyati jihatidan ustun ekanligini ko'rsatadi.

Nazorat savollari

1. Urinmalar usulining asosiy mohiyati nimada?
2. Urinmalar usulining asosiy afzalligi nimada?
3. Urinmalar usulida dastlabki yaqinlashish qanday aniqlanadi?
4. Usulning ishchi formulasi qanday xosil qilinadi?
5. Urinmalar usulida xatolik qanday baholanadi?

4-§. Vatarlar usuli

Tayanch so'z va atamalar

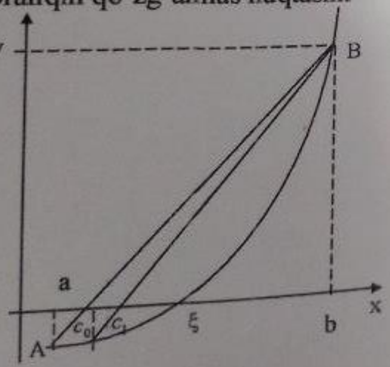
Dastlabki yaqinlashish, dastlabki yaqinlashishni aniqlovchi shart, usulning geometrik ma'nosi, asosiy ishchi formula, vatarlar usulining xatoligi, usulning ishchi algoritmi, dastur matni.

Bu usul ham $f(x)=0$ tenglamaning ildizini berilgan $[a,b]$ kesmada tez va aniqroq topish imkonini beradi. Berilgan tenglamalarning $f(x)$ funksiyasi $[a,b]$ kesmada uzluksiz va uning chegaralarida har xil ishorali qiymatlariga ega bo'lib, $f(a)\cdot f(b)<0$ sharti bajarilsin. Urinmalar usulidan farqli ravishda bu usulda haqiqiy yechimga vatarlar yordamida yaqinlashib boramiz. Avval $A(a,f(a))$ va $B(b,f(b))$ nuqtalardan vatar o'tkazaylik (8-rasm). U OX o'qini c_0 nuqtada kesib o'tadi. Ma'lumki, vatarni OX o'qi bilan kesishishidan hosil bo'lgan nuqtaning abssissasi:

$$c_0 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)}\cdot f(a)$$

dan iborat bo'ladi. Bu nuqtani dastlabki yaqinlashish sifatida olishimiz mumkin. Lekin, keyingi vatarlarni qaerdan o'tkazamiz degan savol tug'iladi.

Buning uchun, oraliqni qo'zg'almas nuqtasini



8-rasm

$f(a)\cdot f(c_0)<0$ sharti yordamida aniqlab olishimiz kerak. Chizmadan ko'rinib turibdiki, agar $f(a)\cdot f(c_0)<0$ sharti bajarilsa,

$b=c$ bo'lib, a nuqta qo'zg'almas bo'ladi, aks holda $a=c$ bo'lib, b nuqta qo'zg'almas bo'ladi. Ildizga yaqinlashuvchi $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ ketma-ketlik $f(x)$ funksiyaning vatarlarini OX o'qi bilan kesishish nuqtalarini tashkil qiladi.

$$c = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$$

formuladan esa ishchi formula sifatida foydalanamiz. Urinmalar usulidagi singari bu usulda ham $f(a)\cdot f''(x)>0$ sharti bajarilsa ishchi formula yordamida topilgan qiymatlar yechimga yaqinlashuvchan bo'ladi. Jarayon kerakli aniqlikdagi yechim olinmaguncha davom etaveradi.

Endi vatarlar usulining xatosini baholaymiz. $f'(x)$ xosila (a,b) kesmada uzluksiz va o'zining ishorasini saqlaydi, deb faraz qilamiz. ξ va x_n $f(x)=0$ tenglamaning aniq va taqribiy yechimlari bo'lsin. U holda

$$|\xi - x_n| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_n - x_{n-1}|$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu yerda m_1 va M_1 lar (a,b) kesmada $f'(x)$ning moduli bo'yicha eng katta va eng kichik qiymatlari. Ko'pincha amaliyotda, agar talab qilingan aniqlik $\varepsilon>0$ musbat sonidan iborat bo'lsa, xatoni aniqlash uchun oxirgi x_n yaqinlashish x_{n-1} yaqinlashishdan ε ga nisbatan kamroq farq qilsa, ya'ni $|x_n - x_{n-1}|<\varepsilon$ bo'lsa, u vaqtda limit absolyut xato sifatida olinadi: $|\xi - x_n|<\varepsilon$.

Quyida vatarlar usuliga mos algoritm-blok-sxemasi va dasturi keltirilmoqda.

Ishlab chiqilgan algoritm asosida quyidagi chiziqsiz tenglamani yechishni tashkil etaylik.

__Misol.__ Vatarlar usuli yordamida $x^3+2x+0.5=0$ tenglama ildizini 0.0001 aniqlikda hisoblang.

__Yechish.__ Ushbu chiziqsiz tenglama uchun ildiz yotgan oraliq (-2, -1) ekanligini grafik usul bilan aniqlaymiz va oraliqni to'g'riligini analitik usulda tekshiramiz:

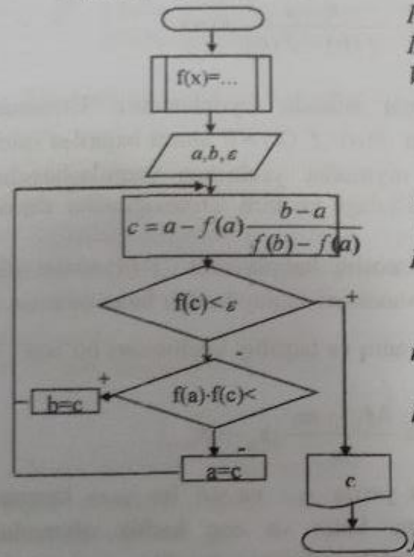
$$f(-1)=-2.5<0,\quad f(0)=0.5>0$$

Xuddi urinmalar usulidagi singari birinchi va ikkinchi tartibli xosilalar

$$f'(x)=3x^2+2, \quad f''(x)=6x$$

(-2, -1) oraliqda o'z ishorasini saqlagani uchun usul yordamida hosil qilingan yaqinlashishlar tenglamaning ildiziga intiladi, deya olamiz.

Algoritm blok-sxemasi | **Dastur matni**




```
Program Vatarlar;
Label L1;
Var
  a,b,x,x0,eps,c:real;
  k:integer;
  Function f(x:real):real;
  Begin f:=x*x*x+2*x+0.5;
  end;
Begin
  k:=1;
  writeln('a,b=');
readln(a,b);
  writeln('aniqlikni
kiriting');    readln(eps);
  repeat
  c:=a-f(a)*(b-a)/(f(b)-f(a));
  writeln(k, c:6:5,
f(c):8:6);
   if f(a)*f(c)<0 then b:=c
  else   a:=c; k:=k+1;
  until abs(f(c))<eps;
end.
```

Vatarlar yordamida yechimga yaqinlashuvchi algoritmni qo'llab, dastur bo'yicha quyidagi ijobiy natijalarga erishamiz. Bu yerda n-yaqinlashishlar soni.

N	C_n	$f(C_n)$
1	-0.16667	0.162037
2	-0.21739	0.054944
3	-0.23422	0.018708
4	-0.23991	0.006373
5	-0.24184	0.002171
6	-0.24250	0.000740
7	-0.24272	0.000252
8	-0.24280	0.000086

Nazorat savollari

1. Vatarlar usulining geometrik ma'nosi qanday ifodalanadi?
2. Vatarlar usulining ishchi formulasi qaysi formula asosida hosil qilinadi?
3. Vatarlar usulida dastlabki yaqinlashishni qanday qilib aniqlanadi?
4. Usulning xatoligini baholash mumkinmi?
5. Vatarlar usulining kamchiligi mavjudmi?

5-§. Iteratsiya usuli

Oddiy iteratsiya usuli

Tayanch so'z va atamalar

Nolinchi yaqinlashish, usulning geometrik ma`nosi, yaqinlashishni aniqlovchi shart, yaqinlashuvchi jarayon, uzoqlashuvchi jarayon, iteratsiya usulining xatoligi, usulning ishchi algoritmi, dastur ta`minoti.

Algebraik va transsendent tenglamalarni yechishning eng muhim usullaridan biri iteratsiya usuli hisoblanadi. Iteratsiya usulini qo'llash uchun (2.1) tenglamani unga teng kuchli bo'lgan quyidagi

$$x = \varphi(x) \qquad (2.2)$$

kanonik ko'rinishga keltirilgan va ildizlari ajratilgan bo'lishi kerak. (2.2) tenglamaning ildizi yotgan atrofning biror x_0 nuqtasini izlanayotgan ildizning nolinchi yaqinlashishi deb olamiz. Navbatdagi yaqinlashishlarni topish uchun (2.2) formuladan foydalanamiz, ya`ni

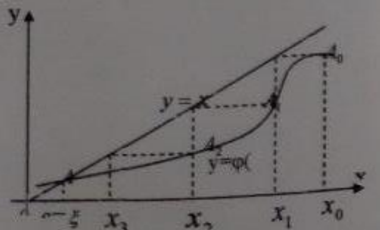
$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \qquad (2.3)$$

Hosil qilingan sonlar ketma-ketligining limiti

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \qquad (2.4)$$

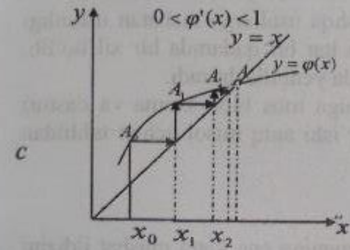
mavjud va $\varphi(x)$ funksiya uzluksiz bo'lsa, ξ berilgan tenglamaning ildizi bo'ladi. Demak, bu ildizni (2.3) formula yordamida istalgan aniqlik bilan hisoblash mumkin. (2.4) limit mavjud bo'lgan holda iteratsiya jarayoni yaqinlashuvchi deyiladi. Lekin, mazkur limit har doim ham mavjud bo'lavermaydi, bunday holda oddiy iteratsiya usulidan foydalanish maqsadga muvofiq bo'lmay-di.

Iteratsiya usuli sodda geometrik ma`noga ega. Buni tushunish uchun $y=x$ va $y=\varphi(x)$ funksiyalarning grafiklarini chizamiz.

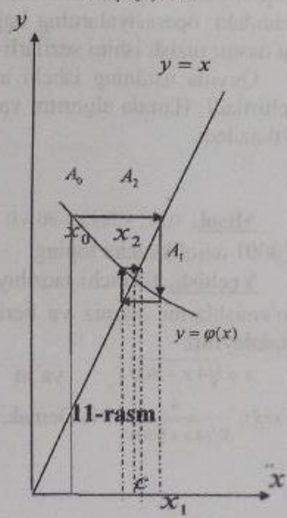


9-rasm

Bu grafiklarning OX o'qi bilan kesishgan nuqtasining absissasi tenglamaning ildizidan iborat bo'ladi. Iteratsiya usulining umumiy algoritmiga binoan dastlabki yaqinlashishni tanlab olamiz. Birinchi yaqinlashish bo'ladi (9-rasm). Bu geometrik nuqtai-nazardan x_0 nuqtaga mos keluvchi $A_0(x_0, \varphi(x_0))$ nuqtadan OX o'qiga parallel to'g'ri chiziq o'tkazib, uning $y=x$ to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtasining abssissasini topish demakdir. Bu nuqtada $\varphi(x_1)$ni hisoblaymiz. Natijada $A_1(x_1, \varphi(x_1))$nuqta topiladi. Bu nuqtadan yana OX o'qiga parallel to'g'ri chiziq bilan kesishgan nuqtasining abssissasi, ya`ni $x_2=\varphi(x_1)$ni topamiz va h.k. 10-rasmdan ko'rinib turibdiki, $0<\varphi'(x)<1$ sharti bajarilganda iteratsiya jarayoni yaqinlashar ekan, ya`ni $A_0, A_1, \ldots$ nuqtalar $A(c, \varphi(c))$ nuqtaga yaqinlashib boradi va o'z navbatida $x_0, x_1 \ldots$ ketma-ketlik $x=c$ limitga intiladi.



10-rasm



11-rasm

Endi $-1<\varphi'(x)<0$ bo'lgan holni qaraymiz (11-rasm). Ketma-ket yaqinlashishlar rasmda strelkalar yordamida yaqqol ko'rsatilgan.

Bunda, faqat, oldingi holdan farqli ravishda $x_0, x_1, \ldots$ yaqinlashishlar $x=c$ yechimning har xil tarafida yotadi. Bu holda ham yaqinla-shuvchi iteratsiya jarayoniga ega bo'lamiz. Qolgan $\varphi'(x)<-1$, $\varphi'(x)>1$ hollarda (12-13-rasmlar) iteratsiya jarayoni uzoqlashuvchi bo'ladi, $\varphi'(x)<-1$ bo'lganda yaqinlashishlar x=s yechimning ikkala tarafida uzoqlashib borsa, $\varphi'(x)>1$ bo'lganda esa ular yechimning bir tarafida uzoqlashadi.

Bu mulohazalarni yakunlab quyidagi umumiy xulosaga kelamiz: iteratsiya usuli qaralayotgan sohada $|\varphi'(x)|<1$ bo'lganda yaqinlashadi va $|\varphi'(x)|\geq 1$ bo'lganda uzoqlashadi. Iteratsiya usulining hatosini baholash uchun quyidagi formuladan foydalaniladi.

$$|\xi - x_n| < \frac{q^n}{1-q}(x_1 - x_0)$$

Agar q qanchalik kichik bo'lsa, iteratsiya jarayoni shunchalik tez yaqinlashadi. Iteratsiya usulining boshqa usullarga nisbatan ustunligi shundaki, operasiyalarning bajarilishi har bir qadamda bir xil bo'lib, bu dastur tuzish ishini sezilarli darajada yengillashtiradi.

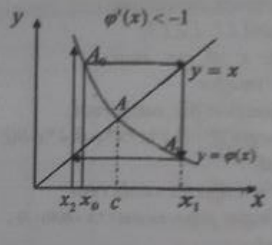
Quyida usulning ishchi algoritmiga mos blok-sxema va dasturi keltiriladi. Hamda algoritm va dastur ishi aniq misol uchun tahlildan o'tkaziladi.

Misol. $0{,}1x^3 - 0{,}4x - 80 = 0$ tenglamaning eng katta musbat ildizini 0,0001 aniqlikkacha toping.

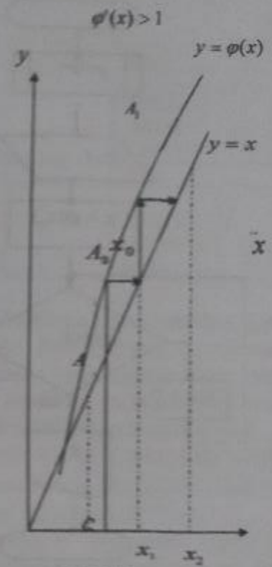
Yechish. Birinchi taqribiy yaqinlashish sifatida $x_0 = 10$ va $x_0 = 8$ ko'rinishlarini olamiz va berilgan tenglamani quyidagi ko'ri-nishda ifodalaymiz:

$x = \sqrt[3]{4x+800}$, ya`ni $\varphi(x) = \sqrt[3]{4x+800}$ deb olsak,

$|\varphi'(x)| \leq \dfrac{4}{3\sqrt[3]{(4x+800)^2}} < 1$. Demak, iteratsiya jarayoni yaqinlashuvchidir.

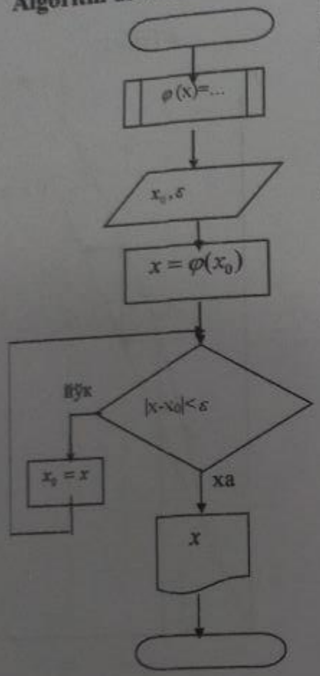


12-rasm



13-rasm

Algoritm blok-sxemasi



Dastur matni

```
Program Iteratciya;
Label L1, L2,L3;
Var x, x0, eps: real;
  i:integer;
 function ff(x:real):real;
  begin ff:=0.1*x*x*x-0.4*x-80;
 end;
  Function f(x:real):real;
  Begin f(x):=exp(ln(4*x+800)/3);
 end;
 Begin
  writeln('aniqlik');
  readln(eps);
  writeln('x0='); readln (x0);
  i:=1;
  x:=f(x0);
  while abs(x-x0)>eps do
  begin
    writeln(i, x:7:6, ff(x):7:6);
    i:=i+1; x0:=x; x:=f(x0);
  end;
 end.
```


Ishlab chiqilgan algoritm dasturi asosida keyingi yaqinlashishlarni topamiz.

N	x_n	$f(x_n)$
0	8	32
1	9.405339	0.562136
2	9.426473	0.008454
3	9.426791	0.000127
N	x_n	$f(x_n)$
0	10	16
1	9.435388	0.225845
2	9.426924	0.003385
3	9.426797	0.000051

Natijalarni tahlil qilib, shunday xulosalarga kelish mumkin: agar iteratsion jarayonni tashkil etuvchi $\varphi(x)$ funksiya to'g'ri tanlansa, yechim juda oson topiladi, jarayonning yaqinlashishi faqat shu funksiyaga bog'liq, chunki ixtiyoriy dastlabki yaqinlashishda ham iteratsion qiymatlar o'zini darhol o'nglab oladi va yechimga intiladi.

Agar biz berilgan tenglamani $x = 0{,}1x^3 - 80$ ko'rinishida yozib olsak, $\varphi'(x) = 0{,}3x^2$ bo'lib, $9 < x < 10$ qiymatlarida $\varphi'(x) > 27$ bo'ladi va iteratsiya jarayonining yaqinlashish sharti bajarilmaydi.

Demak, bundan ko'rinadiki, berilgan tenglamani ixtiyoriy ko'rinishda yozib olish har doim ham maqsadga yetkazavermaydi. Bu kamchilikni yo'qotadigan usullardan biri Vegsteyn usulidir. U ham aslida iteratsion jarayon bo'lib, o'ziga xos yaqinlashish formulasiga egaligi bilan oddiy iteratsiya usulidan farq qiladi.

Vegsteyn usuli

Yuqorida keltirilgan mulohazalardan aytish mumkinki, iteratsiya usulining yaqinlashishi yoki uzoqlashishi ξ ildizning kichik atrofida $\varphi'(x)$ hosilaning qiymatiga bog'liq bo'ladi. Bu esa qidirilayotgan ildizga har doim ham yaqinlashish imkoni mavjud emasligini bildiradi. Lekin, J. X. Vegsteyn 1958 yilda geometrik mulohazalar asosida, iteratsiya usulini shunday o'zgartirishni taklif etadiki, uni qo'llaganda $\varphi'(x)$ ning qiymati har qanday bo'lganda ham iteratsiya jarayoni yechimga yaqinlashadi. Mabodo $|\varphi'(x)| < 1$ tengsizlik bajarilsa, u vaqtda oddiy iteratsiya jarayoniga nisbatan Vegsteyn jarayoni tezroq yaqinlashadi. Vegsteyn usulida (2.2) tenglamaning aniq yechimi ξ ning dastlabki yaqinlashishi x_0 orqali,

$$z_0 = x_0, \quad z_1 = x_1 = \varphi(x_0) \tag{2.5}$$

deb olib, ikkita $\{x_n\}$ va $\{z_n\}$ ketma-ketlikni quramiz:

$$x_{n+1} = \varphi(z_n),$$

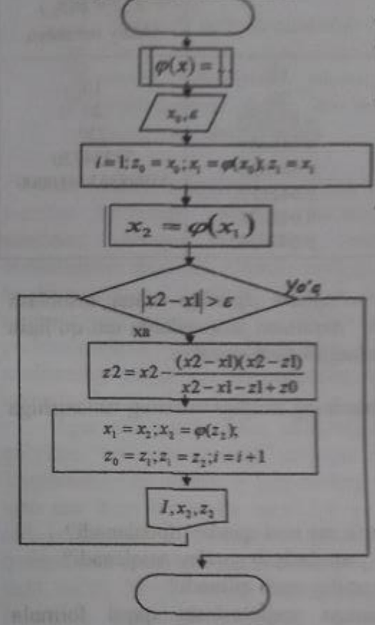
$$z_{n+1} = x_{n+1} - \frac{(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - z_n)}{x_{n+1} - x_n - z_n + z_{n-1}} \tag{2.6}$$

Vegsteyn usulini qo‘llash uchun ildizning nolinchi yaqinlashishi x_0 ga nisbatan bir marta oddiy iteratsiya usulini qo‘llash kerak. Birinchi qadamdan so‘ng, keyingi yaqinlashishlarni topish uchun (2.6) formulalarni qo‘llaymiz. Bu usulda oddiy iteratsiya usuliga nisbatan yechimga qat`iy yaqinlashishni misol yordamida ko‘ramiz.

Misol. Vegsteyn usuli yordamida yuqorida berilgan tenglamani $x = 0{,}1x^3 - 80$ iteratsion yaqinlashishlar bilan 0,0001 aniqlikda yeching.

Yechish. Ma`lumki, oldingi paragrafda ko‘rib o‘tganimizdek $x = 0{,}1x^3 - 80$ hol uchun oddiy iteratsiya usulining yaqinlashish sharti bajarilmaydi. Nolinchi yaqinlashish sifatida x_0=10, aniqlik uchun ε=0.0001 deb olamiz. Vegsteyn usuli bilan topilgan ketma-ket yaqinlashishlarni aniqlaymiz. Natijalar jadvalidan ko‘rinib turibdiki, oxirgi ustundagi qiymatlar oddiy iteratsiya usuli uchun olingan bo‘lib, xattoki 0,01 aniqlikda ham yechimdan juda tez uzoqlashib ketiladi.

Algoritm blok-sxemasi



Dastur matni

```
Program Vegsteyn;
Label L1;
Var x1,x0,x2,z1,z0,z2,eps:
real;
  i:integer;
  Function f(x:real):real;
  Begin f:=0.1*x*x*x-80;  end;
Begin
  writeln('aniqlik');
  readln(eps);
  writeln('x0='); readln (x0);
  i:=0;  z0:=x0;
  writeln (i, x0:6:5, z0:6:5);
  x1:=f(x0); z1:=x1; i:=i+1;
  writeln(i, x1:6:5, z1:6:5);
  x2:=f(z1);
  while abs(x2-x1)>eps do
  begin
    z2:=x2-((x2-x1)*(x2-
z1))/(x2-x1-      z1+z0);
    x1:=x2;
    x2:=f(z2);
    z0:=z1;
    z1:=z2;
    i:=i+1;
    writeln(i,  x2:7:6,  z2:7:6);
  end;
 end.
```

N	$x_{n+1}=\varphi(z_n)$ Vegsteyn	z_n	$x_{n+1}=\varphi(x_n)$ Oddiy iteratsiya
0	10	10	10
1	20	20	20
2	15.714881	9.855072	720
3	13.241184	9.769431	37324720
4	9.721507	9.644925	519983634610000
5	9.643155	9.642117	
6	9.642078	9.642078	
7	9.642078	9.642078	

Vegsteyn usuli o'zini juda tez «o'nglab» olganligi uchun, hisoblash jarayoni biroz uzoq bo'lsa ham, iteratsion jarayonlarda uni qo'llash maqsadga muvofiq degan xulosalarga kelish mumkin.

MS Chiziqsiz tenglama yechimining aniqligi usulning tanlanishiga bog'liqmi ?

Nazorat savollari

1. Iteratsiya usulining geometrik ma`nosi qanday ifodalanadi?
2. Iteratsiya usulida dastlabki yaqinlashish qanday aniqlanadi?
3. Usulning ishchi formulasi qanday xosil qilinadi?
4. Iteratsion jarayonni yechimga yaqinlashishi qaysi formula yordamida tekshiriladi?
5. Iteratsiya usulining xatoligi qanday baholanadi?
6. Vegsteyn usulida dastlabki yaqinlashish qanday aniqlanadi?
7. Vegsteyn usulida ishchi formulalar qanday hosil qilinadi?
8. Vegsteyn usulining o'ziga xos va iteratsiya usuliga o'xshashlik xususiyati nimada?

6-§. Chiziqsiz tenglamalar sistemasini yechishning oddiy iteratsiya usuli

Tayanch so'z va atamalar

Aniq usullar, taqribiy usullar, iteratsiya usuli, kanonik shakl, dastlabki yaqinlashish, iteratsiya usulining yaqinlashish sharti, iteratsion jarayon, usulning ishchi algoritmi, dastur matni.

Ma`lumki, tenglamalar sistemasini yechish usullarini ikki guruhga bo'linadi: aniq va iteratsion. Aniq usullar yordamida sistemani yechgan bilan aniq yechimni har doim ham topa olmasligimiz mumkin. Chunki berilgan sistemadagi ayrim qiymatlar taqriban olingan bo'lishi, bundan tashqari, hisoblash jarayonida sonlarni yaxlitlashga to'g'ri kelishi mumkin. Iteratsion usullarda esa yechim cheksiz ketma-ketliklarning limiti sifatida olinadi. Lekin, bu usullarning o'ziga xos tomonlaridan biri shundan iboratki, ular o'z xatosini o'zi tuzatib boradi.

Agar aniq usullar bilan ishlayotganda biror qadamda xatoga yo'l qo'yilsa, bu xato oxirgi natijaga ham o'z ta`sirini o'tkazadi. Yaqinlashuvchi iteratsion jarayonning biror qadamida yo'l qo'yilgan xato esa faqat bir necha iteratsiya qadamini ortiqcha bajarishgagina olib keladi, xolos. Ya`ni, biror qadamda yo'l qo'yilgan xato keyingi qadamlarda tuzatib boriladi. Iteratsion usullarning hisoblash sxemalari juda sodda bo'lib, ularni dasturlash juda qulaydir. Lekin, har bir iteratsion usulning qo'llanish sohasi chegaralangandir. Chunki, iteratsiya jarayoni berilgan sistema uchun uzoqlashishi yoki, shuningdek, sekin yaqinlashishi mumkinki, amalda yechimni qoniqarli aniqlikda topib bo'lmaydi. Shuning uchun ham, iteratsion usullarda faqat yaqinlashish masalasigina emas, balki yaqinlashish tezligi masalasi ham katta ahamiyatga egadir. Yaqinlashish tezligi dastlabki yaqinlashish vektorining qulay tanlanishiga ham bog'liqdir. Aytib o'tilgan mulohazalar chiziqli tenglamalar sistemasini iteratsion usullar yordamida yechishga tegishli bo'lib, chiziqsiz tenglamalar sistemasini iteratsion usullar yordamida yechishda bu jarayon birmuncha boshqacharoq kechadi.

Chiziqsiz tenglamalar sistemasini yechishda eng qulay usullar bu iteratsion usullardir. Chunki, chiziqsiz tenglamalar sistemasini aniq usullar bilan yechish imkoniyati juda kam bo'lganligi uchun, ularni yechishda taqribiy usullarni qo'llashni tavsiya qilinadi.

Chiziqsiz tenglamalar uchun iteratsiya usulining mohiyati quyidagicha. Aytaylik, bizga quyidagi

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad (2.7)$$

chiziqsiz tenglamalar sistemasini yechish masalasi qo'yilgan bo'lsin. Bu sistemani yechish uchun avval berilgan sistemani biror usul bilan quyidagi kanonik shaklga keltirib olinadi:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots x_n) \end{cases} \qquad (2.8)$$

Bu yerda φ_1, $\varphi_2, \ldots \varphi_n$ lar berilgan tenglamaning koeffisientlari va ozod hadga bog'liq qandaydir funksiyalardir. n noma`lumli, $n$ ta chiziqsiz tenglamalar sistemasi uchun ixtiyoriy $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_n^{(0)})$vektorni taqribiy, ya`ni qo'pol yechim sifatida qabul qilamiz va uni nolinchi yaqinlashish deb ataymiz. So'ngra, taqribiy yechimdan aniqroq bo'lgan shunday yechimlar ketma-ketligini hosil qilamizki, bu ketma-ketliklarning limiti berilgan tenglamalar sistemasining yechimidan iborat bo'lsin.

Masalan, $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots x_n^{(k)})$ yaqinlashish topilgan bo'lsa, $\mathbf{x}^{(k+1)}$ yaqinlashishni

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots x_n^{(k)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots x_n^{(k)}) \end{cases} \qquad (2.9)$$

kabi topiladi.

Iteratsiya jarayoni

$$\max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon$$

sharti bajarilguncha davom ettiriladi. Bu yerda ε-izlanayotgan yechim aniqligi.

Iteratsiya usuli ma`lum shartlar bajarilganda yetarli aniqlikdagi yechimni istalgan $\mathbf{x}^{(0)}$ boshlang'ich yaqinlashishlarda topish imkoniyatini beradi. Bu shartlar yaqinlashish shartlari deyiladi. Muayyan aniqlikdagi yechimni olish uchun kerak bo'lgan iteratsiyalar soni dastlabki yaqinlashishlarga bog'liq bo'ladi. Dastlabki yaqinlashish topilayotgan taqribiy yechimga qancha yaqin bo'lsa, yechim shuncha kam iteratsiyalar bilan olinadi. Iteratsiya jarayonining yaqinlashish tezligi esa o'z navbatida berilgan sistema koeffisientlari matrisasining xususiyatiga bog'liq bo'ladi.

Albatta, iteratsiya usuli bilan tenglamalar sistemasining taqribiy yechimi topiladi. Agar sistema koeffisientlari va ozod hadlari aniq sonlardan iborat bo'lsa, hisoblashlarni sonlarda verguldan keyin ixtiyoriy m ta xona aniqligida bajarish mumkin. Buning uchun, hisoblash amallari verguldan keyin $m+1$ ta xona aniqligida bajarilib, kerakli iteratsiyalar bajarilgach, $m+1$ xonadagi son yaxlitlanadi. Sistema koeffisientlari va ozod hadlar p aniqlikdagi sonlar bo'lsa, sistemani p dan katta aniqlikda yechish ma`noga ega emas. Bunda odatda sistema p dan katta bo'lmagan aniqlikda yechiladi. Misol sifatida iteratsiya usulining yaqinlashish shartlarini ikkinchi tartibli sistema uchun keltiramiz.

<u>5-teorema:</u> Ikkinchi tartibli sistemaning yagona yechimi $\{a < x_1 < b,\ c < x_2 < d\}$ to'g'ri to'rtburchakda joylashgan bo'lsin. Agar bu to'g'ri to'rtburchakda quyidagi

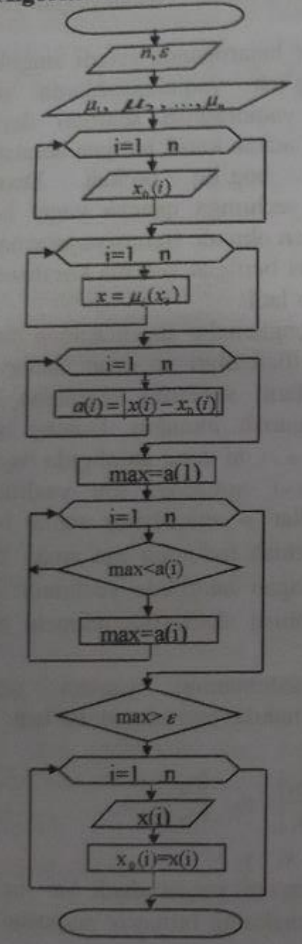
$$\left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right| \le p_1, \quad \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right| \le q_1, \quad \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right| \le p_2, \quad \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right| \le q_2,$$

$$p_1 + p_2 < 1, \qquad q_1 + q_2 < 1$$

tengsizliklar bajarilsa, iteratsiya jarayoni yaqinlashadi va nolinchi yaqinlashish sifatida to'g'ri to'rtburchakning ixtiyoriy nuqtasini olish mumkin.

Quyida iteratsiya usulining algoritmini blok-sxemalardagi ifodasi va dasturi keltirilmoqda. Ularning ishonchlilik darajasini aniqlash uchun esa aniq chiziqsiz sistemani yechish tashkil qilinadi.

Algoritm blok-sxemasi



Dastur matni

```
Program Iterat_sis;
label 1;
const n=2;eps=0.001;
type vec=array [1..n] of real;
var i,k:integer; a,x,x0:vec;
max:real;
function f1(x:vec):real;
  begin
   f1:=4.6-sqr(x[1])/10-
ln(x[2])/3;
  end;
function f2(x:vec):real;
  begin
   f2:=3.1-exp(-x[1])-sqrt(x[2]);
  end; Begin
  k:=1;
for i:=1 to n do readln(x0[i]);
 1: x[1]:=f1(x0);
  x[2]:=f2(x0);
  for i:=1 to n do
  a[i]:=abs(x[i]-x0[i]);
  max:=a[1];
  for i:=1 to n do
  if max<a[i] then max:=a[i];
  if max>eps then
  begin
    writeln(k, ' nchi
yaqinlashish');
    for i:=1 to n do
    begin
      write(x[i]:8:6);
      x0[i]:=x[i];
    end;
    k:=k+1; goto 1;
  end;
  readln;
end.
```


<u>Misol:</u> Ushbu $\begin{cases} x_1 + \dfrac{x_1^2}{10} + \dfrac{\ln x_2}{3} = 4.6 \\ e^{-x_1} + \sqrt{x_2} + x_2 = 3.1 \end{cases}$ chiziqsiz tenglamalar sistemasini oddiy iteratsiya usuli bilan 0,001 aniqlikda yeching.

<u>Echish:</u> Avvalo sistemaning koʻrinishini oʻzgartirib olamiz, ya`ni ularni x_1 va x_2 larga nisbatan yechib olamiz:

$$\begin{cases} x_1 = 4{,}6 - \dfrac{x_1^2}{10} - \dfrac{\ln x_2}{3} \\ x_2 = 3.1 - e^{-x_1} - \sqrt{x_2} \end{cases}; \qquad \text{U holda} \begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2) = 4{,}6 - \dfrac{x_1^2}{10} - \dfrac{\ln x_2}{3} \\ \varphi_2(x_1, x_2) = 3.1 - e^{-x_1} - \sqrt{x_2} \end{cases}$$

Endi qidirilayotgan oʻzgaruvchilar boʻyicha hususiy hosilalar olinadi:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = -\frac{x_1}{5}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{3x_2}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = e^{-x_1}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{2\sqrt{x_2}}$$

Aytaylik, boshlang'ich yaqinlashish x_1 va x_2 lar boʻyicha [1,4] kesmada boʻlsin. U holda hosilalar uchun quyidagi tengsizliklar oʻrinli boʻladi:

$$\left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right| \le \frac{4}{5} = 0{,}8 = p_1 \qquad \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right| \le \frac{1}{12} = 0{,}083 = q_1$$

$$\left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right| \le \frac{1}{e^4} \approx 0.0069 = p_2 \qquad \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right| \le \frac{1}{4} = 0{,}25 = q_2$$

Demak, qaralayotgan kvadratda:

$$p_1 + p_2 = 0{,}8 + 0.0069 = 0.8069 < 1$$
$$q_1 + q_2 = 0{,}083 + 0{,}25 = 0.333 < 1$$

yaqinlashish shartlari bajariladi.

U holda dastlabki yaqinlashish sifatida $x_1^{(0)} = 3{,}5 \quad x_2^{(0)} = 1{,}7$ ni olib, keyingi yaqinlashishlarni oddiy iteratsiya usuliga mos dastur ta`minoti yordamida aniqlaymiz.

Taqribiy yechimga n nchi yaqinlashish	X_1	X_2
1	3.5	1.7
2	3.468951	1.635999
3	3.232553	1.789788
4	3.361027	1.722714
5	3.289049	1.752779
6	3.331148	1.738785
7	3.305950	1.745618
8	3.321367	1.742117
9	3.311819	1.744004
10	3.317791	1.742943
11	3.314034	1.743562
12	3.316408	1.743191
13	3.314905	1.743418
14	3.315858	1.743277
15	3.315253	1.743365
16	3.315637	1.743310
17	3.315393	1.743345
	3.315548	1.743322

Natijalardan ko'rinib turibdiki, berilgan chiziqsiz tenglamalar sistemasining $x_1^{(0)}=3{,}5$ $x_2^{(0)}=1{,}7$ dastlabki yaqinlashish bilan olingan 0,001 aniqlikdagi yechimi $x_1=3{,}315$ va $x_2=1{,}743$ ga teng. Albatta, aniqlikni oshirish imkoniyati ε ning qiymatiga bog'liq ravishda har doim mumkin va bu zamonaviy hisoblash mashinasida hisoblash vaqtini biroz orttiradi xolos.

Nazorat savollari

1. Iteratsiya usuli uchun dastlabki yaqinlashish qanday aniqlanadi?
2. Iteratsion usullarda yechimga yaqinlashish formulasi qanday hosil qilinadi?
3. Iteratsiya usulining yaqinlashish tezligi qaysi omilga bog'liq?
4. Iteratsion jarayon qachon to'xtatiladi?
5. Iteratsiya usulida har doim yechimga yaqinlashish holati sodir bo'ladimi?

7-§. Chiziqsiz tenglamalar sistemasini yechishning Nyuton usuli

Tayanch so'z va atamalar

N'yuton usuli, Yakobi matrisasi, dastlabki yaqinlashish, usulning xatoligi, yechimga yaqinlashish tezligi, usulning ishchi algoritmi, dastur matni.

Bu usul iteratsiya usuliga nisbatan tezroq yaqinlashadi. Nyuton usuli (2.7) tenglamalar sistemasidagi $f_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funksiyani Teylor qatoriga yoyib, faqat birinchi tartibli hosilalar qatnashgan hadlarni qoldirib, ketma-ket yaqinlashishlarni tuzishga asoslangan. Masalan, (2.7) sistema yechimining $\mathbf{x}^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)})$ yaqinlashishi topilgan bo'lsin. Sistemaning $\mathbf{x}$ aniq yechimi $\mathbf{x}^{(k)}$ taqribiy yechimdan $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}=(\varepsilon_1^{(k)},\varepsilon_2^{(k)},\dots,\varepsilon_n^{(k)})$ tuzatmaga farq qiladi.

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}+\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} \qquad (2.10)$$

Buni inobatga olib, (2.7) ni

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}+\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)})=0 \qquad (2.11)$$

deb yozamiz. Endi $\mathbf{f}(x)$ funksiyani uzluksiz differensiallanuvchi deb qarab, $\mathbf{x}^{(k)}$ nuqta atrofida $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}$ ning darajalari bo'yicha Teylor qatoriga yoyamiz va bunda faqat chiziqli hadlar bilan chegaralanib

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}+\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)})\approx \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})+\mathbf{f}'(\mathbf{x}^{(k)})\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} \qquad (2.12)$$

sistemani hosil qilamiz.

Bu tenglamalarni koordinatalar bo'yicha yoyib yozib,

$$\begin{cases} f_1(x^{(k)}+\varepsilon^{(k)})\approx f_1(x^{(k)})+\dfrac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_1}\cdot\varepsilon_1^{(k)}+\dfrac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_2}\cdot\varepsilon_2^{(k)}+\dots+\dfrac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_n}\cdot\varepsilon_n^{(k)}=0 \\ f_2(x^{(k)}+\varepsilon^{(k)})\approx f_2(x^{(k)})+\dfrac{\partial f_2(x^{(k)})}{\partial x_1}\cdot\varepsilon_1^{(k)}+\dfrac{\partial f_2(x^{(k)})}{\partial x_2}\cdot\varepsilon_2^{(k)}+\dots+\dfrac{\partial f_2(x^{(k)})}{\partial x_n}\cdot\varepsilon_n^{(k)}=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x^{(k)}+\varepsilon^{(k)})\approx f_n(x^{(k)})+\dfrac{\partial f_n(x^{(k)})}{\partial x_1}\cdot\varepsilon_1^{(k)}+\dfrac{\partial f_n(x^{(k)})}{\partial x_2}\cdot\varepsilon_2^{(k)}+\dots+\dfrac{\partial f_n(x^{(k)})}{\partial x_n}\cdot\varepsilon_n^{(k)}=0 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Oxirgi sistemada

$$[\mathbf{f}'(\mathbf{x})]=[\mathbf{W}(\mathbf{x})]=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Yakobi matrisasini kiritib, uni

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}^{(k)})\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}=-\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (2.13)$$

shaklga keltiramiz. Bu esa $\varepsilon^{(k)}$ larga nisbatan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasidan iborat. Noma`lumlar oldidagi koeffisientlar $\mathbf{W}(\mathbf{x}^{(k)})$-Yakobi matrisasini tashkil qiladi. Bu matrisani xos emas yani,

$$\det[\mathbf{W}(\mathbf{x}^{(k)})]\neq 0$$

deb faraz qilaylik. Unda (2.13) sistemaning yechimi

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}=-[\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)})]\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$$

dan iborat bo'ladi.

(2.10) ni hisobga olib, yechimning $k+1$ yaqinlashishini

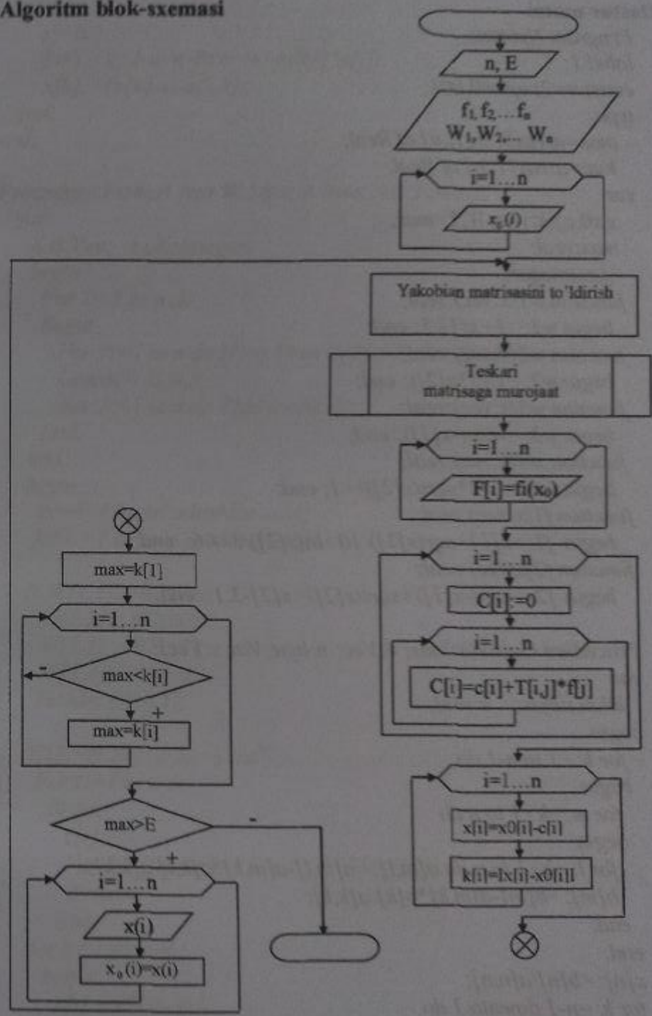
$$\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k=0,1,... \quad (2.14)$$

ko'rinishda aniqlaymiz.

Nolinchi yaqinlashish sifatida ixtiyoriy $\mathbf{x}^{(0)}$ vektorni olish mumkin.

Quyida usul algoritmining umumiy-strukturaviy blok-sxemasi va algoritmga mos ishchi dastur keltirilgan.

Algoritm blok-sxemasi



Dastur matni

```
Program Nyuton;
label 1;
const n=2; eps=0.001;
type
  mas=array[1..n,1..n] of Real;
  Vec=array[1..n] of Real;
var
  x,x0,c,f,k:vec; W,T: mas;
  max:real;
  i,j,p:integer;
 function w1(x:vec):real;
  begin w1:=1+x[1]/5; end;
 function w2(x:vec):real;
  begin w2:=1/(3*x[2]); end;
 function w3(x:vec):real;
  begin w3:=-exp(-x[1]); end;
 function w4(x:vec):real;
  begin w4:=1/(2*sqrt(x[2]))+1; end;
function f1(x:vec):real;
  begin f1:=x[1]+sqr(x[1])/10+ln(x[2])/3-4.6;  end;
function f2(x:vec):real;
  begin f2:=exp(-x[1])+sqrt(x[2])+x[2]-3.1;  end;

Procedure Gauss(a:Mas; b:Vec; n:byte;Var x:Vec);
var
  k,l,m,i:byte;   s:real;
begin
  for k:=1 to n-1 do
  begin
   for m:=k+1 to n do
   begin
    for l:=k+1 to n do a[m,l]:=a[m,l]-a[m,k]*a[k,l]/a[k,k];
    b[m]:=b[m]-a[m,k]*b[k]/a[k,k];
   end;
  end;
  x[n]:=b[n]/a[n,n];
  for k:=n-1 downto 1 do
```



```
   begin
    s:=0;
    for i:=k+1 to n do s:=s+a[k,i]*x[i];
    x[k]:=(b[k]-s)/a[k,k];
  end;
end;

Procedure Teskari (var W:Mas; n:byte; var T:Mas);
 var
  X,B:Vec;   i,j,K:Integer;
  begin
   For I:=1 to n do
   Begin
     For J:=1 to n do If i=j Then B[J]:=1 else B[J]:=0;
     Gauss(W,B,N,X);
     For J:=1 to n do T[J,I]:=X[J];
   End;
  end;
 begin
   p:=1; {Yaqinlashishlar soni}
   for i:=1 to n do readln (x0[i]);

 1: W[1,1]:=W1(x0);
    W[1,2]:=W2(x0);
    W[2,1]:=W3(x0);
    W[2,2]:=W4(x0);
   Teskari (W,n,T);

 f[1]:=f1(x0); f[2]:=f2(x0);
  For I:=1 to n do
   Begin
     c[i]:=0;
     For J:=1 to n do  c[i]:=c[i]+T[i,j]*f[j];
     Writeln;
    End;
 for i:=1 to n do
   begin
    x[i]:=x0[i]-c[i];
```

```
  k[i]:=abs(x[i]-x0[i]);
end;
max:=k[1];
for i:=1 to n do
if max<k[i] then max:=k[i];
if max>eps then
begin
  writeln('p=', p);
  for i:=1 to n do write (x[i]:12:6, '   ');
  for i:=1 to n do x0[i]:=x[i];
  p:=p+1;
  Goto 1;
end;
end.
```

Ishlab chiqilgan usul algoritmining to'g'riligi va u asosida yaratilgan dasturning ishga sozligini tekshirish uchun yana aniq bir misol ko'rib chiqaylik.

__Misol:__ Yuqorida iteratsiya usuli bilan yechilgan ikkinchi tartibli, chiziqsiz tenglamalar sistemasini Nyuton usuli bilan yeching.

__Yechish:__ Avvalo berilgan sistemani

$$f_1(x_1,x_2)=x_1+\frac{x_1^2}{10}+\frac{\ln x_2}{3}-4{,}6=0$$

$$f_2(x_1,x_2)=e^{-x_1}+\sqrt{x_2}+x_2-3{,}1=0$$

ko'rinishida yozib olamiz.

Nolinchi yaqinlashish sifatida $\mathbf{x}^{(0)}=(1;1)$ ni olaylik. YAkobi matrisasining shu nuqtadagi qiymatini topish uchun mos hususiy hosilalarni olamiz:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=1+\frac{x_1}{5},\quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2}=\frac{1}{3x_2},\quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1}=-e^{-x_1},\quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}=\frac{1}{2\sqrt{x_2}}+1.$$

Hosilalarni $x_1^{(0)}=1$, $x_2^{(0)}=1$ boshlang'ich qiymatlar uchun hisoblab

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}^{(0)})=\begin{pmatrix}1.2 & 0.33\\ -0.37 & 1.5\end{pmatrix}$$

Yakobian matrisasini topamiz. Bu matrisa uchun $\det \mathbf{W}(\mathbf{x}^{(0)})=1{,}9221\neq 0$ sharti bajarilganligi tufayli $\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{x}^{(0)})$ ni topish mumkin. Keyingi yaqinlashishlar esa

$$\mathbf{x}^{(p+1)}=\mathbf{x}^{(p)}-\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{x}^{(p)})\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(p)})$$

formula orqali aniqlanadi. Har safar $\max|\mathbf{x}^{(p+1)}-\mathbf{x}^{(p)}|<\varepsilon$ yaqinlashish sharti yordamida yechimning kerakli aniqliqda ekanligini tekshirib boriladi. Yuqorida ishlab chiqilgan algoritm yordamida olingan natijalar quyidagi jadvalda berilgan.

Taqribiy yechimga n nchi yaqinlashish	X_1	X_2
0	3.5	1.7
1	3.603709	2.126648
2	3.317086	1.739434
3	3.315488	1.743330

Natijalarni tahlil qilib, shunday xulosalarga kelamiz. Nyuton usuli iteratsiya usuliga nisbatan yechimga juda tez yaqinlashadi. Oddiy iteratsiya usulida yuqorida 17 ta qadam bilan topilgan yechim bu usulda 3 tagina qadamda olindi va tabiiyki, bu hisoblash mashinasining juda oz vaqt sarflashiga olib keldi. Demak, Yakobi determinantini to'g'ri qurib olinsa, Nyuton usuli chiziqsiz tenglamalar sistemasini yechishdagi eng maqbul usullardan deya olamiz.

Nazorat savollari

1. N'yuton usulida dastlabki yaqinlashish qanday aniqlanadi?
2. N'yuton usulida tenglamalar sistemasini yechish uchun qo'llanadigan Yakobi matrisasi qanday tuziladi?
3. N'yuton usulida yechimga yaqinlashish formulasi qanday munosabatlar asosida shakllantiriladi?

XULOSA

- ✓ Mazkur bobda chiziqsiz algebraik va transsendent tenglamalar, ularni yechish imkoniyatlari, tenglamani yechimlari soni, taqribiy yechish usullari haqida umumiy ma`lumotlar keltirildi.
- ✓ Chiziqsiz tenglamani yechish uchun uning ildizlarini ajratishning analitik, grafik va algoritmik usullari, ularning mohiyati bayon qilindi va misollar bilan tushuntirildi.
- ✓ Chiziqsiz tenglamani yechishning oraliqni teng ikkiga bo'lish, urinmalar, iteratsiya va vatarlar usullarining mohiyati, geometrik ma`nolari, yechimga yaqinlashish formulasi, usullarning xatoliklarini baholash jarayoni tavsiflanib, usullarga mos ishchi formulalar va dastur matnlari tavsiya qilindi. Har bir usul uchun na`muna sifatida misollar keltirildi va natijalar yaratilgan dastur ta`minoti yordamida olinib, tahlil etildi.
- ✓ Chiziqsiz sistemani yechishning iteratsiya va Nyuton usullari uchun ishchi algoritm va dastur ta`minotlari ishlab chiqildi. Aniq misollar uchun usullarga mos dastlabki yaqinlashishlar tanlanib, natijalar olindi. Har ikkala usuldan olingan natijalar tahlil etildi.

?! Bobga doir muammoli vaziyatlar!

- ➢ Chiziqsiz tenglamani taqribiy yechish uchun dastlab oraliqni ajratish shart deb o'ylaysizmi? Oraliqni ajratmay turib tenglamani yechish bo'yicha tavsiyalar bera olasizmi?
- ➢ Ildiz yotgan [a,b] oraliqni to'g'riligini tekshiruvchi asosiy shartda ko'paytma $f(a)f(b)=0$ tenglikni qanoatlantirsa, qanday mulohazalar yuritiladi?
- ➢ Nima uchun taqribiy ildiz yotgan oraliqning chetki nuqtalarida funksiyaning turli ishorali bo'lishi va shu oraliqda birinchi tartibli xosilaning ishorasini o'zgarmas bo'lishligi talab qilinishini tushuntirib bera olasizmi? Aksincha bo'lsachi?
- ➢ Ildiz yotgan oraliqni ajratishning qaysi usulini eng samarali va qulay deb hisoblaysiz? Nima uchun?
- ➢ Ildiz yotgan oraliqni katta qilib tanlab olish qanday «salbiy oqibat»larga olib kelishi mumkin? Fikringizni ifodalovchi misollar keltira olasizmi?

- ➢ Oraliqni teng ikkiga bo'lish usuli juda sodda bo'lganligi uchun tenglamani yechishda hech ikkilanmay shu usulni tanlagan bo'larmidingiz? Yoki bunga monelik qiluvchi biror sabab bormi?
- ➢ Yechimga yaqinlashishda bir muncha ustunlikka ega bo'lgan urinmalar va vatarlar usullarini qo'llashdagi asosiy qiyinchilik qaerda paydo bo'ladi? Bu usullarni har doim ishlatish mumkin deb o'ylaysizmi?
- ➢ Iteratsiya usulida yechimga yaqinlashish jarayonini nima uchun xosilaning qiymati bilan bog'lanishini tushuntirib bera olasizmi? yechimdan uzoqlashish jarayonini to'g'ri "boshqarish" uchun hisoblash algoritmida muayyan shartlar kiritish zarur deb hisoblaysizmi?
- ➢ Vegsteyn usulida iteratsiya usuliga qaraganda juda samarali bo'lgan xususiyatni ko'rsata olasizmi? Nima uchun bu usulda aksariyat hollarda yechimga yaqinlashish imkoni mavjudligining sababini bilasizmi?
- ➢ Chiziqsiz tenglamani taqribiy yechish zaruriyati tug'ilganda qaysi usulni tanlagan bo'lar edingiz? Qaysi usulda aniqlik yuqori bo'ladi deb o'ylaysiz?
- ➢ Tenglamalardagi singari tenglamalar sistemasini yechishda ham dastlabki yaqinlashishni tanlashda muayyan shartlarning bajarilishi yechimga yaqinlashishdagi asosiy omil sifatida qaraladimi? Dastlabki yaqinlashish izlanayotgan yechimga yaqinlashish tezligiga ta`sir etadimi?
- ➢ Tenglamalar sistemasini samarali yechishda yaqinlashish tezligi masalasi eng muhim omillardan ekanligining sababini ko'rsata olasizmi?
- ➢ Iteratsion jarayonining davomiyligi nima uchun aynan oldingi va keyingi yaqinlashishlarga mos tavofut miqdorlarning max qiymatini muayyan aniqlikka tekshirish orqali aniqlanishini tushuntirib bera olasizmi?
- ➢ Nyuton usulining iteratsiya usuliga ko'ra tezroq yechimga yaqinlashishiga nima sabab deb o'ylaysiz? Yakobi matrisasini har doim ham tuzib bo'ladimi? U yechimga yaqinlashishni doimo kafolatlaydimi?

3-BOB. CHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISH

Hayotda kuzatilayotgan har bir hodisalarning ro'y berish hollari ma`lum bir qonuniyatlarga bo'ysunadi. Bunday xodisalarning ro'y berishi aniq hisobga olingan faktorlar bilan bog'liq bo'lib, ularning sonli munosabatlari ma`lum bir aniq harakterga ega bo'ladi. Shunday munosabatlardan biri tenglamalar sistemasidir. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi(CHATS)ni yechish usullari sonli usullar orasida muhim o'rin tutadi. Buning asosiy sababi, xalq ho'jaligining juda ko'p masalalari bunday sistemalarni yechish bilan bog'liqdir. Shu bois ushbu bobda CHATSni yechish usullari, aniq va iteratsion usullarning mohiyati, ularni hisoblash algoritmlari, dastur ta`minotlari keltirildi. Har bir hisoblash usuliga mos masalalar na`muna sifatida yechilib, natijalar tahlil etildi.

1-§. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning umumiy qoidalari

Tayanch so'z va atamalar

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi, diagonal matrisa, simmetrik matrisa, yuqori uchburchak matrisa, uch diagonalli matrisa, sistemaning yechimi, sistemani yechish usullari, to'g'ri usullar, iteratsion usullar.

Chiziqli algebraning sonli usullariga chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish, matrisaning teskarisini topish, determinantlar hisoblash kabi sonli usullar kiradi.

Ushbu n-tartibli n ta chiziqli algebraik tenglamalarning sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (3.1)$$

Bu yerda $a_{ij} (i,j=\overline{1,n})$ lar ma`lum sonlardan iborat bo'lib, noma`lumlarning koeffisientlari deyiladi, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - noma`lumlar,

$b_1, b_2, \ldots, b_n$ - (3.1) sistema tenglamalarining ozod hadlari, ular ham ma`lum sonlardan iborat.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (3.2)$$

Matrisa va vektorni bir-biriga ko'paytirish xossasidan foydalanib, (3.2) belgilashlarni hisobga olgan holda (3.1) sistemani matrisa ko'rinishda yozamiz:

$$AX = B \qquad (3.3)$$

Umuman olganda A kvadrat matrisa turli xil ko'rinishlarda bo'lishi mumkin:

1) agar matrisadagi faqat $a_{ii} (i=\overline{1,n})$ hadlar noldan farqli bo'lib, boshqa hadlarning hammasi nolga teng bo'lsa, A matrisa **diagonal matrisa** deyiladi;
2) agar $a_{ij} = a_{ji} (i,j=\overline{1,n})$ shart bajarilgan bo'lsa, A matrisani **simmetrik matrisa** deyiladi;
3) agar matrisaning diagonali va undan yuqorida turgan hadlar noldan farqli, qolgan hadlar esa nolga teng bo'lsa, bu matrisani **yuqori uchburchak matrisa** deyiladi. Xuddi shunday ta`rifni pastki uchburchak matrisaga nisbatan ham berish mumkin;
4) agar matrisaning asosiy chap diagonal va unga parallel bo'lgan ikkita qo'shni diognallardagi elemenilargina noldan farqli, boshqa elementlar esa nolga teng bo'lsa, matrisani **uch diagonalli matrisa** deb ataladi.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish deb (3.1) yoki (3.3) sistemalardan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noma`lumlarni topishga aytiladi. Topilgan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qiymatlar (3.1) yoki (3.3) sistemalarga qo'yilganda tenglamalarni ayniyatga aylantirsa, ular sistemaning **yechimi** deyiladi.

Sistema yagona yechimi mavjudligining zaruriy va yetarli sharti A kvadrat matrisa determinantining noldan farqli bo'lishidir, ya`ni

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (3.4)$$

Agar $D=0$ bo'lsa, sistemalar maxsus sistemalar deyiladi va ularning yechimi yoki mavjud emas, yoki cheksiz ko'p bo'ladi. $D \approx 0$ bo'lgan holda esa sistema yomon shartlangan deb hisoblanadi va bunday sistemalarni yechish masalasiga alohida ahamiyat bilan yondoshish lozim bo'ladi. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish usullari ikkita guruhga bo'linadi: to'g'ri (aniq) va iteratsion (taqribiy) usullar. To'g'ri usullar yordamida sistemaning yechimiga chekli sondagi aniq arifmetik amallarni bajarish orqali erishiladi. Bu usullar keng sinfdagi sistemalarni yechish imkoniyatiga ega. Lekin, shu bilan birga, ular ayrim kamchiliklardan ham holi emas. Masalan, ular kompyuterda ishlatilganda hotira qurilmasida sistema koeffisientlari va ozod hadlarning barchasi saqlanishi kerak. Bundan tashqari, usullar asosida yotuvchi algoritmlar aniq bo'lishiga qaramasdan yechim ma'lum darajada taqribiy topiladi. Chunki, yaxlitlash xatoliklari ketma-ket bajariluvchi hisoblash bosqichlarida doimo jamlanib boradi. Ayniqsa, yuqori tartibli va yomon shartlangan sistemalar uchun bu butunlay yaroqsiz yechim olinishiga sabab bo'lishi mumkin. Shuning uchun, to'g'ri usullar yaxshi shartlangan, past tartibli, hadlari siyrak bo'lmagan matrisali sistemalarni yechishda ishlatiladi.

Iteratsion usullar - bu ketma-ket yaqinlashish usullaridir. Bu usullar to'g'ri usullarga nisbatan murakkabroq. Lekin, ko'p hollarda iteratsion usullarni ishlatish ma'qulroqdir. Chunki, bu usullarni ishlatganda kompyuterning xotira qurilmasida sistema matrisasining barcha hadlarini saqlab turishga hojat yo'q. Undan tashqari, xatoliklar ham iteratsion usullarda jamlanib bormaydi. Har bir iteratsiya qadamida hisob-kitob go'yo yangidan boshlangandek davom etib ketadi. Lekin, iteratsion usullarni hamma vaqt ham ishlataverish mumkin emas. Buning uchun, ma'lum shartlar bajarilishi kerak. Aks holda, iteratsiya jarayoni uzoqlashuvchi bo'lib, uning yordamida yetarli aniqlikdagi yechimni olish imkoniyati bo'lmaydi. Bu shartlar haqida batafsil ma'lumotlar iteratsion usullar berilgan paragrafda keltirilgan. To'g'ri usullarga Kramer, Gauss, bosh elementlar, kvadrat

ildizlar va shu kabi usullar kiradi. Iteratsion usullarga esa oddiy iteratsiya, Zeydel, relaksasiya va shu kabi usullar kiradi.

