МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АБУ РАЙХАНА БЕРУНИ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР ТВЕРДОГО ТЕЛА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Ташкент-2014

Теоретическая механика. Определение реакций опор твердого тела. Методические указания для выполнения расчетно-графической работы. Сост.: Шаков В.М.,Курбанова З.М. -Ташкент: ТашГТУ, 2014.-36 с.

В методических указаниях предлагаются многовариантные задачи по теме: “Определение реакций опор твердого тела”. Они предназначены для студентов технических вузов и должны способствовать приобретению навыков в самостоятельном решении задач по теоретической механике.

Печатаются по решению научно-методического совета ТашГТУ.

Рецензенты:

доц.Хайдаров И.К. (НУУз)
доц. Файзуллаева Ф.Д. (ТашГТУ)

Введение

Теоретическая механика как одна из важнейших физико-математических дисциплин играет существенную роль в подготовке инженеров любых специальностей. На основных законах и принципах теоретической механики базируются многие общеинженерные дисциплины такие, как сопротивление материалов, строительная механика, гидравлика, теория механизмов и машин, детали машин и другие.

В различных курсах по машиностроительным, механическим, строительным, приборостроительным и многим другим специальностям также широко используются положения теоретической механики.

На основании теорем и принципов теоретической механики решаются многие инженерные задачи и осуществляется проектирование новых машин, конструкций и сооружений. Огромное влияние теоретической механики оказала и продолжает оказывать на развитие других физических и теоретических дисциплин: автоматики, телемеханики, кибернетики и т.д.

Теоретическая механика – это наука, в которой изучаются механические движения вещественных форм материальных объектов. Теоретическую механику называют еще классической механикой или механикой Ньютона.

Механическое движение – это перемещение материальных объектов в пространстве с течением времени без рассмотрения физических свойств этих объектов и их изменения в процессе движения.

Теоретическая механика изучает только вещественные формы материальных объектов. Элементарные частицы и различные поля не являются предметом изучения в теоретической механике. Движение материальных объектов происходит в пространстве и во времени. Пространство является трехмерным пространством Эвклида.

Теоретическая механика делится на три части: статику, кинематику и динамику. Главной частью является динамика. Изучение теоретической механики обычно начинается со статики.

Статика

Статика - это раздел теоретической механики, в котором излагается общее учение о силах и изучаются условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил. Под равновесием тела в статике понимается состояние его покоя по отношению к другим телам, принимаемым за неподвижные.

Основные понятия и определения статики

Материальным телом называется некоторое количество вещества, которое заполняет какой-нибудь объем в пространстве. Возможны случаи, когда тело в тех или иных направлениях имеет весьма малые размеры по сравнению с размерами в других направлениях.

Материальной точкой называется простейшая модель материального тела любой формы, размеры которого достаточно малы, и которое можно принять за геометрическую точку, имеющую определенную массу.

Механическим воздействием одного тела на другое называется такое воздействие, при котором пренебрегают изменениями в химической структуре тела и его физическом состоянии. Если тело испытывает механическое воздействие со стороны других материальных тел, то оно может изменять свое движение в пространстве или оставаться в покое. Механическое воздействие может происходить как при соприкосновении тел, так и на расстоянии (притяжение, отталкивание).

Механической системой называется любая совокупность материальных точек.

Абсолютно твердым телом(или**неизменяемой механической системой**) называется материальное тело, геометрическая форма которого и размеры не изменяются ни при каких механических воздействиях со стороны других тел, а расстояние между любыми двумя его точками остается постоянным.

Сила - это основная количественная мера механического воздействия одного тела на другое, которая характеризует его интенсивность и направление.

Природа силы может быть различной. Это могут быть гравитационные, электромагнитные, упругие силы или силы давления. Теоретическая механика не интересуется природой сил. Сила определяется точкой приложения, числовым значением и направлением действия, т.е. **является векторной величиной**.

Модуль силы находят путем ее сравнения с силой, принятой за единицу. Для статического измерения силы служат приборы, называемые **динамометрами**.

Силу как величину векторную обозначают какой-либо буквой со знаком вектора (например, $\overline{F}$ или $\overline{P}$). Для выражения числового значения силы или ее модуля используется знак модуля от вектора или те же буквы, но без знака вектора (например, $|\overline{F}|$ и $|\overline{P}|$ или F и P).

Системой сил называется совокупность сил, которые действуют на рассматриваемое тело или (в общем случае) на точки механической системы.

Если линии действия всех сил лежат в одной плоскости, то система сил называется **плоской**, а если эти линии действия не лежат в одной плоскости, - то система сил называется **пространственной**.

Системой сил эквивалентной нулю(или **уравновешенной системой сил**) называется такая система сил, действие которой на твердое тело или материальную точку, находящиеся в покое или движущиеся по инерции, не приводит к изменению состояния покоя или движения по инерции этого тела или материальной точки.

$$\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n\right) \Leftrightarrow 0$$

Две системы сил называются эквивалентными,если их действие по отдельности на одно и то же твердое тело или материальную точку одинаково при прочих равных условиях.

$$\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n\right) \Leftrightarrow \left(\overline{F}'_1, \overline{F}'_2, \ldots, \overline{F}'_k\right)$$

Равнодействующей силойрассматриваемой системы сил называется сила, действие которой на твердое тело или материальную точкуэквивалентно действию этой системы сил. Равнодействующую силу обозначают обычно $\overline{R}$

$$\left(\overline{R}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n\right)$$

Уравновешивающей силойрассматриваемой системы сил называется сила, добавление которой к заданной системе силдает новую систему, эквивалентную нулю.Уравновешивающая сила равна по модулю равнодействующей и противоположна ей по направлению.

Сила, приложенная к телу в одной его точке, называется **сосредоточенной**. Силы, действующие на все точки данного объема, данной части поверхности тела или данной части кривой, называются **распределенными**.

Понятие о сосредоточенной силе является условным. Силы, которые в механике рассматриваются как сосредоточенные, представляют собой равнодействующие некоторых систем распределенных сил.

АКСИОМЫ СТАТИКИ

А-1 (аксиома о равновесии двух сил). Если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по величине и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны(рис.1).

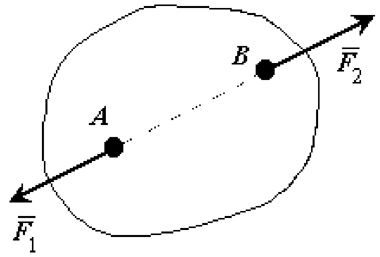


Рис.1

А-2 (Аксиома о добавлении (отбрасывании) уравновешенной системы сил).

Если на твердое тело действует система сил, то к ней можно добавить (отбросить) уравновешенную систему сил. Полученная после добавления (отбрасывания) новая система сил эквивалентна первоначальной.

А-3 (Аксиома параллелограмма сил)

Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и равную по величине и направлению диагонали параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах(рис.2).

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\left(\overline{F_1}, \overline{F_2}\right)}$$

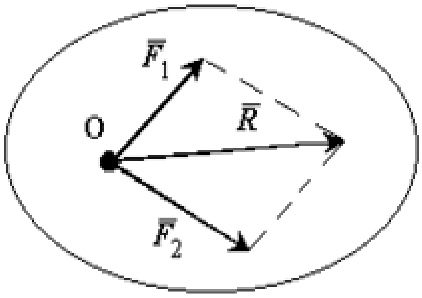


Рис.2

Эта аксиома допускает и обратное утверждение:

Силу можно разложить бесчисленным множеством способов на две силы, приложенные в любой точке линии действия данной силы.

А-4 (Аксиома о равенстве действия и противодействия)

При всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же по величине, но противоположное по направлению противодействие.

Если к данному телу приложена сила воздействия $\overline{F}$ от другого тела, то от данного тела к другому телу будет приложена сила $\overline{F'}$, равная и прямо противоположная силе $\overline{F}$. Силы приложены в одной геометрической точке, но к разным телам (рис.3).

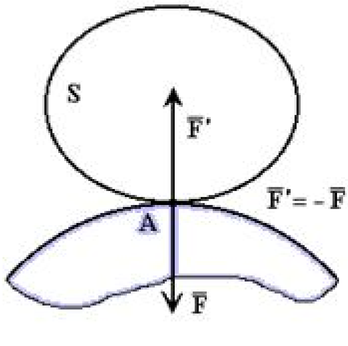


Рис.3

Свободным твердым теломназывается тело, имеющее возможность получать любое движение из данного положения, для чего необходимо приложить соответствующую силу.

При решении большинства задач механики приходится иметь дело с телами **несвободными**, т.е. лишенными возможности перемещаться в направлении действия приложенных к ним активных сил. Тела, ограничивающие движение рассматриваемого тела, называются **связями**. Сила, с которой связь действует на тело, препятствуя его перемещению в том или ином направлении, называется **силой реакции этой связи** или просто **реакцией связи**.

А-5 (Аксиома о связях)

Эффект от действия связей такой же, как от действия определенных, дополнительных сил, которые могут быть приложены к свободному телу вместо связей.

Аксиому о связях называют также **принципом освобождаемости от связей.** Согласно этой аксиоме, не изменяя равновесия тела, каждую связь можно отбросить, заменив ее реакцией связи.

Силы, которые могут сообщать свободному телу движение, называются **активными силами**. Приложив к телу, кроме активных сил, реакции связей, можно рассматривать тело как свободное. Активные силы и силы реакции называются внешними силами.

Пусть, например, на гладкой неподвижной горизонтальной плоскости покоится шар. Плоскость, ограничивающая движение шара, является для него связью. Если мысленно освободить шар от связи, то для удержания его в покое к нему в точке касания с плоскостью нужно приложить силу $\overline{N}$, равную по модулю весу шара $\overline{P}$ и противоположную ему по направлению. Сила $\overline{N}$ и есть реакция плоскости (реакция связи). Шар, освобожденный от связи, будет свободным телом, на которое действует задаваемая (активная) сила $\overline{P}$ и реакция плоскости $\overline{N}$ (рис.4).

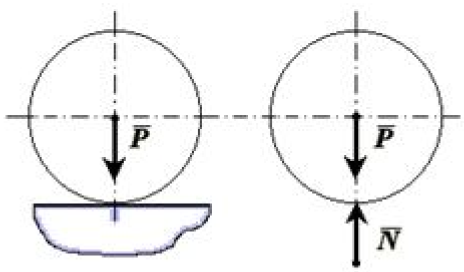


Рис.4

А-6 (Аксиома отвердевания)

Равновесие механической системы не нарушается от наложения новых связей; в частности, равновесие механической системы не нарушится, если все части системы связать между собой неизменно, жестко.

