**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

**ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ИСЛАМА КАРИМОВА**

**А. АБДУКАРИМОВ, Д.Н. ШАМСИЕВ, И.Т. ХАЛДЫБАЕВА**

# М А Т Е М А Т И К А

**Конспект лекций**

**Часть 1**

Ташкент 2018

**Математика**: Конспект лекций. Часть 1 / Абдукаримов А., Шамсиев Д.Н., Халдыбаева И.Т. Ташкент: ТашГТУ, 2018. 154 с.

Данный конспект лекций предназначен для проведения лекций по разделам высшей математики в высших технических учебных заведениях.

Первая часть конспекта содержит в себе следующие разделы высшей математики: линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, дифференциальные и интегральные исчисления и функции многих переменных. Конспект лекций может быть полезен студентам, магистрантам и докторантам.

*Печатается по решению научно-методического совета Ташкентского государственного технического университета.*

Рецензенты: д.ф.-м.н. Ахмедов А.Б. (ТашГТУ);
доц. Кадыркулов Б. (ТГИВ)

## Лекция № 1. Определители 2 и 3 порядков, их свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Определители n-го порядка. Решение систем линейных уравнений методом Крамера

## Определители 2 и 3 порядков

Рассмотрим таблицу чисел:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Число $\Delta = ad - bc$ называется определителем 2 порядка, соответствующим данной таблице чисел. Итак:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Например:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) = 9$$

Рассмотрим теперь таблицу из 9 чисел:

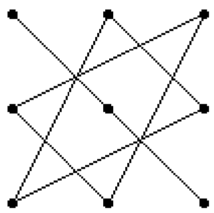
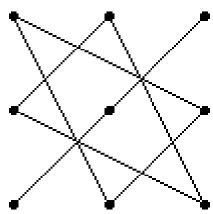
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Определителем 3 порядка, соответствующим данной таблице чисел, называется число:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Выражение в правой части получается следующим образом: произведение чисел, расположенных на главной диагонали и два произведения чисел, стоящих на линиях, параллельных главной диагонали на элемент, стоящий в противоположном углу, берутся со знаком плюс. Три произведения, которые строятся по такому же правилу, но относительно побочной диагонали, берутся со знаком минус. Схематически это правило может быть изображено следующим образом:

«+» «-»

Это правило вычисления определителя 3-го порядка называется правилом Сариуса.

**Пример.** Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

**Решение:**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 9 - 2 + 9 - 1 - 12 = 9$$

## Свойства определителей 3-го порядка:

**1.** Транспонирование, т.е. замена строк столбцами не меняет значения определителя. Доказательство проводится непосредственным вычислением:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{33}$$

Мы видим, что $\Delta = \Delta'$

**2.** При перестановке двух строк (или двух столбцов) определитель меняет знак.

Пусть:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

*Δ'* - определитель, полученный из *Δ* перестановкой первой и второй строк:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Это свойство легко проверяется непосредственным вычислением.

**3.** Общий множитель элементов какой-либо строки (или столбца) можно вынести за знак определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} k\,a_{11} & k\,a_{12} & k\,a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

**4.** Определитель, у которого элементы некоторой строки (или столбца) равны нулю, равен 0.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

**5.** Определитель, имеющий две равные строки (или два равных столбца), равен нулю.

Действительно,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{12}\,a_{33} + a_{12}\,a_{13}\,a_{31} + a_{13}\,a_{11}\,a_{32} -$$

$$- a_{13}\,a_{12}\,a_{31} - a_{11}\,a_{13}\,a_{32} - a_{11}\,a_{12}\,a_{33} = 0$$

## Миноры и алгебраические дополнения

**Определение.** Минором определителя третьего порядка, соответствующим некоторому элементу определителя, называется определитель второго порядка, который получится, если вычеркнуть строку и столбец, на пересечении которых стоит данный элемент. Минор, соответствующий элементу $a_{ij}$, обозначается $M_{ij}$

Например, в определителе:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Минор $M_{21}$, соответствующий элементу $a_{21}$, будет равен:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\,a_{33} - a_{13}\,a_{32};$$

Минор, соответствующий элементу $a_{33}$:

$$M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

**Определение.** Алгебраическим дополнением некоторого элемента определителя третьего порядка называется соответствующий ему минор, взятый со знаком плюс, если сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент, чётная, и со знаком минус, если эта сумма нечетная. Алгебраическое дополнение элемента $a_{ij}$ обозначается $A_{ij}$.

Таким образом: $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$

Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -(-5+6) = -1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10$$

Рассмотрим дальнейшие свойства определителей третьего порядка.

**6.** Сумма произведений элементов некоторого ряда (строки или столбца) на соответствующие алгебраические дополнения равна определителю, а сумма произведений элементов некоторого ряда на алгебраические дополнения параллельного ряда равна нулю.

Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ можно записать в виде:

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33} =$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$
$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

где $A_{ij}\ (i, j = \overline{1,3})$ - алгебраическое дополнение элемента $a_{ij}$

Итак, мы получили, что определитель может быть представлен в виде:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Такое представление называется разложением определителя по элементам первой строки. Аналогичное разложение можно написать по отношению к любой строке или столбцу. Итак, имеют место разложения определителя:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \quad \text{по 1-ой строке}$$
$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \quad \text{по 2-ой строке}$$
$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \quad \text{по 3-ей строке}$$
$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \quad \text{по 1-ому столбцу}$$
$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \quad \text{по 2-ому столбцу}$$
$$\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \quad \text{по 3-ему столбцу}$$

Таким образом, определитель равен сумме произведений элементов какого-либо ряда на соответствующие алгебраические дополнения.

Если в определителе $\Delta$ - элементы 1-ой строки заменить элементами 2-ой строки, то алгебраические дополнения 1-ой строки не изменятся и мы получим определитель:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta' = a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}$$

Но такой определитель будет содержать две одинаковые строки и поэтому по свойству 5 он будет равен нулю:

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0$$

Аналогично, можно получить ряд других равенств, выражающих свойство: сумма произведений элементов некоторого ряда на алгебраические дополнения параллельного ряда равна нулю.

**7.** Если элементы некоторого ряда (строки или столбца) представляют собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей: первый из них имеет в указанном ряду первые слагаемые, второй- вторые.

Пусть

$$a_{11} = a'_{11} + a''_{11}\,; \quad a_{12} = a'_{12} + a''_{12}\,; \quad a_{13} = a'_{13} + a''_{13}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} & a'_{13} + a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$\Delta = (a'_{11} + a''_{11})A_{11} + (a'_{12} + a''_{12})A_{12} + (a'_{13} + a''_{13})A_{13} =$$

$$= a'_{11}A_{11} + a''_{11}A_{11} + a'_{12}A_{12} + a''_{12}A_{12} + a'_{13}A_{13} + a''_{13}A_{13} =$$

$$= a'_{11}A_{11} + a'_{12}A_{12} + a'_{13}A_{13} + a''_{11}A_{11} + a''_{12}A_{12} + a''_{13}A_{13} =$$

$$= \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

**8.** Величина определителя не изменится, если к элементам некоторого ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на одно и то же число. Прибавив к элементам второй строки элементы первой, умноженные на k, получим определитель $\Delta'$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + k\,a_{11} & a_{22} + k\,a_{12} & a_{23} + k\,a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Вследствие свойства 7, этот определитель можно представить в виде суммы двух определителей:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k\,a_{11} & k\,a_{12} & k\,a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\Delta} + k \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\Delta_1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta$$

(Определитель $\Delta_1 = 0$, так как имеет две равные строки)

## Определители n-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определитель четвертого порядка есть число, получающееся следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Определители III-го порядка в правой части равенства – это алгебраические дополнения элементов $a_{11}$ , $a_{12}$ , $a_{13}$и $a_{14}$. Аналогично, можно записать разложение определителя IV-го порядка по элементам любой строки и столбца.Все свойства определителей II-го и III-го порядков справедливы для определителей высших порядков.

На практике, используя свойство 8, преобразуют определитель к такому виду, чтобы все элементы некоторого ряда, кроме одного, обратились в нуль. Затем определитель разлагается по элементам этого ряда.

**Пример**. Вычислить определитель четвертого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

**Решение.** Получим нули в первой строке. Для этого ко второму столбцу прибавим третий, из первого вычтем удвоенный третий. Затем разложим данный определитель по первой строке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -9 & 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -9 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 7 - 81 - 9 + 84 + 3 = 0$$

## Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Рассмотрим систему 3-х линейных уравнений с 3- неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

где $x$, $y$ и $z$ - неизвестные.

Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы. Если этот определитель не равен 0, система имеет единственное решение. Обозначим:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Решение системы находится по формулам:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

Эти формулы называются формулами Крамера.

**Пример:** решить систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x + y + z = 8; \end{cases}$$

**Решение:**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 2 - 9 - 2 - 2 = -8;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 32 - 2 - 24 - 4 - 4 = -8;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 2+12-16+6-16-4=-16;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -24+4+12+18-2-32=-24;$$

$$x=\frac{-8}{-8}=1;\ y=\frac{-16}{-8}=2;\ z=\frac{-24}{-8}=3.$$

Методом Крамера можно решать системы n линейных уравнений с *n*-неизвестными, когда определитель системы не равен нулю.

## Лекция №2. Матрицы. Действия над ними. Обратная матрица. Решение систем линейных уравнений матричным способом

**Матрицы. Определение**. Прямоугольная таблица чисел, состоящая из *m*-строк и *n*-столбцов, называется прямоугольной матрицей размера *mxn*.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа: $a_{ij}\ \left(i,\ j=\overline{1,\ m};\ \ j=\overline{1,\ n}\right)$ называются элементами матрицы.

Матрица, число строк которой равно числу её столбцов, называются квадратной. Например, матрица $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ - квадратная матрица 2-го порядка.

Матрицу, имеющую одну строку, называют *матрицей-строкой*, матрицу, имеющую один столбец, называют *матрицей-столбцом*. Так, матрица $\left(1\ \ 3\ \ 4\right)$ - *матрица-строка*; а матрица: $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ - *матрица-столбец*. Матрица, все элементы которой равны 0, называется *0-матрицей*.

Матрицы обозначаются одной заглавной буквой, например:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix};$$

Если $A$ – квадратная матрица, например:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

то определитель этой матрицы - это определитель:

$$|\mathrm{A}|=\begin{vmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} & \mathrm{a}_{13} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} & \mathrm{a}_{23} \\ \mathrm{a}_{31} & \mathrm{a}_{32} & \mathrm{a}_{33} \end{vmatrix}$$

Матрица, определитель которой не равен нулю, называется невырожденной. Если же определитель матрицы равен нулю, то матрица называется вырожденной.

Например, матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ вырожденная, т. к. определитель этой матрицы: $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=0$

Две матрицы А и В называются равными, если они имеют одинаковое число строк и одинаковое число столбцов, и их соответствующие элементы равны.

Так, если $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$, то $A=B$, если:

$a_1 = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{13} = b_{13}$; $a_{21} = b_{21}$; $a_{22} = b_{22}$; $a_{23} = b_{23}$

## Действия над матрицами

**1.** Умножение матрицы на число:

Если $A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \end{pmatrix}$, то матрица $\alpha A$ определяется так:

$$\alpha A=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \end{pmatrix}$$

**2.** Сумма двух матриц А и В одинаковых размеров:

например, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$, определяется следующим образом:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

Если О-нуль матрица, то для любой матрицы А:

$$A + O = A$$

Легко видеть, что сложение матриц подчиняется переместительному и сочетательному закону:

1) A + B = B + A
2) (A + B) + C = A + (B + C)

**3.** Умножение матриц:

Пусть: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$

Тогда произведение матриц А и В определяется следующим образом:

$$C=AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

Мы видим, что элементы произведения матриц $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\ldots$ $+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}$. Заметим, что можно перемножать такие матрицы А и В, что число столбцов одной равно числу строк второй.

**Пример.** Пусть $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

Найдем произведение матриц АВ и ВА

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 & 14 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Мы видим, что произведение АВ≠ВА, т.е. произведение матриц не подчиняется переместительному закону.

Умножение матриц подчиняется сочетательному закону, т.е.:

$$(A + B)\ C = AC + BC$$

Квадратная матрица вида $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ называется единичной матрицей II-ого порядка; $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ - единичная матрица III-его порядка

Легко проверить, что при умножении любой квадратной матрицы $A$ на единичную матрицу равно матрице $A$:

$$\boldsymbol{AE = EA = A}$$

Очевидно, что: $\Delta\,(E)=1$

## Обратная матрица

Пусть $A$ - квадратная матрица, $|A|\neq 0$. Матрица В называется обратной к матрице А, если:

$$AB = BA = E$$

Матрица, обратная к матрице $A$ обозначается $A^{-1}$, т.е.:

$$A\,A^{-1}= A^{-1}\,A = E$$

Покажем, что если $|A|\neq 0$, то для нее существует обратная матрица $A^{-1}$. Для определенности рассмотрим квадратную матрицу А 3-его порядка. Пусть $A_{ij}$ – алгебраические дополнения элементов $a_{ij}$. Покажем, что обратная матрица имеет вид:

$$\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{A}_{11}}{|\mathrm{A}|} & \frac{\mathrm{A}_{21}}{|\mathrm{A}|} & \frac{\mathrm{A}_{31}}{|\mathrm{A}|}\\ \frac{\mathrm{A}_{12}}{|\mathrm{A}|} & \frac{\mathrm{A}_{22}}{|\mathrm{A}|} & \frac{\mathrm{A}_{32}}{|\mathrm{A}|}\\ \frac{\mathrm{A}_{13}}{|\mathrm{A}|} & \frac{\mathrm{A}_{23}}{|\mathrm{A}|} & \frac{\mathrm{A}_{33}}{|\mathrm{A}|}\end{pmatrix} \qquad (*)$$

Найдем произведение:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|}\\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|}\\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Таким образом, обратная матрица $A^{-1}$ имеет вид (*):

**Пример:** Пусть $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$

Найти обратную матрицу $A^{-1}$. Найдем определитель матрицы А:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 2 + 3 + 12 = 21$$

Вычисляем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{21} & \frac{-10}{21} & \frac{-13}{21} \\ \frac{4}{21} & \frac{4}{21} & \frac{1}{21} \\ \frac{-1}{21} & \frac{-1}{21} & \frac{5}{21} \end{pmatrix}$$

Найдем произведение $AA^{-1}$ :

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{11}{21} & \frac{-10}{21} & \frac{-13}{21} \\ \frac{4}{21} & \frac{4}{21} & \frac{1}{21} \\ \frac{-1}{21} & \frac{-1}{21} & \frac{5}{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

## Решение систем линейных уравнений матричным методом

Пусть дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \tag{2.1}$$

Рассмотрим матрицу системы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ и матрицы – столбцы неизвестных и свободных членов:

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что: $AX=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z \end{pmatrix}$

Используя определение равенства матриц, можем записать данную систему в виде: $\begin{pmatrix} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Следовательно, данная система может быть записана в виде:

$$AX=B \tag{2.2}$$

Это уравнение называется *матричным уравнением*.Если матрица $A$-невырожденная, т.е. $|A|\neq 0$, тогда существует обратная матрица $A^{-1}$. Умножим обе части (2) на $A^{-1}$

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}\cdot B$$

Используя сочетательный закон, мы можем написать:

$$(A^{-1}A)X=A^{-1}\cdot B$$

Так как $A^{-1}A=E$ и $EX=X$ , то получаем решение матричного уравнения в виде:

$$X=A^{-1}\cdot B$$

## Лекция №3. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц. Теорема Кронекера-Капелли. Метод Гаусса

**Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц.** Рассмотрим прямоугольную таблицу чисел, состоящую из $m$-строк и $n$-столбцов (матрицу размера $mxn$).

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Пусть $k\le m, k\le n$. Выделим в этой матрице произвольное $k$-строк и $k$-столбцов. Из элементов, стоящих на пересечении этих строк и столбцов составим определитель $k$-го порядка. Все такие определители называются <u>минорами</u> $k$-го порядка матрицы А.

**Пример:** в матрице $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4 & 2\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$ все миноры 3-го порядка равны нулю. Действительно,

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 5\end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix}2 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 4 & 5 & 1\end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix}3 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{vmatrix}=0$$

Но, существует минор 2-го порядка, отличный от нуля.

**Например**, минор $\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}\neq 0$

**Определение**. Рангом матрицы называется наивысший порядок минора этой матрицы, отличный от нуля.

В рассмотренном выше примере ранг матрицы равен двум. Ранг матрицы $A$ обозначается $r(A)$. Таким образом, если ранг матрицы равен $r$, то среди миноров $r$-го порядка есть минор, не равный нулю, а все миноры порядка $r+1$ равны нулю.

При вычислении ранга матрицы выполняют следующие элементарные преобразования:

1) транспонирование, т.е. замена строк столбцами;

2) умножение всех элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на одно и то же, отличное от нуля, число.

3) прибавление к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число.

4) перестановка двух строк (столбцов).

**Определение.** Матрицы, получающиеся одна из другой при элементарных преобразованиях называются эквивалентными. Эквивалентные матрицы не равны между собой, но, как можно доказать, они имеют одинаковые ранги.

**Теорема**. Каждую матрицу $A$ ранга $r$ путем элементарных преобразований можно привести к виду:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}\approx\left\{\begin{bmatrix}1 & \dots & & \dots & \dots & \\ & & & & * & \\ 0 & 1 & \dots & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\end{bmatrix}\right.$$

где через* обозначены элементы матрицы, стоящие выше диагонали.

**Доказательство:** переставим строки или столбцы, чтобы в верхнем левом углу стоял элемент, неравный нулю. Пусть это будет $a'_{11}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

Разделив элементы первой строки на $a'_{11}$ получим:

$$\tilde{A} \approx \begin{pmatrix} 1 & a''_{12} & \dots & a''_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

Из 2-ой строки вычтем первую, умноженную на $a'_{21}$; из 3-ей строки вычтем 1-ую, умноженную на $a'_{31}$, из m-ой строки 1-ую, умноженную на $a'_{m1}$.

Получим:

$$\tilde{A} \approx \begin{pmatrix} 1 & a''_{12} & \dots & a''_{1n} \\ 0 & a''_{22} & \dots & a''_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a''_{m2} & \dots & a''_{mn} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \\ \dots & A_1 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$A_1$- матрица, содержащая *(m-1)* строк и *(n-1)* столбцов. Значения элементов 1-ой строки несущественны (элементы, обозначенные *)

$A_1$ - матрица, содержащая *(m-1)* строк и *(n-1)* столбцов. Значения элементов первой строки несущественны. (элементы, обозначенные *).

К матрице $A_1$ применим тот же прием. Получим матрицу $A_2$ и т.д.

Мы приведем матрицу *A* к виду

$$A \to \begin{bmatrix} 1\ldots\ldots\ldots \\ 01\ldots\ldots\ldots \\ 001\ldots\ldots \\ 000\ldots1\ldots \\ 000\ldots00 \\ 000\ldots00 \end{bmatrix}$$

Очевидно, ранг этой матрицы равен *r*. Следовательно, *r(A)=r*.

## Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_{\backslash 2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Обозначим через А матрицу, состоящую из коэффициентов при неизвестных $x_1, x_2 ..., x_n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \cdots a_{2n} \\ a_{m1}\ a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Пусть

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \cdots\ a_{1n} & b_1 \\ a_{21}\ a_{22} \cdots a_{2n} & b_2 \\ a_{m1}\ a_{m2} \cdots a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Матрица $\tilde{A}$ называется расширенной матрицей системы.

**Определение**. Система уравнений, имеющая решение, называется совместной.

**Теорема Кронекера-Капелли**. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы А равен рангу матрицы $\tilde{A}$ (т.е. ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы) $r(A) = r(\tilde{A})$

Если $r(A) = r(\tilde{A}) = n$, то система имеет единственное решение; если же $r(A) = r(\tilde{A}) < n$ система имеет бесчисленное множество решений.

**Пример**. Исследовать следующую систему уравнений на совместность

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

**Решение.** Найдем ранги матриц A и Ã , производя элементарные преобразования над ними.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -11 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 11 & 5 & -1 \\ 0 & -11 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 11 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5/11 & -1/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 2$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Будем выполнять те же элементарные преобразования над матрицей $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5/11 & -1/11 & 10/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r(\tilde{A}) = 2 \qquad \text{Итак, } r(A) = r(\tilde{A})$$

Следовательно, данная система уравнений совместна и имеет бесчисленное множество решений $r(A) = r(\tilde{A}) = 2 < 4$ (4- число неизвестных).

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}$$

Ясно, что $r(A)=r(\tilde{A})$

Значит, система линейных однородных уравнений всегда совместна

Если $r(A)=r(\tilde{A})$ =n, то единственное решение будет $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$

Если $r(A)=r(\tilde{A})<n$ система имеет бесчисленное множество решений.

## Метод Гаусса

Рассмотрим систему m-линейных уравнений с n-неизвестными $x_1, x_2,\ldots,x_n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases};$$

**Определение.** Системы уравнений, имеющие одинаковые решения, называются равносильными.

Не трудно заметить, что следующие преобразования приводят данную систему к равносильной:

1. Перемена местами любых двух уравнений.
2. Умножение обеих частей уравнения на одно и то же, не равное нулю число.
3. Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число.

Эти преобразования называются элементарными преобразованиями системы.

Заметим, что элементарные преобразования можно производить над расширенной матрицей системы.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Перестановкой строк можно добиться того, что элемент, стоящий в левом верхнем углу матрицы $\tilde{A}$, отличен от нуля:

1. Разделим первую строку матрицы $\tilde{A}$ на $a_{11}$:

$$\tilde{A} \approx \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & \mathrm{b}_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \mathrm{b}_2 \\ \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \mathrm{b}_\mathrm{m} \end{pmatrix}$$

Из второй строки вычтем первую, умноженную на $a_{21}$; из третьей строки вычтем первую, умноженную на $a_{31}$ и т. д., из m-той строки вычтем первую строку, умноженную на $a_{m1}$, в результате чего получим матрицу.

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & \mathrm{b}_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & \mathrm{b}'_2 \\ \dots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & \mathrm{b}'_\mathrm{m} \end{pmatrix}$$

С матрицей $A_1 = \begin{pmatrix} a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & \mathrm{b}'_2 \\ a'_{32} & a'_{33} & \dots & a'_{3n} & \mathrm{b}'_3 \\ \dots \\ \dots \\ a'_{m2} & a'_{m3} & \dots & a'_{mn} & \mathrm{b}'_\mathrm{m} \end{pmatrix}$ произведем преобразования, аналогичные проделанным выше.

Продолжая процесс, мы приведем матрицу $\tilde{A}$ к одному из следующих видов:

1. $\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & c_{23} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 & \dots & d_n \end{pmatrix}$ - ступенчатая матрица (P<n).

или 2. $\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & c_{23} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & d_n \end{pmatrix}$ - треугольная матрица.

Исходная система приведется к равносильной системе:

В 1-ом случае:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad x_2 + c_{23}x_3 \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\quad x_3 \ldots + c_{3n}x_n = d_3, \\ \dots \\ \qquad\quad x_p \ldots + c_{pn}x_n = d_p, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad x_2 + c_{23}x_3 \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\quad x_3 \ldots + c_{3n}x_n = d_3, \\ \dots \\ \qquad\qquad x_n = d_p, \end{cases}$$

В первом случае система имеет бесчисленное множество решений, во втором – единственное решение.

Таким образом, если после элементарных преобразований система уравнений приводится к системе с матрицей ступенчатого вида, то это означает, что данная система совместна и имеет бесчисленное множество решений; если же данная система уравнений приводит к системе с треугольной матрицей, то она совместна и имеет единственное решение.

**Пример.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$$

**Решение.** Произведем элементарные преобразования над расширенной матрицей системы

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -8 & -14 \\ 0 & 3 & -5 & -9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -9 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ \quad x_2 - 2x_3 = -4 \\ \qquad x_3 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 3, \\ x_2 = 2x_3 - 4 = 2, \\ x_1 = x_2 - 2x_3 + 5 = 1; \end{cases}$$

Ответ. $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$.

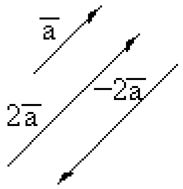
## Лекция № 4. Элементы векторной алгебры. Векторы. Линейные операции над векторами. Действия над векторами, заданными в координатной форме. Деление отрезка в данном отношении

**Элементы векторной алгебры. Векторы. Определение.** Вектором называется направленный отрезок прямой.Вектор обозначается: $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ и т.д. A - начало. B, C – конец.. Длина вектора называется его модулем и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|, |\vec{a}|$. Вектор, начало которого совпадает с его концом, называется 0-вектором и обозначается символом $\vec{\mathbf{0}}$. Векторы, параллельные одной прямой, называются коллинеарными. Два вектора $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называются равными, если они имеют одинаковые модули и одинаковое направление. В этом случае пишут $\vec{a} = \vec{b}$.

Векторы, параллельные одной плоскости, называются компланарными. Заметим, что два вектора всегда компланарны.

## Линейные операции над векторами.

**1.Умножение вектора на число.** Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{c} = \lambda\vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину $|\vec{c}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ и направленный в ту же сторону, что и вектор $\vec{a}$, если λ>0, и противоположно $\vec{a}$, если λ<0. Так, например, $2\vec{a}$ есть вектор, направленный в ту же сторону, что и вектор $\vec{a}$, и имеющий длину, вдвое большую, чем вектор $\vec{a}$. Вектор -2$\vec{a}$ есть вектор, направленный противоположно вектору $\vec{a}$ и имеющий вдвое большую длину, чем вектор $\vec{a}$.




Умножение вектора на число обладает распределительным свойством

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

и сочетательным свойством

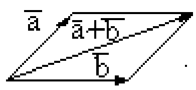
$$(\lambda_1\lambda_2)\vec{a} = \lambda_1(\lambda_2\vec{a})$$

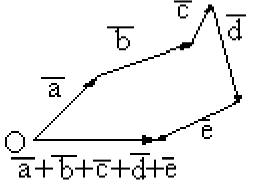
**2. Сложение векторов.** Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку О и построим вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; затем построим вектор, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, поместив его начало в конце вектора $\vec{a}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$, соединяющий начало первого с концом второго, называется суммой этих векторов и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$ .Ту же самую сумму векторов можно получить иным способом. Отложим от точки О векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$. Построим на этих векторах, как на сторонах, параллелограмм ОАВС.

Вектор $\overrightarrow{OB}$, служащий диагональю параллелограмма, является, очевидно, суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a} + \vec{b}$.

Сумма двух векторов обладает переместительным свойством: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Это видно из рисунка:



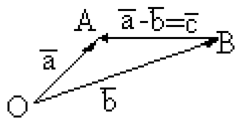




Понятие суммы векторов можно обобщить на случай любого конечного числа слагаемых. Из произвольной точки О откладываем вектор, равный первому слагаемому. В конце первого вектора помещаем начало второго, в конце второго – начало третьего и т.д.

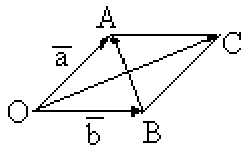
Вектор, соединяющий начало первого с концом последнего, является суммой данных векторов.

Нетрудно видеть, что сложение векторов обладает сочетательным свойством; т.е. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

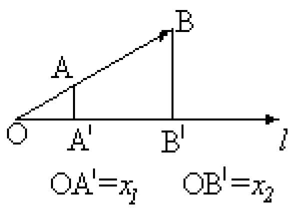
**3. Вычитание векторов.** Разностью двух векторов $\vec{a}-\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, что сумма




$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$. Из определения сложения векторов вытекает правило построения вектора-разности. От-

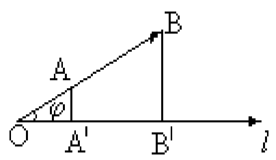


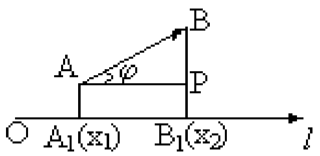

кладываем векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ из общей точки $O$. Вектор $\overrightarrow{BA}$, направленный от конца $\vec{b}$ к концу $\vec{a}$, является разностью векторов. Если на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложенных из общей точки $O$ построить параллелограмм $OACB$, то вектор $\overrightarrow{OC}$, совпадающий с одной диагональю параллелограмма, равен сумме $\vec{a}+\vec{b}$, а вектор $\overrightarrow{BA}$. совпадающий с другой диагональю – разности $\vec{a}-\vec{b}$.




Пусть $l$ - произвольная ось, $\overrightarrow{AB}$ - вектор в пространстве.Опустим из точек A и B перпендикуляры на ось $l$. $A'$ - проекция точки A, $B'$ - проекция точки B на ось $l$. Пусть $x_1$ - координата точки $A'$, $x_2$ - координата точки $B'$.

Разность $x=x_1-x_2$ между координатами проекций конца и начала вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось $l$ называется проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на эту ось. Если вектор $\overrightarrow{AB}$ образует острый угол $\varphi$ с осью $l$, то проекция $x$




положительна, если же этот угол тупой, то проекция отрицательна.

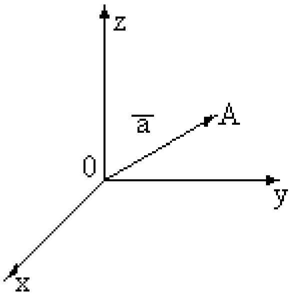
Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось $l$ обозначается $пр_l\,\overrightarrow{AB}$

Нетрудно видеть, что $пр_l\,\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\varphi$. Приведем некоторые свойства проекций.

**1.** Проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций $\qquad пр_L(\vec{a}+\vec{b})=пр_L\vec{a}+пр_L\vec{b}$

**2.** При умножении вектора на число его проекция на данную ось умножается на это число $\qquad пр_L(\lambda\vec{a})=\lambda пр_L\vec{a}$

Теперь находим направляющие косинусы вектора.




Пусть $\vec{a}$ - вектор в пространстве, начало которого совпадает с началом декартовой системы координат. Пусть $\alpha, \beta, \gamma$ - углы, образуемые вектором $\vec{a}$ с координатными осями *Ox, Oy, Oz*соответственно. Косинусы углов, образуемых вектором с осями координат, называются направляющими косинусами этого вектора.

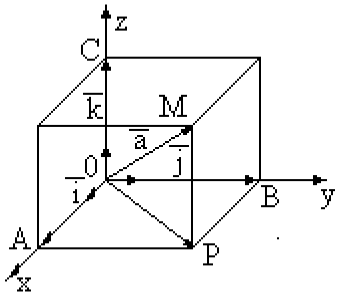
Обозначим проекцию вектора $\vec{a}$ на ось *Ox*через X, на ось *Oy*- через У, на ось *Oz*- через Z. Тогда, как известно $X = |\vec{a}| \cdot cos\,\alpha$, $Y = |\vec{a}| \cdot cos\,\beta$, $Z = |\vec{a}| \cdot cos\,\gamma$; откуда мы находим направляющие косинусы вектора $\vec{a}$.

$$cos\,\alpha = \frac{X}{|\vec{a}|} \qquad cos\,\beta = \frac{Y}{|\vec{a}|} \qquad cos\,\gamma = \frac{Z}{|\vec{a}|}$$

Нетрудно видеть, что $cos^2\,\alpha + cos^2\,\beta + cos^2\,\gamma = 1$

Заметим, что проекции единичного вектора $\vec{a}$ $(|\vec{a}| = 1)$ совпадают с его направляющими косинусами. $X = cos\,\alpha$, $Y = cos\,\beta$, $Z = cos\,\gamma$.

## Действия над векторами, заданными в координатной форме




Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы, направленные по осям декартовой прямоугольной системы координат; $\vec{a}$ - произвольный вектор в пространстве. Пусть начало этого вектора совпадает с началом координат. Построим параллелепипед, диагональю которого является вектор $\overrightarrow{OM}$.

Вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$ $\quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$$\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

x, y, z- проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси OX, OY, OZ.

**1.** Пусть дан вектор $\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$, тогда

$\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot X\vec{i} + \alpha \cdot Y\vec{j} + \alpha \cdot Z\vec{k}$ Таким образом, при умножении вектора на число все его проекции умножаются на это число.

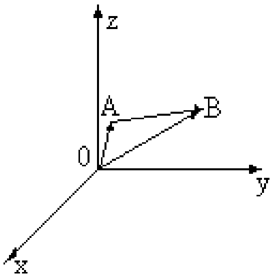
**2.** Пусть $\begin{array}{l} \vec{a} = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k} \\ \vec{b} = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k} \end{array}$,

тогда $\vec{a} \pm \vec{b} = (X_1 \pm X_2)\vec{i} + (Y_1 \pm Y_2)\vec{j} + (Z_1 \pm Z_2)\vec{k}$.

Таким образом, при сложении векторов соответствующие проекции складываются, при вычитании векторов соответствующие проекции вычитаются. Зная проекции вектора, легко найти выражение для его модуля. так как вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ является диагональю параллелепипеда, то мы можем написать, что

$$|\vec{a}| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

Таким образом, модуль вектора равен квадратному корню из суммы координат его проекций на оси координат.




Рассмотрим теперь вектор $\overrightarrow{AB}$, начало которого А имеет координаты $x_1, y_1, z_1$, а конец В имеет координаты $x_2, y_2, z_2$; т.е. $A(x_1, y_1, z_1)$; $B(x_2, y_2, z_2)$ Вектор $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Но при вычитании векторов соответствующие проекции вычитаются, т.е.

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

Тогда $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Пусть в пространстве даны две точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$; $A_2(x_2, y_2, z_2)$.

Расстояние $d$ между точками $A_1$ и $A_2$ находится как модуль вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}.$$

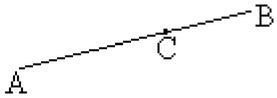
Итак $$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ на плоскости вычисляется по формуле $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

## Деление отрезка в данном отношении

Пусть даны 2 точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ и точка С на отрезке АВ, такая что $\frac{AC}{CB} = \lambda$; т.е. точка С делит отрезок АВ в отношении $\lambda$.

Требуется найти координаты x, y, z точки С.




Очевидно, что $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$. Найдем

$$\overrightarrow{AC} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\},$$

$$\overrightarrow{CB} = \{x_2 - x; y_2 - y; z_2 - z\}$$

$$\{x - x_1; y - y_1; z - z_1\} = \{\lambda(x_2 - x); \lambda(y_2 - y); \lambda(z_2 - z)\}$$

Из равенства векторов следует равенство соответствующих проекций

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x \\ y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y \\ z - z_1 = \lambda z_2 - \lambda z \end{cases} \qquad \begin{cases} x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2 \\ y + \lambda y = y_1 + \lambda y_2 \\ z + \lambda z = z_1 + \lambda z_2 \end{cases}$$

Отсюда $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$; $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$; $z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$

Если точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ - точки на плоскости, то для координат точки C имеют место формулы $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$; $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$;

Если C является серединой отрезка AB ($\lambda = 1$), то координаты точки вычисляются по формулам $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$; $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$

Аналогично, если точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ - точки на плоскости, то для координат точки C имеют место формулы $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$;

**Пример.** Даны точки A(3,-1,2), B(-4,2,0). Найти координаты точки C(x,y,z), делящей отрезок AB в отношении 3:1.

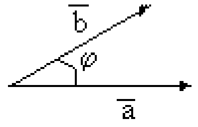
$\dfrac{AC}{CB} = 3$

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \dfrac{3 + 3(-4)}{1+3} = -\dfrac{9}{4} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \dfrac{-1 + 3\cdot 2}{1+3} = \dfrac{5}{4} \\ z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} = \dfrac{2 + 3\cdot 0}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Итак, $C(-\frac{9}{4}, \frac{5}{4}, \frac{1}{2})$ .

