

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

**ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ИСЛАМА КАРИМОВА**

**Конспект лекций
ОСНОВЫ ГРАВИМЕТРИИ**



Ташкент - 2022

Хайдаров Б.Х. Основы гравиметрии
Ташкент: ТашГТУ, 2022.

Конспект лекций составлен на основании учебного плана и соответствующей рабочей программы дисциплины для студентов, обучающихся по направлению образования 60722500 - «Геодезия, картография и кадастр». Конспект лекций также может представлять интерес и для студентов магистратуры различных направлений геолого-геодезического профиля.

Печатается по решению научно-методического совета ТашГТУ

Рецензенты:

Турсунметов Р.А.

Зав.лаб. ГУ«ГИДРОИНГЕО», в.н.с.

Мирходжаев Б.И.

к.г.-м.н., доц. Таш ГТУ

© Ташкентский государственный технический университет, 2022.

Введение

Гравиметрия как следует из дословного перевода (латинское - *gravitas* – тяжелый, греческое – *metreo* – измеряю) , может определяться как наука об измерении величин, характеризующих гравитационное поле Земли, в предмет гравиметрии включаются вопросы использования данных измерений для определения фигуры Земли, ее внутреннего строения, а также для изучения геологического строения её верхних частей: земной коры и мантии.

Под гравитационным полем Земли понимается поле силы тяжести (точнее ускорения силы тяжести), которая определяется как составляющая двух основных сил: силы притяжения Земли и центробежной силы, вызванной её суточным вращением. Величина силы тяжести на поверхности Земли зависит от фигуры и распределения плотности внутри Земли. Вследствие этого знание гравитационного поля позволяет определить, как её фигуру, так и её внутреннее строение, в частности строение земной коры. При изучении фигуры Земли нужно прежде всего определить, что понимается под фигурой нашей планеты. На первый взгляд все то, что образует внешнюю поверхность Земли – материки, моря. Океаны, горы , реки и т.д. имеет настолько причудливую форму, что не представляется возможным вывести какое-либо заключение обо всей Земле в целом. Но при рассмотрении мы видим, что моря сообщаются между собой, что берега морей и океанов мало возвышаются над уровнем моря и что высота самых высоких гор совершенно ничтожна по сравнению с радиусом Земли (около 9 км (Джомолунгма пик) и 6371 км (средний радиус Земли) или 0,14% всего радиуса). В зависимости от степени приближения рассматриваемой фигуры к реальной поверхности в качестве фигуры может приниматься шар, эллипсоид вращения, трехосный эллипсоид и т.п.

Исторически эволюция представлений о фигуре Земли шла от простого к сложному. Пифагор в 6 веке до н.э. высказал предположение о близкой к шару форме планеты. В 3 веке до н.э. Эратосфен произвел первое определение радиуса земли. Следующий шаг в развитии представлений о фигуре Земли сделал Ньютон (1687г), когда он доказал, что Земля должна иметь форму эллипсоида, сжатого у полюсов. Градусные измерения , организованные Французской академией наук подтвердили справедливость теории Ньютона.

В дальнейшем ученые пришли к выводу, что под фигурой Земли нужно понимать поверхность мирового океана и сообщаящихся с ним морей при некотором среднем уровне воды, свободной от возмущений, мысленно продолженная под континентами. Эта поверхность, являющаяся одной из уровенных поверхностей потенциала силы тяжести, получила название **геоида**.

Часто под геоидом понимают уровенную поверхность, проходящую через некоторую фиксированную точку земной поверхности у берегов моря (начало счета высот). По современным данным, средняя величина отступлений геоида от наиболее удачно подобранного эллипсоида составляет около ± 30 м , а максимальное – около 100 м.

Ученый Стокс (1849г) решил задачу определения формы уровенной поверхности по результатам измерения силы тяжести без каких либо гипотез о внутреннем строении Земли, Стоксом получена формула расчета высоты геоида над эллипсоидом.

В 1945-60 гг. М.Молоденским была решена основная задача изучения фигуры и внешнего гравитационного поля Земли. Показав принципиальную невозможность строгого изучения геоида только по результатам гравиметрических и геодезических измерений на поверхности Земли, Молоденский создал теорию, определяющую непосредственную фигуру физической поверхности Земли и внешнее гравитационное поле.

Задача определения фигуры Земли заключается в определении точных геодезических координат (В, L, Н) относительно уровенного эллипсоида.

Точный закон изменения силы тяжести на поверхности уровенного эллипсоида определяется так называемой формулой нормальной силы тяжести. Если бы наблюдаемые по этой формуле значения в точности совпадали с наблюдаемой силой тяжести, это служило бы доказательством того, что поверхность Земли является поверхностью уровенного эллипсоида. Наоборот, отличия действительной силы тяжести от нормальной (аномалии силы тяжести) свидетельствуют об отступлении истинной фигуры Земли от фигуры сравнения. Молоденский получил принципиально строгие формулы, позволяющие по аномалиям силы тяжести определить отступления физической поверхности Земли от уровенного эллипсоида. За уровенный эллипсоид можно принять как общий земной эллипсоид, так и референц-эллипсоид. Эти эллипсоиды отличаются друг от друга не только размерами и формой (большая полуось и сжатие), но и способом ориентирования в теле Земли. Общий земной эллипсоид ориентируется таким образом, что его центр масс совмещается с центром масс Земли, а малая полуось совпадает с осью вращения Земли. Референц-эллипсоид ориентируется путем установления исходных геодезических дат (т.е. геодезические координаты какого либо одного пункта, выбираемого в качестве исходного, принимаются равными некоторым заданным величинам) и потому его центр масс не совпадает с центром масс Земли (различие около 100м), а малая полуось параллельна оси вращения Земли.

При построении государственных геодезических сетей высокой точности выполняют угловые и линейные измерения, определяют астрономические широты, долготы и азимуты, измеряют силу тяжести и превышения между пунктами, ведут наблюдения искусственных спутников Земли и т. п. При производстве высокоточных астрономо-геодезических измерений всякий раз тщательно совмещают вертикальную ось измерительного прибора с отвесной линией в точке его установки. Направление отвесной линии в каждой точке пространства совпадает с направлением действия силы тяжести. Сила тяжести является равнодействующей двух основных сил: силы земного притяжения F и центробежной силы P , возникающей вследствие суточного вращения материальной точки вокруг оси вращения Земли.

Лекция 1

Закон тяготения и сила тяжести

Закон всемирного тяготения был установлен Исааком Ньютоном в конце 17 века. Согласно этому закону все тела притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной их массе и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Для двух точечных масс, то есть масс, сосредоточенных в бесконечно малом объеме, закон всемирного тяготения можно записать в виде :

$$F = -f \cdot (m_1 \cdot m_2 / r^2), \tag{1.1}$$

где m_1 и m_2 - взаимодействующие точечные массы, r - расстояния между точками m_1 и m_2 , f – коэффициент пропорциональности называемый гравитационной постоянной.

Размерность гравитационной постоянной легко получить из формулы (1), если представить силу, согласно второму закону Ньютона, как произведение массы на ускорение:

$$F = mg = - f \cdot (m_1 m_2 / r^2)$$

Ускорение можно выразить через время и путь в соответствии с известной формулой $r = gt^2/2$. Отсюда размерность ускорения будет

$$(g) = (L)/(T)^2, \text{ а размерность гравитационной постоянной}$$

$$(f) = (L)^3 / (T)^2 (M),$$

где L – длина, T - время, M – масса.

В системе СИ где за единицу длины принят метр, единицу времени секунда и единицу массы – килограмм,

$$f = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2$$

В системе СГС – сантиметр, секунда, грамм,

$$f = 6,673 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{с}^2$$

Физически эта постоянная представляет собой силу притяжения между двумя телами массой по 1 грамму, удаленных на 1 см, внутри герметически закрытой области, выраженную в динах ($1 \text{ дн} = \text{г} \cdot \text{см} \cdot \text{с}^2$).

Обычно сила тяжести измеряется ускорением сообщаемым свободно падающему телу: $g = m \cdot t^2$. В системе СГС за единицу ускорения принят гал = $\text{см} \cdot \text{с}^{-2}$. Это в честь Галилея, первым измерившим значение ускорения силы тяжести. Если масса притягиваемого тела равна 1 г, то сила тяжести, в динах численно равна её ускорению, выраженному в галах. Одна тысячная доля гала это миллигал: $1 \text{ мгл} = 0,001 \text{ гл}$.

Обычно вместо точного выражения «ускорения силы тяжести» говорят «сила тяжести».

Согласно теории притяжения однородная сферическая масса притягивает другую массу с силой, равной силе, развиваемой точечной массой, равной массе всего шара и сосредоточенной в ее центре. Поэтому в первом приближении притяжение Земли можно представить формулой для притяжения точечных масс:

$$F = - f \cdot (M / R^2), \tag{1.2}$$

где M - масса Земли, R – расстояние от центра Земли до точки притяжения. В случае точки на поверхности Земли, R – радиус Земли.

Кроме силы притяжения, на массы Земли действует центробежная сила, возникающая за счет суточного вращения Земли вокруг оси. Эта сила пропорциональна радиусу вращения и квадрату угловой скорости ω :

$$P = \rho\omega^2 m \tag{1.3}$$

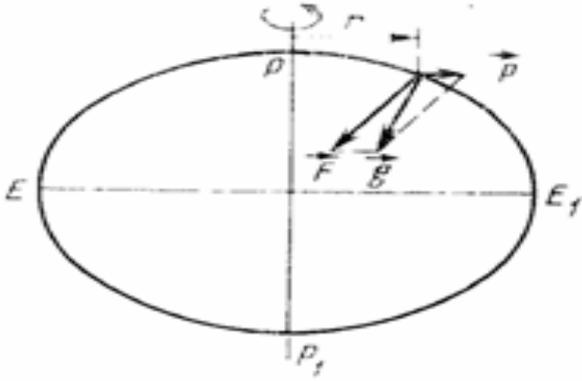


Рис. 1.1. Сила тяжести и ее составляющие

В сумме сила притяжения и центробежная сила составляют то, что называется сила тяжести. Будучи отнесена к единичной массе она дает ускорение в данной точке

$$g = -f \int \frac{1}{r^2} dm + \rho\omega^2 \tag{1.4}$$

Если каждой точке пространства на поверхности Земли и во внешнем пространстве соответствует единственное значение силы тяжести, отнесенное к единичной массе, то это пространство будет названо **полем силы тяжести**.

Полная напряженность силового поля у поверхности Земли изменяется в пределах от 978 мгл на экваторе до 983 мгл на полюсах, то есть на 5 мгл. Отношение разности силы тяжести на экваторе и полюсе к силе тяжести на экваторе равно

$$\beta = (g_n - g_3) / g_3 = 1/189$$

Из двух компонентов силы тяжести – силы притяжения и центробежной силы – последняя даже при максимальном значении составляет менее 0,5%. Отношение максимального значения центробежной силы к минимальному значению силы тяжести составляет: $\omega^2 a / g_3 = 1/288$, при

$\omega = 2\pi/86164,1 = 7,29 * 10^{-5}$, где 86164,1 – число секунд в звездных сутках (в обычных сутках 86400 сек), $a = 6378\ 245$ м – большая полуось Земли по Красовскому, $g_3 = 978,03$ гл по Гельмерту. Центробежная сила изменяется от нуля у полюсов до максимального

значения на экваторе $\omega^2 a = 3,4$ гл. Эта сила P направлена от оси вращения Земли по перпендикуляру к ней и таким образом, уменьшает силу притяжения на величину $\omega^2 a \cdot \cos\varphi$, где φ – широта места где рассматривается сила тяжести. закономерное Изменение центробежной силы в основном определяет так называемое нормальное изменение силы тяжести от полюса до экватора. Также за счет сплюснутости происходит увеличение силы тяжести у полюсов.

Таблица 1.1

Полное изменение силы тяжести от полюса к экватору, мгл	5200
Изменение g от полюса к экватору за счет центробежной составляющей, мгл	3400
Изменение g от полюса к экватору за счет сплюснутости, мгл	1800
Максимальная аномалия силы тяжести, мгл	500
Изменение g при перемещении на 1 м по высоте, мгл	0,3
Максимальная амплитуда лунно-солнечных возмущений g , мгл	0,4

Контрольные вопросы:

1. Составляющие силы тяжести, единица измерения силы тяжести.
2. Общее распределение силы тяжести по поверхности Земли.

Лекция 2

Потенциал силы тяжести и уровенные поверхности

Гравитационное поле Земли является потенциальным, в котором каждой точке пространства вокруг Земли соответствует некоторая непрерывная имеющая непрерывные производные функция. Производные функции по направлениям равняются проекциям силы тяжести на эти направления. Эта функция является потенциалом силы тяжести. Потенциал W состоит из суммы потенциала притяжения V и потенциала центробежной силы U :

$$V = f \int \frac{1}{r} dm, \quad U = \rho^2 \omega^2 / 2,$$

$$\text{тогда } W = f \int \frac{1}{r} dm + \rho^2 \omega^2 / 2 \quad (2.1)$$

Изменение потенциала при переносе массы из одной точки в другую равняется работе, затраченной на этот перенос:

$$dW = g \cdot dS, \quad (2.2)$$

где g – напряженность поля, dS – элементарное перемещение массы

Производные W по направлениям x, y, z равны соответственно

$$\begin{aligned} dW/dx &= -f \int \frac{dr}{dx} * dm/r^2 + \omega^2 \rho * d\rho/dx \\ dW/dy &= -f \int \frac{dr}{dy} * dm/r^2 + \omega^2 \rho * d\rho/dy \\ dW/dz &= -f \int \frac{dr}{dz} * dm/r^2 + \omega^2 \rho * d\rho/dz \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь } \frac{dr}{dx} &= \cos(F, x), \quad d\rho/dx = \cos(P, x) \\ \frac{dr}{dy} &= \cos(F, y) \quad d\rho/dy = \cos(P, y) \\ \frac{dr}{dz} &= \cos(F, z) \quad d\rho/dz = \cos(P, z) = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Теперь выражения (2.3) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} dW/dx &= F \cos(F, x) + P \cos(P, x) = F_x + P_x = g * \cos(gx) \\ dW/dy &= F \cos(F, y) + P \cos(P, y) = F_y + P_y = g * \cos(gy) \\ dW/dz &= F \cos(F, z) = F_z = g * \cos(gz) \end{aligned} \quad (2.5)$$

F_x, F_y, F_z, P_x, P_y = проекции напряженности силы притяжения и центробежной соответственно.

Если масса M переместилась в любом направлении на dS , то полное приращение потенциала $dW = (dW/dx) dx + (dW/dy) dy + (dW/dz) dz$, (2.6)

$$\begin{aligned} \text{где } dx &= ds * \cos(s, x) \\ dy &= ds * \cos(s, y) \\ dz &= ds * \cos(s, z) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Учитывая выражения (2.5), (2.7) получим:

$$dW = g dS \{ \cos(gx) * \cos(s, x) + \cos(gy) * \cos(s, y) + \cos(gz) * \cos(s, z) \}.$$

Имея в виду, что

$$\cos(gx) * \cos(s, x) + \cos(gy) * \cos(s, y) + \cos(gz) * \cos(s, z) = \cos(g, s)$$

$$\text{Получим } dW/ds = g * \cos(g, s) = g_s \quad (2.8)$$

Из этого свойства потенциала вытекает 2 важных свойства потенциала:

1. Если точка перемещается в направлении перпендикулярном направлению действия силы g , то $\cos(g, s) = 0$, а тогда $dW/ds = 0$,

$$\text{Интегрируя получим } W = \text{const} = C \quad (2.9)$$

Это выражение является уравнением некоторой поверхности, в любой точке которой сила тяжести направлена по нормали к ней. Работа материальной точки при

перемещении по этой поверхности равна нулю ($dW = 0$), на материальную точку на поверхности не действуют тангенциальные составляющие силы, так как сила нормальна к ней, и следовательно, точка находится в равновесии.

Очевидно, что это поверхность равновесия жидкости, по ней устанавливается уровень жидкости, такая поверхность является уральной, или эквипотенциальной поверхностью вследствие постоянства на ней потенциала.

Задавая в уравнении (2.9) различные значения констант, получим семейство уральных поверхностей, которые никогда не могут касаться или пересекаться между собой.

2. Теперь рассмотрим случай перемещения точки вдоль линии действия силы g .

$$\text{Тогда } \cos(g,s) = 1, \quad ds = dW/g, \quad (2.10)$$

где ds – перемещение перпендикулярное уральной поверхности, dW – приращение потенциала при переходе с одной уральной поверхности на другую, бесконечно близкую.

Согласно уравнению (2.10) расстояние между двумя бесконечно близкими уральными поверхностями обратно пропорционально действующей силе и прямо пропорционально приращению потенциала. Величина силы тяжести в каждой точке пространства поля – является напряженностью поля. Можно сказать, что уральные поверхности располагаются тем чаще, чем больше напряженность поля.

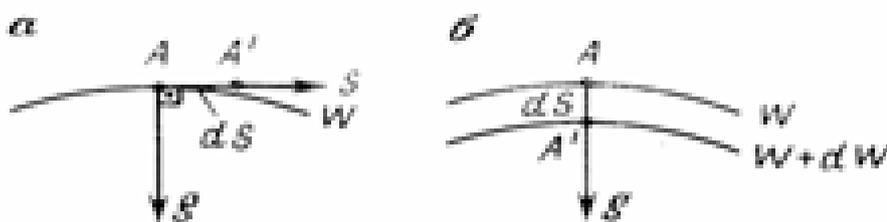


Рис. 2.2. Схемы перемещения материальной точки перпендикулярно к вектору силы тяжести (а) и вдоль него (б)

1. Уровенные поверхности Земли нигде не соприкасаются между собой и не пересекаются.
2. Уровенные поверхности Земли не параллельны между собой: на полюсе они сближаются, а на экваторе, наоборот, удаляются одна от другой.
3. Уровенные поверхности Земли имеют волнообразный вид из-за наличия внутри Земли аномальных по плотности масс.

Еще одним свойством потенциала является то, что называется теоремой Лапласа, согласно которой для точки, расположенной вне притягивающих масс, сумма вторых производных потенциала притяжения по осям прямоугольных координат равна нулю:

$$d^2V/dx^2 + d^2V/dy^2 + d^2V/dz^2 = 0 \quad (2.11)$$

Левая часть уравнения (11) является оператором Лапласа. Теорема легко доказывается простым дифференцированием потенциала притяжения.

В случае если притягиваемая точка лежит внутри притягиваемых масс, оператор Лапласа для потенциала притяжения обращается в величину, равную $-4\pi f\sigma$, где σ – плотность масс:

$$d^2V/dx^2 + d^2V/dy^2 + d^2V/dz^2 = -4\pi f\sigma \quad (2.12)$$

Это последнее выражение называется уравнением Пуассона.