Nazorat savollari

6. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi umumiy holda qanday ifodalanadi?
7. Qanday matrisaga diagonal matrisa deyiladi?
8. Simmetrik matrisaning ta'rifini bilasizmi?
9. Yuqori uchburchak matrisani tavsiflang.
10. Qanday matrisalarni uch diagonalli matrisalar deb yuritiladi?
11. Sistemaning yechimi nima?
12. Determinantni hisoblashning sistemaning yechimini aniqlashda qanday ahamiyati bor?
13. Qanday usullarni to'g'ri usullar deb ataladi?
14. Iteratsion usullarning mohiyatini bilasizmi?
15. To'g'ri va iteratsion usullarga qanday usullar kiradi?

2-§. Gauss usuli

Tayanch so'z va atamalar

Gauss usuli, to'rtburchak sistema, uchburchak hol, to'g'ri yurish bosqichi, teskari yurish bosqichi, usulning ishchi algoritmi, dastur matni.

Gauss usuli bizga oddiy matematika kursidan ma'lum bo'lgan sistema noma'lumlarini ketma-ket yo'qotish usulining umumiy sxemasidan iboratdir. Bizga (3.1) ko'rinishidagi kabi ifodalangan quyidagi n-tartibli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}^{(1)}x_1 + a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases} \qquad (3.5)$$

Gauss usuli ikki bosqichdan iborat: to'g'ri yurish va teskari yurish. Usulning to'g'ri yurish bosqichida (3.5) ko'rinishdagi «to'rtburchak» sistema «yuqori uchburchak» holiga keltiriladi. Teskari yurish bosqichida esa, xosil qilingan «uchburchak» sistema eng oxirgi tenglamasidan boshlab yuqoriga qarab ketma-ket yechib boriladi va sistemaning sonli yechimlari xosil qilinadi.

To'g'ri yurish bosqichi. Faraz qilaylik, (3.5) sistemadagi birinchi tenglamaning yetakchi elementi $a_{11}^{(1)} \neq 0$ bo'lsin, aks holda sistemadagi tenglamalarning o'rinlarini almashtirib, x_1 noma'lum oldidagi koeffi-sienti noldan farqli bo'lgan tenglamani birinchi o'ringa ko'chiramiz. Sistemadagi birinchi tenglamaning barcha koeffisientlarini $a_{11}^{(1)}$ ga bo'lib,

$$x_1 + a_{12}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(2)}x_n = b_1^{(2)} \qquad (3.6)$$

ni hosil qilamiz, bu yerda $a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)} / a_{11}^{(1)}$, $b_1^{(2)} = b_1^{(1)} / a_{11}^{(1)}$. (3.6) tenglamadan foydalanib (3.5) sistemaning qolgan tenglamalaridan $x_1$ni yo'qotish mumkin. Buning uchun, (3.6) tenglamani ketma-ket $a_{21}^{(1)}, a_{31}^{(1)}, \ldots, a_{n1}^{(1)}$ larga ko'paytirib, mos ravishda (3.5) sistemaning ikkinchi, uchinchi va x.k tenglamalaridan ayiramiz va yana shu tenglamalar sifatida yozib olamiz. Natijada, quyidagi sistema xosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{22}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n2}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases} \qquad (3.7)$$

bu yerda $a_{ij}^{(2)}$ koeffisientlar va $b_i^{(2)}$ ozod hadlar

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} a_{1j}^{(1)}, \qquad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} b_1^{(1)}$$

formula yordamida hisoblanadi.

Yuqoridagi kabi amallarni (3.7) sistema uchun ham qo'llaymiz va bu jarayonni ketma-ket davom ettirib, berilgan (3.5) sistemaga teng kuchli quyidagi «uchburchak» sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \qquad\quad a_{22}^{(2)} + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{cases} \qquad (3.8)$$

Xosil qilingan bu uchburchak sistemaning koeffisientlari va ozod hadlari quyidagi formulalar bilan hisoblanadi:

$$a_{ml}^{(k+1)} = a_{ml}^{(k)} - \frac{a_{mk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kl}^{(k)} \qquad (3.9)$$

$$b_m^{(k+1)} = b_m^{(k)} - \frac{a_{mk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)}$$

bu yerda $k < m, l \le n,\ 1 \le k < n-1$

Teskari yurish bosqichi. Endi (3.8) uchburchak sistemaning oxirgi tenglamasidan boshlab yuqoriga qarab yurib sistema noma`lumlari $x_1, x_2, \ldots, x_n$ larni ketma-ket topish mumkin:

$$\begin{cases} x_n = b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)} \\ x_{n-1} = (b_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1,n}^{(n-1)} * x_n) / a_{n-1,n-1}^{(n-1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 = (b_1^{(1)} - a_{12}^{(1)} x_2 - a_{13}^{(1)} x_3 - \ldots - a_{1n}^{(1)} x_n) / a_{11}^{(1)} \end{cases} \qquad (3.10)$$

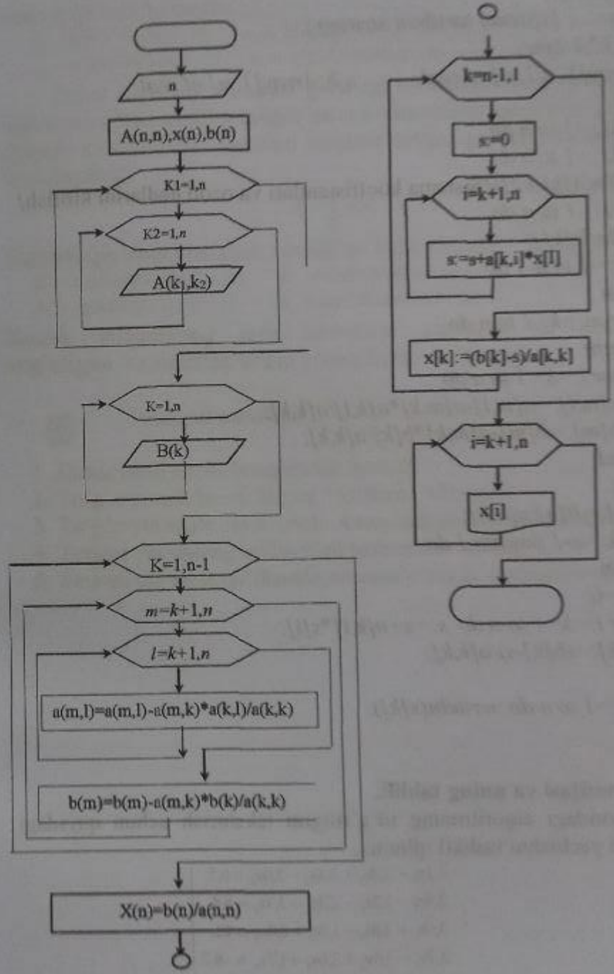
(3.10) ko'rinishdagi sistema yechimlarini aniqlash formulalarini quyidagi ixcham ko'rinishda yozish mumkin:

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}, \quad x_k = \frac{1}{a_{kk}^{(k)}} (b_k^{(k)} - \sum_{i=k+1}^{n} a_{ki}^{(k)} * x_i) \qquad (3.11)$$

$$k = n-1, n-2, \ldots, 1$$

Shunday qilib, ixtiyoriy n-tartibli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini ko'rsatib o'tilgan algoritm bo'yicha yechish mumkin. Faqat yetakchi hadlar $a_{kk}^{(k)}$ ni noldan farqliligiga yoki uni moduli bo'yicha eng kattaligiga erishish kerak. Buning uchun, Gauss usulini bosh hadni tanlash yo'li bilan qo'llaniladi, ya`ni noma`lum yo'qotiladigan ustundan moduli bo'yicha eng katta koeffisientli tenglama ishchi tenglama sifatida tanlab olinadi.

Gauss usulining algoritmining blok-sxemasi



Gauss usuli algoritmining dastur matni

```
Program m1;
const n=...; {sistema tartibini kiriting }
var k1,k2,k:byte;
  A:Array[1..n,1..n] of real;        x,b:Array[1..n] of real;
  begin
   for k1:=1 to n do
   for k2:=1 to n do
   readln(A[k1,k2]){Sistema koeffisientlari va ozod hadlarini kiritish}
   for k1:=1 to n do
   readln(B[k1])
   for k:=1 to n-1 do
    begin
     for m:=k+1 to n do
     begin
      for l:=k+1 to n do
      a[m,l]:=a[m,l]-a[m,k]*a[k,l]/a[k,k];
      b[m]:=b[m]-a[m,k]*b[k]/a[k,k];
     end;
    end;
   X[n]:=B[n]/a[n,n];
   for k:=n-1 downto 1 do
   begin
    s:=0;
    for i:=k+1 to n do  s:=s+a[k,i]*x[i];
    x[k]:=(b[k]-s)/a[k,k];
   end;
  for k:=1 to n do writeln(x[k]);
end.
```

Dastur natijasi va uning tahlili.

Yuqoridagi algoritmning to'g'riligini tekshirish uchun quyidagi sistemani yechishni tashkil qilamiz.

$$\left.\begin{aligned} 1,1x_1 + 2,3x_2 + 3,4x_3 - 2,0x_4 &= 6,5, \\ 2,8x_1 - 1,2x_2 - 2,3x_3 - 3,9x_4 &= 8,8, \\ 3,9x_1 + 2,8x_2 - 1,3x_3 + 2,8x_4 &= 4,1, \\ 2,7x_1 - 3,6x_2 + 2,6x_3 + 1,7x_4 &= -8,7. \end{aligned}\right\}$$

Gauss usuliga mos dastur ta'minotini ishlatib ko'rib, quyidagi natijalarga ega bo'lamiz.

$x_1 = 2,6372176354E+00$ $x_2 = 7,9322297766E-01$

$x_3 = -6,2607093330E-01$ $x_4 = -1,8050300306E+00$

Gauss usuli to'g'ri usullar guruhiga kirsa ham, haqiqiy sonlar ustida bajarilgan amallar tufayli ba'zi bir hisoblash xatoliklari kelib chiqishi mumkin. Shu xatolikni aniqlash uchun quyidagi formuladan foydalanamiz:

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} - b_i$$

Natijada quyidagi hisoblash xatoliklari kelib chiqadi:

$R_1 = 0,0000000000E+00$ $R_2 = 0,0000000000E+00$

$R_3 = 2,1456221112E-11$ $R_4 = 0,0000000000+00$

Xatolik miqdorining juda kichikligi algoritm va dasturning to'g'riligini va ishlatish uchun yaroqliligini ko'rsatadi.

Nazorat savollari

1. Gauss usuli necha bosqichdan iborat?
2. To'g'ri yurish bosqichining vazifasini bilasizmi?
3. To'g'ri yurishda qaysi ishchi formulalardan foydalaniladi?
4. Teskari yurishning mohiyatini tushuntirib bering.
5. Teskari yurishda qo'llanadigan asosiy ishchi formulalar qaysi?

Gauss usuli algoritmining dastur matni

```
Program m1;
const n=...; {sistema tartibini kiriting }
var k1,k2,k:byte;
  A:Array[1..n,1..n] of real;        x,b:Array[1..n] of real;
  begin
   for k1:=1 to n do
   for k2:=1 to n do
   readln(A[k1,k2]){Sistema koeffisientlari va ozod hadlarini kiritish}
   for k1:=1 to n do
   readln(B[k1])
   for k:=1 to n-1 do
    begin
     for m:=k+1 to n do
     begin
       for l:=k+1 to n do
       a[m,l]:=a[m,l]-a[m,k]*a[k,l]/a[k,k];
       b[m]:=b[m]-a[m,k]*b[k]/a[k,k];
     end;
    end;
    X[n]:=B[n]/a[n,n];
    for k:=n-1 downto 1 do
    begin
     s:=0;
     for i:=k+1 to n do  s:=s+a[k,i]*x[i];
     x[k]:=(b[k]-s)/a[k,k];
    end;
   for k:=1 to n do  writeln(x[k]);
end.
```

Dastur natijasi va uning tahlili.

Yuqoridagi algoritmning to'g'riligini tekshirish uchun quyidagi sistemani yechishni tashkil qilamiz.

$$\left.\begin{aligned} 1{,}1x_1 + 2{,}3x_2 + 3{,}4x_3 - 2{,}0x_4 &= 6{,}5,\\ 2{,}8x_1 - 1{,}2x_2 - 2{,}3x_3 - 3{,}9x_4 &= 8{,}8,\\ 3{,}9x_1 + 2{,}8x_2 - 1{,}3x_3 + 2{,}8x_4 &= 4{,}1,\\ 2{,}7x_1 - 3{,}6x_2 + 2{,}6x_3 + 1{,}7x_4 &= -8{,}7. \end{aligned}\right\}$$

Gauss usuliga mos dastur ta'minotini ishlatib ko'rib, quyidagi natijalarga ega bo'lamiz.

$x_1 = 2{,}6372176354E+00 \quad x_2 = 7{,}9322297661E-01$

$x_3 = -6{,}2607093330E-01 \quad x_4 = -1{,}8050390306E+00$

Gauss usuli to'g'ri usullar guruhiga kirsa ham, haqiqiy sonlar ustida bajarilgan amallar tufayli ba`zi bir hisoblash xatoliklari kelib chiqishi mumkin. Shu xatolikni aniqlash uchun quyidagi formuladan foydalanamiz:

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} - b_i$$

Natijada quyidagi hisoblash xatoliklari kelib chiqadi:

$R_1 = 0{,}0000000000E+00 \quad R_2 = 0{,}0000000000E+00$

$R_3 = 2{,}1456221112E-11 \quad R_4 = 0{,}0000000000+00$

Xatolik miqdorining juda kichikligi algoritm va dasturning to'g'riligini va ishlatish uchun yaroqliligini ko'rsatadi.

Nazorat savollari

1. Gauss usuli necha bosqichdan iborat?
2. To'g'ri yurish bosqichining vazifasini bilasizmi?
3. To'g'ri yurishda qaysi ishchi formulalardan foydalaniladi?
4. Teskari yurishning mohiyatini tushuntirib bering.
5. Teskari yurishda qo'llanadigan asosiy ishchi formulalar qaysi?

Shunday qilib, alohida ta`kidlash mumkinki, matrisalar determinantini Gauss usuli yordamida hisoblash uni bevosita algebraik to'ldiruvchi va minorlarga yoyib hisoblashga nisbatan ancha qulay va kam amallar bajarishni talab qiladi.

Yuqori tartibli determinantlarni Gauss usulining ishchi formulalari orqali hisoblash usuli algoritmining blok- sxemasi va dastur ta`minotlari keltirilmoqda.

Yuqoridagi algoritmning to'g'riligini tekshirish uchun avvalgi paragrafdagi sistemaning koeffisientlaridan tuzilgan determinantni yozib olamiz:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1.1 & 2.3 & 3.4 & -2.0 \\ 2.8 & -1.2 & -2.3 & -3.9 \\ 3.9 & 2.8 & -1.3 & 2.8 \\ 2.7 & -3.6 & 2.6 & 1.7 \end{vmatrix}$$

Algoritmga mos hisoblash dasturini ishlatishdan olingan natija: $\det A = 794.4342$. Yuqori tartibli determinantni hisoblashning Gauss usuliga asoslangan algoritmning hisoblash xatoligi qanday ekanligini tekshirish uchun yuqoridagi determinantni oliy matematika kursida o'rgangan an`anaviy- algebraik to'ldiruvchilar yordamida hisobladik. Natija: 794,4345. Hisoblash xatoligi: 0,0001. Xatolik miqdorining unchalik katta emasligi algoritm va dasturning to'g'riligini va ishlatish uchun yaroqliligini ko'rsatadi.

Nazorat savollari

1. Yuqori tartibli determinantlarni hisoblash nima uchun kerak bo'ladi?
2. Determinantlarni hisoblashning qanday usullarini bilasiz?
3. Matrisaning qaysi hadlarini yetakchi hadlar deb ataymiz?
4. Determinantni hisoblovchi asosiy formula qaysi?
5. Yetakchi hadlardan birortasi nolga teng bo'lsa qanday choralar ko'riladi?

4-§. Teskari matrisani Gauss usuli bilan hisoblash

Tayanch so'z va atamalar

Xosmas kvadrat matrisa, teskari matrisa, Kroneker belgisi, uchburchak sistemalar tizimi, teskari matrisani topish algoritmi, dastur matni.

Odatda, shunday bir qancha sistemalarni yechishga to'g'ri keladiki, ularning koeffisientlari matrisasi bir xil, ozod hadlari esa turlicha bo'ladi. Bunday xollarda koeffisientlar matrisasini teskarisini topib, ular orqali sistemalarni yechish maqsadga muvofiqdir. Bundan tashqari, turli xil statistik hisoblashlarda ba`zi parametrlarni baholash uchun teskari matrisalar katta ahamiyatga ega. Umuman olganda, turli xil amaliy ahamiyatga ega bo'lgan masalalarni yechishda teskari matrisalar bilan ishlashga to'g'ri keladi. Shuning uchun, bu paragrafda teskari matrisani topishni Gauss usuli yordamida tashkil etamiz.

Faraz qilaylik, bizga xosmas, ya`ni $\det A \neq 0$, kvadrat matrisa $A = [a_{ij}]$ $(i,j = \overline{1,n})$ berilgan bo'lsin.

Umumiy usulda teskari matrisa

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

ko'rinishda topiladi. Bunda A_{ij} $(i,j = \overline{1,n})$ hadi berilgan matrisani a_{ij}-hadining algebraik to'ldiruvchisi bo'lib, u shu had minori bilan $(-1)^{i+j}$ ning ko'paytmasiga tengdir.

Ma`lumki, $n$-tartibli $A$ kvadrat matrisaga teskari $A^{-1}$ matrisa ta`rifga ko'ra $A \cdot A^{-1} = E$ (E-birlik matrisa) shart bajariladi.

Gauss usuli yordamida A^{-1} matrisani topish uchun uning hadlarini $x_{i,j}$ $(i,j = \overline{1,n})$ deb belgilab olamiz va $A \cdot A^{-1} = E$ munosa-batdan foydalanamiz. U xolda A^{-1} matrisaning noma`lum had-lariga nisbatan yozilgan n ta n-tartibli tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot x_{kj} = \delta_{ij} \qquad (i,j = \overline{1,n}) \qquad (3.16)$$

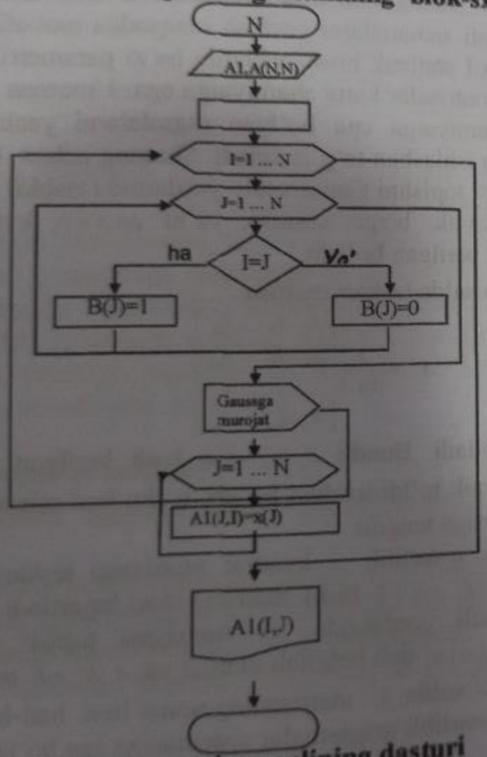
Bu formuladagi Kroneker belgisi quyidagicha aniqlanadi:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & агар\ i = j\ бўлса \\ 0 & агар\ i \neq j\ бўлса \end{cases}$$

Hosil qilingan *n* ta tenglamalar sistemalarining koeffi-sientlar matrisalari bir xildir. Bu sistemalarda ozod hadlar farqli xolos. Shuning uchun , sistema koeffisientlari matrisasini Gauss usuli yordamida bir marta uchburchak xoliga keltirib olamiz va so'ngra ularga moslashtirilgan turli xil ozod hadlar uchun uchburchak sistemalarni ketma-ket yechib, teskari matrisa hadlarini aniqlaymiz. Bunda asosiy vaqt uchburchak sistemani yechishga ketadi xolos.

Quyida teskari matrisani Gauss usuliga asoslanib hisoblanish algoritmining blok-sxemasi va dasturi keltirilgan.

Teskari matrisa topish algoritmining blok-sxemasi



Teskari matrisa usulining dasturi

```
Program Teskari_mat;
const n=3;
type
  mat=array[1..n,1..n] of Real;
```



```
    Vec=array[1..n] of Real;
   Var
    A,T,E:Mat;
    X,B:Vec;   i,j,K:Integer;
   Procedure Gauss(a:Mat; b:Vec; n:byte;Var x:Vec);
   var
    k,l,m,i:byte;    s:real;
    begin
    for k:=1 to n-1 do
  begin
   for m:=k+1 to n do
   begin
    for l:=k+1 to n do a[m,l]:=a[m,l]-a[m,k]*a[k,l]/a[k,k];
    b[m]:=b[m]-a[m,k]*b[k]/a[k,k];
   end;end;
x[n]:=b[n]/a[n,n];
    for k:=n-1 downto 1 do
    begin
     s:=0;
     for i:=k+1 to n do s:=s+a[k,i]*x[i];
     x[k]:=(b[k]-s)/a[k,k];
    end;end;
   begin
    For I:=1 to n do For J:=1 to n do Readln(A[i,j]);
    For I:=1 to n do
    Begin
      For J:=1 to n do If i=j Then B[J]:=1 else B[J]:=0;
      Gauss(A,B,N,X);
      For J:=1 to n do T[J,I]:=X[J];
    End;
     For I:=1 to n do
     Begin
      For J:=1 to n do Write(T[i,j]:12:4);
       Writeln;
     End;
      Writeln('Tekshirish');
      for i:=1 to n do
      for j:=1 to n do
```

```
begin
  e[i,j]:=0;
  for k:=1 to n do e[i,j]:=e[i,j]+a[i,k]*T[k,j];   end;
 for i:=1 to n do
 begin
  for j:=1 to n do write(E[i,j]:8:4);
   writeln;   end;
readln;
end.
```

Olingan natijalarni tahlil qilish.

Yuqoridagi algoritmning va dastur ta`minotining to'g'rili-gini tekshirish uchun quyidagi matrisani misol sifatida olamiz:

$$A=\begin{bmatrix}1,1 & 2,3 & 5,5 & 2,3\\ 3,3 & 1,3 & 1,8 & 3,1\\ 2,6 & 4,3 & 1,1 & 1,7\\ 1,1 & 3,8 & 2,9 & 2,7\end{bmatrix}$$

Teskari matrisani topish algoritmiga mos dastur ta`mi-notini ishlatib ko'rib, quyidagi teskari matrisani hosil qilamiz.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0,16 & 0,16 & 0,34 & -0,54\\ -0,05 & 0,19 & 0,20 & 0,12\\ 0,31 & -0,07 & 0,04 & -0,21\\ -0,33 & 0,27 & -0,47 & 0,64\end{bmatrix}$$

Olingan natijaning to'g'riligini tekshirish uchun berilgan matrisani teskari matrisaga ko'paytirib ko'rdik. Natijada ko'paytma birlik matrisadan iborat bo'ldi. Bu jarayon dasturning tekshirish qismida o'z ifodasini topgan. Bu esa algoritm va dasturning to'g'riligini va ishlatish uchun yaroqliligini ko'rsa-tadi.

Nazorat savollari

1. Teskari matrisani topish uchun qaysi usuldan foydalaniladi?
2. Teskari matrisani hisoblashda ishlatiladigan Kroneker belgisi qanday aniqlanadi?
3. Teskari matrisani to'g'ri topilganligini qanday tekshirish mumkin?
4. Teskari matrisa yordamida tenglamalar sistemasini yechish qanday usullar guruhiga kiradi?

5-§. Iteratsiya usuli

Tayanch so'z va atamalar
Diagonalelementlar, nolinchi yaqinlashish, iteratsiyalar soni, yaqinlashish tezligi, yaqinlashish shartlari, iteratsiya usulining hisoblash algoritmi,dastur matni.

Iteratsiya, ya`ni ketma-ket yaqinlashish usuli yuqori tartibli sistemalarni yechishda qo'l keladi. Bundan tashqari, bu usul aniq usullardan farqli o'laroq xatoliklarning jamlanmasligi kabi xususiyatga egaki, bu yuqori tartibli sistemalarni yechishda hal qiluvchi omillardan biri bo'lishi mumkin.

Bizga (3.1) ko'rinishidagi sistema berilgan bo'lsin. Koeffisientlar matrisasi A da barcha diagonal hadlarni 0 dan farqli deb qaraymiz. (3.1) sistemaning birinchi tenglamasini x_1 ga nisbatan, ikkinchi tenglamasini x_2 ga nisbatan va hokazo n-tenglamasini x_n ga nisbatan yechib quyidagi berilgan tenglamalar sistemasiga teng kuchli sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}. \end{cases} \qquad (3.17)$$

Bunda agar $i \neq j$ bo'lsa, $\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$, $\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, a_{ii} \neq 0$; agar $i = j$ bo'lsa , $\alpha_{ij} = 0 \quad (i, j = \overline{1,n})$

Quyidagi belgilashlar kiritib

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\ldots\alpha_{2n} \\ \alpha_{n1}\alpha_{n2}\ldots\alpha_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ . \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

(3.17) sistemani matrisa-vektorli ko'rinishida yozib olishimiz mumkin:

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\beta} + \alpha\mathbf{X} \qquad (3.18)$$

(3.18) sistemani ketma-ket yaqinlashish usuli bilan yechamiz. Nolinchi yaqinlashish sifatida ixtiyoriy **X** vektor ustunni olishimiz mumkin. Masalan:

$$\mathbf{X}^{(0)} = \boldsymbol{\beta} \text{ yoki } \mathbf{X}^{(0)} = 0$$

Nolinchi yaqinlashishni (3.18) sistemaning o'ng tarafiga qo'yib chap tarafda **X** vektor- ustunning birinchi yaqinlashishini topamiz:

$$\mathbf{X}^{(1)} = \boldsymbol{\beta} + \alpha\mathbf{X}^{(0)}$$

Xuddi shuningdek,

$$\mathbf{X}^{(2)} = \boldsymbol{\beta} + \alpha\mathbf{X}^{(1)}$$

ni topishimiz shu qonuniyat asosida yechimning ixtiyoriy $(k+1)$-yaqinlashishini

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \boldsymbol{\beta} + \alpha\mathbf{X}^{(k)} \quad (k = 0,1,2,\ldots) \qquad (3.19)$$

ko'rinishida topishimiz mumkin.

Agar $\mathbf{X}^{(0)}, \mathbf{X}^{(1)}, \ldots, \mathbf{X}^{(k)}, \ldots$ ketma-ketlik chekli limitga ega, ya`ni

$$\mathbf{X} = \lim_{k \to \infty} \mathbf{X}^{(k)}$$

bo'lsa, bu limit (3.1) yoki (3.17) sistemaning yechimi bo'ladi.

Matrisa-vektorli ko'rinishdagi yozuvdan koordinatalar ko'rinishidagi yozuvga o'tib, (3.19) formulani quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$x_i^{(0)} = \beta_i,$$
$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)}, \qquad (3.20)$$
$$\alpha_{ii} = 0, \; i = \overline{1,n}, \; k = 0,1\ldots$$

(3.19) yoki (3.20) formulalar bilan aniqlangan ketma-ket yaqinlashishlar asosida **X** yechimni topish iteratsiya usulini ma`nosini tashkil qiladi.

Iteratsiya usuli ma`lum shartlar bajarilganda yetarli aniqlikdagi yechimni istalgan $\mathbf{X}^{(0)}$ boshlang'ich yaqinlashishlarda topish imkoniyatini beradi. Bu shartlar yaqinlashish shartlari deyilib, ular to'g'risida keyinchalik fikr yuritamiz. Demak, yuqoridagi kabi dastlabki yaqinlashish sifatida ozod hadlarni olish umuman olganda shart emas. Ularning o'rniga nollar: $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)} = 0$ yoki istalgan sonlarni olish mumkin. Bunday ixtiyoriylik yaqinlashish jarayoniga kuchli ta`sir ko'rsatmaydi. Muayyan aniqlikdagi yechimni olish uchun kerak bo'lgan iteratsiyalar soni esa dastlabki yaqinlashishlarga bog'liq bo'ladi. Agar dastlabki yaqinlashish topilayotgan taqribiy yechimga qanchalik yaqin bo'lsa, yechim shuncha kam iteratsiyalar bilan olinadi. Iteratsiya jarayonining yaqinlashish tezligi koeffisientlar matrisasining xususiyatlariga bog'liq.

Yaqinlashuvchi iteratsiya jarayoni o'z-o'zini tuzatish kabi juda ajoyib xususiyatga ega. Ma`lum iteratsiya qadamida xatoliklarga yo'l qo'yilsa, keyingi iteratsiya qadamlarida ular o'z-o'zidan tuzatiladi. Lekin, shuni ham ta`kidlab o'tish lozimki, yo'l qo'yilgan xatoliklar ma'lum aniqlikdagi yechimlarni olish uchun zarur bo'lgan iteratsiyalar sonini ko'paytirib yuborishi mumkin. Xatoliklarning o'z-o'zidan tuzatilishi iteratsiya jarayonining har bir qadamida dastlabki yaqinlashish sifatida qaralayotgan oldingi iteratsiya qadamida olingan yechimning ishlatilishi tufayli yuz beradi.

Endi iteratsiya usulining yaqinlashish shartlarini keltiramiz. Agar keltirilgan (3.18) sistema uchun quyidagi

$$1)\ \sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|<1,\ i=\overline{1,n},\quad 2)\ \sum_{i=1}^{n}|\alpha_{ij}|<1,\ j=\overline{1,n},\quad 3)\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|^2<1 \qquad (3.21)$$

shartlardan hech bo'lmaganda biri bajarilsa, (3.19) iteratsiya jarayoni boshlang'ich yaqinlashishni qanday olishdan qat`iy nazar, sistemaning yagona yechimiga yaqinlashadi.

Dastlabki (3.1) sistema esa (3.21) shartlarning birinchi va ikkinchisiga asosan

$$|a_{ii}|>\sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|,\ i=\overline{1,n},\qquad |a_{jj}|>\sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|,\ j=\overline{1,n}, \qquad (3.22)$$

shartlarning hech bo'lmaganda bittasi bajarilganda tezroq yaqinlashadi.

Bu shartlar bajarilmasa (3.1) sistemaga bevosita iteratsiya usulini qo'llab bo'lmaydi. Buning uchun, sistemani chiziqli almashtirishlar yordamida (3.22) shartni qanoatlantiruvchi teng kuchli sistemaga keltirish kerak. Ayrim hollarda dastlabki sistemada tenglamalarning o'rnini almashtirishning o'ziyoq aytilgan teng kuchli sistemani beradi.

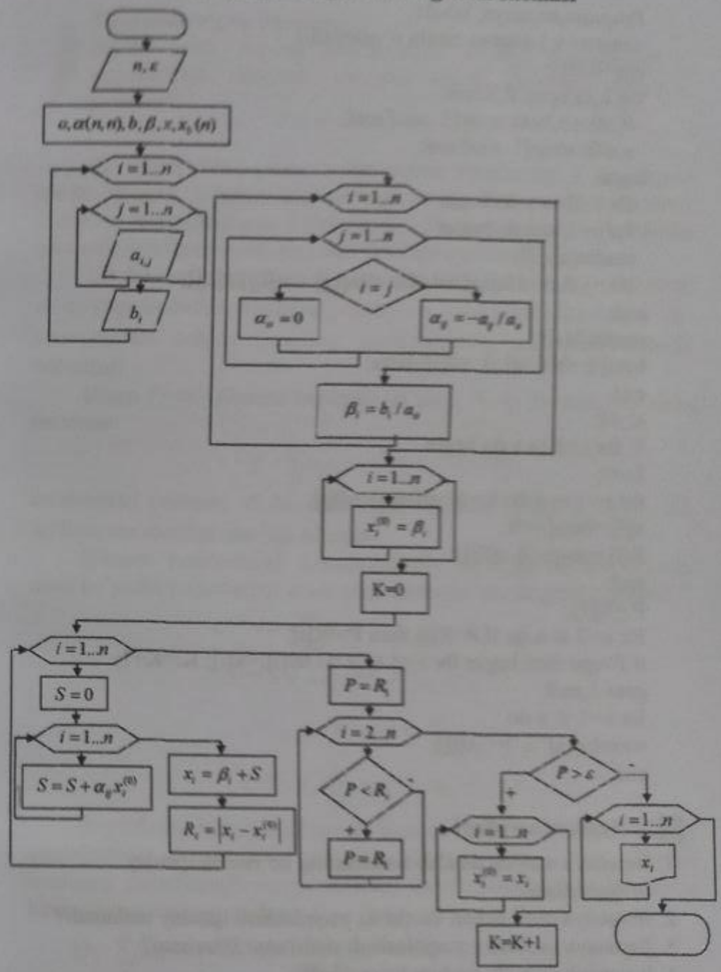
Har bir iteratsiya qadamidan so'ng olingan yechim oldingi iteratsiya qadamida olingan yechim bilan taqqoslanishi kerak. Ketma-ket ikkita iteratsiya qadamidagi yechimlarning o'zaro yaqinligi

$$\delta=\max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k)}-x_i^{(k-1)}\right| \qquad (3.23)$$

miqdor bilan baholanishi mumkin. Masalan, tenglamalar sistemasini avvaldan qabul qilingan ε aniqlikda yechish talab qilingan bo'lsa, iteratsiyalarni $\delta<\varepsilon$ shart bajarilguncha davom ettirish kerak.

Sistemaning taqribiy yechimi sifatida $\delta<\varepsilon$ shartni bajaruvchi oxirgi iteratsiya qadamida topilgan $\tilde{x}=x_1^{(k)},\tilde{x}_2=x_2^{(k)},...,\tilde{x}_n=x_n^{(k)}$ yechim olinadi. Bu yerda $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n$ lar berilgan sistemaning taqribiy yechimlaridir.

Iteratsiya usuli algoritmining blok-sxemasi



Algoritm dasturi

```
Program iterasiya; label1;
const n=4;{sistema tartibi o'rnatiladi}
eps=0.001;
var k,i,j:byte; P,S:real;
 R,x0,x,b,beta:array[1..n]of real;
 a,alfa:array[1..n]of real;
begin
 for i:=1 to n do begin
 for j:=1 to n do begin
 readln(a[i,j]);
 if i:=j then alfa[i,j]:=0 else alfa[i,j]:=-a[I,j]/a[i,j];
end;
readln(b[i]);
beta[i]:=b[i]/a[i,j]; x0[i]=beta;
end;
K:=0;
1: for i:=1 to n do begin
S:=0;
for j:=1 to n do S:=S+alfa[i,j]*x0[i];
x[i]:=beta[i]+S;
R[i]:=abs(x[i]-x0[i]);
end;
P:=R[1];
for i:=2 to n do if P<R[i] then P:=R[i];
if P>eps then begin for i:=1 to n do x0[i]:=x[i]; K:=K+1;
goto 1;end;
for i:=1 to n do
writeln('x[',i,']=',x[i]);
end.
```

Nazorat savollari

1. Iteratsiya usulida dastlab sistemaning ko'rinishi qanday o'zgartiriladi?
2. Iteratsiya usuli uchun dastlabki yaqinlashish qanday tanlanadi?
3. Iteratsiya usulining yaqinlashish shartlarini bilasizmi?
4. Iteratsion jarayon qachon to'xtatiladi?

6-§. Zeydel usuli

Tayanch so'z va atamalar

Zeydel usuli, keyingi yaqinlashish, avvalgi yaqinlashish, yaqinlashish shartlari, usulning ishchi algoritmi, dastur ta'minoti.

Bu usulni 1847 yilda taniqli nemis matematigi F. L. Zeydel ishlab chiqqan. Mazkur usul oldingi paragrafda qaralgan iteratsiya usulining takomillashgan ko'rinishidir. Shuning uchun, u ko'pincha takomillashtirilgan iteratsiya usuli deb ham yuritiladi.

Zeydel usulining asosiy g'oyasi shundan iboratki, x_i yechimning $(k+1)$-yaqinlashishini hisoblash uchun $x_1, x_2, ..., x_{i-1}$ yechimlar-ning $(k+1)$-yaqinlashishi, qolgan $x_i, x_{i+1}, ..., x_n$ yechimlarning esa k-yaqin-lashishi ishlatiladi.

Bizga (3.18) sistema berilgan bo'lsin . Koordinatalar bo'yicha sistemani

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j, \ (i = \overline{1,n}) \qquad (3.24)$$

ko'rinishda yozamiz. (3.24) sistemada umumiy holda $\alpha_{ii} \neq 0 \ (i = \overline{1,n})$ bo'lishi mumkinligi hisobga olingan.

Sistema yechimining k-yaqinlashishi topilgan bo'lsin. Zeydel usuli bo'yicha yechimning $(k+1)$-yaqinlashishi quyidagicha topiladi:

$$x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j^{(k)},$$

$$x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{2j} x_j^{(k)},$$

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)},$$

$$x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)}, \quad k = 0,1,2,...$$

Zeydel usulining yaqinlashish shartlari oddiy iteratsiya usulining yaqinlashish shartlaridan, umuman olganda, farq qiladi. Zeydel usulining yaqinlashishi uchun quyidagi shartlarning hech bo'lmaganda bittasi bajarilishi yetarlidir:

1) $\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1, i = \overline{1,n};$ 2) $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1, j = \overline{1,n};$ 3) $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^2 < 1;$ 4) A matrisa simmetrik va musbat aniqlangan.

Yaqinlashish shartlari bajarilganda yechim boshlang'ich yaqinlashishning olinish usuliga bog'liq emas.

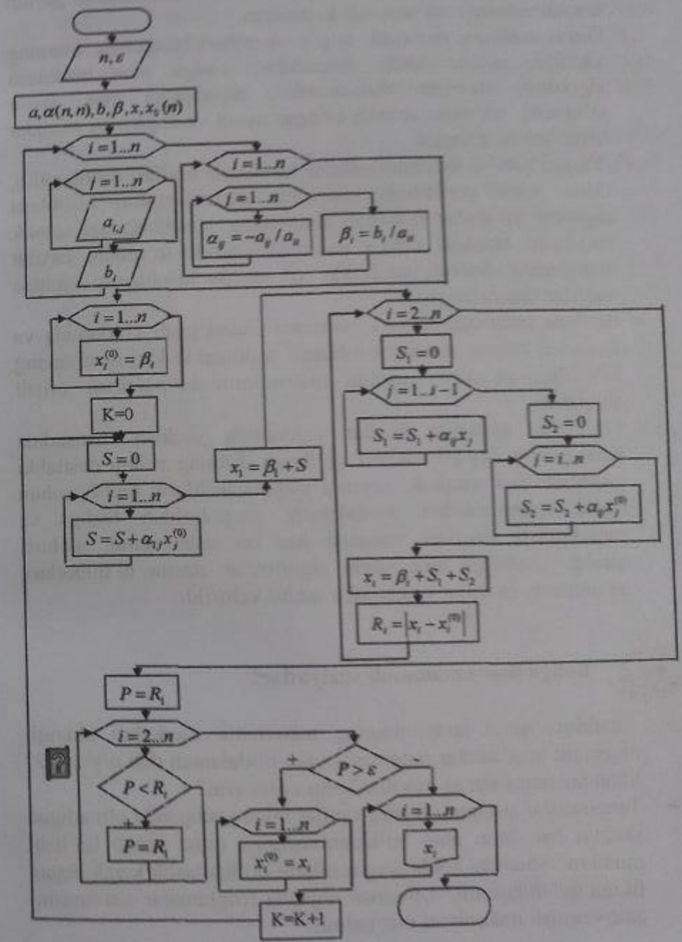
Yuqoridagi shartlardan ko'rinadiki, oddiy iteratsiya usuli-ning yaqinlashish shartlari bajarilganda Zeydel usuli yaqinlashadi.

Odatda Zeydel usuli oddiy iteratsiya usuliga nisbatan yechimga tezroq yaqinlashadi. Lekin, ayrim hollarda buning aksi ham bo'lishi mumkin.

Algoritm dasturi

```
Program Zeydel;
label1;
const n=4; eps=0.001;
var k,i,j:byte; P,S:real;
  R,x0,x,b,beta:array[1..n]of
real;
  a,alfa:array[1..n]of real;
begin
  for i:=1 to n do begin
  for j:=1 to n do begin
  readln(a[i,j]);
  alfa[i,j]:=-a[i,j]/a[i,i];
end;
  readln(b[i]);
  beta[i]:=b[i]/a[i,i];
end;
for i:=1 to n do
x0[i]:=beta[i];
K:=0;
1: S:=0;
for i:=2 to n do begin
S1:=0; for j:=1 to i-1 do
S1:=S2+alfa[i,j]*x[j];
S2:=0; for j:=i to n do
S2:=S2+alfa[i,j]*x0[i];
x[i]:=beta[i]+S1+S2;
R[i]:=abs(x[i]-x0[i]);
end;
P:=R[1];
for i:=2 to n do if P<R[i] then
P:=R[i];
if P>eps then begin for i:=1 to
n do x0[i]:=x[i];
K:=K+1; goto1 ; end;
for i:=1 to n do writeln(x[i]);
end.
```


Zeydel usuli algoritmining blok-sxemasi



XULOSA

Mazkur bobda tenglamalar sistemasining yechimi, turli xil matrisalar va ularning tavsifi, CHATSni yechish usullari guruhi haqida umumiy ma`lumotlar keltirilgan.

- ✓ Gauss usulining mohiyati, to'g'ri va teskari bosqichlar, ularning vazifasi, asosiy ishchi formulalar, usulga mos hisoblash algoritmi, algoritm blok-sxemasi, algoritmga mos dastur ta`minoti, na`muna sifatida olingan misol va unga mos natijalar tahlili bayon qilingan.
- ✓ Yuqori tartibli determinantlarni hisoblash usullari tahlil etilib, Gauss usuli yordamida matrisalar determinantini hisoblash algoritmi va dastur ta`minoti kelti-rilgan. Hisoblashdagi xatolik miqdorini aniqlash uchun na`muna sifatida to'rtinchi tartibli matrisaning determi-nanti ikki xil usulda hisoblanib, olingan natijalar taqqoslangan.
- ✓ Berilgan matrisaga teskari matrisani Gauss usuli yordamida va Kroneker belgisi asosida hisoblanib, topilgan teskari matrisaning to'g'riligi an`anaviy usulda matrisalarni ko'paytirish orqali aniqlandi.
- ✓ CHATSni iteratsion usullar yordamida yechish maqsadida iteratsiya va Zeydel usullari qo'llandi. Buning uchun dastlabki yaqinlashishni aniqlash, keyingi yaqinlashishlarni topish uchun ishchi formulalardan foydalanish, yaqinlashish tezligi va yaqinlashish shartlari masalasi har bir usul uchun alohida qaraldi. Usullarga mos ishchi algoritmlar, dastur ta`minotlari, na`munaviy misollar va natijalar tahlili keltirildi.

?!

Bobga doir muammoli vaziyatlar!

- ➢ Amaldagi qaysi jarayonlarning matematik modellari chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi orqali ifodalanadi deb o'ylaysiz? Shunday masalalarga misollar keltira olasizmi?
- ➢ Tenglamalar sistemasini aniq usullar bilan yechganda olinadigan yechim har doim aniq bo'lavermasligiga nima sabab bo'lishi mumkin? Shunday holda aniq usullarni qo'llamaslik kerak degan fikrga qo'shilasizmi? Umuman olganda tenglamalar sistemasini aniq yechish imkoniyati mavjudmi?

- ➢ Sistema yagona yechimi mavjudligining zaruriy va yagona sharti nima uchun determinantlar hisobi bilan bog'liqligini tushuntira olasizmi? Shu shart yechim mavjudligini aniqlash uchun yetarli deb o'ylaysizmi?
- ➢ Har qanday CHATS uchun to'g'ri usullarni qo'llash maqsadga muvofiqmi? Ular har doim maqbul yechimlarni olishga yordam berishi mumkinmi?
- ➢ Gauss usulini hamma CHATSlar uchun qo'llansa maqsadga muvofiq yechimlar olinishiga ishonasizmi? Usulni samarali qo'llash uchun qo'shimcha tavsiyalar qirita olasizmi?
- ➢ Gauss usulining boshqa usullarda deyarli uchramaydigan alohida afzallik tomoni mavjud. Uni tavsiflay olasizmi?
- ➢ Matrisa determinantini hisoblash siz bilgan qaysi masalalarni yechishda qo'llaniladi deb o'ylaysiz. Determinantlar hisoblash usuli to'g'ri usullar guruhiga kiradimi? Nima uchun?
- ➢ Matrisa determinantini hisoblash zaruriyati tug'ilganda aynan qaysi usulni tanlar edingiz? Sababini tushuntira olasizmi?
- ➢ Iteratsion usullarda aniq usullarda uchramaydigan xatoliklar bilan bog'liq "ajoyib xususiyat"ni aniqlay olasizmi? Bu holat iteratsion usullarning CHATSni yechishdagi "ustun"ligiga sabab bo'lishi mumkinmi?
- ➢ Har qanday tenglamalar sistemasi uchun iteratsion usullarni qo'llash mumkin deb o'ylaysizmi? Bunda sistema koeffisientlari uchun alohida shartlarning bajarilishi talab etilmaydimi?

4-BOB. FUNKSIYALARNI INTERPOLYATSIYALASH

Amaliy faoliyatda ko'pincha jarayon va hodisalarning matematik ifodasini topish bilan bog'liq muammolarga duch kelinadi. Ayniqsa, iqtisodiyot va texnikada funksiya va jadval ko'rinishida berilgan funksiya argumentining turli qiymatlariga mos funksiyaning analitik ko'rinishini hamda matematik ifodasini topish masalasi birmuncha murakkab masala hisoblanadi. Shu bois ushbu bobda tajriba natijalarini qayta ishlashda qo'llanadigan funksiyani interpolyatsiyalash masalasi qaraladi. Ko'phad bilan interpolyatsiyalash, xususan Nyuton va Lagranj interpolyasion formulalari misol sifatida tavsiflanadi. Jadvalning qiymatlariga qarab funksiyaning analitik ko'rinishini topish uchun eng kichik kvadratlar usuli tavsiya qilinadi.

1-§. Interpolyatsiya masalasi

Tayanch so'z va atamalar
Interpolyatsiya, jadval funksiya, ekstrapolyatsiya, Vandermond determinanti, ko'phad.

Interpolyatsiyalash tajriba yoki kuzatish natijalarini umumlashtirish, analitik ko'rinishini topish qiyin bo'lgan murakkab funksiyalarni soddaroq funksiyalar bilan almashtirish va ularning qiymatlarini hisoblashda ishlatiladi.

Interpolyatsiya deganda, erkli o'zgaruvchi miqdor bilan funksiyaning diskret nuqtalardagi mos qiymatlari orasidagi munosabati ma`lum bo'lgan holda funksional bog'lanishning taqribiy yoki aniq analitik ifodasini tuzish tushuniladi. Boshqacha aytganda, tajriba o'tkazish yoki kuzatish natijasida quyidagi jadval funksiya

x_i	x_0	x_1	...	x_n
y_i	y_0	y_1	...	y_n

olingan bo'lsa, x va y o'zgaruvchilar orasida bog'lanish bormi, bor bo'lsa ular qanday qonuniyat bilan bog'langan degan muammoga

javob izlanadi. Yoki, $x_1, x_2, ..., x_n$ diskret nuqtalarda $y=f(x)$ funksiyaning qiymati ma`lum bo'lsa, boshqa x larda shu funksiyaning qiymatini topish tushuniladi. Umuman olganda, yuqorida aytgan qonuniyatni jadval ko'rinishida berilgan funksiya orqali bir qiymatli aniqlash mumkin emas.

Shuning uchun, bu masalaning klassik yechimi quyidagicha hal qilinadi: $F(x)$ funksiya $x = x_i$, $i = 0,1,..,n$, nuqtalarda jadval funksiya $f(x)$ bilan ustma-ust tushadi deb qabul qilinadi, ya`ni

$$F(x_i) = f(x_i)\ ,\ i = 0,1,..,n \qquad (4.1)$$

Yaqinlashuvchi funksiya $F(x)$ ni (4.1) shart asosida topishni interpolyatsiya masalasi deyiladi. $F(x)$ funksiyani interpolyatsiya formulasi, $x_0,...,x_n$ nuqtalarni interpolyatsiya nuqtalari, (4.1) shartni esa interpolyatsiya shartlari deb ataladi.

$F(x)$ funksiyani darajali ko'phad, trigonometrik ko'phad, rasional funksiya, splayn-funksiya ko'rinishda tanlab olish mumkin. Izlanayotgan ko'phad uchun quyidagi teorema doimo o'rinli bo'ladi.

Teorema: Agar $a = x_0 < x_1, ... < x_n = b$ bo'lsa, $P_n(x_i) = y(x_i)$, $i = 0,1,...,n$ shartlarni qanoatlantiruvchi yagona interpolyatsiya ko'phadi $P_n(x)$ mavjud.

Argument va funksiya o'rtasidagi taqribiy munosabat biror bir usul bilan o'rnatilgach, bu munosabat orqali x o'zgaruvchining jadvalda berilmagan qiymatlarida $y = f(x)$ funksiya qiymatlarini hisoblash mumkin.

Agar funksiyaning taqribiy qiymati aniqlanayotgan x argument berilgan $[x_0, x_n]$ oraliqqa tegishli bo'lsa, u holda qo'yilgan masala *interpolyatsiyalash* masalasi, agar hisoblanayotgan qiymat x argumentning $[x_0, x_n]$ oraliqdan tashqaridagi qiymatlari uchun bo'lsa, qo'yilgan masala *ekstrapolyasiyalash* masalasi deyiladi.

$F(x)$ funksiyani darajali funksiya ko'rinishida tanlansa, bunday interpolyatsiya parabolik deb ataladi. Bunday yaqinlashish usuli, shunga asoslanadiki, $f(x)$ funksiya uncha katta bo'lmagan oraliqlarda muayyan tartibli parabola uchun juda qulay approksimasiyalanadi.

Agar $f(x)$ funksiya davriy bo'lsa, u holda $F(x)$ ni ba`zi hollarda trigonometrik, ba`zan esa rasional funksiyalar sifatida tanlanadi. Shunday qilib, interpolyatsiyada quyidagi vazifalarni hal etish lozim bo'ladi.

1. Har qanday aniq holat uchun interpolyatsiya funksiyasini qurishning qulay usulini tanlash.
2. $[a,b]$ kesmada interpolyatsiyalanadigan $F(x)$ funksiyaning xatoligini baholash, ya`ni $F(x)$ va $f(x)$ funksiya qiymatlarini $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tugun nuqtalarda qanchalik mos kelishini aniqlash.
3. Eng kichik xatolik bilan sodir bo'luvchi interpolyatsiya tugunlarini maqbul tanlash.

Ko'phad bilan interpolyatsiyalash. Interpolyatsiyalash funksiyasini quyidagi ko'phad

$$F(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \qquad (4.2)$$

ko'rinishida izlaylik. $P_n(x_i) = y_i$, $i = 0,1,\ldots,n$ deb talab qilib, maz-kur ko'phadning noma`lum koeffisientlariga nisbatan quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j = f(x_i),\ i = 0,1,\ldots,n \qquad (4.3)$$

(4.3) sistemani to'g'ri yoki iteratsion usullar yordamida yechib, qiymatlari $x = x_i$ nuqtalarda $y = f(x)$ funksiya qiymatlari bilan ustma-ust tushadigan $y = P_n(x)$ ko'phadi hosil qilinadi. Lekin, (4.3) sistemani yechishda o'ziga xos muammolar hosil bo'ladi. Bu muammo ayniqsa, sistemaning tartibi katta bo'lganda o'zini namoyon qiladi. Chunki, yuqori tartibli sistemalarni yechishda kompyuter xotirasini yetishmasligi yoki hisoblashlardagi yaxlitlash xatosining ortib ketishi kabi muammolar hosil bo'ladi. Shunday xollarning oldini olish uchun $P_n(x)$ ko'phadi maxsus ko'rinishlarda tanlab olinadi.

$P_n(x)$ interpolyatsiya ko'phadining I.Nyuton (1643-1727) va J.L.Lagranj (1736-1813) topgan qulay ko'rinishlari ana shu maxsus ko'rinishlarga misol sifatida qaralishi mumkin.

Nazorat savollari

1. Interpolyatsiyalash jarayoni qanday amalga oshiriladi?
2. Interpolyatsiya qanday funksiyalar uchun qo'llanadi?
3. Ekstrapolyasiya nima?
4. Interpolyatsiyada noma`lum ko'phadning koeffisientlari qanday aniqlanadi?

2-§. Nyuton interpolyasion formulasi

Tayanch so'z va atamalar

Tugun nuqtalar, n-darajali ko'phad, Nyuton interpolyasion formulalari, interpolyatsiya xatoligi, interpolyatsiyalash algoritmi, dastur matni.

Amalda Nyutonning ikkita interpolyatsiyalash formulasi mavjud. Nyutonning birinchi interpolyatsiya formulasida $y = f(x)$ funksiyaning qiymatini x_0 boshlang'ich qiymati atrofida hisoblash qulay bo'lib, funksiyani jadvalning oxiridagi qiymatlari uchun hisoblash noqulay. Nyutonning ikkinchi interpolyatsiya formulasi kesma oxirida x_n nuqtadan orqaga qarab bajariladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tugun nuqtalardagi $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$ qiymatlar bilan berilgan bo'lsin, $P_n(x_0) = y_0$, $P_n(x_1) = y_1$, $\ldots, P_n(x_n) = y_n$ tengliklarni qanoatlantiruvchi $P_n(x)$ ko'phadni qurish talab qilinmoqda. n- darajali interpolyatsiya ko'phadining mavjudlik va yagonalik xossasidan kelib chiqib, uni quyidagi tenglama ko'rinishida ifodalanadi:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Bu yerda $a_0, a_1 \ldots a_n$ lar hozircha noma`lum koeffisientlardir. Ularni $P_n(x_i) = y_i, i = 0,\ldots,n$, interpolyatsiya shartlaridan topamiz. Interpolyatsiya shartlari bizga quyi uchburchak matrisali chiziqli tenglamalar sistemasini beradi. Uni yozishdan avval biz funksiyaning $x_0,\ldots,x_k, 1 \le k \le n$ nuqtalarda argumentlarga nisbatan simmetrik k-tartibli bo'lingan ayirmalar (k-.t.b.a.) tushunchasini kiritamiz:

1-t. b.a.: $f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_1, x_0],$

2-t. b.a.: $f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1} = \dfrac{f[x_0, x_1] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0},$

k-t. b.a.:

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_0, \ldots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}} = \frac{f[x_1, \ldots, x_{k-1}] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}, k \le n.$$

Endi $P_n(x_i) = y_i, i = 0,\ldots,n$, interpolyatsiya shartlarni bajarilishini so'rab quyidagi munosabatlarni hosil qilamiz:

$$P_n(x_0)=y_0 \to a_0=y_0=f(x_0),$$
$$P_n(x_1)=y_1 \to f(x_0)+a_1(x_1-x_0)=f(x_1)\to a_1=f[x_0,x_1]$$
$$P_n(x_2)=y_2 \to f(x_0)+f[x_0,x_1](x_2-x_0)+a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)=f(x_2)\to a_2=f[x_0,x_1,x_2]$$

, ... $P_n(x_k)=y_k \to a_k=f[x_0,x_1,\dots,x_k], 1\le k\le n$.

Topilgan koeffisentlarni $P_n(x)$ formulaga qo'yib Nyutonning 1-interpolyatsiya formulasi (ko'phadi) ni topamiz:

$$P_n(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n} f[x_0,\dots,x_k](x-x_0)\dots(x-x_{k-1}). \qquad (4.4)$$

Qoldiq had quyidagicha bo'ladi:

$$R_n(f,x)=f(x)-P_n(x)=f[x,x_0,\dots,x_n](x-x_0)\dots(x-x_n)$$

Xuddi shunday interpolyatsiya ko'phadini ushbu ko'rinishda

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_n)+a_2(x-x_n)(x-x_{n-1})+\dots+a_n(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_1)$$

izlab, Nyutonning 2-interpolyatsiya formulasini topamiz:

$$P_n(x)=f(x_n)+\sum_{k=1}^{n} f[x_{n-k},\dots,x_n](x-x_n)\dots(x-x_{n-k+1}) \qquad (4.5)$$

(4.4) va (4.5) formulalar mos holda jadval boshida va oxirida kerak bo'ladi. Ularni interpolyatsiya nuqtalari teng uzoqlikda joylashgan hol uchun chiqaramiz: $x_k-x_{k-1}=h, k=1,2,\dots,n$. Avvalo, k-tartibli chekli ayirmalar (k.-t.ch.a) tushunchasini kiritamiz:

1-t. ch.a.: $\Delta y_0=\Delta f(x_0)=y_1-y_0=f(x_1)-f(x_0)$,

2-t. ch.a.: $\Delta^2 y_0=\Delta^2 f(x_0)=\Delta y_1-\Delta y_0=\Delta f(x_1)-\Delta f(x_0)=y_2-2y_1+y_0$,…,

k-t. ch.a.: $\Delta^k y_0=\Delta^k f(x_0)=\Delta(\Delta^{k-1}y_0)=y_k-C_k^1 y_{k-1}+C_k^2 y_{k-2}-\dots-(-1)^{k-1}y_0$.

Bu yerda $C_k^i=\dfrac{k!}{i!(k-i)!}$ k elementdan i tadan kombinasiyalar soni.

Endi bo'lingan ayirmalar va chekli ayirmalar orasida bog'lanish o'rnatamiz. Ravshanki,

$$f[x_0,x_1]=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{\Delta y_0}{h},\quad f[x_0,x_1,x_2]=\frac{1}{h}\left[\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}-\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right]=\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2},\dots,$$

$$f[x_0,\dots,x_k]=\frac{1}{kh}[f[x_1,\dots,x_{k-1}]-f[x_0,\dots,x_{k-1}]]=\frac{1}{kh}\left[\frac{\Delta^{k-1}y_1-\Delta^{k-1}y_0}{(k-1)!h^{k-1}}\right]=\frac{\Delta^k y_0}{k!h^k}.$$

Bu formulalarni (4.4) ga qo'yib quyidagi formulani olamiz:

$$P_n(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{1!h}(x-x_0)+\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1)+\dots+\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

(4.5)

(4.5) formula Nyutonning *birinchi interpolyasion formulasi* hisoblanadi. Nyutonning birinchi interpolyasion formulasi xatoligi quyidagi miqdor bilan baholanadi:

$$R_n(x)=h^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}q(q-1)(q-2)\dots(q-n), x_0<\xi<x_n, q=\frac{x-x_0}{h}.$$

Nyutonning ikkinchi interpolyasion formulasi esa jadvalning oxirgi qiymatlari uchun hosil qilinadi. Buning uchun quyidagi interpolyasion ko'phadni (4.6) ko'rinishda olib, koeffisentlar uchun quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$a_i=\frac{\Delta^i y_{n-i}}{i!h^i}, i=0,\dots,n \quad .$$

Topilgan qiymatlarni va $q=\dfrac{x-x_n}{h}$ belgilashlarni hisobga olib, $P_n(x)$ ko'phadni quyidagicha ifodalanadi:

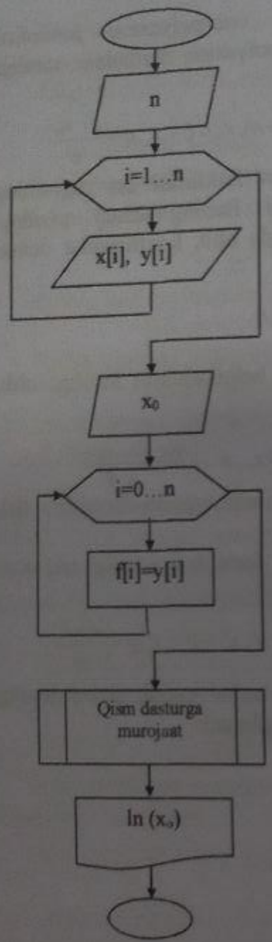
$$P_n(x)=y_n+q\Delta_{n-1}+\frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+\frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3}+\dots+\frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

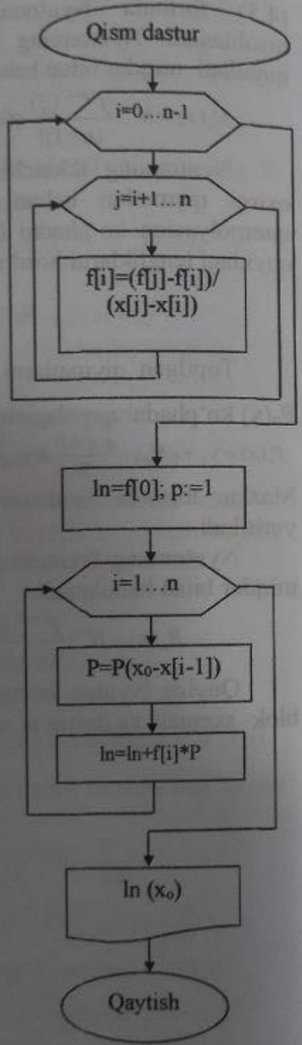
Mazkur formula Nyutonning ikkinchi interpolyasion formulasi deb yuritiladi.