Одна из основных аксиом статики, аксиома связей, гласит, что несвободное твердое тело можно формально представить свободным, если мысленно отбросить механические связи и их действие на тело заменить реакциями связей.Тогда на тело будут действовать активные силы и реакции связей - это и будет расчетной схемой для дальнейшего решения задачи.

Обычно в статике при заданных активных силах, действующих на тело, вычисляют реакции связей; поэтому нужно знать, как правильно показать реакции связей.

ТИПЫ СВЯЗЕЙ И ИХ РЕАКЦИИ

а) Свободное опирание

При свободном опирании реакция $\overline{N}$направляется перпендикулярно касательной, проведенной через точку А контакта тела *1* с опорной поверхностью 2 (рис.5).

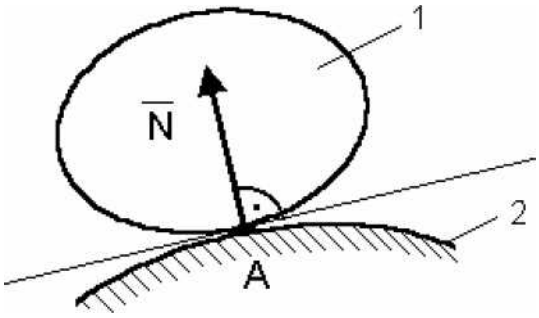


Рис.5

б) Гибкая связь (нить, канат, трос, веревка, лента, цепь, ремень)

Гибкая связь работает только на растяжение. Реакция в нити направляется всегда вдоль нити от тела *1* к сечению AA_1(рис.6).

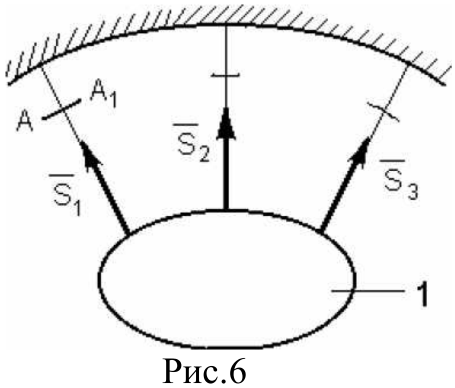


Рис.6

в) Тонкий однородный стержень

Тонкий однородный стержень работает как на растяжение, так и на сжатие.

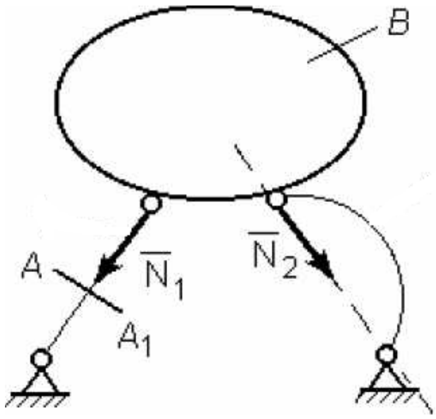


Рис.7

Концы стержней крепятся при помощи цилиндрических или сферических шарниров. Реакция в стержне направляется вдоль стержня от тела B к сечению AA_1.Если задан криволинейный стержень , то его мысленно заменяем прямолинейным и точно также направляем реакцию (рис.7).

г) Цилиндрический шарнир на плоскости (рис.8)

На рисунках показаны различные изображения неподвижного цилиндрического шарнира. В неподвижном цилиндрическом шарнире реакция будет одна R_A,номыне знаем ее направления, поэтому всегда показываем составляющие X_A, Y_A этой реакции, а направления их по оси выбираем произвольно.Направление реакции в подвижном цилиндрическом шарнире всегда известно, она направлена перпендикулярно опорной поверхности.

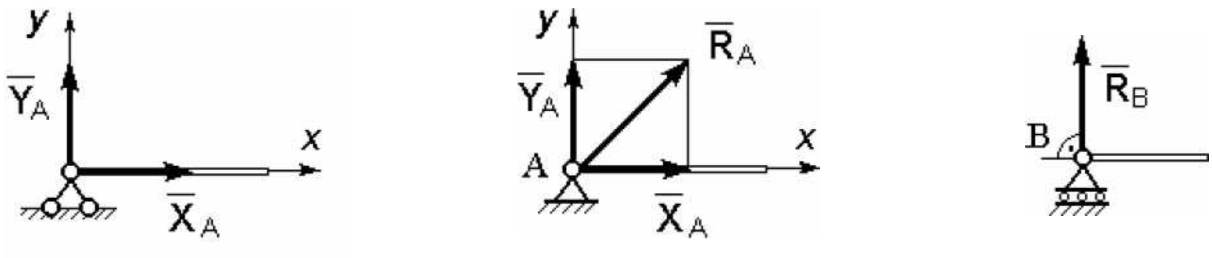


Рис.8

д) Цилиндрический шарнир (подшипник) в пространстве

Вал, который может вращаться вокруг своей продольной оси, имеет опоры - цилиндрические подшипники. На каждой опоре будет по две составляющих реакций -X_A;Z_A;X_B;Z_B(рис.9).

Рис.9

Вертикальный вал имеет две опоры. Опора А - цилиндрический подшипник, а опора В - упорный подшипник. В опоре А будет две составляющие реакции, в упорном подшипнике - три составляющие реакции

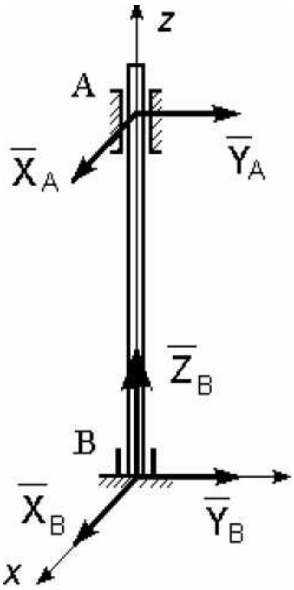


Рис.10

e) Сферический (шаровой) шарнир

Изображение такого шарнира показано на рис. 11.В сферическом шарнире будет три составляющих реакции - $X_{A,} Y_A, Z_A$

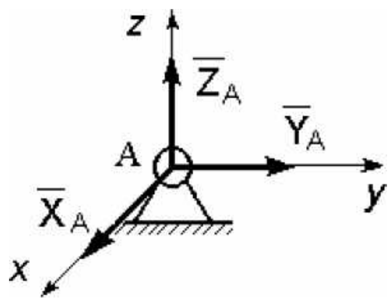


Рис.11

ж) Петля (рис.12)

Конструктивный вид петли показан на рисунке. Чисто теоретически полочку *1* можно снять с петель, перемещая ее вдоль оси Ay в любую сторону.В петле будут только две составляющие реакции X_A, Z_A.

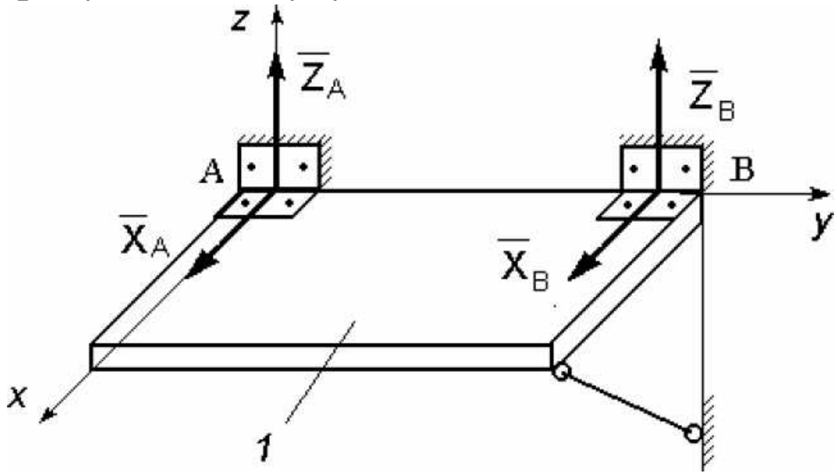


Рис.12

з) Жесткая заделка (рис.13)

Плоская жесткая заделка показана на рис. 13. В плоскости жесткой заделки будут две составляющие реакции X_A,$У_A$ и момент пары сил M_A, который препятствует повороту балки *1* относительно точки А.

Рис.13

Жесткая заделка в пространстве отнимает у тела 1 все шесть степеней свободы - три перемещения вдоль осей координат и три поворота относительно этих осей. В пространственной жесткой заделке будут три составляющие реакций X_a, Y_a, Z_aитри момента пар сил M_{Ax}, M_{Ay}, M_{Az}(рис.14).

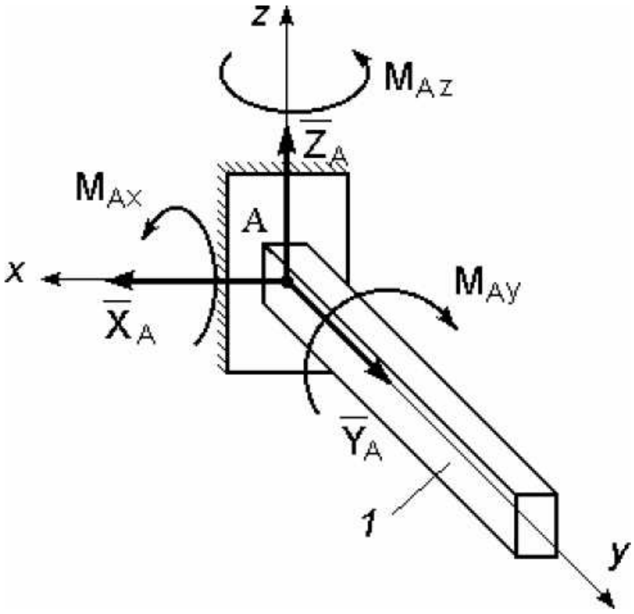


Рис.14

и) Другие виды связей (рис.15)

Ползун 1 на стержне 2 (скользящая заделка). Ползун 1 в направляющих (скользящая заделка)

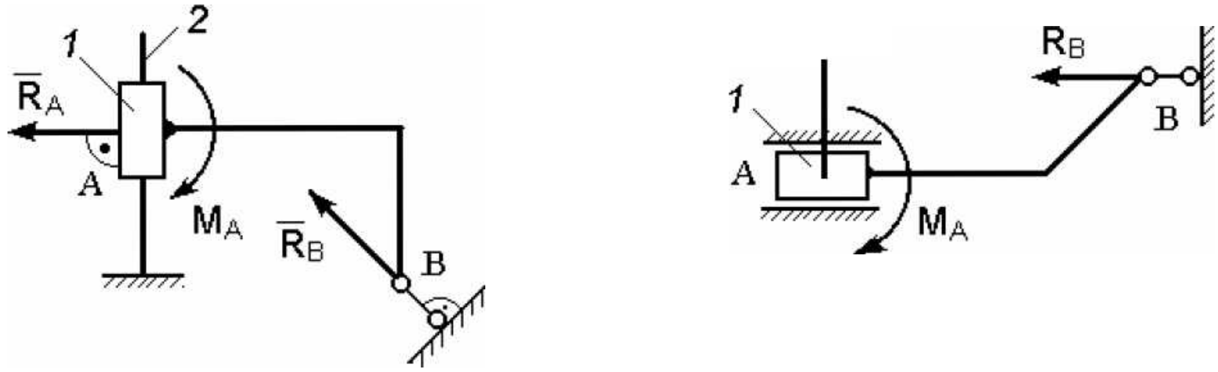


Рис.15

Проекция силы на ось

Прямая неограниченной длины, на которой задано определенное направление, называется осью. Возьмем (рис.16) вектор АВ = Fи ось х, лежащие в плоскости чертежа. Положительным направлением оси считаем направление слева направо. Опустим из началаА и конца В вектора перпендикуляры на ось.

