МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ИСЛАМА КАРИМОВА

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Ташкент 2022

Каюмов Ш., Хаитов Т.О. Учебно – методическое пособие.

Основные формулы по высшей математике.

-Ташкент: ТашГТУ, 2022.-105 с.

В учебно-методическом пособии по математике описаны формулы, уравнения, понятия, соотношения и другие выражения, необходимые в повседневной жизни любого человека.

Учебно-методическое пособие предназначено для широкого круга читателей: студентам высших учебных заведений, учащимся школы и средних специальных учебных заведений, инженерам, преподавателям, физикам, биологам, экономистам и другим специалистам, использующим в своей повседневной жизни математику.

Печатается по решению научно-методического совета Ташкентского государственного технического университета.

Протокол № 9 от 25 мая 2022 г.

Рецензенты: доц. Алиқулов Т.Н. (НУУз)

PhD., доц. Арзиқулов Ғ.П. (ТашГТУ)

Введение

В связи с повседневным использованием математики в частности высшей математики в различных направлениях современной жизни в обществе, остро стал вопрос о необходимости подготовки литературы по математике небольшого объема, где содержались бы все необходимые информации и формулы, отражающие основные разделы элементарной и высшей математики. Подготовка литературы такого типа требует тщательного подбора из множества существующих справочников, учебных пособий и учебников, используемых в учебном процессе. Необходимо настольное и повседневное пособие, где пользователь, рассматривая те или иные строки, воссоздает в памяти полученные знания в период обучения в школе, вузе и других учебно-просветительских подразделениях. Беглый взгляд этого пособия достаточен читателю для использования тех или иных формул, уравнений, неравенств и т.д., вместо того чтобы искать их в больших многочисленных объемистых учебниках, опубликованных за последние 200 лет и хранящихся в специализированных библиотеках и центрах. Для укрепления зрительного восприятия в пособии приведено геометрическое толкование информации, что ещё больше увеличивает знание изучаемого математического объекта. Из многочисленных математических терминов, встречающихся в фундаментальных изданиях, отобраны самые важные и часто используемые объекты математической трактовки в виде уравнений, формул, выражений, соотношений и т.д.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Признак делимости

Признак делимости на 2. Число, делящееся на 2, называется четным, не делящееся – нечетным. Число делится на 2, если его последняя цифра четная или нуль. В остальных случаях не делится.

Признак делимости на 4. Число делится на 4, если две последние его цифры нули или образуют число, делящееся на 4. В остальных случаях не делится.

Признак делимости на 8. Число делится на 8, если три последние его цифры нули или образуют число, делящееся на 8. В остальных случаях не делится.

Признак делимости на 3 и на 9. На 3 делятся только те числа, у которых сумма цифр делится на 3; на 9 – только те, у которых сумма цифр делится на 9.

Признак делимости на 6. Число делится на 6, если оно делится одновременно на 2 и на 3. В остальных случаях не делится.

Признак делимости на 5. На 5 делятся числа, последняя цифра которых 0 или 5. Другие не делятся.

Признак делимости на 25. На 25 делятся числа, две последние цифры которых нули или образуют число, делящееся на 25 (т.е. числа, оканчивающиеся на 00, 25, 50 или 75). Другие числа не делятся.

Признак делимости на 10, 100 и 1000. На 10 делятся только те числа, последняя цифра которых нуль, на 100- только те числа, у которых три последние цифры нули.

Признак делимости на 11. На 11 делятся только те числа, у которых сумма цифр, занимающих нечетные места, либо равна сумме цифр, занимающих четные места, либо отличается от нее число, делящееся на 11.

ПРОПОРЦИИ

- Два равных отношения образуют пропорцию $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$.
- Основное свойство пропорции $ad=bc$.
- Нахождение членов пропорции $a=\dfrac{bc}{d};\ b=\dfrac{ad}{c};\ c=\dfrac{ad}{b};\ d=\dfrac{bc}{a}$.
- Пропорции, равносильные пропорции $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$,

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d};\ \ \frac{d}{b}=\frac{c}{a};\ \ \frac{d}{c}=\frac{b}{a}.$$

- Производная пропорция-следствие данной пропорции $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$,

$$\frac{ma+nb}{pa+qb}=\frac{mc+nd}{pc+qd}.$$

Средние величины

- Среднее арифметическое
  - двух величин: $\dfrac{a+b}{2}$
  - n величин: $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$.
- Среднее геометрическое
  - двух величин: $\sqrt{ab}$
  - n величин: $\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots a_n}$.
- Среднее квадратичное
  - двух величин: $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$
  - n величин: $\sqrt{\dfrac{1}{n}\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)}$.
- Среднее гармоническое

• двух величин: $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}}$ • n величин: $\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}}$

АЛГЕБРА

Свойства степеней	Модуль
Для любых m,n и $a>0, b>0$ верны равенства: $a^0=1;\ a^m\cdot a^n=a^{m+n};\ a^m:a^n=a^{m-n};$ $\left(a^m\right)^n=a^{mn};\ (ab)^n=a^n\cdot b^n;$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n};\ a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}.$	$\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert=\begin{cases}a,\ если\ a\ge 0\\-a,\ если\ a<0\end{cases}$ $\lvert a\rvert\ge 0;\ \lvert a\rvert-\lvert b\rvert\le\lvert a+b\rvert\le\lvert a\rvert+\lvert b\rvert;$ $\lvert -a\rvert=\lvert a\rvert;\ \lvert a-b\rvert=\lvert b-a\rvert.$
Формула сокращенного умножения	**Свойства арифметических корней**
$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$ $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$ *или* $(a\pm b)^3=a^3\pm b^3\pm 3ab(a\pm b);$ $a^2-b^2=(a-b)(a+b);$ $a^3\pm b^3=(a\pm b)\left(a^2\mp ab+b^2\right);$ $(a\pm b\pm c)^2=a^2+b^2+c^2\pm$ $\pm 2ab\pm 2ac\pm 2bc;$ $(a\pm b)^2=(a\pm b)(a\pm b);$ $(a-b)^2=(b-a)^2;$ $(a-b)^3=-(b-a)^3.$	Для любых натуральных n и m больших1, и любых $a\ge 0$ и $b\ge 0$ верны равенства: $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b};\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k};$ $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}(b\ne 0);\ \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[kn]{a};$ $\sqrt[n]{a}=\sqrt[kn]{a^k};\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a;$ $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b},\ если\ 0\le a<b;$ $\sqrt[2n]{a^{2n}}=\lvert a\rvert;\ \sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}$ $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\ m\in Z, n\in N.$ Если $m<0$, то $a>0$, если $m>0$, то $a\ge 0$.

Квадратные уравнения

$$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$$

$D=b^2-4ac$ - ***дискриминант квадратного уравнения***. Если $D<0$, то уравнение не имеет действительных корней.

Если $D=0$, то уравнение имеет 1 корень $x=-\dfrac{b}{2a}$. Если $D>0$, то уравнение имеет 2 корня: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $\quad x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.

Теорема Виета

Если приведённое квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет корни x_1 и x_2 (т.е. $D\geq 0$), то $\quad x_1+x_2==-p,\quad x_1\cdot x_2=q$.

Теорема, обратная теореме Виета

Если числа m и n таковы, что $m+n=-p$ и $m\cdot n=q$, то эти числа являются корнями уравнения .

Квадратное уравнение с чётным вторым коэффициентом

$ax^2+2kx+c=0$, где $b=2k$. $D^*=k^2-ac,\quad \left(D^*=\dfrac{1}{4}D\right)$

Если $D^*>0$, то $x_{1,2}=\dfrac{-k\pm\sqrt{D^*}}{a}$; если $D^*=0$, то $x=-\dfrac{k}{a}$.

Разложение квадратного трёхчлена на множители

Если x_1 и x_2 – корни квадратного трёхчлена, ax^2+bx+c то

$$ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right).$$

Уравнения с модулем	**Показательные уравнения**
1 . $\lvert x\rvert=a$	1. $a^x=b,\ \left(a>0,\ a\neq 1\right)$
• если $a<0$, то решений нет; • если $a=0$, то $x=0$;	• если $b>0$, то $x=\log_a b$ • если $b\geq 0$, то решений нет

<table>
<tr>
<td>

• если $a>0$, то $x=\pm a$.

2 . $\left|x-b\right|=a$

• если $a<0$, то решений нет;
• если $a=0$, то $x=b$;
• если $a>0$, то $x=\pm a+b$.

3 .$\left|f(x)\right|=\left|g(x)\right|$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right.$$

4.$\left|f(x)\right|=g(x)$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right. \\ g(x)\geq 0. \end{array}\right.$$

</td>
<td>

2.
$$a^{f(x)}=b^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)\cdot\log_c a=g(x)\cdot\log_c b$$

где $a>0, a\neq 1, b>0, b\neq 1, c>0, c\neq 1$.

В частности, уравнение

$$a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$$

3. $$\left(u(x)\right)^{f(x)}=\left(u(x)\right)^{g(x)}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} \left(u(x)\right)>0, \\ \left(u(x)\right)\neq 1, \\ f(x)g(x) \end{array}\right..$$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Логарифмические уравнения

(при $a>0,\ a\neq 1$**)**

1 . $\log_a f(x)=b\Leftrightarrow f(x)=a^b$

2 . $$\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow\left(\left\{\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)>0. \end{array}\right.\ \textit{или}\ \left\{\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ g(x)>0. \end{array}\right.\right)$$

Уравнение вида $$\frac{f(x)}{g(x)}=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)\neq 0. \end{array}\right.$$

3 . $$\log_a f(x)=\log_b g(x)\ \Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} f(x)=1, \\ g(x)=1. \end{array}\right.$$

</td>
</tr>
</table>

Некоторые методы решения неравенств

Квадратные неравенства

(приводимые к виду $ax^2+bx+c<0, ax^2+bx+c>0$,

$ax^2+bx+c\le 0,\ ax^2+bx+c\ge 0$).

Графиком функции $f(x)=ax^2+bx+c$ является парабола; координаты вершины

$$x_0=-\frac{b}{2a},\quad y_0=f(x_0)=-\frac{D}{4a}$$

$(D=b^2-4ac)$.

Для решения квадратного неравенства вычисляют дискриминант D и определяют корни квадратного трёхчлена.

- $D<0$ и $a>0$

Неравенство	Ответ
$ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\ge 0$	$x\in R$
$ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\le 0$	$x\in\varnothing$

- $D<0$ и $a<0$

Неравенство	Ответ
$ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\ge 0$.	$x\in\varnothing$

Неравенства с модулем

1 . $|x-b|<a$

- если $a\le 0$, то решений нет;
- если $a>0$,

то $b-a<x<b+a$

2 . $|x-b|\ge a$

- если $a\le 0$, то $x\in R$;
- если $a>0$, то $\left[\begin{array}{l} x\ge b+a, \\ x\le b-a \end{array}\right.$

3 .

$$|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>-g(x) \end{cases}$$

4 .

$$|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)>g(x), \\ f(x)<-g(x) \end{array}\right.$$

5 .

$$|f(x)|>|g(x)|\Leftrightarrow f^2(x)>g^2(x).$$

Иррациональные неравенства

1 . $\sqrt{x}<a$

- если $a\le 0$, то решений нет;
- если $a>0$, то $0\le x<a^2$

$ax^2+bx+c<0,$ $ax^2+bx+c\le 0.$	$x\in R$

- $D=0$ и $a>0$.

Неравенство	Ответ
$ax^2+bx+c>0$	$(-\infty;x_0)\cup(x_0;\infty)$
$ax^2+bx+c\ge 0$	$x\in R$
$ax^2+bx+c<0$	$x\in\varnothing$
$ax^2+bx+c\le 0$	$x=x_0$

- $D=0$ и $a<0$.

Неравенство	Ответ
$ax^2+bx+c>0$	$x\in\varnothing$
$ax^2+bx+c\ge 0$	$x=x_0$
$ax^2+bx+c<0$	$(-\infty;x_0)\cup(x_0;\infty)$
$ax^2+bx+c\le 0$	$x\in R$

- $D>0$ и $a>0$

Неравенство	Ответ
$ax^2+bx+c>0$	$(-\infty;x_1)\cup(x_2;\infty)$
$ax^2+bx+c\ge 0$	$(-\infty;x_1]\cup[x_2;\infty)$
$ax^2+bx+c<0$	$(x_1;x_2)$
$ax^2+bx+c\le 0$	$[x_1;x_2]$

2 . $\sqrt{x}>a$,

- если $a<0$, то $x\ge 0$;
- если $a=0$, то $x>0$;
- если $a>0$, то $x>a^2$;

3 .

$$\sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ g(x)>0,\\ f(x)<g^2(x).\end{cases}$$

4 .

$$\sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)\ge 0,\\ f(x)>g^2(x)\end{cases}\\ \begin{cases}g(x)<0,\\ f(x)\ge 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

5 .

$$\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>g(x),\\ g(x)\ge 0.\end{cases}$$

Показательные неравенства

1 . $a^{f(x)}<m$

- если $m>0$, $a>0$, $a\ne 1$,

  то решений нет;
- если $m>0$, $0<a<1$,

  то $f(x)>\log_a m$;
- если $m>0$, $a>1$,

  то $f(x)<\log_a m$;

2 . $a^{f(x)}>m$

- $D > 0$ и $a < 0$.

Неравенство	Ответ
$ax^2 + bx + c > 0$	$(x_1; x_2)$
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$[x_1; x_2]$
$ax^2 + bx + c < 0$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; \infty)$

- если $m \leq 0$, $a > 0$, $a \neq 1$,

  то $x \in D(f)$;

- если $m > 0$, $0 < a < 1$,

  то $f(x) < \log_a m$;

- если $m > 0$, $a > 1$,

  то $f(x) > \log_a m$;

3 . $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

- если $a > 0$, то $f(x) > g(x)$,
- если $0 < a < 1$,

  то $f(x) < g(x)$.

Логарифмические неравенства	**Комбинаторика и бином Ньютона**
1 . $\log_a f(x) < m,\ (m \in R)$ • если $0 < a < 1$, то $f(x) > a^m$; • если $a > 1$, то $\begin{cases} f(x) < a^m, \\ f(x) > 0 \end{cases}$ 2 . $\log_a f(x) > m,\ (m \in R)$ • если $0 < a < 1$, то $\begin{cases} f(x) < a^m, \\ f(x) > 0 \end{cases}$ • если $a > 1$, то $f(x) > a^m$; 3 . $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ • если $0 < a < 1$, то $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$ • если $a > 1$, то $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$ 4 . $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x) \Leftrightarrow$	Число перестановок из n элементов $P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$ Число сочетаний из n элементов по m $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!};\quad C_n^0 = 1.$ Свойства сочетаний $C_n^m = C_n^{n-m};\ C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}.$ Число размещений из n элементов по m $A_n^m = P_m \cdot C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}.$ Формула бинома Ньютона $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots$ $\ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n$ или $(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \ldots$ $\ldots + \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} a^{n-k} b^k + \ldots + b^n,$ где $n \in N$ и $C_n^k a^{n-k} b^k = T_{k+1}$ есть $(k+1)$ – й член в разложении бинома $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n: $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x)>0, \\ h(x)<1, \\ f(x)<g(x), \\ f(x)>0; \end{cases} \\ \begin{cases} h(x)>1, \\ f(x)>g(x), \\ g(x)>0. \end{cases} \end{array}\right.$	

ПРОГРЕССИИ

Арифметическая	**Геометрическая**
(a_1-первый член, d - разность, n - число членов, a_n - n-й член, S_n - сумма n первых членов) $a_n = a_1 + d(n-1)$; $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$; $d = a_{n+1} - a_n$; $d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$, $(n \neq m)$; $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$; $a_n + a_m = a_p + a_q$, *где* $n+m=p+q$.	(b_1-первый член, b_n - n-й член ($b_n \neq 0$), n-число членов, q - знаменатель ($q \neq 0$), S_n - сумма n первых членов) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$; $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $b_n \neq 0$; $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1 - b_n q}{1-q}$ *при* $q \neq 1$; $S_n = n \cdot b_1$ *при* $q = 1$; $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$; $q^{n-m} = \frac{b_n}{b_m}$; $b_n b_m = b_p b_q$, *где* $n+m=p+q$. Сумма бесконечной геометрической прогрессии $S = \frac{b_1}{1-q}$, $\lvert q \rvert < 1$.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Градусная и радианная мера углов

$$1\,радиан \approx \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45'', \qquad 1^\circ \approx \frac{\pi}{180}\,радиана \approx 0{,}017453\,радиана$$

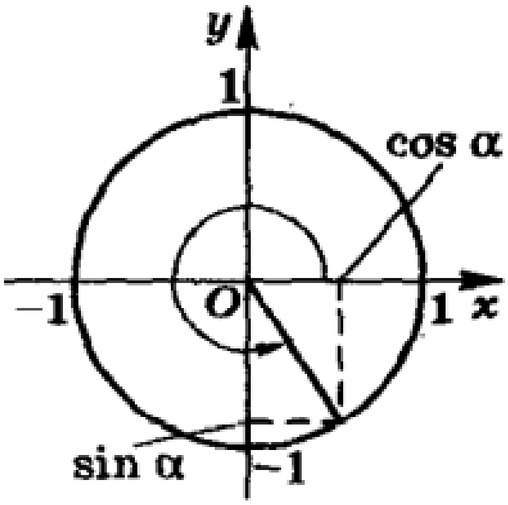
$$1' \approx \frac{\pi}{180 \cdot 60}\,радиана \approx 0{,}000291\,радиана$$

$$1'' \approx \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60}\,радиана \approx 0{,}000005\,радиана$$

Тригонометрические функции

Синус угла α-ордината точки единичной окружности, соответствующей данному углу, т.е. $\sin\alpha = y$.

Косинус угла α-абсцисса точки окружности, соответствующей данному углу, т.е. $\cos\alpha = x$.



