MATEMATIK ANALIZ

O`QUV-USLUBIY MAJMUA

I SEMESTR

O`ZBEKISTON MILLIY
UNIVERSITETI
MATEMATIK ANALIZ KAFEDRASI

O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O`RTA-MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

MIRZO ULUG`BEK NOMIDAGI O`ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

"Matematik analiz"

fani bo`yicha

O`QUV – USLUBIY MAJMUA

(5130200-Amaliy matematika va informatika ta'lim yo`nalishi talabalari uchun)

Toshkent–2016

Mazkur o`quv-uslubiy majmua Oliy va o`rta maxsus ta'lim vazirligining 2016 yil 6 aprelidagi 137-sonli buyrug`i bilan tasdiqlangan o`quv reja va dastur asosida tayyorlandi.

Tuzuvchilar: Otaboyev T.O`.
Karimov J.A.
Raximov K.X.
Narzillayev N.X.
Rajabov S.M.
Karimov J.J.

O`quv-uslubiy majmua O`zMU kengashining 2016 yil __________dagi ____-sonli qarori bilan tasdiqqa tavsiya qilingan.

Mundarija

So'z boshi

So'nggi yillarda mamlakatimizda oliy ta'lim sifatini oshirishga qaratilgan bir qancha chora-tadbirlar amalga oshirilmoqda. Chunki, jahon talablari darajasidagi raqobatbardosh kadrlar tayyorlash maqsadida talabalarga dunyo standartlariga javob beradigan bilim va ko'nikmalar berish bugungi kunning eng dolzarb masalalaridan biri bo'lib qolmoqda.

Mazkur o'quv-uslubiy majmua "Matematik analiz" fani bo'yicha tayyorlangan bo'lib, u "5130200-amaliy matematika va informatika" yo'nalishi talabalari uchun mo'ljallangan va O'zbekiston Milliy universiteti "Matematik analiz" kafedrasi o'qituvchilari tomonidan tayyorlangan. Ushbu majmua mamlakatimizda "Matematik analiz" fanini o'qitish bo'yicha uzoq yillardan beri to'plangan boy tajriba hamda rivojlangan horijiy davlatlarning yetakchi Oliy ta'lim muassasalarining tajribalaridan foydalangan holda, shuningdek, ularning o'quv dasturlaridagi asosiy adabiyotlardan foydalangan holda yaratildi.

Matematik analiz fani oliy matematikaning fundamentak bo'limlaridan biri bo'lib, u matematikaning poydevori hisoblanadi. Matematik analiz kursi davomida ko'pgina tushuncha va tasdiqlar, shuningdek, ularning tatbiqlari keltiriladi.

Matematik analiz fanining asosiy vazifasi shu fanning tushuncha, tasdiqlar va boshqa matematik ma'lumotlar majmuasi bilan tanishtirishgina bo'lmasdan, balki talabalarda mantiqiy fikrlash, matematik usullarni amaliy masalalarni yechishga qo'llash ko'nikmalarini shakllantirishdan iborat.

Ushbu o'quv-uslubiy majmuada dastlab sillabus hamda o'qitishda foydalaniladigan interfaol ta'lim metodlari berilgan bo'lib, so'ngra har bir mavzu bo'yicha materiallar batartib berilgan. Bunda har bir mavzu bo'yicha ma'ruza matnlari, nazorat savollari, mashqlar, glossariy, amaliy mashg'ulot materiallari, test savollari va keyslar banki keltirilgan.

"Matematik analiz" fanining sillabusi

(2016/2017 o'quv yili)

<table>
<tr><td>Kafedra nomi</td><td colspan="2">Matematik analiz</td></tr>
<tr><td>O'qituvchi haqida ma'lumot</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Semestr va o'quv kursining davomiyligi</td><td colspan="2">1,2-semestr va jami soat</td></tr>
<tr><td rowspan="5">O'quv soatlari hajmi</td><td>jami:</td><td>372</td></tr>
<tr><td>shuningdek</td><td></td></tr>
<tr><td>ma'ruza</td><td>108</td></tr>
<tr><td>amaliy mashg'ulot</td><td>108</td></tr>
<tr><td>mustaqil ta'lim</td><td>156</td></tr>
<tr><td>Yo'nalish nomi va shifri</td><td>5130200</td><td>Amaliy matematika va informatika</td></tr>
<tr><td colspan="3">Fanni o'qitishning maqsadi va vazifalari. Matematik analiz fanining o'qitilishidan maqsad – talabalarni matematikaning zaruriy ma'lumotlari majmuasi (tushunchalar, tasdiqlar va ularning isboti, amaliy masalalarni yechish usullari va boshqalar) bilan tanishtirishdan iboratdir. Ayni paytda, u talabalarni mantiqiy fikrlashga, to'g'ri xulosa chiqarishga, ularning matematik madaniyatini oshirishga xizmat qiladi.</td></tr>
</table>

Kursning tarkibi va mazmuni

№	Mavzu	Jami	Ma'ruza	Amaliy mashg'ulot
	1-semestr			
1.	To'plamlar. To'plamlar ustida amallar	4	2	2
2.	Akslantirishlar va ularning turlari	4	2	2
3.	Haqiqiy sonlar	4	2	2
4.	Haqiqiy sonlar to'plamining chegaralari	4	2	2
5.	Haqiqiy sonlar ustida amallar	4	2	2
6.	Sonlar ketma-ketligi va uning limiti	4	2	2
7.	Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari	4	2	2
8.	Monoton ketma-ketliklar va ularning limiti	4	2	2
9.	Qismiy va fundamental ketma-ketliklar. Ketma-ketliklarning quyi hamda yuqori limitlari.	4	2	2
10.	Funksiya tushunchasi	4	2	2
11.	Funksiya limiti	4	2	2
12.	Limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari.	4	2	2
13.	Funksiyalarni taqqoslash.	4	2	2
14.	Funksiyaning uzluksizligi	4	2	2
15.	Uzluksiz funksiyalarning lokal xossalari	4	2	2
16.	Uzluksiz funksiyalarning global xossalari	4	2	2
17.	Tekis uzluksizlik	4	2	2
18.	Funksiyaning hosilasi	4	2	2
19.	Hosila hisoblash qoidalari	4	2	2
20.	Funksiyaning differensiali	4	2	2
21.	Funksiyaning yuqori tartibli hosila va differensiallari	4	2	2
22.	Asosiy teoremalar	4	2	2
23.	Asosiy teoremalar natijalari. Koshi teoremasi	4	2	2
24.	Teylor formulasi	4	2	2
25.	Funksiyaning monotonligi. Funksiyaning ekstremumlari	4	2	2
26.	Funksiyaning qavariqligi, egilish nuqtalari va asimptotalari	4	2	2
27.	Lopital qoidalari	4	2	2
	2-semestr			
28.	Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral tushunchalari	4	2	2
29.	Integrallash usullari. Sodda kasrlarni integrallash	4	2	2
30.	Ratsional funksiyalarni integrallash	4	2	2
31.	Ba'zi irratsional funksiyalarni integrallash. Trigonometrik funksiyalarni integrallash	4	2	2
32.	Aniq integral tushunchasi	4	2	2
33.	Funksiyaning integrallanuvchanlik mezoni (kriteriysi)	4	2	2
34.	Integrallanuvchi funksiyalar sinfi	4	2	2

35.	Aniq integrallarning xossalari	4	2	2
36.	Chegaralari o’zgaruvchi bo’lgan aniq integrallar	4	2	2
37.	Aniq integrallarni hisoblash	4	2	2
38.	Tekis shaklning yuzi va uni hisoblash	4	2	2
39.	Yoy uzunligi va uni hisoblash	4	2	2
40.	Aniq integralning tadbiqlari	4	2	2
41.	Chegaralari cheksiz xosmas integrallar	4	2	2
42.	Manfiy bo‘lmagan funksiyaning xosmas integrallari. Integralning absolyut yaqinlashuvchililigi	4	2	2
43.	Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrallari	4	2	2
44.	Xosmas integralining bosh qiymati	4	2	2
45.	Rm fazo. Rm fazoda ochiq va yopiq to‘plamlar	4	2	2
46.	Rm Fazoda ketma-ketlik va uning limiti	4	2	2
47.	Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya va uning limiti	4	2	2
48.	Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi. Tekis uzluksizlik	4	2	2
49.	Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari. Funksiyaning differensiallanuvchiligi	4	2	2
50.	Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning differensiali	4	2	2
51.	Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli hosila va differensiallari. Teylor formulasi	4	2	2
52.	Teylor formulasi	4	2	2
53.	Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning ekstremumlari	4	2	2
54.	Oshkormas funksiyalar	4	2	2
	Jami	**216**	**108**	**108**

1-ma’ruza. To‘plamlar. To‘plamlar ustida amallar. To‘plam tushunchasi. To‘plamlar ustida amallar. Matematik belgilar.

2-ma’ruza. Akslantirishlar va ularning turlari. Akslantirish tushunchasi. Akslantirishning turlari. Ekvivalent to‘plamlar. Sanoqli to‘plamlar.

3-ma’ruza. Haqiqiy sonlar. Ratsional sonlar va cheksiz davriy o‘nli kasrlar. Haqiqiy son tushunchasi.

4-ma’ruza. Haqiqiy sonlar to‘plamining chegaralari. Sonlar to‘plamining aniq chegaralari. Aniq chegaraning mavjudligi.

5-ma’ruza. Haqiqiy sonlar ustida amallar. Haqiqiy sonlar yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi va nisbati. Haqiqiy sonning darajasi. Haqiqiy sonning absolyut qiymati. Bernulli tengsizligi. Nyuton binomi formulasi. Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipi.

6-ma’ruza. Sonlar ketma-ketligi va uning limiti. Sonlar ketma-ketligi tushunchasi. Sonlar ketma-ketligining limiti.

7-ma’ruza. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning chegaralanganligi. Tengsizliklarda limitga o‘tish. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustida amallar. Cheksiz kichik hamda cheksiz katta miqdorlar.

8-ma’ruza. Monoton ketma-ketliklar va ularning limiti. Monoton ketma-ketlik tushunchasi. Monoton ketma-ketlikning limiti. e soni

9-ma’ruza. Qismiy va fundamental ketma-ketliklar. Ketma-ketliklarning quyi hamda yuqori limitlari. Qismiy ketma-ketliklar. Boltsano–Veyershtrass teoremasi. Fundamental ketma-ketliklar. Koshi teoremasi. Ketma-ketlikning quyi hamda yuqori limitlari.

10-ma’ruza. Funksiya tushunchasi. Funksiya ta’rifi, berilish usullari. Funksiyaning

chegaralanganligi. Davriy funksiyalar. Juft va toq funksiyalar. Monton funksiyalar. Teskari funksiya. Murakkab funksiyalar.
11-ma’ruza. Funksiya limiti. To‘plamning limit nuqtasi. Funksiya limiti ta’riflari va ekvivalentligi. Funksiyaning o‘ng va chap limitlari.
12-ma’ruza. Limitga ega bo‘lgan funksiyalarning xossalari. Limitga ega bo‘lgan funksiyalarning xossalari. Monoton funksiya limiti. Koshi kriteriysi.
13-ma’ruza. Funksiyalarni taqqoslash. Cheksiz katta va cheksiz kichik funksiyalar.2. “*O*” va “*o*” belgilar, ularning xossalari. Funksiyalarning ekvivalentligi.
14-mavzu. Funksiyaning uzluksizligi. Funksiyaning uzluksizligi ta’riflari. Funksiyaning uzilishi va uzilish turlari. Monoton funksiyaning uzilish nuqtasi.
15-mavzu. Uzluksiz funksiyalarning lokal xossalari. Uzluksiz funksiyalarning chegaralanganligi. Ishorani saqlash xossasi. Murakkab funksiya uzluksizligi. Uzluksiz funksiyalar ustida amallar.
16-ma’ruza. Uzluksiz funksiyalarning global xossalari. Veyershtrassning birinchi va ikkinchi teoremalari. Bolsano–Koshining birinchi va ikkinchi teoremalari.
17-ma’ruza. Tekis uzluksizlik. Funksiyaning tekis uzluksizligi tushunchasi. Kantor teoremasi.
18-ma’ruza. Funksiyaning hosilasi. Funksiya hosilasining ta’rifi. Funksiyaning o‘ng va chap hosilalari. Hosilaning geometrik va mexanik ma’nolari.
19-mavzu. Hosila hisoblash qoidalari. Ikki funksiya yiђindisi, ayirmasi, ko‘paytmasi va nisbatining hosilasi. Murakkab funksiyaning hosilasi. Teskari funksiyaning hosilasi. Hosilalar jadvali.
20-mavzu. Funksiyaning differensiali. Funksiya differensiali tushunchasi. Funksiya differensialining sodda qoidalari. Funksiya differensiali va taqribiy formulalar.
21-ma’ruza. Funksiyaning yuqori tartibli hosila va differensiallari. Funksiyaning yuqori tartibli hosilalari. Funksiyaning yuqori tartibli differensiallari. Differensial shaklining invariantligi.
22-ma’ruza. Asosiy teoremalar. Hosilaga ega bo‘lgan funksiyalar haqidagi teoremalar. Funksiya hosilasinig uzilishi haqida.
23-ma’ruza. Asosiy teoremalar natijalari. Koshi teoremasi. Lagranj teoremasi natijalari. Koshi teoremasi.
24-ma’ruza. Teylor formulasi. Ko‘phad uchun Teylor formulasi. Ixtiyoriy funksiyaning Teylor formulasi va uning qoldiq hadlari. Ba’zi funksiyalarning Teylor formulalari.
25-ma’ruza. Funksiyaning monotonligi. Funksiyaning ekstremumlari. Funksiyaning monotonligi. Funksiyaning ekstremumlari.
26-ma’ruza. Funksiyaning qavariqligi, egilish nuqtalari va asimptotalari. Funksiyaning qavariqligi va botiqligi. Funksiyaning egilish nuqtalari. Funksiya grafigining asimptotalari.
27-ma’ruza. Lopital qoidalari. $\frac{0}{0}$ ва $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishidagi hollar. $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ 0^{0}$ ko‘rinishidagi hollar.
28-ma’ruza. Boshlang’ich funksiya va aniqmas integral tushunchalari. Boshlang’ich funksiya tushunchasi. Funksiyaning aniqmas integrali. Integralning xossalari. Asosiy aniqmas integrallar jadvali.
29-ma’ruza. Integrallash usullari. Sodda kasrlarni integrallash. O’zgaruvchini almashtirib integrallash usuli. Bo’laklab integrallash usuli. Sodda kasrlarni integrallash.
30-ma’ruza. Ratsional funksiyalarni integrallash. Algebraning ba’zi ma’lumotlari va tasdiqlari. Ratsional funksiyalarni integrallash.
31-ma’ruza. Ba’zi irratsional funksiyalarni integrallash. Trigonometrik funksiyalarni integrallash. $R(x, y(x))$ ko’rinishidagi funksiyalarni integralash. Binominal differensialni

integrallash. Trigonometrik funksiyalarni integrallash.
32-ma'ruza. Aniq integral tushunchasi. Aniq integral ta'rifi. Darbu yig'indilari.
33-ma'ruza. Funksiyaning integrallanuvchanlik mezoni (kriteriysi). Darbu yig'indilarini xossalari. Aniq integralning mavjudligi.
34-ma'ruza. Integrallanuvchi funksiyalar sinfi. Uzluksiz funksiyalarning integrallanuvchanligi. Monoton funksiyalarning integrallanuvchanligi. Uziladigan funksiyalarning integrallanuvchanligi
35-ma'ruza. Aniq integrallarning xossalari. Integralning chiziqlilik hamda additivlik xossalari. Integral tengsizliklar. O'rta qiymat haqidagi teoremalar.
36-ma'ruza. Chegaralari o'zgaruvchi bo'lgan aniq integrallar. Uzluksizligi. Differensiallanuvchanligi.
37-ma'ruza. Aniq integrallarni hisoblash. Nyuton-Leybnits formulasi. O'zgaruvchilarni almashtirish formulasi. Bo'laklab integrallash formulasi.
38-ma'ruza. Tekis shaklning yuzi va uni hisoblash. Tekis shaklning yuzi tushunchasi. Egri chizikli trapetsiyaning yuzini hisoblash. Egri chiziqli sektorning yuzini hisoblash.
39-ma'ruza. Yoy uzunligi va uni hisoblash. Yoy uzunligi tushunchasi. $y=f(x)$ tenglama bilan berilgan egri chiziq uzunligini hisoblash. Parametrik ko'rinishda berilgan egri chiziq uzunligini hisoblash.
40-ma'ruza. Aniq integralning tadbiqlari. Aylanma jism yuzi. Inersiya momenti. O'zgaruvchi kuchning bajargan ishi.
41-ma'ruza. Chegaralari cheksiz xosmas integrallar. Chegaralari cheksiz xosmas integral tushunchasi. Yaqinlashuvchi xosmas integralning sodda xossalari. Xosmas integralning yaqinlashuvchiligi.
42-ma'ruza. Manfiy bo'lmagan funksiyaning xosmas integrallari. Integralning absolyut yaqinlashuvchililigi. Manfiy bo'lmagan funksiya xosmas integralining yaqinlashuvchiligi. Taqqoslash teoremalari. Xosmas integralning absolyut yaqinlashuvchiligi.
43-ma'ruza. Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrallari. Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integrali tushunchasi. Xosmas integrallarni hisoblash.
44-ma'ruza. Xosmas integralining bosh qiymati. Dirixle alomati. Abel alomati. Xosmas integralning bosh qiymati.
45-ma'ruza. R^m fazo. R^m fazoda ochiq va yopiq to'plamlar. R^m fazo tushunchasi. R^m fazoda nuqtaning atrofi. R^m fazoda ochiq va yopiq to'plamlar.
46-ma'ruza. R^m Fazoda ketma-ketlik va uning limiti. R^m fazoda ketma-ketlik va uning limiti tushunchalari. Ketma-ketlik limitining mavjudligi. Ichma-ich joylashgan yopiq sharlar prinsipi. Qismiy ketma-ketliklar. Bolsano-Veyershtrass teoremasi.
47-ma'ruza. Ko'p o'zgaruvchili funksiya va uning limiti. Ko'p o'zgaruvchili funksiya tushunchasi. Ko'p o'zgaruvchili funksiya limiti (karrali limiti) ta'riflari. Funksiya limitining mavjudligi. Takroriy limitlar.
48-ma'ruza. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi. Tekis uzluksizlik. kantor teoremasi. Ko'p o'zgaruvchili funksiya uzluksizligi tushunchasi. Uzluksiz funksiyalarning sodda xossalari. To'plamda uzluksiz bo'lgan funksiyalarning xossalari. Funksiyaning tekis uzluksizligi. Kantor teoremasi.
49-ma'ruza. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari. Funksiyaning differensiallanuvchiligi. Funksiyaning xususiy hosilalari tushunchasi. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensiallanuvchiligi. Zaruriy shart. Funksiya differensiallanuvchiligining yetarli sharti. Murakkab funksiyaning differensiallanuvchiligi. Murakkab funksiyaning hosilasi.
50-ma'ruza. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differensiali. Funksiya differensiali tushunchasi. Murakkab funksiyaning differensiali. Differensial shaklning invariantligi. Sodda

<table>
<tr><td colspan="3">qoidalar. Xususiy hollar. Funksiya differensialining geometrik ma’nosi.
51-ma’ruza. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning yuqori tartibli hosila va differensiallari. Teylor formulasi. Yuqori tartibli xususiy hosilalar. Yuqori tartibli differensialar. Murakkab funksiyaning yuqori tartibli differensiallari.
52-ma’ruza. Teylor formulasi. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning Teylor formulasi. Xususiy hollar. Aralash hosilaning tengligi haqida teorema.
53-ma’ruza. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning ekstremumlari. Funksiya ekstremumi tushunchasi. Zaruriy shart. Funksiya ekstremumga erishishining yetarli sharti.
54-ma’ruza. Oshkormas funksiyalar. Oshkormas funksiya tushunchasi. Oshkormas funksiyaning mavjudligi. Oshkormas funksiyaning hosilalari.</td></tr>
<tr><td>Mustaqil ta’lim:</td><td colspan="2">Talaba mustaqil ta’limning asosiy maqsadi — o‘qituvchining rahbarligi va nazoratida muayyan o‘quv ishlarini mustaqil ravishda bajarish uchun bilim va ko‘nikmalarini shakllantirish va rivojlantirish.
Matematik analiz fanini o‘rganuvchi talabalar auditoriyada olgan nazariy bilimlarini mustahkamlash va amaliy masalalarni echishda ko‘nikma hosil qilish uchun mustaqil ta’lim tizimiga asoslanib, kafedra o‘qituvchilari rahbarligida, mustaqil ish bajaradilar. Bunda ular qo‘shimcha adabiyotlarni o‘rganib hamda internet saytlaridan foydalanib referatlar va ilmiy dokladlar tayyorlaydilar, amaliy mashg‘ulot mavzusiga doir uy vazifalarini bajaradilar, ko‘rgazmali qurollar va slaydlar tayyorlaydilar.
Talaba mustaqil ishini tashkil etishda quyidagi shakllardan foydalanadi:
ayrim nazariy mavzularni o‘quv adabiyotlari yordamida mustaqil o‘zlashtirish;
berilgan mavzular bo‘yicha axborot (referat) tayyorlash;
nazariy bilimlarni amaliyotda qo‘llash;
maket, model va namunalar yaratish;
ilmiy maqola, anjumanga ma’ruza tayyorlash va h.k.
Bunda talabalar ma’ruzalarda olgan bilimlarini amaliy mashg‘ulotlarni bajarishlari bilan mustahkamlashi hamda matematik analizdagi ba’zi mavzularini tushunishi hamda ularga oid masalalarni echishlari kerak.
Mustaqil ish mavzularini o‘zlashtirish ta’lim jarayonida uzluksiz nazorat qilib boriladi.</td></tr>
<tr><td>Maslahatlar va topshiriqlarni topshirish vaqti</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Bilimlarni baholash usullari, mezonlari va tartibi:</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Baholash usullari</td><td>
O‘zlashtirish nazorati (1- va 2-semestrlar)
<table>
<tr><th>№</th><th>Reyting nazorat / shakli, maksimal ballari</th><th>1-JN</th><th>2-JN</th><th>3-JN (MI)</th><th>1-ON</th><th>2-ON</th><th>YN</th><th>Ballar yig‘indisi</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Maksimal ball</td><td>10</td><td>10</td><td>20</td><td>15</td><td>15</td><td>30</td><td rowspan="3">100</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Shakli: (test, yozma, og‘zaki)</td><td>yozma</td><td>yozma</td><td>yozma</td><td>yozma</td><td>yozma</td><td>yozma</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Muddati (haftalarda)</td><td>8</td><td>15</td><td>18</td><td>9</td><td>16</td><td>19-20</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Baholash mezonlari</td><td>
1) Har bir semestrda 3 ta joriy nazorat o‘tkaziladi. Barcha joriy nazoratlar yozma ravishda topshiriladi. 1- va 2-joriy nazoratlarda 5 tadan masala bo‘lib, har bir masalaga maksimal 2 ball qo‘yiladi. 3-joriy nazorat (mustaqil ish) ikki qisimga ajratib baholanadi:
a) talaba berelgan individual topshiriqlarni bajari-shiga qarab maksimal 10 balldan baho qo‘yiladi;
b) berilgan individual topshiriqdan ikkita ixtiyoriy masala yozma ravishda topshiriladi, har bir masala maksimal 5 balldan baholanadi.
2) Har semestrda 2 ta oraliq nazoratlar yozma ravishda o‘tkaziladi. Har bir oraliq nazoratda 5tadan savol bo‘lib, har bir savol maksimal 3 balldan baholanadi.
3) Yakuniy nazorat yozma topshiriladi. Yakuniy nazoratda 5 ta savol bo‘ladi va har biri maksimal 6 balldan baholanadi.
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Axborot resurs baza: O‘zMU axborot-resurs markazi, Matematika fakulteti axborot-resurs markazi</td></tr>
<tr><td>Asosoiy adabiyotlar</td><td>
1. Tao T. Analysis 1, 2. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. Aksoy A. G., Khamsi M. A. A problem book in real analysis. Springer, 2010.
3. Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A. Matematik analizdan ma’rizalar, I, II q. T. “Voris-nashriyot”, 2010.
4. Shoimqulov B. A., Tuychiyev T. T., Djumaboyev D. X. Matematik analizdan mustaqil ishlar. T. “O’zbekiston faylasuflari milliy jamiyati”, 2008.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, 1, 2, 3 т. М. «ФИЗМАТЛИТ», 2001.
</td></tr>
</table>

Qo‘shimcha adabiyotlar	6. **Садуллаев А., Мансуров Х. Т., Худойберганов Г., Ворисов А. К., Гуломов Р.** *Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами, 1, 2, 3 қ.* Т. “Ўқитувчи”, 1995, 1995, 2000. 7. **Шокирова Х. Р.** *Каррали ва эгри чизиқли интеграллар.* Т. “Ўзбекистон”, 1990. 8. **Демидович Б. П.** *Сборник задач по математическому анализу.* М. «Наука», 1997. 9. <u>**Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical Analysis I, II.* Springer-Verlag, Italia, Milan, 2008.</u> 10. **Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х.** *Математический анализ, 1, 2 т.* М. «Проспект», 2007. 11. **Зорич В.А.** *Математический анализ, 1, 2 т.* М. «Наука», 1981. 12. **Азларов Т. А., Мансуров Х. Т.** *Математик анализ, 1, 2 қ.* Т. “Ўқитувчи”, 1994, 1995. 13. **Кудряцев Л. Д. и др.** *Сборник задач по математическому анализу, 1, 2, 3 т.* М. «Наука», 2003.
Normativ-huquqiy hujjatlar	–
Ilmiy jurnallar	–
Davriy nashrlar	–
Statistik nashrlar	–
Internet saytlari	1. http://www.ziyonet.uz/ 2. http://www.allmath.ru/ 3. http://www.mcce.ru/ 4. http://lib.mexmat.ru/ 5. http://www.webmath.ru/ 6. http://www.exponenta.ru/

1-mavzu. To'plamlar. To'plamlar ustida amallar

1-ma'ruza

Reja

1^0. To'plam tushunchasi.

2^0. To'plamlar ustida amallar.

3^0. Matematik belgilar.

1^0. To'plam tushunchasi.

To'plam matematikaning boshlang'ich, ayni paytda muhim tushunchalaridan biri. Uni ixtiyoriy tabiatli narsalarning (predmetlarning) ma'lum belgilar bo'yicha birlashmasi (majmuasi) sifatida tushuniladi. Masalan, javondagi kitoblar to'plami, bir nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar to'plami, $x^2-5x+6=0$ tenglamaning ildizlari to'plami deyilishi mumkin.

To'plamni tashkil etgan narsalar **uning elementlari** deyiladi.

Matematikada to'plamlar bosh harflar bilan, ularning elementlari esa kichik xarflar bilan belgilanadi. Masalan, A, B, C – to'plamlar, a, b, c – to'plamning elementlari.

Ba'zan to'plamlar ularning elementlarini ko'rsatish bilan yoziladi:

$$\mathrm{A}=\{2,4,6,8,10,12\},$$
$$\mathrm{N}=\{1,2,3,\ldots,n,\ldots.\},$$
$$\mathrm{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}.$$

Agar a biror A to'plamning elementi bo'lsa, $a\in A$ kabi yoziladi va «a element A to'plamga tegishli» deb o'qiladi. Agar a shu to'plamga tegishli bo‘lmasa, uni $a \notin A$ kabi yoziladi va «a element A to‘plamga tegishli emas» deb o‘qiladi. Masalan, yuqoridagi A to‘plamda $10 \in A$, $15 \notin A$.

Agar A chekli sondagi elementlardan tashkil topgan bo‘lsa, u **chekli to‘plam**, aks holda **cheksiz to‘plam** deyiladi. Masalan, $A=\{2,4,6,8,10,12\}$ chekli to‘plam, bir nuqtadan o‘tuvchi barcha to‘g‘ri chiziqlar to‘plami esa cheksiz to‘plam bo‘ladi.

1-ta’rif.[3, Defenition 3.1.15, 39-bet] A va B to‘plamlari berilgan bo‘lib, A to‘plamning barcha elementlari B to‘plamga tegishli bo‘lsa, A **to‘plam** B **ning qismi (qismiy to‘plam)** deyiladi va

$$A \subset B \text{ (yoki } B \supset A)$$

kabi yoziladi.

A to‘plamning elementlari orasida biror xususiyatga (bu xususiyatni P bilan belgilaymiz) ega bo‘ladiganlari bo‘lishi mumkin. Bunday xususiyatli elementlardan tuzilgan to‘plam quyidagicha

$$\{x \in A \mid P\}$$

belgilanadi. Ravshanki,

$$\{x \in A \mid P\} \subset A$$

bo‘ladi.

Agar A to‘plam elementlari orasida P xususiyatli elementlar bo‘lmasa, u holda

$$\{x \in A \mid P\}$$

bitta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam bo‘lib, uni **bo‘sh to‘plam** deyiladi. Bo‘sh to‘plam $\varnothing$ kabi belgilanadi. Masalan, $x^2+x+1=0$ tenglamaning haqiqiy ildizlaridan iborat A bo‘sh to‘plam bo‘ladi:

$$\varnothing = \{x \in A \mid x^2+x+1=0\}.$$

Har qanday A to‘plam uchun

$$A \subset A\,,\ \varnothing \subset A$$

deb qaraladi.