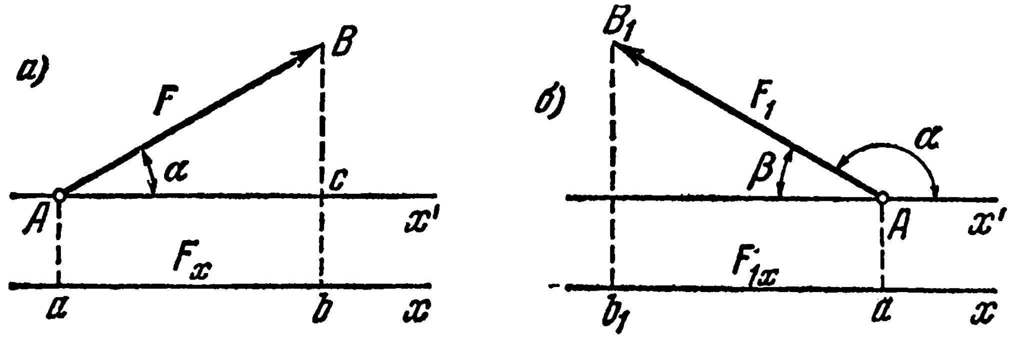


Рис.16

Основания перпендикуляров, опущенных из данных точек на ось, называются проекциями этих точек на данную ось.Длина отрезка оси, заключенного между проекциями на ось начала и конца данного вектора, с приписанным ей знаком плюс или минус называется проекцией этого вектора на данную ось.Проекцию вектора на ось будем обозначать той же буквой, которой обозначается вектор, указывая подстрочной маленькой буквой ось проекции. Так, например, проекция вектора Fна ось x обозначается F_x.

Проекция вектора на ось считается положительной, если перемещение от ее начала к концу совпадает с положительным направлением оси, и отрицательной —в противоположном случае. Из рис. 16 нетрудно видеть, что проекция вектора на ось получается положительной когда вектор составляет острый угол с направлением оси проекций (рис.16а), и отрицательной, когда вектор составляет с направлением оси проекций тупой угол(рис.16б). Следовательно, $F_x = Fcos\alpha,$ причем тот или другой знак в этой формуле берется согласно установленному правилу.Заметим, что *проекция вектора на ось представляет собой* не векторную, а *скалярную алгебраическую величину*, так как она вполне определяется знаком и численным значением соответствующего отрезка оси проекций.

Рассмотрим теперь два частных случая.

1) Вектор параллелен оси проекций, т. е. $\alpha = 0$ или $\alpha = 180°$ в зависимости от того, с каким, положительным или отрицательным, направлением оси проекций совпадает направление вектора. В этом случае $cos\alpha = \pm 1$ и $F_x = -Fcos\alpha$

Следовательно, *проекция вектора на параллельную ему* ось равна модулю вектора, взятому со знаком плюс или минус в зависимости от направления вектора.

2) Вектор перпендикулярен к оси проекций, т. е. α= 90°. В этом случае *cos*α= 0 и $F_x = 0$.Следовательно, проекция вектора на перпендикулярную к нему ось равна нулю.

Ниже на рис.17 приведены возможные случаи проецирования силы на ось:

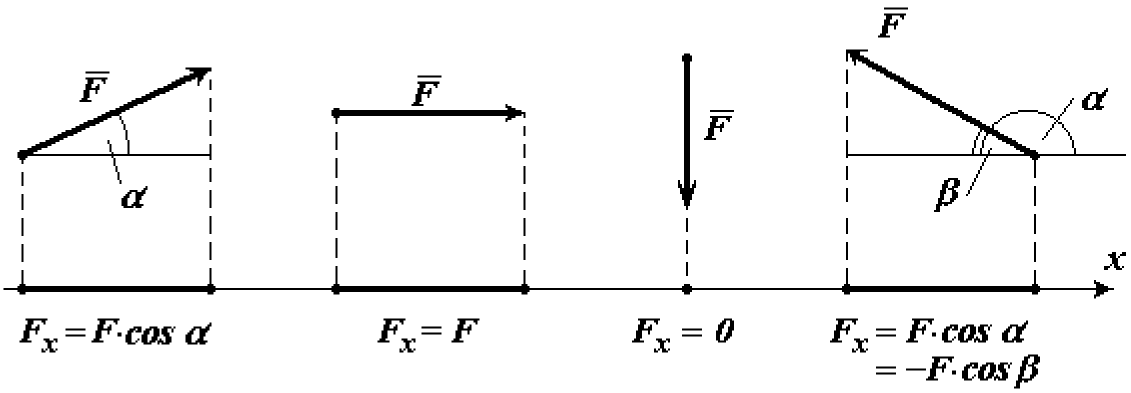


Рис.17

Момент силы относительно точки

Если под действием приложенной силы твердое тело может совершать вращение вокруг некоторой точки, то для того, чтобы охарактеризовать вращательный эффект силы, необходимо ввести новое понятие - момент силы относительно точки.

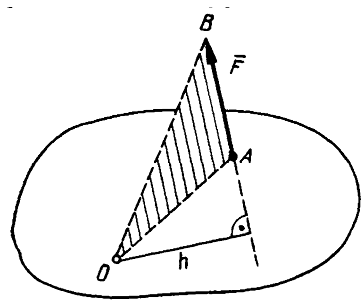


Рис.18

Рассмотрим силу $\overline{F}$, приложенную к телу в точке А. Из некоторой точки О опустим перпендикуляр на линию действия силы $\overline{F}$.

Плечом h силы $\overline{F}$ относительно точки **О** называется кратчайшее расстояние между этой точкой и линией действия силы (рис.18).

Момент силы относительно точки не меняется от переноса силы вдоль линии ее действия.

Момент силы равен нулю, если линия действия силы проходит через моментную точку.

Векторным моментом силы $\overline{F}$ относительно точки О называется вектор $\overline{M_0}(\overline{F})$, приложенный в этой точке и равный векторному произведению радиус-вектора $\bar{r}$, соединяющего эту точку с точкой приложения силы, на вектор силы. Момент силы $\overline{F}$ относительно точки О направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат сила и моментная точка (радиус-вектор), в том направлении откуда видно стремление силы вращать тело против движения часовой стрелки (рис.19).

$$\overline{M_0}(\overline{F}) = \bar{r} \times \overline{F}$$

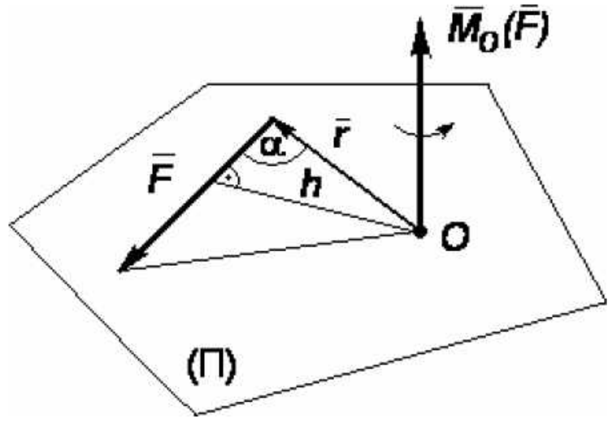


Рис.19

Если сила $\overline{F}$ задана своими проекциями $F_x \ F_y \ F_z$ на оси координат и даны координаты $x \ y \ z$ точки приложения этой силы, то момент силы относительно начала координат вычисляется следующим образом:

$$\overline{M_0}(\overline{F}) = \bar{r} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} \cdot \bar{i} + \begin{vmatrix} z & x \\ F_z & F_x \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \cdot \bar{k} =$$

$$= (y \cdot F_z - z \cdot F_y) \cdot \bar{i} + (z \cdot F_x - x \cdot F_z) \cdot \bar{j} + (x \cdot F_y - y \cdot F_x) \cdot \bar{k}$$

Проекции момента на оси координат равны:

$$M_{0x}(\overline{F}) = (y \cdot F_z - z \cdot F_y)$$

$$M_{0y}(\overline{F}) = (z \cdot F_x - x \cdot F_z)$$

$$M_{0z}(\overline{F}) = (x \cdot F_y - y \cdot F_x)$$

ПАРА СИЛ

Парой сил (парой) называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело.

Плоскостью действия пары сил называется плоскость, в которой расположены эти силы.

Плечом пары силd называется кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары.

Моментом пары сил называется вектор $\overline{M}$, модуль которого равен произведению модуля одной из сил пары на ее плечо и который направлен перпендикулярно плоскости действия сил пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки $M = F_1 \cdot d$ (рис.20)

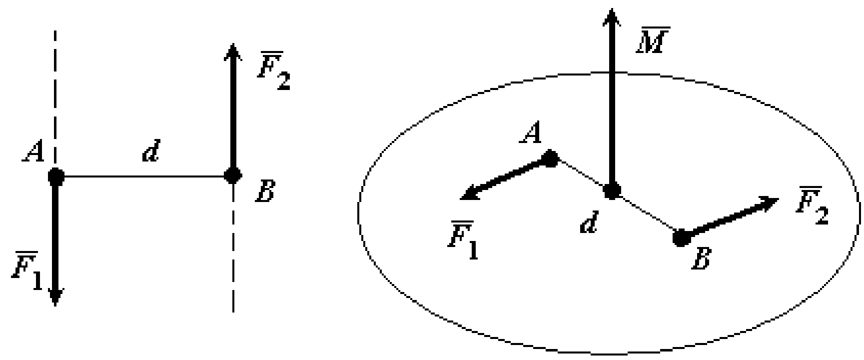


Рис.20

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

Условия равновесия плоской системы сил.

