

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

**ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
имени Абу Райхана БЕРУНИ**

***КАРИМОВ Р.И., МАКСУДОВА Н.А.***

**ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА  
РАЗДЕЛ «СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»  
УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

**ТАШКЕНТ – 2003**

Прикладная механика. Раздел «Сопrotивление материалов» учебное пособие для студентов бакалавриатуры направлений «Инженерия и инженерное дело» / ТашГТУ; Р.И.Каримов, Н.А.Максудова; Ташкент, 2003

Учебное пособие охватывает основные разделы сопротивления материалов курса «Прикладная механика», связанных с выполнением расчетов на прочность стержней при растяжении и сжатии, кручении и изгибе.

В отличие от сборников задач, выходявших ранее, в учебном пособии приводится ряд задач, решаемых численными методами с применением ЭВМ и анализом результатов машинных расчетов. Имеются задачи повышенной трудности, к которым даны подробные решения. Книга может служить пособием для самостоятельных студенческих научных разработок.

*Кафедра «Основы проектирования машин»*

Печатается по решению научно-методического совета Ташкентского государственного технического университета имени Абу Райхана Беруни.

Рецензенты: профессор кафедры «Теория механизмов и деталей машин» ТАДИ, д.т.н. Ш.П.Алимухамедов

доцент кафедры «Основы проектирования машин» ТашГТУ, к.т.н. М.Абдусяямов

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие составлено в соответствии с программой курса «Прикладная механика» для направлений отрасли 520 000 - «Инженерия и инженерное дело».

Программой курса предусматривается чтение лекций, проведение практических и лабораторных занятий, а также самостоятельная работа студентов, связанная с выполнением расчетно-графических заданий.

Настоящее учебное пособие предназначено для обеспечения самостоятельной работы студентов, изучающих дисциплину «Прикладная механика», и оказания им помощи при выполнении расчетно-графических работ: «Расчет брусьев и стержней при растяжении и сжатии», «Расчеты стержней и брусьев на прочность и жесткость при кручении», «Расчет балок на прочность и жесткость при изгибе», «Расчет рамок круглого сечения при растяжении (сжатии) и изгибе».

Целью настоящего учебного пособия является закрепление и углубление знаний, полученных студентами при изучении основ сопротивления материалов, являющихся составной частью курса «Прикладная механика». Выполнение работ позволит студентам получить навыки самостоятельного выполнения расчетов на прочность, жесткость стержней и брусьев, элементы которых подвержены растяжению и сжатию, кручению, изгибу.

С целью более широкого использования компьютеров при выполнении расчетно-графических работ по сопротивлению материалов, а также для контроля решения некоторых задач использованы результаты совместных научных исследований авторов с учеными Института механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т.Уразбаева по расчету стержневых систем методом конечных элементов на ЭВМ, которые защищены четырьмя свидетельствами на программные продукты Патентного ведомства Республики Узбекистан.

При подготовке данного учебного пособия авторами учтен многолетний опыт преподавания курса «Прикладная механика» преподавателями кафедры «Основы проектирования машин» ТашГТУ.

## РАЗДЕЛ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

Сопротивление материалов как наука возникло в эпоху Возрождения, когда развитие техники, торговли, мореплавания, военного дела потребовало научных обоснований, необходимых для постройки крупных морских судов, мостов, гидротехнических сооружений и других сложных конструкций. Основоположителем этой науки считают итальянского ученого Галилея (1564–1642).

Все элементы сооружений или машин должны работать без угрозы поломки или опасного изменения сечений и формы под действием внешних сил. Размеры этих элементов в большинстве случаев определяют расчет на прочность. Элементы конструкции должны быть не только прочными, но и достаточно жесткими и устойчивыми.

Практика показывает, что все части конструкций под действием нагрузок *деформируются*, т.е. изменяют свою форму и размеры, а в некоторых случаях происходит разрушение конструкции.

Сопротивление материалов есть наука о прочности и деформируемости материалов и элементов машин и сооружений.

**Прочностью** называется способность материала конструкции и их элементов сопротивляться действию внешних сил, не разрушаясь.

В сопротивлении материалов рассматривают методы расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Расчеты на прочность дают возможность определить размеры и форму деталей, выдерживающих заданную нагрузку при наименьшей затрате материала.

Под **жесткостью** понимается способность тела или конструкции сопротивляться образованию деформации.

Расчеты на жесткость гарантируют, что изменения формы и размеров конструкций и их элементов не превзойдут допустимых норм.

Под **устойчивостью** понимается способность конструкции сопротивляться усилиям, стремящимся вывести ее из исходного состояния равновесия.

Расчеты на устойчивость предотвращают возможность внезапной потери устойчивости и искривления длинных или тонких деталей. Примером потери устойчивости может служить внезап-

ное искривление длинного прямолинейного стержня при сжатии вдоль оси.

На практике в большинстве случаев приходится иметь дело с конструкциями сложной формы, но их можно представить себе состоящими из отдельных простых элементов, например, брусьев, пластин, оболочек и массивов.

Основным расчетным элементом в сопротивлении материалов является *брус*, т. е. тело, поперечные размеры которого малы по сравнению с длиной. Брусья бывают прямолинейные и криволинейные, постоянного и переменного сечения. В зависимости от их назначения в конструкции брусья называют колоннами, балками, стержнями.

Плоское сечение, перпендикулярное оси бруса называется поперечным: сечение, параллельное оси бруса (прямолинейного) — продольным; остальные плоские сечения — наклонными.

Кроме расчета брусьев, сопротивление материалов занимается расчетом пластин и оболочек, т. е. тел, имеющих малую толщину по сравнению с другими размерами (например, резервуары, трубы, обшивка кораблей и самолетов). Тела, у которых все три измерения одинакового порядка, называются массивами (например, фундаменты, станины станков). Расчеты пластин, оболочек и массивов в настоящем учебном пособии не рассматриваются.

При деформации тела под действием внешних сил внутри него возникают силы упругости, которые препятствуют деформации и стремятся вернуть частицы тела в первоначальное положение. Силы упругости возникают в результате существования в теле внутренних сил молекулярного взаимодействия.

В сопротивлении материалов изучают деформации тел и возникающие при этих деформациях внутренние силы.

После прекращения действия внешних сил вызванная ими деформация может полностью или частично исчезнуть. Способность материала устранять деформацию после прекращения действия внешних сил называется *упругостью*. Деформация, исчезающая после прекращения действия внешних сил, называется упругой; деформация, не исчезающая после прекращения действия внешних сил, называется остаточной или пластической. Способность материала иметь значительные остаточные деформации, не разрушаясь при этом, носит название пластичности, а сами

материалы называются пластичными. К числу таких материалов относятся низкоуглеродистая сталь, алюминий, медь, латунь и др.

Материалы, обладающие весьма малой пластичностью, называются хрупкими. В отличие от пластичных материалов хрупкие материалы разрушаются без заметных остаточных деформаций. К хрупким материалам относят чугун, твердые сплавы, стекло, кирпич и др.

Наука о сопротивлении материалов опирается на законы теоретической механики, в которой тела полагались абсолютно жесткими, т. е. не способными деформироваться. Пользуясь рассмотренным в теоретической механике, принципом отвердевания в сопротивлении материалов мы будем применять к деформированным телам условия равновесия статики для определения реакций связей и действующих в сечениях деталей внутренних сил.

Силы, приложенные к небольшой поверхности тела, как и в теоретической механике, мы будем считать сосредоточенными, т. е. приложенными в точке: распределенные реактивные силы, приложенные к заземленному концу балки, мы по-прежнему будем заменять реактивной силой и реактивным моментом. Такие замены не вносят существенных изменений в условия деформации тела. Это положение носит название принципа смягченных граничных условий или принципа Сен-Венана, по имени французского ученого Сен-Венана (1797—1886).

Принцип Сен-Венана можно сформулировать следующим образом: *в точках тела, достаточно удаленных от мест приложения внешних сил, модуль внутренних сил весьма мало зависит от конкретного способа приложения сил.*

Основные гипотезы и допущения

Конструкционные материалы, из которых изготовляют детали машин и сооружений, не являются, строго говоря, непрерывными, однородными во всех точках и изотропными (имеющими одинаковые свойства во всех направлениях).

В процессе изготовления заготовок и получения из них готовых деталей в материале появляются различные, не поддающиеся учету поверхностные и внутренние дефекты, например, раковины, трещины и неоднородность структуры в литых деталях, волосовины у штампованных деталей, первоначальные внутренние усилия, вызванные неравномерностью остывания литых и кованных деталей, неравномерностью высыхания и неоднородностью древе-

сины, неравномерностью затвердевания и неоднородностью бетона и т.д.

Так как закономерности возникновения указанных явлений установить невозможно, то в сопротивлении материалов принимается ряд гипотез и допущений, которые позволяют исключить из рассмотрения эти явления. В результате объектом изучения в сопротивлении материалов становится не само реальное тело, а его приближенная модель. Экспериментальная проверка выводов, полученных на основании приведенных ниже гипотез и допущений, показывает, что эти выводы вполне пригодны для применения в практике инженерных расчетов.

Перейдем к рассмотрению основных гипотез и допущений, касающихся физико-механических свойств материалов.

1. Гипотеза об отсутствии первоначальных внутренних усилий. Согласно этой гипотезе предполагается, что если нет причин, вызывающих деформацию тела (нагружение, изменение температуры), то во всех его точках *внутренние усилия равны нулю*. Таким образом, не принимаются во внимание силы взаимодействия между частицами ненагруженного тела.

2. Допущение об однородности материала. Физико-механические свойства тела могут быть неодинаковыми в разных точках. В сопротивлении материалов этими различиями пренебрегают, полагая, что материал во всех точках тела обладает *одинаковыми свойствами*.

3. Допущение о непрерывности материала. Согласно этому допущению, материал любого тела имеет *непрерывное строение* и представляет собой *сплошную среду*. Допущение о непрерывном строении материала позволяет применять при расчетах методы высшей математики (дифференциальное и интегральное исчисления).

4. Допущение об изотропности материала. Это допущение предполагает, что материал тела обладает во всех направлениях *одинаковыми свойствами*.

Многие материалы состоят из кристаллов, у которых физико-механические свойства в различных направлениях существенно различны. Однако, благодаря наличию в теле большого количества беспорядочно расположенных кристаллов, свойства всей массы материала в различных направлениях выравниваются.

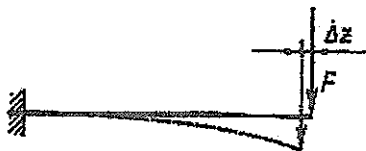


Рис. 1.1.

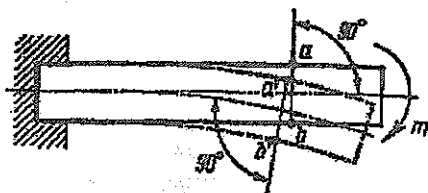


Рис. 1.2.

Допущение об изотропности хорошо подтверждается практикой для большинства материалов и лишь приближенно для таких материалов, как камень, пластмассы, железобетон.

Материалы, имеющие неодинаковые свойства в разных направлениях, называются анизотропными, например, древесина.

5. Допущение об идеальной упругости. Это допущение предполагает, что в известных пределах нагружения материал обладает *идеальной упругостью*, т. е. после снятия нагрузки деформации полностью исчезают.

Рассмотрим теперь гипотезы и допущения, связанные с деформациями элементов конструкций.

Изменение линейных и угловых размеров тела называется соответственно *линейной и угловой деформацией*. Изменение положения (координат) точек тела, вызванное деформацией, называется *перемещением*.

1. Допущение о малости перемещении или принцип начальных размеров. Согласно этому допущению, деформации тела и связанные с ними перемещения точек и сечений *весьма малы* по сравнению с размерами тела. На основании этого мы будем пренебрегать изменениями в расположении внешних сил, вызванными деформацией. Так, например, не будем принимать во внимание смещение  $\Delta z$  линии действия силы  $F$ , показанное на рис. 1.1.

2. Допущение о линейной деформируемости тел. Согласно этому допущению, перемещения точек и сечений упругого тела в известных пределах нагружения *прямо пропорциональны* силам, вызывающим эти перемещения.

3. Гипотеза плоских сечений или гипотеза Бернулли. Согласно этой гипотезе, плоские поперечные сечения, проведенные в теле до деформации, остаются при деформации *плоскими* и



нормальными к оси (рис.1.2.). Эта гипотеза была впервые высказана швейцарским ученым Якобом Бернулли (1654 – 1705) и положена в основу при изучении большинства основных деформаций бруса.

К основным гипотезам сопротивления материалов относится также принцип независимости действия сил: *результат действия группы сил не зависит от последовательности нагружения или конструкции и равен сумме результатов действия каждой из сил в отдельности, (принцип суперпозиции).*

Этот принцип применим только для конструкций, деформации которых малы по сравнению с размерами и пропорциональны действующим нагрузкам.

### ***Виды нагрузок и основных деформаций.***

В процессе работы машин и сооружений их узлы и детали воспринимают и передают друг другу различные нагрузки, т. е. силовые воздействия, вызывающие изменение внутренних сил и деформации узлов и деталей.

Силы, воспринимаемые элементами конструкций, являются либо массовыми или объемными (силы тяжести, силы инерции) либо поверхностными силами контактного взаимодействия рассматриваемого элемента с соседними элементами или прилегающей к нему средой (например, пар, воздух, жидкость).

В теоретической механике мы установили, что поверхностные нагрузки бывают сосредоточенными или распределенными.

В зависимости от характера действия нагрузки подразделяют на статические и динамические.

***Статическими*** называются нагрузки, числовое значение, направление и место приложения которых остаются постоянными или меняются медленно и незначительно. Таким образом, можно полагать, что при передаче статических нагрузок все части конструкции находятся в равновесии.

Пример статической нагрузки — сила тяжести сооружений.

***Динамическими*** называются нагрузки, характеризующиеся быстрым изменением во времени их значения, направления или места приложения.

К динамическим нагрузкам относятся ударные, внезапно приложенные и повторно-переменные нагрузки. Ударные нагрузки возникают, например, при ковке металла или забивке свай; при-

мером внезапно прилагаемой нагрузки является давление колеса, катящегося по рельсу; повторно-переменные нагрузки испытывают, например, детали кривошипно-ползунного механизма паровой машины. К динамическим нагрузкам относятся также инерционные нагрузки, например, силы инерции в ободу вращающегося маховика.

Следует помнить, что в число внешних сил, принимаемых во внимание при расчете конструкций, входят *не только* активные силы, *но также* реакции связей и силы инерции (при движении с достаточно большим ускорением).

Далее перейдем к рассмотрению *основных деформаций*. Из практики известно, что в процессе эксплуатации элементы конструкций испытывают следующие, основные деформации:

1) растяжение; эту деформацию испытывают, например, канаты, тросы, цепи, шток протяжного станка;

2) сжатие; на сжатие работают, например, колонны, кирпичная кладка, пуансоны штампов;

3) сдвиг; деформацию сдвига испытывают заклепки, болты, шпонки, швы сварных соединений. Деформацию сдвига, доведенную *до разрушения* материала, называют срезом. Срез возникает, например, при резке ножницами или штамповке деталей из листового материала;

4) кручение; на кручение работают валы, передающие мощность при вращательном движении. Обычно деформация кручения сопровождается другими деформациями, например, изгибом;

5) изгиб; на изгиб работают балки, оси, зубья зубчатых колес и другие элементы конструкций.

### **Метод сечений. Напряжение.**

Для расчетов деталей машин и сооружений на прочность необходимо знать внутренние силы упругости, возникающие в результате действия приложенных к деталям внешних сил.

Метод сечения заключается в том, что тело мысленно разрезается плоскостью на две части, любая из которых отбрасывается и взамен нее к сечению оставшейся части прикладываются внутренние силы, действовавшие до разреза, оставленная часть рассматривается как самостоятельное тело, находящееся в равновесии под действием внешних и приложенных к сечению внутренних сил.

Очевидно, что, согласно третьему закону Ньютона (аксиома взаимодействия), внутренние силы, действующие в сечении оставшейся и отброшенной частей тела, равны по модулю, но противоположны по направлению. Таким образом, рассматривая равновесие любой из двух частей рассеченного тела, мы получим одно и то же значение внутренних сил, однако выгоднее рассматривать ту часть тела, для которой уравнения равновесия проще.

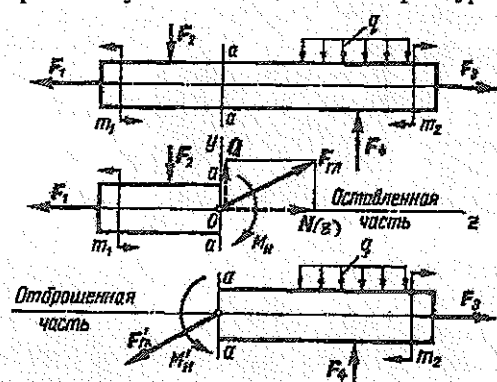


Рис.1.3.

В соответствии с принятым допущением о непрерывности материала тела мы можем утверждать, что внутренние силы, возникающие в теле, представляют собой силы, равномерно или неравномерно распределенные по сечению.

Применяя к оставленной части тела условия равновесия, мы не сможем найти закон распределения внутренних сил по

сечению, но сможем определить статические эквиваленты этих сил.

Так как основным расчетным объектом в сопротивлении материалов является брус и чаще всего нас будут интересовать внутренние силы в его поперечном сечении, то рассмотрим, каковы будут статические эквиваленты внутренних сил в поперечном сечении бруса.

Рассечем брус (рис. 1.3.) поперечным сечением  $a-a$  и рассмотрим равновесие его левой части.

Если внешние силы, действующие на брус, лежат в одной плоскости, то в общем случае статическим эквивалентом внутренних сил, действующих в сечении  $a-a$ , будут главный вектор  $R_{zn}$ , приложенный в центре тяжести сечения, и главный момент  $M_{zn}$ , уравнивающие плоскую систему внешних сил, приложенных к оставленной части бруса.

Разложим главный вектор на составляющую  $N(z)$ , направленную вдоль оси бруса, и составляющую  $Q$ , перпендикулярную этой оси, т. е. лежащую в плоскости поперечного сечения.

Эти составляющие главного вектора вместе с главным моментом назовем *внутренними силовыми факторами*, действующими в сечении бруса. Составляющую  $N(z)$  назовем *продольной силой*, составляющую  $Q$  — *поперечной силой*, пару сил  $M_{ij}$  — *изгибающим моментом*.

Для определения указанных трех внутренних силовых факторов статика дает три уравнения равновесия оставленной части бруса, а именно:

$$\sum Z=0, \sum Y=0, \sum M=0$$

(ось  $z$  всегда направляем по оси бруса).

Если внешние силы, действующие на брус, не лежат в одной плоскости, т. е. представляют собой пространственную систему сил, то в общем случае в поперечном сечении бруса возникают *шесть внутренних силовых факторов* (рис. 1.4.), для определения которых статика дает *шесть уравнений равновесия* оставленной части бруса, а именно:

$$\sum X=0, \sum Y=0, \sum Z=0, \sum M_x=0, \sum M_y=0, \sum M_z=0.$$

Шесть внутренних силовых факторов, возникающих в поперечном сечении бруса в самом общем случае, носят следующие названия:  $N(z)$  — продольная сила,  $Q_x$ ,  $Q_y$  — поперечные силы,  $T_k$  — крутящий момент,  $M_{ix}$ ,  $M_{iy}$  — изгибающие моменты.

При разных деформациях в поперечном сечении бруса возникают различные внутренние силовые факторы. Рассмотрим частные случаи:

1. В сечении возникает *только продольная сила*  $N(z)$ . В этом случае это деформация растяжения (если сила  $N$  направлена от сечения) или деформация сжатия (если сила  $N$  направлена к сечению).

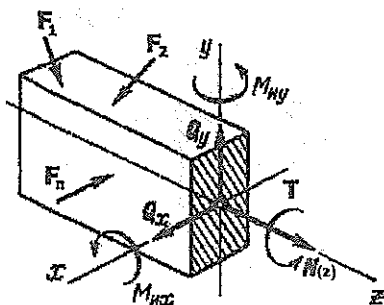


Рис. 1.4.

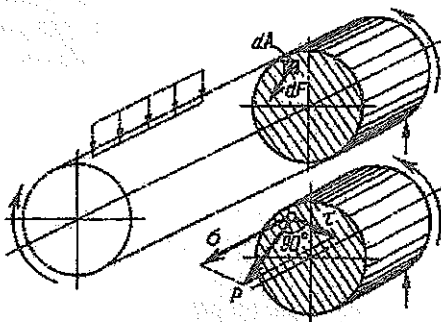


Рис. 1.5.

2. В сечении возникает *только поперечная сила*  $Q$ . В этом случае это деформация сдвига.

3. В сечении возникает *только крутящий момент*  $T_k$ . В этом случае это деформация кручения.

4. В сечении возникает *только изгибающий момент*  $M_{из}$ . В этом случае это деформация чистого изгиба. Если в сечении одновременно возникает изгибающий момент  $M_{из}$  и поперечная сила  $Q$ , то изгиб называют поперечным.

5. Если в сечении *одновременно* возникают *несколько внутренних силовых факторов* (например, изгибающий и крутящий моменты или изгибающий момент и продольная сила), то в этих случаях имеет место сочетание основных деформаций.

Наряду с понятием деформации одним из основных понятий сопротивления материалов является напряжение. *Напряжение характеризует интенсивность внутренних сил, действующих в сечении.*

Рассмотрим какой-либо произвольно нагруженный брус и применим к нему метод сечений (рис. 1.5.). Выделим в сечении бесконечно малый элемент площади  $dA$  (что мы имеем право делать, так как считаем материал непрерывным). Ввиду малости этого элемента можно считать, что в его пределах внутренние силы, приложенные в различных точках, одинаковы по модулю и направлению и, следовательно, представляют собой систему параллельных сил. Равнодействующую этой системы обозначим  $dF$ . Разделив  $dF$  на площадь элементарной площадки  $dA$ , определим интенсивность внутренних сил, т. е. напряжение  $p$  в точках элементарной площадки  $dA$ :

$$p = \frac{dF}{dA}$$

Таким образом, напряжение есть внутренняя сила, отнесенная к единице площади сечения.

Напряжение есть величина векторная.

Единица напряжения:

$$[p] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{\text{сила}}{\text{площадь}} = \text{ньютон на квадратный метр} = \text{Н/м}^2 = \text{паскаль (Па)}.$$

Поскольку эта единица напряжения очень мала, то мы будем применять более крупную кратную единицу, а именно мегапаскаль (МПа):

$$1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ Н/мм}^2.$$

Числовые значения напряжения, выраженного в МПа и Н/мм<sup>2</sup>, совпадают.

Разложим вектор напряжения  $p$  на две составляющие:

$\sigma$ - перпендикулярную плоскости сечения и  $\tau$ - лежащую в плоскости сечения (рис. 1.5.). Эти составляющие назовем так:  $\sigma$ - нормальное напряжение,  $\tau$ - касательное напряжение.

Так как угол между нормальным и касательным напряжениями всегда равен  $90^\circ$ , то модуль полного напряжения  $p$  определится по формуле

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}.$$

Разложение полного напряжения на нормальное и касательное имеет вполне определенный физический смысл. Как мы убедимся в дальнейшем, в поперечном сечении бруса при растяжении, сжатии и чистом изгибе действуют *только нормальные напряжения*, а при сдвиге и кручении – *только касательные напряжения*.

Теперь рассмотрим гипотезу, которая носит название принципа независимости действия сил и формулируется так: при действии на тело нескольких нагрузок внутренние силы, напряжения, перемещения и деформации в любом месте могут быть определены как сумма этих величин, найденных от каждой нагрузки в отдельности.

Пользуясь принципом независимости действия сил, мы, начав с изучения простейших основных деформаций, когда в поперечных сечениях бруса действуют только нормальные или только касательные напряжения, в дальнейшем перейдем к изучению более сложных основных деформаций, когда в поперечном сечении действуют и те, и другие напряжения.

Заметим, что принцип независимости действия сил применим только для конструкций, деформации которых малы по сравнению с размерами и пропорциональны действующим нагрузкам.

## **РАЗДЕЛ 2.**

### **«РАСТЯЖЕНИЕ, СЖАТИЕ БРУСЬЕВ, СТЕРЖНЕЙ»**

## 2.1. ИСХОДНЫЕ ПОНЯТИЯ.

*Растяжением* или *сжатием* называется такой вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только продольная сила  $N(z)$ . Брусья с прямолинейной осью (прямые брусья), работающие на растяжение или сжатие, часто называют *стержнями*.

Рассмотрим невесомый, защемленный левым концом прямой брус, вдоль оси, которого действует активная сила  $F$  и  $2F$  (рис. 1.1.).

Части бруса постоянного сечения, заключенные между поперечными плоскостями, в которых приложены активные или реактивные силы, будем называть *участками*. Изображенный на рис. 2.1. брус состоит из двух участков.

Применив метод сечений, определим продольные силы  $N_1(z)$  и  $N_2(z)$  на участках. Рассечем брус на левом участке поперечным сечением 1—1. Во всех точках бруса будут действовать внутренние распределенные силы, равнодействующая которых определится из условия равновесия одной из частей бруса (например, правой от сечения):

$$\sum Z = 0; \quad 2F - F - N_1(z) = 0,$$

откуда

$$N_1(z) = 2F - F = F.$$

Мы видим, что для равновесия оставленной части бруса в сечении 1—1 необходимо приложить только силу  $N_1$ , направленную вдоль оси, т.е. продольную силу.

Продольная сила есть равнодействующая нормальных внутренних сил, возникающих в поперечном сечении бруса. Нетрудно понять, что в сечении 2—2 на правом участке продольная сила будет иметь другое значение:  $N_2(z) = 2F$ . Таким образом, *продольная сила в поперечном сечении бруса численно равна алгебраической сумме внешних сил, расположенных по одну сторону сечения* (имеется в виду, что все силы направлены вдоль оси бруса).

В дальнейшем растягивающие (направленные от сечения) продольные силы мы будем считать *положительными*, а сжимающие (направленные к сечению) — *отрицательными*.

При растяжении и сжатии в поперечных сечениях бруса возникают только *нормальные напряжения, равномерно распределенные по сечению* и вычисляемые по формуле:



$$\sigma_{(z)} = \frac{N_{(z)}}{A}$$

где  $N_{(z)}$  — продольная сила;  $A$  — площадь поперечного сечения. Очевидно, что при растяжении и сжатии форма сечения на напряжение не влияет.

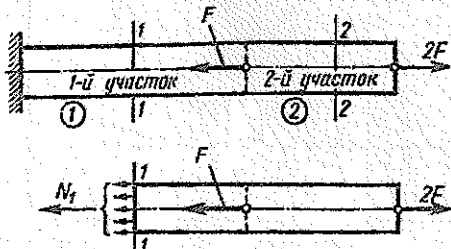


Рис.2.1.

В сечениях, близких к точкам приложения растягивающих или сжимающих сил, закон распределения напряжений по сечению будет более сложным, но, пользуясь принципом смягченных граничных условий, мы будем этими отклонениями пренебрегать и считать, что во всех сечениях

бруса напряжения распределены равномерно и что в сечении, где к брусу приложена вдоль оси сосредоточенная сила, значения продольной силы и напряжений меняются скачкообразно.

Напряжения и деформации при растяжении и сжатии связаны между собой зависимостью, которая называется законом Гука, по имени установившего этот закон английского физика Роберта Гука (1635—1703).

Закон Гука при растяжении и сжатии справедлив лишь в *определенных пределах* нагружения и формулируется так: *нормальное напряжение прямо пропорционально относительному удлинению или укорочению.*

Математический закон Гука можно записать в виде равенства:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Коэффициент пропорциональности  $E$  — характеризует жесткость материала, т.е. его способность сопротивляться упругим деформациям растяжения или сжатия, и называется *модулем продольной упругости* или *модулем упругости первого рода.*

Модуль упругости и напряжения выражаются в одинаковых единицах:

$$[E] = \frac{[\sigma]}{[\varepsilon]} = \text{Па}$$

Значения  $E$ , МПа, для некоторых материалов:

Таблица 1.

Чугун	$(1,5...1,6) 10^5$
Сталь	$(1,96...2,16) 10^5$
Медь	$(1,0...1,3) 10^5$
Сплавы алюминия	$(0,69...0,71) 10^5$
Дерево (вдоль волокон)	$(0,1...0,16) 10^5$
Текстолит	$(0,06...0,1) 10^5$
Капрон	$(0,01...0,02) 10^5$

Если в формулу закона Гука подставим выражения

$$\sigma = \frac{N(z)}{A}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

то получим

$$\Delta l = \frac{N(z) \cdot l}{(EA)}$$

Произведение  $EA$ , стоящее в знаменателе, называется *жесткостью сечения* при растяжении и сжатии; оно характеризует одновременно физико-механические свойства материала и геометрические размеры поперечного сечения бруса.