$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

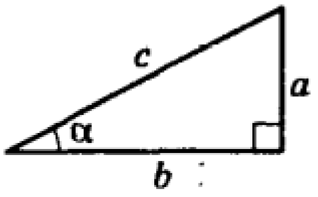
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Знаки значений тригонометрических функций

Четверть	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

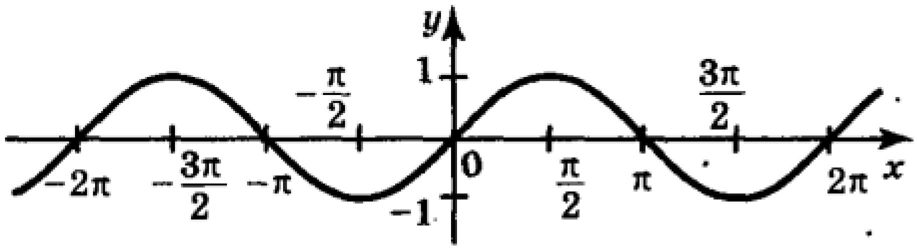
Тригонометрические функции в прямоугольном треугольнике



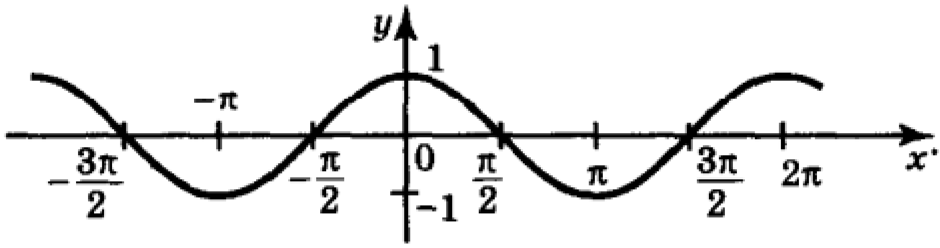
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b} \qquad ctg\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b} \qquad \cos ec\alpha = \frac{c}{a}$$

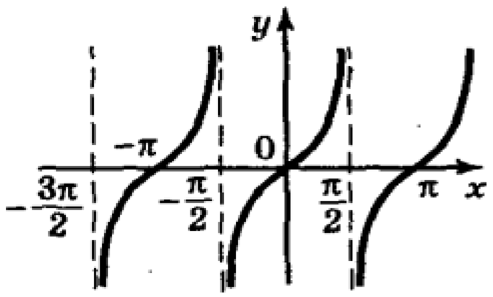


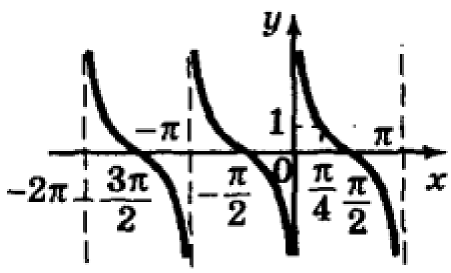
$y = \sin x$



$y = \cos x$

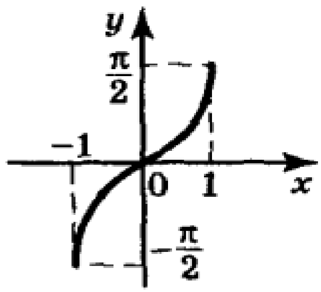
$y = tgx$ $\qquad$ $y = ctgx$

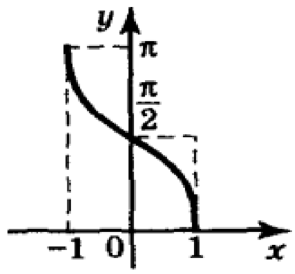




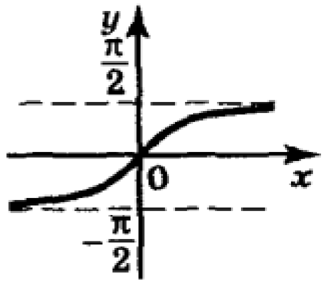
Обратные тригонометрические функции

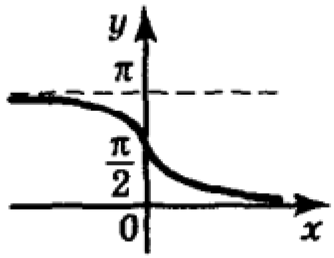
$y = \arcsin x$ $\qquad$ $y = \arccos x$





$y = arctgx$ $\qquad\qquad\qquad$ $y = arcctgx$





$$\left.\begin{matrix} y=\sin x \\ y=\cos x \end{matrix}\right\} \; T=2\pi, \quad \begin{matrix} E_{\sin x}=[-1;1] \\ E_{\cos x}=[-1;1] \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} y=tgx \\ y=ctgx \end{matrix}\right\} \; T=\pi, \quad \begin{matrix} E_{tgx}=[-\infty;\infty] \\ E_{ctgx}=[-\infty;\infty] \end{matrix}$$

Основные тригонометрические тождества	**Формулы понижения степени**
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ \sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ $tg\alpha\cdot tg\beta=1;\alpha\neq\frac{\pi}{2}n$ $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n;n\in Z$ $ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\alpha\neq\pi n;n\in Z$ $1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\quad 1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$	$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$ $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}$ $2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$ $2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha$ $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$
Формулы сумм и разности $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ $tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$ $ctg\alpha\pm ctg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ $\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ $\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$ $\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$ $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$ $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=-2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$	$tg\alpha+ctg\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$ $tg\alpha-ctg\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$ $ctg\alpha-tg\alpha=2ctg2\alpha$ $ctg\alpha+tg\alpha=\frac{2}{\sin2\alpha}$ $\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ $\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$ $\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ $\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$
Формулы сумм и разности углов $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$ $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$ $tg\left(\alpha\pm\beta\right)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\cdot tg\beta}$ $ctg\left(\alpha\pm\beta\right)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta\mp1}{ctg\beta\pm ctg\alpha}$	**Универсальные формулы** $\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$, $\cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$, $tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$

Формулы произведения

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right)$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)\right)$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha+\beta\right)+\sin\left(\alpha-\beta\right)\right)$$

$$tg\alpha\cdot tg\beta=\frac{tg\alpha+tg\beta}{ctg\alpha+ctg\beta},$$

$$ctg\alpha\cdot ctg\beta=\frac{ctg\alpha+ctg\beta}{tg\alpha+tg\beta}$$

Уравнения

$$\sin x=0\Rightarrow x=\pi k;\quad k\in Z$$

$$\sin x=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi k;\quad k\in Z$$

$$\sin x=-1\Rightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\quad k\in Z$$

$$\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k;\quad k\in Z$$

$$\cos x=1\Rightarrow x=2\pi k;\quad k\in Z$$

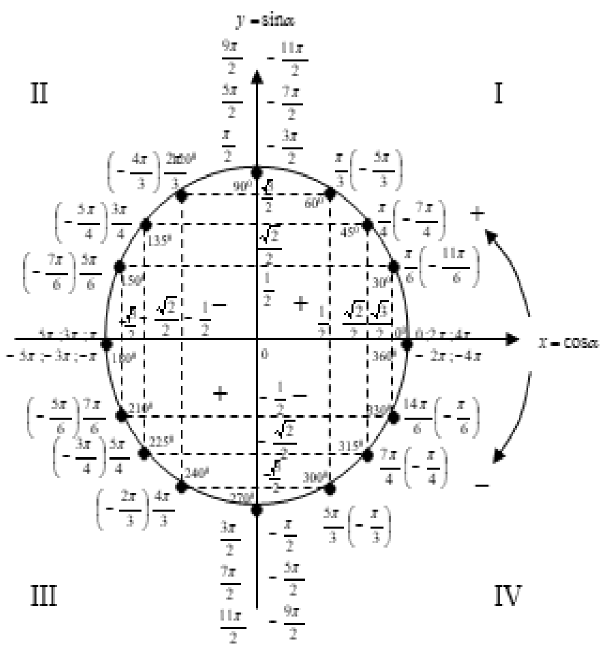
$$\cos x=-1\Rightarrow x=\pi+2\pi k;\quad k\in Z$$

$$\cos x=a\Rightarrow x=\pm\arccos a+2\pi k;\quad k\in Z$$

$$\sin x=a\Rightarrow x=\left(-1\right)^{\kappa}\arcsin a+\pi k;\quad k\in Z$$

$$tgx=a\Rightarrow x=\mathrm{arc}tga+\pi k;\quad k\in Z$$

$$ctg=a\Rightarrow x=arcctga+\pi k;\quad k\in Z$$



Соотношения между обратными тригонометрическими функциями

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = arcctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$arctgx = -arctg(-x) = \frac{\pi}{2} - arcctgx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$arcctgx = \pi - arcctg(-x) = \frac{\pi}{2} - arctgx = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Некоторые тригонометрические формулы

$\sin^4 x = 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x$
$\cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x$
$\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$
$\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$
$\cos^4 x - \sin^4 x = c\mathrm{os}\,2x$
$\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$
$\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - \frac{2}{4}\sin^2 2x$
$\cos^6 x - \sin^6 x = \cos 2x(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x)$
$\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - \frac{2}{4}\sin^2 2x$

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
$\sin 4x = 4\sin x\cos x - 8\sin^3 x\cos x$
$\sin 5x = 5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x$
$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$
$\cos^2 nx = \dfrac{1+\cos 2nx}{2}$
$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$
$\sin x\sin(60^0 - x)\sin(60^0 + x) = \dfrac{1}{4}\sin 3x$
$\cos x\cos(60^0 - x)\cos(60^0 + x) = \dfrac{1}{4}\cos 3x$
$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + ... + \sin nx = \dfrac{\sin\dfrac{nx}{2}\sin\dfrac{n+1}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}$
$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + ... + \cos nx = \dfrac{\sin\dfrac{nx}{2}\cos\dfrac{n+1}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}$
$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos(x-\alpha),$ где $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $a^2+b^2 \neq 0.$
$tg^2x - tg^2y = \dfrac{\sin(x+y)\sin(x-y)}{\cos^2 x\cos^2 y}$
$ctg^2x - ctg^2y = \dfrac{\sin(x+y)\sin(y-x)}{\sin^2 x\sin^2 y}$
$tg^2x - \sin^2 x = tg^2x\sin^2 x$

$ctg^2 x - \cos^2 x = ctg^2 x \cos^2 x$
$(1+tgx)(1+tgy)=2 \quad \text{если} \quad x+y=45^0$
$ctg(60^0 - x)\cdot ctgx \cdot ctg(60^0+x) = ctg3x$
$tg(60^0 - x)\cdot tgx \cdot tg(60^0+x) = tg3x$
$x+y+z=180^0$ $\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 4\sin x \sin y \sin z$
$\cos x \cdot \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2n}}$
$\sin^2 x + \sin^2 2x + \ldots + \sin^2 nx = \frac{n}{2} - \frac{\sin nx \cos(n+1)x}{2\sin x}$
$\cos^8 x + \sin^8 x = (1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x$
$\cos^8 x - \sin^8 x = \cos 2x(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)$
$tgx\cdot ctgy = \frac{tgx+tgy}{ctgx+ctgy} = -\frac{tgx-ctgy}{ctgx-tgy}$

Производные и первообразные

Производные	
$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta Y}{\Delta x} = f(x),\ \Delta x = x - x_0$ $\Delta f = f(\Delta x + x_0) - f(x_0)$ $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$ $f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=3x^2$ $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$	$(u\pm v)'_x = u'_x \pm v'_x$ $(uv)'_x = u'_x v + u v'_x$ $\left(\frac{u}{v}\right)'_x = \frac{u'_x v - u v'_x}{v^2}$ $(u^n)'_x = n u^{n-1}\cdot u'_x$

$f(x)=k \Rightarrow f'(x)=0$ $\left(x^n\right)'_x = nx^{n-1}$ $(\sin x)'_x = \cos x$ $(\cos x)'_x = -\sin x$ $(tgx)'_x = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(ctgx)'_x = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $(\arcsin x)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(arctgx)'_x = \frac{1}{1+x^2}$ $(arcctgx)'_x = -\frac{1}{1+x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)'_x = -\frac{u'_x}{u^2}$ $(\sin u)'_x = \cos u \cdot u'_x$ $(\cos u)'_x = -\sin u \cdot u'_x$ $(tgu)'_x = \frac{u'_x}{\cos^2 u}$ $(ctgu)'_x = -\frac{u'_x}{\sin^2 u}$ $h(u) = f(g(x)), u = g(x)$ $h'(u) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ $\left(a^u\right)'_x = a^u \ln a \cdot u'_x$ $\left(e^u\right)'_x = e^u \cdot u'_x$ $(\log_a u)'_x = \frac{u'_x}{u \ln a}$ $(\ln u)'_x = \frac{u'_x}{u}$

Первообразная	
$y = f(x)$	$y = F(x)$
0	C
1	x
x	$\frac{x^2}{2}$
$x^n\,(n \in N)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$ (при $x > 0$)
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-ctgx$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	tgx

Логарифмы

$a^x = b \Rightarrow \log_a b = x$

$\log_{10} x = \lg x$; $\quad a^{\log_a b} = b$

$\log_a 1 = 0$; $\quad \log_a a = 1$

$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$; $\quad \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

$\log_a x^p = p \cdot \log_a x$; $\quad \log_y x = \frac{\log_a x}{\log_a y}$

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$\log_{a^q} b^p = \frac{p}{q} \cdot \log_a b$ $\quad \log_{a^{\frac{m}{n}}} b^{\frac{p}{q}} = \frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q} \log_a b$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ $\quad a^{\sqrt{\log_b c}} = c^{\sqrt{\log_b a}}$

ГЕОМЕТРИЯ

ТРЕУГОЛЬНИК

Сумма внутренних углов:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi=180^0.$$

Неравенства треугольник: $\begin{cases} a+b>c, \\ a+c>b, \\ b+c>a; \end{cases}$

$$\begin{cases} |a-b|<c, \\ |a-c|<b, \\ |b-c|<a. \end{cases}$$

Теорема косинусов:

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta,$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

Величина внешнего угла:

$$\alpha_1=\beta+\gamma,\ \beta_1=\alpha+\gamma,\ \gamma_1=\alpha+\beta$$

Теорема синусов:

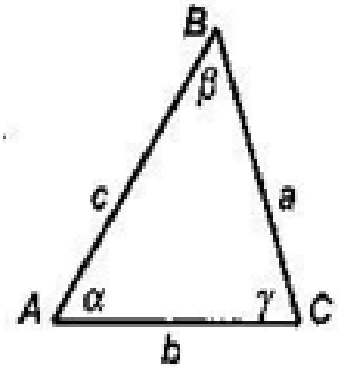
$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

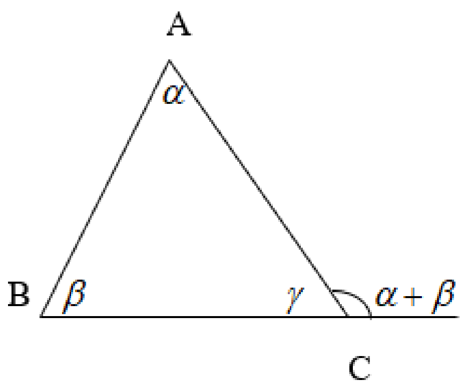
($R-$радиус описанной окружности).

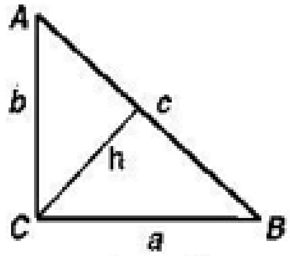
Теорема тангенсов:

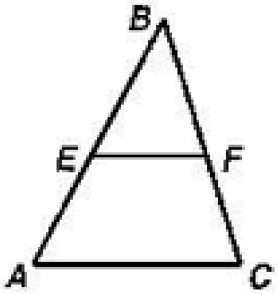
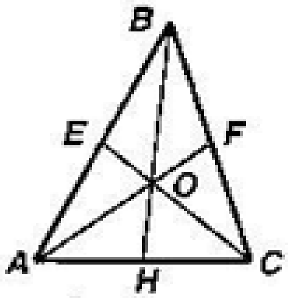
$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{ctg\,\frac{\gamma}{2}}{tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}};$$

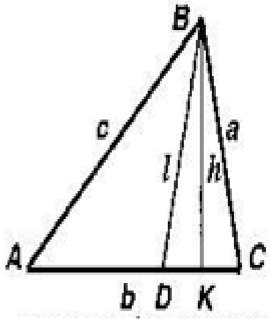
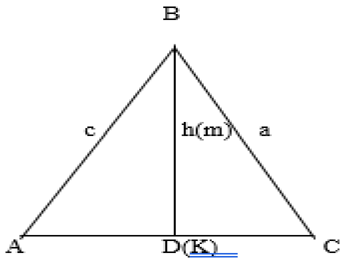
$$\frac{a+c}{a-c}=\frac{tg\,\frac{\alpha+\gamma}{2}}{tg\,\frac{\alpha-\gamma}{2}}=\frac{ctg\,\frac{\beta}{2}}{tg\,\frac{\alpha-\gamma}{2}};$$

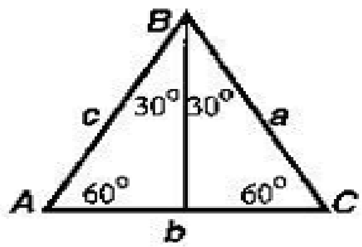




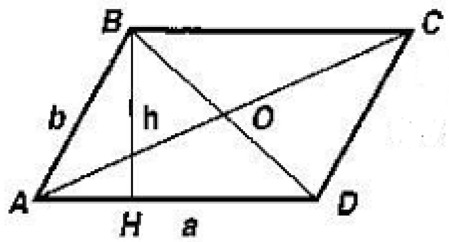
$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{tg\frac{\beta+\gamma}{2}}{tg\frac{\beta-\gamma}{2}}=\frac{ctg\frac{\alpha}{2}}{tg\frac{\beta-\gamma}{2}};$$	
ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК *Теорема Пифагора:* $a^2+b^2=c^2$ (a,b-длины катетов, c -длина гипотенузы, r,R -радиусы вписанной и описанной окружности). $$a=c\sin\alpha=c\cos\beta=btg\alpha=bctg\beta$$ $$m_c=\frac{c}{2},\ R=\frac{c}{2},\ r=\frac{a+b-c}{2},$$ $$S=\frac{ab}{2}=\frac{ch_c}{2}$$	

 Свойства средней линии: $$[EF]\parallel[AC],\ EF=\frac{1}{2}AC$$	 Свойства медиан: $$OF=\frac{1}{3}AF,\ OE=\frac{1}{3}CE,\ OH=\frac{1}{3}BH$$
Свойства биссектрис: $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$. Свойства высот: $h_a:h_b:h_c=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$. Длина медианы, высоты и биссектрисы:	

<table>
<tr>
<td>проведенных из вершины B:
$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$,
$h_b = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b}$,
$l_b = \frac{2\sqrt{acp(p-b)}}{a+c}$.
Площадь: $S = \frac{1}{2}ah_a$, $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона).
Периметр: $2p = a+b+c$ (p-полупериметр), $S = \frac{abc}{4R}, S = pr$, r - радиус вписанной окружности.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК


$m_b = h_b = l_b = \sqrt{a^2 - b^2/4}$
$\alpha = \frac{\pi - \beta}{2}$, $S = \frac{bh_b}{2} = \frac{a^2\sin\beta}{2}$</td>
<td>РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК


$m_b = h_b = l_b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,
$R = a\sqrt{3}/3$, $r = a\sqrt{3}/6$,
$S = a^2\sqrt{3}/4$</td>
</tr>
<tr>
<td>ПАРАЛЛЕЛОГРАММ</td>
<td>ТРАПЕЦИЯ</td>
</tr>
</table>



Свойства сторон и углов:

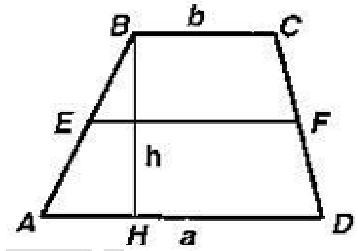
$$\angle BAD + \angle ADC = \pi,$$
$$AB \parallel CD,\ AB = CD,\ AD \parallel BC,\ AD = BC,$$
$$\angle BAD = \angle BCD, \angle ABC = \angle ADC,$$

Свойства диагоналей:

$$AO = OC,\ BO = OD, AC^2 + BD^2 =$$
$$= 2\left(a^2 + b^2\right)$$

Площадь:

$$S = ah,\ S = ab\sin\alpha,\ S = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin\angle AOB$$



Свойства сторон:

$$AD \parallel BC,$$

Средняя линия:

$$EF \parallel AD,\ EF = \frac{a+b}{2},$$

Площадь:

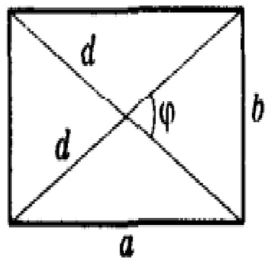
$$S = \frac{(a+b)h}{2},\ S = EF \cdot h.$$

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi.$$

ПРЯМОУГОЛЬНИК

$$S = ab = \frac{1}{2}d^2 \sin\varphi$$

$$R = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$



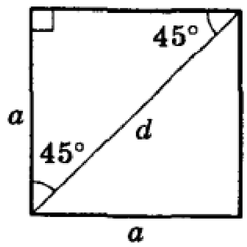
$$P = 2(a+b)$$

КВАДРАТ

$$S = a^2 = \frac{1}{2}d^2$$

$$P = 4a$$

$$d = a\sqrt{2}$$



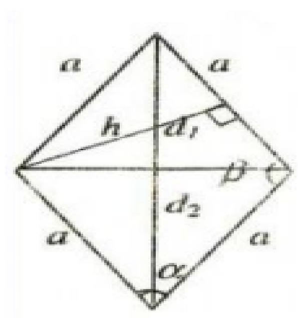
$$R = \frac{1}{2}d = \frac{a\sqrt{2}}{2}\quad,\quad r = \frac{1}{2}a\ .$$

ОКРУЖНОСТЬ, КРУГ

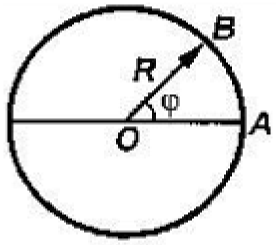
Определение.
Окружностью *называется множество, состоящее из всех точек плоскости, находящихся на равном расстоянии R от фиксированной точки O.*

Число R – называется **радиусом** окружности, точка O–**центром.**

РОМБ



Определение. Ромб - это параллелограмм, который

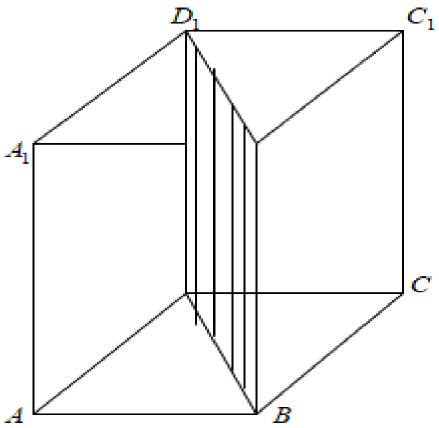
<table>
<tr>
<td>


Длина окружности, $l = 2\pi R$;
Площадь, $S = \pi R^2$,
Длина дуги $l_{AB} = 2\pi R \cdot \varphi/360$,
Площадь, $S_{OAB} = \pi R^2 \cdot \varphi/360$
</td>
<td>
имеет равные стороны. Если у ромба все углы прямые, тогда он называется квадратом.
a - сторона ромба, d_1, d_2 - диагонали,
h-высота, α -острый угол,
β - тупой угол.
• $d_1 \perp d_2$, $\alpha + \beta = 180^\circ$, $P = 4a$;
• $S = ah = 2ar$, $S = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$, $S = a^2 \sin\alpha$;
• $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$, $d_1 = 2a\cos\dfrac{\beta}{2}$, $d_2 = 2a\sin\dfrac{\beta}{2}$;
• $r = \dfrac{h}{2}$, $r = \dfrac{1}{2}\sin\alpha$, $r = \dfrac{S}{2a}$.
</td>
</tr>
</table>

ПРИЗМА

Призма- многогранник, две грани которого параллельны, а остальные пересекаются по параллельным прямым. || грани -основания призмы, остальные грани-боковые. Боковые грани-параллелограммы.