В случае потенциала силы тяжести

$$W = fm/r + \rho^2 \omega^2/2,$$

легко показать, что уравнение Лапласа примет вид:

$$d^2W/dx^2 + d^2W/dy^2 + d^2W/dz^2 = 2\omega^2 \quad (2.13)$$

а уравнение Пуассона :

$$d^2W/dx^2 + d^2W/dy^2 + d^2W/dz^2 = 2\omega^2 - 4\pi f\sigma \quad (2.14)$$

Производные добавившегося потенциала центробежной силы

$$U = \rho^2 \omega^2/2 = (\omega^2/2) \cdot (x^2 + y^2) \text{ будут}$$

$$d^2U/dx^2 = \omega^2. \quad d^2U/dy^2 = \omega^2. \quad d^2U/dz^2 = 0$$

$$d^2U/dx^2 + d^2U/dy^2 + d^2U/dz^2 = 2\omega^2.$$

Контрольные вопросы:

1. Понятие потенциала силы тяжести и его производные.
2. Уровненные поверхности и их свойства.

Лекция 3

Фундаментальные геодезические постоянные и нормальное гравитационное поле Земли. Фигура реальной Земли

Гравитационное поле Земли = нормальное поле + остаточное аномальное поле. Нормальное поле для решения геодезических задач = поле гравитационное эллипсоида вращения, поверхность которого является уровенной. Это уровенный эллипсоид или нормальная Земля.

Зная параметры нормальной Земли - массу, форму поверхности, угловую скорость вращения в любой точке внешнего пространства можно легко вычислить нормальной потенциал и другие элементы нормального гравитационного поля.

Нормальная сила тяжести. Нормальную силу тяжести γ на поверхности нормальной Земли можно рассчитать аналитическим образом. Распределение изменений нормальной силы тяжести γ_0 на поверхности нормальной Земли оценивается таким образом:

$$\gamma_0 = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B), \quad (3.1)$$

где

B - широта точки, $\beta = 5/2q - \alpha$, $\beta_1 = 1/8 \alpha^2 + 1/4\alpha\beta$, $\alpha = (a-b)/a$, здесь a, b – большая и малая полуоси эллипсоида, представляющего Землю;

$q = \omega^2 a / g_e$ - это отношение максимальной центробежной силы к силе тяжести на экваторе.

γ_e - значение нормальной силы тяжести на экваторе.

Согласно (1.1) γ_0 на полюсе равна: $\gamma_P = \gamma_e (1 + \beta)$ следующие по $\gamma_P = \gamma_e + \gamma_e \beta \Rightarrow \beta = \frac{\gamma_P - \gamma_e}{\gamma_e}$ этот коэффициент выражает избыток силы тяжести на полюсе по отношению к экватору. Считая, что $\gamma_e = 978$ гал, $\gamma_P = 983,2$ гал. Отсюда $\gamma_P - \gamma_e = 5,2$ гал $\Rightarrow \beta \approx 0,0053$.

Величина $\gamma_e \beta = 5,2$ гал - это суммарные изменения гравитационной и центробежной составляющих нормальной силы тяжести.

На экваторе центробежная сила противоположна силе тяготения и равна $\omega^2 a$. а- большая полуось Земли эллипсоида=6378км, $\omega = 2\pi/86164$ (в знаменателе)число средних в звездных сутках=23 часа 56 минут.

$\omega = 7,292 \cdot 10^{-5}$ 1/сек. Получаем $\omega^2 a = 3,4$ гал.

Полное изменение силы тяготения на поверхности нормальной Земли = 5,2-3,4=1,8гал.

Для определения коэффициентов нормального гравитационного поля, нужно в разных точках земного шара с известными геодезическими координатами на уровне геоида провести определения значений силы тяжести. Например, в трех точках определены эти значения, тогда имеем систему трех линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= g_e (1 + \beta \sin^2 B_1 - \beta_1 \sin^2 2B_1) \\ \gamma_2 &= g_e (1 + \beta \sin^2 B_2 - \beta_1 \sin^2 2B_2) \\ \gamma_3 &= g_e (1 + \beta \sin^2 B_3 - \beta_1 \sin^2 2B_3) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Таким образом, имеем три уравнения с тремя неизвестными g_e, β, β_1

Коэффициенты (3.1) определяет на основе экспериментальных данных. В настоящее время есть несколько формул для расчета нормальной силы тяжести:

1. формула Гельмерта: $\gamma_0 = 978030(1 + 0,005302 \sin^2 \beta - 0,000007 \sin^2 2\beta)$ мГал. (1909 год);
2. формула Гельмерта для трехосной Земли:
 $\gamma_0 = 978052 (1 + 0,005258 \sin^2 \beta - 0,000007 \sin^2 2\beta + 0,000018 \cos^2 \beta \cos 2(\lambda + 17^\circ))$
(1915 год). Этой формуле соответствует трехосный эллипсоид со сжатиями $\alpha_1 = 1:295,1; \alpha_2 = 1:298,3; a_1 - a_2 = 230$ метр;
3. формула Беррота для трехосного эллипсоида:
 $\gamma_0 = 978046 (1 + 0,005296 \sin^2 \beta - 0,000007 \sin^2 2\beta + 0,000012 \cos^2 \beta \cos 2(\lambda + 17^\circ))$
(1915 год);
4. формула Гельмерта для трехосного эллипсоида :
 $\gamma_0 = 978049 (1 + 0,005293 \sin^2 \beta - 0,000007 \sin^2 2\beta + 0,000019 \cos^2 \beta \cos (\lambda + 0^\circ))$ (1928 год);
5. формула Гейсканена для трехосного эллипсоида:
 $\gamma_0 = 978049,7 (1 + 0,0052902 \sin^2 \beta - 0,0000059 \sin^2 2\beta)$ (1957 год);
6. формула Киссиниса: $\gamma_0 = 978049(1 + 0,0052884 \sin^2 \beta - 0,0000059 \sin^2 2\beta)$ мГл. (1930 год);

В этих формулах β и λ являются соответственно широтой и долготой места определения нормальной силы тяжести.

1 формула соответствует эллипсоиду Красовского с сжатием 1:298,3

2 формула соответствует эллипсоиду Хейфорда с сжатием 1:297 при $a=6378388$ м.)

Формула Кассиниса принятая в 1930 году и считается международной. Для перехода от формулы Кассиниса к формуле Гельмерта существует зависимость $\gamma^r = \gamma^k - (19 - 13,2\text{Sin}^2 B + 1,076\text{Sin}^2 2B)$ мГал.

7. нормальная формула геодезической референц-системы 1967 принята равной:
 $\gamma_0 = 978053 (1 + 0,005288 \sin^2 \beta - 0,0000059 \sin^2 2\beta)$ сжатие $\alpha = 1 : 297,0$

Международным геодезическим и геофизическим союзом (МГГС) приняты следующие параметры для нормальной Земли:

- геоцентрическая гравитационная постоянная $IM = 398603 \text{ km}^3 \cdot \text{c}^{-2}$.

- большая полуось эллипсоида $a = 6378160 \text{ м}$.

- зональный гармонический коэффициент второго порядка потенциала тяготения.

$J_2 = 10827 \cdot 10^{-7}$ (этот коэффициент связан со сжатием Земли следующим образом:

$$\alpha \approx \frac{3}{2} J_2 + \frac{\omega^2 a^3}{IM}. \quad (3.3)$$

Контрольные вопросы:

1. Фундаментальные геодезические постоянные и параметры нормальной Земли
2. Понятие нормального гравитационного поля Земли и формулы для его расчета.

Фигура и гравитационное поле Земли тесно взаимосвязаны и их изучение представляет собой по существу одну задачу. Сложная структура гравитационного поля, обусловленная неправильностями фигуры Земли и особенностями распределения плотностей масс, создает значительные трудности при определении потенциала силы тяжести W . Задача определения потенциала W существенно облегчается, если гравитационное поле Земли представить в виде двух полей: основного, или нормального и остаточного, или аномального и каждое из них изучать отдельно.

За физическую модель Земли при этом принимают так называемый уровенный эллипсоид вращения, внешняя поверхность которого является уровенной и сила тяжести в каждой точке ее направлена по нормали к ней.

Центр уровенного эллипсоида совмещают с центром масс Земли, а ось его вращения — с осью вращения Земли. Гравитационное поле, создаваемое уровенным эллипсоидом на его поверхности и во внешнем пространстве, называют нормальным гравитационным полем, а силу тяжести — нормальной и обозначают буквой u .

Определив параметры уровенного эллипсоида, можно вычислить нормальный потенциал U и другие элементы нормального поля силы тяжести на его поверхности и во внешнем пространстве. Приняв поверхность уровенного

эллипсоида за отсчетную, задачу изучения фигуры Земли можно свести к определению отклонений ее физической поверхности от поверхности эллипсоида, а задачу определения потенциала W реальной силы тяжести к определению небольших разностей $T=W-U$, называемых возмущающим потенциалом Земли в точках земной поверхности.

Уровенный эллипсоид, принимаемый за физическую модель Земли при определении ее фигуры и гравитационного поля, принято называть Нормальной Землей. При решении ряда задач геодезии, геофизики и небесной механики широкое распространение получило представление потенциала V притяжения Земли (включая ее атмосферу) в виде разложения в ряд шаровых функций геоцентрических координат r , Φ и L , т. е. геоцентрических радиуса, широты и долготы соответственно. Потенциал притяжения V_0 Нормальной Земли (уровенного эллипсоида) имеет вид:

$$V_0 = \frac{fM_0}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} j_{2n}^0 P_{2n}(\sin \varphi) \right] \quad (3.4)$$

где индексом «0» отмечены параметры Нормальной Земли; f — универсальная гравитационная постоянная; M_0 — масса уровенного эллипсоида; r — геоцентрический радиус-вектор точек его поверхности; a — большая полуось эллипсоида; J_{2n}^0 — зональные гармонические коэффициенты второй степени при полиномах Лежандра $P_{2n}(\sin \Phi)$.

Параметры Нормальной Земли в зависимости от их величины и важности классифицируют следующим образом.

Параметры нулевого порядка: геоцентрическая гравитационная постоянная fM ; нормальный потенциал силы тяжести на поверхности Нормальной Земли U_0 ; экваториальный радиус Земли a ; нормальная сила тяжести на экваторе γ_e .

Параметры, порядка сжатия: нормальный гармонический коэффициент геопотенциала второй степени J_2 ; геометрическое сжатие Земли $a=(a-b)/a$; гравиметрическое сжатие Земли $P=(\gamma_p - \gamma_e)/\gamma_e$, где γ_p — нормальная сила тяжести на полюсе; малые параметры, являющиеся функцией угловой скорости вращения Земли ω , и параметры нулевого порядка, а именно:

$$q = \omega^2 a / \gamma_e \quad (3.5)$$

$$q = \omega^2 a^2 / fM \quad (3.6)$$

Параметры высших порядков: коэффициент β_1 в формуле нормальной силы тяжести; гармонические коэффициенты нормального потенциала притяжения J_4^0 , J_6^0 , ... и т. д.

При известных параметрах и ориентировке земного эллипсоида в теле Земли задача изучения ее фигуры сводится к определению геодезических высот точек земной поверхности, отсчитываемых от поверхности эллипсоида по нормальям к нему, т. е. к определению отрезков $H_M^r = MC$ (рис.4.1 а) в точках с известными координатами на эллипсоиде. Однако геодезическую высоту любой точки измерить непосредственно нельзя. Поэтому ее раскладывают на две составляющие и каждую из них определяют отдельно, используя разную измерительную информацию.

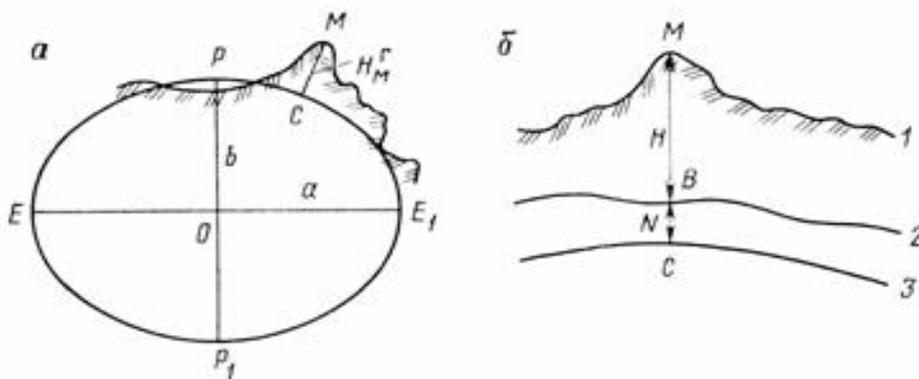


рис. 3.1. Геодезическая высота точки (а) и ее составляющие (б):

- 1 — физическая поверхность Земли;
- 2 — квазигеоид (геоид);
- 3 — эллипсоид

В соответствии с теорией М. С. Молоденского геодезическую высоту H_M^r любой точки M земной поверхности вычисляют по формуле

$$H_M^r = \zeta_M^E + H_M^r \quad (3.7)$$

где ζ_M^E — аномалия высоты; H_M^r — нормальная высота данной точки. Аномалии высот ζ^E сравнительно малы и, как правило, не превышают 100 м, а нормальные высоты точек в горах могут достигать нескольких километров.

Аномалию высоты ξ_M^E любой точки M представляют в виде

$$\zeta_M = \frac{T_M}{\gamma_m} + \frac{U_0 - W_0}{\gamma_m} \quad (3.8)$$

где $T_M = W_m - U_M$ — возмущающий потенциал Земли в точке M ; W_M и W_0 — значения потенциала реальной силы тяжести в точке M и на поверхности геоида; U_M и U_0 — значения потенциала нормальной силы тяжести в этих же точках; γ_m — значение

нормальной силы тяжести на высоте $H = \frac{1}{2} H^{\gamma_M}$ над эллипсоидом.

Нормальную высоту H^{γ_M} любой точки M можно определить по формуле

$$H^{\gamma_M} = \frac{1}{\gamma_m} \int_0^M g dh \quad (3.9)$$

она определяется из геометрического нивелирования, сопровождаемого измерениями силы тяжести. В формуле (4.6) γ_m — значение нормальной силы тяжести на высоте

$H = \frac{1}{2} H^{\gamma_M}$ над эллипсоидом; g — значения реальной силы тяжести в точках нивелирной линии; dh — элементарные превышения.

Через точку M земной поверхности (рис. 4.1 б) проведем нормаль MC к поверхности земного эллипсоида и обозначим: $N = BC$ — высота квазигеоида над эллипсоидом; $H = MB$ — высота этой точки над квазигеоидом. Для каждой конкретной точки M земной поверхности высота N квазигеоида численно равна аномалии высоты ξ_M^E , т. е. $N = \xi_M^E$, а высота H этой точки над квазигеоидом численно равна нормальной высоте, т. е. $H = H^{\gamma_M}$.

Поэтому вместо выражения (4.4) с такой же строгостью и точностью можно написать

$$H^{\gamma} = N + H. \quad (3.10)$$

Формулой (4.7) обычно и пользуются на практике, но значения $N = \xi_M^E$ и $H = N^{\gamma_M}$ вычисляют по формулам (5) и (6), хотя физический смысл величин ξ_M^E и N , а также $H = N^{\gamma_M}$ и H соответственно разный. Строго говоря, при вычислениях в

формуле (4) нормальные высоты N_M^x отсчитываются от поверхности эллипсоида, а по формуле (7) высоты H отсчитываются от поверхности квазигеоида. Обе эти формулы дают одно и то же значение геодезической высоты H^g и являются теоретически строгими.

Для определения высот N квазигеоида (аномалий высот ξ_M^g) в континентальной части земного шара выполняют комплекс геодезических, астрономических, гравиметрических, а теперь еще спутниковых и гравиинерциальных измерений. Из обработки градусных измерений, включая спутниковые определения, установлено, что поверхность геоида (квазигеоида) является достаточно сложной вследствие неоднородностей гравитационного поля Земли. Относительно поверхности земного эллипсоида она имеет крупные (порядка 1000 км и более) и сравнительно небольшие (порядка 100 км и менее) волны.

Контрольные вопросы:

1. Понятие фигуры Земли и его связь с урванным эллипсоидом.
2. Что представляет собой геоид, нормальные, геодезические высоты, высота квазигеоида.
3. Гравитационный потенциал и возмущающий гравитационный потенциал.

Лекция 4

Топографо-геодезическое обеспечение гравиметрической съёмки

Пространственные координаты гравиметрических пунктов нужны для вычислений аномалий сил тяжести, составления каталога пунктов и нанесения пунктов на карты.

Для вычисления аномалий силы тяжести в редукции Буге используется формула:

$$(g - \gamma)_B = g - 2\pi f_6 H^\gamma + \Delta g - \gamma_0 + 0,3086 H^\gamma \quad (4.1).$$

Найдем погрешность $M_{\Delta g}$ аномалии, вызванной погрешностями координат.

Дифференцируя (1) по переменным B и H и переходе к погрешностям, получим:

$$M_{\Delta g}^2 = \left(\frac{d\gamma_0}{dB}\right)^2 M_B^2 + (0,3086 - 2\pi f_6)^2 M_H^2 \quad (4.2).$$

Произведения $\frac{d\gamma_0}{dB}$ определяет скорость изменения нормальной силы тяжести с

изменением широты. Удобнее перейти от производной по широте к производной

$\frac{d\gamma_0}{dx}$ по дуге x меридиана, тогда погрешность M_B широты следует заменить

погрешностью M_x расстояния X . например:

$$\frac{d\gamma_0}{dB} M_B = \frac{d\gamma_0}{RdB} R M_B = \frac{d\gamma_0}{dx} M_x.$$

Горизонтальный градиент нормальной силы тяжести легко получить:

$$\frac{d\gamma_0}{dx} = 0,81 \sin 2B \text{ МГал/км.} \quad (4.3).$$

Для широт $36^\circ - 54^\circ$ можно принять: $\frac{d\gamma_0}{dx} = 0,8 \text{ МГал/км} = 0,0008 \text{ МГал/м}$.

Коэффициент $0,3086 - 2\pi f\sigma$ учитывающий изменения нормальной силы тяжести с высотой и притяжение промежуточного слоя, значительно больше и при плотности $2,5 \text{ г/см}^3$ составляет $0,2 \text{ МГал/м}$. значит:

$$M_{\Delta g}^2 = (0,0008)^2 M_x^2 + (0,2)^2 M_H^2 \quad (4.4).$$

Так как коэффициент при M_x мал, требования к точности определения плановых координат для вычисления аномалий сила тяжести невысоки: при допустимой погрешности аномалии в $0,01 \text{ МГал}$ допустимая погрешность M_x составит $12,5 \text{ м}$, поэтому для определения погрешностей плановых координат нужно исходить из масштаба карты.

Если графическая точность нанесения пункта на карту равна $0,2 - 0,4 \text{ мГал}$, то для масштаба $1:10000$ погрешность плановых координат должна быть не больше 40 см .

Точность определения плановых координат для вычисления аномалии силы тяжести невысоки: при допустимой погрешности аномалии в $0,01 \text{ мГал}$ допустимая погрешность M_x составит $12,5 \text{ м}$. поэтому для определения погрешностей плановых координат нужно исходить из масштаба карты. Если графическая точность нанесения пункта на карту равна $0,2 - 0,4 \text{ мГ}$, то для масштаба $1:10000$ погрешность плановых координат должна быть не больше 40 см .