Эта формула читается так: *абсолютное удлинение или укорочение прямо пропорционально продольной силе, длине и обратно пропорционально жесткости сечения бруса.*

Условие прочности детали конструкции заключается в том, что наибольшее возникающее в ней напряжение (рабочее) не должно превышать допускаемого:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma].$$

Ориентировочные значения допускаемых напряжений на растяжение и сжатие для некоторых материалов приведены ниже в таблице 2.

Таблица 2.

Материал	[ $\sigma$ ], МПа	
	Растяжение	сжатие
Чугун серый	28...80	120...150
Сталь углеродистая конструкторная	60...250	
Сталь легированная конструкторная	100...400 и выше	
Медь	30...120	
Латунь	70...140	
Бронза	60...120	
Дюралюминий	80...150	
Текстолит	30...40	50...90
Дуб (вдоль волокна)	9...13	13...15
Кирпичная кладка	до 0,2	0,6...2,5
Бетон	0,1...0,7	1...9

Если допускаемые напряжения при растяжении и сжатии различны, то их обозначают соответственно [ $\sigma_p$ ] и [ $\sigma_c$ ].

Расчетная формула при растяжении и сжатии имеет вид:

$$\sigma = \frac{N_{(z)}}{A} \leq [\sigma]$$

и читается следующим образом: *нормальное напряжение в опасном сечении, вычисленное по формуле  $\sigma = \frac{N_{(z)}}{A}$ , не должно превышать допускаемое.*

При расчете конструкций на прочность встречаются три вида задач, различающихся формой использования расчетной формулы:

1) *проектный расчет*, при котором определяются размеры опасного сечения по формуле:

$$A = \frac{N_{(\max)}}{[\sigma]};$$

2) *проверочный расчет*, при котором определяется рабочее напряжение и сравнивается с допускаемым по формуле:

$$\sigma = \frac{N_{(z)}}{A} \leq [\sigma];$$

3) *определение допускаемой нагрузки* ведется по формуле

$$[N_{(z)}] = A \cdot [\sigma]$$

## 2.2. УСЛОВИЯ ЗАДАЧ: №1, №2, №3, №4.

### Задача №1.

Стальной ступенчатый брус нагружен системой сосредоточенных сил действующих вдоль оси, как показано на рисунке в задании. Номер задания и варианты исходных данных приведены в таблицах № 2.1. и № 2.5.

### Требуется:

- определить продольные силы, напряжения и перемещения поперечных сечений бруса;
- построить эпюры продольных сил, напряжений и перемещений по длине бруса  $N=f(z)$ ,  $\sigma = f(z)$ ,  $\lambda = f(z)$ ;
- из расчета на прочность определить размеры поперечных сечений каждой ступени, принимая их сплошными круглыми.

### Задача №2.

Абсолютно жесткий брус АВ укреплен и поддерживается с помощью трех стержней, как показано на рисунке в задании. Крепление всех стержней — шарнирное. На брус действует сосредоточенная или распределенная нагрузка. Форма поперечного сечения стержней указана на схеме.

### Требуется:

- определить размеры поперечных сечений стержней 1, 2, 3 из условия их равнопрочности. Номер задания и варианты исходных данных приведены в таблицах № 2.2. и № 2.5.

### Задача №3.

Стальной брус нагружен системой сосредоточенных сил и постоянной распределенной нагрузкой, действующих вдоль оси бруса, как показано на рисунке. Номер задания и вариант исходных данных приведены в таблицах № 2.3. и № 2.5.

### Требуется:

- определить продольные силы, перемещения поперечных сечений бруса;

- построить эпюры продольных сил и перемещений поперечных сечений по длине бруса  $N = f(z)$ ,  $\lambda = f(z)$ ;
- из расчета на прочность определить размеры поперечного сечения, принимая их сплошными круглыми.

#### Задача №4.

Стальной брус нагружен системой сосредоточенных сил и изменяющейся распределенной нагрузкой, действующих вдоль оси бруса, как показано на рисунке в задании. Номер задания и вариант исходных данных приведены в таблицах № 2.4. и № 2.5.

#### Требуется:

- определить продольные силы, перемещения поперечных сечений бруса;
- построить эпюры продольных сил  $N = f(z)$  и перемещений  $\lambda = f(z)$  поперечных сечений по длине бруса;
- из расчета на прочность определить размеры поперечного сечения, принимая их сплошными круглыми;
- определить общее перемещение бруса.

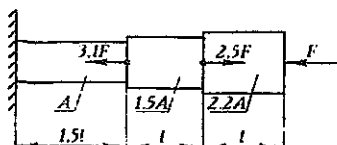
### 2.3. СИСТЕМА ЕДИНИЦ И ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ.

В методическом указании используется международная система единиц СИ. Обозначение величин:

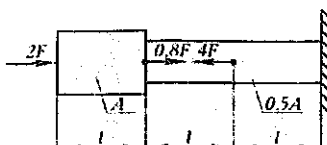
1. Система координат — правая, продольная ось — Z, оси в поперечном сечении — X, Y.
2. Нагрузка, внешняя сила — F.
3. Площадь поперечного сечения — A.
4. Внутренняя продольная сила —  $N(z)$ .
5. Нормальное напряжение —  $\sigma(z)$ .
6. Допускаемое номинальное напряжение —  $[\sigma]$
7. Модуль упругости первого рода — E.
8. Жесткость бруса — EA.
9. Линейное перемещение поперечного сечения —  $\lambda(z)$ .

<p>1</p>	<p>5</p>
<p>2</p>	<p>6</p>
<p>3</p>	<p>7</p>
<p>4</p>	<p>8</p>

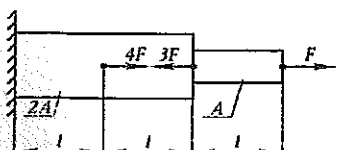
9



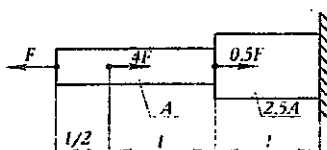
13



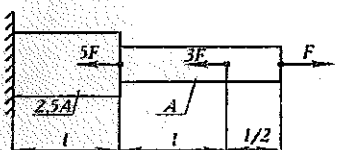
10



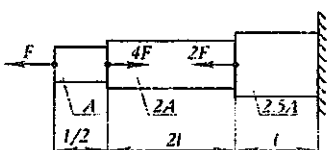
14



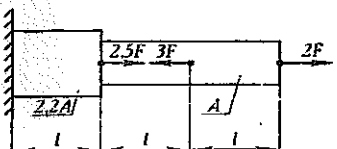
11



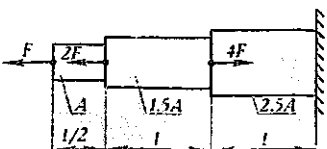
15



12

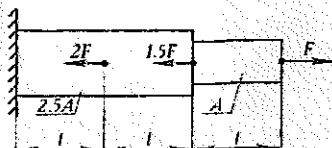


16

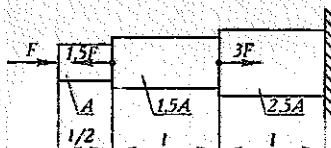




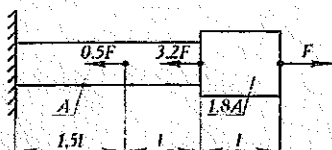
17



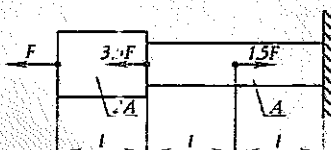
21



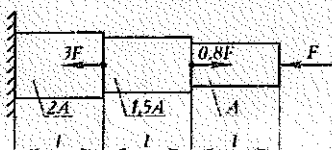
18



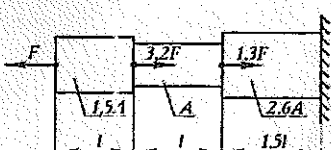
22



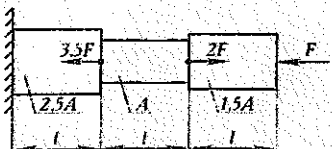
19



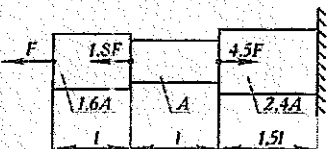
23

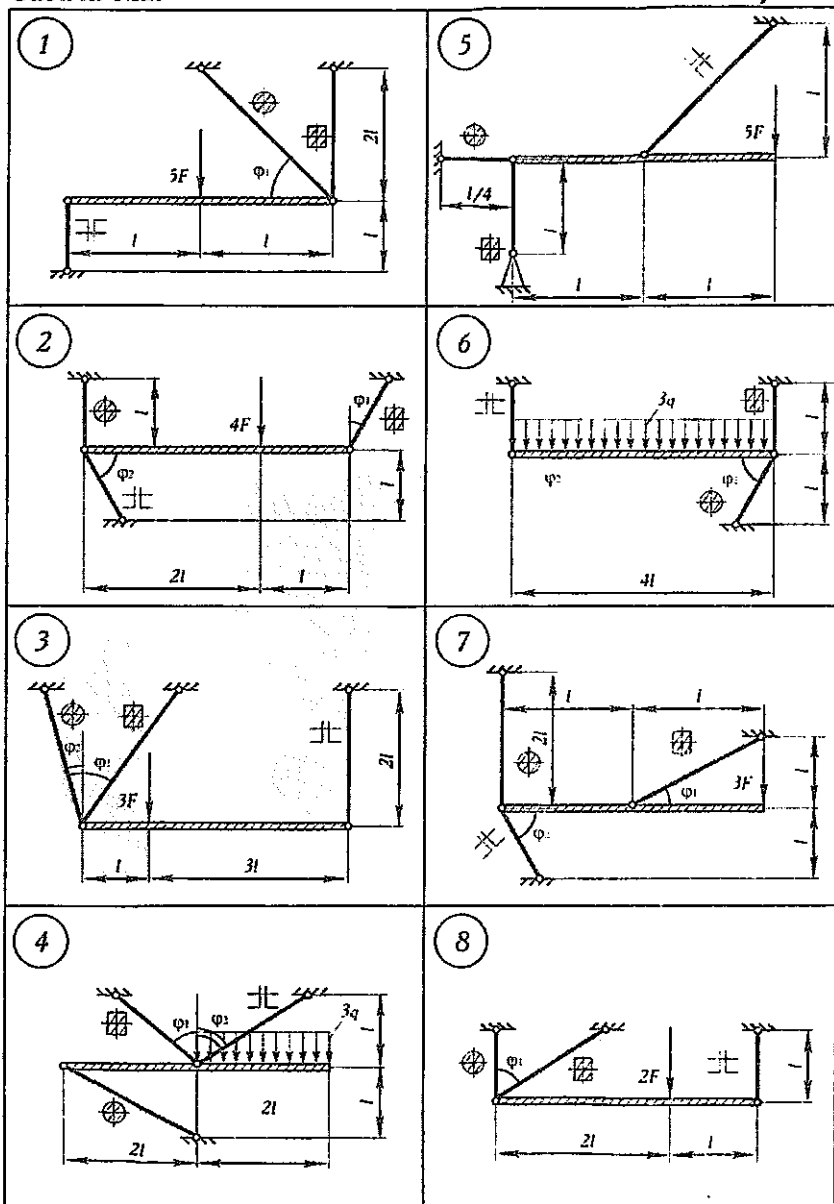


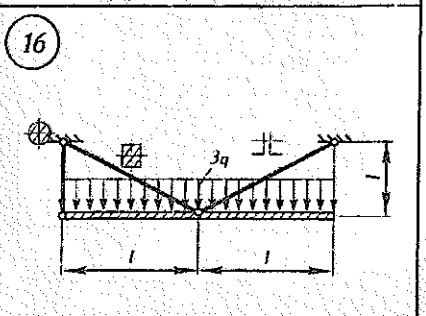
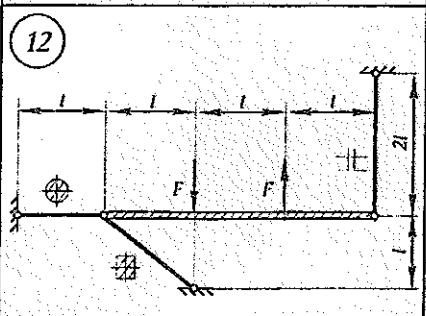
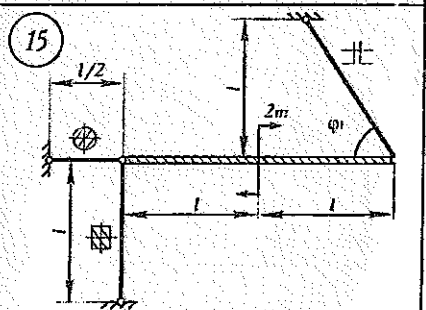
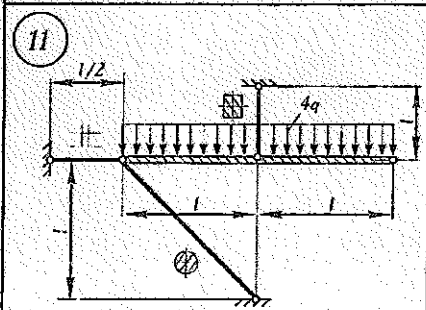
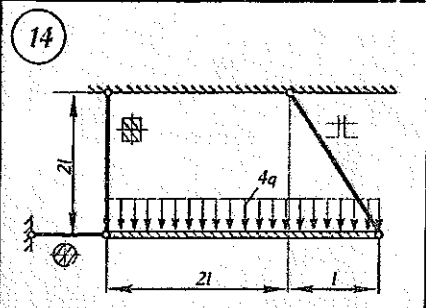
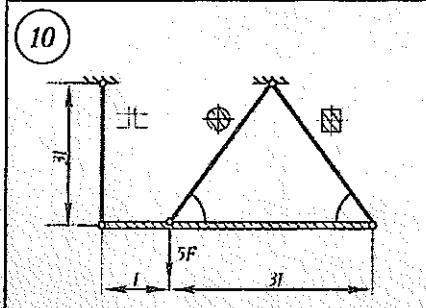
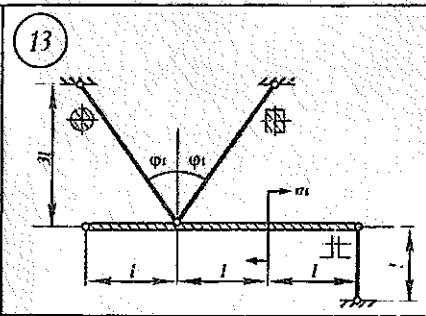
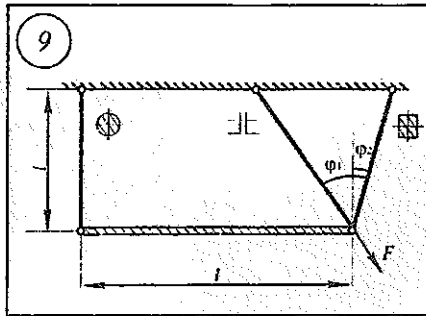
20

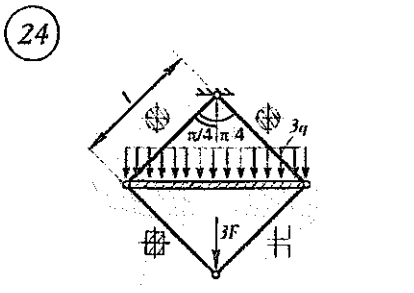
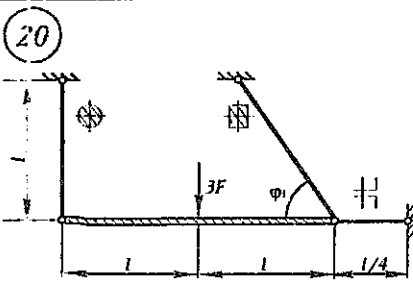
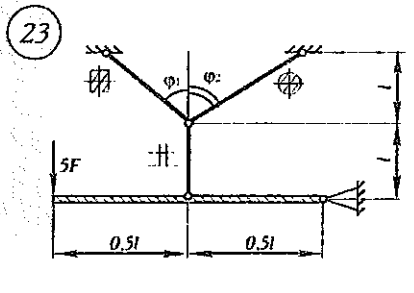
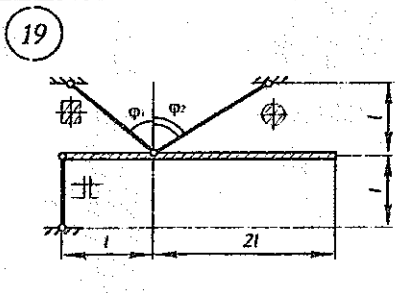
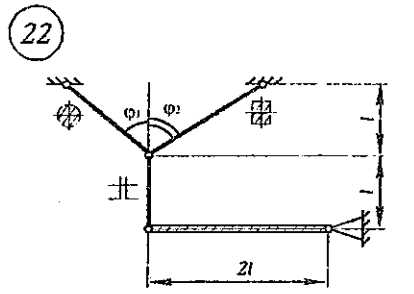
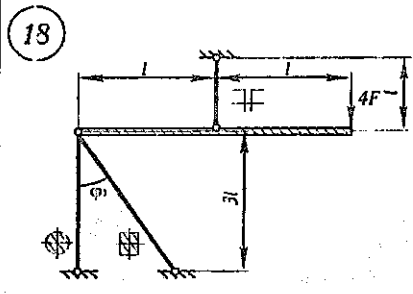
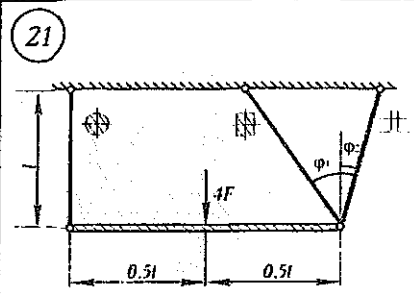
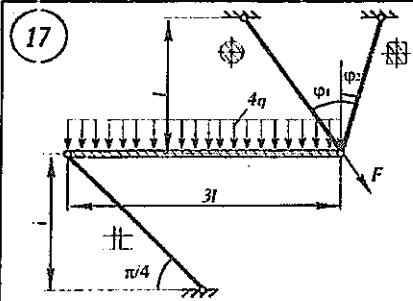


24



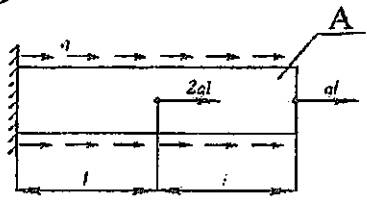




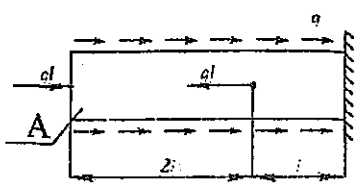


<p>1</p>	<p>5</p>
<p>2</p>	<p>6</p>
<p>3</p>	<p>7</p>
<p>4</p>	<p>8</p>

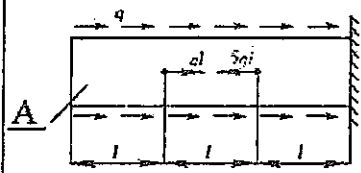
9



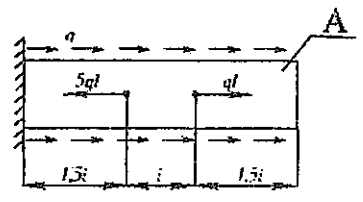
13



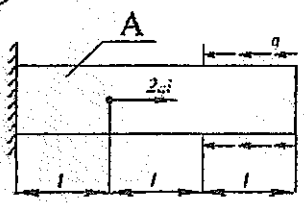
10



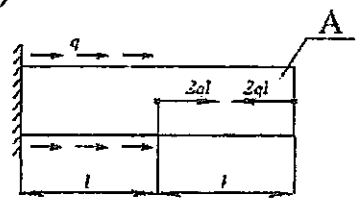
14



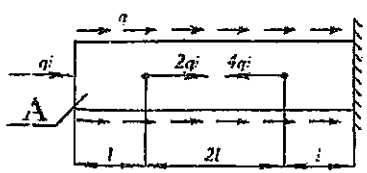
11



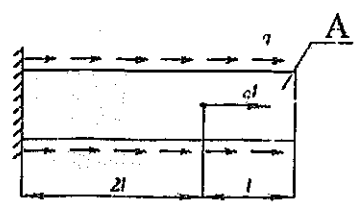
15



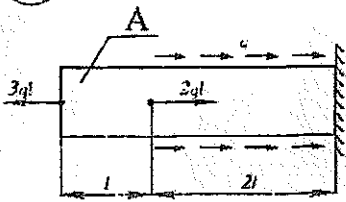
12



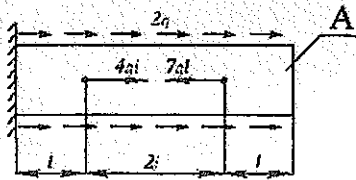
16



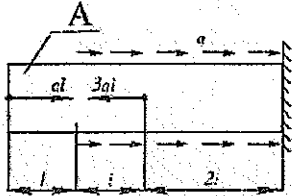
17



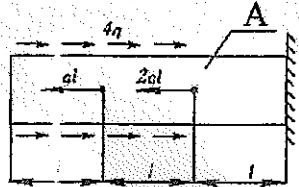
21



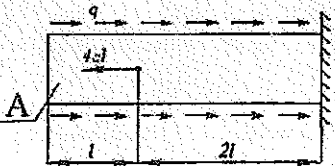
18



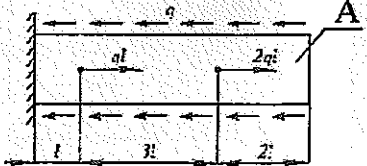
22



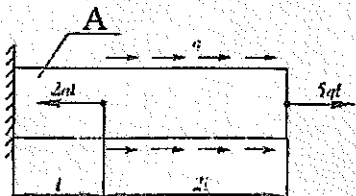
19



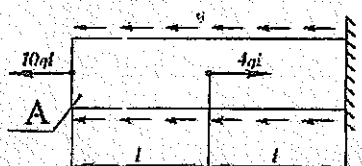
23

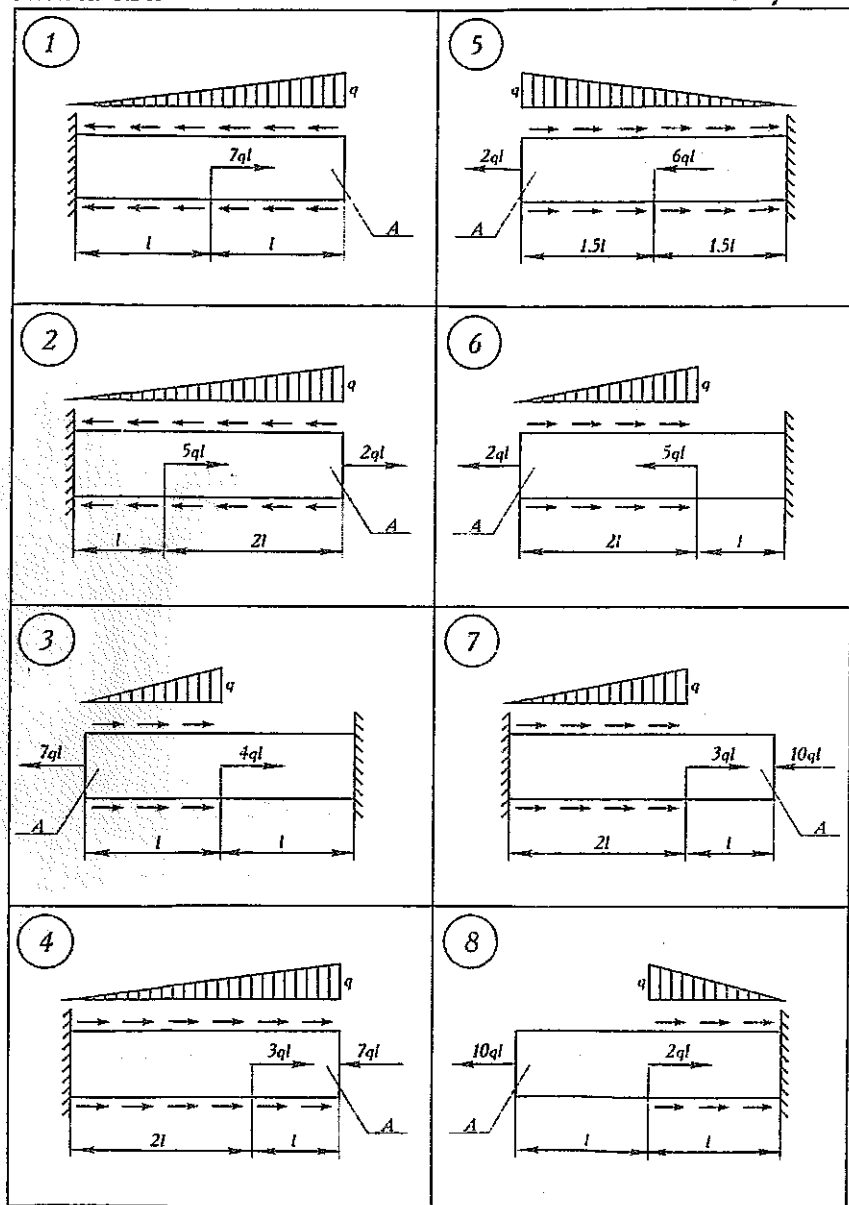


20

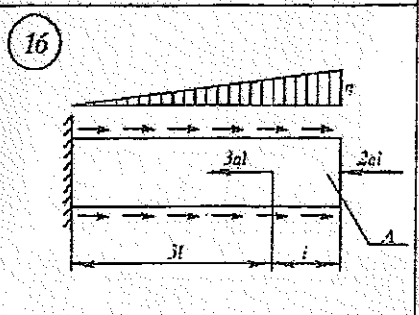
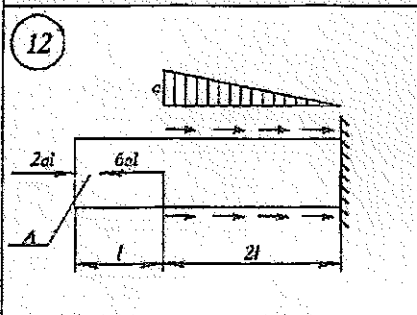
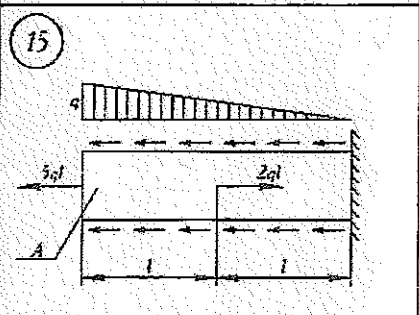
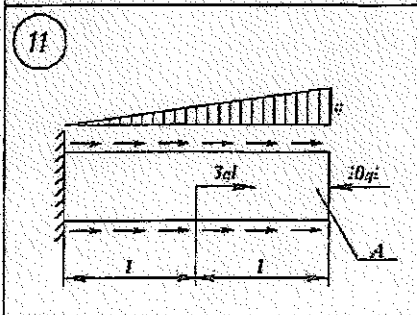
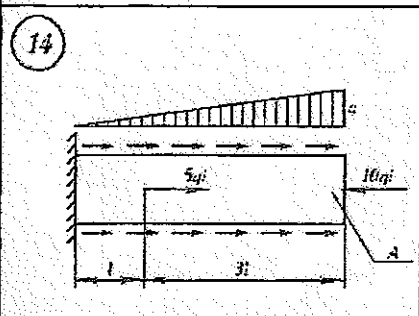
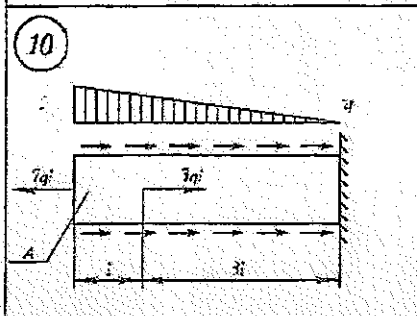
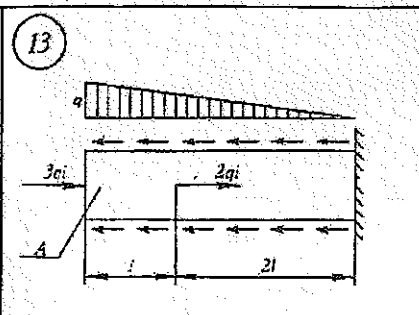
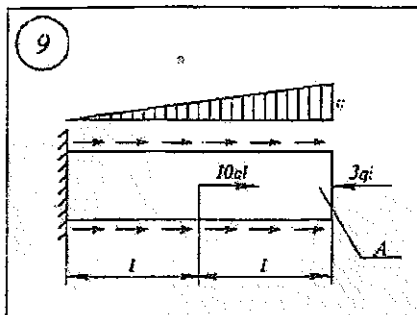


24









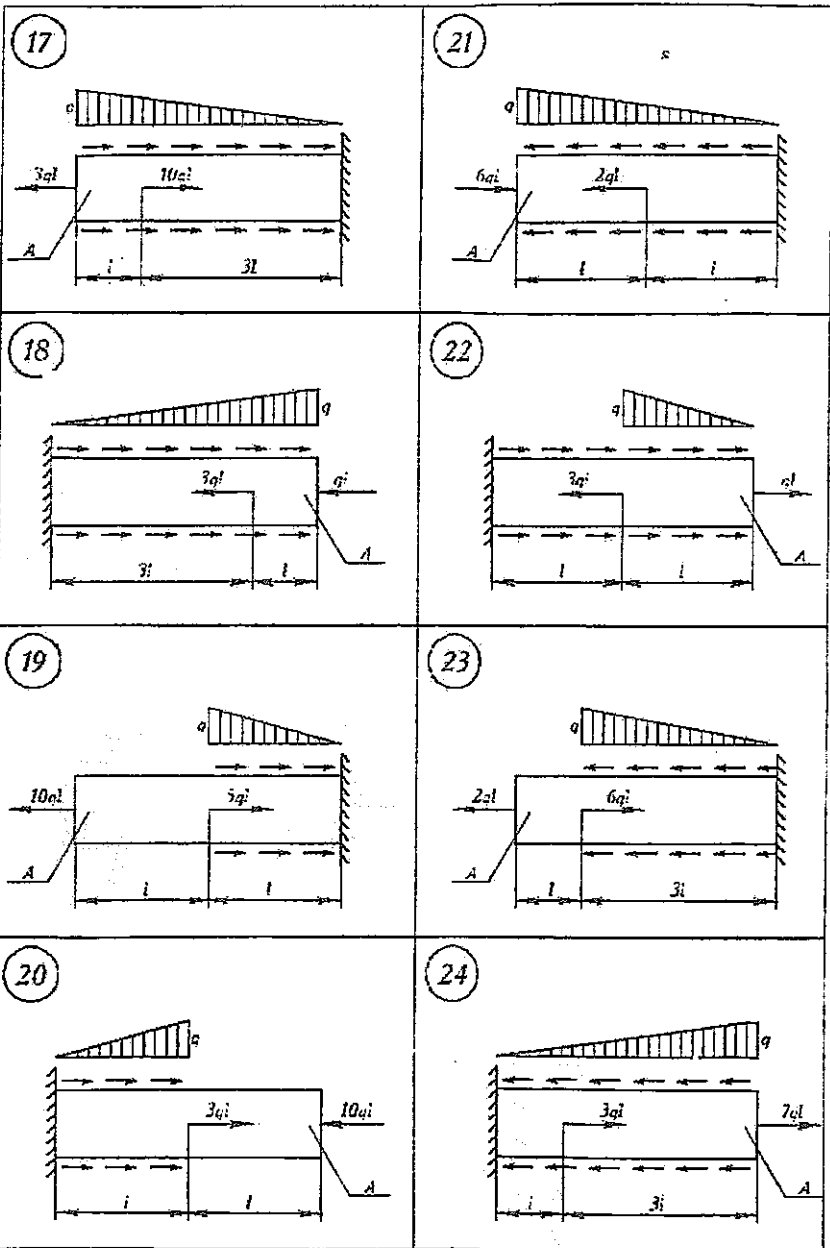


Таблица 2.5.

## ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ К ЗАДАЧАМ

№	Наименование величин	Ед. изм.	Варианты исходных данных										
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1.	Длина элемента ( $l$ )	м.	1,0	1,2	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0	0,5	0,6	0,8	
2.	Интенсивность распределенной нагрузки ( $q$ )	кН/м	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	
3.	Углы $\varphi_1, \varphi_2$ в стержневой системе	$\varphi_1$	град	30	30	40	40	50	50	60	60	45	45
		$\varphi_2$		60	60	50	50	40	40	30	30	45	45
4.	Пара сил ( $m$ )	кНм	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	
5.	Сосредоточенная сила ( $F$ )	кН	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	

## 2.4. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАЧИ №1.

### Задача №1.

#### Условие:

Стальной ступенчатый брус нагружен системой сосредоточенных сил действующих вдоль оси, как показано на рис. 2.2.

#### Требуется:

1. Определить продольные силы, нормальные напряжения и линейные перемещения поперечных сечений бруса.
2. Построить эпюры продольных сил, напряжений и перемещений  $N(z)$ ;  $\sigma(z)$ ;  $\lambda(z)$ .
3. Из расчёта на прочность определить размеры поперечных сечений каждой ступени, принимая их сплошными, круглыми.

#### Исходные данные:

- Нагрузка	$F = 60 \text{ кН};$
- Длина	$\ell = 1,2 \text{ м};$
- Допускаемое напряжение	$[\sigma] = 140 \text{ МПа};$
- Модуль упругости	$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$

#### Решение:

1. Определение продольных сил и построение эпюры  $N=f(z)$ . Мысленно отбросив опору и заменив ее силой реакции  $R_B$ , составляем уравнение равновесия для бруса, из которого определяем реакцию в заделке. Реакцию предполагаем растягивающей (рис. 2.2.б).

$$\sum F_{ix}=0; F-2.5F+2F-R_E=0; R_E=0.5F$$

Знак «плюс» обозначает, что предполагаемое направление реакции правильное.

Брус имеет три участка. Границами участков служат точки приложения сил. Нумеруем участки. Продольные силы определяем методом сечений. Неизвестную продольную силу в сечении предполагаем растягивающей (рис. 2.2.в).

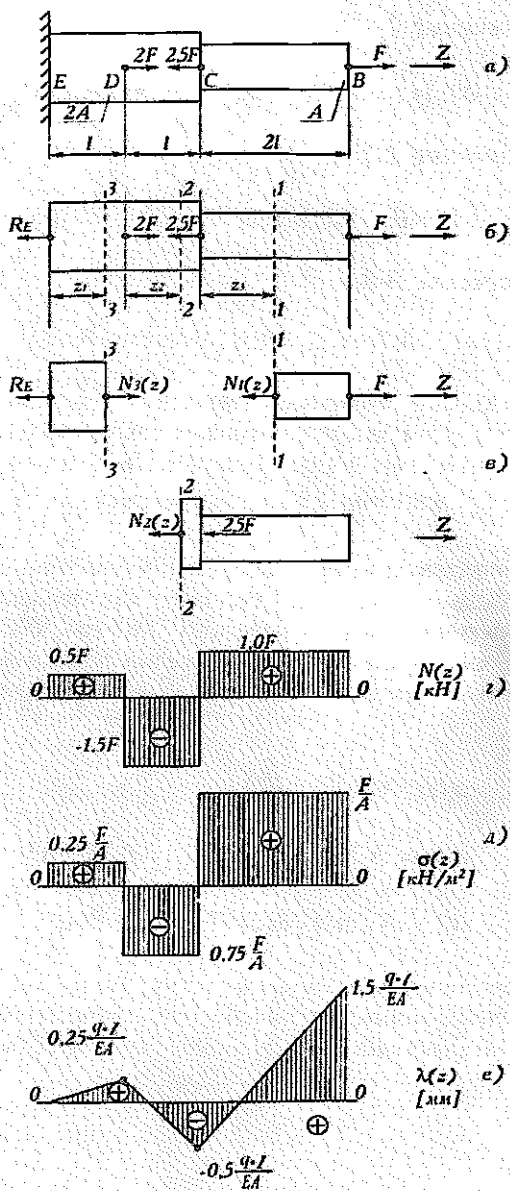


Рис. 2.2.

### 1 УЧАСТОК, сечение 1-1

$$\Sigma F_x=0; -N(z)+F=0; N_1(z)=F \text{ (растяжения)}.$$

### 2 УЧАСТОК, сечение 2-2

$$-N_2(z)-2,5F+F=0; N_2(z)=F-2,5F=-1,5F \text{ (сжатия)}$$

### 3 УЧАСТОК, сечение 3-3

$$-R_E+N_3(z)=0; N_3(z)=R_E=0,5F \text{ (растяжения)}.$$

По найденным значениям строим эпюру продольных сил, т.е. график  $N(z)$ . При этом принимают определенный масштаб, как по длине бруса, так и для ординат. На рисунке  $1(z)$  одна единица длины  $l$  принята 25 мм, а единица силы  $F$  - 10 мм.

### 2. Определение напряжений и построение эпюры $\sigma(z)$ .

Поскольку продольные силы на участках постоянные, но и нормальные напряжения в любом сечении участка будут одинаковы. Напомним, что при осевом растяжении или сжатии в самом поперечном сечении нормальные напряжения распределены равномерно.

$$1 \text{ УЧАСТОК} \quad \sigma_1(z)=N_1(z)/A_1=F/A;$$

$$2 \text{ УЧАСТОК} \quad \sigma_2(z)=N_2(z)/A_2=-1,5F/2A=-0,75F/A;$$

$$3 \text{ УЧАСТОК} \quad \sigma_3(z)=N_3(z)/A_3=0,5F/2A=0,25F/A;$$

По найденным значениям строим эпюру (рис. 1.д). При этом принимаем определенный масштаб для напряжений. Например, одна единица напряжения  $F/A$  принята равной 20 мм на чертеже.

### 3. Определение перемещения поперечных сечений

и построения эпюры  $\lambda(z)$ .

Определим перемещения характерных сечений, т.е. сечений на границах участков В, С, Д, Е. Сразу же отметим, что перемещение сечения Е (заделки) равно нулю.

$$\lambda_E(z)=0$$

Перемещение остальных точек удобно определить по отношению к неподвижному сечению.

$$\lambda_E(z)=0$$

3 УЧАСТОК:  $0 \leq Z_3 \leq \ell$

$$\lambda_D(z) = \lambda_E(z) + \Delta \lambda_3(z) = 0 + N_3(z) \cdot Z_3 / E \cdot A_3 = 0,5F \cdot Z_3 / E \cdot 2A = 0,25 F \cdot Z_3 / E \cdot A$$

При постоянных продольных силах перемещения линейно зависят от расстояния. Поэтому достаточно вычислить перемещения в двух точках в начале и конце участка.

$$\lambda_D(Z_3=0)=0; \quad \lambda_D(Z_3=\ell)=0,25F \cdot \ell EA;$$

2 УЧАСТОК:  $0 \leq Z_2 \leq \ell$

$$\lambda_C(z) = \lambda_D(z=\ell) + \Delta \lambda_2(z) = 0,25F \cdot \ell EA + N_2(z) \cdot Z_2 / E \cdot A_2 = 0,25F \cdot \ell EA + 1,5F \cdot Z_2 / E \cdot 2A; \quad \lambda_C(0) = 0,25F \cdot \ell EA; \quad \lambda_C(\ell) = -0,5F \cdot \ell EA;$$

1 УЧАСТОК:  $0 \leq Z_1 \leq 2\ell$

$$\lambda_B(z) = \lambda_C(\ell) + \Delta \lambda_1(z) = -0,5F \cdot \ell EA + N_1(z) \cdot Z_1 / E \cdot A_1 = -0,5F \cdot \ell EA + F \cdot Z_1 / E \cdot A;$$

$$\lambda_B(0) = -0,5F \cdot \ell EA; ;$$

$$\lambda_B(2\ell) = -0,5F \cdot \ell EA + F \cdot 2\ell EA = 1,5F \cdot \ell EA;$$

По этим данным строим эпюру  $\lambda(Z)$  причём для ординат  $\lambda(Z)$  принят также определённый масштаб. На рис.2.2.е одна единица перемещения  $F \cdot \ell EA$  принята равным 25 мм на чертеже.

Эпюры  $\lambda(Z)$  используются в расчетах на жесткость. Вычисляем перемещение свободного конца бруса:

$\lambda_B(z) = 1,5F \cdot \varnothing EA = 1,5 (60 \cdot 1,2) / (2 \cdot 10^5 \cdot 430) = 54 / (43 \cdot 10^6)$   
 где площадь поперечного сечения принята  $A = 430 \text{ мм}^2$ .

#### 4. Определение размеров поперечного сечения бруса.

По этюре напряжения (рис.1.д) видно, что наибольшие напряжения возникают на первом участке, причем все сечения здесь равноопасны. Запишем условие прочности для первого участка:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]; \quad \frac{F}{A} \leq [\sigma]$$

Из условия прочности определяем площади поперечных сечений бруса и их диаметры.

$$A \geq F / [\sigma] = 60 \cdot 10^3 / 140 = 428,5 \text{ мм}^2 \text{ принимаем } A = 430 \text{ мм}^2.$$

$$A_1 = A = 430 \text{ мм}^2 \quad d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot A_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 430}{\pi}} = 23,4 \text{ мм}$$

$$A_2 = 2A = 860 \text{ мм}^2 \quad d_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot A_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 860}{\pi}} = 33 \text{ мм}$$

## 2.5. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАЧИ №2.

### Задача №2.

#### Условие:

Абсолютно жесткий брус АВ укреплен в точке В шарнирно к стене, а в точке А с помощью трех стержней подвешен к верхней опоре (рис 2.3.а). Крепления всех стержней шарнирные. Поперечные сечения стержней указаны на рисунке. На брус АВ действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ .



### Требуется:

1. Определить размеры поперечных сечений стержней 1, 2, 3, на условиях их равнопрочности.

### Исходные данные:

- Интенсивность  
распределенной нагрузки  $q = 50 \text{ кН/м}$
- Длина  $l = 1,2 \text{ м}$
- Углы стержней в системе  $\varphi_1 = 60^\circ, \varphi_2 = 30^\circ, \beta = 45^\circ$
- Допускаемое напряжение  
для материала стержней  $[\sigma] = 140 \text{ МПа}$

### Решение.

1. Рассмотрим равновесие абсолютно жесткого бруса АВ. Для этого отбросим связи и заменим их силами реакций. В точке В имеем две составляющие реакции, а в точке А реакция направлена по стержню 1 (рис.2.2.б). Таким образом, на брус действует плоская система сил  $N_1, B_x, B_y, 2ql$ , для которой можно составить три уравнения равновесия. Этих уравнений достаточно для определения трех неизвестных усилий.

$$1. \sum F_{ix} = 0,$$

$$B_x - N_1 \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$2. \sum F_{iy} = 0,$$

$$B_y - N_1 \cdot \sin 45^\circ - 2ql = 0;$$

$$3. \sum M_B = 0,$$

$$2ql \cdot l - N_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot 2l = 0;$$

В связи с тем, что в задаче не требуется определить реакцию в шарнире В, для определения усилия в стержне 1 достаточно воспользоваться одним уравнением моментов относительно точки В, из которого:

$$N_1 = \frac{2ql^2}{2 \cdot l \cdot \sin 45^\circ} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 1,2^2 \cdot 10^3}{2 \cdot 1,2 \cdot 0,707} = 85000 \text{ Н} = 85 \text{ кН}$$

2. Рассмотрим равновесие точки О. Для чего также освободим ее от связей, а вместо них приложим силы реакций (рис 2.2.в). Точка О находится в равновесии под действием трех сходящихся сил  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$ . Для такой системы можно составить два уравнения равновесия, что будет достаточно для определения усилий  $N_2$ ,  $N_3$ .

Выбираем систему координат. Так как углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в сумме составляют  $90^\circ$ , то удобно оси X и Y направить по направлению усилий  $N_2$  и  $N_3$ .

$$\sum F_{ix} = 0,$$

$$N_3 - N_1 \cdot \cos 15^\circ = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0,$$

$$N_2 + N_1 \cdot \cos 75^\circ = 0;$$

Откуда:

$$N_3 = N_1 \cdot \cos 15^\circ = 85 \cdot 0,966 = 82,1 \text{ кН}$$

$$N_2 = -N_1 \cdot \cos 75^\circ = -85 \cdot 0,259 = 22 \text{ кН}$$

3. Используя условия прочности, определяем площади поперечных сечений стержней 1, 2, 3 и их размеры:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$$

$$A_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{85 \cdot 10^3}{140} = 608 \text{ мм}^2$$

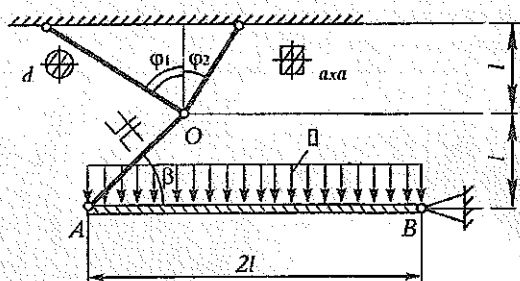
$$a = 24,2 \text{ мм}$$

$$A_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{22 \cdot 10^3}{140} = 157 \text{ мм}^2$$

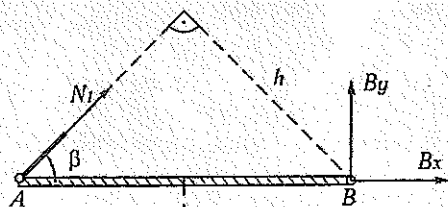
$$d = 14,2 \text{ мм}$$

$$A_3 \geq \frac{N_3}{[\sigma]} = \frac{82,1 \cdot 10^3}{140} = 586 \text{ мм}^2$$

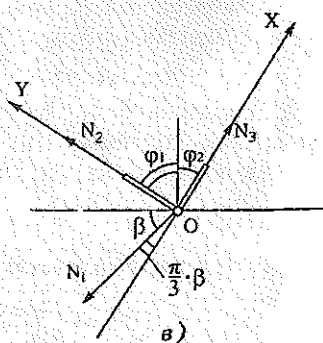
40 × 40 × 4 (по ГОСТ 8239-72)



a)



б)



в)

Рис. 2.3.

## 2.6. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАЧИ №3.

### Задача №3.

#### Условие:

Стальной стержень с постоянной жесткостью  $EA = \text{const.}$  нагружен системой сосредоточенных сил и распределенной, действующей вдоль оси, нагрузкой (рис. 2.4.).

#### Требуется:

1. Определить и построить эпюры продольной силы  $N(z)$  линейного перемещения  $\lambda(z)$ . Из расчета на прочность определить размеры поперечного сечения стержня, принимая его круглым.
2. Определить полную деформацию.

#### Дано:

- $q = 45 \text{ кН}$ ,
- $l = 1,5 \text{ м}$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .
- $[\sigma_{\text{см}}] = 140 \text{ МПа}$ .

#### Найти:

$N(z)$ ,  $\lambda(z)$ ,  $\lambda_{\text{вк}}(z)$ ,  $d = ?$

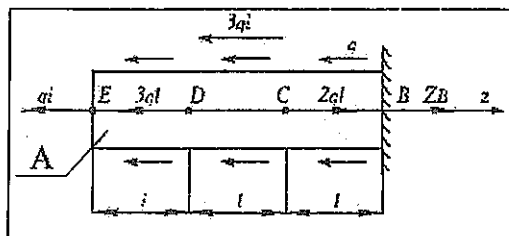


Рис. 2.4.

#### Решение:

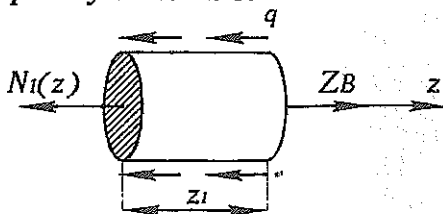
Для решения данной задачи применим метод сечений, но сначала определим реакцию опоры  $Z_B$  из уравнения:

$$-ql - 3ql - 3ql + 2ql + Z_B = 0, \quad Z_B = 5ql.$$

Разделим тело на три участка — BC — первый, CD — второй, DE — третий.

На каждом из участков проведем сечение перпендикулярное оси  $z$ .

Рассмотрим первый участок BC:



Отбрасываем левую часть участка, при этом в сечении возникает внутренняя продольная сила  $N_1(z_1)$ , где  $0 \leq z_1 \leq l$ . Определим  $N_1(z_1)$

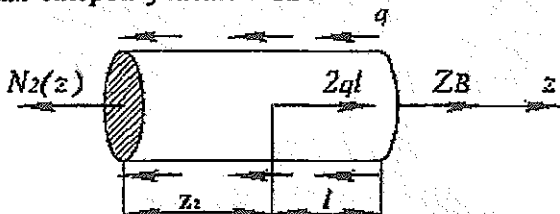
$$-N_1(z_1) + Z_B - qz_1 = 0$$

$$N_1(z_1) = -qz_1 + Z_B$$

$$N_1(0) = 5ql$$

$$N_1(l) = 4ql$$

Рассмотрим второй участок CD:



Отбрасываем левую часть участка, при этом в сечении возникает внутренняя продольная сила  $N_2(z_2)$ , где  $0 \leq z_2 \leq l$ . Определим  $N_2(z_2)$

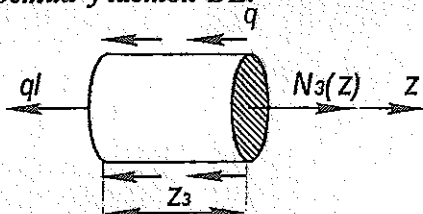
$$-N_2(z_2) + 2ql + Z_B - q(z_2 + l) = 0$$

$$N_2(z) = 7ql + q(z_2 + l)$$

$$N_2(0) = 6ql;$$

$$N_2(l) = 5ql;$$

Рассмотрим третий участок DE:



Отбрасываем правую часть участка, при этом в сечении возникает внутренняя продольная сила  $N_3(z_3)$ , где  $0 \leq z_3 \leq l$ . Определим  $N_3(z_3)$

$$N_3(z_3) - ql - qz_3 = 0$$

$$\begin{aligned}
 N_3(z_3) &= ql + qz_3 \\
 N_3(0) &= ql \\
 N_3(l) &= ql + ql = 2ql
 \end{aligned}$$

**Определим удлинение стержня:**

Для этого примем удлинение точки В равным нулю, то есть  $\lambda_B = 0$ , тогда удлинение точки С можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 \lambda_C &= \lambda_B + \int_0^l \frac{N_1(z_1) dz_2}{E \cdot A} = 0 + \int_0^l \frac{(5ql - qz_1) dz_2}{E \cdot A} = \frac{1}{E \cdot A} \int_0^l (5ql - qz_1) dz_2 = \\
 &= \frac{1}{E \cdot A} \left( 5qlz_1 - \frac{1}{2} qz_1^2 \right) \Big|_0^l; \\
 \lambda_C(0) &= 0; \lambda_C(l) = \frac{9ql^2}{2EA} = 4,5 \frac{ql^2}{EA}.
 \end{aligned}$$

**Удлинение точки D:**

$$\begin{aligned}
 \lambda_D &= \lambda_C(l) + \int_0^l \frac{N_2(z_2) dz_2}{EA} = 4,5 \frac{ql^2}{EA} + \int_0^l \frac{(7ql - qz_2 - ql) dz_2}{EA} = 4,5 \frac{ql^2}{EA} + \frac{1}{EA} \left( 6qlz_2 - \frac{qz_2^2}{2} \right) \Big|_0^l; \\
 \lambda_D(0) &= 4,5 \frac{ql^2}{EA}; \lambda_D(l) = 10 \frac{ql^2}{EA}.
 \end{aligned}$$

**Удлинение точки E:**

$$\begin{aligned}
 \lambda_E &= \lambda_D(l) + \int_0^l \frac{N_3(z_3) dz_3}{EA} = 10 \frac{ql^2}{EA} + \int_0^l \frac{(ql + qz_3) dz_3}{EA} = 10 \frac{ql^2}{EA} + \frac{1}{EA} \int_0^l \left( qlz_3 + \frac{qz_3^2}{2} \right) \Big|_0^l \\
 \lambda_E(0) &= 10 \frac{ql^2}{EA}; \lambda_E(l) = 11,5 \frac{ql^2}{EA}
 \end{aligned}$$

*Определим диаметр поперечного сечения:  
Условие прочности при растяжении и сжатии:*

$$\sigma_{\max}(z) \leq \frac{|N_{\max}|}{A} \leq [\sigma], \text{ где } A \text{ площадь поперечного сечения}$$

*откуда*  $A \geq \frac{|N_{\max}|}{[\sigma]}$ , но  $A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$ , *откуда*

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} \quad \text{или} \quad d = 2 \sqrt{\frac{N_{\max}}{\pi \cdot [\sigma]}}$$

*То есть:*

$$d = 2 \sqrt{\frac{6ql}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 45 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 140}} = 30,4 \text{ мм}$$

*Выбираем*  $d = 32 \text{ мм}$ .

*Полная деформация стержня*

$$\lambda_{\text{вс}} = 8 \frac{ql^2}{EA} = 32 \frac{ql^2}{E\pi d^2} = 0,34 \text{ мм}$$

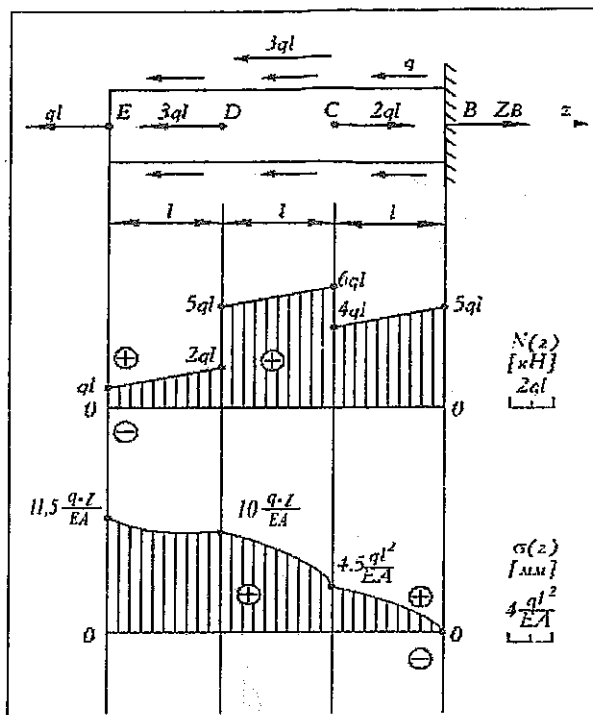


Рис. 2.5.

## 2.7. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАЧИ №4.

### Задача №4.

#### Условие:

Стальной стержень с постоянной жесткостью  $EA = \text{const.}$  нагружен системой сосредоточенных сил и распределенной, действующей вдоль оси, нагрузкой (рис. 2.6.).

#### Требуется:

1. Определить и построить эпюры продольной силы  $N(z)$  линейного перемещения  $\lambda(z)$ . Из расчета на прочность определить



размеры поперечного сечения стержня, принимая его круглым. Определить полную деформацию.

**Дано:**

- $q = 45 \text{ кН}$ ,
- $l = 1,5 \text{ м}$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .
- $[\sigma_{cm}] = 140 \text{ МПа}$ .

**Найти:**

$$N(z), \lambda(z), \lambda_{BE}(z), d=?$$

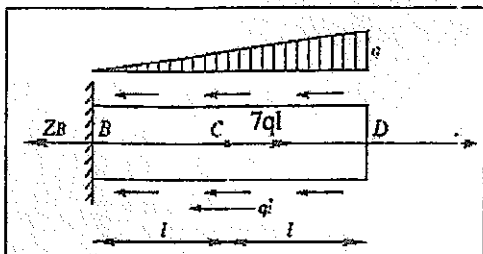


Рис. 2.6.

**Решение:**

Для решения данной задачи применим метод сечений, но сначала определим результирующую силу  $G$  распределенной нагрузки:

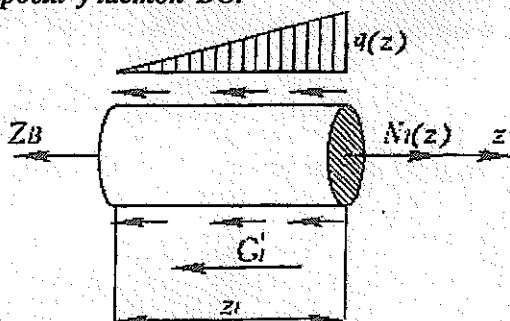
$$G = \frac{1}{2} q \cdot 2l = ql$$

Определим реакцию опоры  $Z_B$  из уравнения:

$$7ql - ql - Z_B = 0, \Rightarrow Z_B = 6ql$$

Разделим тело на два участка —  $BC$  — первый,  $CD$  — второй. На каждом из участков проведем сечение перпендикулярное оси  $z$ .