Для равновесия плоской системы сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из двух прямоугольных осей координат, расположенных в плоскости действия сил, были равны нулю и сумма моментов этих сил относительно любой точки, находящейся в плоскости действия сил также была равна нулю.

$$\sum F_{ix} = 0 \qquad \sum F_{iy} = 0 \qquad \sum M_0(\overline{F_i}) = 0$$

Решение задач с использованием условий равновесия плоской системы сил

В данном разделе рассматривается решение задач по силовому расчету конструкций, находящихся в равновесии под действием сил, расположенных в одной плоскости. Конструкцию из одного тела и связей, ограничивающих перемещение этого тела, называют простой.

Решение задач выполняется в указанной последовательности: выбирается объект равновесия; указываются все силы, действующие на объект; из условий равновесия определяются искомые величины. Кроме обычных сил, в плоских задачах статики на объект могут действовать различные виды распределенных нагрузок, а также моменты. Примером распределенной нагрузки является равномерно распределенная нагрузка, которая характеризуется интенсивностью q. Интенсивность – величина силы, действующей на единицу длины участка нагружения, ее размерность – Н/м или кН/м.

Равномерно распределенная нагрузка заменяется равнодействующей $Q = ql$, где l – длина участка нагружения , сила Q приложена к середине участка нагружения.

Для решения плоских задач статики обычно применяется аналитическое условие равновесия, которое представляет собой систему из трех уравнений: $\sum F_{ix} = 0 \qquad \sum F_{iy} = 0 \qquad \sum M_0(\overline{F_i}) = 0$

Примеры решения задач

Пример 1

Горизонтальная балка, шарнирно закрепленная в точке А, удерживается в равновесии при помощи шарнирно закрепленного невесомого стержня CB и груза P, подвешенного на нити, переброшенной через блок и закрепленной в точке B балки (рис.21). Найтиреакцию опоры A и усилие в стержне CD.

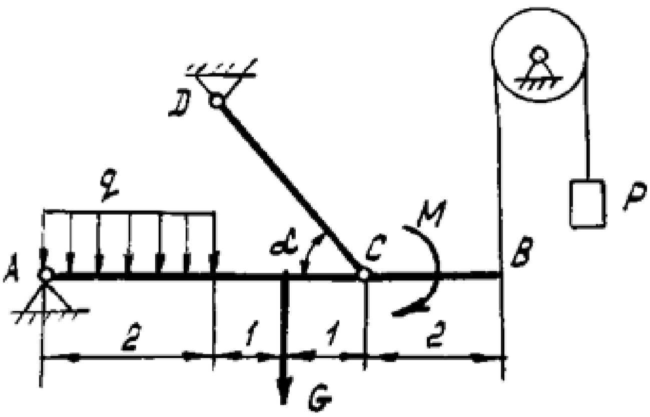


Рис.21

Дано:

G = 10 *кН; P= 5 кН;*

q = 0,5 *кН/м*; a = 30°, размеры - в *м.*

Определить реакцию опоры*A* и реакцию стержня CD.

Решение

Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к балке AB. Отбрасываем связи: шарнирно неподвижную опору*A,* стержень *CD* и нить. Действие связей на балку заменяем их реакциями . Так как направление реакции шарнирно неподвижной опоры*A* неизвестно, то определяем ее составляющие X_A и Y_A. Покажем также реакцию S_{CD} стержня и реакцию S нити, модуль которой равен P. Равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q заменяем сосредоточенной силой Q с модулем $Q = 2q = 2 \cdot 0,5 = 1$ *кН* и приложенной в центре тяжести эпюры этой нагрузки (рис.22)

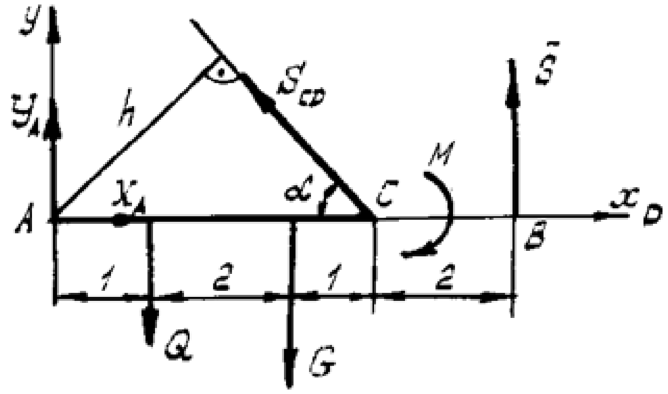


Рис.22

Для плоской системы сил, приложенных к балке, составляем три уравнения равновесия:

$$\sum_K F_{Kx} = 0;$$
$$\sum_K F_{Ky} = 0;$$
$$\sum_K m_A(\vec{F}_K) = 0;$$

$$X_A - S_{CD}\cos 30^o = 0; \qquad (1)$$

$$Y_A - Q - G + S_{CD}\cos 60^o + S = 0; \qquad (2)$$

$$-Q\cdot 1 - G\cdot 3 + S_{CD}\cdot 4\cdot \sin 30^o - M + S\cdot 6 = 0; \qquad (3)$$

Из уравнения (3)

$$S_{CD} = \frac{Q\cdot 1 + G\cdot 3 + M - S\cdot 6}{4\cdot \sin 30^o} = \frac{1\cdot 1 + 10\cdot 3 + 8 - 5\cdot 6}{4\cdot 0{,}5} = 4{,}5 кН.$$

Из уравнения (1)

$$X_A = S_{CD}\cos 30^o = 4{,}5\cdot 0{,}866 = 3{,}90 кН.$$

Из уравнения (2)

$$Y_A = Q + G - S_{CD}\cos 60^o - S = 1 + 10 - 4{,}5 \cdot 0{,}5 - 5 = 3{,}75кН.$$

находим значения искомых реакций; они получаются положительными, это указывает на то, что принятые направления этих сил совпадают с их действительными направлениями.

Пример 2

Горизонтальная балка и рама, длина которой равна l, у одного конца закреплена шарнирно, а у другого конца B подвешена к стене посредством тяги BC, угол наклона которой к балке AB равен α. По балке перемещается груз F, положение которого определяется переменным расстоянием X от шарнира A. Определить натяжение N тяги BC в зависимости от положения груза. Весом балки пренебречь .

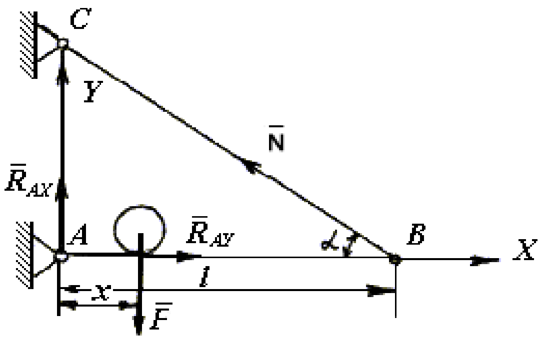


Рис.23

Решение. На балку наложены внешние связи - шарнир A и тяга BC. Заменим их реакциями. Реакцию шарнира A представим через его составляющие R_{AX} и R_{AY}, а реакцию тяги N направим вдоль линии BC (рис.23) .

В данной задаче одна неизвестная величина - реакция N. Составим уравнение моментов сил:

$$\sum M_A(\overline{F}_i) = 0;$$

$$-F \cdot x + N \cdot \sin\alpha \cdot \ell = 0.$$

Откуда имеем:

$$N = \frac{F \cdot x}{\ell \sin\alpha}.$$

Ответ: $$N = \frac{F \cdot x}{\ell \cdot \sin\alpha}$$

Пример 3

Определить реакции опор консольной балки AB весом $G = 15$ кН, находящейся под действием сил $F_1 = 40$ кН, $F_2 = 30$ кН и пары с моментом $|M| = 30$ кНм. Размеры балки: $AB = 9$ м; $AC = 1{,}5$ м; $CD = 6$ м; $CE = 2$ м (рис.24).

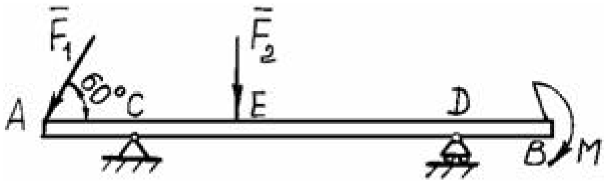


Рис.24

Решение. Решаем задачу согласно общей методике решения равновесных задач:

1. Рассматриваем равновесие плоской системы сил, действующих на балку AB.

2. Показываем действующие на балку заданные силы: F_1, F_2, пару сил с моментом M, а также вес балки G, приложенный в середине длины AB.

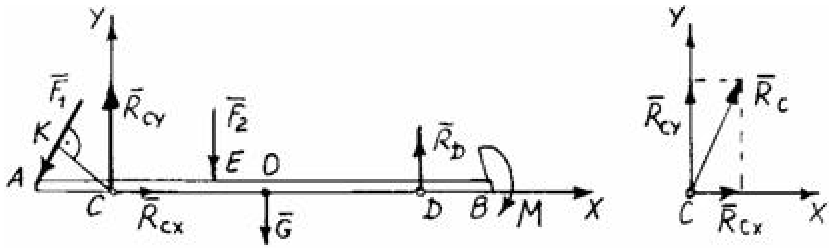


Рис.25

3. Мысленно отбрасываем связи балки: шарнирно-подвижную опору D и шарнирно-неподвижную опору C, заменяя их действие соответствующими реакциями (рис. 25). Направление реакции опоры C неизвестно, поэтому представим реакцию R_C в виде двух составляющих R_{CX} и R_{CY} по осям координат X и Y. Выбор направления осей обусловлен характером задачи, оси могут иметь любое направление. Реакция опоры R_D направлена вертикально.

4. Для плоской системы сил F_1, F_2, G, R_{CX}, R_{CY}, R_D и пары сил с моментом M составим систему из трех уравнений равновесия:

$$\sum M_O(\bar{F}_i) = 0; \qquad \sum F_{iX} = 0; \qquad \sum F_{iY} = 0.$$

При составлении первого уравнения за центр моментов O принимается, как правило, точка, относительно которой моменты наибольшего числа неизвестных сил равны нулю. Такой точкой в задаче является точка *C*.