Nyutonning ikkinchi interpolyasion formulasi xatoligi quyidagi miqdor bilan baholanadi:

$$R_n(x)=h^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}q(q+1)\dots(q+n), x_0<\xi<x_n, q=\frac{x-x_n}{h}.$$

Quyida Nyuton interpolyasion ko'phadini qurish algoritmining blok- sxemasi va dastur ta`minoti tavsiya qilinadi.





Nyuton interpolyasion ko'phadini qurish dasturi

```
program Newtoninterpolation(i,o);
uses wincrt;
type vec=array[0..20] of real;
var i,j,n:integer;
   x,y,f:vec;
   p,ln,c,x0:real;
   d:string;
procedure tab(n:integer;var x,y:vec);
var i:integer;
begin  for i:=0 to n do begin
     write('x,y[',i,']=');
     readln(x[i],y[i]);
     end;
     end;
procedure  newton(n:integer;x,f:vec;x0:real;var ln:real);
var  p,c:real;
begin
for i:=0 to n-1 do
for j:=i+1 to n do
f[j]:=(f[j]-f[i])/(x[j]-x[i]);
ln:=f[0]; p:=1;
for i:=1 to n do
begin
  p:=p*(x0-x[i-1]);ln:=ln+f[i]*p;
end;
end;
begin
write('n=');readln(n);
tab(n,x,y);
repeat
write('x0=');readln(x0);
for i:=0 to n do f[i]:=y[i];
newton(n,x,f,x0,ln);
writeln('ln(',x0,')=',ln);
until false;
end.
```

Olingan natijalar tahlili.

Quyidagi jadval ko'rinishidagi funksiya berilgan bo'lsin. nq5.

i	1	2	3	4	5
x_i	1,5	2	2,5	3	4
y_i	4	5,1	4,9	6	7,3

Ishlab chiqilgan hisoblash algoritmini va dastur ta`minotining to'g'ri ishlayotganligini aniqlash maqsadida qurilgan Nyuton interpolyasion ko'phadini bir nechta yangi qiymatlarda hisoblandi.

x_0=2,2 $\quad$ y=5,0663296

x_0=3,1 $\quad$ y=6,5542528

x_0=2,9 $\quad$ y=5,557872

Sonli natijalar Nyuton interpolyasion ko'phadini qurish uchun ishlab chiqilgan dastur ta`minoti va hisoblash algoritmlarini ishonchli ekanligini ko'rsatadi.

Nazorat savollari

1. Nyuton interpolyasion ko'phadini qurish uchun qaysi formuladan foydalaniladi?
2. Nyutonning birinchi va ikkinchi interpolyasion formulalari bir-biridan qanday farqlanadi?
3. Nyuton interpolyasion ko'phadini qurish usulining xatoligi qanday baholanadi?

3-§ Lagranj interpolyasion formulasi

Tayanch so'z va atamalar

Tugun nuqtalar, n-darajali ko'phad, Lagranj interpolyasion formulasi, interpolyatsiya xatoligi, interpolyatsiyalash algoritmi, dastur matni.

Ma`lumki, Nyutonning interpolyasion formulalari $x$ o'zgaruvchining teng uzoqlikda yotgan nuqtalari uchun yaroqli edi. Amaliyotda esa funksiyaning qiymatlarini o'zgaruvchining teng oraliqdagi qiymatlari uchun hisoblash murakkab kechishi mumkin. Bunday hollarda, ya`ni har xil uzoqlikda yotgan nuqtalar uchun Lagranj interpolyasion formulasidan foydalanish samaraliroq kechadi.

Bu usulda [a,b] oraliqdagi ixtiyoriy masofada yotgan $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tugun nuqtalar va ularga mos qiymatlar uchun shunday L(x) ko'phadni qurish talab etiladiki, u

$$L(x_0) = y_0,\ L(x_1) = y_1,\ \ldots,\ L(x_n) = y_n \qquad (4,6)$$

tengliklarni qanoatlantirishi kerak bo'ladi.

Aytaylik: $L_n(x)$ ko'phad quyidagi ko'rinishida bo'lsin:

$$L_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots a_nx^n$$

Ushbu tenglamani va (4.6) tengliklarni hisobga olib $L_n(x)$ ko'phadning ifodasini turli xil qiymatlar uchun qaytadan yozib olamiz.

$$\begin{cases} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots a_nx^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots a_nx_1^n = y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots a_nx_n^n = y_n \end{cases} \qquad (4.7)$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ noma`lumlarni Kramer formulasi yordamida aniqlaymiz.

$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}, a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ldots, a_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$ bu yerda Δ - (4.7) sistemaning yechimi bo'lib, $\Delta \neq 0$ bo'lganda sistema yagona yechimga ega bo'ladi.

Bu sistemaning determinanti chiziqli algebra kursidan ma`lum bo'lgan Vandermond determinantidir:

$$D = |x_i^j| = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = I\left(x_j - x_i\right) \quad 0 \le i \le j \le n$$

Ravshanki, agar interpolyatsiya nuqtalari x_i lar har xil bo'lsa D≠0 va qaralayotgan sistema yagona yechimga ega bo'ladi.

Agar $x_0, x_1, \ldots, x_n$ turli qiymatlar qabul etsa, Δ noldan farqli qiymatga ega bo'ladi. $a_0, a_1, \ldots, a_n$ koeffisientlar aniqlangandan so'ng interpolyasion ko'phadni

$$Ln(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta} x + \frac{\Delta_1}{\Delta} x^2 + \ldots + \frac{\Delta_n}{\Delta} x^n \qquad (4.8)$$

ko'rinishda tasvirlanadi. (4.8)ni boshqacharoq ko'rinishda ifodalash mumkin: $Ln(x) = y_0 Q_0(x) + y_1 Q_1(x) + \ldots + y_n Q_n(x)$. Bundan $Q_i(x)$ funksiyani quyidagi shartni qanoatlantirishi talab etiladi:

$$Q_i(x_j) = \begin{cases} 0, & агар \cdot i \ne j \\ 1, & агар \cdot i = j \end{cases}$$

Mazkur shartni qancha $Q_i(x)$ faqat quyidagi nisbatda bo'lishini anglash qiyin emas.

$$Q_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i x_{i+1})\ldots(x_i-x_1)}.$$

$x_0, x_1, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n$ nuqtalarda $Q_i(x)$ funksiya 0 ga, x_i da esa 1 ga aylanadi.

Nihoyat, (4.8) tenglamani quyidagicha ifodalash mumkin bo'ladi.

$$L_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} y_1 + \ldots$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})} y_n = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ i \ne j}}^{n} (x-x_j) \cdot y_i / \prod_{\substack{j=0 \\ i \ne j}}^{n} (x_i - x_j) \right) \qquad (4.9)$$

Mazkur ko'phad Lagranj interpolyasion ko'phadi deb ataladi.

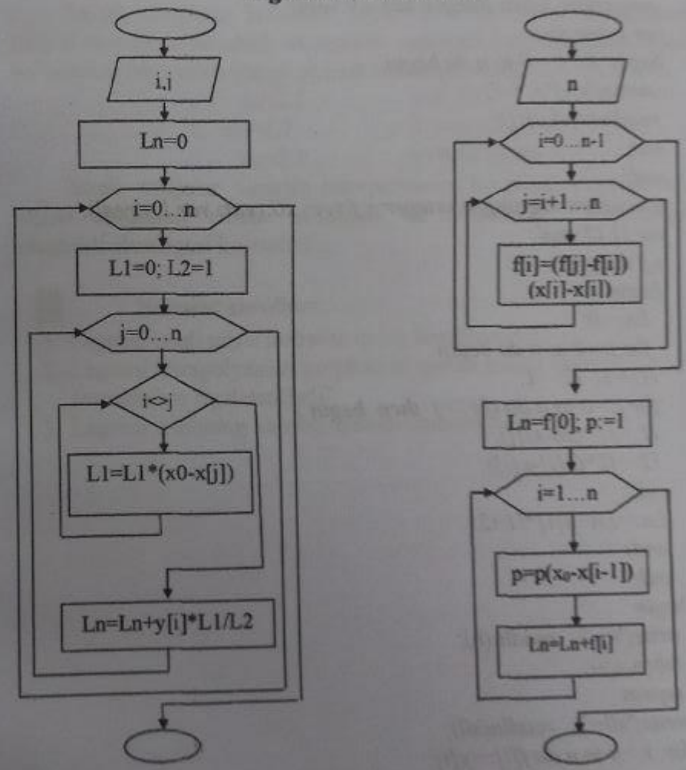
Har xil uzoqlikda yotgan nuqtalar uchun yozilgan ushbu Lagranj interpolyasion formulasini teng uzoqlikda yotgan nuqtalar uchun ham qo'llaniladi. Yuqoridagi interpolyatsiya formulasida x va y o'zgaruvchilarining o'rinlarini o'zaro almashtirish ham mumkin.

Lagranj interpolyasion formulasi xatoligini quyidagi formula bilan baholanadi:

$$R_n(x) = \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} q(q-1)(q-2)\ldots(q-n)$$

bu yerda $q = \frac{x - x_0}{h}$, $\Delta y_0 = y_1 - y_0$. Quyida Lagranj interpolyasion ko'phadini hisoblash algoritmining blok-sxemasi va dastur ta'minotini tavsiya qilinadi.

Algoritm blok-sxemasi



Lagranj usulining dasturi

```
program lagrangeinterpolation(i,o);
uses wincrt;
type vec=array[0..20] of real;
var i,j,n:integer;
  x,y,f:vec;
  p,Ln,e,x0:real;
procedure tab(n:integer;var x,y:vec);
var i:integer;
begin for i:=0 to n do begin
  write('x,y[',i,']=') ;
readln(x[i],y[i]);
end;
end;
procedure lagrang(n:integer;x,f:vec; x0:real; var Ln:real);
var l1,l2:real;
i,j:integer;
begin
  Ln:=0;
  for i:=0 to n do begin
  l1:=1; l2:=1;
  for j:=0 to n do if i<>j then begin
  l1:=l1*(x0-x[j]);
  l2:=l2*(x[i]-x[j]);
 end;
  Ln:=Ln+y[i]*l1/l2;
  end;
 end;
begin
 write('n='); readln(n);
 tab(n,x,y);
 repeat
write('x0='); readln(x0);
for i:=0 to n do f[i]:=y[i];
lagrang(n,x,f,x0,Ln);
writeln('Ln(',x0,')=',Ln);
until false;
end.
```


Olingan natijalar tahlili.

Lagranj usulidan olingan natijalarning to'g'riligini tekshirish uchun quyidagi jadval ko'rinishidagi funksiyadan foydalaniladi. n=6.

i	1	2	3	4	5	6
x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	5	6	6,5	6,8	8	8,8

Ishlab chiqilgan hisoblash algoritmini va dastur ta'minotining to'g'ri ekanligini aniqlash maqsadida qurilgan Lagranj interpolyasion ko'phadini bir nechta yangi qiymatlarda hisoblandi.

x_0=2,5 y=6,35
x_0=4,7 y=7,543248
x_0=5,1 y=8,1574264

Sonli natijalar Lagranj interpolyasion ko'phadini qurish uchun ishlab chiqilgan dastur ta'minoti va hisoblash algoritmlarini ishonchli ekanligini ko'rsatadi..

Nazorat savollari

1. Lagranj usuli qaysi hollarda qulay hisoblanadi?
2. Lagranj interpolyasion ko'phadini qurish uchun qaysi formuladan foydalaniladi?
3. Lagranj usulining xatoligi qanday baholanadi?

4-§. Eng kichik kvadratlar usuli

Tayanch so'z va atamalar

n-darajali ko'phad, Lagranj interpolyasion formulasi, interpolyatsiya xatoligi, interpolyatsiyalash algoritmi, dastur ta'minoti.

Eng kichik kvadratlar usuli birinchi marta 1874 yilda Gauss tomonidan ishlab chiqilgan bo'lib, ayrim adabiyotlarda bu usul Gauss usuli deb ataladi.

Aytaylik, x erkli o'zgaruvchining n ta qiymati berilgan bo'lsin.

Bu usulda qidirilayotgan funksiyaning qiymatlari uni jadvaldagi mos qiymatlariga teng bo'lmasada, ularning farqlar kvadratlarining yig'indisi eng kichik bo'lishi talab qilinadi, ya`ni

$$\sum_{i=0}^{n}(y(x_i)-y_i)^2 \to \min$$

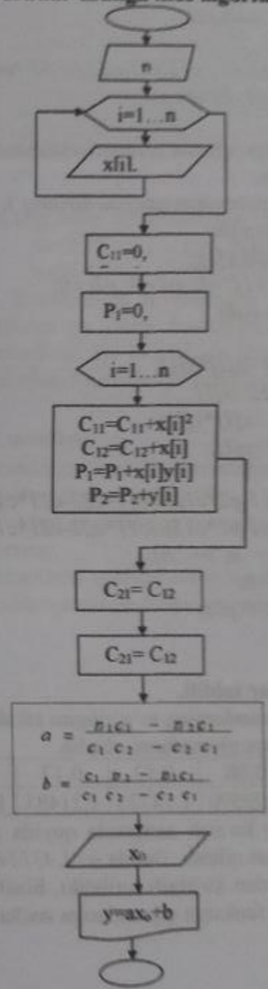
X	X_1	X_2	…	X_n
Y	Y_1	Y_2	…	Y_n

Jadvalda berilganlarga asoslanib $P_m(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_mx^m$ ko'phadni qurish kerak, ya`ni bu ko'phadning $c_0, c_1, \ldots, c_m$ koeffisientlarini aniqlash kerak. Yaqinlik sharti $\sum_{i=0}^{n}(y_i-P_m(x_i))^2=F(c_0,c_1,\ldots,c_m)$ ko'phadning noma`lum koeffisientlariga nisbatan funksiyadir. Ko'p o'zgaruvchili funksiya $F(c_0,c_1,\ldots,c_m)$ni minimumga erishtirish uchun undan o'zgarmaslar c_i bo'yicha xususiy hosilalar olib nolga tenglaymiz $\partial F/\partial C_i=0$ $(i=\overline{0,m})$. Natijada $c_0, c_1, \ldots, c_m$ larga nisbatan yozilgan quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} (n+1)c_0+c_1\sum_{i=0}^{n}x_i+\ldots+c_m\sum_{i=0}^{n}x_i^m=\sum_{i=0}^{n}y_i, \\ c_0\sum_{i=0}^{n}x_i+c_1\sum_{i=0}^{n}x_i^2+\ldots+c_m\sum_{i=0}^{n}x_i^{m+1}=\sum_{i=0}^{n}y_ix_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_0\sum_{i=0}^{n}x_i^m+c_1\sum_{i=0}^{n}x_i^{m+1}+\ldots+c_m\sum_{i=0}^{n}x_i^{2m}=\sum_{i=0}^{n}y_ix_i^m. \end{cases} \qquad (4.10)$$

Sistemani Gauss-Jordan usuli bilan yechib izlanayotgan $P_m(x)$ ko'phadning noma`lum koeffisientlarini hosil qilamiz.

Eng kichik kvadratlar usuliga mos algoritm blok-sxemasi



Algoritmning dastur matni

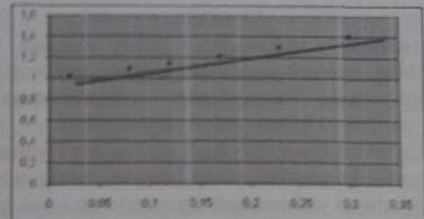
```
Program Kvadusul;
const n=6;
var x0,y0,a,b,c11,c12,c21,c22,p1,p2:real;
  x,y:array[1..6] of real;
  begin
  write('Qaysi qiymat uchun hisoblaymiz');
  readln(x0);
  write('Massiv elementlarini kiriting');
  for i:=1 to n do
    readln(x[I],y[I]);
    c11:=0; c12:=0; p1=0; p2:=0;
for I:=1 to n do
begin
  c11:=c11+x[I]*x[I];
   c12:=c12+x[I];
   p1:=p1+x[I]*y[I];
   p2:=p2+y[I];
end;
a:=(p1*c11-p2*c12)/(c11*c22-c21*c12);
b:=(c11*p2-p1*c12)/(c11*c22-c21*c12);
writeln('a=',a, 'b=',b);
y0:=a*x0+b;
writeln('y0=',y0);
end.
```

Olingan natijalar tahlili.

Yuqoridagi algoritmlarning to'g'riligini tekshirish uchun quyidagi nuqtalarga mos qiymatlarni olaylik.

X	0,02	0,08	0,12	0,17	0,23	0,30
Y	1,02316	1,09590	1,14725	1,21483	1,30120	1,40976

Dasturni ishlatib ko'rish natijasida quyida grafigi tasvirlangan chiziqli funksiyani hosil qilindi. Bunda $a=1,431246$ $b=0,989741$ ga teng bo'ldi. Natijalardan ko'rinib turibdiki, hosil qilingan funksiya grafigi berilgan jadval funksiya qiymatlariga ancha yaqindir.



Quyidagi oraliq qiymatlar uchun natijalar alohida hosil qilindi.

$x_0=0,15$ $y=1,20444$

$x_0=0,4$ $y=1,51927$

Argument va funksiyaning qiymatlarini tahlil etish natijasida ularni tegishli oraliqlarga va yangi funksiyaning xususiyatiga mos ekanligini aniqlash mumkin. Bu esa ishlab chiqilgan algoritmlardan amaliy masalalar yechishda foydalanish mumkinligini ko'rsatadi.

Nazorat savollari

1. Eng kichik kvadratlar usulida nima uchun tafovut miqdorlarning kvadratlari qaraladi?
2. Eng kichik kvadratlar usulining geometrik ma`nosini tushuntirib bering.
3. Eng kichik kvadratlar usulida noma`lumlarni topish uchun tenglamalar sistemasini yechishning qaysi usulini qo'llash afzalroq?

XULOSA

- ✓ Interpolyatsiyalash masalasining asosiy maqsadi va vazifasi, ko'phad bilan interpolyatsiyalash jarayoni, funksiya va argument o'rtasidagi o'zaro munosabatlar, izlanayotgan ko'phadni aniqlash yo'llari va imkoniyatlari bayon qilindi.
- ✓ Ko'phad bilan interpolyatsiyalash usullaridan Nyuton va Lagranj interpolyasion ko'phadini qurish jarayoni, usullarning mohiyati, ishchi formulalari va hisoblash algoritmlari tavsiya qilindi.
- ✓ Nyuton va Lagranj interpolyasion ko'phadini qurish usullarining xatoligini baholash formulalari ifodalandi.
- ✓ Nyuton va Lagranj interpolyasion ko'phadini qurish usuliga mos dastur ta`minotlari yaratilib, natijalar olindi va tahlil etildi, ishlab chiqilgan algoritmlarning ishonchliligi tasdiqlandi.
- ✓ Funksiyani qurishga oid interpolyasion usullardan eng kichik kvadratlar usuli va uning mohiyati, usulning asosiy ishchi algoritmi va dastur ta`minoti, natijalar tahlili keltirildi.

?! **Bobga doir muammoli vaziyatlar!**

1) Bir nechta argumentlarga mos funksiyaning qiymatlari berilgan holda funksional qonuniyatni bir qiymatli aniqlash mumkinmi?!
2) Parabolik interpolyatsiyalashning qulaylik jihatlari mavjud deb o'ylaysizmi? Izlayotgan funksiya davriy bo'lganda ham parabolik interpolyatsiyalashni tavsiya etasizmi? Aksincha bo'lsa nima uchun?
3) Interpolyatsiyalash va ekstrapolyasiyalash jarayonida ko'phadniqurishning umumiy jihatlari bo'lishi mumkinmi?
4) Nima uchun Lagranj interpolyasion formulasi har xil uzoqlikda yotgan nuqtalar uchun qo'llanishga qulay deb hisoblanadi? Bu bilan Nyuton usulini turli uzoqlikdagi nuqtalar uchun qo'llash mumkin emas, degan mulohazalar kelib chiqishiga qo'shilasizmi? Fikringizni tushuntiring?
5) Eng kichik kvadratlar usulida aynan tavofut miqdorlar kvadratlarining qaralishiga sabab nima deb o'ylaysiz? Bu usulning xatoligiga ta`sir qilishi mumkinmi? Xatolikni qamaytirish omillari nimalarga bog'liq?

5-BOB. INTEGRALLARNI TAQRIBIY HISOBLASH

Ma`lumki, berilgan funksiyaning hosilasini topish amali differensiallash deb atalib, uning uchun boshlang'ich funksiyani topishdan iborat teskari amal integrallash deb ataladi (lotincha-untegrare-tiklash degan ma`noni bildiradi). Amalda ko'pgina funksiyalarning boshlang'ich funksiyalarini elementar funksiyalarning kombinatsiyasi orqali ifodalab bo'lmaydi. Shuning uchun, bu funksiyalarning aniq integrallarini ba`zan taqribiy usullar bilan hisoblash zaruriyati tug'iladi. Shuning uchun ushbu bobda aniq integralni taqribiy hisoblashning ayrim usullari, ularning mohiyati, geometrik ma`nosi, ishchi algoritmlari va dastur ta`minotlari tavsiya qilinadi.

1-§. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash haqida umumiy tushunchalar

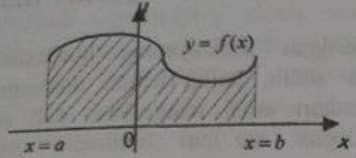
Tayanch so'z va atamalar

Integrallash, egri chiziqli trapetsiya, Nyuton- Leybnis formulasi, integral yig'indi, boshlang'ich funksiya, integrallash formulasi, integrallash usullari.

Aniq integrallarni taqribiy hisoblash egri chiziqli trapetsiyaning yuzi haqidagi masalaning geometrik yechimi bilan uzviy bog'liqdir. Quyidan OX o'qidagi $[a,b]$ kesma bilan, yuqoridan musbat qiymat qabul qiladigan $y=f(x)$ uzluksiz funksiyaning grafigi bilan, yon tomonlardan $x=a$ va $x=b$ to'g'ri chiziqlarning kesmalari bilan chegaralangan figurani egri chiziqli trapetsiya deyiladi. Egri chiziqli trapetsiyaning yuzini (14-rasm)

$$S=\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a) \qquad (5.1)$$

Nyuton-Leybnis formulasi orqali aniq hisoblash mumkin. Bunda $F(x)$-berilgan $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi. Yuqorida ta`kid-langanidek, boshlang'ich funksiyani integrallash qoidalari va formulalar yordamida hisoblash imkoni bo'lmaganda uni integral yig'indilar yordamida taqriban hisoblanadi.



14-rasm

Aniq integralni geometrik ma`nosi 14-rasmdagi shtrixlangan sohaning yuzasini topish demakdir.

Odatda integral ostidagi funksiyaning boshlang'ich fuksiya-sini topish matematik jihatdan ancha qiyinchilik tug'diradi, ayrim funksiyalar uchun esa boshlang'ich funksiyani topishning mutlaqo iloji yo'q. Shuning uchun, kerak bo'lgan aniqlikda aniq integrallarni hisoblash algoritmlarining ishlab chiqilishi va dasturlarining yaratilishi dolzarb masalalardan hisoblanadi.

Aniq integralni hisoblash ta`rifiga ko'ra , u

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \qquad (5.2)$$

limitga teng. Bu yerda Δx_k $-[a,b]$ kesmani n-ta bo'lakka bo'lgandagi k-bo'lagining uzunligi, ξ_k $-k$-kesma ichidagi biror nuqta.

Aniq integralni taqribiy hisoblashning barcha usullari (5.2) formulaga asoslangan bo'lib, Δx_k va ξ larni har xil tanlab olib, turli taqribiy integrallash formulalari hosil qilinadi.

Amalda eng ko'p qo'llaniladigani to'g'ri to'rtburchaklar, trapetsiyalar va Simpson formulalaridir.

Nazorat savollari

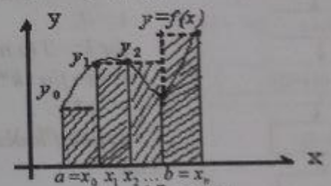
1. Integral so'zining ma`nosini bilasizmi?
2. Egri chiziqli trapetsiyaning yuzi qaysi formula bilan hisoblanadi?
3. Aniq integralni hisoblashda qaysi usullardan foydalaniladi?

2-§. Tug'ri turtburchaklar formulasi

Tayanch so'z va atamalar

Egri chiziqli soha, bo'linish qadami uzunligi, o'ng to'g'ri to'rtburchaklar usuli, chap to'g'ri to'rtburchaklar usuli, hisoblash formulasi xatoligi, ishchi algoritmga mos blok-sxema, dastur ta`minoti.

Integral tarixan egri chiziqlar bilan chegaralangan figuralarning yuzini, xususan egri chiziqli trapetsiyaning yuzini hisoblash munosabati bilan kelib chiqqan. Mazkur usul ham yuzani to'g'ri to'rtburchaklar bilan to'ldirib taqriban hisoblashga asoslangan. Trapetsiyaning asosi bo'lgan $[a,b]$ kesmani $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ nuqtalar bilan n ta kesmalarga bo'lamiz. U holda bo'linish oralig'i uzunligi $h = \frac{b-a}{n}$ formula bilan ifodalanadi. $x_0 = a$ deb, $x_i = x_{i-1} + h$ nuqtalarni belgilab olamiz, bunda $i = 1,2,3,\ldots,n$. $[a,b]$ oraliqning tugun nuqtalari $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ dan chegaraviy $y = f(x)$ egri chiziq bilan kesishgunga qadar vertikal parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz va kesishish nuqtalarining ordinatalarini $y(x_1), y(x_2), \ldots, y(x_i), \ldots$ kabi belgilaymiz. Har bir oraliqdagi ordinatasi uzunligi $y(x_i)$ga teng to'g'ri to'rtburchakning yuzalarini topamiz $S_i = h \cdot y(x_i)$ (15-rasm):



15-rasm

Hosil qilingan to'g'ri to'rtburchaklarning yuzalarini qo'shamiz:

$$S = h \cdot (y(x_1) + y(x_2) + y(x_3) + \ldots + y(x_n)) = h \cdot \sum_{k=1}^{n} y(x_k)$$

Yuzalarni hisoblashda $k = 1,2,3,\ldots,n$ deb olsak, vertikal to'g'ri chiziqlarga nisbatan o'ng tomondagi to'g'ri to'rtburchaklar olingani uchun o'ng to'g'ri to'rtburchaklar usulining formulasi kelib chiqadi:

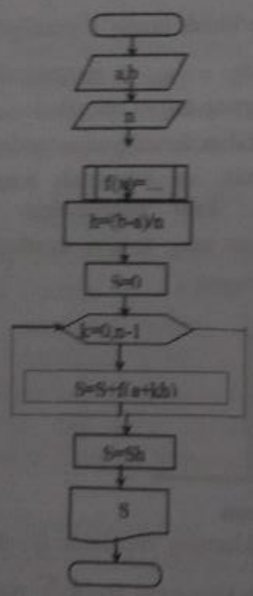
$$S = \int_b^a f(x)dx \approx h[f(a+h) + \ldots + f(a+n \cdot h)] = h \cdot \sum_{k=1}^{n} f(a+kh) \qquad (5.3)$$

$k=0,2,\ldots,n-1$ deb olsak, vertikal to'g'ri chiziqlarga nisbatan chap tomondagi to'g'ri to'rtburchaklar olingani uchun, chap to'g'ri to'rtburchaklar usulining formulasi kelib chiqadi:

$$S=\int_a^b f(x)dx \approx h[f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+(i-1)h)]=h\cdot\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh) \quad (5.4)$$

Agar $f(x)$ funksiya ikki marta differensiallanuvchi bo'lsa ishchi formulani hisoblash xatoligi $R_n=\frac{(b-a)^3}{2n^2}f''(\xi)$, $a\le\xi\le b$ formula bilan aniqlanadi.

To'g'ri to'rtburchaklar usulining ishchi algoritmi blok-sxemasi



Dastur ta`minoti

```
program Turtburchakli yuza;
var a,b,s, h:real;
n,k:byte;
function f(x:real):real;
begin  f:=....  end;{интеграл ости функциясини кўриниши берилади}
begin writeln ('a,b='); readln (a,b);
   writeln('n='); readln (n);
    h:=(b-a)/n;
    s:=0;
    for k:=0 to n-1 do
    s:=s+f(a+k*h);
    s:=s*h;
    writeln('làdèæà=',s);
end.
```


Nazorat savollari

1. To'g'ri to'rtburchaklar usulining mohiyati nimada?
2. To'g'ri to'rtburchaklar usulining geometrik ma'nosi qanday tavsiflanadi?
3. Chap va o'ng to'g'ri to'rtburchaklar usulining ishchi formulasi qanday hosil qilinadi?

3-§. Trapetsiya usuli

Tayanch so'z va atamalar

Trapetsiya usulinig ishchi algoritmi, trapetsiya usulining geometrik ma'nosi. Trapetsiya usuli xatoligi, ishchi algoritmga mos blok- sxema, dastur ta'minoti.

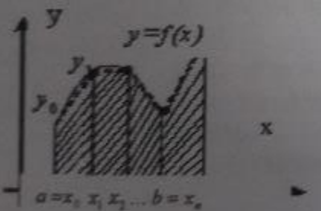
Bu usulda ham to'g'ri to'rtburchaklar usulidagi kabi $[a;b]$ kesmani $a=x_0,x_1,\ldots,x_n=b$ nuqtalar bilan n ta teng bo'lakka bo'lamiz. Har bir tugun nuqtalar orasidagi masofa $h=\frac{b-a}{n}$.

$[a;b]$ kesmani bo'luvchi x_i nuqtalardan chegaraviy egri chiziq bilan kesishgunga qadar perpendikulyarlar o'tkazamiz. Egri chiziq mos nuqtalarining ordinatalarini $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1),\ldots,y_{n-1}=f(x_{n-1}),y_n=f(x_n)$ deb belgilaymiz.

Perpendikulyarlarning $y=f(x)$ chiziq bilan kesishgan qo'shni nuqtalarini vatarlar bilan birlashtiramiz va hosil qilingan har bir trapetsiyalarning yuzini topamiz (16-rasm):

$$\frac{y_0+y_1}{2}\cdot h;\quad \frac{y_1+y_2}{2}\cdot h;\ldots;\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\cdot h$$

Barcha n ta trapetsiya yuzini qo'shamiz: $S=h\left[\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\ldots+\frac{y_n}{2}\right]$.



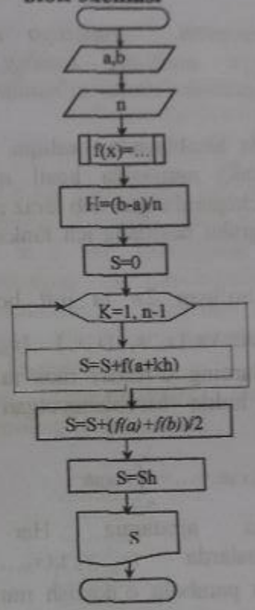
16-rasm

Demak, egri chiziqli trapetsiyaning yuzi taqriban quyidagiga teng:

$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)$ yoki $y_0=f(a)$, $y_n=f(b)$, $x_i=a+ih$ desak, trapetsiya usulining formulasi

$S=\int_a^b f(x)dx = h\cdot\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)\right]$ bo'ladi. Usulning hisoblash xatoligi $R_n=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi)$, $a\le\xi\le b$ formula bilan aniqlanadi.

Trapetsiya usuli algoritmining blok-sxemasi



Dastur ta'minoti

```
Program Trapetsia;
var a,b,h,S:real;
   n,k:byte;
 function f(x:real):real;
   begin f:= .... end;
   begin
     write('Оралиқни        киритинг
 a,b=');
     readln(a,b);
     write('Бўлинишлар сони n=');
     readln(n);
     h:=(b-a)/N;
     s:=0;
     for k:=1 to n-1 do
     s:=s+f(a+k*h);
     s:=s+(f(a)+f(b))/2;
     s:=s*h;
     writeln('Натижа s=',s);
  end.
```

Nazorat savollari

1. Trapetsiya usulining mohiyati nimada?
2. Trapetsiya usuling geometrik ma'nosi qanday tavsiflanadi?
3. Trapetsiya usulining ishchi formulasi qanday hosil qilinadi?

4 -§. Simpson (parabolalar) formulasi

Tayanch so'z va atamalar

Simpson usulinig ishchi algoritmi, trapetsiya usulining geometrik ma'nosi, trapetsiya usulining xatoligi, ishchi algoritmga mos algoritm blok-sxemasi, dastur ta`minoti.

Aniq integrlni Simpson usulida hisoblashda, oraliqni bo'lish (bo'linishlar soni juft bo'lishi kerak) natijasida hosil qilingan yuzalarni yuqoridan parabolalar bilan chegaralangan deb faraz qilinadi va bunday yuzani hisoblash aniq integralni boshlang'ich funksiyasini topish hisobiga amalga oshiriladi.

$[a,b]$ kesma uzunligini $h=\frac{b-a}{2n}$ bo'lgan $2n$ ta juft bo'lakka $x_1, x_2, ..., x_{2n-1}, x_{2n}$ nuqtalar orqali ajratamiz va $[x_0, x_2], [x_2 x_4], ..., [x_{2n-2}, x_{2n}]$ kesmalarni hosil qilamiz. Bu kesmalarning o'rtalari mos ravishda $x_1, x_3, ..., x_{2n-1}$ nuqtalar bo'ladi. U holda hisoblanayotgan aniq integralni

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx+\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx+\ldots+\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx$$

ko'rinishidagi integral yig'indiga ajratamiz. Har bir $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ ($i=0$dan $n-1$gacha) kesmalarda $(x_{2i}, y_{2i}), (x_{2i+1}, y_{2i+1}),$ (x_{2i+2}, y_{2i+2}) nuqtalar orqali hamma vaqt parabola o'tkazish mumkin, shu bilan birga bunday parabola $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ kesmada yagona bo'ladi. Yordamchi parabola bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuzi taqriban berilgan egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx=\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} (ax^2+bx+c)dx$$

Parabola tenglamasiga tegishli har uchta a,b,c noma`lum uchun quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} ax_{2i}^2+bx_{2i}+c=y_{2i} \\ ax_{2i+1}^2+bx_{2i+1}+c=y_{2i+1} \\ ax_{2i+2}^2+bx_{2i+2}+c=y_{2i+2} \end{cases}$$

Hosil bo'lgan a,b,c noma`lumli uchta tenglamalar sistemasini yechib, a,b,c larning qiymatini integral ifodaga qo'yib, aniq integralni Nyuton-Leybnis formulasi bilan hisoblaymiz. Har bir kesmalar uchun ularning qiymatini qo'shib, parabolalar usuliga mos ishchi formulani

hosil qilamiz. Usulning ishchi formulasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

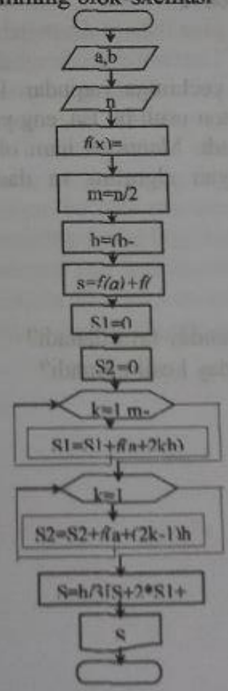
$$S=\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+4\cdot\sum_{i=1}^{n} f(a+(2i-1)h)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(a+2ih)\right].$$

Nazariy tomondan Simpson formulasi yuqoridagi ikki formulaga nisbatan ancha aniqdir, chunki bunda xato

$$R_n(x)=-\frac{(b-a)^5}{180n^4}\ f^{IV}(\eta)\ , a\le\eta\le b$$

formula bilan aniqlanadi. Ammo, xatolik funksiyasi integral ostidagi funksiyaning 4-tartibli hosilasi mavjudligini talab qiladi. Shuning uchun, ba`zi bir funksiyalar uchun Simpson formulasi to'g'ri to'rtburchaklar va trapetsiyalar formulalaridan yomonroq natija berishi mumkin. Taqribiy qiymatni aniqligini tekshirish uchun aniq integ-rallanadigan funksiya uchun u yoki bu formulani qo'llab ko'rish foydali bo'ladi.

Simpson (marabolalar) usuli algoritmining blok-sxemasi



Dastur ta`minoti

```
Program Parabola;
var a,b,h,s,s1,s2:real;
  k,m,n:byte;
function f(x:real):real;
begin f:=... end;
Begin
  write('a,b ни киритинг');
  readln( a,b);
  write('n='); readln(n);
  m:=n*2;          h:=(b-a)/m;
  s:=f(a)+f(b);    s1:=0; s2:=0;
  for k:=1 to m-1 do
    s1:=s1+f(a+2*k*h);
  for k:=1 to m do
    s2:=s2+f(a+(2*k- 1)*h);
    s:=h/3*(s+2*s1+4*s2);
  writeln('s=',s);
end.
```

Olingan natijalar va ularning tahlili.

Ishlab chiqilgan algoritmlarning va yaratilgan dastur-larning to'g'riligini tekshirib ko'rish uchun test misolini tanlab olaylik va uning qiymatini aniqlaylik:

$$I=\int_0^1 (x^3+2x^2-x+5)dx=\left[\frac{x^4}{4}+2\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+5x\right]\Big|_0^1=$$

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+5=5+\frac{3+8}{12}-\frac{1}{2}=5+\frac{11}{12}-\frac{1}{2}=$$

$$=5+\frac{11-6}{12}=5\frac{5}{12}$$

Demak, integralning aniq qiymati $5\frac{5}{12}$ yoki 5,41(6) ga teng ekan.

Dastur ishlashi uchun zarur bo'lgan boshlang'ich qiymatlar:

$$a=0,\ b=1,\ n=20$$

Berilgan qiymatlarni kiritib, yuqoridagi algoritmlar asosida dastur ta`minotini ishlatib ko'ramiz. Ulardan olingan natijalar:

1) To'g'ri to'rtburchaklar usulida: $S=5,4236673$

2) Trapetsiya usulida: $S=5,41566723$

3) Simpson usulida: $S=5,4166666$

Olingan natijalarning barchasi aniq yechimga yaqindar. Lekin, usullardan eng yaxshi natija bergani Simpson usuli bo'lsa, eng yomon natija to'g'ri to'rtburchaklar usulidan olindi. Mantiqan ham olingan natijalar rostdir. Demak, yuqorida berilgan algoritm va dasturlar to'g'ri, amalda ishlatish uchun yaroqli.

Nazorat savollari

1. Simpson usulining mohiyati nimada?
2. Simpson usulining geometrik ma`nosi qanday tavsiflanadi?
3. Simpson usulining ishchi formulasi qanday hosil qilinadi?

XULOSA

- ✓ Ushbu bobda aniq integralning mohiyati, egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish masalasi, aniq integralni hisoblash usullari va ularning imkoniyatlari haqida zarur ma`lumotlar berildi.
- ✓ Aniq integralni taqribiy hisoblashning to'g'ri to'rtburchaklar, trapetsiya va Simpson usullari uchun hisoblash algoritmlari va dastur ta`minotlari ishlab chiqildi.
- ✓ Barcha usullarning mohiyati ularning geometrik ma`nolari yordamida tushuntirildi.
- ✓ Barcha taqribiy usullar uchun ishlab chiqilgan dastur ta`minotlari aniq masalalar uchun ishlatib ko'rildi, olingan natijalar tahlil etildi.

Bobga doir muammoli vaziyatlar!

- ➢ Matematik modeli aniq integrallar bilan ifodalanadigan amaliy jarayonlarni bilasizmi? Ularga misollar keltira olasizmi?
- ➢ Aniq integralni hisoblovchi Nyuton-Leybnis kabi formulalar mavjud bo'la turib, taqribiy usullarni qo'llash zaruriyati paydo bo'lishining sababi nimada deb o'ylaysiz?
- ➢ Aniq integralni taqribiy hisoblashning qaysi usulida aniqlik yuqori bo'lishi mumkin. Umuman olganda, natijaning aniqligi usulning turiga bog'liqmi?
- ➢ Integral osti funksiyaning xususiyati aniq integralni taqribiy hisoblash usulini tanlashda muhim omil bo'la oladimi? Fikringizni tushuntiring.

6-BOB. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI SONLI YECHISH USULLARI

1-§. Differensial tenglamalar va ularni yechish usullari haqida umumiy ma`lumotlar

Tayanch so'z va atamalar

Differensial tenglamalar, oddiy differensial tenglamalar, differensial tenglamaning tartibi, chiziqli differensial tenglamalar, umumiy yechim, xususiy yechim, differensial tenglamani yechish usullari, aniq usullar, taqribiy analitik usullar, sonli usullar.

Ma`lumki, ko'pincha amaliy masalalarni yechishda, dastlab uning matematik modeli fizik, mexanik, kimyoviy va boshqa qonuniyatlar asosida tuziladi. Matematik model asosan algebraik, differensial, integral va boshqa tenglamalardan iborat bo'ladi. Ayniqsa, oddiy differensial tenglamalar juda ko'p muhandislik masalalarini yechishda matematik model rolini o'ynaydi. Shuning uchun, differensial tenglamalarning ma`lum shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlarini topish katta ahamiyatga ega.

Differensial tenglamalar ikkita asosiy sinfga bo'linadi: oddiy differensial tenglamalar va xususiy hosilali differensial tenglamalar.

Xususiy hosilali differensial tenglamalarga keyinroq batafsil to'xtalamiz.

Oddiy differensial tenglamalarda faqat bir o'zgaruvchiga bog'liq funksiya va uning hosilalari qatnashadi, ya`ni

$$f(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (6.1)$$

(6.1) tenglamada qatnashuvchi hosilalarning eng yuqori tartibi differensial tenglamaning tartibi deyiladi. Agar tenglama izlanuvchi funksiya va uning hosilalariga nisbatan chiziqli bo'lsa, unga chiziqli differensial tenglama deyiladi.

Differensial tenglamaning umumiy yechimi deb, uni ayniyatga aylantiruvchi x va n ta $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ o'zgarmaslarga bog'liq ixtiyoriy funksiyaga aytiladi. Masalan (6.1) tenglamaning umumiy yechimi $y = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ ko'rinishdagi funksiyalardan iborat. Agar $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ o'zgarmaslarga muayyan qiymatlar berilsa, umumiy yechimdan xususiy yechim hosil qilinadi. Xususiy yechimni topish

uchun $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ o'zgarmaslarning mos qiymatlarini aniqlash lozim. Buning uchun esa yechim qanoatlantiruvchi qo'shimcha shartlarga ega bo'lishimiz kerak. Agar differensial tenglama n-tartibli bo'lsa, yagona xususiy yechimni topish uchun xuddi shuncha qo'shimcha shartlar kerak. Hususan, birinchi tartibli tenglama $F(x, y, y') = 0$ ning umumiy yechimi $y = \varphi(x, c)$ dagi c o'zgarmasni topish uchun bitta qo'shimcha shartning berilishi kifoya.

Qo'shimcha shartlar berilishiga ko'ra differensial tenglamalar uchun ikki xil masala qo'yiladi:

1) *Koshi masalasi*
2) *Chegaraviy masala.*

Agar qo'shimcha shartlar bitta $x = x_0$ nuqtada berilsa, differensial tenglamani yechish uchun qo'yilgan masalani Koshi masalasi deyiladi. Koshi masalasidagi qo'shimcha shartlar boshlang'ich shartlar, $x = x_0$ nuqta esa boshlang'ich nuqta deb ataladi.

Agar qo'shimchi shartlar erkli o'zgaruvchi argumentlarning ikki yoki undan ko'p qiymatlarida berilsa, bunday masalaga chegaraviy masala deyiladi. Qo'shimcha shartlar esa chegaraviy shartlar deb ataladi.

Oddiy differensial tenglamalarni yechishning chizma, analitik, taqribiy va sonli yechish usullari mavjud.

Chizma usullarda differensial tenglamaning integral chiziqlarini geometrik tasviri yasaladi. Bunda hosila o'zgarmas bo'lgandagi integral chiziqlar-izoklinalar tuziladi. Bu usuldan asosan sodda ko'rinishdagi differensial tenglamalarni yechishda foydalaniladi.

Analitik usullarda differensial tenglamaning yechimlari aniq formulalar orqali aniqlanadi.

Taqribiy usullarda differensial tenglama va qo'shimcha shartlar u yoki bu darajada soddalashtirilib, masala osonroq masalaga keltiriladi.

Sonli usullarda esa yechim analitik shaklda emas, balki sonlar jadvali ko'rinishida olinadi. Albatta, bunda differensial tenglamalar oldin diskret tenglamalar bilan almashtirib olinadi. Natijada, sonli usullar vositasida olingan yechim taqribiy bo'ladi.

Umuman olganda, oddiy differensial tenglamalarning yechimlarini analitik usul yordamida topish imkoni juda kam bo'lganligi uchun, amalda ko'pincha ularni sonli usullar yordamida taqribiy hisoblanadi.

Quyida Koshi masalasini sonli yechish usullaridan na`muna sifatida Eyler va Runge-Kutta usullarini ko'rib chiqamiz.

Nazorat savollari

1. Differensial tenglamalar qanday sinflarga bo'linadi?
2. Qanday tenglamalar oddiy differensial tenglamalar hisoblanadi?
3. Differensial tenglamaning umumiy yechimi nima?
4. Differensial tenglamalarnig xususiy yechimi qanda aniqlanadi?
5. Differensial tenglamalar yechishning qanday usullarini bilasiz?

2-§. Koshi masalasini yechishning Eyler usuli

Tayanch so'z va atamalar

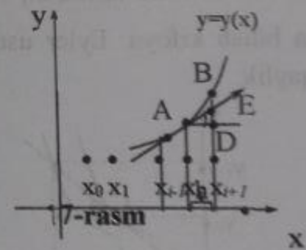
Koshi masalasi, boshlang'ich shart, Eyler usulining ishchi formulasi, usulning geometrik ma`nosi, Eyler usulining xatoligi, usulga mos algoritm blok-sxemasi, dasturi

Bizga quyidagi birinchi tartibli oddiy differensial tenglama(Koshi masalasi)ni

$$y' = f(x, y) \qquad (6.2)$$

$[a,b]$ oraliqdagi $y_0 = y(x_0)$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi aniq yechimi $\bar{y} = \bar{y}(x)$ ni topish lozim bo'lsin.

Koshi masalasini Eyler usuli yordamida yechish uchun, dastlab differensial tenglamaning yechimi qidiriladigan $[a,b]$ kesmani $x_0, x_1, ..., x_n$ tugun nuqtalar bilan bo'laklarga bo'lamiz. Tugun nuqtalarning koordinatalari $x_{i+1} = a + (i+1)h$, $(i = \overline{0, n-1})$ formula orqali aniqlanadi. Har bir tugunda $y(x_i)$echimning qiymatlarini chekli ayirmalar yordamida taqribiy y_i qiymatlar bilan almashtiriladi.



7-rasm

Ma`lumki, $\bar{y} = \bar{y}(x)$ funksiyaning $x = x_i$ nuqta atrofidagi Teylor qatoriga yoyilmasini quyidagicha yozish mumkin:

$$\bar{y}(x_{i+1}) = \bar{y}(x_i) + h \cdot \bar{y}'(x_i) + \frac{1}{2} h^2 \cdot \bar{y}'(x_i) + ...$$

Ushbu cheksiz qatorning boshidagi ikkita had bilan chegaralanib, birinchi tartibli hosila qatnashgan hadni aniqlash natijasida quyidagi chekli ayirmali formulani hosil qilamiz:

$$\bar{y}'(x_i) = \frac{\bar{y}(x_{i+1}) - \bar{y}(x_i)}{h} + O(h) \qquad (6.3)$$

Ushbu almashtirishning geometrik ma`nosi haqida fikr bildiraylik. Hosilaning geometrik ma`nosiga ko‘ra (17-rasm)

$$\bar{y}'(x_i) = tg\beta = \frac{ED}{AD} = \frac{ED}{h}$$

(6.3) dan

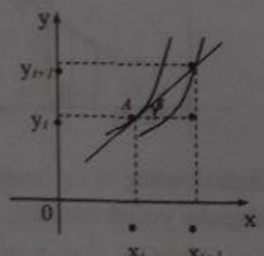
$$\bar{y}'(x_i) \approx \frac{\overbrace{y_{i+1} - y_i}^{BD}}{h} = \frac{BD}{h} = \frac{ED}{h} + \frac{BE}{h} = \bar{y}'(x_i) + \frac{BE}{h}$$

Demak, chekli ayirmalar formulasi hosilaning asl qiymatidan BE/h ga farq qiladi, ya`ni BE qancha kichik bo‘lsa, chekli ayirma $\bar{y}'$ hosilaga shuncha yaqin bo‘ladi. Rasmdan $h \to 0$da $BE \to 0$ ekanini ko‘rish mumkin. (6.2) va (6.3) dan $\bar{y}'_i = f(x_i, \bar{y}_i)$ ekanini hisobga olib, quyidagini hosil qilamiz: $\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h \cdot f(x_i, \bar{y}_i) + O(h^2)$.

Yangi taqribiy $y_i \approx \bar{y}_i$ qiymatlarni ushbu formula bilan kiritamiz:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \qquad (6.4)$$

Hosil qilingan (6.4) formula Eyler usulining asosiy ishchi formulasi bo‘lib, uning yordamida tugun nuqtalarga mos bo‘lgan differensial tenglamaning y_i xususiy yechimlarini topish mumkin. Yuqoridagi formuladan ko‘rinib turibdiki, y_{i+1} yechimni topish uchun y_i yechimnigina bilish kifoya. Eyler usulining *geometrik ma`nosi* bilan tanishib chiqaylik:



18-rasm

A nuqta $x = x_i$ nuqtaga mos keluvchi yechim bo‘lsin. Bu nuqtadan integral chiziqqa o‘tkazilgan urinma x_{i+1} nuqtada boshqa integral chizig’ida y_{i+1} yechimni aniqlaydi.

Urinmaning og’maligi $\beta \cdot y_i' = f(x_i, y_i)$ hosila bilan aniqlanadi. Demak, Eyler usulidagi yo‘l qo‘yilgan asosiy xatolik yechimni bir integral chizig’idan boshqasiga o‘tkazib yuborishi bilan xarakterlanadi. $y = f(x)$ funksiyani $x = x_i$ nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyib, bu qatordagi chiziqli xadlar bilangina cheklanganimiz uchun (6.4) formulani

$$\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h \cdot f(x_i, \bar{y}_i) + O(h^2)$$

kabi yozish mumkin. Har bir qadamda Eyler usuli xatoligi $O(h^2)$ bo‘ladi. Qidirilayotgan yechimni n-ta nuqtada topilishini inobatga olsak bu xatoliklar jamlanib borib $n \cdot O(h^2)$ ga teng bo‘ladi. Lekin, $h = L/n$, L-integrallanuvchi kesma uzunligi, bo‘lganligi uchun usulning yakuniy xatosi

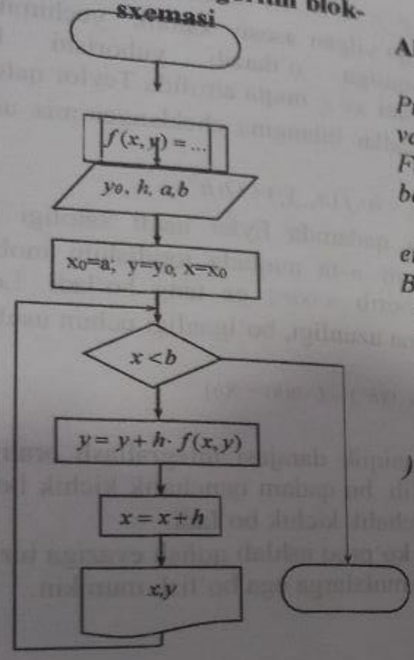
$$n \cdot O(h^2) = L/n \cdot O(h^2) = L \cdot O(h) = O(h)$$

ga teng bo‘ladi.

Shunday qilib, usulning aniqlik darajasi integrallash oralig’ini bo‘linish qadamiga bog’liq bo‘lib, bu qadam qanchalik kichik bo‘lsa, yo‘l qo‘yilgan xatolik ham shunchalik kichik bo‘ladi.

Teylor qatoridagi hadlarni ko‘proq ushlab qolish evaziga turli xil ko‘rinishdagi takomillashgan formulalarga ega bo‘lish mumkin.

Eyler usuliga mos algoritm blok-sxemasi



Algoritmning dastur matni

```
Program Eyler;
var a,b,x0,y0,x,y,h:real;
Function f(x,y:real):real;
begin
   f:=<funksiya ko'rinishi>;
end;
Begin
  Write('a,b='); readln(a,b);
  Write('y0='); readln(y0);
  x0:=a;
  Write('h=');readln(h);
  writeln('x0=',x0,'   y0=', y0
);
  x:=x0;y:=y0;
  while x< b do
  begin
   y:=y+h*f(x,y);
   Writeln('x=',x;'    y=',y);
    x:=x+h;
  end;
Readln;
end.
```

Nazorat savollari

1. Eyler usulining ishchi formulasi qanday hosil qilinadi?
2. Eyler usulinig geometrik ma`nosini ifodalay olasizmi?
3. Eyler usulinig xatoligi qanday baholanadi?

3-§. Koshi masalasini yechishning Runge-Kutta usuli

Tayanch so'z va atamalar

Runge – Kutta usuli, usulning ishchi formulasi, algoritm blok-sxemasi, datur tavminoti.

Bir qadamli oshkor usullarning boshqa bir necha xillari ham mavjud bo'lib, ularning ichida amalda eng ko'p ishlatiladigani Runge-Kutta usuli hisoblanadi. Usul shartiga ko'ra har bir yangi x_{i+1} tugun nuqtadagi y_{i+1} yechimni topish uchun $f(x,y)$ funksiyani to'rt marta har xil argumentlar uchun hisoblash kerak. Bu jihatdan Runge-Kutta usuli hisoblash uchun nisbatan ko'p vaqt talab qiladi. Lekin, Eyler usuliga ko'ra aniqligi yuqori bo'lganligi uchun, undan amalda keng foydalaniladi. Usulning ishchi formulasi quyidagicha yoziladi:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)\,,\; i = 0,1,\dots,n-1,$$

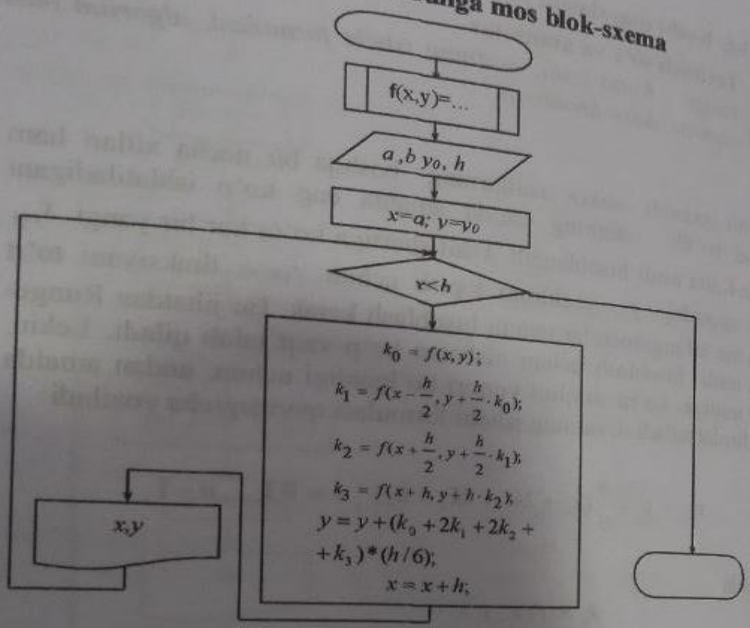
bu yerda

$$k_0 = f(x_i, y_i);$$

$$k_1 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\cdot k_0);$$
$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\cdot k_1);$$
$$k_3 = f(x_i + h, y_i + h\cdot k_2);$$

Demak, formulalardan ko'rinib turibdiki, Eyler usuli birinchi tartibli Runge-Kutta usuliga mos keladi. Runge-Kutta usulining aniqligi $O(h^4)$ kichik miqdor bilan baholanadi, ya`ni Eyler usuliga nisbatan to'rt marta yuqori aniqlikka egadir.

Runge-Kutta usuliga mos blok-sxema



Algoritmning dastur matni

```
Program R_kutta;
var a,b,x0,y0,h,x,y,k0,k1,k2,k3:real;
function f(x,y:real):real;
 begin
  f:=. . .;end;
Begin
 Write('a,b=');readln(a,b);
 Write('y0,h=');readln(y0,h);
 x:=a;y:=y0;
 while x<b do
 begin
  k0:=f(x,y);
  k1:=f(x+h/2,y+h*k0/2);
  k2:=f(x+h/2,y+h*k1/2);
```



```
  k3:=f(x+h,y+h*k2);
  y:=y+(k0+2*k1+2*k2+k3)*(h/6);
  x:=x+h;
  Writeln('x=',x,'  y=',y );end;
 readln;
 end.
```

Yuqorida ko'rib chiqilgan dasturlarning to'g'riligini va usullarning aniqlik darajasini tekshirish uchun bitta ixtiyoriy differensial tenglama olamiz. Aniq yechimni analitik usulda hisoblash qulay bo'lishi uchun quyidagi tenglamani ko'rib chiqamiz:

$y' = \cos(x)$ tenglamaning $[0,1]$ oraliqda $h = 0,1$ qadam bilan $y(0) = 1$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish kerak.

Yuqoridagi dasturlarga kerakli qiymatlarni kiritamiz. $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $f(x) = \cos x$; $a = 0$; $b = 1$; $h = 0,1$

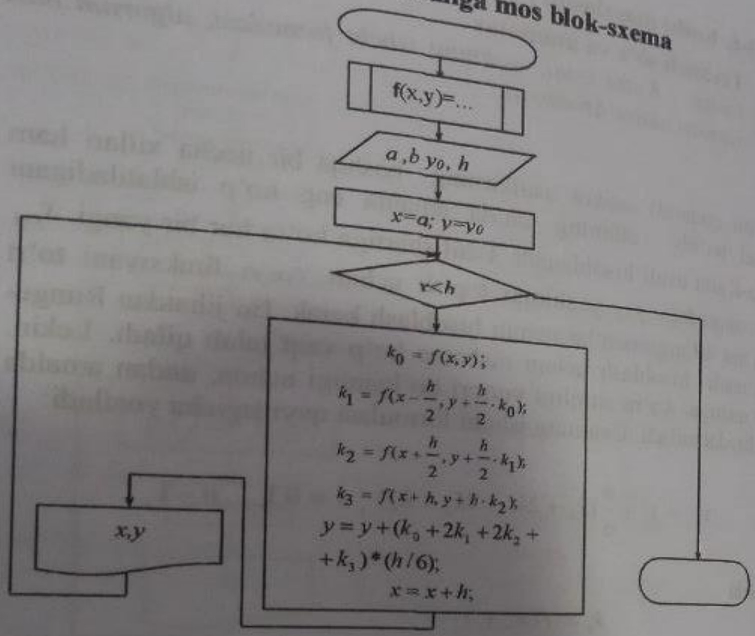
Yuqoridagi tenglama uchun aniq yechim sifatida $y = \sin x + c$ ni olamiz. Uni boshlang'ich shartlarga qo'yib: $1 = \sin 0 + c$ noma'lum o'zgarmasni aniqlaymiz: $c = 1$. Demak, differensial tenglamaning xususiy yechimi: $y = \sin x + 1$.

Olingan natijalarga mos qiymatlardan iborat jadval tuzamiz.

x_i	Eyler usuli uchun	Runge-Kutta usuli uchun	Aniq yechim
0.1	1,1000	1,0998	1,0998
0.2	1,1995	1,1986	1,1986
0.3	1,2975	1,2955	1,2955
0.4	1,3930	1,3894	1,3894
0.5	1,4851	1,4794	1,4794
0.6	1,5729	1,5646	1,5466
0.7	1,6554	1,6442	1,6442
0.8	1,7319	1,7173	1,7173
0.9	1,8015	1,7833	1,7833
1	1,8637	1,8414	1,8414

Natijalardan ko'rinib turibdiki, haqiqatan ham Runge- Kutta usulidan olingan natijalar Eyler usulidan olingan natijalarga ko'ra aniq yechimga ancha yaqindir.

Runge-Kutta usuliga mos blok-sxema



Algoritmning dastur matni

```
Program R_kutta;
var a,b,x0,y0,h,x,y,k0,k1,k2,k3:real;
function f(x,y:real):real;
  begin
   f:=. . .;end;
Begin
  Write('a,b=');readln(a,b);
  Write('y0,h=');readln(y0,h);
  x:=a;y:=y0;
  while x<b do
  begin
   k0:=f(x,y);
   k1:=f(x+h/2,y+h*k0/2);
   k2:=f(x+h/2,y+h*k1/2);
```



```
   k3:=f(x+h,y+h*k2);
   y:=y+(k0+2*k1+2*k2+k3)*(h/6);
   x:=x+h;
   Writeln('x=',x,'  y=',y );end;
readln;
end.
```

Yuqorida ko'rib chiqilgan dasturlarning to'g'riligini va usullarning aniqlik darajasini tekshirish uchun bitta ixtiyoriy differensial tenglama olamiz. Aniq yechimni analitik usulda hisoblash qulay bo'lishi uchun quyidagi tenglamani ko'rib chiqamiz:

$y' = \cos(x)$ tenglamaning $[0,1]$ oraliqda $h = 0{,}1$ qadam bilan $y(0) = 1$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish kerak.