Рассмотрим первый участок  $BC$ :



Отбрасываем правую часть участка, при этом в сечении возникает внутренняя продольная сила  $N_1(z_1)$ , где  $0 \leq z_1 \leq l$ . Определим  $N_1(z_1)$

$$N_1(z) - Z_B - G_1' = 0, \quad N_1(z) = Z_B + G_1'$$

$G_1^I(z) = \frac{1}{2} q(z_1) \cdot z_1$  определим  $q(z_1)$  из соотношения (из подобия треугольников):

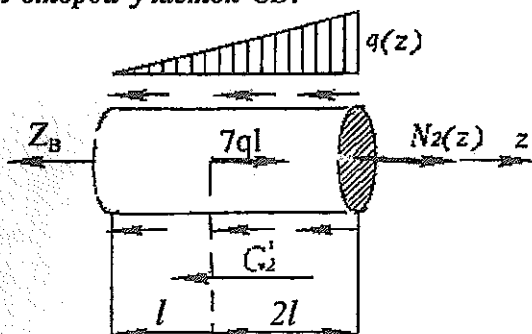
$$\frac{q(z_1)}{z_1} = \frac{q}{2l}, \Rightarrow q(z_1) = \frac{q \cdot z_1}{2l}$$

Тогда

$$N_1(z) = 6ql + \frac{1}{2} q \frac{z_1 \cdot z_1}{2l} = 6ql + \frac{1}{4} q \frac{z^2}{l}$$

$$N_1(0) = 6ql, \quad N_1(l) = 6,25ql.$$

Рассмотрим второй участок CD:



Отбрасываем левую часть участка, при этом в сечении возникает внутренняя продольная сила  $N_2(z_2)$ , где  $0 \leq z_2 \leq l$ . Определим  $N_2(z_2)$

$$N_2(z) + 7ql - z_B - G_2^I = 0, \quad N_2(z) = 6ql - 7ql + \frac{1}{2} q(z) \cdot (z_2 + l).$$

$q(z_2)$  определяем из соотношения (из подобия треугольников):

$$\frac{q(z_2)}{(l + z_2)} = \frac{q}{2l}, \Rightarrow q(z_2) = \frac{q \cdot (l + z_2)}{2l}$$

Тогда

$$N_2(z) = 6ql - 7ql + \frac{q(l + z_2) \cdot (z_2 + l)}{4l} = -ql + \frac{q(l + z_2)^2}{4l} \quad \text{и}$$

$$N_2(0) = -0,75ql, \quad N_2(l) = 0.$$

**Определим удлинение стержня:**

Для этого примем удлинение точки В равным нулю, то есть  $\lambda_B=0$ , тогда удлинение точки С можно представить в виде:

$$\lambda_C = \lambda_B + \int_0^l \frac{N_1(z_1) dz_1}{E \cdot A} = 0 + \int_0^l \frac{\left(6ql + \frac{1}{4}q \frac{z_1^2}{l}\right) dz_1}{E \cdot A} = \frac{1}{E \cdot A} \int_0^l \left(6ql + \frac{1}{4}q \frac{z_1^2}{l}\right) dz_1 =$$

$$= \frac{1}{E \cdot A} \left(6qlz_1 + \frac{1}{12}q \frac{z_1^3}{l}\right) \Big|_0^l; \lambda_C(0) = 0; \lambda_C(l) = 6,1 \frac{ql^2}{EA}.$$

Удлинение точки D:

$$\lambda_D = \lambda_C(l) + \int_0^l \frac{N_2(z_2) dz_2}{E \cdot A} = 6,1 \frac{ql^2}{EA} + \int_0^l \frac{\left(-ql + \frac{q(l+z_2)^2}{4l}\right) dz_2}{E \cdot A} =$$

$$= 6,1 \frac{ql^2}{EA} + \int_0^l \frac{\left(-ql + \frac{ql^2 + 2qlz_2 + qz_2^2}{4l}\right) dz_2}{EA} = 6,1 \frac{ql^2}{EA} + \frac{1}{EA} \cdot$$

$$\left(-qlz_2 + \frac{ql^2z_2}{4l} + \frac{2qlz_2^2}{8l} + \frac{qz_2^3}{12l}\right) \Big|_0^l;$$

$$\lambda_D(0) = 6,1 \frac{ql^2}{EA}; \lambda_D(l) = 5,7 \frac{ql^2}{EA}$$

Определим диаметр поперечного сечения из условия прочности при растяжении и сжатии:

$$\sigma_{\max}(z) \leq \frac{|N_{\max}|}{A} \leq [\sigma], \text{ где } A \text{ площадь поперечного сечения}$$

$$\text{откуда } A \geq \frac{|N_{\max}|}{[\sigma]}, \text{ но } A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}, \text{ откуда}$$

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} \text{ или } d = 2 \sqrt{\frac{N_{\max}}{\pi \cdot [\sigma]}}$$

То есть:

$$d = \sqrt{\frac{6,25ql}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt{\frac{6,25 \cdot 45 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 140}} = 31 \text{ мм.}$$

Выбираем  $d = 32$  мм, по стандартному ряду.

Полная деформация стержня равна  $\lambda_1 = 5,7 \frac{ql^2}{EA} = 0,3$  мм.

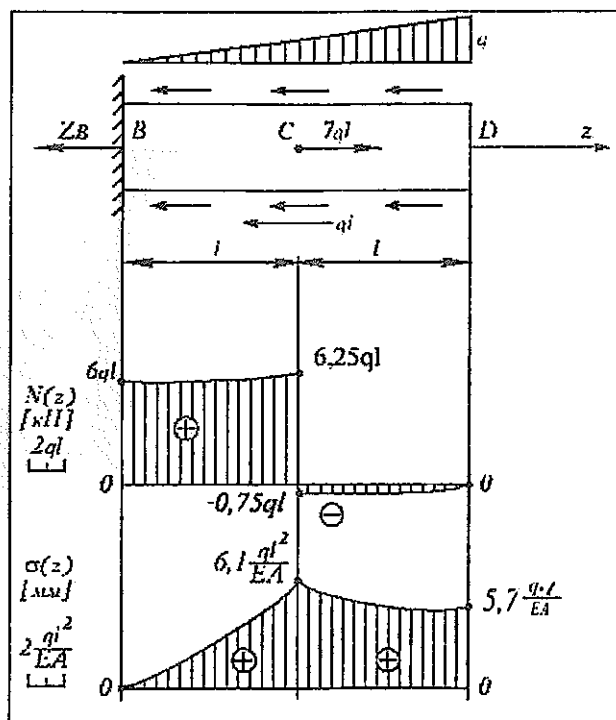


Рис. 2.7.

### **РАЗДЕЛ 3.**

#### **«РАСЧЕТ БРУСЬЕВ И СТЕРЖНЕЙ ПРИ КРУЧЕНИИ»**

### 3.1. ИСХОДНЫЕ ПОНЯТИЯ

*Кручением* называется такой вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только *крутящий момент*.

Деформации кручения возникают, если к прямому брусу в плоскостях, перпендикулярных оси, приложить пары сил. Момент этих пар будем называть *вращающими*. Вращающий момент обозначается  $T$ .

*Относительным углом закручивания*  $\varphi_0$  называется отношение угла закручивания  $\varphi_z$  к расстоянию  $z$  данного сечения от заделки. Если брус длиной  $l$  имеет постоянное сечение и нагружен скручивающим моментом на конце (т.е. состоит из одного участка), то

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_z}{z} = \frac{\varphi}{l} = \text{const}$$

Крутящий момент в любом поперечном сечении численно равен алгебраической сумме внешних моментов, приложенных к брусу справа или слева от сечения.

*Эпюры крутящих моментов* дают возможность определить опасное сечение. В частности, если брус имеет постоянное поперечное сечение, то опасным будут сечения на участке, где возникает наибольший крутящий момент.

Крутящий момент полагаем положительным, если при взгляде со стороны сечения результирующий момент внешних пар, приложенных к рассматриваемой части бруса, будет направлен против часовой стрелки, и наоборот.

Условие прочности бруса при кручении заключается в том, что наибольшее возникающее в нем касательное напряжение не должно превышать допустимое. Расчетная формула на прочность при кручении имеет вид  $\tau = M_k / W_p \leq [\tau_k]$  и читается так: касательное напряжение в опасном сечении, вычисленное по формуле  $\tau = M_k / W_p$ , не должно превышать допустимое.

Допускаемое напряжение при кручении выбирают в зависимости от допускаемого напряжения при растяжении, а именно:

для сталей

$$[\tau_k] = (0,55 \dots 0,60)[\sigma_p];$$

для чугунов  
 $[\tau_k] = (1 \dots 1,2)[\sigma_p]$ .

Кроме прочности к валам предъявляется требование жесткости, заключающееся в том, что угол закручивания  $I$  м длины вала не должен превышать определенной величины во избежание, например, пружинения валов или потери точности ходовых винтов токарно-винторезных станков.

Допускаемый угол закручивания  $I$  м длины вала задается в градусах и обозначается  $[\varphi_0]$ ; расчетная формула на жесткость при кручении имеет вид

$$\varphi_0 = \frac{180 \cdot M_k}{\pi \cdot G \cdot I_p} \leq [\varphi_0]$$

Величины допускаемых углов закручивания зависят от назначения вала; их обычно принимают в следующих пределах:

$$[\varphi_0] = 0,25 \dots 1 \text{ град/м.}$$

С помощью выведенных расчетных формул выполняются три вида расчетов конструкций на прочность и жесткость при кручении — проектный, проверочный и определение допускаемой нагрузки.

## 3.2. УСЛОВИЯ ЗАДАЧ №5, №6.

### Задача №5.

Стальной ступенчатый брус круглого поперечного сечения нагружен парами сил, действующими перпендикулярно оси, как показано на рисунке в задании. Номер задания и варианты исходных данных приведены в таблицах № 3.1. и № 3.3.

### Требуется:

- определить крутящие моменты по участкам и построить эпюру крутящих моментов;
- из условия прочности определить диаметр каждой ступени;
- определить углы закручивания поперечных сечений бруса и построить эпюру  $\varphi = (z)$ .

### Задача №6.

Стальная балка круглого поперечного сечения нагружена парами сил, действующими перпендикулярно оси, как показано на рисунке в задании. Номер задания и варианты исходных данных приведены в таблицах № 3.2. и № 3.3.

### Требуется:

- определить крутящие моменты по участкам и построить эпюру крутящих моментов;
- из условия прочности определить диаметр поперечного сечения балки;
- определить углы закручивания поперечных сечений бруса и построить эпюру  $\varphi = (z)$ ;
- определить полное закручивание вала.

## 3.3. СИСТЕМА ЕДИНИЦ И ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ.

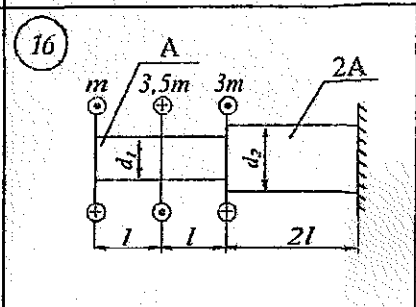
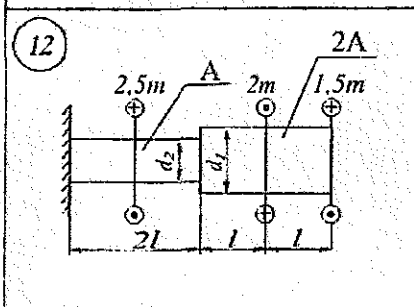
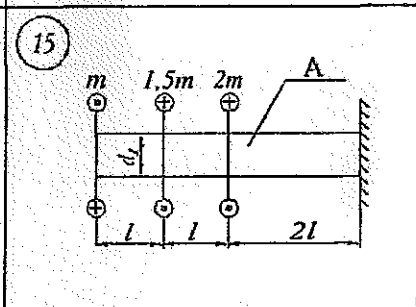
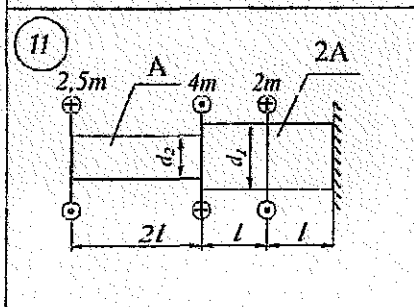
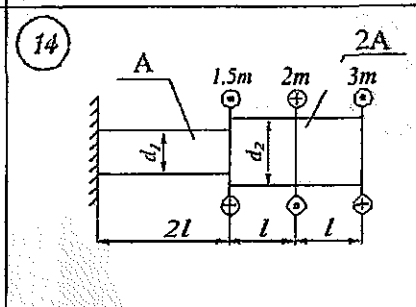
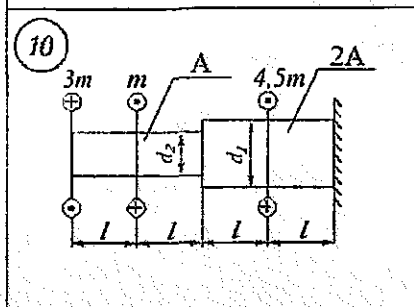
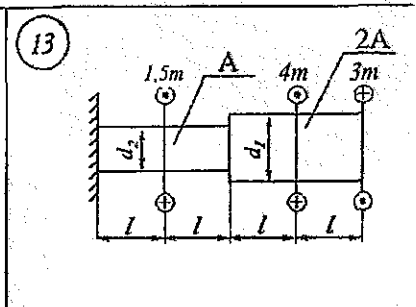
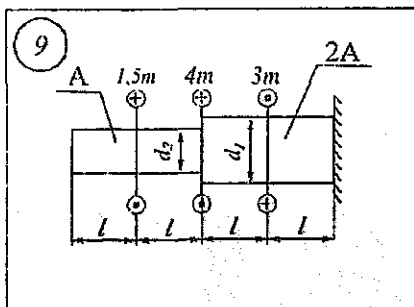
В методическом указании используется международная система единиц СИ. Обозначение величин:

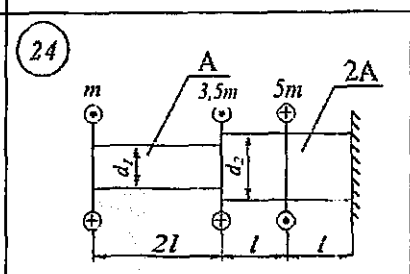
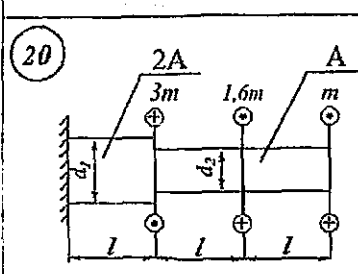
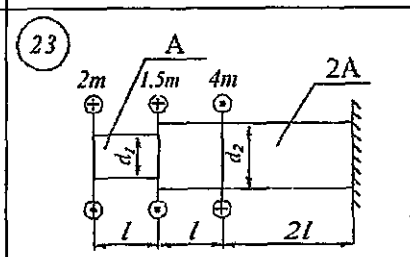
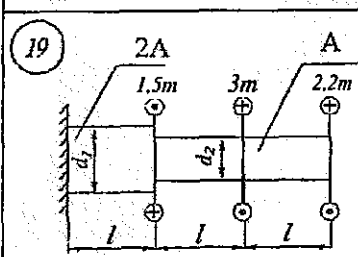
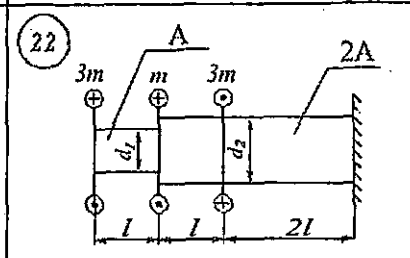
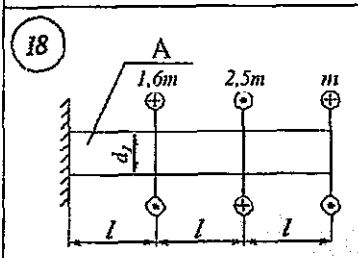
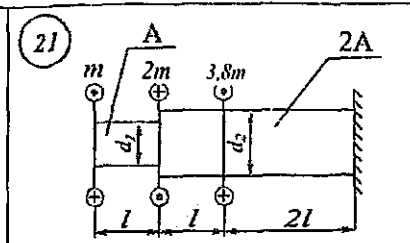
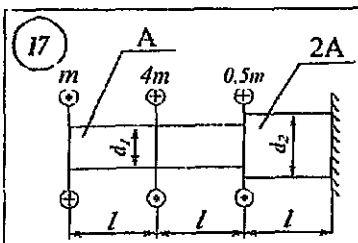
1. Система координат — правая, продольная ось —  $Z$ , оси в поперечном сечении —  $X, Y$ .
2. Нагрузка, внешняя сила —  $F$ .
3. Внешний вращающий момент (пара сил) —  $m$ .



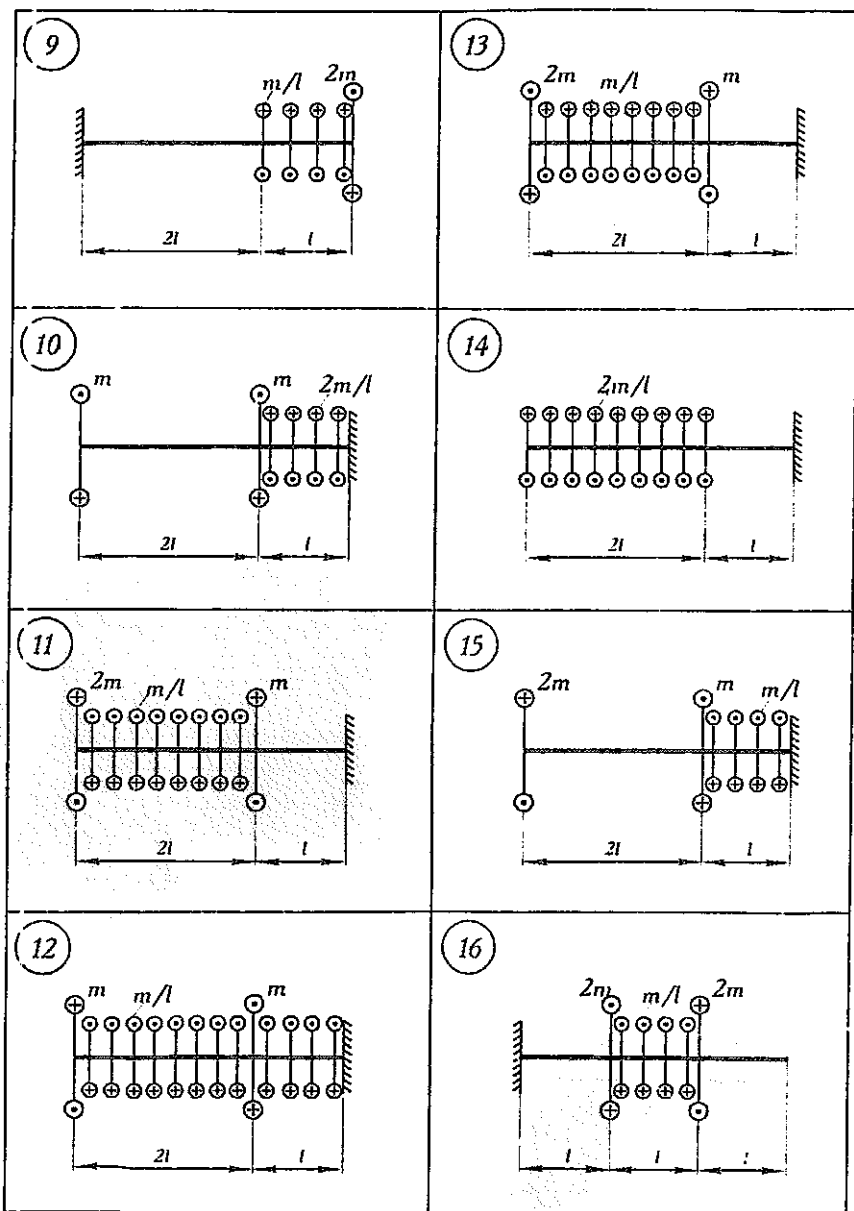
4. Внутренние силовые факторы: продольная сила —  $N(z)$ , поперечные силы —  $Q_x, Q_y$ ; изгибающие моменты —  $M_x, M_y$ ; крутящий момент —  $T$ .
5. Моменты инерции плоского сечения: осевой, полярный, центробежный —  $I_x, I_y, I_p$ .
6. Моменты сопротивления осевые, полярный —  $W_x, W_y, W_p$ .
7. Касательное напряжение —  $\tau$ .
8. Допускаемое номинальное напряжение нормальное, касательное —  $[\sigma], [\tau]$ .
9. Модуль сдвига —  $G$ .
10. Жесткость при кручении, при изгибе —  $GI_p, GI_x$ .
11. Угол закручивания бруса —  $\varphi$ .
12. Вертикальное перемещение поперечного сечения —  $\nu$ .
13. Угол поворота поперечного сечения балки —  $\theta$ .

<p>1</p>	<p>5</p>
<p>2</p>	<p>6</p>
<p>3</p>	<p>7</p>
<p>4</p>	<p>8</p>





<p>1</p>	<p>5</p>
<p>2</p>	<p>6</p>
<p>3</p>	<p>7</p>
<p>4</p>	<p>8</p>



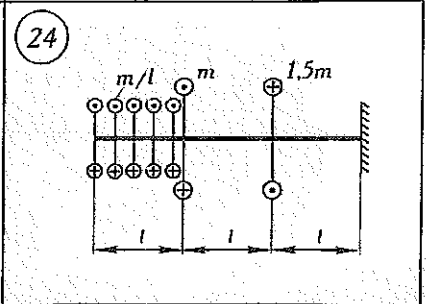
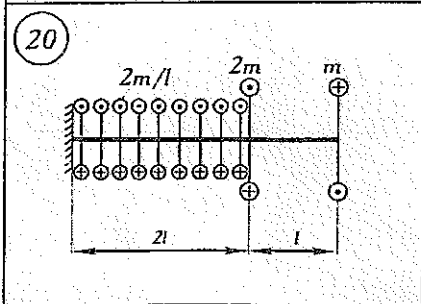
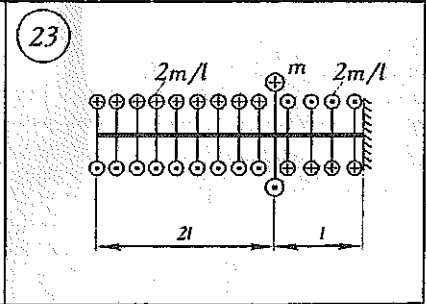
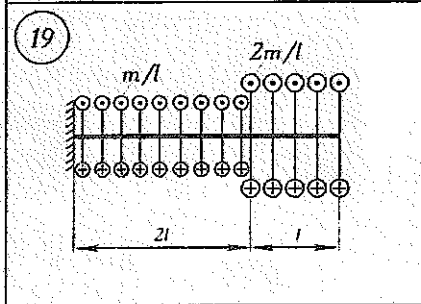
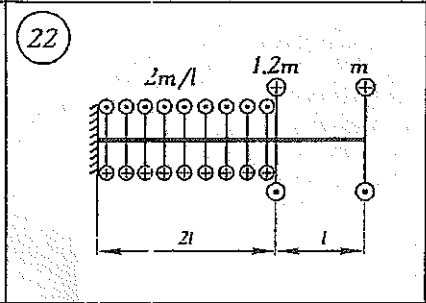
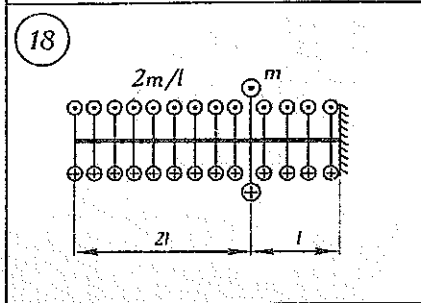
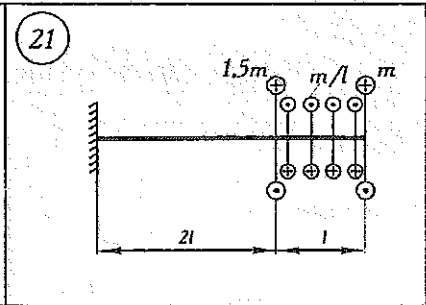
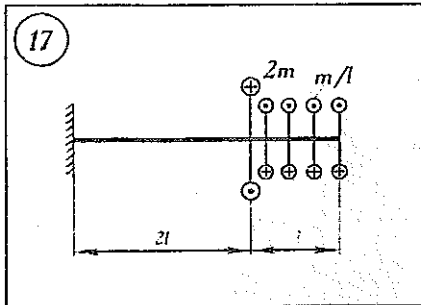


Таблица 3.3.

## ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ К ЗАДАЧАМ.

№	Наименование величин	Ед. изм.	Варианты исходных данных									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	Длина элемента ( $l$ )	м.	1,0	1,2	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0	0,5	0,6	0,8
2.	Интенсивность распределенной нагрузки ( $q$ )	кН/м	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
3.	Сосредоточенная сила ( $F$ )	кН	$F = ql$									
4.	Пара сил перпендикулярная оси бруса ( $m=ql$ )	кНм	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
5.	Пара сил плоскости чертежа ( $M$ )	кНм	$M = ql^2$									
7.	Допускаемое нормальное напряжение	МПа	$[\sigma] = 160$									
8.	Допускаемое касательное напряжение	МПа	$[\tau] = 70$									
9.	Модуль упругости ( $I$ ) рода.	МПа	$E = 2 \cdot 10^5$									
10	Модуль сдвига ( $G$ )	МПа	$G = 8 \cdot 10^4$									
11	Соотношения $\alpha = \frac{h}{b}$ .	—	1,2	1,4	1,5	1,8	2	2,2	2,4	2,5	2,8	3



### 3.4. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАЧИ №5.

#### Задача №5.

##### Условия:

Стальной ступенчатый брус нагружен парами сил, действующими перпендикулярно оси бруса, как показано на рис. 3.1.а.

##### Требуется:

1. Определить крутящие моменты по участкам и построить эпюру крутящих моментов  $T(z)$ .

2. Из условия прочности определить диаметры поперечных сечений каждой ступени.

3. Определить углы закручивания поперечных сечений бруса и построить эпюру  $\varphi(z)$ .

##### Исходные данные:

- Нагрузки	$m=5кНм$
- Длина	$l=0,4м$
- Допускаемое касательное напряжение $[\tau]$	$70МПа$
- Модуль упругости	$G=8 \cdot 10^4 МПа$

##### Решение.

1. **Определение крутящих моментов и построение эпюры  $T(z)$ .** Для определения реакции опоры в т.А мысленно отбросим опору и заменим ее реактивным моментом. Затем составляем уравнение равновесия для всего бруса, из которого определим момент в заделке. Вращение заданных пар сил действующих на брус рассматриваем стоя лицом к свободному концу бруса

$$M_A - 3m - 2m + m = 0; \quad M_A = 4m$$

Знак «плюс» обозначает, что предполагаемое направление реактивного момента выбрано, верно.

Для определения  $T(z)$  — крутящих моментов нумерация участков можно начинать как справа, так и слева бруса. Наше деление бруса на участки и сечения сделано слева направо. Крутящий момент определяется методом сечения. Незвестный крутящий момент в сечении полагаем положительным. Рассматриваем участки (рис 3.1.в).

**1-УЧАСТОК:**  $0 \leq Z_1 \leq \ell$

$T(z) = -M = -4 \text{ м}$  - (const.)- (слева рассматриваем, стоя лицом к сечению).

**2-УЧАСТОК:**  $0 \leq Z_2 \leq \ell$

$T(z) = -M + 3 \text{ м} = -4 \text{ м} + 3 \text{ м} = - \text{ м}$  - (const.)- (слева рассматриваем, стоя лицом к сечению).

**3-УЧАСТОК:**  $2 \cdot \ell \leq Z_3 \leq 0$

$T(z) = \text{ м}$  - (const.)- (рассматриваем справа, стоя лицом к сечению).

По данным строим эпюру  $T(z)$  (рис 3.1.з.). Принимаем масштаб  $\ell = 25 \text{ мм}$  в единицу крутящего момента  $m = 7 \text{ мм}$ .

**2. Размеры поперечных сечений определяем из условия прочности при кручении.**

$$\tau_{\max} = \frac{|T(z)|}{W_p} \leq [\tau]$$

на 1-участке

$$|T(z)| = 4m; \quad W_p = \frac{\pi d_1^3}{16}$$

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{4m \cdot 16}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 5 \cdot 16 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 70}} = 1,13 \cdot 10^2 = 113 \text{ мм}$$

Принимаем  $d_1 = 115 \text{ мм}$ .