## Лекция №5. Скалярное произведение векторов. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов. Геометрический смысл смешанного произведения

### Скалярное произведение векторов




**Определение**. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению модулей векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$

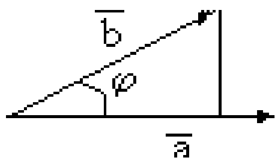
Итак $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$.

Рассмотрим физическую задачу, решение которой приводится к скалярному произведению векторов.

Пусть материальная точка *M* движется по прямой от точки *A* до точки *B*. Путь, проходимый при этом, равен *S*. Допустим, что на точку *M* действует постоянная по величине и направлению сила *F* под углом φ к направлению перемещения. Тогда работа $A = FS\cos\varphi = \vec{F}\vec{S} = (\vec{F},\vec{S})$

Таким образом, работа постоянной силы на прямолинейном участке равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

Можно придать формуле для скалярного произведения другой вид.




$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$$

$$|\vec{b}| \cos\varphi = np_a\vec{b}$$

$$|\vec{a}| \cos\varphi = np_b\vec{a}$$

Следовательно, $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}| np_a\vec{b} = |\vec{b}| np_b\vec{a}$, т.е. скалярное произведение двух векторов равно произведению модуля одного вектора, умноженному на проекцию другого на направление первого.

Рассмотрим основные **свойства** скалярного произведения:

1. Скалярное произведение векторов обладает переместительным свойством

$$(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$$

2. Скалярное произведение векторов обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$

3. Скалярное произведение двух векторов обладает сочетательным свойством

$$(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{c})$$

4. Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы взаимно перпендикулярны.

5. $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2$ т.е. скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.

**Пример.** Дан вектор $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$, причем $|\vec{a}| = 3; |\vec{b}| = 2;\ \varphi = (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 60^\circ$

Найти $|\vec{c}|$.

**Решение.**

$$|\vec{c}|^2 = (\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{a}) - 4(\vec{a}, \vec{b}) + 4(\vec{b}, \vec{b}) =$$

$$= |\vec{a}|^2 - 4|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi + 4|\vec{b}|^2 = 9 - 12 + 16 = 13$$

Следовательно, $|\vec{c}| = \sqrt{13}$

Пусть даны два вектора $\vec{a} = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k};\ \vec{b} = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k}$. Тогда

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1 k)(X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2 k) = X_1X_2(\vec{i}, \vec{i}) + Y_1X_2(\vec{j}, \vec{i}) +$$

$$+ Z_1X_2(\vec{k}, \vec{i}) + X_1Y_2(\vec{i}, \vec{j}) + Y_1Y_2(\vec{j}, \vec{j}) + Z_1Y_2(\vec{k}, \vec{j}) + Z_1Z_2(\vec{k}, \vec{k})$$

Заметим теперь, что $(\vec{i}, \vec{i}) = |\vec{i}| = 1$, $(\vec{j}, \vec{j}) = |\vec{j}| = 1$, $(\vec{k}, \vec{k}) = |\vec{k}| = 1$.

Так как векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ взаимно перпендикулярны, по свойству 4 $(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{j}, \vec{i}) = (\vec{i}, \vec{k}) = (\vec{k}, \vec{i}) = (\vec{k}, \vec{i}) = (\vec{j}, \vec{k}) = (\vec{k}, \vec{j}) = 0$

Тогда для скалярного произведения имеем

$$(\vec{a}, \vec{b}) = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2.$$

**Пример 1.** Найти скалярное произведение векторов $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} + 3\vec{b}$, если $\vec{a}\{1,0,1\}, \vec{b}\{2,-1,3\}$.

**Решение.** Найдем вектор $\vec{c} = \{2,0,2\} - \{2,-1,3\} = \{0,1,-1\}$ и вектор $\vec{d} = \{1,0,1\} + \{6,-3,9\} = \{7,-3,10\}$. Скалярное произведение $(\vec{c}, \vec{d}) = 0 \cdot 7 + 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 10 = -13$.

**Пример 2.** Даны векторы $\vec{a}(1,3,2)$ $\vec{b}(-4,0,3)$. Найти $np_b\vec{a}$

**Решение.**

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 1(-4) + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3; |\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 3^2} = 5 \qquad np_b\vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{2}{5}.$$

По определению скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$

Из этой формулы $\cos\varphi = \dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

Если

$\vec{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \vec{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, то $\cos\varphi = \dfrac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}$.

Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\cos\varphi = 0$.

Следовательно, условие перпендикулярности двух векторов имеет вид: $X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0$.

**Пример.** Являются ли векторы $\vec{a} = \{3,2,-1\}, \vec{b} = \{1,-3,-3\}$ перпендикулярными.

**Решение.** Проверим, выполняется ли условия перпендикулярности:

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0$$
$$3\cdot 1+2\cdot(-3)+(-1)\cdot(-3)=0$$

Значит вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны, если $\vec{a}=\alpha\vec{b}$, где α-любое действительное число. Если $\vec{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\}$, $\vec{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$, то $\{X_1,Y_1,Z_1\}=\{\alpha X_2,\alpha Y_2,\alpha Z_2\}$.

Отсюда следуют равенства:

$$X_1=\alpha X_2 \qquad \frac{X_1}{X_2}=\alpha;\ \frac{Y_1}{Y_2}=\alpha;\ \frac{Z_1}{Z_2}=\alpha$$
$$Y_1=\alpha Y_2$$
$$Z_1=\alpha Z_2$$

Так как α – любое число, мы получим условие параллельности двух векторов

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{Z_1}{Z_2}$$

**Пример 1.** Даны векторы, $\vec{a}(1,3,5)$, $\vec{b}(m,6,10)$. При каком значении m вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны?

**Решение.** $\frac{1}{m}=\frac{3}{6}=\frac{5}{10}$; $\frac{1}{m}=\frac{1}{2}$ т.е $m=2$

Таким образом, $\vec{a}\parallel\vec{b}$ при m=2.

**Пример 2.** Дан треугольник с вершинами $A(1,-1,0), B(2,1,3), C(0,1,2)$ Найти $\angle ABC$.

**Решение.** Найдем векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BA}=\{-1,-2,-3\}$; $\overrightarrow{BC}=\{-2,0,-1\}$.

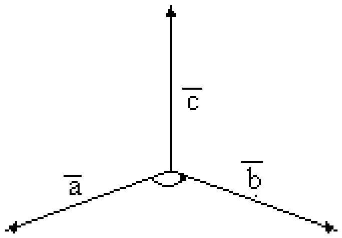
$$\cos\varphi=\frac{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{-1\cdot(-2)+(-2)\cdot 0+(-3)\cdot(-1)}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{70}}$$

$$\varphi=\arccos\frac{5}{\sqrt{70}}.$$

**Векторное произведение векторов. Определение.** Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой третий вектор $\vec{c}$, который определяется следующим образом

1. $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$.
2. Направление вектора $\vec{c}$ таково, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов, т.е. если смотреть с конца вектора $\vec{c}$, то кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ видим совершающимся против часовой стрелки.

3. $|\vec c| = |\vec a|\cdot|\vec b|\cdot \sin(\widehat{\vec a,\vec b})$ , т.е. модуль векторного произведения двух векторов равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec a$ и $\vec b$ как на сторонах. Векторное произведение векторов $\vec a$ и $\vec b$ обозначается




$$[\vec a \times \vec b].$$

Рассмотрим основные свойства векторного произведения:

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет свой знак $[\vec a\times\vec b] = -[\vec b\times\vec a]$.

2. Векторное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя

$$[\lambda\vec a\times\vec b] = [\vec a\times\lambda\vec b] = \lambda[\vec a\times\vec b]$$

3. Векторное произведение обладает распределительным свойством.

$$[(\vec a+\vec b)\times\vec c] = [\vec a\times\vec c] + [\vec b\times\vec c]$$

4. Векторное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны. Отсюда, в частности, следует, что векторное произведение $[\vec a\times\vec a] = 0$

**Пример.** Известно, что $|\vec a| = 1, |\vec b| = 3, \varphi = 30^\circ$.

Найти. $\left|[(2\vec a - 3\vec b)\times(\vec a+2\vec b)]\right|$.

**Решение.** Найдем

$$[(2\vec a-3\vec b)\times(\vec a+2\vec b)] = 2[\vec a\times\vec a] - 3[\vec b\times\vec a] + 4[\vec a\times\vec b] - 6[\vec b\times\vec b] = 4[\vec a\times\vec b] + 3[\vec a\times\vec b] =$$
$$= 7[\vec a\times\vec b]$$

$$\left|[(2\vec a-3\vec b)\times(\vec a+2\vec b)]\right| = \left|7[\vec a\times\vec b]\right| = 7|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\sin\varphi = 7\cdot1\cdot3\cdot\sin30^\circ = 10{,}5$$

Пусть даны два вектора $\vec a = X_1\vec i + Y_1\vec j + Z_1\vec k; \vec b = X_2\vec i + Y_2\vec j + Z_2\vec k$ Предварительно найдем все парные произведения единичных векторов $\vec i, \vec j, \vec k$

Так как векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю, то

$$[\vec i\times\vec i] = [\vec j\times\vec j] = [\vec k\times\vec k] = 0.$$

Рассмотрим, например, произведение $[\vec i\times\vec j]$. Найдем его модуль

$$\left|[\vec i\times\vec j]\right| = |\vec i|\cdot|\vec j|\cdot\sin90^\circ = 1.$$

Вектор $[\vec{i}\times\vec{j}]$ перпендикулярен векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$, т.е. направлен вдоль оси *Oz*. Так как тройка векторов должна быть правой, то он направлен в сторону положительного направления оси *Oz*. Отсюда следует, что этот вектор совпадает с вектором $\vec{k}$, т.е. $[\vec{i}\times\vec{j}]=\vec{k}$.

Аналогично можно получить, что $[\vec{j}\times\vec{k}]=\vec{i}$; $[\vec{k}\times\vec{i}]=\vec{j}$, и следовательно,

$$[\vec{j}\times\vec{i}]=-\vec{k};\ [\vec{k}\times\vec{j}]=-\vec{i};\ [\vec{i}\times\vec{k}]=-\vec{j}$$

$$[\vec{a}\times\vec{b}]=(X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k})\times(X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k})=X_1X_2[\vec{i}\times\vec{i}]+Y_1X_2[\vec{j}\times\vec{i}]+Z_1X_2[\vec{k}\times\vec{i}]+$$
$$+X_1Y_2[\vec{i}\times\vec{j}]+Y_1Y_2[\vec{j}\times\vec{j}]+Z_1Y_2[\vec{k}\times\vec{j}]+X_1Z_2[\vec{i}\times\vec{k}]+Y_1Z_2[\vec{j}\times\vec{k}]+Z_1Z_2[\vec{k}\times\vec{k}]=$$
$$=Y_1X_2(-\vec{k})+Z_1X_2\vec{j}+X_1Y_2\vec{k}+Z_1Y_2(-\vec{i})+X_1Z_2(-\vec{j})+Y_1Z_2\vec{i}=(Y_1Z_2-Z_1Y_2)\vec{i}-(X_1Z_2-$$
$$-Z_1X_2)\vec{j}+(X_1Y_2-Y_1X_2)\vec{k}$$

$$Y_1Z_2-Z_1Y_2=\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}\qquad X_1Z_2-Z_1X_2=\begin{vmatrix}X_1 & Z_1\\ X_2 & Z_2\end{vmatrix}\quad X_1Y_2-Y_1X_2=\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}$$

Значит, $[\vec{a}\times\vec{b}]=\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}X_1 & Z_1\\ X_2 & Z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}\vec{k}$.

Полученное выражение справа на основании свойства определителя можно записать следующим образом:

$$[\vec{a}\times\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}$$

**Пример 1**. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$.

**Решение.**

$$[\vec{a}\times\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}\vec{k}=7\vec{i}-7\vec{j}-7\vec{k}$$

**Пример.** Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(2,3,1), B(-1,0,1) C(1,-1,0).

**Решение.** Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB}=\{-3,-3,0\}\qquad\qquad \overrightarrow{AC}=\{-1,-4,-1\}$$

Теперь найдем векторное произведение $[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}]$

$$[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & -3 & 0\\ -1 & -4 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & 0\\ -4 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-3 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-3 & -3\\ -1 & -4\end{vmatrix}\vec{k}=3\vec{i}-3\vec{j}+9\vec{k}$$

Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Найдем $\left|\left[\overline{AB} \times \overline{AC}\right]\right| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 9^2} = \sqrt{99}$. $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{99} \approx 5$ (квадр ед.)

**Смешанное произведение векторов. Определение.** Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется их векторно-скалярное произведение.Здесь первые два вектора $\vec{a}, \vec{b}$ умножаются векторно, затем полученный вектор скалярно умножается на третий вектор $\vec{c}$. Обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right] \vec{c}$$

Пусть $\vec{a} = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k}; \vec{b} = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k}; \vec{c} = X_3\vec{i} + Y_3\vec{j} + Z_3\vec{k}$

Найдем

$$\left[\vec{a} \times \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\left[\vec{a} \times \vec{b}\right] = \left\{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\right\}$$

Найдем скалярное произведение вектора $\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$ на вектор $\vec{c}$, т.е. смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ .Используя формулу скалярного произведения получим

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right]\vec{c} = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} X_3 - \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} Y_3 + \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} Z_3$$

Легко видеть, что полученное выражение является разложением определителя $\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}$ по элементам третьей строки. Итак,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}$$

т.е. смешанное произведение трех векторов равно определителю третьего порядка, в строках которого находятся проекции перемножаемых векторов.

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны.

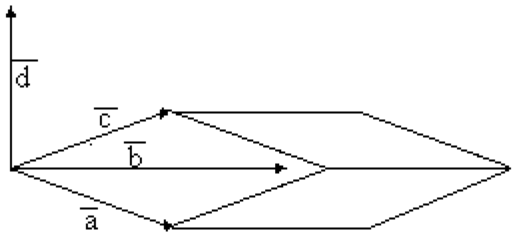
Действительно, пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны. Без ограничения общности можно сказать, что эти векторы лежат в одной плоскости. Тогда вектор $\vec{d} = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$ перпендикулярен плоскости этих векторов и, следовательно он перпендикулярен вектору $\vec{c}$ .Тогда скалярное произведение

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = [\vec{a}\times\vec{b}]\,\vec{c} = 0$$

т.е. смешанное произведение компланарных векторов равно нулю.Обратно, если смешанное произведение равно нулю, то векторы компланарны. Действительно, если бы эти векторы были бы некомпланарны, то на них можно было бы построить параллелепипед ненулевого объема $V = |abc|$

2. $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c}\cdot\vec{a} = \vec{c}\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} = -\vec{b}\cdot\vec{a}\cdot\vec{c} = -\vec{a}\cdot\vec{c}\cdot\vec{b} = -\vec{c}\cdot\vec{b}\cdot\vec{a}$ .

**Геометрический смысл смешанного произведения.** Предположим, что векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ не лежат в одной плоскости. На этих векторах, как на ребрах, построим параллелепипед. Построим также вектор $\vec{d} = [\vec{a}\times\vec{b}]$, модуль которого равен площади S основания параллелепипеда.




Смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = [\vec{a}\times\vec{b}]\,\vec{c} = \left|[\vec{a}\times\vec{b}]\right||\vec{c}|\cos\varphi = S\cdot|\vec{c}|\cos\varphi$,

где φ – угол между векторами $\vec{d} = [\vec{a}\times\vec{b}]$ и $\vec{c}$. Если $\varphi < \frac{\pi}{2}$ и h высота параллелепипеда, то $h = |\vec{c}|\,cos\,\varphi$

Таким образом, $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = S\cdot h$

Но объем параллелепипеда $V = Sh$, следовательно, объем параллелепипеда

$V = \vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$

Если $\varphi > \frac{\pi}{2}$, то $cos\,\varphi < 0$ и $|\vec{c}|\,cos\,\varphi = -h$.Следовательно, в этом случае $V = -\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$. Итак, окончательно получаем $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \pm V$ т.е.

$V = |\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}|$.

Таким образом, смешанное произведение трех векторов с точностью до знака равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на ребрах.Так как три вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю, то условие компланарности трех векторов есть равенство нулю их смешанного произведения: $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = 0$

Если $\vec{a}(X_1,Y_1,Z_1),\vec{b}(X_2,Y_2,Z_2),\vec{c}(X_3,Y_3,Z_3)$, то в координатной форме условие компланарности трех векторов имеет вид $\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} = 0$

**Пример 1.** Являются ли векторы $a = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}; b = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}; \vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$ компланарными.

**Решение.** Найдем смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot c = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 18 + 36 + 48 - 18 - 48 - 36 = 0$$

Следовательно, векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны.

**Пример 2**. Вычислить объем пирамиды с вершинами A(1,3,4), B(2,4,0), C(-3,0,1), D(-2,-4,1)

**Решение.** Найдем векторы $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AB} = \{1,1,-4\}; \overrightarrow{AC} = \{-4,-3,-3\}; \overrightarrow{AD} = \{-3,-7,-3\}$$

*Найдем смешанное произведение векторов*

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -4 & -3 & -3 \\ -3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = 9 + 9 - 112 + 36 - 21 - 12 = -91$$

$$V_{пир} = \frac{1}{6} \cdot 91 = 15\frac{1}{6} \text{ (кв.ед.)}$$

## Лекция №6. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до плоскости. Угол между двумя прямыми. Уравнение пучка прямых

**Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Определение.** Уравнение прямой – это уравнение, связывающее координаты $x$ и $y$ любой точки, лежащей на прямой.

**Определение.** Угловым коэффициентом прямой называется тангенс угла наклона этой прямой к оси *Ox.*Угловой коэффициент обозначается через *k.*Тогда, $k_1 = tg\varphi_1; k_2 = tg\varphi_2$. Итак, угловой коэффициент обозначается $tg\varphi = k$ .Если φ- острый угол, то $k$>0, если φ-тупой угол, то $k$<0, если φ=0 прямая параллельна оси *Ox* и $k$=0, если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то прямая не имеет углового коэффициента. Напишем уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент, равный $k$ и отсекающий отрезок величины b на оси OY.

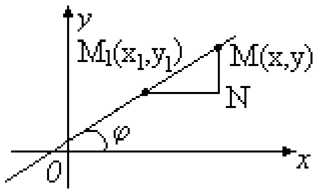
Пусть M(x,y)- произвольная точка прямой.

Рассмотрим треугольник MBN; он прямоугольный. Очевидно, что $\angle MBN = \varphi$, $tg\varphi = \frac{MN}{BN} = k;\ MN = y - b;\ BN = x$ Значит $\frac{y-b}{x} = k$, откуда получаем уравнение

$$y = kx + b \tag{6.1}$$

Это и есть уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Рассмотрим уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.




Дана точка $M_1(x_1, y_1)$, $k$ – угловой коэффициент. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$ и имеющей угловой коэффициент $k$.Пусть M(x,y) – произвольная точка прямой. Рассмотрим треугольник $M_1MN$:

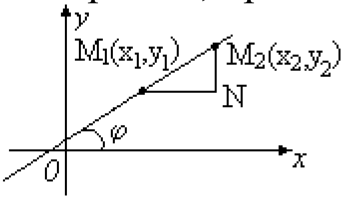
$$\frac{MN}{M_1N} = tg\varphi;\quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = k$$

Откуда получаем искомое уравнение:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{6.2}$$

## Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть даны две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Написать уравнение прямой, проходящей через эти точки.




Угловой коэффициент $k$ определим из треугольника $M_2M_1N$:

$$k = tg\varphi = \frac{M_2N}{M_1N} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Подставим полученное значение $k$ в уравнение (2):

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Разделим обе части уравнения на $y_2 - y_1$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Запишем полученное уравнение в виде:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{6.3}$$

Это и есть искомое уравнение прямой, проходящей через две точки.

Исследуем общее уравнение прямой. Уравнение вида

$$Ax+By+C=0 \qquad (6.4)$$

называется общим уравнением прямой.

а). Пусть $B\neq 0$, тогда это уравнение можно записать в виде:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

Это и есть уравнение прямой с угловым коэффициентом, т.е. уравнение вида $y=kx+b$ (1), где $k=-\frac{A}{B};\ b=-\frac{C}{B}$

Так как уравнение (1) есть уравнение прямой, то и уравнение (4) есть также уравнение прямой.

б). Если B=0, мы получаем $x=-\frac{C}{A}$. Это есть уравнение прямой, параллельной оси *Oy*.

**Пример 1.** Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(-3{,}1)$ и образующей угол $135^\circ$ с положительным направлением оси *Ox*.

**Решение.** Найдем угловой коэффициент искомой прямой:

$$k=tg135^\circ=tg(180^\circ-45^\circ)=-tg45^\circ=-1$$

Тогда искомое уравнение примет вид $y-1=-(x+3)$ или

$$x+y+2=0.$$

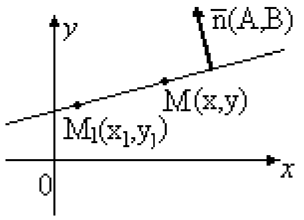
**Пример 2.** Написать уравнение прямой, проходящей через две точки: $M_1(-2{,}1)$ и $M_2(1{,}-4)$

**Решение**. Искомое уравнение будет $\frac{x+2}{1+2}=\frac{y-1}{-4-1}$ или $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-5}$

3). Найти угловой коэффициент прямой 5x-3y+6=0.

**Решение.** Запишем уравнение прямой в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом: $y=\frac{5}{3}x+2$. Откуда, $k=\frac{5}{3}$

Дана точка $M_1(x_1,y_1)$ и вектор $\vec{n}(A,B)$. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_1$, перпендикулярно вектору $\vec{n}(A,B)$.




Пусть $M(x,y)$ - произвольная точка прямой.

Очевидно, что векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны: $\overrightarrow{M_1M}\perp\vec{n}$.

<u>Условие перпендикулярности двух векторов</u> – это равенство нулю их скалярного произведения:

$$(\overrightarrow{M_1M}, \vec{n}) = 0$$

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1\}; \ \vec{n} = \{A; B\}$$

$$(\overrightarrow{M_1M}, \vec{n}) = A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$

Итак, получаем уравнение

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 \qquad (6.5)$$

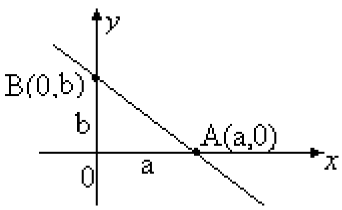
Уравнение (5) можно записать в виде Ax+By+C=0, где $C = -Ax_1 - By_1$

Таким образом, коэффициенты A и B в общем уравнении прямой являются координатами вектора, перпендикулярного к этой прямой. Вектор $\vec{n}(A,B)$ называется <u>нормальным вектором прямой.</u>

**Пример**. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(-2,3)$, перпендикулярно вектору $\vec{n}(3,4)$.

**Решение.** Используем уравнение (5) 3(x+2)+4(y-3)=0 Окончательно, 3x+4y-6=0

Пусть требуется написать уравнение прямой, отсекающей на координатных осях *Ox* и *Oy* отрезки величин a и b соответственно.




Заданная прямая проходит через две точки A(a,0) и B(0,b). Используем уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0}; \qquad \frac{x-a}{-a} = \frac{y}{b}$$

$$-\frac{x}{a} + 1 = \frac{y}{b}$$

Окончательно, получаем $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (6.6)$$

**Пример.** Дана прямая 2x-3y-6=0. Привести это уравнение к уравнению в отрезках на осях.

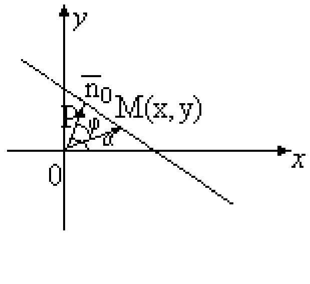
Чтобы получить отрезок a, отсекаемый на оси OX, нужно положить в данном уравнении y=0; чтобы получить отрезок b – x=0.

*y=0;* *2x-6=0;* *2x=6;* *x=3;* т.е. *a=3*

*x=0;* *-3y-6=0;* *-3y=6;* *y=-2;* т.е. *b=-2*

Искомое уравнение примет вид: $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$

## Нормальное уравнение прямой




Пусть известно расстояние p от прямой до начала координат, и угол α, образуемый перпендикуляром к прямой и положительным направлением оси $Ox$. Требуется написать уравнение прямой.

Пусть $M(x,y)$ - произвольная точка прямой, $\vec{n}_0(\cos\alpha,\sin\alpha)$- единичный нормальный вектор прямой.

Найдем скалярное произведение $(\overrightarrow{OM},\vec{n}_0)$.По определению скалярного произведения: $(\overrightarrow{OM},\vec{n}_0)=\left|\overrightarrow{OM}\right|\cdot\left|\vec{n}_0\right|\cdot\cos\varphi$,где $\varphi$ - угол между векторами $\overrightarrow{OM}$ и $\vec{n}_0$ .Но $\left|\vec{n}_0\right|=1;\left|\overrightarrow{OM}\right|\cdot\cos\varphi=np_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OM}$ Следовательно, мы получим $(\overrightarrow{OM},\vec{n}_0)=np_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OM}=p$. $(\overrightarrow{OM},\vec{n}_0)=x\cos\alpha+y\sin\alpha$

Итак, мы получаем уравнение $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ или, окончательно,

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \qquad (7)$$

Пусть $Ax+By+C=0$ – общее уравнение прямой.Умножим его на некоторый множитель $M$: $MAx+MBy+MC=0$,чтобы уравнение прямой имело нормальный вид:

$$MA=\cos\alpha;MB=\sin\alpha.$$

Но $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Из этого условия находим множитель М:

$$M^2A^2+M^2B^2=1;\ \ M^2=\frac{1}{A^2+B^2};\ \ M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

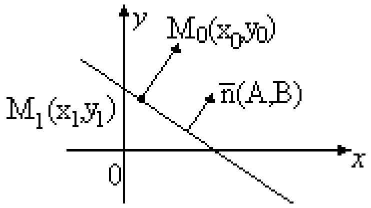
Знак перед дробью выбирается противоположным знаку С( для того, чтобы МС было отрицательным).

**Пример.** Привести уравнение прямой $5x-12y+26=0$ к нормальному виду.

**Решение.** Находим множитель $M=\pm\frac{1}{\sqrt{5^2+12^2}}=\pm\frac{1}{13}$

Выбираем знак минус. Умножаем данное уравнение на $M=-\frac{1}{13}$: получаем нормальное уравнение прямой $-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-2=0$

## Расстояние от точки до прямой




Дана точка $M_0(x_0;y_0)$ и прямая Ax+By+C=0. Найти расстояние от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$.

Пусть $M_1(x_1;y_1)$ - основание перпендикуляра, опущенного из точки $M_0$ на прямую. Найдем скалярное произведение $(\overrightarrow{M_1M_0},\vec{n})=\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|\cdot\cos\varphi=\pm\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|$, так как $\overrightarrow{M_1M_0}\,\mathrm{II}\,\vec{n}$.

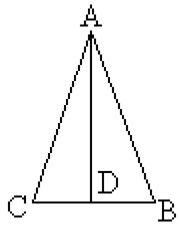
$$(\overrightarrow{M_1M_0},\vec{n}) = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1$$

Точка $M_1(x_1; y_1)$ лежит на прямой. Поэтому $Ax_1 + By_1 + C = 0;$ т.е. $-Ax_1 - By_1 = C$. Итак, имеем $(\vec{n},\overrightarrow{M_1M_0}) = (\overrightarrow{M_1M_0},\vec{n}) = \pm|\vec{n}|d = Ax_0 + By_0 + C$, (d – расстояние от точки $M_0$ до прямой, т.е. $d = |\overrightarrow{M_1M_0}|$).

Отсюда , $$d = \pm\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{|\vec{n}|} = \pm\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Окончательно, получаем формулу для вычисления расстояния от точки до прямой $$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

**Пример.** Даны вершины треугольника *ABC: A(-1,0); B(2,-1); C(3,2).* Найти длину высоты, опущенной из вершины *A*.




**Решение**. Длина высоты, опущенной из вершины *A* на сторону *BC* – это и есть расстояние от точки *A* до прямой, проходящей через точки *B* и *C*.

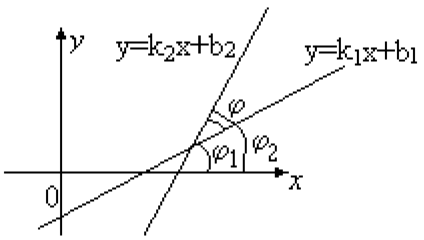
Уравнение

ВС: $\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+1}{2+1}$; $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3}$; $y + 1 = 3(x-2)$

*3x-y-7=0* уравнение ВС $d = AD = \frac{|3\cdot(-1) - 1\cdot 0 - 7|}{\sqrt{9+1}} = \frac{|-10|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$.

## Угол между двумя прямыми

Пусть на плоскости даны две прямые $y = k_1x + b_1;\ y = k_2x + b_2$.




Обозначим через φ- угол между двумя прямыми $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

Тогда по известной формуле тригонометрии
$$tg\varphi = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 \cdot tg\varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

Итак, тангенс угла между двумя прямыми вычисляется по формуле
$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

Ясно, что две прямые будут параллельны, если их угловые коэффициенты будут равны, т.е. условие параллельности двух прямых: $k_1 = k_2$

Если две прямые перпендикулярны, т.е. угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$, мы получим $tg\varphi = tg\frac{\pi}{2} = \infty$.Это будет иметь место, когда $1 + k_1 k_2 = 0$ , т.е. $k_1 k_2 = -1$ Итак, условие перпендикулярности двух прямых: $k_1 k_2 = -1$.

Пусть прямые заданы общими уравнениями: $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$.Вектор $\vec{n}_1(A_1; B_1) \perp$ прямой $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$.Вектор $\vec{n}_2(A_2; B_2) \perp$ прямой $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$.

Угол между данными прямыми равен углу между нормальными векторами прямых: $cos\,\varphi = \frac{(\vec{n}_1 \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$ Окончательно, получаем

$$cos\,\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Прямые будут параллельны, если их нормальные векторы параллельны. Условие параллельности двух прямых будет иметь вид:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

Если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, то прямые совпадают.Условие перпендикулярности двух прямых – есть условие перпендикулярности нормальных векторов

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$$

**Пример 1.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1,3)$, параллельно прямой *2x-5y+6=0.*

**Решение**. Так как искомая прямая должна быть параллельна данной, то нормальный вектор данной прямой является нормальным вектором искомой прямой. Зная нормальный вектор $\vec{n}(2,-5)$ и точку $M_0(-1,3)$, мы можем написать уравнение искомой прямой

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$$2(x+1)-5(y-3)=0$$

Окончательно получаем *2x-5y+17=0*

**Пример 2**. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-3,2)$ перпендикулярно прямой *x-3y-7=0.*

**Решение**. Условие перпендикулярности двух прямых $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$

Мы имеем $A_1=1$; $B_1= - 3$.Условие перпендикулярности будет выполнено, если $A_2=3$; $B_2=1$. Действительно, $1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 0$

Значит, нормальный вектор искомой прямой $\vec{n}_2(3,1)$.Уравнение искомой прямой $3(x+3)+1(y-2)=0$

Или, окончательно, $3x+y+7=0$

## Уравнение пучка прямых

Совокупность прямых, проходящих через некоторую точку, называется пучком прямых с центром в этой точке.

Если $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ - уравнения двух пересекающихся прямых, то уравнение

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0,$$

где $\alpha$ и β любые числа, не равные нулю одновременно, называется уравнением пучка прямых, проходящих через точку пересечения данных прямых, причем при α=0 получаем уравнение второй прямой, при β=0 получаем уравнение первой прямой.

**Пример.** Написать уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения прямых $x-2y+3=0$ и $2x+3y-1=0$ и точку $M_1(-1,2)$.

**Решение.** Запишем уравнение пучка прямых в виде

$$x-2y+3+\lambda(2x+3y-1)=0$$

(Разделим обе части уравнения на $\alpha;\alpha\neq 0$)

Так как искомая прямая проходит через точку $M_1(-1,2)$, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой.

$$-1-2\cdot 2+3+\lambda(2\cdot(-1)+3\cdot 2-1)=0$$

$$-2+\lambda\cdot 3=0;\quad \lambda==\frac{2}{3}$$

Подставив полученное значение λ в уравнение пучка, получим

$$x-2y+3+\frac{2}{3}(2x+3y-1)=0 \qquad \text{или } x+1=0$$

# Лекция №7. Плоскость в пространстве. Приведение общего уравнения плоскости к нормальному виду. Расстояние от точки до плоскости. Угол между двумя плоскостями

**Плоскость в пространстве.** Рассмотрим уравнение плоскости, проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору.

Пусть дана точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и вектор $\vec{n}(A,B,C)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0$, перпендикулярно вектору $\vec{n}$.

Пусть M(x,y,z) – произвольная точка плоскости. Очевидно, что вектор $\overline{M_0M} \perp \vec{n}$ для любой точки M плоскости.Тогда скалярное произведение

$$(\vec{n}, \overline{M_0M}) = 0. \quad \vec{n}(A,B,C); \ \overline{M_0M}(x-x_0; y-y_0; z-z_0)$$
$$(\vec{n}, \overline{M_0M}) = 0; \quad A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (7.1)$$

Уравнение (7.1) есть искомое уравнение плоскости. Вектор $\vec{n}$ называется нормальным вектором плоскости.

**Пример.** Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0$(-1,3,-2) перпендикулярно вектору $\vec{n}(3,4,1)$.

**Решение.** Искомое уравнение будет

$$3(x+1)+4(y-3)+(z+2)=0$$

Окончательно получим : $\qquad 3x+4y+z-7=0$

Уравнение вида (7.1) может быть приведено к виду:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

где $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$. Покажем, что уравнение вида

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (7.2)$$

где D – любое число является уравнением плоскости. Представим это уравнение в виде (7.1)

$$A(x+\frac{D}{A})+By+Cz=0$$

Это есть уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору $\vec{n}(A,B,C)$. Значит уравнение вида (7.2) является уравнением плоскости. Оно называется общим уравнением плоскости.

Пусть даны три точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M(x_3,y_3,z_3)$; M(x,y,z) – Произвольная точка плоскости.