Yuqoridagi dasturlarga kerakli qiymatlarni kiritamiz. $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $f(x) = \cos x$; $a = 0$; $b = 1$; $h = 0{,}1$

Yuqoridagi tenglama uchun aniq yechim sifatida $y = \sin x + c$ ni olamiz. Uni boshlang'ich shartlarga qo'yib: $1 = \sin 0 + c$ noma'lum o'zgarmasni aniqlaymiz: $c = 1$. Demak, differensial tenglamaning xususiy yechimi: $y = \sin x + 1$.

Olingan natijalarga mos qiymatlardan iborat jadval tuzamiz.

x_i	Eyler usuli uchun	Runge-Kutta usuli uchun	Aniq yechim
0.1	1,1000	1,0998	1,0998
0.2	1,1995	1,1986	1,1986
0.3	1,2975	1,2955	1,2955
0.4	1,3930	1,3894	1,3894
0.5	1,4851	1,4794	1,4794
0.6	1,5729	1,5646	1,5466
0.7	1,6554	1,6442	1,6442
0.8	1,7319	1,7173	1,7173
0.9	1,8015	1,7833	1,7833
1	1,8637	1,8414	1,8414

Natijalardan ko'rinib turibdiki, haqiqatan ham Runge- Kutta usulidan olingan natijalar Eyler usulidan olingan natijalarga ko'ra aniq yechimga ancha yaqindir.

$$|m_0|+|m_1|\neq 0 \text{ va } |g_0|+|g_1|\neq 0$$

Chegaraviy shart belgilariga turli xil qiymatlarni berish orqali, berilgan masalani yechish uchun har xil chegaraviy shartlar hosil qilinishi mumkin.

Ayrim paytlarda yechilishi lozim bo'lgan masalalarning matematik modellari to'rtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar orqali ham ifodalanishi mumkin.

Amalda ko'pincha to'rtinchi tartibli differensial tenglamalarning quyidagi ko'rinishi uchraydi:

$$y^{IV}(x)=k\cdot f(x)$$

bu yerda k qiymati beriluvchi koeffisient hisoblanadi. Bu differensial tenglama uchun ma`lum belgilashlarni kiritib, uni ikkinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasiga keltirish mumkin.

$y(x)$ noma`lum funksiyani $y_1(x)$ funksiya orqali belgilab olib, quyidagi almashtirishlar qilamiz, ya`ni:

$$\begin{cases} y_1''(x)=y_2(x) \\ y_2''(x)=k\cdot f(x) \end{cases}$$

Shunday qilib, to'rtinchi tartibli differensial tenglamaning o'rniga ham ikkita, ikkinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasini hosil qilishimiz mumkin. Shuning uchun, biz asosan ikkinchi tartibli differensial tenglamalarning chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarini topishni o'rganamiz.

Avval ta`kidlab o'tganimizdek, ikkinchi tartibli differensial tenglamalarda xususiy yechimni ajratib olish uchun ikkita qo'shimcha shart, yani chegaraviy shartlar berilgan bo'lishi lozim. Bundan buyon, qulaylik uchun ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarni berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlarini topish masalasini oddiygina qilib chegaraviy masala deb yuritamiz.

Chegaraviy masalalarni yechish usullarini quyidagi guruhlarga bo'lish mumkin:

1. Analitik usullar;
2. Sonli-taqribiy usullar;
3. Taqribiy-analitik usullar.

1. Analitik usullar. Oddiy differensial tenglamalarni analitik usullar bilan yechishni oliy matematika kursida o'rganganmiz. Unda chiziqli, bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning umumiy

yechimi bu tenglamaning xususiy yechimi va mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig'indisidan iboratdir. Chiziqli, bir jinsli tenglamalarning umumiy yechimini topish uchun esa uning xususiy yechimlari fundamental sistemasini topish kerak bo'ladi. Xususiy yechimlarni differensial tenglamalarga mos xarakteristik tenglamalar yordamida topiladi. Yuqoridagi barcha bajariladigan amallar differensial tenglamaning ko'rinishi juda sodda bo'lgandagina biror-bir natija berishi mumkin.

Demak, analitik usullar bilan barcha ikkinchi tartibli differensial tenglamalarni yechish imkoni deyarli yo'q.

2. Sonli-taqribiy usullar.

Sonli-taqribiy usullarda yechim sonlar yoki sonlar jadvali ko'rinishida olinadi. Albatta, bunda differensial tenglamalar oldin diskret tenglamalar bilan almashtirib olinadi. Sonli usullarning imkoniyatlari boshqa taqribiy usullarga qaraganda ancha kengdir. Sonli usullar ikki guruhga bo'linadi:

1) Chegaraviy masalalarni Koshi masalasiga keltiruvchi usullar;

2) Chekli ayirmalar usuli.

Biz ko'proq e`tiborni sonli usullar ichida eng ko'p ishlatiladigani - chekli ayirmali usullarga qaratamiz.

3. Taqribiy-analitik usullar.

Bu usulda differensial tenglama va qo'shimcha shartlar u yoki bu darajada soddalashtirilib, masala osonroq masalaga keltiriladi. Taqribiy-analitik usullarga Galyorkin, eng kichik kvadratlar , kollokasiya , Rits va boshqa usullar kiradi. Amalda eng ko'p ishlatiladigan usullardan biri bu Galyorkin usulidir.

Nazorat savollari

1. Chegaraviy masalani yechish uchun qanday qo'shimcha shartlardan foydalanish yetarli hisoblanadi?
2. Chegaraviy masalalarni yechish usullarini qaysi guruhlarga bo'linadi?

5-§. Chekli ayirmalar usuli

Tayanch so'z va atamalar

Chekli ayirmali formula, o'ng chekli ayirmali formula, markaziy chekli ayirmali formula, uch diaganalli tenglamalar sistemasi, haydash usuli, noma`lum haydash koeffisientlari, to'g'ri va teskari bosqichlar.

Bizga quyidagi

$$y''(x)+ p(x)y'(x)+ q(x)y(x) = f(x) \qquad (6.7)$$

ikkinchi tartibli, o'zgaruvchan koeffisientli oddiy differensial tenglamaning $x\in[a,b]$ oraliqning chetki nuqtalarida qo'yilgan $\{m_0 y(a)+m_1 y'(a) = m_2, g_0 y(b)+g_1 y'(b) = g_2$ (6.8)

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi aniq yechim $\bar{y}=\bar{y}(x)$ ni topish lozim bo'lsin. Bu yerda $p(x), q(x), f(x)$ lar $[a,b]$ oraliqda uzluksiz funksiyalar sinfiga kiradi. $m_0, m_1, m_2, g_0, g_1, g_2$ - o'zgarmaslar, ya`ni chegaraviy shart belgilari. Ixtiyoriy taqribiy yechimni $y=y(x)$ deb belgilaymiz.

Yuqoridagi masalani sonli-taqribiy usul hisoblanmish chekli ayirmalar usuli bilan yechish uchun yechim qidiriladigan $[a,b]$ oraliqda quyidagi to'rni kiritamiz, ya`ni oraliqni koordinatalari $x_i = a+i\cdot h$ formula bilan aniqlanuvchi tugun nuqtalar bilan bo'laklarga bo'lamiz, bu yerda $h=\dfrac{b-a}{n}$, n-tugun nuqtalar soni. Belgilashlar kiritamiz: $\bar{y}_i = \bar{y}(x_i), y_i = y(x_i)$.

x_i nuqtalar uchun yuqoridagi (6.7) tenglama o'rinli bo'lgani uchun, uni shu nuqtalarda yozib olamiz:

$$\bar{y}''(x_i)+ p(x_i)\bar{y}'(x_i)+q(x_i)\bar{y}(x_i) = f(x_i)$$

Qulaylik uchun, bu tenglamani quyidagi ko'rinishda qayta yozamiz:

$$\bar{y}''_i + p_i\bar{y}'_i + q_i\bar{y}_i = f_i \qquad (6.9)$$

Ma`lumki, izlanuvchi y_i funksiyaning x_i nuqta atrofidagi Teylor qatoriga yoyilmasini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\bar{y}(x_{i+1}) = \bar{y}(x_i)+h\bar{y}'(x_i)+\frac{h^2}{2!}\bar{y}''(x_i)+\ldots \qquad (6.10)$$

yoki

$$\bar{y}(x_{i-1}) = \bar{y}(x_i)-h\bar{y}'(x_i)+\frac{h^2}{2!}\bar{y}''(x_i)+\ldots \qquad (6.11)$$

(6.10) va (6.11) qatordagi ikki va undan yuqori tartibli hosilalar qatnashgan hadlarni tashlab yuborsak, izlanuvchi funksiyaning x_i nuqtadagi hosilalari uchun quyidagi taqribiy hisoblash formulalari hosil bo'ladi.

(6.10) formuladan

$$\bar{y}'(x_i) = \frac{\bar{y}(x_{i+1})-\bar{y}(x_i)}{h}+O(h) \qquad (6.12)$$

(6.11) formuladan

$$\bar{y}'(x_i) = \frac{\bar{y}(x_i)-\bar{y}(x_{i-1})}{h}+O(h) \qquad (6.13)$$

(6.12)-formula o'ng chekli ayirmali formula, (6.13)-formula chap chekli ayirmali formula deb ataladi. Bu formulalar $O(h)$ miqdorli xatoliklar bilan baholanadi.

Endi (6.10) va (6.11) Teylor qatoridagi uchinchi va undan yuqori tartibli hosilalar qatnashgan hadlarni tashlab yuborib, hosil bo'lgan taqribiy tengliklarni ayirish hisobiga birinchi tartibli hosilani taqribiy hisoblashning markaziy chekli ayirmali formulasini hosil qilamiz:

$$\bar{y}'(x_i) = \frac{\bar{y}(x_{i+1})-\bar{y}(x_{i-1})}{2h}+O(h^2) \qquad (6.14)$$

bu almashtirishning xatolik darajasi $O(h^2)$ miqdor bilan belgilanadi.

Agar yuqoridagi (6.10) va (6.11) formulalardagi ikkinchi tartibli hosila qatnashgan hadni ham qo'shib olib, hosil bo'lgan tengliklarni hadlab qo'shsak:

$$\bar{y}_i'' = \frac{\bar{y}(x_{i+1})-2\bar{y}(x_i)+\bar{y}(x_{i-1})}{h^2}+O(h^2) \qquad (6.15)$$

dan iborat izlanuvchi y_i funksiyaning x_i nuqtalari uchun ikkinchi tartibli hosilasini taqribiy hisoblash formulasi kelib chiqadi. Bu almashtirishning xatoligi ham $O(h^2)$ miqdor bilan baholanadi.

(6.9) differensial tenglamadagi $\bar{y}_i', \bar{y}_i''$ lar o'rniga hosil qilingan chekli ayirmali formulalarni qo'yamiz:

$$\frac{\bar{y}_{i+1}-2\bar{y}_i+\bar{y}_{i-1}}{h^2}+p_i\frac{\bar{y}_{i+1}-\bar{y}_{i-1}}{2h}+q_i\bar{y}_i+O(h^2) = f_i.$$

Cheksiz kichik miqdorlarni tashlab yuborib, hosilalar qatnashmagan va $y_i \approx \bar{y}(x_i)$ noma`lumlardan iborat tenglamalarni hosil qilamiz:

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+p_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+q_iy_i=f_i, i=1,...,n-1.$$

Hosil bo'lgan tenglamani har ikkala tomonini h^2 ga ko'paytiramiz va mos hadlarni guruhlaymiz. Hamda ushbu belgilashlar kiritib:

$$A_i=1+\frac{h}{2}p_i,\ \ B_i=2-h^2q_i,\ \ C_i=1-\frac{h}{2}p_i,\ \ D_i=h^2f_i \quad (6.16)$$

quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$A_iy_{i+1}-B_iy_i+C_iy_{i-1}=D_i \qquad (6.17)$$

Bu yerda $i=\overline{1,n-1}$ bo'lgani uchun i ga mos qiymatlarni berib, (6.17) sistemaning yoyib yozilgan xolini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} A_1y_2-B_1y_1+C_1y_0=D_1 \\ A_2y_3-B_2y_2+C_2y_1=D_2 \\ A_3y_4-B_3y_3+C_3y_2=D_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_ny_{n+1}-B_ny_n+C_ny_{n-1}=D_n \end{cases} \qquad (6.18)$$

Hosil bo'lgan sistema $y_0, y_1, ..., y_n$ lardan iborat $(n+1)$ ta noma`lumli, $(n-1)$ ta tenglamadan iborat uch diagonalli, algebraik, chiziqli tenglamalar sistemasidan iborat.

Uch diagonalli bo'lishiga sabab, sistemadagi har bir tenglamada faqat uchtadan noma`lum qatnashgan hadlar mavjud bo'lib, sistemada ularning joylashgan o'rni asosiy diagonal, uni pasti va yuqorisidagi diagonallarga mos keladi.

Ma`lumki, tenglamalar sistemasining yagona yechimini aniqlash uchun tenglamalar va noma`lumlar soni teng bo'lishi kerak. Shuning uchun, yetishmayotgan ikkita tenglamani chegaraviy shart hisobiga to'ldirib olamiz. $x_0=a$ va $x_n=b$ oraliqning chetki nuqtalari uchun (6.8) shartlarni quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{cases} m_0y_0+m_1y_0'=m_2 \\ g_0y_n+g_1y_n'=g_2 \end{cases}$$

y_0', y_n'-larni mos ravishda (6.11) va (6.12) chekli ayirmali formulalari bilan almashtiramiz, ya`ni $y(x)$ ni $x=x_0$ yoki $x=a$ nuqtadagi hosilasi uchun o'ng chekli ayirma formulasini, $x=x_n$ yoki $x=b$ nuqtadagi hosilasi uchun chap chekli ayirma formulasini qo'yamiz:

$$\begin{cases} m_0y_0+m_1\cdot\frac{y_1-y_0}{h}=m_2 \\ g_0y_n+g_1\frac{y_n-y_{n-1}}{h}=g_2 \end{cases}$$

Hosil bo'lgan tenglamalarni h ga ko'paytirib, o'xshash hadlarni ixchamlaymiz:

$$\begin{cases} (hm_0-m_1)y_0+m_1y_1=hm_2 \\ (hg_0+g_1)y_n-g_1y_{n-1}=hg_2 \end{cases} \qquad (6.19)$$

Quyidagicha belgilashlarni kiritib:

$$A_0=hm_0-m_1, D_0=hm_2, B_n=-g_1, B_0=m_1, A_n=hg_0+g_1, D_n=hg_2 \qquad (6.20)$$

hosil qilingan tenglamalarni (6.17) tenglamalar sistemasiga "ulaymiz" va natijada $(n+1)$ ta noma`lumli, $(n+1)$ ta tenglamadan iborat $y_0, y_1, ..., y_n$ noma`lumlarga nisbatan yozilgan quyidagi uch dioganalli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} B_0y_0+C_0y_1=D_0 \\ A_iy_{i+1}-B_iy_i+C_iy_{i-1}=D_i \qquad (i=\overline{1,n-1}) \\ A_ny_n+B_ny_{n-1}=D_n \end{cases} \qquad (6.21)$$

Ma`lumki, qidirilayotgan taqribiy yechimning aniqlik darajasini oshirish uchun $[a,b]$ oraliqda kiritilgan $x_i=a+ih$ to'rning h qadamini kichraytirish lozim. Bu miqdorni kichraytirish esa o'z navbatida tugun nuqtalar $x_i$ning sonini keskin oshishiga olib keladi. Shunday qilib, qo'yilgan masalani zarur aniqlikda yechish uchun hosil qilingan (6.21) sistemaning tartibi ming, ayrim hollarda esa o'n mingdan ham ortiq bo'lishi mumkin. Yuqorida eslatganimizdek, sistemaning har bir tenglamasida faqat uchtadangina noma`lum qatnashgan xadlar mavjud. Qolgan noma`lumlarning koeffisientlari esa nolga teng. Agarda biz bunday sistemani an`anaviy usullar (Gauss, Kramer, teskari matrisa kabi) yordamida yechmoqchi bo'lsak, nollar ustida ma`nosiz bo'lgan ko'p hajmdagi amallarni bajarishimizga to'g'ri keladi. Shuning uchun, bunday maxsus sistemalarni yechishning maxsus usullari ishlab chiqilgan. Bu usullarning eng soddasi, dasturlashga qulayi, xatolar yig`ilmasini hosil qilmaydigani "haydash" usuli hisoblanadi.

Quyida "Haydash " usulining qisqacha mohiyati bilan tanishib chiqamiz.

Maxsus, diagonalli sistemalarni yechishga mo'ljallangan "Haydash" usuli ikki bosqichdan iborat:

- noma`lum koeffisientlarni aniqlash (to'g'ri bosqichi)
- sistemaning yechimlarini aniqlash (teskari bosqichi).

1-bosqichda (6.21) sistemaning noma`lum y_i yechimini quyidagi ko'rinishda qidiramiz:

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1} \qquad (6.22)$$

bu yerda α_{i+1} va β_{i+1} noma`lum haydash koeffisientlari. Noma`lum $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ koeffisientlarni topish uchun (6.22) tenglikni $x = x_i$ va $x = x_{i-1}$ nuqtalardagi ko'rinishini (6.21) formuladagi ikkinchi tenglamaga ketma-ket qo'yib,

$$A_i y_{i-1} - B_i(\alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}) + C_i(\alpha_i(\alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}) + \beta_i) = D_i$$

yoki

$$(A_i - B_i\alpha_{i+1} + C_i\alpha_i\alpha_{i+1}) y_{i+1} + (-B_i\beta_{i+1} + C_i\alpha_i\beta_{i+1} + C_i\beta_i - D_i) = 0$$

ni hosil qilamiz.

Bu chiziqli ifoda aynan 0 ga teng bo'lishi uchun, barcha koeffisientlar 0 ga teng bo'lishi kerakligini hisobga olib, quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$A_i - B_i\alpha_{i+1} + C_i\alpha_i\alpha_{i+1} = 0$$

$$-B_i\beta_{i+1} + C_i\alpha_i\beta_{i+1} + C_i\beta_i - D_i = 0$$

Hosil qilingan tengliklardan $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ noma`lum koeffisientlarni topish unchalik qiyin emas, ya`ni

$$\alpha_{i+1} = \frac{A_i}{B_i - C_i\alpha_i}; \quad \beta_{i+1} = \frac{c_i\beta_i - D_i}{B_i - C_i\alpha_i}; \qquad i = \overline{1, n-1} \qquad (6.23)$$

Mazkur rekkurent formuladagi barcha α_{i+1} va β_{i+1} larni aniqlash uchun yoki boshqacha aytganda rekkurent formulani "yurishi" uchun dastlabki α_i va β_i qiymatlarni topishimiz kerak. Bu qiymatlarni topishimiz uchun $x = a$ nuqtadagi chegaraviy shartdan hosil qilingan (6.21) formuladagi birinchi tenglamadan foydalanamiz.

$B_0 y_0 + C_0 y_1 = D_0$ tenglamani har ikkala tomonini A_0 ga bo'lib, y_0 ni topamiz:

$$y_0 = \frac{C_0}{B_0} y_1 - \frac{D_0}{B_0};$$

Keltirib chiqarilgan formulani (6.22) formulaning $i = 0$ dagi qiymatida hosil qilingan $y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1$ bilan solishtirish natijasida $\alpha_1 = \frac{C_0}{B_0}$; $\beta_1 = -\frac{D_0}{B_0}$ ekanligi kelib chiqadi.

Eslatib o'tamiz, B_0, C_0, D_0 larning qiymati oldinroq (6.20) formulalar orqali aniqlangan edi.

α_1, β_1 lar ma`lum bo'lgach, barcha keyingi $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ lar (6.23) rekkurent formuladan topiladi. Bu jarayon "haydash" usulining to'g'ri bosqichini tashkil etadi.

2-bosqichda α_i, β_i noma`lum koeffisientlarning barcha qiymat-lari topilgach (6.22) rekkurent formula yordamida qidirilayotgan yechim y_i larni topish mumkin, bu yerda ham rekkurent formulaning ishlashi uchun dastlabki qiymat sifatida y_n ni aniqlash lozim. Bu ishni bajarish uchun $x = b$ nuqtadagi chegaraviy shartdan hosil qilingan (6.21) sistemaning uchinchi tenglamasi

$$A_n y_n + B_n y_{n-1} = D_n$$

va (6.22) formulaning $i = n-1$ nuqtadagi ko'rinishi $y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n$ dan foydalanamiz, ya`ni ularni sistema deb qarab, bu sistemadan y_n ni aniqlaymiz. $y_n = \dfrac{C_n\beta_n - D_n}{B_n - C_n\alpha_n}$

Qidirilayotgan y_n hisoblangach, $y_i = \alpha_{i+1} \cdot y_{i+1} + \beta_{i+1}$ rekkurent formulasi yordamida ($i = \overline{n-1, 0}$) barcha qolgan yechimlar topiladi.

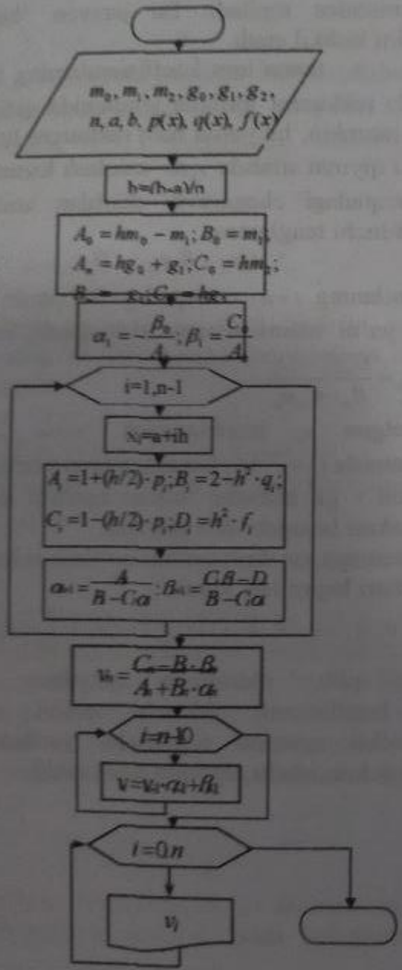
Bu jarayon i ga nisbatan teskari tartibda bo'lgani uchun, uni haydashning teskari bosqichi deb ataymiz.

(6.21) sistemaga xaydash usulini qo'llash uchun quyidagi turg'unlik shartlari bajarilishi kerak:

$$A_i \neq 0, \; C_i \neq 0, \; |B_i| \geq |A_i| + |C_i|, \; i = \overline{1, n-1}, \; \left|\frac{C_0}{B_0}\right| \leq 1, \; \left|\frac{C_n}{B_n}\right| < 1.$$

Shunday qilib, oldimizga qo'yilgan masalani, ya`ni o'zgaruvchan koeffisientli, ikkinchi tartibli, oddiy differensial tenglamani chekli ayirmali formulalar yordamida sonli-taqribiy usulda yechish uchun ishchi algoritm hosil qildik.

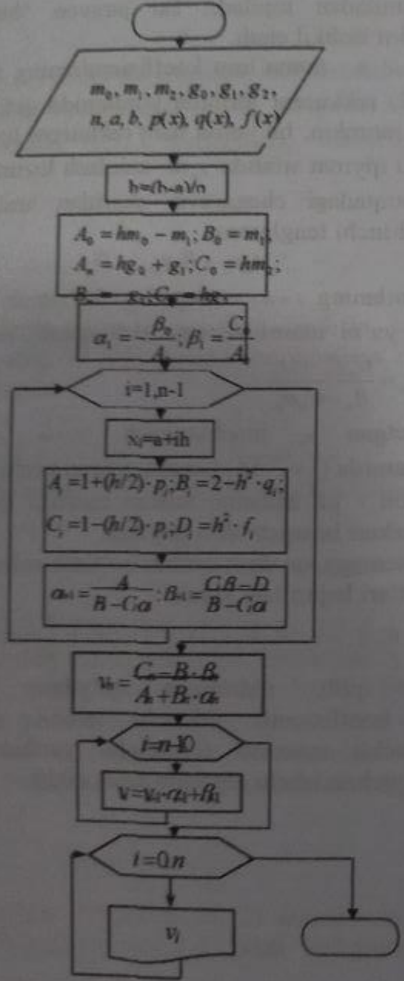
Usulga mos algoritm blok-sxemasi quyidagicha ko'rinishda bo'ladi:



Algoritmning dastur matni

```
program chekli_a;
uses crt;
const n=10;
  A0,B0,C0,An,Bn,Cn,Ai,Bi,Ci,Di:real;
  i:integer;
  al,be:array[1..n] of real;
  y:array[0..n] of real;
    function p(x:real):real;
    begin p:=-2;end;
    function q(x:real):real;
    begin q:=x*x*x;end;
    function f(x:real):real;
    begin f:=12*x*x-8*x*sqr(x)+exp(7*ln(x));end;
begin
    write('m0,m1,m2,g0,g1,g2=');
    readln(m0,m1,m2,g0,g1,g2);
    write('a,b=');
    readln(a,b);
    h:=(b-a)/n;
    B0:=-h*m0+m1; A0:=m1; D0:=h*m2;
    Bn:=-h*g0-g1; Cn:=-g1; Cn:=h*g2;
    al[1]:=C0/B0; be[1]:=-D0/B0;
    for i:=1 to n-1 do
   begin
     x:=a+i*h;
     Ai:=1+(h/2)*P(x);Bi:=2-h*h*q(x);
     Ci:=1-(h/2)*P(x);Di:=h*h*f(x);
     al[i+1]:=Ai/(Bi-Ci*al[i]);
     be[i+1]:=(Ci*be[i]-Di)/(Bi-Ci*al[i]);
   end;
    y[n]:=(Dn-Cn*be[n])/(-Bn+Cn*al[n]);
    for i:=n-1 downto 1 do
    y[i]:=y[i+1]*al[i+1]+be[i+1];
    for i:=0 to n do
    writeln(y[i]:2:8,'      ',sqr(h*i)*sqr(h*i):2:8,'     ', abs(y[i]-
   sqr(i*h)*sqr(i*h)):2:8);
  end.
```

Usulga mos algoritm blok-sxemasi quyidagicha ko'rinishda bo'ladi:



Algoritmning dastur matni

```
program chekli_a;
uses crt;
const n=10;
  A0,B0,C0,An,Bn,Cn,Ai,Bi,Ci,Di:real;
  i:integer;
  al,be:array[1..n] of real;
  y:array[0..n] of real;
    function p(x:real):real;
    begin p:=-2;end;
    function q(x:real):real;
    begin q:=x*x*x;end;
    function f(x:real):real;
    begin f:=12*x*x-8*x*sqr(x)+exp(7*ln(x));end;
  begin
    write('m0,m1,m2,g0,g1,g2=');
    readln(m0,m1,m2,g0,g1,g2);
    write('a,b=');
    readln(a,b);
    h:=(b-a)/n;
    B0:=-h*m0+m1; A0:=m1; D0:=h*m2;
    Bn:=-h*g0-g1; Cn:=-g1; Cn:=h*g2;
    al[1]:=C0/B0; be[1]:=-D0/B0;
    for i:=1 to n-1 do
    begin
       x:=a+i*h;
       Ai:=1+(h/2)*P(x);Bi:=2-h*h*q(x);
       Ci:=1-(h/2)*P(x);Di:=h*h*f(x);
       al[i+1]:=Ai/(Bi-Ci*al[i]);
       be[i+1]:=(Ci*be[i]-Di)/(Bi-Ci*al[i]);
    end;
     y[n]:=(Dn-Cn*be[n])/(-Bn+Cn*al[n]);
     for i:=n-1 downto 1 do
     y[i]:=y[i+1]*al[i+1]+be[i+1];
     for i:=0 to n do
     writeln(y[i]:2:8,'         ',sqr(h*i)*sqr(h*i):2:8,'   ', abs(y[i]-
    sqr(i*h)*sqr(i*h)):2:8);
  end.
```

yaqin bo'ladi. Lekin, ikkinchi tomondan, qatordan ko'proq had olishga intilish qo'lda bajariladigan matematik almashtirishlar va amallar sonini keskin orttirib yuboradi. Bu esa yo'l qo'yilishi mumkin bo'lgan xatoliklar ehtimolini keskin orttiradi.

Endi e`tiborimizni yana yechimni qidirishga qaratsak, (6.26) formuladagi $c_1, c_2, ... c_n$-lar qiymatlari noma`lum bo'lgan o'zgarmaslar hisoblanadi. $u_0(x), u_1(x), ..., u_n(x)$ lar esa tanlab olinadigan [a, b] kesmada ikki marta uzluksiz differensallanuvchi, chiziqli bog'liq bo'lmagan funksiyalar hisoblanadi, ya`ni ular bazis sistemasini tashkil qilishi kerak.

Bazis funksiyalarni shunday tanlash lozimki, (6.26) formula bilan aniqlanuvchi masalaning yechimi $c_1, c_2, ..., c_n$ o'zgarmaslarning ixtiyoriy tanlangan qiymatlarida ham chegaraviy masalaning (6.25) chegaraviy shartlarini qanoatlantirsin. Buning uchun bazis funksiyalarni tanlash quyidagicha amalga oshiriladi.

Avval quyidagi operatorlarni muomalaga kiritaylik:

$$L[y(x)] \equiv y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x),$$
$$L_a[y(x)] \equiv m_0 y(x) + m_1 y'(x)$$
$$L_b[y(x)] \equiv g_0 y(x) + g_1 y'(x)$$

1) $u_0(x)$ funksiya – berilgan (6.25) chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi funksiya bo'lishi lozim, ya`ni:

$$\begin{cases} m_0 u_0(a) + m_1 u'_0(a) = m_2 \\ g_0 u_0(b) + g_1 u'_0(b) = g_2 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} L_a[u_0(a)] = m_2 \\ L_b[u_0(b)] = g_2 \end{cases}.$$

2) $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x)$ funksiyalari esa berilgan (6.25) chegaraviy shartning bir jinsli holatini qanoatlantiruvchi funksiyalar bo'lishi lozim, ya`ni:

$$\begin{cases} m_0 u_i(a) + m_1 u_i(a) = 0 \\ g_0 u_i(b) + g_1 u_i(b) = 0 \end{cases}, \quad i = \overline{1,n} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} L_a[u_i(a)] = 0 \\ L_b[u_i(b)] = 0 \end{cases}$$

Bazis funksiyalarni tanlash yo'llarini quyidagi misolda ko'rib chiqaylik:

Chegaraviy masalaning chegaraviy shartlari quyidagicha berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$u_0(x)$ ni shunday tanlaymizki, $u_0(0)=1$, $u_0(1)=0$, ya`ni berilgan chegaraviy shart qanoatlansin:

$$u_0(x) = 1 - x$$

Xuddi shunga o'xshash, boshqa bazis funksiyalar $u_k(x)$lar esa bir jinsli chegaraviy shartlarni qanoatlantirishi va chiziqli bog`liqsiz bo'lishi kerak.

$$\begin{cases} u_1(0) = 0 \\ u_1(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad u_1(x) = x(1-x)$$

$$\begin{cases} u_2(0) = 0 \\ u_2(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad u_2(x) = x^2(1-x)$$

Topshiriq: Chegaraviy shartlar $y(0)=1$ va $y'(\pi/2) = -1$ bo'lgan hol uchun bazis funksiyalarni mustaqil tanlang.

Yuqorida, soddalik uchun (6.26) da $n=2$ deb hisoblandi.

Biz $u_0(x), u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x)$ bazis funksiyalarni tanlashni o'rgandik, endi chegaraviy masalaning yechimi faqat $c_1, c_2, ..., c_n$ noma`lum koeffisientlarga bog'liq bo'lib qoldi. Galyorkin, Rits, kollokasiya, eng kichik kvadratlar kabi boshqa taqribiy-analitik usullar bir-biri bilan aynan shu noma`lum koeffisientlarni aniqlash yo'llarini turlichaligi bilan o'zaro farq qiladi holos. Bu o'zgarmaslarni Galyorkin taklif etgan usul bilan aniqlashni tashkil qilamiz. Buning uchun, dastlab (6.26) formulani (6.24) differensial tenglamaga qo'yib, quyidagi tafovut funksiyasini hosil qilamiz:

$$R(x, c_1, c_2, ..., c_n) = L[u_0(x)] + \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot L[u_k(x)] - f(x) \qquad (6.27)$$

Bu funksiya chegaraviy masala taqribiy yechimining aniq yechimdan farqini xarakterlovchi miqdor bo'lib, u $c_1, c_2, ..., c_n$ o'zgarmaslarga chiziqli bog'liqdir.

Tafovut funksiyani minimallashtirish sharti Galyorkin usulida quyidagicha ifodalanadi.

$$\begin{cases} \int_a^b R(x,c_1,c_2,\ldots,c_n)\cdot u_1(x)\cdot dx = 0 \\ \int_a^b R(x,c_1,c_2,\ldots,c_n)\cdot u_2(x)\cdot dx = 0 \\ \int_a^b R(x,c_1,c_2,\ldots,c_n)\cdot u_n(x)\cdot dx = 0 \end{cases} \qquad (6.28)$$

Yani, tafovut funksiyani $u_i(x)$, $(i=\overline{1,n})$ bazis funksiyalarga ortogonallik shartidan foydalaniladi.
(6.27) formuladagi R –tafovut funksiyasini (6.28) sistemaga qo‘yamiz.

$$\begin{cases} \int_a^b (L[u_0]+c_1\cdot L[u_1]+c_2\cdot L[u_2]+\ldots+c_n\cdot L[u_n]-f(x))\cdot u_1(x)\cdot dx = 0 \\ \int_a^b (L[u_0]+c_1\cdot L[u_1]+c_2\cdot L[u_2]+\ldots+c_n\cdot L[u_n]-f(x))\cdot u_2(x)\cdot dx = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \int_a^b (L[u_0]+c_1\cdot L[u_1]+c_2\cdot L[u_2]+\ldots+c_n\cdot L[u_n]-f(x))\cdot u_n(x)\cdot dx = 0 \end{cases} \qquad (6.29)$$

Natijada $c_1,c_2,\ldots,c_n$ noma`lumlarga nisbatan (6.29) ko‘rinishidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi. Uning koeffisientlarini yuqoridagi aniq integrallarni hisoblash yordamida topiladi. Sistemani yechib (odatda Gauss usulidan foydalaniladi) $c_1,c_2,\ldots,c_n$ noma`lum o‘zgarmaslarni aniqlash mumkin. U holda chegaraviy masalaning taqribiy analitik yechimini

$$y(x)=u_0(x)+c_1\cdot u_1(x)+c_2\cdot u_2(x)+\ldots+c_n\cdot u_n(x)$$

ko‘rinishida yoza olamiz.

n=3 bo‘lgan hol uchun tafovut funksiyasini va unga mos tenglamalar sistemasini hosil qiling.

Yuqorida ko‘rib, o‘rganib chiqilgan nazariy amallarni quyidagi chegaraviy masala ustida bajarishni tashkil qilaylik. ($n=2$ deb faraz qilaylik).

Chegaraviy masalaning differensial tenglamasi quyidagicha ko‘rinishda berilgan bo‘lsin:

$$y''-2y'+x^3\cdot y=12x^2-8x^3+x^7$$

Differensial tenglamaning yechimiga qo‘yilgan chegaraviy shartlar esa:

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y(1)=1 \end{cases}$$

Yuqorida ta`kidlaganimizdek, Galyorkin usuli bilan ishlashdan oldin berilgan masalaning chegaraviy shartlarini qanoatlantiradigan bazis funksiyalarni tanlab olishimiz lozim:
1) $u_0(x)$ ni berilgan chegaraviy shart, ya`ni $u_0(0)=0$ va $u_0(1)=1$ shartni qanoatlantiradigan qilib, quyidagicha tanlab olamiz: $u_0(x)=x$.
2) $u_1(x)$ va $u_2(x)$ larni esa berilgan chegaraviy shartga mos bir jinsli shartlarni, ya`ni $u_1(0)=0, u_1(1)=0$ va $u_2(0)=0$, $u_2(1)=0$ shartni qanoatlantiradigan va o‘zaro chiziqli bog’liqsiz qilib, quyidagicha tanlab olamiz:

$$u_1(x)=x(x-1)=x^2-x; \quad u_2(x)=x^2(x-1)=x^3-x^2.$$

Ishchi formulalarda foydalaniladigan quyidagi operatorlarni hisoblashni tashkil qilaylik.

$$L[u_1]\equiv u_1''-2u_1'+x^3u_1=2-2(2x-1)+x^3(x^2-x)=2-4x+2+x^5-x^4=$$
$$=x^5-x^4-4x+4$$

$$L[u_2]\equiv u_2''-2u_2'+x^3u_2=6x-2-2(3x^2-2x)+x^3(x^3-x^2)=$$
$$=6x-2-6x^2+4x+x^6-x^5=x^6-x^5-6x^2+10x-2.$$
$$L[u_0]\equiv u_0''-2u_0'+x^3u_0=0-2+x^4=x^2-2$$

Endi quyidagi (6.29) sistemaga mos tenglamalar sistemasining koeffisientlari va ozod hadlarini hisoblashni tashkil etaylik.

$$\begin{cases} m_{11}c_1+m_{12}c_2=b_1 \\ m_{21}c_1+m_{22}c_2=b_2 \end{cases} \qquad (6.30)$$

bu yerda

$$m_{11}=\int_0^1 L[u_1]\cdot u_1(x)dx=\int_0^1 (x^5-x^4-4x+4)\cdot(x^2-x)dx;$$

$$m_{12}=\int_0^1 L[u_2]\cdot u_1(x)dx=\int_0^1 (x^6-x^5-6x^2+10x-2)\cdot(x^2-x)dx;$$

$$m_{21}=\int_0^1 L[u_1]\cdot u_2(x)\cdot dx=\int_0^1 (x^5-x^4-4x+4)\cdot(x^3-x^2)\cdot dx;$$

$$m_{22}=\int_0^1 L[u_2]u_2(x)dx=\int_0^1 (x^6-x^5-6x^2+10x-2)\cdot(x^3-x^2)\cdot dx;$$

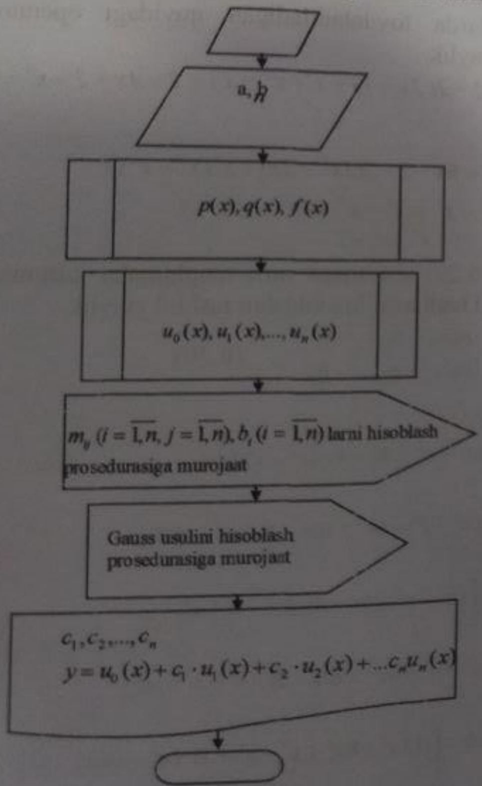
$$b_1=\int_0^1 (L[u_0]-f(x))u_1(x)dx=\int_0^1 (12x^2-8x^3+x^7-x^2+2)\cdot(x^2-x)dx;$$

$$b_2=\int_0^1 (L[u_0]-f(x))u_2(x)dx=\int_0^1 (12x^2-8x^3+x^7-x^2+2)\cdot(x^3-x^2)dx;$$

Barcha koeffisientlarni integrallarni hisoblash orqali aniqlab olingach, (6.30) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini c_1 va c_2 noma`lumlarga nisbatan yechishni Gauss usuli bilan tashkil qilamiz. Hosil qilingan natijalarni, ya`ni c_1 va c_2 larning qiymatlarini $y=u_0(x)+c_1\cdot u_1(x)+c_2\cdot u_2(x)$ formulaga qo'yib, berilgan chegaraviy masalaning taqribiy-analitik yechimini hosil qilamiz.

ms Galyorkin usulida yechim analitik ko'rinishda qidiriladi, u holda yechimning xatoligi qaerdan kelib chiqadi?

Galyorkin usulining ishchi algoritmi uchun blok-sxema



Algoritmning dastur matni

```
Program Galerkin;
Const q=2;
Type
 Mas=array[1..q,1..q] of real;
 Mas1=array[1..q] of real;
Var
 fx,lu0,lu1,lu2,a,b,z,x,h:Real; m:Mas; C,M1:Mas1; i:Integer;
 Function F(X:Real; K:Integer):Real;
 var
  u0,u1,u2,u3:real;
  begin
   lu0:=Sqr(x)-2;
   u1:=Sqr(x)-x;
   lu1:=sqr(x)*sqr(x)*x-x*x*x*x-4*x+4;
   lu2:=Sqr(x)*Sqr(x)*Sqr(x)-sqr(x)*sqr(x)*x-6*x*x+10*x-2;
   fx:=12*x*x-8*x*x*x+sqr(x)*sqr(x)*sqr(x)*x;
  case K of
   1:F:=lu1*u1;
   2:F:=lu2*u1;
   3:F:=lu1*u1*x;
   4:F:=lu2*u1*x;
   5:F:=(fx-lu0)*u1;
   6:F:=(fx-lu0)*u1*x;
  end;end;
function Integ(a,b:Real; k:Integer):Real;
var
 y,h1:Real; i:Integer;
 begin
  h1:=(b-a)/20;
  y:=(f(a,k)+f(b,k))/2;
  write(y:12:3);
  for i:=1 to 19 do    y:=y+f(a+i*h1,k);
  y:=y*h1;
  Integ:=y;
  writeln(y:12:3);end;
 Procedure Gauss(A:Mas; B:Mas1; Var x:Mas1; N:Integer);
var
```

```
k,m,l:Integer;  s:Real;
begin
for k:=1 to n-1 do
for m:=k+1 to n do
begin
for l:=k+1 to n do
A[m,l]:=A[m,l]-A[m,k]*A[k,l]/A[k,k];
B[m]:=B[m]-A[m,k]*B[k]/A[k,k];  end;
x[n]:=B[n]/A[n,n];
for k:=n-1 downto 1 do
begin
s:=0;
for i:=k+1 to n do s:=s+A[k,i]*X[i];
X[k]:=(B[k]-s)/A[k,k]; end;end;
begin
Write('a,b=');Readln(a,b);
M[1,1]:=Integ(a,b,1);
M[1,2]:=Integ(a,b,2);
M[2,1]:=Integ(a,b,3);
M[2,2]:=Integ(a,b,4);
M1[1]:=Integ(a,b,5);
M1[2]:=Integ(a,b,6);
Gauss(M,M1,C,q);
For i:=1 to q do   writeln(c[i]:12:4);
For I:=0 to 10 do  begin
h:=(b-a)/10;    x:=a+i*h;
z:=x+c[1]*(x*x-x)+c[2]*(x*x*x-x*x);
Writeln('x=',x:2:2,'  z=',z:2:8,'  a=',  sqr(x)*sqr(x):2:8,'  ', abs(z-
sqr(x)*sqr(x)):2:8);
end;end.
```

Yuqoridagi misol uchun dastur ta`minotini ishlatib, olingan natijalar quyidagi jadvalda keltirilgan:

c[1]= 0.7431   c[2]=1.9562

x	taqribiy	aniq	xatolik
xq0.0	0.00000000	0.00000000	0.00000000
xq0.1	0.01551908	0.00010000	0.01541908
xq0.2	0.01851317	0.00160000	0.01691317
xq0.3	0.02071920	0.00810000	0.01261920
xq0.4	0.03387413	0.02560000	0.00827413
xq0.5	0.06971492	0.06250000	0.00721492
xq0.6	0.13997851	0.12960000	0.01037851
xq0.7	0.25640186	0.24010000	0.01630186
xq0.8	0.43072193	0.40960000	0.02112193
xq0.9	0.67467566	0.65610000	0.01857566
xq1.0	1.00000000	1.00000000	0.00000000

Natijalardan va xatolik miqdorini kam ekanligidan ishlab chiqilgan algoritmlardan amaliy masalalar yechishda foydalanish mumkin degan xulosa kelib chiqadi.

Nazorat savollari

1. Galyorkin usuli qanday usullar guruhiga kiradi? Nima uchun?
2. Galyorkin usulida bazis funksiyalar qanday tanlanadi?
3. Galyorkin usulida hosil bo'lgan tenglamalar sistemasi qaysi usulda yechiladi?
4. Galyorkin usulida aniqlikni oshirish imkoni bormi?

XULOSA

- ✓ Ushbu bobda differensial tenglamaning asosiy sinflari, oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamaning umumiy ta`rifi keltirildi.
- ✓ Oddiy differensial tenglamaning umumiy va xususiy yechimi tushunchasi bayon qilindi va yechish usullari guruhlari tahlil etildi.
- ✓ Koshi masalasini yechishning Eyler va Runge-Kutta usullari uchun hisoblash algoritmlari v dastur ta`minotlaritavsiya qilindi.
- ✓ Chegaraviy masalani yechishda qo'llaniladigan turli hil chekli ayirmali formulalar hosil qilinib, ular yordamida ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama sonli taqribiy usulda yechildi.
- ✓ Chegaraviy masalani yechishda taqribiy-analitik usullar guruhiga kiruvchi Galyorkin usuli va unga mos ishchi algoritm-lar hamda dastur ta`minotlari keltirildi.
- ✓ Barcha ishlab chiqilgan dastur ta`minotlari aniq masalar uchun qo'llanilib, olingan natijalar tahlil etildi. Pirovardida tavsiya qilingan hisoblash algoritmlarining ishonchliligi tasdiqlandi.

?! **Bobga doir muammoli vaziyatlar!**

- ➢ Matematik modellari oddiy differensial tenglamalar orqali ifodalanuvchi jarayonlarga misollar keltira olasizmi? Hosila bilan ishtirok etuvchi parametrlar amalda qanday qonuniyatlar orasida o'zgarishi mumkin?
- ➢ Differensial tenglamaning umumiy yechimini ifodalovchi funksiya bir nechta o'zgarmaslarga bog'liq bo'lsa ham amaliy jarayonning u yoki bu xususiyatini tavsiflashi mumkinmi?
- ➢ Eyler usuli foydalanish va o'zgarish uchun juda qulay bo'lganidan amalda keng qo'llaniladi degan mulohazalarga qo'shilasizmi?
- ➢ Chegaraviy masalalarga qo'shimcha shartlarning yetarli emasligini qanday oqibatlarga olib kelishi mumkinligini tushintira olasizmi?
- ➢ Chegaraviy masalani yechish uchun qaysi usullar guruhini qo'llagan maqsadga muvofiq deb o'ylaysiz?
- ➢ Chekli ayirmali usullarda qo'llaniladigan o'ng va chap chekli ayirmali formulalarning qaysi birida xatolik miqdori kamroq bo'lishi mumkin? Markaziy chekli ayirmali formulada

xatolikning yanada kam bo'lishi ehtimoli mavjudmikin? Fikringizni tushuntiring.

- ➢ "Haydash usuli"ning nomlanishi usulning mohiyatiga ko'ra qandaydir ma`noni anglatmasmikin? Ya'ni bu usulda aynan nima "haydalishi" mumkin?
- ➢ Galyorkin usulida $n=3$ bo'lgan hol uchun tafovut funksiyasini va unga mos tenglamalar sistemasini hosil qila olasizmi? n ning katta bo'lgan qiymatlai orqali aniqlikni oshirish fikriga qo'shilasizmi?
- ➢ Galyorkin usulida izlanayotgan funksiya tarkibida ishtirok etuvchi koeffisient funksiyalarning nima uchun aynan chiziqli bog'liqmas bo'lishi talab etiladi?

7-BOB. XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI TAQRIBIY YECHISH

Oliy matematika kursidan ma`lumki, agar differensial tenglamadagi noma`lum funksiya ikki yoki undan ortiq argumentlarga bog`liq bo`lsa, bunday differensial tenglamalarni xususiy hosilali differensial tenglamalar deb ataladi. Demak, bunday tenglamalarda funksiyaning erkli argumenti bo'yicha xususiy hosilalari qatnashadi. Juda ko`p amaliy jarayonlar xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan iofdalangani bilan ularni umumiy holda yechish uchun aniq formula va qoidalar mavjud emas. Shu bois, bunday tenglamalarni yechish algoritmlarini bilish, ularni yechishni tashkil etuvchi amaliy dastur ta`minotlarini yaratish masalasi davrimizning g`oyat muhim masalalaridan biri hisoblanadi. Ushbu bobda xususiy hosilali differensial tenglamalarning muayyan tiplarini yechish usullari, ularga mos ishchi algoritmlar va dastur ta`minotlari tavsiya qilinadi.

1-§. Xususiy hosilali differensial tenglamalar, ularning tiplari va yechish usullari

Tayanch so'z va atamalar

Xususiy hosilali differensial tenglama, xususiy hosilali differensial tenglamaning tipi, xususiy hosilali differensial tenglamani yechish usuli, aniq usullar, taqribiy- analitik usullar, sonli- taqribiy usullar.

Amalda xususiy hosilali differensial tenglamalar juda ko'p fizik jarayonlarni tahlil qilishda ishlatiladi. Masalan, turar joy binolari va korxonalar qurishdagi hisob ishlari, ko'p qavatli binolarning issiqlik rejimini saqlash maqsadida yechiladigan g'ovak to'siqlarning issiqlik o'tkazuvchanlik masalasi (bunda jism sirtiga o'tkaziladigan issiqlik ta'siri vaqt bo'yicha juda tez o'zgarishi va jism har xil materiallar aralashmasidan iborat bo'lishi mumkin), ingichka torlar, har xil materiallardan ishlangan tayoqlar va boshqa xildagi konstruksiyalarning ko'ndalang va bo'ylama tebranishlari jarayonlari, neft va gaz konlaridagi ishlab chiqarishni tashkillashtirish va

boshqarishni avtomatlashtirish maqsadida qaralayotgan qatlam parametrlarini aniqlik ko'rsatkichini yanada yaxshilash, quvurlardagi qovushqoq suyuqliklarning nostasionar harakati jarayonlari. Bu jarayonlarning barchasi uchun yaratiladigan matematik modellar xususiy hosilali differensial tenglamalar orqali ifodalanadi.

Xususiy hosilali differensial tenglamalarni matematik-fizika tenglamalari deb ham ataladi. Oddiy differensial tenglamalar kabi xususiy hosilali differensial tenglamalar ham cheksiz ko'p yechimlarga ega. Ular umumiy yechimlar deyilib, xususiy yechimlar umumiy yechimlardan ma`lum shartlar asosida ajratiladi. Agar qo'shimcha shartlar soha chegarasida berilsa, bunday masalaga chegaraviy masala deyiladi. Agar chegaraviy shartlar berilmasdan faqat boshlang'ich shart berilsa, bunday masalaga xususiy hosilali differensial tenglama uchun Koshi masalasi deyiladi. Bunda masala cheksiz sohada qaraladi. Masalada ham boshlang'ich, ham chegaraviy shartlar qatnashsa, bunday masalaga aralash masala deyiladi.

Xususiy hosilali differensial tenglamalarni ikki o'lchovli hol uchun quyidagicha yozish mumkin(qulaylik uchun faqat xususiy holni, ya`ni ikkinchi tartibli hosilalarga nisbatan chiziqli tenglamalarnigina qaraymiz):

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g \quad (7.1)$$

bunda x, y-erkli o'zgaruvchilar, $u(x,y)$-qidirilayotgan noma`lum funksiya, indeksdagi $x, y$ lar noma`lum funksiyaning x va y bo'yicha xususiy hosilalarini anglatadi. a, b, c, d, e, f, g-koeffisientlar umuman x, y va u ga bog'liq funksiyalar bo'lishi mumkin. Agar ular o'zgarmas sonlardan iborat bo'lsa, (7.1) tenglamani o'zgarmas koeffisientli, x va $y$ga bog'liq funksiyalar bo'lsa o'zgaruvchi koeffisientli va nihoyat, x, y va u ga bog'liq funksiyalar bo'lsa, tenglama kvazichiziqli deyiladi. Bu funksiyalar berilgan ma`lum funksiyalar bo'lib, yopiq $\overline{G} = G + \Gamma$ sohada aniqlangandir. G soha x va y o'zgaruvchilarning o'zgarish sohasi bo'lib Γ kontur bilan chegaralangandir.

(7.1) ko'rinishdagi matematik-fizika tenglamalarning tipi $D = b^2 - ac$ diskriminantning ishorasi bilan aniqlanadi. Agar $D > 0$ bo'lsa, tenglama giperbolik tipga, $D = 0$ bo'lsa, tenglama parabolik tipga, $D < 0$ bo'lsa, tenglama elliptik tipga tegishli bo'ladi. Tenglamaning tipini aniqlash juda muhim ahamiyatga ega, chunki bir xil tipdagi har xil tenglamalar juda ko'p umumiy xususiyatlarga ega bo'ladi.

Xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechish usullari xuddi oddiy differensial tenglamalardagi kabi, bir necha guruhga bo'linadi:

1. Aniq usullar;
2. Taqribiy-analitik usullar;
3. Sonli-taqribiy usullar;

Aniq usullar bilan asosan chiziqli xususiy hosilali tenglamalar sodda ko'rinishdagi chegaraviy va boshlang'ich shartlar bilan berilganda yaxshi natijalar olish mumkin. Bu guruhga o'zgaruvchilarni ajratish, Laplas almashtirishlari va boshqa usullar kiradi. Taqribiy-analitik usullar bilan umumiy ko'rinishdagi tenglamalarni yechish imkoniyati deyarli yo'q, faqat ayrim xususiy hollardagina biror-bir natija chiqishi mumkin. Amalda esa foydalanishga qulayligi va dasturlashga osonligi uchun asosan sonli-taqribiy usullarni qo'llaniladi.

Nazorat savollari

1. Qanday tenglamalar matematik-fizika tenglamalari deb ataladi?
2. Matematik-fizika tenglamalarini taqribiy hisoblash zaruriyati qaerdan kelib chiqadi?
3. Xususiy hosilali differensial tenglamani yechishning qanday usullarini bilasiz?
4. Xususiy hosilali differensial tenglamani yechishda ko'proq qaysi usuldan foydalaniladi?

2-§. Giperbolik tipdagi tenglamalarni yechish uchun to'r usuli

Tayanch so'z va atamalar

Tebranuvchi jarayonlar, giperbolik tipdagi tenglamalar, boshlang'ich shart, Dirixle masalasi, Neyman masalasi, aralash masala, oshkor sxema, oshkormas sxema, algoritm blok-sxemasi, dastur ta'minoti.

Yuqorida ta'kidlab o'tganimizdek, amalda uchraydigan barcha jarayonlar o'zlarining asosiy xususiyatlarini ifodalovchi matematik modellarga egadirlar. Masalaning mohiyatiga qarab, bu modellarni ifodalovchi matematik tenglamalar turli ko'rinishda, jumladan, murakkab jarayonlarning matematik modellari matematik-fizika tenglamalari orqali ifodalanadi.

Agar tebranuvchan xarakterdagi jarayonlar, aniqroq qilib aytadigan bo'lsak, turli xil ingichka torlar, har xil materiallardan ishlangan tayoqlar va boshqa xildagi konstruksiyalarning ko'ndalang va bo'ylama tebranishlari jarayonlari o'rganilayotgan bo'lsa, bunday masalalarning matematik modellari giperbolik tipdagi tenglamalarga keltiriladi. Tebranishlar esa so'nib boruvchi yoki aksincha bo'lishi mumkin. Xususiy holda giperbolik tipdagi tenglamalarni quyidagicha yozish mumkin (fazoviy koordinata bo'yicha bir o'lchov bilan chegaralanib):

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (7.2)$$

Bunda $u(x,t)$-izlanuvchi funksiya, t-vaqt, x-chiziqli koordinata, c^2-o'zgarmas koeffisient. (7.2)-ko'rinishdagi giperbolik tipdagi tenglamalar uchun odatda ikkita boshlang'ich va ikkita chegaraviy shart beriladi. Qaralayotgan soha $x^{\circ}[a,b]$ va $t^{\circ}[0,T]$ lardan iborat bo'lsa, qidirilayotgan noma'lum $u(x,t)$ funksiya quyidagi boshlang'ich shartlarni:

$$u(x,0) = f_1(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f_2(x) \qquad (7.3)$$

va quyidagicha chegaraviy shartlarni (soddalik uchun eng sodda chegaraviy shart, Dirixle masalasi qabul qilindi):

$$u(a,t) = \varphi_1(t), \quad u(b,t) = \varphi_2(t) \qquad (7.4)$$

qanoatlantirishi kerak.

Umuman barcha tipdagi matematik-fizika tenglamalari uchun chegaraviy shartlar quyidagi ko‘rinishlarda qo‘yilishi mumkin:

1) Dirixle masalasi: $u(x,y)|_\Gamma = \gamma^{(0)}$

2) Neyman masalasi: $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial \vec{n}}\Big|_\Gamma = \gamma^{(1)}$

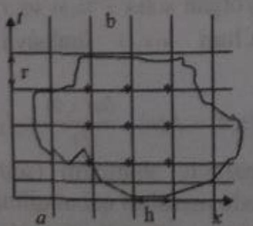
3) Aralash masala: $\alpha u(x,y) + \beta \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial \vec{n}}\Big|_\Gamma = \gamma^{(2)}$

Bu yerda $u(x,y)$-izlanayotgan funksiya; $\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}$-qiymatlari ma`lum funksiyalar yoki o‘zgarmaslar; Γ-yechim qidirilayotgan soha chegarasi; $\vec{n}$-soha chegarasiga o‘tkazilgan normal birlik vektor; α, β-chegaraviy shart belgilari.

(7.2) ko‘rinishdagi xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechish uchun sonli usullar ichida eng keng tarqalgan usul-chekli ayirmalar usulidan foydalanamiz. Tenglamada qatnashuvchi funksiya ikkita argumentga bog’liq bo‘lgani uchun, uning aniqlanish sohasi tekislikda bo‘ladi. Bu sohani G-deb, uning chegarasini esa Γ-deb belgilaylik. Chekli ayirmalar usulida dastlab G-soha chiziqlar yordamida bo‘laklarga bo‘linadi. Bo‘linish nuqtalari *tugun*, ulardan tashkil topgan to‘plamga esa *to‘r* deb ataladi.

G-sohaning ichida yotgan nuqtalar ichki tugun nuqtalar, Γ-chegarada yotgan nuqtalarga chegaraviy nuqtalar deymiz (19-rasm).

To‘r sohani quyidagicha tashkil etamiz: $[a,b]$ kesmani $x_i = a + ih\,(i = 0,1,2,...,n)$ tugun nuqtalar yordamida, t-bo‘yicha esa $[0,T]$ oraliqni $t_j = j \cdot \tau$ bo‘laklarga bo‘lamiz va tekis to‘r hosil qilamiz. Bu yerda $h = \dfrac{b-a}{n}$, $\tau = \dfrac{T}{m}$ ga teng. Bunda vaqt bo‘yicha tanlangan qadam fazoviy koordinata x bo‘yicha tanlangan qadamdan kichik bo‘lishi shart. Aks holda, hosil qilingan sxemalar turg’un bo‘lmaydi.



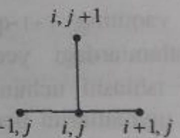
19-rasm

G sohada yotgan (x_i, t_j) tugun nuqtalar uchun (7.2) tenglamani quyidagi ko‘rinishda qayta yozamiz:

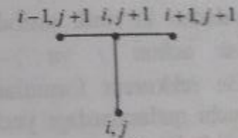
$$\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x^2} + f(x_i,t_j) \qquad (7.5)$$

To‘r sohada to‘r funksiyasi deb ataluvchi funksiyalarni qaraymiz. Ular G sohada aniqlangan funksiyalar o‘mida qaraluvchi diskret funksiyalardan iborat bo‘ladi, ya`ni oddiy differensial tenglamalardagi kabi xususiy hosilalar ham chekli ayirmalar bilan almashtiriladi. Hosilalarni almashtirishdagi chekli ayirmalarda ishlatiluvchi tugun nuqtalar majmuasiga shablon deyiladi. Bir xil hosilalar uchun bir necha xil shablon asosida chekli ayirmalar tuzish mumkin. Shunday qilib, differensial tenglama berilgan boshlang’ich va chegaraviy shartlarda chekli ayirmali masalaga keltiriladi.