Odatda, A to‘plamning barcha qismiy to‘plamlaridan iborat to‘plam $F(A)$ kabi belgilanadi. Masalan, $A=\{a,b,c\}$ to‘plam uchun

$$F(A)=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\},\varnothing\}$$

bo‘ladi.

2-ta’rif. [3, Defenition 3.1.15, 39-bet] A va B to‘plamlari berilgan bo‘lib,

$$A \subset B\ ,\ B \subset A$$

bo‘lsa, A va B bir biriga **teng to‘plamlar** deyiladi va

$$A = B$$

kabi yoziladi.

Demak, $A=B$ tenglik A va B to‘plamlarning bir xil elementlardan tashkil topganligini bildiradi.

2^0. To‘plamlar ustida amallar.

Ikki A va B to‘plamlar berilgan bo‘lsin.

3-ta’rif. [3, Axiom 3.4, 37-bet] A va B to‘plamlarning barcha elementlaridan tashkil topgan E to‘plam A va B **to‘plamlar yig‘indisi** (**birlashmasi**) deyiladi va $A \bigcup B$ kabi belgilanadi:

$$E = A \bigcup B\,.$$

Demak, bu holda $a \in A \bigcup B$ dan $a \in A$, yoki $a \in B$, yoki bir vaqtda $a \in A$, $a \in B$ bo‘lishi kelib chiqadi.

4-ta’rif. [3, Definition 3.1.23, 41-bet] A va B to‘plamlarning barcha umumiy elementlaridan tashkil topgan F to‘plam A va B **to‘plamlar ko‘paytmasi (kesishmasi)** deyiladi va $A \bigcap B$ kabi belgilanadi:

$$F = A \bigcap B\,.$$

Demak, bu holda $a \in A \bigcap B$ dan bir vaqtda $a \in A$, $a \in B$ bo‘lishi kelib chiqadi.

5-ta’rif. **[3, Definition 3.1.27, 42-bet]** A to‘plamning B to‘plamga tegishli bo‘lmagan barcha elementlaridan tashkil topgan G to‘plam A **to‘plamdan** B **to‘plamning ayirmasi** deyiladi va $A \setminus B$ kabi belgilanadi:

$$G = A \setminus B.$$

Demak, $a \in A \setminus B$ dan $a \in A$, $a \notin B$ bo‘lishi kelib chiqadi.

6-ta’rif. A to‘plamning B ga tegishli bo‘lmagan barcha elementlaridan va B to‘plamning A ga tegishli bo‘lmagan barcha elementlaridan tuzilgan to‘plam A va B **to‘plamlar-ning simmetrik ayirmasi** deyiladi va $A\Delta B$ kabi belgila-nadi:

$$A\Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A).$$

Demak, $a \in A\Delta B$ bo‘lishidan $a \in A$, $a \notin B$ yoki $a \in B$, $a \notin A$ bo‘lishi kelib chiqadi.

7-ta’rif. Aytaylik, $a \in A$, $a \in B$ bo‘lsin. Barcha tartiblangan (a,b) ko‘rinishidagi juftliklardan tuzilgan to‘plam A va B **to‘plamlarning dekart ko‘paytmasi** deyiladi va $A \times B$ kabi belgilanadi. Demak,

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Xususan, $A = B$ bo‘lganda $A \times A = A^2$ deb qaraladi.

8-ta’rif. Aytaylik, S va A to‘plamlar berilgan bo‘lib, $A \subset S$ bo‘lsin. Ushbu

$$S \setminus A$$

to‘plam A to‘plamni S ga **to‘ldiruvchi to‘plam** deyiladi va CA yoki $C_S A$ kabi belgilanadi:

$$CA = S \setminus A.$$

To‘plamlar ustida bajariladigan amallarning ba’zi xossalarini keltiramiz.

A, B va D to‘plamlari berilgan bo‘lsin.

1) $A\subset B$, $B\subset D$ bo‘lsa, $A\subset D$ bo‘ladi;

2) $A\bigcup A=A,\ A\bigcap A=A$ bo‘ladi;

3) $A\subset B$ bo‘lsa, $A\bigcup B=B,\ A\bigcap B=A$ bo‘ladi;

4) $A\bigcup B=B\bigcup A,\ A\bigcap B=B\bigcap A$ bo‘ladi;

5) $(A\bigcup B)\bigcup D=A\bigcup(B\bigcup D)$, $(A\bigcap B)\bigcap D=A\bigcap(B\bigcap D)$ bo‘ladi;

6) $A\subset S$ bo‘lsa, $A\bigcap CA=\varnothing$;

7) $C(A\bigcup B)=CA\bigcap CB$, bunda $A\subset S$, $B\subset S$;

8) $C(A\bigcap B)=CA\bigcup CB$, bunda $A\subset S$, $B\subset S$.

Bu xossalarning isboti yuqorida keltirilgan ta’rif-lardan kelib chiqadi.

1-misol. Ushbu

$$(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)=(A\bigcup B)\setminus(A\bigcap B) \tag{1}$$

tenglik isbotlansin.

◄ $a\in(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)$ bo‘lsin. U holda

$$a\in(A\setminus B):\ a\in A,\ \ a\notin B$$

yoki

$$a\in(B\setminus A):\ \ a\in B,\ \ a\notin A$$

bo‘ladi. Bundan esa

$$a\in(A\bigcup B),\ \ a\notin(A\bigcap B)$$

bo‘lib,

$$a\in(A\bigcup B)\setminus(A\bigcap B)$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak,

$$(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)\subset(A\bigcup B)\setminus(A\bigcap B). \tag{2}$$

Aytaylik, $a\in\left(A\bigcup B\right)\setminus\left(A\bigcap B\right)$ bo‘lsin.

U holda

$$a\in\left(A\bigcup B\right):\ a\in A \text{ ёки } a\in B,$$

$$a \notin (A \cap B): a \notin A, a \notin B \text{ ёки } a \in A, a \notin B \text{ ёки } a \notin A, a \in B$$

bo‘ladi.

Bundan esa

$$a \in A \setminus B \text{ ёки } a \in B \setminus A$$

bo‘lib,

$$a \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak,

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \qquad (3)$$

(2) va (3) munosabatlardan (1) tenglikning o‘rinli bo‘lishi topiladi. ►

To‘plamlar ustida bajariladigan amallarni bayon etishda to‘plamlarning qanday tabiatli elementlardan tuzilganligiga e’tibor qilinmadi.

Aslida, keltirilgan amallar biror universal to‘plam deb ataluvchi to‘plamning qismiy to‘plamlari ustida bajariladi deb qaraladi. Masalan, natural sonlar to‘plamlari ustida amallar bajariladigan bo‘lsa, universal to‘plam sifatida barcha natural sonlardan iborat N to‘plamni olish mumkin.

3^0. Matematik belgilar.

Matematikada tez-tez uchraydigan so‘z va so‘z birikmalari o‘rnida maxsus belgilar ishlatiladi. Ulardan muximlarini keltiramiz:

1) «agar ... bo‘lsa, u holda ... bo‘ladi» iborasi «$\Rightarrow$» belgi orqali yoziladi;

2) ikki iboraning ekvivalentligi ushbu «$\Leftrightarrow$» belgi orqali yoziladi;

3) «har qanday», «ixtiyoriy», «barchasi uchun» so‘zlari o‘rniga «$\forall$» belgi ishlatiladi;

4) «mavjudki», «topiladiki» so‘zlari o‘rniga «$\exists$» mavjudlik belgisi ishlatiladi.

Mashqlar

1. Ushbu

$$(A\bigcup B)\setminus D=(A\setminus D)\bigcup(B\setminus D)$$

tenglik isbotlansin.

2. Agar A va B chekli to‘plamlar bo‘lib, ularning elementlari soni mos ravishda $n(A)$, $n(B)$ bo‘lsa,

$$n(A\bigcup B)=n(A)+n(B)-n(A\bigcap B)$$

bo‘lishi isbotlansin.

3. Agar A chekli to‘plam bo‘lib, uning elementlarining soni n ga teng bo‘lsa, bu to‘plamning barcha qismiy to‘plamlari to‘plami $F(A)$ ning elementlari soni 2^n ga teng ekani isbotlansin.

Adabiyotlar

1. **Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma’ruzalar, I q.* T. “Voris-nashriyot”, 2010.

2. **Fixtengols G. M.** *Курс дифференциального и интегралного исчисление, 1 т.* М. «FIZMATLIT», 2001.

3. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014. [33-44 betlar]

Nazorat savollari

1. To‘plam deganda nimani tushunasiz?
2. Qism to‘plam nima? Misollarda tushuntiring.

3. Ikki to‘plamning yig‘indisi va ko‘paytmasi nima?
4. Ikki to‘plamning ayirmasi va simmetrik ayirmasi nima?
5. To‘plamlar ustida bajariladigan amallarning asosiy xossalarini keltiring.

Glossariy

To’plam – ixtiyoriy tabiatli narsalarning ma’lum belgilari bo’yicha birlashmasi.

Cheksiz to’plam – elementlari soni cheksiz bo’lgan to’plam cheksiz to’plam deyiladi.

Bo’sh to’plam – birorta ham elementga ega bo’lmagan to’plam bo`sh to`plam deyiladi.

Simmetrik ayirma – ikki to’plamning bir-biriga tegishli bo’lmagan elementlari to’plami.

Qarama qarshi sonlar – faqat ishorasi bilan farq qiladigan sonlar.

Natural sonlar to’plami –sanoqda ishlatiladigan sonlar.

Butun sonlar to’plami – natural sonlar va ularga qarama-qarshi sonlar hamda 0 sonidan tashkil topgan to’plam.

Keys banki

1-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: agar $A$ va $B$ chekli toplamlar bo`lib, ularning elementlari soni mos ravishda $n(A)$, $n(B)$ bo`lsa,

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

bo`lishi isbotlansin.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

1-amaliy mashg‘ulot

Na’muna uchun misollar yechimi

3 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\left(A\setminus B\right)\cup\left(B\setminus A\right)=\left(A\cup B\right)\setminus\left(A\cap B\right)$$

тенглик исботлансин.

◄ $a\in\left(A\setminus B\right)\cup\left(B\setminus A\right)$ бўлсин. У ҳолда

$$a\in A\setminus B \;\Rightarrow\; a\in A,\; a\overline{\in} B$$

ёки

$$a\in B\setminus A \;\Rightarrow\; a\in B,\; a\overline{\in} A$$

бўлиб, булардан $a\in A\cup B$, $a\overline{\in} A\cap B$ бўлиши келиб чиқади. Демак, $a\in\left(A\cup B\right)\setminus\left(A\cap B\right)$ ва

$$\left(A\setminus B\right)\cup\left(B\setminus A\right)\subset\left(A\cup B\right)\setminus\left(A\cap B\right) \qquad (3)$$

бўлади.

$a\in\left(A\cup B\right)\setminus\left(A\cap B\right)$ бўлсин. У ҳолда

$$a\in\left(A\cup B\right) \;\Rightarrow\; a\in A,\text{ ёки } a\in B,$$

$$a\overline{\in} A\cap B\Rightarrow\; a\overline{\in} A,\; a\overline{\in} B,\text{ ёки } a\in A, a\overline{\in} B \text{ ёки } a\overline{\in} A, a\in B$$

бўлиб, булардан $a\in A\setminus B$ ёки $a\in B\setminus A$ бўлиши келиб чиқади. Демак, $a\in\left(A\setminus B\right)\cup\left(B\setminus A\right)$ ва

$$\left(A\cup B\right)\setminus\left(A\cap B\right)\subset\left(A\setminus B\right)\cup\left(B\setminus A\right) \qquad \textbf{(4)}$$

бўлади. (3) ва (4) муносабатлардан топамиз:

$$\left(A\setminus B\right)\cup\left(B\setminus A\right)=\left(A\cup B\right)\setminus\left(A\cap B\right).$$ ►

Misollar

Ихтиёрий A,B,C,D тўпламлар учун қуйидаги муносабатлар исботлансин.

35. $\left(A\cup B\right)\cup C=A\cup\left(B\cup C\right)$.

36. $\left(A\cap B\right)\cap C=A\cap\left(B\cap C\right)$.

37. $\left(A\cup B\right)\cap C=\left(A\cap C\right)\cup\left(B\cap C\right)$.

38. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

39. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

40. $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) = A \cup B \cup C$.

41. $(A \cap C) \cup (B \cap D) \subset (A \cup B) \cap (C \cup D)$.

42. $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$.

43. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

44. $(A \cup B) \setminus C \subset A \cup (B \setminus C)$.

45. $(A \cup C) \setminus B \subset (A \setminus B) \cup C$.

46. $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.

47. $A \cap (A \cup B) = A$.

48. Агар $A \setminus B = C$ бўлса, $A = B \cup C$ нинг ўринли бўлиши келиб чиқадими?

49. Агар $A = B \cup C$ бўлса, $A \setminus B = C$ нинг ўринли бўлиши келиб чиқадими?

50. $(A \cup B) \setminus (A \cup C) \subset A \cup (B \setminus C)$.

51. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

52. $A \setminus (B \cup C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

53. Агар A ва B чекли тўпламлар бўлиб, уларнинг элементлари сони мос равишда $n(A)$, $n(B)$ бўлса,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

бўлиши исботлансин.

54. Агар A чекли тўплам бўлиб, унинг элементлари сони m га тенг бўлса, бу тўпламнинг барча қисмий тўпламлари тўпламининг элементлари сони

2^m та бўлиши исботлансин.

Test

№	Savol	to`g'ri javob	muqobil javob	muqobil javob
1.	Quyidagi to`plamlardan qaysilari bo`sh to`plam?	$\{x\in\mathbb{R}: x^2+1=0\};$	$\{x\in\mathbb{R}: \lvert x\rvert=3\};$	$\{x\in\mathbb{R}: x^3=1\};$
2.	Faqat butun sonlarni aniqlaydigan to`plamni ko`rsating	$\{x\in N: x^2-3x=0\};$	$\left\{x\in N: \left\lvert x+\frac{2}{x^3}\right\rvert=0\right\};$	$\{x\in N: x^2+3\sqrt{x-7}=0\};$
3.	Qanday to`plamga *bo`sh to`plam* deyiladi?	Birorta ham elementga ega bo`lmagan to`plamga;	Elementlari soni cheksiz bo`lgan to`plamga;	Elementlari soni chekli bo`lgan to`plamga;
4.	Qanday to`plamlarga *teng to`plamlar* deyiladi?	Ayni bir xil elementlardan tashkil topgan to`plamlarga;	Elementlari soni aynan teng bo`lgan to`plamlarga;	Chekli to`plamlarga;
5.	$A=\{a,b,c,d,e,f\}$ va $B=\{b,d,e,g,h\}$ to`plamlarning kesishmasi $A\cap B$ni toping.	$A\cap B=\{b,d,e\}$	$A\cap B=\{b,d,e,f\}$	$A\cap B=\{b,d,e,g\}$
6.	$A=\{x: -\frac{2}{3}\le x\le\frac{7}{4}\}$ va $B=\{x: -\frac{1}{4}\le x\le 2\}$ to`plamlarning kesishmasini toping.	$A\cap B=\{x: -\frac{1}{4}\le x\le\frac{7}{4}\}$	$A\cap B=\{x: -\frac{1}{4}\le x\le 2\}$	$A\cap B=\{x: -\frac{2}{3}\le x\le\frac{7}{4}\}$
7.	$A=\{x: -\frac{2}{3}\le x\le\frac{7}{4}\}$ va $B=\{x: -\frac{1}{4}\le x\le 2\}$ to`plamlarning birlashmasini toping.	$A\cup B=\{x: -\frac{2}{3}\le x\le 2\}$	$A\cup B=\{x: -\frac{2}{3}\le x\le -\frac{1}{4}\}$	$A\cup B=\{x: -\frac{1}{4}\le x\le 2\}$
8.	$A=\left\{x: -\frac{2}{3}\le x\le\frac{7}{4}\right\}$ va $B=\left\{x: -\frac{1}{4}\le x\le 2\right\}$ to`plamlar berilgan. $A\setminus B$ ni toping.	$A\setminus B=\left\{x: -\frac{2}{3}\le x\le -\frac{1}{4}\right\}$	$A\setminus B=\left\{x: -\frac{2}{3}\le x\le 2\right\}$	$A\setminus B=\{x: -\frac{1}{4}\le x\le 2\}$

9.	A to\`plamning $B$ to\`plamga tegishli bo\`lmagan elementlari to\`plami A va B to\`plamning ... deyiladi.	ayirmasi	simmetrik ayirmasi	yig'indisi
10.	$A\triangle B=?$	$(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$	$(A\setminus B)\cap(B\setminus A)$	$(A\setminus B)\setminus(B\setminus A)$

2-mavzu. Akslantirishlar va ularning turlari

2-Ma'ruza.

Reja

1^0. Akslantirish tushunchasi.

2^0. Akslantirishning turlari.

3^0. Ekvivalent to'plamlar. Sanoqli to'plamlar.

1^0. Akslantirish tushunchasi.

E va F to'plamlar berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. [3, Definition 3.3.1, 49-bet] Agar E to'plamdan olingan har bir x elementga biror f qoida yoki qonunga ko'ra F to'plamning bitta y elementi $(y \in F)$ mos qo'yilgan bo'lsa, E **to'plamni** F **to'plamga akslantirish berilgan** deyiladi va

$$f: E \to F \text{ yoki } x \xrightarrow{f} y, \quad (x \in E,\ y \in F)$$

kabi belgilanadi. Bunda E to'plam f akslantirishning **aniqlanish to'plami** deyiladi.

1-misol. Ushbu $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ va $N' = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ to'plamlar berilgan bo'lsin.

1) har bir natural n $(n \in N)$ songa $\frac{1}{n}$ $\left(\frac{1}{n} \in N'\right)$ sonni mos qo'ysak, unda

$$f: N \to N', \quad n \xrightarrow{f} \frac{1}{n}$$

akslantirish hosil bo'ladi. Uni $f(n) = \frac{1}{n}$ kabi ham yoziladi.

2) har bir natural son n $(n \in N)$ songa $\frac{1}{n^2}$ $\left(\frac{1}{n^2} \in N'\right)$ sonni mos qo'ysak, unda

$$\varphi: N \to N', \quad n \xrightarrow{\varphi} \frac{1}{n^2}$$

akslantirishga ega bo‘lamiz: $\varphi(n)=\dfrac{1}{n^2}$.

3) har bir natural n $(n\in N)$ songa 1 $(1\in N')$ sonini mos qo‘yish natijasida

$$g:N\to N',\ \ n\xrightarrow{g}1$$

akslantirish hosil bo‘ladi: $g(n)=1$.

Aytaylik,

$$f:E\to F$$

akslantirish berilgan bo‘lsin. $x\in E$ elementga mos qo‘yilgan $y\in F$ element x **ning aksi (obrazi)** deyiladi va $y=f(x)$ kabi belgilanadi.

Endi $y\in F$ elementni olaylik. E to‘plamning shunday x elementlarini qaraymizki, $f(x)=y$ bo‘lsin. Bunday $x\in E$ elementlar $y\in E$ ning **asli** (**proobrazi**) deyiladi va $f^{-1}(y)$ kabi belgilanadi:

$$f^{-1}(y)=\{x\in E\mid f(x)=y\}.$$

[Definition 3.4.1, 56-bet]Agar $A\subset E$ bo‘lsa, ushbu

$$\{f(x)\mid x\in A\}$$

to‘plam A **to‘plamning** F dagi **aksi** deyiladi va $f(A)$ kabi belgilanadi:

$$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}.$$

[Definition 3.4.4, 57-bet]Agar $B\subset F$ bo‘lsa, ushbu

$$\{x\in E\mid f(x)\in B\}$$

to‘plam B **to‘plamning** E dagi **asli** deyiladi va $f^{-1}(B)$ kabi belgilanadi:

$$f^{-1}(B)=\{x\in E\mid f(x)\in B\}.$$

2-misol. Faraz qilaylik, $N=\{1,2,3,\dots,n,\dots\}$ va $M\{-1,+1\}$ to‘plamlar berilgan bo‘lib, ushbu

$$f:N\to M$$

akslantirish quyidagi

$$f(n)=(-1)^n$$

ko‘rinishda bo‘lsin.

Ravshanki, $5\in N$ ning aksi $f(5)=-1$; $1\in M$ ning asli esa $f^{-1}(1)=\{2,\ 4,\ 6,\dots\}$ bo‘ladi. Shuningdek, $A=\{3,\ 4\}\subset N$ to‘plamning aksi $f(A)=\{-1,\ 1\}=M$, $B=\{-1\}\subset M$ to‘plamning asli esa

$$f^{-1}(B)=\{1,\ 3,\ 5,\dots\}$$

bo‘ladi.

Faraz qilaylik, A va B to‘plamlari F to‘plamning qismiy to‘plamlari bo‘lsin: $A\subset F$, $B\subset F$. Unda

$$f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(\mathrm{A})\cap f^{-1}(\mathrm{B}). \qquad (1)$$

bo‘ladi.

◀ Aytaylik, $x \in f^{-1}(A \cap B)$ bo‘lsin. Unda $f(x) \in A \cap B$ bo‘lib, $f(x) \in A$ va $f(x) \in B$ bo‘ladi. Keyingi munosabatlardan $x \in f^{-1}(A)$, $x \in f^{-1}(B)$ bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Bundan esa

$$f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \tag{2}$$

bo‘lishini topamiz.

Aytaylik, $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ bo‘lsin. Unda $x \in f^{-1}(A)$ va $x \in f^{-1}(B)$ bo‘lib, $f(x) \in A$, $f(x) \in B$ bo‘ladi. Natijasi $f(x) \in A \cap B$ bo‘lib, undan $x \in f^{-1}(A \cap B)$ bo‘lishini topamiz. Bu esa

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B) \tag{3}$$

bo‘lishini bildiradi.

(2) va (3) munosabatlardan (1) tenglikning o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi. ▶

Yuqoridagidek,

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$$
$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

tengliklarning o‘rinli bo‘lishi isbotlanadi.

2^0. Akslantirishning turlari.

Aytaylik,

$$f : E \to F \tag{4}$$

akslantirish berilgan bo‘lib, $f(E)$ esa E to‘plamning aksi bo‘lsin:

$$f(E) = \{ f(x) \mid x \in E \}.$$

2-ta’rif. Agar (4) akslantirishda

$$f(E) \subset F$$

bo‘lsa, (4) akslantirish E to‘plamni F to‘plamning **ichiga akslantirish** deyiladi.

Masalan,

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}, N' = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$$

to‘plamlari uchun ushbu

$$f : N \to N', \ n \xrightarrow{f} \frac{1}{3n}$$

akslantirish N to‘plamni N' to‘plamning ichiga akslantirish bo‘ladi.

3-ta’rif. [Definition 3.3.17, 53-bet] Agar (4) akslantirishda

$$f(E) = F$$

bo‘lsa, (4) akslantirish E to‘plamni F to‘plamning **ustiga akslantirish** (**syur'ektiv akslantirish**) deyiladi.

Masalan,

$$N=\{1,\ 2,3,\ldots\},\ M=\{-1,1\}$$

to'plamlari uchun

$$n\xrightarrow{f}(-1)^n$$

akslantirish N to'plamni M to'plamning ustiga akslantirish bo'ladi.

4-ta'rif. Agar (4) ustiga akslantirish bo'lib, bu akslantirish E to'plamning turli elementlarini F to'plamning turli elementlariga akslantirsa, (4) **in'ektiv akslantirish** deyiladi.

5-ta'rif. [Definition 3.3.14, 54-bet] Agar (4) ustiga akslantirish bo'lib, u in'ektiv akslantirsh ham bo'lsa, (4) **o'zaro bir qiymatli akslantirish (moslik)** deyiladi.

Masalan,

$$N=\{1,2,3,\ldots\},\ N'=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\right\}.$$

to'plamlar uchun ushbu

$$f:N\to N',\ n\xrightarrow{f}\frac{1}{n}.$$

akslantirish o'zaro bir qiymatli akslantirish bo'ladi.

6-ta'rif. $f:E\to F$ akslantirish o'zaro bir qiymatli akslantirish bo'lsin. F to'plamning har bir y, $(y\in F)$ elementiga E to'plamning bitta x elementini $(x\in E)$ mos qo'yadigan va

$$g(y)=g(f(x))=x.$$

munosabat bilan aniqlanadigan

$$g:F\to E$$

akslantirish $f:E\to F$ ga nisbatan **teskari akslantirish** deyiladi va f^{-1} kabi belgilanadi:

$$f^{-1}:F\to E.$$

Demak, $f:E\to F$ ga teskari akslantirish mavjud bo'lishi uchun:

a) f ustiga akslantirish,

b) F to'plamdan olingan har bir y elementning E to'plamdagi asli

$$f^{-1}(y)=f^{-1}(f(x))=x$$

yagona bo'lishi kerak.

3^0. Ekvivalent to'plamlar. Sanoqli to'plamlar.

Ko'p holda to'plamlarni ularning tashkil etgan elementlari soni bo'yicha o'zaro solishtirishga to'g'ri keladi. Chekli to'plamlar solishtirilganda bir to'plamning elementlari soni ikkinchisidan ko'p, yoki kam, yoki ularning elementlarining soni bir-biriga teng degan hulosaga kelinadi. Bu holda elementlari soni koʻp boʻlgan toʻplamni «quvvati» koʻproq deyish mumkin.

Cheksiz toʻplamlarni solishtirishda vaziyat boshqacharoq boʻladi. Cheksiz toʻplamlar ekvivalentlik tushunchasi yordamida solishtiriladi.

7-ta'rif. Agar $f: E \to F$ oʻzaro bir qiymatli akslantirish (moslik) boʻlsa, E va F **ekvivalent toʻplamlar** deyiladi va $E \sim F$ kabi belgilanadi.

Demak, E va F toʻplamlarning ekvivalentligi $E \sim F$ ularning elementlari oʻzaro bir qiymatli moslikda ekanligini bildiradi.

Masalan,

$$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}, \quad N_1 = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

toʻplamlar uchun

$$n \xrightarrow{f} 2n \,, \quad (n \in N, \ 2n \in N_1)$$

akslantirish oʻzaro bir qiymatli. Binobarin,

$$N \sim N_1$$

boʻladi. (Bu holda $n \leftrightarrow 2n$ kabi yoziladi).

Aytaylik A, B, D toʻplamlar berilgan boʻlsin. Unda

1) $A \sim A$,
2) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$,
3) $A \sim B \,,\, B \sim D \Rightarrow A \sim D$

boʻladi. Bu xossalarning isboti yuqorida keltirilgan ta'rifdan kelib chiqadi.

Ikki A va B toʻplamlari oʻzaro ekvivalent boʻlsa, ularni bir xil quvvatli toʻplamlar deb qaraladi.

Demak, quvvatni ekvivalent toʻplamlarning miqdoriy xarakteristikasi sifatida tushunish mumkin.

Chekli toʻplamlarning oʻzaro ekvivalentligi ularning tashkil etgan elementlarining sonini bir-biriga tengligini bildiradi.

Umuman, A va B chekli toʻplamlarning oʻzaro ekvivalent boʻlishi uchun ularning elementlari soni bir xil boʻlishi zarur va etarli:

$$A \sim B \Leftrightarrow n(A) = n(B),$$

bunda $n(G) - G$ toʻplamning elementlari soni.

8-ta'rif. Natural sonlar toʻplami N ga ekvivalent boʻlgan har qanday toʻplam **sanoqli toʻplam** deyiladi.

Masalan, ushbu

$$N_1 = \{2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots\},$$

$$N_2 = \{1, 8, 27, 64, \ldots, n^3, \ldots\},$$

$$N_3 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$$

toʻplamlar sanoqli toʻplamlar boʻladi, chunki

$$n \leftrightarrow 2n, \ N \sim N_1;$$

$$n \leftrightarrow n^3, \ N \sim N_2;$$

$$n \leftrightarrow \frac{1}{n}, \ N \sim N_3.$$

Natural sonlar to‘plami N ga ekvivalent bo‘lgan barcha to‘plamlar sanoqli to‘plamlar sinfini tashkil etadi. Bu sinf to‘plamlarining quvvati bir xil bo‘ladi.

Ravshanki,

$$N_1 \subset N, N_2 \subset N, N_3 \subset N$$

bo‘ladi. Ayni paytda, yuqorida ko‘rdikki,

$$N \sim N_1 , N \sim N_2 , N \sim N_3 .$$

Bunday vaziyat (to‘plamning qismi o‘ziga ekvivalent bo‘lishi) faqat cheksiz to‘plamlardagina sodir bo‘ladi.

Matematik analiz kursida tayin E va F to‘plamlar uchun $f:E \to F$ akslantirishlar va ularning xossalari o‘rganiladi.

Dastavval yuqoridagi to‘plamlar sifatida haqiqiy sonlar to‘plamini olamiz va uning xossalarini o‘rganamiz.

Mashqlar

1. Agar $A = \{a, b\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. bo‘lsa, A to‘plamning B to‘plamga akslantirishlari soni 9 ga teng bo‘lishi isbotlansin.

2. Aytaylik, A sanoqli to‘plam bo‘lib, $x \notin A$ bo‘lsin. U holda $A \bigcup \{x\} \sim A$ bo‘lishi isbotlansin.

Adabiyotlar

1. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma’rizalar, I q.* T. “Voris-nashriyot”, 2010.
2. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.
3. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014. [49-61 betlar]

Nazorat savollari.

1. Akslantirish nima?
2. To`plam elementining hamda to`plamning aksi va asli deganda nimani tushunasiz?
3. Akslantirishlarning qanday turlari mavjud?
4. O`zaro bir qiymatli akslantirish nima?
5. Qanaday to`plamlar ekvivalent to`plamlar deyiladi?
6. Sanoqli to`plam nima?