Параллелепипед-призма, основаниями которой являются параллелограммы.



Площадь поверхности: $S = 2S_{осн} + S_{бок}$,

где $S_{осн}$ – площадь основания призмы; $S_{бок}$ - площадь боковой поверхности призмы; $S_{бок} = P \cdot l$;

P-периметр перпендикулярного сечения; l-длина бокового ребра.

Объем: $V = QH, V = Q_1 l$, где Q – площадь основания: H - высота призмы, Q_1- площадь перпендикулярного сечения .

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

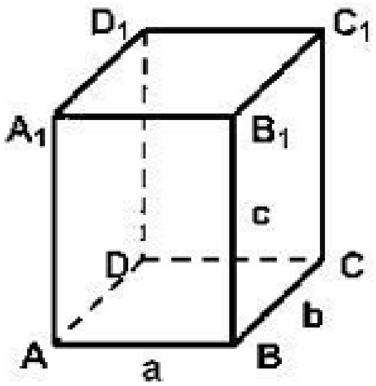
Свойства диагоналей:

$AC_1 = BD_1 = CA_1 = DB_1 = d,\ d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$

Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

$S_{бок} = 2(ab + bc + ac)$

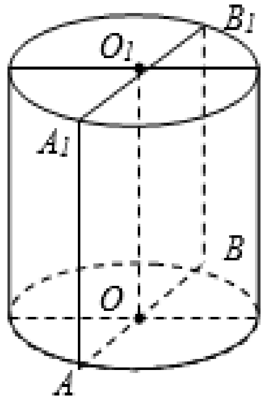
Объем: $V = abc$



Для куба: $a = b = c,\ d = a\sqrt{3},\ S = 6a^2,\ V = a^3$

ЦИЛИНДР

<u>Определение</u>. ***Цилиндром*** называется геометрическая фигура, полученная вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. Сторона, относительно которой происходит вращение – ***ось*** цилиндра, противоположная ей сторона называется ***образующей*** (образует при вращении боковую поверхность цилиндра), две другие – ***радиусы*** нижнего и верхнего оснований цилиндра.



OO_1 – ось цилиндра,

$AA_1 = BB_1 = \ldots = l$ – образующие цилиндра,

$OA = OB = \ldots = OA_1 = OB_1 = R$ – радиусы нижнего и верхнего оснований.

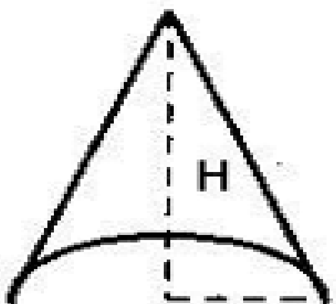
Объём и площадь поверхности цилиндра

$$s_{осн} = \pi R^2 \qquad S_{бок} = 2\pi RH$$

$$S_{пов} = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R\left(R + H\right)$$

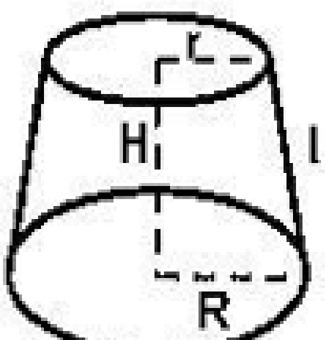
$$V = \pi R^2 H$$

КОНУС

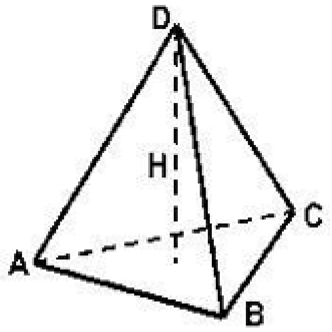
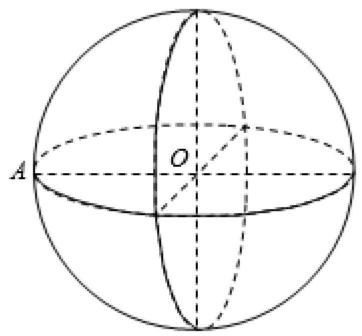


<u>Определение</u>. ***Конусом*** называется геометрическая фигура, полученная вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. Катет, относительно которого

УСЕЧЕННЫЙ КОНУС



<u>Определение</u>. ***Усечённым конусом*** называется геометрическая фигура, полученная вращением прямоугольной трапеции вокруг её меньшей боковой стороны. Другими словами: усечённым

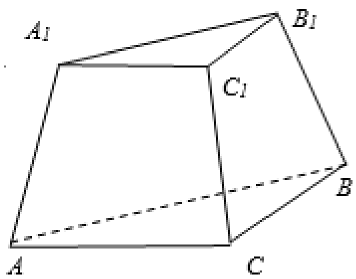
происходит вращение – ***ось*** конуса, численно равная его высоте; второй катет – ***радиус*** основания; гипотенуза – ***образующая*** (образует при вращении боковую поверхность конуса). Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = \pi Rl$ **Площадь полной поверхности:** $S_{кон} = \pi Rl + \pi R^2$ Объем: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$	конусом называется часть конуса, заключённая между основанием и параллельным основанию сечением конуса. $S_{бок} = \pi(R+r)l$**,** $S_{кон} = \pi R^2 + \pi r^2 + \pi(R+r)l$, $V = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + Rr + r^2\right)$**.**
ПИРАМИДА  **<u>Определение</u>. *Пирамидой*** называется многогранник, одна грань которого - произвольный многоугольник (основание), а все остальные грани (боковые) – треугольники, имеющие общую вершину (вершина пирамиды). **Площадь поверхности:** $S_{пир} = S_{бок} + S_{осн}$, где $S_{бок}$-пл. бок. поверхн: $S_{осн}$ -пл. основания.	**ШАР и СФЕРА**  **<u>Определение</u>. *Шар*** – геометрическая фигура, полученная вращением круга (полукруга) вокруг его диаметра. Другими словами: шаром называется множество точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного (*R* - радиус шара) от данной точки (центра шара). **<u>Определение</u>. *Сфера*** – геометрическая фигура,

Объем: $V = \frac{1}{3}QH$, где Q-пл. основания; H - высота пирамиды.

Правильная пирамида

$S_{бок} = \frac{1}{2}Ph_{бок}$, где P- периметр основания; h- высота боковой грани $Q = S_{бок}\cos\alpha$, где $\alpha -$ угол между боковой гранью и плоскостью основания.

Определение. ***Усечённой пирамидой*** называется многогранник, две грани которого – подобные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, называемых основаниями пирамиды, а остальные грани – четырёхугольники (трапеции), называемые боковыми гранями



Объем: $V = \frac{h}{3}\left(Q_1 + \sqrt{Q_1Q_2} + Q_2\right)$, где h-высота; Q_1, Q_2-площади оснований. Для правильной усеченной пирамиды $S_{бок} = \frac{1}{2}\left(p_1 + p_2\right)h_{бок}$, где p_1, p_2 - периметры оснований; $h_{бок}$ - высота боковой грани.

полученная вращением окружности (полуокружности) вокруг её диаметра. Другими словами: сферой называется множество точек пространства, удалённых от данной точки (центра сферы) на данное расстояние R (радиус сферы).

Площадь поверхности:

$$S = 4\pi R^2$$

Объем: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Площадь сферического сегмента: $S = 2\pi RH$, где $H -$ высота сегмента. **Объем шарового сегмента:**

$$V = \frac{1}{3}\pi H^2\left(3R - H\right)$$

Объем шарового сектора:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$$

Сечение сферы любой плоскостью-***окружность.*** Сечение шара любой плоскостью-***круг***. Большой круг шара – круг, проходящий через центр.

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

<u>Опр</u>. Определителем 2- порядка называется число:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Определитель 3- порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad a_{ij} \text{–элементы } \Delta \;\; i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,3}$$

<u>Опр</u>. <u>Минор</u> элемента a_{ij} -это M_{ij} остаток из Δ при вычеркивании элементов

i -ой строки и j -го столбца $\mathrm{M}_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

Определитель $n-$ го порядка. $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$ - элементы i ой строки $a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj}$ - элементы $j-$ столбца.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1\mathrm{j}} & ... & a_{1\mathrm{n}} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2n} \\ \hdashline a_{\mathrm{i}1} & a_{\mathrm{i}2} & ... & a_{\mathrm{i}j} & ... & a_{\mathrm{i}n} \\ \hdashline a_{\mathrm{n}1} & a_{\mathrm{n}1} & ... & a_{\mathrm{n}j} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Опр. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется

$$\mathrm{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \mathrm{M}_{ij}$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ Δ: Определитель Δ <u>равен</u> сумме из произведений элементов строки(столбца) на их алгебраические дополнения, т. е.

$$\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + ... a_{in} \cdot A_{in}$$

Основные свойства Δ: Определитель не изменяет своего значения, если элементы любой строки (столбца) умножить на число и сложить с соответствующими элементами другой строки (столбца).

$\Delta = 0$, если элементы двух строк (столбцов) совпадают.

Матрица – это таблица чисел размерность $(k \times n)$

$$\mathrm{A}=\mathrm{M}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix}.$$

Записывается короче $\mathrm{A}=\left[a_{ij}\right]=\left\|a_{ij}\right\|=\left(a_{ij}\right);\ i=\overline{1,k};\ \mathrm{j}=\overline{1,n}.$

Если $k\neq n$, A наз. прямоугольная. Если $k=n$, A наз. квадратная.

Матрица строка – $\left(a_{1j}\right),\quad j=\overline{1,n}\qquad (1\times n).$

Матрица столбец – $\left(a_{i1}\right),\quad i=\overline{1,k}\qquad (k\times 1).$

Матрица единичная - $\mathrm{E}=(a_{ij})\Rightarrow a_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\ (n\times 1)$

Если A квадратная и детерминант $\det A\neq 0$, то обратная матрица для A существует

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},\qquad A^{-1}\cdot A=E$$

Действия над матрицами

$$C=A+B,\ c_{ij}=a_{ij}+b_{ij};\qquad C=k\cdot A,\quad c_{ij}=ka_{ij}$$

С=А·В возможно, если $A-(n\times k),\ \ b-(k\times l)$

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{ik}\cdot b_{kj}=\sum_{m=1}^{k}a_{im}\cdot b_{mj}\qquad i=\overline{1,n}\ ;\ j=\overline{1,l}$$

система k линейных уравнений с n неизвестными $\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\ldots+a_{kn}x_n=b_k \end{cases}$$

Матрица системы $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix}$

Матрица неизвестных $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, матрица свободных членов $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}x_i = b_1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}x_i = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki}x_i = b_k \end{cases}$$

$\det A$ сущ. для $(n \times n)$, $\det A = \left|a_{ij}\right|$, $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,n}$

Методы решения

КРАМЕРА – система n уравнений с n неизвестными и $\det A \neq 0$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \cdots; \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \quad \text{где} \quad \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{6} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & b_n & \dots & a_{kn} \end{vmatrix}$$

ГАУССА – записываем $(A \vdots B)$ и алгебраическими преобразованиями получаем $(E \vdots X)$, где матрица X – матрица ответов.

$$A X = \overline{B}, \quad \underset{m<n}{A[m \times n]}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

1) $r(A) = r(B) = n$ система совместна определена

2) $r(A) = r(B) = m < n$ совместна неопределенно

3) $r\left(A\right)\neq r\left(B\right)$ решение не существует.

$$B=0,\quad AX=0,\quad \det A=0 \text{ совместна } X=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad r\left(A\right)<n.$$

$$m=n,\quad B=\left(A\setminus\overline{B}\right).$$

МАТРИЧНЫЙ

$$A\cdot X=B\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B,$$

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов

<table>
<tr><th colspan="2">Скалярное произведение</th></tr>
<tr><td>

$\vec{a}\left(a_x;a_y\right)$, $\vec{b}\left(b_x;b_y\right)$; $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y$,

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{b_x^2+b_y^2}$;

$\vec{a}\left(a_x;a_y;a_z\right)$, $\vec{b}\left(b_x;b_y;b_z\right)$; $\vec{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$, $\vec{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}$;

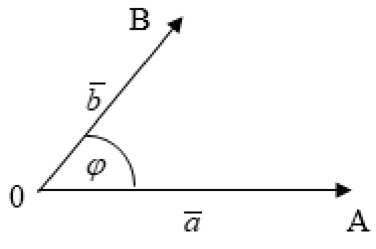
$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}$

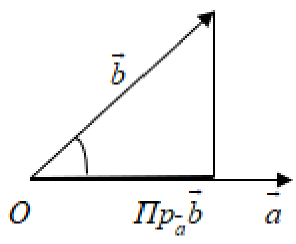
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi$, $\varphi=\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)$

Свойства:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$
2. $\left|\vec{b}\right|\cos\varphi=Пр_{\vec{a}}\vec{b}$, (проекция вектора $\bar{b}$ на $\bar{a}$).
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi=\left|\vec{a}\right|Пр_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|Пр_{\vec{b}}\vec{a}$

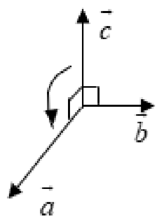
</td><td>





</td></tr>
</table>

3. $\vec{a}^{\,2} = \lvert\vec{a}\rvert^2,\ \lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, *где* $\vec{a} =$ $= a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ 4. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, если $\vec{a}\perp\vec{b}$ 5. $\vec{b} = k\vec{a}$ или $\dfrac{b_x}{a_x} = \dfrac{b_y}{a_y} = \dfrac{b_z}{a_z} = k$ - условие коллинеарности векторов. 6. Угол между векторами: $\cos\varphi = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\lvert\bar{a}\rvert\cdot\lvert\bar{b}\rvert} = \dfrac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$, $a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0$ - условие перпендикулярности двух векторов. 7. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ 8. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$ 9. $\bar{i}\cdot\bar{j} = 0,\quad \bar{j}\cdot\bar{k} = 0,\quad \bar{i}\cdot\bar{i} = 1,\quad \bar{j}\cdot\bar{j} = 1,$ $\bar{k}\cdot\bar{k} = 1.$	

Векторное произведение	***Смешанное произведение***
Вектор $\bar{c} = \bar{a}\times\bar{b}$ 1. $\lvert\bar{c}\rvert = \lvert\bar{a}\rvert\cdot\lvert\bar{b}\rvert\sin\left(\bar{a}\,\hat{,}\,\bar{b}\right)$,  2. $\bar{c}\perp\bar{a}, \bar{c}\perp\bar{b}$,	Число $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$ 1. $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c} = \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right)$-форма записи смешанного произведения. 2. $\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right)$ $\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot\bar{c}\right) = \left(\bar{c}\cdot\bar{a}\cdot\bar{b}\right) = -\left(\bar{b}\cdot\bar{a}\cdot\bar{c}\right) =$ $= -\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\cdot\bar{b}\right) = -\left(\bar{c}\cdot\bar{b}\cdot\bar{a}\right)$ 3. Если $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$-компланарны,

3. $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – правая тройка

Свойства:

1. $\overline{a}\times\overline{b} = -\left(\overline{b}\times\overline{a}\right)$
2. $\lambda\left(\overline{a}\times\overline{b}\right) = \left(\lambda\overline{a}\right)\times\overline{b} = \overline{a}\times\left(\lambda\overline{b}\right)$, где $\lambda\in R$
3. $\overline{a}\times\left(\overline{b}+\overline{c}\right) = \left(\overline{a}\times\overline{b}\right)+\left(\overline{a}\times\overline{c}\right)$
4. Если $\overline{a}\wedge\overline{b} = 0$, то $\overline{a}\,\|\,\overline{b} \Leftrightarrow \overline{a}\times\overline{b} = 0$
5. $\overline{a}\times\overline{a} = \overline{b}\times\overline{b} = \overline{0}$
6. Если $\overline{a}\perp\overline{b}$, то $\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|$
7. $S_{пар} = \left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$ - площадь параллелограмма.

   $S_{\Delta} = \dfrac{1}{2}\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$-площадь треугольника.
8. $$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$
   $$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}$$
9. $\overline{i}\times\overline{j} = \overline{k}$, $\overline{j}\times\overline{k} = \overline{i}$, $\overline{i}\times\overline{k} = -\overline{j}$

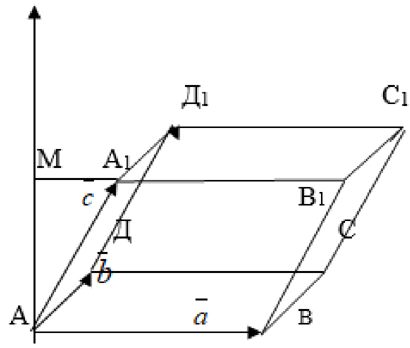
   $\overline{k}\times\overline{i} = \overline{j}$, $\overline{j}\times\overline{i} = -\overline{k}$, $\overline{k}\times\overline{j} = -\overline{i}$.

