И. В. САВЕЛЬЕВ

УМУМИЙ ФИЗИКА КУРСИ

I

И. В. САВЕЛЬЕВ

УМУМИЙ ФИЗИКА КУРСИ

I ТОМ

МЕХАНИКА, ТЕБРАНИШЛАР ВА ТЎЛҚИНЛАР, МОЛЕКУЛЯР ФИЗИКА

РУСЧА ТЎРТИНЧИ, ҚАЙТА ИШЛАНГАН НАШРИДАН ТАРЖИМА

СССР Олий ва махсус ўрта таълим министрлиги томонидан олий техника ўқув юртларининг студентлари учун қўлланма сифатида рухсат этилган

«ЎҚИТУВЧИ» НАШРИЁТИ
ТОШКЕНТ—1973

Ушбу китобнинг асосий мақсади студентларни физиканинг асосий идеялари ва методлари билан таништиришдан иборат. Асосий эътибор физикавий қонунларнинг маъносини тушунтиришга ва улардан онгли равишда фойдаланишга қаратилди. Китобнинг ҳажми унчалик катта бўлмаса ҳам, у келгусида назарий физика ва бошқа физикавий фанларни яхши ўзлаштириб олишда етарлича тайёргарлик берувчи қўлланма бўлиб хизмат қилади.

Китоб ва унинг таржимаси ҳақидаги фикр ва мулоҳазаларингизни қуйидаги адресга юборишингизни сўраймиз: Тошкент, Навоий, 30. «Ўқитувчи» нашриёти, физика-математика адабиёти редакцияси.

На узбекском языке

ИГОРЬ ВЛАДИМИРОВИЧ САВЕЛЬЕВ

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ТОМ I

Пособие для студентов высших технических учебных заведений

Перевод с русского 4-го переработанного издания издательство «Наука» М., 1970.

Издательство «Ўқитувчи»— Ташкент—1973

Таржимонлар: *М. Юнусов* (1,2- қисмлар), *Р. Сайдалиев* (3- қисм)
Редакторлар: *М. Пўлатов, М. Юнусов* Тех. редактор *Н. Сорокина*
Бадиий редактор *Е. Соин* Корректор *А. Рашидхўжаева*

Теришга берилди 19/III-1973 й. Босишга рухсат этилди 10/X-1973 й. Қоғози №3.60×90[1]/16.
Физик л. 25,75. Нашр. л. 24,34. Тиражи 17000.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Шартнома 121-72. Баҳоси 68 т.
Муқоваси 10 т.

ЎзССР Министрлар Советининг нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари бўйича Давлат комитетининг Тошкент полиграфия комбинати. Навоий кўчаси. 30. 1973. Зак. № 1317.

Ташкентский полиграфкомбинат Государственного комитета Совета Министров УзССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, ул. Навои, 30.

РУСЧА БИРИНЧИ НАШРИГА ЁЗИЛГАН СЎЗ БОШИДАН

Қитобхонларнинг эътиборига ҳавола қилинаётган бу китоб олий техника ўқув юртлари учун ёзилган умумий физика курси бўйича ўқув қўлланманинг биринчи томидир. Автор кўп йиллар давомида Москва инженер-физиклар институтида умумий физикадан дарс берди. Шу сабабли автор ушбу қўлланмани ёзишда, аввало, олий техника ўқув юртларининг инженер-физик ихтисоси студентларини назарда тутганлиги табиийдир.

Автор китобни ёзишда ўқувчиларни физика фанининг асосий идеялари ва методлари билан таништиришга, уларни физика нуқтаи назаридан фикр юритишга ўргатишга интилди. Шунинг учун ҳам китоб ўз характери билан энциклопедик асар эмас. Унинг мазмуни асосан физика қонунларининг маъносини тушунтиришга ва улардан тушунган ҳолда фойдаланишга бағишланган. Автор ўқувчини мумкин қадар кўпроқ мисоллар билан таништиришни эмас, балки унга физика фанининг фундаментал асосларидан чуқур билим беришни ўз олдига мақсад қилиб қўйган.

И. Савельев

1961 й.

РУСЧА ТЎРТИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Китобнинг ушбу нашрини тайёрлаш вақтида анчагина ўзгаришлар киритилиб, қайта ишлаб чиқилди. 7, 17, 18, 22, 27, 33, 36, 37, 38, 40, 43, 68, 88-параграфлар батамом ёки қисман янгидан ёзилди. 2, 11, 81, 89, 104, 113-параграфларга муҳим ўзгаришлар ёки қўшимчалар киритилди.

Китобни иккинчи ва учинчи нашрларга тайёрлаш вақтида 14, 73, 75-параграфлар янгидан ёзилган эди. 109, 114, 133, 143-параграфларга эса муҳим ўзгаришлар ёки қўшимчалар киритилган эди.

Шундай қилиб, биринчи томнинг қиёфаси биринчи нашрдагига қараганда анча ўзгарган. Бу ўзгаришлар кейинги ўн йил ичида Москва инженер-физиклар институтида умумий физикадан дарс бериш давомида автор орттирган методик тажрибани акс эттиради.

И. Савельев

1969 й., ноябрь.

I-ҚИСМ
МЕХАНИКАНИНГ ФИЗИК АСОСЛАРИ

МУҚАДДИМА

Механика жисмларнинг ёки уларнинг қисмларининг бир-бирига нисбатан кўчишидан иборат бўлган материя ҳаракатининг энг содда тури ҳақидаги таълимотдир.

Биз жисмларнинг кўчишини кундалик ҳаётимизда кузатамиз. Шунинг учун ҳам механика тушунчалари кўргазмалидир. Механика барча табиий фанлар ичида энг аввал кенг ривожланганлигига ҳам сабаб ана шу.

Бир жисмнинг ҳаракати турли жисмларга нисбатан ҳар хил характерда бўлиши мумкин. Масалан, агар 1 жисм бизга нисбатан тинч турган бўлиб, 2 ва 3 жисмлар бир томонга қараб бир хил тезлик билан ҳаракатланаётган бўлса, у ҳолда 3 жисм 1 жисмга нисбатан кўчади, бироқ 2 жисмга нисбатан эса тинч ҳолатда қолади. Шу сабабли ҳаракатни тушунтириш учун берилган жисмнинг ҳаракатини бошқа қандай жисмга (ёки бир-бирларига нисбатан тинч турган жисмлар группасига) нисбатан ҳисоблаш кераклиги ҳақида келишиб олиш лозим. Ана шу мақсадда танлаб олинган жисм (ёки жисмлар группаси) саноқ системасини ташкил этади.

Амалда ҳаракатни тавсифлаш учун саноқ системасини ташкил этувчи жисмлар билан бирор координата системасини, масалан, декарт ёки тўғри бурчакли координаталар системасини боғлашга тўғри келади.

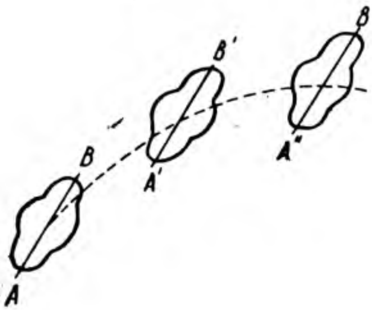
Жисмнинг координаталари унинг фазодаги вазиятини аниқлашга имкон беради. Ҳаракат фазо ва вақтда содир бўлади (фазо ва вақт — материянинг мавжудлик формалари). Шу сабабли ҳаракатни тавсифлаш учун вақтни ҳам ҳисоблаш керак. Бу соат ёрдамида амалга оширилади.

Танлаб олинган саноқ системаси билан боғланган координата системасига ва соатга эга бўлган ҳолда жисмларнинг ҳаракатини тавсифлашга ўтса бўлади.

Жисмларнинг харакати, одатда, уларга кучлар таъсир этиб турган шароитда содир бўлади. Бу кучларнинг таъсири жисмларнинг ҳаракатланиш характерини белгилаш билан бирга уларни деформациялайди, яъни уларнинг ўлчамлари билан шаклларини ўзгартиради. Кўп ҳолларда бундай деформациялар шу қадар заиф бўладики, жисмларнинг ҳаракатини тавсифлашда уларни эътиборга олмаса ҳам бўлади. Агар қаралаётган масаланинг шартларига биноан жисмнинг деформацияларини эътиборга олмаслик мумкин бўлса, бундай жисм **абсолют қаттиқ жисм** дейилади. Шуни назарда тутмоқ керакки, табиатда абсолют қаттиқ (яъни мутлақо деформацияланмайдиган) жисмлар йўқ. Фақат жисмлар маълум шароитларда ҳаракатланган вақтда деформациянинг роли ҳисобга олмаслик даражада кичиклиги уларни абсолют қаттиқ жисм деб қабул қилишга имкон беради.

Баъзан жисмларнинг ҳаракатини қаралаётганда уларнинг ўлчамларини эътиборга олмаса бўлади. Бунинг учун жисмнинг ўлчамлари берилган масалада иш кўриладиган бошқа барча ўлчамлардан кичик бўлиши керак. Масалан, автомобилнинг Самарқанддан Тошкентга боргунча босиб ўтган йўлини аниқлаётганда автомобиль ўлчамларини ҳисобга олмаса ҳам бўлади.

Муайян масалада ўлчамларини эътиборга олмаса ҳам бўладиган жисмни **моддий нуқта** деб аталади. Берилган конкрет жисмни моддий нуқта деб қабул қилиш мумкин ёки мумкин эмаслик масаласи жисмнинг ўлчамларига эмас, балки масаланинг шартларига боғлиқдир. Бир жисмнинг ўзи айрим ҳолларда моддий нуқта деб қаралиши мумкин бўлса, бошқа ҳолларда эса ўлчамли деб қаралиши зарур бўлади. Масалан, Ернинг Қуёш атрофидаги ҳаракати траекториясини ҳисоблаганда Ерни моддий нуқта деб қараш мумкин. Жисмларнинг Ер юзидаги ҳаракатини текшираётганда эса у ўлчамли жисм деб қаралиши зарур.

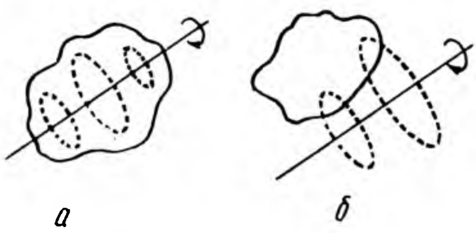


1- расм.

Қаттиқ жисмнинг ҳар қандай ҳаракатини иккита асосий ҳаракат турига — илгариланма ва айланма ҳаракатларга ажратиш мумкин.

Илгариланма ҳаракат — бу шундай ҳаракатки, бунда ҳаракатланаётган жисм билан боғланган исталган тўғри чизиқ ўзига параллеллигича қолади (1- расм).

Айланма ҳаракат вақтида жисмнинг барча нуқталари марказлари айланиш ўқи деб аталувчи бирдан-бир тўғри чизиқда ётувчи айланалар бўйлаб ҳаракатланади (2- *а* расм). Айланиш ўқи жисмдан ташқарида ётиши ҳам мумкин (2- *б* расм).



2- расм.

Бирор жисмни моддий нуқта деб қабул қилганимизда унинг ўлчамларини ҳисобга олмаганлигимиз сабабли у орқали ўтувчи ўқ атрофидаги айланма ҳаракат ҳақидаги тушунча бундай жисмга яроқсиз.

Механика уч қисмга бўлинади: 1) кинематика, 2) статика ва 3) динамика. Кинематикада жисмларнинг ҳаракатини бу ҳаракатни юзага келтирувчи сабабларни ҳисобга олмаган ҳолда ўрганилади, статикада жисмларнинг мувозанат шартларини ўрганилади ва, ниҳоят, динамикада жисмларнинг ҳаракатини у ёки бу характердаги харакатларни юзага келтирувчи сабаблар (жисмлар орасидаги ўзаро таъсирлар) билан боғланган ҳолда ўрганилади. Мувозанат ҳаракатнинг хусусий ҳоли бўлгани учун динамика қонунлари статика учун замин бўлиши табиийдир. Шу сабабли физика курсини ўрганишда статика бўлимини алоҳида ўрганилмайди.

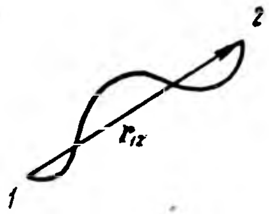
I БОБ

ҚИНЕМАТИКА

1-§. Нуқтанинг кўчиши. Векторлар ва скалярлар

Моддий нуқта ўз ҳаракати давомида қандайдир чизиқ чизади. Бу чизиқни моддий нуқтанинг траекторияси дейилади. Траекториясининг шаклига қараб, ҳаракат тўғри чизиқли, айланма, эгри чизиқли ва ҳоказо ҳаракатларга ажратилади.

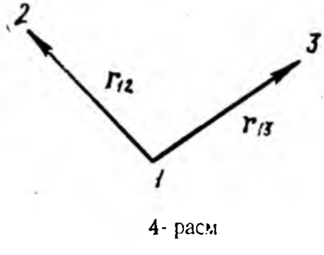
Фараз қилайлик, моддий нуқта (бундан кейин биз қисқалик учун уни нуқта деб атаймиз) бирор траектория бўйлаб *1* нуқтадан *2* нуқтага кўчган бўлсин (3-расм). Траектория бўйлаб ҳисобланган *1* нуқта билан *2* нуқта орасидаги масофа ўтилган йўлдан иборатдир. Уни биз s билан белгилаймиз.



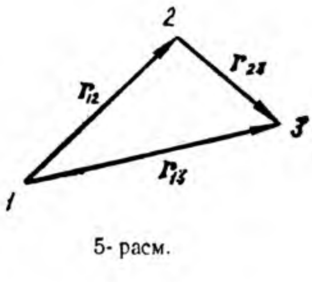
3-расм.

1 нуқтадан *2* нуқтага ўтказадиган тўғри чизиқ кесмаси кўчиш дейилади. Уни $\mathbf{r}_{12}$ билан белгилаймиз. Кўчиш ўз узунлигидан (у $\mathbf{r}_{12}$ кесманинг узунлигига тенг) ташқари яна йўналиш билан ҳам характерланади. Ҳақиқатан ҳам, иккита бир хил катталикдаги $\mathbf{r}_{12}$ ва $\mathbf{r}_{13}$ кўчишларни тасаввур қилайлик (4-расм). Бу кесмаларнинг узунлиги бир хил бўлишига қарамасдан улар турли кўчишларни характерлаётганлиги яққол кўриниб турибди.

Кўчишга ўхшаш катталиклар алоҳида қўшиш қоидасига бўйсунади. Бу қоидани қуйидаги мисол ёрдамида тушунтириш мумкин. Фараз қилайлик, нуқта кетма-кет икки марта кўчсин (бу кўчишлар $\mathbf{r}_{12}$ ва $\mathbf{r}_{13}$ бўлсин, 5-расм). Бу икки кўчишнинг йиғиндиси деб уларнинг натижасига мос натижага олиб келувчи учинчи бир $\mathbf{r}_{13}$ кўчишни қабул қилиш табиийдир.



4-расм



5-расм.

Шу кўчишга ўхшаш катталиклар, яъни ҳам катталиги, ҳам йўналиши билан характерланувчи ва шунингдек, бир-бири билан 5- расмда кўрсатилган қоида бўйича қўшилувчи катталиклар, векторлар деб аталади. Тезлик, тезланиш, куч ва қатор бошқа катталиклар вектор катталиклар ҳисобланади.

Фақат сон қиймати билан характерланиши мумкин бўлган катталиклар скаляр дейилади. Скалярларга йўл, вақт, масса ва бошқалар мисол бўла олади.

Векторлар одатда йўғон ҳарфлар билан белгиланади. Масалан, *1* нуқтадан *2* нуқтага кўчиш вектори $\mathbf{r}_{12}$ билан белгиланади. Оддий шрифт билан ёзилган худди шу ҳарф мос векторнинг катталиги (сон қиймати) ни ёки, одатда айтилишича, шу векторнинг модулини ифодалайди[1]. Модулни ифодалаш учун, шунингдек, иккита вертикал чизиқ орасида олинган вектор символдан ҳам фойдаланилади. Шундай қилиб,

$$|\mathbf{A}| = A = \mathbf{A} \text{ векторнинг модулига,}$$
$$|\mathbf{r}_{12}| = r_{12} = \mathbf{r}_{12} \text{ векторнинг модулига.}$$

Векторнинг модули — скаляр бўлиб, у доим мусбат бўлади.

Чизмаларда векторлар стрелкали тўғри чизиқ кесмалари ҳолида тасвирланади. Кесманинг узунлиги қабул қилинган масштабда векторнинг модулини берса, унинг стрелка билан кўрсатилган йўналиши эса векторнинг йўналишини кўрсатади.

5- расмда кўрсатилган векторларни қўшиш операцияси символлар ёрдамида қуйидагича ёзилади:

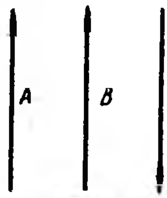
$$\mathbf{r}_{12} + \mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_{13}.$$

2- §. Векторлар ҳақида баъзи тушунчалар

Параллел тўғри чизиқлар бўйлаб (бир томонга ёки қарама-қарши томонларга) йўналган векторлар коллинеар векторлар дейилади.

Йўналишлари бир текисликка параллел бўлган векторлар компланар векторлар дейилади.

Модуллари бир хил бўлган ва бир томонга йўналган коллинеар векторлар ўзаро тенг деб ҳисобланади[2]. Модуллари тенг, лекин қарама-қарши йўналган коллинеар векторлар бир-биридан ишораси билан фарқ қилади деб ҳисобланади. Масалан, 6- расмда тасвирланган вектор-



6- расм.

---

[1] Ёзган вақтда векторлар устига стрелка қўйилган ҳарфлар билан белгиланади (масалан, $\vec{r}_{12}$) Бу ҳолда стрелкасиз худди ўша ҳарф векторнинг модулини ифодалайди.

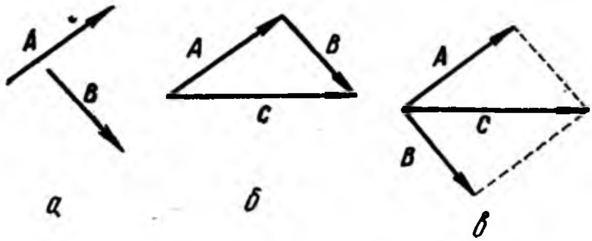
[2] Бунда эркин векторлар, яъни фазонинг исталган нуқтасидан бошлаб чизса бўладиган векторлар назарда тутилади. Эркин векторлардан ташқари учлари вектор орқали ўтувчи чизиқ бўйлаб сирпаниши мумкин бўлган сирпанувчи векторлар ва боғланган векторлар, яъни аниқ бир нуқтага қўйилган векторлар ҳам бор. Кейинги икки векторни эркин векторлар орқали ифодалаш мумкин; шу сабабли векторлар ҳисобига эркин векторлар тушунчаси асос қилиб олинган. Бу эркин вектор одатда тўғридан-тўғри вектор деб юритилади.

лар ва уларнинг модуллари орасида қуйидаги муносабатлар ўринли:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}; \quad \mathbf{A} = -\mathbf{C}; \quad \mathbf{B} = -\mathbf{C};$$

$$A = B = C \text{ ёки } |\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| = |\mathbf{C}|.$$

Векторларни қўшиш. Иккита вектор қўшилиб умумий ташкил этувчи вектор ҳосил қилиши ҳақида аввалги параграфда гапирилган эди. Бизга иккита **A** ва **B** векторлар берилган бўлсин (7-*а*



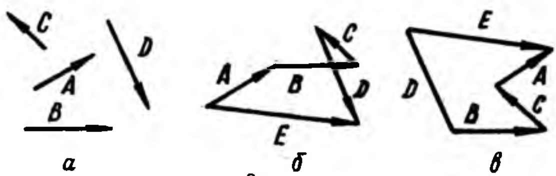
7- расм.

расм). Умумий ташкил этувчи **C** векторни топиш учун **B** векторни ўзига параллел ҳолда шундай кўчирамизки, натижада унинг боши **A** векторнинг охири билан устма-уст тушсин[1] (7-*б* расм). У ҳолда **A** векторнинг бошидан **B** векторнинг охирига қараб ўтказилган **C** вектор натижавий векторнинг ўзгинаси бўлади:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}.$$

Бироқ векторларни бошқача усулда ҳам қўшиш мумкин (7-*в* расм). **B** (ёки **A**) векторни иккаласининг учлари устма-уст тушадиган қилиб кўчирамиз. Сўнгра **A** ва **B** векторлардан параллелограмм тузамиз. Бу параллелограммнинг диагонали, равшанки, 7-*б* расмда топилган **C** векторнинг ўзгинаси бўлади. Ана шу сабабга кўра баъзида векторлар параллелограмм қоидасига биноан қўшилади деб айтилади.

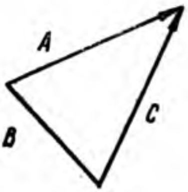
Бу кўрилган иккала *б*) ва *в*) усул ҳам бир хил натижа беради. Бироқ иккитадан кўпроқ векторларни қўшиш учун *б*) усул осонроқ ва қулайроқдир. Айтайлик **A**, **B**, **C** ва **D** векторлар берилган бўлсин (8-расм). Векторларни ўзларига параллел ҳолда шундай кўчи-



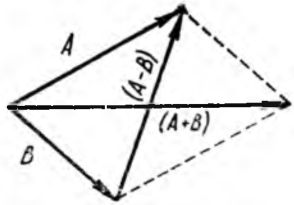
8- расм.

[1] Бундай кўчиришга **B** векторни ўзига тенг ва боши **A** векторнинг охири билан устма-уст тушадиган векторлар билан алмаштиришдан иборат деб қараш мумкин.

рамизки, ҳар бир кейинги векторнинг боши аввалги векторнинг охири билан устма-уст тушсин. Натижада синиқ чизиқ ҳосил бўлади. Натижавий вектор **E** қўрилаётган векторларнинг биринчиси **A** нинг бошидан кейингиси **D** нинг охирига қараб ўтказилган векторнинг ўзгинасидир. Натижавий вектор **E** берилган векторлар қандай тартибда қўшилаётганлигига боғлиқ эмаслигига осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкин. 8-*б* расмда $\mathbf{E} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D}$ ҳол, 8-*в* расмда эса $\mathbf{E} = \mathbf{D} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{A}$ ҳол тасвирланган.



9- расм.



10- расм

Векторларни айириш. Икки векторнинг айирмаси **A — B** деб шундай **C** векторга айтиладики, уни **B** вектор билан қўшганда **A** вектор ҳосил бўлсин (9- расм). **A — B** айирмани

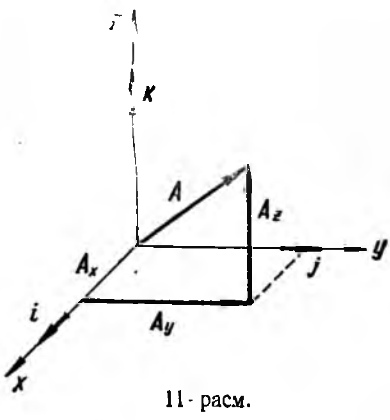
$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

кўринишда ёзиш мумкин бўлганлиги сабабли $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ векторни **A** векторга катталиги **B** векторга тенг, аммо йўналиши унга тескари бўлган векторни қўшиб ҳосил қилиш мумкин.

10- расмда **A** ва **B** векторларнинг йиғиндиси билан айирмаси ўзаро таққосланган.

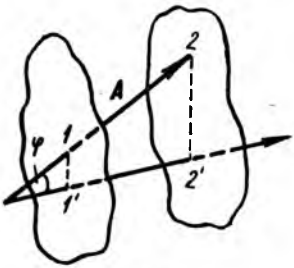
Векторларни ташкил этувчиларга ажратиш. Ҳар қандай **A** векторни, йиғиндиси **A** векторни ҳосил қилувчи бир нечта $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ ва ҳоказо векторлар билан алмаштириш мумкин. Бу ҳолда $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ ва ҳоказо векторлар **A** векторнинг ташкил этувчилари дейилади. **A** векторни бир нечта векторлар билан алмаштириш операцияси **A** векторни ташкил этувчиларга ажратиш дейилади. 11- расмда **A** векторнинг тўғри бурчакли координата ўқлари бўйлаб йўналган ташкил этувчиларга ажратилиши тасвирланган. $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$, $\mathbf{A}_z$ символлар билан **A** векторнинг x, y, z ўқлари бўйлаб ташкил этувчилари белгиланган.

Векторнинг ўққа проекцияси. Айтайлик, бизга **A** вектор ва фазодаги бирор йўналиш (ўқ) берилган бўлсин. Бу ўқни биз, масалан, n ҳарфи билан белгилайлик (12- расм). **A** векторнинг боши билан охири орқали n га перпендикуляр



11- расм.

қилиб текисликлар ўтказамиз. Бу текисликлар n ўқ билан кесишган $1'$ ва $2'$ нуқталар **A** векторнинг боши билан охирининг проекциялари деб аталади. Ўқнинг текисликлар орасидаги кесмасининг катталиги **A** векторнинг n йўналишига (ёки ўққа) проекцияси дейилади. Векторнинг проекцияси скаляр катталик бўлади. Агар $1'$ нуқтадан $2'$ нуқтага қараган йўналиш n йўналиш билан бир хил бўлса проекция мусбат ҳисобланади; акс ҳолда проекция манфий бўлади.



12- расм.

Проекцияни ўша векторнинг ҳарфи билан белгиланади, бунда шу ҳарфга индекс қилиб векторнинг проекцияси туширилган йўналишни кўрсатувчи ҳарф ёзилади. Масалан, **A** векторнинг n йўналишга проекцияси A_n билан белгиланади.

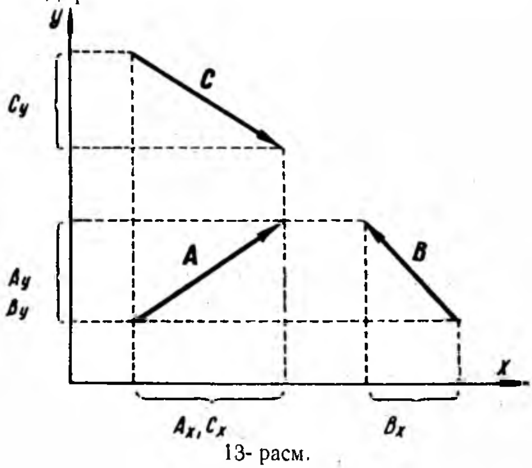
Энди **A** вектор n ўқ билан ҳосил қилган φ бурчакни (12- расм) эътиборингизга ҳавола қиламиз. A_n проекцияни қуйидаги йўл билан ҳисоблаш мумкин:

$$A_n = A\cos\varphi, \tag{2.1}$$

бу ерда A — вектор **A** нинг модули.

Агар вектор берилган йўналиш билан ўткир бурчак ташкил қилса, у ҳолда бу бурчакнинг косинуси мусбат, демак, векторнинг проекцияси ҳам мусбат бўлади. Агар вектор ўқ билан ўтмас бурчак ҳосил қилса, у ҳолда бу бурчакнинг косинуси ва проекцияси манфий бўлади. Агар вектор берилган ўққа перпендикуляр бўлса, унинг проекцияси нолга тенг.

13- расмда бир нечта векторларнинг x ва y координата ўқларига проекциялари кўрсатилган. Бу проекциялар учун қуйидаги муносабатлар ўринлидир:



13- расм.

$$A_x = C_x > 0, \qquad B_x < 0;$$
$$A_y = B_y > 0, \qquad C_y < 0.$$

Агар **A** вектор x, y ва z ўқлари билан α, β ва γ бурчакларни ташкил қилса, у ҳолда унинг проекциялари қуйидагиларга тенг бўлади:

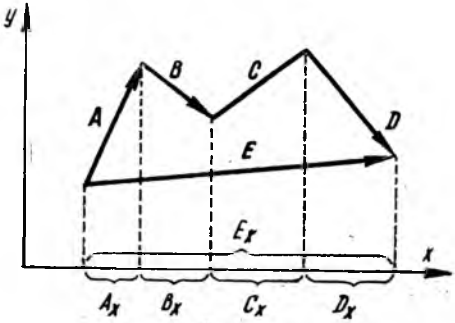
$$\left.\begin{aligned} A_x &= A\cos\alpha, \\ A_y &= A\cos\beta, \\ A_z &= A\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Векторнинг учта ўққа проекциялари берилган бўлса, векторнинг ўзини ҳам ясаш мумкинлигини тушуниб олиш қийин эмас. Демак, ҳар қандай вектор учта сон билан, яъни унинг координата ўқларидаги проекциялари билан берилиши мумкин экан. Скаляр эса фақат битта сон билан берилади.

Бир нечта векторларнинг $\mathbf{E} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D}$ йиғиндисини текширайлик (14- расм). Равшанки,

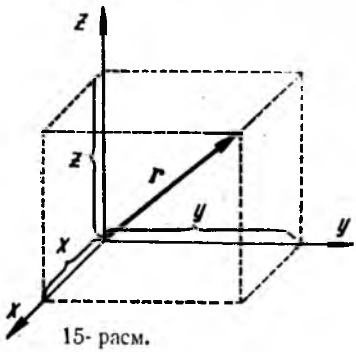
$$E_x = A_x + B_x + C_x + D_x, \tag{2.3}$$

яъни векторлар йиғиндисининг бирор йўналишга проекцияси қўшилаётган векторларнинг ўша йўналишига проекциялари йиғиндисига тенг.



14- расм.

Радиус-вектор. Координаталар бошидан нуқтага ўтказилган векторга шу нуқтанинг радиус-вектори деб айтилади (15- расм). Радиус-вектор **r** нуқтанинг фазодаги вазиятини бир қийматли белгилайди. Унинг координата ўқларига проекцияси, расмдан кўриниб турибдики, нуқтанинг декарт координаталарига тенг:



15- расм.

$$r_x = x; \quad r_y = y; \quad r_z = z. \tag{2.4}$$

Вектор **r** модулининг квадрати координаталар квадратлари йиғиндисига тенг

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{2.5}$$

Векторни скалярга кўпайтириш. **A** векторни a скалярга кўпайтирганда модули **A** векторнинг модулидан $|a|$ марта катта бўлган **B** вектор ҳосил бўлади. Бу **B** векторнинг йўналиши эса агар a скаляр мусбат бўлса, **A** векторнинг йўналишига мос, a скаляр манфий бўлганда эса **A** векторнинг йўналишига карама-қарши бўлади. Агар $\mathbf{B} = a\mathbf{A}$ бўлса, $B = |a|\, A$ бўлади.

Векторни b скалярга бўлиш векторни $a = \frac{1}{k}$ скалярга кўпайтиришга тенг кучлидир.

Бирлик вектор. Ҳар бир **A** векторга йўналиши **A** векторнинг йўналиши билан бир хил, модули эса бирга тенг бўлган бирлик вектор $\mathbf{A}_{\text{бирлик}}$ таққосланиши мумкин. Қуйидаги муносабатлар тушунарлидир:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A} &= A\cdot\mathbf{A}_{\text{бирлик}}, \\ \mathbf{A}_{\text{бирлик}} &= \frac{\mathbf{A}}{A}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

Бирлик вектор яна бошқача ном — орт номига ҳам эга. Векторнинг координата ўқлари бўйлаб $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$, $\mathbf{A}_z$ (11-расмга қаранг) ташкил этувчилари векторнинг шу ўқларга бўлган проекцияларининг модулларига тенг:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}_x| &= |A_x|, \\ |\mathbf{A}_y| &= |A_y|, \\ |\mathbf{A}_x| &= |A_x|. \end{aligned}$$

Координата ўқлари билан бир хил йўналган бирлик векторлар киритайлик. Уларни қуйидагича белгиланади: x ўқи бўйлаб йўналган бирлик вектор **i** символ билан, y ўқи бўйлаб йўналгани **j** символ билан ва z ўқи бўйлаб йўналгани эса — **k** символи билан белгиланади[1]. **i**, **j** ва **k** векторлар мос равишда x, y ва z ўқларнинг ортлари дейилади.

У вақтда, масалан, $\mathbf{A}_x$ ташкил этувчини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин бўлади (11-расмга қаранг):

$$\mathbf{A}_x = A_x\mathbf{i} \qquad (2.7)$$

Ҳақиқатан ҳам, $A_x\mathbf{i}$ векторнинг модули $|A_x|$ га, яъни $|\mathbf{A}_x|$ га тенг бўлади. Энди, агар $\mathbf{A}_x$ вектор x ўқи билан бир хил йўналган, яъни унинг йўналиши **i** ортнинг йўналиши билан бир хил бўлса, у вақтда 11-расмдан осонгина кўриш мумкинки, A_x мусбат бўлади, борди-ю, $\mathbf{A}_x$ манфий x томонга қараб йўналган, яъни **i** векторга тескари йўналган бўлса, A_x манфий бўлади, демак $A_x\mathbf{i}$ нинг йўналиши **i** нинг йўналишига тескари, яъни $\mathbf{A}_x$ векторнинг йўналиши билан бир хил бўлади.

Қолган иккита $\mathbf{A}_y$ ва $\mathbf{A}_z$ ташкил этувчилар учун ҳам (2.7) га ўхшаш ифодалар ёзиш мумкин:

$$\mathbf{A}_y = A_y\mathbf{j}, \quad \mathbf{A}_z = A_z\mathbf{k}.$$

A вектор ўз ташкил этувчиларининг йиғиндисига тенг бўлганлиги учун қуйидаги тенгликни ёзиш мумкин:

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z k. \qquad (2.8)$$

---

[1] Шунингдек, $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ белгилар ҳам қўлланилади.

Шундай қилиб, исталган векторни унинг координата ўқларига проекциялари ва шу ўқларнинг бирлик векторлари орқали ифодалаш мумкин экан.

Векторнинг ҳосиласи. Фараз қилайлик, (2.8) вектор вақт давомида маълум $\mathbf{A}(t)$ қонун билан ўзгарсин. Бу векторнинг координата ўқларига проекциялари t вақтнинг аввалдан берилган функцияларидан иборат демакдир:

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{i}A_x(t) + \mathbf{j}A_y(t) + \mathbf{k}A_z(t)$$

(агар координата ўқлари фазода бурилмаса, ўқларнинг ортлари вақт давомида ўзгармайди).

Вақтнинг Δt оралиғида векторнинг проекциялари ΔA_x, ΔA_y, ΔA_z орттирма олади, бунинг натижасида векторнинг ўзи эса $\Delta\mathbf{A} = \mathbf{i}\Delta A_x + \mathbf{j}\Delta A_y + \mathbf{k}\Delta A_z$ орттирма олади деб фараз қилайлик. $\mathbf{A}$ векторнинг t вақт давомида ўзгариш тезлигини қуйидаги муносабат билан характерлаш мумкин:

$$\frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta t} = \mathbf{i}\frac{\Delta A_x}{\Delta t} + \mathbf{j}\frac{\Delta A_y}{\Delta t} + \mathbf{k}\frac{\Delta A_z}{\Delta t}. \qquad (2.9)$$

Биз ёзган бу ифода $\mathbf{A}$ нинг Δt вақт оралиғида ўртача ўзгариш тезлигини беради. $\mathbf{A}$ вақт давомида узлуксиз, сакрамасдан ўзгаради дейлик. У ҳолда вақт оралиғи Δt қанча кичик бўлса, вақтнинг Δt оралиққа тегишли ихтиёрий моментидаги $\mathbf{A}$ нинг ўзгариш тезлигини характерловчи катталик (2.9) шунча аниқроқ бўлади. Шундай қилиб, $\mathbf{A}$ векторнинг вақтнинг t пайтидаги ўзгариш тезлиги Δt ни чексиз кичрайтирганда (2.9) ифоданинг интиладиган лимитига тенгдир:

$$\text{Ўзгариш тезлиги } \mathbf{A} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta t} =$$

$$\mathbf{i}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A_x}{\Delta t} + \mathbf{j}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A_y}{\Delta t} + \mathbf{k}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A_z}{\Delta t}.$$

Функция Δf орттирмасининг аргумент орттирмаси Δt га нисбати Δt нолга интилгандаги лимити f функциянинг t бўйича ҳосиласи дейилади ва $\frac{df}{dt}$ символ билан белгиланади. Демак, $\mathbf{A}$ векторнинг вақт давомида ўзгариш тезлиги

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{i}\frac{dA_x}{dt} + \mathbf{j}\frac{dA_y}{dt} + \mathbf{k}\frac{dA_z}{dt} \qquad (2.10)$$

га тенг экан.

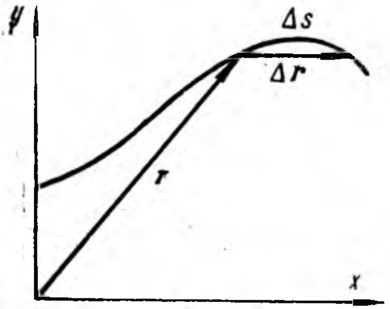
Олинган ифодани (2.8) формула билан солиштирсак, (2.10) да ортлар ёнида турган кўпайтувчилар $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ векторнинг координата ўқларга проекцияларидан иборат эканлигини осонгина кўрамиз:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{\text{пр } x} &= \frac{dA_x}{dt},\\ \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{\text{пр } y} &= \frac{dA_y}{dt}\\ \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{\text{пр } z} &= \frac{dA_z}{dt}.\end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

Белгилар қўйишда жуда эҳтиёт бўлиш керак. Масалан, $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ векторнинг x ўқига проекциясини $\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_x$ символ билан белгилаб бўлмайди, чунки бундай символ $\mathbf{A}_x$ га ўхшаб $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ векторнинг x ўқи бўйлаб ташкил этувчисини ифодалайди. Шунингдек, бу проекцияни $\left(\frac{dA}{dt}\right)_x$ символ билан ($\mathbf{A}$ векторнинг проекцияси A_x билан белгиланганидек) белгилаш мумкин эмас, чунки $\left|\frac{dA}{dt}\right|$, умуман айтганда, $\left|\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|$ дан фарқлидир. Шу сабабларга кўра $\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{\text{пр } x}$ ва ҳоказо кўринишдаги белгилардан фойдаланишга тўғри келади.

3- §. Тезлик

Моддий нуқтанинг (уни келгусида биз қисқалик учун тўғридан-тўғри нуқта деб атаймиз) фазодаги вазиятини $\mathbf{r}$ радиус-вектор ёрдамида бериш мумкин. Нуқта ҳаракатланган вақтда $\mathbf{r}$ векторнинг, умуман айтганда, ҳам катталиги, ҳам йўналиши ўзгаради[1].



16- расм.

Бирор вақт моменти t ни белгилаб олайлик. Бу вақтга радиус-векторнинг $\mathbf{r}$ қиймати мос келади (16-расм). t моментдан кейин келадиган кичик (уни биз элементар деб айтаймиз) Δt вақт оралиғи давомида нуқта Δs элементар йўл ўтади ва элементар $\Delta\mathbf{r}$ га кўчишда бу кўчиш радиус-векторнинг Δt вақт оралиғидаги орттирмасига тенгдир[2].

Қуйидагича нисбат тузайлик:

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}. \tag{3.1}$$

Берилган t да (3.1) векторнинг ҳам модули, ҳам йўналиши, умуман айтганда, Δt вақт оралиғининг катталигига боғлиқ. Оралиқ Δt ни камайтириш (шу билан бирга мос равишда ΔS билан $\Delta\mathbf{r}$ ҳам камая боради) билан бирг, (3.1) нисбатни кузата борамиз. Маълум бўлишича Δt нинг қиймати етарлича кичрайгандан кейин (3.1) ҳам катталик жиҳатдан, ҳам йўналиш жиҳатдан деярли ўзгармай қола-

---

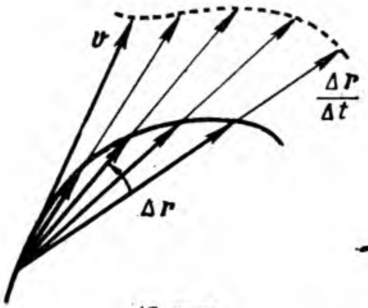
[1] Машқ учун нуқта радиус-векторининг а) фақат катталиги, б) фақат йўналиши ўзгарадиган ҳоллар учун траекторияни чизиб чиқиш тавсия этилади.

[2] Символ Δ (дельта) дан икки хил мақсадда фойдаланамиз: а) бирор катталикнинг улушини белгилаш учун. Масалан, биз текшираётган ҳол учун Δt ҳаракат давом этадиган тўла вақтнинг улушига, Δs эса нуқта ўтадиган бутун йўлнинг улушига тенгдир; б) бирор катталикнинг орттирмасини белгилаш учун. Биз текшираётган ҳол учун $\Delta\mathbf{r}$ радиус-вектор $\mathbf{r}$ нинг Δt вақт ичидаги орттирмаси.

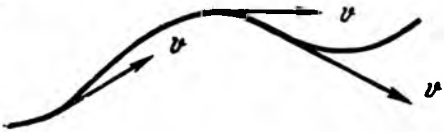
ди. Бу ҳол Δt нолга интилганда (3.1) нисбат маълум лимитга интилишини кўрсатади. Ана шу лимит ҳаракатланаётган нуқтанинг вақтнинг t моментидаги $\mathbf{v}$ тезлиги дейилади. Бу айтилган хулоса символ тарзида қуйидагича ёзилади:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \tag{3.2}$$

Шундай қилиб, тезлик деб Δt чексиз камайганда $\Delta \mathbf{r}$ нинг Δt га нисбати интиладиган лимитга айтилади. Демак, тезликни ҳаракат-



17- расм.



18- расм.

ланаётган нуқта радиус-векторининг вақт бўйича ҳосиласи сифатида ифодалаш мумкин:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{3.3}$$

Тезлик унинг таърифига кўра вектор катталнкдир. 17- расмдан кўриниб турибдики, $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ вектор траектория учун кесувчи экан. (3.2) лимитга яқинлашган сари бу векторнинг траектория билан кесишиш нуқталари тобора бир-бирига яқинлаша бориб (Δs нолга интилади), бир нуқтага тўпланади, натижада кесувчи уринмага айланади. Шундай қилиб, тезлик вектори траекториянинг мос нуқтасига ўтказилган уринма бўйлаб йўналган бўлар экан (18- расм).

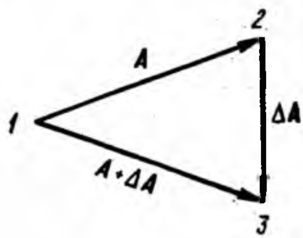
(3.2) формулага биноан тезлик векторининг модули қуйидагича ёзилиши мумкин:

$$v = |\mathbf{v}| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}. \tag{3.4}$$

Бу ифодада $|\Delta \mathbf{r}|$ ўрнига $\Delta \mathbf{r}$ ёзиб бўлмайди. $\Delta|\mathbf{r}|$ символ $\mathbf{r}$ вектор орттирмасининг модулини ифодалайди, ҳолбуки Δr эса $\mathbf{r}$ вектор модулининг орттирмаси $\Delta|\mathbf{r}|$ дир. Бу икки катталик бир-бирига тенг эмас:

$$|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta|\mathbf{r}| = \Delta r.$$

Бунга қуйидаги мисол ёрдамида ишонч ҳосил қилиш мумкин (19- расм).



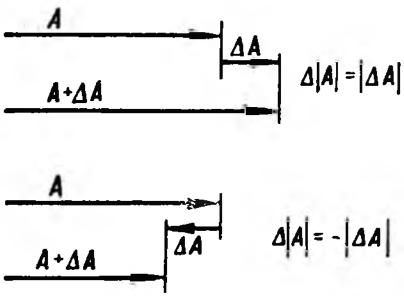
19- расм.

Фараз қилайлик, бирор вектор **A** шундай Δ **A** орттирма олсинки, бунда унинг модули ўзгармасин:

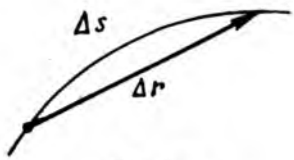
$$|\mathbf{A} + \Delta\,\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|.$$

Демак, **A** вектор модулининг орттирмаси нолга тенг ($\Delta|\mathbf{A}| = \Delta A = 0$). Бу вақтнинг ўзида вектор орттирмасининг модули $|\Delta\mathbf{A}|$ нолдан фарқлидир (у $2-3$ кесманинг узунлигига тенг). 20-расм берилган $|\Delta\mathbf{A}|$ учун модулнинг орттирмаси $\Delta\,|\mathbf{A}|$ фақат $-|\Delta\mathbf{A}|$ билан $+\,|\Delta\mathbf{A}|$ оралиғидаги қийматларга эга бўлишини кўрсатади.

Элементар Δs йўл, умуман айтганда, катталик жиҳатдан элементар кўчишнинг $|\Delta\mathbf{r}|$ модулидан фарқ қилади (21-расм). Бироқ, агар йўлнинг Δt кичик вақт оралиқларига мос Δs кесмалари



20-расм



21-расм.

ва $\Delta\mathbf{r}$ кўчишларни олсак, у ҳолда Δs билан $|\Delta\mathbf{r}|$ орасидаги фарқ у қадар катта бўлмайди, бунда Δt кичрайган сари Δs орта борувчи аниқлик билан $|\Delta\mathbf{r}|$ га тенглаша боради. Ана шуларга асосланиб қуйидагини ёзиш мумкин:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\mathbf{r}|}{\Delta t}\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t},$$

бундан (3.4) га мос равишда тезлик модули учун қуйидаги формула келиб чиқади:

$$v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \tag{3.5}$$

4-§. Ўтилган йўлни ҳисоблаш

(3.5) дан кичик Δt лар учун қуйидаги хулоса келиб чиқади:

$$v \simeq \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{4.1}$$

Δt қанчалик кичик бўлса, сўнгги тақрибий тенглик шунчалик аниқроқ бажарилади. Агар v тезликнинг катталиги t вақтнинг функцияси сифатида маълум бўлса, у ҳолда нуқта t_1 моментдан t_2 моментгача ўтган йўлни ҳисоблаб топиш мумкин. Бунинг учун $t_2 - t_1$ вақт оралиғини N та кичик $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_N$ вақт оралиқларига бўлиб чиқамиз; бунда бу оралиқларнинг катталиклари турлича бўлиши ҳам мумкин. Нуқта ўтган бутун s йўлни мос Δt вақт оралиқлари ичида ўтилган Δs_1, Δs_2, ... , Δs_N йўллар йиғиндиси сифатида ёзиш мумкин:

$$s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \ldots + \Delta s_N = \sum_{i=1}^{N} \Delta s_i.$$[1]

(4.1) га мос равишда Δs_i (i — 1 дан N гача бўлган ихтиёрий сон) қўшилувчиларнинг ҳар бири

$$\Delta s_i \cong v_i \Delta t_i$$

кўринишда ёзилиши мумкин, бу ерда Δt_i Δs_i йўлни ўтиш учун кетган вақт оралиғи, v_i эса — тезликнинг бирор Δt_i вақт ичидаги қиймати. Шундай қилиб,

$$s \cong \sum_{i=1}^{N} v_i \, \Delta t_i. \tag{4.2}$$

Δt_i вақт оралиқлари қанча кичик бўлса, бу ёзилган тенглик шунча аниқ бажарилади. Ҳамма Δt_i лар нолга интилганда (бунда Δt_i оралиқлар сони чексиз ортиб кетади) ўнг томонда турган йиғиндининг лимити роппа-роса s га тенглашади:

$$s = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} v_i \Delta t_i. \tag{4.3}$$

Тезлик вақтнинг функциясидир: $v = v(t)$.

Математикада x нинг a дан b гача оралиқдаги қийматлари учун ёзилган

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \, \Delta x_i,$$

кўринишдаги ифода аниқ интеграл деб аталади ва символик равишда қуйидагича ёзилади:

$$\int_a^b f(x) \, dx.$$

Демак, нуқта t_1 дан t_2 гача бўлган вақт оралиғи ичида ўтган йўл қуйидаги аниқ интегралга тенг:

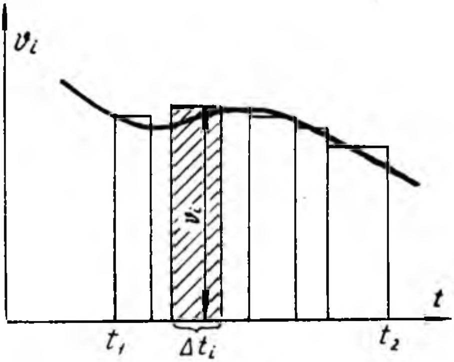
$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \, dt. \tag{4.4}$$

Ўтилган йўлни v тезлик ва t вақт орасидаги боғланиш эгри чизиғи билан чегараланган шаклнинг юзи сифатида тасаввур қилиш мумкинлигини кўрсатайлик. $v = v(t)$ функциянинг графигини чи-

---

[1] Бир хил кўринишдаги N та қўшилувчининг йиғиндисини ана шундай кўринишда ёзиш қабул қилинган.

зайлик (22- расм). Кўпайтма $v_i \Delta t_i$ сон жиҳатдан штрихланган (i нчи) соҳанинг юзига тенг. Ана шундай кўпайтмаларнинг йиғиндиси t ўқ $t = t_1$ ва $t = t_2$ тўғри чизиқлар ва шунингдек, шунга ўхшаш соҳаларнинг устки қирғоқлари ҳосил қилган синиқ чизиқ билан чегараланган юзга тенг бўлади. Δt_i нолга интилганда ҳамма соҳаларнинг кенглиги камая боради (шу билан бирга уларнинг сони орта боради) ва синиқ чизиқ лимитда $v = v(t)$ эгри чизиққа айланади.



22- расм.

Шундай қилиб, t_1 дан t_2 гача бўлган вақт оралиғида ўтилган йўл сон жиҳатдан $v = v(t)$ график, t вақт ўқи ҳамда $t = t_1$ ва $t = t_2$ тўғри чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзига тенг экан.

5- §. Текис ҳаракат

Тезлиги йўналиш жиҳатдан ҳар қанча ўзгарса ҳам, катталик жиҳатдан ўзгармайдиган ҳаракат текис ҳаракат дейилади.

Текис ҳаракатда (4.3) формуладаги v_i ларнинг ҳаммаси бирдай бўлиб, v га тенг бўлади. Шунинг учун v умумий кўпайтувчини йиғинди белгиси остидан ташқарига чиқариш мумкин:

$$s = \lim_{\Delta t_i \to 0} v \sum \Delta t_i = v \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum \Delta t_i.$$

Элементар вақт оралиқларининг йиғиндиси нуқта s йўлни ўтгунча кетган t вақтни беради[1]. Шундай қилиб, қуйидаги тенгликни ёзиш мумкин:

$$s = vt. \qquad (5.1)$$

---

[1] t ҳарфи вақт оралиғини белгилаш учун ҳам (берилган ҳол учун биз ана шундай қилдик), вақт моментини белгилаш учун ҳам (масалан, 3- § нинг бошида ана шундай қилинган эди) ишлатилаверади. Ана шу икки ҳолни қатъиян бир-биридан фарқ қилиш керак.

(5.1) формуладан текис ҳаракат тезлиги s йўлнинг шу йўлни ўтиш учун кетган t вақтга нисбатига тенг деган хулосага келамиз:

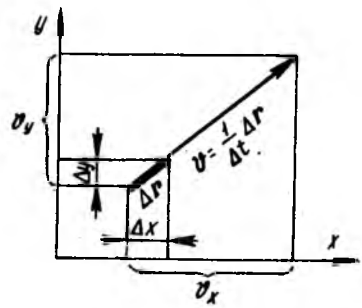
$$v = \frac{s}{t}. \tag{5.2}$$

(5.2) га асосан текис ҳаракат тезлиги катталик жиҳатдан ҳаракатланаётган нуқта вақт бирлиги ичида ўтган йўлга тенг деб айтишимиз мумкин. Нотекис ҳаракат учун бу фикр мутлақо нотўғри. Бу ҳолда вақтнинг берилган t моментидаги тезлик катталик жиҳатдан, агар нуқта t моментдаги тезлигини бундан кейин ҳам сақлаб қолган бўлса, нуқтанинг вақт бирлигида ўтадиган йўлига тенг бўлади деб айтиш мумкин.

6- §. Тезлик векторининг координата ўқларига проекциялари

Тезликни ифодаловчи (3.2) муносабатда лимит аломати остида $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ вектор турибди. (3.2) да ана шу вектор ўрнига унинг бирор йўналишга проекциясини олсак, равшанки, биз $\mathbf{v}$ векторнинг худди ўша йўналишга проекциясини топамиз:

$$\text{пр. } \mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\text{пр. } \Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \tag{6.1}$$



23- расм.

23- расмдан кўриниб турибдики, $\Delta \mathbf{r}$ векторнинг ўқларга проекциялари бирор жойга кўчган нуқта координаталарининг орттирмаларига тенг экан:

$$(\Delta \mathbf{r})_x = \Delta x;$$
$$(\Delta \mathbf{r})_y = \Delta y;$$
$$(\Delta \mathbf{r})_z = \Delta z.$$

Бу ифодаларни (6. 1) формулага қўйиб, тезлик векторининг координата ўқларига проекцияларини топамиз:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta \mathbf{r})_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt};$$

$$v_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta \mathbf{r})_y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt};$$

$$v_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta \mathbf{r})_z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt}.$$

Физикада катталикларнинг вақт t бўйича ҳосилаларини мос ҳолда устига нуқта қўйилган символлари билан белгиланади:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad \frac{dr}{dt} = \dot{r}; \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad \text{ва ҳоказо.}$$

Бу белгилардан фойдаланиб, **v** векторнинг координата ўқларига проекцияларини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$v_x = \dot{x}; \qquad v_y = \dot{y}; \qquad v_z = \dot{z}. \tag{6.2}$$

Эслатиб ўтамизки, (2. 11) формулаларда **A** = **r** деб олиб, (6.2) формулаларни ҳосил қилиш мумкин.

7-§. Тезланиш

2-§ да векторнинг ҳосиласи ҳақида айтилганига асосланиб, моддий нуқта **v** тезлигининг t вақтга қараб ўзгариш суръатини қуйидаги катталик билан характерлаш мумкин:

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} . \tag{7.1}$$

Бу катталик нуқтанинг **т е з л а н и ш и** деб аталади.

Агар тезланиш вақтнинг функцияси $\mathbf{w}(t)$ сифатида берилган ва бошланғич моментдаги ($t = 0$ да) тезлик $\mathbf{v}_0$ маълум бўлса, у ҳолда вақтнинг ихтиёрий t моментидаги **v** тезликни топиш мумкин. Бу айтилганлар қуйидаги формула ёрдамида амалга оширилади:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \int_0^t \mathbf{w}dt.$$

w ўзгармас бўлса,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{w}t. \tag{7.2}$$

Тезлик векторини

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z = \mathbf{i}\dot{x} + \mathbf{j}\dot{y} + \mathbf{k}\dot{z}$$

кўринишда ёзайлик [(6.2) га қаранг].

Бу ифодани t бўйича дифференциаллаб қуйидагини топамиз:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{i}\frac{d}{dt}(\dot{x}) + \mathbf{j}\frac{d}{dt}(\dot{y}) + \mathbf{k}\frac{d}{dt}(\dot{z}).$$

$\frac{d}{dt}(\dot{x})$ x нинг t бўйича иккинчи ҳосиласи бўлганлиги учун уни $\ddot{x}$ символ билан белгилаш мумкин. Худди шунга ўхшаш

$$\frac{d}{dt}(\dot{y}) = (\ddot{y}), \quad \frac{d}{dt}(\dot{z}) = (\ddot{z}). \quad \text{Демак,} \quad \mathbf{w} = \mathbf{i}\ddot{x} + \mathbf{j}\ddot{y} + \mathbf{k}\ddot{z}. \tag{7.3}$$

(7.3) ни (2.8) формула билан таққослаб, тезлик векторининг координата ўқларига проекциялари учун қуйидаги ифодаларни осонгина топишимиз мумкин:

$$w_x = \ddot{x}, \quad w_y = \ddot{y} \quad w_z = \ddot{z} . \tag{7.4}$$

8- §. Тўғри чизиқли текис ўзгарувчан ҳаракат

Тўғри чизиқли ҳаракатда тезлик вектори доим бирдан-бир тўғри чизиқли траектория бўйлаб йўналганлиги учун **w** векторнинг йўналиши **v** векторнинг йўналиши билан устма-уст тушади ёки унга тескари йўналган бўлади. Агар **w** нинг йўналиши **v** нинг йўналиши билан бир хил бўлса, у ҳолда тезлик катталик жиҳатдан орта боради ва ҳаракат тезланувчан бўлади. **w** йўналиш жиҳатдан **v** га тескари бўлса, у ҳолда тезлик камая боради ва ҳаракат секинланувчан бўлади.

Тезланиши ўзгармайдиган тўғри чизиқли ҳаракат текис ўзгарувчан ҳаракат дейилади. Тезлик вақт бўйича қандай ўзгараётганлигига қараб ҳаракат текис тезланувчан ва текис секинланувчан ҳаракатларга ажратилади.

Текис ўзгарувчан ҳаракат учун (7.2) формула ўринли бўлиб, бунда унга кирувчи барча **v**, $\mathbf{v}_0$ ва **w** векторлар битта тўғри чизиқ бўйлаб йўналган. Бу векторларни $\mathbf{v}_0$ векторнинг йўналиши билан устма-уст тушувчи x йўналишга проекциясини олсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$v_x = v_{0x} + w_x t. \qquad (8.1)$$

v_x, v_{0x} ва w_x мос векторларнинг модулларига тенг. Бу модуллар агар векторнинг йўналиши x нинг йўналиши билан бир хил бўлса «+» ишора билан, векторнинг йўналиши x нинг йўналишига қарама-қарши бўлса, «—» ишора билан олинади.

Одатда, тўғри чизиқли ҳаракат ўрганилаётганда (8.1) тенгламада x нинг индекслари тушириб қолдирилади ва тўғридан-тўғри

$$v = v_0 + wt \qquad (8.2)$$

кўринишда ёзилади, бунда (8.2) тенгламага кирувчи катталиклар векторларнинг проекцияларига ўхшаш катталиклар деб қабул қилинади. Бунда унча тўғри бўлмаган (аммо кўпчиликка сингиб кетган) терминологиядан фойдаланилади. Масалан, w тезланиш деб юритилади ва w_x нинг ишорасига қараб бу тезланиш мусбат ёки манфий деб ҳисобланади. (8.2) функцияни нолдан то ихтиёрий t вақт моментигача бўлган оралиқда интеграллаб, ўтилган йўл учун қуйидаги формулани топамиз [(4.4) га қаранг)]:

$$s = \int_0^t (v_0 + wt)dt = v_0 t + \frac{wt^2}{2}, \qquad (8.3)$$

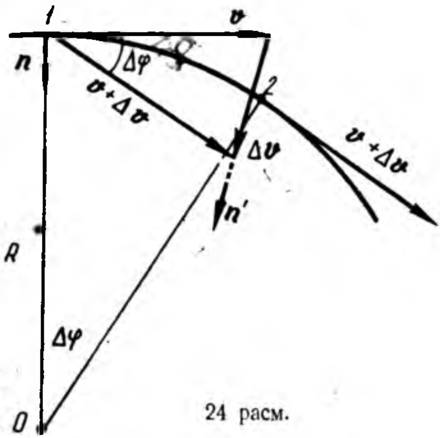
бу ерда w — алгебраик катталик.

Шуни таъкидлаб ўтамизки, бу формула t вақт давомида нуқта ҳаракатининг йўналиши (тезликнинг ишораси) ўзгармагандагина ўтилган йўл учун тўғри натижа беради.

9- §. Эгри чизиқли ҳаракатда тезланиш

Умумий ҳол учун тезланишни топишдан аввал эгри чизиқли ҳаракатнинг энг содда ҳолини — нуқтанинг айлана бўйлаб текис ҳаракатини қараб чиқамиз.

Фараз қилайлик, вақтнинг текширилаётган t моментида нуқта 1 ҳолатда бўлсин (24-расм). Δt вақтдан кейин нуқта $1-2$ ёйга тенг бўлган Δs йўлни ўтиб 2 ҳолатга келади. Бунда нуқтанинг $\mathbf{v}$ тезлиги $\Delta\mathbf{v}$ орттирма олади ва тезлик вектори катталик жиҳатдан ўзгармасдан (текис ҳаракатда $|\mathbf{v}| = \text{const}$) $\Delta\varphi$ бурчакка бурилади; бу бурчакнинг катталиги Δs узунликдаги ёйга таянган марказий бурчакка тенгдир:



24 расм.

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{R}, \tag{9.1}$$

бу ерда R — нуқта ҳаракатланаётган айлананинг радиуси.

Тезлик векторининг $\Delta\mathbf{v}$ орттирмасини топайлик. Бунинг учун $(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v})$ векторни унинг боши $\mathbf{v}$ векторнинг бошига устма-уст тушадиган қилиб кўчирамиз. У вақтда $\Delta\mathbf{v}$ вектор $\mathbf{v}$ векторнинг охиридан $(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v})$ векторнинг охирига ўтказилган кесма билан ифодаланади. Бу кесма томонлари $\mathbf{v}$ ва $(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v})$ га ва учидаги бурчак $\Delta\varphi$ га тенг бўлган тенг ёнли учбурчакнинг асоси бўлиб хизмат қилади. Агар $\Delta\varphi$ бурчак кичик бўлса (кичик Δt лар учун бу шарт бажарилади), у ҳолда бу учбурчакнинг томонлари учун тақрибан қуйидаги тенгликни ёзиш мумкин:

$$|\Delta\mathbf{v}| \cong v\Delta\varphi^{1}.$$

$\Delta\mathbf{v}$ векторни унинг модули билан $\Delta\mathbf{v}$ бўйлаб йўналган бирлик вектор кўпайтмаси сифатида ёзиш мумкин. Ана шу бирлик векторни $\mathbf{n}'$ деб белгилаймиз. У вақтда

$$\Delta\mathbf{v} = |\Delta\mathbf{v}|\,\mathbf{n}' \cong \mathbf{v}\Delta\varphi\mathbf{n}'.$$

Бу формулага (9.1) даги $\Delta\varphi$ нинг қийматини қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$\Delta\mathbf{v} \cong v\frac{\Delta s}{R}\mathbf{n}'. \tag{9.2}$$

$\Delta\mathbf{v}$ ни Δt га тақсимлаб кейин лимитга ўтсак, тезланишни топамиз.

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{v}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t}\mathbf{n}'.$$

---

[1] Δv деб ёзиш мумкин эмас, чунки бу ҳолда $\Delta v = 0$ бўлади.

Бу ифодада v ва R — ўзгармас катталиклар; $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ нисбатнинг лимити тезликнинг v модулини беради; бирлик вектор $\mathbf{n}'$ нинг лимити $\mathbf{n}$ бирлик векторга устма-уст тушади; кейингиси айланага *1* нуқтада нормал бўлиб, марказга қараб йўналгандир. Шундай қилиб,

$$\mathbf{w}_n = \frac{v^2}{R}\mathbf{n}. \tag{9.3}$$

Биз топган бу тезланиш траекторияга ўтказилган нормал бўйлаб йўналгандир; у нормал тезланиш деб аталади ва $\mathbf{w}_n$ билан белгиланади [(9.3) ифодада қилганимиздек]. Нормал тезланишнинг модули:

$$w_n = \frac{v^2}{R}. \tag{9.4}$$

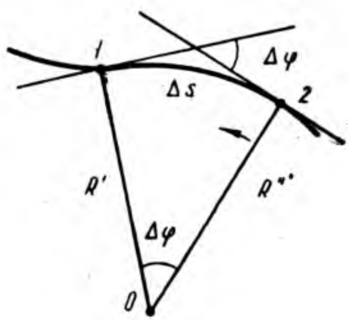
Траектория эгрилиги қанча кўп (айлананинг радиуси R қанча кичик) бўлса, тезликнинг берилган v қийматида w_n шунча катта бўлади. Эгрилик ўлчови сифатида айлананинг эгрилиги деб аталувчи $1/R$ катталик қабул қилинади.

Равшанки, ихтиёрий эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланувчи нуқтанинг тезланиши ҳам траекториянинг эгрилигига (бу эгрилик траекториянинг турли нуқталарида турлича бўлиши табиийдир) боғлиқ бўлади. Бундан кейин масалани оддийлаштириш учун биз фақат бир текисликда ётувчи (ясси) эгри чизиқларни текшириш билангина чегараланамиз. Ясси эгри чизиқнинг бирор нуқтасидаги эгрилиги унинг берилган жойидаги чексиз кичик қисмида унга устма-уст тушувчи айлананинг эгрилигига тенг бўлади. Бундай айлана ясси эгри чизиқнинг берилган нуқтасидаги эгрилиги доираси дейилади. *1* нуқтадаги эгрилик доирасини топиш учун (25-расм) қуйидагича иш кўриш керак. Эгри чизиқда *1* нуқтага яқин ётган *2* ва *3* нуқталарни оламиз. *1*, *2* ва *3* лар орқали айлана ўтказамиз. Бу айлананинг *2* ва *3* нуқталарини *1* нуқтага чексиз яқинлаштирган вақтда оладиган сунгги вазияти эгрилик доирасининг ўзгинаси бўлади. Бу доиранинг радиуси чизиқнинг *1* нуқтадаги эгрилик радиусини, доиранинг маркази эса *1* нуқта учун эгрилик марказини беради.

Эгри чизиқнинг C эгрилиги аналитик усулда қуйидагича ифодаланади:

$$C = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds},$$

25-расм.



26-расм.

бу ерда $\Delta\varphi$—эгри чизиқнинг бир-биридан Δs масофада ётган нуқталарига ўтказилган уринмалар орасидаги бурчак (26- расм). Шундай қилиб, эгрилик эгри чизиқ йўналишининг ўзгариш тезлиги, яъни эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланаётган уринманинг бурилиш тезлиги билан характерланар экан. C га тескари бўлган катталик R эгрилик радиусига тенг. Айлана учун ана шундай йўл билан топилган эгрилик радиуси айлана радиусидан иборат бўлишига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Яна 26- расмга мурожаат қилайлик. 1 ва 2 нуқталардаги уринмаларга перпендикулярлар ўтказамиз. Бу перпендикуляр бирор O нуқтада кесишади, бунда R' ва R'' масофалар, умуман айтганда, бир хил бўлмайди. $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ нисбатни тузайлик. Δs катталикни тахминан $R'\Delta\varphi$ билан алмаштириш мумкин. У вақтда

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\approx\frac{1}{R'}.$$

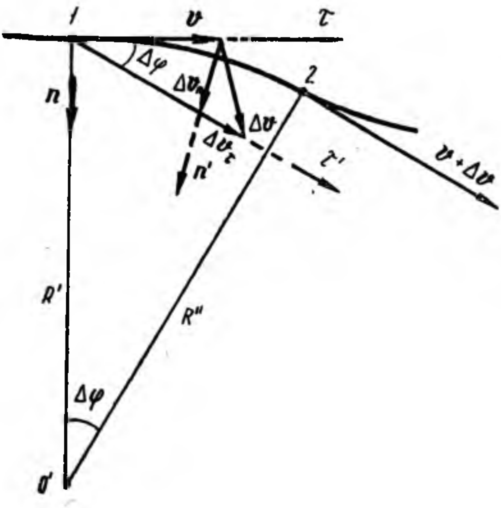
1 ва 2 нуқталар бир-бирига қанча яқин ётса, яъни Δs қанча кичик бўлса, кейинги тақрибий тенглик шунча аниқроқ бажарилади. Δs ни нолга интилтирсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$C=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{R'}.$$

Агар 2 нуқтани чексиз равишда 1 нуқтага яқинлаштира борсак, перпендикулярларнинг кесишиш нуқтаси эгрилик марказидан иборат бўлган бирор нуқтага интилади. Иккала R' ва R'' масофалар эгрилик радиусига тенг бўлган бирдан бир R лимитга интилади. R га тескари бўлган катталик чизиқнинг 1 нуқтадаги эгрилигини беради.

Энди исталган ясси эгри чизиқ бўйлаб ҳаракатланаётган нуқтанинг тезланишини топайлик. Тезликнинг (нуқта 1 ҳолатдан 2 ҳолатга кўчиши учун кетган Δt вақт оралиғига мос) $\Delta\mathbf{v}$ орттирмаси векторини иккига $\Delta\mathbf{v}_n$ ва $\Delta\mathbf{v}_\tau$ ташкил этувчиларга ажратамиз (27- расм). Бу ташкил этувчиларни шундай танлаб оламизки, 1 нуқтадан $\Delta\mathbf{v}_n$ векторнинг охиригача бўлган масофа бошланғич моментдаги тезликнинг мудулига тенг бўлсин. У ҳолда, чамаси, $\Delta\mathbf{v}_\tau$ векторнинг модули тезлик модули орттирмасига тенг бўлади:

$$|\Delta\mathbf{v}_\tau|=\Delta|\mathbf{v}|=\Delta v.$$



27-расм.

Йўналиши $\Delta \mathbf{v}_\tau$ векторга мос бўлган $\bar{\tau}'$ бирлик вектор киритиб, сўнгги ифодани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин[1]:

$$\Delta \mathbf{v}_\tau = \Delta v \bar{\tau}'. \tag{9.5}$$

Бизни (9.4) формулага олиб келган мулоҳазаларни такрорлаб, қуйидагини топишимиз мумкин:

$$\Delta \mathbf{v}_n = v \frac{\Delta s}{R'} \mathbf{n}'. \tag{9.6}$$

Таърифга биноан тўла тезланиш вектори қуйидагига тенг:

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_n + \Delta \mathbf{v}_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_\tau}{\Delta t},$$

(9.6) ни ҳисобга олсак, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_n}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{v}{R'} \frac{\Delta s}{\Delta t} \mathbf{n}'$.

Лимитда $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ нисбат v тезликни, R' — эгрилик радиуси R ни беради, $\mathbf{n}'$ вектор эса траекторияга 1 нуқтада ўтказилган нормалнинг $\mathbf{n}$ бирлик вектори билан устма-уст тушади. Бу лимитни $\mathbf{w}_n$ билан белгиласак:

$$\mathbf{w}_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} \mathbf{n}. \tag{9.7}$$

Иккинчи лимит (уни $\mathbf{w}_\tau$ билан белгилаймиз), (9.5) ҳисобга олсак,

$$\mathbf{w}_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \bar{\tau}'.$$

Лимитга ўтилганда $\bar{\tau}'$ вектор $\bar{\tau}$ бирлик вектор билан устма-уст тушади. Кейингиси траекторияга 1 нуқтадан ўтган уринма бўйлаб ҳаракат йўналган томонга қараб йўналган ва $\mathbf{v}$ тезликнинг бирлик векторига айнан тенгдир [(2.6) га қаранг]:

$$\bar{\tau} = \frac{\mathbf{v}}{v}.$$

Ниҳоят,

$$\mathbf{w}_\tau = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \right) \bar{\tau} = \frac{dv}{dt} \bar{\tau}. \tag{9.8}$$

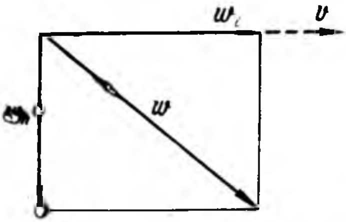
Шундай қилиб, $\mathbf{w}$ вектор иккита $\mathbf{w}_n$ ва $\mathbf{w}_\tau$ векторларнинг йиғиндиси (28- расм) сифатида ифодаланиши мумкин экан. Бу векторларнинг бири ($\mathbf{w}_n$) $\mathbf{v}$ тезлик векторига перпендикуляр ва траектория эгрилиги марказига қараб, иккинчиси ($\mathbf{w}_\tau$) эса траекторияга ўтказилган уринма бўйлаб йўналган. Агар тезлик катталик жиҳатдан ортса $\left(\frac{dv}{dt} \text{ — мусбат бўлса}\right)$, у ҳолда $\mathbf{w}_\tau$ — ҳаракат йўналиши

---

[1] Босмахонада қора τ, β, ω ва φ ҳарфлар бўлмагани учун улар билан белгиланадиган вектор катталиклар ўрнига ёзмалагидек, устига чизиқча қўйилган ҳарфлар терилди. *(Ред.)*

бўйлаб йўналади, агар тезлик катталик жиҳатдан камайса ($\frac{dv}{dt}$ манфий бўлса), у вақтда $\mathbf{w}_\tau$ — ҳаракат йўналишига тескари йўналади.

Вектор $\mathbf{w}_\tau$ тангенциал тезланиш деб аталади. У тезликнинг катталик жиҳатдан ўзгаришини характерлайди. Агар тезлик катталик жиҳатдан ўзгармаса, у вақтда тангенциал тезланиш нолга тенг ва $\mathbf{w} = \mathbf{w}_n$ бўлади.



28- расм.

Вектор $\mathbf{w}_n$ (нормал тезланиш) тезликнинг йўналиши бўйича ўзгаришини характерлайди. Агар тезликнинг йўналиши ўзгармаса, ҳаракат тўғри чизиқли траектория бўйлаб содир бўлади. Тўғри чизиқнинг эгрилиги нолга тенг (мос равишда R эгрилик радиуси чексизликка тенг), бинобарин, нормал тезланиш нолга тенг ва $\mathbf{w} = \mathbf{w}_\tau$.

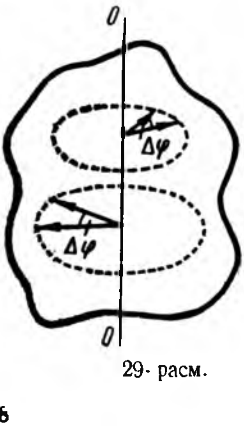
Умумий ҳолда тўла тезланишнинг модули қуйидагига тенг (28- расм):

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

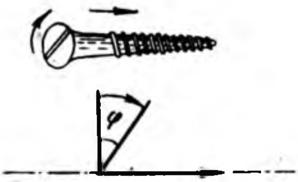
10- §. Айланма ҳаракат кинематикаси

Бирор OO ўқ (29- расм) атрофида айланувчи абсолют қаттиқ жисмни ташкил қилган барча нуқталарининг марказлари айланиш ўқида ётган айланалар бўйлаб ҳаракатланади. Ҳар бир нуқтанинг радиус-вектори (айлананинг марказидан берилган нуқтага ўтказилган вектор) Δt вақт ичида бирдан-бир $\Delta\varphi$ бурчакка — қаттиқ жисмнинг бурилиш бурчагига бурилади.

Жисмнинг бирор φ бурчакка бурилишини узунлиги φ га тенг, йўналиши эса бурилиш содир бўлган ўқнинг йўналиши билан устма-уст тушувчи кесма кўринишида бериш мумкин. Берилган ўқ атрофида бурилиш қайси томонга бўлаётганлигини кўрсатиш учун бурилишнинг ва уни тасвирловчи кесманинг йўналишларини ўнг винт қоидаси деб ата-

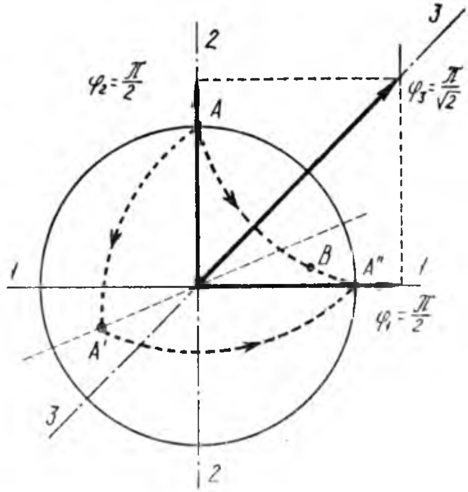


29- расм.



30- расм.

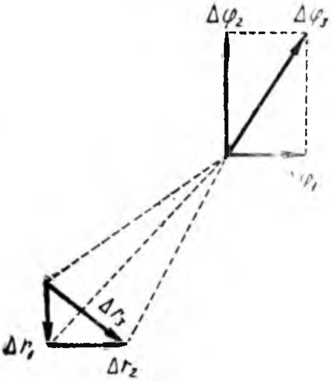
лувчи қоида билан боғлашга келишиб олишимиз мумкин. Бу қоидага биноан кесманинг йўналиши кесма бўйлаб қараганимизда айланиш соат стрелкаси йўналиши бўйлаб содир бўлаётган йўналишда бўлиши керак (ўнг винтнинг бошини соат стрелкаси йўналиши бўйлаб бурасак, у биздан узоқлашаётганлигини кўрамиз, 30- расм). Шундай қилиб, жисмнинг бурилишини қиймат ва йўналишга эга деб олишимиз мумкин экан. Бироқ бурилишни вектор деб ҳисоблаш учун бунинг ўзи етарли эмас — шу усул би-



31 расм.

лан тасвирланадиган бурилишларни параллелограмм қоидасига асосан қўшиладиган бўлиши керак. Исталган катталикдаги бурилишлар учун сўнгги шарт қаноатлантирилмайди. Буни сферанинг айланиш мисолида кўрсатайлик (31- расм). Сферанинг *1—1* ўқ атрофида $\pi/2$ бурчакка бурилиши (бу бурилиш φ_1 кесма билан тасвирланган) ва ундан кейин *2—2* ўқ атрофида $\pi/2$ га бурилиши (φ_2 кесма), сферанинг A нуқтаси дастлаб A' ҳолатга кейин эса A'' ҳолатга кўчишига олиб келади. φ_1 ва φ_2 лардан параллелограмм усулида олинган φ_3 кесма (бу кесманинг узунлиги $\pi/\sqrt{2}$ га тенг) билан тасвирланувчи бурилиш A нуқтани A'' дан фарқ қилувчи B ҳолатга кўчиради. Демак, φ_3 кесма билан тасвирланувчи бурилиш кетма-кет содир бўлувчи φ_1 ва φ_2 бурилишларга айнан тенг эмас ва, шунинг учун ҳам уларнинг йиғиндисидан иборат бўла олмайди. Шундай қилиб, жисмнинг ўқ атрофидаги бурилишини йўналган кесма билан тасвирлаш мумкин бўлса ҳам уни вектор деб бўлмаслигига ишонч ҳосил қилдик.

Жуда кичик бурилиш бурчаклари учун аҳвол бошқачароқ. Жуда кичик бурилиш вақтида жисмнинг исталган нуқтаси ўтган йўлни тўғри чизиқ деб ҳисоблаш мумкин. Иккита кетма-кет содир бўлувчи $\Delta\varphi_1$ ва $\Delta\varphi_2$ кичик бурилишлар, 32- расмдан кўринишича, жисмнинг ихтиёрий нуқтасини шундай $\Delta \mathbf{r}_1 + \Delta \mathbf{r}_2$ кўчишини юзага келтирадики, у $\Delta\varphi_1$ ва $\Delta\varphi_2$ дан параллелограмм қоидасига асосан олинган $\Delta\varphi_3$ кўчишга тенг бўлади. Бундан жуда кичик бурилишлар векторлар деб қаралиши мумкин деган хулоса чиқади (уларни биз $\Delta\overline{\varphi}$ ёки $d\overline{\varphi}$ кўринишда ёзамиз).



32- расм.

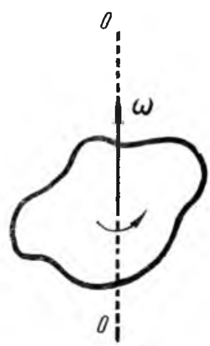
Биз $d\overline{\varphi}$ векторнинг йўналишини уни жисмнинг айланиш йўналиши билан маълум йўсинда боғлаш орқали аниқладик. Тезлик **v**, тезланиш **w**, радиус-вектор **r** каби катталикларни текширган вақтда уларнинг йўналишини танлаш ҳақида сўз ҳам бўлмаган эди: бу йўналиш катталикларнинг табиатидан ўз-ўзидан келиб чиққан эди. Ана шундай векторлар қутб векторлари дейилади. $d\overline{\varphi}$ га ўхшаб йўналиши айланиш (ёки айланиб ўтиш) йўналиши билан боғланадиган векторлар аксиал векторлар дейилади.

Вектор катталик

$$\overline{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\overline{\varphi}}{dt}, \tag{10.1}$$

бу ерда Δt — $\Delta\overline{\varphi}$ бурилиш содир бўлиши учун кетган вақт жисмнинг бурчак тезлиги дейилади[1]. Вектор ω жисм айланаётган ўқ бўйлаб ўнг винт қоидасига биноан йўналган (33- расм) бўлиб, аксиал вектордан иборат.

Бурчак тезлик векторининг модули $\frac{d\varphi}{dt}$ га тенг. Ўзгармас бурчак тезликда бўладиган айланиш текис айланиш дейилади, бунда $\omega = \varphi/t$. Шундай қилиб, ω текис айланишда жисм вақт бирлиги ичида қандай бурчакка бурилишини кўрсатади.



33-расм.

Текис айланишни айланиш даври T билан характерласа ҳам бўлади. Жисм бир айланиб чиқиши учун, яъни 2π бурчакка бурилиши учун кетган вақтга айланиш даври деб айтилади. Вақт оралиғи $\Delta t = T$ га $\Delta\varphi = 2\pi$ бурилиш бурчаги мос келганлиги учун

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{10.2}$$

[1] Бурчак тезликдан фарқ қилиш учун аввал кўрилган **v** тезликни чизиқли тезлик деб юритилади. Бундан кейин англашилмовчиликлар юзага чиқмайдиган ҳолларда «чизиқ»ли сўзини қолдириб кетаверамиз.

бундан

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (10.3)$$

Маълумки вақт бирлигида содир бўладиган айланишлар сони ν қуйидагига тенг:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \qquad (10.4)$$

(10.4) дан бурчак тезлик вақт бирлигидаги айланишлар сонининг 2π га кўпайтирилганига тенг эканлиги келиб чиқади;

$$\omega = 2\pi\nu.$$

Айланиш даври ва айланишлар сони тушунчаларини нотекис айланма ҳаракат учун ҳам сақлаб қолса бўлади. Бунда жисм берилган оний бурчак тезлик билан айланганда у бир айланиб чиқиши учун кетган вақтни T нинг оний қиймати деб тушунилади; ν деб эса худди ана шундай шароитда жисмнинг вақт бирлигидаги айланишлари сони тушунилади.

Вектор $\bar{\omega}$ жисмнинг ўз атрофида айланиш тезлиги ўзгариши ҳисобига (бу ҳолда у катталик жиҳатдан ўзгаради) бўлгани каби, айланиш ўқининг фазода бурилиши ҳисобига ҳам (бу ҳолда $\bar{\omega}$ нинг йўналиши ўзгаради) ўзгариши мумкин. Фараз қилайлик, $\bar{\omega}$ вектор Δt вақтда $\Delta\bar{\omega}$ орттирма олсин. Бурчак тезлиги векторининг вақт бўйича ўзгариши **бурчак тезланиши** деб аталувчи қуйидаги катталик билан характерланади:

$$\bar{\beta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}. \qquad (10.6)$$

$\bar{\beta}$ вектор ҳам $\bar{\omega}$ каби аксиал вектор.

Айланиш ўқининг йўналиши фазода ўзгармаса, тезлик фақат катталик жиҳатидан ўзгаради ва бунда $|\Delta\bar{\omega}| = |\Delta\omega|$ бўлади. Бу ҳолда (10.6) дан бурчак тезланишнинг модули учун қуйидаги ифода келиб чиқади:

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\omega|}{\Delta t} = \left|\frac{d\omega}{dt}\right|. \qquad (10.7)$$

Агар β деб $\bar{\beta}$ векторнинг $\bar{\omega}$ йўналишига проекциясини тушунсак, у ҳолда (10.7) формула қуйидагича ёзилади.

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \qquad (10.8)$$

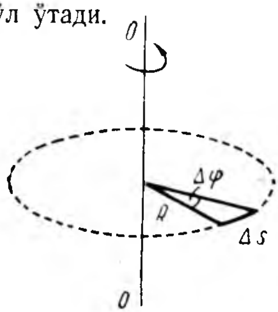
(10.8) формуладаги β — алгебраик катталик бўлиб, агар ω вақт ўтиши билан ортса (бу ҳолда $\bar{\beta}$ ва $\bar{\omega}$ векторлар бир хил йўналишга эга бўлади), мусбат қийматга, агар ω камайса (бу ҳолда $\bar{\beta}$ билан $\bar{\omega}$ бир-бирига қарама-қарши йўналган), манфий қийматга эга бўлади.

Айланаётган жисмнинг турли нуқталари турли $\mathbf{v}$ чизиқли тезликларга эга бўлади. Ҳар бир нуқтанинг тезлиги тегишли айланаларга ўтказилган уринма бўйлаб йўналган бўлиб, ўз йўналишини узлуксиз ўзгартира боради. Нуқта тезлигининг катталиги жисмнинг ω айланиш тезлиги ва айланиш ўқидан берилган нуқтагача бўлган R масофа билан аниқланади.

Δt қисқа вақт оралиғида жисм $\Delta\varphi$ бурчакка бурилган бўлсин (34- расм). Бунда R ўқдан Δs масофада ётган нуқта

$$\Delta s = R\Delta\varphi$$

йўл ўтади.


34- расм.

Таърифга биноан нуқтанинг чизиқли тезлиги

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} R\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} =$$
$$= R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega,$$

яъни

$$v = \omega R. \qquad (10.9)$$

Шундай қилиб, нуқта айланиш ўқидан қанча узоқ ётса, у шунча каттароқ чизиқли тезлик билан ҳаракатланар экан.

Айланаётган жисм нуқталарининг чизиқли тезланишини топайлик. Нормал тезлик (9.4) га биноан:

$$w_n = \frac{v^2}{R}.$$

Бу ифодага (10.9) дан v ни олиб келиб қўйсак, қуйидагини топамиз:

$$w_n = \omega^2 R. \qquad (10.10)$$

Тангенциал тезланишнинг модули (9.8) га биноан $\left|\frac{dv}{dt}\right|$ га тенг. Яна (10.9) тенгламадан фойдаланиб қуйидагини топамиз:

$$w_\tau = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}\right| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(\omega R)}{\Delta t}\right| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} R\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right| = R\left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right| = R\beta,$$

яъни

$$w_\tau = \beta R. \qquad (10.11)$$

Шундай қилиб, нормал тезланиш ҳам тангенциал тезланиш ҳам айланиш ўқидан нуқтагача бўлган R масофа ортиши билан чизиқли ортар экан.

11- §. v ва ω векторлар орасидаги боғланиш

Юқорида кўрилган векторларни қўшиш ва айириш, шунингдек векторни скалярга кўпайтириш (2- § га қаранг) амалларидан ташқари яна векторларни бир-бирига кўпайтириш амаллари ҳам мавжуддир. Иккита векторни бир-бирига икки усул билан кўпайтириш мумкин: биринчи усул натижада бирор янги векторни беради, иккинчи усул эса скаляр катталикка олиб келади. Эслатиб ўтамизки, векторни векторга бўлиш усули йўқ.

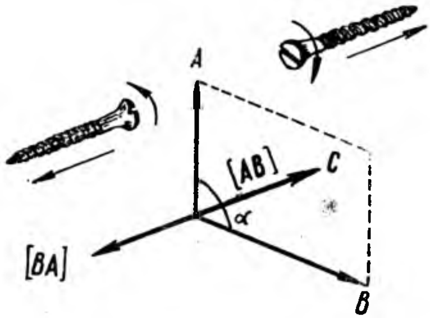
Ҳозир биз векторларнинг вектор кўпайтмасини кўриб чиқамиз. Векторларни скаляр кўпайтириш усулини биз кейинроқ, унга зарурат туғилганда ўрганамиз.

Иккита **A** ва **B** векторнинг вектор кўпайтмаси деб қуйидагидек хоссаларга эга бўлган учинчи **C** векторга айтилади:

1) **C** векторнинг модули кўпайтирилаётган векторларнинг модуллари билан улар орасидаги α бурчакнинг синуси кўпайтмасига тенг (35- расм).

$$C = AB\sin\alpha;$$

2) **C** вектор **A** ва **B** векторлар ётган текисликка перпендикуляр бўлиб, унинг йўналиши **A** ва **B** ларнинг йўналиши билан ўнг винт қоидасига асосан боғлангандир: агар **C** вектор бўйлаб қарасак, у ҳолда биринчи кўпайтувчидан иккинчи кўпайтувчига қараб энг қисқа йўл билан бурилиш соат стрелкаси бўйлаб амалга ошади.



35- расм.

Вектор кўпайтмани символик йўл билан қуйидагича ёзиш мумкин.

$$[\mathbf{AB}] \text{ ёки } \mathbf{A} \times \mathbf{B}.$$

Биз бу усулларнинг биринчисидан фойдаланамиз, шу билан бирга баъзан формулаларни ўқишни енгиллаштириш мақсадида кўпайтирилувчилар орасига вергуль белгисини қўямиз. Бир вақтнинг ўзида, ҳам кўпайтириш белгиси, ҳам квадрат қавслардан фойдаланиш мумкин эмас: $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]$. $[\mathbf{AB}] = AB\sin\alpha$ каби ёзиш мутлақо мумкин эмас. Бу тенгликда чап томонда вектор, ўнг томонда эса бу векторнинг модули, яъни скаляр турибди. Қуйидагича ёзилса, тўғри бўлади:

$$|\,[\mathbf{AB}]\,| = AB\sin\alpha. \qquad (11.1)$$

Вектор кўпайтманинг йўналиши биринчи кўпайтувчидан иккинчисига қараб бурилиш йўналишига боғлиқ бўлганлиги учун иккита векторнинг бир-бирига кўпайтириш натижаси кўпайтирилувчиларнинг тартибига боғлиқ бўлади. Кўпайтирилувчилар тартибининг ўзгариши натижавий вектор йўналишининг ўзгаришига олиб келади (35- расм).

$$[\mathbf{BA}] = -[\mathbf{AB}] \text{ ёки } \mathbf{B} \times \mathbf{A} = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B}).$$

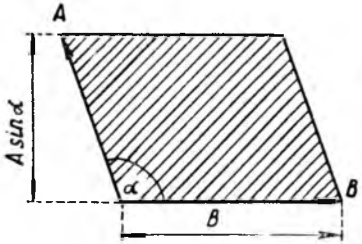
Шундай қилиб, вектор кўпайтма коммутативлик хоссасига эга эмас экан.

Вектор кўпайтма дистрибутив, яъни

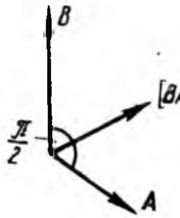
$$[\mathbf{A}, (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \ldots + \mathbf{B}_N)] = [\mathbf{AB}_1] + [\mathbf{AB}_2] + \ldots + [\mathbf{AB}_N] \quad (11.2)$$

эканлигини исботлаш мумкин.

Иккита қутб ёки иккита аксиал векторларнинг вектор кўпайтмаси аксиал векторлардан иборатдир. Бироқ аксиал векторнинг қутб векторига кўпайтмаси (ёки тескариси) қутб вектори бўлади. Аксиал векторларнинг йўналишини белгиловчи шартнинг тескарига ўзгариши бу ҳолда вектор кўпайтма олдидаги белгининг ўзгаришига ва бир вақтда кўпайтувчилардан бири олдидаги ишоранинг тескарисига ўзгаришига олиб келади. Натижада вектор кўпайтма билан группаланувчи катталик ўзгармай қолади.



36- расм.



37- расм

Вектор кўпайтманинг модулига оддий геометрик маъно бериш мумкин: $AB \sin\alpha$ ифода **A** ва **B** векторлар устида чизилган параллелограммнинг юзига тенг (36- расм, бу ҳолда $\mathbf{C} = [\mathbf{AB}]$ вектор чизма текислигига тик ва чизма орқасига қараб йўналган).

A ва **B** векторлар ўзаро перпендикуляр йўналган бўлсин (37- расм). Бу векторларнинг иккиламчи вектор кўпайтмасини ҳосил қилайлик:

$$\mathbf{D} = [\mathbf{A}, [\mathbf{BA}]],$$

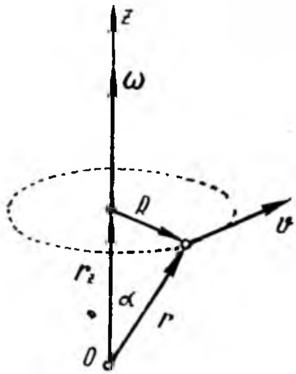
яъни **B** векторни **A** векторга кўпайтирайлик, кейин эса **A** векторни биринчи кўпайтириш натижасида ҳосил бўлган векторга вектор кўпайтирайлик. $[\mathbf{BA}]$ вектор BA $(\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{2} = 1)$ га тенг бўлган модулга эга ҳамда **A** ва **B** векторлар билан $\pi/2$ га тенг бурчаклар ҳосил қилади. Демак, **D** векторнинг модули $|\mathbf{A}|\cdot|[\mathbf{BA}]| = A\cdot BA = A^2B$. **D** вектор **B** вектор билан бир хил йўналганлигини 37- расмдан осонгина кўриш мумкин. Бу бизга қуйидаги муносабатни ёзишга асос бўла олади:

$$[\mathbf{A}, [\mathbf{BA}]] = A^2\mathbf{B}. \quad (11.3)$$

Келгусида (11.3) формуладан кўп фойдаланамиз. Бу формула фақат **A** ва **B** векторлар ўзаро перпендикуляр бўлган ҳолдагина ўринли эканини эслатиб ўтамиз.

(10.9) формула $\mathbf{v}$ ва $\boldsymbol{\omega}$ векторларнинг модулларини бир-бирига боғлайди. Вектор кўпайтма ёрдамида векторлар орасидаги боғланишни берувчи муносабатни ёзиш мумкин. Жисм z ўқи атрофида $\bar{\omega}$ бурчак тезлик билан айланаётган бўлсин (38- расм). $\bar{\omega}$ нинг биз $\mathbf{v}$ тезлигини қидираётган нуқтанинг $\mathbf{r}$ радиус-векторига вектор кўпайтмаси йўналиши $\mathbf{v}$ вектор билан бир хил бўлган ва модули $\omega r \sin\alpha = \omega R$ га, яъни v га [(10.9) формулага қаранг] тенг вектордан иборат эканлигини осонгина билиб олиш мумкин. Шундай қилиб, $[\bar{\omega}\mathbf{r}]$ кўпайтма йўналиш жиҳатдан ҳам, модули жиҳатдан ҳам $\mathbf{v}$ векторга тенг экан:

$$\mathbf{v} = [\bar{\omega}\mathbf{r}]. \qquad (11.4)$$



38- расм.

(11.4) формулага бошқача кўриниш бериш мумкин. Бунинг учун $\mathbf{r}$ радиус векторни иккита векторнинг йиғиндиси шаклида — z ўққа параллел бўлган $\mathbf{r}_z$ вектор билан z ўққа перпендикуляр $\mathbf{R}$ векторларнинг йиғиндиси шаклида, яъни $\mathbf{r} = \mathbf{r}_z + \mathbf{R}$ кўринишда ёзиш мумкин (38- расмга қаранг). Бу ифодани (11.4) формулага қўйиб ва вектор кўпайтма дистрибутив кўпайтма эканлигидан [(11.2) га қаранг] фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$[\bar{\omega}\mathbf{r}] = [\bar{\omega}(\mathbf{r}_z + \mathbf{R})] = [\bar{\omega}\mathbf{r}_z] + [\bar{\omega}\mathbf{R}].$$

$\bar{\omega}$ ва $\mathbf{r}_z$ векторлар коллинеар векторлардир. Шу сабабли уларнинг вектор кўпайтмаси нолга тенг ($\sin\alpha = 0$) Демак:

$$\mathbf{v} = [\bar{\omega}\mathbf{R}] \qquad (11.5)$$

деб ёзиш мумкин.

Келгусида айланма ҳаракатни таҳлил қилишда биз ҳамма вақт $\mathbf{R}$ билан ўқ устида олинган нуқтадан ўтказилган $\mathbf{r}$ радиус-векторнинг айланиш ўқига перпендикуляр ташкил этувчисини белгилаймиз. Бу векторнинг модули ўқдан нуқтагача бўлган R масофани беради.

II БОБ

МОДДИЙ НУҚТА ДИНАМИКАСИ

12- §. Классик механика. Унинг қўлланиш чегараси

Кинематикада жисмларнинг ҳаракати ҳақида гапирилиб, жисм нима сабабдан бошқача эмас, худди шундай (масалан, айлана бўйлаб текис ёки тўғри чизиқ бўйлаб текис тезланувчан) ҳаракатланади, деган масалага эътибор берилмайди.

Динамика жисмларнинг ҳаракатини унинг у ёки бу характерда бўлишини белгиловчи сабаблар (жисмлар орасидаги ўзаро таъсирлар) билан боғланган ҳолда ўргатади.

Классик механика ёки ньютон механикасига динамиканинг 1687 йилда Ньютон аниқлаган учта қонун асос қилиб олинган.

Ньютон қонунлари (қолган барча физика қонунлари каби) тажрибада топилган кўп фактларни умумлаштириш натижасида майдонга келган. Бу қонунларнинг тўғрилигини (жуда кенг бўлса ҳам, ҳар ҳолда чекли сондаги ходисалар учун) тажриба натижаларига мос келиши билан тасдиқланади.

Ньютон механикаси кейинги икки юз йил ичида шундай катта муваффақиятларга эришдики, XIX асрнинг кўп физиклари бу механиканинг мислсиз куч-қудратига тўла ишонган эдилар. Улар исталган физикавий ҳодисани тушунтириш — уни Ньютон қонунларига бўйсунувчи механик процессга келтиришдан иборатдир, деб ҳисоблар эдилар. Бироқ фан ривожланиши билан классик механика тушунчаларига мутлақо мос келмайдиган фактлар очилди. Бу фактларни янги назария — махсус нисбийлик назарияси ва квант механикаси тушунтириб берди.

1905 йилда Эйнштейн яратган махсус нисбийлик назариясида фазо ва вақт ҳақидаги Ньютон тушунчалари янгидан қайта қараб чиқилди. Бундай қайта қараш, «катта тезликлар механикасининг» ёки релятивистик механиканинг яратилишига олиб келди. Бироқ янги механика эски Ньютон механикасини бутунлай инкор қилмади. Релятивистик механика тенгламалари лимитда (ёруғлик тезлигидан кичик тезликлар учун) классик механика тенгламаларига айланади. Шундай қилиб, классик механика релятивистик механикага унинг хусусий ҳоли сифатида кирди ва ёруғлик тезлигидан кичик тезликлар билан содир бўладиган ҳодисаларни таърифлаш учун ўзининг аввалги аҳамиятини сақлаб қолди.

Классик механика билан асримизнинг 20- йилларида атом физикаси ривожи жараёнида юзага келган квант механикаси орасидаги муносабат ҳам худди ана шундай. Квант механикаси тенгламалари ҳам лимитда (атом массаларидан каттароқ массалар учун) классик механика тенгламаларини беради. Демак, классик механика ҳам квант механикасига унинг лимитдаги ҳоли сифатида кирган экан.

Шундай қилиб, фаннинг тараққиёти классик механикани йўққа чиқармасдан фақат унинг қўлланиш чегараси чекланганлигини кўрсатди холос. Ньютон қонунларига асосланувчи классик механика катта массали (атомлар массасига нисбатан) кичик тезлик (ёруғлик тезлигига нисбатан) билан ҳаракатланувчи жисмлар механикасидир.

13- §. Ньютоннинг биринчи қонуни

Инерциал саноқ системалар

Ньютоннинг биринчи қонуни қуйидагича таърифланади: *ҳар қандай жисм тинч ёки тўғри чизиқли ва текис ҳаракат ҳолатини то бошқа жисмлар томонидан кўрсатилаётган таъсир бу ҳолатни ўзгартиришга мажбур этмагунча сақлаб қолади*. Кўрсатилган бу икки ҳолат жисмнинг тезланиши нолга тенглиги билан ажралиб туради. Шунинг учун биринчи қонунни қуйидагича таърифлаш мумкин: ҳар қандай жисмнинг тезлиги то унга бошқа жисмлар томонидан кўрсатилган таъсир уни ўзгартирмагунча доимийлигига (хусусан нолга тенглигича) қолади.

Шуни таъкидлаб ўтиш керакки, бошқа жисмларнинг у ёки бу таъсирига дучор бўлмаган жисм табиатда мавжуд эмас. Амалда кузатиладиган тинч ёки текис ва тўғри чизиқли ҳаракат ҳолларида жисмларга кўрсатиладиган таъсирлар ўзаро мувозанатлашган бўлади. Масалан, стол устида ётган китобга Ернинг тортиш кучи ҳамда стол томонидан кўрсатиладиган босим кучи таъсир қилади, бунда бу иккала таъсир бир-бирини мувозанатлаганлиги туфайли китоб тинч ҳолатда туради.

Биринчи қонунда баён қилинган фикр унча равшан эмас. Галилейга қадар (1564—1642) ташқи таъсир тезликни ўзгартириш учун эмас, балки уни ўзгартирмай сақлаш учун зарур деб ҳисобланар эди. Бу фикр араванинг текис ҳаракати секинлашмаслиги учун уни узлуксиз туртиб туриш зарурлиги каби кундалик ҳаётдан маълум бўлган фактларга асосланган эди. Ҳозир эса, биз биламизки, аравани туртар эканмиз унга таъсир қилувчи ишқаланиш кучини мувозанатлаймиз. Аммо бу ҳолни етарли даражада тушуниб етмасак, ташқи таъсир тезликнинг ўзгаришига (яъни тезланишга) сабабчи бўлмай, балки тезликка сабабчи бўлади, деган хулосага келиш қийин эмас.

Ньютоннинг биринчи қонуни ҳар қандай саноқ системада ҳам бажарилавермайди. Биз ҳаракатнинг характери саноқ системанинг танлаб олинишига боғлиқ эканлигини таъкидлаб ўтган эдик. Бирбирига нисбатан бирор тезланиш билан ҳаракат қилаётган икки саноқ системани текширайлик. Агар жисм улардан бирига нисбатан тинч турган бўлса, маълумки, иккинчисига нисбатан у тезланиш билан ҳаракатланади. Демак, Ньютоннинг биринчи қонуни бир вақтнинг ўзида иккала системада қаноатлантирилиши мумкин эмас.

Агар саноқ системада Ньютоннинг биринчи қонуни қаноатлантирилса, бу системани инерциал система дейилади. Бу қонуннинг ўзи баъзан инерция қонуни деб ҳам юритилади. Ньютон қонуни бажарилмайдиган саноқ система ноинерциал саноқ система деб аталади. Чексиз кўп инерциал системалар мавжуд. Бирор инерциал системага нисбатан тўғри чизиқли ва текис (яъни ўзгармас тезлик билан) ҳаракатланувчи исталган саноқ система ҳам инерциал бўлади. Бу ҳақда 17- § да гапирилади.

Маркази Қуёш билан устма-уст тушувчи, ўқлари эса мос равишда танлаб олинган юлдузларга томон йўналган саноқ системасининг инерциал система эканлиги тажрибада аниқланган. Бу система гелиоцентрик саноқ системада дейилади (гелиос сўзи — юнонча бўлиб, унинг таржимаси қуёш демакдир). Гелиоцентрик системага нисбатан текис ва тўғри чизиқли ҳаракатланувчи исталган саноқ система инерциал бўлади.

Ер, қуёш ва юлдузларга нисбатан эллипс шаклидаги эгри чизиқли траектория бўйлаб ҳаракатланади. Эгри чизиқли ҳаракат доим маълум тезланиш билан содир бўлади. Ундан ташқари Ер ўз ўқи атрофида айланиб туради. Ана шу сабабларга кўра Ер сирти билан боғланган саноқ система гелиоцентрик саноқ системага нисбатан тезланиш билан ҳаракат қилади ва инерциал бўлолмайди. Бироқ бундай системанинг тезланиши шу қадар кичикки, кўп ҳолларда уни деярли инерциал деб ҳисобласа бўлади. Лекин Ер сирти билан боғланган саноқ системанинг ноинерциаллиги унга нисбатан қаралаётган механик ҳодисаларнинг характерига муҳим таъсир кўрсатади. Ана шундай ҳолларнинг баъзиларини биз келгусида таҳлил қиламиз.

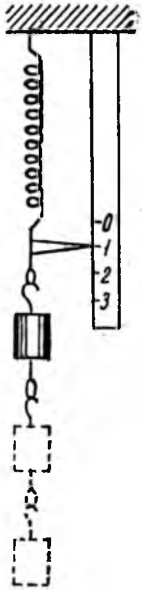
14- §. Ньютоннинг иккинчи қонуни

Ньютоннинг иккинчи қонунида иккита янги физик катталик куч ва масса иштирок этади. Куч берилган жисмга бошқа жисмлар томонидан кўрсатилаётган таъсирнинг миқдори билан йўналишини кўрсатади. Масса эса жисмнинг бу таъсирга «жавоб берувчанлигини» миқдор томонидан характерлайди.

Юқорида таъкидлаб ўтилганидек, бирор жисмга кўрсатиладиган таъсир икки хил ҳодисани юзага келтириши: жисмнинг тезлигини ўзгартириши ёки уни деформациялаши (яъни унинг ўлчамлари ва шаклини) ўзгартириши мумкин. Бу иккала эффектни (тезланишни ҳам, деформацияни ҳам) ўлчаш мумкин бўлганлиги сабабли уларнинг исталганидан таъсирни миқдоран, яъни кучни таққослаш ва ўлчаш учун фойдаланиш мумкин.

Қуйидаги тажрибани кўриб чиқайлик. Юқори учи кўчмас қилиб маҳкамланган пружина оламиз. Пружинанинг пастки учига бирор юк иламиз (39- расм). Бу юкнинг (ва пружинанинг юқори учи маҳкамланган жисмнинг) таъсирида пружина маълум даражада узаяди ва натижада пружинага маҳкамланган кўрсаткич стрелка қўзғалмас шкала бўйлаб 0 белгидан 1 белгига қараб бурилади. Ҳар бирини алоҳида-алоҳида илганимизда пружинани бир хил узайишга мажбур этадиган юклардан бир нечтасини танлаб оламиз. У ҳолда бу юклардан ҳар бири пружинага илинганда унга бир хил таъсир кўрсатади ва бу таъсирни пружинанинг учига маълум катталикдаги кучнинг таъсири сифатида характерласа бўлади деб таъкидлаш мумкин.

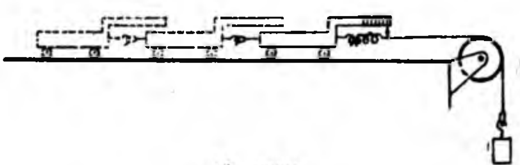
Энди пружинага бир вақтда иккита юк иламиз. Уларнинг ҳар бири фақат катталик жиҳатдан эмас, балки йўналиш жиҳатдан ҳам бир хил таъсир кўрсатади. Равшанки, бу ҳолда пружинага таъсир этувчи куч 2 марта катта бўлади. Тажрибанинг кўрсатишича, бу ҳолда пружина ҳам 2 марта кўпроқ узаяр экан. Учта бир хил юк бир вақтда таъсир кўрсатганда пружина уч марта кўпроқ деформацияланади ва ҳоказо.



39- расм.

Демак, пружинанинг узайиши унга таъсир этувчи кучга пропорционал экан. Тўғри, Гук қонуни номи билан юритилувчи бу қонун фақат у қадар катта бўлмаган деформациялар учунгина бажарилади. Деформациянинг катталиги ҳар бир конкрет пружина учун аниқ чегарадан ўтгандан кейин куч билан деформация орасидаги пропорционаллик қаноатлантирилмай қолади[1]. Шундай қилиб, биз кучларни миқдор жиҳатдан солиштириш усулига эга бўлдик: иккита куч катталикларининг нисбати пружинанинг шу кучлар юзага келтираётган эластик деформациялари нисбатига тенгдир.

Кучни ўлчаш усулини топгач, жисмнинг тезланиши унга таъсир этувчи кучнинг катталигига қандай боғлиқ бўлишини текширайлик. Бунинг учун қуйидагича тажриба ўтказамиз (40- расм). Юк таранг қилиб тортиб турган ип таъсирида аравачанинг текис горизонтал стол устидаги ҳаракатини ўрганамиз. Чўзилишига қараб таъсир этаётган кучни аниқлаш учун аравача билан ип орасига пружина қўямиз. Маълумки, таъсирнинг йўналиши ипнинг йўналиши билан


40- расм.

[1] Гук қонунига бўйсунувчи деформация эластик деформация дейилади.

бир хил бўлади. Ипга ҳар хил юклар осиш билан ҳаракатни юзага келтираётган кучни ўзгартириш мумкин.

Бундай тажриба қуйидагича натижа беради: агар пружинанинг таранглиги ўзгармаса, аравача текис тезланувчан ҳаракатланади ва бунда w тезланиш f кучға пропорционал бўлади:

$$w \sim f. \tag{14.1}$$

Аравачанинг ғилдиракчалари билан ўқ орасидаги, шунингдек, ғилдираклар билан стол орасидаги ишқаланишнинг бўлиши натижага хатолик киритишини эътиборга олиш керак. Бироқ ишқаланиш камайган сари бизнинг натижамиз (14.1) муносабатга яқинлаша боради. Топилган қонуният бизга кучларни миқдоран таққослашнинг яна бир усулини беради: иккита f_1 ва f_2 кучнинг нисбатини ана шу кучлар таъсирида бирор жисм олган w_1 ва w_2 тезланишларни аниқлаш йўли билан ҳам топиш мумкин:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{w_1}{w_2}. \tag{14.2}$$

Агар бошқа аравачани олсак, у вақтда бу аравача учун ҳам ҳаракатнинг характери ва куч билан тезланиш орасидаги муносабат бирдек қолса ҳам, умуман айтганда, унинг ўша f куч таъсирида олган тезланиши бошқача бўлади. Бу аравачаларнинг куч кўрсатаётган «таъсирга берилмаслиги» турлича эканлиги, одатда айтилишича, турлича инерционлиги билан тушунтирилади.

Кучнинг катталиги ва йўналиши қандай бўлмасин f куч катталигининг бу куч юзага келтираётган w тезланишга нисбати берилган жисм учун ўзгармайди[1]. Турли жисмлар учун бу нисбат ҳар хил бўлар экан. Маълумки, f/w нисбатнинг катталиги берилган жисмнинг инерционлигини характерлайди. Шунинг учун жисмнинг инерционлигини миқдоран характерлаш учун f/w нисбатга пропорционал бўлган ва жисмнинг массаси деб аталадиган физикавий катталикдан фойдаланамиз. Жисмнинг массасини m билан белгилаб қуйидаги тенгликни ёзиш мумкин:

$$m \sim \frac{f}{w}. \tag{14.3}$$

Ана шундай йўл билан аниқланган масса жисм инерциаллигининг ўлчови бўлади. (14.3) нисбатдан массаларни солиштириш усули келиб чиқади: иккита жисмнинг m_1 ва m_2 массалари нисбати бу жисмларга бир хил куч бераётган w_1 ва w_2 тезланишларнинг тескари нисбатларига тенгдир:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{w_2}{w_1}. \tag{14.4}$$

Тенг кучлар таъсирида бир хил катталикдаги тезланиш оладиган (ишқалиш эътиборга олмайдиган даражада кичик деб фараз

[1] Бу фақат жисмнинг тезлиги ёруғликнинг бўшлиқдаги тезлигидан кичик бўлган ҳол учунгина ўринлидир.

қилинади) бир нечта аравачани олайлик. Бундай аравачаларнинг массалари тенг бўлади. Бу икки аравачани ип билан бир-бирига боғлайлик (40- расмга қаранг) Бу тажриба иккита ўзаро бирлаштирилган аравачанинг бирор f куч таъсирида олган тезланиши шу куч таъсирида ҳар бир аравачанинг олган тезланишидан икки марта кичик эканлигини кўрсатади. Агар учта аравачани бирлаштирсак, системанинг ҳар бирининг тезланишидан тезланиши уч марта кичик бўлади ва ҳоказо. Бундан масса аддитивлик хоссасига эга эканлиги келиб чиқади; бу деган сўз бир неча қисмдан ташкил топган жисмнинг массаси унинг алоҳида қисмлари массалари йиғиндисига тенг эканлигини англатади[1].

(14.3) ифодани қуйидаги кўринишда ёзайлик:

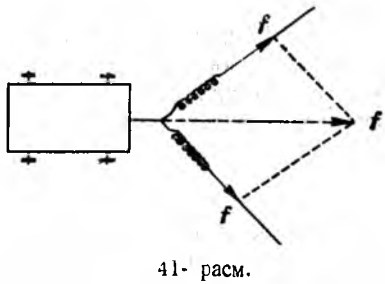
$$w = k\frac{f}{m}, \tag{14.5}$$

бу ерда k — пропорционаллик коэффициенти. (14.5) муносабат Ньютон иккинчи қонунининг аналитик ифодасидир.

Шундай қилиб, Ньютоннинг иккинчи қонуни қуйидагича таърифланади: *Ҳар қандай жисмнинг тезланиши унга таъсир этувчи кучга тўғри ва жисмнинг массасига тескари пропорционал.* Бу қонун ҳам Ньютоннинг биринчи қонуни каби фақат инерциал саноқ системалардагина ўринли.

Хусусий ҳолда куч нолга тенг бўлса (жисмга бошқа жисмлар таъсир кўрсатмаса), тезланиш ҳам (14.5) га биноан нолга тенг бўлади. Бу эса Ньютоннинг биринчи қонунига мос келади. Шунинг учун, биринчи қонун иккинчи қонунга унинг хусусий ҳоли бўлиб киргандек туюлади. Бироқ бунга қарамасдан биринчи қонун иккинчи қонундан мустақил равишда таърифланади, чунки аслини олганда унда инерциал саноқ системалар мавжудлиги ҳақидаги (постулат) фикр бор.

Бир жисмнинг иккинчи жисмга таъсири маълум бир йўналишга эга. Демак, куч ҳам сон қийматидан ташқари яна ўз йўналиши билан ҳам характерланадиган катталикдир. Лекин кучни векторлар категориясига қўшиш учун бунинг ўзигина етарли эмас. Кучлар қандай қўшилиш қоидаларига бўйсунишини аниқламоқ зарур. Бунинг учун иккита таранг ип таъсирида турган аравача билан тажриба ўтказамиз (41- расм, аравачанинг уст томондан кўриниши). Тажриба аравачанинг $\mathbf{f}_1$ ва $\mathbf{f}_2$ кучлар таъсирида олган тезланиши $\mathbf{f}_1$ ва $\mathbf{f}_2$ кучлардан векторларни қўшиш қоидасига асосан олинадиган $\mathbf{f}$ куч ўзининг таъсирида олган тезланишига ҳам



41- расм.

[1] Массанинг аддитивлиги ҳақидаги даъво фақат Ньютон механикаси доирасидагина тўғри холос. Релятивистик механикада масса аддитив эмас.

йўналиш ва катталик жиҳатдан тенг эканлигини кўрсатади. Демак, куч вектор катталикдир.

Куч вектор бўлганлиги ва тезланишнинг йўналиши кучнинг йўналиши билан мос тушганлиги учун (14.5) тенгламани вектор кўринишида ёзиш мумкин.

$$\mathbf{w} = k\frac{\mathbf{f}}{m}. \tag{14.6}$$

Масса m ва пропорционаллик коэффициенти k скаляр катталиклардир. (14.6) тенглама классик механиканинг асосий тенгламаси ҳисобланади.

15- §. Физикавий катталикларнинг ўлчов бирликлари ва ўлчамликлари

Юқорида қайд қилинганидек, физика қонунлари физикавий катталиклар орасида миқдорий муносабатлар ўрнатади. Бундай муносабатларни ўрнатиш учун турли физикавий катталикларни ўлчаш имкониятига эга бўлиш керак.

Бирор физикавий катталикни (масалан, тезликни) ўлчаш — бирлик учун қабул қилинган ўша турдаги катталик билан (олинган мисолда тезлик билан) солиштириш демакдир.

Умуман айтганда, ҳар бир физикавий катталик учун бошқа катталиклардан мустақил бўлган ихтиёрий ўлчов бирлигини ўрнатиш мумкин бўлар эди. Бироқ, маълум бўлишича, асосий деб қабул қилинган (принципда ихтиёрий) учта катталик учун ўлчов бирлигини ихтиёрий танлаб олиш билан чегараланиш мумкин экан. Барча қолган катталикларнинг ўлчов бирликларини эса учта асосий катталикка асосланган ҳолда мос катталикни асосий каталиклар билан ёки шу йўсинда бирликлари аниқланган бошқа катталиклар билан боғлайдиган физика қонунларидан фойдаланиб аниқлаш мумкин экан.

Айтилганларни қуйидаги мисол билан тушунтирайлик. Биз масса билан тезланиш учун ўлчов бирлигини аниқладик деб фараз қилайлик. (14.5) муносабат бу катталикларни учинчи физикавий катталик — куч билан қонуний равишда боғлайди. Кучнинг ўлчов бирлигини шундай танлаб оламизки, бу тенгламада пропорционаллик коэффициенти бирга тенг бўлсин. У вақтда (14,5) соддароқ кўринишга келади

$$w = \frac{f}{m}. \tag{15.1}$$

(15.1) дан кучнинг топилган бирлиги шундай кучдан иборатки, бу куч таъсирида массаси бирга тенг бўлган жисм бирга тенг тезланиш олади, деган хулоса чиқади [(15.1) га $f = 1$ ва $m = 1$ ни қўйсак, $w = 1$ ни топамиз].

Ўлчов бирликларини юқоридагидек топиш усулидан фойдаланилганда физик муносабатлар соддароқ кўринишга келади. Ўлчов бирликларининг тўплами эса маълум системани ҳосил қилади.

Бир-бирларидан асосий бирликлар қандай танлаб олинганлиги билан фарқ қилувчи бир нечта система мавжуд. Узунлик, масса ва вақтнинг бирликлари асос қилиб олинган системалар **абсолют** системалар дейилади.

СССР да 1963 йилнинг 1 январидан СИ символи билан белгиланувчи Халқаро бирликлар системасини белгиловчи ГОСТ 9867-61 давлат стандарти қабул қилинган. Бу бирликлар системасини фаннинг техниканинг ва халқ хўжалигининг барча соҳаларида, шунингдек, ўқитиш процессида устунроқ система сифатида қўлланилиши керак СИ нинг асосий бирликлари қуйидагилар ҳисобланади: узунлик бирлиги — метр (қисқа белгиси *м*), масса бирлиги — килограмм (*кг*) ва вақт бирлиги — секунд (*сек*). Шундай қилиб, СИ абсолют системалар қаторига киради. Кўрсатилган учта бирликдан ташқари СИ да асосий бирликлар сифатида ток кучи бирлиги амперни (*а*) термодинамик температура бирлиги — Кельвин градусини (°К) ва ёруғлик кучи бирлиги — шамни (*ш*) қабул қилинган.

Метр деб криптон-86[1] атомининг $2P_{10}$ ва $5d_5$ сатҳлари орасидаги электрон ўтишга мос нурланишнинг (криптон-86 нинг зарғалдоқ нурланиш чизиғининг) вакуумдаги тўлқин узунлигининг 1650763,73 тасига тенг узунлик қабул қилинган. Метр Ер меридианининг тахминан $\frac{1}{40000000}$ улушига тенгдир. Шунингдек, метрга аррали ва метрнинг улушидан иборат бирликлар мавжуд: километр (1000 *м*), сантиметр (1/100 *м*,) миллиметр (1/1000 *м*) микрон (1/1000 000 *м*) ва ҳоказо.

Килограмм Севрдаги (Париж яқинида) халқаро ўлчов ва тарозилар бюросида сақланадиган платина-иридий[2] жисмнинг массасидан иборат. Бу жисм килограммнинг халқаро нусхаси деб аталади. Нусханинг массаси 4°С температурадаги 1000 *см*³ тоза сувнинг массасига яқин. Грамм 1/1000 килограммга тенг.

1900 йил 0 январь эфемерид вақти[3] билан соат 12 учун тропик йилнинг 1/31556925, 9747 қисмини секунда деб олинади. Секунда тахминан ўртача қуёш суткаларининг 1/86400 қисмига тенг.

Физикада, шунингдек СГС система деб аталувчи абсалют бирликлар системаси ҳам қўлланилади. Бу системада асосий бирликл р сантиметр, грамм ва секундлардир.

Биз кинематикада киритган катталикларнинг (тезликлар ва тезланишларнинг) бирликлари асосий бирликларидан келиб чиқадиган ҳосилавий бирликлардир. Чунончи, тезлик бирлиги қилиб вақт бирлиги ичида (секундда) узунлик бирлигига (метрга ёки сантиметрга) тенг йўл ўтувчи текис ҳаракатланаётган жисмнинг тезлиги қабул қилинади.

---

[1] Бу белгиларнинг маъноси «Атом физикаси» бўлимида тушунтирилади.

[2] Платинанинг иридий билан қотишмаси жуда қаттиқ ва коррозияга чидамлидир (яъни атрофдаги муҳит унга деярли химиявий таъсир кўрсатмайди).

[3] Яъни 1899 йил 31 декабрь соат 12 учун. Эфемерид вақти деб текис ўтувчи вақтга айтилади. Бу вақтни Ернинг ўз ўқи атрофида нотекис айланишини ҳисобга олиб, тузатма киритиш йўли билан топиш мумкин. 1900 йилга нлова қилинишига сабаб тропик йил юз йил ичида тахминан 0,5 секундга камайишидир.

Бу бирлик СИ системада *м/сек* ва СГС системада эса *см/сек* билан белгиланади. Тезланиш бирлиги қилиб жисмнинг тезлиги вақт бирлиги ичида (секундига) бир бирликка (*м/сек* га ёки *см/сек* га) ўзгарадиган текис ўзгарувчан ҳаракатнинг тезланиши қабул қилинади. Бу бирлик СИ системада $м/сек^2$ ва СГС системада $см/сек^2$ билан белгиланади.

СИ системада куч бирлиги ньютон (*н*) деб аталади. (15.1) га биноан ньютон 1 *кг* массали жисмга 1 $м/сек^2$ тезланиш берадиган кучдир. СГС системада куч бирлиги дина (*дина*) дейилади. Бир дина 1 *г* массали жисмга 1 $см/сек^2$ тезланиш берадиган кучга тенг. Ньютон билан дина орасидаги қуйидаги муносабат ўринли:

$$1н = 1кг \cdot 1\ м/сек^2 = 10^3 г \cdot 10^2 см/сек^2 = 10^5\ дина.$$

Техникада МКГСС (у одатда техник система деб аталади) система кенг қўлланилар эди. Бу системанинг асосий бирликлари метр, куч бирлиги — килограмм-куч (*кгк* ёки *кг*) дир. Килограмм-куч 1 *кг* массага 9,80655 $м/сек^2$ тезланиш берадиган куч сифатида таърифланади. Бу таърифдан 1 *кгк* = 9,80655 *н* (тахминан 9,81 *н*) деган хулоса чиқади. МКГСС системада (15.1) га биноан масса бирлиги қилиб 1 *кгк* куч таъсирида 1 $м/сек^2$ тезланиш оладиган масса қабул қилинган. Бу бирлик $кгк \cdot сек^2/м$ билан белгиланади, у алоҳида номга эга эмас. Равшанки, 1 $кгк \cdot сек^2/м = 9{,}80655$ *кг* (тахминан 9,81 *кг*).

Бирликлар системасини тузиш усулидан асосий бирликларнинг ўзгариши ҳосилавий бирликларнинг ўзгаришига олиб келади деган хулоса чиқади. Агар вақт бирлиги қилиб секунд ўрнига минутни олсак, яъни вақт бирлигини 60 марта катталаштирсак, у ҳолда тезлик бирлиги 60 марта кичраяди, тезланиш бирлиги эса 3600 марта кичраяди.

Асосий бирликлар ўзгарганда бирор катталикнинг ўлчов бирлиги қандай ўзгаришини кўрсатувчи муносабат шу катталикнинг ўлчамлиги дейилади. Исталган физикавий катталикнинг ўлчамлигини кўрсатиши учун унинг ҳарф белгисини квадрат қавслар ичига олинади. Масалан, $[v]$ символ тезликнинг ўлчамлигини билдиради. Асосий катталикларнинг ўлчамлигини ифодалаш учун махсус белгилар: узунлик учун L, масса учун M ва вақт учун T ишлатилади. Шундай қилиб, узунликни l ҳарф билан, массани m билан ва вақтни t билан белгилаб қуйидагиларни ёзиш мумкин экан.

$$[l] = L; \quad [m] = M; \quad [t] = T.$$

Бу белгиларда исталган физикавий катталикнинг ўлчамлиги $L^\alpha M^\beta T^\gamma$ кўринишга эга (α, β ва γ мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши хусусий ҳолда улар нолга тенг бўлиши ҳам мумкин). Бу ёзув узунлик бирлиги n_1 марта ортганда берилган катталикнинг бирлиги n_1^α марта ортишини билдиради (мос равишда катталикнинг бу бирликлардаги қийматини ифодалайдиган сон n_1^α марта камаяди); масса бирлиги n_2 марта ортганда берилган катталикнинг бирлиги n_2^β марта ортади ва ниҳоят, вақт бирлиги n_3 марта ортганда берилган катталикнинг бирлиги n_3^γ марта ортади.

Физика қонунлари уларга кирувчи катталикларнинг ўлчов бирлиги танлаб олинганлигига боғлиқ бўлмаганлиги учун бу қонунларни ифодаловчи тенгламаларнинг иккала томонининг ўлчамликлари бир хил бўлиши керак. Бу шартдан биринчидан, олинган физикавий муносабатларнинг тўғрилигини текшириш учун ва иккинчидан, физикавий катталикларнинг ўлчамликларини аниқлаш учун фойдаланиш мумкин. Масалан, тезлик $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}$ кўринишда ёзилади. Δs нинг ўлчамлиги L га Δt ники эса T га тенг. Бу ёзилган муносабатнинг ўнг томонининг ўлчамлиги $[\Delta s]/[\Delta t]=L/T=LT^{-1}$. Унинг чап томонидаги ифоданинг ўлчамлиги ҳам шундай булиши керак. Демак,

$$[v]=LT^{-1}. \qquad (15.2)$$

Бу ёзилган муносабат ўлчамлик формуласи, унинг ўнг томони эса мос катталикнинг (берилган ҳол учун тезликнинг) ўлчамлиги дейилади. $w=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ муносабатга асосан тезланишнинг ўлчамлигини аниқлаш мумкин:

$$[w]=\frac{[\Delta v]}{[\Delta t]}=\frac{LT^{-1}}{T}=LT^{-2}.$$

Кучнинг ўлчамлиги

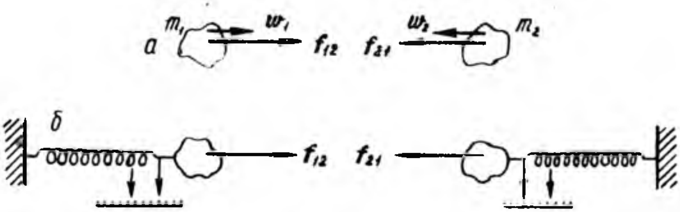
$$[f]=[m][w]=MLT^{-2}.$$

Қолган барча катталикларнинг ўлчамликлари ҳам худди шундай йўл билан аниқланади.

16- §. Ньютоннинг учинчи қонуни

Жисмларнинг бир-бирларига бўлган ҳар қандай таъсири ўзаро таъсир характерига эга: агар M_1 жисм M_2 жисмга бирор $\mathbf{f}_{21}$ куч билан таъсир кўрсатса, у ҳолда M_2 жисм ҳам ўз навбатида M_1 жисмга $\mathbf{f}_{12}$ куч билан таъсир қилади.

Тажриба кўрсатадики, ўзаро таъсирлашувчи жисмларнинг бир-бирига таъсир кучлари доим катталик жиҳатидан тенг ва йўналиш жиҳатидан қарама-қарши бўлар экан. Қуйидаги мисолни кўрайлик. Массалари m_1 ва m_2 бўлган, ташқи жисмларнинг таъсиридан изоляция қилинган икки жисм (масалан, электр зарядларга эга бўлганлиги сабабли) бир-бирларини тортсин (ёки итарсин) (42- расм).



42- расм.

f_{12} ва f_{21} кучлар таъсирида жисмлар мос равишда w_1 ва w_2 тезланишлар олади. Бу тезланишларнинг катталиги жисмларнинг массаларига тескари пропорционал:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

Бундан $m_1w_1 = m_2w_2$ тенглик ва демак, кучларнинг тенглиги $f_{12} = f_{21}$ келиб чиқади. Равшанки, кучларнинг йўналиши қарама-қаршидир.

Жисмларнинг тезланишини эмас, балки даражаланган пружиналарнинг (улар ёрдамида ўзаро таъсирлашувчи жисмларни қўзғалмас таянчларга «боғлаш» мумкин) чўзилишини солиштириш орқали ҳам юқоридаги натижага келиш мумкин (42-*б* расм). Бу ҳолда пружинанинг деформацияси орқали ўлчанган f_{12} ва f_{21} кучлар ҳам катталик жиҳатдан бир хил бўлади.

Ньютоннинг учинчи қонуни ана шунга ўхшаш тажрибадан олинган фактларнинг умумлаштиришидан иборат. Ньютоннинг ўзи бу қонунни қуйидагича таърифлаган: «таъсирга доим тенг ва қарама-қарши йўналган акс таъсир бор, бошқача айтганда—икки жисмнинг бир-бирига таъсири ўзаро тенг ва қарама-қарши томонларга йўналган». Бу таърифда «таъсир» ва «акс таъсир» терминлари учрайди, шунинг учун ҳам жисмлар бир-бирига таъсир этувчи кучлар бир-биридан фарқ қилса керак, деган тасаввур пайдо бўлиши мумкин. «Таъсирга» беихтиёр бош роль, «акс таъсирга» эса иккинчи даражали роль ажратилади. Аслида бу иккала $\mathbf{f}_{12}$ ва $\mathbf{f}_{21}$ куч бир-бирига тенгдир. Шунинг учун Ньютоннинг учинчи қонунини қуйидагича таърифлаган яхшироқ: *жисмларнинг бир-бирига кўрсатадиган ҳар қандай таъсири ўзаро таъсир характерига эга; ўзаро таъсирлашувчи жисмларнинг бир-бирига таъсир кучлари доим катталик жиҳатдан тенг ва йўналиш жиҳатдан қарама-қаршидир.* Кучларнинг 42-расмда кўрсатилган белгиларидан фойдаланиб, учинчи қонуннинг маъносини қуйидагича ёзиш мумкин:

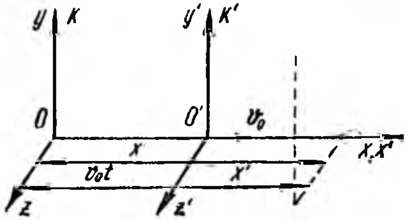
$$\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21}. \qquad (16.1)$$

Айтилганлардан кучлар доим жуфт ҳолда пайдо бўлади; бирор жисмга қўйилган исталган кучга унга катталик жиҳатдан тенг ва қарама-қарши йўналган ўзаро таъсирлашаётган иккинчи жисмга қўйилган бошқа бир кучни таққослаш мумкин деган хулоса чиқади.

17-§. Галилейнинг нисбийлик принципи

Бир-бирига нисбатан ўзгармас $\mathbf{v}_0$ тезлик билан ҳаракатланувчи иккита саноқ системасини текширайлик. Булардан 43-расмда *К* ҳарфи билан белгиланган системани шартли равишда кўчмас деб ҳисоблаймиз. У ҳолда иккинчи *К'* система тўғри чизиқли ва текис ҳаракатланади. *К* системанинг x, y, z координата ўқларини ҳамда *К'* системанинг x', y', z' ўқларини x билан x' устма-уст тушадиган, y ва y', шунингдек, z ва z' ўқлар бир-бирларига параллел йўналадиган қилиб танлаб оламиз.

Бирор P нуқтанинг K системадаги x, y, z координаталари билан худди шу нуқтанинг K' системадаги x', y', z' координаталари орасидаги боғланишни топайлик. Агар вақтни иккала системанинг координата бошлари устма-уст турган пайтдан бошлаб ҳисобласак, у вақтда 43- расмга биноан $x=x'+$ $+v_0t$ бўлади. Ундан ташқари, $y=y'$ ва $z=z'$ бўлиши равшан. Бу муносабатларга классик механикада қабул қилинган иккала системада ҳам вақт бир тарзда ўтади, яъни $t=t'$ деб фараз қилсак, у ҳолда тўртта тенглама тўпламига эга бўламиз:



43- расм.

$$\left.\begin{aligned} x &= x'+v_0t, \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= t', \end{aligned}\right| \qquad (17.1)$$

булар Галилей ўзгартиришлари деб аталади.

(17.1) муносабатлардан биринчиси билан охиргиси фақат v_0 нинг ёруғликнинг бўшлиқдаги тезлигидан (уни биз c ҳарфи билан белгилаймиз) кичик қийматлари ($v_0 \ll c$) учунгина тўғри экан. v_0 нинг c га яқин қийматларида Галилей ўзгартиришларини бунга нисбатан умумийроқ бўлган «Оптика» бобида айтилган (масалан, III томнинг (37.10) формулаларига қаранг) Лоренц ўзгартиришлари билан алмаштириш мумкин. Классик механика чегарасида (17.1) формулаларни тўғри деб фараз қилинади.

(17.1) муносабатларни вақт бўйича дифференциаллсак, P нуқтанинг K ва K' саноқ системаларидаги тезликлари орасидаги боғланишни топамиз:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}'+v_0 \quad \text{ёки} \quad v_x = v'_x + v_0, \\ \dot{y} &= \dot{y}' \quad \text{ёки} \quad v_y = v'_y, \\ \dot{z} &= \dot{z}' \quad \text{ёки} \quad v_z = v'_z. \end{aligned}\right| \qquad (17.2)$$

(17.2) даги бу учта скаляр муносабат K системага нисбатан ўлчанган $\mathbf{v}$ тезлик вектори билан K' системага нисбатан ўлчанган $\mathbf{v}'$ тезлик вектори орасидаги

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}'+\mathbf{v}_0 \qquad (17.3)$$

муносабатга эквивалентдир. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун (17.3) вектор тенгликнинг x, y, z ўқларга проекциясини олиш кифоя. Натижада (17.2) формулалар ҳосил бўлади.

(17.2) ва (17.3) формулалар классик механикада тезликларни қўшиш қоидаларини беради. Бунда шуни назарда тутмоқ керакки, K ва K' системаларнинг координата ўқлари йўналишларини ихтиёрий танлаб олинганда ҳам (17.3) муносабат вектор муносабатлар каби ўз кучини сақлаб қолаверади. (17.2) муносабатлар эса ўқлар фақат 43-расмдагидек танлангандагина бажарилади холос.

13-§ да бирор инерциал системага нисбатан ўзгармас тезлик билан ҳаракатланувчи ихтиёрий саноқ системаси ҳам инерциал бўлиши таъкидлаб ўтилган эди. Энди биз бу фикрни исботлаш имкониятига эгамиз. Бунинг учун (17.3) муносабатни вақт бўйича дифференциаллаймиз. $\mathbf{v}_0$ доимий эканлигини ҳисобга олсак:

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}' \text{ ёки } \mathbf{w} = \mathbf{w}'. \tag{17.4}$$

Бундан бирор жисмнинг тезланиши бир-бирига нисбатан тўғри чизиқли текис ҳаракатланувчи барча системаларда бир хил бўлади деган хулоса келиб чиқади. Шунинг учун агар бу системалардан бирортаси инерциал бўлса (бу кучлар бўлмаганда $\mathbf{w}=0$ демакдир), у вақтда қолганлари ҳам инерциал бўлади ($\mathbf{w}'$ ҳам нолга тенг).

Механиканинг асосий тенгламаси (14.6) кинематик катталиклардан фақат тезланишнигина ўз ичига олиши, тезлик эса унга кирмаслиги билан характерланади. Бироқ биз юқорида аниқлаганимиздек, иккита K ва K' ихтиёрий танлаб олинган инерциал саноқ системасида жисмнинг тезланиши бир хил бўлади. Бундан Ньютоннинг иккинчи қонунига биноан жисмга K ва K' системаларда таъсир этувчи кучлар ҳам бир хил бўлади, деган хулоса келиб чиқади. Демак, *бир инерциал системадан иккинчисига ўтганда динамика қонунлари ўзгармас бўлар экан*, яъни одатда айтилишича, координаталарнинг бир инерциал системадан иккинчисига ўтиши физикавий катталикларга нисбатан инвариант ўтиш бўлар экан. Механика нуқтаи назаридан қараганда ҳамма инерциал саноқ системалари ўзаро эквивалентдир: уларнинг бирортасини ҳам бошқаларидан юқори қўйиб бўлмайди. Амалда бу ҳол берилган саноқ системасида ўтказилган механик тажрибаларнинг ҳеч қайсисидан система тинч турибдими ёки тўғри чизиқли текис ҳаракат қилаётибдими—буни билиб бўлмаслигида намоён бўлади. Масалан, турткисиз тўғри чизиқли ва текис ҳаракатланаётган поезд вагони ичида туриб, агар вагон ойнасидан қарамасак, вагон тинч турибдими ёки ҳаракатланаётибдими, буни била олмаймиз. Бундай шароитда жисмларнинг эркин тушиши биз ташлаган жисмнинг ҳаракати ва барча бошқа механик процесслар гўё вагон тинч тургандагидек содир бўлади.

Юқорида баён қилинган ҳодисаларни Галилей аниқлаган эди. Барча механик ҳодисалар турли инерциал системаларда бир хил содир бўлганлиги сабабли ҳеч қандай механик тажрибалар ёрдамида берилган саноқ система тинч турганлиги ёки тўғри чизиқли ва текис ҳаракат қилаётганлигини билиб бўлмаслиги ҳақидаги бу қонун Галилейнинг н и с б и й л и к п р и н ц и п и деб аталади.

18-§. Оғирлик кучи ва оғирлик

Барча жисмлар ерга тортилиш кучи таъсири остида ер сиртига нисбатан бир хил тезланиш билан тушади. Одатда тортилиш кучини g харфи билан белгиланади. Бу Ер билан боғланган саноқ системада m массали ҳар қандай жисмга о ғ и р л и к к у ч и деб аталувчи

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g} \tag{18.1}$$

куч таъсир қилишини англатади[1]. Жисм ер сиртига нисбатан тинч турганда $\mathbf{P}$ куч жисмни туширмай ушлаб турган осма ёки таянчнинг реакцияси[2] $\mathbf{f}_r$ билан мувозанатда бўлади ($\mathbf{f}_r = -\mathbf{P}$). Ньютоннинг учинчи қонунига биноан жисм бу ҳолда осма ёки таянчга $-\mathbf{f}_r$ га тенг бўлган $\mathbf{G}$ куч билан таъсир қилади:

$$\mathbf{G} = \mathbf{P} = m\mathbf{g}.$$

Жисмнинг осма ёки таянчга кўрсатадиган $\mathbf{G}$ кучи ж и с м н и н г о ғ и р л и г и дейилади. Бу куч фақат жисм билан таянч (ёки осма) Ерга нисбатан қўзғалмас бўлгандагина $m\mathbf{g}$ га тенг бўлади. Жисмлар бирор $\mathbf{w}$ тезланиш билан ҳаракатланаётган бўлса, $\mathbf{G}$ оғирлик $m\mathbf{g}$ га тенг бўлмайди. Буни қуйидаги мисолдан тушуниб олиш мумкин. Фараз қилайлик, осма рамкага маҳкамланган пружина кўринишида бўлиб, жисм билан биргаликда $\mathbf{w}$ тезланиш билан ҳаракатлансин (44- расм). У вақтда жисмнинг ҳаракат тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\mathbf{P} + \mathbf{f}_r = m\mathbf{w}. \tag{18.2}$$

бу ерда $\mathbf{f}_r$— османинг реакцияси, яъни пружинанинг жисмга таъсир кучи. Ньютоннинг учинчи қонунига биноан жисм пружинага $\mathbf{f}_r$— куч билан таъсир қилади ва бу куч таърифга биноан шу шароитда жисмнинг $\mathbf{G}$ оғирлигидан иборат бўлади. (18.2) да $\mathbf{f}_r$ реакция кучини $-\mathbf{G}$ куч билан, $\mathbf{P}$ оғирлик кучини эса $m\mathbf{g}$ кўпайтма билан алмаштирсак, қуйидагини топамиз:

$$\mathbf{G} = m(\mathbf{g} - \mathbf{w}). \tag{18.3}$$

(18.3) формула жисмнинг оғирлигини умумий кўринишда ифодалайди. У ихтиёрий кўринишдаги осма ёки таянч учун тўғри.

Фараз қилайлик, жисм билан осма вертикал йўналишда ҳаракат қилсин (44- расм).

(18.3) нинг ипнинг йўналишига проекциясини туширамиз:

$$G = m(g \pm w). \tag{18.4}$$

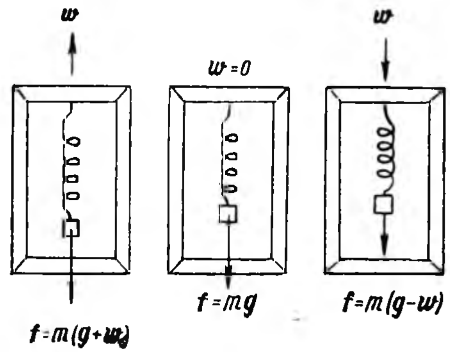
Бу ифодада G, g ва w лар мос векторларнинг модулларидир. «+» ишора юқорига йўналган $\mathbf{w}$ га, «—» ишора эса пастга қараб йўналган $\mathbf{w}$ га тегишли.

---

[1] Ер билан боғланган саноқ система ноинерциал бўлганлиги сабабли оғирлик кучи жисмни Ерга тортиб турган кучдан бир қадар фарқ қилади. Бу ҳақда 47- § да муфассалроқ гапирилади.

[2] Реакция деб жисмга унинг ҳаракатини чегараловчи жисм томонидан кўрсатиладиган кучга айтилади.

(18.4) формуладан G оғирликнинг модули **P** оғирлик кучидан катта ҳам, кичик ҳам бўлиши мумкин. Рамка осма билан бирга, эркин тушаётганда **w** = **g** ва жисмнинг осмага таъсир кучи **G** нолга тенг бўлади. Натижада вазнсизлик ҳолати юзага келади. Ер атрофида двигатели ўчирилған ҳолатда парвоз қилаётган космик кема худди эркин тушаётган рамка **g** тезланиш билан ҳаракатла-



44- расм .

нади, бунинг натижасида кема ичидаги жисмлар вазнсиз холатда бўлади, улар ўзлари тегиб турган жисмларга босим кўрсатмайди.

Шуни таъкидлаб ўтамизки, кўп ҳолларда оғирлик кучи **P** билан жисмнинг оғирлиги **G** ни чалкаштириб юборилади. Бунга сабаб шуки, таянч кўчмас бўлганда **P** ва **G** кучлар ҳам катталик жиҳатдан, ҳам йўналиш жихатдан бир-бирига тенг (иккалови ҳам $m\mathbf{g}$ га тенг) бўлади. Бироқ шуни эсда тутмоқ керакки, бу кучлар турли жисмларга қўйилган: **P** жисмнинг ўзига қўйилган бўлса, **G** жисмнинг Ернинг тортиш кучи майдонида эркин ҳаракатини чегаралаб турувчи осмага ёки таянчга қўйилгандир. Ундан ташқари жисм ҳаракат қилаётибдими ёки тинч турибдими, бундан қатъи назар **P** куч доим $m\mathbf{g}$ га тенг, оғирлик эса таянчлар билан жисмнинг тезланишига боғлиқ бўлиб $m\mathbf{g}$ дан катта ҳам бўлиши, кичик ҳам бўлиши, хусусан вазнсизлик ҳолатида нолга айланиши ҳам мумкин.

Масса билан оғирлик орасидаги (18.3) муносабат жисмларнинг массаларини тортиш йўли билан солиштириш усулини беради — жисмларнинг бир хил шароитда (одатда **w** = 0 да), Ер сиртини бир нуқтасида аниқланган оғирликларининг нисбати шу жисмлар массаларининг нисбатига тенг:

$$G_1 : G_2 : G_3 : \ \ldots = m_1 : m_2 : m_3 : \ \ldots$$

47-§ да эркин тушиш тезланиши g ва оғирлик кучи P жойнинг географик кенглигига боғлиқ эканлигини кўрсатамиз. Ундан ташқари P ва g, шунингдек денгиз сатҳидан баландликка ҳам боғлиқ—Ер марказидан узоқлашган сари улар камая боради.

19-§. Ишқаланиш кучлари

Ишқаланиш кучлари бир-бирига тегиб турган жисмлар ёки уларнинг тегиб турган қисмлари бир-бирига нисбатан кўчган вақтда юзага келади. Иккита тегиб турган жисмлар бир-бирига нисбатан кўчган вақтда юзага келган ишқаланиш ташқи ишқаланиш дейилади; битта яхлит жисмнинг (масалан, суюқлик ёки газнинг) қисмлари орасидаги ўзаро ишқаланиш ички ишқаланиш дейилади.

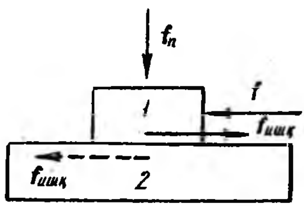
Қаттиқ жисмнинг суюқлик ёки газсимон муҳитга нисбатан ҳаракатланган вақтда юзага келадиган ишқаланиш кучини ички ишқаланиш кучлари қаторига қўшиш керак, чунки бу ҳолда муҳитнинг жисмга бевосита тегиб турган қатламларини жисм ўз тезлигига тенг тезлик билан эргаштиради ва жисмнинг ҳаракатига муҳитнинг шу қатламлари билан уларга нисбатан ташқи бўлган қатламлари орасидаги ишқаланиш таъсир кўрсатади.

Иккита қаттиқ жисм сиртларининг орасида бирор қатлам, масалан, мой қатлам бўлмаган шароитдаги ишқаланиш қуруқ ишқаланиш дейилади. Қаттиқ жисм билан суюқ ёки газсимон муҳит орасидаги ёки шунга ўхшаш муҳит қатламлари орасидаги ишқаланиш ковушоқ (ёки) суюқ ишқалиш дейилади.

Қуруқ ишқаланишга мослаб сирпаниш ишқаланиши ва тебраниш ишқаланишини бир-биридан фарқ қилади.

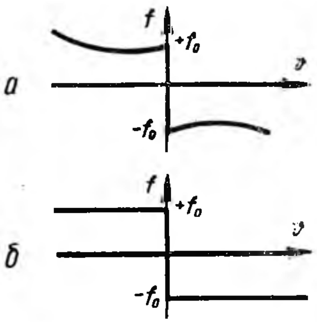
Ишқаланиш кучлари ишқаланувчи сиртларга (ёки қатламларга) ўтказилган уринма бўйлаб бу сиртларнинг (қатламларнинг) нисбий силжишига қаршилик кўрсатадиган бўлиб йўналгандир. Масалан, агар суюқликнинг иккита қатлами турли тезликлар билан ҳаракатланиб бир-бири бўйлаб сирпанса, у ҳолда тезроқ ҳаракатланаётган қатламга қўйилган куч ҳаракатга тескари, секинроқ ҳаракатланаётган қатламга қўйилган куч эса қатламнинг ҳаракати бўйлаб йўналади.

Қуруқ ишқаланиш. Қуруқ ишқаланишда ишқаланиш кучи фақат бир қатлам иккинчисининг устида сирпангандагина юзага келмасдан, шунингдек, ана шундай сирпанишни амалга оширишга уринган вақтда ҳам юзага келади. Кейингисини тинч холатдаги ишқаланиш кучи дейилади. Бунга мисол тариқасида бир-бирига тегиб турган *1* ва *2* жисмларни текширайлик, бунда *2* жисм кўчмас қилиб маҳкамланган (45-расм). *1* жисм *2* жисмга жисмларнинг бир-бирига тегиш сиртига ўтказилган нормал бўйлаб йўналган $\mathbf{f}_n$ куч билан босилиб туради. Бу куч нормал босим кучи дейилади ва жисмнинг оғирлигига ва бошқа сабабларга боғлиқ бўлади. *1* жисмни $\mathbf{f}$ ташқи куч таъсирида силжитишга уриниб кўрайлик. Бунда жисмларнинг ҳар бир конкрет жуфти учун ва нормал босим кучининг қиймати учун $\mathbf{f}$ кучнинг *1* жисмни жойидан жилдириш учун етарли бўлган маълум минимал $\mathbf{f}_0$ қиймат бор эканлиги маълум бўлади. Ташқи кучнинг



45-расм.

$0<f<f_0$ чегарадаги қийматларида жисм ўрнидан силжимайди. Ньютоннинг иккинчи қонунига биноан, агар **f** куч унга катталик жиҳатдан тенг ва йўналиши тескари куч (бу куч ҳолатдаги ишқалиш кучи $\mathbf{f}_{\text{ишқ}}$ нинг ўзгинасидир, 45-расм) билан мувозанатлашсагина амалга ошиши мумкин. Тинч ҳолатдаги ишқалиш кучи автоматик[1] равишда f ташқи кучга тенглашади (агар f куч f_0 дан катта бўлмаса) f_0 тинч ҳолатдаги ишқаланиш кучининг энг катта қийматидан иборат эканлигини осонгина кўриш мумкин.



46-расм.

Эслатиб ўтамизки, Ньютоннинг учинчи қонунига биноан 2 жисмга ҳам тинч ҳолатдаги ишқаланиш кучи $\mathbf{f}'_{\text{ишқ}}$ (у 45-расмда пунктир билан кўрсатилган) таъсир қилади. Бу кучнинг катталиги $\mathbf{f}_{\text{ишқ}}$ кучга тенг, йўналиши эса қарама-қаршидир.

Агар **f** ташқи куч f_0 кучдан катта бўлса, жисм сирпана бошлайди, бунда жисмнинг тезланишини иккита кучнинг: ташқи **f** куч билан $\mathbf{f}_{\text{ишқ}}$ сирпанишдаги ишқаланиш кучининг умумий ташкил этувчиси белгилайди. $f_{\text{ишқ}}$ кучнинг катталиги у ёки бу даражада сирпаниш тезлигига боғлиқдир. Бу боғланишнинг характерини ишқаланувчи сиртларнинг табиати билан ҳолати белгилайди. Ишқаланиш кучининг тезликка қараб ўзгаришининг кўпроқ учрайдиган кўриниши 46-расмда келтирилган (ўқлар бўйлаб ишқаланиш кучи билан тезликнинг сирпаниш юз бераётган йўналишга проекциялари қўйилган; бу икки проекциянинг ишораси, маълумки, қарама-қаршидир). График тинч ҳолатни ҳам, сирпаниш ҳолатини ҳам ўз ичига олади. Тинч ҳолатдаги ишқаланиш кучи, юқорида қайд қилинганидек, нолдан графикда вертикал чизиқ билан кўрсатилган f_0 гача бўлган чегарадаги қийматларга эга бўлиши мумкин. Сирпанишдаги ишқаланиш кучи тезлик ортиши билан дастлаб бир оз камаяди, маълумки бунда v нолга интилганда у кучнинг қиймати f_0 га интилади. Тезликнинг кейинги ортишида ишқаланиш кучи ҳам орта бошлайди.

Сиртларнинг ҳолати ва табиати ўзгармаган ҳолларда[2] сирпаниш ишқаланиш кучи деярли тезликка боғлиқ бўлмай қолиб тинч ҳолатдаги ишқаланиш кучи f_0 нинг максимал қийматига тенглашар экан (46-*б* расм).

---

[1] Бу ҳодиса худди пружина чўзувчи куч таъсирида «автоматик» равишда унинг эластик кучи ташқи кучни мувозанатлайдиган даражада чўзилишига ўхшаб кетади.

[2] Сиртларнинг ўзгариши сирпаниш вақтида ундаги ғадир-будирликларнинг текисланиши, қизиш натижасида оксидланиш ва ҳоказолар ҳисобига бўлиши мумкин.