На 3-участке:  $|T(z)| = m$

$$d_3 = \sqrt[3]{\frac{m \cdot 16}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 16 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 70}} = 0,715 \cdot 10^2 = 71,5 \text{ мм}$$

Принимаем  $d_3 = 72 \text{ мм}$ .

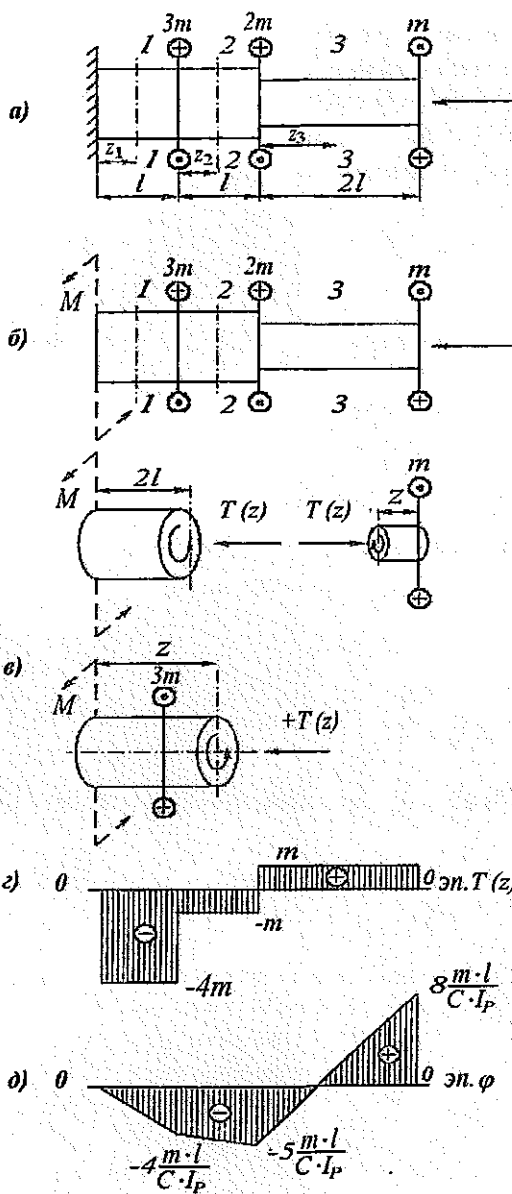


Рис. 3.1.

**3. Определение углов закручивания поперечных сечений бруса и построение эпюра  $\varphi(z)$ .** Углы закручивания поперечного сечения бруса начинаем рассматривать с неподвижной опоры в т.А. Углы закручивания рассматриваются в характерных точках А, В, С, Д; Сразу отметим, что:  $\varphi_A(z)=0$ .

**1-УЧАСТОК:**  $0 \leq z_1 \leq \ell$

$$\varphi_A(z)=0.$$

$$\varphi_B(z) = \varphi_A(z) + \Delta \varphi_1(z) = 0 + (T_1(z) \cdot z_1) / (G \cdot J_p) = -(4 m z_1) / (G \cdot J_p) - \text{линейный закон.}$$

$$\varphi_1(z_1=0)=0; \varphi_B(z_1=\ell) = -(4 m \cdot \ell) / (G \cdot J_p);$$

**2-УЧАСТОК:**  $0 \leq z_2 \leq \ell$

$$\varphi_C(z) = \varphi_B(z_1=\ell) + \Delta \varphi_2(z) = -(4 m \cdot \ell) / (G \cdot J_p) + (T_2(z) \cdot z_2) / (G \cdot J_p) = -(4 m \cdot \ell) / (G \cdot J_p) - (m z_2) / (G \cdot J_p) - \text{линейный закон;}$$

$$\varphi_C(0) = -(4 m \ell) / (G \cdot J_p);$$

$$\varphi_C(\ell) = -(5 m \ell) / (G \cdot J_p);$$

**3-УЧАСТОК:**  $0 \leq z_3 \leq 2\ell$

$$\varphi_D(z) = \varphi_C(z=\ell) + \Delta \varphi_3(z) = (5 m \ell) / (G \cdot J_{p1}) + (m z) / (G \cdot J_{p3}) = (5 m \ell) / (G \cdot J_p) + (m z) / (0,154 \cdot G \cdot J_p) - \text{линейный закон.}$$

$$\varphi_D(0) = (5 m \ell) / (G \cdot J_p); \quad \varphi_D(2\ell) = (8 m \ell) / (G \cdot J_p);$$

На 3-участке найдено соотношение полярных моментов инерции поперечных сечений 1 и 2 – участков:

$$\frac{J_{p1}}{J_{p3}} = \frac{\pi \cdot d_1^4 \cdot 32}{32 \cdot \pi d_3^4} = \frac{d_1^4}{d_3^4}$$

$$J_{p3} = J_{p1} \cdot \frac{d_3^4}{d_1^4} = J_p \cdot \frac{7,2^4}{11,5^4} = 0,154 \cdot J_p$$

По этим данным построены эпюры  $\varphi(z)$ . Рис. 3.1.д. Масштабом – одна единица угла закручивания  $\varphi(z) = \frac{m\ell}{GJ_p}$  – принята 4мм на чертеже.

Эюра  $\varphi(z)$  – используется в расчетах на жесткость.

Вычисляем угол закручивания свободного конца бруса:

$$\varphi_d(z) = (8m\ell)/(GJ_p) = (85 \cdot 0,4 \cdot 10^3 \cdot 10^6 \cdot 32)/(8 \cdot 10^4 \cdot 3,14 \cdot 115^4) = 0,0115 \text{ рад.}$$

### 3.5. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАЧИ №6.

#### Задача №6.

##### Условия:

Для заданной стальной балки Рис. 3.3.

##### Требуется:

1. Определить и построить эпюры  $T$  — крутящего момента.
2. Из условий прочности определить диаметр поперечного сечения.
3. Определить угол закручивания и построить его эпюры.
4. Определить полное закручивание вала.

##### Дано:

- $m = 7 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,
- $l = 1,5 \text{ м}$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .
- $[\tau] = 80 \text{ МПа}$ .
- $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ .

##### Найти:

$$T(z), \varphi(z), \varphi_{AC}(z), d = ?$$

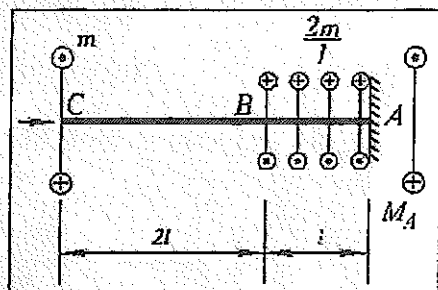


Рис. 3.3.

##### Решение:

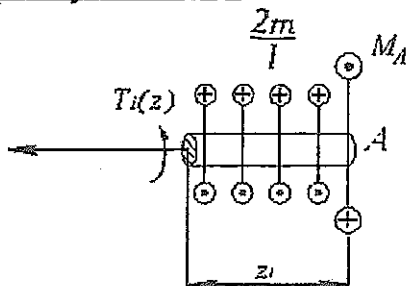
Для решения данной задачи применим метод сечений, но сначала определим реакцию опоры  $m_A$  из следующего уравнения:

$$2m - m - M_A = 0$$

$$M_A = m.$$

Разделим тело на два участка — АВ — первый, ВС — второй. На каждом из участков проведем сечение перпендикулярное оси  $z$ .

Рассмотрим первый участок АВ:



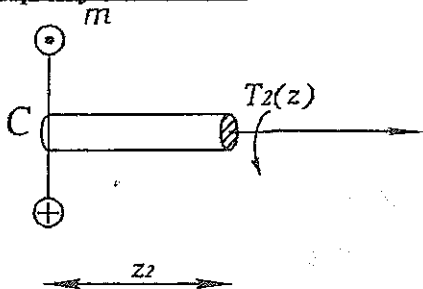
Отбрасываем левую часть участка, при этом в сечении возникает крутящийся момент  $T_1(z_1)$ , где  $0 \leq z_1 \leq l$ , который всегда направлен, независимо от действия внешних сил, против часов, то есть всегда положителен. Определим  $T_1(z_1)$ , из следующего уравнения:

$$T_1(z_1) + \frac{2m}{l} z_1 - M_A = 0,$$

$$T_1(z_1) = m - \frac{2m}{l} z_1 = 0,$$

$$T_1(0) = m, \quad T_1(l) = -m$$

Рассмотрим второй участок ВС:



Отбрасываем правую часть участка, при этом в сечении возникает крутящийся момент  $T_2(z_2)$ , где  $0 \leq z_2 \leq 2l$ , который всегда направлен, независимо от действия внешних сил, против часов, то есть всегда положителен. Определим  $T_2(z_2)$ , из следующего уравнения:

$$\begin{aligned} T_2(z_2) + m &= 0, \\ T_2(z_2) &= -m \\ T_1(0) &= -m, \quad T_1(2l) = -m. \end{aligned}$$

Определим угол закручивания, для этого примем закручивание точки А равным нулю, то есть  $\varphi_A = 0$ , тогда угол закручивания точки В можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_B(z) &= \varphi_A + \Delta\varphi_{\pm}(z) = 0 + \int_0^l \frac{T_1(z_1) dz_1}{GI_p} = \\ &= \frac{1}{GI_p} \int_0^l \left( m - \frac{2m}{l} z_1 \right) dz_1 = \frac{1}{GI_p} \left( m z_1 - \frac{m}{l} z_1^2 \right) \Big|_0^l; \varphi_B(0) = 0; \varphi_B(l) = 0. \end{aligned}$$

Так  $T_1(z_1)$  на участке АВ меняет знак с положительного на отрицательный, то в точке  $T_1(z_{\text{экстр}}) = 0$  угол закручивания достигает экстремального значения, и для того чтобы определить это экстремальное значение угла закручивания решим уравнение:

$$\begin{aligned} m - \frac{2m}{l} z_{\text{экстр}} &= 0, \quad \frac{2m}{l} z_{\text{экстр}} = m, \quad \text{откуда} \\ z_{\text{экстр}} &= \frac{ml}{2m} = \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

Тогда экстремальное значение угла закручивания будет равно:

$$\varphi_B\left(\frac{l}{2}\right) = 0,25 \frac{ml}{GJ_p}.$$

Определим угол закручивания для точки С:

$$\varphi_C(z) = \varphi_B + \Delta\varphi_{\pm}(z) = 0 + \int_0^{2l} \frac{T_2(z_2) dz_2}{GI_p} = - \left. \frac{mz_2}{GI_p} \right|_0^{2l};$$

$$\varphi_C(0) = 0; \varphi_C(2l) = -\frac{2ml}{GJ_p}$$

Полное закручивание тогда будет равно:

$$\varphi_{AC} = |\varphi_{\max}| = -\frac{2ml}{GI_p}$$

Из условий прочности определим диаметр:

$$\tau_{\max} = \frac{|T_{\max}|}{W_p} \leq [\tau], \text{ где } W_p \text{ — полярный момент сопротивления,}$$

$$W_p = \frac{|T_{\max}|}{[\tau]} = \frac{m}{[\tau]}, \text{ но } W_p = \frac{\pi d^3}{16}, \text{ тогда}$$

$$d^3 = \sqrt[3]{\frac{W_p \cdot 16}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{m \cdot 16}{[\tau] \cdot \pi}} = 76 \text{ мм}$$



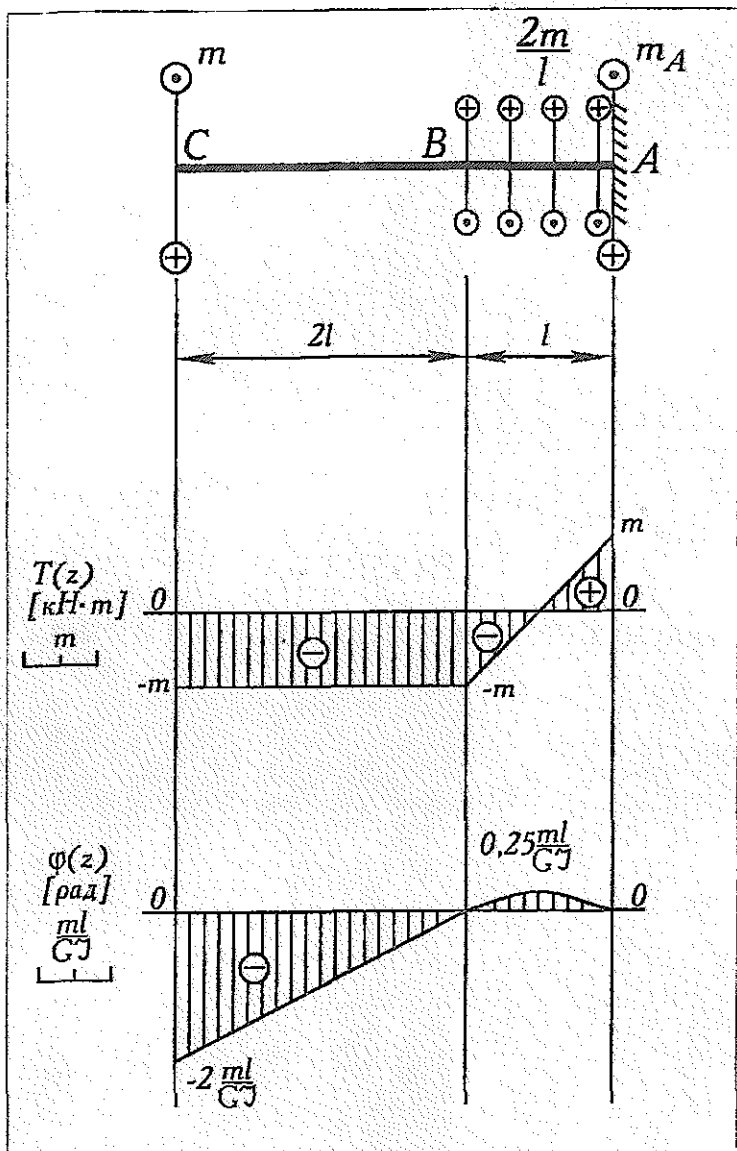


Рис. 3.2.

## РАЗДЕЛ 4.

### «РАСЧЕТ БРУСЬЕВ И СТЕРЖНЕЙ ПРИ ИЗГИБЕ»

## 4.1. ИСХОДНЫЕ ПОНЯТИЯ.

Чистым изгибом называется такой вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только изгибающий момент.

Деформация чистого изгиба будет, например, иметь место, если к прямому брусу в плоскости, проходящей через ось, приложить две равные по величине и противоположные по знаку пары сил.

Изгиб, при котором в поперечном сечении балки действуют изгибающий момент и поперечная сила, называется поперечным.

Изгибающий момент в сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов относительно центра тяжести всех внешних сил, действующих справа или слева от сечения.

У балки, находящейся в равновесии под действием плоской системы сил, перпендикулярных оси (т.е. система параллельных сил), алгебраическая сумма всех внешних сил равна нулю; следовательно, сумма внешних сил, действующих на балку левее сечения, численно равна сумме сил, действующих на балку правее сечения.

Таким образом, поперечная сила в сечении балки численно равна алгебраической сумме всех внешних сил, действующих справа или слева от сечений.

Так как правило, знаков статики неприемлемо для установления знаков изгибающего момента и поперечной силы, то установим для них другие правила знаков, а именно:

- если внешняя нагрузка стремится изогнуть балку выпуклостью вниз, то изгибающий момент в сечении считается положительным, и наоборот (рис. 1);

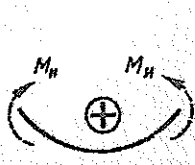


Рис. 4.1.

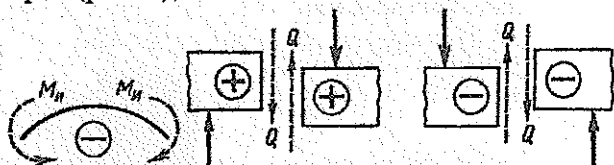


Рис. 4.2.

- если сумма внешних сил, лежащих на левую сторону от сечения, дает равнодействующую, направленную вверх, то поперечная сила считается положительной, и наоборот (рис. 2);

*речная сила* в сечении считается *положительной*, и наоборот; для части балки, расположенной справа от сечения, знаки поперечной силы будут противоположными (рис. 4.2).

Правило знаков для изгибающих моментов иногда называют «правилом дождя» (имея в виду, что в случае выпуклости вниз образуется воронка, в которой задержится дождевая вода, и наоборот).

Условие прочности балки при изгибе заключается в том, что нормальное максимальное напряжение в опасном сечении не должно превосходить допускаемое.

Полагая, что гипотеза о ненадавливании волокон справедлива не только при чистом, но и при поперечном изгибе, мы можем нормальные напряжения в поперечном сечении вычислять при поперечном изгибе по той же формуле, что и при чистом изгибе.

Расчетная формула на прочность при изгибе имеет вид

$$\sigma = \frac{M_{v.\max}}{W} \leq [\sigma]$$

и читается так: *нормальное напряжение в опасном сечении, вычисленное по формуле  $\sigma = \frac{M_{v.\max}}{W}$ , не должно превышать допускаемое. Допускаемое нормальное напряжение при изгибе выбирают таким же, как и при растяжении и сжатии.*

*Максимальный изгибающий момент определяют из эпюр изгибающих моментов или расчетом.*

Так как момент сопротивления изгибу  $W$  в расчетной формуле стоит в знаменателе, то чем больше  $W$ , тем меньше будут расчетные напряжения.

Определим моменты сопротивления изгибу наиболее распространенных сечений:

1. Прямоугольник  $b \times h$  (рис. 4.3.):

$$W_{np} = \frac{I}{y_{\max}} = \frac{bh^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}$$

*Если балку прямоугольного сечения положить плашмя, то*

$$W_{np} = \frac{hb^2}{6}, \text{ тогда}$$

$$\frac{W_m}{W_m} = \frac{bh^2}{6} : \frac{bh^2}{6} = \frac{h}{b} \geq 1,$$

следовательно, при прочих равных условиях нормальные максимальные напряжения  $\sigma'$  у прямоугольной балки, положенной плашмя, будут больше, чем у той же балки, когда ее габаритный наибольший размер  $h$  вертикален (имеется в виду, что изгиб происходит в вертикальной плоскости).

Из сказанного следует правило: для обеспечения максимальной прочности ось, относительно которой момент инерции максимален, должна быть нейтральной.

2. Круг диаметром  $d$ :

$$W = \frac{\pi d^4}{64} : \frac{d}{2} \approx 0,1d^3$$

3. Круг размером  $D \times d$ :

$$W = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) : \frac{D}{2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} \approx \frac{0,1(D^4 - d^4)}{D}$$

Момент сопротивления кольцевого сечения нельзя вычислять как разность моментов сопротивлений большого и малого кругов. Нетрудно подсчитать, что при одинаковой площади поперечного сечения, т.е. одинаковом расходе материала, момент сопротивления кольцевого сечения больше момента сопротивления сплошного круглого сечения.

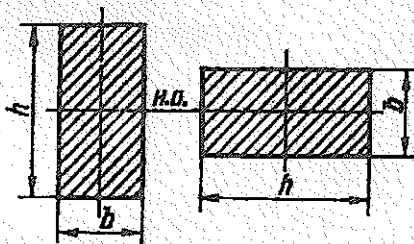


Рис. 4.3.

Так как вблизи нейтральной оси материал мало напряжен, то выгодно больше материала располагать дальше от нейтральной оси. Поэтому в машиностроении редко применяют металлические балки прямоугольного сечения, но весьма широко распространены прокатные профильные балки таврового, двутаврового,

углового, швеллерного и других сечений. Моменты инерции, моменты сопротивления и другие сведения о прокатных фасонных профилях стандартных размеров даются в таблицах ГОСТа.

Для балок, материал которых *неодинаково* работает на растяжение и сжатие (например, чугун), целесообразно применять профили, не симметричные относительно нейтральной оси, например, тавровый или П-образный. Так как у несимметричного профиля при изгибе возникают неодинаковые напряжения растяжения и сжатия, то сечение, например, чугунной балки выгодно располагать так, чтобы меньшие напряжения были в зоне растянутых, а большие — в зоне сжатых волокон.

## 4.2. УСЛОВИЯ ЗАДАЧ №7, №8.

### Задача №7.

Для заданной стальной балки, закрепленной жестко одним концом и нагруженной, как показано на схеме в задании. Номер задания и варианты исходных данных приведены в таблицах № 4.1. и № 4.3.

### Требуется:

- Определить внутренние силовые факторы (поперечные силы и изгибающие моменты) и построить эпюры  $Q$  и  $M_x$ .
- Из условия прочности определить размеры поперечного сечения бруса в двух вариантах:
  - а) Сечение двутавровое.
  - б) Сечение прямоугольное  $\frac{h}{b} = \alpha$

### Задача №8.

Для заданной стальной балки на двух опорах нагруженной, как показано на схеме в задании. Номер задания и варианты исходных данных приведены в таблицах № 4.2. и № 4.3.

### Требуется:

- Определить внутренние силовые факторы (поперечные силы и изгибающие моменты) и построить эпюры  $Q$  и  $M_x$ .
- Из условия прочности определить размеры поперечного сечения бруса в двух вариантах:
  - а) Сечение двутавровое.
  - б) Сечение прямоугольное ( $h = \alpha \cdot b$ ), круглое или квадратное по указанию преподавателя.

### 4.3. СИСТЕМА ЕДИНИЦ И ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ.

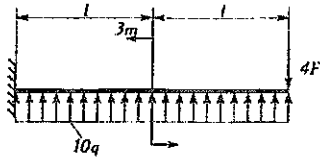
В работе используется международная система единиц СИ. Обозначение величин:

1. Система координат — правая, продольная ось —  $Z$ , оси в поперечном сечении —  $X, Y$ .
2. Нагрузка, внешняя сила —  $F$ .
3. Внешний вращающий момент (пара сил) —  $m$ .
4. Внутренние силовые факторы: продольная сила —  $N(z)$ , поперечные силы —  $Q_x, Q_y$ ; изгибающие моменты —  $M_x, M_y$ ; крутящий момент —  $T$ .
5. Моменты инерции плоского сечения: осевой, полярный, центробежный —  $I_x, I_y, I_p$ .
6. Моменты сопротивления осевые, полярный —  $W_x, W_y, W_p$ .
7. Касательное напряжение —  $\tau$ .
8. Допускаемое номинальное напряжение нормальное, касательное —  $[\sigma], [\tau]$ .
9. Модуль сдвига —  $G$ .
10. Жесткость при кручении, при изгибе —  $GI_p, GI_x$ .
11. Угол закручивания бруса —  $\varphi$ .
12. Вертикальное перемещение поперечного сечения —  $V$ .
13. Угол поворота поперечного сечения балки —  $\theta$ .

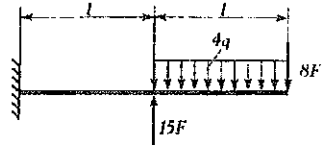


<p>1</p>	<p>5</p>
<p>2</p>	<p>6</p>
<p>3</p>	<p>7</p>
<p>4</p>	<p>8</p>

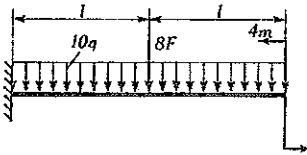
9



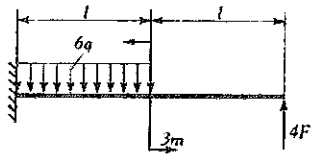
13



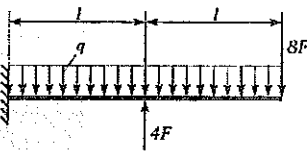
10



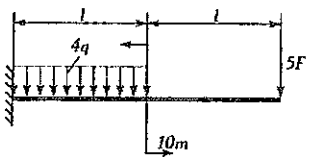
14



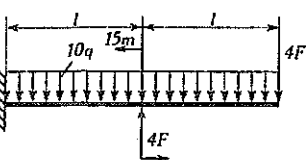
11



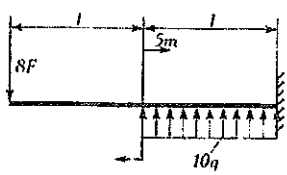
15



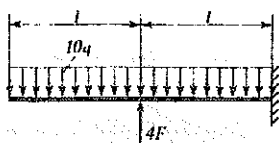
12



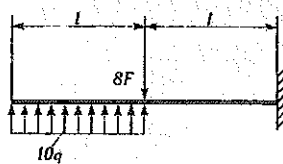
16



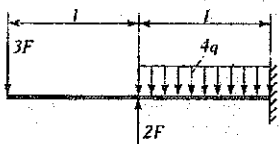
17



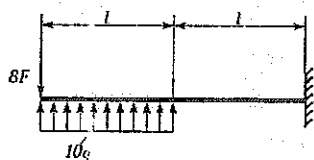
21



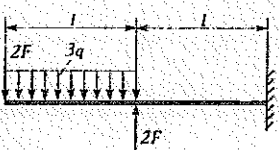
18



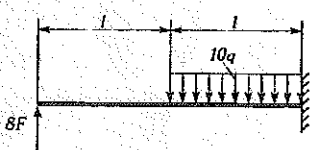
22



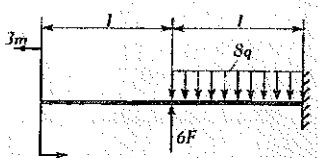
19



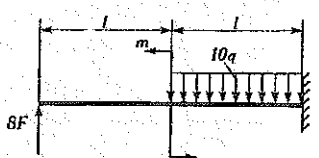
23



20

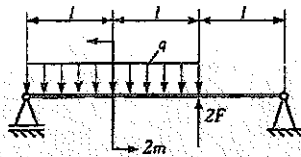


24

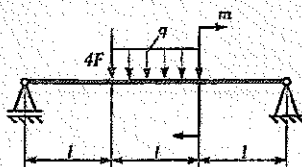


<p>1</p>	<p>5</p>
<p>2</p>	<p>6</p>
<p>3</p>	<p>7</p>
<p>4</p>	<p>8</p>

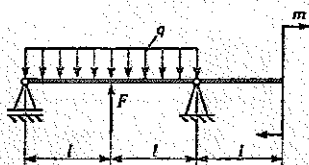
9



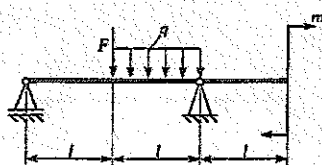
13



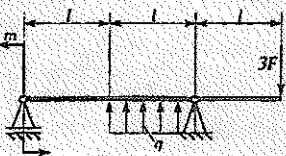
10



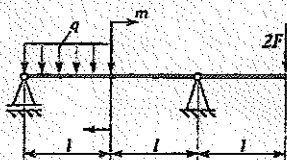
14



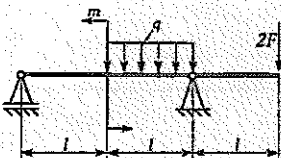
11



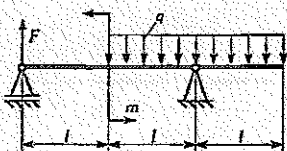
15



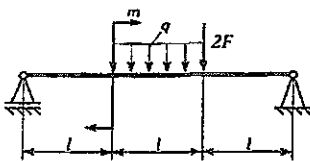
12



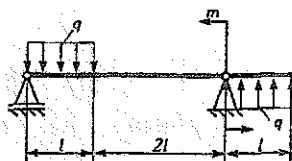
16



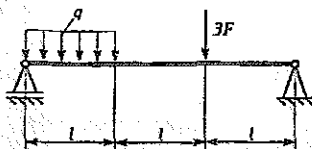
17



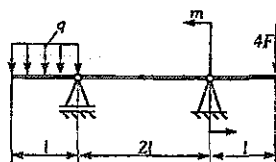
21



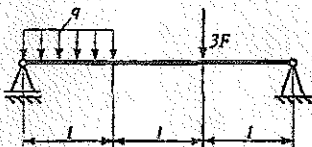
18



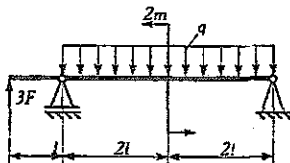
22



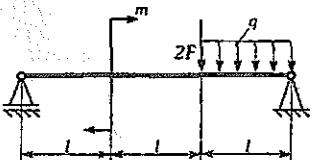
19



23



20



24

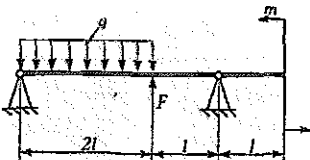


Таблица 4.3.

## ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ К ЗАДАЧАМ.

№	Наименование величин	Ед. изм.	Варианты исходных данных									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	Длина элемента (l)	м.	1,0	1,2	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0	0,5	0,6	0,8
2.	Интенсивность распределенной нагрузки (q)	кН/м	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
3.	Сосредоточенная сила (F)	кН	$F = ql$									
4.	Пара сил перпендикулярная оси бруса ( $m=ql$ )	кНм	25	30	35	40	45	50	55	60	65	20
5.	Пара сил плоскости чертежа (M)	кНм	$M = ql^2$									
7.	Допускаемое нормальное напряжение	МПа	$[\sigma] = 160$									
8.	Допускаемое касательное напряжение	МПа	$[\tau] = 70$									
9.	Модуль упругости (I) рода.	МПа	$E = 2 \cdot 10^5$									
10.	Модуль сдвига (G)	МПа	$G = 8 \cdot 10^4$									
11.	Соотношения $\alpha = \frac{h}{b}$ .	—	1,2	1,4	1,5	1,8	2	2,2	2,4	2,5	2,8	3

#### 4.4. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАЧИ №7.

##### Задача №7.

###### Условия:

Для заданной стальной балки, закрепленной жестко одним концом, как указано в задании (рис. 4.4.а.).

###### Требуется:

1. Определить внутренние силовые факторы:  $Q(z)$ - поперечные силы и  $M(z)$ - изгибающие моменты. Построить их эпюры.
2. Из условия прочности определить размеры поперечного сечения балки в двух вариантах:
  - а) сечение двутавровое;
  - б) сечение прямоугольное  $\frac{h}{b} = \alpha$ .

###### Исходные данные:

- Интенсивность распределения нагрузки  $q = 50 \text{ кН/м}$
- Длина  $l = 0,4 \text{ м}$
- Допускаемое напряжение  $[\sigma] = 140 \text{ МПа}$
- Модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$
- Соотношение размеров поперечного сечения  $\alpha = 2,5$

###### Решение:

1. Определение внутренних силовых факторов  $Q(z)$  и  $M(z)$  и построение их эпюр.

1. Определяем реакцию опор. Для этого мысленно отбрасываем опору А, заменяем её действие опорной реакцией  $Y_A$  и реактивным моментом  $M_A$ ,  $X_A = 0$ ;

Реакции опор определяем по уравнениям равновесия:

$$\sum X = 0; \quad X_A = 0.$$

$$\sum Y = 0; \quad Y_A - 8q\ell + 5q\ell = 0; \quad Y_A = 3q\ell$$

$$\sum \text{mom}_A(F) = 0; \quad 5q\ell \cdot 2\ell + 2q\ell^2 - 8q\ell \cdot \ell/2 - M_A = 0; \quad M_A = 8q\ell^2$$



Знаки у найденных реакций указывают на то, что предполагаемое направление опорных реакций выбрано правильно.

2. Определив опорные реакции, делим брус на участки. Нумерация участков можно начинать определять с любой стороны. Балка имеет два участка. Внутренние силовые факторы определяем методом сечения на каждом участке. В поперечных сечениях имеет место поперечная сила  $Q(z)$  и изгибающий момент  $M(z)$  – направление которых принимаем положительным.

**I УЧАСТОК**  $0 \leq z \leq l$  (слева)

$$Q(z) = Y_A - 8qz = 3ql - 8qz$$

$$M(z) = Y_A z + M_A - 8qz^2/2 = 3qlz + 8ql^2 - 4qz^2$$

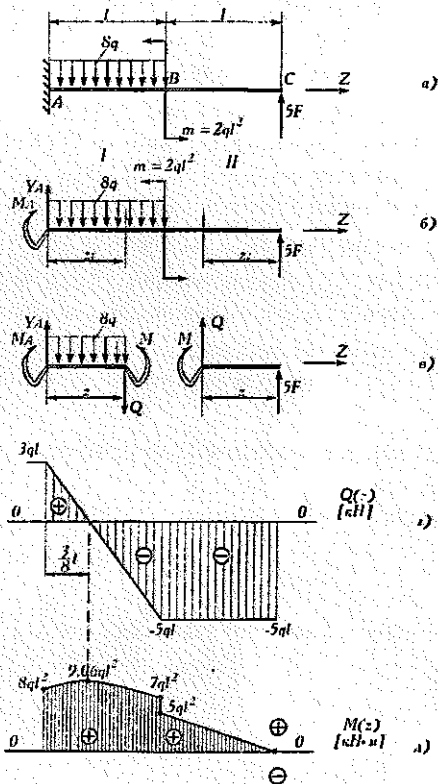


Рис. 4.4.

По этим уравнениям видно, что поперечные силы меняются по линейному закону, изгибающий момент – по квадратной параболе.

$$\begin{aligned} Q(0) &= 3q\ell; & M(0) &= 8q\ell^2; \\ Q(\ell) &= -5q\ell; & M(\ell) &= 7q\ell^2. \end{aligned}$$

При  $Q(z) = 0$ ;

$$3q\ell - 8qz = 0; \quad 3q\ell = 8qz; \quad z = 3/8 \cdot \ell;$$

$$M(3/8 \cdot \ell) = M_{\max} = q\ell^2(3 \cdot 3/8 + 8 - 4 \cdot 3^2/8^2) = 9,06q\ell^2;$$

2 УЧАСТОК  $\ell \geq Z \geq 0$  (справа)

$$Q = -5F - \text{const.}$$

$M(z) = 5Fz$  - изменяются по линейному закону.

$$M(z=0) = 0; \quad M(z=\ell) = 5F\ell = 5q\ell^2$$

По этим данным построены эпюры  $Q(z)$  и  $M(z)$ . При этом принимают определенный масштаб для ординат.

Для поперечных сил принят масштаб: одна единица поперечной силы  $\ell q$  принята равной 5 мм чертежа, одна единица изгибающего момента  $q\ell^2$  принята равной 3 мм чертежа.

По эпюрам изгибающих моментов видно, что опасным сечением является сечение на расстоянии  $3/8 \cdot \ell$  от заделки:

$$M_{\max} = 9,06q\ell^2.$$

## II. Определение размеров поперечного сечения.

### Вариант - а:

Из условия прочности балки на изгиб

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

определяем требуемый момент сопротивления при заданных значениях  $\frac{q}{l}$  и  $[\sigma]$ :

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{(9,06)}{[\sigma]} = \frac{9,06 \cdot 50 \cdot 0,4^2 \cdot 10^3}{140 \cdot 10^6} = 517 \text{ см}^3$$

По таблице сортамента прокатной стали, находим соответствующий данному  $W_x$  профиль. Двутавра №3а имеет  $W_x = 518 \text{ см}^2$ .

### Вариант - б:

Момент сопротивления прямоугольного сечения:

$$W_x \geq \frac{(b \cdot h^2)}{6}; \text{ при } h = 2,5b; W_x = 1,04b^3;$$

Отсюда находим размеры поперечного сечения

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}; 1,04 \cdot b^3 \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]};$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\max}}{1,04[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{9,06 \cdot 50 \cdot 0,4^2 \cdot 10^3}{1,04 \cdot 140 \cdot 10^6}} = 0,8 \cdot 10^{-1} = 80 \text{ мм}$$

$$h = 2,5 \cdot b = 2,5 \cdot 80 = 200 \text{ мм.}$$

## 4.5. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАЧИ №8.

### Задача №8.

#### Условия:

Для заданной стальной балки на двух опорах (рис.4.5.а.).

#### Требуется:

1. Определить внутренние силовые факторы  $Q$  – поперечная сила и  $M$  – изгибающий момент. Построить их эпюры.
2. Из условия прочности определить размер поперечного сечения балки в двух вариантах:
  - а) сечение двутавровое.
  - б) сечение прямоугольное ( $\frac{h}{b} = \alpha$ ).

### Исходные данные:

- Длина	$l = 0,4 \text{ м}$
- Интенсивность распределения нагрузки	$q = 50 \text{ кН/м}$
- Сосредоточенная нагрузка и пара сил	$F = ql; m = ql^2$
- Допускаемое напряжение	$[\sigma] = 140 \text{ МПа}$
- Модуль упругости	$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$
- Соотношение размеров поперечного сечения	$\alpha = 2,5$

### Решение:

1. Определение внутренних силовых факторов  $Q(z)$  и  $M(z)$  и построение их эпюр.

1. Определяем опорные реакции. Для этого мысленно отбрасываем опоры А и В, заменяя их действием опорными реакциями В в неподвижном шарнире А имеем две неизвестные реакции  $Y_A$  и  $X_A$ . В неподвижной опоре - одна реакция  $Y_B$ . Определяем их по уравнениям равновесия для всего бруса:

$$\begin{aligned} \sum X = 0; & \quad -X_A = 0; \\ \sum \text{mom}_A(F) = 0; & \quad -2ql \cdot l \cdot ql^2 + Y_B \cdot 3l - ql \cdot l = 0; & \quad Y_B = 7/3 \cdot ql \\ \sum \text{mom}_B(F) = 0; & \quad -Y_A \cdot 3l + 2ql \cdot 2l - ql \cdot l = 0; & \quad Y_A = 2/3 \cdot ql \end{aligned}$$

Положительные знаки найденных реакций указывают на то, что принятые направления  $Y_A$  и  $X_A$  являются верными.

При получении знака «минус» направление опорной реакции должно быть изменено на противоположное.

$$\begin{aligned} \text{Проверка: } \sum Y = 0; & \quad Y_A - 2ql - Y_B - ql = 0; \\ & \quad 2/3 \cdot ql - 2ql + 7/3 \cdot ql - ql = 0 \\ & \quad 0 = 0 \end{aligned}$$

2) Определив реакции опор  $Y_A$  и  $Y_B$ , определяем внутренние силовые факторы:

$Q(z)$  - поперечная сила

$M(z)$  - изгибающий момент.

Для определения  $Q(z)$  и  $M(z)$  применяем метод сечения. Для этого делим балку на участки. Нумерация сделана слева направо (рис.4.5.б.). Балка имеет три участка. На участках проводим сечения.

В поперечных сечениях имеет место изгибающий момент  $M(z)$  и поперечная сила  $Q(z)$ . Направления принимаем положительным (рис.4.5.в.).

**1 УЧАСТОК**  $0 \leq z \leq 2\ell$  (слева)

$$Q(z) = Y_A - qz = 2/3 \cdot ql - qz; \quad Q = dM(z)/dz;$$

$$M(z) = 2/3 \cdot qlz - qz^2/2;$$

$Q(z)$  - изменяется по линейному закону.  
 $M(z)$  - изменяется по квадратной параболе.

$$Q(0) = 2/3 \cdot ql; \quad M(0) = 0;$$

$$Q(2\ell) = -4/3 \cdot ql; \quad M(2\ell) = -2/3 \cdot ql^2.$$

На этом участке в точке, где  $Q(z) = 0$  изгибающий момент достигает экстремального значения.

$$Q(z) = 0; \quad 2/3 \cdot ql - qz = 0; \quad z = 2/3 \cdot \ell;$$

$$M_{\max}(z = 2/3 \cdot \ell) = ql^2(4/9 - 4/18) = 2/9 \cdot \ell^2.$$

**2 УЧАСТОК**  $2\ell \geq z \geq \ell$  (справа)

$$Q(z) = ql - 7/3 \cdot ql = -4/3 \cdot ql - \text{const.}$$

$$M(z) = -ql(z) + 7/3 \cdot ql(z - \ell) = 4/3 \cdot qlz - 7/3 \cdot ql^2 - \text{линейный закон.}$$

Тогда

$$M(\ell) = -ql^2; \quad M(2\ell) = 1/3 \cdot ql^2$$

**3 УЧАСТОК**  $\ell \geq z \geq 0$  (справа)

$$Q(z) = F = ql - \text{const.}$$

$$M(z) = -qlz - \text{линейный закон.}$$

Тогда

$$M(0) = 0; \quad M(\ell) = -ql^2.$$

По этим данным построены эпюры  $Q(z)$  и  $M(z)$ ; Масштаб для поперечных сил  $q\ell$  принят равной 10 мм чертежа. Для изгибающих моментов одна единица принята равной 20 мм на чертеже.

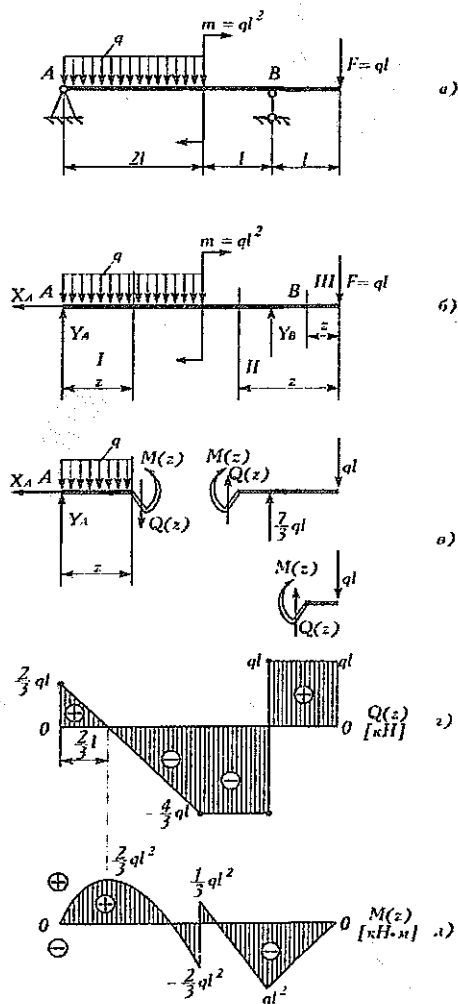


Рис. 4.5.

По эпюре изгибающих моментов видно, что наиболее опасным сечением является сечение под опорой В, где  $M(z) = q l^2$ .

## II. Определение размеров поперечного сечения.

### Вариант А.

Из условия прочности балки на изгиб  $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$

$$W_x \geq \frac{(M_{\max})}{[\sigma]} = \frac{1,33ql^2}{[\sigma]}$$

$$W_x \geq \frac{1,33 \cdot 50 \cdot 0,4^2 \cdot 10^3}{140 \cdot 10^6} = 58,1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 58,1 \text{ см}^3$$

По таблице сортамента прокатной стали принимаем двутавр N12, у которого  $W_x = 58,4 \text{ см}^3$ .

### Вариант Б.

Момент сопротивления прямоугольного сечения

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} \text{ при } h=2,5 b; \quad W_x=1,04 b^3;$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{|M_{\max}|}{1,04 \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{50 \cdot 0,4^2 \cdot 10^3 \cdot 1,33}{1,04 \cdot 140 \cdot 10^6}} = 0,038 \text{ м} = 38 \text{ мм}$$

Принимаем  $b=40 \text{ мм}$ ;

$$h=2,5 b=100 \text{ мм}.$$

## **РАЗДЕЛ 5.**

### **«РАСЧЕТ РАМ И БРУСЬЕВ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ И КРУЧЕНИИ»**



## 5.1. УСЛОВИЯ ЗАДАЧ №9.

### Задача №9.

На стальную раму действует система внешних сил, как показано на схеме в задании. Номер задания и варианты исходных данных приведены в таблицах №5.1. и №5.2.

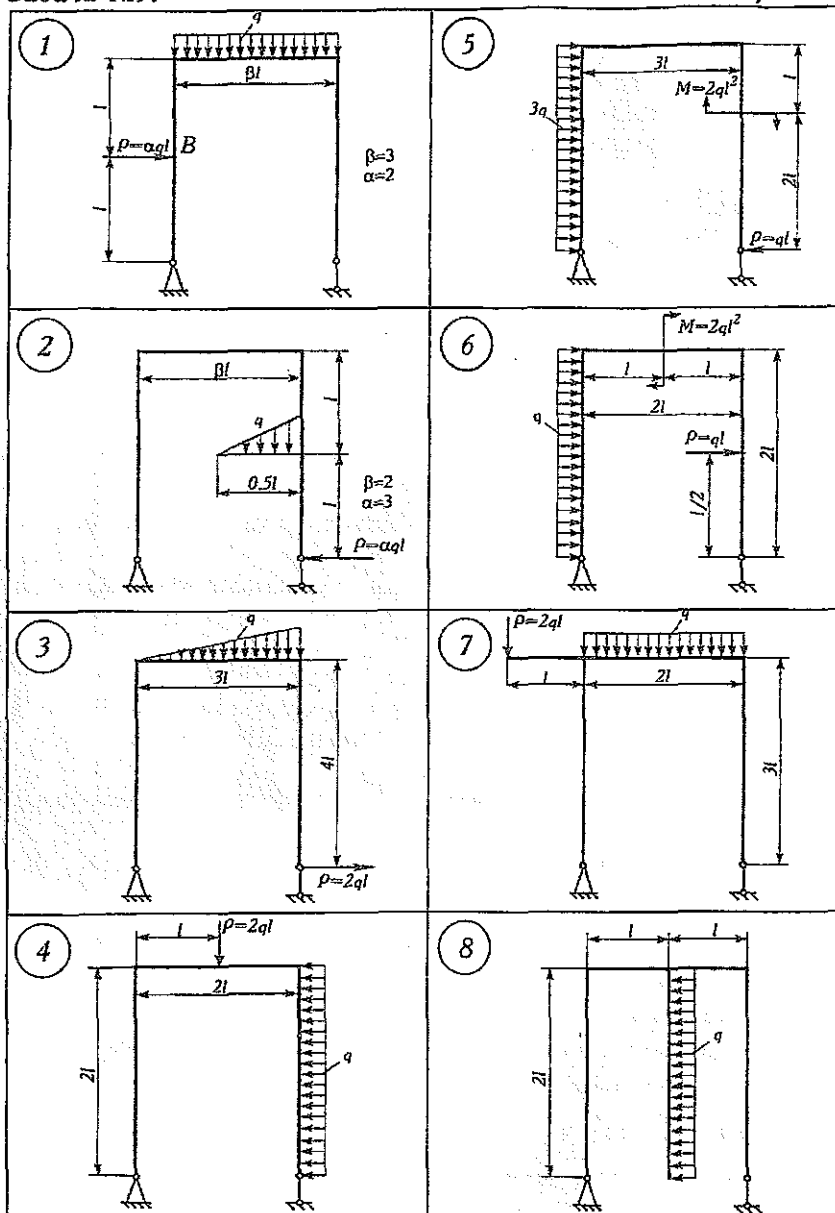
### Требуется:

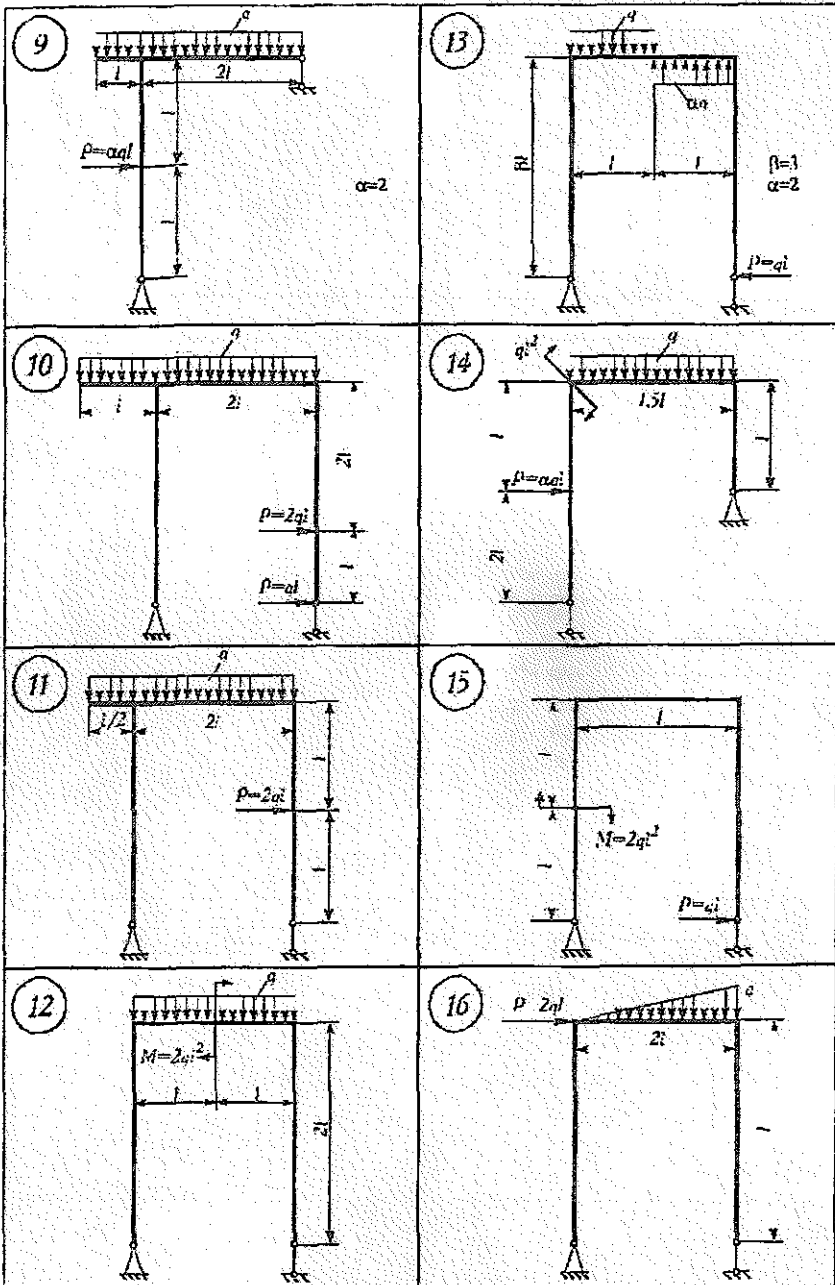
- Определить внутренние силовые факторы (поперечные силы, изгибающие моменты и поперечные моменты) и построить эпюры  $N$ ,  $Q$  и  $M$ .
- Из условия прочности определить размеры поперечного сечения рамы, считая его прямоугольным.

## 5.2. СИСТЕМА ЕДИНИЦ И ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ.

В работы используется международная система единиц СИ. Обозначение величин:

1. Система координат — правая, продольная ось —  $Z$ , оси в поперечном сечении —  $X$ ,  $Y$ .
2. Нагрузка, внешняя сила —  $F$ .
3. Внешний вращающий момент (пара сил) —  $m$ .
4. Внутренние силовые факторы: продольная сила —  $N(z)$ , поперечные силы —  $Q_x$ ,  $Q_y$ ; изгибающие моменты —  $M_x$ ,  $M_y$ ; крутящий момент —  $T$ .
5. Моменты инерции плоского сечения: осевой, полярный, центробежный —  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_p$ .
6. Моменты сопротивления осевые, полярный —  $W_x$ ,  $W_y$ ,  $W_p$ .
7. Касательное напряжение —  $\tau$ .
8. Допускаемое номинальное напряжение нормальное, касательное —  $[\sigma]$ ,  $[\tau]$ .
9. Модуль сдвига —  $G$ .
10. Жесткость при кручении, при изгибе —  $GI_p$ ,  $GI_x$ .
11. Угол закручивания бруса —  $\varphi$ .
12. Вертикальное перемещение поперечного сечения —  $V$ .
13. Угол поворота поперечного сечения балки —  $\theta$ .





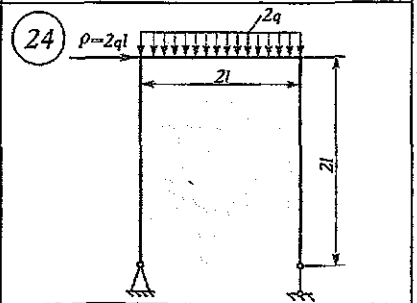
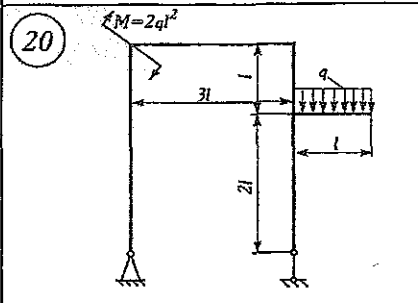
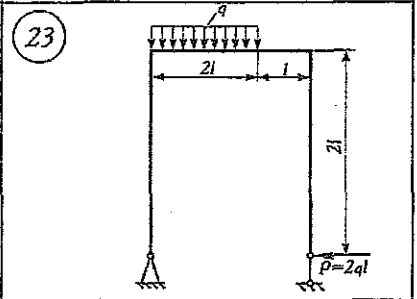
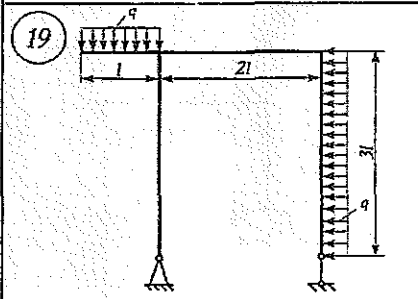
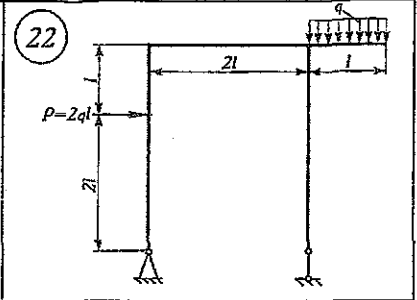
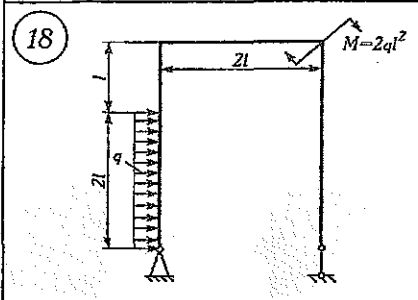
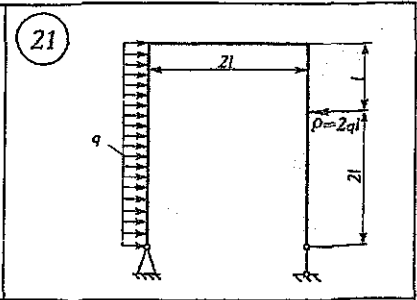
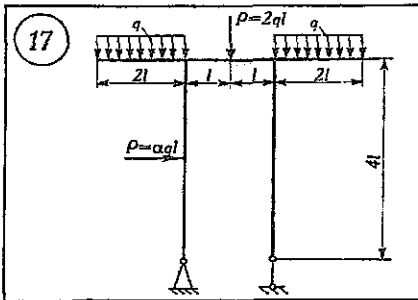


Таблица 5.2.

## ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ К ЗАДАЧАМ.

№	Наименование величин	Ед. изм.	Варианты исходных данных									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	Длина элемента ( $l$ )	м.	1,0	1,2	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0	0,5	0,6	0,8
2.	Интенсивность распределенной нагрузки ( $q$ )	кН/м	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
3.	Сосредоточенная сила ( $F$ )	кН	$F = ql$									
4.	Пара сил перпендикулярная оси бруса ( $m=ql$ )	кНм	25	30	35	40	45	50	55	60	65	20
5.	Пара сил плоскости чертежа ( $M$ )	кНм	$M = ql^2$									
7.	Допускаемое нормальное напряжение	МПа	$[\sigma] = 160$									
8.	Допускаемое касательное напряжение	МПа	$[\tau] = 70$									
9.	Модуль упругости (I) рода.	МПа	$E = 2 \cdot 10^5$									
10	Модуль сдвига ( $G$ )	МПа	$G = 8 \cdot 10^4$									
11	Соотношения $\alpha = \frac{h}{b}$ .	—	1,2	1,4	1,5	1,8	2	2,2	2,4	2,5	2,8	3

### 5.3. ПРИМЕР РАСЧЕТА СТАЛЬНОЙ РАМЫ.

#### Задача №9.

##### Условия:

На стальную раму действуют внешние силы (рис. 5.1.).

##### Требуется:

1. Определить и построить эпюры:  $N(z)$  — продольной силы;  $Q(z)$  — поперечной силы;  $M(z)$  — поперечного момента.
2. Определить размеры поперечного сечения рамы, считая его прямоугольным.

##### Дано:

- $q=45$  кН,
- $t = ql^2$
- $l=1,5$  м,  $E=2 \cdot 10^5$  мПа.
- $[\sigma_{cm}] = 140$  мПа.

##### Найти:

$N(z), Q(z), M(z)$

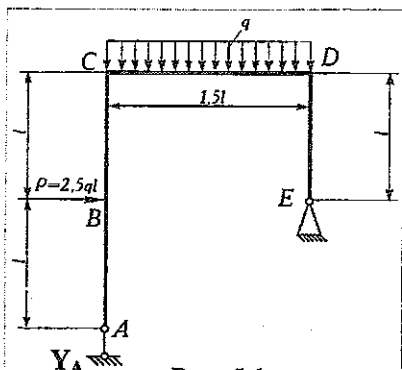


Рис. 5.1.