Рассмотрим векторы: $\overline{M_1M}; \overline{M_1M_2}; \overline{M_1M_3}$

Для любой точки M плоскости эти векторы компланарны, т.е. лежат в одной плоскости.

$$\overline{M_1M}(x-x_1; y-y_1; z-z_1); \overline{M_1M_2}(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1); \overline{M_1M_3}(x_3-x_1; y_3-y_1; z_3-z_1)$$

Условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения, т.е. $\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} = 0$

Это условие в проекциях можно записать так:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7.3)$$

**Пример.** Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки *$M_1$(-3,0,2), $M_2$(1,4,3) и $M_3$(2,-1,-1)*

**Решение.** Искомое уравнение будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} x+3 & y & z-2 \\ 1+3 & 4 & 3-2 \\ 2+3 & -1 & -1-2 \end{vmatrix} = 0$$

Разложив этот определитель по первой строке, получим

$$(x+3)\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+3)(-12+1) - y(-12-5) + (z-2)(-4-20) = 0$$

$$-11(x+3) + 17y - 24(z-2) = 0$$

Окончательно получим, *11x-17y+24z-15=0*

Найти уравнение плоскости, если расстояние от начала координат до этой плоскости равно p, $\vec{n}_0(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ - единичный нормальный вектор плоскости ( $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы нормали к плоскости)

Пусть *M(x,y,z)* – произвольная точка плоскости; $\overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}$ - радиус вектор точки *M*. $\overline{OM} = r$. Рассмотрим скалярное произведение $(\overline{OM}, \vec{n}_0) = (\vec{r}, \vec{n}_0)$

По определению скалярного произведения $(\vec{r}, \vec{n}_0) = \left|\overline{OM}\right| \cdot \left|\vec{n}_0\right| \cdot \cos\varphi = np_{n_0} OM = p$ .(здесь φ - угол между век-м $\overline{OM}$ и $\vec{n}_0$).

Таким образом, мы получим,

$$(\vec{r}, \vec{n}_0) = p \qquad (7.4)$$

Это и есть нормальное уравнение плоскости в векторной форме. Напишем его в координатной форме.

Так как $\vec{r} = \{x, y, z\}; \vec{n}_0 \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, то мы получим уравнение

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (7.5')$$

Это – нормальное уравнение плоскости в координатной форме.

## Приведение общего уравнения плоскости к нормальному виду

Дано уравнение плоскости Ax+By+Cz+D=0. Умножим его на некоторое число M: MAx+MBy+MCz+MD=0, чтобы полученное уравнение стало нормальным $MA = \cos\alpha; MB = \cos\beta; M = \cos\gamma; MD = -p$ но $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Следовательно, $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 1$. Откуда находим $M^2 = \dfrac{1}{A^2+B^2+C^2}$ или $M = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Знак перед дробью выбираем противоположным знаку свободного члена D.

**Пример.** Привести уравнение плоскости $3x+4y-12z+26=0$ к нормальному виду.

**Решение**. Найдем множитель $M$: $M = \pm\dfrac{1}{\sqrt{9+16+144}} = \pm\dfrac{1}{13}$

Так как $D=26>0$, выбираем знак "минус", и умножим данное уравнение плоскости на $-\frac{1}{13}$

$$-\frac{3}{13}x - \frac{4}{13}y + \frac{12}{13}z - 2 = 0$$

Это и есть нормальное уравнение плоскости.

## Расстояние от точки до плоскости

Пусть дана точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и плоскость $Ax+By+Cz+D=0$. Найти расстояние d от данной точки до данной плоскости.

Пусть $M_1$ – точка пересечения перпендикуляра к плоскости, опущенного из точки $M_0$. Рассмотрим скалярное произведение нормального вектора плоскости $\vec{n}(A,B,C)$ на вектор $\overline{M_1M_0}$.

$$(\vec{n},\overline{M_1M_0}) = |\vec{n}|\cdot\left|\overline{M_1M_0}\right|\cdot\cos\varphi = \pm|\vec{n}|\cdot\left|\overline{M_1M_0}\right|$$

Но $|\vec{n}| = \sqrt{A^2+B^2+C^2};\ \left|\overline{M_1M_0}\right| = d;\ \overline{M_1M_0} = \{x_0-x_1; y_0-y_1; z_0-z_1\}$

(Вектор $\vec{n} \parallel \overline{M_1M_0}$, поэтому угол $\varphi = (\widehat{\vec{n},\overline{M_1M_0}})$ равен или 0 или 180, и следовательно, $\cos\varphi = \pm1$)

Таким образом,

$$(\vec{n},\overline{M_1M_0}) = \pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot d$$

Но $(\vec{n},\overline{M_1M_0}) = A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1) = Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)$

Так как точка $M_1(x_1,y_1,z_1)$ лежит на плоскости $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ или $(Ax_1+By_1+Cz_1) = -D$

Итак, мы получаем $(\vec{n},\overline{M_1M_0}) = Ax_0+By_0+Cz_0+D$

Или

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D = \pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot d$$

Откуда

$$d = \pm\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Окончательно, получаем формулу для расстояния от точки до плоскости

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

**Пример**. Найти расстояние от точки $M_0(1,-2,3)$ до плоскости 2x-2y+z-4=0

Решение.

$$d=\frac{|2\cdot 1-2\cdot(-2)+3-4|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{5}{3}$$

Пусть плоскость отсекает на координатных осях *Ox, Oy, Oz* отрезки, величины которых равны a,b,c соответственно.($a,b,c\neq 0$). Написать уравнение этой плоскости.

Пусть *Ax+By+Cz+D=0* – общее уравнение плоскости. Заметим, что $D\neq 0$. Точка *A(a,0,0)* лежит на плоскости, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости.

$$A\cdot a+B\cdot 0+C\cdot 0+D=0$$

Откуда находим $A\cdot a=-D$ или $A=-\frac{D}{a}$. Аналогично, из условия, что точки *B(0,b,0) и C(0,0,c)* – точки плоскости, находим $B=-\frac{D}{b}$ и $C=-\frac{D}{c}$.

Подставляя полученные значения *A,B и C* в общее уравнение плоскости, получим

$$-\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0$$

Разделив обе части на –D, получим $-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}-1=0$ или, окончательно

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (5)$$

**Угол между двумя плоскостями.** Угол между двумя плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ **и** $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ можно вычислить как угол между нормальными векторами этих плоскостей.

$$\varphi=(\widehat{\vec{n}_1,\vec{n}_2})$$

$$\vec{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\};\ \vec{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\};\ \cos\varphi=\frac{(\vec{n}_1,\vec{n}_2)}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$$

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

**Пример**. Найти угол между двумя плоскостями *2x-y+3z-2=0* и *x+3y-2z+4=0*.

**Решение**. Воспользуемся формулой

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^{\,2}+B_1^{\,2}+C_1^{\,2}}\cdot\sqrt{A_2^{\,2}+B_2^{\,2}+C_2^{\,2}}}$$

$$\vec{n}_1=\{2,-1,3\};\ \vec{n}_2=\{1,3,-2\}$$

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot1+(-1)\cdot3+3\cdot(-2)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}}=-\frac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}=-\frac{1}{2}$$

$$\varphi=\pi-\arccos\frac{1}{2}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

2. Две плоскости параллельны, если нормальные векторы этих плоскостей параллельны.

Следовательно, условие параллельности двух плоскостей имеет вид:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

3. Две плоскости перпендикулярны, если нормальные векторы этих плоскостей перпендикулярны. Следовательно, условие перпендикулярности двух плоскостей имеет вид:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

**Пример 1**. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3,-1,2)$параллельно плоскости $7x-y+3z-12=0$

**Решение.** Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3,-1,2)$ будет иметь вид: $A(x-3)-B(y+1)+C(z-2)=0$

Используем условие параллельности:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=k.\quad A_1=7;B_1=-1;C_1=3;\qquad \frac{A}{7}=\frac{B}{-1}=\frac{C}{3}=k$$

$$A=7k;B=-k;C=3k;$$

Получим $7k(x-3)-k(y+1)+3k(z-2)=0$. Разделив обе части уравнения на к получим: $7(x-3)-(y+1)+3(z-2)=0$ или $7x-y+3z-28=0$

Заметим, что мы могли взять с самого начала за нормальный вектор искомой плоскости нормальный вектор данной плоскости.

**Пример 2.** Определить при каком значении $\ell$ две плоскости перпендикулярны:

$$2x+\ell y-3z+1=0 \text{ и } 5x+y-3z-2=0$$

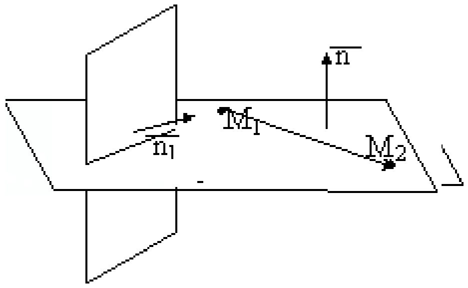
**Решение**.

$$\vec{n}_1=\{2,\ell,-3\};\ \vec{n}_2=\{5,1,-3\}$$

$$2\cdot5+\ell\cdot1-3\cdot(-3)=0$$

$$10+9+\ell=0;\quad \ell=-19$$

**Пример 3.** Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(1,-1,3)$ и $M_2(-1,0,2)$перпендикулярно к плоскости $2x-y+3z-1=0$




**Решение**. Напишем уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно данному вектору.

За данную точку можно взять любую из точек $M_1$ или $M_2$:

$$A(x-1)-B(y+1)+C(z-3)=0$$

Ясно, что нормальный вектор искомой плоскости $\vec{n}(A,B,C)$ будет перпендикулярен векторам $\vec{n}_1(2,-1,3)$ и $\overline{M_1M_2}(-2,1,-1)$, т.е. он будет направлен по векторному произведению векторов $\vec{n}_1$ и $\overline{M_1M_2}$ /

Найдем $\vec{n} =$ [redacted] $_1 \times \overline{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 4\vec{j}$; $\vec{n}(-2,-4,0)$

Искомое уравнение будет : *-2(x-1)-4(y+1)+0(z-3)=0*

Окончательно получим: *x+2y+1=0*

## Лекция №8. Кривые второго порядка. Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола

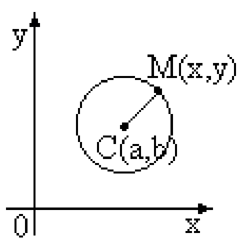
**Определение.** Кривой второго порядка называется кривая, выражающая аналитическое уравнение второй степени.

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

В частности, это уравнение может определять окружность, эллипс, гиперболу или параболу.

### Окружность

**Определение.** Окружностью называется геометрическое место точек, одинаково удаленных от одной точки, называемой центром.




Если точка C(a,b) - центр окружности, M(x,y) - произвольная точка окружности и R - ее радиус, то мы можем написать:

$$CM=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$$

или

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

**Пример.** Найти радиус окружности $x^2+y^2-8x+12y-12=0$

**Решение.** $(x-4)^2-16+(y+6)^2-36-12=0$ или окончательно $(x-4)^2+(y+6)^2=64$

Следовательно, радиус окружности  R=8.

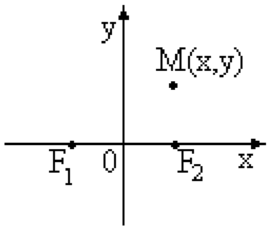
## Эллипс

**Определение.** Эллипсом называется геометрическое место точек на плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Если $F_1$ и $F_2$ - фокусы, M - произвольная точка эллипса, то

$$MF_1 + MF_2 = const$$

Чтобы вывести уравнения эллипса введем систему координат следующим образом: проведем ось OX слева направо через фокусы $F_1$ и $F_2$, ось OY направим перпендикулярно оси OX через середину отрезка $F_1F_2$.




Пусть $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, $M(x,y)$ - произвольная точка эллипса. По определению $MF_1 + MF_2 = const$. Обозначим эту константу через 2a, т.е.

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2};\ MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

Тогда $\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$

Избавимся от иррациональности в уравнении:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right)^2$$

Возводя в квадрат обе части,найдем:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

или $4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$ т.е. $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$

Возводя снова в квадрат, получим:

$$\left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(a^2 - cx\right)^2$$

$$a^2((x-c)^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

или

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Разделив оба части на $a^2(a^2 - c^2)$, получим:

$$\frac{(a^2-c^2)x^2}{a^2(a^2-c^2)}+\frac{a^2y^2}{a^2(a^2-c^2)}=1.$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(a^2-c^2)}=1.$$

Обозначим $a^2-c^2=b^2\ (a^2-c^2>0; 2a>2c\Rightarrow a>c)$

Тогда получим $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Это и есть каноническое уравнение эллипса. Число 2a называется большой осью эллипса, 2b - малой осью эллипса; a называется большой полуосью эллипса, b - малой полуосью эллипса.

1. Так как координаты x и y входят в уравнение в квадратах, эллипс симметричен относительно осей координат. Оси координат называются осями симметрии эллипса.

2. Найдем y из уравнения эллипса

$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2};\quad y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ откуда $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}$

Отсюда находим область определения функции y:

$$a^2-x^2\geq 0;\ x^2\leq a^2;\ |x|\leq a \qquad D(y)=[-a;a]$$

3. Если в уравнении эллипса положить y=0, мы имеем $\frac{x^2}{a^2}=1;\ x\neq\pm a$

Это значит, что эллипс пересекает ось *Ox* в точках $A_1(-a,0)$ и $A_2(a,0)$

Полагая x=0, мы получим $\frac{y^2}{b^2}=1$ или $y=\pm b$, т.е. эллипс пересекает ось *Oy* в точках $B_1(0,-b)$ и $B_2(0,b)$.

Точки $A_1$, $A_2$, $B_1$ и $B_2$ называются вершинами эллипса.

**Опр.** Отношение $\varepsilon=\frac{c}{a}$ называется **эксцентриситетом** эллипса.

Так как $c<a$ для эллипса, то $\varepsilon<1$. Эксцентриситет характеризует степень вытянутости эллипса вдоль оси *Ox*.

Действительно, $$\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^2}$$

Если b<<a ( значительно меньше чем a) $\varepsilon\approx 1$.

При $\varepsilon\approx 1$ эллипс значительно вытянут вдоль оси *Ox*.

Таким образом, чем ближе эксцентриситет к еденице, тем эллипс более вытянут вдоль оси *Ox*.

Если b=a, $\varepsilon=1$ и эллипс вырождается в окружность.

**Определение.** Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются **директрисами.**

Так как $\varepsilon < 1$ $\frac{a}{\varepsilon} > a$ и прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ проходят вне эллипса.

**Определение.** Расстояние от любой точки М эллипса до фокусов $F_1$ и $F_2$ называются **фокальными радиусами** точки М и обозначаются $r_1$ и $r_2$:

$$MF_1 = r_1; \quad MF_2 = r_2$$

Верно следующее утверждение: отношение фокального радиуса точки М к расстоянию до соответствующей директрисы постоянно и равно эксцентриситету $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$.

**Пример 1.** Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что:

а) полуоси его равны a=4; b=2

б) расстояние между фокусами 6 и большая полуось равна 5

в) малая полуось равна 3 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**Решение.** а) a=4; b=2

Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

б) Расстояние между фокусами 2c=6, большая полуось a=5

Найдем c=3; $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$.

Значит, каноническое уравнение эллипса . $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

в) b=3; $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\varepsilon = \frac{c}{a}$; $c^2 = a^2 - b^2$; $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ;

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \; \frac{a^2 - 9}{a^2} = \frac{1}{2}; \; 2a^2 - 18 = a^2; \; a^2 = 18$$

Искомое уравнение $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

**Пример 2.** Дано уравнение эллипса: $25x^2 + 169y^2 = 4225$. Вычислить длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет.

**Решение.** Разделим обе части данного уравнения на 4225:

$$\frac{25x^2}{4225} + \frac{169y^2}{4225} = 1$$

Получим $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$

Значит *a=13; b=5*

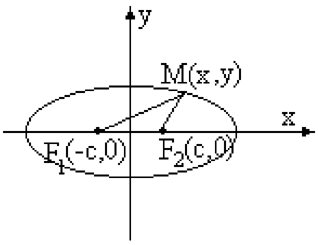
$$c^2 = a^2 - b^2 = 169 - 25 = 144;\ c = 12;\ \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{12}{13}$$

Итак, длины осей равны 2a=26; 2b=10; расстояние между фокусами 2c=24 и эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{12}{13}$

## Гипербола

**Определение**. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, разность расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Чтобы вывести уравнение гиперболы введем систему координат таким же образом как и при выводе уравнения эллипса. Ось OX направим через фокусы, ось OY направим перпендикулярно оси OX через середину отрезка $F_1F_2$.




Пусть $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ – фокусы, $M(x,y)$ – произвольные точки гиперболы. Тогда по определению гиперболы: $MF_1 - MF_2 = \pm 2a$

Найдем $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$; $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

Тогда $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$

Избавимся от иррациональности в уравнении:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\pm 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

Возводя в квадрат оба части,найдем:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\pm 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

Или

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Возводя снова в квадрат, получим:

$$(cx - a^2)^2 = (a\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2cxa^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Разделив оба части на $a^2(c^2 - a^2)$, получим:

$$\frac{(c^2 - a^2)x^2}{a^2(c^2 - a^2)} + \frac{a^2y^2}{a^2(c^2 - a^2)} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(c^2 - a^2)} = 1$$

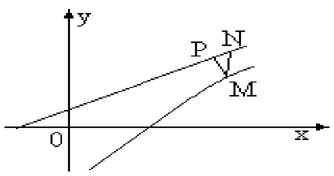
Для гиперболы 2c>2a (разность любых двух сторон треугольника меньше третьей стороны) т.е. c>a, значит $c^2 - a^2 > 0$.

Обозначив $c^2 - a^2 = b^2$, получим уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Это и есть каноническое уравнение гиперболы.

Введем понятие **асимптоты** кривой.

Прямая линия называется **асимптотой** кривой, если расстояние от переменной точки на кривой до прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки кривой от начала координат. Покажем, что прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы.




Из треугольника MPN: $\frac{MP}{MN} = \cos\alpha; MP = MN\cos\alpha$

α – постоянный угол для любой точки кривой.

Поэтому расстояние от точки кривой до прямой стремится к нулю, если стремится к нулю разность ординат кривой к прямой.Из уравнения гиперболы находим $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ . Покажем, что прямая $y = \frac{b}{a}x$ является асимптотой ветви гиперболы $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ .

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) =$$

Найдем предел: $= \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} =$ Аналогич-

$$= \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - x^2 + a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0$$

но, можно показать, что прямая $y=-\frac{b}{a}x$ является асимптотой ветви гиперболы $y=-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$.

Так как координаты х и у входят в уравнение гиперболы в квадратах, то гипербола симметрична относительно осей координат. Оси координат являются осями симметрии гиперболы.

Выразим у из уравнения гиперболы

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1;\quad y^2=\frac{b^2}{a^2}\sqrt{x^2-a^2};\quad y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

у определено при $x^2-a^2\geq 0$, т.е. при $|x|\geq a$

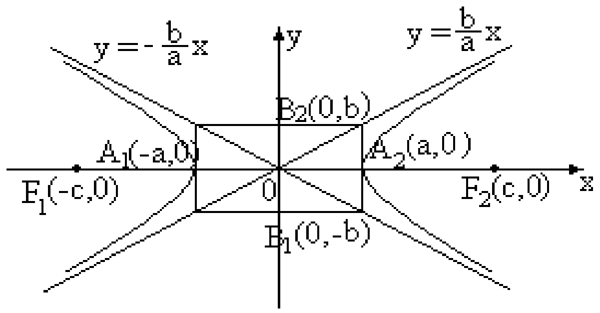
Таким образом, кривая определена при $|x|\geq a$.

При у=0 х=$\pm a$. Гипербола пересекает ось ОХ в точках $A_1$(-а,0) и $A_2$(а,0)

Точки $A_1$(-а,0) и $A_2$(а,0) называются вершинами гиперболы.

Число 2а называется действительной осью гиперболы, а – действительной полуосью.

При х=0 $y^2=-b^2$. Это значит, что гипербола не пересекается с осью ОУ. Число 2b называется мнимой осью гиперболы, b- мнимой полуосью.




При $|x|\to\infty$ $y\to\pm\infty$. Прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ являются **асимптотами** гиперболы. Построим гиперболу.

**Определение.** Число, равное $\varepsilon=\frac{c}{a}$, называется **эксцентриситетом** гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы ε>1, так как с>а.

**Определение.** Прямые $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются **директрисами** гиперболы. Так как ε>1, директрисы $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ проходят между вершинами $A_1$ и $A_2$. $MF_1 = r_1$; $MF_2 = r_2$ называются фокальными радиусами точки $M$ гиперболы.

Если $d_1$ и $d_2$ – расстояния от точки $M$ гиперболы до левосторонней и правосторонней директрис соответственно, то $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$.

**Пример 1.** Написать каноническое уравнение гиперболы, зная, что

а) полуоси гиперболы равны 4 и 2.

б) действительная ось равна 6, и гипербола проходит через точку (8,-3)

в) асимптоты гиперболы $y = \pm 2x$ и расстояние между фокусами равно 10.

**Решение.** а) a=4, b=2. Уравнение гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$.

б) 2a=6, a=3, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Так как гипербола проходит через точку *(8,-3)*, координаты этой точки удовлетворяют уравнению гиперболы

$$\frac{64}{16} - \frac{9}{b^2} = 1;\ \ 4 - 1 = \frac{9}{b^2};\ \ 3 = \frac{9}{b^2};\ \ 3b^2 = 9;\ b^2 = 3;$$

Искомое уравнение $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$

в) асимптоты гиперболы $y = \pm 2x$ $2c = 10$

Уравнения асимптот $y = \pm \frac{b}{a}x$, значит, $\frac{b}{a} = 2$

Известно $2c=10$, т.е. c=5 $b^2 = c^2 - a^2$; $\begin{cases} b^2 = 25 - a^2 \\ \frac{b}{a} = 2 \end{cases}$

Решаем полученную систему уравнений

$$\begin{cases} 4a^2 = 25 - a^2 \\ b = 2a \end{cases};\ \begin{cases} 5a^2 = 25 \\ b = 2a \end{cases};\ \begin{cases} a^2 = 5 \\ b = 2a \end{cases};\ \begin{cases} a = \sqrt{5} \\ b = 2\sqrt{5} \end{cases};$$

Искомое уравнение гиперболы $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$

**Пример 2.** Дана гипербола $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

Вычислить: а) координаты фокусов

б) эксцентриситет

в) записать уравнения асимптот и директрис

**Решение.**

а) $a=3;\ b=4;\ c^2=a^2+b^2=9+16=25;\quad c=5$

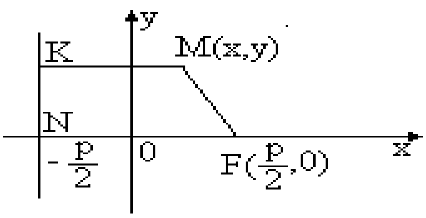
Координаты фокусов $F_1(-5,0)$ и $F_2(5,0)$

б) $\varepsilon=\frac{c}{a};\ \varepsilon=\frac{5}{3}$. в) уравнения асимптот: $y=\pm\frac{4}{3}x$; уравнения директрис: $x=\pm\frac{9}{5}$

## Парабола

**Определение**. Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Обозначим расстояние между фокусом *F* и директрисой через p (p называется параметром параболы).




Введем систему координат следующим образом: пусть ось *Ox* проходит через фокус *F* перпендикулярно директрисе, ось *Oy* проходит перпендикулярно оси *Ox* через середину отрезка *NF* (*N* – точка пересечения оси *Ox* с директрисой).

Если *M(x,y)* – любая точка параболы. то *MK=MF*

Найдем $MF=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2};\ MK=\left|x+\frac{p}{2}\right|;\ \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|$

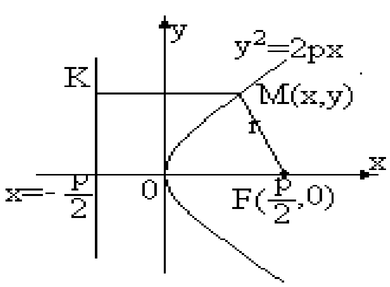
Возведем обе части последнего уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}\right)^2=\left(\left|x+\frac{p}{2}\right|\right)^2$$

$$(x-\frac{p}{2})^2+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$$

$$y^2=2px$$

Уравнение $y^2=2px$ - называется каноническим уравнением параболы.




Так как координата y входит в уравнение параболы в квадрате, парабола симметрична относительно оси OX.

При x=0 y=0, т.е. парабола проходит через начало координат.

При $x \to \infty$ $|y| \to \infty$

**Определение**. Расстояние от любой точки параболы до фокуса называется **фокальным радиусом** точки и обозначается через r.

**Пример 1.** Составить уравнение параболы, зная, что: парабола симметрична относительно оси OX и

а) расстояние фокуса от вершины равно 3

б) проходит через начало координат и точку M(1,-4)

**Решение.**

а) $y^2 = 2px$; $\frac{p}{2} = 3$; $p = 6$

Искомое уравнение $y^2 = 12x$

б) $y^2 = 2px$. Так как точка $M(1,-4)$ принадлежит параболе, то ее координаты удовлетворяют уравнению параболы. $16=2p$; $p=8$. Искомое уравнение $y^2 = 16x$

## Лекция № 9. Функция одной переменной. Способы задания функции. Основные элементарные функции. Числовая последовательность. Монотонность, ограниченные последовательности. Предел числовой последовательности

**Определение**. Если каждому значению переменной величины $x$ соответствует определенное значение другой переменной величины $y$, то переменная $y$ называется функцией от переменной $x$ и мы пишем $y = f(x)$.

При этом x называется независимой переменной или аргументом.

**Определение.** Совокупность всех значений независимой переменной $x$, для которых функция $y$ определена называется областью определения этой функции.

**Пример 1.** Найти область определения функции y = $\sqrt{9-x^2}$

**Решение.** Эта функция определена при 9-x $\geq 0$, т.е. $x^2 \leq 9$. Отсюда IxI $\leq 3$ или $-3 \leq x \leq 3$

### Способы задания функции

1.**Аналитический способ.** Если функциональная зависимость выражена в виде формулы y = f (x), то говорят, что она задана аналитически.

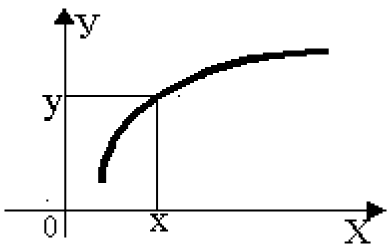
**Например.** $y = \sqrt{x-4}$, y = ln ( 1 –x) и т.д.

**2.Табличный способ.**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | .. | | n |
| | 1 | 2 | 3 | .. | | n |

В первой строке таблицы - значения аргумента; во второй – соответствующие значения функции.

3.**Графический способ.** Функциональная зависимость между Х и У задается в виде графика.



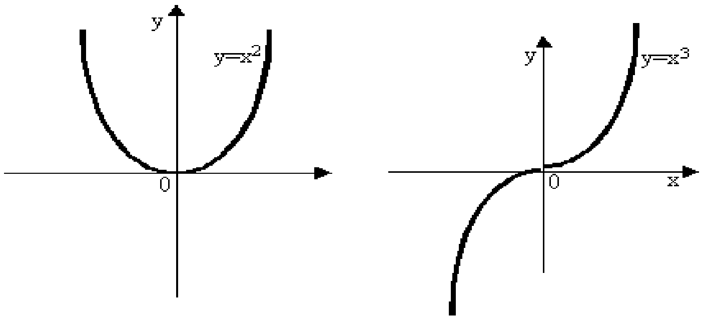

Примером графического изображения функции является так называемая барограмма (запись самопишущего прибора – барографа), дающая графическое изменение атмосферного давления в зависимости от времени.

## Основные элементарные функции

1.Степенная функция $y = x^{\alpha}$, $\alpha$ – действительное число.

а. $\alpha$ - целое положительное число. Функция определена на $(-\infty,\infty)$, т.е. $D(y) = (-\infty,\infty)$

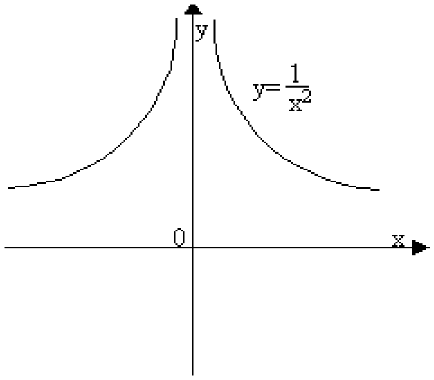
Графики степенной функции при некоторых значениях $\alpha$ имеют вид :

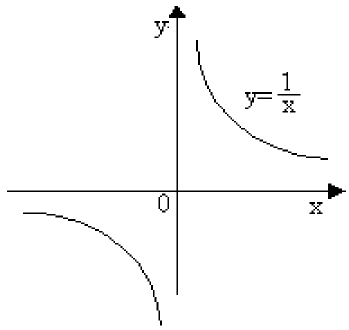



а) $\alpha$ - четное б) $\alpha$ - нечетное число.

В случае когда $\alpha<0$ функция определена при всех значениях $x$ , кроме $x = 0$, т.е. $D(y) = (-\infty,0)\cup(0,\infty)$

**2. Показательная функция.** $y = a^x$ , $a > 0$; $a \neq 1$. Область




определения

$D(y) = (-\infty.\infty)$, область значений $E(y) = (0,\infty)$.

3.**Логарифмическая функция.** $y = \log_a x$; $a > 0$ ; $a \neq 1$

Область определения $D(y) = (0,\infty)$ область значений $E(y) = (-\infty.\infty)$

4.**Тригонометрические функции.** y=sinx, y=cosx, y=tgx, y=ctgx.

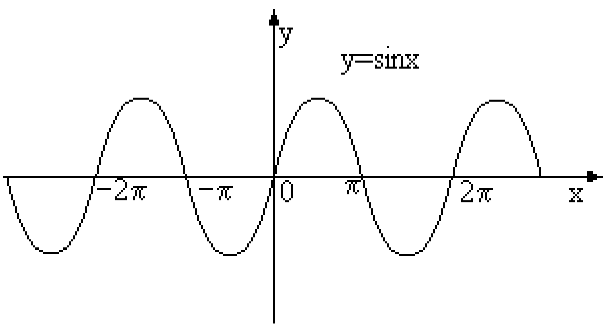
**Опр.** Функция y=f(x) называется четной, если f(-x)=f(x) и нечетной, если f(-x)=-f(x)

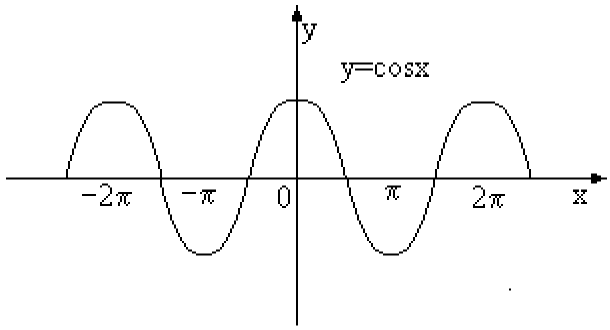
Функции sinx, tgx, ctgx – нечетные, функция cosx – четная, т.е. sin(-x)= -sinx ; tg(-x)= -tgx ; ctg(-x)=ctgx.; cos(-x)= cosx.

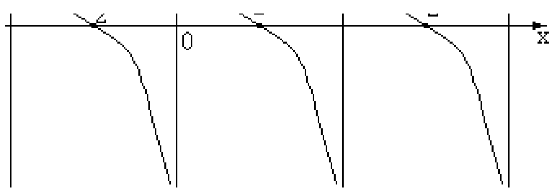
**Определение.** Функция f(x) называется периодической, если существует такое число T , что f(x+T) =f(x). Наименьшее такое положительное число называется периодом функции.

Функции sinx и cosx – периодические с периодом $T=2\pi$; функции tgx и ctgx периодические с периодом $\pi$ . Таким образом: $\sin(x+2\pi)= \sin x$ $\cos(x+2\pi )= \cos x$ $tg(x+\pi)=tgx$ $ctg(x+\pi)=ctgx$

Графики тригонометрических функций



5.**Обратные тригонометрические функции.**1) $y$=arcsin$x$ - функция обратная к $y$=sin$x$. Область определения $D(y)=[-1;1]$; область значения $E(y)= [-\pi/2; \pi/2]$.

2) $y$=arccos$x$-функция обратная к $y$=cos$x$.Область определения $D(y)= [-1; 1]$, область значения $E(y)=[0; \pi]$.

3) $y$=arctg$x$-функция обратная к $y$=tg$x$ . Область определения$D(y)=(-\infty ; \infty)$; область значений $E(y)=(-\pi/2; \pi/2)$

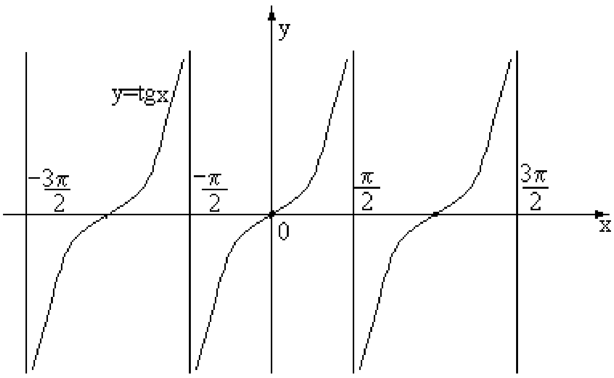
4) y=arcctgx – функция обратная к y=ctgx .

**Сложная функция. Элементарные функции.** Пусть y-функция от u, т.е. y=f(u), а u- есть функция от x, т.е. u=φ (x). Тогда

y=f (φ(x)) называется сложной функцией от x. ( сложная функция от x – это есть функция от функции x ).

Например: y=sinx здесь y=u , где u=sinx

**Определение.** Элементарная функция – это функция, которая




может быть предоставлена в виде одной формулы вида y=f (x) , где выражение в правой части составлено из основных элементарных функций и констант посредством конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и операции образования сложной функции.

**Примеры:** $y = tg\sqrt{1+x}$ ; y= cos2x / ln (x$^2$ – x + 2 ) и т.д.

## Числовая последовательность. Монотонность, ограниченные последовательности. Предел числовой последовательности

**Определение.** Если каждому натуральному числу n соответствует определенное действительное число $x_n$, то мы говорим, что задана числовая последовательность $\{x_n\}$.

Числа $x_n$ ($n \subset N$) называются членами числовой последовательности.

Числовая последовательность может быть задана формулой общего члена. Мы будем рассматривать бесконечные числовые последовательности.

**Определение:** Число $a$ называется пределом числовой последовательности, если для любого числа $\varepsilon > 0$, как угодно малого, существует такой номер последовательности $N=N(\varepsilon)$ (зависящий от $\varepsilon$) что члены последовательности с номерами $n>N$ удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$

Если a – есть предел числовой последовательности $\{ x_n \}$, то пишут

$$\lim x_n = a$$

Это неравенство можно записать в виде двойного неравенства: $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

С геометрической точки зрения эти неравенства показывают, что для сколь угодно малой $\varepsilon$ - окрестности точки $a$ может быть указан номер последовательности с номерами $n>N$ будут внутри интервала $(a - \varepsilon , a + \varepsilon )$

Вне этого интервала будет конечное число членов числовой последовательности.