Қуруқ ишқаланиш қонунлари қуйидагилардан иборат; тинч ҳолатдаги максимал ишқаланиш кучи, шунингдек сирпаниш ишқаланиш кучи ишқаланаётган жисмларнинг бир-бирига тегиш юзига боғлиқ эмас ва ишқаланаётган сиртларни бир-бирига сиқиб турувчи f_n нормал босим кучи катталигига пропорционал экан:

$$f_{\text{ишк}} = kf_n. \qquad (19.1)$$

Ишқаланиш кучининг тегиш сиртининг катталигига боғлиқ эмаслиги қуйидаги мисолда яққол кўзга ташланади. Агар жисм тўғри бурчакли параллелепипед (ғишт) шаклида бўлиб, иккинчи жисмга оғирлиги таъсиридагина босилиб турган бўлса, у вақтда максимал ишқаланиш кучининг (ёки бир тезликнинг ўзида олинган ишқаланиш кучининг) катталиги бу жисм иккинчи жисмнинг сиртига қайси томони билан ишқаланаётганлигига боғлиқ бўлмайди.

(19.1) тенгламадаги ўлчамсиз коэффициент k ни (тегишли равишда тинч ҳолатдаги ёки сирпанишдаги) ишқаланиш коэффициенти дейилади. У ишқаланаётган сиртларнинг табиатига ва ҳолатига, масалан, ғадир-будурлигига боғлиқ. Сирпаниш учун ишқаланиш коэффициенти тезлик функциясидир.

Ишқаланиш коэффициентининг катталиги ҳақида тушунча бериш мақсадида баъзи бир материаллар учун тинч ҳолатдаги ишқаланиш коэффициенти қийматларини келтириб ўтамиз (1- жадвал).

1- жадвал

Материал	k
Металл билан металл (мойсиз)	0,15—0,25
Ёғоч билан металл	0,5
Ёғоч билан ёғоч	0,65
Металл билан чарм	0,6

Ишқаланиш кучлари табиатда жуда муҳим аҳамиятга эга. Бизнинг кундалик ҳаётимизда ишқаланиш кўп ҳолларда фойдали роль ўйнайди. Яхмалак вақтида йўл сирти билан йўловчилар пойабзалининг таг чарми ва транспорт ғилдираги орасидаги ишқаланиш анча камайганлиги туфайли йўловчилар билан транспорт қанчалик қийинчиликларга дучор бўлишини эсга олайлик. Ишқаланиш кучи бўлмаганда уй жиҳозларини худди кема чайқалаётганда қилингани каби полга маҳкамлаш зарур бўлар эди, акс ҳолда пол бир оз ногоризонтал бўлса ҳам улар паст томонга сирпаниб кетган бўлар эди. Ўқувчининг ўзи ҳам шунга ўхшаш мисолларни келтириши мумкин.

Кўпчилик ҳолларда ишқаланиш жуда катта салбий роль ўйнайди ва шу сабабли уни кўп ҳолларда камайтириш тадбирларини кўришга тўғри келади. Масалан, подшипниклардаги ёки ғилдирак втулкаси билан ўқ орасидаги ишқаланишлар ана шундай ишқаланишлардандир.

Ишқаланиш кучларини камайтиришнинг энг радикал (асосий) усули бу сирпаниш ишқаланишини думаланиш ишқаланиши билан алмаштиришдан иборатдир. Думаланиш ишқаланиши, масалан, ясси ёки эгри сирт билан унинг устида думаланаётган цилиндрик ёки шарсимон жисм орасида юзага келади. Думаланиш ишқаланиши ҳам сирпаниш ишқаланиши қонунларига бўйсунади, бироқ бу ҳолда ишқаланиш коэффициенти анча кичик бўлади.

Қовушоқ ишқаланиш ва муҳитнинг қаршилиги. Қовушоқ ишқаланиш қуруқ ишқаланишдан фарқли равишда шу билан характерланадики, тезлик нолга айланиши билан қовушоқ ишқаланиш кучи ҳам дарҳол нолга тенглашади. Шунинг учун ташқи куч канчалик кичик бўлмасин, у қовушоқ муҳитнинг қатламларига нисбий тезлик бера олади. Бундай муҳитнинг қатламлари орасидаги ишқаланиш кучи бўйсунадиган қонунлар суюқликлар механикасига бағишланган бобда таҳлил қилинади.

Бу параграфда биз қаттиқ жисм билан қовушоқ (суюқ ёки газсимон) муҳит орасидаги ишқаланиш кучларини текшириш билан чекланамиз. Шуни назарда тутмоқ керакки, жисмлар суюқ ёки газсимон муҳитда ҳаракатланганда асл ишқаланиш кучларидан ташқари яна муҳитнинг қаршилик кучлари деб аталувчи кучлар ҳам юзага келади; шу билан бирга бу кучлар ишқаланиш кучларига қараганда анча катта бўлиши мумкин. Бу кучларнинг пайдо бўлиш сабабларини батафсил ўрганиш имкониятига эга бўлмаганлигимиз туфайли, биз ишқаланиш кучлари ва муҳитнинг қаршиликлари биргаликда (бу йиғинди кучни биз ишқаланиш кучи деб атаймиз) бўйсунадиган қонуниятларни баён этиш билан чегараланамиз. Қисқача бу қонуниятлар қуйидагилардан иборат.

Ишқаланиш кучининг катталиги жисмнинг шаклига ва ўлчамларига, жисм сиртининг ҳолатига, муҳитга нисбатан тезлигига ва ниҳоят қовушоқлик деб аталувчи хоссасига боғлиқ бўлади. Ишқаланиш кучи билан жисмнинг муҳитга нисбатан тезлиги орасидаги характерли боғланиш график равишда 47-расмда тасвирланган. Нисбатан кичик тезликларда ишқаланиш кучи тезликка қараб ортади:

$$\mathbf{f}_{\text{ишқ}} = -k_1 \mathbf{v}, \qquad (19.2)$$

бу ерда «—» ишора ишқаланиш кучи тезликка тескари йўналганлигини билдиради.

47-расм.

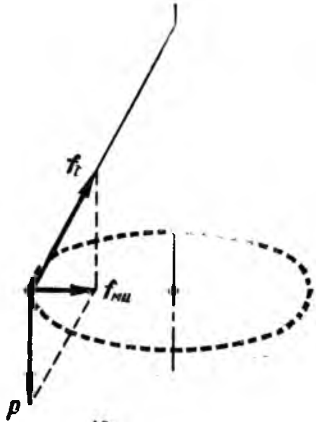
Катта тезликларда чизиқли қонун квадратик қонунга айланади, яъни ишқаланиш кучи тезликнинг квадратига пропорционал равишда ортади.

$$\mathbf{f}_{\text{ишқ}} = -k_2 v^2 \frac{\mathbf{v}}{v}, \qquad (19.3)$$

k_1 ва k_2 коэффициентларнинг (уларни ишқаланиш коэффициентлари деб аташ мумкин) катталиги жисмнинг шаклига ва ўлчамларига, жисм сиртининг ҳолатига муҳитнинг қовушоқлик хоссаларига жуда кучли боғланган. Масалан, улар глицерин учун сувникига қараганда анча катта. (19.2) қонун (19.3) га айланадиган тезликнинг қиймати ҳам ўша сабабларга боғлиқ экан.

20-§. Эгри чизиқли ҳаракат вақтида таъсир этувчи кучлар

9-§ да кўрсатилганидек, эгри чизиқли ҳаракат вақтидаги тезланишни иккита: нормал $\mathbf{w}_n$ ва тангенциал $\mathbf{w}_\tau$ тезланишларнинг йиғиндиси шаклида ёзиш мумкин. Шунга мос равишда жисмга таъсир этувчи кучни ҳам нормал $\mathbf{f}_n$ ва тангенциал $\mathbf{f}_\tau$ ташкил этувчиларга ажратиш мумкин. Кучнинг нормал ташкил этувчиси тезликнинг катталигини ўзгартирмасдан унинг йўналишини ўзгартиради; тангенциал ташкил этувчи эса тезликни катталик жиҳатдан ўзгартириб, унинг йўналишини ўзгартирмайди. Бундан муҳим хулоса чиқади; агар вақтнинг ҳар бир пайтидаги жисмга таъсир этувчи куч унинг тезлигига перпендикуляр бўлса, у вақтда тезликнинг йўналиши ўзгариб, катталиги ўзгармайди. Ундан ташқари куч катталик жиҳатдан ўзгармаган шароитда нормал тезланиш v^2/R ҳам



48- расм.

(R — траекториянинг эгрилик радиуси) катталик жиҳатдан ўзгармайди ва жисм эгрилиги ўзгармас траектория, яъни айлана бўйлаб ҳаракатланади.

Жисм айлана бўйлаб текис ҳаракатланганда унинг тезлиги ва унга таъсир этувчи куч доим айлананинг марказига қараб йўналган («интилган») бўлади, шунинг учун ҳам улар марказга интилма тезланиш ва марказга интилма куч деб аталади.

Амалда марказга интилма тезланиш кўпинча ҳаракатланаётган жисмга бир вақтда бир неча жисм таъсир қилиши туфайли юзага келади. Мисол сифатида $\mathbf{P}$ оғирлик кучи билан таранг ипнинг $\mathbf{f}_r$ реакцияси (48-расм) таъсирида турган жисмнинг айлана бўйлаб текис ҳаракатини текширайлик. Бу ерда марказга интилма $\mathbf{f}_{ми}$ куч $\mathbf{P}$ ва $\mathbf{f}_r$ кучларнинг тенг таъсир этувчисидир.

21-§. Ньютон қонунларининг амалда қўлланилиши

Ньютоннинг вектор кўринишда ёзилган иккинчи қонуни куч, жисмнинг массаси ва тезланиши орасида умумий боғланиш ўрнатади. Ҳисоблашни амалга ошириш учун векторлардан уларнинг мос равишда танлаб олинган йўналишларга туширилган проекцияларини га ўтиш керак. Бунда проекцияларнинг қуйидаги хоссаларидан фойдаланилади:

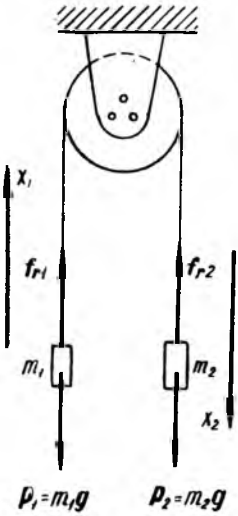
1) тенг векторлар бир хил проекцияларга эга;

2) бирор векторнинг скалярга кўпайтириш натижасида ҳосил қилинган векторнинг проекцияси шу вектор проекциясининг ўша скалярга кўпайтмасига тенг;

3) векторлар йиғиндисининг проекцияси, қўшилувчи векторлар проекциялари йиғиндисига тенг.

Бир нечта мисолни қараб чиқамиз.

1-мисол. Массалари m_1 ва m_2 бўлган иккита жисм кўчмас блок орқали ўтказилган чўзилмайдиган вазнсиз ипнинг учларига маҳкамланган (49-расм). Ип блокнинг ариқчаларидан деярли ишқаланишсиз сирпаниши мумкин. Ипнинг таранглаииш кучини ва жисмларнинг тезланишини топинг.



49-расм.

Жисмларнинг ҳар бирига иккита куч: оғирлик кучи **P** билан ипнинг реакцияси $\mathbf{f}_r$ таъсир қилади (мисолни Ер билан боғланган системада уни инерциал деб қабул қилиб ечамиз). Иккала жисм учун иккинчи қонун тенгламасини ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P}_1 + \mathbf{f}_{r1} &= m_1\mathbf{w}_1, \\ \mathbf{P}_2 + \mathbf{f}_{r2} &= m_2\mathbf{w}_2. \end{aligned}\right\} \qquad (21.1)$$

Ип блокда ишқаланишсиз сирпанганлиги ва вазнсиз бўлгани учун унинг таранглиги бутун узунлиги бўйлаб бир хил бўлади. Шунинг учун иккала кучнинг модули ${}_r$ бир хил бўлади. Ип чўзилмайдиган бўлганлиги сабабли иккала жисмнинг тезланишлари катталик жиҳатдан бир-бирига тенг $w_1 = w_2 = w$ бўлади.

(21.1) тенгламалардан биринчисини x_1 йўналишга (49-расм), иккинчисини эса x_2 йўналишга проекциясини туширсак, қуйидаги системани топамиз:

$$\left.\begin{aligned} f_r - P_1 &= m_1 w, \\ P_2 - f_r &= m_2 w. \end{aligned}\right\} \qquad (21.2)$$

(21.2) тенгламалар системасини f_r ва w номаълумларга нисбатан ечиб, қуйидагиларни топамиз:

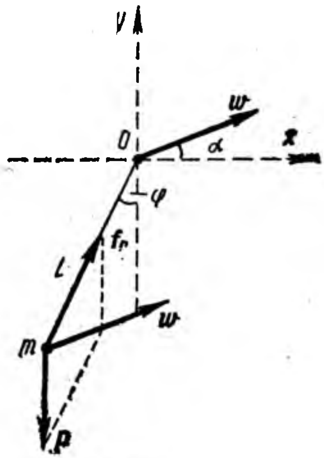
$$w = \frac{P_2 - P_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\, g,$$

$$f_r = \frac{P_1 m_2 + P_2 m_1}{m_1 + m_2} = \frac{2\, m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, g.$$

Агар $m_2 > m_1$ бўлса, w мусбат, яъни биринчи жисмнинг тезланиши $\mathbf{w}_1$ юқорига қараб, иккинчи жисмнинг тезланиши $\mathbf{w}_2$ эса пастга қараб йўналади. $m_2 < m_1$ бўлса, иккала тезланишнинг йўналишлари қарама-қарши томонларга ўзгаради. $m_1 = m_2$ бўлса, жисмлар тезланишсиз ҳаракатланади (ёки тинч ҳолатда туради).

Тезланишни билган ҳолда (8.2) формула ёрдамида жисмнинг тезлигини осонгина топиш мумкин.

2-мисол. m массали жисм l узунликдаги чўзилмайдиган ипнинг учига осиб қўйилган (50-расм). Ипнинг таянчига маҳкамланган нуқтаси Ерга нисбатан ўзгармас ва горизонт билан α бурчак ташкил этувчи $\mathbf{w}$ тезланиш билан ҳаракатланади. Ипнинг вертикалдан огиш бурчаги (φ бурчак) ва жисмнинг ипга таъсир кучи f топилсин.



50-расм.

Жисм ҳам ипнинг таянчга маҳкамланиш нуқтасининг тезланишига тенг бўлган $\mathbf{w}$ тезланиш билан ҳаракатланади. Демак, жисм учун иккинчи қонуннинг тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\mathbf{P} = \mathbf{f}_r = m\mathbf{w}.$$

Бу тенгламага кирувчи векторларни x ва y координата ўқларига проекциясини тушириб қуйидагини топамиз:

$$\left.\begin{aligned} P_x + f_{rx} &= mw_x, \\ P_y + f_{ry} &= mw_y. \end{aligned}\right\} \qquad (21.3)$$

50-расмдан кўриниб турибдики,

$$P_x = 0, \; P_y = -P = -mg;$$

$$f_{rx} = f_r \sin\varphi = f\sin\varphi;$$

$$f_{ry} = f_r \cos\varphi = f\cos\varphi;$$

$$w_x = w\cos\alpha; \; w_y = w\sin\alpha$$

(қидирилаётган $\mathbf{f}$ куч билан $\mathbf{f}_r$ куч катталик жиҳатидан бир-бирига тенг).

Проекцияларнинг қийматларини (21.3) га қўйсак:

$$0 + f\sin\varphi = mw\cos\alpha,$$

$$-mg + f\cos\varphi = mw\sin\alpha.$$

Бу тенгламалар системасини φ ва f га нисбатан ечсак,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{w\cos\alpha}{g + w\sin\alpha},$$

$$f = m\sqrt{g^2 + 2gw\sin\alpha + w^2}. \qquad (21.4)$$

$\alpha = \pm\pi/2$ да («+» ишора $\mathbf{w}$ юқорига қараб йўналишига «—» эса $\mathbf{w}$ нинг пастга қараб йўналишига тегишли) (21-4) формула бизга таниш бўлган (18.4) формулага айланади.

22-§. Импульс

Ньютон иккинчи қонуни тенгламаси

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} \qquad (22.1)$$

га бошқача кўриниш бериш мумкин. Классик механикада m масса ўзгармас катталик эканлигини ҳисобга олиб, уни хосила ишораси остига киритиш ва (22.1) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{f}.$$

Вектор катталик

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad (22.2)$$

моддий нуқтанинг импульси дейилади[1]. Импульснинг таърифидан фойдаланиб, иккинчи қонуннинг тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}, \qquad (22.3)$$

қонуннинг ўзини эса қуйидагича таърифлашимиз мумкин: *моддий нуқта импульсининг вақт бўйича ҳосиласи нуқтага таъсир этувчи барча кучларнинг тенг таъсир этувчисига тенг.*

(22.3) тенглама (22.1) тенгламага қараганда кенгроқ қўлланилади. Нисбийлик назарияси аниқлашича жисмнинг массаси тезликнинг функциясидир: тезлик ортиши билан масса орта боради. Тўғри массанинг тезликка боғлиқлиги[2] шундаки, ёруғлик тезлигидан кичикроқ тезликларда масса деярли ўзгармайди. Бироқ катта тезликларда эса масса тез суръат билан орта борганлиги сабабли (22.1) тенглама яроқсиз бўлиб қолади. Шу вақтнинг ўзида (22.3) тенглама ана шундай шароитларда ҳам ўринли бўлиб қола беради. Шундай қилиб (22.3)тенглама релятивистик механикада ҳам ўз аҳамиятини сақлаб қолар экан (12- § га қаранг).

(22.3) ни dt га кўпайтирсак, қуйидаги муносабатга келамиз:

$$d\mathbf{p} = \mathbf{f}dt \qquad (22.4)$$

Бу муносабатни интеграллласак, t_1 дан t_2 гача ўтган вақт оралиғидаги импульс орттирмасини топамиз:

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int d\mathbf{p} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}dt. \qquad (22.5)$$

---

[1] Илгари «импульс» термини ўрнига «ҳаракат миқдори» термини ишлатилар эди.

[2] Бу боғланиш қуйидагича кўринишга эга: $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$, бу ерда m — жисмнинг саноқ системадаги массаси, жисм бу саноқ системасига нисбатан v тезлик билан ҳаракатланади, m_0 — тинч ҳолатдаги, яъни $v=0$ тезликдаги масса, c — ёруғликнинг бўшлиқдаги тезлиги.

Хусусий ҳолда, агар $\mathbf{f} = \text{const}$ бўлса, (22.5) тенглама τ вақт оралиғи учун импульсга $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \mathbf{f}\tau$ орттирма беради.

Эслатиб ўтамизки, (22.3) дан импульс вақт бўйича қандай ўзгаришини аниқлаб, жисмга таъсир этувчи кучни топиш мумкин деган хулоса чиқади.

23- §. Импульснинг сақланиш қонуни

N та моддий нуқтадан ташкил топган системани (уни қисқалик учун жисмлар системаси деб атаймиз) қараб чиқайлик. Системани ташкил этувчи жисмлар, ҳам ўзаро, ҳам берилган системага тааллуқли бўлмаган жисмлар билан ўзаро таъсирлашиши мумкин. Шунга мос равишда системанинг жисмларига таъсир этувчи кучларни ички ва ташқи кучларга ажратиш мумкин. Берилган жисмга системанинг бошқа жисмлари кўрсатган таъсир кучини ички кучлар, системага кирмаган жисмларнинг таъсир кучини эса ташқи кучлар деб атаймиз.

Агар ташқи кучлар бўлмаса, система ёпиқ система дейилади. Системани ташкил этувчи жисмлар импульсларининг вектор йиғиндисига $\mathbf{p}$ системанинг импульси деб айтилади:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \ldots \mathbf{p}_N = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i.$$

Системанинг инерция маркази деб шундай нуқтани айтамизки, унинг фазодаги вазияти қуйидаги формула билан аниқланадиган $\mathbf{r}_c$ радиус-вектор билан берилади:

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots + m_N\mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum m_i\mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i\mathbf{r}_i}{m}, \qquad (23.1)$$

m_i бу ерда i нчи жисмнинг массаси, $\mathbf{r}_i$ — шу жисмнинг фазодаги ҳолатини аниқловчи радиус-вектор, m — системанинг массаси.

Инерция марказининг декарт координаталари $\mathbf{r}_c$ нинг координата ўқларига проекцияларига тенг:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{m}; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{m}; \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{m}. \qquad (23.2)$$

Шуни таъкидлаб ўтиш керакки, инерция маркази системанинг оғирлик маркази билан устма-уст тушади.[1]

Инерция марказининг тезлиги $\mathbf{r}_c$ ни вақт бўйича дифференциаллаб топилади:

$$\mathbf{v}_c = \dot{\mathbf{r}}_c = \frac{\sum m_i\dot{\mathbf{r}}_i}{m} = \frac{\sum m_i\mathbf{v}_i}{m}.$$

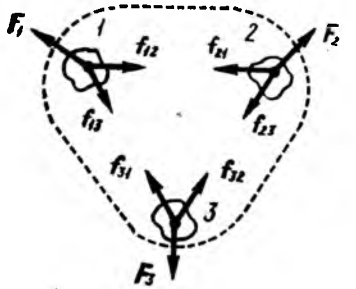
[1] Бу фақат оғирлик кучининг бир жинсли майдонидагина ўринли (41- § га қаранг).

$m_i \mathbf{v}_i$ кўпайтма $\mathbf{p}_i$ га тенг эканлигини, $\sum \mathbf{p}_i$ эса системанинг импульсини беришини ҳисобга олиб қуйидагини ёзиш мумкин:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}_c. \tag{23.3}$$

Шундай қилиб, системанинг импульси системанинг массаси билан инерция маркази тезлигининг кўпайтмасига тенг экан.

Система учта жисмдан иборат деб фараз қилайлик (51-расм). Ички кучларнинг ҳар бирига, масалан, *1* жисмга *2* жисмнинг $\mathbf{f}_{12}$ таъсир этувчи кучига *1* жисмнинг *2* жисмга акс таъсир этувчи $\mathbf{f}_{21}$ кучи мос келади, шу билан бирга Ньютоннинг учинчи қонунига мувофиқ $\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21}$. $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ ва $\mathbf{F}_3$ символлар билан ташқи жисмларнинг мос равишда системанинг *1*- ва *2*- ва *3*- жисмларга таъсир кучлари белгиланган.



51-расм.

Учта жисмнинг ҳар бири учун (22.3) тенгламани ёзамиз:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}_1 = \mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{13} + \mathbf{F}_1,$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}_2 = \mathbf{f}_{21} + \mathbf{f}_{23} + \mathbf{F}_2.$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}_3 = \mathbf{f}_{31} + \mathbf{f}_{32} + \mathbf{F}_3.$$

Учта тенгликни бир-бирига қўшайлик. Ички кучларнинг йиғиндиси нолга тенг, шунинг учун:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) = \frac{d}{dt}\mathbf{p} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3. \tag{23.4}$$

Ташқи кучлар бўлмаганда

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = 0,$$

демак, ёпиқ система учун $\mathbf{p}$ — ўзгармас экан.

Бу натижани исталган N сондаги жисмлардан ташкил топган система учун осонгина умумлаштириш мумкин. Йиғиндиларни қисқача ёзиш усулидан фойдаланиб, ҳамма N та жисм учун (22.3) тенгламани қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}_i = \sum_{k \neq i} \mathbf{f}_{ik} + \mathbf{F}_i \quad (i = 1, 2 \, \ldots, N). \tag{23.5}$$

(23.5) ифода бир-биридан i индексининг қийматлари билангина фарқланадиган N та тенгламалар системасидан иборат. Бу тенгламаларнинг ҳар бирида йиғинди k индекс бўйича олинади, бунда

i-тенгламада k индекс 1 дан N гача бўлган барча ($k = i$ қийматидан ташқари) қийматларни қабул қилади.

Бу тенгламаларни $\mathbf{f}_{ik} = -\mathbf{f}_{ki}$ эканлигини ҳисобга олган ҳолда ўзаро қўшсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i. \tag{23.6}$$

Демак, система импульси векторидан вақт бўйича олинган ҳосила система жисмларига қўйилган барча ташқи кучларнинг вектор йиғиндисига тенг экан.

Ёпиқ система учун (23.6) муносабатнинг ўнг томони нолга тенг, шунинг учун $\mathbf{p}$ вақтга боғлиқ эмас. Бу фикр импульснинг сақланиш қонунининг мазмунидан иборатдир. Бу қонун қуйидагича таърифланади: *моддий нуқталар ёпиқ системасининг импульси ўзгармайди.*

Эслатиб ўтамизки, ташқи таъсирлар остида турган система учун ҳам, агар система жисмларига таъсир этувчи ташқи кучлар йиғиндиси нолга тенг бўлса, импульс ўзгармайди. Борди-ю, ташқи кучлар йиғиндиси нолга тенг бўлмасдан бу йиғиндининг бирор йўналишига проекцияси нолга тенг бўлса ҳам импульснинг шу йўналиш бўйлаб ташкил этувчиси ўзгармайди. Ҳақиқатан ҳам, (23.6) тенгламанинг барча катталикларининг ихтиёрий x йўналишга проекциясини тушириб ва

$$\left(\frac{d}{dt}\mathbf{p}\right)_{\text{пр}_x} = \frac{d}{dt}p_x^{1}$$

эканлигини ҳисобга олиб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{d}{dt}p_x = \sum_{i=1}^{N} F_{xi}. \tag{23.7}$$

Худди шу тенгламадан биз юқорида баён этган фикр келиб чиқади.

(23.3) га биноан импульснинг сақланиш қонунидан жисмларнинг ёпиқ системасининг инерция маркази ё тўғри чизиқли ва текис ҳаракат қилади, ё тинч ҳолатда қолади деган хулоса чиқади.

Импульснинг сақланиш қонунига асосланган жуда кўп ҳодисаларнинг номини айтиш мумкин. Масалан, силлиқ пол устида турган одам бирор буюмни жойидан сураётганда албатта ўзи қарама-қарши томонга сирғаниб кетади. Ракеталарнинг (ва реактив двигателларнинг) ишлаши шунга асосланганки, ёнилғи ёнган вақтда ҳосил бўлган газлар оқими ракетанинг соплосидаги чиқиши натижасида ракетага импульс берилади. Бу импульс чиқаётган газлар олган импульсга тенг бўлади.

---

[1] (2.11) формулаларга қаранг.

III БОБ

ИШ ВА ЭНЕРГИЯ

24- §. Иш

Фараз қилайлик, **f** куч таъсир этаётган жисм бирор траектория бўйлаб s йўлни ўтган бўлсин. Бунда куч ё жисмнинг тезлигини ўзгартириб унга тезланиш беради, ё ҳаракатга қаршилик кўрсатаётган бошқа кучнинг (ёки кучларнинг) таъсирини компенсациялайди. **f** кучнинг s йўлда кўрсатган таъсири иш деб аталувчи катталик билан характерланади.

Кучнинг кўчиш рўй бераётган йўналишга проекцияси f_s нинг куч қўйилган нуқта босиб ўтган s йўлга кўпайтмасидан иборат скаляр катталикка иш деб айтилади:

$$A = f_s s. \tag{24.1}$$

Кучнинг кўчиш рўй бераётган йўналишга (яъни тезликнинг йўналишига) f_s проекциясининг катталиги доим ўзгармай қолгандагина (24.1) ифода ўринли бўлади. Хусусан жисм тўғри чизиқли ҳаракат қилса ва ўзгармас f куч ҳаракат йўналиши билан ўзгармас α бурчак ҳосил қилса, бу шарт қаноатлантирилади. $f_s = f\cos\alpha$ бўлгани учун (24.1) ифодани қуйидаги кўринишга келтириш мумкин:

$$A = fs\cos\alpha. \tag{24.2}$$

Иш — алгебраик катталик. Агар куч билан кўчиш йўналиши орасидаги бурчак ўткир ($\cos\alpha > 0$) бўлса, иш мусбат бўлади. Агар α бурчак ўтмас ($\cos\alpha < 0$) бўлса, иш манфий бўлади. $\alpha = \pi/2$ да иш нолга тенг. Кейинги хулоса механикадаги иш тушунчаси оддий иш ҳақидаги тушунчадан тубдан фарқ қилишини кўрсатади. Оддий тушунчага биноан ҳар қандай зўриқиш, масалан мускулларнинг зўриқиши албатта, иш бажарилишига олиб келади. Масалан, юк ташувчи одам оғир юкни тик туриб ушлаб туриши учун, айниқса бу юкни горизонтал йўлда кўчириши учун мускулларини кўп зўриқтиради, яъни «иш бажаради». Бироқ бу ҳолларда иш механик катталик сифатида нолга тенг.

Агар кучнинг кўчиш йўналишга проекцияси ҳаракат вақтида доимий қолмаса, у вақтда ишни ҳисоблаш учун s йўлни элементар қисмларга бўлиб чиқиш керак. Бу Δs қисмларини шу қадар кичик олиш керакки, жисм бундай қисмини ўтиши учун кетган вақт ичида f_s нинг катталиги деярли ўзгармас деб ҳисоблаш мумкин бўлсин.

У вақтда ҳар бир элементар қисмида кучнинг иши тахминан қуйидагига тенг:

$$\Delta A \cong f_s \Delta s.$$

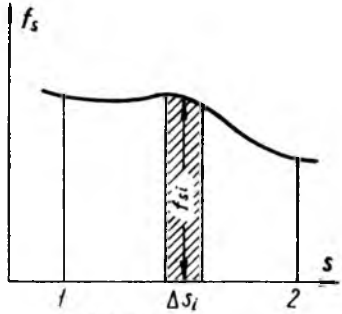
s йўлда бажарилган бутун иш эса элементар ишларнинг йиғиндиси сифатида ҳисобланиши мумкин бўлади:

$$A = \sum \Delta A_i \cong \sum f_{si} \Delta s_i . \qquad (24.3)$$

Барча Δs_i лар нолга интилганда тахминий (24.3) тенглик қуйидаги аниқ тенгликка айланади:

$$A = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum f_{si} \Delta s_i = \int\limits_S f_s \, ds^1. \qquad (24.4)$$

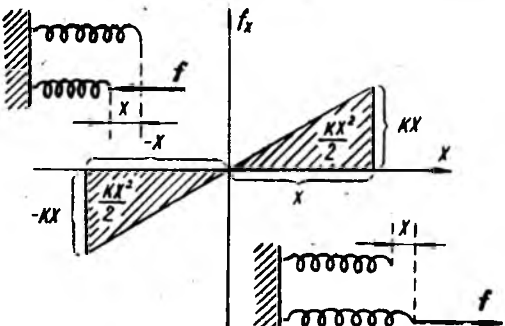
52- расмда f_s нинг графиги траекториядаги нуқта ҳолатининг функцияси сифатида чизилган (горизонтал ўқни s деб ҳисоблаш мумкин, бу ўқнинг *1* ва *2* нуқталари орасидаги кесманинг узунлиги йўлнинг тўлиқ узунлигига тенг).



52- расм.

Гук қонунига бўйсунувчи пружинани чўзиш вақтида бажарилган ишни топайлик. Пружинага кўрсатилаётган таъсир кучининг катталиги ҳамма вақт $f = kx$ (x — пружинанинг чўзилиши) эластик кучга тенглигича қолиши учун пружинани аста-секин чўзамиз. Куч кўчиш йўналиши бўйлаб таъсир қилганлиги учун $f_x = f$. Куч қўйилган нуқтанинг ўтган йўли x га тенг (53- расм). 53- расмга биноан пружинани x га чўзиш учун бажариладиган иш

$$A = \frac{kx^2}{2} . \qquad (24.5)$$

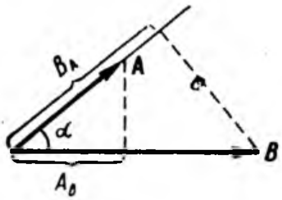


53- расм

[1] Бу ҳолда ҳам нотекис ҳаракат вақтида ўтилган йўл формуласини чиқараётган вақтдагидек мулоҳазалар юритилади (4- § га қаранг).

Пружинани x га қисган вақтда ҳам катталиги ҳамда ишораси пружинани чўзиш вақтида бажарилган ишга тенг иш бажарилади. Кучнинг проекцияси f_x бу ҳолда манфий (пружинага таъсир этувчи куч чапга қараб йўналган, x эса ўнгга қараб ўсади, 53-расмга қаранг), барча Δx лар манфий, натижада $f_x \Delta x$ мусбат бўлади.

Шуни таъкидлаб ўтамизки, эластик кучнинг, яъни пружина томонидан уни чўзганда ҳам, қисганда ҳам уни деформацияловчи жисмга таъсир этувчи куч — $kx^2/2$ га тенг, чунки эластиклик кучи вақтнинг ҳар бир моментида деформация юзага келтирувчи кучга катталик жиҳатидан тенг, лекин йўналиш жиҳатидан тескари.



54- расм.

Иш бирликлари. Иш бирлиги қилиб кўчиш йўналишида таъсир қилувчи бир бирлик кучнинг бир бирлик йўлда бажарган иши қабул қилинади:

1) СИ системада иш бирлиги жоуль (*ж*) бўлиб, у 1 ньютон кучнинг 1 метр йўлда бажарган ишига тенг;

2) СГС системада иш бирлиги *эрг* бўлиб, у 1 дина кучнинг 1 сантиметр йўлда бажарган ишига тенг;

3) МКГСС системада килограммометр (*кгк·м*) бўлиб, у 1 *кгк* кучнинг 1 метр йўлда бажарган ишига тенг.

Ишнинг бирликлари орасида қуйидагича муносабатлар ўринлидир:

$1\ ж = 1\ н.\ 1\ м = 10^5\ дина \cdot 10^2\ см = 10^7\ эрг;$

$1\ кгк \cdot м = 1\ кгк \cdot 1\ м = 9{,}81\ н \cdot 1\ м = 9{,}81\ ж.$

Векторларнинг скаляр кўпайтмаси. Ишнинг ифодаси куч вектори билан кўчиш векторнинг скаляр кўпайтмаси кўринишида ёзилиши мумкин.

Иккита **A** ва **B** векторлар модулларининг улар орасидаги α бурчак косинусига кўпайтмасига шу векторларнинг скаляр кўпайтмаси деб айтилади (54-расм). Скаляр кўпайтма символик **AB** кўринишда ёзилади; бунда векторининг символлари орасига ҳеч қандай белги қўйилмайди[1].

Шундай қилиб, таърифга биноан скаляр кўпайтма қуйидагига тенг:

$$\mathbf{AB} = AB\cos\alpha. \qquad (24.6)$$

Бурчак α ўткир бўлганда, AB нолдан катта, α ўтмас бўлганда эса нолдан кичик; икки ўзаро перпендикуляр векторларнинг ($\alpha = \pi/2$) скаляр кўпайтмаси нолга тенг.

Таъкидлаб ўтамизки, векторнинг квадрати деганда векторнинг ўз-ўзига скаляр кўпайтмаси тушунилади:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA} = AA\cos 0 = A^2. \qquad (24.7)$$

[1] **A·B** ва (**A**,**B**) каби белгилар камроқ ишлатилади.

(векторнинг ўз-ўзига вектор кўпайтмаси нолга тенг). Демак, векторнинг квадрати унинг модулининг квадратига тенг.

Таърифлардан келиб чиқадики, скаляр кўпайтма кўпаювчилар тартибига боғлиқ эмас; шунинг ҳам вектор кўпайтмадан фарқли ўлароқ скаляр кўпайтма коммумативдир.

(24.6) ифодага қуйидагича кўриниш бериш мумкин:

$$\mathbf{AB} = AB\cos\alpha = A(B\cos\alpha) = B(A\cos\alpha)$$

54- расмдан кўриниб турибдики, $B\cos\alpha$, **B** векторнинг **A** вектор йўналишига бўлган проекциясига, яъни B_A га, шунингдек $A\cos\alpha = A_B$, **A** векторнинг **B** вектор йўналишига проекциясига тенг. Шунинг учун скаляр кўпайтмани бошқача таърифлаш ҳам мумкин: кўпайтирилаётган векторлардан бирининг модулини иккинчи векторнинг биринчи вектор йўналишига туширилган проекциясига кўпайтиришдан ҳосил бўлган скалярга икки векторнинг скаляр кўпайтмаси дейилади.

$$\mathbf{AB} = A_B B = AB_A. \tag{24.8}$$

Векторлар йиғиндисининг проекцияси қўшилувчи векторлар проекцияларининг йиғиндисига тенг. Бундан келиб чиқадики:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C} + \ \ldots\ ) = A(\mathbf{B} + \mathbf{C} + \ \ldots\ )_A = A(B_A + C_A + \ \ldots\ ) =$$
$$= AB_A + AC_A + \ \ldots\ = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} + \ \ldots$$

Шундай қилиб, векторларнинг скаляр кўпайтмаси дистрибутивдир, яъни бирор **A** векторнинг бир неча векторлар йиғиндисига скаляр кўпайтмаси шу **A** векторнинг қўшилувчи векторларнинг ҳар бирига алоҳида скаляр кўпайтмалари йиғиндисига тенг экан.

Векторларнинг скаляр кўпайтмасидан фойдаланиб, ишнинг ифодаси (24.4) ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$A = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum \mathbf{f}_i \,\Delta \mathbf{s}_i = \int\limits_S \mathbf{f}d\mathbf{s}, \tag{24.9}$$

бу ерда $\Delta\mathbf{s}$ деб биз аввал $\Delta\mathbf{r}$ орқали ифодаланган элементар кўчиш вектори тушунилади (элементар кўчиш модули $|\Delta\mathbf{r}|$ лимитда элементар йўлга тенг 3- § га қаранг).

Фараз қилайлик, жисмга умумий ташкил этувчиси $\mathbf{f} = \sum\limits_k \mathbf{f}_k$ га тенг бўлган бир неча куч бир вақтда таъсир қилсин. Скаляр кўпайтманинг дистрибутивлигидан умумий ташкил этувчи Δs йўлда бажарган ΔA ишни қуйидаги

$$\Delta A = \Big(\sum_k \mathbf{f}_k\Big)\Delta\mathbf{s} = \sum_k (\mathbf{f}_k \Delta s) = \sum_k \Delta A_k\,,$$

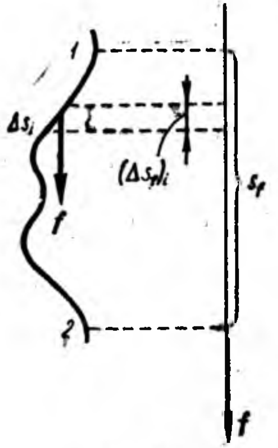
формуладан ҳисоблаб топиш мумкин, яъни бир неча кучлар ташкил этувчисининг умумий ташкил этувчиси бажарган иш ҳар бир куч алоҳида бажарган ишларнинг алгебраик йиғиндисига тенг деган хулоса чиқади.

Элементар $\Delta \mathbf{s}$ кўчиш

$$\Delta \mathbf{s} = \mathbf{v}\,\Delta t$$

кўринишда ёзилиши мумкин. Шунинг учун (24.9) формулага қуйидаги кўринишни бериш мумкин:

$$A = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum \mathbf{f}_i\,\mathbf{v}_i\,\Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}\,\mathbf{v}\,dt. \tag{24.10}$$



55- расм.

(24.8) га биноан $f_s \Delta s = f \Delta s_f$, бу ерда Δs_f элементар кўчишнинг куч йўналишига проекцияси. Шунинг учун ишни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$A = \lim_{(\Delta s_f)_i \to 0} \sum f_i (\Delta s_f)_i = \int_S f\,d\,s_f. \tag{24.11}$$

Агар кучнинг катталиги билан йўналиши ўзгармаса (55- расм), у вақтда (24.9) формулада $\mathbf{f}$ векторни интеграл ишорасидан ташқарига чиқариш мумкин, натижада ишнинг ифодаси қуйидаги кўринишга келади.

$$A = \mathbf{f}\int d\mathbf{s} = \mathbf{f}\mathbf{s} = f s_f, \tag{24.12}$$

бу ерда $\mathbf{s}$ кўчириш вектори, s_f — унинг куч йўналишига проекцияси.

25- §. Қувват

Амалда фақат бажарилган ишнинг катталигигина эмас, балки бу ишни бажариш учун кетган вақт ҳам аҳамиятга эга. Шу сабабли иш бажариш учун мўлжалланган механизмларни характерлаш учун берилган механизм вақт бирлигида қандай иш бажаришини кўрсатадиган катталик киритилади. Бу катталик **қувват** дейилади. Шундай қилиб w қувват ΔA ишнинг шу ишни бажариш учун кетган Δt вақтга нисбатига тенг экан:

$$W = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \tag{25.1}$$

Агар истаганча кичик ва бир хил Δt вақт оралиқлари ичида бажарилган ΔA ишлар бир хил бўлмаса, у ҳолда қувват вақт бўйича ўзгарувчан бўлади. Бундай ҳолларда қувватнинг оний қиймати текширилади:

$$W = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}. \tag{25.2}$$

Оний қувват (25.2) доимий бўлмаган ҳолда (25.1) ифода қувватнинг Δt вақт ичидаги ўртача қийматини беради.

dt вақт ичида куч қўйилган нуқта ds га кўчган бўлсин. У вақтда dt вақт ичида бажарилган элементар dA иш

$$dA = \mathbf{f}\, d\mathbf{s}$$

га тенг ва қувватни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин бўлади:

$$W = \frac{dA}{dt} = \mathbf{f}\,\frac{d\mathbf{s}}{dt}\,.$$

Бироқ $\frac{d\mathbf{s}}{dt}$ тезлик вектори $\mathbf{v}$ га тенг. Демак, қувват куч вектори билан куч қўйилган нуқтанинг ҳаракат тезлиги векторининг скаляр кўпайтмасига тенг экан:

$$W = \mathbf{f}\,\mathbf{v}. \tag{25.3}$$

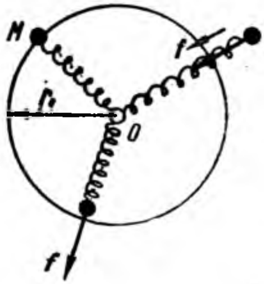
Қувват бирликлари. Қувват бирлиги деб шундай қувват қабул қилинадики, бунда вақт бирлиги (*сек*) ичида бир бирлик (*ж* ёки *эрг*) иш бажарилади. СИ системада қувват бирлиги ватт (*вт*) бўлиб жоуль тақсим секунд (*ж/сек*) га тенг. СГС системада қувват бирлиги (*эрг/сек*) махсус номга эга эмас. Ватт билан *эрг/сек* орасида қуйидаги муносабат мавжуд: 1 *вт* = 10^7 *эрг/сек*.

МКГСС — системада қувват бирлиги от кучи (о. к.) бўлиб, у секундига 75 килограмметрга тенг. 1 о. к. = 736 *вт*.

26- §. Кучларнинг потенциал майдони. Консерватив ва ноконсерватив кучлар

Агар фазонинг ҳар бир нуқтасида жисмга бошқа жисмлар нуқтадан нуқтага қонуният билан ўзгариб борувчи куч билан таъсир қилиб турган бўлса, жисм кучлар майдонида турибди дейилади. Масалан, Ер сиртига яқин жойда жисмга оғирлик кучлари таъсир қилади — фазонинг ҳар бир нуқтасида унга вертикал бўйлаб пастга йўналган $P = mg$ куч таъсир қилади.

Иккинчи мисол тариқасида пружина ёрдамида бирор O марказга «боғланган» M жисмни текширамиз (56- расм). Пружинанинг бир учи кўчмас O нуқта атрофида шарнир равишда исталган йўналишда айлана олади, иккинчи учи эса M жисмга маҳкамланган. Фазонинг ҳар бир нуқтасида M жисмга радиус бўйлаб (O марказ билан M жисм орқали ўтган тўғри чизиқ бўйлаб) йўналган



56- расм.

$$f = -k\,(r - r_0) \tag{26.1}$$

куч таъсир қилади, бу ерда r — O марказдан жисмгача бўлган масофа r_0 — деформацияланмаган пружинанинг узунлиги, k — пропорционаллик коэффициенти. Агар $r > r_0$ (пружина чўзилган) бўлса, куч марказга қараб йўналган ва «—» ишорасига эга (куч билан r

радиус-векторнинг йўналиши қарама-қаршидир); агар $r < r_0$ (пружина сиқилган) бўлса, куч марказдан ташқарига қараб йўналган ва «+» ишорага эга. Биз текширган бу кучлар майдони марказий кучлар майдони деб аталувчи майдоннинг хусусий бир ҳолидир. Бу майдон шу билан характерланадики, у эгаллаган фазонинг исталган нуқтасида таъсир қилувчи куч бирор марказ орқали ўтади, кучнинг катталиги эса фақат шу марказгача бўлган масофагагина боғлиқ бўлади $f = f(r)$.

Оғирлик кучи майдони ҳам кучларнинг марказий майдонига мисол бўлади.

Келтирилган мисоллар шу билан характерлики, жисмга таъсир қилувчи кучлар фақат жисмнинг фазодаги вазиятига (аниқроғи жисмнинг унга таъсир кўрсатаётган бошқа жисмларга нисбатан вазиятига) боғлиқ бўлиб, жисмнинг тезлигига боғлиқ эмас.

Фақат жисмнинг вазиятигагина боғлиқ бўлган кучлар учун улар жисм устида бажарилаётган иш йўлга боғлиқ бўлмасдан, фақат жисмнинг фазодаги бошланғич ва сўнгги ҳолатларигагина боғлиқ бўлиб қолиши ҳам мумкин. Бу ҳолда кучлар майдони потенциал майдон, кучларнинг ўзлари эса консерватив кучлар деб аталади. Бажарган иши жисм бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга қандай йўл билан ўтганлигига боғлиқ бўлган кучлар ноконсерватив кучлар дейилади.

Консерватив кучларнинг исталган ёпиқ йўлда бажарган иши нолга тенг. Ҳақиқатан хам, потенциал майдонда турган жисм айланиб ўтаётган ёпиқ йўлни икки қисмга бўламиз: I йўл, унинг бўйлаб жисм *1* нуқгадан *2* нуқтага ўтади ва II йўл, унинг бўйлаб жисм *2* нуқтадан *1* нуқтага ўтади. Бу мисолда *1* ва *2* нуқталарни мутлақо ихтиёрий танлаб оламиз (57- расм). Бутун ёпиқ йўлда бажарилган иш айрим қисмнинг ҳар бирида бажарилган ишларнинг йиғиндисига тенг:

$$A = (A_{12})_{\mathrm{I}} = (A_{21})_{\mathrm{II}}. \tag{26.2}$$

Бирор йўлда, масалан, II йўлда (57- расм) жисм *1* нуқтага ўтган вақтда бажарилган иш ўша йўлда *2* нуқтадан *1* нуқтага қайтиб ўтиш вақтида бажарилган ишнинг тескари ишора билан олинган қийматига тенг эканлигини кўрсатайлик. Траекториянинг Δs қисмини (58- расм) олайлик. Потенциал майдонда f куч фақат жисм-

57- расм.

58- расм.

нинг фазодаги ҳолатига боғлиқ бўлиб, жисмнинг харакат ҳолатига (хусусан, ҳаракати йўналишига) боғлиқ бўлмаганлиги сабабли Δs йўлда бажарилган элементар иш бир томонга қараб ҳаракатланган вақтда $\Delta A = \mathbf{f}\,\Delta\mathbf{s}$ қарама-қарши томонга қараб ҳаракатланган вақтда эса $\Delta A' = \mathbf{f}\,\Delta\mathbf{s}'$ га тенг бўлади. $\Delta\mathbf{s}' = -\Delta\mathbf{s}$ бўлганлиги учун $\Delta A' = -\Delta A$. Бу йўлнинг ихтиёрий элнментар участкаси учун, демак, бутун йўлдаги бажарилган иш учун ўринлидир, шунинг учун

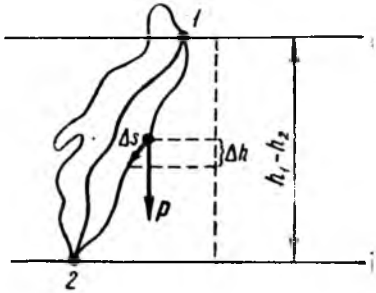
$$(A_{21})_{II} = -(A_{12})_{II}. \tag{26.3}$$

Олинган натижадан фойдаланиб (26.2) тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$A = (A_{12})_I - (A_{12})_{II}. \tag{26.4}$$

Бироқ кучларнинг потенциал майдонида бажарилган иш йўлга боғлиқ эмас, яъни $(A_{12})_I = (A_{12})_{II}$. Демак, (26.4) ифода нолга тенг, худди ана шуни исботлаш зарур эди.

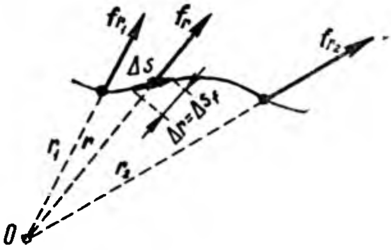
Агар исталган ёпиқ йўлда бирор кучларнинг бажарилган иши нолга тенг бўлса, у вақтда бу кучларнинг жисм бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга ўтиш вақтида бажарган иши, афтидан, йўлга боғлиқ бўлмайди (буни юқоридаги мулоҳазаларнинг аксинча юргизиш йўли билан исботлаш мумкин). Шунинг учун кучларнинг потенциал майдонини иши исталган ёпиқ йўлда нолга тенг бўлган кучларнинг майдони сифатида таърифлаш мумкин. Кучларнинг потенциал майдонида ёпиқ йўлда бажарган иши нолга тенг бўлганлиги учун кучлар ёпиқ йўлнинг айрим қисмларида мусбат иш бажарса, бошқа қисмларида эса манфий иш бажаради. Ишқаланиш кучларининг Δt вақт оралиғида бажарган иши (24.10) га мувофиқ қуйидагига тенг:



59- расм.

$$\Delta A = \mathbf{f}\,\mathbf{v}\,\Delta t = -fv\,\Delta t,$$

чунки $\mathbf{f}$ ва $\mathbf{v}$ векторлар доим қарама-қарши йўналишларга эга.[1] Демак, ишқаланиш кучларининг иши



60- расм.

[1] Бунда ҳаракатланаётган жисм билан кўчмас (саноқ системага нисбатан) жисмлар орасидаги ишқаланиш назарда тутилади. Баъзи ҳолларда ишқаланиш кучларининг иши мусбат ҳам бўлиб қолиши мумкин. Бу ҳол, масалан, ишқаланиш кучи берилган жисм билан худди ўша йўналишда, бироқ унга нисбатан каттароқ тезлик билан ҳаракатланаётган бошқа жисмлар орасидаги ўзаро таъсир натижасида юзага келган вақтда учрайди.

доим манфий бўлиб, ёпиқ йўлда нолдан фарқ қилади. Шундай қилиб, ишқаланиш кучлари ноконсерватив кучлар қаторига кирар экан.

Оғирлик кучлари майдони потенциал майдон эканлигини исботлайлик. Жисмга траекториянинг исталган нуқтасида таъсир этувчи куч бир хил $P = mg$ қийматга эга ва вертикал бўйлаб пастга йўналган (59-расм). Шунинг учун (24.12) га биноан иш

$$A = P(h_1 - h_2) = mg(h_1 - h_2). \tag{26.5}$$

Кўриниб турибдики, бу ифода йўлга боғлиқ эмас, демак оғирлик кучлари майдони потенциалдир.

Марказий кучлар майдони ҳам потенциал майдон ҳисобланади. Δs йўлда бажарилган элементар иш (60-расм).

$$\Delta A = f(r)\Delta s_f.$$

Бироқ Δs нинг берилган жойда кучнинг йўналишига, яъни $\mathbf{r}$ радиус-векторнинг йўналишига проекцияси O нуқтадан жисмгача бўлган масофанинг Δr орттирмасига тенг: $\Delta s_f = \Delta r$. Шунинг учун

$$\Delta A = f(r)\Delta r.$$

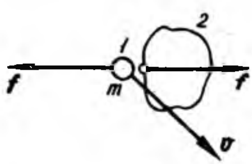
Бутун йўлда бажарилган иш

$$A = \sum \Delta A_i = \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_{r=r_1}^{r=r_2} f(r_i)\Delta r_i = \int_{r_1}^{r_2} f(r)\,dr\,.$$

Сўнгги ифода, афтидан, фақат $f(r)$ функциянинг турига ва r_1 билан r_2 нинг қийматларига боғлиқ холос. У траекториянинг кўринишига ҳеч боғлиқ эмас, шунинг учун кучларнинг марказий майдони ҳам потенциал майдондир.

27-§. Энергия. Энергиянинг сақланиш қонуни

Тажриба шуни кўрсатадики, жисмлар кўпинча бошқа жисмлар устида иш бажариш имкониятига эга бўладилар. Жисмнинг ёки жисмлар системасининг иш бажариш қобилиятини характерловчи физик катталик **энергия** дейилади. Жисм энергияга эга бўлишига икки нарса: биринчидан, жисмнинг бирор тезлик билан ҳаракатланиши ва иккинчидан, жисмнинг кучлар потенциал майдонида турганлиги сабаб бўлиши мумкин. Биринчи турдаги энергия **кинетик энергия** дейилади. Иккинчи турдаги энергия эса **потенциал энергия** дейилади. Қисқача кинетик энергияни — ҳаракат энергияси, потенциал энергияни эса — ҳолат (вазият) энергияси деб аташ мумкин.



61-расм.

Кинетик энергия. Фараз қилайлик, $\mathbf{v}$ тезлик билан ҳаракатланувчи m массали 1 жисм (моддий нуқта назарда тутилади) бориб урилган 2 жисмга $\mathbf{f}$ куч билан таъсир қилсин (61-расм). dt вақт ичида куч қўйилган нуқта $ds = \mathbf{v}dt$ га кўчади ва натижада *1* жисм *2* жисм устида

$$dA = \mathbf{f}\,ds = \mathbf{f}\mathbf{v}\,dt \qquad (27.1)$$

иш бажаради. Равшанки, берилган ҳолда *1* жисм ҳаракатланаётганлиги туфайли эга бўлган энергия запаси ҳисобига, яъни T кинетик энергия ҳисобига иккинчи жисм устида иш бажаради (агар *1* жисм ҳаракатланмаганда ds кўчиш ҳам, демак dA иш ҳам нолга тенг бўлар эди). Шунинг учун *1* жисм бажарган ишни унинг кинетик энергиясининг камайишига[1] тенглаштириш мумкин:

$$dA = -dT.$$

(27.1) ни эътиборга олиб қуйидагини топамиз:

$$dT = -\mathbf{f}\mathbf{v}dt. \qquad (27.2)$$

Ньютоннинг учинчи қонунига биноан *2* жисм *1* жисмга $\mathbf{f}' = -\mathbf{f}$ куч билан таъсир кўрсатганлиги туфайли 1 жисмнинг тезлиги dt вақт ичида қуйидагича орттирма олади:

$$d\mathbf{v} = \frac{1}{m}\mathbf{f}'dt = -\frac{1}{m}\mathbf{f}dt.$$

Кейинги тенгликнинг иккала қисмини $m\mathbf{v}$ га скаляр кўпайтириб қуйидагини топамиз:

$$m\mathbf{v}d\mathbf{v} = -\mathbf{f}\mathbf{v}dt. \qquad (27.3)$$

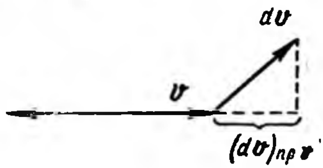
(27.3) ни (27.2) билан солиштириб dT учун қуйидаги ифодани топамиз:

$$dT = m\mathbf{v}d\mathbf{v}. \qquad (27.4)$$

(24.8) формулага биноан $\mathbf{v}d\mathbf{v}$ скаляр кўпайтмани $v\,|d\mathbf{v}|\cos\alpha = (d\mathbf{v})_{\text{пр}v}$[2] кўринишда ёзиш мумкин: бунда $(d\mathbf{v})_{\text{пр}v}$ — $d\mathbf{v}$ векторнинг $\mathbf{v}$ вектор йўналишига проекцияси.

62- расмдан $(d\mathbf{v})_{\text{пр}v}$ тезлик модулининг орттирмасига, яъни dv га тенг деган хулосага келиш мумкин. Шунинг учун (27.4) ифодани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$dT = mvdv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right). \qquad (27.5)$$



62- расм.

---

[1] Бирор a катталикнинг ўзгаришини ё унинг орттирмаси билан, ё камайиши билан характерлаш мумкин. Катталик a нинг орттирмаси деб (уни биз Δa деб белгилаймиз) бу катталикнинг охирги (a_2) ва бошланғич (a_1) қийматлари айирмасига айтилади:

$$\text{орттирма} = \Delta a = a_2 - a_1.$$

a катталикнинг камайиши деб унинг бошланғич (a_1) ва охирги (a_2) қийматлари айирмасига айтилади:

$$\text{камайиш} \equiv a_1 - a_2 \equiv -\Delta a.$$

Катталикнинг камайиши тескари ишора билан олинган орттирмасига тенг. Орттирма билан камайиш алгебраик катталиклардир. Агар $a_2 > a_1$ бўлса, орттирма мусбат, камайиш эса манфийдир. $a_2 < a_1$ бўлган ҳолларда эса орттирма манфий, камайиш эса мусбат бўлади.

[2] Бу ифодани $v \cdot dv \cdot \cos\alpha$ деб ёзиш мумкин эмас, чунки умуман айтганда $|d\mathbf{v}| \neq dv$.

Бундан[1] v тезлик билан ҳаракатланувчи m массали моддий нуқтанинг кинетик энергияси

$$T = \frac{mv^2}{2}. \tag{27.6}$$

(27.6) ифоданинг сурат ва махражини m га кўпайтириб ва mv кўпайтма жисмнинг p импульсига тенг эканлигини эътиборга олиб кинетик энергия ифодасини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$T = \frac{p^2}{2m}. \tag{27.7}$$

Жуда муҳим бир масалани қайд қилиб ўтамиз: жисм устида бажарилган A' иш унинг кинетик энергиясининг орттирмасига тенг $\Delta T = T_2 - T_1$. Буни исботламоқ учун элементар ишнинг ифодасини ёзамиз:

$$dA' = \mathbf{f}'\mathbf{v}dt$$

($\mathbf{f}'$ — жисм устида иш бажарувчи куч, $\mathbf{v}$ — жисмнинг тезлиги). Энди $\mathbf{f}'dt$ кўпайтмани $d\mathbf{p} = md\mathbf{v}$ [(22.4) га қаранг)]. билан алмаштирсак, қуйидагини топамиз:

$$dA' = \mathbf{f}'\mathbf{v}dt = m\mathbf{v}d\mathbf{v} = mvdv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dT.$$

Бу ифодани интеграллаб қуйидаги формулани топамиз:

$$A' = T_2 - T_1. \tag{27.8}$$

(27.8) дан энергиянинг ўлчамлиги ҳам ишнинг ўлчамлигига ўхшаш деган хулоса чиқади. Бу энергияни ҳам ишни ўлчашда қўлланиладиган бирликларда ўлчашга имкон беради.

Потенциал энергия. Кучлар потенциал майдонида турган жисмни (бунда моддий нуқта назарда тутилади) қараб чиқайлик. Майдоннинг ҳар бир нуқтасига (у $\mathbf{r}$ радиус-вектор билан характерланади) бирор $U(\mathbf{r})$ функциянинг маълум қийматини таққослайлик. Буни қуйидагича амалга оширамиз. Бирор бошланғич 0 нуқта учун функциянинг U_0 га тенг ихтиёрий қийматини қабул қиламиз. Функциянинг бир нуқтадаги U_1 қийматини топиш учун U_0 га жисм *1* нуқтадан *0* нуқтага кўчаётганда майдон кучлари жисм устида бажарган A_{10} ишни қўшамиз:

$$U_1 = U_0 + A_{10} \tag{27.9}$$

(шуни қайд қилиб ўтамизки, бу йўл билан аниқланган U функциянинг ўлчамлиги иш ёки энергиянинг ўлчамлигига тенгдир). Кучлар потенциал майдонида бажарилган иш йўлга боғлиқ бўлмаганлиги учун (26-§ га қаранг) бу йўл билан топилган U_1 қиймат бир қийматли бўлади.

---

[1] (27.5) тенгламани интеграллаш $T = \frac{mv^2}{2} + \mathrm{const}$ ифодага олиб келади. Бирок физик мулоҳазалардан равшанки, $v = 0$ да кинетик энергия T ҳам нолга тенг, бундан константани нолга тенг деб олиш керак деган хулоса чиқади.

Майдоннинг барча қолган нуқталари учун ҳам $U(\mathbf{r})$ нинг қийматлари худди ана шундай йўл билан топилади. Хусусан, $U(\mathbf{r})$ нинг 2 нуқтадаги қиймати қуйидагига тенг.

$$U_2 = U_0 + A_{20} \tag{27.10}$$

$U_1 - U_2$ айирмани ҳисоблайлик. Бунинг учун (27.9) дан (27.10) ифодани айирамиз ва $A_{20} = -A_{02}$ (26-§ га қаранг) эканлигидан фойдаланамиз. Натижада қуйидагини топамиз:

$$U_1 - U_2 = (U_0 + A_{10}) - (U_0 + A_{20}) = A_{10} - A_{20} = A_{10} + A_{02}.$$

Бироқ $A_{10} + A_{02}$ йиғинди майдон кучлари жисмни 1 нуқтадан 2 нуқтага 0 нуқта орқали ўтувчи траектория бўйлаб кўчирган вақтда бажарилган ишни беради. Бироқ жисм 1 нуқтадан 2 нуқтага исталган бошқа траектория бўйлаб (жумладан 0 нуқта орқали ўтмайдиган траектория бўйлаб ҳам) кўчирилган вақтда ҳам бажарилган иш худди ўшандай бўлади. Шунинг учун $A_{10} + A_{02}$ йиғиндини тўғридан-тўғри A_{12} кўринишда ёзиш мумкин. Натижада қуйидаги муносабатга келамиз:

$$U_1 - U_2 = A_{12}. \tag{27.11}$$

Шундай қилиб, $U(\mathbf{r})$ функция ёрдамида жисм устида майдон кучлари ихтиёрий 1 нуқтадан бошланиб ихтиёрий 2 нуқтада тугайдиган ихтиёрий йўлда бажарган ишини аниқлаш мумкин экан. Бу иш 1 — 2 йўлда $U(\mathbf{r})$ функциянинг камайишига тенг экан. Сўнгги айтганларимиз $U(\mathbf{r})$ ни механик энергиянинг биз потенциал энергия деб аталган бир тури сифатида таърифлашга имкон беради.

U_0 ихтиёрий бўлганлиги [(27.9) формулага қаранг] сабабли потенциал энергия бирор ноаниқ аддитив доимий сонга қадар аниқлик билан топилиши мумкин экан. Бироқ бу ҳол ҳеч қандай аҳамиятга эга эмас, чунки барча физик катталикларга U нинг жисмнинг икки ҳолагига мос қийматлари фарқи киради. Амалда жисмнинг бирор маълум ҳолатидаги U энергиясини нолга тенг деб ҳисоблаб, бошқа ҳолатларнинг энергиясини эса шу энергияга нисбатан олинади.

$U(\mathbf{r})$ функциянинг конкрет кўриниши куч майдонининг характерига боғлиқ бўлади. Масалан, оғирлик кучи майдонида Ер сирти яқинида m массали жисмнинг потенциал энергияси қуйидаги кўринишга эга:

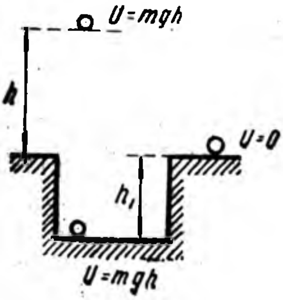
$$U = mgh, \tag{27.12}$$

бу ерда h — $U = 0$ бўлган сатҳдан ўлчанган баландлик. Бу фикр жисм h_1 баландликдан h_2 баландликка кўчган вақтда оғирлик кучи ишни ифодаловчи (26.5) формуладан келиб чиқади.

U нинг ҳисоб бошини ихтиёрий танлаб олиш мумкин бўлганлиги сабабли потенциал энергия манфий қийматларга ҳам эга бўлиши мумкин. Масалан, агар Ер сиртида турган жисмнинг потенциал энергиясини нолга тенг деб қабул қилсак, у вақтда h' чуқурликдаги қудуқнинг тагида ётган жисмнинг потенциал энергияси $U =$

$= mgh'$ бўлади (63-расм). Қайд қилиб ўтамизки, кинетик энергия манфий бўла олмайди.

Юқорида қараб чиқилган мисолда $U = mgh$ потенциал энергия оғирлик кучи майдонида турган жисмнинг энергияси деб айтган эдик. Бироқ аниқроқ айтганда, потенциал энергия ўзаро таъсирлашувчи жисмлар системасига тегишли бўлиши керак. Масалан, таҳлил қилинган мисолда $U = mgh$ энергия Ер — жисм системасининг энергиясидир. Жисмлар системасининг энергияси уларнинг бир-бирига нисбатан эгаллаган вазиятига боғлиқдир.



63- расм

Потенциал энергияга фақат ўзаро таъсирлашувчи жисмлар системасигина эмас, балки алоҳида олинган эластик деформацияланган жисм (масалан, қисилган ёки чўзилган пружина) ҳам эга бўлиши мумкин. Бу ҳолда потенциал энергия жисмнинг айрим қисмлари бир-бирларига нисбатан қандай жойлашганлигига (масалан, пружина қўшни ўрамлари орасидаги масофага) боғлиқ бўлади.

(24.5) га биноан пружинани x га чўзиш учун ҳам қисиш вақтдагидек $A = \frac{1}{2}kx^2$ иш бажарилиши керак. Бу иш ҳисобига пружинанинг потенциал энергияси ортади. Демак, пружина потенциал энергияси x билан қуйидагича боғланган:

$$U = \frac{kx^2}{2}. \qquad (27.13)$$

64- расм.

64-расмда бу муносабат график усулда тасвирланган.

Жисмлар системасининг тўла механик энергияси. Умумий ҳолда жисм бир вақтда ҳам кинетик энергияга, ҳам потенциал энергияга эга бўлиши мумкин. Бу энергияларнинг йиғиндиси тўла механик энергияни ташкил қилади. Масалан, Ер сиртидан h баландликда Ерга нисбатан v тезлик билан ҳаракатланаётган M жисм

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh. \qquad (27.14)$$

тўла энергияга эга бўлади.

Аниқроқ айтганда, бу ифода Ер — жисм системанинг тўла энергиясини ифодалайди: mgh — системанинг ўзаро потенциал энергияси, $mv^2/2$ — M жисмнинг кинетик энергияси, Ернинг кинетик энергияси эса биз текшираётган саноқ системада нолга тенг, ана шу ҳол (27.14) энергияни M жисмнинг энергиясидир деб айтишга асос бўла олади.

Потенциал ва кинетик энергиялар бир-бирларига айланиши мумкин. Аввал тинч турган жисмнинг h баландликдан эркин тушиш ҳолини текширайлик. Тушиш бошланишидан аввал жисмнинг кинетик энергияси нолга тенг (жисм тинч ҳолатда) потенциал энергияси эса mgh га тенг. Тушишнинг охирига келиб жисмнинг тезлиги

$$v = \sqrt{2gh} \tag{27.15}$$

га ва демак, кинетик энергияси

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(\sqrt{2gh})^2}{2} = mgh$$

га тенглашади, бироқ $h = 0$ баландликда потенциал энергия нолга тенглашади. Шундай қилиб, потенциал энергия эквивалент миқдорига кинетик энергияга айланади.

Ер сиртидан юқорига вертикал қилиб v тезлик билан отилган жисм дастлаб $mv^2/2$ кинетик энергияга ва нолга тенг потенциал энергияга эга бўлади. Жисм аста-секин тезлигини йўқота бориб, h баландликка кўтарилади. Бу h баландлик бошланғич тезлик билан (27.15) муносабат ёрдамида боғланган. h баландликда жисмнинг тезлиги ва демак, унинг кинетик энергияси нолга тенглашади, бироқ энди унинг потенциал энергияси ҳам кинетик энергиясининг дастлабки запасига тенглашади.

Иккала ҳолда ҳам (жисм Ер сиртига яқин жойда Ерга тушаётганда ҳам ва юқорига кўтарилаётганда ҳам) жисмнинг тўла энергияси ўзгармайди (жисмнинг ҳаракатига ҳавонинг қаршилигини ҳисобга олмаймиз). h' баландликнинг исталган ($0 < h' < h$) оралиғида қуйидаги йиғинди

$$\frac{mv'^2}{2} + mgh'$$

v' — h' баландликдаги тезлик (mgh га ёки $\frac{mv^2}{2}$ га тенг эканлигига осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкин[1].

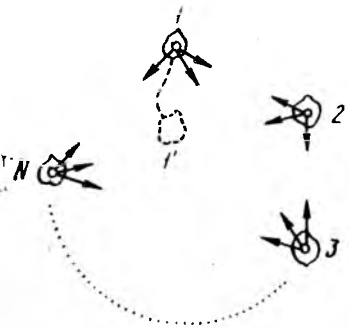
Бу натижа жисмга фақат потенциал энергияни юзага келтирувчи куч (mg куч Ер — жисм системасида таъсир кўрсатувчи ички кучдир) таъсир этганлиги сабаблигина келиб чиқди. Ташқи кучлар мавжуд бўлган ҳолларда бу бошқачароқ бўлади. Бу кучларнинг системани ҳосил қилувчи жисмлар устида бажарган иши ҳисобига системанинг тўла энергияси ўзгаради. Фараз қилайлик, дастлаб Ер сиртида тинч турган M жисмга mg оғирлик кучидан каттароқ бўлган ва вертикал бўйлаб юқорига йўналган f куч таъсир кўрсатсин (бу кучни фақат Ер — M жисм системага кирмайдиган жисмлар юзага келтириши мумкин). У вақтда жисм бирор тезлик билан кўтарила бошлайди ва бунинг натижасида унинг потенциал ва кинетик энергияси орта бошлайди, бунда тўла энергиянинг ортиши ташқи f кучнинг M жисм устида бажарилган ишига тенг бўлади.

[1] Буни машқ тариқасида исботлаб чиқишни ўқувчининг ўзига ҳавола қиламиз.

Ораларида консерватив кучлар таъсир этаётган N та жисмдан ташкил топган системанинг тўла механик энергияси бутун системанинг потенциал энергияси билан системанинг кинетик энергиясидан ташкил топади; бу кинетик энергия эса ўз навбатида системани ташкил этувчи алоҳида жисмларнинг кинетик энергияларидан ташкил топади:

$$E = U + T = U + \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2}. \qquad (27.16)$$

Энергиянинг сақланиш қонуни. Ораларида фақат консерватив кучлар таъсир кўрсатаётган N жисмдан ташкил топган системани қараб чиқайлик (65- расм). Фараз қилайлик, *1* жисм ихтиёрий траектория бўйлаб *1'* ҳолатга кўчган бўлсин. Бунда *1* жисмга системанинг бошқа жисмлари томонидан таъсир этувчи кучлар *1* жисмнинг кўчиш йўлига боғлиқ бўлмаган ва фақат жисмнинг қолган барча жисмларга нисбатан бошланғич ва сўнгги ҳолатларигагина боғлиқ бўлган ишни бажаради. Худди шунга ўхшаш барча N жисмлар янги ҳолатларга кўчган вақтда системада таъсир кўрсатувчи консерватив кучлар бажарган иш фақат жисмларнинг бир-бирларига нисбатан бошланғич ва сўнгги ҳолатларига боғлиқ бўлади. Демак, жисмларнинг ҳар бир ўзаро вазиятига (ҳар бир конфигурациясига) U потенциал энергиянинг маълум қийматини кўрсатиш ва бир конфигурациядан бошқа конфигурацияга ўтган вақтда консерватив кучлар бажарган ишни U нинг шу конфигурацияларга мос қийматларининг айирмаси сифатида бажариш мумкин экан:



65- расм.

$$A_{12} = U_1 - U_2. \qquad (27.17)$$

Системанинг жисмларига ички консерватив кучлардан ташқари, шунингдек ташқи кучлар ҳам таъсир кўрсатади деб фараз қилайлик. i- жисмга қўйилган барча кучлар бажарган ишни ички кучлар бажарган $(A_{12})_i$ иш ва берилган жисмга таъсир этувчи ташқи кучлар A'_i ишининг йиғиндиси сифатида тасаввур қилиш мумкин. Биз биламизки, тўла иш жисм кинетик энергиясининг ортишига сарф бўлади [(27.8) га қаранг]. Демак,

$$(A_{12}) + A'_i = (T_2)_i - (T_1)_i. \qquad (27.18)$$

(27.18) ифоданинг бутун жисмлар бўйича йиғиндисини олсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\sum (A_{12})_i + \sum A_i' = \sum (T_2)_i - \sum (T_1)_i \qquad (27.19)$$

(27.19) ифодадаги йиғиндиларнинг биринчиси система бошланғич (биринчи) конфигурациясидан сўнгги (иккинчи) конфигурациясига ўтган вақтда консерватив кучларнинг жисмлар устида бажарган ишдан иборат (27.17) га биноан бу иш потенциал энергиянинг процесс бошидаги ва охиридаги қийматлари айирмаси кўринишида ёзилиши мумкин:

$$\sum (A_{12})_i = U_1 - U_2.$$

(27.19) ифоданинг чап томонидаги иккинчи йиғинди ташқи кучлар томонидан система жисмлари устида бажарилган тўла ишдан иборат. Уни A' билан белгилаймиз.

(27.19) нинг ўнг томони $T_2 - T_1$ га, яъни система тўлиқ кинетик энергиясининг процесс бошидаги ва охиридаги қийматлари айирмасига тенг эканлиги равшан.

Шундай қилиб, (27.19) формулани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин экан:

$$U_1 - U_2 + A' = T_2 - T_1.$$

Формуладаги аъзоларни тегишли равишда группалаб қуйидагини топамиз:

$$(T_2 + U_2) - (T_1 + U_1) = A'.$$

Ниҳоят, система тўла энергияси $E = T + U$ белгисини киритсак, қуйидаги муносабатни топамиз:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = A'. \qquad (27.20)$$

Шундай қилиб. ораларида консерватив кучлар таъсир этаётган жисмлар системаси тўла энергиясининг orттирмаси система жисмларига қўйилган ташқи кучларнинг бажарган ишига тенг экан.

Агар система ёпиқ бўлса, у вақтда (27. 20) га биноан $\Delta E = 0$, бундан

$$E = \mathrm{const} \qquad (27.21)$$

деган хулоса чиқади.

(27.20) ва (27.21) формулалари механиканинг асосий қонунларидан бири — энергиянинг сақланиш қонунининг моҳиятини акс эттиради. Механикада бу қонун қуйидагича таърифланади: *ораларида фақат консерватив кучлар таъсир этаётган жисмлар ёпиқ системасининг тўла механик энергияси ўзгармайди.*

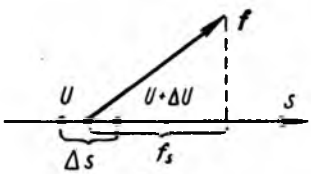
Агар ёпиқ системада консерватив кучлардан ташқари ноконсерватив кучлар, масалан, ишқаланиш кучлари, таъсир кўрсатаётган бўлса, у вақтда системанинг тўла механик энергияси сақланмайди. Ноконсерватив кучларни ташқи кучлар деб қараб қуйидагини ёзиш мумкин:

$$E_2 - E_1 = A_{\text{н. к}}.$$

бу ерда $A_{\text{н.к.}}$ — ноконсерватив кучлар бажарган иш. Ишқаланиш кучлари одатда манфий иш бажаради (69- бетдаги изоҳга қаранг). Шунинг учун ёпиқ системада ишқаланиш кучлари бўлса, вақт ўтиши билан тўла механик энергия камая боради. Ишқаланиш кучларининг таъсирида механик энергия бошқа номеханик турдаги энергияларга айланади. Бундай ҳолларда умумийроқ бўлган сақланиш қонуни бажарилади. Исталган ташқи таъсирлардан изоляцияланган системада энергиянинг барча турларининг (номеханик турларнинг ҳам) йиғиндиси ўзгармайди.

28- §. Потенциал энергия билан куч орасидаги боғланиш

Потенциал майдоннинг ҳар бир нуқтасига бир томондан жисмга таъсир этувчи f куч векторининг бирор қиймати мос келса, иккинчи томондан, жисм U потенциал энергиясининг ҳам бирор қиймати мос келади. Демак, куч билан потенциал энергия орасида маълум боғланиш мавжуд бўлиши керак. Ана шу боғланишни топиш учун жисмни кичик Δs масофага силжитилган вақтда майдон кучлари бажарган элементар ΔA ишни ҳисоблайлик. Бу Δs силжиш фазода ихтиёрий танлаб олинган s йўналиш бўйлаб содир бўлади деб қабул қиламиз (66- расм). Бу иш қуйидагига тенг:



66-расм.

$$\Delta A = f_s \Delta s. \tag{28.1}$$

бу ерда f_s кучнинг s йўналишига проекцияси.

Берилган мисолда иш потенциал энергия ҳисобига бажарилганлиги учун у потенциал энергиянинг s ўқнинг Δs кесмасидаги $-\Delta U$ камайишига тенг бўлади:

$$\Delta A = -\Delta U. \tag{28.2}$$

(28.1) билан (28.2) ни солиштириб қуйидагини топамиз:

$$f_s \Delta s = -\Delta U,$$

бундан

$$f_s = \frac{\Delta U}{\Delta S}. \tag{28.3}$$

(28.3) ифода f_s нинг Δs кесмасидаги ўртача қийматини беради. f_s нинг берилган нуқтадаги қийматини топиш учун лимитга ўтиш керак:

$$f_s = -\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta s} \tag{28.4}$$

U, s ўқ бўйлаб кўчилгандагина эмас, ҳатто бошқа йўналишлар бўйлаб кўчганда ҳам ўзгарганлиги учун (28.4) формуладаги лимит U дан s бўйича хусусий ҳосиладан иборатдир:

$$f_s = \frac{\partial U}{\partial s}. \tag{28.5}$$

(28.5) муносабат фазодаги ихтиёрий йўналиш учун, хусусан, x, y, z декарт координата ўқлари йўналишлари учун ҳам ўринлидир:

$$\left.\begin{aligned} f_x &= -\frac{\partial U}{\partial x}, \\ f_y &= -\frac{\partial U}{\partial y}, \\ f_z &= -\frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned}\right| \tag{28.6}$$

(28.6) формулалар куч векторнинг координата ўқларига проекцияларини ифодалайди. Агар бу проекциялар маълум бўлса, куч векторининг ўзи ҳам аниқ бўлади (2.8) га биноан

$$\mathbf{f} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\right). \tag{28.7}$$

Математикада

$$\frac{\partial a}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial a}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial a}{\partial z}\mathbf{k},$$

векторни шу скалярнинг г р а д и е н т и дейилади ва grad$a$ символи билан белгиланади (бу ерда a — x, y, z ларнинг скаляр функцияси). Демак, куч потенциал энергиянинг тескари ишора билан олинган градиентига тенг экан

$$\mathbf{f} = -\operatorname{grad} U. \tag{28.8}$$

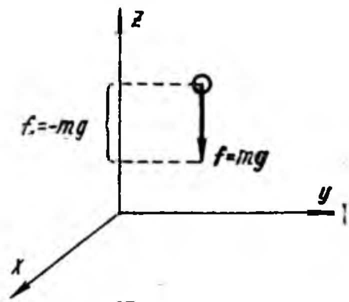
М и с о л. Мисол тариқасида оғирлик кучи майдонини қараб чиқамиз. z ўқни вертикал бўйлаб юқорига йўналтирамиз (67- расм). Координата ўқларини бундай танлаб олганда потенциал энергия қуйидагидек кўринишга эга бўлади [(27.12) га қаранг].

$$U = mgz + \text{const}.$$

Кучнинг ўқларга проекцияси (28. 6) га биноан қуйидагига тенг:

$$f_x = 0,\ f_y = 0,\ f_z = -mg,$$

бундан куч mg га тенг бўлиб z га қарама-қарши, яъни вертикал бўйлаб пастга йўналган деган хулоса чиқади.



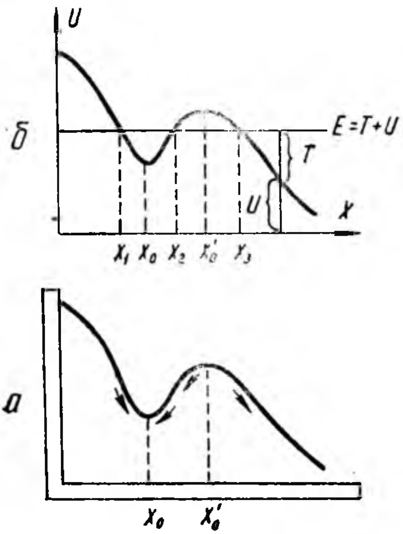
67-расм.

29- §. Механик системанинг мувозанат шартлари

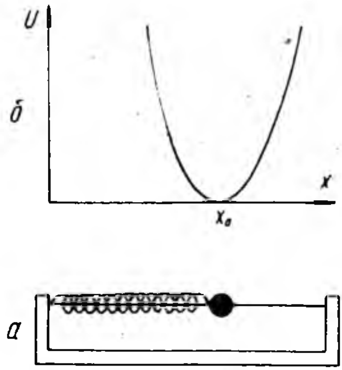
Ёпиқ системада тўлиқ энергия ўзгармас бўлгани учун кинетик энергия фақат потенциал энергиянинг камайиши ҳисобига ортиши мумкин холос. Агар система шундай ҳолатда турган бўлсаки, бунда жисмларнинг тезликлари нолга тенг, потенциал энергияси эса минимал қийматга эга бўлса, у ҳолда ташқи таъсир бўлмагунча системанинг жисмлари ҳаракатга кела олмайди, яъни система мувозанат ҳолатда туради.

Шундай қилиб, ёпиқ система учун жисмларнинг фақат шундай конфигурацияси мавжуд бўлиши мумкинки, у системанинг потенциал энергияси минимумига мос келади.

Система жисмларининг ўзаро вазияти фақат битта катталик, масалан x координатаси ёрдами билан аниқланиши мумкин бўлган ҳолни текширайлик. Мисол тариқасида Ер ва кўчмас қилиб маҳкамланган эгилган сим бўйлаб сирпанувчи шарчадан иборат системани келтириш мумкин (68-*а*



68-расм.



69-расм.

расм). Иккинчи мисол сифатида пружина учига маҳкамланган ва горизонтал йўналтирувчи бўйлаб сирпанувчи шарчани кўрсатиш мумкин (69-*а* расм). $U(x)$ функциянинг графиклари 68-*б* ва 69-*б* расмларда келтирилган. U нинг минимумларига x нинг x_0 га тенг қийматлари мос келади (69-расмда) x_0 деформацияланмаган пружинанинг узунлиги). U нинг минимумлик шарти қуйидаги кўринишга эга:

$$\frac{dU}{dx} = 0. \tag{29.1}$$

(28.6)га мос равишда (29.1) шарт

$$f_x = 0 \tag{29.2}$$

га тенг кучлидир (U фақат битта ўзгарувчи x нинг функцияси бўлганда $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dx}$).

Шундай қилиб, системанинг потенциал энергиянинг минимумига мос келадиган конфигурацияси шундай хоссага эгаки, унда системадаги жисмларга таъсир этувчи кучлар нолга тенг бўлади. Бу натижа U бир неча ўзгарувчининг функцияси бўлган умумий ҳолда ҳам тўғрилигича қолади.

68- расмда тасвирланган ҳолда (29. 1) ва (29. 2) шартлар x га тенг x'_0 лар учун ҳам (яъни U нинг максимуми учун ҳам) бажарилаверади. Шарчанинг x нинг бу қиймати билан белгиланадиган ҳолати ҳам мувозанат ҳолат бўлади. Бироқ бу мувозанат $x - x_0$ даги мувозанатдан фарқли равишда турғун бўлмайди: шарчани бу ҳолатдан бир оз чиқарилса бас, дарҳол шарчани x'_0 ҳолатдан узоқлаштирувчи куч юзага келади. Шарчани турғун мувозанат ҳолатидан (унинг учун $x = x_0$) силжитилган вақтда юзага келувчи кучлар шундай йўналганки, улар шарчани мувозанат ҳолатга қайтаришга интилади.

Системанинг потенциал энергиясини ифодаловчи функциянинг кўриниши маълум бўлса, система ҳаракатининг характери ҳақида қатор хулосалар чиқариш мумкин. Буни 68- *б* расмда тасвирланган графикдан фойдаланиб тушунтирайлик. Агар системанинг тўла энергияси графикда чизилган горизонтал чизиқ қийматларига мос келса, у вақтда система ё x_1 дан x_2 гача бўлган чегарада, ё x_3 дан чексизликкача бўлган чегарада ҳаракат қилиши мумкин. Система $x < x_1$ ва $x_2 < x < x_3$ соҳага кира олмайди, чунки потенциал энергия тўлиқ энергиядан катта бўла олмайди (мабода шундай бўлганда, у ҳолда кинетик энергия манфий бўлиб қолар эди). Шундай қилиб, $x_2 < x < x_3$ соҳа шундай потенциал тўсиқки, система берилган энергия запаси билан у орқали ўта олмас экан.

68- б расмда U нинг графиги орқали системанинг x нинг берилган қийматидаги кинетик энергиясини топиш усули тушунтирилган.

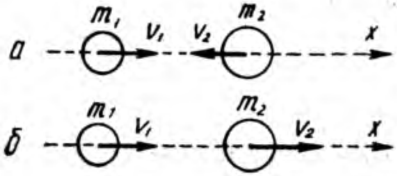
30- §. Шарларнинг марказий урилиши

Жисмлар бир-бирига урилганда деформацияланади. Бунда жисмларнинг урилишдан олдинги кинетик энергияси қисман ёки тўла равишда эластик деформация потенциал энергияси билан жисмларнинг ички энергиясига айланади. Жисмларнинг ички энергияси ортиши уларнинг температурасини ортишига олиб келади.

Табиатда икки хил урилиш тури мавжуд, булар — абсолют эластик ва абсолют ноэластик урилишлар. Абсолют эластик урилиш деб шундай урилишга айтиладики, бунда жисмларнинг механик энергияси, энергиянинг бошқа номеханик турларига айланмайди. Бундай урилиш вақтида кинетик энергия батамом ёки қисман эластик деформация потенциал энергиясига айланади. Кейин эса жисмлар бир-бирини итариб дастлабки шаклига қайтади. Натижада эластик деформация потенциал энергияси қайтиб кинетик энергияга айланади ва жисмлар маълум тезликлар билан бир-биридан қочади. Бу тезликларнинг катталиги билан йўналиши иккита шартга — — жимлар системасининг тўлиқ энергиясининг сақланишига ҳамда тўлиқ импульсининг сақланишига боғлиқ бўлади.

Абсолют ноэластик урилиш шу билан характерланадики, бунда деформация потенциал энергияси юзага келмайди; жисмларнинг кинетик энергияси батамом ёки қисман ички энергияга айланади; урилишдан сўнг тўқнашган шарлар ё бир хил тезлик билан ҳаракатланади, ё тинч ҳолатда қолади. Абсолют ноэластик урилиш вақтида фақат импульснинг сақланиш қонунигина бажарилади, механик энергиянинг сақланиш қонуни эса бажарилмайди — ҳар хил турдаги — механик ва ички энергиялар йиғиндисининг сақланиш қонуни ўринли бўлади холос.

Биз иккита шарнинг марказий урилишини текшириш билангина чегараланамиз. Агар урилишга қадар шарлар уларнинг марказлари орқали ўтувчи тўғри чизиқ бўйлаб харакатланаётган бўлса, урилиш марказий урилиш дейилади. Марказий урилиш вақтида қуйидаги ҳолларда тўқнашиш юз бериши мумкин: 1) агар шарлар бир-бирига қараб йўналаётган бўлса (70-*а* расм) ва 2) агар шарлардан биттаси иккинчисига қувиб етаётган бўлса (70-*б* расм).



70- расм.

Шарлар ёпиқ система ҳосил қилади ёки шарларга қўйилган ташқи кучлар бир-бирини мувозанатлаб туради деб фараз қиламиз.

Аввал абсолют ноэластик урилишни қараб чиқайлик. Шарларнинг массалари m_1 ва m_2 уларнинг урилишига қадар тезликлари эса $\mathbf{v}_{10}$ ва $\mathbf{v}_{20}$ бўлсин. Сақланиш қонунига биноан шарларнинг урилишдан кейинги йиғинди импульси уларнинг урилишдан аввалги йиғинди импульсига тенг бўлиши керак:

$$m_1\mathbf{v}_{10} + m_2\mathbf{v}_{20} = m_1\mathbf{v} + m_2\mathbf{v} = (m_1 + m_2)\mathbf{v} \qquad (30.1)$$

($\mathbf{v}$ — шарларнинг урилишдан кейинги тезлиги, у иккала шар учун бир хил).

(30.1) дан қуйидаги келиб чиқади:

$$\mathbf{v} = \frac{m_1\mathbf{v}_{10} + m_2\mathbf{v}_{20}}{m_1 + m_2}. \qquad (30.2)$$

$\mathbf{v}_{10}$ ва $\mathbf{v}_{20}$ векторлар бир тўғри чизиқ бўйлаб йўналганлиги учун $\mathbf{v}$ векторнинг йўналиши ҳам шу тўғри чизиқнинг йўналиши билан устма-уст тушади. Агар б) ҳол ўринли бўлса (70- расмга қаранг). У ҳолда $\mathbf{v}$ вектор ҳам $\mathbf{v}_{10}$ ва $\mathbf{v}_{20}$ векторлар билан бир томонга йўналган. Борди-ю а) ҳол ўринли бўлса, у вақтда $\mathbf{v}$ вектор $\mathbf{v}_{io}$ векторларнинг қайси бири учун $m_i\, v_{io}$ кўпайтма катта бўлса, ўша вектор бўйлаб йўналади.

$\mathbf{v}$ векторнинг модули қуйидаги формула ёрдамида ҳисобланиши мумкин:

$$v = \left|\frac{m_1v_{10} \pm m_2v_{20}}{m_1 + m_2}\right|, \qquad (30.3)$$

бу ерда v_{10} ва v_{20}, $\mathbf{v}_{10}$ ва $\mathbf{v}_{20}$ векторларнинг модули; «—» ишора а) ҳолга, «+» ишора эса б) ҳолга мос келади.

Энди абсолют эластик урилишни қараб чиқайлик. Бундай урилишда иккита сақланиш қонуни: импульснинг сақланиш қонуни билан механик энергиянинг сақланиш қонуни бажарилади.

Шарларнинг массаларини m_1 ва m_2 билан, уларнинг урилишига қадар тезликларини $\mathbf{v}_{10}$ ва $\mathbf{v}_{20}$ билан ва ниҳоят, урилишдан кейинги тезликларини $\mathbf{v}_1$ ва $\mathbf{v}_2$ билан белгилаймиз. Импульс ва энергиянинг сақланиш қонунини ёзайлик:

$$m_1\mathbf{v}_{10} + m_2\mathbf{v}_{20} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2, \tag{30.4}$$

$$\frac{m_1\mathbf{v}_{10}^2}{2} + \frac{m_2\mathbf{v}_{20}^2}{2} = \frac{m_1\mathbf{v}_1^2}{2} + \frac{m_2\mathbf{v}_2^2}{2}.^{1} \tag{30.5}$$

(30.4) ни қуйидагича ўзгартирамиз:

$$m_1(\mathbf{v}_{10} - \mathbf{v}_1) = m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{20}). \tag{30.6}$$

$(A^2 - B^2) = (A - B)(A + B)$ эканлигини ҳисобга олиб (30.5) ни қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$m_1(\mathbf{v}_{10} - \mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_{10} + \mathbf{v}_1) = m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{20})(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{20}). \tag{30.7}$$

Симметрия тушунчаларига асосланиб шарларнинг тезликлари урилишга қадар қандай тўғри чизиқ бўйлаб йўналган бўлса, урилишдан кейин ҳам ўша тўғри чизиқ бўйлаб йўналади деган фикрга келиш мумкин. Демак, (30.6) ва (30.7) даги барча векторлар коллинеардир. Бу (30.6) ва (30.7) ларни солиштиришдан келиб

$$\mathbf{v}_{10} + \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_{20} \tag{30.8}$$

чиқади деб хулоса чиқаришга имкон беради.

(30.8) ни m_2 га кўпайтириб ва чиққан натижани (30.6) дан айириб, кейин эса (30.8) ни m_1 га кўпайтириб ва чиққан натижани (30.6) билан қўшиб, шарларнинг урилишдан кейинги тезликларининг векторларини топамиз:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{2m_2\mathbf{v}_{20} + (m_1 - m_2)\mathbf{v}_{10}}{m_1 + m_2}, \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{2m_1\mathbf{v}_{10} + (m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}. \end{aligned}\right\} \tag{30.9}$$

Сонли ҳисоблар бажариш учун (30.9) ни $\mathbf{v}_{10}$ векторнинг йўналишига проекциясини оламиз:

$$v_1 = \frac{\mp 2m_2v_{20} + (m_1 - m_2)v_{10}}{m_1 + m_2},$$

$$v_2 = \frac{2m_1v_{10} \mp (m_2 - m_1)v_{20}}{m_1 + m_2}.$$

Бу формулаларда v_{10} ва v_{20} — мсс векторларнинг модуллари v_1 ва v_2 эса уларнинг проекцияларидир. Юқоридаги «—» ишора

---

[1] (24.7) га қаранг.

шарлар бир-бирига қарама-қарши йўналган ҳоли учун, остидаги«$+$» ишора эса биринчи шар иккинчисини қувиб етаётган ҳол учун тааллуқлидир.

Шуни қайд қилиб ўтамизки, эластик урилишдан кейин шарларнинг тезликлари бир хил бўла олмайди. Ҳақиқатан ҳам $\mathbf{v}_{10}$ ва $\mathbf{v}_{20}$ лар учун ёзилган (30.9) ифодаларни бир-бирига тенглаб ва ўзгартиришлар киритиб қуйидагини топамиз:

$$\mathbf{v}_{10} = \mathbf{v}_{20}.$$

Демак, шарларнинг тезлиги урилишдан кейин бир хил бўлиши учун бу тезликлар урилишга қадар ҳам бир хил бўлиши керак экан. Лекин, маълумки, бундай шароитда урилиш содир бўлмайди. Бундан урилишдан кейин шарлар тезлигининг бир хил бўлишлик шарти энергиянинг сақланиш қонунига зид келар экан деган хулосага келамиз. Шундай қилиб ноэластик урилишда механик энергия сақланмас экан у қисман тўқнашаётган шарларнинг ички энергиясига айланади, бу эса уларни қизишига олиб келади.

Урилаётган шарларнинг массалари бир-бирига тенг: $m_1 = m_2$ бўлган ҳолни текширайлик. (30.9) дан бундай шароитда қуйидагилар келиб чиқади:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{20}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{10},$$

яъни шарлар тўқнашган вақтда тезликларини ўзаро алмаштирар экан. Хусусан, агар бир хил массали шарлардан бири, масалан иккинчиси урилишга қадар тинч турган бўлса, у ҳолда урилишдан кейин бу шар биринчи шар қандай тезлик билан келиб урилган бўлса, ўшандай тезлик билан ҳаракатланади; биринчи шар эса урилишдан кейин тинч ҳолатга ётади.

(30.9) формула ёрдамида шарнинг тинч турган ёки ҳаракатланаётган деворга (уни чексиз катта m_2 массали ва чексиз катта радиусли шар деб қараш мумкин) эластик урилгандан кейинги тезлигини аниқлаш мумкин. (30.9) ифодаларнинг сурат ва махражини m_2 га тақсимласак ва m_1/m_2 кўпайтмага эга бўлган аъзоларни ташлаб юборсак, қуйидагини топамиз:

$$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{v}_{20} - \mathbf{v}_{10},$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{20}.$$

Олинган натижадан келиб чиқадики, деворнинг тезлиги ўзгармас экан. Шарларнинг тезлиги эса агар девор қўзғалмас бўлса ($\mathbf{v}_{20} = 0$) ўз йўналишини қарама-қарши томонга ўзгартиради; девор ҳаракатланаётган бўлса ҳам шарнинг тезлиги катталик жиҳатдан ўзгаради (агар девор шарга қарши ҳаракатланаётган бўлса, у $2v_{20}$ га ортади ва агар девор қувиб бораётган шардан «қочаётган» бўлса, у $2v_{20}$ га камаяди).

IV БОБ

НОИНЕРЦИАЛ САНОҚ СИСТЕМАЛАР

31- §. Инерция кучлари

Юқорида (13- § га қаранг) баён қилинганидек, Ньютон қонунлари фақат инерциал саноқ системалардагина тўғри холос. Барча инерциал системаларга нисбатан берилган жисм бир хил $\mathbf{w}$ тезланишга эга бўлади. Исталган ноинерциал саноқ система инерциал саноқ системаларга нисбатан бирор тезланиш билан ҳаракатланганлиги сабабли жисмнинг ноинерциал саноқ системадаги $\mathbf{w}'$ тезланиши $\mathbf{w}$ дан фарқли бўлади. Жисмнинг инерциал ва ноинерциал системалардаги тезланишлари фарқини $\mathbf{a}$ символ билан белгилаймиз:

$$\mathbf{w} - \mathbf{w}' = \mathbf{a}. \tag{31.1}$$

Агар ноинерциал система инерциал системага нисбатан илгариланма ҳаракатланса, у ҳолда $\mathbf{a}$ ноинерциал саноқ системанинг тезланишига тенг бўлади. Айланма ҳаракат вақтида ноинерциал системанинг турли нуқталарининг тезланишлари турлича бўлади. Бундай ҳолларда $\mathbf{a}$ ни ноинерциал системанинг инерциал системага нисбатан ҳаракат тезланиши деб таърифлаб бўлмайди.

Фараз қилайлик, бошқа жисмлар томонидан берилган жисмга кўрсатилаётган барча кучларнинг умумий ташкил этувчиси $\mathbf{f}$ га тенг бўлсин. У ҳолда Ньютоннинг иккинчи қонунига биноан

a=W f=F

$$\mathbf{w} = \frac{1}{m}\mathbf{f}.$$

Ноинерциал саноқ системага нисбатан тезланишни эса (31.1) га мос равишда қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\mathbf{w}' = \mathbf{w} - \mathbf{a} = \frac{1}{m}\mathbf{f} - \mathbf{a}.$$

Шундай қилиб, агар жисмга қўйилган барча кучларнинг ташкил этувчиси нолга тенг бўлса ҳам жисм ноинерциал саноқ системага нисбатан $-\mathbf{a}$ тезланиш билан, яъни гўё унга $-m\mathbf{a}$ га тенг куч таъсир этаётгандагидек ҳаракатланади.

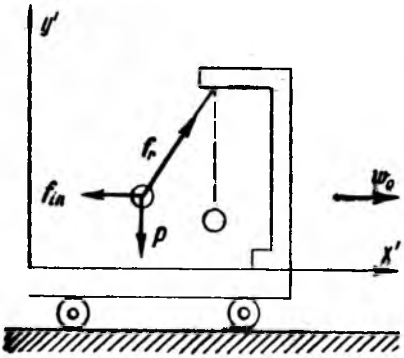
Демак, ноинерциал саноқ системалардаги ҳаракатни таърифлаган вақтда, агар жисмларнинг бир-бирига таъсири туфайли юзага чиқадиган кучлар билан бир қаторда *инерция кучлари* деб аталувчи $\mathbf{f}_{in}$ кучлар ҳам (бу кучларни жисм массаси билан унинг инерциал ва ноинерциал саноқ системаларга нисбатан олинган тезланишлари фарқининг кўпайтмасига тенг деб олмоқ керак) ҳисобга олинса, динамика тенгламаларидан фойдаланиш мумкин:

$$\mathbf{f}_{in} = -m(\mathbf{w} - \mathbf{w}') = -m\mathbf{a}. \qquad (31.2)$$

У вақтда Ньютоннинг иккинчи қонуни тенгламаси ноинерциал саноқ системада қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$m\mathbf{w}' = \mathbf{f} + \mathbf{f}_{in}. \qquad (31.3)$$

Айтилганларни қуйидаги мисол билан тушунтирайлик. Аравачага ўрнатилган кронштейнга ип ёрдамида юк осилган бўлсин (71- расм). Аравача тинч ҳолатда турган ёки тезланишсиз ҳаракат қилаётган бўлса, ип вертикал ҳолатда бўлади ва оғирлик кучи $\mathbf{P}$ ни ипнинг $\mathbf{f}_r$ реакцияси мувозанатлаб туради. Энди аравачани $\mathbf{w}_0$ тезланиш билан илгариланма ҳаракатга келтирамиз. У ҳолда ип вертикалдан шундай бурчакка оғадики, бунда $\mathbf{P}$ ва $\mathbf{f}_r$ кучларнинг умумий ташкил этувчиси жисмга $\mathbf{w}_0$ тезланиш беради. $\mathbf{P}$ ва $\mathbf{f}_r$ кучларнинг умумий ташкил этувчиси нолдан фарқли бўлишига қарамасдан жисм аравача билан боғланган саноқ системага нисбатан тинч ҳолатда бўлади. Жисм бу саноқ системага нисбатан тезланишга эга эмаслигини формал равишда $\mathbf{P}$ ва $\mathbf{f}_r$ кучлардан ташқари яна



71- расм.

$$\mathbf{f}_{in} = -m\mathbf{w}_0 \qquad (31.4)$$

инерция кучи ҳам таъсир этаётганлиги билан тушунтириш мумкин.

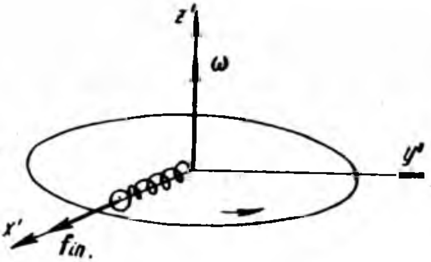
Инерция кучларининг киритилиши жисмларнинг ҳаракатини исталган (инерциал ва ноинерциал) саноқ системаларда бир хил ҳаракат тенгламалари билан ифодалашга имкон беради.

Инерция кучларини эластик, гравитацион кучлар ва ишқаланиш кучлари билан, яъни жисмга бошқа жисмлар таъсир кўрсатиши натижасида юзага чиқадиган кучлар билан бир қаторга қўйиб бўлмаслигини аниқ тушуниб олиш керак. Инерция кучлари механик ҳодисалар кузатилаётган саноқ системанинг хоссаларига боғлиқ. Шу маънода уларни фиктив кучлар деб аташ ҳам мумкин

Инерция кучларини киритиш учун принципиал зарурат йўқ. Принципда исталган ҳаракатни доим инерциал саноқ системага нисбатан текшириш мумкин. Бироқ амалда жисмларнинг ноинерциал саноқ системаларга нисбатан, масалан, Ер сиртига нисбатан, ҳаракати қизиқтиради. Инерция кучларидан фойдаланиш тегишли масалани бевосита шундай саноқ системага нисбатан текширишга имкон берадики, бу эса ҳаракатни инерциал системада текширгандагидан анча соддароқ бўлади.

32- §. Марказдан қочма инерция кучи

Ўзига перпендикуляр ўтган z' ўққа нисбатан ω бурчак тезлик билан айланувчи дискни текширайлик (72- расм). Диск билан бирга унинг кегайига кийдирилган, дискнинг марказига пружина ёрдамида маҳкамланган шарча айланаётган бўлсин. Диск айланганда шарча кегайида, шундай вазиятни эгаллайдики, унда пружинанинг таранглaниш кучи шарча массасининг марказга интилма тезланишга кўпайтмасига, яъни $\omega^2 R$ га (бу ерда R — диск марказидан шарчагача бўлган масофа) тенг бўлади.



72- расм.

Диск билан боғланган саноқ системага нисбатан шарча тинч ҳолатда бўлади, чунки шарчага пружина томонидан таъсир этаётган кучдан ташқари диск марказидан радиус бўйлаб йўналган

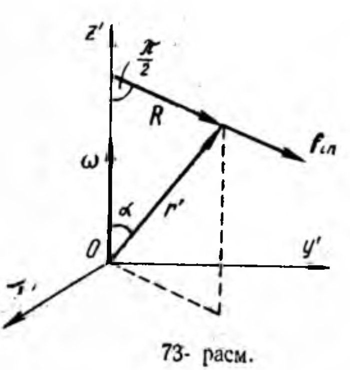
$$f_{in} = m\omega^2 R \qquad (32.1)$$

куч ҳам таъсир кўрсатади. Айланаётган (инерциал системаларга нисбатан айланаётган) саноқ системада юзага келувчи (32.1) куч марказдан қочма инерция кучи дейилади.

Айланувчи саноқ системадаги турли нуқталарнинг тезланиши катталик ва йўналиши жиҳатидан инерциал системага нисбатан турлича бўлади. Шунга мос равишда марказдан қочма инерция кучи жисмнинг айланувчи саноқ системадаги вазиятига боғлиқ бўлади.

Жисм айланувчи саноқ системада тинч турадими (шу вақтга қадар биз фараз қилганимиздек) ёки унга нисбатан $\mathbf{v}'$ тезлик билан ҳаракатланадими, бундан қатъи назар жисмга марказдан қочма инерция кучи таъсир кўрсатаверади.

Жисмларнинг ер сиртига нисбатан ҳаракатига доир масалаларни аниқ ечган вақтларда $m\omega_{Ep}^2 R_{Ep} \cos\varphi$ га тенг бўлган инерция кучини ҳисобга олмоқ керак, бу ерда m — жисмнинг массаси, ω_{Ep} — Ернинг ўз ўқи атрофида айланиш бурчак тезлиги. R_{Ep} — Ер шарининг радиуси, φ — жойнинг географик кенглиги (131- расмга қаранг).



73- расм.

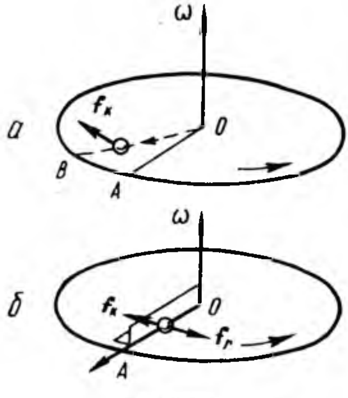
Машқ. Марказдан қочма инерция кучини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкинлиги исботлансин.

$$m[\bar{\omega}, [\mathbf{r}', \bar{\omega}]] = m\omega^2\mathbf{R}, \qquad (32.2)$$

бу ерда m — жисмнинг массаси, $\bar{\omega}$ — айланувчи саноқ системанинг бурчак тезлиги, $\mathbf{r}'$ — жисмнинг айланувчи саноқ системанинг боши-га нисбатан радиус-вектори; бу системанинг боши айланиш ўқининг бирорта нуқтасига устма-уст тушади, $\mathbf{R}$ вектор $\mathbf{r}'$ нинг айланиш ўқига перпендикуляр ташкил этувчиси (73- расм).

33- §. Кориолис кучи

Жисм айланаётган саноқ системага нисбатан ҳаракатланганда марказдан қочма инерция кучидан ташқари Кориолис кучи ёки кориолис инерция кучи деб аталувчи яна битта куч юзага келади. Кориолис кучининг юзага келишини қуйидаги мисолда кузатиш мумкин. Вертикал ўқ атрофида айлана оладиган горизонтал жойлашган дискни олайлик. Дискка радиал OA тўғри чизиқ ўтказамиз (74- *а* расм). O дан A га қараб $\mathbf{v}'$ тезлик билан бир шарча думалатамиз. Агар диск айланмаётган бўлса, у ҳолда шарча биз чизиб қўйган тўғри чизиқ бўйлаб думалайди. Агар дискни стрелка билан кўрсатилган томонга айлантирсак, у вақтда шарча пунктир билан тасвирланган OB эгри чизиқ бўйлаб думалайди, шу билан бирга бунда унинг дискка нисбатан тезлиги $\mathbf{v}'$ ўз йўналишини ўзгартиради. Демак, айланаётган саноқ системага нисбатан шарча гўё унга унинг $\mathbf{v}'$ тезлигига тик йўналган $\mathbf{f}_K$ куч таъсир кўрсатгандай бўлади.



74-расм.

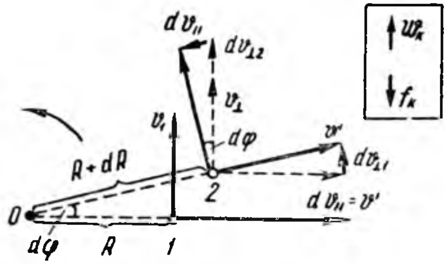
Шарчани айланаётган диск устида радиал тўғри чизиқ бўйлаб думалашга мажбур этиш учун OA деворчага ўхшаш йўналтирувчи ўрнатиш керак (74- *б* расм). Шарча думалаганда йўналтирувчи деворга унга бирор $\mathbf{f}_r$ куч билан таъсир этади. Айланувчи системага (дискка) нисбатан йўналиши ўзгармас тезлик билан ҳаракатланади. Буни $\mathbf{f}_r$ куч шарчага қўйилган ва $\mathbf{v}'$ тезликка перпендикуляр $\mathbf{f}_K$ инерция кучи билан мувозанатлашганлиги билан тушунтириш мумкин. Худди шу $\mathbf{f}_K$ куч Кориолис инерция кучидир. Бу кучни хусусий ҳоллар учун (31.2) формуладан қидирамиз.

1- ҳол. Жисм радиал йўналиш бўйлаб айланиш ўқига перпендикуляр ўзгармас $\mathbf{v}'$ тезлик билан ҳаракатланади (75- расм; айланиш ўқи расм текислигига перпендикуляр). $\mathbf{v}'$ ўзгармас бўлганлиги учун $\mathbf{w}'$ тезланиш нолга тенг ва инерция кучи $m\mathbf{w}$ га тенг.

Вақтнинг бирор t моментида жисм *1* ҳолатда турибди деб фараз қилайлик. Бу моментда кўчмас саноқ системага нисбатан $\mathbf{v}$ тезлик иккита ташкил этувчидан иборат бўлади: радиус бўйлаб ташкил этувчи $\mathbf{v}_{//}$ у жисмнинг $\mathbf{v}'$ тезлигига тенг ва радиусга перпендикуляр ташкил этувчи $\mathbf{v}_{\perp}'$, у модули бўйича ωR га тенг (R — айланиш ўқидан жисмгача бўлган масофа, ω — айланувчи саноқ системанинг бурчак тезлиги).

dt вақт ичида жисм ҳаракати йўналишини кўрсатувчи тўғри чизиқ $d\varphi = \omega dt$ бурчакка бурилади, жисм эса бу тўғри чизиқ бўйлаб $dR = v'dt$ кесмага кўчади ва натижада 2 ҳолатга ўтади. Натижада $\mathbf{v}$ тезликнинг иккала ташкил этувчилари ҳам ўзларига перпендикуляр $dv_{\perp 1} = v'd\varphi$ ва $dv_{\parallel} = \omega R d\varphi$ орттирмалар олиб $d\varphi$ бурчакка бурилади. Ундан ташқари $\mathbf{v}_{\perp}$ ташкил этувчининг модули $dv_{\perp 2} = \omega dR = \omega v'dt$ га ортади. Бундай бўлишига сабаб шуки, 2 ҳолатда $\mathbf{v}$ нинг радиусга (жисм у бўйлаб ҳаракатланади), перпендикуляр ташкил этувчиси $\omega(R + dR)$ га тенглашиб қолади.

Шундай қилиб, dt вақт ичида $\mathbf{v}$ тезлик олган $d\mathbf{v}$ орттирмани учта $d\mathbf{v}_{\perp 1}$, $d\mathbf{v}_{\perp 2}$ ва $d\mathbf{v}_{\parallel}$ орттирмаларнинг (75- расмга қаранг) йиғиндиси сифатида тасаввур қилиш мумкин экан: бунда бу орттирмалардан биринчи иккитаси $\mathbf{v}'$ векторга перпендикуляр, учинчиси эса $\mathbf{v}'$ қайси йўналиш бўйлаб йўналган бўлса, ўша томонга йўналгандир ($d\varphi$ жуда кичик эканлигини назарда тутмоқ зарур).



75- расм.

$d\mathbf{v}$ нинг тегишли ташкил этувчиларини dt га тақсимлаб $\mathbf{w}$ тезланишнинг кўчмас системага нисбатан ташкил этувчиларини топамиз: $\mathbf{w}_{\parallel}$ ташкил этувчининг модули

$$w_{\parallel} = \frac{dv_{\parallel}}{dt} = \omega R \frac{d\varphi}{dt} = \omega^2 R$$

га тенг. Бу ташкил этувчи $\mathbf{v}'$ га боғлиқ эмас: у $\mathbf{v}' = 0$ да ҳам мавжуддир. Бу ташкил этувчининг m га кўпайтмаси бизга маълум бўлган марказдан қочма инерция кучини беради.

$d\mathbf{v}_{\perp 1}$ ва $d\mathbf{v}_{\perp 2}$ нинг йиғиндисига тенг бўлган $d\mathbf{v}_{\perp}$ ташкил этувчи dt га бўлингандан сўнг $\mathbf{w}$ нинг модули қуйидагига тенг бўлган $\mathbf{w}_{\perp}$ ташкил этувчисини беради:

$$w_{\perp} = \frac{dv_{\perp 1}}{dt} + \frac{dv_{\perp 2}}{dt} = v' \frac{d\varphi}{dt} + \omega \frac{dR}{dt} = v'\omega + \omega v' = 2\omega v'.$$

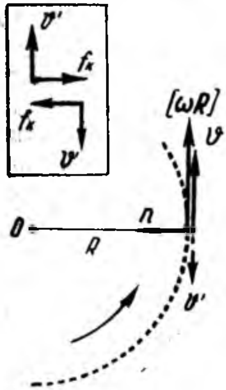
Вектор $\mathbf{w}_{\perp}$ (келгусида биз уни $\mathbf{w}_K$ билан белгилаймиз ($\mathbf{v}$) га ва ω га перпендикуляр бўлиб

$$\mathbf{w}_K = 2[\bar{\omega}\mathbf{v}'] \qquad (33.1)$$

кўринишда ёзилиши мумкин (75- расмда $\bar{\omega}$ вектор расм текислигига тик ва бизга қараб йўналган). (33.1) тезланиш кориолис тезланиши дейилади. Уни m га кўпайтириб ва ишорасини тескарига ўзгартириб, кориолис инерция кучини топамиз:

$$\mathbf{f}_K = 2m[\mathbf{v}'\bar{\omega}]. \qquad (33.2)$$

2-ҳол. Айланаётган системага нисбатан жисм айланиш ўқига тик текисликда ётган айлана бўйлаб ҳаракатланади, бунда айлананинг маркази ўша ўқда ётади (76- расм). Айланаётган системага нисбатан жисм марказга интилма тезланишга эга бўлади ва бу тезланиш



76- расм.

$$\mathbf{w}' = \frac{v'^2}{R}\,\mathbf{n}, \qquad (33.3)$$

бу ерда $\mathbf{n}$ — $\mathbf{v}'$ га тик бирлик вектор бўлиб, айланиш марказига қараб йўналгандир.

Жисмнинг кўчмас саноқ системага нисбатан тезлиги R радиусга перпендикуляр бўлган иккита v' ва ωR ташкил этувчилардан ташкил топади. v' тезликнинг йўналишига ва системанинг айланиш йўналишига қараб бу ташкил этувчилар ё бир хил, ё қарама-қарши йўналишларга эга бўлади. $\mathbf{v}$ тезликнинг модули қуйидагига тенг бўлади:

$$v = |v' \pm \omega R|, \qquad (33.4)$$

бу ерда «+» v' тезлик билан ωR нинг бир хил йўналишига «—» эса — қарама-қарши йўналишига мос келади.

Кўчмас системага нисбатан ҳам жисм айлана бўйлаб текис ҳаракат қилади, шу сабабли $\mathbf{w}$ ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\mathbf{w} = \frac{v^2}{R}\mathbf{n} = \frac{(v' \pm \omega R)^2}{R}\,\mathbf{n} = \frac{v'^2}{R}\,\mathbf{n} + \omega^2 R\mathbf{n} \pm 2v'\,\omega\mathbf{n}.$$

Биринчи қўшилувчи айланувчи системага нисбатан $\mathbf{w}'$ тезланишдан иборат [(33.3) га қаранг]. Демак,

$$\mathbf{a} = \mathbf{w} - \mathbf{w}' = \omega^2 R\mathbf{n} \pm 2v'\,\omega\mathbf{n}.$$

Шу ифодага мос равишда инерция кучи иккита ташкил этувчидан иборат бўлади:

$$\mathbf{f}_{in} = -m\mathbf{a} = m\omega^2 R\mathbf{n} \mp 2mv'\omega\mathbf{n}. \qquad (33.5)$$

Бу кучлардан биринчиси марказдан қочма инерция кучи, иккинчиси эса — $\mathbf{f}_K$ кориолис кучидир.

Куч $\mathbf{f}_K$ $\mathbf{v}'$ ва $\bar{\omega}$ векторларга перпендикуляр бўлиб қуйидагича йўналгандир: а) агар v' ва ωR тезликларнинг йўналишлари бир хил бўлса, у вақтда марказдан ташқарига қараб ва б) агар v' га

ωR тезликлар қарама-қарши йўналган бўлса, у ҳолда марказга қараб йўналган (пастдаги ишора). Афтидан бу иккала ҳолни қуйидаги ифодага бирлаштириш мумкин:

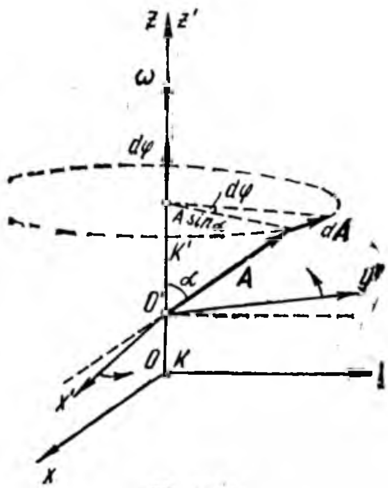
$$\mathbf{f}_K = 2m\,[\mathbf{v}'\overline{\omega}]. \tag{33.6}$$

Топилган ифода (33.2) га айнан ўхшашдир.

Жисмнинг айланувчи саноқ системада ҳаракатининг иккита хусусий ҳолини кўриб чиқдик, энди жисмнинг ихтиёрий ҳаракати ҳолига мурожаат қилайлик. Бунда умумийроқ ҳол бўлиши учун K' ноинерциал саноқ система K кўчмас (инерциал) системага нисбатан айланибгина қолмасдан унга нисбатан илгариланма ҳаракат ҳам қилади деб фараз қилайлик. Лекин биз аввал умумий ҳолни текшириш вақтида керак бўладиган битта муҳим муносабатни чиқарамиз.

Векторнинг қўзғалмас ва айланувчи координата системаларидаги орттирмалари орасидаги муносабат. Иккита координата системасини олайлик, улардан битгаси (уни K' билан белгилаймиз) иккинчисига (K) нисбатан ω бурчак тезлик билан айланаётган бўлсин. Бу системаларни шундай танлаб оламизки, уларнинг z ва z' ўқлари айланиш ўқи билан, яъни $\overline{\omega}$ вектор билан устма-уст тушсин.

K' системанинг боши O' нуқтага жойлашган бирор $\mathbf{A}$ векторни текширайлик. $\mathbf{A}$ вектор вақт ўтиши билан ўзгаради деб фараз қилайлик. Векторнинг K координата системасида кузатиладиган dt вақт ичидаги орттирмасини $d\mathbf{A}$ билан, худди ўша вақт ичида K' координата системасида кузатиладиган орттирмани эса $d'\mathbf{A}$ билан белгилаймиз. $d\mathbf{A}$ ва $d'\mathbf{A}$ орттирмалар турлича эканлигини тушуниб олиш қийин эмас. Агар $\mathbf{A}$ вектор K' системага нисбатан ўзгармас ва демак, унинг бу системадаги орттирмаси $d'\mathbf{A}$ нолга тенг (бу ҳол 77- расмда тасвирланган) деб фараз қилсак, бу нарса яққол сезилади. Бироқ K системага нисбатан $\mathbf{A}$ вектор $\overline{\omega}$ тезлик билан бурилади. Расмдан кўриниб турибдики K' система $d\overline{\varphi} = \overline{\omega} dt$ бурилиши учун кетган dt вақт ичида $\mathbf{A}$ вектор $d\mathbf{A}$ орттирма олади. Бу орттирмани $d\overline{\varphi}$ нинг $\mathbf{A}$ га вектор кўпайтмаси, яъни $d\mathbf{A} = [d\overline{\varphi},\ \mathbf{A}]$ кўринишда ёзиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам $d\mathbf{A}$ нинг модули $A\sin\alpha d\varphi$ га тенг бўлиб, $d\mathbf{A}$ вектор ўзи эса $d\overline{\varphi}$ ва $\mathbf{A}$ векторлар ётган (улар шундай ётган бўлиши керакки, $d\overline{\varphi}$ дан $\mathbf{A}$ га қараб бурилиш ўнг винтни $d\mathbf{A}$ йўналиши бўйлаб кўчишига олиб келиши керак) текисликка перпендикуляр йўналган. Шуни қайд қиламизки, боши координата бошида эмас, балки исталган нуқтада ётган вектор учун худди шундай натижа чиқади. Агар



77- расм.

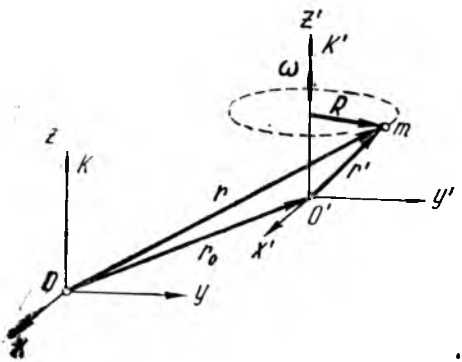
A вектор координата ўқларига нисбатан қандай жойлашганлигидан қатъи назар K' система қандай бурчакка бурилса, **A** вектор ётган ва z' ўққа параллел бўлган текислик ҳам худди шундай $d\varphi$ бурчакка бурилишини ҳисобга олсак, юқоридаги натижани тушуниб олишимиз мумкин.

Умумий ҳолда $d'\mathbf{A}$ орттирма K' системада нолдан фарқли бўлганда K системадаги орттирма қуйидаги формула билан аниқланади:

$$d\mathbf{A} = d'\mathbf{A} + [d\bar{\varphi}, \ \mathbf{A}]. \qquad (33.7)$$

Худди шу муносабат биз жисм ҳаракатининг умумий ҳолини текширган вақтда керак бўладиган муносабатнинг ўзгинасидир. Ана шу ҳолни текширишга ўтайлик.

Ноинерциал саноқ системада жисм ҳаракатининг умумий ҳоли. Иккита K ва K' саноқ системаларни олайлик (78- расм). Булардан бири K инерциал бўлиб, иккинчиси K' эса K га нисбатан илгариланма ҳаракат қилиш билан бирга z ўққа доим параллел қолувчи z' ўқ атрофида текис айлансин (ω вектор ҳам, катталик ҳам йўналиш жиҳатдан ўзгармайди). Моддий нуқта m нинг K системага нисбатан вазияти $\mathbf{r}$ радиус-вектор билан, K' системага нисбатан вазияти эса $\mathbf{r}'$ радиус-вектор билан белгиланади. Бу векторлар билан K координата системаси бошидан K' система бошигача ўтказилган $\mathbf{r}_0$ радиус-вектор орасидаги муносабат қуйидагича бўлиши равшан:



78- расм.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'. \qquad (33.8)$$

m нуқтанинг K системага нисбатан тезлиги таърифга биноан қуйидагича:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \qquad (33.9)$$

K' системага нисбатан тезлиги эса

$$\mathbf{v}' = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} \qquad (33.10)$$

га тенг, бу ерда $d'\mathbf{r}'$ орқали $\mathbf{r}'$ радиус-векторнинг K' системага нисбатан орттирмаси белгиланган.

(33.8) га биноан $\mathbf{r}$ радиус-векторнинг K системадаги орттирмаси қуйидагига тенг:

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}'. \qquad (33.11)$$

Бу ерда $d\mathbf{r}'$ — $\mathbf{r}'$ радиус-векторнинг K системадаги орттирмаси. Бу юқорида [(33.7) га қаранг] аниқланганига биноан K' системада кузатиладиган $d'\mathbf{r}'$ орттирма билан $[d\bar{\varphi}, \mathbf{r}'] = [\bar{\omega}\mathbf{r}']\,dt$ вектордан ташкил топган:

$$d\mathbf{r}' = d'\mathbf{r}' + [\bar{\omega}\mathbf{r}']\,dt. \tag{33.12}$$

Сўнгги муносабатни (33.11) муносабатга қўйиб қуйидаги ифодага эга бўламиз.

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + d'\mathbf{r}' + [\bar{\omega}\mathbf{r}']\,dt.$$

Бу ифодани dt га бўлиб ва (33.9) ҳамда (33.10) ларни ҳисобга олиб қуйидаги формулани топамиз:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' + [\bar{\omega}\mathbf{r}'], \tag{33.13}$$

бунда $\mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt}$ — K' системанинг K системага нисбатан илгариланма ҳаракати тезлиги. Агар K' система фақат илгариланма ҳаракат қилса, у ҳолда $\bar{\omega} = 0$ ва (33.13) формула бизга таниш бўлган (17.3) формулага айланади. $\mathbf{v}_0$ ва $\mathbf{v}'$ тезликлар нолга тенг бўлган ҳолда (33.13) дан (11.4) формула келиб чиқади.

Энди (33.13) билан ифодаланувчи $\mathbf{v}$ векторнинг K системада кузатиладиган орттирмасини топайлик $\bar{\omega} = \text{const}$ эканлигини ҳисобга олиб қуйидагини топамиз:

$$d\mathbf{v} = d\mathbf{v}_0 + d\mathbf{v}' + [\bar{\omega}, d\mathbf{r}'].$$

Бу формулада $d\mathbf{r}'$ ни унинг (33.12) қиймат билан, $d\mathbf{v}'$ ни эса худди (33.12) га ўхшаш ифода билан алмаштирайлик:

$$d\mathbf{v}' = d'\mathbf{v}' + [d\bar{\varphi}, \mathbf{v}'] = d'\mathbf{v}' + [\bar{\omega}\mathbf{v}']\,dt$$

($d\mathbf{v}'$ — $\mathbf{v}'$ векторнинг K системада кузатиладиган орттирмаси, $d'\mathbf{v}'$ эса $\mathbf{v}'$ нинг K системадаги орттирмаси). Ўрин алмаштиришлардан кейин қуйидаги ифодани топамиз:

$$d\mathbf{v} = d\mathbf{v}_0 + d'\mathbf{v}' + [\bar{\omega}\mathbf{v}']\,dt + [\bar{\omega}, (d'\mathbf{r}' + [\bar{\omega}\mathbf{r}']\,dt)].$$

Вектор кўпайтманинг дистрибутивлигидан фойдаланиб, топилган ифоданинг сўнгги қўшилувчисини $[\bar{\omega}, d'\mathbf{r}'] + [\bar{\omega}, ([\bar{\omega}\mathbf{r}']\,dt)]$ кўринишда ёзиш мумкин. Демак,

$$d\mathbf{v} = d\mathbf{v}_0 + d'\mathbf{v}' + [\bar{\omega}\mathbf{v}']\,dt + [\bar{\omega}, d'\mathbf{r}'] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}\mathbf{r}']]\,dt,$$

(сўнгги қўшилувчида скаляр кўпайтувчи dt ни вектор кўпайтма белгиси остидан чиқариб юбордик).

Топилган ифодани dt га бўламиз:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d'\mathbf{v}'}{dt} + [\bar{\omega}\mathbf{v}'] + \left[\bar{\omega}, \frac{d'\mathbf{r}'}{dt}\right] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}\mathbf{r}']].$$

$\frac{d'\mathbf{r}'}{dt}$ $\mathbf{v}'$ га тенг бўлганлиги учун биринчи иккита вектор кўпайтма бир-бирига ўхшаш ва уларни битта $2\,[\bar{\omega}\mathbf{v}']$ қўшилувчига бирлаштириш мумкин. $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ ҳосила таърифга биноан m нуқтанинг K системадаги $\mathbf{w}$ тезланиши, худди шунга ўхшаш $\mathbf{w}'$ — m нуқтанинг K' системадаги тезланиши. Шундай қилиб,

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}' + 2\,[\bar{\omega}\mathbf{v}'] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}\mathbf{r}']], \qquad (33.14)$$

бу ерда $\mathbf{w}_0$ — K' система координата бошининг тезланиши (K' системанинг «илгариланма» тезланиши).

31- § да $\mathbf{a} = \mathbf{w} - \mathbf{w}'$ векторни m га кўпайтирсак ва ишорани тескарига алмаштирсак, инерция кучи топилишини айтган эдик. (33.14) га биноан

$$\mathbf{a} = \mathbf{w} - \mathbf{w}' = \mathbf{w}_0 + 2\,[\bar{\omega}\mathbf{v}'] + [\bar{\omega}, [\bar{\omega}, \mathbf{r}']].$$

Демак,

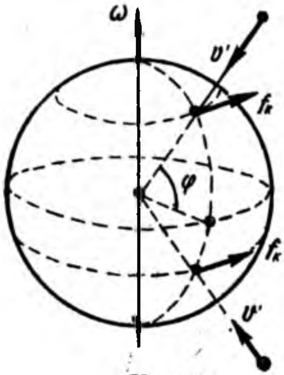
$$\mathbf{f}_{in} = -m\mathbf{w}_0 + 2m\,[\mathbf{v}'\bar{\omega}] + m\,[\bar{\omega}, [r'\bar{\omega}]] \qquad (33.15)$$

сўнгги иккита қўшилувчининг ишорасини ўзгартириш учун кўпайтирувчиларнинг ўрнини алмаштирилади. (33.15) формула инерция кучининг барча турларини ўз ичига олади.

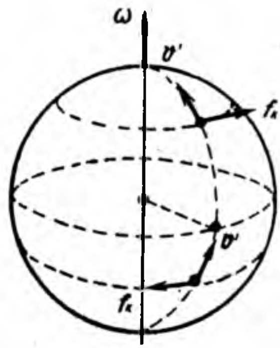
Масалан, агар K' система K системага нисбатан айланишсиз фақат илгариланма ҳаракат қилса, инерция кучи $\mathbf{f}_{in} = -m\mathbf{w}_0$ [(31.4) формулага қаранг]. Айланма ҳаракат ҳам юз бераётган бўлса, қўшимча $\mathbf{f}_К = 2m[\mathbf{v}'\bar{\omega}]$ [(33.2) формулага қаранг] кориолис кучи ва $\mathbf{f}_{м.к.} = m\,[\bar{\omega}, [\mathbf{r}'\bar{\omega}]]$ марказдан қочма инерция кучи юзага келади. Марказдан қочма инерция кучини $\mathbf{f}_{м.к.} = m\omega^2\mathbf{R}$ кўринишда ҳам ёзса бўлади [(32.2) формулага қаранг].

Шуни эслатиб ўтамизки, кориолис кучи фақат жисм ўз вазиятини айланувчи саноқ системага нисбатан ўзгартирган вақтдагина юзага келади ($\mathbf{v}' = 0$ да кориолис кучининг ифодаси нолга айланади). Яна шуни қайд қиламизки, кориолис кучи доим айланиш ўқига перпендикуляр текисликда ётади.

Кориолис инерция кучи намоён бўладиган ҳаракатларга мисоллар. Жисмларнинг ер сиртига нисбатан ҳаракати билан боғлиқ бўлган ҳодисаларни тушунтираётганда кўп ҳолларда кориолис куч-



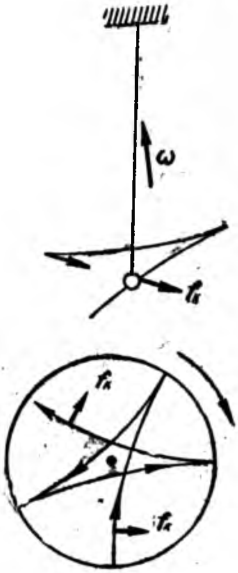
79- расм.



80- расм.

ларини ҳисобга олишга тўғри келади. Масалан, жисмлар эркин тушаётганда уларга кориолис кучи таъсир қилиб, уларни осилиш чизиғидан шарққа қараб оғдиради (79- расм). Бу куч экваторда максимум бўлиб, қутбларда нолга айланади.

Учиб бораётган снаряд кориолис инерция кучлари таъсирида оғади (80- расм). Шимолга қараб турган замбаракдан ўқ узилганда снаряд шимолий ярим шарда ғарбга, жанубий ярим шарда эса жанубга оғади. Меридиан бўйлаб жанубга қараб отилганда оғиш йўналишлари юқоридагига тескари бўлади. Экватор бўйлаб агар ғарб томонга қараб ўқ узилса, кориолис кучлари снарядни Ерга қараб босади, агар ўқ шарқ томонга узилган бўлса, у вақтда кориолис кучлари снарядни юқорига қараб кўтаради. Меридиан бўйлаб ихтиёрий йўналишда (шимолга ёки жанубга) ҳаракатланаётган жисмга таъсир қилувчи кориолис кучи шимолий ярим шарда ҳаракат йўналишига нисбатан ўнгга, жанубий ярим шарда эса чапга қараб йўналганлигига ишонч ҳосил қилишни китобхоннинг ўзига ҳавола қиламиз. Бу ҳол доим шимолий ярим шарда дарёларнинг ўнг қирғоғи ва жанубий ярим шарда эса — чап қирғоғи ювилишига олиб келади. Худди шу сабаблар икки изли темир йўлларнинг излари турлича едирилишига олиб келади.



81- расм.

Кориолис кучлари маятник тебранган вақтда ҳам намоён бўлади. 81- расмда маятник юкчасининг траекторияси кўрсатилган (соддалик учун маятник қутбда жойлашган деб фараз қилинган.) Шимолий қутбда кориолис кучи доим маятник юриши бўйлаб ўнгга, жанубий ярим шарда эса — чапга йўналган бўлади. Натижада траекториянинг кўриниши розеткага (нақшға) ўхшайди.

Расмдан кўриниб турибдики, маятникнинг тебраниш текислиги Ерга нисбатан соат стрелкаси бўйлаб бурилади, бунда у бир суткада бир марта айланади. Гелиоцентрик саноқ системага нисбатан аҳвол бошқача тебраниш текислиги ўзгармайди, Ер эса унга нисбатан бурилиб, бир суткада бир марта айланади.

Географик кенглиги φ бўлган жойда маятникнинг тебраниш текислиги бир суткада $2\pi \sin \varphi$ бурчакка бурилишини кўрсатиш мумкин.

Шундай қилиб, маятникнинг тебраниш текислигини кузатиш Ернинг ўз ўқи атрофида айланишини бевосита исботлар экан (бундай мақсадлар учун мўлжалланган маятниклар Фуко маятниклар деб аталади).

V БОБ

ҚАТТИҚ ЖИСМ МЕХАНИКАСИ

34- §. Қаттиқ жисм ҳаракати[1]

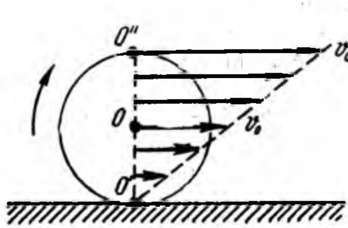
Муқаддимада биз қаттиқ жисм ҳаракатининг икки асосий тури илгариланма ва айланма ҳаракат турлари билан танишдик.

Илгариланма ҳаракатда жисмнинг барча нуқталарининг бир хил вақт оралиқларида кўчиши катталик ва йўналиши жиҳатидан бир хил бўлади, шу сабабли барча нуқталарнинг тезлиги ва тезланиши вақтнинг ҳар бир моментида бир хил бўлади. Шу сабабли бутун жисмнинг (масалан, унинг инерция марказининг) ҳаракатини тўла характерламоқ учун унинг битта нуқтасининг ҳаракатини билиш кифоя қилади.

Айланма ҳаракат вақтида қаттиқ жисмнинг барча нуқталари марказлари айланиш ўқи деб аталувчи бир тўғри чизиқ устида жойлашган айланалар бўйлаб ҳаракатланади. Айланма ҳаракатни таърифлаш учун айланиш ўқининг фазодаги вазиятини ва жисмнинг вақтнинг ҳар бир моментидаги бурчак тезлигини бермоқ керак.

Маълум бўлишича, қаттиқ жисмнинг ихтиёрий ҳаракатини юқорида эслатилган иккита асосий ҳаракат турларининг йиғиндиси сифатида тасаввур қилиш мумкин экан. Буни ясси ҳаракат ҳоли учун, яъни жисмнинг барча нуқталари параллел текисликларда кўчадиган ҳол учун кўрсатамиз. Ясси ҳаракатга цилиндрнинг текислик бўйлаб думаланиши мисол бўлиши мумкин (82- расм).

Қаттиқ жисмнинг *1* ҳолатдан *2* ҳолатга ихтиёрий кўчишини (82- расм) иккита кўчишнинг *1* ҳолатдан *1'* ёки *1''* ҳолатга илгариланма кўчиш билан *0'* ёки *0''* ўқ атрофида бурилишнинг йиғиндиси сифатида тасаввур қилиш мумкин. Равшанки, кўчишни бундай илгариланма ва айланма кўчишга ажратишни чексиз кўп усуллар билан амалга ошириш мумкин-у, бироқ ҳар қандай ҳолда ҳам жисм албатта, бир хил φ бурчакка бурилади.



82- расм.

Юқорида айтилганига мос равишда жисмнинг бирор нуқтаси-

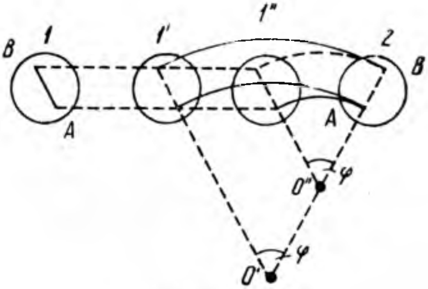
[1] Бу бобда 45- § дан бошқа барча жойларда абсолют қаттиқ жисм назарда тутилади.

нинг элементар $d\mathbf{s}$ кўчишини иккита «илгариланма» $d\mathbf{s}_{и}$ ва «айланма» $d\mathbf{s}_{ай}$ кўчишларга ажратиш мумкин:

$$d\mathbf{s} = d\mathbf{s}_{и} + d\mathbf{s}_{ай},$$

бунда $d\mathbf{s}_{и}$ жисмнинг барча нуқталари учун бир хил.

$d\mathbf{s}$ кўчишни бундай ажратишни юқорида кўрганимиздек, турли усуллар билан амалга ошириш мумкин, бунда ҳар гал $d\mathbf{s}_{ай}$ ва $d\mathbf{s}_{и}$ лар ҳар хил бўлса ҳам, жисмнинг айланма кўчиши жисмни бир хил $d\varphi$ бурчакка (бироқ турли ўқларга нисбатан) буриш орқали амалга оширилади.



83- расм.

$d\mathbf{s}$ ни тегишли dt вақт оралиғига тақсимлаб, нуқтанинг $\mathbf{v}$ тезлигини топамиз:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{d\mathbf{s}_{и}}{dt} + \frac{d\mathbf{s}_{ай}}{dt} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}',$$

бу ерда $\mathbf{v}_0$ илгариланма ҳаракат тезлиги у жисмнинг барча нуқталари учун бир хил, $\mathbf{v}'$ эса — айланиш натижасида юзага чиқадиган тезлик у жисмнинг турли нуқталари учун турлича.

Шундай қилиб, қаттиқ жисмнинг ясси ҳаракатини иккита ҳаракатнинг — $\mathbf{v}_0$ тезликли илгариланма ҳаракат билан $\bar{\omega}$ бурчак тезликли (82- расмда $\bar{\omega}$ вектор расм текислигига тик бўлиб, расм орқасига қараб йўналган) айланма ҳаракатнинг йиғиндиси сифатида тасаввур қилиш мумкин экан. Мураккаб ҳаракат ҳақидаги бундай тасаввурни кўп йўллар билан амалга ошириш мумкин. Бу усуллар бир-биридан $\mathbf{v}_0$ ва $\mathbf{v}'$ ларнинг қийматлари турлича эканлиги билан фарқ қилса ҳам, улар бир хил $\bar{\omega}$ бурчак тезликка мос келади. Масалан, текислик устида сирпанмасдан думаланаётган цилиндрнинг ҳаракатини (82- расм) $\mathbf{v}_0$ тезликли илгариланма ҳаракат ва бир вақтда $\bar{\omega}$ бурчак тезлик билан ўқ атрофида айланиш ёки $\mathbf{v}_0'' = 2\mathbf{v}_0$ тезликли илгариланма ҳаракат ва ўшандай $\bar{\omega}$ бурчак тезлик билан O'' ўқ атрофида айланиш ёки ниҳоят, яна фақат ўшандай бурчак $\bar{\omega}$ тезлик билан O' ўқ атрофида айланиш сифатида тасаввур қилиш мумкин.

Қаттиқ жисмнинг мураккаб ҳаракати қайси саноқ системага нисбатан текширилаётган бўлса, шу системани кўчмас деб олиб, жисмнинг ҳаракатини кўчмас системага нисбатан $\mathbf{v}_0$ тезлик билан ҳаракатланаётган саноқ системада $\bar{\omega}$ бурчак тезлик билан айланиш деб тасаввур қилиш мумкин.

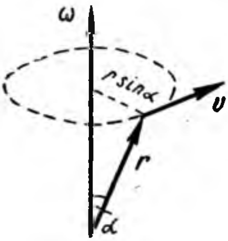
$\mathbf{r}$ радиус-векторли нуқтанинг жисмнинг айланиши туфайли юзага келган $\mathbf{v}'$ чизиқли тезлиги қуйидагига тенг (84- расм):

$$\mathbf{v}' = [\bar{\omega}\mathbf{r}].$$

Демак, бу нуқтанинг жисм мураккаб ҳаракат қилган вақтдаги тезлиги қуйидаги кўринишда ёзилиши мумкин

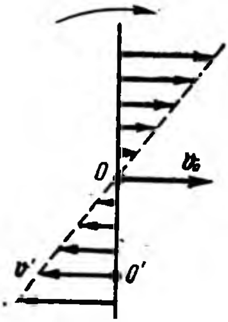
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\overline{\omega}\mathbf{r}]. \tag{34.1}$$

Шундай нуқталар мавжудки, (улар жисмнинг ичида ёки унинг ташқарисида ётиши мумкин) улар иккала — илгариланма ва айланма ҳаракатда иштирок эта туриб, қўзғалмай қолади. Ҳақиқатан ҳам, берилган $\mathbf{v}_0$ ва $\overline{\omega}$ учун доим шундай $\mathbf{r}$ ни топиш мумкинки, бунда (34.1) нолга тенг бўлади. Фараз қилайлик, берилган моментда илгариланма ҳаракатланаётган саноқ системанинг тезлиги $\mathbf{v}_0$ га тенг бўлсин (85- расм). Бу системада жисм стрелка билан кўрсатилган йўналишли $\overline{\omega}$ бурчак тезлик билан айланаётган бўлсин. Айланиш билан боглиқ бўлган $\mathbf{v}'$ тезлик турли нуқталар учун расмда кўрсатилгандек қийматларга эга. O' нуқта учун $\mathbf{v}'_0$ ва $\mathbf{v}'$ тезликлар катталик жиҳатдан тенг ва йўналишлари қарама-қаршидир. Демак, бу нуқтанинг кўчмас саноқ системага нисбатан тезлиги нолга тенг.

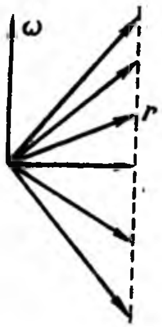


84- расм.

Шу билан бирга, агар $\overline{\omega}$ билан вектор кўпайтмаси — $\mathbf{v}_0$ векторга тенг бўлган камида битта $\mathbf{r}$ вектор мавжуд бўлса, у вақтда қатор векторлар мавжудки, уларнинг $\overline{\omega}$ га вектор кўпайтмаси худди шундай натижа беради: $\overline{\omega}$ нинг 86- расмда тасвирланган исталган $\mathbf{r}$



85- расм.



86- расм.

векторга вектор кўпайтмаси бир хил катталикка ва бир хил йўналишга эга бўлади. Бундай радиус-векторлар билан аниқланадиган нуқталар қаралаётган вақт моментида ҳаракатсиз бўлади. Бу нуқталар расмдан кўриниб турибдики, бир тўғри чизиқ устида ётиб оний айланиш ўқи деб аталувчи ўқни ҳосил қилади. Оний айланиш ўқининг вазияти қўзғалмас саноқ системага нисбатан ва жисмнинг ўзига нисбатан умуман айтганда, вақт ўтиши билан ўзгара боради. Думаланаётган цилиндр учун (82- расм) оний O' ўқ цилиндрнинг текисликка тегиб турган чизиғи билан устма-уст тушади. Цилиндр думалаганда оний ўқ ҳам текислик бўйлаб (яъни кўчмас саноқ системага нисбатан) ҳам цилиндр сирти бўйлаб кўчиб юради.

Жисмнинг барча нуқталарининг вақтнинг ҳар бир моментидаги тезликларини тегишли оний ўқ атрофида айланиши туфайли юзага келади деб ҳисоблаш мумкин. Демак, қаттиқ жисмнинг ясси ҳаракатини оний ўқлар атрофида қатор кетма-кет элементар айланишлардан иборат деб ҳисоблаш мумкин.

Умумий ҳолда ҳаракатни (ясси эмас) оний ўқ атрофида айланиш билан шу ўқ бўйлаб илгариланма кўчишдан иборат деб тасаввур қилиш мумкин.

35- §. Қаттиқ жисм инерция марказининг ҳаракати

Жисмни элементар Δm_i массаларга бўлиб, уни ўзаро вазияти ўзгармайдиган моддий нуқталар системаси деб тасаввур қилиш мумкин. Ана шу элементар массалардан исталгани бир вақтда элементар масса текширилаётган жисмнинг бошқа элементар массалари билан ўзаро таъсирлашиши туфайли юзага келадиган ҳам ички кучлар ҳам ташқи кучлар таъсири остида бўлиши мумкин. Масалан, агар жисм Ернинг тортиш кучи таъсирида турган бўлса, у ҳолда жисмнинг ҳар бир элементар Δm_i массасига $\Delta m_i g$ га тенг ташқи куч таъсир қилади.

Ҳар бир элементар масса учун Ньютон иккинчи қонунининг тенгламасини ёзайлик:

$$\Delta m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{f}_i + \mathbf{F}_i, \tag{35.1}$$

бу ерда $\mathbf{f}_i$ — барча ички кучларнинг тенг таъсир этувчиси, $\mathbf{F}_i$ эса берилган элементар массага қўйилган барча ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчиси. (35.1) тенгламаларни ҳамма элементар массалар йиғиндиси учун ёзиб қуйидагини топамиз:

$$\sum \Delta m_i \mathbf{w}_i = \sum \mathbf{f}_i + \sum \mathbf{F}_i. \tag{35.2}$$

Бироқ системада таъсир кўрсатувчи барча ички кучларнинг йиғиндиси нолга тенг. Шунинг учун (35.2) тенглама қуйидаги содда кўринишга келади:

$$\sum \Delta m_i \mathbf{w}_i + \sum \mathbf{F}_i, \tag{35.3}$$

бу ерда ўнг томонда жисмга таъсир кўрсатувчи барча ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчиси ҳосил бўлади. (35.3) тенгламанинг чап томонида турган йиғиндини жисмнинг m массасининг унинг инерция маркази $\mathbf{w}_c$ тезланишига кўпайтмаси билан алмаштириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам инерция марказининг радиус-вектори [(23.1) га қаранг] қуйидагига тенг:

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum \Delta m_i \mathbf{r}_i}{m}.$$

Бу муносабатни вақт бўйича икки марта дифференциаллаб ва $\ddot{\mathbf{r}}_c = \mathbf{w}_c$ ва $\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{w}_i$ эканлигини ҳисобга олиб қуйидагини ёзиш мумкин:

$$m\mathbf{w}_c = \sum \Delta m_i \, \mathbf{w}^i. \tag{35.4}$$

Демак,

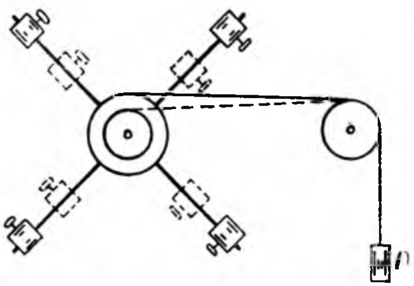
$$m\mathbf{w}_c = \sum \mathbf{F}_i, \tag{35.5}$$

бундан қуйидаги хулоса чиқади: *массаси жисмнинг массасига тенг бўлган моддий нуқта жисмга қўйилган барча кучлар таъсирида қандай ҳаракатланса, қаттиқ жисмнинг инерция маркази ҳам шундай ҳаракатланади.*

Агар қаттиқ жисмнинг массаси билан унга таъсир этувчи кучлар аниқ бўлса, (35.5) тенгламадан қаттиқ жисм инерция марказининг ҳаракатини аниқлаш мумкин. Илгариланма ҳаракат учун бу тенглама фақат инерция марказинингина эмас, балки жисмнинг исталган бошқа нуқтасининг тезланишини аниқлаб беради.

36- §. Қаттиқ жисмнинг айланиши. Куч моменти

Жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофидаги ҳаракати нима билан аниқланишини топиш учун қуйидаги тажрибани қараб чиқамиз. Учларига бир хил оғир m юклар маҳкамланган енгил крест шаклидаги жисм олайлик (87- расм). Крестнинг марказига поғонали шкив ўрнатамиз. Бу крестни шкив билан биргаликда ўққа шундай ўрнатамизки, бу ўқ атрофида айланиш деярли ишқаланишсиз содир бўлсин.



87- расм.

Ипнинг учини шкивнинг поғоналаридан бирига маҳкамлаб, бу ипни шкивга ўраймиз ва ипнинг эркин учини блок орқали ўтказиб, учига P юк боғлаб осиб қўямиз. Агар P юкни қўйиб юборсак, крест ортиб борувчи $\overline{\omega}$ бурчак тезлик билан текис тезланувчан айлана бошлайди.

Юкнинг P оғирлигини, шкивнинг l радиусини, юкларнинг m массасини ва уларнинг ўқлардан R узоқлигини ўзгартириб, бу факторлар β бурчак тезланишига қандай таъсир кўрсатишини текширайлик. Бундай текширишлар натижасида қуйидагиларни аниқлаймиз: β бурчак тезланиш:

1) ипнинг f таранглигига ва шкивнинг l радиусига тўғри пропорционал;

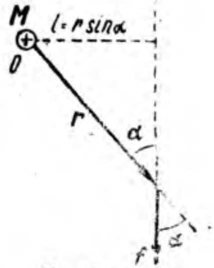
2) юкларнинг m массасига ва айланиш ўқидан юкларгача бўлган R масофанинг квадратига тескари пропорционал.

Демак, айланма ҳаракатнинг тезланиши фақат жисмга таъсир этувчи f кучгагина эмас, балки айланиш ўқидан кучнинг таъсир чизиғигача бўлган l масофага ҳам боғлиқ экан. Кўпайтма fl айланиш ўқига нисбатан **к у ч м о м е н т и** деб аталувчи катталикни беради.

Шунингдек бу қараб чиқилган тажрибадан бурчак тезликнинг катталиги айланувчи жисмнинг массасигагина эмас, балки массанинг айланиш ўқига нисбатан тақсимланишига ҳам боғлиқ деган хулоса чиқади. Бу икки ҳолни ҳисобга олувчи катталик жисмнинг айланиш ўқига нисбатан **и н е р ц и я м о м е н т и** деб аталади.