##### Решение:

Заменяем опоры реакциями, а распределенную силу результирующей (Рис.5.2.):

Для нахождения реакций опор составим уравнения равновесия системы:

1) Уравнение сил относительно оси X:

$$\sum F_x = 0, \text{ то есть } -X_E + 2,5ql = 0, \text{ откуда } X_E = 2,5ql$$

2) Уравнение моментов относительно точки A:

$$\sum_{\text{мом}A} (F) = 0, \text{ то есть}$$

$$-2,5ql^2 - 1,125ql^2 + Y_E \cdot 1,5l + 2,5ql^2 = 0, \text{ откуда } Y_E = 0,75ql$$

3) относительно точки E:

$$\sum_{\text{мом}E} (F) = 0, \text{ то есть}$$

$$1,125ql^2 - Y_A \cdot 1,5l = 0, \text{ откуда } Y_A = 0,75ql$$

Выполним проверку. Для этого составим уравнение моментов относительно точки С:

$$\sum_{\text{мол.С}} (F) = 0, \text{ то есть}$$

$$2,5ql^2 - 0,75 \cdot 1,5ql^2 + 2,5ql^2 - 0,75ql \cdot 1,5l = 0$$

$$0 \equiv 0$$

Таким образом, реакции опор найдены, верно.

Разделим тело на четыре участка: АВ – первый, ВС – второй, CD – третий, DE – четвертый.

**Рассмотрим первый участок АВ:**

Определим внутренние силы  $N_1(z_1)$ ,  $Q_1(z_1)$  и  $M_1(z_1)$ , где

$$0 \leq z_1 \leq l.$$

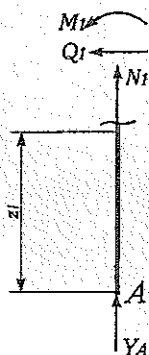
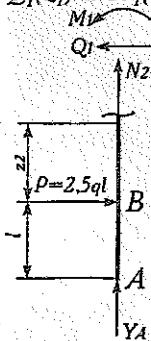
1. Определим  $N_1(z_1)$  из уравнения:

$$N_1(z_1) + Y_A = 0, \text{ то есть}$$

$$N_1(z_1) = -Y_A = -0,75ql$$

2. Определим  $Q_1(z_1)$  и  $M_1(z_1)$ :

Так как на участке АВ поперечных сил нет, то  $Q_1(z_1)$  и  $M_1(z_1)$  равны нулю.



**Рассмотрим второй участок ВС:**

Определим внутренние силы  $N_2(z_2)$ ,  $Q_2(z_2)$  и  $M_2(z_2)$ , где  $0 \leq z_2 \leq l$ .

1. Определим  $N_2(z_2)$  из уравнения:

$$N_2(z_2) + Y_A = 0, \text{ то есть } N_2(z_2) = -Y_A = -0,75ql$$

2. Определим  $Q_2(z_2)$  из уравнения:

$$Q_2(z_2) + 2,5ql = 0, \text{ то есть } Q_2(z_2) = -2,5ql$$

3. Определим  $M_2(z_2)$  из уравнения:

$$M_2(z_2) = -2,5ql \cdot z_2 \text{ тогда}$$

$$M_2(0) = 0 \text{ и } M_2(l) = -2,5ql^2$$

**Рассмотрим четвертый участок ED  $0 \leq z_4 \leq l$ :**

1. Определим  $N_4(z_4)$  из уравнения:

$$N_4(z_4) + Y_E = 0, \text{ то есть } N_4(z_4) = -0,75ql$$

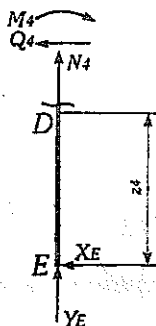
2. Определим  $Q_4(z_4)$  из уравнения:

$$Q_4(z_4) = 2,5ql$$

3. Определим  $M_4(z_4)$  из уравнения:

$$M_4(z_4) = -2,5ql \cdot z_4 \text{ тогда}$$

$$M_4(0) = 0 \text{ и } M_4(l) = -2,5ql^2$$



**Рассмотрим третий участок DC  $0 \leq z_3 \leq 1,5l$ :**

1. Определим  $N_3(z_3)$  из уравнения:

$$N_3(z_3) - X_E = 0, \text{ то есть } N_3(z_3) = -2,5ql$$

2. Определим  $Q_3(z_3)$  из уравнения:

$$Q_3(z_3) + Y_E - qz_3 = 0, \text{ то есть } Q_3(z_3) = -Y_E + qz_3, \text{ тогда}$$

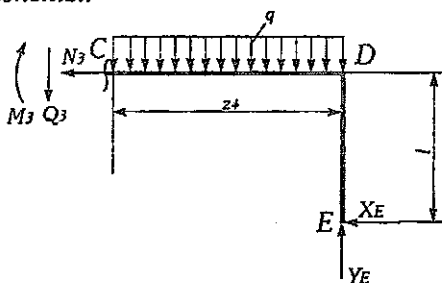
$$Q_3(0) = Y_E = -0,75ql, \quad Q_3(1,5l) = -0,75ql + 1,5ql = 0,75ql$$

3. Определим  $M_3(z_3)$  из уравнения:

$$M_3(z_3) = Y_E \cdot z_3 - X_E \cdot l - qz_3 \frac{z_3}{2}$$

тогда

$$M_3(0) = -X_E \cdot l = -2,5ql^2$$



$$M_3(1,5l) = 0,75 \cdot 1,5ql^2 - 2,5ql^2 - \frac{1}{2}q(1,5l)^2 = -2,5ql^2$$

На участке DC поперечная сила  $Q_3(z_3)$  меняет знак с положительного на отрицательный в точке  $z_{\text{экстр}}$ , таким образом  $Q_3(z_{\text{экстр}}) = 0$  поперечный момент достигает экстремального значения и для того чтобы определить это экстремальное значение решим уравнение:

$$Y_E - qz_{\text{экстр}} = 0, \text{ то есть } 0,75ql = qz_{\text{экстр}}, \quad z_{\text{экстр}} = 0,75l$$

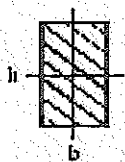
Тогда экстремальное значение поперечного момента будет равно:



$$M_3(0,75l) = 0,75ql \cdot 0,75ql - 2,5ql \cdot 0,75ql - \frac{1}{2}q(0,75l)^2 = -1,59375ql^2$$

Из условий на прочность определим размеры поперечного сечения рамы:  $\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_z} \leq [\sigma]$ ;  $W_z \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]}$ ;

Для прямоугольного сечения ( $\alpha = \frac{h}{b} = 2,5$ ):



$$W_z = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{2,5 \cdot b^3}{6},$$

$$\frac{2,5ql^2}{[\sigma]} \geq \frac{2,5 \cdot b^3}{6} \Rightarrow b = \sqrt[3]{\frac{6ql^2}{[\sigma]}}$$

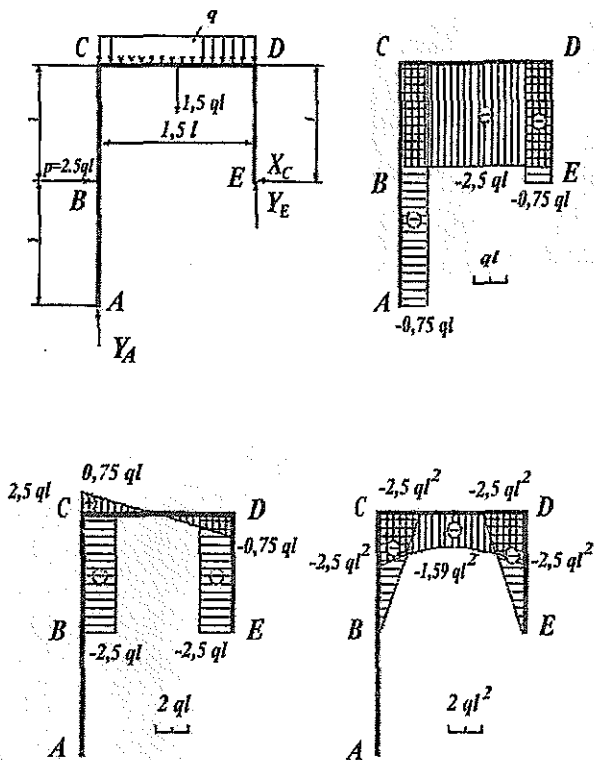


Рис. 5.1.

### Требования к оформлению работы.

1. РГР оформляется на стандартных листах писчей бумаги формата А4. Первой страницей РГР является титульный лист.
2. Каждую задачу следует начинать с новой страницы, полностью приводить условие задачи и необходимые числовые данные. Расчетная схема должна быть вычерчена аккуратно, в масштабе, с указанием всех величин, необходимых для расчета.
3. Решение должно сопровождаться краткими, последовательными и грамотными, без сокращения слов, объяснениями. Следует избегать многословных пояснений и пересказов учебника, памятуя, что язык техники — формула и чертеж.
4. Пользуясь формулами, следует указать значения величин, входящих в нее, их физический смысл, размерность. Решения задач производят в буквенном виде и только в конечный результат подставляют числовые величины. Окончательный результат подчеркнуть и указать размерность.
5. Вычисления производят с помощью карманных калькуляторов. Не следует приводить большое число значащих цифр после запятой. Вычисления должны соответствовать практической точности. Расчеты должны быть выполнены в международной системе единиц СИ.

Образец титульного листа:

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

**ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
имени Абу Райхана Беруни.**

**Кафедра: «ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МАШИН»**

**РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА  
по Прикладной механике  
(раздел «Сопротивление материалов»)**

**Номер задания:**.....  
(номер схемы, номер варианта)

**Выполнил студент:**.....  
(Ф.И.О)

**Факультет** .....**группа**.....

**Дата** «.....».....200...г.

**Преподаватель:**.....

**Оценка**..... **Дата**.....  
(баллы)

**Принял** .....  
(Ф.И.О, подпись)

**Ташкент – 200...г.**

## 6. РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ НА ЭВМ.

Для расчетов на ЭВМ следует подходить по-разному. Можно программировать расчетные формулы сразу. Этот метод удобен, когда имеется алгоритм расчета. В других случаях необходимо пользоваться численными методами. Эти методы логически просты, но содержат много вычислений, которые выполняет ЭВМ. Использование того или другого метода обусловлено удобством расчета. Ниже даны решения с использованием метода конечных элементов для стержневых систем. При изложении материала использовалась матричная алгебра.

### 6.1. РАСЧЕТ СТЕРЖНЕЙ НА РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ.

Опишем общую методику расчета стержня. Как видно из рис. 6.1. стержень может состоять из нескольких участков, если составить математическую модель для одного участка, то можно рассчитать стержень, как сумму всех участков. Будем называть каждый участок элементом.

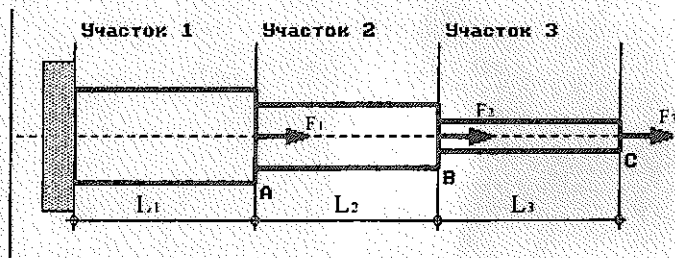
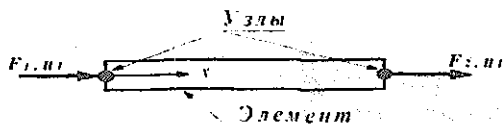


Рис. 6.1.

Изменение перемещений в элементе выражается в виде линейной функции вдоль оси стержня.

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x = [1 \quad x] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}. \quad (6.1)$$

Линейная функция выбрана потому, что элемент имеет два узла, следовательно, однозначное значение дает линейная функция, так как через две точки можно провести только одну прямую.



Если это выражение записывается для  $x=0$  и  $x=l$ , то получается:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = [C] \{\alpha\}, \quad (6.2)$$

откуда

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} l & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [C]^{-1} \{q\}, \quad (6.3)$$

Подставив (6.3) в (6.1), получается

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x = \begin{bmatrix} 1 - \xi & \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [N_1 \quad N_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [N] \{q\}. \quad (6.4)$$

здесь  $\xi = x/l$

Деформация в стержне определяется из выражения

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [B] \{q\}, \quad (6.5)$$

а напряжения равны

$$\sigma = E\varepsilon = E \cdot \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = E [B] \{q\}. \quad (6.6)$$

Известно, что работы внешних и внутренних сил на возможных перемещениях равны.

Пусть  $d\{q\}$  - возможные перемещения узлов конечного элемента. Тогда деформации запишутся в виде

$$d\varepsilon = [B] \{d\{q\}\}, \quad (6.7)$$

Работа, совершаемая узловыми силами, равна сумме произведений каждой силы на соответствующие перемещения, т.е. в матричном виде

$$\{d\{q\}\}^T \cdot \{F\}. \quad (6.8)$$

Аналогично внутренняя работа напряжений, приходящаяся на единицу объема, равна

$$d\varepsilon \cdot \sigma = [\mathbf{B}](d\{\mathbf{q}\})\sigma. \quad (6.9)$$

Приравнявая работу внешних сил суммарной внутренней работе, получаемой интегрированием по объёму элемента, имеем

$$(d\{\mathbf{q}\})^T \cdot \{F\} = (d\{\mathbf{q}\})^T \int [\mathbf{B}]^T \cdot \sigma dV \quad (6.10)$$

Это соотношение справедливо для любого виртуального перемещения, поэтому коэффициенты в правой и левой частях должны быть равны

$$\{F\} = \int [\mathbf{B}]^T \cdot E \cdot [\mathbf{B}]\{\mathbf{q}\} dV \quad (6.11)$$

Выражение, которое стоит под интегралом, не зависит от объёма, поэтому можно записать

$$\{F\} = [\mathbf{B}]^T E [\mathbf{B}] \int dV \{\mathbf{q}\} = [\mathbf{B}]^T E [\mathbf{B}] A l \{\mathbf{q}\} \quad (6.12)$$

Раскроем это выражение

$$\begin{aligned} \{F\} &= [\mathbf{B}]^T E [\mathbf{B}] A l \{\mathbf{q}\} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot E \cdot \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot l \{\mathbf{q}\} = \\ &= \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{\mathbf{q}\} = [\mathbf{k}]\{\mathbf{q}\} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Имея зависимость между внешними силами и перемещениями для одного элемента можно решать задачи для любых составных стержней.

Матрица  $(\mathbf{k})$  - называется *матрицей жёсткости элемента*. В компьютерных программах матрица жесткости элемента, программируется следующим образом

$$EL = X(2) - X(1)$$

$$SF = E * A / EL$$

$$EK(1, 1) = SF$$

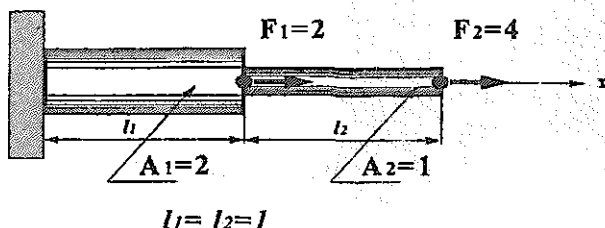
$$EK(2, 1) = -SF$$

$$EK(1, 2) = -SF$$

$$EK(2, 2) = SF$$

Для примера решим следующую задачу.

Дано:



Матрица жёсткости первого стержня  $\mathbf{k}_1$  - вычисляется по формуле (6.13)

$$[\mathbf{k}]_1 = \frac{EA_1}{l_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1 \cdot 2}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

для второго

$$[\mathbf{k}]_2 = \frac{EA_2}{l_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1 \cdot 1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Составим глобальную матрицу жёсткости, как сумму матриц жёсткости каждого элемента

Глобальная матрица составляется по принципу - элементы матриц жёсткости, принадлежащие одним и тем же узлам, суммируются. Покажем это наглядно

	1	2	3	
$\mathbf{K} =$	2	-2		1
	-2	2 + 1	-1	2
		-1	1	3

Пустые клетки заполняются, очевидно, нулями, так как первый и третий узлы независимы.

Программа составления глобальной матрицы жёсткости имеет вид



```

DO 1 IE=1,NE          * NE - количество элементов
L=X(IC(2,IE))-X(IC(1,IE)) * L- длина элемента
SF=E*A(IE)/L
EK(1,1)=SF           * EK - матрица жёсткости
EK(2,1)=-SF         * элемента
EK(1,2)=-SF
EK(2,2)=SF
DO 2 I=1,2
DO 2 J=1,2
K(IC(I,IE),IC(J,IE))=K(IC(I,IE),IC(J,IE))+ EK(I,J)
2 CONTINUE
1 CONTINUE

```

В нашем случае вектор  $(X) = (0.0, 1.0, 2.0)$

Массив  $[IC] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ . Этот массив имеет 2 строки и количество столбцов равное количеству элементов.

Вектор нагрузок  $F$  будет иметь вид

$$F = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

И, наконец, осталось учесть граничные условия. В методе конечных элементов имеются различные способы учета закреплений. Один из способов, когда закрепление неподвижно, это вычеркивание строк и столбцов глобальной матрицы жёсткости, соответствующие закреплённым степеням свободы.

В нашем случае закреплён первый узел, следовательно, после, вычеркивания первой строки и первого столбца матриц жесткости и вектора нагрузок приходим к системе линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Решая систему, получим  $q_1 = 3$ ,  $q_2 = 7$ . Когда неизвестных много систему уравнений необходимо решать на компьютере. Программа решения системы уравнений методом Гаусса имеет вид

```

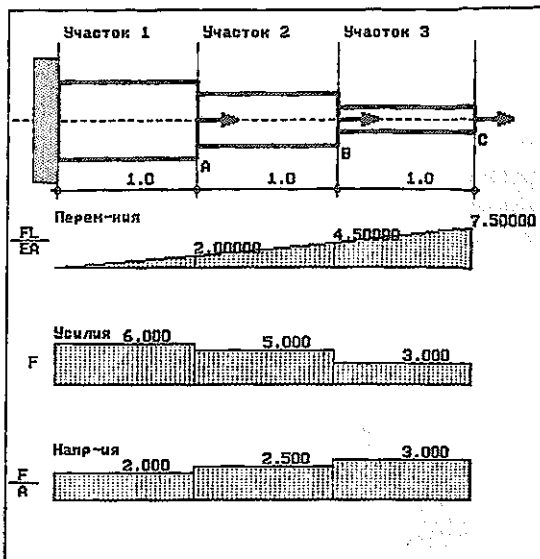
SUBROUTINE SOLVE(N)
C
C   COMMON/S3/A(100,100),B(100),X(100)
C
C   A - МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ
C   B - ВЕКТОР ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ
C   X - ВЕКТОР НЕИЗВЕСТНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ
C   N - КОЛИЧЕСТВО НЕИЗВЕСТНЫХ
C
C   ПРЯМОЙ ХОД
C
NB=N-1
DO 20 J=1,NB
L=J+1
DO 20 JJ=L,N
XM=A(JJ,J)/A(J,J)
DO 10 I=J,N
10 A(JJ,I)=A(JJ,I)-A(J,I)*XM
20 B(JJ)=B(JJ)-B(J)*XM
C
C   ОБРАТНЫЙ ХОД
C
X(N)=B(N)/A(N,N)
DO 40 J=1,NB
JJ=N-J
L=JJ+1
SUM=0.
DO 30 I=L,N
30 SUM=SUM+A(JJ,I)*X(I)
40 X(JJ)=(B(JJ)-SUM)/A(JJ,JJ)
C
RETURN
END

```

Имея перемещения, по формулам (6.5) и (6.6) можно определить соответственно деформации и напряжения в элементах стержня.

Каждый этап расчета можно запрограммировать на компьютере. Исходными данными для программы будут количество элементов и количество узлов, геометрические и физические ха-





**ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ**

Сила в сечении А= 1.00  
 Сила в сечении В= 2.00  
 Сила в сечении С= 3.00

**РЕЗУЛЬТАТЫ**

Размеры сечений [кв.мм]  
 1в Сечении 3.86E+0003  
 2в Сечении 2.57E+0003  
 3в Сечении 1.29E+0003

Печать IP1

Как видно результат имеет достаточно информации о работе стержня.

## 6.2. КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ.

Для расчета стержней на кручение вывод матрицы жёсткости проводится аналогично случаю растяжения стержней. Отличие состоит в том, что вместо перемещения определяется угол закручивания, а вместо модуля упругости и площади поперечного сечения ставится соответственно модуль сдвига и полярный момент инерции, т.е.

$$\{M\} = \frac{GJ_p}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{\varphi\} = [k] \{\varphi\}$$

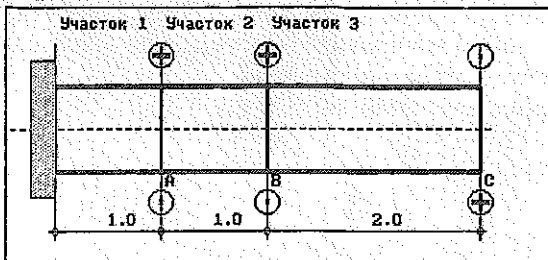
Аналогично предыдущему была составлена программа для расчёта стержней на кручение. Порядок ввода исходных данных и результаты расчета приведены ниже

РАСЧЕТ СТЕРЖНЯ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

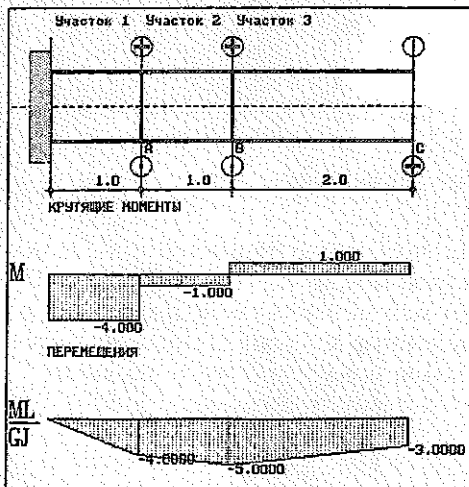
ВВЕДИТЕ ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ( ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ )

Момент в сечении А = -3.00  
 Момент в сечении В = -2.00  
 Момент в сечении С = 1.00  
 Длина 1 участка = 1.00  
 Длина 2 участка = 1.00  
 Длина 3 участка = 2.00  
 Значение  $n$  (Н) = 5000.00  
 Допустимое напряжение [MPa] = 70.00

БУДЕТЕ КОРРЕКТИРОВАТЬ? У/Н



Результаты



ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Момент в сеч. А=-3.00  
 Момент в сеч. В=-2.00  
 Момент в сеч. С=1.00

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА  
 Диаметры сеченийDm1  
 1a Сечение 1.13E+0001  
 2a Сечение 1.13E+0001  
 3a Сечение 1.13E+0001

Печать (P1)

### 6.3. РАСЧЕТ РАМНЫХ И БАЛОЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В практике расчётов очень часто приходится рассчитывать конструкции, которые работают на изгиб. Это ходовая часть автомобилей, тракторов, прицепов, балки зданий, пролётные строения мостов, тоннели метрополитенов, фундаменты, разнообразные рамные системы и т.д. Поэтому проблемы расчёта, связанные с изгибом, являются одними из важных. Неслучайно около 70% курса строительной механики и сопротивления материалов отводится под изучение изгиба конструкций.

Рассмотрим, например, раму (Рис. 6.2.)

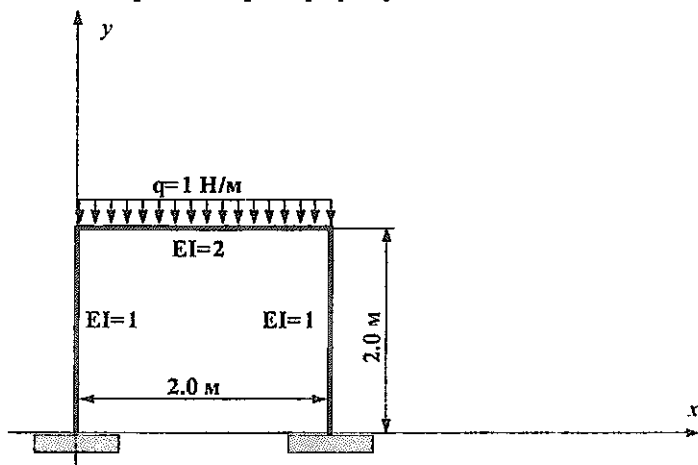
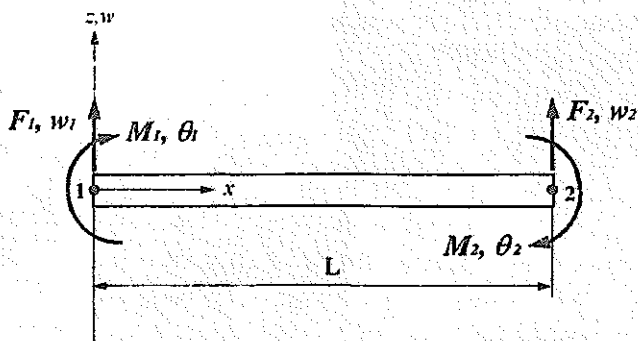


Рис. 6.2.

Из чертежа видно, что можно выделить три характерных участка. Каждый из участков можно назвать элементом. Следовательно, если мы построим математическую модель одного элемента, то можно рассчитать данную систему, как комбинацию трех элементов. Мы продемонстрируем всё от начала до конца.

Элемент можно представить в следующем виде



Согласно теории изгиба балок, не учитывающей поперечные сдвиговые деформации, в конечных точках необходимо определять поперечные смещения ( $w_1$  и  $w_2$ ) и угловые смещения ( $\theta_1$  и  $\theta_2$ ). Последние равны отрицательному значению тангенса угла наклона нейтральной оси, так как вращение в положительном направлении (по часовой стрелке) вызывает отрицательные поперечные смещения. Имеем

$$\theta_1 = - \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0}, \quad \theta_2 = - \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=L}. \quad (6.14)$$

Вектор перемещений

$$\{q\} = \{w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2\}^T \quad (6.15)$$

Так как имеется четыре степени свободы, то для представления поля перемещений внутри конечного элемента нужно принять полином третьей степени

$$w = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = \begin{Bmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (6.15)$$

Он является точной формулой прогиба балки, если принять, что силы и моменты действуют только на её концах. Коэффициенты полинома определяются из граничных условий

$$\begin{aligned} w(0) &= w_1; w'(0) = \theta_1, \\ w(L) &= w_2; w'(L) = \theta_2 \end{aligned} \quad (6.17)$$

Вычисляя (6.16) при условиях (6.17), получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ L^3 & L^2 & L & 1 \\ -3L^2 & -2L & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (6.18)$$

Решая относительно вектора  $\{a\}$ , получим

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} 2 & -L & -2 & -L \\ -3L & 2L^2 & 3L & L^2 \\ 0 & -L^3 & 0 & 0 \\ L^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (6.19)$$

После подстановки (6.19) в (6.16) и, приводя подобные по перемещениям и углам поворота, получим

$$w = [N] \{q\} \quad (6.20)$$

где

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4],$$

$$N_1 = (1 + 2\xi^3 - 3\xi^2), \quad N_3 = (3\xi^2 - 2\xi^3),$$

$$N_2 = -x(\xi - 1)^2, \quad N_4 = -x(\xi^2 - \xi),$$

здесь  $\xi = x/L$

Функция формы обладает той особенностью, что принимает единичное значение в узле, для которого она построены.

Учитывая этот факт, для некоторых конечных элементов функции формы можно определить сразу по принципу "зная результат, стремимся к нему".

Но продолжим вывод матрицы жёсткости.