**Пример.** Доказать, что 2/3 является пределом числовой последовательности $\{ x_n \}$ если $x_n=(2n-3) / (3n+2)$

Пусть $\varepsilon$ - любое малое положительное число и $|x_n - a| < \varepsilon$, т.е.

$$\left| \frac{2n-3}{3n+2} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$$

Решив это неравенство, получаем $n>13.3$. Значит $N=13$. Начиная с $n=14$ члены последовательности $x_n$удовлетворяют неравенству $\left| x_n - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$, это значит, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}$

**Определение:** Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется невозрастающей, если $x_n > x_n +1$, для любого $n \subset N$

**Определение:** Числовая последовательность называется не убывающей, если $x_n < x_n +1$, для любого $n \subset N$.

**Определение:** Числовая последовательность $\{ x_n \}$ называется ограниченной сверху, если существует такое число $M$ , что $x_n < M$ для любого $n \subset N$и числовая последовательность $\{ x_n \}$называется ограниченной снизу, если существует такое число $m$, что $x_n$>m для любого $n \subset N$

**Теорема:** Всякая неубывающая числовая последовательность, ограниченная сверху, имеет конечный предел $\lim x_n = a$, $(a<M)$ и всякая не возрастающая числовая последовательность, ограниченная снизу , имеет конечный предел.

## Лекция №10. Число е. Предел функции в точке и на бесконечности. Бесконечно большие функции. Бесконечно малые и их основные свойства. Основные теоремы о пределах. Первый и второй замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых

### Число е

Рассмотрим числовую последовательность$\{x_n\}=\{(1+1/n)\}^n$.

Покажем, что эта последовательность возрастает и ограничена сверху. Тогда на основании теоремы предыдущей лекции она будет иметь конечный предел.На основании формулы бинома Ньютона

$$(1+x)^n = 1+nx+n\frac{(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^k+\ldots+x^n$$

имеем

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-(n+1)}{}\cdot\frac{1}{n^n}=2+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\ldots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n})\cdot\ldots \quad (1)$$
$$\cdot\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n})$$

Мы видим, что $x_n \geq 2$ для любого n.

Докажем, что эта последовательность ограничена сверху.

$$x_n \leq 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\frac{1}{n!} \leq 2+1/2+1/2^2+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} < 1+(1+1/2+1/2^2+\ldots 1/2^n+\ldots)=$$
$$1+\frac{1}{1-1/2}=3$$

Выражение в скобках представляет собой сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Итак, $2 \leq x_n < 3$, то есть последовательность $\{x_n\} = (1+1/n)^n$ ограничена снизу и сверху.

Теперь покажем, что эта последовательность монотонно возрастает.

Рассмотрим $x_{n+1}=(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$. Разложим $x_{n+1}$ по формуле бинома Ньютона и запишем в виде (1)

$$x_{n+1}=2+1/2!(1-\frac{1}{n+1})+1/3!(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})+\ldots+\frac{1}{(n+1)!}\cdot(1-\frac{1}{n+1})\cdot(1-\frac{2}{n+1})\ldots(1-\frac{n}{n+1}) \qquad (2)$$

Каждое слагаемое в разложении $x_{n+1}$ больше соответствующего слагаемого в разложении $x_n$.Причём в (2) на одно слагаемое больше(все слагаемые положительны). Следовательно, $x_n < x_{n+1}$.

Итак, последовательность $x_n = (1+1/n)^n$ возрастает и ограничена. Следовательно, она имеет конечный предел.

Предел этой последовательности обозначается буквой e: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$.

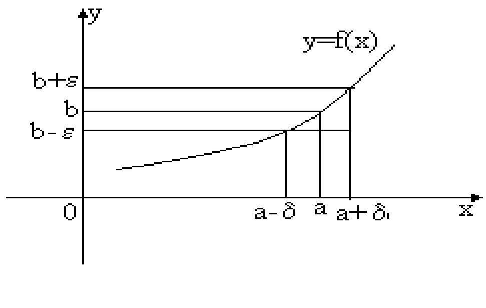
Ясно, что $2 \le e \le 3$. Установлено, что e есть иррациональное число. Его приближённое значение $e \approx 2.718281\ldots$

## Предел функции в точке

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки a.

**Определение:** Число в называется пределом функции y=f(x) при x, стремящимся к a, если для любого, как угодно малого положительного числа $\varepsilon$, можно указать такое положительное число $\delta=\delta(\varepsilon)$, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$ выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$

Если b есть предел функции y=f(x) при x, стремящимся к a, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$



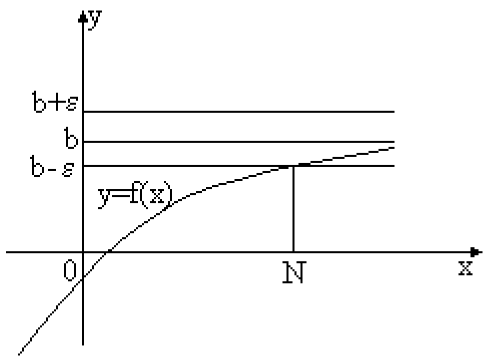

## Геометрическая интерпретация определения предела функции в точке

Неравенство $|x-a|<\delta$ можно записать в виде $-\delta<x-a<\delta$ или $a-\delta<x<a+\delta$ .Соответственно, неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$ равносильно двойному неравенству: $-\varepsilon < f(x) - b < \varepsilon$ или $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ то есть, для х, удовлетворяющих неравенству $a - \delta \prec x \prec a + \delta$ будет выполнятся неравенство $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$.

Таким образом, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, то для значений х, лежащих между $a - \delta$ и $a + \delta$, соответствующие значения функции лежат внутри полосы, ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$

## Предел функции на бесконечности

**Определение:** Число b называется пределом функции f(x) при х, стремящимся к бесконечности, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число N>0, что при x>N $|f(x) - b| < \varepsilon$




В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$

Геометрическая интерпретация:

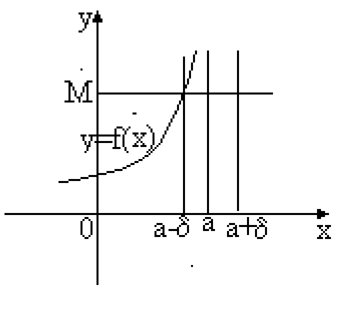
Для х; удовлетворяющих неравенству x>N, соответствующие значения функции f(x), удовлетворяют неравенству $|f(x) - b| < \varepsilon$ или $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$.

Таким образом, если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, то для любого положительного числа ε, найдётся такое число N , что при x>N соответствующие значения функции будут находиться в полосе от b-ε до b+ε

## Бесконечно большие функции

**Определение:** Функция y=f(x) называется бесконечно большой при $x \to a$, если для любого числа M>0 , как угодно большого, найдётся такое число δ>0, что при х, удовлетворяющих неравенству $|x - a|$>M

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.




**Геометрическая интерпретация**:

Неравенство $|x - a| < \delta$ равносильно неравенствам:-δ<x-a<δ и a-δ<x<a+δ

Итак, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$,то это значит, что для любого, как угодно большого числа М, найдётся такая окрестность точки a: (a-$\delta$, a+$\delta$), что при x, лежащих в этой окрестности, соответствующие значения функции будут по абсолютной величине больше M, т. е. $|f(x)| > M$

**Ограниченные функции. Определение:** Функция f(x) называется ограниченной в некоторой области изменения x, если существует такое число M>0, что для всех x из этой окрестности $|f(x)| \leq M$

**Определение:** Функция f(x) называется ограниченной при x, стремящимся к a, если существует окрестность точки x=a, что в этой окрестности функция f(x) ограничена.

**Теорема:** Функция, имеющая конечный предел при x, стремящимся к a, ограничена при $x \to a$.

**Доказательство**: Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, для любого $\varepsilon$>0 неравенство $|f(x) - b|$<$\varepsilon$ выполняется в $\delta$- окрестности точки x=a.Из этого неравенства следует двойное неравенство b-$\varepsilon$<f(x)<b+$\varepsilon$ или $|f(x)| < |b| + \varepsilon$

Это означает, что f(x) ограничена при x, стремящемся к a.

## Бесконечно малые и их свойства

**Определение:** Функция, предел которой при $x \to a$ (или $x \to \infty$) равен нулю, называется бесконечно малой при $x \to a$ или $(x \to \infty)$ т.е. f(x)- бесконечно малая при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ Бесконечно малые обозначаются $\alpha$(x), $\beta$(x) и т.д.

**Теорема 1:** Алгебраическая сумма двух бесконечно малых есть бесконечно малая, т. е., если $\alpha$(x) и $\beta$(x)- две бесконечно малые при $x \to a$ (или $x \to \infty$), то $\alpha(x) + \beta(x)$ - бесконечно малые при $x \to a$

**Теорема 2:** Произведение бесконечно малой функции на функцию, ограниченную при $x \to a$ (или $x \to \infty$) есть бесконечно малая.

**Следствие 1:** Произведение двух бесконечно малых есть величина бесконечно малая т.е., если $\alpha$(x) и $\beta$(x)- бесконечно малые, то $\alpha$(x) и $\beta$(x)- бесконечно малые

**Следствие 2:** Произведение постоянной на бесконечно малую есть бесконечно малая, т.е., если $\alpha$(x)- бесконечно малая, то C$\cdot\alpha$(x), где C= const, есть бесконечно малая.

**Теорема 3:** Если $\alpha$(x)- бесконечно малая при x$\to$a (или x$\to\infty$) tof(x)$= \dfrac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая.

**Теорема 4:** Частное $\frac{\alpha(x)}{f(x)}$ от деления бесконечно малой на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно малая.

**Теорема 5:** Если $\lim_{x\to a} f(x)=b$ (или x→∞) то f(x)=b+α, где α- бесконечно малая при x→a (или x→∞), и обратно, если f(x) может быть представлена в виде:F(x)=β+α,где b=const, α- бесконечно малая при x→a (или x→∞), то $\lim_{x\to a} f(x)=b(или x\to\infty)$.

## Основные теоремы о пределах

**Теорема 1.** Предел алгебраической суммы двух, трех и вообще конечного числа функций равен алгебраической сумме пределов этих функций

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)\right)=\lim_{x\to a} f_1(x)+\lim_{x\to a} f_2(x)+\cdots+\lim_{x\to a} f_n(x) (\text{или } x\to\infty)$$

**Теорема 2.** Предел произведения двух, трех и вообще конечного числа функций равен произведению пределов этих функций, т.е.

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\cdots\cdot f_n(x)\right)=\lim_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim_{x\to a} f_2(x)\cdot\cdots\cdot\lim_{x\to a} f_n(x)$$

**Пример.** Найти $\lim_{x\to 3}(2x^2-7)(x-2)$

**Решение.**

$$\lim_{x\to 3}(2x^2-7)(x-2)=\lim_{x\to 3}(2x^2-7)\cdot\lim_{x\to 3}(x-2)=11$$

**Теорема 3**. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, если предел знаменателя не равен нулю.

$$\lim\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)},\ \ если\ \ \lim f_2(x)\neq 0$$

Вычислим следующие пределы:

1. $\lim_{x\to 1}\frac{5x-4}{2x+1}$ **Решение.** $\lim_{x\to 1}\frac{5x-4}{2x+1}=\frac{5-4}{2+1}=\frac{1}{3}$

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+2x^2+x}{2x^3-x+5}$ **Решение.** $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+2x^2+x}{2x^3-x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(5+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^3(2-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3})}=\frac{5}{2}$

3. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$

**Решение.** $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{x(x+1)}=\frac{0}{2}=0$

**Теорема 4**. Если между соответствующими значениями трех функций выполняются неравенства $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = b$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$

**Теорема 5.** Если функция $y = f(x)$ неотрицательна, т.е. $y \ge 0$ и $\lim\limits_{x\to a} y = b$, то $b \ge 0$

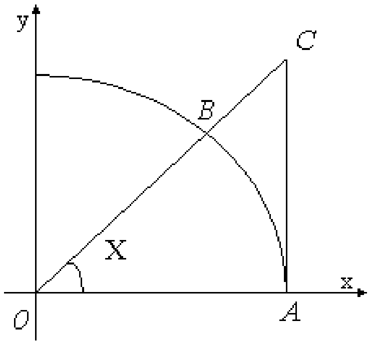
**Теорема 6.** Если две функции $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ удовлетворяют неравенству $f_1(x) \le f_2(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = b_1$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = b_2$, то $b_1 \le b_2$

## Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ не определена при $x = 0$. Найдём предел этой функции при $x \to 0$.

Рассмотрим окружность единичного радиуса.




Пусть $0 < x < \pi /2$

Дуга АВ численно равна центральному углу *x*, выраженному в радианах, а отрезок АВ численно равен *Sinx*. Из рисунка видно, что площади треугольника АОВ, сектора АОВ и треугольника АОС удовлетворяют неравенствам

$S_{\Delta AOB} < S_{сектAOB} < S_{\Delta AOC}$ т.е.

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin x = \frac{1}{2} \sin x;$$

$$S_{сектAOB} = \frac{1}{2} Rx = \frac{1}{2} x;\; S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} tgx;$$

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} tgx \text{ или } \sin x < x < tgx ½$$

Разделим все члены на *Sinx* (*Sin x*> 0, т.к. $0 < x < \pi/2$). Получим $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ или $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.(Это имеет место для *x,* удовлетворяющих условию *x* > 0). Заметим, что это верно и для *x*< 0. Действительно, *cos* (-*x*) = *cos x* и *sin* (-*x*)/(-*x*) = *sinx*/*x*. Но $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1 \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$

Следовательно, функция *sinx/x* заключена между двумя функциями, имеющими один и тот же предел 1. Таким образом, на основании теоремы о пределах $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

**Примеры. Найти пределы**:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}$

**Решение**: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{cosx\cdot x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{1\cdot x}=1$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin3x}{sin5x}$

**Решение**: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin3x}{sin5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin3x\cdot 3x\cdot 5x}{sin5x\cdot 3x\cdot 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos^3x}{x^2}$

**Решение**:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos^3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-cosx)(1+cosx+cos^2x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}(1+1+1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}2sin^2\frac{x}{2}\cdot\frac{3}{4x^2}4=\frac{6}{4}$$

## Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.\quad \text{(число e)}$$

Было доказано, что предел числовой последовательности $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ при $n\to\infty$ равен e, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e.$

1.пусть $x\to+\infty.$ Найдём $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.$

Каждое действительное значение x заключено между двумя натуральными числами: n и n + 1, т.е. $n\le x<n+1$

Тогда будут выполняться неравенства $1/n\ge 1/x>1/n+1$,

$$(1+\frac{1}{n})^{n+1}>(1+\frac{1}{x})^x>(1+\frac{1}{n+1})^n$$

Перейдём к пределу в последних неравенствах:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}>\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x>\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n$$

(т.к. при $n\to\infty$ $x\to\infty$)

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})=e\cdot 1=e$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})}=\frac{e}{1}=e$$

Значит и $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

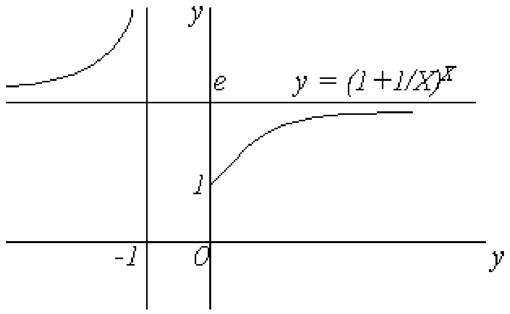
2.Пусть $x \to -\infty.$ . Введём новую переменную x = - (t +1). При $t \to \infty.$ $x \to -\infty.$

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{t\to\infty}(1-\frac{1}{t+1})^{-(t+1)} = \lim_{t\to\infty}(\frac{t}{t+1})^{-(t+1)} = \lim_{t\to\infty}(\frac{t+1}{t})^{t+1} = \lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t\cdot(1+\frac{1}{t}) = e$$

Мы доказали, что $\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

Итак, $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

Этот предел называется вторым замечательным пределом. Ниже приводится график функции $y=(1+\frac{1}{x})^x$




**Замечание.** Второй замечательный предел в наиболее общей форме можно записать:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(1+\frac{1}{\alpha})^{\alpha} = e$$

**Примеры. Найти пределы**:

1. $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{2n+1}$

**Решение:** $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{2n}\cdot(1+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}((1+\frac{1}{n})^n)^2\cdot(1+\frac{1}{n}) = e^2$

2. $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{5}{x})^{2x+1}$

**Решение**: $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{5}{x})^{2x+1} = \lim_{x\to\infty}[(1+\frac{5}{x})^{\frac{x}{5}}]^{\frac{5}{x}(2x+1)} = \lim_{x\to\infty}e^{\frac{5}{x}(2x+1)} = e^{10}$

3. $\lim_{x\to\infty}(\frac{2x+3}{2x-1})^{3x-4}$

**Решение**:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{2x+3}{2x-1})^{3x-4} = \lim_{x\to\infty}(\frac{2x-1+4}{2x-1})^{3x-4} = \lim_{x\to\infty}[(1+\frac{4}{2x-1})^{\frac{2x--1}{4}}]^{\frac{4}{2x-1}\cdot(3x-4)} = e^6$$

**Натуральные логарифмы**. Логарифм по основанию *e* = 2,7182.... называется натуральным логарифмом:$Log_e\, x = Ln\, x$.

Так, если $y = lnx$, то $x = e^y$ . Установим зависимость между натуральными и десятичными логарифмами. Прологарифмируем равенство $x = e^y$ по основанию 10.

$lgx = lg\, e^y$, $lgx = ylg\, e$ , но $y = lnx$, значит $lgx = lnx\cdot lge$

Таким образом, если известен натуральный логарифм, число можно найти его десятичный логарифм и наоборот.

M = *lge* = 0,434294 называется модулем перехода от натуральных логарифмов к десятичным.

Итак, *lgx* = M · *lnx*. Натуральные логарифмы выражаются через десятичные так: *lnx = 1/Mlgx*, где 1/M = 2,302585

## Сравнение бесконечно малых

Мы знаем, что бесконечно малая – это функция, предел которой равен нулю. Пусть даны две бесконечно малые α(x) и β(x).

**Определение**. Две бесконечно малые α(x) и β(x) называются бесконечно малыми одного порядка, при $x \to a$ (или $x \to \infty$) если

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = K,\ K \neq 0, |K| < \infty.$$

**Пример.** Пусть α(x) = (1–x); β(x) = 1–$x^2$

Найдём $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1}{2}$

Это значит, что функции α(x) = 1–x и β(x) = 1-$x^2$ являются бесконечно малыми одного порядка при $x \to 1$.

**Определение.** Бесконечно малая α(x) называется бесконечно малой высшего порядка по сравнению с бесконечно малой β(x), при $x \to a$ (или $x \to \infty$) если $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$

**Пример**. Пусть α(x) = $\sin^2$x, β(x) = x. Тогда

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x \cdot \sin x}{x} = 1 \cdot 0 = 0$$

**Определение.** Бесконечно малая α(x) называется бесконечно малой к-того порядка относительно бесконечно малой β(x) при $x \to a$ если

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = A;\ A \neq 0; |A| < \infty$$

**Определение.** Если $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то α(x) и β(x) называются бесконечно малыми одного порядка при $x \to a$.

Обозначается так: α(x) ~ β(x).

**Примеры.**

1. sinx ~ x при $x \to 0$. Действительно $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$

Отсюда следует, что arcsinx ~ x. При $x \to 0$

2. tgx ~ x при $x \to 0$ т.к. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{xcosx} = 1$

Следовательно, arctgx ~ x при $x \to 0$.

3. Ln (1+x) ~ x при $x \to 0$

Действительно, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} ln(1+x) = \lim\limits_{x\to 0} ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = ln\,e = 1$

2.e $^{x}$–1 ~ x при $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} e^x - \frac{1}{x} = \left| \begin{aligned} &e^x - 1 = t \\ &e^x = t+1 \\ &x = ln(t+1) \end{aligned} \right| = \lim_{t\to 0} \frac{t}{ln(t+1)} = \lim_{t\to 0} \left( \frac{ln(t+1)}{t} \right)^{-1} = 1$$

## Лекция №11. Непрерывность функции в точке. Разрывы. Классификация точек разрыва. Теоремы о функциях непрерывных в точке. Свойства функций непрерывных на отрезке

### Непрерывность функции в точке

Пусть функция *y=f(x)* определена в некоторой точке $x_0$ и окрестности этой точки. В точке $x_0$значение функции будет $y=f(x_0)$. Дадим аргументу *x* приращение $\Delta x$. Новое значение аргумента будет $x+\Delta x$. Функция получит приращение Δy. Это можно записать так:

$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$ Отсюда: $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

**<u>Определение</u>**. Функция y = f(x) называется непрерывной в точке $x_0$ если эта функция определена в какой- нибудь окрестности точки $x_0$ и если

То есть бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Пользуясь выражением для Δy, можно записать также, что

Или, иначе,

Если обозначить $x_0 + \Delta x = x$, последнее равенство можно переписать так:

Итак, определение непрерывности функции можно сформулировать следующим образом: Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$ если она определена в какой- нибудь окрестности этой точки и если предел функции при существует и равен значению функции при

Функция называется непрерывной в интервале, если она непрерывна в каждой его точке.

### Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва

**Определение.** Если в какой либо точке $x_0$ функция не является непрерывной, то точка $x_0$ называется точкой разрыва функции, а сама функция разрывной в этой точке.

Пусть $x \to x_0$, оставаясь все время слева от $x_0$, то есть будучи меньше $x_0$. Если при этом условии значения функции $f(x)$ стремится к пределу, то он называется левым пределом функции $f(x)$ в точке $x_0$, аналогично определяется и правый предел. Левые и правые пределы обозначаются соответственно

или

Для левых и правых пределов, когда они существуют и конечны возможны случаи:

1) $f(x_0-0)= f(x_0+0)\neq f(x_0)$
2) $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$

Точкой разрыва первого рода функции $f(x)$ называется такая точка $x_0$, в которой выполняются одно из условий 1) или 2).

Все остальные точки разрыва называются точками разрыва второго рода.

**Примеры.**

1) Функция $y = -$ разрывна при $x = 0$. Действительно при $x = 0$ функция не определена:

–                    –

2)        Функция y = –

–                    –

При $x = 0$ функция не определена. Следовательно, функция разрывна при x=0.

Ниже приводим некоторые свойства непрерывных функций.

## Основные теоремы о непрерывных функциях

**Теорема 1**. Сумма конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная.

Доказательство. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – функции непрерывные на $[a,b]$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x)+f_2(x)\right]=\lim_{x\to x_0} f_1(x)+\lim_{x\to x_0} f_2(x)=f_1(x_0)+f_2(x_0)$$

Следовательно, функция $f_1(x)+f_2(x)$ непрерывна в точке $x_0$.

**Теорема 2**. Произведение конечного числа непрерывных функций есть непрерывная функция.

**Теорема 3**. Частное от деления двух непрерывных функций есть функция непрерывная во всех точках, в которых знаменатель не равен нулю.

**Теорема 4**. Непрерывная функция от непрерывной функции есть также непрерывная функция. Так, если $y=f(u), u=\varphi(x)$. $\varphi(x)$ – функция. непрерывная в точке $x_0$, а функция $y=f(u)$ непрерывна в точке $u==\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ непрерывна в точке $x_0$. В силу теоремы 1-4 мы получаем, что все элементарные функции непрерывны во всех точках, в которых они определены.

## Теоремы о функциях, непрерывных на отрезке

**Определение.** Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в интервале $(a,b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

**Определение**. Если функция $f(x)$ определена в точке $a$ и

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a)$$

то функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $a$справа.

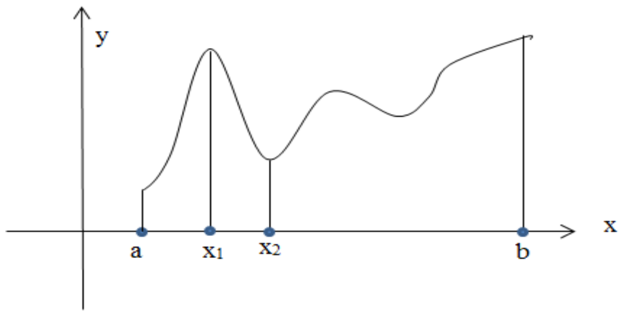
**Определение**. Если функция $f(x)$ определена в точке$b$ и

$$\lim_{x\to b-0} f(x)=f(b)$$

то функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $b$слева.

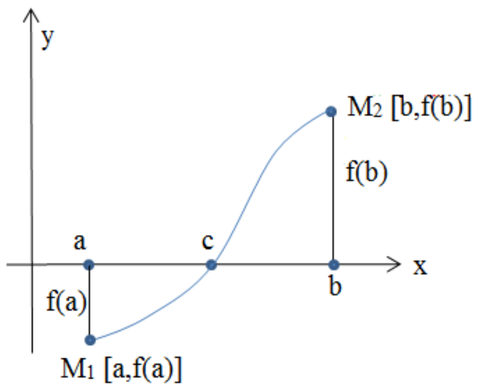
Определение. Если функция $y=f(x)$ непрерывна в интервале $(a,b)$, а в точке $a$ непрерывна справа, а в точке $b$ непрерывна слева, то функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a,b]$.

**Теорема 1**. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a,b]$, то на отрезке $[a,b]$ найдётся по крайней мере одна точка $x=x_1$ такая, что $f(x_1)\geq f(x)$ и найдётся по крайней мере одна точка $x_2$, что $f(x_2)\leq f(x)$ для любой точки $x\in[a,b],x\neq x_1$. Значение $f(x_1)$ будем называть наибольшим значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, $f(x_2)$-наименьшим.




Кратко, эту теорему можно сформулировать так:

Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция принимает на этом отрезке свое наибольшее и наименьшее значения.




Будем обозначать: $M$ – наибольшее, $m$- наименьшее значение $f(x)$ на $[a,b]$.

**Теорема 2**. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, тогда между точками $a$ и $b$найдётся хотя бы одна точка $x=c$, в которой значение функции равно нулю, т.е. $f(c)=0$.

Эта теорема имеет простой геометрический смысл. График непрерывной функции, принимающей значения разных знаков на концах отрезка $[a,b]$ т. е. $f(a)f(b)<0$, пересекает ось $Ox$ по крайней мере в одной точке.

**Теорема 3**. Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Если на концах этого отрезка функция принимает неравные значения $f(a)=A$, $f(b)=B$, то каково бы ни было число $C$ между $A$ и $B$ найдётся такая точка $x=c$, заключённая между $a$ и $b$, что $f(c)=C$.

Следствие теоремы 3. Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция по крайней мере один раз принимает значение, заключённое между её наименьшим и наибольшим значениями.

## Лекция №12. Производная, ее геометрический и механический смысл. Производные основных элементарных функций

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке $x_0$и некоторой ее окрестности. Составим приращение функции в точке $x_0$, соответствующее приращению аргумента $\Delta x$:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

**Определение.** Производной функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ называется предел отношения приращения функции $\Delta y$ в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.

Производная функции $y = f(x)$ в точке $x_0$обозначается $f'(x_0)$

Итак, по определению,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Производная функции $f(x)$ в любой точке $x$ некоторого множества обозначается $f'(x)$. Для обозначения производной применяются и другие обозначения $y'$, $y'_x$, $\frac{dy}{dx}$.

**Определение.** Нахождение производных функций называется их дифференцированием.

**Примеры:** Найти производные функций, пользуясь определением.

1. $y = x^2$. Находим приращение функции:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) = 2x$$

2. $y = \sin x$. Составим приращение функции:

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{x+\Delta x - x}{\Delta x}\cos\frac{x+\Delta x + x}{\Delta x} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

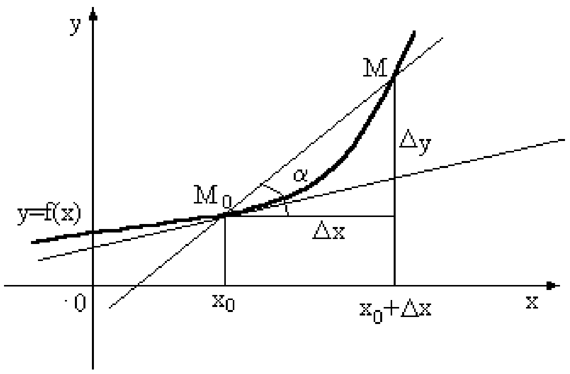
$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) = \cos x$$

## Геометрический смысл производной

Пусть на плоской кривой задана точка $M_0$, Рассмотрим другую точку $M$ этой кривой и проведем секущую $M_0M$. Пусть точка $M_0$фиксированная, а точка $M$ перемещается по кривой, неограниченно приближаясь к точке $M_0$.

Предельное положение секущей называется касательной.

Пусть задан график непрерывной функции $y = f(x)$. Рассмотрим секущую, соединяющую неподвижную точку $M_0$ и точку $M$, неограниченно приближающуюся к точке $M_0$. Найдем угловой коэффициент секущей $M_0M$.




$$k = tg\,\beta = \Delta y / \Delta x$$

Угловой коэффициент касательной.

$$k_{кас} = \lim_{\Delta x\to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

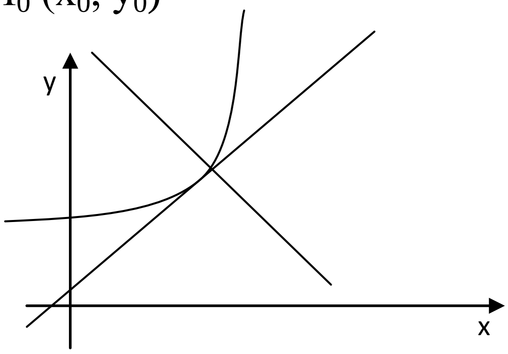
Итак, угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0$ равен значению производной этой функции в точке $x_0$.

Уравнение касательной и нормали.Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0$ $(x_0, y_0)$ и имеющей угловой коэффициент к, имеет вид $y - y_0 = к\,(x - x_0)$.

Так как $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = x_0$, то уравнение касательной будет иметь вид:

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ или $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, где $f(x_0) = y_0$

**Определение:** Нормалью к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется прямая, перпендикулярная к касательной к этой кривой, проведенной в точке $M_0(x_0, y_0)$




Так как условие перпендикулярности двух прямых имеет вид $k_1 \bullet k_2 = -1$ (где $k_1$ и $k_2$ - угловые коэффициенты этих прямых), то угловой коэффициент нормали $k = -1/f'(x_0)$. Тогда уравнение нормали будет иметь вид: $У = f(x_0) - (1/f'(x_0)) \cdot (x - x_0)$

**Пример:** Написать уравнение касательной и нормали к параболе $y = x^2$ в точке $M_0(2;4)$

**Решение**: Найдем $f'(x) = 2x$; $f'(2) = 4$; $f(2) = 4$.

Уравнение касательной: $y = 4 + 4(x - 2)$ или $y = 4x - 4$

Уравнение нормали: $y = 4 - \frac{1}{4}(x - 2)$ или $y = -\frac{1}{4}x + 9/2$

## Механический смысл производной

Пусть материальная точка движется по прямой по закону $S=S(t)$, где $t$ – время, а $S(t)$ – путь, проходимый за время $t$. Возьмем некоторый момент времени $t_0$ Путь, проходимый к этому моменту времени $S_0 = S(t_0)$. Поставим задачу: определить скорость в момент времени $t_0$.

Рассмотрим другой момент времени $t+\Delta t$. Путь, пройденный к этому моменту, будет $S(t + \Delta t)$. За промежуток времени $\Delta t=t-t_0$ точка прошла путь

$$\Delta S(t)=S(t+\Delta t)-S(t).$$

Средняя скорость движения $V_{ср.}$ за промежуток времени $\Delta t$, $V_{ср.}=\Delta S/\Delta t$.

Пусть $t_0$ – фиксированное, а $\Delta t$ меняется.

**Определение:** Скоростью $V_0$ в данный момент $t_0$ называется предел средней скорости, когда $\Delta t \to 0$, т.е. $V(t_0) = V_0 = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t_0)$. Таким образом, скорость точки в данный момент $t_0$ равна производной от пути $S(t)$ по времени $t$ при $t=t_0$.

$$V(t_0)= S'(t_0)$$

## Производные основных элементарных функций

**Производные функции $y=sinx$, $y=cosx$.** Мы доказали, что производная sinx равна cosx, т.е. $(sinx)'=cosx$

Найдем производную функции $y=cosx$. По определению:

$$(cosx)'= \lim_{\Delta x\to 0} (cos(x+\Delta x)-cosx)/\Delta x= \lim_{\Delta x\to 0} [(-2sin(x+\Delta x-x)/2sin(x+\Delta x+x)/2]/\Delta x=$$

$=-lim [-sin(\Delta x/2)]/(\Delta x/2)sin(x+\_\Delta x/2)=-sinx$. Итак, $(cosx)'=- sinx$.

**Производная логарифмической функций.** $y=log_a x$

Найдем $\Delta y=log_a(x+\Delta x)- log_a x$ $(log_a x)'=$

$(log_a (x+\Delta x) - log_a x)/\Delta x= \lim_{\Delta x\to 0} 1/\Delta x(log_a (x+\Delta x)- log_a x)=$

$\lim_{\Delta x\to 0}(log_a [(x+\Delta x)/x]^{1/\Delta x})= \lim_{\Delta x\to 0} log_a ((1+\Delta x/x)^{x/\Delta x})^{1/x} = log_a e^{1/x}$

Итак, $(log_a x)'=(1/x)lna$. В частности, $(lnx)'=1/x$

## Основные правила дифференцирования

1. $(Cu)'=0$; $u=u(x)$, $C=const$
2. $(u+v)'=u'+v'$ ; $u=u(x)$ $v=v(x)$
3. $(uv)'=u'v+v'u$ ;
4. $(u/v)'=(u'v-v'u)/v^2$

**Производные функций** $y=tgx$; $y=ctgx$

По правилам дифференцирования

1. $y=tgx$; $(tgx)'=(sinx/cosx)'=((sinx)'cosx-(cosx)'sinx)/cos^2x=$
$=(cos^2x+sin^2x)/cos^2x=1/cos^2x$. Итак, $(tgx)'=1/cos^2x$

2. $y=ctgx$; $(cosx/sinx)'=((cosx)'sinx-cosx(sinx)')/sin^2x=(-sin^2x-cos^2x)/sin^2x=$
$=-(cos^2x+sin^2x)/sin^2x=-1/sin^2x$

**Обратная функция. Производная обратной функции.** Пусть дана возрастающая или убывающая функция $y=f(x)$. Пусть $f(a)=c$, $f(b)=d$. Пусть для определенности $f(x)$ – возрастающая функция. Будем рассматривать значения $y$ как значения аргумента, а значения $x$ как значения функции. Получаем $x=\varphi(y)$, эта функция называется обратной для функции $y=f(x)$. Верна следующая теорема.

**Теорема:** Если возрастающая (или убывающая) функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $(a;b)$, то обратная функция $x=\varphi(y)$ будет возрастающей (или убывающей) и непрерывной на отрезке $(c;d)$.

Заметим, что обратная функция находится решением уравнения $y=f(x)$ относительно $x$.

**Теорема (о дифференцировании обратной функции):** Если для функции $y=f(x)$ существует обратная функция $x=\varphi(y)$, которая в рассматриваемой точке $y$ имеет производную $\varphi'(y),(\varphi'(y)\neq 0)$, то в соответствующей точке $x$ функция $y=f(x)$ имеет производную $f'(x)$, равную $1/\varphi'(y)$, т.е. $f'(x)=1/\varphi'(y)$.