Шундай қилиб, айланма ҳаракатни ўрганиш учун иккита янги физикавий катталик — куч моменти билан инерция моментини киритилиши зарур экан.

Куч моменти тушунчасини аниқлашдан бошлайлик. Инерция моментини эса кейинги параграфларда текширамиз.



88- расм.

Нуқтага нисбатан куч моменти. Бирор O нуқтага нисбатан $\mathbf{f}$ кучнинг моменти деб

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rf}], \qquad (36.1)$$

ифода билан белгиланувчи $\mathbf{M}$ вектор катталикка айтилади, бу ерда $\mathbf{r}$ — O нуқтадан кучлар қўйилган нуқтагача ўтказилган радиус вектор. Бу таърифни тушунтирувчи 88- расм O нуқта (момент ўша нуқтага нисбатан олинади) ва $\mathbf{f}$ вектор расм текислигида ётади, деган фараз билан чизилган. У вақтда $\mathbf{r}$ вектор ҳам шу текисликда ётади, $\mathbf{M}$ вектор эса биз томондан расм текислигига қараб перпендикуляр йўналган. $\mathbf{M}$ вектор ичига крестча чизилган доирача шаклида тасвирланган[1].

(36.1) таърифдан $\mathbf{M}$ аксиал вектор деган хулоса чиқади. Унинг йўналиши шундай танлаб олинганки, O нуқта атрофида куч йўналиши бўйлаб айланганда $\mathbf{M}$ вектор ўнг винт системасини ташкил қилади.

$\mathbf{M}$ векторнинг модули

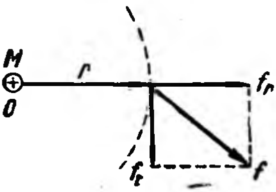
$$M = rf\sin\alpha = lf, \qquad (36.2)$$

бу ерда α — $\mathbf{r}$ ва $\mathbf{f}$ векторларнинг йўналишлари орасидаги бурчак, $l = r\sin\alpha$ эса O нуқтадан кучнинг таъсир чизиғига туширилган перпендикулярнинг узунлиги (88- расмга қаранг). Бу узунлик **к у ч н и н г O н у қ т а г а н и с б а т а н е л к а с и** дейилади.

---

[1] Бундан кейин расм текислигига перпендикуляр йўналган векторларни агар у биз томондан расмга қараб йўналган бўлса, крестли доирача билан ва вектор бизга қараб йўналган бўлса, марказига нуқта қўйилган доирача билан тасвирлаймиз. Кўргазмалироқ бўлиши учун векторни учи конуссимон ва дум томонида крестсимон пати бор найза кўринишида тасаввур қилиш мумкин. У вақтда агар вектор бизга қараб йўналган (найза бизга қараб учиб келаётган) бўлса, нуқтали доирачани кўрамиз, борди-ю вектор биздан узоқлашаётган (найза биз томондан учиб кетаётган) бўлса, биз крестли доирачани кўрамиз.

Куч моменти билан унинг модулини ифодаловчи (36.1) ва (36.2) формулаларга бошқача кўриниш бериш мумкин. Бунинг учун $\mathbf{f}$ кучнинг векторини иккита: $\mathbf{r}$ билан коллинеар бўлган $\mathbf{f}_r$ ва $\mathbf{r}$ га перпендикуляр бўлган $\mathbf{f}_\tau$ ташкил этувчиларга ажратамиз (89-расм). Маркази O нуқтада ётган $\mathbf{r}$ радиусли айланани кўз олдимизга келтирайлик, бунда $\mathbf{f}_\tau$ ташкил этувчи айланага ўтказилган уринма бўйлаб йўналган бўлади (36.1) формулада $\mathbf{f}$ векторни $\mathbf{f}_r + \mathbf{f}_\tau$ йиғинди билан алмаштирамиз ва вектор кўпайтманинг дистрибутивлигидан фойдаланамиз:



89-расм.

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rf}] = [\mathbf{r}, (\mathbf{f}_r + \mathbf{f}_\tau)] = [\mathbf{r}, \mathbf{f}_r] + [\mathbf{r}, \mathbf{f}_\tau].$$

Биз топган бу ифодада биринчи қўшилувчи нолга тенг, чунки $\mathbf{r}$ ва $\mathbf{f}_r$ векторлар ўзаро коллинеар. Демак, нуқтага нисбатан куч моментини қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{f}_\tau]. \qquad (36.3)$$

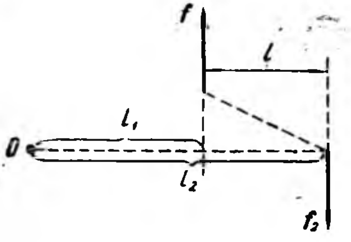
$\mathbf{r}$ ва $\mathbf{f}_\tau$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлганлиги учун $\mathbf{M}$ векторнинг модули

$$M = rf_\tau$$

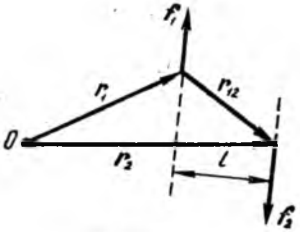
Вектор кўпайтманинг дистрибутивлигидан умумий қўйилиш нуқтага эга бўлган кучлар йиғиндисининг моменти қўшилаётган кучлар моментлари йиғиндисига тенг деган хулоса чиқади:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rf}] = [\mathbf{r}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \ldots)] = [\mathbf{rf}_1] + [\mathbf{rf}_2] + \ldots =$$
$$= \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \ldots \qquad (36.5)$$

Жуфт куч моменти. Катталик жиҳатдан тенг бўлган қарама-қарши йўналган ва бир тўғри чизиқ бўйлаб таъсир кўрсатмайдиган иккита кучга жуфт куч деб айтилади (90-расм). Кучлар таъсир кўрсатаётган тўғри чизиқлар орасидаги l масофа, жуфт кучнинг



90- расм.



91-расм.

елкаси дейилади. Жуфт кучнинг исталган нуқтага нисбатан моменти бирдай эканлигини исботлайлик. Буни аввал кучлар қайси текисликда таъсир кўрсатаётган бўлса, ўша текисликда ётган нуқта учун бажарайлик (90- расмга қаранг). Модули бир хил бўлган $\mathbf{f}_1$ ва $\mathbf{f}_2$ кучларни f ҳарфи билан белгилаймиз. $\mathbf{f}_1$ кучнинг моменти fl_1 га тенг ва бизга қараб йўналган, $\mathbf{f}_2$ кучнинг моменти эса fl_2 га тенг ва расмнинг орқасига қараб йўналган. Натижавий момент расм орқасига қараб йўналган бўлиб қуйидагига тенг:

$$M = fl_2 - fl_1 = f(l_2 - l_1) = fl.$$

Топилган бу муносабат O нуқтанинг жуфт куч ётган текисликдаги вазиятига боғлиқ эмас.

Энди O нуқтани тамоман ихтиёрий равишда танлаб олайлик (91-расм). Бу нуқтадан $\mathbf{f}_1$ ва $\mathbf{f}_2$ кучларнинг қўйилиш нуқталарининг $\mathbf{r}_1$ ва $\mathbf{r}_2$ радиус-векторларини ўтказайлик. $\mathbf{f}_1$ кучнинг қўйилиш нуқтасидан $\mathbf{f}_2$ кучнинг қўйилиш нуқтасига $\mathbf{r}_{12}$ вектор ўтказамиз. Равшанки,

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_{12} \tag{36.6}$$

$\mathbf{f}_1$ ва $\mathbf{f}_2$ кучларнинг йиғинди моменти

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}_1\mathbf{f}_1] + [\mathbf{r}_2\mathbf{f}_2].$$

$\mathbf{r}_2$ векторни (36.6) га асосан алмаштириб ва вектор купайтманинг дистрибутивлигидан фойдаланиб, қуйидагини ёзиш мумкин:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}_1\mathbf{f}_1] + [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_{12})\mathbf{f}_2] = [\mathbf{r}_1\mathbf{f}_1] + [\mathbf{r}_1\mathbf{f}_2] + [\mathbf{r}_{12}\mathbf{f}_2].$$

$\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}_2$ бўлганлиги учун биринчи иккита қўшилувчилар ўзаро ейишиб кетиб, охирида қуйидаги ифода келиб чиқади:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}_{12}\mathbf{f}_2].$$

Шундай қилиб, жуфт кучлар моменти кучлар ётган текисликка перпендикуляр йўналган (92- расм) бўлиб, қиймат жиҳатдан кучлардан исталган биттасининг модулининг елкасига кўпайтмасига тенг экан.

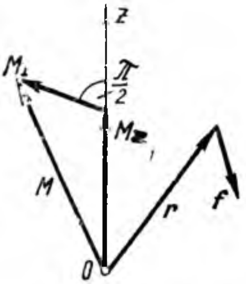
Ўққа нисбатан куч моменти. Агар жисм O нуқтага нисбатан ихтиёрий айланадиган бўлса, у ҳолда f куч таъсири остида жисм куч билан O нуқта ётган текисликка перпендикуляр ўқ атрофида, яъни берилган нуқтага нисбатан олинган кучлар моментининг йўналиши билан устма-уст тушувчи ўқ атрофида бурилади. Моментнинг катталиги кучнинг жисмни шу ўқ атрофида айлантириш қобилиятини характерлайди.

Агар жисм фақат бирор белгиланган ўқ атрофидагина айлана олса, у ҳолда кучнинг жисмни шу ўқ атрофида айлантира олиш қобилияти кучнинг ўққа нисбатан моменти деб аталувчи катталик билан характерланади.

$\mathbf{f}$ кучнинг ўққа нисбатан моменти нимадан иборат эканлигини тушуниб олиш учун $\mathbf{f}$ нинг O нуқтага нисбатан моментини топамиз ва бу моментнинг $\mathbf{M}$ векторини O нуқтадан бош-

92- расм.

лаб чизамиз (93- расм; бунда $\mathbf{f}$, $\mathbf{r}$ ва $\mathbf{M}$ векторлар расм текислигида ётмайди деб фараз қилинади). O нуқта орқали z ўқ деб аталувчи ўқ ўтказамиз ва $\mathbf{M}$ векторни иккита: $\mathbf{M}_z$ — ўққа параллел[1] ва $\mathbf{M}_\perp$ — ўққа перпендикуляр ташкил этувчиларга ажратамиз.



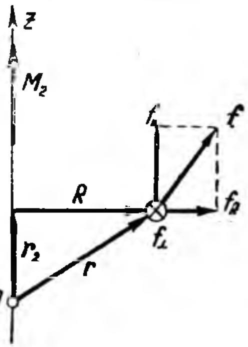
93- расм.

O нуқтага (у ўқда ётади) нисбатан куч моментининг z параллел ташкил этувчиси ўққа нисбатан куч моменти деб юритилади. Ўққа нисбатан куч моментини $\mathbf{M}_z$ символ билан белгилаб қуйидагини ёзиш мумкин:

$$\mathbf{M}_z = [\mathbf{rf}]_z. \tag{36.7}$$

Берилган $\mathbf{M}$ учун $\mathbf{M}_z$ векторнинг катталиги билан йўналиши z ўқ қандай танлаб олинганлигига боғлиқ. Агар z ўқ $\mathbf{M}$ векторнинг йўналиши билан устма-уст тушса, у ҳолда $\mathbf{M}_z$ вектор $\mathbf{M}$ га тенг бўлади, агар z ўқ $\mathbf{M}$ векторга перпендикуляр бўлса, у ҳолда $\mathbf{M}_z = 0$ бўлади.

$\mathbf{M}_z$ нинг (36.7) ифодасини кўргазмалироқ қилиб ёзиш мумкин. Бунинг учун $\mathbf{r}$ радиус-векторни иккита: $\mathbf{r}_z$ — ўққа параллел ва $\mathbf{R}$ ўққа перпендикуляр (94- расм) ташкил этувчиларнинг йиғиндиси сифатида тасаввур қиламиз. У вақтда z ўққа нисбатан куч моментини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин.



94- расм.

$$\mathbf{M}_z = [\mathbf{rf}]_z = [(\mathbf{r}_z + \mathbf{R}),\ \mathbf{f}]_z = [\mathbf{r}_z, \mathbf{f}]_z + [\mathbf{Rf}]_z.$$

Бироқ $[\mathbf{r}_z\mathbf{f}]$ вектор z ўққа перпендикуляр: демак, унинг бу ўқ бўйлаб ташкил этувчиси нолга тенг. Шунинг учун биз қуйидаги формулага келамиз:

$$\mathbf{M}_z = [\mathbf{Rf}]_z. \tag{36.8}$$

Энди $\mathbf{f}$ кучнинг векторини учта: z ўққа параллел $\mathbf{f}_\parallel$, $\mathbf{R}$ векторга коллинеар $\mathbf{f}_R$ ва ниҳоят z ўқ ва $\mathbf{R}$ вектор орқали ўтувчи текисликка перпендикуляр йўналган ташкил этувчиларнинг йиғиндиси сифатида тасаввур этамиз. 94- расмда энг сўнгги ташкил этувчи крестли доирача билан белгиланади. Агар маркази z ўқда ётган R радиусли айланани кўз олдимизга келтирсак, у вақтда $\mathbf{f}_\tau$ ташкил этувчи бу айланага ўтказилган уринма бўйлаб йўналади. (36.8) да

[1] $\mathbf{M}_z$ ташкил этувчини $\mathbf{M}$ векторнинг z ўққа проекциясидан (у M_z символ билан белгиланади) фарқ қилмоқ керак; бу ерда $\mathbf{M}_z$ — вектор, M_z эса скаляр алгебраик катталик: улар орасида оддий $\mathbf{M}_z = \mathbf{e}_z M_z$ боғланиш мавжуд; бу ерда $\mathbf{e}_z$ — z ўқнинг бирлик вектори (орт). [Бу орт, шунингдек $\mathbf{k}$ символи билан ҳам белгиланади; (2.8) формулага қаранг.]

$\mathbf{f}$ векторни юқорида эслатиб ўтилган ташкил этувчиларнинг йиғиндиси билан алмаштирамиз:

$$M_z = [\mathbf{Rf}]_z = [\mathbf{R},(\mathbf{f}_{\parallel} + \mathbf{f}_R + \mathbf{f}_\tau)]_z = [\mathbf{R},\mathbf{f}_{\parallel}]_z + [\mathbf{R},\mathbf{f}_R]_z + [\mathbf{R},\mathbf{f}_\tau]_z.$$

Бу учта ташкил этувчиларнинг ҳар бирини алоҳида-алоҳида кўриб чиқамиз. $[\mathbf{R}, \mathbf{f}_{\parallel}]$ вектор z ўққа перпендикуляр, шунинг учун унинг ўқ бўйлаб ташкил этувчиси нолга тенг.

$[\mathbf{R}, \mathbf{f}_R]$ вектор ўз-ўзидан нолга тенг, чунки уни ташкил қилган кўпайтувчилари коллинеардир. Демак, биринчи икки ташкил этувчи нолга тенг экан. $[\mathbf{R},\mathbf{f}_\tau]$ вектор z ўққа параллел (уни ташкил қилган иккала кўпайтувчи ҳам z ўққа перпендикуляр), шунинг учун унинг ўқ бўйлаб ташкил этувчиси унинг ўзига тенг:

$[\mathbf{R},\mathbf{f}_\tau]_z = [\mathbf{R},\mathbf{f}_\tau]$. Шундай қилиб, биз қуйидаги формулага келамиз:

$$M_z = [\mathbf{R},\mathbf{f}_\tau]. \tag{36.9}$$

$\mathbf{R}$ ва $\mathbf{f}_\tau$ векторлар ўзаро перпендикуляр. Шунинг учун M_z векторнинг модули қуйидагига тенг:

$$|M_z| = Rf_\tau^{1}. \tag{36.10}$$

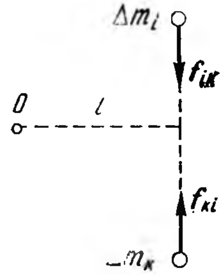
R катталик $\mathbf{f}_\tau$ кучнинг z ўққа нисбатан елкаси дейилади.

(36.9) ифодадан M_z момент $\mathbf{f}$ кучининг ўзи таъсир кўрсатаётган жисмни z ўқ атрофида бура олиш қобилиятини характерлайди деган хулосага осонгина келиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам $\mathbf{f}_{\parallel}$ ва $\mathbf{f}_R$ ташкил этувчилар жисмни z ўқ атрофида айлантира олмайди. Демак, биз текшираётган бурилиш фақат $\mathbf{f}_\tau$ ташкил этувчи томонидангина юзага келиши мумкин ва шу билан бирга бу ташкил этувчининг R елкаси қанча катта бўлса, у бу бурилишни шунча осонроқ амалга оширади.

Ўққа нисбатан момент учун ҳам (36.5) муносабат ўринли, яъни тенг таъсир этувчининг моментини қўшилувчи кучларнинг ўша ўққа нисбатан моментлари йиғиндисига тенг:

$$M_z = M_{z1} + M_{z2} + \ldots \tag{36.11}$$

Ички кучларнинг йиғинди моменти. Исталган иккита элементар массаларнинг ўзаро таъсир кучлари бир тўғри чизиқ устида ётади (95-расм). Уларнинг исталган O нуқтага нисбатан моментлар катталик жиҳатдан ўзаро тенг ва йўналиш жиҳатдан қарама-қаршидир. Шунинг учун ички кучларнинг моментлари жуфт-жуфт бўлиб бир-бирини мувозанатлайди ва моддий нуқта, хусусан, қаттиқ жисмларнинг исталган система учун барча ички кучлар мо-



95- расм.

[1] $\mathbf{M}_z$ нинг модулини M_z символи билан белгилаш ярамайди, чунки кейинги символ M векторнинг z ўққа проекциясини ифодалайди; бу проекция мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин. Векторнинг модули эса доим мусбат. $|M_z| = |\mathbf{M}_z|$ муносабат ўринлидир.

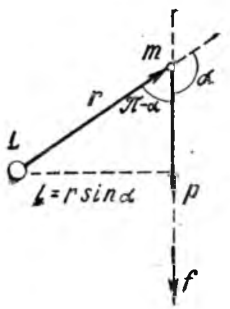
ментларининг йиғиндиси доим нолга тенг бўлади. Бу фикр барча ички кучларнинг исталган нуқтага нисбатан моментларининг йиғиндиси учун ҳам бу кучларнинг исталган ўққа нисбатан моментларининг йиғиндиси учун ҳам ўринлидир.

37-§. Моддий нуқтанинг импульс моменти. Импульс моментининг сақланиш қонуни

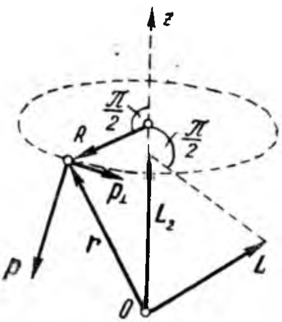
Моддий нуқтанинг импульс моменти (ҳаракат миқдори моменти) ҳам худди куч моментига ўхшаш усул билан аниқланади. O нуқтага нисбатан импульс моменти қуйидагига тенг:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{rp}] = m[\mathbf{rv}], \tag{37.1}$$

бу ерда $\mathbf{r}$ — O нуқтадан фазонинг моддий нуқта ётган нуқтасига ўтказилган радиус-вектор (96- расм; $\mathbf{f}$ вектор бизга келгусида керак



96- расм.



97- расм.

бўлади). $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ — нуқтанинг импульси [(36.1) формула билан таққосланг].

$l = r\sin\alpha$ елкани киритиб, импульс моменти векторининг модулини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$L = rp\sin\alpha = lp. \tag{37.2}$$

Импульснинг z ўққа нисбатан моменти деб, ўқда ётган O нуқтага нисбатан $\mathbf{L}$ импульс моментининг шу ўқдаги ташкил этувчиси $\mathbf{L}_z$ га айтилади (97- расм):

$$\mathbf{L}_z = [\mathbf{rp}]_z. \tag{37.3}$$

(36.9) формулани чиқариш вақтида юргизилган мулоҳазаларни такрорлаб қуйидагини топамиз:

$$\mathbf{L}_z = [\mathbf{R},\ \mathbf{p}_\tau] = m[\mathbf{R},\mathbf{v}_\tau], \tag{37.4}$$

бу ерда $\mathbf{R}$ — радиус-вектор $\mathbf{r}$ нинг z ўққа перпендикуляр ташкил этувчиси, $\mathbf{p}_\tau$ эса $\mathbf{p}$ векторнинг z ўқ ва m нуқта орқали ўтувчи текисликка перпендикуляр ташкил этувчиси.

Импульс моментининг вақтга қараб ўзгариши нимага боғлиқ эканлигини аниқлайлик. Бунинг учун кўпайтмани дифференциаллаш қоидасидан фойдаланиб, (37.1) ни t вақт бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\mathbf{rp}] = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{p}\right] + \left[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right]. \qquad (37.5)$$

Биринчи қўшилувчи нолга тенг, чунки у бир хил йўналган векторларнинг вектор кўпайтмасидан иборат. Ҳақиқатан ҳам $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ вектор $\mathbf{v}$ векторга тенг ва, демак, йўналиш жиҳатидан $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ векторга устма-уст тушади. $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ вектор Ньютоннинг иккинчи қонунига биноан жисмга таъсир этувчи $\mathbf{f}$ кучга тенг [(22.3) га қаранг]. Демак, (37.3) ифодани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\mathbf{rf}] = \mathbf{M}, \qquad (37.6)$$

бу ерда $\mathbf{M}$ — $\mathbf{L}$ импульс моменти қайси O нуқтага нисбатан олинаётган бўлса, ўша моддий нуқтага қўйилган кучларнинг моменти.

(37.6) муносабатдан моддий нуқтага таъсир этувчи кучларнинг бирор O нуқтага нисбатан натижавий моменти нолга тенг бўлса, у ҳолда моддий нуқта импульсининг шу O нуқтага нисбатан моменти ўзгармайди деган хулоса келиб чиқади.

(37.6) формулага кирувчи векторларнинг z ўқ бўйлаб ташкил этувчиларини олсак, қуйидаги ифодани топамиз[1].

$$\frac{d\mathbf{L}_z}{dt} = \mathbf{M}_z. \qquad (37.7)$$

(37.6) формула (22.3) формулага ўхшайди. Бу формулаларни бир-бирига таққосласак, импульснинг вақт бўйича ҳосиласи моддий нуқтага таъсир этувчи кучга тенг бўлгани каби, импульс моментидан вақт бўйича олинган ҳосила куч моментига тенг бўлади деган хулосага келамиз.

---

[1] (2.11) формулага биноан $\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{пр}z} = \frac{d}{dt}L_z$, бу ерда $(d\mathbf{L}/dt)_{\text{пр}z}$— $\frac{d\mathbf{L}}{dt}$ векторнинг z ўққа проекцияси, $\mathbf{L}$ эса $\mathbf{L}_z$ векторнинг z ўққа проекцияси. Тенгликнинг икки қисмини z ўқнинг $\mathbf{e}_z$ ортига кўпайтирамиз ва t га боғлиқ эмаслигини ҳисобга олиб, уни ўнг томонда ҳосила ишораси остига киритамиз. Натижада қуйидагини топамиз:

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{\text{пр}z} \mathbf{e}_z = \frac{d}{dt}(L_z\mathbf{e}_z).$$

Бироқ $\mathbf{e}_z$ нинг векторнинг z ўққа проекциясига кўпайтмаси бу векторнинг z ўқ бўйлаб ташкил этувчисини беради (132- бетдаги иловага қаранг). Демак,

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_z = \frac{d}{dt}\mathbf{L}_z,$$

бу ерда $\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_z$ — $\frac{d\mathbf{L}}{dt}$ векторнинг z ўқ бўйлаб ташкил этувчиси.

Бир неча мисол кўриб чиқайлик.

1-мисол. Фараз қилайлик, моддий нуқта m 96-расмдаги пунктир тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатлансин. Ҳаракат тўғри чизиқли бўлганлигидан моддий нуқтанинг импульси фақат модули бўйича ўзгаради, бунда

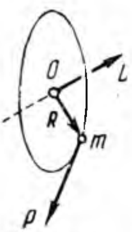
$$\frac{dp}{dt} = f,$$

бу ерда f — кучнинг модули [кўрилаётган ҳолда $\mathbf{f}$ билан $\mathbf{p}$ бир хил йўналган (96-расмга қаранг), шунинг учун $\frac{dp}{dt} > 0$].

Елка l ўзгармаслигича қолади. Демак,

$$\frac{d}{dt}L = \frac{d}{dt}(lp) = l\frac{dp}{dt} = lf = M.$$

Бу (37.6) формулага мос келади (берилган ҳолда $\mathbf{L}$ нинг фақат модули ўзгаради холос, у ортада, шунинг учун $\left|\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right| = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)$.



98-расм.

2-мисол. Массаси m бўлган моддий нуқта R радиусли айлана бўйлаб ҳаракатланмоқда (98-расм). Моддий нуқта импульсининг O айлана марказига нисбатан моменти модуль жиҳатидан қуйидагига тенг:

$$L = mvR. \tag{37.8}$$

$\mathbf{L}$ вектор айлана текислигига перпендикуляр бўлиб, нуқта ҳаракатининг йўналиши билан $\mathbf{L}$ вектор ўнг винт системасини ҳосил қилади.

R га тенг бўлган елка ўзгармаганлиги учун импульс моменти фақат тезлик модулининг ўзгариш ҳисобига ўзгариши мумкин. Моддий нуқта айлана бўйлаб текис ҳаракатланганда импульс моменти катталик жиҳатидан ҳам йўналиш жиҳатидан ҳам ўзгармайди. Бу ҳолда моддий нуқтага таъсир этувчи кучнинг моменти нолга тенг эканлигини тушуниб олиш қийин эмас.

3-мисол. Моддий нуқтанинг кучлар марказий майдонидаги ҳаракатини текширайлик (26-§ га қаранг). (37.6) га мос равишда моддий нуқта импульсининг кучлар марказига нисбатан олинган моменти катталик ва йўналиш жиҳатидан ўзгармаслиги керак (марказий кучнинг марказга нисбатан моменти нолга тенг). Кучлар марказидан m нуқтага ўтказилган $\mathbf{r}$ радиус-вектор билан $\mathbf{L}$ вектор ўзаро бир-бирларига перпендикуляр. Шунинг учун $\mathbf{r}$ вектор доим $\mathbf{L}$ йўналишга перпендикуляр бўлган текисликда қолаверади. Демак, моддий нуқтанинг марказий майдонидаги кучларнинг ҳаракати кучлар маркази орқали ўтувчи текисликда ётган эгри чизиқ бўйича содир бўлар экан.

Марказий кучларнинг ишорасига қараб (яъни улар тортишув кучлари ёки итарилиш кучлари бўлишига қараб), шунингдек бошланғич шароитларга қараб траектория гиперболадан, параболадан ёки эллипсдан (хусусий ҳолда айланадан) иборат бўлиши мумкин. Масалан, Ер фокусларидан бирида Қуёш жойлашган эллипссимон орбита бўйлаб ҳаракатланади.

Импульс моментининг сақланиш қонуни. N та моддий нуқтадан ташкил топган системани текширайлик. 23-§ да қилганимиздек, нуқталарга таъсир этувчи кучларни ички ва ташқи кучларга ажратамиз. i-моддий нуқтага таъсир этувчи ички кучларнинг натижавий моментини $\mathbf{M}'_i$ символ билан, худди шу нуқтага таъсир этувчи ташқи кучларнинг натижавий моментини эса $\mathbf{M}_i$ символ билан белгилаймиз. У ҳолда (37.6) тенглама i-моддий нуқта учун қуйидаги кўринишига эга бўлади:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_i = \mathbf{M}'_i + \mathbf{M}_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Бу ифода бир-биридан i индекси билан фарқ қилувчи N та тенглама тўпламидан иборат. Бу тенгламаларни бир-бирига қўшиб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{M}'_i + \sum_{i=1}^{N}\mathbf{M}_i \tag{37.9}$$

Қуйидаги катталик

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^{N}[\mathbf{r}_i,\ \mathbf{p}_i] \tag{37.10}$$

моддий нуқталар системаси импульсининг моменти деб аталади.

Ички кучлар моментлари йиғиндиси [(37.9) формуланинг ўнг томонидан биринчи йиғинди] 36-§ нинг охирида кўрсатилганидек, нолга тенг. Демак, ташқи кучларнинг йиғинди моментини $\mathbf{M}$ символ билан белгилаб, қуйидаги тенгликни ёзишимиз мумкин:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{M}_i = \mathbf{M} \tag{37.11}$$

[бу формуладаги $\mathbf{L}$ ва $\mathbf{M}$ символлар (37.6) формуладаги худди шундай символларга қараганда бошқача маъноларга эга].

Моддий нуқталарнинг ёпиқ системаси учун $\mathbf{M} = 0$ бўлганлиги сабабли импульснинг йиғинди моменти $\mathbf{L}$ вақтга боғлиқ эмас. Шундай қилиб, импульс моментининг сақланиш қонунига келдик: *моддий нуқталар ёпиқ системасининг импульс моменти ўзгармайди.*

Шуни таъкидлаб ўтамизки, агар система жисмларига таъсир этувчи ташқи кучларнинг йиғинди моменти нолга тенг бўлса, ташқи кучлар таъсирида турган бундай система учун ҳам импульс моменти ўзгармайди.

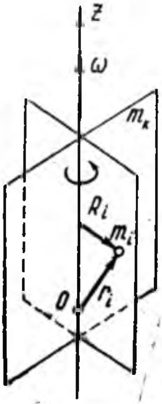
(37.11) тенгламаларнинг чап ва ўнг томонларида турган векторлардан уларнинг z ўқи бўйича ташкил этувчиларини олиб қуйидаги муносабатни топамиз:

$$\frac{d\mathbf{L}_z}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{M}_{zi} = \mathbf{M}_z, \tag{37.12}$$

Ташқи кучларнинг O нуқтага нисбатан натижавий моменти нолдан фарқли ($\mathbf{M} \neq 0$), бироқ $\mathbf{M}$ векторнинг бирор z йўналиш бўйича ташкил этувчиси $\mathbf{M}_z$ нолга тенг бўлиб қолиши мумкин. У вақтда (37.12) га биноан система импульси моментининг z ўқ бўйича ташкил этувчиси $\mathbf{L}_z$ сақланиб қолади.

38-§. Айланма ҳаракат динамикасининг асосий тенгламаси

Ҳар бири умумий z ўқ орқали ўтувчи текисликлардан бирортасиниг устида қола туриб бирор ҳаракат қила оладиган моддий нуқталар системасини текширайлик (99- расм). Ҳамма текисликлар бу ўқ атрофида бир хил $\bar{\omega}$ бурчак тезлик билан айлана олиши мумкин.



99- расм.

(11.5) формулага биноан i-нуқта тезлигининг тангенциал ташкил этувчиси қуйидаги кўринишда ёзилиши мумкин:

$$\mathbf{v}_{\tau i} = [\bar{\omega},\ \mathbf{R}_i],$$

бу ерда $\mathbf{R}_i$ — $\mathbf{r}_i$ радиус-векторнинг z ўққа перпендикуляр ташкил этувчиси (унинг $\mathbf{R}_i$ модули z ўқдан нуқтагача бўлган масофани беради). $\mathbf{v}_{\tau i}$ нинг бу қийматини (37.4) формулага қўйсак, нуқтанинг z ўққа нисбатан импульси моменти ифодасини топамиз:

$$\mathbf{L}_{zi} = m_i\ [\mathbf{R}_i, [\bar{\omega},\ \mathbf{R}_i]] = m_i R_i^2 \bar{\omega}$$

биз [(11.3) муносабатдан фойдаландик: $\mathbf{R}_i$ ва $\bar{\omega}$ векторлар ўзаро перпендикуляр].

Бу ифодани барча нуқталар бўйича қўшиб ва $\bar{\omega}$ умумий кўпайтмани йиғинди ишораси остидан чиқариб, система импульсининг z ўққа нисбатан моменти учун қуйидаги ифодани топамиз:

$$\mathbf{L}_z = \bar{\omega} \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2. \tag{38.1}$$

Моддий нуқталар массаларининг улардан z ўққача бўлган масофа квадратига кўпайтмалари йиғиндисига тенг ушбу

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2, \tag{38.2}$$

физикавий катталик моддий нуқталар системасининг z ўққа нисбатан инерция моменти дейилади (алоҳида олинган ҳар бир $m_i R_i^2$ қўшилувчи i-моддий нуқтанинг z ўққа нисбатан инерция моментидан иборат).

(38.2) ни ҳисобга олсак, (38.1) қуйидаги кўринишга келади:

$$\mathbf{L}_z = I_z\bar{\omega}. \qquad (38.3)$$

$\mathbf{L}_z$ нинг бу ифодасини (37.12) муносабатга қўйсак, айланма ҳаракат динамикасининг қуйидаги асосий тенгламасини топамиз:

$$\frac{d}{dt}(I_z\bar{\omega}) = \mathbf{M}_z. \qquad (38.4)$$

Бу тенглама шаклан Ньютон иккинчи қонунининг

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{f}$$

тенгламасига ўхшайди.

35-§ да биз абсолют қаттиқ жисмни ораларидаги масофалар ўзгармайдиган моддий нуқталар системаси деб қараш мумкин эканлигини айтиб ўтган эдик. Бундай система учун белгиланган қўзғалмас z ўққа нисбатан инерция моменти I_z ўзгармас катталикдир. Демак, (38.4) тенглама абсолют қаттиқ жисм учун қуйидаги тенгламага айланади:

$$I_z\bar{\beta} = \mathbf{M}_z, \qquad (38,5)$$

бу ерда $\bar{\beta} = \dot{\omega}$ — жисмнинг бурчак тезланиши $\mathbf{M}_z$ — жисмга таъсир этувчи ташқи кучларнинг натижавий моменти.

(38.5) тенглама шаклан

$$m\mathbf{w} = \mathbf{f}$$

тенгламага ўхшаш.

Айланма харакат динамикаси тенгламаларини илгариланма ҳаракат динамикаси тенгламалари билан солиштирсак, айланма харакатда куч ролини куч моменти, масса ролини эса инерция моменти ўйнашини ва шунга ўхшашларни (2-жадвал) осонгина пайқаб олишимиз мумкин.

2-жадвал

Илгариланма ҳаракат	Айланма ҳаракат
$m\mathbf{w} = \mathbf{f}$ $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}$ $\mathbf{f}$ — куч m — масса $\mathbf{v}$ — чизиқли тезлик $\mathbf{W}$ — чизиқли тезланиш $\mathbf{p}$ — импульс	$I_z\bar{\beta} = \mathbf{M}_z$ $\mathbf{L}_z = I_z\bar{\omega}$ $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$ $\mathbf{M}$ ёки $\mathbf{M}_z$ — куч моменти I_z — инерция моменти $\bar{\omega}$ — бурчак тезлик $\bar{\beta}$ — бурчак тезланиш $\mathbf{L}$ — импульс моменти

Куч моменти ва инерция моменти тушунчаларини биз қаттиқ жисмнинг айланишини текширишга асосланиб киритган эдик. Бироқ бу катталиклар айланишга алоқадор бўлмаган ҳолда мавжуд. Масалан, исталган жисм, у айланмоқдами ёки тинч турибдими, бундан қатъи назар (худди жисм ўзининг ҳаракат ҳолатига боғлиқ бўлмаган равишда маълум массага эга бўлгани каби) исталган ўққа нисбатан маълум инерция моментига эга бўлади. Куч моменти ҳам, момент қайси ўққа нисбатан олинаётган бўлса, ўша ўқ атрофида айланмоқдами ёки йўқми, бундан қатъи назар мавжуд бўлади. Кейинги ҳолда текширилаётган кучнинг моменти афтидан, жисмга таъсир кўрсатаётган бошқа кучлар билан мувозанатлашади.

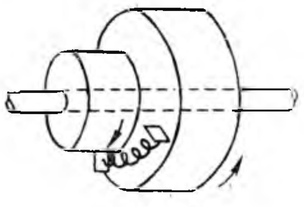
(38.5) тенгламадан барча ташқи кучларнинг натижавий моменти нолга тенг бўлганда жисм ўзгармас бурчак тезлик билан айланади. деган хулоса чиқади. Агар жисмнинг инерция моменти жисмнинг алоҳида қисмларининг ўзаро вазияти ўзгариши ҳисобига ўзгара олса, $\mathbf{M}_z = 0$ бўлганда $I_z\omega$ кўпайтма ўзгармай қолади [(38.4) га қаранг] ва I_z инерция моментининг ўзгариши ω бурчак тезликни тегишли равишда ўзгаришига олиб келади. Айланаётган курсида турган одам қулочини ёзган вақтда секинроқ айлана бошлайди, қўлларини кўкрагига босганда эса секинроқ. бу ҳодисани худди ана шу қонуният билан тушунтирилади.

Умумий айланиш ўқига эга бўлган иккита дискдан иборат системани текширайлик (100- расм). Дискларнинг махсус ясалган дўнг жойлари орасига сиқилган пружина жойлаштириб, уларни ип билан боғлаб қўямиз. Агар ипни ёқиб юборсак, у ҳолда нормал ҳолатига қайтаётган пружина таъсирида иккала диск қарама-қарши томонларга қараб айлана бошлайди. Дисклар олган импульс моментлари катталик жиҳатдан тенг ва йўналиш жиҳатдан қарама-қарши бўлади:

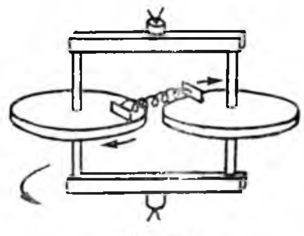
$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2.$$

Шу сабабли система импульсининг йиғинди моменти аввалгидек нолга тенглигича қолади.

Симметрия ўқи атрофида эркин айлана оладиган рамага ўқлари устма-уст тушмайдиган қилиб ўрнатилган дисклардан иборат 101-расмда тасвирланган системада ҳам аҳвол шунга ўхшаш бўлади. Агар дискларнинг дўнгликлари орасига ўрнатилган пружинани



100- расм.



101- расм.

сиқиб тортиб турувчи ипни ёқиб юборсак, дисклар айланма ҳаракатга келади, бунда бу дисклар бир томонга қараб айланишини кўриш мумкин. Дисклар билан бир вақтда рама қарама-қарши томонга қараб айланади ва натижада системанинг тўла импульс моменти нолга тенглигича қолади.

Юқорида кўриб ўтилган иккала мисолда ҳам система алоҳида қисмларнинг айланиши ички кучлар таъсири остида юзага келди. Демак, системанинг қисмлари орасида таъсир этувчи кучлар системанинг алоҳида қисмларининг импульс моментларини ўзгартира олиши мумкин эди. Бироқ бу ўзгаришлар доим шундай юз берадики, системанинг йиғинди импульси моменти ўзгаришсиз қолади. Системанинг тўла импульс моменти фақат ташқи кучлар таъсири остидагина ўзгариши мумкин холос.

39- §. Инерция моменти

Аввалги параграфда инерция моменти элементар массаларнинг улардан ўққача бўлган масофанинг квадратига кўпайтмаларининг йиғиндиси сифатида таърифланган эди [(38.2) га қаранг]. Таърифдан инерция моменти аддитив катталикдир, деган хулоса чиқади. Бу эса жисмнинг инерция моменти унинг қисмлари инерция моментларининг йиғиндисига тенг эканлигини билдиради.

Жисм ичидаги массанинг тақсимланишини зичлик деган катталик ёрдамида характерлаш мумкин. Агар жисм бир жинсли бўлса, яъни унинг хоссаси барча нуқталарида бир хил бўлса, у ҳолда

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{39.1}$$

га тенг бўлган катталик зичлик дейилади, бу ерда m — жисмнинг массаси, V эса унинг ҳажми. Шундай қилиб, бир жинсли жисм учун зичлик жисмнинг ҳажм бирлигидаги массасидан иборат экан.

Массаси нотекис тақсимланган жисм учун (39.1) ифода зичликнинг ўртача қийматини беради. Бундай ҳолда берилган нуқтадаги зичлик қуйидагича ёзилади:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \tag{39.2}$$

Бу ифодада Δm — лимитга ўтганда зичлик аниқланаётган нуқтага қараб тортиладиган ΔV ҳажмдаги масса.

(39.2) да лимитга ўтишни ΔV нинг чиндан бир нуқтага қараб тортилишидан иборат деб тушуниш нотўғри бўлади. Бундай тушунганда бири атом ядросига тўғри келган, иккинчиси ядролар оралиғига тўғри келган иккита деярли устма-уст тушувчи нуқталар учун жуда катта фарқ қилувчи натижа (биринчи нуқта учун жуда катта қиймат, иккинчиси учун ноль) келиб чиқар эди. Шунинг учун ΔV ни физикавий чексиз кичик ҳажм ҳосил бўлгунга қадар кичрайтириш керак. Физикавий чексиз кичик ҳажм деганда бир томондан унинг доирасида макроскопик (яъни кўп миқдордаги атомларга хос) хоссаларни бир хил деб ҳисобласа бўладиган даражада етарлича кичик, иккинчи томонда эса модданинг дискретлиги (узлуклилиги) сезилмайдиган даражада етарлича катта деб ҳисобласа бўладиган ҳажм тушунилади.

(39.2) га биноан Δm_i элементар масса берилган нуқтадаги ρ жисм зичлигининг тегишли ΔV_i элементар ҳажмга кўпайтмасига тенг:

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i.$$

Демак, инерция моментини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$I = \sum \rho_i r_i^2 \Delta V_i \tag{39.3}$$

[биз (38.2) формуладаги R_i ни r_i билан алмаштирдик].

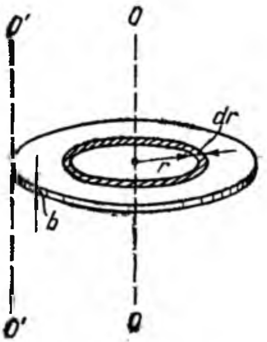
Агар жисмнинг зичлиги ўзгармас бўлса, уни йиғинди ишораси остидан чиқариш мумкин:

$$I = \rho \sum r_i^2 \Delta V_i. \tag{39.4}$$

(39.3) ва (39.4) муносабатлар тахминий бўлиб, элементар ҳажмлар ва уларга мос элементар Δm_i массалар қанча кичик бўлса, шунча аниқлаша боради. Демак, инерция моментларини топиш вазифаси интеграллашдан иборат экан:

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV. \tag{39.5}$$

(39.5) даги интеграллар жисмнинг бутун ҳажми бўйлаб олинади. Бу интегралларда ρ ва r катталиклар нуқтанинг, масалан, x, y ва z декарт координатларнинг функциясидир.



102- расм.

Мисол сифатида бир жинсли дискнинг унинг текислигига перпендикуляр ва марказидан ўтувчи ўққа нисбатан инерция моментини топайлик (102- расм). Дискни dr қалинликдаги ҳалқасимон қатламларга бўлиб чиқамиз. Бундай битта қатламнинг барча нуқталари ўқдан бир хил r га тенг бўлган масофада ётади. Бундай қатламнинг ҳажми

$$dV = b 2\pi r dr,$$

бу ерда b — дискнинг қалинлиги.

Диск бир жинсли бўлганлиги учун, унинг зичлиги барча нуқталарда бир хил бўлади ва демак, ρ ни (39.5) да интеграл ишорасидан ташқарига чиқариш мумкин:

$$I = \rho \int r^2 dV = \rho \int_0^R r^2 b 2\pi r dr,$$

бу ерда R — дискнинг радиуси. Ўзгармас кўпайтувчи $2\pi b$ ни интеграл белгиси остидан ташқарига чиқарамиз:

$$I = 2\pi b\rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi b\rho \frac{R^4}{4}.$$

Ниҳоят, ρ зичликнинг дискнинг $b\pi R^2$ ҳажмига кўпайтмасига тенг бўлган дискнинг m массасини киритиб қуйидагини топамиз:

$$I = \frac{mR^2}{2}. \qquad (39.6)$$

Қараб чиқилган мисолда жисм бир жинсли ва симметрик бўлганлиги ҳамда инерция моментини биз симметрия ўқига нисбатан қидирганимиз сабабли инерция моментини топиш анча осонлашади. Агар, биз дискнинг, масалан, дискка перпендикуляр бўлган ва унинг қиррасидан ўтган $O'O'$ ўққа нисбатан инерция моментини топмоқчи бўлганимизда ҳисоблашлар равшанки, анча мураккаблашган бўлар эди (102-расмга қаранг). Бундай ҳолларга агар Штейнер теоремасидан фойдаланилса, инерция моментини топиш анча енгиллашади. Штейнер теоремаси қуйидагича таърифланади: *исталган ўққа нисбатан инерция моменти I шу ўққа параллел бўлган ва жисмнинг инерция маркази орқали ўтувчи ўққа нисбатан инерция моменти I_0 билан жисмнинг m массасининг ўқлар орасидаги a масофа квадратига кўпайтмасининг йиғиндисига тенг:*

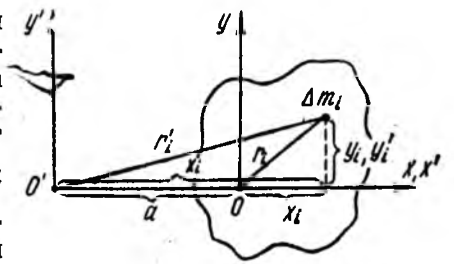
$$I = I_0 + ma^2. \qquad (39.7)$$

Штейнер теоремасига биноан дискнинг $O'O'$ ўққа нисбатан инерция моменти дискнинг маркази орқали ўтувчи ўққа нисбатан биз топган инерция моменти билан mR^2 нинг ($O'O'$ ва OO ўқлар орасидаги масофа дискнинг R радиусига тенг) йиғиндисига тенг:

$$I = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2.$$

Шундай қилиб, Штейнер теоремаси аслида исталган ўққа нисбатан инерция моментини ҳисоблашни жисмнинг инерция маркази орқали ўтувчи ўққа нисбатан инерция моментини ҳисоблашга келтирар экан.

Штейнер теоремасини исботлаш учун исталган шаклдаги жисм оламиз (103-расм). Иккита бир-бирига параллел OO ва $O'O'$ ўқларини олайлик. Бу ўқлардан бири (OO ўқ) жисмнинг инерция маркази орқали ўтсин. Бу ўқлар билан xyz ва $x'y'z'$ координаталар ўқларини боғлаймиз. Бу координата ўқларини шундай танлаб оламизки, z ўқ



103-расм.

OO ўқ билан, z' ўқ эса $O'O'$ ўқ билан устма-уст тушсин (103-расмда бу ўқлар расм текислигига перпендикуляр йўналган). Ундан ташқари x ва x' ўқларни улар бир-бирига устма-уст тушадиган ва жисмнинг инерция маркази орқали ўтадиган қилиб танлаб оламиз. У вақтда Δm_i элементар массаларнинг координаталари орасида қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$x'_i = a + x_i; \quad y'_i = y_i,$$

бу ерда a — ўқлар орасидаги масофа.

Δm_i дан OO ўққача масофанинг квадрати

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2, \tag{39.8}$$

$O'O'$ ўққача бўлган масофа квадрати эса

$$r_i'^2 = x_i'^2 + y_i'^2 = (x_i + a)^2 + y_i^2. \tag{39.9}$$

(39.8) ни ҳисобга олганда жисмнинг OO ўққа нисбатан инерция моменти қуйидагича ифодаланади:

$$I_0 = \sum r_i^2 \Delta m_i = \sum (x_i^2 + y_i^2) \Delta m_i. \tag{39.10}$$

$O'O'$ ўққа нисбатан инерция моменти эса [(39.9) ни ҳисобга олганда]

$$I = \sum r_i'^2 \Delta m_i = \sum [(a + x_i)^2 + y_i^2] \Delta m_i. \tag{39.11}$$

Кичик қавслар ичидаги ифодани квадратга кўтариб ва ҳосил бўлган қўшилувчиларни мос равишда группалаб (39.11) ифодани қуйидаги кўринишга келтириш мумкин:

$$I = \sum (x_i^2 + y_i^2) \Delta m_i + a^2 \sum \Delta m_i + 2a \sum x_i \Delta m_i. \tag{39.12}$$

(39.12) даги йиғиндилардан биринчиси (39.10) га айнан тенг, яъни I_0 дан иборат; иккинчи йиғинди ma^2 ни беради; учинча йиғинди эса, кўриниб турибдики, нолга тенг. Ҳақиқатан ҳам z ўқ жисмнинг инерция маркази орқали ўтганлиги учун инерция марказининг x_c координатаси нолга тенг. Шу билан бирга таърифга биноан $x_c = \frac{1}{m} \sum x_i \Delta m_i$, бундан $\sum x_i \Delta m_i$ нолга тенг деган хулоса чиқади.

Шундай қилиб, (39.12) ифода қуйидаги кўринишга келади:

$$I = I_0 + ma^2,$$

худди шуни исботлаш талаб қилинган эди [(39.7) га қаранг].

Энди баъзи жисмлар учун (жисмлар бир жинсли деб фараз қилинади, m — жисмнинг массаси) инерция моментларининг қийматларини келтириб ўтамиз.

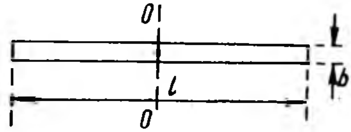
1. Жисм кесими ихтиёрий шаклга эга бўлган ингичка узун стержендан иборат. Стерженнинг кўндаланг ўлчами b стерженнинг l узунлигидан анча кичик ($b \ll l$). Стерженга перпендикуляр бўлган

ва унинг қоқ ўртасидан ўтган ўққа (104- расм) нисбатан инерция моменти қуйидагига тенг:

$$I = \frac{1}{12}ml^2.$$

2. Диск ёки цилиндр учун R нинг l га нисбатан исталган қийматда бўлганда (105- расм), цилиндрнинг геометрик ўқи билан устма-уст тушувчи ўққа нисбатан инерция моменти қуйидагига тенг:

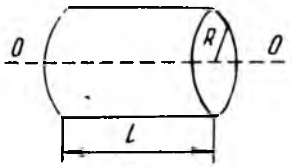
$$I = \frac{1}{2}mR^2.$$



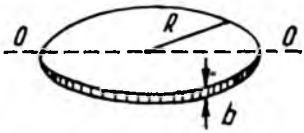
104- расм.

3. Жисм юпқа дискдан иборат. Дискнинг қалинлиги b дискнинг R радиусидан кўп марта кичик ($b \ll R$). Дискнинг диаметри билан устма-уст тушувчи ўққа нисбатан инерция моменти қуйидагига тенг (106- расм).

$$I = \frac{1}{4}mR^2.$$



105- расм.



106- расм.

4. R радиусли шарнинг унинг маркази орқали ўтувчи ўққа нисбатан инерция моменти қуйидагига тенг:

$$I = \frac{2}{5}mR^2.$$

40- §. Қаттиқ жисмнинг кинетик энергияси

Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофида айланиши. Жисм биз z ўқ деб ном берган қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган бўлсин. Δm_i массанинг чизиқли тезлиги қуйидаги кўринишда ёзилиши мумкин:

$$v_i = R_i\omega,$$

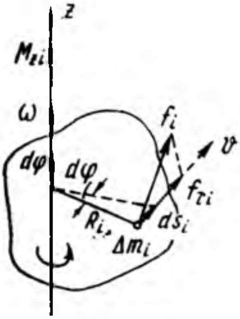
бу ерда R_i — z ўқдан Δm_i гача бўлган масофа. Демак, i- элементар массанинг кинетик энергияси қуйидагига тенг:

$$\Delta T_i = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2}\Delta m_i R_i^2\ \omega^2.$$

Жисмнинг кинетик энергияси унинг қисмлари кинетик энергияларидан ташкил топади:

$$T = \sum \Delta T_i = \frac{1}{2}\omega^2 \sum \Delta m_i R_i^2.$$

Бу муносабатнинг ўнг томонидаги йиғинди жисмнинг айланиш ўқига нисбатан I_z инерция моментидан иборат. Шундай қилиб, қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган жисмнинг кинетик энергияси қуйидагига тенг экан:



107- расм.

$$T = \frac{I_z\omega^2}{2}. \qquad (40.1)$$

Топилган ифода илгариланма ҳаракатланаётган жисм кинетик энергиясининг $T = \frac{mv^2}{2}$ ифодасига ўхшайди. Айланма ҳаракатда масса ролини инерция моменти, чизиқли тезлик ролини эса бурчак тезлик - ўйнайди.

Қаттиқ жисм айланган вақтда ташқи кучларнинг бажарган иши. Жисм қўзғалмас z ўқ атрофида айланган вақтда ташқи кучлар бажарган ишни топайлик. Элементар Δm_i массага қўйилган ташқи кучни $\mathbf{f}_i$ билан белгилаймиз: dt вақт ичида i- элементар масса

$$ds_i = R_i d\varphi$$

йўлни ўтади (107- расм), бу ерда $d\varphi$ — dt вақт ичида жисм бурилган бурчак.

Бу йўлда $\mathbf{f}_i$ куч бажарган иш кучнинг кўчиш йўналишига проекцияси (уни $\mathbf{f}_{\tau i}$ символ билан белгилаймиз) билан белгиланади (τ—элементар масса ҳаракатланаётган айланага ўтказилган уринманинг бирлик вектори; бу векторнинг йўналиши берилган моментдаги кўчиш йўналиши билан устма-уст тушади). Шундай қилиб,

$$dA_i = f_{\tau i} ds_i = f_{\tau i} R_i d\varphi.$$

Бироқ $f_{\tau i}R_i$ катталик $\mathbf{f}_i$ кучнинг z ўққа нисбатан моментининг, яъни $[\mathbf{M}_{zi}]$ модулига тенг: агар мусбат бўлса, «+» ишора билан, агар $f_{\tau i}$ манфий бўлса, «—» ишора билан олинади. (36.10) формулага қаранг; (бу формулада f_τ — проекция эмас, балки f_τ кучининг модулидир). Демак,

$$dA_i = \pm |\mathbf{M}_{zi}| d\varphi. \qquad (40.2)$$

Элементар бурилиш бурчагини аксиал вектор деб қараш мумкин:

$$d\bar{\varphi} = \bar{\omega} dt.$$

dA_i иш агар $\mathbf{M}_{zi}$ ва $d\bar{\varphi}$ билан бир хил йўналганда мусбат ва агар $\mathbf{M}_{zi}$ ва $d\bar{\varphi}$ векторларнинг йўналишлари қарама-қарши бўлса, манфий бўлишини билиб олиш қийин эмас. Шунинг учун (40.2) формулага қуйидагича кўриниш бериш мумкин:

$$dA_i = \mathbf{M}_{zi} d\bar{\varphi}.$$

Жисмга қўйилган барча кучларнинг иши айрим кучлар бажарган ишларнинг йиғиндисига тенг:

$$dA = \sum dA_i = \sum \mathbf{M}_{zi}\, d\bar{\varphi} = \left(\sum \mathbf{M}_{zi}\right) d\bar{\varphi}.$$

Қавс ичида турган йиғинди жисмга қўйилган барча ташқи кучларнинг айланиш ўқига нисбатан натижавий M_z моментини беради. Демак,

$$dA = \mathbf{M}_z d\bar{\varphi}^1. \tag{40.3}$$

Бу ифода илгариланма ҳаракат вақтидаги ишнинг $dA = \mathbf{f} d\mathbf{s}$ ифодасига ўхшайди. Таққослашлар шуни кўрсатадики, айланиш учун куч ролини куч моменти, чизиқли $d\mathbf{s} = \mathbf{v}dt$ кўчиш ролини эса бурчак кўчиш $d\bar{\varphi} = \bar{\omega}dt$ ўйнар экан.

Амалда ишни ҳисоблаш учун қуйидаги

$$dA = M_\omega d\varphi = M_\omega \omega dt \tag{40.4}$$

ифодадан фойдаланилади, бу ерда $\mathbf{M}_\omega$ деб жисмга қўйилган барча ташқи кучлар натижавий моментининг $\bar{\omega}$ вектор йўналишига проекцияси тушунилади. Чекли вақт оралиғи ичидаги иш (40.4) ифодани интеграллаш орқали топилади:

$$A = \int dA = \int_0^\varphi M_\omega d\varphi = \int_0^t M_\omega \omega dt. \tag{40.5}$$

Агар кучлар натижавий моментининг $\bar{\omega}$ йўналишга проекцияси ўзгармаса, у вақтда уни интеграл ишорасидан ташқарига чиқариш мумкин:

$$A = M_\omega \int_0^\varphi d\varphi = M_\omega \varphi. \tag{40.6}$$

(φ — жисм t вақт ичида бурилган бурчак.)

Жисмнинг ясси ҳаракат вақтидаги кинетик энергияси. Биз 34-§ да жисмнинг ясси ҳаракатини иккита ҳаракат — бирор $\mathbf{v}_0$ тезликли илгариланма ҳаракат ва тегишли ўқ атрофида айланма ҳаракат йиғиндиси сифатида тасаввур қилиш мумкин эканлигини кўрган эдик. Жисм билан K' координата системасини боғлаб, унинг z' ўқини жисмнинг айланиш бурчак тезлиги вектори $\bar{\omega}$ бўйлаб йў-

---

[1] Элементар массаларга қўйилган ички $\mathbf{f}'_i$ кучлар учун ҳам шундай мулоҳазаларни такрорласак, биз қуйидаги $dA = \mathbf{M}'_z d\bar{\varphi}$, формулани топамиз, бу ерда $\mathbf{M}'_z$ — барча ички кучларнинг натижавий моменти. Бу момент биз биламизки, нолга тенг (36-§ нинг сўнгги абзацига қаранг). Демак, жисм айланган вақтда ички кучларнинг йиғинди иши нолга тенг экан.

налтирамиз. (33.13) формулага биноан жисмнинг i-элементар массасининг қўзғалмас K координата системасидаги тезлигини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + [\bar{\omega},\ \mathbf{r}'_i],$$

бу ерда $\mathbf{v}_0$ — K' система координата боши O' нинг тезлиги, $\mathbf{r}'_i$ — элементар массанинг O' нуқтага нисбатан вазиятини белгиловчи радиус-вектори.

i-элементар массанинг кинетик энергияси[1]

$$\Delta T_i = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2}\Delta m_i \{\mathbf{v}_0 + [\bar{\omega},\ r'_i]\}^2.$$

Квадратга кўтариш амалини бажарсак:

$$\Delta T_i = \frac{1}{2}\Delta m_i\{v_0^2 + 2\mathbf{v}_0[\bar{\omega},\ \mathbf{r}'_i] + [\bar{\omega},\ r'_i]^2\}. \qquad (40.7)$$

$\bar{\omega}$ нинг $\mathbf{r}'_i$ га вектор кўпайтмани $\bar{\omega}$ нинг $\mathbf{r}_i$ радиус-векторнинг z' ўққа перпендикуляр ташкил этувчиси $\mathbf{R}_i$ га кўпайтмаси билан алмаштириш мумкин эканлигини биламиз [(11.4) формулага ва ундан кейинги текстга қаранг]. Бу вектор кўпайтманинг модули ωR_i га тенг (чунки $\bar{\omega}$ билан $\mathbf{R}_i$ ўзаро перпендикуляр).

Демак, $[\bar{\omega},\ \mathbf{r}'_i]^2 = \omega^2 R_i^2$. Бу ифодани (40.7) га қўямиз ва ΔT_i нинг барча элементар массалари бўйича йиғиндисини оламиз. Натижада биз жисмнинг кинетик энергиясини топамиз:

$$T = \frac{1}{2}\sum \Delta m_i v_0^2 + \sum \mathbf{v}_0[\bar{\omega},\ \Delta m_i \mathbf{r}'_i] + \frac{1}{2}\sum \omega^2 \Delta m_i R_i^2.$$

Ҳамма ҳаддаги ўзгармас катталикларни йиғинди ишораси остидан чиқарамиз:

$$T = \frac{1}{2}v_0^2 \sum \Delta m_i + \mathbf{v}_0\left[\bar{\omega},\ \sum \Delta m_i \mathbf{r}'_i\right] + \frac{1}{2}\omega^2 \sum \Delta m_i R_i^2$$

(иккинчи қўшилувчини ўзгартираётганда биз тенгликнинг ўнг томонида вектор ва скаляр кўпайтмаларнинг дистрибутивлигидан фойдаландик).

Элементар массаларнинг йиғиндиси $\sum \Delta m_i$ жисмнинг m массасидан иборат. $\sum \Delta m_i \mathbf{r}'_i$ ифода жисм массасининг жисм инерция

---

[1] Векторнинг квадрати унинг модулининг квадратига тенг: $\mathbf{v}_i^2 = v_i^2$ эканлигини эслатиб ўтамиз.

марказининг K' системадаги $\mathbf{r}'_c$ радиус-векторига кўпайтмасига тенг [(23.1) формулага қаранг]. Ниҳоят, $\sum \Delta m_i R_i^2$ жисмнинг z' айланиш ўқига нисбатан I_z инерция моментини беради. Шунинг учун

$$T = \frac{mv_0^2}{2} + \mathbf{v}_0[\overline{\omega},\ m\mathbf{r}'_c\,] + \frac{I_z\omega^2}{2}. \qquad (40.8)$$

O' нуқта сифатида жисмнинг C инерция марказини олсак, яъни K' координаталар системаси бошини C нуқтага жойлаштирсак, бу ифодани соддалаштиришимиз мумкин. Бу ҳолда $\mathbf{r}'_c = 0$ бўлганлиги учун иккинчи қўшилувчи йўқ бўлиб кетади. Шунинг учун $\mathbf{v}_c$ билан инерция маркази тезлигини, I_c билан эса C нуқта орқали ўтувчи айланиш ўқига нисбатан жисмнинг инерция моментини белгилаб, жисмнинг кинетик энергияси учун қуйидаги формулани топамиз:

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}. \qquad (40.9)$$

Шундай қилиб, ясси ҳаракатда жисмнинг кинетик энергияси инерция марказининг тезлигига тенг тезлик билан содир бўлувчи илгариланма ҳаракат энергияси билан жисмнинг инерция маркази орқали ўтувчи ўқ атрофида айланиш энергиясидан ташкил топар экан.

41-§. Қаттиқ жисм динамикаси қонунларининг қўлланилиши

Аввалги параграфларда аниқланганидек, қаттиқ жисмнинг ҳаракати иккита тенгламани қаноатлантиради [(35.5) ва (38.5) ларга қаранг]:

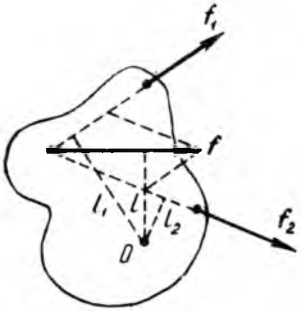
$$m\mathbf{w}_c = \sum \mathbf{f}_i, \qquad (41.1)$$

$$\mathbf{I}_\beta = \sum \mathbf{M}_i. \qquad (41.2)$$

Демак, жисмнинг ҳаракати жисмга таъсир этувчи ташқи кучлар ва бу кучларнинг $\mathbf{M}_i$ моментлари билан белгиланар экан. Кучлар моментини исталган қўзғалмас ёки тезланишсиз ҳаракатланувчи ўққа (I инерция моментини ҳам худди ўша ўққа) нисбатан олиш мумкин. Агар ташқи кучларнинг тезланиш билан ҳаракатланаётган ўққа нисбатан олганимизда биз аслида ноинерциал саноқ системада (41.2) тенгламани ёзган бўлар эдик. Бу ҳолда жисмга қўйилган ташқи кучлардан ташқари инерция кучларини ва уларнинг моментларини ҳам ҳисобга олиш керак.

Жисмга таъсир этувчи $\mathbf{f}_i$ кучларнинг қўйилиш нуқталарини уларнинг таъсир чизиқлари бўйлаб кўчириш мумкин, чунки бунда $\sum \mathbf{f}_i$ йиғинди ҳам ва $\mathbf{M}_i$ момент ҳам ўзгармайди (кучни унинг таъсир чизиғи бўйлаб кўчирганда исталган нуқтага нисбатан елка ўзгармайди). Ана шундай кўчиришлар орқали бир неча кучни уларнинг жисмнинг ҳаракатига кўрсатаётган таъсири нуқтаи назаридан уларга эквивалент бўлган битта куч билан алмаштириш мумкин. Масалан, бир текисликда ётган иккита $\mathbf{f}_1$ ва $\mathbf{f}_2$ кучни (108- расм) қўйилиш нуқтасини ўзи таъсир этаётган чизиқ бўйлаб ихтиёрий танлаб олса бўладиган эквивалент $\mathbf{f}$ куч билан алмаштириш мумкин.

Жисмга таъсир этаётган параллел кучларни уларнинг тенг таъсир этувчиси билан алмаштириш мумкин. Бу тенг таъсир этувчи барча кучларнинг йиғиндисига тенг бўлиши ва шу билан бирга жисмнинг шундай нуқтасига қўйилиши керакки, бу нуқтанинг моменти алоҳида кучлар моментларининг йиғиндисига тенг бўлсин.



108- расм.

Оғирлик кучининг тенг таъсир этувчисини топайлик. Оғирлик кучи қаттиқ жисмнинг барча элементларига қўйилган бўлиб, Δm_i элементар массага $\Delta m_i \mathbf{g}$ га тенг куч таъсир кўрсатади. Бу кучларнинг йиғиндиси $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ га тенг. Оғирлик кучларининг исталган O нуқтага нисбатан йиғинди моменти

$$\mathbf{M} = \sum [\mathbf{r}_i, (\Delta m_i \mathbf{g})],$$

бу ерда $\mathbf{r}_i - \Delta m_i$ нинг вазиятини O нуқтага нисбатан аниқловчи радиус-вектор. Скаляр кўпайтувчи Δm_i ни иккинчи кўпайтувчидан биринчисига ўтказиб ва умумий кўпайтувчи $\mathbf{g}$ ни йиғинди белгиси остидан чиқариб қуйидагини топамиз:

$$\mathbf{M} = [(\sum \Delta m_i \mathbf{r}_i), \mathbf{g}].$$

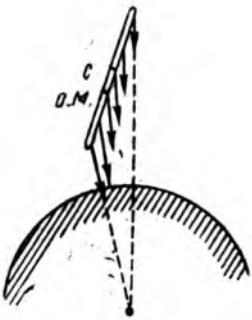
Бироқ кичик қавс ичида турган йиғинди жисмнинг m массасининг C инерция маркази радиус-вектори $\mathbf{r}_c$ га кўпайтмасига тенг. Шунинг учун

$$\mathbf{M} = [(m\mathbf{r}_c), \mathbf{g}] = [\mathbf{r}_c, (m\mathbf{g})] = [\mathbf{r}_c, \mathbf{P}], \tag{41.3}$$

яъни оғирлик кучининг исталган нуқтага нисбатан йиғинди моменти C нуқтага қўйилган $m\mathbf{g}$ кучнинг моментига айнан ўхшар экан.

Шундай қилиб, оғирлик кучларининг тенг таъсир этувчиси $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ га тенг бўлиб, жисмнинг инерция марказига қўйилар экан.

(41.3) дан оғирлик кучларининг инерция марказига нисбатан моменти нолга тенг деган хулоса чиқади (бу ҳолда $\mathbf{r}_c = 0$). Қайси нуқтага нисбатан оғирлик кучларининг моменти нолга тенг бўлса, ўша нуқта жисмнинг оғирлик маркази дейилади. 23- § да қайд қилиб ўтганимиздек, жисмнинг оғирлик маркази унинг инерция маркази билан устма-уст тушади. Тўғри, фақат тортишиш кучи майдонини берилган жисм чегарасида бир жинсли деб ҳисоблаш мумкин бўлган ҳолларда, яъни турли элементар массаларга қўйилган кучлар бир хил йўналган ва массага пропорционал бўлган ҳоллардагина бу фикр тўғри бўлади. Бу шарт ўлчамлари Ер шарининг ўлчамларига қараганда анча кичик бўлган жисмлар учунгина бажарилади. Агар ўлчамлар Ернинг ўлчамларига яқин бўлса, умуман айтганда, оғирлик маркази билан инерция маркази устма-уст тушмайди. Буни оддий бир мисолда тушунтирайлик. Бир жинсли узун стержень Ерга яқин жойда турган бўлсин (109- расм). Стержень расмда кўрсатилганидек вазиятда турганда унинг турли элементларига қўйилган тортилиш кучлари тахминан параллел бўлади. Тенг элементларга қўйилган кучларнинг катталиги Ердан узоқлашган сари $1/r^2$ (r — Ер марказидан элементгача бўлган масофа) қонуният билан ўзгаради. Маълумки, бу ҳолда оғирлик маркази инерция марказига нисбатан стерженнинг Ерга яқинроқ учига қараб кўчган бўлади.



109- расм.

Инерциал системага нисбатан илгариланма ҳаракатланаётган ноинерциал саноқ системада жисмнинг ҳаракатини текшириш вақтида киритиладиган инерция кучлари ҳам худди оғирлик кучининг куч майдони бир жинсли бўлган ҳолдаги хоссаларига ўхшаш хоссаларга эга бўлади. Ҳақиқатан ҳам Δm_i элементар массаларга қўйилган инерция кучлари $-\Delta m_i \mathbf{w}_0$ га тенг, яъни бир хил йўналган ва массага пропорционал (илгариланма ҳаракатланаётган ноинерциал системанинг барча нуқталари учун $\mathbf{w}_0$ бир хил) бўлади. Бизни (41.3) формулага олиб келган мулоҳазаларни такрорлаб, натижавий инерция кучи $-m\mathbf{w}_0$ га тенг (m — жисмнинг массаси) ва инерция марказига қўйилган эканлигини кўрсатиш мумкин.

Илгариланма ҳаракатланувчи ноинерциал саноқ система билан боғланган ва жисмнинг инерция маркази орқали ўтувчи (яъни жисм инерциал системада илгариланма ҳаракатланаётган ўққа нисбатан) инерция кучлари моменти нолга тенг (бу ҳолда натижавий инерция кучлари инерция марказига қўйилган эканлигини биз кўрган эдик). Шунинг учун (41.2) тенгламани инерция кучларини ҳисобга олмай ана шундай ўққа нисбатан ёзиш мумкин. Яна бир бор таъкидлаб ўтамизки, фақат инерция маркази орқали ўтувчи ва инерциал саноқ системага нисбатан ўз йўналишини ўзгартирмайдиган (бурилмайдиган) ўққа нисбатангина ана шундай қилиш мумкин. Ясси ҳаракат учун инерция маркази орқали ўтувчи ва ҳаракат содир бўлаётган текисликка перпендикуляр йўналган ўқ ана шундай ўқ ҳисобланади.

Қаттиқ жисмнинг мувозанати шартлари. Маълумки, илгариланма ҳаракатни ёки айланишни юзага келтирувчи сабаблар бўлмасагина, жисм тинч ҳолатда туриши мумкин. Бунинг учун (41.1) ва (41.2) ларга биноан қуйидаги иккита шарт бажарилиши зарур ва етарли ҳисобланади:

1) жисмга қўйилган барча ташқи кучларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлиши керак:

$$\sum \mathbf{f}_i = 0, \tag{41.4}$$

2) ташқи кучларнинг исталган қўзғалмас ўққа нисбатан натижавий моменти нолга тенг бўлиши керак:

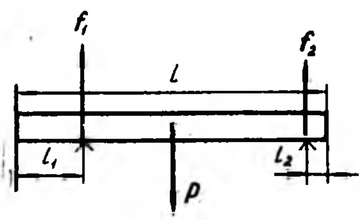
$$\sum \mathbf{M}_i = 0. \tag{41.5}$$

Амалда (41.5) шарт бир текисликда ётмаган учта исталган қўзғалмас ўқлар (масалан, x, y ва z координата ўқлари) учун бажарилса, шунинг ўзи кифоя экан. Бунда у исталган бошқа ўқ учун ҳам бажарилаверади.

(41.4) ва (41.5) муносабатлар қаттиқ жисмнинг мувозанат шартларининг ўзгинасидир.

Қаттиқ жисм механикаси қонунларининг қўлланилишига мисоллар

1- мисол. Бир жинсли тўсин иккита таянчда ётибди (110- расм). Таянчларнинг $\mathbf{f}_1$ ва $\mathbf{f}_2$ реакция кучларини топинг.



110- расм.

Оғирлик кучларининг тенг таъсир этувчиси $\mathbf{P}$ га тенг бўлиб, инерция марказига қўйилган. Тўсин қўзғалмас, шунинг учун (41.4) га биноан $\mathbf{P}$, $\mathbf{f}_1$ ва $\mathbf{f}_2$ кучларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлиши керак. Бундан қуйидаги муносабат келиб чиқади:

$$P = f_1 + f_2,$$

бу ерда P, f_1 ва f_2 — ташкил этувчи кучларнинг модуллари.

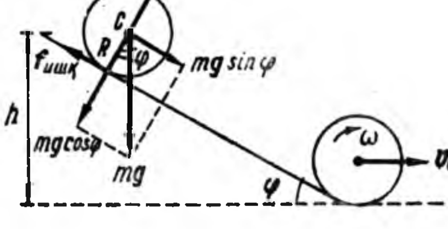
Тўсинга таъсир этувчи барча кучларнинг исталган ўққа нисбатан натижавий моменти ҳам, хусусан, чап томондаги таянч нуқтасига нисбатан моменти нолга тенг бўлиши керак [(41.5) га қаранг]. Бундан

$$P\left(\frac{l}{2} - l_1\right) = f_2(l - l_1 - l_2).$$

Биз f_1 ва f_2 номаълумли иккита тенгламага эга бўлдик. Энди уларни ечиб, қуйидагиларни топамиз:

$$f_1 = \frac{P}{2}\,\frac{l - 2l_2}{l - (l_1 + l_2)}; \quad f_2 = \frac{P}{2}\,\frac{l - 2l_1}{l - (l_1 + l_2)}.$$

2- мисол. Радиуси R га ва массаси m га тенг бўлган бир жинсли цилиндр қия текислик бўйлаб ишқаланишсиз думаланиб тушмоқда. Текисликнинг қиялик бурчаги φ га (111- расм), баландлиги эса h га тенг бўлсин ($h \gg R$). Цилиндрнинг бошланғич тезлиги нолга тенг. Цилиндрнинг горизонтал қисмга чиққан пайтдаги



111- расм.

бурчак тезлиги ва унинг инерция марказининг тезлиги топилсин.

Ечимнинг иккита вариантини берамиз.

1-ечиш усули. Цилиндр учта куч: $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, ишқаланиш кучи $\mathbf{f}_{\text{ишқ}}$ ва қия текисликнинг реакцияси $\mathbf{f}_r$ таъсири остида ҳаракат қилади. Ньютоннинг учинчи қонунига биноан $\mathbf{f}_r$ реакциянинг модули $\mathbf{P}$ кучнинг нормал ташкил этувчисига (унинг катталиги $mg \cos \varphi$ га) тенг.

Цилиндр билан қия текислик орасидаги ишқаланиш уларнинг бир-бирига тегиш нуқталарида юзага келади. Цилиндрнинг бу нуқталари вақтнинг ҳар бир моментида кўчмаганлиги (улар оний айланиш ўқини ҳосил қилади) туфайли бу ерда эслатилаётган ишқаланиш кучи тинч ҳолатдаги ишқаланиш кучидан иборат бўлади. 19-§ дан маълумки, тинч ҳолатдаги ишқаланиш кучи нолдан то максимал f_0 қийматларгача эга бўлиши мумкин. Бу максимал қиймат ишқаланиш коэффициентининг бир-бирига тегиб турувчи жисмларни ўзаро сиқиб турувчи нормал босим кучига кўпайтмасига тенг ($f_0 = kmg \cos \varphi$). Берилган ҳолда ишқаланиш кучи шундай қиймат оладики, бунда сирпаниш сира бўлмайди. Цилиндр текисликда думаланаётганда тегиш нуқталарининг чизиқли тезлиги нолга тенг бўлган ҳоллардагина сирпаниш йўқ бўлади. Кейинги шарт эса инерция марказининг тезлиги v_c вақтнинг ҳар бир моментида цилиндрнинг ω айланиш бурчак тезлиги билан цилиндр R радиусининг кўпайтмасига тенг, яъни

$$v_c = \omega R \tag{41.6}$$

бўлгандагина бажарилади.

Шунга мос равишда инерция марказининг w_c тезланиши β бурчак тезланишининг R га кўпайтмасига тенг:

$$w_c = \beta R. \tag{41.7}$$

Агар бу шартларни бажариш учун зарур бўлган ишқаланиш кучи $f_{\text{ишқ}}$ максимал $f_0 = kmg \cos \varphi$ қийматидан ортмаса, у ҳолда цилиндр сирпанишсиз думаланиб тушади. Акс ҳолда сирпанишсиз думаланиб тушиш амалга ошмайди.

Сирпанишсиз ҳол учун[1] (41.1) тенгламанинг ҳаракат йўналишига проекцияси қуйидаги кўринишга эга:

$$mw_c = mg \sin \varphi - f_{\text{ишқ}}. \tag{41.8}$$

Цилиндрик ўқига нисбатан ёзилган (41.2) тенгламада фақат ишқаланиш кучи моментигина нолдан фарқ қилади. Қолган кучларнинг, жумладан инерция кучларининг тенг таъсир этувчисининг йўналиши цилиндрнинг ўқи билан устма-уст тушганлиги сабабли

---

[1] Сирпанишли ҳол учун (41.8) даги $f_{\text{ишқ}}$ куч тинч ҳолатдаги ишқаланиш кучи эмас, балки сирпанишдаги ишқаланиш кучидан иборат бўлади.

уларнинг бу ўққа нисбатан моментлари нолга тенг. Шундай қилиб, (40.2) тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$$I\beta = Rf_{\text{ишқ}} \tag{41.9}$$

бу ерда I — цилиндрнинг ўз ўқига нисбатан инерция моменти бўлиб, у яхлит бир жинсли цилиндр учун $\frac{1}{2}mR^2$ га тенг.

(41.8) ва (41.9) тенгламаларда учта: $f_{\text{ишқ}}$, β ва w номаълум катталиклар иштирок этади. Бироқ кейинги иккита катталик ишқаланиш йўқлиги шартидан келиб чиқувчи (41.7) муносабат орқали ўзаро боғланган (41.7)—(41.9) тенгламаларни биргаликда ечиб (ҳамда $I = \frac{1}{2}mR^2$ эканлигини ҳисобга олиб) қуйидагиларни топамиз:

$$f_{\text{ишқ}} = \frac{1}{3}mg\sin\varphi; \tag{41.10}$$

$$w_c = \frac{2}{3}g\sin\varphi; \tag{41.11}$$

$$\beta = \frac{2}{3}\frac{g}{R}\sin\varphi. \tag{41.12}$$

Энди биз цилиндрнинг сирпанишсиз думаланиб тушишини таъминлайдиган тинч ҳолатдаги ишқаланиш кучининг (41.10) қийматини топганимиздан кейин ана шундай думаланиб тушиш амалга ошиши учун қандай шарт қаноатлантирилиши зарурлигини аниқлашимиз мумкин. Цилиндр сирпанишсиз думаланиб тушиши учун (41.10) куч тинч ҳолатдаги ишқаланиш кучининг $kmg\cos\varphi$ га тенг (буни биз юқорида кўрдик), максимал қийматидан ортмаслиги керак:

$$\frac{1}{3}mg\sin\varphi \leqslant kmg\cos\varphi.$$

Бундан келиб чиқадики,

$$\operatorname{tg}\varphi \leqslant 3k.$$

Агар текисликнинг қиялик бурчаги φ нинг тангенси цилиндр билан текислик орасидаги тинч ҳолатдаги ишқаланиш коэффициентининг учланган қийматидан ортиқ бўлса, думаланиб тушиш сирпанишсиз содир бўла олмайди.

(41.11) дан келиб чиқишича цилиндрнинг инерция маркази текис тезланувчан ҳаракатланади. w_c тезланиш аниқ бўлса, цилиндрнинг думаланиб тушиш вақти $t_д$ ни, яъни цилиндр $h/\sin\varphi$ га тенг йўлни ўтиши учун кетган вақтни топиш мумкин. Бу йўл w_c ва $t_д$ лар билан қуйидагича боғланган:

$$\frac{h}{\sin\varphi} = \frac{w_c t_д^2}{2},$$

бунга w_c нинг (41.11) қийматини олиб келиб қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$t_д = \frac{1}{\sin\varphi}\sqrt{\frac{3h}{g}}.$$

Бу вақт худди w_c каби цилиндрнинг массасига ҳам, радиусига ҳам боғлиқ эмас[1]; у фақат текисликнинг қиялик бурчаги φ билан цилиндрнинг қирғоқлари баландликларининг h фарқига боғлиқ холос.

Цилиндр горизонтал участкага чиққан вақтда инерция марказининг тезлиги қуйидагига тенг бўлади:

$$v_c = w_c t_д = \sqrt{\frac{4}{3}gh},$$

цилиндрнинг бурчак тезлиги эса

$$\omega = \beta t_д = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{3}{4}gh}.$$

Шуни қайд қилиб ўтамизки, ишқаланиш кучи (41.10) цилиндр устида иш бажармайди: чунки цилиндрнинг ана шу куч қўйилган нуқталари вақтнинг ҳар бир моментида кўчмаслигича қолади.

Горизонтал текислик учун ($\varphi = 0$) (41.11) ва (41.12) формулаларга биноан агар цилиндрга дастлаб бирор илгариланма ва унга мос равишда (сирпаниш бўлмайдиган қилиб) бурчак тезлик берилган бўлса, у тезланишсиз ҳаракатланади, деган хулоса чиқади. Аслида эса ҳаракат секинланувчан бўлади. Бундай секинланиш думаланиш ишқаланиш кучи таъсирида юзага келади. Бу куч шундай йўналганки, унинг моменти ω бурчак тезликни камайтиради, кучнинг ўзи эса инерция марказини тегишли равишда (яна сирпаниш юзага келмайдиган қилиб) секинлаштиради. Думаланиш ишқаланиш кучи думаланаётган жисм устида манфий иш бажаради.

Цилиндрнинг қия текислик бўйлаб думаланиб тушиши хақидаги масалани ечаётганда биз думаланиш ишқаланишини ҳисобга олмадик.

2-ечиш усули. Ишқаланиш кучи иш бажармаётганлиги (думаланиш ишқаланишини ҳисобга олмаймиз) учун цилиндрнинг тўла энергияси ўзгармайди. Бошланғич моментда кинетик энергия нолга, потенциал энергия эса mgh га тенг. Думаланиш охирига келиб потенциал энергия нолга тенглашади, бироқ унинг ҳисобига кинетик энергия юзага келади [(40.9) га қаранг]

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}.$$

Сирпаниш бўлмаганлиги учун v_c билан ω $v_c = \omega R$ муносабат орқали боғланган. Кинетик энергия ифодасига $\omega = \frac{v_c}{R}$ ва $I_c = \frac{1}{2}mR^2$ ларни қўйсак, қуйидагини топамиз:

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{mv_c^2}{4} = \frac{3}{4}mv_c^2.$$

[1] Бу фақат бир жинсли яхлит цилиндр учунгина тўғри.

Думаланишнинг бошидаги ва охиридаги тўла энергиялар ўзаро тенг бўлиши керак:

$$\frac{3}{4}mv_c^2 = mgh,$$

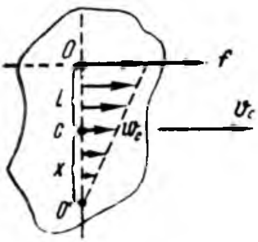
бундан

$$v_c = \sqrt{\frac{4}{3}gh},$$

бурчак тезлик эса

$$\omega = \frac{v_c}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh}.$$

3- мисол. m массали жисмга жуда қисқа Δt вақт давомида ўзгармас **f** куч таъсир кўрсатади. Δt вақт оралиғидан бошқа вақт ичида унга ҳеч қандай жисмлар таъсир этмайди. Жисмга $\mathbf{f}\Delta t$ импульс берилганига қадар у тинч ҳолатда турган эди. Кучнинг таъсири тўхтатилгандан кейин жисм қандай ҳаракат қилишини аниқланг.



112- расм.

(41.1) тенглама берилган ҳолда қуйидаги кўринишга эга:

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{f},$$

бундан

$$\mathbf{w}_C = \frac{1}{m}\mathbf{f}. \tag{41.13}$$

Демак, токи куч таъсир этар экан, жисмнинг инерция маркази куч таъсири йўналиши бўйлаб текис-тезланувчан ҳаракатланади. **f** кучнинг инерция марказига нисбатан елкасини l ҳарфи билан белгилаймиз (112- расм). Инерция маркази C орқали шундай қилиб OO ўқ ўтказайликки, у куч таъсир кўрсатаётган чизиқ ва жисмнинг инерция маркази орқали ўтувчи текисликка перпендикуляр бўлсин. (41.2) тенглама бу ўққа нисбатан қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$I_c\beta = M,$$

бу ерда I_c— жисмнинг OO ўққа нисбатан инерция моменти, $M = fl$ эса **f** кучнинг ўша ўққа нисбатан моменти. Бу тенгламани β га нисбатан ечиб қуйидагини топамиз:

$$\beta = \frac{M}{I_C} = \frac{fl}{I_G}. \tag{41.14}$$

Шундай қилиб, куч таъсир этиб турган Δt вақт ичида жисм шундай ҳолатда бўладики, унинг инерция маркази кучнинг таъсир чизиғи бўйлаб тўғри чизиқли текис тезланувчан ҳаракатланади ва шу билан бирга инерция маркази орқали ўтувчи ўқ атрофида ўзгармас бурчак тезлик (41.14) билан айланади. Δt вақт оралиғининг охирига келиб инерция марказининг тезлиги қуйидаги қийматга эришади:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{w}_C \Delta t = \frac{\mathbf{f}\Delta t}{m},$$

бурчак тезлиги эса

$$\omega = \beta\Delta t = \frac{M\Delta t}{I_C} = \frac{fl\Delta t}{I_C}$$

га тенг бўлиб қолади.

Бу $\mathbf{v}_C$ ва ω нинг биз топган қийматлари жисмнинг кучнинг таъсири тўхтагандан кейинги ҳаракатини белгилайди.

Шуни эслатиб ўтамизки, олинган натижа фақат кучнинг таъсир вақти ичида жисм кучнинг l елкасини бутун Δt вақт оралиғи давомида етарли аниқлик билан ўзгармас деб ҳисобласа бўладиган кичик бурчакка бурилсагина тўғри бўлади.

C инерция марказидан

$$\omega x = v_C, \quad \beta x = w_C \tag{41.15}$$

шартлар билан белгиланувчи x масофада ётган O' нуқтанинг тезлиги нолга тенг бўлишини кўриш қийин эмас (112- расм). Демак, O' нуқта орқали ўтувчи ўқ оний айланиш ўқи бўлар экан. (41.15) га w_C ва β учун топилган ифодаларни қўйсак, қуйидагини топамиз:

$$x = \frac{I_C}{ml}.$$

Кучнинг таъсирида жисм қуйидагича кинетик энергия олади:

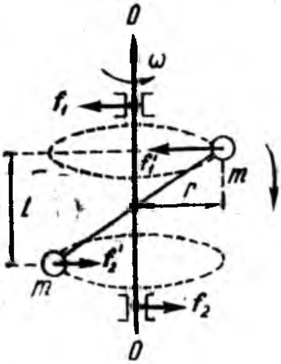
$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{f\Delta t}{m}\right)^2 + \frac{I_C}{2}\left(\frac{fl\Delta t}{I_C}\right)^2 = \frac{I_C + ml^2}{2mI_C}(f\Delta t)^2.$$

T нинг l га боғлиқ бўлишига сабаб шуки, l ортиши билан куч қўйилган нуқтанинг Δt вақт ичида ўтган йўли ортади ва демак, кучнинг жисм устида бажараётган иши ҳам ортади.

42- §. Эркин ўқлар. Бош инерция ўқлари

Агар бирор жисмни исталган ўқ атрофида айлантириб кейин уни эркин қўйсак, у ҳолда айланиш ўқининг фазодаги вазияти ўзгаради: ўқ инерция саноқ системага нисбатан ё бурилади, ё кўчади. Ихтиёрий олинган ўқни ўзгармас ҳолатда сақлаб туриш учун унга маълум бир кучлар билан таъсир кўрсатиш керак.

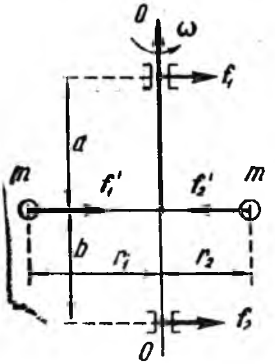
Масалан, агар жисм 113- расмдагидек шаклга эга бўлиб, OO ўқ атрофида ω бурчак тезлик билан айланаётган бўлса, у ҳолда айланиш ўқини қўзғалишсиз сақлаб туриш учун унга $M = m\omega^2 rl$ айлантирувчи момент берадиган кучлар қўйилиши керак. Ҳақиқатан ҳам, m массани r радиусли айланалар бўйлаб ҳаракатлантириш учун, уларга ҳар бири $m\omega_r^2$ га тенг бўлган $\mathbf{f}_1'$ ва $\mathbf{f}_2'$ кучлар қўйилиши керак. Бу кучлар $M = m\omega_C^2 rf$ моментли жуфт ҳосил қилади. Агар масалан, ўқни унга мос $\mathbf{f}_1$ ва $\mathbf{f}_2^1$ кучлар билан таъсир кўрсатадиган подшипникларга ўрнатиш орқали бу момент юзага чиқишига йўл қўймасак, у ҳолда айланиш ўқи стрелка билан кўрсатилган томонга қараб бурилади.



113- расм.

Агар m массаларни боғлаб турувчи стержень OO айланиш ўқига перпендикуляр бўлиб, массалар ўқдан ҳар хил r_1 ва r_2 масофаларда ётса (114- расм), у ҳолда ўқнинг фазода кўчишига йўл қўймаслик учун подшипниклар ўққа бир хил йўналган ва модулларининг йиғиндиси марказга интилма кучларнинг f_1' ва f_2' модуллари айирмасига тенг бўлган $\mathbf{f}_1$ ва $\mathbf{f}_2$ кучлар билан таъсир этиши керак:

$$f_1 + f_2 = m\omega^2 (r_1 - r_2)$$



114- расм.

(a ва b кесмалар ўзаро тенг бўлса, f_1 ва f_2 кучларнинг катталиги ҳам бир хил бўлади; акс ҳолда $f_1 a = f_2 b$ шарт бажаралиши керак).

Фазодаги вазияти ташқаридан бирор кучларнинг таъсирисиз сақланадиган айланиш ўқи жисмнинг **эркин ўқи** дейилади. 114- расмда тасвирланган ҳол учун $r_1 = r_2$ бўлганда, OO ўқ маълумки, эркин ўқ бўлади.

Исталган жисм учун эркин ўқлар бўлиб хизмат қиладиган ва жисмнинг инерция маркази орқали ўтувчи учта ўзаро перпендикуляр ўқлар мавжуд эканлигини исботлаш мумкин; улар **бош инерция ўқлари** деб аталади.

Бир жинсли параллелепипед учун (115- расм) қарама-қарши ётган ёқларни кесиб ўтувчи O_1O_1, O_2O_2 ва O_3O_3 ўқлар бош инерция ўқлари бўлиши равшан.

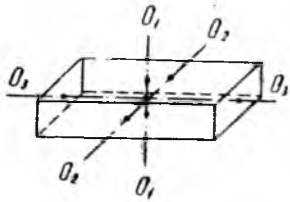
Симметрия ўқига эга бўлган жисм (масалан, бир жинсли[2] цилиндр) учун симметрия ўқи бош инерция ўқларидан биридир, бошқа иккита ўқ вазифасини эса симметрия ўқига тик ва жисмнинг инерция маркази орқали ўтувчи, текисликда ётувчи иккита ўзаро

[1] Жисм ўқ атрофида бурилган сари бу кучларнинг йўналиши ўзгара боради.

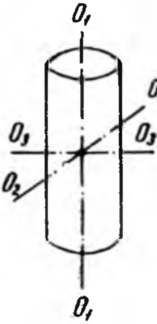
[2] Жисмнинг зичлиги ҳар бир кесимда фақат симметрия ўқидан ўлчанадиган масофанинг функцияси бўлса етарли.

перпендикуляр ўқлар бажариши мумкин (116- расм). Шундай қилиб, симметрия ўқига эга бўлган жисмда бош инерция ўқларидан фақат биттаси фиксацияланган (қўзғалмас) экан.

Марказий симметрияли жисм, яъни зичлиги фақат марказигача бўлган масофага боғлиқ бўлган шар учун инерция маркази орқали ўтувчи учта ўзаро перпендикуляр ўқлар бош инерция ўқларидир. Демак, бош инерция ўқларидан бири ҳам фиксацияланмаган экан.



115- расм.



116- расм

Жисмнинг бош ўқларига нисбатан инерция моментлари, умуман турлича бўлади: $I_2 \neq I_2 \neq I_3$. Симметрия ўқига эга бўлган жисм учун иккита инерция моменти бир хил катталикка эга, учинчиси эса улардан фарқ қилади: $I_1 = I_2 \neq I_3$ ва ниҳоят, марказий симметрияли жисм учун учала момент бир хил бўлади: $I_1 = I_2 = I_3$.

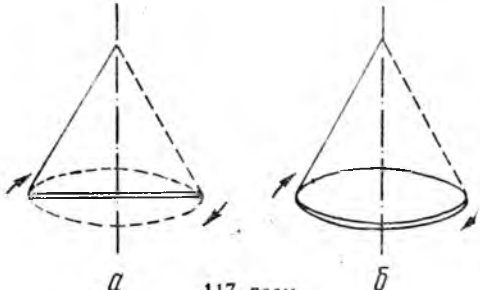
Агар жисм унга ташқаридан ҳеч қандай таъсир кўрсатилмайдиган шароитда айланаётган бўлса, у вақтда фақат инерция моментининг максимал ва минимал қийматларига мос келувчи бош ўқлар атрофидаги айланишгина турғун бўлади. Катталик жиҳатдан оралиқ моментга мос келувчи ўқ атрофида айланиш турғун бўлмайди. Бу эса айланиш ўқи ана шу бош ўқдан бир оз бўлса ҳам оғган вақтда юзага келувчи кучларнинг оғиш йўналишда таъсир этишини билдиради. Айланиш турғун ўқдан оғган вақтда бу оғиш натижасида юзага келган кучлар таъсирида жисм яна тегишли бош ўқ атрофида айланишга қайтади.

Айтилганларга ишонч ҳосил қилиш учун параллелепипед шаклидаги бирор жисмни (масалан, гугурт қутисини) унга бир вақтда айланма ҳаракат бериб улоқтирсак бўлади[1]. Бунда жисм пастга тушаётиб энг катта ёки энг кичик қирралари орқали ўтувчи ўқлар атрофида турғун айлана олишини аниқлаймиз. Жисмни ўрта қирралари орқали ўтувчи ўқ атрофида айланадиган қилиб улоқтиришга интилсак, ижобий натижага эриша олмаймиз.

---

[1] Бу ҳол учун оғирлик кучининг таъсири аҳамиятга эга эмас. У фақат жисмнинг пастга қараб тушишига сабабчи бўлади, холос.

Ташқаридан, масалан, айланаётган жисм осиб қўйилган ип томонидан таъсир кўрсатилаётган бўлса, у ҳолда инерция моментининг энг катта қийматига мос келувчи бош ўқ атрофидаги айланишгина турғун бўлади. Ана шу сабабга кўра бир учидан ипга



117- расм.

осиб қўйилган стержень тез айлантирилганда ўзига перпендикуляр бўлган ва марказидан ўтувчи ўқ атрофида айлана бошлайди (117- *а* расм). Чеккасидан ипга осиб қўйилган диск ҳам ана шундай айланади (117- *б* расм).

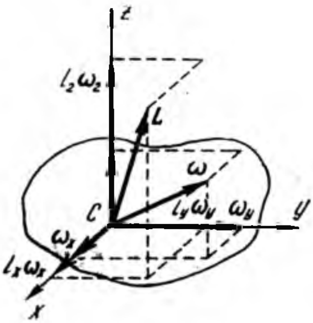
43- §. Каттиқ жисмнинг импульс моменти

Биз 38- § да қаттиқ жисмнинг импульс моменти учун топган

$$\mathbf{L}_z = I_z\overline{\omega} \qquad (43.1)$$

ифода фақат жисм қўзғалмас ўқ, яъни фазода подшипниклар тутиб турадиган ўқ ёки эркин ўқ атрофида айлангандагина ўринли бўлади. Бошқа ҳолларда **L** билан $\overline{\omega}$ орасидаги боғланиш анча мураккаблашади, хусусан, **L** импульс моменти векторининг йўналиши $\overline{\omega}$ бурчак тезлиги векторининг йўналиши билан устма-уст тушмайди.

Координата ўқларини[1] жисмнинг бош инерция ўқлари бўйлаб йўналтирамиз. Фараз қилайлик, $\overline{\omega}$ вектор бу ўқларнинг ҳеч қайсиси билан устма-уст тушмасин (118- расм). У ҳолда унинг ўқлар бўйлаб ω_x, ω_y, ω_z ташкил этувчилари, умуман айтганда, нолдан фарқ қилади. $I_z\,\omega_z$ кўпайтма (43.1) га биноан **L** векторнинг z бўйича ташкил этувчисини беради. Худди шунга ўхшаш $I_x\,\omega_x$ кўпайтма $\mathbf{L}_x$ ташкил этувчини, $I_y\,\omega_y$ эса — $\mathbf{L}_y$ ташкил этувчини беради. Агар бош ўқларга нисбатан I_x, I_y, I_z инерция моментлари бир-бирига тенг бўлмаса, у ҳолда натижавий вектор $\mathbf{L} = \mathbf{L}_x + \mathbf{L}_y + \mathbf{L}_z$ нинг йўналиши, 118-



118- расм.

[1] Бу ерда жисм билан боғланиши қатъий бўлган ва у билан бирга айланадиган ўқлар назарда тутилади.

расмдан кўринишича, ω векторнинг йўналиши билан бир хил йўналмайди. Фақат $\bar{\omega}$ бош ўқлардан бири бўйлаб, масалан, z ўқ бўйлаб йўналган шароитдагина $\bar{\omega}$ нинг бошқа ўқлар бўйлаб ташкил этувчилар (яъни ω_x ва ω_y лар) нолга тенг ва натижада $\mathbf{L}_x$ ва $\mathbf{L}_y$ ташкил этувчилар ҳам нолга тенг бўлади ва биз (43.1) формулага келамиз.

Шундай қилиб, координата ўқлари сифатида жисмнинг бош инерция ўқларини танлаб олсак, $\bar{\omega}$ ва $\mathbf{L}$ векторлар орасидаги боғланиш қуйидаги кўринишга келади:

$$\mathbf{L} = I_x \bar{\omega}_x + I_y \bar{\omega}_y + I_z \bar{\omega}_z. \tag{43.2}$$

$\bar{\omega}_x = \omega_x \mathbf{i}$ ва ҳоказо эканлигини эсга олиб сўнгги ифодага қуйидагича кўриниш бериш мумкин:

$$\mathbf{L} = (I_x \omega_x)\mathbf{i} + (I_y \omega_y)\mathbf{j} + (I_z \omega_z)\mathbf{k},$$

бундан $\mathbf{L}$ ва $\bar{\omega}$ векторларнинг координата ўқларига проекциялари орасидаги боғланиш қуйидагича кўринишга эга деган хулоса чиқади:

$$L_x = I_x \omega_x, \quad L_y = I_y \omega_y, \quad L_z = I_z \omega_z. \tag{43.3}$$

Координата ўқлари жисмнинг бош инерция ўқлари билан устма-уст тушмаса, бу боғланиш яна мураккаблашади. Бу ҳолда $\mathbf{L}$ ва $\bar{\omega}$ нинг проекциялари орасидаги боғланиш қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z, \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z. \end{aligned}\right\} \tag{43.4}$$

Тўққизта $I_{ik}(i, k = x, y, z)$ катталик иккинчи ранг симметрик тензор[1] деб аталадиган тензорни ҳосил қилади. Механикада бу тензор **инерция тензори** дейилади. Тензорнинг I_{ik} компонентлари координата ўқларининг танланишига боғлиқ. Агар координата ўқлари жисмнинг бош инерция ўқлари билан устма-уст тушса, у ҳолда I_{xx}, I_{yy} ва I_{zz} лардан бошқа барча компонентлар нолга айланади ва (43.4) формулалар (43.3) формулага айланади [(43.3) да I_{xx} ни I_x билан белгиланган ва ҳоказо].

Биз моддий нуқталар системаси учун топган (37.11) тенглама қаттиқ жисм учун ҳам ўринли бўлади. Бу ҳолда $\mathbf{L}$ деб координата ўқларига туширилган проекциялари (43.4) формулалар билан аниқланадиган вектор тушунилади.

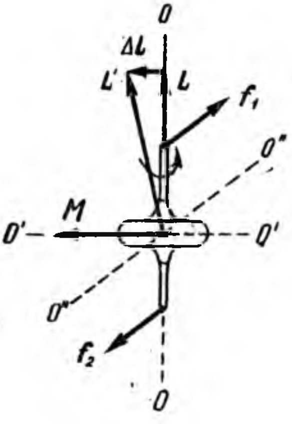
Энди қаттиқ жисмнинг бош инерция ўқларининг бирортаси билан ҳам устма-уст тушмайдиган қўзғалмас z ўқ атрофида айланиш ҳолини текширайлик. Бундай ўқ фақат унга ташқи кучлар таъсир кўрсатаётгандагина қўзғалмас бўлиши мумкин (масалан, 113-расмга қаранг). Бу кучларнинг z ўққа нисбатан моменти нолга тенг (кучлар таъсир кўрсатадиган йўналиш ўқ орқали ўтади) бўлиши

[1] Агар тензорнинг компонентлари $I_{ik} = I_{ki}$ шартни қаноатлантирса, бундай тензор симметрик тензор дейилади.

равшан, бироқ бу ўқда ётган исталган O нуқтага нисбатан кучлар моменти нолдан фарқли. Ана шу сабабга кўра жисмнинг z ўққа нисбатан импульс моменти $\mathbf{L}_z$ ўзгармайди $\left(\frac{d}{dt}\mathbf{L}_z = \mathbf{M}_z\right.$ ва $\left.\mathbf{M}_z = 0\right)$, O нуқтага нисбатан импульс моменти L эса (берилган ҳол учун унинг йўналиши z ўқи бўйлаб йўналган ω нинг йўналиши билан устма-уст тушмайди) ташқи кучларнинг унга перпендикуляр йўналган $\mathbf{M}$ моменти таъсирида жисм билан бирга бурилади $\left(\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \mathbf{M} \neq \neq 0\right)$.

44- §. Гироскоплар

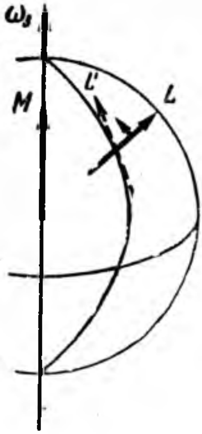
Симметрия ўқи атрофида катта тезлик билан айланувчи оғир симметрик жисмни гироскоп ёки (пилдироқ) деб юритилади. Симметрия ўқи гироскопнинг бош инерция ўқларидан бири бўлиб хизмат қилади, шунинг учун гироскопнинг импульс моментининг йўналиши унинг айланиш ўқи билан устма-уст тушади. Гироскоп ўқининг фазодаги йўналишини ўзгартириш учун (37.11) га мос равишда унга ташқи кучлар моменти билан таъсир кўрсатиш керак. Бунда гироскопик эффект деб ном олган қуйидаги ҳодиса кузатилади; гўё гироскопнинг OO ўқини $O'\,O'$ (119-расм) тўғри чизиқ атрофида буриши керак бўлган кучлар таъсирида гироскопнинг ўқи $O''\,O''$ тўғри чизиқ атрофида бурилади (OO ўқ ва $O'\,O'$ тўғри чизиқ расм текислигида ётади, $O''\,O''$ тўғри чизиқ ва f_1: f_2 кучлар эса бу текисликка перпендикуляр йўналган деб фараз қилинади).



119- расм.

Биринчи қараганда гироскопнинг бундай ғайри табиий бўлиб кўринган хатти-ҳаракати, маълум бўлишича, айланма ҳаракат, динамикаси қонунларига, яъни Ньютон қонунларига батамом мос эканлигини кўриш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам, $\mathbf{f}_1$ ва $\mathbf{f}_2$ кучларнинг моменти $O'\,O'$ тўғри чизиқ бўйлаб йўналган. Δt вақт ичида гироскопнинг $\mathbf{L}$ импульс моменти $\mathbf{M}$ билан бир томонга йўналган $\Delta\mathbf{L} = \mathbf{M}\Delta t$ орттирма олади. Гироскопнинг импульс моменти Δt вақтдан кейин расм текислигида ётган натижавий $\mathbf{L}' = \mathbf{L} + \Delta\mathbf{L}$ га тенг бўлади, $\mathbf{L}'$ векторнинг йўналиши гироскоп айланиш ўқининг янги йўналиши билан устма-уст тушади. Шундай қилиб, гироскопнинг айланиш ўқи $O''\,O''$ тўғри чизиқ атрофида шундай буриладики, $\mathbf{M}$ ва $\mathbf{L}$ векторлар орасидаги бурчак кичраяди. Агар гироскопга $\mathbf{M}$ моментининг йўналиши ўзгармайдиган ташқи кучлар билан узоқ вақт давомида таъсир кўрсатсак, у ҳолда гироскопнинг ўқи ниҳоят шундай ҳолатни оладики, унинг хусусий айланишлари ўқи билан йўналиши ташқи кучлар таъсирида содир бўлаётган айланиш ўқи ва йуналиши билан устма-уст тушади (L вектор йўналиши бўйича M вектор билан устма-уст тушади).

Гироскопнинг таърифланган хатти-ҳаракати **г и р о с к о п и к к о м п а с** (гирокомпас) деб аталувчи асбобга асос қилиб олинган. Бу асбоб ўқи горизонтал текисликда эркин бурила оладиган гироскопдан иборат (120- расм). Ер суткали айланганлиги сабабли гироскопга уни Ер ўқи атрофида айлантиришга интилувчи (худди 119-расмда f_1 ва f_2 кучлар гироскопни O' O' тўғри чизиқ атрофида айлантиришга интилгани каби) кучлар таъсир қилади. Натижада гироскопнинг ўқи шундай буриладики, гироскоп импульс моменти вектори $\bar{L}$ билан Ернинг бурчак тезлиги вектори $\bar{\omega}_{Ер}$ орасидаги бурчак кичраяди. Бу то L билан $\bar{\omega}_{Ер}$ орасидаги бурчак минимал бўлиб қолгунга қадар, яъни гироскоп меридионал текисликда жойлашгунга қадар давом этади (юқорида қараб чиқилган умумий ҳолдан фарқли равишда гироскопик компас ўқининг бурилиши шундай чегаралаб қўйилганки, бу ўқ фақат горизонтал текисликда жойлашиши мумкин холос.



120- расм

Гироскопик компаснинг магнит стрелкали компасдан қулай фарқи шундаки, унинг кўрсатишига магнит оғиши[1] ҳисобига бўладиган тузатма киритиш зарурати йўқдир, шунингдек стрелкага унинг яқин атрофида турган ферромагнит нарсаларнинг (масалан, кеманинг пўлат танасининг ва бошқаларнинг таъсирини бартараф қилиш учун тадбирлар кўришга ҳам эҳтиёж қолмайди. Ана шу сабабларга кўра ҳозирги вақтда навигация ишларида асосан гирокомпаслар ишлатилади.

Гироскопик кучлар. Гироскопнинг ўқини керак томонга буриш вақтида гироскопик эффект туфайли гироскопнинг ўқи ўрнашган таянчларга таъсир кўрсатувчи гироскопик кучлар юзага келади. Масалан, гироскопнинг OO ўқини O' O' тўғри чизиқ атрофида мажбуран бурган вақтда (121- расм) OO ўқ O'' O'' тўғри чизиқ атрофида бурилишга интилади. Ана шу бурилишнинг олдини олиш учун гироскопнинг ўзига подшипниклар томонидан f'_1 ва f'_2 кучлар таъсир кўрсатиши керак. Ньютоннинг учинчи қонунига биноан ўқ ҳам подшипникларга f_1 ва f_2 кучлар билан таъсир кўрсатади. Ана шу кучлар гироскопик кучлардир.

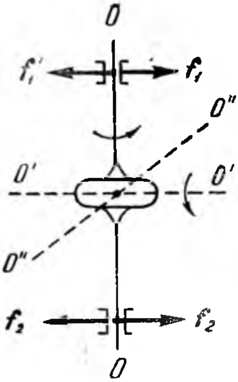
Масалан, кемалардаги буғ турбиналари подшипникларини лойиҳалаш вақтида гироскопик кучларни ҳисобга олишга тўғри келади. Турбинанинг ротори гироскопга ўхшайди. Кема бўйлама тебранганда турбинанинг ўқи мажбуран O' O' тўғри чизиқ атрофида бурилади (122- расм). Бу f_1 ва f_2 гироскопик кучлар юзага келишига са-

---

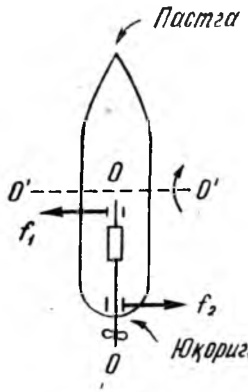
[1] Магнит оғиш деб магнит ва географик меридианлар орасидаги бурчакка айтилади.

бабчи бўлади ва бу кучлар ўқнинг подшипникларга қўшимча, баъзида эса анча сезиларли босим кўрсатишга олиб келади.

Гироскоп прецессияси. Агар гироскопга таъсир кўрсатувчи кучлар моменти катталик жиҳатдан вақт бўйича ўзгармай қолиб, гироскоп ўқи билан биргаликда у билан доим тўғри бурчак ҳосил



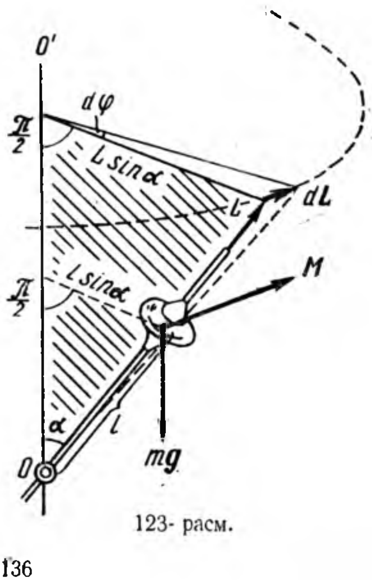
121- расм.



122- расм.

қилган ҳолда бурилса, гироскопнинг алоҳида турдаги ҳаракати юзага келади. Масалан, ўқи оғирлик кучи майдонида турган шарнирда айланадиган гироскоп ана шундай шароитда бўлади (123- расм). Гироскопга қўйилган ташқи кучларнинг моменти катталик жиҳатидан қуйидагига тенг:

$$M = mgl\sin\alpha, \qquad (44.1)$$



123- расм.

бу ерда m — гироскопнинг массаси, l — шарнирдан гироскоп инерция марказига қадар масофа, α — гироскоп ўқи вертикал билан ҳосил қилган бурчак. **M** момент гироскоп ўқи орқали ўтувчи вертикал текисликка (123- расмда бу текислик штрихланган) перпендикуляр йўналган.

M кучлар моменти таъсирида гироскопнинг **L** импульс моменти dt вақт ичида йўналиши бўйича **M** вектор билан бир томонга йўналган, яъни **L** векторга перпендикуляр бўлган қуйидагича орттирма олади:

$$d\mathbf{L} = \mathbf{M}dt. \qquad (44.2)$$

dL орттирма олиш натижасида L векторнинг ўзгаришига гироскоп ўқининг OO' тўғри чизиқ атрофида шундай бурилишига мос келадики, бунда α бурчак доимий қолади. Бундай ҳолда гироскопнинг ўзи ётган вертикал текислик $d\varphi$ бурчакка бурилади. Бир вақтда **M** вектор ҳам горизонтал текисликда ана шундай бурчакка бурилади. Натижада dt вақтдан кейин L ва M векторлар дастлаб ўзаро қандай жойлашган бўлса, ўшандай вазиятни эгаллайди.

Бундан кейинги dt вақт элементи ичида L вектор энди ўзининг янги («биринчи» элементар бурилишдан кейин юзага келган) қийматига перпендикуляр бўлгани яна $d\mathbf{L}$ орттирма олади ва ҳоказо. Натижада гироскопнинг ўқи узлуксиз равишда O шарнир орқали ўтувчи вертикал атрофида айланиб, учидаги бурчаги 2α га тенг конус чизади. Бунда L векторнинг фақат йўналишигина ўзгаради, унинг катталиги эса ўзгармайди, чунки $d\mathbf{L}$ элементар орттирмалар доим L векторга перпендикуляр йўналган.

Гироскопнинг бу таърифланган ҳаракати прецессия деб аталади, бунда гироскоп ўқи ташқи кучлар таъсирида конус чизиб айланади (хусусий ҳолда, $\alpha = \pi/2$ бўлганда конус текисликка айланади).

L вектор прецессия вақтида айлана бўйлаб бўладиган текис ҳаракат вақтида тезлик векторининг ҳаракатига ўхшаш ҳаракат қилади. Айлана бўйлаб текис ҳаракат вақтида тезликнинг элементар орттирмаси $d\mathbf{v}$ доим $\mathbf{v}$ векторга перпендикуляр ва $\mathbf{w}dt$ га тенг, бу ерда $|\mathbf{w}|$ ўзгармас. Гироскоп учун $d\mathbf{L}$ — **L** векторга перпендикуляр ва $\mathbf{M}dt$ га тенг, бу ерда $|\mathbf{M}|$ ўзгармас.

Конуснинг ўқи орқали ўтувчи текисликнинг айланиш бурчак тезлиги прецессия тезлиги дейилади. Прецессия бурчак тезлиги, маълумки, қуйидагига тенг:

$$\omega' = \frac{d\varphi}{dt},$$

бу ерда $d\varphi$ — эслатилган текислик dt вақт ичида бурилган бурчак. Бу бурчак $|dt|$ нинг $L\sin\alpha$ га нисбати сифатида тасаввур қилиниши мумкин (123-расмга қаранг, L векторнинг боши O шарнир билан устма-уст тушади деб фараз қилинади):

$$d\varphi = \frac{|d\mathbf{L}|}{L\sin\alpha}. \tag{44.3}$$

(44.2) ва (44.1) га биноан

$$|d\mathbf{L}| = Mdt = mgl\sin\alpha\, dt.$$

Бу ифодани (44.3) га қўйиб ва L ни $I\omega$ билан алмаштириб қуйидагини топамиз:

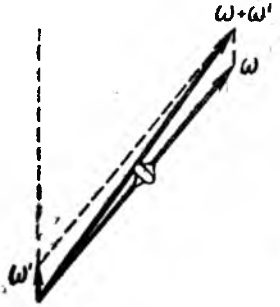
$$d\varphi = \frac{mgl\sin\alpha\, dt}{I\omega\sin\alpha} = \frac{mgl}{I\omega}dt.$$

Бундан прецессиянинг бурчак тезлиги

$$\omega' = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgl}{I\omega}. \tag{44.4}$$

(44.4) дан прецессия тезлиги гироскопик ўқнинг горизонтга нисбатан оғиш бурчагига боғлиқ эмас деган хулоса чиқади.

Импульс моменти $I\omega$ одатда катта бўлганлигидан прецессия тезлиги ω' кичик бўлади, бунда ω қанча катта бўлса, ω' ҳам шунча кичик бўлади. Гироскопнинг йўналиши бурчак тезлиги ω камайиши билан прецессия тезлиги ω' ортади.



124- расм.

Шуни назарда тутмоқ керакки, прецессия вақтида гироскопнинг импульс моменти унинг симметрия ўқи билан устма-уст тушмайди, чунки гироскопнинг ҳаракати иккита айланишнинг — симметрия ўқи атрофида $\overline{\omega}$ бурчак тезлик билан айланишнинг ва вертикал ўқ атрофида прецессия бурчак тезлиги $\overline{\omega}'$ билан айланишнинг йиғиндисидан ташкил топади. Натижавий бурчак тезлик $\overline{\omega}+\overline{\omega}'$ га тенг (124- расм). Бироқ $\overline{\omega}' \ll \overline{\omega}$ булганлигидан тахминан $\overline{\omega}+\overline{\omega}' \approx \overline{\omega}$ ва $\mathbf{L} = I\overline{\omega}$ деб ҳисоблаш мумкин. Прецессия бурчак тезлиги формуласи (44.4) ни чиқаришда биз ана шундай тахминий ҳисобдан фойдаланган эдик.

45- §. Қаттиқ жисмнинг деформацияси

Юқорида баён қилинганидек, кучлар таъсири остида жисмлар деформацияланади, яъни уларнинг ўлчамлари билан шакли ўзгаради. Агар деформацияни юзага келтирган кучнинг таъсири тўхтагандан кейин жисм дастлабки ўлчамларини ва шаклини қайта эгалласа, бундай деформация эластик деформация дейилади. Биз бу ерда асосий эластик деформацияларни қисқагина таҳлил қилиш билан чегараланамиз.

Агар деформацияни юзага келтирувчи куч ҳар бир конкрет жисм учун аниқ бўлган чегарадан ортиқ бўлмаса, деформация эластик бўлади. Куч ана шу чегарадан ортиб кетса, жисм кучнинг унга таъсири тўхтагандан кейин сақланиб қоладиган қолдиқ ёки пластик деформация олади.

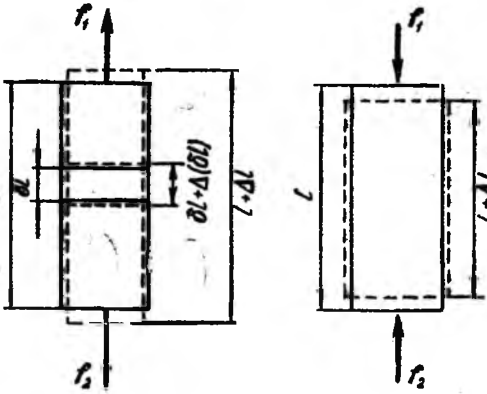
Қаттиқ жисм деформациясининг барча мумкин бўлган хиллари иккита асосий деформацияга: чўзилиш (ёки сиқилиш) ва силжиш деформациясига келтирилиши мумкин.

Бўйлама чўзилиш (ёки бир томонлама сиқилиш). Агар ўзгармас кесимли бир жинсли стерженнинг учларига унинг ўқи бўйлаб йўналган ва таъсири бутун кесим бўйлаб текис тақсимланган $\mathbf{f}_1$ ва $\mathbf{f}_2$ ($f_1 = f_2 = f$) кучлар қўйсак, у ҳолда стерженнинг l узунлиги мусбат (чўзилиш учун), ёки манфий (сиқилиш учун) Δl орттирма олади (125- расм). Бунда стерженнинг ҳар бир ихтиёрий танлаб олинган δl элементи унинг узунлигига пропорционал бўлган $\Delta(\delta l)$ орттирма олади. Шунинг учун стерженнинг ҳамма элементлари учун $\frac{\Delta(\delta l)}{\delta l}$ нисбат бир хил бўлар экан. Шу сабабдан табиий равишда стерженнинг деформациясини характерлайдиган катталик сифатида унинг узунлигининг нисбий ўзгаришини, яъни

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \qquad (45.1)$$

ни олиш қулай.

Нисбий узайиш ε аниқланишига кўра ўлчамсиз катталикдир. Чўзилиш учун у мусбат, сиқилиш учун эса манфий бўлади.



125- расм.

Тажриба берилган материалдан ясалган стерженлар учун эластик деформация вақтидаги нисбий узайиш стержень кўндаланг кесимининг юз бирлигига тўғри келувчи кучга пропорционал эканлигини кўрсатади:

$$\varepsilon = \alpha \frac{f}{S} . \qquad (45.2)$$

Пропорционаллик коэффициенти α эластиклик коэффициенти дейилади. У фақат стержень материалининг хоссаларига боғлиқ.

Кучнинг шу куч таъсир қилаётган сиртнинг катталигига нисбати кучланиш дейилади. Жисмнинг қисмлари ўзаро таъсирлашганлиги сабабли кучланиш жисмнинг барча нуқталарига берилади — стерженнинг борлиқ ҳажми кучланган ҳолатда бўлади. Агар куч сиртга ўтказилган нормал бўйлаб йўналса, кучланиш нормал кучланиш дейилади. Агар куч ўзи таъсир этаётган сиртга ўтказилган уринма бўйлаб йўналса, кучланиш тангенциал кучланиш дейилади. Нормал кучланишни σ ҳарфи билан, тангенциал кучланишни эса τ ҳарфи билан белгилаш қабул қилинган.

Нормал кучланиш тушунчаси

$$\sigma = \frac{f}{S} \qquad (45.3)$$

ни киритсак, (45.1) тенгламани қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$\varepsilon = \alpha\sigma. \qquad (45.4)$$

Шундай қилиб, нисбий узайиш нормал кучланишга пропорционал экан. (45.4) дан эластиклик коэффициенти α қиймат жиҳатдан бирлик кучланиш таъсиридан юзага келадиган нисбий узайишга тенг деган хулоса чиқади.

Материалнинг эластик хоссаларини характерлаш учун эластиклик коэффициенти α билан бир қаторда унга тескари бўлган $E = 1/\alpha$ катталик ҳам ишлатилади. Бу катталик **Юнг модули** деб аталади.

(45.4) да α ни E билан алмаштирсак, қуйидагини топамиз:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \qquad (45.5)$$

бундан Юнг модули шундай нормал кучланишга тенгки, унинг таъсирида материалнинг нисбий узайиши, агар имкони бўлса, бирга тенг бўлар эди (яъни узунлик орттирмаси Δl дастлабки l узунликка тенг бўлар эди, бироқ аслида анча кичик кучланишлардаёқ стержень узилиб кетади, эластиклик чегарасига эса бундан ҳам тезроқ эришилади) деган хулоса чиқади.

(45.1) ва (45.5) ни ҳисобга олганда (45.3) ни қуйидаги кўринишга келтириш мумкин:

$$f = \frac{ES}{l}\Delta l = k\Delta l, \qquad (45.6)$$

бу ерда k — берилган стержень учун ўзгармас коэффициент.

(45.6) га биноан эластик деформация вақтида стерженнинг узайиши стерженга таъсир этувчи кучга пропорционал (45.6) муносабат берилган деформация кучи учун Гук қонунини ифодалайди. Бу қонун эластиклик чегарасида бажарилади.

Деформация вақтида стержень узунлигининг ўзгаришига мос равишда стерженнинг d кўндаланг ўлчамлари ҳам ўзгаради (125-расм). Бу ўзгариш қабул қилинишига кўра нисбий кўндаланг кенгайиш ёки сиқилиш билан характерланади:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d}. \qquad (45.7)$$

Равшанки, ε билан ε' нинг ишораси доим ҳар хил бўлади: чўзилиш вақтида Δl мусбат, Δd эса манфий, сиқилиш учун эса Δl манфий, Δd эса мусбат бўлади. Тажриба ε' нинг ε га пропорционал эканлигини кўрсатади:

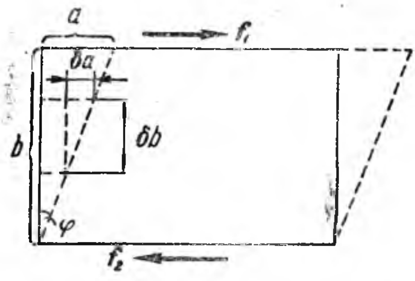
$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon, \qquad (45.8)$$

бу ерда μ — фақат материалнинг хоссаларигагина боғлиқ бўлган мусбат коэффициент. У **кўндаланг сиқилиш коэффициенти** ёки **Пуассон коэффициенти** дейилади.

Силжиш. Тўғри бурчакли параллелипипед шаклидаги бир жинсли жисм олиб, унинг қарама-қарши ёқларига уларга параллел йўналган $\mathbf{f}_1$ ва $\mathbf{f}_2$ ($f_1 = f_2 = f$) кучлар қўямиз (126-расм). Агар кучларнинг таъсири тегишли ёқнинг бутун S сирти бўйлаб текис тақсимланса, у ҳолда шу ёққа параллел бўлган ихтиёрий кесимда тангенциал кучланиш юзага келади:

$$\tau = \frac{f}{S}. \qquad (45.9)$$

Кучланишлар таъсирида жисм шундай деформацияланадики, тепадаги (расмда) ёқ остидагига нисбатан бирор a масофага силжийди. Агар жисмни фикран элементар горизонтал қатламларга бўлсак, у ҳолда ҳар бир қатлам қўшни қатламларга нисбатан силжийди. Ана шу сабабга кўра бундай турдаги деформация с и л ж и ш деган ном олган.



126- расм.

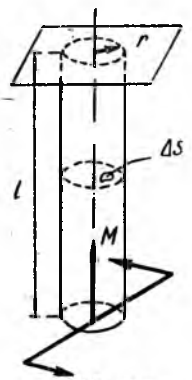
Силжиш деформацияси вақтида дастлаб горизонтал қатламларга перпендикуляр бўлган ҳар қандай тўғри чизиқ бирор φ бурчакка бурилади. Демак, иккита ихтиёрий олинган қатламнинг δa силжишининг шу қатламлар орасида δb масофага нисбати исталган қўшни қатламлар жуфти учун бир хил бўлади. Табиийки, ана шу нисбатни силжиш деформациясини характерлаш учун танлаб олиш мумкин:

$$\gamma = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\varphi. \qquad (45.10)$$

γ катталик н и с б и й с и л ж и ш деб аталади. Бурчак φ жуда кичик бўлганлигидан $\operatorname{tg}\varphi \approx \varphi$ деб олиш мумкин. Демак, нисбий силжиш γ силжиш бурчаги φ га тенг экан. Тажриба кўрсатадики, нисбий силжиш тангенциал кучланишга пропорционал экан,

$$\gamma = \frac{1}{G}\tau. \qquad (45.11)$$

Коэффициент G фақат материалнинг хоссасига боғлиқ бўлиб, с и л ж и ш м о д у л и номи билан юритилади. У шундай тангенциал кучланишга тенгки, бундан катта кучланишларда эластиклик чегарасидан ўтиб кетилмаганда силжиш бурчаги 45° га тенг ($\operatorname{tg}\varphi = 1$) бўлсин.



127- расм.

Биз таҳлил қилган асосий деформациялардан ташқари д у м а л о қ с т е р ж е н н и н г б у р а л и ш и н и қараб чиқайлик. Агар думалоқ стерженнинг бир учини қўзғалмайдиган қилиб маҳкамлаб, иккинчи учига стержень ўқи бўйлаб йўналган **M** айлантирувчи момент қўйсак (127- расм), стержень шундай деформацияланадики, бунда унинг пастки асоси юқориги асосига нисбатан бирор φ бурчакка бурилади.

Буралиш деформацияси силжиш деформациясидан иборат эканлигини кўриш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам, агар стерженни унинг ўқига перпендикуляр қатламларга фикран бўлиб чиқсак, у ҳолда буралиш бундай қатламларнинг ҳар бирининг унга қўшни қатламларга нисбатан силжишига олиб келади. Тўғри, бундай силжиш бир жинсли бўлмайди: қатламнинг ΔS қисми стержень ўқидан қанча узоқда ётса, шунга ўхшаш қўшни қатламига нисбатан ўшанча кўпроқ силжийди.

Тегишли ҳисоблар ўтказиб стерженнинг буралиш бурчаги тажрибага мос келадиган қуйидаги ифода билан аниқланишини кўрсатиш мумкин:

$$\varphi = \frac{2l}{\pi r^4 G} M, \tag{45.12}$$

бу ерда l — стерженнинг узунлиги, r — унинг радиуси, G — силжиш модули, M — айлантирувчи момент.

Берилган стержень учун доимий бўлган M нинг олдидаги кўпайтувчини k ҳарфи билан белгилаб (45.12) муносабатни қуйидаги кўринишга келтириш мумкин:

$$\varphi = kM. \tag{45.13}$$

Сўнгги муносабат буралиш учун Гук қонунини ифодалайди. Берилган материалдан ясалган стерженнинг узунлиги ўзгармаганда пропорционаллик коэффициенти k стерженнинг қалинлигига жуда кучли боғлиқ бўлади (у $1/r^4$ каби ўзгаради).

Эластик деформация энергияси. Эластик деформацияланган жисм, масалан, чўзилган ёки сиқилган стержень деформацияланмаган ҳолатга қайтаётиб, худди чўзилган ёки сиқилган пружина каби ташқи жисмлар устида иш бажариши мумкин, яъни қандайдир энергия запасига эга бўлади[1]. Бу энергия жисм элементларининг ўзаро вазиятига боғлиқ бўлганлиги учун у потенциал энергиядан иборатдир. Деформацияланган жисмнинг энергия запаси деформациялаш вақтида ташқи кучлар бажарган ишга тенг эканлиги равшан.

Эластик чўзилган (сиқилган) стерженнинг энергиясини ҳисоблайлик. Чўзиш вақтида стерженга катталиги (45.6) ифода билан аниқланувчи куч билан таъсир кўрсатиш керак. Бу кучнинг иши

$$A = \int_0^{\Delta l} f dx,$$

бу ерда стерженнинг абсолют узайиши x билан белгиланган, у деформация вақтида 0 дан Δl гача ўзгаради.

x узайишига мос келувчи f куч (45.6) ифодага биноан қуйидагига тенг:

$$f = kx = \frac{ES}{l} x.$$

---

[1] (27.13) га ва шунга тегишли текстга қаранг.

Демак,

$$A = \int_0^{\Delta l} \frac{ES}{l} x\,dx = \frac{ES}{l} \frac{\Delta l^2}{2} = U^1,$$

олинган ифоданинг сурат ва махражини l га кўпайтириб, сўнгра $\Delta l/l$ ни нисбий узайиш ε билан алмаштириб ва Sl стерженнинг V ҳажмини беришини ҳисобга олиб қуйидагини топамиз:

$$U = \frac{E\varepsilon^2}{2} V. \qquad (45.14)$$

Энергия зичлиги u тушунчасини киритайлик. Уни биз ΔU энергиянинг шу энергия мужассамлашган ΔV ҳажмга нисбати сифатида таърифлаймиз:

$$u = \frac{\Delta U}{\Delta V}.$$

Биз текшираётган ҳолда стержень бир жинсли ва деформация текис, яъни стерженнинг турли нуқталарида бир хил бўлганлиги учун (45.14) энергия ҳам стерженда ўзгармас зичлик билан текис тақсимлангандир. Шунинг учун

$$u = \frac{U}{V} = \frac{E\varepsilon^2}{2} \qquad (45.15)$$

деб ҳисоблаш мумкин.

(45.15) ифода чўзилиш (ёки сиқилиш) вақтидаги эластик деформация энергиясининг зичлигини беради. Худди юқоридагидек йўл билан силжиш вақтидаги эластик деформация энергиясининг зичлиги учун қуйидаги ифодасини топиш мумкин:

$$u = \frac{G\gamma^2}{2}. \qquad (45.16)$$

---

[1] Топилган ишни потенциал энергияга тенглар эканмиз, биз деформацияланмаган жисмнинг энергиясини нолга тенг деб олдик.

VI БОБ

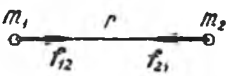
БУТУН ОЛАМ ТОРТИШИШИ

46- §. Бутун олам тортишиш қонуни

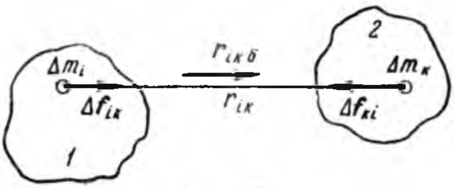
Табиатда ҳамма жисмлар ўзаро бир-бирига тортишиб туради. Бу тортишиш бўйсунадиган қонунни Ньютон кашф қилган бўлиб, бутун олам тортишиш қонуни деб аталади. Бу қонунга биноан *иккита жисмнинг бир-бирига тортишиш кучи бу жисмларнинг массаларига тўғри пропорционал ва улар орасидаги масофанинг квадратига тескари пропорционалдир:*

$$f = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \qquad (46.1)$$

бу ерда γ — гравитацион доимий деб аталувчи пропорционаллик коэффициенти. Куч ўзаро таъсирлашувчи жисмлар орқали ўтувчи тўғри чизиқ бўйлаб йўналган (128- расм). (46.1) формула катталиклари жиҳатидан тенг $\mathbf{f}_{12}$ ва $\mathbf{f}_{21}$ кучларнинг қийматини беради.



128- расм.



129- расм.

(46.1) муносабатда гап бораётган жисмлар, афтидан, моддий нуқталардир. Моддий нуқта деб қараш мумкин бўлмаган жисмларнинг ўзаро таъсир кучларини аниқлаш учун уларни Δm элементар массаларга, яъни ҳар бири моддий нуқта деб қабул қилса бўладиган кичик ҳажмларга бўлиб ташлаш керак (129- расм). (46.1) га биноан *1* жисмнинг i — элементар массаси *2* жисмнинг k — элементар массасига

$$\Delta \mathbf{f}_{ik} = \gamma \frac{\Delta m_i \, \Delta m_k}{r_{ik}^2} \mathbf{r}_{ik\ \text{бир}} \cdot \qquad (46.2)$$

куч билан тортилади, бу ерда $\mathbf{r}_{ik\ \text{бир}}$ — Δm_i дан Δm_k га қараб йўналган бирлик вектор, r_{ik} эса шу элементар массалар орасидаги масофа.

(46.2) нинг k нинг барча қийматлари бўйича йиғиндисини олиб, *2* жисм томонидан *1* жисмга тегишли элементар Δm_i массага таъсир кўрсатувчи барча кучларнинг тенг таъсир этувчисини топамиз:

$$\Delta \mathbf{f}_{i2} = \sum_k \gamma \frac{\Delta m_i \, \Delta m_k}{r_{ik}^2} \mathbf{r}_{ik\,\text{бир}}. \tag{46.3}$$

Ниҳоят, (46.3) нинг i индексининг барча қийматлари бўйича йиғиндисини олиб, яъни биринчи жисмнинг барча элементар массаларига қўйилган кучларни қўшиб, *2* жисмнинг *1* жисмга таъсир кучини топамиз:

$$\mathbf{f}_{12} = \sum_i \sum_k \gamma \frac{\Delta m_i \, \Delta m_k}{r_{ik}^2} \mathbf{r}_{ik\,\text{бир}}. \tag{46.3}$$

Йиғинди i ва k индексларнинг барча қийматлари бўйича олинади. Демак, агар *1* жисмни N_1 та, *2* жисмни эса N_2 та элементар массаларга тақсимласак, у ҳолда (46.4) йиғинди $N_1 N_2$ та қўшилувчига эга бўлар экан.

Ньютоннинг учинчи қонунига биноан *1* жисм *2* жисмга — $\mathbf{f}_{12}$ га тенг бўлган $\mathbf{f}_{21}$ куч билан таъсир кўрсатади.

Амалда (46.4) йиғиндини топиш интеграллашга келтирилади, умуман айтганда уни аниқлаш жуда мураккаб математик масаладир. Агар ўзаро таъсирлашувчи жисмлар бир жинсли шартлардан иборат бўлса[1], у ҳолда (46.4) га асосан ўтказиладиган ҳисоблар қуйидаги натижага олиб келади:

$$\mathbf{f}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{r}_{12\,\text{бир}}, \tag{46.5}$$

бу ерда m_1 ва m_2 — шарларнинг массалари, r — уларнинг марказлари орасидаги масофа, $\mathbf{r}_{12\,\text{бир}}$ — биринчи шарнинг марказидан иккинчи шарнинг марказига қараб йўналган бирлик вектор. Шундай қилиб, шарлар гўё массалари шарларининг массасига тенг бўлган ва уларнинг марказига жойлашган моддий нуқталардек ўзаро таъсирлашар экан.

Агар жисмлардан биттаси жуда катта R радиусли шар (масалан, Ер шари) бўлса, иккинчи жисм эса шарга ўхшамасдан R дан анча кичик ўлчамларга эга бўлиб, шарнинг сиртига яқин жойда ётса, у ҳолда уларнинг ўзаро таъсирлашуви (46.5) формула (ундаги r ўрнига шарнинг радиусини олиш керак) билан ифодаланади (иккинчи жисмдан шар сиртигача масофани, шунингдек иккинчи жисмнинг ўлчамларини R га нисбатан жуда кичик бўлгани учун ҳисобга олмаса ҳам бўлади).

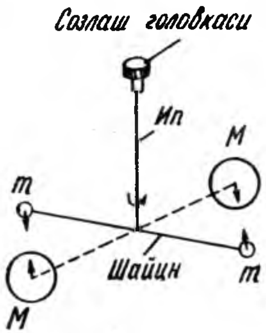
(46.1) тенгламадаги γ пропорционаллик коэффициентига нисбатан Ньютоннинг иккинчи қонунидаги пропорционаллик коэффициентига ўхшаш муносабатда бўлиш (яъни кучнинг ўлчов бирлигини танлаш ҳисобига уни бирга тенглаштириб юбориш) мақсадга муво-

[1] Бунда масса тақсимоти ҳар бир шар доирасида марказий симметрияга эга бўлса, яъни зичлик фақат шарнинг марказидан ўлчанган масофанинг функцияси бўлса етарли.

фиқ эмас, чунки ундай қилганимизда ҳар хил физикавий ҳодисаларни таҳлил қилган вақтда битта физикавий катталик — кучнинг турли ўлчов бирликларидан фойдаланишга мажбур бўлиб қоламиз. Борди-ю (46.1) га кирувчи катталикларни ўлчаш учун аввал қабул қилинган бирликлардан фойдалансак, у ҳолда гравитацион доимий γ ўлчамли катталик бўлади ва унинг қийматини тажриба ёрдамида аниқлашга тўғри келади (46.1) га биноан γ нинг ўлчамлиги қуйидагига тенг:

$$[\gamma] = \frac{[f]\,[r^2]}{[m^2]} = \frac{\frac{ML}{T^2}L^2}{M^2} = \frac{L^3}{MT^2}\ L^3M^{-1}T^{-2}.$$

γ нинг қиймати маълум массали жисмларнинг ўзаро тортишиш кучини ўлчаш орқали топилган. Бундай ўлчашларни бажаришда катта қийинчиликлар юзага келади, чунки массаларини бевосита ўлчаса бўладиган жисмлар учун тортишиш кучлари жуда ҳам кичик экан. Чунончи, ҳар бирининг массаси 100 *кг* дан бўлган ва бир-биридан 1 *м* масофада турган иккита жисм 10^{-6} *н*, яъни 10^{-4} *Г* куч билан ўзаро таъсирлашар экан.



130- расм.

γ ни аниқлаш борасидаги биринчи муваффақиятли иш Кавендиш (1798 й.) амалга оширган тажрибадан иборатдир. Кавендиш бу тажрибада кучни ўлчаш учун жуда сезгир бўлган бурама тарози усулидан фойдаланди (130- расм). Енгил шайинга маҳкамланган иккита қўрғошин шар m (ҳар бирининг массаси 729 граммдан) симметрик ўрнатилган M шарлар (массалари 158 килограммдан) ёнига жойлаштирилган. Шайин эластик ипга осилган бўлиб, бу ипнинг буралишига қараб шарларнинг бир-бирига тортишиш кучини аниқлаш мумкин бўлган. Ипнинг юқориги учи созлаш мосламасига маҳкамланиб, бу мосламани бураш орқали m ва M шарлар орасидаги масофани ўзгартириш мумкин. γ нинг ҳар хил усуллар билан топилган қийматларидан қуйидагиси энг аниқ деб ҳисобланади:

$$\gamma = 6{,}670\cdot 10^{-11}\ м^3/кг\cdot сек^2.$$

Агар (46.5) да m_1, m_2 ва r ларни бирга тенг деб олсак, у ҳолда кучнинг қиймати γ га тенг бўлади. Шундай қилиб, ҳар бирининг массаси 1 *кг* га тенг ва марказлари бир-биридан 1 *м* масофада ётган иккита шар ўзаро $6{,}670\cdot 10^{-11}$ *н* куч билан тортишар экан.

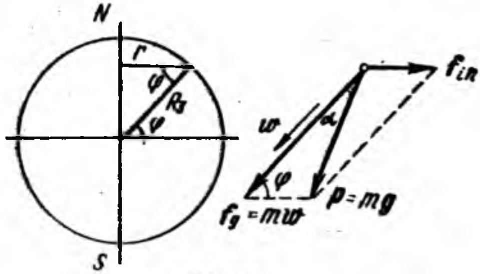
47- §. Оғирлик кучининг жойнинг географик кенглигига қараб ўзгариши

Жисмларнинг Ер сиртига нисбатан ҳаракатини ўрганган вақтда Ер билан боғланган саноқ система ноинерциал эканлигини назарда тутиш керак. Орбита бўйлаб ҳаракатга мос келадиган тезланиш

Ернинг суткали айланиши билан боғлиқ бўлган тезланишга қараганда анча кичик. Шунинг учун Ер билан боғланган саноқ система инерциал системага нисбатан ўзгармас ω бурчак тезлик билан айланади, деб етарли даражада аниқлик билан айтиш мумкин. Демак, жисмларнинг Ерга нисбатан ҳаракатини текшираётганда қуйидагича марказдан қочма инерция кучи ифодасини киритиш керак:

$$f_{in} = m\omega^2 r,$$

бу ерда m — жисмнинг массаси, r — Ер ўқидан жисмгача бўлган масофа (131-расм).



131-расм.

Жисмларнинг Ер сиртидан баландлиги катта бўлмаган ҳоллар билан чегараланиб, r ни $R_{\text{Ер}}\cos\varphi$ га тенг деб олиш мумкин ($R_{\text{Ер}}$ — Ернинг радиуси, φ — жойнинг географик кенглиги). У ҳолда марказдан қочма кучнинг ифодаси қуйидаги кўринишга келади:

$$f_{in} = m\omega^2 R_{\text{Ер}}\cos\varphi. \tag{47.1}$$

Жисмларнинг Ерга нисбатан одатда кузатиладиган эркин тушиш тезланиши g иккита кучнинг таъсирида юзага келади: булардан бири жисмнинг Ерга тортишиш кучи $\mathbf{f}_g$ ва иккинчиси $\mathbf{f}_{in}$. Бу икки кучнинг тенг таъсир этувчиси

$$\mathbf{P} = \mathbf{f}g + \mathbf{f}_{in},$$

оғирлик кучидан иборат (18-§ га қаранг). **P** куч m массали жисмга **g** тезланиш берганлиги учун қуйидаги муносабат ўринли:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}. \tag{47.2}$$

P оғирлик кучининг Ерга тортишиш $\mathbf{f}_g$ кучидан фарқи катта эмас, чунки марказдан қочма инерция кучи $\mathbf{f}_g$ га қараганда анча кичик. Масалан, 1 *кг* масса учун $m\omega^2 R_{\text{Ер}}$ тахминан 0,035 *н* га (ω 2π нинг 86400 *сек* га нисбатига тенг, $R_{\text{Ер}}$ тахминан 6400 *км* га тенг) бўлса, $\mathbf{f}_g$ эса тахминан 9,8 *н* га тенг, яъни марказдан қочма инерция кучининг максимал (экваторда кузатиладиган) қийматидан тахминан 300 марта катта экан.

$\mathbf{f}_g$ билан **P** ларнинг йўналишлари орасидаги α бурчакни синуслар теоремасидан фойдаланиб ҳисоблаш мумкин:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = \frac{f_{in}}{P} = \frac{m\omega^2 R_{\text{Ер}}\cos\varphi}{mg} \approx \frac{0{,}035}{9{,}8}\cos\varphi \approx 0{,}0035\cos\varphi,$$

бундан

$$\sin\alpha \approx 0{,}0035\sin\varphi\cos\varphi \approx 0{,}0018\sin 2\varphi.$$

Кичик бурчакнинг синусини тахминан бурчакнинг

$$\alpha \approx 0{,}0018\sin 2\varphi \qquad (47.3)$$

қиймати билан алмаштириш мумкин.

Шундай қилиб, географик кенглик φ га қараб α бурчак нолдан (экваторда, у $\varphi = 0$ ва қутбда $\varphi = 90°$) то 0,0018 *рад* ёки 6′ гача (45° кенгликда) тебраниб турар экан.

P нинг йўналиши юк таранг қилиб тортиб турган ипнинг йўналиши (у осма йўналиши деб юритилади) билан устма-уст тушади. $\mathbf{f}_g$ куч Ернинг марказига қараб йўналган. Демак, осма ип фақат қутбларда ва экваторда Ер марказига қараб йўналган бўлиб, оралиқ кенгликларда (47.3) ифода билан аниқланадиган бурчакка оғади.

$f_g - P$ айирма қутблар нолга тенг бўлиб, экваторда максимал қийматига эришади. Бу қиймат f_g кучнинг 0,3 % ига тенг. Ер шари қутбларида ялпоқроқ бўлганлигидан f_g кучнинг ўзи ҳам кенгликка қараб бир қадар ўзгаради: у экваторда қутблардаги қийматидан 0,2 % камроқ. Натижада эркин тушиш тезланиши g кенгликка қараб 9,780 *м/сек*² дан (экваторда) 9,832 *м/сек*² гача (қутбларда) ўзгаради. $g = 9{,}80665$ *м/сек*² қиймат нормал (стандарт) қиймат сифатида қабул қилинган.

Эркин тушаётган жисмлар инерциал, масалан, гелиоцентрик саноқ системага нисбатан g тезланиш билан эмас, балки $\mathbf{f}_g$ га ўхшаш йўналган ва катталиги f_g/m га тенг тезланиш **w** билан ҳаракатланишини эслатиб ўтамиз. Ҳар хил жисмлар учун g бир хил эканлигидан w нинг ҳам бир хил эканлиги келиб чиқишини осонгина кўрсатиш мумкин (131- расмга қаранг). Ҳақиқатан ҳам ҳар хил жисмлар учун $\mathbf{f}_g$ ва **P** векторлар устида чизилган учбурчаклар ўхшаш (α ва φ бурчаклар Ер сиртининг берилган нуқтасида турган барча жисмлар учун бир хил бўлади). Демак, $f_g|P$ нисбатга тенг бўлган $w|g$ нисбат ҳамма жисмлар учун бир хил, бунда g лар бир хил бўлса, w лар ҳам бир хил бўлади деган хулоса чиқади.

48- §. Инерт масса ва гравитацион масса

Масса икки хил қонунда: Ньютоннинг иккинчи қонунида ва бутун олам тортишиш қонунида иштирок этади. Биринчи ҳолда у жисмнинг инерт хоссаларини характерласа, иккинчисида эса — гравитацион хоссаларини, яъни жисмларнинг бир-бирини тортиш хоссаларини характерлайди. Шу муносабат билан m_{in} инерт масса билан m_g гравитацион (тортишувчи) массадан фарқ қилиш керак эмасми, деган савол туғилади.

Бу саволга фақат тажрибагина жавоб бериши мумкин. Гелиоцентрик саноқ системада жисмнинг эркин тушишини қараб чиқайлик. Ҳар қандай жисмга ҳам Ер сиртининг яқинида Ернинг тортиш кучи таъсир кўрсатади. Бу куч (46.5) га биноан қуйидагига тенг:

$$f = \gamma \frac{m_g M_{\text{Ер}}}{R^2_{\text{Ер}}},$$

бу ерда m_g — берилган жисмнинг гравитацион массаси, $M_{\text{Ер}}$ — Ернинг гравитацион массаси, $R_{\text{Ер}}$ — Ер шарининг радиуси.

Бу куч таъсирида жисм w (лекин g эмас; олдинги параграфга қаранг) тезланиш олади ва бу тезланиш f кучнинг m_{in} инерт массага бўлган нисбатига тенг бўлади:

$$w = \frac{f}{m_{in}} = \gamma \frac{M_{\text{Ер}}}{R^2_{\text{Ер}}} \frac{m_g}{m_{in}}. \qquad (48.1)$$

Тажриба тезланиш w барча жисмлар учун бир хил эканлигини кўрсатади (g нинг бир хиллигидан, юқорида кўрган эдикки, w нинг бир хил эканлиги келиб чиқади). Кўпайтувчи $\gamma \frac{M_{\text{Ер}}}{R^2_{\text{Ер}}}$ ҳам барча жисмлар учун бир хил экан. Инерт масса билан гравитацион масса орасидаги фарқ сезилиши мумкин бўлган бошқа барча тажрибалар ҳам худди шундай натижага олиб келади.

Тажрибадан топилган фактларнинг ҳаммаси *ҳамма жисмларнинг инерт ва гравитацион массалари қатъиян бир-бирига пропорционал* эканлигини кўрсатади. Бу шуни англатадики, ўлчов бирликларини тегишлича танлаб олинса, гравитацион ва инерт массалар бир-бирига айнан тенг бўлиб қолади, шунинг учун ҳам физикада тўғридан-тўғри масса ҳақида гап юритилади. Гравитацион ва инерт массаларнинг айнийлигини Эйнштейн умумий нисбийлик назариясига асос қилиб олган.

Шуни қайд қилиб ўтамизки, аввалданоқ (46.1) да биз масса инерт массага ўхшайди деб олганмиз; шунинг учун ҳам γ нинг сон қийматини $m_g = m_{in}$ деб фараз қилиб туриб топган эдик. Шунинг учун (48.1) ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$w = \gamma \frac{M_{\text{Ер}}}{R^2_{\text{Ер}}}. \qquad (48.2)$$

Кейинги муносабатдан Ернинг $M_{\text{Ер}}$ массасини аниқлаш мумкин. Унга w, $R_{\text{Ер}}$ ва γ ларнинг ўлчанган қийматлари қўйилса, Ернинг массаси учун $5{,}98 \cdot 10^{24}$ *кг* қиймат топилади.

Сўнгра Ер орбитасининг $R_{\text{ор}}$ радиуси ва Ернинг Қуёш атрофида тўла айланиш вақти T маълум бўлса, Қуёшнинг $M_{\text{қ}}$ массасини топиш мумкин. Ернинг $\omega^2 R_{\text{ор}}$ $(\omega = 2\pi/T)$ га тенг тезланиши Ернинг Қуёшга тортилиш кучи таъсирида юзага келади. Демак,

$$M_{\text{Ер}}\omega^2 R_{\text{ор}} = \gamma \frac{M_{\text{Ер}} M_{\text{К}}}{R_{\text{ор}}^2},$$

бундан Қуёшнинг массасини ҳисоблаб чиқариш мумкин.

Бошқа осмон жисмларининг массалари ана шундай йўл билан топилган.

49- §. Кеплер қонунлари

Ньютоннинг бутун олам тортишиш қонунини кашф қилишига планеталар харакатининг Кеплер томонидан очилган учта қонуни асос бўлди:

1. Барча планеталар фокусларидан бирида Қуёш жойлашган эллипслар бўйлаб ҳаракатланади.
2. Планетанинг радиус-вектори тенг вақтлар ичида тенг юзлар чизади.
3. Планеталарнинг Қуёш атрофида айланиш даврларининг квадратлари нисбатлари улар орбиталарининг катта ярим ўқлари кубларининг нисбатларига тенг.

Кеплернинг биринчи қонуни планеталар марказий кучлар майдонида ҳаракатланишини кўрсатади. Ҳақиқатан ҳам, биз 37- § да жисмнинг марказий куч майдонидаги траекторияси ясси текисликдан — фокуси кучлар маркази билан устма-уст тушувчи гиперболадан, параболадан ёки эллипсдан иборат эканлигини кўрган эдик.