Точность определения высот гравиметрических пунктов определяют на основе формулы (4.4). При погрешностях аномалии в $0,01 \text{ мГал}$ высоты нужно определять с точностью 5 см . Точность привязки гравиметрических пунктов в зависимости от точности аномалии силы тяжести и масштаба карты установлена согласно инструкции по гравиразведке (1975г) и приведена.

В таблице 4.1 (для равнинных районов) и таблице 4.2 (для горных районов).

Таблица 4.1,2

Масштаб карты	Сечения изоаномал мГал		Точность Аном. Буге мГал		Средние квадрат погрешность				Число пунктов на 1 км^2	
					Плановых координат		Висот. М			
	Р	Г	Р	Г	Р	Г	Р	Г		
1:1000000	5	5	1,5	2	200	-	5	-	0,04- 01	0,04- 0,1
1:200 000	2	2	0,8	1	100	100	2,5	3	0,1- 0,25	0,1- 0,25
1:100 000	1	1	0,4	0,5	80	100	1,2	1,8	0,25- 1	0,25-1

1:50 000	0,25	0,5	0,1	0,25	40	50	0,35	0,9	4-50	2-30
1:10 000	0,1	0,2	0,04	0,1	4	5	0,1	0,25	25-200	20-100
1:5 000	0,05	0,1	0,02	0,05	2	2	0,05	0,12	100-500	50-250

Плановые координаты для составления мелкомасштабных карт определяют по топографическим картам. При детальном гравиметрическом съёмке масштаба 1:50000 и крупнее координаты определяют теодолитами и мензульными ходами или радиогодезическими способами. Методика определения высот выбирается также в зависимости от точности их определения.

При мелкомасштабном съёмке высоты определяют с гравиметром-высотометром или по топографическим картам. При детальном съёмке точности 0,1 мгл и выше высоты определяют геометрическим нивелированием, при съёмке точности 0,2-0,5 мГал – из геодезического, барометрического, гидростатического, нивелирования.

Как видно из таблиц, точность привязки и нивелирования гравиметрических пунктов при детальном съёмке довольно высока. Топографо-геодезические работы по трудоёмкости и объёму работ значительно превосходят гравиметрические наблюдения, и они должны опережать гравиметрические наблюдения.

Контрольные вопросы:

1. Расчетная формула горизонтального градиента нормальной силы тяжести.
2. Точность определения плановых координат для вычисления аномалии силы тяжести.

Лекция 5

Взаимосвязь между астрономо-геодезическим и гравиметрическим уклонениями отвеса.

Угол (γ, g) между направлением нормальной силы тяжести γ и направлением действительной силы тяжести (направлением отвесной линии) называется гравиметрическим уклонением отвесной линии. Этот угол как и высота квазигеоида ξ обусловлен отличием гравитационного поля Земли от нормального и может рассматриваться в качестве величины, характеризующей форму Земли.

При проектировании измерений на физической поверхности Земли, надо знать направление **нормали** \mathbf{n} к принятому эллипсоиду. Уклонение отвесной линии от направления этой нормали называется астрономо-геодезическим уклонением отвеса (угол (\mathbf{n}, g)).

Определим связь между гравиметрическим и астрономо-геодезическим уклонениями отвеса. Продолжим направления \mathbf{n}, g и до пересечения с небесной сферой,

устанавливается связь между гравиметрическими и астрономо-геодезическими уклонениями отвеса:

$$\xi_{AG} = \xi_{GR} + \Delta B \quad (5.2)$$

$$\eta_{AG} = \eta_{GR} \quad (5.3)$$

Для установления зависимости между астрономическим и геодезическим (B, L) координатами рассмотрим сферический треугольник $Z_2 Z_A P$. Его сторона $Z_2 P$ может быть определена либо через ξ_{GR} , либо через ξ_{AG} следующим образом:

$$Z_2 P = Z_G P - Z_G Z_1 - Z_1 Z_2 = 90 - B - \Delta B - \xi_{GR} = 90 - (B + \Delta B + \xi_{GR}),$$

$$Z_2 P = Z_G P - Z_G Z_2 = 90 - B - \Delta B - \xi_{AG} = 90 - (B + \xi_{AG}).$$

Для прямоугольного сферического треугольника $Z_2 Z_A P$ напишем:

$$\cos(\lambda - L) = \operatorname{tg} \phi \operatorname{ctg}(B + \Delta B + \xi_{GR}) = \operatorname{tg} \phi \operatorname{ctg}(B + \xi_{AG}).$$

$$\operatorname{Sin} \eta = \cos \phi \operatorname{Sin}(\lambda - L)$$

Раскладывая $\cos(\lambda - L)$, $\operatorname{Sin}(\lambda - L)$ и $\operatorname{Sin} \eta$ в ряды и пренебрегая по малости величинами $(\lambda - L)^2$, η^2 и более высокого порядка, получим:

$$\phi = B + \Delta B + \xi_{GR} = B + \xi_{AG}$$

$$\xi_{GR} = \phi - B - \Delta B \quad (5.4)$$

$$\xi_{AG} = \phi - B \quad (5.5)$$

$$\eta = (\lambda - L) \cos \phi \quad (5.6)$$

Отсюда же устанавливается связь между геодезическими и астрономическими координатами :

$$B = \phi - \xi_{GR} - \Delta B \quad (5.7)$$

$$B = \phi - \xi_{AG} \quad (5.8)$$

$$L = \lambda - \eta \operatorname{sek} \phi \quad (5.9)$$

Составляющие астрономо-геодезического уклонения отвеса вычисляются по формулам (5.5) и (5.6) в промежуточных астрономических пунктах государственной сети триангуляции 1 класса, где определяются ϕ и λ . В среднем расстояния между этими пунктами составляет 70-100 км. В остальных пунктах составляющие астрономо-геодезического уклонения отвеса получить по указанным формулам нельзя. В этих пунктах определяются составляющие гравиметрического уклонения отвеса.

Контрольные вопросы:

1. Определение астрономо-геодезических и гравиметрических уклонений отвеса и их взаимосвязь .
2. Установление зависимости между астрономическим и геодезическим координатами

Лекция 6

Связь между возмущающим потенциалом и составляющими уклонения отвеса.

Рассмотрим связь между составляющими $\eta_{\Gamma P}$ и ξ_{GR} и возмущающим потенциалом T . Примем точку M за начало прямоугольной системы координат, Ось Z совместим с направлением нормальной силы тяжести γ , ось x направим по касательной к меридиану на север, а ось y – на восток (рис 6.1).

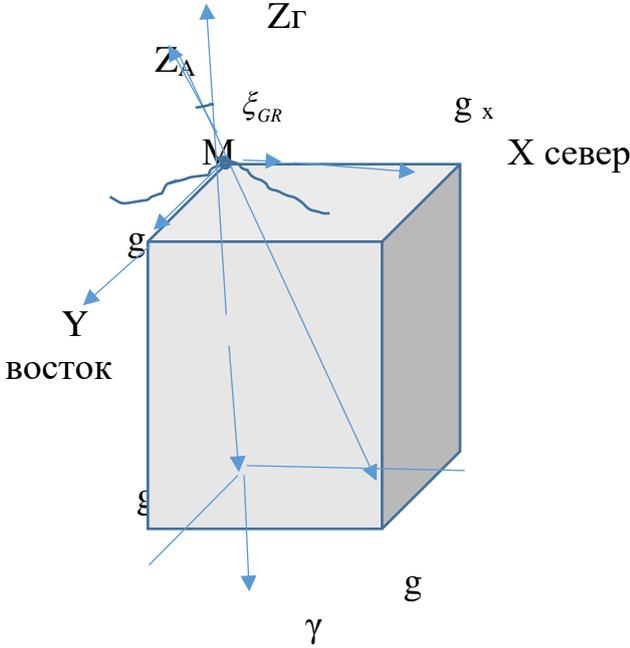


Рис. 6.1. Схема связи между составляющими $\eta_{\Gamma P}$ и ξ_{GR} и возмущающим потенциалом T

Споектируем угол между направлениями g и γ на плоскость меридиана и первого вертикала. В соответствии с формулами (5.4) и (5.5) устанавливается такое правило знаков для составляющих $\eta_{\Gamma P}$ и ξ_{GR} : когда астрономический зенит Z_A отклоняется от геодезического Γ на северо- восток, то составляющие уклонения отвеса – положительные, если на юго-запад, то отрицательные. На рис 5. Астрономический зенит отклоняется к юго-западу, в соответствии с этим будет:

$$\xi_{GR} = - g_x / g_z \text{ и аналогично } \eta_{\Gamma P} = - g_y / g_z,$$

где из-за малости углов $\eta_{\Gamma P}$ и ξ_{GR} тангенсы заменены углами, выраженными в радианах.

Составляющие силы тяжести g_x, g_y связаны с потенциалом W соотношениями:

$$g_x = dW/dx = d(U+T) / dx \tag{6.1}$$

$$g_y = dW/ dy = d(U+T) / dy$$

Поскольку плоскость xu перпендикулярна к направлению нормальной силы тяжести, то проекция нормальной силы тяжести на эти оси будут равны нулю:

$$\gamma_x = dU/dx = 0 \quad \gamma_y = dU/dy = 0$$

Вследствие этого : $g_x = dT/dx$ и $g_y = dT/dy$

и мы получаем на основе вышеизложенного:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{GR} &= -1/\gamma * (dT/dx) \\ \eta_{гр} &= -1/\gamma *(dT/dy) \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Считая, что радиус-вектор ρ точки M равен $R+N$, где R – средний радиус Земли, N – геодезическая высота точки M , получим следующие выражения для дифференциалов дуг меридиана и параллели:

$dx = \rho dB$ и $dy = \rho \cos B dL$, введем эти выражения в (6.2)

$$\left. \begin{aligned} \xi_{GR} &= -1/\gamma\rho * (dT/dB) \\ \eta_{гр} &= -1/\gamma\rho\cos B *(dT/dL) \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Формулы (6.3) устанавливают связь составляющих гравиметрического уклонения отвеса с возмущающим потенциалом.

Переход от астрономических координат к геодезическим осуществляется по формулам (5.8) и (5.9).

Контрольные вопросы:

1. Схема связи между составляющими $\eta_{гр}$ и ξ_{GR} и возмущающим потенциалом T .
2. Формулы для определения составляющих уклонений отвеса с возмущающим гравитационным потенциалом.

Лекция 7

Уравнивание гравиметрических сетей и связь между данными гравиметрических и геодезических наблюдений.

Если гравиметрические определения произведены по замкнутому полигону, то есть точки наблюдений расположены так, что последняя из них совпадает с

первой, что сумма истинных приращений силы тяжести от точки к точке по всему периметру полигона равна нулю. Однако в силу имеющихся ошибок измерений с гравиметрами, измеренные разности будут как то отличаться от истинных и сумма их будет равна величине V , называемой невязкой полигона. Уравнивание состоит в нахождении наивероятнейших поправок в наблюдаемые значения разностей силы тяжести, после введения которых сумма разностей силы тяжести по полигону будет равна нулю. Если сеть состоит из нескольких связанных между собой полигонов, то ищется такая система поправок, которая обратила бы в ноль сумму разностей Δg во всех полигонах.

Уравнивание приводит к перераспределению ошибок, в результате чего материал наблюдений становится более однородным. В силу этого уравнивать следует достаточно однородный материал, а все выскакивающие ненадежные определения следует переопределять, а не включать механически в уравнивание.

Простейшим случаем уравнивания является разбрасывание невязки в изолированном полигоне пропорционально числу пунктов. Уравнивание следует производить только при построении опорных сетей. Совершенно нерационально его применение на рядовых гравиметрических съемках.

В гравиметрии пользуются упрощенным способом, предложенным для геодезических работ геодезистом В.Поповым, который предложил при уравнивании опорной гравиметрической сети метод полигонов или коррелят.

Рассмотрим сеть состоящую из ряда полигонов – 1,2,3,4,5.

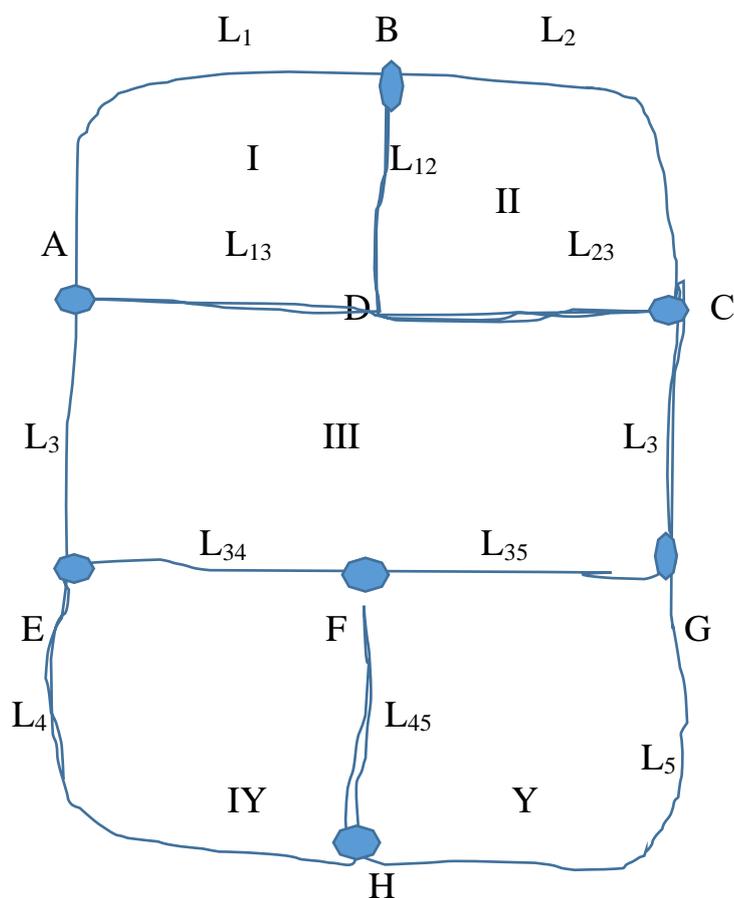


Рис.7.1. Схема для проведения уравнивания гравиметрических сетей.

Звеньями полигонов являются участки AB, BC, CD, DB и т.д. Фактическая длина звена, то есть расстояние от A до B и другие, в гравиметрии не играет роли.

Поэтому за длину звена принимается число разностей силы тяжести, определенных на нём. Обозначим невязку полигона V с соответствующими индексами, а через K с соответствующими индексами поправку, приходящуюся на единицу условной длины полигона. Для изолированного полигона, не имеющего смежных полигонов, суммарная поправка будет

$$K_1(L_1 + L_{12} + L_{13}).$$

При наличии смежных полигонов в звеньях, примыкающих к полигону, возникает условие, что невязка в этом звене при обходе по полигону, равна невязке в этом звене при обходе по смежному полигону. В нашем случае для полигона I эта поправка в смежное звено L_{12} будет $K_1 L_{12}$, а для полигона II – $K_2 L_{12}$.

Невязка для полигона I:

$$K_1((L_1+L_{12} +L_{13}) - K_2L_{12} - K_3L_{13} + V_1= 0 \quad (7.1)$$

Невязка для полигона II :

$$K_2(L_{12}+L_2+L_{23}) - K_1L_{12} - K_3L_{23} + V_2 = 0$$

Поэтому же правилу составим невязку для полигона III:

$$K_3(L_{13}+ L_{23}+L_3 +L_{35}+L_{34}) - K_1L_{13} - K_2 L_{23} - K_5L_{35} - K_4L_{34} + V_3=0 \quad (7.2)$$

И поэтому же принципу для других полигонов. Число уравнений равно числу полигонов. Поправки K_i характеризующие общую поправку на единицу длины полигона, называют коррелатами.

Теперь в уравнениях объединим члены по L. Тогда коэффициентами при них будут поправки в звено:

$$K_1L_1+ (K_1-K_2) L_{12} +L_{13}) - (K_1 - K_3) L_{13} =V_1$$

$$(K_2-K_1)L_{12} + K_2L_2 +(K_2 - K_3)L_{23} = V_2 \quad (7.3)$$

$$(K_3-K_1) L_{13} +(K_3-K_2)L_{23} +K_3L_3 +(K_3- K_4)L_{34} +(K_3-K_5)L_{35} = V_3$$

Если измерения по некоторым полигонам или звеньям проведены несколько раз, то есть они измерены точнее других, то уравнивание следует проводить с учетом весов. Рассмотрим пример уравнивания сети из трех полигонов.

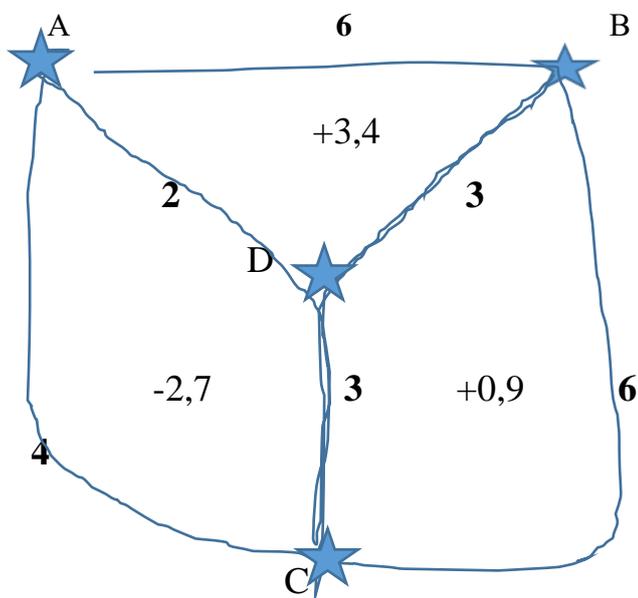


рис.7.2. Пример уравнивания гравиметрической сети

Внутри полигонов указаны невязки, около звеньев жирными числами указаны условные длины звеньев, то есть число замеров силы тяжести вдоль этих звеньев. Для этих полигонов уравнения типа (1) можно составить по чертежу: для каждого полигона надо выписать член, состоящий из произведения коррелаты K данного полигона на сумму длин звеньев и из него вычесть произведения длин смежных звеньев на соответствующие коррелаты. Тогда для полигонов на рис.8.2 уравнения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} 11K_1 - 2K_2 - 3K_3 + 3,4 &= 0 \\ 9K_2 - 2K_1 - 3K_3 - 2,7 &= 0 \\ 12K_3 - 3K_1 - 3K_2 + 0,9 &= 0 \end{aligned} \quad (7.4)$$

Решая эту систему трех уравнений находим соответствующие коррелаты:

$$K_1 = -0,3; K_2 = +0,2; K_3 = -0,1:$$

Поправки :

На звено АВ	6K ₁ = -1,8	на звено ВС	6K ₃ = -0,6
ВД	3(K ₁ -K ₃) = -0,6	СД	3(K ₃ -K ₂) = -0,9
ДА	2(K ₁ -K ₂) = -1,0	СА	4K ₂ = 0,8

Эти поправки делятся на число разностей Δg в соответствующем звене и придаются каждой разности Δg .

Соотношения между параметрами нормального гравитационного поля по методу Стокса выглядят следующим образом.