Glossariy

Akslantirish – Agar E to‘plamdan olingan har bir x elementga biror f qoida yoki qonunga ko‘ra F to‘plamning bitta y elementi $(y \in F)$ mos qo‘yilgan bo‘lsa, E **to‘plamni** F **to‘plamga akslantirish berilgan** deyiladi.

To`plmning aksi – Agar $A \subset E$ bo‘lsa, ushbu

$$\{f(x) \mid x \in A\}$$

to‘plam A **to‘plamning** F dagi **aksi** deyiladi.

To`plmning asli – Agar $B \subset F$ bo‘lsa, ushbu

$$\{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

to‘plam B **to‘plamning** E **dagi asli** deyiladi.

Ichiga akslantirish – Agar $f : E \to F$ akslantirishda

$$f(E) \subset F$$

bo‘lsa, bu akslantirish E to‘plamni F to‘plamning **ichiga akslantirish** deyiladi.

Ustiga akslantirish (**syur’ektiv akslantirish**) – Agar $f : E \to F$ akslantirishda

$$f(E) = F$$

bo‘lsa, bu akslantirish E to‘plamni F to‘plamning **ustiga akslantirish** (**syur’ektiv akslantirish**) deyiladi.

In’ektiv akslantirish – Agar $f : E \to F$ ustiga akslantirish bo‘lib, bu akslantirish E to‘plamning turli elementlarini F to‘plamning turli elementlariga akslantirsa, u **in’ektiv akslantirish** deyiladi.

O‘zaro bir qiymatli akslantirish (moslik) – Agar $f : E \to F$ ustiga akslantirish bo‘lib, u in’ektiv akslantirsh ham bo‘lsa, u **o‘zaro bir qiymatli akslantirish (moslik)** deyiladi.

Ekvivalent to‘plamlar – Agar $f : E \to F$ o‘zaro bir qiymatli akslantirish (moslik) bo‘lsa, E va F **ekvivalent to‘plamlar** deyiladi.

Sanoqli to‘plam – Natural sonlar to‘plami N ga ekvivalent bo‘lgan har qanday to‘plam **sanoqli to‘plam** deyiladi

Keys banki

2-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: Aytaylik, A sanoqli to‘plam bo‘lib, $x \notin A$ bo‘lsin. U holda $A \cup \{x\} \sim A$ bo‘lishi isbotlansin.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

2-amaliy mashg'ulot

1. $\mathbb{N}$ natural sonlar to'plamida $f(n)=3n$ akslantirish berilgan bo'lsin. $f(n):\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ akslantirish qanday akslantirish bo'ladi.

   Yechish: Ikkita $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ sonlarni qaraylik. $n_1\neq n_2$ ekanligidan $f(n_1)\neq f(n_2)$ ekanligi kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, $n_1\neq n_2$ bo'lsa, $3n_1\neq 3n_2$. Demak, $f(n)$ akslantirish bir qiymatli akslantirish ekan ya'ni, $f(n)$ akslantirish ineksiya . Hisoblashlardan ko'rinadiki, $\{f(\mathbb{N})\}\subset\mathbb{N}$, ammo $\mathbb{N}\not\subset\{f(\mathbb{N})\}$ shuning uchun bu akslantirish sureksiya emas.
2. $\mathbb{N}$ natural sonlar to'plamida $f(n)=n^2$ akslantirish berilgan bo'lsin. $f(n):\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ akslantirish qanday akslantirish bo'ladi.
3. $\mathbb{N}$ natural sonlar to'plamida $f(n)=n^2+2n$ akslantirish berilgan bo'lsin. $f(n):\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ akslantirish qanday akslantirish bo'ladi.
4. $\mathbb{N}$ natural sonlar to'plamida $f(n)=2n$ akslantirish berilgan bo'lsin. $f(n):\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ akslantirish qanday akslantirish bo'ladi.
5. $A=\{x\in\mathbb{R}:|x|\leq 1\}$ va $B=\{x\in\mathbb{R}:0\leq x\leq 1\}$ to'plamlar berilgan bo'lsin. $f(x)=x^2$ ya'ni $f(x):A\to B$ akslantirish qanaqa akslantirish bo'ladi.
6. $A=\{x\in\mathbb{R}:|x|<1\}$ to'plam berilgan bo'lsin. $f(x)=x^3$ ya'ni $f(x):A\to A$ akslantirish qanaqa akslantirish bo'ladi.
7. $\mathbb{R}$ haqiqiy sonlar to'plamida $f(x)=\dfrac{2arctgx}{\pi}$ akslantirish berilgan bo'lsin. $f(x):\mathbb{R}\to B$ bo'lsa, B to'plamni toping.
8. $A=\{x\in\mathbb{R}:|x|<1\}$ to'plamda $f(x)=tg\dfrac{\pi x}{2}$ akslantirish berilgan bo'lsin. $f(x):A\to B$ bo'lsa, B to'plamni toping.
9. $f(x)=\arcsin x$ akslantirish $A=\{x\in\mathbb{R}:|x|\leq 1\}$ to'plamni qaysi to'plamga akslantirishini toping.
10. $f(x)=\sin x$ akslantirish $\mathbb{R}$ haqiqiy sonlar to'plamini qaysi to'plamga akslantirishini toping.
11. $f(x)=x^3$ akslantirish $B=\{x\in\mathbb{R}:3\leq x^2\leq 9\}$ to'plamni qaysi to'plamga akslantirishini toping.
12. $f(x)=\sin x$ akslantirish $A=\{x\in\mathbb{R}:0<x<10\}$ to'plamni qaysi

to’plamga akslantirishini toping.

Test

№	Savol	to`g’ri javob	muqobil javob	muqobil javob
1.	$x=5$ nuqtaning $f(x)=\frac{x^2+5}{30}+29$ akslantirish orqali aksini toping.	30	25	35
2.	$x=\pi$ nuqtaning $f(x)=\sin x$ akslantirish orqali aksini toping	0	1	-1
3.	$\frac{1}{2}$ sonning $f(x)=\cos x$ akslantishdagi asli(proobrazi)ni toping	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{\pi}{6}$
4.	1 sonning $f(x)=e^{\frac{x}{1-800x^3}}$ akslantishdagi asli(proobrazi)ni toping	0	1	2
5.	$\frac{1}{2}$ sonning $f(x)=2^x$ akslantish orqali proobrazini toping	-1	1	2
6.	Inektiv akslantirishni ko’rsating	$f(x)=4^x$	$f(x)=x^2$	$f(x)=\sin x$
7.	$x=0$ nuqtaning $f(x)=\sin\frac{x}{1+88\sqrt{x}}$ akslantirish orqali aksini toping	0	1	-1
8.	$N=\{1, 2, 3, ...\}$ va $M=\{-1, 1\}$ to`plamlar berilgan. $N$ ni $M$ ga syur’ektiv akslantiruvchi akslantirishni ko`rsating.	$n\to(-1)^n$	$n\to(-1)^{2n}$	$n\to(-1)^{2n+1}$
9.	$N=\{1, 2, 3, ...\}$ va $M=\{-1, 1\}$ to`plamlar berilgan. $N$ ni $M$ ning ichiga akslantiruvchi akslantirishni ko`rsating.	$n\to(-1)^{2n}$	$n\to(-1)^n$	$n\to\frac{1}{n}$
10.	$N=\{1, 2, 3, ...\}$ va $M=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\}$ to`plamlar berilgan. $N$ ni $M$ ga o`zaro bir qiymatli akslantiruvchi akslantirishni ko`rsating.	$n\to\frac{1}{n}$	$n\to\frac{1}{n^2}$	$n\to\frac{1}{2n}$

3-mavzu. Haqiqiy sonlar

3-Ma'ruza

Reja

1. Ratsional sonlar va cheksiz davriy o'nli kasrlar.

3. Haqiqiy son tushunchasi.

Son tushunchasi uzoq o'tmishdan ma'lum. Odamlar sanash taqozosi bilan dastlab 1, 2, 3, ... – natural sonlarni qo'llaganlar. So'ngra manfiy son, ratsional son va nihoyat, haqiqiy son tushunchasi kiritilgan va o'rganilgan.

Biz o'quvchiga o'rta maktab, kollej va litseylarda matematika kursidan natural, butun, ratsional sonlarni, ular ustida bajariladigan amallarni, amallarning xossala'rini, shuningdek to'g'ri chiziqda (sonlar o'qida) geometrik ifodalanishini ma'lum deb hisoblaymiz.

Haqiqiy sonlarning matematik analiz kursida muhimligini e'tiborga olib, ular haqidagi ma'lumotlarni talab darajasida bayon etamiz.

1. Ratsional sonlar va cheksiz davriy o'nli kasrlar.

Ta'rif. [3, Definition 4.2.1, 82-bet] $\frac{a}{b}$ qisqarmas kasr ko`rinishda tasvirlash mumkin bo`lgan sonlar ratsional sonlar deyiladi. Bunda a,b – butun sonlar va $b \neq 0$.

Faraz qilaylik, $\frac{p}{q}$ biror musbat ratsional son bo'lsin. Bo'lish qoidasidan foydalanib p butun sonni q ga bo'lamiz. Agar p ni q ga bo'lish jarayonida biror qadamdan keyin qoldiq nolga teng bo'lsa, u holda bo'lish jarayon to'xtab, $\frac{p}{q}$ kasr o'nli kasrga aylanadi. Odatda, bunday o'nli kasr chekli o'nli kasr deyiladi. Masalan, $\frac{59}{40}$ kasrda 59 ni 40 ga bo'lib, uni 1,475 bo'lishini topamiz:

$$\frac{59}{40} = 1{,}475.$$

Agar p ni q ga bo'lish jarayoni cheksiz davom etsa, ma'lum qadamdan keyin yuqorida aytilgan qoldiqlardan biri yana bir marta uchraydi, so'ng undan oldingi raqamlar mos tartibda takrorlanadi.

Odatda bunday kasr cheksiz davriy o‘nli kasr deyiladi. Takrorlanadigan raqamlar (raqamlar birlashmasi) o‘nli kasrning davri bo‘ladi.

Masalan, $\frac{1}{3}$ kasrda 1 ni 3 ga bo‘lib, 0,333... bo‘lishini topamiz;

$$\frac{1}{3}=0{,}333\ldots$$

Ushbu

$$0{,}333\ldots,\ \ 1{,}4777\ldots,\ \ 2{,}131313\ldots$$

kasrlar cheksiz davriy o‘nli kasrlardir. Ularning davri mos ravishda 3, 7, 13 bo‘ladi va bu cheksiz davriy o‘nli kasrlar quyidagicha

$$0{,}(3),\ \ 1{,}4(7),\ \ 2{,}(13)$$

yoziladi;

$$0{,}(3)=0{,}333\ldots$$

$$1{,}4(7)=1{,}4777\ldots$$

$$2{,}(13)=2{,}131313\ldots\ .$$

Shuni ta’kidlaymizki, davri 9 ga teng bo‘lgan cheksiz davriy o‘nli kasrni chekli o‘nli kasr qilib yoziladi.

Masalan,

$$0{,}4999\ldots=0{,}4(9)=0{,}5,$$

$$2{,}71999\ldots=2{,}71(9)=2{,}72.$$

Har qanday chekli o‘nli kasrni nollar bilan davom ettirib cheksiz davriy o‘nli kasr ko‘rinishida yozish mumkin.

Masalan,

$$1{,}4=1{,}4000\ldots=1{,}4(0)$$

$$0{,}75=0{,}75000\ldots=0{,}75(0).$$

Demak, har qanday $\frac{p}{q}$ ratsional son cheksiz davriy o‘nli kasr ko‘rinishida ifodalanadi. Aksincha, har qanday cheksiz davriy o‘nli kasrni $\frac{p}{q}$ ko‘rinishida yozish mumkin.

Masalan, ushbu

$$0{,}(3)=0{,}333\ldots,\ \ 7{,}31(06)=7{,}31060606\ldots$$

cheksiz davriy o‘nli kasrlarni qaraylik. Avvalo ularni

$$0{,}(3)=0+\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\ldots,$$

$$7{,}31(06)=7+\frac{3}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{6}{10^4}+\frac{6}{10^6}+\ldots$$

ko‘rinishda yozib, so‘ng cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig‘indisi formulasidan foydalanib topamiz:

$$0,(3)=0,333\ldots=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{1}{3}\ ,$$

$$7,31(06)=7,31060606\ldots=\frac{731}{100}+\frac{\frac{1}{10^4}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{731}{100}+\frac{1}{100}\cdot\frac{6}{99}=$$

$$=\frac{1}{100}\left(731+\frac{2}{33}\right)=\frac{965}{132}.$$

Demak, ixtiyoriy ratsional son cheksiz davriy o‘nli kasr orqali va aksincha, ixtiyoriy cheksiz davriy o‘nli kasr ratsional son orqali ifodalanadi.

2. Haqiqiy son tushunchasi.

Cheksiz davriy bo‘lmagan o‘nli kasrlar ham bo‘ladi. Bu kesmalarni o‘lchash jarayonida yuzaga kelishini ko‘rsatamiz.

Faraz qilaylik, biror J kesma hamda o‘lchov birligi, masalan metr berilgan bo‘lsin. J kesmaning uzunligini hisoblash talab etilsin.

Aytaylik, 1 metr J kesmada 5 marta butun joylashib, kesmaning J_1 qismi ortib qolsin. Ravshanki J_1 ning uzunligi 1 metrdan kam bo‘ladi. Bu holda J kesmaning uzunligini taxminan 5 m. ga teng deb olish mumkin:

$$J \text{ uzunligi } \approx 5 \text{ m.}$$

Agar bu aniqlik etarli bo‘lmasa, o‘lchov birligining $\frac{1}{10}$ qismini, ya’ni 1 dm. ni olib, uni J_1 kesmaga joylash-tiramiz. Aytaylik, 1 dm. J_1 kesmada 7 marta butunlay joylashib, J_1 kesmaning J_2 qismi ortib qolsin. Bunda J_2 ning uzunligi 1 dm. dan kichik bo‘ladi. Bu holda J kesmaning uzunligi taxminan 5,7 m ga teng deb olinishi mumkin:

$$J \text{ uzunligi } \approx 5,7 \text{ m.}$$

Bu jarayonni davom ettira borish natijasida ikki holga duch kelamiz:

1) biror qadamdan keyin, masalan $n+1$ qadamdan keyin o‘lchov birligining $\frac{1}{10^n}$ qismi J_n kesmaga α_n marta butunlay joylashadi. Bu holda o‘lchov jarayoni to‘xtatilib,

$$J \text{ uzunligi } =5,\underbrace{7\ldots\alpha_n}_{n\,\text{та рақам}}.$$

bo‘lishi topiladi.

2) o‘lcham jarayoni to‘xtovsiz davom (cheksiz davom) etadi. Bu holda J

kesmaning uzunligining aniq qiymati deb ushbu

$$5{,}7..\alpha_n...$$

cheksiz o‘nli kasr olinadi:

$$J \text{ uzunligi } = 5{,}7..\alpha_n...$$

Aytaylik, to‘g‘ri chiziqda biror O nuqta (koordinata boshi) hamda o‘lchov birligi tayinlangan bo‘lsin. U holda O nuqtadan o‘ngda joylashgan har bir P nuqtaga, OP kesmani o‘lchash natijasida hosil bo‘lgan ushbu $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2..\alpha_n...$ cheksiz o‘nli kasrni mos qo‘yish mumkin. Bunda

$$\alpha_0 \in N\bigcup\{0\},\ \alpha_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ n \geq 1.$$

Bu moslik o‘zaro bir qiymatli moslik bo‘ladi. Ravshanki, yuqoridagi cheksiz o‘nli kasrlar orasida cheksiz davriy o‘nli kasrlar bo‘lib, ular manfiy bo‘lmagan ratsional sonlar bo‘ladi. Qolgan kasrlar esa ratsional sonlar bo‘lmaydi.

1-ta’rif. Ushbu

$$a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2..\alpha_n.... ,$$

ko‘rinishidagi cheksiz o‘nli kasr **manfiy bo‘lmagan haqiqiy son** deyiladi, bunda $\alpha_0 \in N\bigcup\{0\}$, $\alpha_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, n \geq 1$.

Agar $\exists\, n \geq 0; \alpha_n > 0$ bo‘lsa, u **musbat haqiqiy son** deyiladi.

Manfiy haqiqiy sonning «–» ishora bilan olingani musbat haqiqiy son sifatida ta’riflanadi.

Barcha haqiqiy sonlardan iborat to‘plam $\mathbb{R}$ harfi bilan belgilanadi.

Barcha natural sonlar to‘plami N, ratsional sonlar to‘plami Q, haqiqiy sonlar to‘plami R uchun $N \subset Q \subset R$ bo‘ladi.

2-ta’rif. Ushbu

$$R \setminus Q$$

to‘plam elementi (son) **irratsional son** deyiladi.

Biz yuqorida, davri «9» ga teng bo‘lgan cheksiz davriy o‘nli kasrni chekli o‘nli kasr qilib olinishini aytgan edik. Buning oqibatida bitta son ikki ko‘rinishga, masalan, $\frac{1}{2}$ soni

$$\frac{1}{2} = 0{,}5000...$$

$$\frac{1}{2} = 0{,}4999...$$

ko‘rinishlarga ega bo‘lib qoladi.

Umuman, $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n\ \ (\alpha_n \neq 0)$ ratsional son ushbu,

1) $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_{n-1}\ \ (\alpha_n - 1)999...,$

2) $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,...\alpha_n 000...,$ ikki ko‘rinishda yozilishi mumkin. Haqiqiy sonlarni solishtirishda ratsional sonning 1)- ko‘rinishidan foydalanamiz.

Ikkita manfiy bo‘lmagan

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2..\alpha_n.... ,$$
$$b = \beta_0, \beta_1\beta_2...\beta_n....$$

haqiqiy sonlar berilgan bo‘lsin.

3-ta’rif. Agar $\forall n \geq 0$ da $\alpha_n = \beta_n$,ya’ni

$$\alpha_0 = \beta_0,\ \alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2, ..., \alpha_n = \beta_n, ...$$

bo‘lsa, a **va** b **sonlar teng** deyiladi va $a = b$ kabi yoziladi.

4-ta’rif. Agar

$$\alpha_0 = \beta_0,\ \alpha_1 = \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2, ..., \alpha_n = \beta_n, ...$$

tengliklarning hech bo‘lmaganda bittasi bajarilmasa va birinchi bajarilmagan tenglik $n = k$ da sodir bo‘lsa, u holda:

$\alpha_k > \beta_k$ bo‘lganda a **soni** b **sonidan katta** deyiladi va $a > b$ kabi belgilanadi.

$\alpha_k < \beta_k$ bo‘lganda a **soni** b **sonidan kichik** deyiladi va $a < b$ kabi belgilanadi.

Aytaylik, to‘g‘ri chiziq, unda tayin olingan O nuqta (koordinata boshi) va o‘lchov birligi berilgan bo‘lsin.

Haqiqiy sonlar to‘plami R bilan to‘g‘ri chiziq nuqtalari orasidagi bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin:

O nuqtadan o‘ngda joylashgan P nuqtaga OP kesmaning uzunligiga teng x soni mos qo‘yiladi (x son P **nuqtaning koordinatasi** deyiladi);

O nuqtadan chapda joylashgan Q nuqtaga QO kesmaning uzunligiga teng x sonining minus ishorasi bilan olingan $-x$ soni mos qo‘yiladi;

O nuqtaga nol soni mos qo‘yiladi.

Arximed aksiomasi. Ixtiyoriy chekli haqiqiy a soni uchun shunday natural m soni topiladiki,

$$m > a$$

bo‘ladi.

◄ Aytaylik,

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2..\alpha_n... > 0,$$

bo‘lsin. $m = \alpha_0 + 1$, $m \in N$ deb olinsa, unda 3-ta’rifga binoan $a < m$ bo‘ladi ►

Kurs davomida tez-tez uchrab turadigan haqiqiy sonlar to‘plamlarini keltiramiz.

Aytaylik, $a \in R, b \in R, a < b$ bo‘lsin:

$[a,b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$ – segment deyiladi,

$(a,b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$ – interval deyiladi,

$[a,b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$ – yarim interval deyiladi,

$(a,b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$ – yarim interval. deyiladi.

Bunda a va b sonlar $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ larning chegaralari deyiladi.

SHuningdek,

$$\left[a,+\infty\right)=\{x\in R\,|\,x\geq a\},$$
$$\left(-\infty,a\right)=\{x\in R\,|\,x<a\},$$
$$\left(-\infty,\infty\right)=R$$

deb qaraymiz.

Faraz qilaylik, a va b ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo‘lib, $a<b$ bo‘lsin. U holda

$$(a,b)\neq\varnothing$$

bo‘ladi.

◀ Haqiqatdan ham,

$$a=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2..\alpha_n...\geq 0$$
$$b=\beta_0,\beta_1\beta_2...\beta_n....$$

bo‘lib, $m\geq 0$ uchun

$$\alpha_0=\beta_0,\alpha_1=\beta_1,..\alpha_{m-1}=\beta_{m-1}\ \text{ va }\ \alpha_m<\beta_m$$

bo‘lsin. Agar k natural son m dan katta sonlar ichida eng kichigi bo‘lsa, $(\alpha_k<9)$ unda

$$r=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2..\alpha_m\alpha_{m+1}..(\alpha_k+1)$$

ratsional son uchun $a<r<b$ bo‘ladi. Demak, $(a,b)\neq\varnothing$ ▶

Mashqlar

1. Ushbu $x^2=3$ tenglikni qanoatlantiruvchi ratsional sonning mavjud emasligi isbotlansin.
2. Agar $r\in Q,\alpha\in R\setminus Q$ bo‘lsa, $\alpha+r\in R\setminus Q$ bo‘lishi ko‘rsatilsin.
3. $\forall a\in R,\forall b\in R,\forall c\in R$ sonlari uchun

$$a>b,b>c\Rightarrow a>c$$

bo‘lishi isbotlansin.

Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014. [3, 81–90, 96–110]
2. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma’rizalar, I q.* T. “Voris-nashriyot”, 2010.
3. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.

Nazorat savollari

1. Ratsional son nima?
2. Cheksiz davriy va cheksiz davriy bo`lmagan davriy o`nli kasrlar nima?
3. Haqiqiy son deganda nimani tushunasiz?
4. Arximed aksiomasini ayting.

5. Tez-tez uchrab turadigan haqiqiy sonlar to‘plamlarini keltiring va ularni izohlab tushuntiring.

Glossariy

Ratsional son – $\frac{a}{b}$ qisqarmas kasr ko`rinishda tasvirlash mumkin bo`lgan sonlar ratsional sonlar deyiladi. Bunda a,b – butun sonlar va $b \neq 0$.
Manfiy bo‘lmagan haqiqiy son – ushbu $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2..\alpha_n....$, ko‘rinishidagi cheksiz o‘nli kasr **manfiy bo‘lmagan haqiqiy son** deyiladi, bunda $\alpha_0 \in N \bigcup \{0\}$, $\alpha_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, n \geq 1$.
Irratsional son – Ushbu $\mathbb{R} \setminus Q$ to‘plam elementi (son) **irratsional son** deyiladi.
Arximed aksiomasi – Ixtiyoriy chekli haqiqiy a soni uchun shunday natural m soni topiladiki, $m > a$ **bo‘ladi.**

Keys banki

3-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: Ushbu $x^2 = 3$ tenglikni qanoatlantiruvchi ratsional sonning mavjud emasligi isbotlansin.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

3-amaliy mashg'ulot

Ma'lumki, N - barcha natural sonlar to'plamini, Z - barcha butun sonlar to'plamini, Q - barcha ratsional sonlar to'plamini ifodalaydi:

$$N=\{1,2,3,...n,...\},$$

$$Z=\{...,-2,-1,0,1,2,...\},$$

$$Q=\left\{r:r=\frac{p}{q},\ \ p\in Z,\ \ q=N\right\}.$$

Cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasr bilan ifodalanadigan son irratsional son deyiladi. Uni $\frac{p}{q}$ $\left(p\in Z,\ \ q\in N\right)$ ko'rinishida yozib bo'lmaydi.

Ratsional va irratsional sonlar umumiy nom bilan haqiqiy son deyiladi. Barcha haqiqiy sonlar to'plami R harfi bilan belgilanadi.

1 – m i s o l . Agar α va β irratsional son bo'lsa, $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ sonlar irratsional bo'ladimi?

Yechim. Faraz qilaylik $\alpha=\sqrt{2}$ va $\beta=1-\sqrt{2}$ bo`lsin, u holda $\alpha+\beta=1$ bo`ladi. Xuddi shunday, $\alpha=\sqrt{2}$ va $\beta=-1+\sqrt{2}$ bo`lsin, u holda $\alpha-\beta=1$ bo`ladi. Demak, agar α va β irratsional son bo'lsa, $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ sonlar irratsional bo'lishi shart emas.

1. Kvadrati 3 ga teng bo'lgan ratsional sonning mavjud emasligi isbotlansin.

2. Agar r - ratsional son, α - irratsional son bo'lsa, $\alpha+r$ ning irratsional son bo'lishi isbotlansin.

3. Agar α va β irratsional son bo'lsa, $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ sonlar irratsional bo'ladimi?

4. Agar α va β irratsional son bo‘lib, $\alpha+\beta$ esa ratsional son bo‘lsa, $\alpha-\beta$ va $\alpha+2\beta$ sonlarning irratsional bo‘lishi isbotlansin.

5. Ushbu

$$\alpha=\sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n}}} \qquad (n\in N,\ \ n\geq 2)$$

sonning irratsional bo‘lishi isbotlansin.

6. Ushbu

$$\log 2,\ \ \log_2 3$$

sonlarning irratsional son bo‘lishi isbotlansin.

Quyidagi to‘plamlar chegaralanganlikka tekshirilsin:

7. $E=\left\{x=1-n^2-6n:\ \ n\in N\right\}$.

8. $E=\left\{x=\dfrac{n}{1+n^2}:\ \ n\in N\right\}$.

9. $E=\left\{x=\dfrac{(-1)^n\cdot n+10}{\sqrt{n^2+1}}:\ \ n\in N\right\}$.

10. $E=\left\{x=\dfrac{n}{a^n}:\ \ n\in N,\ \ a>1\right\}$.

11. $E=\left\{x=\left[1+(-1)^n\right]\cdot n+\dfrac{1-(-1)^n}{n}:\ \ n\in N\right\}$.

12. $x\in R$ sonning absolyut qiymati $|x|$ quyidagicha ta’riflanadi:

$$|x| = \begin{cases} x, & агар \ \ x \geq 0 \\ -x, & агар \ \ x < 0 \end{cases}$$

Ixtiyoriy x haqiqiy son uchun

$$|x| \geq 0, \qquad |x| = |-x|, \qquad -|x| \leq x \leq |x|$$

bo‘lishi isbotlansin.

13. Ixtiyoriy x va y haqiqiy sonlari uchun

1) $|x+y| \leq |x| + |y|$,

2) $\left||x| - |y|\right| \leq |x-y|$,

3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

bo‘lishi isbotlansin.

14. Ixtiyoriy x va y haqiqiy sonlari ushbu

$$|x \cdot y| \leq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

tengsizlikni qanoatlantirishi isbotlansin.

15. Ushbu

$$E = \{x: \ |x| < a, \ \ a > 0\},$$

$$F = \{x: \ -a < x < a, \ \ a > 0\}$$

to‘plamlarning o‘zaro tengligi isbotlansin.

16. Ushbu

$$E=\{x:\ |x|>a\},$$

$$F=\{x:\ x>a,\ \ x<-a\}$$

to‘plamlarning tengligi isbotlansin.

Quyidagi tengsizliklarning echimlar to‘plami topilsin:

1. $|3x-1|\le|2x-1|+|x|$

2. $|x-2|<3$

3. $|x+3|>2$

4. $|x|<x+1$

5. $\left|\dfrac{x}{1+x}\right|>\dfrac{x}{x+1}$

6. $|x^2-5|>2$

7. $|x^2-2x-3|>x^2-2x-3$

8. $|x+3|-|x+1|<2$

9. $|x^2-2x|>x^2-|2x|$

10. $|x+2|+|x-2|\ge 12$

11. $|x-4|+|x+4|\le 10$

Quyidagi tenglamalarning echimlar to‘plami topilsin:

1. $|2x+3|=x^2$.

2. $|\sin x|=\sin x+2$.

3. $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|=\dfrac{x-1}{x+1}$.

4. $|x^2-5x+6|=-(x^2-5x+6)$.

5. $|x|=x^2-6$.

6. $|(x^2+2x+5)+(x-5)|=|x^2+2x+5|+|x-5|$.

7. $|(x^4-4)-(x^2+2)|=|x^4-4|-|x^2+2|$.

Test

№	Savol	to`g'ri javob	muqobil javob	muqobil javob	muqobil javob
1.	$\frac{a}{b}$ qisqarmas kasr ko`rinishda tasvirlash mumkin bo`lgan sonlar ... sonlar deyiladi.	ratsional	irratsional	butun	natural
2.	Irratsional sonni ko'rsating	$\sqrt{2}$	2,2(3322)	$297\frac{1}{2}$	2,5
3.	Ratsional sonni ko'rsating	$\frac{1}{2}$	π	e	$\sqrt{2}$
4.	Butun sonni ko'rsating	2	$\frac{100}{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
5.	Ratsional sonni ko'rsating	$2,88(3)$	π	e	$\sqrt{\frac{5}{2}}$
6.	Butun sonni ko'rsating	$\frac{234}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{11}$
7.	Irratsional sonni ko'rsating	$\sqrt{3}$	4,(27)	$22\frac{5}{6}$	2,9
8.	$x^2-33=0$ tenglamaning yechimlari ... sonlardan iborat!	irratsional	butun	natural	ratsional
9.	|50|=?	50	-50	25	-25
10.	|-(-75)|=?	75	-75	7,5	-7,5

4-mavzu. Haqiqiy sonlar to‘plamining chegaralari

4-Ma‘ruza

Reja

1. Sonlar to‘plamining aniq chegaralari.
2. Aniq chegaraning mavjudligi.

Haqiqiy sonlar to‘plamining chegaralanganligi, to‘plamning aniq chegaralari tushunchalari matematik analiz kursida muhim rol o‘ynaydi.