то $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c} = 0$

4. $$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_z & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

если
$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$$
$$\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$$
$$\overline{c} = c_x\overline{i} + c_y\overline{j} + c_z\overline{k}$$

5. $\overline{d} = \overline{a}\times\overline{b}$



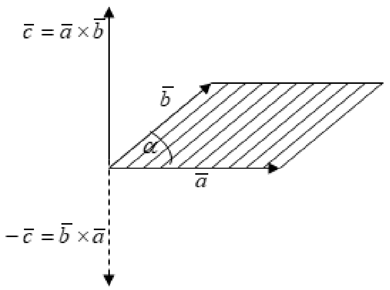
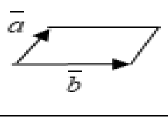
$$\overline{d} = \overline{a}\times\overline{b}, \quad AM = Пр_{\overline{d}}\overline{c},$$
$$S_{ABCD} = \left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$$
$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c} = \left|\overline{a}\times\overline{b}\right|\cdot\left|\overline{c}\right|\cos\alpha = \left|\overline{a}\times\overline{b}\right| Пр_{\overline{d}}\overline{c},$$
$$S\cdot H = V$$

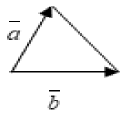
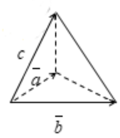
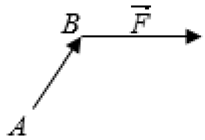
где V-объём параллелепипеда .

$$V = \left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|$$

$$\vec{a}\left(a_x;a_y;a_z\right),\ \vec{b}\left(b_x;b_y;b_z\right),\ \vec{c}\left(c_x;c_y;c_z\right)$$

$$\vec{c} = \overline{a}\times\overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

 $\vec{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$	$\overline{abc} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$
Признак коллинеарности векторов $\bar{a} \times \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}$ $\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$	Признак компланарности векторов $\overline{abc} = 0 \Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - компланарны $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$
Площадь параллелограмма $S_{пр} = \left\|\bar{a} \times \bar{b}\right\| = \left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \sin\varphi,\ \varphi = \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$ 	Объём параллелепипеда $V = \left\|\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}\right\|$

Площадь треугольника $S_\Delta = \frac{1}{2}\left\|\bar{a}\times\bar{b}\right\|$ 	Объём пирамиды $V = \frac{1}{6}\left\|\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right\|$ 
Момент силы $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{F}$ 	

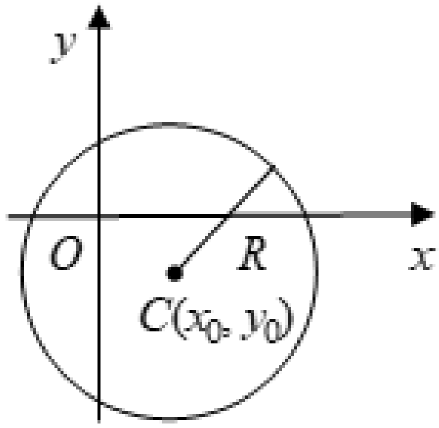
Некоторые кривые второго порядка

Общее уравнение линии второго порядка в декартовой системе координат:

$$F\left(x, y\right) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$$

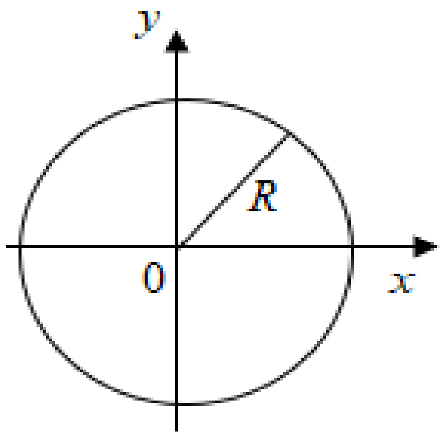
$$\mathrm{A}x^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

ОКРУЖНОСТЬ	**ЭЛЛИПС**
Общее уравнение окружности с центром в точке $C\left(x_0; y_0\right)$ и радиуса R имеет вид: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - уравнение эллипса с центром в начале координат.



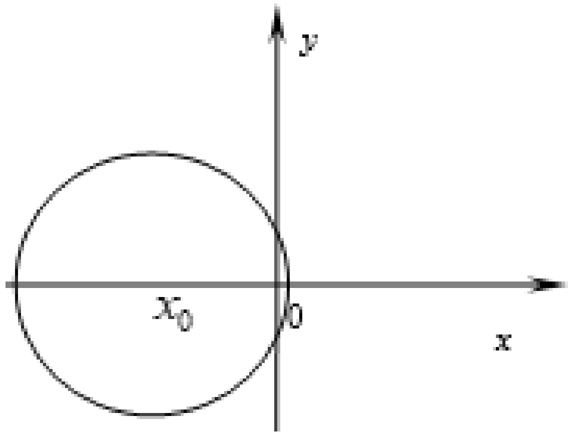
с центром в начале координат:

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0 \rightarrow\ x^2 + y^2 = R^2$$

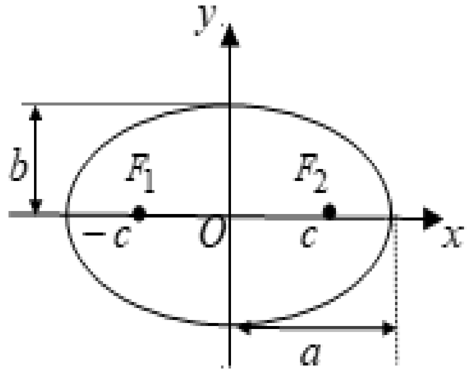


Если центр окружности лежит на оси Ox, то уравнение окружности имеет вид:

$$\left(x - x_0\right)^2 + y^2 = R^2$$



Если центр окружности лежит на оси Oy, то уравнение



a - большая полуось

b - малая полуось

$F_1(-c,0),\ F_2(c,0)$ - фокусы

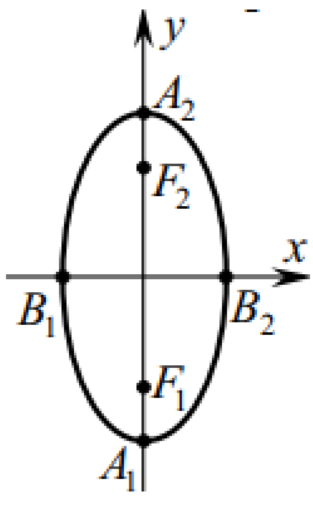
$$c^2 = a^2 - b^2$$

$2a$-большая ось, $2b$-малая ось

$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ - эксцентриситет эллипса

$$r_1 = |MF_1| = \alpha + \varepsilon x,\ r_2 = |MF_2| = \alpha - \varepsilon x$$

Фокальные радиусы.

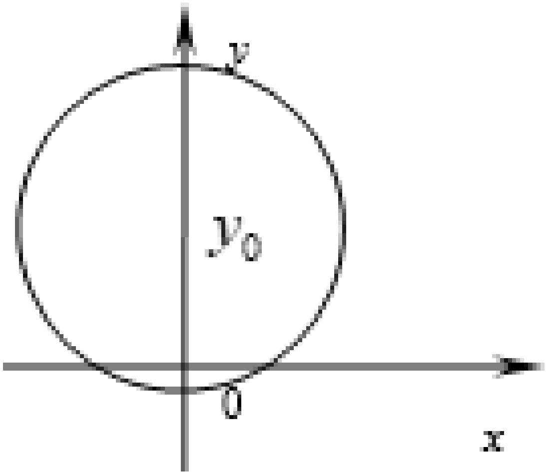


$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Oy - большая ось, Ox - малая ось

$F_1\left(0;-c\right)$ и $F_2\left(0;c\right)$ фокусы окружности имеет вид:

$$x^2+\left(y-y_0\right)^2=R^2$$



Параметрическое уравнение окружности

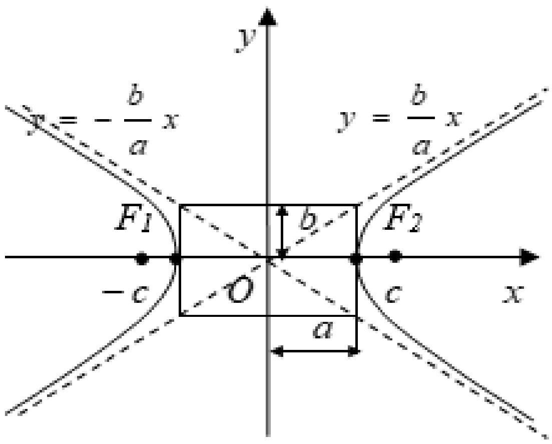
$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$$

$$c^2=b^2-a^2$$

$\dfrac{\left(x-x_0\right)^2}{a^2}+\dfrac{\left(y-y_0\right)^2}{b^2}=1$ - уравнение эллипса со смещённым центром в точке $O\left(x_0,y_0\right)$.

ГИПЕРБОЛА

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$- каноническое уравнение гиперболы с центром в начале координат.

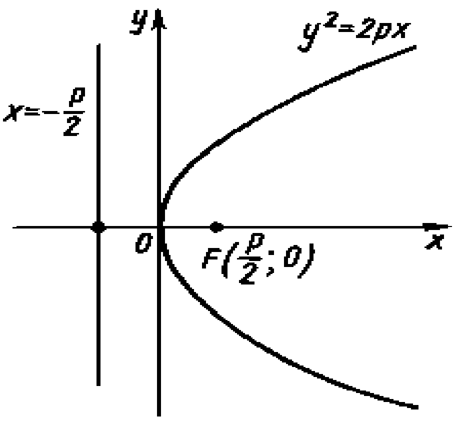


a - действительная полуось

b - мнимая полуось

ПАРАБОЛА С ВЕРШИНОЙ В НАЧАЛЕ КООРДИНАТ:

$y^2=2px$ $(p>0)$- каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $O(0,0)$. Ветви направлены вправо. Ось симметрии *Ox*.

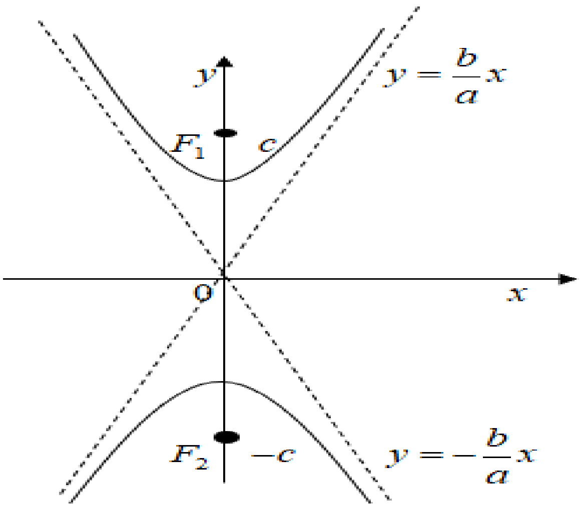


$F_1(-c,0),\ F_2(c,0)$ - фокусы

$$c^2=a^2+b^2$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$ - уравнение гиперболы со смещённом центром $O(x_0,y_0)$.

$$\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$$



$F_1(0,-c),\ F_2(0,-c)$ - фокусы

$$c^2=a^2+b^2$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}-\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$$ - уравнение гиперболы со смещённым центром $O(x_0,y_0)$.

УРАВНЕНИИ АСИМПТОТЫ.

$y=kx+b$ - наклонная асимптота, где $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}$;

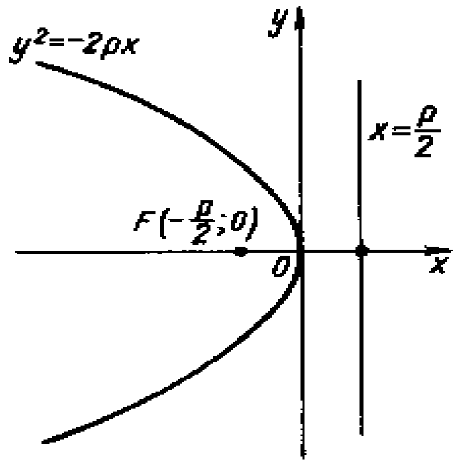
$$b=\lim_{x\to\infty}\left(y(x)-kx\right).$$

$D:\ x=-\frac{p}{2}$ - директриса

$F(\frac{p}{2},0)$ - фокус

$y^2=-2px,\ p>0.$

Ветви направлены влево. Ось симметрии Ox.



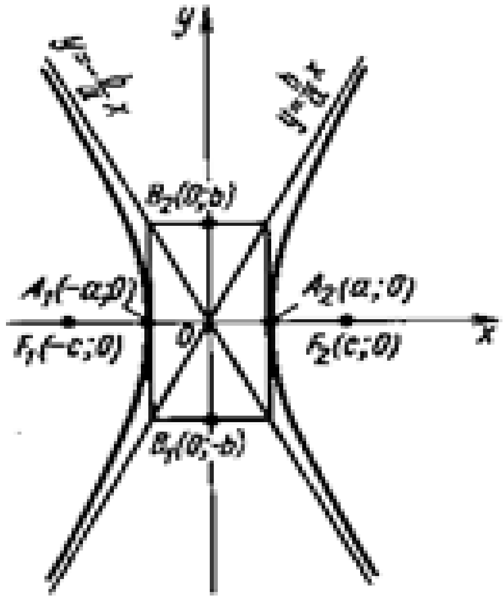
$D:\ x=\frac{p}{2}$ - директриса

$F(-\frac{p}{2},0)$ - фокус

$x^2=2py,\ (p>0).$

Ветви направлены вверх. Ось симметрии Oy.

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

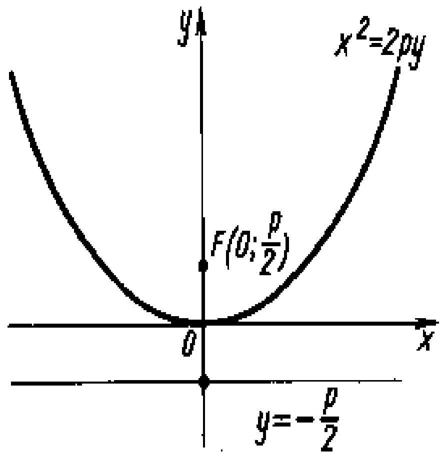


$A_1(-a;0)$ и $A_2(a;0)$- вершины гиперболы.

$|A_1A_2| = 2a$ -вещественная ось.

a -вещественная полуось.

b– мнимая полуось.

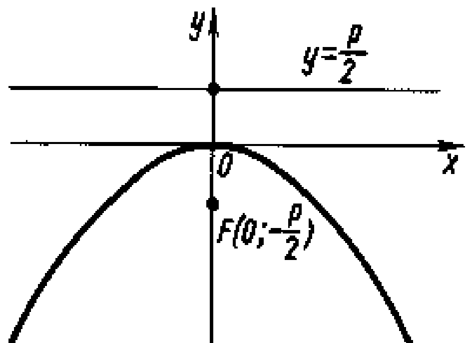


D: $y = -\frac{p}{2}$ - директриса

$F(0,\frac{p}{2})$ - фокус

$x^2 = -2py$, ($p > 0$).

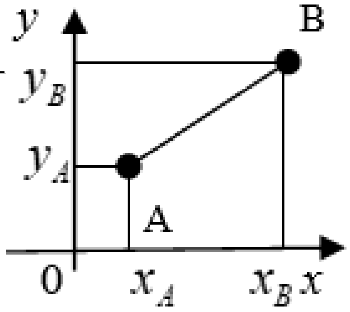
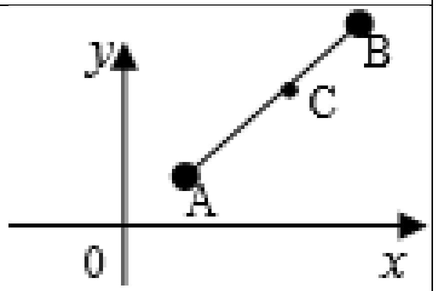
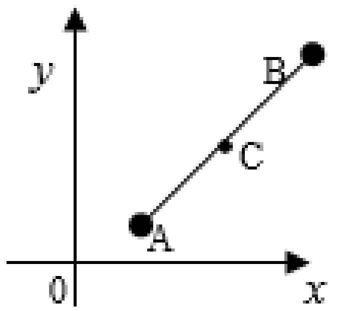
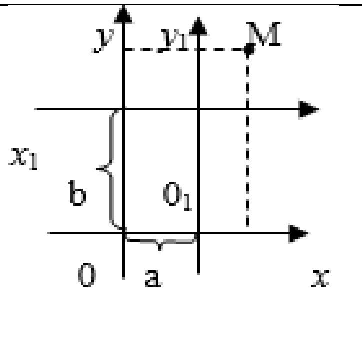
Ветви направлены вниз. Ось симметрии *Oy*.

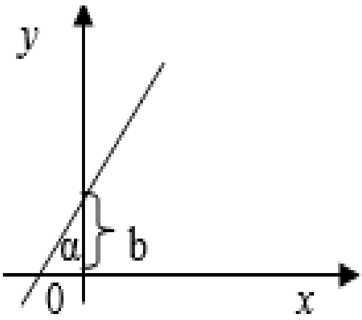
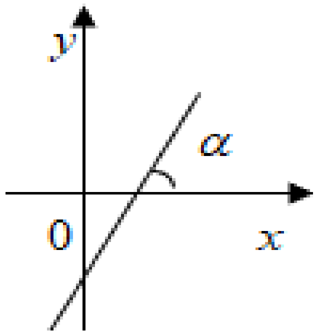
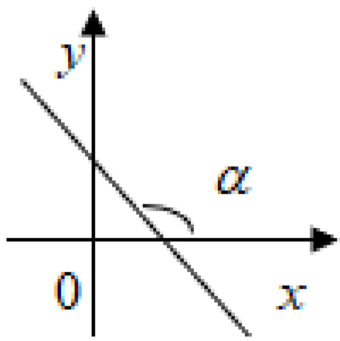
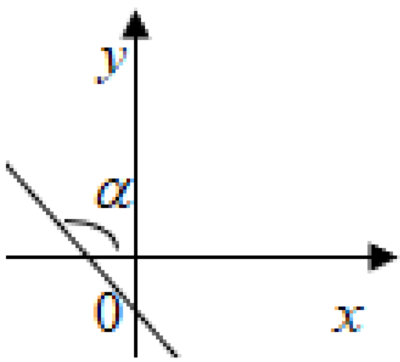


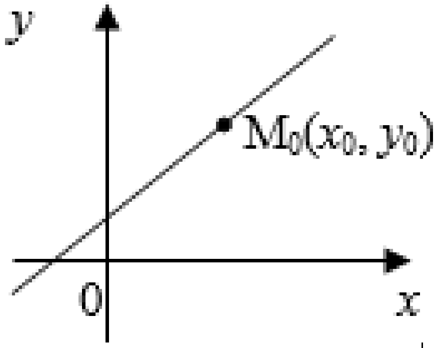
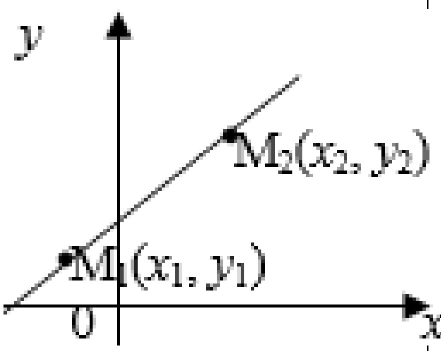
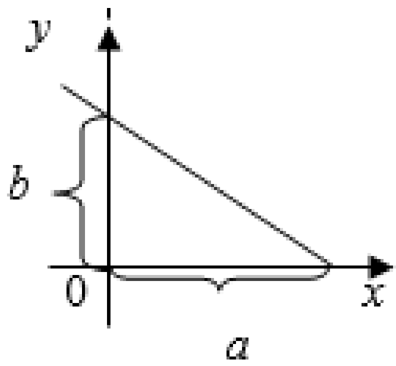
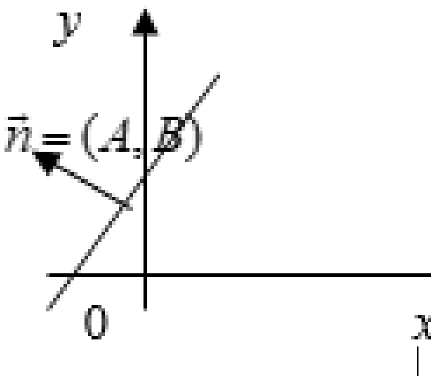
D: $y = \frac{p}{2}$ - директриса