Пусть форма внешней уровенной поверхности задана уравнением

$$(X^2 + Y^2)/a^2 + Z^2/b^2 = 1. \text{ Здесь } a \text{ и } b \text{ - большая и малая полуоси уровенного}$$

эллипсоида. Вращение эллипсоида происходит с угловой скоростью ω . Потенциал эллипсоида является нормальным и равен U . Тогда сила тяжести на поверхности Эллипсоида будет определяться так:

$$\gamma_0 = - (dU/dn)_0 = (a\gamma_e \cos^2\varphi + b\gamma_p \sin^2\varphi) / \sqrt{(a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi)} \quad (7.5)$$

Это формула Сомильяни, она выражает в конечной форме точный закон изменения силы тяжести на поверхности уровенного эллипсоида. Приведем её к виду аналогичному. Для этого разложим правую часть (7.5) в ряд, удерживая малые второго порядка малости и введя в рассмотрение α и β . После некоторых преобразований из (8.5) получим:

$$\gamma_0 = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta_1 \sin^2 2\varphi) \quad (7.6)$$

$$\text{где } \beta_1 = \alpha^2/8 + \alpha\beta/4 \quad (7.7)$$

Формулу (8.6) называют первой формулой Клеро с членами второго порядка. Вторая формула Клеро с членами второго порядка имеет вид:

$$\beta + \alpha = 5q/2 - (17/14)\alpha q \quad (7.8)$$

Отсюда можно вычислить сжатие α эллипсоида

$$\alpha = (5q/2 - \beta)/1 + 17q/14 \quad (7.9)$$

Нормальный потенциал на поверхности уровенного эллипсоида определяется по формуле :

$$U_0 = fM/a(1 + \alpha/3 + 2\alpha^2/15) + \omega^2 a^2/3 \quad (7.10)$$

Поскольку масса эллипсоида M и экваториальная постоянная γ_e связаны соотношением

$$fM = a^2 \gamma_e(1 - \alpha) + 3\omega^2 a^3/2(1 - 5\alpha/7 - \alpha^2/441) \quad (7.11)$$

формулу для U_0 можно представить иначе:

$$U_0 = \gamma_e a(1 - 2\alpha/3 - \alpha^2/5) + 11\omega^2 a^2/6(1 - 24\alpha/77 - 236\alpha^2/2695) \quad (7.12)$$

Параметры характеризующие нормальное поле называют фундаментальными геодезическими постоянными. Это следующие параметры: fM , U_0 , γ_e , a , ω , α , β , β_1 . Из этих 8 параметров знать надо 4, ибо, используя написанные формулы (25-30) можно получить остальные.

Связь между динамическими параметрами и геометрическими, характеризующими фигуру Земли

Коэффициенты fM , J_n , C_{nR} , S_{nR} разложения потенциала V притяжения в ряд сферических функций

$$V(\rho\theta\lambda) = fM/\rho [1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^n * \sum_{R=0}^n (C_n R \cos R\lambda + S_n R \sin R\lambda) P_{nR}(\theta)] \quad (7.13)$$

принято называть динамическими. Коэффициенты C_{nR} , S_{nR} позволяют определить такие геометрические параметры, характеризующие фигуру Земли, как полярное и экваториальное сжатие, параметры асимметрии северного и южного полушарий, параметры отклонения поверхности квазигеоида от эллипсоида, а также координаты центра масс Земли и направления главных осей инерции.

Покажем связь между динамическими коэффициентами J_2 и C_{22} и соответственно полярным α и экваториальным α' сжатиями Земли.

Известно, что полярное и экваториальное сжатие эллипсоида определяется по формулам : $\alpha = (a-c)/a$ и $\alpha' = (a-b)/a$, где a и b – экваториальные, c – полярная полуоси эллипсоида.

Эти параметры связаны с разностями $(C-A_m)$ и $(B-A)$ главных моментов инерции эллипсоида:

$$\begin{aligned} 3f(C-A_m) &= fMa^2(2\alpha - \alpha^2) - \omega^2 a^2(1 - 9\alpha/7) \\ F(B-A) &= fMa^2/3 * 2\alpha' - \omega^2 a^2/3 * 16\alpha'/7 \end{aligned} \tag{7.14}$$

В свою очередь разности главных моментов инерции эллипсоида на основании формул : $D_{20} = f((A+B)/2 - C)$ (7.15)

$$D_{22} = (f/4)(B-A) \tag{7.16}$$

Можно связать с динамическими коэффициентами J_2 и C_{22} :

$$J_2 = -C_{20} = -D_{20}/fMa^2 = (C-A_m)/Ma^2 \tag{7.17}$$

$$C_{22} = (B-A)/4Ma^2 \tag{7.18}$$

При помощи этих соотношений выразим динамические коэффициенты J_2 и C_{22} через полярное и экваториальное сжатия эллипсоида:

$$J_2 = 1/3(2\alpha - \alpha^2) - (\omega^2 a^3/3fM)(1 - 9\alpha/7) \tag{7.19}$$

$$C_{22} = \alpha/6 - (\omega^2 a^3/fM) * 4\alpha/21 - J_2 \tag{7.20}$$

Для отношения $\omega^2 a^3/fM$ встречающегося в обоих равенствах напомним:

$$\omega^2 a^3/fM = q(1 + \alpha - 3q/2) \tag{7.21}$$

$$\omega^2 a^3/3fM (1 - 9\alpha/7) = (q/3)(1 - 2\alpha/7 - 3q/2) \tag{7.22}$$

$$\text{Следовательно } J_2 = 2\alpha/3 - q/3 - \alpha^2/3 + 2\alpha q/21 + q^2/2 \tag{7.23}$$

Решая это уравнение методом последовательных приближений можно выразить полярное сжатие α через коэффициент J_2

$$\alpha = 3J_2/2 + q/2 \tag{7.24}$$

Следовательно коэффициент J_2 может быть рассмотрен в качестве параметра, определяющего форму уровня эллипсоида.

В свою очередь найдем:

$$C_{22} = \alpha/6 - 4\alpha q/21. \tag{7.25}$$

Второй член справа имеет третий порядок малости. Отбросив его получим:

$$C_{22} = \alpha/6 \quad (7.26)$$

Разность (а-в) экваториальных осей эллипсоида определяется через коэффициент C_{22} :

$$a - b = a\alpha' = 6aC_{22}. \quad (7.27)$$

Высота квазигеоида ε связана с возмущающим потенциалом T определяемой в точках физ. поверхности Земли как $\varepsilon_m = T_m / \gamma_m$. Возмущающий потенциал как разность действительного потенциала W и нормального U может быть представлен в виде разложения по сферическим функциям. В принятой в настоящее время форме записи возмущающий потенциал равен:

$$T = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho^{n+1}} \right) \left[\sum_{R=0}^n (D_n R \cos R\lambda + E_n R \sin R\lambda) P_{nR}(\theta) \right] \quad (7.28)$$

Или в модифицированной записи:

$$T = fM/\rho \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{R=0}^n \left(\frac{a}{\rho} \right)^n (C_n R \cos R\lambda + S_n R \sin R\lambda) P_{nR}(\theta) \quad (7.29)$$

Полагая $a = \rho = R$, $\gamma = fM/R^2$ на основании $\varepsilon_m = T_m / \gamma_m$ получим:

$$\varepsilon = R \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{R=0}^n (C_n R \cos R\lambda + S_n R \sin R\lambda) P_{nR}(\theta) \quad (7.30)$$

Таким образом, величину поднятия или опускания квазигеоида в произвольной точке можно представить суммой бесконечного числа сферических гармоник. Сумма различных гармоник дает очень сложный закон, которому подчиняются изменения величин ε . Высоты квазигеоида являются наиболее наглядной характеристикой возмущающего потенциала Земли.

На карте высот геоида над эллипсоидом резко выражена отрицательная впадина в районе Индийского океана (около -100 м) и поднятие к северу от Австралии (+80м), несколько меньшее опускание с восточной и западной стороны Северной Америки и значительное повышение геоида в Северной Атлантике (около +50м).

Известна асимметрия северного и южного полушарий Земли. Наиболее крупная волна квазигеоида, вызывающего асимметрию полушарий, определяется зональной гармоникой третьей степени, что приводит к грушевидности формы Земли.

Определим эту асимметрию.

При $\theta=0^0$, $\cos \theta = +1$ $\varepsilon_3 = +C_{30}R$

При $\theta=180^0$, $\cos \theta = -1$ $\varepsilon_3 = -C_{30}R$

Следовательно квазигеоид у северного полюса будет приподнят на величину $C_{30}R$ и настолько же опущен у южного полюса. Асимметрия полушарий составит $2C_{30}R$.

Принимая $C_{30} = 2,541 \cdot 10^{-6}$, получим, что асимметрия полушарий составляет около 32 метра ($2 \cdot 2,541 \cdot 10^{-6} \cdot 6374000 = 32$ м).

Контрольные вопросы:

1. Порядок проведения гравиметрического выравнивания звеньев полигона на некотором примере.
2. Соотношения между параметрами нормального гравитационного поля по методу Стокса.
3. Связь между динамическими параметрами и геометрическими, характеризующими фигуру Земли

Лекция 8

Теория нормального и возмущающего гравитационного потенциала и соотношения между параметрами

Представим нормальный потенциал Земли формулой действительного потенциала:

$$U = V^{\circ} + Q^{\circ} \quad (8.1)$$

Где V° - потенциал притяжения нормальной Земли

Q° - потенциал его центробежной силы.

В качестве нормального потенциала возьмем приближенное значение потенциала, представляемое первыми членами разложения:

$$U(\rho, \theta, \lambda) = fM/\rho + f(A_m - C)/\rho^3(3/2\cos^2 \theta - 1/2) + (\omega^2 \rho^2/2) \sin^2 \theta \quad (8.2)$$

Где $A_m = (A+B)/2$ – средний экваториальный момент инерции Земли

ω – угловая скорость вращения Земли $= 2\pi/86164 = 7,2 \cdot 10^{-5}$ сек⁻¹

f – гравитационная постоянная $= 6,67 \cdot 10^{-8}$ см³Г⁻¹с⁻²

Определим форму уровенной поверхности $U=U_0$ нормального потенциала

$$fM/\rho + f(A_m - C)/\rho^3(3/2\cos^2 \theta - 1/2) + (\omega^2 \rho^2/2) \sin^2 \theta = U_0 \quad (8.3)$$

Для нахождения постоянной U_0 примем $\rho = a$, $\theta = \pi/2$. Тогда

$$U_0 = fM/a + f(A_m - C)/2a^3 + \omega^2 a^2/2 \quad (8.4)$$

Подставляя полученное значение U_0 в (3) получим

$$\begin{aligned} fM/\rho (1 + (A_m - C/M\rho^2)(3/2\cos^2 \theta - 1/2) + (\omega^2/2fM)\rho^3 \sin^2 \theta) = \\ fM/a (1 - (A_m - C)2Ma^2 + \omega^2 a^3/2fM) \end{aligned} \quad (8.5)$$

Обозначим отношение центробежной силы на экваторе к силе тяжести $\gamma_{\text{э}}$ на экваторе уровенной поверхности $U = U_0$ через q

$$q = \omega^2 a / \gamma_{\text{э}} \quad (8.6)$$

Эта величина имеет тот же порядок, что и сжатие Земли α

Пренебрегая величинами второго порядка малости, заменим в (8.6) $\gamma_{\text{э}}$ через fM/a^2 , то есть через притяжение шара массы M на точку земного экватора. Тогда

$$q = \omega^2 a^3 / fM \quad (8.7)$$

Введем это значение q в (5); кроме того в поправочных членах примем $\rho = a$, получим:

$$\begin{aligned} fM/\rho (1 + (A_m - C/Ma^2)(3/2\cos^2 \theta - 1/2) + (q/2)\sin^2 \theta) = \\ fM/a (1 - (A_m - C)2Ma^2 + q/2), \text{ или удерживая малые первого порядка,} \\ \rho/a = 1 + (A_m - C/Ma^2)(3/2\cos^2 \theta - 1/2) + (q/2)\sin^2 \theta + (A_m - C)2Ma^2 - q/2. \end{aligned}$$

Отсюда получим $\rho = a (1 - (3(C - A_m)/2Ma^2 + q/2)\cos^2 \theta)$ (8.8)

Таким образом получили уравнение **сфероида Клеро**.

С точностью до малых величин первого порядка можно доказать, что полученное уравнение является эллипсоидом вращения с большой полуосью, a и сжатием

$$\alpha = 3(C - A_m)/2Ma^2 + q/2 \quad (8.9)$$

Эллипсоид поверхность которого является уровенной называется уровенным эллипсоидом. Выразим разность $C - A_m$ главных моментов инерции Земли через сжатие α :

$$3(C - A_m)/2Ma^2 = \alpha - q/2 \quad (8.10)$$

$$\text{Или } 3f(C - A_m) = f M a^2 2\alpha - \omega^2 a^5 \quad (8.11)$$

Введем это соотношение в (8.4). После преобразований получим более удобное выражение для U_0 :

$$U_0 = f M/a (1 + \alpha/3 + q/3) \quad (8.12)$$

Этой формулой определяется значение, которое принимает нормальный потенциал U на поверхности уровня эллипсоида

$U=U_0$ с параметрами : f M (геоцентрическая гравитационная постоянная), ω (угловая скорость вращения), a (большая полуось), α (сжатие). Эти четыре параметра полностью определяют нормальное гравитационное поле Земли, а значение

$$q = \omega^2 a^3 / fM \quad (8.7)$$

Производная от нормального потенциала U по направлению внешней нормали n к уровневой поверхности нормального потенциала дает значение нормальной силы тяжести

Учитывая что угол между направлением радиуса вектора ρ и нормалью n невелик (он не превосходит 11°) можно считать что

$$\gamma = - (dU/d\rho)$$

$$\text{Выразив } \omega^2 = f M q / a^3 \quad (8.13)$$

Представим (8.12) в виде

$$U = fM/ \rho + f(A_m - C)/ \rho^3 (3/2 \cos^2 \theta - 1/2) + (f M q / 2a^3) (\rho^2 \sin^2 \theta)$$

После дифференцирования найдем :

$$\gamma = - dU/d\rho = fM/ \rho^2 + 3f(A_m - C)/ \rho^4 (3/2 \cos^2 \theta - 1/2) - (f M q / a^3) * (\rho \sin^2 \theta) \quad (8.14)$$

Теперь определим значение нормальной силы тяжести на поверхности ровного эллипсоида $U = U_0$. Для этого в главном члене формулы (8.14) значение ρ заменим его выражением (8.8) а в остальных поправочных членах примем $\rho = a$, тогда с учетом (8.10) формулы получим:

$$\gamma_0 = fM/ a^2 (1 + \alpha - (3/2) q + ((5/2) q - \alpha) \cos^2 \theta) \quad (8.15)$$

Полученную формулу для γ_0 можно упростить. Вычислим значения γ_0 на полюсе (γ_p) и на экваторе (γ_e) уровня эллипсоида. Полагая в (8.15) $\theta = 0$, получим

$$\gamma_p = fM/ a^2 (1 + q) \quad (8.16)$$

При $\theta = \pi/2$

$$\gamma_e = fM / a^2 (1 + \alpha - 3q/2) \quad (8.17)$$

Выражение (8.17) можно использовать для определения fM :

$$fM = \gamma_e a^2 (1 - \alpha + 3q/2) \quad (8.18)$$

Разделим выражение (16) на (17)

$$\gamma_p / \gamma_e = (1 + q) / (1 - \alpha + 3q/2) \text{ откуда } \gamma_p = \gamma_e (1 - \alpha + 5q/2)$$

или $(\gamma_p - \gamma_e) / \gamma_e = 5q/2 - \alpha$.

Величина стоящая в левой части выражения является относительным избытком силы тяжести на полюсе по сравнению с экватором, её обозначают через $\beta = (\gamma_p - \gamma_e) / \gamma_e$ (8.19)

Очевидно что величина β и α связаны между собой соотношением :

$$\beta + \alpha = 5q/2 \quad (8.20)$$

Разделим теперь (15) на (17)

$$\gamma_0 / \gamma_e = (1 + \alpha - (3/2)q + ((5/2)q - \alpha) \cos^2 \theta) / (1 + \alpha - 3q/2)$$

с точностью до малых первого порядка это даёт

$\gamma_0 = \gamma_e (1 + \beta \cos^2 \theta)$, или после замены полярного расстояния θ широтой φ ;

$$\gamma_0 = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 \varphi) \quad (8.21)$$

Данная (8.21) формула является **первой формулой Клеро** -

Она даёт закон распределения нормальной силы тяжести на уровне эллипсоида.

Формула (8.20) называется **второй формулой Клеро** и она позволяет определить значение сжатия земного эллипсоида:

$$\alpha = 5q/2 - \beta \quad (8.22)$$

Первая и вторая формулы Клеро составляют теорему Клеро.

Контрольные вопросы:

1. Основы теории нормального и возмущающего гравитационного потенциала и соотношения между их параметрами.
2. Теорема Клеро, получение первой и второй формул Клеро.

Лекция 9

Граничные условия возмущающего потенциала и аномалии силы тяжести, редукции силы тяжести

Аномалией силы тяжести называется разность наблюдаемого ускорения силы тяжести отнесенного к некоторой поверхности сравнения, и теоретического γ , полученного по формуле нормального значения силы тяжести, т.е. $\Delta g = g_0 - \gamma_0$.

Аномалии силы тяжести характеризуют отклонение истинного значения ее в данной точке от теоретического, рассчитанного с помощью формулы нормального значения силы тяжести и соответствующих редукций. Аномалия получает название в соответствии от метода редукции. Наиболее употребительны аномалии в свободном воздухе или аномалии Фая, в которых выполнено приведение только за высоту точки наблюдения; аномалии Буге, где учтено также влияние промежуточного слоя между точкой наблюдения и поверхностью относимости, и изостатические аномалии, в которых учтено влияние рельефа и предполагаемых изменений плотности в соответствии с теорией изостазии.

Аномалии силы тяжести возникают вследствие неоднородности распределения плотностей в Земле, в частности в ее верхних частях, так называемой земной коре. Аномалии силы тяжести отражают поэтому внутреннее строение Земли и в первую очередь строение ее верхних этажей. Они указывают на наличие тех или иных геологических структур, связанных с дислокацией пород различных плотностей.

Определение силы тяжести обычно производят на поверхности Земли, под землей (в шахте или скважине), иногда под водой. Наблюдаемые значения в том виде как их получают, несопоставимы между собой и по ним нельзя судить о распределении масс, что является основной целью гравиразведки. Чтобы получить аномалию силы тяжести, необходимо сделать приведение наблюдаемого значения силы тяжести к поверхности Эллипсоида, или наоборот нормального значения силы тяжести известного на эллипсоиде к точке наблюдения. Это операция называется редуцированием, а поправки которые при этом надо добавлять к силе тяжести, называются редукциями.

Редукция в свободном воздухе состоит в приведении нормального значения силы тяжести при образовании аномалии к точке наблюдения. Если известны высоты H и

высоты геоида ϵ , то такое редуцирование к точке наблюдения может быть выполнено точно.