1. Sonlar to‘plamining aniq chegaralari.

Biror $E \subset R$ to‘plam berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar E to‘plamning shunday x_0 elementi $(x_0 \in E)$ topilsaki, E to‘plamning ixtiyoriy x elementlari uchun

$$x \le x_0$$

tengsizlik bajarilsa, ya’ni

$$\exists x_0 \in E, \quad \forall x \in E: \quad x \le x_0$$

bo‘lsa, x_0 soni E to‘plamning **eng katta elementi** deyiladi va

$$x_0 = \max E$$

kabi belgilanadi.

2-ta’rif. Agar E to‘plamning shunday x_0 elementi $(x_0 \in E)$ topilsaki, E to‘plamning ixtiyoriy x elementlari uchun

$$x \ge x_0$$

tengsizlik bajarilsa, ya’ni

$$\exists x_0 \in E, \quad \forall x \in E: \quad x \ge x_0$$

bo‘lsa, x_0 soni E to‘plamning **eng kichik elementi** deyiladi va

$$x_0 = \min E$$

kabi belgilanadi.

Masalan,

$$\max\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\} = 1$$

$$\min\ \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\} = 1$$

bo‘ladi.

3-ta’rif. [1, definiyion 5.5.1, 116-bet] Agar shunday M soni $(M \in R)$ topilsaki, E to‘plamning ixtiyoriy x elementlari uchun

$$x \leq M$$

tengsizlik bajarilsa, ya’ni

$$\exists M \in R,\ \forall x \in E:\ \ x \leq M$$

bo‘lsa, E to‘plam **yuqoridan chegaralangan** deyiladi, M soni to‘plamning **yuqori chegarasi** deyiladi.

4-ta’rif. Agar shunday m soni $(m \in R)$ topilsaki, E to‘plamning ixtiyoriy x elementlari uchun

$$x \geq m$$

tengsizlik bajarilsa, ya’ni

$$\exists m \in R,\ \forall x \in E:\ \ x \geq m$$

bo‘lsa, E to‘plam **quyidan chegaralangan deyiladi,** m soni to‘plamning **quyi chegarasi** deyiladi.

Ravshanki, to‘plam yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, uning yuqori chegaralari cheksiz ko‘p, shuningdek quyidan chegaralan-gan bo‘lsa, uning quyi chegaralari cheksiz ko‘p bo‘ladi.

5-ta’rif. Agar $E \subset R$ to‘plam ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, E **chegaralangan to‘plam** deyiladi.

6-ta’rif. Agar ixtiyoriy M soni $(M \in R)$ olinganda ham shunday x_0 elementi $(x_0 \in E)$ topilsaki,

$$x_0 > M$$

tengsizlik bajarilsa, ya’ni

$$\forall M \in R,\ \exists x_0 \in E:\ \ x_0 > M$$

bo‘lsa, E to‘plam **yuqoridan chegaralanmagan** deyiladi.

7-ta’rif. Agar ixtiyoriy m soni $(m \in R)$ olinganda ham shunday x_0 elementi $(x_0 \in E)$ topilsaki,

$$x_0 < m$$

tengsizlik bajarilsa, ya’ni

$$\forall m \in R,\ \ \exists x_0 \in E:\ \ x_0 < m$$

bo‘lsa, E to‘plam **quyidan chegaralanmagan** deyiladi.

Masalan,

1) $E_1 = \{\dots, -2, -1, 0\}$ to‘plam yuqoridan chegaralangan;

2) $E_2 = \{1, 2, 3, \dots\}$ to‘plam quyidan chegaralangan;

3) $E_3 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ to‘plam chegaralangan;

4) $E_4 = \{x \in R \mid x > 0\}$ to‘plam yuqoridan chegaralanmagan;

5) $E_5 = \{x \in R \mid x < 0\}$ to‘plam quyidan chegaralanmagan bo‘ladi.

Endi sonlar to‘plamining aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralari tushunchalarini keltiramiz.

Aytaylik, $E \subset R$ to‘plam va $a \in R$ soni berilgan bo‘lsin.

8-ta’rif. [1, definition 5.5.5, 117-bet] Agar

1) a soni E to‘plamning yuqori chegarasi bo‘lsa,

2) E to‘plamning ixtiyoriy yuqori chegarasi M uchun $a \le M$ tengsizlik bajarilsa, a soni E to‘plamning aniq yuqori chegarasi deyiladi va $\sup E$ kabi belgilanadi:

$$a = \sup E .$$

Demak, E to‘plamning aniq yuqori chegarasi, uning yuqori chegaralari orasida eng kichigi bo‘ladi.

9-ta’rif. Faraz qilaylik, $E \subset R$ to‘plam va $b \in R$ soni berilgan bo‘lsin. Agar

1) b son E to‘plamning quyi chegarasi bo‘lsa,

2) E to‘plamning ixtiyoriy quyi chegarasi m uchun $b \ge m$ tengsizlik bajarilsa, b soni E to‘plamning **aniq quyi chegarasi** deyiladi va $\inf E$ kabi belgilanadi:

$$b = \inf E .$$

Demak, E to‘plamning aniq quyi chegarasi, uning quyi chegaralari orasida eng kattasi bo‘ladi.

“sup” va “inf” lar lotincha “supremum” va “infimum” so‘zlaridan olingan bo‘lib, ular mos ravishda eng yuqori, eng quyi degan ma’nolarni anglatadi.

1-teorema. Faraz qilaylik, $E \subset R$ to‘plam va $a \in R$ soni berilgan bo‘lsin. a soni E to‘plamning aniq yuqori chegarasi bo‘lishi uchun

1) a soni E to‘plamning yuqori chegarasi,

2) a sonidan kichik bo‘lgan ixtiyoriy α $(\alpha < a)$ uchun E to‘plamda $x > \alpha$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x sonining topilishi zarur va etarli.

◄ **Zarurligi.** Aytaylik,

$$a = \sup E$$

bo‘lsin. 8-ta’rifga binoan:

1) $\forall x \in E$ uchun $x \le a$, ya’ni a soni E to‘plamning yuqori chegarasi;

2) a soni yuqori chegaralar orasida eng kichigi. Binobarin, a dan kichik α soni uchun $x > \alpha$ bo‘lgan $x \in E$ soni topiladi.

Yetarliligi. Teoremaning ikkala sharti bajarilsin. Bu holda, ravshanki, $\alpha < a$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday α soni E to‘plamning yuqori chegarasi bo‘lolmaydi. Demak, a - to‘plamning yuqori chegaralari orasida eng kichigi. Unda ta’rifga ko‘ra

$$a = \sup E$$

bo‘ladi. ►

Xuddi shunga o‘xshash quyidagi teorema isbotlanadi.

2-teorema. Faraz qilaylik, $E \subset R$ to‘plam va $b \in R$ soni berilgan bo‘lsin. b soni E to‘plamning aniq quyi chegarasi bo‘lishi uchun

1) b soni E to‘plamning quyi chegarasi,

2) b sonidan katta bo‘lgan ixtiyoriy β $(\beta > b)$ uchun E to‘plamda $x < \beta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x sonining topilishi zarur va etarli.

Eslatma. Agar $E \subset R$ to‘plam yuqoridan chegaralanmagan bo‘lsa, u holda

$$\sup E = +\infty \quad ,$$

quyidan chegaralanmagan bo‘lsa, u holda

$$\inf E = -\infty$$

deb olinadi.

2^0. Aniq chegaralarning mavjudligi.

Aytaylik,

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

musbat haqiqiy son bo‘lsin, bunda

$$\alpha_0 \in N \bigcup \{0\}, \quad \alpha_n \in N_0 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}, \ \ n \ge 1.$$

Ushbu

$$a_n = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 .. \alpha_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{10^n},$$

$$b_n = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots (\alpha_n + 1) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots + \frac{\alpha_n + 1}{10^n}$$

ratsional sonlar uchun

$$a_n \le \alpha < b_n$$

bo‘ladi.

Demak, ixtiyoriy haqiqiy son olinganda shunday ikkita ratsional son topiladiki, ulardan biri shu haqiqiy sondan kichik yoki teng, ikkinchisi esa katta bo‘ladi.

Endi sonlar to‘plamining aniq chegaralarining mavjudligi haqidagi teoremalarni keltiramiz.

3-teorema. [1, theorem 5.5.9, 117-bet] Agar bo‘sh bo‘lmagan to‘plam yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, uning aniq yuqori chegarasi mavjud bo‘ladi.

Bu teoremani

$$E \subset [0, +\infty), \quad E \ne \varnothing$$

to‘plam uchun isbotlaymiz.

◄ E to‘plam yuqoridan chegaralangan bo‘lsin:

$$\exists M \in R, \ \forall x \in E: \quad x \le M.$$

Arximed aksiomasini e’tiborga olib, $M \in N$ deyish mumkin.

Endi E to‘plam

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \qquad (\alpha \in E)$$

elementlarining butun qismlaridan, ya’ni α_0 laridan iborat to‘plamni F_0 deylik:

$$F_0 = \{\alpha_0 \in N \cup \{0\} \mid , \ \alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \in E\}.$$

Bu to‘plam ham yuqoridan M soni bilan chegaralangan va $F_0 \ne \varnothing$. Ravshanki, $F_0 \subset N \cup \{0\}$. Bundan F_0 to‘plamning chekli ekanligini topamiz. Demak, F_0 to‘plamning eng katta elementi mavjud. Uni c_0 deylik:

$$\max F_0 = c_0 \qquad (1)$$

E to‘plamning

$$c_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$$

ko‘rinishdagi barcha elementlaridan iborat to‘plamni E_0 deb olamiz:

$$E_0 = \{c_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \in E\}.$$

Ravshanki, $E_0 \subset E$, $E_0 \ne \varnothing$.

Endi E_0 to‘plam

$$c_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$$

elementlarining α_1 laridan iborat to‘plamni olib, uni F_1 deylik:

$$F_1 = \{\alpha_1 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\} \mid c_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \in E_0\}.$$

Bu chekli to‘plam bo‘lib, $F_1 \ne \varnothing$ bo‘ladi. SHuning uchun uning eng katta elementi mavjud. Uni c_1 deb olamiz:

$$\max F_1 = c_1 \qquad (2)$$

E_0 to‘plamning

$$c_0, c_1\alpha_2\alpha_3\ldots$$

ko‘rinishdagi barcha elementlaridan iborat to‘plamni E_1 deb olamiz:

$$E_1 = \{c_0, c_1\alpha_2\alpha_3\ldots \in E_0\}.$$

Ravshanki, $E_1 \subset E_0$, $E_1 \neq \varnothing$.

Endi E_1 to‘plam

$$c_0, c_1\alpha_2\alpha_3\ldots$$

elementlarining α_2 laridan iborat to‘plamni olib, uni F_2 deylik:

$$F_2 = \{\alpha_1 \in \{0,1,2,\ldots,9\} \mid c_0, c_1, \alpha_2\ldots \in E_1\}.$$

Bu to‘plam ham chekli va $F_2 \neq \varnothing$ bo‘lib, uning eng katta elementi mavjud:

$$\max F_2 = c_2 \qquad (3)$$

E_1 to‘plamning

$$c_0, c_1c_2\alpha_3\ldots$$

ko‘rinishdagi barcha elementlaridan iborat to‘plamni E_2 deb olamiz:

$$E_2 = \{c_0, c_1c_2\alpha_3\ldots \in E_1\}$$

Bu jarayonni davom ettira borish natijasida

$$a = c_0, c_1c_2\ldots c_n\ldots$$

haqiqiy son hosil bo‘ladi.

Endi E to‘plam va bu a son uchun 1-teoremaning ikkala shartlarini bajarilishini ko‘rsatamiz:

1) Yuqoridagi (1) munosabatga ko‘ra $\forall\ \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots \in E$ uchun $\alpha_0 \leq c_0$ bo‘ladi.

Agar $\alpha_0 < c_0$ bo‘lsa, u holda $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots < a$ bo‘ladi.

Agar $\alpha_0 = c_0$ bo‘lsa, u holda $c_0, \alpha_1\alpha_2\ldots \in E_0$ bo‘lib, (2) munosa-batga ko‘ra $\alpha_1 \leq c_1$ bo‘ladi.

Agar $\alpha_1 < c_1$ bo‘lsa u holda $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots < a$ bo‘ladi.

Agar $\alpha_1 = c_1$ bo‘lsa, u holda $c_0, c_1\alpha_2\ldots \in E_1$ bo‘lib, (3) munosa-batga ko‘ra $\alpha_2 \leq c_2$ bo‘ladi.

Bu jarayonni davom ettirish natijasida ikki holga duch kelamiz:

a) shunday $n \geq 0$ topiladiki,

$$\alpha_0 = c_0, \quad \alpha_1 = c_1, \ldots\ \alpha_{n-1} = c_{n-1}, \quad \alpha_n < c_n$$

bo‘lib, $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots < a$ bo‘ladi.

b) ixtiyoriy $n \geq 0$ da $\alpha_n = c_n$ bo‘lib, $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots = a$ bo‘ladi.

Demak, har doim $\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots \leq a$ munosabat o‘rinli bo‘ladi;

2) a sondan kichik bo‘lgan ixtiyoriy

$$\beta = \beta_0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots$$

haqiqiy sonni olaylik:

$$\beta_0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots < c_0,c_1c_2\ldots c_n\ldots$$

Unda shunday $n \geq 0$ topiladiki,

$$\beta_0 = c_0, \quad \beta_1 = c_1, \ldots \ \beta_{n-1} = c_{n-1}, \quad \beta_n < c_n$$

bo‘ladi. SHuni e’tiborga olib, $\forall x \in E_n \subset E$ uchun

$$x > \beta_0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots$$

bo‘lishini topamiz.

Shunday qilib teoremada keltirilgan E to‘plam va a soni uchun 1-teoremaning ikkala shartining bajarilishi ko‘rsatildi. Unda 1-teoremaga muvofiq E to‘plamning aniq yuqori chegarasi mavjud va

$$a = \sup E$$

bo‘lishi kelib chiqadi. ►

Xuddi shunga o‘xshash quyidagi teorema isbotlanadi.

4-teorema. Agar bo‘sh bo‘lmagan to‘plam quyidan chegaralangan bo‘lsa, uning aniq quyi chegarasi mavjud bo‘ladi.

Eslatma. To‘plamning aniq quyi hamda aniq yuqori chegaralari shu to‘plamga tegishli bo‘lishi ham mumkin, tegishli bo‘lmasligi ham mumkin.

Mashqlar

1. Agar A va B to‘plamlari $(A \subset R,\ B \subset R)$ chegaralangan bo‘lib, $A \subset B$ bo‘lsa,

$$\sup A \leq \sup B, \qquad \inf A \geq \inf B$$

bo‘lishi isbotlansin.

2. Agar $\forall x \in A$ $(A \subset R)$ uchun $x \leq \alpha$ $(\alpha \in R)$ bo‘lsa, $\sup A \leq \alpha$ bo‘lishi isbotlansin.

Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.**

Matematik analizdan ma'rizalar, I q. T. "Voris-nashriyot", 2010.
3. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.

Nazorat savollari

1. To`plamning eng kata va eng kichik elementlari nima?
2. To`plamning yuqori va quyi chegaralari ta'riflarini bering.
3. To`plamning aniq yuqori va aniq quyi chegaralari ta'riflarini bering.
4. Aniq yuqori chegaraning mavjudligi haqidagi teoremani ayting.
5. Aniq quyi chegaraning mavjudligi haqidagi teoremani ayting.

Glossariy

To'plamning eng katta elementi - agar E to'plamning shunday x_0 elementi $(x_0 \in E)$ topilsaki, E to'plamning ixtiyoriy x elementlari uchun $x \le x_0$
tengsizlik bajarilsa x_0 soni E to'plamning **eng katta elementi** deyiladi.

To'plamning eng kichik elementi - agar E to'plamning shunday x_0 elementi $(x_0 \in E)$ topilsaki, E to'plamning ixtiyoriy x elementlari uchun $x \ge x_0$ tengsizlik bajarilsa x_0 soni E to'plamning **eng kichik elementi** deyiladi.

Chegaralangan to'plam – agar $E \subset R$ to'plam ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u **chegaralangan to'plam** deyiladi.

To'plamning aniq yuqori chegarasi – agar 1) a soni E to'plamning yuqori chegarasi bo'lsa, 2) E to'plamning ixtiyoriy yuqori chegarasi M uchun $a \le M$ tengsizlik bajarilsa, a soni E to'plamning aniq yuqori chegarasi deyiladi va $\sup E$ kabi belgilanadi.

To'plamning aniq quyi chegarasi –agar 1) b son E to'plamning quyi chegarasi bo'lsa, 2) E to'plamning ixtiyoriy quyi chegarasi m uchun $b \ge m$ tengsizlik bajarilsa, b soni E to'plamning **aniq quyi chegarasi** deyiladi va $\inf E$ kabi belgilanadi.

Keys banki

4-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: Agar A va B to'plamlar $(A \subset \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R})$ chegaralangan bo'lib, $A \subset B$ bo'lsa,

$$\sup A \le \sup B, \qquad \inf A \ge \inf B$$

bo'lishi isbotlansin.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching

(individual).

4-amaliy mashg‘ulot

Na’muna uchun misollar yechimi

1-мисол. *Ушбу*

$$E=\left\{x=\frac{n^2}{n^2+4}:n\in N\right\}$$

тўпламнинг аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегараси топилсин.

◀ Равшанки, $\forall n\in N$ учун

$$0<\frac{n^2}{n^2+4}<1 \qquad (1)$$

бўлади. Демак, берилган тўплам чегараланган.

(1) муносабатдан $\forall x\in E$ учун

$$x=\frac{n^2}{n^2+4}\le 1$$

бўлиши келиб чиқади.

$\forall\varepsilon>0$ сонни $(0<\varepsilon<1)$ олиб, E тўпламда, унинг

$$x_0=\frac{n^2}{n^2+4}, \quad n>\sqrt{\frac{4(1-\varepsilon)}{\varepsilon}}$$

элементи қаралса, унинг учун

$$\frac{n^2}{n^2+4}>1-\varepsilon \qquad (2)$$

тенгсизлик бажарилади (чунки

$$\frac{n^2}{n^2+4}>1-\varepsilon\Rightarrow n^2>n^2+4-n^2\varepsilon-4\varepsilon\Rightarrow n^2\varepsilon>4(1-\varepsilon)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2>\frac{4(1-\varepsilon)}{\varepsilon}\Rightarrow n>\sqrt{\frac{4(1-\varepsilon)}{\varepsilon}})$$

(1) ва (2) муносабатлардан топамиз:

$$SupE=Sup\left\{x=\frac{n^2}{n^2+4}:n\in N\right\}=1.$$

Худди шунга ўхшаш

$$\inf E=\inf\left\{x=\frac{n^2}{n^2+4}:n\in N\right\}=0$$

бўлиши кўрсатилади.▶

Қуйидаги тўпламлар чегараланганликка текширилсин (1–6):

1. $E=\left\{x=\dfrac{n}{1+n^2}:\ \ n\in N\right\}.$

2. $E=\left\{x=1-n^2-6n:\ \ n\in N\right\}$

3. $E=\left\{x=\dfrac{(-1)^n\cdot n+10}{\sqrt{n^2+1}}:\ \ n\in N\right\}.$

4. $E=\left\{x=\dfrac{n}{a^n}:\ \ n\in N,\ \ a>1\right\}.$

5. $E=\left\{x=\left[1+(-1)^n\right]\cdot n+\dfrac{1-(-1)^n}{n}:\ \ n\in N\right\}.$

6. Ушбу

$$E\left\{x=\frac{1}{n}:\ \ n\in N\right\}$$

тўпламнинг аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегаралари топилсин.

7. Ушбу

$$E=\left\{x=1+\frac{(-1)^n}{n}:\ \ n\in N\right\}$$

тўпламнинг аниқ юқори ва аниқ қуйи чегаралари топилсин.

8. $E\subset R$ тўплам учун $SupE$ ва $\inf E$ лар мавжуд бўлиб,

$$SupE=\inf E$$

бўлса, E тўплам тўғрисида нима дейиш мумкин.

9. Агар $E\subset R$, $F\subset E$ тўпламлар учун:

1) $\forall x\in E,\forall y\in F: x\leq y,$

2) $\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in E,\exists y_0\in F: y_0-x_0<\varepsilon$

бўлса, у ҳолда

$$SupE=\inf F$$

бўлиши исботлансин.

10. Агар $E \subset R$ тўплам чегараланган бўлиб, $E_1 \subset E$ бўлса, у ҳолда

$$SupE_1 \leq SupE, \ \ \inf E_1 \geq \inf E$$

бўлиши исботлансин.

11. Агар $E \subset R$ тўплам чегараланган бўлиб, $a \in R$ бўлса, у ҳолда

$$Sup\{a+E\} = a + SupE$$

бўлиши исботлансин.

12. Агар $E \subset R$ тўплам чегараланган бўлиб, $a > 0$ бўлса, у ҳолда

$$Sup\{a \cdot E\} = a \cdot SupE$$

бўлиши исботлансин.

13. Айтайлик, чегараланган $E = \{x\} \subset R$ тўплам ҳар бир x элементининг қарама-қаршиси $-x$ лардан тузилган тўплам F бўлсин: $F = \{-x : x \in E\}$. У ҳолда

$$SupF = -\inf E, \qquad \inf F = -SupE$$

бўлиши исботлансин.

14. Айтайлик, $E = \{x\} \subset R$, $F = \{y\} \subset R$ чегараланган тўпламлар бўлиб, $E + F = \{x + y : x \in E, y \in F\}$ бўлсин. У ҳолда

$$Sup(E+F) = SupE + SupF,$$

$$\inf(E+F) = \inf E + \inf F$$

бўлиши исботлансин.

15. Айтайлик, $E = \{x\} \subset R, F = \{y\} \subset R$ чегараланган тўпламлар бўлиб, $E - F = \{x - y : x \in E, y \in F\}$ бўлсин. У ҳолда

$$Sup(E-F) = SupE - \inf F$$

бўлиши исботлансин

16. Ушбу $E_+ = \{x : x > 0\}$, $F_+ = \{y : y > 0\}$ тўпламлар ёрдамида тузилган $E_+ \cdot F_+ = \{x \cdot y : x \in E_+, y \in F_+\}$ тўплам учун

$$\inf\left(E_{+}\cdot F_{+}\right)=\inf E_{+}\cdot\inf F_{+},$$

$$Sup\left(E_{+}\cdot F_{+}\right)=SupE_{+}\cdot SupF_{+}$$

бўлиши исботлансин.

17. Айтайлик, $E\subset R$, $F\subset R$ тўпламлар юқоридан чегараланган бўлсин. Унда

$$Sup\left(E\cup F\right)=\max\left(SupE,\ \ SupF\right)$$

бўлиши исботлансин.

$(\max(a,\ b)-a$ ва b ларнинг каттаси)

Test

№	Test topshirig`i	To`g`ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	$M \in R$ soni $E \subset R$ to‘plamning yuqori chegarasi deyiladi, agar …	$\forall x \in E: x \le M$	$\exists x \in E: x \ge M$	$\exists x \in E: x \le M$
2.	$m \in R$ soni $E \subset R$ to‘plamning quyi chegarasi deyiladi, agar…	$\forall x \in E: x \ge m$	$\forall x \in E: x \le m$	$\exists x \in E: x \le m$
3.	$M \in R$ soni $E \subset R$ to‘plamning aniq yuqori chegarasi deyiladi, agar...	M soni E to‘plamning yuqori chegaralari orasidagi eng kichigi	M soni E to‘plamning quyi chegarasi	M soni E to‘plamning yuqori chegarasi
4.	$m \in R$ soni $E \subset R$ to‘plamning aniq quyi chegarasi deyiladi, agar...	m soni E to‘plamning quyi chegaralari orasidagi eng kattasi	m soni E to‘plamning quyi chegarasi	m soni E to‘plamning yuqori chegaralari orasidagi eng kichigi
5.	E to‘plam chegaralangan deyiladi, agar …	$\forall x \in E: \ m \le x \le M$	$\forall x \in E: \ x \le M$	$E = \{-\infty; +\infty\}$
6.	E to‘plam yuqoridan chegaralangan deyiladi, agar …	$\forall x \in E, \exists M, x \le M$	$E = \{-\infty; +\infty\}$	$\forall x \in E: m \le x \le M$
7.	E to‘plam quyidan chegaralangan deyiladi, agar …	$\forall x \in E, \exists m, x \ge m$	$\forall x \in E: x \le M$	$\forall x \in E: m \le x \le M$
8.	Chegaralanmagan E to‘plamni ko‘rsating:	$E = \{-\infty; +\infty\}$	$\forall x \in E: x \le M$	$\forall x \in E: m \le x \le M$
9.	(0, 1) intervalning aniq yuqori chegarasini ko‘rsating:	1	2	3
10.	Chegaralangan E to‘plamni ko‘rsating:	$E = [a, b]$	$E = (-\infty, +\infty)$	$E = (-\infty, a]$

5-mavzu. Haqiqiy sonlar ustida amallar

5-ma'ruza

Reja

1. Haqiqiy sonlar yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbati.

2. Haqiqiy sonning darajasi.

3. Haqiqiy sonning absolyut qiymati.

4. Bernulli tengsizligi. Nyuton binomi formulasi.

5. Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipi.

1. Haqiqiy sonlar yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbati.

Avval aytganimizdek, ratsional sonlar ustida, xususan chekli o'nli kasrlar ustida bajariladigan amallar va ularning xossalari ma'lum deb hisoblaymiz.

Aytaylik, ikkita musbat

$$a=\alpha_0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$$

$$b=\beta_0,\beta_1\beta_2...\beta_n...$$

haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin. Unda $n\geq 0$ bo'lganda ushbu

$$a_n'=a_0,a_1a_2...a_n=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+...+\frac{a_n}{10^n},$$

$$a_n''=a_0,a_1a_2...(a_n+1)=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+...+\frac{a_n+1}{10^n}$$

ratsional sonlar uchun

$$a_n'\leq a\leq a_n'', \tag{1}$$

shuningdek,

$$b_n'=\beta_0,\beta_1\beta_2...\beta_n=\beta_0+\frac{\beta_1}{10}+\frac{\beta_2}{10^2}+...+\frac{\beta_n}{10^n},$$

$$b_n^{''} = \beta_0, \beta_1\beta_2...(\beta_n + 1) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + ... + \frac{\beta_n + 1}{10^n}$$

ratsional sonlar uchun

$$b_n^{'} \le b \le b_n^{''} \qquad (2)$$

bo‘ladi.

Endi (1) va (2) tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ratsional sonlarning yig‘indisi $a_n^{'} + b_n^{'}$ lardan iborat $\{a_n^{'} + b_n^{'}\}$ to‘plamni qaraymiz. Ravshanki, bu to‘plam yuqoridan chegaralangan. Unda 4-ma’ruzadagi 3-teoremaga ko‘ra $\{a_n^{'} + b_n^{'}\}$ to‘plamning aniq yuqori chegarasi mavjud bo‘ladi.

1-ta’rif. [1, p.104, def.5.3.4]$\{a_n^{'} + b_n^{'}\}$ *to‘plamning aniq yuqori chegarasi* a *va* b ***haqiqiy sonlar yigindisi*** *deyiladi va* $a+b$ *kabi belgilanadi:*

$$a + b = \sup_{n\ge 0}\{a_n^{'} + b_n^{'}\}.$$

(1) va (2) tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ratsional sonlarning ko‘paytmasi $a_n^{'} \cdot b_n^{'}$ *lardan iborat* $\{a_n^{'} \cdot b_n^{'}\}$ *to‘plamni qaraymiz. Bu to‘plam yuqoridan chegaralangan bo‘ladi. SHuning uchun uning aniq yuqori chegarasi mavjud bo‘ladi.*

2-ta’rif. . [1, p.105, def.5.3.9]$\{a_n^{'} \cdot b_n^{'}\}$ *to‘plamning aniq yuqori chegarasi* a *va* b ***haqiqiy sonlar ko‘paytmasi*** *deyiladi va* $a \cdot b$ *kabi belgilanadi.*

$$a \cdot b = \sup_{n\ge 0}\{a_n^{'} \cdot b_n^{'}\}.$$

(1) va (2) tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ratsional sonlarning nisbati $\frac{a_n^{'}}{b_n^{''}}$ lardan iborat $\left\{\frac{a_n^{'}}{b_n^{''}}\right\}$ to‘plam yuqoridan chegaralangan bo‘ladi.

3-ta’rif. $\left\{\frac{a_n^{'}}{b_n^{''}}\right\}$ to‘plamning aniq yuqori chegarasi a **sonining** b **soniga nisbati** deyiladi va $\frac{a}{b}$ kabi belgilanadi.

$$\frac{a}{b} = \sup_{n\ge 0}\left\{\frac{a_n^{'}}{b_n^{''}}\right\}.$$

Aytaylik a va b musbat haqiqiy sonlar bo‘lib, $a > b$ bo‘lsin.