Уравнения равновесия системы сил:

$\sum M_C(\bar{F}_i) = 0; \quad F_1 \cdot CK - F_2 \cdot CE - G \cdot CO + R_D \cdot CD - M = 0;$

$\sum F_{iX} = 0; \ -F_1 \cdot \cos 60^0 + R_{CX} = 0;$

$\sum F_{iY} = 0; \ -F_1 \cdot \cos 30^0 + R_{CY} - F_2 - G + R_D = 0.$

Перпендикуляр $CK = AC \cdot \sin 60^0 = 1{,}5 \cdot 0{,}866 = 1{,}3$ м.

5. Из трех уравнений равновесия определяем искомые реакции:

$$R_D = \frac{-F_1 \cdot CK + F_2 \cdot CE + G \cdot CO + M}{CD} =$$
$$= \frac{-40 \cdot 1{,}3 + 30 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 30}{6} = 13{,}8 \text{ кН.}$$

Из уравнений, составленных выше:

$R_{CX} = F_1 \cdot \cos 60^0 = 40 \cdot 0{,}5 = 20$ кН;

$R_{CY} = F_1 \cdot \cos 30^0 + F_2 + G - R_D = 40 \cdot 0{,}866 + 30 + 15 - 13{,}8 = \ = 65{,}8$ кН.

Все ответы имеют знак «плюс», следовательно, принятые направления сил R_{CX}, R_{CY}, R_D совпадают с действительными.

Определим модуль и направление реакции R_C опоры *C*.

$$R_C = \sqrt{R_{CX}^2 + R_{CY}^2} = \sqrt{20^2 + 65{,}82} = 68{,}8 \ кН;$$
$$\cos\left(\bar{R}_C, \bar{i}\right) = \frac{R_{CX}}{R_C} = \frac{20}{68{,}8} = 0{,}291;$$
$$\cos\left(\bar{R}_C, \bar{j}\right) = \frac{R_{CY}}{R_C} = \frac{65{,}8}{68{,}8} = 0{,}956;$$
$$\angle\left(\bar{R}_C, \bar{i}\right) \approx 73^0; \ \angle\left(\bar{R}_C, \bar{j}\right) \approx 17^0.$$

Ответ: $R_D = 13{,}8$ кН; $R_C = 68{,}8$ кН.

Пример 4

Горизонтальная балка АВ длиной 7 м, заделанная концом А в стену , подвергается действию равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q = 1,5 кН/м, пары сил с моментом M = 2 кН·м и сосредоточенной силы F = 4 кН. Определить реакции заделки, пренебрегая весом балки.

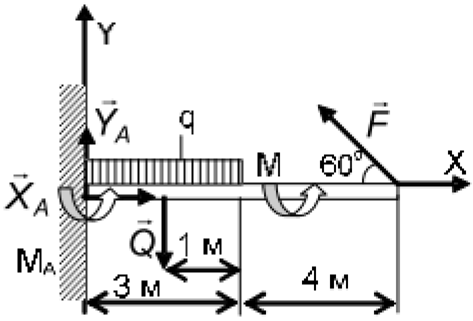


Рис.26

Решение

За объект равновесия примем балку АВ. На балку действуют активные силы: F; Q – равнодействующая равномерно распределенной нагрузки Q = q·3 = 4, 5 кН ; момент пары М. Реакцию заделки представляем составляющими X_A, Y_A и реактивным моментом M_A.

На балку действует плоская произвольная система сил, для решения задачи будем использовать соответствующие уравнения равновесия. Оси X и Y указаны , за центр моментов выберем точку A, в которой сходятся две неизвестные силы X_A и Y_A:

$$\sum F_{kx} = 0, X_A - F\cos 60^\circ = 0; \quad (а)$$

$$\sum F_{ky} = 0, Y_A - Q + F\cos 30^\circ = 0; \quad (б)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = 0, M_A - Q\cdot 1{,}5 + F\cdot 7\sin 60^\circ + M = 0. \quad (в)$$

Знаки моментов M_A и M в уравнении (в) положительные, так как оба момента «стремятся» повернуть балку против хода часовой стрелки . В каждом из полученных уравнений равновесия содержится по одному неизвестному. Решая их, находим

$$X_A = 4\cdot 0{,}5 = 2 \text{ кН},$$

$Y_A = 4{,}5 - 2 \cdot 0{,}866 = 2{,}77$ кН,

$M_A = 4{,}5 \cdot 1{,}5 - 4 \cdot 7 \cdot 0{,}866 - 2 = -19{,}47$ кН·м.

Модуль реакции $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{2^2 + 2{,}77^2} = 3{,}42$ кН .

Реактивный момент получился со знаком «–», это означает, что вращательное действие заделки противоположно принятому направлению по расчетной схеме.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ С-1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР ТВЕРДОГО ТЕЛА

На схемах показаны три способа закрепления бруса, ось которого ломаная линия. Задаваемая нагрузка и размеры (м) во всех трех случаях одинаковы.

Определить реакции опор для того способа закрепления бруса, при котором исследуемая реакция имеет наименьший модуль.

а)

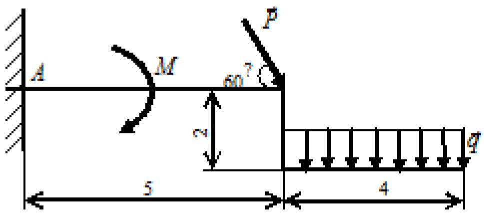


Рис.27

б)

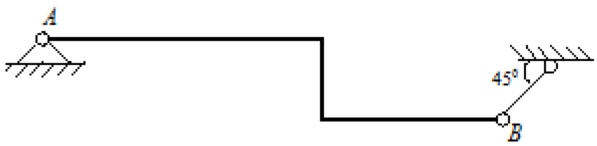


Рис.28

в)

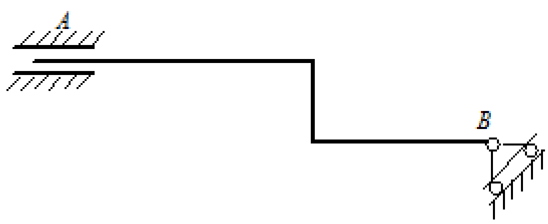


Рис.29

Дано:

Схемы закрепления бруса; P=4кН, M=10 кНм,   q=2 кН/м.

Определить реакции опор для того способа закрепления, при котором исследуемая реакция Y_A имеет наименьшее числовое значение.

Решение

Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к конструкции. Действие связей на конструкцию заменяем реакциями. Равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q заменяем равнодействующей

$$Q = q \cdot 4 = 8 \text{ кН}.$$

Чтобы выяснить, в каком случае исследуемая реакция Y_A является наименьшей, найдем ее для всех трех схем, не определяя пока остальных реакций.

а)

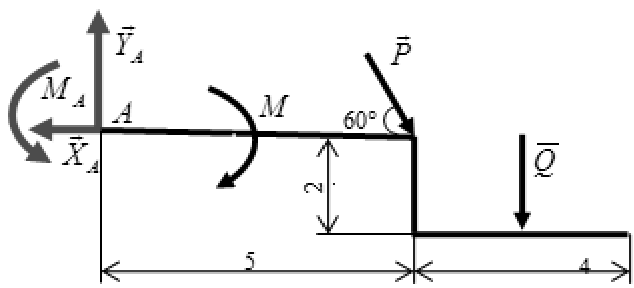


Рис.30

б)

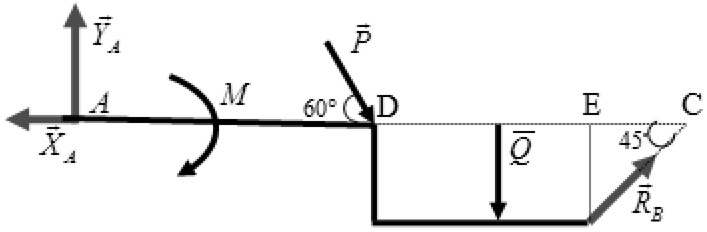


Рис.31

в)

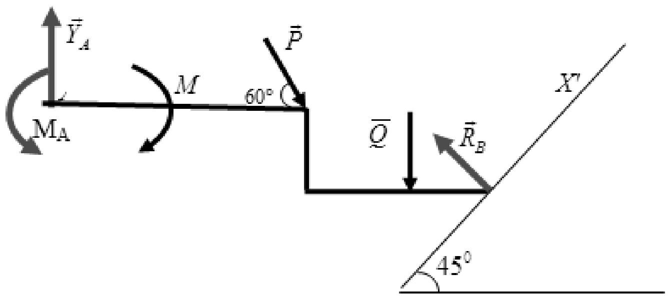


Рис.32

Для схемы а) (рис.30):

$\sum F_{ky} = 0 \qquad Y_A - P\cos 30^\circ - Q = 0, \qquad$ *откуда* $\quad Y_A = Q + P\cos 30^\circ$

Подставляя числовые значения, получим $\quad Y_A = 8 + 4\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 11{,}46\,\text{кН}$

Для схемы б) (рис.31):

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = 0 \qquad -Y_A \cdot AC - M + P\cos 30^\circ \cdot DC + Q \cdot (2 + CE) = 0$$

$$\text{откуда}, \quad Y_A = \frac{M - Q\cdot(2+CE) + P\cos 30^\circ \cdot DC}{AC} = \frac{10 - 32 + 4\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6}{9} = 0{,}98\,\text{кН}$$

Здесь CE =2 м

Для схемы в) (рис.32):

$$\sum F_{kx'} = 0 \qquad Y_A \cdot \cos 45^\circ - P\cos 75^\circ + Q\cos 45^\circ = 0$$

$$\text{откуда}, \quad Y_A == Q + P\frac{\cos 75^\circ}{\cos 45^\circ} = 8 + 10\frac{0{,}26}{0{,}71} = 11{,}66\,\text{кН}$$

Таким образом, наименьшее числовое значение исследуемой реакции получается при закреплении бруса по схеме б). Определим остальные реакции для этой схемы:

$$\sum F_{ky} = 0 \quad Y_A - P\cos 30^\circ - Q + R_B\cos 45^\circ = 0 \quad \text{откуда} \quad R_B = \frac{-Y_A + Q + P\cos 30^\circ}{\cos 45^\circ} = 12{,}25\,\text{кН}$$

$$\sum F_{kx} = 0 \qquad -X_A + P\cos 60^\circ + R_B \cos 45^\circ = 0 \qquad \text{откуда,} \quad X_A = P\cos 60^\circ + R_B \cos 45^\circ = 13{,}7\ кН$$

Результаты расчета приведены в табл.1

Таблица1

Схема	Исследуемая реакция Y_A, кН	Другие реакции		
		X_A кН	Y_A кН	M_A кНм
а	11,46	-	-	-
б	0,98	13.7	12,25	-
в	11,66	-	-	-

ЗАДАНИЕ С.1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР ТВЕРДОГО ТЕЛА

На схемах в Приложении показаны для каждого варианта три способа закрепления бруса, ось которого — ломаная линия. Задаваемая нагрузка и размеры (м) во всех трех случаях одинаковы (табл.2).Определить реакции опор для того способа закрепления бруса, при котором исследуемая реакция, имеет наименьший модуль.