Будем рассматривать Землю в виде шара и допустим, что сила тяжести известная на поверхности шара должна быть перенесена, редуцирована на высоту H над поверхностью шара. Притяжение шара, действующее на точку, расположенную на его поверхности, будет : $\gamma_0 = - fM/R^2$

Притяжение, действующее на точку, расположенную на высоте H над поверхностью шара будет: $\gamma = - fM/(R + H)^2$

Таким образом имеем изменение силы тяжести при переходе от точки, расположенной на шарообразной Земле, к точке, расположенной на высоте H над Землей,

$$\Delta g = \gamma - \gamma_0 = -fM/R^2 + fM/(R+H)^2 = -fM[1/R^2 - 1/(R+H)^2] = -fM/R^2 [1 - 1/(1-1/(1+H/R)^2)]$$

Развертывая знаменатель дроби в квадратной скобке по формуле Бинома Ньютона и отбрасывая члены, содержащие $(H/R)^2$, получим :

$$\Delta g = -2 \gamma H/R.$$

Если подставить средние для Земли значения $\gamma_{cp} = 979,77$ и $R = 6371,2$ км, получим :

$$\Delta g = -2 \gamma H/R = -0,3086H \tag{9.1}$$

При выводе сделаны следующие упрощения.

1. Земля рассматривается как шар.
2. Пренебрегают изменением центробежной силы. Её максимальное изменение будет $\Delta P = \omega^2(H+R) - \omega^2R = \omega^2H$, то есть оно более чем на порядок меньше самой силы.

Значение нормальной силы тяжести γ_H на высоте H определим, если к значению нормальной силы тяжести на эллипсоиде γ_0 добавим редуцию в свободном воздухе:

$$\gamma_H = \gamma_0 - 0,3086 H.$$

Отсюда формула для расчета аномалии силы тяжести в свободном воздухе будет представлена как разность наблюдаемого и редуцированного к точке наблюдения нормального значения силы тяжести:

$$\Delta g_{св.в.} = g_H - \gamma_H = g_H - \gamma_0 + 0,3086 H \tag{9.2}$$

При введении редукции в свободном воздухе на массы, лежащие между уровнями точек наблюдения и поверхностью эллипсоида не обращается внимание.

Введение **поправки за рельеф** местности даёт возможность учесть влияние притяжения всех форм внешнего рельефа и привести значение силы тяжести в данной точке к такому, которое было, если бы под точкой располагался ровный слой масс без выступов и впадин. Для учета окружающего рельефа обычно применяется метод представления всей окружающей местности в виде криволинейных призм, влияние каждой из них рассчитывается по аналитической формуле в предположении, что толщина призмы постоянна. Общее влияние рельефа получается как сумма всех отдельных призм. Для отдельной призмы может быть применена следующая формула:

$$\Delta g = (2\pi f\sigma/n) * ((R_2^2 + Z_2^2)^{1/2} - (R_2^2 + Z_1^2)^{1/2} - (R_1^2 + Z_2^2)^{1/2} + (R_1^2 + Z_1^2)^{1/2}) \quad (9.3)$$

Для того, чтобы рассчитать ошибку за рельеф местности в данной точке, вся область вокруг точки разбивается на ряд криволинейных призм системой концентрических окружностей и радиусов.

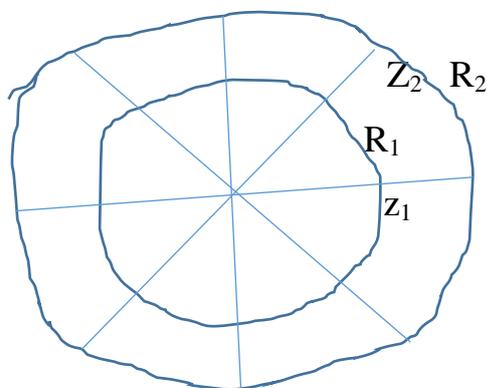


Рис 9.1. Схема разделения рельефа на сектора для расчета поправки за рельеф

Из всех видов редуций в практике гравиметрии наиболее применяется **редукция Буге**, которая получается добавлением поправки за притяжение промежуточного слоя к редуции в свободном воздухе. При этом используется следующая последовательность операций:

1. Нормальное значение γ для точки с координатами, совпадающими с точкой наблюдения, редуцируется к точке наблюдения введением редуции в свободном воздухе равной $2\gamma H/R = 0,3086 \text{ Н}$.
2. Если рельеф местности вокруг точки достаточно неровный, вводится поправка за влияние рельефа по формуле (9.3).
3. Из полученной аномалии вычитается притяжение плоского слоя известной плотности, расположенного между уровнем исследуемой точки и геоидом.

Притяжение плоского слоя находится по формуле :

$\Delta g = 2\pi f\sigma * ((R^2+Z_2^2)^{1/2} - (R^2+Z_1^2)^{1/2} - Z_2+Z_1)$. Положим $Z_1 = 0$ и $Z_2 = H$, вынесем за знак радикала R и развернем корень квадратный в ряд при помощи бинома Ньютона и находим:

$$\Delta g = 2\pi f\sigma [H^2/2R - H] = - 2\pi f\sigma H [1 - H/2R] \quad (9.4)$$

Подставляя в эту формулу значения $\pi = 3,14$, $f = 6,67*10^{-8}$ получим:

$$\Delta g_B = 0,0418\sigma H [1 - H/2R], \quad (9.5)$$

ввиду малости $H/2R$ им можно пренебречь. Тогда аномалия силы тяжести Буге получится, если к разности $g_H - \gamma_H$ добавим поправку Δg_B :

$$\Delta g_B = g_H - \gamma_0 + 0,3086 \text{ Н} - 0,0418 \sigma H \quad (9.6)$$

Вследствие введения поправки Буге снимается влияние фона, создаваемого выступающими за геоид массами средней плотности и выделяется более

рельефно составляющая поля, создаваемого невидимыми аномальными по плотности массами.

Для определения изменения силы тяжести внутри Земли используется **редукция Прея**, которая получается вычитанием из редукции в свободном воздухе двойной поправки за влияние промежуточного слоя:

$$\Delta g_{\text{П}} = 2 \gamma H/R - 2\pi f \sigma H[1 + H/2R] = 0,3086H - 0,0838\sigma H \quad (9.7)$$

Очевидно, что изменение силы тяжести с глубиной зависит от величины плотности окружающих горных пород σ . Сила тяжести определенная по формуле (7) не изменяется при $\sigma = 3,7 \text{ г/см}^3$. Если $\sigma < 3,7 \text{ г/см}^3$, то сила тяжести с глубиной увеличивается, а если $\sigma > 3,7 \text{ г/см}^3$, то сила тяжести при углублении уменьшается. Это правило справедливо для незначительных глубин.

Приближенный расчет изменения силы тяжести с глубиной погружения внутрь Земли можно получить по формуле:

$$g = 3\gamma/\sigma_m R r^2 \int_0^r \sigma r r dr , \quad (9.8)$$

где ρ – толщина слоя Земли над точкой наблюдения, r – расстояние от центра Земли до точки наблюдения, R – радиус Земли, σ_m – средняя плотность Земли.

Принимая для изменения плотности закон Роша:

$$\sigma = \sigma_0 (1 + k\rho) \quad (9.9)$$

где $k = 0,764$, $\sigma_0 = 10,1$, получим что на глубине около 1000 км сила тяжести имеет максимум, после которого монотонно убывает до нуля в центре Земли.

Редукции силы тяжести и образование аномалий на море

Измерения силы тяжести на морях и океанах производятся с надводного корабля на несколько метров выше уровня моря, в подводных лодках, на глубине несколько сотен метров или на дне моря. На надводном корабле гравиметр находится на высоте H от уровня моря. Вычисление аномалий в свободном воздухе производится по формуле :

$$\Delta g_{\text{св.в.}} = g_H - \gamma_H = g_H - \gamma_0 + 0,3086 H \quad (9.2)$$

В подводной лодке гравиметр находится на глубине p и для приведения наблюдения к уровню моря вычисляется поправка Проя, учитывающая притяжение массы слоя воды между уровнем воды и уровнем точки наблюдения на глубине погружения p :

$$\Delta g_{п.} = g_{Н} - \gamma_0 - 0,3086p + 0,0838 \sigma_{в} p, \quad (9.10)$$

где $\sigma_{в} = 1,03 \text{ г/см}^3$. При этой плотности формула упрощается до :

$$\Delta g_{п.} = g_{Н} - \gamma_0 - 0,222p \quad (9.11)$$

В этой формуле не учитывается плотность пород на дне океана.

Формула для вычисления аномалий Буге при измерениях на надводном корабле имеет вид:

$$\Delta g_{Б} = g_{Н} - \gamma_0 + 0,3086h + 0,0419(\sigma - 1,03)P \quad (9.12)$$

P – глубина морского дна, h – высота прибора над уровнем моря.

При вычислении аномалий Буге по результатам измерений силы тяжести в подводной лодке применяется формула:

$$\Delta g_{Б} = g_{Н} - \gamma_0 - 0,222p + 0,0419(\sigma - 1,03)P \quad (9.13)$$

В случае вычисления аномалий Буге по измерениям с донным гравиметром глубина $p = P$, тогда формула (13) упрощается:

$$\Delta g_{Б} = g_{Н} - \gamma_0 - (0,265 - 0,0419\sigma)P \quad (9.14)$$

Где σ – плотность верхних слоев земной коры на дне океана.

Контрольные вопросы:

1. Физический смысл аномалий Фая, Буге, введение поправок
2. Расчет различных аномалий при воздушной и морской съемках

Лекция 10

Использование формулы Веннинг-Мейнеса для изучения фигуры геоида.

Используя соотношение $\varepsilon_m = T_m / \gamma m$ (10.1)

для определения аномалии высоты геоида и интегральную формулу Стокса для возмущающего потенциала

$$T = (R/4 * 3,14) \iint_{\omega} (g - \gamma) S(\psi) d\omega \quad (10.2)$$

можно определить высоту квазигеоида

$$\varepsilon_{\text{квг}} = (R/4 * 3,14 \gamma) \iint_{\omega} (g - \gamma) S(\psi) d\omega \quad (10.3)$$

Выведем формулы для составляющих уклонения отвеса. Продифференцировав обе части равенства (10.2) по широте B и долготе L и имея ввиду выражения

$$\left. \begin{aligned} \xi_{GR} &= -1/\gamma \rho * (dT/dB) \\ \eta_{ГР} &= -1/\gamma \rho \cos B * (dT/dL) \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

в которых $\rho = R$, получим

$$\begin{aligned} \xi_{GR} &= 1/(4 * 3,14 \gamma) * (d/dB) \iint_{\omega} (g - \gamma) S(\psi) d\omega \\ \eta_{ГР} &= 1/(4 * 3,14 \gamma \cos B) * \frac{d}{dL} \iint_{\omega} (g - \gamma) S(\psi) d\omega \end{aligned}$$

Переходя от астрономических координат к геодезическим и заменяя полярные расстояния ϑ и ϑ' через $(90-B)$ и $(90-B')$ представим формулу

$$\cos \psi = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' / \cos(\lambda - \lambda')$$

в виде

$$\cos \psi = \cos B \cos B' \cos(L' - L) + \sin B \sin B' \quad (10.5)$$

Учитывая, что $S(\psi)$ является неявной функцией геодезических координат B, L , можно написать

$$\begin{aligned} \xi_{GR} &= -1/(4 * 3,14 \gamma) \iint_{\omega} (g - \gamma) (dS/d\psi) (d\psi/dB) d\omega \\ \eta_{ГР} &= -1/(4 * 3,14 \gamma) \iint_{\omega} (g - \gamma) (dS/d\psi) (d\psi/\cos B dL) d\omega \end{aligned}$$

Для определения частных производных, стоящих под интегралами, воспользуемся формулами сферической тригонометрии, которые представим в виде

$$\begin{aligned}\sin \psi \sin A &= \cos B' \sin(L' - L) \\ \sin \psi \cos A &= \sin B' \cos B - \cos B' \sin B \cos(L' - L)\end{aligned}\quad (10.6)$$

Дифференцируя $\cos \psi = \cos B' \cos B' \cos(L'+L) + \sin B' \sin B'$ По B и L, получим

$$\begin{aligned}-\sin \psi \frac{d\psi}{dB} &= \sin B' \cos B - \cos B' \sin B \cos(L' - L) \\ -\sin \psi \frac{d\psi}{dL} &= \cos B' \cos B \sin(L' - L)\end{aligned}\quad (10.5)$$

Принимая во внимание (10.6), будем иметь

$$\begin{aligned}-\frac{d\psi}{dB} &= \cos A \\ -\frac{d\psi}{\cos B dL} &= \sin A\end{aligned}$$

Используя эти соотношения, представим $\varepsilon_{гр}$ и $\eta_{гр}$ в виде

$$\begin{aligned}\varepsilon_{гр} &= 1/(4*3,14 \gamma) \iint_{\omega} (g - \gamma) (dS/d\psi) \cos A d\omega \\ \eta_{гр} &= 1/(4*3,14 \gamma) \iint_{\omega} (g - \gamma) (dS/d\psi) \sin A d\omega\end{aligned}\quad (10.7)$$

Будем выражать составляющие уклонения отвеса в секундах дуги

$$\begin{aligned}\varepsilon_{гр}'' &= 1/(4*3,14 \gamma \sin 1'') \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (g - \gamma) [(dS/d\psi) \sin \psi] \cos A d\psi dA \\ \eta_{гр}'' &= 1/(4*3,14 \gamma \sin 1'') \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (g - \gamma) [(dS/d\psi) \sin \psi] \sin A d\psi dA\end{aligned}$$

Введем обозначение

$$Q(\psi) = - 1/(2\gamma \sin 1'') * (dS/d\psi) \sin \psi$$

Эта функция называется функцией Веннинг-Мейнеса. Она имеет вид

$$\begin{aligned}Q(\psi) &= - 1/(2\gamma \sin 1'') \cos^2(\psi/2) [\operatorname{cosec}(\psi/2) + 12 \sin(\psi/2) - \\ &- 32 \sin^2(\psi/2) + 1/(1 + \sin \psi/2) - 12 \sin^2(\psi/2) \ln(\sin \psi/2 + \sin^2(\psi/2))]\end{aligned}\quad (10.8)$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned}\varepsilon_{гр}'' &= 1/(2*3,14) \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (g - \gamma) Q(\psi) \cos A d\psi dA \\ \eta_{гр}'' &= 1/(4*3,14) \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (g - \gamma) Q(\psi) \sin A d\psi dA\end{aligned}\quad (10.9)$$

Эта формула носит имя Веннинг-Мейнеса.

Интегрирование по формулам (10.3), (10.7) и (10.9) не может быть выполнено аналитически, так как нам известны лишь числовые значения входящих под знак интеграла аномалий $(g - \gamma)$ силы тяжести для отдельных дискретных точек. Поэтому

интегрирование должно проводиться численным методом, как суммирование по элементарным участкам, на которые подразделяется область интегрирования. Приведем формулы Стокса и Веннинг-Мейнеса для плоской отсчетной поверхности. Рассматривая плоскость как сферу бесконечно большого радиуса R можно указать, что

$$\lim[S(\psi)/R]_{R \rightarrow \infty} = 2/r$$

$$\lim [dS(\psi)/R^2 d\psi]_{R \rightarrow \infty} = -2/r^2$$

Где r – линейное расстояние от исследуемой точки до текущей. Учитывая, что $d\omega = d\sigma/R^2$ формулу (10.3) приведем к виду

$$\varepsilon_{\Sigma} = 1/(2\pi\gamma) \iint_{\Sigma} ((g - \gamma)/r) d\sigma \quad (10.10)$$

где интегрирование распространяется по всей бесконечной плоскости Σ .

Соответственно формулы (10.7) примут вид

$$(\varepsilon_{гр})_{\Sigma} = 1/(2\pi\gamma) \iint_{\Sigma} ((g - \gamma)/r^2) \cos A d\sigma$$

$$(\eta_{гр})_{\Sigma} = 1/(2\pi\gamma) \iint_{\Sigma} ((g - \gamma)/r^2) \sin A d\sigma \quad (10.11)$$

В настоящее время при вычислениях высот квазигеоида и составляющих уклонения отвеса влияние дальних зон ($R \geq 50$ км) вычисляется с помощью ЭВМ, влияние же ближних зон ($R < 50$ км) вычисляются вручную, используя палетку В.Еремеева, которая рассчитана для учета влияния аномалий, расположенных в области со сферическим радиусом равным 20° . Пространство вокруг пункта, где определяются составляющие уклонения отвеса разбивается окружностями на пять областей радиусами 5, 100, 300, 1000, 2000 км. Коэффициенты, характеризующие влияние кольцевых зон на уклонение отвеса, уменьшаются с удалением области от центральной точки. Каждая область разбита радиальными линиями на сферические трапеции равной площади. Для учета влияния поля аномалий всей области Σ на площади каждой трапеции должно быть известно среднее значение аномалий силы тяжести.

При учете аномалий в области Σ радиуса $\psi = 20^{\circ}$ вместо функции Веннинг-Мейнеса можно использовать его приближенное значение

$$Q_1 = (\rho^{\parallel} R / \gamma r + 3\rho^{\parallel} / 2\gamma + 49\rho^{\parallel} r / 24\gamma R), \text{ где } \rho^{\parallel} = 206265. \text{ Введем обозначения}$$

$$\rho^{\parallel} R / \gamma = A, 3\rho^{\parallel} / 2\gamma = B, 49\rho^{\parallel} r / 24\gamma R = C, \text{ тогда } Q_1 = (A/r + B + Cr)$$

Приняв $\gamma = 981000$ мгл, $R = 6371$ км, получим значения коэффициентов

$$A = 1339,6'', B = 0,315'', C = 0,000066''.$$

При малых значениях r первый член в Q_1 значительно превосходит по величине остальные и потому при интегрировании в центральной зоне (0-5 км) можно принять $Q_1 = A/r$

Использование вторых производных потенциала для вычисления уклонений отвеса

Для составляющих уклонения отвеса в плоскости меридиана и первого вертикала ранее были получены формулы

$$\xi_{GR} = -g_x / g_z = -1/\gamma * g_x$$

$$\eta_{rp} = -g_y / g_z = -1/\gamma * g_y ,$$

где g_x, g_y - проекции вектора силы тяжести на плоскость, касательную к нормальной уровенной поверхности. Возьмем две произвольные точки А и В на поверхности Земли. Для этих точек можно написать:

$$\left. \begin{aligned} \xi_B - \xi_A &= - [(1/\gamma * g_x)_B - (1/\gamma * g_x)_A] \\ \eta_B - \eta_A &= - [(1/\gamma * g_y)_B - (1/\gamma * g_y)_A] \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$

В соответствии с основным свойством потенциала проекции g_x, g_y равны производным потенциала W по направлениям x и y , поэтому формулы (1) перепишем так :

$$\left. \begin{aligned} \xi_B - \xi_A &= - 1/\gamma * [(dW/dx)_B - (dW/dx)_A] \\ \eta_B - \eta_A &= - 1/\gamma * [(dW/dy)_B - (dW/dy)_A] \end{aligned} \right\} \quad (10.13)$$

Чтобы найти разности производных потенциала напишем полный дифференциал:

$$d(dW/dx) = d^2W/dx^2 * dx + d^2W/dxdy * dy + d^2W/dxdz * dz \quad (10.14)$$

проинтегрируем выражение (3) между точками А и В получим:

$$(dW/dx)_B - (dW/dx)_A = \int_{x_A}^{x_B} \frac{d^2W}{dx^2} dx + \int_{y_A}^{y_B} \frac{d^2W}{dxdy} dy + \int_{z_A}^{z_B} \frac{d^2W}{dxdz} dz \quad (10.15)$$

Аналогично

$$(dW/dy)_B - (dW/dy)_A = \int_{x_A}^{x_B} \frac{d^2W}{dxdy} dx + \int_{y_A}^{y_B} \frac{d^2W}{dy^2} dy + \int_{z_A}^{z_B} \frac{d^2W}{dydz} dz$$

Предположим, что А и В – близко расположенные точки, расстояние между ними десятки или сотни метров, и вторые производные между ними меняются линейно.