Соддалаштириш учун орбиталар эллипс эмас, айланалардан иборат (шундай фараз қилиш мумкин, чунки ҳамма планеталарнинг орбиталари айланаларидан кам фарқ қилади) деб олиб, планетанинг ҳаракат тезланишини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$w = \frac{v^2}{r},$$

бу ерда v — планетанинг ҳаракат тезлиги, r — орбитанинг радиуси. v ни $2\pi r/T$ билан алмаштирайлик (T — планетанинг Қуёш атрофида айланиш даври):

$$w = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Сўнгги ифодага асосан планеталарга Қуёш томонидан кўрсатиладиган таъсир кучларининг нисбати қуйидагича ёзилади:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{m_1 w_1}{m_2 w_2} = \frac{m_1 r_1 T_2^2}{m_1 r_2 T_1^2}.$$

Кеплер учинчи қонунига биноан айланиш даврлари квадратларининг нисбатини орбиталар радиусларининг кублари нисбати билан алмаштириб қуйидагини топамиз:

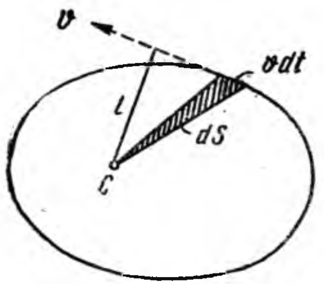
$$f_1 : f_2 = \frac{m_1}{r_1^2} : \frac{m_2}{r_2^2}.$$

Шундай қилиб, Кеплернинг учинчи қонунидан планетанинг Куёшга тортилиш кучи планетанинг массасига тўғри пропорционал ва ундан Қуёшгача бўлган масофанинг квадратига тескари пропорционал деган хулоса чиқади:

$$f = k\frac{m}{r^2}.$$

Пропорционаллик коэффициенти k ўз навбатида Қуёшнинг $M_қ$ массасига пропорционалдир деб фараз қилиб, Ньютон бизга таниш бўлган қуйидаги бутун олам тортишиш қонунини ифодаловчи формулани топди:

$$f = \gamma\frac{mM_қ}{r^2}.$$



132- расм.

Кеплернинг иккинчи қонуни импульс моментининг сақланиш қонунининг хулосасидир. 132- расмдан кўриниб турибдики, dt вақт ичида радиус-вектор чизган dS юз учбурчакнинг vdt асосининг учбурчак баландлиги l га (у планета импульсининг Қуёшга нисбатан елкаси билан устма-уст тушади) кўпайтмасининг ярмига тенг:

$$dS = \frac{1}{2}lvdt = \frac{L}{2m}dt$$

(L — планетанинг импульси моменти бўлиб, у mvl га тенг).

$\frac{dS}{dt}$ ифода секториал тезлик дейилади. Шундай қилиб, секториал тезлик $= \frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}$.

Кучларнинг марказий майдонида импульс моменти ўзгармайди, демак, планетанинг секториал тезлиги ҳам ўзгармаслиги керак. Бу вақтнинг тенг оралиқлари ичида радиус-вектор тенг юзлар чизишини билдиради.

50- §. Космик тезликлар

Жисм Ер атрофида радиуси Ер радиуси $R_{Ер}$ дан кам фарқ қиладиган айлана орбита бўйлаб ҳаракатланиши учун у аниқ бир v_1 тезликка эга бўлиши керак; бу v_1 тезликнинг катталигини жисм массасининг марказга интилма тезланишга кўпайтмаси жисмга таъсир этувчи оғирлик кучига тенг эканлиги шартидан топиш мумкин:

$$m\frac{v_1^2}{R_{Ер}} = mg.$$

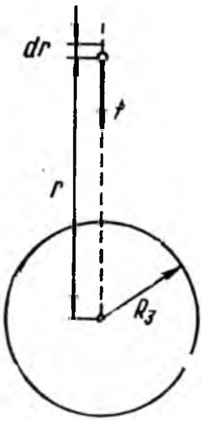
Бундан

$$v_1 = \sqrt{gR_{Ер}}. \qquad (50.1)$$

Демак, бирор жисм Ернинг йўлдошига айланиши учун унга биринчи космик тезлик деб аталадиган v_1 тезлик бериш керак экан. g ва $R_{\text{Ер}}$ ларнинг қийматларини формулага қўйсак, биринчи космик тезлик учун қуйидаги қийматни топамиз:

$$v_1 = \sqrt{gR_{\text{Ер}}} = \sqrt{9{,}8 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6} \approx 8 \cdot 10^3 \ \textit{м/сек} = 8 \ \textit{км/сек}.$$

Тезлиги v_1 га тенг бўлган жисм Ерга тушиб кетмайди. Бироқ бу тезлик жисм Ернинг тортиш сферасидан чиқиб кетиши, яъни Ердан то Ернинг тортиш кучи муҳим роль ўйнамай қоладиган масофагача узоқлашиб кетиши учун етарли эмас. Бунинг учун зарур бўлган тезлик иккинчи космик тезлик дейилади.



133- расм.

Иккинчи космик тезликни топиш учун жисмни Ер сиртидан чексизликкача узоқлаштириш учун Ернинг тортиш кучига қарши мажбуран бажариладиган ишни ҳисоблаш керак. 26- § да биз марказий кучлар майдонида бажарилган иш йўлга боғлиқ эмаслигини исботлаган эдик. Жисмни Ернинг маркази орқали ўтувчи тўғри чизиқ бўйлаб кўчириш учун бажариладиган ишни ҳисоблайлик (133- расм). dr йўлда бажарилган элементар иш қуйидагига тенг:

$$dA = f dr = \gamma \frac{mM_{\text{Ер}}}{r^2} dr.$$

$r = R_{\text{Ер}}$ дан $r = \infty$ гача бўлган йўлда бажарилган ишни интеграллаш орқали топамиз:

$$A = \int dA = \int\limits_{R_{\text{Ер}}}^{\infty} \gamma \frac{mM_{\text{Ер}}}{r^2} dr = -\gamma \frac{mM_{\text{Ер}}}{r}\Bigg|_{R_{\text{Ер}}}^{\infty} = \gamma \frac{mM_{\text{Ер}}}{R_{\text{Ер}}}. \qquad (50.2)$$

Оғирлик кучини Ерга тортилиш кучига тенглаштириб қуйидагини ёзиш мумкин:

$$mg = \gamma \frac{mM_{\text{Ер}}}{R^2_{\text{Ер}}}; \text{ бундан } \gamma \frac{mM_{\text{Ер}}}{R_{\text{Ер}}} = mgR_{\text{Ер}}.$$

Шундай қилиб, (50.2) ишни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$A = mgR_{\text{Ер}}. \qquad (50.3)$$

Ернинг тортишини енгиб, Ернинг тортиш кучи доирасидан чиқиб кетиш учун жисм (50.3) ишни бажариш учун етарли энергия запасига эга бўлиши керак. Бунинг учун зарур бўлган минимал тезлик v_2 иккинчи космик тезликнинг ўзгинасидар. У қуйидаги шартдан топилади:

$$\frac{mv_2^2}{2} = mgR_{\text{Ер}},$$

бундан

$$v_2 = \sqrt{2gR_{\text{Ер}}}. \qquad (50.4)$$

(50.4) ни (50.1) билан солиштирсак, иккинчи космик тезлик биринчи космик тезликдан 2 марта катта эканлиги кўриниб турибди. 8 *км/сек* ни $\sqrt{2}$ га кўпайтирсак, v_2 учун тахминан 11 *км/сек* га тенг қийматни топамиз.

Космик тезликларга дунёда биринчи бўлиб СССРда эришилди. 1957 йилнинг 4 октябрида Совет Иттифоқида кишилик жамияти тарихида биринчи марта Ернинг сунъий йўлдоши муваффақиятли учирилди. 1959 йилнинг 2 январида иккинчи космик тезликка эришилди. Шу куни совет тупроғидан Ернинг тортиш сферасидан чиқиб бизнинг Қуёш системамизнинг сунъий сайёрасига айланган космик ракета учирилди. 1961 йилнинг 12 апрелида Совет Иттифоқида, дунёда биринчи бўлиб одам космик фазога муваффақиятли парвоз қилди. Биринчи совет космонавти Юрий Алексеевич Гагарин Ер атрофини айланиб чиқди ва Ерга муваффақиятли қўнди.

VII БОВ

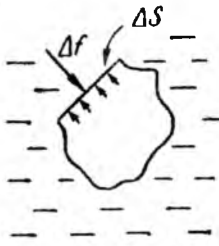
СУЮҚЛИКЛАР ВА ГАЗЛАР СТАТИКАСИ

Механиканинг суюқлик ва газларни ўрганиш билан шуғулланадиган бўлими гидромеханика ва аэромеханика дейилади. Улар ўз навбатида гидростатика ва аэростатикага (улар суюқлик ва газларнинг мувозанатини ўрганади) ҳамда гидродинамикага ва аэродинамикага (улар суюқлик ва газларнинг ҳаракатини ўрганади) бўлинади. Ушбу бобда статика баён этилади.

51- §. Босим

Суюқлик ва газсимон жисмлар шу билан характерланадики, улар силжишга қаршилик кўрсатмайди ва шу сабабли истаганча кичик кучлар таъсирида ҳам ўз шаклини ўзгартира олади. Суюқлик ёки газнинг ҳажмини ўзгартириш учун, аксинча, анча катта чекли ташқи кучлар зарур. Ташқи таъсирлар натижасида суюқликлар ва газларнинг ҳажми ўзгарганда уларда ниҳоят бориб ташқи кучларинг таъсирини мувозанатловчи эластик кучлар юзага келади. Суюқлик ва газларнинг эластик хоссалари уларнинг алоҳида қисмлари бир-бирига ёки уларга тегиб турувчи жисмларга бу суюқлик ва газларнинг сиқилиш даражасига боғлиқ бўлган куч билан таъсир кўрсатиши орқали намоён бўлади. Ана шу таъсир босим деб аталувчи катталик билан характерланади.

Мувозанатда турган суюқликни текширайлик. Мувозанатда турибди деган сўз унинг алоҳида қисмлари бир-бирига ёки улар билан чегарадош жисмларга нисбатан кўчмаслигини билдиради. Суюқликда фикран ΔS юзча ажратамиз (134-расм). Суюқликнинг шу юзча бўйлаб бир-бирига тегиб турган қисмлари бир-бирига катталик жиҳатдан тенг, йўналишлари қарама-қарши бўлган кучлар билан таъсир кўрсатади. Бу кучларнинг характерини аниқлаш учун юзчанинг бир томонидан суюқликни фикран олиб қўйиб бу олинган суюқликнинг таъсирини шундай катталик ва йўналишдаги кучлар билан алмаштирамизки, натижада суюқликнинг бошқа қисмларининг мувозанат ҳолати бузилмасин. Бу кучлар ΔS га нормал йўналган бўлиши керак,



134- расм.

чунки акс ҳолда уларнинг тангенциал ташкил этувчиси суюқлик бўлакчаларини ҳаракатга келтириб мувозанатни бузган бўлар эди. Демак, суюқликнинг ΔS юзга кўрсатадиган таъсир кучларининг Δf тенг таъсир этувчиси ҳам шу юзга ўтказилган нормал бўйлаб йўналган. Юзча сиртининг бирлигига тўғри келувчи Δf куч суюқликдаги босим дейилади. Шундай қилиб, таърифга биноан босим p қуйидагига тенг экан:

$$p = \frac{\Delta f}{\Delta S}. \qquad (51.1)$$

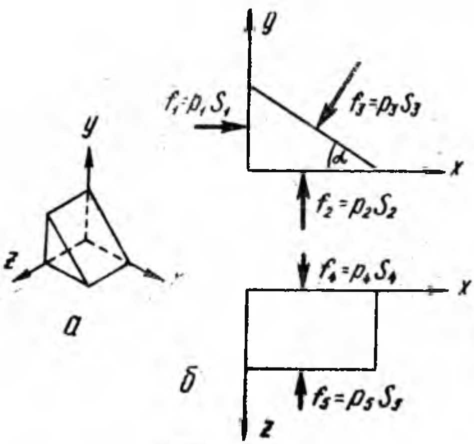
Агар суюқликнинг ΔS юзга кўрсатаётган таъсир кучи у бўйлаб текис тақсимланса, у ҳолда (51.1) ифода ўртача босимни ифодалайди. Берилган нуқтадаги босимни топиш учун ΔS ни нолга интилтирмоқ керак. Демак, нуқтадаги босим қуйидаги ифода билан аниқлади:

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta S} = \frac{df}{dS}. \qquad (51.2)$$

Газдаги босим ҳам худди шундай йўл билан топилади.

Босим — скаляр катталик, чунки унинг катталиги суюқликнинг (ёки газнинг) берилган нуқтасидаги шу босим тегишли бўлган ΔS юзнинг вазиятига боғлиқ эмас. Бу фикрни исботлаш учун қотиш принципи номи билан юритилувчи принципдан фойдаланамиз. Бу принципга биноан суюқликнинг исталган ҳажмини мувозанат шароитини бузмасдан зичлиги суюқлик зичлигига тенг бўлган қаттиқ жисм билан алмаштириш мумкин.

Текширилаётган нуқтанинг яқин атрофида фикран суюқликнинг уч ёқли призма шаклидаги қотиб қолган ҳажмини ажратиб олайлик. Бу ҳажмнинг асл кўриниши 135- *а* расмда ва иккита проекцияси 135- *б* расмда тасвирланган. Призманинг ҳар бир ёғига унга нормал бўйлаб йўналган ва тегишли босимнинг сиртнинг катталигига кўпайтмасига тенг бўлган сиртқи куч таъсир кўрсатади. Ундан ташқари призмага унинг оғирлигига тенг бўлган ҳажм кучи таъсир қилади. Сирт жисмнинг чизиқли ўлчамларининг квадратига, ҳажм эса — учинчи даражасига пропорционал бўлганлигидан призманинг ўлчамлари кичрайганда ҳажм кучи сиртқи кучларга қараганда тезроқ нолга интилади. Биз охири бориб лимитда ажратилган ҳажмни нуқтага келтиришимизни на-



135- расм.

зарда тутиб, мулоҳазаларнинг бошидаёқ ҳажм кучини эътиборга олмасак ҳам бўлади. У ҳолда мувозанат шарти сиртқи кучларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлишидан иборат бўлади. 135- *б* расмда кўрсатилган x, y ва z ўқларга туширилган проекциялар орқали мувозанат шартлари қуйидагича ёзилади:

$$p_1S_1 = p_3S_3 \sin\alpha, \quad p_2S_2 = p_3S_3\cos\alpha, \quad p_4S_4 = p_5S_5. \qquad (51.3)$$

135- *б* расмдан кўриниб турибдики, призма ёқларининг сиртлари орасида қуйидагича муносабатлар ўринли экан:

$$S_1 = S_3\sin\alpha, \quad S_2 = S_3\cos\alpha, \quad S_4 = S_5.$$

Бу муносабатларни ҳисобга олсак, (51.3) формулалар қуйидагича кўринишга келади:

$$p_1 = p_2 = p_3, \quad p_4 = p_5. \qquad (51.4)$$

Лимитга ўтган вақтда ажратиб олинган ҳажм нуқтага тўпланганлиги сабабли p_1, p_2, p_3 ва ҳоказо босимларни суюқликнинг битта нуқтасинининг ўзига тегишли деб олиш мумкин.

Призманинг фазодаги вазияти ва α бурчак ихтиёрий бўлганлиги учун (51.4) босимнинг катталиги шу босим тегишли бўлган юзчанинг вазиятига (ориентациясига) боғлиқ эмас деган хулоса чиқади; худди шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Дастлаб қараганда вектор катталикка (кучга) пропорционал бўлган босим скаляр катталик эканлиги қизиқ туюлади. Бироқ шуни назарда тутмоқ керакки, ΔS юзчани ҳам унга ўтказилган нормал бўйлаб йўналган, яъни юзчага таъсир кўрсатаётган куч билан бир томонга йўналган вектор деб қараш мумкин. Демак, аслида босим иккита коллинеар $\Delta \mathbf{f}$ ва $\Delta \mathbf{S}$ векторларнинг нисбатига тенг экан. Маълумки, бундай катталик скаляр катталикдир.

Босим бирликлари қуйидагилардир:

1) СИ системада — *н/м*^{2};

2) СГС системада — *дина/см*^{2}.

Ундан ташқари босимни ўлчаш учун кўпинча қуйидаги системадан ташқари бирликлардан ҳам фойдаланилади:

1) техник атмосферада (белгиси *ат*), у 1*кгк/см*^{2} га тенг;

2) физик ёки нормал атмосферада (белгиси *атм*), у баландлиги 760 *мм* бўлган симоб устунининг босимига тенг.

Физикада босим кўпинча миллиметрларда ўлчанган симоб устуни билан ўлчанади. Босимнинг турли бирликлари орасида қуйидаги муносабатлар ўринли:

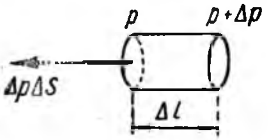
1 *мм сим уст* $= 0{,}001$ *м* $\cdot 13{,}6 \cdot 10^3$*кг/м*^{3} $9{,}81$ *м/сек*^{2} $= 133$ *н/м*^{2};

1 *атм* $= 760 \cdot 133 = 1{,}01 \cdot 10^5$ *н/м*^{2} $= 1{,}033$ *ат*;

1 *ат* $= 9{,}81 \cdot 10^4 = 0{,}981 \cdot 10^5$ *н/м*^{2} $= 0{,}968$ *атм*.

52- §. Тинч ҳолатдаги суюқлик ва газда босим тақсимоти

Агар суюқликда (ёки газда) ҳажм кучлари бўлмаса, у ҳолда бутун ҳажмда босимнинг ўзгармай қолиши мувозанат шартидан иборат бўлган бўлар эди (Паскаль қонуни). Ҳақиқатан ҳам, суюқликда ихтиёрий ориентирланган баландлиги Δl га ва асоси ΔS га тенг цилиндрик ҳажм ажратайлик (136-расм). Агар бир-биридан Δl масофада ётган нуқталарда босим Δp га фарқ қилса, у вақтда цилиндрнинг ўқи бўйлаб $\Delta p\ \Delta S$ куч таъсир кўрсатган бўлар ва



136- расм

137- расм.

бунинг натижасида суюқлик ҳаракатга келиб мувозанат бузилган бўлар эди. Демак, ҳажм кучлари бўлмаган шароитда мувозанат ҳолатдаги суюқликнинг исталган жойи учун $\frac{\Delta p}{\Delta l} = 0$ шарт қаноатлантирилиши зарур, бундан $p = \text{const}$ деган хулоса чиқади.

Ҳажм кучлар бор бўлганда босим қандай тақсимланишини текширайлик. Суюқликда горизонтал жойлашган кичик ΔS кесимли (137-расм) цилиндр шаклидаги «қотган» ҳажм ажратамиз. Ҳажм кучи вертикал бўйлаб йўналганлиги учун цилиндр ўқи бўйлаб иккита $p_1\Delta S$ ва $p_2\Delta S$ кучлар таъсир этади. Мувозанат шартидан $p_1 = p_2$ эканлиги келиб чиқади; демак, суюқликнинг бир хил баландликда (яъни битта горизонтал текисликда) ётган барча нуқталарида босим бир хил қийматга эга бўлар экан.

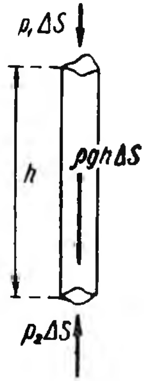
Энди қотган цилиндрик ҳажмни шундай танлаб оламизки, унинг ўқи вертикал йўналган бўлсин (138-расм). Бу ҳолда цилиндр асосига унинг ўқи бўйлаб кўрсатиладиган босим кучидан ташқари ҳажм кучи $\rho gh\Delta S$ (ρ — суюқлик зичлиги, h — цилиндрнинг баландлиги) таъсир кўрсатади ва мувозанат шарти қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$p_2\Delta S = p_1\Delta S + \rho gh\Delta S.$$

ΔS га қисқартириб қуйидагини топамиз:

$$p_2 = p_1 + \rho gh.$$

Шундай қилиб, иккита турли баландликлардаги босимлар бир-биридан шу баландликлар орасида ётган ва кўндаланг кесими бирга тенг бўлган суюқлик вертикал устунининг оғирлигига тенг қийматга фарқ қилар экан.

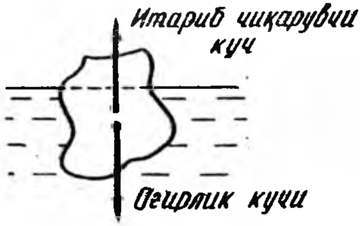


138- расм.

53- §. Итариб чиқарувчи куч

Турли баландликлардаги босимлар ҳар хил бўлганлиги натижасида суюқлик ёки газ ичида турган жисмларга таъсир этувчи итариб чиқариш (Архимед) кучлари юзага келади. Итариб чиқарувчи кучнинг катталигини топиш учун жисмни «қотган» суюқлик (газ) ҳажми билан алмаштирамиз. Бу ҳажм мувозанатда турганлиги сабабли унинг оғирлик кучи унинг сиртига таъсир этувчи барча босим кучларининг тенг таъсир этувчиси билан мувозанатлашиши керак. Худди шундай сирт кучлари жисмнинг ўзига ҳам таъсир кўрсатади ва уларнинг тенг таъсир этувчиси итариб чиқарувчи кучни ҳосил қилади.

139- расм.



140- расм.

Айтилганлардан итариб чиқарувчи куч жисм ҳажмидаги суюқлик оғирлигига тенг ва вертикал бўйлаб юқорига қараб таъсир этади деган хулоса чиқади. Қотган ҳажм унинг исталган вазиятида ҳам мувозанатда (фарқсиз мувозанатда) қолади. Демак, итариб чиқарувчи кучнинг қўйилиш нуқтаси жисм ҳажмининг оғирлик маркази билан устма-уст тушади. Жисмнинг ўзининг оғирлик маркази фақат жисмнинг зичлиги барча нуқталарда бир хил бўлган ҳолдагина ҳажмнинг оғирлик маркази билан устма-уст тушади. Акс ҳолда улар устма-уст тушмаслиги мумкин. Мисол учун қўрғошин ва ёғоч ярим шарлардан ясалган шар олайлик (139-расм). Итариб чиқарувчи куч шарнинг марказига қўйилган бўлса, оғирлик кучининг қўйилиш нуқтаси эса қўрғошин ярим шар томонга қараб силжиган бўлади.

Агар жисмнинг ўртача зичлиги суюқликнинг зичлигидан кичик бўлса, у ҳолда мувозанат ҳолатида жисм фақат қисмангина суюқликка ботиб туради. Бунда оғирлик кучи (у жисмнинг оғирлик марказига қўйилган) ва итариб чиқарувчи кучлар (улар жисмнинг суюқликка ботган қисмининг оғирлик марказига қўйилган) катталик жиҳатдан бир-бирига тенг бўлиши ва бир тўғри чизиқ бўйлаб таъсир этиши керак (140-расм), акс ҳолда улар айлантирувчи момент юзага келтиради ва натижада мувозанат бузилади.

VIII БОБ

ГИДРОДИНАМИКА

54-§. Оқим чизиқлари ва найлари. Оқимнинг узлуксизлиги

Суюқликнинг ҳаракатини тушунтириш учун суюқликнинг ҳар бир зарраси учун траектория билан тезликни вақтнинг функцияси сифатида ёзиш керак. Бу усулни Лагранж ишлаб чиққан. Бироқ суюқликнинг зарраларини кузатмасдан, фазонинг алоҳида нуқталарини кузатиб, ҳар бир берилган нуқтадан суюқликнинг алоҳида зарралари қандай тезлик билан ўтаётганлигини қайд қилиб борса ҳам бўлади. Бу иккинчи усул Эйлер усули деб аталади.

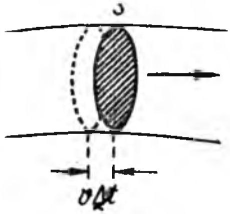
Суюқликнинг ҳаракат ҳолатини фазонинг ҳар бир нуқтаси учун тезлик векторини вақтнинг функцияси сифатида ёзиш орқали ҳам аниқласа бўлади. Фазонинг барча нуқталари учун берилган **v** векторлар тўплами тезлик вектори майдонини ҳосил қилади. Бу майдонни қуйидагича тасвирлаш мумкин. Ҳаракатланаётган суюқликда шундай чизиқлар ўтказамизки, уларнинг уринмалари ҳар бир нуқтада йўналиши **v** вектор йўналиши билан устма-уст тушсин (141-расм). Бу чизиқлар о қ и м ч и з и қ л а р и дейилади.

141- расм.

Оқим чизиқларини шундай ўтказишга келишиб оламизки, уларнинг қуюқлиги (у чизиқлар сони ΔN нинг улар кесиб ўтаётган, уларга перпендикуляр ΔS юзчанинг катталигига нисбати билан характерланади) берилган жойдаги тезликнинг катталигига пропорционал бўлсин. Ўшанда оқим чизиқларининг манзарасига қараб **v** векторнинг фазонинг турли нуқталаридаги йўналиши ҳақидагина эмас, балки катталиги ҳақида ҳам фикр юритиш мумкин бўлади: тезлик каттароқ бўлган жойда оқим чизиқлари зичроқ ва аксинча, тезлик кичикроқ бўлган жойда оқим чизиқлари сийракроқ бўлади. **v** векторнинг катталиги ва йўналиши ҳар бир нуқтада вақт ўтиши билан ўзгариши мумкин бўлганлиги учун оқим чизиқларининг манзараси ҳам узлуксиз ўзгариши мумкин. Агар тезлик вектори фазонинг ҳар бир нуқтасида бирдек қолса, у ҳолда оқим қарор топган ёки с т а ц и о н а р дейилади. Стационар оқиш вақтида суюқликнинг исталган нуқтаси фазонинг берилган нуқтасини бирдан-бир **v** тезлик билан ўтади. Стационар оқиш вақтида оқим чизиқларининг манзараси ўзгармайди ва бу ҳолда оқим чизиқлари зарарларнинг траекториялари билан устма-уст тушади.

Суюқликнинг оқим чизиқлари билан чегараланган қисми **оқим найи** деб аталади. **v** вектор ҳар бир нуқтада оқим чизиғига уринма бўлганлигидан оқим найининг сиртига ҳам уринма бўлади; демак, суюқлик зарралари ҳаракат вақтида оқим найининг деворларини кесиб ўтмайди.

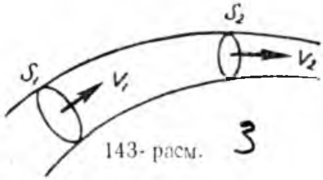
Оқим найининг тезлик йўналишига перпендикуляр S кесимини олайлик (142-расм). Фараз қилайлик, суюқлик зарраларининг ҳаракат тезлиги бу кесимнинг ҳамма нуқталарида бир хил бўлсин. Δt вақт ичида S кесим орқали бошланғич моментда S дан $v\Delta t$ масофадан катта бўлмаган масофада ётган барча зарралар ўтади. Демак, Δt вақт ичида S кесим орқали $Sv\Delta t$ га тенг суюқлик ҳажми, вақт бирлиги ичида эса S кесим орқали Sv га тенг суюқлик ҳажми ўтар экан. Оқим найини унинг ҳар бир кесимида тезликни доимий деб ҳисобласа бўладиган даражада ингичка қилиб оламиз. Агар суюқлик сиқилмас бўлса (яъни унинг зичлиги ҳамма ерда бир хил бўлиб ўзгармай қолса), у ҳолда S_1 ва S_2 кесимлар орасида (143-расм) суюқлик миқдори ўзгармайди. Демак, вақт бирлиги ичида S_1 ва S_2 кесимлар орқали оқиб ўтувчи суюқлик ҳажмлари бир хил бўлиши керак:



142- расм.

$$S_1v_1 = S_2v_2$$

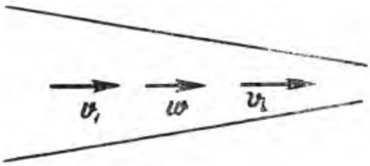
(оқим найининг ён сиртлари орқали суюқлик зарралари ўтмаслигини эслатамиз).



143- расм.

Юқорида келтирилган мулоҳазалар S_1 ва S_2 кесимларнинг исталган жуфти учун тааллуқлидир. Демак, сиқилмас суюқлик учун берилган найнинг исталган кесимида Sv катталик бир хил бўлиши керак экан:

$$Sv = \text{const}.$$



144- расм.

Бу олинган натижа **оқимнинг узлуксизлиги ҳақидаги теореманинг** мазмунини намойиш қилади.

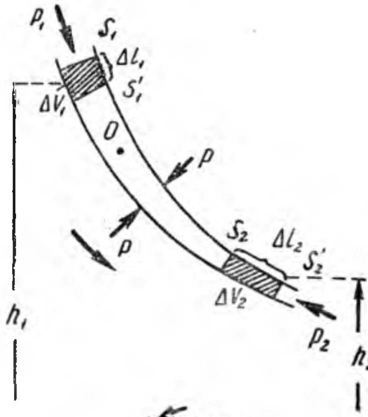
(54.1) га биноан оқим найининг кесими ўзгарувчан бўлса, сиқилмас суюқликнинг зарралари тезланиш билан ҳаракат қилади. Горизонтал оқим найида (144- расм) бу тезланишнинг юзага келишига фақат най ўқи бўйлаб босим доимий бўлмаганлиги сабаб бўлиши мумкин: тезлик кам бўлган жойларда босим каттароқ бўлиши керак ва аксинча Оқиш тезлиги билан босим орасидаги миқдорий боғланиш кейинги параграфларда топилади.

Оқимнинг узлуксизлиги ҳақидаги теорема реал суюқликларга ва газларнинг сиқилувчанлигини ҳисобга олмаса бўладиган ҳолларда ҳатто газларга ҳам қўллаш мумкин. Тегишли ҳисоблар кўрсатадики, суюқликлар ва газлар товуш тезлигидан кичик тезликлар билан ҳаракатланган вақтда уларни етарли даражада аниқлик билан сиқилмас деб ҳисоблаш мумкин экан.

55- §. Бернулли тенгламаси

Суюқликларнинг ҳаракатини текшираётганда кўп ҳолларда суюқликнинг бир қисмининг бошқа қисмларига нисбатан ҳаракати вақтида ишқаланиш кучлари юзага чиқмайди деб ҳисоблаш мумкин. Ички ишқаланиши (қовушоқлик) батамом йўқ бўлган суюқлик и д е а л суюқлик дейилади.

Стационар оқаётган идеал суюқликда кичик кесимли оқим найини ажратиб олайлик (145-расм). Оқим найининг деворлари ва оқим чизиқларига перпендикуляр S_1 ва S_2 кесимлар билан чегараланган суюқликнинг ҳажмини кўрайлик. Δt вақт ичида бу ҳажм оқим найи бўйлаб кўчади, бунда S_1 кесим Δl_1 йўл ўтиб S_1' ҳолатга кўчади, S_2 кесим эса Δl_2 йўл ўтиб S_2' ҳолатга ўтади. Оқим узлуксиз бўлганлигидан штрихланган ҳажмлар бир хил $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$ бўлади. Суюқликнинг ҳар бир заррасининг энергияси унинг кинетик энергияси билан Ернинг тортиш кучи майдонидаги потенциал энергиясидан ташкил топади. Оқим стационар бўлгани учун Δt вақтдан кейин қаралаётган жисмнинг штрихланмаган қисмининг исталган нуқтасида (масалан, 145-расмдаги O нуқтани қаранг) турган зарранинг тезлиги (демак, кинетик энергияси ҳам) вақтнинг бошланғич моментида ўша нуқтада турган зарранинг тезлигига тенг бўлади. Шунинг учун бутун текширилаётган ҳажм энергиясининг ΔE орттирмасини штрихланган ΔV_2 ва ΔV_1 ҳажмчалар энергияларининг айирмаси сифатида ҳисоблаб чиқариш мумкин.



145- расм.

Оқим найининг кесимини ва Δl кесмаларни шу қадар кичик қилиб оламизки, штрихланган ҳажмчаларнинг ҳар бирининг барча нуқталарида v тезлик, p босим ва h баландлик бир хил деб ҳисоблаш мумкин бўлсин. У вақтда энергиянинг орттирмаси қуйидагича ёзилади:

$$\Delta E = \left(\frac{\rho \Delta V v_2^2}{2} + \rho \Delta V g h_2\right) - \left(\frac{\rho \Delta V v_1^2}{2} + \rho \Delta V g h_1\right) \qquad (55.1)$$

(ρ — суюқликнинг зичлиги).

Идеал суюқликда ишқаланиш кучлари йўқ. Шунинг учун энергия орттирмаси (55.1) ажратилган ҳажм устида босим кучлари бажарган ишга тенг бўлиши керак. Ён сиртга кўрсатиладиган босим кучлари ҳар бир нуқтада ўзлари қўйилган нуқталарнинг кўчиш йўналишига перпендикуляр бўлганлиги учун иш бажармайди. Фақат S_1 ва S_2 кесимларга қўйилган кучларнинг ишигина нолдан фарқли, холос. Бу иш қуйидагига тенг:

$$A = p_1S_1\Delta l_1 - p_2S_2\Delta l_2 = (p_1 - {}_2p)\Delta V. \qquad (55.2)$$

(55.1) ва (55.2) ифодаларни бир-бирига тенглаштириб, ΔV га қисқартириб ва бир хил индексли ҳадларни бараварнинг бир томонига ўтказиб қуйидагини топамиз:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \qquad (55.3)$$

S_1 ва S_2 кесимлар ихтиёрий олинган эди. Шунинг учун оқим найининг исталган кесимида $\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p$ ифода бир хил қийматга эга бўлади, деб айтиш мумкин. Биз (55.3) тенгламани чиқараётганимизда қилган тахминларимизга мувофиқ бу тенглама фақат S кўндаланг кесим нолга интилгандагина, яъни оқим найи чизиққа айлангандагина тўла равишда аниқ тенгламага айланади. Шундай қилиб, (55.3) тенгламанинг чап ва ўнг томонларида иштирок этувчи p, v ва h катталикларни бирдан-бир оқим чизиғининг иккита ихтиёрий нуқталарига тегишли деб қараш керак.

Бу биз топган натижани қуйидагича таърифлашимиз мумкин: стационар оқаётган идеал суюқликда исталган оқим чизиғи бўйлаб қуйидаги шарт бажарилади:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}. \qquad (55.4)$$

(55.4) тенглама ёки унга тенг кучли бўлган (55.3) тенглама **Бернулли тенгламаси** дейилади. Бу тенгламани биз идеал суюқлик учун топганлигимизга қарамасдан у ички ишқаланиши унча катта бўлмаган идеал суюқликлар учун ҳам етарли даражада аниқ бажарилади.

Бернулли тенгламасидан келиб чиқадиган баъзи бир хулосаларни қараб чиқайлик. Фараз қилайлик, суюқлик шундай оқаётган бўлсинки, тезлик барча нуқталарда бир хил катталикка эга бўлсин. У вақтда (55.3) га биноан исталган оқим чизиғининг ихтиёрий икки нуқтаси учун қуйидаги тенглик бажарилади:

$$p_1 - p_2 = \rho g(h_2 - h_1),$$

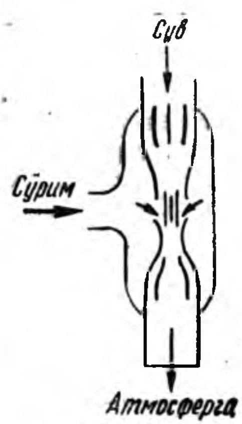
бундан бу ҳолда ҳам босим тақсимоти худди тинч ҳолатда турган суюқликдагидек бўлади, деган хулоса чиқади [(52.1) га қаранг].

Горизонтал оқим чизиғи учун (55.4) шарт қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2,$$

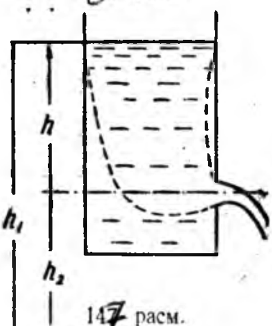
яъни тезлик каттароқ бўлган нуқталарда босим кичикроқ бўлар экан (шундай бўлишини биз олдинги параграфда юзаки қараб чиққан эдик).

Оқим тезлиги каттароқ бўлган нуқталарда босимнинг кичрайиши сув шарраси насосининг тузилишига асос қилиб олинган (146-расм). Сув шарраси атмосферага очиладиган, яъни учидаги босим атмосфера босимига тенг бўлган найга берилади. Найда ингичка жой бўлиб, у орқали сув каттароқ тезлик билан оқади, демак, натижада бу ердаги босим атмосфера босимидан кичикроқ бўлади. Насоснинг найни ўраб турган ва най билан унинг ингичка жойидаги узилиш орқали туташган камерасида ҳам босим худди шундай бўлади. Камерага ҳавоси сўриладиган ҳажмни улаб ундаги ҳавони (ёки бошқа бирор газни) тахминан 100 *мм сим уст* гача сўриб олиш мумкин. Сўрилаётган ҳавони сувнинг шарраси атмосферага олиб чиқиб кетади.



146- расм.

Бернулли тенгламасини суюқликнинг оғзи очиқ катта идиш тешигидан оқиб чиқиш ҳолига татбиқ этайлик. Суюқликда бир томондаги кесими идишдаги суюқликнинг очиқ сиртидан, иккинчи томондаги кесими эса суюқлик оқиб чиқаётган тешикдан иборат бўлган оқим найини ажратиб олайлик[1] (147-расм). Бу кесимларнинг ҳар бирида тезликни ва уларнинг бирор бошланғич юзчадан баландлигини бир хил деб ҳисоблаш мумкин. Шунинг учун ҳам худди шундай фараз қилиниб топилган (55.3) тенгламани бу ҳолга қўллаш мумкин. Ундан ташқари иккала кесимда ҳам босимлар атмосфера босимига тенг, шунинг учун ҳам улар бир хил бўлади. Шу билан бирга кенг идишдаги очиқ сиртнинг силжиш тезлигини нолга тенг деб олиш мумкин. Ана шу айтилганларнинг ҳаммасини ҳисобга олиб (55.3) тенгламани қаралаётган ҳол учун қуйидагича ёзиш мумкин:



147- расм.

$$\rho g h_1 = \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h_2,$$

бу ерда v — тешикдан оқиб чиқиш тезлиги. ρ га қисқартириб ва суюқликнинг очиқ сиртининг тешикдан баландлиги $h = h_1 - h_2$ ни киритиб қуйидагини топамиз:

$$\frac{v^2}{2} = gh, \text{ бундан } v = \sqrt{2gh}. \qquad (55.5)$$

---

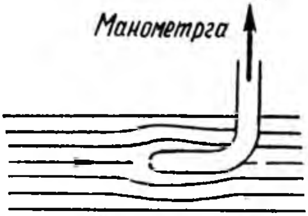
[1] Аниқроғи тешикдан чиқаётган шарранинг кесимини. Агар тегишли чоралар кўрилмаса, шарранинг кесими тешикдан кичик бўлади.

Бу формула Торричелли формуласи дейилади.

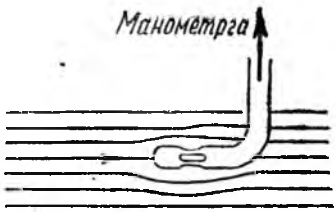
Шундай қилиб, очиқ сирт остида h чуқурликда ётган тешик орқали суюқликнинг оқиб чиқиш тезлиги h баландликдан тушаётган исталган жисм оладиган тезликка тенг бўлар экан. Бу натижа суюқлик идеал деб фараз қилиш орқали топилганлигини эсда тутмоқ керак. Реал суюқликлар учун оқиш тезлиги кичикроқ бўлади ва суюқликнинг қовушоқлиги қанча катта бўлса, тезлик (55.5) қийматидан шунча кўпроқ фарқ қилади.

56- §. Оқаётган суюқликдаги босимни ўлчаш

Аввалги параграфда биз суюқликдаги босим оқим тезлигига боғлиқ эканлигини аниқладик. Суюқликка унинг босимини ўлчайдиган асбоб киритсак, у суюқликнинг ҳаракати характерини бузиши, демак, ўлчанаётган босимнинг катталигини ҳам ўзгартириши мумкин. Суюқликка букилган манометрик найни тешигини оқимга



148- расм.



149- расм.

қаратиб туширайлик (148- расм). Бундай най Пито найи деб аталади. Учи билан най тешигининг марказига тақалувчи оқим чизигини текширайлик. Қаралаётган оқим чизиғи тезлиги найдан катта масофада ётган тўлқинланмайдиган оқим учун v дан бевосита тешик олдидаги оқим учун нолгача ўзгаради. Бернулли тенгламасига биноан тешик олдидаги (демак, манометрик найидаги ҳам) босим қўзғатилмаган оқимдаги p босимдан $\rho v^2/2$ га каттароқ бўлади. Демак, Пито найи билан туташтирилган маноментр

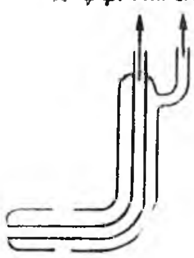
$$p' = p + \frac{\rho v^2}{2} \tag{56.1}$$

босимни кўрсатади.

Ўлчамлиги босим ўлчамлигига тенг бўлган бу $\rho v^2/2$ қўшилувчи динамик босим дейилади. p босимни эса, одатда статик босим дейилади. Статик ва динамик босимларнинг йиғиндисига тенг бўлган p' босим тўла босим дейилади. Демак, Пито найи ёрдамида тўла босимни ўлчаш мумкин экан (56.1).

Агар ингичка букилган найнинг ён томонларидан тешик очсак, у ҳолда бундай тешиклар ёнидаги тезлик (демак, босим ҳам) тўлқинланмаган оқимнинг тезлигидан (ва босимидан) кам фарқ қилади (149- расм). Шунинг учун бундай найга уланган манометр зонд деб аталиб суюқликдаги статик p босимни кўрсатади.

Тўла ва статик босимлар маълум бўлса, $\rho v^2/2$ динамик босимни ва демак, v оқим тезлигини ҳам топиш мумкин (суюқликнинг зичлиги маълум деб фараз қилинади). Агар Пито найи билан зондни 150-расмда кўрсатилгандек қилиб бирлаштириб, дифференциал манометрнинг (яъни босимлар фарқини ўлчайдиган манометрнинг) ҳар хил тирсакларига туташтирсак, у ҳолда манометрнинг) кўрсатишлари бевосита динамик босимни беради. Манометрни v тезлик бирликларида даражаласак, суюқликнинг оқим тезлигини ўлчайдиган асбоб ҳосил қилишимиз мумкин.



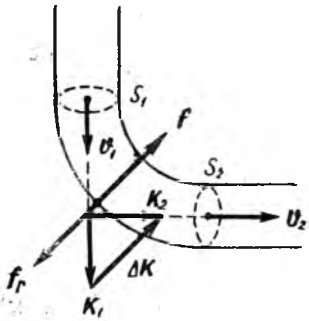
150- расм

57-§. Суюқликнинг ҳаракатига импульснинг сақланиш қонунини қўллаш

Ҳар хил жисмлар каби суюқликлар билан газларга ҳам импульснинг сақланиш қонунини татбиқ қилиш мумкин. Шу қонунни баъзи бир масалаларни ечиш учун татбиқ қилайлик.

Оқаётган суюқликнинг букилган найнинг деворига реакцияси. Букилган най ичида сиқилмас суюқликнинг стационар оқими қарор топди, деб фараз қилайлик (151-расм). Масалани соддалаштириш учун ўзгармас S кесимли най оламиз. У ҳолда оқимнинг узлуксизлигига биноан тезлик ҳар бир кесимда катталик жиҳатдан бир хил ва v га тенг бўлади.

Найнинг S_1 ва S_2 кесимлар билан чегараланган букилган қисмининг ҳажмини қараб чиқайлик. Δt вақт ичида S_1 кесим орқали бу ҳажмга $K_1 = \rho S v \mathbf{v}_1 \Delta t$ импульсга[1] эга бўлган $Sv\Delta t$ суюқлик миқдори оқиб киради. Бир вақтнинг ичида, бу ҳажмдан S_2 кесим орқали $\mathbf{K}_2 = \rho S v \mathbf{v}_2 \Delta t$ импульсга эга бўлган худди ўшанча суюқлик миқдори оқиб чиқади. Шундай қилиб, найнинг букилган қисмининг деворлари Δt вақт ичида ўзларининг ёнидан оқиб ўтаётган суюқликка $\Delta K = K_2 - K_1 = \rho S v (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)\ \Delta t$ импульс орттирмасини беради. Биз биламизки, жисм импульсининг вақт бирлиги ичидаги орттирмаси жисмга таъсир этувчи кучга тенг. Демак, найнинг деворлари суюқликка тенг таъсир этувчиси $\mathbf{f} = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \rho S v (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$ га тенг бўлган кучлар билан таъсир кўрсатар экан. Ньютоннинг учинчи қонунига би-



151- расм.

---

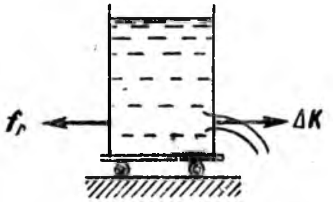
[1] Босим ҳам импульсга ўхшаб p ҳарф билан белгиланади. Шу сабабли, англашилмовчилик бўлмаслиги учун импульсни К ҳарфи билан белгилаймиз.

ноан оқаётган суюқлик найнинг деворига тенг таъсир этувчиси

$$\mathbf{f}_r = \rho S v (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \qquad (57.1)$$

га тенг бўлган кучлар билан таъсир кўрсатар экан. Куч $\mathbf{f}_r$ оқаётган суюқликнинг найнинг деворларига реакцияси дейилади.

Оқиб чиқаётган шарранинг реакцияси. Идишдаги тешикдан оқиб чиқаётган суюқлик шарраси (152- расм) Δt вақт ичида ўзи билан бирга $\Delta \mathbf{K} = \rho S v \mathbf{v} \Delta t$ (ρ — суюқликнинг зичлиги, S — тешикнинг юзи, $\mathbf{v}$ — шарранинг оқиб чиқиш тезлиги) импульс олиб кетади. Бу импульсни оқиб чиқаётган суюқликка идиш беради. Ньютоннинг учинчи қонунига биноан идиш оқиб чиқаётган суюқликдан Δt вақт ичида $-\Delta \mathbf{K}$ импульс олади, яъни унга



152- расм.

$$\mathbf{f}_r = -\frac{\Delta \mathbf{K}}{\Delta t} = -\rho S v \mathbf{v} \qquad (57.2)$$

куч таъсир кўрсатади.

Бу куч оқиб чиқаётган суюқлик шаррасининг реакцияси дейилади. Агар идишни аравачага ўрнатсак, у ҳолда $\mathbf{f}_r$ куч таъсири остида у шарранинг йўналишига тескари йўналишда ҳаракатга келади.

Суюқликнинг тешикдан оқиб чиқиш тезлиги учун ёзилган (55.5) ифодадан фойдаланиб $\mathbf{f}_r$ кучнинг катталигини топамиз:

$$f_r = \rho S v^2 = 2gh\rho S. \qquad (57.3)$$

Агар $\mathbf{f}_r$ куч тешикни беркитиб турган пўкакка суюқлик кўрсатадиган гидростатик босим кучига тенг бўлганда (биринчи қарағанда шундай туюлиши мумкин), f_r куч $gh\rho S$ га тенг бўлар эди. Аслида эса $\mathbf{f}_r$ куч икки марта катта экан. Бунга сабаб шуки, шарра оқиб чиқаётганда суюқликнинг юзага келадиган ҳаракати босимнинг қайта тақсимланишига олиб келади, бунда тешикнинг қаршисида ётган девор ёнидаги босим тешикли девор ёнидаги босимдан каттароқ бўлади.

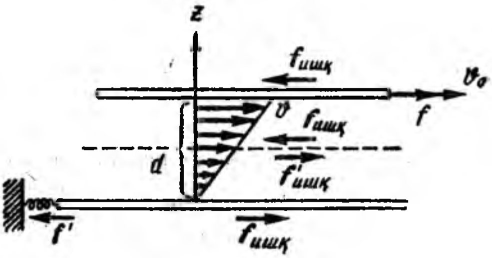
Реактив двигателлар ва ракеталарнинг ҳаракати оқиб чиқаётган газ оқимининг реакция кўрсатиш ҳодисасига асосланган. Реактив ҳаракат учун атмосферанинг зарурати бўлмаганлиги сабабли ундан космик фазога учишда қўлланилади.

Планеталараро алоқалар назариясининг асосчиси буюк рус олими ва ихтирочиси К. Э. Циолковскийдир (1857—1935). У ракетанинг учиш назариясини яратди ва реактив аппаратлардан планеталараро алоқалар учун фойдаланиш мумкинлигини асослаб берди. Хусусан, Циолковский мураккаб ракеталарнинг учиш назариясини ишлаб чиқди. Бундай ракеталарда ҳар бир сўнгги поғона ундан олдинги поғона ёқилгини тўла сарфлаб ракетадан ажралгандан кейин ишга тушади. Циолковский ғоялари космик фазони ўзлаштириш ва ўрганиш борасида Совет Иттифоқини етакчи ўринга чиқарган совет олимлари ҳамда инженерлари томонидан янада ривожлантирилди ва амалга оширилди.

58- §. Ички ишқаланиш кучлари

Идеал, яъни ишқаланишсиз суюқлик бу абстракциядир. Борлиқ реал суюқликлар ва газларга кўп ёки оз даражада қовушоқлик ёки ички ишқаланиш хосдир. Қовушоқлик суюқлик ёки газда юзага келган ҳаракат уни юзага келтирувчи сабаблар тўхтагандан кейин аста-секин тўхтаб қолишида намоён бўлади.

Ички ишқаланиш кучлари бўйсунадиган қонуниятларни аниқлаш учун қуйидаги тажрибани қараб чиқайлик. Суюқликка иккита бир-



153- расм.

бирига параллел ва чизиқли ўлчамлари улар орасидаги d масофадан анча катта бўлган пластинкалар ботирилган бўлсин (153- расм). Остки пластинка ўрнида қолдирилиб, устидагисини остидагига нисбатан бирор v_0 тезлик билан ҳаракатга келтирайлик. Бу тажрибада устки пластинкани доимий v_0 тезлик билан ҳаракатлантириш учун аниқ бир ўзгармас f куч билан таъсир кўрсатиш керак эканлиги кўринади. Ваҳоланки, пластинка тезланиш олмас экан, демак, бу кучнинг таъсири катталик жиҳатдан унга тенг ва қарама-қарши йўналган куч билан мувозанатлашади. Афтидан, бу куч пластинка суюқликда ҳаракатланган вақтда унга таъсир этувчи ишқаланиш кучидан иборат бўлса керак. Уни $f_{ишқ}$ билан белгилаймиз.

Пластинканинг v_0 тезлигини, пластинкаларнинг S юзини ва улар орасидаги d масофани ўзгартира бориб,

$$f_{ишқ} = \eta \frac{v_0}{d} S \qquad (58.1)$$

эканлигини топиш мумкин, бу ерда η — пропорционаллик коэффициенти, у суюқликнинг табиатига ва ҳолатига (масалан, температурасига) боғлиқ бўлиб, **ички ишқаланиш коэффициенти** ёки **қовушоқлик коэффициенти**, ёки тўғридан-тўғри суюқликнинг (газнинг) қовушоқлиги дейилади.

Юқоридаги пластинка ҳаракатланганда осткисига ҳам $f_{ишқ}$ га тенг бўлган $f'_{ишқ}$ куч таъсир кўрсатади. Остки пластинка қўзғалмасдан қолиши учун $f'_{ишқ}$ кучни f' куч ёрдамида мувозанатлаш керак.

Шундай қилиб, суюқликка ботирилган иккита пластинка бир-бирига нисбатан ҳаракатланганда улар орасида (58.1) куч билан характерланувчи ўзаро таъсир юзага келар экан. Пластинкаларнинг ўзаро таъсири, афтидан, улар орасидаги суюқлик орқали суюқликнинг бир қатламидан иккинчисига узатилиш йўли билан амалга ошса керак. Агар тирқишнинг исталган жойида фикран пластинкаларга параллел текислик ўтказсак (153- расмдаги пунктир чизиққа қаранг), у ҳолда суюқликнинг бу текислик устида ётган қисми текислик остидаги қисмига $f'_{ишқ}$ куч билан, суюқликнинг текислик остида ётган қисми эса текислик устида ётган қисмига $f_{ишқ}$ куч билан таъсир кўрсатади ва бунда $f_{ишқ}$ ва $f'_{ишқ}$ кучлар (58.1) формула билан ифодаланади деб айтишимиз мумкин бўлади. Шундай қилиб, (58.1) формула фақат пластинкалар таъсир этаётган ишқаланиш кучинигина эмас, ҳатто суюқликнинг ўзаро тегиб турган қисмлари орасидаги ишқаланиш кучини ҳам ифодалар экан.

Агар суюқликнинг турли қатламларидаги зарраларининг тезлигини текширсак, у ҳолда бу тезлик пластинкага перпендикуляр бўлган z йўналиш бўйлаб (153- расм) чизиқли

$$v(z) = \frac{v_0}{d} z \tag{58.2}$$

қонун билан ўзгаришини топамиз.

Суюқликнинг пластинкаларга бевосита тегиб турган зарралари гўё уларга ёпишиб қолади ва уларнинг тезлиги пластинка тезлигига тенглашади. (53.2) формулага биноан

$$\frac{dv}{dz} = \frac{v_0}{d}. \tag{58.3}$$

(58.3) дан фойдаланиб, ички ишқаланиш кучининг формуласи (58.1) ни қуйидагича кўринишга келтириш мумкин:

$$f_{ишқ} = \eta \frac{dv}{dz} S. \tag{58.4}$$

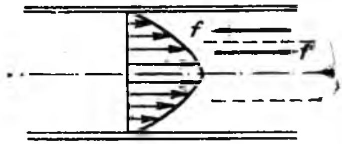
$\frac{dv}{dz}$ катталик z ўқи бўйлаб тезлик қанчалик тез ўзгараётганлигини кўрсатади ва тезлик градиенти деб аталади (аниқроғи, у тезлик градиентининг модулидир; градиент ўзи эса вектор катталик).

(58.4) формула тезлик чизиқли қонун билан ўзгарган ҳол учун топилган эди (бу ҳолда тезлик градиенти ўзгармас бўлади). Маълум бўлишича, бу формула тезлик қатламдан-қатламга ўтганда исталганча бошқа қонун билан ўзгарганда ҳам тўғрилигича қолар экан. Бу ҳолда иккита чегарадош қатламлар орасидаги ишқаланиш кучини аниқлаш учун қатламларнинг тасаввур қилинган ажралиш сирти қаердан ўтса, $\frac{dv}{dz}$ градиентнинг ўша жойдаги қийматини олиш керак. Масалан, суюқлик цилиндрик най ичида ҳаракатланганда тезлик найнинг деворлари ёнида нолга тенг бўлиб, найнинг ўқида эса максимал қийматга эга бўлади. Оқиш тезликлари у қадар катта бўлмаганда исталган радиус бўйлаб

$$v = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \tag{58.5}$$

қонун билан ўзгаришини кўрсатиш мумкин, бунда R — найнинг радиуси, v_0 — найнинг ўқидаги суюқлик қатламининг тезлиги, v — найнинг ўқидан r масофадаги тезлик (154- расм).

Суюқлик ичида фикран r радиусли цилиндрик сирт чизамиз. Суюқликнинг шу сиртнинг турли томонларида ётган қисмлари бир-бирига маълум куч билан таъсир кўрсатади. Бу куч юз бирлигига нисбатан олинганда қуйидагига тенг бўлади:



154- расм.

$$f = \eta \frac{dv}{dr} = \eta\, \frac{2v_0 r}{R^2},$$

яъни найнинг ўқидан чегара сиртгача бўлган масофага пропорционал равишда ортар экан [(58.5) ни r бўйича дифференциаллаганда ҳосил бўладиган «—» ишорани биз тушириб қолдирдик, чунки (58.4) ички ишқаланиш кучининг фақат модулини беради.

Ушбу параграфда айтилган ҳамма гаплар суюқликлар билан бир қаторда газларга ҳам тааллуқлидир.

СИ системада қовушоқлик бирлиги қилиб тезлик градиенти ҳар 1 метрга 1 *м/сек* бўлганда қатламларнинг тегиб турган 1 $м^2$ юзига 1 *н* ички ишқаланиш кучини юзага келтирадиган қовушоқлик қабул қилинган. Бу бирлик $н \cdot сек/м^2$ билан белгиланади.

СГС системада қовушоқлик бирлиги қилиб пуаз (*пз*) олинади. У шундай қовушоқликка тенгки, унда қатламларнинг тегиб турган юзи 1 $см^2$ бўлганда тезликнинг 1 *см* га 1 *см/сек* градиенти 1 *дина* кучни юзага келтиради. 10^{-6} пуазга тенг бирлик микропуаз (*мкпз*) дейилади.

Пуаз билан СИ системадаги қовушоқлик бирлиги орасида қуйидаги муносабат ўринли бўлади.

$$1 н \cdot сек/м^2 = 10\ пз.$$

Қовушоқлик коэффициенти температурага боғлиқ бўлиб, бу боғланишнинг характери суюқлик ва газлар учун ҳар хил бўлади. Суюқликларда температура кўтарилиши билан қовушоқлик коэффициенти кескин камаяди. Газларда эса, аксинча, температура кўтарилиши билан қовушоқлик коэффициенти ортади. Температура ўзгарганда η нинг ўзгариш характери турлича бўлиши суюқлик ва газларда ички ишқалишнинг табиати турлича эканлигидан далолат беради.

59- §. Ламинар ва турбулент оқим

Суюқликнинг (ёки газнинг) икки хил оқиши кузатилади. Баъзи ҳолларда суюқлик гўё аралашмасдан бир-бирига нисбатан сирпанаётган қатламларга ажралган ҳолда оқади. Бундай оқимни ламинар (қатлам-қатлам) оқим дейилади[1]. Агар ламинар оқимга бўялган (рангли) суюқлик оқимини киритсак, у оқимнинг бутун узунлиги давомида ёйилмасдан оқади, чунки суюқликнинг зарралари ламинар оқимда бир қатламдан бошқа қатламга ўтмайди. Ламинар оқим стационардир.

155- расм.

Оқимнинг тезлиги ёки кўндаланг ўлчамлари ўзгарса, оқиш характери кескин ўзгаради. Суюқлик интенсив равишда аралаша бошлайди. Бундай оқим турбулент оқим дейилади. Турбулент оқим вақтида зарранинг тезлиги ҳар бир берилган жойда доим тартибсиз равишда ўзгариб туради — оқим ностационар бўлади. Агар турбулент оқимга рангли суюқлик қўшимча, у ҳолда суюқлик қўшилган жойдан узоққа бормасданоқ оқимнинг бутун кесими бўйлаб текис тарқалиб кетади.

Оқим тезлигининг най ўқидан ўлчанган масофага қараб ўзгариш характерини кўрсатувчи 154- расм ламинар оқимга тегишлидир. Турбулент оқим вақтида тезликнинг най кесимининг ҳар бир нуқтасидаги ўртача (вақт бўйича) қиймати ҳақида гапириш мумкин. Турбулент оқимдаги ўртача тезликларнинг профили 155- расмда тасвирланган. Най деворининг ёнида тезлик ламинар оқимдагига қараганда кучлироқ, кесимнинг қолган қисмларида эса камроқ ўзгаради.

Инглиз олими Рейнольдс оқиш характери ўлчамсиз

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v l}{\eta} \qquad (59.1)$$

катталикнинг қийматига боғлиқ эканлигини аниқлади, бу ерда ρ — суюқлик (ёки газнинг) зичлиги, v — оқимнинг ўртача (найнинг кесими бўйлаб олинган) тезлиги, η — суюқликнинг қовушоқлик коэффициенти, l — кўндаланг кесим учун характерли бўлган ўлчам, масалан, кесими квадрат бўлса, квадратнинг томони, думалоқ кесим бўлса, унинг радиуси ёки диаметри ва ҳоказо[2].

(59.1) катталик Рейнольдс сони дейилади. Рейнольдс сони кичик бўлган ҳолларда ламинар оқим кузатилади. Re нинг маълум қийматидан (у критик қиймат деб аталади) бошлаб, оқим турбулент характерга эга бўлади. Агар думалоқ най учун характерли ўлчам сифатида унинг r радиусини қабул қилсак, у ҳолда Рейнольдс со-

---

[1] Латинча сўз lamina пластинкани, тасмани англатади.

[2] (59.1) ифода ўлчамсиз катталик эканлигига ишонч ҳосил қилиш ўқувчининг ўзига ҳавола қилинади.

нинг (ушбу ҳол учун у $\mathrm{Re} = \rho v r/\eta$ кўринишга эга) критик қиймати 1000 га тенг бўлар экан[1]. Рейнольдс сонига нисбат сифатида суюқликнинг хоссаларига боғлиқ бўлган иккита: ρ — зичлик ҳамда η қовушоқлик коэффициенти киради. Бу

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \tag{59.2}$$

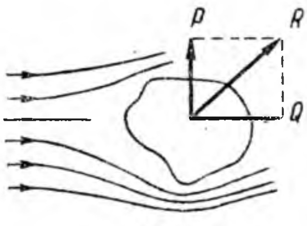
нисбат кинематик қовушоқлик дейилади. ν дан фарқли равишда η динамик қовушоқлик дейилади. Кинематик қовушоқликдан фойдаланиб, Рейнольдс сонига қуйидагича кўриниш бериш мумкин:

$$\mathrm{Re} = \frac{vl}{\nu}. \tag{59.3}$$

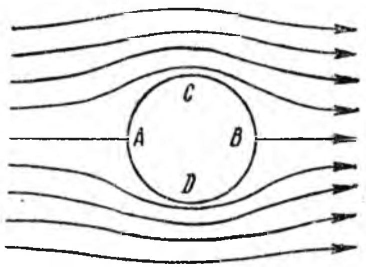
Рейнольдс сони суюқликларнинг қувур, канал шу кабиларда оқишида ўхшашлик критерийси бўла олади. Агар турли кўндаланг кесимли найларда ҳар хил суюқликларнинг (ёки газларнинг) оқиши учун Re нинг бир хил қиймати мос келса, уларнинг оқиш характери ҳам мутлақо бир хил бўлади.

60- §. Жисмларнинг суюқликлар ва газларда ҳаракати

Жисм суюқлик ёки газда[2] ҳаракатланганда унга маълум кучлар таъсир кўрсатади. Бу кучларнинг тенг таъсир этувчисини **R** ҳарфи билан белгилайлик (156- расм). **R** кучни бири **Q** жисмнинг ҳаракати йўналишига тескари (ёки жисмга урилаётган оқимнинг йўналиши бўйлаб) йўналган ва иккинчиси **P** бу йўналишга перпендикуляр бўлган иккита ташкил этувчига ажратиш мумкин. **Q** ва **P** ташкил этувчилар мос равишда пешона қаршилик ва кўтарувчи куч деб аталади. Равшанки, ҳаракат йўналишига нисбатан сим-



156- расм.



157- расм.

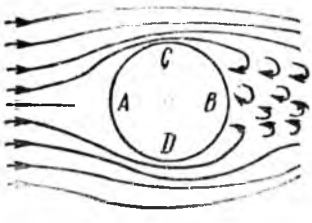
[1] Равшанки, l сифатида найнинг радиусини эмас диаметрини олсак, у ҳолда биз Re нинг критик қийматини 2 марта орттириб олишимиз керак.

[2] Жисм суюқликка нисбатан ўзгармас тезлик билан ҳаракат қилса, жисмга таъсир этувчи куч Галилейнинг нисбийлик назариясига биноан қўзғалмай турган жисмга нисбатан суюқлик ўшандай тезлик билан ҳаракатланган вақтда жисмга таъсир этадиган кучга тенг бўлади. 156- расм кейинги ҳолга тегишли.

метрик бўлган жисмга фақат пешона қаршилик таъсир кўрсатиши мумкин, кўтарувчи куч эса бу ҳолда нолга тенг бўлади.

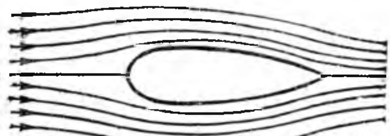
Ҳисоблашлардан идеал суюқликда текис ҳаракат қилаётган жисмларга пешона қаршилик таъсири бўлмаслиги маълум бўлди. Қовушоқликка эга бўлмаганлигидан идеал суюқлик жисмнинг сирти бўйлаб эркин сирғаниб уни айланиб оқади. 157- расмда идеал суюқлик жуда узун («чексиз») цилиндрни айланиб оққан вақтда оқим чизиқлари қандай шаклга эга бўлиши кўрсатилган. Тўла айланиб оқиш бўлганлигидан оқим чизиқлари A ва B нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиққа нисбатан ҳам C ва D нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиққа нисбатан ҳам мутлақо симметрик бўлади. Шунинг учун A ва B нуқталар ёнида босим бир хил бўлади (ва тўлқинланмай оқиш вақтида катта бўлади, чунки бу нуқталар ёнида тезлик кичикроқ); худди шунингдек C ва D нуқталар ёнидаги босимлар ҳам бир хил бўлади (ва тўлқинланмаган оқимдагига қараганда кичикроқ бўлади, чунки бу нуқталар ёнида тезлик каттароқ). Демак, цилиндрнинг сиртига кўрсатиладиган натижавий босим кучи (у қовушоқлик бор бўлганда пешона қаршиликни юзага келтирган бўлар эди) нолга тенг бўлади. Бошқача шаклдаги жисмлар учун ҳам худди шундай натижалар олинган.

Жисм қовушоқ суюқликларда ҳаракатланганда эса бошқачароқ ҳодиса кузатилади. Бу ҳолда жуда юпқа суюқлик қатлами жисмнинг сиртига ёпишиб олади ва у билан бирга ҳаракатланиб ёнидаги қатламларни ишқаланиш туфайли эргаштириб кетади. Жисмнинг сиртидан узоқлаша борган сари қатламларнинг тезлиги камая боради ва ниҳоят, сиртдан бирор масофада суюқлик жисмнинг ҳаракати таъсирида тўлқинланмайди. Шундай қилиб, жисм тезлик градиентига эга бўлган суюқлик қатлами билан ўралиб қолар экан. Бу қатламни ч е г а р а қатлам дейилади. Унда ишқаланиш кучлари мавжуд бўлиб, натижада улар пешона қаршиликни юзага келтиради. Аммо ҳодиса шу билангина чегараланиб қолмайди. Чегара қатламнинг мавжудлиги жисмнинг суюқлик томонидан айланиб оқиш ҳаракатини тубдан ўзгартириб юборади. Тўла айланиб оқиш мумкин бўлмай қолади. Сиртдаги қатламда ишқаланиш кучларининг таъсири оқим жисмнинг сиртидан ажралиб чиқишига ва натижада жисмнинг орқасида уюрмалар ҳосил бўлишига олиб келади (158- расмга қаранг, унда қовушоқ суюқликнинг цилиндрни айланиб оқиши кўрсатилган). Бу уюрмаларни оқим олиб кетади ва у ишқаланиш таъсирида аста-секин сўнади; бунда уюрмаларнинг энергияси суюқликни иситишга сарфланади. Жисм орқасида ҳосил бўлган уюрма соҳасида босим пасаяди ва шунинг учун босим кучларининг тенг таъсир этувчиси нолдан фарқли бўлиб, пешона қаршилигини юзага келтиради.



158- расм.

Шундай қилиб, пешона қаршилик ишқаланиш қаршилиги билан босим қаршилигидан ташкил топар экан. Жисмнинг берилган кўндаланг ўлчамларида босим қаршилиги унинг шаклига жуда кучли боғлангандир. Шунинг учун ҳам у шакл қаршилиги деб ҳам аталади. Суюқликнинг айланиб оқиши жуда осон бўлган шакл томчи шакли бўлиб, бундай жисмлар энг кичик босим қаршилигига эга (159- расм). Ихтирочилар самолётларнинг фюзеляжига ва қанотларига, автомобилларнинг кузовларига ва ҳоказоларга ана шундай шакл беришга интиладилар.



159- расм.

Ишқаланиш қаршилиги билан босим қаршилиги орасидаги нисбат Рейнольдс сонининг қиймати билан аниқланади (59.3). Бу ҳолда l — жисмнинг бирор характерли ўлчами (масалан, шар шаклидаги жисм учун радиус), v — жисмнинг суюқликка нисбатан тезлиги.

Re нинг кичик қийматларидан асосий ролни ишқаланиш қаршилиги ўйнайди, шунинг учун босим қаршилигини эътиборга олмаса ҳам бўлади. **Re** ортиши билан босим қаршилигининг роли орта боради. **Re** нинг катта қийматларида пешона қаршиликда босим кучлари асосий роль ўйнайди.

Рейнольдс сони оқимда жисмга таъсир кўрсатаётган кучларнинг ҳарактерини аниқлаб бериб, бу ҳолда ҳам ҳодисаларнинг ўхшашлигини аниқлаб берувчи ўлчов бўлиб хизмат қилиши мумкин. Бу ҳол моделлашда қўлланилади. Масалан, агар самолётнинг ўзи билан модели орасидаги геометрик ўхшашликдан ташқари улар учун Рейнольдс сонининг тенг бўлиши шарти қаноатлантирилган бўлса, самолётнинг модели газ оқимида худди самолётнинг асл нусхаси каби ўзини тутади.

Стокс қонуни. **Re** кичик, яъни ҳаракат тезлиги кичик бўлганда ва l ҳам кичик бўлганда; [(59.3) га қаранг] муҳитнинг қаршилигини амалда фақат ишқаланиш кучлари юзага чиқаради. Стокс аниқлаган қонунга биноан бу ҳолда қаршилик кучи η динамик қовушоқлик коэффициентига, жисмнинг суюқликка нисбатан v ҳаракат тезлигига ва жисмнинг l характерли ўлчамига пропорционал бўлади: $f \sim \eta l v$ (жисмдан суюқликнинг чегараларигача бўлган масофа, масалан, идишнинг деворларигача бўлган масофа жисмнинг ўлчамларига қараганда анча катта деб фараз қилинади). Пропорционаллик коэффициенти жисмнинг шаклига боғлиқ. Агар шар учун l деб унинг r радиусини олсак, у ҳолда пропорционаллик коэффициенти 6π га тенг бўлар экан. Демак, суюқликларда кичик тезликларда шарчанинг ҳаракатига кўрсатиладиган қаршилик кучи Стокс қонунига биноан қуйидагига тенг:

$$f = 6\pi\eta r v. \tag{60.1}$$

Суюқлик ёки газ ичида вертикал тушаётган шарчага учта куч: 1) пастга қараб йўналган оғирлик кучи $\frac{4}{3}\pi r^3\rho g$ (r — шарчанинг радиуси, ρ — унинг зичлиги), 2) юқорига қараб йўналган кўтарувчи куч $\frac{4}{3}\pi r^3\rho_0 g$ (ρ_0 — суюқлик ёки газнинг зичлиги) ва 3) шарчанинг ҳаракатига тескари, яъни юқорига қараб йўналган $6\pi\eta r v$ қаршилик кучи таъсир қилади. Биринчи икки куч катталик жиҳатдан ўзгармас бўлиб, учинчиси эса v тезликка пропорционалдир. Шу сабабдан маълум v_0 тезликка эришилгач, кўтарувчи куч билан қаршилик кучи қўшилиб оғирлик кучини мувозанатлайди ва натижада шарча тезланишсиз текис ҳаракатлана бошлайди. Текис ҳаракат v_0 тезлигини қуйидаги шартдан осонгина топиш мумкин:

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho g = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_0 g + 6\pi\eta r v_0.$$

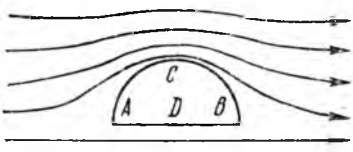
Бу тенгламани v_0 га нисбатан ечсак,

$$v_0 = \frac{2(\rho - \rho_0)\, g r^2}{9\eta}. \qquad (60.2)$$

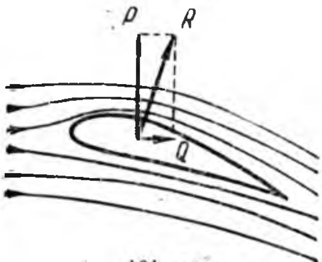
(60.2) дан шарчанинг қовушоқ муҳитда текис тушиш тезлиги унинг радиуси квадратига пропорционал эканлиги кўриниб турибди. Юқорида аниқланган сабабларга кўра (60.2) формула фақат кичик шарчалар учун яроқлидир.

Кичик шарчаларнинг суюқликда текис тушиш тезлигини ўлчаб (60.2) формуладан суюқликнинг η қовушоқлигини топиш мумкин. Қовушоқликни бундай топиш усулидан баъзан амалда фойдаланилади.

Кўтариш кучи. Кўтариш кучи юзага келиши учун суюқликнинг қовушоқлиги аҳамиятга эга эмас. 160- расмда идеал суюқлик ярим цилиндрни айланиб чиққан вақтдаги оқим чизиқлари кўрсатилган. Тўла айланиб оқиш бўлганлиги учун оқим чизиқлари CD тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлади. Аммо AB тўғри чизиққа нисбатан манзара симметрик бўлмайди. Оқим чизиқлари C нуқта ёнида қуюқлашганлиги учун бу ердаги босим D ёнидаги босимдан кичикроқ бўлади ва натижада кўтарувчи P куч вужудга келади. Қовушоқ муҳитда ҳам кўтарувчи куч худди шу йўл билан вужудга келади.



160- расм.



161- расм.

Самолётни ҳавода ушлаб турувчи куч бу унинг қанотларига таъсир кўрсатувчи кучдир. Пешона қаршилик самолётнинг учишида зарарли таъсир кўрсатади. Шу сабабдан самолётнинг қанотлари ва фюзеляжи суйри шаклида ясалади. Қанотнинг профили шу билан бирга етарли катталикда кўтарувчи куч юзага келтириши керак. Қанот учун 161- расмда кўрсатилган буюк рус олими Н. Е. Жуковский (1847—1921) кашф қилган профиль энг оптимал профилдир. Жуковский ва унинг ўқувчиси С. А. Чаплигин ўзларининг тадқиқотлари билан ҳозирги замон аэродинамикасига асос солдилар. Шунинг учун В. И. Ленин Жуковскийни рус авиациясининг отаси деб атаган эди. Жуковский кўтариш кучини аниқлаш формуласини келтириб чиқарди. Бу формула самолётларга тегишли барча аэродинамик ҳисоблар учун асос бўлиб хизмат қилади.

2- ҚИСМ
ТЕБРАНИШЛАР ВА ТЎЛҚИНЛАР

IX БОБ
ТЕБРАНМА ҲАРАКАТ

61- §. Тебранишлар ҳақида умумий маълумотлар

У ёки бу даражада такрорланувчанлиги билан ажралиб турадиган процессларга тебранишлар деб айтилади. Ана шундай такрорланувчанлик хоссасига, масалан, соат маятникнинг тебраниши, камертон торининг ёки оёқчаларининг тебраниши, радиоприёмник контуридаги конденсатор қопламалари орасидаги кучланишнинг тебраниши ва ҳоказолар эгадир.

Такрорланаётган процесснинг физик табиатига қараб тебранишлар: механик, электромагнит, электромеханик ва ҳоказо тебранишларга ажралади. Ушбу бобда механик тебранишлар таҳлил қилинади.

Тебранишлар табиатда ва техникада кенг тарқалган. Кўпчилик ҳолларда улар салбий роль ўйнайдилар. Рельсларнинг қўшилиш жойидан ўтаётганда поезднинг ғилдираги берадиган турткилар таъсирида кўприкнинг тебраниши, сузиш винтининг айланиши натижасида кема танасининг тебраниши (вибрацияси), самолёт қанотларининг вибрацияси ҳалокатга олиб келиши мумкин бўлган процесслардир. Бундай ҳолларда вазифа тебранишларнинг юзага чиқишига йўл қўймасликдан ёки ҳар хил тебранишлар хавфли чегарагача кўтарилишига қарши курашишдан иборат бўлади.

Шу билан бирга тебранма процесслар техниканинг турли соҳалари асосий аҳамиятга эга. Масалан, радиотехника тебранма процессларга асосланган.

Тебранаётган системага кўрсатилаётган таъсирининг характерига қараб, тебранишлар эркин (ёки хусусий) тебранишларга, мажбурий тебранишларга, автотебранишларга ва параметрик тебранишларга бўлинади.

Бир марта туртки берилгандан ёки мувозанат ҳолатидан чиқарилгандан кейин ўзича тебранадиган системада юз берадиган тебранишларга эркин ёки хусусий тебранишлар деб айтилади. Бунга мисол қилиб ипга осиб қўйилган шарчанинг (маятникнинг) тебранишини олиш мумкин. Тебранишлар вужудга келиши учун шарчани туртиб юбориш ёки уни мувозанат ҳолатидан четга чиқариб қўйиб юбориш кифоя.

Даврий равишда ўзгарувчи ташқи куч таъсири остида бўладиган тебранишлар мажбурий тебранишлар деб юритилади. Бунга устидан одамлар тартибли қадам ташлаб ўтаётган кўприкнинг тебранишлари мисол бўла олади.

Автотебранишлар вақтида мажбурий тебранишлардаги каби тебранувчи системага ташқи кучлар таъсир қилади, бироқ бундай таъсир кўрсатилиши зарур бўлган вақт моментларини тебранувчи системанинг ўзи белгилайди — ташқи таъсирни системанинг ўзи бошқаради. Автотебранувчи системага соат мисол бўлиши мумкин. Маятник кўтариб қўйилган тошнинг ёки буралган пружинанинг энергияси ҳисобига туртки олиб туради, бунда бу турткилар маятник ўрта ҳолатдан ўтаётган моментлардагина берилади.

Параметрик тебранишлар вақтида ташқи таъсир ҳисобига системанинг бирор параметри, масалан, тебранаётган шарча осилиб турган ипнинг узунлиги даврий равишда ўзгариб туради.

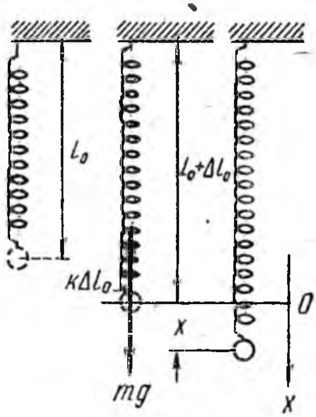
Энг содда тебраниш бу гармоник тебранишдир. Гармоник тебраниш шундай ҳодисаки, унда тебранувчи катталик (масалан, маятникнинг оғиши) вақт бўйича синус ёки косинус қонуни бўйича ўзгаради. Бу турдаги тебраниш қуйидаги сабабларга кўра жуда муҳимдир: биринчидан табиатда ва техникада учрайдиган тебранишлар ўз характери билан гармоник тебранишларга жуда яқин, иккинчидан бошқача кўринишдаги (вақтга қараб бошқача ўзгарадиган) даврий тебранишларни устма-уст тушган бир неча гармоник тебранишлар сифатида тасаввур қилиш мумкин.

62-§. Гармоник тебранишлар

Пружинага осиб қўйилган m массали шарчадан иборат системани қараб чиқайлик (162-расм). Мувозанат холатида mg куч $k\Delta l_0$ эластик куч билан мувозанатлашади:

$$mg = k\Delta l_0 \qquad (62.\ 1)$$

Шарчанинг мувозанат ҳолатидан оғишини x координата билан характерлаймиз, бунда x ўқни пастга вертикал йўналтириб, ўқнинг нолини шарчанинг мувозанат ҳолати билан устма-уст туширамиз.



162- расм.

Агар шарчани мувозанат ҳолатдан x масофага (x — алгебраик катталик) оғдирсак, у ҳолда пружина $\Delta l_0 + x$ га узайган бўлади ва натижавий кучнинг x ўққа проекцияси (бу проекцияни тўғридан-тўғри f ҳарф билан белгилаймиз) қуйидаги қийматни олади:

$$f = mg - k(\Delta l_0 + x).$$

(62.1) мувозанат шартини ҳисобга олсак, қуйидагини топамиз:

$$f=-kx. \tag{62.2}$$

(62.2) формулада «—» ишора силжиш билан куч қарама-қарши йўналганлигини англатади: агар шарча мувозанат ҳолатидан пастга қараб оғса ($x>0$), куч юқорига қараб йўналади ($f<0$), шарча юқорига қараб оғса ($x<0$), куч пастга қараб йўналади ($f>0$). Шундай қилиб, f куч қуйидагича хоссаларга эга экан: 1) у шарчанинг мувозанат ҳолатдан силжишига пропорционал, 2) у доим мувозанат ҳолатга қараб йўналган.

Бу қараб чиққан мисолимизда (62.2) куч аслида ўз тибиати билан эластик кучдир. Бошқача табиатга эга бўлган куч ҳам худди шундай қонуниятга бўйсуниши, яъни—kx га тенг бўлиб қолиши мумкин, бу ерда k—доимий мусбат катталик. Одатда бундай кўринишдаги кучлар уларнинг табиатидан қатъи назар **квазиэластик** кучлар деб аталади.

Системани x га силжитиш учун квазиэластик кучга қарши қуйидагича иш бажариш керак:

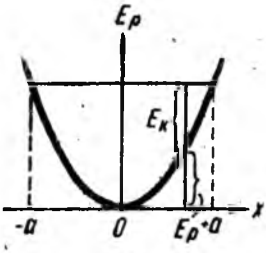
$$A=\int_0^x(-f)\,dx=\int_0^x kx\,dx=\frac{kx^2}{2}.$$

Бу иш системанинг потенциал энергияси запасини вужудга келтиришга сарфланади. Демак, квазиэластик куч таъсир кўрсатаётган система мувозанат ҳолатда x масофага силжиганда

$$E_p=\frac{kx^2}{2} \tag{62.3}$$

потенциал энергияга[1] эга бўлар экан (мувозанат ҳолатдаги потенциал энергияни нолга тенг деб оламиз).

(62.3) ифода деформацияланган пружинанинг потенциал энергияси формуласи (27. 13) га ўхшайди.



163-расм.

Яна 162-расмда тасвирланган системага мурожаат қилайлик. Шарчани $x=a$ га силжитиб, сўнгра системани ўз ҳолига қўямиз. $f=-kx$ куч таъсирида шарча мувозанат ҳолатга қараб тобора ортиб борувчи $v=\dot{x}$ тезлик билан ҳаракатланади. Бунда системанинг потенциал энергияси камая боради (163-расм), лекин тобора ортиб борувчи $E_k=m\dot{x}^2/2$ кинетик энергия майдонга келади (пружинанинг массасини ҳисобга олмаймиз). Шарча мувозанат ҳолатига қайтгандан кейин

---

[1] Биз кинетик ва потенциал энергияларнинг механикада ишлатилган белгиларидан воз кечишга мажбурмиз. Тебранишлар ҳақидаги таълимотда T ҳарфи билан одатда, тебраниш даври белгиланади. Молекуляр физикада U ҳарфи билан жисмнинг ички энергияси белгиланади. Шунинг учун биз келгусида кинетик энергияни E_k символи билан, потенциал энергияни эса E_p символи билан белгилаймиз.

ҳам инерция билан ҳаракатини давом эттиради. Бу ҳаракат секинланувчан бўлиб, кинетик энергия батамом потенциал энергияга айлангач, яъни шарчанинг силжиши—a га тенг бўлгач, тўхтаб қолади. Сўнгра шарча орқага қараб қайтган вақтда ҳам худди шундай процесс содир бўлади. Агар системада ишқаланиш бўлмаса, системанинг энергияси сақланиб қолади ва шарча $x=a$ дан $x=-a$ гача оралиқда чексиз узоқ вақт ҳаракатланади.

Шарча учун Ньютон иккинчи қонунининг тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Бу тенгламани қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x=0. \tag{62.4}$$

x олдидаги коэффициент мусбат. Шунинг учун уни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \tag{62.5}$$

бу ерда ω_0—ҳақиқий сон.

(62.4) га (62.5) даги белгини қўйиб қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{62.6}$$

Шундай қилиб, (62.2) кўринишдаги куч таъсиридаги шарчанинг ҳаракати иккинчи даражали чизиқли бир жинсли дифференциал тенглама билан ифодаланар экан.

(62.2) тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишга эга эканлигига осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкин:

$$x=a\cos(\omega_0 t+\alpha)^1, \tag{62.7}$$

бу ерда a ва α—ихтиёрий катталиклар.

Шундай қилиб, x силжиш вақтга қараб косинус қонуни билан ўзгарар экан. Демак, $f=-kx$ кўринишдаги кучнинг таъсири остида турган системанинг ҳаракати гармоник тебранишдан иборат экан.

Гармоник тебранишнинг графиги, яъни (62.7) нинг графиги 164-расмда тасвирланган. Горизонтал ўқ бўйлаб t вақт, вертикал ўқ бўйлаб силжиш x қўйилган. Косинус -1 дан $+1$ гача чегарада ўзгарганлигидан x нинг қийматлари $-a$ дан $+a$ гача чегарада ётади.

164- расм.

Системанинг мувозанат ҳолатидан энг катта оғиши тебраниш

[1] Ёки $x=a\sin(\omega_0 t+\alpha')$, бунда $\alpha'=\alpha+\pi/2$.

амплитудаси дейилади. Амплитуда a ўзгармас мусбат катталикдир. Унинг қиймати дастлабки оғишнинг ёки системани мувозанат ҳолатидан чиқарган турткининг катта-кичиклигига боғлиқ.

Косинус ишораси остидаги $(\omega_0 t + \alpha)$ катталик тебраниш фазаси дейилади. Ўзгармас катталик α вақтнинг $t=0$ моментидаги фазанинг қийматидан иборат бўлиб, тебранишнинг бошланғич фазаси дейилади. Вақт ҳисоб бошининг ўзгариши билан α ҳам ўзгаради. Демак, бошланғич фазанинг қиймати вақт ҳисоб бошига боғлиқ экан. x нинг қиймати фазага 2π соннинг қўшилишига ёки айрилишига боғлиқ бўлмаганлиги учун ҳамма вақт ҳам бошланғич фазани у модули бўйича π дан кичик бўладиган қилиб танлаб олиш мумкин. Шу сабабдан одатда α нинг $-\pi$ билан $+\pi$ орасида ётган қийматларигина текширилади.

Косинус даври 2π га тенг бўлган даврий функция бўлганлигидан гармоник тебранаётган системанинг турли ҳолатлари[1] шундай T вақт оралиги ичида такрорланиб турадики, бу вақт давомида тебраниш фазаси 2π га тенг орттирма олади (163- расм). Бу вақт оралиги T тебранишлар даври деб аталади. У қуйидаги шартдан топилиши мумкин: $[\omega_0(t+T) + \alpha] = [\omega_0 t+\alpha]+2\pi$, бундан

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \tag{62.8}$$

Вақт бирлиги ичидаги тебранишлар сони ν тебраниш частотаси дейилади. Афтидан, ν частота тебранишнинг давом этиш вақти T билан қуйидагича боғланган:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Частота бирлиги деб даври 1 *сек* га тенг бўлган тебранишнинг частотаси қабул қилинган. Бу бирлик *герц (гц)* деб аталади. 10^3 *гц* га тенг частота килогерц (*кгц*) деб, 10^6 *гц* эса — мегагерц (*Мгц*) деб аталади.

(62.8) дан

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \tag{62.10}$$

Шундай қилиб, ω_0 2π секунд ичидаги тебранишлар сонидан иборат экан. ω_0 катталикни айланавий ёки циклик частота дейилади. У одатдаги частота ν билан қуйидагича боғланган:

$$\omega_0 = 2\pi\nu. \tag{62.11}$$

(62.7) ни вақт бўйича дифференциаллаб, тезлик ифодасини топамиз:

$$v = \dot{x} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t+\alpha) = a\omega_0 \cos\left(\omega_0 t+\alpha+\frac{\pi}{2}\right). \tag{62.12}$$

---

[1] Механик системанинг ҳолати системани ташкил қилган жисмларнинг координаталари ва тезликларининг қийматлари билан характерланишини эслатиб ўтамиз.

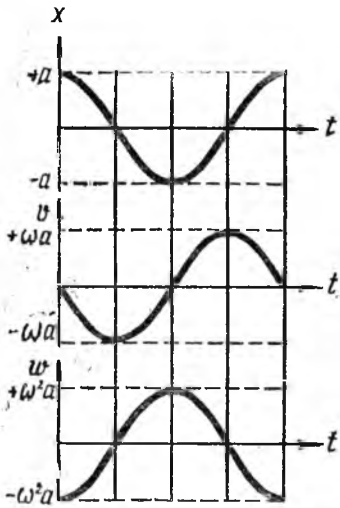
(62.12) дан кўриниб турибдики, тезлик ҳам гармоник қонун бўйича ўзгарар экан. Тезликнинг амплитудаси эса $a\omega_0$ га тенг (62.7) билан (62.12) ни солиштирсак, тезлик силжишдан фаза бўйича $\pi/2$ га илгари юришини кўрамиз.

(62.12) яна бир марта вақт бўйича дифференциаллаcак, тезланиш ифодасини топамиз:

$$w = \ddot{x} = -a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi). \quad (62.13)$$

(62.13) дан тезланиш билан силжиш қарама-қарши фазаларда ўзгаради деган хулоса чиқади. Бу шуни англатадики, силжиш энг катта мусбат қийматга эришганда тезланиш энг катта манфий қийматга эришади ва аксинча.

165-расмда силжиш, тезлик ва тезланишнинг графиклари бир-бирига таққосланган.



165- расм.

Ҳар бир конкрет тебраниш амплитуда ва α бошланғич фазанинг маълум қийматлари билан характерланади. Бу катталикларнинг қийматлари берилган тебраниш учун бошланғич шартлардан, яъни силжиш x_0 ва вақтнинг бошланғич моментидаги v_0 тезликнинг қийматлари орқали топилиши мумкин. Ҳақиқатан ҳам, (62.7) ва (62.12) ларда $t=0$ деб олсак, иккита тенгламага эга бўламиз:

$$x_0 = a\cos\alpha, \; v_0 = -a\omega_0 \sin\alpha,$$

булардан қуйидагиларни топамиз:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}, \quad (62.14)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{v_0}{x_0\omega_0}. \quad (62.15)$$

(62.15) тенглама α нинг $-\pi$ дан $+\pi$ гача оралиқда ётган иккита қийматини қаноатлантиради. α нинг бу қийматларидан косинус билан синусга тўғри ишора берадиган қийматини танлаб олиш керак.

63-§. Гармоник тебраниш энергияси

Квазиэластик куч консерватив кучдир. Шунинг учун гармоник тебранишнинг тўла энергияси доимий қолиши керак. Биз юқорида тебраниш процессида кинетик энергия потенциал энергияга ва аксинча, потенциал энергия эса кинетик энергияга айланиб туришини, шу билан бирга система мувозанат ҳолатдан энг кўп оғган пайтда тўла энергия E ўзининг максимал $E_{p\max}$ қийматига эришган фақат потенциал энергиядан иборат бўлишини аниқлаган эдик:

$$E = E_{p\max} = \frac{ka^2}{2}, \tag{63.1}$$

система мувозанат ҳолатидан ўтаётган пайтда эса тўла энергия батамом шу моментда ўзининг максимал $E_{k\max}$ қийматига эришган энергиядан иборат бўлади:

$$E = E_{k\max} = \frac{mv^2_{\max}}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2} \tag{63.2}$$

(юқорида тезлик амплитудаси $a\omega_0$ га тенг эканлиги кўрсатилган эди). (63.1) ва (63.2) ифодалар бир-бирига тенг эканлигини осонгина кўриш мумкин, чунки (62.5) га биноан $m\omega_0^2 = k$.

Гармоник тебранишнинг кинетик E_k ва потенциал E_p энергиялари вақт бўйича қандай ўзгаришини қараб чиқайлик. Кинетик энергия [$\dot{x}$ учун ёзилган (62.12) ифодага қаранг]

$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \alpha). \tag{63.3}$$

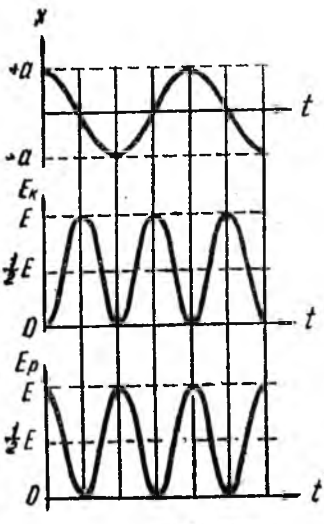
Потенциал энергия қуйидагича ифодаланади:

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{ka^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \alpha). \tag{63.4}$$

(63.3) билан (63.4) ни қўшиб ва (62.5) муносабатни ҳисобга олиб қуйидагини топамиз:

$$E = E_k + E_p = \frac{ka^2}{2}\ \left(\text{ёки}\ \frac{ma^2\omega_0^2}{2}\right), \tag{63.5}$$

бу (63.1) ва (63.2) га ўхшашдир. Шундай қилиб, гармоник тебранишнинг тўла энергияси чиндан ҳам ўзгармас экан.



166- расм.

Тригонометрияда маълум бўлган формулалардан фойдаланиб E_k ва E_p ларнинг ифодасини қуйидагича кўринишга келтириш мумкин:

$$E_k = E\sin^2(\omega_0 t + \alpha) = E\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2(\omega_0 t + \alpha)\right], \tag{63.6}$$

$$E_p = E\cos^2(\omega_0 t + \alpha) = E\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2(\omega_0 t + \alpha)\right], \tag{63.7}$$

бу ерда E—системанинг тўла энергияси. (63.6) ва (63.7) формулалардан E ва E_p энергиялар $2\omega_0$ частота билан, яъни гармоник тебраниш частотасидан 2 марта катта частота билан ўзгариши кўриниб турибди.

166-расмда x, E_k ва E_p ларнинг графиклари бир-бирига таққосланган.

Маълумки, синуснинг ҳам, косинуснинг ҳам квадратининг ўртача қиймати яримга тенг. Демак, E_k нинг ўртача қиймати E_p нинг ўртача қийматига мос келади ва $E/2$ га тенг экан.

64-§. Гармоник осциллятор

Қуйидаги тенглама бўйича тебранадиган система

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{64.1}$$

бу ерда ω_0^2— ўзгармас мусбат катталик (62.6) га қаранг гармоник осциллятор (ёки гармоник вибратор) деб юритилади. Биз биламизки, (64.1) тенгламанинг ечими қуйидаги кўринишга эга:

$$x = a\cos(\omega_0 t + \alpha). \tag{64.2}$$

Демак, гармоник осциллятор мувозанат ҳолати ёнида гармоник тебранувчи системадан иборат экан.

Ўз-ўзидан равшанки, аввалги параграфларда гармоник тебраниш учун олинган барча натижалар гармоник осциллятор учун ҳам ўринли. Яна қўшимча иккита масалани қараб чиқайлик.

Гармоник осцилляторнинг импульсини топамиз (64.2) ни вақт бўйича дифференциаллаб ва олинган натижани осцилляторнинг m массасига кўпайтириб қуйидагини топамиз:

$$p = m\dot{x} = -ma\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha). \tag{64.3}$$

Осциллятор x силжиши билан характерланувчи ҳар бир вазиятда бирор p импульсга эга бўлади. p ни x нинг функцияси кўринишида топиш учун (64.2) ва (64.3) тенгламалардан t вақтни йўқотиш керак. Бунинг учун ана шу тенгламаларни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

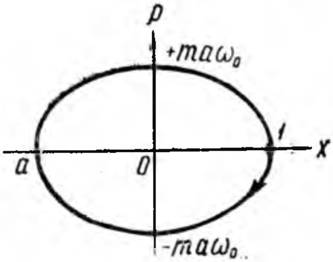
$$\frac{x}{a} = \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

$$\frac{p}{ma\omega_0} = -\sin(\omega_0 t + \alpha).$$

Бу ифодаларни квадратга кўтариб ва ўзаро қўшиб қуйидагини топамиз:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{p^2}{m^2 a^2 \omega_0^2} = 1. \tag{64.4}$$

167-расмда гармоник осциллятор p импульсининг x оғишга қараб ўзгаришини кўрсатувчи график тасвирланган. p, x координаталар текислиги одатда ф а з а т е к и с л и г и, бунга мос график эса ф а з а в и й т р а е к т о р и я деб юритилади. (64.4) га биноан гармоник осцилляторнинг фазавий траекторияси ярим ўқлари a га ва $ma\omega_0$ га тенг эллипсдан иборат. Фазавий траекториянинг ҳар бир нуқтаси x оғиш билан p импульсни, яъни осцилляторнинг вақтнинг бирор моментидаги ҳолатини тасвирлайди. Вақт ўтиши билан ҳолатни тасвирловчи нуқта (қисқача у тасвирий нуқта деб юритилади) фазавий траектория бўйлаб кўчиб тебраниш даври ичида уни тўла айланиб чиқади. Тасвирий нуқта соат стрелкаси бўйлаб кўчишига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Ҳақиқатан ҳам, шундай t' вақт моментини оламизки, $\omega_0 t' + \alpha = 2\pi n$ (n бутун сон) бўлсин. Вақтнинг бу моментига $x = a$ ва $p = 0$ мос келади (167-расмдаги 1 нуқтага қаранг). Вақтнинг бундан кейинги моментларида x камая боради, p эса модули орта борувчи манфий қийматлар қабул қилади. Демак, тасвирий нуқта 167-расмда кўрсатилган йўналишда, яъни соат стрелкаси бўйлаб ҳаракатланади.



167- расм.

Эллипснинг юзини топайлик. Маълумки, у эллипс ярим ўқларининг π га кўпайтмасига тенг:

$$S = \pi a m a \omega_0 = \frac{2\pi}{\omega} \frac{ma^2\omega_0^2}{2}.$$

(63.5) га мос равишда $ma^2\omega_0^2/2$ осцилляторнинг тўла энергияси; $2\pi/\omega_0$ катталик эса $1/\nu_0$ га тенг, бу ерда ν_0 осцилляторнинг хусусий частотаси, у берилган осциллятор учун ўзгармас катталик. Демак, эллипснинг юзини қуйидагича кўринишда ёзиш мумкин:

$$S = \frac{1}{\nu_0} E,$$

бундан

$$E = \nu_0 S. \tag{64.5}$$

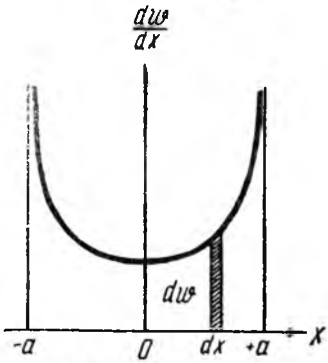
Шундай қилиб, гармоник осцилляторнинг тўла энергияси эллипснинг юзига пропорционал бўлиб, бунда осцилляторнинг хусусий частотаси пропорционаллик коэффициенти вазифасини ўтар экан.

Эллипснинг юзи $\oint p dx$ интеграл сифатида ҳисобланиши мумкин. Шунинг учун (64.5) формулани қуйидаги кўринишга келтириб ёзиш мумкин:

$$E = \nu_0 \oint p dx.$$

Сўнгги ифода квант механикасининг асосини яратишда муҳим роль ўйнади.

- Энди осцилляторни турли ҳолатларда топиш эҳтимоли ҳақидаги масалани қараб чиқайлик. Осцилляторнинг тезлиги у мувозанат ҳолатидан ўтаётган пайтларда энг катта қийматига эришади. Мувозанат ҳолатидан энг катта оғиш пайтларида эса тезлик нолга айланади. Бунда осцилляторни мувозанат ҳолати атрофида топиш эҳтимолидан уни энг четки ҳолатининг бири яқинида топиш эҳтимоли каттароқ деган хулоса чиқади. Буни 168- расмдан тушуниб олиш мумкин. Унда эҳтимоллик зичлиги деб аталадиган $\frac{dw}{dx}$[1] катталикни тасвирловчи эгри чизиқ келтирилган. Осцилляторнинг берилган dx чегарасида бўлиш эҳтимоли dw ни аниқлаш учун эгри чизиқнинг тегишли жойидаги ординатасини dx га кўпайтириш керак. Масалан, 168- расмдаги штрихланган тасманинг юзи катталик жиҳатдан осцилляторнинг берилган dx интервал ичида топилиш эҳтимолига тенг. Эҳтимолликлар зичлиги эгри чизиғининг остидаги бутун юз осцилляторнинг $-a$ билан $+a$ чегарадаги бирор ҳолатида топилиш эҳтимолини беради. Демак, у ҳар қандай бўлиши мумкин бўлган ҳодиса эҳтимоллиги сифатида бирга тенг бўлиши керак.



168- расм.

Қайд қилиб ўтамизки, квант механикаси гармоник осцилляторнинг турли ҳолатлари эҳтимоллиги учун анча фарқли натижалар беради.

65- §. Системанинг мувозанат ҳолати атрофидаги кичик тебранишлари

Вазияти битта катталик (биз x билан белгилаймиз) ёрдамида берилиши мумкин бўлган ихтиёрий механик системани олиб текширайлик. Бундай ҳолларда система битта эркинлик даражасига эга дейилади. Системанинг вазиятини аниқловчи катталик бўлиб бирор текисликдан бошлаб ўлчанадиган бурчак ёки берилган эгри чизиқ, хусусан, тўғри чизиқ бўйлаб ўлчанадиган масофа ва ҳоказолар хизмат қилиши мумкин. Системанинг потенциал энергияси битта x ўзгарувчининг функцияси бўлади: $E_p = E_p(x)$. x нинг ҳисоб бошини шундай танлаб оламизки, системанинг мувозанат ҳолатида x нолга тенг бўлсин. Ўшанда $E_p(x)$ функция $x=0$ да минимумга эга бўлади. $E_p(x)$ ни x нинг даражалари бўйича қаторга ёямиз. Бунда кичик тебранишларни қараш билан чегараланамиз, шунинг

---

[1] Бу эгри чизиқ $\frac{dw}{dx} = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}$ тенглама билан ифодаланади.

учун x нинг юқори даражаларини эътиборга олмасак ҳам бўлади. Маклорен формуласига биноан

$$E_p(x) = E_p(0) + E'_p(0)\,x + \frac{1}{2} E''_p(0)x^2$$

(x кичик бўлганлигидан қолган ҳадларни ҳисобга олмаймиз).

$E_p(x)$ функция $x=0$ да минимумга эга бўлганлиги учун $E'_p(0)$ нолга тенг, $E''_p(0)$ эса мусбат бўлади. Қуйидагича белгилар киритамиз:

$$E_p(0) = b, \quad E''_p(0) = k \quad (k>0).$$

У ҳолда

$$E_p(x)=b+\frac{1}{2}kx^2. \tag{65.1}$$

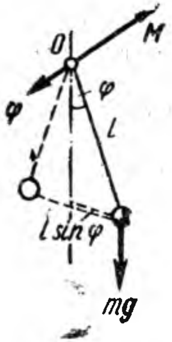
(65.1) ифода квазиэластик куч таъсир кўрсатаётган системанинг потенциал энергияси ифодаси (62. 3) га ўхшайди (b константани нолга тенг деб олиш мумкин).

(28.5) ифодадан фойдаланиб, системага таъсир кўрсатаётган кучни топиш мумкин:

$$f=f_x=-\frac{\partial E_p}{\partial x}=-kx.$$

Шундай қилиб, система мувозанат ҳолатидан кам оғиб тебранаётган шароитларда унинг потенциал энергияси силжишнинг квадрат функциясидан иборат, системага таъсир этувчи куч эса квазиэластик куч кўринишида бўлар экан. Демак, исталган механик система мувозанат ҳолатдан кам оғиб тебранса, унинг тебранишлари гармоник тебранишларга яқин бўлар экан.

66-§. Математик маятник



169- расм.

Математик маятник деб вазнсиз ва чўзилмайдиган ип билан унга осилган бир нуқтада мужассамланган массадан иборат идеал системага айтилади. Узун ингичка ипга осилган кичикроқ оғир шарча математик маятникка етарли даражада яқин бўлади. Маятникнинг мувозанат ҳолатдан оғишини ип вертикал билан ҳосил қилган φ бурчак орқали характерлаймиз (169- расм). Маятник ўз мувозанат ҳолатидан оғган вақтда $mgl \sin\varphi$ га (m — маятникнинг массаси, l эса узунлиги) тенг айлантирувчи M момент юзага келади. У шундай йўналганки, маятникни мувозанат ҳолатига қайтаришга интилади. Шу хусусияти жиҳатдан бу куч квазиэластик кучга ўхшайди. Шу сабабдан силжиш билан куч каби M момент билан бурчак силжиш φ га қарама-қарши ишоралар берилиши керак[1]. Демак, айлантирувчи моментнинг ифодаси қуйидагича кўринишга эга бўлади:

$$M = -mgl\sin\varphi. \tag{66.1}$$

Маятник учун айланма ҳаракат динамикаси тенгламасини ёзайлик. Бурчак тезланишини $\ddot{\varphi}$ билан белгилаб ва маятникнинг инерция моменти ml^2 га тенг эканлигини ҳисобга олиб қуйидагини топамиз:

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi.$$

Сўнгги тенгламани

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \tag{66.2}$$

кўринишга келтириш мумкин.

Кичик тебранишларни текшириш билан чегараланайлик. Бу ҳолда $\sin\varphi \approx \varphi$ деб олиш мумкин. Ундан ташқари

$$\frac{g}{l} = \omega_0^2, \tag{66.3}$$

белгини киритсак, қуйидаги тенгламани топамиз:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \tag{66.4}$$

бу тенглама пружинага осилган шарча учун ёзилган (62.6) тенгламага айнан ўхшашдир. Унинг ечими қуйидаги кўринишга эга:

$$\varphi = a\cos(\omega_0 t + \alpha). \tag{66.5}$$

Демак, кичик тебранишлар учун математик маятникнинг оғиш бурчаги вақт бўйича гармоник ўзгарар экан.

(66.3) дан математик маятникнинг тебраниш частотаси фақат маятник узунлиги билан оғирлик кучи тезланишига боғлиқ бўлиб, маятникнинг массасига боғлиқ эмас эканлиги келиб чиқади. (66.3) ни ҳисобга олганда (62.8) формуладан математик маятникнинг тебраниш даври учун мактаб курсидан маълум бўлган қуйидаги ифодани топамиз:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{66.6}$$

---

[1] φ ни бурилиш йўналиши билан ўнг винт қоидаси бўйича боғланган вектор деб қараб (φ нинг кичик қийматлари учун шундай қилиш мумкин), M ва Φ ларнинг ишораларининг қарама-қаршилигини M ва Φ векторлар қарама-қарши томонларга йўналганлиги билан тушунтириш мумкин (169-расм).

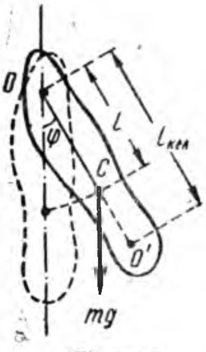
(66.2) тенгламани ечсак, тебраниш даври учун қуйидаги формулани топишимиз мумкин:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{a}{2} + \left(\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\right)^2 \sin^4\frac{a}{2} + \ldots\right\},$$

бу ерда a—тебранишлар амплитудаси, яъни маятникнинг мувозанат ҳолатидан энг кўп оғиш бурчаги.

67-§. Физик маятник

Инерция маркази билан устма-уст тушмайдиган қўзғалмас нуқта атрофида тебраниш хусусиятига эга бўлган қаттиқ жисм физик маятник деб аталади. Мувозанат ҳолатида маятникнинг C инерция маркази маятникнинг O осилиш нуқтаси остида у билан бир вертикалда ётади (170-расмга қаранг). Маятник мувозанат ҳолатидан φ бурчакка оғганда маятникни мувозанат ҳолатига қайтаришга интилувчи момент юзага келади. Бу момент қуйидагига тенг:



170- расм.

$$M = -mgl\sin\varphi, \qquad (67.1)$$

бу ерда m—маятникнинг массаси, l—маятникнинг осилиш нуқтаси билан инерция маркази орасидаги масофа. $\bar{M}$ билан $\bar{\varphi}$ нинг йўналишлари қарама-қарши бўлгани учун «—» ишора қўйилган.

Маятникнинг осилиш нуқтаси орқали ўтувчи ўққа нисбатан инерция моментини I ҳарфи билан белгилаб, қуйидагини ёзишимиз мумкин:

$$I\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi. \qquad (67.2)$$

Кичик тебранишлар учун (67.2) бизга маълум бўлган қуйидаги тенгламага айланади:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0. \qquad (67.3)$$

Бу ҳолда ω_0^2 билан қуйидаги катталик белгиланади:

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}. \qquad (67.4)$$

(67.3) ва (67.4) тенгламалардан қуйидаги хулоса чиқади: мувозанат ҳолатдан кам оғган вақтларда физик маятник гармоник тебранар экан ва бу тебранишларнинг частотаси маятникнинг массасига, маятникнинг айланиш ўқига нисбатан инерция моментига ва маятникнинг айланиш ўқи билан инерция маркази орасидаги масофага пропорционал бўлар экан. (67.4) га биноан физик маятникнинг тебраниш даври қуйидагига тенг:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}. \qquad (67.5)$$

(66.6) ва (67.5) формулаларни солиштирсак, узунликлари

$$l_{\text{кел}} = \frac{I}{ml} \qquad (67.6)$$

га тенг бўлган математик маятникнинг тебраниш даври берилган физик маятникнинг даврига тенг деган хулоса чиқади. (67.6) катталик физик маятникнинг **к е л т и р и л г а н у з у н л и г и** деб аталади. Шундай қилиб, физик маятникнинг келтирилган узунлиги шундай математик маятникнинг узунлигидан иборатки, бу маятникнинг тебраниш даври берилган физик маятникнинг тебраниш даврига тенг бўлади.

Осилиш нуқтасини инерция маркази билан бирлаштирувчи тўғри чизиқ устида айланиш ўқидан келтирилган узунликка тенг масофада ётган нуқта физик маятникнинг **т е б р а н и ш м а р к а з и** дейилади (170- расмдаги O' нуқтага қаранг).

Штейнер теоремасига биноан маятникнинг I инерция моменти қуйидагича кўринишда ёзилиши мумкин:

$$I = I_0 + ml^2, \qquad (67.7)$$

бу ерда I_0 маятникнинг айланиш ўқига параллел бўлган ва инерция маркази орқали ўтувчи ўққа нисбатан инерция моменти. (67.7) ни (67. 6) формулага қўйсак қуйидагини топамиз:

$$l_{\text{кел}} = \frac{I_0}{ml} + l. \qquad (67.8)$$

(67. 8) дан келтирилган узунлик доим l дан катта деган хулоса чиқади, чунки осилиш нуқтаси билан тебраниш маркази инерция марказининг турли томонларида ётади.

Маятникни унинг O' тебраниш маркази билан устма- уст тушган нуқтасидан осамиз. (67.8) га биноан, бу ҳолда келтирилган узунлик қуйидагига тенг бўлади:

$$l'_{\text{кел}} = \frac{I_0}{ml'} + l', \qquad (67.9)$$

бу ерда l'—маятникнинг дастлабки тебраниш маркази билан инерция маркази орасидаги масофа $l' = l_{\text{кел}} - l$ эканлигини ҳисобга олиб (67.9) ифодани қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$l'_{\text{кел}} = \frac{I_0}{m(l_{\text{кел}} - l)} + l_{\text{кел}} - l = l_{\text{кел}} + \frac{1}{m(l_{\text{кел}} - l)}\left[(I_0 + ml^2) - mll_{\text{кел}}\right].$$

Квадрат қавслар ичида турган ифода нолга тенг. Ҳақиқатан ҳам, $I_0 + ml^2$—дастлабки айланиш ўқига нисбатан олинган I инерция моментига тенг; (67.6) га биноан худди шу катталикка $mll_{\text{кел}}$

ифода ҳам тенг. Шундай қилиб, биз маятникни тебраниш марказидан осган вақтда келтирилган узунлик ва демак, тебранишлар даври худди дастлабкидек бўлади деган хулосага келамиз. Демак, осиш нуқтаси билан тебраниш маркази алмашиниш хоссасига эга экан: осиш нуқтаси тебраниш марказига ўтказилса, аввалги осиш нуқтаси янги тебраниш марказига айланиб қолар экан.

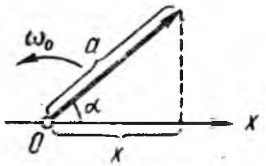
Тўнкарма маятник деб юритиладиган маятник ёрдамида оғирлик кучи тезланишини аниқлаш усули ана шу биз аниқлаган алмашиниш хоссасига асосланганди. Тўнкарма маятник деб учларига яқин жойда маҳкамлаб қўйилган иккита параллел таянч призмалари бўлиб, шу призмаларидан навбат билан осиб қўйса бўладиган маятникка айтилади. Маятник, зарур бўлганда у бўйлаб кўчирса ёки унинг бирор жойига маҳкамлаб қўйса бўладиган оғир юклар бириктирилган. Юкларни жилдириш орқали уларнинг шундай ҳолати топиладики, бунда маятникни исталган призмасидан осганда у бир хил давр билан тебранади. У ҳолда призманинг таянч қирралари орасидаги масофа $l_{кел}$ га тенг бўлади. Маятникнинг тебраниш даврини ўлчаб ва $l_{кел}$ нинг топилган қийматидан фойдаланиб қуйидаги

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{кел}}{g}}$$

формуладан g оғирлик кучи тезланишини топишимиз мумкин.

68- §. Гармоник тебранишларни график усулда тасвирлаш. Векторлар диаграммаси

Қатор масалаларнинг ечилиши, хусусан, бир томонга йўналган бир неча тебранишларни бир-бирига қўшиш тебранишларни текисликдаги векторлар кўринишида график усулда тасвирланган вақтда анча енгил ва кўргазмали бўлади. Ана шундай усул билан топилган схема векторлар диаграммаси дейилади.



171- расм.

Бир ўқ олиб уни x билан белгилаймиз (171- расм). Ўқ устида ётган 0 нуқтадан ўқ билан α бурчак ҳосил қилувчи a узунликдаги вектор чизамиз. Агар бу векторни ω_0 бурчак тезлик билан айлантира бошласа, у ҳолда векторнинг учининг проекцияси x ўқи бўйлаб $-a$ билан $+a$ чегарасида ўзгаради, шу билан бирга бу проекциянинг координатаси вақт бўйича қуйидагича қонун билан ўзгаради:

$$x = a\cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Демак, вектор учининг ўққа проекцияси гармоник тебранади ва бу тебранишнинг амплитудаси векторнинг узунлигига, айлана частотаси векторнинг айланиш бурчак тезлигига ва бошланғич фазаси эса вақтнинг бошланғич моментида вектор ўқ билан ташкил қилган бурчакка тенг бўлади.

Бу айтганлардан гармоник тебранишни узунлиги тебраниш амплитудасига, x ўқи билан ташкил қилган бурчаги тебранишларнинг бошланғич фазасига тенг бўлган вектор билан тасвирланиши мумкин деган хулоса чиқади.

69-§. Бир хил йўналишдаги тебранишларни қўшиш

Жисм бир вақтда бир йўналиш ёки турли йўналишлар бўйлаб содир бўлаётган бир неча тебранишларда иштирок этадиган ҳоллар ҳам учраши мумкин. Масалан, агар шарчани пружина ёрдамида рессорларда тебранаётган вагоннинг шипига осиб қўйсак, у ҳолда шарчанинг Ерга нисбатан ҳаракати вагоннинг Ерга нисбатан тебранишларидан ташкил топади.

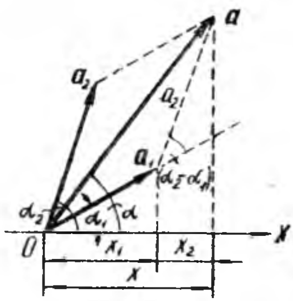
Йўналишлари ва частоталари бир хил бўлган иккита гармоник тебранишларнинг қўшилишини қараб чиқайлик. Тебранувчи жисмнинг x силжиши қуйидагидек кўринишга эга бўлган x_1 ва x_2 силжишларнинг йиғиндисидан иборат:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1), \\ x_2 &= a_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2). \end{aligned}\right\} \qquad (69.1)$$

Бу икки тебранишни $\mathbf{a}_1$ ва $\mathbf{a}_2$ векторлар ёрдамида тасвирлайлик (172-расм). Векторларнинг қўшилиш қоидасига биноан натижавий **а** векторни чизайлик. Бу векторнинг x ўқига проекцияси қўшилувчи векторлар проекцияларининг йиғиндисига тенг, яъни

$$x = x_1 + x_2$$

эканлигини кўриш қийин эмас.



172- расм.

Демак, **а** вектор натижавий тебранишдан иборат. Бу вектор ҳам $\mathbf{a}_1$ ва $\mathbf{a}_2$ векторлар каби α бурчак тезлик билан айланади. Шунинг учун натижавий ҳаракат частотаси ω_0, амплитудаси a ва бошланғич фазаси α бўлган гармоник тебранишдан иборат бўлади. Графикдан кўриниб турибдики,

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1), \qquad (69.2)$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2}{a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2}. \qquad (69.3)$$

Шундай қилиб, гармоник тебранишларни векторлар ёрдамида тасвирлаш усули бир неча тебранишларни қўшиш операциясини векторларни қўшиш операциясига келтиришга имкон берар экан. Бу усул айниқса, оптикада жуда фойдалидир. Масалан, бирор нуқтадаги ёруғлик тебранишлари шу нуқтага тўлқин фронтининг турли нуқталаридан келувчи кўп тўлқинларнинг йиғиндиси сифатида аниқланади.

(69.2) ва (69.3) формулаларни (69.1) ифодаларни ўзаро қўшиш ва тегишли тригонометрик ўзгартиришлар бажариш йўли билан ҳам чиқариш мумкин. Лекин бу формулаларни топишнинг биз қўллаган усули анча соддалиги ва кўргазмалилиги билан ажралиб туради.

Амплитуда учун ёзилган (69.2) ифодани таҳлил қилайлик. Агар икки тебранишнинг фазалари айирмаси $\alpha_2 - \alpha_1$ нолга тенг бўлса, натижавий тебранишнинг амплитудаси a_1 ва a_2 нинг йиғиндисига тенг. Агар $\alpha_2 - \alpha_1$ айирма $+\pi$ ёки $-\pi$ га тенг бўлса, яъни иккала тебраниш қарама-қарши фазаларда бўлса, у ҳолда натижавий тебранишнинг амплитудаси $|a_1 - a_2|$ га тенг бўлади.

Агар x_1 ва x_2 тебранишларнинг частоталари ҳар хил бўлса, $\mathbf{a}_1$ ва $\mathbf{a}_2$ векторлар ҳар хил тезликлар билан айланади. Бу ҳолда натижавий $\mathbf{a}$ векторнинг катталиги пульсацияланиб туради ва у ўзгарувчан тезлик билан айланади. Демак, бу ҳолда натижавий ҳаракат гармоник тебраниш эмас, қандайдир мураккаб тебранма процессдан иборат бўлади.

70-§. Титраш

Иккита бир томонга йўналган қўшилувчи гармоник тебранишларнинг частоталари жуда кам фарқ қилган ҳолда алоҳида аҳамиятга эга. Бундай шароитда натижавий ҳаракатни пульсацияланувчи амплитудали гармоник тебраниш деб қараш мумкин эканлигини кўрсатайлик. Бундай тебранишлар титраш дейилади.

Тебранишлардан бирининг частотасини ω билан, иккинчисиникини эса $\omega + \Delta\omega$ билан белгилаймиз. Шартга биноан $\Delta\omega \ll \omega$. Иккала тебранишнинг амплитудасини бир хил ва a га тенг деб оламиз. Тебранишлар частоталари бир-биридан бир оз фарқ қилганлиги учун вақтнинг ҳисоб бошини иккала тебранишнинг бошланғич фазалари нолга тенг бўладиган қилиб танлаб олиш мумкин. Амалда биз иккала тебранишнинг силжишлари бир вақтда энг катта мусбат қийматга эришадиган пайтни кутиб туриб, шу пайтда «секундомерни ишлатиб юборишимиз» керак. У вақтда бу икки тебранишнинг тенгламалари қуйидаги кўринишга келади.

$$x_1 = \cos\omega t,$$
$$x_2 = a\cos(\omega + \Delta\omega)t.$$

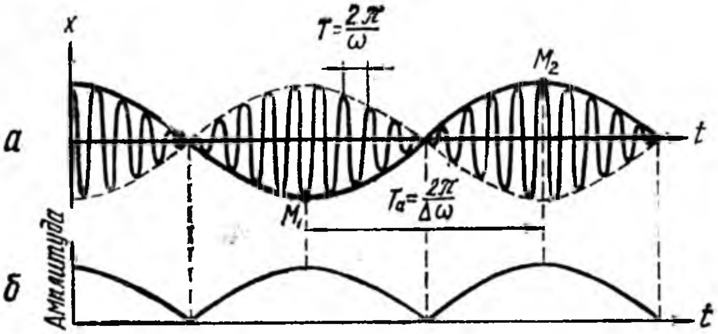
Бу ифодаларни ўзаро қўшиб ва косинусларнинг йиғиндиси учун тригонометрик формулани қўллаб қуйидагини топамиз:

$$x = x_1 + x_2 = \left(2a\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\omega t \qquad (70.1)$$

(иккинчи кўпайтувчида ω га нисбатан кичик бўлгани учун $\Delta\omega/2$ ни ҳисобга олмадик).

(70.1) функциянинг графиги 173-a расмда тасвирланган. График $\frac{\omega}{\Delta\omega} = 10$ бўлган ҳол учун тузилган.

(70.1) да қавс ичидаги кўпайтувчи иккинчи кўпайтувчига нисбатан анча секин ўзгаради. $\Delta\omega \ll \omega$ бўлгани учун $\cos\omega t$ кўпайтувчи бир неча марта тўла тебраниб чиққунча кетган вақт ичида қавс ичида турган кўпайтувчи деярли ўзгармайди. Бу бизга (70.1) тебранишни ω частотали ва амплитудаси бирор даврий қонун билан

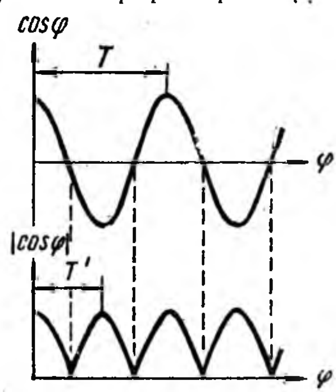


173- расм.

ўзгарадиган гармоник тебраниш деб қарашга имкон беради. Қавс ичида турган кўпайтма амплитуданинг бундай ўзгариш қонунини ифодалай олмайди, чунки y — $2a$ билан $+2a$ чегарасида ўзгаради, ҳолбуки, амплитуда таърифга биноан мусбат катталикдир. Амплитуданинг графиги 173-*б* расмда кўрсатилган. Амплитуданинг аналитик ифодаси қуйидагича бўлади:

$$\text{амплитуда} = \left|2a\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right|. \qquad (70.2)$$

(70.2) функция модул белгиси остида турган ифоданинг частотасидан 2 марта катта частотага, яъни $\Delta\omega$ частотага эга бўлган даврий функция (косинус ва унинг модулининг графиклари таққосланган 174- расмга қаранг). Шундай қилиб, амплитуданинг пульсация частотаси—уни титраш частотаси деб юритилади — қўшилаётган тебранишларнинг частоталари айирмасига тенг экан.

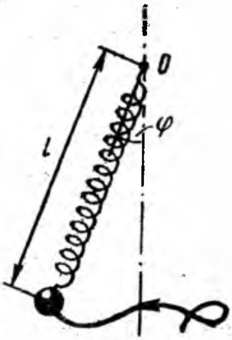


174- расм.

$2a\cos\frac{\Delta\omega}{2}t$ кўпайтма фақат амплитудани белгилаб қолмасдан тебранишлар фазасига ҳам таъсир кўрсатишини қайд қилиб ўтмоқчимиз. Бу амплитуданинг қўшни максимумларига тегишли оғишлари қарама-қарши ишораларга эга эканлигида намоён бўлади (173-*а* расмдаги M_1 ва M_2 нуқталарга қаранг).

71- §. Ўзаро перпендикуляр тебранишларни қўшиш

Иккита эркинлик даражасига эга бўлган, яъни вазиятини аниқлаш учун иккита катталик зарур бўлган системани қараб чиқайлик. Бунга бир учи шарнир ҳолда маҳкамлаб қўйилган енгил узун пружинага осилган оғир шарча мисол бўла олади. Бу шарча пружина билан биргиликда битта текисликда маятник каби тебранади. Шарчанинг вазиятини пружина ўқи билан вертикал ўқ ташкил қилган φ бурчак ва шарнирнинг ўқидан шарчанинг марказигача бўлган l масофа орқали аниқлаш мумкин. Шарча иккита тебранишда: биринчидан φ бурчак ўзгарадиган тебранишларда, иккинчидан l масофа ўзгарадиган тебранишларда иштирок эта олади. Биринчи тебранишнинг частотасини пружинанинг l узунлиги ва g оғирлик кучи тезланиши, иккинчи тебранишнинг частотасини эса пружинанинг эластиклик коэффициенти k ва шарчанинг m массаси белгилайди. Агар бир вақтда иккала тебраниш уйғотилса, у ҳолда шарча, умуман айтганда, шакли иккала тебранишларнинг частоталари ва бошланғич фазаларнинг нисбатига боғлиқ бўлган қандайдир мураккаб траектория бўйлаб ҳаракатланади (175- расм).



175- расм.

Иккинчи мисол сифатида узун ингичка ипга осилган оғир шарчани (математик маятникни)[1] қараб чиқайлик. Бу шарча ўзаро перпендикуляр йўналишларда икки хил тебранишда бўлиши мумкин, шу билан бирга бу иккала тебранишнинг ҳам частоталари бир-бирига аниқ тенг бўлади (иккала частота ҳам маятникнинг l узунлиги ва g оғирлик кучининг тезланиши билан аниқланади). Бу ҳолда шарча, умуман айтганда, шакли иккала тебранишнинг фазалари айирмасига боғлиқ бўлган қандайдир эгри чизиқли траектория бўйлаб ҳаракатланади.

Энди x ва y ўқлар бўйлаб содир бўлаётган бир хил ω частотали ўзаро перпендикуляр иккита гармоник тебранишни қўшишга ўтамиз. Вақтнинг ҳисоб бошини биринчи тебранишнинг бошланғич фазаси нолга тенг бўладиган қилиб танлаб оламиз. У вақтда тебранишлар тенгламалари қуйидагича ёзилади.

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\omega t, \\ y &= b\cos(\omega t + \alpha), \end{aligned}\right\} \qquad (71.1)$$

бу ерда α — иккала тебранишнинг фазалари айирмаси.

(71.1) ифода иккита тебранишда иштирок этаётган жисм ҳаракатланаётган траекториянинг параметрик шаклда тенгламасини беради.

---

[1] 66- § да биз маятник берилган текисликда тебранади, деб фараз қилган эдик, шунинг учун уни битта эркинлик даражасига эга бўлган система деб қараш мумкин эди.

Траектория тенгламасини оддий кўринишда топиш учун (71.1) тенгламадан t ни йўқотиш керак. Биринчи тенгламадан қуйидагини топамиз:

$$\cos\omega t = \frac{x}{a}. \qquad (71.2)$$

Демак,

$$\sin\omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \qquad (71.3)$$

Энди иккинчи (71.1) тенгламадаги косинусни йиғиндининг косинуси формуласига асосан ёямиз ҳамда $\cos\omega t$ ва $\sin\omega t$ лар ўрнига уларнинг (71.2) ва (71.3) қийматларини қўямиз. Натижада қуйидаги тенгламани топамиз:

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a}\cos\alpha - \sin\alpha\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Сўнгги тенгламани у қадар мураккаб бўлмаган ўзгартиришлардан кейин қуйидаги ҳолга келтириш мумкин:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\alpha = \sin^2\alpha. \qquad (71.4)$$

Аналитик геометриядан маълумки (71.4) тенглама ўқлари x ва y ўқларга нисбатан ихтиёрий ориентирланган эллипс тенгламасининг ўзгинасидир. Эллипснинг ориентацияси ва унинг ярим ўқларининг катталиги a ва b амплитудаларга ҳамда α фазалар фарқига мураккаб равишда боғлиқдир.

Баъзи бир хусусий ҳоллар учун траекторияларнинг шаклини текширайлик:

1. **Фазалар фарқи α нолга тенг.** Бу ҳолда (71.4) тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0,$$

бундан қуйидаги тўғри чизиқ формуласи келиб чиқади:

$$y = \frac{b}{a}x.$$

Тебранувчи нуқта шу тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатланади, бунда координата бошидан бу тўғри чизиққача бўлган масофа $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ га тенг. Бунга x ва y ларнинг (71.1) ифодасини қўйиб ва $\alpha = 0$ эканлигини ҳисобга олиб r нинг вақт бўйича ўзгариш қонунини топамиз:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\cos\omega t. \qquad (71.6)$$

(71.6) дан кўринадики, натижавий ҳаракат (71.5) бўйича частотаси ω ва амплитудаси $\sqrt{a^2 + b^2}$ га тенг бўлган гармоник тебранишдан иборат бўлар экан (176- расм).

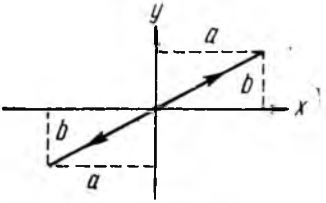
2. Фазалар фарқи $\alpha = \pm \pi$ га тенг бўлсин. (71.4) тенглама қуйидагича кўринишга эга

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0,$$

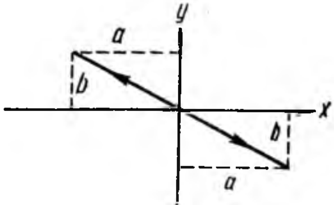
бундан натижавий ҳаракат

$$y = -\frac{b}{a}x$$

тўғри чизиқ бўйлаб содир бўлувчи гармоник тебранишдан иборат. деган хулоса чиқади (177- расм).



176- расм.



177- расм.

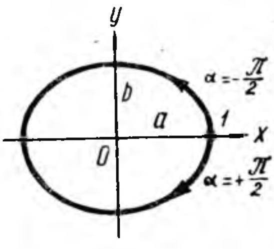
3. $\alpha = \pm \pi/2$ да (71.4) тенглама қуйидагича

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{71.7}$$

яъни координата ўқларига келтирилган эллипсдан иборат бўлади. Бунда эллипснинг ярим ўқлари тебранишларнинг мос амплитудаларига тенг. a ва b амплитудалар тенг бўлса, эллипс айниб, айланага ўтади. $\alpha = +\pi/2$ ва $\alpha = -\pi/2$ ҳоллар эллипс ёки айлана бўйлаб ҳаракатнинг йўналиши билан фарқ қилади Агар $\alpha = +\pi/2$ бўлса, (71.1) тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\omega t, \\ y &= -b\sin\omega t. \end{aligned}\right\} \tag{71.8}$$

$t = 0$ моментда жисм 1 нуқтада бўлади (178- расм). Вақтнинг бундан кейинги моментларида x координата камаяди, у координата эса манфий ишора олади. Демак, ҳаракат йўналиши соат стрелкаси йўналиши бўйлаб содир бўлар экан.



178- расм.

$\alpha = -\pi/2$ бўлганда тебраниш тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\omega t, \\ y &= b\sin\omega t. \end{aligned}\right\} \tag{71.9}$$

Бундан ҳаракат соат стрелкаси йўналишига тескари йўналишда содир бўлади, деган хулосага келиш мумкин. Айтилганлардан R радиусли айлана бўйлаб ω бурчак тезликли текис ҳаракат иккита ўзаро перпендикуляр

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos\omega t, \\ y &= \pm R\sin\omega t \end{aligned}\right\} \qquad (71.10)$$

тебранишларнинг йиғиндиси сифатида тасаввур қилиниши мумкин деган хулоса чиқади (ифодадаги «$+$» ишора ҳаракатнинг соат стрелкаси йўналишига тескари, «$-$» ишора эса соат стрелкаси йўналиши бўйича бўлишини билдиради).

Хулоса тариқасида шуни таъкидлаб ўтамизки, агар ўзаро перпендикуляр тебранишларнинг частоталари бир-биридан жуда кичик $\Delta\omega$ га фарқ қилса, уларни бир хил частотали, лекин фазалари айирмаси секин ўзгарадиган тебранишлар сифатида тасаввур қилиш мумкин, ҳақиқатан ҳам, тебраниш тенгламаларини қуйидагича ёзиш

$$x = a\cos\omega t,$$
$$y = b\cos[\omega t + (\Delta\omega t + \alpha)],$$

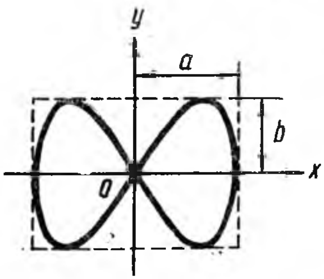
ва $\Delta\omega t + \alpha$ ифодани вақт бўйича чизиқли қонун билан секин ўзгарадиган фазалар фарқи деб қараш мумкин.

Бу ҳолда натижавий ҳаракат кўриниши секин ўзгарадиган эгри чизиқ бўйлаб содир бўлади. Бу эгри чизиқ аста-секин фазалар айирмасининг $-\pi$ дан $+\pi$ гача оралиқдаги барча қийматларига мос келувчи шаклларни олган ҳолда ўзгара боради.

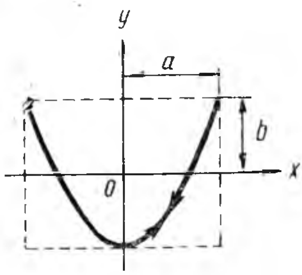
72-§. Лиссажу шакллари

Агар ўзаро перпендикуляр тебранишларнинг частоталари бир хил бўлмаса, у ҳолда натижавий ҳаракатнинг траекторияси Лиссажу шакллари деб аталувчи жуда мураккаб эгри чизиқлардан иборат бўлади. 179-расмда частоталар нисбати $1:2$ га ва фазалар айирмаси эса $\pi/2$ га тенг бўлганда ҳосил бўладиган энг содда траекториялардан бири келтирилган. Бу ҳолда тебранишлар тенгламаси қуйидагича кўринишга эга:

$$x = a\cos\omega t,$$
$$y = b\cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$



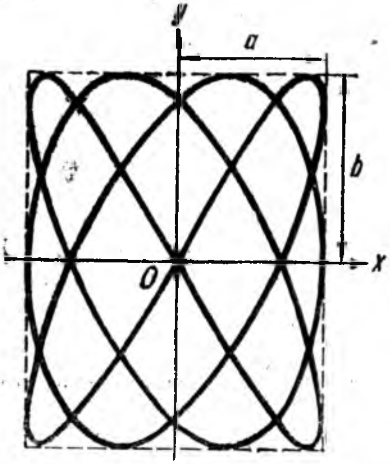
179- расм.



180- расм.

Нуқта x ўқ бўйлаб бир четки ҳолатдан иккинчи четки ҳолатга ўтгунга қадар кетган вақт ичида у ўқ бўйлаб ноль ҳолатидан чиқиб, бир четки ҳолатга сўнг иккинчи четки ҳолатга бориб, яна ноль ҳолатга қайтишга улгуради.

Частоталар нисбати 1 : 2 га ва фазалар айирмаси нолга тенг бўлганда траектория очиқ эгри чизиққа (180-расм) айланади ва нуқта бу траектория бўйлаб у ёқ-бу ёққа ҳаракатланади.



181-расм.

Тебранишлар частоталарининг нисбатини ифодаловчи рационал каср бирга қанча яқин бўлса, Лиссажу шакллари шунча мураккаброқ бўлар экан. 181-расмда мисол тариқасида частоталарнинг нисбати 3 : 4 га ва фазалар айирмаси $\pi/2$ га тенг бўлгандаги эгри чизиқ кўрсатилган.

73-§. Сўнувчи тебранишлар

Гармоник тебранишлар тенгламасини чиқараётганда биз тебранувчи нуқтага квазиэластик куч таъсир қилади деб ҳисоблаган эдик. Ҳар қандай реал тебранувчи системада доим қаршилик кучлари мавжуд бўлиб, уларнинг таъсири система энергиясининг камайишига олиб келади. Агар камайган энергия ташқи кучларнинг иши ҳисобига тўлдирилиб турилмаса, тебранишлар сўнади.

Эркин (ёки хусусий) сўнувчи тебранишларни қараб чиқайлик. Тебранишлар эркин экан, демак, система ташқи кучлар томонидан мувозанат ҳолатидан чиққан ёки ташқи кучлар ҳисобига дастлабки туртки олиб сўнгра ўз ҳолига қўйилган ва унга фақат квазиэластик куч билан муҳитнинг қаршилик кучи таъсир қилаётган ҳолатда туради. Биз кичик тебранишларни қараш билан чегараланамиз. У ҳолда системанинг тезлиги ҳам кичик бўлади, кичик тезликларда эса қаршилик кучи тезликка пропорционал:

$$f_r = -rv = -r\dot{x}, \qquad (73.1)$$

бу ерда r — қаршилик коэффициенти деб аталувчи ўзгармас катталик. «—» ишора f_r билан v қарама-қарши йўналганлигини билдиради.

Тебранаётган жисм учун Ньютон иккинчи қонунининг тенгламасини ёзамиз:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}.$$

Уни қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (73.2)$$

бу ерда қуйидаги белгилардан фойдаландик:

$$2\beta = \frac{r}{m}, \qquad (73.3)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}. \qquad (73.4)$$

ω_0 ҳақида шуни эслатиб ўтамизки, муҳитнинг қаршилиги бўлмаганда, яъни $r = 0$ бўлганда система ана шундай частота билан эркин тебранган бўлар эди. Бу частота системасининг **хусусий тебраниш частотаси** дейилади.

Гармоник осциллятор учун a амплитуда билан аниқланувчи тебранишлар қулочи (чегараси) ўзгаришсиз қолади. Муҳитнинг қаршилиги таъсирида тебранишлар қулочи кичраяди. Шунинг учун (73.2) тенгламанинг ечимини қуйидаги кўринишда қидириб кўрайлик.

$$x = a(t)\cos(\omega t + \alpha), \qquad (73.5)$$

бу ерда $a(t)$ — вақт функцияси.

(73.5) ни t вақт бўйича дифференциаллаб $\dot{x}$ ва $\ddot{x}$ ларни топайлик:

$$\dot{x} = \dot{a}\cos(\omega t + \alpha) - a\omega\sin(\omega t + \alpha),$$

$$\ddot{x} = \ddot{a}(\omega t + \alpha) - 2\dot{a}\omega\sin(\omega t + \alpha) - a\omega^2\cos(\omega t + \alpha).$$

Бу ифодаларни (73.2) га қўйиб, унга мураккаб бўлмаган ўзгартиришлар ўтказсак, қуйидаги муносабатни топамиз:

$$[\ddot{a} + 2\beta\dot{a} + (\omega_0^2 - \omega^2)a]\cos(\omega t + \alpha) - 2\omega[\dot{a} + \beta a]\sin(\omega t + \alpha) = 0.$$

Бу биз топган тенглама t нинг исталган қийматларида бажарилиши учун $\cos(\omega t + \alpha)$ ва $\sin(\omega t + \alpha)$ ларнинг олдидаги коэффициентлар нолга тенг бўлиши керак. Шундай қилиб, биз қуйидаги иккита тенгламани топамиз:

$$\dot{a} + \beta a = 0, \qquad (73.6)$$

$$\ddot{a} + 2\beta\dot{a} + (\omega_0^2 - \omega^2)a = 0. \qquad (73.7)$$

(73.6) тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{da}{dt} = -\beta a, \text{ бундан } \frac{da}{a} = -\beta dt.$$

Сўнгги тенгламани интеграллаcак, $\ln a = -\beta t + \ln a_0$, бу ерда интеграллаш доимийси $\ln a_0$ билан белгиланган. Ниҳоят, топилган муносабатни потенцирлаб $a(t)$ учун қуйидаги ифодани топамиз:

$$a = a_0 e^{-\beta t}. \qquad (73.8)$$

$\dot{a} = -\beta a$ ва $\ddot{a} = \beta^2 a$ эканлигини осонгина кўриш мумкин. Бу қийматларни (73.7) тенгламага қўйсак, қуйидаги муносабатни топамиз:

$$\beta^2 a - 2\beta^2 a + (\omega_0^2 - \omega^2) a = 0,$$

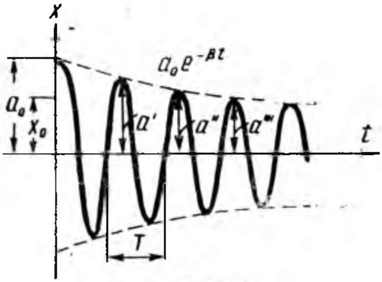
бу муносабатни нолдан фарқли a кўпайтувчига қисқартирсак, ω^2 нинг қийматини топамиз:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2. \qquad (73.9)$$

$\omega_0^2 > \beta^2$ бўлса, ω ҳақиқий сон бўлади ва (73.2) дифференциал тенгламанинг ечими (73.5) кўринишда ёзилиши мумкин. Шундай қилиб, сўниш жуда кучли бўлмаганда ($\beta < \omega_0$) тебранишлар қуйидаги функция билан тасвирланади:

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \qquad (73.10)$$

Бу функциянинг графиги 182-расмда келтирилган. Пунктир чизиқлар билан тебранаётган нуқтанинг x кўчиш чегаралари кўрсатилган.



182-расм.

(73.10) функциянинг кўринишига мос равишда системанинг ҳаракатини частотаси ω га тенг ва амплитудаси (73.8) қонун билан ўзгарувчи гармоник тебраниш деб қараш мумкин. 182-расмдаги пунктир чизиқлардан юқоридагиси $a(t)$ функциянинг графигини беради, бунда a_0 катталик вақтнинг бошланғич пайтидаги амплитуда қийматини билдиради. Бошланғич силжиш x_0 a_0 дан ташқари яна α бошланғич фазага ҳам боғлиқ: $x_0 = a_0 \cos\alpha$ (182-расм).

Тебранишларнинг сўниш тезлиги с ў н и ш к о э ф ф и ц и е н т и деб аталувчи $\beta = r/2m$ катталик билан аниқланади. Амплитуда e марта камайиши учун кетган τ вақтни аниқлайлик. Таърифга биноан $e^{-\beta\tau} = e^{-1}$, бунда $\beta\tau = 1$. Демак, сўниш коэффициенти катталик жиҳатдан амплитуда e марта камайиши учун кетган вақтнинг тескари қийматига тенг экан.

(73.9) га биноан сўнувчи тебранишларнинг даври

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \qquad (73.11)$$

Муҳитнинг қаршилиги кичик ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) бўлса, тебранишлар даври амалда $T = 2\pi/\omega_0$ бўлади. Сўниш коэффициенти ортиши билан тебранишлар даври ортади.

Кейинги бирор томонга энг кўп оғишлар (масалан, 182-расмдаги a', a'', a''' ва ҳоказолар) геометрик прогрессия ҳосил қилади. Ҳаҳиқатан ҳам, агар $a' = a_0 e^{-\beta t}$ бўлса, у вақтда $a'' = a_0 e^{-\beta(t+T)} = a' e^{-\beta T}$, $a''' = a_0 e^{-\beta(t+2T)} = a'' e^{-\beta T}$ ва ҳоказо. Умуман, бир даврга фарқ қиладиган вақт моментларига тегишли амплитудаларнинг нисбати қуйидагига тенг бўлади:

$$\frac{a(t)}{a(t+T)} = e^{\beta T}.$$

Бу нисбат **сўниш декременти**, унинг логарифми эса **сўнишнинг логарифмик декременти** дейилади:

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T. \tag{73.12}$$

Бу кейинги катталик одатда тебранишларнинг сўнишини характерлаш учун ишлатилади. β ни (73.12) га мос равишда λ ҳамда T орқали ифодалаб, амплитуданинг сўниш қонунини қуйидагича ёзиш мумкин

$$a = a_0 e^{-\frac{\lambda}{T} t}.$$

Амплитуда e марта ўзгариши учун кетган τ вақт ичида система $N_e = \tau/T$ тебраниб улгуради. $e^{-\lambda \frac{\tau}{T}} = e^{-1}$ шартдан $\lambda \frac{\tau}{T} = \lambda N_e = 1$ келиб чиқади. Демак, сўнишнинг логарифмик декременти катталик жиҳатдан амплитуда e марта камайиши учун кетган вақт ичида содир бўлувчи тебранишлар сонининг тескари қийматига тенг экан.

Тебраниш системасини характерлаш учун кўпинча тебраниш системасининг **асллиги** деб аталувчи

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e \tag{73.13}$$

катталикдан фойдаланилади. Контурнинг асллиги унинг таърифига биноан тебранишлар амплитудаси e марта камайиши учун кетган τ вақт ичидаги системанинг N_e тебранишлари сонига тенг эканлиги кўриниб турибди.

Сўнувчи тебранишлар бажараётган системанинг импульсини топайлик. (73.10) функцияни вақт бўйича дефференциаллаб ва топилган натижани m массага кўпайтириб, қуйидагини топамиз:

$$p = m\dot{x} = -m a_0 e^{-\beta t} [\beta \cos(\omega t + \alpha) + \omega \sin(\omega t + \alpha)].$$

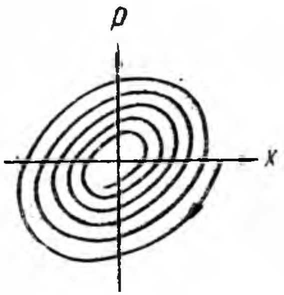
Бу ифодани қуйидагича ўзгартириб ёзиш мумкин:

$$p = p_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha + \psi), \tag{73.14}$$

бу ерда $p_0 = m a_0 \sqrt{\omega^2 + \beta^2} = m a_0 \omega_0$ эса қуйидаги шартни қаноатлантиради:

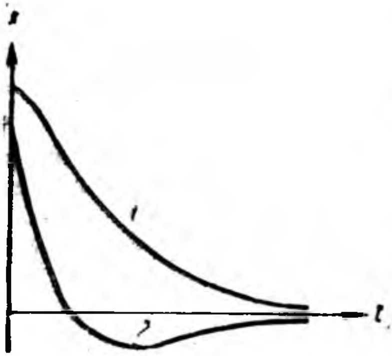
$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{\omega}{\beta}.$$

Агар $e^{\beta-t}$ кўпайтма бўлмаганда 71-§ да қилганимиздек (73.10) ва (73.14) тенгламалардан t ни чиқариб юбориб x ва p координаталарда координата ўқларига нисбатан бурилган эллипснинг тенгламасини топган бўлар эдик. Экспоненциал кўпайтма $e^{-\beta t}$ нинг борлиги эллипс ичига қараб ўралувчи спираль шаклида бўлишига олиб келади. (183-расм) Ана шу спираль сўнувчи тебранишнинг фазовий траекториясидан иборат. Бунда сўниш коэффициенти β қанча катта бўлса, бу спираль координата ўқларига нисбатан шунча кўпроқ огади.



183-расм.

(73.11) формуладан $\omega_0^2-\beta^2=0$ бўлганда тебранишлар даври чексизликка айланади, яъни ҳаракат даврий бўлмай қолади деган хулоса чиқади. Тегишли математик анализлар шуни кўрсатадики, $\omega_0^2-\beta^2\leqslant 0$ бўлганда ҳаракат апериодик (даврий эмас) характерга эга бўлар экан. Бу ҳаракатда мувозанат ҳолатидан чиқарилган система тебранмасдан ўз мувозанат ҳолатига қайтиб келади. 184-расмда апериодик ҳаракат вақтида системанинг мувозанат ҳолатига қайтишидаги мумкин бўлган икки йўл тасвирланган. Система бу йўлларда қайси бири билан мувозанат қайтиши ҳолатга бошланғич шартларга боғлиқ. Агар система x_0 силжиш билан характерланувчи ҳолатдан мувозанат ҳолатига қараб қуйидаги шартга бўйсунувчи v_0 бошланғич тезлик



184-расм.

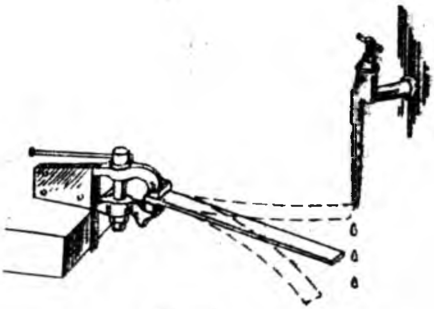
$$|v_0|>|x_0|(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})$$

билан ҳаракатлана бошласа, у вақтда 2 эгри чизиқ билан тасвирланган ҳаракат амалга ошади.

74-§. Автотебранишлар

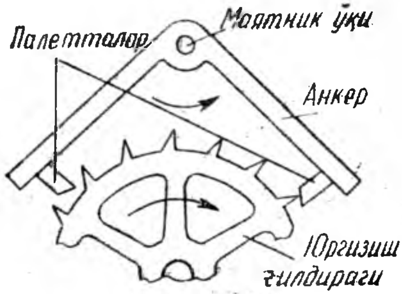
Сўнувчи тебранишлар вақтида системанинг энергияси муҳитнинг қаршилигини енгишга сарфланади. Агар энергиянинг бундай камайиши тўлдириб турилса, тебранишлар сўнмас тебранишларга айланади. Системанинг энергияси ташқаридан бериладиган туртки ҳисобига тўлдириб турилиши мумкин. Лекин бу турткилар системага унинг тебранишлари билан бир хил тактда берилиб турилиши керак, акс ҳолда улар тебранишларни сусайтириш ҳатто бутунлай тўхтатиб қўйиши мумкин. Тебранувчи система ташқи таъсирни ўзи бошқариб, берилаётган турткиларни ўзининг ҳаракатига созлаб турадиган қилиш ҳам мумкин. Ана шундай система **автотебранувчи**, у бажарадиган сўнмас тебранишлар **автотебранишлар** деб аталади.

Энг содда автотебранувчи системага мисол сифатида 185- расмда тасвирланган мосламани кўриб чиқайлик. Эгилувчан эластик пластинканинг бир учи қўзғалмас қилиб маҳкамланган. Агар пластинканинг эркин учини пастга тортиб юборсак, у сўнувчи тебранма ҳаракат қила бошлайди. Агар пластинка энг юқори ҳолатда турган пайтда унинг учига томадиган қилиб сув оқизиб қўйсак, тебранишларни сўнмас тебранишларга айлантиришимиз мумкин. Сув томчилари пластинканинг учига урилиб ишқаланиш натижасида йўқотилган тебраниш энергиясини тиклаб туради.



185- расм.

Автотебранувчи системага иккинчи мисол сифатида соат механизмини қараб чиқамиз. Соатнинг маятниги эгилган ричаг — анкер билан бирга бир ўққа ўрнатилган (186-расм). Анкернинг учларида палетталар деб аталувчи махсус дўнгликлари бор. Тишли юргизувчи ғилдирак уни айлантиришга интилувчи тош осилган занжир ёки буралган пружина таъсирида туради. Бироқ ғилдирак кўп вақт давомида тишларининг бири билан у ёки бу палеттанинг ён сиртига тиралиб туради. Маятник тебранганда бу палетта тишнинг сирти бўйлаб сирғанади. Фақат маятник ўрта ҳолатга яқин турган пайтлардагина палетталар тишларнинг йўлини тўсмайди ва юргизувчи ғилдирак бурилиб ўзининг устки томони билан палеттанинг қия қилиб кесилган учи бўйлаб сирпанувчи тиши ёрдамида анкерни туртади. Маятник тебранишининг тўла цикли (даври) ичида юргизувчи ғилдирак иккита тишга бурилади, бунда палетталарнинг ҳар бири биттадан туртки олади. Ана шу турткилар воситаси билан кўтарилган тошнинг ёки буралган пружинанинг энергияси ҳисобиға маятникнинг ишқаланиш туфайли йўқотган энергиясини тиклаб туради.



186- расм.