4-ta’rif. [1, p.106]$\{a_n^{'} - b_n^{''}\}$ *to‘plamning aniq yuqori chegarasi* a ***sonidan*** b ***sonining ayirmasi*** *deyiladi va* $a-b$ *kabi belgilanadi.*

$$a - b = \sup_{n\ge 0}\{a_n^{'} - b_n^{''}\}.$$

Eslatma. 1) Haqiqiy sonlar ustida bajariladigan qo‘shish, ko‘paytirish, ayirish va bo‘lish amallarini to‘plamning aniq quyi chegarasi orqali ham ta'riflash mumkin.

Masalan, a va b haqiqiy sonlar yig'indisi quyidagicha ta'riflanadi:

$$a+b=\inf_{n\geq 0}\{a_n^{''}+b_n^{''}\}.$$

Haqiqiy sonlarda, yuqorida kiritilgan amallar o'rta maktab matematika kursida o'rganilgan amallarning barcha xossalarga ega.

2. Haqiqiy sonning darajasi.

Avval haqiqiy sonning 0-hamda n- darajalari $(n\in N)$ quyidagicha

$$a^0=1,$$

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ та}},\ (n\in N)$$

aniqlanishini ta'kidlaymiz.

Teorema [2, p.18, property 1.8] *(isbotsiz). Faraz qilaylik, $a>0$ va $n\in N$ bo'lsin. U holda shunday yagona musbat x soni topiladiki,*

$$x^n=a$$

bo'ladi.

5-ta'rif. *Musbat haqiqiy a sonining n darajali ildizi deb ushbu*

$$x^n=a$$

tenglikni qanoatlantiruvchi yagona x soniga aytiladi va

$$x=\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$$

kabi belgilanadi.

Aytaylik, a musbat haqiqiy son, r esa musbat ratsional son bo'lsin:

$$a>0,\quad r=\frac{m}{n},\quad m,n\in N.$$

Bu holda a sonining r- darajasi quyidagicha

$$a^r=\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$$

aniqlanadi.

6-ta'rif. Faraz qilaylik, $a>1,\ b>0$ haqiqiy sonlari berilgan bo'lsin, a sonining b-darajasi deb ushbu $\left\{a^{b_n^{'}}\right\}$ to'plamning aniq yuqori chegarasiga aytiladi:

$$a^b=\sup_{n\geq 0}\left\{a^{b_n^{'}}\right\}.\text{ bunda } b_n^{'}=\beta_0,\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_n,\quad b=\beta_0,\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_n,\ldots$$

3. Haqiqiy sonning absolyut qiymati.

[2, p.13] Aytaylik $x\in R$ son berilgan bo'lsin. Ushbu

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{agar } x \geq 0 \text{ bo'lsa,} \\ -x, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

miqdor x ***sonining absolyut qiymati*** *deyiladi.*

Haqiqiy sonning absolyut qiymati quyidagi xossalarga ega:

1) $x \in R$ son uchun

$$|x| \geq 0, \quad |x| = |-x|, \quad x \leq |x|, \quad -x \leq |x|$$

munosabatlar o'rinli,

2) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$,

$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$, $\qquad (a > 0)$

3) $x \in R, \ y \in R$ sonlar uchun

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$
$$|x - y| \geq |x| - |y|,$$
$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|,$$
$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad (y \neq 0)$$

bo'ladi.

Bu xossalarning isboti bevosita sonning absolyut qiymati ta'rifidan kelib chiqadi. Ulardan birini, masalan $|x + y| \leq |x| + |y|$ bo'lishini isbotlaymiz.

◄ Aytaylik, $x + y > 0$ bo'lsin. Unda $|x + y| = x + y$ bo'ladi. $x \leq |x|, \quad y \leq |y|$ bo'lishini e'tiborga olib topamiz:

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y|.$$

Endi $x + y < 0$ bo'lsin.

Unda $|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y)$ bo'ladi. $-x \leq |x|, \quad -y \leq |y|$ bo'lishini e'tiborga olib topamiz:

$$|x + y| = (-x) + (-y) \leq |x| + |y| . \ ►$$

1-misol. Ushbu

$$|3x - 1| \leq |2x - 1| + |x| \qquad (3)$$

tengsizlik x ning qanday qiymatlarida o'rinli bo'ladi?

◄ Sonning absolyut qiymati xossasidan foydalanib topamiz:

$$|3x - 1| = |(2x - 1) + x| \leq |2x - 1| + |x| .$$

Demak, (3) tengsizlik ixtiyoriy $x \in R$ uchun o'rinli bo'ladi. ►

Barcha manfiy bo'lmagan haqiqiy sonlar to'plamini R_+ bilan belgilaylik. Ravshanki, $R_+ \subset R$.

Har bir $x \in R$ haqiqiy songa uning absolyut qiymati $|x|$ ni mos qo'yish bilan ushbu

$$f : x \to |x| \qquad (f : R \to R_+)$$

akslantirishga ega bo‘lamiz.

Demak haqiqiy sonning absolyut qiymati R to‘plamni R_+ to‘plamga akslantirish deb qaralishi mumkin.

Ixtiyoriy $x \in R,\ y \in R$ sonlarni olaylik. Ushbu

$$|x-y|$$

miqdor x va y **nuqtalar orasidagi masofa** deyiladi va $d(x,y)$ kabi belgilanadi:

$$d(x,y)=|x-y|.$$

Masofa quyidagi xossalarga ega:

1) $d(x,y)\geq 0$ ва $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y,$

2) $d(x,y)=d(y,x),$

3) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z), \quad (z\in R).$

4. Bernulli tengsizligi. Nyuton binomi formulasi.

Ixtiyoriy $x\geq -1$ ($x\in R$) hamda ixtiyoriy $n\in N$ uchun ushbu

$$(1+x)^n \geq 1+nx \tag{4}$$

tengsizlik o‘rinli.

◀ Bu tengsizlikni matematik induksiya usuli yordamida isbotlaymiz.

Ravshanki, $n=1$ da (4) tengsizlik (tasdiq) o‘rinli bo‘ladi

$$1+x=1+x.$$

Endi $n\in N$ da (4) munosabat o‘rinli deb, uni $n+1$ uchun ham o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatamiz. (4) tengsizlikning har ikki tomonini $1+x$ ga ko‘paytirib topamiz:

$$(1+x)^{n+1}\geq (1+nx)\cdot(1+x)=1+(n+1)x+nx^2\geq 1+(n+1)x.$$

Matematik induksiya usuliga binoan (4) munosabat ixtiyoriy $n\in N$ uchun o‘rinli bo‘ladi.▶

(4) tengsizlik **Bernulli tengsizligi** deyiladi.

[2, p.19-20]Endi Nyuton binomi formulasini keltiramiz.

Ma’lumki, $a\in R,\ \ b\in R$ *da*

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

bo‘ladi. Umuman, ixtiyoriy $n\in N$ *da*

$$(a+b)^n=C_n^0\cdot a^n+C_n^1a^{n-1}\cdot b+\ldots+C_n^k\cdot a^{n-k}b^k+\ldots+$$

$$+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^n\cdot b^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k \tag{5}$$

bo‘ladi, bunda

$$C_n^0=1$$

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!},\quad k!=1\cdot 2\cdot 3\ldots k,\quad k=1,2\ldots,n$$

(5) tenglik ham matematik induksiya usuli yordamida isbotlanadi.

◀ *Ravshanki,* $n=1$ *da* $C_1^0\cdot a+C_1^1\cdot b=a+b$. *Demak, bu holda (5) tenglik o'rinli. Endi (5) tenglik* n *uchun o'rinli bo'lsin deb, uni* $n+1$ *uchun ham o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. (5) tenglikning har ikki tomonini* $a+b$ *ga ko'paytirib topamiz:*

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}(C_n^k+C_n^{k-1})\cdot a^{n+1-k}\cdot b^k+b^{n+1}.$$

Ravshanki,

$$C_n^k+C_n^{k-1}=\frac{n(n-1)...(n-(k-2))}{k!}(n-(k-1)+k)=$$
$$=\frac{n(n+1)((n+1)-1)...((n+1)-(k-1))}{k!}=C_{n+1}^k$$

Demak,

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}C_{n+1}^k\cdot a^{n+1-k}\cdot b^k+b^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k\cdot a^{n+1-k}\cdot b^k$$

bo'ladi. Bu esa (5) tenglik $n+1$ *bo'lganda ham bajarilishini ko'rsatadi.* ▶

Odatda (5) tenglik ***Nyuton binomi formulasi*** *deyi-ladi.*

5. Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipi.

Ma'lumki, ushbu

$$\{x\in R:\ a\le x\le b\}=[a,b]$$

to'plam segment deb ataladi.

Aytaylik, $[a_1,b_1]$ va $[a_2,b_2]$ segmentlar berilgan bo'lsin. Agar

$$[a_1,b_1]\subset[a_2,b_2]$$

bo'lsa, $[a_1,b_1]$ **segment** $[a_2,b_2]$ **segmentning ichiga joylashgan** deyiladi. Bu holda $a_1\le a_2<b_2\le b_1$ bo'ladi.

7-ta'rif. Agar

$$[a_1,b_1],[a_2,b_2],....,[a_n,b_n],... \qquad (6)$$

cegmentlar ketma-ketligi quyidagi

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset...\supset[a_n,b_n]\supset...$$

munosabatda, ya'ni $\forall n\in N$ da

$$[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$$

bo'lsa, (6) **ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligi** deyiladi.

Teorema. Aytaylik,

$$[a_1,b_1],[a_2,b_2],....,[a_n,b_n],...$$

cegmentlar ketma-ketligi quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $\forall n\in N:\quad [a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$,

2) $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in N,\ n>n_0:\quad b_n-a_n<\varepsilon$ bo'lsin.

U holda shunday $c\in R$ mavjud bo'ladiki, $c\in[a_n,b_n],\ (n=1,2,3,...)$ bo'lib, bunday c yagona bo‘ladi.

◀ Teoremada qaralayotgan segmentlar ketma-ketligi ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligi bo‘ladi. Ravshanki, bu holda ushbu

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n < b_n \le b_{n-1} \le \ldots \le b_2 \le b_1$$

munosabat bajariladi.

Endi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sonlaridan tashkil topgan

$$E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

to‘plamni qaraymiz. Bu to‘plamning yuqoridan chegaralanganligini ko‘rsatamiz.

Ixtiyoriy natural m sonini olib, uni tayinlaymiz.

Agar $n \le m$ bo‘lsa, $[a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]$ bo‘lib, $a_n \le a_m < b_m \le b_n$, ya’ni $a_n < b_m$ bo‘ladi.

Agar $n > m$ bo‘lsa, $[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m]$ bo‘lib, $a_m \le a_n < b_n \le b_m$, ya’ni $a_n < b_m$ bo‘ladi.

Aniq yuqori chegara haqidagi teoremaga ko‘ra

$$\sup E = c \qquad (c \in R)$$

mavjud bo‘ladi.

To‘plamning aniq yuqori chegarasi ta’rifiga binoan

$$\forall n \in N \text{ da } a_n \le c \text{ va } \forall m \in N \text{ da } c \le b_m \text{ bo‘ladi.}$$

Demak,

$$\forall n \in N \text{ da } c \in [a_n, b_n].$$

Agar shu nuqtadan farqli va barcha segmentlarga tegishli c' $(c' \in [a_n, b_n], \forall n \in N)$ mavjud deb qaraladigan bo‘lsa, unda

$$b_n - a_n \ge |c - c'| > 0$$

bo‘lib, bu teoremaning 2-shartiga zid bo‘ladi.

Demak, $c = c'$ ▶.

Odatda bu teorema ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipi deyilib, u haqiqiy sonlar to‘plamining uzluksizlik (to‘liqlik) xossasini ifodalaydi.

Mashqlar

1. Ixtiyoriy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ haqiqiy sonlar uchun

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$$

bo‘lishi isbotlansin.

2. Ikki haqiqiy son yig‘indisi ta’rifidan foydalanib ushbu

$$a + b = b + a, \quad a + a = 2a$$

tengliklar isbotlansin.

Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical analysis I*, Springer-Verlag Italia, Milan, 2008.
3. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'rizalar, I q.* T. "Voris-nashriyot", 2010.
4. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.

Nazorat savollari

1. Ikki haqiqiy sonning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbati ta'riflarini bering.
2. Haqiqiy sonning darajasi ta'rifini bering. Misollarda tushuntiring.
3. Haqiqiy sonnig absolyut qiymati nima?
4. Bernulli tengsizligini keltiring.
5. Nyuton binomi formulasini yozing.
6. Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipini tushuntiring.

Glossariy

Haqiqiy sonning absolyut qiymati – aytaylik $x \in R$ son berilgan bo'lsin. Ushbu $|x| = \begin{cases} x, & \text{agar } x \geq 0 \text{ bo'lsa}, \\ -x, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa}, \end{cases}$ miqdor x **sonining absolyut qiymati** deyiladi.

Nuqtalar orasidagi masofa – ixtiyoriy $x \in R,\ y \in R$ sonlar uchun $|x-y|$ miqdor x va y **nuqtalar orasidagi masofa** deyiladi.

Bernulli tengsizligi – ixtiyoriy $x \geq -1$ $(x \in R)$ hamda ixtiyoriy $n \in N$ uchun ushbu $(1+x)^n \geq 1+nx$ tengsizlik **Bernulli tengsizligi** deyiladi.

Nyuton binomi formulasi –

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 a^{n-1} \cdot b + \ldots + C_n^k \cdot a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n \cdot b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipi – aytaylik,

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$$

segmentlar ketma-ketligi quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $\forall n \in N: \quad [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}],$

2) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N,\ n > n_0: \quad b_n - a_n < \varepsilon$ bo'lsin.

U holda shunday $c \in R$ mavjud bo'ladiki, $c \in [a_n, b_n],\ \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ bo'lib, bunday c yagona bo'ladi.

Keys banki

5-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: Ixtiyoriy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ haqiqiy sonlar uchun

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$$

bo'lishi isbotlansin.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

5-amaliy mashg‘ulot

Na’muna uchun misollar yechimi

1-мисол. $S_n = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$ yig‘indini hisoblang.

Yechish: Ushbu $(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$ tenglikni qaraymiz. Bu tenglikda $x = 1, 2, ..., n$ deb olib va hosil bo‘lgan tenglikni hadma-had qo‘shib, topamiz:

$$\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^2 - k^3\right) = 3\sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k + n.$$

Bundan

$$(n+1)^3 - n^3 = 3S_n + \frac{3}{2}n(n+1) + n$$

bo‘lishini hosil qilamiz. Endi yuqoridagi tenglikdan S_n ni topsak,

$$S_n = \frac{1}{6}\left(2n^3 + 3n^2 + n\right) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Demak,

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Quyidagi tengsizliklarni isbotlang:

1. $|x-y| \geq \left||x| - |y|\right|$.
2. $|x_1 + x_2 + ... + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + ...|x_n|$

Ixtiyoriy a va b sonlar uchun quyidagi tengliklar o`rinli bo`lishini iosbotlang:

1. $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} b^k a^{n-k}$;
2. $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k b^k a^{2n-k}$;

Quyidagi tengliklarni isbotlang:

$$1)\ \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = C_{2n+1}^{3}; \qquad 2)\ \sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)!-1;$$

$$3)\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2};$$

$$4)\ \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3};$$

$$5)\ \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4};$$

$$6)\ \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30};$$

$$7)\ \sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}.$$

Quyidagi tengliklarni isbotlang:

$$1)\ \sum_{k=0}^{n}\cos(x+ka) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)\cos\left(x+\frac{n}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha\neq 2\pi k, \quad k\in Z;$$

$$2)\ \sum_{k=0}^{n}\sin(x+k\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)\sin\left(x+\frac{n}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha\neq 2\pi k, \quad k\in Z.$$

Quyidagi yig‘indilarni hisoblang:

$$1)\ \sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x; \qquad 2)\ \sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x; \qquad 3)\ \sum_{k=1}^{n}\sin^2 kx;$$

$$4)\ \sum_{k=1}^{n}\cos^2 kx; \qquad 5)\ \sum_{k=1}^{n}\sin^3 kx; \qquad 6)\ \sum_{k=1}^{n}\cos^3 kx.$$

Quyidagi yig‘indilarni hisoblang:

$$1)\ \sum_{k=1}^{n}(k+1)C_n^k; \quad 2)\ \sum_{k=1}^{n}(k-1)C_n^k; \quad 3)\ \sum_{k=1}^{n}C_{2n}^{2k}; \quad 4)\ \sum_{k=1}^{n}C_{2n}^{2k-1};$$

$$5)\ \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_n^k, \quad m<n; \quad 6)\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k (C_n^k)^2.$$

Quyidagi tengliklarni isbotlang:

$$1)\ \sum_{k=1}^{n}kC_n^k = n2^{n-1}; \quad 2)\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}kC_n^k = 0;$$

$$3)\ \sum_{k=0}^{s}C_n^k C_m^{s-k} = C_{m+n}^s; \quad 4)\ \sum_{k=0}^{m}C_{n+k}^n = C_{n+m+1}^{n+1};$$

Test

№	Test topshirig`i	To`g`ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	Musbat haqiqiy a sonining n darajali ildizi deb ushbu ... tenglikni qanoatlantiruvchi yagona x soniga aytiladi.	$x^n = a$	$x^{\frac{1}{n}} = a$	$x^n = a^n$
2.	Noto`g`ri munosabatni ko`rsating.	$\lvert x\rvert > \lvert -x\rvert$	$\lvert x\rvert = \lvert -x\rvert$	$x \le \lvert x\rvert$
3.	Noto`g`ri munosabatni ko`rsating.	$\lvert x-y\rvert \le \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$	$\lvert x+y\rvert \le \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$	$\lvert x-y\rvert \ge \lvert x\rvert - \lvert y\rvert$
4.	Ushbu $\lvert 3x-1\rvert \le \lvert 2x-1\rvert + \lvert x\rvert$ tengsizlik x ning qanday qiymatlarida o‘rinli bo‘ladi?	$\forall x \in R$	$\forall x \in R^+$	$\forall x \in R^-$
5.	Ushbu ... miqdor x va y nuqtalar orasidagi masofa deyiladi.	$\lvert x-y\rvert$	$\lvert x+y\rvert$	$\lvert x-(-y)\rvert$
6.	Bernulli tengsizligini ko`rsating	$(1+x)^n \ge 1+nx$	$(1-x)^n \ge 1+nx$	$(1+x)^n \le 1+nx$
7.	Ushbu $\lvert 8x-3y+5\rvert \ge \lvert 8x+3\rvert - \lvert 3y-2\rvert$ tengsizlik x va y ning qanday qiymatlarida o‘rinli bo‘ladi?	$\forall x,y \in R$	$\forall x,y \in R^+$	$\forall x,y \in R^-$
8.	Ushbu $\lvert 17x+11y-7\rvert \le \lvert 17x-3\rvert + \lvert 11y-4\rvert$ tengsizlik x va y ning qanday qiymatlarida o‘rinli bo‘ladi?	$\forall x,y \in R$	$\forall x,y \in R^-$	$\forall x,y \in R^+$
9.	Noto`g`ri munosabatni ko`rsating.	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{n}{m}}$	$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$	$\sqrt[k]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[km]{a}$
10.	Ushbu $\lvert x^2-2x-3\rvert > x^2-2x-3$ tengsizlikni yeching.	$x \in (-1;3)$	$x \in (-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$	$x \in (-3;1)$

6-mavzu. Sonlar ketma-ketligi va uning limiti

6-ma'ruza

Reja

1. Sonlar ketma-ketligi tushunchasi.

2. Sonlar ketma-ketligining limiti.

1. Sonlar ketma-ketligi tushunchasi.

Biz birinchi bobda ixtiyoriy E to'plamni F to'plamga akslantirish:

$$f: E \to F$$

tushunchasi bilan tanishgan edik.

Endi $E = N$, $F = R$ deb, har bir natural n songa biror haqiqiy x_n sonini mos qo'yuvchi

$$f: n \to x_n, \quad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{1}$$

akslantirishni qaraymiz.

1-ta'rif. 1- akslantirishning akslaridan iborat ushbu

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_n,\ ... \tag{2}$$

to'plam **sonlar ketma-ketligi** deyiladi. Uni $\{x_n\}$ yoki x_n kabi belgilanadi.

$x_n\, (n = 1, 2, 3, ...)$ sonlar (2) **ketma-ketlikning hadlari** deyiladi. Masalan,

1) $x_n = \dfrac{1}{n}: 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, ..., \dfrac{1}{n}, ...,$

2) $x_n = (-1)^n: -1, 1, -1, ..., (-1)^n, ...$

3) $x_n = \sqrt[n]{n}: 1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, ..., \sqrt[n]{n}, ...$

4) $x_n = 1: 1, 1, 1, ..., 1, ...$

5) $0,3;\ 0,33;\ 0,333; ...;\ \underbrace{0,333...3}_{n \text{ та}};\ ...$

lar sonlar ketma-ketliklaridir.

Biror $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

2-ta'rif. *[1, p.130, def. 6.1.16] Agar shunday o'zgarmas M soni mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $x_n\, (n = 1, 2, 3, ...)$ uchun $x_n \le M$ tengsizlik bajarilsa (ya'ni $\exists M,\ \forall n \in N: x_n \le M$ bo'lsa), $\{x_n\}$ ketma-ketlik* ***yuqoridan chegaralangan*** *deyiladi.*

3-ta'rif. *Agar shunday o'zgarmas m soni mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $x_n\,(n=1,2,3,...)$ uchun $x_n \geq m$ tengsizlik bajarilsa (ya'ni, $\exists\, m,\ \forall\, n\in N: x_n \geq m$ bo'lsa), $\{x_n\}$ ketma-ketlik* ***quyidan chegaralangan*** *deyiladi.*

4-ta'rif. *Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa (ya'ni $\exists\, m, M,\ \forall\, n\in N:\ m\leq x_n \leq M$ bo'lsa), $\{x_n\}$ ketma-ketlik* ***chegaralangan*** *deyiladi.*

1-misol. Ushbu

$$x_n = \frac{n}{4+n^2} \qquad (n=1,2,3,...)$$

ketma-ketlikning chegaralanganligi isbotlansin.

◄ Ravshanki, $\forall n \in N$ uchun

$$x_n = \frac{n}{4+n^2} > 0$$

bo'ladi. Demak, qaralayotgan ketma-ketlik quyidan chegaralan-gan.

Ma'lumki,

$$0 \leq (n-2)^2 = n^2 - 4n + 4$$

bo'lib, undan $4n \leq 4+n^2$ ya'ni,

$$\frac{n}{4+n^2} \leq \frac{1}{4}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa berilgan ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligini bildiradi. Demak, ketma-ket-lik chegaralangan ►

5-ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun

$$\forall M \in R,\ \exists n_0 \in N:\ x_{n_0} > M$$

bo'lsa, **ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan** deyiladi.

2. Sonlar ketma-ketligining limiti.

Aytaylik, $a \in R$ son hamda ixtiyoriy musbat ε son berilgan bo'lsin.

6-ta'rif. Ushbu

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in R|\ a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

to'plam a **nuqtaning ε - atrofi** deyiladi.

Faraz qilaylik $\{x_n\}$ ketma-ketlik va $a \in R$ soni berilgan bo'lsin.

7-ta'rif. *[2, p.68, def. 3.5] Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday n_0 natural soni mavjud bo'lsaki, $n > n_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha natural sonlar uchun*

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad (3)$$

tengsizlik bajarilsa, (ya'ni

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 : |x_n - a| < \varepsilon$$

bo'lsa), a son $\{x_n\}$ ***ketma-ketlikning limiti*** *deyiladi va*

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \ \ yoki \ \ n \to \infty \ \ da \ \ x_n \to a$$

kabi belgilanadi.

Ravshanki, yuqoridagi (3) tengsizlik uchun

$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

ya'ni, $x_n \in U_\varepsilon(a)$, $(n > n_0)$ bo‘ladi. SHuni e'tiborga olib, ketma-ketlikning limitini quyidagicha ta'riflasa bo‘ladi.

8-ta'rif. *[1, p.128, def.6.1.5] Agar a nuqtaning ixtiyoriy $U_\varepsilon(a)$ atrofi olinganda ham $\{x_n\}$ ketma-ketlikning biror hadidan keyingi barcha hadlari shu atrofga tegishli bo‘lsa, a son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi.*

Yuqorida keltirilgan ta'riflardan ko‘rinadiki ε ixtiyoriy musbat son bo‘lib, natural n_0 soni esa ε ga va qaralayotgan ketma-ketlikka bog‘liq ravishda topiladi.

2-misol. Ushbu

$$x_n = c \ \ (c \in R, \ n = 1, 2, 3, ...)$$

ketma-ketlikning limiti c ga teng bo‘ladi.

◄Haqiqatan ham, bu holda $\forall\ \varepsilon > 0$ ga ko‘ra $n_0 = 1$ deyilsa, unda $\forall n > n_0$ uchun $|x_n - c| = 0 < \varepsilon$ bo‘ladi. Demak, $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} c = c$ ►

3-misol. Ushbu

$$x_n = \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

ketma-ketlikning limiti 0 ga teng bo‘lishi isbotlansin:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

◄ Ravshanki,

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$$

bo‘lib, $\frac{1}{n} < \varepsilon \ (\varepsilon > 0)$ tengsizlik barcha $n > \frac{1}{\varepsilon}$ bo‘lganda o‘rin-li. Bu holda

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$$

deyilsa, $([a] - a$ sonidan katta bo‘lmagan uning butun qismi), unda $\forall n > n_0$ uchun

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

bo‘ladi. Ta'rifga binoan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \ ►$$

4-misol. Aytaylik, $a \in R, |a| > 1$ bo‘lsin. U holda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0$$

bo‘lishi isbotlansin.

◀ $|a| = 1 + \delta$ deylik. Unda $\delta = |a| - 1 > 0$ va Bernulli tengsiz-ligiga ko‘ra

$$(1+\delta)^n \geq 1 + n\delta > n\delta$$

bo‘lib, $\forall n \in N$ da

$$\frac{1}{|a|^n} < \frac{1}{n\delta}$$

bo‘ladi. Demak,

$$\left| \frac{1}{a^n} - 0 \right| = \frac{1}{a^n} < \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$$

tengsizlik barcha

$$n > \frac{1}{\varepsilon\delta}$$

bo‘lganda o‘rinli. Agar

$$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon\delta} \right] + 1$$

deyilsa, ravshanki, $\forall n > n_0$ uchun

$$\left| \frac{1}{a^n} - 0 \right| < \varepsilon$$

bo‘ladi. Demak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0 \ ▶$$

5-misol. Ushbu $x_n = \dfrac{n}{n+1} \ (n = 1, 2, 3, ...)$

ketma-ketlikning limiti 1 ga teng bo‘lishi isbotlansin.

◀ Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olamiz. So‘ng ushbu

$$|x_n - 1| < \varepsilon$$

tengsizlikni qaraymiz. Ravshanki,

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{n}{n+1}$$

Unda yuqoridagi tengsizlik

$$\frac{n}{n+1} < \varepsilon$$

ko‘rinishga keladi. Keyingi tengsizlikdan

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, limit ta’rifidagi $n_0 \in N$ sifatida $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$ olinsa ($\varepsilon > 0$ ga ko‘ra $n_0 \in N$ topilib), $\forall n > n_0$ uchun $|x_n - 1| < \varepsilon$ bo‘ladi. Bu esa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

bo‘lishini bildiradi.►

6-misol. Faraz qilaylik, $a \in R, |a| > 1$ va $\alpha \in R$ bo‘lsin. U holda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$$

bo‘lishi isbotlansin.

◄ SHunday natural k sonni olamizki $k \ge \alpha + 1$ bo‘lsin. Endi $|a|^{\frac{1}{k}} > 1$ bo‘lishini e’tiborga olib, $|a|^{\frac{1}{k}} = 1 + \delta$, ya’ni $\delta = |a|^{\frac{1}{k}} - 1 > 0$ deymiz. Unda Bernulli tengsizligiga ko‘ra

$$|a|^{\frac{n}{k}} = (1+\delta)^n \ge 1 + n\delta > n\delta$$

bo‘lib, $\forall\, n \in N$ da

$$\frac{n^{k-1}}{a^n} < \frac{1}{n\delta^k}$$

bo‘ladi. Bu holda

$$n_0 = \left[\frac{1}{\delta^k \cdot \varepsilon}\right] + 1 \quad (\varepsilon > 0)$$

deyilsa, $\forall\, n > n_0$ uchun

$$\left|\frac{n^\alpha}{a^n} - 0\right| = \frac{n^\alpha}{|a|^n} \le \frac{n^{k-1}}{|n|^n} < \varepsilon$$

bo‘ladi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$. ►

7-misol. Ushbu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lg n}{n} = 0$$

tenglik isbotlansin.

◄ Ravshanki, $\forall\, \varepsilon > 0$ va $\forall\, n \in N$ uchun

$$0\le\frac{\lg n}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow \lg n<n\varepsilon \Leftrightarrow n<10^{n\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{n}{(10^{\varepsilon})^n}<1$$

bo‘ladi. Agar $10^{\varepsilon}>1$ bo‘lishini e’tiborga olsak, 6-misolga ko‘ra

$$n\to\infty \text{ да } \frac{n}{(10^{\varepsilon})^n}\to 0$$

ekanini topamiz. Unda ta’rifga ko‘ra 1 soni uchun

$$\exists\, n_0\in N,\ \forall\, n>n_0:\ \frac{n}{(10^{\varepsilon})^n}<1$$

bo‘ladi. SHunday qilib, $\forall\, n>n_0$ uchun $\frac{\lg n}{n}<\varepsilon$ bo‘ladi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n}=0$.
►

8-misol. Ushbu

$$x_n=(-1)^n \quad (n=1,2,3,...)$$

ketma-ketlikning limiti mavjud emasligi isbotlansin.