Таблица2

Номер варианта	P, кН	M, кН-м	q, кН/м	Исследуемая реакция	Номер варианта	P, кН	M, кН-м	q, кН/м	Исследуемая реакция
1	10	6	2	Y_A	16	12	6	2	M_A
2	20	5	4	M_A	17	20	4	3	У4
3	15	8	1	Y_B	18	14	4	2	X_A
4	5	2	1	Y_B	19	16	6	1	K_B
5	10	4	-	X_B	20	10	-	4	Y_A
6	6	2	1	M_A	21	20	10	2	M_A
7	2	4	2	X_A	22	6	6	1	Y_A
8	20	10	4	K_B	23	10	4	2	M_A
9	10	6	-	Y_A	24	4	3	1	Y_A
10	2	4	2	K_A	25	10	10	2	X_A
11	4	10	1	K_B	26	20	5	2	M_A
12	10	5	2	Y_A	27	10	6	1	X_A
13	20	12	2	Y_A	28	20	10	2	Y_A
14	15	4	3	Y_A	29	25	-	1	M_A
15	10	5	2	X_A	30	20	10	2	K_B

Пример выполнения задания

Дано:*P*= 5 кН; *M* = 8 кНм;*q*=1,2 кН/м.Определить реакции опор для того способа закрепления, при котором момент взаделке имеет наименьшее числовое значение (рис.33).

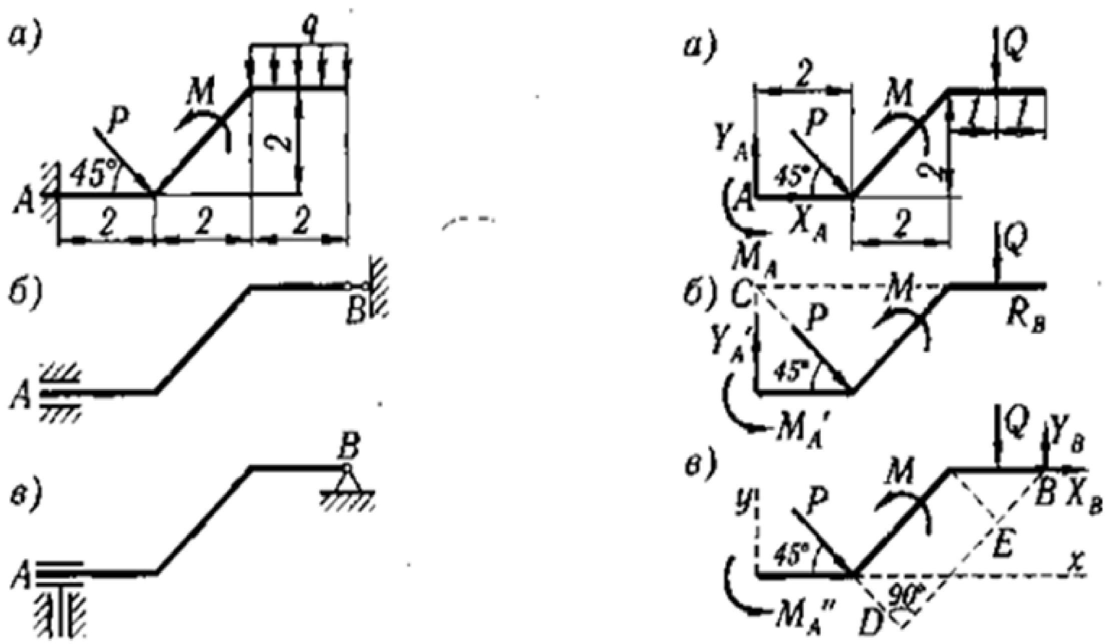


Рис.33

Решение. Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к конструкции. Действие связей на конструкцию заменяем их реакциями:

в схеме а) - X_A, Y_A, M_A; в схеме б) -, Y_A, M_A, X_B; в схеме б) -, M_A, $X_B Y_B$

Равномерно распределенную нагрузку интенсивностью *q* заменяем равнодействующей Q=*q* . 2 = 2,4 кН.

Чтобы выяснить, в каком случае момент в заделке является наименьшим, найдем его для всех трех схем, не определяя пока остальных реакций.

Для схемы *а)*

$$\sum M_{iA} = 0;\ M_A - P \cdot 2\sin 45^\circ + M - Q \cdot 5 = 0.$$

Вычисления дают $M_A = 11{,}07$ кН · м.

Для схемы *б)*

$$\sum M_{iC} = 0;\; M'_A + M - Q \cdot 5 = 0 \;\text{ и }\; M'_A = 4{,}00 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для схемы *в)*

$$\sum M_{iB} = 0;\; M''_A + P \cdot BD + M + Q \cdot 1 = 0 \;\text{ и }\; M''_A = -31{,}61 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Здесь $BD = BE + ED = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4{,}24$ м.

Таким образом, наименьший момент в заделке получается при закреплении бруса по схеме *б)*. Определим остальные опорные реакции для этой схемы:

Для схемы *б)*

$$\sum M_{iC} = 0;\; M'_A + M - Q \cdot 5 = 0 \;\text{ и }\; M'_A = 4{,}00 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для схемы *в)*

$$\sum M_{iB} = 0;\; M''_A + P \cdot BD + M + Q \cdot 1 = 0 \;\text{ и }\; M''_A = -31{,}61 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Здесь

$$BD = BE + ED = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4{,}24 \text{ м}.$$

Таким образом, наименьший момент в заделке получается при закреплении бруса по схеме *б)*. Определим остальные опорные реакции для этой схемы:

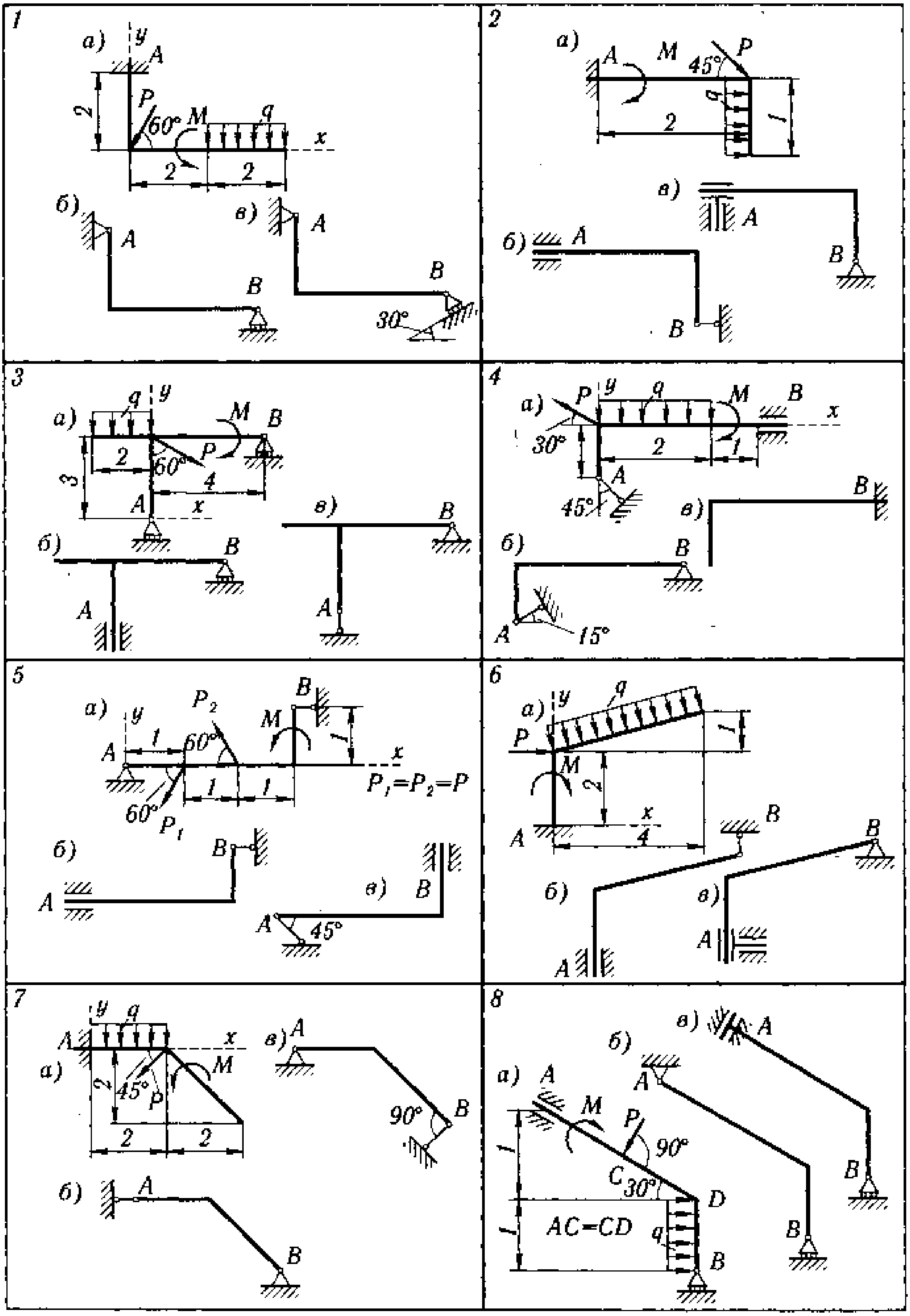
$$\sum X_i = 0;\quad P\cos 45^\circ - R_B = 0, \qquad \text{откуда } R_B = 3{,}54 \text{ кН};$$
$$\sum Y_i = 0;\quad Y'_A - P \cdot \sin 45^\circ - Q = 0, \quad \text{откуда } Y'_A = 5{,}94 \text{ кН}.$$