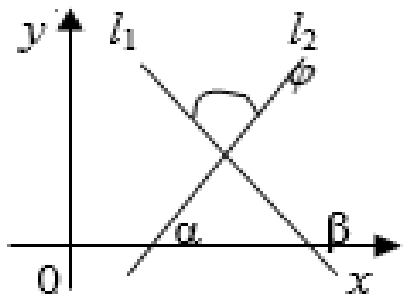
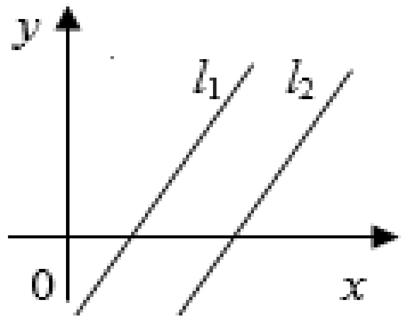
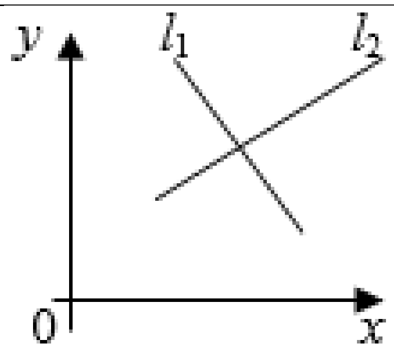
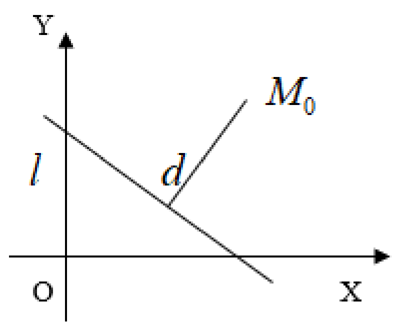
$F(0,-\frac{p}{2})$ - фокус

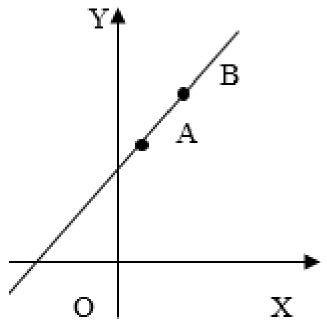
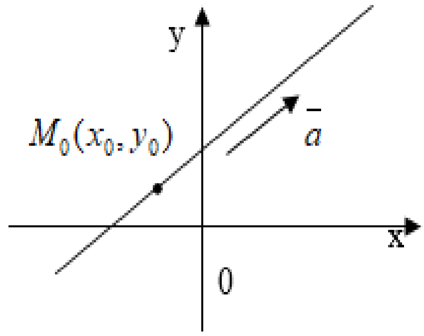
Простейшие формулы аналитической геометрии

Комментарии	Формулы	Схематический чертеж
Расстояние между двумя точками $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$	$\vert AB\vert=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$	
Деление отрезка в заданном отношении $(\lambda = AC/CB)$	$x_C=\dfrac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}$ $y_C=\dfrac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}$	
Деление отрезка пополам $(\lambda = 1)$	$x_C=\dfrac{x_A+x_B}{2}$ $y_C=\dfrac{y_A+y_B}{2}$	
Преобразования координат при параллельном переносе	$x=x_1+a$ $y=y_1+b$	

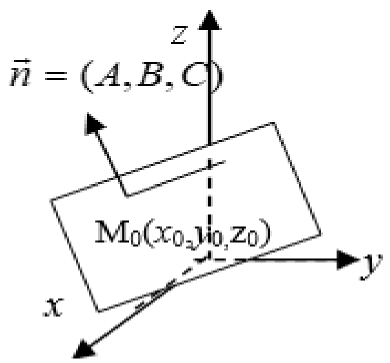
Уравнение прямой с угловым коэффициентом k	$y = kx + b$ $(k = \mathrm{tg}\,\alpha)$	$k > 0,\ b > 0$ 
		$k > 0,\ b < 0$ 
		$k < 0,\ b > 0$ 
		$k < 0,\ b < 0$ 

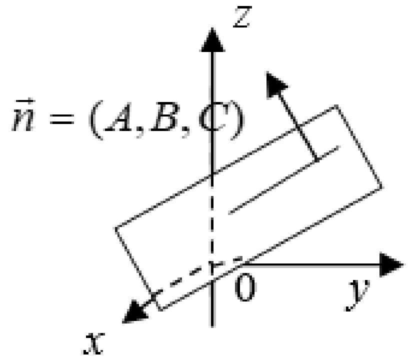
Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ в заданном направлении k	$y - y_0 = k(x - x_0)$	
Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.	$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	
Уравнение прямой в отрезках на осях.	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$	
Общее уравнение прямой.	$Ax + By + C = 0$, $\vec{n} = (A, B)$, $(A^2 + B^2 \neq 0)$	

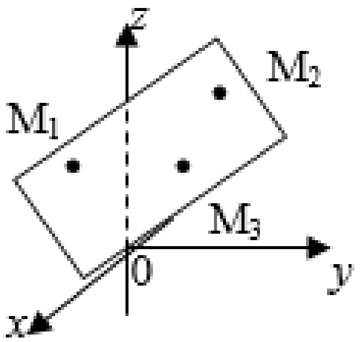
Угол между двумя прямыми l_1: $y = k_1 x + b_1$, l_2: $y = k_2 x + b_2$.	$\mathrm{tg}\phi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$	
Условие параллельности двух прямых $l_1: \ y_1 = k_1 x + b_1$, $l_2: \ y_2 = k_2 x + b_2$.	$k_1 = k_2$	
Условие перпендикулярности двух прямых $l_1: \ y_1 = k_1 x + b_1$, $l_2: \ y_2 = k_2 x + b_2$.	$k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$	
Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $l: Ax + By + C = 0$, $\vec{n} = (A, B)$	$d = \dfrac{\lvert Ax_0 + By_0 + C \rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$	

Угловой коэффициент прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$.	$k = \operatorname{tg}\alpha$ $k = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$	
Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{a} = m \cdot \vec{i} + n \cdot \vec{j}$	$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$	

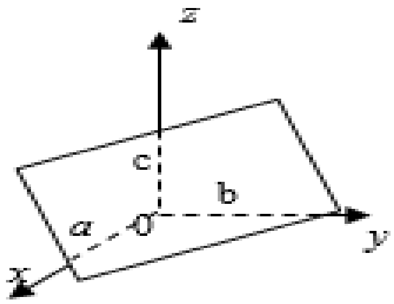
Плоскость и прямая в пространстве

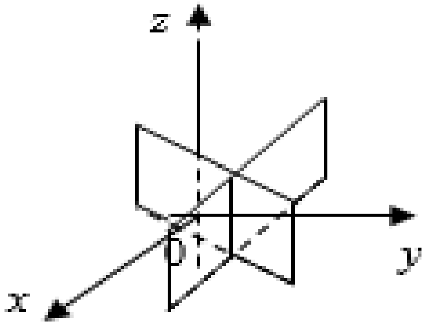
Формулы и комментарии	Схематический чертеж
Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – перпендикулярно вектору нормали $\vec{n} = (A, B, C)$: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$	
Общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ $\vec{n} = (A, B, C)$ $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$	

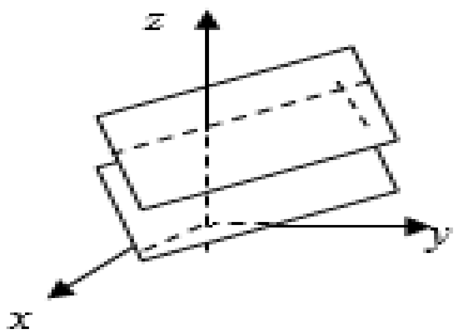
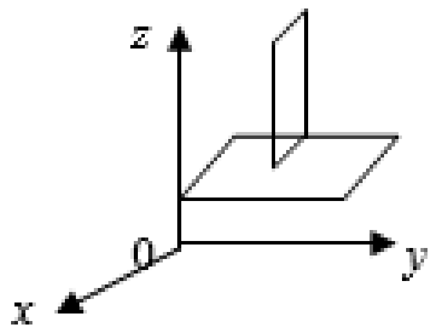
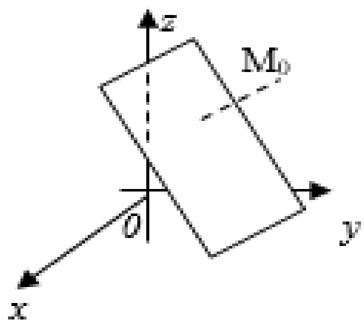
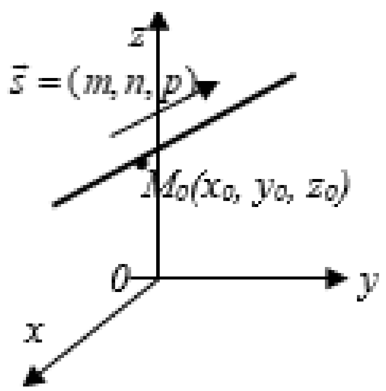
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$

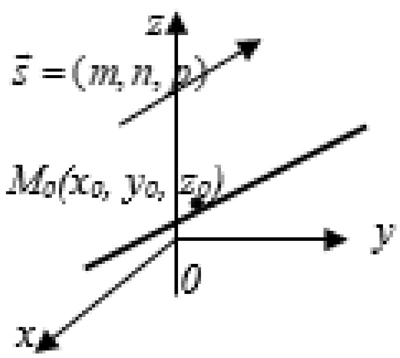
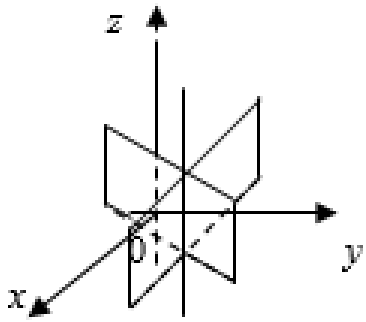
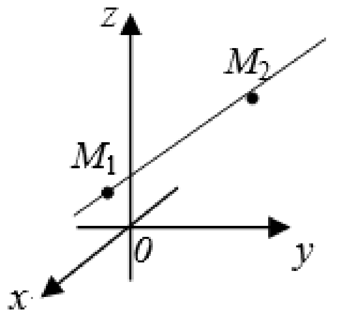
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Уравнение плоскости в отрезках

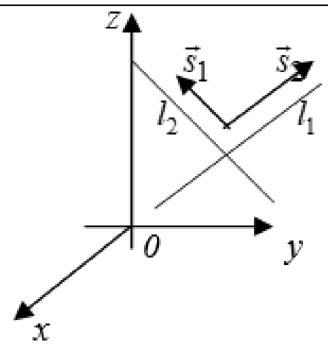
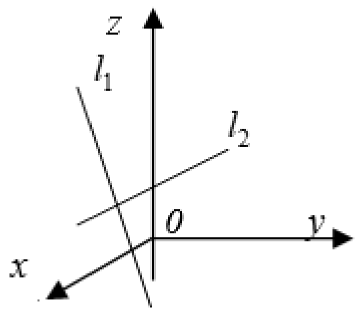
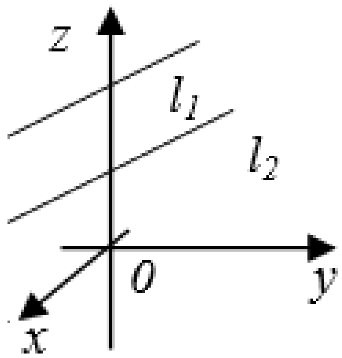
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где a, b, c – величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Угол между двумя плоскостями

$$P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + +D_1 = 0,$$
$$P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + +D_2 = 0$$
$$\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1),\ \overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$$
$$\cos\phi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

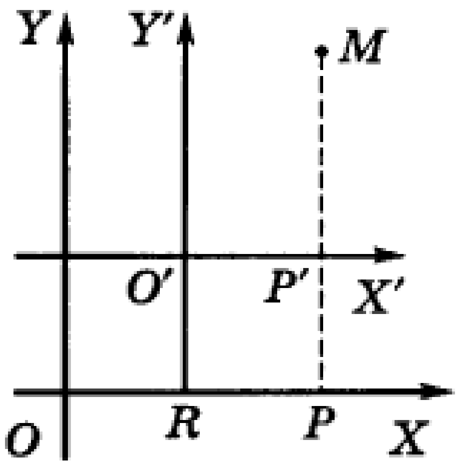
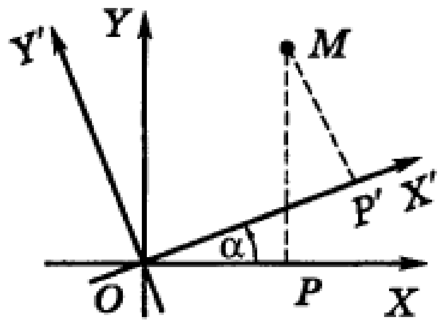
<table>
<tr>
<td>Условие параллельности двух плоскостей
$P_1: A_1x + B_1y + C_1z + +D_1 = 0,$
$P_2: A_2x + B_2y + C_2z + +D_2 = 0$
$\overrightarrow{n_1} = \left(A_1, B_1, C_1\right),\ \overrightarrow{n_2} = \left(A_2, B_2, C_2\right)$
$P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \ \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Условие перпендикулярности двух плоскостей
$P_1: A_1x + B_1y + C_1z + +D_1 = 0,$
$P_2: A_2x + B_2y + C_2z + +D_2 = 0$
$\overrightarrow{n_1} = \left(A_1, B_1, C_1\right),\ \overrightarrow{n_2} = \left(A_2, B_2, C_2\right)$
$P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Расстояние от точки $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ до плоскости
$Ax + By + Cz + D = 0,$
$\vec{n} = \left(A, B, C\right),$
$d = \dfrac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Канонические уравнения прямой в пространстве:
$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p},$
где $\vec{s} = (m, n, p)$– направляющий вектор прямой</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Параметрические уравнения прямой в пространстве: $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \text{ где } t\text{– параметр.} \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$	
Общие уравнения прямой в пространстве: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$ $\vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$	
Уравнения прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2)$ $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$	
Угол между двумя прямыми $l_1 : \dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1},$ $l_2 : \dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{p_2},$	

$\vec{s_1}=(m_1,n_1,p_1)$, $\vec{s_2}=(m_2,n_2,p_2)$- направляющие векторы $\cos\phi=\dfrac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$	
Условие перпендикулярности двух прямых $l_1:\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$, $l_2:\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$, $l_1\perp l_2 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.	
Условие параллельности двух прямых $l_1:\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$, $l_2:\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$, $l_1 \parallel l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.	

Перенос начала координат

- старые координаты точки $M:\ x=OP,\ y=PM$; - новые координаты точки $M:\ x'=O'P',\ y'=P'M$; - координаты нового начала O'	

в старой системе $XOY:\ x_0 = OR,\ y_0 = RO'.$ Формула переноса: $x = x' + x_0,\ \ y = y' + y_0$ или $x' = x - x_0,\ \ y' = y - y_0.$	
- старые координаты точки $M:\ x = OP,\ y = PM;$ - новые координаты точки $M:\ x' = O'P',\ y' = P'M;$ - угол поворота осей $\alpha = \angle XOX' = \angle YOY'.$ Формулы поворота: $\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \end{cases}$ или $\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$	

Нахождение центра центральной линии второго порядка

Чтобы найти координаты $x_0,\ y_0$ центра центральной линии

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

надо решить систему уравнений $\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases}.$

Эта система совместна и имеет единственное решение.

$$x_0 - \frac{\begin{vmatrix} D & B \\ E & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}, \qquad y_0 = -\frac{\begin{vmatrix} A & D \\ B & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}},$$

так как $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$ это - условие центральности.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Интегрирование некоторых типов дифференциальных уравнений (ДУ) первого порядка

Тип уравнения	Метод решения
Простейшее ДУ первого порядка $y' = f(x)$	Проинтегрировать правую часть $y = \int f(x)dx + C$
ДУ с разделенными переменными $M(x)dx + N(y)dy = 0$	Почленно проинтегрировать $\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$
ДУ с разделяющимися переменными $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$	Разделить переменные, разделив уравнение на $M_2(x)N_1(y)$ и проинтегрировать $\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$
Однородное ДУ первого порядка $y' = f(x,y)$ где $f(tx,ty) = f(x,y),\ t \in R$ однородна 0 го порядка.	Решается заменой $y = u(x)\cdot x = ux,\ y' = u'x + u$
Линейное ДУ 1 – порядка $y' + p(x)y = q(x)$	Решается заменой $y = u(x)\cdot v(x) = uv,\ y' = u'v + uv'$

ДУ Бернулли $y' + p(x)y = q(x)y^n \ (n \neq 0, n \neq 1)$ $z = y^{1-n}, \ z' = (1-n)y^{-n} \cdot y'$ $z' + (1-n)p(x)z = q(x)$	Решается заменой $y = u(x) \cdot v(x) = uv, \ y' = u'v + uv'$ $z = u(x) \cdot x = ux, \ z' = u'x + u$
Линейное ОДУ 1-порядка $y' + P(x)y = Q(x)$	Общее решение $y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)$

Интегрирование некоторых типов дифференциальных уравнений (ДУ) второго порядка

<table>
<tr><th>Тип уравнения</th><th colspan="2">Метод решения</th></tr>
<tr><td>Простейшее ДУ 2 – порядка
$a) \ y'' = f(x)$
$b) \ y'' = f(x, y')$
$c) \ y'' = f(y, y')$</td><td colspan="2">а) Произвести двукратное интегрирование правой части
$\int\left(\int f(x)dx\right)dx + c_1x + c_2$
б) Решается заменой
$y' = z(x) = z, \ y'' = z'$
в) Решается заменой
$y' = p(y) = p, \ y'' = p\dfrac{dp}{dy} = p \cdot p'$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Линейное однородное ДУ 2 – порядка с постоянными коэффициентами
$y'' + py' + qy = 0$</td><td colspan="2">Находим корни k_1, k_2 характеристического уравнения: $k^2 + pk + q = 0$. Если</td></tr>
<tr><td>1) $k_1 \neq k_2 \in R$</td><td>$y = c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x}$</td></tr>
<tr><td>2) $k_1 = k_2$</td><td>$y = e^{k_1x}(c_1 + c_2x)$</td></tr>
</table>

	3) $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ - комплексные	$y = e^{\alpha x}(c_1 \sin\beta x +$ $+ c_2 \cos\beta x)$

Линейное неоднородное ДУ 2-ого порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = f(x)$	Найти общее решение y соответствующего линейного однородного ДУ и одно из частных решений y^* линейного неоднородного ДУ. Тогда общее решение имеет вид $y = y + y^*$.

Вид частного решения y^*

линейного неоднородного уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$

$f(x)$		y^*
1. $P_n(x)$	**а)** $k_1 \neq 0,\ k_2 \neq 0$	$Q_n(x)$
	б) $k_1 = 0,\ k_2 \neq 0$ или $k_1 \neq 0,\ k_2 = 0$	$xQ_n(x)$
	в) $k_1 = 0,\ k_2 = 0$	$x^2 Q_n(x)$

2. $Ae^{\alpha x}$	**а)** $k_1 \neq \alpha,\ k_2 \neq \alpha$	$Be^{\alpha x}$
	б) $k_1 = \alpha,\ k_2 \neq \alpha$ или $k_1 \neq \alpha,\ k_2 = \alpha$	$Bxe^{\alpha x}$
	в) $k_1 = \alpha,\ k_2 = \alpha$	$Bx^2e^{\alpha x}$
3. $e^{\alpha x}P_n(x)$	**а)** $k_1 \neq \alpha,\ k_2 \neq \alpha$	$e^{\alpha x}Q_n(x)$
	б) $k_1 = \alpha,\ k_2 \neq \alpha$ или $k_1 \neq \alpha,\ k_2 = \alpha$	$xe^{\alpha x}Q_n(x)$
	в) $k_1 = k_2 = \alpha$	$x^2e^{\alpha x}Q_n(x)$
4. $P_n(x)\cos\beta x$ ***или*** $R_n(x)\sin\beta x$	**а)** $k_1 \neq \pm\beta i,$ $k_2 \neq \pm\beta i$	$Q_n(x)\cos(\beta x) + S_n(x)\sin(\beta x)$
	б) $k_1 \neq \pm\beta i,$	$x\left(Q_n(x)\cos(\beta x) + S_n(x)\sin(\beta x)\right)$
5. $e^{\alpha x}P_n(x)\cos\beta x$ ***или*** $e^{\alpha x}R_n(x)\sin\beta x$	**а)** $k_1 \neq \alpha \pm \beta i,$ $k_2 \neq \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}\left(Q_n(x)\cos(\beta x) + S_n(x)\sin(\beta x)\right)$

	б) $k_1 = \alpha \pm \beta i,$	$xe^{\alpha x}\left(Q_n(x)\cos(\beta x) + S_n(x)\sin(\beta x)\right)$
6. $e^{\alpha x}(P_l(x)\cos\beta x + {}$ $+R_m(x)\sin\beta x)$	**а)** $k_1 \neq \alpha \pm \beta i,$ $k_2 \neq \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x}(Q_n(x)\cos(\beta x) +$ $S_n(x)\sin(\beta x))$
	б) $k_1 = \alpha \pm \beta i,$	$xe^{\alpha x}(Q_n(x)\cos(\beta x) +$ $S_n(x)\sin(\beta x))$ $n = \max(l, m)$

Где $P_n(x), \quad Q_n(x), \quad R_n(x), \quad S_n(x),$ – многочлены степени n, причем

$$P_o(x) = A,$$

$$P_1(x) = Ax + B,$$

$P_2(x) = Ax^2 + Bx + C,$ *где* A, B, C – некоторые действительные числа.