Biz hosil qilgan to‘r sohadagi har bir tugun (x_i,t_j) nuqtalarda $u(x,t)$ yechimning qiymatlari $u(x_i,t_j)$dan iborat bo‘ladi. (7.5) tenglamani chekli ayirmalarga o‘tkazish uchun (x_{i-1},t_j), (x_i,t_j), (x_{i+1},t_j), (x_i,t_{j+1}), (x_{i-1},t_{j+1}), (x_{i+1},t_{j+1}) nuqtalardan tashkil topgan shablonlarni ishlatamiz. Bu shablonda (7.5) tenglamadagi xususiy hosilalarni quyidagi sxemalar yordamida chekli ayirmalar bilan almashtirish mumkin:



1-sxema



2-sxema

1-cxemada vaqt bo‘yicha $j+1$- qatlamning bitta nuqtadagi noma`lum yechimini $j$-qatlamdagi uchta tugun nuqtadagi ma`lum yechimlar orqali aniq, oshkor shaklda ifodalanadi. Shuning uchun, bunday sxemalarga oshkor sxemalar deyiladi. Oshkor sxemalarda oldingi qatlamda yo‘l qo‘yilgan xatoliklar yig’indisi keyingi qatlamga ham o‘tganligi uchun, bir necha qatlamdan so‘ng xatoliklar to‘planmasi hosil bo‘ladi va ular olingan natijalarni butunlay yaroqsiz qilib qo‘yishi mumkin. Shuning uchun, amalda oshkor sxemalardan faqat qisqa vaqt oralig’ida yechiladigan masalalarni xal qilishdagina foydalangan ma`qul.

2-sxemada vaqt bo'yicha har bir yangi qatlamning uchta tugun nuqtadagi noma'lum yechimlari, o'zidan oldingi qatlamdagi bitta ma'lum yechim orqali ifodalanadi. Bu holda, har bir keyingi qatlamdagi yechimlarni odingi qatlamdagi yechimlar orqali bevosita, oshkor holda ifodalab bo'lmaydi. Bunday sxemalarga oshkormas sxemalar deyiladi. Oshkormas sxemada biror qatlamda yo'l qo'yilgan hisoblash xatoliklari boshqa qatlamga deyarli uzatilmaydi. Shuning uchun, bunday sxemalar orqali hosil qilingan hisoblash formulalari birmuncha murakkab bo'lsa ham, lekin ulardagi xatolik miqdori kam bo'ladi. Demak, amalda oshkormas sxemalardan foydalangan ma'qulroq. (7.5) tenglamadagi $\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial t^2}$; $\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x^2}$ ifodalar o'rniga

$$\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial t^2} \approx \frac{u_i^{j+1}-2u_i^j+u_i^{j-1}}{\tau^2} \text{ va } \frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^j-2u_i^j+2u_{i-1}^j}{h^2}$$

chekli ayirmali formulalarni qo'yib, (7.5) tenglamalarga mos quyidagi chekli-ayirmali tenglamalarni hosil qilamiz:

$$\frac{u_i^{j+1}-2u_i^j+u_i^{j-1}}{\tau^2} = c^2\frac{u_{i+1}^j-2u_i^j+2u_{i-1}^j}{h^2}+f(x_i,t_j) \qquad (7.6)$$

(7.6) tenglamani u_i^{j+1} ga nisbatan yechib,

$$u_i^{j+1} = 2u_i^j-u_i^{j-1}+\frac{\tau^2c^2}{h^2}(u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j)+\tau^2 f_i^j \qquad (7.7)$$

ishchi formulani hosil qilamiz. Bu yerda $j=\overline{1,m-1}$, $i=\overline{1,n-1}$.

(7.7) formuladan ko'rinib turibdiki, vaqtning $j+1$-qatlamidagi yechimini topish uchun j va $j-1$-qatlamlardagi yechimlardan foydalaniladi. Bu rekkurent formulaning ishlashi uchun dastlabki nolinchi va birinchi qatlamlardagi yechim qiymatlarini berish kerak. Bu yechimlarni (7.3) boshlang'ich shart orqali hosil qilinadi. Nolinchi qatlamda:

$$u_i^0 = f_1(x_i)\ , \quad i=\overline{0,n} \qquad (7.8)$$

Birinchi qatlamdagi yechim (7.3) dagi $f_1(x)$ va $f_2(x)$ lar orqali ifodalanadi:

$$\frac{\partial u(x_i,0)}{\partial t} \approx \frac{u_i^1-u_i^0}{\tau} \approx f_2(x_i)$$

va bulardan

$$u_i^1 \approx u_i^0+\tau f_2(x_i) = f_1(x_i)+\tau f_2(x_i)\ , \quad i=\overline{0,n} \qquad (7.9)$$

ni hosil qilamiz.

Integrallash sohasining chegaralari $x=a$ va $x=b$ dagi yechimlar esa (7.4) chegaraviy sharti orqali aniqlanadi:

$$u_0^j = \varphi_1^j \text{ va } u_n^j = \varphi_2^j, \quad j=\overline{0,m} \qquad (7.10)$$

Shunday qilib, (7.7), (7.8), (7.9), (7.10) formulalarni birgalikda ishlatish orqali giperbolik tipli tenglamani yechim qidirilayotgan sohaning (x_i,t_j) tugun nuqtalaridagi sonli-taqribiy yechimlarini hosil qilinadi.

Hosil bo'lgan (7.7) formula oshkor sxema asosida olingan bo'lib, berilgan xususiy hosilali differensial tenglamaning taqribiy yechimini hisoblaydi. Yuqorida ta'kidlanganidek, oshkor sxemalarda hosil qilingan taqribiy yechim muayyan xatoliklar jamlanmasini o'zida saqlaydi. Yo'l qo'yilishi mumkin bo'lgan xatolikni birmuncha kamaytirish maqsadida oshkormas sxemali chekli-ayirmali almashtirishlardan foydalanamiz. Buning uchun (x_i,t_j) tugun nuqtalarda olingan fazoviy koordinatalar bo'yicha xususiy hosilalarni $\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}}{h^2}$ chekli-ayirmali formula orqali almashtirib, uni (7.5) tenglamaga qo'ysak, quyidagi ishchi tenglama hosil bo'ladi:

$$\frac{u_i^{j+1}-2u_i^j+u_i^{j-1}}{\tau^2} = c^2\frac{u_{i+1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}}{h^2}+f(x_i,t_j) \qquad (7.11)$$

(7.11) tenglamada o'xshash hadlarni ixchamlab,

$$\frac{\tau^2}{h^2}c^2u_{i+1}^{j+1}-(2\frac{c^2\tau^2}{h^2}-1)u_i^{j+1}+\frac{c^2\tau^2}{h^2}u_{i-1}^{j+1} = -f_{ij}\tau^2-2u_i^j+u_i^{j-1} \qquad (7.12)$$

va quyidagi belgilashlarni kiritib,

$$A_i = \frac{\tau^2}{h^2}c^2, B_i = \frac{2\tau^2c^2}{h^2}-1, C_i = \frac{c^2\tau^2}{h^2} \text{ va } F_i = -f_{ij}\tau^2-2u_i^j+u_i^{j-1};$$

vaqt faktorining har bir j-qiymati uchun $(j=1,2,3,\ldots,m-1)$ quyidagi uch diagonalli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$A_i\cdot u_{i+1}^{j+1}-B_i\cdot u_i^{j+1}+C_i\cdot u_{i-1}^{j+1} = F_i (7.13) \quad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

Hosil bo'lgan (7.13) uch diagonalli tenglamalar sistemasi j ning har bir qiymatida $n-1$ ta tenglama va $n+1$ ta noma'lumlardan iborat. Yetishmayotgan ikkita tenglamani (7.4) chegaraviy shartlardan olamiz. Natijada $n+1$ ta noma'lumli $n+1$ ta tenglamadan iborat bo'lgan uch diagonalli tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi. Oldingi bobdagi chegaraviy masalalarni chekli-ayirmalar orqali yechishda ta'kidlab o‘tilganidek, bunday ko‘rinishdagi tenglamalar sistemasini haydash usuli bilan yechish uchun noma`lum yechimni

$$u_i^{j+1} = \alpha_{i+1} u_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1} \qquad (7.14)$$

ko‘rinishda qidiramiz. Bu yerdagi α_{i+1} va β_{i+1} noma`lum koeffisientlar

$$\alpha_{i+1} = \frac{A_i}{B_i} - C_i \cdot \alpha_i; \; \beta_{i+1} = \frac{C_i - \beta_i - F_i}{B_i - C_i \cdot \alpha_i} \qquad (7.15)$$

formulalar yordamida topiladi $(i = 1,2,...,n-1)$.

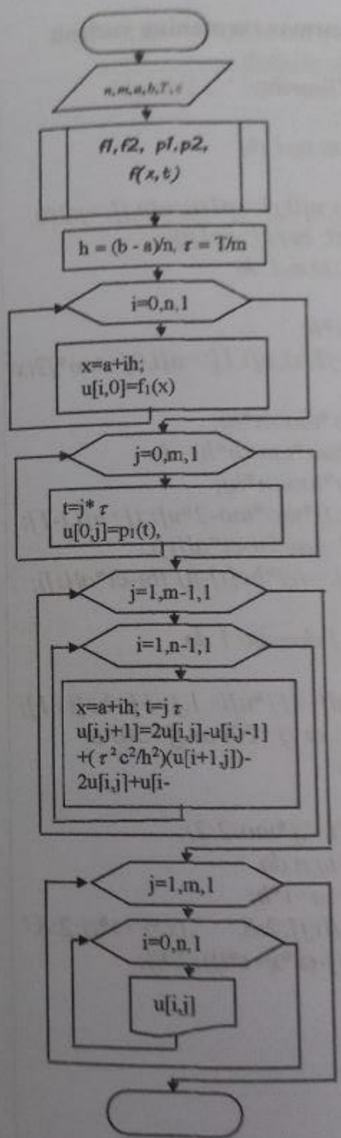
Berilgan chegaraviy shartlardan birinchisini, ya`ni $x = a$ nuqtadagi $u(a,t) = \varphi_1(t)$ shartni va (7.14) formulani $i = 0$ nuqtada taqqoslab, $\alpha_1 = 0, \beta_1 = \varphi_1(t)$ noma`lum koeffisientlarning boshlang’ich qiymatlari hosil qilinadi. So‘ngra, α_{i+1}, β_{i+1} koeffisientlarning barchasi (7.15) formula bilan ketma-ket hisoblanadi.

Ikkinchi chegaraviy shartdan, ya`ni $u(b,t) = \varphi_2(t)$ dan $u_n^j = \varphi_2(t_j)$ tenglikni hosil qilamiz. So‘ngra,

$$u_i^{j+1} = \alpha_{i+1} \cdot u_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1} \; (i = n-1,...,0) \qquad (7.16)$$

formula yordamida tenglamaning qolgan barcha qidirilayotgan yechimlari, ya`ni noma`lum u_i^j lar hisoblanadi. Yana shuni qayta eslatib o‘tish lozimki, (7.13) ko‘rinishdagi uch diagonalli tenglamalar sistemasi vaqt t ning har bir qiymati t_j uchun hosil qilinadi. (7.12) formulaning o‘ng tomonidagi u_i^j va u_i^{j-1} larning boshlang’ich qiymatlari oshkor sxemali almashtirishlarda ishlatilgan (7.8) va (7.9) formulalar orqali hisoblanadi. Ishchi formulalarni hosil qilishda foydalanilgan chekli-ayirmalar-ning xatolik darajalari haqida oddiy differensial tenglamalarni yechishda to‘liq ma`lumotlar keltirilgan.

Giperbolik tenglamani yechish oshkor sxema uchun algoritmning blok-sxemasi va dasturi:




```
Program Giper_osh;
uses crt;
const n=6;m=10;
var a,b,h,ta,t,x:real;
  i,j:integer;
  u:array[0..n,0..m] of real;
  function f1(x:real):real;
  begin f1:=3*sin(x); end;
  function f2(x:real):real;
  begin f2:=x; end;
  function p1(x:real):real;
  begin p1:=1-cos(x) ;end;
  function p2(x:real):real;
  begin p2:=exp(x)+3*sin(1)-cos(x);  end;
  function f(x,t:real):real;
  begin f:=exp(x*t)*(x*x-
t*t)+cos(t)+3*sin(x); end;
  begin   clrscr;
   a:=0;b:=1;t:=0.1;
   h:=(b-a)/n; ta:=t/m;
   for i:=0 to n do
  begin   x:=a+i*h;
   u[i,0]:=f1(x);
   u[i,1]:=u[i,0]+ta*f2(x);
  end;
   for j:=2 to m do
   begin
    t:=j*ta; u[0,j]:=p1(t); u[n,j]:=p2(t);
  end;
   for j:=1 to m-1 do
   for i:=1 to n-1 do
   begin
     x:=a+i*h; t:=j*ta;
      u[i,j+1]:=2*u[i,j]-u[i,j-
   1]+(ta*ta/(h*h))*(u[i+1,j]-2*u[i,j]+u[i-
   1,j])+ta*ta*f(x,t);
   end;
   for j:=0 to m do
   begin
    t:=j*ta;
    writeln(' t=',t:5:2);
    for i:=0 to n do
     begin
      x:=a+i*h;
      writeln(u[i,j]:2:8,'     ',exp(x*t)+3*sin(x)-
       cos(t):2:8,'', abs(u[i,j]-
       (exp(x*t)+3*sin(x)-cos(t))):2:8);
    end;
    end;
   end.
```

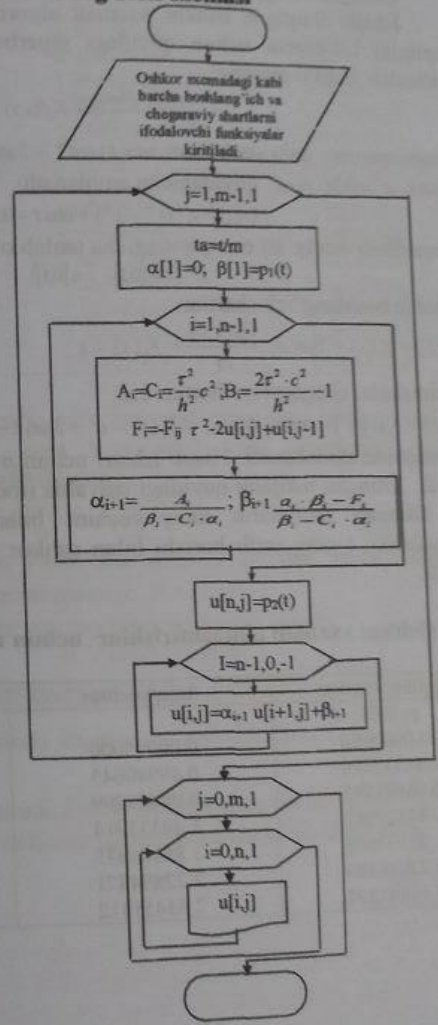
Giperbolik tenglama uchun oshkormas sxemaning yechish dasturi

```
Program OshkmasGip;
uses crt;
const n=10;m=100;
var a,b,h,tao,t,x:real;
  i,j:integer;
  ai,bi,ci,fi:real;
  u:array[0..n,0..m] of real;
  al,be:array[1..n] of real;
function f1(x:real):real;
begin f1:=x*x; end;
function f2(x:real):real;
begin f2:=0; end;
function p1(x:real):real;
begin p1:=x*x ;end;
function p2(x:real):real;
begin p2:=1+x*x; end;
function f(x,t:real):real;
begin f:=0; end;
begin
 clrscr;
 readln(a,b,T);
 h:=(b-a)/n;
 tao:=T/m;
 for i:=0 to n do
 begin
  x:=a+i*h;
  u[i,0]:=f1(x);

u[i,1]:=u[i,0]-tao*f2(x);
 end;
 for j:=2 to m do
 begin
  t:=j*tao; u[0,j]:=p1(t);
  u[n,j]:=p2(t);
 end;
writeln('Taqribiy','     ','aniq','
','xatolik');
 for j:=1 to m-1 do
 begin
  t:=j*tao;u[0,j]:=p1(t);u[n,j]:=p2(t);
  al[1]:=0; be[1]:=p1(t);
  for i:=1 to n-1 do
  begin
   x:=a+i*h;
  u[i,0]:=f1(x);u[i,1]:=u[i,0]+tao*f2(x
  );
   ai:=tao*tao/(h*h);
   bi:=2*tao*tao/(h*h)+1;
   ci:=tao*tao/(h*h);
   fi:=-f(x,t)*tao*tao-2*u[i,j]+u[i,j-1];
   al[i+1]:=ai/(bi-ci*al[i]);
   be[i+1]:=(ci*be[i]-fi)/(bi-ci*al[i]);
  end;
  for i:=n-1 downto 1 do

u[i,j+1]:=al[i+1]*u[i+1,j+1]+be[i+1];
    if (j=10) or (j=20) or (j=50) or
(j=99)  then
   begin
    writeln('t=',j*tao:2:2);
    for i:=0 to n do
    begin x:=a+i*h;
    writeln(u[i,j]:2:8,'     ',(x*x+t*t):2:8,'
    ',abs(u[i,j]-(x*x+t*t)):2:8);
    end;
   end;
  end;
end.
```


Giperbolik tenglamani yechishda oshkormas sxema uchun algoritmning blok-sxemasi



Olingan natijalar tahlili.

Ishlab chiqilgan oshkor sxemali algoritm va dasturlarni ishga sozligini tekshirish uchun quyidagi giperbolik tipdagi tenglamani yechishni tashkil qilamiz:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t)$$

Tenglamaning aniq yechimini $u(x,t) = e^{xt} + 3\sin x - \cos t$ deb qabul qilsak, u holda $f(x,t)$ quyidagicha aniqlanadi:

$$f(x,t) = e^{xt}(t^2 - x^2) + \cos t - 3\sin x$$

integrallash oralig'ini esa quyidagicha tanlab olamiz:

$$D: \{x \in [0,1]; \ t \in [0,1]\}$$

U holda boshlang'ich shartlar:

$u(x,0) = f_1(x) = 3\sin x$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f_2(x) = x$

ko'rinishida, chegaraviy shartlar esa:

$u(0,t) = P_1(t) = 1 - \cos t$, $u(1,t) = P_2(t) = e^t + 3\sin 1 - \cos t$

ko'rinishida ifodalanadi. Hisob ishlari uchun n=6 va m=10 deb qabul qilindi. Olingan natijalar quyidagi jadvalda ifoda qilingan.

Olingan natijalarni aniq yechim bilan taqqoslash shuni ko'rsatadiki, t ning ortib borishi bilan oshkor sxemani xatoligi ortib boradi.

Oshkor sxemali almashtirishlar uchun natijalar

Taqribiy yechim	Aniq yechim	Xatolik
t= 0.01		
0.00000000	0.00005000	0.00005000
0.49935506	0.49940645	0.00005139
0.98491742	0.98497299	0.00005556
1.44327662	1.44333914	0.00006252
1.86177608	1.86184835	0.00007227
2.22886389	2.22894871	0.00008482
2.53441295	2.53451312	0.00010017

Taqribiy yechim	Aniq yechim	Xatolik
t= 0.05		
0.00124974	0.00124974	0.00000000
0.50705317	0.50730629	0.00025312
0.99936444	0.99964016	0.00027572
1.46453201	1.46484148	0.00030947
1.88989702	1.89025426	0.00035725
2.26391376	2.26432720	0.00041344
2.57693379	2.57693379	0.00000000
t= 0.10		
0.00499583	0.00499583	0.00000000
0.51900748	0.51949056	0.00048308
1.01992844	1.02047504	0.00054660
1.49393169	1.49454355	0.00061186
1.92834014	1.92904435	0.00070421
2.31165759	2.31243044	0.00077285
2.63457971	2.63457971	0.00000000

Oshkormas sxemali algoritm va dasturni ishga sozligini tekshirish uchun esa yana yuqoridagi kabi giperbolik tipdagi tenglamani yechishni tashkil qilamiz:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t)$$

Tenglamaning aniq yechimini $u(x,t) = x^2 + t^2$ deb qabul qilsak, u holda *f(x,t)* quyidagicha aniqlanadi: $f(x,t) = 0$

integrallash oralig'ini esa quyidagicha tanlab olamiz:

$$D: \{x \in [0,1]; \ t \in [0,1]\}$$

U holda boshlang'ich shartlar: $u(x,0) = f_1(x) = x^2$, $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f_2(x) = 0$

ko'rinishida, chegaraviy shartlar esa: $u(0,t) = P_1(t) = t^2$, $u(1,t) = P_2(t) = 1 + t^2$

ko'rinishida ifodalanadi. Hisob ishlari uchun n=10 va m=100 deb qabul qilindi. Olingan natijalar quyidagi jadvalda ifoda qilingan.

Taqribiy yechim	Aniq yechim	Xatolik
t=0.1		
0.00499583	0.00499583	0.00000000
0.31128044	0.31454625	0.00326581
0.61532565	0.62120517	0.00587952
0.91350050	0.92201099	0.00851049
1.20298495	1.21406164	0.01107668
1.48099529	1.49454355	0.01354826
1.74485925	1.76075980	0.01590055
1.99205193	2.01015708	0.01810515
2.22033581	2.24035118	0.02001537
2.42953079	2.44915085	0.01962006
2.63457971	2.63457971	0.00000000
t=0.5		
0.12241744	0.12241744	0.00000000
0.39720200	0.47318878	0.07598679
0.67706367	0.82359635	0.04653268
0.95544677	1.17081230	0.01536554
1.23140496	1.51207522	0.08067027
1.50750087	1.84471947	0.03721860
1.79466067	2.16620367	0.07154300
2.11217486	2.47413805	0.06196319
2.47208355	2.76631041	0.09422686
2.86794513	3.04071035	0.07276522
3.29555166	3.29555166	0.00000000
t=0.9		
0.45131014	0.45131014	0.00000000
0.62164789	0.85487669	0.03322880
0.83678892	1.26628053	0.02949160
1.10873329	1.68368606	0.07495277
1.44435035	2.10543448	0.06108413
1.83966320	2.53008499	0.09042179
2.29244547	2.95645638	0.06401091
2.80364532	3.38366886	0.0102355
3.37091108	3.81118604	0.04027496
3.99257441	4.23885687	0.04628245
4.66695757	4.66695757	0.00000000

Vaqtning o'zgarish qadamini kichikroq tanlash hisobiga taqribiy yechimning aniqligini yanada orttirish mumkin. Bundan tashqari, sinov sifatida tanlab olingan funksiyalar ham xatolik miqdoriga sezilarli ta'sir qilishi mumkin. Xatolik miqdorini unchalik katta

emasligi ishlab chiqilgan algoritmlardan amaliy masalalarni yechishda foydalanish mumkinligini ko'rsatadi.

Nazorat savollari

1. Oshkor va oshkormas sxemalarning asosiy mohiyati nimadan iborat?
2. Giperbolik tipdagi tenglamalarni to'r usulida yechish algoritmini ayting?

3-§.Parabolik tipdagi tenglamalarni yechish uchun to'r usuli

Tayanch so'z va atamalar

Issiqlik o'tkazuvchanlik masalasi, parabolik tipdagi tenglamalar, boshlang'ich shart, chegaraviy shart, oshkor sxema, oshkormas sxema, algoritm blok-sxemasi, dasturi

Agar o'rganilayotgan jarayonda vaqt bo'yicha jarayonning kechish tezligi o'zgarmas bo'lsa, bu jarayonlarning matematik modeli parabolik tipdagi tenglamalar orqali ifodalanadi. Bunday jarayonlarga quvurlardagi qovushqoq suyuqliklarning nostasionar harakati jarayonlari, g'ovak to'siqlarning issiqlik o'tkazuvchanlik masalalari, diffuziya jarayonlari va boshqalar kiradi.

Parabolik tipdagi tenglamalarni xususiy holda (fazoviy koordinata bo'yicha bir o'lchov bilan chegaralanib) quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t), \qquad x\in[a,b]\ t\in[0,T] \qquad (7.17)$$

bu yerda $u(x,t)$ – izlanayotgan noma'lum funksiya, $f(x,t)$ – masalaning fizik mohiyatidan kelib chiqib beriluvchi manbaa funksiya, c^2 – o'zgarmas koeffisient. Bizga (7.17) tenglamani

$$u(x,0)=\varphi(x) \qquad (7.18)$$

boshlang'ich shartni va $[a,b]$ oraliqning chetlarida

$$u(a,t)=\varphi_1(t) \text{ va } u(b,t)=\varphi_2(t) \qquad (7.19)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi qo'yilgan bo'lsin. Berilgan chegaraviy shartlar, biz yuqorida keltirgan chegaraviy shart turlariga ko'ra, Dirixle masalasiga mos keladi. Xuddi giperbolik tipdagi kabi, parabolik tipdagi tenglamalarni ham to'r usulida yechish mumkin. Buning uchun, dastlab, x va t o'qlar bo'yicha to'r kiritamiz.

$$x_i=a+i\cdot h;\ h=\frac{b-a}{n};\ t_j=j\cdot\tau;\ \tau=\frac{T}{m};$$

bu yerda n-OX o'qi bo'yicha olingan tugun nuqtalar soni ;

$h-x$ o'zgaruvchi bo'yicha kiritilgan to'r qadami ;

T -qaralayotgan vaqt oralig'i;

m – vaqt bo'laklari soni;

τ – vaqt bo'yicha kiritilgan to'r qadami.

To'r sohasidagi $\{x_i=a+i\cdot h,\ h=\frac{b-a}{n},\ t_j=j\cdot\tau,\ \tau=T/m\}$har bir (x_i,t_j) nuqta (7.17) tenglamani qanoatlantirgani uchun uni shu nuqtalarga nisbatan yozib olamiz.

$$\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x^2}+f(x_i,t_j) \qquad (7.20)$$

(7.20) tenglamadagi $\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial t}$ va $\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x^2}$ xususiy hosilalar o'rniga (qulaylik uchun $u(x_i,t_j)=u_i^j$, $f(x_i,t_j)=f_{ij}$ deb belgilab olamiz) $\frac{\partial u_i^j}{\partial t}\approx\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}$, $\frac{\partial^2 u_i^j}{\partial x^2}\approx\frac{u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j}{h^2}$ oshkor sxemali almashtirishlarga asoslangan chekli ayirmali formulalarni qo'yib, integrallash sohasining tugun nuqtalarida yozilgan quyidagi

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=c^2\frac{u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j}{h^2}+f_{ij}$$

tenglamani hosil qilamiz. Uni u_i^{j+1}ga nisbatan yechib,

$$u_i^{j+1}=u_i^j+\frac{\tau\cdot c^2}{h^2}[u_{i+1}^j-u_i^j+u_{i-1}^j]+\tau\cdot f_{ij} \qquad (7.21)$$

ko'rinishidagi ishchi formulani hosil qilamiz.

Hosil qilingan (7.21) rekkurent formula bilan parabolik tipdagi tenglamaning (x_i,t_j) nuqtalardagi yechimlarini topish uchun unga chegaraviy va boshlang'ich shartlarni ham qo'shamiz:

$$u_i^0=\varphi_i,\ i=\overline{0,n}\ (7.22),$$

$$u_0^j=\varphi_1^j\ u_n^j=\varphi_2^j,\ j=\overline{0,m}\ (7.23)$$

(7.21) formuladan ko'rinib turibdiki, vaqtning har bir $j+1$-qatlamidagi noma`lum yechimlar j-qatlam orqali topiladi va demak, u oshkor sxemali almashtirish hisoblanadi. Oldingi paragrafda eslatib o'tganimizdek, bunday sxemali almashtirishlar natijasida barcha oldingi qatlamlarda yo'l qo'yilgan xatoliklar yig'ilib boradi. Buning natijasida, vaqt faktorini oshib borishi bilan olinayotgan taqribiy yechimlarning ishonchlilik darajasi keskin kamayib boradi. Shuning uchun, topiladigan yechimning aniqliligini oshirish maqsadida oshkormas chekli ayirmali sxemalarni ishlatish maqsadga muvofiqdir. Buning uchun (7.20) formuladagi $\frac{\partial^2 u_i^j}{\partial x_i^2}$ xususiy hosila o‘rniga $\frac{\partial^2 u_i^j}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2}$ chekli ayirmali formulani qo‘yib, $\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = c^2 \cdot \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2} + f_{ij}$ tenglamani hosil qilamiz.

O‘xshash hadlarini ixchamlab, uni quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$\frac{c^2 \cdot \tau}{h^2} \cdot u_{i-1}^{j+1} - (2\frac{c^2 \cdot \tau}{h^2} + 1) \cdot u_i^{j+1} + \frac{c^2 \cdot \tau}{h^2} \cdot u_{i+1}^{j+1} = -\tau \cdot f_{ij} - u_i^j \qquad (7.24)$$

So‘ngra (7.24) tenglamada

$$A_i = \frac{c^2 \cdot \tau}{h^2}; \quad B_i = \frac{2 \cdot c^2 \cdot \tau}{h^2} - 1; \quad C_i = \frac{c^2 \cdot \tau}{h^2}; \quad F_i = -\tau \cdot f_{ij} - u_i^j;$$

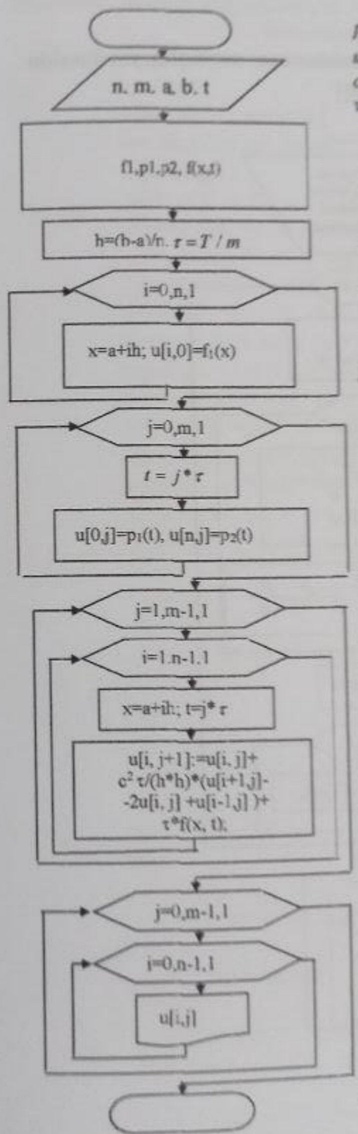
kabi belgilashlar kiritib, quyidagi

$$A_i \cdot u_{i-1}^{j+1} - B_i \cdot u_i^{j+1} + C_i \cdot u_{i+1}^{j+1} = F_i \qquad (7.25)$$

uch diagonalli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

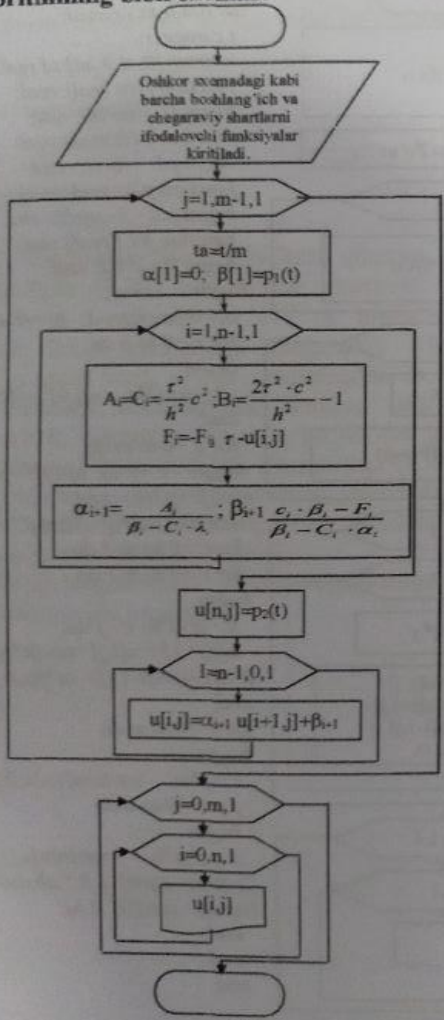
Hosil bo‘lgan (7.25) tenglamalar sistemasi j ning har bir qiymatida $n-1$ ta tenglama va $n+1$ ta noma`lumlardan iborat. Yetishmayotgan ikkita tenglamani chegaraviy shartlardan olamiz. Natijada $n+1$ ta noma`lumli $n+1$ ta tenglamadan iborat uch diagonalli tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi. Bunday sistemani “haydash” usuli bilan yechish maqsadga muvofiq bo‘lib, bu jarayon giperbolik tenglamalar uchun to‘la ko‘rsatildi. Yuqoridagi (7.24) sistemani ham shu tarzda yechib, barcha qidirilayotgan yechimlar aniqlanadi. Bu sxemada ham boshlang’ich va chegaraviy shartlar (7.22) va (7.23) kabi hisoblanib jarayonda ishtirok etadi.

Parabolik tip tenglamalarni yechish algoritmiga mos blok-sxema va dasturi quyida berilgan.




```
Program Para_osh;
uses crt;
const n=4;m=10;
var a,b,h,ta,t,x: real;
  i,j: integer;
  u:array[0..n,0..m] of real;
  function f1(x:real):real;
  begin f1:=sqr(x); end;
  function p1(t:real):real;
  begin p1:=sqr(t) ;end;
  function p2(t:real):real;
  begin p2:=1+sqr(t); end;
  function f(x,t:real):real;
  begin f:=2*t-2; end;
Begin   clrscr;
  a:=0;b:=1;t:=1;  h:=(b-a)/n; ta:=t/m;
  for i:=0 to n do
  begin
    x:=a+i*h;   u[i,0]:=f1(x);
  end;
  for j:=0 to m do
  begin   t:=j*ta; u[0,j]:=p1(t);
u[n,j]:=p2(t);  end;
  writeln ('taqr',' ','aniq',' ','xatolik');
  for j:=0 to m-1 do
  for i:=1 to n-1 do
  begin
    x:=a+i*h; t:=j*ta;
    u[i,j+1]:=u[i,j]+(ta/(h*h))*(u[i+1,j]-
  2*u[i,j]+u[i-1,j])+ta*f(x,t);
  end;
  for j:=0 to m do
  begin
    t:=j*ta;   writeln('t=',t:2:2);
    for i:=0 to n do
    begin
    x:=a+i*h;  writeln(u[i,j]:2:8,
' ',sqr(x)+sqr(t):2:8,' ',abs(u[i,j]-
(sqr(x)+sqr(t))):2:8);
    end;
    end;
    end.
```

Parabolik tipdagi tenglamalarni oshkormas sxemalar yordamida yechish algoritmining blok-sxemasi



Parabolik tipdagi tenglamalarni oshkormas sxemalar algoritmiga mos dastur matni

```
Program par_oshkormas;
uses crt;
const n=10; m=100;
var kk,a,b,h,ta,t,x:real;
  i,j:integer;
 ai,bi,ci,fi:real;
 u:array[0..n,0..m] of real;
 al,be:array[0..n] of real;
 function f1(x:real):real;
 begin f1:=1+x*x; end;
function p1(x:real):real;
begin p1:=cos(2*x) ;end;
function p2(x:real):real;
begin p2:=cos(2*x)+exp(x); end;
function f(x,t:real):real;
begin f:=-2*sin(2*t)-x*x*exp(t)-2*exp(t); end;
function an(x,t:real):real;
begin an:=cos(2*t)+x*x*exp(t); end;
 Begin
   clrscr;
 readln(a,b);
 h:=(b-a)/n; ta:=1/m;
 for i:=0 to n do
 begin
   x:=a+i*h;
   u[i,0]:=f1(x);
   end;
 for j:=1 to m do
 begin
   t:=j*ta;
   u[0,j]:=p1(t); u[n,j]:=p2(t);
 end;
   for j:=0 to m-1 do
   begin
   t:=j*ta; al[1]:=0; be[1]:=p1(t);
  for i:=1 to n-1 do
```

```
begin
  x:=a+i*h;
  ai:=ta/(h*h);
  bi:=2*ta/(h*h)+1;
  ci:=ta/(h*h);
  fi:=-f(x,t)*ta-u[i,j];
al[i+1]:=ai/(bi-al[i]*ci);
be[i+1]:=(ci*be[i]-fi)/(bi-al[i]*ci);
end;
for i:=n-1 downto 1 do
u[i,j+1]:=al[i+1]*u[i+1,j+1]+be[i+1];
if (j=10) or (j=50) or (j=90) then
begin
 writeln('t=', j*ta:2:2);
 for i:=0 to n do
 begin
 writeln(abs(u[i,j]):10:6,abs(an(a+i*h,t)):10:6,abs(u[i,j]-
an(a+i*h,t)):10:6);
end;
end;
end;
end.
```

Olingan natijalar tahlili.

Oshkor va oshkormas sxemalarga asoslanib ishlab chiqilgan algoritmlarni va dasturlarni ishga sozlash uchun quyidagi parabolik tipdagi tenglamani yechishni tashkil qilamiz:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u^2(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t)$$

Oshkor sxemali almashtirishlar uchun tenglamaning aniq yechimi deb $u(x,t)=x^2+t^2$ ni qabul qilsak, u holda tenglamadagi $f(x,t)$ quyidagicha aniqlanadi:

$$f(x,t)=u_t-u_{xx}=2\,t\,-2$$

integrallash oralig'ini esa quyidagicha deb qabul qilaylik:

$$D\ \{x\in[0,1],\ \ t\in[0,1]\}$$

u holda boshlang'ich shart $u(x,0)=1-x^2$ chegaraviy shartlar esa $u(0,t)=t^2$, $u(1,t)=1+t^2$ ko'rinishda ifodalanadi. Hisob ishlari uchun n=6 va m=100 deb qabul qilingan. Olingan natijalar quyidagi jadvalda ifoda qilingan.

Taqribiy yechim	Aniq yechim	Xatolik
t=0.10		
0.01000000	0.01000000	0.00000000
0.07190289	0.07250000	0.00059711
0.25923136	0.26000000	0.00076864
0.57190289	0.57250000	0.00059711
1.01000000	1.01000000	0.00000000
t=0.50		
0.25000000	0.25000000	0.00000000
0.31156914	0.31250000	0.00093086
0.49875939	0.50000000	0.00124061
0.81156914	0.81250000	0.00093086
1.25000000	1.25000000	0.00000000
t=1.00		
1.00000000	1.00000000	0.00000000
1.06156255	1.06250000	0.00093745
1.24875007	1.25000000	0.00124993
1.56156255	1.56250000	0.00093745
2.00000000	2.00000000	0.00000000

Olingan natijalarni aniq yechim bilan taqqoslash ishlab chiqilgan algoritm va dasturning to'g'riligini ta'kidlab turibdi. Oshkor sxemali algoritm asosida olingan natijalar xatoligi kutilganidek vaqt ortishi bilan ko'payib bormoqda.

Oshkormas sxemali almashtirishlar uchun tenglamaning aniq yechimi deb $u(x,t)=cos2t+x^2e^t$ funksiyani qabul qilsak, u holda tenglamadagi f(x,t) quyidagicha aniqlanadi:

$$f(x,t)=u_t-u_{xx}=-2sin2t+x^2e^t-2e^t$$

integrallash oralig'ini esa quyidagi deb qabul qilaylik:

$$D:\{x\in[0,1],t\in[0,1]\}$$

u holda boshlang'ich shart $u(x,0)=1+x^2$, chegaraviy shartlar esa $u(0,t)=cos2t$, $u(1,t)=cos2t+e^t$ ko'rinishda ifodalanadi. Hisob ishlari uchun n=10 va m=100 deb qabul qilingan. Olingan natijalar quyidagi jadvalda faqat ayrim qatlamlar uchun aks ettirilgan.

Taqribiy yechim	Aniq yechim	Xatolik
t=0.10		
0.980067	0.980067	0.000000
0.994909	0.991118	0.003790
1.028046	1.024273	0.003772
1.083244	1.079532	0.003712
1.160488	1.156894	0.003594
1.259757	1.256359	0.003398
1.381025	1.377928	0.003097
1.524255	1.521600	0.002655
1.689404	1.687376	0.002028
1.876418	1.875255	0.001163
2.085237	2.085237	0.000000
t=0.50		
0.540302	0.540302	0.000000
0.572980	0.556790	0.016191
0.621692	0.606251	0.015441
0.703151	0.688687	0.014463
0.817344	0.804098	0.013246
0.964256	0.952483	0.011774
1.143873	1.133842	0.010031
1.356176	1.348176	0.008001
1.601147	1.595484	0.005664
1.878769	1.875767	0.003002
2.189024	2.189024	0.000000
t=0.90		
0.227202	0.227202	0.000000
0.183072	0.202606	0.019534
0.109768	0.128818	0.019050
0.012261	0.005838	0.018098
0.183037	0.166334	0.016702
0.402581	0.387699	0.014882
0.670910	0.658255	0.012655
0.988042	0.978003	0.010038
1.353990	1.346944	0.007046
1.768771	1.765076	0.003694
2.232401	2.232401	0.000000

Olingan natijalarni aniq yechim bilan taqqoslash ishlab chiqilgan algoritm va dasturning to'g'riligini ta'kidlab turibdi. Bu holda ham oshkormas sxemali algoritm dasturi kutilgan natijalarni berdi. Xatolikning unchalik katta emasligi undan amaliy masalalar yechishda foydalanish mumkinligini ko'rsatadi.

Nazorat savollari

1. Qanday jarayonlarning matematik modeli parabolik tipdagi tenglamalar orqali ifodalanadi?
2. Parabolik tipdagi tenglamalar uchun qanday qo'shimcha shartlar beriladi?
3. Parabolik tipdagi tenglamani oshkor va oshkormas sxemalar orqali yechish qanday tashkil etiladi?

4-§. Elliptik tipdagi tenglamalarni yechish uchun to'r usuli

Tayanch so'z va atamalar

Stasionar jarayonlar, elliptik tipdagi tenglamalar, Puasson tenglamasi, Zeydel usuli, algoritm blok-sxemasi, dastur ta'minoti.

Ma'lumki, qaralayotgan masalada vaqt faktori kuchsiz rol o'ynasa, ya'ni jarayonning matematik modelida vaqtni ifodalovchi parametrlar qatnashmasa, bunday jarayonlarni stasionar jarayonlar deb ataladi. Stasionar jarayonlarga qurilish mexanikasini zo'riqish va egilish masalalarini kiritish mumkin. Stasionar jarayonlarning matematik modellari elliptik tipdagi quyidagi tenglamalar orqali ifodalanishi mumkin (ikki o'lchovli hol uchun):

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=f(x,y) \qquad (7.26)$$

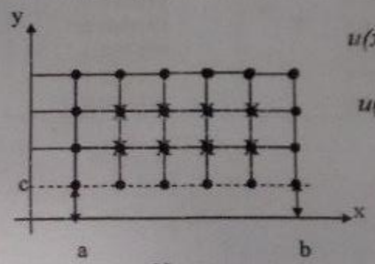
(7.26) tenglamani Puasson tenglamasi deb ataladi. Agar tenglamaning chap tomonida turgan miqdor $f(x,y)$ nolga teng bo'lsa hosil bo'lgan tenglamani

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (7.27)$$

Laplas tenglamasi deb ataladi.

Ikki o'lchovli (7.26) tenglamani yechimini ikki o'lchamli G sohada aniqlangan deb faraz qilamiz. Soha chegarasi G yopiq chiziq bilan chegaralangan deb hisoblaymiz.

Soddalik uchun integrallash oralig'ini to'g'ri to'rtburchak deb olamiz. Yuqorida keltirilgan Puasson tenglamasi uchun Dirixle masalasi berilgan to'rtburchak soha uchun quyidagicha bo'ladi:



20-расм

$$u(x,y)|_{x=a}=f_1(y) \qquad u(x,y)|_{y=c}=f_3(x)$$
$$u(x,y)|_{x=b}=f_2(y) \qquad u(x,y)|_{y=d}=f_4(x) \qquad (7.28)$$

Bu yerda $f_1(y)$, $f_2(y)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ lar integrallash sohasining chegaralarida berilgan funksiyalar. Puasson tenglamasi uchun Dirixle masalasini to'r usulida yechish uchun dastlab qaralayotgan OX va OY o'qlar bo'yicha $x_i=a+ih$, $y_j=c+j\tau$ tugun nuqtalar yordamida to'r kiritamiz. 20-rasmda chegaraviy nuqtalar «•» belgisi bilan, ichki nuqtalar esa «×» belgisi bilan belgilangan.

Kiritilgan to'rda OX va OY o'qlari bo'yicha to'r qadamlari quyidagicha aniqlanadi:

$$h=\frac{b-a}{n}, \quad \tau=\frac{d-c}{m}$$

bu yerda n va m lar mos ravishda OX va OY o'qlaridagi tugun nuqtalar soni.

Umuman olganda hisoblash algoritmini soddalashtirish maqsadida $h=l$ deb olish ham mumkin.

Kiritilgan tugun nuqta (x_i,y_j) larda Puasson tenglamasi (7.26) ni qayta yozamiz:

$$u_{xx}(x_i,y_j)+u_{yy}(x_i,y_j)=f(x_i,y_j) \qquad (7.29)$$

(7.29) dagi ikkinchi tartibli xususiy hosilalar o'miga oldingi paragraflarda kiritilgan chekli-ayirmali formulalarni qo'yib quyidagi ikki indeksli chekli ayirmali tenglamalarni :

$$\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u^j_{i-1,j}}{h^2}+\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{l^2}=f(x_i,y_j) \qquad (7.30)$$

chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Soddalik uchun (fizik ma'nosiga ko'ra) $h=l$ deb olib (7.30) tenglamani

$$u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-4u_{i,j}=h^2 f_{i,j}\,, \quad i=\overline{1,n-1},\ j=\overline{1,m-1} \qquad (7.31)$$

ko'rinishidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi ko'rinishida yozamiz.

Qidirilayotgan to'r funksiyaning G chegarasidagi qiymatlarini (7.28) formulada keltirilgan shart orqali aniqlanadi:

$$u_{0,j}=f_{1,j},\ u_{n,j}=f_{2,j},\ u_{i,0}=f_{3,i},\ u_{i,m}=f_{4,i} \quad i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,m} \qquad (7.32)$$

(7.31) tenglamalar sistemasini yechish uchun bizga oldingi boblardan ma'lum bo'lgan iteratsion usullardan foydalaniladi:

$$u^{(k+1)}_{i,j}=(u^{(k)}_{i+1,j}+u^{(k)}_{i-1,j}+u^{(k)}_{i,j+1}+u^{(k)}_{i,j-1}-h^2 f_{i,j})/4, k=0,1,...s$$

Elliptik tipdagi tenglamalarni to'r usulida yechish algoritmiga mos dastur

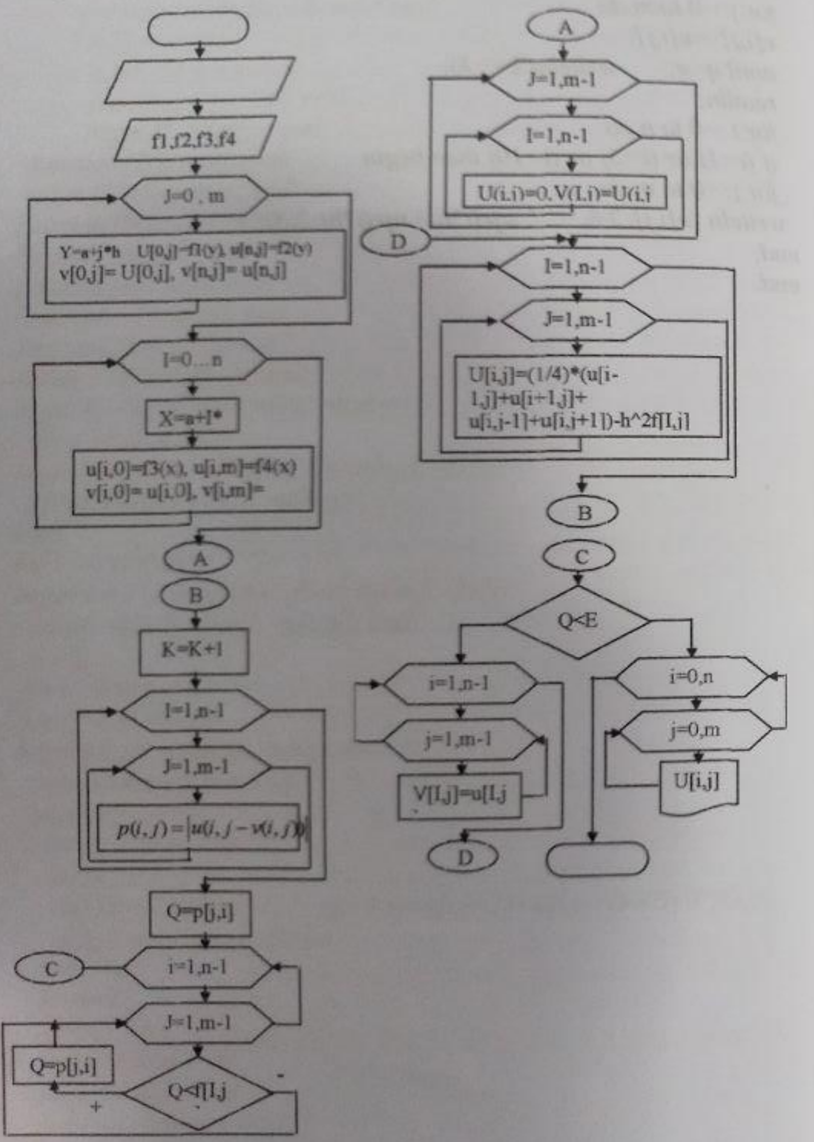
program elliptik;

```
const n=10; m=10; e=0.001;
var p,u,v:array[0..n,0..m]of real;
  k,i,j:integer;
  a,b,c,d,q,h,x,y:real;
  function f1(y:real):real;
  begin f1:=sqr(y); end;
function f2(y:real):real;
begin f2:=1+sqr(y); end;
function f3(x:real):real;
begin f3:=sqr(x); end;
function f4(x:real):real;
begin f4:=1+sqr(x); end;
function f(x,y:real):real;
begin f:=0*x+0*y+4; end;
begin h:=0.1;a:=0;b:=1;c:=0;d:=1;
 for j:=0 to m do
begin y:=c+j*h; u[0,j]:=f1(y);u[n,j]:=f2(y);
 v[0,j]:=u[0,j];v[n,j]:=u[n,j];
end;
for i:=0 to n do
begin x:=a+i*h; u[i,0]:=f3(x);u[i,m]:=f4(x);
 v[i,0]:=u[i,0];v[i,m]:=u[i,m]; end;
 k:=0;
for i:=1 to n-1 do
for j:=1 to m-1 do
begin u[i,j]:=0;v[i,j]:=u[i,j];end;
repeat for i:=1 to n-1 do
begin x:=a+i*h;
 for j:=1 to m-1 do
 begin y:=c+j*h;
  u[i,j]:=(1/4)*(u[i-1,j]+v[i+1,j]+v[i,j+1]+u[i,j-1])-h*h/4*f(x,y);
  p[i,j]:=abs(u[i,j]-v[i,j]);
 end; end;
k:=k+1;
q:=p[1,1];
for i:=1 to n-1 do
for j:=1 to m-1 do
if q<p[i,j] then q:=p[i,j];
```



```
for i:=0 to n do
for j:=0 to m do
v[i,j]:=u[i,j];
until q<e;      writeln('k=', k);
readln;
for i:=0 to n do
if (i=1) or (i=5) or (i=10) then begin
for j:=0 to m do
writeln (u[i,j]:2:8,'    ', sqr(i*h)+sqr(j*h):2:8);
end;
end.
```

Elliptik tipdagi tenglamani yechish algoritmining blok-sxemasi



Olingan natijalar tahlili.

Ishlab chiqilgan algoritmni va dasturni ishga sozlash uchun quyidagi elliptik tipdagi tenglamani yechishni tashkil qilamiz:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=f(x,y)$$

Tenglamaning aniq yechimi deb $u(x,t)=x^2+y^2$ ni qabul qilsak, u holda tenglamadagi f(x,y) quyidagicha aniqlanadi:

$$f(x,y)=u_{yy}+u_{xx}=2+2=4$$

integrallash oralig'ini esa quyidagicha deb qabul qilaylik:

$$D:\{x\in[0,1],\ y\in[0,1]\}$$

u holda chegaraviy shartlar $u(0,y)=y^2$, $u(n,y)=1+y^2$, $u(x,0)=x^2$, $u(x,n)=1+x^2$ ko'rinishda ifodalanadi. Hisob ishlari uchun n=10 deb qabul qilingan.

y=0.1	*X*	Taqribiy yechim	Aniq yechim	Aniqlik
	0.0	0.01000000	0.01000000	0.00000000
	0.1	0.01874920	0.02000000	0.00125080
	0.2	0.04773644	0.05000000	0.00226356
	0.3	0.09703570	0.10000000	0.00296430
	0.4	0.16668435	0.17000000	0.00331565
	0.5	0.25668298	0.26000000	0.00331702
	0.6	0.36699865	0.37000000	0.00300135
	0.7	0.49757117	0.50000000	0.00242883
	0.8	0.64832138	0.65000000	0.00167862
	0.9	0.81916060	0.82000000	0.00083940
	0.10	1.01000000	1.01000000	0.00000000
y=0.5				
	0.0	0.25000000	0.25000000	0.00000000
	0.1	0.25668298	0.26000000	0.00331702
	0.2	0.28399824	0.29000000	0.00600176
	0.3	0.33214165	0.34000000	0.00785835
	0.4	0.40121182	0.41000000	0.00878818
	0.5	0.49120965	0.50000000	0.00879035
	0.6	0.60204738	0.61000000	0.00795262
	0.7	0.73356516	0.74000000	0.00643484
	0.8	0.88555319	0.89000000	0.00444681
	0.9	1.05777650	1.06000000	0.00222350
	0.10	1.25000000	1.25000000	0.00000000

Olingan natijalarni aniq yechim bilan taqqoslash ishlab chiqilgan algoritm va dasturning to'g'riligini ta`kidlab turibdi. Xatolikning unchalik katta emasligi undan amaliy masalalar yechishda foydalanish mumkinligini ko'rsatadi.

Nazorat savollari

1. Eliptik tipdagi tenglamani umumiy holda ifodalay olasizmi?
2. Elliptik tipdagi tenglama uchun qanday qo'shimcha shartlar beriladi?
3. Elliptik tipdagi tenglamani to'r usulida yechishning mohiyatini tushuntiring.
4. Eliptik tipdagi tenglamani yechishda Zeydel usuli uchun boshlang'ich qiymatlar qanday aniqlanadi?

XULOSA

- ✓ Ushbu bobda xususiy hosilali differensial tenglamalar, ularning amaliy tadbiqlari, differensial tenglamani tiplarga ajratish, turli xil tipdagi differensial tenglamalar uchun beriladigan boshlang'ich va chegaraviy shartlar haqida zarur ma`lumotlar berildi.
- ✓ Dirixle masalasi, Neyman masalasi, aralash masala, oshkor va oshkormas sxemalarning umumiy tavsifi keltirildi.
- ✓ Giperbolik va parabolik tipdagi tenglamalarni oshkor va oshkormas sxemalar yordamida yechish uchun hisoblash algoritmlari va dastur ta`minotlari ishlab chiqildi.
- ✓ Elliptik tipdagi tenglamani to'r usulida yechish algoritmi, uning dastur ta`minoti tavsiya qilindi.
- ✓ Har bir tipdagi tenglamani yechish algoritmiga mos dastur ta`minotlari ishlatib ko'rildi va olingan natijalar tahlil etildi.

?! Bobga doir muammoli vaziyatlar!

- Nima uchun xususiy hosilali differensial tenglamalarni tiplarga ajratib o'rganiladi? Ularning barchasi uchun umumiy bo'lgan yechish usullarini ishlab chiqish mumkin emasmi?
- Matematik modellari xususiy hosilali differensial tenglamalar orqali ifodalanuvchi jarayonlarga misollar keltira olasizmi? Hosila bilan ishtirok etuvchi parametrlar amalda qanday qonuniyatlar asosida o'zgarishi mumkin?
- Xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishda olingan sonli-taqribiy yechimlarning aniqligini oshirish bo'yicha tavsiyalar bera olasizmi?
- Xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishda oshkor sxemali almashtirishlarni bajarish natijasida xatoliklar yig`indisi hosil qilinadi, u holda nima uchun oshkor sxemalar amalda qo'llanadi?
- Nima uchun elliptik tipdagi tenglamani yechishda aynan *Zeydel* usulidan foydalaniladi? Zeydel usulining iteratsiya usuliga ko'ra yechimga tez yaqinlashishiga nima sabab bo'lishi mumkin deb o'ylaysiz?
- Eliptik tipdagi tenlamalarda vaqt faktorining kuchli ta`sir etmasligi no`malum yechimlarni aniqlash jarayoniga ta`sir etishi mumkinmi?
- Oshkor va oshkormas shablonlarda differensialni approksimasiya qilish uchun ikkala holda ham chekli-ayirmali almashtirishlar qo'llanadi va ikki xil ishchi formula hosil qilinadi. Bunga sabab nimada?

8-BOB. MATHCAD AMALIY DASTURLAR BOG'LAMI VA UNI SONLI-HISOBLASh USULLARINI QO'LLASHGA TADBIG'I

Mathcad dasturi yordamida matematik masalalarni yechish 3 xil usulda: dasturning ichki tilida yozilgan dasturlar, ichki funksiyalar va hisoblash usullari algoritmlarini tashkil etish asosida amalga oshiriladi. Bunday imkoniyatlar boshqa barcha matematik dasturlarda to'laqonli mavjud emas. Faqat Maple dasturidagina ayrim mavzular uchun loyihachilar tomonidan yaratilgan interaktiv lavhalar mavjud.

Mazkur bobda yuqorida keltirilgan barcha hisoblash usullari uchun olingan natijalar Mathcad dasturiy ta'minotining ichki standart funksiyalari va hisoblash algoritmlari yordamida olinadi va tahlil etiladi.

Amaliy dasturlar bog'lami va matematik dasturiy vositalar

Ma'lumki, har qanday amaliy masala o'zining qandaydir ko'rinishdagi matematik modeliga ega. Uni yechish masalasi esa mutaxassis tomonidan hal etiladi va quyidagi vazifalar ketma-ketligida amalga oshiriladi:

1. Masalaning berilgan va qiymatlari qidirilayotgan miqdorlari, tekshirilayotgan ob'ekt, jarayonning kechishini harakterlaydigan parametrlar majmuasi aniqlanadi.
2. Fizik, mexanik, kimyoviy va boshqa qonuniyatlardan foydalanib parametrlar orasida munosabatlar o'rnatiladi, ya'ni matematik model tuziladi.
3. Matematik modelni yechish uchun biror hisoblash usuli tanlanadi va ishchi algoritm ishlab chiqiladi.
4. Biror algoritmik tilda masalani yechish uchun dastur ta'minoti loyihalanadi yoki biror matematik dasturda hisoblash jarayoni tashkil etiladi.
5. Yaratilgan dasturni kompyuter xotirasiga kiritib, xatolar tuzatiladi, tajriba eksperimentini o'tkaziladi va shulardan so'ng, masalaning asosiy boshlang'ich ma'lumotlari kiritilib, natijalar

olinadi. Natijalar tahlil qilinib, zarur bo'lsa, dasturga, algoritmga tuzatishlar kiritiladi.

Bu ko'rsatilgan vazifalar masalani yechish bosqichlari yoki hisoblash tajribasi deb ataladi.

Sanab o'tilgan bosqichlarning har birini hal qilishda mutaxassis oldida o'ziga xos qiyinchiliklar paydo bo'ladi. Mutaxassis nafaqat masalani modelini tuzishni, uni yechish usulini tanlashni va algoritm ishlab chiqishni bilishi, balki biror zamonaviy dasturlash tilida mukammal dasturlar yarata olishi yoki biror matematik dasturiy vositalar yordamida qo'yilgan masalani yecha olishi ham kerak. Oxirgi yillarda sanab o'tilgan murakkab vazifalarni hal qilishga mo'ljallangan izlanishlar tobora izchil olib borilmoqda. Ma'lum bir sinf masalalarini yechishga bag'ishlangan dasturiy vositalar, amaliy dasturlar bog'lamlari yaratila boshlandi. Eng yaxshi dasturlar bog'lami odatda o'z muhitidan «chiqmas»dan barcha zaruriy ishlarni, yoki ishlarning salmoqli qismini bajarish imkoniyatini beradi. Dasturlar bog'lami e'tiborni masalaning asosiy tomoniga qaratib, klassik matematika texnikasi, hisoblash usullari injiqliklariga, dasturlash, operasion tizimlar buyruqlarining sirlariga e'tibor bermaslik imkoniyatlarini beradi.

«Dasturlar bog'lami» tushunchasi foydalanuvchi nuqtai-nazaridan qaraganda bir maqsadga yo'naltirilgan bir nechta dasturlar to'plamini anglatadi. Bog'lamga asosan qo'yilgan masalaning alohida xususiyatlarini o'zida saqlovchi va samarali yechimni olishga mo'ljallangan dasturlar kiritiladi. Amaliy dasturlar bog'lamini ishlab chiqish va undan foydalanishning bir nechta tomonlari mavjud. Asosan quyidagi ko'rsatkichlar bog'lamdan foydalanishda muhim rol o'ynaydi:

-ma'lumotlarni kiritish va bog'lamni ishlatishning qulayligi, masalani qo'yishning tabiiyligi va soddaligi, matematika tiliga yaqinligi;

-agar zarur bo'lsa dasturga yoki algoritmga to'ldirishlar va o'zgarishlar kiritish imkoniyatining mavjudligi;

-ma'lumotlarning tushunarliligi va mazmunliligi.