◄ Teskarisini faraz qilaylik. Bu ketma-ketlik a limitga ega bo‘lsin. Unda ta’rifga binoan,

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in N,\ \forall n>n_0:\ |(-1)^n-a|<\varepsilon$$

bo‘ladi.

Ravshanki, n juft bo‘lganda $|1-a|<\varepsilon$, n toq bo‘lganda $|(-1)-a|<\varepsilon$, ya’ni $|1+a|<\varepsilon$ bo‘ladi. Bu tengsizliklardan foydalanib topamiz:

$$2=|(1-a)+(1+a)|\le|1-a|+|1-a|<2\varepsilon .$$

Bu tengsizlik $\varepsilon>1$ bo‘lgandagina o‘rinli. Bunday vaziyat $\varepsilon>0$ soning ixtiyoriy bo‘lishiga zid. Demak, ketma-ketlik limitga ega emas. ►

Teorema. *[1, p.128, prop. 6.1.7] Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik limitga ega bo‘lsa, u yagona bo‘ladi.*

◄ *Teskarisini faraz qilaylik. $\{x_n\}$ ketma-ketlik ikkita a va b $(a\ne b)$ limitlarga ega bo‘lsin:*

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,\quad \lim_{n\to\infty}x_n=b \qquad (a\ne b)$$

Limitning ta’rifiga ko‘ra

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in N,\ \forall n>n_0:\ |x_n-a|<\varepsilon,$$
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0'\in N,\ \forall n>n_0':\ |x_n-b|<\varepsilon$$

bo‘ladi.

Agar n_0 va n_0' sonlarining kattasini $\bar{n}$ desak, unda $\forall n>\bar{n}$ da

$$|x_n-a|<\varepsilon,\ |x_n-b|<\varepsilon$$

bo‘lib

$$|x_n-a|+|x_n-b|<2\varepsilon$$

bo‘ladi.

Ravshanki, $|a-b|=|a-x_n+x_n-b|\le|x_n-a|+|x_n-b|$.
Demak, $\forall\,\varepsilon>0$ *da* $|a-b|<2\varepsilon$ *bo'lib, undan* $a=b$ *bo'lishi kelib chiqadi.* ►

Mashqlar

1. Ketma-ketlik limiti ta'rifidan foydalanib ushbu

$$x_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}$$

ketma-ketlikning limiti topilsin.

2. Agar $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\ \ \lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$ bo'lsa, u holda ushbu

$$x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\dots,x_n,\ y_n,\dots$$

ketma-ketlikning limiti ham a ga teng bo'lishi isbotlansin.

3. Agar $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}=a$$

bo'lishi isbotlansin.

Adabiyotlar

1. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'rizalar, I q.* T. "Voris-nashriyot", 2010.
2. **Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical analysis I*, Springer-Verlag Italia, Milan, 2008.
3. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.
4. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.

Nazorat savollari

1. Sonlar ketma-ketligi nima?
2. Qachon ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralangan (chegaralanmagan) deyiladi?
3. Sonlar ketma-ketligi limiti ta'rifini bering. Misollarda tushuntiring.

Glossariy

Sonlar ketma-ketligi – $f: n \to x_n,\ (n=1,2,3,...)$ akslantirishning akslaridan iborat ushbu $x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_n,\ ...$ to‘plam **sonlar ketma-ketligi** deyiladi.

Yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik – agar shunday o‘zgarmas M soni mavjud bo‘lsaki, ixtiyoriy $x_n\ (n=1,2,3,...)$ uchun $x_n \le M$ tengsizlik bajarilsa (ya’ni $\exists\, M,\ \forall\, n \in N:\ x_n \le M$ bo‘lsa), $\{x_n\}$ ketma-ketlik **yuqoridan chegaralangan** deyiladi.

Quyidan chegaralangan ketma-ketlik – agar shunday o‘zgarmas m soni mavjud bo‘lsaki, ixtiyoriy $x_n\ (n=1,2,3,...)$ uchun $x_n \ge m$ tengsizlik bajarilsa (ya’ni, $\exists\, m,\ \forall\, n \in N: x_n \ge m$ bo‘lsa), $\{x_n\}$ ketma-ketlik **quyidan chegaralangan** deyiladi.

Chegaralangan ketma-ketlik – agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo‘lsa (ya’ni $\exists\, m, M,\ \forall\, n \in N:\ m \le x_n \le M$ bo‘lsa), $\{x_n\}$ ketma-ketlik **chegaralangan** deyiladi.

Yuqoridan chegaralanmagan ketma-ketlik – agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $\forall M \in R,\ \exists n_0 \in N:\ x_{n_0} > M$ bo‘lsa, **ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan** deyiladi.

Nuqtaning ε-atrofi – ushbu

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in R|\ a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\} = (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$$

to‘plam a **nuqtaning ε - atrofi** deyiladi.

Ketma-ketlikning limiti – **a**gar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday n_0 natural soni mavjud bo‘lsaki, $n > n_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha natural sonlar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, (ya’ni

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N,\ \forall n > n_0: |x_n - a| < \varepsilon$$

bo‘lsa), a son $\{x_n\}$ **ketma-ketlikning limiti** deyiladi va

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ yoki } n \to \infty \text{ da } x_n \to a$$

kabi belgilanadi.

Keys banki

6-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ bo‘lsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = a$$

bo‘lishi isbotlansin.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

6-amaliy mashg`ulot

Na'muna uchun misollar yechimi

1-мисол. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ekanligi ta`rif yordamida ko`rsatilsin $\left(n_0(\varepsilon) \quad -?\right)$

$$x_n = \frac{2n^3}{n^3-2}, \quad a = 2$$

$\lhd$ $(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in N: \;\; \forall n > n_0 \;\; |x_n - a| < \varepsilon\right).$

$$|x_n - a| = \left|\frac{2n^3}{n^3-3} - 2\right| = \left|\frac{2n^3 - 2n^3 + 6}{n^3-3}\right| = \frac{6}{|n^3-3|} =$$

$$= \frac{6}{\left(n - \sqrt[3]{3}\right)\left(n^2 + \sqrt[3]{3}n + \sqrt[3]{3^2}\right)} < \frac{6}{n^2 + \sqrt[3]{3}n + \sqrt[3]{9}} < \frac{6}{\sqrt[3]{3}n} <$$

$$< \frac{6}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{6}{\varepsilon} \Rightarrow n_0 = \left[\frac{6}{\varepsilon}\right]$$

Demak, $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham $n_0 = \max\left\{2, \left[\frac{6}{\varepsilon}\right]\right\}$ deb olsak, $\forall n > n_0$ uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ bo`ladi. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $\rhd$

Quyidagi ketma-ketliklarning umumiy hadiga ko`ra dastlabki 5 ta hadi topilsin:

388. $x_n = (-1)^n$

389. $x_n = \dfrac{n+3}{n+1}$

390. $x_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{n^2}$

391. $x_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$

Ketma-ketlikning dastlabki hadlariga ko`ra umumiy hadi topilsin:

395. $\sqrt{1\cdot 2}, \sqrt{2\cdot 3}, \sqrt{3\cdot 4}, \ldots$

396. $-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{5}, \ldots$

397. $5, \frac{25}{2}, \frac{125}{6}, \frac{625}{24}, \ldots$

398. $\frac{1}{11}, \frac{2}{7}, \frac{9}{19}, \frac{8}{13}, \ldots$

Ketma-ketlik hadlari orasida eng kattasi topilsin:

400. $x_n = \sin\frac{n\pi}{2}$

401. $x_n = \frac{n^2}{2^n}$

402. $x_n = \frac{\pi^2}{(2n+1)!}$

403. $x_n = \frac{10^n}{n!}$

Ketma-ketlik hadlari orasida eng kichigi topilsin:

405. $x_n = n + \frac{5}{n}$

406. $x_n = \frac{n^2}{n^2+1}$

407. $x_n = \cos\frac{n\pi}{2}$

408. $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Quyidagi ketma-ketliklarning chegaralanganligi isbotlansin:

409. $x_n = \frac{n^3+1}{n^3+4}$.

410. $x_n = \frac{n}{4+n^2}$

411. $x_n = \frac{2^n}{n!}$

412. $x_n = \frac{2n^2-1}{n^2+2}$.

Quyidagi ketma-ketliklarning chegaralanmaganligi isbotlansin:

419. $x_n = (-1)^n \cdot n$.

420. $x_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}$

421. $x_n = \mathrm{n} + (-1)^n \cdot n$

422. $x_n = \dfrac{\mathrm{n}+1}{\log_2(n+1)}$

424. Ketma-ketlikning yuqoridan hamda quyidan chegaralanganligi ta'riflari keltirilsin.

425. Quyidagi ketma-ketliklarning yuqoridan chegaralanmaganligi isbotlansin: 1) $x_n = \sqrt{\mathrm{n}}$, 2) $x_n = \dfrac{n^3}{n^2+1}$, 3) $x_n = \mathrm{n}^{\cos\pi x}$.

426. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar chegaralangan bo`lsa, $\{\mathrm{x_n} + y_n\}$, $\{\mathrm{x_n} - y_n\}$, $\{\mathrm{x_n} \cdot y_n\}$ ketma-ketliklar ham chegaralangan bo`lishi isbotlansin.

427. Agar $\{x_n\}$ chegaralangan, $\{y_n\}$ chegaralanmagan bo`lsa, $\{\mathrm{x_n} + y_n\}$ chegaralanmagan ketma-ketlik bo`lishi isbotlansin.

428. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar chegaralanmagan bo`lsa, $\{\mathrm{x_n} + y_n\}$, $\{\mathrm{x_n} \cdot y_n\}$ ketma-ketlikla haqida nima deyish mumkin? Misollar keltirilsin.

Quyidagi ketma-ketliklarning o`suvchi yoki kamayuvchi bo`lishi aniqlansin:

429. $x_n = \dfrac{n+1}{n}$

430. $x_n = n^2$

431. $x_n = \dfrac{n+1}{2n-1}$

432. $x_n = 3^n - 2^n$

433. $x_n = \dfrac{1-n}{\sqrt{n}}$

434. $x_n = \dfrac{3^n}{n!}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ **ekanligi ta`rif yordamida ko`rsatilsin** $\left(n_0(\varepsilon)-?\right)$.

1. $x_n = \dfrac{13-n^2}{1+2n^2},\ a=-\dfrac{1}{2}$.

2. $x_n = \dfrac{3n-1}{5n+1},\ a=\dfrac{3}{5}$.

3. $x_n = \dfrac{1+3n}{6-n},\ a=-3$.

4. $x_n = \dfrac{3n^2+2}{4n^2-1},\ a=\dfrac{3}{4}$.

5. $x_n = \dfrac{2n-1}{2-3n},\ a=-\dfrac{2}{3}$.

6. $x_n = \dfrac{5n+1}{10n-3},\ a=\dfrac{1}{2}$.

7. $x_n = \dfrac{2n+3}{n+5},\ a=2$.

8. $x_n = \dfrac{2-3n^2}{4+5n^2},\ a=-\dfrac{3}{5}$

a **soni** $\{x_n\}$ **ketma-ketlikning limiti emasligi ta`rif yordamida ko`rsatilsin.**

1. $x_n = \dfrac{1}{2n+1},\ a=\dfrac{1}{2}$.

2. $x_n = \dfrac{(-1)^2}{n},\ a=-1$.

3. $x_n = \dfrac{n+1}{3-2n^2},\ a=-\dfrac{1}{2}$.

4. $x_n = n^{(-1)^n},\ a=0$.

5. $x_n = \sin\dfrac{\pi n}{2},\ a=1$.

6. $x_n = \sin\dfrac{\pi n}{3},\ a=0$.

7. $x_n = (-1)^n n,\ a=-1$.

8. $x_n = \dfrac{n^2-2n}{n+1},\ a=1$.

Test

№	Test topshirig`i	To`g`ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	Agar shunday o'zgarmas M soni mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $x_n\,(n=1,2,3,\ldots)$ uchun $x_n \le M$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik ...deyiladi	yuqoridan chegaralangan	quyidan chegaralangan	chegaralangan
2.	Chegaralangan ketma-ketlikni ko`rsating.	$x_n = \dfrac{n^3+1}{n^3+2017^{2017}}$	$x_n = \dfrac{n^4-1}{n^3-10^{2017}}$	$x_n = \dfrac{3^n+11}{n^3+2017}$
3.	Chegaralanmagan ketma-ketlikni ko`rsating.	$x_n = (-1)^n n$	$x_n = \dfrac{2^n}{n!}$	$x_n = \dfrac{\log_2 n}{n}$
4.	Ketma-ketlik limitni hisoblang: $x_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi n}{2}$	0	1	-1
5.	Ketma-ketlik limitni hisoblang: $x_n = \dfrac{1-3n^2}{n^2+2}$	-3	3	$\dfrac{1}{2}$
6.	Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $\forall M \in R \quad \exists n_0 \in N:\ x_{n_0} > M$ bo'lsa, ketma-ketlik ... deyiladi	yuqoridan chegaralanmagan	yuqoridan chegaralangan	quyidan chegaralangan
7.	Ketma-ketlik limitni hisoblang: $x_n = \sqrt{n^2+1} - n$	0	1	-1
8.	Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar chegaralangan bo`lsa, quyidagilardan qaysi biri chegaralangan bo`ladi? 1) $\{x_n+y_n\}$; 2) $\{x_n-y_n\}$; 3) $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$; 4) $\{x_n\cdot y_n\}$; 5) $\left\{\dfrac{1}{x_n\cdot y_n}\right\}$	1, 2, 4	1, 2, 3	1, 3, 5
9.	Ketma-ketlik limitni hisoblang: $x_n = \dfrac{12+3n^5}{5n^5+2n^2+9}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{4}{3}$	6
10.	Ketma-ketlik limitni hisoblang: $x_n = \dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$	0	1	-1

7-mavzu. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari

7-ma'ruza

Reja

1. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning chegaralanganligi. Tengsizliklarda limitga o'tish.

2. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustida amallar.

3. Cheksiz kichik hamda cheksiz katta miqdorlar.

$\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lsa, u **yaqinlashuvchi ketma-ketlik** deyiladi.

1. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning chegaralanganligi. Tengsizliklarda limitga o'tish.

1-teorema. *[1, p.131, Corollary 6.1.17] $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u chegaralangan bo'ladi.*

◄ *Aytaylik,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad (a \in R)$$

bo'lsin. Limit ta'rifiga ko'ra

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in N, \ \ \forall n > n_0; \ \ |x_n - a| < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak, $n > n_0$ uchun

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

bo'ladi. Agar

$$\max\{|a-\varepsilon|, \ |a+\varepsilon|, \ |x_1|, \ |x_2|, \dots, |x_{n_0}|\} = M$$

deyilsa, u holda, $\forall n \in N$ uchun

$$|x_n| \le M$$

tengsizlik bajariladi. Bu esa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chegaralanganligini bildiradi. ►

2-teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

bo‘lib, $a > p$ $(a < q)$ bo‘lsa, u holda shunday $n_0 \in N$ topiladiki, $\forall n > n_0$ bo‘lganda

$$x_n > p \ \ (x_n < q)$$

bo‘ladi.

◀ Aytaylik,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad a > p \quad (p \in R)$$

bo‘lsin. ε > 0 sonining ixtiyoriyligidan foydalanib, $\varepsilon < a - p$ deb qaraymiz.

Ketma-ketlik limiti ta’rifiga binoan, $\forall\ \varepsilon > 0$ uchun, jumladan, $0 < \varepsilon < a - p$ uchun, shunday $n_0 \in N$ topiladiki, $\forall n > n_0$ bo‘lganda

$$|\,x_n - a\,| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

bo‘ladi. Ravshanki,

$$0 < \varepsilon < a - p \Rightarrow p < a - \varepsilon,$$

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n.$$

Bu tengsizliklardan $\forall n > n_0$ bo‘lganda

$$x_n > p$$

bo‘lishi kelib chiqadi. ►

($a < q$ hol uchun ham teorema yuqoridagidek isbot etiladi).

3-teorema. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lib,

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b;$

2) $\forall n \in N$ учун $x_n \le y_n$ $(x_n \ge y_n)$

bo‘lsa, u holda $a \le b$ $(a \ge b)$ bo‘ladi.

◀ Shartga ko‘ra

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Ketma-ketlik limiti ta’rifiga binoan:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0^{'} \in N,\ \ \forall n > n_0^{'}:\ \ |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0^{''} \in N,\ \ \forall n > n_0^{''}\ \ \ |y_n - b| < \varepsilon$$

bo‘ladi.

Agar $n_0 = \max\{n_0^{'},\ n_0^{''}\}$ deyilsa, unda $\forall n > n_0$ uchun bir yo‘la

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad |y_n - b| < \varepsilon$$

tengsizliklar bajariladi.

Ravshanki,

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon\ ,$$

$$|y_n - b| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon.$$

Bu tengsizliklardan hamda teoremaning 2-shartidan foydalanib topamiz:

$$a-\varepsilon < x_n \le y_n < b+\varepsilon .$$

Keyingi tengsizliklardan

$$a-\varepsilon < b+\varepsilon, \qquad a-b<2\varepsilon$$

va $\forall\varepsilon>0$ bo‘lgani uchun $a-b\le 0$, ya’ni $a\le b$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Xuddi shunga o‘xshash, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ hamda $\forall n\in N$ uchun $x_n \ge y_n$ bo‘lishidan $a\ge b$ tengsizlik kelib chiqishi ko‘rsatiladi. ►

4-teorema. Agar $\{x_n\}$ va $\{z_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lib,

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\quad \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$

2) $\forall n\in N$ uchun $x_n \le y_n \le z_n$

bo‘lsa, u holda $\{y_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi va

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a$$

bo‘ladi.

◄ Shartga ko‘ra

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = a.$$

Limit ta’rifiga binoan:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0^{'}\in N,\ \ \forall n>n_0^{'}:\ \ |x_n-a|<\varepsilon,$$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0^{''}\in N,\ \ \forall n>n_0^{''}\ \ \ |z_n-a|<\varepsilon$$

bo‘ladi. Agar $n_0=\max\{n_0^{'},\, n_0^{''}\}$ deyilsa, unda $\forall n>n_0$ uchun

$$a-\varepsilon<x_n, \quad z_n<a+\varepsilon$$

tengsizliklar bajariladi. Teoremaning 1-shartidan foyda-lanib topamiz:

$$a-\varepsilon<x_n\le y_n\le z_n<a+\varepsilon .$$

Keyingi tengsizliklardan

$$a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon, \quad \text{ya’ni} \quad |y_n-a|<\varepsilon$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

Shuni isbotlash talab qilingan edi. ►

1-misol. Ushbu

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$$

limit topilsin.

◄ Ravshanki, barcha $n\ge 2$ bo‘lganda

$$\sqrt[2n]{n}>1$$

bo‘ladi. Aytaylik,

$$\sqrt[2n]{n}=1+\alpha_n$$

bo‘lsin. Unda

$$\sqrt[n]{n} = (1+\alpha_n)^2 \qquad (1)$$

va $\sqrt{n} = (1+\alpha_n)^2$ bo‘ladi.
Bernulli tengsizligidan foydalanib topamiz:

$$\sqrt{n} = (1+\alpha_n)^n \geq 1+n\cdot\alpha_n > n\cdot\alpha_n. \qquad (2)$$

(1) va (2) munosabatlardan

$$a_n < \frac{1}{\sqrt{n}},$$

va

$$1 < \sqrt[n]{n} < \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$$

tengsizliklar kelib chiqadi. Agar

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = 1$$

ekanini e’tiborga olsak, unda 4-teoremaga ko‘ra

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

bo‘lishini topamiz. ►

2-misol. Ushbu

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}$$

limit topilsin.

◄Ravshanki,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} > \frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n} = n\cdot\frac{1}{n} = 1,$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} < 1+1+1+\ldots+1 = n.$$

Demak,

$$1 < \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{n}.$$

4-teoremadan foydalanib topamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}} = 1.\ ►$$

2^0. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustida amallar.

Faraz qilaylik, $\{x_n\}$ hamda $\{y_n\}$ ketma-ketliklar berilgan bo‘lsin:

$$\{x_n\}: \ x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$$
$$\{y_n\}: \ y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ...$$

Quyidagi

$$x_1 + y_1, \ \ x_2 + y_2, \ \ x_3 + y_3, \ ..., \ \ x_n + y_n, ...$$
$$x_1 - y_1, \ \ x_2 - y_2, \ \ x_3 - y_3, \ ..., \ \ x_n - y_n, ...$$
$$x_1 \cdot y_1, \ \ x_2 \cdot y_2, \ x_3 \cdot y_3, ..., x_n \cdot y_n, ...$$
$$\frac{x_1}{y_1}, \ \frac{x_2}{y_2}, \ \frac{x_3}{y_3}, \ ..., \ \frac{x_n}{y_n}, ... \quad (y_n \neq 0, \ \ n = 1, 2, 3, \ ...)$$

ketma-ketliklar mos ravishda $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ **ketma-ketlik-larning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi hamda nisbati** deyiladi va ular

$$\{x_n + y_n\}, \ \ \{x_n - y_n\}, \ \ \{x_n \cdot y_n\}, \ \ \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$$

kabi belgilanadi.

5-teorema. *[1, p.131, theorem 6.1.19] Aytaylik $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklari berilgan bo'lib,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b, \qquad (a \in R, \quad b \in R)$$

bo'lsin. U holda $n \to \infty$ da $(c \cdot x_n) \to c \cdot a$;

$$x_n + y_n \to a + b; \qquad x_n \cdot y_n \to ab; \qquad \frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b} \ (b = 0), \textit{ ya'ni}$$

a) $\forall c \in R$ да $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \quad (b \neq 0)$

bo'ladi.

Teoremaning tasdiqlaridan birini, masalan c)-ning isbotini keltiramiz.

◀ Teoremaning shartiga ko'ra,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Ravshanki,

$$\begin{aligned} |x_n \cdot y_n - ab| &= |x_n \cdot y_n - a \cdot y_n + a \cdot y_n - b| \leq \\ &\leq |x_n - a| \cdot |y_n| + |a| \cdot |y_n - b|. \end{aligned} \tag{3}$$

$\{y_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lganligi sababli u 1-teoremaga ko'ra chegaralangan bo'ladi:

$$\exists M>0, \quad \forall n\in N: \quad |y_n|\le M.$$

Ketma-ketlik limiti ta'rifidan foydalanib topamiz:

$\forall\varepsilon>0$ berilgan hamda $\dfrac{\varepsilon}{2M}$ ga ko'ra shunday $n_0^{'}\in N$ topiladiki, $\forall n>n_0^{'}$ uchun

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2M}$$

bo'ladi.

SHuningdek, $\dfrac{\varepsilon}{2(1+|a|)}$ ga ko'ra shunday $n_0^{''}\in N$ topiladiki, $\forall n>n_0^{''}$ uchun

$$|y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2(1+|a|)}$$

bo'ladi.

Agar $n_0=\max\{n_0^{'},\, n_0^{''}\}$ deyilsa, unda $\forall n>n_0$ uchun bir yo'la

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2M}, \quad |y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2(1+|a|)} \tag{4}$$

bo'ladi.

(3) va (4) munosabatlardan

$$|x_n\cdot y_n-ab|<\frac{\varepsilon}{2M}\cdot M+|a|\cdot\frac{\varepsilon}{2(1+|a|)}<\varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa

$$\lim_{n\to\infty} x_n\cdot y_n=ab$$

bo'lishini bildiradi. ►

3^0. Cheksiz kichik hamda cheksiz katta miqdorlar.

Faraz qilaylik, $\{\alpha_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

2-ta'rif. *[2. p.130]Agar $\{\alpha_n\}$ ketma-ketlikning limiti nolga teng, ya'ni*

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$$

*bo'lsa, $\{\alpha_n\}$ - **cheksiz kichik miqdor** deyiladi.*

Masalan,

$$\alpha_n=\frac{1}{n} \quad \text{ва} \quad \alpha_n=q^n, \ (|q|<1)$$

ketma-ketliklar cheksiz kichik miqdorlar bo'ladi.

Aytaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib, uning limiti a ga teng bo'lsin:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a.$$

U holda $\alpha_n = x_n - a$ cheksiz kichik miqdor bo‘ladi. Keyingi tenglikdan topamiz: $x_n = a + \alpha_n$. Bundan esa quyidagi muhim xulosa kelib chiqadi:

$\{x_n\}$ ketma-ketlikning a $(a \in R)$ limitga ega bo‘lishi uchun $\alpha_n = x_n - a$ ning cheksiz kichik miqdor bo‘lishi zarur va etarli.

Ketma-ketlikning limiti ta’rifidan foydalanib quyidagi ikkita lemmani isbotlash qiyin emas.

1-lemma. Chekli sondagi cheksiz kichik miqdorlar yigindisi cheksiz kichik miqdor bo‘ladi.

2-lemma. Chegaralangan miqdor bilan cheksiz kichik miqdor ko‘paytmasi cheksiz kichik miqdor bo‘ladi.

3-ta’rif. *[2, p.70, def. 3.7]Agar har qanday M soni olinganda ham shunday natural n_0 soni topilsaki, barcha $n > n_0$ uchun*

$$|x_n| > M$$

*tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning **limiti cheksiz** deyiladi va*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

kabi belgilanadi.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti cheksiz bo‘lsa, $\{x_n\}$ cheksiz katta miqdor deyiladi.

Masalan,

$$x_n = (-1)^n \cdot n$$

ketma-ketlik cheksiz katta miqdor bo‘ladi.

Endi cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar orasidagi bog’lanishni ifodalovchi tasdiqlarni keltiramiz:

1) Agar $\{x_n\}$ cheksiz kichik miqdor $(x_n \neq 0)$ bo‘lsa, u holda $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ cheksiz katta miqdor bo‘ladi.

2) Agar $\{x_n\}$ cheksiz katta miqdor bo‘lsa, u holda $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ cheksiz kichik miqdor bo‘ladi.

Mashqlar

1. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ a > 0$ bo‘lsa, u holda $\exists n_0 \in N,\ \forall n > n_0:\ x_n > 0$ bo‘lishi isbotlansin.

2. Ushbu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n^2 - 1} \cos\frac{n+1}{2n-1}$$

limit hisoblansin.

3. Ushbu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n!} = 0, \quad (n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n)$$

limit munosabat isbotlansin.

Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical analysis I*, Springer-Verlag Italia, Milan, 2008.
3. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'rizalar, I q.* T. “Voris-nashriyot”, 2010.
4. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.

Nazorat savollari

1. Yaqinlashuvhci ketma-ketlik ta’rifini ayting.
2. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lib,

   1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$;

   2) $\forall n \in N$ uchun $x_n < y_n$

bo‘lsa, u holda $a < b$ bo‘ladimi? Misollar keltirlsin.

3. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustida bajariladigan amallar haqidagi teoremani ayting.
4. Cheksiz kichik va cheksiz kata ketma-ketliklar ta’riflarini keltiring.
5. Ikkita cheksiz katta miqdor yig’indisi, ayimasi, ko’paytmasi va nisbati yana cheksiz katta miqdor bo’ladimi?

Glossariy

Yaqinlashuvchi ketma-ketlik – agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo‘lsa, u yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Ikki mirshab haqidagi teorema – agar $\{x_n\}$ va $\{z_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lib, 1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$; 2) $\forall n \in N$ uchun $x_n \le y_n \le z_n$ bo‘lsa, u holda $\{y_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ bo‘ladi.

Cheksiz kichik miqdor – agar $\{\alpha_n\}$ ketma-ketlikning limiti nolga teng, ya’ni $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ bo‘lsa, $\{\alpha_n\}$ – cheksiz kichik miqdor deyiladi.

Cheksiz katta miqdor – agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti cheksiz bo‘lsa, u cheksiz katta miqdor deyiladi.

Keys banki

7-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $a > 0$ bo‘lsa, u holda $\exists n_0 \in N$, $\forall n > n_0$: $x_n > 0$ bo‘lishi isbotlansin.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

7-amaliy mashg`ulot

Na'muna uchun misollar yechimi

1-misol. «Ikki mirshab haqidagi teorema»dan foydalanib $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchiligi ko`rsatilsin.

$$x_n=\left(\frac{2n+3}{n^2}\right)^n$$

$\triangleleft$ $\frac{2n+3}{n^2}\le\frac{2n+3n}{n^2}=\frac{5n}{n^2}=\frac{5}{n}\le\frac{1}{2}$, agar $n\ge10$ bo`lsa,

$\frac{2n+3}{n^2}\ge\frac{2+3}{n^2}=\frac{5}{n^2}\ge\frac{1}{20}$ agar $n\ge10$ bo`lsa.

Agar $y_n=\frac{1}{20^n}$ va $z_n=\frac{1}{2^n}$ deb belgilasak, unda $\forall\, n\ge10$ uchun $y_n\le x_n\le z_n$ qo`sh tengsizlik bajariladi. $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$ va «ikki mirshab haqidagi teorema» ga ko`ra $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ bo`ladi. $\triangleright$

Misollar

Cheksiz kichik ketma-ketlikning chegaralangan ketma-ketlikka ko`paytmasi haqidagi teoremadan foydalanib $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchi ekanligi ko`rsatilsin.