**Доказательство**: Придадим $y$ приращение $\Delta y$, тогда функция $x$ получит приращение $\Delta x=\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)$. При $\Delta y\neq 0$, $\Delta x=0$, т.к. $\varphi(y)$-монотонная функция.Рассмотрим: $\Delta y/\Delta x=1/(\Delta x/\Delta y)$

Так как $\varphi(y)$- непрерывная функция, то $\Delta x\to 0$ при $\Delta y\to 0$. Переходя к

пределу в последнем равенстве при $\Delta y\to 0$, получим $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$.

То есть $y'_x=1/x'_y$ или $y'(x)=1/\varphi'(y)$.

**Производные обратных тригонометрических функций.** $y=arcsinx$

Обратная функция $x=siny$. По формуле для производной обратной функции найдем.

$(arcsinx)'=1/(siny)'=1/cosy=1/(1-sin^2y)^{1/2}=1/(1-x^2)^{1/2}$. Итак, $(arcsinx)'=$

$$1/(1-x^2)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

*1.* $y=arccosx$

Обратная функция $x=cosy$. $(arccosx)'=1/(cosy)'=1/-siny=-1/(1-x^2)^{1/2}$ Таким образом, $(arccosx)'=-1/(1-x^2)^{1/2}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

*2.* $y=arctgx$

Обратная функция $x=tgy$,

$(arcctgx)'=1/(tgy)'=1/(1/cos^2y)=1/(1+tg^2y)=1/(1+x^2)$. Итак,

$$(arctgx)'=1/(1+x^2)$$

*3.* $y=arcctgx$

Обратная функция $x=ctgy$, $(arcctgx)'=1/(ctgy)'=1/(-1/sin^2y)=-1/(1+ctg^2y)=-1/(1+x^2)$ . Таким образом, $(arcctgx)'=-1/(1+x^2)$.

**Производная показательной функции.** $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$.

$x=log_a y$- обратная функция. По формуле для производной обратной функции находим.

$(a^x)'=1/(log_a y)'=1/(1/ylna)=ylna=a^x lna$.Итак, $(a^x)'=a^x lna$

В частности $(e^x)'=e^x$.

## Лекция №13. Производная сложной, параметрически заданной и неявной функции. Производная степенной функции. Производная степенно - показательной функции. Гиперболические функции и их дифференцирование. Таблица производных

Докажем, что если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$(т.е. имеет в этой точке производную), то она непрерывна в этой точке.

Пусть существует $f'(x_0)$. По определению, $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

По теореме о пределе функции $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$, где α – бесконечно малая при $\Delta x\to 0$, тогда $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$, найдем $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x)=0$

А это означает, что функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$.

### Производная сложной функции

Пусть $u=\varphi(x)$, $y=f(u)$, тогда $y=f(\varphi(x))$ есть сложная функция от $x$.

**Теорема.** Пусть функция $u=\varphi(x)$ имеет производную в точке $x_0$, а функция $y=f(u)$ имеет производную в точке $u_0=\varphi(x_0)$, тогда сложная функция $y=f(\varphi(x))$ имеет производную в точке $x_0$,и имеет место формула $y'_x=y'_y\cdot u'_x$,т.е. производная сложной функции равна производной этой функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную этого промежуточного аргумента по конечному аргументу.

**Доказательство**. Дадим аргументу $x_0$ приращение $\Delta x$. Тогда $u$ получит приращение $\Delta u$, а $y$ получит приращение $\Delta y$.

Рассмотрим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Мы можем представить это отношение в виде

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Пусть $\Delta x \to 0$. Тогда $\Delta u \to 0$, так как $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x_0$ , Перейдем к пределу в обеих частях равенства при $\Delta x \to 0$. ($\Delta u \to 0$)

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Получим $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

## Производная степенной функции

$$y = x^{\alpha} (\alpha > 0)$$

Можно записать $y = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$. Тогда по формуле для производной сложной функции:

$$y' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$$

Таким образом, производная степенной функции $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

**Пример.** Найти производную функции $y = \sqrt{x}$

**Решение**. $y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

## Гиперболические функции и их дифференцирование

1. Функция $y = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ называется гиперболическим синусом.

А. Гиперболический синус – функция нечетная

Б. График функции проходит через начало координат.

В. Можно построить график гиперболического синуса путем графического вычитания графиков $y = e^x$ и $y = e^{-x}$ и делением на 2 их разности.

2.Функция $y = chx ( y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} )$ называется гиперболическим косинусом

График этой функции можно получить путем сложения графиков и деления их на 2.

3.Гиперболический тангенс $y = thx$. $thx = shx/chx$ ($y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$)

Свойства функции.

А. Гиперболический тангенс нечетная функция.

Б. График симметричен относительно начала координат.

В. График проходит через начало координат.

Г. Предел этой функции при $x \to 0$ равен 1.

4.Гиперболический котангенс $y = cthx cthx = chx/shx$ ($y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$)

А. Область определения $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Б. Гиперболический котангенс- нечетная функция

В. График функции симметричен относительно начала координат

Г. Предел функции при $x \to 0$ равен $\infty$

Д. Предел функции при $x \to \infty$ равен $\infty$.

Производные гиперболических функции определяются формулами

$$(shx) = (\text{———}) = \text{———} = chx; \qquad (thx) = \text{——};$$

$$(chx) = shx; \qquad (chx) = \text{——};$$

## Логарифмическое дифференцирование

Функцию вида $y = [\ \ (x)]^{\ (x)}$, $\ (x)>0$, где и основания и показатель изменяются вместе с независимой переменной, называют степенно-показательной. Простейшим примером такой функции является функция $y=u\,(x)^{v(x)}$.

Найдем $y'(x)$. Для этого логарифмируем обе части выражения по основанию $e$, тогда$\ln y = v(x)\cdot \ln\,(u(x))$

Дифференцировав последнее равенство, получим

$$-\ \ y' = v'\,(x)\cdot \ln\,(u(x)) + v(x)\cdot\frac{1}{u(x)}\cdot u'\,(x)$$

Окончательно имеем,

$$y' = u(x)^{v(x)} * [v'(x)\ln\big(u(x)\big) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}$$

## Параметрическое задание функции

Пусть даны два уравнения

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad (1)$$

где $t \in [\alpha, \beta]$. Каждому значению t из отрезка $[\alpha, \beta]$ соответствуют значения x и y, (т.е. каждому значению t соответствует определённая точка плоскости). При изменении t от $\alpha$ до $\beta$ точка описывает на плоскости определенную кривую.

Уравнение (1) называется параметрическим уравнением кривой, t называется параметром. Мы видим, что каждому значению x соответствует определенное значение y. Таким образом, уравнения (1) определяют y как функцию от x.Такой способ задания функции называется параметрическим.

## Производная функции заданной параметрически

Пусть функция $y$ от $x$ задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t);\ y = \psi(t); \alpha \le t \ge \beta$$

Пусть функции $\varphi(t),\psi(t)$ имеют производные $\varphi'(t),\psi'(t)$, функция $\varphi(t)$ имеет обратную функцию $t=\Phi(x)$, которая также имеет производную. Тогда функция у от х, заданная параметрически, имеет производную $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$

Докажем эту формулу. Функцию *y* от *x* можно рассматривать как сложную функцию от *x*.Следовательно, $y=\psi(t);t=\psi(\Phi(x))$, сложная функция от х.

По правилу дифференцирования сложной функции $y'_x=y'_t\cdot t'_x$

Но функция $t=\Phi(x)$ - обратная к функции $x=\varphi(t)$. Поэтому $t'_x=\dfrac{1}{x_t}$

Таким образом, $y'_x=y'_t\dfrac{1}{x'_t}$ т.е. $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$

**Пример 1.** Задана функция $\begin{cases} x=a\,cos^3 3t \\ y=a\,sin^3 3t \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$

Найти производную $y'_x$

**Решение**. Находим $x_t$=-$3acos^2tsint$ $y'_t$=$3asin^2tcost$

По формуле $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$ находим $y'_x=\dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\sin t\cos^2 t}=-tgt$

## Производная функции, заданной неявно

Неявная функция – это функция, заданная уравнением $F(x,y)=0$, т.е. таким образом, что каждому значению *x* из некоторого множества поставлено в соответствии такое значение *y*, что $F(x,y)=0$

**Теорема.** Производная от неявной функции $F(x,y)=0$ вычисляется по формуле $y'=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$.

**Доказательство:** Для приращения неявной функции по *x* и *y* имеем

$$F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y)=0$$

Производим тождественные преобразования и переходим к пределу при $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$, тогда:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y+\Delta y)+F(x,y+\Delta y)-F(x,y)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y+\Delta y)}{\Delta x}+\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{F(x,y+\Delta y)-F(x,y)}{\Delta x}=$$

$$=F_x'+\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{F(x,y+\Delta y)-F(x,y)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}=F_x'+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{F(x,y+\Delta y)-F(x,y)}{\Delta y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$$

Отсюда имеем $F_x'+F_y'y'=0$ или $y'=-\frac{F_x'}{F_y'}$.

**Пример 1.** Найти производную функции $y$, заданной неявно уравнением $x^2y+y^3+lny=0$

**Решение.** Дифференцируем обе части, имея в виду, что $y$ есть функция от $x$ $(x^2y)'+(y^3)'+(xlny)'=0$ $\quad 2xy+x^2y'+3y^2y'+lny+xy'/y=0$

Откуда $y'(x^2+3y^2+x/y)=-2xy-lny$ $\qquad y'=-\frac{2xy+lny}{x^2+3y^2+x/y}$

### Таблица производных простейших элементарных функций

1. $(c)'=0$ $\qquad$ 2. $(x^n)'=nx^{n-1}$, в частности $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$; $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ;

$(u^n)'=nu^{n-1}*u'$ $\qquad$ 3. $(\log_a u)'=\frac{1}{ulna}*u'$,

4. $\qquad$ 5. $(a^u)'=a^u*lna*u'$.

6. $(sin\,u)'=cosu*u'$ $\qquad$ 7. $(cosu)'=-sinu*u'$

8. $(tg\,u)'=\frac{1}{cos^2u}*u'$ $\qquad$ 9. $(ctg\,u)'=-\frac{1}{sin^2u}*u'$

10. $(e^u)'=e^u*u'$ $\qquad$ 11. $(lnu)'=\frac{1}{u}*u'$

12. $(arcsinu)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ $\qquad$ 13. $(arccosu)'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

14. $(arctgu)'=\frac{u'}{1+u^2}$ $\qquad$ 15. $(arcctgu)'=-\frac{u'}{1+u^2}$

## Лекция №14. Производные высших порядков. Дифференциал функции. Применение дифференциала в приближённых вычислениях. Инвариантность формы дифференциала. Геометрический смысл дифференциала

### Производные высших порядков

Пусть имеем функцию $y=f(x)$. Пусть эта функция дифференцируема в некотором интервале $(a,b)$.

Вообще говоря, значения производной зависят от $x$, т. е. производная $f'(x)$ есть функция от $x$. Дифференцируя эту функцию, получаем вторую производную от функции $f(x)$, т.е. $f''(x)$. Так, если $f(x)=x^4$ то $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$.

Производная от второй производной называется производной третьего порядка или третьей производной и обозначается $y'''$ или $f'''(x)$. Вообще, производной $n$-го порядка от функции $f(x)$ называется производная от ($n$-1)-ой производной, т.е. $(f^{(n-1)}{}_x)' = f^{(n)}{}_x$.

## Производные *n*-го порядка некоторых элементарных функций

1. $f(x)=e^{kx}$. $f'(x)=ke^{kx}$, $f''(x)=k^2e^{kx}$ …, $f^n(x)=k^ne^{kx}$.

2. $f(x)=\sin x$. $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$ …, $f^n(x)=\sin(x+\pi n/2)$

3. $f(x)=\cos x$ . $f'(x)=-\sin x$, $f''(x)=-\cos x$ …, $f^n(x)=\cos(x+\pi n/2)$.

Правила дифференцирования распространяются на случай производных n-го порядка: $(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$; $(u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$

Производная $n$-го порядка для произведения двух функций вычисляется по формуле Лейбница. Чтобы вывести эту формулу, мы найдем сначала производные 1,2,3 и 4-го порядков, затем установим закономерность.

$$y=uv,\ y'=u'v+uv';\ y''=u''v+2u'v'+v''u;\ \ y'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''$$

Закон заключается в следующем: $(u+v)^n$ разлагается по формуле бинома Ньютона и в разложении показатели степеней для $u$ и $v$ заменяются указателями порядка производных, причем нулевые степени $u$ и $v$ означают сами функции $u$ и $v$. Таким образом,

$$(uv)^n=u^nv+nu^{n-1}v+\ldots+uv^n$$

Это и есть формула Лейбница.

## Производные высших порядков функций, заданных параметрически

Пусть $y$, функция от $x$, задана параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$ Мы знаем, что $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$

Тогда $$y''_{xx} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t t'_x = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^2}\frac{1}{x'_t} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}$$

Заметим, что при нахождении $y''_{xx}$, удобнее воспользоваться тем, что $y''_{xx}=(y'_x)'_x=(y'_x)'_t t'_x$(не используя полученную выше формулу для второй производной).

## Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a;b]$. По определению производная этой функции в некоторой точке отрезка $[a;b]$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

На основании теоремы о пределе функции мы можем написать равенство

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

где $\alpha$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Умножив обе части последнего равенства на $\Delta x$, получим

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x$$

Так как в общем случае $f'(x) \neq 0$ слагаемое $f'(x)\Delta x$ - есть бесконечно малая одного порядка с $\Delta x$, а слагаемое $\alpha\Delta x$ - есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $\Delta x$, так как

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$$

Таким образом, приращение функции $\Delta y$ представляется в виде суммы двух слагаемых, из которых первое линейно относительно $\Delta x$, а второе – есть бесконечно малая высшего порядка, чем $\Delta x$ и следовательно, бесконечно малая высшего порядка по сравнению с первым слагаемым.

Первое слагаемое $f'(x)\Delta x$ называется главной частью приращения функции.

**Определение**: Выражение $f'(x)\Delta x$ называется дифференциалом функции.

Таким образом, дифференциалом функции называется главная часть приращения функции, линейная относительно $\Delta x$ .Дифференциал функции обозначается $dy$ или $df(x)$ . Итак, $dy = df(x)$

Найдём дифференциал функции $y = x; dy = x'\Delta x; dy = dx = \Delta x$

То есть: $dx = \Delta x$ Таким образом дифференциал независимого переменного равен его приращению.

Выражение дифференциала любой функции $f(x)$ будет иметь вид:

$$dy = f'(x)dx$$

Отсюда $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$, то есть производная $f'(x)$ - это есть отношение дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной.

**Примеры:** Найти дифференциалы следующих функций при произвольных значениях $x$ и $\Delta x$

**1.** $f(x)=x^3$. Решение: $df(x)=(x^3)'dx=3x^2dx$

**2**. $f(x)=\ln^2 x$.Решение: $df(x)=(\ln^2 x)'dx=\dfrac{2\ln x dx}{x}$

**3.** Найти дифференциал функции: $y=x^3$ при $x=10;\Delta x=0.1$

**Решение:** $dy=(x^3)'\Delta x=3x^2\Delta x=3*100*0.1=30$

## Применение дифференциала в приближённых вычислениях

Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке $x$ то её приращение $\Delta y$ может быть представлено в виде

$$\Delta y= f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x$$

где $f'(x)\Delta x$ - есть дифференциал функции в точке $x$

Так как $d\Delta x$ - есть бесконечно малая высшего порядка, чем первое слагаемое, в приближённых вычислениях мы можем заменить приращение функции $\Delta y$ дифференциалом $dy$.

$\Delta y\approx dy$ то есть $f(x+\Delta x)-f(x)\approx dy$. Откуда

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$$

Это формула для приближенного вычисления.

**Примеры:** Найти приближённое значение функции, пользуясь дифференциалом.

**1.** Найти $sin31^0$. **Решение**:

$$f(x)=\sin x; x=30^\circ=\frac{\pi}{6};\Delta x=1^\circ=\frac{2\pi}{360}=\frac{\pi}{180}$$

$f'(x)=\cos x$ по формуле $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$. Находим

$$\sin 31^\circ\approx\sin 30^\circ+\cos 30^\circ*\frac{\pi}{180},\quad \sin 31^\circ\approx 0.5+0.85$$

**2.** Найти значение $\sqrt[3]{28}$. **Решение:** $f(x)=\sqrt[3]{x}; x=27;\Delta x=1$;

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};\sqrt[3]{28}\approx\sqrt[3]{27}+\frac{1}{3*\sqrt[3]{(27)^2}}*1=3+\frac{1}{27}\approx 3.03$$

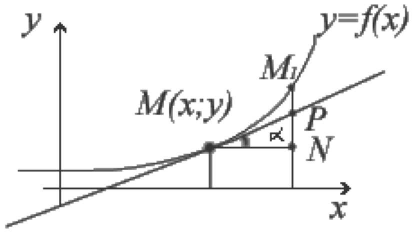
## Инвариантность формы дифференциала

Пусть $y = f(u), u = \varphi(x)$ .тогда $y = f(\varphi(x))$ - сложная функция от $x$. Найдём дифференциал этой функции. $dy = f'(\varphi(x)) * u'_x dx$, но $u'_x dx = du$. Поэтому $dy = f'(u)du$. Таким образом, дифференциал сложной функции имеет такой же вид, как и в случае если бы $u$ являлось независимой переменной.Это свойство дифференциала называется инвариантностью.

## Геометрический смысл дифференциала

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке $M(x; y)$.

Рассмотрим график этой функции.




По определению дифференциал функции $dy = f'(x)\Delta x$

Из треугольника $PMN$: $\dfrac{PN}{MN} = tg\alpha; \dfrac{PN}{MN} = f'(x)$ $PN = f'(x)MN$, но

$MN = \Delta x; PN = f'(x)\Delta x$, то есть $dy = PN$

Таким образом, дифференциал функции $f(x)$, соответствующий данным значениям $x$ и $dx$ равен приращению ординаты касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $x$.

## Дифференциалы высших порядков

**Определение**: Дифференциал от дифференциала функции называется вторым дифференциалом или дифференциалом второго порядка. Дифференциал второго порядка обозначается $d^2 f'(x)$. Итак, $d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx$. Так как $dx$ не зависит от $x$, мы можем написать $d^2 y = d(f'(x))'dxdx = f''(x)(dx)^2$ вместо $(dx)^2$ пишут $dx^2$

Третьим дифференциалом или дифференциалом третьего порядка функции называется дифференциал от второго дифференциала.

$$d^3y = d(d^2y) = f'''(x)(dx)^3$$

Вообще дифференциалом $n$ – ного порядка, называется дифференциалом от дифференциала *(n-1)* порядка.

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = (f^{(n-1)})'(dx)^n = f^{(n)}(x)(dx)^n$$

## Лекция № 15. Теоремы о функциях, дифференцируемых в интервале. (Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши). Раскрытие неопределённостей. Формула Тейлора и Маклорена. Разложение некоторых функций по формуле Маклорена

### Теорема Ролля (о корнях производной

**Теорема.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема в интервале (a;b) и на концах отрезка принимает значения равные нулю, то есть $f(a) = f(b) = 0$, то найдется, по крайней мере, одна точка $x = c, a < c < b$, в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, то есть $f'(c) = 0$.

**Доказательство.** Так как $f(x)$ непрерывна на отрезке, то она принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения.

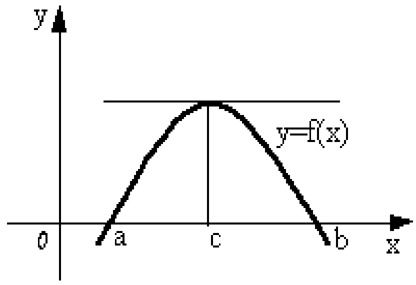
Пусть $M$ - наибольшее значение, $m$ - наименьшее значение $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

1.Пусть $M = m$. В этом случае $f(x) = const$. Тогда $f'(x) = 0$ в любой точке отрезка и теорема доказана.

2.Пусть теперь $M \neq m$. Тогда хотя бы одно из этих значений не равно нулю. Пусть для определённости $M > 0$, и функция принимает своё наибольшее значение при $x = 0$, то есть $f(c) = M$. (Заметим, что $c \neq a, c \neq b$, так как $f(a) = f(b) = 0$).

Так как $M$ – наибольшее значение $f(x)$, то $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$, как при $\Delta x > 0$, так и при $\Delta x < 0$.

Рассмотрим отношение $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta}$ Ясно, что $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta}\le 0$ при $\Delta x>0$. $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta}\ge 0$ при $\Delta x<0$. По условию $f(x)$ дифференцируема в интервале (a;b) и, следовательно, дифференцируема в точке $c$. По определению производной




$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)}{\Delta x}=f'(c)\le 0$ при $\Delta x>0$. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)}{\Delta x}=f'(c)\ge 0$ при $\Delta x<0$

Следовательно, внутри отрезка [a;b] нашлась точка $x=c$, в которой производная равна нулю. Теорема доказана.

Эта теорема называется теоремой о корнях производной.

**Геометрический смысл теоремы**. Если непрерывная кривая, имеющая в каждой точке касательную, пересекает ось $OX$ в двух точках: $x=a$ и $x=b$, то найдётся хотя бы одна точка, в которой касательная параллельна оси $OX$.

**Замечание**. Теорема остаётся справедливой, если условие $f(a)=f(b)=0$ заменить условием $f(a)=f(b)$.

**Теорема Лагранжа. (О конечных приращениях)**

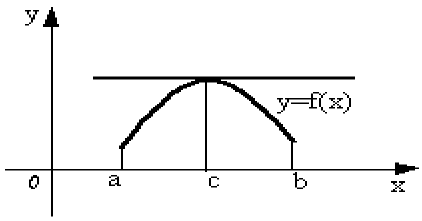
**Теорема.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема в интервале $(a;b)$, то внутри отрезка $[a;b]$

найдётся по крайней мере одна точка $c$, $a<c<b$, что

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

**Доказательство.** Обозначим $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=Q$ и рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-f(a)-Q(x-a).$$




Функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Действительно, $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема в интервале $(a;b)$ и обращается в нуль на концах отрезка.

Действительно, $F(a) = f(a) - f(a) - (a-a)Q = 0$

$$F(b) = f(b) - f(a) - (b-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0$$

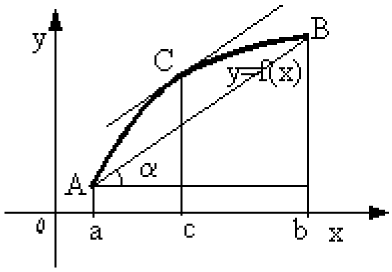
Следовательно, найдётся точка $c,\ a < c < b$ что $F'(c) = 0$, то есть

$F'(x) = f'(x) - Q, F'(c) = f'(c) - Q = 0$. То есть

$$f'(c) = Q,\ f'(c) = \frac{f(b - f(a)}{b-a}$$

Откуда $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. Теорема Лагранжа доказана.

**Геометрический смысл теоремы Лагранжа.**




$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = tg\alpha$$

$tg\alpha$ - угловой коэффициент хорды, соединяющей точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$. $f'(c)$ - угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке графика с абсциссой $c$. Таким образом, геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в следующем: Если во всех точках дуги $AB$ существует касательная, то на этой дуге найдётся точка $C$ между $A$ и $B$, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей точки $A$ и $B$.

**Теорема Коши. (об отношении приращений двух функций)**

**Теорема.** Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке [a;b], дифференцируемы в интервале (a;b) и в интервале $\varphi'(x) \neq 0$, то найдётся такая точка $x = c,\ a < c < b$, что $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$

**Доказательство.** Обозначим $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = Q$.

Заметим, что $\varphi(b)-\varphi(a) \neq 0$, так как в этом случае $\varphi(a) = \varphi(b)$ и по теореме Ролля внутри отрезка [a;b] нашлась бы точка, в которой производная $\varphi'(x) = 0$, что противоречит условию теоремы.

Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - Q\varphi(x)$

Очевидно, что функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: $F(x)$ непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема в (a;b) и $F(Q) = F(b) = 0$

По теореме Ролля найдётся точка $c,\ a < c < b$, что $F'(c) = 0$

Найдём $F(x) = f'(x) - Q\varphi'(x)$. Тогда $F'(c) = f'(c) - Q\varphi'(c) = 0$ или $f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(c) = 0$, то есть

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

Теорема доказана.

## Раскрытие неопределённостей. (правило Лопиталя)

### 1. Раскрытие неопределённостей типа $(\frac{0}{0})$

**Теорема. (правило Лопиталя)** Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ на некотором отрезке [a;b] удовлетворяют условиям теоремы Коши и обращаются в нуль при $x = a$, то есть $f(a) = \varphi(a) = 0$ и существует конечный предел отношения $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x \to a$, то существует $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и выполняется равенство.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

**Доказательство.** Пусть $x \in [a;b]$, $x \neq a$. Применим формулу Коши:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}; a < c < b$$

Рассмотрим $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}; a < c < x$. Поэтому при $x \to a$ будем иметь, что $c \to a$.

Значит, $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim\limits_{c \to a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$

Таким образом мы доказали, что $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$; И теорема доказана.

**Замечание 1.** Теорема применима и в случае, когда функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ не определены в точке $a$, но $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$

**Замечание 2.** Если $f(a) = 0$, $\varphi(a) = 0$ и производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют условиям теоремы и $f'(x) = \varphi'(x) = 0$ , то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \quad \text{и т.д.}$$

**Примеры.** Вычислить следующие пределы, пользуясь правилом Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{tg 2x}$ **Решение** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{tg 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{7\cos 7x}{\frac{2}{\cos^2 2x}}=\frac{7}{2}=3.5$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ **Решение** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x-1}{\ln(1+x)}$ **Решение** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x-1}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+\cos x}{\frac{1}{1+x}}=2$

**Замечание.** Правило Лопиталя применимо и в случае, когда $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$

В этом случае замена $\frac{1}{x}=t$ приводит к рассмотренному случаю.

**Пример**. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{1}{x}}$. **Решение:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{x}(-\frac{\pi}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}=\pi$$

## 2. Раскрытие неопределённостей типа $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

**Теорема (правило Лопиталя)** Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы при всех $x\neq a$ в окрестности точки $a$, причём $\varphi'(x)\neq 0$.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ и существует предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, тогда существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$

Примем эту теорему без доказательства.

**Замечание.** Теорема применима для случая $x \to \infty$.

**Рассмотрим примеры.** Найти следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2}}$ **Решение** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2xe^{x^2}} = 0$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{tg\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$. **Решение:**

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{1-x}(-1)} = \frac{\pi}{2}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\cos^2\frac{\pi x}{2}} = \frac{\pi}{2}\lim_{x\to 1}\frac{1}{-2\cos\frac{\pi x}{2}\sin\frac{\pi x}{2}} = -\infty$$

**Замечание.** Другие типы неопределённостей:

$(0.\infty);(0^0);(1^\infty);(\infty-\infty)$ приводятся к неопределённостям типа $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

**Примеры**: Найти следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$ **Решение** $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to 0} x = 0$

## Формула Тейлора и Маклорена

Пусть функция *y=f(x)* имеет произведение до порядка $n+1$ включительно в окрестности точки $x=a$. Поставим задачу: найти многочлен $P_n(x)$ степени $n$, значение которого в точке $a$ равно значению функции в этой точке, значение производной этого многочлена до $n$-го порядка равны значениям соответствующих производных функций $f(x)$, т.е.

$$P_n(a)= f(a),\ P_n'(a)= f'(a) \ldots P_n^{(n)}(a)= f^{(n)}(a) \tag{1}$$

Будем искать многочлен $P_n(x)$ в виде

$$P_n(x)=C_0+C_1(x-a)+C_2(x-a)^2+\ldots+C_n(x-a)^n. \tag{2}$$

Значения коэффициентов $C_1, C_2, \ldots, C_n$ находятся из условий (1)

$$P_n(a)=C_0=f(a); \quad C_0=f(a)$$

Найдём $P'_n(x)=C_1+2C_2(x-a)+3C_3(x-a)^2+\ldots+nC_n(x-a)^{n-1}$

$$P''_n(x)=2C_2+6C_3(x-a)+12C_4(x-a)^2+...+n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}$$
$$P'''_n(x)=6C_3+24C_4(x-a)+...+n(n-1)(n-2)C_n(x-a)^{n-3}$$
$$.......................................................................$$
$$P_n^{(n)}(x)=n!C_n$$

Найдём значения $P'_n(a)$, $P''_n(a)$, $P'''_n(a)$ ... $P_n^{(n)}(a)$.

$$P'_n(a)=C_1; P''_n(a)=2C_2; \; P'''_n(a)=6C_3, .... , P_n^{(n)}(a)=n!C_n$$
$$C_1=f'(a) 2C_2=f''(a) 6C_3=f'''(a) \quad n!C_n=f^{(n)}(a)$$

$$C_0=f(a) ; \quad C_1=f'(a) \quad C_2= f''(a)/2! \quad C_3=f'''(a)/3! .......C_n=f^{(n)}(a)/n!$$

Таким образом,

$P_n(x)= f(a)+ f'(a)(x-a)+ f''(a)(x-a)^2/2! +f'''(a)(x-a)^3/3!+ ......+ f^{(n)}(a)(x-a)^n/n!$

Обозначим разность значений функции и многочлена через $R_n(x)$. Тогда

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$$

или в развёрнутом виде

$f(x)= f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)(x-a)^2/2!......+ f^{(n)}(a)(x-a)^n/n! +R_n(x),$

где $R_n(x)$ называется остаточным членом. Для тех значений x, при которых $R_n(x)$ достаточно мало, многочлен $P_n(x)$ даёт приближённое значение функции.

Одна из форм остаточного члена

$$R(x)= f^{(n+1)}(c)\,(x-a)/(n+1)!$$

Эта форма остаточного члена $R_n(x)$- называется формулой Лагранжа. Здесь $c$ заключено между $x$ и $a$, т.е.

$c=a+\theta(x-a), \; 0<\theta<1$. Формула

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)(x-a)^2/2+..+f^{(n)}(a)(x-a)^n/n!+f^{(n+1)}(c)x^{n+1}/(n+1)!$$

называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

В частности, если $a=0$ , то получаем частный случай формулы Тейлора – формулу Маклорена:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)x^2/2!+f'''(0)x^3/3!+..+f^{(n)}(0)x^n/n!+f^{(n+1)}(c)\,x^{n+1}/(n+1)!$$

## Разложение некоторых функций по формуле Маклорена

1. $f(x)=e^x$.

Найдём $f'(x)=e^x$; $f''(x)=e^x$; ......$f^{(n+1)}=e^x$

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=...=f^{(n)}(0)=1$$

Тогда формула Маклорена для функции $f(x)=e^x$ имеет вид:

$$e^x=1+x+x^2/2!+x^3/3!+....+x^n/n!+e^c\,x^{n+1}/(n+1)!$$

Можно показать, что $R_n = e^c x^{n+1}/(n+1)! \quad 0$ при $n \to \infty$.

Поэтому можно применять формулу Маклорена для $e^x$ для приближённого вычисления значений этой функции.

2. $f(x)=sinx$. Найдём $f'(x)=cosx$;

$$f''(x)=-sinx;\ f'''(x)=-cosx;$$
$$f^{(iv)}(x)=sinx.....f^{(v)}=cosx.....f^{(n)}(x)=sin(x+n\pi/2)$$
$$f(0)=0;\ f'(0)=1;\ f''0)=0; f'''(0)=-1;\ f^{(iv)}(0)=0;\ f^{(v)}=1\ ...,$$
$$f^{(n)}(0)=sin(n\pi/2)$$
$$f^{(n+1)}(c)=sin(c+(n+1)\pi/2).$$

Формула Маклорена

$$sin\,x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + .... + sin\,\pi n\,x^n / n! + sin\,(c+\pi n/2)\,x^{n+1}/(n+1)!$$

Здесь также $lim\,Rn\,(x) = lim\,sin\,(c+\pi n/2)\,x^{n+1}/(n+1)! = 0$

3. $f(x)=cosx$. Найдём $f'(x)=-sinx;\ f''(x)=-cosx;\ f'''(x)=sinx;$

$$f^{(iv)}(x)=cosx;\ f^{(v)}(x)=-sinx;......\ f^{(n)}(x)=cos(x+n\pi/2).$$

$$f(0)=1;\ f'(0)=0;\ f''(0)=-1;\ f'''(0)=0;\ f^{(iv)}(0)=1;\ f^{(v)}(0)=0;.....$$
$$f^{(n)}(x)=cos\,(n\pi/2);\ f^{(n+1)}(c)=cos(c+n\pi/2)$$

Формула Маклорена

$$cosx = 1 - x^2/2! + x^4/4! - ..... + cos\,\pi n/2\ \ x^n/n! + cos(\,c+\pi n/2)\,x^{n+1}/(n+1)!$$

и в этом случае, $limR_n(x) = limcos(c+\pi n/2)\,x^{n+1}/(n+1)! = 0$

## Лекция № 16. Исследование поведения функции. Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

### Исследование поведения функции. Возрастание и убывание

**Определение.** Функция $f(x)$ называется возрастающей в интервале $(a,b)$, если для любых значений $x_1$и $x_2$ из этого интервала, $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$. Иными словами, функция f(x) возрастает в интервале $(a,b)$, если большему значению аргумента $x$ соответствует большее значение функции.

Аналогично определяется убывающая функция.

**Теорема** (необходимое условие возрастания). Если функция $f(x)$, имеющая производную в интервале $(a,b)$, возрастает в этом интервале, то её производная $f'(x)\geq 0$ на $(a,b)$.и обратно, (достаточное условие возрастания) если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема в интервале $(a,b)$ и $f'(x)>0$ в $(a,b)$, то эта функция возрастает в $(a,b)$.

**Доказательство**. **Необходимость.** Пусть $f(x)$ возрастает на $(a,b)$. Рассмотрим отношение:

$f\ (x+\Delta x)-f(x)/\ \Delta x$ ; $x(a,b)$.Так как f(x) возрастает в $(a,b)$, то $f(x+\Delta x)-f(x)>0$ при $\Delta x>0$ и $f(x+\Delta x)-f(x)<0$ при $\Delta x<0$.В обоих случаях $f\ (x+\Delta x)-f(x)/\ \Delta x>0$. Следовательно, $Lim f\ (x+\Delta x)-f(x)/\ \Delta x \geq 0$, но $Lim f\ (x+\Delta x)-f(x)/\ \Delta x = f'(x)$ , т.е $f'(x) \geq 0$, что и требовалось доказать.

**Достаточность**. Пусть теперь $f'(x)>0$ при всех $x\in(a,b)$.

Рассмотрим два любых значения $x_1$и $x_2$, $x_1<x_2$, $x_1, x_2\in(a,b)$.

По теореме Лагранжа о конечных приращениях $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$, $x_1<C<x_2$. По условию $f'(c)>0$, $x_2>x_1$, следовательно, $f(x_2)-f(x_1)>0$ или $f(x_2)>f(x_1)$. А это значит, что функция $f(x)$ возрастает в интервале $(a,b)$.

Аналогичным образом доказывается теорема для убывающей функции.

**Геометрический смысл теоремы**. Если в интервале $(a,b)$ функция $f(x)$ возрастает, то касательная к кривой $y=f(x)$ в каждой точке образует острый угол с осью $Ox$. (в некоторых точках касательная параллельна оси $Ox$).