75- §. Мажбурий тебранишлар

Тебранувчи системада даврий ўзгариб турувчи ташқи куч (биз уни мажбур этувчи куч деб атаймиз) таъсирида содир бўлувчи тебранишлар мажбур этувчи куч вақт бўйича гармоник

$$f = F_0 \cos \omega t \tag{75.1}$$

қонун билан ўзгаради деб фараз қилайлик.

Ҳаракат тенгламасини тузган вақтда мажбур этувчи кучдан ташқари эркин тебраниш вақтида системада таъсир кўрсатадиган кучларни, яъни квазиэластик куч билан муҳитнинг қаршилик кучини ҳам ҳисобга олиш керак. Тебранишлар етарли даражада кичик деб фараз қилиб, аввалгидек қаршилик кучини тезликка пропорционал деб ҳисоблаймиз: у ҳолда ҳаракат тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t .$$

Бу тенгламани m га тақсимлаб ва x ҳамда $\dot{x}$ ли ҳадларни чап томонга ўтказиб, иккинчи даражали чизиқли дифференциал тенгламага эга бўламиз:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t , \tag{75.2}$$

бу ерда $f_0 = \frac{F_0}{m}$, $\beta = \frac{r}{2m}$ эса сўниш коэффициенти, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ —системанинг хусусий тебраниш частотаси.

Дифференциал тенгламалар назариясидан маълумки, бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими бир жинсли тенгламанинг умумий ечими билан бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечими йиғиндисига тенг. Маълумки, бир жинсли тенгламанинг умумий ечими [(73.2) тенгламанинг умумий ечими бўлган (73.10) функцияга қаранг] қуйидаги кўринишга эга:

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos (\omega' t + \alpha') , \tag{75.3}$$

бу ерда $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, a_0 ва α' лар эса ихтиёрий катталиклар.

Энди (75.2) тенгламанинг хусусий (ихтиёрий ўзгармас коэффициентларга эга бўлмаган) ечимини топиш қолди. Фараз қилайлик, бу ечим қуйидаги кўринишга эга бўлсин:

$$x = a \cos (\omega t - \varphi) \tag{75.4}$$

(бу ҳолда бошланғич фазани α билан эмас, $-\varphi$ билан белгилаган қулай). Векторлар диаграммаси ёрдамида (68 ва 69- § ларга қаранг) бизнинг фаразимиз тўғри эканлигига осонгина ишонч ҳосил қилишимиз ва шунингдек, α билан φ нинг (75.4) функция (75.2) тенгламани қаноатлантиришига имкон берадиган қийматларини топишимиз мумкин. (75.4) ни вақт бўйича дифференциаллаб, (75.2) тенгламанинг биринчи икки ҳадини қуйидагича ёзишимиз мумкин:

$$2\beta\dot{x} = -2\beta\omega a \sin (\omega t - \varphi) = 2\beta\omega a \cos \left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \tag{75.5}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 a \cos(\omega t - \varphi) = \omega^2 a \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (75.6)$$

(75.2) дан $f_0 \cos\omega t$ гармоник тебраниш худди шундай частотали учта гармоник тебранишнинг: (75.6), (75.5) ва $\omega_0^2 x = \omega_0^2 a\cos(\omega t - \varphi)$ тебранишларнинг йиғиндисидан иборат деган хулоса чиқади. Агар кейинги тебранишни $\omega_0^2 a$ узунлигидаги ва ўнг томонга йўналган вектор билан тасвирласак, у вақтда (75.5) тебраниш узунлиги $2\beta\omega a$ га тенг ва $\omega_0^2 x$ векторга нисбатан соат стрелкасига тескари $\pi/2$ бурчакка бурилган вектор билан, (75.6) тебраниш эса $\omega^2 a$ узунликдаги $\omega_0^2 x$ векторга нисбатан π бурчакка бурилган вектор билан тасвирланади (187- расм). (75.2) тенглама қаноатлантирилиши учун қайд қилинган учта векторнинг йиғиндиси $f_0 \cos\omega t$ тебранишни тасвирловчи вектор билан бир хил бўлиши керак. a амплитуданинг қуйидаги шарт билан белгиланадиган қийматларидагина бу векторлар бир хил бўлади (187- a расмга қаранг):

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 a^2 + 4\beta^2 \omega^2 a^2 = f_0^2,$$

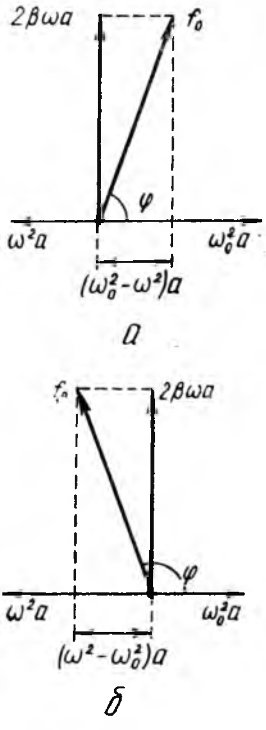
бундан

$$a = \frac{f_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \qquad (75.7)$$

187- a расм $\omega < \omega_0$ ҳолга тўғри келади $\omega > \omega_0$ ҳолга тегишли 187- $б$ расмдан a нинг худди шундай қиймати топилади.

187- расм шунингдек, (75.4) мажбурий тебранишнинг уни юзага келтирган (75.1) мажбур этувчи кучдан кечикиши катталиги бўлмиш φ нинг қийматини топишга ҳам имкон беради. Расмдан қуйидаги келиб чиқади:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (75.8)$$



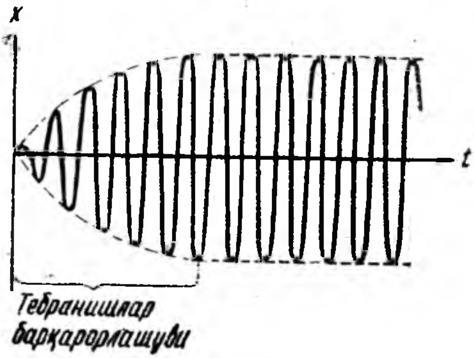
187- расм.

(75.4) га a ва φ нинг (75.7) ҳамда (75.8) формулалардан чиқадиган қийматларини қўйсак, бир жинсли бўлмаган (75.2) тенгламанинг хусусий ечимини топамиз:

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - arc\operatorname{tg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \qquad (75.9)$$

(75.9) функция билан (75.3) нинг йиғиндиси системанинг мажбурий тебраниш вақтидаги ҳаракатини ифодаловчи (75.3) тенгламанинг умумий ечимини беради. (75.3) қўшилувчи процесснинг дастлабки босқичида, тебранишлар қарор топаётган вақтда (188- расм) сезиларли роль ўйнайди. Вақт ўтиши билан (75.3) қўшилувчи экспоненциал $e^{-\beta t}$ кўпайтувчи туфайли тобора кичрая боради ва етарлича вақт ўтгандан кейин уни ташлаб юбориб ечимда фақат (75.9) қўшилувчини олиб қолиш мумкин.

Шундай қилиб, (75.9) функция барқарор мажбурий тебранишларни ифодалар экан. Бу тебранишлар частотаси мажбур этувчи куч частотасиға тенг бўлган гармоник тебранишлардан иборат. Мажбурий тебранишларнинг амплитудаси (75.7) мажбур этувчи



188- расм.

кучнинг амплитудасига пропорционал. Берилган тебранувчи (аниқ ω_0 ва β га эга бўлган) система учун амплитуда мажбур этувчи кучга пропорционал бўлади. Мажбурий тебранишлар фаза бўйича мажбур этувчи кучдан орқада қолади, бунда кечикиш катталиги φ мажбур этувчи кучнинг частотасига ҳам боғлиқ бўлади [(75.8) га қаранг].

Мажбурий тебранишлар амплитудаси мажбур этувчи куч частотасига боғлиқлиги шунга олиб келадики, берилган система учун аниқ бўлган бирор частотада тебранишлар амплитудаси максимал қийматга эришади. Тебранувчи система айниқса шундай частотали мажбур этувчи кучнинг таъсирига берилувчан экан. Бу ҳодиса р е з о н а н с деб, бунга мос частота эса р е з о н а н с ч а с т о т а деб аталади.

$\omega_{рез}$ резонанс частотани аниқлаш учун (75.7) функциянинг максимумини ёки худди шунинг ўзи, махраждаги илдиз остида турган ифоданинг минимумини топиш керак. Бу ифодани ω бўйича дифференциаллаб ва нолга тенглаштириб, $\omega_{рез}$ ни аниқловчи шартни топамиз:

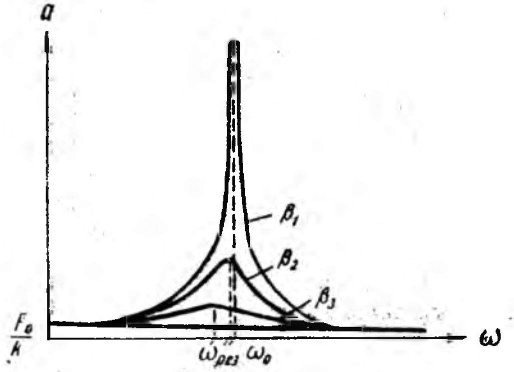
$$-4(\omega_0^2-\omega^2)\omega+8\beta^2\omega=0. \qquad (75.10)$$

(75.10) тенглама учта ечимга эга: $\omega=0$ ва $\omega=\pm\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$. Нолга тенг ечим махражнинг максимум қийматига мос келади. Қолган иккита ечимдан манфий сон физик маънога эга бўлмаган катталик сифатида (частота манфий бўлиши мумкин эмас) ташлаб юборилади. Шундай қилиб, резонанс частота учун битта қиймат топилади:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \tag{75.11}$$

Частотанинг бу қийматини (75.7) га қўйиб, резонанс вақтидаги амплитуда учун қуйидаги ифодани топамиз:

$$a_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \tag{75.12}$$



189- расм

(75.12) га биноан муҳитнинг қаршилиги бўлмаганда резонанс вақтидаги амплитуда чексизликка айланган бўлар эди. (75.11) га биноан эса худди шундай шароитларда ($\beta = 0$ бўлганда) резонанс частота системанинг ω_0 хусусий тебранишлари частотасига тенг бўлади.

Мажбурий тебранишлар амплитудасининг мажбур этувчи куч частотасига (ёки худди шунинг ўзи, тебранишлар частотасига) қараб ўзгариши 189- расмда кўрсатилган. Графикдаги алоҳида эгри чизиқлар, параметр β нинг турли қийматларига тегишлидир. (75.11) ва (75.12) ларга биноан β қанча кичик бўлса, берилган эгри чизиқнинг максимуми юқорироқда ва ўнгда ётади. Сўниш анча катта ($2\beta^2 > \omega_0^2$) бўлганда, резонанс частотанинг ифодаси мавҳум бўлиб қолади. Бу эса шуни англатадики, бундай шароитларда резонанс кузатилмайди — частота ортиши билан мажбурий тебранишлар амплитудаси бир меъёрда камая боради (189- расмдаги пастдаги эгри чизиққа қаранг). (75.7) функциянинг β параметрнинг турли қийматларига тегишли 189-расмда тасвирланган графиклари тўплами резонанс чизиқлари дейилади.

Резонанс чизиқлари ҳақида яна қуйидагини эслатиб ўтиш мумкин. ω нолга интилганда барча эгри чизиқлар нолдан фарқли ва f_0/ω_0^2 га, яъни F_0/k га тенг бўлган бирдан-бир чегаравий қийматга интилади. Бу қиймат системанинг мувозанат ҳолатидан F_0 ўзгармас куч таъсирида силжишидан иборат. ω чексизликка интилганда ҳамма эгри чизиқлар асимптотик равишда нолга интилади, чунки частота катта бўлганда куч ўзининг йўналишини шу қадар тез ўзгартирадики, система мувозанат ҳолатидан сезиларли даражада силжиб улгурмайди. Ниҳоят, β қанча кичик бўлса, резонансга яқин жойда амплитуда частотага қараб шунча тез ўзгаришини, максимум шунча «ўткирроқ» бўлишини қайд қилиб ўтамиз.

(75.12) формуладан сўниш заиф бўлганда (яъни $\beta \ll \omega_0$ бўлганда) резонанс вақтидаги амплитуда тахминан қуйидагига тенг бўлади, деган хулоса чиқади:

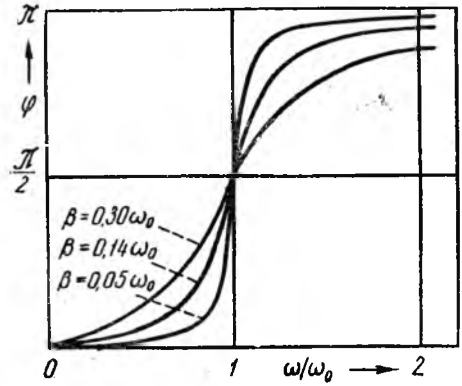
$$a_{\text{рез}} \approx \frac{f_0}{2\beta\omega_0}.$$

Бу ифодани ўзгармас куч F_0 таъсирида (у f_0/ω_0^2 га тенг эканлигини биз аниқлаган эдик) системанинг мувозанат ҳолатдан x_0 силжишига тақсимлайлик. Натижада қуйидагини топамиз:

$$\frac{a_{\text{рез}}}{x_0} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = Q.$$

[(73.13) формулага қаранг.] Шундай қилиб, Q асллик резонанс вақтида амплитуда системанинг катталик жиҳатдан мажбур этувчи куч амплитудасига тенг ўзгармас куч (фақат сўниш кичик бўлган шароитдагина шундай бўлиши мумкин) таъсирида мувозанат ҳолатдан силжишидан неча марта катта эканлигини кўрсатар экан.

187-расмдан кўриниб турибдики, мажбурий тебранишлар фаза бўйича мажбур этувчи кучдан орқада қолар экан, бунда кечикиш φ катталиги 0 билан π орасида ётади. β нинг турли қийматларида φ нинг ω га қараб ўзгариши 190-расмдаги графикда тасвирланган. ω_0 частотага $\varphi = \frac{\pi}{2}$ мос келади. Резонанс частотаси хусусий частотадан кичик бўлади [(75.11) га қаранг]. Демак, резонанс пайтида $\varphi < \pi/2$. Сўниш заиф бўлганда $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$ ва резонанс шароитида φ ни $\pi/2$ га тенг деб ҳисоблаш мумкин.



190-расм.

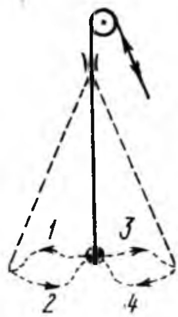
Машиналар ва ҳар хил иншоотларни қуришда резонанс ҳодисасини ҳисобга олишга тўғри келади. Бундай қурилмаларнинг хусусий тебраниш частотаси ташқи таъсирларнинг частотасига мутлақо яқин бўлмаслиги керак. Масалан, кема танасининг ёки самолёт қанотининг силкиниш хусусий частотаси сузиш винти ёки паррак юзага келтириши мумкин бўлган тебранишларнинг частотасидан кескин фарқ қилиши керак. Акс ҳолда силкинишлар (вибрациялар) юзага чиқиб, ҳалокатга олиб келиши мумкин. Устидан аскарлар саф тортиб ўтаётганда кўприклар қулаб кетган ҳоллар тарихда маълум. Бунга кўприкнинг хусусий тебраниш частотаси колоннанинг қадам ташлаш частотасига яқин бўлиб қолганлиги сабаб бўлган.

Шу билан бирга резонанс ҳодисаси кўпинча, айниқса акустикада, радиотехникада ва бошқаларда жуда фойдали роль ўйнайди.

76- §. Параметрик резонанс

Аввалги параграфда қараб чиқилган ҳолда системага қўйилган ташқи мажбур этувчи куч бевосита системани мувозанат ҳолатдан силжишини юзага чиқарган эди. Маълум бўлишича, системани кучли равишда тебранишга имкон берадиган бошқача ташқи таъсир ҳам мавжуд экан. Бундай таъсир шундан иборатки, системанинг бирор параметри тебранишлар билан бир вақтда даврий равишда ўзгаради. Шунинг учун ҳам бу ҳодисанинг ўзи параметрик резонанс дейилади.

Мисол учун энг содда маятник — ипга осилган шарча олайлик. Агар маятникнинг l узунлигини четки ҳолатларда турган пайтда орттириб ва маятник ўрта ҳолатда турган пайтларда эса камайтириб даврий равишда ўзгартириб турсак (191-расм), у ҳолда маятник қаттиқ тебрана бошлайди. Бунда маятникнинг энергияси ипга таъсир кўрсатаётган куч бажарадиган иш ҳисобига ортади. Маятник тебранаётганда ипнинг таранглик кучи ўзгариб туради: у четки ҳолатларда (бу ҳолатларда тезлик нолга айланади) кичик ва ўрта ҳолатда (бунда маятникнинг тезлиги максимал) катта бўлади. Шунинг учун маятникни узайтирган вақтдаги ташқи кучнинг манфий иши маятникни қисқартирган вақтда бажариладиган мусбат ишга қараганда кичикроқ бўлади. Натижада ташқи кучнинг бир давр ичида бажарган иши нолдан катта бўлади.



191-расм.

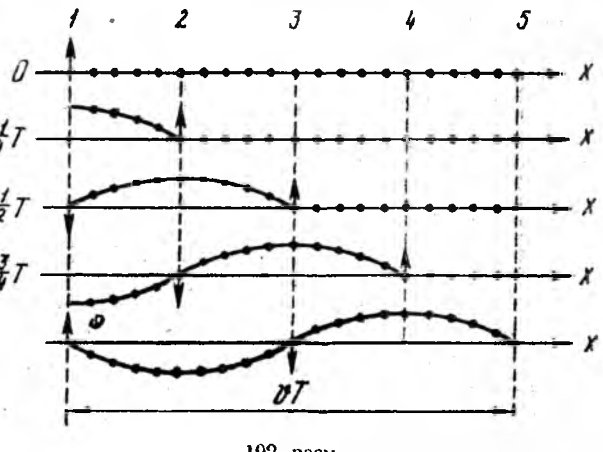
X БОБ

ТЎЛҚИНЛАР

77-§. Тўлқинларнинг эластик муҳитда тарқалиши

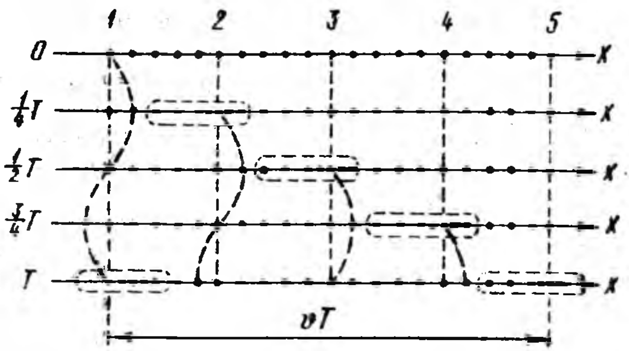
Агар эластик (қаттиқ, суюқ ёки газ ҳолатдаги) муҳитнинг бирор жойидаги зарралар тебрантирилса, у ҳолда зарраларнинг ўзаро таъсирланиши натижасида бу тебранишлар муҳитда бирор v тезлик билан заррадан заррага тарқала бошлайди. Тебранишларнинг фазода тарқалиш процесси т ў л қ и н деб аталади.

Тўлқин тарқалаётган муҳитнинг зарралари тўлқин билан бирга кўчмайди, улар фақат ўз мувозанат ҳолатлари атрофида тебраниб туради холос. Зарраларнинг тебраниши тўлқин тарқалаётган йўналишга нисбатан қандай йўналганлигига қараб тўлқинлар бўйлама ва кўндаланг тўлқинларга ажратилади. Бўйлама тўлқинда муҳитнинг зарралари, тўлқинлар тарқалаётган йўналиши бўйлаб тебранади. Кўндаланг тўлқинда муҳитнинг зарралари тўлқинлар тарқалаётган йўналишга перпендикуляр йўналишда тебранади. Механик кўндаланг тўлқинлар фақат силжиш қаршилигига эга бўлган муҳитда вужудга келиши мумкин. Шунинг учун суюқ ва газ ҳолатдаги муҳитларда фақат бўйлама тўлқинлар вужудга келиши мумкин. Қаттиқ муҳитда ҳам бўйлама, ҳам кўндаланг тўлқинлар вужудга келиши мумкин.



192- расм.

Муҳитда кўндаланг тўлқин тарқалган вақтдаги зарраларнинг ҳаракати 192- расмда кўрсатилган. Бир-биридан $\frac{1}{4}$ vT масофада, яъни чорак тебраниш даври ичида ўтадиган йўлга тенг масофада турган зарралар *1*, *2*, *3* ва ҳоказо сонлар билан белгиланган. Схемада ноль деб қабул қилинган вақт моментида тўлқин ўқ бўйича чапдан ўнгга тарқалиб *1* заррага етади, бунинг натижасида зарра ўз кетидан бошқа зарраларни эргаштириб юқорига қараб силжий бошлайди.

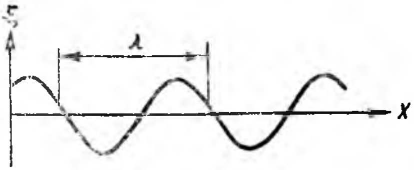


193- расм.

Чорак тебраниш даври ўтгач, *1* зарра юқоридаги четки ҳолатга етади; бир вақтда *2* зарра мувозанат вазиятидан силжий бошлайди. Яна чорак давр ўтиши билан биринчи зарра юқоридан пастга қараб ҳаракатланиб мувозанат ҳолатидан ўтади, иккинчи зарра энг четки юқори ҳолатига эришади, учинчи зарра эса мувозанат ҳолатидан чиқиб юқорига қараб силжий бошлайди. Вақтнинг T га тенг моментида биринчи зарра тўла тебраниши циклини ўтиб бўлади ва дастлабки моментдагидек ҳолатига келади. Тўлқин вақтнинг T моментигача vT йўлни ўтиб *5* заррага етиб келади.

193- расмда муҳитда бўйлама тўлқин тарқалаётганда зарраларнинг ҳаракатланиши кўрсатилган. Кўндаланг тўлқинни таҳлил қилаётган вақтда юргизилган барча мулоҳазаларни бу ҳолга ҳам татбиқ қилиш мумкин, бироқ бунда юқорига ва пастга силжишлар ўрнига ўнгга ва чапга силжиш ҳақида гапириш керак. 193- расмдан кўриниб турибдики, бўйлама тўлқин тарқалаётганда муҳитда зарраларнинг тўлқиннинг тарқалиш йўналиши бўйлаб v тезлик билан кўчувчи навбатма-навбат қуюқланиш ва сийракланишлари (расмда зарраларнинг қуюқланиши пунктр чизиқ билан ўралган) юзага келиб турар экан.

Тўлқин мавжуд экан, муҳитнинг зарралари ўзларининг мувозанат ҳолатлари атрофида доим тебраниб туради, бунда 192- ва 193- расмлардан кўриниб турибдики, турли зарралар фаза бўйича силжиган ҳолда тебранар экан. Бир-биридан vT[1] масофада турган зарралар бир хил фазада тебранади (фазага 2π ни қўшсак, у ҳеч қандай таъсир кўрсатмайди). Бир хил фазада тебранаётган ўзаро яқин зарралар орасидаги масофа λ **тўлқин узунлиги** дейилади (194-расмга қаранг, унда зарранинг мувозанат ҳолатдан ξ силжиши тўлқиннинг тарқалиш йўналиши бўйлаб ўлчанадиган x масофанинг функцияси сифатида ифодаланган). Тўлқин узунлиги, равшанки, тўлқиннинг бир давр ичида тарқалган масофасига тенг:



194- расм.

$$\lambda = vT. \qquad (77.1)$$

Бу муносабатда T ни $1/\nu$ билан [(62.9) га қаранг; ν — тебранишлар частотаси] алмаштирсак, қуйидагини топамиз:

$$\lambda\nu = v. \qquad (77.2)$$

Сўнгги муносабатни қуйидагича мулоҳаза юритиб ҳам топишимиз мумкин. Бир секунд ичида тўлқин манбаи ν марта тебраниб, ҳар бир тебранишида муҳитда битта «дўнглик» битта «чуқурлик» ҳосил қилади. Манба ν-тебраниш бажараётган моментга келиб биринчи «дўнглик» v йўлни ўтишга улгуради. Демак, v узунликда ν дона дўнглик ва ν дона «чуқурлик» ётиши керак.

Аслида фақат x ўқи бўйлаб ётган зарраларгина тебранмасдан (192- ва 193- расмларда тасвирланганидек), бирор ҳажмдаги зарралар тўплами тебранади. Тўлқин процесс тебраниш манбаидан тарқалиб фазонинг янги-янги қисмларини эгаллай боради. Тебранишлар вақтнинг t моментига етиб келган нуқталарнинг геометрик ўрни **тўлқин фронти** деб аталади. Тўлқин фронти фазонинг тўлқин процесси тарқалган қисмидан тебранишлар ҳали юзага келмаган қисмини ажратиб турувчи сиртдан иборат.

Бир хил фазада тебранувчи нуқталарнинг геометрик ўрни **тўлқин сирти** деб аталади. Тўлқин сиртини фазонинг тўлқин процесси бўлаётган исталган нуқтаси орқали ўтказиш мумкин. Демак, вақтнинг ҳар бир моментига битта тўлқин фронти мос келса, тўлқин сиртлари чексиз кўп бўлар экан. Тўлқин сиртлари ҳаракатланмайди (улар бир хил фазада тебранувчи зарраларнинг мувозанат ҳолатлари орқали ўтади). Тўлқин фронти доим кўчиб юради.

Тўлқин сиртлари исталган шаклда бўлиши мумкин. Энг содда ҳолда улар текислик ёки сфера шаклида бўлади. Бу ҳолларда тўлқин мос равишда ясси ёки сферик тўлқин дейилади. Ясси тўлқинда тўлқин сиртлари бир-бирига параллел текисликлардан, сферик тўлқинда эса — концентрик сфералардан иборат бўлади.

---

[1] Бунда тегишли зарраларнинг мувозанат ҳолатлари бир-биридан vT масофада ётиши назарда тутилади.

78- §. Ясси ва сферик тўлқинлар тенгламалари

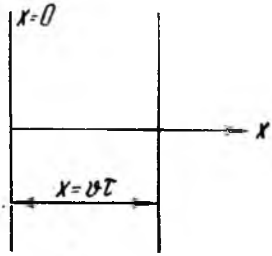
Тебранаётган нуқтанинг силжишини унинг x, y, z координаталари[1] ва t вақтнинг функцияси сифатида ифодаловчи тенглама

$$\xi = \xi\,(x,\ y,\ z;\ t) \tag{78.1}$$

тўлқин тенгламаси деб аталади. (78.1) функция t вақтга нисбатан ҳам, x, y, z координаталарга нисбатан ҳам даврий бўлиши керак.

ξ нинг t га нисбатан даврий эканлиги у, x, y, z координатали нуқтанинг тебранишини тасвирлаганлигидан келиб чиқади. Унинг координаталар бўйича даврийлиги эса, бир биридан λ масофада ётган нуқталар бир хил тебранганлигидан келиб чиқади.

Тебранишлар гармоник характерга эга деб фараз қилиб, ясси тўлқин учун ξ функциянинг кўринишини топайлик. Масалани соддалаштириш учун координата ўқларини x ўқи тўлқиннинг тарқалиш йўналиши билан устма-уст тушадиган қилиб йўналтирамиз. У вақтда тўлқин сиртлари x ўққа перпендикуляр бўлади ва тўлқин сиртнинг барча нуқталари бир хил тебранганлиги учун ξ фақат x билан t га боғлиқ бўлади:



195- расм.

$$\xi = \xi\,(x,\ t).$$

Фараз қилайлик $x = 0$ текисликда (195-расм) ётувчи нуқталарнинг тебраниши қуйидаги кўринишга эга бўлсин:

$$\xi\,(0,\ t) = a\ \cos \omega t.$$

Нуқталарнинг x нинг ихтиёрий қийматига тегишли текисликдаги тебранишларининг кўринишини топайлик. Тўлқин $x = 0$ текислик билан бу текислик орасидаги йўлни ўтиши учун

$$\tau = \frac{x}{v}$$

вақт керак, бу ерда v — тўлқиннинг тарқалиш тезлиги. Демак, x текисликда ётувчи нуқталарнинг тебраниши $x = 0$ текисликда ётган зарраларнинг тебранишидан вақт бўйича τ га орқада қолади, яъни қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\xi\,(x,\ t) = a\ \cos \omega\,(t - \tau) = a\ \cos \omega\,\left(t - \frac{x}{v}\right). \tag{78.2}$$

Шундай қилиб, ясси тўлқин тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\xi = a\ \cos \omega\ \left(t - \frac{x}{v}\right).$$

[1] Бунда нуқта мувозанат ҳолатининг координаталари назарда тутилади.

(78.2) даги ξ катталик x координатали исталган нуқтанинг t вақт моментидаги силжишидан иборат. (78.2) тенгламани чиқараётганимизда тебраниш амплитудаси барча нуқталарда бир хил деб фараз қилган эдик. Ясси тўлқин учун тўлқин энергияси муҳитда ютилмасагина ана шундай ҳолни кузатиш мумкин.

$$\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = \text{const} \tag{78.3}$$

деб фараз қилиб, (78.2) да турган фазанинг бирор қийматини белгилаб оламиз.

(78.3) ифода t вақт билан фазанинг белгиланган қиймати берилган моментда амалга ошадиган x жой орасидаги боғланишни беради. Ундан $\frac{dx}{dt}$ нинг келиб чиқадиган қийматини аниқлаб фазанинг берилган қийматининг кўчиш тезлигини топамиз. (78.3) ифодани дифференциаллаб қуйидагини топамиз:

$$dt - \frac{1}{v}dx = 0,$$

бундан

$$\frac{dx}{dt} = v. \tag{78.4}$$

Шундай қилиб, (78.2) тенгламадаги тўлқиннинг тарқалиш тезлиги v фазанинг кўчиш тезлигидан иборат экан. Шу сабабдан бу тезлик **фаза тезлиги** деб аталади. (78.4) дан (78.2) тўлқиннинг тезлиги мусбат деган хулоса чиқади. Демак, (78.2) тенглама x нинг ортиш томонига қараб тарқалувчи тўлқинни ифодалар экан. Қарама-қарши томонга қараб тарқалувчи тўлқин қуйидаги кўринишга эга:

$$\xi = a\cos\omega\left(t + \frac{x}{v}\right). \tag{78.5}$$

Ҳақиқатан хам, (78.5) тўлқиннинг фазасини ўзгармас сонга тенглаштириб ва у тенгламани дифференциаллаб қуйидагини топамиз:

$$\frac{dx}{dt} = -v,$$

бундан (78.5) тўлқин x нинг камайиши томонига қараб тарқалади, деган хулоса чиқади.

Ясси тўлқин тенгламасига t ва x га нисбатан симметрик кўриниш бериш мумкин. Бунинг учун тўлқин сони деб аталувчи k катталикни киритамиз:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{78.6}$$

(77.1) ва (78.6) дан тўлқин сони k, айланиш (циклик) частотаси ω ва тўлқиннинг фаза тезлиги v орасида қуйидагича муносабат бор деган хулоса чиқади:

$$v = \frac{\omega}{k}. \tag{78.7}$$

(78.2) да v нинг унинг (78.7) қиймати билан алмаштириб ва қавс ичига ω ни киритиб, ясси тўлқин учун қуйидаги кўринишдаги тенгламани топамиз:

$$\xi = a \cos(\omega t - kx). \tag{78.8}$$

x нинг камайиши томонига қараб тарқалувчи тўлқиннинг тенгламаси (78.8) дан фақат kx нинг олдидаги ишора билан фарқ қилади.

Энди сферик тўлқин тенгламасини топамиз. Ҳар қандай реал тўлқин манбаи бирор чекли ўлчамга эга бўлади. Бироқ, агар манбага нисбатан унинг ўлчамларидан анча катта масофаларда содир бўладиган тўлқин процессларни текшириш билан чегаралансак, у ҳолда манбани нуқтавий деб қарашимиз мумкин.

Агар тўлқиннинг барча йўналишлар бўйлаб тарқалиш тезлиги бир хил бўлса, у ҳолда нуқтавий манба ҳосил қилаётган тўлқин сферик бўлади. Фараз қилайлик, манбанинг тебранишлари фазаси ωt га тенг бўлсин. У вақтда r радиусли тўлқин сиртда ётувчи нуқталар $\omega(t - r/v)$ фаза билан тебранади (тўлқин r йўлни ўтиши учун $\tau = r/v$ вақт керак). Бу ҳолда тебранишлар амплитудаси, ҳатто тўлқин энергияси муҳит томонидан ютилмаса ҳам, ўзгаришсиз қолмайди — манбадан узоқлашган сари $1/r$ қонуният билан камая боради (82- § га қаранг). Демак, сферик тўлқиннинг тенгламаси қуйидагича кўринишга эга бўлар экан:

$$\xi = \frac{a}{r} \cos\omega\left(t - \frac{r}{v}\right). \tag{78.9}$$

Бу ерда a — ўзгармас катталик бўлиб, унинг қиймати манбадан бирлик масофадаги амплитудага тенг. a нинг ўлчамлиги амплитуданинг ўлчамлиги билан узунлик ўлчамлигининг (r нинг ўлчамлиги) кўпайтмасига тенг.

Шуни эслатиб ўтамизки, параграфнинг бошида қилинган фаразларга биноан (78.9) тенглама манбанинг ўлчамларидан анча катта бўлган r лар учунгина тўғри. r нолга интилганда амплитуданинг ифодаси чексизликка айланади. Бундай нотўғри натижа чиқишига тенгламани кичик r лар учун қўллаб бўлмаслиги сабаб бўлади.

79- §. Ихтиёрий йўналишда тарқалувчи ясси тўлқин тенгламаси

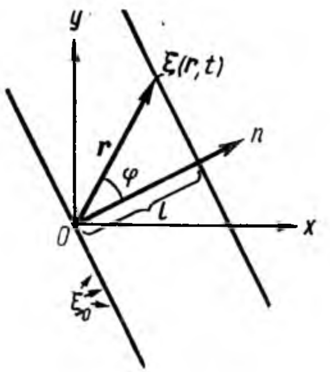
Аввалги параграфда биз x ўқи йўналишида тарқалувчи ясси тўлқин тенгламасини топдик. Энди x, y, z координата ўқлари билан α, β ва γ бурчаклар ҳосил қилувчи йўналишда тарқалувчи ясси тўлқин тенгламасини топайлик. Координата ўқи бошидан ўтувчи текисликдаги (196- расм) тебранишлар қуйидаги кўринишга эга деб фараз қилайлик:

$$\xi = a \cos\omega t. \tag{79.1}$$

Координата бошидан l масофада ётган тўлқин сиртини (текисликни) кўрайлик. Бу текисликдаги тебранишлар (79.1) тебранишлардан $\tau = l/v$ вақтга кечикади:

$$\xi = a\cos\omega\left(t - \frac{l}{v}\right). \qquad (79.2)$$

l ни қаралаётган текисликнинг нуқталарини $\mathbf{r}$ радиус-вектор орқали ифодалайлик. Бунинг учун тўлқин сирти нормалининг $\mathbf{n}$ бирлик векторини киритамиз. $\mathbf{n}$ нинг сиртнинг исталган нуқтаси $\mathbf{r}$ радиус-векторига скаляр кўпайтмаси бирдан-бир қиймат — l га тенг эканлигини осонгина кўриш мумкин:



196- расм.

$$\mathbf{nr} = r\cos\varphi = l. \qquad (79.3)$$

l нинг (79.3) ифодасини (79.2) га қўйиб ва бир вақтда ω ни қавслар ичига киритиб қуйидагини топамиз:

$$\xi = a\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}\mathbf{nr}\right) \qquad (79.4)$$

ω/v нисбатан k тўлқин сонига тенг [(78.7) га қаранг]. Модули $k = 2\pi/\lambda$ тўлқин сонига тенг бўлган ва тўлқин сиртининг нормали бўйлаб йўналган

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n} \qquad (79.5)$$

вектор т ў л қ и н в е к т о р и дейилади. (79.4) га k ни киритиб қуйидагини топамиз:

$$\xi(r,\ t) \approx a\cos(\omega t - \mathbf{kr}) \qquad (79.6)$$

(79.6) функция $\mathbf{r}$[1] радиус-векторли нуқтанинг вақтнинг t моментидаги оғишини беради.

Нуқтанинг радиус-векторидан унинг x, y, z координаталарига ўтиш учун $\mathbf{kr}$ скаляр кўпайтмани векторларнинг координата ўқларига проекциялари орқали ифодалаймиз:

$$\mathbf{kr} = k_x x + k_y y + k_z z.$$

У вақтда ясси тўлқин тенгламаси қуйидаги кўринишга келади:

$$\xi(x,\ y,\ z;\ t) = a\ \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z), \qquad (79.7)$$

бу ерда, $k_x = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\alpha$, $k_y = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\beta$, $k_z = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\gamma$.

(79.7) функция x, y, z координатали нуқтанинг вақтнинг t моментидаги оғишини ифодалайди. Агар $\mathbf{n}$ x ўқи билан устма-уст тушса, у ҳолда $k_x = k$, $k_y = k_z = 0$ ва (79.7) тенглама (78.8) тенгламага айланади.

---

[1] 213- бетдаги изоҳга қаранг.

Ясси тўлқин тенгламаси баъзан

$$\xi = \mathrm{Re}\, ae^{i(\omega t - \mathbf{kr})} \qquad (79.8)$$

кўринишда ёзилади, бунда кўпинча Re тушириб қолдирилиб, бу ифоданинг фақат ҳақиқий қисми олинади деган фараз билан тўғридан-тўғри қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\xi = ae^{i(\omega t - \mathbf{kr})}\,. \qquad (79.9)$$

80- §. Тўлқин тенгламаси

Маълум бўлишича, исталган тўлқиннинг тенгламаси дифференциал тўлқин тенгламаси деб аталувчи дифференциал тенгламанинг ечимидан иборат экан. Тўлқин тенгламасини топиш учун ясси тўлқинни ифодаловчи (79.7) функциянинг координаталар ва вақт бўйича иккинчи хусусий ҳосилаларини таққослаймиз. (79.7) ни ҳар бир ўзгарувчи бўйича икки марта дифференциаллаб, қуйидагини топамиз:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\omega^2 a \cos(\omega t - \mathbf{kr}) = -\omega^2\xi, \qquad (80.1)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} &= -k_x a \cos(\omega t - \mathbf{kr}) = -k^2{}_x\xi, \\ \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} &= -k^2{}_y a \cos(\omega t - \mathbf{kr}) = -k_y^2\xi, \\ \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} &= -k^2{}_z a \cos(\omega t - \mathbf{kr}) = -k^2{}_z\xi. \end{aligned}\right\} \qquad (80.2)$$

(80.2) тенгламаларни ўзаро қўшамиз:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = -(k^2{}_x + k^2{}_y + k^2{}_z)\xi = -k^2\xi. \qquad (80.3)$$

Энди (80.1) ва (80.3) тенгламаларни бир-бирига таққосласак, қуйидагини топамиз:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\,\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$$

Ниҳоят, (78.7) га биноан $\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{v^2}$ эканлигини ҳисобга олиб узил-кесил қуйидагини топамиз:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.\,[1] \qquad (80.4)$$

---

[1] Бу тенгламанинг чап томонини Лаплас оператори Δ ёрдамида ихчамлаштириш мумкин. Лаплас оператори билан x, y, z ўзгарувчиларнинг функциясидан улар бўйича олинган иккинчи даражали хусусий ҳосилалар йиғиндисини берувчи амаллар тўплами символи равишда белгиланади:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Лаплас операторидан фойдаланиб (80.4) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\Delta\xi = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$$

(80.4) тенглама биз қидираётган тўлқин тенгламасининг ўзгинасидир. Тўлқин тенгламасини фақат (79.7) функциягина эмас, ҳатто қуйидаги кўринишдаги исталган функция ҳам қаноатлантиришига осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкин:

$$f(x,y,z;t) = f(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z). \qquad (80.5)$$

Ҳақиқатан ҳам, (80.5) нинг ўнг томонидаги қавслар ичидаги ифодани ζ билан белгиласак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{d f}{d \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial t} = f'\omega, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \omega\frac{df'}{d\zeta}\frac{\partial \zeta}{d t} = f''\omega^2. \qquad (80.6)$$

Худди шунга ўхшаш

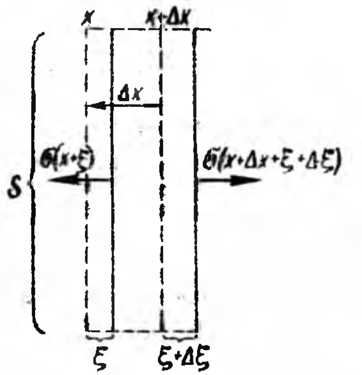
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = k_x^2 f''; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k_y^2 f''; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = k_z^2 f''. \qquad (80.7)$$

(80.6) ва (80.7) ифодаларни (80.4) тенгламага қўйиш йўли билан $v = \omega/k$ деб (80.5) функция тўлқин тенгламасини қаноатлантиришига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

(80.4) кўринишдаги тенгламани қаноатлантирувчи ҳар қандай функция бирор тўлқинни ифодалайди, бунда $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ олдидаги коэффициентнинг тескари қийматига тенг бўлган катталикдан олинган квадрат илдиз бу тўлқиннинг фаза тезлигини беради. (80.4) тенгламанинг ечимига қўйилган, қўшимча шартларга қараб, у ёки бу тўлқин ҳосил қилиниши мумкин.

81- §. Эластик тўлқинларнинг тарқалиш тезлиги

Фараз қилайлик, x ўқи йўналиши бўйлаб бўйлама ясси тўлқин тарқалаётган бўлсин. Муҳитда баландлиги Δx га ва асосининг юзи S га тенг бўлган цилиндрик ҳажм ажратамиз (197- расм). x координаталари ҳар хил бўлган ξ зарраларнинг силжишлари вақтнинг ҳар бир моментида ҳар хил бўлар экан (194- расмга қаранг, унда ξ x нинг функцияси сифатида тасвирланган). Агар цилиндрнинг координатаси x га тенг асоси вақтнинг бирор моментида ξ га силжиган бўлса, у вақтда $x + \Delta x$ координатали асос $\xi + \Delta\xi$ га силжийди. Демак, қаралаётган ҳажм деформацияланади—у $\Delta\xi$ га узаяди ($\Delta\xi$ — алгебраик катталик; $\Delta\xi < 0$ бўлганда цилиндр сиқилади) ёки $\frac{\Delta\xi}{\Delta x}$ нисбий узайишга эга бўлади $\frac{\Delta\xi}{\Delta x}$ катталик цилиндрнинг ўртача дефор-



197- расм.

мацнясини беради. ξ функция x га қараб чизиқли қонун билан ўзгармаганлиги сабабли цилиндрнинг турли кесимларидаги ҳақиқий деформация бир хил бўлмайди. x кесимдаги ε деформацияни топиш учун Δx ни нолга интилтириш керак. Демак,

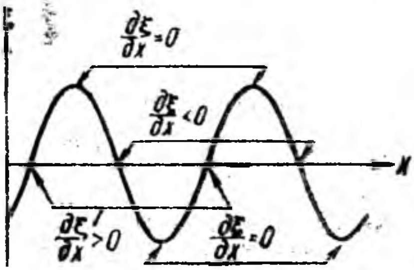
$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{81.1}$$

(ξ функция x дан ташқари t га ҳам боғлиқ бўлганлиги учун бу ерда хусусий ҳосила ёзилган).

Чўзилиш деформациясининг мавжудлиги кичик деформацияларда деформация катталигига пропорционал бўлган нормал кучланиш σ борлигидан далолат беради. (45.5) бииоан

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\partial \xi}{\partial x}, \tag{81.2}$$

бу ерда E — муҳитнинг Юнг модули.



198-расм.

Шуни қайд қилиб ўтамизки, нисбий деформация $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ ва демак, σ кучланиш ҳам вақтнинг белгиланган моментида x га боғлиқ (198-расм). Зарраларнинг мувозанат ҳолатдан огиши максимал бўлган жойда деформация билан кучланиш нолга тенг бўлади. Зарралар мувозанат ҳолатидан ўтаётган жойларда деформация билан кучланиш максимал қийматга эришади, шу билан бирга мусбат ва манфий деформациялар (яъни чўзилаш ва сиқилишлар) навбат билан алмашиниб туради. Шунга мос равишда, 77-§ да қайд қилинганидек, бўйлама тўлқин муҳитнинг навбат билан алмашиниб келувчи сийракланиш ҳамда куюқланишларидан иборат бўлади.

Яна 197- расмда тасвирланган цилиндрик ҳажмга мурожаат қилиб унинг учун ҳаракат тенгламасини ёзайлик. Δx ни жуда кичик деб олиб цилиндрнинг тезланиши $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ га тенг деб қабул қилишимиз мумкин. Цилиндрнинг массаси $\rho S\Delta x$ га тенг, бу ерда ρ — деформацияланмаган муҳитнинг зичлиги. Цилиндрга таъсир этувчи куч цилиндр асосининг S юзининг $(x + \Delta x + \xi + \Delta\xi)$ ва $(x + \xi)$ кесимлардаги нормал кучланишларнинг айирмасига кўпайтмасига тенг бўлади:

$$f = SE\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x+\Delta x+\xi+\Delta\xi} - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x+\xi}\right]. \tag{81.3}$$

$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x+\delta}$ катталикни кичик δ лар учун катта аниқлик билан қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x+\delta} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\right]_x \delta = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\delta, \tag{81.4}$$

бу ерда $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$ деб ξ нинг x бўйича x кесимдаги иккинчи ҳосиласи тушунилади.

Δx, ξ ва $\Delta\xi$ катталиклар кичик бўлганлиги учун (81.3) ифодага нисбатан (81.4) ўзгартиришларни қўллаймиз:

$$f = SE\left\{\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_x + \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}(\Delta x + \xi + \Delta\xi)\right] - \left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_x + \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\xi\right]\right\} = SE\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}(\Delta x + \Delta\xi) \approx SE\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\Delta x$$

(эластик деформация вақтида нисбий узайиш $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ бирдан анча кичик бўлади. Шунинг учун $\Delta\xi \ll \Delta x$, ана шуни эътиборга олиб $(\Delta x + \Delta\xi)$ йиғиндида $\Delta\xi$ ни тушириб қолдирса ҳам бўлади).

Ньютоннинг иккинчи қонуни тенгламасига масса, тезланиш ва кучни қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$\rho S\Delta x\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = SE\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\Delta x.$$

Ниҳоят, $S\Delta x$ га қисқартириб, қуйидаги тенгламага келамиз:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \tag{81.5}$$

бу тенглама ξ функция y ва z га боғлиқ бўлмаган хусусий ҳол учун ёзилган (80.4) тўлқин тенгламасининг ўзгинасидир.

(81.5) ва (80.4) ларни таққослаб, қуйидагини топамиз:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{81.6}$$

Шундай қилиб, бўйлама эластик тўлқинларнинг фаза тезлиги Юнг модулининг муҳит зичлигига нисбатидан олинган квадрат илдизга тенг экан.

Кўндаланг тўлқинлар учун ҳам ана шундай ҳисоблар тезликнинг қуйидаги ифодасини беради:

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \tag{81.7}$$

бу ерда G—силжиш модули.

82- §. Эластик тўлқин энергияси

Ясси бўйлама тўлқин тарқалаётган муҳитда шу қадар кичик элементар ΔV ҳажм ажратиб оламизки, бу ҳажмнинг барча нуқталарида деформациялар билан ҳаракат тезликларини бир хил ва мос равишда $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ ва $\frac{\partial\xi}{\partial t}$ ларга тенг деб олиш мумкин бўлсин.

(45.15) формулага биноан, биз ажратиб олган ҳажм қуйидагича эластик деформация потенциал энергиясига эга бўлади:

$$\Delta E_p = \frac{E\varepsilon^2}{2}\Delta V = \frac{E}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 \Delta V,$$

бу ерда $\varepsilon = \frac{\partial\xi}{\partial x}$ — нисбий узайиш, E эса Юнг модули.

(81.6) га биноан E Юнг модулини ρv^2 (ρ — муҳитнинг зичлиги, v — тўлқиннинг фаза тезлиги) билан ифодалаш мумкин. У вақтда ΔV ҳажмнинг потенциал энергияси қуйидагича ифодаланади:

$$\Delta E_p = \frac{\rho v^2}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 \Delta V, \qquad (82.1)$$

Қаралаётган ҳажм шунингдек кинетик энергияга ҳам эга бўлади:

$$\Delta E_k = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 \Delta V, \qquad (82.2)$$

$\rho\Delta V$ — ҳажмнинг массаси, $\frac{\partial\xi}{\partial t}$ — унинг тезлиги).

(82.1) ва (82.2) ифодаларнинг йиғиндиси тўла энергияни беради:

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right]\Delta V.$$

ΔE энергияни у мужассамлашган ΔV ҳажмга тақсимласак, энергия зичлигини топамиз:

$$u = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right]. \qquad (82.3)$$

Ясси тўлқиннинг (78.2) тенгламасини t ва x бўйича дифференциаллсак:

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = -\omega\, a \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\omega}{v}\, a \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Бу ифодаларни (82.3) формулага қўйсак, қуйидагини топамиз:

$$u = \rho\, a^2\, \omega^2 \sin^2\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = \rho\, a^2\, \omega^2 \sin^2(\omega t - kx). \qquad (82.4)$$

Кўндаланг тўлқиннинг энергия зичлиги учун ҳам ана шундай ифода келиб чиқади.

(82.4) дан кўриниб турибдики, вақтнинг ҳар бир берилган моментидаги энергия зичлиги фазонинг турли нуқталарида турлича экан. Бир нуқтанинг ўзида энергия зичлиги вақт бўйича синус квадрати қонуни билан ўзгаради. Синус квадратининг ўртача қиймати яримга тенг бўлганлиги учун энергия зичлигининг муҳитнинг ҳар бир нуқтасидаги ўртача (вақт бўйича) қиймати қуйидагига тенг бўлади:

$$\bar{u} = \frac{1}{2}\rho a^2\omega^2. \qquad (82.5)$$

Энергия зичлиги (82.4) ва унинг ўртача қиймати (82.5) муҳитнинг ρ зичлиги, ω частотанинг квадратига ва тўлқиннинг *a* амплитудаси квадратига пропорционал экан. Ана шундай муносабат фақат ясси тўлқин учунгина эмас, балки бошқа турдаги тўлқинлар учун ҳам ўринли.

Шундай қилиб, тўлқин юзага келадиган муҳит қўшимча энергия запасига эга экан. Бу энергияни тебранишлар манбаидан муҳитнинг турли нуқталарига тўлқиннинг ўзи ташиб келади, демак, тўлқин ўзи билан энергия олиб юрар экан. Тўлқин бирор сирт орқали вақт бирлиги ичида ташиб ўтган энергия миқдори сирт орқали ўтувчи **энергия оқими** Ф дейилади. Энергия оқими скаляр катталик бўлиб, унинг ўлчамлиги энергия ўлчамлигининг вақтнинг ўлчамлигига нисбатига тенг, яъни қувватнинг ўлчамлигига ўхшайди. Ана шунга мос равишда Ф ни *эрг/сек*, *ватт* ва ҳоказоларда ўлчаш мумкин.

Энергия оқими муҳитнинг турли нуқталарида турли интенсивликка эга бўлиши мумкин. Фазонинг турли нуқталарида энергиянинг оқиш процессини характерлаш учун **энергия оқимининг зичлиги** деган катталик киритилади. Бу катталикнинг қиймати берилган нуқтада энергия кўчаётган йўналишга перпендикуляр жойлашган бирлик юз орқали ўтувчи энергия оқимига тенг. Энергия оқими зичлиги векторининг йўналиши энергия кўчаётган йўналиш билан устма-уст тушади.

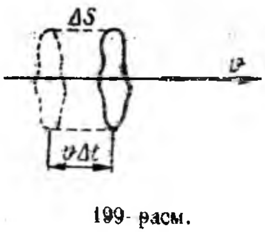
Тўлқин тарқалаётган йўналишга перпендикуляр $\Delta S_\perp$ юз орқали Δt вақт ичида ΔE энергия оқиб ўтади, деб фараз қилайлик. У ҳолда энергия оқимининг зичлиги j таърифга биноан қуйидагига тенг бўлади:

$$j = \frac{\Delta E}{\Delta S_\perp \Delta t}. \qquad (82.6)$$

$\frac{\Delta E}{\Delta t}$ катталик $\Delta S_\perp$ сирт орқали ўтувчи энергия оқими $\Delta\Phi$ эканлигини ҳисобга олиб, қуйидаги тенгликни ёзиш мумкин:

$$j = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S_\perp}. \qquad (82.7)$$

$\Delta S_\perp$ юз орқали Δt вақт ичида асоси $\Delta S_\perp$ ва баландлиги $v\Delta t$ (v — — тўлқиннинг фаза тезлиги) бўлган цилиндр ҳажми ичидаги энергия оқиб ўтади (199- расм). Агар цилиндрнинг барча нуқталарида энергия зичлигини бир хил деб ҳисоблаш мумкин бўлиши учун унинг ўлчамлари етарли даражада кичик ($\Delta S_\perp$ ва Δt ларнинг кичиклиги ҳисобига) бўлса, у вақтда ΔE ни энергия зичлиги u нинг цилиндрнинг ҳажмига (у $\Delta S_\perp v\Delta t$ га тенг) кўпайтмаси сифатида топиш мумкин:



199- расм.

$$\Delta E = u\Delta S_{\perp} v\Delta t.$$

Бу ΔE нинг ифодасини (82.6) формулага қўйсак, қуйидагини топамиз:

$$j = uv. \qquad (82.8)$$

v фаза тезлигини йўналиши тўлқин тарқалиши йўналиши билан (энергиянинг кўчиш йўналиши билан ҳам) устма-уст тушувчи вектор деб қараб, қуйидагини ёзишимиз мумкин:

$$\mathbf{j} = u\mathbf{v}. \qquad (82.9)$$

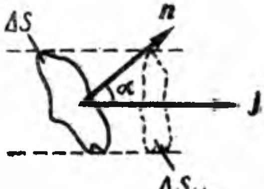
Энергия оқими зичлиги векторини биринчи марта буюк рус физиги Н. А. Умов киритган бўлиб, уни Умов вектори деб аталади. (82.9) вектор u энергия зичлиги каби фазонинг турли нуқталарида турлича бўлиб, фазонинг берилган нуқтасида эса синус квадрати қонуни билан ўзгаради. Унинг ўртача қиймати (82.5) ни ҳисобга олганда қуйидагига тенг:

$$\mathbf{j}_{\text{ўрт}} = \bar{u}\mathbf{v} = \frac{1}{2}\rho a^2 \omega^2 \mathbf{v}. \qquad (82.10)$$

Агар фазонинг бирор нуқтасида $\mathbf{j}$ нинг қиймати маълум бўлса, шу нуқтага исталганча ориентирлаб жойлаштирилган кичик ΔS юз орқали ўтувчи энергия оқимини топиш мумкин (200- расм). Бунинг учун ΔS нинг $\mathbf{j}$ векторга перпендикуляр текисликка проекциясини туширамиз. Проекциянинг катталиги $\Delta S_{\perp}$ равшанки, қуйидагича бўлади:

$$\Delta S_{\perp} = \Delta S \cos \alpha, \qquad (82.11)$$

бу ерда α — ΔS га ўтказилган нормал $\mathbf{n}$ билан $\mathbf{j}$ вектор орасидаги бурчак.



200- расм.

ΔS кичик бўлганлиги учун ΔS орқали оқаётган оқим $\Delta S_{\perp}$ орқали оқаётган оқимга тенг деб олиш мумкин. $\Delta S_{\perp}$ орқали оқаётган оқим эса (82.7) га биноан қуйидагига тенг:

$$\Delta \Phi = j\Delta S_{\perp}.$$

$\Delta S_{\perp}$ ни унинг (82.11) қиймати билан алмаштирсак,

$$\Delta \Phi = j\Delta S \cos\alpha.$$

Аммо $j \cos\alpha$ катталик $\mathbf{j}$ векторининг ΔS юзга ўтказилган $\mathbf{n}$ нормал йўналиши бўйлаб ташкил этувчисининг ўзгинасидир:

$$j_n = j \cos\alpha.$$

Демак,

$$\Delta \Phi = j_n \Delta S \qquad (82.12)$$

деб ёзиш мумкин.

Шундай қилиб, кичик ΔS юз орқали ўтувчи энергия оқими унинг зичлиги векторининг нормал ташкил этувчисининг ΔS га кўпайтмасига тенг экан.

Ихтиёрий S сиртнинг исталган нуқтасидаги $\mathbf{j}$ ни билган ҳолда шу сирт орқали ўтувчи Φ энергия оқимини ҳисоблаб чиқариш мумкин. Шу мақсадда сиртни шундай кичик ΔS участкаларга тақсимлаймизки, уларнинг ҳар бирини ясси деб ҳисоблаш, $\mathbf{j}$ векторни эса ҳар бир ΔS чегарасида катталик жиҳатдан ҳам, йўналиш жиҳатидан ҳам ўзгармас деб ҳисоблаш мумкин бўлсин. У вақтда ҳар бир ΔS участка орқали ўтувчи элементар $\Delta\Phi$ оқимни (82.12) формулага асосан ҳисоблаб чиқиш мумкин. Бунда j_n нинг ҳар бир ΔS учун ўз қийматини олиш керак; j_n нинг қиймати эса $\mathbf{j}$ векторнинг ΔS турган жойдаги қийматига ва бу юзнинг $\mathbf{j}$ га нисбатан ориентациясига боғлиқ бўлади.

S сирт орқали ўтувчи тўлиқ оқим элементар оқимларнинг йиғиндисига тенг бўлади:

$$\Phi = \sum \Delta\varphi = \sum j_n \Delta S, \tag{82.13}$$

Бу биз топган ифода тақрибийдир. Φ нинг аниқ қийматини топиш учун барча ΔS ларни нолга интилтириш керак. Бунда (82.13) йиғинди интегралга айланади

$$\Phi = \int_S j_n \, dS. \tag{82.14}$$

бу интеграл бутун S юз бўйлаб олиниши керак. (82.14) формула сиртнинг турли нуқталарида энергия оқими зичлиги билан шу сирт орқали ўтувчи энергия оқими орасидаги боғланишни беради.

Сферик тўлқиннинг тўлқин сирти орқали ўтувчи энергия оқимини ҳисоблайлик. Энергия зичлиги оқимининг нормал ташкил этувчиси тўлқин сиртининг барча нуқталарида бир хил ва қуйидагидек ўртача қийматга эга бўлади:

$$\overline{j_n} = \frac{1}{2}\rho a_r^2 \omega^2 v^2$$

(a_r — тўлқиннинг манбадан r масофадаги амплитудаси).

(82.14) да j_n ўзгармас катталикни интеграл ишорасидан ташқарига чиқарсак, қуйидаги кўринишга келади:

$$\Phi_{\text{ўрт}} = \overline{j_n} S = \frac{1}{2} \rho a_r^2 \omega^2 v \, 4\pi r^2.$$

Агар тўлқин энергияси муҳитда ютилмаса, истилган радиусли сфера орқали ўтувчи ўртача оқим бир хил бўлиши керак.

$$\Phi_{\text{ўрт}} = 2\pi\rho\omega^2 v a_r^2 r^2 = \text{const}.$$

Бундан сферик тўлқиннинг a_r амплитудаси тўлқин манбаигача бўлган масофа r га тескари пропорционал экан [(78.9) га қаранг].

78- § да биз тўлқин энергияси муҳит томонидан ютилмаган шароитдагина ясси тўлқиннинг амплитудаси ўзгармас бўлишини қайд қилиб ўтган эдик. Акс ҳолда манбадан узоқлашган сари тўлқиннинг интенсивлиги аста-секин камая боради—тўлқиннинг сўниши кузатилади. Тажриба бундай сўниш экспоненциал қонун билан содир бўлишини кўрсатади. Бу тўлқиннинг амплитудаси x масофага қараб $a = a_0 e^{-\gamma x}$ қонун билан камая боришидан далолат беради. Демак, ясси тўлқиннинг тенгламаси қуйидагича кўринишга эга экан:

$$\xi = a_0 e^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx). \tag{82.15}$$

γ катталик тўлқиннинг сўниш коэффициенти (ёки тўлқиннинг ютилиш[1] коэффициенти) дейилади. Унинг ўлчамлиги узунлик ўлчамлигига тескаридир. Шуни тушуниб олиш осонки, γ га тескари катталик тўлқиннинг амплитудаси қандай масофада e марта камайишини кўрсатади (тебранишларнинг сўниш коэффициентини β билан таққосланг. 73- §).

(82.10) га мос равишда (82.15) тўлқиннинг интенсивлиги x масофага қараб қуйидагича қонун билан камая боради:

$$j_{ўрт} = j_{ўрт\ o}\, e^{-2\gamma x}. \tag{82.16}$$

Ютувчи муҳитда тарқалаётган сферик тўлқиннинг тенгламаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\xi = \frac{ae^{-\gamma r}}{r} \cos\omega\left(t - \frac{r}{v}\right). \tag{82.17}$$

83- §. Тўлқинларнинг интерференцияси ва дифракцияси

Агар муҳитда бир вақтда бир нечта тўлқин тарқалаётган бўлса, у ҳолда муҳит зарраларининг тебраниши зарраларнинг ҳар бир тўлқин алоҳида-алоҳида тарқалган вақтдаги тебранишларининг геометрик йиғиндисидан иборат бўлар экан. Демак, тўлқинлар бир-бирини бузмасдан тўғридан-тўғри қўшилар экан. Тажрибадан келиб чиқадиган бу фикр тўлқинларнинг суперпозиция (қўшилиш) принципи деб аталади.

Агар муҳитнинг ҳар бир нуқ~~таси~~даги айрим-айрим тўлқинлар юзага келтирган тебранишларнинг фазалари фарқи ўзгармас бўлса, тўлқинлар когерент дейилади. Равшанки, фақат бир хил частотали тўлқинларгина когерент бўлиши мумкин.

Когерент тўлқинлар қўшилган вақтда интерференция ҳодисаси юз беради. Бу ҳодиса шундан иборатки, тебранишлар баъзи нуқталарда бир-бирини кучайтирса, бошқа нуқталарда заифлаштиради.

[1] Тўлқин амплитудасининг эмас, балки унинг интенсивлигининг камайишини характерлайдиган катталикни ютилиш коэффициенти деб атаса тўғрироқ бўлар эди. Бу катталик 2 γ га тенг.

Фазалар фарқи ўзгармас бўлган O_1 ва O_2 нуқтавий манбалар (бундай манбалар ўзлари ҳосил қилган тўлқинларга ўхшаб когерент манбалар деб юритилади) тарқатаётган иккита тўлқинни текширайлик. Тўлқинларнинг ҳар бири ҳосил қилаётган тебранишларнинг иккаласи ҳам бир хил йўналишига эга (бунинг учун тўлқин манбалари орасидаги масофа манбалардан берилган нуқтагача бўлган масофадан анча кичик бўлиши ёки тебранишларнинг йўналаши манба билан берилган нуқта ётган текисликка перпендикуляр бўлиши керак) деган шарт билан муҳитнинг бирор нуқтасидаги натижавий тебранишни топайлик.

O_1 ва O_2 манбаларнинг тебраниш фазалари мос равишда $(\omega t+\alpha_1)$ ва $(\omega t+\alpha_2)$ ларга тенг бўлсин. У вақтда берилган нуқтадаги тебраниш қуйидаги тебранишларнинг йиғиндисига тенг бўлади:

$$\xi_1 = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1 - kr_1),$$

$$\xi_2 = a_2 \cos(\omega t + \alpha_2 - kr_2),$$

бу ерда a_1 ва a_2—тўлқинларнинг текширилаётган нуқтадаги амплитудалари, k—тўлқин сони, r_1 ва r_2—тўлқин манбаларидан берилган нуқтагача бўлган масофа.

Қуйидаги шарт билан аниқланадиган тебранишлар бир-бирини кучайтиради

$$k(r_1 - r_2) - (\alpha_1 - \alpha_2) = \pm 2\pi n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \quad (83.1),$$

ва натижавий ҳаракат ω частотали ва $(a_1 + a_2)$ амплитудали гармоник тебранишдан иборат бўлмайди.

Қуйидаги

$$k(r_1 - r_2) - (\alpha_1 - \alpha_2) = \pm 2\pi \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \quad (83.2)$$

шартни қаноатлантирадиган нуқталарда эса тебранишлар бир-бирини заифлаштиради ва натижавий ҳаракат $|a_1 - a_2|$ амплитудали гармоник тебранишдан иборат бўлади. $a_1 = a_2$ бўлган хусусий ҳолда бу нуқталарда тебраниш бўлмайди.

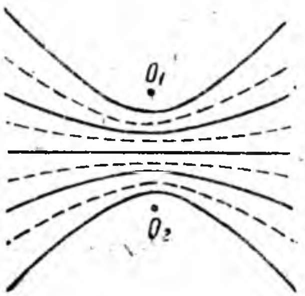
(83.1) ва (83.2) шартлардан

$$r_1 - r_2 = \text{const} \qquad (83.3)$$

деган хулоса чиқади.

Аналитик геометриядан (83.3) тенглама фокуслари O_1 ва O_2 нуқталарда ётган гиперболанинг тенгламасидан иборат эканлиги маълум. Шундай қилиб, тебранишлар бир-бирини кучайтирадиган нуқталарнинг геометрик ўрни гиперболалар оиласидан иборат экан (201- расм, бу расм $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ ҳол учун чизилган. Туташ чизиқлар билан тебранишлар бир-бирини кучайтирадиган жойлар, пунктир чизиқлар билан эса — тебранишлар бир-бирини заифлаштирадиган жойлар кўрсатилган).

Тўлқинлар ўз йўлида тўсиққа учраса уни айланиб ўтади. Бу ҳодиса **дифракция** дейилади. Дифракциянинг юзага келишини Гюйгенс принципига асосланиб тушунтириш мумкин. Бу принцип тўлқин фронтининг вақтнинг t моментида маълум бўлган вазиятига асосланиб $t + \Delta t$ вақт моментидаги тўлқин фронтини ясаш усулини беради. Гюйгенс принципига биноан тўлқин ҳаракат етиб борган ҳар

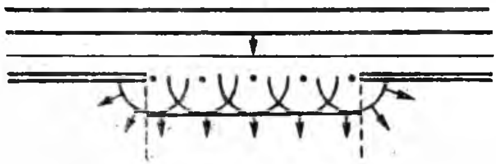


201- расм.

202- расм.

бир нуқта иккиламчи тўлқинлар учун марказ бўлиб хизмат қилади; бу тўлқинларни ўраб олган эгри чизиқ кейинги моментдаги тўлқин фронтининг вазиятини беради. (202- расм, муҳит бир жинсли эмас — тўлқин тезлиги расмнинг пастки қисмида юқориги қисмидагидан каттароқ деб фараз қилинади.)

Тешикли ясси тўсиққа унга параллел бўлган тўлқин фронти тушаётган бўлсин (203- расм). Гюйгенс принципига биноан тўлқин фронтининг тешикка рўпара келувчи қисмининг ҳар бир нуқтаси бир жинсли ва изотропик муҳитда сферик шаклга эга бўлган иккиламчи тўлқинлар учун марказ бўлиб хизмат қилади. Иккиламчи тўлқинларни ўраб олувчи эгри чизиқ чизсак, биз тўлқин тўсиқнинг қирғоғидан айланиб ўтиб, тешикнинг орқасида геометрик соя соҳасига (расмда бу соҳанинг чегаралари пунктир чизиқ билан кўрсатилган) кириб борганлигини кўрамиз.



203- расм.

84- §. Турғун тўлқинлар

Иккита бир хил амплитудали бир-бирига қараб йўналган ясси тўлқинлар ўзаро қўшилганда жуда муҳим интерференция ҳодисаси кузатилади. Натижада юзага келувчи тебранма процесс **т у р ғ у н т ў л қ и н** дейилади. Амалда турғун тўлқинлар улар тўсиқлардан қайтган вақтларда юзага келади. Тўсиққа келиб тушаётган тўлқин билан унга қарши келаётган қайтган тўлқин бир-бирига қўшилиб турғун тўлқин ҳосил қилади.

Қарама-қарши йўналишларда тарқалаётган иккита ясси тўлқиннинг тенгламаларини ёзайлик:

$$\xi_1 = a \cos(\omega t - kx),$$

$$\xi_2 = a \cos(\omega t + kx).$$

Бу икки тенгламани ўзаро қўшиб ва натижани косинуслар йиғиндиси формуласига асосан ўзгартириб қуйидагини топамиз:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2a \cos kx \cos \omega t.$$

Тўлқин сони k ни унинг $2\,\pi/\lambda$ қиймати билан алмаштириб ξ нинг ифодасига қуйидагича кўриниш бериш мумкин:

$$\xi = \left(2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \cos \omega t. \qquad (84.1)$$

(84.1) тенглама турғун тўлқин тенгламасидир. Ундан кўриниб турибдики, турғун тўлқиннинг ҳар бир нуқтасида учрашаётган тўлқинларнинг частотасига тенг частота билан тебранишлар содир бўлади ва бу тебранишларнинг амплитудаси x га боғлиқ экан:

$$\text{амплитуда} = \left|2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}\right|.$$

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm n\pi \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (84.2)$$

тенгликни қаноатлантирувчи нуқталарда тебранишлар частотаси максимал $2a$ қийматга эришади. Бу нуқталар турғун тўлқиннинг **д ў н г л и к л а р и** деб аталади. (84.2) шартдан дўнгликларнинг координаталарининг қийматлари келиб чиқади:

$$x_{\text{дўнг}} = \pm n \frac{\lambda}{2}, \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (84.3)$$

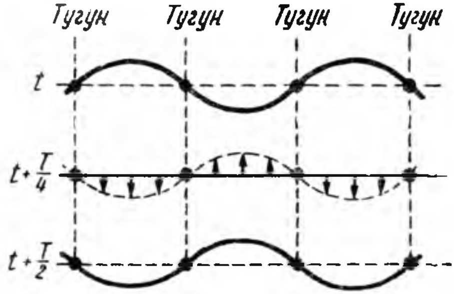
$$2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

тенгликни қаноатлантирувчи нуқталарда тебранишлар амплитудаси нолга айланади. Бу нуқталар турғун тўлқинларнинг **т у г у н л а р и** дейилади. Муҳитнинг тебранишлар тугунида жойлашган нуқталари тебранмайди. Тугунларнинг координаталари қуйидаги қийматларга эга:

$$x_{\text{туг}} = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2\ \ldots). \qquad (84.4)$$

(84.3) ва (84.4) формулалардан қўшни дўнгликлар орасидаги масофа худди қўшни тугунлар орасидаги масофа каби $\lambda/2$ га тенг деган хулоса чиқади. Дўнгликлар билан тугунлар бир-бирига нисбатан чорак тўлқин узунлигига силжигандир.

Яна (84.1) тенгламага мурожаат қилайлик. $\left(2a\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$ кўпайтма ноль қийматидан ўтаётганда ўз ишорасини ўзгартиради. Шунга мос равишда тугуннинг турли томонларидаги тебранишлар-



204- расм.

нинг фазаси π га фарқ қилади, яъни тугуннинг турли томонларида ётган нуқталар қарама-қарши фазаларда тебранади. Иккита қўшни тугун орасидаги барча нуқталар синфаз равишда (яъни бир хил фазада) тебранади. 204- расмда нуқталарнинг мувозанат ҳолатидан оғишининг «оний фотосуратлари» тасвирланган. Биринчи «фотосурат» оғишлар энг катта абсолют қийматларига эришган пайтга тегишли. Кейинги «фотосуратлар» чорак даврга тенг вақт оралиқларида олинган. Стрелкалар билан зарраларнинг тезликлари кўрсатилган.

(84.1) тенгламани x ва t бўйича дифференциалласак, биз муҳитнинг деформацияси билан зарралар тезлигининг ўзгариш қонунини топамиз:

$$\varepsilon = \frac{\partial\xi}{\partial x} = -2\,\frac{2\pi}{\lambda}\,a\sin 2\pi\frac{x}{\lambda}\cos\omega t, \tag{84.5}$$

$$\dot{\xi} = \frac{\partial\xi}{\partial t} = -\,2\omega a\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\sin\omega t. \tag{84.6}$$

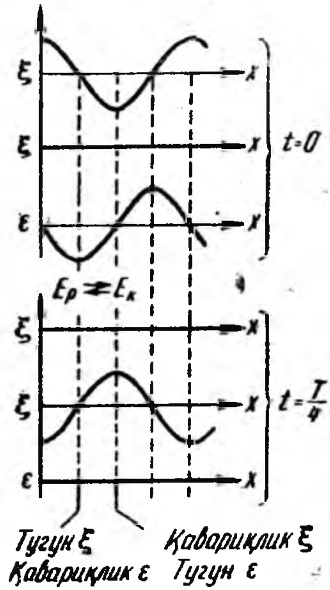
(84.5) тенглама деформация турғун тўлқинини, (84.6) эса — тезлик турғун тўлқинини ифодалайди. Бу тенгламаларнинг кўринишидан тезликнинг тугун ва дўнгликлари силжишнинг тугун ва дўнгликлари билан устма-уст тушади, деган хулосага келамиз: деформациянинг тугун ва дўнгликлари эса мос равишда тезлик ва силжишнинг дўнгликлари билан устма-уст тушади (205- расм). ξ билан ε максимал қийматга эришганда $\dot{\xi}$ нолга айланади ва аксинча. Шунга мос равишда бир давр ичида турғун тўлқиннинг энергияси икки марта гоҳ батамом потенциал энергияга (у асосан тўлқиннинг тугунлари ёнида, яъни деформациянинг дўнгликлари жойлашган ерда мужассамлашади), гоҳ батамом кинетик энергияга (у асосан тўлқиннинг дўнглиги ёнида, яъни тезликнинг дўнглиги жойлашган ерда мужассамлашади) айланади. Натижада энергия ҳар бир тугундан унга қўшни дўнгликларга ва дўнгликлардан қўшни тугунларга кўчиб туради. Тўлқиннинг исталган кесимида ўртача энергия оқими нолга тенг.

85- §. Торнинг тебраниши

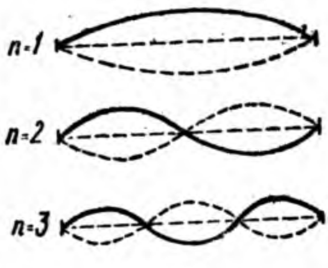
Икки учи маҳкамланган таранг торда кўндаланг тўлқинлар уйғотилса, турғун тўлқинлар юзага келади. Бунда тор маҳкамланган учларида тугунлар жойлашиши керак. Шунинг учун торда фақат ярим тўлқин узунлиги торнинг узунлигига бутун сон марта нисбатда бўлган тўлқинларгина сезиларли интенсивлик билан юзага келади (206- расм). Бундан қуйидаги шарт келиб чиқади:

$$l = n\frac{\lambda}{2} \text{ ёки } \lambda_n = \frac{2l}{n}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (85.1)$$



205- расм.



206- расм.

бу ерда l — торнинг узунлиги. (85.1) тўлқин узунликларига қуйидаги частоталар мос келади:

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l}n, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(v — тўлқиннинг фаза тезлиги, у торнинг таранглик кучига ва тор узунлик бирлигининг массасига, яъни торнинг чизиқли зичлигига боғлиқ).

ν_n частоталар торнинг **хусусий тебраниш частоталари** дейилади. Хусусий частоталар, маълум бўлишича, асосий частота деб аталувчи қуйидаги

$$\nu_1 = \frac{v}{2l}$$

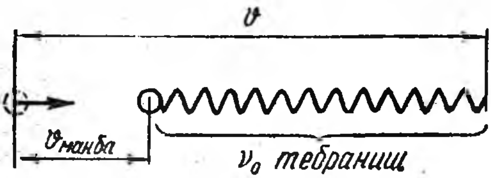
частотага каррали нисбатда бўлар экан. $n = 2, 3 \ldots$ ларга мос келувчи частоталар обертонлар (биринчи обертон $n = 2$ га, иккинчи обертон $n = 3$ га ва ҳоказо, мос келади) деб аталади. Умумий ҳолда торнинг тебраниши ҳар хил хусусий частотали бир неча турғун тўлқинларнинг қўшилишидан иборат.

86-§. Допплер эффекти

Фараз қилайлик, эластик муҳитда тўлқин манбаидан бирор масофада муҳитнинг тебранишларини сезувчи (уни биз приёмник деб атаймиз) қурилма жойлашган бўлсин. Тўлқин манбаи билан приёмник тўлқин тарқалаётган муҳитга нисбатан қўзғалмаса, у ҳолда приёмник қабул қилаётган тўлқинлар частотаси манбанинг ν_0 тебраниш частотасига тенг бўлади. Агар манба ёки приёмник, ёки бўлмаса иккаласи ҳам муҳитга нисбатан ҳаракатланаётган бўлса, у вақтда приёмник қабул қилаётган ν частота ν_0 дан фарқ қилиши мумкин. Бу ҳодиса Допплер эффекти деб юритилади.

Соддалик учун приёмник билан манба уларни бирлаштирувчи тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракатланади деб фараз қиламиз. Агар манба приёмник томонга ҳаракатланаётган бўлса, манбанинг $v_м$ тезлигини мусбат ва манба приёмникдан узоқлашаётган бўлса—манфий деб ҳисоблаймиз. Худди шунга ўхшаш агар приёмник манбага яқинлашаётган бўлса, приёмникнинг тезлиги $v_п$ ни мусбат ва приёмник манбадан узоқлашаётган бўлса—манфий деб ҳисоблаймиз.

Агар манба қўзғалмасдан ν_0 частота билан тебранаётган бўлса, у ҳолда манба ν_0- тебранишни бажараётган моментда биринчи тебраниш яратган тўлқиннинг «қирраси» муҳитда v йўл ўтишга улгуради (v — тўлқиннинг муҳитга нисбатан тарқалиш тезлиги). Демак, манба бир секунд ичида яратган ν_0 «қирра» билан «чуқурчалар» v узунликда жойлашади. Борди-ю манба муҳитга нисбатан $v_м$ тезлик билан ҳаракатланаётган бўлса, у вақтда манба ν_0- тебранишни бажараётган моментга келиб биринчи тебраниш яратган «қирра» манбадан $v - v_м$ масофада бўлади (207- расм.) Демак, $v - v_м$ узунликка ν_0 дона «қирра» ва «чуқурчалар» жойлашади. Шунинг учун тўлқин узунлиги қуйидагига тенг бўлади:



207- расм.

$$\lambda = \frac{v - v_м}{\nu_0}. \tag{86.1}$$

v узунликка қанча «қирра» билан «чуқурча» сиғса, қўзғалмас приёмник ёнидан бир секундда шунча «қирра» ва «чуқурча» ўтади. Агар приёмник $v_{пр}$ тезлик билан ҳаракатланса, у ҳолда бир секундга тенг вақт оралиги охирига келиб, у шу вақт оралигининг бошида унинг ҳозирги ҳолатидан v масофада турган «чуқурчани» қабул қилади. Шундай қилиб, приёмник бир секундда $v + v_{пр}$

(208- расм) узунликка сиғадиган «қирралар» ва «чуқурчаларга» тегишли сондаги тебранишларни қабул қилиб олади ва қуйидагича частота билан тебранади:

$$\nu = \frac{v + v_{пр}}{\lambda}. \qquad (86.2)$$

(86.2) га λ нинг (86.1) ифодасини қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$\nu = \nu_0 \frac{v + v_{пр}}{v - v_м}. \qquad (86.3)$$

(86.3) формулага биноан приёмник билан манба улар орасидаги масофа қисқарадиган қилиб ҳаракатланганда приёмник қабул қиладиган частота ν манбанинг ν_0 частотасидан катта бўлади. Агар манба билан приёмник орасидаги масофа ортса, ν частота ν_0 дан кичик бўлади.

208- расм.

Агар манба билан приёмникнинг ҳаракати йўналиши уларни бирлаштирувчи тўғри чизиқ билан устма-уст тушмаса, у вақтда (86.3) формуладаги $v_м$ ва $v_{пр}$ ларни манба ва приёмникнинг тезликларининг кўрсатилган тўғри чизиққа проекциялари деб тушуниш керак.

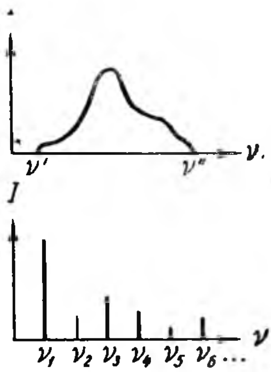
87- §. Товуш тўлқинлари

Агар ҳавода тарқалаётган эластик тўлқинларнинг частотаси тахминан 20 дан 20 000 *гц* оралиғида бўлса, у ҳолда улар инсон қулоғида товуш сезгисини уйғотади. Шунинг учун частотаси ана шу кўрсатилган чегарада ётган исталган муҳитдаги эластик тўлқинлар товуш тўлқинлари ёки тўғридан-тўғри товуш деб аталади. Частотаси 20 *гц* дан кичик бўлган эластик тўлқинлар **инфратовуш** деб аталади; частотаси 20 000 *гц* дан катта бўлган тўлқинлар **ультратовуш** дейилади. Инфра- ва ультратовушларни инсон қулоғи эшитмайди.

Газ ва суюқликлардаги товуш тўлқини фақат бўйлама тўлқин бўлиши мумкин ва галма-гал келувчи сиқилиш ва сийракланишлардан иборат бўлади. Қаттиқ жисмларда тарқалаётган тўлқинлар ҳам бўйлама, ҳам кўндаланг бўлиши мумкин.

Одамлар қабул қилган товушларни уларнинг юксаклиги, тембри ва қаттиқлигига қараб бир-биридан фарқ қилади. Ана шу ҳар бир субъектив баҳога товуш тўлқинининг аниқ физикавий характеристикаси мос келади.

Ҳар қандай реал товуш оддий гармоник тебраниш эмас, балки маълум частоталар тўпламига эга бўлган гармоник тебранишларнинг йиғиндисидан иборат. Берилган товушда иштирок этувчи тебранишлар частоталари тўплами товушнинг **акустик спектри** деб аталади. Агар товушда ν' дан ν'' гача интервалдаги барча частотага эга бўлган тебранишлар иштирок этса, у ҳолда спектр туташ спектр дейилади. Агар товуш ν_1, ν_2, ν_3 ва ҳоказо дискрет (яъни бир-биридан чекли интерваллар билан ажралган) частотали тебранишлардан ташкил топган бўлса, спектр чизиқли спектр дейилади. 209- расмда туташ (юқорида) ва чизиқ (пастда) спектрлар тасвирланган. Абсцисса ўқи бўйича ν тебраниш частотаси, ордината ўқи бўйича унинг интенсивлиги I қўйилган.



209- расм.

Шовқинлар туташ акустик спектрга эга. Чизиқ спектрли тебранишлар у ёки бу даражада юксакликдаги товуш сезгисини уйғотади. Бундай товуш оҳангдор товуш дейилади.

Оҳангдор товушнинг юксаклиги асосий (энг кичик) частота (209- расмдаги ν_1 частотага қаранг) билан белгиланади. Обертонларнинг (яъни ν_2, ν_3 ва ҳоказо частотали тебранишларнинг) нисбий интенсивлиги товушнинг ранг-бaранглигини ёки тембрини белгилайди. Ҳар хил музика асбоблари уйғотадиган товушлар турли спектрал таркибга эгалиги, масалан, найни скрипка ёки роялдан товуши орқали фарқ қилишга имкон беради.

88- §. Товуш тўлқинларининг газлардаги тезлиги[1]

Газдаги эластик тўлқин газнинг фазода галма-гал келувчи сиқилиш ва сийракланиш соҳаларидан иборат. Демак, босим фазонинг ҳар бир нуқтасида ўртача p қийматидан (у тўлқин йўқ бўлган шароитдаги газнинг босимига тенг) даврий равишда Δp га оғиб туради. Шундай қилиб фазонинг бирор нуқтасидаги босимнинг оний қийматини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

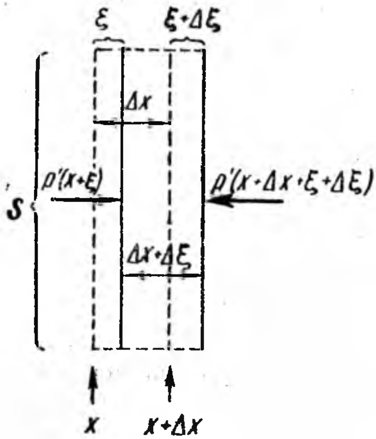
$$p' = p + \Delta p.$$

Товуш тўлқини x ўқи бўйлаб тарқалаётган бўлсин. 81- § да биз қаттиқ муҳитда эластик тўлқинлар тезлигини топаётганда қилганимиздек, газнинг баландлиги Δx ва асоси S га тенг цилиндр чаклидаги ҳажмини текширамиз (210- расм). Бу ҳажм ичидаги газнинг массаси $\rho S \Delta x$ га тенг, бунда ρ — тўлқинланмаган газнинг зичлиги.

[1] 102 - ва 103- § лар ўрганилгандан кейин бу параграфни яна бир эсга олиш лозим.

Δx кичик бўлганлиги учун цилиндрнинг барча нуқталарида тезланишни бир хил ва $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ га тенг деб ҳисоблаш мумкин.

Газнинг ҳажмига таъсир кўрсатаётган f кучни топиш учун цилиндр асосининг S юзини $(x+\xi)$ ва $(x+\Delta x+\xi+\Delta\xi)$ кесимлардаги босимларнинг айирмасига кўпайтмасини олиш керак. (81.5) формулани топиш вақтида келтирган мулоҳазаларимизни такрорлаб қуйидагини топамиз:



210- расм.

$$f=-\frac{\partial p'}{\partial x}S\Delta x.$$

[(81.5) формулани чиқараётганимизда $\Delta\xi \ll \Delta x$ деб фараз қилганлигимизни эслатиб ўтамиз.] Шундай қилиб, газнинг ажратиб олинган ҳажмининг массасини, унинг тезланишини ва унга таъсир этувчи кучни топдик. Энди газнинг бу ҳажми учун Ньютон иккинчи қонунининг тенгламасини ёзайлик):

$$(\rho S\ \Delta x)\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-\frac{\partial p'}{\partial x}S\ \Delta x.$$

$S\ \Delta x$ га қисқартирсак,

$$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-\frac{\partial p'}{\partial x}. \tag{88.1}$$

Бу топилган дифференциал тенгламада иккита номаълум функция ξ ва p' иштирок этади. Тенгламани ечиш учун бу функциялардан бирини иккинчиси орқали ифодалаш керак. Бунинг учун газнинг p' босими билан унинг ҳажмининг нисбий ўзгариши $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ орасидаги боғланишни топайлик. Бу боғланиш газнинг сиқилиш (ёки кенгайиш) процессининг характерига боғлиқ. Товуш тўлқинида газнинг сиқилиш ва сийракланишлари бири-бирининг кетидан шу қадар тез юрадики, натижада муҳитнинг қўшни участкалари бир-бирига иссиқлик бериб улгура олмайди. Шунинг учун процессни адиабатик деб ҳисоблаш мумкин. Адиабатик процесс учун газнинг берилган массасининг босими билан ҳажми орасидаги боғланиш (103.4) формула билан ифодаланади. Шунинг учун ёзиш мумкинки:

$$p\,(S\ \Delta x)^{\gamma}=p'\,[S\,(\Delta x+\Delta\xi)]^{\gamma}=p'\left[S\left(\Delta x+\frac{\partial\xi}{\partial x}\Delta x\right)\right]^{\gamma}=$$

$$=p'(S\ \Delta x)^{\gamma}\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^{\gamma},$$

бу ерда γ — газнинг ўзгармас босимдаги иссиқлик сиғимининг ўзгармас ҳажмдаги иссиқлик сиғимига нисбати. Бу тенгликни $(S\Delta x)$ га қисқартирсак,

$$p = p'\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{\gamma}.$$

Фаразга асосан $\frac{\partial \xi}{\partial x} \ll 1$ эканлигидан фойдаланиб, $\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{\gamma}$ ифодани $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ нинг даражалари бўйича қаторга ёямиз ва кичиклик даражаси юқори бўлган ҳадларни ташлаб юборамиз. Натижада қуйидаги формулани топамиз:

$$p = p'\left(1 + \gamma\frac{\partial \xi}{\partial x}\right).$$

Бу тенгламани p' га нисбатан ечамиз:

$$p' = \frac{p}{1 + \gamma\frac{\partial \xi}{\partial x}} \approx p\left(1 - \gamma\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{1}. \qquad (88.2)$$

Топилган муносабатдан осонгина Δp нинг ифодасини топишимиз мумкин:

$$\Delta p = p' - p = -\gamma\, p\frac{\partial \xi}{\partial x}. \qquad (88.3)$$

γ — бирга яқин сон бўлганлиги учун (88.3) дан $\left|\frac{\partial \xi}{\partial x}\right| \approx \left|\frac{\Delta p}{p}\right|$. Шундай қилиб, $\frac{\partial \xi}{\partial x} \ll 1$ шартнинг физик маъноси босимнинг ўртача қийматидан оғиши босимнинг ўзидан кўп марта кичик эканлигини билдиради. Бу ҳақиқатан ҳам шундай: атмосфера босими p тахминан 10^3 *мм* сим. устунига тенг бўлганда жуда қаттиқ товушлар учун ҳам ҳаво босимининг тебраниш амплитудаси 1 *мм* сим. устунидан ортмайди.

(88.2) ни x бўйича дифференциалласак, қуйидагини топамиз:

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = -\gamma\, p\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Ниҳоят, $\frac{\partial p'}{\partial x}$ нинг бу топилган қийматини (88.1) формулага қўйсак,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\gamma p}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad (88.4)$$

дифференциал тенгламани топамиз.

---

[1] Биз $x \ll 1$ шарт учун ўринли бўлган $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ формуладан фойдаландик.

(88.4) ни (80.4) тўлқин тенгламаси билан солиштирсак, товуш тўлқинларининг газдаги тезлиги учун қуйидаги ифодани топамиз:

$$v = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \tag{88.5}$$

(p ва ρ — тўлқинланмаган газнинг босими билан зичлиги эканлигини эслатиб ўтамиз).

Дафъатан қараганда товушнинг газдаги тезлиги босимга боғлиқдек туюлади. Бироқ аслида бундай эмас, чунки газ босими ўзгарганда унинг зичлиги ҳам ўзгаради.

Одатдаги босимларда газларнинг хоссаларини қуйидаги тенглама яхши ифодалайди:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \tag{88.6}$$

бу ерда m — V ҳажмдаги газнинг массаси; μ — 1 моль газнинг массаси, у газнинг молекуляр оғирлигига тенг. Газнинг m массасини унинг V ҳажмига тақсимласак, ρ зичликни топишимиз мумкин. (88.6) тенгламани m/V га нисбатан ечсак

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}.$$

Бу зичликнинг ифодасини (88.5) га қўйсак, товушнинг газдаги тезлиги учун қуйидаги формулани топамиз:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}. \tag{88.7}$$

Бундан товушнинг газдаги тезлиги температурага ва газни характерловчи γ ва μ катталикларнинг қийматига боғлиқ бўлишини билиш қийин эмас. Товушнинг газдаги тезлиги босимга боғлиқ эмас.

Молекулалар иссиқлик ҳаракатининг ўртача тезлиги қуйидагича ифодаланади [(106.17) га қаранг]:

$$\bar{v}_{\text{мол}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

Бу формулани (88.7) билан таққосласак, товушнинг газдаги v тезлиги молекулаларнинг ўртача тезлигига қуйидагича боғланганлигини кўрамиз:

$$v = \bar{v}_{\text{мол}} \sqrt{\frac{\gamma\pi}{8}}. \tag{88.8}$$

γ нинг ҳаво учун 1,4 га тенг қийматини қўйсак, $v \approx {}^3/_4 \bar{v}_{\text{мол}}$ бўлади. γ нинг максимал қиймати 5/3 га тенг. Бу ҳолда $v \approx {}^4/_5 \bar{v}_{\text{мол}}$. Шундай қилиб, товушнинг газдаги тезлиги молекулаларнинг иссиқлик ҳаракати ўртача тезлигига яқин экан, бироқ у, доим $\bar{v}_{\text{мол}}$ дан бир неча марта кичик бўлади.

Уй температураси (тахминан 290°К абсолют температура) учун товушнинг ҳаводаги тезлигини тақрибан топайлик. Ҳаво учун $\gamma =$

$= 1{,}40$, $\mu = 29$. Универсал газ доимийси $8{,}31 \cdot 10^3$ *ж/кмоль·град* га тенг. Бу қийматларни (88.7) формулага қўяйлик:

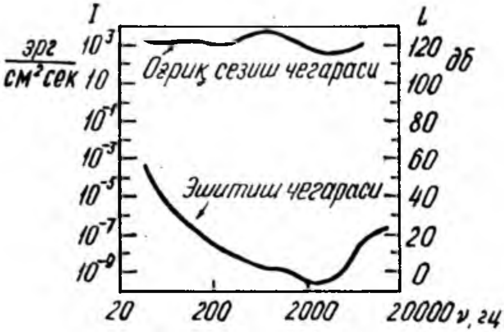
$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{1{,}40 \cdot 8{,}31 \cdot 10^3 \cdot 290}{29}} = 340 \text{ м/сек.}$$

v нинг биз топган қиймати тажриба йўли билан топилган қийматга яқин. Молекуляр оғирлиги маълум газда товушнинг тезлигини ўлчаб, (88.7) формула ёрдамида γ ни — газнинг ўзгармас босим ва ўзгармас ҳажмдаги иссиқлик сиғимларининг нисбатини топиш мумкин. Амалиётда ана шу усулдан фойдаланилади.

Товуш дисперсияга эга эмаслиги, яъни унинг тезлиги частотага қараб ўзгармаслиги диққатга сазовор фактдир. Борди-ю ана шундай богланиш мавжуд бўлганда нутқ яратиш мумкин бўлмаган, ҳар ҳолда уни яратиш жуда қийинлашган бўлар эди. Шу билан бирга куй эшитиб роҳатланиш имкониятидан ҳам маҳрум бўлар эдик.

89- §. Товуш кучининг шкаласи

Товуш тўлқинларининг интенсивлиги деб тўлқин ўзи билан олиб юрган энергия оқими зичлигининг ўртача қийматига айтилади. Тўлқин товуш сезгисини уйғотиш учун эшитиш чегараси деб аталувчи бирор минимал интенсивликка эга бўлиши керак. Эшитиш чегараси ҳаммада ҳар хил бўлиб, товушнинг частотасига боғлиқ. Одам қулоғи 1000—4000 *гц* орасидаги частотали товушларга жуда сезгир бўлади. Частотанинг бу соҳасида эшитиш чегараси тахминан 10^{-9} *эрг/см²·сек* га тенг. Бошқа частоталарда эшитиш чегараси юқорироқ бўлади (211- расмдаги пастки эгри чизиққа қаранг).



211- расм.

Интенсивлик тахминан 10^3—10^4 *эрг/см²·сек* атрофида бўлганда тўлқин товуш сифатида сезилмай қолади ва қулоқда фақат оғриқ ҳамда босим сезгисини уйғотади. Интенсивликнинг ана шундай сезги уйғотадиган қиймати оғриқ сезиш чегараси деб аталади. Оғриқ сезиш чегараси ҳам эшитиш чегараси каби частотага боғлиқ (211-расмдаги юқориги эгри чизиққа қаранг; бу расмда келтирилган ўртача нормал эшитувчи қулоққа тегишли).

Субъектив баҳоланадиган қаттиқлик товуш тўлқинларининг интенсивлигига қараганда анча секинроқ ўсади. Интенсизлик геометрик прогрессия бўйича ўсганда қаттиқлик тахминан арифметик прогрессия бўйича, яъни чизиқли ўсади. Ана шунга асосан қаттиқлик даражаси L берилган товушнинг I интенсивлигининг бошлангичи деб қабул қилинган I_0 интенсивликка нисбатининг логарифми сифатида аниқланади:

$$L = \lg \frac{I}{I_0}. \tag{89.1}$$

Бошланғич интенсивлик $I_0 = 10^{-9}$ *эрг/см·сек* деб қабул қилинади. Шунинг учун эшитиш чегараси тахминан 1000 *гц* частотада ноль атрофида ётади ($L = 0$).

(89.1) формула билан аниқланувчи қаттиқлик даражаси бирлиги *бел* деб аталади. Одатда ундан 10 марта кичикроқ бирликлардан — децибеллардан (*дб*) фойдаланилади. Равшанки, L нинг децибелларда ўлчанадиган қиймати қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \tag{89.2}$$

Исталган иккита I_2 ва I_1 интенсивликларнинг нисбати ҳам децибелларда ифодаланиши мумкинлигини эслатиб ўтамиз:

$$L_{12} = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}. \tag{89.3}$$

(89.3) формулага асосан децибелларда тўлқин интенсивлигининг бирор йўлда камайиши (сўниши) ҳам децибелларда ифодаланиши мумкин. Масалан, 20 *дб* — интенсивликнинг 100 марта камайганлигини билдиради.

Тўлқин одам қулогида товуш сезгисини уйғота оладиган интенсивликларнинг бутун соҳаси (10^{-9} дан то 10^{4} *эрг/см*^{2}*·сек* гача) қаттиқлик даражасининг 0 дан 130 *дб* қийматларига мос келади. 3- жадвалда баъзи типик товушлар учун қаттиқлик даражасининг тахминий қийматлари келтирилган.

Товуш тўлқинларининг энергияси жуда ҳам кичик. Масалан, агар бир стакан сув қаттиқлик даражаси 70 *дб* бўлган товуш тўлқинининг унга тушаётган энергиясини тўлиқ ютади (бу ҳолда бир секундда ютилган энергия миқдори $60 \cdot 10^{-2}$ *эрг/сек* га тенг бўлади) деб фараз қилсак, у ҳолда сувни уй температурасидан то қайнагунча иситиш учун ўттиз минг йилга яқин вақт керак бўлади.

Товуш тўлқинлари интенсивлиги I билан босимнинг тебраниш амплитудаси $(\Delta p)_m$ орасидаги богланишни топайлик. Бу параграфнинг бошида интенсивлик I энергия оқими зичлигининг ўртача қийматига тенг деб эслатиб ўтган эдик. У ҳолда (82.10) га биноан қуйидагини ёзиш мумкин:

$$I = j_{ўрт} = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 v, \tag{89.4}$$

бу ерда ρ — тўлқинланмаган газнинг зичлиги, a—муҳит зарраларининг тебранишлари амплитудаси[1], яъни ξ—катталикнинг тебранишлари амплитудаси, ω — частота, v — тўлқиннинг фазавий тезлиги.

3- ж а д в а л.

Товуш характеристикаси	Қаттиқлик даражаси, *дб*	Интенсивлик *эрг/см²·сек*
Соатларнинг тиқиллаши	20	10^{-7}
1 *м* масофада шивирлаш	30	10^{-6}
Паст овоз билан гапириш	40	10^{-5}
Ўртача қаттиқликдаги нутқ	60	10^{-3}
Қаттиқ нутқ	70	10^{-2}
Қичқириқ	80	10^{-1}
Самолёт моторининг шовқини:		
5 *м* масофада	120	10^{3}
3 *м* масофада	130	10^{4}

Фараз қилайлик, ξ функция $\xi = a\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$ қонун билан ўзгарсин. У вақтда $\frac{\partial\xi}{\partial x} = a\frac{\omega}{v}\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$. (88.3) га биноан $\Delta p = -\gamma p\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}$ нинг қийматини олиб келиб қўйиб Δp нинг ўзгариш қонунини топамиз:

$$\Delta p = -\gamma p a\,\frac{\omega}{v}\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = -(\Delta p)_m\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

Бундан тебраниш амплитудаси ξ (яъни a) босимнинг тебраниш амплитудаси $(\Delta p)_m$ илан қуйидагича боғланган деган хулоса чиқади:

$$a = \frac{(\Delta p)_m v}{\gamma\cdot p\omega}. \tag{89.5}$$

(89.4) формулага a нинг (89.5) қиймати билан v нинг (88.5) қийматини олиб келиб қўйиб ва у қадар мураккаб бўлмаган ўзгаришлар бажариб қуйидаги

$$I = \frac{(\Delta p)_m^2}{2\rho v} \tag{89.6}$$

муносабатни топиш мумкинлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

Бу формуладан фойдаланиб 0 дан 130 *дб* гача оралиқдаги қаттиқлик даражасига ҳаво босими тебранишлари амплитудасининг тахминан $3\cdot10^{-4}$ *дина/см²* дан (яъни $2\cdot10^{7}$ *мм* сим. уст. дан) 1000 *дина/см²* гача (яъни$\approx$1 *мм* сим. уст. гача) қиймати мос келишини ҳисоблаб чиқариш мумкин.

Зарраларнинг a тебраниш амплитудалари билан зарралар тезли-

[1] Муҳитнинг зарралари деганда алоҳида молекулалар эмас, балки чизиқли ўлчамлари тўлқин узунлигидан кўп марта кичик бўлган макроскопик (яъни ўз ичига кўп миқдордаги молекулаларни олган) ҳажмлар тушунилади.

ги $(\dot{\xi})_m$ амплитудасининг тахминий қийматларини топайлик. Буни (89.5) формула билан ифодаланган a нинг қийматини аниқлашдан бошлаймиз. $\frac{v}{\omega}=\frac{\lambda}{2\pi}$ эканлигини ҳисобга олсак, қуйидаги муносабатни топамиз:

$$\frac{a}{\lambda}=\frac{1}{2\pi\gamma}\frac{(\Delta p)_m}{p}\approx 0,1\frac{(\Delta p)_m}{p} \tag{89.7}$$

($\gamma\approx 1,5$, демак, $2\pi\gamma\approx 10$).

Қаттиқлик 130 *дб* бўлганда $(\Delta p)_m/p$ нисбат тахминан 10^{-3} га, қаттиқлик 60 *дб* бўлганда эса бу нисбат тахминан $2\cdot 10^{-7}$ га тенг бўлади. Ҳаводаги товуш тўлқинларининг узунлиги 17 *м* ($\nu=20$ *гц* бўлганда) билан 17 *мм* ($\nu=20\,000$ *гц* бўлганда) оралиқда ётади. Бу қийматларни (89.7) формулага қўйсак, қаттиқлик 60 *дб* бўлганда зарраларнинг тебранишлари амплитудаси энг узун тўлқинлар учун $\sim 3\cdot 10^{-4}$ *мм* га, энг қисқа тўлқинлар учун эса $\sim 3\cdot 10^{-7}$ *мм* га тенг эканлигини аниқлаймиз. Қаттиқлик 130 *дб* бўлганда энг узун тўлқинлар учун тебранишлар амплитудаси $\sim 1,7$ *мм* га етади.

Гармоник тебранишлар учун тезлик амплитудаси $(\dot{\xi})_m$ силжиш амплитудаси a нинг ω айлана частотага кўпайтмасига тенг $(\dot{\xi})_m=a\omega$ эканлигини биз биламиз. (89.5) ни ω га кўпайтирсак, қуйидаги муносабатни топамиз:

$$\frac{(\dot{\xi})_m}{v}=\frac{1}{\gamma}\frac{(\Delta p)_m}{p}\approx\frac{(\Delta p)_m}{p}. \tag{89.8}$$

Демак, қаттиқлик 130 *дб* бўлганда тезлик амплитудаси тахминан 340 *м/сек*$\cdot 10^{-3}=0,34$ *м/сек* га тенг. Қаттиқлик 60 *дб* бўлганда эса тезлик амплитудаси тахминан 0,1 *мм/сек* га тенг.

Тезлик амплитудаси силжиш амплитудасидан фарқли равишда тўлқин узунлигига боғлиқ эмас.

90-§. Ультратовуш

Бир томонга йўналган, яъни ясси тўлқинга яқин тўлқин ҳосил қилиш учун манбанинг (нурлаткичнинг) ўлчамлари тўлқин узунлигидан кўп марта катта бўлиши керак. Ҳавода товуш тўлқинларининг узунлиги тахминан 15 *м* дан 15 *мм* гача оралиқда ётади. Суюқ ва қаттиқ муҳитларда тўлқин узунлиги яна ҳам катта (бу муҳитларда товуш тўлқинларининг тарқалиш тезлиги ҳаводагига қараганда каттароқ). Амалда ана шундай узунликдаги бир томонга йўналган тўлқин ярата оладиган нурлаткич қуриш имконияти йўқ. Узунликлари анча кичикроқ бўлган ультратовуш тўлқинларни яратишга келсак, аҳвол бошқача. Тўлқин узунлиги кичрайган сари тўлқиннинг тарқалиш процессида дифракциянинг роли ҳам сусая боради. Шунинг учун ультратовуш тўлқинларининг бир томонга йўналган дастасини (ёруғлик дастаси каби) ҳосил қилиш мумкин.

Ҳозирги вақтда ультратовуш тўлқинларини яратиш учун асосан иккита ҳодиса: тескари пьезоэлектрик эффект ҳамда магнитострикция ҳодисаларидан фойдаланилади. Тескари пьезоэлектрик эффект шундан иборатки, баъзи бир кристаллардан (масалан, кварц, сегнет тузи, барий титанати ва бошқалардан) маълум усул билан кесиб олинган пластинка электр майдони таъсирида бир оз деформацияланади (майдон бир томонга йўналганда чўзилса, тескари томонга йўналганда эса сиқилади). Ана шундай пластинкани ўзгарувчан кучланиш берилган металл қопламалари ўртасига жойлаштирсак, пластинканинг мажбурий механик тебранишларини уйғотишимиз мумкин. Агар электр кучланишнинг ўзгариш частотаси пластинканинг хусусий тебранишлари частотасига тенг келса юқоридагидек тебранишлар айниқса интенсивлашади. Пластинканинг тебранишлари уни ўраб турган суюқ ёки газсимон муҳитга берилиб унда ультратовуш тўлқин уйғотади.

Магнитострикция ҳодисаси шундан иборатки, ферромагнит моддалар (темир, никель, баъзи бир қотишмалар ва бошқалар) уларга магнит майдони таъсир қилганда бир оз деформацияланади. Шунинг учун ферромагнит стерженни ўзгарувчан магнит майдонига (масалан, ўзгарувчан ток оқаётган ғалтак ичига) жойлаштириб унда механик тебранишлар уйғотиш мумкин. Бу тебранишлар резонанс шароитида айниқса интенсив бўлади.

Бир томонга йўналган ультратовуш дасталари сувда локация (предметларни топиш ва уларгача бўлган масофаларни аниқлаш) ишлари олиб боришда кенг қўлланилмоқда. Ультратовуш локацияси ҳақидаги фикрни биринчи бўлиб француз физиги П. Ланжевен (1872—1946) ўртага ташлаган ва биринчи жаҳон уруши вақтида сув ости кемаларини пайқаш учун асбоб ишлаб чиққан эди. Ҳозирги вақтда ультратовуш локаторлари айсбергларни, балиқ галаларини ва ҳоказоларни пайқаш учун қўлланилади.

Шу нарса маълумки, қичқиргандан сўнг акс садонинг, яъни тўсиқдан, қоядан, ўрмондан, қудуқдаги сувнинг сатҳидан ва ҳоказолардан қайтган товушнинг қайтиб келиши учун кетган вақтни аниқлаб ва бу вақтнинг ярмини товуш тезлигига кўпайтириб тўсиққача бўлган масофани топиш мумкин. Юқорида эслатилган локатор, шунингдек чуқурликни ўлчаш ва денгиз остининг рельефини аниқлаш учун ишлатиладиган эхолот ана шу принципга асосланиб тузилган. Кемага ўрнатилган нурлаткич вертикал йўналишда қисқа ультратовуш тўлқинлари юборади. Денгиз остидан қайтган импульслар приёмник томонидан қайд қилинади. Импульс жўнатилган пайт билан уни қайтиб қабул қилиш пайти орасида ўтган вақтга асосан чуқурлик ҳисоблаб топилади.

Ультратовуш локацияси усули кўршапалакка қоронғида учган вақтда тўғри йўл топишга имкон беради. Кўршапалак даврий равишда ультратовуш частотали импульслар чиқариб туради ва эшитиш органи ёрдамида қабул қилиб туриладиган қайтган сигналларга қараб катта аниқлик билан ўзини ўраб турган предметларгача бўлган масофани аниқлайди.

1928 йилда совет олими С. Я. Соколов ультратовушни дефектоскопия, яъни буюмларнинг нуқсонларини (дефектларини) топиш мақсадлари учун қўллаш усулини таклиф этди. Агар нуқсоннинг ўлчамлари тўлқин узунлигидан катта бўлса, у вақтда ультратовуш импульс нуқсондан орқага қайтиб келади. Буюмга ультратовуш импульсларини юбориш ва қайтган импульсларни қайд қилиш орқали фақат буюмларда нуқсонлар борлигини билибгина қолмасдан, бу нуқсонларнинг ўлчамларини ва улар қаерда жойлашганлигини ҳам аниқлаш мумкин. Соколов ва бошқа олимлар ишлаб чиққан ультратовуш дефектоскопияси усули тобора кенг қўлланилмоқда.

Ультратовуш тўлқинлар катта интенсивликка эга бўлганлиги ва ўзи ўтаётган муҳитда босимни кучли тебрантирганлиги орқасида қатор ўзига хос ҳодисаларни юзага келтиради. Буларга: суюқликда сузиб юрган зарраларнинг майдаланиши, эмульсиялар ҳосил бўлиши (бир суюқлик ичида у билан аралашмайдиган иккинчи суюқликнинг майда томчиларининг сузиб юриши), диффузия, эриш процессларининг тезланиши, кимёвий реакцияларнинг активлашиши ва ҳоказолар киради.

3-ҚИСМ

МОЛЕКУЛЯР ФИЗИКА ВА ТЕРМОДИНАМИКА

XI БОБ

БОШЛАНҒИЧ МАЪЛУМОТЛАР

91-§. Молекуляр-кинетик назария (статистика) ва термодинамика

Молекуляр физика физиканинг бир бўлими бўлиб, модданинг тузилиши ва хоссаларини молекуляр-кинетик тасаввурларга асосланиб ўрганади. Бу тасаввурларга биноан, қаттиқ, суюқ ёки газ ҳолатидаги ҳар қандай жисм жуда майда алоҳида зарралар—молекулалардан[1] иборат. Ҳар қандай модданинг молекулалари аниқ бир йўналишга эга бўлмаган тартибсиз ҳаракат ҳолатида бўлади. Бу ҳаракатнинг интенсивлиги модданинг температурасига боғлиқ.

Молекулалар хаотик ҳаракат қилишининг бевосита далили броун ҳаракатидир. Бу ҳодиса шундан иборатки, суюқлик ичида муаллақ ҳолатда юрган жуда майда (фақат микроскопда кўринадиган) зарралар тўхтовсиз бетартиб ҳаракат қилиб туради; бу ҳаракат ташқи сабабларга боғлиқ бўлмай, модда ичидаги ҳаракатнинг намоён бўлишидан иборат экан. Броун зарралари молекулаларнинг тартибсиз турткилари таъсири остида ҳаракат қилади.

Молекуляр-кинетик назариянинг мақсади жисмларнинг бевосита тажрибада кузатиладиган хоссаларини (босим, температура ва ҳоказоларни) молекулалар таъсирининг умумий натижаси сифатида талқин қилишдан иборат. Бунда бу назария айрим молекулаларнинг ҳаракати билан эмас, балки зарраларнинг жуда катта тўплами ҳаракатини характерлайдиган фақат ўртача миқдорлар билангина иш кўриб, статистик методдан фойдаланади. Шунинг учун молекуляр-кинетик назария статистик физика деб ҳам юритилади.

Жисмларнинг ҳар хил хоссалари ва модда ҳолатининг ўзгаришларини термодинамика ҳам ўрганади. Лекин молекуляр-кинетик назариядан фарқли равишда термодинамика жисмларнинг ва табиат ҳодисаларининг макроскопик хоссаларини уларнинг микроскопик манзарасига эътибор қилмай ўрганади. Термодинамика молекула ва атом тушунчаларидан фойдаланмай ва процессларни микроскопик нуқтаи назардан текширмай туриб ҳам бу процессларнинг бориши тўғрисида қатор хулосалар чиқаришга имкон беради.

Термодинамикага жуда кўп тажрибалардан олинган фактларни умумлаштириш орқали топилган бир нечта асосий қонунлар (тер-

[1] Атомларни бир атомли молекулалар деб қараш мумкин.

модинамика асослари деб аталувчи қонунлар) асос қилиб олинган. Шунинг учун ҳам термодинамика хулосалари жуда умумий характерга эга.

Модда ҳолатининг ўзгаришларини текширишга турли хил нуқтаи назарлардан ёндашиб термодинамика билан молекуляр-кинетик назария бир-бирини тўлдиради ва аслида, бориб бирлашиб кетади.

Молекуляр-кинетик тасаввурларнинг тараққиёти тарихига назар ташлар эканмиз, аввало шуни қайд қилиш керакки, модданинг атомлардан тузилганлиги тўғрисидаги тасаввурларни қадимги греклар айтиб ўтган. Лекин бу гоялар қадимги грекларда фақат гениал фаразгина бўлган. XVII асрга келиб атомистика қайта яратилди, лекин энди у фараз сифатида эмас, балки илмий гипотеза сифатида қайта яратилди. Бу гипотеза гениал рус олими ва мутафаккири М. В. Ломоносов (1711—1765) асарларида айниқса кенг ривожлантирилди. Ломоносов ўз замонасида маълум бўлган барча физикавий ва химиявий ҳодисаларнинг ягона манзарасини беришга уринди. Бунда у материя тузилишининг корпускуляр (ҳозирги замон терминалогияси бўйича—молекуляр) тасаввурларига асосланди. Ломоносов ўзи яшаган даврда ҳукмрон бўлган теплород (жисмдаги миқдори жисмнинг нақадар исиганлигини кўрсатадиган фаразий иссиқлик суюқлиги) назариясига қарши чиқиб, «иссиқликнинг сабаби» жисм зарраларининг айланма ҳаракат қилишидадир, деган хулосага келди. Шундай қилиб, молекуляр-кинетик тасаввурларни аслида Ломоносов таърифлаган.

XIX асрнинг иккинчи ярми ва XX аср бошларида қатор олимларнинг асарлари туфайли атомистика илмий назарияга айланди.

92- §. Молекулаларнинг массаси ва ўлчамлари

Атом ва молекулаларнинг массаларини характерлаш учун атом оғирлик ва молекуляр оғирлик деб аталадиган катталиклар қўлланилади (уларни атом ва молекуляр масса деб аташ тўғрироқ бўлур эди).

Химиявий элементнинг атом оғирлиги (A) деб, шу элемент атоми массасининг C^{12} атоми массасининг 1/12 қисмига нисбатига айтилади (масса сони 12 бўлган углерод изотопи C^{12} билан белгиланади; «Атом физикаси»га қ.). Модданинг молекуляр массаси (M) деб, шу модда молекуласи массасининг C^{12} атоми массасининг 1/12 қисмига нисбатига айтилади. Атом ва молекулалар массаларининг шу тариқа аниқланадиган шкаласи $C^{12} = 12$ шкала[1] деб аталади. Бу

[1] Илгарилари $O^{16} = 16$ шкала қўлланилар эди, бу шкалага биноан, O^{16} нинг (кислороднинг масса сони 16 бўлган изотопи) атом оғирлиги 16 га тенг. Лекин O^{16} шкала бошқа атом ва молекулалар массаларини масса-спектрографик усулда таққослаш учун ноқулайдир. Бу мақсадда углерод изотопларидан бири жуда қулай. Шунинг учун соф ва татбиқий физика Халқаро иттифоқининг (ЮПАП) 1960 йилда бўлиб ўтган X Бош ассамблеяси $C^{12} = 12$ шкалани тавсия этди. Шу муносабат билан СССР ФА атом ва молекуляр оғирликларнинг янги шкаласига ўтишга қарор қилди.

шкала бўйича C^{12} нинг атом оғирлиги роса 12 га, O^{16} кислородники 15,9949 га, элементлар ичида энг енгил бўлган водородники эса (изотопларининг табиий аралашмаси учун (1,0080 га тенг. Таърифга кўра, атом ва молекуляр оғирликлар ўлчамсиз катталиклардир.

Массанинг C^{12} атоми массасининг 1/12 қисмига тенг бўлган бирлиги қисқача латинча «u» (unit ёки русча «е» ҳарфи «единица» сўзидан[1] олинган) билан белгиланади. Бу бирликнинг килограмм ҳисобида ифодаланган катталигини $m_б$ билан белгилаймиз, у ҳолда атомнинг килограмм билан ифодаланган массаси $Am_б$ га, молекуланинг массаси эса $Mm_б$ га тенг бўлади.

Химиявий жиҳатдан содда бўлган икки модда шундай миқдорда олинсаки, уларнинг m_1 ва m_2 массалари нисбати уларнинг A_1 ва A_2 атом оғирликлари нисбатига тенг бўлса, улардаги атомлар сони тенг бўлади. Буни тушуниб олиш қийин эмас. Шунга ўхшаш, массаларининг нисбати молекуляр оғирликларининг нисбатига тенг бўладиган миқдорларда олинган иккита химиявий мураккаб моддада ҳам молекулалар сони бир хил бўлади.

Мазкур элементнинг килограмм ҳисобида ифодаланган массаси ўз атом оғирлигига сон жиҳатдан тенг бўладиган миқдори килограмм-атом деб аталади. Мазкур модданинг килограмм ҳисобида ифодаланган массаси ўз молекуляр оғирлигига сон жиҳатдан тенг бўладиган миқдори килограмм-молекула ёки қисқача киломоль деб аталади (*кмоль* билан белгиланади).

СГС системасида килограмм-атом ўрнида грамм-атом (мазкур элементнинг A граммдан иборат бўлган миқдори), килограмм-молекула ўрнида грамм-молекула, яъни моль (мазкур модданинг M граммдан иборат миқдори) қўлланилади.

Килограмм-молекуланинг μ массаси M молекуляр массага сон жиҳатдан тенг бўлади. Шунинг учун ҳам баъзан μ молекуляр оғирлик деб аталади. Лекин шуни назарда тутмоқ лозимки, M ўлчамсиз катталик бўлиб, киломолнинг μ массасининг ўлчамлиги *кг/кмоль*. Равшанки, атомларни бир атомли молекулалар деб ҳисоблаб, килограмм-атомни μ сининг сон қиймати A га тенг бўлган килограмм-молекула деб ҳисоблаш мумкин.

Килограмм-молекулаларнинг массалари нисбати тегишли молекуляр оғирликлар нисбати билан бир хил бўлгани учун, барча моддаларнинг бир киломолида

$$N_A = \frac{\mu}{Mm_б}$$

га тенг, яъни сон жиҳатдан $1/m_б$ га тенг айни бир хил миқдорда молекула бор. N_A сон Авогадро сони деб аталади.

$$N_A = 6{,}023 \cdot 10^{26}\ кмоль^{-1}$$

эканлиги тажрибада топилган.

[1] Биз бирлик сўзининг биринчи ҳарфига қараб «б» белги киритдик.

СГС системасида модданинг грамм-молекуласидаги молекулалар сони Авогадро сони деб аталади. Бинобарин, бу системада

$$N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23}\ моль^{-1}.$$

Авогадро сонини билган ҳолда $m_б$ бирлик массани топиш мумкин. Дарҳақиқат, $m_б$ нинг сон қиймати $1/N_A$ га, яъни $1/6{,}023 \cdot 10^{26} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ *кг* га тенг. Шундай қилиб,

ҳар қандай атомнинг массаси $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ *А кг* га тенг,

ҳар қандай молекуланинг массаси $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ *М кг* га тенг.

Энди молекулаларнинг ўлчамлари қандай эканлигини чамалаб кўрамиз. Суюқликларда молекулалар бир-бирига анча яқин жойлашади деб фараз қилиш табиийдир. Шунинг учун битта молекуланинг ҳажмини чамалаб топиш учун бирор суюқликнинг, масалан, сувнинг бир киломоли ҳажмини киломолдаги молекулаларнинг N_A сонига бўлиш керак. Бир киломоль (яъни 18 *кг*) сувнинг ҳажми 0,018 $м^3$. Бинобарин, битта молекулага тўғри келган ҳажм қуйидагига тенг:

$$\frac{0{,}018}{6 \cdot 10^{26}} = 30 \cdot 10^{-30}\ м^3.$$

Бундан сув молекулаларининг чизиқли ўлчамлари тахминан қуйидагига тенг эканлиги келиб чиқади:

$$\sqrt[3]{30 \cdot 10^{-30}} \approx 3 \cdot 10^{-10}\ м = 3\ \text{Å}.$$

Бошқа моддалар молекулаларининг ўлчамлари ҳам бир неча ангстрем тартибида бўлади.

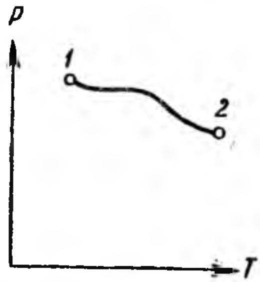
93- §. Системанинг ҳолати. Процесс

Текширилаётган жисмлар тўпламини биз жисмлар системаси деб ёки соддагина қилиб система деб атаймиз. Суюқлик ва у билан мувозанат ҳолатидаги буғ системага мисол бўла олади. Хусусий ҳолда система битта жисмдан иборат бўлиши ҳам мумкин.

Ҳар қандай система температураси, босими, ҳажми ва ҳоказо параметрлари билан фарқ қилувчи турли хил ҳолатларда бўлиши мумкин. Системанинг ҳолатини характерлайдиган бундай катталиклар ҳолатлар параметрлари деб аталади.

Бирор параметр ҳамма вақт ҳам аниқ бир қийматга эга бўлавермайди. Масалан, агар жисмнинг ҳар хил нуқталарида температураси бир хил бўлмаса, у ҳолда жисмнинг T параметри маълум бир қийматга эга деб бўлмайди. Бу ҳолда ҳолат мувозанатсиз ҳолат деб аталади. Агар бундай жисм бошқа жисмлардан ажратилиб, ўз ҳолига қўйилса, у ҳолда температура текислашиб, жисмнинг ҳамма нуқталари учун бир хил бўлган T қиймат олади, яъни жисм мувозанат ҳолатга ўтади. Жисм ташқаридан кўрсатиладиган таъсир натижасида мувозанат ҳолатидан чиқарилмагунча T нинг бу қиймати ўзгармай тураверади.

Бошқа параметрлар ҳам, масалан, p босим ҳам ўзини шундай тутиши мумкин. Агар жипс қилиб ишланган поршень ёрдамида цилиндрик идиш ичига қамалган газ олиб, поршенни идиш ичига тез киргизилса, у ҳолда поршень остидаги газнинг босими қолган ҳажмдаги газнинг босимидан катта бўлади. Бинобарин, бу ҳолда газ p босимнинг маълум бир қиймати билан характерлана олмайди ва унинг ҳолати мувозанатсиз ҳолат бўлади. Лекин поршенни ичкарига итариш тўхтатилса, ҳажмнинг ҳар хил жойида (ҳар хил нуқталарида) газнинг босими бараварлашади ва газ мувозанат ҳолатга ўтади.



212- расм.

Шундай қилиб, системанинг **мувозанат ҳолати** деб шундай ҳолатга айтиладики, бу ҳолатда системанинг барча параметрлари тайин бир қийматларга эга бўлади ва бу қийматлар ташқи шароит ўзгармас экан, истаганча узоқ вақт давомида ўзгармай қолаверади.

Агар координата ўқларига қандайдир икки параметрнинг қийматлари қўйиб чиқилса, у ҳолда системанинг исталган мувозанат ҳолати ўша графикда битта нуқта билан тасвирланиши мумкин (масалан 212- расмдаги 1 нуқтага қаранг). Мувозанатсиз ҳолатни бундай усул билан тасвирлаб бўлмайди, чунки мувозанатсиз ҳолатда параметрлардан ҳеч бўлмаганда биттаси тайинли бир қийматга эга бўлмайди.

Ҳар қандай процесс, яъни системанинг бир ҳолатдан бошқа ҳолатга ўтиши система мувозанатининг бузилишига олиб келади. Бинобарин, системада бирор процесс юз бераётганда система мувозанатсиз ҳолатлардан бирин-кетин ўтади. Поршень бекитиб турган идишдаги газни сиқишнинг юқорида кўриб ўтилган процессига назар ташласак, поршенни идиш ичига киргизишда газ қанча тез сиқилса, мувозанат шунчалик кўпроқ бузилади, деган хулосага келамиз. Агар поршень ичкарига жуда секин итарилса, у ҳолда мувозанат арзимаган даражада бузилади ва ҳар хил нуқталардаги босим бирор ўртача p қийматдан жуда оз фарқ қилади. Газ ниҳоят даражада секинлик билан сиқилган пировард ҳолатда газ ҳар бир пайтда босимнинг маълум бир қиймати билан характерланади. Бинобарин, бу ҳолда газнинг ҳолати ҳар бир пайтда мувозанат ҳолат бўлади ва чексиз секин ўтадиган процесс мувозанат ҳолатлар кетма-кетлигидан иборат бўлади.

Мувозанат ҳолатларнинг узлуксиз кетма-кетлигидан иборат бўлган процесс **мувозанатли процесс** деб аталади. Айтилганлардан жуда секин ўтадиган процессгина мувозанатли процесс бўлади деган хулоса чиқади, шунинг учун мувозанатли процесс абстракциядир.

Мувозанатли процессни графикда тегишли эгри чизиқ (212- расм) билан тасвирлаш мумкин. Мувозанатсиз процессларни биз шартли равишда пунктир эгри чизиқлар билан тасвирлаймиз.

Мувозанат ҳолат ва мувозанатли процесс тушунчалари термодинамикада катта роль ўйнайди. Термодинамиканинг барча миқдорий хулосалари фақат мувозанатли процессларгагина аниқ қўлланилиши мумкин.

94- §. Системанинг ички энергияси

Бирор жисмнинг ички энергияси деб, шу жисмнинг энергиясидан бир бутун деб олинган шу жисмнинг кинетик энергияси билан жисмнинг ташқи кучлар майдонидаги потенциал энергиясини айириб ташланганда қолган энергияга айтилади. Масалан, бирор газ массасининг ички энергиясини аниқлаган вақтда газнинг идиш билан биргаликда қиладиган ҳаракати энергияси ва газнинг Ер тортиш кучлари майдонида турганлиги натижасида эга бўладиган энергияси ҳисобга олинмаслиги керак.

Бинобарин, ички энергия тушунчаси молекулалар хаотик ҳаракатининг кинетик энергиясини, молекулалар орасидаги ўзаро таъсир потенциал энергиясини ва молекулалар ичидаги энергияни ўз ичига олар экан.

Жисмлар системасининг ички энергияси ҳар бир жисмнинг алоҳида олингандаги ички энергиялари йиғиндиси билан жисмлар орасидаги ўзаро таъсир энергиясининг йиғиндисига тенг. Жисмлар орасидаги ўзаро таъсир энергияси жисмлар бир-бирига тегиб турадиган чегаранинг юпқа қатламидаги молекулалараро ўзаро таъсир энергиясидан иборат.

Ички энергия система ҳолатининг функциясидир. Демак, система тайинли бир ҳолатга келиб қолган ҳар бир ҳолда унинг ички энергияси, системанинг олдинги ҳолатлари қандай бўлганидан қатъи назар, мазкур ҳолат учунгина хос бўлган қиймат қабул қилади. Бинобарин, система бир ҳолатдан бошқа ҳолатга ўтишида унинг ички энергияси ўзгариши ички энергиянинг бу ҳолатлардаги қийматлари айирмасига ҳамиша тенг бўлиб, бир ҳолатдан бошқа ҳолатга ўтиладиган йўлга, яъни системанинг бир ҳолатдан бошқа ҳолатга ўтишига олиб келган процессларга ёки процесслар мажмуига боғлиқ эмас.

95- §. Термодинамиканинг биринчи асоси

Ички энергия асосан турлича бўлган икки процесс ҳисобига, яъни жисм устида A' иш бажариш ва жисмга Q иссиқлик миқдори бериш ҳисобига ўзгариши мумкин. Иш бажарилганда системага таъсир кўрсатувчи ташқи жисмлар кўчади. Масалан, идиш ичидаги газни қамаб турган поршенни идиш ичига итарганда поршень сурилиб газ устида A' иш бажаради. Ньютоннинг учинчи қонунига асосан, бунда газ ҳам поршень устида $A = -A'$ иш бажаради.

Жисмга иссиқлик бериш вақтида ташқи жисмлар кўчмайди ва, бинобарин, жисм устида макроскопик (яъни жисм таркибига кирган барча молекулалар тўпламига тегишли) иш бажарилмайди. Бу ҳолда ички энергия шу сабабдан ўзгарадики, кўпроқ исиган жисмнинг алоҳида молекулалари камроқ исиган жисмнинг молекулалари устида иш бажаради. Бунда энергия нурланиш орқали ҳам узатилади. Жисмдан жисмга энергия ўтишига олиб келувчи микроскопик процессларнинг (яъни бутун жисмни эмас, балки унинг айрим молекулаларини ўз ичига олувчи процессларнинг) мажмуи иссиқлик узатиш деб аталади.

Бир жисмнинг иккинчи жисмга узатган энергия миқдори жисмларнинг бир-бири устида бажарган A иши билан аниқлангани каби, бир жисмнинг иккинчи жисмга иссиқлик узатиш йўли билан берган энергияси миқдори, бир жисмнинг иккинчи жисмга берган Q иссиқлик миқдори билан аниқланади. Шундай қилиб, система ички энергиясининг орттирмаси система устида бажарилган A' иш билан системага берилган Q иссиқлик миқдори йиғиндисига тенг бўлиши керак:

$$U_2 - U_1 = Q + A'. \tag{95.1}$$

Бу ерда U_1 ва U_2 — система ички энергиясининг олдинги ва кейинги қийматлари. Одатда ташқи жисмларнинг система устида бажарадиган A' иши ўрнига системанинг ташқи жисмлар устида бажарадиган A иши (бу иш $-A'$ га тенг) текширилади. (95.1) тенгламада A' ўрнига $-A$ қўйиб ва уни Q га нисбатан ечиб, бу тенгламани қуйидаги кўринишга келтириш мумкин:

$$Q = U_2 - U_1 + A. \tag{95.2}$$

(95.2) тенглама энергиянинг сақланиш қонунини ифодалайди ва у **т е р м о д и н а м и к а н и н г б и р и н ч и қ о н у н и (а с о с и) н и н г** мазмунидан иборат. Уни сўз билан бундай айтиш мумкин: *системага берилган иссиқлик миқдори системанинг ички энергиясини оширишга ва системанинг ташқи жисмлар устида иш бажаришига сарфланади.*

Айтилганлардан системага иссиқлик берилганда ҳамиша системанинг ички энергияси ортади деган хулоса чиқмаслиги керак. Шундай ҳол бўлиши ҳам мумкинки, системага иссиқлик берилишига қарамай, унинг энергияси ортмасдан, балки камаяди: $U_2 < U_1$. Бу ҳолда (95.2) га асосан, $A > Q$ бўлади, яъни система ҳам олинаётган Q иссиқлик ҳисобига, ҳам ички энергия запаси ҳисобига иш бажаради; ички энергия запасининг камайиши $U_1 - U_2$ га тенг. Шуни ҳам назарда тутиш керакки, (95.2) даги Q ва A катталиклар алгебраик катталиклардир ($Q < 0$ эканлиги ҳақиқатда система иссиқлик олмасдан, балки иссиқлик бераётганини билдиради).

(95.2) дан Q иссиқлик миқдорини иш ёки энергия ўлчанадиган бирликларда ўлчаш мумкин деган хулоса чиқади. СИ системасида иссиқлик миқдорининг ўлчов бирлиги — жоуль.

Иссиқлик миқдори к а л о р и я деб аталадиган махсус бирлик билан ҳам ўлчанади. Бир калория 1 *г* сувни 19,5 дан 20,5° С га қадар иситиш учун керак бўладиган иссиқлик миқдорига тенг. Минг калория катта калория ёки килокалория деб аталади.

Бир калория 4,18 *ж* га эквивалент эканлиги тажрибада аниқланган; Бинобарин, бир жоуль 0,24 калорияга эквивалент. $I = 4,18$ *ж/кал* катталик иссиқликнинг механик эквиваленти деб аталади.

Агар (95.2) тенгламага кирувчи катталиклар ҳар хил бирликларда ифодаланган бўлса, у ҳолда бу катталикларнинг баъзиларини тегишли эквивалентга кўпайтириш керак. Масалан, Q ни калория ҳисобида, U ва A ни жоуль ҳисобида ифодаласак, (95.2) муносабатни қуйидаги кўринишда ёзиш керак:

$$IQ = U_2 - U_1 + A.$$

Бундан буён биз ҳамиша Q, A ва U лар бир хил бирликларда ифодаланган деб фараз қилиб, биринчи қонуннинг тенгламасини (95.2) кўринишда ёзамиз.

Система бажарган ишни ёки система олган иссиқлик миқдорини ҳисоблашда одатда текширилаётган процесс бир қатор элементар процессларга ажратиладики, бу процессларнинг ҳар бири система параметрларининг жуда кичик (пировардида — чексиз кичик) ўзгаришига мос келади. Элементар процесс учун, (95.2) тенглама

$$\Delta' Q = \Delta U + \Delta' A \tag{95.3}$$

кўринишда бўлади, бу ерда $\Delta' Q$ — иссиқликнинг элементар миқдори, $\Delta' A$ — элементар иш ва ΔU — система ички энергиясининг мана шу элементар процесс давомидаги орттирмаси.

Шуни назарда тутиш муҳимки, $\Delta' Q$ ва $\Delta' A$ ни Q ва A катталикларнинг орттирмаси деб қараш ярамайди. Бирор f катталикнинг элементар процессга тегишли бўлган Δ сини бу миқдорнинг орттирмаси деб ҳисоблаш учун, бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга ўтишга тегишли бўлган $\sum \Delta f$ йиғинди мана шу ўтиладиган йўлга боғлиқ бўлмаслиги, яъни f катталик ҳолат функцияси бўлиши керак. Ҳолат функцияси ҳолатларнинг ҳар бирида ўз «запасига» эга бўлади деб гапириш мумкин. Масалан, системанинг ҳар хил ҳолатларда эга бўладиган ички энергияси запаси ҳақида гап бориши мумкин.

Кейинчалик биз кўрамизки, система бажарган ишнинг катталиги ва система олган иссиқлик миқдори системанинг бир ҳолатдан бошқа ҳолатга ўтиш йўлига боғлиқ бўлади. Бинобарин, Q ҳам, A ҳам ҳолат функцияси эмас, шунинг учун системанинг ҳар хил ҳолатларда эга бўладиган иссиқлик ёки иш запаси ҳақида гап бўлиши мумкин эмас.

Шундай қилиб, A ва Q ёнида турган Δ символнинг маъноси U ёнида турган Δ символнинг маъносидан бошқача бўлади. Ана шу ҳолни таъкидлаб ўтиш учун A ва Q ёнидаги Δ га штрих қўйилган. ΔU символ ички энергия орттирмасини билдиради, $\Delta' Q$ ва $\Delta' A$ символлар эса орттирмани эмас, балки элементар иссиқлик миқдори ва элементар ишни билдиради.

Ҳисоблаш учун (95.3) тенгламада дифференциалларга ўтилади. Унда термодинамика биринчи асосининг тенгламаси қуйидаги кўринишга[1] келади:

$$d'Q = dU + d'A. \tag{95.4}$$

---

[1] (95.4) тенгламада dU тўлиқ дифференциал бўлиб, $d'Q$ ва $d'A$ лар тўлиқ дифференциал эмас.

(95.4) ни бутун процесс бўйича интеграллаганда (95.2) тенглама билан айнан бир хил бўлган қуйидаги ифода топилади:

$$Q = (U_2 - U_1) + A$$

$d'A$ ни интеграллаш натижасини

$$\int_1^2 d'A = A_2 - A_1$$

кўринишда ёзиш мумкин эмас эканлигини яна бир марта таъкидлаб ўтамиз. Бу ёзув система бажарган иш ишнинг биринчи ва иккинчи ҳолатлардаги қийматлари (яъни запаслари) айирмасига тенг эканлигини билдирган бўлар эди.

96-§. Жисмнинг ҳажми ўзгарганда бажарадиган иши

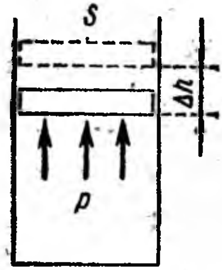
Жисмнинг ўзига тегиб турган бошқа жисмлар билан қиладиган ўзаро таъсирини унинг ўша жисмларга кўрсатадиган босими орқали характерлаш мумкин. Газнинг идиш деворлари билан, шунингдек қаттиқ ёки суюқ жисмнинг атрофидаги муҳит (масалан, газ) билан бўладиган ўзаро таъсирини босим орқали тавсифлаш мумкин. Ўзаро таъсир кучлари қўйилган нуқталар кўчганда жисмнинг ҳажми ўзгаради. Бинобарин, мазкур жисмнинг ташқи жисмлар устида бажарадиган иши босим ва жисм ҳажмининг ўзгаришлари орқали ифодаланиши мумкин. Бу ифодани топиш учун қуйидаги мисолни кўриб чиқамиз.

Жипс қилиб ишланган ва осон сирпанадиган поршень билан бекитилган цилиндрик идиш (213-расм) ичига газ қамалган бўлсин. Агар бирор сабаб билан газ кенгая бошласа, у поршенни суриб, поршень устида иш бажаради. Поршенни Δh кесмага кўчириш учун газ бажарган элементар иш қуйидагига тенг:

$$\Delta' A = f\Delta h,$$

бу ерда f — газнинг поршенга кўрсатадиган таъсир кучи. Бу кучни газнинг p босимининг поршеннинг S юзига кўпайтмаси билан алмаштирсак, қуйидагини топамиз:

$$\Delta' A = pS\Delta h.$$



213- расм.

Лекин $S\Delta h$ кўпайтма газ ҳажмининг ΔV орттирмасидан иборат. Шунинг учун элементар ишнинг ифодасини қуйидагича ёзамиз:

$$\Delta' A = p\Delta V. \tag{96.1}$$

Равшанки, (96.1) даги $\Delta' A$ катталик алгебраик катталикдир. Дарҳақиқат, газ сиқилаётганда Δh кўчиш йўналиши билан газнинг поршенга кўрсатадиган f таъсир кучи йўналиши қарама-қарши бўлади, шу туфайли $\Delta' A$ элементар иш манфий бўлади. Бу ҳолда ҳажмнинг ΔV орттирмаси ишораси ҳам манфийдир. Шундай қилиб, (96.1) формула газнинг ҳажми ҳар қандай ўзгарганда ҳам ишни тўғри ифодалайди.

Агар газнинг босими доимий бўлиб қолаверса (бунинг учун температура айни вақтда тегишлича ўзгариши керак), у ҳолда ҳажм V_1 қийматидан V_2 қийматигача ўзгарганда бажарилган иш

$$A_{12} = p(V_2 - V_1). \tag{96.2}$$

бўлади. Агар ҳажм ўзгарганда босим доимий қолмаса, у ҳолда (96.1) формула етарли даражада кичик ΔV учунгина тўғри бўлади. Бу ҳолда ҳажмнинг чекли ўзгаришларида бажариладиган иш (96.1) кўринишдаги элементар ишларнинг йиғиндиси сифатида, яъни интеграллаш йўли билан ҳисобланиши керак:

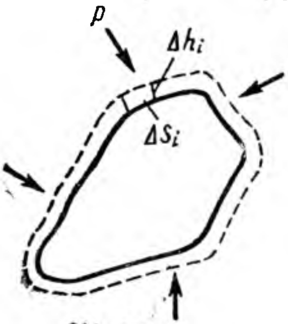
$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p\, dV. \tag{96.3}$$

93- § да айтилганлардан маълумки, биз топган формулалар фақат мувозанатли процессларга қўлланилиши мумкин холос.

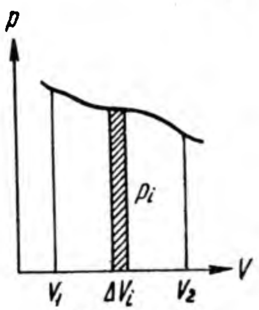
Ишнинг топилган ифодалари қаттиқ, суюқ ва газ ҳолатидаги жисмлар ҳажмининг ҳар қандай ўзгаришлари учун тўғри. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун яна бир мисол кўриб чиқамиз. Ихтиёрий шаклдаги қаттиқ жисм олиб, уни суюқ ёки газ ҳолатидаги муҳитга ботирамиз, маълумки, бу муҳит жисмнинг ҳамма нуқталарига бир хил p босим кўрсатади (214- расм). Жисм кенгайиб, натижада унинг сиртининг айрим ΔS_i элементар қисмлари ҳар хил Δh_i миқдорда кўчади, деб фараз қилайлик. Унда i-қисм $p\Delta S_i \Delta h_i$ га тенг бўлган $\Delta' A_i$ иш бажаради. Жисм бажарган иш унинг айрим қисмлари бажарган ишлар йиғиндиси сифатида топилиши мумкин:

$$\Delta' A = \sum \Delta' A_i = \sum p\Delta S_i \Delta h_i.$$

Ҳамма қисмлар учун бир хил бўлган p босимни йиғинди ишораси остидан ташқарига чиқариб, $\sum \Delta S_i \Delta h_i$ йиғинди жисм ҳажми-



214- расм.



215- расм.

нинг ΔV орттирмасини ифодалашини эътиборга олсак, бажарилган ишни

$$\Delta' A = p\Delta V$$

кўринишда ёзиш мумкин, яъни умумий ҳолда ҳам биз (96.1) формулани топамиз.

Жисм ҳажмининг ўзгариш процессини (p, V) диаграммада (215-расм) тасвирлаймиз. $\Delta' A = p_i \Delta V_i$ элементар ишга графикда энсизгина штрихли тасмачанинг юзи мос келади. Равшанки, V ўқ $p = f(V)$ эгри чизиқ, V_1 ва V_2 тўғри чизиқлар билан чегараланган юз ҳажмнинг V_1 қийматдан V_2 қийматга қадар ўзгаришида бажарилган ишга тенг.

Шуни айтиб ўтамизки, (96.1) ифоданинг дифференциаллар орқали ёзилган шаклидан фойдалансак, термодинамика биринчи асосининг (95.4) тенгламасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$d'Q = dU + p\,dV. \qquad (96.4)$$

97- §. Температура

Температура тушунчасини қуйидаги мулоҳазаларга асосланган ҳолда таърифлаш мумкин. Агар бир-бирига тегиб турган бир қанча жисм иссиқлик мувозанати ҳолатида бўлса, яъни улар иссиқлик узатиш йўли билан ўзаро энергия алмашмаса, бу жисмларнинг температураси бир хил бўлади. Агар жисмлар бир-бирига иссиқлик бериши мумкин бўладиган шароит яратилганда улардан бири иккинчисига иссиқлик узатиш орқали энергия берса, у вақтда биринчи жисмнинг температураси иккинчисиникига қараганда юқори деб ҳисобланади. Жисмларнинг ҳажм, электр қаршилик ва шу каби қатор хоссалари температурага боғлиқ. Температурани миқдорий жиҳатдан аниқлаш учун бу хоссаларнинг ҳар биридан фойдаланиш мумкин.

Температурани ўлчаш учун танлаб олинган жисмни (термометрик жисмни) эриётган муз билан иссиқлик мувозанати ҳолатига келтирамиз, жисмнинг бу ҳолатдаги температурасини 0° деб оламиз ва жисмнинг температурани ўлчаш учун биз қўлламоқчи бўлган хоссасини (температура белгисини) миқдорий жиҳатдан характерлаймиз. Бундай белги сифатида жисмнинг ҳажми танлаб олинган ва унинг 0° даги қиймати V_0 га тенг деб фараз қиламиз. Сўнгра ўша жисмнинг ўзини атмосфера босими остида қайнаётган сув билан иссиқлик мувозанати ҳолатига келтирамиз, бу ҳолатда унинг температурасини 100° га тенг деб оламиз ва бунга мос келадиган V_{100} ҳажмни аниқлаймиз. Биз танлаб олган температура белгиси (бу мисолда—ҳажм) температура ўзгариши билан чизиқли ўзгаради деб ҳисоблаб, термометрик жисмнинг ҳажми V бўлган ҳолатида температураси қуйидагига тенг бўлади деб ёзиш керак:

$$t^\circ = \frac{V - V_0}{V_{100} - V_0}\, 100^\circ. \qquad (97.1)$$

Шу тариқа топилган температура шкаласи, маълумки, Цельсий шкаласи деб аталади. Температурани ўлчаш учун ҳажм эмас, балки бирор бошқа белги олинганда ҳам (97.1) га ўхшаш муносабатни ёзиш мумкин.

Термометрни айтиб ўтилган усул билан даражалаб олиб, ундан температурани ўлчаш учун фойдаланиш мумкин. Бунинг учун уни температураси ўлчанаётган жисм билан иссиқлик мувозанати ҳолатига келтириш ва ҳажм катталигини топиш керак.

Табиати ҳар хил бўлган термометрик жисмлардан (масалан, симоб ва спирт) ёки турли хил температура белгиларидан (масалан, ҳажмдан ва электр қаршиликдан) фойдаланувчи термометрларни таққослаганда уларнинг кўрсатишлари даражалаш усули туфайли 0° ва 100° да бир хил бўлиб, бошқа температураларда фарқ қилади. Бундан шундай хулоса чиқадики, температуралар шкаласини бир қийматли аниқлаш учун, даражалаш усулидан ташқари, яна термометрик жисм ва температура белгисини қандай танлаш ҳақида ҳам келишиб олиш керак. Температураларнинг эмпирик шкала деб аталувчи шкаласини аниқлашда буларнинг қандай танланиши кейинги параграфда баён этилади. Аввалдан шуни айтиб ўтамизки, термометрик жисмнинг хоссаларига боғлиқ бўлмаган шкала термодинамиканинг иккинчи қонунига асосан аниқланиши мумкин (130- § га қ.). Бу шкала **температураларнинг абсолют шкаласи** деб аталади.

98- §. Идеал газ ҳолатининг тенгламаси

Бирор газ массасининг ҳолати p босим, V ҳажм ва $t°$ температурадан иборат учта параметрнинг қийматлари билан аниқланади. Бу параметрлар бир-бирига қонуний равишда боғланганки, улардан бирининг ўзгариши натижасида бошқалари ҳам ўзгаради. Айтиб ўтилган боғланиш аналитик усулда

$$F(p,\ V,\ t°) = 0 \tag{98.1}$$

функция кўринишида ифодаланиши мумкин. Бирор жисмнинг параметрлари орасидаги боғланишни ифодаловчи муносабат шу жисмнинг **ҳолат тенгламаси** деб аталади. Бинобарин, (98.1) муносабат берилган газ массасининг ҳолат тенгламасидир.

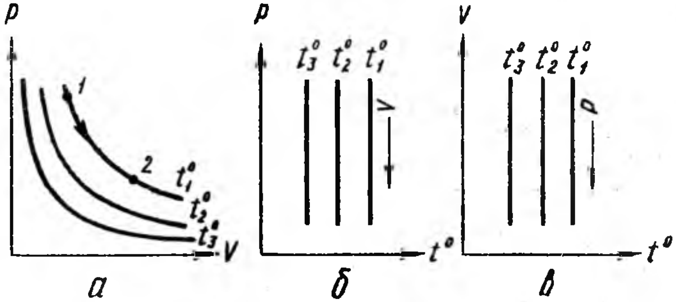
Агар (98.1) тенгламани параметрлардан бирортасига, масалан, p га нисбатан ечсак, ҳолат тенгламаси

$$p = f(V,\ t°) \tag{98.2}$$

кўринишга келади. Мактаб курсидан маълум бўлган Бойль—Мариотт ва Гей-Люссак қонунлари параметрлардан бири ўзгармас бўлган шароитдаги ҳолат тенгламаларини ифодалайди. Масалан, Бойль—Мариотт қонунига кўра, температура ўзгармаганда берилган газ массаси учун газнинг босими унинг ҳажмига тескари пропорционал равишда ўзгаради. Буни аналитик равишда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$pV = \text{const} \quad (t° = \text{const}). \tag{98.3}$$

Айни бир температурага мос келувчи ҳолатлар мавжуд (p, V) диаграммада (98.3) тенглама билан аниқланувчи эгри чизиқ, яъни гипербола билан тасвирланади. Температуранинг ҳар бир қийматига ўзининг эгри чизиғи мос келади (216- *а* расм). Бу эгри чизиқлар изотермалар деб аталади («изо» — бир хил, тенг).



216- расм.

Газнинг ўзгармас температурада бир ҳолатдан бошқа ҳолатга ўтиши **изотермик процесс** деб аталади. Изотермик процессда газ ҳолатини тасвирловчи нуқта изотерма бўйлаб кўчади.

(p, t°) ёки (V, t°) диаграммада изотермик процесс p ўқига (мос равишда V ўқига) параллел бўлган тўғри чизиқ билан тасвирланади. Бу чизиқлар ҳам изотерма бўлади. Учинчи параметр бўлган V (мос равишда p) нинг қиймати бу тўғри чизиқлар бўйлаб доимий қолмайди, балки тўғри чизиқ бўйлаб стрелка билан кўрсатилган йўналишда кўчилганда унинг қиймати орта боради (216- *б* ва *в* расм).

Гей-Люссак қонунига кўра, босим ўзгармас бўлганда берилган газ массасининг ҳажми температурага қараб чизиқли равишда ўзгаради:

$$V = V_0(1 + \alpha t^\circ) \quad (p = \text{const}). \tag{98.4}$$

Ҳажм ўзгармас бўлганда босим учун ҳам шунга ўхшаш боғланиш ўринли:

$$p = p_0(1 + \alpha t^\circ) \quad (V = \text{const}). \tag{98.5}$$

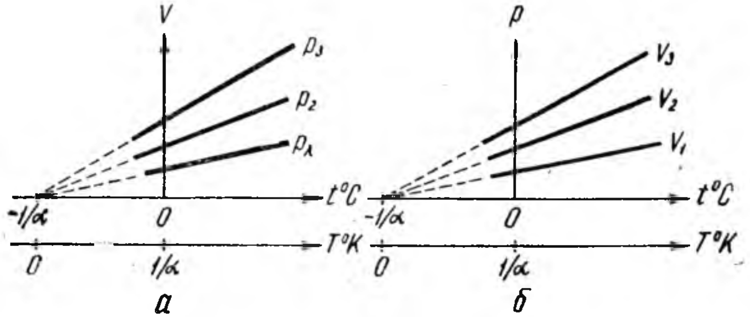
Бу тенгламаларда t° — Цельсий шкаласи бўйича ҳисобланган температура, V_0 — 0°C даги ҳажм, p_0 — 0°C даги босим. Иккала тенгламада ҳам α коэффициент бир хил бўлиб, унинг қиймати 1/273 1/*град*[1].

Ўзгармас босимда юз берадиган процесс **изобарик процесс** деб аталади. Газ учун бундай процесс (V, t°) диаграммада (98.4) тўғри чизиқ билан тасвирланади (217- *а* расм; турли тўғри чизиқлар турли босимларга тегишлидир). Бу тўғри чизиқ **изобара** деб ата-

[1] Аниқроғи 1/273,15 *град*$^{-1}$.

лади. (p, $t°$) ёки (p, V) диаграммада изобара $t°$ ўқига ёки мос равишда V ўққа параллел йўналган тўғри чизиқ кўринишида бўлади.

Ўзгармас ҳажмда юз берадиган процесс **изохорик** процесс деб аталади. (p, $t°$) диаграммада изохоралар 217- *б* расмда кўрсатилган шаклда бўлади.



217- расм.