Har bir dasturni yoki dasturlar bog'lamini yaratish qandaydir imkoniyatlarning mavjudligi, qandaydir imkoniyatlarning esa mavjud emasligidan kelib chiqqan holda qat'iy aniqlangan texnologiyaga asoslanadi. Biz ham o'zimizning dasturiy mahsulotlarimizni yaratishni o'zimizga xos texnologiya asosida amalga oshirishimiz mumkin.

Amaliy dasturlar bog'lamining yuqoridagi imkoniyatlarini tahlil etib, dars jarayonida ulardan foydalanishning samarali jihatlarini quyidagicha tavsiflash mumkin:

1. Talaba dasturlash tillarining yuqori imkoniyatlaridan foydalanish malakasiga ega bo'ladi;

2. Amaliy dasturlar bog'lamidan foydalanganda qo'yilgan amaliy masalaning barcha yechimlarini tahlil qilish va masalani yechishning samarali usulini tanlash imkoniyati paydo bo'ladi;

3. Mavzu talabalar tomonidan tizimli va mantiqiy bog'langan holda o'zlashtiriladi.

4. Amaliy dasturlar bog'lami dasturlar kutubxonasi sifatida keyingi ilmiy-tadqiqotlar uchun zaruriy dasturiy ta`minot zahirasi vazifasini o'taydi;

5. Bog'lamni keraklicha to'ldirish va o'zgartirish imkoniyatining mavjudligi talabaning kelgusidagi bilish faoliyatini aniq maqsadlar sari yo'naltiradi;

6. Talabada o'z bilimiga va amaliy masalalarni yechish qobiliyatiga bo'lgan ishonchi ortib, unda yangi ijodiy izlanishlar uchun motivasiya paydo bo'ladi.

Shunday qilib, har qanday masalani yechish uchun muayyan dasturlar bog'lamidan foydalaniladi. Hozirgi davrda kelib, turli xil amaliy masalalarni yechish uchun foydalanuvchilarga mo'ljallangan, dastur tuzishni bilishi unchalik zarur bo'lmaganlar uchun tayyor, o'rganish unchalik qiyin bo'lmagan, ilmiy dasturlar kutubxonasi, elektron qo'llanmalar va eng muhimi, standartlashtirilgan, ommaviy hisoblashlarni bajaradigan qator matematik amaliy dasturlar bog'lamlari yaratildi.

Hozirgi paytda quyidagi matematik dasturiy tizimlar keng tarqalgan:

-MathCAD, Mat Lab (firma Math Soft, 1988 y.);

-Maple (firma Waterloo Maple Software, Kanada);

-Mathematica (firma Wolfram Research);

-Scientific Work Place (SWP) (firma Waterloo Maple Software, Kanada).

Bu dasturiy tizimlar turli xil imkoniyatlarga ega.

Quyida matematik dasturiy tizimlarning eng soddasi va foydalanishga qulayi hisoblangan Mathcad dasturiy ta`minoti haqida qisqacha to'xtab o'tamiz.

Mathcad xilma-xil matematik masalalarni yechish uchun mo'ljallangan integrallashgan muhitdir. Mathcad quyidagi funksional komponentlardan iborat:

- yaxshi o'ylangan, koordinasiyalashgan menyular tizimi, kontekst menyu;
- qurollar paneli majmuasi;
- matn muharriri;
- formulalar tahrirlashichi;
- grafik tahrirlashich, jumladan uch ulchovli grafiklar yaratish imkoniyatini beradi;
- hisoblash tizimi, bu tizim sonli va simvolli hisoblashlar imkoniyatini beradi;
- shablonlar majmuasi, ular yordamida formulalar, indekslar, integral, hosila, matrisa, determinant va hokazo belgilarni qulay kiritish mumkin;
- matematik ifodalarni to'g'ri yozilishini nazorat qiluvchi va noto'g'riligi haqida, uni tuzatish haqida ko'rsatma beruvchi yordam sistemasi;
- natijalarni chiqarish sistemasi;
- alfavitli, indeksli yordam tizimi.

Mathcad menyu ierarxik tuzilishga ega: bosh menyu (gorizontal menyu) gorizontal menyu punktlariga bog'langan osiluvchi vertikal menyu va uning qo'shimcha menyulari, qalqib chiquvchi menyu, kontekst menyu.

Mathcad dasturiy tizimi Math Soft Inc. firmasi tomonidan kompakt disklarda chiqariladi. Uni standart usullar bilan installyasiya qilinadi. Mathcad dasturi o'rnatilgach, Windows OSning bosh menyusida qayd etiladi. *Файл, правка, вид, вставка, формат, окно, помощ* menyulari har qanday Windows dasturlarining menyulari uchun standart vazifalarni bajaradi.

1-§. Bir no`malumli chiziqsiz tenglamalarni Mathcad dasturi yordamida yechish

Tayanch so'z va atamalar:
standart ichki funksiyalar, root, given, find, minimize, polyroots.

MathCAD dasturida bir noma'lumli chiziqsiz tenglamalarni taqribiy yechish uchun standart ichki funksiyalar mavjud bo'lib, ular: *root, given, find, minimize, polyroots* kabi funksiyalardan iboratdir. Bu funksiyalarning har biri tenglamaning yechimlarini aniqlashda o'ziga xos imkoniyatlarga va yondashuvlarga ega. Masalan, ixtiyoriy chiziqsiz transendend tenglama uchun *root* funksiyasi qulay hisoblansa, algebraik ko'phadli tenglamalar uchun esa *polyroots* funksiyasini qo'llash qulaydir.

Izoh: *bundan keyin ">" belgi MathCADdagi komandani, "//" belgi izohni bildirsin. (aslida ular MathCAD dasturida ishlatilmaydi).*

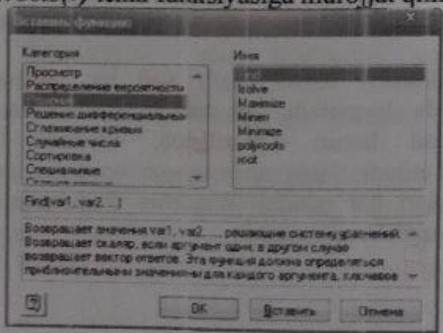
2-bobda berilgan quyidagi chiziqsiz tenglamalar qaralsin:

1) $f1(x)=x^3-5x+1$, 2) $f2(x)=2x^3-0.4$,
3) $f3(x)=x^3+2x+0.5$, 4) $f4(x)=0.1x^3-0.4x-80$,
5) $f5(x)=\sqrt{x+2}+0.7x$.

Dastlab 1-4 tenglamalarni yechish uchun chiziqsiz algebraik tenglamalarni yechishda qo'llanadigan *polyroots* funksiyasidan foydalaniladi. Buning uchun ko'phad koeffisiyentlaridan iborat vektorlar tashkil etiladi:

$v1^T=[1\ -5\ 0\ 1]$, $v2^T=[-0.4\ 0\ 0\ 2]$, $v3^T=[0.5\ 2\ 0\ 1]$, $v4^T:=[-80,\ -0.4\ 0\ 0.1]$

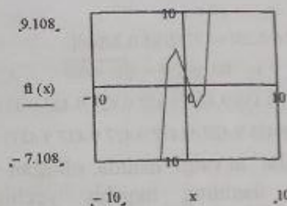
So'ngra ***r=polyroots(v)*** ichki funksiyasiga murojjat qilinadi.



21-rasm..

Xususan, $f1(x):=x^3-5x+1$ tenglama uchun taqribiy yechish $v1^T:=[1\ -5\ 0\ 1]$ ko'phad koeffisientlari kiritilib, so'ngra r1:=polyroots(v1) funksiyasi ishlatiladi. Natijada ishchi oynada r1=[-2.3301 0.2016 2.1284]^T tenglamaning barcha ildizlari paydo bo'ladi.

Hosil qilingan ildizlarni grafik usulda tasvirlash uchun Вставить/ Графики/ X –Y зависимость yoki @ yoki Графики qurollar panelidan / asbob tanlanadi. Grafikdagi pastki qora to'rtburchak marker o'miga x, chap tomondagi qora to'rtburchak marker o'miga $f(x)$ belgi kiritiladi. Shablondan chiqilgach, grafik paydo bo'ladi:



22-rasm.

Xuddi shunday hisoblashlar qolgan tenglamalar uchun ham olinadi:

> r2:=polyroots(v2) r2=[-0.2924-0.5065i -0.2924+0.5065i 0.5848]^T // Tenglama ildizlari

> r3:=polyroots(v3) $r3=[-0.2428\ \ 01214+1.4298i\ \ 01214-1.4298i]$ //Tenglama ildizlari

> r4:=polyroots(v4) r4=[-4.7134-7.9150 4.7134-7.9150 9.4268]^T // Tenglama ildizlari

Endi tenglamalardan birini Mathcadning ichki funksiyasi yordamida yechish masalasi qaralsin. Xususan, $f5(x):=\sqrt{x+2}+0.7x$ chiziqsiz tenglamani root(f(x),x)) ichki funksiya yordamida yechamiz. Buning uchun,

$>x:=-1.5$ $r:=root(f(x),x)$ $r=-1.2436$. Natijada tenglamaning $x=-1.5$ ga yaqin ildizi hosil qilinadi.

Barcha olingan natijalarni tahlil etadigan bo'lsak, olingan taqribiy ildizlarning aniqligi 0.001 ga teng bo'lib, uni har doim orttirish mumkin. Buning uchun Формат / Результат / Формат Результата muloqotli darchasida ishonchli raqamlar soni ko'rsatiladi.

Endi tenglama ildizlarini bevosita sonli-taqribiy usullar yordamida, xususan, iteratsiya usuli yordamida tashkil etish masalasi qaralsin. Bunda ishchi oynaga dastlabki yaqinlashish, yaqinlashish funksiyasi va rekkurent formula, yani yaqinlashish uchun ko'rsatma kiritiladi. So'ngra keyingi yaqinlashishlar hamda aniqlikka mos yechim hosil qilinadi. Yuqoridagi ayrim tenglamalar uchun iteratsiya usulini qollaymiz.

1) $f1(x) = x^3 - 5x + 1$

$> k := 0..5 \; x_0 := 0 \qquad g1(x) := \frac{x^3+1}{5}$

$> x_0 := 0 \; k := 0..5 \; x_{k+1} := g1(x_k)$

$> x^T = [0 \; 0.2 \; 0.2016 \; 0.20164 \; 0.20164 \; 0.20164]$

2) $f4(x) := 0.1x^3 - 0.4x - 80, \; g4(x) := \sqrt[3]{4x+800} \qquad x_{k+1} := g4(x_k) \; k := 0..10$

$> x_0 := 10 \quad x^T = [10 \; 9.435 \; 9.427 \; 9.427 \; 9.427 \; 9.427 \; 9.427]$

$> x_0 := 8 \quad x^T = [8 \; 9.435 \; 9.427 \; 9.427 \; 9.427 \; 9.427 \; 9.427]$

Olingan natijalar avvalgi usulda olingan yechimning miqdori bilan tengdir. Bu usulning taqribiy yechimga yaqinlashuvchi ekanligini bildiradi.

Tenglamani *Nyuton usulida* yechish uchun $f(x) = 0$ tenglama $x = q(x) = x - f(x)/f'(x)$ ko'rinishga keltiriladi. Keyin iteratsiya usuli qo'llaniladi.

INDIVIDUAL TOPSHIRIQLAR

Chiziqsiz tenglamalar iteratsiya, Nyuton usullari bilan yechilsin. Yechim Mathcad (Maple, Mathematica) dasturida ichki funksiyalar yordamida va algoritmlar yordamida olinsin, natijalar tahlil etilsin. Grafiklar chizilsin.

T.r	Topshiriqlar	a	b	c	d
1	$f(x) = 0$ tenglamaning eng kichik noldan farqli musbat yechimi topilsin f(x)=tg (ax)-bx	0,6319	0,9217	-	-
2		9,4637	13,8249	-	-
3		0,9464	1,3825	-	-
4		8,5174	12,4424	-	-
5		1,8927	2,7650	-	-
6		4,4164	6,4516	-	-
T.r	Topshiriqlar	a	b	c	d
7	$f(x) = 0$ tenglamaning eng katta musbat yechimi topilsin f(x)=ln (ax)+bx-c	0,3049	0,3436	0,5	-
8		9,1464	10,3081	1,0	-
9		0,6098	0,6872	1,5	-
10		8,5366	9,6209	2,0	-
11		0,9146	1,0308	2,5	-
12		7,9268	8,9337	3,0	-
13	$f(x) = 0$ tenglamaning eng kichik noldan farqli musbat yechimi topilsin f(x)=asin(bx)-cx	0,33	2,3	0,5	
14		10	7,375	7,75	-
15		1	2,2	1	-
16		6,3	5,189	5	-
17		1,67	2,5	1,5	-
18		8	6,18	6,25	-
19	$f(x) = 0$ tenglamayechilsin f(x)=a exp(-bx)-x	0,312	0,7586	-	-
20		0,893	0,52	-	-
21		0,0385	0,963	-	-
22		0,944	0,51	-	-
23		0,25	0,8	-	-
24		0,67	0,6	-	-
25		0,5	0,667		
26		0,6857	0,56		
27		0,982	0,503		
28	$f(x) = 0$ tenglamayechilsin $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$	0,8896	-2,813	3,6929	11,2
29		0,107	-0,4613	2,3738	5,44
30		1,2755	-3,601	-1,37	6,76

2-§. Chiziqsiz tenglamalar sistemalarini yechish

Tayanch so'z va atamalar:
find, given, minimize, minner, origin.

MathCAD dasturida chiziqsiz tenglamalar sistemasini taqribiy yechish uchun ichki funksiyalar mavjud, ular given ..find bloki, minimize (f(x),x), Minner(var) ichki funksiyalari. Undan tashqari, iteratsiya va Nyuton usullarini tashkil etuvchi jarayonlar uchun rekkurent formulalar tuzish va Mathcad dasturining ishchi oynasida hisoblash mumkin. Misol sifatida 2-bob 6-§ da qaralgan ushbu sistemalarni olamiz:

$$f_1(x_1,x_2)=x_1+\frac{x_1^2}{10}+\frac{\ln(x_2)}{3}-4.6=0\ ,\ f_2(x_1,x_2)=e^{-x_1}+\sqrt{x_2}+x_2-3.1=0,$$

$f1(x_1,x_2)=0,\ f2(x_1,x_2)=0$ funksiyalarning grafiklarini chizib, kesishgan nuqtaning taqribiy koordinatalari topiladi. Uni boshlang'ich yaqinlashish sifatida olinadi. $x_1^{(0)}=3.5,\ \ x_2^{(0)}=1.7$

1) **given ..find** blokidan foydalanish:

$>x{:=}3.5\ \ y{:=}1.7$ // dastlabki yaqinlashishni berish

$>f_1(x_1,x_2)=x_1+\frac{x_1^2}{10}+\frac{\ln(x_2)}{3}-4.6\quad f_2(x_1,x_2)=e^{-x_1}+\sqrt{x_2}+x_2-3.1$

>*Given* $f_1(x_1,x_2)=0\quad f_2(x_1,x_2)=0$ // tenglamalarni kiritish.

$>r:=Find(x,y)$ // ichki funksiyani qo'llash.

$>r^T=[3.3202\ 1.7427]$ //Natijani hosil qilish.

2). **Minimizasiya usuli**: minimize (f(x),x), Minner(var).

$Minimize(f,x_1,x_2)$	$Minner(x_1,x_2)$
$>x_1:=3.5\ \ x_2:=1.7$	$>x_1:=3.5\ \ x_2:=1.7$
$>f_1(x_1,x_2):=x_1+\frac{x_1^2}{10}+\frac{\ln(x_2)}{3}-4.6$	$>x_1+\frac{x_1^2}{10}+\frac{\ln(x_2)}{3}-4.6=0$
$>f_2(x_1,x_2):=e^{-x_1}+\sqrt{x_2}+x_2-3.1$	$>e^{-x_1}+\sqrt{x_2}+x_2-3.1=0$
$>f(x):=[f_1(x_1,x_2)]^2+[f_2(x_1,x_2)]^2$	$r:=Minner(x_1,x_2)\ \ r^T=(3.3202\ 1.7427)$
$>s:=Minimize(f,x_1,x_2)\ \ s^T=(3.3202\ 1.7427)$	

3) **Iteratsiya usuli**.

$>g(x):=[4.6-0.1(x_1)^2-\frac{\ln(x_2)}{3},3.1-e^{-x_1}-\sqrt{x_2}]^T$ // iteratsiya funksiyasini berish

$>x^{<1>}:=[3.5\ \ 1.7]^T$ // boshlang'ich yaqinlashishni kiritish

$>k:=0..5\qquad x^{<k+1>}:=g(x^{<k>})$ // keyingi yaqinlashishlarni hisoblash

x =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3.5	3.198	3.388	3.27	3.344	3.297	3.327	3.306	3.32	3.313
2	1.7	1.786	1.73	1.751	1.739	1.746	1.742	1.744	1.743	1.744

//Olingan natijalar

4) **Nyuton iteratsiya usuli**ni tashkil etish uchun $x^{<k+1>}:=x^{<k>}-(J(x^{<k>}))^{-1}f(x^{<k>})$ rekkurent formuladan foydalaniladi.

> ORIGIN :=1 // indeksning boshlang'ich qiymati

$>g(x)^T:=\left[x_1+\frac{x_1^2}{10}+\frac{\ln(x_2)}{3}-4.6=0,e^{-x_1}+\sqrt{x_2}+x_2-3.1=0\right]$ // yaqinlashuvchi funksiyani kiritish

$$>\ J(x):=\begin{bmatrix}1+\frac{x_1}{5} & \frac{1}{3x_2}\\ -e^{-x_1} & 1+\frac{1}{2\sqrt{x_2}}\end{bmatrix}$$

// 2-bob 7-§ dagi kabi Yakobi matrisasini qurish

$>x^{<1>}:=[3.5\ \ 1.7]^T$ // Dastlabki yaqinlalashishlarni berish

$>k:=0..5\quad x^{<k+1>}:=x^{<k>}-(J(x^{<k>}))^{-1}f(x^{<k>})$ // Keyingi yaqinlashishlarni hisoblash.

Olingan natijalar:

x =

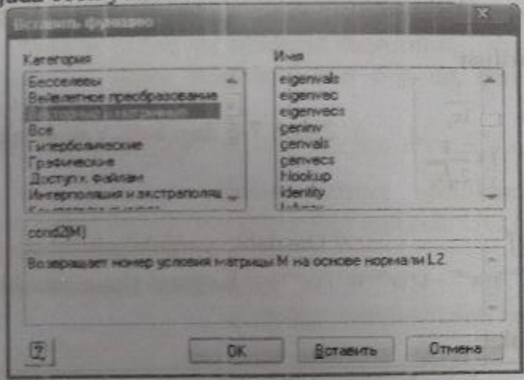
	1	2	3	4	5	6
1	3.5	3.317	3.315	3.315	3.315	3.315
2	1.7	1.744	1.743	1.743	1.743	1.743

Izoh: $x^{<k+1>}:=x^{<k>}-(J(x^{<k>}))^{-1}f(x^{<k>})$ formula hozircha faqat MathCADda ishlamoqda.

3-§. Chiziqli algebra masalalarini yechish

Tayanch so'z va atamalar:
chiziqli algebra, lsolve, rref, augment, identite.

MathCADda juda ko'p chiziqli algebra masalalari, xususan $Ax=b, Ax=\lambda x$ $|A|, A^{-1}$ masalalar ayrim matematik funksiyalar yordamida juda oson yechiladi.



23-rasm.

1) $Ax=b$ CHATS ni teskari matrisa usulida yechish (3- bob 4-§)

$$>A:=\begin{bmatrix}1.1 & 2.3 & 3.4 & -2.0\\ 2.8 & -1.2 & -2.3 & -3.9\\ 3.9 & 2.8 & -1.3 & 2.8\\ 2.7 & -3.6 & 2.6 & 1.7\end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix}6.3\\ 8.8\\ 4.1\\ -8.7\end{bmatrix}$$

// Asosiy koeffisientlar matrisasi va ozod haddan iborat vektor.

$>x:=A^{-1}b \quad x^T=[0.871 \ 1.765 \ -0.626 \ -1.805]$ // Natijani hosil qilish.

2) $Ax=b$ CHATSni lsolve(A,B) ichki funksiya yordamida ham yechish mumkin.

$>r=lsolve(A,B) \quad r^0=[0.871 \ \ 1.765 \ \ -0.626 \ \ -1.805]$ (r^T =yozilganda yechim satr ko'rinishida hosil qilinadi).

3) $Ax=b$ni Gauss usulining ichki funksiyasi rref(A) yordamida yechish

$$>B:=augment(A,b) \quad B=\begin{bmatrix}1.1 & 2.3 & 3.4 & -2.0 & 6.3\\ 2.8 & -1.2 & -2.3 & -3.9 & 8.8\\ 3.9 & 2.8 & -1.3 & 2.8 & 4.1\\ 2.7 & -3.6 & 2.6 & 1.7 & -8.7\end{bmatrix}$$ // kengaytirilgan

matritsa

rref(B) ichki funksiya B matrisani diagonal ko'rinishga keltiradi:

$$>s:=rref(B) \quad s=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0.871\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.765\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.626\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.805\end{bmatrix} \quad x=\begin{bmatrix}0.871\\ 1.765\\ -0.626\\ -1.805\end{bmatrix}$$ // ichki funksiya va

yechim

4) Teskari matrisani hisoblash.

$$>C:=A^{-1} \quad C:=\begin{bmatrix}0.044 & 0.097 & 0.115 & 0.085\\ 0.103 & -0.043 & 0.09 & -0.127\\ 0.156 & -0.077 & -0.049 & 0.087\\ -0.092 & -0.128 & 0.084 & 0.049\end{bmatrix} \quad CA=AC=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

5) Determinantni hisoblash.

$>d:=|A| \quad d1:=|C| \quad d=797.972 \quad d1=1.253*E-3 \quad d*d1=1$

6). CHATSni yechish uchun iteratsiya usulini qo'llash.

Mathcad dasturining ishchi oynasida quyidagi buyruqlarni beramiz:

$$>A:=\begin{bmatrix}40 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 40 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 40 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 40\end{bmatrix} \quad b:=\begin{bmatrix}43\\ 45\\ 46\\ 44\end{bmatrix} \quad E:=identity(4) \quad E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad x:=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$\tau:=0.005$

Izoh: A matrisa uchun yaqinlashish sharti, ya'ni bosh diagonal elementlarini salmoqli bo'lish sharti bajariladi.

$>B:=E-\tau A \quad d:=\tau b \quad k:=0..30 \quad x^{<k+1>}:=d+Bx^{<k>}$

x =

	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0	0.989	0.992	0.993	0.995	0.996	0.997	0.997	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999
1	0.992	0.994	0.995	0.996	0.997	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999	0.999	1
2	0.994	0.995	0.997	0.997	0.998	0.999	0.999	0.999	0.999	1	1	1
3	0.991	0.993	0.994	0.996	0.997	0.997	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999	0.999

INDIVIDUAL TOPSHIRIQLAR.

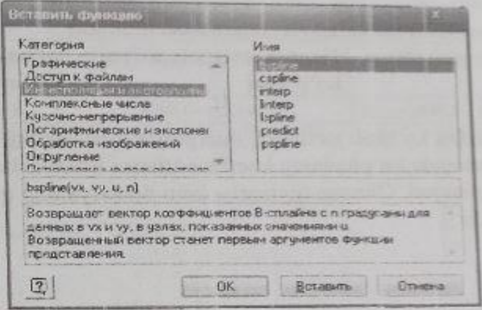
Tenglamalar sistemasini Gauss, iteratsiya, teskari matrisa usullari bilan yechilsin. yechim Mathcad (Maple, Mathematica) dasturida ichki funksiyalar yordamida va algoritmlar tuzish orqali olinsin, natijalar tahlil etilsin (*n-talabaning tartib raqami*).

1) $A=\begin{bmatrix} 8.30 & 2.62+\alpha & 4.10 & 1.90 \\ 3.92 & 8.45 & 7.78-\alpha & 2.46 \\ 3.77 & 7.21+\alpha & 8.04 & 2.28 \\ 2.21 & 3.65-\alpha & 1.69 & 6.99 \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 16.92+\alpha \\ 22.61-\alpha \\ 21.3+\alpha \\ 14.54-\alpha \end{bmatrix}, \alpha=0.2k, k=0,\dots,n.$,

2) $A=\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}, k=n+3, n+4, n+5,\dots, b=\begin{bmatrix} n+3 \\ n+3 \\ n+3 \\ n+3 \end{bmatrix}, n=1,2,\dots$

4-§. Interpolyatsiya formulalarini qurish

Tayanch so'z va atamalar:
Lagranj interpolyatsiya ko'phadi, Nyuton interpolyatsiya ko'phadi.



24-rasm.

Lagranj interpolyatsiya ko'phadi: $L_n(t)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)l_i(t), l_i(t)=\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{t-x_j}{x_i-x_j}$

Mathcad dasturining ishchi oynasida quyidagi buyruqlarni beramiz:

$>n:=4\ \ f(t):=t*\sin(t)\ \ a:=0\ \ b:=4\ \ h:=(b-a)/n$ // tugun nuqtalar, funksiya
$>i:=0..n\ \ x_i:=a+ih\ \ y_i=f(x_i)$ // interpolyatsiya shartlari
$>x:=[0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4]^T\ \ y=[0\ \ 0.8415\ \ 1.8186\ \ 0.4234\ \ -3.0272]^T$ // qiymatlar
$>i:=0..n\ \ j:=0..n$ // indekslarning o'zgarish sohasi
$>Ln(t):=\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0}^{n} if(i=j, 1, (t-x_j)/(x_i-x_j))$ // Lagranj interpolyatsiya ko'phadi
$>Ln(2.3)=1.689\ \ f(2.3)=1.715\ \ Ln(1)=0.841\ \ Ln(2)=1.8186$ // qiymatlar.

Nyuton interpolyatsiya ko'phadi. $N_n(t)=f(x_0)+\sum_{i=1}^{n} f[x_0,\dots,x_i]\prod_{j=0}^{i-1}(t-x_j)$

Mathcad dasturining ishchi oynasida quyidagi buyruqlarni beramiz:

$>n:=4\ \ f(x):=x*\sin(x)\ \ a:=0\ \ b:=4\ \ h:=(b-a)/n$ // tugun nuqtalar, funksiya
$>i:=0..n\ \ x_i:=a+ih\ \ y_i=f(x_i)$ // interpolyatsiya shartlari

$>x:=[0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4]^T\ \ y=[0\ \ 0.8415\ \ 1.8186\ \ 0.4234\ \ -3.0272]^T$ // qiymatlar

$>$ k=0..n $\quad a_0:=f(x_0)\ a_k:=\sum_{i=0}^{k} y_i \prod_{j=0}^{k} if(i=j,1,1/(x_i-x_j))$ // bo'lingan

ayirmalar $>Nn(t):=a_0+\sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=0}^{i-1}(t-x_j)$ // Nyuton ko'phadi

$>Nn(2.3)=1.6893\ \ Nn(2)=1.8186\ \ Nn(3)=0.4234$ // natijalar

Olingan natijalarni qo'yidagicha taqqoslash mumkin:

Lagranj interpolyatsiya ko'p hadi	Nyuton interpolyatsiya ko'p hadi	Funksiya qiymati
$Ln\,(2,3)=1,689$	$Nn\,(2,3)=1,6893$	$S\,(2,3)=1,715$

Natijadan ko'rinib turibdiki, interpolyatsiyalashning ikki xil formulalari asosida ko'phadning koeffisientlarini hisoblashda juda kam farqlar mavjud. Olingan qiymatlar ham funksiyaning qiymatiga ancha yaqindir.

INDIVIDUAL TOPSHIRIQLAR

Berilgan funksiya uchun Nyuton, Lagranj interpolyatsiya ko'phadlari qurilsin, yechim Mathcad (Maple, Mathematica) dasturida ichki funksiyalar yordamida va algoritmlar tuzib olinsin, natijalarning yaqinligiga erishilsin. To'r nuqtalari $\{x_i=a+ih, i=0..n\}$ dan farqli uchta $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ nuqtalarda interpolyatsiya formulalari va funksiyaning qiymatlari hisoblanib, qiymatlar solishtirilsin. Grafiklar chizilsin.

T.r	Topshiriqlar	a	b	c	d	[a,b]	Nuqtalar soni	Funksiya hisoblanadigan nuqtalar
1		1	1				10	$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$
2		2	2			[0,2]		
3	f(x)=tg (ax)-bx	3	3					
4		4	4					
5		5	5					
6		6	6					
T.r	Topshiriqlar	a	b	c	d	[a,b]	Nuqtalar soni	Funksiya hisoblanadigan nuqtalar
13		1	1	1			10	$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$
14		2	2	2		[1,4]		
15	f(x)=asin(bx)-cx	3	3	3				
16		4	4	4				
17		5	5	5				
18		6	6	6				
19		1	1				10	$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$
20		2	2			[3,5]		
21		3	3					
22	f(x)=a exp(-bx)-x	4	4					
23		5	5					
24		6	6					
25		7	7					
26		8	8					
27		9	9					
28		1	1	1	1		10	$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$
29	$f(x)=a\,x^3+bx^2+cx+d$	2	2	2	2	[2.5]		
30		3	3	3	3			

5-§. Integrallarni hisoblash masalasi

Tayanch so‘z va atamalar: *to‘g’ri to‘rtburchaklar usuli, trapetsiya usuli, Simpson usuli, tugun nuqtalar, integral y'ig'indi.*

$J=\int_0^{\pi}\sin(x)dx$ integralni hisoblaylik, $J_h:=\sum_{i=0}^{n}c_i f(\xi_i)$ $R_h:=J-J_h$.

To‘g’ri to‘rtburchaklar formulasi.

$c_i=h, \xi_i=x_i+h/2, i=0..n-1, c_n=0$:

$$J_h^{TT}:=h\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i+h/2)\ ,\ R_h^{TT}=\frac{h^2(b-a)}{24}f''(c)\ .$$

Mathcad dasturining ishchi oynasida quyidagi buyruqlarni beramiz:

$> f(x):=\sin(x)\ \ a:=0\ \ b:=\pi\ \ n:=20$ // funksiya, oraliq, bo‘linishlar soni

$> J:=\int_a^b f(x)dx\qquad J=2$ // hisoblanadigan integralning aniq qiymati

$> h:=(b-a)/n\ \ i:=0..n\ \ x_i:=a+ih$ // qadam, tugun nuqtalar

Q$> JTT(n):=h\sum_{i=0}^{n}f(x_i-h/2)\quad JJT(n)=1.99$ // to‘g’ri to‘rt burchaklar formulasini ishlatish va yuzasining qiymati

Trapetsiya formulasi. $c_0=c_n=h/2, c_i=h, i=1..n-1, \xi_i=x_i, i=0..n$:

$$J_h^T:=h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]+h\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i),\ R_h^T=-\frac{h^2(b-a)}{12}f''(c),.$$

Mathcad dasturining ishchi oynasida quyidagi buyruqlarni beramiz:

$> f(x):=\sin(x)\ \ a:=0\ \ b:=\pi\ \ n:=20$ // funksiya, oraliq, bo‘linishlar soni

$> J:=\int_a^b f(x)dx\qquad J=2$ // hisoblanadigan integral

$> h:=(b-a)/n\ \ i:=0..n\ \ x_i:=a+ih$ // qadam, tugun nuqtalar

$> JT(n):=h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]+h\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\quad JT(n)=1.996$ // trapetsiya formulasini ishlatish va natija.

Simpson formulasi.

$c_0=c_{2m}=h/3, c_{2i-1}=4h/3, i=1..m, c_{2i}=2h/3, i=1..m-1$:

$$J_h^C:=\frac{h}{3}[f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{m}f(x_{2i-1})+2\sum_{i=1}^{m-1}f(x_{2i})],\ \ R_h^{TT}=-\frac{h^4(b-a)}{180}f^{(4)}(c)\ .$$

Mathcad dasturining ishchi oynasida quyidagi buyruqlarni beramiz:

$> f(x):=\sin(x)\ \ a:=0\ \ b:=\pi\ \ n:=20$ // funksiya, oraliq, bo‘linishlar soni

$> J:=\int_a^b f(x)dx$ // hisoblanadigan integral

$> h:=(b-a)/n\ \ i:=0..n\ \ x_i:=a+ih$ // qadam, tugun nuqtalar

$> JS(m):=\frac{h}{3}[f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{m}f(x_{2i-1})+2\sum_{i=1}^{m-1}f(x_{2i})]$ // Simpson formulasini qo‘llash

$> J=2\ \ JS(10)=2.0000067844$ // integralning aniq va taqribiy qiymati.

Natijalar aniq va taqribiy qiymatlarning ancha yagin ekanligini ko'rsatmoqda.

INDIVIDUAL TOPSHIRIQLAR.

Integrallar to'g'ri to'rtburchaklar, trapetsiya, Simpson usullari bilan topilsin. Yechimlar Mathcad (Maple, Mathematica) dasturida ichki funksiyalar va algoritmlar tuzib olinsin, natijalar tahlil etilsin.

N	$f(x)$	[a,b]	$F(x), F'(x)=f(x)$
1	$\ln x/(x\sqrt{1+\ln x})$	$[1,3.5]$	$2(\ln x+1)^{3/2}/3-2(\ln x+1)^{1/2}+4/3$
2	tg^2x+ctg^2x	$[\pi/6,\pi/3]$	$tgx-ctgx-2x-tg(\pi/6)+ctg(\pi/6)+\pi/3$
3	$1/x/\ln x$	$[2,3]$	$2.3026(\ln\ln x-\ln\ln 2)$
4	$\ln^2 x/x$	$[1,4]$	$\ln^3 x/3$
5	$\sqrt{e^x-1}$	$[0,\ln 2]$	$2\sqrt{e^x-1}-2arctg\sqrt{e^x-1}$
6	$xe^x\sin x$	$[0,1]$	$(xe^x(\sin x-\cos x)+e^x\cos x-1)/2$
7	$xshx$	$[0,2]$	$xchx-shx$
8	$1/\sqrt{9+x^2}$	$[0,2]$	$\ln(x+\sqrt{x^2+9})-\ln 3$
9	$x^{-2}\sin(1/x)$	$[1,2.5]$	$\cos(1/x)-\cos 1$
10	$xarctgx$	$[0,\sqrt{3}]$	$x^2arctgx/2-x/2+1/arctgx$
11	$\arcsin\sqrt{x/(1+x)}$	$[0,3]$	$x\arcsin\sqrt{x/(1+x)}-\sqrt{x}\_arctg\sqrt{x}$
12	$x^x(1+\ln x)$	$[1,3]$	x^x-1
13	$1/\sqrt{1+3x+2x^2}$	$[0,1]$	$\ln((x+0.75+\sqrt{(x+0.75)^2-0.0625})/(0.75+\sqrt{0.5})))/\sqrt{2}$
14	$(\sqrt{x^2-0.16})/x$	$[1,2]$	$(\sqrt{x^2-0.16})-0.4\arccos(0.4/x)-\sqrt{0.84}+0.4\arccos(0.4/x)$
15	2^{3x}	$[0,1]$	$(2^{3x}-1)/3/\ln 2$
16	$xarctgx/\sqrt{1+x^2}$	$[0,1]$	$\sqrt{1+x^2}arctgx-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$
17	$(e^{2x}+1)/(e^x+1)$	$[0,2]$	$e^{2x}/2-e^x+x+0.5$
18	$\sin^2 x$	$[0,\pi/2]$	$x/2-\sin 2x/4$
19	$x^2\sqrt{4-x^2}$	$[0,1.9999]$	$2\arcsin(x/2)-\sin(4\arcsin(x/2))/2$
20	$e^x\cos^2 x$	$[0,\pi]$	$e^x(1+(2\sin 2x+\cos 2x)/5)/2-0.6$
21	$(x\ln x)^2$	$[1,e]$	$x^3(9\ln^2 x-6\ln x+2)/27-2/9$
22	$\arcsin(\sqrt{x/(1+x)})$	$[0,1]$	$x\arcsin(\sqrt{x/(1+x)})-\sqrt{x+arctg\sqrt{x}}$
23	$(x^2-1)/(x^2+1)/\sqrt{1+x^2}$	$[0,1]$	$-\sqrt{2}\arcsin(\sin(2arctgx/\sqrt{2})/2$
24	$\sin x\ln(tgx)$	$[1,1.5]$	$\ln(tg(x/2))-\cos x\ln(tgx)-\ln tg0.5...$
25	$e^x(1+\sin x)/(1+\cos x)$	$[0,1.5]$	$e^x tg(x/2)$
26	$1/(3\sin x+2\cos x)$	$[0,1]$	$3/26-(3\cos x-2\sin x)/(13(2\cos x+3\sin x))$
27	$(\ln x/x)^2$	$[1,2]$	$-(\ln^3 x+3\ln^2 x/2+3\ln x+3/4)/2x^2$
28	$x^2/(3+x)$	$[1,2]$	$9x-3x^2/2+x^3/3-27\ln(3+x)-47/6+27$

6-§. Koshi masalasini yechish usullari

Tayanch so'z va atamalar:
differensial tenglama, ichki funksiyalar, origin.

Oddiy differensial tenglama uchun Koshi masalasini taqribiy yechishni ushbu misolda ko'ramiz: $y'=2.2/(x^2+y^2+2.6), y(0)=0$

Mathcad dasturining quyidagi ichki funksiyalari differensial tenglamalarni yechishga yordam beradi: bulstoer, bvalfit, Odesolve, Radau, Rkadapt, rkfixed, Sbval, Stiifb, Stiffr. Ularning ko'pchiligi asosida quyida qaralayotgan usullar yotadi. Sonli-taqribiy usullar sifatida Eyler (E) $y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i)$, takomillashgan Eyler (TE) $y_{i+0.5}=y_i+hf(x_i,y_i)/2, y_{i+1}=y_i+hf(x_{i+0.5},y_{i+0.5})/2$, prognoz-korreksiya (PK) $\bar{y}_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i), y_{i+1}=y_i+hf(x_{i+1},\bar{y}_{i+1})$, Runge-Kutta (RK) $y_{i+1}=y_i+(k_1+2k_2+2k_3+k_4)/6$, $k_1=hf(x_i,y_i)$, $k_2=hf(x_i+h/2,$ $k_3=hf(x_i+h/2,y_i+hk_2)$, $k_4=hf(x_{i+1},y_i+hk_3)$ usullarini qaraymiz. Mathcad dasturining ishchi oynasida quyidagi buyruqlarni beramiz:

$>a:=0\ b:=0\ n:=10\ h:=(b-a)/n\ Origin:=0\ i:=0..n\ x_i:=a+ih$ // oraliq, nuqtalar

$>f(x,y):=2.2/(x^2+y^2+2.6)\ \ y_0:=0$

//**d**ifferensial tenglamaga mos funksiya va boshlang'ich shart

$>y_{i+1}:=y_i+hf(x_i,y_i)$ // E usuli

$>y12_{i+1}:=y_i+\frac{h}{2}f(x_i,y_i)\ \ yTE_{i+1}:=y_i+hf(x_i+\frac{h}{2},y12_i)$ // TE usuli

$>yPK_{i+1}:=y_i+hf(x_i+h,y_{i+1})$ // PK usuli

$>k1_i:=hf(x_i,y_i)\ \ k2_i:=hf(x_i+h/2,y_i+hk1_i/2)$ // RK usuli koeffisientlari

$>k3_i:=hf(x_i+h/2,y_i+hk2_i/2)\ \ k4_i:=hf(x_i+h,y_i+hk3_i)$ // RK usuli koeffisientlari

$>yRK_{i+1}:=y_i+\frac{1}{6}(k1_i+2k2_i+2k3_i+k4_i)$ // RK usuli ishchi formulasi

Hisoblashlarni bajarib, ushbu natijalar olindi:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E	0.085	0.169	0.251	0.331	0.408	0.481	0.55	0.614	0.675	0.732
TE	0.085	0.168	0.251	0.331	0.407	0.48	0.549	0.614	0.675	0.731
PK	0.084	0.167	0.249	0.328	0.404	0.477	0.545	0.61	0.671	0.728
RK	0.085	0.168	0.25	0.33	0.406	0.479	0.548	0.613	0.674	0.731

Olingan natijalar barcha hisoblash usullarida bir-biriga ancha yaqin ekanligini ko'rsatadi.

INDIVIDUAL TOPSHIRIQLAR.

Koshi masalasining taqribiy yechimi Eyler, Runge-Kutta usullari bilan hisoblansin. Mathcad (Maple, Mathematica) dasturida ichki funksiyalar va algoritmlar tuzib natijalar olinsin va tahlil etilsin.

N	Differensial tenglama	[a,b]	Boshqani shart	hq (b-a)/n	Aniq yechim
1	$y'-xy=-x^2\sin x$	[0,0.5]	$y(0)=1$	0.1	$\cos x+x\sin x$
2	$(1+x)y'-y=2-2\ln(1+x)$	[0,0.5]	$y(0)=1$	0.05	$1+x+2\ln(1+x)$
3	$y'-y=e^{-x}(\cos x-\sin x)$	[0,0.5]	$y(0)=1$	0.05	$e^{-x}(\cos x+\sin x)$
4	$y'+2y=e^{-2x}$	[0,1]	$y(0)=1$	0.1	$(1+x)e^{-2x}$
5	$y'-2y=-4\cos 2x$	[0,0.2]	$y(0)=1$	0.02	$\cos 2x-\sin 2x$
6	$y'-y=2e^{-x}$	[0,2]	$y(0)=2$	0.2	$e^{x}+e^{-x}$
7	$y'-5y=-2e^{3x}$	[0,0.2]	$y(0)=2$	0.02	$e^{5x}+e^{3x}$
8	$y'+2y=4\cos 2x$	[0,1]	$y(0)=1$	0.1	$\cos 2x+\sin 2x$
9	$y'+y=6e^{3x}$	[0,1]	$y(0)=2$	0.1	$e^{3x}+e^{-3x}$
10	$y'-y=e^{x}$	[0,1]	$y(0)=1$	0.1	$e^{x}(1+x)$
11	$y'+y=5e^{2x}$	[0,1]	$y(0)=0$	0.1	$e^{2x}-e^{-3x}$
12	$y'+(3/4)y=(5/4)e^{x/2}$	[0,1]	$y(0)=2$	0.1	$e^{x/2}+e^{-3x/4}$
13	$xy'-y=x^2-x-1$	[1,2]	$y(0)=0$	0.1	x^2+x
14	$y'+3y=0$	[0,0.5]	$y(0)=1$	0.05	$e^{-3x}(\cos x+\sin x)$
15	$y'+2y=2.5e^{3x}+1.5e^{x}$	[0,1]	$y(0)=0$	0.02	$-e^{2x}+0.5e^{3x}+0.5e^{x}$
16	$y'-y=0.1e^{2x}-0.5x^2-2x-1$	[0,1.5]	$y(0)=5.1$	0.1	$e^{x}+0.1e^{2x}+0.5x^2+3x+4$
17	$y'+y=2\cos x+1+e^{x}$	[1,1.5]	$y(0)=2.5$	0.1	$\cos x+\sin x+1+e^{x}/2$
18	$x^2y-xy=-2$	[1,1.5]	$y(0)=4$	0.05	$2x+1/x+x^2$
N	Differensial tenglama	[a,b]	Boshlang'ich shart	h=(b-a)/n	Aniq yechim
19	$xy'+y=5\ln x-1$	[1,1.5]	$y(1)=5$	0.05	$5-\ln x$
20	$y'-y=e^{x}-x^2e^{x}/3$	[0,0.5]	$y(0)=1$	0.05	$(1+x)e^{x}+x^3e^{x}/6$
21	$y-2y=2e^{3x}$	[0,1]	$y(0)=2$	0.1	$e^{x}+e^{2x}$
22	$2xy'-y=4x^{-2}$	[1,2]	$y(0)=2$	0.1	$3\sqrt{x}-x^{-2}$
23	$2\sqrt{x}y'+y=2\cos\sqrt{x}$	[1,2]	$y(0)=1$	0.1	$\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}$
24	$10y'-3y=20x-0.3x^3-1$	[1,2]	$y(0)=1/3$	0.1	$x^2+0.1x^3+1/3$
25	$y'+y=2e^{x}$	[0,1]	$y(0)=2$	0.1	$e^{x}+e^{-x}$
26	$y'+2y=4\cos 2x$	[0,0.5]	$y(0)=1$	0.05	$\sin 2x+\cos 2x$
27	$y'+0.5y=1.5e^{x}$	[0,1]	$y(0)=1$	0.1	$e^{x}+e^{-x/2}$
28	$y'-y=xe^{-2x}-2(1+x)$	[0,0.5]	$y(0)=1$	0.05	$(1+x)e^{-3x}$

Olingan natijalar barcha hisoblash usullarida bir-biriga ancha yaqin ekanligini ko'rsatadi.

INDIVIDUAL TOPSHIRIQLAR.

Koshi masalasining taqribiy yechimi Eyler, Runge-Kutta usullari bilan hisoblansin. Mathcad (Maple, Mathematica) dasturida ichki funksiyalar va algoritmlar tuzib natijalar olinsin va tahlil etilsin.

N	Differensial tenglama	[a,b]	Boshqani shart	hq (b-a)/n	Aniq yechim
1	$y'-xy=-x^2\sin x$	[0,0.5]	$y(0)=1$	0.1	$\cos x+x\sin x$
2	$(1+x)y'-y=2-2\ln(1+x)$	[0,0.5]	$y(0)=1$	0.05	$1+x+2\ln(1+x)$
3	$y'-y=e^{-x}(\cos x-\sin x)$	[0,0.5]	$y(0)=1$	0.05	$e^{-x}(\cos x+\sin x)$
4	$y'+2y=e^{-2x}$	[0,1]	$y(0)=1$	0.1	$(1+x)e^{-2x}$
5	$y'-2y=-4\cos 2x$	[0,0.2]	$y(0)=1$	0.02	$\cos 2x-\sin 2x$
6	$y'-y=2e^{-x}$	[0,2]	$y(0)=2$	0.2	$e^{x}+e^{-x}$
7	$y'-5y=-2e^{3x}$	[0,0.2]	$y(0)=2$	0.02	$e^{5x}+e^{3x}$
8	$y'+2y=4\cos 2x$	[0,1]	$y(0)=1$	0.1	$\cos 2x+\sin 2x$
9	$y'+y=6e^{3x}$	[0,1]	$y(0)=2$	0.1	$e^{3x}+e^{-3x}$
10	$y'-y=e^{x}$	[0,1]	$y(0)=1$	0.1	$e^{x}(1+x)$
11	$y'+y=5e^{2x}$	[0,1]	$y(0)=0$	0.1	$e^{2x}-e^{-3x}$
12	$y'+(3/4)y=(5/4)e^{x/2}$	[0,1]	$y(0)=2$	0.1	$e^{x/2}+e^{-3x/4}$
13	$xy'-y=x^2-x-1$	[1,2]	$y(0)=0$	0.1	x^2+x
14	$y'+3y=0$	[0,0.5]	$y(0)=1$	0.05	$e^{-3x}(\cos x+\sin x)$
15	$y'+2y=2.5e^{3x}+1.5e^{x}$	[0,1]	$y(0)=0$	0.02	$-e^{2x}+0.5e^{3x}+0.5e^{x}$
16	$y'-y=0.1e^{2x}-0.5x^2-2x-1$	[0,1.5]	$y(0)=5.1$	0.1	$e^{x}+0.1e^{2x}+0.5x^2+3x+4$
17	$y'+y=2\cos x+1+e^{x}$	[1,1.5]	$y(0)=2.5$	0.1	$\cos x+\sin x+1+e^{x}/2$
18	$x^2y-xy=-2$	[1,1.5]	$y(0)=4$	0.05	$2x+1/x+x^2$
N	Differensial tenglama	[a,b]	Boshlang'ich shart	h=(b-a)/n	Aniq yechim
19	$xy'+y=5\ln x-1$	[1,1.5]	$y(1)=5$	0.05	$5-\ln x$
20	$y'-y=e^{x}-x^2e^{x}/3$	[0,0.5]	$y(0)=1$	0.05	$(1+x)e^{x}+x^3e^{x}/6$
21	$y-2y=2e^{3x}$	[0,1]	$y(0)=2$	0.1	$e^{x}+e^{2x}$
22	$2xy'-y=4x^{-2}$	[1,2]	$y(0)=2$	0.1	$3\sqrt{x}-x^{-2}$
23	$2\sqrt{x}y'+y=2\cos\sqrt{x}$	[1,2]	$y(0)=1$	0.1	$\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}$
24	$10y'-3y=20x-0.3x^3-1$	[1,2]	$y(0)=1/3$	0.1	$x^2+0.1x^3+1/3$
25	$y'+y=2e^{x}$	[0,1]	$y(0)=2$	0.1	$e^{x}+e^{-x}$
26	$y'+2y=4\cos 2x$	[0,0.5]	$y(0)=1$	0.05	$\sin 2x+\cos 2x$
27	$y'+0.5y=1.5e^{x}$	[0,1]	$y(0)=1$	0.1	$e^{x}+e^{-x/2}$
28	$y'-y=xe^{-2x}-2(1+x)$	[0,0.5]	$y(0)=1$	0.05	$(1+x)e^{-2x}$

$m =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.95	-1.999	1.05	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0.95	-1.998	1.05	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0.95	-1.997	1.05	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0.95	-1.996	1.05	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0.95	-1.995	1.05	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0.95	-1.994	1.05	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0.95	-1.993	1.05	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0.95	-1.992	1.05
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0.95	-1.991
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$d =$

	0
0	0
1	$6.301 \cdot 10^{-3}$
2	0.013
3	0.021
4	0.029
5	0.038
6	0.048
7	0.059
8	0.071
9	0.085
10	0.1

Yechimning to'r nuqtalardagi qiymatlari: $> u := m^{-1} d$ $u^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.526E-3	0.907E-3	0.028	0.065	0.126	0.217	0.344	0.513	0.729	1

Olingan natijalar aniq yechimning tugun nuqtalardagi qiymatlariga juda yaqindir.

8-§. Chegaraviy masalani yechishning Galyorkin usuli

Tayanch so'z va atamalar:
differensial tenglama, chegaraviy shartlar, bazis funksiya, analitik yechim.

Oddiy differensial tenglama uchun chegaraviy masala quyidagicha qo'yilgan bo'lsin:

$Lu \equiv u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x),\ a \le x \le b,$ (differensial tenglama-DT),

$l_0 u \equiv \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = \gamma_0,\ l_1 u \equiv \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = \gamma_1$ (chegaraviy shartlar-CHSH).

Differensial tenglama va chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $u = u(x) \in C^2[a,b]$ funksiyani topish kerak.

Galyorkin usulida taqribiy yechim $u_n(x) \approx u(x)$ quyidagicha izlanadi:

$$u_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x),\ c_j\text{-?}.$$

Bu erda $\varphi_i(x)$ bazis funksiyalar bo'lib, ular turli hil chegaraviy shartlarda turlicha tanlanadi.

Galerkin usulida koeffisientlar quyidagicha topiladi:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j (L\varphi_j, \varphi_i) = (f - L\varphi_0, \varphi_i),\ (f,g) = \int_b^a f(x)g(x)dx,\quad i,j = 1,..n$$

Bazis funksiyalarni tanlash:

1-tur chegara shartlari: u(a)=A, u(b)=B , $\varphi_0^1(x) = A + (B-A)(x-a)/(b-a)$,

a) $\varphi_i(x) = (x-a)^i (b-x), i \ge 1$ **;b)** $\varphi_i(x) = \sin(\frac{i(x-a)}{b-a}\pi),\quad i \ge 1.$

2-tur chegara shartlari: u'(a)=A, u'(b)=B ,

$\varphi_0^2(x) = \int \varphi_0^1(x)dx = Ax + (B-A)(x-a)^2/(2(b-a)) + C,$

a) $\varphi_i(x) = (x-a)^{i+1}(b-x)^2,\ i \ge 1;$ b) $\varphi_i(x) = Cos(\frac{i(x-a)}{b-a}\pi),\ i \ge 1$

3-tur chegara shartlari: $\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = A,\ \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = B,$

$\varphi_0(x) = \delta + \gamma(x-a) => \alpha_0\delta + \alpha_1\gamma = A,\ \beta_0\delta + (\beta_0(b-a) + \beta_1)\gamma = B,$

$a)\ \varphi_i(x) = (x-a)^{i+1}(b-x)^2, i \ge 1;\ b)\ \varphi_i(x) = (x-a)^{i+1}[\gamma_i + (x-a)],\ i \ge 1$

Mathcad dasturining ishchi oynasida quyidagi buyruqlarni beramiz:

$> p(t) := \sin(t)\ q(t) := \cos(t)\ f(t) := 6t + 3t^2 \sin(t) + t^3 \cos(t)$

$// u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t)$

$> \pi := 3.14\ \varphi_0(t) := 1\ n := 5\ i := 1..n\ j := 1..5\ t_0 := 0\ t_n := 1$ // oraliq, parametrlar

> $h:=(t_n-t_0)/n$ $\varphi(j,t):=\sin(j\cdot\pi\cdot t)$ $i:=1..n$ Origin:=0 // qadam, bazis funksiya

> $\psi(j,t):=\varphi''(j,t)+p(t)\varphi'(t)+q(t)\varphi(t)$ $\chi(t):=f(t)-\varphi_0''(t)-p(t)\varphi_0'(t)-q(t)\varphi_0(t)$

> $a_{i,j}:=\int_0^1 \psi(j,t)\varphi(i,t)dt$ $b_i:=\int_0^1 \chi(t)\varphi(i,t)dt$ // CHATS elementlari

$$> A:=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{bmatrix} \quad b:=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix}$$ //A-matrisa, b-o'ng tomon

> $c:=A^{-1}b$ $c:=[-0.381\ \ 0.058\ \ -0.011\ \ 0.0004666\ \ -0.0000987]^T$

// izlanayotgan analitik funksiya koeffisientlari

> $u(t):=\varphi_0(t)+\sum_{j=1}^{5} c_j\varphi(j,t)$ // yechim funksiya

> $u(0.2)=0.013$ $u(0.4)=0.062$ $u(0.6)=0.073$ $u(0.8)=0.042$ //qiymatlar.

Nuqtalarning qiymatlarini jadvalda keltiramiz:

Nuqtalar	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Galyorkin	-10E-3	0.013	0.038	0.062	0.074	0.073	0.061	0.042	0.021

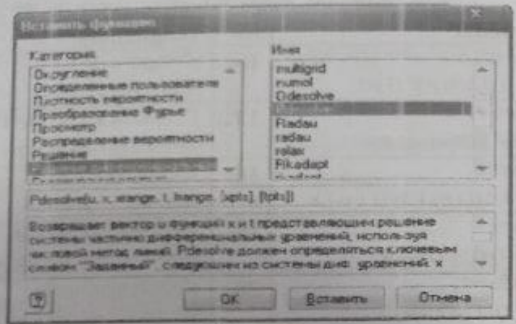
INDIVIDUAL TOPSHIRIQLAR

Quyidagi ikkinchi tartibli chiziqli oddiy differensial tenglamaga mos chegaraviy masala uchun chekli ayirmali sxemalar tuzilib, Galerkin usullari va haydash usullari bilan yechilsin. Yechim Mathcad (Maple, Mathematica) dasturida ichki funksiyalar va algoritmlar yordamida olinib, natijalar taqqoslansin: $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$, $\alpha_0 y(a)+\alpha_1 y'(a)=\gamma_0$, $\beta_0 y(b)+\beta_1 y'(b)=\gamma_1$

№	Tenglamalar	№	Tenglamalar
1	$y''+2xy'+3y=1.5$, $y'(0,6)=1.1, 0.4y(1)+y'(1)=2$	16	$y''+ctg(x)y'-y=3$ $y(0)=1, y(\pi/2)=1.6$
2	$y''-xy'+3y=x+1$ $y(0.8)-0.5y'(0.8)=1, y(1.8)=1$	17	$y''+(0.1+2x)y'-(5x+1)y=1.2$ $y(0)=2.2$ $y(1)+0.4y'(1)=1.8$
3	$y''+y'/3+xy=2$ $y(0.6)=1.4, 2y(1.6)-1.5y'(1.6)=1.8$	18	$y''+\sin xy'-2y=3x+1$ $y(0)=1.2,\ y(\pi/4)=1.8$
4	$y''-0.6y'/x=x$ $y(0)=1, y(1)-0.5y'(1)=1.8$	19	$y''+(0.3+1)y'-1.8xy=1.4$ $y(0)=2,\ y(1)+0.8y'(1)=2.6$
5	$y''+xy'-y/(2x)=1$, $y(2)+2y'(2)=1, y(2.8)=2.5$	20	$y''+(0.2x+1)y'-4y=3x$, $y(1.1)=1.7, y(2.1)+2.4y'(2.1)=3.6$
6	$y''+0.4xy'-2yx=4x$, $y(0.2)-1.5y'(0.2)=1, y(1.2)-0.5y'(1.2)=2$	21	$y''+(0.4x+1)y'-1.4y=2x+1$ $y(0)+1.4y'(0)=1.6, y'(0.6)=4.2$
7	$y''+(1.5)y'-(3x+0.5)y=4$ $y(0.6)=1.4, 2y(1.6)-1.5y'(1.6)=1.8$	22	$y''-(3x+1)y'+\cos xy=3x\sin x$ $y(0)+1.2y'(0)=3.3, y(\pi/2)-1.4y(\pi/2)=4.2$
8	$y''+\sin xy'+2yx=1.2$ $y(0)=1.4, y(\pi/2)-2y'(\pi/2)=2.2$	23	$y''+(2.3x+4)y'-6xy=4x$ $y(0)-1.2y'(0)=1.2,\ y'(0.8)=1.4$
9	$y''-\sin xy'+(x+1)y=2x+1$ $y(0.1)=1.4$ $y(1.1)-2.3y'(1.1)=2.3$	24	$y''+(3x+1)y'-\cos xy=\sin x$ $y(1.1)-1.4y'=1$ $y(2.1)-2.1y'(2.1)=2$
10	$y''+\cos xy'+(3x^2+1)y=-2.2x$ $y(0)=0.5,\ y(1)=2.4$	25	$y''-(3x+1)y'-4x=2$ $y(0)+1.4y'-4x=2,\ y'(0.4)=2.5$
11	$y''-3xy'-1.5y=x+1$ $1.2y(1.1)+0.6y'(1.1)+2=1.4$ $y(1.2)-0.5y'(1.2)=2.1$	26	$y''+y'/(3x)-y=3/x$ $y(0.6)=1.3$ $0.5y(1.6)-1.2y'(1.6)=2.4$
12	$y''-(x+1)y'+3xy=2x^2$ $y(1.4)=1,\ y(2.4)-3.2y'(2.4)=1.2$	27	$y''-3xy'-y/(2x)=0.7$ $y(0.4)=1.4, y(0.7)+1.4y'(0.7)=2.1$
13	$y''-(2x+1)y'-3xy=x$ $1.1y(0)-0.2y'(0)=1.1, y(1)+0.5y'(1)=2$	28	$y''+2x^2y'+y=x+1$ $y(0.7)-2y'(0.7)=1, y(1.7)-3y'(1.7)=2.3$
14	$y''-(x+3)y'-(4x+1)y=2x$ $y(0)=1.4\ ,\ y'(1)=2.4$	29	$y''-y'/2+2y/x=x/4$ $1.1y(1.1)-y'(1.1)=0.9, 3y(1.6)+0.5y'(1.6)=1.8$
15	$y''+(2x+0.5)y'+xy=1.7$, $y(0)=1, 2y(1)+0.5y'(1)=1.4$	30	$y''+3y'-y/x=x+1$, $y(0.5)=1, y(0.8)-2y'(0.8)=1.4$

9-§. Parabolik tipdagi hususiy hosilali differensial tenglamalar

Tayanch so'z va atamalar: *parabolik tip,xususiy hosila, pdesolve, oshkor va oshkormas sxemalar.*



25-rasm.

7-bobda qaralgan xususiy hosilali differensial tenglamalarni MathCadda yechish uchun ko'plab ichki funksiyalar mavjud: multigrid, numol, Pdesolve, relax, multigrid, relax- Puasson $\Delta u = \rho(x,y)$ tenglamasi uchun mo'ljallangan, numol, Pdesolve-vaqtga bog'liq DTlar uchun mo'ljallangan. Ularning ko'rinishlari quyidagicha: Pdesolve(u, x, xrange, t, trange, [xpts], [tpts]), Multigrid(ρ,ncycle), relax(a,b,c,d,e, ρ,u,r), numol(xrange, rows,trange, colomns,num_e, num_a,F,init,bc_F).