Если функция $f(x)$ убывает в интервале $(a,b)$, то угол наклона касательной к кривой $y=f(x)$-тупой (в некоторых точках этот угол равен 0).

Теорема позволяет определять интервалы возрастания и убывания функции.

**Рассмотрим примеры**. Найти интервалы возрастания и убывания функции.

1. $y=x\ /(1-x^2$ **Решение**. $D(y)=[-1;1]$. Найдём производную.

$y'= x'\ /(\ 1-x^2\ )+x(\ 1-x^2\ )'= 1-x^2 +x\ (2x)/2\ \ 1-x^2 = 1-x^2-x^2/\ \ 1-x^2 = 1-x^2-x^2/\ \ 1-x^2 = 1-2x^2/\ \ 1-x^2$ Приравниваем производную нулю: $1-2x^2=0$; $x^2=1/2$; $x=\pm 1/\sqrt{2}$. Таким образом, в интервале $(-1;\ -1/\sqrt{2}\ )U(1/2;\ 1)$ функция убывает; в интервале $(-1/\sqrt{2}\ ;\ 1/\sqrt{2}\ )$ функция возрастает.

2. $y=lnx-arctgx$ **Решение.** $D(y)=(0,\infty)$. Найдём $y'= 1/x - 1/\ 1+x^2 = 1+x^2-x\ /\ x\ (\ 1+x^2)$

$$y'= 1+x^2-x/x(\ 1+x^2) =0;\ 1+x^2-x=0.\ \ x^2-x+1=0.\ D=1-4<0.$$

Это значит, что $x^2-x+1>0$ во всей области определения. Следовательно, функция возрастает в интервале $(0,\infty)$.

## Экстремумы функции (максимум и минимум)

**Определение.** Функция $y = f(x)$ имеет в точке $x_0$ максимум, если существует такая окрестность точки $x_0$, что для всех точек $x$ из этой окрестности ($x = x_0$) выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$. Число $f(x_0)$ называется максимумом функции $f(x)$.

**Определение**. Функция $y = f(x)$ имеет в точке $x_1$ минимум, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек $x$ из этой окрестности ($x = x_1$) выполняется неравенство $f(x) > f(x_1)$. Число $f(x_1)$ называется минимумом функции $f(x)$.

**Определение.** Максимумы и минимумы функции $f(x)$ называются ее экстремумами.

**Теорема (необходимое условие экстремума).** Если дифференцируемая функция $f(x)$ имеет экстремум в точке $x_1$, то ее производная в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_1) = 0$

**Доказательство**. Пусть для определенности функция $f(x)$ имеет в точке $x_1$ максимум. Тогда при достаточно малой абсолютной величине $\Delta x$ - $f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0$

Рассмотрим отношение $\dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$. Очевидно, что $\dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0$ при $\Delta x < 0$ и $\dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0$ при $\Delta x > 0$.По определению производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = f'(x_1)$$

Таким образом, получим, что $f'(x_1) \geq 0$ при $\Delta x < 0$, и $f'(x_1) \leq 0$ при $\Delta x > 0$ (по теореме о пределе).Так как $f'(x_1)$ есть определенное число, то неравенства $f'(x_1) \geq 0$ и $f'(x_1) \leq 0$ совместимы, если $f'(x_1) = 0$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что если функция имеет производную при всех значениях $x$, то она может иметь экстремум только в точках, в которых производная равна нулю. Обратное утверждение неверно. Производная от функции может обращаться в нуль в некоторой точке, но функция не имеет в этой точке ни максимума, ни минимума.

**Например**, функция $y = x^3$ не имеет экстремума при $x = 0$, хотя ее производная $y' = 3x^2$ обращается в нуль при $x = 0$.

Возможен случай, когда в некоторой точке производная $f'(x)$ не существует, но функция $f(x)$ может иметь в этой точке максимум или минимум. Таким образом, функция может иметь экстремум в точках, где производная существует и равна нулю, и в точках, где производная не существует.

**Определение.** Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называются критическими точками.

**Теорема (достаточное условие экстремума).** Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку $x_0$ и дифференцируема во всех точках этого интервала ( за исключением, быть может, самой точки $x_0$). Если при переходе через точку $x_0$ слева направо производная меняет знак с плюса на минус, то в точке $x_0$ функция имеет максимум. Если при переходе через точку $x_0$ слева направо производная меняет знак с минуса на плюс, то в точке $x_0$ функция имеет минимум.

**Доказательство.** Пусть при переходе через критическую точку $x_0$ производная меняет знак с плюса на минус. Тогда для точек $x$, достаточно близких к точке $x_0$ будем иметь:

$$f'(x) > 0 \text{ при } x < x_0; \quad f'(x) < 0 \text{ при } x > x_0$$

Применим теорему Лагранжа к разности $f(x) - f(x_0)$:

$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, где с лежит между $x$ и $x_0$

1. Для $x < x_0$, $x - x_0 < 0$, $f'(c) > 0$. Поэтому $f(x) - f(x_0) < 0$, т.е. $f(x) < f(x_0)$

2. Для $x > x_0$, $x - x_0 > 0$, $f'(c) < 0$. Поэтому $f(x) - f(x_0) < 0$, т.е. $f(x) < f(x_0)$

Мы получили, что в точках, близких к точке $x_0$, слева и справа, значения функции меньше чем в точке $x_0$.Значит в точке $x_0$ функция $f(x)$ имеет максимум. Аналогично доказывается достаточное условие максимума.

На основании рассмотренных теорем можно сформулировать правило для исследования функции на экстремум:

1. Находим первую производную $f'(x)$.

2. Находим критические точки, т.е. находим точки, где производная равна нулю или не существует.

3. Исследуем знак производной слева и справа от критической точки.

4. Вычисляем значения функции в критических точках.

**Пример.** Исследовать функцию $f(x)=x^2(x-12)^2$ на экстремум.

**Решение:** 1. Находим производную

$f'(x)=2x(x-12)^2+x^2 2(x-12)=4x(x-12)(x-6)$.

2. Приравниваем к нулю $f'(x)$: $4x(x-12)(x-6)=0$

Критические точки: $x_1=0;\ \ x_2=6;\ \ x_3=12$

3. Исследуем знак производной: При переходе через точки $x=0$ и $x=12$ слева направо производная меняет знак с минуса на плюс, а при переходе через точку $x=6$ производная меняет знак с плюса на минус.

Следовательно, в точках $x=0$ и $x=12$ функция имеет минимум, а в точке $x=6$ функция имеет максимум.

4. Находим значение функции в критических точках:

$y_{\min}=y(0)=y(12)=0$ $\qquad$ $y_{\max}=y(6)=1296$

## Наибольшее и наименьшее значение функции

Как мы знаем, непрерывная на отрезке функция принимает на этом отрезке свои наибольшее и наименьшее значения:

Допустим, что M – наибольшее значение и m – наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции нужно:

1. Найти критические точки, лежащие на отрезке $[a,b]$.

2. Определить значения функции в этих критических точках.

3. Найти значение функции на концах отрезка.

4. Из всех полученных выше значений функции выбрать наибольшее, оно будет наибольшим значением функции на отрезке.

Из всех полученных выше значений функции выбрать наименьшее, оно будет наименьшим значением функции на отрезке.

**Пример.** Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=\sqrt{x(10-x)}$.

**Решение.** Найдем область определения функции, решив неравенство $x(10-x)\ge 0$ .Область определения: $D(y)=[0,10]$ .Значит нужно найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке $[0,10]$

1. Находим производную: $y'=\dfrac{10-2x}{2\sqrt{x(10-x)}}=\dfrac{(5-x)}{\sqrt{x(10-x)}}$. $\ y'=0$ при $x=5$

2. Находим $y(5)=\sqrt{5(10-5)}=5$

3. Находим значения функции на концах отрезка $y(0)=y(10)=0$

4. Наибольшее значение M=5, наименьшее значение m=0.

## Лекция №17. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба. Асимптоты. Полное исследование функций

### Выпуклость, вогнутость кривой. Точки перегиба

**Определение.** Кривая называется выпуклой вверх на интервале $(a,b)$, если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной в этом интервале.

**Определение.** Кривая называется выпуклой вниз на интервале $(a,b)$, если все точки кривой лежат выше любой ее касательной в этом интервале.

Кривую, выпуклую вверх, будем называть выпуклой, а кривую, выпуклую вниз – вогнутой.

**Теорема ( достаточное условие выпуклости).** Если в точках интервала $(a,b)$ $f''(x)<0$, то кривая выпукла в этом интервале.

**Доказательство.** Пусть $x_0$ - произвольная точка интервала $(a,b)$. Проведем касательную в этой точке $(x_0, f(x_0))$. $y=f(x)$ - это уравнение кривой. Пусть $\bar{y}=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ - уравнение касательной. Теорема будет доказана, если мы докажем, что разность $y-\bar{y}<0$. Представим разность $y-\bar{y}=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$ в следующем виде:

$$y-\bar{y}=f'(c)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$$

(к разности $f(x)-f(x_0)$ мы применили теорему Лагранжа). Здесь с лежит между $x$ и $x_0$.

$$y-\bar{y}=(f'(c)-f'(x_0))(x-x_0)=f''(c_1)(c-x_0)(x-x_0)$$

(применили теорему Лагранжа к разности $f'(c)-f'(x_0)$). Точка $c_1$ лежит между $c$ и $x_0$.Таким образом, имеем $y-\bar{y}=f''(c_1)(c-x_0)(x-x_0)$

1. Пусть $x>x_0$. Тогда $x_0<c_1<c<x$. Но в этом случае $x-x_0>0$, $c-x_0>0$, $f''(c_1)<0$ по условию. И мы получим: $y-\bar{y}<0$

2. . Пусть $x<x_0$. Тогда $x_0<c<c_1<x$. Но в этом случае $x-x_0<0$, $c-x_0<0$ $f''(c_1)<0$ по условию. И мы получим: $y-\bar{y}<0$. Таким образом, мы доказали, что любая точка кривой лежит ниже любой ее касательной. Это значит, что кривая выпукла.Аналогично можно доказать, что если в интервале $(a,b)$ производная $f''(x)>0$, то кривая $y=f(x)$ вогнута в интервале $(a,b)$.

**Определение.** Точка кривой, отделяющая выпуклую часть графика от вогнутой, называется точкой перегиба.

**Теорема (достаточное условие перегиба).** Пусть непрерывная кривая определяется уравнением $y = f(x)$. Если $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует и при переходе через значение $x = x_0$ производная $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = x_0$ есть точка перегиба.

**Доказательство.** 1. Пусть $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x > x_0$. Тогда при $x < x_0$ кривая выпукла, а при $x > x_0$ кривая вогнута, т.е. в точке $x = x_0$ - перегиб.

2. Если при $x < x_0$ $f''(x) > 0$ и при $x > x_0$ $f''(x) < 0$, то при $x < x_0$ кривая вогнута, а при $x > x_0$ выпукла. Тогда в точке $x = x_0$ - перегиб. Теорема доказана.

**Пример.** Найти точку перегиба графика функции $y = arctgx - x$

**Решение.** Найдем производные $y'$ и $y''$

$$y' = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{1-1-x^2}{1+x^2} = -\frac{x^2}{1+x^2}$$

$$y'' = -(\frac{x^2}{1+x^2})' = -\frac{2x(1+x^2) - x^2 2x}{(1+x^2)^2} = -\frac{2x + 2x^3 - 2x^3}{(1+x^2)^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

Приравняем $y''$ к нулю: $\quad -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0, \;\; x = 0$

При $x < 0$ $y'' > 0$, при $x > 0$ $y'' < 0$ .Следовательно, при $x = 0$ график функции имеет перегиб. $y_{пер} = y(0) = arctg0 - 0 = 0$

## Асимптоты

**Определение:** Асимптотой кривой называется такая прямая, что расстояние от точки M кривой до прямой при неограниченном удалении точки M от начала координат стремится к нулю.Асимптоты бывают вертикальные и наклонные.

1. Вертикальные асимптоты. Прямая x=a будет вертикальной асимптотой кривой *y=f(x)*, если $\lim\limits_{V \to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{V \to a-0} f(x) = \infty$

**Пример.** Кривая $y = \frac{x}{x-1}$ имеет вертикальную асимптоту x=1, таккак $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{x-1} = \infty$ .

2. Наклонные асимптоты. Пусть *y=kx+b* наклонная асимптота, M(x,y)- точка кривой, N- точка, лежащая на асимптоте. MP- расстояние от точки M до асимптоты. По определению асимптоты

$\lim\limits_{x\to\infty} MP = 0$. Из треугольника MNP находим $\frac{MP}{MN} = \cos\alpha$, откуда $MN = \frac{MP}{\cos\alpha}$; Тогда, если $\lim\limits_{x\to\infty} MP = 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty} MN = 0$ и наоборот. Поэтому, чтобы прямая явилась асимптотой кривой, достаточно чтобы $MN \to 0$, т. е. абсолютная величина разности ординат асимптоты и кривой стремилась к нулю при $x \to 0$

Если уравнение асимптоты $y=kx+b$, то $MN = \left|y - \bar{y}\right| = \left|f(x) - (kx+b)\right|$ и

$\lim\limits_{x\to\infty} MN = \lim\limits_{x\to\infty}\left|f(x) - (kx+b)\right| = 0$ Найдём $k$ и $b$.Вынесем $x$ за скобки. Тогда будем иметь $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$ Так как $x \to \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$, но $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x} = 0$. Следовательно $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k\right] = 0$, откуда $k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ (1). Зная $k$, $b$ найдём из условия, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - xk - b\right] = 0$ т.е. $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right]$ (2)

Итак, $y=kx+b$, где $k$ и $b$ находятся по формулам (1) и (2) есть уравнение наклонной асимптоты. В частности, при к=0 мы получаем горизонтальную асимптоту y=b.

**Пример.** Найти асимптоты кривой $y = \frac{x^3}{4x^2 - 1}$

**Решение** . Вертикальные асимптоты находим из условия: $4x^2-1=0$; $4x^2=1$; $x = \pm\frac{1}{2}$ . Прямые $x = \pm\frac{1}{2}$ являются вертикальными асимптотами, так как

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}-0}\frac{x^3}{4x^2-1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}-0}\frac{x^3}{(2x-1)(2x+1)} = -\infty;\quad \lim_{x\to\frac{1}{2}+0}\frac{x^3}{(4x^2-1)} = \lim_{x\to\frac{1}{2}+0}\frac{x^3}{(2x-1)(2x+1)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}-0}\frac{x^3}{4x^2-1} = \lim_{x\to-\frac{1}{2}-0}\frac{x^3}{(2x-1)(2x+1)} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}+0}\frac{x^3}{(4x^2-1)} = \lim_{x\to-\frac{1}{2}+0}\frac{x^3}{(2x-1)(2x+1)} = +\infty$$

Уравнение наклонной асимптоты y=kx+b.

Находим $k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{(4x^2-1)x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{4 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{4}$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{4x^2-1} - \frac{1}{4}x\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{4(4x^2-1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{4x(4-\frac{1}{x^2})} = 0$$

Наклонная асимптота. $y=\frac{1}{4}x$

## Схема общего исследования функции

Полное исследование функции включает:

1. Нахождение области определения функции.
2. Определение точек разрыва функции.
3. Нахождение интервалов возрастания и убывания функции.
4. Нахождение максимумов и минимумов функции.
5. Определение интервалов выпуклости и вогнутости графика функции.
6. Нахождение точек перегиба.
7. Нахождение асимптот графика функции.
8. Построение графика функции.

**Замечание.** Полезно также предварительно некоторые особенности функции: (если они имеются); чётность, нечётность, периодичность, а также найти точки пересечения графика функции с осями координат.

**Примеры.** Построить графики следующих функций, проведя предварительно её полное исследование.

$$y=\frac{4x}{4+x^2}$$

1. Область определения $D(y)=(-\infty;\infty)$
2. Точек разрыва нет.
3. Интервалы возрастания и убывания.

Находим $y'=\frac{16-4x^2}{(4+x^2)^2}$. Находим критические точки: $16-4x^2=0$; $x=-2$, $x=2$. В интервале $(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$ функция убывает, в интервале (-2;2) возрастает.

4. Находим экстремумы функции; $y'=0$ при x=+-2

При переходе через точку x=-2 производная меняет знак с минуса на плюс, а при переходе через точку x=2 производная меняет знак с плюса на минус. Значит, при x=-2 функция имеет минимум, а при x=2 функция имеет максимум.

Найдём $Y_{min}=y(-2)=4(-2)/(4+4)=-1$ $Y_{max}=y(2)=4*2/(4+4)=1$

5. Интервалы выпуклости и вогнутости графика функции. Находим $y'' = \left(\frac{16-4x^2}{(4+x^2)^2}\right) = 4*\left(\frac{4-x^2}{(4+x^2)^2}\right)' = -4*\frac{(2x(4+x^2)+4x(4-x^2))}{(4+x^2)^3} = -\frac{8x(12-x^2)}{(4+x^2)^3}$

$Y''=0$: $8x(12-x^2)=0$; $x=0$; $x^2=12$; $x=\pm 2\sqrt{3}$

График функции вогнутый в интервале $(-2\sqrt{3};0)\cup(2\sqrt{3};\infty)$ и выпуклый в интервале $(-\infty;-2\sqrt{3})\cup(0;2\sqrt{3})$

6. При переходе через точки x=0 и $x=\pm 2\sqrt{3}$ вторая производная меняет знак; следовательно, график функции имеет перегиб в этих точках.

Найдём y(0)=0; $y(-2\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $y(2\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Итак в точках $M_1(0;0)$; $M_2(-2\sqrt{3};-\frac{\sqrt{3}}{2})$; $M_3(2\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{2})$ график функции имеет перегиб.

7. Вертикальных асимптот нет, т. к. функция всюду определена. Найдём наклонную асимптоту.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{(4+x^2)x} = 0 \quad b = \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx] = \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{(4+x^2)} = 0$$

y=0- горизонтальная асимптота.Заметим также, что при x=0 и y=0, т.е. график функции проходит через начало координат.

Так как $y(-x) = -\frac{4x}{4+x^2} = -y(x)$, то функция чётная, и её график симметричен относительно начала координат.

При x>0, y>0, при x<0- y<0. График функции находится в первой и третьей четвертях.

8. Учитывая все данные исследования, построим график функции.

## Лекция № 18. Неопределенный интеграл. Замена переменной. Интегрирование по частям

### Неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке $(a;b)$, если для всех $x\in(a;b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.Например, для функции $x^2$первообразной будет функция $x^3/3$.Если для $F(x)$ установлено равенство $dF(x) = f(x)dx$, то $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, так как $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$.

Рассмотрим две теоремы, которые называются теоремами об общем виде всех первообразных данной функции.

**Теорема 1.** Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $(a;b)$, то $F(x) + C$, где $C$ – число, тоже первообразная для $f(x)$ на $(a;b)$.

**Доказательство.** $(F + C)' = F' + C' = f + 0 = f$

По определению $F + C$— первообразная для $f$.Прежде чем рассмотреть теорему 2, докажем две вспомогательные теоремы.

**Вспомогательная теорема 1.** Если функция $g(x)$ постоянна на $(a;b)$, то $g'(x) = 0$.

**Доказательство.** Так как $g(x) = C$, справедливы равенства: $g'(x) = C' = 0$ (здесь, как и ниже, через $C$ обозначено произвольно выбранное число).

**Вспомогательная теорема 2** Если $g'(x) = 0$ при всех $x \in (a;b)$, то $g(x) = C$ на $(a;b)$.

**Доказательство.** Пусть $g'(x) = 0$ во всех точках $(a;b)$. Зафиксируем точку $x_1 \in (a;b)$. Тогда для любой точки $x \in (a;b)$ по формуле Лагранжа имеем $g(x) - g(x_1) = g'(\xi)(x - x_1)$

Так как $\xi \in (x;\, x_1)$, а точки $x$ и $x_1$ принадлежат промежутку $(a;b)$, то $g'(\xi) = 0$, откуда следует, что $g(x) - g(x_1)=0$, то есть $g(x) = g(x_1)=const$.

**Теорема 2.** Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$ на промежутке $(a;b)$, а $G(x)$ – другая первообразная для $f(x)$ на $(a;b)$, то $G = F + C$, где $C$ – число.

**Доказательство.** Возьмем производную от разности $G - F$: $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$. Отсюда следует: $G - F = C$, где $C$— число, то есть $G = F + C$.

Множество всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке $(a;b)$называется **неопределенным интегралом** и обозначается $\int f(x)dx$. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $C$ – произвольное число.

Вычисление неопределенного интеграла от заданной функции называется интегрированием.

Из определения неопределенного интеграла следует, что каждой формуле дифференциального исчисления $F'(x) = f(x)$ соответствует формула $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ интегрального исчисления. Отсюда получается таблица неопределенных интегралов:

1) $\int dx = x + C$;

2) $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{б+1}}{б+1}$ $(\alpha \neq 1)$;

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

4) $\int e^{x}dx = e^{x} + C$;

5) $\int a^{x}dx = a^{x}\log_{a}e + C$ $(\alpha \neq 1)$;

6) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;

7) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;

8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C$;

9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + C$;

10) $\int \frac{dx}{x^2+1} = \mathrm{arctg}\,x + C =$
$= -\mathrm{arcctg}\,x + C$;

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C =$
$= -\arccos x + C$;

12) $\int \frac{dx}{x(a-x)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a-x}\right| + C$.

Неопределенный интеграл обладает следующими свойствами:

1) $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$;

2) $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$;

3) $d\int f(x)\,dx = f(x)dx$;

4) $\int d\,f(x) = f(x) + C$;

5) $\int kf(x)dx = k\int f(x)\,dx$;

6) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$;

7) Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ $(a \neq 0)$.

Все эти свойства непосредственно следуют из определения.

## Интегрирование методом замены переменной или способ подстановок

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, причем непосредственно подобрать первообразную для f(x) мы не можем, но нам известно, что она существует.

Сделаем замену переменной в подынтегральном выражении, положив $x=\varphi(t)$, (1)
где $\varphi(t)$-непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию. Тогда $dx=\varphi'(t)dt$. Докажем, что в этом случае имеет место следующее равенство

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (2)$$

**Доказательство**: $(\int f(x)dx)'=f(x)$. Правую часть равенства (2) будем дифференцировать по x как сложную функцию, где t-промежуточный аргумент.

$\frac{dx}{dt}=\varphi'(t);\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\varphi'(t)};$ Таким образом имеем

$$(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt)'_x=(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt)'_t\times\frac{dt}{dx}=f[\varphi(t)]\times\varphi'(t)=f[\varphi(t)]=f(x);$$

Следовательно, производные по x от правой и левой частей равенства (2) равны.При интегрировании иногда целесообразнее подбирать замену переменной в виде не x=$\varphi$(t),а $t=\varphi(x)$. Пусть нужно вычислить интеграл $\int\frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)}$ здесь удобно, $\varphi(x)=t$ , $\varphi'(x)dx=dt$

$$\int\frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln|\varphi(x)|+c$$

**Пример 1**: $\int\sqrt{\sin x}\cos xdx$. $t=\sin x$, $dt=\cos xdx$.

$$\int\sqrt{\sin x}\cos xdx=\int\sqrt{t}dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+c=\frac{3}{2}\sin^{\frac{3}{2}}x+c$$

**Пример 2**: $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1+(\frac{x}{a})^2}$, $t=\frac{x}{a}$ $dt=\frac{1}{a}dx$ $dx=adt$

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{adt}{1+(\frac{x}{a})^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{adt}{1+t^2}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}arctgt+c=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+c$$

$$\int\frac{1+\ln x}{3+x\ln x}dx=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln|3+x\ln x|+c$$

## Интегрирование по частям

Пусть *u* и *v* - две дифференцируемые функции от *x*. Тогда, как известно, дифференциал произведения *uv*вычисляется по следующей формуле $d(uv)=udv+vdu$ отсюда интегрируя получим $\int d(uv)=\int udv+\int vdu$ или $\int udv=uv-\int vdu$ (1)
формула (1) называется формулой интегрирования по частям.

Для применения этой формулы подынтегральное выражение следует представить в виде произведения одной функции на дифференциал другой функции.

1.Если под интегралом стоит произведение логарифмической или обратной тригонометрической функций на алгебраическую, то за *u* обычно принимают не алгебраическую функцию.

2.Если $f(x)=P_n(x)\,G(x)$,где $G(x)$-обратная тригонометрическая функция или $f(x)=P_n(x)\log_a x$ т.е. интегралы вида:

$\int P_n(x)\arcsin x\,dx,\ \int P_n(x)\arccos x\,dx,\ \int P_n(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx,\ \int P_n\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$

или

$$\int P_n(x)\begin{Bmatrix}\arcsin x\\ \arccos x\\ \mathrm{arctg}\,x\\ \mathrm{arcctg}\,x\end{Bmatrix}dx$$

**Пример 1.**

$$\int x\ln x\,dx=\begin{vmatrix}\ln x=u & xdx=dV\\ \frac{1}{x}dx=du & \frac{x^2}{2}=V\end{vmatrix}=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{1}{2}xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}+c$$

$$\int \mathrm{arctg}\,x\,dx=\begin{vmatrix}\mathrm{arctg}\,x=u & \mathrm{dv=dx}\\ du=\frac{dx}{1+x^2} & \mathrm{v=x}\end{vmatrix}=x\,\mathrm{arctg}\,x-\int\frac{x}{1+x^2}dx=x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+c$$

$$\int(x^2-2x+5)e^{-x}dx=\begin{vmatrix}e^{-x}=u & dV=(x^2-2x+5)dx\\ -e^{-x}=du & V=\frac{x^3}{3}-x^2+5x\end{vmatrix}=\int e^{-x}(\frac{1}{3}x^3-x^2+5x)+\int(\frac{1}{3}x^3-x^2+5x)e^{-x}dx$$

Задача усложняется, поэтому за *u* надо брать $u=x^2-2x+5$

2. Если под интегралом стоит произведение тригонометрической или показательной функции на алгебраическую, то за *u* обычно принимают алгебраическую функцию. $\int P_n(x)\times\begin{Bmatrix}\sin ax\\ \cos ax\\ e^{ax}\end{Bmatrix}dx$

**Пример 2.** $\int e^x\sin x\,dx=\begin{vmatrix}u=\sin x & e^xdx=dV\\ du=\cos dx & V=e^x\end{vmatrix}=e^x\sin x-\int\cos x e^x dx$

$$\int\cos x e^x dx=\begin{vmatrix}u=\cos x & dV=e^xdx\\ du=-\sin x dx & V=e^x\end{vmatrix}=e^x\cos x+\int e^x\sin x dx$$

$$\int e^x\sin x dx=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x dx$$

$$2\int e^x\sin x dx=e^x(\sin x-\cos x)\qquad \int e^x\sin x dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+c$$

# Лекция № 19. Интегрирование рациональных дробей. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие

Функция вида $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$,где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$–многочлены степеней соответственно m и n называются дробно-рациональной функцией или рациональной дробью.

1) Если m<n, то дробь правильная
2) Если m$\geq$n, то дробь неправильная

Если дробь неправильная, то разделив числитель на знаменатель можно представить данную дробь в виде суммы многочлена некоторой правильной дроби. Всякую неправильную и рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби,разделить числитель на знаменатель по правилу деления монгочлена на многочлен.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = M_n(x) + \frac{F(x)}{f(x)}$$

Здесь M(x)-многочлен; $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ -правильная дробь

Интегрирование многочлена не представляет трудности и вся задача сводится к нахождению интеграла от правильной дроби.

1) $\frac{x^4+1}{x^4-1}$-неправильная 2) $\frac{x^2-2x+9}{(x-1)(x^3+1)}$-правильная

3) $\frac{1}{x^2+4x-3}$-правильная 4) $\frac{2x^4-5x^3+8x^2-7}{x^3+4x}$-неправильная

Определение: Правильные рациональные дроби видов

1) $\frac{A}{x-a}$ 2) $\frac{A}{(x-a)^k}$ ($k$-целый положительный $k\geq 2$)

3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$(корни знаменателя комплексные, т.е. $D$<0)

4) $\frac{Ax+b}{(x^2+px+q)^k}$ $\left(k \geq 2 \ \frac{p^2}{4} - q < 0\right)$

называются простейшими дробями I, II, III, IV типов.

Интегрирование простейших дробей типа I, II, III не составляет большой трудности.

$$1) \int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + c$$

$$2) \int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k} d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{1-k} + c$$

$$3)\int\frac{Ax+b}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Ax+b}{x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q}dx=\int\frac{(Ax+B)}{(x+\frac{p}{4})^2+(q-\frac{p^2}{4})}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} x+\frac{p}{2}=t & q-\frac{p^2}{4}=a^2 \\ x=t-\frac{p}{2} & \\ dx=dt & \end{matrix}\right|=\int\frac{A(t-\frac{p}{2})+B}{t^2+a^2}dt=A\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+(B-A\frac{p}{2})\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{A}{2}\ln\left|t^2+a^2\right|+$$

$$+(B-A\frac{p}{2})\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+c=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{(B-A\frac{p}{2})}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+c$$

**Пример 1.**

$$\int\frac{3x-4}{x^2+2x+5}dx=\int\frac{3x-4}{(x+1)^2+4}dx=\left|\begin{matrix} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{matrix}\right|=\int\frac{3(t-1)-4}{t^2+4}dt=3\int\frac{tdt}{t^2+4}-7\int\frac{dt}{t^2+4}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|t^2+4\right|-\frac{7}{2}arctg\frac{t}{2}+c=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|-\frac{7}{2}arctg\frac{x+1}{2}+c$$

Более сложных вычислений требует интегрирование простейших дробей IV типа.

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx$$

$$J=\frac{A}{2}\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}=\frac{A}{2}\int(t^2+a^2)^{-k}d(t^2+a^2)=\frac{1}{2}\frac{(t^2+a^2)^{-k+1}}{1-k}+c$$

$$J=\frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}+c$$

$$j_k=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^k}dt=\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2+a^2}{(t^2+a^2)^k}dt-\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}dt=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left[J_{k-1}-\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}dt\right]$$

$$\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}dt=\left|\begin{matrix} t=u & \frac{t^2}{(t^2+a^2)^k}dt=dV \\ dt=du & V=\frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} \end{matrix}\right|=\frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}-\int\frac{dt}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}=$$

$$\frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}-\frac{1}{2(1-k)}J_{k-1}$$

$$J_k=\frac{1}{a^2}\left[J_{k-1}+\frac{1}{2(1-k)}J_{k-1}-\frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}\right]=\frac{1}{a^2}\left[\frac{3-2k}{2(1-k)}J_{k-1}-\frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}\right]$$

Подставляя в интеграл 4-го типа найденные интегралы $J$, $J_k$, получим

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = A\frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + (B - A\frac{p}{2})\left[\frac{3-2k}{2(1-k)}J_{k-1} - \frac{t}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}\right]\frac{1}{a^2}$$

**Пример 2.**

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx = \int \frac{x-1}{\left((x+1)^2+2\right)^2}dx = \begin{vmatrix} x+1=t \\ x=t-1 \\ dx=dt \end{vmatrix} = \int \frac{t-2}{(t^2+2)^2}dt = \int \frac{tdt}{(t^2+2)^2} - 2\int \frac{dt}{(t^2+2)^2}$$

$$J = \frac{1}{2(1-2)(t^2+2)^{2-1}} = \frac{1}{-2(t^2+2)}$$

$$\int \frac{tdt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+2)}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int (t^2+2)^{-2}d(t^2+2) = \frac{1}{2}\frac{(t^2+2)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2(t^2+2)}$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+2-t^2}{(t^2+2)^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+2)^2}$$


$$\int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+2-t^2}{(t^2+2)^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+2)^2}$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+2-t^2}{(t^2+2)^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+2)^2}$$


**Пример 3.**

$$\int \frac{x-1}{x^2+2x+5}dx = -\frac{1}{2(t^2+1)} - 2\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}(-\frac{}{2(t^2+2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}})\right] =$$

$$= -\frac{1}{2(t^2+2)} - \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{t}{2} + c = -\frac{t+1}{2(t^2+2)} - \frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}} + c =$$

$$= -\frac{x+2}{2(x^2+2x+6)} - \frac{\sqrt{2}}{4}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}} + c$$

Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где m<n можно разложить в сумму простейших дробей. Это разложение зависит от разложения знаменателя $Q_n(x)$ на линейные и квадратичные множители.

Пусть $Q_n(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\mu (x^2+Rx+S)^\nu$

$\alpha + \beta + 2\nu + 2\mu = n$ $a, b, p, q, R, S$ – const, $\alpha, \beta, \mu, \nu$ - натуральные числа

**Теорема**: Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $Q_n(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\mu (x^2+Rx+S)^\nu$ можно разложить в виде:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+$$
$$+\frac{C_1+D_1}{(x^2+px+q)}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{C_\mu x+D_\mu}{(x^2+px+q)^\mu}+\frac{Ex+D}{x^2+Rx+S}+\frac{E_1x+D_1}{(x^2+Rx+S)^2}+$$
$$+\ldots+\frac{E_\nu x+D_\nu}{(x^2+Rx+S)^\nu}$$

Простым действительным линейным множителям знаменателя соответствуют простейшие дроби I,II типов, а квадратичным множителям соответствует I и IV типа.

Итак, можно вписывать правило интегрирования рациональных дробей.

1.Если рациональная дробь неправильная, то путем деления числителя на знаменатель выделить из нее целую часть и записать эту дробь как суммы этой целой части и правильной дроби.

2.Знаменатель правильной дроби разложить на линейные и квадратичные множители.

3.Правильную дробь разложить в сумму простейших дробей с неизвестными коэффициентами.

4.Найти эти неизвестные коэффициенты.

5.Найти интеграл от целой части и от полученных простейших дробей.

Рассмотрим примеры.

**Пример 4.** $\int\frac{20x^2-25x-25}{(x+2)(x-3)(3x-1)}dx$

$Q(x)=(x+2)(x-3)(3x-1)$ Все корни действительные и различные в этом случае дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби I типа

$$\int\frac{20x^2-25x-25}{(x+2)(x-3)(3x-1)}dx=\int\frac{A}{x+2}dx+\int\frac{B}{x-3}dx+\int\frac{C}{3x-1}dx$$
$$\frac{20x^2-25x-25}{(x+2)(x-3)(3x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{3x-1}$$
$$20x^2-25x-25=A(x-3)(3x-1)+B(x+2)(3x-1)+C(x+2)(x-3)$$

Для нахождения $A,B,C$ применим метод частных значений.