Шуни қайд қилиб ўтамизки, (98.4) ва (98.5) ларга асосан, барча изобара ва барча изохоралар $t°$ ўқни

$$1 + \alpha t° = 0$$

шарт билан аниқланувчи айни бир нуқтада кесиб ўтади, бундан

$$t° = -\frac{1}{\alpha} = -273{,}15°\text{C}.$$

Температуранинг саноқ бошини шу нуқтага жойлаштириб, биз температураларнинг Цельсий шкаласидан абсолют шкала ёки Кельвин шкаласи[1] деб аталувчи шкаласига ўтамиз. Кейинчалик биз, абсолют температуранинг (яъни абсолют шкала бўйича ҳисобланган температуранинг) физик маъноси жуда чуқур эканлигини кўрамиз.

Абсолют шкаланинг таърифига биноан абсолют температура билан (биз бу температурани T ҳарфи билан белгилаймиз) Цельсий шкаласи бўйича ҳисобланган температура ўртасида қуйидаги муносабат ўринлидир:

$$T = t° + \frac{1}{\alpha} = t° + 273{,}15. \qquad (98.6)$$

Масалан, 0°С температурага 273,15°К мос келади. 0°К га тенг температура **абсолют ноль** деб аталади, унга — 273,15°С мос келади.

---

[1] Мос равишда бу шкаланинг градуси °К билан белгиланади.

(98.4) ва (98.5) тенгламаларда Цельсий температурасидан абсолют температурага ўтамиз. Бунинг учун (98.6) га мувофиқ равишда $t°$ нинг ўрнига $T - 1/\alpha$ ни қўямиз:

$$V = V_0(1 + \alpha t°) = V_0\left[1 + \alpha\left(T - \frac{1}{\alpha}\right)\right] = \alpha V_0 T \qquad (98.7)$$

ва шунга ўхшаш

$$p = \alpha p_0 T. \qquad (98.8)$$

Бу тенгламалардан қуйидагилар келиб чиқади:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \qquad (p = \text{const}), \qquad (98.9)$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \qquad (V = \text{const}), \qquad (98.10)$$

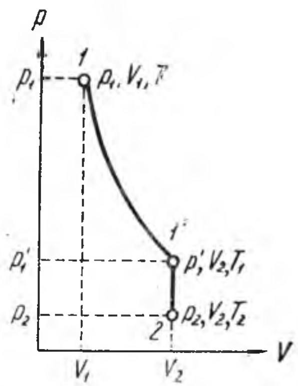
бу ердаги 1 ва 2 индекслари айни бир изобарада ётувчи [(98.9) учун] ёки айни бир изохорада [(98.10) учун] ётувчи ихтиёрий ҳолатларга тегишлидир.

Бойль—Мариотт ва Гей-Люссак қонунлари тақрибий қонунлардир. Ҳар қандай реал газнинг зичлиги қанча кичик бўлса, яъни ҳажми қанча катта бўлса, у (98.3), (98.9) ва (98.10) тенгламаларни шунча аниқроқ қаноатлантиради. (98.3) га мувофиқ, босим камайганда ҳажм ортади, (98.9) га мувофиқ эса, температура кўтарилиши билан ҳажм ортади. Бинобарин, Бойль—Мариотт ва Гей-Люссак қонунлари унча паст бўлмаган температураларда ва унча катта бўлмаган босимларда тўғри бўлади.

(98.3), (98.9) ва (98.10) тенгламаларга аниқ бўйсунадиган газ *идеал газ* деб аталади. Идеал газ абстракт тушунчадир. Ҳар қандай реал газ зичлиги камая боргани сари ўз хоссалари билан идеал газга яқинлаша боради.

Ҳаво, азот, кислород каби баъзи газлар уй температураси ва атмосфера босими шароитида идеал газга жуда яқин бўлади. Гелий ва водороднинг хоссалари идеал газ хоссаларига айниқса яқиндир.

Бойль—Мариотт ва Гей-Люссак тенгламаларини бирлаштириб, идеал газ ҳолатининг тенгламасини топиш мумкин. Бунинг учун (p, V) диаграммада параметрларининг қийматлари p_1, V_1, T_1 ва p_2, V_2, T_2 бўлган иккита ихтиёрий ҳолат оламиз (218- расм). *1* — *1'* изотермадан ва *1'* — *2* изохорадан иборат бўлган *1* дан *2* га ўтиш процессини кўриб чиқамиз. Равшанки, *1'* ҳолатнинг температураси *1* ҳолатнинг температурасига тенг бўлади, *1'* ҳолатдаги ҳажм *2* ҳолатдаги ҳажмга тенг. p' босим, умуман айтганда, p_1 ва p_2 босимлардан фарқ қилади.



218- расм.

1 ва *1'* ҳолатлар айни бир изотермада ётади. Шунинг учун (98.3) га мувофиқ равишда

$$p_1V_1 = p'V_2.$$

1' ва *2* ҳолатлар айни бир изохорада ётади. Бинобарин, (98.10) га мувофиқ,

$$\frac{p'}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Бу тенгламалардан p' ни йўқотиб, қуйидаги тенгламани топамиз:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}.$$

1 ва *2* холатлар мутлақо ихтиёрий равишда танлаб олинганлиги учун, ҳар қандай ҳолатда ҳам

$$\frac{pV}{T} = B \tag{98.11}$$

бўлади деб таъкидлаш мумкин, бу ерда B — берилган газ массаси учун ўзгармас бўлган катталикдир.

Авогадро кашф қилган қонунга асосан, *бир хил шароитда (яъни бир хил температура ва бир хил босимда) барча газларнинг килограмм-молекулалари бир хил ҳажмга эга бўлади.* Жумладан, нормал шароитлар деб аталувчи шароитда, яъни 0°С ва 1 *атм* босимда ҳар қандай газнинг бир киломолининг ҳажми 22,4 $м^3/кмоль$ га тенг[1]. Бундан газ миқдори бир киломолга тенг бўлганда (98.11) даги B катталик барча газлар учун бир хил бўлади деган хулоса чиқади. B катталикнинг бир киломолга тўғри келадиган қийматини R ҳарфи билан, киломолнинг ҳажмини $V_{км}$ билан белгилаб, (98.11) тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{pV_{км}}{T} = R. \tag{98.12}$$

Бу тенглама Клапейрон тенгламаси деб аталади. Бу тенглама идеал газ киломолининг параметрларини бир-бири билан боғлайди ва, демак, у идеал газ ҳолати тенгламасининг ўзгинасидир. Бу тенглама одатда

$$pV_{км} = RT \tag{98.13}$$

кўринишда ёзилади. R катталик универсал газ доимийси деб аталади. Унинг қийматини Авогадро қонуни ёрдамида ҳисоблаб топиш мумкин. Бунинг учун (98.12) да p ўрнига $1{,}01 \cdot 10^5$ $н/м^2$

---

[1] Шуни айтиб ўтамизки, нормал шароитларда 1 $м^3$ газда

$$L = \frac{6{,}06 \cdot 10^{26}}{22{,}4} = 2{,}68 \cdot 10^{25}$$

дона молекула, 1 $см^3$ да эса $L' = 2{,}68 \cdot 10^{19}$ молекула бўлади. L (ёки L') сони Лошмидт сони деб аталади.

(1 *атм*), $V_{км}$ ўрнига 22,4 *м³/кмоль* ва *T* ўрнига 273°К қўйиш керак:

$$R = \frac{1{,}01 \cdot 10^5 \cdot 22{,}4}{273} \frac{(н/м^2) \cdot м^3}{град \cdot кмоль} = 8{,}31 \cdot 10^3 \frac{ж}{град \cdot кмоль}.$$

Нормал шароитларда 1 моль газ ҳажми 22,4 *л/моль* бўлади. Газнинг киломолини моль орқали ва жоулларни эрг ва калориялар орқали ифодаласак, универсал газ доимийсининг қуйидаги қийматларини осонгина топишимиз мумкин:

$$R = 8{,}31 \cdot 10^7 \frac{эрг}{град \cdot моль} = 1{,}99 \frac{кал}{град \cdot моль}.$$

Баъзан *R* доимий градус-молга тўғри келган литр-атмосфера ҳисобида ифодаланади:

$$R = \frac{1 \ атм \cdot 22{,}4 \ л/моль}{273 \ град} = 0{,}0820 \frac{л \cdot атм}{град \cdot моль}.$$

Бир киломолга тегишли тенгламадан ҳар қандай *m* массали газга тегишли тенгламага ўтиш осон, бунинг учун бир хил босим ва бир хир температурада газнинг *z* киломоли бир киломолникига қараганда *z* марта ортиқ ҳажм эгаллашини эътиборга олиш керак: $V = zV_{км}$. (98.13) ни $z = m/\mu$ га кўпайтириб ва $zV_{км}$ ўрнига *V* ни қўйиб, қуйидаги тенгламани топамиз:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \tag{98.14}$$

бу ерда *m* — газ массаси, μ — киломолининг массаси. Бу тенглама ҳар қандай *m* массали идел газ ҳолатининг тенгламасидир. Бу тенгламадан (98.3), (98.9) ва (98.10) тенгламаларнинг келиб чиқишини кўриш осон.

Идеал газнинг температураси билан бошқа параметрлари ўртасидаги боғланишнинг соддалиги бу газни термометрик модда сифатида ишлатиш соҳасида кенг истиқбол очиб беради. Ҳажмнинг доимий қолишини таъминлаб, температура белгиси сифатида газ босимидан фойдаланилганда температура шкаласи идеал равишда чизиқли бўлган термометр ҳосил қилиш мумкин. Бундан буён биз бу шкалани температураларнинг идеал газ шкаласи деб атаймиз.

Халқаро келишувга мувофиқ, амалда термометрик жисм сифатида водород олинади. (98.14) тенгламадан фойдаланиб ва термометрик жисм сифатида водород олиб тузилган шкала температураларнинг эмпирик шкаласи деб аталади.

XII БОБ

ГАЗЛАРНИНГ ЭЛЕМЕНТАР КИНЕТИК НАЗАРИЯСИ

Молекуляр-кинетик назария модда ҳолатининг энг содда ҳоли бўлган газ ҳолатини талқин этишда катта-катта ютуқларга эришди. Кинетик назария соддалаштирувчи бир қатор фаразлар киритилган шароитдаги ўзининг энг элементар кўринишида ҳам газ ҳолатининг асосий хоссаларини ва газларда бўладиган ҳодисаларни сифат жиҳатидангина эмас, балки миқдор жиҳатидан ҳам (бирга яқин сонли кўпайтувчига қадар аниқлик билан) изоҳлаб бера олади.

Биз ечмоқчи бўлган биринчи масала газнинг идиш деворларига берадиган босимининг катталигини ҳисоблаш масаласидир. Бу масаланинг ечилиши абсолют температуранинг физик табиатини очиб беради.

99- §. Газлар кинетик назариясининг босимга оид тенгламаси

Газнинг энг содда молекуляр-кинетик модели қуйидагичадир. Газ олисдан бир-бирига ўзаро таъсир кўрсатмайдиган ва хаотик равишда ҳаракатланадиган бир хил молекулалар тўпламидир. Молекулаларнинг ўлчамлари шу қадар кичикки, уларнинг ҳажмлари йиғиндисини идишнинг ҳажмига нисбатан эътиборга олмаса ҳам бўлади. Ҳар бир молекула асосан ҳамма вақт эркин ҳаракат қилади ва баъзан бошқа молекулалар билан ёки идиш деворлари билан эластик равишда тўқнашиб туради.

Бундай модель идеал газнинг худди ўзгинасидир. Реал газларда молекулаларнинг ўлчамлари чекли бўлиб, улар бир-бирига ораларидаги масофа ортиши билан тез камайиб кетадиган кучлар билан таъсир кўрсатади. Лекин газнинг зичлиги камайган сари молекулаларнинг хусусий ҳажми газ эгаллаб турган ҳажмга қараганда камая боради, молекулалар орасидаги ўртача масофалар эса шу қадар ортиб кетадики, бунда молекулаларнинг бир-бирига кўрсатадиган ўзаро таъсир кучларини бутунлай эътиборга олмаса ҳам бўлаверади. Демак, ҳар қандай газ ўз хоссалари жиҳатдан идеал газга яқинлашган шароитларда биз юқорида тавсифлаб ўтган моделга асос қилиб олинган фаразлар ўринли бўлиб чиқади.

Идиш деворига келиб урилганида молекула деворга импульс беради, бу импульснинг сон қиймати молекула импульсининг ўзгаришига тенг. Девор сиртининг ҳар бир ΔS элементини кўп миқдордаги молекулалар муттасил равишда бомбардимон қилиб туради. Бунинг натижасида ΔS элемент Δt вақт ичида ΔS га нормал бўйича йўналган ΔK йиғинди импульс олади. Механикадан маълумки, ΔK нинг Δt га нисбати ΔS га таъсир этувчи кучга, бу кучнинг ΔS га нисбати эса p босимга тенг.

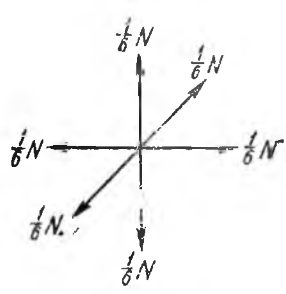
Молекулалар мутлақо тартибсиз, хаотик равишда ҳаракат қилади; улар барча йўналишлар бўйича бир хил эҳтимоллик билан ҳаракат қилади, бу йўналишларнинг ҳеч бири бошқалари олдида устунлик қила олмайди. Бундай фикрга келишимизга сабаб шуки, газ идиш деворларига ҳамма жойда бир хил босим кўрсатади. Агар борди-ю молекулаларнинг бирор йўналишдаги ҳаракати устунлик қилганда, унда табиий равишда деворнинг мана шу йўналиш томонда ётган қисмига кўпроқ босим кўрсатилган бўлар эди.

Молекулалар тезлигининг катталиги жуда хилма-хил бўлиши мумкин. Бунинг устига, молекуланинг тезлиги, умуман айтганда, ҳар бир тўқнашиш натижасида ўзгариши керак[1], бунда тезлик бир хил эҳтимол билан ортиши ҳам, камайиши ҳам мумкин. Бунга сабаб шуки, иккита молекуланинг тўқнашишдан аввалги умумий кинетик энергияси тўқнашишдан кейинги умумий кинетик энергиясига тенг бўлиши керак. Бинобарин, тўқнашиш натижасида бир молекуланинг тезлиги ортса, иккинчи молекуланинг тезлиги камайиши керак.

Қўйилган масалани ечишни соддалаштириш учун молекулалар ҳаракатининг характерига алоқадор бўлган баъзи соддалаштирувчи фаразлар киритамиз. Биринчидан, молекулаларни фақат ўзаро перпендикуляр бўлган учта йўналишда ҳаракатланади, деб фараз қиламиз. Агар газда N дона молекула бўлса, у ҳолда бу йўналишларнинг ҳар бири бўйлаб истаган пайтда $N/3$ дона молекула ҳаракат қилади, шу билан бирга, уларнинг ярми (яъни $N/6$ қисми) бу йўналиш бўйлаб бир томонга, иккинчи ярми бунга қарама-қарши томонга ҳаракат қилади (219- расм). Бундай фаразга асосланиб, бизни қизиқтираётган йўналишда (масалан, деворнинг мазкур ΔS элементига ўтказилган нормаль бўйлаб) молекулаларнинг 1/6 қисми ҳаракат қилади, деб ҳисоблаймиз.

Иккинчи соддалаштириш шундан иборатки, биз ҳамма молекулалар тезлигининг v қиймати бир хил, деб ҳисоблаймиз.

Биринчи соддалаштириш босимни ҳисоблашнинг охирги натижасига таъсир кўрсатмайди, шундай эканлигини биз бундан кейинги параграфда кўрсатамиз; иккинчи соддалаштиришдан воз кечиш ма-



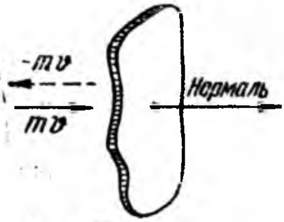
219- расм.

---

[1] Массалари бир хил бўлган иккита шар ўзаро эластик марказий тўқнашганда тезликлари алмашади.

салага қандай аниқлик киритишини шу параграфнинг ўзида кўрамиз.

Идиш деворига урилаётган молекуланинг ўша деворга берадиган импульсини ҳисоблайлик. Молекуланинг деворга урилишдан аввалги импульси ΔS га ўтказилган ташқи нормал бўйлаб йўналган бўлиб (220- расм), $m\mathbf{v}$ га тенг. Тўқнашиш натижасида импульснинг ишораси ўзгаради. Шундай қилиб, молекула импульсининг орттирмаси қуйидагига тенг бўлиб қолади:



220- расм.

$$(-m\mathbf{v})-(m\mathbf{v})=-2m\mathbf{v}. \quad (99.1)$$

Ньютоннинг учинчи қонунига асосан, молекула келиб урилганда девор нормал бўйича йўналган $2m\mathbf{v}$ импульс олади.

Асоси ΔS ва баландлиги $v\Delta t$ бўлган цилиндр ҳажми ичида жойлашган ва деворнинг ΔS элементи томонга қараб ҳаракатланаётган барча молекулалар деворнинг шу элементига Δt вақт ичида етиб боради (221- расм). Бу молекулаларнинг сони:

$$\Delta N=\frac{1}{6}\,n\,v\,\Delta S\,\Delta t, \quad (99.2)$$

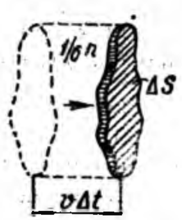
бу ерда n — ҳажм бирлигидаги молекулалар сони.

Тўғри, деворга қараб бораётганида бу молекулаларнинг бир қисми бошқа молекулалар билан тўқнашиб, натижада ўзининг ҳаракат йўналишини ўзгартиради ва ΔS га етиб боролмайди, деган эътироз ҳам билдириш мумкин. Лекин молекулаларнинг ўзаро тўқнашувлари улар ҳаракатининг хаотик характерини бузмайди: деворга қараб кетаётган молекулалар группасидан бирор миқдордаги молекула бошқа йўналишларда ҳаракатланувчи группаларга қўшилганда ўшанча миқдордаги молекула бошқа группалардан чиқиб, деворга қараб ҳаракатланаётган группага қўшилади. Шунинг учун деворга етиб борадиган молекулалар сонини ҳисоблашда молекулаларнинг бир-бири билан бўладиган ўзаро тўқнашувларини эътиборга олмаса ҳам бўлади. (99.2) га мувофиқ, ΔS юзга вақт бирлиги ичида уриладиган молекулалар сони

$$\frac{\Delta N}{\Delta t}=\frac{1}{6}n\,v\,\Delta S$$

га тенг бўлиб, бирлик юзга ($\Delta S=1$ $м^2$) бир секундда бўладиган зарблар сони қуйидагига тенг:

$$\frac{\Delta N}{\Delta S\Delta t}=\frac{1}{6}\,n\,v. \quad (99.3)$$



221- расм.

(99.2) зарблар сонини ҳар бир тўқнашувда деворга бериладиган (99.1) импульсга кўпайтирсак, деворнинг ΔS элементига Δt вақт ичида бериладиган натижавий ΔK импульс ҳосил бўлади:

$$\Delta K = 2mv \frac{1}{6} nv\Delta S\Delta t = \frac{1}{3} nmv^2\Delta S\Delta t.$$

ΔK импульсни Δt вақт оралигига бўлсак, ΔS юзга таъсир этувчи кучни топамиз. Ниҳоят, топилган бу кучни ΔS юзга бўлсак, газнинг идиш деворларига кўрсатадиган босимини топамиз. Бинобарин,

$$p = \frac{\Delta K}{\Delta S\Delta t} = \frac{1}{3} nmv^2. \tag{99.4}$$

$\varepsilon = mv^2/2$ ифода молекула илгариланма ҳаракатининг кинетик энергияси эканлигини ҳисобга олиб, босимнинг ифодасини қуйидаги кўринишга келтириш мумкин:

$$p = \frac{2}{3} n\varepsilon. \tag{99.5}$$

Топилган формулаларни анализ қилишга киришишдан олдин барча молекулаларнинг тезликлари тенг деб қилган фараздан воз кечиш оқибати бу формулаларнинг кўринишига қандай таъсир қилишини аниқлаймиз.

Молекулаларнинг тезликлари турлича бўлсин, яъни ҳажм бирлиги ичида бўлган n та молекуладан n_1 тасининг тезлиги амалда v_1 бўлсин, n_2 та молекуланинг тезлиги v_2 ва, умуман, n_i та молекуланинг тезлиги v_i бўлсин, деб фараз қиламиз. Равшанки,

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_i + \ldots = \sum n_i = n.$$

Молекулаларнинг тезликлари бўйича тақсимотини билган ҳолда молекулалар тезлигининг ўрта қийматини топиш мумкин. Бунинг учун барча n та молекуланинг тезликларини қўшиш ва бу натижани n га бўлиш керак:

$$\bar{v} = \frac{\overbrace{v_1 + v_1 + \ldots + v_1}^{n_1} + \overbrace{v_2 + v_2 + \ldots + v_2}^{n_2} + \ldots + \overbrace{v_i + v_i + \ldots + v_i}^{n_i} + \ldots}{n}.$$

Бунда биз v_1 қўшилувчини n_1 марта, v_2 қўшилувчини n_2 марта олишимиз керак ва ҳоказо. Бинобарин $\bar{v}$ ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\bar{v} = \frac{n_1 v_1 + n_2 v_2 + \ldots + n_i v_i + \ldots}{n} = \frac{1}{n} \sum n_i v_i. \tag{99.6}$$

Молекула илгариланма ҳаракатининг ε кинетик энергияси устида ҳам худди шундай мулоҳазалар юритиб, бу энергиянинг ўртача қиймати учун қуйидаги ифодани топамиз:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum n_i' \varepsilon_i, \tag{99.7}$$

бу ерда n_i' — энергияси деярли ε_i га тенг бўлган молекулалар сони.

Шуни қайд қиламизки, (99.7) га биноан, ҳажм бирлиги ичидаги молекулалар кинетик энергиясининг йиғиндиси $n\bar{\varepsilon}$ га, яъни ҳажм бирлигидаги молекулалар сонининг битта молекуланинг ўртача энергиясига кўпайтмасига тенг, шу билан бирга, бу натижа молекулаларнинг тезликлар бўйича тақсимоти қандай бўлишига боғлиқ эмас.

Молекулалар тезликлар бўйича бирор тарзда тақсимланган деб фараз қилиб, молекулаларнинг идиш деворига берадиган зарблари сонини аниқлаймиз. Тезлигининг қиймати v_i бўлган молекулалар орасида турли хил йўналишларда ҳаракат қилувчи молекулалар бор. Шунинг учун, соддароқ қилиб деворнинг ΔS элементига қараган йўналиш бўйича бундай молекулаларнинг 1/6 қисми ҳаракат қилади, деб ҳисоблаш мумкин. Бинобарин, тезлиги v_i бўлган молекулалардан Δt вақт ичида ΔS элементга (222- расм)

$$\Delta N_i = \frac{1}{6} n_i v_i \Delta S \Delta t \tag{99.8}$$

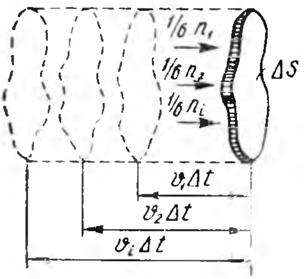
дона молекула етиб боради. Тезликлари ҳар қандай бўлган молекулалар берадиган зарбларнинг тўлиқ сони:

$$\Delta N = \sum \Delta N_i = \frac{1}{6} \Delta S \Delta t \sum n_i v_i.$$

(99.6) га мувофиқ равишда $\sum n_i v_i$ 'ни $n\bar{v}$ билан алмаштириб, бирлик юзга вақт бирлиги ичида бериладиган зарблар сонини қуйидагича[1] ифодалаймиз:

$$\frac{\Delta N}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{6} n\bar{v}. \tag{99.9}$$

Бу ифода-биз олдин топган (99.3) ифодадан фақат шу билан фарқ қиладики, унда ҳамма молекулалар учун бир хил бўлган v тезлик ўрнида молекулаларнинг ўртача $\bar{v}$ тезлиги қатнашади.



222- расм.

ΔN_i молекулалардан ҳар бири [(99.8) га қ.] деворга урилганида унга $2mv_i$ импульс беради. Ҳар хил тезликли молекулаларнинг Δt вақт ичида ΔS элементга берадиган натижавий импульси қуйидагига тенг:

$$\Delta K = \sum 2mv_i \Delta N_i = \sum 2mv_i \frac{1}{6} n_i v_i \Delta S \Delta t.$$

Босимни топиш учун ΔK ни ΔS ва Δt га бўлиш керак:

$$p = \frac{2}{3} \sum n_i \frac{mv_i^2}{2} = \frac{2}{3} \sum n_i \varepsilon_i,$$

бу ерда $\varepsilon_i = mv_i^2/2$ — тезлиги v_i бўлган молекула илгариланма ҳаракатининг кинетик энергияси.

---

[1] Бу формула тақрибий формуладир. Аниқроқ ҳисобланганда (бундан кейинги параграфга қаранг) қуйидаги формула ҳосил бўлади:

$$\frac{\Delta N}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{4} n\bar{v}.$$

(99.7) га мувофиқ равишда $\sum n_i \varepsilon_i$ ни $n\bar{\varepsilon}$ билан алмаштириб, p босимни топамиз:

$$p = \frac{2}{3} n\bar{\varepsilon} = \frac{2}{3} n \frac{\overline{mv^2}}{2}. \qquad (99.10)$$

Бу ифода олдин топилган (99.5) ифодадан шу билан фарқ қиладики, ҳамма молекулалар учун бир хил бўлган ε энергия ўрнида бу ифодада ўртача $\bar{\varepsilon}$ энергия қатнашади.

Газларнинг кинетик назариясида (99.10) тенглама асосий тенглама ҳисобланади. Бу тенгламага асосан, *босим ҳажм бирлигидаги молекулалар илгариланма ҳаракати кинетик энергиясининг учдан икки қисмига тенг.*

(99.10) дан шу нарса кўринадики, n ўзгармас бўлганда (яъни берилган газ массасининг ҳажми ўзгармас бўлганда) босим молекула илгариланма ҳаракатининг ўртача $\bar{\varepsilon}$ кинетик энергиясига пропорционалдир. Шу билан бирга биз бундан олдинги параграфда кўрдикки, идеал газ шкаласи бўйича ўлчанган T температура идеал газнинг ҳажм ўзгармас бўлгандаги босимига пропорционал катталик сифатида аниқланади. Бундан T температура $\bar{\varepsilon}$ га пропорционал деган хулоса чиқади. T абсолют температура билан $\bar{\varepsilon}$ орасидаги пропорционаллик коэффициентини топиш учун (99.10) тенгламани идеал газ ҳолатининг (98.13) тенгламаси билан таққослаймиз. Бунинг учун (99.10) тенгламани киломолнинг $V_{км}$ ҳажмига кўпайтирамиз:

$$pV_{км} = \frac{2}{3}(nV_{км})\bar{\varepsilon}.$$

Ҳажм бирлигидаги молекулалар сонининг бир киломолнинг ҳажмига кўпайтмаси Авогадро сонига тенг эканлигини ҳисобга олиб, ҳозиргина ёзилган тенгликни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$pV_{км} = \frac{2}{3}N_А\bar{\varepsilon}.$$

Бу тенгламани бир киломоль идеал газнинг $pV_{км} = RT$ ҳолат тенгламаси билан таққослаб, қуйидаги хулосага келамиз:

$$\frac{2}{3}N_А\bar{\varepsilon} = RT,$$

бундан

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}kT, \qquad (99.11)$$

бу тенгламада Больцман доимийси деб аталадиган $R/N_А$ катталик k ҳарфи билан белгиланган. Унинг қиймати:

$$k = \frac{R}{N_А} = \frac{8{,}31\cdot10^3}{6{,}02\cdot10^{26}} = 1{,}38\cdot10^{-23}\,\frac{ж}{град} = 1{,}38\cdot10^{-16}\,\frac{эрг}{град}.$$

Шундай қилиб, биз муҳим хулосага келдик: абсолют температура битта молекула ҳаракатининг ўртача энергиясига пропорционал бўлган катталикдир. Бу хулоса фақат газлар учунгина эмас, балки ҳар қандай ҳолатдаги модда учун ҳам тўғридир.

(99.11) ифода шу жиҳатдан ажойибки, унда ўртача $\bar{\varepsilon}$ энергия фақат температурага боғлиқ бўлиб, молекуланинг массасига боғлиқ эмас.

Идеал газ ҳолатининг тенгламасида R ўрнига $N_A k$ қўйиб ва $N_A/V_{км}$ нисбатнинг n га тенг эканлигини ҳисобга олиб, босим учун қуйидаги муҳим формулани топиш мумкин:

$$p = nkT. \qquad (99.12)$$

Агар бир қанча хил газдан иборат аралашма олсак, ундаги массалари ҳар хил бўлган молекулаларнинг ўртача тезлиги ҳар хил бўлсада, бироқ молекулаларнинг ўртача энергияси айни бир хил бўлади. Бу ҳолда босим қуйидагига тенг бўлади:

$$p = nkT = (n_1 + n_2 + \ldots)\,kT, \qquad (99.13)$$

бу ерда n_1, n_2 ва ҳоказолар ҳажм бирлигидаги биринчи, иккинчи ва ҳоказо навли молекулаларнинг миқдорини билдиради. (99.13) ифодани

$$p = n_1kT + n_2kT + \ldots$$

кўринишида тасвирлаш мумкин. Лекин n_1kT ифода — борди-ю идишда фақат биринчи навли молекулалар бўлганда юзага келадиган p_1 босим, n_2kT ифода—идишда фақат иккинчи навли молекулалар бўлганда юзага келадиган p_2 босим ва ҳоказо. Идишда бирор навли молекулаларнинг фақат ўзлари аралашмадагича миқдорда бўлганда юзага келадиган босим газ аралашмасининг тегишли компонентасининг **парциал босими** деб аталади. Парциал босим тушунчасини киритиб, (99.13) га асосан, қуйидаги тенгликни ёзиш мумкин:

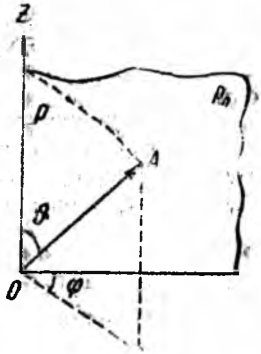
$$p = p_1 + p_2 + \ldots = \sum p_i. \qquad (99.14)$$

Шундай қилиб, биз **Дальтон қонунини** топдик, бу қонунга биноан: *идеал газлар аралашмасининг босими шу аралашмадаги газлар парциал босимларининг йиғиндисига тенг.*

100- §. Молекулалар тезликларининг йўналишлар бўйича тақсимланишини аниқ ҳисобга олиш

Бу параграфда биз молекулалар фақат ўзаро перпендикуляр бўлган учта йўналиш бўйлабгина ҳаракат қилади, деган содда тасаввурдан фойдаланмай, молекулаларнинг деворга берадиган зарблари сонини аниқ ҳисоблаб чиқамиз. Ундан ташқари, ана шу соддалаштириш босимнинг бундан олдинги параграфда топилган (99.4) ифодасига таъсир этмаслигини ҳам кўрсатамиз.

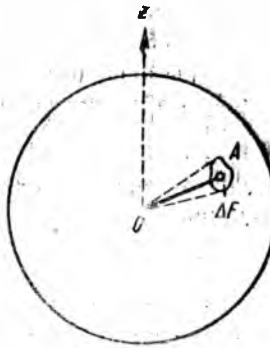
Фазодаги ҳар қандай йўналишни бирор O нуқтадан бошлаб чизилган ва йўналишга эга бўлган OA кесма шаклида тасвирлаш мумкин (223- расм). O нуқта орқали Z ўқ ва шу ўқ орқали P_0 текислик ўтказамиз. OZ ўқ орқали ўтадиган P текислик (OA йўналиш шу текисликда ётади) саноқ боши деб қабул қилинган P_0 текислик билан φ бурчак ҳосил қилади. OA йўналиш OZ ўқ билан θ бурчак ҳосил қилади. Равшанки, θ ва φ бурчаклар берилса, OA йўналиш тўлиқ аниқланган бўлади. Ҳар хил йўналишлар учун φ бурчак 0 дан 2π гача, θ бурчак эса 0 дан π гача чегараларда ўзгаради.



223- расм.

Шундай қилиб, ҳар бир молекула учун берилган θ ва φ бурчакларнинг қийматлари орқали газ молекулаларининг ҳаракат йўналишини характерлаш мумкин экан. θ ва φ бурчаклар бирор тайинли OZ йўналишдан (бундай йўналиш сифатида, масалан, юзчага ўтказилган нормалнинг йўналишини олиш мумкин) ва шу ўқ орқали ўтган P_0 текисликдан бошлаб ҳисобланади.

Лекин бундан бошқача, янада кўргазмалироқ усулдан фойдаланиш мумкин. O нуқтани марказ қилиб ихтиёрий R радиусли сфера чизамиз (224- расм). Бу сферадаги ҳар қандай A нуқта O дан A га томон бўлган бирор йўналишни белгилайди. Бинобарин, газ молекулалари ҳаракатланадиган йўналишлар сферадаги нуқталар орқали берилиши мумкин.



224- расм.

Молекулаларнинг барча йўналишлар бўйлаб ҳаракатланиш эҳтимоли бир хил эканлиги шунга олиб келадики, молекулаларнинг ҳаракат йўналишини тасвирловчи нуқталар сферада бир хил ρ зичлик билан тақсимланади. Бу зичлик текширилаётган молекулалар N сонининг сфера сиртига бўлинганига тенг:

$$\rho = \frac{N}{4\pi R^2}. \qquad (100.1)$$

Молекулаларнинг ўзаро тўқнашиши натижасида уларнинг ҳаракат йўналиши ўзгаради, бунинг оқибатида N та нуқтанинг сфера сиртидаги вазияти муттасил ўзгариб туради. Лекин молекулалар ҳаракати тартибсиз бўлганлиги оқибатида нуқталарнинг зичлиги доим ўзгармай қолаверади.

Фазодаги мумкин бўлган йўналишлар сони чексиз кўп эканлиги равшан. Ҳар бир пайтда, текширилаётган молекулалар сонига (Nга) тенг бўлган чекли сондаги йўналишлар бўйлабгина молекулалар ҳаракат қилади. Шунинг учун, тайинли (сферадаги A нуқта билан тасвирланадиган ёки θ ва φ бурчакларнинг қийматлари билан аниқланадиган) ҳаракат йўналишига эга бўлган молекулаларнинг сони тўғрисидаги масала маънога эга эмас. Дарҳақиқат, мумкин бўлган йўналишлар сони чексиз катта, молекулалар сони чекли бўлгани учун аниқ бир йўналиш бўйлаб ҳеч бўлмаганда битта молекула ҳаракат қилиши эҳтимоли нолга тенг.

Мазкур йўналишга (θ ва φ бурчаклар билан аниқланадиган йўналишга) яқинроқ бўлган йўналишларда ҳаракатланадиган молекулалар сони ҳақидаги масалани қўйиш ўринли бўлади. Бундай йўналишларга сфера сиртининг A нуқта атрофида олинган ΔF элементининг барча нуқталари мос келади (224- расм). Молекулаларнинг ҳаракат йўналишини тасвирловчи нуқталар сферада бир текис тақсимланган бўлгани учун, ΔF элемент ичига тушадиган нуқталар сони қуйидагига тенг бўлади:

$$\Delta N_{\theta,\varphi} = \rho\Delta F = N\frac{\Delta F}{4\pi R^2} \qquad (100.2)$$

ΔN ёнида θ, φ индекслар бу ерда ҳаракатининг йўналиши θ ва φ бурчаклар билан аниқланадиган йўналишга яқин бўлган молекулалар назарда тутилганлигини кўрсатади. ΔF дан ўтувчи йўналишларни ўз ичига олган $\Delta\Omega = \Delta F/R^2$ фазовий бурчакни киритиб, (100.2) формулани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\Delta N_{\theta,\varphi} = N\frac{\Delta\Omega}{4\pi}. \qquad (100.3)$$

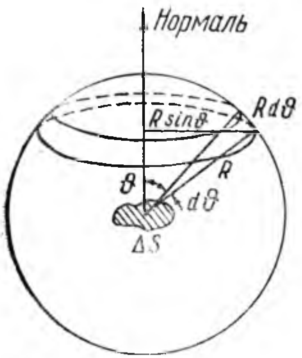
Молекулаларнинг деворга урилиш шароитлари (жумладан, зарб вақтида деворга бериладиган импульс) молекулалар ҳаракатининг йўналиши билан деворнинг ΔS элементига ўтказилган нормал орасидаги θ бурчаккагина боғлиқ бўлиб φ бурчакка боғлиқ эмас. Ҳажм бирлигидаги n молекуладан ҳаракати йўналиши нормал билан θ дан $\theta + d\theta$ гача чегарада бурчак ҳосил қиладиганларининг dn_θ сони қанча эканлигини топамиз. Бунинг учун (100.2) га мувофиқ, сфера сиртининг θ нинг бундай қийматларига мос келадиган dF элементини топиш керак. 225- расмдан кўринишича, сиртнинг бу элементи шар камаридан иборат бўлиб, унинг асосининг узунлиги, $2\pi R\sin\theta$ га ва эни $Rd\theta$ га тенг. Бундай камарнинг сирти

$$dF_\theta = 2\pi R\sin\theta R d\theta = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$

бўлади. Бинобарин, (100.2) га мувофиқ dn_θ ни топамиз:

$$dn_\theta = n\frac{2\pi R^2\sin\theta d\theta}{4\pi R^2} = \frac{1}{2}n\sin\theta d\theta. \qquad (100.4)$$

$\frac{1}{2}\sin\theta$ кўпайтувчи молекулаларнинг θ бурчак қийматларига қараб тақсимланишини



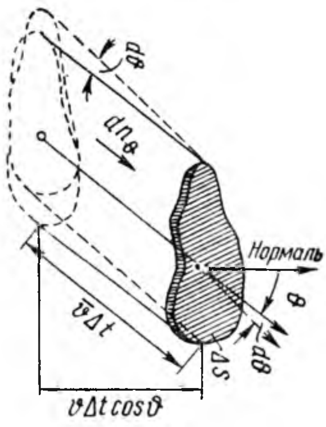
225- расм.

характерлайди. Агар молекулаларнинг айни бир $d\theta$ бурчаклар интервалига тўғри келадиган, лекин θ нинг қийматлари билан фарқ қиладиган dn_θ миқдорларини таққосласак, у ҳолда бундай dn_θ лар $\sin\theta$ каби ўзгаради.

Энди молекулаларнинг ΔS юзга Δt вақт ичида берадиган зарблари сонини топамиз. Ҳаракатининг йўналиши ΔS га ўтказилган нормал билан $\theta + d\theta$ гача оралиқда ётувчи бурчаклар ҳосил қиладиган молекулалардан 226- расмда кўрсатилган оғма цилиндрнинг ΔV ҳажми ичидаги барча dn_θ таси ΔS га Δt вақт ичида етиб боради[1]. ΔV ҳажм қуйидагига тенг:

$$\Delta V = \Delta S v \Delta t \cos\theta,$$

бу ерда v — барча молекулалар учун бир хил деб фараз қилинган тезлик.



226- расм.

Ҳажм бирлигидаги бизни қизиқтираётган молекулалар сони (100.4) формула билан аниқланади. Шунинг учун,

$$dN_\theta = dn_\theta \Delta V = \frac{1}{2} n \sin\theta d\theta \Delta S v \Delta t \cos\theta. \qquad (100.5)$$

Бу ифодани 0 дан $\pi/2$ гача соҳада θ бўйича интеграллаб[2], ΔS юзга Δt вақт ичида бериладиган зарбларнинг тўлиқ сонини топамиз:

$$\Delta N = \int dN_\theta = \frac{1}{2} nv\Delta S\Delta t \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{1}{4} nv\Delta S\Delta t.$$

Бундан фойдаланиб, бирлик юзга вақт бирлиги ичида бериладиган зарблар сонини қуйидагича ифодалаймиз:

$$\frac{\Delta N}{\Delta S\Delta t} = \frac{1}{4} nv. \qquad (100.6)$$

Бу ифода биз олдинги параграфда топган (99.3) ифодадан 3/2 га тенг бўлган кўпайтувчи билангина фарқ қилади.

Энди газнинг деворга берадиган босимини ҳисоблашга ўтамиз. Деворга θ бурчак остида келиб уриладиган ҳар бир молекула деворга нормал бўйича йўналган ва $2mv\cos\theta$ га тенг бўлган импульс беради (227- расм). Деворнинг ΔS элементига Δt вақт ичида (100.5)

[1] θ бурчаги тайин қийматга эга бўлган барча йўналишларни биз фикран φ бурчакнинг ихтиёрий қийматига мос келувчи битта тексликка келтирамиз.
[2] θ нинг $\pi/2$ дан π гача бўлган қийматларига ΔS дан кетаётган молекулалар мос келади.

формула билан аниқланувчи dN_θ дона молекула θ бурчак остида келиб урилади. Бинобарин, бу молекулаларнинг ΔS юзга берадиган импульси қуйидагига тенг:

$$dK_\theta = 2mv\cos\theta dN_\theta = nmv^2\Delta S\Delta t\cos^2\theta\sin\theta d\theta.$$

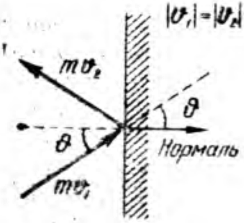
Барча йўналишлардаги молекулаларнинг ΔS га берадиган тўлиқ ΔK импульси интеграллаш йўли билан топилади:

$$\Delta K = \int dK_\theta = nmv^2\Delta S\Delta t\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta d\theta = \frac{1}{3}nmv^2\Delta S\Delta t.$$

Шунинг учун босим қуйидагича ифодаланади:

$$p = \frac{\Delta K}{\Delta S\Delta t} = \frac{1}{3}nmv^2. \qquad (100.7)$$

(100.7) ифода босимнинг молекулалар фақат ўзаро перпендикуляр бўлган учта йўналиш бўйлаб ҳаракат қилади деган фаразга асосланиб топилган (99.4) ифодаси билан бир хил бўлиб чиқди. Бу икки ифоданинг бир хил бўлиб чиқишининг сабаби шундаки, юқорида биз қилган фараз натижасида, бир томондан, молекулаларнинг деворга урилиш сони камайса [(100.6) ни (99.3) га солиштиринг], иккинчи томондан, ҳар бир зарбда деворга бериладиган импульс ортади. (99.4) формулани чиқаришда биз ҳар бир зарбда деворга $2mv$ га тенг бўлган импульс берилади, деб ҳисоблаган эдик. Аслида эса деворга бериладиган импульснинг катталиги θ бурчакка боғлиқ, шунинг учун бир зарбда бериладиган ўртача импульс $\frac{4}{3}mv$ га тенг бўлади. Натижада бу иккала аниқмаслик бир-бирини компенсациялайди ва масалани соддалаштириб қараганда ҳам босим учун аниқ ифода келиб чиқаверади.



227- расм.

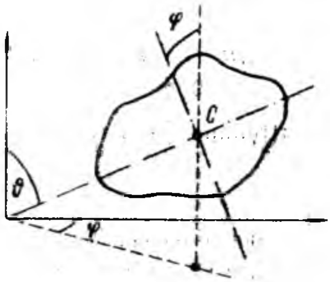
101- §. Энергиянинг молекула эркинлик даражалари бўйича текис тақсимланиши

Молекула ўртача энергиясининг 99- § да топилган

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2}kT \qquad (101.1)$$

ифодаси молекуланинг илгариланма ҳаракати энергиясинигина ҳисобга олади. Лекин молекула илгариланма ҳаракат қилиш билан бир қаторда айланиши ва унинг таркибидаги атомлар тебранма ҳаракат қилиши мумкин. Ҳаракатнинг бу иккала турига энергиянинг бирор запаси тўғри келади. Бу энергия запаси молекуланинг эркинлик даражалари бўйича энергиянинг текис тақсимланиши тўғрисидаги қонунга асосан аниқланади; бу қонун статистик физикада аниқланади.

Механик системанинг эркинлик даражалари сони деб, системанинг вазиятини ифодалай оладиган эркли катталиклар сонига айтилади. Масалан, моддий нуқтанинг фазодаги вазияти унинг учта координатасининг (масалан, x, y, z декарт координаталари ёки r, θ, φ сферик координаталар ва ҳоказо) қийматлари билан тўлиқ аниқланади. Шунга мувофиқ равишда моддий нуқтанинг эркинлик даражалари сони учга тенгдир.



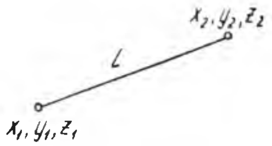
228- расм.

Абсолют қаттиқ жисмнинг вазиятини аниқлаш учун унинг инерция марказининг учта (x, y, z) координатаси, жисм билан боғланган ва унинг инерция маркази (228- расм) орқали ўтувчи бирор ўқнинг йўналишини кўрсатувчи иккита θ ва φ бурчак ва, ниҳоят, жисм билан боғланган ва биринчи ўққа перпендикуляр бўлган иккинчи ўқнинг йўналишини белгиловчи ψ бурчак берилган бўлиши керак. Шундай қилиб, абсолют қаттиқ жисм олтита эркинлик даражаларига эга, θ, φ ва ψ бурчаклар ўзгармаган шароитда инерция марказининг координаталари қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракати туфайлигина ўзгаради. Шунинг учун бунга мос эркинлик даражалари илгариланма эркинлик даражалари деб аталади. Инерция марказининг вазияти ўзгармас бўлганда θ, φ, ψ бурчаклардан исталган биттасининг ўзгаришига жисмнинг айланиши сабаб бўлади, шунинг учун буларга мос эркинлик даражалари айланма эркинлик даражалари деб аталади. Бинобарин, абсолют қаттиқ жисмнинг олтита эркинлик даражасидан учтаси илгариланма ва учтаси айланма эркинлик даражалари экан.

Ораларида қаттиқ боғланишлари бўлмаган N дона моддий нуқтадан иборат системанинг $3N$ эркинлик даражалари бўлади (N та нуқтадан ҳар бирининг вазияти учта координата билан ифодаланиши керак). Икки нуқтанинг бир-бирига нисбатан вазиятини ўзгартирмай турадиган ҳар қандай қаттиқ боғланиш эркинлик даражалари сонини биттага камайтиради. Масалан, система ораларидаги l масофа ўзгармай турадиган иккита моддий нуқтадан иборат бўлса (229- расм), у ҳолда системанинг эркинлик даражалари сони бешга тенг бўлади. Дарҳақиқат, бу ҳолда нуқталарнинг координаталари ўртасида

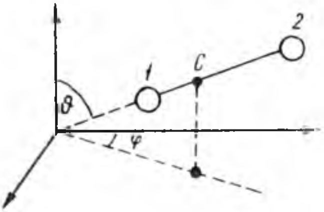
$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2 \qquad (101.2)$$

муносабат ўринли бўлади, бунинг натижасида координаталар эркин бўлмай қолади: координаталардан ихтиёрий бештаси берилган бўлса, олтинчи координата (101.2) шартдан аниқланади. Бу бешта эркинлик даражасини классификация қилиш учун бир-бирига маҳкам боғланган иккита моддий нуқтадан иборат системанинг вазиятини қуйидагича аниқлаш мумкин эканлигини эслатиб ўтамиз: бунинг учун система инерция марказининг учта координатаси (230- расм) ва фазода система ўқининг (яъни ўша икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқнинг) йўналишини аниқлайдиган иккита θ ва φ бурчак берилган бўлиши керак. Бундан эркинлик даражаларининг учтаси илгариланма ва иккитаси айланма эркинлик даражалари эканлиги келиб чиқади. Айланма эркинлик даражалари системанинг OO ўқига перпендикуляр бўлган иккита ўзаро перпендикуляр $O'O'$ ва $O''O''$ ўқ атрофида айланишга мос келади (231- расм). OO ўқ атрофида айланиш моддий нуқталар учун маънога эга эмас.

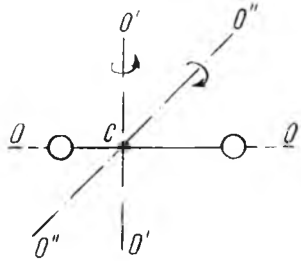


229- расм.

Агар иккита моддий нуқта бир-бирига қаттиқ боғланиш билан эмас, балки эластик боғланиш билан (яъни нуқталар орасидаги му-



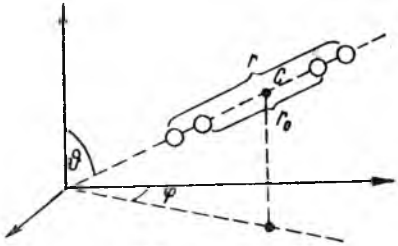
230- расм.



231- расм.

возанатли r_0 масофа ҳар қандай ўзгарганда нуқталар орасидаги масофани бошланғич ҳолатига қайтаришга интилувчи кучлар пайдо бўладиган қилиб) боғланган бўлса, унда эркинлик даражалари сони олтига тенг бўлади. Бу ҳолда системанинг вазиятини аниқлаш учун инерция марказининг (232- расм) учта координатасини, иккита θ, φ бурчак ва нуқталар орасидаги r масофани бериш керак. r нинг ўзгаришлари системадаги тебранишларга мос келади, шунинг учун бу эркинлик даражаси тебранма эркинлик даражаси деб аталади. Шундай қилиб, кўриб ўтилган бу система учта илгариланма, иккита айланма ва битта тебранма эркинлик даражасига эга.

Бир-бири билан эластик равишда боғланган N та моддий нуқтадан иборат системани кўриб чиқамиз. Бундай система $3N$ та эркинлик даражасига эга. Нуқталарнинг системанинг потенциал энергияси минимумига мос келадиган мувозанатли конфигурацияси мавжуддир. Мувозанатли конфигурация нуқталар орасидаги масофаларнинг тайинли бўлиши билан характерланади. Агар нуқталар мувозанатли конфигурацияга мос келадиган вазиятлардан чиқарилса, системада тебранишлар юзага келади. Системанинг вазиятини аниқлаш учун мувозанатли конфигурациянинг вазиятини ва нуқталарнинг мувозанатли вазиятлардан кўчишини характерловчи катталикларни бериш керак. Нуқталарнинг мувозанат вазиятидан кўчишини характерлайдиган катталиклар тебранма эркинлик даражаларига мос келади.



232- расм.

Мувозанатли конфигурациянинг вазияти, абсолют қаттиқ жисмнинг вазияти каби, олтита катталик билан аниқланади, буларнинг учтасига илгариланма ва учтасига айланма эркинлик даражалари мос келади. Шундай қилиб, тебранма эркинлик даражалари миқдори $3N-6$ га тенг бўлади[1].

Газларнинг иссиқлик сиғимини аниқлашга доир тажрибалардан шундай хулоса чиқадики, молекуланинг эркинлик даражалари сонини аниқлашда атомларни моддий нуқта деб қараш керак. Бинобарин, бир атомли молекуланинг учта илгариланма эркинлик даражаси бўлади деб, икки атомли молекуланинг атомлар орасидаги боғланишнинг характерига қараб учта илгариланма ва иккита айланма (боғланиш қаттиқ бўлган ҳолда) эркинлик даражаси бўлади деб ёки боғланиш эластик бўлганда бу бешта эркинлик даражасидан ташқари яна битта, яъни тебранма эркинлик даражаси бўлади деб, боғланиши қаттиқ бўлган уч атомли молекуланинг учта илгариланма ва учта айланма эркинлик даражаси бўлади деб ҳисоблаш лозим ва ҳоказо.

Шуни қайд қиламизки, молекуланинг эркинлик даражалари нечта бўлмасин, улардан учтаси илгариланма эркинлик даражалари бўлади. Молекуланинг илгариланма эркинлик даражаларидан ҳеч бири бошқаларидан афзал бўлмагани учун уларнинг ҳар бирига ўрта ҳисобда (101.1) қийматнинг учдан бир қисмига тенг бўлган, яъни $kT/2$ га тенг бўлган энергия тўғри келиши керак. Ҳаракат турларининг ҳеч бири бошқаларидан афзал эмас ва бинобарин, эркинлик даражаларидан ихтиёрий биттасига, яъни илгариланма, айланма ва тебранма эркинлик даражаларидан ихтиёрий биттасига ўрта ҳисобда бир хил ва $kT/2$ га тенг энергия (аниқроқ айтганда, кинетик энергия) тўғри келиши керак деб фараз қилиш табиийдир. Бу даъво молекуланинг эркинлик даражалари бўйича энергиянинг текис тақсимланиши тўғрисидаги қонуннинг мазмунидан иборат. Бу қоиданинг нақадар тўғри эканлиги бундан кейинги параграфда аниқланади.

---

[1] Нуқталарнинг мувозанат вазиятлари бир тўғри чизиқда ётмайди, деб фараз қилинади. Акс ҳолда айланма эркинлик даражалари фақат иккита, тебранма эркинлик даражалари эса $3N-5$ бўлади. Иккита нуқтадан иборат системани текширганда биз худди мана шундай ҳолни учратган эдик.

Энергиянинг текис тақсимланиши тўғрисидаги қонунга асосан, молекула қанчалик мураккаб, унинг эркинлик даражалари қанча кўп бўлса, бу молекула энергиясининг $\bar{\varepsilon}$ ўрта қиймати (ўша температурада) шунча кўпроқ бўлади. $\bar{\varepsilon}$ ни аниқлашда молекуланинг тебранма эркинлик даражасининг энергетик сиғими илгариланма ёки айланма эркинлик даражасиникига қараганда икки марта катта бўлиши лозим эканлигини ҳисобга олиш керак. Бунинг сабаби шундаки, молекуланинг илгариланма ва айланма ҳаракатида фақат кинетик энергия бор бўлса, тебранма ҳаракатда кинетик энергия ҳам, потенциал энергия ҳам бўлади; шу билан бирга, гармоник осцилляторда кинетик ва потенциал энергиянинг ўрта қиймати бир хил бўлар экан. Шу сабабдан ҳар бир тебранма эркинлик даражасига ўрта ҳисобда бири кинетик энергия тарзидаги ва яна бири потенциал энергия тарзидаги иккита $kT/2$ тўғри келиши керак.

Шундай қилиб, молекуланинг ўртача энергияси қуйидагига тенг бўлиши керак:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{i}{2}kT, \tag{101.3}$$

бу ерда i — молекуланинг илгариланма, айланма ва иккиланган тебранма эркинлик даражалари сонларининг йиғиндиси:

$$i = n_{\text{илг}} + n_{\text{айл}} + 2n_{\text{теб}}. \tag{101.4}$$

Атомлари орасидаги боғланиши қаттиқ бўлган молекулаларда i нинг қиймати молекуланинг эркинлик даражалари сони билан бир хил бўлади.

102- §. Идеал газнинг ички энергияси ва иссиқлик сиғими

Идеал газ молекулалари бир-бири билан олисдан ўзаро таъсирлашмаганлиги сабабли бундай газнинг ички энергияси айрим молекулалар энергияларининг йиғиндисига тенг бўлади. Бинобарин, бир киломоль идеал газнинг ички энергияси Авогадро сони билан битта молекуланинг ўртача энергияси кўпайтмасига тенг бўлади:

$$U_{\text{км}} = N_A\bar{\varepsilon} = \frac{i}{2}N_A kT = \frac{i}{2}RT. \tag{102.1}$$

Ихтиёрий m массали газнинг ички энергияси бир молнинг ички энергияси билан m массадаги киломоллар сонининг кўпайтмасига тенг бўлади:

$$U = \frac{m}{\mu}U_{\text{км}} = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RT. \tag{102.2}$$

Бирор жисмнинг иссиқлик сиғими деб, шу жисмнинг температурасини бир градусга кўтариш учун шу жисмга берилиши зарур бўлган иссиқлик миқдорига тенг катталикка айтилади. Агар жисмга $d'Q$ иссиқлик миқдори берилганда унинг температураси dT қадар ортса, у ҳолда таърифга кўра жисмнинг иссиқлик сиғими қуйидагича бўлади:

$$C_{жисм} = \frac{d'Q}{dT}. \qquad (102.3)$$

(102.3) катталикнинг ўлчамлиги *ж/град* бўлади.

Бир киломоль модданинг иссиқлик сиғимини C ҳарфи билан белгилаймиз. C нинг ўлчамлиги *ж/град·кмоль* бўлади.

Модда массаси бирлигининг иссиқлик сиғими **солиштирма иссиқлик сиғими** деб аталади. Уни биз c ҳарфи билан белгилаймиз. c нинг ўлчамлиги *ж/град·кг.*

Бир киломоль модданинг иссиқлик сиғими билан ўша модданинг солиштирма иссиқлик сиғими ўртасида қуйидаги муносабат бор:

$$c = \frac{C}{\mu}. \qquad (102.4)$$

Иссиқлик сиғимининг катталиги жисмни иситиш вақтидаги шароитларга боғлиқ бўлади. Жисм ҳажми ўзгармайдиган шароитда ёки босими ўзгармайдиган шароитда иситилган ҳоллардаги иссиқлик сиғими энг кўп қизиқиш уйғотади. Биринчи ҳолда иссиқлик сиғими ўзгармас ҳажм шароитидаги иссиқлик сиғими деб аталади ва C_V билан белгиланади, иккинчи ҳолда ўзгармас босим шароитидаги иссиқлик сиғими деб аталади ва C_p билан белгиланади.

Агар жисм ҳажми ўзгармайдиган шароитда иситилса, бу жисм ташқи жисмлар устида иш бажармайди ва, бинобарин, термодинамиканинг биринчи асосига (95.4) га қ. мувофиқ, бутун иссиқлик жисмнинг ички энергиясини орттиришга кетади:

$$d'Q_V = dU. \qquad (102.5)$$

(102.5) дан ҳар қандай жисмнинг ўзгармас ҳажм шароитидаги иссиқлик сиғими қуйидагига тенг эканлиги келиб чиқади:

$$C_V = \frac{dU}{dT}. \qquad (102.6)$$

Бинобарин, бир киломоль идеал газнинг ўзгармас ҳажм шароитидаги иссиқлик сиғимини топиш учун газ ички энергиясининг (102.1) ифодасини температура бўйича дифференциаллаш керак. Дифференциаллаб C_V ни топамиз,

$$C_V = \frac{i}{2}R. \qquad (102.7)$$

Бу ифодадан идеал газнинг ўзгармас ҳажм шароитидаги иссиқлик сиғими газ ҳолатининг параметрларига, жумладан температурага боғлиқ бўлмаган ўзгармас катталик эканлиги келиб чиқади.

Шуни эслатиб ўтамизки, (102.7) ни эътиборга олганда идеал газнинг ички энергиясини қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин:

$$U_{км} = C_V T. \qquad (102.8)$$

Агар газ ўзгармас босим шароитида иситилса, у ҳолда газ кенгайиб, ташқи жисмлар устида мусбат иш бажаради. Бинобарин, бу ҳолда газнинг температурасини бир градусга ошириш учун уни ўзгармас ҳажм шароитида иситгандагига қараганда кўпроқ иссиқлик керак; бу ҳолда иссиқликнинг бир қисми газнинг иш бажаришига сарф бўлади. Шунинг учун ўзгармас босим шароитидаги иссиқлик сиғими ўзгармас ҳажм шароитидаги иссиқлик сиғимидан каттароқ бўлиши керак.

Бир киломоль газ учун термодинамика биринчи асосининг (96.4) тенгламасини ёзамиз:

$$d'Q_p = dU_{\text{км}} + p\,dV_{\text{км}}. \qquad (102.9)$$

Бу ифодада $d'Q$ ёнида турган p индекс иссиқлик газга p босим ўзгармас бўлган шароитда берилаётганини кўрсатади. (102.9) ни dT га бўлиб, бир киломоль газнинг ўзгармас босим шароитидаги иссиқлик сиғимининг қуйидаги ифодасини топамиз:

$$C_p = \frac{dU_{\text{км}}}{dT} + p\left(\frac{dV_{\text{км}}}{dT}\right)_p. \qquad (102.10)$$

Юқорида кўриб ўтганимиздек, $\frac{dU_{\text{км}}}{dT}$ ҳад киломолнинг ўзгармас ҳажм шароитидаги иссиқлик сиғимидир. Шунинг учун (102.10) формула қуйидагича ёзилиши мумкин:

$$C_p = C_V + p\left(\frac{dV_{\text{км}}}{dT}\right)_p. \qquad (102.11)$$

$\left(\frac{dV_{\text{км}}}{dT}\right)_p$ катталик p босим ўзгармаганда киломолнинг температураси бир градусга ортганда унинг ҳажми олган орттирмадан иборат. (98.13) ҳолат тенгламасига мувофиқ равишда,

$$V_{\text{км}} = \frac{RT}{p}.$$

Бу ифодани T бўйича дифференциаллаб ($p = \text{const}$), қуйидагини топамиз:

$$\left(\frac{dV_{\text{км}}}{dT}\right)_p = \frac{R}{p}.$$

Ниҳоят, бу натижани (102.11) муносабатга қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$C_p = C_V + R. \qquad (102.12)$$

Шундай қилиб, босим ўзгармаганда бир киломоль идеал газнинг температураси бир градусга ортганда бажарадиган иши универсал газ доимийсига тенг бўлар экан.

Шуни қайд қиламизки, (102.12) муносабат идеал газ ҳолатининг тенгламасидан фойдаланиб топилди ва бинобарин, у фақат идеал газ учунгина тўғридир.

(102.7) формулани эътиборга олиб, C_p ни қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$C_p = \frac{i}{2}R + R = \frac{i+2}{2}R. \qquad (102.13)$$

(102.13) ни (102.7) га бўлиб, ҳар бир газ учун ўзига хос бўлган C_p нинг C_V га нисбатини топамиз:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}. \qquad (102.14)$$

(102.14) дан кўриниб турибдики, γ катталик молекула эркинлик даражаларининг сони ва характери билан аниқланар экан.

4- жадвалда C_V, C_p ва γ ларнинг ҳар хил молекулалар учун (102.7), (102.13) ва (102.14) формулалардан топиладиган қийматлари келтирилган.

5- жадвалда назариядан топилган натижалар экспериментал маълумотлар билан солиштирилган. Назариядан топилган қийматлар молекулалар қаттиқ деб қилинган фараз асосида (жадвалга берилган эслатмада кўрсатилган битта ҳолдан мустасно) олинган; экспериментал маълумотлар эса уй температурасига яқин температураларда топилган.

4- жадвал

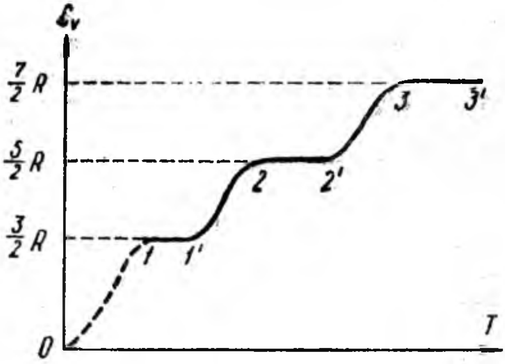
Молекула	Атомлар орасидаги богланиш характери	Эркинлик даражалари сони			i	C_V	C_p	γ
		Илгар.	айл.	тебр.				
Бир атомли	—	3	—	—	3	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$	1,67
Икки атомли	Қаттиқ	3	2	—	5	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$	1,40
«	Эластик	3	2	1	7	$\frac{7}{2}R$	$\frac{9}{2}R$	1,29
Атомларининг сони учта ва ундан ортиқ	Қаттиқ	3	3	—	6	$\frac{6}{2}R$	$\frac{8}{2}R$	1,33

5- жадвал

Газ	Молекуладаги атомлар сони	$C_V \cdot 10^{-3}$ ж/град. кмоль		$C_p \cdot 10^{-3}$ ж/град. кмоль		γ	
		назар.	тажр.	назар.	тажр.	назар.	тажр.
Гелий (He)	1	12,5	12,5	20,8	20,9	1,67	1,67
Кислород (O_2)	2	20,8	20,9	29,1	28,9	1,40	1,40
Углерод оксиди (CO) . . .	2	20,8	21,0	29,1	29,3	1,40	1,40
Сув буғлари (H_2O) . . .	3	25,0 33,2*	27,8	33,2 41,5*	36,2	1,33 1,25*	1,31

* Бу маълумотлар $i = 8$ бўлган, яъни яна битта қўшимча тебранма эркинлик даражаси бор деган ҳолга тегишли.

5- жадвалдан кўриниб турганидек, биринчи қарашда назария ва тажриба натижалари ҳеч бўлмаганда бир атомли ва икки атомли молекулалар учун жуда қаноатланарли даражада мос келади. Аслида эса шундай эмас. Биз кўриб ўтган назарияга мувофиқ, газларнинг иссиқлик сиғимлари $R/2$ га каррали бўлган бутун сонлар бўлиши керак, чунки эркинлик даражалари сони фақат бутун сон бўла олади. Шунинг учун C_V ва C_p нинг $R/2$ га каррали бўлган



233- расм

қийматларидан салгина фарқ қилиши принципиал роль ўйнайди. Жадвалдан кўриниб турибдики, бундай фарқлар бор, ҳатто улар ўлчашлар вақтида йўл қўйилиши мумкин бўлган хатолардан анча катта.

Иссиқлик сиғимининг температурага қараб ўзгаришига мурожаат қилинганда назария билан эксперимент орасидаги келишмовчилик айниқса сезиларли бўлиб қолади. Бир киломоль водороднинг C_V иссиқлик сиғими билан температура орасидаги боғланишнинг тажрибада топилган эгри чизиғи 233- расмда тасвирланган. Назарияга мувофиқ, иссиқлик сиғими температурага боғлиқ бўлмаслиги керак [(102.7) га қ]. Расмдан кўриниб турибдики, бу ҳол маълум температура интерваллари ичидагина тўғри бўлади. Лекин ҳар хил интервалларда иссиқлик сиғимининг қийматлари молекуланинг эркинлик даражалари сонининг ҳар хил қийматларига мос келади. Масалан, $1—1'$ қисмда C_V иссиқлик сиғими $3/2R$ га тенг. Демак, молекула ўзини фақат илгариланма эркинлик даражаларига эга бўлган система каби тутади. $2—2'$ қисмда C_V иссиқлик сиғими $\frac{5}{2}R$ га тенг. Бинобарин, бу қисмга тегишли температураларда молекулада анча пастроқ температураларда намоён бўладиган учта илгариланма эркинлик даражаларига яна иккита айланма эркинлик даражаси қўшилади. Ниҳоят, етарли даражада юқори температураларда C_V иссиқлик сиғими $\frac{7}{2}R$ га тенг бўлиб қолади, бу ҳол эса бундай температураларда молекула тебранма ҳаракат қилишидан далолат беради. Айтиб ўтилган бу интерваллар орасида иссиқлик сиғими температурага боғлиқ равишда монотон ўсади, яъни иссиқлик сиғими эркинлик даражаларининг бутун бўлмаган ўзгарувчи сонига мос келгандай бўлади.

Шундай қилиб, молекуланинг иссиқлик сиғимида намоён бўладиган эркинлик даражалари сони температурага боғлиқ экан. Паст температураларда молекулалар фақат илгариланма ҳаракат қилади. Юқорироқ температураларда молекулалар илгариланма ҳаракат қилиши билан бирга айланади ҳам. Ниҳоят, янада юқорироқ температураларда ҳаракатнинг олдинги иккита турига молекулаларнинг тебранма ҳаракати ҳам қўшилади. Иссиқлик сиғими эгри чизиғининг монотон юришидан шу нарса кўринадики, бунда айланма, сўнгра эса тебранма ҳаракат қилишга молекулаларнинг ҳаммаси бирданига киришмайди. Аввал, масалан, молекулаларнинг озроқ қисми айланма ҳаракатга келади. Температура кўтарилиши билан бундай молекулалар сони орта бориб, маълум бир температурага эришилгач, молекулаларнинг деярли ҳаммаси айланма ҳаракат қиладиган бўлади. Молекулаларнинг тебранма ҳаракати учун ҳам шундай ҳодиса содир бўлади.

Иссиқлик сиғимининг характери бундай бўлиши сабабини квант механикаси шарҳлаб беради. Квант назариясининг кўрсатишича, молекулаларнинг айланма ва тебранма ҳаракатлари энергияси квантланган бўлади. Бунинг маъноси шуки, молекуланинг айланма ҳаракат энергияси ва тебраниш энергияси ихтиёрий қийматларга эмас, балки фақат дискрет қийматларга (яъни бир-биридан чекли миқдорга фарқ қилувчи алоҳида қийматларга) эга бўлади. Бинобарин, ҳаракатнинг бу турларига тегишли бўлган энергия фақат сакраб ўзгариши мумкин. Илгариланма ҳаракат энергияси учун эса бундай чекланиш йўқ, яъни у узлуксиз ўзгаради.

Тебранишларга тегишли энергиянинг йўл қўйиладиган алоҳида қийматлари (ёки физикада қабул қилинганича айтганда, энергия сатҳлари) орасидаги интерваллар айланма ҳаракат энергиясиникидан бир тартиб юқори бўлади. Икки атомли молекуланинг айланма ва тебранма сатҳларининг соддалаштирилган схемаси 234- расмда берилган[1].

106- § да биз газ молекулаларининг кўпчилигининг энергияси ўртача $\bar{\varepsilon}$ энергия қийматига яқин бўлиб, жуда оз қисмининггина энергияси ўртача $\bar{\varepsilon}$ энергиядан анча катта бўлишини кўрамиз. Шу туфайли молекулаларнинг сезиларли улуши айланма ёки тебранма ҳаракатда иштирок этиши учун уларнинг ўртача энергияси тегишли энергиянинг йўл қўйиладиган сатҳлари орасидаги масофага нисбатан етарли даражада катта бўлиши керак.

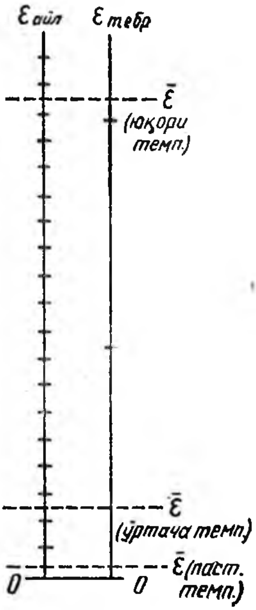
Шунчалик паст температура олайликки, бунда молекуланинг $\bar{\varepsilon}$ ўртача энергияси айланма ҳаракат энергиясининг йўл қўйиладиган

[1] Аслида айланма сатҳлари орасидаги масофалар бир хил эмас. Лекин бунинг биз текшираётган масала учун аҳамияти йўқ.

биринчи қийматидан анча кам бўлсин (234- расмдаги пастки пунктир тўғри чизиққа қаранг). У вақтда барча молекулаларнинг арзимаган қисмигина айланма ҳаракат қилади. Шунинг учун газ молекулалари фақат илгариланма ҳаракат қилади, деса бўлади. Температуранинг унча катта бўлмаган ўзгаришлари илгариланма ҳаракат энергиясинигина ўзгартиради. Шунинг учун газнинг иссиқлик сиғими $\frac{3}{2}R$ га тенг бўлиб чиқади (233- расмда тасвирланган эгри чизиқнинг $1—1'$ қисмига қаранг).

Температура кўтарилганда $\bar{\varepsilon}$ ортади, бунинг натижасида молекулаларнинг борган сари кўпроқ қисми айланма ҳаракат қила бошлайди. Бу процессга 233- расмдаги эгри чизиқнинг $1'—2$ қисми мос келади.

Молекулаларнинг ҳаммаси айланма ҳаракатда иштирок этадиган бўлгандан кейин $2—2'$ горизонтал қисм бошланади. Бу қисмга тегишли температураларда ҳали $\bar{\varepsilon}$ ўртача энергия тебраниш энергиясининг йўл қўйиладиган сатҳлари орасидаги масофадан анча кичик бўлганлиги учун амалда молекулалар тебранмайди. Температура янада кўтарила боргани сари тобора кўпроқ молекула тебранма ҳаракат қилишга интила боради, бу процессга иссиқлик сиғими эгри чизиғининг $2'—3$ ўтиш қисми мос келади. Ниҳоят, етарлича юқори температурада барча молекулалар тебранма ҳаракатда иштирок эта бошлайди, шунинг учун иссиқлик сиғими $\frac{7}{2}R$ га тенг бўлиб қолади.



234- расм.

Иссиқлик сиғимининг биз илгари сурган классик назариясига қайтар эканмиз, унинг натижалари айрим температура интерваллари учун тахминан тўғри ва шу билан бирга, ҳар бир интервалга молекуланинг ўз эркинлик даражалари сони мос келади, деб айтиш мумкин.

103- §. Идеал газ адиабатасининг тенгламаси

Ташқи муҳит билан иссиқлик алмашмасдан юз берадиган процесс адиабатик процесс деб аталади. Идеал газнинг адиабатик процессдаги параметрларини бир-бирига боғловчи тенгламани топамиз.

Термодинамика биринчи асосининг (96.4) тенгламасига идеал газ ички энергиясининг dU ифодасини қўямиз:

$$d'Q = \frac{m}{\mu} C_V \, dT + p \, dV.$$

Адиабатик процесс учун $d'Q=0$ бўлгани учун, қуйидаги шарт бажарилиши керак:

$$\frac{m}{\mu}C_V\,dT+p\,dV=0. \qquad (103.1)$$

Энди идеал газнинг ҳолат тенгламасидан фойдаланиб, p ни V ва T орқали ифодалаймиз:

$$p=\frac{m}{\mu}\,\frac{RT}{V}$$

ва уни (103.1) га қўямиз. Нолдан фарқли m/μ кўпайтувчига қисқартириб, натижада қуйидаги ифодани топамиз:

$$C_V dT+RT\frac{dV}{V}=0.$$

Бу ифодани қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{dT}{T}+\frac{R}{C_V}\,\frac{dV}{V}=0.$$

Буни эса

$$d\left(\ln T+\frac{R}{C_V}\ln V\right)=0$$

кўринишда ёзиш мумкин; бу ифодадан адиабатик процессда

$$\ln T+\frac{R}{C_V}\ln V=\text{const} \qquad (103.2)$$

эканлиги келиб чиқади.

Идеал газ учун $C_p-C_V=R$ эканлигини ҳисобга олиб, R/C_V нисбатни $\gamma-1$ орқали алмаштириш мумкин; бу ерда $\gamma=C_p/C_V$. (103.2) да $\frac{R}{C_V}$ нисбатни $\gamma-1$ билан алмаштириб ва чиққан ифодани потенцирлаб, қуйидаги тенгламани топамиз:

$$TV^{\gamma-1}=\text{const}. \qquad (103.3)$$

Топилган бу муносабат идеал газ адиабатасининг T ва V ўзгарувчилар орқали ёзилган тенгламасидир. Бу тенгламадан p ва V ўзгарувчилар орқали ёзилган тенгламага ўтиш мумкин, бунинг учун идеал газ ҳолатининг тенгламасидан фойдаланиб, T ни p ва V орқали алмаштириш керак:

$$T=\frac{\mu}{m}\,\frac{pV}{R}.$$

Бу ифодани (103.3) га қўйиб ва m, μ ва R — доимий миқдорлар эканлигини ҳисобга олиб, қуйидаги муносабатни топамиз:

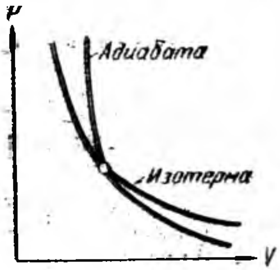
$$pV^{\gamma}=\text{const}^1. \qquad (103.4)$$

---

[1] Равшанки, (103.2) — (103.4) муносабатлардаги const нинг қиймати турлича.

(103.4) муносабат идеал газ адиабатасининг p ва V ўзгарувчилар орқали ёзилган тенгламасидир. Бу тенглама **Пуассон тенгламаси** деб ҳам аталади.

Адиабатанинг (103.4) тенгламасини изотерманинг (98.3) тенгламасига солиштиришдан адиабата изотермага қараганда тикроқ эканлиги келиб чиқади. Изотерма ва адиабата учун $\frac{dp}{dV}$ нинг айни бир (p, V) нуқтадаги қийматини ҳисоблаб топамиз (235-расм). (98.3) тенгламани дифференциаллаймиз:



235- расм.

$$p\,dV + V dp = 0,$$

бундан изотерма учун қуйидагини топамиз:

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{p}{V}. \qquad (103.5)$$

(103.4) ни дифференциаллаб,

$$p\gamma V^{\gamma-1}\,dV + V^{\gamma}dp = 0$$

тенгламани топамиз, бундан

$$\frac{dp}{dV} = -\gamma\,\frac{p}{V}.$$

Шундай қилиб, адиабата қиялик бурчагининг тангенси изотерманикига қараганда γ марта ортиқ экан.

Бу мулоҳазаларнинг ҳаммасида биз газ ҳолати ҳар бир пайтда p ва T параметрларнинг маълум қийматлари билан характерланади деб, бошқача сўз билан айтганда, текширилаётган бу адиабатик процесс мувозанатли процесс, деб фараз қилган эдик. Биз биламизки, жуда секин ўтадиган процессгина мувозанатли процесс бўла олади. Шу билан бирга, иссиқликни мутлақо ўтказмайдиган моддалар табиатда бўлмагани учун, бу процесс қанча қисқа вақт давом этса, системанинг атрофидаги муҳит билан алмашинадиган иссиқлик миқдори шунча кам бўлади. Шундай қилиб, тез ўтувчи процессларгина адиабатик процессларга яқин бўлиши мумкин. Бундай процессга ичида товуш тўлқини тарқалаётган газнинг ҳар бир нуқтасида юз берадиган сиқилиш ва кенгайиш процесси мисол бўла олади. Бунда газнинг ҳолати катта ҳажм ичида мувозанатли бўлмаганлигига (ҳар хил нуқталарда p ва T ҳар хил) қарамай, ҳар бир анча кичик ҳажм ичида газнинг ҳолати (103.4) адиабата тенгламаси орқали анча қаноатланарли равишда тавсифланади.

104- §. Политропик процесслар

Биз юқоридаги параграфларда текшириб ўтган процессларнинг ҳаммаси политропик процесснинг хусусий ҳолларидир. Агар бирор процесс давомида идеал газнинг босими билан ҳажми орасидаги боғланиш

$$pV^n = \text{const} \qquad (104.1)$$

муносабат билан ифодаланса, бундай процесс политропик процесс деб аталади, бунда n кўрсаткич $-\infty$ дан $+\infty$ гача қийматлар қабул қилади.

6-жадвалда n нинг шундай қийматлари кўрсатилганки, бунда политропик процесс бизга олдиндан маълум бўлган процесслардан бирига айнан ўхшаб қолади. Жадвалнинг олдинги учта сатри ўз-ўзидан равшан. Тўртинчи сатрнинг тўғри эканлигига ишонч ҳосил қилиш учун (104.1) политропа тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

6-жадвал

n	Процесс
0	Изобарик
1	Изотермик
γ	Адиабатик
$\pm\infty$	Изохорик

$$p_1V_1^n = p_2V_2^n, \qquad (104.2)$$

бундаги 1 ва 2 индекслари ихтиёрий равишда олинган иккита ҳолатга тегишли. (104.2) дан n даражали илдиз чиқарамиз:

$$p_1^{\frac{1}{n}} V_1 = p_2^{\frac{1}{n}} V_2.$$

Энди n ни $+\infty$ ёки $-\infty$ га интилтирсак, биз

$$V_1 = V_2$$

шартга келамиз, бу шарт изохорик процессни характерлайди.

Бир киломоль идеал газ учун ёзилган ҳолат тенгламасига асосан,

$$p = R\frac{T}{V} \qquad (104.3)$$

p нинг бу қийматини (104. 1) тенгламага қўйсак ва R нинг ўзгармас катталик эканлигини ҳисобга олсак, политропанинг T ва V ўзгарувчилар орқали ёзилган тенгламасини топамиз:

$$TV^{n-1} = \text{const}. \qquad (104.4)$$

Бир киломоль идеал газнинг политропик процессдаги иссиқлик сиғимини топайлик. (96.4) ва (102.8) га асосан,

$$d'Q = C_V dT + pdV.$$

Бинобарин,

$$C = \frac{d'Q}{dT} = C_V + p\frac{dV}{dT}. \qquad (104.5)$$

$\frac{dV}{dT}$ ни топиш учун политропанинг (104.4) кўринишдаги тенгламасидан фойдаланамиз. Бу тенгламани дифференциаллаймиз:

$$V^{n-1}dT + T(n-1)V^{n-2}dV = 0,$$

бундан

$$\frac{dV}{dT} = -\frac{V}{T(n-1)} = -\frac{R}{p(n-1)},$$

бу ерда биз (104.3) муносабатдан фойдаландик.

$\frac{dV}{dT}$ нинг топилган қийматини (104.5) формулага қўйсак, бир киломоль идеал газнинг политропик процессдаги иссиқлик сиғими қуйидагича ифодаланади:

$$C_п = C_V - \frac{R}{n-1} = \frac{nC_V - C_p}{n-1}. \qquad (104.6)$$

Бу ифодада p, V ва T ҳолат параметрлари қатнашмайди. Шундай қилиб, (104.6) иссиқлик сиғими доимий катталик экан. Шу муносабат билан политропик процессларни иссиқлик сиғими ўзгармай қола берадиган процесслар деб таърифлаш мумкин. Бу таъриф (104.1) таърифга қараганда анча умумийроқ; бу таъриф ихтиёрий табиатли жисмлар ҳамда системаларга қўлланилиши мумкин, (104.1) таъриф эса фақат идеал газ учун тўғридир.

$C = C_п = \text{const}$ деган фаразга асосланиб туриб, бу шароитда идеал газ (104.1) тенгламага бўйсунишини кўрсатиш мумкин, бу ерда

$$n = \frac{C_p - C_п}{C_V - C_п}. \qquad (104.7)$$

Бу хулосани машқ тариқасида чиқариб кўришни тавсия этамиз.

105- §. Ҳар хил процессларда идеал газ бажарадиган иш

Маълумки, бирор жисмнинг *1* ҳолатдан *2* ҳолатга ўтишида ташқи жисмлар устида бажарадиган иши қуйидагига тенг: (96.3 га қ.):

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV. \qquad (105.1)$$

Бу интегрални ечиш учун p ни V орқали ифодалаш керак. Бунинг учун ҳар хил процесслар вақтида p билан V орасидаги боғланишдан фойдаланамиз.

Идеал газ политропасининг (104.1) тенгламасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$pV^n = p_1V_1^n = p_2V_2^n,$$

бу ерда p_1, V_1 ва p_2, V_2—газнинг мос равишда биринчи (бошланғич) ва иккинчи (охирги) ҳолатларидаги босими ва ҳажмининг қийматлари, p ва V—ихтиёрий оралиқ ҳолатдаги босим ва ҳажм.

Бу муносабатга мувофиқ равишда, газ босимини унинг ҳажми ва бошланғич ҳолатидаги параметрларининг қийматлари орқали ифодалаймиз[1]:

$$p = \frac{p_1 V_1^n}{V^n}. \tag{105.2}$$

(105.2) ни (105.1) га қўйиб, ишни топамиз:

$$A_{12} = p_1 V_1^n \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n}. \tag{105.3}$$

Аввало $n \neq 1$ булган ҳолни кўриб чиқамиз; у ҳолда (105.3) даги интеграл қуйидагига тенг бўлади:

$$\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^n} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{V_1^{n-1}} - \frac{1}{V_2^{n-1}}\right).$$

Интегралнинг бу қийматини (105.3) га қўйиб, соддагина шакл алмаштиришлар бажарсак, ишни топамиз:

$$A_{12} = \frac{p_1 V_1}{n-1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right]. \tag{105.4}$$

Идеал газ ҳар қандай процессда қатнашганида ҳам унинг параметрлари ўзаро (98.14) ҳолат тенгламасига асосан боғланган бўлишидан фойдаланиб, ишнинг (105.4) ифодасини бошқача ёзиш мумкин. Жумладан, бу ҳол бошланғич ҳолат учун ҳам тўғри:

$$p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} R T_1. \tag{105.5}$$

(105.5) ни (105.4) га қўйиб, ишни топамиз:

$$A_{12} = \frac{m}{\mu}\,\frac{RT_1}{n-1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right]. \tag{105.6}$$

(105.4) ва (105.6) ифодалар идеал газнинг изотермик процессдан (бунда $n=1$ бўлади) бошқа ҳар қандай политропик процессда бажарадиган ишидир[2]. Хусусан, адиабатик процессда

$$A_{12} = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] \tag{105.7}$$

[1] Босимни охирги ҳолатнинг параметрлари орқали ҳам худди шундай ифодалаш мумкин.

[2] $n=1$ бўлганда (105.4) ва (105.6) ифодалар ноаниқ бўлиб қолади.

ёки

$$A_{12}=\frac{m}{\mu}\frac{RT_1}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]. \qquad (105.8)$$

Идеал газнинг изотермик процессда бажарадиган ишини ҳисоблаб чиқариш учун (105.1) формуладаги босимни ҳолат тенгламасига мувофиқ равишда бошқа катталиклар орқали ифодалаймиз. Натижада, ишнинг ифодасини топамиз (T ўзгармас бўлгани учун уни интеграл остидан ташқарига чиқариш мумкин):

$$A_{12}=\frac{m}{\mu}RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}=\frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Шундай қилиб, изотермик процессда идеал газ бажарадиган иш қуйидагига тенг:

$$A_{12}=\frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1}. \qquad (105.9)$$

Изобарик процессда ҳар қандай жисм бажарадиган, шу жумладан идеал газ бажарадиган иш, (105.1) га асосан, қуйидагига тенг бўлади:

$$A_{12}=p\,(V_2-V_1). \qquad (105.10)$$

(105.4) да n ни нолга тенг деб олганда ҳам айни шу натижа келиб чиқади. Пировардида шуни қайд қиламизки, изохорик процессда иш нолга тенг бўлади, бу ҳол ҳар қандай жисм учун тўғридир.

106-§. Газ молекулаларининг тезликлар бўйича тақсимланиши

Газ молекулалари жуда хилма-хил тезликлар билан ҳаракат қилади; алоҳида олинган ҳар бир молекула тезлиги ҳам катталиги жиҳатдан, ҳам йўналиши жиҳатдан молекулаларнинг бир-бирига тўқнашуви туфайли муттасил ўзгариб туради (кейинчалик биз кўрамизки, нормал шароитларда ҳар бир молекула секундига тахминан 10^9 тўқнашувга дуч келади).

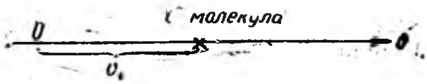
Ҳаракатнинг барча йўналишлари тенг эҳтимолли бўлгани учун молекулалар йўналишлар бўйича бир текис тақсимланади: ҳар қандай ориентирланган, лекин катталиги ўзгармас бўлган $\Delta\Omega$ фазовий бурчак ичида ҳар бир пайтда ўрта ҳисобда бир хил $\Delta N_{\theta\varphi}$ сондаги молекулаларнинг ҳаракати йўналиши ётади.

Молекулалар тезлигининг v сон қийматига келганда аҳвол бошқачароқ. v нинг нолдан чексизликкача бўлган соҳадаги мумкин бўлган қийматлари бир хил эҳтимоллик билан учрамайди. Бу хулоса қуйидаги мулоҳазалардан келиб чиқади. Тўқнашувларда молекулаларнинг тезлиги тасодифий равишда ўзгаради. Қандайдир бир молекула кетма-кет қатор тўқнашувларда ўзи билан тўқнашган бошқа молекулалардан энергия олиши ва натижада унинг энергияси ε ўрта қийматдан анча ортиб кетиши мумкин. Лекин газнинг ҳамма молекулалари ўз энергиясини якка-ю ягона молекулага бериб, ўзлари тўхтаб қоладиган жуда фантастик ҳолни тасаввур этганда ҳам бу молекуланинг энергияси ва, бинобарин, унинг тезлиги чекли бўлади. Шундай қилиб, газ молекулаларининг тезлиги бирор $v_{\text{шах}}$ қийматдан бошлаб ∞ гача бўлган қийматларга ҳеч эга бўла олмайди. Барча молекулаларнинг жами энергиясининг сезиларли қисмини битта молекулага тўплашга олиб келадиган процессларнинг содир бўлиш эҳтимоли жуда кам, шунинг учун тезликнинг ўртача қийматига нисбатан жуда катта бўлган тезликлар жуда камдан-кам ҳолларда учрайди, деб айтиш мумкин. Худди шунингдек, молекулаларнинг ўзаро тўқнашишлари натижасида молекуланинг тезлиги расо нолга тенг бўлиши ҳам амалда мумкин эмас. Бинобарин, ўртача қийматга нисбатан жуда кичик ва шунингдек жуда катта тезликли молекулаларнинг учраш эҳтимоли жуда кичик экан. Шу билан бирга, $v \to 0$ бўлганда ҳам, $v \to \infty$ бўлганда ҳам шундай тезликли молекулаларнинг учраш эҳтимоли нолга интилади.

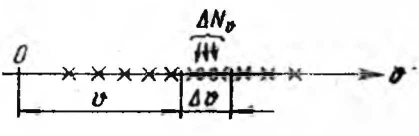
Айтилганлардан шундай хулоса чиқадики, молекулаларнинг тезликлари асосан энг катта эҳтимолли бирор қийматга яқин бўлади.

Молекулаларнинг v нинг қийматлари бўйича тақсимланишини миқдор томондан тавсифлайдиган усулни аниқлаш учун қуйидаги кўргазмали йўлдан фойдаланамиз. Тезликларнинг қийматларини v ўқида нуқталар билан белгилаб чиқамиз, у ҳолда ҳар бир молекулага бу ўқда битта нуқта мос келади. Бу нуқтанинг саноқ боши деб қабул қилинган O нуқтадан ҳисобланган масофаси сон жиҳатидан мазкур молекула тезлигининг катталигига тенг бўлади (236-расм).

Бирор миқдор газдаги барча N дона молекуланинг тезликларини бир вақтда аниқлаш усулини биламиз, деб фараз қилайлик. Топилган натижаларни v ўқида нуқталар шаклида белгилаб чиқсак[1], молекулалар тезликларининг бирор t пайтдаги «оний фотосуратини» ҳосил қилган бўламиз (237-расм). Агар v нинг ҳамма қийматлари эҳтимоли бир хил бўлганда эди, бу нуқталар v ўқи бўйича бир текис тақсимланган бўлар эди. Лекин юқорида кўрганимиздек, тезликлар асосан эҳтимоли энг катта бўлган бирор қийматга яқин қийматларга эга бўлади. Тезликнинг нолга яқин ва жуда катта қийматлари анча кам учрайди. Шунинг учун v ўқида нуқталар нотекис тақсимланади, уларнинг зичлиги ўқнинг ҳар хил қисмларида ҳар хил бўлади.



236-расм.



237-расм.

---

[1] Ҳар бир нуқтани белгилаб чиқиш учун атиги бир секунд сарфласак, $2,7 \cdot 10^{19}$ нуқтани белгилаб чиқиш учун 10^{12} йил меҳнат қилган бўлар эдик.

ёки

$$A_{12}=\frac{m}{\mu}\,\frac{RT_1}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] \tag{105.8}$$

Идеал газнинг изотермик процессда бажарадиган ишини ҳисоблаб чиқариш учун (105.1) формуладаги босимни ҳолат тенгламасига мувофиқ равишда бошқа катталиклар орқали ифодалаймиз. Натижада, ишнинг ифодасини топамиз (T ўзгармас бўлгани учун уни интеграл остидан ташқарига чиқариш мумкин):

$$A_{12}=\frac{m}{\mu}\;RT\int\limits_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}=\frac{m}{\mu}\;RT\;\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Шундай қилиб, изотермик процессда идеал газ бажарадиган иш қуйидагига тенг:

$$A_{12}=\frac{m}{\mu}\qquad\qquad \text{n}\,\frac{V_2}{V_1}. \tag{105.9}$$

Изобарик процессда ҳар қандай жисм бажарадиган, шу жумладан идеал газ бажарадиган иш, (105.1) га асосан, қуйидагига тенг бўлади:

$$A_{12}=p\,(V_2-V_1). \tag{105.10}$$

(105.4) да n ни нолга тенг деб олганда ҳам айни ўша натижа келиб чиқади. Пировардида шуни қайд қиламизки, изохорик процессда иш нолга тенг бўлади, бу ҳол ҳар қандай жисм учун тўғридир.

106- §. Газ молекулаларининг тезликлар бўйича тақсимланиши

Газ молекулалари жуда хилма-хил тезликлар билан ҳаракат қилади; алоҳида олинган ҳар бир молекула тезлиги ҳам катталиги жиҳатдан, ҳам йўналиши жиҳатдан молекулаларнинг бир-бирига тўқнашуви туфайли муттасил ўзгариб туради (кейинчалик биз кўрамизки, нормал шароитларда ҳар бир молекула секундига тахминан 10^9 тўқнашувга дуч келади).

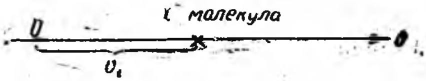
Ҳаракатнинг барча йўналишлари тенг эҳтимолли бўлгани учун молекулалар йўналишлар бўйича бир текис тақсимланади: ҳар қандай ориентирланган, лекин катталиги ўзгармас бўлган $\Delta\Omega$ фазовий бурчак ичида ҳар бир пайтда ўрта ҳисобда бир хил $\Delta N_{\theta\varphi}$ сондаги молекулаларнинг ҳаракати йўналиши ётади.

Молекулалар тезлигининг v сон қийматига келганда аҳвол бошқачароқ. v нинг нолдан чексизликкача бўлган соҳадаги мумкин бўлган қийматлари бир хил эҳтимоллик билан учрамайди. Бу хулоса қуйидаги мулоҳазалардан келиб чиқади. Тўқнашувларда молекулаларнинг тезлиги тасодифий равишда ўзгаради. Қандайдир бир молекула кетма-кет қатор тўқнашувларда ўзи билан тўқнашган бошқа молекулалардан энергия олиши ва натижада унинг энергияси с ўрта қийматдан анча ортиб кетиши мумкин. Лекин газнинг ҳамма молекулалари ўз энергиясини якка-ю ягона молекулага бериб, ўзлари тўхтаб қоладиган жуда фантастик ҳолни тасаввур этганда ҳам бу молекуланинг энергияси ва, бинобарин, унинг тезлиги чекли бўлади. Шундай қилиб, газ молекулаларининг тезлиги бирор $v_{шах}$ қийматдан бошлаб ∞ гача бўлган қийматларга ҳеч эга бўла олмайди. Барча молекулаларнинг жами энергиясининг сезиларли қисмини битта молекулага тўплашга олиб келадиган процессларнинг содир бўлиш эҳтимоли жуда кам, шунинг учун тезликнинг ўртача қийматига нисбатан жуда катта бўлган тезликлар жуда камдан-кам ҳолларда учрайди, деб айтиш мумкин. Худди шунингдек, молекулаларнинг ўзаро тўқнашишлари натижасида молекуланинг тезлиги расо нолга тенг бўлиши ҳам амалда мумкин эмас. Бинобарин, ўртача қийматга нисбатан жуда кичик ва шунингдек жуда катта тезликли молекулаларнинг учраш эҳтимоли жуда кичик экан. Шу билан бирга, $v \to 0$ бўлганда ҳам, $v \to \infty$ бўлганда ҳам шундай тезликли молекулаларнинг учраш эҳтимоли нолга интилади.

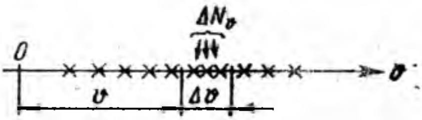
Айтилганлардан шундай хулоса чиқадики, молекулаларнинг тезликлари асосан энг катта эҳтимолли бирор қийматга яқин бўлади.

Молекулаларнинг v нинг қийматлари бўйича тақсимланишини миқдор томондан тавсифлайдиган усулни аниқлаш учун қуйидаги кўргазмали йўлдан фойдаланамиз. Тезликларнинг қийматларини v ўқида нуқталар билан белгилаб чиқамиз, у ҳолда ҳар бир молекулага бу ўқда битта нуқта мос келади. Бу нуқтанинг саноқ боши деб қабул қилинган O нуқтадан ҳисобланган масофаси сон жиҳатидан мазкур молекула тезлигининг катталигига тенг бўлади (236-расм).

Бирор миқдор газдаги барча N дона молекуланинг тезликларини бир вақтда аниқлаш усулини биламиз, деб фараз қилайлик. Топилган натижаларни v ўқида нуқталар шаклида белгилаб чиқсак[1], молекулалар тезликларининг бирор t пайтдаги «оний фотосуратини» ҳосил қилган бўламиз (237-расм). Агар v нинг ҳамма қийматлари эҳтимоли бир хил бўлганда эди, бу нуқталар v ўқи бўйича бир текис тақсимланган бўлар эди. Лекин юқорида кўрганимиздек, тезликлар асосан эҳтимоли энг катта бўлган бирор қийматга яқин қийматларга эга бўлади. Тезликнинг нолга яқин ва жуда катта қийматлари анча кам учрайди. Шунинг учун v ўқида нуқталар нотекис тақсимланади, уларнинг зичлиги ўқнинг ҳар хил қисмларида ҳар хил бўлади.



236-расм.



237-расм.

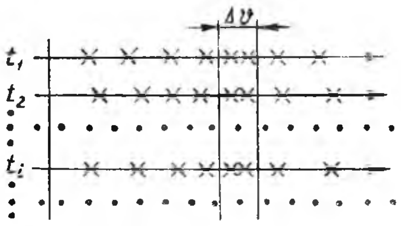
[1] Ҳар бир нуқтани белгилаб чиқиш учун атиги бир секунд сарфласак, 2, 7·10^{19} нуқтани белгилаб чиқиш учун 10^{12} йил меҳнат қилган бўлар эдик.

Нуқталар зичлигини Δv интервал ичига тушган ΔN_v нуқталар сонининг ўша интервал катталигига нисбати сифатида (237- расм) таърифлаб, яъни

$$\rho = \frac{\Delta N_v}{\Delta v}$$

деб олиб, бу катталик v нинг функцияси $[\rho=\rho(v)]$ деб айтиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, ρ нинг қиймати Δv интервал v ўқнинг қаерида олинганига, яъни v га боғлиқ.

Икки молекуланинг ҳар бир ўзаро тўқнашиши тегишли нуқталарнинг v ўқидаги вазиятини тасодифий равишда ўзгартиради. Шунинг учун t_1, t_2 ва ҳоказо пайтларга тегишли қатор «фотосуратларини» (238- расм) бир-бирига солиштирсак, умуман айтганда бу «фотосуратларда» устма-уст тушадиган нуқталар бўлмайди. Лекин газ мувозанат ҳолатда (яъни параметрлари ўзгармайдиган ҳолатда) бўлса, молекулаларнинг тезликлари бўйича тақсимланиши ўзгармай қолаверади. Шунинг учун v ўқининг ҳар хил қисмларидаги нуқталар тақсимотининг зичлиги ҳамма вақт бир хил бўлади.



238- расм

Газнинг айнан бир хил шароитларда (p ва T лари бир хил) турган бир нечта порциясини олсак, улардаги молекулаларнинг тезликлари бўйича тақсимоти ҳам айнан бир хил бўлади. Лекин нуқталарнинг v ўқида тақсимланиш характери бир хил бўлгани ҳолда, уларнинг зичлиги молекулаларнинг текширилаётган N сонига пропорционал бўлади ва бинобарин, газнинг ҳар хил порциялари учун ҳар хил бўлади. Исталган миқдордаги газ учун қуйидаги муносабат ўринли бўлади:

$$f(v) = \frac{\rho(v)}{N} = \frac{1}{N}\frac{\Delta N_v}{\Delta v}. \qquad (106.1)$$

Шу тарзда аниқланган $f(v)$ функция газ молекулаларининг тезликлари бўйича тақсимланишини характерлайди ва **т а қ с и м о т ф у н к ц и я с и** деб аталади. $f(v)$ функциянинг шаклини билган ҳолда берилган N дона молекуладан тезликлари Δv интервал ичига тушадиган молекулалар сонини, яъни тезликларининг қиймати v дан $v+\Delta v$ гача соҳада ётадиган молекулаларнинг ΔN_v сонини топиш мумкин:

$$\Delta N_v = N f(v)\,\Delta v. \qquad (106.2)$$

Қуйидаги

$$\frac{\Delta N_v}{N} = f(v)\,\Delta v \qquad (106.3)$$

нисбат молекуланинг тезлиги тезликларнинг берилган Δv интервали (v билан $v+\Delta v$ орасида ётадиган интервали) ичидаги қийматларга эга бўлиши эҳтимолини кўрсатади (ΔN ёнидаги v индекс Δv интервални белгилаш учун ишлатилган)[1].

v ўқни нечта интервалга бўлиш мумкин бўлса, ўшанча Δv_i интерваллар бўйича олинган

$$\sum \Delta N_v = \sum Nf(v_i)\Delta v_i = \sum \rho_i \Delta v_i$$

йиғинди, равшанки, молекулаларнинг тўлиқ N сонига тенг бўлиши керак. Бундан тақсимот функциясининг қуйидаги хоссаси келиб чиқади:

$$\sum f(v_i)\,\Delta v_i = 1. \tag{106.4}$$

Бу натижани қуйидагича изоҳлаб бериш мумкин:

$$\sum \frac{\Delta N_v}{N} = \sum f(v_i)\Delta v_i$$

ифода молекуланинг тезлиги 0 дан ∞ гача бўлган соҳадаги қийматлардан бирига тенг бўлишнинг эҳтимолидан иборат. Молекуланинг тезлиги албатта қандайдир бир қийматга эга бўлгани учун айтиб ўтилган бу эҳтимол ишончли воқеанинг эҳтимоли бўлиб, у бирга тенг.

Аниқроқ айтганда, (106. 4) шарт қуйидагича ёзилиши керак:

$$\int_0^\infty f(v)dv = 1. \tag{106.5}$$

(106.2)—(106.5) муносабатлар тақсимот функциясининг умумий таърифидан келиб чиқиб, бу функциянинг конкрет кўриниши қандай эканлигига боғлиқ эмас.

Тақсимот функциясини назарий йўл билан Максвелл топган бўлиб, бу функция унинг номи билан аталади. Бу функциянинг кўриниши қуйидагича:

$$f(v) = Ae^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2, \tag{106.6}$$

бу ерда A—v га боғлиқ бўлмаган кўпайтувчи, m—молекуланинг массаси, k—Больцман доимийси.

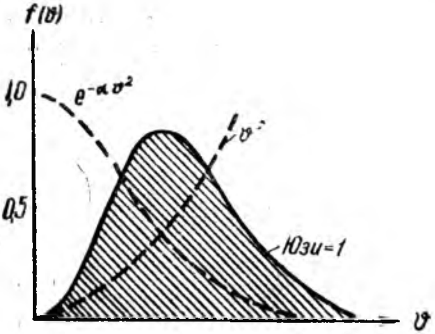
Максвеллнинг тақсимот функцияси учун шу нарса характерлики, e нинг даража кўрсаткичида молекуланинг қаралаётган v тез-

---

[1] Бирор молекуланинг тезлиги ихтиёрий олинган маълум бир v қийматга тенг бўлишининг эҳтимоли 0 га тенг. Бундай бўлишининг сабаби шундаки, v нинг мумкин бўлган қийматлари сони чексиз бўлиб, молекулаларнинг N сони гарчи жуда катта бўлса ҳам, лекин чекли [100- § даги (100.1) билан (100.2) орасидаги текстга солиштиринг].

лигига мос келадиган $mv^2/2$ кинетик энергиясининг kT катталикка, яъни молекуланинг ўртача энергиясини ифодаловчи катталикка «—» ишора билан олинган нисбати туради.

v ортганда e^{-av^2} кўринишдаги кўпайтувчи v^2 кўпайтувчининг ортиш суръатига қараганда тезроқ камаяди, шунинг учун тақсимот функцияси нолдан бошланиб (v^2 кўпайтувчи сабабли), максимумга эришади ва сўнгра асимптотик равишда нолга интилади (239-расм). $f(v)$ эгри чизиқ қуршаб турган юз (106.5) муносабатга мувофиқ бирга тенг.



239- расм.

(106.5) шарт (106.6) даги A кўпайтувчини ҳисоблаб топишга имкон беради:

$$A\int_0^\infty e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2\, dv = 1.$$

Бу шарт функцияни нормалаш шарти деб, A эса нормаловчи кўпайтувчи деб аталади. Ҳисоблаш натижасида A нинг қиймати $4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$ га тенг эканлиги аниқланган. Шундай қилиб, Максвелл тақсимот функциясининг кўриниши қуйидагича экан:

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2. \qquad (106.7)$$

Кутганимиздек, функциянинг конкрет кўриниши газнинг турига (молекуласининг массасига) ва ҳолат параметрига (T температурага) боғлиқ бўлиб чиқди. Шуни қайд қиламизки, газнинг босими ва ҳажми молекулаларнинг тезликлар бўйича тақсимотига таъсир кўрсатмайди.

Тезликнинг ҳақиқатда учрайдиган қийматлари чекли чегара билан чекланган ҳолда (106.7) функция тезликнинг чексиз қийматидагина 0 га айланганлиги сабабли (106.7) функция тақсимотни нотўғри тавсифлагандай бўлиб кўриниши мумкин. Лекин v нинг анча катта қийматларида (106.7) функция нолдан шу қадар кам фарқ қиладики, ҳозиргина қайд қилинган келишмовчилик амалда ҳеч қандай аҳамиятга эга бўлмай қолади.

Тақсимот функциясининг максимал қийматига мос келувчи тезликнинг эҳтимоли, равшанки, энг катта бўлади. Дарҳақиқат, агар тезликлари ихтиёрий равишда танлаб олинган, лекин катталиги тенг бўлган Δv интервалларда ётувчи молекулаларнинг ΔN_v сонлари солиштирилса, у ҳолда максимум атрофига жойлашган интервалга тегишли ΔN_v энг катта бўлади. Шундай қилиб, $f(v)$ нинг максимумини топиш масаласини ечар эканмиз, биз эҳтимоли энг катта бўлган $v_{эхт}$ тезликни топган бўламиз. (106. 6) ни v бўйича дифференциаллаб, бундан чиққан ифодани нолга тенглаймиз:

$$\frac{df(v)}{dv} = Ae^{-\frac{mv^2}{2kT}} v\left(2 - \frac{mv^2}{kT}\right) = 0.$$

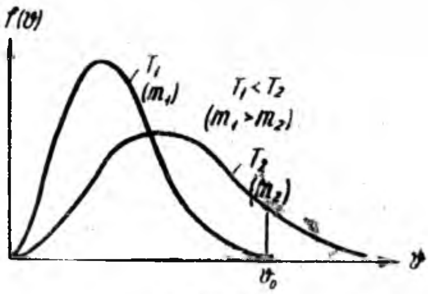
Тезликнинг бу тенгламани қаноатлантирадиган $v = 0$ ва $v = \infty$ қийматлари $f(v)$ нинг минимумларига тўғри келади. v нинг қавслар ичидаги ифодани нолга айлантирувчи қиймати биз излаётган $v_{эхт}$ нинг ўзгинаси:

$$v_{эхт} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \qquad (106.8)$$

(106.7) га энг катта эҳтимолли тезликни қўйиб, $f(v)$ нинг максимал қийматини топамиз:

$$f(v_{эхт}) = \frac{4}{e}\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \sim \sqrt{\frac{m}{T}}. \qquad (106.9)$$

Тақсимот эгри чизиғининг газ температурасига ва молекула массасига боғлиқ равишда қандай ўзгаришини тадқиқ қиламиз. (106. 8) ва (106. 9) лардан шундай хулоса чиқадики, температура кўтарилганда (ёки молекуланинг массаси камайганда) эгри чизиқнинг максимуми ўнг томонга сурилади ва пасайиб қолади, шу билан бирга биз биламизки, эгри чизиқ қуршаб турган юз ўзгармай қолаверади. 240- расмда иккита тақсимот эгри чизиғи бирбирига солиштирилган; бу чизиқларни ҳар хил T_1 ва T_2 температураларга (m бир хил бўлганда) тегишли деб ёки молекулаларнинг турли хил m_1 ва m_2 массаларига (T бир хил бўлганда) тегишли деб ҳисоблаш мумкин.



240- расм.

Тезликлари бирор v_0 қийматдан катта бўлган молекулаларнинг нисбий сони

$$\int_{v_0}^{\infty} f(v)dv$$

ифода билан аниқланади.

Графикда бу интегралга эгри чизиқ билан чегараланган юзнинг v_0 дан ўнг томонда ётадиган қисми мос келади. 240- расмдан кўриниб турибдики, тезликлари v_0 дан катта бўлган молекулаларнинг нисбий сони температура кўтарилиши билан тез ортади.

7- жадвал

$\frac{v}{v_{эхт}}$	$\frac{\Delta N}{N}$, %	$\frac{v}{v_{эхт}}$	$\frac{\Delta N}{N}$, %
0—0,5	8,1	2—3	4,6
0,5—1,5	70,7	>3	0,04
1,5—2	16,6	>5	$8\cdot 10^{-9}$

7-жадвалда тезликларнинг ҳар хил интерваллари учун молекулаларнинг (106. 7) функцияга мос келувчи $\Delta N/N$ нисбий сонлари келтирилган. Жадвалдан кўриниб турибдики, барча молекулаларнинг 70% идан ортиғининг тезлиги энг катта эҳтимолли тезликдан 50% дан ортиқ бўлмаган миқдорда фарқ қилади. Ўрта ҳисобда молекулалардан атиги 0,04% ининг тезлиги $v_{эхт}$ дан 3 мартадан зиёдроқ катта бўлади. 12 миллиард молекуладан ўрта ҳисобда фақат биттасининг тезлиги $5v_{эхт}$ дан ортиқ бўлади.

Молекулаларнинг тезликлари бўйича тақсимотини билган ҳолда тезликнинг ўрта қийматини, шунингдек тезликнинг функцияси бўлган ҳар қандай катталикнинг, масалан, v^2 нинг ўрта қийматини топиш мумкин.

Тезликлар ўқини жуда кичик Δv_i интервалларга бўламиз. Ҳар бир интервалга, (106.2) формулага биноан, қуйидаги миқдорда молекула тўғри келади:

$$\Delta N_{v_i} = N\, f(v_i)\, \Delta v_i. \qquad (106.10)$$

Δv_i интервал жуда кичик бўлгани учун $\Delta N v_i$ дона молекуладан ҳар бирининг тезлигини тахминан v_i га, яъни тезликнинг Δv_i интервалга тегишли қийматларидан бирига тенг, деб ҳисоблаш мумкин. У ҳолда барча N дона молекуланинг тезликлари қийматларининг йиғиндисини $\sum v_i\, \Delta N v_i$ кўринишда тасвирлаш мумкин. Бу йиғиндини молекулаларнинг N сонига бўлиб, $\bar{v}$ ўртача тезликнинг қуйидаги [(106.10) ни ҳисобга олиб] ифодасини топамиз:

$$\bar{v} = \sum v_i f(v_i)\, \Delta v_i.$$

Йиғиндидан интегралга ўтиб, $\bar{v}$ ни топамиз:

$$\bar{v} = \int_0^\infty v f(v)\, dv. \qquad (106.11)$$

Агар (106.11) га $f(v)$ нинг (106. 7) ифодасини қўйиб, интегрални ҳисоблаб чиқарсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \qquad (106.12)$$

Худди шу йўл билан тезлик квадратининг $\overline{v^2}$ ўрта қийматини ҳам қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\overline{v^2} = \int\limits_0^\infty v^2 f(v)\, dv.$$

Бунга $f(v)$ нинг ифодасини қўйиб, интегрални ҳисобласак, $\overline{v^2} = 3kT/m$ чиқади. $\overline{v^2}$ нинг квадрат илдизи ўртача квадратик тезлик деб аталади. Шундай қилиб

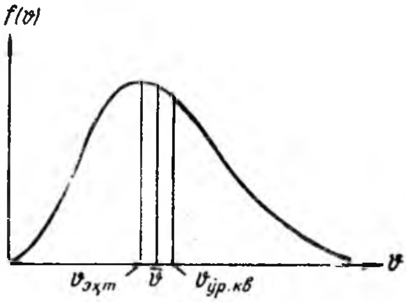
$$v_{\text{ўрт. кв.}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \qquad (106.13)$$

Бу натижа $\bar{\varepsilon}$ нинг олдин топилган (99.11) ифодасига мос келади. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун (99.11) да $\bar{\varepsilon}$ ўрнига $\overline{mv^2}/2$ ни қўйиш керак.

Шунга эътибор бериш керакки, $\bar{v} \neq v_{\text{ўрт. кв.}}$ ва $\bar{v}^2 \neq \overline{v^2}$.

(106.8), (106.12) ва (106.13) ларни таққосласак, $v_{\text{эҳт}}$, $\bar{v}$ ва $v_{\text{ўрт. кв.}}$ лар газнинг температураси ва молекуланинг массасига бир хилда боғлиқ эканлигини пайқаш мумкин, булар бир-биридан фақат сонли кўпайтувчи билангина фарқ қилади. Агар $v_{\text{эҳт}}$ ни 1 га тенг деб олсак, $\bar{v} = 1,13$, $v_{\text{ўрт.кв.}} = 1,22$ бўлади (241-расм).

Яна бир марта шуни қайд қиламизки, молекулаларнинг тезликлари бўйича тақсимланишининг Максвелл топган қонуни ва ундан келиб чиқадиган барча натижалар мувозанат ҳолатида турган газ учунгина тўғри. Бу қонун исталган, бироқ етарли даражада катта бўлган N сони учун ҳам ўринли. Максвелл қонуни статистик қонундир. Статистика қонунлари эса қанчалик кўп сондаги бир хил объектларга татбиқ этилса, шунча тўғрироқ натижа беради. Объектлар сони оз бўлганда статистика берадиган маълумотлардан анчагина четланишлар кузатилиши мумкин.



241- расм.

Агар газларнинг мувозанат ҳолатга эга аралашмаси берилган бўлса, у ҳолда ҳар бир нав молекулалар ўзига тегишли m билан (106.7) қонун бўйича тақсимланади. Оғирроқ молекулалар енгилроқ молекулаларга қараганда ўрта ҳисобда кичик тезлик билан ҳаракат қилади.

Молекулаларнинг тезликлар бўйича олинган

$$dN_v = N\, 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\, v^2 dv \qquad (106.14)$$

тақсимотига асосланиб туриб, молекулаларнинг илгариланма ҳаракат кинетик энергияси қийматлари бўйича тақсимланишини топиш мумкин. Бунинг учун v ўзгарувчидан $mv^2/2$ га тенг бўлган ε ўзгарувчига ўтиш керак. (106.14) да $v=\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}$ ва $dv=\frac{1}{\sqrt{2m\varepsilon}}d\varepsilon$ алмаштиришлар киритиб, қуйидагини топамиз:

$$dN_\varepsilon = N\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(kT)^{3/2}}e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon, \tag{106.15}$$

бу ерда dN_ε — энергиясининг қиймати ε дан $\varepsilon+d\varepsilon$ гача оралиқда ётган молекулалар сони.

Шундай қилиб, молекулаларнинг ε қийматлари бўйича тақсимланиши

$$f(\varepsilon) = A'e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\sqrt{\varepsilon} \tag{106.16}$$

функция билан характерланади, бу ерда A'—нормаловчи кўпайтувчи бўлиб, у $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(kT)^{3/2}}$ га тенг.

Пировардида молекулаларнинг, масалан, кислород молекулаларининг ўртача тезлигини чамалаб топамиз. Ҳисобни қулайлаштириш учун (106. 12) даги k/m нисбат ўрнига унга тенг бўлган R/μ нисбатни оламиз. У ҳолда ўртача тезликнинг ифодаси қуйидаги кўринишга келади:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}. \tag{106.17}$$

Кислороднинг молекуляр оғирлиги 32 га тенг. Бинобарин, бир киломолнинг массаси $\mu=32$ *кг/кмоль*. Уй температураси тахминан 300°K га тенг. (106.17) формулага ундаги катталикларнинг сон қийматларини қўйиб, $\bar{v}$ ни топамиз:

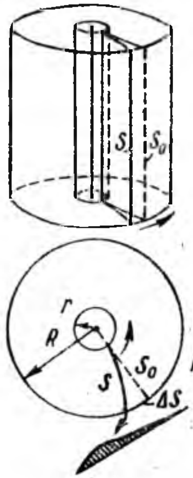
$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8\cdot 8{,}31\cdot 10^3\cdot 300}{3{,}14\cdot 32}} \approx 500 \text{ м/сек}.$$

Шундай қилиб, кислороднинг ҳар бир молекуласи бир секунд ичида ўрта ҳисобда 0,5 *км* га тенг йўл босиб ўтар экан. Молекула бошқа молекулалар билан жуда кўп тўқнашиб тургани учун бу йўл синиқ чизиқ ҳосил қилувчи жуда кўп сондаги тўғри чизиқли қисқа кесмалардан иборат бўлади.

Водород молекулаларининг массаси кислород молекулаларининг массасидан 16 марта кичик бўлгани учун ўша температурада водород молекулаларининг тезлиги 4 марта ортиқ бўлиб, уй температурасида ўрта ҳисобда деярли 2 *км/сек* га тенглашади.

107-§. Максвеллнинг тақсимот қонунини тажрибада текшириш

Молекулаларнинг тезлигини биринчи марта 1920 йилда Штерн тажрибада аниқлади. Бу мақсадда ишлатилган асбоб иккита коаксиал цилиндрдан иборат эди (242-расм). Асбобнинг ўқи бўйлаб устига кумуш югуртирилган платина сим тортилган. Бу сим ўзидан ўтаётган электр токи таъсирида исиганида унинг сиртидан кумуш атомлари буғланиб чиқиб турган. Буғланиб чиқаётган атомларнинг тезликлари симнинг температурасига мос эди. Симдан чиққан атомлар радиал йўналишлар бўйлаб ҳаракат қилган. Ички цилиндрда бўйламасига кетган энсиз тирқиш бўлиб, у орқали ташқарига атомларнинг энсизгина дастаси (молекуляр даста) чиққан. Кумуш атомлари ҳаво молекулалари билан тўқнашиб ўз йўлидан четлашмаслиги учун бутун асбоб ичидаги ҳаво сўриб олинган. Кумуш атомлари ташқи цилиндрнинг юзига бориб ўтириб, унда энсиз вертикал тасма кўринишида қатлам ҳосил қилган.



242-расм.

Агар бутун асбоб айланма ҳаракатга келтирилса, молекуляр даста ҳосил қиладиган из ташқи цилиндрнинг сирти бўйлаб бирор Δs масофага сурилади (242-расм). Бунга сабаб шуки, кумуш атомлари цилиндрлар орасидаги масофани босиб ўтиш учун кетган вақт ичида асбоб бирор $\Delta\varphi$ бурчакка бурилиб улгуради, натижада дастанинг қаршисида ташқи цилиндр сиртининг аввалги s_0 изга нисбатан $\Delta s = R\Delta\varphi$ масофага сурилган бошқа қисми келиб қолади. (R — ташқи цилиндрнинг радиуси). Кумуш атомларининг ҳаракатини цилиндрлар билан бирга айланувчи саноқ системасига нисбатан текширганда из атомларга $2m\,|\mathbf{v}\vec{\omega}|$ га тенг бўлган Кориолис кучи таъсир қилиши натижасида кўчади деб изоҳлаш мумкин.

Дастлабки ва сурилиб қолган кумуш тасмачалари орасидаги Δs масофани цилиндрларнинг ω бурчак тезлиги, асбобнинг геометрияси ва атомларнинг v тезлиги билан боғлаш мумкин. Учиб ўтиш вақтини Δt орқали белгилаб, қуйидаги тенгликни ёзиш мумкин:

$$\Delta s = \omega R \Delta t. \qquad (107.1)$$

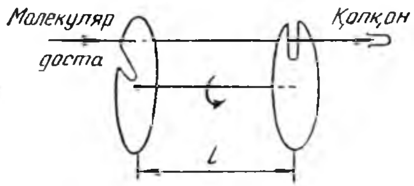
Ички цилиндрнинг радиуси ташқи цилиндрнинг R радиусига қараганда жуда кичик бўлгани учун кумуш атомларининг Δt учиб ўтиш вақтини қуйидагига тенг деб олиш мумкин:

$$\Delta t = \frac{R}{v}.$$

Бу ифодани (107.1) га қўйиб ва ҳосил бўлган тенгламани v га нисбатан ечиб, v ни топамиз:

$$v = \frac{\omega R^2}{\Delta s}.$$

Изнинг Δs силжишини ва асбобнинг айланиш тезлигини ўлчаб, атомларнинг v тезлигини аниқлаш мумкин. Тўғри, бу ерда аҳвол шу билан мураккаблашадики, атомлар тезликларига қараб тақсимлангани туфайли уларнинг тезлиги ҳар хил бўлади ва натижада, силжиган қатлам чаплашиб кетади[1]. Изнинг профилини (242-расм) текшириш орқали кумуш атомларининг тезликлар бўйича тақсимоти қандай эканлиги тўғрисида тахминий тасаввур ҳосил қилиш мумкин эди.



243- расм.

Штерн тажрибасининг натижалари атомлар ўртача тезлигининг Максвелл тақсимотидан келиб чиқадиган қийматлари тўғри эканлигини тасдиқлади. Тақсимотнинг ўзининг характери тўғрисида бу тажриба жуда тақрибий маълумотлар бера олади, холос.

Тақсимот қонуни Ламмерт тажрибасида (1929 й.) янада аниқроқ текшириб кўрилди. Бу тажрибада молекуляр даста айланувчи икки диск орқали ўтказилган; бу дисклардаги радиал тирқишлар бир-бирига нисбатан бирор φ бурчакка силжиган (243- расм). Биринчи дискдаги тирқиш орқали учиб ўтган молекулаларнинг ҳаммаси ҳам иккинчи дискдан ўтавермайди; даста йўлига иккинчи дискдаги тирқиш тўғри келиб қолган пайтда иккинчи дискка етиб келган молекулаларгина иккинчи дискдан ўтади. Тезроқ ҳаракатланувчи молекулалар иккинчи дискка анча эрта, анча секинроқ ҳаракатланувчи молекулалар эса жуда кечикиб келганлиги учун иккинчи дискдан ўта олмайди. Шундай қилиб, бу қурилма дастадан тезлиги аниқ бир қийматга эга бўлган молекулаларни ажратиб олишга имкон беради (тирқишларининг эни чекли бўлгани учун бу асбоб тезликлари бирор Δv интервал ичида ётувчи молекулаларни ажратади). Асбоб ажратиб оладиган молекулаларнинг ўртача тезлиги қуйидаги шартдан топилиши мумкин: бундай молекулаларнинг дисклар орасидаги l масофани босиб ўтишга кетадиган t_1 вақт ($t_1 = l/v$) дискларнинг φ бурчакка бурилишига кетадиган t_2 вақтга ($t_2 = \varphi/\omega$) тенг бўлиши керак. Иккала вақтни тенглаштириб, тезликни топамиз:

$$v = \frac{\omega l}{\varphi}.$$

---

[1] Асбоб қимирламай турганда ҳосил бўладиган қатламнинг эни асбобнинг геометриясигагина, жумладан, молекуляр даста чиқадиган тирқишнинг энигагина боғлиқ бўлади

Асбобнинг ω айланиш тезлигини (ёки дисклар орасидаги φ бурчакни) ўзгартириб, даста ичидан тезлигининг қиймати ҳар хил бўлган молекулаларни ажратиб олиш мумкин. Сўнгра бу молекулаларни маълум вақт давомида тўплаб, уларнинг дастадаги нисбий миқдорини аниқлаш мумкин.

Ламмерт тажрибасининг ва ўша мақсадда ўтказилган бошқа тажрибаларнинг натижалари Максвелл томонидан назарий равишда топилган тақсимот қонунига бутунлай мувофиқ келади.

Шуни қайд қилиш лозимки, идишдаги тирқишдан чиққан дастадаги молекулаларнинг тезликлар бўйича тақсимоти молекулаларнинг ёпиқ идишда ўринли бўлган тақсимотидан бир оз фарқ қилади. Тезроқ ҳаракатланувчи молекулалар тешикдан секинроқ ҳаракатланувчи молекулаларга қараганда кўпроқ миқдорда ўтгани учун даста тезроқ ҳаракатланувчи молекулаларга бойроқ бўлади. Тешик орқали вақт бирлиги ичида учиб ўтадиган молекулалар миқдори v тезликка пропорционал бўлгани учун, дастадаги тақсимот (106.6) функция билан эмас, балки

$$f_1(v) = A_1 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^3$$

функция билан характерланади, бу ерда A_1 — нормаловчи кўпайтувчи.

Бу ҳолда энг катта эҳтимолли тезлик $\bar{v}'_{\text{эҳт.}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$, ўртача тезлик эса $\bar{v}' = \sqrt{\frac{9\pi kT}{8m}}$ бўлади.

108-§. Барометрик формула

Бирор h баландликдаги атмосфера босими газнинг шу баландликдан юқорида ётувчи қатламларининг оғирлиги таъсирида юзага келади.

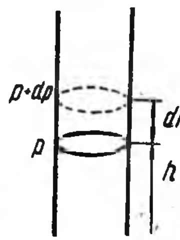
h баландликдаги босимни p ҳарфи билан белгилайлик. У ҳолда $h + dh$ баландликда босим $p + dp$ бўлади, лекин dh нолдан катта бўлса, у ҳолда dp нолдан кичик бўлади, чунки атмосферанинг юқорида ётган қатламларининг оғирлиги ва, бинобарин, босими баландликка кўтарилган сари камаяди. p ва $p + dp$ босимлар орасидаги айирма асосининг юзи бирга тенг ва баландлиги dh бўлган цилиндр (244-расм) ҳажми ичидаги газ оғирлигига тенг:

$$p - (p + dp) = \rho g \, dh,$$

бу ерда ρ — h баландликдаги газнинг зичлиги. Бундан

$$dp = -\rho g \, dh. \qquad (108.1)$$

Ҳолат тенгламасидан фойдаланиб, газ зичлигини босими ва температураси орқали ифо-



244-расм.

далаш мумкин. Юқорида айтиб ўтганимиздек, нормал шароитга яқин шароитларда атмосфера таркибидаги газларнинг хоссалари идеал газ хоссаларидан жуда кам фарқ қилади. Шунинг учун (98.14) тенгламадан фойдаланамиз. Бу тенгламани m/V га нисбатан ечиб, ρ зичликни топамиз:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}. \tag{108.2}$$

ρ нинг бу ифодасини (108.1) га қўйиб, dp ни топамиз:

$$dp = -\frac{p\mu g}{RT}\,dh,$$

бундан

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT}\,dh. \tag{108.3}$$

T температура h нинг бирор функцияси бўлади. Агар бу функциянинг кўриниши маълум бўлса, (108.3) тенгламани ечиб (интеграллаб), p ни h нинг функцияси сифатида топиш мумкин.

Температура ўзгармас бўлган ҳол учун (108.3) ни интеграллласак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\ln p = -\frac{\mu g h}{RT} + \ln C,$$

бу ерда C — ўзгармас катталик (интеграллаш доимийсини бу ерда $\ln C$ орқали ифодалаш қулай).

Топилган ифодани потенцирлаб, p ни топамиз:

$$p = Ce^{-\frac{\mu g h}{RT}},$$

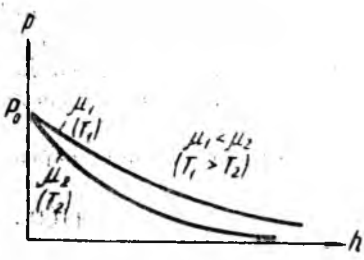
Бунга $h = 0$ ни қўйсак,

$$p_0 = C$$

эканини топамиз, бу ерда p_0 босим $h = 0$ баландликдаги босимни билдиради.

Шундай қилиб, биз температура ўзгармайди, деб қилган фаразимиз асосида босим билан баландлик орасидаги боғланиш учун қуйидаги формулани топдик:

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}. \tag{108.4}$$



245-расм.

Бу формула **барометрик формула** деб аталади. Бундан газ қанча оғир (μ қанча катта) ва температура қанча паст бўлса, баландлик ортиши билан босим шунчалик тез камаяди деган хулоса чиқади. 245-расмда (108.4) кўринишидаги иккита эгри чизиқ тасвирланган бўлиб, уларни ҳар хил μ ларга (T бир хил бўлганда) ёки ҳар хил T ларга (μ бир хил бўлганда) мос келувчи эгри чизиқлар деб талқин этиш мумкин.

109-§. Больцман тақсимоти

(108.4) да p босимни nkT билан алмаштириб [(99.12) га қ.], ҳажм бирлигидаги молекулалар сонининг баландликка қараб ўзгариш қонунини топамиз:

$$n = n_0 e^{-\frac{\mu g h}{kT}}.$$

Бу ерда n_0 — баландлиги нолга тенг бўлган жойда ҳажм бирлигидаги молекулалар сони, n — h баландликда ҳажм бирлигидаги молекулалар сони.

Топилган бу ифодани ўзгартириш мумкин, бунинг учун μ/R нисбатни унга тенг бўлган m/k нисбатга алмаштириш керак, бу ерда m — битта молекуланинг массаси, k — Больцман доимийси:

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}. \tag{109.1}$$

(109 1) дан келиб чиқадики, температура пасайиши билан нолдан фарқли баландликлардаги зарралар сони камая бориб, $T = 0$ бўлганда бу зарралар сони 0 га айланади (246- расм). Абсолют ноль температурада барча молекулалар Ер сиртига тушиб қолган бўлар эди. Юқори температураларда, аксинча, молекулалар сони (n) баландликка қараб секинроқ камаяди, натижада молекулалар баландлик бўйича деярли текис тақсимланади.

Бу фактнинг физикавий сабаби жуда оддий. Молекулаларнинг баландлик бўйича ҳар бир конкрет тақсимоти иккита тенденция таъсири натижасида қарор топади: 1) молекулаларнинг mg куч билан характерланадиган Ерга тортилиши уларни Ер сиртига туширишга интилади; 2) kT катталик билан характерланувчи иссиқлик ҳаракати молекулаларни барча баландликлар бўйлаб текис сочиб юборишга интилади. m қанча катта ва T қанча кичик бўлса, биринчи тенденция кучлироқ таъсир кўрсатади ва молекулалар Ер юзига яқинроқ жойда тўпланишади. $T = 0$ бўлган пировард ҳолатда иссиқлик ҳаракати бутунлай тўхтайди ва молекулалар Ернинг тортиш кучи таъсири остида Ер юзига жойлашади. Температура юқори бўлганда иссиқлик ҳаракати устунлик қилади ва молекулаларнинг зичлиги баландликка кўтарилган сари секин камая боради.

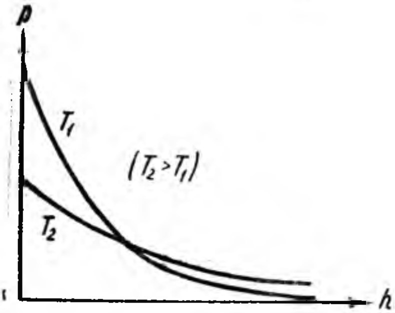
Ҳар хил баландликда молекула ҳар хил потенциал энергия запасига эга бўлади:

$$\varepsilon_p = mgh. \tag{109.2}$$

Бинобарин, молекулаларнинг баландлик бўйича тақсимотини кўрсатувчи (109.1) формула уларнинг потенциал энергия қийматлари бўйича тақсимотини ҳам ифодалайди. (109.2) ни ҳисобга олиб, (109.1) формулани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$n = n_0 e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}, \qquad (109.3)$$

бу ерда n_0 — молекуланинг потенциал энергияси нолга тенг бўлган жойда олинган бирлиги ҳажмдаги молекулалар сони, n — фазонинг молекулалар потенциал энергияси ε_p га тенг бўлган нуқталаридаги ҳажм бирлигида бор бўлган молекулалар сони.



246- расм.

(109.3) дан чиқадики, потенциал энергияси кам бўлган жойда молекулалар зичроқ жойлашади ва, аксинча, потенциал энергияси катта бўлган жойда молекулалар зичлиги камроқ бўлади.

(109.3) га мувофиқ, молекуланинг потенциал энергияси қийматлари ε_{p1} ва ε_{p2} бўлган нуқталардаги n_1 ва n_2 нинг бир бирига нисбати қуйидагига тенг:

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{-\frac{\varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{p_2}}{kT}}. \qquad (109.4)$$

Больцман шуни исбот қилдики, (109.3) тақсимот формуласи ва ундан келиб чиқадиган (109.4) формула хаотик иссиқлик ҳаракати ҳолатидаги исталган бир хил зарралар тўплами учун фақат ер тортиш кучларининг потенциал майдонидагина эмас, балки кучларнинг ҳар қандай потенциал майдонида ҳам тўғри эканлигини исбот қилди. Шу муносабат билан (109.3) тақсимот **Больцман тақсимоти** деб аталади.

Максвелл қонуни зарраларнинг кинетик энергияси қийматлари бўйича тақсимотини кўрсатгани ҳолда, Больцман қонуни зарраларнинг потенциал энергияси қийматлари бўйича тақсимотини ифодалайди. Иккала тақсимот қонуни учун ҳам экспоненциал кўпайтувчининг борлиги характерлидир; бу кўпайтувчининг кўрсаткичида битта молекула кинетик энергиясининг ёки мос равишда потенциал энергиясининг молекула иссиқлик ҳаракатининг ўртача энергиясини аниқловчи катталикка нисбати туради.

(106.14) ва (109.3) тақсимотларни битта **Максвелл — Больцман қонуни** қилиб бирлаштириш мумкин; бу қонунга мувофиқ, тезликлари v билан $v + dv$ орасида ётадиган молекулаларнинг ҳажм бирлиги ичидаги сони қуйидагига тенг:

$$dn_{\varepsilon_p,\, v} = n_0 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon_p + \frac{mv^2}{2}}{kT}} v^2 dv \sim e^{-\frac{E}{kT}} v^2 dv, \qquad (109.5)$$

бу ерда n_0 сон — $\varepsilon_p = 0$ бўладиган нуқтада олинган ҳажм бирлигидаги молекулалар сони, E — молекуланинг тўлиқ энергияси бўлиб, унинг кинетик ва потенциал энергиялари йиғиндисига тенг.

(109.5) ни v (106.5) шартга биноан v бўйича 0 дан ∞ гача интегралласак, (109.3) тақсимот қонуни билан бир хил бўлган қуйидаги ифода ҳосил бўлади:

$$n = n_0 e^{-\frac{\varepsilon_p}{kT}}.$$

(109.5) тақсимотда ε_p потенциал энергия ва $mv^2/2$ кинетик энергия, бинобарин, E тўлиқ энергия ҳам қатор узлуксиз қийматлар қабул қила олади. Агар зарраčанинг тўлиқ энергияси, масалан, атомнинг ички энергияси каби қайматларнинг фақат E_1, E_2, ... каби дискрет қаторинигина қабул қила олса, Больцман тақсимотининг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$N_i = Ae^{-\frac{E_i}{kT}}, \tag{109.6}$$

бу ерда N_i — энергияси E_i бўлган ҳолатда турган зарралар сони, A — қуйидаги шартни қаноатлантириши зарур бўлган пропорционаллик коэффициенти:

$$\sum N_i = A \sum e^{-\frac{E_i}{kT}} = N.$$

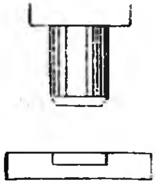
(N — текширилаётган системадаги зарраларнинг тўлиқ сони.)

Охирги муносабатдан топилган A нинг қийматини (109.6) формулага қўйиб, энергиянинг қийматлари дискрет бўлган ҳолга тегишли Больцман тақсимотининг узил-кесил ифодасини топамиз:

$$N_i = \frac{Ne^{-\frac{E_i}{kT}}}{\sum e^{-\frac{E_i}{kT}}}. \tag{109.7}$$

110-§. Перреннинг Авогадро сонини аниқлаши

Перрен Авогадро сонини аниқлашга доир тажрибаларига (109.4) тақсимотни асос қилиб олди (1909 й.). Суюқлик ичида муаллақ ҳолда юрган жуда майда қаттиқ зарралар Броун ҳаракати (91-§ га қ.) деб аталадиган тартибсиз бетўхтов ҳаракат ҳолатида бўлади. Бу ҳаракатнинг сабаби шундаки, қаттиқ зарраларнинг ўлчамлари етарли даражада кичик бўлганда уларга ҳар томондан келиб уриладиган молекулалар берадиган импульслар компенсацияланмай қолади. Ўлчамлари сезиларли даражада каттароқ бўлган заррага бир вақтнинг ўзида жуда кўп молекулалар урилганлиги учун молекулалар берадиган зарбларнинг умумий натижаси анча яхши компенсацияланади. Зарранинг ўлчамлари жуда кичкина бўлганда айрим молекулалар тезликларининг ва келиб урилаётган молекулалар сонининг ўртача қийматларидан четланиши сезилиб қолади. Агар заррага бир томондан келиб урилаётган молекулаларнинг тезлиги ёки сони заррага иккинчи томондан келиб урилаётган молекулаларнинг тезлиги ёки сонидан бошқачароқ бўлиб қолса, заррага берилаётган натижавий импульс нолдан фарқли бўлади ва зарра тегишли томонга қараб ҳаракатга келади. Бундан кейинги пайтда натижавий импульснинг йўналиши бошқача бўлади. Бинобарин, зарра ҳамма вақт тартибсиз равишда кўчиб юради.



247- расм.

Броун ҳаракати шуни кўрсатадики, етарлича кичик зарралар (юқорида айтиб ўтилган ҳодиса туфайли) молекулалар қиладиган иссиқлик ҳаракатида иштирок этади. Иссиқлик ҳаракатида қатнашар экан бундай зарралар ўзларини баҳайбат молекулалар каби тутиши ва улар кинетик назариянинг қонунларига, жумладан (109.4) қонунга бўйсуниши керак.

Перрен тажрибаларидаги асосий қийинчилик бир хил зарралар тайёрлаш ва уларнинг массаларини аниқлашдан иборат бўлган. Перрен центрифугалаш методини такрор-такрор қўллаб, гуммигутнинг[1] амалда бир хил шарчаларидан иборат бўлган жуда бир жинсли эмульсия тайёрлашга муваффақ бўлди. Гуммигут шарчаларининг радиуси микроннинг ўндан бир улушларининг бир нечтаси чамасида бўлган. Бу эмульсия чуқурлиги 0,1 *мм* бўлган ясси шиша кювета ичига солиниб, микроскоп орқали қаралган (247-расм). Микроскопнинг кўриш майдони чуқурлиги шу қадар кичик бўлганки, у орқали қараганда қалинлиги тахминан 1 *мк* га тенг горизонтал қатламда жойлашган зарраларгина кўринган. Микроскопни вертикал йўналишда суриш билан броун зарраларининг баландлик бўйича тақсимотини тадқиқ этиш мумкин бўлган.

Микроскоп орқали қараганда кўринадиган қатламнинг кювета тубидан ҳисобланган баландлигини h ҳарфи билан белгилаймиз. Микроскопнинг кўриш майдонига тушадиган заррачалар сони

$$\Delta N = n(h)\, S\, \Delta h$$

формула билан аниқланади, бу ерда $n(h)$ — h баландликда олинган ҳажм бирлигидаги броун зарраларининг сони, S — микроскоп кўриш майдонининг юзи, Δh — ўша майдоннинг чуқурлиги.

Броун зарраларига (109.3) формулани татбиқ этиб, қуйидаги тенгликни ёзиш мумкин:

$$n(h) = n_0 e^{-\frac{p'h}{kT}},$$

[1] Гуммигут — Ост-Индия ва Цейлонда ўсадиган баъзи тур дарахтлар танасини тилганда чиқадиган қуюқ шира.

бу ерда n_0 сон — $h = 0$ баландликда олинган ҳажм бирлигидаги зарралар сони, p' — эмульсиядаги броун заррасининг оғирлиги, яъни Архимед қонунига оид тузатмани ҳисобга олиб топилган оғирлик.

Иккита h_1 ва h_2 баландликда микроскопнинг кўриш майдонига тушадиган зарраларнинг ΔN сонлари қуйидагича ифодаланади:

$$\Delta N_1 = n_0 e^{-\frac{p'h_1}{kT}} S\Delta h,$$

$$\Delta N_2 = n_0 e^{-\frac{p'h_2}{kT}} S\Delta h.$$

Ниҳоят, $\Delta N_1/\Delta N_2$ нисбатни логарифмлаб, қуйидаги ифодага келамиз:

$$\ln\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \frac{p'(h_2 - h_1)}{kT}.$$

Бу формулага p', T, $(h_2 - h_1)$, ΔN_1 ва ΔN_2 ларнинг ўлчаб топилган қийматларини қўйиб, ундан Больцман доимийси бўлмиш k ни топиш мумкин. Сўнгра, универсал газ доимийси R ни k га бўлиб, Авогадро сонини топиш мумкин бўлган.

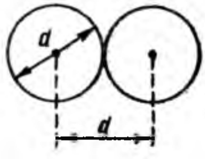
N_A нинг Перрен ҳар хил эмульсиялар ишлатганда топилган қиймати $6{,}5 \cdot 10^{26}$ дан $7{,}2 \cdot 10^{26}$ *кмоль*$^{-1}$ гача бўлган чегарада ётган. N_A нинг анча аниқ бошқа методлар билан топилган қиймати $6{,}02 \cdot 10^{26}$ *кмоль*$^{-1}$ га тенг. Шундай қилиб, Авогадро сонининг Перрен топган қиймати унинг бошқа усуллар билан топилган қийматларига яхшигина мос келади. Бу ҳол броун зарраларига (109.4) тақсимот қонунини татбиқ этиш мумкин эканлигини исботлайди.

111- §. Эркин югуриш йўлининг ўртача узунлиги

Газ молекулалари иссиқлик ҳаракатида иштирок этар экан, узлуксиз равишда бир-бири билан тўқнашиб туради. Икки молекула бир-бирига тўқнашганда уларнинг марказлари яқинлашадиган минимал масофа молекуланинг **эффектив диаметри** d деб аталади (248- расм). Кейинчалик биз кўрамизки (117- § га қ.), молекулаларнинг тезлиги ошганда, яъни температура кўтарилганда эффектив диаметри бир оз камаяди. $\sigma = \pi d^2$ катталик молекуланинг **эффектив кесими** деб аталади.

Молекула кетма-кет келадиган иккита тўқнашиш орасидаги вақт ичида бирор l йўл босиб ўтади, бу йўл эркин югуриш йўлининг узунлиги деб аталади. Эркин югуриш йўлининг узунлиги тасодифий миқдордир. Баъзан молекула иккита тўқнашиш орасида анча катта йўл босиб ўтишга муваффақ бўлади, баъзан эса бу йўл жуда кичик бўлиши мумкин. Кўрсатиш мумкинки, молекуланинг ҳеч тўқнашмасдан l йўл босиб ўтишининг $w(l)$ эҳтимоли

$$w(l) = e^{-\frac{l}{\lambda}} \qquad (111.1)$$



248- расм.

формула билан аниқланади, бу ерда λ — молекуланинг кетма-кет келган иккита тўқнашиш орасида босиб ўтадиган ўртача l йўли, бу йўл **эркин югуриш йўлининг ўртача узунлиги** деб аталади. (111.1) га мувофиқ, молекуланинг бирор l йўлни ҳеч тўқнашмасдан ўтишининг эҳтимоли l ортган сари экспоненциал равишда камаяди. Бир секунд ичида молекула ўрта ҳисобда ўртача $\bar{v}$ тезликка тенг бўлган масофани босиб ўтади. Агар молекула бир секунд ичида ўрта ҳисобда ν марта тўқнашса, у ҳолда эркин югуриш йўлининг ўртача узунлиги

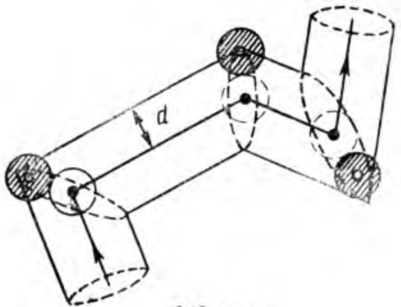
$$\lambda = \frac{\bar{v}}{\nu} \tag{111.2}$$

бўлиши равшан.

Тўқнашишларнинг ўртача ν сонини ҳисоблаб топиш учун, бошда бу биттасидан бошқа ҳамма молекулалар ўз жойида қимирламайдиган бўлиб қотиб қолган, деб фараз қиламиз. Биз ажратиб олган молекуланинг ҳаракатини кузатиб борайлик. Қимирламай турган молекулага тўқнашгандан кейин у қимирламайдиган бирор бошқа молекула билан тўқнашмагунча тўғри чизиқ бўйича учади (249- расм). Қўзғалмас молекуланинг марказидан биз ажратиб олган молекула учиб кетаётган тўғри чизиққача бўлган масофа молекуланинг d эффектив диаметридан кичик бўлганда бу молекулалар тўқнашади. Тўқнашиш натижасида молекула ўз ҳаракатининг йўналишини ўзгартиради, бундан сўнг у яна бирор вақт давомида тўғри чизиқ бўйича ҳаракатлана бориб, унинг йўлида маркази 249- расмда кўрсатилган d радиусли цилиндр ичида ҳаракат қиладиган молекула учрагандан кейин яна ҳаракат йўналишини ўзгартиради.

Бир секунд ичида молекула $\bar{v}$ га тенг бўлган йўл босиб ўтади. Равшанки, мана шу вақт ичида қўзғалмас молекулалар билан юз берадиган тўқнашишлар сони марказлари узунлиги $\bar{v}$, радиуси d ва ҳажми $\pi d^2 \bar{v}$ бўлган тирсакли цилиндр ичида ётувчи молекулалар сонига тенг. Цилиндрнинг бу ҳажмини ҳажм бирлигидаги молекулаларнинг n сонига кўпайтириб, ҳаракатдаги битта молекуланинг қўзғалмас молекулалар билан бўладиган тўқнашишларининг бир секунддаги ўртача сонини топамиз:

$$\nu' = \pi d^2 \bar{v}\, n.$$



249- расм.

Ҳақиқатда эса ҳамма молекулалар доим ҳаракат қилиб туради, бунинг натижасида тўқнашишлар сони молекулаларнинг бир-бирига нисбатан қиладиган ҳаракатининг ўртача тезлиги билан аниқланади. Тегишли ҳисоблар шуни кўрсатадики, молекулалар нисбий ҳаракатининг ўртача тезлиги молекулаларнинг идиш деворларига нисбатан ҳаракатининг $\bar{v}$ тезлигидан $\sqrt{2}$ марта ортиқ. Шунинг учун бир секунд ичидаги тўқнашишларнинг ўртача сони қуйидагига тенг бўлади:

$$\nu = \sqrt{2}\,\pi d^2 \bar{v} n. \qquad (111.3)$$

Бу сонни (111.2) га қўйиб, эркин югуриш йўлининг ўртача узунлигини қуйидагича ифодалаймиз:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi d^2 n}. \qquad (111.4)$$

d эффектив диаметр ўрнига молекуланинг σ эффектив кесимини қўйиб, куйидаги формулани топамиз:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma n}. \qquad (111.5)$$

Ўзгармас температурада n сон p босимга пропорционал равишда ўзгаргани учун, эркин югуриш йўлининг ўртача узунлиги босимга тескари пропорционалдир:

$$\lambda \sim \frac{1}{p}. \qquad (111.6)$$

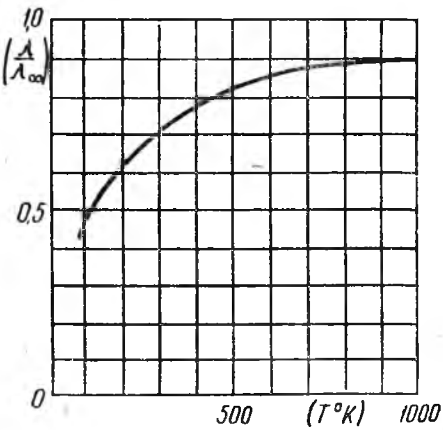
Юқорида айтиб ўтилганидек, температура кўтарилганда молекулаларнинг эффектив диаметри камаяди. Шунинг учун температура кўтарилганда эркин югуриш йўлининг ўртача узунлиги ортади. λ билан T орасидаги боғланиш Сёзерленднинг қуйидаги формуласи билан ифодаланади:

$$\lambda = \lambda_\infty \frac{T}{T + C}, \qquad (111.7)$$

бу ерда C — ҳар бир газ учун характерли бўлган ўзгармас катталик, унинг ўлчамлиги температура ўлчамлиги билан бир хил, у Сёзерленд доимийси деб аталади. λ_∞ — эркин югуриш йўлининг $T = \infty$ бўлгандаги ўртача узунлиги.

(111.7) дан кўринадики, $T = C$ температурада λ нинг қиймати 0,5 λ_∞ га тенг бўлади.

250- расмда кислород учун λ нинг температурага боғланиш графиги кўрсатилган ($C = 125°$).



250- расм.

Эркин югуриш йўлининг ўртача узунлиги қандай тартибда эканлигини ва бир секундда содир бўладиган тўқнашувларнинг ўртача сонини чамалаб кўрайлик. Молекулаларнинг ўлчамлари бир неча ангстрем чамасида бўлишини биз 92- § да аниқлаган эдик. Молекуланинг эффектив радиусини 1 Å га, яъни 10^{-10} *м* га тенг деб оламиз. Нормал шароитларда *n* Лошмидт сонига, яъни $2{,}68 \cdot 10^{25}$ $м^{-3}$ га тенг. Бу маълумотларни (111.4) формулага қўйиб, λ ни топамиз:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 3{,}14 \cdot 4 \cdot 10^{-20} \cdot 2{,}68 \cdot 10^{25}} \approx 2 \cdot 10^{-7}\, м = 2 \cdot 10^{-5}\, см.$$

Босим 10^{-3} *мм* сим. уст. (бу босим тахминан 10^{-6} *ат* га мос келади) бўлганда, λ узунлик 10 *см* чамасида бўлади. Бинобарин, идишнинг чизиқли ўлчамлари бир қанча сантиметр чамасида бўлса, бундай босимда молекулалар идишнинг бир деворидан иккинчи деворига бир-бирлари билан деярли тўқнашмасдан етиб боради, дейиш мумкин. Босим 10^{-6} *мм* сим. уст. бўлганда λ бир қанча ўн метрлар атрофида бўлади.

8- жадвалда баъзи газларнинг нормал шароитдаги λ сининг қийматлари ва молекулаларининг эффектив диаметрлари келтирилган.

8- жадвал

Газ	λ, 0°C ва 760 *мм* сим. уст. шароитида, *м*	*d*, Å	Газ	λ, 0°C ва 760 *мм* сим. уст. шароитида, *м*	*d*, Å
H_2	$1{,}10 \cdot 10^{-7}$	2,75	N_2	$0{,}59 \cdot 10^{-7}$	3,75
He	$1{,}75 \cdot 10^{-7}$	2,18	Ҳаво	$0{,}60 \cdot 10^{-7}$	3,74
O_2	$0{,}63 \cdot 10^{-7}$	3,64	CO_2	$0{,}39 \cdot 10^{-7}$	4,65

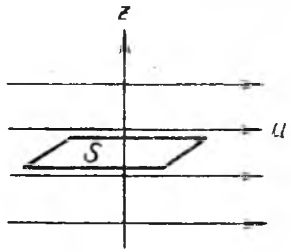
Бир секунддаги тўқнашувлар сонини топиш учун молекулаларнинг ўртача $\bar{v}$ тезлигини λ га бўлиш мумкин. 106- § да биз кислород учун $\bar{v}$ нинг қиймати 500 *м/сек* чамасида эканлигини топган эдик. Бу миқдорни 8- жадвалдан олинган $\lambda = 0{,}63 \cdot 10^{-7}$ *м* қийматга бўлиб, бир секунддаги тўқнашувлар сони тахминан $8 \cdot 10^9$ $сек^{-1}$ га тенг эканини топамиз. Шундай қилиб, нормал шароитларда тўқнашувлар сони секундига бир неча миллиардни ташкил этади. Босим камайиши билан тўқнашувлар сони *p* босимга пропорционал равишда камаяди.