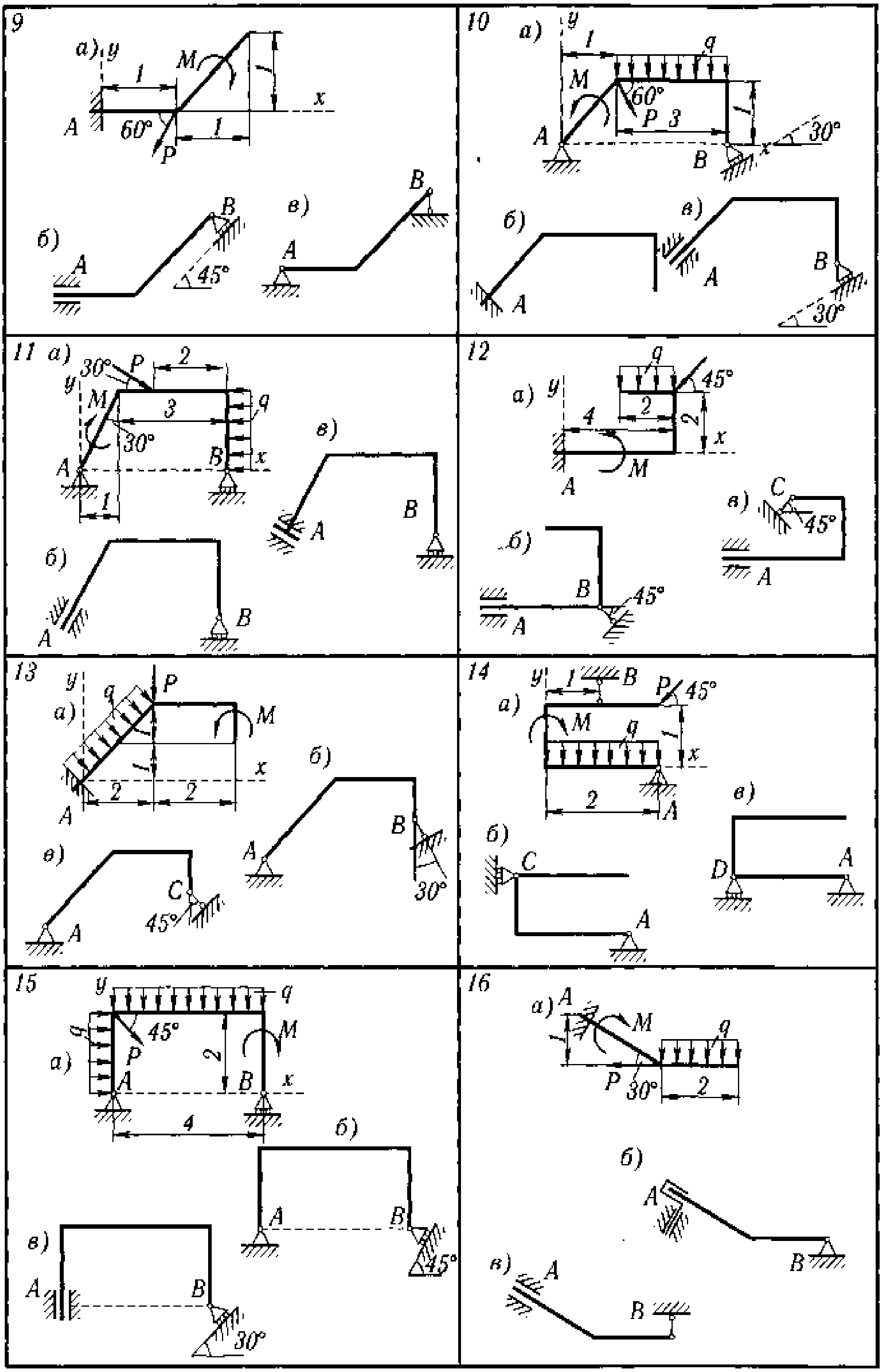
Результаты расчета приведены в табл.3

Таблица 3

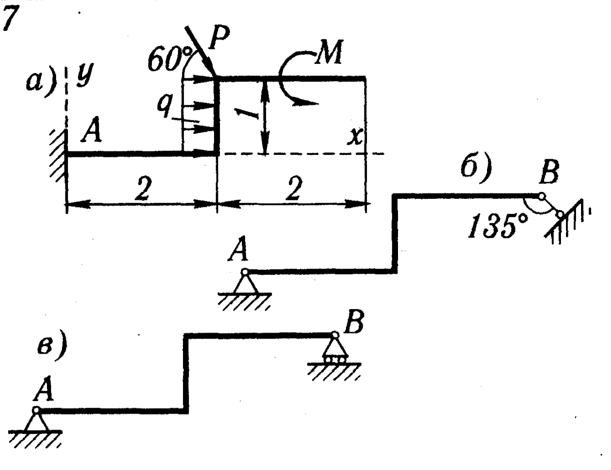
Схема	Момент $M_A(M'_A,\ M''_A)$, кН · м	Силы, кН	
		Y'_A	R_B
а	11,07	–	–
б	4,00	5,94	3,54
в	−31,61	–	–

Приложение

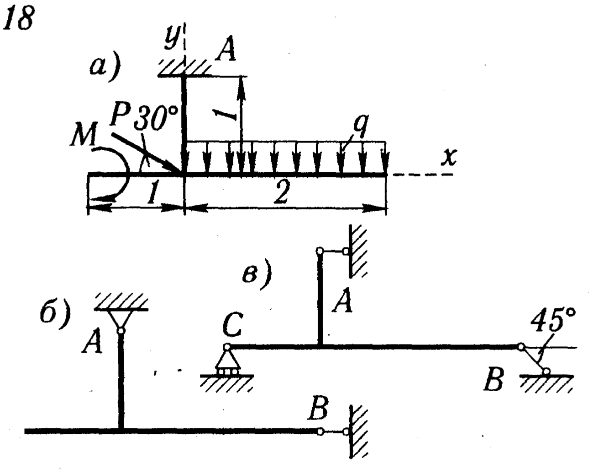

1
а)
б)
в)
30°
2
а)
б)
в)
45°
3
а)
б)
в)
60°
4
а)
б)
в)
30°
45°
15°
5
а)
б)
в)
$P_1=P_2=P$
60°
45°
6
а)
б)
в)
7
а)
б)
в)
45°
90°
8
а)
б)
в)
AC=CD
30°
90°


9
а) y
M
A
60°
P
x
б)
A
B
45°
в)
A
B
10
а) y
q
M
60°
P 3
A
B
x
30°
б)
A
в)
A
B
30°
11 а)
30°
P
2
y
M
3
q
30°
A
B
x
1
в)
A
B
б)
A
B
12
q
45°
а) y
4
2
2
x
A
M
в)
C
45°
б)
B
45°
A
A
13
y
q
P
а)
M
x
A
2
2
б)
B
A
30°
в)
C
45°
A
14
y
1
B
P
45°
а)
M
q
1
x
2
A
в)
б)
C
D
A
A
15
y
q
q
45°
M
а)
P
2
A
B
x
4
б)
A
B
45°
в)
A
B
30°
16
а) A
M
q
1
P
30°
2
б)
A
B
в)
A
B