1. $x_n=\frac{\operatorname{sgn}(tgn)}{n}$.

2. $x_n=\frac{1}{n(8+\sin n)}$.

3. $x_n=\frac{1}{n^2\cdot\left[2+(-1)^n\right]}$.

4. $x_n=\frac{\cos\pi n}{\sqrt{n}}$.

5. $x_n=\frac{\sin\frac{\pi n}{4}}{n^2}$.

6. $x_n=\frac{\frac{n}{2}-\left[\frac{n}{2}\right]}{\ln(n+1)}$.

Qismiy ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremadan foydalanib $\{x_n\}$ ketma-ketlikning uzoqlashuvchi ekanligi ko`rsatilsin.

7. $x_n = (0,5)^{(-1)^n n}$.

8. $x_n = 2^{(-1)^n n}$.

9. $x_n = \left[2 + (-1)^n\right]^n$.

10. $x_n = \sin \frac{\pi n}{2002}$.

«Ikki mirshab haqidagi teorema» dan foydalanib $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchiligi ko`rsatilsin.

11. $x_n = \left(\frac{5}{n}\right)^n$.

12. $x_n = \left(\frac{n+10}{2n-1}\right)^n$.

13. $x_n = \frac{2^n}{(2n)!}$.

14. $x_n = \frac{-1 + \sqrt{n} + \sin n}{n}$.

15. $x_n = \left(\frac{2n+3}{n^2}\right)^n$.

Test

№	Test topshirig`i	To`g`ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	Yaqinlashuchi ketma -ketlikni ko`rsating.	$x_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$	$x_n = \cos\frac{\pi n}{3}$	$x_n = n^{(-1)n}$
2.	Yaqinlashuchi bo`lmagan ketma -ketlikni ko`rsating.	$x_n = n^{(-1)^n+2}$	$x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$	$x_n = \sqrt{n^2+1}-n$
3.	Agar $\{\alpha_n\}$ ketma-ketlikning limiti nolga teng bo'lsa, $\{\alpha_n\}$ ... deyiladi.	cheksiz kichik miqdor	cheksiz katta miqdor	kichik miqdor
4.	Chegaralangan miqdor bilan cheksiz kichik miqdor ko'paytmasi ... bo'ladi	cheksiz kichik miqdor	cheksiz katta miqdor	kichik miqdor
5.	Cheksiz kichik miqdorni ko`rsating.	$x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$	$x_n = \sqrt{n^2+1}-n$	$x_n = \frac{(-1)^n}{n}$
6.	Cheksiz katta miqdorni ko`rsating.	$x_n = \lg(\lg n),\ (n \geq 2)$	$x_n = \frac{2n-3}{n^2}$	$x_n = \frac{n^2-1}{n^3}$
7.	Uzoqlashuvchi ketma -ketlikni ko`rsating	$x_n = n^2\cos\frac{\pi n}{4}$	$x_n = \frac{2n-3}{n^2}$	$x_n = \frac{n^2-1}{n^3}$
8.	Ketma-ketlik limitini toping: $x_n = \sqrt{\frac{9n+1}{n}}$	3	1	0
9.	Ketma-ketlik limitini toping: $x_n = \sqrt[n]{2^n+5^n}$	5	2	$\frac{1}{2}$
10.	Ketma-ketlik limitini toping: $x_n = \frac{2n^3+3\cdot 2^n+\cos n}{2^n+\sin n}$	3	2	0

8-mavzu. Monoton ketma-ketliklar va ularning limiti

8-ma'ruza

Reja

1. Monoton ketma-ketlik tushunchasi.

2. Monoton ketma-ketlikning limiti.

3. *e* soni.

1. Monoton ketma-ketlik tushunchasi. [2, p.71]

Aytaylik, $\{x_n\}$:

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n,\ \ldots \qquad (1)$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. *Agar (1) ketma-ketlikda* $\forall n \in N$ *uchun* $x_n \le x_{n+1}$ *tengsizlik bajarilsa,* $\{x_n\}$ ***o'suvchi ketma-ketlik*** *deyiladi. Agar (1) ketma-ketlikda* $\forall n \in N$ *uchun* $x_n < x_{n+1}$ *tengsizlik bajarilsa,* $\{x_n\}$ ***qat'iy o'suvchi ketma-ketlik*** *deyiladi.*

2-ta'rif. *Agar (1) ketma-ketlikda* $\forall n \in N$ *uchun* $x_n \ge x_{n+1}$ *tengsizlik bajarilsa,* $\{x_n\}$ ***kamayuvchi ketma-ketlik*** *deyiladi. Agar (1) ketma-ketlikda* $\forall n \in N$ *uchun* $x_n > x_{n+1}$ *tengsizlik bajarilsa,* $\{x_n\}$ ***qat'iy kamayuvchi ketma-ketlik*** *deyiladi.*

1-misol. Ushbu

$$x_n = \frac{n+1}{n}:\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \ldots$$

ketma-ketlik qat'iy kamayuvchi ketma-ketlik bo'ladi.

◀ Haqiqatdan ham, berilgan ketma-ketlik uchun

$$x_n = \frac{n+1}{n}, \qquad x_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

bo'lib, $\forall n \in N$ uchun

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

bo‘ladi. Unda $x_{n+1} < x_n$ bo‘lishi kelib chiqadi. ►

Yuqoridagi ta’riflardan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

1) agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik o‘suvchi bo‘lsa, u quyidan chegaralangan bo‘ladi:

2) agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik kamayuvchi bo‘lsa, u yuqoridan chegaralangan bo‘ladi.

O‘suvchi hamda kamayuvchi ketma-ketliklar umumiy nom bilan monoton ketma-ketliklar deyiladi.

2-misol. Ushbu

$$x_n = \frac{n^2}{n^2+1} \qquad (n = 1,2,3,\dots)$$

ketma-ketlikning qat’iy o‘suvchi ekanligi isbotlansin.

◄ Bu ketma-ketlikning $n -$hamda $(n+1) -$hadlari uchun

$$x_n = \frac{n^2}{n^2+1} = 1 - \frac{1}{n^2+1},$$

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2+1}$$

bo‘ladi. Ravshanki,

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} \ .$$

SHu tengsizlikni e’tiborga olib, topamiz:

$$x_{n+1} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2+1} > 1 - \frac{1}{n^2+1} = x_n.$$

Demak, $\forall n \in N$ uchun $x_n < x_{n+1}$. Bu esa qaralayotgan ketma-ketlikning qat’iy o‘suvchi bo‘lishini bildiradi. ►

2. Monoton ketma-ketlikning limiti.

Quyida monoton ketma-ketliklarning limiti haqidagi teoremalarni keltiramiz.

1-teorema. *[2, p.71, th.3.9]Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik*

1) o‘suvchi,

2) yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, u chekli limitga ega bo‘ladi.

◄ Aytaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik teoremaning ikkala shartlarini bajarsin. Bu ketma-ketlikning barcha hadlari-dan iborat to‘plamni E bilan belgilaymiz:

$$E = \{x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ \dots\}.$$

Ravshanki, E yuqoridan chegaralangan to‘plam bo‘lib, $E \neq \varnothing$. Unda to‘plamning aniq chegarasining mavjudligi haqidagi teoremaga muvofiq, $\sup E$ mavjud bo‘ladi. Uni a bilan belgilaylik:

$$\sup E = a.$$

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonini olaylik. To‘plamning aniq yuqori chegarasi ta’rifiga binoan:

1) $\forall n \in N$ uchun $x_n \le a$

2) $\exists x_{n_0} \in E, \qquad x_{n_0} > a - \varepsilon$

bo‘ladi. Ayni paytda $\forall n > n_0$ uchun $x_n \ge x_{n_0}$ tengsizlik bajari-lib, $x_n > a - \varepsilon$ bo‘ladi.

Natijada $\forall n > n_0$ uchun $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ ya’ni $|a - x_n| < \varepsilon$ bo‘li-shini topamiz.

Demak $\{x_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \sup E. \ ►$$

2-teorema. *Agar* $\{x_n\}$ *ketma-ketlik*

1) kamayuvchi,

2) quyidan chegaralangan bo‘lsa, u chekli limitga ega bo‘ladi.

Bu teorema yuqorida keltirilgan teoremaning isboti kabi isbotlanadi.

3-misol. Ushbu

$$x_n = \frac{n!}{n^n}$$

ketma-ketlikning limiti topilsin.

◄ Ravshanki, $\forall n \ge 1$ uchun $x_n > 0$ bo‘ladi. Bu ketma-ketlikning x_{n+1} va x_n hadlarining nisbatini qaraymiz:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n} = \frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1.$$

Demak, $x_{n+1} < x_n$. Bundan esa berilgan ketma-ketlikning kamayuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Ayni paytda $\forall n \ge 1$ da

$$0 < x_n \le x_1$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi. Demak berilgan ketma-ketlik chegaralangan. 1-teoremaga ko‘ra $\{x_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega. Uni a bilan belgilaymiz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = a. \qquad (a \ge 0)$$

Endi ushbu $x_n - x_{n+1}$ ayirmani qaraymiz. Bu ayirma uchun

$$x_n - x_{n+1} = x_n - x_n \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = x_n \frac{(n+1)^n - n^n}{(n+1)^n} \geq$$

$$\geq x_n \cdot \frac{2n^n - n^n}{(n+1)^n} = x_n \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = x_{n+1}$$

bo‘lib, undan

$$x_n \geq 2x_{n+1}$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Keyingi munosabatlardan topamiz:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq 2\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$, $\quad a \geq 2a$. Ravshanki, bu holda $a = 0$ bo‘ladi.

Demak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0. \blacktriangleright$$

3. *e* ***soni.*** *[2, p.72]*

Ushbu

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

ketma-ketlikni qaraymiz.

Tasdiq. *(1) ketma-ketlik o‘suvchi bo‘ladi.*

◀ Berilgan ketma-ketlikning x_{n+1} hamda x_n hadlarining nisbatini topamiz:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{(n+2)^{n+1} \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot (n+1)^n} =$$

$$= \left[\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}.$$

Bernulli tengsizligiga ko‘ra:

$$\left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} > 1 - \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1} \text{ bo‘ladi.}$$

Natijada $\forall n \in N$ uchun

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1$$

ya’ni, $x_{n+1} > x_n$ bo‘lishi kelib chiqadi. ►

Tasdiq. *(1) ketma-ketlik chegaralangan bo‘ladi.*

◄ Ravshanki, $k \geq 1$ uchun

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k \geq 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{k-1}$$

bo‘ladi.

Endi Nyuton binomi formulasidan foydalanib topamiz:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} + \ldots + C_n^n \cdot \frac{1}{n^n} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n^k} C_n^k =$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(\frac{n-1}{n}\right) \leq$$

$$\leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

Demak, $\forall n \in N$ uchun $0 < x_n < 3$ bo‘ladi.

Monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremaga ko‘ra

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ketma-ketlik chekli limitga ega. ►

3-ta’rif. *(1) ketma-ketlikning limiti e soni deyiladi:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Bu e soni irratsional son bo‘lib,

$$e = 2{,}718281828459045\ldots$$

bo‘ladi.

Mashqlar

1. Ushbu $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ketma-ketlikning kamayuvchi ekanligi isbotlansin.

2. Ushbu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}$ limit hisoblansin.

3. Ushbu $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ... ketma-ketlikning yaqinlashuvchanligi isbotlansin va limiti topilsin.

Adabiyotlar

1. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'rizalar, I q.* T. "Voris-nashriyot", 2010.
2. **Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical analysis I*, Springer-Verlag Italia, Milan, 2008.
3. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.
4. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.

Nazorat savollari

4. (Qat'iy) o'suvchi (kamayuvchi) ketma-ketliklar ta'riflarini bering?
5. Monoton ketma-ketliklarning limiti haqidagi teoremalarni keltiring.
6. e soni qanday son?

Glossariy

Monoton ketma-ketlik – O‘suvchi hamda kamayuvchi ketma-ketliklar

O‘suvchi ketma-ketlik – Agar $\{x_n\}$ketma-ketlikda $\forall n \in N$ uchun $x_n \le x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa.

Qat’iy o‘suvchi ketma-ketlik – Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikda $\forall n \in N$ uchun $x_n < x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa.

Kamayuvchi ketma-ketlik – Agar $\{x_n\}$ketma-ketlikda $\forall n \in N$ uchun $x_n \ge x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa.

Qat’iy kamayuvchi ketma-ketlik – Agar $\{x_n\}$ketma-ketlikda $\forall n \in N$ uchun $x_n > x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa.

Quyidan chegaralangan ketma-ketlik – Agar shunday *n* soni mavjud bo`lib, $\{x_n\}$ketma-ketlikning har bir hadi shu sondan katta bo`lsa.

Yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik – Agar shunday *n* soni mavjud bo`lib, $\{x_n\}$ketma-ketlikning har bir hadi shu sondan kichik bo`lsa.

***e* soni –** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Keys banki

8-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: Ushbu

$$\sqrt{2},\quad \sqrt{2+\sqrt{2}},\quad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \ldots$$

ketma-ketlikning yaqinlashuvchanligi isbotlansin va limiti topilsin.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

8-amaliy mashg'ulot

Na'muna uchun misollar yechimi

21-masala. Monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teorema yoki limitlar ustidagi amallar haqidagi teoremalardan foydalanib $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashishga tekshirilsin.

◃ Monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremadan foydalanib, berilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yaqinlashuvchi ekanligini ko`rsatamiz.

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{(n+1)!} > x_n \Rightarrow \{x_n\}\uparrow .$$

Endi bu ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligini ko`rsatamiz:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} <$$

$$< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Shunday qilib, $\{x_n\}\uparrow$ va $\forall n \in N$ uchun $x_n \le 2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \exists \Rightarrow \{x_n\}$ - yaqinlashuvchi ▹

Misollar

Monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teorema yoki limitlar ustidagi amallar haqidagi teoremalardan foydalanib $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashishga tekshirilsin.

1. $x_n = n^{(-1)^n} + \dfrac{\operatorname{sgn}(tgn)}{n}$.

2. $x_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{\frac{n}{2} - \left[\frac{n}{2}\right]}{\ln(n+1)}$.

3. $x_n = \dfrac{n^2 + n}{n - n^2}$.

4. $x_n = (-1)^n \cdot \left(1 + \dfrac{\cos \pi n}{\sqrt{n}}\right)$.

5. $x_n = \dfrac{n + \sin\left(\dfrac{\pi n}{4}\right)}{n^2}$.

6. $x_n = \dfrac{n+1}{n^2 \cdot (8 + \sin n)}$.

7.
$x_n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$
.

8.
$x_n = \left(1 - \dfrac{1}{\lg 11}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{\lg 12}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \dfrac{1}{\lg(10+n)}\right)$
.

9.
$x_n = \dfrac{\sin\alpha}{2} + \dfrac{\sin 2\alpha}{2^2} + \ldots + \dfrac{\sin n\alpha}{2^n}$.

10. $x_n = \dfrac{|\sin 1|}{2} + \dfrac{|\sin 2|}{2^2} + \ldots + \dfrac{|\sin n|}{2^n}$.

11. $x_n = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{2}{3^2} + \ldots + \dfrac{n}{(n+1)^2}$.

12. $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

13. $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

14. $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

15. $x_n = \cos 1 + \dfrac{\cos 2}{2^2} + \ldots + \dfrac{\cos n}{n^2}$.

16. $x_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

17. $x_n = \dfrac{\lg n}{n}$.

18. $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

19. $x_n = 0,\underbrace{77\ldots7}_{n\ \text{TT}}$.

20. $x_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2} - \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$.

21. $x_n = 1 + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$.

Test

1. Ushbu $x_n = \frac{n!}{n^n}$ ketma-ketlikning limiti topilsin.

   A) 0 B) 1 C) ∞ D) aniqlab bo`lmaydi

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^2-1}{3n^2+5n+2}$ limitni hisoblang.

   A) $\frac{2}{3}$ B) 1 C) 0 D) ∞

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2-3n}{3n^2+4n+7}$ limitni hisoblang.

   A) $\frac{1}{3}$ B) 2 C) 0 D) 1

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n^2+1}}{5n-1}$ limitni hisoblang.

   A) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) 0 D) ∞

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+25}}{7n+61}$ limitni hisoblang.

   A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{2}{5}$ C) 0 D) 1

6. $\lim\limits_{n\to\frac{1}{2}} \frac{8n^3-1}{6n^2-5n+1}$ limitni hisoblang.

   B) -4 B) 0 C) 1 D) ∞

7. $\lim\limits_{n\to 0} \frac{tgn}{n}$ limitni hisoblang.

   A) 1 B) 0 C) 2 D) ∞

8. $\lim\limits_{n\to 0} \frac{\sin n}{n}$ limitni hisoblang.

   A) 1 B) 2 C) 0 D) ∞

9. $\lim\limits_{n\to 0} \frac{2^n-1}{n}$ limitni hisoblang.

   A) ln2 B) 0 C) 1 D) ∞

10. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$ limitni hisoblang.

    A) 1 B) 0 C) 2 D) ∞

9-mavzu. Qismiy va fundamental ketma-ketliklar. Ketma-ketliklarning quyi hamda yuqori limitlari

9-ma'ruza

Reja

1. Qismiy ketma-ketliklar. Boltsano–Veyershtrass teoremasi.

2. Fundamental ketma-ketliklar. Koshi teoremasi.

3. Ketma-ketlikning quyi hamda yuqori limitlari.

1. Qismiy ketma-ketliklar. Boltsano–Veyershtrass teoremasi.

[1, p.149] Aytaylik,

$$\{x_n\}:\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ldots \qquad (1)$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Bu (1) ketma-ketlikning biror n_1 *nomerli* x_{n_1} *hadini olamiz. So'ngra nomeri* n_1 *dan katta bo'lgan* n_2 *nomerli* x_{n_2} *hadini olamiz. SHu usul bilan* $x_{n_3},\ x_{n_4}$ *va h.k. hadlarni tanlab olamiz. Natijada nomerlari*

$$n_1 < n_2 < n_3 < .. < n_k < \ldots$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi (1) ketma-ketlikning hadlari ushbu

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ \ldots,\ x_{n_k},\ \ldots \qquad (2)$$

ketma-ketlikni hosil qiladi.

(2) ketma-ketlik (1) ketma-ketlikning qismiy ketma-ketligi deyiladi va $\{x_{n_k}\}$ *kabi belgilanadi.*

Masalan,

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots,$$

$$1,\ 3,\ 5,\ \ 7,\ \ldots,$$

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots$$

ketma-ketliklar $1,\ 2,\ 3,\ 4,..,n,\ \ldots$ *ketma-ketlikning qismiy ketma-ketliklari,*

$$1,\ 1,\ 1,\ \dots,\ 1,\ \dots,$$
$$-1,\ -1,\ \dots,\ -1,\ \dots$$

ketma-ketliklar $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \dots,\ (-1)^{n+1},\ \dots$ *ketma-ketlikning qismiy ketma-ketliklari bo'ladi.*

Keltirilgan tushuncha va misollardan bitta ketma-ketlikning turli qismiy ketma-ketliklari bo'lishi mumkinligi ko'rinadi.

1-teorema. *[1, p.150, prop.6.6.5] Agar* $\{x_n\}$ *ketma-ketlik limitga ega bo'lsa, uning har qanday qismiy ketma-ketligi ham shu limitga ega bo'ladi.*

◄ Bu teoremaning isboti ketma-ketlik limiti ta'rifidan kelib chiqadi. ►

Eslatma. Ketma-ketlik qismiy ketma-ketliklarining limiti mavjud bo'lishidan berilgan ketma-ketlikning limiti mavjud bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

Masalan, $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \dots,\ (-1)^{n+1},\ \dots$ ketma-ketlikning qismiy ketma-ketliklari

$$1,\ 1,\ 1,\ \dots,\ 1,\ \dots,$$
$$-1,\ -1,\ \dots,\ -1,\ \dots$$

larning limiti bo'lgan holda ketma-ketlikning o'zining limiti mavjud emas.

2-teorema (Boltsano–Veyershtrass teoremasi). [1, p.151, theorem 6.6.8] *Har qan-day chegaralangan ketma-ketlikdan chekli songa intiluvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin.*

◄ $\{x_n\}$ *ketma-ketlik berilgan bo'lib, u chegaralangan bo'lsin: Bu holda* $\{x_n\}$ *ketma-ketlikning barcha hadlari* $[a,b]$ *da joylashgan deb qarash mumkin:* $x_n \in [a,\ b],\quad n = 1,\ 2,\ 3,\dots$

$[a,\ b]$ *segmentni*

$$\left[a,\ \frac{a+b}{2}\right],\quad \left[\frac{a+b}{2},\ b\right]$$

segmentlarga ajratamiz. $\{x_n\}$ *ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari joylashganini* $[a_1,\ b_1]$ *deymiz. Ravshanki,* $[a_1,\ b_1]$ *ning uzunligi* $\dfrac{b-a}{2}$ *ga teng bo'ladi. YUqoridagiga o'xshash* $[a_1,\ b_1]$ *segmentni*

$$\left[a_1,\ \frac{a_1+b_1}{2}\right],\quad \left[\frac{a_1+b_1}{2},\ b_1\right]$$

segmentlarga ajratamiz. Berilgan ketma-ketlikning cheksiz ko'p sondagi hadlari bo'lganini $[a_2,\ b_2]$ *deymiz. Bunda* $[a_2,\ b_2]$ *ning uzunligi* $\dfrac{b-a}{2^2}$ *ga teng bo'ladi. Bu jarayonni davom ettirish natijasida ushbu*

$$[a_1,\ b_1],\ [a_2,\ b_2],\ \dots,\ [a_k,\ b_k],\ \dots$$

segmentlar ketma-ketligi hosil bo'ladi. Bu segmentlar ketma-ketligi uchun

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_k, b_k] \supset \ldots \text{ bo'lib, } k \to \infty \text{ da}$$

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \to 0$$

bo'ladi.

Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipiga ko'ra

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = C \qquad (C \in R)$$

bo'ladi.

Endi $\{x_n\}$ *ketma-ketlikning* $[a_1, b_1]$ *dagi birorta* x_{n_1} *hadini,* $[a_2, b_2]$ *dagi birorta* x_{n_2} *hadini va h.k.* $[a_k, b_k]$ *dagi birorta* x_{n_k} *hadini va h.k. hadlarini olamiz. Natijada* $\{x_n\}$ *ketma-ketlikning hadlaridan tashkil topgan ushbu*

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ \ldots,\ x_{n_k},\ \ldots \qquad (n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots)$$

qismiy ketma-ketlik hosil bo'ladi. Bu ketma-ketlik uchun

$$a_k \le x_{n_k} \le b_k \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

bo'lib, undan $k \to \infty$ *da* $x_{n_k} \to C$ *ya'ni* $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = C$ *bo'lishi kelib chiqadi.*

►

2. Fundamental ketma-ketliklar. Koshi teoremasi.

$\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. [1, p.127, definition 6.1.3] *Agar har qanday* $\varepsilon > 0$ *olinganda ham shunday natural* n_0 *soni topilsaki, barcha* $n > n_0$ *va* $m > n_0$ *uchun*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa (ya'ni $\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N,\ \forall n > n_0,\ \forall m > n_0 :\ |x_n - x_m| < \varepsilon$ *bo'lsa),* $\{x_n\}$ *fundamental ketma-ketlik deyiladi.*

Masalan,

$$x_n = \frac{n}{n+1} \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

fundamental ketma-ketlik bo'ladi.

◄Haqiqatdan ham, berilgan ketma-ketlik uchun

$$|x_n - x_m| = \left|\frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1}\right| < \frac{n+m}{nm} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

bo'lib, $\forall\varepsilon > 0$ ga ko'ra $n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$ deyilsa, $\forall n > n_0,\ \forall m > m_0$ bo'lganda

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

bo'ladi. ►

3-teorema. (Koshi teoremasi). [1, p.130, proposition 6.1.12, theorem 6.4.18] *Ketma-ketlikning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning fundamental bo'lishi zarur va etarli.*

◀***Zarurligi.*** $\{x_n\}$ *ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib,* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *bo'lsin. Limit ta'rifiga binoan*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N,\ \forall n > n_0 : |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Shuningdek, $\forall m > n_0 : |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ *bo'ladi. Natijada* $\forall n > n_0,\ \forall m > n_0$ *uchun*

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $\{x_n\}$ *fundamental ketma-ketlik.*

Yetarliligi. $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik bo'lsin:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in N,\ \forall n > n_0,\ \forall m > n_0 :\ |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Agar $m > n_0$ shartni qanoatlantiruvchi m tayinlansa, unda

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$$

bo'lib, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chegaralanganligi kelib chiqadi.

Bolsano-Veyershrass teoremasiga binoan bu ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy $\{x_{n_k}\}$ ketma-ketlikni ajratish mumkin: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a.$

Demak,

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists k_0 \in N,\ \forall k > k_0 :\ |x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

bo'ladi.

Agar $m = n_k$ deyilsa, unda

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon$$

bo'ladi. Keyingi ikki tengsizliklardan

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < 2\varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$ ▶

3. Ketma-ketlikning quyi hamda yuqori limitlari.

$\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlikning qismiy ketma-ketligining limiti $\{x_n\}$ ning qismiy limiti deyiladi.

2-ta'rif. [1, p.6.4.6, definition 6.4.6] $\{x_n\}$ *ketma-ketlik qismiy limitlarining eng kattasi berilgan* ***ketma-ketlikning yuqori limiti*** *deyiladi va*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

kabi belgilanadi.

$\{x_n\}$ *ketma-ketlik qismiy limitlarining eng kichigi berilgan* ***ketma-***

ketlikning quyi limiti *deyiladi va*

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n$$

kabi belgilanadi.

Masalan, ushbu $\{x_n\}: 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots$ ketma-ketlikning yuqori limiti

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = 3,$$

quyi limiti esa

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = 1$$

bo‘ladi. Umuman, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning quyi hamda yuqori limitlari quyidagicha ham kiritilishi mumkin.

Aytaylik, $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo‘lib, A bu ketma-ketlikning qismiy limitlaridan iborat to‘plam bo‘lsin. Unda bu ketma-ketlikning quyi limitini

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\inf x_n =$$
$$= \begin{cases} -\infty; & \{x_n\} \text{ quyidan chegaralanmagan bo'lsa}, \\ \inf A; & \{x_n\} \text{ quyidan chegaralangan va } A \neq \{+\infty\}, \\ +\infty; & A = \{+\infty\} \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

deb olish mumkin.

$\{x_n\}$ ketma-ketlikning yuqori limitini esa

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\sup x_n =$$
$$= \begin{cases} +\infty; & \{x_n\} \text{ yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa}, \\ \sup A; & \{x_n\} \text{ yuqoridan chegaralangan va } A \neq \{-\infty\} \text{ bo'lsa}, \\ -\infty; & A = \{-\infty\} \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

deb qarash mumkin.

Endi quyi hamda yuqori limitlarning xossalarini keltiramiz.

Biror $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $\varlimsup_{n\to\infty} x_n = a$ bo‘lsin. U holda $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham:

1) shunday $n_0 \in N$ topiladiki, $\forall n > n_0$ da $x_n < a + \varepsilon$

2) $\forall n_1 \in N$ uchun ε va n_1 larga boђliq shunday $n' > n_1$ topiladiki, $x_{n'} > a - \varepsilon$ bo‘ladi.

Bu xossalar quyidagilarni anglatadi: $\forall \varepsilon > 0$ tayin olganda, birinchi xossa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning faqatgina chekli sondagi hadlarigina

$$x_n < a + \varepsilon$$

tengsizlikni qanoatlantirishini, ikkinchi xossa esa bu ketma-ketlikning

$$x_n > a - \varepsilon$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi hadlarining soni cheksiz ko‘p bo‘lishini ifodalaydi.

◀Agar $\{x_n\}$ ning cheksiz ko‘p sondagi hadlari $a+\varepsilon$ dan katta bo‘lsa, u holda $a+\varepsilon$ sonidan kichik bo‘lmagan b $(b \geq a+\varepsilon)$ ga intiluvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlikning qismiy ketma-ketligi mavjud va bu $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = a$ ga zid.

Demak, $a+\varepsilon$ dan o‘ngda ketma-ketlikning ko‘pi bilan chekli sondagi hadlari yotadi.

Modomiki,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = a$$

ekan, unda $\{x_n\}$ ning qismiy limitlaridan biri a ga teng:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$$

Limit ta’rifiga ko‘ra bu $\{x_{n_k}\}$ ketma-ketlikning, demak, $\{x_n\}$ ning ham cheksiz ko‘p sondagi hadlari $a-\varepsilon$ dan katta bo‘ladi. ▶

Eslatma. Biror a soni yuqoridagi ikki shartni qanoatlantirsa, u $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yuqori limiti bo‘ladi.

Faraz qilaylik, biror $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = b$$

bo‘lsin. U holda $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham:

$1'$) shunday $n_0 \in N$ topiladiki, $\forall n > n_0$ da $x_n > b - \varepsilon$

$2'$) $\forall n_1 \in N$ uchun ε va n_1 larga bofliq shunday $n' > n_1$ topiladiki, $x_{n'} < b + \varepsilon$ bo‘ladi.

Quyi limitning bu xossasi yuqoridagidek isbotlanadi.

Ketma-ketlikning quyi hamda yuqori limitlari xossalaridan foydalanib, quyidagi teoremani isbotlash qiyin emas:

4-teorema. [1, p.142, proposition 6.4.12] *$\{x_n\}$ ketma-ketlik C limitga ega bo‘lishi uchun*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = C$$

bo‘lishi zarur va etarlidir.