MathCadda differensial tenglamalarni ichki funksiyalar yordamida taqribiy yechish usullari.

1)Funksiya Pdesolve(u, x, xrange, t, trange, [xpts], [tpts]) x va t o'zgaruvchilarga bog'liq parabolik va giperbolik tipdagi differensial tenglama yoki tenglamalar sistemasini funksiya yoki vektor funksiya ko'rinishdagi yechimni izlaydi. Bu erda xrange, trange-ikki elementli vektor ustun ko'rinishdagi x va t o'zgaruvchilarning o'zgarish oraliqlari; xpts, tpts - x va t o'zgaruvchilarning o'zgarish oraliqlarini butun sonli bo'linish sonlari. Tenglama va qo'shimcha shartlar Given .. Pdesolve blokida beriladi.

2)Funksiya numol(xrange, rows,trange, colomns,num_e, num_a,F,init,bc_F). Bu erda xrange, trange-ikki elementli vektor ustun ko'rinishdagi x va t o'zgaruvchilarning o'zgarish oraliqlari;

rows, colomns- x, y-oraliqlari bo'yicha bo'linishlar soni; num_e, num_a-differensial va algebraik tenglamalar soni; F-o'ng tomonlar vektori; va init- boshlang'ich vektor funksiyasi, bc_F-chegara shartlar matrisasi.

Misol 1.

$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - 2\sin(2t) + x^2e^t - 2e^t, u(x,0) = 1 + x^2, u(0,t) = \cos(2t), u(1,t) = \cos(2t) + e^t$

chegara masala yechish. (aniq yechim $ua(x,t) = \cos(2t) + x^2e^t$)

$m := 10 \quad n := 5 \quad ua(x,t) := \cos(2\cdot t) + x^2\cdot e^t \quad u0(x) := ua(x,0) \quad g1(t) := ua(0,t) \quad g2(t) := ua(1,t)$

$f(x,t) := \left(\frac{d}{dt}ua(x,t)\right) - \left(\frac{d^2}{dx^2}ua(x,t)\right)$

Given PDE $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + f(x,t)$ with boundary conditions

$u(x,0) = u0(x) \quad u(0,t) = g1(t) \quad u(L,t) = g2(t) \quad L \equiv 1 \quad T \equiv 1$

$u := \text{Pdesolve}\left[u, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}, 10, 5\right]$

$i := 1..10 \quad j := 1..5 \quad x_i := i\cdot\frac{1}{m} \quad t_j := j\cdot\frac{1}{n} \quad va_{i,j} := ua(x_i,t_j) \quad v_{i,j} := u(x_i,t_j)$

$va^T =$

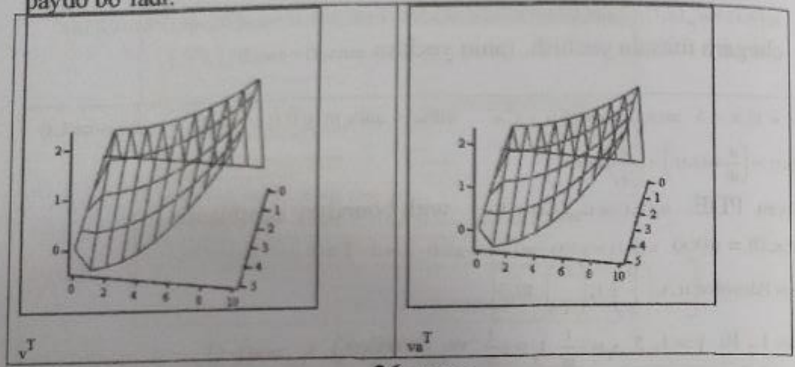
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0.933	0.97	1.031	1.116	1.226	1.361	1.52	1.703	1.91	2.142
2	0	0.712	0.756	0.831	0.935	1.07	1.234	1.428	1.651	1.905	2.189
3	0	0.381	0.435	0.526	0.654	0.818	1.018	1.255	1.529	1.838	2.184
4	0	-0.007	0.06	0.171	0.327	0.527	0.772	1.061	1.395	1.773	2.196
5	0	-0.389	-0.307	-0.172	0.019	0.263	0.562	0.916	1.324	1.786	2.302

$v^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0.912	0.954	1.016	1.102	1.213	1.347	1.507	1.69	1.898	2.139
2	0	0.685	0.738	0.814	0.92	1.056	1.221	1.416	1.64	1.895	2.182
3	0	0.36	0.43	0.522	0.652	0.817	1.019	1.257	1.531	1.843	2.197
4	0	-0.019	0.067	0.181	0.338	0.54	0.785	1.075	1.41	1.79	2.231
5	0	-0.386	-0.302	-0.164	0.027	0.272	0.57	0.923	1.329	1.789	2.302

v^T va va^T taqribiy yechim va aniq yechimning to'r nuqtalaridagi qiymatlari jadvali asosida ularning grafiklarini chizamiz. Sirt grafigini chizish uchun funksiya berilgan sohada nuqtalar to'ri yasaladi va to'rda funksiya qiymatlari jadvali hisoblanadi. So'ng / Вставить /

Графики / yoki Ctrl+2 yoki qurollar panelidan > tugmalar bosiladi. Natijada uch o'lchovi koordinata o'qlari kelib chiqadi. Uning chap quyi burchagida turgan markerdagi to'rtburchak o'rniga massiv nomi v^T va va^T ni kiritib, Enter bosilsa jadval qiymatlariga mos grafik paydo bo'ladi.



26-rasm.

Parabolik tipdagi differensial tenglamani yechish uchun oshkor va oshkormas sxemali chekli ayirmali usullarni qo'llash.

7-bob 3-§ da parabolik tipdagi tenglamani oshkor sxemali chekli ayirmali formulalar yordamida yechish algoritmi keltirilgan edi. Endi uni MathCadda yechishni tashkil etish masalasi qaraladi:

$a := 0 \quad b := 1 \quad m := 10 \quad i := 0..m \quad T := 0.01 \quad h := \frac{b-a}{m} \quad h = 0.1 \quad n := 50 \quad j := 0..n \quad \tau := \frac{T}{n}$

$r := \frac{\tau}{h^2} \quad r = 0.02 \quad ua(x,t) := x^2 + t^2 \quad g(x) := ua(x,0) \quad g1(t) := ua(0,t) \quad g2(t) := ua(1,t)$

$x_i := a + i \cdot h \quad t_j := j \cdot \tau \quad \tau = 0$

$f(x,t) := \frac{d}{dt} ua(x,t) - \frac{d^2}{dx^2} ua(x,t) \quad u_{i,0} := g(x_i) \quad u_{0,j} := g1(t_j) \quad u_{m,j} := g2(t_j)$

$i := 1..m-1 \quad j := 0..n-1 \quad u_{i,j+1} := r \cdot u_{i-1,j} + (1 - 2 \cdot r) \cdot u_{i,j} + r \cdot u_{i+1,j} + \tau \cdot f(x_i, t_j)$

$i := 1..m \quad j := 0..n \quad ua_{i,j} := ua(x_i, t_j)$

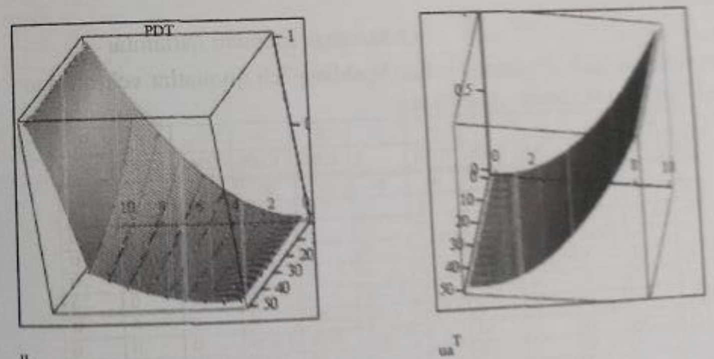
Ox o'qini gorizontal, Ot o'qini vertikal joylashtirish uchun u ni transpozisiyalaymiz:

$u^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1
1	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1
2	0	0.009	0.038	0.087	0.155	0.243	0.35	0.477	0.624	0.81	1
3	0	0.008	0.036	0.084	0.15	0.236	0.341	0.465	0.608	0.81	1
4	0	0.008	0.035	0.081	0.145	0.229	0.331	0.453	0.593	0.809	1
5	0	0.007	0.033	0.078	0.141	0.222	0.322	0.441	0.578	0.808	1
6	0	0.006	0.032	0.075	0.136	0.216	0.313	0.429	0.563	0.807	1
7	0	0.006	0.03	0.072	0.132	0.21	0.305	0.418	0.548	0.806	1
8	0	0.005	0.029	0.069	0.128	0.203	0.296	0.407	0.535	0.804	1
9	0	0.004	0.027	0.067	0.124	0.197	0.288	0.396	0.521	0.802	1
10	0	0.004	0.026	0.064	0.12	0.192	0.28	0.386	0.508	0.8	1

$ua^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1
1	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1
2	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1
3	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1
4	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1
5	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1
6	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1
7	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1
8	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1
9	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1
10	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1



27-rasm.

Olingan natijalarni grafik tasvirini hosil qilish orqali aniq va taqribiy yechimlar orasidagi tafovutni ko'rish mumkin:

7-bob 3-§ da parabolik tenglama oshkormas chekli ayirmali almashtirishlar yordamida ham yechilgan. Uni MathCadda yechishni tashkil etish uchun quyidagi buyruqlar kiritiladi:

$>u_t = u_{xx} + f(x,t)\ \ ua(x,t) = e^{-p\cdot t}\cdot\sin(\pi\cdot x)\ \ f(x,t) = e^{-p\cdot t}\cdot\sin(\pi\cdot x)\cdot(\pi^2 - p)\ \ g1(t) = u(0,t)$

$g2(1,t) = u(1,t)$

$> x0 := 0\ \ xk := 1\ \ u0(x) := \sin(\pi\cdot x)\ \ m := 10\ \ h := \dfrac{(xk - x0)}{m}\ \ i := 0..m\ \ x_i := x0 + i\cdot h$

//Boshlang'ich shart

$>t0 := 0\ \ tk := 0.25\ \ n := 8\ \ \tau := \dfrac{(tk - t0)}{n}\ \ j := 0..n\ \ t_j := t0 + j\cdot\tau\ \ r := \dfrac{\tau}{h^2}\ \ \tau = 0.031$ //

Qadamlar

$>g1(t) := 0\ \ g2(t) := 0\ \ p := 3\ \ ua_{i,j} := e^{-p\cdot t_j}\cdot\sin(\pi\cdot x_i)$ //Chegaraviy shart, parametr, aniq yechim

$>h = 0.1\ \ r = 3.125\ \ A_{0,0} := 1\ \ i := 1..m\ \ A_{0,i} := 0\ \ u_i := u0(x_i)\ \ A_{m,m} := 1\ \ i := 0..m-1$

$A_{m,i} := 0\ \ i := 1..m-1\ \ A_{i,i-1} := -r\ \ A_{i,i+1} := -r\ \ A_{i,i} := 1 + 2\cdot r\ \ i := 0..m\ \ j := 0..n$

$f_{i,j} := (\pi^2 - p)\cdot\left(e^{-p\cdot t_j}\cdot\sin(\pi\cdot x_i)\right)$ // CHATS

$>i := 1..m-1\ \ j := 0..n-1\ \ d_{0,j} := g1(t_{j+1})\ \ d_{m,j} := g2(t_{j+1})\ \ d_{i,j} := \tau\cdot f_{i,j+1}$ //O‘ng tomon

$>j := 0..n-1\ \ u^{\langle j+1\rangle} := A^{-1}\cdot(d^{\langle j\rangle} + u^{\langle j\rangle})$ //Oshkormas sxemani qatlamlar bo‘yicha yechish. // Nazorat uchun boshlang’ich qiymatlar vektorini va CHATS matrisasini chiqaramiz:

$u^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.309	0.588	0.809	0.951	1	0.951	0.809	0.588	0.309	0

$A =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-3.125	7.25	-3.125	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	-3.125	7.25	-3.125	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	-3.125	7.25	-3.125	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	-3.125	7.25	-3.125	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	-3.125	7.25	-3.125	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	-3.125	7.25	-3.125	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	-3.125	7.25	-3.125	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	-3.125	7.25	-3.125	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	-3.125	7.25	-3.125
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

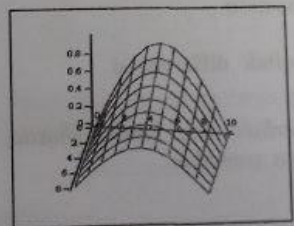
// Taqribiy yechim va aniq yechim jadvallari:

$u^T =$

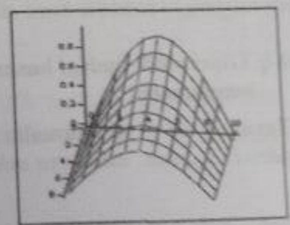
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.309	0.588	0.809	0.951	1	0.951	0.809	0.588	0.309	0
1	0	0.283	0.538	0.741	0.871	0.915	0.871	0.741	0.538	0.283	0
2	0	0.259	0.492	0.677	0.796	0.837	0.796	0.677	0.492	0.259	0
3	0	0.236	0.45	0.619	0.728	0.765	0.728	0.619	0.45	0.236	0
4	0	0.216	0.411	0.565	0.665	0.699	0.665	0.565	0.411	0.216	0
5	0	0.197	0.375	0.516	0.607	0.638	0.607	0.516	0.375	0.197	0
6	0	0.18	0.342	0.471	0.554	0.582	0.554	0.471	0.342	0.18	0
7	0	0.164	0.312	0.43	0.505	0.531	0.505	0.43	0.312	0.164	0
8	0	0.15	0.285	0.392	0.461	0.484	0.461	0.392	0.285	0.15	0

$ua^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.309	0.588	0.809	0.951	1	0.951	0.809	0.588	0.309	0
1	0	0.281	0.535	0.737	0.866	0.911	0.866	0.737	0.535	0.281	0
2	0	0.256	0.487	0.671	0.788	0.829	0.788	0.671	0.487	0.256	0
3	0	0.233	0.444	0.611	0.718	0.755	0.718	0.611	0.444	0.233	0
4	0	0.212	0.404	0.556	0.654	0.687	0.654	0.556	0.404	0.212	0
5	0	0.193	0.368	0.506	0.595	0.626	0.595	0.506	0.368	0.193	0
6	0	0.176	0.335	0.461	0.542	0.57	0.542	0.461	0.335	0.176	0
7	0	0.16	0.305	0.42	0.493	0.519	0.493	0.42	0.305	0.16	0
8	0	0.146	0.278	0.382	0.449	0.472	0.449	0.382	0.278	0.146	0



u^T



ua^T

28-rasm.

Olingan natijalar aniq yechimning qiymatlariga juda yaqin ekanligi ko‘rinib turibdi.

INDIVIDUAL TOPSHIRIQLAR

$u_t - u_{xx} = f(x,t)$, $u(x,0) = g(x)$, $u(0,t) = \mu_1(t), u(1,t) = \mu_2(t)$ DT uchun oshkor va oshkormas sxemalar tuzilsin va Mathcad (Maple) dasturida ichki funksiyalar va algoritmlar tuzib yechilsin, natijalar tahlil etilsin.

№	$u(x,t)$	$u(x,0)$	$u(0,t)$	$u(1,t)$	$f(x,t)$
1	$x(1-x)\sin t$	0	0	0	$(x-x^2)\cos t + 2\sin t$
2	$x(1-x)\cos t$	$x(1-x)$	0	0	$(x^2-x)\sin t + 2\cos t$
3	$x(1-x)\exp t$	$x(1-x)$	0	0	$(x-x^2+2)\exp t$
4	$x(1-x)sht$	0	0	0	$(x-x^2)cht + 2sht$
5	$x(1-x)cht$	$x(1-x)$	0	0	$(x-x^2)sht + 2cht$
6	$x(1-x)\sin 2t$	0	0	0	$2(x-x^2)\cos 2t + 2\sin 2t$
7	$x(1-x)\cos 2t$	$x(1-x)$	0	0	$2(x^2-x)\sin 2t + 2\cos 2t$
8	$x(1-x)\exp 2t$	$x(1-x)$	0	0	$2(x-x^2+2)\exp 2t$
9	$x(1-x)sh2t$	0	0	0	$2(x-x^2)ch2t + 2sh2t$
10	$x(1-x)ch2t$	$x(1-x)$	0	0	$2(x-x^2)sh2t + 2ch2t$
11	$\alpha x^3 + \beta t^2$	αx^3	βt^2	$1+\beta t^2$	$2\beta t - 6\alpha x$
12	$\alpha x^3 + \beta t^3$	αx^3	βt^3	$1+\beta t^3$	$3\beta t^2 - 6\alpha x$

Izoh: 11-12- variantlardagi α, β parametrlarning qiymatlarini turlicha olib, turli xil yangi variantlar hosil qilish mumkin.

10-§. Giperbolik tipdagi hususiy hosilali differensial tenglamalar

Tayanch so'z va atamalar: *giperbolik tip, xususiy hosila, pdesolve, given, oshkor va oshkormas sxemalar.*

7-bob 2-§ da qaralgan giperbolik tipdagi tenglamani yechish uchun dastlab Mathcadning ichki funksiyalaridan foydalaniladi.

Masalan: quyidagi giperbolik tipdagi tenglama uchun *ua(x,t)* aniq yechimni ifodalovchi funksiya bo'lsin.

$w_t(x,t) = v(x,t)$, $v_t(x,t) = a^2 \cdot w_{xx}(x,t) + f(x,t)$

$ua(x,t) := e^{x \cdot t} + 3 \cdot \sin(x) - \cos(t)$

$m := 10$ $n := 10$ $ua(x,t) := e^{x \cdot t} + 3 \cdot \sin(x) - \cos(t)$ $u0(x) := ua(x,0)$ $u1(x,t) := \frac{d}{dt} ua(x,t)$

$u1(x) := u1(x,0)$ $g1(t) := ua(0,t)$ $g2(t) := ua(1,t)$ $f(x,t) := \left(\frac{d^2}{dt^2} ua(x,t)\right) - \left(\frac{d^2}{dx^2} ua(x,t)\right)$

Given GDE $w_t(x,t) = v(x,t)$ $v_t(x,t) = a^2 \cdot w_{xx}(x,t) + f(x,t)$

with boundary conditions

$w(x,0) = u0(x)$ $v(x,0) = u1(x)$ $w(0,t) = g1(t)$ $w(L,t) = g2(t)$ $a = 1$

$\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} := \text{Pdesolve}\left[\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}, m, n\right]$

$L = 1$ $T = 0.5$ $i := 1..m$ $j := 1..5$ $x_i := i \cdot \frac{1}{m}$ $t_j := j \cdot \frac{1}{n}$ $va_{i,j} := ua(x_i, t_j)$ $v_{i,j} := w(x_i, t_j)$

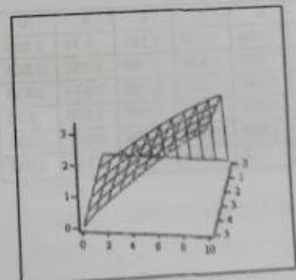
$va^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0.315	0.621	0.922	1.214	1.495	1.761	2.01	2.24	2.449	2.635
2	0	0.34	0.657	0.968	1.271	1.563	1.841	2.103	2.346	2.567	2.786
3	0	0.375	0.703	1.025	1.34	1.645	1.936	2.211	2.468	2.706	2.919
4	0	0.419	0.758	1.093	1.421	1.739	2.044	2.335	2.606	2.862	3.095
5	0	0.473	0.824	1.171	1.512	1.845	2.166	2.474	2.766	3.041	3.296

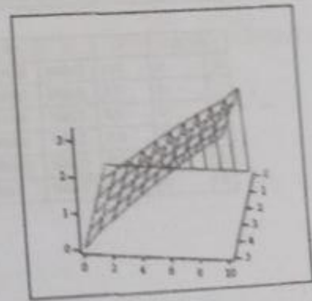
$v^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0.317	0.621	0.921	1.213	1.493	1.759	2.008	2.239	2.486	2.816
2	0	0.341	0.657	0.968	1.27	1.562	1.839	2.101	2.344	2.576	2.86
3	0	0.379	0.702	1.025	1.339	1.643	1.934	2.209	2.467	2.725	3.126
4	0	0.421	0.758	1.092	1.42	1.737	2.042	2.333	2.607	2.868	3.16
5	0	0.473	0.823	1.17	1.511	1.843	2.164	2.472	2.765	3.04	3.298

Hosil qilingan qiymatlarga mos grafik tasvirlar yuqoridagi kabi shakllantiriladi.



va^T



v^T

29-rasm.

Olingan natijalar taqribiy yechimni aniq yechimning qiymatlariga juda yaqin ekanligini ko'rsatmoqda.

Oshkor chekli ayirmali almashtirishlar

Giperbolik tipdagi tenglamani yechishda oshkor chekli ayirmali almashtirishlardan foydalanish uchun Mathcadning ishchi oynasida quyidagi buyruqlar kiritiladi.

$>u_{tt} = u_{xx} + e^{x\cdot t} + f(x,t) \quad f(x,t) = e^{x\cdot t}\cdot\left(t^2 - x^2\right) + \cos(t) - 3\cdot\sin(x)$

$>ua(x,t) := e^{x\cdot t} + 3\cdot\sin(x) - \cos(t) \quad u0(x) := ua(x,0) \quad u1(x,t) := \frac{d}{dt}ua(x,t) \quad u1(x) := u1(x,0)$

$>g1(t) := ua(0,t) \quad g2(t) := ua(1,t) \quad f(x,t) := \left(\frac{d^2}{dt^2}ua(x,t)\right) - \left(\frac{d^2}{dx^2}ua(x,t)\right)$

$>a := 0 \quad b := 1 \quad m := 10 \quad i := 0..m \quad T := 0.01 \quad h := \frac{b-a}{m} \quad n := 5 \quad j := 0..n \quad \tau := \frac{T}{n} \quad r := \frac{\tau^2}{h^2}$

$>g(x) := ua(x,0) \quad g1(t) := ua(0,t) \quad g2(t) := ua(1,t) \quad x_i := a + i\cdot h \quad t_j := j\cdot\tau$

$>u_{i,0} := g(x_i) \quad u_{i,1} := u_{i,0} + \tau\cdot u1(x_i) \quad u_{m,j} := g2(t_j) \quad u_{0,j} := g1(t_j)$

$>i := 1..m-1 \quad j := 1..n-1 \quad u_{i,j+1} := r\cdot u_{i-1,j} + 2\cdot(1-r)\cdot u_{i,j} + r\cdot u_{i+1,j} + \tau^2\cdot f(x_i,t_j) - u_{i,j-1}$

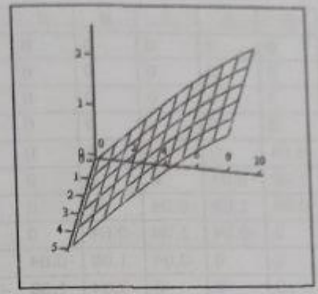
$>i := 1..m \quad j := 0..n \quad ua_{i,j} := ua(x_i,t_j)$

$u^T =$

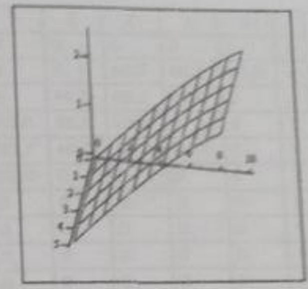
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.3	0.596	0.887	1.168	1.438	1.694	1.933	2.152	2.35	2.524
1	0	0.3	0.596	0.887	1.169	1.439	1.695	1.934	2.154	2.352	2.526
2	0	0.3	0.597	0.888	1.17	1.44	1.696	1.935	2.155	2.354	2.528
3	0	0.3	0.597	0.888	1.17	1.441	1.697	1.936	2.156	2.355	2.53
4	0	0.3	0.597	0.888	1.17	1.44	1.696	1.936	2.156	2.357	2.532
5	0	0.299	0.596	0.887	1.169	1.439	1.695	1.935	2.154	2.359	2.535

$ua^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.3	0.596	0.887	1.168	1.438	1.694	1.933	2.152	2.35	2.524
1	0	0.3	0.596	0.887	1.169	1.439	1.695	1.934	2.154	2.352	2.526
2	0	0.3	0.597	0.888	1.17	1.44	1.696	1.935	2.155	2.354	2.528
3	0	0.3	0.597	0.888	1.171	1.441	1.698	1.937	2.157	2.355	2.53
4	0	0.3	0.598	0.889	1.171	1.442	1.699	1.938	2.159	2.357	2.532
5	0	0.301	0.598	0.89	1.172	1.443	1.7	1.94	2.16	2.359	2.535



u^T



ua^T

30-rasm.

Olingan natijalar taqribiy yechimni aniq yechimning qiymatlariga juda yaqin ekanligini ko'rsatmoqda.

Oshkormas chekli ayirmali almashtirishlar.

Giperbolik tipdagi tenglamani yechishda oshkormas chekli ayirmali almashtirishlardan foydalanish uchun Mathcadning ishchi oynasida quyidagi buyruqlar kiritiladi.

$> u_{tt} = u_{xx} + f(x,t) \qquad 0 \le x \le 1 \;\; 0 \le t \le T \quad T = 0,25$

$> c := 7 \quad d := 10 \quad ua(x,t) := cx^3 + dt^3$

$> u(x,0) := cx^3 \; u(0,t) = g_1(t) := dt^3 \;\; u_t'(x,0) := 0 \;\; u(1,t) = g_2(t) = c + dt^3$

$> x0 := 0 \quad xk := 1 \quad m := 10 \quad h := \frac{xk - x0}{m} \quad k := 0..m \quad x_k := x0 + k\cdot h \quad h = 0.1$ //Sterjen

$> t0 := 0 \quad T := 0.25 \quad tk := 0.2 \quad n := 10 \quad \tau := \frac{tk - t0}{n} \quad j := 0..n \quad t_j := t0 + j\cdot\tau \quad r := \frac{\tau^2}{h^2} \quad \tau = 0.02$ //Vaqt

$> u0(x) := c\cdot x^3 \quad u1(x,t) := 3\cdot d\cdot t^2 \quad u_{k,0} := c\cdot(x_k)^3 \quad u_{k,1} := u1(x_k,0)$ //Boshlang'ich shart

$> u_{0,j} := c\cdot(t_j)^3 \qquad u_{m,j} := c + d\cdot(t_j)^3$ //Chegaraviy shart

$g_1(t) := dt^3 \;\; g_2(t) := c + dt^3$

$> f(x,t) := 6\cdot d\cdot t - 6\cdot c\cdot x \quad ua(x,t) := c\cdot x^3 + d\cdot t^3 \quad f_{k,j} := f(x_k,t_j) \quad ua_{k,j} := ua(x_k,t_j)$ //O'ng tomon

// Oddiy oshkormas ayirmali sxema:

$> k := 0..m \quad u_{k,0} := c\cdot(x_k)^3 \quad u_{k,1} := u_{k,0} + \tau\cdot u1(x_k,0) \quad k := 1..m-1$

$> h = 0.1 \quad r = 0.04 \quad A_{0,0} := 1 \;\; i := 1..m \quad A_{0,i} := 0 \quad i := 1..m-1 \quad A_{i,i-1} := -r \quad A_{i,i+1} := -r \quad A_{i,i} := (1 + 2\cdot r)$

$i := 0..m-1 \quad A_{m,i} := 0 \quad A_{m,m} := 1$ //CHATSni shakllantirish

// CHATS matrisasi

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-0.04	1.08	-0.04	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	-0.04	1.08	-0.04	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	-0.04	1.08	-0.04	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	-0.04	1.08	-0.04	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	-0.04	1.08	-0.04	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	-0.04	1.08	-0.04	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	-0.04	1.08	-0.04	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	-0.04	1.08	-0.04	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.04	1.08	-0.04
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

A =

$> u^{\langle 0\rangle T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0.007 & 0.056 & 0.189 & 0.448 & 0.875 & 1.512 & 2.401 & 3.584 & 5.103 & 7 \end{bmatrix}$ // 0-qatlam

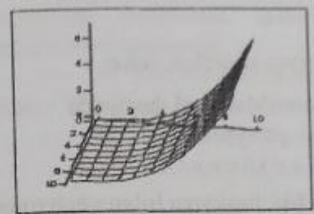
$> u^{\langle 1\rangle T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0.007 & 0.056 & 0.189 & 0.448 & 0.875 & 1.512 & 2.401 & 3.584 & 5.103 & 7 \end{bmatrix}$ //1-qatlam

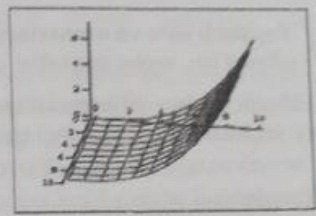
$> j := 1..n-1 \quad u^{\langle j+1\rangle} := A^{-1}\left[-\left(u^{\langle j-1\rangle}\right) + \tau^2 \cdot f^{\langle j+1\rangle} + 2 \cdot u^{\langle j\rangle}\right]$ // CHAS ni qatlamlarda yechish

$u^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.007	0.056	0.189	0.448	0.875	1.512	2.401	3.584	5.103	7
1	0	0.007	0.056	0.189	0.448	0.875	1.512	2.401	3.584	5.103	7
2	0.001	0.008	0.057	0.19	0.449	0.876	1.513	2.402	3.5849	5.1033	6.9842
3	0.0034	0.0104	0.0594	0.1924	0.4514	0.8784	1.5154	2.4044	3.5872	5.1033	6.953
4	0.0077	0.0147	0.0637	0.1967	0.4557	0.8827	1.5197	2.4086	3.5911	5.1019	6.9069
5	0.0144	0.0214	0.0704	0.2034	0.4624	0.8894	1.5264	2.4153	3.5967	5.0977	6.8464
6	0.024	0.031	0.08	0.213	0.472	0.899	1.536	2.4247	3.604	5.0891	6.772
7	0.037	0.044	0.093	0.226	0.485	0.912	1.5489	2.4371	3.6127	5.0747	6.6842
8	0.0538	0.0608	0.1098	0.2428	0.5018	0.9287	1.5656	2.453	3.6222	5.0529	6.5834
9	0.0749	0.0819	0.1309	0.2639	0.5229	0.9498	1.5865	2.4723	3.6319	5.0227	6.4701
10	0.1008	0.1078	0.1568	0.2898	0.5488	0.9757	1.612	2.4952	3.6407	4.9829	6.3448

//Taqribiy va aniq yechim grafigi





31-rasm.

Olingan natijalar taqribiy yechimni aniq yechimning tugun nuqtalardagi qiymatlariga juda yaqin ekanligini ko'rsatadi

INDIVIDUAL TOPSHIRIQLAR

$u_t - u_{xx} = f(x,t)$, giperbolik tipdagi tenglama $u(x,0) = g_1(x), u_t^{(0)}(x,0) = g_2(x)$, $u(0,t) = \mu_1(t), u(1,t) = \mu_2(t)$ chegaraviy shartlar bilan berilgan bo'lsin.

Qo'yilgan masala oshkor va oshkormas sxemalar yordamida hamda ichki funksiyalardan foydalangan holda Mathcad (Maple) dasturida yechilsin.

№	$u(x,t)$	$u(x,0)$	$u_t^{(0)}(x,0)$	$u(0,t)$	$u(1,t)$	$f(x,t)$
1	$x(1-x)\sin t$	0	$x(1-x)$	0	0	$(x-x^2+2)\sin t$
2	$x(1-x)\cos t$	$x(1-x)$	0	0	0	$(x-x^2+2)\cos t$
3	$x(1-x)\exp t$	$x(1-x)$	$x(1-x)$	0	0	$(x-x^2+2)\exp t$
4	$x(1-x)sht$	0	$x(1-x)$	0	0	$(x-x^2+2)sht$
5	$x(1-x)cht$	$x(1-x)$	0	0	0	$(x-x^2+2)cht$
6	$x(1-x)\sin 2t$	0	$2x(1-x)$	0	0	$2(x-x^2+2)\sin 2t$
7	$x(1-x)\cos 2t$	$x(1-x)$	$-2x(1-x)$	0	0	$2(x-x^2+2)\cos 2t$
8	$x(1-x)\exp 2t$	$x(1-x)$	$2x(1-x)$	0	0	$2(x-x^2+2)\exp 2t$
9	$x(1-x)sh2t$	0	$2x(1-x)$	0	0	$2(x-x^2+2)sh2t$
10	$x(1-x)ch2t$	$x(1-x)$	0	0	0	$2(x-x^2+2)ch2t$
11	$\alpha x^3+\beta t^2$	αx^3	0	βt^2	$1+\beta t^2$	$2\beta-6\alpha x$
12	$\alpha x^3+\beta t^3$	αx^3	0	βt^3	$1+\beta t^3$	$6\beta t-6\alpha x$

Izoh: 11-12. variantdagi α, β parametrlarning qiymatlarini turlicha olib turli xil yangi variantlar hosil qilish mumkin.

11-§. Elliptik tipdagi xususiy hosilali differensial tenglama

Tayanch so'z va atamalar:
elliptik tip, tugun nuqtalar, chegarviy shartlar, relax.

Elliptik tipdagi differensial tenglamaniMathcad dasturida taqribiy yechish uchun quyidagi masalani qaraymiz.

$$\Delta u = \rho(x,y), u_G = 0, \rho(x,y) = -2(x+y) + 2(x^2+y^2), 0 \le x, y \le 1.$$

Tenglamani $relax(a,b,c,d,e,\rho,u,r)$ ichki funksiya bilan yechamiz, parametrlarni elliptik tipdagi tenglama uchun chekli ayirmali sxemalarning ko'rinishidan olinadi:

$$au_{i+1,j} + bu_{i-1,j} + cu_{i,j+1} + du_{i,j-1} + eu_{i,j} = \rho_{i,j},$$

$$a = b = c = d, e = -4a, a_{i,j} = 1, i := 1..m, j := 1..m, 0 < r < 1.$$

r –relaksasiya koeffisienti, usulning yaqinlashishini ta`minlaydi.

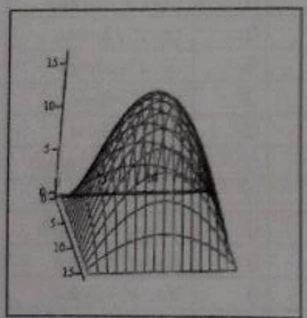
Mathcad dasturida quyidagi buyruqlar kiritladi:

$L_1 := 1$ $L_2 := 1$ $m := 16$ $i := 0..m$ $j := 0..m$ $ua(x,y) := (x-x^2)(y-y^2)$ $x_i := L_1 \cdot \frac{i}{m}$ $y_j := L_2 \cdot \frac{j}{m}$

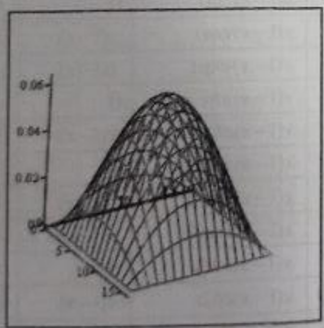
$\rho_{i,j} := -2(x_i + y_j) + 2[(x_i)^2 + (y_j)^2]$ $u_{i,0} := 0$ $u_{i,m} := 0$ $u_{0,j} := 0$ $u_{m,j} := 0$

$a_{i,j} := 1$ $b := a$ $c := a$ $d := a$ $e := -4a$ $r := 0.9$ $u := relax(a,b,c,d,e,\rho,u,r)$

$va_{i,j} := ua(x_i, y_j)$



u



va^T

32-rasm.

Olingan natijalar taqribiy yechimni aniq yechimning qiymatiga ancha yaqinligini ko'rsatmoqda.

Elliptik tipdagi tenglamani MathCadda chekli ayirmali sxemalar yordamida yechishni tashkil etish uchun quyidagi Puasson tenglamasini qaraymiz.

$$\Delta u = f(x,y), \phi0(y) := ua(0,y)\ \phi m(y) := ua(1,y)\ , \psi0(x) := ua(x,0)\ \psi m(x) := ua(x,1)$$

uchun CHAS quyidagi ko'rinishga ega

$$u_{i-1j} - 2u_{ij} + u_{i+1j} + \alpha(u_{ij-1} - 2u_{ij} + u_{ij+1}) = f_{ij}, i = 1..m-1, j = 1..n-1, \alpha = (h_1/h_2)^2,$$

$$u_{0j} = \phi0(y_j), u_{mj} = \phi m(y_j)\ , u_{i0} = \psi0(x_i), u_{in} = \psi m(x_i)\ .$$

Bu CHAS uchun vektor –matrisali progonkani qaraymiz [2]. Vektor $u_i = [u_{i1}, \dots, u_{in-1}]^T, i = 0..m$, kiritilib, CHASni quyidagicha yoziladi:

$$u_{i+1} + Au_i + u_{i-1} = f_i, i = 1..n-1, u_0 = \varphi_0, u_m = \varphi_m\ .$$

Bu erda belgilashlar quyidagi ma`noga ega:

$$A = [A_{i,j}], A_{i,j} = -2(1+\alpha), A_{i+1,j} = A_{i,j+1} = \alpha\ , h = h_1, \alpha = (h_1/h_2)^2,$$

$$f1_i := [h^2 f_{i1} - \alpha\psi_{i0}\ \ h^2 f_{i2}\ \ h^2 f_{i3}\ \ h^2 f_{i4}\ \ h^2 f_{i5}\ \ h^2 f_{i6}\ \ h^2 f_{i7}\ \ h^2 f_{i8}\ \ h^2 f_{in-1} - \alpha\psi_{in-1}]^T,$$

$$\varphi_0 := [\varphi_{01}\ \ \varphi_{02}\ \ \varphi_{03}\ \ \varphi_{04}\ \ \varphi_{05}\ \ \varphi_{06}\ \ \varphi_{07}\ \ \varphi_{08}\ \ \varphi_{0n-1}]^T,$$

$$\varphi_m := [\varphi_{m1}\ \ \varphi_{m2}\ \ \varphi_{m3}\ \ \varphi_{m4}\ \ \varphi_{m5}\ \ \varphi_{m6}\ \ \varphi_{m7}\ \ \varphi_{m8}\ \ \varphi_{mn-1}]^T.$$

Vektor –matrisali progonka quyidagi qadamlardan iborat:

1) $R_1 = [0_{ij}]_{k,j=1}^{n-1}$, $k = 1..m-1$ $R_{k+1} = -(A + R_k)^{-1}$
2) $s_1 := 0$ $k = 1..m-1$ $s_{k+1} := R_{k+1}(s_k - f_k)$
3) $u_m := \varphi_m$ $k := m, m-1..1$ $u_{k-1} := Ru_k + s_k$

Ushbu masalani qaraymiz va uni Mathcad da quyidagicha yozamiz:

$u_{xx} + u_{yy} = -4$ $ua(x,y) := x^2 + y^2$ $u(0,y) = y^2$ $u(1,y) = 1 + y^2$ $u(x,0) = x^2$ $u(x,1) = 1 + x^2$

$> \phi0(y) := ua(0,y)$ $\phi m(y) := ua(1,y)$ $\psi0(x) := ua(x,0)$ $\psi m(x) := ua(x,1)$ $ua(x,y) := x^2 + y^2$

$> m := 10$ $n := 10$ $h1 := 1/m$ $h2 := 1/n$ $\alpha := (h1/h2)^2$ $h := h1$

$> i := 0..m$ $j := 0..n$ $x_i := i * h1$ $y_j := j * h2$

$> j := 1..n-1$ $a_{j,j+1} := \alpha$ $a_{j+1,j} := \alpha$ $a_{j,j} := -2(1+\alpha)$

$> A := submatrix(a, 1, n-1, 1, n-1)$

$> i := 1..n-1$ $f_{i,j} := f(x_i, y_j)$ $\varphi0_j := \varphi0(y_j)$ $\varphi m_j := \varphi m(y_j)$ $\psi0_i := \psi0(x_i)$ $\psi m_i := \psi m(x_i)$

$> f1_i := [h^2 f_{i1} - \alpha\psi_{i0}\ \ h^2 f_{i2}\ \ h^2 f_{i3}\ \ h^2 f_{i4}\ \ h^2 f_{i5}\ \ h^2 f_{i6}\ \ h^2 f_{i7}\ \ h^2 f_{i8}\ \ h^2 f_{in-1} - \alpha\psi_{in-1}]^T$

$> \varphi0 := [\varphi0_1\ \ \varphi0_2\ \ \varphi0_3\ \ \varphi0_4\ \ \varphi0_5\ \ \varphi0_6\ \ \varphi0_7\ \ \varphi0_8\ \ \varphi0_{n-1}]^T$

$> \varphi m := [\varphi m_1\ \ \varphi m_2\ \ \varphi m_3\ \ \varphi m_4\ \ \varphi m_5\ \ \varphi m_6\ \ \varphi m_7\ \ \varphi m_8\ \ \varphi m_{n-1}]^T$

$> i := 1..n-1$ $j := 1..n-1$ $R1_{i,j} := 0$ $R := submatrix(R1, 1, n-1, 1, n-1)$

$> s_1 := 0$ $u_m := \varphi m$

$> k := 1..m-1$ $Q := -(A+R)^{-1}$ $s_{k+1} := Q(s_k - f1_k)$ $R := Q$

$>p:=m,m-1..1\ u_{p-1}:=Ru_p+s_p$

$>k:=1..m\ u_k=$

Javob:

$$u=\begin{bmatrix} 0.0.467 & 0..638 & 0.691 & 0.751 & 0.826 & 0.929 & 1.79 & 1.33 & 1.81 \\ 0.239 & 0.356 & 0.393 & 0.434 & 0.49 & 0.579 & 0.734 & 1.031 & 1.64 \\ 0.132 & 0.209 & 0.235 & 0.265 & 0.312 & 0.394 & 0.549 & 0.858 & 1.49 \\ 0.092 & 0.139 & 0.158 & 0.184 & 0.225 & 0.302 & 0.452 & 0.753 & 1.36 \\ 0.072 & 0.108 & 0.124 & 0.147 & 0.186 & 0.258 & 0.4 & 0.683 & 1.25 \\ 0.013 & 0.096 & 0.112 & 0.135 & 0.172 & 0.241 & 0.375 & 0.637 & 1.16 \\ 0.059 & 0.094 & 0.113 & 0.138 & 0.178 & 0.247 & 0.372 & 0.613 & 1.09 \\ 0.054 & 0.097 & 0.123 & 0.158 & 0.207 & 0.281 & 0.403 & 0.621 & 1.04 \\ 0.043 & 0.1 & 0.143 & 0.198 & 0.269 & 0.361 & 0.489 & 0.682 & 1.01 \end{bmatrix}$$

INDIVIDUAL TOPSHIRIQLAR

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$ elliptik tipdagi tenglama $u(0,y)=g_1(y), u(1,y)=g_2(y), u(x,0)=g_3(x), u(x,1)=g_4(x)$ chegaraviy shartlar bilan yechilsin.

№	$u(x,y)$	$u(0,y)$	$u(1,y)$	$u(x,0)$	$u(x,1)$	$f(x,y)$
1	$(x-x^2)(y-y^2)$	0	0	0	0	-4
2	$(x-x^2)\sin\frac{\pi y}{2}$	0	0	0	$(x-x^2)$	$[(x-x^2)(\frac{\pi}{2})^2-2]\sin\frac{\pi y}{2}$
3	$(x-x^2)\cos\frac{\pi y}{2}$	0	0	$(x-x^2)$	0	$[2-(x-x^2)(\frac{\pi}{2})^2]\cos\frac{\pi y}{2}$
4	$(y-y^2)\sin\frac{\pi x}{2}$	0	$y-y^2$	0	0	$[(y-y^2)(\frac{\pi}{2})^2-2]\sin\frac{\pi x}{2}$
5	$(y-y^2)\cos\frac{\pi x}{2}$	$y-y^2$	0	0	0	$[(y-y^2)(\frac{\pi}{2})^2-2]\cos\frac{\pi x}{2}$
6	$\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi y}{2}$	0	$\cos\frac{\pi y}{2}$	$\sin\frac{\pi x}{2}$	$\cos\frac{\pi y}{2}$	0
7	$(x-x^2)shy$	0	0	0	$(x-x^2)sh1$	$(x^2-x-2)shy$
8	$(x-x^2)chy$	0	0	$(x-x^2)$	$(x-x^2)ch1$	$(x^2-x-2)chy$
9	$(y-y^2)shx$	0	$(y-y^2)sh1$	0	0	$(y-y^2+2)shx$
10	$(y-y^2)chx$	$y-y^2$	$(x-x^2)ch1$	0	0	$(y-y^2+2)chx$
11	$\alpha x^3+\beta y^3+xy$	βt^3	$\alpha+\beta y^3+y$	αx^3	$\alpha x^3+\beta+x$	$6\alpha x+6\beta y$
12	$\alpha x^4+\beta y^3+xy$	βt^3	$\alpha+\beta y^3+y$	αx^4	$\alpha x^4+\beta+x$	$12\alpha x+6\beta y$

Izoh: 11-12. variantdagi α, β parametrlarning qiymatlarini turlicha olib, turli xil yangi variantlar hosil qilish mumkin.

9-BOB. TA`LIM TEXNOLOGIYALARI

Umrning butun ma`nosi mavhumlikni to'xtovsiz zabt etish, tobora va hamisha ko'proq bilishga intilishdir.

Emil Zolya.

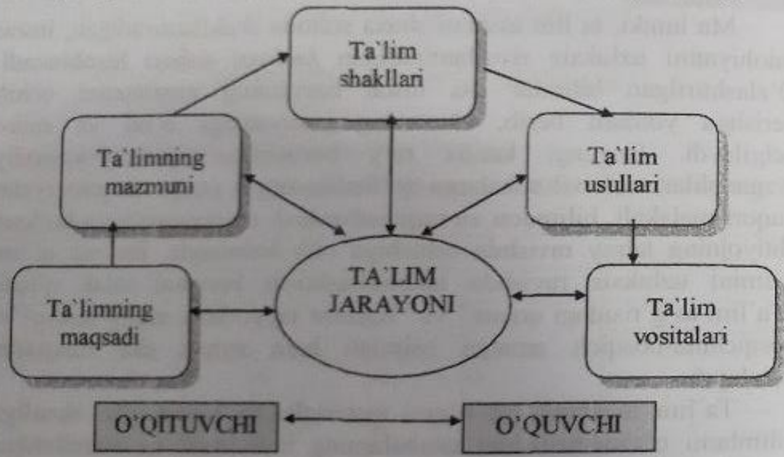
9.1 Ta`lim jarayonida innovasion usullardan foydalanish

Ma`lumki, ta`lim insonni shaxs sifatida shakllantiradigan, inson salohiyatini uzluksiz rivojlantiradigan *faoliyat sohasi* hisoblanadi. O'zlashtirilgan bilimlar esa inson hayotining mazmunini ochib berishga yordam berib, shaxsning jamiyatdagi o'rni va rolini belgilaydi. Bugungi kunda ro'y berayotgan ijtimoiy-iqtisodiy o'zgarishlar, turli xil sohalarga qo'llanilayotgan yangi texnologiyalar yuqori malakali, bilimdon va raqobatbardosh mutaxassislarga bo'lgan ehtiyojning tabiiy ravishda oshishiga olib kelmoqda. Bu esa ta`lim tizimini uzluksiz ravishda takomillashtirib borishni talab qiladi. "Ta`lim to'g'risidagi qonun" va "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi"ni bosqichma-bosqich amalga oshirish ham aynan shu maqsadni ko'zlaydi.

Ta`lim mazmuni va o'quv materialining turli-tuman ekanligi, bilimlarni o'zlashtirilishini talabalarning individual va intellektual xususiyatlariga bog'liqligi, o'quv jarayoni samaradorligiga ta`sir etuvchi turli xil omillarning mavjudligi *ta`lim jarayoniga* va uni tashkil etish masalasiga jiddiy munosabatda bo'lishni va mas`uliyat bilan yondashuvni talab etadi.

Olimlar bugungi kunda ta`lim tizimida "Nima uchun o'qitamiz?", "Nimani o'qitamiz?", "Qanday o'qitamiz?" kabi an`anaviy savollar uchligidan tashqari "Qanday qilib samarali va kutilgan natijali o'qitish mumkin?" degan muammo doirasida ham tadqiqotlar olib borishmoqda. Bu esa o'quv jarayonini texnologiyalashtirishga, ya`ni o'qitishni ishlab chiqarishga oid, aniq kafolatlangan natija beradigan texnologik jarayonga aylantirishga urinib ko'rish mumkin degan mulohazalarga olib keladi. Bunday fikrning tug'ilishi *yangi pedagogik texnologiyalar* yo'nalishini paydo bo'lishiga olib keldi.

Ta`lim jarayonini bir tizim deb qaraydigan bo'lsak, uni tashkil etuvchilari: ta`limning maqsadi *(nima uchun?)*, ta`limning mazmuni (*nimani?*), ta`lim metodi va vositalari (*qanday qilib?*), ta`lim beruvchi va tahsil oluvchi, nazorat va baholash kabi elementlarning bir butunligi va *ta`lim sifatini* oshirishdek yagona maqsadga *yo'naltirilganligi* muhimdir. Ta`lim jarayonini loyihalashtirishda yuqorida sanab o'tilgan elementlardan birortasi e`tibordan chetda qolsa, yoki noto'g'ri tanlangan bo'lsa tizim ishlamaydi, demakki, ta`lim jarayoni oldiga qo'yilgan maqsadga erishilmaydi (33-rasm).



33-rasm. Ta`lim jarayoni metodik tizim sifatida.

Endi bugungi kunda ta`lim muassasalarida pedagogik texnologiyalarga katta ahamiyat berilayotganligining asosiy sabablarini izlab ko'raylik. Bu sabablar sifatida quyidagilarni keltirish mumkin:

1. Pedagogik texnologiyada shaxsni rivojlantiruvchi ta'limni amalga oshirish imkoniyatining kengligi tufayli mustaqil va ijodiy fikrlarning shakllanishini ta`min-lashi mumkinligi.
2. Ta`lim-tarbiya jarayonini kechishini texnologik zanjir sifatida to'la loyihalab olinishi natijasida o'quv jarayonining borishini nazorat etish va boshqarish mumkinligi.

3. O'quv-tarbiya jarayoniga tizimli yondashuvning keng joriy etilishi sabab yangi ta`lim va texnik, axborot vositalaridan foydalanish zaruriyatining vujudga kelishi.

Demak, pedagogik texnologiya asosida o'tkazilgan mashg'ulotlar yoshlarning turli xil muammolarga o'z munosabatlarini bildirishlarini ta`minlab, o'z *nuqtai nazarlari*ga ega bo'lishlariga imkon yaratadi.

Axborotlar ummoni qamrab olgan bugungi kunda o'quvchini oddiy, an`anaviy usulda ta`lim berish orqali biror narsani o'zlashtirishga majbur qilib bo'lmasligini, o'quvchini *"hayron"* qoldirish uchun esa, albatta, samarali uslub va aniq loyihalangan texnologiyalar zarurligini har bir o'qituvchi xis qilib turibdi.

Kuzatishlar va tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, har xil sohalarda faoliyat yuritayotgan zamonaviy mutaxassis bugungi kunda quyidagi talablarga javob berishi lozim:

- turli xil muammoli vaziyatlarni mustaqil hal eta olish;
- yangi g'oyalarni taklif qilish, ijodiy fikrlash;
- axborotlar bilan ishlay olish, kerakli ma`lumotlarni yig`ish va qayta ishlash;
- turli xil munosabatlarga tez kirishuvchan bo'lish, turli xil vaziyatlarni to'g'ri baholay olish, o'z fikrini himoya eta olish;
- statistik va mantiqiy qonuniyatlarni bilish, asosli xulosalar chiqarish, natijalarni tahlil etish.

Bugungi bitiruvchi o'zi tanlagan sohada nafaqat kasbiy bilimlarni namoyon eta olishi, balki yangi sharoitlarda yangi bilimlarni yarata olishi ham kerak. Buning uchun esa ta`lim sifatini ko'tarish borasida izchil ishlar olib borilishi talab qilinadi. Dunyo ta`lim tajribasidan ma`lumki, ta`lim sifatini oshirishga zamonaviy ta`lim texnologiyalarini ishlab chiqib, dars jarayoniga olib kirish orqali erishilmoqda. Tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, an`anaviy dars shaklini saqlab qolgan holda, unga turli-tuman o`quvchilar faoliyatini faollashtiradigan *innovasion usullar* (inglizcha *innovation-yangilik kiritish*) bilan boyitish o'quvchilarning o'zlashtirish darajasini ko'tarilishiga olib kelar ekan. Buning uchun dars jarayoni oqilona tashkil qilinishi, o'qituvchi tomonidan o'quvchilarning qiziqishini orttirib, ularning ta`lim jarayonida faolligi muttasil rag'batlantirilib turilishi, o'quv materialini kichik-kichik bo'laklarga bo'lib, ularning mazmunini ochishda bahs, munozara, aqliy hujum, kichik guruhlarda ishlash, tadqiqot, rolli o'yinlar metodlarini qo'llash, rang-barang qiziqtiruvchi misollarning keltirilishi, o'quvchi-larni amaliy mashqlarni mustaqil bajarishga undash, rang-barang baholash usullaridan foydalanish, ta`lim vositalaridan joyida va vaqtida foydalanish talab etiladi. Mazkur innovasion usullarni qo'llashda kichik guruhlar faoliyatini tashkil etish alohida ahamiyatga ega.

Innovasion texnologiyalar o'quv jarayoniga hamda bevosita o'qituvchi va talabalar faoliyatiga yangilik kiritish bo'lib, uni amalga oshirishda asosan interfaol uslublardan foydalaniladi. *"Inter" - o'zaro, "act" – harakat qilmoq* degan ma`nolarni anglatadi. Demak, interaktiv munosabatda o'zaro ish ko'rish, faoliyat ko'rsatish yoki suhbat tartibida kim bilandir muloqot holatida bo'lish tushuniladi. Shunday qilib, interfaol o'qitish-bu, avvalambor muloqotli o'qitish bo'lib, jarayonning borishida o'qituvchi va o'quvchi orasida o'zaro ta`sir amalga oshiriladi. Uning mohiyati o'quv jarayonini shunday tashkil etishdan iboratki, unda barcha o'quvchilar bilish jarayoniga jalb qilingan bo'lib, erkin fikrlash, tahlil qilish va *mantiqiy fikr yuritish* imkoniyat-lariga ega bo'ladilar.

Darslardagi interaktiv faoliyat o'zaro tushunishga, hamkorlikda faoliyat yuritishga, umumiy, lekin har bir ishtirokchi uchun ahamiyatli masalalarni birgalikda yechishga olib keladigan dialogli aloqani tashkil etish va rivojlantirishni ko'zda tutadi. Interaktiv metod bitta so'zga chiquvchining, shuningdek bitta fikrning boshqa fikrlar ustidan dominantlik qilishligini bartaraf etadi. Dialogli o'qitish jarayonida o'quvchilar tanqidiy fikrlashga, shart-sharoitlarni va tegishli axborotni tahlil qilish asosida murakkab muammolarni yechishga, alternativ fikrlarni chamalab ko'rishga, asosli ravishda qarorlar qabul qilishga, diskussiyalarda ishtirok etishga, boshqalar bilan muloqat qilishga o'rganadilar. Buning uchun darslarda individual, juftli va guruhli ishlar tashkil etiladi, izlanuvchi loyihalar, rolli o'yinlar qo'llaniladi, xujjatlar va axborotning turli manbalari bilan ish olib boriladi, ijodiy ishlar qo'llaniladi.

Kichik guruhlarda ishlashga asoslangan innovasion usullar quyidagi jihatlari bilan o'quv maqsadlarini amalga oshirishda yordam beradi:

- guruhdagi o'quvchilarning *o'zaro muloqot*lari jarayonida, boshqalarning qadriyatlarini tushunib yetish shakllanadi;

- o'quvchilarda musobaqa, raqobatchilik kayfiyatlarini rivojlan-tirish orqali ularda g'olib bo'lish, buning uchun esa ko'proq o'qish, *o'rganish ehtiyoj*lari paydo bo'ladi;
- guruhlarda ishlash paytida, zarurati bo'lganda, ta`lim oluvchi-lar yordam berishlarini so'raydilar va boshqalarga *yordam berishni* o'rganadilar;
- har bir ta`lim oluvchining potensial imkoniyatlarini rivojlanishi va amalga oshirilishi ta`minlanadi;
- guruh a`zolari javoblarni do'stona baholab, o'zlarida *o'ziga ishonch tuyg'usi*ni uyg'otish imkonini beradilar;
- ta`lim beruvchi bilan ta`lim oluvchilar o'rtasida ancha *mustahkam aloqa* o'rnatiladi, shaxsiy va bir vaqtning o'zida ta`lim jarayonida jamoaviy ruhiy holat kuchayadi.

Guruhlarda ishlash mas`uliyati har bir talabadan yangi mavzuni o'zlashtirishga va guruh uchun foydali bironta fikrni ayta olish imkoniyatini xosil qilishga undaydi. Bu esa talabada o'qish va o'rganishga bo'lgan *motivasiya*ni uyg'otishga yordam beradi.

Shunday qilib, hozirgi kunda taklif etilayotgan va Respub-lika ta`lim muassasalarida keng qo'llanilayotgan quyidagi: *rolli o'yinlar, o'z o'rningni top, kubik strategiyasi, tushunchalar asosida bashorat qilish, taxmin va tasdiq, zig-zag, insert, esse, oxirgi so'zni menga qoldiring, chuqurlashtirilgan ma`ruza, bir-birini so'rash, bir-biriga o'rgatish, konseptual javdal, venn diagrammasi, ustoz rahbarligida amaliyot, tadqiq qilish, chalkashtirilgan mantiqiy zanjirlar, semantik xususiyatlar tahlili, ikki qismli kundaliklar, birgalikda izlash, munozaralar girdobi, matnning obrazli tizimi va uning timsollari munozaralar girdobi, matnning obrazli tizimi va uning timsollari* →

Xulosa qilib aytganda, o'quvchini mustaqil va ijodiy fikrlashga yo'naltirish, buning uchun kerakli vositalarni ishlab chiqish va qo'llash o'qituvchi oldidagi eng muhim vazifalardan sanaladi. Bunday vositalardan foydalanish samaradorligini oshirish esa, albatta, ularning maqsadga muvofiq tanlanganligiga bog'liq. Zamonaviy axborot va yangi ta`lim texnologiyalari esa bunday imkoniyatlarni taqdim qiladi. Zeroki, ulardan foydalanib dars mashg'ulotlarini olib borish ta`lim sohasi oldida turgan muhim vazifalardandir!

$$\int_a^b f(x)dx$$

9.2 Fanni o'qitishda qo'llanadigan ta`lim texnologiyalari

Informatika yo'nalishida tayyorlanayotgan kadrlar matematika, fizika, informatika, dasturlash, modellashtirish va optimallashtirish kabi fanlardan olgan bilimlarini xalq ho'jaligining turli jarayonlarini ifodalovchi matematik modellarni yechishda qo'llay olishlari uchun turli xil sonli, sonli-taqribiy, taqribiy-analitik usullardan foydalanish malakalariga ega bo'lgan yetuk mutaxassislar bo'lishligini bugungi zamon talablari taqozo etmoqda. Muhandis-pedagog pedagogik, psixologik va metodologik bilimlarni puxta egallashi bilan bir qatorda sonli, sonli-taqribiy, taqribiy-analitik usullarni turli xil amaliy jarayonlarni ifodalovchi matematik modellarni yechishda qo'llay olishi, masalani yechishning ishchi algoritmlarini ishlab chiqishi va ular asosida yuqori darajali dasturlash tillarida modulli dasturlar yarata olishi, turli sinflarga tegishli amaliy masalalarni yechish uchun amaliy dasturlar bog'lamini yaratishi va ulardan amalda foydalanish tizimlarini ishlab chiqishi, fan bo'yicha egallagan pedagogik malakasiga asoslanib o'rta maxsus, kasb-hunar ta`limi tizimida yangi pedagogik va zamonaviy axborot texnologiyalar asosida dars mashg'ulotlarini yuqori saviyada o'tkaza olish uslubiyotini egallashi lozim.

Talabalarning bilish jarayonidagi faolligini oshiruvchi va ularning fikrlash qobiliyatini rivojlantiruvchi o'qitish uslublarini ishlab chiqish va ularni ta`lim tizimida qo'llash masalasi oliy va o'rta maxsus ta`limning dolzarb masalalaridan hisoblanadi. Fanni o'qitishda innovasion texnologiyalarning turli usullaridan oqilona foydalanish dars samaradorligini oshirishda, talabalarning mustaqil, ijodiy fikrlash qobiliyatini shakllantirishda va bilimlarni puxta egallashda muhim omil vazifasini bajaradi. Fan bo'yicha dars mashg'ulotlari reja asosida turli xil: ma`ruza, amaliyot va tajriba mashg'uloti hamda mustaqil ta`lim shaklida amalga oshiriladi. Har bir dars shakli muayyan maqsadlar aniqligida o'tkazilib, fanning *o'ziga*

xos xususiyatlari asosida rejalashtiriladi. Quyida ushbu holatlarni dars shakllari uchun tahlil etamiz.