Некоторые формулы сравнения

$\sin x \sim x \ (x \to 0)$	$tgx \sim x \ (x \to 0)$
$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$	$a^x - 1 \sim x \cdot \ln a \, (x \to 0)$
$\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$	$(1+x)^a - 1 \sim a \cdot x$
$\ln(1+x) \sim x \ (x \to 0)$	$\arcsin x \sim x \ (x \to 0)$
$\ln(1+x^2) \sim x^2$	$\cos x = 1 - (1 - \cos x) \sim 1 - \dfrac{x^2}{2}$
$\cos 2x \sim 1 - 2x^2$	$\cos 3x \sim 1 - \dfrac{9x^2}{2}$

$\dfrac{\sin x}{e^x} \sim \dfrac{1}{e^x}$	$\sqrt{1+x}-1 \sim \dfrac{x}{2}$
$e^x - 1 \sim x \ (x \to 0)$	$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2} \ (x \to 0)$
$\sqrt{\cos 2x} = \left(\left[1-2x^2\right]^{\frac{1}{2}} - 1\right) + 1 \sim 1 - x^2$	
$\sqrt{\cos 3x} = \left(\left[1-\dfrac{9}{2}x^2\right]^{\frac{1}{2}} - 1\right) + 1 \sim 1 - \dfrac{3}{2}x^2$	

Основные свойства пределов последовательностей

Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – две сходящиеся последовательности, то

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(cx_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ $\quad$ (c – число);
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ $\quad$ при $\quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$;
5. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ $\quad$ при $\quad x_n \leq y_n$.

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \quad e \approx 2.7182818....$$

Дополнительный замечательный предел

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$
$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{b^n}=0$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x=e^k$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$	$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$
$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}}=\ln a$
$\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\exp\lim\limits_{x\to 0}\left[g(x)\ln f(x)\right]$	
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}=\dfrac{1}{p+1}$	
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+3^p+\ldots+(2n+1)^p}{n^{p+1}}=\dfrac{2^p}{p+1}$	

Некоторые конечные суммы

$1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2};$	$p+(p+1)+(p+2)+\ldots+(p+n)=$ $=\dfrac{(n+1)(2p+n)}{2};$
$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2;$	$2+4+6+\ldots+2n=n(n+1);$

$1+8+16+\ldots+8(n-1)=(2n-1)^2;$	$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6};$
$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=$ $=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4};$	$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3};$
$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=$ $=n^2(2n^2-1);$	$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=$ $=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30};$

Числовые ряды

1. $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}};$

2. $\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\dfrac{\cos\frac{n+1}{2}x\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}};$

3. $\cos x+2\cos 2x+\ldots+n\cos nx=\dfrac{n\sin\frac{2n+1}{2}x\sin\frac{x}{2}-\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}};$

4. $tg\, x+\frac{1}{2}tg\frac{x}{2}+\frac{1}{4}tg\frac{x}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}tg\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}ctg\frac{x}{2^n}-2ctg2x;$

5. $chx+2ch2x+\ldots+n\,ch\,nx=\dfrac{n\,sh\frac{x}{2}sh\left(n+\frac{1}{2}\right)x-sh^2\frac{nx}{2}}{2\,sh^2\frac{x}{2}}.$

Некоторые числовые ряды

$B_n=\dfrac{(2n)!}{\pi^{2n}2^{2n-1}}\left[1+\dfrac{1}{2^{2n}}+\dfrac{1}{3^{2n}}+\dfrac{1}{4^{2n}}+\ldots\right]$ ***(числа Бернулли);***	$E_n=\dfrac{2^{2n+2}(2n)!}{\pi^{2n+1}}\left[1-\dfrac{1}{3^{2n+1}}+\dfrac{1}{5^{2n+1}}-\dfrac{1}{7^{2n+1}}+\ldots\right]$ ***(числа Эйлера);***

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+=e;$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{2}\frac{1}{n!}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...=\frac{1}{e};$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...=\ln 2;$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...=2;$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{1}{2^{n}}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...=\frac{2}{3};$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{1}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+$ $+...=\frac{\pi}{4};$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...=1;$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+$ $+...=\frac{1}{2};$
$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+$ $+...=\frac{3}{4};$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)(4n+1)}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{11\cdot 13}+$ $+...=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8};$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+$ $+...=\frac{1}{4};$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}=1+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{3^{2}}+\frac{1}{4^{2}}+...=\frac{\pi^{2}}{6};$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{2}}=1-\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{3^{2}}+\frac{1}{4^{2}}+$ $...=\frac{\pi^{2}}{12};$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^{2}}=1+\frac{1}{3^{2}}+\frac{1}{5^{2}}+...=\frac{\pi^{2}}{8};$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4}}=1+\frac{1}{2^{4}}+\frac{1}{3^{4}}+...=\frac{\pi^{2}}{90};$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^{2}}=1-\frac{1}{3^{2}}+\frac{1}{5^{2}}-\frac{1}{7^{2}}+$ $+...=\frac{\pi^{2}}{32};$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+...=\frac{\pi^4}{96};$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^4}=1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+...=\frac{7\pi^4}{720};$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=1+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{4^{2k}}+...=$ $=\frac{\pi^{2k}2^{2k-1}}{(2k)!}B_k;$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{2k}}=1-\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}-\frac{1}{4^{2k}}+...=$ $=\frac{\pi^{2k}(2^{2k-1}-1)}{(2k)!}B_k;$
$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}=ch1;$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^{2k+1}}=1-\frac{1}{3^{2k+1}}+\frac{1}{5^{2k+1}}$ $-\frac{1}{7^{2k+1}}+...=\frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2}\cdot(2k)!}E_k;$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}=sh1;$	$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}=\cos 1;$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}=\sin 1.$

Формула Коша-Адамара: $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}.$

Если существует предел $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, то $R=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$

Действия со степенными рядами.

Внутри общего интервала сходимости $|x-x_0|<R$ степенных рядов $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$ справедливы равенства:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-x_0)^n;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n,\ \text{где}\quad c_n\sum_{i=0}^{\infty}a_ib_{n-i};$$

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-x_0)^n;$$

$$\int\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n + \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1} + c, \qquad c = (\mathrm{co}nst).$$

Некоторые степенные ряды.

$$(1 \pm x)^m = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!} x^n \qquad (m > 0);$$

$$(1 \pm x)^m = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)x^2}{2!} \pm \frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!} + ... \qquad (|x| \le 1);$$

$$(1 \pm x)^{-m} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (\mp 1)^n \frac{m(m-1)...(m+n+1)}{n!} x^n =$$

$$1 \mp \frac{mx}{1!} + \frac{m(m+1)x^2}{2!} \mp \frac{m(m+1)(m+2)x^3}{3!} + ... \qquad (m > 0; |x| < 1);$$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... \qquad ([x] < \infty);$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... \qquad ([x] < \infty);$$

$$tg\, x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + ... \qquad \left([x] < \frac{\pi}{2}\right);$$

$$ctg\, x = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n-1} = \frac{1}{x} - \left(\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} + ...\right) \qquad (0 < |x| < \pi);$$

$$\sec x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \frac{277x^8}{8064} + ... \qquad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\cos ec\, x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n)!} B_n x^{2n-1} =$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{x}{6}+\frac{7x^3}{360}+\frac{31x^5}{15120}+\frac{127x^7}{604800}+\ldots \quad (0<|x|<\pi);$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\ldots;$$

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}B_n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x}{2}+\frac{B_1x^2}{2!}-\frac{B_2x^4}{4!}+\frac{B_3x^G}{6!}-\ldots \quad (|x|<2\pi);$$

$$e^{\sin x}=1+x+\frac{x^2}{2!}-\frac{3x^4}{4!}-\frac{8x^5}{5!}-\frac{3x^6}{6!}+\frac{56x^7}{7!}+\ldots \quad (|x|<\infty);$$

$$e^{\cos x}=e\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{4x^4}{4!}-\frac{31x^6}{6!}+\ldots\right] \quad (|x|<\infty);$$

$$e^{tg\,x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{3x^3}{3!}+\frac{9x^4}{4!}+\frac{37x^5}{5!}+\ldots \quad \left(|x|<\frac{\pi}{2}\right);$$

$$e^{\arcsin x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{2x^3}{3!}+\frac{5x^4}{4!}+\ldots \quad (|x|<1);$$

$$e^{\mathrm{arc}tgx}=1+x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\frac{7x^4}{4!}+\frac{5x^5}{5!}\ldots \quad (|x|<1);$$

$$\ln x=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)(x+1)^{2n+1}}=2+\left(\frac{x-1}{x+1}+\frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3}+\frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5}+\ldots\right) \quad (x>0);$$

$$\ln x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots \quad (0<x\le 2);$$

$$\ln x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{nx^n}=\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{3x^3}+\ldots \quad (x>1/2);$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots \quad (-1<x\le 1);$$

$$\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\ldots\right) \quad (-1\le x<1);$$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}...\right),\quad (-1\le x<1);$$

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Совокупность всех первообразных функций $F(x)+C$ для функции $f(x)$ называется ***неопределённым интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx = F(x)+C$. Процесс нахождения первообразной функции называется ***интегрированием***. Переменная x называется ***переменной интегрирования***, функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, выражение $f(x)dx$ – ***подынтегральным выражением***.

- Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции, т.е. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
- Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению, т.е. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.
- Неопределённый интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная, т.е. $\int dF(x) = F(x)+C$.
- Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла: $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.
- Неопределённый интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т.е. $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.
- Результат интегрирования не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е. если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то при замене переменной интегрирования x на t $\int f(t)dt = F(t)+C$. Такое свойство называется ***инвариантностью формулы интегрирования***.

- Если подынтегральная функция представляет собой дробь, у которой числитель есть производная знаменателя, то такой интеграл равен логарифму натуральному от абсолютной величины знаменателя, т.е. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\left|f(x)\right| + C$.

- Для нахождения интеграла вида $\int u dv$ используется ***формула интегрирования по частям*** $\int u dv = uv - \int v du$.

При использовании данного метода интегрирования удобно пользоваться следующими рекомендациями:

- в интегралах вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin x dx$, $\int P(x)\cos x dx$ имеет смысл положить $u=P(x)$, а в качестве dv взять оставшуюся часть подынтегрального выражения;
- в интегралах вида $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$, $\int P(x) arctgx dx$, $\int P(x) arcctgx dx$, $\int P(x)\ln x dx$ следует положить $dv=P(x)dx$, а оставшуюся часть подынтегрального выражения обозначить через u;
- в интегралах вида $\int e^{ax}\sin bx dx$, $\int e^{ax}\cos bx dx$ можно положить $u = e^{ax}$, а оставшуюся часть подынтегрального выражения принять за dv.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

- Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a,b]$, ни от выбора точек $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, то он называется ***определённым интегралом*** от функции $y = f(x)$ на отрезке $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

Числа a и b называются ***нижним и верхним пределами интегрирования***. Функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, выражение $f(x)dx$ - ***подынтегральным выражением***, x – ***переменной интегрирования***, $[a,b]$ - ***отрезком интегрирования***.

Определённый интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции. В этом состоит ***геометрический смысл определённого интеграла***.

Свойства определённого интеграла:

- $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$; ($k$ =const)
- $\int\limits_a^b \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$;
- $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;
- $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;
- $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b f(u)du = \ldots$;
- если $a < c < b$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

Вычисления определённого интеграла проводится по

формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. $\int 0dx = C,$

2. $\int dx = x + C,$

3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1,$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C,$

5. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$

12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C,$

13. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C,$

14. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C,$

15. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C,$

16. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a > 0,$

6. $\int e^x dx = e^x + C,$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1,$

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C,$

9. $\int \cos x dx = \sin x + C,$

10. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C,$

11. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C,$

17. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C, a > 0,$

18. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C, a > 0,$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, a > 0,$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, a > 0,$

21. $\int shx dx = chx + C,$

22. $\int chx dx = shx + C.$

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1);$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C;$
$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \quad (n \neq -1);$	
$\int \frac{ax+b}{cx+d} dx = \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2}\ln\lvert cx+d\rvert + C;$	
$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\ln\left\lvert\frac{x+b}{x+a}\right\rvert + C \quad (a \neq b);$	
$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C;$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C;$
$\int \frac{xdx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2}\ln\lvert x^2-a^2\rvert + C;$	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a} + C;$

$\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln\left\|x^2+a^2\right\| + C;$	$\int \frac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2} + C;$
$\int \frac{xdx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\left(a\ln\|x+a\| - b\ln\|x+b\|\right) + C \quad (a \neq b);$	
$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2} = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;$	
$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^3} = \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2} + \frac{3}{8a^4}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;$	
$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)(x+b)} = \frac{1}{a^2+b^2}\left(\ln\frac{\|x+b\|}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{b}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) + C;$	
$\int \frac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)(x+b)} = \frac{1}{a^2+b^2}\left(a\ \operatorname{arctg}\frac{x}{a} - b\ln\frac{\|x+b\|}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) + C;$	
$\int \frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)(x+b)} = \frac{1}{a^2+b^2}\left(b^2\ln\|x+b\| + \frac{1}{2}a^2\ln\left\|x^2+a^2\right\| - ab\ \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) + C;$	
$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left\|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right\| + C \quad \left(b^2-4ac>0\right);$	
$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C \quad \left(b^2-4ac<0\right);$	
$\int \frac{xdx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a}\ln\left\|ax^2+bx+c\right\| - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c};$	
$\int (a+bx)^n\,dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C \quad (n \neq -1);$	
$\int \frac{xdx}{a+bx} = \frac{1}{b^2}\left(a+bx-a\ln\|a+bx\|\right) + C;$	

$$\int \frac{x^2dx}{a+bx} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2\ln\lvert a+bx\rvert\right] + C;$$	
$$\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2}\ln\left\lvert\frac{a+bx}{x}\right\rvert + C;$$	
$$\int \frac{xdx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left(\ln\lvert a+bx\rvert + \frac{a}{a+bx}\right) + C;$$	
$$\int \frac{dx}{x(a+bx)} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\frac{a+bx}{x}\right\rvert + C;$$	$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln\lvert a+bx\rvert + C;$$
$$\int \frac{x^2dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a+bx - 2a\ln\lvert a+bx\rvert - \frac{a^2}{a+bx}\right) + C;$$	
$$\int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)} + \frac{1}{a^2}\ln\left\lvert\frac{a+bx}{x}\right\rvert + C;$$	
$$\int \frac{xdx}{(a+bx)^3} = \frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{a+bx} + \frac{a}{2(a+bx)^2}\right] + C;$$	
$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg} x\sqrt{\frac{b}{a}} + C \qquad (ab>0);$$	
$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(np+m+1)} - \frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx;$$	
$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1} + \frac{anp}{np+m+1}\int x^n(a+bx^n)^{p-1}\,dx;$$	
$$\int \frac{dx}{x^m(a+bx^n)^p} = -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}} - $$ $$-(m-n+np-1)b\int\frac{dx}{x^{m-n}(a+bx^n)^p} \qquad (m>1);$$	

$$\int \frac{dx}{x^m\left(a+bx^n\right)^p}=\frac{1}{an\left(p-1\right)x^{m-1}\left(a+bx^n\right)^{p-1}}+\frac{m-n+np-1}{an\left(p-1\right)}\int \frac{dx}{x^m\left(a+bx^n\right)^{p-1}};$$

$$\int \frac{\left(a+bx^n\right)^p dx}{x^m}=-\frac{\left(a+bx^n\right)^{p+1}}{a\left(m-1\right)x^{m-1}}-\frac{b\left(m-n-np-1\right)}{a\left(m-1\right)}\int \frac{\left(a+bx^n\right)^p dx}{x^{m-n}};$$

$$\int \frac{\left(a+bx^n\right)^p dx}{x^m}=\frac{\left(a+bx^n\right)^p}{\left(np-m+1\right)x^{m-1}}+\frac{anp}{np-m+1}\int \frac{\left(a+bx^n\right)^{p-1} dx}{x^m};$$

$$\int \frac{x^m dx}{\left(a+bx^n\right)^p}=\frac{x^{m-n+1}}{b\left(m-np+1\right)\left(a+bx^n\right)^{p-1}}-\frac{a\left(m-n+1\right)}{b\left(m-np+1\right)}\int \frac{x^{m-n}dx}{\left(a+bx^n\right)^p};$$

$$\int \frac{x^m dx}{\left(a+bx^n\right)^p}=\frac{x^{m+1}}{an\left(p-1\right)\left(a+bx^n\right)^{p-1}}-\frac{m+n-pn+1}{an\left(p-1\right)}\int \frac{x^m dx}{\left(a+dx^n\right)^{p-1}};$$

$$\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^n}=\frac{1}{2\left(n-1\right)a^2}\left[\frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}+\left(2n-3\right)\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{n-1}}\right];$$

$$\int \frac{dx}{\left(a+bx^2\right)^n}=\frac{1}{2\left(n-1\right)a}\left[\frac{x}{\left(a+bx^2\right)^{n-1}}+\left(2n-3\right)\int \frac{dx}{\left(a+bx^2\right)^{n-1}}\right];$$

$$\int \frac{xdx}{\left(a+bx^2\right)^n}=\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\left(a+bz\right)^n} \qquad \left(z=x^2\right);$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\left(a+bx^2\right)^n}=\frac{-x}{2b\left(n-1\right)\left(a+bx^2\right)^{n-1}}+\frac{1}{2b\left(n-1\right)}\int \frac{dx}{\left(a+bx^2\right)^{n-1}};$$

$$\int \frac{dx}{x^2\left(a+bx^2\right)^n}=\frac{1}{a}\int \frac{dx}{x^2\left(a+bx^2\right)^{n-1}}-\frac{b}{a}\int \frac{dx}{\left(a+bx^2\right)^n};$$

$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2}=\frac{1}{2ab}\ln\left\|\frac{a+bx}{a-bx}\right\|+C;$	$\int \frac{dx}{x\left(a+bx^n\right)}=\frac{1}{an}\ln\left\|\frac{x^n}{a+bx^n}\right\|+C;$
$\int \frac{xdx}{a+bx^2}=\frac{1}{2b}\ln\left\|x^2+\frac{a}{b}\right\|+C;$	$\int \frac{x^2dx}{a+bx^2}=\frac{x}{b}-\frac{a}{b}\int \frac{dx}{a+bx^2};$
$\int \frac{dx}{x\left(a+bx^2\right)}=\frac{1}{2a}\left\|\frac{x^2}{a+bx^2}\right\|+C;$	$\int \frac{dx}{x^2\left(a+bx^2\right)}=-\frac{1}{ax}-\frac{b}{a}\int \frac{dx}{a+bx^2};$