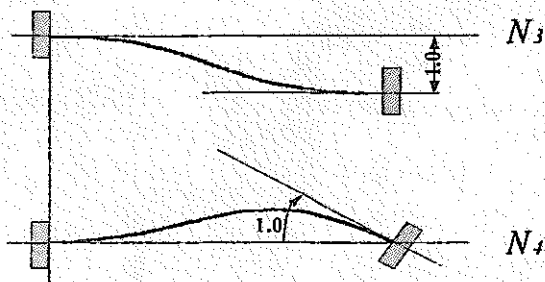
Деформации в случае изгиба равны кривизнам (вторым производным), т.е.  $w''$ . Следовательно,

$$w'' = [N''] \{q\}. \quad (6.21)$$

где



$$N_1'' = -N_3'' = \frac{6}{L^2}(2\xi - 1), \quad N_2'' = -\frac{2}{L}(3\xi - 2), \quad N_4'' = -\frac{2}{L}(3\xi - 1)$$



Внутренние изгибающие моменты определяются соотношением

$$m = EIw'' \quad (6.22)$$

Так как вторые производные в (6.21) меняются линейно внутри элемента, то кривизна может быть определена однозначно, если заданы  $w''$  в узлах 1 и 2. Согласно (6.21), получим

$$\begin{Bmatrix} w_1'' \\ w_2'' \end{Bmatrix} = \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} -6 & 4L & 6 & 2L \\ 6 & -2L & -6 & -4L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (6.23)$$

Рассматривая условия равновесия сил, необходимо заметить, что внутренние моменты  $m_1$  и  $m_2$  в узлах 1 и 2 соответственно считаются положительными, если им отвечает положительная кривизна. Поэтому  $m_1 = M_1$ , а  $m_2 = -M_2$ . Можно применить условия равновесия для моментов, чтобы выразить узловые силы через  $m_1$  и  $m_2$ . Объединив всю систему уравнений, запишем

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_2 \\ F_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} \quad (6.24)$$

Кроме того, так как требуется на двух концах элемента связать моменты с кривизнами, необходимо записать уравнение изгиба (6.22) в виде

$$\begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1'' \\ w_2'' \end{Bmatrix} \quad (6.25)$$

Окончательно подставляя (6.23) в (6.25), а результат в (6.24) получим

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_2 \\ F_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & -3L & -6 & -3L \\ -3L & 2L^2 & 3L & L^2 \\ -6 & 3L & 6 & 3L \\ -3L & L^2 & 3L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (6.26)$$

Имея эту зависимость, можно решать практические задачи. Матрица зависимости между узловыми силами и перемещениями является матрицей жесткости. Эту матрицу можно применять для расчета балочных конструкций и прямоугольных рам без учета нормальных сил. В случае, если необходимо учесть нормальные силы, необходимо объединить эту матрицу с матрицей центрально напряжённого стержня (6.13). Кроме того, учитывая, что матрица жесткости строится в местной системе координат необходимо переводить её в глобальную систему координат. В простейших случаях, когда нормальными деформациями можно пренебречь, можно ограничиться соотношением (6.26).

Решим задачу на изгиб, которая имеет важное практическое значения. Ниже приведена её расчетная схема. (Рис 6.3.)

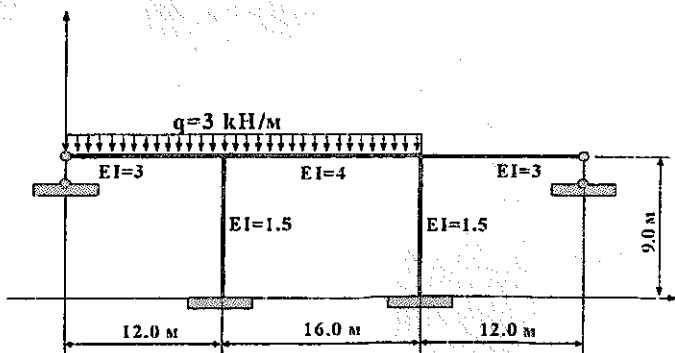


Рис. 6.3.

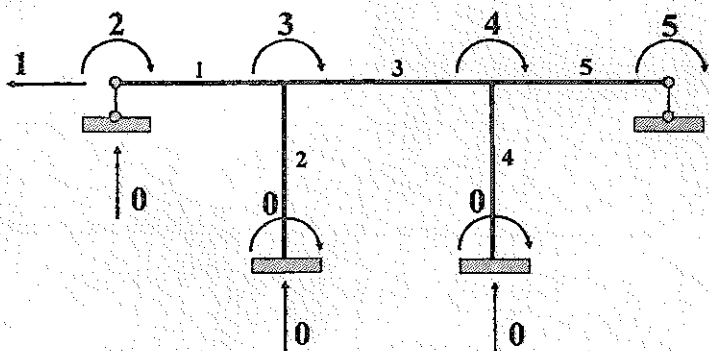
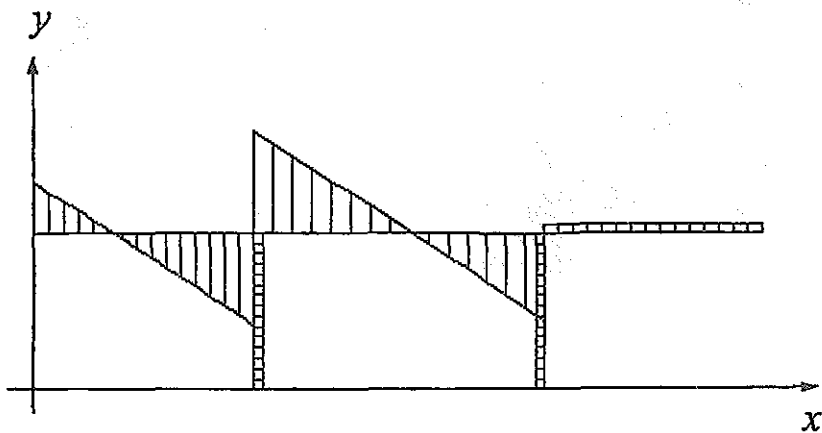


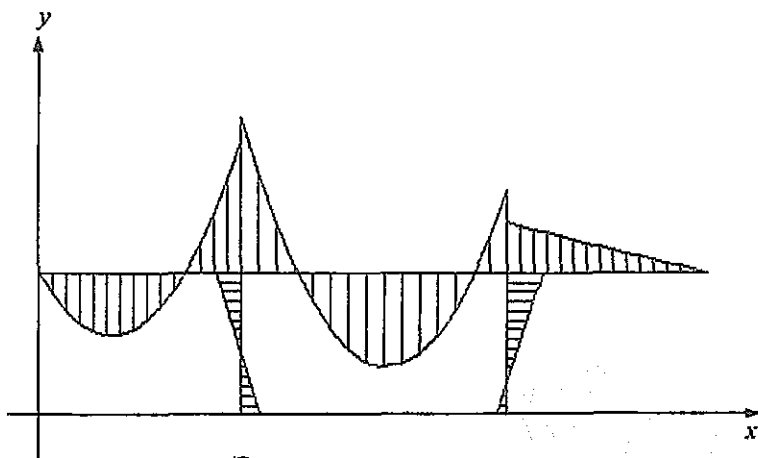
Рис. 6.4.

Выпишем степени свободы для каждого элемента, как показано на рисунке (Рис. 6.4.)

Номер элемента	Степени свободы элемента			
	0	2	0	3
1	0	2	0	3
2	0	0	1	3
3	0	3	0	4
4	0	0	1	4
5	0	4	0	5



Эпюра поперечных сил



Эпюра моментов

**ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ**  
Имя файла (pag82.bas)

№ эле мента	Координаты узлов				Степени свободы узлов				Жесткость на изгиб
	узел 1		узел 2		узел 1		узел 2		
	X	Y	X	Y	си- ла	мо- мент	си- ла	мо- мент	
1	0.00	9.00	12.00	9.00	0	2	0	3	0.30000E+01
2	12.00	0.00	12.00	9.00	0	0	1	3	0.15000E+01
3	12.00	9.00	28.00	9.00	0	3	0	4	0.40000E+01
4	28.00	0.00	28.00	9.00	0	0	1	4	0.15000E+01
5	28.00	9.00	40.00	9.00	0	4	0	5	0.30000E+01

**ВЕКТОР НАГРУЗОК**

$$y(1) = 0$$

$$y(2) = -36$$

$$y(3) = -28$$

$$y(4) = 64$$

$$y(5) = 0$$

**РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТА  
ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И УГЛЫ ПОВОРОТА**

$$x(1) = 50.276$$

$$x(2) = -31.934$$

$$x(3) = -8.1319$$

$$x(4) = 30.477$$

$$x(5) = -15.238$$

ЭПОРА МОМЕНТОВ

ДЛИНА ЗНАЧЕНИЕ

Номер элемента												
1	0.00	2.00	4.00	6.00	8.00	10.00	12.00					
	+0.000E+00	-1.998E+01	-2.797E+01	-2.395E+01	-7.934E+00	+2.008E+01	+6.010E+01					
2	0.00	1.50	3.00	4.50	6.00	7.50	9.00					
	-8.297E+00	-5.079E+00	-1.862E+00	+1.355E+00	+4.573E+00	+7.790E+00	+1.101E+01					
3	0.00	2.67	5.33	8.00	10.67	13.33	16.00					
	+7.111E+01	+1.219E+01	-2.540E+01	-4.165E+01	-3.657E+01	-1.016E+01	+3.759E+01					
4	0.00	1.50	3.00	4.50	6.00	7.50	9.00					
	+4.573E+00	+1.355E+00	-1.862E+00	-5.079E+00	-8.297E+00	-1.151E+01	-1.473E+01					
5	0.00	2.00	4.00	6.00	8.00	10.00	12.00					
	+2.286E+01	+1.905E+01	+1.524E+01	+1.143E+01	+7.619E+00	+3.810E+00	-1.907E-06					

## ЭЩОРА ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ

### ДЛИНА ЗНАЧЕНИЕ

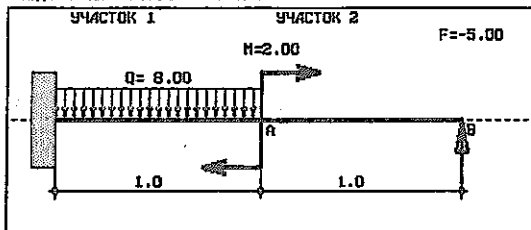
Номер элемента	0.00	2.00	4.00	6.00	8.00	10.00	12.00
1	+1.299E+01	+6.992E+00	+9.918E-01	-5.008E+00	-1.101E+01	-1.701E+01	-2.301E+01
2	0.00	1.50	3.00	4.50	6.00	7.50	9.00
	-2.145E+00	-2.145E+00	-2.145E+00	-2.145E+00	-2.145E+00	-2.145E+00	-2.145E+00
3	0.00	2.67	5.33	8.00	10.67	13.33	16.00
	+2.609E+01	+1.809E+01	+1.009E+01	+2.095E+00	-5.905E+00	-1.391E+01	-2.191E+01
4	0.00	1.50	3.00	4.50	6.00	7.50	9.00
	+2.145E+00	+2.145E+00	+2.145E+00	+2.145E+00	+2.145E+00	+2.145E+00	+2.145E+00
5	0.00	2.00	4.00	6.00	8.00	10.00	12.00
	+1.905E+00	+1.905E+00	+1.905E+00	+1.905E+00	+1.905E+00	+1.905E+00	+1.905E+00

Подобным образом рассчитываются и балки, т.е. принципиальных отличий между расчётом балки или рамы нет.

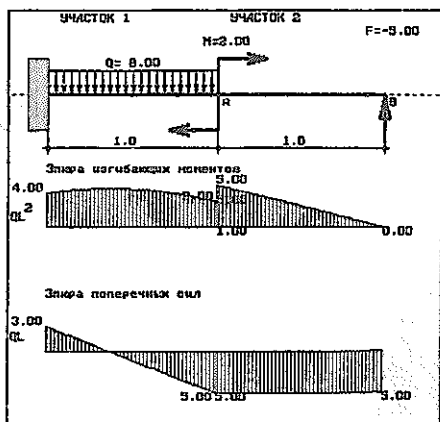
Основываясь на приведенных выше выкладках, были составлены 2 программы для расчета балок.

Первая программа предназначена для расчёта балок защемлённых одним концом и построения эпюр изгибающих моментов поперечных сил. Пример ввода исходных данных показан ниже

ВВЕДИТЕ ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ( ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ )  
 Длина 1 участка = 1.00  
 Длина 2 участка = 1.00  
 Распределенная сила на 1 участке = 8.00  
 Распределенная сила на 2 участке = 0.00  
 СИЛА в точке А = 0.00  
 МОМЕНТ в точке А = 2.00  
 СИЛА в точке В = -5.00  
 МОМЕНТ в точке В = 0.00  
 Допустимое напряжение [МПа] = 140.00  
 Интенсивность распределенной нагрузки [кН/м] = 50.00  
 Реальное значение длины [м] = 0.40  
 БУДЕТЕ КОРРЕКТИРОВАТЬ? Y/N



Результатами расчёта являются эпюры моментов и поперечных сил, а также определение момента сопротивления



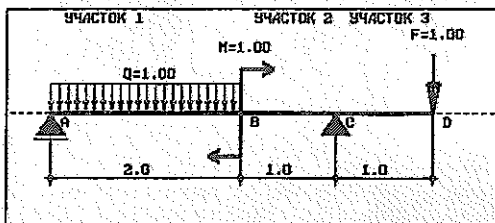
РЕЗУЛЬТАТ:  
 ТРЕБУЕМЫЙ  
 МОМЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ  
 [сантиметр в кубе]  
 $W_x = 2.866E+0002$

Печать [P]

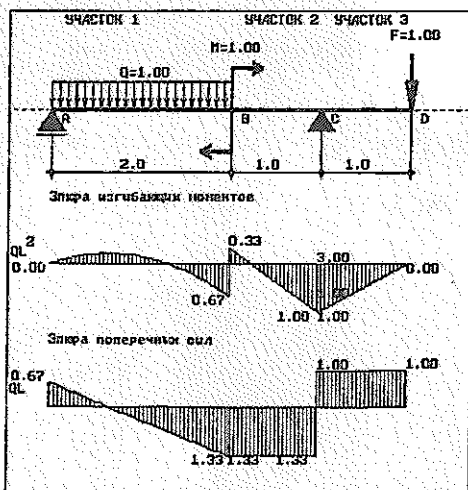


Вторая программа предназначена для расчёта двух опорных балок и построения эпюр поперечных сил, изгибающих моментов и прогибов. Пример исходных данных и результаты представлены ниже

ВВЕДИТЕ ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ (ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ):  
 Длина 1 участка = 2.00  
 Длина 2 участка = 1.00  
 Длина 3 участка = 1.00  
 Распределенная сила на 1 участке = 1.00  
 Распределенная сила на 2 участке = 0.00  
 Распределенная сила на 3 участке = 0.00  
 СИД в точке А = 0.00 МОМЕНТ в точке А = 0.00  
 СИД в точке В = 0.00 МОМЕНТ в точке В = 1.00  
 СИД в точке С = 0.00 МОМЕНТ в точке С = 0.00  
 СИД в точке D = 1.00 МОМЕНТ в точке D = 0.00  
 Допустимое напряжение [MPa] = 140.00  
 Интенсивность распределенной нагрузки [kN/m] = 50.00  
 Реальное значение длины [m] = 0.40  
 Введите опоры: 1 если А; 2 если В; 3 если С; 4 если D;  
 Первая опора: 1.00  
 Вторая опора: 3.00  
 БУДЕТЕ КОРРЕКТИРОВАТЬ? Y/N



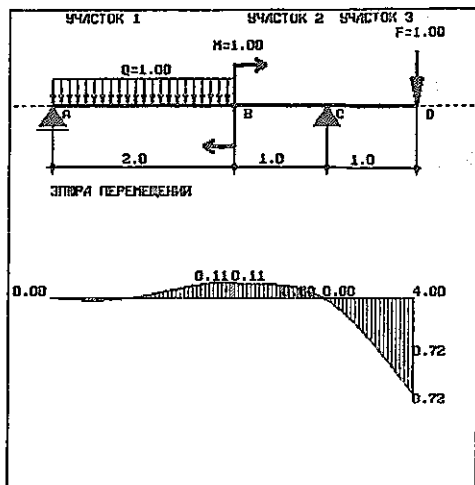
## Результаты



РЕЗУЛЬТАТЫ:  
 УРЕЗАННЫЙ  
 МОМЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ  
 (сантиметр в кубе)  
 $W_x = 5.71E+0001$

Печать [P]

## Прогиб балки



В приложении приведены исходные данные и программа расчета балочных конструкций.

В заключение можно отметить что, хотя приведённые здесь конечные элементы просты, но они практически отражают сущность метода.

### ПРИЛОЖЕНИЕ.

Здесь приведена программа для расчета изгибаемых стержневых конструкций с учетом нормальных деформаций.

### ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

```
8 3
0 0 1 2 3 4
0 0 0 4 1
344.7917 165500000
0 0 0
2 3 4 5 6 7
0 4 5 4 1
344.7917 165500000
0 0 0
5 6 7 0 0 8
```

5 4 5 0 1  
344.7917 165500000  
0 0 0  
1  
2 10

## ПРОГРАММА РАСЧЕТА

```
DEFDBL A-Z
CLS
WIDTH 80, 50
REDIM K(6, 6), C(6, 6), KC(6, 6), x(2), y(2), p(2)
REDIM A(10, 10), B(10), U(10)
REDIM ST(6) AS INTEGER
file$ = "NAG1.BAS"
GOSUB 5 'Построение матрицы жесткости
GOSUB 25 'Решение системы линейных уравнений
GOSUB 20 'Построение эпюры моментов
AS = INPUT$(1)
WIDTH 80, 25
RUN "GRAF.BAS"
END
5
*****
'* Построение матрицы жесткости конструкции
*****
OPEN file$ FOR INPUT AS #2
INPUT #2, N, NE
FOR I = 1 TO N
FOR J = 1 TO N
A(I, J) = 0
NEXT J
NEXT I
FOR JJ = 1 TO NE
LOCATE 1, 1
PRINT "N="; JJ
FOR I = 1 TO 6
INPUT #2, ST(I)
NEXT I
INPUT #2, x(1), y(1), x(2), y(2), SH
```

```

INPUT #2, ei, ef
L = SQR((x(2) - x(1)) ^ 2 + (y(2) - y(1)) ^ 2)
SinA = (y(2) - y(1)) / L
CosA = (x(2) - x(1)) / L
INPUT #2, p(1), p(2), kn
GOSUB 30
K(1, 1) = ef / L
K(1, 2) = 0
K(1, 3) = 0
K(1, 4) = -ef / L
K(1, 5) = 0
K(1, 6) = 0
K(2, 2) = 12# * ei / L ^ 3 + kn * L / 2
K(2, 3) = 6# * ei / L ^ 2
K(2, 4) = 0
K(2, 5) = -12# * ei / L ^ 3
K(2, 6) = K(2, 3)
K(3, 3) = 4# * ei / L
K(3, 4) = 0
K(3, 5) = -K(2, 3)
K(3, 6) = 2# * ei / L
K(4, 4) = ef / L
K(4, 5) = 0
K(4, 6) = 0
K(5, 5) = 12# * ei / L ^ 3 + kn * L / 2
K(5, 6) = -K(2, 3)
K(6, 6) = K(3, 3)
FOR I = 2 TO 6
FOR J = 1 TO I
K(I, J) = K(J, I)
NEXT J
NEXT I
C(1, 1) = CosA: C(1, 2) = SinA:
C(2, 1) = -SinA: C(2, 2) = CosA:
C(3, 3) = 1#
C(4, 4) = CosA: C(4, 5) = SinA:
C(5, 4) = -SinA: C(5, 5) = CosA
C(6, 6) = 1#
***** [A] = [K] * [C]
FOR L = 1 TO 6

```



```

OPEN "out.bas" FOR OUTPUT AS #1
OPEN file$ FOR INPUT AS #2
INPUT #2, N, NE
PRINT #1, NE
PRINT #1, " Nэл s Момент Поперечная сила Нормальная сила"
'PRINT " Nэл s Момент Поперечная сила Нормальная сила"
FOR J = 1 TO NE
PRINT J
FOR I = 1 TO 6
INPUT #2, ST(I)
NEXT I
INPUT #2, x(1), y(1), x(2), y(2), SH
PRINT #1, J;
PRINT #1, USING " ###.##"; x(1); y(1); x(2); y(2);
PRINT #1, USING " ###"; SH
L = SQR((x(2) - x(1)) ^ 2 + (y(2) - y(1)) ^ 2)
CosA = (x(2) - x(1)) / L
SinA = (y(2) - y(1)) / L
INPUT #2, ei, ef
INPUT #2, p(1), p(2), kn
IF ABS(p(1)) >= ABS(p(2)) THEN
p = p(1) - p(2)
q = p(2)
kod = 0
ELSE
p = p(2) - p(1)
q = p(1)
kod = 1
END IF
v5 = U(ST(1)) * CosA + U(ST(2)) * SinA
v1 = -U(ST(1)) * SinA + U(ST(2)) * CosA
v2 = U(ST(3))
v6 = U(ST(4)) * CosA + U(ST(5)) * SinA
v3 = -U(ST(4)) * SinA + U(ST(5)) * CosA
v4 = U(ST(6))
FOR s = 0 TO L + .01 STEP L / SH
IF kod = 0 THEN x = s
IF kod = 1 THEN x = L - s
m1 = (12# / L ^ 3 * s - 6# / L ^ 2) * v1
m2 = (-4# / L + 6# / L ^ 2 * s) * v2

```

$M3 = (6\# / L^2 - 12\# / L^3 * s) * v3$   
 $M4 = (-2\# / L + 6\# / L^2 * s) * v4$   
 $Mr = q / 2\# * ((x - L / 2\#)^2 - L^2 / 12\#)$   
 $Mt = (-x^3 / 6\# / L + x^2 * .5\# - x * L * .35\# + L^2 * .05\#)$   
 $* p$

moment = (m1 + m2 + M3 + M4) \* ei + Mr + Mt

Q1 = 12\# / L^3 \* v1

Q2 = 6\# / L^2 \* v2

Q3 = -12\# / L^3 \* v3

Q4 = 6\# / L^2 \* v4

Qr = q \* (x - L / 2\#)

Qt = (-x^2 / L \* .5\# + x \* .35\# \* L) \* p

poper = (Q1 + Q2 + Q3 + Q4) \* ei + Qr + Qt

normal = (v6 - v5) \* ef / L

PRINT #1, USING " ###.##"; s;

PRINT #1, USING " #####.#####"; moment; poper; normal

PRINT USING " ###.##"; s;

PRINT USING " #####.#####"; moment; poper; normal

NEXT s

NEXT J

PRINT #1, "ВЫВОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ"

FOR I = 1 TO N

PRINT #1, USING "U(##)=##.#####^^^^"; I; U(I)

NEXT I

CLOSE #1

CLOSE #2

RETURN

25

\*\*\*\*\*

\* Программа решения системы линейных уравнений

\*\*\*\*\*

' ПРЯМОЙ ХОД

NB = N - 1

FOR J = 1 TO NB

LOCATE 2, 1

PRINT "N="; J

L = J + 1

FOR JJ = L TO N

IF NOT (A(J, JJ) = 0) THEN

XM = A(J, JJ) / A(J, J)

```

FOR I = JJ TO N
A(JJ, I) = A(JJ, I) - A(J, I) * XM
NEXT I
B(JJ) = B(JJ) - B(J) * XM
END IF
NEXT JJ
NEXT J
' ОБРАТНЫЙ ХОД
U(N) = B(N) / A(N, N)
FOR J = 1 TO NB
JJ = N - J
L = JJ + 1
SUM = 0
FOR I = L TO N
SUM = SUM + A(JJ, I) * U(I)
NEXT I
U(JJ) = (B(JJ) - SUM) / A(JJ, JJ)
NEXT J
REM ВЫВОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ
FOR I = 1 TO N
PRINT USING "U(##)=##.#####^ ^ ^"; I; U(I)
NEXT I
A$ = INPUT$(1)
RETURN
30
*****
'* Обсчет узловых сил от распределенной нагрузки
*****
IF ABS(p(1)) >= ABS(p(2)) THEN
p = p(1) - p(2)
q = p(2)
r1 = q * L / 2# + .35# * p * L
r2 = q * L / 2# + .15# * p * L
m1 = q * L ^ 2 / 12# + .05# * p * L ^ 2
m2 = -q * L ^ 2 / 12# - p * L ^ 2 / 30#
ELSE
p = p(2) - p(1)
q = p(1)
r1 = q * L / 2# + .15# * p * L
r2 = q * L / 2# + .35# * p * L

```



```

m1 = q * L ^ 2 / 12# + p * L ^ 2 / 30#
m2 = -q * L ^ 2 / 12# - .05# * p * L ^ 2
END IF
B(ST(1)) = B(ST(1)) - r1 * SinA
B(ST(2)) = B(ST(2)) + f1 * CosA
B(ST(3)) = B(ST(3)) + m1
B(ST(4)) = B(ST(4)) - r2 * SinA
B(ST(5)) = B(ST(5)) + r2 * CosA
B(ST(6)) = B(ST(6)) + m2
RETURN

```

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Эл	s	Момент		Попереч. сила	Нормал. сила
1	0.00	0.00	0.00	4.00	1
0.00		-0.00000000		5.00000042	8.00000000
4.00		20.00000170		5.00000042	8.00000000
2	0.00	4.00	5.00	4.00	1
0.00		20.00000170		-8.00000000	-4.99999958
5.00		-19.99999830		-8.00000000	-4.99999958
3	5.00	4.00	5.00	0.00	1
0.00		-19.99999830		4.99999958	-8.00000000
4.00		-0.00000000		4.99999958	-8.00000000

### ВЫВОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

```

U( 1)=-1.64350536783D-01
U( 2)= 5.02719369502D-01
U( 3)= 1.93353474311D-07
U( 4)=-4.83384535605D-02
U( 5)= 5.02719218445D-01
U( 6)=-1.93353474311D-07
U( 7)=-4.83384289316D-02
U( 8)=-1.64350492451D-01

```

## ЛИТЕРАТУРА:

1. Иосилевич Г.Б. и др. Прикладная механика, Москва, 1985.
2. Степин П.А. Сопротивление материалов, Москва, 1986.
3. Миролюбов И.Н. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов, Москва, 1985.
4. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. Москва : Стройиздат, 1982. 448 с.
5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с..
6. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975.
7. Шапошников Н.Н., Тарабасов Н.Д., Петров В.Б., Млячков В.И. Расчет машиностроительных конструкций на жесткость и прочность. М.: Машиностроение, 1981.
8. Свидетельство № DGU 00309 (РУз.) об официальной регистрации программ для ЭВМ. Название программы «UZ KN1.pas» // Каримов Р.И., Нурматов А.С., 2000.
9. Свидетельство № DGU 00442 (РУз.) об официальной регистрации программ для ЭВМ. Название программы «UZ KN2.pas» // Каримов Р.И., Нурматов А.С., 2001.
10. Свидетельство № DGU 00443 (РУз.) об официальной регистрации программ для ЭВМ. Название программы «UZ KN3.pas» // Каримов Р.И., Нурматов А.С., 2001.
11. Свидетельство № DGU 00458 (РУз.) об официальной регистрации программ для ЭВМ. Название программы «KRUCHEN.pas» // Каримов Р.И., Тураев Ф.Т., 2001.

## ОГЛАВЛЕНИЕ:

<b>Предисловие</b> .....	3
<b>Раздел 1. Основные понятия и определения</b> .....	4
<b>Раздел 2. «Растяжение, сжатие брусьев, стержней»</b> .....	15
2.1. <i>Исходные понятия</i> .....	16
2.2. <i>Условия задач №1, №2, №3, №4</i> .....	21
2.3. <i>Система единиц и принятые обозначения</i> .....	22
2.4. <i>Пример выполнения задачи №1</i> .....	36
2.5. <i>Пример выполнения задачи №2</i> .....	40
2.6. <i>Пример выполнения задачи №3</i> .....	44
2.7. <i>Пример выполнения задачи №4</i> .....	48
<b>Раздел 3. «Расчет брусьев и стержней при кручении»</b> .....	53
3.1. <i>Исходные понятия</i> .....	54
3.2. <i>Условия задач №5, №6</i> .....	56
3.3. <i>Система единиц и принятые обозначения</i> .....	56
3.4. <i>Пример выполнения задачи №5</i> .....	65
3.5. <i>Пример выполнения задачи №6</i> .....	69
<b>Раздел 4. «Расчет брусьев и стержней при изгибе»</b> .....	74
4.1. <i>Исходные понятия</i> .....	75
4.2. <i>Условия задач №7, №8</i> .....	79
4.3. <i>Система единиц и принятые обозначения</i> .....	80
4.4. <i>Пример выполнения задачи №7</i> .....	88
4.5. <i>Пример выполнения задачи №8</i> .....	91
<b>Раздел 5. «Расчет рам и брусьев круглого сечения при изгибе и кручении»</b> .....	96
5.1. <i>Условия задачи №9</i> .....	97
5.2. <i>Система единиц и принятые обозначения</i> .....	97
5.3. <i>Пример расчета стальной рамы</i> .....	102
<b>Раздел 6. «Расчет конструкций на ЭВМ»</b> .....	109
6.1. <i>Расчет стержней на растяжение и сжатие</i> .....	109
6.2. <i>Кручение стержней</i> .....	116
6.3. <i>Расчет рамных и балочных конструкций</i> .....	118
<b>Литература</b> .....	138

Подписано к печати 2.12.2003. Формат 60x84 1/16.  
Объем 8,75 п.л. Тираж 50. Заказ № 775.  
Отпечатано в типографии ТГТУ. г.Ташкент ул. Талабалар, 54.