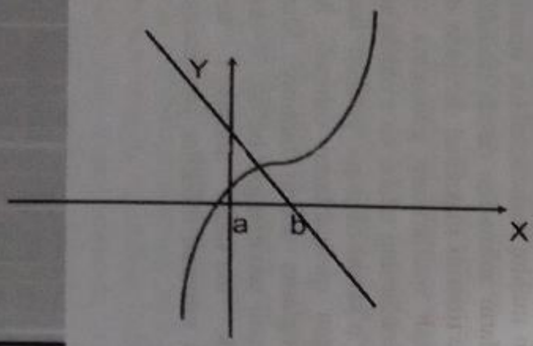
Ma`lumki, *ma`ruza* o'quv jarayonining asosiy bo'g'ini, dars o'tishning asosiy shakllaridan biridir. Ma`ruza bilimni so'z bilan ifodalash, og'zaki bayon qilish ko'zda tutilgan, hajmning kattaligi, mantiqiy qurilishi, umumlashtirishning murakkabligi bilan ajralib turadi. Ma`ruza (arabcha *leksiya* (lot. *lectio*)-*o'qish*) o'quv materiali, biror masala, mavzu kabilarning mantiqiy izchil, ma`lum bir tizimga solingan bayonidir. Ma`ruza o'quvchi talabalar bilan muloqotda bo'lishning alohida shakli bo'lib, uning vazifasini hech qaysi boshqa dars shakli orqali amalga oshirib bo'lmaydi. S.I. Arxangelskiyning ta`kidlashicha, ma`ruza o'qituvchi shaxsining barcha boyligi: ongi, hissiyoti, irodasi, tuyg'usi, e`tiqodi orqali talabalar ichki dunyosi bilan muloqotda bo'lishining eng samarali, jonli shaklidir. Shu bois aynan ma`ruza mashg'ulotida talabani mantiqiy fikrlashga, yetakchi g'oyalarni ilgari surishga keng imkoniyatlar yaratiladi.

Fanning ma`ruza mashg'ulotlarida barcha an`anaviy va zamonaviy usullardan hamda axborot texnologiyalaridan keng foydalaniladi. Ayniqsa, axborot texnologiyalari yordamida muayyan mavzu, matn, ta`rif, qoida, chizma va formulalarni sifatli va ma`noli namoyish etish, ayrim muhim tushunchalarni ajratish va izoh berish, shakllarni va harakatlarni animasion tarzda ifodalash imkoniyatining mavjudligi talabalar e`tiborini maksimal darajada darsga qaratilishini ta`min-laydi. Hisoblash usullarining geometrik ma`nolarini ifodalovchi iteratsion jarayonlarning talaba ko'z oldida sodir bo'lishi yangi tushunchalarni oson o'zlashtirilishiga yordam beradi, mavzuga va bevosita fanga bo'lgan qiziqishlarini oshiradi. Misol sifatida 34-rasmda chiziqsiz tenglama uchun taqribiy ildiz yotgan oraliqni aniqlashning grafik usuli tasvirlangan bo'lsa, 35-rasmda esa iteratsiya usulining geometrik ma`nosi, aniqrog'i taqribiy yechimga yaqinlashish jarayoni samarali effektlar yordamida namoyish etilgan sahifalar tasvirlangan.

Grafik usul

$f(x)=0$

Bu nuqtalarning abssissalari ildizlarning taqribiy qiymatlari deb qabul qilinadi.



Taqribiy ildiz yotgan kesmani haqiqatda to'g'ri olinganligini analitik yo'l bilan tekshirib ko'rish mumkin.

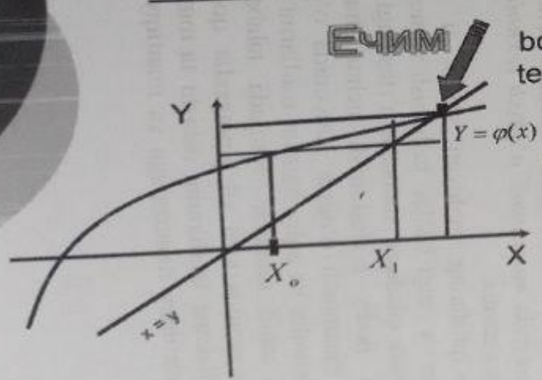
Buning uchun yana ildizning $f(a)\cdot f(b)<0$ mavjudlik shartidan foydalanamiz.

Agar shart bajarilsa oraliq to'g'ri tanlangan bo'ladi.

34-rasm

Iteratsiya usuli

Bu usulda ketma-ket yaqinlashishlar $f(x)=0$ tenglamani $x=\varphi(x)$ (1) ko'rinishga keltirish orqali hosil qilinadi.



[a, b] kesmada ihtiyoriy x_0 yechimning boshlang'ich yaqinlashishini aniqlaymiz. Uni (1) tenglamaning o'ng tarafiga qo'yib, chap tarafda yechimning birinchi yaqinlashishini topamiz:

$x_1 = \varphi(x_0)$.

Topilgan yaqinlashishni ketma-ket (1) ning o'ng tarafiga qo'yib borib, chap tarafda yangi yaqinlashishlar hosil qilinadi:

$x_{n+1}=\varphi(x_n)$, $n=0,1,2,\ldots$ (2)

Agar $x_0, x_1, \ldots$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lsa, u (1) tenglamaning yechimi bo'ladi. Iteratsiya jarayoni $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$ shart bajarilguncha davom ettiriladi.

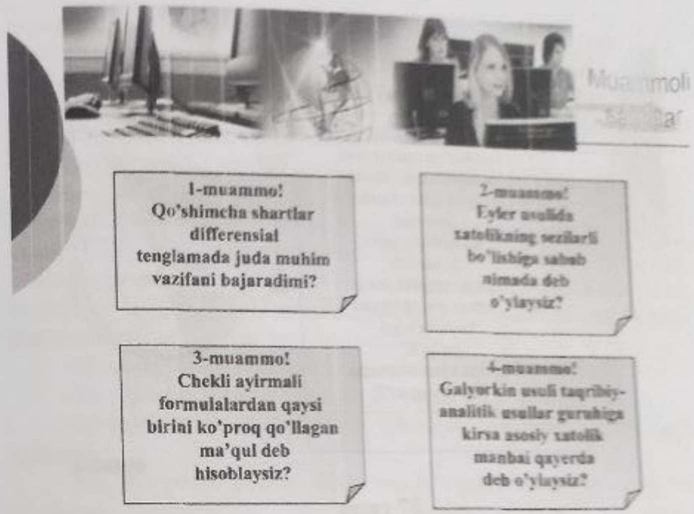
35-rasm

Bunda yechimga yaqinlashish jarayonining har bir bosqichini ketma-ket algoritm asosida namoyish etilishi ma`ruzaning ko'rgazmalilik darajasini oshirib, hisoblash jarayonining to'liq texnologik zanjirini talaba tomonidan his etilishini ta`minlaydi.

Ma`ruzani shunday tuzish kerakki, talabada fanni chuqur o'rganishi uchun mustaqil ravishda adabiyotlar topish, ular ustida ishlash, tushunishga xohish-istak tug'ilsin. Tajriba shuni ko'rsatadiki, talabaga ishonchli dalillar, chuqur tahlil ko'proq ta`sir qiladi. Har qanday fan, jumladan, hisoblash usullari haqidagi fanlar ham aniq dalillar, ma`lumotlar, nazariy va amaliy xulosalarga tayanadi. *Fanning mazmuni* amaliy jarayonlarga bog'liq holda aniq matematik modellar qurish, uni yechish usullari, muayyan taqribiy hisoblash usulining mohiyati, usulning afzallik va kamchilik tomonlari, usulni qo'llash imkoniyatlari, xatolik-larni baholash bilan bog'liq bo'lganligi uchun ko'proq ma`ruza darslarida *aniq ilmiy tushunchalar asosida mustahkam bilim-lar*ning hosil qilinishiga e`tibor beriladi hamda *xotirani mustahkamlash* bilan bog'liq innovasion texnologiyalardan keng foydalaniladi.

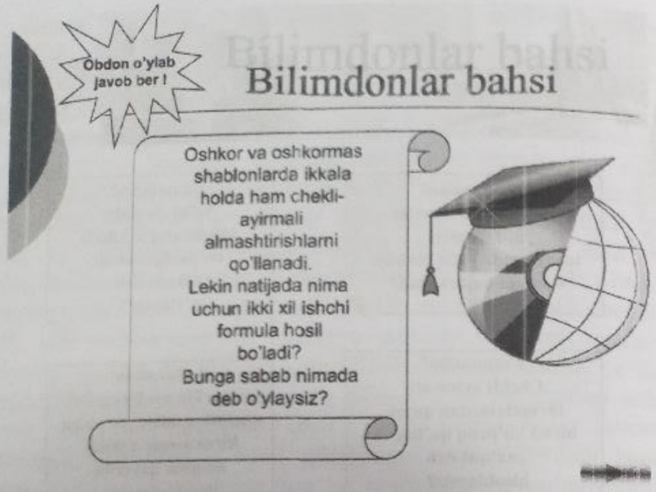
Psixologlarning kuzatishlaricha bilish, o'rganish jarayoni fikrlar qarama-qarshiligi asosiga qurilsa, samarali bo'ladi. Ilmiy munozara talabalar uchun ijodiy muhit yaratadi. Buning uchun esa, ayniqsa, ma`ruza mashg'ulotlarida ***muammoli o'qitish texnologiyasi***dan keng foydalanishni tavsiya etamiz.

Muammoli o'qitishning mohiyati shuki, u talabaga tanish bo'lgan ma`lumotlar va yangi faktlar, tushunish va tushuntirish uchun avvalgi bilimlar kamlik qiladigan xodisalar o'rtasidagi ziddiyatdir. Bu ziddiyat bilimlarni ijodiy o'zlashtirish uchun harakatlantiruvchi kuchdir. Talabalar muammoli o'qitish jarayonida o'quv materialini idrok qilish orqali bilimlar va aqliy harakat usullarini o'zlashtiradilar va ularni mustaqil tahlil qiladilar. Natijada talabada muammoli vaziyatni yechish jarayonida turli xil gipotezalar qo'yish va ularni isbotlash orqali intellektual faollikning oshishi ta`minlanadi. Bu esa o'z-o'zidan talabalarni ilmiy munozaraga va mantiqiy mushohadaga chorlaydi.



36-rasm

Ayniqsa, "Nima uchun shunday deb o'ylaysiz?", "Mazkur usullarning asosiy afzalligi nimada?", "Masalani yechishning qaysi imkoniyatidan foydalanishni tavsiya etasiz?", "Nima uchun aynan shu tenglama mazkur jarayonning matematik modelini ifodalaydi? Mulohazalaringizni tushuntira olasizmi?" singari muammoli savollar, ularni topishga bo'lgan intilish mavzuga ilmiy yondashuvlarni va mukammal bilimlarni hosil bo'lishini ta`minlashi mumkin. Bunday savol va vaziyatlarning har bir mavzu uchun alohida ishlab chiqilganligi va mazkur qo'llanmada keltirilganligi esa foydalanuvchi uchun foydadan holi emas deb o'ylaymiz. Na`muna sifatida dars mashg'ulotida qo'llanilayotgan maummoli topshiriqlardan tavsiya qilamiz.



37-rasm

O‘qituvchi muammoli savollarning javoblarini tahlil etar ekan ularni darhol to‘g‘ri va noto‘g‘ri javoblarga ajratmasligi, balki talabalardan savollarga har tomonlama keng javob berishlarini talab qilishi kerak. Agar talaba kutilgan muayyan javobni tayinli asoslay olmasa, bu javobga hayrixoh bo‘lgan boshqa talabalarni ham aniqlab, ularga birgalikda shu javobni asoslashni taklif etadi. Agar talabalar u yoki bu savolga turli javoblar taklif etsalar, o‘qituvchi talabalarning javoblarni qiyoslashga qaratilgan fikrlashga urintirishi lozim bo‘ladi. Bunday fikrlash ishi murakkab bo‘lib, u barcha bildirilgan nuqtai nazarlarni tushunish, ularning kuchli va kuchsiz tomonlarini aniqlash, to‘g‘ri javobni qidirish maqsadida tanqidlarni hisobga olgan holda turli qarashlarni o‘zaro nisbatlashni ko‘zda tutadi.

Oliy maktab o‘qitish tizimiga ma`ruza bilan birgalikda amaliy mashg’ulot turi ham kiradiki, u nazariyani amaliyot bilan bog’lashdek asosiy vazifani bajaradi.

"Amaliy mashg’ulot" termini pedagogikaga oid adabiyotlarda ham keng, ham tor ma`noda izohlanadi. U keng ma`noda mashq, seminar va tajriba mashg’ulotlarini umumlashtiradi. Amaliy mashg’ulotlarning ma`ruzadan farqlanadigan asosiy meyorlaridan biri o‘quv jarayoni qatnashchilarining birgalikdagi harakatlarida o‘ziga xos xarakter bilan

namoyon bo‘lishdir. Ular vazifalariga ko‘ra ham farqlanadi. Agar ma`ruzada ilmiy bilimlar asosi bayon qilinadigan bo‘lsa, amaliy mashg’ulotlarda bilimlar chuqurlash-tiriladi, kengaytiriladi va detallashtiriladi. Eng muhimi, amaliy mashg’ulotlar talabalar bilimini mustahkamlash uchun xizmat qiladi.

Shunday qilib, amaliy mashg’ulot-bu nazariya bilan amaliyotni bog’lovchi o‘ziga xos dars shakli bo‘lib, u talabalar tomonidan o‘zlashtirilgan turli xil o‘quv-amaliy masalalarni, bilimlarni amalda sinab ko‘rishga va mustahkamlashga yordam beradi. Samarali o‘tkazilgan amaliy mashg’ulot o‘quvchida kerakli malakalarni xosil bo‘lishiga olib keladi. O‘quvchilarda bilim, ko‘nikma va malakalarni shakllantirish jarayonida quyidagi omillarni hisobga olish kerak.

-Bilimlar asosida malaka va ko‘nikmalar shakllantiriladi.

-Har qanday *malaka* faqat tajriba orqali hosil qilinadi.

-Malakalar takomillashtirilib, takrorlash natijasida ko‘nikmaga aylanadi.

Fan bo‘yicha amaliy dars mashg’ulotlarida asosan turli xil hisoblash usullarining algoritmlari ishlab chiqiladi va dastur ta`minotlari yaratish masalasiga alohida e`tibor qaratiladi.

Fan bo‘yicha amaliy dars jarayoni quyidagi ketma-ketlikda tashkil etiladi:

1. Qo‘yilgan masala atroflicha o‘rganib chiqiladi va uni xal qilish uchun lozim bo‘lgan boshlang’ich ma`lumotlar to‘planadi;

2. Masalani xal qilishdagi natijaviy ma`lumotlar belgilab olinadi;

3. Qo‘yilgan masalani matematik modelini yechish usullari o‘rganiladi;

4. Tanlangan usullar bo‘yicha ishchi algoritmlar ishlab chiqiladi;

5. Ishchi algoritmlar asosida zamonaviy dasturlash tillarida masalani xal qilish uchun dastur ta`minoti loyihalanadi;

6. YAratilgan dastur ta`minotini ishga yaroqliligi maxsus testlar yordamida tekshiriladi;

7. Dastur ta`minotidan foydalanib qo‘yilgan masalani sonli natijalari olinadi;

9. Olingan natijalarni to‘g’riligi va aniqligi tahlil qilinib, baholanadi.

Amaliy mashg’ulotlarni o‘tkazishda yangi ta`lim texnologiyala-rining innovasion usullaridan keng foydalaniladi. Asosan amaliy mashq jarayonini faollashtiruvchi usullar: *ustoz rahbar-ligida* *amaliyot, o'quvchilar munosabatini aniqlash, uch bosqichli intervyu, qarama-qarshi fikrlar bahsi, akademik bahs munozara, muloqot texnologiyalarining qo'llanilishi amaliy mashg'ulotlar-dan kutiladigan samaradorlikni oshirishi tabiiydir.*

Talaba aniq qo'yilgan masalani yangi o'zlashtirilgan amaliy malakalar asosida mustaqil hal etishga *tajriba* darslari orqali erishadi. Bunda ular har bir mashg'ulot uchun rejalashtirilgan hisoblash usulini aniq variantlar asosida taqsimlangan shaxsiy topshiriqqa tadbiq etadilar. Tajriba mashg'uloti ishlab chiqilgan na`munaviy yo'riqnomalar asosida bajariladi. Aynan shu dars mashg'uloti talabada turli xil natijalarni tahlil etishga, mustaqil xulosalar chiqarishga, olingan bilimlarni yanada mustaqkamlanishiga va kelgusi amaliy jarayonlarga uni tadbiq etish ishtiyoqining uyg'onishiga sabab bo'ladi.

Fanning xususiyatidan kelib chiqib, tajriba darslarida talabalar mustaqil bajarishi lozim bo'lgan ishlar tartibini quyidagicha belgilab olish mumkin.

1. Tajriba ishini bajarish uchun zarur bo'lgan nazariy ma`lumotlarni ko'rsatilgan adabiyotlardan to'plash;
2. Belgilangan variant bo'yicha shaxsiy topshiriqlarni o'z vaqtida olish;
3. Ish rejasida belgilangan masalalarning qo'yilishi, uning mohiyati va xalq ho'jaligidagi masalalarni yechishdagi ahamiyati haqida to'liq ma`lumotga ega bo'lish;
4. Masalani yechish usullarining ishchi algoritmlarini ishlab chiqish va algoritmni blok-sxemalar ko'rinishda ifodalash;
5. Ishlab chiqilgan algoritmlar bo'yicha Paskal dasturlash tilida dastur yaratish va uni ishga sozlash hamda hisoblash jarayonini matematik dasturlarda tashkil etish;
6. Tuzilgan dasturni tekshirib ko'rish va olinayotgan natija-larning to'g'riligini, masalani turli xil boshlang'ich va chegaraviy shartlar bilan yechib, eksperiment o'tkazish orqali ishonch hosil qilish;
7. Qo'yilgan masala (shaxsiy topshiriq)ning dasturdan olingan natijalarini zarur formada chop etishni tashkillash;
8. Bajarilgan ishlarni, belgilangan reja asosida rasmiylash-tirish va uni o'qituvchi huzurida himoya qilish (tajriba darsi mobaynida);
9. Himoya qilingan, o'qituvchi tomonidan baholangan tajriba ishi hisobotini o'qituvchiga topshirish;

10. Tajriba ishini o'z vaqtida bajarmagan talaba o'qituvchi bel-gilagan vaqtda(dars mashg'ulotlaridan bo'sh vaqtda) kafedraga kelib ishni bajaradi va belgilangan tartibda uni himoya qiladi. Agar talaba dars mobaynida va qo'shimcha belgilangan vaqtda ham tajriba ishini bajarmasa shu mavzu uchun reyting ballarini ololmaydi va fandan o'zlashtirmagan hisoblanadi.

Tajriba mashg'ulotlarida ko'proq dasturlashgan texnologiya, o'qitishni individuallashtirish texnologiyasi kabi innovasion usullar, zamonaviy axborot texnologiyalari, xususan, tajriba ishlarini bajarish uchun qo'llanadigan elektron uslubiy qo'llanmalar, virtual tajriba stendlaridan keng foydalaniladi.

Zamonaviy, raqobatbardosh mutaxassis kadrlar tayyorlashda o'quvchi-talabalar bilimini nazorat qilish, sinash va *baholash-ning* ahamiyati kattadir. Agar uni yaxshi yo'lga qo'yilmasa, turli-tuman metodlarni qo'llashimiz, qiziqarli dars o'tish uchun turli topshiriqlar tayyorlashimizdan qat`iy nazar, kutilgan natijaga erishib bo'lmaydi. CHunki inson ongida har doim o'z mehnat faoliyatini baholovchi psixologik jarayon ro'y berib turadi. O'z ishini natijasi baholanmasa yoki baholanishidan, taqdirlanishi-dan ko'ngli to'lmasa faolligi susayadi, oxir-oqibat «hafsalasi pir» bo'lishi mumkin. Qo'yilgan ta`lim maqsadlaridan kelib chiqib erishilgan natijani nazorat qilish alohida muhim ahamiyatga ega va u pedagogik texnologiyaning asosiy komponent-laridan biri hisoblanadi.

O'quvchining talabalar bilimini, muntazam tekshirishi va baholashi ularni predmetni chuqur o'rganishga undaydi. Baho-lashning adolatli bo'lishi va bilimiga ko'ra tabaqalanishi, predmetni puxta o'zlashtirish uchun intilishga olib keladi

Talabaning fan bo'yicha o'zlashtirishini baholash semestr davomida muntazam ravishda joriy, oraliq va yakuniy nazorat shaklida amalga oshiriladi.

Joriy baholashda talabalarning tajriba ishlarini bajarish darajasi, dars mashg'ulotlaridagi faol ishtiroki va mustaqil ish topshiriqlarini bajarishi e`tiborga olinsa, oraliq baholashda talabalarning ma`ruza mashg'ulotlaridagi *faolligi*, mustaqil ish topshiriqlarini *o'z vaqtida* bajarganligi va institut ilmiy-uslubiy kengashining qarori bilan belgilangan test yoki yozma ish *natijalari* hisobga olinadi.

YAkuniy baholash ham institut ilmiy-uslubiy kengashining qarori bo'yicha og'zaki, test yoki yozma ish usulida o'tkaziladi hamda talabaning bilim, ko'nikma va malakalari fanning umumiy mazmuni doirasida baholanadi. Baholash faqatgina o'zlashtirish darajasini aniqlash emas, balki pedagog uchun o'qishni rag'batlantirish, ijobiy o'quv motivlarini shakllantirish, shaxsga ta`sir etishning yagona vositasi bo'lib hisoblanadi. *Holisona baholash* ta`sirida talabalarda o'z-o'zini baholash, o'z muvaffaqiyatlariga nisbatan tanqidiy munosabatda bo'lish hissi paydo bo'ladi. Bu esa tabiiyki, o'zlashtirishga nisbatan ijobiy munosabatlarni uyg'otib, mashg'ulotlardan kutiladigan samaradorlikni ta`minlaydi.

9.3 Fanning muayyan mavzularini o'qitishni innovasion usullar yordamida tashkil etish

Ma`lumki, o'qitish usullarining bitmas-tuganmas xazinasi mavjud. Bu usullar har xil o'quv samarasi berishi va muayyan o'quv sharoitida o'quvchilarning bilish faoliyatining har xil darajasini ta`minlashi mumkin. Shu bois, to'g'ri aniqlangan o'quv maqsadlari va uni amalga oshirish uchun qo'llanadigan samarali o'quv usullari yordamida loyihalangan dars mashg'uloti kutilgan samaradorlikni ta`minlashi muqarrardir.

Quyida aniq bir mavzu asosida amaliy dars mashg'ulotini o'tkazish texnologiyasini tavsiya qilamiz.

Amaliy mashg'ulot darsining mavzusi:

CHiziqsiz tenglamalarni yechishning sonli- taqribiy usullari.

Darsning maqsadi:

1. Ta`limiy maqsad:

-talabalarda hisoblash usullarini turli xil masalalarni yechishda qo'llash malakalarini hosil qilish;

-hisoblash usullarining imkoniyatlari haqida atroflicha va to'liq ma`lumotlar berish;

-algoritmlash va dasturlash ko'nikmalarini hosil qilish.

2. Tarbiyaviy maqsad:

-qo'yilgan masalani hal etishda mustaqillik va javobgarlik xislatlarini tarbiyalash.

3. Rivojlantiruvchi maqsad:

-talabalarni o'qishga, dasturlashga va ilmiy-izlanishlar olib borishga bo'lgan qiziqishlarini orttirish;

-hisoblash usullari bilan ishlashda talabaning diqqati va ijodkorligini-rivojlantirish.

Darsning jihozi:

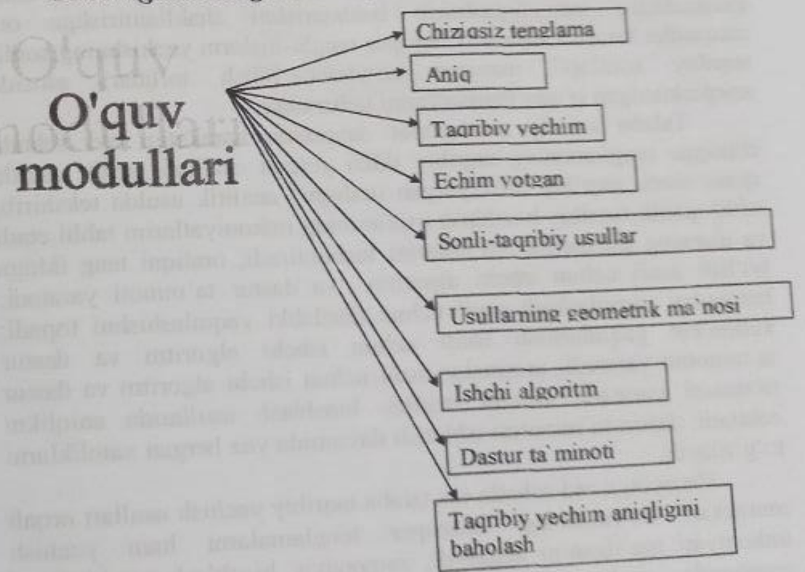
1. darsliklar, kompyuter, tasvirni uzatuvchi;
2. topshiriqni bajarish uchun uslubiy ko'rsatma;
3. tarqatma materiallar.

O'qitish uslublari: Tushuntirish, o'yinli texnologiya, amaliy topshiriq, kichik guruhlarda ishlash, bahs-munozara, savol-javob, muloqot.

Darsning vaqt taqsimoti:

tashkiliy qism (3 min)
takrorlash (7 min)
amaliy topshiriqlar bajarish (35 min)
kichik guruhlarda ishlash (30 min)
darsni yakunlash (5 min)

Fanning mavzusiga doir o'quv moduli birliklari



O'quv modullari dars mavzusining asosiy tushunchalari bo'lib, mavzuni bo'laklarga bo'lib o'zlashtirish imkoniyatini hosil qiladi. Modullarni ajratish talabada har bir tushuncha orasidagi asosiy mantiqiy bog'lanishlarni topishga va ularni ketma-ket o'zlashtirishlariga yordam beradi.

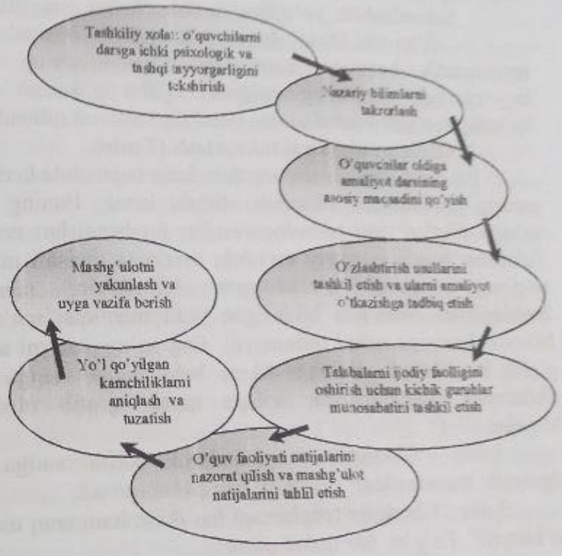
Aniqlashtirilgan o'quv maqsadlari pedagogik jarayonni tashkil etuvchi qismlarning eng muhimi, yetakchisi bo'lib hisoblanadi. Pedagogik jarayon, o'zining qanchalik murakkabligi va davomiyligidan qat`iy nazar, u eng avvalo o'quv maqsadlarni aniqlashdan boshlanadi. Pedagogik jarayonning boshqa tashkil etuvchi qismlari (tamoyil, mazmun, uslub, vosita, shakl) belgilangan maqsadga bo'ysunadilar. ular maqsadga muvofiq holda tanlanadilar va o'zaro uyg'unlashtiriladilar. Pedagogik maqsad-bu pedagog va talabaning hamkorlikdagi faoliyati natijasini oldindan tasavvur etishdir. Amaliy mashg'ulotning asosiy maqsadi harakatga va hissiyotga oid sohalarga tegishli bo'lib, bu sohaga u yoki bu harakat faoliyatida harakat yo'nalishlarini tez va chaqqon o'zgartirish, asab muskullarini muvofiqlashtirib boshqarishni shakllantirishga oid maqsadlar kiradi. Quyida "Chiziqsiz tengla-malarni yechishning sonli-taqribiy usullari" mavzusi bo'yicha bilish toifalari asosida aniqlashtirilgan o'quv maqsadlarini keltiramiz.

Talaba amaliy mashg'ulot davomida harakatga oid sohada chiziqsiz tenglamaning taqribiy ildizi yotgan oraliqni grafik usulda ajrata oladi; taqribiy ildiz yotgan oraliqni analitik usulda tekshirib, tahlil qiladi; taqribiy hisoblash usullarining imkoniyatlarini tahlil etadi va ularning geometrik ma`nolarini tushuntiradi; oraliqni teng ikkiga bo'lish usuli uchun ishchi algoritm va dastur ta`minoti yaratadi; ketma-ket yaqinlashish usuli uchun dastlabki yaqinlashishni topadi; ketma-ket yaqinlashish usuli uchun ishchi algoritm va dastur ta`minotini yaratadi; urinmalar usuli uchun ishchi algoritm va dastur ta`minoti yaratadi; barcha taqribiy hisoblash usullarida aniqlikni oshiradi; dastur ta`minotini ishlatish davomida yuz bergan xatoliklarni to'g'rilaydi.

Hissiyotga oid sohada esa talaba taqribiy yechish usullari orqali murakkab ko'rinishdagi chiziqsiz tenglamalarni ham yechish imkoniyati tug'ilganini anglaydi; zamonaviy hisoblash mashina-lari yordamida sonli-taqribiy usullar bilan olingan yechim-larning

aniqligini yetarlicha orttirish imkoniyati mavjudligini sezadi; hisoblash usullariga bo'lgan qiziqishi kuchayadi.

Mashg'ulot strukturasi



DARS BOSQICHLARI TAVSIFI VA DARSNING BORISHI

1. Tashkiliy qism (3 min).

Salomlashish, yo'qlama, sinfning holati, yangiliklar.

O'quvchi fikrini darsga jalb etish. Bu bosqich mashg'ulotga tayyorgarlik bosqichi hisoblanib, o'quvchilarning mashg'ulotga tayyorgarligi, guruhning *ruhiyati*, tajriba o'tkazish uchun kerak bo'ladigan o'quv vositalarining yetarliligi nazorat qilinadi.

2. O'tilgan mavzuni takrorlash (7 min).

Bu bosqichda amaliy topshiriqlarni bajarishda kerak bo'ladigan nazariy ma`lumotlar takrorlab olinishi kerak. Buning uchun "*Eng so'nggi fikr*" o'yinli texnologiyasidan foydalanishni tavsiya etamiz. Talabalar bunda ixtiyoriy ravishda mavzuga tegishli mulohazalarni, to'g'rirog'i avval o'zlashtirgan bilimla-rini namoyon qila boshlaydilar. Noto'g'ri bildirilgan yoki mantiqan ma`nosiz fikrlar bilimlar bazasiga qabul qilinmaydi. Eng so'nggi fikrni aytgan talaba g'olib hisoblanadi. So'nggi fikrni belgilangan vaqtga qarab yoki fikrlarning chegaralangan soniga qarab ajratib olish mumkin. Masalan,

1-fikr. "Chiziqsiz tenglamalarni ikkita sinfga ajratamiz: algebraik, transsendent". *To'g'ri, fikr qabul qilindi.*

2-fikr. "Chiziqsiz tenglamani har doim ham aniq usulda yechib bo'lmaydi". *To'g'ri, fikr qabul qilindi.*

3-fikr. "CHiziqsiz tenglamani taqribiy yechishda eng maqbul usul bu oraliqni teng ikkiga bo'lish usulidir". *Fikringiz unchalik to'g'ri emas. Yana bir karra o'ylab ko'ring.*

4-fikr. "Chiziqsiz tenglamaning taqribiy yechimi aniqligi uning yechish usulini tanlanishiga bog'liq emas". *To'g'ri, fikr qabul qilindi.*

5-fikr. "Chiziqsiz tenglamalarni taqribiy yechishdan oldin ularning ildizi yotgan oraliqni aniqlab olish juda muhimdir". *To'g'ri, fikr qabul qilindi.*

Shu tariqa *fikrlar jamlanmasi* paydo bo'la boshlaydi. "Men bugun o'nta fikr eshitmoqchiman!", "Shaxsiy fikrlarni besh daqiqa davomida bildiring",- deyish vaunga erishish bilan o'yinni to'xtatiladi. Albatta, oxirgi fikr egasi rag'batlan-tirilishi lozim. CHunki, u bunga loyiq! Mazkur o'yinning afzalliklari quyidagilarda namoyon bo'ladi:

-shaxsiy fikrlar mavzuga tegishli bo'lganligi uchun talaba, albatta, mavzuni o'zlashtirishga harakat qiladi;

-eng so'nggi fikrni aytish uchun talabalarning ko'pgina bilimlar bazasiga ega bo'lishi talab qilinadi;

-talabalarda yangi tushunchalarga tegishli "nozik jihatlarni ham ilg'ab olish" majburiyati hosil bo'ladi. CHunki fikrlar ummon singari cheksiz emas. Ular ba`zan tezda tugab qolishi ham mumkin;

-ma`lumotlarning talabalar tomonidan e`tirof etilayot-ganligi beixtiyor mavzuni mustahkamlaydi. "*To'g'ri, fikr qabul qilindi*" tasdig'ining o'qituvchi tomonidan berilishi bir tomon-dan bildirilgan fikrni ishonchli va to'g'ri ekanligini anglatsa, ikkinchi tomondan bu ma`lumotga ega bo'lmay qolgan talabani yangi bilimlar bilan beixtiyor boyitadi;

-bugungi kunda talabaning "*noyob*" bo'lib borayotgan nutq madaniyati sayqallanib, ko'pchilik ichida o'z fikrini bayon qila olish malakasi hosil bo'ladi;

-talabada o'z fikrini ximoya qilish ehtiyoji tug'ilib, o'zining imkoniyatlariga bo'lgan ishonchi ortadi;

-so'nggi fikrni aytishga bo'lgan umid har safar "*yangi-yangi*" talabalarning bu bahsga qo'shilishiga va natijada faol talabalar sonining ortishiga olib keladi;

-barcha zarur axborotlar takrorlanib, talabalar mashg'ulotni o'tkazishga tayyor, *ishchi* holatda bo'ladilar;

-va nihoyat hamma talabalarda, xatto o'ta passiv talabalarda ham bilishga bo'lgan moyillik, xohish uyg'onadi.

Mazkur texnologiyani nafaqat takrorlash bosqichida balki, ma`ruza mashg'ulotlarining mustahkamlash bosqichida ham qo'llash yaxshi samaralar berishi mumkin. CHunki, yangi o'zlashtirilgan bilimlarni yana bir tasdiqlab olish mukammal bilimlarni egallash garovidir.

3. Amaliy topshiriqlarni bajarish (35 min)

Bu bosqichda asosiy e`tibor bevosita olingan nazariy bilimlar asosida amaliy malakalarni hosil qilishga beriladi. Xususan, biz chiziqciz tenglama-larni yechish o'rganayotgan dars mashg'ulotida usullariga mos ishchi algoritmlar ishlab chiqiladi hamda ularga mos dastur ta`minotlari yaratish talabalarga topshiriladi, yaratilgan dasturning ishonchliligi tekshiriladi. Topshiriqni musobaqa tarzida bajartirish maqsadga muvofiqdir. Musobaqa usulini quyidagi ssenariy asosida qo'llash mumkin:

1-bosqich. Dastlab, guruh 3 ga bo'linadi. Har bir guruhga alohida topshiriq, aniqrog'i taqribiy yechish usullarining algoritmlari blok-sxemalarini tuzish topshiriladi.

1-guruh uchun: Oraliqni teng ikkiga bo'lish usuli.

2-guruh uchun: Iteratsiya usuli.

3-guruh uchun: Urinmalar usuli.

Bunda har bir guruh jamoasi maslahatlashib, o'zlariga ajratilgan taqribiy hisoblash usuli bo'yicha algoritm blok-sxemasini ishlab chiqadilar.

2-bosqich. Har bir guruh o'zi ishlab chiqqan algoritm asosida dastur ta`minoti tuzishni boshlaydi. Har bir guruh a`zosi ishlab chiqilgan aniq algoritmik ketma-ketlik yordamida dastur ta`minotiga mos buyruqlarni doskadagi o'zlari uchun ajratilgan maydonga yoza boshlaydilar. Har bir maydonda komanda a`zolari tuzgan dastur matni hosil bo'ladi. Kimning maydonida eng to'g'ri, mantiqiy va sintaktik xatolarsiz, ishonchli dastur matni paydo bo'lsa, shu komanda a`zolari rag'batlantiriladi. Ushbu usul mavzuni mustahkamlashda va amaliy malakalar hosil qilishda ko'proq qo'llanadi.

Usulni qo'llashdan kutiladigan samaralar:

-har bir guruh o'zi uchun belgilangan topshiriqni birgalikda bajarganligi uchun jamoa bo'lib ishlash, o'zaro hayrixohlik va hamfikrlilik tuyg'ulari kamol topadi;

-har bir guruh a`zosi alohida harakat qilganda topshiriqni mas`uliyat va ziyraklik bilan bajarishga harakat qiladi.

Guruhni ortga tortmaslik har bir talabadan iloji boricha ko'proq bilimlarga ega bo'lishni talab etsa, guruhning faol ishtirokchisiga aylanishga bo'lgan intilish esa ularni o'z ustida ko'proq mustaqil ishlashlarini taqozo etadi.

4. Kichik guruhlarda ishlash (30 min).

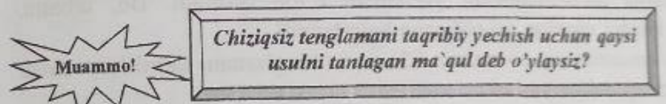
Talabalarni o'zaro faol munosabatlarini tashkil etish va mavzu bo'yicha egallagan amaliy ko'nikmalarni mustahkamlash, ularni ijodiy fikrlashga o'rgatish maqsadida innovasion texnologiyalaridan ayrimlarini darsning aynan shu bosqichida qo'llash maqsadga muvofiqdir.

Bunda guruh talabalari 4-8 kishidan iborat guruhlarga bo'linadi va alohida ish o'rinlariga o'tiradilar. Barcha kichik guruhlarga bir xil yoki har biriga alohida topshiriq beriladi. Guruh a`zolari o'zaro fikr almashib, topshiriqni mustaqil yechishlari zarur. O'qituvchi guruhlarni oralab, ularga topshiriqni bajarish uchun yo'llanma va maslahatlar berib boradi. Kichik guruhlar tarkibi va sardorlari har bir topshiriq hal qilingandan so'ng yoki navbatdagi mashg'ulotda almashtirilishi maqsadga muvofiq bo'ladi. Quyida kichik guruhlar uchun qo'llanadigan usullardan ayrimlari keltirildi.

FSMU texnologiyasi

Dastlab hal etilishi lozim bo'lgan muammoli topshiriq e`lon qilinadi.

Masalan:



Har bir talabaga **FSMU** texnologiyasining to'rt bosqichi yozilgan qog'oz varaqlari tarqatiladi va yakka tartibda ularni to'ldirishni iltimos qilinadi. Bu yerda:

- **F** – fikringizni bayon eting;
- **S** – fikringiz bayoniga sabab ko'rsating;
- **M** – ko'rsatgan sababingizni asoslovchi misol keltiring;
- **U** – fikringizni umumlashtiring.

Talabalar bu bosqichlarda chiziqsiz tenglamani yechishda qo'llanadigan sonli- taqribiy usullar, ularning afzallik va kamchiliklari, har bir usulni qo'llash imkoniyatlari to'g'risidagi *mulohazalar*ini tahlil etadilar.

Yakka tartibdagi ish tugagach, talabalar kichik guruhlarga ajratiladi va o'qituvchi kichik guruhlarga FSMU texnologiya-sining to'rt bosqichi yozilgan katta formatdagi qog'ozlarni tarqatadi. Kichik guruhlarga har bir talaba yozgan qog'ozlardagi fikr va dalillarni katta formatda umumlashtirgan holda to'rt bosqich bo'yicha yozishlari taklif etiladi. So'ngra kichik guruh-larning yozgan fikrlarini jamoa o'rtasida himoya qilishlari so'raladi. FSMU texnologiyasi o'qituvchi tomonidan muammo bo'yicha bildirilgan fikrlarni umumlashtirish bilan yakunlanadi.

Usulni qo'llashdan kutiladigan samaralar:

-talabalar yakka tartibda muammoning yechimini izlaydilar, natijada ularning mustaqil fikrlashlariga keng sharoitlar yaratiladi;

-muammoning yechimini birgalikda qaytadan tahlil etilishi o'zaro hamkorlikda ishlash natijasida javoblarni yanada to'laqonli, ishonchli va to'g'ri bo'lishini ta`minlashi mumkin;

-muammoni FSMU texnologiyasi asosida hal etishni talab etish talabani tizimli fikrlashga, masalaga tizimli yondashuvga, sabab va oqibatlarga falsafiy nuqtai nazarlardan qarashga undaydi.

Muloqot texnologiyasi

Dastlab, guruh kichik guruhlarga ajratiladi va har bir guruhchaga bahs-munozara yo'nalishi e`lon qilinadi. Bu, albatta, amaliy mashg'ulotdan sal oldinroq belgilanadi.

1-muammoviy yo'nalish: Chiziqsiz tenglamani taqribiy yechish usullarining imkoniyatlari.

2-muammoviy yo'nalish: Chiziqsiz tenglamaning amaliy tadbiqlari.

3-muammoviy yo'nalish. Hisoblash usullarini qo'llashda foydalaniladigan daasturlash tillarining imkoniyatlari.

Har bir kichik guruh jamoasi o'z yo'nalishi bo'yicha tayyorgarlik boshlaydi. Boshqa kichik guruhlar bilan muloqotga kirisha olishi uchun o'z yo'nalishi bo'yicha turli materiallar, dalillar, tarixiy ma`lumotlar, ko'rgazmali qurollar tayyorlaydi.

Bahs munozara kuni kichik guruhlar o'rtasida asosiy mavzu va uning yo'nalishlari bo'yicha muloqot boshlanadi. O'qituvchi guruhlarning fikrlarini maqsadli yo'naltirib boradi. Asosiy mavzu kichik guruhlar tomonidan yoritilgach, u aytilgan fikrlarga o'zining munosabatini bildirgan holda muloqotni yakunlaydi. Bunda o'qituvchi muloqotda keltirilgan qimmatli fikrlarni rag'batlantirib turishi va talabalarning muloqotdagi ishtirokini nazorat etib borishi zarur bo'ladi. Yo'nalish bo'yicha qo'yilgan masalani hal etilish darajasiga qarab guruhlar va ayrim talabalar faolligi baholanadi.

Usulni qo'llashdan kutiladigan samaralar:

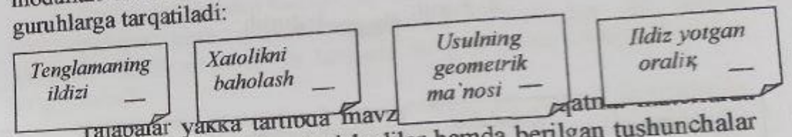
-ushbu texnologiya talabalarning dars jarayonida mustaqil fikrlashga, o'z fikrlarini erkin bayon etishga hamda ularda bahslashish madaniyatini tarbiyalashga yordam beradi.

-talabalarga erkin holda bahslashishlariga sharoit yaratilib, ularda muloqotga kirishish va muloqot qila olish malakalari shakllanadi;

-muammo doirasida turli yo'nalishlar bo'yicha har xil ma`lumotlar to'planadiki, bunday axborotlarni bitta talaba tomonidan to'planishi mushkuldir.

Tushunchalar tahlili

Dastlab talabalar guruhlarga ajratiladi. Mavzu bo'yicha o'quv modullari asosida asosiy tushunchalar yozilgan tarqatma materiallar guruhlarga tarqatiladi:



Talabalar yakka tartibda mavz ... qatm ... berilgan tushunchalar bilan tanishadilar hamda berilgan tushunchalar yoniga egallagan bilimlari asosida berilgan tushunchalarni qanday tushungan bo'lsalar shunday izoh yozadilar.

O'qituvchi jamoa bilan birgalikda tarqatma materialda mavzu bo'yicha berilgan tushunchalarni tahlil etadi va har bir tushunchaga to'g'ri izohni belgilaydi yoki ekranda har bir tushunchaning izohi berilgan slayd orqali tekshiriladi. Har bir guruh to'g'ri javob bilan belgilangan javoblarning farqlarini aniqlaydilar, kerakli tushunchaga ega bo'ladilar, o'z-o'zlarini tekshiradilar, baholaydilar, shuningdek bilimlarini yana bir bor mustahkamlaydilar.

Usulni qo'llashdan kutiladigan samaralar:

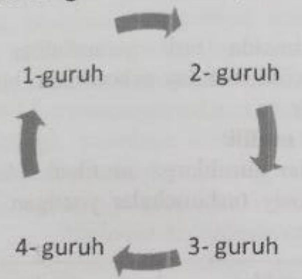
-asosiy tushunchani tavsiflash uchun zarur bilimlarga *ega bo'lish* talab etiladi, bu talabani yangi mavzu bo'yicha ko'proq nazariy bilimlarga ega bo'lishga va mustaqil shug'ullanishga undaydi;

-o'zaro hamkorlikda tushunchalarni tahlil etish muhokama etilayotgan *tushunchaga* yoki munozara mavzusiga oid barcha jihatlarni to'g'ri talqin etilishiga, bilimlarni mustahkam o'zlashtirilishiga sabab bo'lishi mumkin.

-talabalarda bir-birining fikrini hurmat qilish, o'z fikrini himoya etish va nihoyat, yozma nutq madaniyati kamol topishi mumkin.

3*4 texnologiyasi

O'qituvchi guruhni talabalarning umumiy soniga qarab, 3-5 kishidan iborat kichik guruhlarga ajratadi (kichik guruhlar soni *4 ta* bo'lgani maqsadga muvofiq). Har bir kichik guruhga qog'ozning yuqori qismida yozuvi bo'lgan varaklar tarqatiladi:



Tenglama bu —	*Dastlabki yaqinlashishni topish uchun —*	*Echim yotgan oraliqni aniqlashda dastlab —*	*Iterasiya usulining geometrik ma`nosi shuki —*

O'qituvchi kichik guruh a`zolariga tarqatma materialda yozilgan asosiy fikrni faqat uchta fikr, ya`ni uchta gap bilan davom ettirishlari mumkinligini uqtiradi va buni amalga oshirish uchun aniq vaqt belgilaydi. Guruh a`zolari birgalikda tarqatma materialda berilgan fikrni yozib davom ettiradilar.

Vazifa bajarilgach, guruh a`zolari o'rinlaridan turib soat mili yo'nalishi bo'yicha joylarini o'zgartiradilar, ya`ni 1-guruh 2-guruhning, 2-guruh 3-guruhning, 3-guruh 4-guruhning, 4-guruh esa 1-guruhning o'rniga o'tadilar.

Yangi joyga kelgan guruh a`zolari shu yerda qoldirilgan tarqatma materialdagi fikrlar bilan tanishib, unga yana yangi uchtadan o'z fikrlarini yozib qo'yadilar.

Guruh a`zolari yana yuqoridagi kabi joylarini o'zgartiradilar, shu tariqa kichik guruhlar o'z joylariga qaytib kelgunlariga qadar joylarini almashtirib, tarqatma materiallarga o'z fikrlarini qo'shib boradilar.

O'z joylariga qaytib kelgan kichik guruhlar tarqatma materialda to'plangan barcha fikrlarni *diqqat bilan o'qib*, ularni umumlashtirgan holda bitta yaxlit ta`rif yoki qoida holatiga keltiradilar.

Har bir kichik guruhning mualliflik ta`riflari yoki qoidalarini guruh a`zolaridan biri taqdimot qiladi. O'qituvchi kichik guruhlar tomonidan berilgan ta`riflar yoki qoidalarga izoh berib, ularni baholaydi.

Agar auditoriya kichik guruhlarning joylarini almash-tirishga moslanmagan bo'lsa, u xolda talabalarni joylarini almashtirish o'rniga guruhlarga tarqatilgan materiallarni almashtirish orqali, ular dastlabki olingan guruhlarga kaytib kelgunga qadar almashtirilib, talabalar fikrlari to'planishi va taqdimot qilinishi mumkin.

Usulni qo'llashdan kutiladigan samaralar:

-talabalar bitta muammoni yechish uchun har xil fikrlar ko'lamini tahlil etishlari va natijada *to'g'ri qaror* chiqarish-lariga to'g'ri keladi.

-nafaqat bitta muammo doirasida balki, bir nechta muammolar doirasida fikrlashlari natijasida talabalarda mavzuga tegishli keng qamrovli bilimlar tizimi hosil bo'ladi.

Rezyume texnologiyasi

O'qituvchi guruhni talabalarning soniga karab 3-5 kishidan iborat kichik guruhlarga ajratadi. Har bir kichik guruhga qog'ozning yuqori qismida yozuvi bo'lgan, ya`ni asosiy muammo, ularni yechish yo'llari belgilangan va xulosa yozma bayon qilinadigan varaqlarni tarqatadi:

⇨	Asosiy muammo.
⇨	Muammoni yechish yo'llarini tahlil etish.
⇨	Muammoning yechimi va xulosalar.

Har bir kichik guruh a`zolari berilgan varaqlardagi muammolarning yechish yo'llarini aniqlab, o'z fikrlarini flomaster yordamida yozma bayon etadilar.

Masalan:

1-muammo: Chiziqsiz tenglamaning ildizi yotgan [a,b] oraliqni mavjudligini va to'g'riligini tekshiruvchi asosiy shartdagi ko'paytma f(a)f(b)q0 tenglikni qanoatlantirsa, qanday mulohazalar yuritiladi? Bu qanday sabab asosida bo'lishi mumkin?

Echish yo'li: *Ildizning mavjudlik sharti bilan taqqoslang. Funksiyaning xususiyatini va grafikning joylashuv holatlarini tahlil eting.*

2-muammo: Ildiz yotgan oraliqni "katta" qilib tanlab olish qanday «salbiy oqibat»larga olib kelishi mumkin deb o'ylaysiz?

Echish yo'li: *Chiziqsiz funksiyaning har xil grafiklarini va ularning joylashuv holatlarini tasavvur eting . Kattaroq oraliq kanday munosabatlarga sabab bo'lishini eslang.*

Guruhchada yozma bayon etilgan fikrlar asosida ushbu muammoni
echimini topib, eng maqbul variant sifatida umumiy xulosa chiqaradilar. Kichik guruh a`zolaridan biri tayyorlangan materialni jamoa nomidan taqdimot etadi. Guruhning yozma bayon etgan fikrlari o'qib eshittiriladi.

Usulni qo'llashdan kutiladigan samaralar:

-muammoni hal etish yo'nalishining berilishi muammoning yechimini topishda ijobiy samara berishi mumkin.

-fikrlarni mustaqil tahlil etish va yozma bayon qilish malakalari shakllanadi.

Odatda qo'yiladigan muammolar birmuncha murakkabroq bo'lganda mazkur texnologiyani qo'llash maqsadga muvofiqdir.

Charxpalak texnologiyasi

Talabalar guruhlarga ajratiladi. Quyidagi tartibda tayyorlangan tarqatma materiallar guruhlarga tarqatiladi. Bu yerda OTIB – *oraliqni teng ikkiga bo'lish*, UU – *urinmalar usuli* ma`nolarini anglatadi.

№	Tegishli xususiyat	OTIB UU	1-guruh xulo-sasi	2-guruh xulo-sasi	3-guruh xulo-sasi	YAkuniy xulosa
1.	Ildiz yotgan oraliq aniqlanadi	OTIB				
		UU				
2.	Dastlabki yaqinlashish aniqlanadi	OTIB				
		UU				
3.	Ishchi formula juda sodda ko'rinishga ega	OTIB				
		UU				
4.	Sonli -taqribiy usul hisoblanadi	OTIB				
		UU				
5.	Agar oraliq to'g'ri berilsa, bu usulda yechim, albatta topiladi	OTIB				
		UU				
6.	Aniq algoritm asosida hisoblanadi	OTIB				
		UU				
7.	Echimning aniqligini istalgancha oshirish mumkin	OTIB				
		UU				
8.	Echimga yaqinlashish dast-labki yaqinlashishning to'g'ri tanlanishiga juda bog'liq	OTIB				
		UU				
9.	Echimga juda tez yaqin-lashiladi	OTIB				
		UU				
10.	Ildizga ikki tomondan yaqinlashiladi	OTIB				
		UU				
11.	Echimni topish uchun bajariladigan amallar soni ko'p	OTIB				
		UU				
12.	Muayyan geometrik ma`noga ega	OTIB				
		UU				

Guruh a`zolari o'zaro fikrlashib, jadvalda keltirilgan usullarning xususiyatlarini ajratadilar, ya`ni tegishli katak-larga muayyan belgilarni qo'yadilar. Har bir guruh o'zi ishlagan tarqatma materialning o'ng burchagiga guruh raqamini yozadi. Vazifa bajarilgan tarqatma materiallar boshqa guruhlarga «charxpalak aylanmasi» yo'nalishida almashtiriladi.

Yangi guruh a`zolari tomonidan berilgan materiallar o'rganiladi va agar zaruriyat bo'lsa o'zgartirishlar kiritiladi. Jamoalar tomonidan o'rganilgan va o'zgartirishlar kiritilgan materiallar yana yuqorida eslatilgan yo'nalish bo'yicha guruhlararo almashtiriladi.

Materiallarni oxirgi almashishdan so'ng har bir guruh o'zlari ilk bor to'ldirgan materiallarini tanlab oladilar va o'zlari belgilagan javoblariga boshqa guruh a`zolarining tuzatishlarini taqqoslaydilar. YAkuniy xulosa o'rnida esa agar lozim deb topilsa, yangi o'zgartirishlar kiritilgan variantni tavsiya etadilar.

Masalan:

Tegishli xususiyat	Usul	1-guruh	2-uruh	3-guruh	YAkuniy xulosa
Echimga yaqinla-shish dastlabki yaqinlashishning to'g'ri tanlani-shiga juda bog'liq	OTIB	+			
	UU		+	+	+

Va nihoyat, o'qtuvchi berilgan topshiriqning to'g'ri javobini bayon etadi. Guruhlar o'zlarining javob variantlarini tekshirib, muayyan ballni yig'ishlari mumkin. Har bir guruhning faolligi va topqirligi mashg'ulot so'ngida rag'batlantiriladi.

Usulni qo'llashdan kutiladigan samaralar:

-talabalar topshiriqni bajarish davomida mantiqan fikrlab, berilgan savollarga mustaqil ravishda to'g'ri javob berishga va o'z-o'zini baholashga o'rganadilar;

-qisqa vaqt ichida o'qituvchi tomonidan barcha talabalar-ning egallagan bilimlarini baholash imkoniyati tug'iladi.

-talabalar guruhlar bilan ishlash jarayonida boshqalar fikriga hurmat bilan qarashga, ko'p fikrlardan keraklisini tanlab olishga o'rganadilar.

Shunday qilib, tavsiya etilgan barcha texnologiyalar kichik guruhlarda qo'llashga mo'ljallangan bo'lib, mavzuning mazmuniga va o'rgatilayotgan materialning xususiyatiga qarab ulardan birini qo'llash mumkin. Albatta, mazkur innovasion usullarni qo'llash, guruhni boshqarish, talabalarni nazorat qilish va ularni ob`ektiv baholash o'qituvchidan muayyan kasbiy tayyorgarlikni va pedagogik mahoratga ega bo'lishni talab etadi.

5. Darsni yakunlash (5 min)

Mazkur bosqichda talabalarning mashg'ulotdagi va kichik guruhlardagi faol ishtiroki, talabalarning mantiqiy mushohada etish darajasi, o'zaro munosabatlarga kirishish qobiliyatlari, yo'l qo'yilgan kamchiliklarning sabab va oqibatlari, amaliy malakalarni o'zlashtirish darajasi tahlil etilib, nazorat natijalari, qo'yilgan rag'bat ballari va baholar e`lon qilinadi. Tegishli izohlar beriladi. Mashg'ulotda qo'yilgan maqsadlarga erishilganlik darajasi aniqlanib, kelgusi rejalar va mustaqil ish topshiriqlari tavsiya qilinadi.

Xulosa qilib aytganda, mustahkam egallangan bilim va malakalar natijasida talabalarda kelgusida amaliy masalalarni yechishda hisoblash usullarini qo'llash bo'yicha muayyan tajribalar hosil bo'lishi hamda ular ilmiy izlanishlarga va tadqiqotlarga yo'naltirishi mumkin. Samarali o'tkazilgan dars mashg'uloti esa undan ko'zlangan maqsadlarga to'laqonli erishilishini va talabalarda mustahkam bilimlar hosil bo'lishini kafolatlaydi.

Qo'llanma fanlardan amaliy mashg'ulotlarni innovasion usullar yordamida loyihalashda hamda o'tkazishda muhim ahamiyatga egadir. Bundan tashqari fanni o'zlashtirish natijasida talabalar nafaqat tanlangan usullarga mos algoritmlar ishlab chiqish, dastur ta`minotlarini yaratish, balki tayyor matematik dasturiy tizimlardan foydalanib qo'yilgan masalalarni hal qilish imkoniyatiga ega bo'ladilar.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yhati

1. Abduqodirov A.A., Fozilov F.N., Umurzoqov T.N. Hisoblash matematikasi va programmalash. Toshkent, «O'qituvchi», 1989.

2. Badalov F.B, Shodmonov G'. Sh. Riyoziy modellar va muhandislik masalalarini sonli yechish usullari. Toshkent, «Fan», 2000.

3. Xolmatov T.X., Toyloqov N.Sh. Amaliy matematika va kompyu-terning dasturiy ta'minoti. Toshkent, «Mehnat», 2000.

4. Siddiqov A. Sonli usullar va programmalash. Toshkent, «O'zbekiston», 2001.

5. Боглаев Ю.П. Вычислителная математика и программи-рование. Москва, «Высшая школа», 1990.

6. Ho'jayorov B.X. Qurilish masalalarini sonli yechish usullari. Toshkent, «O'zbekiston», 1995.

7. Бахвалов Н.С. Жидков Н.Г., Кобелков Г.М. Численные методы. Москва, «Наука», 1987.

8. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. Москва, «Наука», 1989.

9. Boyzoqov A., Qayumov Sh. Hisoblash matematikasi asoslari. Toshkent, TDIU, 2000.

10. Isroilov M.I. Hisoblash metodlari. 1-qism. Toshkent, «O'zbekiston», 2003.

11. Qobulov V.K. Funksional analiz va hisoblash matematikasi. Toshkent, «O'qituvchi», 1976.

12. Демидович Б.П., Марон И. А. Основы вычислителной математики. Москва, «Наука», 1970.

13. Калиткин Н.Н. Численные методы. Москва, «Наука», 1979.

14. Марчук Г. И. Методы вычислителной математики. Москва, «Наука», 1989.

15. Кабулов В.К., Файзуллаев А.Ф., Назиров Ш.А. Ал-Хорезми, алгоритм и алгоритмизасия. Ташкент, «Фан», 2006.

16. Хюз Д., Митом Д. Структурный поход к программированию. Москва, «Мир»,1980.

17. Karimov P., Irisqulov S.S., Isaboev A. Dasturlash. Toshkent, «O'zbekiston», 2003.

18. Абрамов В.Г., Трифанов Н.П., Трифанов Г.Н. Введение в язык Паскал. Москва, «Наука»,1989.

19. Поршнев С.В., Беленкова И.В. Численные методы на базе Mathcad. СПб, 2005.-464 с.

20. Ракитин В.И.Руководство по ВМ и приложения Mathcad. М.:ФМ,2005.-264с.

21. Имомов А. Hisoblash usullari va Mathcad.Amaliy ishlarni bajarish na'munalari. Namangan, NamDU, 2013.-88 б.

22. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе Mathcad. СПб, Лан,2008-352 с.

23. Половко А.М., Ганичев И.В. Mathcad для студента. СПб, -Петербург, 2006.-336 с.

MUNDARIJA

S. Irisqulov, K. Ismanova, M. Olimov, A. Imamov

SONLI USULLAR VA ALGORITMLAR

O`quv qo'llanma

Toshkent - "Innovatsiya-Ziyo" - 2022

Muharrir: Xolsaidov F. B.
Nashriyot litsenziyasi AI №023, 27.10.2018.
Bosishga 14.09.2022. da ruxsat etildi. Bichimi 60x90. "Times New Roman" garniturasi.
Ofset bosma usulida bosildi. Shartli bosma tabog'i 17. Nashr bosma tabog'i 16.5.
Adadi 100 nusxa.

"Innovatsiya-Ziyo" MCHJ matbaa bo'limida chop etildi.
Manzil: Toshkent shahri, Farhod ko'chasi, 6-a uy.

+99893 552-11-21

ISBN 978-9943-6466-4-3