при $x=-2$ $35A=105$ $A=3$

при $x=3$ $40B=80$ $B=2$

при $x=\frac{1}{3}\ \frac{7}{3}(-\frac{8}{3})C=\frac{20}{9}-\frac{25}{3}-25$; с=5

$$\int\frac{20x^2-25x-25}{(x+2)(x-3)(3x-1)}dx=3\int\frac{dx}{x+2}+2\int\frac{dx}{x-3}+5\int\frac{dx}{3x-1}=3\ln|x+2|+2\ln|x-3|+\frac{5}{3}\ln|3x-1|+c$$

**Пример 5.** $\int \frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}dx \; Q(x)=(x-2)^2(x+3)$

Корни знаменателя действительны, причем некоторые из них кратные

$$\frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

$$x^2+2x+2=A(x-2)^2+B(x-2)(x+3)+C(x+3)$$

Метод частных значений: $A(x-2)^2+B(x-2)(x+3)+C(x+3)=x^2+2x+2$

При x=2 5c=10; c=2; при x=-3; 25A =5; $A=\frac{1}{5}$

При x=0 4A-6B+3c=2; $\frac{4}{5}-6B+6=2; B=\frac{4}{5}$;

$$\int\frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+3}+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x-2}+2\int\frac{dx}{(x-2)^2}=\frac{1}{5}\ln|x+3|+\frac{4}{5}\ln|x-2|+\frac{2}{x-2}+c$$

**Пример 6.** $\int\frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}$

$Q_n(x)=(x^2+1)(x-1)$. Среди корней знаменателя есть комплексные неповторяющиеся (т.е. различные).

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{c}{x-1}$$

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{(Ax+B)(x-1)+c(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}; \quad x=(Ax+B)(x-1)+c(x^2+1)$$
$$x=Ax^2+x(B-A)+cx^2+c-b$$

полагая x=1 2c=1; c=$\frac{1}{2}$ полагая x=0 x=0 C-B=0; B=C; B=$\frac{1}{2}$

$$x^2: A+c=0; A=-c; A=-\frac{1}{2};$$

$$\int\frac{xdx}{(x^2+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=-\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\frac{1}{2}arctgx+\frac{1}{2}\ln|x^2+1|.$$

I-интеграл был рассмотрен в примере №2 IV типа.

Из всего вышеизложенного следует, что интеграл от $\forall$ рациональной функции может быть выражен через элементарные функции в конечном виде, а именно: через логарифмическую функцию-в слу-чае I типа, через рациональную функцию-в случае II типа, через ло-гарифмическую и arctg-в случае III типа, через рациональную и arctg -в случае IV типа.

## Лекция № 20. Интегралы от тригонометрических функций

1.Рассмотрим интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$; R(sinx,cosx) рациональная функция относительно функций. Такие интегралы приводятся к интегралам от рациональной функции с помощью подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ (универсальная подстановка). Выразим *sinx, cosx,* и*dx* через *t*.

$$\frac{x}{2}=arctgt; \quad x=2\operatorname{arctg}t; \quad dx=\frac{2d}{1+t^2};$$

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}; \int R(\sin x,\cos x)dx=\int R(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2dt}{1+t^2};$$

**Пример.** $\displaystyle\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\begin{vmatrix} tg\frac{x}{2}=t & \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} & \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{vmatrix}=$

$$=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left[\frac{8t}{(1+t^2)}+\frac{3(1+t^2)}{(1+t^2)}+5\right]}=\int\frac{2dt}{(1+t^2)(\frac{8t+3-3-3t^2+5+5t^2}{(1+t^2)})}=$$

$$=2\int\frac{dt}{2t^2+8t+8}=\int\frac{dt}{t^2+4t=4}=\int\frac{dt}{(t+2\ )^2}=\int\frac{d(t+2)}{(t+2)^2}=\int(t+2)^{-2}d(t+2)=\frac{(t+2)^{-1}}{-1}+c$$

$$=-\frac{1}{t+2}+c==-\frac{1}{tg\frac{x}{2}}+c$$

Итак, интеграл вида I всегда может быть приведен к интегралу от рациональной функции с помощью универсальной подстановки.

Но вычисление этих интегралов с такой подстановкой приводит к сложным преобразованиям. Покажем некоторые простые подстановки:

1) Если интеграл имеет вид $\int R(\sin x)\cos xdx$, то подстановка *sinx=t* , *cosxdx=dt* приводит этот интеграл к виду: $\int R(t)dt$

2) Если интеграл имеет вид; $\int R(\cos x)\sin xdx$, то он приводится к интегралу от рациональной функции заменой *cosx=t, -sinxdx=dt.*

3) Если подинтегральная функция зависит только от *tgx,* то замена *tgx=t, x=arctgt,*

$dx=\frac{dt}{1+t^2}$ приводит этот интеграл к интегралу от рациональной функции: $\int R(tgx)dx=\int R(t)\frac{dt}{1+t^2}$.;

4) Если интегральная функция имеет вид: R(sinx, cosx), но sinx и cosx входят только в четных степенях, то применяется та же подстановка. tgx=t, так как $\sin^2 x$и $\cos^2 x$ выражаются рационально через tgx:

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+tg^2x}=\frac{1}{1+t^2};\ \sin^2 x=\frac{1}{1+tg^2x}=\frac{t^2}{1+t^2};\ dx=\frac{dt}{1+t^2}$$

**Пример**:

$$\int\frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx=\int\frac{\sin^2 x\sin x}{2+\cos x}dx=\int R(\cos x)\sin xdx=\int\frac{1-\cos^2 x}{2=\cos x}\sin xdx=\left|\begin{matrix}\cos x=t\\ \sin xdx=-dt\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{1-t^2}{2+t}dt=\int(t-2+\frac{3}{2+t})dt=\frac{t^2}{2}-2t+3\ln(2+t)+c=\frac{\cos^2 x}{2}-2\cos x+\ln(2+\cos x)+c;$$

**1. Если подинтегральная функция является нечетной относительно sinx, т.е. а) *R(-sinx.cosx)=-R(sinx.cosx),* то *t=sinx***

б) Если подинтегральная функция четная и относительно sinx и cosx

*R(-sinx,-cosx)=R(sinx,cosx),*то*t=tgx.*

**Пример**

$$\int\frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^4 x}}dx=\left|\begin{matrix}\text{нечетная относительно}\sin x & \\ t=\cos x\ | & dt=-\sin xdx\end{matrix}\right|=\int\frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\sqrt[5]{\cos^4 x}}dx=$$

$$-\int\frac{(1-t^2)}{\sqrt[5]{t^4}}dt=\int\frac{t^2-1}{\sqrt[5]{t^4}}dt=\int(t^{2-\frac{4}{5}}-t^{-\frac{5}{4}})dt=\int t^{\frac{5}{6}}dt-\int t^{-\frac{5}{4}}dt=\frac{5}{11}t^{\frac{11}{5}}-5t^{\frac{1}{5}}+c=\frac{5}{11}(\cos x)^{\frac{5}{11}}-5\sqrt[5]{\cos x}+c$$

III. Рассмотрим интегралы вида $\int\sin^m x\cos^n xdx$

а)числа m и n –целые и положительные , и хотя бы одно из них нечетное число. Пусть *m=2k+1; t=cosxsinxdx=-dt*

$$\int\sin^{2k-1}x\cos^n xdx=\int\sin^{2k}x\cos^4 x\sin xdx=\int(1-\cos^2 x)^k\cos^n x\sin xdx=-\int(1-t)^k t^n dt$$

$$\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx=\int\frac{\cos^2 x\cos xdx}{\sin^4 x}=\left|\begin{matrix}t=\sin x\\ dt=\cos xdx\end{matrix}\right|=\int\frac{(1-\sin^2 x)}{\sin^4 x}\cos xdx=\int\frac{1-t^2}{t^4}dt=\int\frac{dt}{t^4}-\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{t}+c=$$

$$-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{1}{\sin x}+c;$$

б)*m* и *n* –целые положительные и четные. Применяем формулы понижения степени $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};$sinxcosx=$\frac{\sin 2x}{2};$

$$\int \cos^4 x dx = \left| \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \right| = \int (\frac{1+\cos 2x}{2})^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int (\frac{1+\cos 4x}{2}) dx = \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + c =$$

$$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c;$$

в)*m* и *n* –четные и хотя бы одно из них отрицательное. Здесь следует сделать замену *tgx=t* или *ctgx=t*

**Пример:**

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \left| \begin{matrix} t = tgx & 1+tg^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ & dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{matrix} \right| = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int tg^2 x \frac{1}{\cos^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int t^2 dt + \int t^4 dt =$$

$$\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + c = \frac{tg^3 x}{3} + \frac{tg^5 x}{5} + c;$$

Произведения подинтегральной функции преобразуют в сумме по известным формулам:*cosmxcosnx*=$\frac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x)$

*sinmxsinnx*=$\frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x);$

*sinmxcosnx*=$\frac{1}{2}(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x);$

$$\int \sin kx dx = -\frac{1}{k}\cos kx + c; \qquad \int \mathrm{coskxdx} = \frac{1}{\mathrm{k}}\sin kx + c;$$

Пример:

**1)** $\int \sin 2x \cos 6x dx = \int \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 4x) dx = -\frac{1}{16}\cos 8x = \frac{1}{12}\cos 4x = c;$

**2)** $\int \cos 3x \cos x dx = \int \frac{\cos 2x = \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x + c;$

В функциях, интегралы от которых не выражаются через элементарные функции.

Не всякая первообразная, даже тогда, когда она существует, выражается в конечном виде через элементарные функции.

Например:

$\int e^{-x^2} dx$ -интеграл Пуассона, $\int \cos x^2 dx$ -интеграл Френеля

$\int \frac{\sin x}{x} dx$ -интегральный синус, $\int \frac{\cos x}{x} dx$ -интегральный косинус $\int \frac{dx}{\ln x}$ -интегральный логарифм, $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-x^2} dx$ -интеграл Лапласа, все эти интегралы в конечном виде не выражаются и находят их приближенным способом.

## Лекция №21. Интегралы от иррациональных функций

I. Рассмотрим интеграл $\int R(x, x^{\frac{m}{n}}, ..., x^{\frac{r}{s}})dx$ R-рациональная функция. Пусть k-общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, ..., \frac{r}{s}$. Сделаем подстановку: $x = t^k;\ dx = kt^{k-1}dt$ . Тогда каждая дробная степень x выражается через целую степень *t* и, следовательно, подинтегральная функция, преобразуется в рациональную функцию от *t*.

**Пример 1.**

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{3}{4}}+1} = \begin{bmatrix} x = t^4 & x^{\frac{1}{2}} = t^2 \\ dx = 4d^3dt & x^{\frac{3}{4}} = t^3 \end{bmatrix} = \int \frac{t^2 4t^3 dt}{t^3+1} = 4\int \frac{t^5 dt}{t^3+1} =$$

$$= 4\int (t^2 - \frac{t^2}{t^3+1})dt = 4\int t^2 dt - 4\int \frac{t^2}{t^3+1}dt = \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\ln\left|t^3+1\right| + c =$$

$$= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}\ln\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right| + c$$

II. Рассмотрим интеграл вида

$$\int R\left[x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{m}{n}} \dots (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{r}{s}}\right]dx$$

Этот интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки.

$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ *k*-общий знаменатель. Из этой замены найдем *x* и *dx*

$$ax+b = cxt^k + dt^k; \qquad x = \frac{dt^k - b}{a - ct^k}$$

$$dx = \frac{kdt^{k-1}(a-ct^k) + ckt^{k-1}(dt^k - b)}{(a-ct^k)^2}dt = \frac{kt^{k-1}(da - dct^k + cdt^k - cb)}{(a-ct^k)^2}dt =$$

$$= \frac{kt^{k-1}(da-cb)}{(a-ct^k)^2}dt$$

Заменяя *x, dx* и дробное выражение, получим интеграл от рациональной функции.

**Пример 2**. Найти интеграл:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{x-3}}=\begin{vmatrix}x-3=t^3\\dx=3t^2dt\\t=\sqrt[3]{x-3}\end{vmatrix}=\int\frac{(t^3+3)3t^2dt}{t}=3\int(t^4+3t)dt=\frac{3}{5}t^5+\frac{9}{2}t+c=$$

$$=\frac{3}{5}(x-3)\sqrt[3]{(x-3)^2}+\frac{9}{2}t+c\sqrt[3]{(x-3)^2}+c$$

III. Рассмотрим интеграл.

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

Такой интеграл приводится к интегралу от рациональной функции новой переменной с помощью следующих подстановок Эйлера.

1. Первая подстановка Эйлера

Если a>0, то полагаем $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t$. Возводим обе части в квадрат $ax^2+bx+c=ax^2+2\sqrt{a}xt+t^2$. $x(b-2\sqrt{a}t)=t^2-c$.

$$x=\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t},\ dx=\frac{2t(b-2\sqrt{a}t)+2\sqrt{a}(t^2-c)}{(b-2\sqrt{a}t)^2}dt,\ \sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+t=\sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}+t$$

Подставляя $x,\sqrt{ax^2+bx+c}$ и $dx$ в интеграл $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$, мы сведем его к интегралу от рациональных функций от *t.*

2. Вторая подстановка Эйлера.Если $c>0$, то полагаем

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$$

$$ax^2+bx+c=x^2t^2+2xt\sqrt{c}+c\quad |:x$$

$$ax+b=xt^2+2t\sqrt{c}$$

$$x=\frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}$$

$dx=\dfrac{2\sqrt{c}(a-t^2)+2t(2\sqrt{c}t-b)}{(a-t^2)^2}dt$. Подставляя $x,\sqrt{ax^2+bx+c}$ и $dx$ в интеграл $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$, мы сведем его к интегралу от рациональных функций от *t.*

**Пример 3.** $\displaystyle\int\frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx$.

$$\sqrt{1+x+x^2}=xt+1$$

$$1+x+x^2=x^2t^2+2xt+1$$

$$1+x=xt^2+2t;\qquad x=\frac{2t-1}{1-t^2}$$

$$dx = \frac{2(1-t^2)+2t(2t-1)}{(1-t^2)^2}dt = \frac{2-2t^2+4t^2-2t}{(1-t^2)^2}dt = \frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}dt$$

$$\sqrt{1+x+x^2} = xt+1 = \frac{2t-1}{1-t^2}\cdot t+1 = \frac{2t^2-t+1-t^2}{1-t^2} = \frac{t^2-t+1}{1-t^2}$$

$$1-\sqrt{1+x+x^2} = 1-\frac{t^2-t+1}{1-t^2} = \frac{-2t^2+t}{1-t^2}$$

$$\int\frac{(-2t^2+t)^2(2t^2-2t+2)dt}{\frac{t^2-t+1}{1-t^2}(\frac{2t-1}{1-t^2})^2(1-t^2)} = \int\frac{(t-2t^2)^2(1-t^2)2(t^2-t+1)}{(t^2-t+1)(2t-1)^2}dt =$$

$$= \int\frac{t^2(1-2t)^2}{(1-2t)^2}(1-t^2)dt = \int t^2dt - \int t^4dt = \frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+c$$

3. Третья подстановка Эйлера.

Пусть $\alpha и \beta$ - действительные корни трехчлена $ax^2+bx+c$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-2)t$$

Так как $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ , то $\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t$ ,

$a(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)^2t^2$, $x = \dfrac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}$

IV. Рассмотрим интеграл $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.

$$\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int\frac{Ax+B}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}}}dx = \int\frac{A(x+\frac{b}{2a})-\frac{Ab}{2a}+B}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}}}dx =$$

$$= A\int\frac{(x+\frac{b}{2a})}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}}}dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{1}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}}}dx$$

Если в этих интегралах произведем замену $x+\dfrac{b}{2a}=t$, то первый из них приводится к интегралу от степенной функции

$$I_1 = \left|\begin{matrix} t = x+\frac{b}{2a} \\ dt = dx\end{matrix}\right| = A\int\frac{\frac{1}{2a}d(at^2-\frac{b^2}{4a})}{\sqrt{at^2-\frac{b^2}{4a}}} = \frac{A}{a}\sqrt{at^2-\frac{b^2}{4a}} = \frac{A}{a}\sqrt{a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a}} = \frac{A}{a}\sqrt{ax^2+bx+c},$$

а второй к табличному интегралу.

**Пример 5.**

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \left|\begin{matrix} t=(x^2+4x+5)' & \\ t = x+2 & x=t-2 \\ dx = dt & \end{matrix}\right| = \int\frac{(t-2)dt}{\sqrt{t^2-4t+4+4t-8+5}} =$$

$$= \int\frac{(t-2)dt}{\sqrt{t^2+1}} = \int\frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}} - 2\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \sqrt{t^2+1}-2\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+c$$

V. Во многих случаях для вычисления интегралов вида $\int R\left(x;\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ ( $a \neq 0$ ) воспользуются тригонометрическими преобразованиями. Для этого из квадратного трехчлена выделяем полный квадрат и произведем замену $t = x + \frac{b}{2a}$ . Тогда $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{at^2 + (c - \frac{b^2}{4a})}$ .

Рассмотрим всевозможные случаи:

1. $a > 0, c - \frac{b^2}{4a} > 0$. В этом случае введем обозначения $a = p^2, c - \frac{b^2}{4a} = q^2$ тогда $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{p^2t^2+q^2}$ ;

2. $a > 0, c - \frac{b^2}{4a} < 0$ . В этом случае введем обозначения $a = p^2, c - \frac{b^2}{4a} = -q^2$, тогда $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{p^2t^2-q^2}$ ;

3. $a <, c - \frac{b^2}{4a} > 0$. В этом случае введем обозначения $a = -p^2, c - \frac{b^2}{4a} = q^2$ тогда $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{q^2 - p^2t^2}$ ;

4. $a < 0, c - \frac{b^2}{4a} < 0$. Тогда $\sqrt{ax^2+bx+c}$ не имеет смысла.

Таким образом, интеграл $\int R\left(x;\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ сводится к одному из интегралов $\int R\left(t;\sqrt{p^2t^2+q^2}\right)dt$ $\int R\left(t;\sqrt{p^2t^2-q^2}\right)dt$ $\int R\left(t;\sqrt{q^2-p^2t^2}\right)dt$.

Первый из них с помощью замены $t = \frac{q}{p} tgz$, вторую $t = \frac{q}{p}\frac{1}{\cos z}$, а третью $t = \frac{q}{p}\sin z$ можно привести к рацион. функции от $\sin z$ и $\cos z$.

VI. Интегралы вида: $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$; Замена $x - \alpha = \frac{1}{t}; \quad x = \frac{1}{t} + \alpha; \quad dx = -\frac{dt}{t^2}$

**Пример 6.**

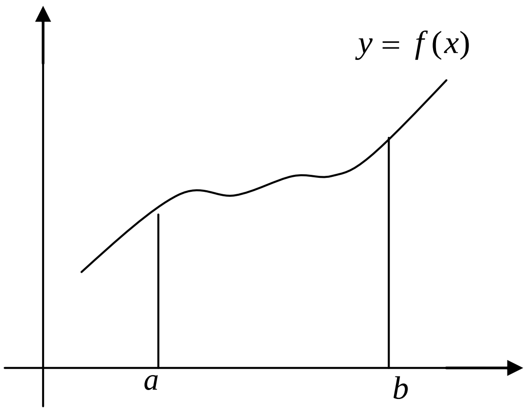
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{7x^2-6x-1}} = \left| x = \frac{1}{t}; \quad dx = -\frac{dt}{t^2} \right| = -\int \frac{t \cdot tdt}{t^2\sqrt{7-6t-t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{16-6t-t^2-9}} =$$

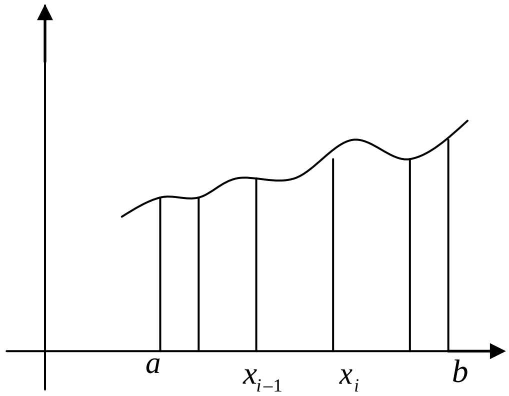
$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{4^2-(t+3)^2}} = -\arcsin\frac{t+3}{4} + c = -\arcsin\frac{1+3x}{4x} + c;$$

## Лекция № 22. Определённый интеграл. Задачи, приводящие к определённому интегралу. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной в определённом интеграле. Интегрирование по частям

### Задачи, приводящие к определённому интегралу

Требуется найти площадь любой плоской фигуры, ограниченной замкнутой линией.Частный случай: Пусть фигура ограничена прямыми $x=a, x=b$ , осью Ох и кривой $y=f(x)$, причём $f(x) \geq 0$. Такая фигура называется криволинейной трапецией.Отрезок $[a , b]$ разобьём на $n$ частей точками $a=x_0$ , $x_1, \dots$ , $x_n=b$. Через точки деления проведём прямые параллельные оси $Oy$и получим $n$ криволинейных трапеций.Пусть $\Delta S_1$ , $\Delta S_2$ ,$\Delta S_3$ , ..., $\Delta S_n$ – площади соответствующих трапеций




Найдем площадь $\Delta S_i$. Длина отрезка $[x_{i-1} ,x_i]$ считается настолько малым, что $\Delta S_i \approx f(\xi_i)\,\Delta x_i$ , где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$,

$$S = \lim_{\max|\Delta x|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

при $n \to \infty$ точное значение площади

Рассмотренная задача привела к определённому интегралу.

**Определение определённого интеграла.** Пусть дана функция $y=f(x)$ на отрезке $[ a , b ]$ непрерывная.

Выполним следующие действия:

1. Разобьём отрезок на n – частей

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \quad [x_0, x_1], [x_1, x_2] \ldots [x_{n-1}, x_n].$$

2. В каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольно по точке $\xi_i$. Находим значение функции в этих точках как $f(\xi_i)$.

Составим произведение $f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_i)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$\tau_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Пусть $n \to \infty$, $n$- число малых отрезков, причём $\max |\Delta x_i| \to 0$

$$\lim_{\max|\Delta x_n| \to 0} \tau_n = \lim_{\max|\Delta x_n| \to 0} \sum f(\xi_i)\Delta x_i$$

**Определение.** Конечный предел интегральной суммы, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a,b]$ на $n$- частей и от выбора точек $\xi_i$ в каждой из них, называется определённым интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$

$$\lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

здесь $x$– интегральная переменная, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$– подынтегральное выражение, $a$ – нижняя граница интегралов или нижний предел, $b$– верхняя граница или верхний предел

**Определение.** Функция $y=f(x)$, для которых существует интеграл называется интегрируемой на отрезке $[a,b]$

**Теорема**. (О существовании определённого интеграла).

Если функция $y= f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Условия непрерывности функции являются достаточными для существования определённого интеграла.

В общем случае, если функция ограничена на отрезке [a,b] и имеет конечное число точек разрыва, то она интегрируема.

## Свойства определённого интеграла.

1. Если поменять местами пределы интегрирования, то интеграл изменит свой знак

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

2. $\int_a^b f(x)dx = 0$

3.Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

4. Определённый интеграл от суммы или разности двух функций равны сумме или разности двух интегралов от этих функций

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

5. Если [*a,b*] разбит на части точкой с, где $a<c<b$, то определённый интеграл по отрезку [*a,b*] равен сумме определённых интегралов по его частям

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

**Доказательство:** Так как разбиение [a,b] выполняется произвольно , то и с можно взять за $c=x_к$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=k+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

6. Если функция не отрицательна на [*a,b*], то определённый интеграл также

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0$$

**Доказательство:** Так как $f(x)\ge 0$ на [*a,b*], то $f(\xi_i)\ge 0$, $f(\xi_i)\Delta x\ge 0$, отсюда

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum f(\xi_i)\Delta x_i \ge 0$$

7. Если $f(x)\ge\varphi(x)$ на [*a,b*], то $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b \varphi(x)dx$

**Доказательство:** Пусть $f(x)\ge\varphi(x) \Rightarrow f(x)-\varphi(x)\ge 0$ по свойству 6.

$$\int_a^b (f(x)-\varphi(x))dx \ge 0$$

по свойству 4.

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge 0 \int_a^b \varphi(x)dx$$

8. Теорема о среднем. Если функция $y= f(x)$ непрерывна на [*a,b*] , то внутри этого отрезка существует хотя бы одна точка с, для которой справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)*(b-a)$$

**Доказательство:** Так как *f(x)* непрерывна на [*a,b*], то эта функция имеет наибольшее и наименьшее значения. *M*- наибольшее значение, m- наименьшее значение для всех $x \in [a,b]$ $m \le f(x) \le M$.

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

$$\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx, \qquad m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

Так как функция непрерывная, то существует точка c, для которых

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

$m \le f(c) \le M$, $f(c)$ – среднее значение функции.

Так как функция непрерывна, то она принимает все значения, заключённые между *m* и *M*, следовательно, при некотором значении c $(a<\xi<b)$ $c=f(\xi)$

Определённый интеграл $\int f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции. $f(c)\,(b\text{-}a)$ – площадь прямоугольника с основанием равным длине отрезка [*a,b*] и высотой равной значению функции в некоторой точке. Итак, площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с тем же основанием.

В этом заключается геометрический смысл теоремы о среднем.

**Производная от интеграла по переменной верхней границе.** Пусть дан $\int_a^b f(x)dx$, где *f(x)*- заданная непрерывная ф/я на **[***a , b***].** Этот интеграл зависит от границ интегрирования.

Пусть *a*–закреплена, а *b* –меняется. Обозначим *b* через *x*, а переменную интегрирования через t.

$$\int_a^x f(x)dt = I(x)$$

Функция *I(x)* называется интегралом по переменной верхней границе.

**Теорема**: Производная интеграла по переменной верхней границе равна подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена верхней границей:

$$I'(x) = (\int_a^x f(t)d(t)'_x = f(x) \qquad \frac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx = f(x)$$

**Доказательство**: По определению $I'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta x}$

$$\Delta I = I(x+\Delta x) - I(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Применим к последнему интегралу теорему о среднем

$$\Delta I = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)(x+\Delta x - x) = f(c)\Delta x \qquad c\in [\, x\, ,\, x+\Delta x\, ]$$

$$I'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = \begin{bmatrix} при & \Delta x \to 0 \\ c \to x & \end{bmatrix} = \lim_{x \to c} f(c) = f(x)$$

Итак, $I'(x) = (\int_a^x f(t)dt)'_x = f(x)$

Доказанная теорема является одним из основных в курсе математического анализа. Эта теорема устанавливает связь между определённым интегралом и производной.

## Формула Ньютона-Лейбница

Вычислить определённые интегралы непосредственно по определению сложно даже для простейших функций. На практике определённые интегралы находят по формуле Ньютона-Лейбница.

Пусть дан $\int_a^b f(x)dx.$ Если *F(x)* - одно из первообразных для *f(x)*, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница читается: *Определённый интеграл равен приращению первообразной на отрезке интегрирования.*

**Доказательство:** По определению $\int_a^x f(t)dt = f(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) + c$$

Две первообразные отличаются на постоянную *I(x)=F(x)+c*

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + c \qquad \textbf{(1)}$$

Для определения постоянного с предположим *x = a,* тогда

$$\int_a^a f(t)dt = F(x) + c$$

*C = -F(x);*следовательно,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

Полагая *x = b,* получим формулу Ньютона-Лейбница,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

**Примеры** :

1. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = arctgx \Big|_{-1}^{1} = arctg1 - arctg(-1)$

2. $\int_1^4 \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2}\ln|2x-1| \Big|_1^4 = \frac{1}{2}[\ln 7 - \ln 1] = \frac{1}{2\ln 7}$ .

### Замена переменной в определённом интеграле

Пусть дан определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где *f(x)* непрерывна на **[***a, b***]** и пусть *x = φ(x).*

**Теорема:** Если 1.*φ(α)=a, φ(β)=b,* **2.** *φ(t) и φ'(t)* непрерывно при *t* Є *[α, β]* то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

**Доказательство**: Если *F(x)* – первообразная для *f(x)* , то

$$\int f(x)dx = F(x) + c \qquad (2)$$

$$\int f(\varphi(t)\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c \qquad (3)$$

Из (1) получим $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ Из (2) получим

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) \Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

Теорема доказана.

**Пример:**

1. $$\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left| \begin{matrix} \sqrt{x} = t & \textit{при} \quad x=0 \quad t=0 \\ x^2 = t^2 & \textit{при} \quad x=1 \quad t=1 \\ dx = tdt & \end{matrix} \right| = \int_0^1 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_0^1 \frac{t+1-1}{t+1}dt = 2\int_0^1 dt - 2\int_0^1 \frac{dt}{t+1} =$$

$$= 2t \Big|_0^1 - 2\ln|t+1| \Big|_0^1 = 2 - 2\ln 2 = 2 - \ln 4$$

2. $$\int_1^t \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x}dx = \left| \begin{matrix} t = \ln x + 1 & \textit{при} \quad x=1 \quad t \to 1 \\ dt = \dfrac{dx}{x} & \textit{при} \quad x=e \quad t \to 2 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_1^2 \sqrt[4]{t}dt = \frac{4t^{5/4}}{5} \Big|_1^2 = \frac{4}{5}(2^{5/4} - 1^{5/4}) = \frac{4}{5}(\sqrt{2^4 \cdot 2} - 1) = \frac{4}{5}(2\sqrt{2} - 1)$$

## Интегрирование по частям в определённом интеграле

Пусть функции *u(x)* и *v(x)* дифференцируемы на **[***a, b*] и *d(uv)=udv+vdu,* тогда справедлива следующая формула, которая называется формулой интегрирования по частям

$$\int_a^b udv = uv \Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

**Пример 1.**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx = \left| \begin{matrix} u = x & \cos xdx = dv \\ du = dx & v = \sin x \end{matrix} \right| = x\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx =$$

$$= x\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} - 1$$

2. $$\int_1^2 (\ln x)^2 dx = \left| \begin{matrix} u = (\ln x)^2 & du = 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right| = x(\ln x)^2 \Big|_1^2 - 2\int_1^2 \ln xdx$$

$$\int_1^2 \ln x dx = \begin{vmatrix} u=\ln x & dv=dx \\ du=\frac{1}{x}dx & v=x \end{vmatrix} = x\ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} x dx = x \ln x \Big|_1^2 - x \Big|_1^2$$

$$\int_1^2 (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 \Big|_1^2 - x\ln x \Big|_1^2 + x \Big|_1^2$$

## Лекция № 23. Применение определенного интеграла

### 1. Площадь плоской фигуры

а) Если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и положительна $f(x)>0$, то определённый интеграл от этой функции на отрезке $[a,b]$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью $Ox$ и прямыми $x=a$, $x=b$.

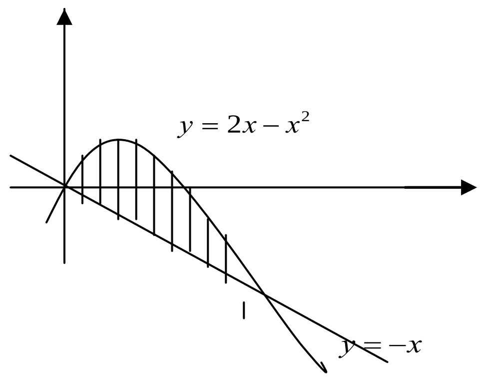
**Пример1.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 4x - x^2;\ x = 3;\ y=0.$$

$$\int_0^3 (4x - x^2)dx = (4\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_0^3 = 9$$

**Пример 2.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2$; $y=-x$.

**Решение.** Построим фигуру по её границам $y=2x-x^2$; $y=1-1+2x-x^2=1-(x-1)^2$




Ветви параболы направлены вниз, вершина в точке (1,1).

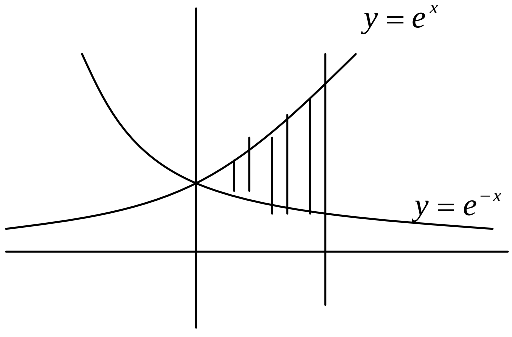
Решая систему, получим

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow 2x - x^2 = -x \Rightarrow x(x-3) \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 3$$

$$\int_0^3 (2x - x^2 + x)dx = \int_0^3 (3x - x^2)dx = (\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2}$$

**Пример 3.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

$$y=e^x,\ y=e^{-x},\ x=2.$$




$$S = \int_0^2 (e^x - e^{-x})dx = e^x\Big|_0^2 + e^{-x}\Big|_0^2 =$$

$$= e^2 - 1 + \frac{1}{e^2} - 1 = \frac{e^4 - 2e^2 + 1}{e^2} = \frac{(e^2-1)^2}{e^2} = (e - \frac{1}{e})^2$$

в) Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta \qquad S = \int_a^b y dx = \begin{bmatrix} \varphi(\alpha) = a \\ \varphi(\beta) = b \\ x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{bmatrix} = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t) dt$$

**Пример 4.** Найти площадь фигуры ограниченной эллипсом.

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi \qquad S = \int_0^{2\pi} b\sin t \cdot a(-\sin t) dt = -ab\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt =$$

$$= -\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)dt = -\frac{ab}{2}t \Big|_0^{2\pi} + \frac{ab}{2\cdot 2}\sin 2t \Big|_0^{2\pi} = -ab\pi$$

Знак минус получен ввиду изменения направления интегрирования.