Заменяя под знаком интеграла производные их средними значениями, для разностей уклонения отвеса получим

$$\left. \begin{aligned} \xi_B - \xi_A &= - 1/\gamma [(d^2W/dx^2)_m * (x_B - x_A) + (d^2W/dxdy)_m * (y_B - y_A) + \\ & (d^2W/dxdz)_m * (z_B - z_A)] \\ \eta_B - \eta_A &= - 1/\gamma [(d^2W/dxdy)_m * (x_B - x_A) + (d^2W/dy^2)_m * (y_B - y_A) + \\ & (d^2W/dydz)_m * (z_B - z_A)] \end{aligned} \right\} \quad (10.16)$$

Производные d^2W/dx^2 и d^2W/dy^2 по измерениям с гравитационным вариометром отдельно не определяют.

Из измерений находят разность $W\Delta = d^2W/dy^2 - d^2W/dx^2$

Введем эту разность в выражение (10.16). Для этого умножим первое уравнение на $\sin A$. Второе умножим на $\cos A$ и вычтем из первого равенства второе. При этом учтем что $x_B - x_A = S_{AB} \cos A$, $y_B - y_A = S_{AB} \sin A$,

$z_B - z_A = \Delta h_{AB}$, где S_{AB} – расстояние между точками А и В, A – азимут линии АВ, Δh_{AB} – превышение между точками А и В.

Получим

$$(\xi^B - \xi^A) \sin A - (\eta^B - \eta^A) \cos A = S_{AB} / \gamma [1/2 * W \Delta \sin 2A + W_{xy} \cos 2A] - (W_{xz} \sin A - W_{yz} \cos A) * \Delta h_{AB} / \gamma \quad (10.17)$$

Все величины в правой части получают по результатам измерений с гравитационным вариомером.

В правой части (10.16) для обозначения вторых производных принята обычная форма записи, например $d^2W / dx dy = W_{xy}$. В левой части уравнения (10.17) две неизвестные величины $(\xi^B - \xi^A)$ и $(\eta^B - \eta^A)$. Для их нахождения применяют такой прием: добавим к точкам А и В точку С. Уравнение (10.17) можно записать для линий АС и ВС:

$$(\varepsilon^C - \varepsilon^B) \sin ABC - (\eta^C - \eta^B) \cos ABC = S_{BC} / \gamma [1/2 * W \Delta \sin 2A + W_{xy} \cos 2A] - [W_{xz} \sin A - W_{yz} \cos A] * \Delta h_{BC} / \gamma \quad (10.18)$$

$$(\varepsilon^C - \varepsilon^A) \sin A - (\eta^C - \eta^A) \cos A = S_{AC} / \gamma [1/2 * W \Delta \sin 2A + W_{xy} \cos 2A] - [W_{xz} \sin A - W_{yz} \cos A] * \Delta h_{AC} / \gamma .$$

В уравнениях (10.16) шесть неизвестных – разности $\xi^B - \xi^A$, $\varepsilon^C - \varepsilon^B$, $\varepsilon^C - \varepsilon^A$, $\eta^B - \eta^A$, $\eta^C - \eta^B$, $\eta^C - \eta^A$ или составляющие уклонения отвеса ξ^A , ε^B , ε^C , η^A , η^B , η^C .

При обработке результатов геодезических измерений можно использовать местную систему координат, ориентированную по направлению отвесной линии в исходном пункте сети. В этом случае уклонения отвеса в исходном пункте будут равны нулю и число неизвестных в уравнениях 6,7 уменьшаться до четырёх.

Разность составляющих уклонения отвеса можно найти непосредственно по формулам (10.16), если известна производная W_{zz} – вертикальный градиент силы тяжести. Используя уравнение :

$$W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} = 2\omega^2,$$

Где ω – угловая скорость вращения Земли, можно найти отдельно производные W_{xx} , W_{yy} :

$$2 W_{xx} = 2\omega^2 - W_{zz} - W \Delta$$

$$2 W_{yy} = 2\omega^2 - W_{zz} + W \Delta$$

И вычислить разности $\xi^B - \xi^A$ и $\eta^B - \eta^A$. Точность определения разности уклонения отвеса по вторым производным зависит от точности измерения вторых производных и расстояния между пунктами.

Контрольные вопросы:

1. Вывод формул для вычисления составляющих уклонения отвеса с учетом возмущающего потенциала
2. Использование вторых производных для расчета составляющих уклонения отвеса.

Лекция 11

Виды проведения гравиметрических съемок. Сети гравиметрических съёмок и составление гравиметрических карт.

Гравиметрической съемкой называют совокупность гравиметрических наблюдений и определений координат пунктов. Целью проведения гравиметрических съемок является изучение гравитационного поля, поверхности и внутреннего строения Земли, гравиметрической разведки, обработки результатов геодезических измерений.

Гравиметрическую съемку, необходимую для определения гравитационного поля и поверхности Земли, называют мировой гравиметрической съемкой. Она представляет собой совокупность всех гравиметрических наблюдений, выполняемых на Земле.

Гравиметрические съемки для региональных геологических исследований на территориях протяженностью в тысячи километров, называют региональной съемкой. С ее помощью выполняют тектоническое и литолого-петрографическое районирование и выявляют участки для детальных геолого-геофизических исследований. В результате региональной съемки составляют гравиметрические карты масштабов 1/1000 000, 1/500 000 с сечением изоаномал 2-5 мГал и 10 мгал.

Поисковые гравиметрические съемки проводят с целью обнаружения определенных геологических объектов в районах, перспективных на полезные ископаемые. В результате составляют карты масштабов 1/200 000 – 1/100 000 с сечением изоаномал 1-2 мгал.

Гравиметрическая съемка, выполняемая с высокой точностью и высокой плотностью распределения пунктов называется детальной съемкой, по материалам которой составляют карты масштабов 1/50 000 – 1/5000 с сечением 0,05-0,5 мгал.

Результаты детальных съемок используют для изучения строения нефтегазоносных районов, определения участков, перспективных на разные виды металлов, определения локальных форм, благоприятных для скопления полезных ископаемых и изучения конкретных месторождений.

По характеру распределения пунктов съемки делят на площадные и профильные. Площадной называют гравиметрическую съемку с относительно равномерным распределением гравиметрических пунктов на местности. При

равномерной площадной съемке расстояния между пунктами вдоль линии наблюдения (профилями) и между профилями одинаково. Для обеспечения достоверности гравиметрической съемки, расстояния между профилями не должны превышать расстояния между пунктами вдоль профиля более чем в 5 раз.

Профильная съемка выполняется для изучения протяженных геологических объектов и при наблюдениях в труднодоступных условиях. Так профильные исследования проводят в Антарктиде, большая часть морских наблюдений представляет собой профильные съемки. При гравиметрической разведке выполняют в основном площадные съемки.

Гравиметрические наблюдения в основном проводят относительным методом. Для приведения относительных измерений в единую систему, контроля за смещением нуля-пункта необходимо иметь систему гравиметрических пунктов повышенной точности, что является опорную гравиметрическую сеть. Таким образом, гравиметрические съемки делят на опорные сети и рядовые съемки.

Гравиметрическую съемку вокруг астропунктов или пунктов триангуляции, выполняемую для вычисления уклонения отвеса и астрономо-гравиметрического нивелирования, называют съемкой сгущения.

Методика полевой работы с гравиметрами определяется задачами, стоящими перед данной съемкой. Практически у всех гравиметров наблюдается в разной степени смещение нуля-пункта во времени. Съемка разделяется на рейсы небольшой длительности, при которой смещение нуля-пункта носит линейный характер. При нелинейном смещении нуля-пункта рейс разделяется на звенья, смещение нуля-пункта в каждом из которых учитывается как линейное. Рейсы и их звенья всегда замыкаются на пункты с известной силой тяжести, обычно – опорные гравиметрические пункты 3-го класса. Пункты опорной сети 3-го класса должны быть размещены на местности так часто, чтобы при выполнении рядовой съемки каждый рейс с гравиметром захватывал не менее 2-3-х опорных пунктов. Обычно опорные пункты располагаются при очень детальных съемках через 2-3 км один от другого, а при рекогносцировочных – на расстояниях 8-12 км.

При создании опорной сети наблюдения ведутся замкнутыми рейсами, образующими систему замкнутых полигонов. По окончании определения опорной сети она уравнивается чаще всего по методам полигонов, разработанных В. Поповым.

Опорные гравиметрические точки I и II классов должны быть надежно и на длительное время закреплены на местности. Существуют следующие формы закрепления: 1) заложение каменных столбов и плит; 2) установка железных труб с крестовиной; 3) совмещение с пунктами триангуляций и нивелирования.

Опорные точки III класса закрепляются на местности столбами или трубами при обеспечении сохранности знака в течение 5-10 лет.

После определения опорной сети III класса приступают к наблюдению на рядовой сети, для которой опорные пункты служат жестким каркасом.

Рядовые рейсы строятся так, чтобы по возможности избегать в течение рейса перегиба хода температуры, что приводит, как правило, к криволинейности смещения нуля-пункта и снижению точности работы гравиметра. Поэтому рекомендуется проводить

короткие рейсы в утренние и вечерние часы при монотонном изменении температуры внутри гравиметра.

Рейсы с гравиметром могут строиться по разному способу:

1. Рейс начинается и заканчивается на одном и том же опорном пункте и все пункты рейса повторяются на обратном пути. Так же рейс может быть произведен так, что на обратном пути повторяются измерения только на части пунктов.
2. Рейс включает не менее трех опорных пунктов. Обычно он заканчивается не на том опорном пункте на котором начался.

Если в рейсе имелись пункты, на которых наблюдения проводились дважды, то по ним также можно установить смещение нуль-пункта.

При проведении гравиметровых съемок по инструкции требуется повторение не менее 10% пунктов. Основным критерием качества наблюдений с гравиметром служит средняя квадратическая ошибка единичного наблюдения, вычисляемая по сходимости независимых контрольных наблюдений способом наименьших квадратов по формуле:

$$m = \pm \sqrt{\sum (g_i - g_{\text{ср}})(g_i - g_{\text{ср}}) / (l - n)}$$
, в этой формуле $g_i - g_{\text{ср}}$ - отклонение от среднего значения; l - число наблюдений; n - число контрольных точек.

Средняя квадратическая ошибка определения аномалий силы тяжести гравиметрами на рядовых пунктах вычисляется по формуле:

$$m_a = \pm \sqrt{m * m + m_{\text{оп}} * m_{\text{оп}} + m_H^2 + m_k^2}$$
, где m - средняя квадратическая ошибка измерения силы тяжести, $m_{\text{оп}}$ - средняя квадратическая ошибка сети опорной сети III класса, m_H - средняя квадратическая ошибка определения высот, m_k - средняя квадратическая ошибка определения координат.

При проведении профильных съемок с целью решения поисковых задач необходимая густота точек устанавливается в зависимости от интенсивности и размеров ожидаемых аномалий, чтобы аномалия от объекта поисков была отмечена не менее чем тремя точками. При этом необходимо, чтобы аномальное поле было пересечено не менее чем тремя профилями и чтобы на профиле в пределах аномалии было более трех точек наблюдений.

Результаты гравиметровых съемок представляются в виде карт изоаномал силы тяжести. Карты составляются на участки, районы, страны и даже континенты. Для гравиметрических карт обычно используется нормальная формула Гельмерта 1909 года. На картах масштабов от 1:200 000 до 1: 1000 000 с правой стороны рамки даются поправки для перехода к нормальной формуле Кассиниса, являющейся международной. За исходное значение силы тяжести принято абсолютное значение силы тяжести в Потсдаме, За нуль-пункт приведения высот принят уровень Балтийского моря.

Составление гравиметрических карт состоит из следующих операций:

- 1) Приведения всех съемок к единому гравиметрическому уровню.
- 2) Выбора масштаба и сечения карт;
- 3) Выбор значения плотности промежуточного слоя.
- 4) Построения карты.

В большинстве стран для приведения гравиметрических съемок в единую систему созданы специальные высокоточные опорные сети. Для мировой съемки исходным является значение силы тяжести в Потсдаме. Приведение гравиметрических съемок к общегосударственному уровню силы тяжести должно осуществляться с точностью 1 мгал, иначе при сочленении детальных съемок на соседних планшетах сводные карты аномалий будут сильно искажены. Это также удовлетворяет геодезистов при определении по гравиметрическим данным параметров фигуры Земли.

Сечения и масштаб гравиметрических карт, составляемы в результате проведения гравиметрической съемки, определяется густотой сети, ошибкой аномалии, и степенью аномальности гравитационного поля. Выбор значения плотности промежуточного слоя определяется геологическим строением района. Так, для Западной Европы, США, Канады и Австралии плотность слоя принимается равной $2,67 \text{ г/см}^3$. Для стран бывшего СССР при составлении карт больших территорий в качестве единого значения промежуточного слоя принимается $2,3 \text{ г/см}^3$. Для этой территории большая часть промежуточного слоя сложена осадочными породами и значение $2,3 \text{ г/см}^3$ больше соответствует реальной действительности нежели $2,67 \text{ г/см}^3$. Это справедливо для мелкомасштабной съемки, но при крупномасштабной съемке необходимо очень аккуратно подходить к выбору плотности.

Контрольные вопросы:

1. Виды проведения гравиметрических съемок.
2. Сети гравиметрических съемок и составление гравиметрических карт.

Лекция 12

Вторые производные потенциала силы тяжести и определение кривизны поверхности Земли. Решение некоторых геодезических задач при помощи гравиметрии

Выберем прямоугольную систему координат. Ось Z направим по отвесной линии в данной точке, тогда плоскость ху будет горизонтальной плоскостью, касающейся в данной точке уровенной поверхности. Ось х направим по меридиану, ось у – по первому вертикалу. Полная составляющая силы тяжести в начале координат $g_z = dW/dz$. Если эту величину продифференцировать по направлениям координатных осей, то:

$$\begin{aligned} dg/dx &= d^2W/dzdx = W_{xz} \\ dg/dy &= d^2W/dzdy = W_{yz} \\ dg/dz &= d^2W/dzdz = W_{zz} \end{aligned} \tag{12.1}$$

Две первые формулы дают изменение силы тяжести при перемещении точки в горизонтальных направлениях х и у. Это так называемые горизонтальные градиенты

силы тяжести. Последняя формула дает изменение силы тяжести в вертикальном направлении, то есть вертикальный градиент силы тяжести.

Первые производные потенциала силы тяжести по направлениям x , y , z равны проекциям силы тяжести на эти направления:

$$\begin{aligned} dW/dx &= g_x. \\ dW/dy &= g_y. \\ dW/dz &= g_z \end{aligned} \quad (12.2)$$

Для того чтобы понять физический смысл вторых производных потенциала по x и y , необходимо ввести понятие кривизны поверхности. Если поверхность задана уравнением $Z = f(x,y)$, то её кривизна будет :

$$1/\rho_\alpha = r \cos^2\alpha + 2s \sin\alpha \cos\alpha + q \sin^2\alpha \quad (12.3)$$

Где ρ_α – радиус кривизны в азимуте сечения α , в котором определяется кривизна:

$$r = d^2z/dx^2 ; s = d^2z/dydx ; q = d^2z/dy^2 \quad (12.4)$$

Поверхность на которой рассматривается потенциал и его производные, задана уравнением $W = C$.

Если найти значения r , s , q для W и внести их в соотношения (3) то кривизну поверхности можно выразить через вторые производные потенциала.

Пусть поверхность задана уравнением $W(x,y,z) = C$. Считая $z = f(x,y)$, напомним: полные производные от W по x , y

$$\begin{aligned} dW/dx + dW/dz * dz/dx &= 0 \\ dW/dy + dW/dz * dz/dy &= 0 \end{aligned}$$

Вторые производные от W будут:

$$\begin{aligned} dW^2/dx^2 + dW/dz * d^2z/dx^2 &= 0 \\ dW^2/dy^2 + dW/dz * d^2z/dy^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } r = d^2z/dx^2 = (-1/g)W_{xx} ; s = d^2z/dydx = (-1/g)W_{xy} ; q = d^2z/dy^2 = (-1/g)W_{yy}$$

Подставляя значения r , s , q в уравнение (12.3) определим кривизну поверхности

$$1/\rho_\alpha = -1/g (W_{xx} \cos^2\alpha + W_{xy} \sin 2\alpha + W_{yy} \sin^2\alpha) \quad (12.5)$$

Рассмотрим сечения в меридиане и первом вертикале.

$$\text{В первом случае } \alpha = 0, \quad 1/\rho_M = (-1/g)W_{xx} \quad (12.6)$$

$$\text{Во втором - } \alpha = \pi/2, \quad 1/\rho_N = (-1/g)W_{yy} \quad (12.7)$$

$$\text{Отсюда } W_{yy} - W_{xx} = W_{\text{дельта}} = g(1/\rho_M - 1/\rho_N) \quad (12.8)$$

Где ρ_m и ρ_N – радиусы кривизны в сечениях меридиана и первого вертикала. Сечения в плоскости меридиана и первого вертикала – главные нормальные сечения поверхности. Разность вторых производных потенциала $W_{yy} - W_{xx} = W_{\text{дельта}}$ определяют отклонение поверхности от сферичности.

Обозначим через $1/R_1$ и $1/R_2$ кривизну главных нормальных сечений уровенной поверхности, имеющих максимальную и минимальную кривизну.

$$1/R_1 = -\frac{1}{g} (W_{xx} \cos^2 \psi_0 + W_{xy} \sin 2\psi_0 + W_{yy} \sin^2 \psi_0) \quad (12.9)$$

$$1/R_2 = -\frac{1}{g} (W_{xx} \sin^2 \psi_0 - W_{xy} \sin 2\psi_0 + W_{yy} \cos^2 \psi_0)$$

Здесь ψ_0 - угол между плоскостью меридиана (осей) и плоскостью, содержащих нормальное сечение максимальной кривизны: $1/R_1$,

Принимая $W_{xx} = \frac{\partial^2 W}{\partial X^2}$, $W_{yy} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$, $W_{xy} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \cdot \partial y}$, получим что

Разность кривизны главных нормальных сечений будет равна:

$$1/R_1 - 1/R_2 = \frac{1}{g} [(W_{yy} - W_{xx}) \cos 2\psi_0 - 2W_{xy} \cdot \sin 2\psi_0], \text{ что}$$

Определяет степень отличия уровенной поверхности от сферы.

$$\text{Примем } W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx}, \text{ тогда } 1/R_1 - 1/R_2 = \frac{1}{g} (W_{\Delta} \cdot \cos 2\psi_0 - 2W_{xy} \cdot \sin 2\psi_0).$$

Направления ψ_0 нормального сечения, изменяющего максимальную кривизну $1/R_1$, определяется соотношением:

$$\operatorname{tg} 2\psi_0 = \frac{2W_{xy}}{W_{\Delta}}.$$

W_{xy} и W_{Δ} - это градиенты кривизны уровенной поверхности.