112- §. Кўчиш ҳодисалари. Газларнинг қовушоқлиги

Шу вақтгача биз мувозанат ҳолатидаги газни текшириб келдик. Бундай ҳолат газ эгаллаб турган ҳажмнинг ҳамма нуқталарида температура, босим, турли хил молекулаларнинг нисбий сони ва шу каби катталикларнинг бир хил бўлиши билан характерланади. Энди биз газнинг мувозанат ҳолатдан четлашганида юз берадиган ҳодисаларни текширамиз, лекин бунда четланишлар унча катта бўлмаган ҳолларни текшириш билан чегараланамиз. Бундай ҳодисалар к ў ч и ш ҳодисалари деб аталади, уларнинг шундай аталишининг сабаби кейинроқ ойдинлашади. Биз бундай ҳодисаларнинг фақат учтасини — ички ишқаланиш (яъни қовушоқлик), иссиқлик ўтказувчанлик ва диффузияни кўриб чиқамиз.

Шуни қайд қиламизки, статистик физика жисмларнинг фақат мувозанат ҳолати билан иш кўради. Мувозанат бузилганда юз берадиган процессларни ўрганувчи фан **физикавий кинетика** деб аталади.

Ўтиш ҳодисаларини биз газларнинг қовушоқлигидан бошлаб текширамиз. Агар газ оқимидаги u тезлик қатламдан қатламга ўзгарса, у ҳолда иккита қўшни қатлам чегарасида (251-расм) ички ишқаланиш кучи таъсир қилади. Механикадан маълумки, бу кучнинг катталиги қуйидаги эмпирик формула билан аниқланади:

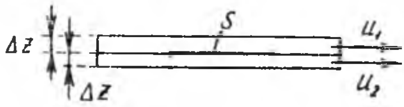


251-расм.

$$f = \eta \frac{du}{dz} S, \qquad (112.1)$$

бу ерда η — қовушоқлик коэффициенти (ёки ички ишқаланиш коэффициенти), $\frac{du}{dz}$ — тезлик градиенти, яъни газ ҳаракатининг u тезлиги қатламларни ажратиб турган сиртга перпендикуляр бўлган z йўналишда нақадар тез ўзгаришини кўрсатадиган катталик, S эса f куч таъсир қилаётган сиртнинг катталиги.

Ички ишқаланиш кучининг пайдо бўлишини тушуниб олиш учун, қалинлиги Δz бўлган бир-бирига тегувчи иккита газ қатламини кўриб чиқамиз. Қатламлар турли хил u_1 ва u_2 тезликлар билан (252-расм) ҳаракатланади, деб фараз қиламиз. Газнинг ҳар бир молекуласи иккита ҳаракатда: ўртача тезлиги $\bar{v}$ бўлган иссиқлик ҳаракатида ва тезлиги u бўлган тартибли ҳаракатда қатнашади; u тезлик $\bar{v}$ дан анча кичик ($\bar{v} \sim 10^3 м/сек$, энг кучли бўронда шамол тезлиги $\sim 10^2$ $м/сек$ бўлади).



252-расм.

Бирор пайтда қатламларнинг импульслари K_1 ва K_2 бўлсин. Бу импульслар ўзгармай қололмайди, чунки иссиқлик ҳаракати туфайли молекулалар бир қатламдан иккинчисига муттасил ўтиб туради. Δt вақт ичида S сирт орқали иккала йўналишда бир хил

$$\Delta N = \frac{1}{6} n\bar{v} S \Delta t \qquad (112.2)$$

дона молекула ўтади (молекулалар тартибли ҳаракатининг молекулалар тезлигининг катталигига кўрсатадиган заиф таъсирини эътиборга олмаса ҳам бўлади).

Молекула иккинчи қатламга ўтганда шу қатламнинг молекулалари билан тўқнашади, бунинг натижасида у ўз импульсининг ортиқчасини бошқа молекулаларга беради (агар у каттароқ тезлик билан ҳаракатланувчи қатламдан учиб келган бўлса) ёки ўз импульсини бошқа молекулалар ҳисобига орттиради (агар у кичикроқ тезлик билан ҳаракатланувчи қатламдан учиб келган бўлса). Натижада тезроқ ҳаракатланувчи қатламнинг импульси камаяди, секинроқ ҳаракатланувчи қатламнинг импульси эса ортади.

Масалан, молекулалар Δt вақт ичида биринчи қатламдан $\Delta K''$ га тенг бўлган импульс олиб кетади:

$$\Delta K''_1 = \Delta N m u_1,$$

бу ердаги ΔN сон (112.2) формула билан аниқланади, m — молекула массаси.

Айни вақтда биринчи қатламга

$$\Delta K'_1 = \Delta N m u_2,$$

импульс олиб ўтилади. Бинобарин, Δt вақт ичида биринчи қатламнинг импульси қуйидагига тенг орттирма олади:

$$\Delta K_1 = \Delta K''_1 - \Delta K'_1 = \Delta N m (u_2 - u_1) = \frac{1}{6} n\bar{v} m (u_2 - u_1) S \Delta t .$$

Ана шунга ўхшаш мулоҳазалар юритиб, иккинчи қатламнинг импульси бунда

$$\Delta K_2 = -\Delta K_1$$

орттирма олишини осонгина аниқлаш мумкин.

Импульснинг ўзгариши билан куч орасидаги боғланишга асосланиб туриб, қуйидаги фикрни айтиш мумкин: қатламлар гўё биринчи қатламга S сирт бўйлаб

$$f_1 = \frac{\Delta K_1}{\Delta t} = \frac{1}{6} n\bar{v} m (u_2 - u_1) S \qquad (112.3)$$

куч, иккинчи қатламга эса

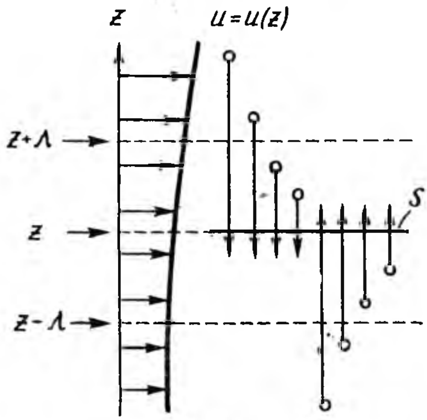
$$f_2 = -f_1 = \frac{1}{6} n\bar{v} m (u_1 - u_2) S$$

куч таъсир қилаётганидек ҳаракатланади.

(112.3) формуладан иккита қўшни қатламнинг бир-бирига кўрсатадиган таъсир кучи ажралиш сирти орқали бир секундда молекулалар олиб ўтадиган импульсга тенг, деган хулоса чиқади.

Ишқаланиш кучининг охирги формуласини топиш учун тезлик иккита қатламнинг чегарасида биз ўйлагандек сакраб ўзгармасдан, балки қатламларга перпендикуляр бўлган z йўналишда узлуксиз ўзгаришини ҳисобга олиш керак [$u = u(z)$, 253- расмга қ.]. S сирт орқали учиб ўтадиган ҳар бир молекула ўзининг охирги тўқнашиш юз берган жойдаги тезлигининг u қиймати билан аниқланадиган импульс олиб ўтади.

S сиртдан ундан ҳар хил l масофаларда бошқа молекулалар билан тўқнашган молекулалар учиб ўтади; бунда молекуланинг ҳар хил l масофаларда тўқнашиш эҳтимоли (111.1) формула билан аниқланади. Ўрта ҳисобда молекулаларнинг охирги тўқнашуви S сиртдан эркин югуриш йўлининг ўртача λ узунлигига тенг бўлган масофада юз беради (253- расм). Шунинг учун, S орқали юқоридан пастга қараган (расмда) йўналишда учиб ўтадиган молекулалар тезлигининг қиймати $z+\lambda$ координатали кесимдаги қийматига тенг деб, пастдан юқорига қараган йўналишда ўтадиган молекулалар тезлигининг қиймати $z-\lambda$ координатали кесимдаги қийматига тенг деб олиш керак[1]. λ жуда кичкина бўлгани учун бу тезликларни қуйидагича ифодалаш мумкин:



253- расм.

$$\left.\begin{aligned} u(z+\lambda) &= u(z) + \frac{du}{dz}\lambda, \\ u(z-\lambda) &= u(z) - \frac{du}{dz}\lambda, \end{aligned}\right\} \qquad (112.4)$$

бу ерда $u(z)$ — газнинг S ажралиш чегарасини биз фикран жойлаштирган жойдаги кесимдаги тезлиги, $\frac{du}{dz}$ — ҳосиланинг ўша кесимдаги қиймати.

Энди ишқаланиш кучини (112.3) формуладан фойдаланиб ҳисоблаб чиқариш мумкин, бунинг учун u_1 ва u_2 ўрнига уларнинг (112.4) қийматларини қўйиш керак:

$$f = \frac{1}{6} n\bar{v} m \left(\frac{du}{dz} 2\lambda\right) S.$$

nm кўпайтма газнинг ρ зичлигига тенг эканлигини эътиборга олиб, бу формулани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$f = \left(\frac{1}{3}\rho\bar{v}\lambda\right)\frac{du}{dz} S. \qquad (112.5)$$

(112.5) формулани (112.1) эмпирик формула билан таққослаш шуни кўрсатадики, биз газокинетик тасаввурларга асосланиб f нинг

---

[1] Бу фактни молекулаларнинг l эркин югуриш йўли бўйича тақсимоти эътиборга олинган ҳолда ўтказилган аниқ ҳисоб тасдиқлайди.

$\frac{du}{dz}$ ва S га боғланишини тўғри топибгина қолмай, балки η ковушоқлик коэффициентининг ифодасини ҳам топдик. Дарҳақиқат, бу формулаларни солиштирсак,

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \lambda \tag{112.6}$$

эканлиги келиб чиқади.

Биз эътиборга олмаган бир қатор факторларни ҳисобга олувчи янада аниқ ҳисоблар ҳам худди шундай формулага олиб келади, бироқ ундаги сонли коэффициент бир оз бошқачароқ.

Газларнинг қовушоқлик коэффициентининг биз топган (112.6) ифодасини текширайлик. ρ ўрнига nm қўйиб ва $\bar{v}$ ўртача тезлик $\sqrt{T/m}$ га пропорционал, эркин югуриш йўлининг ўртача λ узунлиги эса $1/nd^2$ га пропорционал эканлигини эътиборга олиб, қовушоқлик коэффициентини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\eta \sim nm \sqrt{\frac{T}{m}} \frac{1}{nd^2} \sim \frac{\sqrt{m}}{\sigma} \sqrt{T}. \tag{112.7}$$

Аввало шу нарса диққатни ўзига жалб қиладики, η коэффициент ҳажм бирлигидаги молекулалар сонига, бинобарин, босимга ҳам ($p = n\,kT$) боғлиқ эмас. Биринчи қарашда ажабланарли бўлиб кўринган бу натижанинг сабаби қуйидагичадир. Босим пасайганда n камаяди, яъни импульс олиб ўтишда иштирок этувчи молекулаларнинг сони камаяди. Айни вақтда λ ортади, демак, битта молекуланинг қарама-қарши йўналишларда олиб ўтадиган импульсларининг фарқи ортади. Натижада тезлик $\frac{du}{dz}$ градиентининг берилган қийматида молекулалар олиб ўтадиган импульслар йиғиндиси босимга боғлиқ бўлмай қолади. Бу хулоса λ катталик газ оқаётган тирқишнинг ўлчамларига (масалан, найнинг диаметрига) нисбатан жуда кичик бўлган шароитлардагина тўғри бўлади. Бу шарт бажарилмайдиган бўла боргани сари қовушоқлик босимга кўпроқ боғлиқ бўла бориб, босим камайиши билан у ҳам камаяди. Эркин югуриш йўлининг ўртача узунлиги газ оқаётган тирқишнинг ўлчамларига яқинлашганда молекулаларнинг эркин югуриш йўли газ оқаётган тирқишнинг катталиги билан белгиланади ва натижада λ узунлик босимга боғлиқ бўлмай қолади. Босим камайган сари ҳажм бирлигидаги молекулалар сони ҳам камаяверади, бунинг натижасида η коэффициент ҳам камаяди.

(112.7) га биноан, температура кўтарилганда қовушоқлик коэффициенти $\sqrt{T}$ га пропорционал равишда ортиши керак. 9-жадвалда ҳавонинг ҳар хил температуралардаги қовушоқлигининг тажрибада топилган қийматлари келтирилган.

Агар η коэффициент $\sqrt{T}$ га пропорционал равишда ўзгарганда эди, у ҳолда $\eta/\sqrt{T}$ нисбат ўзгармасдан қолиши керак эди. Жадвалдан кўриниб турибдики, T ортганда бу нисбат бир қадар ортади. Демак, η коэффициент $\sqrt{T}$ га қараганда бир оз тезроқ ортади. Бунинг сабаби эркин чопиш йўли ўртача узунлигининг температурага боғлиқлигидир, бу боғланишни биз бундан олдинги параграфда қайд қилиб ўтган эдик.

9-жадвал

T, °K	η, мкпз	$\eta/\sqrt{T}$
273	171	10,4
313	190	10,7
573	295	12,3
673	328	12,6
773	358	12,9

Газ қовушоқлигининг молекулалар массасига боғланишини молекулаларининг массалари бир-биридан фарқ қиладиган, лекин эффектив кесимлари бир хил бўлган газларда текшириб кўриш мумкин. Бундай газларга одатдаги ва оғир водород (дейтерий) мисол бўла олади. Дейтерий атомларининг (мос равишда молекулаларининг ҳам) массаси одатдаги водород атоминикидан 2 марта катта бўлади. Водород ва дейтерий молекулаларининг электрик хоссалари эса деярли бир хил. Молекулалар орасидаги ўзаро таъсир ва, бинобарин, молекуланинг эффектив кесими молекулаларнинг электрик хоссалари билан аниқлангани учун дейтерий билан водороднинг эффектив кесими бир хил бўлади ва уларнинг қовушоқлик коэффициентларининг нисбати айни бир температурада $\sqrt{2}:1$ нисбат каби бўлиши керак. Дейтерийнинг η си водороднинг η сидан 1,39 марта катта эканлиги тажрибада топилган. Бу қиймат назариядан топилган қийматга жуда яқин.

113-§. Газларнинг иссиқлик ўтказувчанлиги

Агар бирор муҳитда бирор z йўналиш бўйлаб температура доимий қолмаса, у ҳолда ўша йўналиш бўйлаб иссиқлик оқими қарор топиши тажрибада аниқланган. Бу иссиқлик оқимининг катталиги

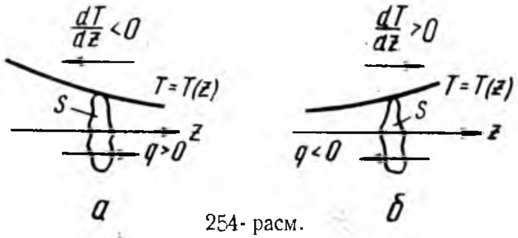
$$q = -\varkappa \frac{dT}{dz} S \qquad (113.1)$$

формула билан аниқланади, бу ерда q — z ўққа перпендикуляр вазиятда жойлашган S юз орқали вақт бирлиги ичида оқиб ўтадиган иссиқлик миқдори, $\frac{dT}{dz}$ — температура градиенти, $\varkappa$ — муҳитнинг хоссаларига боғлиқ бўлган пропорционаллик коэффициентидир; у и с с и қ л и к ў т к а з у в ч а н л и к к о э ф ф и ц и е н т и деб аталади. q нинг ўлчамлиги *ж/сек* (ёки *эрг/сек*, *кал/сек* ва ҳоказо). Бинобарин, $\varkappa$ нинг ўлчамлиги *ж/м·сек·град* бўлади. (113.1) формуладаги «—» ишора температура ортадиган йўналиш билан иссиқлик оқаётган йўналиш қарама-қарши эканлигини, яъни иссиқлик температуранинг пасайиш томонига қараб оқишини билдиради. (113.1) даги иссиқлик оқими алгебраик катталикдир: агар иссиқлик z ўқнинг мусбат йўналишида оқса, q мусбат бўлади, агар иссиқлик z ўқнинг манфий йўналишида оқса, у ҳолда q манфий бўлади (254-расм).

S юз орқали t вақт ичида оқиб ўтадиган Q иссиқлик миқдорини ҳисоблаб топиш учун q ни t га кўпайтириш керак:

$$Q = qt = -\varkappa \frac{dT}{dz} St. \qquad (113.2)$$

Газдаги иссиқлик оқимини молекуляр-кинетик тасаввурларга асосланиб туриб ҳисоблаб чиқаришга ҳаракат қилиб кўрайлик. Агар газнинг ҳар хил нуқталардаги температураси ҳар хил бўлса, у ҳолда молекулаларнинг бу нуқталардаги ўртача энергияси ҳам ҳар хил



254-расм.

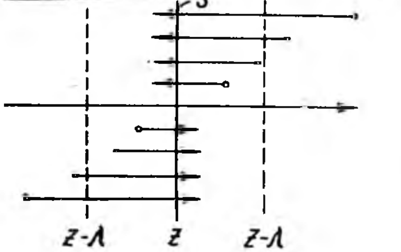
бўлади. Молекулалар иссиқлик ҳаракати натижасида бир жойдан бошқа жойга кўчар экан, ўзлари жамғарган энергияни олиб ўтади. Энергиянинг бундай ўтиши газларда иссиқлик ўтказувчанлик процессининг юзага келишига сабаб бўлади.

Ўзида олинган бирор йўналиш бўйлаб температура қандайдир бир усул билан ўзгартириб турилган газни кўриб чиқамиз. Бу йўналишни z ҳарфи билан белгилаймиз. Бу йўналишга перпендикуляр бўлган S юзни фикран тасаввур қиламиз (255-расм). S юз орқали унинг нормали йўналишида учиб ўтаётган молекулалар сони:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{6} n\bar{v} S \qquad (113.3)$$

ифода билан аниқланиши бизга маълум.

Ҳар бир молекула у билан бошқа молекула охирги марта тўқнашган жойдаги температурага мос энергияга эга бўлади. Бу тўқнашув ўрта ҳисобда S дан молекуланинг эркин югуриш йўлининг ўртача λ узунлигига тенг масофада юз беради. Шунинг учун чапдан ўнгга қараб учаётган молекулаларни $(z - \lambda)$ текисликдаги T_1 температурага мос келувчи $\bar{\varepsilon}_1$ энергияга эга дейиш, қарама-қарши йўналишда учаётган молекулаларни эса $(z + \lambda)$ текисликдаги T_2 температурага мос келувчи $\bar{\varepsilon}_2$ энергияга эга дейиш лозим.



255-расм.

n ва $\bar{v}$ катталиклар температурага боғлиқ. Шунинг учун S юз орқали чапдан ўнгга қараб учиб ўтаётган молекулаларнинг сонини топиш учун (113.3) формулага n ва $\bar{v}$ нинг T_1 температурага мос келадиган қийматларини қўйиш, ўнгдан чапга қараб учиб ўтаётган молекулаларнинг сонини топиш учун эса, n ва $\bar{v}$ нинг T_2 температурага мос қийматларини қўйиш керакдек кўринади. Лекин S юз орқали қарама-қарши йўналишларда учиб ўтаётган зарралар сони ҳар хил бўла олмаслигини тушуниш осон. Агар бу сонлар бир хил бўлмаганида эди, S юз орқали иссиқлик ўтишидан ташқари модда ҳам оқиб ўтган бўлар, яъни фазонинг бир қисмидаги газ иккинчи қисмига ўта бошлаган бўлар эди. Биз эса бутунича олиб қаралганда газ ҳаракатланмайди, деб фараз қиламиз.

S юз орқали ҳар бир йўналиш бўйлаб учиб ўтадиган молекулаларнинг сонини (113.3) формуладан топамиз, бунда n ва $\bar{v}$ нинг S кесимдаги қийматларини қўямиз. У ҳолда S юз орқали z ўқнинг мусбат йўналишида бир секунд ичида молекулалар олиб ўтадиган энергия миқдорини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$q = \frac{dN}{dt}(\bar{\varepsilon}_1 - \bar{\varepsilon}_2) = \frac{1}{6} n\bar{v}S\left(\frac{i}{2} kT_1 - \frac{i}{2} kT_2\right) =$$
$$= \frac{1}{6} n\bar{v}S \frac{i}{2} k(T_1 - T_2). \qquad (113.4)$$

λ жуда кичик бўлгани учун

$$T_1 = T - \frac{dT}{dz}\lambda, \; T_2 = T + \frac{dT}{dz}\lambda,$$

деб ҳисоблаш мумкин, бу ерда T — S юз жойлашган жойдаги температура, $\frac{dT}{dz}$ — T дан z бўйича олинган ҳосиланинг ўша жойдаги қиймати. Бу қийматларни (113.4) формулага қўйиб, q ни топамиз:

$$q = -\frac{1}{6} n\bar{v}S \frac{i}{2} k \frac{dT}{dz} 2\lambda.$$

Бу ифодани молекуланинг m массасига ва $N_А$ Авогадро сонига кўпайтирамиз ва бўламиз:

$$q = -\frac{1}{6} mn\bar{v}S \frac{i}{2} \frac{kN_А}{mN_А} \frac{dT}{dz} 2\lambda.$$

Сўнгра, $mn = \rho$ эканлигини ва

$$\frac{i}{2}\frac{kN_А}{mN_А} = \frac{1}{\mu}\frac{i}{2}R = \frac{1}{\mu}C_V = c_V$$

эканлигини ҳисобга олиб, (c_V — ҳажм ўзгармас бўлгандаги солиштирма иссиқлик сиғими), q ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$q = -\left(\frac{1}{3}\rho\bar{v}\lambda c_V\right)\frac{dT}{dz}S. \qquad (113.5)$$

(113.5) ни (113.1) га солиштириб, газларнинг иссиқлик ўтказувчанлик коэффициентини қуйидагича ифодалаймиз:

$$\varkappa = \frac{1}{3}\rho \bar{v} \lambda c_V . \quad (113.6)$$

η нинг (112.6) формуласини $\varkappa$ нинг (113.6) формуласига солиштириб,

$$\varkappa = \eta c_V \quad (113.7)$$

эканлигини топамиз. Янада аниқроқ бажарилган ҳисоблар $\varkappa$ билан η орасида қуйидагича боғланиш мавжуд эканлигини кўрсатади:

$$\varkappa = K \eta c_V .$$

Бу ерда K — сонли коэффициент бўлиб, қуйидаги формула билан аниқланади:

$$K = \frac{9\gamma - 5}{4} .$$

Шундай қилиб, бир атомли газлар ($\gamma = C_p/C_V = 5/3$) учун $K = 2{,}5$, икки атомли газлар ($\gamma = 7/5$) учун $K = 1{,}9$ ва ҳоказо.

$\varkappa$ нинг молекулани характерлайдиган миқдорларга ва газ параметрларига қандай боғлиқ эканлигини аниқлаймиз. $\varkappa \sim \eta c_V$ бўлгани учун бу боғланишни топиш мақсадида (112.7) ни c_V нинг

$$c_V = \frac{1}{\mu} C_V = \frac{1}{mN_A} \frac{i}{2} R \sim \frac{i}{m}$$

ифодасига кирган катталикларга кўпайтириш етарли.

Натижада изланаётган боғланишни топамиз:

$$\varkappa \sim \frac{i}{\sigma \sqrt{m}} \sqrt{T} . \quad (113.8)$$

Бу боғланиш η га доир (112.7) боғланишдан шу билан фарқ қиладики, $\varkappa$ коэффициент $\sqrt{m}$ га тескари пропорционал, η эса $\sqrt{m}$ га тўғри пропорционалдир. Бундан ташқари, $\varkappa$ коэффициент молекула эркинлик даражаларининг сони ва характерига (i сонига) боғлиқдир. $\varkappa$ нинг босим ва температурага боғланиши худди η ники кабидир. Бинобарин, иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти босимга боғлиқ бўлмайди (то λ узунлик иссиқлик узатилаётган идишнинг чизиқли ўлчамига яқин қийматга эришмагунча) ва температура кўтарилганда $\sqrt{T}$ га қараганда бир оз тезроқ ортади.

114-§. Газларда диффузия ҳодисаси

Бир қанча компонентадан, яъни бир неча хил молекулалардан иборат газ аралашмасини кўриб чиқайлик. i-компонентанинг ҳажм бирлигидаги молекулалари сонини n_i билан белгилаймиз. Ҳажм бирлигидаги молекулаларнинг тўлиқ сони қуйидагига тенг бўлади:

$$n = \sum n_i .$$

Аралашмадаги i-**компонентанинг нисбий концентрацияси деб ўлчовсиз**

$$c'_i = \frac{n_i}{n}$$

катталикка айтилади.

Равшанки, ҳамма компоненталар нисбий концентрацияларининг йиғиндиси бирга тенг:

$$\sum c'_i = \sum \frac{n_i}{n} = 1.$$

Бирор компонентанинг абсолют концентрацияси деб, ўша нав молекулаларнинг ҳажм бирлигидаги массасига айтилади. Шу тариқа аниқланган концентрация мазкур компонентанинг парциал зичлигидан иборат. i-компонента молекуласининг массаси m_i бўлса, у ҳолда абсолют концентрация қуйидагига тенг бўлади:

$$c_i = n_i m_i.$$

Газ аралашмасининг босими айрим компоненталар парциал босимларининг йиғиндисига тенг ва ҳажм бирлигидаги молекулаларнинг тўлиқ сони билан аниқланади:

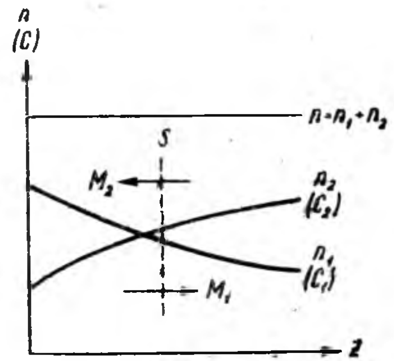
$$p = \sum p_i = \sum n_i kT = nkT.$$

Фазонинг турли нуқталарида газ компоненталарининг концентрацияси бир хил бўлмай қолиши мумкин. Бу ҳолда молекулаларнинг иссиқлик ҳаракати туфайли концентрацияларнинг тенглашиш процесси юз беради, бу процессда i-компонентанинг массаси унинг концентрацияси камаядиган йўналишда кўчади. Бу процесс **диффузия** деб аталади.

Диффузия процессида молекулаларнинг тўлиқ сони ва, бинобарин, босим ўзгармайди. Фақат турли нав молекулалар қайта тақсимланади, яъни n_i катталиклар ўзгаради, шу билан бирга бирор жойда компоненталардан бири учун n_i ортса, айни вақтда бошқа компоненталар учун n_i ўзгаради, натижада n_i лар йиғиндиси ўзгармай қолаверади.

Бундан буён бу параграфда гап икки компонентали газ аралашмалари тўғрисида боради.

Бирор ҳажм ичида иккала компонентанинг z йўналиш бўйлаб концентрациялари градиенти бирор йўл билан вақт бўйича ўзгартирмай сақлаб турилади деб фараз қиламиз (256-расм, бу расмда абсолют концентрациялар ўрнига ҳажм бирлигидаги молекулаларнинг



256- расм.

бу концентрацияларга пропорционал бўлган сонлари тасвирланган). Бутун ҳажмда босим бир хил. Бинобарин, ҳар бир кесимда $n_1 + n_2$ йиғинди бир хил бўлади. Бу ҳолда z га перпендикуляр бўлган S юз орқали биринчи нав молекулаларнинг кўпроқ чапдан ўнгга қараб йўналган оқими ҳосил бўлади. Бу оқимни бир секунд ичида S юз орқали олиб ўтиладиган M_1 масса билан характерлаш мумкин. Бу массанинг қуйидагича ифодаланиши тажрибадан топилган:

$$M_1 = - D \frac{dc_1}{dz} S, \tag{114.1}$$

бу ерда D — пропорционаллик коэффициенти бўлиб, **диффузия коэффициенти** деб аталади. $\frac{dc_1}{dz}$ — S юз фикран жойлаштирилган кесимдаги абсолют концентрациянинг градиенти.

Равшанки, S юз орқали t вақт ичида олиб ўтиладиган масса қуйидагига тенг:

$$M_1 t = - D \frac{dc_1}{dz} S t. \tag{114.2}$$

Айни вақтда иккинчи нав молекулаларнинг биринчи нав молекулаларга қарши йўналган оқими мавжуд бўлади, бу оқим ҳам олдингиси каби қуйидаги ифода билан аниқланади:

$$M_2 = - D \frac{dc_2}{dz} S .$$

(114.1) тенглама диффузиянинг эмпирик тенгламасидир. Бундаги « — » ишора масса (молекулалар) мазкур компонентанинг концентрацияси камаядиган йўналишда кўчишини кўрсатади.

Диффузия тенгламасини молекуляр-кинетик тасаввурларга асосланиб чиқаришга уриниб кўрамиз ва ҳисобни соддалаштириш учун иккала компонента молекулаларининг массалари бир-биридан жуда оз фарқ қилади ($m_1 \approx m_2 \approx m$) ва уларнинг эффектив кесимлари деярли бир хил ($\sigma_1 \approx \sigma_2 \approx \sigma$) деб ҳисоблаймиз. Бу ҳолда иккала компонента молекулаларининг иссиқлик ҳаракатининг $\bar{v}$ ўртача тезлигини бир хил деб олиб, эркин югуриш йўлининг ўртача узунлигини

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n}$$

формуладан ҳисоблаб топиш мумкин, бу ерда $n = n_1 + n_2$

Биринчи компонента концентрациясининг z ўқ бўйлаб ўзгариши $c_1 = c_1(z)$ функция орқали ифодалансин, деб фараз қилайлик. S юз орқали учиб ўтувчи ҳар бир молекула ўзига тегишли m массани олиб ўтади ($m_1 \approx m$ эканлигини эслатиб ўтамиз). Биринчи компонента молекулаларининг S юз орқали z ўқ йўналишида бир секундда ўтадиганлари сонини N'_1 билан, z йўналишга қарама-қарши ўтадиган ўшандай молекулалар сонини N''_1 билан белгилаймиз.

У ҳолда биринчи компонентанинг бир секунд ичида z йўналишда олиб ўтиладиган массаси қуйидаги кўринишда тасвирланиши мумкин:

$$M_1 = (N'_1 - N''_1)\, m. \tag{114.3}$$

Олдинги ҳоллардагидек (қ. 112 ва 113- §), S юзни кесиб ўтувчи молекулалар S дан эркин югуриш йўлининг ўртача узунлигига тенг масофаларда турадиган кесимлардан учиб келади, деб ҳисоблаш мумкин. У ҳолда S дан z ўқ йўналишида учиб ўтадиган молекулалар сони ҳажм бирлигидаги молекулалар сонининг $z - \lambda$ координатали кесимга тўгри келадиган n'_1 қиймати билан аниқланади, бунга қарши йўналишда учиб ўтадиган молекулаларнинг сони $z + \lambda$ координатали кесимга тўғри келадиган n''_1 қиймат билан аниқланади. Шундай қилиб N'_1 ва N''_1 сонлари

$$N_1 = \frac{1}{6} n_1 \bar{v} S$$

ифода билан аниқланади, бу ерда N'_1 учун $n'_1 = n_1 (z - \lambda)$ қиймат, N''_1 учун эса $n''_1 = n_1 (z + \lambda)$ сон олиниши керак. N'_1 ва N''_1 нинг қийматларини (114.3) га қўйиб, M_1 ни топамиз:

$$M_1 = -\frac{1}{6} \bar{v} S \frac{dn_1}{dz} 2\lambda m.$$

m — ўзгармас миқдор бўлгани учун $m \frac{dn_1}{dz}$ ифодани $\frac{d(mn_1)}{dz}$ кўринишда ёзиш мумкин, бу эса концентрациянинг $\frac{dc_1}{dz}$ градиентидан иборат. У ҳолда

$$M_1 = -\left(\frac{1}{3} \bar{v} \lambda\right) \frac{dc_1}{dz} S. \tag{114.4}$$

(114.4) ни (114.1) билан солиштириб, диффузия коэффициентининг газокинетик ифодасини топамиз:

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \lambda. \tag{114.5}$$

D нинг ўлчов бирлиги $м^2/сек$ эканлиги (114.5) дан келиб чиқади.

Бизнинг бу мулоҳазаларимиз аралашманинг иккала компонентасига бир хилда тааллуқлидир. Бинобарин, иккала компонента учун диффузия коэффициентининг қиймати бир хил бўлади.

(114.5) ни (112.6) га таққослаб, η билан D орасидаги қуйидаги боғланишни топамиз:

$$\eta = \rho D.$$

(114.5) га $\bar{v}$ ва λ нинг ифодасини қўйиб,

$$D \sim \frac{1}{n\sigma \sqrt{m}} \sqrt{T}$$

эканлигини топиш мумкин. η ва $\varkappa$ лардан фарқли ўлароқ диффузия коэффициенти ҳажм бирлигидаги молекулалар сонига ва, бинобарин, p босимга тескари пропорционал экан:

$$D \sim \frac{1}{p}.$$

D нинг температурага боғланиши худди η ва $\varkappa$ нинг температурага боғланиши каби бўлади.

Биз иккала компонента молекулаларининг массалари ва эффектив кесимлари бир хил деб фараз қилганимиз учун аслида (114.5) ифода хусусий диффузия коэффициентининг, яъни бирор газ молекулаларининг ўша газ молекулалари муҳитидаги диффузияси коэффициентининг ифодасидан иборатдир. Хусусий диффузия ҳодисасини кузатиш учун бир жинсли газ молекулаларининг бир қисмини бирор усул билан нишонлаб чиқиш керак. У вақтда нишонланган молекулалар концентрацияси ва нишонсиз молекулалар концентрацияси доимий бўлмаса, газда турли жинсли молекулаларнинг қарама-қарши йўналган оқимлари пайдо бўлар эди ва бу оқимларнинг катталиги (114.4) формула билан аниқланган бўлар эди. Амалда хусусий диффузия ҳодисасини нишонли атомлар методидан фойдаланиб тадқиқ қилиш мумкин. Бу метод изотоплар аралашмасидан, яъни айни бир химиявий элементнинг бир-биридан фарқ қиладиган, масалан, бири радиактив бўлган, бошқаси стабиль (барқарор) бўлган атомларининг аралашмасидан фойдаланишдан иборат.

Турли массали ва турли кесимли молекулалар аралашмаси учун диффузия коэффициенти қуйидагича ифодаланиши ҳисоблаб топилган:

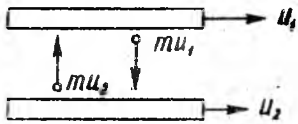
$$D = B\sqrt{\frac{T}{m'}}\,\frac{1}{d_{12}^2 n},$$

бу ерда B — сонли коэффициент, $m' = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — молекулаларнинг келтирилган масса деб аталувчи массаси ва $d_{12} = \frac{d_1 + d_2}{2}$ — эффектив диаметрларнинг ярим йиғиндиси.

115-§. Ультрасийраклашган газлар

Молекулаларнинг эркин югуриш йўли узунлиги идишнинг чизиқли ўлчамларидан ортиқ бўлса, идиш ичида вакуумга эришилди, деб гапирилади. Бундай газ ультрасийраклашган газ деб аталади. Гарчи сўзнинг том маъносида вакуум сўзи «бўшлиқ» ни билдирса ҳам, ультрасийраклашган газда ҳажм бирлигида жуда кўп молекула бўлади. Масалан, босим 10^{-6} *мм* сим. уст. бўлганда 1 $м^3$ да тахминан 10^{16} молекула бўлади. Бундан ташқари, жуда кичик коваклардa вакуум деб таърифланадиган ҳолат атмосфера босимида ҳам юзага келтирилиши мумкин.

Ультрасийраклашган газларнинг характери бир қатор хусусиятлари билан ажралиб туради. Вакуум шароитларида газнинг бир қисми иккинчи қисмига босим кўрсатади, деб гапириш тўғри эмас. Одатдаги шароитларда молекулалар бир-бири билан тез-тез тўқнашиб туради. Шунинг учун газни фикран икки қисмга ажратиш мумкин бўлган ҳар қандай сирт бўйлаб молекулалар орасида импульс алмашиш юз беради ва, бинобарин, газнинг бир қисми иккинчи қисмига ажралиш сирти бўйлаб p босим билан таъсир қилади. Вакуум ҳолатида молекулалар идишнинг девори билангина импульс алмашинишади, натижада газнинг деворга берадиган босими тушунчасигина маънога эга бўлади. Бу ҳолатда газда ички ишқаланиш ҳам бўлмайди. Лекин ультрасийраклашган газ ичида ҳаракатланувчи жисмга ишқаланиш кучлари таъсир қилади, бунинг сабаби шундаки, молекулалар бу жисмга урилиб, унинг импульсини ўзгартиради. Бу масалани батафсилроқ кўриб ўтамиз.



257 - расм.

Ультрасийраклашган газда иккита пластинка бир-бирига параллел равишда ҳаракат қилсин (257- расм). Пластинкаларнинг тезликлари u_1 ва u_2 га тенг. Молекула пластинкага урилган пайтда молекула билан пластинка орасида содир бўлган ўзаро таъсир шунга олиб келадики, молекула пластинкадан сапчиб, иссиқлик тезлигига қўшимча тезлик олади ва бу қўшимча тезлик катталик ва йўналиши бўйича пластинка тезлигига тенг бўлади.

Юқориги пластинканинг бирлик юзига ҳар секундда $\frac{1}{6}\, n\bar{v}$ дона молекула келиб урилади, бу молекулалар пастдаги пластинкага олдинги урилишда олган тезликнинг u_2 ташкил этувчисига эга бўлади. Бу молекулаларнинг ҳар бири импульснинг mu_2 ташкил этувчисига эга бўлади. Молекулалар юқориги пластинкадан сапчиб қайтганида импульснинг mu_1 ташкил этувчисига эга бўлади. Бинобарин, ҳар бир молекула юқориги пластинкага урилганда унинг импульси $m(u_1 - u_2)$ миқдорида камаяди. Пластинка сиртининг бирлик юзига нисбатан олганда импульснинг вақт бирлиги ичидаги ўзгариши қуйидагига тенг бўлади:

$$\frac{1}{6}\, n\bar{v}\, m(u_1 - u_2)\, .$$

Маълумки, бу ўзгариш пластинка сиртининг бирлик юзига таъсир этувчи кучга тенг:

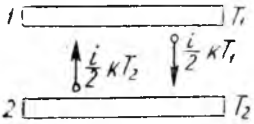
$$f = \frac{1}{6}\, \rho\, \bar{v}(u_1 - u_2) \qquad (115.1)$$

(биз mn ўрнига ρ қўйдик).

Пастки пластинканинг бирлик сиртига катталиги худди шундай, лекин унга қарама-қарши йўналган куч таъсир қилади.

Ишқаланиш кучи билан пластинкалар тезликлари айирмаси орасидаги пропорционаллик коэффициентини ишқаланиш коэффициенти деб аташ табиийдир. (115.1) дан бу коэффициентнинг $\frac{1}{6}\rho\bar{v}$ га тенг эканлиги, яъни газнинг зичлигига ва бинобарин, газнинг пластинка ва идиш деворига берадиган босимига пропорционал эканлиги келиб чиқади (бу босим учун $p = nkT$ ифода сақланади).

Энди газнинг вакуум шароитида иссиқлик узатиши тўғрисидаги масалага мурожаат қиламиз. Орасида ультрасийраклашган газ турган иккита пластинкани кўриб чиқамиз, бу пластинкаларнинг температуралари T_1 ва T_2 бўлсин (258-расм). Агар молекулалар қаттиқ жисмнинг сиртига абсолют эластик равишда урилганида эди, у холда молекулаларнинг пластинкадан сапчиб кетишдаги тезлигининг катталиги (бинобарин, энергияси ҳам) урилишдан олдинги тезлигига тенг бўлар эди. Натижада молекулалар пластинкадан пластинкага энергия олиб ўта олмаган бўлар эди. Лекин бу хулоса тажрибага зид келади. Бинобарин, девор билан унга келиб урилаётган молекула орасидаги ўзаро таъсир эластик зарб характерига эга эмас. Аслида бу ўзаро таъсир қуйидагича юз беради: деворга урилган молекула унга қисқа вақт давомида ёпишиб қолгандай бўлади, бундан сўнг молекула девордан мутлақо ихтиёрий йўналишда бирор тезлик билан узоқлашади ва бу тезликнинг катталиги ўрта ҳисобда деворнинг температурасига мос келади[1].



258- расм

Энди яна 258-расмга мурожаат қиламиз. Юқориги пластинкага ҳар секунд ичида уриладиган $\frac{1}{6}n\bar{v}S$ дона молекуланинг ҳар бири ўзи билан $\frac{i}{2}kT_2$ энергия олиб келади ва $\frac{i}{2}kT_1$ энергия олиб кетади. Бинобарин, молекуланинг пластинкага ҳар бир урилиши натижасида пластинка $\frac{i}{2}k(T_1 - T_2)$ энергия йўқотади. Молекула ҳар бир урилганда иккинчи пластинка ўшанча миқдорда энергия олади. Шундай қилиб, молекулаларнинг ҳар секунд ичида пластинкадан пластинкага олиб ўтадиган энергияси миқдори қуйидагига тенг бўлади:

$$q = \frac{1}{6}n\bar{v}\,\frac{i}{2}k(T_1 - T_2)S.$$

Бу ифодани mN_A га кўпайтириб ва бўлиб қуйидагини топамиз:

$$q = \frac{1}{6}\rho\bar{v}c_V(T_1 - T_2)S. \qquad (115.2)$$

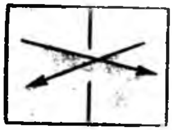
---

[1] Молекулаларнинг девор билан бўладиган ўзаро таъсири характерига оид бу аниқлик бизнинг 99- § да босимни ҳисоблашда топган натижаларимизга таъсир қилмайди. Агар газ ва деворнинг температураси бир хил бўлса, молекулаларнинг девордан сапчиб кетишдаги тезлиги уларнинг деворга келиб урилишдаги тезлигига ўрта ҳисобда тенг бўлади. Зарб натижасида молекулалар импульсининг ўзгариши ўрта ҳисобда абсолют эластик зарб бўлган ҳолдагидек бўлади.

$\frac{1}{6}\rho \bar{v} c_V$ га тенг бўлган иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти ультра сийраклашган газда газнинг зичлигига пропорционал бўлар экан. Бинобарин, босим пасайганда бир девордан иккинчи деворга иссиқлик узатиш камаяди, одатдаги шароитларда эса газнинг иссиқлик ўтказувчанлиги юқорида кўрганимиздек босимга боғлиқ бўлмайди.

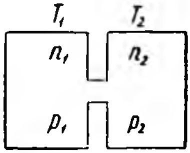
116- §. Эффузия

Ичида ультра сийраклашган гази бор идишни кўриб чиқайлик, бу идиш тешикли тўсиқ билан икки қисмга бўлинган бўлсин (259- расм.) Агар тешикнинг ўлчамлари молекуланинг эркин чопиш йўли узунлигидан кичик бўлса, у ҳолда молекулалар тешик орқали бирбирига тўқнашмасдан якка-якка учиб ўтади. Бундай шароитларда газнинг тешик орқали оқиши *э ф ф у з и я* деб аталади.



259- расм.

Эффузияда бир қатор ўзига хос ҳодисалар юз беради; биз буларнинг иккитасини кўриб чиқайлик. Мулоҳазаларимизни соддалаштириш учун биз, идиш ичидаги газ шу қадар кучли сийраклаштирилганки, эркин югуриш йўлининг узунлиги идишнинг чизиқли ўлчамларидан ортиқ, деб фараз қиламиз. Бу ҳолда молекулалар тўсиқдаги тешик орқали ўтиб, то идишнинг деворларига етгунча тўғри чизиқли траекториялар бўйлаб ҳаракат қилади.



260- расм.

И с с и қ л и к э ф ф у з и я с и. Идишнинг иккала қисми деворларининг T_1 ва T_2 температуралари ҳар хил бўлсин (260- расм). Эркин чопиш йўлининг λ узунлиги тешикнинг d диаметридан анча кичик бўлганда ($\lambda \ll d$) идишни тўлдириб турган газнинг мувозанат шарти p_1 ва p_2 босимларнииг тенглиги бўлади. Босим nkT га тенг бўлгани учун идишнинг иккала қисмининг ҳажм бирлигидаги молекулалар сони ва бинобарин, газнинг зичлиги бу ҳолда температураларнинг нисбатига тескари муносабатда бўлади:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{T_2}{T_1}. \qquad (116.1)$$

Ультра сийраклашган газда ($\lambda \gg d$) эса мувозанат шартлари бошқача бўлади. Агар идишнинг биринчи қисмидан иккинчи қисмига тешик орқали бир секунд ичида ўтаётган молекулалар сони тешик орқали қарама-қарши йўналишда бир секунд ичида ўтаётган молекулалар сонига тенг бўлса, вақт ўтиши билан ўзгармайдиган (стационар) ҳолат қарор топади. Тешик орқали ўтадиган молекулалар сони $n\bar{v}$ га пропорционал бўлгани учун мувозанат шарти

$$n_1\bar{v}_1 = n_2\bar{v}_2$$

кӯринишда бӯлади. $\bar{v} \sim \sqrt{T}$ бӯлгани учун қуйидаги тенгликларни ёзиш мумкин[1]:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}. \qquad (116.2)$$

Шундай қилиб, газ зичликларининг нисбати одатдаги шароитлардагидан (116.1 га қ.) бошқачароқ бӯлар экан.

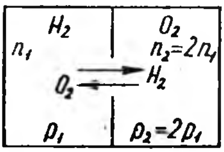
(116.2) ни ҳисобга олсак, босимлар нисбати қуйидагича бӯлади:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{n_1 k T_1}{n_2 k T_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}.$$

Идишнинг иккала қисмида босимлар тенг бӯлганда мувозанат юз берадиган одатдаги шароитлардан фарқли равишда вакуум шароитида босим идишнинг деворлари температураси юқори бӯлган қисмида ортиқроқ бӯлар экан.

Икки газнинг учрашма изотермик эффузияси. Идишнинг температураси ҳамма жойда бир хил бӯлган ва аввалдан идишнинг ҳар хил қисмларида молекулаларининг массалари кӯп фарқ қиладиган ҳар хил газлар бор бӯлган ҳолни текширайлик. Аниқлик учун идишнинг чап қисмида водород ($M=2$), ӯнг қисмида кислород ($M=32$) бор деб оламиз. Водороднинг p_1 босими кислороднинг p_2 босимидан 2 марта кичик бӯлсин. Бинобарин, кислородга оид n_2 сон водородга оид n_1 сондан 2 марта катта: $n_2 = 2n_1$. Босимларнинг ӯзи шундайки, иккала газ учун λ узунлик идишнинг чизиқли ӯлчамларидан катта.

Агар тӯсиқдаги тешик очилса, бу тешик орқали кислород ва водороднинг учрашма эффузион оқимлари юзага келади (261-расм). Бунда водород молекулаларининг оқими $n_1\bar{v}_1$ га пропорционал, кислород молекулаларининг оқими эса $n_2\bar{v}_2$ га пропорционал бӯлади. $\bar{v} \sim 1/\sqrt{m}$ бӯлгани учун водород молекулаларининг ӯртача тезлиги кислород молекулаларининг ӯртача тезлигидан 4 марта ортиқ бӯлади: $\bar{v}_1 = 4\bar{v}_2$. Гарчи идишнинг водород турган қисмдаги босими кислород турган қисмдаги босимидан кичик бӯлса-да, натижада водород молекулаларининг оқими кислород молекулаларининг оқимидан 2 марта катта бӯлади. Эффузион оқимлар босимларни тенглаштириш ӯрнига босимлар фарқининг ортишига олиб келади. Тӯғри, вақт ӯтиши билан идишнинг иккала қисмида водород ва кислород концентрациялари тенглашади (аввал тезроқ ҳаракатланувчи молекулалар, яъни водород молекулалари концентрацияси, сӯнгра эса кислород молекулалари концентрациялари тенглашади) ва пировардида босимлар тенглашади. Идишнинг иккала қисми-

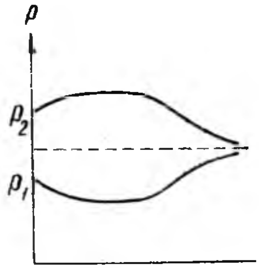


261-расм.

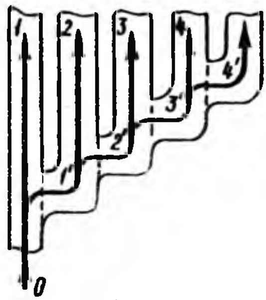
[1] Олдинги параграфда айтилганларга мувофиқ, идиш деворига урилгандан кейин молекула ундан деворнинг температурасига мос тезлик билан сапчиб кетади, деб ҳисоблаймиз.

даги p_1 ва p_2 босимларнинг вақт бўйича ўзгариши 262- расмда график равишда тасвирланган.

Компоненталари айни бир химиявий элементларнинг ҳар хил изотопларидан (турли атомларидан) иборат эканлиги билан фарқланувчи газ аралашмаларини ажратишда эффузия ҳодисасидан фойдаланилади. Изотопларнинг химиявий хоссалари айнан бир хил бўлгани учун уларни химиявий усуллар билан ажратиб бўлмайди.



262- расм.



263- расм.

Газни ажратишнинг эффузион усули принципи 263- расмда кўрсатилган[1]. Расмда «O» символи билан белгиланган газ аралашмасининг оқими икки қисмга тармоқланиб, улардан бири майда тешикли ($\lambda >$ тешиклар ўлчами) тўсиқдан ўтказилади. Массалари кичик бўлган молекулаларнинг иссиқлик ҳаракати ўртача тезлиги катта бўлгани учун, тўсиқдан ўтган оқим бошланғич оқимга қараганда енгил молекулаларга бир оз бойийди. Бойитилган бу оқим ($1'$ оқим) яна икки қисмга ажратилади, улардан бири иккинчи говак тўсиқдан ўтиб енгилроқ молекулаларга янада бойийди. Бу процессни кўп марта такрорлаш натижасида асосан молекулалари тегишли химиявий элементнинг енгилроқ изотопларига эга бўлган газ олиш мумкин.

---

[1] Тарихан бу усул изотопларни диффузия усулида ажратиш деб нотўғри ифодаланиб қолган.

XIII БОБ

РЕАЛ ГАЗЛАР

117-§. Газларнинг идеалликдан четланиши

Юқорида айтиб ўтилганидек, реал газларнинг характери босим унча юқори бўлмаган, температура эса етарлича юқори бўлган ҳоллардагина

$$pV = \frac{m}{\mu} RT$$

(98.14) тенглама билан анча яхши тавсифланади. Босим ортиши ва температура камайиши билан бу тенгламадан анча четланишлар кузатилади. 10-жадвалнинг иккинчи устунида нормал шароитларда бир литрга тенг ҳажм эгаллайдиган азот массаси учун pV кўпайтманинг қийматлари келтирилган. Бу қийматлар ҳар хил босимлар ва айни бир 0°С температура учун берилган.

10-жадвал

p, *ат*	pV, *ат·л*	$\left(p + \frac{a'}{V^2}\right)(V - b')$, *ат·л*
1	1,000	1,000
100	0,994	1,000
200	1,048	1,009
500	1,390	1,014
1000	2,069	0,893

(98.14) тенгламага мувофиқ, температура ўзгармаса, pV кўпайтма ўзгармай қолавериши керак. Аслида эса жадвалдан кўриниб турганидек, 200 *ат* тартибидаги босимларда сезиларли фарқ юзага келади. Бу фарқ босим ортиши билан муттасил ортиб бориб, босим 1000 *ат* бўлганда 100% гача ортиб кетади. (98.14) тенгламани келтириб чиқаришда биз молекулаларнинг ўлчамларини ва уларнинг бир-бирига олисдан кўрсатадиган ўзаро таъсирини эътиборга олмаган эдик, шунинг учун бу фарқлар биз учун ажабланарли эмас. Шу билан бирга, босим ортганда газнинг зичлиги ортади, бу эса молекулалар орасидаги ўртача масофанинг камайишига олиб келади; шунинг учун молекулаларнинг ҳажми ва улар орасидаги ўзаро таъсир муҳим роль ўйнай бошлайди.

Биз қилган ҳисобга мувофиқ (қ. 92- §) молекулаларнинг ўлчамлари 10^{-8} *см* тартибида бўлади. Молекуланинг r радиусини 10^{-8} *см* га тенг деб олиб, битта молекуланинг ҳажми қуйидагича бўлишини топамиз:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\,3{,}14\cdot 10^{-24} \approx 4\cdot 10^{-24} см^3.$$

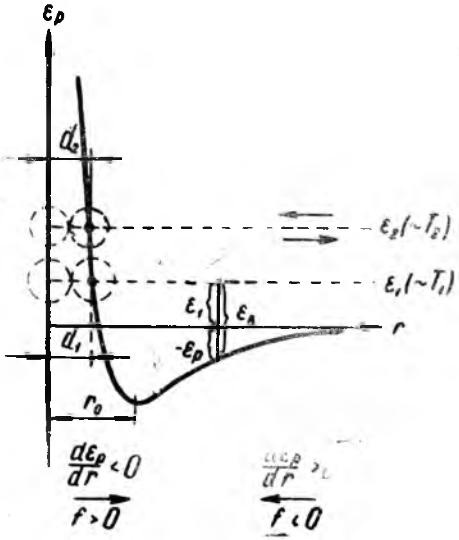
Бинобарин, нормал шароитда 1 *см*³ газдаги молекулаларнинг ҳажми тахминан

$$4\cdot 10^{-24}\cdot 2{,}7\cdot 10^{19} \approx 10^{-4} см^3$$

бўлади. Бу ҳажмни газнинг ҳажмига (1 *см*³) нисбатан бемалол эътиборга олмаса ҳам бўлади.

Агар газ (98.14) тенгламага бўйсунганда эди, у ҳолда босим 5000 *ат* га қадар кўтарилганида газнинг зичлиги 5000 марта ортган ва бир 1 *см*³ даги молекулалар ҳажми $10^{-4}\cdot 5\cdot 10^3 = 0{,}5$ *см*³ га тенг бўлар эди. Шундай қилиб, газ эгаллаб турган ҳажмнинг ярми молекулаларга тўғри келар эди. Молекулалар ҳаракат қилиши учун қоладиган ҳажм атмосфера босимидагидан 2 марта кичик бўлар эди. Мутлақо равшанки, бундай шароитларда ҳажмнинг босимга тескари пропорционаллиги бузилиши керак.

Молекулалар орасидаги ўзаро таъсир характерини 264-расмда келтирилган эгри чизиқ ёрдамида кўрсатиш ҳаммадан яхши. Бу эгри чизиқ икки молекуланинг ўзаро потенциал энергиясини бу молекулаларнинг марказлари орасидаги r масофанинг функцияси сифатида тасвирлайди. Бу эгри чизиқни ясашда бир-биридан чексиз катта масофада турган (яъни ўзаро таъсирлашмайдиган) молекулаларнинг потенциал энергияси нолга тенг деб олинган. Бинобарин, r чексизликка интилганда эгри чизиқ r ўқига асимптотик равишда яқинлашиб боради.



264- расм.

Потенциал энергиянинг r масофа функцияси сифатидаги ифодасини билган ҳолда молекулалар бир-биридан ҳар хил масофада турганида қандай куч билан ўзаро таъсирлашишини аниқлаш мумкин. Бунинг учун механикадан маълум бўлган

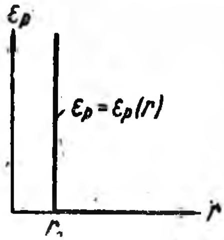
$$f_r = -\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial r}$$

муносабатдан фойдаланиш керак. Бу ердаги «—» ишора шуни билдирадики, молекулаларнинг ўзаро таъсир кучлари уларни энг кичик потенциал энергияли ҳолатга келтиришга интилади. Бинобарин, молекулалар орасидаги масофалар r_0 дан ортиқ бўлганда улар орасида ўзаро тортиш кучлари таъсир қилади, молекулалар орасидаги масофалар r_0 дан кичик бўлганда эса улар орасида итариш кучлари таъсир қилади. Эгри чизиқнинг тегишли жойдаги тиклиги кучнинг катталигини кўрсатади.

Молекулаларнинг яқинлашиш (бир-бирига тўқнашиш) процессини ε_p эгри чизиқ ёрдамида кўриб чиқамиз. Молекулалардан биринчинг марказини фаразий равишда координаталар бошига жойлаштирамиз, иккинчи молекуланинг марказини r ўқ бўйича кўчади, деб фараз қиламиз. Иккинчи молекула $\varepsilon_k = \varepsilon_1$ бошланғич кинетик энергия запасига эга бўлгани ҳолда чексизликдан биринчи молекулага томон йўналишда учиб келаётган бўлсин. Биринчи молекулага яқинлашар экан, иккинчи молекула тортишиш кучи таъсири остида тобора ортиб борувчи тезлик билан ҳаракат қилади. Натижада молекуланинг ε_k кинетик энергияси ҳам ортади. Лекин системанинг ε_1 га тенг бўлган $\varepsilon = \varepsilon_k + \varepsilon_p$ тўлиқ энергияси ўзгармайди (иккита молекула системаси берк системадир), чунки айни вақтда ε_p потенциал энергия камаяди. Иккинчи молекула координатаси r_0 бўлган нуқтадан ўтганда тортишиш кучлари итариш кучлари билан алмашади, бунинг оқибатида молекуланинг тезлиги тез камаяди (итаришиш соҳасида ε_p эгри чизиқ жуда тик кетади). ε_p потенциал энергия системанинг ε_1 тўлиқ энергиясига тенг бўлиб қолган пайтда молекуланинг тезлиги нолга айланади. Бу пайтда молекулалар бир-бирига энг яқин келади. Молекулалар бир-бирига энг яқин келган шароитда уларнинг марказлари орасида қолган энг кичик d_1 масофа молекуланинг эффектив диаметридан иборат бўлади. Молекула тўхтагандан кейин эса ҳамма ҳодисалар тескари тартибда содир бўлади: аввало молекула итаришиш кучи таъсири остида тобора ортиб борувчи тезлик билан ҳаракат қилади; координатаси r_0 бўлган нуқтадан ўтгач, молекулага унинг ҳаракатини секинлаштирувчи тортиш кучи таъсир кўрсата бошлайди ва ниҳоят, дастлабки ε_1 кинетик энергия запасига тенг энергия билан чексизликка қараб кетади.

264- расмдан кўриниб турибдики, молекула ўз ҳаракатини каттароқ ε_2 энергия запаси билан чексизликдан бошлаган ҳолда молекулаларнинг марказлари яна ҳам яқинроқ келар экан, яъни улар орасидаги минимал масофа d_2 аввалгидан кичикроқ бўлар экан. Шундай қилиб, молекулаларнинг эффектив диаметри уларнинг ўртача энергиясига ва, бинобарин, температурага боғлиқ экан. Температура кўтарилиши билан молекулаларнинг эффектив d диаметри камаяди, бунинг натижасида эркин югуриш йўлининг λ ўртача узунлиги ортади [(111.7) га қ.].

Молекулалар ўртасидаги ўзаро таъсирнинг идеал газ ҳолатининг тенгламасини чиқаришда фараз қилинган характери 265- расмда тасвирланган потенциал эгри чизиққа мос келади. Молекулалар орасидаги масофалар r_0 дан катта бўлганда ε_p ўзгармайди, шунинг учун бу ҳолда куч нолга тенг бўлади. $r = r_0$ бўлганда ε_p чексизликка айланиб, молекулалар марказларини r_0 дан кичик масофага яқинлашишга тўсқинлик қилувчи потенциал барьер ҳосил бўлади. Газда молекулалар орасидаги ўртача масофалар етарли даражада катта бўлгандагина шундай соддалаштирилган мулоҳазалар ўринли бўлади: r катта бўлганда 264-расмдаги ε_p эгри чизиқ жуда ётиқ кетади, натижада $\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial r} \approx 0$ бўлади. Молекулалар орасидаги ўртача масофа камайгани сари, яъни газ зичлиги ортгани сари молекулалар орасида тортишиш кучларининг роли тобора ортади. Юқорида кўриб ўтганимиздек, айни вақтда газ эгаллаб турган ҳажмнинг молекулалар ҳаракатланадиган қисми камаяди.



265- расм.

Бу айтилганларнинг ҳаммасидан шундай хулоса чиқадики, зичлик катта бўлганда газларнинг характерини тўғри ифода этадиган тенглама, биринчидан, молекулаларнинг бир-бирини тортишини ва иккинчидан, молекулалар маълум чекли хусусий ҳажмга эга эканлигини ҳисобга олиши керак.

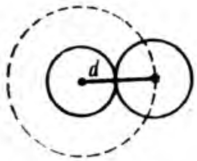
118- §. Ван-дер-Ваальс тенгламаси

Реал газларнинг характерини ифода этиш учун берилган жуда кўп тенгламалар ичида Ван-дер-Ваальс тенгламаси энг содда бўлиши билан бирга жуда яхши натижалар берар экан. Бу тенглама $pV_{км} = RT$ тенгламага тузатмалар киритиш йўли билан ҳосил қилинган бўлиб, қуйидагича кўринишга эгадир:

$$\left(p + \frac{a}{V_{км}^2}\right)(V_{км} - b) = RT, \qquad (118.1)$$

бу ерда p — газга ташқаридан кўрсатилаётган босим (бу босим газнинг идиш деворларига кўрсатадиган босимига тенг), a ва b — Ван-дер-Ваальс доимийлари бўлиб, ҳар хил газлар учун ҳар хил қийматга эга; бу қийматлар тажриба йўли билан топилади. Агар босим квадрат метрга ньютон ҳисобида, ҳажм киломолга куб метр ҳисобида ифодаланса, a доимийнинг ўлчамлиги $н \cdot м^4/кмоль^2$, b доимийнинг ўлчамлиги $м^3/кмоль$ бўлади. Баъзан a доимий $ат \cdot л^2/моль^2$ билан, b доимий эса $л/моль$ билан ҳам ифодаланади.

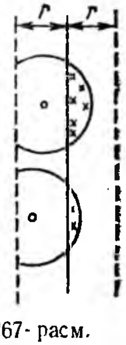
b доимий молекулалар ўлчамлари чекли бўлгани туфайли ҳажмнинг молекулалар ҳаракат қилолмайдиган қисмини аниқлайди. Бу доимий молекулалар ҳажмининг тўртланганига баравар, шундай эканлиги қуйидаги мулоҳазалардан келиб чиқади. Идишда фақат иккита молекула бўлсин. Бу молекулалардан истаган бирининг маркази иккинчи молекуланинг марказига молекуланинг d диаметридан кичик масофага яқин кела олмайди (266- расм). Шундай қилиб, иккала молекуланинг марказлари радиуси d бўлган сферик ҳажмга, яъни молекуланинг саккизта ҳажмига тенг ҳажмга киролмайди. Буни битта молекулага нисбатан ҳисоблаганда унга молекуланинг тўртланган ҳажмига тенг ҳажм тўғри келади. Одатда, молекулалар жуфт-жуфти билан тўқнашгани учун (бир вақтда учта ва ундан кўпроқ молекулаларнинг тўқнашиш эҳтимоли жуда кичик), бу мулоҳазалар молекулаларнинг ҳар қандай жуфти учун тўғридир. Бундан шундай хулоса чиқадики, газ молекулаларининг ҳар бирига нисбатан ҳисоб қилганда улар битта молекуланинг тўртта ҳажмига тенг ҳажмда, ҳамма молекулалар эса уларнинг бутун ҳажмига тўрт баравар келадиган ҳажмда ҳаракат қила олмайди.



266- расм.

$a/V_{км}^2$ тузатма молекулаларнинг бир-бирига ўзаро тортишиши туфайли ҳосил бўладиган p_i ички босимни ифодалайди. Агар молекулалар ўртасидаги ўзаро таъсир тўсатдан йўқ бўлиб қолса эди, у ҳолда газни ўша ҳажмда сақлаб қолиш учун ташқи босимни p_i ички босимга тенг миқдорда орттиришга тўғри келган бўлар эди. p_i нинг ҳажм квадратига тескари пропорционал бўлишининг сабаблари қуйидагичадир. Молекулалар орасидаги тортишиш кучлари масофа ортиши билан тез камайганлиги сабабли бирор r масофадан бошлаб молекулалар орасидаги ўзаро таъсирни мутлақо эътиборга олмаса ҳам бўлади. r масофа молекуляр таъсир радиуси деб аталади. r радиусли сфера молекуляр таъсир сфераси деб аталади. Газда фаразий бир текислик ўтказамиз (267- расм) ва газнинг бу текисликнинг икки томонида ётган қисмлари бир-бирини қандай куч билан тортишини баҳолаб кўришга ҳаракат қиламиз. Бу кучнинг сирт бирлигига тўғри келган қиймати ички босимга тенг бўлади.

Фаразий текисликдан чап томонда турган молекулаларнинг ҳар бирини текисликдан ўнг томонда турган молекулаларнинг мазкур молекула атрофига чизилган молекуляр таъсир сферасининг текисликдан нарига ўтиб турган қисми доираси ичида турганлари ўзига тортади (267- расмда бу молекулалар крест билан белгиланган). Бундай молекулаларнинг сони ва, бинобарин, текисликдан чап томонда ётган молекулаларнинг ҳар бирига таъсир этувчи куч ҳажм бирлигидаги молекулаларнинг n сонига пропорционалдир. Текисликдан чап томонда



267- расм.

турган молекулаларнинг қалинлиги r бўлган қатламга тушадиганларигагина текисликдан ўнг томонда турган молекулаларнинг тортиш кучи таъсир қилади. Бу молекулаларнинг сони ҳам n га пропорционалдир. Шундай қилиб, газнинг бир қисми иккинчи қисмини тортадиган куч ва бинобарин, ички босим n^2 га пропорционал бўлиб чиқди. n сон газ ҳажмига тескари пропорционал бўлгани учун, ички босим хажмнинг квадратига тескари пропорционал бўлади.

(118.1) тенглама бир киломоль газ учун ёзилган. z киломоль газга мос келувчи ихтиёрий m массали ($z = m/\mu$) газга оид тенгламага ўтиш учун ўша шароитда z киломоль газ z марта ортиқ ҳажм эгаллашини, яъни

$$V = zV_{\text{км}}$$

бўлишини хисобга олиш керак.

(118.1) да $V_{\text{км}}$ ўрнига V/z қўйиб, қуйидаги тенгламани топамиз:

$$\left(p + \frac{z^2a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{z} - b\right) = RT.$$

Бу тенгламани z га кўпайтириб ва қуйидаги

$$a' = z^2a; \quad b' = zb \tag{118.2}$$

белгиларни киритиб, z моль газга оид Ван-дер-Ваальс тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\left(p + \frac{a'}{V^2}\right)(V - b') = zRT. \tag{118.3}$$

Ван-дер-Ваальснинг z киломолга оид доимийлари a' ва b' харфлари билан белгиланган. Бу доимийлар билан a ва b орасидаги боғланиш (118.2) муносабатлар орқали берилади. a' нинг ўлчамлиги $н \cdot м^4$, b' доимийнинг ўлчамлиги ҳажмнинг ўлчамлиги билан бир хил.

Ван-дер-Ваальс тенгламаси газларнинг характерини (98.14) тенгламага қараганда қанчалик яхши ифодалашини 10-жадвалда (олдинги параграфга қаранг) келтирилган маълумотларга қараб фикр юритиш мумкин. Жадвалнинг учинчи устунида $\left(p + \frac{a'}{V^2}\right)(V - b')$[1] миқдорнинг қийматлари, иккинчи устунида pV нинг қийматлари берилган, иккала устундаги қийматлар ҳам азот газининг бир хил массаси учун берилган. Жадвалдан кўриниб турибдики, Ван-дер-Ваальс тенгламаси эксперимент натижаларига (98.14) тенгламадан кўра анча яхшироқ мос келади.

Зичлиги камайганда барча реал газларнинг хоссалари идеал газ хоссаларига яқинлашгани учун, ҳажм чексизликка интилгандаги лимитда Ван-дер-Ваальс тенгламаси (98.14) тенгламага айланади. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун, pV кўпайтма тахминан ўзгармай

[1] (118.3) га биноан бу катталик доимий бўлиши керак.

қолишини ҳисобга олмоқ ҳамда (118.3) тенгламада p ва V ни қавсдан ташқарига чиқармоқ керак:

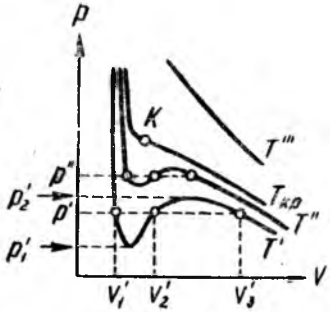
$$pV\left(1+\frac{1}{pV}\frac{a'}{V}\right)\left(1-\frac{b'}{V}\right)=zRT.$$

(118.3) тенгламада қавсларни очиб чиқиб ва ҳосил бўлган ифодани V^2 га кўпайтириб, Ван-дер-Ваальс тенгламасини

$$pV^3-(b'p+zRT)V^2+a'V=a'b' \qquad (118.4)$$

кўринишга келтириш мумкин. Ҳосил бўлган бу тенглама V га нисбатан кубик тенглама бўлиб, унинг коэффициентлари p ва T параметрларга боғлиқ. Коэффициентлари ҳақиқий бўлган озод ҳадли куб тенглама учта ечимга эга бўлади. Коэффициентлар орасидаги муносабатнинг қандай бўлишига қараб учала ечим ҳақиқий бўлиши ёки биттаси ҳақиқий, қолган иккитаси комплекс бўлиши мумкин. Ҳажм фақат ҳақиқий бўла олгани учун комплекс ечимлар физик маънога эга эмас.

268- расмда температуранинг бир қанча қийматларига оид Ван-дер-Ваальс изотермалари тасвирланган. Температура T' бўлиб, босим p'_1 дан p'_2 гача соҳада ўзгарганда (118.4) тенгламанинг коэффициентлари шундай бўладики, унинг учала ечими ҳам ҳақиқий бўлади; босимлар қиймати бошқача бўлганда унинг фақат битта ечимигина ҳақиқий бўлади. Температура кўтарилиши билан тенгламанинг учта ҳақиқий ечими орасидаги фарқ камаяди (T' ва T'' изотермаларни солиштиринг; $T''>T'$). Ҳар бир модданинг ўзига хос бўлган маълум бир $T_{кр}$ температурадан бошлаб ҳар қандай босимда (118.4) тенгламанинг фақат битта ечими ҳақиқий бўлиб қолаверади. $T_{кр}$ температура **критик температура** деб аталади. Агар температура орттира борилса, тенгламанинг V'_1, V'_2 ва V'_3 ечимларига мос келувчи нуқталар бир-бирига тобора яқинлашиб, критик нуқтада устма-уст тушади, бу нуқта 268-расмда K ҳарфи билан белгиланган. K нуқта критик нуқта деб аталади. Тегишли изотерма учун K нуқта бурилиш нуқтасидир. Бу нуқтада (118.4) тенгламанинг учала ҳақиқий ечими бир хил бўлади. Критик изотермага K нуқтада ўтказилган уринма температура критик температурага интилган ҳолда p', p'' ва ҳоказо кесувчилар интиладиган лимитдир. Бинобарин, бу уринма барча кесувчилар каби, V ўқига параллелдир, шунинг учун $\frac{dp}{dV}$ ҳосила K нуқтада нолга тенг. Ундан ташқари, бурилиш нуқтасида $\frac{d^2p}{dV^2}$ иккинчи ҳосила нолга тенг бўлиши керак.



268 расм.

(118.1) тенгламани p га нисбатан ечамиз:

$$p = \frac{RT}{V_{\text{км}} - b} - \frac{a}{V_{\text{км}}^2}. \tag{118.5}$$

Бу ифодани $V_{\text{км}}$ бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{dp}{dV_{\text{км}}} = -\frac{RT}{(V_{\text{км}} - b)^2} + \frac{2a}{V_{\text{км}}^3},$$

$$\frac{d^2p}{dV_{\text{км}}^2} = \frac{2RT}{(V_{\text{км}} - b)^3} - \frac{6a}{V_{\text{км}}^4}.$$

Критик нуқтада, яъни уларга $T = T_{\text{кр}}$, $V_{\text{км}} = V_{\text{км.кр}}$ қийматлар қўйилганда бу ифодалар нолга айланиши керак:

$$-\frac{RT}{(V_{\text{км.кр}} - b)^2} + \frac{2a}{V_{\text{км.кр}}^3} = 0,$$

$$\frac{2RT_{\text{кр}}}{(V_{\text{км.кр}} - b)^3} - \frac{6a}{V_{\text{км.кр}}^4} = 0.$$

Бу тенгламалар K нуқта учун ёзилган

$$p_{\text{кр}} = \frac{RT_{\text{кр}}}{V_{\text{км.кр}} - b} - \frac{a}{V_{\text{км.кр}}^2}$$

(118.5) тенглама билан бирга $P_{\text{кр}}$, $V_{\text{км.кр}}$ ва $T_{\text{кр}}$ номаълумли учта тенглама ҳосил қилади. Бу тенгламалар системасининг ечими қуйидагича:

$$V_{\text{км.кр}} = 3b,$$

$$p_{\text{кр}} = \frac{a}{27b^2},$$

$$T_{\text{кр}} = \frac{8a}{27bR}.$$

Шундай қилиб, Ван-дер-Ваальснинг a ва b доимийларини билган ҳолда критик нуқтага тегишли $V_{\text{км.кр}}$, $P_{\text{кр}}$ ва $T_{\text{кр}}$ катталикларни топиш мумкин экан, улар **критик катталиклар** деб аталади. Аксинча, критик катталикларнинг маълум қийматларига қараб Ван-дер-Ваальс доимийларининг қийматларини топиш мумкин.

Критик катталикларнинг ифодаларидан

$$p_{\text{кр}} V_{\text{км.кр}} = \frac{3}{8} RT_{\text{кр}}$$

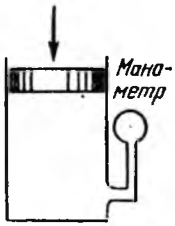
эканлиги келиб чиқади, ваҳолонки идеал газнинг ҳолат тенгламасига асосан

$$p_{\text{кр}} V_{\text{км.кр}} = RT_{\text{кр}}$$

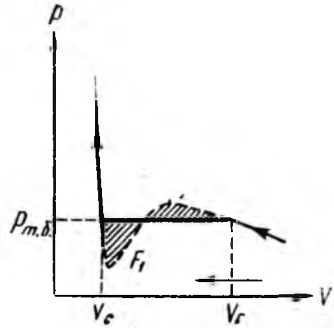
тенглик бажарилиши керак эди.

119-§. Экспериментал изотермалар

Изотермани тажриба йўли билан топиш учун газ ҳолатидаги модда олиб, уни суриладиган поршенли идиш ичига солиш (269- расм) ва секин сиқа бошлаш керак. Бу вақтда модданинг температураси ўзгармай қолишига аҳамият бериб туриб, босим ва ҳажмни бир вақтда қайд қила бориш керак. Бундай тажрибалардан критик температуралардан паст температураларда олинган натижалар 270- расмда кўрсатилган.



269- расм.



270- расм.

ган. Дастлаб ҳажм камайиши билан газнинг босими ортади[1], шу билан бирга изотерманинг бориши Ван-дер-Ваальс тенгламасига жуда мос келади. Лекин ҳажмнинг бирор $V_г$ қийматидан бошлаб экспериментал изотерма (118.3) тенгламага бўйсунмай қўяди. Ҳажмнинг шу қийматидан бошлаб идишдаги босим ўзгариши тўхтайди, бунда модданинг ўзи эса бир жинсли бўлмай қолади: газнинг бир қисми конденсацияланиб суюқликка айланади. Модда иккита фазага: суюқ ва газ фазасига ажралади. Ҳажм янада камая борган сари модданинг тобора кўпроқ қисми суюқ фазага ўтади, бу ўтиш процессида босим ўзгармай туради, расмда бу босим $p_{т.б}$ билан белгиланган.

Модданинг конденсацияланиб, суюқликка айланиш процесси тамом бўлгач (ҳажм V_c қийматга эришганда шундай бўлади), ҳажмнинг бундан кейинги камайишида босим тез ортади. Бунда изотерма яна (118.3) тенгламага тахминан бўйсунади. Изотерманинг бу қисмига тегишли ҳолатларда модда яна бир жинсли бўлади, лекин газ ҳолатида эмас, балки суюқ ҳолатда бўлади.

Шундай қилиб, Ван-дер-Ваальс тенгламаси модданинг газ ҳолатинигина эмас, балки модданинг суюқ ҳолатга ўтиш процессини ва суюқликнинг сиқилиш процессини ҳам тавсифлайди.

Экспериментал изотермани Ван-дер-Ваальс изотермасига солиштириш шу нарсани кўрсатадики, бу изотермалар модданинг бир фа-

---

[1] Температураси критик температурадан паст бўлган газ ҳолатидаги модда баъзан буғ деб аталади.

зали ҳолатларига тегишли қисмларда анча яхши устма-уст тушиб, модданинг икки фазага қатламланиш соҳасида мутлақо ҳар хил бўлади. Бу соҳада Ван-дер-Ваальс изотермасидаги S шаклидаги букилишга экспериментал изотермада тўғри чизиқли горизонтал қисм мос келади. Тўғри чизиқли бу қисм шундай жойлашадики, S шаклидаги букилиш қамраб ётган F_1 ва F_2 юзлар бир хил бўлади (270- расм).

Изотерманинг горизонтал қисмига тегишли ҳолатларда модданинг суюқ ва газ фазалари ўртасида мувозанат юзага келади. Ўзининг суюқлиги билан мувозанатда турган газ (ёки буғ) **т ў й и н г а н б у ғ** деб аталади. Тайинли бир температурада мувозанат амалга ошиши мумкин бўлган $p_{т.б}$ босим тўйинган буғ босими (ёки эластиклиги) деб аталади.

Босим $p_{т.б}$ бўлганда газ ҳолатидаги модда эгаллаб турган ҳажм $V_г$ билан белгиланган; V_c—босим худди шундай бўлганда суюқ ҳолатдаги модданинг ҳажми. Модданинг бирлик массасининг ҳажмини солиштирма V' ҳажми деб атаймиз. У ҳолда модданинг массаси m га тенг бўлганда тўйинган буғ ва суюқликнинг T температура ва $p_{т.б}$ босим шароитидаги солиштирма ҳажмлари қуйидагича бўлади:

$$V'_б = \frac{V_г}{m}; \quad V'_c = \frac{V_c}{m}. \tag{119. 1}$$

Ҳажмнинг оралиқдаги ҳар қандай V қийматида (271- расм) модданинг массаси $m_с$ бўлган қисми суюқ ҳолатда, массаси $m_б$ бўлган қисми буғ ҳолатида бўлади. Бинобарин, суюқликка $V'_с m_с$ ҳажм тўйинган буғга эса $V'_б m_б$ ҳажм тўғри келади. Бу иккала ҳажмнинг йиғиндиси V ҳажмга тенг бўлиши керак.

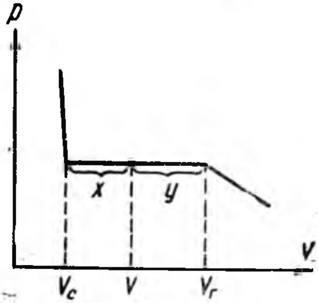
$$V = V'_с m_с + V'_б m_б.$$

Бунга солиштирма ҳажмларнинг (119. 1) ифодаларини қўйиб ва m массани $m_с + m_б$ йиғинди билан алмаштириб, қуйидагини топамиз:

$$V = V_с \frac{m_с}{m_с + m_б} + V_г \frac{m_б}{m_с + m_б},$$

бундан

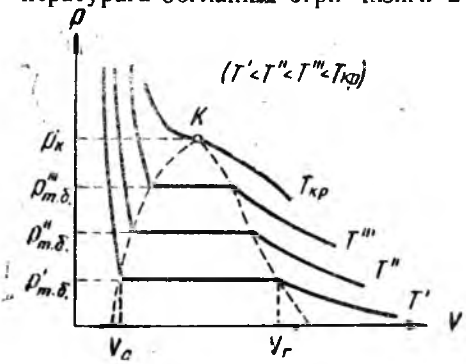
$$\frac{m_с}{m_б} = \frac{V_г - V}{V - V_с} = \frac{y}{x}.$$



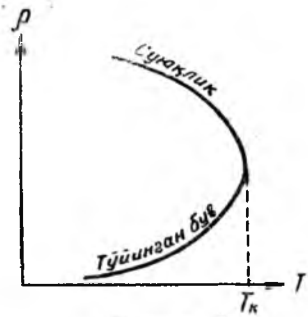
271- расм.

Бинобарин, икки фазали ҳолатда суюқлик ва тўйинган буғ массаларининг нисбати ҳолатни тасвирловчи нуқта изотермадаги горизонтал қисмни бўлиб ҳосил қилган кесмаларнинг нисбатига тенг.

272- расмда температуранинг бир қанча қийматларига оид экспериментал изотермалар кўрсатилган. Расмдан кўриниб турибдики, температура кўтарилиши билан изотерманинг горизонтал қисми қисқаради ва $T_{кр}$ критик температурада бу қисм нуқтага айланиб қолади. Шунга мувофиқ равишда суюқлик ва тўйинган буғнинг солиштирма ҳажмлари фарқи ва, бинобарин, уларнинг зичликлари фарқи камаяди. Критик температурада бу фарқ бутунлай йўқолади. Айни вақтда суюқлик билан буғ орасидаги ҳар қандай фарқ ҳам йўқолади. Суюқлик ва тўйинган буғ зичлигининг температурага боғланиш эгри чизиғи 273- расмда кўрсатилган.



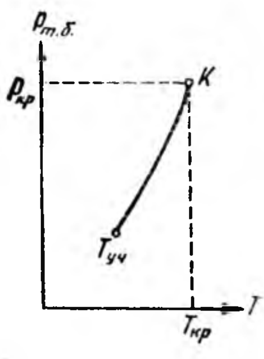
272- расм



273- расм.

272- расмдан кўринадики, тўйинган буғ босими температура кўтарилиши билан ортиб бориб, критик нуқтада $p_{кр}$ қийматга эришади. $p_{т.б.}$ нинг температурага боғланиш эгри чизиғи 274- расмда кўрсатилган. Эгри чизиқ критик нуқтада тугайди, чунки критик температурадан юқори температураларда тўйинган буғ тушунчасининг маъноси йўқолади. Эгри чизиқ учланган нуқта деб аталувчи $T_{уч.}$ нуқтадан бошланади, бу нуқта тўғрисида гап 151- § да боради.

Агар изотермаларнинг горизонтал қисмларининг четки нуқталари орқали чизиқ ўтказилса (272- расм), модданинг икки фазали ҳолатлари соҳасини чегараловчи қўнғироқсимон эгри чизиқ ҳосил бўлади. Критик температурадан юқори температураларда модда ҳар қандай босим шароитида бир жинсли бўлади. Бундай температураларда моддани ҳар қанча қисган билан суюлтириб бўлмайди.

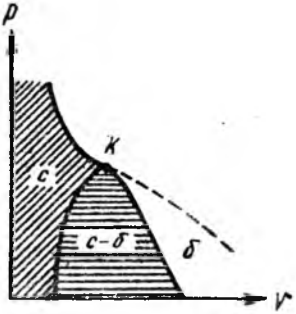


274- расм.

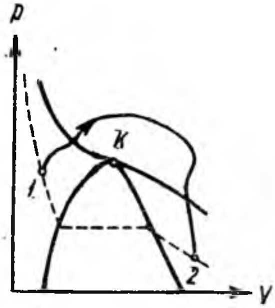
Критик температура тушунчасини биринчи бўлиб Д. И. Менделеев 1860 йилда киритган. Менделеев бу температурани суюқликнинг абсолют қайнаш температураси деб атаган ва уни суюқлик молекулалари орасида тутиниш кучлари йўқоладиган ва суюқлик босим ва у эгаллаб турган ҳажм қандай бўлишидан қатъи назар буғга айланиб кетадиган температура деб ҳисоблаган.

Қўнғироқсимон эгри чизиқ ва критик изотерманинг K нуқтадан чапда ётган қисми (p, V) диаграммани уч соҳага бўлади (275- расм).

Модданинг бир жинсли суюқ ҳолатлари соҳаси қия штрих чизиқ билан белгиланган. Биз биламизки, қўнғироқсимон эгри чизиқ тагида икки фазали ҳолатлар соҳаси ётади ва, ниҳоят, қўнғироқсимон эгри чизиқдан ва критик изотерманинг юқориги тармоғидан ўнг томонда ётадиган соҳа модданинг бир жинсли газ ҳолатларини ифодалайди. Охирги соҳада критик изотерманинг ўнг тармоғи тагида ётувчи қисмни алоҳида ажратиб, уни буғ соҳаси деб аташ мумкин.



275- расм.



276- расм.

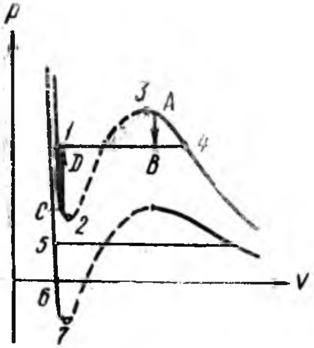
Бу соҳадаги ҳар қандай ҳолат газ ҳолидаги бошқа ҳолатлардан шу жиҳатдан фарқ қиладики, бошда бундай ҳолатда бўлган модда уни изотермик сиққанда суюқланади. Критик температурадан юқори температурада бирор ҳолатда турган модда ҳар қанча сиқилганда ҳам суюқликка айланмайди. Газ ҳолидаги ҳолатларни газ ва буғ деб ажратиш одат тусига кирган эмас.

Бир ҳолатдан бошқа ҳолатга ўтиш процесси икки фазали соҳани кесиб ўтмайдиган қилиб танланса (276- расм), суюқ ҳолатдан газ ҳолатига (ёки газ ҳолатидан суюқ ҳолатга) моддани икки фазага ажралтирмасдан ўтказиш мумкин. Бу ҳолда ўтиш процессида модда ҳамма вақт бир жинсли бўлиб қолаверади.

120- §. Ўта тўйинган буғ ва ўта иситилган суюқлик

Ван- дер- Ваальс изотермасини экспериментал изотермага солиштиришдан шу нарсани аниқладикки, экспериментал изотерма S шаклидаги $1—2—3—4$ букилиш ўрнига (277- расм) модданинг икки фазали ҳолатларига мос бўлган тўғри чизиқли $1—4$ қисмга эга бўлади. Бунга сабаб $1—2—3—4$ букилиш мос келувчи бир жинсли ҳолатларнинг барқарор эмаслигидир. Агар $2—3$ қисмда $\frac{dp}{dV}$ ҳосила мусбат эканлигини ҳисобга олсак, бу қисмга оид ҳолатларнинг турғун эмас эканлиги равшан бўлиб қолади. Бинобарин, $2—3$ ҳолатлардан кетма- кет ўта оладиган модда мутлақо ғайри табиий хоссаларга эга бўлар эди: газ ҳажми ортганда босим камаймасдан, балки ортган бўлар эди.

1—2 ва *3—4* қисмларда $\frac{dp}{dV}$ ҳосила манфий. Шунинг учун модданинг бу қисмларга тегишли ҳолатлари ҳақиқатда амалга ошиши мумкиндек туюлади. Дарҳақиқат, маълум шароитларда модда бу қисмларга мос ҳолатларга чиндан ҳам эга бўлади. Лекин бу ҳолатлар унчалик барқарор эмас: масалан, *A* ҳолатда буғга чанг заррачаси тушди дегунча бутун модда икки фазага ажралиб, *B* ҳолатга ўтиб кетади (277- расмда стрелка билан кўрсатилган *A*→*B* ўтишга қаранг). Шу каби унчалик барқарор бўлмаган ҳолатлар **метастабил** ҳолатлар деб аталади. *1—2* ҳолатлардаги модда ўта иситилган суюқлик деб, *3—4* ҳолатлардаги модда ўта тўйинган буғ деб аталади.



277- расм.

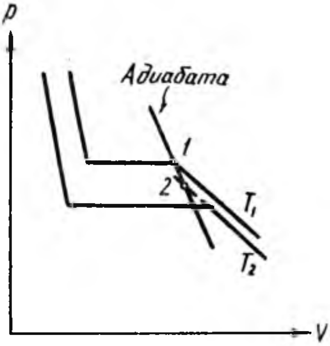
Етарлича паст температураларда Ван-дер-Ваальс изотермасидаги букилишнинг пастки қисми *V* ўқни кесиб ўтади ва манфий босимлар соҳасига ўтиб кетади (277- расмдаги пастки изотермага қаранг). Равшанки, манфий босим таъсири остидаги модда сиқилган ҳолатда эмас, балки чўзилган ҳолатда бўлади. Маълум шароитларда модданинг бундай ҳолатларини ҳақиқатда амалга ошириш мумкин. Шундай қилиб, пастки изотерманинг *5—6* қисми ўта иситилган суюқликка, *6—7* қисми эса чўзилган суюқликка мос келади.

Модданинг метастабил ҳолатлари қандай шароитларда амалга оширилиши мумкин эканлигини кўриб чиқамиз. Ишни ўта тўйинган буғни кўриб чиқишдан бошлаймиз.

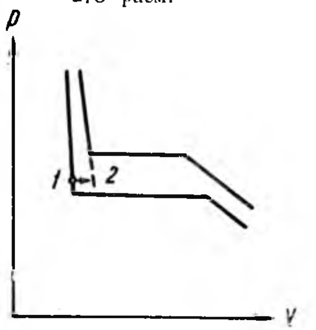
Агар буғда бегона аралашмалар мутлақо бўлмаса, буғнинг конденсацияланиб суюқликка айланиш процесси бошлана олмайди. Томчи ҳосил бўлиши учун жуда кўп молекулалар бир-бирига суюқликдаги молекулалар орасидаги масофалар қандай бўлса, тахминан ўшандай тартибдаги масофаларга бир вақтда яқинлашиши зарур, бундай бўлиши эса мутлақо эҳтимолдан холидир. Конденсация юзага келиши учун буғда конденсация маркази деб аталувчи марказлар бўлиши зарур. Бу марказлар ўзларига яқин учиб келган молекулаларни тутиб олиб, уларни конденсацияланган фазага ўтказади. Чанг зарралари, суюқлик томчилари ва айниқса, зарядли заррачалар (ионлар) конденсация марказлари бўла олади.

Шундай қилиб, агар буғ бегона аралашмалардан ва ионлардан яхшилаб тозаланса, у мазкур температурадаги тўйинган буғнинг $p_{т.б}$ босимидан ортиқ бўлган босим остида ҳам буғ ҳолида тура олади. Бу ҳолат метастабил ҳолат бўлади: ақалли битта конденсация маркази пайдо бўлган ҳамоно ўта тўйинган буғ ҳолати бузилади ва модда икки фазали ҳолатга ўтади.

Амалда ўта тўйинган буғ ҳосил қилиш учун тўйинмаган буғ кескин кенгайтирилади. Буғ тез кенгайтирилганда ташқи муҳит билан иссиқлик алмашинмайди ва натижада совийди. Буғнинг ҳолатини тасвирловчи нуқта бу ҳолда адиабата бўйлаб кўчади. 103-§ да кўрсатилганидек, адиабата изотермага қараганда тикроқ кўтарилади, бунинг натижасида буғ T_1 температурага мос бўлган *1* стабил ҳолатдан (278- расм) пастроқ T_2 температурага мос келувчи *2* метастабил ҳолатга ўта олади. Бундай процессдан Вильсон камерасида, яъни зарядли заррачаларнинг (масалан α-заррачаларнинг) изларини кузатишга мўлжалланган асбобда фойдаланилади. Сув ёки спирт буғларига тўйинган ҳаво Вильсон камераси ичида кескин кенгайтирилади. Натижада ҳаво совийди ва буғ ўта тўйинган ҳолатга ўтади. Камера ичига учиб кирган заррача ўз йўлида молекулаларни ионлаштиради. Ўта тўйинган буғ бу ҳосил бўлган ионлар устида майда томчилар шаклида конденсацияланиб, яхши кўринадиган из ҳосил қилади.



278- расм.



279- расм.

Энди ўта иситилган суюқлик ҳосил қилиш шароитларини кўриб чиқамиз. Шиддатли буғ ҳосил бўлиш (яъни қайнаш) процесси конденсация процесси каби, суюқлик ичидаги бегона аралашмаларда, масалан, қум зарралари ёки суюқликда эриган газ пуфакчаларида юз бериши мумкин. Агар суюқлик қаттиқ бўлган бегона аралашмалардан ва ўзида эриган газлардан яхшилаб тозаланса, суюқликни иситиш йўли билан мазкур температурадаги тўйинган буғнинг $p_{т.б}$ босимидан кичик бўлган босимли ҳолатга қайнатиб юбормасдан ўтказиш мумкин. Бу ҳолат ўта иситилган суюқлик ҳолати бўлади.

Суюқликнинг одатдаги ҳолатдан ўта иситилган ҳолатга ўтиши 279- расмда кўрсатилган (стрелка билан кўрсатилган *1—2* ўтишга қаранг). Ўта иситилган суюқлик ҳолати метастабил ҳолатдир. Ўта иситилган суюқликка қум зарраси ташланса, суюқлик қайнаб кетади ва модда икки фазали стабил ҳолатга ўтади (277- расмдаги $C \to D$ ўтишга қаранг).

Суюқликни, масалан, симобни қуйидагича чўзиш мумкин: агар симобга бир учи кавшарлаб қўйилган узун шиша най ботирилиб, кейин унинг кавшарлаб қўйилган учини юқорига қаратилиб секин-аста ташқарига тортиб чиқарила бошланса, у ҳолда бундай най ичида баландлиги 760 *мм* дан анча ортиқ бўлган симоб устуни ҳосил қилиш мумкин. Бинобарин, най ичидаги симобни атмосфера босими кучи эмас, балки молекулалар орасидаги тутиниш кучи тутиб туради. Най ичидаги симоб чўзилган ҳолатда, яъни манфий босим остида бўлади.

121-§. Реал газнинг ички энергияси

Реал газнинг молекулалари орасидаги ўзаро таъсир натижасида молекулаларнинг ўзаро E_p потенциал энергияси юзага келади ва бу энергия молекулалар ҳаракатининг E_k кинетик энергияси билан бирга газнинг ички энергиясини ташкил этади:

$$U = E_k + E_p.$$

Биз биламизки, бир киломоль газдаги молекулаларнинг кинетик энергияси $E_k = C_V T$ га тенг [(102.8) га қ.], яъни температуранинг функциясидир. Молекулаларнинг ўзаро потенциал энергияси уларнинг орасидаги ўртача масофага боғлиқ. Шунинг учун E_p потенциал энергия V газ ҳажмининг функцияси бўлиши керак. Бинобарин, реал газнинг ички энергияси T ва V дан иборат икки параметрнинг функцияси бўлади.

Газ кенгаяётганда молекулалар орасидаги тортишиш кучларини енгиш учун иш бажарилиши керак. Механикадан маълумки, ички кучларга қарши бажарилган иш системанинг потенциал энергиясини орттиришга сарф бўлади. Ташқи кучларга қарши бажарилган иш $d'A = p\,dV$ ифода билан аниқланган каби, бир киломоль газ молекулалари ўртасида таъсир қилувчи ички кучларга қарши бажариладиган иш $d'A = p_i dV_{\text{км}}$ ифода кўринишида ёзилиши мумкин, бу ерда p_i — Ван-дер-Ваальс тенгламасига бўйсунадиган газ учун $a/V_{\text{км}}^2$ га тенг ички босим. $d'A$ ни молекулалар ўзаро потенциал энергиясининг dE_p орттирмасига тенглаб, қуйидаги ифодани топамиз:

$$dE_p = p_i dV_{\text{км}} = \frac{a}{V_{\text{км}}^2}\, dV_{\text{км}}.$$

Бу ифодани интеграллаб, E_p потенциал энергия учун қуйидаги ифодани топамиз:

$$E_p = -\frac{a}{V_{\text{км}}} + \text{const}.$$

Интеграллаш доимийсининг қийматини шундай танлаб олиш керакки, ҳажм чексизликка интилган вақтда лимитда ички U энергиянинг ифодаси идеал газ ички энергиясининг ифодасига айланадиган бўлсин (ҳажм ортганда ҳамма реал газларнинг хоссалари идеал газникига яқинлашишини эслатиб ўтамиз). Бу мулоҳазаларга асосланиб, интеграллаш доимийсини нолга тенг деб олиш керак. У ҳолда реал газнинг ички энергияси қуйидагича ифодаланади:

$$U_{\text{км}} = C_V T - \frac{a}{V_{\text{км}}}, \tag{121.1}$$

бундан кўринадики, температура кўтарилганда ҳам, ҳажм ортганда ҳам ички энергия ортар экан.

Агар газ ташқи муҳит билан иссиқлик алмашмасдан ва ташқи иш бажарилмасдан кенгайса ёки сиқилса, у ҳолда термодинамиканинг биринчи қонунига мувофиқ, газнинг ички энергияси ўзгармай қолавериши керак. Энергияси (121.1) формула билан аниқланувчи газ учун бу ҳолда қуйидаги шарт бажарилиши керак:

$$dU_{\text{км}} = C_V\, dT + \frac{a}{V_{\text{км}}^2}\, dV_{\text{км}} = 0,$$

бундан dT ва $dV_{\text{км}}$ нинг ишоралари ҳар хил эканлиги келиб чиқади.

Бинобарин, бундай шароитларда газ ҳамиша кенгайганда совиши, сиқилганда эса исиши керак.

122- §. Жоуль—Томсон эффекти

Жоуль билан Томсон газни иссиқлик изоляциясига эга бўлган ва ичида ғовак тўсиғи бор трубкадан ўтказганида газ тўсиқ орқали ўтиб кенгайиши натижасида температураси бир оз ўзгаришини пайқаганлар. Температура ΔT ўзгаришининг ишораси бошланғич босим ва температурага қараб манфий ёки мусбат бўлиши ва, жумладан, нолга тенг бўлиб қолиши ҳам мумкин. Бу ҳодиса Жоуль—Томсон эффекти деб аталади. Агар газ температураси пасайса ($\Delta T<0$), эффект мусбат ишорали деб ҳисобланади; агар газ исиса ($\Delta T>0$), эффект манфий ишорали деб ҳисобланади.

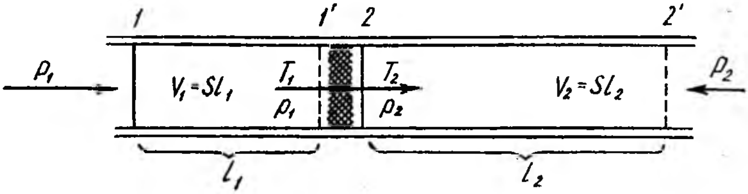
Жоуль—Томсон тажрибасининг схемаси 280- расмда кўрсатилган. Деворлари иссиқликни жуда ёмон ўтказадиган трубка ичида газнинг барқарор (вақт ўтиши билан ўзгармайдиган) оқими ҳосил қилинади. Трубка ичида майда тешиклари бўлган тўсиқ (пахтадан қилинган тиқин) бор бўлиб, мана шу тиқинда босим энг катта p_1 қийматидан энг кичик p_2 қийматига қадар ўзгарган. Бунинг натижасида газ кескин кенгайган. Тажрибада температуралар айирмаси $\Delta T = T_2 - T_1$ ўлчаб борилган.

Газнинг *1* ва *2* кесимлар билан чегараланган қисмини фикран ажратиб олайлик. Газ трубка ичида ҳаракат қилгани сари бу кесимлар кўча боради. Бир оз вақт ўтгандан кейин бу кесимлар мос равишда *1'* ва *2'* вазиятларга келиб қолди деб фараз қиламиз. Газнинг ўша миқдори тўсиқдан кейин тўсиқдан олдингига қараганда каттароқ ҳажм эгаллагани учун *2* кесим *1* кесимга қараганда каттароқ кесмага силжийди. Газнинг фикран ажратиб олинган миқдори учун термодинамика биринчи асосининг тенгламасини ёзамиз. Газ ташқи муҳит билан иссиқлик алмашмасдан (адиабатик) кенгаяди. Шунинг учун газ ички энергиясининг орттирмаси газ устида бажарилган ишга тенг бўлиши керак:

$$U_2 - U_1 = A'. \tag{122.1}$$

Газнинг мазкур миқдори устида бажариладиган бу ишни унга қўшни бўлган газ бажаради. Газнинг ажратиб олинган қисмига чап томондан p_1S куч таъсир қилади (S—трубканинг кесими), бу куч ҳаракат томонига йўналган. Ўнг томондан эса, ҳаракатга қарши йўналган p_2S куч таъсир қилади. Натижа а газнинг биз текшираётган қисми устида A' иш бажарилади:

$$A' = p_1Sl_1 - p_2Sl_2.$$



280- расм.

Sl_1 кўпайтма газнинг кенгайишдан олдин эгаллаб турган V_1 ҳажми, Sl_2 кўпайтма эса газнинг кенгайгандан кейин эгаллаб турган V_2 ҳажми эканлигини ҳисобга олиб, ишни қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$A' = p_1V_1 - p_2V_2.$$

Бу ифодани (122.1) га қўйиб, қуйидаги муносабатни топамиз:

$$U_1 + p_1V_1 = U_2 + p_2V_2. \qquad (122.2)$$

Шундай қилиб, Жоуль—Томсон тажрибаси шароитида газнинг ички энергияси эмас, балки ҳолат функцияси бўлган $U + pV$[1] катталик сақланар экан[1].

Биз киломоль газга оид ҳисоблар бажарамиз. Кенгайгандан кейин газнинг ҳажми катта бўлади, шунинг учун бу газни етарлича даражадаги аниқлик билан идеал газ деб ҳисоблаш мумкин. Шунинг учун p_2V_2 ни RT_2 га тенг дейиш, $U_2 = C_V T_2$ деб олиш мумкин. (118.1) га мувофиқ,

$$p_1V_1 = \left[\frac{RT_1}{V_1 - b} - \frac{a}{V_1^2}\right] V_1.$$

U_1 учун (121.1) ифодани олиш керак. Бу ифодаларнинг ҳаммасини (122.2) га қўямиз:

$$C_V T_1 - \frac{a}{V_1} + \frac{RT_1V_1}{V_1 - b} - \frac{a}{V_1} = C_V T_2 + RT_2.$$

---

[1] Термодинамикада бу функция газда бор бўлган иссиқлик ёки энтальпия деб аталади.

Учинчи қўшилувчини қуйидагича ёзиш мумкин.

$$\frac{RT_1V_1}{V_1-b}=\frac{RT_1(V_1-b+b)}{V_1-b}=RT_1+\frac{RT_1b}{V_1-b}.$$

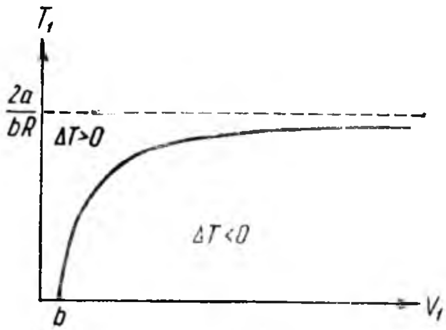
Буни ҳисобга олиб, ΔT ни топамиз:

$$\Delta T=T_2-T_1=\frac{1}{C_V+R}\left(\frac{RT_1b}{V_1-b}-\frac{2a}{V_1}\right). \qquad (122.3)$$

ΔT нинг ишораси қавслар ичидаги ифоданинг ишораси билан аниқланади. Қуйидаги шарт бажарилганда нолинчи эффект ($\Delta T=0$) ўринли бўлади:

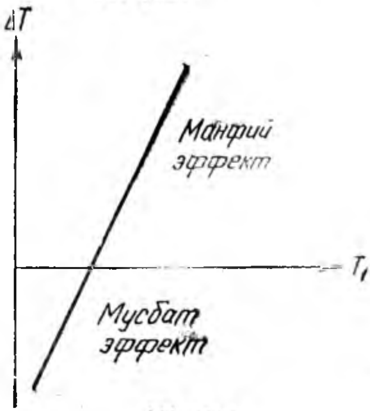
$$\frac{RT_1b}{V_1-b}-\frac{2a}{V_1}=0. \qquad (122.4)$$

(V_1, T_1) текисликда (122.4) тенглама 281-расмда тасвирланган эгри чизиқ билан ифодаланади. Бу эгри чизиқнинг нуқталари T_1 ва V_1 параметрларнинг $\Delta T=0$ бўлган вақтдаги қийматларини аниқлайди. Эгри чизиқдан юқорида ётувчи нуқталар T_1 ва V_1 нинг $\Delta T>0$ бўлган вақтдаги қийматларини, яъни эффект манфий бўлгандаги қийматларини аниқлайди (эгри чизиқдан юқорига қараб кўчилганда қавс ичидаги биринчи қўшилувчи ортади ва қавс ичидаги ифода нолдан катта бўлиб қолади). Эгри чизиқдан пастда ётувчи нуқталар T_1 ва V_1 параметрларнинг эффект мусбат ($\Delta T<0$) бўлгандаги қийматларини аниқлайди. (122.4) тенглама билан ифодаланувчи эгри чизиқ инверсия эгри чизиғи деб аталади.



281- расм

Шундай қилиб, эффектнинг ишораси ва катталиги газнинг бошланғич температураси ва бошланғич ҳажми (ёки бошланғич босими) билан аниқланади. $T_1>\frac{2a}{bR}$ бўлганда эффект ҳамиша манфий бўлади. $T_1<\frac{2a}{bR}$ бўлган ҳолда бошланғич ҳажм етарлича катта бўлгандагина (яъни бошланғич босим етарлича кичик бўлгандагина) эффект мусбат бўлади.



282- расм.

Бошланғич ҳажм (босим) тайинли бир қийматга эга бўлганда ΔT катталик бошланғич T_1 температурага чизиқли боғлиқ равишда ўзгаради (282-расм). Газнинг бошланғич температураси қанча паст бўлса, у Жоуль—Томсон эффекти натижасида шунча кўпроқ совийди.

Шуни қайд қилиб ўтамизки, Жоуль—Томсон эффекти асосан газнинг идеалликдан четланиши туфайли юз беради. Идеал газ учун $pV=RT$ бўлади ва (122.2) шарт

$$C_V T_1+RT_1=C_V T_2+RT_2$$

шартга айланади, бундан $T_1=T_2$ эканлиги келиб чиқади.

123- §. Газларни суюлтириш

Газни суюлтириш учун уни $T_{кр}$ критик температурадан паст температурагача совитиш керак. 11-жадвалнинг иккинчи устунида баъзи газлар критик температураларининг қийматлари келтирилган[1]. Жадвалдан кўриниб турибдики, кислород, азот, водород ва гелий каби газларни суюқ ҳолатга ўтказиш уларнинг температурасини жуда кўп пасайтиришни талаб қилади. Газларни суюлтиришнинг саноатда қўлланиладиган усулларидан бири (Линде методи) газни совитиш учун Жоуль—Томсон эффектига асосланган.

11-жадвал

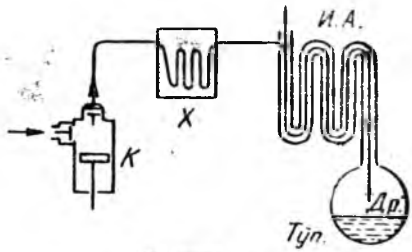
Модда	Критик температура, °C	Атмосфера босими шароитида қайнаш температураси, °C
Кислород	—119	—183
Азот	—147	—196
Водород	—240	—253
Гелий	—268	—269

283-расмда Линде методининг принципиал схемаси берилган. *К* компрессорда сиқилган газ *X* совиткичдан ўтиб, унинг ичида инверсия нуқтасидан паст бўлган температурагача совийди. Газ янада кенгайганда Жоуль—Томсон эффекти натижасида исиб кетмасдан совиши учун у шунчалик паст температурагача совитилади. Сўнгра газ *И. А.* иссиқлик алмаштиргичнинг ички трубкасида оқиб, *Др* дросселдан ўтиб, кескин кенгаяди ва натижада совийди (бу ерда дроссель Жоуль—Томсон тажрибасидаги пахта тиқин вазифасини ўтайди).

Иссиқлик алмаштиргич иккита узун ҳар хил диаметрли трубкадан иборат бўлиб, бири иккинчисининг ичига киритилган: иссиқлик алмаштиргичнинг ўлчамлари кичикроқ бўлиши учун иккала трубка спирал қилиб ўралган. Ички трубканинг деворлари иссиқликни

[1] Жадвалнинг иккала устунида ҳам температураларнинг яхлитланган қийматлари берилган.

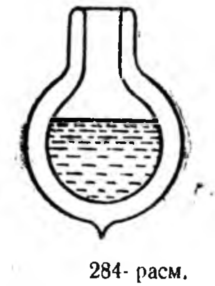
яхши ўтказадиган қилинган. Ташқи трубка эса иссиқлик ўтказмайдиган қилиб изоляцияланган. Агар трубкалар бўйлаб дастлабки температуралари ҳар хил бўлган газлар оқими қарама-қарши йўналишда оқизилса, у ҳолда ички трубка девори орқали иссиқлик алмашинишн натижасида газларнинг температураси тенглашади: иссиқлик алмаштиргичга кираётганда температураси юқорироқ бўлган газ иссиқлик алмаштиргичдан ўта боргани сари совий боради, унга қарши келаётган оқим эса аксинча исийди.



283- расм.

Қурилмани ишга туширган ҳамоно газ кенгайганда температурасининг пасайиши газни суюлтириш учун кифоя қилмайди. Салгина совитилган бу газ иссиқлик алмаштиргичнинг ташқи трубкасига юборилади ва натижада ички трубкадан дросселга томон оқаётган газ бир оз совийди. Шунинг учун газнинг дросселга келаётган ҳар бир кейинги улуши олдингисига қараганда пастроқ температурага эга бўлади. Шу билан бирга, газнинг бошланғич температураси қанча паст бўлса, Жоуль — Томсон эффекти ҳисобига унинг температураси шунча кўпроқ пасаяди. Бинобарин, газнинг ҳар бир кейинги улуши кенгайишдан олдин ўзидан олдинги улушга қараганда пастроқ температурага эга бўлади ва ундан ташқари, кенгайганда олдингисидан кўпроқ совийди. Шундай қилиб, *Тўп* тўплагичдаги газнинг температураси тобора кўпроқ пасаяди ва ниҳоят, температура шунчалик пасаядики, кенгайгандан кейин газнинг бир қисми конденсацияланиб суюқликка айланади.

Газларни суюлтиришнинг саноатда қўлланиладиган иккинчи усули (Клод методи) иш бажарганда газнинг совиши ҳодисасига асосланган. Сиқилган газ поршенли машинага (детандерга) юборилади, бу ерда газ кенгайиб ички энергияси ҳисобига поршень устида иш бажаради. Натижада газнинг температураси пасаяди. Бу усулни совет физиги П. Л. Капица такомиллаштирган. У газни совитиш учун поршенли детандер ўрнига турбодетандер, яъни аввал сиқилган газ билан айланма ҳаракатга келтириладиган турбина ишлайди.


284- расм.

Қайнаш температураси паст бўлган суюлтирилган газлар Дьюар идишлари деб аталадиган махсус конструкцияли идишларда сақланади. Бу идишлар қўш деворли бўлиб, улар орасидаги ҳаво (газ) яхшилаб сўриб олинади (284- расм). Вакуум шароитида газнинг иссиқлик ўтказувчанлиги босим камайиши билан камаяди (115- § га қ.) Шунинг учун идиш деворлари орасидаги ҳавоси сўриб олинган бўшлиқ жуда яхши иссиқлик изолятори бўлиб хизмат қилади. Дьюар идишлари шишадан ҳам, металлдан ҳам ясалади, уларнинг сиғими бир неча ўн миллилитрдан бир неча минг литрларгача боради.

Суюлтирилган газнинг температураси унга таъсир қилаётган босим билан аниқланади. 11-жадвалда газларнинг атмосфера босими шароитидаги қайнаш температуралари берилган. Суюлтирилган газ қайнаётгандаги босимни камайтириб (бунинг учун ҳосил бўлаётган буғларни муттасил сўриб олиб туриш керак), бу газнинг температурасини пасайтириш мумкин. Температурани бу йўл билан шунчалик пасайтириб юбориш мумкинки, натижада суюқлик қаттиқ ҳолатга ўтади.

XIV БОБ

ТЕРМОДИНАМИКА АСОСЛАРИ

124- §. Муқаддима

Даставвал термодинамика иссиқликнинг ишга айланиши ҳақидаги фан сифатида юзага келган. Бироқ термодинамикага асос қилиб олинган қонунлар шу қадар умумий характерга эгаки, шу сабабли термодинамик методлар ҳозирги вақтда жуда кўп физик ва химик процессларни тадқиқ қилишга, модда ва нурланиш хоссаларини ўрганишга самарали татбиқ этилмоқда. 91- § да қайд қилиб ўтилганидек, модданинг хоссаларини ва бир ҳолатдан бошқа ҳолатга айланиш процессларини ўрганишда термодинамика ҳодисаларнинг микроскопик манзарасига эътибор қилмайди. Термодинамика ҳодисаларни тажрибадан топилган асосий қонунларга (асосларга) таяниб туриб текширади. Шунинг учун термодинамика топган хулосаларнинг ҳақиқийлик даражаси унга асос қилиб олинган қонунларнинг ҳақиқийлик даражаси билан бир хил бўлади. Бу қонунлар эса, тажрибалардан топилган ғоят кўп маълумотларни умумлаштириш орқали топилгандир.

Термодинамиканинг дастлабки иккита қонуни унинг асосини ташкил қилади. Биринчи қонун энергиянинг бир турдан бошқа турга айланишларида ўринли бўладиган миқдорий муносабатларни аниқлайди. Иккинчи қонун эса энергиянинг бу айланишлари мумкин бўладиган шароитларни, яъни процесслар қандай йўналишда юз бериши мумкинлигини аниқлайди.

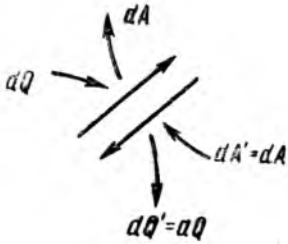
Биринчи асос 95- § да таърифланган эди [(95. 2) формулага қ.]. Иккинчи асоснинг таърифи 126- § да берилади.

Термодинамикада мувозанатли ҳолат ва қайтувчан процесс тушунчалари катта роль ўйнайди. Мувозанатли ҳолат тушунчаси 93- § да изоҳлаб ўтилган эди.

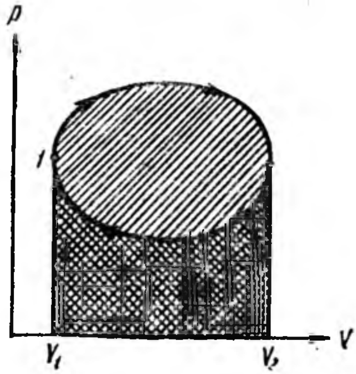
Қайтувчан процесс деб шундай процессга айтиладики, бу процесс тескари йўналишда юз берганда система процесснинг тўғри йўналишида ўтган ҳолатлардан энди фақат тескари тартибда ўтади. 93- § да айтилганлардан фақат мувозанатли процессгина қайтувчан процесс бўлиши мумкин деган хулоса чиқади.

Қайтувчан процесс, равшанки, қуйидагича хоссага эга: процесснинг тўғри йўналишда боришида система бирор элементар қисмда $d'Q$ иссиқлик олиб, $d'A$ иш бажарса (285- расм), у ҳолда процесснинг тескари юришида система ўша қисмда $d'Q' = d'Q$ иссиқлик беради ва унинг устида $d'A' = d'A$ иш бажарилади. Шунинг учун қайтувчан процесс бир йўналишда, сўнгра тескари йўналишда қайтиб содир бўлганда ва натижада система бошланғич ҳолатига қайтиб келганида система атрофида турган жисмларда ҳеч қандай ўзгариш қолмаслиги керак.

Айланма процесс (ёки цикл) деб шундай процессга айтиладики, бу процессда система бир қатор ўзгаришлардан кейин бошланғич ҳолатига қайтиб келади. Графикда цикл ёпиқ эгри чизиқ билан тасвирланади (286- расм). Айланма процессда бажариладиган иш сон жиҳатидан эгри чизиқ ўраб олган юзга тенг. Дарҳақиқат, 96- § да кўрсатилганидек *1—2* қисмда



285- расм.



286- расм.

бажариладиган иш мусбат бўлиб, ўнгга томон қиялатиб чизилган штрихли юзга сон жиҳатдан тенг (соат стрелкаси бўйича юз берадиган цикл текширилмоқда). *2—1* қисмдаги иш манфий бўлиб, чапга оғдириб чизилган штрих билан белгиланган юзга сон жиҳатдан тенг. Бинобарин, бир цикл давомида бажариладиган иш сон жиҳатидан эгри чизиқ ўраб олган юзга тенг бўлиб, тўғри циклда бажарилган ишнинг (яъни соат стрелкаси йўналиши бўйича юз бераётган циклда) ишораси мусбат, тескари циклда эса манфий бўлади.

Циклни бажариб бўлгандан кейин система дастлабки ҳолатига қайтиб келади. Шунинг учун ҳолатнинг ҳар қандай функцияси, жумладан ички энергия циклнинг боши ва охирида бир хил қийматга эга бўлади.

125- §. Иссиқлик машинасининг фойдали иш коэффициенти

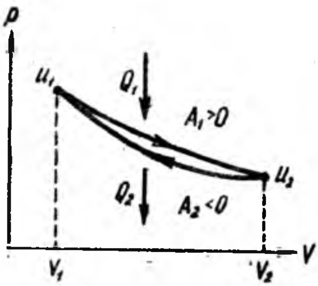
Ҳар қандай двигатель бирор айланма процессни (циклни) кўп марта бажарадиган системадан иборат. Цикл давомида иш бажарувчи модда (масалан, газ) олдин V_2 ҳажмга қадар кенгайсин, сўнгра эса яна бошланғич V_1 ҳажмига келгунча сиқилсин (287- расм), деб фараз қилайлик. Бир цикл давомидаги иш нолдан катта бўлиши учун кенгайиш процессида босим (бинобарин, температура ҳам) сиқилиш процессидаги босимдан ортиқ бўлиши керак. Бунинг учун иш бажарувчи моддага кенгайиш процессида иссиқлик бериш, сиқилиш процессида эса ундан иссиқлик олиш керак.

Циклнинг иккала қисми учун термодинамика биринчи қонунининг тенгламасини ёзамиз. Кенгайишда ички энергия U_1 қийматидан U_2 қийматигача ўзгаради, бунда система Q_1 иссиқлик олади ва A_1 иш бажаради. Биринчи қонунга мувофиқ,

$$Q_1 = U_2 - U_1 + A_1. \qquad (125.1)$$

Сиқилишда система A_2 иш бажаради ва Q_2' иссиқлик беради, бу эса $-Q_2'$ иссиқлик олиш билан бир хилдир. Бинобарин,

$$-Q_2' = U_1 - U_2 + A_2. \qquad (125.2)$$



287- расм

(125.1) ва (125.2) тенгламаларни қўшиб, қуйидагиларни топамиз:

$$Q_1 - Q_2' = A_1 + A_2.$$

$A_1 + A_2$ йиғинди системанинг цикл давомида бажарадиган тўлиқ A иши эканини ҳисобга олиб, қуйидагича ёзиш мумкин:

$$A = Q_1 - Q_2'. \qquad (125.3)$$

Ташқаридан оладиган иссиқлик ҳисобига иш бажарувчи даврий ишлайдиган двигатель иссиқлик машинаси деб аталади.

Термодинамиканинг биринчи асоси баъзан қуйидагича таърифланади: биринчи тур перпетуум мобиле (абадий двигатель) яратиш, яъни ташқаридан оладиган энергиядан ортиқ миқдорда иш бажара оладиган даврий ишлайдиган двигатель яратиш мумкин эмас.

(125.3) дан кўринадики, ташқаридан олинадиган Q_1 иссиқлик миқдорининг ҳаммаси ҳам фойдали ишга сарфланмайди. Двигатель цикл билан ишлаши учун иссиқликнинг Q_2' га тенг бўлган қисми ташқи муҳитга қайтариб берилиши керак ва, бинобарин, у фойдали иш бажаришга сарфланмайди. Равшанки, иссиқлик машинаси ташқаридан оладиган Q_1 иссиқликни фойдали A ишга қанчалик тўлароқ айлантирса, бу машина шунчалик фойдалироқ бўлади. Шунинг учун иссиқлик машинасини η фойдали иш коэффициенти (қисқача ф. и. к.) билан характерлаш қабул қилинган. Ф. и. к. цикл давомида бажариладиган A ишнинг цикл давомида олинадиган Q_1 иссиқликка нисбати сифатида аниқланади:

$$\eta = \frac{A_1}{Q_1}. \qquad (125.4)$$

(125.3) га асосан $A = Q_1 - Q_2'$ бўлгани учун ф.и.к. нинг ифодасини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1}. \qquad (125.5)$$

Ф. и. к. нинг таърифидан у бирдан ортиқ бўла олмаслиги келиб чиқади.

Агар 287- расмда тасвирланган цикл орқага қайтарилса, совиткич машинанинг цикли ҳосил бўлади. Бундай машина температураси T_2 бўлган жисмдан цикл давомида Q_2' иссиқлик миқдори олади ва T_1 температураси юқорироқ бўлган жисмга Q_1 иссиқлик миқдори беради. Цикл давомида машина устида A иш бажарилиши керак. Совиткич машинанинг эффективлиги унинг совитиш коэффициенти билан характерланади. Бу коэффициент совитилаётган жисмдан олинган Q_2' иссиқликнинг машинани ишлатишга сарф қилинадиган A ишга нисбати сифатида таърифланади:

$$\text{совитиш коэффициенти} = \frac{Q_2'}{A} = \frac{Q_2'}{Q_1 - Q_2'}.$$

126- §. Термодинамиканинг иккинчи асоси

Термодинамиканинг иккинчи асоси, биринчиси каби, бир қанча йўл билан таърифланиши мумкин. Иккинчи асоснинг энг равшан таърифи бундай ўқилади: камроқ исиган жисмдан кўпроқ исиган жисмга иссиқлик ўз-ўзидан ўта олмайди. Янада аниқроқ таърифи: *ягона охирги натижаси камроқ исиган жисмдан кўпроқ исиган жисмга иссиқлик берилишидан иборат бўлган процесслар амалга ошмайди.*

Лекин аҳволни иккинчи асос иссиқликнинг камроқ исиган жисмдан кўпроқ исиган жисмга ўтишига умуман йўл қўймайди деб тасаввур қилиш ярамайди. Олдинги параграфнинг охирида биз иссиқликнинг бундай ўтишига олиб келадиган процессни кўриб ўтдик. Лекин бу ўтиш процесснинг якка-ю ягона натижаси эмас эди. Иссиқликнинг бундай ўтишида атрофдаги жисмларда ўзгаришлар юз берди, бу ўзгаришлар система устида A иш бажарилишига алоқадор эди.

Иккинчи асос бундай таърифланиши ҳам мумкин: *бирдан-бир охирги натижаси бирор жисмдан маълум миқдор иссиқлик олиш ва бу иссиқликни бутунлай ишга айлантириб юборишдан иборат бўладиган процесслар амалга ошмайди.*

Биринчи қарашда иккинчи таърифга, масалан, идеал газнинг изотермик кенгайиш процесси қарама-қаршидек туюлиши мумкин. Дарҳақиқат, идеал газ бирор жисмдан олган иссиқлик бутунлай ишга айланиб кетади. Лекин иссиқлик олиш ва уни ишга айлантириб юбориш процесснинг ягона охирги натижаси эмас, ундан ташқари, бу процесс натижасида газнинг ҳажми ўзгаради.

Иссиқлик машинасида иссиқлик ишга айланганда албатта қўшимча процесс юз беради. Бу қўшимча процесс совуқроқ жисмга бирор миқдор Q_2' иссиқлик бериш процессидир (125- § га қ.), бунинг натижасида кўпроқ исиган жисмдан олинадиган Q_1 иссиқлик миқдори ишга бутунлай эмас, балки қисман айлантирилади.

Асоснинг иккинчи таърифидаги даъво биринчи таърифдаги даъводан мантиқий равишда келиб чиқишига ишониш осон. Дарҳақиқат, иш масалан, ишқаланиш воситасида бутунлай иссиқликка айлантирилиши мумкин. Шунинг учун бирор жисмдан олинган иссиқликни иккинчи таъриф инкор этадиган процесс ёрдамида бутунлай ишга айлантириб, сўнгра бу ишни температураси юқорироқ бўлган бошқа жисмга бериладиган иссиқликка ишқаланиш воситасида айлантириб биз биринчи таърифга мувофиқ бўлмайдиган процессни амалга оширган бўлар эдик.

Термодинамиканинг иккинчи асоси тақиқлайдиган процесслардан фойдаланиб, энергиянинг океан каби битмас-туганмас манбаидан олинадиган иссиқлик ҳисобига иш бажарувчи двигатель ясатиш мумкин бўлар эди. Амалда бундай двигатель абадий двигателдан фарқ қилмаган бўлар эди. Шунинг учун иккинчи асос баъзан қуйидагича таърифланади: иккинчи хил перпетуум мобиле, яъни иссиқликни бир резервуардан оладиган ва бу иссиқликни бутунлай ишга айлантирадиган даврий равишда ишловчи двигатель яратиш мумкин эмас.

127-§. Карно цикли

Бирор жисм температуралари T_1 ва T_2 бўлган ва иссиқлик сиғими чексиз катта бўлган иккита иссиқлик резервуари билан иссиқлик алмашина оладиган бўлсин, деб фараз қилайлик. Бу эса бу резервуарларнинг чекли миқдорда иссиқлик олиши ёки бериши уларнинг температурасини ўзгартирмаслигини билдиради. Бундай шароитларда жисм қандай қайтувчан цикл бажара олишини аниқлайлик.

Равшанки, қаралаётган цикл шундай процесслардан тузиладики, бу процессларнинг баъзилари давомида жисм резервуарлар билан иссиқлик алмашиниши мумкин, баъзиларида эса жисм ташқи муҳит билан иссиқлик алмашмайдиган бўлиши (адиабатик процесслар) мумкин.

Иссиқлик алмашиш юз берадиган процесс давомида жисмнинг температураси тегишли резервуарнинг температурасига тенг бўлиб қолгандагина бу процесс қайтувчан процесс бўлиши мумкин. Дарҳақиқат, масалан, жисмнинг температураси резервуарнинг T_1 температурасидан кичик бўлганда жисм ундан иссиқлик олса, у ҳолда ўша процесснинг ўзи тескари йўналишда юз берганда жисмнинг температураси, ҳар қалай, T_1 дан паст бўлмаган ҳолдагина резервуардан олган иссиқлигини унга қайтариб бера олади. Бинобарин, процесс тўғри ва тескари йўналишда юз берганда жисмнинг температураси ҳар хил бўлади, жисм иккала ҳолда ҳолатларнинг турли хил кетма-кетлигидан (бир хил бўлмаган температуралар билан характерланадиган) ўтади ва бу процесс қайтмас процесс бўлади.

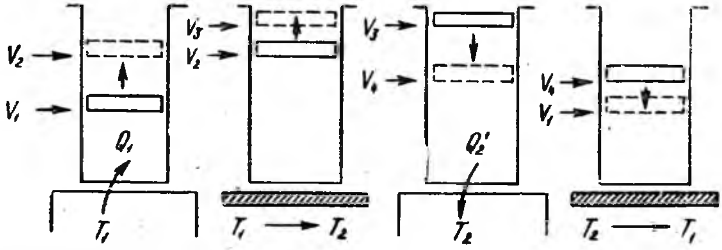
Шундай қилиб, иссиқлик алмашиши билан юз берадиган процесс қайтувчан бўлиши учун жисм резервуардан иссиқлик олаётганида ҳам ва уни процесснинг тескари йўналишда бориши а қайтариб бераётганда ҳам жисмнинг температураси резервуар температурасига тенг бўлиши керак. Аниқроқ айтганда, иссиқлик олишида жисмнинг температураси резервуар температурасидан чексиз кичик миқдор қадар кичик бўлиши керак (акс ҳолда резервуардан жисмга иссиқлик оқмайди), иссиқлик қайтириб беришда эса жисмнинг температураси резервуар температурасидан чексиз кичик миқдор қадар ортиқ бўлиши керак.

Бинобарин, температураси доимий қола берадиган резервуар билан иссиқлик алмашиш юз берадиган ягона қайтувчан процесс резервуар температураси шароитида юз берадиган изотермик процессдир.

Шундай қилиб, иссиқлик сиғими чексиз катта бўлган икки иссиқлик резервуари билан иссиқлик алмашишда қатнашадиган жисм (ёки система) бажарадиган қайтувчан цикл фақат иккита изотерма (резервуарлар температурасида) ва иккита адиабатадан иборат бўла олади, деган хулосага келдик. Бундай циклни биринчи бўлиб француз инженери Сади Карно текширган бўлиб, у **Карно цикли** деб аталади. Шуни қайд қиламизки, таърифга кўра Карно цикли қайтувчан циклдир.

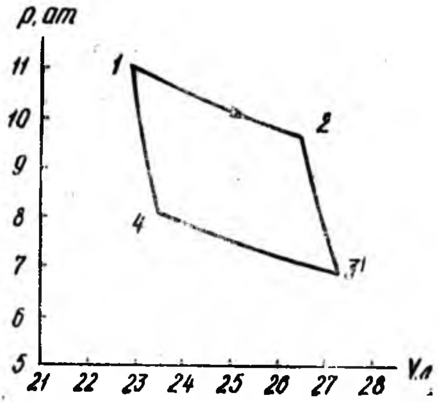
Масалан, иш бажарувчи модда сифатида газ олинганда Карно цикли қандай қилиб амалга оширилишини кўриб чиқамиз. Зич қилиб мосланган поршень билан бекитилган цилиндр ичига газ қамаймиз. Цилиндр деворлари ва поршенини иссиқлик ўтказмайдиган материалдан ясаймиз, цилиндрнинг тубини эса, аксинча, иссиқликни яхши ўтказадиган моддадан ясаймиз. Цилиндр ва поршеннинг иссиқлик сиғимини эътиборга олмайдиган даражада жуда кичик деб ҳисоблаймиз.

Бошланғич пайтда поршень газнинг V_1 ҳажмига ва T_1 температурасига мос вазиятда турсин. Цилиндрни температураси T_1 бўлган резервуар устига қўямиз ва газ V_2 ҳажм эгаллагунча жуда секин кенгайиши учун имконият яратиб берамиз. Бунда газ резервуардан Q_1 иссиқлик олади (288- расм). Сўнгра цилиндрни резервуар устидан оламиз, тубини иссиқлик ўтказмайдиган қопқоқ билан ёпамиз ва газ температураси T_2 қийматгача пасайгунча адиабатик равишда кенгайиши учун имконият яратиб берамиз. Натижада газнинг ҳажми V_3 га тенг бўлиб қолади. Сўнгра иссиқлик ўтказмайдиган қопқоқни олиб ташлаб, цилиндрни T_2 температурали резервуар устига қўямиз ва газни ҳажми V_4 бўлгунча изотермик равишда шундай сиқамизки, уни бундан кейин адиабатик сиққанимизда тем-



288- расм.

ператураси T_1 га етганда ҳажми V_1 қийматга эга бўладиган бўлсин (акс ҳолда цикл бекилмай қолади). Ниҳоят, цилиндрни резервуар устидан оламиз, тубини иссиқлик ўтказмайдиган қопқоқ билан



289- расм.

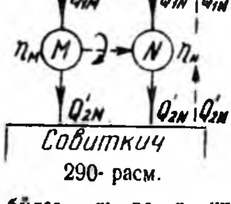
бекитамиз ва газни адиабатик равишда сиқиб, уни бошланғич ҳолатига (температураси T_1 ва ҳажми V_1 бўлган ҳолатига) келтирамиз.

Агар газ идеал газ бўлса, бунга тегишли цикл (p, V) диаграммасида 289- расмдагидек кўринишга эга бўлади (293- расмга ҳам қаранг).

128- §. Қайтувчан ва қайтмас машиналарнинг фойдали иш коэффициенти

Термодинамиканинг иккинчи қонунига асосланиб туриб, айни бир иситкич ва совиткич билан ишлайдиган барча қайтувчан машиналарнинг ф. и. к. қиймати бир хил эканлигини исбот этиш мумкин.

Исботни тескарисини фараз қилишдан бошлаймиз. Ихтиёрий иккита M ва N қайтувчан иссиқлик машинаси оламиз (290- расм) ва машиналардан бирининг, масалан, M нинг ф. и. к. иккинчисиникидан ортиқ деб фараз қиламиз. Келгусида кўрамизки, бу фараз бизни термодинамиканинг иккинчи қонунига зид натижага олиб келади ва бинобарин, бу фараз рад қилиниши керак.



290- расм.

Мулоҳазаларимиз соддароқ бўлиши учун цикл давомида иккала машина иситкичдан бир хил миқдорда иссиқлик олади, деб фараз қиламиз[1]. Қисқалик учун бу иссиқлик миқдорини Q_1 билан белгилаймиз:

$$Q_{1M} = Q_{1N} = Q_1.$$

[1] Бундай фараз қилиш шарт эмас. Агар $Q_{1M} \neq Q_{1N}$ бўлса, m ва n ни $mQ_{1M} = nQ_{1N}$ бўладиган қилиб олиб, M машинанинг m циклини N машинанинг n цикли билан солиштириш керак.

Фаразимизга кўра $\eta_M > \eta_N$, яъни

$$\frac{Q_1 - Q'_{2M}}{Q_1} > \frac{Q_1 - Q'_{2N}}{Q_1},$$

бу ерда Q'_{2M} ва Q'_{2N} — M ва N машиналарнинг цикл давомида совиткичга берадиган иссиқлик миқдорлари.

Равшанки, бу фаразга асосан, M машина цикл давомида N машинага қараганда кўпроқ иш бажариши керак ва ишлар айирмаси

$$A_M - A_N = (Q_1 - Q'_{2M}) - (Q_1 - Q'_{2N}) = Q'_{2N} - Q'_{2M}. \quad (128.1)$$

N машинани тескари томонга юргизиб, совиткич машина вазифасида ишлатамиз. Бунда машина қайтувчан бўлгани учун у цикл давомида совитгичдан Q'_{2N} миқдорда иссиқлик олади (бу иссиқлик миқдори машинанинг тўғри ишлаганида совиткичга берадиган иссиқликка тенг) ва иситкичга Q_1 миқдорда иссиқлик беради. Ундан ташқари, цикл давомида машина устида A_N иш бажариш керак. Бу ишни бажариш учун M машинадан фойдаланиш мумкин. Бунинг учун M машинани N машинага уни ҳаракатга келтирадиган қилиб қўшиш керак. Шундай қилиб бириктирилган машиналар бирор қайтувчан иссиқлик машинасидан иборат бўлади.

Мураккаб машинанинг бир цикл ичидаги балансини кўриб чиқамиз. M машина иситкичдан Q_1 иссиқлик олади; N машина худди шундай миқдордаги иссиқликни иситкичга қайтариб беради. Бинобарин, цикл бажариш натижасида мураккаб машина иситкичдан иссиқлик олмайди ҳам, унга иссиқлик бермайди ҳам. Цикл давомида совиткичдан $Q = Q'_{2N} - Q'_{2M}$ иссиқлик олинади.

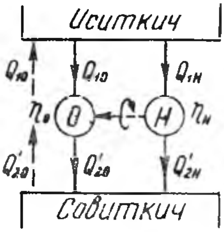
M машина бажарадиган A_M ишнинг бир қисми N машинани ишга туширишга сарф бўлади. Ишнинг $A = A_M - A_N$ га тенг қолдиғини эса, биз хоҳишимиз билан ишлатишимиз мумкин. (128.1) га асосан, бу иш мураккаб машина совиткичдан оладиган Q иссиқликка тенг.

Бинобарин, иккала машинани юқорида айтиб ўтилган тарзда қўшганимизда биз шундай процессни амалга оширган бўлар эдикки, бу процесснинг ягона натижаси бир жисмдан (совиткичдан) Q иссиқлик миқдори олиш ва бу иссиқликни бутунлай ишга айлантириб юбориш бўлар эди, ҳолбуки, термодинамиканинг иккинчи қонуни бундай бўлиши мумкин эмаслигини тасдиқлайди. Шундай қилиб, $\eta_M > \eta_N$ бўлади деган фараздан воз кечиш керак экан.

$\eta_M < \eta_N$ бўлади деган фараз ҳам термодинамиканинг иккинчи қонунига зид хулосага олиб келади. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун M машинани тескари йўналишда ишлатиб, юқорида баён этилган мулоҳазаларни такрорлаш керак. Шундай қилиб, қайтувчан иккала M ва N машинанинг ф. и. к. бир хил бўлиши керак. Биз M ва N машиналарнинг қайтувчан машиналар эканлигидан бошқа фаразлар қилмаганимиз учун топилган натижа барча қайтувчан машиналарнинг тузилиши ва иш бажарадиган моддасининг хоссаларидан қатъи назар уларнинг ҳаммаси учун тўғри бўлади.

Шундай қилиб, биз айни бир иситкич ва айни бир совиткич билан ишлайдиган барча қайтувчан машиналарнинг ф.и.к. лари бир хил бўлиши керак, деган хулосага келдик. Бинобарин, қайтувчан машинанинг ф.и.к. иситкичнинг ва совиткичнинг температурасигагина боғлиқ бўлиши мумкин.

Энди қайтувчан *O* ва қайтмас *H* машиналарнинг ф. и. к. ларини солиштирамиз (291- расм). Қайтмас машинанинг ф.и.к. қайтувчан машинаникига қараганда катта деб фараз қиламиз. Иккала машина цикл давомида иситкичдан бир хил миқдорда $Q_1 (Q_{1o} = Q_{1H} = Q_1)$ иссиқлик олсин. Қайтувчан машинани тескари томонга юргизиб ва бунда қайтмас машина қайтувчан машинани ишлатадиган қилиб олиб, иккита қайтувчан машина учун юргизилган мулоҳазаларни такрорлаб, $\eta_H > \eta_o$ бўлади деган фараз термодинамиканинг иккинчи асосига зид натижага олиб келишини кўрсатиш мумкин.



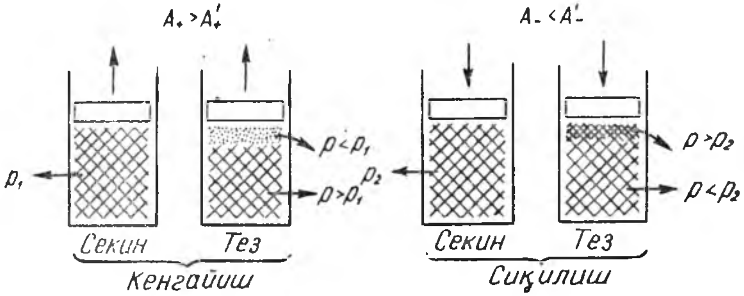
291- расм.

Қайтмас машинанинг η коэффициенти қайтувчан машинанинг η коэффициентидан кичик бўлиши мумкин эмаслигини бу усул билан кўрсатиб бўлмайди. Чунки бу ҳолда мулоҳазалар юритишимизда биз қайтмас машинани тескари ишлатишимизга тўғри келган бўлар эди. Гарчи шундай қилиш мумкин бўлса-да, қайтмас машина тескари йўналишда ишлаганда бажарадиган иши ва унинг иситкич ва совиткич билан алмашинадиган иссиқлик миқдорлари унинг тўғри йўналишда ишлаган вақтда бажарадиган иш ва иссиқлик миқдорларидан фақат ишораси билан фарқ қилади, деб ҳисоблашга асос йўқ.

Шундай қилиб, биз юритган мулоҳазалар $\eta_H > \eta_o$ бўлади деган фараздан воз кечишни талаб қилади, бироқ $\eta_H < \eta_o$ бўлиши эҳтимолини йўққа чиқармайди. Шу билан бирга, қатор физик мулоҳазалар шуни кўрсатадики, қайтмас машинанинг ф. и. к. ўшандай шароитларда ишлайдиган қайтувчан машинанинг ф. и. к. дан ҳамиша кичик бўлади. Бу мулоҳазаларнинг баъзилари билан танишиб чиқамиз.

Газ кенгайиши ва сиқилишининг қайтувчан ва қайтмас циклларини таққослаймиз. Цикл қайтувчан бўлиши учун у жуда секин бажарилиши керак, бунинг натижасида газнинг босими бутун ҳажм бўйлаб тенглашиб улгуради. Цикл давомида бажариладиган тўлиқ иш кенгайишдаги мусбат A_+ иш билан сиқилишдаги манфий A_- ишдан ташкил топади. Натижавий иш $A = A_+ - A_-$ га тенг бўлади (кенгайганда газ иссиқлик олади, сиқилганда эса иссиқлик беради, деб фараз қилинади).

Агар цикл қайтмайдиган қилиб, яъни етарли даражада тез бажарилса, у ҳолда босим бутун ҳажм бўйлаб тенглашиб улгура олмайди ва кенгайиш вақтида поршень тагидаги газнинг босими қайтувчан циклдаги поршеннинг худди шу вазиятидаги босимдан кичик бўлади, сиқилиш вақтида эса, аксинча, бир оз ортиқроқ бўлади (292- расм). Натижада мусбат A'_+ қўшилувчи A_+ дан кичик, манфий A'_- қўшилувчи эса A_- дан катта бўлади, тўлиқ $A' = A'_+ - A'_-$ иш эса қайтувчан циклдагидан кичик бўлади. Мос равишда, қайтмас циклнинг ф. и. к. ҳам кайтувчан циклникидан кичик бўлади.



292- расм.

Ишқаланишда иш ҳамиша иссиқликка айланади, яъни ишқаланиш типик қайтмас процессдир. Шунинг учун қайтувчан машинада ишқаланиш бўлмаслиги керак. Фараз қилайлик, бирор қайтувчан машина цикл давомида Q_1 иссиқлик олиб, A иш бажарсин. Цилиндр билан поршень орасида ишқаланиш бор деб фараз қилиб, машинанинг қайтувчанлигини бузамиз. Ишқаланиш борлиги туфайли A ишнинг бир қисми иссиқликка айланади, бу иссиқлик совиткичга ўтади ёки атрофдаги муҳитга сочилиб кетади. Натижада машина иситкичдан худди аввалгидек Q_1 иссиқлик миқдори олиб, A дан кичик иш бажаради, бинобарин, машина қайтувчан бўлмай қолгандан кейин унинг ф. и. к. камайиб кетади.

Шундай қилиб, биз қуйидаги даъволарни исбот қилдик:

1) айнан бир хил шароитларда (мос равишда иситкич ва совиткичларининг температуралари бир хил бўлган) барча қайтувчан машиналарнинг ф. и. к. бир хил бўлади;

2) қайтмас машинанинг ф. и. к. иш шароити ўхшаш бўлган қайтувчан машинанинг ф.и.к. дан ҳамиша кичик бўлади.

129- §. Идеал газ учун Карно циклининг ф. и. к.

Қайтувчан машинанинг ф. и. к. унинг тузилиши ва иш бажарувчи моддасининг хоссаларига боғлиқ бўлмасдан, фақат иситкичи билан совиткичининг температурасигагина боғлиқ эканлиги бундан олдинги параграфда аниқланди. Лекин ф. и. к. билан иситкичнинг T_1 температураси ва совиткичнинг T_2 температураси орасидаги боғланишнинг кўриниши аниқланмай қолиб кетди. Бу боғланишни топиш учун иш бажарадиган моддасининг хоссалари анча содда бўлган машинани кўриб чиқиш табиийдир. Идеал газ худди ана шундай хоссаларга эга. Биз биламизки, иситкич ва совиткичнинг иссиқлик сиғими етарлича катта бўлганда [127- § га қ.] ягона қайтувчан цикл Карно цикли бўлади.

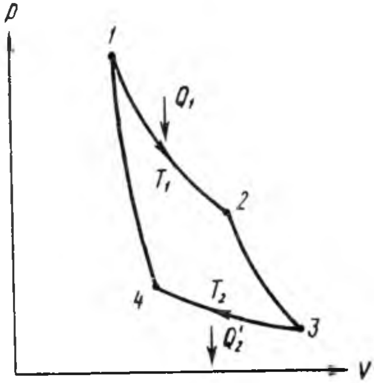
Шундай қилиб, идеал газ учун Карно циклини қараб чиқамиз. Агар биз бундай циклнинг ф.и.к. ни T_1 ва T_2 температуралар функцияси сифатида топа олсак, шу билан биз барча қайтувчан машиналарнинг ф. и. к. ифодасини топган бўламиз.

Таърифга кўра, иссиқлик машинасининг ф. и. к. қуйидагига тенг:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q'_2}{Q_1}, \qquad (129.1)$$

бу ерда Q_1—цикл давомида иситкичдан олинадиган иссиқлик, Q'_2—цикл давомида совиткичга бериладиган иссиқлик.

Изотермик процессда идеал газнинг ички энергияси ўзгармай қолаверади. Шунинг учун газ олган Q_1 иссиқлик миқдори газнинг 1 ҳолатдан 2 ҳолатга ўтишида бажарадиган A_{12} ишга тенг (293- расм). Бу иш (105.9) га асосан қуйидагига тенг:



293- расм

$$Q_1 = A_{12} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}, \qquad (129.2)$$

бу ерда m — машинадаги идеал газ массаси.

Совиткичга бериладиган Q'_2 иссиқлик миқдори газни 3 ҳолатдан 4 ҳолатга ўтказишда уни сиқиш учун сарф бўладиган A'_{34} ишга тенг. Бу иш қуйидагига тенг:

$$Q'_2 = A_{34}' = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} \qquad (129.3)$$

Цикл ёпиқ бўлиши учун 4 ва 1 ҳолатлар айни бир адиабатада ётиши керак. Бундан

$$T_1 V_1^{\gamma - 1} = T_2 V_4^{\gamma - 1} \qquad (129.4)$$

шарт келиб чиқади [адиабатанинг (103.3) тенгламасига қ.].

Худди шунингдек, 2 ва 3 ҳолатлар айни бир адиабатада ётгани учун

$$T_1 V_2^{\gamma - 1} = T_2 V_3^{\gamma - 1} \qquad (129.5)$$

шарт бажарилади. (129.5) ни (129.4) га бўлиб, циклнинг ёпиқ бўлиш шартини топамиз:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \qquad (129.6)$$

Энди (129.2) ва (129.3) ни ф.и.к. нинг (129.1) ифодасига қўямиз:

$$\eta = \frac{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

Ниҳоят, (129.6) ни ҳисобга олиб η ни топамиз:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \qquad (129.7)$$

Шундай қилиб, идеал газ учун Карно циклининг ф. и. к. ҳақиқатан ҳам фақат иситгич билан совиткичнинг температурасига боғлиқ экан.

Юқорида айтиб ўтганимиздек, (129.7) ифода ҳар қандай қайтувчан машина ф. и. к. нинг қийматини кўрсатади.

130- §. Температураларнинг термодинамик шкаласи

Қайтувчан машиналар ф.и.к. нинг ишловчи модда хоссаларига боғлиқ эмаслиги ҳақидаги 128- § да исбот этилган теорема термометрик жисмнинг танланишига боғлиқ бўлмаган температуралар шкаласини белгилашга имкон беради. Юқорида айтиб ўтилган теоремага асосан:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2'}{Q_1}$$

катталик ва бинобарин, Q'_2/Q_1 нисбат Карно цикли учун иситкич билан совиткичнинг температураларигагина боғлиқ бўлади. Бу температураларнинг ҳали бизга маълум бўлмаган бирор шкала бўйича катталигини ϑ_1 ва ϑ_2 билан белгилаб, қуйидагини ёзиш мумкин:

$$\frac{Q_2'}{Q_1} = f(\vartheta_1, \vartheta_2), \qquad (130.1)$$

бу ерда $f(\vartheta_1, \vartheta_2)$—иситкич ҳамда совиткич температураларининг универсал функцияси (яъни барча Карно цикллари учун бир хил бўлган функция).

(130.1) муносабат жисмларнинг температурасини уларнинг Карно цикллари давомида оладиган ва берадиган иссиқлик миқдорлари орқали аниқлашга имкон беради.

(130.1) функциянинг қуйидаги хоссаси бор эканлигини исбот қиламиз:

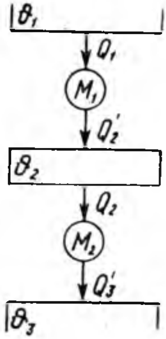
$$f(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{\theta(\vartheta_2)}{\theta(\vartheta_1)}, \qquad (130.2)$$

бу ерда $\theta(\vartheta$ —температуранинг универсал функцияси.

Бирининг совиткичи айни вақтда иккинчиси учун иситкич бўлиб хизмат қиладиган иккита қайтувчан машинани кўриб чиқамиз (294-расм). Иккинчи машина температураси ϑ_2 бўлган резервуардан оладиган иссиқлик миқдори унга биринчи машина берадиган иссиқлик миқдорига тенг, яъни $Q_2 = Q_2'$ деб фараз қиламиз. (130.1) формулага мувофиқ, ҳар бир машина учун қуйидаги нисбатларни ёзамиз:

$$\frac{Q'_2}{Q_1} = f(\vartheta_1, \vartheta_2), \qquad (130.3)$$

$$\frac{Q_3'}{Q_2} = f(\vartheta_2, \vartheta_3). \qquad (130.4)$$



294- расм.

Иккала машина билан температураси ϑ_2 бўлган резервуарни температураси ϑ_1 бўлган иситкичдан Q_1 иссиқлик оладиган ва температураси ϑ_3 бўлган совиткичга Q_3' иссиқлик берадиган ягона қайтувчан машина[1] деб хисобласак, қуйидаги нисбатни ёзишимиз мумкин:

$$\frac{Q_3'}{Q_1} = f(\vartheta_1, \vartheta_3). \qquad (130.5)$$

(130.5) ни (130.3) га бўламиз:

$$\frac{Q'_3}{Q_2} = \frac{f(\vartheta_1, \vartheta_3)}{f(\vartheta_1, \vartheta_2)}.$$

Ниҳоят, бу ифодани (130.4) ифода билан солиштириб ва $Q_2' = Q_2$ эканини ҳисобга олиб, қуйидаги муносабатни топамиз:

$$f(\vartheta_2, \vartheta_3) = \frac{f(\vartheta_1, \vartheta_3)}{f(\vartheta_1, \vartheta_2)}. \qquad (130.6)$$

Бу муносабат икки жисмнинг ϑ_2 ва ϑ_3 температураларини бир-бирига боғлайди, шу билан бирга, бунда учинчи жисмнинг ϑ_1 температураси қатнашади. Бу жисмни узил-кесил танлаб олишга келишиб, яъни ϑ_1 ни ўзгармайдиган қилиб олиб, биз (130.6) формуланинг сурати ва махражида турган $f(\vartheta_1, \vartheta)$ функцияни битта ϑ ўзгарувчининг функцияси ҳолига келтирамиз. Бу функцияни $\theta(\vartheta)$ орқали белгилаб, (130.6) формулани

$$f(\vartheta_2, \vartheta_3) = \frac{\theta(\vartheta_3)}{\theta(\vartheta_2)}$$

кўринишда ёзамиз, ёки индексларини алмаштириб

$$f(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{\theta(\vartheta_2)}{\theta(\vartheta_1)} \qquad (130.7)$$

кўринишга келтирамиз, бу эса (130.2) нинг ўзгинасидир.