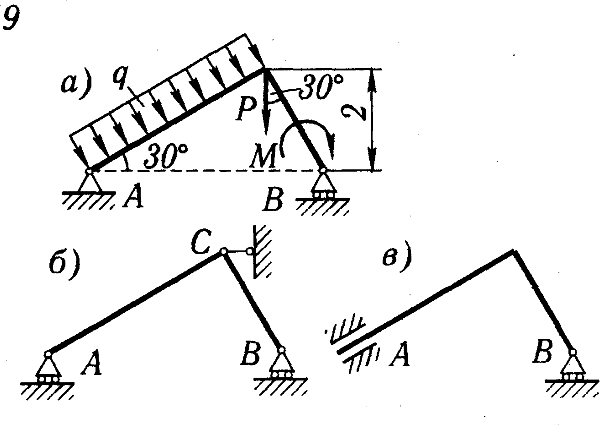
17



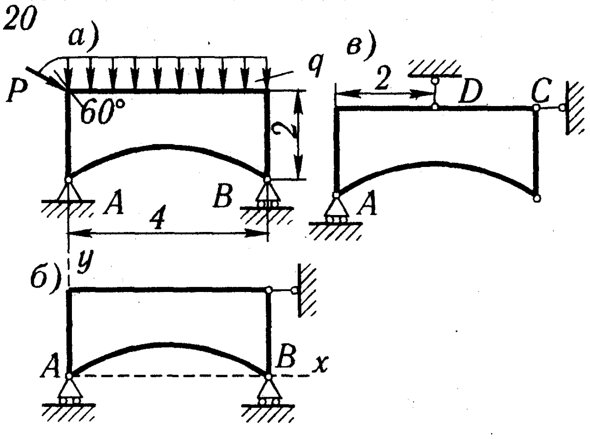
18



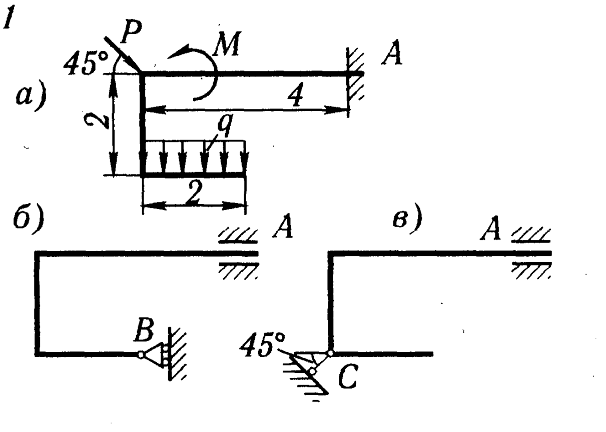
19



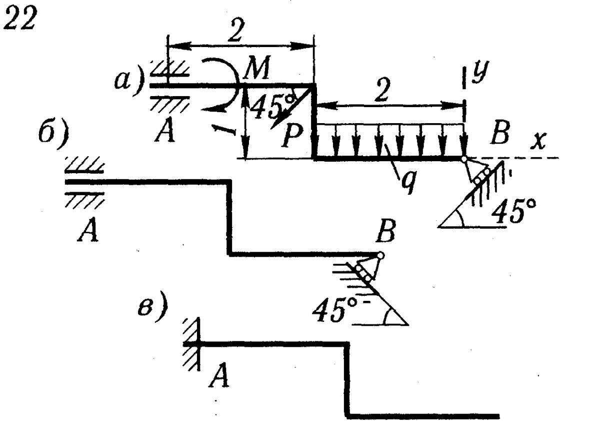
20



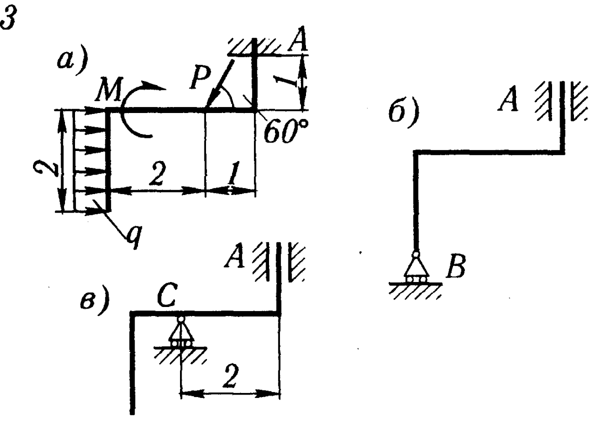
21



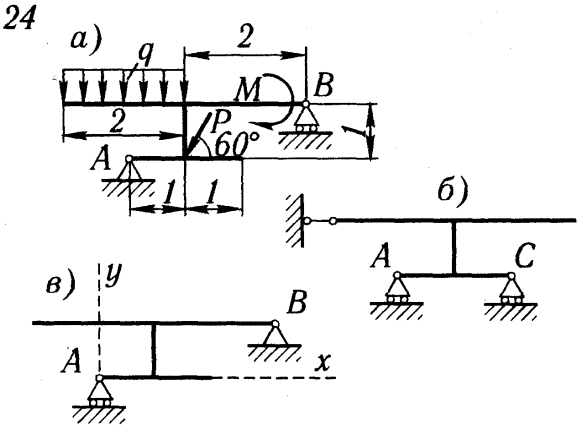
22

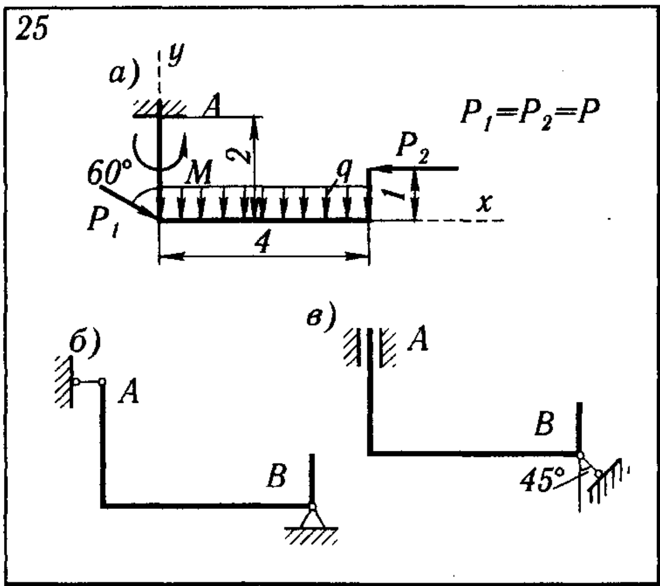
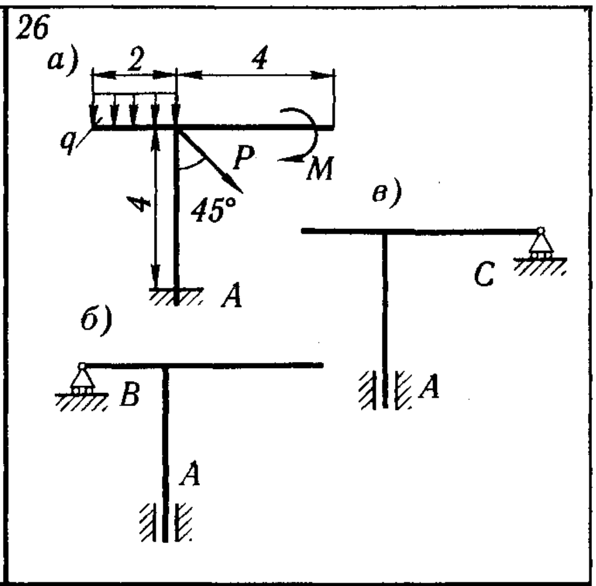
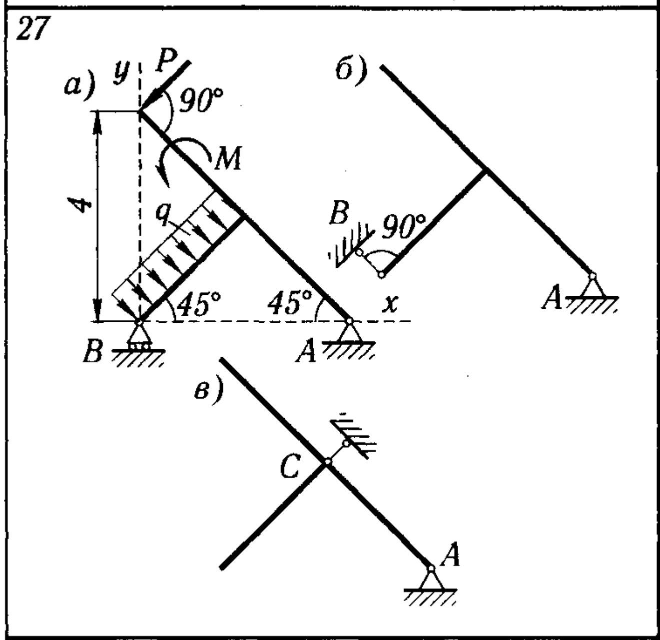
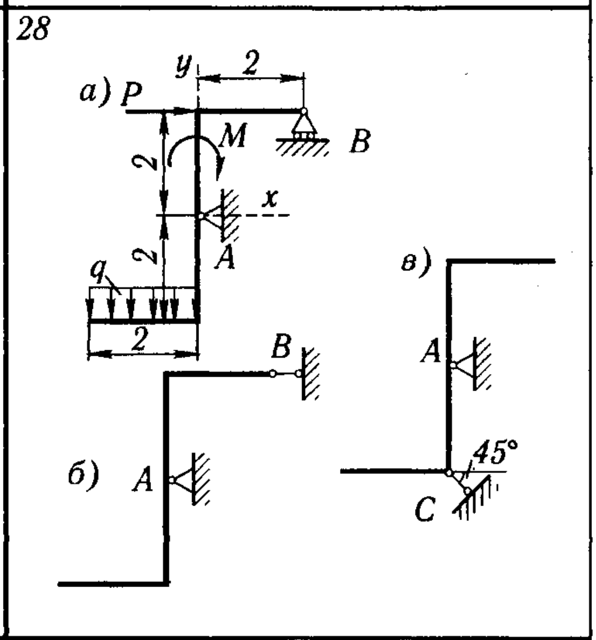
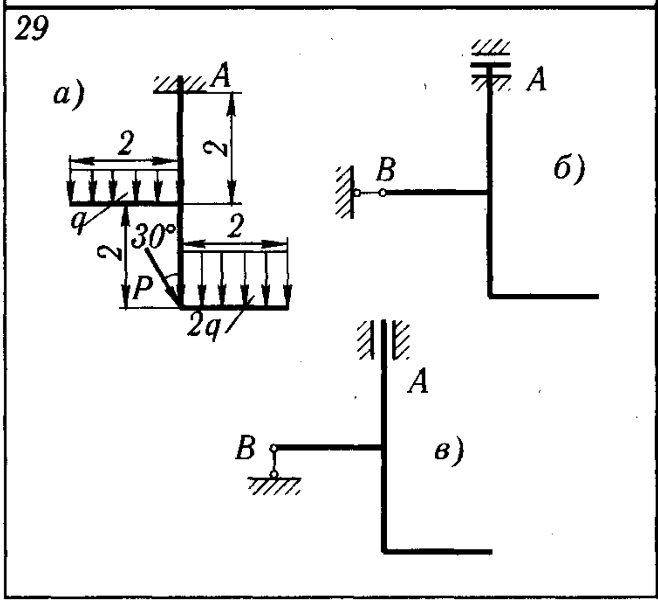
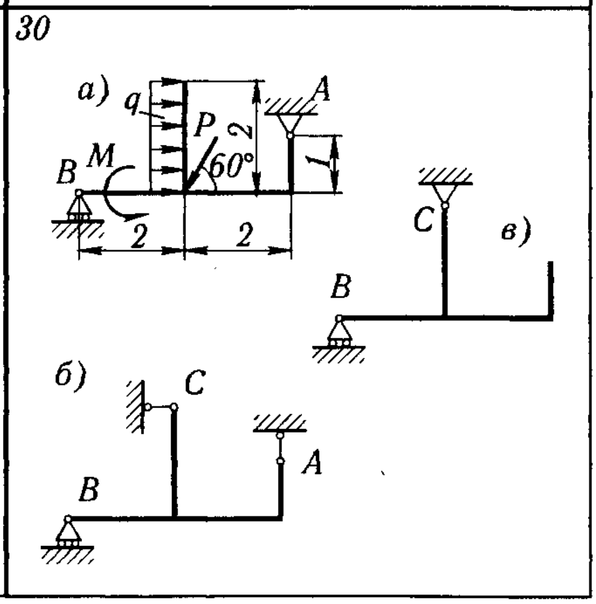


23



24




25
а)
y
A
$P_1=P_2=P$
P_2
60°
M
2
q
1
x
P_1
4
б)
A
B
в)
A
B
45°

26
а)
2
4
q
P
M
4
45°
A
в)
C
б)
B
A
A

27
а)
y
P
90°
M
4
q
45°
45°
x
B
A
б)
B
90°
A
в)
C
A

28
а)
P
y
2
M
B
2
x
2
A
q
2
B
в)
A
б)
A
45°
C

29
а)
A
2
2
q
2
30°
2
P
2q
A
B
б)
A
B
в)

30
а)
q
A
P
2
B
M
60°
1
2
2
C
в)
B
б)
C
A
B

Литература

1. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики- М: Высшая школа, 2004.
2. ТаргС.М. Краткий курс теоретической механики- М: Высшая школа: 2005.
3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Под редакцией А.А. Яблонского- М: Высшая школа,2006.

Содержание

Введение…………………………………………………………………..3
Основные понятия и определения статики……………………….4
Аксиомы статики…………………………………………………….…6
Типы связей и их реакции…………… ………………………....9
Проекция силы на ось……………………………..………………......13
Момент силы относительно точки……………………………....15
Пара сил…………………………………………………………………...17
Примеры решения задач…………………………………………......19
Пример выполнения расчетно-графической работы С-1………...25
Варианты задания С-1……………………...................……...28
Приложение………………………………………………………....31
Литература………………………………………..……..……..………….35

Редактор Ахметжанова Г.М.

КорректорМарданова Э.З.