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

$\int \frac{dx}{(x+c)\sqrt{ax+b}}=\frac{1}{\sqrt{b-ac}}\ln\left\|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b-ac}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac}}\right\|+C;\quad (b-ac>0);$
$\int \frac{dx}{(x+c)\sqrt{ax+b}}=\frac{1}{\sqrt{ac-b}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ax+b}{ac-b}}+C\quad (b-ac<0);$
$\int \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}dx=\frac{1}{c}\sqrt{(ax+b)(cx+d)}-$ $-\frac{ad-bc}{c\sqrt{ac}}\ln\left\|\left[\sqrt{a(cx+d)}+\sqrt{c(ax+b)}\right]\right\|+C\qquad (a>0);$
$\int \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}dx=\frac{1}{c}\sqrt{(ax+b)(cx+d)}-$ $-\frac{ad-bc}{c\sqrt{ac}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a(cx+d)}{c(ax+b)}}+C\quad (c>0;\ \ a<0);$
$\int x\sqrt{a+bx}dx=-\frac{2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2}+C;$
$\int x^2\sqrt{a+bx}dx=\frac{2\left(8a^2-12abx+15b^2x^2\right)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3}+C;$
$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2\left(8a^2-4abx+3b^2x^2\right)}{15b^3}\sqrt{a+bx}+C;$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right| + C \qquad (a>0);$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+bx}{-a}} + C \qquad (a<0);$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}} = \frac{-\sqrt{a+bx}}{ax} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}};$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bx}dx}{x} = 2\sqrt{a+bx} + a\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}};$$

$$\int x^m\sqrt{2ax-x^2}dx = -\frac{x^{m-1}\left(2ax+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{m+1} + \frac{(2m+1)a}{m+2}\int x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2}dx;$$

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2}}{m} + \frac{(2m-1)a}{m}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{2ax-x^2}};$$

$$\int\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^m}dx = -\frac{\left(2ax-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{(2m-3)ax^m} + \frac{m-3}{(2m-3)a}\int\frac{\sqrt{2ax+x^2}}{x^{m-1}}dx;$$

$$\int F(x)\sqrt{2ax-x^2}dx = \int F(z+a)\sqrt{a^2+z^2}dz \qquad (z=x-a);$$

$$\int F(x)\sqrt{2ax+x^3}dx = \int F(z-a)\sqrt{z^2-a^2}dz \qquad (z=x+a);$$

$$\int\sqrt{a+bx-cx^2}dx = \frac{2cx-b}{4c}\sqrt{a+bx-cx^2} + \frac{b^2-4ac}{8c^{\frac{3}{2}}}\arcsin\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C;$$

$$\int\sqrt{\frac{a-x}{b+x}}dx = \sqrt{(a-x)(b+x)} + (a+b)\arcsin\sqrt{\frac{x+b}{a+b}} + C;$$

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}dx = -\sqrt{(a+x)(b-x)} - (a+b)\arcsin\sqrt{\frac{b-x}{a+b}} + C;$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a\left(ax^2+bx+c\right)}\right| + C \qquad (a>0);$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C \qquad (a<0);$$
$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c};$$
$$\int \frac{xdx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c};$$
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left| \frac{x}{bx+2c+2\sqrt{c\left(ax^2+bx+c\right)}} \right| + C \qquad (c>0);$$
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{C}} \arcsin \frac{bx+2c}{x\sqrt{b^2-4ac}} + C \qquad (c<0);$$
$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C;$$
$$\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{8}\left(2x^2+a^2\right)\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C;$$
$$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C;$$
$$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2+a^2} + a\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}\right| + C;$$
$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C;$$
$$\int \frac{dx}{(a+b)\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\frac{x+b}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+a^2}+a^2-bx}\right| + C;$$
$$\int \left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{x}{8}\left(2x^2+5a^2\right)\sqrt{x^2+a^2} + \frac{3}{8}a^4\ln\left|a+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C;$$

$\int\left(x^2+a^2\right)^{\frac{n}{2}}dx=\dfrac{x\left(x^2+a^2\right)^{\frac{n}{2}}}{n+1}+\dfrac{na^2}{n+1}\int\left(x^2+a^2\right)^{\frac{n}{2}-1}dx;$
$\int\dfrac{dx}{x^3\left(x^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}}=-\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2}+\dfrac{1}{2a^3}\ln\left\|\dfrac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right\|+C;$
$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\dfrac{a^2}{2}\ln\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\|+C;$
$\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\dfrac{x}{8}\left(2x^2-a^2\right)\sqrt{x^2-a^2}-\dfrac{a^4}{8}\ln\left\|x+\sqrt{x^2+a^2}\right\|+C;$
$\int\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx=-\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+\ln\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\|+C;$
$\int\dfrac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\dfrac{a^2}{2}\ln\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\|+C;$
$\int\dfrac{dx}{(x+b)\sqrt{x^2-a^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left\|\dfrac{bx+a^2+\sqrt{b^2-a^2}\sqrt{x^2-a^2}}{x+b}\right\|+C;$
$\int\dfrac{dx}{(x+a)\sqrt{x^2-b^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\dfrac{bx+a^2}{a(x+b)}+C;$
$\int\left(x^2-a^2\right)^{\frac{3}{2}}dx=\dfrac{x}{2}\left(2x^2-5a^2\right)\sqrt{x^2-a^2}+\dfrac{3a^4}{8}\ln\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\|+C;$
$\int\left(x^2-a^2\right)^{\frac{n}{2}}dx=\dfrac{x\left(x^2-a^2\right)^{\frac{n}{2}}}{n+1}-\dfrac{na^2}{n+1}\int\left(x^2-a^2\right)^{\frac{n}{2}-1}dx;$
$\int\dfrac{x^2dx}{\left(x^2-a^2\right)^{\frac{3}{2}}}=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+\ln\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\|+C;$
$\int\dfrac{dx}{x^3\left(x^2-a^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2}+\dfrac{1}{2a^3}\operatorname{arcsec}\dfrac{x}{a}+C;$

$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C;$	
$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{8}\left(2x^2-a^2\right)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + C;$	
$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}\,dx}{x} = \sqrt{a^2-x^2} + a\ln\left\|\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right\| + C;$	
$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{a} + C;$	
$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C;$	
$\int \frac{dx}{(x+b)\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\arcsin\frac{bx+a^2}{a(x+b)} + C \quad (b>a);$	
$\int \frac{dx}{(x+b)\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\left\|\frac{x+b}{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{a^2-x^2}+a^2+bx}\right\| + C \quad (b<a);$	
$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\ln\left\|\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right\| + C;$	$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C;$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$	$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C;$
$\int x\left(x^2-a^2\right)^{\frac{n}{2}} dx = \frac{\left(x^2-a^2\right)^{\frac{n}{2}+1}}{n+2} + C;$	$\int \frac{dx}{\left(x^2-a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C;$
$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2 x} + C;$	$\int \frac{dx}{(x\pm a)\sqrt{x^2-a^2}} = \pm\frac{1}{a}\sqrt{\frac{x\mp a}{x\pm a}} + C;$
$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x} + C;$	$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2} + C;$

$\int x\sqrt{x^2-a^2}dx=\frac{1}{3}\left(x^2-a^2\right)^{\frac{3}{2}}+C;$	$\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C;$
$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C;$	$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sqrt{x^2+a^2}+C;$
$\int\frac{dx}{(x\pm a)\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a\mp x}{a\pm x}}+C;$	$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C;$
$\int\frac{dx}{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C;$	$\int x\left(a^2-x^2\right)^{\frac{n}{2}}dx=-\frac{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{n}{2}+1}}{n+2}+C;$
$\int\frac{dx}{x^3\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^2}\ln\left\|\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right\|+C;$	
$\int\frac{x^m dx}{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{(m-1)a^2}{m}\int\frac{x^{m-2}dx}{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}};$	
$\int\frac{x^2dx}{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\arcsin\frac{x}{a}+C;$	
$\int x\left(a^2-x^2\right)^{\frac{n}{2}}dx=-\frac{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{n}{2}+1}}{n+2}+C;$	
$\int\left(a^2-x^2\right)^{\frac{n}{2}}dx=\frac{x\left(a^2-x^2\right)^{\frac{n}{2}}}{n+1}+\frac{a^4n}{n+1}\int\left(a^2-x^2\right)^{\frac{n}{2}-1}dx;$	
$\int\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{x}{8}\left(5a^2-2x^2\right)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C;$	

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. $\int\sin xdx=-\cos x+C;$

2. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

3. $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C;$

4. $\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C;$

5. $\int \sin^3 x dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C = \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x + C;$

6. $\int \cos^3 x dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + C;$

7. $\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx;$

8. $\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx;$

9. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \operatorname{cosec} x dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C;$

10. $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \sec x dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

12. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

13. $\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C;$

14. $\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

15. $\int \sin x \cos x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C;$

16. $\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + C;$

17. $\int \sin x \cos^2 x dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C;$

18. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C;$

19. $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C;$

20. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{\cos x} + C = \sec x + C;$

21. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx = \ln\left|\text{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x + C;$

22. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \text{tg}x - x + C;$

23. $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \text{ctg}x dx = \ln\left|\sin x\right| + C;$

24. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = -\frac{1}{\sin x} + C = -\text{cosec}x + C;$

25. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x}dx = \ln\left|\text{tg}\frac{x}{2}\right| + \cos x + C;$

26. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx = -\text{ctg}x - x + C;$

27. $\int \frac{dx}{\cos x \sin x} = \ln\left|\text{tg}x\right| + C;$

28. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = -\frac{1}{\sin x} + \ln\left|\text{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

29. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \ln\left|\text{tg}\frac{x}{2}\right| + C;$

30. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \text{tg}x - \text{ctg}x + C;$

31. $\int \sin mx \sin nx dx = -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C \quad (m^2 \neq n^2);$

32. $\int \sin mx \cos nx dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C \quad (m^2 \neq n^2);$

33. $\int \cos mx \cos nx dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C \quad (m^2 \neq n^2);$

34. $\int \frac{dx}{a + b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}\arcsin\frac{a\sin x + b}{a + b\sin x} + C \quad (a^2 > b^2);$

35. $\int \frac{dx}{a + b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}\ln\left|\frac{b + a\sin x - \sqrt{b^2 - a^2}\cos x}{a + b\sin x}\right| + C \quad (b^2 > a^2);$

36. $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \mp \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \arcsin \frac{a\cos x + b}{a+b\cos x} + C \qquad (a>0;\ b<0);$

37. $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln\left|\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}\right| + C \qquad (a<b);$

38. $\int \frac{dx}{a+b\,\mathrm{tg}x} = \frac{1}{a^2+b^2}\left(ax + b\ln\left|a\cos x + b\sin x\right|\right) + C;$

39. $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln\left|\frac{b\sin x - a\cos x + \sqrt{a^2+b^2}}{a\sin x + b\cos x}\right| + C;$

40. $\int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2} x};$

41. $\int \mathrm{tg}^m x dx = \frac{(\mathrm{tg}x)^{m-1}}{m-1} - \int \mathrm{tg}^{m-2} x dx \qquad (m \neq 1);$

42. $\int \mathrm{ctg}^m x dx = -\frac{(\mathrm{ctg}x)^{m-1}}{m-1} - \int \mathrm{ctg}^{m-2} x dx \qquad (m \neq 1);$

43. $\int \sec x \mathrm{tg}x = \sec x + C;$

44. $\int \mathrm{cosec} x \mathrm{ctg} x dx = -\mathrm{cosec} x + C;$

45. $\int \sec\varphi d\varphi = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}\right| + C \\ \ln\left|\sec\varphi + tg\varphi\right| + C \\ \ln\left|tg\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C. \end{cases}$

46. $\int \cos^m x \sin^n x dx = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2} x \sin^n x dx \quad (m<n);$

47. $\int \cos^m x \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x \sin^{n-2} x dx \quad (m>n);$

48. $\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^{n-2} x};$

49. $\int \frac{\cos^m x dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos^{m+1} x}{(n-1)\sin^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\cos^m x dx}{\sin^{n-2} x} \quad (n \neq 1);$

50. $\int \frac{\cos^m x dx}{\sin^n x} = \frac{\cos^{m-1} x}{(m-n)\sin^{n-1} x} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\cos^{m-2} x dx}{\sin^n x} \quad (m \neq n);$

51. $\int \sin x \cos^n x dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C;$

52. $\int \sin^n x \cos x dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C;$

53. $\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{b \operatorname{tg} x}{a} + C;$

Двойной интеграл

Определение. Если существует конечный предел

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(P_k) \cdot \Delta S_k = \iint\limits_D f(x,y) dS$, где $z = f(x,y)$ определена в области D.

Геометрический смысл двойного интеграла

Пусть $f(x,y) \geq 0$ в области D, тогда двойной интеграл

$$\iint\limits_D f(x,y) dS = V,$$

численно равен объему V цилиндрического тела, находящегося над плоскостью OXY, нижним основанием которого является область D, верхним – часть поверхности $z = f(x,y)$, проецирующаяся в D.

Физический смысл двойного интеграла

$m = \iint\limits_D \rho(x,y) dx dy$ – масса пластины. ($\rho(x,y)$- плотность пластинки)

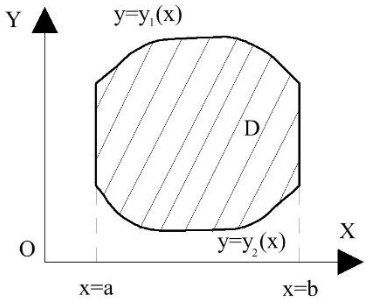
Свойства двойных интегралов

1. $f(x,y) \equiv 1$ в области D: $\iint\limits_D dS = S_D$, где S_D - площадь области интегрирования D.
2. $\iint\limits_D [C_1 f_1(x,y) + C_2 f_2(x,y)] dS = C_1 \iint\limits_D f_1(x,y) dS + C_2 \iint\limits_D f_2(x,y) dS$.

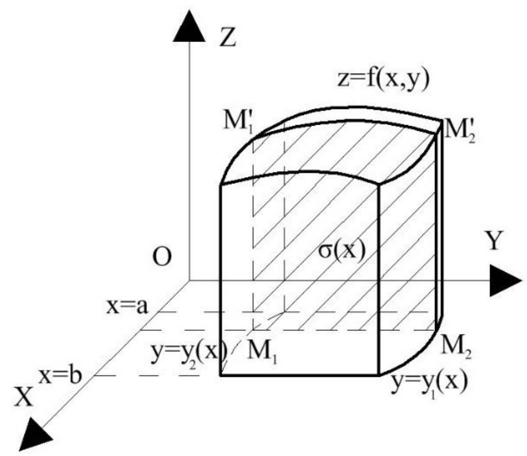
3. Если область интегрирования D разбита на части $D_1 + D_2$, то $\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dS$.
4. Если $f(x,y) \le \phi(x,y)$ для любой точки $P(x,y) \in D$, то $\iint\limits_D f(x,y)dS \le \iint\limits_D \phi(x,y)dS$.
5. Если $m \le f(x,y) \le M$ для любой точки $P(x,y) \in D$, то $m \cdot S_D \le \iint\limits_D f(x,y)dS \le M \cdot S_D$.
6. (**Теорема о среднем**) Если $f(x,y)$ непрерывна в D и существует точка $(\xi,\eta) \in D$, тогда $\iint\limits_D f(x,y)dS = f(\xi,\eta) \cdot S_D$.
7. $\left|\iint\limits_D f(x,y)dS\right| \le \iint\limits_D \left|f(x,y)\right| dS$

Двойной интеграл в прямоугольных декартовых координатах

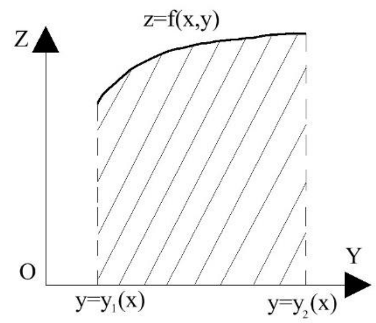
Пусть область интегрирования D – криволинейная трапеция, то есть является областью первого типа – элементарной относительно оси y.



$$\begin{matrix} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{matrix}$$, где $y_1(x), y_2(x)$ непрерывны на $[a,b]$.

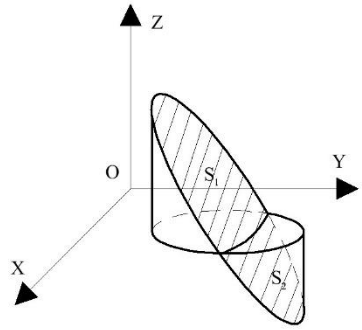


$V=\int\limits_a^b \sigma(x)dx$, где $\sigma(x)$ – функция площади поперечного сечения плоскостью параллельной ZOY. $\sigma(x)$ – площадь криволинейной трапеции, снизу ограниченной отрезком $y_1(x)\le y\le y_2(x)$, сверху кривой $z=f(x,y),\quad x=const$.



$$\sigma(x)=\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy,\quad \iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy,$$

то есть двойной интеграл равен поверхностному интегралу.



Если $z=f(x,y)$ знакопеременная функция, то

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy=\iint\limits_{S_1} f(x,y)dxdy-\iint\limits_{S_2} f(x,y)dxdy$$

Тройной интеграл

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\lim_{\rho\to0}\sum_V f(P_i)\Delta v_i$$

Тройной интеграл вычисляется по формуле:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}\left(\int\limits_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx.$$

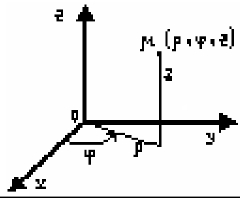
$$(x=a, x=b, y=\phi_1(x), y=\phi_2(x), z=\chi(x,y), z=\psi(x,y))$$

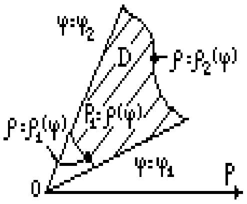
ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Величина	Площадь плоской фигуры	Площадь поверхности
Общая формула	S = $\iint\limits_D ds$	S = $\iint\limits_D \frac{ds}{\cos\gamma}$
В декартовых координатах	$\iint\limits_D dxdy$	$\iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$
В полярных координатах	$\iint\limits_D \rho d\rho d\phi$	$\iint\limits_D \sqrt{\rho^2+\rho^2\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2}\,d\rho d\phi$
Величина	Объём цилиндрического тела	Момент инерции плоской фигуры относительно ОХ

Общая формула	$V = \iint\limits_D Zds$	$Y_x = \iint\limits_D y^2 ds$
В декартовых координатах	$\iint\limits_D Z(x,y)dxdy$	$\iint\limits_D y^2 dydx$
В полярных координатах	$\iint\limits_D Z(\rho\cos\phi;\rho\sin\phi)\rho d\rho d\phi$	$\iint\limits_D \rho^3 \sin^2\phi d\rho d\phi$
Величина	Момент инерции плоской фигуры относительно OY	Момент инерции плоской пластины относительно полюса
Общая формула	$Y_y = \iint\limits_D x^2 ds$	$Y_0 = \iint\limits_D (x^2+y^2)ds$
В декартовых координатах	$\iint\limits_D x^2 dxdy$	$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$
В полярных координатах	$\iint\limits_D \rho^3 \cos^2\phi d\rho d\phi$	$\iint\limits_D \rho^3 d\rho d\phi$
Величина	Масса плоской пластины с плотностью μ (x,y)	Статистический момент плоской фигуры относительно OX
Общая формула	$M = \iint\limits_D \mu(x,y)ds$	$M_{ox} = \iint\limits_D y\mu(x,y)ds$
В декартовых	$\iint_D \mu(x,y)dxdy$	$\iint\limits_D y\cdot\mu(x,y)dxdy$