**Пример 5.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $r=\sin 4\theta$. Эта фигура называется четырёхлепестковой розой. Так как $r\ge 0$, то $\sin 4\theta \ge 0$ при $0\le 4\theta \le \pi$, $0\le\theta\le\pi/4$

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 4\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 8\theta}{2} d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{32}\sin 8\theta \Big|_0^{4\pi} = \pi \quad S=4\pi.$$

## Длина дуги кривой

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Дуга этой кривой, где A$(a,f(a))$, B $(b,f(b))$ определяется как предел вписанной в неё ломаной, когда длина максимальной из её звеньев стремится к нулю.

$$AB = L = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^n \Delta S_i$$

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}}$$

По теореме Лагранжа $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)\Delta x_i =$

$=\Delta x_i\sqrt{1+(\frac{f'(c_i)\Delta x_i}{\Delta x_i})^2}=\Delta x_i\cdot\sqrt{1+[f'(c_i)]^2}$, где $x_{i-1}<c_i<x_i$ $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$

Если $f'(x_i)$ непрерывно на $[a,b]$, то $\sqrt{1+f'(x)}$ также непрерывно, отсюда

$$\lim_{\max\Delta S_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\Delta x_i=\lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+[f'(c_i)]^2}dx$$

$$l=\int_a^b\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx$$

**Пример 6.**

1. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2=x^3$, заключенной между точками (0,0) и (4,8).

$$y=\sqrt{x^3}$$

**Решение.** Функция $y(x)$ определена для $x\geq 0$. Поскольку данные точки лежат в первой четверти $y=x^{3/2}$. Отсюда

$$y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}\quad\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{9}{4}x}$$

Следовательно: $$L=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx=\frac{4}{9}\int_0^4\sqrt{1+\frac{4}{9}x}d(1+\frac{9}{4}x)=$$

$$=\frac{4}{9}\int_0^4(1+\frac{9}{4}x)d(1+\frac{9}{4}x)=\frac{4}{9}\cdot\frac{(1+\frac{9}{4}x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_0^4=$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(1+\frac{9}{4}x)^3}\Big|_0^4=\frac{3}{27}(\sqrt{10^3}-1)=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$$

**Пример 7.** Вычислить длину дуги кривой $y=ln\cos x$, заключенной между точками с абсциссами $x=0;$ $x=\pi/4$.

**Решение**. $y'(x)=-tgx$, то $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+tg^2x}=\dfrac{1}{\cos x}$;

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}=\ln tg(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln tg\frac{3\pi}{8}$$

Длина дуги кривой с заданной параметрической формой. Если кривая задана уравнениями в параметрической форме $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $\alpha\leq\pi\leq\beta$ и производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ непрерывны на отрезке [α,β], то длина дуги кривой выражается интегралом

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

**Доказательство.** $L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx=\left|\begin{matrix}dx=\varphi'(t)dt\\ a=\varphi(\alpha)\\ b=\psi(\beta)\end{matrix}\qquad y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{\psi'_t}{\varphi'_t}\right|=$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1-(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)})^2}\,\varphi'(t)dt=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\varphi'(t))^2-(\psi'(t))^2}\,dt=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

**Пример 8.** Вычислить длину астроиды $x=a\cdot\cos^3 t; y=a\cdot\sin^3 t$.

**Решение**: $x'_t$=-3acos$^2$t·sint $y'_t=3a\sin^2 t\cdot\cos t$. Отсюда

$$\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{9a^2\cos^4 t\cdot\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cdot\cos^2 t}=$$

$$=\sqrt{9a^2\cos^2 t\cdot\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}=3a\sin t\cdot\cos t=\frac{3}{2}a\sin 2t$$

$$l=4\cdot\frac{3a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t dt=-4\cdot\frac{3a}{2\cdot 2}\cdot\cos 2t\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-3a(-1-1)=6a$$

**Длина дуги в полярной системе координат.** Если кривая дана в виде r=r(θ) $\theta_1\le\theta\le\theta_2$. Запишем уравнение в параметрическом виде:

$$\begin{cases}x=r(\theta)\cos\theta & x'(\theta)=r'(\theta)\cdot\cos\theta-r(\theta)\cdot\sin\theta\\ y=r(\theta)\sin\theta & y'(\theta)=r'(\theta)\cdot\sin\vartheta+r(\theta)\cdot\cos\theta\end{cases}$$

$\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{[r'(\theta)]^2+[r(\theta)]^2}$ показать самостоятельно

$$L=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{[r'(\theta)]^2+[r(\theta)]^2}\,d\theta$$

**Пример9:** Найти длину первого витка архимедовой спирали β=aφ

**Решение**. Первый виток архимедовой спирали образуется при изменении полярного угла от 0 до 2π. Поэтому:

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\,d\varphi=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi=a[\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\frac{1}{2}\ln(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}]$$

$$\int\sqrt{x^2+1}dx=\left|\begin{matrix}x=tgt\\ dx=\dfrac{dt}{\cos\ t}\end{matrix}\right|=\int\sqrt{\frac{\sin\ t+\cos\ t}{\cos^2 t}}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=\int\frac{dt}{\cos^3 t}$$

**Вычисление работы (переменной силы).** Пусть под действием некоторой силы $F$ материальная точка $M$ движется по прямой $DS$, причем направление силы совпадает с направлением движения.

**Задача**. Найти работу, совершенную силой $F$ при перемещении точки $M$ из положения $s = a$ в положение $s = b$

1.Если сила $F$ постоянна, то работа выражается произведением силы $F$ на длину пути , т.е.

$$A=F*(b-a)$$

2.Предположим, что сила непрерывно меняется в зависимости от положения материальной точки, т.е. представляет собой функцию $F(s)$, непрерывную на отрезке $a\le s\le b$

Разобьем отрезок $[a ; b]$ на $n$ произвольных частей с длинами

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots\ldots , \Delta s_n$$

затем в каждом частичном отрезке $[s_{i-1};s_i]$ выберем произвольную точку $\xi_i$ и заменим работу силы $F(s)$ на пути $\Delta s_i$ , $i = \overrightarrow{1,n}$ произведением $F(\xi_i)*\Delta s_i$

Это значит, что в пределах каждого частичного отрезка мы принимаем силу $F$ за постоянную, а именно $F= F(\xi_i)$.В таком случае выражение $F(\xi_i)*\Delta S_i$ при достаточно малом $\Delta s_i$ дает нам приближенное значение работы силы $F$ на пути $\Delta s_i$, а сумма

$$A_n=\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)*\Delta s_i$$

Будет приближенным выражением работы силы $F$ на всем отрезке $[a ; b]$ .Очевидно $A_n$ представляет собой интегральную сумму,составленную для функции $F=F(s)$ на отрезке $[a;b]$ .Предел этой суммы при $max(\Delta S_i)\to 0$ существует и выражает работу силы $F(s)$ на пути от точки $s=a$ до точки $s=b$.

$$A=\int_a^b F(s)ds$$

## Лекция № 24. Несобственные интегралы I и II родов

### Несобственные интегралы I рода. (интегралы с бесконечными пределами)

Рассмотрим функцию $f(x)$, которая определена и непрерывна на полупрямой $a\le x\le +\infty$ .

Рассмотрим также интеграл

$$I\,(R) = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx, \qquad (1)$$

где $R \geq a$, который по нашему предположению существует (он также существует так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b)$). Итак, при наших предположениях на полупрямой $a \leq R \leq +\infty$ задана функция $I\,(R)$, определенная соотношением (1).

Исследуем вопрос о предельном значении функции $I(R)$ при $R \to +\infty$, то есть вопрос о существовании предела $\lim\limits_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx$

**Определение.** Если существует конечный предел $\lim\limits_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx$

То этот предел называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ на интервале $[a;+\infty)$ и обозначается

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

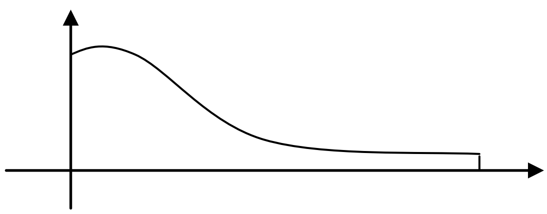
Следовательно, по определению, имеем

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx$$

В этом случае будем говорить, что несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ существует или сходится.

Если $I\,(R)$ при $R \to +\infty$ не имеет конечного предела, то говорят, что $\int_a^\infty f(x)dx$ не существует или расходится.

Геометрически, в случае $f(x) \geq 0$, несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ выражает площадь области , ограниченной кривой $y=f(x)$, осью абсцисс и ординатами $x=a$ , $x=в$, то естественно считать , что несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ выражает площадь неограниченной области (бесконечной), заключенной между линиями $y=f(x)$ ,$x=a$ и осью абсцисс



Аналогично, определяются несобственные интегралы и для других бесконечных интервалов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

Последнее равенство следует понимать так: если каждый из несобственных интегралов, стоящих справа, существует, то существует (сходится ) по определению, интеграл стоящий слева

**Пример 1.** $\int_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x} dx = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2\ln^2 e} - \frac{1}{2\ln^2 R}\right] = \frac{1}{2}$

**Пример 2**. Установить при каких значениях $\alpha \int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится и при каких расходится.

**Решение:** по определению для интеграла $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ имеем

1.$\alpha$=*1* $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty}\left[\ln R - \ln 1\right] = \infty$

Следовательно, при $\alpha$=1 несобственный интеграл расходится .

2. $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{R\to\infty}\frac{R^{-\alpha+1}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} -\dfrac{1}{1-\alpha} & \text{если } \alpha > 1 \\ \infty & \text{если } \alpha < 1 \end{cases}$

Следовательно, мы получили что не собственный интеграл $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{X^{\alpha}}$ сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\le 1$

**Замечание.** Для не собственных интегралов I рода при определенных условиях действуют формулы замены переменных и интегрирования по частям.

Во многих случаях бывает достаточно установить сходится ли данный интеграл или расходится, и оценить его значения.

Сформулируем теоремы, которые будут полезны в этом исследовании.

**Теорема1.** Если для всех *x(x≥a)* выполняется неравенство $0\le f(x)\le\varphi(x)$

и если $\int_{a}^{+\infty}\varphi(x)dx$ сходится, то $\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$ также сходится, при этом $\int_{a}^{+\infty}f(x)dx \le \int_{a}^{+\infty}\varphi(x)dx$

**Теорема 2.** Если для всех *x (x≥a)* выполняется неравенство

*0≤f(x)≤φ(x)* причем $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$

**Определение.** Если сходится интеграл $\int\limits_a^{\infty}|f(x)|dx$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся.

**Определение.** Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется условно сходящимся, если он сходится, а интеграл $\int\limits_a^{\infty}|f(x)|dx$ расходится

**Теорема 3.** Если $\int\limits_a^{\infty}|f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_0^{\infty} f(x)dx$

Рассмотрим интеграл, который применяется при исследовании сходимости многих несобственных интегралов:

$$I=\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x^\alpha},\alpha>0$$

а) При $\alpha<1$, $I=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b=\frac{1}{1-\alpha}\lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}}-1\right)=\infty$ - расходится,

б) При $\alpha=1$, $I=\lim\limits_{b\to\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\infty$ - расходится,

в) При $\alpha>1$ $I=\frac{1}{1-\alpha}\lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}}-1\right)=\frac{1}{1-\alpha}$ - сходится.

Итак, $I=\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases}\alpha\le 1.\textit{расходится}\\ \alpha>1.\textit{сходится}\end{cases}$

## Несобственные интегралы II рода (от разрывной функции)

Пусть функция *f(x)* определена и непрерывна для *a≤x<b*, а в точке *x = b* функция либо не определена либо терпит разрыв. В этом случае интеграл $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ может не существовать т.к. *f(x)* не непрерывна на отрезке [*a; b*].И говорить о нем как о пределе интегральных сумм нельзя.

**Определение.** Будем говорить, что интеграл $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ от функции *f(x),* разрывной в точке *x=b,* сходится, если предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

существует и он конечен. В противном случае, интеграл от разрывной функции расходится.

Если функция терпит разрыв в левом конце,(то есть при $x=a$),то по определению $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$

**Теорема 1.** Пусть на отрезке $[a;\ b]$ функция $f(x)$ и $\varphi(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x = c$ и во всех точках отрезка $[a;b]$, кроме $x= c$, выполняется неравенство $\varphi(x) \geq f(x) \geq 0$.Тогда:

1. Если интеграл $\int_a^b \varphi(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b f(x)dx$

2. Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int_a^b \varphi(x)dx$

**Теорема 2.** Если $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_0^b f(x)dx$

Также можно показать, что как в случае первого типа

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \alpha < 1. \textit{сходится} \\ \alpha \geq 1. \textit{расходится} \end{cases}$$

## Лекция № 25. Функции нескольких переменных. Предел, непрерывность функции двух переменных. Полное приращение и полный дифференциал. Частные производные функции двух переменных. Частные производные сложной функции двух переменных

Во многих вопросах геометрии, естествознания и т.д. приходится иметь дело с функциями двух, трех и более переменных. Рассмотрим примеры:

1.Площадь прямоугольника $S=xy$ есть функция двух его сторон.

2.Объем прямоугольного параллелепипеда $V= xyz$ есть функция трех его измерений.

### Функции двух переменных

**Определение:** Если каждой паре $(x,y)$ значений двух независимых переменных величин $x$ и $y$ из некоторой области $D$, соответствует определенное значение величины $z$, то $z$ называется функцией двух переменных $x$ и $y$, определенной в области $D$. Символически функция двух переменных обозначается $z=f(x,y)$ или $u=f(x,y)$ и т.д.

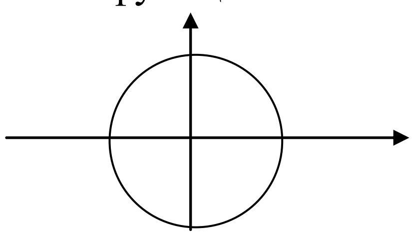
Функция двух переменных может задаваться:
1. с помощью таблицы;
2. с помощью формулы. Например $z=xy$ и т.п.

**Определение:** Областью определения функции двух переменных называется совокупностью пар $(x,y)$, при которых существует $z$, определяемое по формуле $z=f(x,y)$

**Рассмотрим примеры:**

1.$z=\sqrt{x-y}$. Так как квадратный корень существует для неотрицательных чисел, то $x-y\geq 0$ откуда $x\geq y$.
Область определения данной функции - это множество точек плоскости, лежащих ниже прямой $y=x$, включая и саму прямую.

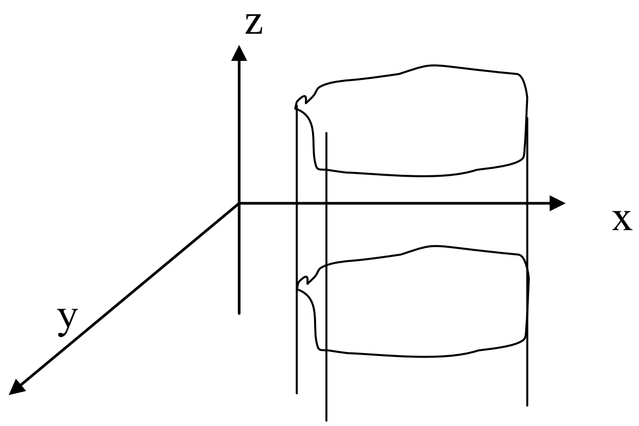
2.$z= ln\ (1-x^2-y^2)$. Логарифм существует только для положительных чисел. Поэтому $1-x^2-y^2>0$ или $x^2+y^2<1$.Область определения данной функции- это множество точек плоскости, лежащих внутри



круга радиуса 1, с центром в начале координат, исключая точки самой окружности.

Пусть данная функция $z=f(x,y)$ определена в некоторой области $D$ плоскости $Oxy$. Тогда каждой паре значения $x$, $y$ из области $D$ соответствует по формуле $z=f(x,y)$ некоторое значение $z$.

Иными словами каждой точке $P(x,y)$ из области $D$ соответствует точка пространства $M(x,y,z)$. Геометрическое место таких точек $M(x,y,z)$ называется графиком функции $z=f(x,y)$. График функции двух переменных представляет собой поверхность пространства.




**Замечание:** Функция $z$ двух переменных $x$ и $y$ может быть задана неявно в виде уравнения $F(x,y,z)=0$

## Пределы и непрерывность функций двух переменных. Линии уровня

Введем понятие окрестности данной точки.

**Определение:** Окрестностью радиуса $r$ данной точки $M_0$ $(x_0,y_0)$ на плоскости называется совокупность всех точек $M(x, y)$ удовлетворяющих неравенству $M_0M = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r$, т.е. совокупность всех точек, лежащих внутри круга радиуса $r$ с центром в точке $M_0$ $(x_0,y_0)$ .

**Опредление**: Число $A$ называется пределом функции $z=f(x,y)$ при стремлении точки $M(x,y)$ к точке $M_0(x_0,y_0)$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для всех точек $MM_0<\delta$ выполняется неравенство $/f(x,y)-A/< \varepsilon$.

Если число $A$ является пределом функции при $M(x,y) \to M_0$ $(x_0,y_0)$, то пишут $\lim\limits_{M\to M_0} f(x,y) = A$.

**Определение**: Пусть функция $f(x,y)$ определена в точке $M_0(x_0,y_0)$ и ее окрестности. Функция $z=f(x,y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0,y_0)$, если

$$\lim_{M\to M_0} f(x,y) = f(x_0,y_0) \qquad (1)$$

Если обозначим $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$, то равенство (1) можно записать так

$$\lim_{M\to M_0} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0)$$

или

$$\lim_{M\to M_0} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = 0 \qquad (2)$$

Обозначим $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ , ясно что при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ $\Delta\rho\to 0$

Выражение $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$ называется полным приращением функции *f(x,y)* соответствующим приращениям аргументов *Δx, Δy*. Равенство (2) можно переписать в виде $\lim\limits_{\Delta\rho\to 0} \Delta z = 0$.

**Определение**: Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области называется непрерывной в этой области .

**Определение**: Линии уровня функции *z=f(x,y)* называется множество точек плоскости *Oxy* для которых данная функция имеет одно и тоже значение. Т.е. уравнение линии уровня *f(x,y)*=С , где С- некоторая постоянная

**Пример**: Так семейство линии уровня $z = x^2 + y^2$ есть окружности $x^2 + y^2 = C$ (для С>0).

## Полное приращение и полный дифференциал. Частные производные функции двух переменных

Пусть дана функция z=f(x,y), определенная в точке M(x,y) и в некоторой ее окрестности придадим x некоторое приращение Δx оставляя y постоянной. Тогда функция f(x,y) получит приращение $\Delta z_x$ =f(x+Δx,y)-f(x,y) которая называется частным приращением функции f(x,y) по x. Рассмотрим отношение

$$\frac{\Delta z_x}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

**Определение:** Предел отношения частного приращения функции f(x,y) по x к Δx при Δx, стремящемся к нулю (если предел существует), называется частной производной функции f(x,y) по x и обозначается $f_x'(x,y)$, $z_x'$ или $\partial z/\partial x$ Итак по определению

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x}.$$

Аналогично вводится определение частной производной от функции f(x,y) по y. Придаем приращение аргумента y, оставляя x неизменным. Разность $\Delta z_y$ = f(x, y+Δy)- f(x,y) называется частным приращением функции f(x,y) по y.

**Определение**. Предел отношения частного приращения функции f(x,y) по y к приращению Δy, когда Δy стремиться к нулю называется частной производной функции f(x,y) по y и обозначается $f_y'(x,y)$, $z_y'$ или $\partial z/\partial y$ .Таким образом

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y}.$$

Мы получили следующее правило дифференцирования функции двух переменных, частная производная по переменной x – это есть производная от функции, взятая по x в предположении что y=const, частная производная по y – это есть производная по y взятая в предложении, что x=const.

**Рассмотрим примеры**. Найти частные производные по x и по y

1.$z=3x^2y-2xy^2+y^2$,

**Решение**: $\partial z/\partial x = 6xy-2y^2$ $\quad \partial z/\partial y = 3x^2-6xy^2+2y$

2.Z=ln x/y,

**Решение**: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\frac{x}{y}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x=\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{x}$, $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{y}$.

3.$z=x^y$,

**Решение**: $\frac{\partial z}{\partial y}=yx^{y-1}$; $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$

## Полное приращение и полный дифференциал функции двух переменных

Пусть дана функция f(x,y), определенная в точке M(x,y) и ее окрестности. Выражение $\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)$ называется полным приращением функции. Предположим, что f(x,y) в точке (x,y) имеет непрерывные частные производные.

Представим $\Delta z$ в виде:

$$\Delta z= f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=(f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y))+(f(x,y+\Delta y)-f(x,y))$$

Разность $f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$ можем рассматривать как разность двух значений функции зависящей только от y. По теореме Лагранжа

$$f(x, y+\Delta y)-f(x,y)= f'_y(x,y^*)\Delta y,$$

где $y^*$ заключено между y и $y+\Delta y$.

К разности $f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)$ также применим теорему Лагранжа, тогда

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y) = f'_x(x^*,y+\Delta y)\Delta x$$

где $x^*$ заключено между x и $x+\Delta x$.

Таким образом, $\Delta z=\frac{\partial f(x^*,y+\Delta y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y^*)}{\partial y}\Delta y$

или $\quad \Delta z=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y+\alpha(\Delta x)+\beta(\Delta y)$

здесь $\lim\limits_{\Delta\rho\to 0}\dfrac{\alpha(\Delta x)}{\Delta\rho}=0$, $\lim\limits_{\Delta\rho\to 0}\dfrac{\beta(\Delta y)}{\Delta\rho}=0$

это значит, что два последних слагаемых являются бесконечно малыми высшего порядка по сравнению с $\Delta\rho$.

Сумма первых двух слагаемых есть выражение линейное относительно $\Delta$x и $\Delta$y. Это выражение является главной частью приращения функции.

**Определение**. Функция z=f(x,y) называется дифференцируемой в данной точке, если ее полное приращение в данной точке представляет собой сумму двух слагаемых: выражение линейное относительно $\Delta x$ и Δy, и величина бесконечно малая относительно Δx и Δy. Главная часть приращения функции, линейная относительно Δx и Δy называется полным дифференциалом и обозначается dz или df. Итак

$$dz=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y\,.$$

с точностью до бесконечно малых высшего порядка $\Delta z\approx dz$

**Пример**. Найти полный дифференциал и полное приращение функции z=x/y в точке (2,1), если Δx =0,1 Δy=0,2

**Решение**. Полный дифференциал $dz=f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y$
$f'_x(x,y)=1/y$; $f'_y(x,y)=-x/y^2$

$$f'_x(2.1)=1;\quad f'_y(2;1)=-2$$
$$dz=1*0.1+(-2)*0.2=0.1-0.4=-0.3$$

Полное приращение $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=2.1/1.2-2=-0.25$

**Замечание**. Приращение независимых переменных Δx и Δy будем называть дифференциалами независимых переменных, и обозначаются dx и dy.

## Применение полного дифференциала в приближенных вычислениях

Так как $\Delta z\approx dz$, то $f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f'x(x,y,)+f'y(x,y)\Delta y+f(x,y)$. Эта формула для приближенного вычисления с помощью полного дифференциала. Зная значение функции в точке M(x,y) можно найти приближенное значение в точке $M_1(x+\Delta x,y+\Delta y)$.

**Пример.** Найти приближенное значение функции $z = x^2 y$, в точке x, y, используя полный дифференциал, если x=1, y=2, Δx=0.1 и Δy=0.2.

$$dz = f_x'(x,y)\Delta x + f_y'(x,y)\Delta y$$

Найдём $f_x'(x,y) = 2xy$; $f_y'(x,y) = x^2$. $f_x'(1;2) = 2\cdot 1\cdot 2 = 4;\ f_y'(1;2) = 1.$

$$dz = 4\cdot 0{,}1 + 1\cdot 0{,}2 = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6.$$

$$f(1{,}1;2{,}2) \approx f(1;2) + dz;\ f(1;2) = 1^2\cdot 2 = 2;\ f(1{,}1;2{,}2) \approx 2 + 0{,}6 = 2{,}6.$$

## Частные производные сложной функции двух переменных

Пусть z=f(u,v), u=u(x,y), v=v(x,y). Тогда z=f(u(x,y),v(x,y)) – сложная функция от переменных x и y. Предположим, что функция f(u,v) дифференцируема относительно переменных u и v, а функции u и v соответственно относительно переменных x и y. Если к x придадим приращение Δx, то функции u и v соответственно принимают приращения $\Delta u_x$ и $\Delta v_x$. По формуле полного приращения

$$\Delta z_x = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta u_x + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta v_x + \alpha_1\Delta u_x + \alpha_2\Delta v_x.$$

Разделим это равенство на Δx и переходим к пределу при $\Delta x \to 0$. Так как при $\Delta x \to 0$ выполняется $\Delta u_x \to 0$, $\Delta v_x \to 0$ и $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to 0$ получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Точно так же имеем

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

**Пример**: $z = uv^3$; $u = x\cdot\sin y; v = y\cdot\cos x.$

**Решение**: Найдём

$$\frac{\partial z}{\partial u} = v^3; \frac{\partial z}{\partial v} = 3uv^2; \frac{\partial u}{\partial x} = \sin y; \frac{\partial u}{\partial y} = x\cos y; \frac{\partial v}{\partial x} = -y\sin x; \frac{\partial v}{\partial y} = \cos x.$$

Итак, $\frac{\partial z}{\partial x} = v^3\cdot\sin y - 3uv^2 y\sin x;\ \frac{\partial z}{\partial y} = v^3 x\cos y + 3uv^2\cos x$

Пусть z=f(x,y); $x = \varphi(t); y = \psi(t)$. Тогда $z = f(\varphi(t),\psi(t))$ - сложная функция одного аргумента t. Производная этой функции вычисляется по формуле $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$.

**Пример**: Найти $\frac{\partial z}{\partial t}$, если $z = e^{2x-3y}$, где x=tgt; y=$t^2$-t.

**Решение**. $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$. Найдём

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2x-3y}\cdot 2;\frac{\partial z}{\partial y}=e^{2x-3y}\cdot(-3);\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\cos^2 t};\frac{dy}{dt}=(2t-1).$$

Таким образом, $\frac{dz}{dt}=2e^{2x-3y}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}-3e^{2x-3y}\cdot(2t-1)=e^{2x-3y}\cdot(\frac{2}{\cos^2 t}-3(2t-1)).$

3.Пусть z=f(x,y), где $y=\varphi(x)$. Тогда $z=f(x,\varphi(x))$ - сложная функция одного переменного x. Производная $\frac{dz}{dx}$ вычисляется по формуле: $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$.

**Пример.** Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z=ln(e^x+e^{\varphi})$, где $y=\frac{1}{3}x^3+x$.

**Решение**. $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$.

Найдем $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{e^x+e^y}\cdot e^x;\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{e^x+e^y}\cdot e^y;\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\cdot 3x^2+1=x^2+1.$

Тогда $\frac{dz}{dx}=\frac{e^x}{e^x+e^y}+\frac{e^y(x^2+1)}{e^x+e^y}=\frac{e^x+e^y(x^2+1)}{e^x+e^y}$.

## Лекция № 26. Уравнения касательной плоскости и нормали поверхности. Частные производные высших порядков функции двух переменных

### Уравнения касательной плоскости и нормали поверхности

Уравнение касательной плоскости поверхности зависит от уравнения самой поверхности.

1) Пусть уравнение поверхности задано равенством $z=f(x;y)$. Тогда уравнение касательной плоскости проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

2) Если уравнение поверхности задано неявным уравнением $F(x,y,z)=0$, тогда уравнение касательной плоскости проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

**Пример:** Записать уравнение касательной плоскости поверхности $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$ проведенной в точке $M_0(1;2;-1)$.

Уравнение поверхности задано неявно, поэтому предварительно находим производные $F'_x(x_0, y_0, z_0)$, $F'_y(x_0, y_0, z_0)$ и $F'_z(x_0, y_0, z_0)$ в точке $M_0(1;2;-1)$

$$F'_x(x, y, z) = 3x^2 + yz \Rightarrow F'_x(1;2;-1) = 1,$$
$$F'_y(x, y, z) = 3y^2 + xz \Rightarrow F'_y(1;2;-1) = 11,$$
$$F'_z(x, y, z) = 3z^2 + xy \Rightarrow F'_z(1;2;-1) = 5,$$

Теперь найденные подставляем в уравнение касательной плоскости

$$x - 1 + 11(y - 2) + 5(z + 1) = 0$$

или $x + 11y + 5z - 18 = 0$.

Нормалью поверхности в некоторой точке М называется прямая проходящая через эту точку и перпендикулярная к касательной плоскости. Уравнение нормали точно так же как уравнение касательной плоскости зависит от уравнения поверхности и записывается равенствами:

1) В случае, когда поверхность задана явным уравнением

$$z=f(x;y) \quad \frac{x - x_0}{f_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1};$$

2) В случае, когда поверхность задана неявным уравнением $F(x;y;z)=0$ получим уравнение

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0; z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0; z_0)} = \frac{z - y_0}{F'_z(x_0; y_0; z_0)}.$$

**Например**, нормаль поверхности для предыдущего примера уравнение нормали имеет следующий вид: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}$

## Частные производные высших порядков функции двух переменных

Пусть $z = f(x,y)$ – функция двух переменных $x$ и $y$. Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)\,\partial$ и $f'_y(x, y)$ также являются функциями двух переменных $x$ и $y$. Поэтому от них также можно находить частные производные: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})$.

Производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ называются смешанными производными второго порядка. Производные второго порядка можно опять дифференцировать;

**Например**, $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$; $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}) = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$ - производные третьего порядка.

Вообще, частная производная *n*-го порядка – это частная производная от производной (*n*-1) – го порядка.

**Примеры.** Вычислить частные производные второго порядка от следующих функций:

**1.** $z = x^3y^2 + 5x^2y^4 + 4y^3$

**Решение**. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 + 10xy^4$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y + 20x^2y^3 + 12y^2$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2 + 10y^4; \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 + 60x^2y^2 + 24y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^3y^2 + 10xy^4) = 6x^2y + 40xy^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y + 20x^2y^3 + 12y^2) = 6x^2y + 40xy^3$$

**2.** $z = y^x$

**Решение**. $\frac{\partial z}{\partial x} = y^x \ln y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (\ln y)\cdot y^x \ln y = y^x \cdot \ln^2 y; \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(x-1)y^{x-2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^x \ln y) = xy^{x-1}\ln y + y^x \cdot \frac{1}{y} = xy^{x-1}\ln y + y^{x-1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy^{x-1}) = y^{x-1} + x \cdot y^{x-1} \cdot \ln y$$

Возникает вопрос, при каких условиях производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ равны между собой.

**Определение.** Производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ называется смешанными частными производными второго порядка. Для этих производных справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Если функция $z = f(x,y)$ и ее частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ определены и непрерывны в точке $M(x,y)$ и в некоторой и окрестности, то в этой точке

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Примем эту теорему без доказательства.

## Лекция №27. Экстремум функции двух переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума. Экстремум функции двух переменных

**Определение.** Функция $f(x,y)$ имеет в точке $M_0(x_0,y_0)$ минимум, если для всех точек $M(x,y)$, достаточно близких к точке $M_0(x_0,y_0)$ и отличных от нее, выполняется неравенство

$$f(x,y) > f(x_0,y_0)$$

**Определение.** Функция $f(x,y)$ имеет в точке $M_0(x_0,y_0)$ максимум, если для всех точек $M(x,y)$, достаточно близких к точке $M_0(x_0,y_0)$ и отличных от нее, выполняется неравенство

$$f(x,y) < f(x_0,y_0)$$

Точки максимума и минимума функции называются и точками экстремума.

Например, функция $z = x^2 + y^2$ имеет минимум в точке O(0;0) и $Z_{\min} = 0$.

### Необходимое условие экстремума

**Теорема**. Если функция $z=f(x,y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0,y_0)$, то в этой точке не существуют частные производные или ее частные производные первого порядка обращаются в нуль, т.е.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} = 0; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} = 0 .$$

Эти условия необходимые но не достаточные для экстремума.

Точки, где не существуют частные производные или равны нулю называются критическими точками.

## Достаточные условия экстремума

**Теорема**. Пусть в некоторой области содержащей точку $M_0(x_0,y_0)$, функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно. Пусть точка $M_0(x_0,y_0)$ является критической точкой, т.е.

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0 .$$

Пусть $A=\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}$; $B=\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}$; $C=\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y\partial x}$; $\Delta=AC\text{-}B^2$,

Тогда в точке $M_0(x_0,y_0)$

1) $f(x,y)$ имеет максимум, если $\Delta=AC\text{-}B^2>0$ *и* $A<0$.
2) $f(x,y)$ имеет минимум если $\Delta=AC\text{-}B^2>0$ *и* $A>0$
3) $f(x,y)$ не имеет ни минимума , ни максимума, если $\Delta=AC\text{-}B^2<0$.
4) Если $\Delta=AC\text{-}B^2=0$, то экстремум в точке $M_0(x_0,y_0)$ может быть, может и не быть.

**Примеры.** Найти экстремумы функции двух переменных

1. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

Найдём частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y-3;\ \frac{\partial z}{\partial x}=x+2y-6$$

Найдём критические точки:

$$\begin{cases}2x+y-30\\ x+2y-6=0\end{cases}\begin{cases}2x+y=3\\ 2x+4y=12\end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы вычтем первое: $3y=9$; $y=3$; тогда $2x+3=3$; $2x=0$; $x=0$. Критическая точка (0;3). Найдем $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$; $A=2$; $B=1$; $C=2$. $\Delta=AC\text{-}B^2 = 4 - 1 = 3 > 0$; $A = 2 > 0$.

Следовательно, в точке (0;3) функция имеет минимум.

2. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

Найдём $\dfrac{\partial z}{\partial x}=6x^2-y^2+10x$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2xy+2y$

Найдём критический точка из условий: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$:

$$\begin{cases} 6x^2 - y^2 + 10x = 0 \\ -2xy + 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x^2 - y^2 + 10x = 0 \\ -2y(x-1) = 0 \end{cases} \quad y=0;\ x=1$$

*1)* $y=0;\ 6x^2 + 10x = 0;\ 2x(3x + 5) = 0;\ x = 0;\ x = -5/3$

Итак, $M_1(0;0)$, $M_2(-\frac{5}{3};\ 0)$ – критические точки.

*2)* $x = 1;\ 6 - y^2 + 10 = 0;\ y^2 = 16;\ y = \pm 4.$

Итак, критические точки: $M_3(1; -4)$; $M_4(1; 4)$

Находим $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x + 10 = 0;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2y;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2x + 2$

В точке $M_1\ (0; 0)$: $A = 12\cdot 0+10=10;\ B=-2\cdot 0=0;\ C=-2\cdot 0+2=2;$

$\Delta = AC - B^2 = 10 \cdot 2 - 0 = 20 > 0;\ A = 10 > 0$

Значит, в точке $M_1(0;0)$ функция имеет минимум: $Z_{min} = 0$

В точке $M_2(-\frac{5}{3};0)$ $F=12(-\frac{5}{3})+10=-20;\ B=-2\cdot 0=0;\ C=-2\cdot(-\frac{5}{3})\ +10$

$= \frac{10}{3} + = \frac{40}{3}$ $\quad \Delta = AC - B^2 = (-20)\ \frac{40}{3}\ - 0 = -\ -\frac{800}{3} < 0;$

Так как $\Delta < 0$ в точке $M_2(-\frac{5}{3};\ 0)$ функция не имеет экстремума.

В точке $M_3(1;-4)$: $A=12\cdot 1+10=22;\ B=-2(-4)=8;\ C=-2\cdot 1+2 = 0$

$$\Delta = AC - B^2 = 22 \cdot 0 - 64 = -64 < 0.$$

В точке $M_3(1;-4)$: $A=12\cdot 1+10=22;\ B=-2\cdot 4=-8;\ C=-2\cdot 1+2=0$

$\Delta=AC-B^2=22\cdot 0-64=-64<0.$ В точке $M_4\ (1; 4)$ экстремума нет.

## Учебники и учебные пособия

1. Gerd Bauman, Mathematics for Engineers II. 2010. Munchen
2. Claudio Canute, Anita Tabacco, Mathematical Analysis I. Milan, 2008
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учеб.: Для вузов. – 6-е изд., - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.280 с.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Часть 1. – М.: Айрис-Пресс, 2005. – 288 с.
5. Умнов А.Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2009. – 570 с.
6. Шипачев В.С. Основы высшей математики: учебное пособие для втузов – Москва: Юрайт, 2009. – 478 с.
7. Луканин Г.Л. и другие. Высшая математика. Учебник для студентов высших технических учебных заведений – М. Высшая школа, 2009. – 583 с.

## Сборники задач и упражнений

1. Лунгу К.Н., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. – М.: Из-во: Айрис-Пресс, 2017. – 576 с.
2. Кузнецов А.А. Сборник заданий по высшей математике. – М. Из-во: Ozon; 2008. – 240 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. 22-е изд.перераб. – М.: Лань, 2008. – 432 с.
4. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике для ВТУЗов. В 4-х частях. 6-е издание. – М.: ООО «Издательский дом Альянс», 2010. – 368 с.
5. Зимина О.В., Кириллов А.И. Решебник. Высшая математика. 2005. – 365 с.
6. Смирнов Ю.М. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М:, Логос, 2005. – 372 с.

# Оглавление

Редактор Ахметжанова Г.М.