Кривизна силовой линии определяется вторыми произведениями. Кривизна кривой - это предел отношения угла между направлениями касательных кривой в двух близких точках к длине кривой между этими точками.

Кривизна проекции силовой линии на плоскость меридиана.

$$K_x = \frac{1}{g} \frac{\partial g_x}{\partial z} = \frac{1}{g} W_{xz} \quad (12.10)$$

Кривизна K_y проекции силовой линии на плоскость первого вертикала:

$$K_y = \frac{1}{g} W_{yz}. \quad (12.11)$$

Таким образом, вторые производные являются вертикальным и горизонтальными градиентами силы тяжести, и определяют кривизну уровенной поверхности и силовой линии.

Исходная единица ускорения сила тяжесть это $\text{см} \cdot \text{с}^{-2} \rightarrow \text{Галл}$. В международной системе СИ единица ускорения это $M \cdot \text{С}^{-2} = 100\text{Гал}$. Н в гравитации используется меньшие единицы-тысячная и миллионная доля Гала: мгал и МкГал.

Сила тяжести Земли примерно равна= 980Гал, по всей поверхности Земли она варьирует от 983 гал на полюсах Земли до 978 гал на экваторе.

Размерность вторых производных гравитационного потенциала определим как размерность градиента сила тяжести $\left[\frac{dg}{dn} \right] = [c^{-2}]$.

Это очень крупная единица, на несколько порядков превышающая величину вторых производных, характерных для Земли. Наибольшие по величине производные W_{zz} для Земли имеют порядок $3 \cdot 10^{-6} \text{с}^{-2}$. Поэтому в практике используют как единицу измерения одну миллиардную этой величины (10^{-9}с^{-2}) называемую этвешем, по имени венгерского ученого, которой создал прибор для измерения вторых производных: $1\text{Э} = \frac{1\text{мГал}}{10\text{км}}$, т.е это соответствует изменениям силы тяжести на 1мГал на расстоянии в 10км по горизонтали, что соответствует одному Этвешу.

Нормальные значения вторых производных
потенциала силы тяжести

Также как и для силы тяжести , для вторых производных потенциала можно получить нормальные значения, соответствующие вторым производным потенциала для некоторой идеальной Земли, сила тяжести на которой выражается одной из нормальных формул, а уровенная поверхность, представляющая Землю, является эллипсоидом вращения. Тогда:

- 1) главными сечениями будут сечения первого вертикала ρ_N и меридиана ρ_M . (эти величины вычисляются в высшей геодезии);
- 2) ось x направлена по меридиану $\alpha=0$;
- 3) $g = \gamma$;
- 4) удовлетворяется уравнение $g = g_e (1 + \beta \sin^2\phi)$ (12.12)

При этих условиях нормальные значения вторых производных потенциала получим из уравнений :

$$tg 2\psi_0 = \frac{2W_{xy}}{W_{\Delta}} \quad \text{следует } W_{xy} = 0 \tag{12.13}$$

$$W_{yy} - W_{xx} = W_{\Delta} = g(1/\rho_M - 1/\rho_N) \quad \text{следует } W_{\Delta} = \gamma (1/\rho_M - 1/\rho_N) \tag{12.14}$$

$$1/\rho_M = (-1/g)W_{xx} \quad \text{следует } W_{xx} = -\gamma/\rho_M \tag{12.15}$$

$$1/\rho_N = (-1/g)W_{yy} \quad \text{следует } W_{yy} = -\gamma/\rho_N \tag{12.16}$$

Имея ввиду, что $dx = \rho_M d\phi$ из
 $dg/dx = d^2W/dzdx = W_{xz}$
 $dg/dy = d^2W/dzdy = W_{yz}$ и $g = g_e (1 + \beta \sin^2\phi)$
 $dg/dz = d^2W/dzdz = W_{zz}$

$$\text{найдем } W_{xz} = dg/dx = dg/(\rho_M d\varphi) = (1/\rho_M)g_e \beta \sin 2\varphi \quad (12.17)$$

$$W_{yz} = dg/dy = dg/(\rho_N \cos\varphi d\lambda) = 0 \quad (12.18)$$

И наконец нормальное значение вертикального градиента силы тяжести

$W_{zz} = dg/dz$ находим из

$d^2W/dx^2 + d^2W/dy^2 + d^2W/dz^2 = 2\omega^2$, откуда следует:

$$W_{zz} = 2\omega^2 - (W_{yy} + W_{xx}) = 2\omega^2 + \gamma (1/\rho_M + 1/\rho_N) \quad (12.19)$$

Нормальное изменение гравитационного поля определяется нормальными значениями вторых производных силы тяжести в зависимости от широты. В таблице 1 приведены количественные величины нормальных значений горизонтального градиента в направлении меридиана W_{xz} и разности кривизны W_{Δ} для средних широт:

Таблица 12.1

φ , градус	$W_{xz} * 10^{-9} \text{ c}^{-2}$	$W_{\Delta} * 10^{-9} \text{ c}^{-2}$
35	-7,6	+6,9
40	-8,0	+6,0
45	-8,1	+5,1
50	-8,0	+4,2
55	-7,6	+3,4
60	-7,0	+2,6
65	-6,2	+1,8
70	-5,2	+1,2

Исходя из $W_{\Delta} = \gamma (1/\rho_M - 1/\rho_N)$ можно отметить что радиус кривизны меридиана обозначается в геодезии через M , а радиус кривизны первого вертикала – через N .

Поэтому можно написать:

$$W_{\Delta} = \gamma (1/M - 1/N). \text{ Поскольку } M = a(1-e^2)/(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}, N = a/(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2},$$

Получим $W_{\Delta} = \gamma e^2 \cos^2\varphi/a$. Подставив в формулу значения постоянных получим

$$W_{\Delta} = 1,024 \cos^2\varphi \text{ мгл/км}$$

То же самое для

$$W_{xz} = dg/dx = dg/(\rho_M d\varphi) = (1/\rho_M)g_e \beta \sin 2\varphi \quad (12.20)$$

Подставим численные значения : $W_{xz} = 0,811 \sin 2\varphi$ мгл/км. Производная W_{xz} позволяет определить кривизну силовой линии нормального поля.

Исходя из того, что $1/\rho = 1/\gamma(W_{xz} + W_{yz})$ подставляем полученные значения вторых производных, получим $1/\rho = g\epsilon \beta \sin 2\varphi / \gamma M$ или пренебрегая малыми второго порядка $1/\rho = \beta \sin 2\varphi / R$, (12.21) где R – средний радиус Земли. Отсюда следует, что кривизна силовой линии зависит от широты только и она лежит в плоскости меридиана. При широтах $\varphi=0$ и 90° кривизна равна нулю, что значит что силовые линии из полюсов и экватора являются прямыми и направлены по оси вращения и по радиусам экватора. Как видно из формулы (12.21) радиус кривизны силовой линии нормального поля во много раз превосходит радиус Земли. В самом деле, при $\varphi = 45^\circ$ $\rho = R/\beta$, откуда получаем, что радиус кривизны нормального поля примерно в 200 раз превосходит средний R и составляет около 1200 000 км. При таком радиусе кривизны отрезок силовой линии MM_0 (H_n) практически не отличается от отрезка нормали MD к уровенному эллипсоиду, то есть геодезической высоты H (рис.12.1)

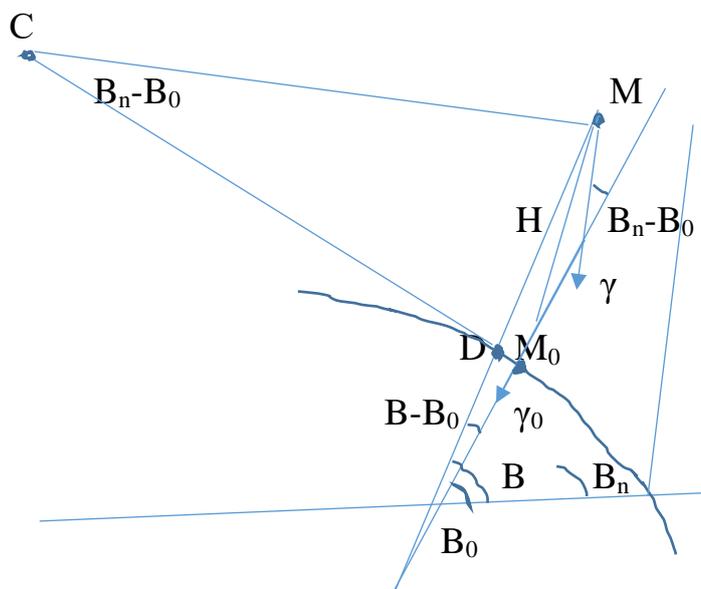


Рис 12.1.Схема определения кривизны силовой линии нормального гравитационного поля

Поэтому в дальнейшем не будем делать различий между геодезической высотой H и соответствующим отрезком H_n силовой линии нормального поля. Производная $U_{zz} = d\gamma_0/dz$ и характеризует изменение нормальной силы тяжести по высоте и называется вертикальным градиентом нормальной силы тяжести. Его необходимо знать, например в точке с геодезической высотой H . Для вычисления U_{zz} используем формулу $d\gamma/dn = (-1/\gamma_0)*(1/M - 1/N) - 2\omega^2$.

После подстановки значений M и N получим:

$$d\gamma/dn = -(2\gamma_0/a)*[1+\alpha-q-(3\alpha - 5q/2)\sin^2 \varphi] \quad (12.22)$$

После замены $\sin^2 \varphi$ через $(1-\cos 2\varphi)/2$ и подстановки численных значений величин формулы (12.22) получим:

$$d\gamma/dn = -0,30855(1+0,00071\cos 2\varphi) \text{ мгл/м} \quad (12.23)$$

Вторым членом формулы можно пренебречь и считать

$$d\gamma/dn = -0,3086 \text{ мгл/м}, \text{ знак минус означает уменьшение силы тяжести с высотой.}$$

В инженерной геодезии предполагают, что в пределах съемки отвесные линии во всех точках параллельны, а уровенные поверхности – параллельные плоскости. Это было бы верным если бы гравитационное поле Земли было бы однородным, то есть являлось бы полем постоянной силы тяжести. В реальном гравитационном поле сила тяжести непостоянна, то есть гравитационное поле неоднородно. В связи с этим необходимо учитывать неоднородность гравитационного поля вызванной аномальным полем. Внедрение в высокоточную геодезию гиротеодолитов приводит к необходимости изучения гравитационного поля, так как во всех точках необходимо знать уклонение отвесной линии для введения поправки в измеряемый гиротеодолитом астрономический азимут.

Влияние уклонений отвесной линии на измеряемые величины.

В процессе измерений геодезические приборы ориентируют по направлениям отвесных линий с помощью отвесов и уровней. Из-за непараллельности отвесных линий вертикальные оси приборов в разных точках также могут быть непараллельны.

Посмотрим как влияют уклонения отвеса на результаты линейных и угловых измерений и высокоточного нивелирования.

1. Влияние уклонений отвеса на измеряемые горизонтальные направления.

Пусть точка O является началом местной системы координат XYZ , где ось Z совпадает с направлением касательной к отвесной линии в точке O , оси OX и OY

лежат в плоскости, касательной к уровенной поверхности в точке O ; X направлена на север, Y направлена на восток. В точке M геодезической сети измерено горизонтальное направление на точку N . Направление касательной к отвесной линии в точке M образует с осью OZ угол ΔV , равный разности уклонений отвеса в точке M и начале координат. При измерении горизонтального направления фактически измеряют двугранные углы, образованные плоскостями, проходящими через вертикальную ось теодолита и наблюдаемые точки.

Пусть MN_0 – линия пересечения плоскости, проходящей через отвесную линию точки M и точку N с горизонтальной плоскостью. N_0 – проекция точки N на горизонтальную плоскость по нормали Nn_0 к уровенной поверхности, проходящей через точку M .

Через N_0' обозначим проекцию на горизонтальную плоскость точки N линией параллельной оси OZ . Через точку N проведем плоскость перпендикулярную к направлению MN_0 . Точку пересечения этой плоскости линией MN_0' обозначим N_0'' . Очевидно, что горизонтальное направление будет искажено на ΔM за счет составляющей ΔU разности уклонений отвеса в плоскости, перпендикулярной к измеренному направлению.

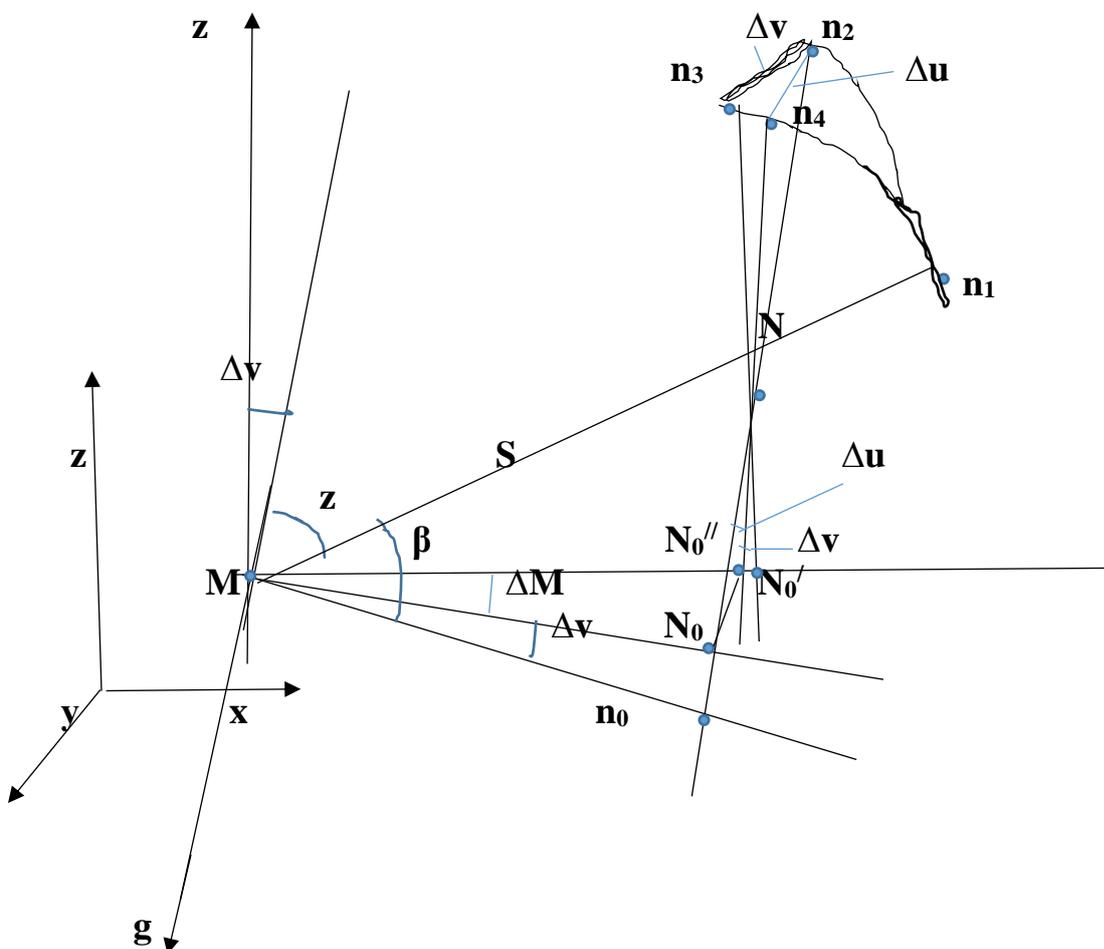


Рис.12.2. Схема определения влияния уклонений отвеса на измеряемые горизонтальные направления, на зенитные расстояния

Из прямоугольного треугольника MNN_0 имеем: $MN_0 = S \cdot \sin Z$

$NN_0 = S \cdot \cos Z$, где Z – измеренное зенитное расстояние, S – сторона MN . Из треугольника $NN_0 N_0''$ сторона $NN_0'' = S \cdot \cos Z \cdot \operatorname{tg} \Delta U$ и из треугольника $MN_0 N_0''$:

$$\operatorname{tg} \Delta M = \operatorname{tg} \Delta U \cdot \operatorname{ctg} Z. \quad (12.24)$$

Из-за малости углов ΔM и ΔU можно написать:

$$\Delta M = \Delta U \cdot \operatorname{ctg} Z \quad (12.25)$$

Это и есть поправка в измеренное горизонтальное направление за счет уклонения отвесной линии.

Особенностью специальных геодезических сетей являются значительные углы наклона, достигающие $30-40^\circ$. При таких углах $\operatorname{ctg} Z$ в (2) формуле равен $0,58-0,84$. Поэтому уклонение отвесной линии нужно знать с точностью, с которой выполняют измерение горизонтальных углов.

2. Влияние уклонения отвесных линий на зенитные расстояния

Продолжим линии MN , NN_0 , NN_0' , NN_0'' до пересечения со сферой единичного радиуса с центром в точке N . Точки пересечения обозначим через n_1 , n_2 , n_3 , n_4 . В системе координат хуз зенитным расстоянием Z точки N будет угол между направлением оси OZ и измеряемым направлением. Согласно рис 10. $Z = \angle MNN_0' = n_1 n_3$.

Из прямоугольного треугольника $n_1 n_2 n_4$ следует

$$\cos Z = \cos \Delta U \cdot \cos n_1 n_4$$

Так как угол ΔU не превышает несколько секунд то можно написать

$\cos Z = \cos n_1 n_4$ и $Z = n_1 n_4$, поэтому

$$Z = Z + \Delta v \quad (12.26)$$

Здесь Δv – составляющая разности уклонения отвеса в азимуте измеряемого направления. Согласно формуле (3) поправки в зенитные расстояния нужно вводить в случае, если точность измерения зенитных расстояний сравнима с величиной уклонения отвеса, то есть при измерениях зенитных расстояний с погрешностями около $1''$.

Контрольные вопросы:

1. Вторые производные потенциала силы тяжести и определение кривизны поверхности Земли.
2. Решение некоторых геодезических задач при помощи гравиметрии

Лекция 13

Теория ортометрических, динамических и нормальных высот. Учет неоднородности гравитационного поля в задачах прикладной геодезии

Нормальная и геодезическая системы координат. Будем рассматривать уровенный эллипсоид в качестве отсчетной поверхности, относительно которой определяется физповерхность Земли.