координаты		
В полярных координатах	$\iint\limits_D \mu(\rho\cos\phi;\rho\sin\phi)\rho d\rho d\phi$	$\iint\limits_D \rho^2\cos\phi\cdot\mu(\rho\cos\phi;\rho\sin\phi)d\rho d\phi$
Величина	Статистический момент плоской пластины относительно OY	Координаты центра тяжести плоской пластины (<u>однородной)</u>
Общая формула	$M_{oy}=\iint\limits_D x\mu(x,y)ds$	$x_c=\frac{M_{oy}}{S}\quad y_c=\frac{M_{ox}}{S}$
В декартовых координатах	$\iint\limits_D x\cdot\mu(x,y)dxdy$; где μ(x,y) – плотность пластины	$x_c=\frac{M_{oy}}{S}=\frac{\iint\limits_D xdxdy}{\iint\limits_D dxdy}$. $y_c=\frac{M_{ox}}{S}=\frac{\iint\limits_D ydxdy}{\iint\limits_D dxdy}$.
В полярных координатах	$\iint\limits_D \rho^2\sin\phi\cdot\mu(\rho\cos\phi;\rho\sin\phi)d\rho d\phi$	$x_c=\frac{M_{oy}}{S}=\frac{\iint\limits_D \rho^2\sin\phi d\rho d\phi}{\iint\limits_D \rho d\rho d\phi}$ $y_c=\frac{M_{ox}}{S}=\frac{\iint\limits_D \rho^2\cos\phi d\rho d\phi}{\iint\limits_D \rho d\rho d\phi}$

Двойной интеграл в полярных координатах.	 **Цилиндрические координаты**



$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \end{cases}$$

$$D: \begin{cases} \phi_1 \le \phi \le \phi_2 \\ \rho_1 \le \rho \le \rho_2 \end{cases}$$

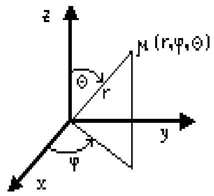
$$dS = \rho d\rho d\phi$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy =$$

$$= \iint\limits_D f\left(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi\right)\rho d\rho d\phi$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases} \quad dV = \rho d\rho d\phi dz$$

Сферические координаты

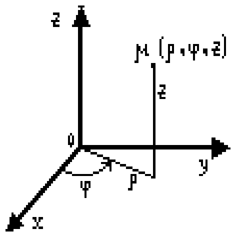
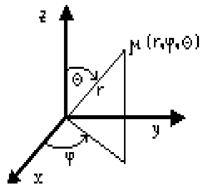


$$\begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\Theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\Theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

$$dV = \rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\Theta$$

ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Величина	Объём тела	Момент инерции тела относительно OZ
Общая формула	$V=\iiint\limits_V dV$	$I_z \equiv \iiint\limits_V \rho^2 dv$
В декартовых координатах	$\iiint\limits_V dxdydz$	$\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz$
В цилиндрических координатах	$\iiint\limits_V \rho dzd\rho d\phi$	$\iiint\limits_V \rho^3 dxdydz$
В сферических координатах	$\iiint\limits_V r^2\sin\Theta drd\Theta d\phi$	$\iiint\limits_V r^4\sin^3\Theta drd\Theta d\phi$
Величина	Масса тела с плотностью μ(x,y,z)	Статистический момент относительно XOY однородного тела
Общая формула	$M = \iiint\limits_V \mu\cdot dv$	$M_{xy} = \iiint\limits_V Zdv$

В декартовых координатах	$\iiint\limits_V \mu(x,y,z)\,dxdydz$	$\iiint\limits_V Zdxdydz$
В цилиндрических координатах	$\iiint\limits_V \mu\cdot\rho dzd\rho d\phi$	Цилиндрические координаты $\begin{cases} x=\rho\cos\phi \\ y=\rho\sin\phi \\ z=z \end{cases}$  $dV=\rho d\rho d\phi dz$
В сферических координатах	$\iiint\limits_V \mu\cdot r^2\sin\Theta drd\Theta d\phi$	Сферические координаты $\begin{cases} x= \\ y= \\ z= \end{cases}$  $dV=r^2\sin\Theta drd\phi d\Theta$

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Элементы комбинаторики. Формула Ньютона

Перестановки

Число перестановок из элементов:

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n = n!$$

Классическое определение вероятности

$$P(A)=m/n$$

(m - число благоприятных исходов опыта; n -число всех его исходов).

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)$$

где $P(B/A)$ – вероятность события B при условии, что произошло событие А.

Формула полной вероятности

$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P(A/B_k)$, где $B_1,B_2,\ldots,B_n$ - полная группа гипотез, т. е. $B_iB_j=\varnothing,\ i\neq j,\ \bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega$

(Ω - достоверное событие).

Формула Бейеса

$$P(B_m/A)=\frac{P(B_m)P(A/B_m)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P(A/B_k)},\quad m=1,2,\ldots,n,$$

где $B_1,B_2,\ldots,B_n$ - полная группа гипотез.

Повторение испытаний

Формула Бернулли

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k},$$

где $P_n(k)$ – вероятность появления события A ровно k раз при n независимых испытаниях; p - вероятность появления события A при каждом испытании.

Вероятность того, что при этом событие A:

1) наступит n раз: $P_n(n)=p^n$;

2) не наступит ни разу: $P_n(0)=(1-p)^n$;

3) наступит хотя бы один раз: $P=1-(1-p)^n$;

4) наступит не более k раз: $P = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k)$**;**

5) наступит не менее k раз: $P = P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n)$**.**

Локальная теорема Лапласа

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-t^2/2},$$

где $P_n(k)$ – вероятность появления события A ровно k раз при n независимых испытаниях; p – вероятность появления события A при каждом испытании; $t = \dfrac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Интегральная теорема Лапласа

$$P(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $P(k_1 \le k \le k_2)$ – вероятность того, что в n независимых испытаниях события Aпоявится не менее k_1и не более k_2 раз;

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt -$$

функция Лапласа; $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}$; $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Оценка отклонения относительной частоты от постоянной вероятности

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right), \qquad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

Наивероятнейшее число k_0 появления события A при n независимых испытаниях

$$np - (1-p) \le k_0 < np + p$$

(n – число испытаний; p – вероятность появления события пои одном испытании).

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Дискретные случайные величины

x_i – значения величины X, $p_i = P(X = x_i), = i = 1, 2, \ldots, n; = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

Математическое ожидание

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Свойства:

1) $M(C)=C,\ C-$постоянная; 2) $M(CX)=CM(X)$;

3) $M(X_1+X_2)=M(X_1)+M(X_2)$, где X_1, X_2 – независимые случайные величины;

4) $M(X_1X_2)=M(X_1)M(X_2)$.

Дисперсия

$$D(X)=M\left((X-M)\right)^2, \quad D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2$$

Свойства:

1) $D(C)=0$; 2) $D(CX)=C^2D(X)$;

3) $D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)$, где X_1X_2 – независимые случайные величины.

Среднее квадратическое отклонение случайной величины X

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X).}$$

Начальный момент порядка k случайной величины X

$$\alpha_k(X)=M\left(X^k\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i.$$

Центральный момент порядка k случайной величины X

$$\mu_k(X)=M\left((X-M)\right)^k.$$

Биномиальный закон распределения

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k=0,\ 1,\ ...,\ n,$$

$$M(X)=np,\ D(X)=np(1-p).$$

Закон Пуассона

$$P(X=k)=\frac{\alpha^k e^{-k}}{k!}, \qquad \alpha>0,\ k=0,1,...,n,$$

$$M(X)=\alpha, \quad D(x)=\alpha.$$

Закон больших чисел

Н е р а в е н с т в о Ч е б ы ш е в а

$$P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)\geq 1-D(x)/\varepsilon^2.$$

Непрерывные случайные величины

Интегральная функция (функция распределения)

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства:

1) $0 \le F(x) \le 1;$ 2) $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2);$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0,$ $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1;$ 4) $P(a \le x < b) = F(b) - F(a).$

Дифференциальная функция распределения

(плотность вероятности)

$$f(x) = F'(x),$$

где $F(x)$ – интегральная функция.

Свойства:

1) $f(x) \ge 0;$ 2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1;$ 3) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt;$

4) $P(a \le X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$

Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Математическое ожидание

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx.$$

Дисперсия

$$D(X) = M\left(\left(X - M(X)\right)^2\right), \qquad D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M(X)\right)^2 f(x)\,dx,$$

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx\right)^2.$$

Некоторые законы распределения непрерывных случайных величин

Равномерное распределение

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x<a \\ 1/(b-a), \text{ если } a\le x\le b, \\ 0, \text{ если } x>b, \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x<a \\ (x-a)/(b-a), \text{ если } a\le x\le b, \\ 1, \text{ если } x>b, \end{cases}$$

Нормальное распределение (распределение Гаусса)

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad M(X)=a,\;\; D(X)=\sigma^2,$$

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{t^2/2}dt -$функция Лапласа;

$P(|X-a|<\delta)=2\Phi(\delta/\sigma),$

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Основные числовые характеристики выборки.

<table>
<tr><td>Не группированная выборка</td><td>Группированная выборка</td></tr>
<tr><td colspan="2">1.Среднее арифметическое выборки (несмещённая состоятельная оценка математического ожидания MX генеральной совокупности)</td></tr>
<tr><td>$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$</td><td>$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\tilde{x}_i n_i$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2.Дисперсия выборки (смещённая состоятельная оценка дисперсии DX генеральной совокупности):</td></tr>
<tr><td>$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$</td><td>$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(\tilde{x}_i-\bar{x})^2 n_i$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3.Исправленная дисперсия выборки (несмещённая состоятельная оценка дисперсии DX генеральной совокупности): $s^2=\frac{n\hat{\sigma}^2}{n-1}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Размах выборки: $\widehat{R}=x_{\max}-x_{\min}$</td></tr>
</table>

5.**Мода** выборки: **а)** $\hat{Mo} = x_i$, где x_i -элемент выборки, встречающийся с наибольшей частотой n_i; **б)** $\hat{Mo} = x_\ell + \dfrac{h(n_\ell - n_{\ell-1})}{2n_\ell - n_{\ell-1} - n_{\ell+1}}$, где x_ℓ-нижняя граница модального интервала (интервала с наибольшей частотой); n_ℓ- частота модального интервала; $n_{\ell-1}$, $n_{\ell+1}$- частоты соседних интервалов; h - длина интервала группировки.
6.**Медиана** выборки: **а)** $\hat{Me} = x_{((n+1)/2)}$, если n- нечётное число и $\hat{Me} = 0.5\left(x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)}\right)$, если n- чётное число; n-объём выборки; $x_{(i)}$ - элемент вариационного ряда выборки с номером i. **б)** $\hat{Me} = x_\ell + h \cdot \left(\dfrac{n/2 - (n_1 + n_2 + \ldots + n_{\ell-1})}{n_\ell}\right)$, где h-длина интервала группировки; x_ℓ-нижняя граница медианного интервала, для которого начинает выполняться условие $\sum n_i \geq n/2$; n_ℓ-частота медианного интервала; $(n_1 + n_2 + \ldots + n_{\ell-1})$- число элементов выборки в интервалах, лежащих слева от медианного; n-объём выборки.

Доверительные интервалы для параметров a и σ^2 нормального распределения.

Параметр	Точечная оценка	Доверительный интервал
(σ^2 неизвестна)	$\bar{X}$	$\bar{X} - \Delta < a < \bar{X} + \Delta$, где $\Delta = \dfrac{\hat{\sigma} t_\alpha^{дв}(k)}{\sqrt{n-1}} = \dfrac{s t_\alpha^{дв}(k)}{\sqrt{n}}$, $k = n-1$
σ^2 (a неизвестно)	$s^2 = \dfrac{n\hat{\sigma}^2}{n-1}$	$\underline{\sigma}^2 < \sigma^2 < \bar{\sigma}^2$, где $\underline{\sigma}^2 = \dfrac{n\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{\alpha/2}(k)} = \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(k)}$, $\bar{\sigma}^2 = \dfrac{n\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(k)} = \dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(k)}$, $k = n-1$.

Доверительный интервал для параметра p биномиального распределения.

Параметр	Точечная оценка	Доверительный интервал
$(n>50, nw>5, n(1-w)>5)$	$\hat{p}=w=\dfrac{m}{n}$	$w-\Delta<p<w+\Delta$, где $\Delta=\dfrac{z_{\alpha/2}\sqrt{w(1-w)}}{\sqrt{n}}$

Объём выборки (повторной): $n=\dfrac{\sigma^2 z_{\alpha/2}^2}{\Delta^2}$ $(\sigma^2\approx\hat{\sigma}^2\approx s^2)$ или

$$n\approx\frac{w(1-w)z_{\alpha/2}^2}{\Delta^2}; \qquad n^*=n\cdot\left(\frac{1}{1+n/N}\right)$$

Объём выборки (бесповторной): $n^*\approx\dfrac{N\sigma^2 z_{\alpha/2}^2}{N\Delta^2+\sigma^2 z_{\alpha|2}^2}$ $(\sigma^2\approx\hat{\sigma}^2\approx s^2)$

или $n^*\approx\dfrac{Nw(1-w)z_{\alpha/2}^2}{N\Delta^2+w(1-w)z_{\alpha|2}^2}$, где N-объём генеральной совокупности;

если w-неизвестно, то при определении объёма n, n^* полагают $w=0.5$.

Здесь: $z_{\alpha/2}$ - корень уравнения $\Phi(z_{\alpha/2})=(1-\alpha)/2=\gamma/2$ (приложение 2); $t_{\alpha}^{дв}(k)$ -критическая точка распределения Стьюдента (приложение 4); $\chi_{\alpha/2}^2(k)$, $\chi_{1-\alpha/2}^2(k)$- критические точки распределения χ^2(приложение 3); Δ-предельная ошибка выборки; $\gamma=1-\alpha$ - доверительная вероятность; m- число элементов в выборке, обладающих данным свойством.

Проверка гипотез о средних нормального распределения.

<table>
<tr><th>Гипотеза H_0</th><th>Статистика критерия</th><th colspan="2">Критическое множество</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$a=a_0$
(σ-известно)</td><td rowspan="2">$Z=\dfrac{\left(\bar{X}-a_0\right)\sqrt{n}}{\sigma}$</td><td colspan="2">$W_{a\neq a_0}=\{\,|Z|>z_{\alpha/2}\}$</td></tr>
<tr><td>$W_{a<a_0}=\{\,Z<-z_{\alpha}\}$</td><td>$W_{a>a_0}=\{\,Z>z_{\alpha}\}$</td></tr>
</table>

$a = a_0$ (σ - неизвестно)	$T = \frac{\left(\bar{X} - a_0\right)\sqrt{k}}{\hat{\sigma}}$, где $k = n-1$	$W_{a\neq a_0} = \left\{ \lvert T \rvert > t_{\alpha}^{\text{дв}}(k)\right\}$	
		$W_{a<a_0} = \left\{ T < -t_{\alpha}^{\text{од}}(k)\right\}$	$W_{a>a_0} = \left\{ T > t_{\alpha}^{\text{од}}(k)\right\}$
$a_1 = a_2$ (σ_1, σ_2 - известны)	$Z = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right)\sqrt{n_1 n_2}}{\sqrt{n_2\sigma_1^2 + n_1\sigma_2^2}}$	$W_{a_1\neq a_2} = \left\{ \lvert Z \rvert > z_{\alpha/2}\right\}$	
		$W_{a_1<a_2} = \left\{ Z < -z_{\alpha}\right\}$	$W_{a_1>a_2} = \left\{ Z > z_{\alpha}\right\}$
$a_1 = a_2$ (σ_1, σ_2 - неизвестны, но равны)	$T = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right)\sqrt{k \cdot n_1 n_2}}{\sqrt{(k+2)(n_1\hat{\sigma}_1^2 + n_2\hat{\sigma}_2^2)}}$ где $k = n_1 + n_2 - 2$	$W_{a_1\neq a_2} = \left\{ \lvert T \rvert > t_{\alpha}^{\text{дв}}(k)\right\}$	
		$W_{a_1<a_2} = \left\{ T < -t_{\alpha}^{\text{од}}(k)\right\}$	$W_{a_1>a_2} = \left\{ T > t_{\alpha}^{\text{од}}(k)\right\}$

Здесь: $z_{\alpha/2}$ - корень уравнения $\Phi(z_{\alpha/2}) = (1-\alpha)/2$ (приложение 2); z_{α} - корень уравнения $\Phi(z_{\alpha}) = (1-2\alpha)/2$ (приложение 2); $t_{\alpha}^{\text{дв}}(k), t_{\alpha}^{\text{од}}(k)$ - критические точки распределения Стьюдента для двусторонней и односторонней критической области, соответственно (приложение 4).

Проверка гипотез о дисперсиях нормального распределения.

Гипотеза H_0	Статистика критерия	Критическое множество	
$\sigma^2 = \sigma_0^2$ (a - неизвестно)	$\chi^2 = \frac{ks^2}{\sigma_0^2}$, где $k = n-1$	$W_{\sigma^2\neq\sigma_0^2} = \left\{ \chi^2 \notin (\chi_{1-\alpha/2}^2(k), \chi_{\alpha/2}^2(k))\right\}$	
		$W_{\sigma^2<\sigma_0^2} = \left\{ \chi^2 < \chi_{1-\alpha}^2(k)\right\}$	$W_{\sigma^2>\sigma_0^2} = \left\{ \chi^2 > \chi_{\alpha}^2(k)\right\}$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (a_1, a_2 неизвестны)	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$, где $s_1^2 > s_2^2$	$W_{\sigma_1^2\neq\sigma_2^2} = \left\{ F > f_{\alpha/2}(k_1, k_2)\right\}$, где $k_1 = n_1 - 1,\ k_2 = n_2 - 1$	
		$W_{\sigma_1^2>\sigma_2^2} = \left\{ F > f_{\alpha}(k_1, k_2)\right\}$, где $k_1 = n_1 - 1,\ k_2 = n_2 - 1$	

Проверка гипотез о параметре p биномиального распределения

<table>
<tr><th>Гипотеза H_0</th><th>Статистика критерия</th><th colspan="2">Критическое множество</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$p = p_0$</td><td rowspan="2">$Z = \dfrac{\left(w - p_0\right)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}}$, где $w = \dfrac{m}{n}$ $(nw > 5,$ $n(1 - w) > 5)$</td><td colspan="2">$W_{p \neq p_0} = \left\{ \mid Z \mid > z_{\alpha/2} \right\}$</td></tr>
<tr><td>$W_{p < p_0} = \left\{ Z < -z_\alpha \right\}$</td><td>$W_{p > p_0} = \left\{ Z > z_\alpha \right\}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$p_1 = p_2$</td><td rowspan="2">$Z = \dfrac{\left(w_1 - w_2\right)\sqrt{n_1 n_2}}{\sqrt{w(1 - w)(n_1 + n_2)}}$ где $w = \dfrac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$ $(n_1 w > 5, n_1(1 - w) > 5,$ $n_2 w > 5, n_2(1 - w) > 5)$</td><td colspan="2">$W_{p_1 \neq p_2} = \left\{ \mid Z \mid > z_{\alpha/2} \right\}$</td></tr>
<tr><td>$W_{p_1 < p_2} = \left\{ Z < -z_\alpha \right\}$</td><td>$W_{p_1 > p_2} = \left\{ Z > z_\alpha \right\}$</td></tr>
</table>

ЛИТЕРАТУРА

1. Наримов Ш. Ш., Эшмаматова Д.Б. Олий математика (биринчи қисм) -2020 й.
2. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1978.
3. Ғаниев И.Ғ., Эшмаматова Д.Б., Каримов А.М., Нуриддинов Р., Мирсалихов Э.А., Эшқобилов А.А. Олий математикадан масалалар тўплами -2020 й.
4. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1981, 1983.
5. Азимов Ж., Шарипова Л., Нуриддинов Ф. Олий математикадан масалалар тўплами (Эҳтимолликлар назарияси ва математик статистика) – 2019 й.
6. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
7. Математика. Қисқача таърифлар ва формулалар. Т.: Академнашр. 2019 й.
8. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия.— М.: Наука, 1969, 1971.
9. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа, т. 1, 2. — М.: Наука, 1971, 1980.
10. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. — М.: Изд. АН СССР, 1961.
11. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ, т. 1, 2. — М.: Высшая школа, 1980.
12. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973.

13. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. — М.: Наука, 1978.
14. Жўраев Р.Ҳ., Рахимов Б.Х., Холматов Ш.Ф. Янги педагогик технологиялар. – Т.: Фан, 2005. – 66 б.
15. Никольский С. М. Курс математического анализа, т. 1, 2. — М.: Наука, 1975.
16. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1984.
17. Погорелов А. В. Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1978.

Содержание

Редактор Ахметжанова Г.М.