$\theta(\vartheta)$ функция фақат температурага боғлиқ. Шунинг учун унинг қийматларидан тегишли жисмнинг температурасини характерлаш учун фойдаланиш, яъни жисмнинг температураси ϑ га тенг деб фараз қилиш мумкин, бу ерда $\theta = \theta(\vartheta)$. У ҳолда (130.1) ифода қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{Q'_2}{Q_1} = \frac{\theta_2}{\theta_1}. \qquad (130.8)$$

---

[1] $Q'_2 = Q_2$ бўлгани учун шундай деб ҳисоблаш мумкин.

(130.8) муносабат температураларнинг термодинамик шкаласига асос қилиб олинган. Бу шкаланинг афзал томони шундаки, у температурани ўлчашда ишлатиладиган жисмнинг (Карно циклида иш бажарадиган модданинг) танланишига боғлиқ эмас.

(130.8) га мувофиқ икки жисмнинг температураларини солиштириш учун бу жисмларни иситкич ва совиткич сифатида ишлатиб Карно циклини амалга ошириш керак. Жисмга — «совиткичга» берилган иссиқлик миқдорининг жисмдан — «иситкичдан» олинган иссиқлик миқдорига нисбати бу жисмлар температураларининг нисбатини ифодалайди.

θ нинг сон қийматини бир қийматли аниқлаш учун температура бирлигини, яъни градусни танлаш тўғрисида шартлашиб олиш лозим. Абсолют градус деб атмосфера босими шароитида қайнаётган сувнинг температураси билан эриётган муз температураси орасидаги айирманинг юздан бир қисми олинади. Шундай қилиб, абсолют термодинамик шкаланинг градуси идеал газ шкаласининг градусига тенг экан.

Температураларнинг термодинамик шкаласи идеал газ шкаласи билан бир хил эканини кўриш осон. Дарҳақиқат, (129.7) га асосан

$$\frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

бундан қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$\frac{Q'_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}. \qquad (130.9)$$

(130.8) ва (130.9) ни таққослаб қуйидагини топамиз:

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

Бинобарин, θ температура T га пропорционал ва иккала шкаланинг градуси бир хил бўлгани учун $\theta = T$.

131-§. Келтирилган иссиқлик миқдори. Клаузиус тенгсизлиги

Ҳар қандай иссиқлик машинаси жисмларнинг айни бир циклни кўп марта такрорлайдиган системасидан иборат. 128-§ да биз барча қайтувчан машиналарнинг ф.и.к. бир хил эканлигини, қайтмас машинанинг ф.и.к. эса ҳамиша қайтувчан машинаникидан кичик эканлигини кўрсатдик. Бу фактни аналитик равишда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} \leqslant \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \qquad (131.1)$$

Бу тенгсизликнинг чап томонида ф.и.к. нинг ҳар қандай машина учун ярайдиган таърифи турибди, ўнг томонида эса қайтувчан машина ф.и.к. нинг 129-§ да топилган ифодаси турибди. (131.1) да тенглик белгиси қайтувчан машинага, тенгсизлик белгиси қайтмас машинага тегишлидир.

Равшанки, (131.1) муносабат жисмларнинг қайтувчан (тенглик белгиси) ёки қайтмас (тенгсизлик белгиси) цикл бажарувчи ҳар қандай системаси учун ҳам тўғридир. Шу билан бирга, бу циклнинг қанча марта такрорланишидан, бинобарин, бу системанинг иссиқлик машинаси сифатида ишлатилиши ёки ишлатилмаслигидан қатъи назар бу муносабат ўринли бўлади. Келгусида биз (131.1) кўринишдаги муносабатларни текширганимизда жисмларнинг бирор системаси бажарадиган циклни назарда тутамиз.

(131.1) ифодадан қуйидаги муносабат келиб чиқади:

$$\frac{Q_2'}{Q_1} \geqslant \frac{T_2}{T_1}.$$

Уни $\frac{Q_1}{T_2}$ мусбат катталикка кўпайтириб қуйидагини топамиз:

$$\frac{Q_2'}{T_2} \geqslant \frac{Q_1}{T_1}.$$

Ниҳоят, бунинг чап ва ўнг томонларидан $\frac{Q_2'}{T_2}$ ни айириб,

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2'}{T_2} \leqslant 0 \qquad (131.2)$$

ифодани ҳосил қиламиз.

(131.2) муносабатга система оладиган Q_1 иссиқлик ҳам, система берадиган Q_2' иссиқлик ҳам қатнашади. Бундан буён биз умумлаштириш билан шуғулланамиз, шу мақсадда биз (131.2) нинг кўринишини шундай ўзгартирамизки, унда системанинг бошқа жисмлардан оладиган Q_i иссиқлик миқдорларигина бўлсин, шу билан бирга, бу иссиқлик миқдорларини алгебраик катталиклар деб ҳисоблаймиз: агар олинадиган Q мусбат бўлса, иссиқлик бирорта ташқи жисмдан системага берилади; агар Q манфий бўлса, система ташқи жисмга иссиқлик беради. Шундай қилиб, температураси T_2 бўлган жисмга бериладиган Q'_2 иссиқликни биз шу жисмдан олинадиган ва $-Q'_2$ га тенг бўлган Q_2 иссиқлик билан белгилаймиз. Унда (131.2) ифода ниҳоят қуйидаги кўринишга келади:

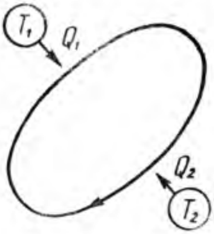
$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leqslant 0. \qquad (131.3)$$

Бу муносабат **Клаузиус тенгсизлиги** деб аталади.

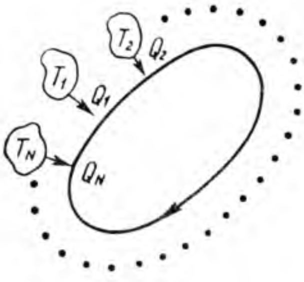
Системанинг қандайдир бир жисмдан олган иссиқлик миқдорининг шу жисм температурасига нисбатини Клаузиус **келтирилган иссиқлик миқдори** деб атаган. Клаузиус терминологиясидан фойдаланиб, (131.3) ни қуйидагича ўқиш мумкин: агар бирор система цикл бажарар экан, бу цикл давомида температуралари доимий бўлган (295- расм) иккита иссиқлик резервуари (жисм) билан иссиқлик алмашса, бу цикл қайтувчан бўлганда келтирилган иссиқлик миқдорларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади, цикл қайтмас цикл бўлганда эса бу йиғинди нолдан кичик бўлади.

Агар система цикл давомида иккита эмас, балки N та жисм билан (296- расм) иссиқлик алмашса ва температураси T_i бўлган жисмдан Q_i иссиқлик миқдори олса (бу иссиқлик мусбат бўлиши ҳам, манфий бўлиши ҳам мумкин), у ҳолда (131.3) га ўхшатиб қуйидаги шарт бажарилиши керак деб фараз қилиш табиийдир:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{T_i} \leq 0. \tag{131.4}$$



295- расм.



296- расм.

Қайта-қайта такрорлай бермаслик учун шу нарсага келишиб оламизки, бундан буён бирор ифодада „ $\leq$ " ёки „ $\geq$ " белгилар турган ҳамма ҳолларда тенглик белгиси қайтувчан процессларга, тенгсизлик белгиси қайтмас процессларга тегишли бўлади. Бу айтилган гаплар (131.4) ифода учун ҳам ўринлидир.

Шу чоққача биз текширилаётган система билан иссиқлик алмашаётган жисмларнинг иссиқлик сиғими шу қадар катта ва шунинг учун иссиқлик алмашиш процесси бу жисмларнинг T_i температурасига таъсир кўрсатмайди, деб фараз қилиб келган эдик. Агар бу шарт бажарилмаса, у ҳолда системага Q_i иссиқлик берилганда тегишли жисмнинг T_i температураси узлуксиз ўзгаради. Бу ҳол учун (131.4) ифодага ўхшаган ифода ёзиш учун Q_i иссиқлик узатиш процессларининг ҳар бирини шундай бир қатор элементар процессларга ажратиш керакки, бу процесслар жуда кичик бўлиб, буларнинг ҳар бирида $\Delta' Q_i$ элементар иссиқлик миқдорини доимий (лекин ҳар бир $\Delta' Q_i$ учун бошқа бўлган) T_i температурада узатилади, деб ҳисоблаш мумкин бўлсин. Унда биз (131.4) ўрнига қуйидагини ёзишимиз керак:

$$\sum_{\circ} \frac{\Delta' Q_i}{T_i} \leq 0. \tag{131.5}$$

Энди бу ерда i индекс система билан иссиқлик алмашадиган жисмнинг номерини эмас, балки система бажарадиган циклни бўлиб ҳосил қилинган элементар процесслардан бирининг номерини билдиради; $\Delta' Q_i$ эса i- номерли элементар процесс давомида ташқи жисмларнинг биридан система оладиган иссиқлик миқдорини билдиради, T_i — ўша ташқи жисмнинг системага $\Delta' Q_i$ иссиқлик бериш пайтидаги температураси. $\sum\limits_{\bigcirc}$ тагидаги ○ белги йиғинди бутун цикл бўйича олиниши кераклигини кўрсатади.

(131.5) ифода шуни билдирадики, цикл қайтувчан бўлганда системанинг цикл давомида ташқаридан олган элементар келтирилган иссиқлик миқдорларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади, цикл қайтмас бўлган ҳолда бу йиғинди нолдан кичик бўлади.

Аниқроқ айтганда, (131.5) муносабат қуйидагича ёзилиши лозим:

$$\oint \frac{d'Q}{T} \leqslant 0, \tag{131.6}$$

бу ерда интеграл бутун цикл бўйича олинади[1]

132-§. Энтропия

Келтирилган иссиқлик миқдорларининг йиғиндисини цикл учунгина эмас, балки айланма бўлмаган ҳар қандай процесс учун хам ҳосил қилиш мумкин, шу билан бирга, бир ҳолатдан иккинчи ҳолатга қайтувчан ўтишда бу йиғиндининг бир ажойиб хоссаси намоён бўлади. Буни биз ҳозир кўрамиз.

Қайтувчан бирор цикл олиб, унда иккита ихтиёрий *1* ва *2* ҳолатларни ажратамиз (297-расм). Бу ҳолатлар циклни расмда *I* ва *II* рақамлари билан белгиланган иккита тармоққа ажратади.

Бундан олдинги параграфда кўрсатганимиздек, келтирилган иссиқлик миқдорларининг бутун цикл (цикл қайтувчан!) бўйича олинган йиғиндиси нолга тенг:

$$\sum_{\bigcirc} \frac{\Delta' Q}{T} = 0. \tag{132.1}$$

297-расм.

(132.1) йиғиндига кирувчи барча қўшилувчиларни икки группага ажратиш мумкин, биринчи группага *I* тармоққа тегишли қўшилувчиларни, иккинчи группага эса *II* тармоққа тегишли қўшилувчиларни киритамиз. Унда (132.1) ифода қуйидагича ёзилиши мумкин:

$$\sum_{\substack{1 \to 2 \\ (\mathrm{I})}} \frac{\Delta' Q}{T} + \sum_{\substack{2 \to 1 \\ (\mathrm{II})}} \frac{\Delta' Q}{T} = 0. \tag{132.2}$$

Биринчи йиғинди *1* ҳолатдан *2* ҳолатга *I* тармоқ бўйича ўтишга, иккинчи йиғинди эса *2* ҳолатдан *1* ҳолатга *II* тармоқ бўйича ўтишга мос келади.

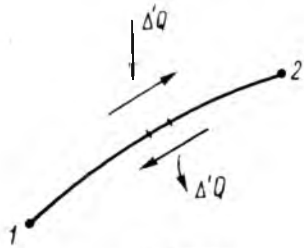
---

[1] Биз (131.3) дан (131.6) ни келтириб чиқаришда қилган мулоҳазаларимизни аниқ исбот деб қараб бўлмайди. Лекин (131.6) ифодани (131.3) дан жуда аниқ йўл билан келтириб чиқариш мумкин.

1 ҳолатдан *2* ҳолатга бирор қайтувчан ўтишга мос келадиган қуйидаги йиғиндини кўриб чиқамиз (298-расм):

$$\sum_{\substack{1\to 2\\ (\text{қайтув})}} \frac{\Delta' Q}{T}. \qquad (132.3)$$

Агар ўтиш йўналиши ўзгартирилса, процесс қайтувчан процесс эканлиги туфайли (132.3) йиғиндининг ишораси ўзгариши керак.



298- расм.

Дарҳақиқат, масалан, 298-расмда белгиланган элементар қисмда процесс $1 \to 2$ йўналишда бўлганда система температураси T бўлган бирор жисмдан $\Delta' Q$ иссиқлик миқдори олади, ўша қисмда процесснинг йўналиши $2 \to 1$ бўлганда система температураси T бўлган ўша жисмга худди шундай $\Delta' Q$ миқдорида иссиқлик бериши, яъни $-\Delta' Q$ иссиқлик олиши керак. Шундай қилиб, ўтиш йўналиши ўзгарганда (132.3) даги барча қўшилувчиларнинг ишораси қарама-қаршисига ўзгаради, натижада

$$\sum_{\substack{1\to 2\\ (\text{қайтув})}} \frac{\Delta' Q}{T} = -\sum_{\substack{2\to 1\\ (\text{қайтув})}} \frac{\Delta' Q}{T} \qquad (132.4)$$

бўлади.

(132.4) хоссага асосланиб (132.2) ифодани қуйидагича ёзамиз:

$$\sum_{\substack{1\to 2\\ (\mathrm{I})}} \frac{\Delta' Q}{T} - \sum_{\substack{1\to 2\\ (\mathrm{II})}} \frac{\Delta' Q}{T} = 0.$$

Бундан қуйидаги натижа келиб чиқади:

$$\sum_{\substack{1\to 2\\ (\mathrm{I})}} \frac{\Delta' Q}{T} = \sum_{\substack{1\to 2\\ (\mathrm{II})}} \frac{\Delta' Q}{T}. \qquad (132.5)$$

Бошда олинган қайтувчан циклни биз мутлақо ихтиёрий равишда олганимиз учун (132.5) муносабат *1* ва *2* ҳолатларни ўз ичига олган ҳар қандай қайтувчан цикл учун бажарилиши керак. Жумладан, *I* ва *II* тармоқлардан ҳосил бўлган цикл ўрнига *I* тармоқ ва 297-расмда пунктир билан кўрсатилган қайтувчан *III* тармоқдан ҳосил бўлган циклни кўриб чиқиш ва юқоридагича мулоҳазалар юритиб, (132.3) йиғиндининг *III* тармоққа тегишли қиймати унинг *I* тармоққа тегишли қийматига тенг эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Шундай қилиб, биз жуда муҳим хулосага келдик: системанинг бир ҳолатдан (бошланғич) иккинчи (охирги) ҳолатга қайтувчан ўтишида оладиган келтирилган иссиқлик миқдорларининг йиғиндиси ўтиш йўлига боғлиқ эмас ва бинобарин, системанинг бошланғич ва охирги ҳолатларигагина боғлиқ.

Биз биламизки, ички энергия орттирмалари йиғиндисининг ҳам шундай хоссаси бор. Энергия ҳолат функцияси бўлганлиги туфайли, *1* ҳолатдан *2* ҳолатга ҳар қандай ўтишдаги ички энергия орттирмаларининг йиғиндиси энергиянинг бу ҳолатлардаги қийматлари айирмасига тенг бўлиши керак:

$$\sum_{1\to 2} \Delta U = U_2 - U_1. \qquad (132.6)$$

Равшанки, юқорида айтилганлар ҳолатнинг ҳар қандай функцияси учун, яъни системанинг ҳолати билан бир қийматли аниқланадиган ҳар қандай катталик учун тўғри бўлади:

$$\sum_{1\to 2} \Delta f\,(\text{ҳолат}) = f(2) - f(1). \qquad (132.7)$$

Агар катталик ҳолатнинг функцияси бўлмаса, у ҳолда унинг элементар миқдорларининг йиғиндиси системанинг бир ҳолатдан бошқа ҳолатга ўтиш йўлига боғлиқ бўлиб қолади. Бундай катталиклар жумласига, масалан, иш киради. Бизга маълумки,

$$A = \sum_{1\to 2} \Delta' A$$

иш шу процессни тасвирловчи эгри чизиқ (215- расмга қ.) қамраб олган юзга тенг ва афтидан, ўтиш йўлига боғлиқ.

Система оладиган иссиқлик миқдори учун ҳам худди шундай бўлади. Термодинамиканинг биринчи асосига мувофиқ равишда

$$Q = \sum_{1\to 2} \Delta' Q = \sum_{1\to 2} \Delta U + \sum_{1\to 2} \Delta' A. \qquad (132.8)$$

(132.8) нинг ўнг томонидаги йиғиндилардан биринчиси йўлга боғлиқ эмас, иккинчиси эса йўлга боғлиқ. Бинобарин, $\sum \Delta' Q$ катталик ўтиш йўлига боғлиқ. Қуйидаги

$$\sum_{\substack{1\to 2 \\ (\text{қайтув})}} \frac{\Delta' Q}{T}$$

йиғиндининг *1* ҳолатдан *2* ҳолатга қайтувчан ўтишдаги йўлга боғлиқ эмаслиги қайтувчан процессда $\Delta' Q/T$ нисбат бирор ҳолат функциясининг орттирмасидир, деб айтишга асос беради. Бу функция э н т р о п и я деб аталади. У S ҳарфи билан белгиланади. Шундай қилиб,

$$\left(\frac{\Delta' Q}{T}\right)_{\text{қайтув}} = \Delta S. \qquad (132.9)$$

(132.9) га асосан энтропиянинг орттирмаси қайтувчан процессда системанинг ташқаридан оладиган элементар иссиқлик миқдорининг шу иссиқлик олинаётган пайтдаги температурага нисбатига тенг[1].

Энтропия ҳолат функцияси бўлгани учун энтропия орттирмаларининг йиғиндиси энтропиянинг охирги ва бошланғич ҳолатлардаги қийматларининг айирмасига тенг бўлиши керак [(132.6) билан солиштиринг]:

$$\sum_{\substack{1\to 2\\(\text{қайтув})}} \frac{\Delta' Q}{T} = \sum_{1\to 2} \Delta S = S_2 - S_1. \qquad (132.10)$$

Янада аниқроқ ҳисоблаганда (132.10) йиғиндилар интеграллар билан алмаштирилиши керак:

$$\int\limits_{\substack{1\\(\text{қайтув})}}^{2} \frac{d'Q}{T} = \int\limits_{1}^{2} dS = S_2 - S_1. \qquad (132.11)$$

Энтропия—аддитив катталик. Бу эса системанинг энтропияси унинг айрим қисмларининг энтропиялари йиғиндисига тенг эканини билдиради.

133- §. Энтропиянинг хоссалари

Қайтувчан процессда келтирилган иссиқлик миқдорларининг (132.10) йиғиндиси энтропиянинг орттирмасига тенг. Энди қайтмас процессда келтирилган иссиқлик миқдорларининг йиғиндиси билан энтропия орттирмаси орасидаги муносабат қандай эканлигини аниқлаймиз. Бунинг учун қайтмас ва қайтувчан тармоқлардан иборат циклни (299- расм) кўриб чиқамиз. Бутун цикл қайтмас цикл бўлгани учун келтирилган иссиқлик миқдорларининг бутун цикл бўйича олинган йиғиндиси нолдан кичик бўлиши керак:

299- расм.

$$\sum_{\circ} \frac{\Delta' Q}{T} < 0.$$

Бу йиғиндини ҳар хил тармоқларга тегишли бўлган икки қисмга ажратамиз:

$$\sum_{\substack{1\to 2\\(\text{қайтмас})}} \frac{\Delta' Q}{T} + \sum_{\substack{2\to 1\\(\text{қайтув})}} \frac{\Delta' Q}{T} < 0. \qquad (133.1)$$

[1] Қайтувчан процессда иссиқлик алмашувчи жисмларнинг температураси бир хил бўлади.

(132.10) га мувофиқ равишда, бу йиғиндиларнинг иккинчиси энтропиянинг *1* ва *2* ҳолатлардаги қийматлари айирмасига тенг. Шунинг учун (133.1) муносабатни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sum_{\substack{1\to 2\\ \text{(қайтмас)}}} \frac{\Delta' Q}{T} + (S_1 - S_2) < 0,$$

бундан қуйидаги хулоса келиб чиқади:

$$S_2 - S_1 > \sum_{\substack{1\to 2\\ \text{(қайтмас)}}} \frac{\Delta' Q}{T} \tag{133.2}$$

(132.10) ва (133.2) ифодаларни бирлаштириб, қуйидагига эга бўламиз:

$$S_2 - S_1 \geqslant \sum_{1\to 2} \frac{\Delta' Q}{T}, \tag{133.3}$$

бу ерда тенглик белгиси *1* ҳолатдан *2* ҳолатга ҳар қандай қайтувчан ўтишга тегишли, тенгсизлик белгиси эса $1\to 2$ йўналишдаги ҳар қандай қайтмас ўтишга тегишли. (133.3) даги T температура системага $\Delta' Q$ иссиқлик берган жисмнинг температурасини билдиради. Қайтувчан процессда бу температура системанинг температураси билан бир хил бўлади.

Равшанки, (133.3) муносабат ҳар бир элементар процесс учун бажарилиши керак:

$$\Delta S \geqslant \frac{\Delta' Q}{T}. \tag{133.4}$$

ёки

$$dS \geqslant \frac{d' Q}{T}. \tag{133.5}$$

Шуни қайд қилиб ўтамизки, энтропия ҳолат функцияси бўлгани учун

$$S_2 - S_1 = \sum_{1\to 2} \Delta S$$

ифода (132.6) ва (132.7) ифодалар каби, тегишли ўтиш қайтувчан ёки қайтмас бўлишидан қатъий назар ҳамиша тўғри бўлади. Қуйидаги

$$S_2 - S_1 = \sum_{1\to 2} \frac{\Delta' Q}{T}$$

формула эса фақат қайтувчан ўтиш учунгина тўғри бўлади.

Агар система ташқи муҳитдан изоляцияланган бўлса, яъни ташқи муҳит билан иссиқлик алмашмаса, у ҳолда (133.3) даги ҳамма $\Delta'Q$ лар нолга тенг бўлади, унинг оқибатида эса

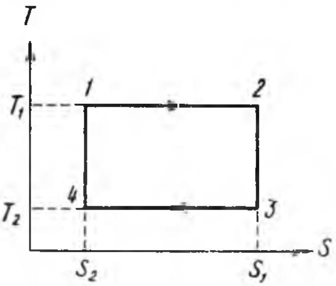
$$S_2 - S_1 \geqslant 0, \tag{133.6}$$

ёки мос равишда

$$\Delta S \geqslant 0. \tag{133.7}$$

Шундай қилиб, *изоляцияланган системанинг энтропияси* (агар системада қайтмас процесс юз бераётган бўлса) *фақат ортиши ёки доимий қолавериши* (агар системада қайтувчан процесс юз бераётган бўлса) *мумкин.* Изоляцияланган системанинг энтропияси камайиши мумкин эмас.

Биз биламизки, ташқи муҳит билан иссиқлик алмашмасдан юз берадигандаги процесс адиабатик процесс деб аталади. Бинобарин, қайтувчан адиабатик процесс давомида энтропия ўзгармайди, шунинг учун қайтувчан адиабата и з э н т р о п а деб аталиши мумкин. Янги терминологиядан фойдаланиб, Карно цикли иккита изотерма ва иккита изэнтропадан иборат, деб айтиш мумкин. Равшанки, (T, S) диаграммада Карно цикли тўғри тўртбурчак шаклида бўлади (300- расм). Тўғри тўртбурчакнинг юзи сон жиҳатидан системанинг бир цикл давомида оладиган иссиқлик миқдорига тенг. Дарҳақиқат, (133.4) га асосан, системанинг қайтувчан процессда оладиган элементар иссиқлик миқдори қуйидагига тенг:



300- расм.

$$\Delta'Q = T\Delta S. \tag{133.8}$$

Бинобарин, системанинг қайтувчан изотермик процессда оладиган иссиқлик миқдори қуйидагича ифодаланиши мумкин:

$$Q = T(S_2 - S_1), \tag{133.9}$$

бу ерда S_1 — процесснинг бошидаги энтропия, S_2 — охиридаги энтропия.

(133.9) дан фойдаланиб, системанинг цикл ҳосил қилувчи изотермик процесслар давомида оладиган иссиқлик миқдорини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$Q_{12} = T_1(S_1 - S_2), \quad Q_{31} = T_2(S_2 - S_1).$$

Цикл давомида олинадиган тўлиқ иссиқлик миқдори қуйидагига тенг:

$$Q = Q_{12} + Q_{34} = T_1(S_1 - S_2) + T_2(S_2 - S_1) = (T_1 - T_2)(S_1 - S_2).$$

Кўриниб турибдики, бундаги охирги ифода циклнинг юзига тенг.

Энтропиянинг камая олмаслигини билдирувчи (133.7) муносабат фақат изоляцияланган системаларга тегишлидир. Агар система ташқи муҳит билан иссиқлик алмашса, унинг энтропиясининг ўзгариш характери ҳар қандай бўлиши мумкин. Жумладан, агар система ташқи жисмларга иссиқлик берса (система оладиган $\Delta' Q$ иссиқлик миқдори манфий бўлса), системанинг энтропияси камаяди.

Агар изоляцияланмаган система цикл бажарса, у ҳолда унинг энтропияси ҳолат функцияси бўлганлиги учун ҳам циклнинг охирида бошланғич қийматини қабул қилади. Лекин циклнинг бориши давомида энтропия, умуман айтганда, ўзгаради, шу билан бирга, у циклнинг баъзи қисмларида ортиши, баъзи қисмларида эса камайиши мумкин, чунки энтропиянинг бир цикл давомидаги ўзгаришлари йиғиндиси нолга тенг бўлиши керак.

Энтропиянинг қайтувчан изотермик процесс вақтида ўзгаришини топайлик. (133.3) га мувофиқ, энтропия орттирмаси қуйидагига тенг:

$$S_2 - S_1 = \sum_{1\to 2} \frac{\Delta' Q}{T}.$$

Ўзгармас температурани йиғинди ишораси остидан чиқариб, энтропия орттирмасини қуйидагича ифодалаймиз:

$$S_2 - S_1 = \frac{1}{T} \sum_{1\to 2} \Delta' Q = \frac{Q_{12}}{T}, \qquad (133.10)$$

бу ерда Q_{12} — системанинг *1* ҳолатдан *2* ҳолатга қайтувчан изотермик ўтиши давомида олган иссиқлик миқдори. Агар бу иссиқлик миқдори манфий бўлса, $S_2 < S_1$ бўлади.

Энтропиянинг қайтмас процессдаги ўзгаришини топиш учун системани айни ўша охирги ҳолатга келтирувчи қандайдир бир қайтувчан процессни кўриб чиқиш ва бу процесс учун келтирилган иссиқлик миқдорларининг йиғиндисини топиш лозим. Буни қуйидаги мисолда тушунтириб ўтамиз. Температуралари ҳар хил T_1 ва T_2 бўлган ($T_1 > T_2$) иккита жисмдан иборат изоляцияланган системани текширамиз. Жисмлар ўртасида иссиқлик алмашиниш юз берганлиги туфайли уларнинг температуралари тенглашади. Бу процесс, равшанки, қайтмас процесс бўлиб, унинг давомида системанинг энтропияси ортиб бориши керак.

Соддалик учун иккала жисмнинг иссиқлик сиғими бир хил ва C га тенг деб фараз қиламиз. Унда иккала жисмнинг иссиқлик мувозанати ҳолатига келгандаги охирги температураси қуйидагига тенг бўлади:

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2}. \qquad (133.11)$$

Система энтропиясининг ўзгаришини ҳисоблаб топиш учун системани иккала жисм учун бир хил бўлган T_0 температурали ҳолатга келтирувчи қайтувчан процессни кўриб чиқамиз. Бу процесс системанинг биринчи жисмининг қандайдир бир ташқи жисмга бирор миқдор иссиқликни қайтувчан тарзда бериб, температураси T_0 қийматга қадар камайишидан ва иккинчи жисмнинг ташқаридан худди шундай миқдорда қайтувчан тарзда иссиқлик олиб, температураси T_0 қийматга қадар ортишидан иборат. Бу иккала процесс қайтувчан процесс бўлиши учун улар шундай содир бўлиши keракки, системанинг жисмларидан ҳар бирининг ва тегишли ташқи жисмнинг температураси ҳар бир пайтда бир хил бўлиши керак.

Биринчи жисм совиганда унинг энтропияси қуйидагича орттирма олади:

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_0} \frac{d'Q}{T} = \int_{T_1}^{T_0} \frac{CdT}{T} = C \ln \frac{T_0}{T_1}.$$

Иккинчи жисм исиганда эса унинг энтропияси олган орттирма қуйидагига тенг бўлади:

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{T_0} \frac{d'Q}{T} = \int_{T_2}^{T_0} \frac{CdT}{T} = C \ln \frac{T_0}{T_2}.$$

Шуни қайд қилиб ўтамизки, $T_1 > T_0 > T_2$ бўлгани учун ΔS_1 манфий, ΔS_2 эса мусбат бўлади.

Система энтропиясининг ўзгариши айрим жисмлар энтропияси ўзгаришлари йиғиндисига тенг:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = C \ln \frac{T_0}{T_1} + C \ln \frac{T_0}{T_2} = C \ln \frac{T_0^2}{T_1 T_2}. \qquad (133.12)$$

(133.12) га T_0 нинг (133.11) қийматини қўйиб, система энтропияси орттирмасининг узил-кесил ифодасини топамиз:

$$\Delta S = C \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2}.$$

Бу ифоданинг ҳақиқатан ҳам нолдан катта эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун логарифм белгиси остидаги ифодани қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} = \frac{T_1^2 + 2T_1 T_2 + T_2^2}{4T_1 T_2} = \frac{T_1^2 - 2T_1 T_2 + T_2^2 + 4T_1 T_2}{4T_1 T_2} = 1 + \frac{(T_1 - T_2)^2}{4T_1 T_2} > 1.$$

Бу ифода бирдан катта бўлгани учун унинг логарифми мусбат бўлади ва, бинобарин, $\Delta S > 0$.

Жисмлар системасининг қайтувчан изотермик процесс вақтида бажарадиган ишини ҳисоблаб чиқарамиз. (95.4) тенгламага асосан,

$$d'A = d'Q - dU.$$

(133.5) формуладан қайтувчан процессда $d'Q = TdS$ эканлиги келиб чиқади. Бу қийматни $d'A$ нинг ифодасига қўямиз:

$$d'A = TdS - dU.$$

$dT = 0$ бўлгани учун (изотермик процесс) TdS катталикни $d(TS)$ билан алмаштириш мумкин. Унда ишнинг ифодаси қуйидаги кўринишга келади:

$$d'A = d(TS) - dU = -d(U - TS). \qquad (133.13)$$

Шундай қилиб, қайтувчан изотермик процессда системанинг ташқи жисмлар устида бажарадиган иши қуйидаги катталикнинг камайишига тенг бўлади:

$$F = U - TS. \qquad (133.14)$$

F ҳолат функцияси эканлигини кўриш қийин эмас. Бу катталик **эркин энергия** деб аталади. Бу энергия система ички энергиясининг қайтувчан изотермик процессларда ташқи ишга айланадиган қисмидан иборат. Ички ва эркин энергия орасидаги айирмага тенг бўлган TS катталик баъзан **боғланган энергия** деб аталади.

(133.13) муносабатни интеграллаб, ишни топамиз:

$$(A_{12})_{\text{изотермик}} = F_1 - F_2. \qquad (133.15)$$

Шуни қайд қиламизки, адиабатик процесс ҳолида ($Q = 0$) система бажарадиган иш система ички энергиясининг камайишига тенг:

$$(A_{12})_{\text{адиабатик}} = U_1 - U_2. \qquad (133.16)$$

Изотермик процессларда эркин энергия ички энергия ролини ўйнайди.

(133.16) муносабат қайтувчан процессларда ҳам, қайтмас процессларда ҳам ўринлидир. (133.15) муносабат эса қайтувчан процесслардагина ўринли бўлади. Қайтмас процессларда $d'Q < TdS$ [(133.5) га қ.]. Бу тенгсизликни $d'A = d'Q - dU$ тенгламага қўйиб, қайтмас изотермик процессларда иш қуйидаги шартни қаноатлантиришини топиш осон:

$$(A_{12})_{\text{изотермик}} < F_1 - F_2.$$

Бинобарин, эркин энергиянинг камайиши изотермик процессда система бажара оладиган энг катта ишни белгилайди.

134-§. Нернст теоремаси

(132.11) ифода энтропиянинг ўзини эмас, балки унинг икки ҳолатдаги қийматлари айирмасини аниқлайди. Нернст энтропиянинг ўзининг исталган ҳолатдаги қийматини аниқлашга имкон берадиган теоремани исботлади.

Баъзан термодинамиканинг учинчи асоси деб аталадиган Нернст теоремаси бундай ўқилади: *абсолют температура нолга интилганда ҳар қандай жисмнинг энтропияси ҳам нолга интилади:*

$$\lim_{T \to 0} S = 0. \tag{134.1}$$

Нернст теоремасига асосан, ҳар қандай жисмнинг абсолют нолдаги энтропияси нолга тенг. Шунга асосан, T температурали ҳолатдаги энтропия қуйидагича ифодаланиши мумкин:

$$S = \int_0^T \frac{d'Q}{T}. \tag{134.2}$$

Масалан, агар жисмнинг босим ўзгармас бўлган шароитдаги иссиқлик сиғими температуранинг функцияси сифатида маълум бўлса, энтропияни қуйидаги формула бўйича ҳисоблаб чиқариш мумкин:

$$S = \int_0^T \frac{C_p(T)\,dT}{T}. \tag{134.3}$$

135- §. Энтропия ва эҳтимоллик

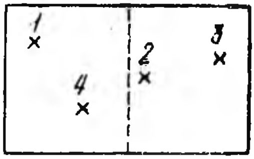
Больцман энтропиянинг статистик талқини жуда содда эканини аниқлаган. Бундан олдинги параграфда изоляцияланган, яъни ўз ҳолига қолдирилган системанинг энтропияси камая олмаслиги кўрсатилди. Иккинчи томондан, ўз ҳолига қолдирилган система эҳтимоли камроқ ҳолатлардан эҳтимоли каттароқ ҳолатларга ўтиши равшан. Система эҳтимоли каттароқ бўлган ҳолатга ўтиб олганидан кейин унда чексиз узоқ вақт қолади. Агар бир хил ва шу билан бирга энг катта эҳтимолликка бир ҳолат эмас, балки қатор ҳолатлар эга бўлса, у ҳолда изоляцияланган система бундай ҳолатларнинг биридан бошқаларига ўта олади. Шундай қилиб, изоляцияланган системанинг энтропияси ва ҳолатларининг эҳтимоли ўз характерлари билан бир-бирига ўхшайди: улар ортиши ёки доимийлигича қолавериши мумкин.

Юқорида келтирилган мулоҳазалардан системанинг энтропияси билан унинг ҳолати эҳтимоли ўртасида маълум бир боғланиш бўлиши керак, деган хулоса келиб чиқади. Больцман бу боғланиш қуйидагича кўринишга эга эканлигини кўрсатди:

$$S = k \ln W, \tag{135.1}$$

бу ерда k — Больцман доимийси, W — система ҳолатининг термодинамик эҳтимоли; система ҳолатининг термодинамик эҳтимоли деганда системанинг шу ҳолатини амалга оширадиган турли хил усулларнинг сони тушунилади[1].

W катталикнинг маъносини тушуниб олиш учун қуйидаги мисолни кўриб чиқамиз. Идиш ичида фақат тўртта молекула бор, деб фараз қиламиз. Идишни фикран иккита тенг қисмга: чап ва ўнг қисмга бўламиз (301-расм). Молекулаларнинг ҳаракат қилиши туфайли уларнинг идишнинг иккала қисми ўртасидаги тақсимоти ўзгариб туради. Бир-биридан идишнинг ўнг ва чап қисмидаги молекулаларнинг сони билан фарқ қилувчи ҳолатларни кўриб чиқамиз. Молекулаларга номер қўйиб, ҳар бир ҳолатни амалга ошириш мумкин бўладиган усуллар сонини ҳисоблаб чиқамиз. Ҳисоблаш натижалари 12-жадвалда кўрсатилган. Молекулаларнинг идишнинг иккита ярми ўртасида мумкин бўлган 16 тақсимотидан олтитаси ўнгда ва чапда бир хил миқдорда молекула бўлган ҳолатларга тўғри келади, саккизтаси эса идишнинг бир ярмида битта молекула, иккинчи ярмида учта молекула бўлган ҳолатга тўғри келади. Фақат иккитасигина идишнинг бир ярмида ҳамма молекулалар тўпланган ҳолатларга тўғри келади.



301-расм.

Ҳар бир молекуланинг идишнинг чап ярмида бўлиш эҳтимоли билан идишнинг ўнг томонидаги ярмида бўлиш эҳтимоли бир-бирига тенг.

Шунинг учун молекулаларнинг 16 тақсимотидан ҳар бирининг такрорланувчанлиги бир хил. Бинобарин, муайян бир ҳолатни амалга ошириш усулларининг сони бу ҳолатнинг эҳтимолини аниқлайди.

Юқорида биз кўрдикки, молекулалар тўртта бўлган ҳолда уларнинг ҳаммаси идишнинг яримларидан бирида тўпланишининг эҳтимоли энг катта (1/8 га тенг) бўлади. Лекин молекулалар сонини кўпроқ қилиб олганда аҳвол жиддий равишда ўзгаради. 13-жадвалда ўнта молекула учун турли ҳолатларни амалга ошириш усулларининг сонлари кўрсатилган. Бу ҳолда барча молекулаларнинг идишнинг битта ярмида тўпланиш эҳтимоли атиги 1/512 га тенг. Жуда кўп ҳолларда (1024 ҳолдан 672 тасида) идишнинг иккала қисмида бир хил (5—5) ёки деярли бир хил (6—4 ёки 4—6) молекула бўлади.

N дона молекулани идишнинг икки қисмига тақсимлаш усулларининг тўлиқ сони 2^N га тенг эканлигини кўрсатиш мумкин (бу-

[1] Термодинамик эҳтимол одатда эҳтимол деб аталувчи математик эҳтимолдан фарқ қилади. Бирор воқеанинг математик эҳтимоли шу воқеа учун қулай ҳоллар сонининг эҳтимоллари тенг ҳоллар сонига нисбатига тенг. Бинобарин, математик эҳтимол каср сон билан ифодаланади ва бирдан ошмайди. Термодинамик эҳтимол, аксинча, бутун сон билан, одатда, жуда катта бутун сон билан ифодаланади.

нинг $N = 4$ ва $N = 10$ ҳоллар учун тўғри эканлигига биз ишонч ҳосил қилдик). Шунинг учун молекулаларнинг N сони, масалан, 10^{20} га тенг бўлса, ҳамма молекулаларнинг идишнинг битта ярмига тўпланиш эҳтимоли ниҳоят даражада кичик бўлади (бу эҳтимол иккининг 10^{20} даражали иккига бўлинганига тенг).

12-жадвал

Ҳолат		Ҳолатни амалга ошириш усуллари		Мазкур ҳолатни амалга ошириш усулларининг сони (W)
чапдаги молекулалар сони	ўнгдаги молекулалар сони	чапдаги молекулаларнинг номерлари	ўнгдаги молекулаларнинг номерлари	
0	4	—	1,2,3,4	1
1	3	1 2 3 4	2,3,4 1,3,4 1,2,4 1,2,3	4
2	2	1,2 1,3 1,4 2,3 2,4 3,4	3,4 2,4 2,3 1,4 1,3 1,2	6
3	1	1,2,3 1,2,4 1,3,4 2,3,4	4 3 2 1	4
4	0	1,2,3,4	—	1
		Барча усуллар сони		$2^4 = 16$

Бошда газ идишнинг ўнг томонидаги бўш қисмидан тўсиқ билан ажратилган чап қисмида тўпланган бўлсин, деб фараз қиламиз. Агар тўсиқни олиб ташласак, газ ўз-ўзидан бутун идишга тарқалади. Бу процесс қайтмас процесс бўлади, чунки иссиқлик ҳаракати натижасида барча молекулаларнинг идишнинг бир қисмига тўпланиш эҳтимоли юқорида кўрганимиздек, деярли нолга тенг. Бинобарин, газ ташқи таъсирсиз ўз-ўзидан яна идишнинг чап ярмига тўплана олмайди.

Шундай қилиб, газнинг бутун идишга тарқалиш процессининг қайтмас процесс бўлиш сабаби шундаки, унга тескари бўлган процесснинг эҳтимоли жуда кичикдир. Бу хулосани бошқа процессларга ҳам жорий этиш мумкин. Ҳар қандай қайтмас процесс шундай процессдирки, унга тескари бўлган процесснинг юз бериш эҳтимоли жуда кичикдир.

13- жадвал

Молекулалар сони		W
чапда	ўнгда	
0	10	1
1	9	10
2	8	45
3	7	120
4	6	210
5	5	252
6	4	210
7	3	120
8	2	45
9	1	10
10	0	1
Ҳаммаси бўлиб		$2^{10} = 1024$

136- §. Идеал газнинг энтропияси

Идеал газ энтропиясининг ифодасини топамиз. Энтропия аддитив катталик бўлгани учун унинг бир киломоль газга тегишли қийматини топишнинг ўзи етарлидир. Ихтиёрий m массали газнинг энтропияси $S = \frac{m}{\mu} S_{\text{км}}$ бўлади.

Термодинамика биринчи асосининг (96.4) тенгламасини олиб, унга идеал газнинг dU ички энергияси ифодасини қўямиз:

$$d'Q_{\text{км}} = C_V dT + p dV_{\text{км}}.$$

$d'Q_{\text{км}}$ ни T га бўлиб, $dS_{\text{км}}$ ни топамиз [(133.5) га қ. процесс қайтувчан процесс деб фараз қилинади]:

$$dS_{\text{км}} = C_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV_{\text{км}}. \qquad (136.1)$$

Идеал газнинг ҳолат тенгламасига асосан, p/T нисбат $R/V_{\text{км}}$ га тенг. Бинобарин, (136.1) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$dS_{\text{км}} = C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV_{\text{км}}}{V_{\text{км}}}.$$

$dS_{\text{км}}$ дан аниқмас интеграл олиб, қуйидагини топамиз:

$$S_{\text{км}} = C_V \ln T + R \ln V_{\text{км}} + S_{0\text{км}}, \qquad (136.2)$$

бу ерда $S_{0\text{км}}$ — интеграллаш доимийси. (136.2) формула бир киломоль идеал газ энтропиясини T ва V ўзгарувчилар орқали ифодалайди. $S_{\text{км}}$ нинг бошқа ўзгарувчилар орқали ёзилган ифодаларига ўтиш учун ҳолат тенгламасидан фойдаланиш мумкин. (136.2) формулада $V_{\text{км}}$ ўрнига RT/p қўйиб, қуйидаги ифодани топамиз:

$$S_{\text{км}} = C_V \ln T + R \ln R + R \ln T - R \ln p + S_{0\text{км}}.$$

$R \ln R + S_{0\text{км}}$ йиғиндини $S'_{0\text{км}}$ билан белгилаб ва идеал газ учун $C_V + R$ йиғинди C_p га тенг эканлигини назарда тутиб, $S_{\text{км}}$ ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$S_{\text{км}} = C_p \ln T - R \ln p + S'_{0\text{км}}. \qquad (136.3)$$

Ниҳоят, (136.2) да T ни $pV_{\text{км}}/R$ билан алмаштириб, $S_{\text{км}}$ нинг қуйидаги ифодасини топиш мумкин:

$$S_{\text{км}} = C_v \ln p + C_p \ln V_{\text{км}} + S''_{0\text{км}}, \tag{136.4}$$

бу ерда

$$S''_{0\text{км}} = S_0 - C_v \ln R.$$

Икки хил газнинг аралашганда энтропиянинг ўзгаришини ҳисоблайлик. Ҳар бири бир киломоль миқдорида олинган икки хил газ бир хил p босим ва бир хил T температура шароитида тўсиқ билан ажратилган бир хил V ҳажмни банд қилиб турибди, деб фараз қилайлик (302- расм). Агар тўсиқ олиб қўйилса, газлар ўзаро диффузияланиб, натижада уларнинг ҳар бири $2V$ ҳажмга тарқалади. Ҳосил бўлган аралашмада иккала газнинг парциал босими $p/2$ га тенг бўлади. Равшанки, газларнинг аралашиш процесси қайтмас процессдир, шунинг учун системанинг энтропияси ортади. (136.3) ифодадан фойдаланиб, система энтропиясининг иккала газ энтропиялари йиғиндисига тенг бўлган бошланғич қийматини қуйидаги шаклда ёзиш мумкин:

$$S_{\text{бош}} = (C_{p1} \ln T - R \ln p + S'_{01}) + (C_{p2} \ln T - R \ln p + S'_{02}). \tag{136.5}$$

Газлар аралаштирилгандан кейинги энтропияни аралашмадаги иккала компонента энтропияларининг йиғиндиси сифатида ҳисоблаб чиқариш мумкин:

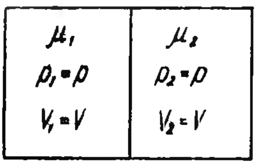
$$S_{\text{охир}} = (C_{p1} \ln T - R \ln \frac{p}{2} + S'_{01}) + (C_{p2} \ln T - R \ln \frac{p}{2} + S'_{02}).$$

Энтропиянинг орттирмаси қуйидагига тенг:

$$\Delta S = S_{\text{охир}} - S_{\text{бош}} = 2R \ln p - 2R \ln \frac{p}{2} = 2R \ln 2. \tag{136.6}$$

Шундай қилиб, газларни аралаштирганда энтропия ҳақиқатан ҳам ортар экан.

Ҳар хил газларнинг ҳар қандай жуфти учун энтропия орттирмаси бир хил (у $2R \ln 2$ га тенг) бўлиши (136.6) натижани айни бир хил компоненталар ҳолига, яъни дастлаб тўсиқнинг икки томонида айни бир хил газ турган ҳолга жорий этишга имкон бергандек бўлиб туюлади. Турли хил компоненталардан айни бир хил компоненталарга ўтиш Гиббс парадоксига олиб келади: тўсиқ олиб ташланса, на диффузия ва на бошқа қайтмас процесслар юз бермайди, лекин натижада энтропия (136.6) га тенг миқдорда ортгандек бўлади. Лекин (136.6) ифодани компоненталар айни бир хил бўлган ҳолга татбиқ этиш нотўғри. (136.6) формула турли хил компоненталар олинган ҳол учун чиқарилган, бу ҳолда аралашмадаги компонен-



302- расм.

талардан ҳар бири p_i парциал босимга эга деб ҳисоблаш мумкин. Компоненталар айни бир хил бўлган ҳолда тўсиқни олиб ташлагандан кейин аралашма эмас, балки бошдаги газнинг ўзи ҳосил бўлади, унинг босими ўша p босимга тенг бўлиб, фақат миқдори икки моль бўлади, холос. Унинг $S_{\text{охир}}$ энтропияси (136.3) формулага асосан, қуйидагига тенг бўлади (газ миқдори икки моль бўлгани учун (136.3) ифодани икки марта орттириш керак):

$$S_{\text{охир}} = 2\,[C_p \ln T - R \ln p + S'_{0\text{км}}],$$

бу ифода эса $S_{\text{бош}}$ нинг (136.5) да $C_{p1} = C_{p2} = C_p$ ва $S'_{01} = S'_{02} = S'_{0\text{км}}$ деб олинганда ҳосил бўладиган ифодасига тенг.

XV БОБ

МОДДАНИНГ КРИСТАЛЛИК ҲОЛАТИ

137- §. Кристаллик ҳолатнинг ўзига хос хусусиятлари

Табиатда қаттиқ жисмларнинг кўпчилиги кристалл тузилишга эга бўлади. Масалан, деярли барча минераллар ва барча металлар қаттиқ ҳолатида кристалл бўлади.

Кристаллик ҳолатнинг уни суюқ ва газ ҳолатидан ажратиб турувчи ўзига хос хусусияти **анизотропия** борлигида, яъни бир қатор физик хоссаларнинг (механик, иссиқлик, электр, оптик хоссаларнинг) йўналишга боғлиқ бўлишидадир.

Хоссалари барча йўналишлар бўйича бир хил бўлган жисмлар **изотроп** жисмлар деб аталади. Газлардан ва баъзи суюқликлардан бошқа ҳамма моддалар, шунингдек аморф қаттиқ жисмлар изотроп жисмлардир. Аморф қаттиқ жисмлар ўта совитилган суюқликлардан иборат (149- § га қ.).

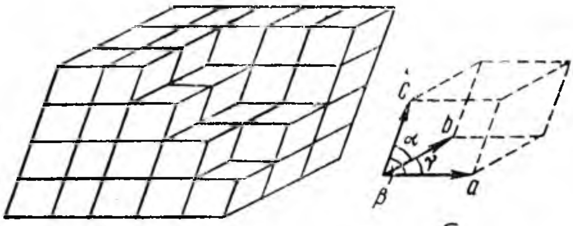
Кристалларнинг анизотропиялик хоссасига эга бўлишига улар таркибидаги зарраларнинг (атом ёки молекулаларнинг) тартибли жойлашганлиги сабаб бўлади.

Зарраларнинг тартибли жойлашуви кристалларнинг ташқи кўриниши мунтазам бўлишида намоён бўлади. Кристалларнинг ёқлари ясси бўлиб, бу ёқлар ҳар бир мазкур жинсли кристаллар учун маълум бир қийматга эга бўлган бурчаклар остида кесишади. Кристалларни жипслашиш текислиги деб аталадиган текисликлар бўйича парчалаш осон.

Кристаллар геометрик шаклининг мунтазам бўлиши ва анизотропияси одатда намоён бўлмайди, чунки кристалл жисмлар **поликристаллар** кўринишида, яъни бир-бирига ёпишиб ўсиб кетган ва тартибсиз жойлашган майда кристаллчалар тўплами кўринишида бўлади. Поликристалларда анизотропия айрим олинган ҳар бир кристаллчадагина кузатилади, кристаллчаларнинг тартибсиз жойлашгани туфайли бутун жисмда эса анизотропия борлиги билинмайди.

Суюқлантирилган модда ёки эритмада махсус кристалланиш шароитлари яратиш йўли билан улардан ҳар қандай модданинг **монокристалларини**, яъни катта-катта якка кристалларни ҳосил қилиш мумкин. Табиатда баъзи минералларнинг монокристаллари табиий ҳолатда учрайди.

Кристалл атомларининг тартибли жойлашуви шундан иборатки, атомлар (ёки молекулалар) мунтазам геометрик фазовий панжаранинг тугунларига жойлашади. Бутун кристаллни кристаллнинг элементар ячейкаси деб аталадиган айни бир структуравий элементни уч турли йўналишда кўп марта такрорлаш йўли билан ҳосил қилиш мумкин (303- *а* расм). Элементар ячейка қирраларининг *a*, *b* ва *c* узунликлари кристаллнинг айнийлик даврлари деб аталади.

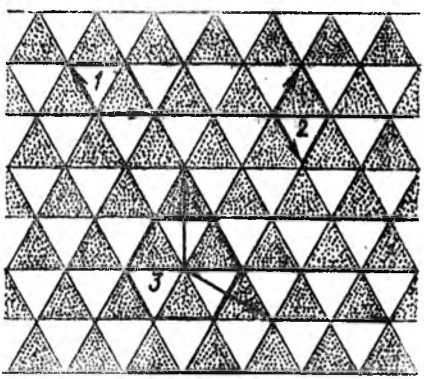


а *б*

303- расм.

Элементар ячейка учта **a**, **b**, **c** вектордан ясалган параллелепипед бўлиб, бу векторларнинг модуллари айнийлик даврларига тенг. Бу параллелепипед *a*, *b*, *c* қирраларидан ташқари, яна ўша қирралари орасидаги α, β, ва γ бурчаклари билан ҳам характерланади (303- *б* расм). *a*, *b*, *c* ва α, β, γ катталиклар элементар ячейкани бир қийматли аниқлайди ва унинг параметрлари деб аталади.

Элементар ячейкани турли хил усуллар билан танлаб олиш мумкин. Бу ҳол 304- расмда текис структура мисолида кўрсатилган. Девор юзини навбатлашиб ёпиштириладиган учбурчак шаклидаги оқ ва қора кошинлар билан қоплаш учун ҳар хил ячейкаларни икки йўналишда кўп марта такрорлаш керак. Масалан *1*, *2* ва *3* ячейкаларга қаранг; ячейкалар такрорланадиган йўналишлар стрелкалар билан кўрсатилган. *1* ва *2* ячейкалар ўзида минимал миқдорда структура элементларига эга бўлиши билан фарқ қилади (уларда битта оқ ва битта қора кошин бор). Кристалл модданинг химиявий таркибини характерловчи атомларни ўз ичига энг оз олган (масалан, муз кристалида кислороднинг бир атоми ва водороднинг икки атомидан иборат бўлган) ячейка бошланғич ячейка деб аталади. Лекин одатда бошланғич ячейка ўрнига атомларнинг сони кўпроқ бўлган, бироқ симметрияси бутун кристаллдаги симметриядек бўлган элементар ячейка танлаб олинади. Масалан, 304- расмда



304- расм.

тасвирланган текис структура кошинларнинг учидан ўз текислигига перпендикуляр равишда ўтган ҳар қандай ўқ атрофида 120° га бурилганда ўз-ўзига устма-уст тушади. Элементар ячейка ( )нинг ҳам шундай хоссаси бор. *1* ва *2* ячейкаларнинг симметрия даражаси камроқдир: улар 360° га бурилгандагина ўз-ўзига устма-уст тушади.

138- §. Кристалларнинг классификацияси

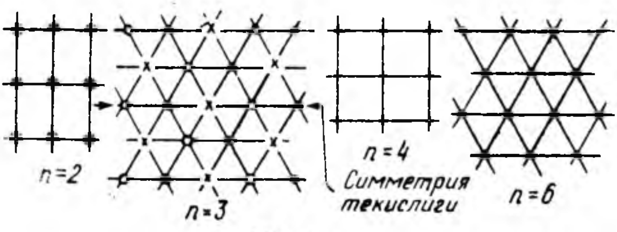
Кристалл панжара симметриянинг турли кўринишларига эга бўла олади. Кристалл панжаранинг симметрияси деганда панжаранинг бирор фазовий кўчишларида ўз-ўзи билан устма-уст тушиш хоссаси тушунилади.

Ҳар қандай панжара энг аввал трансляцион симметрияга эга бўлади, яъни айнийлик даври миқдорида сурилганда (трансляция қилинганда) ўз-ўзи билан устма-уст тушади[1]. Симметриянинг бошқа турлари орасида бирор ўқлар атрофидаги бурилишларга нисбатан симметрияни, шунингдек, маълум бир текисликларга нисбатан кўзгучасига акслантиришни қайд қилиб ўтамиз.

Агар панжара бирор ўқ атрофида $2\pi/n$ бурчакка бурилганда ўз-ўзи билан устма-уст тушса (бинобарин, панжара бу ўқ атрофида бир марта тўлиқ айланганда ўз-ўзи билан n марта устма-уст тушади) у ҳолда бу ўқ n- тартибли симметрия ўқи деб аталади. 1- тартибли тривиал ўқдан ташқари, 2-, 3-, 4- ва 6- тартибли симметрия ўқларигина бўлиши мумкинлигини кўрсатса бўлади. Бундай симметрия ўқларига эга бўлган структураларнинг мисоллари 305- расмда схематик равишда кўрсатилган (турли хил атомлар оқ тўгараклар, қора тўгараклар ва крестлар билан белгиланган).

Панжара бирор текисликдан кўзгучасига аксланганида ўз-ўзига устма-уст тушиб қолса, бундай текисликлар симметрия текисликлари деб аталади. 305- расмда симметрия текислигига ҳам мисол келтирилган.

Симметриянинг турли хиллари кристалл панжараларнинг **симметрия элементлари** деб аталади. Симметрия ўқлари ва сим-



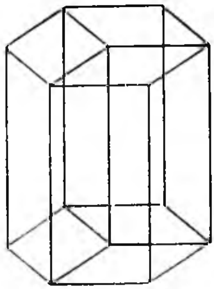
305- расм.

---

[1] Панжаранинг симметрияси текширилаётганда кристаллнинг ўлчамлари чекли эканлиги эътибордан четда қолдирилиб, панжара чексиз панжара деб ҳисобланади.

метрия текисликларидан бошқа симметрия элементлари ҳам бўлиши мумкин, лекин биз уларни текширмаймиз.

Кристалл панжара, одатда, бир вақтнинг ўзида симметриянинг бир қанча кўринишларига эга бўлади. Лекин симметрия элементларининг ҳар қандай мажмуаси ҳам ҳақиқатда бўлавермайди. Машҳур рус олими Е. С. Федоров кўрсатдики, симметрия элементларининг 230 та комбинацияси бўлиши мумкин, булар ф а з о в и й г р у п п а л а р деб аталган. Бу 230 та фазовий группа симметрия аломатларига қараб 32 синфга бўлинади. Ниҳоят, барча кристаллар элементар ячейкасининг шакли қандай бўлишига қараб еттита кристаллографик системага (ёки с и н г о н и я г а) бўлинади, уларнинг ҳар бири эса симметриянинг бир қанча синфини ўз ичига олади.



306- расм.

Кристаллографик системалар симметриясининг ошиб бориш тартибида қуйидагича жойлашади.

1. Т р и к л и н с и с т е м а. Бу система учун $a \neq b \neq c$; $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ бўлиши характерлидир. Элементар ячейкаси қийшиқ бурчакли параллелепипед шаклида бўлади.

2. М о н о к л и н с и с т е м а. Икки бурчаги тўғри бурчак бўлиб, учинчиси тўғри бурчакдан фарқ қилади (учинчи бурчак сифатида β бурчак олиш қабул қилинган). Бинобарин $a \neq b \neq c$; $\alpha = \gamma = 90°$; $\beta \neq 90°$. Элементар ячейкаси тўғри призма шаклида бўлиб, унинг асосида параллелограмм ётади (яъни у тўғри параллелепипед шаклида бўлади).

3. Р о м б и к с и с т е м а. Ҳамма бурчаклари тўғри, ҳамма қирралари ҳар хил: $a \neq b \neq c$; $\alpha = \beta = \gamma = 90°$. Элементар ячейкаси тўғри бурчакли параллелепипед шаклида бўлади.

4. Т е т р а г о н а л с и с т е м а. Ҳамма бурчаклари тўғри, иккита қирраси бир хил: $a = b \neq c$; $\alpha = \beta = \gamma = 90°$. Элементар ячейкаси тўғри призма шаклида бўлиб, унинг асосида квадрат ётади.

5. Р о м б о э д р и к (ёки тригонал) с и с т е м а. Ҳамма қирралари бир хил, ҳамма бурчаклари ҳам бир хил бўлиб, 90° дан фарқ қилади: $a = b = c$; $\alpha = \beta = \gamma \neq 90°$. Элементар ячейкаси диагонали бўйлаб сиқилишдан ёки чўзилишдан деформацияланган куб шаклида бўлади.

6. Г е к с о г о н а л с и с т е м а. Қирралари ва улар орасидаги бурчаклари қуйидаги шартларга бўйсунади: $a = b \neq c$; $\alpha = \beta = 90°$; $\gamma = 120$. Агар унинг учта элементар ячейкаси 306- расмда кўрсатилганча бирга қўшилса, олти бурчакли мунтазам призма ҳосил бўлади.

7. К у б и к с и с т е м а. Ҳамма қирралари бир хил, ҳамма бурчаклари тўғри бурчак: $a = b = c$; $\alpha = \beta = \gamma = 90°$. Элементар ячейкаси куб шаклида бўлади.

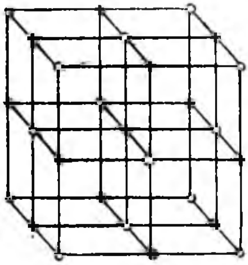
139- §. Кристалл панжараларнинг физик турлари

Кристалл панжаранинг тугунларига жойлашган зарраларнинг табиатига ва зарралар ўртасидаги ўзаро таъсир кучларининг характерига қараб кристалл панжаралар тўрт турга бўлинади ва шунга мос равишда тўрт хил: ионли, атомли, металл ва молекуляр кристаллар бўлади.

1. Ионли кристаллар. Кристалл панжаранинг тугунларида ҳар хил ишорали ионлар жойлашади. Улар орасидаги ўзаро таъсир кучлари асосан электростатик кучлар (Кулон кучлари) бўлади. Турли ишорали зарядланган ионлар орасидаги тортишишнинг электростатик кучлари туфайли юз берадиган боғланиш гетереполяр (ёки ионли) боғланиш деб аталади. Ионли панжаранинг типик мисоли ош тузининг (NaCl) 307- расмда кўрсатилган панжараси бўла олади. Бу панжара кубик системага тегишлидир. Натрийнинг мусбат зарядли ионлари оқ тўгараклар билан, хлорнинг манфий зарядли ионлари қора тўгараклар билан тасвирланган. Расмдан кўриниб турибдики маълум бир ишорали ионнинг энг яқин қўшниси унга тескари ишорали ион бўлади. Газ ҳолатида NaCl шундай молекулалардан иборат бўладики, буларда натрий ионлари хлор ионлари билан жуфт-жуфт бўлиб бириккан. Na иони ва Cl ионидан молекула ҳосил қилувчи группа кристаллда алоҳида-алоҳида бўлмайди. Ионли кристалл молекулалардан эмас, балки ионлардан иборат бўлади. Бутун кристаллни жуда катта битта молекула деб қараш мумкин.

2. Атомли кристаллар. Кристалл панжаранинг тугунларида нейтрал атомлар бўлади. Кристаллдаги (шунингдек молекуладаги) нейтрал атомларни бирлаштирувчи боғланиш гомеополяр (ёки ковалент) боғланиш деб аталади. Гомеополяр боғланишдаги ўзаро таъсир кучлари электр кучлари (лекин Кулон кучлари эмас) характерида бўлади. Бу кучларнинг пайдо бўлиш сабаблари фақат квантлар механикаси асосида изоҳлаб берилиши мумкин.

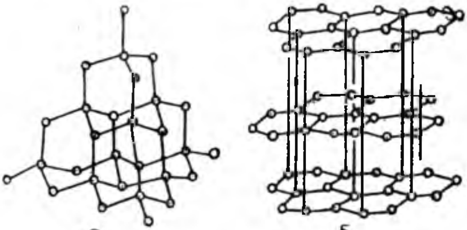
Электронлар жуфти гомеополяр боғланишда бўлади. Бу эса икки атомни бир-бирига боғлашда ҳар бир атомдан биттадан электрон қатнашишини билдиради. Шу сабабли гомеополяр боғланиш маълум бир томонга қараб йўналган бўлади. Гетереполяр боғланиш ҳолида ҳар бир ион ўзига анча яқин бўлган ҳамма ионларга таъсир кўрсатади. Гомеополяр боғланиш ҳолида эса атомнинг таъсири бу атом билан умумий электронлар жуфтига эга бўлган атомга қараб йўналади. Фақат валентлик электронлар, яъни атоми билан заифроқ боғланган электронлар гомеополяр боғланишда қатнашади. Ҳар бир электрон фақат битта атом билан боғланишда бўла олгани учун, мазкур атомнинг қатнаша олиши мумкин бўлган



307- расм.

боғланишлар сони (бу атомга боғланиши мумкин бўлган қўшни атомлар сони) унинг валентлигига тенг.

Олмос ва графит атомли кристалларга типик мисол бўла олади. Бу иккала модда химиявий жиҳатдан айнан бир хил (улар углерод атомларидан тузилган) бўлиб, лекин кристалл тузилишлари жиҳатидан бир-биридан фарқ қилади. 308- *а* расмда олмоснинг кристалл панжараси, 308- *б* расмда графитнинг панжараси кўрсатилган. Кристалл структуранинг модда хоссаларига таъсир кўрсатиши бу мисолдан яхши кўриниб туради.



а *б*

308- расм.

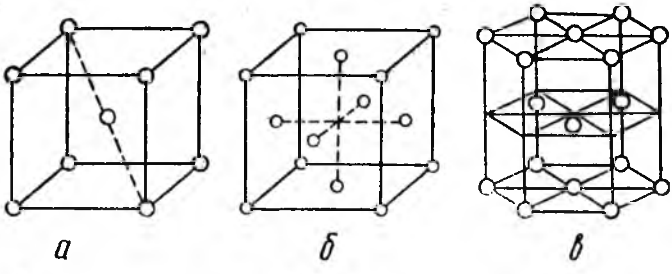
Типик ярим ўтказгич бўлган германий (Ge) ва кремнийнинг (Si) ҳам панжараси худди олмосники (олмос типидаги панжара) каби бўлади. Бу панжара шу билан характерлидирки, унда ҳар бир атом атрофида мунтазам тетраэдр учларига жойлашган тўртта қўшни атом ундан бир хил масофада туради. Тўртта валентлик электронларидан ҳар бири мазкур атомни қўшнилардан бири билан боғловчи электронлар жуфтида қатнашади.

3. Металл кристаллар. Бундай кристалл панжаранинг ҳамма тугунларида металлнинг мусбат ионлари жойлашади. Ионлар ҳосил бўлишида атомидан ажраб қолган электронлар бу мусбат ионлар ўртасида газ молекулаларига ўхшаб бетартиб ҳаракат қилиб юради. Бу электронлар мусбат ионларни бирга ушлаб турувчи «цемент» ролини ўйнайди; акс ҳолда панжара ионлар ўртасидаги итаришиш кучлари таъсири остида парчаланиб кетган бўлар эди. Шу билан бирга, ионлар ҳам электронларни кристалл панжара доирасида ушлаб туради ва шунинг учун электронлар панжарадан чиқиб кета олмайди.

Кўпчилик металларнинг панжараси қуйидаги уч турдан бири бўлади: ҳажмда марказлашган кубик панжара (309- *а* расм), ёқларида марказлашган кубик панжара (309- *б* расм), тўлиқ гексогонал панжара (309- *в* расм). Буларнинг энг охиргиси гексогонал панжара бўлиб, c/a нисбати $\sqrt{8/3}$ га тенг. Ёқларида марказлаштирилган кубик панжара ва зич гексогонал панжара бир хил шарлар энг зич жойлашган ҳолларга мос келади.

4. Молекуляр кристаллар. Кристалл панжаранинг тугунларида маълум йўналишда ориентирланган молекулалар жойла-

шади. Кристаллдаги молекулалар орасида таъсир қиладиган боғланиш кучларининг табиати худди газларни идеалликдан четга чиқаришда молекулалар орасида таъсир қилувчи тортишиш кучлари



309- расм.

табиати билан бир хил. Шу сабабли бу кучлар Ван-дер-Ваальс кучлари деб аталади. Масалан, H_2, N_2, O_2, CO_2, H_2O моддалар молекуляр панжара ҳосил қилади. Шундай қилиб, одатдаги муз, шунингдек қуруқ муз (қаттиқ карбонат ангидрид) молекуляр кристаллардан иборат.

140- §. Кристалларда юз берадиган иссиқлик ҳаракати

Кристалл панжарасининг тугунлари зарраларнинг ўртача вазиятини кўрсатиб туради. Зарраларнинг ўзлари (ион, атом ёки молекулалар) эса бу ўртача вазиятлари атрофида муттасил тебраниб туради: температура кўтарилганда бу тебранишларнинг интенсивлиги ошади.

310- расм.

Кристалл ҳосил қилувчи зарралар ўртасидаги тортишиш кучлари бу зарралар орасидаги масофалар анча кичик бўлганда масофа камайиши билан тез ортиб борувчи итаришиш кучларига алмашади. Бу фикр турли хил ишорали икки ион учун ҳам тўғри бўлади, чунки ионларнинг электронли қобиқлари бир-бирига жуда яқин келганида улар орасидаги итаришиш кучлари кўпроқ таъсир қила бошлайди[1].

Шундай қилиб, кристаллда ҳар қандай кўринишли зарралар ўртасидаги ўзаро таъсир 310-расмда тасвирланган (264- расм

[1] Ионлар ўртасидаги ўзаро таъсир характери иккита нуқтавий заряд орасидаги таъсирга қараганда анча мураккабдир.

билан солиштиринг) потенциал эгри чизиқ орқали ифодаланиши мумкин. Бу эгри чизиқ минимумга нисбатан симметрик эмас. Шу сабабли зарраларнинг мувозанат вазияти атрофидаги жуда кичик тебранишларигина гармоник тебранма ҳаракат бўлади. Температура кўтарилиши натижасида тебранишлар амплитудаси ошиб бориши билан ангармонизм (яъни тебранишларнинг гармоникликдан четланиши) кучли равишда намоён бўла боради. Бу ҳол эса, 310- расмдан кўриниб турганидек, зарралар орасидаги ўртача масофаларнинг ошувига ва, бинобарин, кристалл ҳажмининг катталашувига олиб келади. Кристалларнинг иссиқликдан кенгайиши ана шундай талқин қилинади.

141- §. Кристалларнинг иссиқлик сиғими

Зарраларнинг кристалл панжара тугунларида жойлашиши уларнинг ўзаро потенциал энергиясининг минимум бўлишига мос келади. Зарралар мувозанат вазиятидан ҳар қандай йўналишда силжиганда заррани бошланғич вазиятига қайтаришга интилувчи куч пайдо бўлади, бунинг натижасида зарра тебранма ҳаракатга келади. Ихтиёрий йўналишда содир бўлаётган тебранишни учта координата ўқлари йўналишида бўлаётган тебранишларнинг қўшилиши деб тасаввур қилиш мумкин. Шундай қилиб, кристаллдаги ҳар бир зарранинг учта тебранма эркинлик даражаси бор, деб ҳисоблаш мумкин.

101- § да аниқладикки, битта зарранинг ҳар бир тебранма эркинлик даражасига ҳар бири ўрта ҳисобда kT нинг ярмига тенг бўлган иккита энергия тўғри келади: бу энергиянинг битта ярми кинетик энергия тарзида, иккинчи ярми потенциал энергия тарзида бўлади. Бинобарин, ҳар бир заррага, яъни атомли панжарадаги атомга, ионли ёки металл панжарадаги[1] ионга ўрта ҳисобда 3 kT энергия тўғри келади. Кристалл ҳолатдаги бир киломоль модданинг энергиясини топиш учун битта зарранинг ўртача энергиясини кристалл панжара тугунларида жойлашган зарралар сонига кўпайтириш керак. Химиявий жиҳатдан содда бўлган моддаларда кристалл панжара тугунларидаги зарралар сони Авогадро сонига (N_A) тенг бўлади. Бошқа ҳолларда, масалан NaCl каби моддаларда эса зарралар сони $2N_A$ бўлади, чунки бир моль NaCl да N_A дона натрий атоми ва N_A дона хлор атоми бўлади.

Атомли ёки металл кристаллар ҳосил қилувчи химиявий содда моддаларни кўриб чиқиш билан чекланиб, кристалл ҳолатидаги бир килограмм-атом модданинг ички энергиясини қуйидагича ифодалаш мумкин:

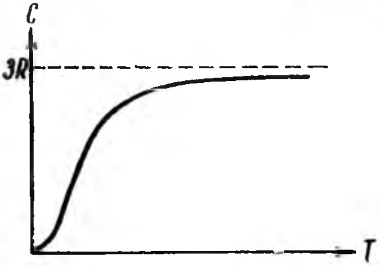
$$U_{\text{км}} = N_A 3kT = 3RT.$$

[1] Молекуляр кристалларда масала бирмунча мураккаброқ. Молекулалар илгарилама тебранишлар билан бирга буралма тебранишлар ҳам қилади. Бундан ташқари, молекулалар ичидаги атомлар ҳам тебранма ҳаракат қилади.

Ички энергиянинг температура бир градус кўтарилгандаги орттирмаси (102.6) га асосан, ҳажм ўзгармас бўлган ҳолдаги иссиқлик сиғимига тенг бўлади. Бинобарин,

$$C_V = 3R \approx 25 \cdot 10^3 \ \textit{ж/град} \cdot \textit{кг-ат}. \qquad (141.1)$$

Иситилганда қаттиқ жисмларнинг ҳажми жуда оз ўзгаради, шунинг учун уларнинг босим ўзгармас бўлган ҳолдаги иссиқлик сиғими ҳажм ўзгармас бўлган ҳолдаги иссиқлик сиғимидан арзимаган миқдорда фарқ қилади. Модомики шундай экан, $C_p \approx C_V$ деб олиш ва қаттиқ жисмнинг иссиқлик сиғими тўғрисида гапириш мумкин.



311- расм.

Шундай қилиб, (141.1) га асосан, кристалл ҳолатидаги химиявий содда моддаларнинг бир килограмм-атомининг иссиқлик сиғими бир хил ва $25 \cdot 10^3$ *ж/град·кг-ат* бўлади. Бу фикр Дьюлонг ва Птининг тажрибада топилган қонунининг мазмунидир. Бу қонун кўп моддалар учун уй температураси шароитида етарлича аниқлик билан қаноатлантирилади. Лекин, масалан, уй температурасида олмоснинг иссиқлик сиғими $5{,}6 \cdot 10^3$ *ж/град·кг-ат* бўлади. Ундан ташқари, кристалларнинг иссиқлик сиғими (141.1) га зид равишда, температурага боғлиқ ва бу боғланиш характери 311- расмда кўрсатилган. Абсолют ноль яқинида ҳамма жисмларнинг иссиқлик сиғими T^3 га пропорционал бўлиб, фақат ҳар бир модданинг ўзи учун характерли бўлган анча юқори температураларда (141.1) муносабат қаноатлантирилади. Кўпчилик жисмлар уй температурасидаёқ (141.1) га бўйсунади, олмоснинг иссиқлик сиғими 1000°С тартибидаги температурадагина (141.1) қийматга эришади.

Қаттиқ жисмлар иссиқлик сиғимининг Эйнштейн ва Дебай яратган жуда аниқ назарияси, биринчидан, тебранма ҳаракат энергиясининг квантланишини ҳисобга олади (102- § га қ.). Иккинчидан, бу назария кристалл панжарадаги зарраларнинг тебранишлари эркли тебранишлар эмаслигини ҳисобга олади. Мувозанат вазиятидан сурилган зарра ўзига яқин зарраларни ўзи билан эргаштириб кетади. Кристаллдаги зарраларнинг кучли ўзаро таъсири шунга олиб келадики, бирор зарранинг тебранишидан юзага келган ғалаёнланиш бошқа зарраларга узатилади ва кристаллда тарқалувчи тўлқин ҳосил қилади. Бу тўлқин кристаллнинг чегарасига етиб бориб, орқага қайтади. Тарқалаётган тўлқин билан қайтган тўлқин қўшилганда, маълумки, турғун тўлқинлар ҳосил бўлади. Чегараланган муҳит ичидаги турғун тўлқинлар маълум шартларни қаноатлантитириши лозим (бундай шарт, масалан, муҳит чегарасида тўлқиннинг қавариқлиги жойлашсин деган шарт бўлиши мумкин). Бу шартлар турғун тўлқинларнинг мумкин бўлган узунликларини ёки тебранишлар частотасини чеклаб қўяди. Маълумки, масалан, учлари маҳкамлаб қўйилган торда ҳосил бўладиган турғун тўлқинларнинг λ узунлиги $l = n\lambda/2$ шартни қаноатлантириши керак, бу ерда l — торнинг узунлиги, n — бутун сон. Шундай қилиб, кристаллардаги иссиқлик ҳаракатини дискрет частотали турғун тўлқинлар тўпламининг (спектрининг) қўшилишидан иборат деб тасаввур қилиш мумкин.

Кристаллар иссиқлик сиғимининг квант назарияси тажриба маълумотларига жуда яхши мос келади, жумладан, у юқори температуралар шароитида кристалл ҳолатдаги моддаларнинг иссиқлик сиғими (141.1) билан ифодаланишини кўрсатади.

XVI БОБ

МОДДАНИНГ СУЮҚ ҲОЛАТИ

142- §. Суюқликларнинг тузилиши

Модданинг суюқ ҳолати газлар билан кристаллар орасида бўлгани ҳолда иккала ҳолатнинг баъзи хусусиятларига эга бўлади. Жумладан, суюқликлар кристалл жисмлар каби маълум бир ҳажмга эга бўлади, шу билан бирга, суюқлик газга ўхшаб ўзи турган идиш шаклини олади. Яна кристалик ҳолатда зарралар (атом ёки молекулалар) маълум тартибда жойлашади, газларда эса бу жиҳатдан олганда мутлақо тартиб йўқ. Рентгенографик тадқиқотларга биноан, суюқликлар зарраларининг жойлашиш тартиби жиҳатидан қаралганда ҳам кристаллар билан газлар ўртасида оралик ўрин эгаллайди. Суюқлик зарралари **я қ и н т а р т и б** деб аталадиган тартибда жойлашган бўлади. Бу эса ҳар қандай заррага нисбатан олиб қаралганда қўшни зарралар тартиб билан жойлашган эканлигини билдиради. Лекин мазкур заррадан узоқлашилгани сари зарраларнинг унга нисбатан жойлашиш тартиби бузилиб боради ва зарралар жойлашишидаги бу тартиб анча тез йўқолиб кетади. Кристалларда эса **у з о қ т а р т и б** деб аталадиган тартиб бор, бу эса ҳар қандай заррага нисбатан бошқа зарраларнинг анча катта ҳажм доирасида тартибли жойлашишини билдиради.

Суюқликларда яқин тартибнинг борлиги суюқликлар структурасини квазикристалик (кристаллсимон) структура деб аташга сабаб бўлади. Суюқликларда (суюқ кристаллардан ташқари) узоқ тартиб бўлмагани учун улар зарралари тартибли жойлашган кристалларга характерли бўлган анизотроплик хоссасига эга бўлмайди.

Чўзинчоқ молекулали суюқликларда анча катта ҳажм доирасида молекулалар бир тартибда ориентирланади, шунинг учун оптик ва баъзи бошқа хоссалари анизотропияга бўйсунади. Бундай суюқликлар суюқ кристаллар деб аталган. Буларда молекулаларнинг ориентирланишигина тартибга солинган бўлиб, молекулаларнинг бирбирига нисбатан жойлашувида, одатдаги суюқликлардаги каби, узоқ тартиб йўқ.

Суюқликларнинг кристаллар билан газлар ўртасида оралиқ ўринда туриши суюқ ҳолатнинг хоссалари жуда мураккаб бўлишига сабаб бўлган. Шунинг учун суюқ ҳолат назарияси кристалик ҳолат ва, айниқса, газсимон ҳолат назариясига қараганда анча кам ривожланган. Шу чоққача суюқликларнинг бутунлай тугалланган ва умум томонидан эътироф этилган назарияси яратилган эмас. Суюқ ҳолат назариясининг қатор проблемаларини ишлаб чиқиш соҳасида совет олими Я. И. Френкелнинг хизматлари катта.

Френкель ғоясига биноан, суюқликлардаги иссиқлик ҳаракатининг характери қуйидагичадир. Ҳар бир молекула бирор вақт давомида маълум бир мувозанат вазияти атрофида тебраниб туради. Вақт-вақти билан молекула олдинги вазиятидан ўз ўлчамлари тартибидаги масофада турган янги вазиятга сакраб ўтиб, мувозанат вазияти ўрнини ўзгартиради. Шундай қилиб, молекулалар маълум жойлар атрофида бирор вақт давомида бўлгани ҳолда суюқлик ичида секин кўчиб юради. Я. И. Френкелнинг образли таъбири билан айтганда, молекулалар кўчманчилик ҳаёти кечириб, бутун суюқлик ичида кезиб юради, бунда қисқа вақт ичида кўчиб олганидан сўнг қиёсан узоқроқ вақт давомида ўтроқ ҳаёт кечиради. Ўтроқлик муддати хилма-хил бўлиб, тартибсиз равишда навбатлашади, лекин ҳар бир суюқликда айни бир мувозанат вазияти атрофида тебранишларнинг ўртача давом этиш муддати маълум бир қийматга эга бўлиб, температура кўтарилганда бу муддат бирданига камайиб кетади. Шу муносабат билан, температура кўтарилганда молекулаларнинг ҳаракатчанлиги ошади, бу эса суюқлик қовушоқлигининг камайишига олиб келади.

Шундай қаттиқ жисмлар борки, улар кўп жиҳатдан кристалларга яқин бўлишидан кўра суюқликларга яқин бўлади. Аморф жисмлар деб аталувчи бундай жисмларда анизотропия бўлмайди. Уларнинг зарралари суюқликлардаги каби, фақат яқин тартиб билан жойлашган бўлади. Иситилганда кристаллдан суюқликка ўтиш процесси сакраб юз бергани ҳолда (бу тўғрида 149- § да батафсил гапирамиз), аморф қаттиқ жисмдан суюқликка ўтиш процесси узлуксиз равишда юз беради. Бу фактларнинг ҳаммаси аморф қаттиқ жисмларни ўта совитилган суюқликлар деб қарашга асос беради, қовушоқлиги жуда катта бўлганидан уларнинг зарраларининг ҳаракатчанлиги чеклаб қўйилган.

Шиша типик аморф қаттиқ жисмга мисол бўлади. Смола, битум ва шу кабилар аморф жисмлар жумласидандир.

143- §. Сирт таранглиги

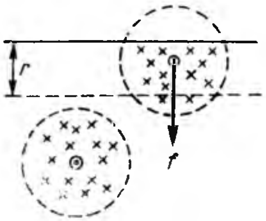
Суюқлик молекулалари бир-бирига шунчалик яқин жойлашадики, улар орасидаги тортишиш кучлари анча миқдорда бўлади. Ўзаро таъсир кучлари масофа ортган сари тез камайгани учун (264- расмдаги эгри чизиққа қаранг) бирор масофадан бошлаб молекулалар орасидаги тортишиш кучларини эътиборга олмаса ҳам бўлади. Биз биламизки (118- § га қ.), бу r масофа молекуляр таъсир радиуси деб, r радиусли сфера эса молекуляр таъсир сфераси деб аталади. Молекуляр таъсир радиуси молекулалар эффектив диаметрларининг бир қанчаси тартибидаги катталикка тенг бўлади.

Ҳар бир молекулани маркази ўша молекулада бўлган сфера (молекуляр таъсир сфераси) ичидаги барча қўшни молекулалар ўзига тортади. Суюқлик сиртидан r дан зиёдроқ масофада турган молекула учун бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси ўрта ҳисобда нолга тенг бўлиши равшан (312- расм). Суюқлик сиртидан r дан кичик масофада турган молекула билан аҳвол бошқача бўлади. Буғнинг (ёки суюқлик билан чегарадош бўлган газнинг) зичлиги суюқликнинг зичлигидан кўп марта кичик бўлгани учун молекуляр таъсир сферасининг суюқликдан ташқарига чиқиб турган қисмида сферанинг қолган қисмидагига қараганда молекула оз бўлади. Натижада қалинлиги r бўлган сиртга яқин қатламдаги ҳар бир молекулага суюқликнинг ичига қараб йўналган куч таъсир қилади. Бу кучнинг катталиги қатламнинг ички чегарасидан ташқи чегарасига томон йўналишда олганда ошиб боради.

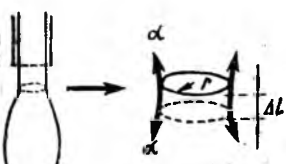
Молекула суюқликнинг ичкарисидан сирт қатламига ўтганида сирт қатламида таъсир қиладиган кучларга қарши иш бажариши зарур. Бу ишни молекула ўзининг кинетик энергияси ҳисобига бажаради ва бу иш молекуланинг потенциал энергиясини оширишга сарф бўлади; бу процесс юқорига учиб кетаётган жисмнинг Ер тортиш кучларига қарши бажарган иши жисмнинг потенциал энергиясини оширишга сарф бўлишига ўхшайди. Молекула сирт қатламидан суюқликнинг ичкарисига ўтганда унинг сирт қатламида эга бўлган потенциал энергияси молекуланинг кинетик энергиясига айланади.

Шундай қилиб, молекулалар суюқликнинг сирт қатламида қўшимча потенциал энергияга эга бўлади. Бутун сирт қатлами суюқликнинг ички энергиясига таркибий қисм сифатида кирувчи қўшимча энергияга эга бўлади.

Мувозанат вазияти потенциал энергиянинг минимум бўлишига мос келгани учун, ўз ҳолига қўйиб берилган суюқлик сирти минимал бўлган шаклга, яъни шар шаклига келади. Одатда биз «ўз ҳолига қўйиб берилган» суюқликларни эмас, балки Ернинг тортиш кучи таъсири остидаги суюқликларни кузатамиз. Бу ҳолда суюқлик тортишиш кучлари майдонидаги энергия ва сирт энергияси йиғиндисидан иборат бўлган умумий энергия минимум бўладиган шаклни олади.



312- расм.



313- расм.

Жисмнинг ўлчамлари ошганда ҳажми чизиқли ўлчамларининг куби каби, сирти эса квадрати каби ўсади. Шунинг учун жисмнинг ҳажмига пропорционал бўлган тортишиш майдони энергияси жисмнинг ўлчамлари ошганда сирт энергиясига қараганда тезроқ ошади. Суюқликнинг майда томчиларида сирт энергияси устунлик қилади, шунинг учун бундай томчилар шакли сферик шаклга яқин бўлади. Суюқликнинг катта томчилари бу ҳолда сирт энергияси ошувига қарамасдан Ернинг тортиш кучлари таъсири остида ялпаяди. Суюқликнинг катта-катта массалари ўзи қуйилган идиш шаклини олади ва эркин сирти горизонтал бўлиб туради.

Сирт энергияси борлиги туфайли суюқлик ўз сиртини қисқартиришга интилади. Суюқлик ўзини қисқаришга интиладиган эластик чўзилган парда ичига солиб қўйилгандек тутади. Ҳақиқатда суюқликни ташқаридан чегаралаб турадиган ҳеч қандай парда йўқ. Сирт қатлами ҳам ўша суюқликнинг молекулаларидан таркиб топган ва сирт қатламидаги молекулаларнинг ўзаро таъсири характери суюқлик ичидаги билан бирдай. Гап шундаки, сирт қатламидаги молекулалар суюқлик ичидаги молекулаларга қараганда қўшимча энергияга эга.

Суюқлик сиртининг ёпиқ контур билан чегараланган бир қисмини фикран ажратиб оламиз. Бу қисмнинг қисқаришга интилиши шунга олиб келадики, у ўзига қўшни бўлган қисмларга бутун контур бўйича ёйилган кучлар билан таъсир қилади (Ньютоннинг учинчи қонунига асосан сирт қатламининг ташқи қисмлари текширилаётган бу қисмга катталиги худди шундай, лекин қарама-қарши йўналган кучлар билан таъсир қилади). Бу кучлар **сирт таранглиги кучлари** деб аталади. Сирт таранглиги кучи суюқлик сиртига ўтказилган уринма бўйлаб ўзи таъсир кўрсатаётган контур қисмига перпендикуляр равишда йўналган.

Сирт таранглиги кучининг контурнинг узунлик бирлигига тўғри келадиган қийматини α билан белгилаймиз. Бу катталик **сирт таранглиги коэффициенти** деб аталади. Бу катталик метрга ньютон (СИ да) ёки сантиметрга дина (СГС да) ҳисобида ўлчанади. Сирт таранглиги коэффициентининг катталиги суюқликнинг табиатига ва суюқлик турган шароитларга, жумладан, температурага боғлиқ.

Суюқликнинг сирти ташқи кучлар таъсири ҳисобига ошадиган бирор процессни кўриб чиқамиз. Масалан, тор найдан суюқлик оқиб чиқишида бундай процесс юз беради (313- расм). Суюқлик бундай найдан томчилаб оқиб чиқади. Томчи бевосита узилиш олдидан шаклини цилиндр шаклида деса бўладиган бўйинда осилиб туради. Томчининг оғирлиги бўйин кесимини чегаралаб турган контур бўйича таъсир этувчи сирт таранглиги кучлари билан мувозанатлашади. Бу кучларнинг натижаловчисини $2\pi r\alpha$ кўринишида тасвирлаш мумкин, бу ерда r—бўйиннинг радиуси. Бўйин узунлиги Δl миқдорида ошганда оғирлик кучи

$$A' = 2\pi r\alpha \Delta l = \alpha\,\Delta\sigma$$

иш бажаради, бу ерда $\Delta\sigma = 2\pi r \Delta l$ — томчи сиртининг орттирмаси (сирт σ ҳарфи билан белгиланган, чунки бу параграфда биз S ҳарфи билан энтропияни белгилаймиз).

Агар сиртнинг ортиш процесси адиабатик равишда юз берган бўлса эди, у ҳолда суюқлик устида бажариладиган иш суюқликнинг ички энергияси орттирмасига тенг бўлар эди: $\Delta U = A' = \alpha\Delta\sigma$. Лекин бу ҳолда ички энергия орттирмаси сирт энергиясининг $\Delta U_{\text{сирт}}$ орттирмасидангина эмас, балки ҳажмий энергия орттирмасидан, яъни суюқликдаги ички қисмлар энергиясининг $\Delta U_{\text{ҳажм}}$ орттирмасидан ҳам иборат бўлади. Бунинг сабаби шундаки, сирт ортганда суюқлик совийди (молекулалар суюқликнинг ичкарисидан сирт қатламига ўтганда уларнинг тезлиги камайишини эслатиб ўтамиз). Ички энергия фақат сирт энергияси ҳисобига ўзгариши (яъни $\Delta U = \Delta U_{сирт}$ бўлиши) учун суюқлик сиртининг ошиш процессини изотермик равишда ўтказиш керак. Бу ҳолда суюқлик сирти $A' = \alpha\Delta\sigma$ иш бажариш ҳисобига ошганда суюқлик атрофидаги муҳитдан $Q = T\Delta S = \Delta (TS)$ иссиқлик келиб қўшилади, бу ифодада S ҳарфи суюқлик сирт қатламининг энтропиясини билдиради. Энтропия аддитив катталик бўлгани учун суюқликнинг ички қисмларининг ҳолати ва бинобарин, энтропияси ўзгармайди. Шундай қилиб, ички энергия орттирмаси қуйидагига тенг бўлади:

$$\Delta U = \Delta U_{сирт} = A' + Q = \alpha\Delta\sigma + \Delta (TS)_{сирт}.$$

Бу муносабатни

$$\alpha\Delta\sigma = \Delta (U - TS)_{сирт} = \Delta F_{сирт}$$

кўринишида ёзиш мумкин, бу ерда $\Delta F_{сирт}$ — юзи $\Delta\sigma$ бўлган сирт қатламининг эркин энергияси[1].

Шундай қилиб, биз α сирт таранглиги коэффициенти суюқлик сиртининг бирлик юзига тўғри келадиган эркин энергияга тенг, деган хулосага келдик. Шунинг учун сирт таранглиги коэффициентини метрига ньютон (ёки сантиметрига дина) ҳисобидагина эмас, балки квадрат метрига жоуль (ёки мос равишда квадрат сантиметрига эрг) ҳисобида ҳам ифодалаш мумкин.

14- жадвал

Модда	α, н/м
Симоб	0,490
Сув	0,073
Бензол	0,029
Спирт	0,023
Эфир	0,020

14- жадвалда баъзи суюқликлар учун α коэффициентнинг уй температурасидаги қийматлари келтирилган.

Аралашмалар сирт таранглиги коэффициентига кучли таъсир қилади. Масалан, сувда совун эритилганда унинг сирт таранглиги коэффициенти камайиб, 0,045 *н/м* гача тушиб қолади. Сувда NaCl эритилганда, аксинча, унинг сирт таранглиги коэффициенти ошади.

Температура кўтарилгани сари суюқликнинг зичлиги билан унинг тўйинган буғининг зичлиги ўртасидаги фарқ камаяди. Шу муносабат билан сирт таранглиги коэффициенти ҳам камаяди. Критик температурада α нолга айланади.

144- §. Суюқликнинг эгрилаган сирти остидаги босим

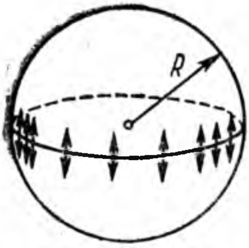
Суюқликнинг бирор ясси контурга таянувчи сиртини кўриб чиқамиз (314- *а* расм). Агар суюқлик сирти ясси бўлмаса, унинг қисқаришга интилиши суюқлик сирти ясси бўлгандаги босимга қўшимча равишда босим ҳосил қилади. Сирт қавариқ бўлган ҳолда бу қўшимча босим мусбат (314- *б* расм), сирт ботиқ бўлганда эса қўшимча босим манфий бўлади (314- *в* расм). Сирт ботиқ бўлган ҳолда қисқараётганда суюқликни чўзади.

[1] (133.14) формулага қаранг.

Равшанки, қўшимча босим катталиги сирт таранглиги коэффициенти (α) ва сиртнинг эгрилиги ортиши билан ортиши керак. Қўшимча босимни суюқликнинг сферик сирти учун ҳисоблаб чиқарамиз. Бунинг учун суюқликнинг сферик томчисини диаметр текислиги билан иккита ярим шарга фикран ажратамиз (315- расм). Сирт таранглиги туфайли иккала ярим шар бир-бирига қуйидагига тенг куч билан тортишади:

314- расм.

$$f = l\alpha = 2\pi R\alpha.$$



315- расм.

Бу куч иккала ярим шарни бир-бирига $S = \pi R^2$ сирт бўйича қисади ва бинобарин қўшимча

$$\Delta p = \frac{f}{S} = \frac{2\pi R\alpha}{\pi R^2} = \frac{2\alpha}{R} \qquad (144.1)$$

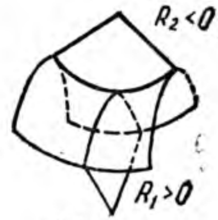
босим ҳосил бўлишига сабаб бўлади.

Сферик сиртнинг эгрилиги ҳамма жойда бир хил бўлиб, сферанинг R радиуси билан аниқланади. Равшанки, R қанчалик кичик бўлса, сферик сиртнинг эгрилиги шунчалик катта бўлади. Ихтиёрий сиртнинг эгрилигини ўртача эгрилик деб аталадиган эгрилик билан характерлаш қабул қилинган, бу эгрилик сиртнинг ҳар хил нуқталари учун ҳар хил бўлиши мумкин.

Ўртача эгрилик нормал кесимларнинг эгрилиги орқали аниқланади. Сиртнинг бирор нуқтасидаги нормал кесими деб сиртга шу нуқтада ўтказилган нормал орқали ўтадиган текислик билан шу сиртнинг кесишув чизиғига айтилади. Сфера учун ҳар қандай нормал кесим радиуси R бўлган айланадир (R — сфера радиуси). $H = 1/R$ катталик сферанинг эгрилигини билдиради. Умумий ҳолда сиртнинг айни бир нуқтасидан ўтказилган нормал кесимларнинг эгрилиги турлича бўлади. Эгрилик радиусларига тескари катталиклар йиғиндисининг ярми, яъни

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (144.2)$$

катталик ўзаро перпендикуляр бўлган нормал кесимларнинг ҳар қандай жуфти учун айни бир қийматга эга бўлиши геометрияда исбот қилинади. Бу катталик сиртнинг маълум нуқтасидаги ўртача эгрилигидир.



316- расм.

(144.2) формуладаги R_1 ва R_2 радиуслар алгебраик катталиклардир. Агар нормал кесимнинг эгрилик маркази шу сиртнинг тагида ётса, бунга тегишли эгрилик радиуси мусбат бўлади; агар эгрилик маркази сиртдан юқорида ётса, эгрилик радиуси манфий бўлади (316- расм). Шундай қилиб, ясси бўлмаган сиртнинг ўртача эгрилиги нолга тенг бўлиши мумкин. Бунинг учун R_1

ва R_2 эгрилик радиусларининг катталиги тенг ва ишораси қарама-қарши бўлиши керак.

Сферада $R_1 = R_2 = R$ бўлади ва (144.2) формуладан $H = 1/R$ эканлиги келиб чиқади. R нинг бундан топиладиган қийматини (144.1) га қўйиб, сферик сирт остидаги қўшимча босимни топамиз:

$$\Delta p = 2H\alpha. \qquad (144.3)$$

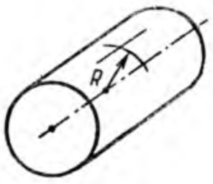
Агар H деганда сиртнинг тагида қўшимча босим аниқланадиган нуқтасидаги ўртача эгрилиги тушунилса (144.3) формула ҳар қандай шаклдаги сирт учун тўғри бўлар экан. Шундай эканлигини Лаплас исбот қилиб кўрсатди. (144.3) ифодага ўртача эгриликнинг (144.2) ифодасини қўйиб, ҳар қандай сирт остидаги қўшимча босим формуласини топамиз:

$$\Delta p = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \qquad (144.4)$$

Бу формула **Лаплас формуласи** деб аталади.

(144.4) формула билан аниқланадиган қўшимча босим ингичка найларда (капиллярларда) суюқлик сатҳининг ўзгаришига сабаб бўлади, шунинг учун ҳам бу босим баъзан капилляр босим деб аталади.

R радиусли доиравий цилиндр шаклидаги сиртни кўриб чиқамиз. Нормал кесимлар сифатида сиртнинг цилиндр ўқидан ўтадиган текислик билан кесишувидан ҳосил бўлган кесимни ва ўққа перпендикуляр бўлган текислик билан кесишувидан ҳосил бўлган кесимни оламиз (317- расм). Биринчи кесим тўғри чизиқ ($R_1 = \infty$) бўлади, иккинчи кесим R радиусли айлана бўлади ($R_2 = R$). (144.2) формулага биноан цилиндрик сиртнинг эгрилиги $1/2\,R$ га тенг, яъни ўшандай радиусли сферик сиртнинг эгрилигидан 2 марта кичик. (144.4) формулага биноан, R радиусли цилиндрик сирт остидаги қўшимча босим қуйидагига тенг бўлади:



317- расм

$$\Delta p = \frac{\alpha}{R}. \qquad (144.5)$$

Агар суюқликда газ пуфакчаси бўлса, пуфакча сирти қисқаришга интилиб, газга қўшимча босим беради. (144.1) формулани чиқаришдаги мулоҳазаларни такрорлаб, бу босим миқдори $2\alpha/R$ га тенг эканини кўрсатиш мумкин. Қўшимча босим 1 *ат* бўлганда сувдаги пуфакчанинг радиуси нимага тенг бўлишини топамиз. 20°С даги сувнинг сирт таранглиги коэффициенти 0,073 *н/м* га тенг. 1 *ат* эса тахминан 10^5 *н/м*^{2} га тўғри келади. Бинобарин, R нинг қиймати қуйидагига тенг бўлади:

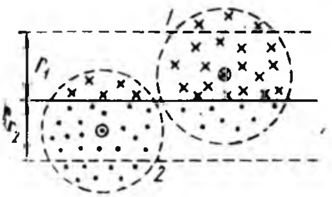
$$R = \frac{2\alpha}{\Delta p} = \frac{2\cdot 0{,}073}{10^5} \approx 1{,}5\cdot 10^{-6}\ мм = 1{,}5\cdot 10^{-3}\ мм.$$

Шундай қилиб, пуфакчанинг диаметри тахминан 3 *мк* бўлганда қўшимча босим $\Delta p = 1 ат$ бўлади. Диаметри 1 *мм* бўлган пуфакча 2 *мм* сим. уст. дан ортиқ қўшимча босим беради.

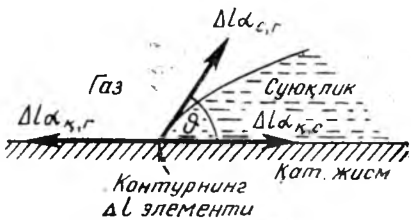
145- §. Суюқлик билан қаттиқ жисмнинг ёндошиш чегарасида бўладиган ҳодисалар

Сирт қатламидаги молекулалар турган махсус шароитлар тўғрисида 143- § да айтилган ҳамма гаплар бутунлай қаттиқ жисмларга ҳам оиддир. Бинобарин, қаттиқ жисмлар, суюқликлар каби, сирт таранглигига эга.

Ҳар хил муҳитларнинг ажралиш чегарасидаги ҳодисаларни кўриб чиқишда шуни назарда тутиш керакки, суюқ ёки қаттиқ жисмнинг сирт энергияси ўша суюқ ёки қаттиқ жисмнинг хоссаларигагина эмас, балки улар билан чегарадош бўлган модданинг хоссаларига ҳам боғлиқ. Тўғрисини айтганда, бир-бири билан чегарадош бўлган икки муҳитнинг умумий α_{12} сирт энергияси билан иш кўриш керак (318- расм). Моддалардан бири газ бўлиб, иккинчиси билан



318- расм.



319- расм.

химиявий реакцияга киришмайдиган ва унда жуда оз эрийдиган ҳолдагина умумий сирт энергиясини тилга олмасдан содда қилиб иккинчи суюқ ёки қаттиқ жисмнинг сирт энергияси (ёки сирт таранглиги коэффициенти) тўғрисида гапириш мумкин.

Агар бирданига учта модда: қаттиқ, суюқ ва газ ҳолатидаги модда бир-бири билан чегарадош бўлса (319- расм), унда бутун система умумий потенциал энергия (сирт энергияси, оғирлик кучи майдонидаги энергия ва ҳоказо) минимум бўладиган конфигурация олади. Жумладан, учала модда чегарадош бўладиган контур қаттиқ жисм сиртида шундай жойлашадики, бунда контурнинг ҳар бир элементига қўйилган сирт таранглик кучларининг контур элементи силжий оладиган йўналишдаги (яъни қаттиқ жисм сиртига ўтказилган уринма йўналишидаги) проекциялари йиғиндиси нолга тенг бўлади. Контурнинг узунлиги Δl бўлган элементининг мувозанат шарти қуйидагича ёзилиши 319- расмдан келиб чиқади:

$$\Delta l\alpha_{к,г} = \Delta l\alpha_{к,с} + \Delta l\alpha_{с,г} \cos\vartheta, \qquad (145.1)$$

бу ерда $\alpha_{к,г}$, $\alpha_{к,с}$, $\alpha_{с,г}$ —қаттиқ жисм—газ, қаттиқ жисм—суюқлик ва суюқлик — газ чегараларидаги сирт таранглиги коэффициентлари.

Қаттиқ жисм сиртига ва суюқлик сиртига ўтказилган уринмалар орасидаги ϑ бурчак *чегаравий бурчак* деб аталади (бу бурчак суюқлик ичида ҳисоб қилинади). (145.1) га асосан,

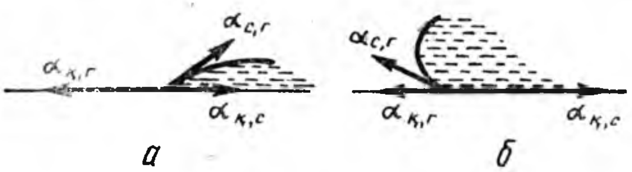
$$\cos\vartheta = \frac{\alpha_{қ,г} - \alpha_{қ,с}}{\alpha_{с,г}}. \qquad (145.2)$$

Қуйидаги шарт бажарилган ҳолдагина чегаравий бурчак (145.2) ифода билан аниқланади:

$$\frac{|\alpha_{қ,г} - \alpha_{қ,с}|}{\alpha_{с,г}} \leqslant 1. \qquad (145.3)$$

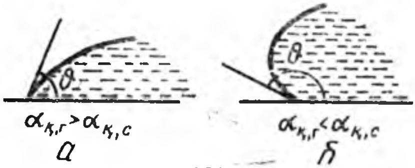
Агар (145.3) шарт бажарилмаса, яъни $|\alpha_{қ,г} - \alpha_{қ,с}| > \alpha_{с,г}$ бўлса, ν нинг ҳеч қандай қийматида мувозанат юз бермайди. Икки ҳолда шундай бўлади.

1) $\alpha_{қ,г} > \alpha_{қ,с} + \alpha_{с,г}$. Бунда ϑ бурчак ҳар қанча кичик бўлмасин $\alpha_{қ,г}$ куч қолган иккитасини ҳам босиб кетади (320- *а* расм). Бу ҳолда суюқлик қаттиқ жисм сирти бўйлаб чексиз ёйилиб кетади. Бу ҳол **т ў л и қ ҳ ў л л а ш** дейилади. Қаттиқ жисм билан газ орасидаги сиртни икки сирт билан: қаттиқ жисм билан суюқлик ва суюқлик билан газ орасидаги сиртга алмаштириш энергетик жиҳатдан фойдали бўлар экан. Тўлиқ ҳўллашда чегаравий бурчак нолга тенг бўлади.



320- расм.

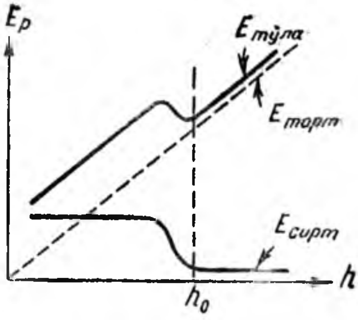
2) $\alpha_{қ,с} > \alpha_{қ,г} + \alpha_{с,г}$. Бунда ϑ бурчак π га ҳар қанча яқин бўлса ҳам $\alpha_{қ,с}$ куч қолган иккитасини ҳам босиб кетади (320- *б* расм). Бу ҳолда суюқлик билан қаттиқ жисм чегарадош бўлган сирт нуқтага тортилади. Суюқлик қаттиқ сиртдан ажралади — бу ҳол **т ў л и қ ҳ ў л л а м а с л и к** дейилади. Қаттиқ жисм билан суюқлик орасидаги сиртни иккита сирт билан: қаттиқ жисм билан газ ва суюқлик билан газ орасидаги сиртга алмаштириш энергетик жиҳатдан фойдали экан. Тўлиқ ҳўлламасликда чегаравий бурчак π га тенг.



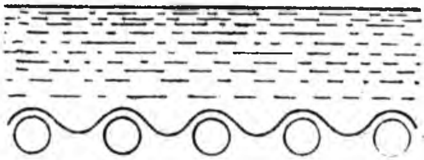
321- расм.

(145.3) шартга риоя қилинганда чегаравий бурчак $\alpha_{қ,г}$ ва $\alpha_{қ,с}$ кучлар орасидаги муносабатнинг қандай бўлишига қараб, ўткир ёки ўтмас бўлиши мумкин. Агар $\alpha_{қ,г}$ куч $\alpha_{қ,с}$ кучдан катта бўлса, у ҳолда $\cos\vartheta > 0$ ва ϑ бурчак ўткир бўлади (321- *а* расм). Бу ҳолда қисман ҳўллаш юз беради. Агар $\alpha_{қ,г}$ куч $\alpha_{қ,с}$ кучдан кичик бўлса, $\cos\vartheta < 0$ ва ϑ бурчак ўтмас бурчак бўлади (321- *б* расм). Бу ҳолда қисман ҳўлламаслик юз беради.

Ҳўлламаслик қизиқарли ҳодисаларнинг юз беришига сабаб бўлади. Маълумки, ёғланган нина ёки устара лезвиеси сув бетида чўкиб кетмасдан тура олади. Биринчи қарашда ажабланарли бўлиб туюлган бу ҳодисанинг сабабларини энергетик мулоҳазалар асосида очиб бериш ҳаммасидан осон. Пўлатнинг ёғланган сиртини сув ҳўлламайди, пўлат билан сувнинг ёндошиш сиртининг энергияси пўлат билан ҳаво ёки ҳаво билан сув орасидаги сирт энергиясидан анча катта бўлади. Нинанинг сувга бутунлай чўкишида сирт энергияси $S\alpha_{к,г}$ (пўлат — ҳаво) қийматидан $S\alpha_{к,с}$ (пўлат—сув) қийматга қадар ошади, бу ерда S — нинанинг сирти. Сирт энергиясининг нина чўкаётгандаги ўзгаришини 322- расмда тасвирланган $E_{сирт}$ эгри чизиқ ифодалайди. Нинанинг идиш тубидан ҳисобланган баландлиги h билан белгиланган: h_0—суюқлик сиртининг идиш тубидан ҳисобланган баландлиги. Нинанинг Ер



322- расм.



323- расм.

тортиши кучи майдонидаги $E_{торт}$ потенциал энергияси билан h баландлик орасидаги боғланиш координаталар бошидан ўтадиган тўғри чизиқ шаклида бўлади. $E_{сирт}$ ва $E_{торт}$ энергиялар йиғиндисига тенг бўлган тўлиқ энергия $h = h_0$ да минимум бўлади, бу ҳол эса нинанинг сув бетида қалқиб сузиб юришига имкон беради. Агар нинани босиб, сувга шунчалик ботирсакки, бунда тўлиқ энергия максимум қийматидан ўтиб камая бошласа, у ҳолда нина бундан кейин ўзи янада чўка бошлаб, ниҳоят, бутунлай чўкиб кетади.

«Ғалвирда сув ташиш» мумкинлигининг сабаби ҳам шунга ўхшайди. Агар сув ғалвирни ҳўлламаса (бунинг учун ғалвир тўқилган симларга парафин суркаш мумкин) ва сув қатлами унча қалин бўлмаса, унда суюқлик сатҳининг пастга қараб бир оз кўчиши оқибатида сирт энергияси ошади, энергиянинг бу орттирмаси миқдори энергиянинг оғирлик кучи майдонида камайишидан ортиқ бўлади (323- расм). Шунинг учун ғалвирда сув тўкилмасдан туради.

146- §. Капиллярлик ҳодисалари

Чегаравий бурчакнинг мавжудлиги шунга олиб келадики, идиш деворлари яқинида суюқлик сирти эгриланади. Ингичка найда (капиллярда[1]) ёки икки девор ўртасидаги тор бўғизда суюқликнинг бутун сирти эгриланган бўлади. Агар суюқлик идиш деворларини ҳўлласа, сирт ботиқ сирт бўлади, агар ҳўлламаса, суюқлик сирти қавариқ бўлади (324- расм). Суюқликнинг бундай эгриланган сирти **мениск** деб аталади.

[1] Лотинча capillus — соч деган. Капилляр — «сочдек ингичка най».

Агар капиллярнинг бир учи кенг идишга қуйилган суюқликка ботирилса, капиллярдаги эгриланган сирт остидаги босим кенг идишдаги ясси сирт остидаги босимдан Δp миқдорида фарқ қилади; бу Δp босим (144.4) формуладан аниқланади. Натижада капилляр ҳўлланганда ундаги суюқлик сатҳи кенг идишдагидан юқори бўлади. Капилляр ҳўлланмаганда капиллярда суюқлик сатҳи кенг идишдагидан паст бўлади.

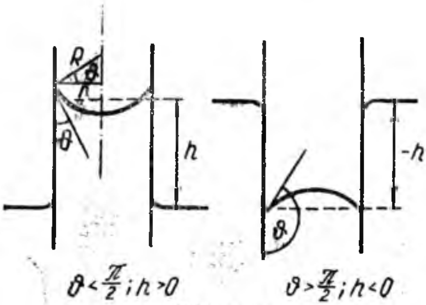
Тор найларда ёки тор бўғизларда суюқлик сатҳи баландлигининг ўзгариши капиллярлик деб аталади. Кенг маънода капилляр ҳодисалар деганда сирт таранглиги мавжудлиги орқасида пайдо бўладиган барча ҳодисалар тушунилади. Жумладан, сирт таранглиги туфайли ҳосил бўладиган (144.4) босим, юқорида айтиб ўтилганидек, капилляр босим деб аталади.

Суюқликнинг капиллярдаги сатҳи билан кенг идишдаги сатҳи орасида шундай h фарқ ҳосил бўладики, бу ҳолда $\rho g h$ гидростатик босим Δp капилляр босимни мувозанатлайди:

$$\rho g h = \frac{2\alpha}{R}. \qquad (146.1)$$

Бу формуладаги α — суюқлик — газ чегарасидаги сирт таранглиги коэффициенти, R — менискнинг эгрилик радиуси.

Менискнинг R эгрилик радиусини ϑ чегаравий бурчак ва капиллярнинг r радиуси орқали ифодалаш мумкин. Дарҳақиқат, $R = r/\cos\vartheta$ эканлиги 324- расмдан кўриниб турибди. R нинг бу қийматини (146.1) га қўйиб ва ҳосил бўлган тенгламани h га нисбатан ечиб,



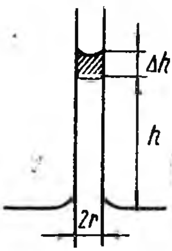
324- расм.

$$h = \frac{2\alpha\cos\vartheta}{\rho g r} \qquad (146.2)$$

формулани топамиз. Ҳўллайдиган суюқлик капиллярда кўтарилгани ва ҳўлламайдиган суюқлик пасайгани учун $\vartheta < \pi/2$ ($\cos\vartheta > 0$) бўлган ҳолда (146.2) дан топиладиган h лар мусбат, $\vartheta > \pi/2$ ($\cos\vartheta < 0$) бўлган ҳолда эса h лар манфий бўлади.

(146.2) формулани чиқаришда биз менискни сферик шаклда деб фараз қилган эдик. h нинг формуласини энергетик мулоҳазалар асосида ҳам келтириб чиқариш мумкин, унда менискнинг шакли тўғрисида қандайдир тахминлар қилишга эҳтиёж қолмайди.

Менискнинг мувозанат вазияти суюқлик — капилляр системасининг E_p потенциал энергияси минимум бўлишига мос келади. Бу энергия суюқлик билан девор ўртасидаги, суюқлик билан газ ўртасидаги ва девор билан газ ўртасидаги чегараларнинг сирт энергиясидан ҳамда суюқликнинг Ер тортиш кучи майдонидаги потенциал энергиясидан иборат бўлади.



325- расм.

Суюқликнинг капиллярда кўтарилиш баландлиги кичикроқ Δh миқдорга ўзгарган ҳол учун энергиянинг ΔE_p орттирмаси қандай бўлишини топамиз. Суюқлик баландлиги Δh қадар ошганда унинг капиллярга тегиб турадиган сирти $2\pi r\Delta h$ қадар ортади, бунинг натижасида энергия $2\pi r\Delta h\alpha_{қ,с}$ га тенг орттирма олади. Айни вақтда девор билан газнинг бир-бирига тегиб турадиган сирти камаяди, бунда энергия орттирмаси $-2\pi r\Delta h\alpha_{қ,г}$ га тенг бўлади. Ернинг тортиш кучи майдонидаги потенциал энергия $g\rho\pi r^2 h\Delta h$ га тенг орттирма олади, бу орттирма суюқликнинг штрихлаб қўйилган ҳажми билан h нинг кўпайтмасига тенг бўлади (325- расм). Кенг идишдаги суюқлик сатҳининг ўзгаришини эътиборга олмаса ҳам бўлади. Шундай қилиб,

$$\Delta E_p = 2\pi r(\alpha_{қ,с} - \alpha_{қ,г})\Delta h + \pi r^2 \rho g h\Delta h.$$

Бундан қуйидаги ҳосилани топамиз:

$$\frac{dE_p}{dh} = 2\pi r(\alpha_{қ,с} - \alpha_{қ,г}) + \pi r^2 \rho g h.$$

Бу ҳосилани нолга тенглаштириб, мувозанат шартини, мувозанат шартидан эса h ни топамиз:

$$h = \frac{2(\alpha_{қ,г} - \alpha_{қ,с})}{\rho g r}. \qquad (146.3)$$

Лекин (145.2) га мувофиқ $\alpha_{қ,г} - \alpha_{қ,с} = \alpha_{с,г}\cos\vartheta$. Бу қийматни (146.3) га қўйиб ва $\alpha_{с,г}$ ни α билан белгилаб, (146.2) формулани ҳосил қиламиз.

Суюқликка ботирилган параллел пластинкалар орасидаги тор жойда мениск цилиндрик шаклда бўлиб, унинг эгрилик радиуси $R = (d/2)\cos\vartheta$ бўлади, бу ерда d — пластинкалар орасидаги оралиқ. (144.5) га асосан, бу ҳолда капилляр босим $\frac{\alpha}{R} = \frac{2\alpha\cos\vartheta}{d}$ га тенг бўлади. Капилляр босим билан гидростатик босим ўртасидаги

$$\frac{2\alpha\cos\vartheta}{d} = \rho g h$$

шартдан h ни топамиз:

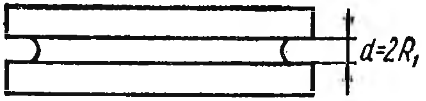
$$h = \frac{2\alpha\cos\vartheta}{\rho g d}.$$

Агар яхшилаб жилвирланган иккита пластинкани ҳўллаб, бир-бирига тегизиб қўйсак, улар орасида сезиларли тутиниш кучи пайдо бўлади. Бу ҳодисанинг сабаби қуйидагича. Икки пластинка орасида суюқлик сирти эгриланади (326- расм). Бинобарин, суюқлик ичидаги босим атмосфера босимидан қуйидаги миқдорда кичик бўлади:

$$\Delta p = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Пластинка тўлиқ ҳўлланганда $R_1 = d/2$ бўлади, бу ерда d—пластинкалар оралиғи. Пластинкаларга параллел текислик билан кесилганда ҳосил бўлган кесимнинг R_2 радиуси R_1 га қараганда анча катта бўлади. Шунинг учун $\Delta p \approx \alpha \frac{1}{R_1} = \frac{2\alpha}{d}$ деб олса бўлади. Агар ҳар бир пластинканинг суюқлик билан ҳўлланган сиртининг юзи S га тенг бўлса, у ҳолда пластинкалар бир-бирига қуйидаги f куч билан сиқилади:

$$f = \Delta pS = \frac{2\alpha S}{d}. \tag{146.4}$$



326- расм.

Пластинкалар оралиғи уларнинг юзидаги ғадир-будурликларнинг ўлчамлари билан аниқланади. Сув билан ҳўлланган пластинкалар оралиғи 1 *мк* чамасида бўлганда Δp капилляр босим 1 *ат* чамасида бўлади: агар бу пластинкалар ўлчами 10×10 *см* бўлса, улар орасидаги тутиниш кучи 100 *кГ* га етиши мумкин.

Пластинкалар орасида уларни ҳўлламайдиган суюқлик турган ҳолда пластинкаларни бир-биридан итарувчи куч пайдо бўлади. Бу кучнинг катталиги ҳам (146.4) формула билан ҳисоблаб топилади.

XVII БОВ

ФАЗАВИЙ МУВОЗАНАТ ВА АЙЛАНИШЛАР

147- §. Муқаддима

Системанинг бир жинсли ва хоссалари бир хил бўлган қисмлари термодинамикада фаза деб аталади. Фаза тушунчасини қуйидаги мисолларда тушунтириб ўтамиз. Ёпиқ идишда сув ва унинг устида ҳаво билан сув буғи аралашмаси бор. Бу ҳолда биз иккита фазадан иборат бўлган система билан иш кўрамиз: бир фаза сув бўлиб, иккинчи фаза эса ҳаво билан сув буғи аралашмасидир. Агар сувга бир неча бўлак муз ташланса, бу бўлакларнинг ҳаммаси учинчи фаза ташкил этади. Бирор модданинг турли кристалл модификациялари ҳам турли хил фазалар бўлади. Масалан, олмос ва графит углероднинг турли хил қаттиқ фазаларидир.

Маълум бир шароитларда айни бир модданинг турли хил фазалари бир-бирига тегиб мувозанатда бўла олади. Икки фаза температураларнинг маълум бир интервалидагина мувозанатда бўлади, шу билан бирга температуранинг ҳар бир T қийматига мутлақо аниқ p босим тўғри келади: босимнинг бу қийматида мувозанат бўлиши мумкин. Шундай қилиб, икки фазанинг мувозанат ҳолатлари (p,T) диаграммасида

$$p = f(T) \tag{147.1}$$

чизиқ билан тасвирланади.

Масалан, суюқлик билан унинг тўйинган буғи мувозанатда бўладиган температуралар интервали, 119- § да кўрганимиздек, учланган нуқта билан критик температура орасида ётади. Бу ҳолда (147.1) функциянинг графиги тўйинган буғ эластиклигининг эгри чизиғидан иборат бўлади.

Айни бир модданинг уч фазаси (қаттиқ, суюқ ва газсимон ёки суюқ ва иккита қаттиқ фазаси) температура ва босимнинг ягона қийматларидагина мувозанатда бўла олади. (p, T) диаграммада температура ва босимнинг бу қийматларига **учланган** нуқта деб аталадиган нуқта тўғри келади. Бу нуқта иккиталаб олинган фазалар мувозанатининг эгри чизиқлари кесишган нуқтада ётади.

Айни бир модданинг учтадан ортиқ фазасининг мувозанатда бўлолмаслиги термодинамикада тажрибага мувофиқ равишда исбот қилинади.

Модда бир фазадан бошқа фазага ўтганда бирор миқдор иссиқлик ютилади ёки ажралиб чиқади, бу иссиқлик миқдори ўтишнинг яширин иссиқлиги ёки, соддароқ қилиб, ўтиш иссиқлиги деб аталади. Бир кристалл модификациядан бошқасига ўтиш ҳоллари борки, буларда иссиқлик ютилмайди ҳам, чиқарилмайди ҳам. Бундай ўтишлар биринчи тур фазавий ўтишлар деб аталадиган одатдаги ўтишлардан фарқли ўлароқ, иккинчи тур фазавий ўтишлар деб аталади. Биз биринчи тур фазавий ўтишларни кўриб чиқиш билан чегараланамиз.

148- §. Буғланиш ва конденсация

Ҳар қандай температурада суюқ ва қаттиқ жисмларда бирор миқдор молекула бўладики, уларнинг энергияси бошқа молекулаларнинг тортиш кучини енгишга, суюқ ёки қаттиқ жисм сиртидан чиқиб кетишга ва газ фазасига ўтишга етади. Суюқликнинг газ ҳолатига ўтиши буғланиш деб, қаттиқ жисмнинг газ ҳолатига ўтиши сублимация деб аталади.

Қаттиқ жисмларнинг ҳаммаси мустаносиз озми-кўпми сублимацияланади. Баъзи моддаларда, масалан, қаттиқ карбонат ангидридда (сунъий муз) сублимация процесси билинарли тезлик билан юз беради; бошқа моддаларда бу процесс одатдаги температураларда шунчалик секин юз берадики, уни амалда сезиб бўлмайди.

Буғланиш ва сублимацияда жисмдан анча тез ҳаракатланувчи молекулалар чиқиб кетади, натижада қолган молекулаларнинг ўртача энергияси камаяди ва жисм совийди. Буғланаётган (ёки сублимацияланаётган) жисмнинг температурасини ўзгартирмай туриш учун унга муттасил равишда иссиқлик бериб туриш керак. Модданинг бирлик массасини температураси модданинг буғланишдан олдинги температурасидек бўлган буғга айлантириб юбориш учун унга берилиши лозим бўлган q иссиқлик солиштирма буғланиш (ёки сублимация) иссиқлиги деб аталади.

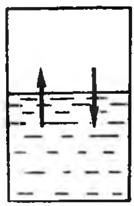
Буғланишда сарф бўлган иссиқлик конденсацияланишда қайтариб берилади: конденсацияланишда ҳосил бўладиган суюқлик (ёки қаттиқ жисм) исийди.

Суюқликнинг буғланиш иссиқлиғини чамалаб кўрамиз. Бирор миқдор суюқлик буғланаётганда газсимон фазага ўтаётган молекулалар сирт қатламида таъсир этувчи кучларга қарши иш бажариши керак (143- § га қ.). Бу кучлар қатламнинг r қалинлигига тенг йўлда таъсир қилади. Кучнинг мана шу йўлдаги ўртача қийматини $\bar{f}$ билан, масса бирлигидаги молекулалар сонини n' билан белгилаб, сирт қатламида таъсир этувчи кучларга қарши бажарилган ишни $n'\bar{f}r$ кўринишда ифодалаш мумкин. Буғланиш процессида модданинг ҳажми ортади, шунинг учун бунда ташқи кучларга қарши иш бажариш зарурати ҳам туғилади. Агар модда буғланаётганда ташқи p босим ўзгармай турса, у ҳолда ташқи кучларга қарши бажарилган иш $p(V'_б - V'_с)$ га тенг бўлади, бу ерда $V'_б$ ва $V'_с$ — буғ ва суюқликнинг солиштирма ҳажмлари. Юқорида айтиб ўтилган иккала иш буғланиш иссиқлиги q ҳисобига бажарилади. Шундай қилиб,

$$q = n'\bar{f}r + p(V'_б - V'_с). \tag{148.1}$$

Температура кўтарилган сари буғланиш иссиқлиги камайиши (148.1) ифодадан кўринади. Дарҳақиқат, температура кўтарилиши билан тўйинган буғнинг зичларлиги ортади, бу эса молекулага сирт қатламида таъсир этувчи кучларни камайтиради. Тўйинган буғ ва суюқликнинг солиштирма ҳажмларидаги фарқ ҳам камаяди. Бинобарин, температура кўтарилганда (148.1) даги иккала қўшилувчи ҳам камаяди. Критик температурада буғланиш иссиқлиги нолга айланади.

Суюқлик билан унинг буғи ўртасида мувозанат қарор топишини кўриб чиқамиз. Ичига тўлдирмасдан суюқлик қуйилган герметик идиш оламиз (327- расм). Дастлаб суюқлик устидаги фазодан модда бутунлай чиқариб ташланган бўлсин, деб фараз қиламиз. Буғланиш процесси натижасида суюқлик устидаги фазо молекулалар билан банд бўла бошлайди. Газсимон фазага ўтган молекулалар бетартиб ҳаракат қилиб, суюқлик сиртига келиб урилади, бундай тўқнашишларнинг баъзиларида молекула суюқ фазага ўтади. Вақт бирлиги ичида суюқ фазага ўтувчи молекулалар сони равшанки, суюқлик сиртига келиб урилувчи молекулалар сонига пропорционал бўлади. Бизга маълум бўлганидек [(99.9) га қ.], сиртга (суюқлик сиртига) келиб урилувчи молекулалар сони эса, ўз навбатида $n\bar{v}$ га пропорционалдир, яъни p босим ошуви билан кўпаяди. Бинобарин, буғланиш билан бирга молекулаларнинг газсимон фазадан суюқ фазага ўтишидек тескари процесс юз беради, бу процесснинг интенсивлиги суюқлик устидаги фазода молекулалар зичлиги ортиши билан ошади. Мазкур температура учун тайинли бир босимга эришилгач, суюқликдан чиқиб кетаётган ва унга қайтиб тушаётган молекулалар сони тенглашади. Шу пайтдан бошлаб буғнинг зичлиги ўзгармай қўяди. Суюқлик билан буғ ўртасида динамик мувозанат юз беради (327- расм), системанинг ҳажми ёки температураси ўзгармас экан, бу мувозанат бузилмай туради.



327- расм.

Динамик мувозанат ҳолатга тўғри келган босим тўйинган буғнинг $p_{\text{т.б}}$ босимидир. Агар идишнинг ҳажми оширилса, буғ босими пасаяди ва мувозанат бузилади. Натижада бирор миқдор суюқлик буғга айланиб, босим яна $p_{\text{т.б}}$ га тенг бўлиб қолади. Шунга ўхшаш, идишнинг ҳажми камайтирилса, бирор миқдор буғ суюқликка айланади.

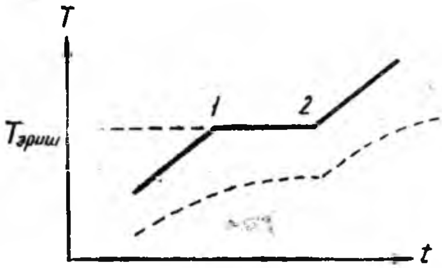
Вақт бирлиги ичида суюқликдан чиқиб кетадиган молекулалар сони температура кўтарилганда тез ошади. Суюқлик сиртига келиб уриладиган молекулалар сони температуранинг кичикроқ даражасига ($\bar{v}$ орқали $\sqrt{T}$ каби) боғлиқ. Шунинг учун температура кўтарилганда фазалар ўртасидаги мувозанат бузилади ва бирор вақт давомида молекулаларнинг суюқлик→буғ йўналишдаги оқими буғ→суюқлик йўналишдаги оқимидан ортиқ бўлиб туради. Босим ошиб яна динамик мувозанат юз бермагунча бу ҳол давом этаверади. Шундай қилиб, суюқлик билан буғ ўртасида ҳаракатчан (динамик) мувозанат юз берадигандаги босим, яъни тўйинган буғ босими температурага боғлиқ бўлар экан. Бу боғланишнинг кўриниши 274- расмда тасвирланган.

Суюқлик билан газ ўртасидаги мувозанат тўғрисида айтилган гапларнинг ҳаммаси қаттиқ жисм—газ системаси учун ҳам тўғри. Ҳар бир температурага босимнинг қаттиқ жисм билан газ ўртасида ҳаракатчан мувозанат қарор топадиган тайинли бир қиймати мос келади. Одатдаги температураларда кўпчилик жисмлар учун, масалан, қаттиқ металлар учун бу босим шу қадар кичик бўладики, уни энг сезгир асбоблар билан ҳам пайқаб бўлмайди.

149- §. Эриш ва кристалланиш

Кристалл жисмнинг суюқ ҳолатга ўтиш процесси ҳар бир модда учун тайинли бўлган маълум бир температурада юз беради ва бирор миқдор иссиқлик сарфлашни талаб қилади. Бу иссиқлик миқдори эриш иссиқлиги деб аталади.

Дастлаб кристалл ҳолатда бўлган моддага ҳар секундда айни бир миқдорда иссиқлик бериб турилса, унда жисм температураси ўзгаришининг вақтга боғланиш эгри чизиғи 328- расмда кўрсатилган шаклда бўлади. Дастлаб жисмнинг температураси ҳамиша ошиб боради. $T_{эр}$ эриш температурасига етгач (328- расмдаги *1* нуқта), жисмга аввалгича иссиқлик бериб турилишига қарамасдан, унинг температураси ўзгармай қўяди. Шу билан бир вақтда қаттиқ жисмнинг эриш процесси бошланади, бу процесс давомида модданинг янги-янги улушлари суюқликка айланиб боради. Эриш процесси тамом бўлиб, бутун модда батамом суюқ ҳолатга ўтиб бўлгандан кейин (328- расмдаги *2* нуқта) температура яна кўтарила бошлайди.

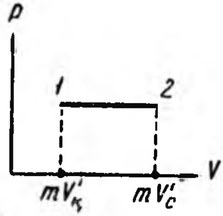


328- расм.

Аморф жисмнинг исиш эгри чизиғи бошқача бўлади (328- расмдаги пунктир эгри чизиқ). Иссиқлик муттасил бериб турилганда аморф жисмнинг температураси узлуксиз кўтарилиб боради. Аморф жисмлар учун суюқ ҳолатга ўтишнинг тайинли бир температураси бўлмайди. Бу ўтиш процесси сакраб эмас, балки узлуксиз юз беради. Жисм юмшайдиган температуралар соҳасинигина кўрсатиш мумкин. Бундай бўлишининг сабаби шундаки, суюқликлар билан аморф жисмлар бир-биридан молекулаларининг ҳаракатчанлик даражаси билангина фарқ қилади, аморф жисмлар, юқорида айтиб ўтганимиздек, қаттиқ совитилган суюқликлардир.

Эриш температураси босимга боғлиқ. Шундай қилиб, модданинг кристалл ҳолатдан суюқ ҳолатга ўтиш процесси босим ва температуранинг қийматлари билан характерланадиган мутлақо тайинли бир шароитларда юз беради. Бу қийматлар тўпламига (p, T) диаграммада эгри чизиқ тўғри келади, бу эгри чизиқ эриш эгри чизиғи деб аталади. Эриш эгри чизиғи жуда тикроқ кетади. Музнинг эриш температурасини, масалан, 1° ўзгартириш учун босимни 132 *ат* миқдорида ўзгартириш керак.

Эриш эгри чизиғининг нуқталари кристалл ва суюқ фазалар бир-бири билан мувозанатда бўладиган шароитларни белгилайди. Суюқлик ва кристалл массалари ўртасидаги муносабат ҳар қандай бўлган ҳолда, яъни системанинг ҳажми $mV'_к$ дан $mV'_с$ ғача бўлган қийматлар қабул қилинадиган ҳолда бундай мувозанат юз бериши мумкин, бу ердаги m—система массаси, $V'_к$ ва $V'_с$ — қаттиқ ва суюқ фазаларнинг солиштирма ҳажмлари. Шунинг учун эриш эгри чизиғининг ҳар бир нуқтасига (p, V) диаграммада горизонтал тўғри чизиқ кесмаси мос келади (329- расм). Бу кесманинг нуқталари билан ифодаланадиган ҳолатларда модданинг температураси бир хил бўлгани учун, 329- расмдаги $1 — 2$ тўғри чизиқ кесмаси изотерманинг модданинг икки фазали ҳолатига мос қисмидан иборат (272- расмдаги изотермаларнинг горизонтал қисмларига таққосланг).



329- расм.

Эришга тескари бўлган кристалланиш процесси қуйидагича юз беради. Суюқликни унинг қаттиқ ва суюқ фазалари маълум бир босим шароитида мувозанатда бўладиган температурага қадар (яъни эриш бошланадиган температурага қадар) совитганда айни вақтда кристаллар ўса бошлайди. Бу кристаллар кристалланиш куртаклари ёки марказлари деб аталадиган марказлар атрофида ҳосил бўлади. Айрим кристаллчалар борган сари ўса бориб, оқибатда бир-бирига бирикиб поликристалик қаттиқ жисм ҳосил қилади.

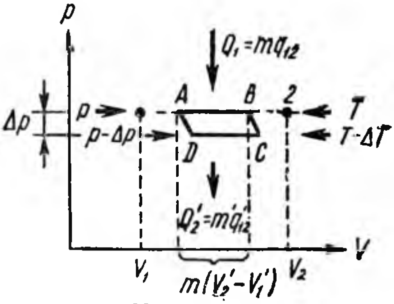
Суюқликда муаллақ ҳолда юрган қаттиқ зарралар кристалланиш марказлари бўлади. Бундай зарралардан яхшилаб тозаланган суюқликни кристалланиш температурасидан пастроқ температурага қадар совитиш мумкинки, бунда кристалланиш ҳали бошланмаган бўлади. Суюқликнинг ўта совитилган бундай ҳолати метастабил бўлади. Бундай суюқликнинг мувозанат температурасида турган суюқлик ва кристалларга ажралиб кетиши учун унга бирор чанг заррасининг тушиши кифоя. Лекин баъзи ҳолларда ўта совитилган суюқлик молекулаларининг ҳаракатчанлиги арзимаган даражада бўлиб, метастабил ҳолат анча узоқ вақт давомида сақланиб қолади. Бундай ҳолларда суюқликнинг оқувчанлиги жуда кам бўлиб, у аморф қаттиқ жисмдан иборат бўлади.

Модда эриш вақтида қанча иссиқлик ютган бўлса, кристалланиш процесси а худди ўшанча миқдорда иссиқлик ажралиб чиқади.

150- §. Клапейрон — Клаузиус тенгламаси

Бундан олдинги параграфларда кўриб ўтдикки, модданинг ҳар қандай икки фазаси маълум бир босим шароитидагина мувозанатда бўлади. Бу босимнинг катталиги температурага боғлиқ бўлади. Бу боғланишнинг умумий кўринишини термодинамиканинг иккинчи асосидан фойдаланиб топиш мумкин. Бунинг учун бир модданинг мувозанатда турган иккита фазасидан иборат бўлган системага оид Карно циклини кўриб чиқамиз.

Икки фазали системага оид Карно цикли (p, V) диаграммада 330- расмда кўрсатилган шаклда бўлади (иситкич билан совиткичнинг температуралари бир-биридан жуда кичик ΔT миқдорга фарқ қилади, деб фараз қилинади). Температураси T бўлган изотерманинг горизонтал қисмининг четки нуқталари 1 ва 2 рақамлари билан белгиланган. 1 ва 2 ҳолатлар бир фазали ҳолатлардир. $1-2$ кесманинг оралиқдаги барча нуқталари икки фазали ҳолатларни тасвирлайди, бу ҳолатлар бир-биридан модда массасининг биринчи ва иккинчи фаза ўртасида қайта тақсимланиши билан фарқ қилади.



330- расм.

$A \to B$ изотермик процессда модданинг бирор m массаси бир фазадан бошқа фазага айланади. Бунда модданинг ҳажми $m(V_2' - V_1')$ га тенг бўлган орттирма олади, бу ерда V_1' ва V_2' — биринчи ва иккинчи фазанинг солиштирма ҳажмлари. Модданинг бир фазадан бошқа фазага бундай айланиши учун моддага $Q_1 = mq_{12}$ иссиқлик миқдори бериш керак, бу ерда q_{12}—модданинг T температура шароитида 1 ҳолатдан 2 ҳолатга ўтишида ютадиган солиштирма иссиқлиги, Q_1 иссиқлик системанинг цикл давомида иситкичдан оладиган иссиқликдир. Иссиқлик совиткичга $C \to D$ изотермик процесс давомида берилади. Берилган иссиқлик миқдори $Q'_2 = m' q'_{12}$, бу ерда q'_{12} — температура $T - \Delta T$ бўлган шароитда $1 - 2$ ўтиш процессидаги иссиқлик, m' эса $C \to D$ процесс давомида бир фазадан бошқа фазага айланган модда миқдори. Модданинг бу миқдори m дан бир оз фарқ қилади, чунки модданинг бирор массаси бир фазадан бошқа фазага адиабатик процесслар давомида айланади.

Цикл давомида бажариладиган A иш сон жиҳатдан циклнинг юзига тенг. Шунинг учун ишни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$A \approx m(V_2' - V_1')\,\Delta p\,. \tag{150.1}$$

(150.1) тенглик тақрибий тенгликдир. Δp нолга интиладиган (бунинг учун ΔT нолга интиладиган бўлиши лозим) лимитда (150.1) ифода тўғри тенгликка айланади.

Таърифга биноан, циклнинг ф. и. к. қуйидагига тенг:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} \approx \frac{m(V_2' - V_1')\,\Delta p}{mq_{12}} = \frac{V_2 - V_1'}{q_{12}}\,\Delta p\,. \tag{150.2}$$

Шу билан бирга, (129.7) га асосан

$$\eta = \frac{\Delta T}{T}. \qquad (150.3)$$

η нинг (150.2) ва (150.3) ифодаларини бир-бирига тенглаштирамиз:

$$\frac{V_2' - V_1'}{q_{12}} \Delta p \approx \frac{\Delta T}{T}.$$

Бундан

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} \approx \frac{q_{12}}{T(V_2' - V_1')}. \qquad (150.4)$$

(150.4) тақрибий тенглик ΔT нолга интилган лимитда тўғри тенгликка айланади:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_{12}}{T(V_2' - V_1')}. \qquad (150.5)$$

(150.5) муносабат Клапейрон—Клаузиус формуласи (ёки тенгламаси) деб аталади. Клапейрон—Клаузиус тенгламаси мувозанат ҳолатдаги босимдан температура бўйича олинган ҳосила билан ўтиш процессининг иссиқлиги, температура ва мувозанатда турган фазалар солиштирма ҳажмларининг айирмаси орасидаги боғланишни аниқлайди.

(150.5) тенгламага асосан, $\frac{dp}{dT}$ ҳосиланинг ишораси иссиқлик ютилганда юз берадиган фазавий ўтиш процессида ҳажмнинг қандай ўзгаришига (ортишига ёки камайишига) боғлиқ. Суюқлик ёки қаттиқ жисм буғланганда ҳамиша ҳажм ортади, шу сабабдан буғланиш эгри чизиғи учун, шунингдек, сублимация эгри чизиғи учун $\frac{dp}{dT}$ ҳосила фақат мусбат бўлади: температура кўтарилганда мувозанат ҳолатдаги босим ортади.

Одатда эришда ҳажм ортади, шунинг учун $\frac{dp}{dT} > 0$:босим ортганда эриш температураси кўтарилади. Лекин баъзи моддаларда (булар жумласига сув ҳам киради) суюқ фазанинг ҳажми қаттиқ фазанинг ҳажмидан кичик ($V_2' < V_1'$) бўлади[1]. Бу ҳолда $\frac{dp}{dT} < 0$, яъни босим ортганда эриш температураси пасаяди. Музни қаттиқ сиқиб, унинг температурасини 0°C дан оширмасдан ҳам эритиб юбориш мумкин.

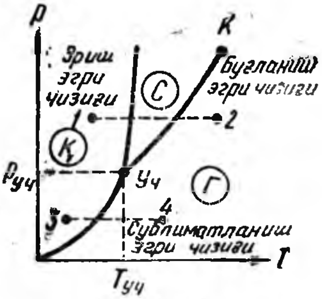
Бир кристалл ҳолатдан бошқасига ўтиш процессининг температураси босим ортганда кўтариладиган ёки пасаядиган бўлиши қаттиқ фазалардан қайси бирининг солиштирма ҳажми ортиқ бўлишига боғлиқ.

---

[1] Маълумки, сув музлаганда ҳажми ортади. Шу сабабли музнинг зичлиги сувникидан кичик бўлади.

151-§. Учланган нуқта. Ҳолат диаграммаси

Суюқлик ва у билан мувозанат ҳолатида бўлган буғ тарзидаги моддани олиб, унинг ҳажмини ўзгартирмай туриб ундан иссиқлик ола бошлаймиз. Бу процесс давомида модданинг температураси пасаяди ва шунга яраша босим ҳам камаяди. Шунинг учун модданинг ҳолатини (p, T) диаграммада тасвирловчи нуқта буғланиш эгри чизиғи бўйлаб (331-расм) пастга кўчади. Бу нуқта модданинг кристалланиш температурасига (бу температура мувозанат ҳолатидаги босимга тўғри келади) эришилгунча пастга кўчаверади. Бу температурани $T_{уч}$ билан белгилаймиз. Кристалланиш процесси давом этиб турган бутун вақт ичида температура ва босим ўзгармай туради. Бунда чиқадиган иссиқлик кристалланишда чиқадиган иссиқликдир.

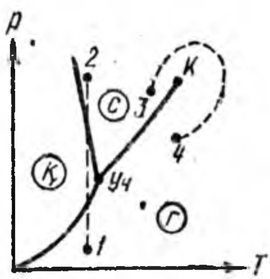


331-расм.

$T_{уч}$ температура билан унга мос мувозанат ҳолатидаги $p_{уч}$ босим температура ва босимнинг модданинг учта фазаси: қаттиқ, суюқ ва газ фазаси мувозанатда бўладиган ягона қийматларидир. Бунга (p, T) диаграммада мос келувчи нуқта **учланган нуқта** деб аталади. Шундай қилиб, учланган нуқта модданинг учала фазаси бир вақтда мувозанатда бўладиган шароитларни аниқлайди.

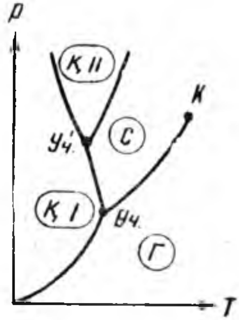
Кристалланиш процесси тамом бўлгач, қаттиқ ва газ фазалар мувозанатда бўлади. Агар моддадан иссиқлик олиш давом этаверса, у ҳолда температура яна пасая бошлайди. Кристалл фаза билан мувозанатда бўлган буғнинг босими шунга яраша камаяди. Модданинг ҳолатини тасвирловчи нуқта сублимация эгри чизиғи бўйлаб пастга кўчади.

Учланган нуқтага оид температурада модда $p_{уч}$ га тенг босим шароитида эрийди. Босим бошқача бўлганда эриш температураси бошқа бўлади. Босим билан эриш температураси орасидаги боғланиш учланган нуқтада бошланувчи эриш эгри чизиғи билан тасвирланади. Шундай қилиб, учланган нуқта иккита фазанинг, чунончи қаттиқ ва суюқ, суюқ ва газ, ниҳоят, қаттиқ ва газ фазаларнинг мувозанат шароитларини аниқловчи учта эгри чизиқнинг кесишиш жойида ётар экан. Эриш эгри чизиғи қаттиқ ва суюқ фазаларнинг солиштирма ҳажмлари орасидаги муносабатга қараб, 331-расмда кўрсатилганидек $\left(\frac{dp}{dT} > 0\right)$ ёки 332-расмда кўрсатилгандек $\left(\frac{dp}{dT} < 0\right)$ бўлади.



332-расм.

Эриш, буғланиш ва сублимация эгри чизиқлари координаталар текислигини учта соҳага бўлади. Сублимация ва эриш эгри чизиқларидан чап томонда қаттиқ фаза соҳаси ётади, эриш ва буғланиш эгри чизиқлари орасида суюқ ҳолатлар соҳаси ётади ва ниҳоят, буғланиш ва сублимация эгри чизиқларидан ўнг томонда модданинг газ ҳолатлари соҳаси ётади. Бу соҳалардан бирида олинган ҳар қандай нуқта модданинг тегишли бир фазали ҳолатини тасвирлайди (ҳамиша мувозанатли ҳолатлар, яъни ташқи шароитлар ўзгармаганда модда истаганча узоқ вақт бўла оладиган ҳолатлар назарда тутилади). Соҳаларни бир-биридан ажратиб турган эгри чизиқлардан бирида олинган ҳар қандай нуқта модданинг тегишли икки фазасининг мувозанат ҳолатини тасвирлайди. Учланган нуқта модданинг учала фазасининг мувозанат ҳолатини тасвирлайди.



333- расм.

Шундай қилиб, диаграммадаги ҳар бир нуқта модданинг маълум бир мувозанат ҳолатини тасвирлайди. Шунинг учун бу диаграмма **ҳолат диаграммаси** деб аталади.

Кристалл модифакациялари бир нечта бўлган модда учун ҳолат диаграммаси анча мураккаб бўлади. Турли хил кристалл модификациялари сони иккига тенг бўлган ҳолга оид диаграмма 333- расмда тасвирланган. Бу ҳолда учланган нуқта иккита бўлади. Расмдаги *Уч* нуқтада суюқлик, газ ва модданинг биринчи кристалл модификацияси мувозанатда бўлади, *Уч'* нуқтада эса суюқлик ва модданинг иккала кристалл модификацияси мувозанатда бўлади.

Аниқ бир модданинг ҳолат диаграммаси эксперимент маълумотларига қараб тузилади. Модданинг ҳолат диаграммаси маълум бўлса, ҳар хил шароитларда (p ва T нинг турли хил қийматларида) модда қандай ҳолатда бўлишини, шунингдек турли хил процессларда модда бир ҳолатдан қандай бошқа ҳолатга айланишини олдиндан айтиш мумкин. Буни қуйидаги мисоллар устида тушунтириб ўтамиз.

Агар *1* нуқта (331- расмга қ.) мос келадиган ҳолатда модда олиб уни изобарик равишда иситсак, унда модда *1 — 2* пунктир тўғри чизиқ билан кўрсатилган ҳолатлардан, яъни кристалл—суюқлик—газ ҳолатлардан бирин-кетин ўтади. Агар ўша моддани *3* нуқта билан белгиланган ҳолатда олиб, уни ҳам изобарик равишда иситсак, ҳолатлар кетма-кетлиги бошқача бўлади (*3— 4* пунктир тўғри чизиқ): кристаллар суюқликка айланмасдан, бевосита газга айланиб кетади.

Ҳолат диаграммасидан шу нарса кўринадики, суюқ фаза учланган нуқтанинг босимидан кичик бўлмаган босимлар шароитидагина мувозанат ҳолатида бўла олади (бу фикр 333- расмдаги *II* қаттиқ фазага ҳам тегишли). $p_{уч}$ дан кичик босимларда суюқлик ўта совиган ҳолатда бўлади.

Одатдаги кўпчилик моддаларга тегишли учланган нуқта атмосфера босимидан анча пастда ётади, шунинг учун бу моддалар қатгиқ ҳолатдан газ ҳолатга оралиқдаги суюқ ҳолат орқали ўтади. Масалан, сувнинг учланган нуқтасига 4,58 *мм* сим. уст. босим ва 0,0075°С температура мос келади.

Карбонат ангидриднинг учланган нуқтасига 5,11 *ат* босим ва — 56,6°С температура мос келади. Шунинг учун карбонат ангидриди атмосфера босими шароитида фақат қаттиқ ҳолатда ёки газ ҳолатида бўла олади. Қаттиқ карбонат ангидрид (қуруқ муз) бевосита газга айланади. Карбонат ангидриднинг атмосфера босими шароитидаги сублимация температураси — 78°С га тенг.

Агар кристалларнинг солиштирма ҳажми суюқ фазанинг солиштирма ҳажмидан ортиқ бўлса, баъзи процессларда модданинг характери жуда ҳам ўзига хос бўлиши мумкин. Масалан, шундай моддани *1* нуқта билан тасвирланган ҳолатда (332- расмга қ.) олиб, уни изотермик равишда сиқамиз. Бундай сиқишда босим ортади ва процесс диаграммада вертикал тўғри чизиқ билан (расмдаги *1 — 2* пунктир тўғри чизиқ) тасвирланади. 332- расмдан кўринадики, босим ошганда модда қуйидаги ҳолатларда бўлиб ўтади: газ—кристаллар—суюқ ҳолат. Модда ҳолатининг бундай кетма-кетлиги учланган нуқта температурасидан кичик температураларда юз бериши равшан.

Пировардида ҳолат диаграммасининг яна бир хусусиятини айтиб ўтамиз. Буғланиш эгри чизиғи критик K нуқтада тугайди. Шу сабабли суюқ ҳолатлар соҳасидан газ ҳолатлар соҳасига критик нуқтани айланиб, буғланиш эгри чизиғи билан кесишмасдан ўтиш мумкин (332- расмда пунктир билан кўрсатилган *3 — 4* ўтиш процесси). Бундай ўтиш процессининг (p, V) диаграммада қандай тасвирланиши 276- расмда кўрсатилган. Бу ҳолда модданинг суюқ ҳолатдан газ ҳолатга (ва тескари тартибда) ўтиш процесси бир фазали ҳолатлар кетма-кетлиги орқали узлуксиз равишда юз беради.

Суюқ ва газ ҳолатларнинг бир-бирига узлуксиз ўтишининг сабаби шундаки, улар бир-биридан сифат жиҳатидан эмас, балки миқдор жиҳатидан фарқ қилади, жумладан бу ҳолатларнинг иккаласида ҳам анизотропия йўқ. Кристалл ҳолатнинг суюқ ёки газ ҳолатга узлуксиз ўтиши мумкин эмас, чунки кристалл ҳолатнинг ўзига хос томони анизотропиядир. Анизотропияга эга бўлган ҳолатдан анизотропияси бўлмаган ҳолатга ўтиш процесси сакраб юз беради — анизотропия қисман бўлиши мумкин эмас, у ё бўлади ё бўлмайди, учинчи имконият бўлиши мумкин эмас. Шу сабабли сублимация эгри чизиғи ва эриш эгри чизиғи, буғланиш эгри чизиғи критик нуқтада узилиб қолгани каби, узилиб қололмайди. Сублимация эгри чизиғи $p = 0$ ва $T = 0$ нуқтага келади, эриш эгри чизиғи чексизликка кетади.

Худди шунингдек, бир кристалл модификациядан бошқасига ўтиш процесси ҳам узлуксиз юз бериши мумкин эмас. Модданинг турли хил кристалл модификациялари бир-биридан ўзларига хос симметрия элементлари билан фарқ қилади. Бирор симметрия элементи бор бўлиши ёки бутунлай бўлмаслиги сабабли бир қаттиқ фазадан бошқа қаттиқ фазага ўтиш процесси фақат сакраб юз беради. Шунинг учун иккита қаттиқ фазанинг мувозанатда бўлиш эгри чизиғи, эриш эгри чизиғи каби, чексизликка кетади.

МУНДАРИЖА

3- ҚИСМ

МОЛЕКУЛЯР ФИЗИКА ВА ТЕРМОДИНАМИКА