Возьмем произвольную точку M (рис 3), её положение в пространстве будет вполне определено, если известна уровенная поверхность $U=U_M$ нормального потенциала, проходящая через точку M , долгота L^M меридионального сечения поверхности $U=U_M$, проходящего через эту точку, и угол B_n^M , образованный касательной к силовой линии в точке M с плоскостью экватора. Этот угол будет нормальной широтой B_n^M точки M . Поскольку постоянная U_0 известна (см. лекцию 7 ф(28)), то для определения уровенной поверхности $U=U_M$, достаточно вычислить разность $U_0 - U_M$ нормальных потенциалов. Таким образом, величины $U_0 - U_M$, B_n , и L полностью определяют положение точки M и могут рассматриваться в качестве координат. Но в геодезии принята иная система координат : геодезическая высота H , геодезическая широта B и долгота L . Долготы в обеих системах одинаковы. Разность нормальных потенциалов $U_0 - U_M$ и геодезическая высота H связаны простым следующим соотношением:

$MM_0 = H_n = (U_0 - U_M) / \gamma_m$ — где γ_m — среднее значение нормальной силы тяжести широт $B_n - B_0$ точек M и M_0 равна углу между касательными к силовой линии в этих точках. Если полагать что силовая линия на отрезке MM_0 имеет постоянный радиус кривизны ($CM = CM_0 = \rho$), то угол между касательными будет равен углу между

радиусами, проведенными из центра кривизны С силовой линии в точке М и М₀.

Тогда Н_n как дуга окружности радиуса ρ определится из соотношения :

$$H_n / \rho = B_n - B_0 \quad (13.1)$$

А отрезок Н – из прямоугольного треугольника СМD.

$$H / \rho = \sin(B_n - B_0). \text{ Следовательно } (H_n - H) / \rho = (B_n - B_0)^3 / 3!$$

Подставив значение ρ и значение B_n-B₀ найдём, что:

$$H_n - H = (\beta^2 H_n^3 \sin^2 2\varphi) / 6R^2. \text{ Даже при } H_n = 10 \text{ км разница } H_n - H \text{ будет меньше } 0,01$$

мм. Поэтому в дальнейшем не будем делать различия между геодезической высотой Н и соответствующим отрезком Н_n силовой линии нормального поля. В результате вышеизложенного можно написать

$$H = (U_0 - U_M) / \gamma_m,$$

где γ_m - значение нормальной силы тяжести в точке посередине отрезка Н. На основании формул $\gamma_0 = \gamma_e(1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta_1 \sin^2 2\varphi)$ и

$$\gamma = \gamma_0 + (d\gamma/dn)H + (d^2 \gamma/dn^2)(H^2/2) \text{ можно принять}$$

$$\gamma_m = \gamma_e(1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta_1 \sin^2 2\varphi) + (d\gamma/dn)(H/2) \quad (13.2)$$

Таким образом разность потенциалов U₀- U_M и отрезок Н взаимосвязаны как:

$$U_0 - U_M = [\gamma_e(1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta_1 \sin^2 2\varphi) + (d\gamma/dn)(H/2)] * H$$

Зная разность U₀- U_M можно определить геодезическую высоту Н и наоборот.

Далее рассмотрим переход от нормальной широты к геодезической .

Геодезическая широта это угол между плоскостью экватора и нормалью к эллипсоиду в точке М (угол В на рис 13.1).

$$\text{Искомую разность можно выразить как: } \Delta B = B_n - B = (B_n - B_0) - (B - B_0)$$

Первый угол справа был определен в (13.1). Выражая его в секундах дуги получим:

$$B_n - B_0 = (\beta H \sin 2\varphi) / (R \sin 1''). \text{ Остаётся определить угол } (B - B_0). \text{ Из рис.3 видно:}$$

$$DM_0 = CM_0 - CD = \rho - \rho \cos(B_n - B_0),$$

$$B - B_0 = DM_0 / R = \rho / R [1 - \cos(B_n - B_0)] = (\rho / R) * (B_n - B_0)^2 / 2, \text{ но } B_n - B_0 = H / \rho, \text{ поэтому}$$

$$B - B_0 = H^2 / 2R\rho, \text{ После подстановки сюда } 1/\rho \text{ из } 1/\rho = \beta \sin 2\varphi / R \text{ получим}$$

$$B - B_0 = \beta H^2 \sin 2\varphi / 2R^2, \text{ эта разность очень мала, так как даже при } H = 8 \text{ км}$$

$B - B_0 = 0,0008'' \sin 2\varphi$. Поэтому окончательно: $\Delta B = \beta H \sin 2\varphi / R \sin 1''$, если высоту выразим в километрах и вставим значения постоянных, получим:

$$\Delta B = B_n - B_0 = 0,171'' H \sin 2\varphi \quad (13.3)$$

Таким образом, положение точки в пространстве может быть определено при помощи двух систем координат: в первой системе координатами является разность потенциалов $U_0 - U_M$, нормальная широта B_n и долгота L , а во второй системе геодезические высота H , широта B и долгота L .

Остановимся на определении геодезической высоты. Вычислить геодезическую высоту по формуле $H = (U_0 - U_M) / \gamma_m$, невозможно, так как неизвестна разность потенциалов. В результате измерений можно определить только разность $W_0 - W_M$ действительных потенциалов силы тяжести

$W_0 - W_M = \int_{0M} g dh$, разность $U_0 - U_M$ нормальных потенциалов из измерений найти невозможно. Поэтому геодезическую высоту можно получить в результате сложных вычислений. Представим формулу

$$H = (U_0 - U_M) / \gamma_m \text{ в виде } H_M = (W_0 - W_M) / \gamma_m + (W_M - U_M + U_0 - W_0) / \gamma_m \quad (13.4)$$

В результате геодезическую высоту представим в виде суммы двух составляющих, обозначаемые через H_M^γ и ε_M :

$$H_M^\gamma = (W_0 - W_M) / \gamma_m, \quad (13.5)$$

$$\varepsilon_M = (W_M - U_M + U_0 - W_0) / \gamma_m \quad (13.6)$$

Подчеркнём, что под U_0 понимается значение нормального потенциала не в исходном пункте нивелирования (точке 0) а на поверхности уровенного эллипсоида $U = U_0$.

Разберём геодезический смысл обеих составляющих. Найдём на отрезке MM_0 нормали к уровенному эллипсоиду, проходящем через точку M , некоторую точку N , которая отвечает условию:

$$W_0 - W_M = U_0 - U_N \quad (13.7)$$

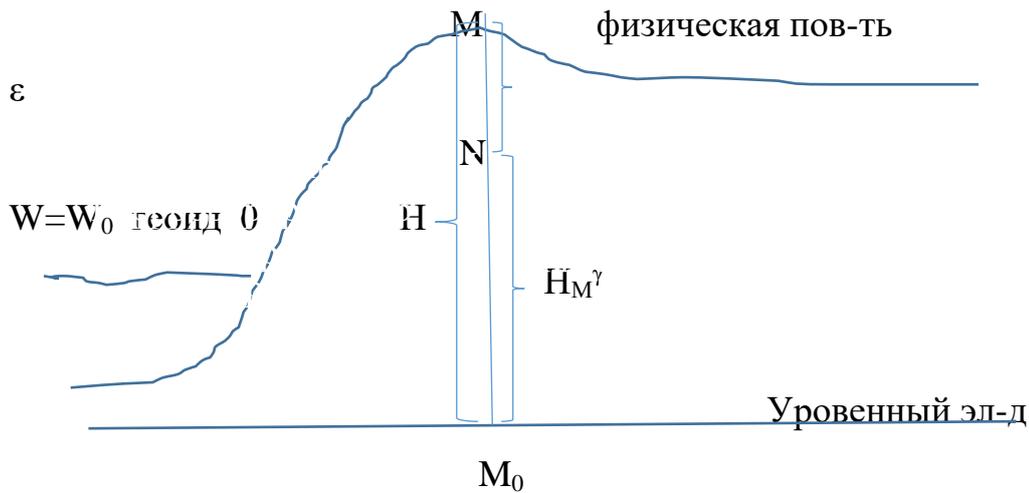


Рис. 13.1. Схема определения нормальной и геодезической высоты.

Очевидно, что геодезическая высота точки N и является той величиной, обозначаемой H_M^γ : $M_0N = H_N = H_M^\gamma$

Эта величина называется нормальной высотой точки M. Если бы действительная сила тяжести совпадала бы с нормальной, то соблюдались бы следующие равенства:

$$\begin{aligned} W_M &= U_M \\ W_0 &= U_0 \end{aligned} \quad (13.8)$$

$$W_0 - W_M = U_0 - U_M$$

И формула примет вид $H_M = H_M^\gamma$, то есть геодезическая высота совпала бы с нормальной.

Для вычисления нормальной высоты используем формулу

$$H_M^\gamma = (1/\gamma_m) \int_0^M g dh \quad (13.9),$$

где γ_m находится по формуле

$$\gamma_m = \gamma_e(1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta_1 \sin^2 2\varphi) + (d\gamma/dn)(H/2) \quad (13.10)$$

с заменой H на H^γ . Поскольку зависимость H^γ от γ_m весьма слабая, то при вычислении γ_m можно с пренебрегаемой погрешностью геодезическую широту B заменить астрономической φ , а вместо нормальной высоты взять ее приближенное значение. Для вычисления интеграла $\int_0^M g dh$ методом численного интегрирования

необходимо иметь нивелирный ход от исходной точки 0 до точки М, вдоль которого сила тяжести g должна быть измерена.

Но формула (20) неудобна для практического применения. Обычно её преобразуют, выделяя главную часть и ряд небольших поправок. В качестве главной части удобно выделить сумму измеренных превышений $\int_0^M dh$, то есть так называемую измеренную высоту $H^{изм}$. При условии $g = \gamma_m$. То есть при постоянной силе тяжести вдоль нивелирного хода, мы получили бы на основании (13.9):

$$H^\gamma = H^{изм} = \int_0^M dh$$

Обозначив поправку учитывающую изменение g , через ΔH_g , представим формулу (13.9) в виде $H^\gamma = H^{изм} + \Delta H_g$

Разность между геодезической высотой H_M точки и ее нормальной высотой H_M^γ , то есть величина $\varepsilon_M = H_M - H_M^\gamma$, равная отрезку NM нормали, проведенной к эллипсоиду в точке М получила название **аномалии высоты**.

Это объясняется тем, что только вследствие отличия действительного гравитационного поля от нормального (т.е. аномальности гравитационного поля) приходится иметь дело с величинами ε . В случае нормального поля очевидно, что $\varepsilon = 0$.

Учитывая, что $W_M - U_M = T_M$, где T_M – возмущающий потенциал точки М, формулу $\varepsilon_M = (W_M - U_M + U_0 - W_0) / \gamma_m$ (13.11)

Перепишем в виде $\varepsilon_M = T_M / \gamma_m + (U_0 - W_0) / \gamma_m$ (13.12).

Если параметры уровенного эллипсоида выбрана под условием соблюдения равенства $U_0 = W_0$, то выражение для аномалии высоты принимает более простой вид: $\varepsilon_M = T_M / \gamma_m$. Это соотношение называется формулой Брунса.

Влияние уклонения отвеса на измеряемые расстояния.

Пусть на рис 10. Mn_0 - проекция измеренной линии MN на уровенную поверхность точки М по нормали к этой поверхности, $\beta = 90^\circ - z$ – измеренный угол наклона, угол N_0Mn_0 равен составляющей Δv уклонения отвеса в азимуте направления MN. Проекция направления MN на горизонтальную плоскость равна :

$$MN\cos(\beta-\Delta v) = MN\cos\beta\cos\Delta v + MN\sin\beta\sin\Delta v$$

Примем $\cos\Delta v=1$, $\sin\Delta v=\Delta v$,

$$\text{тогда } MN_0^{\perp} = MN_0 + \Delta v h_{\text{изм}} \quad (13.14)$$

Где $h_{\text{изм}}$ – измеренное превышение точки. Если расстояние измеряют с точностью 1:1000 000, то поправку $\Delta v h_{\text{изм}}$, учитывающую влияние отклонения отвесной линии на угол наклона, и связанную с этим поправку в проекцию измеренного расстояния можно не учитывать при условии: $\Delta v h_{\text{изм}}/MN < 1:1000 000$ или $\Delta v < 0,2'' / \sin\beta$, так как

$h/MN = \sin\beta$. Таким образом если угол наклона измеряемой линии составляет 5-10°, а колебания уклона отвеса 1-2'' (угловые секунды), необходимо учитывать поправки за отклонение отвеса в измеряемые расстояния.

Влияние отклонения отвеса на результаты тригонометрического нивелирования.

При измерении углов наклона β или зенитных расстояний Z инструмент ориентирован по отвесной линии в точке наблюдений, поэтому методом тригонометрического нивелирования определяют превышения над уровенной поверхностью, а не над горизонтальной плоскостью $MN_0N_0^{\perp}$.

Превышения h над горизонтальной плоскостью равно:

$$h = MN \cdot \cos(Z + \Delta v) = MN \cdot \cos Z \cdot \cos \Delta v - MN \cdot \sin Z \cdot \sin \Delta v$$

Так как $\cos\Delta v = 1$, $\sin\Delta v = \Delta v$, $MN\cos Z = h_{\text{изм}}$, получаем

$$h = h_{\text{изм}} - \Delta v \cdot MN \cdot \sin Z \quad (13.15)$$

При $\Delta v = 0,1''$, $MN \cdot \sin Z = 100$ м, $\Delta v \cdot MN \cdot \sin Z = 0,05$ мм. Эта величина сравнима с погрешностями точного нивелирования, поэтому влияние отклонения отвеса на результаты нивелирования надо учитывать.

Влияние отклонений отвеса на результаты геометрического нивелирования.

Пусть на рис 13.2. Mn – физическая поверхность Земли, g – направление силы тяжести в точке m , mn_0 – уровенная поверхность

Точки m , mn_0 – измеренное нивелирное превышение dh . Разность высот точек m и n в принятой прямоугольной системе координат xuz , где ось z совпадает с направлением отвесной линии в исходной точке будет равна:

$$dH = nn_0 = (nm_0 - m_0n_1)\cos\Delta v,$$

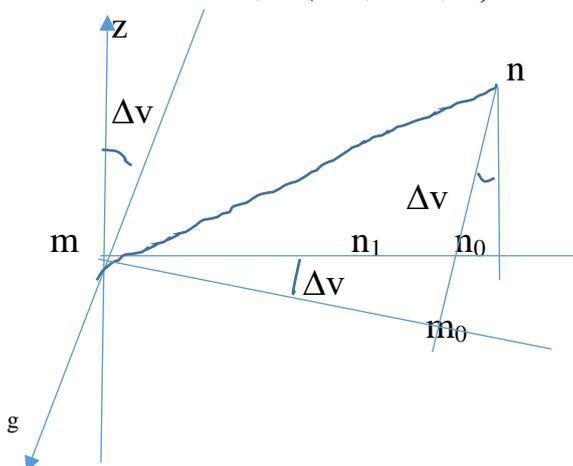


Рис 13.2. Схема определения уклонения отвеса на результаты геометрического нивелирования

Или, так как $\cos\Delta v=1$, а $m_0n_1*\sin\Delta v =\Delta v dS$,

$$dH = dh - \Delta v dS, \quad (13.16)$$

где dS = расстояние между точками m и n .

Для вычисления превышения между удаленными точками следует сложить элементарные превышения

$$H_M - H_0 = \sum d h_{изм} - \sum \Delta v dS \quad (13.17)$$

В соответствии с формулой (13.17) при средней разности уклонения отвеса $0,5''$ и расстоянии 2 км влияние уклонений отвеса на разность высот составит 10 мм.

Контрольные вопросы:

1. Теория ортометрических, динамических и нормальных высот.
2. Учет неоднородности гравитационного поля в задачах прикладной геодезии

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Грушинский Н.П. Теория фигуры Земли. М., Наука, 2002.
2. Макаров Н.П. Геодезическая гравиметрия М.Недра., 1998.
3. Бондаренко В.М., Демира Г.В., Ларионов А.М. Общий курс геофизических методов разведки. – М., Недра, 1996
4. 8. Геофизические методы разведки. Под редакцией В.П. Захарова.- С-П.: Недра, 2012.

Дополнительная

1. Мирзиёев Ш.М. Эркин ва фаровон, демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамиз. Ўзбекистон Республикаси Президентининг

лавозимига киришиш тантанали маросимига бағишланган Олий Мажлис палаталарининг кўшма мажлисидаги нутқи. – Т.: - “Ўзбекистон” НМИУ, 2016. – 56 б.

2. Абалакин В.К., Краснорылов И.И., Плахов Ю.В. Геодезическая астрономия и астрометрия. Справочное пособие: М.: Картгеоцентр-Геодезиздат, 2006.
3. Грушинский Н.П. Основы гравиметрии. М., Наука, 1983, 352 с.
4. Делинжер П. Морская гравиметрия М., Недра, 1982, 312с.
5. Шимбирев Б.П. Теория фигуры земли. М., Недра, 1995, 432 с.
6. Юзефович А.П., Огородова Л.В. Гравиметрия, М., Недра, 1980, 320 с.
7. Огородова Л.В., Шимбирев Б.П., Юзефович А.П., Гравиметрия. М., 2008, 306 с.

Ключевые слова

Сила тяжести, гравитационный потенциал, центробежная сила, угловая скорость вращения, гравитационная постоянная, коэффициент сжатия, возмущающий гравитационный потенциал, аномалия высоты, геоид, эллипсоид вращения, составляющие отклонения отвеса, вторые производные потенциала силы тяжести, градиенты, кривизна поверхности, астрономо-геодезическое и гравиметрическое отклонения отвеса, вариометрическая и гравиметрическая съёмка, опорные и рядовые точки наблюдения, редукции силы тяжести, аномалии Буге, Фая и за рельеф местности.

Содержание

Лекция 1. Введение, закон тяготения, и сила тяжести.....	3
Лекция 2. Потенциал силы тяжести и уровенные поверхности.....	7
Лекция 3. Фундаментальные геодезические постоянные и нормальное гравитационное поле Земли. Фигура реальной Земли	11
Лекция 4. Топографо-геодезическое обеспечение гравиметрической съёмки.	18
Лекция 5. Взаимосвязь между астрономо-геодезическим и гравиметрическим отклонениями отвеса ..	20

Лекция 6. Связь между возмущающим потенциалом и составляющими уклонения отвеса	22
Лекция 7. Уравнивание гравиметрических сетей и связь между данными гравиметрических и геодезических наблюдений.....	24
Лекция 8. Теория нормального и возмущающего гравитационного потенциала и соотношения между параметрами.....	32
Лекция 9. Граничные условия возмущающего потенциала и аномалии силы тяжести, редукции силы тяжести.....	35
Лекция 10. Использование формулы Веннинг-Мейнеса для изучения фигуры геоида	42
Лекция 11. Виды проведения гравиметрических съёмок. Сети гравиметрических съёмок и составление гравиметрических карт...	47
Лекция 12. Вторые производные потенциала силы тяжести и определение кривизны поверхности Земли. Решение некоторых геодезических задач при помощи гравиметрии	50
Лекция 13. Теория ортометрических, динамических и нормальных высот. Учет неоднородности гравитационного поля в задачах прикладной геодезии.....	59
Литература	64
Ключевые слова	65