Mashqlar

1. Har qanday monoton ketma-ketlik faqat bitta qismiy limitga ega bo‘lishi isbotlansin.

2. Koshi teoremasidan foydalanib, ushbu

$$x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

ketma-ketlikning $(a_k \in R,\ |a_k| \le q^k;\ \ 0 < q < 1;\ \ k = 1, 2, \ldots)$ limitga ega bo‘lishi isbotlansin.

3. Ushbu

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n + y_n) \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n$$

tengsizlik isbotlansin.

Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical analysis I*, Springer-Verlag Italia, Milan, 2008.
3. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma’rizalar, I q.* T. “Voris-nashriyot”, 2010.
4. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.

Nazorat savollari

1. Qismiy ketma-ketlik nima? Misollar keltiring.

2. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning ikkita qismiy ketma-ketligi turli limitlarga ega bo‘lishi mumkinmi?

3. Boltsano–Veyershtrass teoremasini keltiring.

4. Fundamental ketma-ketlik nima?

5. Koshi teoremasini ayting.

6. Ketma-ketlikning yuqori hamda quyi limitlari nima? Xossalarini ayting.

Glossariy

Qismiy ketma-ketlik – Aytaylik, $\{x_n\}: x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ ketma-ketlik berilgan bo‘lsin. Bu ketma-ketlikning biror n_1 nomerli x_{n_1} hadini olamiz. So‘ngra nomeri n_1 dan katta bo‘lgan n_2 nomerli x_{n_2} hadini olamiz. Shu usul bilan x_{n_3}, x_{n_4} va h.k. hadlarni tanlab olamiz. Natijada nomerlari $n_1 < n_2 < n_3 < .. < n_k < ...$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi berilgan ketma-ketlikning hadlari ushbu $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...$ ketma-ketlikni hosil qiladi. Hosil bo‘lgan ketma-ketlik berilgan ketma-ketlikning qismiy ketma-ketligi deyiladi.

Boltsano–Veyershtrass teoremasi – har qanday chegaralangan ketma-ketlikdan chekli songa intiluvchi qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin.

Fundamental ketma-ketlik – agar har qanday $\varepsilon > 0$ olinganda ham shunday natural n_0 soni topilsaki, barcha $n > n_0$ va $m > n_0$ uchun $|x_n - x_m| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa (ya’ni $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0, \forall m > n_0 : |x_n - x_m| < \varepsilon$ bo‘lsa), $\{x_n\}$ fundamental ketma-ketlik deyiladi.

Koshi teoremasi – ketma-ketlikning yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun uning fundamental bo‘lishi zarur va etarli.

Ketma-ketlikning yuqori limiti – $\{x_n\}$ ketma-ketlik qismiy limitlarining eng kattasi berilgan ketma-ketlikning yuqori limiti deyiladi.

Ketma-ketlikning quyi limiti – $\{x_n\}$ ketma-ketlik qismiy limitlarining eng kichigi berilgan ketma-ketlikning quyi limiti.

Keys banki

9-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: Har qanday monoton ketma-ketlik faqat bitta qismiy limitga ega bo‘lishi isbotlansin.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

9-amaliy mashg`ulot

Na'muna uchun misollar yechimi

1-misol. $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yuqori va quyi limitlari topilsin $\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n - ?,\ \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n - ?\right)$.

$$x_n = \sin n^0$$

◁ Berilgan ketma-ketlikning qiymatlari to`plamida

$$0,\quad \pm\sin 1^0,\ \pm\sin 2^0, \ldots,\ \pm\sin 89^0,\quad \pm 1$$

sonlari cheksiz ko`p uchraydi, chunki $\forall n \in N$ va $\forall p \in N$ uchun keltirish formulasiga ko`ra $\sin n^0 = \sin\left(360^0 p + n^0\right)$ va $\sin\left(180^0 \pm n^0\right) = \mp \sin n^0$. Demak, yuqoridagi sonlarning har biri berilgan ketma-ketlikning qismiy limiti bo`ladi. Shu bilan birgalikda $\{x_n\}$ ketma-ketlikning yuqorida ko`rsatilgan 181 ta sondan boshqa qismiy limiti yo`q. $\Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1$ va $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -1$ ▷

Misollar

Quyidagi ketma-ketliklarning yuqori hamda quyi limitlari topilsin $\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n - ?; \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n - ?\right)$

539. $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$

540. $x_n = n^{(-1)^n}$

541. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$

542. $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cdot\cos^2\dfrac{n\pi}{2}$

543. $x_n = 1 + 2\cdot(-1)^{n+1} + 3\cdot(-1)^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}$

544. $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cdot\cos\dfrac{2n\pi}{3}$

545. $x_n = -n\cdot\left[2+(-1)^n\right]$

546. $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n(-1)^n + \sin\dfrac{n\pi}{4}$

547. $x_n = \sqrt[n]{1+2^{n\cdot(-1)^n}}$

548. $x_n = \cos^n\dfrac{2n\pi}{3}$

Quyidagi ketma-ketliklarning qismiy limitlari topilsin.

549. $\{x_n\}$: $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n - 1}{2^n}, \ldots$

550. $\{x_n\}$: $1, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{2} +$
$+ \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots$

551. $\{x_n\}$: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \ldots.$

552. $x_n = \frac{1}{2}\left[(a+b) + (-1)^n \cdot (a-b)\right]$

553. Qismiy limitlari ushbu

$$a_1, a_2, \ldots, a_p$$

sonlarga teng bo‘lgan sonli ketma-ketlikka misol keltirilsin.

554. Qismiy limitlari ushbu

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

ketma-ketlikning barcha hadlariga teng bo‘lgan ketma-ketlikka misol keltirilsin.

555. Chekli qismiy limitga ega bo‘lmagan ketma-ketlikka misol keltirilsin.

556. Yaqinlashuvchi bo‘lmagan, lekin yagona qismiy limitga ega bo‘lgan ketma-ketlikka misol keltirilsin.

557. Cheksiz ko‘p qismiy limitga ega bo‘lgan ketma-ketlikka misol keltirilsin.

558. $[1;2]$ kesmadagi ixtiyoriy haqiqiy son qismiy limiti bo‘lgan ketma-ketlikka misol keltirilsin.

559. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi va $\{y_n\}$ ketma-ketlik uzoqlashuvchi bo‘lsa, unda

а) $\{x_n + y_n\}$ б) $\{x_n \cdot y_n\}$

ketma-ketlikning yaqinlashishi haqida nima deyish mumkin?

560. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar uzoqlashuvchi bo‘lsa, unda

а) $\{x_n + y_n\}$ б) $\{x_n \cdot y_n\}$

ketma-ketliklar uzoqlashuvchi bo‘ladimi?

561. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

bo‘lib, $\{y_n\}$ – ixtiyoriy ketma-ketlik bo‘lsa,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = 0$$

tenglik o‘rinli bo‘ladimi?

562. Agar

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = 0$$

bo‘lsa, unda

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ ёки } \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

tengliklardan biri o‘rinli bo‘ladimi?

Quyidagi munosabatlar isbotlansin.

563. $\lim x_n = a \Leftrightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = a$

564. $\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n) = -\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$

565. $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$

566. $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$

567. Agar $x_n \geq 0$ ва $y_n \geq 0$ $(n \geq 1, 2, \ldots)$ bo‘lsa,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$$

bo‘ladi.

Test

№	Test topshirig`i	To`g`ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	x_n ketma-ketlik uchun yuqori limit hisoblansin: $x_n = \cos\frac{\pi n}{3}$	1	2	0	-1
2.	x_n ketma-ketlik uchun quyi limit hisoblansin: $x_n = (-1)^n \frac{2n+1}{n}$	-2	0	2	1
3.	x_n ketma-ketlik uchun quyi limit hisoblansin: $x_n = (1{,}5\cos\frac{2\pi n}{3})^n$	0	1	∞	-1
4.	x_n ketma-ketlik uchun yuqori limit hisoblansin: $x_n = (-1)^n \frac{3n-1}{n+2}$	3	0	-1	∞
5.	x_n ketma-ketlik uchun quyi limit hisoblansin: $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$	0	1	-1	2
6.	x_n ketma-ketlik uchun quyi limit hisoblansin: $x_n = (\cos(\pi n/2))^{n+1}$	-1	0	2	1
7.	x_n ketma-ketlik uchun yuqori limit hisoblansin: $x_n = \frac{1+(-1)^n n}{n}$	1	-1	0	2
8.	x_n ketma-ketlik uchun quyi limit hisoblansin: $x_n = (-n)^{\sin(\pi n/2)}$	$-\infty$	1	0	-1
9.	x_n ketma-ketlik uchun yuqori limit hisoblansin: $x_n = \frac{1}{n} + \sin\frac{\pi n}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	-1
10.	x_n ketma-ketlik uchun quyi limit hisoblansin: $x_n = \frac{(1-(-1)^n)2^n + 1}{2^n + 3}$	0	1	-1	∞

10-mavzu. Funksiya tushunchasi

10-ma’ruza

Reja

1. Funksiya ta’rifi, berilish usullari.
2. Funksiyaning chegaralanganligi. Davriy funksiyalar. Juft va toq funksiyalar.
3. Monton funksiyalar. Teskari funksiya. Murakkab funksiyalar.

1. Funksiya ta’rifi, berilish usullari.

Biz 2-ma’ruzada E to‘plamni F to‘plamga akslantirish

$$f: E \to F$$

ni o‘rgangan edik.

Endi $E = F$, $F = R$ deb olamiz. Unda har bir haqiqiy x songa biror haqiqiy y sonni mos qo‘yuvchi

$$f: F \to R \quad (x \xrightarrow{f} y)$$

akslantirishga kelamiz. Bu esa funksiya tushunchasiga olib keladi.

Funksiya tushunchasi o‘quvchiga o‘rta maktab matematika kursidan ma’lum. Shuni e’tiborga olib funksiya haqidagi dastlabki ma’lumotlarni qisqaroq bayon etishni lozim topdik.

Aytaylik, $X \subset R$, $Y \subset R$ to‘plamlar berilgan bo‘lib, x va y o‘zgaruvchilar mos ravishda shu to‘plamlarda o‘zgarsin: $x \in X$, $y \in Y$.

1-ta’rif. [1, p. 49, Def. 3.3.1] *Agar X to‘plamdagi har bir x songa biror*

f qoidaga ko'ra Y to'plamdan bitta y son mos qo'yilgan bo'lsa, X to'plamda ***funksiya berilgan (aniqlangan)*** *deyiladi va*

$$f: x \to y \ \text{yoki} \ y = f(x)$$

kabi belgilanadi. Bunda X – ***funksiyaning aniqlanish to'plami (cohasi)****, Y –* ***funksiyaning o'zgarish to'plami (cohasi) deyiladi.*** *x –* ***erkli o'zgaruvchi*** *yoki* ***funksiya argumenti****, y esa* ***erksiz o'zgaruvchi*** *yoki* ***funksiya*** *deyiladi.*

Misollar. 1. $X = (-\infty, +\infty)$, $Y = (0, +\infty)$ bo'lib, f qoida

$$f: x \to y = x^2 + 1$$

bo'lsin. Bu holda har bir $x \in X$ ga bitta $x^2 + 1 \in Y$ mos qo'yilib,

$$y = x^2 + 1$$

funksiyaga ega bo'lamiz.

2. Har bir ratsional songa 1 ni, har bir irratsional songa 0 ni mos qo'yish natijasida funksiya hosil bo'ladi. Odatda, bu **Dirixle funksiyasi** deyilib, u $D(x)$ kabi belgilanadi:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar} \quad x \quad \text{ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar} \quad y \quad \text{irratsional son bo'lsa.} \end{cases}$$

Shunday qilib, $y = f(x)$ funksiya uchta: X to'plam, Y to'plam va har bir $x \in X$ ga bitta $y \in Y$ ni mos qo'yuvchi f qoidaning berilishi bilan aniqlanar ekan.

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin. $x_0 \in X$ nuqtaga mos keluvchi y_0 miqdor $y = f(x)$ ***funksiyaning*** *$x = x_0$* ***nuqtadagi xususiy qiymati*** *deyiladi va $f(x_0) = y_0$ kabi belgilanadi. [1, p. 49, 3.3]*

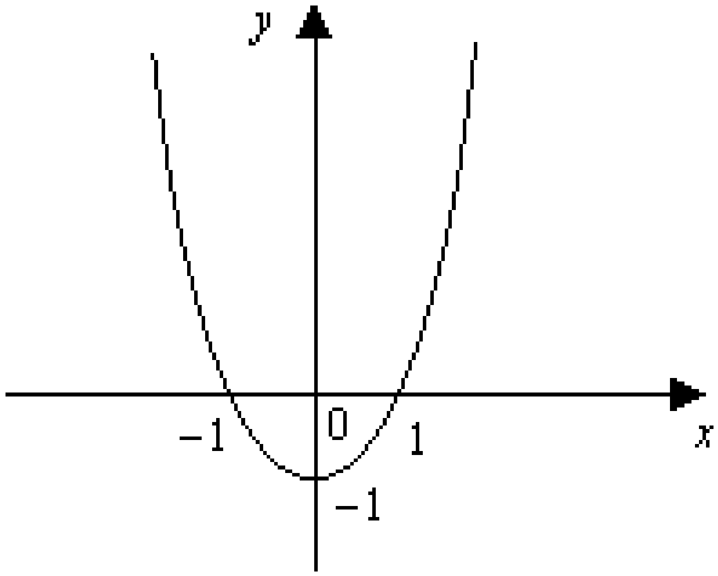
Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasini olamiz. Tekislikdagi $(x, f(x))$ nuqtalardan iborat ushbu

$$\{(x, f(x))\} = \{(x, f(x)) | \ x \in X, f(x) \in Y\}$$

to'plam $y = f(x)$ *funksiyaning grafigi deyiladi [2, p. 31]. Masalan,*

$$y = x^2 - 1 \quad (x \in X = [-2, 2])$$

funksiyaning grafigi 1-chizmada tasvirlangan. [2, p. 32, Example 2.1]



1-chizma.

Funksiya ta'rifidagi f qoida turlicha bo'lishi mumkin.

a) Ko'pincha x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish formulalar yordamida ifodalanadi. Bu **funksiyaning analitik usulda berilishi** deyiladi. Masalan,

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

funksiya analitik usulda berilgan bo'lib, uning aniqlanish to'plami

$$X = \{x \in R \mid -1 \le x \le 1\} = [-1, 1]$$

bo'ladi.

x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish quyidagi formulalar yordamida berilgan bo'lsin:

$$y = f(x) = \begin{cases} -1, & \text{agar} \quad x < 0 \quad \text{bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar} \quad x = 0 \quad \text{bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar} \quad x > 0 \quad \text{bo'lsa,} \end{cases}$$

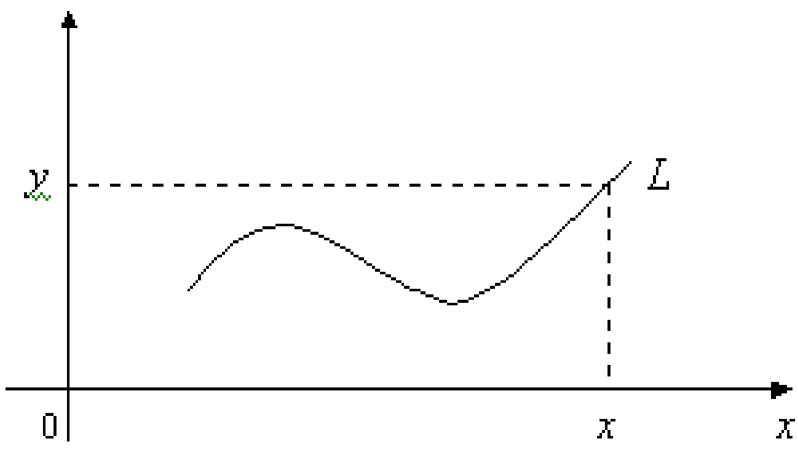
Bu funksiyaning aniqlanish to'plami $X = R$ bo'lib, qiymatlar to'plami esa $Y = \{-1,0,1\}$ bo'ladi. Odatda bu funksiya $y = \operatorname{sgn} x$ kabi belgilanadi. [2, p. 32, vi)]

b) Ba'zi hollarda $x \in X$, $y \in Y$ o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish jadval orqali bo'lishi mumkin. Masalan, kun davomida havo haroratini kuzatganimizda, t_1 vaqtda havo harorati T_1, t_2 vaqtda havo harorati T_2 va h.k. bo'lsin. Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi.

t – vaqt	t_1	t_2	t_3	...	t_n
T – harorat	T_1	T_2	T_3	...	T_n

Bu jadval t vaqt bilan havo harorati T orasidagi bog'lanish-ni ifodalaydi, bunda t – argument, T esa t ning funksiyasi bo'ladi.

v) x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish tekislikda biror egri chiziq orqali ham ifodalanishi mumkin (2-chizma).



2-chizma.

Masalan, 2-chizmada tasvirlangan L egri chiziq berilgan bo‘lsin. Aytaylik, $[a,b]$ segmentdagi har bir nuqtadan o‘tkazilgan perpendikulyar L chiziqni faqat bitta nuqtada kessin. $\forall x\in[a,b]$ nuqtadan perpendikulyar chiqarib, uning L chiziq bilan kesishish nuqtasini topamiz. Olingan x nuqtaga kesishish nuqtasining ordinatasi y ni mos qo‘yamiz. Natijada har bir $x\in[a,b]$ ga bitta y mos qo‘yilib, funksiya hosil bo‘ladi. Bunda x bilan y orasidagi bog‘lanishni berilgan L egri chiziq bajaradi.

Aytaylik, $f_1(x)$ funksiya $X_1\subset R$ to‘plamda, $f_2(x)$ funksiya esa $X_2\subset R$ to‘plamda aniqlangan bo‘lsin.

Agar

1) $X_1=X_2$,

2) $\forall x\in X_1$ *da* $f_1(x)=f_2(x)$,

bo‘lsa, $f_1(x)$ hamda $f_2(x)$ funksiyalar o‘zaro teng deyiladi va $f_1(x)=f_2(x)$ kabi belgilanadi. [1, p. 51, Def. 3.3.7]

2. Funksiyaning chegaralanganligi. Davriy funksiyalar. Juft va toq funksiyalar.

$f(x)$ funksiya $X\subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lsin.

2-ta’rif. *[2, p. 37, Def. 2.3] Agar shunday o‘zgarmas M soni topilsaki, $\forall x\in X$ uchun $f(x)\le M$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$* ***funksiya X to‘plamda yuqoridan chegaralangan*** *deyiladi. Agar shunday o‘zgarmas m soni topilsaki, $\forall x\in X$ uchun $f(x)\ge m$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$* ***funksiya X to‘plamda quyidan chegaralangan*** *deyiladi.*

3-ta’rif. *[2, p. 37, Def. 2.3] Agar $f(x)$ funksiya X to‘plamda ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo‘lsa, $f(x)$* ***funksiya X to‘plamda***

***chegaralangan** deyiladi.*

1-misol. Ushbu $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ funksiyani qaraylik. Bu funksiya R da chegaralangan bo‘ladi.

◄ Ravshanki, $\forall x\in R$ da $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}>0$.

Demak, berilgan funksiya R da quyidan chegaralangan.

Ayni paytda, $f(x)$ funksiya uchun

$$f(x)=\frac{1}{1+x^4}+\frac{x^2}{1+x^4}\le 1+\frac{x^2}{1+x^4}$$

bo‘ladi. Endi

$$0\le (x^2-1)^2=x^4-2x^2+1 \quad\Rightarrow\quad 2x^2\le x^4+1 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{x^4+1}\le\frac{1}{2}$$

bo‘lishini e’tiborga olib, topamiz: $f(x)\le 1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

Bu esa $f(x)$ funksiyaning yuqoridan chegaralanganligini bildiradi. Demak, berilgan funksiya R da chegaralangan. ►

4-ta’rif. Agar har qanday $M>0$ son olinganda ham shunday $x_0\in X$ nuqta topilsaki,

$$f(x_0)>M$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ **funksiya** X **to‘plamda yuqoridan chegaralanmagan** deyiladi.

$f(x)$ funksiya $X\subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lsin.

5-ta’rif. Agar shunday o‘zgarmas $T\,(T\ne 0)$ son mavjud bo‘lsaki, $\forall x\in X$ uchun

1) $x-T\in X$, $x+T\in X$,

2) $f(x+T)=f(x)$,

bo‘lsa, $f(x)$ **davriy funksiya** deyiladi, T son esa $f(x)$ **funksiyaning davri** deyiladi.

Masalan, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$ funksiyalar davriy funksiyalar bo‘lib, ularning davri 2π ga, $f(x)=tgx$, $f(x)=ctgx$ funksiyalarning davri esa π ga teng.

Davriy funksiyalar quyidagi xossalarga ega:

a) Agar $f(x)$ davriy funksiya bo‘lib, uning davri T $(T\neq 0)$ bo‘lsa, u holda

$$T_n = nT\,,\ (n=\pm 1, \pm 2, \ldots)$$

sonlar ham shu funksiyaning davri bo‘ladi.

b) Agar T_1 va T_2 sonlar $f(x)$ funksiyaning davri bo‘lsa, u holda $T_1+T_2\neq 0$ hamda T_1-T_2 $(T_1\neq T_2)$ sonlar ham $f(x)$ funksiyaning davri bo‘ladi.

v) Agar $f(x)$ hamda $g(x)$ lar davriy funksiyalar bo‘lib, ularning har birining davri T $(T\neq 0)$ bo‘lsa, u holda

$$f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\ \ (g(x)\neq 0)$$

funksiyalar ham davriy funksiyalar bo‘lib, T son ularning ham davri bo‘ladi.

2-misol. Ixtiyoriy T $(T\neq 0)$ ratsional son Dirixle funksiyasi

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{agar} \quad x \quad \text{ratsional son bo'lsa,}\\ 0, & \text{agar} \quad y \quad \text{irratsional son bo'lsa.}\end{cases}$$

ning davri bo‘lishi ko‘rsatilsin.

◄ Aytaylik, $T(T\neq 0)$ ratsional son bo‘lsin. Ravshanki, $\forall\, x\in R$ irratsional son uchun $x+T-$ irratsional son, $\forall\, x\in R$ ratsional son uchun $x+T$ ratsional son bo‘ladi. Demak,

$$D(x+T)=\begin{cases}1, & \text{agar} \quad x \quad \text{ratsional son bo'lsa,}\\ 0, & \text{agar} \quad y \quad \text{irratsional son bo'lsa.}\end{cases}$$

Shunday qilib, $\forall\ x \in R$, T – ratsional son bo‘lganda

$$D(x+T) = D(x)$$

bo‘ladi. ►

Ma’lumki, $\forall\ x \in X\ \ (X \subset R)$ uchun $-\ x \in X$ bo‘lsa, X to‘plam O nuqtaga nisbatan **simmetrik to‘plam** deyiladi.

Aytaylik, O nuqtaga nisbatan simmetrik bo‘lgan X to‘plamda $f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin.

6-ta’rif. Agar $\forall\ x \in X$ uchun $f(-x) = f(x)$ tenglik bajarilsa, $f(x)$ **juft funksiya** deyiladi. Agar $\forall\ x \in X$ uchun $f(-x) = -f(x)$ tenglik bajarilsa, $f(x)$ **toq funksiya** deyiladi.

Masalan, $f(x) = x^2 + 1$ juft funksiya, $f(x) = x^3 + x$ esa toq funksiya bo‘ladi. Ushbu $f(x) = x^2 - x$ funksiya juft ham emas, toq ham emas.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ juft funksiyalar bo‘lsa, u holda

$$f(x) + g(x),\ f(x) - g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\ \ (g(x) \neq 0)$$

funksiyalar ham juft bo‘ladi.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ toq funksiyalar bo‘lsa, u holda

$$f(x) + g(x),\ f(x) - g(x)$$

funksiyalar toq bo‘ladi,

$$f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\ \ (g(x) \neq 0)$$

funksiyalar esa juft bo‘ladi.

Juft funksiyaning grafigi ordinatalar o‘qiga nisbatan, toq funksiyaning grafigi esa kordinatalar boshiga nisbatan simmetrik joylashgan bo‘ladi.

3. Monoton funksiyalar. Teskari funksiya. Murakkab funksiyalar.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lsin.

7-ta'rif. *[2, p. 41, Def. 2.6]* Agar $\forall\, x_1, x_2 \in X$ uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \le f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ **funksiya** X **to'plamda o'suvchi** deyiladi. Agar $\forall\, x_1, x_2 \in X$ uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) < f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ **funksiya** X **to'plamda qat'iy o'suvchi** deyiladi.

8-ta'rif. *[2, p. 41-42, Def. 2.6] Agar $\forall\, x_1, x_2 \in X$ uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \ge f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$* ***funksiya*** *X* ***to'plamda kamayuvchi*** *deyiladi. Agar $\forall\, x_1, x_2 \in X$ uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) > f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$* ***funksiya*** *X* ***to'plamda qat'iy kamayuvchi*** *deyiladi.*

O'suvchi hamda kamayuvchi funksiyalar umumiy nom bilan ***monoton funksiyalar*** *deyiladi. [2, p. 42]*

3-misol. Ushbu $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ funksiyaning $X = [1, +\infty)$ to'plamda kamayuvchi ekanligi isbotlansin.

◄ $[1, +\infty)$ da ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalarni olib, $x_1 < x_2$ bo'lsin deylik. Unda

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{1+x_1^2} - \frac{x_2}{1+x_2^2} = \frac{x_1 + x_1 x_2^2 - x_2 - x_2 x_1^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} =$$

$$= \frac{x_1 - x_2 + x_1 \cdot x_2 (x_2 - x_1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} = \frac{(x_1 - x_2)(1 - x_1 \cdot x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$

bo'ladi. Keyingi tenglikda

$$x_1 - x_2 < 0,\; 1 - x_1 \cdot x_2 < 0$$

bo'lishini e'tiborga olib,

$$f(x_1) - f(x_2) > 0$$

ya'ni, $f(x_1) > f(x_2)$ ekanini topamiz. Demak,

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2). \;\blacktriangleright$$

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $X \subset R$ to‘plamda o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘lib, $C = const$ bo‘lsin. U holda

a) $f(x)+C$ funksiya o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘ladi.

b) $C>0$ bo‘lganda $C \cdot f(x)$ o‘suvchi, $C<0$ bo‘lganda $C \cdot f(x)$ kamayuvchi bo‘ladi.

v) $f(x)+g(x)$ funksiya o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘ladi.

$y = f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lib, bu funksiyaning qiymatlaridan iborat to‘plam

$$Y_f = \{ f(x) \mid x \in X \}$$

bo‘lsin.

Faraz qilaylik, biror qoidaga ko‘ra Y_f, to‘plamdan olingan har bir y ga X to‘plamdagi bitta x mos qo‘yilgan bo‘lsin. Bunday moslik natijasida funksiya hosil bo‘ladi. Odatda, bu funksiya $y = f(x)$ ga nisbatan **teskari funksiya** deyiladi va $x = f^{-1}(y)$ kabi belgilanadi.

Masalan, $y = \frac{1}{2}x + 1$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya $x = 2y - 1$ bo‘ladi.

Yuqorida aytilganlardan $y = f(x)$ da x argument, y esa x ning funksiyasi, teskari $x = f^{-1}(y)$ funksiyada y argument, x esa y ning funksiyasi bo‘lishi ko‘rinadi.

Qulaylik uchun teskari funksiya argumenti ham x, uning funksiyasi y bilan belgilanadi: $y = g(x)$.

$y = f(x)$ ga nisbatan teskari $g(x)$ funksiya grafigi $f(x)$ funksiya grafigini I va III choraklar bissektrisasi atrofiida 180^0 ga aylantirish natijasida hosil bo‘ladi.

Aytaylik, Y_f to‘plamda $u = F(y)$ funksiya berilgan bo‘lsin. Natijada X

to‘plamdan olingan har bir x *ga* Y_f *to‘plamda bitta* y *:*

$$f : x \mapsto y \quad (y = f(x)),$$

va Y_f *to‘plamdagi bunday* y *songa bitta* u *:*

$$F : y \to u \qquad (u = F(y))$$

son mos qo‘yiladi. Demak, X *to‘plamdan olingan har bir* x *songa bitta* u *son mos qo‘yilib, yangi funksiya hosil bo‘ladi:* $u = F(f(x))$. *Odatda bunday funksiyalar* ***murakkab funksiya*** *deyiladi. [2, p. 43]*

Mashqlar

1. $f(x)$ funksiyaning $X \subset R$ to‘plamda quyidan chegaralanmaganligi ta’rifi keltirilsin.

2. O nuqtaga nisbatan simmetrik bo‘lgan $X \subset R$ to‘plamda berilgan har qanday $f(x)$ funksiya juft va toq funksiyalar yig‘indisi ko‘rinishida ifodalanishi isbotlansin.

3. Ushbu $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ funksiyaning $X = [0, +\infty)$ to‘plamda kamayuvchi ekani isbotlansin.

4. Agar $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ bo‘lsa, $f(f(f(x)))$ topilsin.

Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical analysis I.* Springer-Verlag, Italia, 2008.
3. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma’ruzalar, I q.* T. “Voris-nashriyot”, 2010.
4. **Фихтенгольц Г. М.** *Курс дифференциального и интегрального исчисления, 1 т.* М. «ФИЗМАТЛИТ», 2001.

Nazorat savollari

1. Funksiyaning ta’rifi.
2. Funksiya qanday usullarda beriladi?
3. Qanday funksiya chegaralangan funksiya deyiladi?
4. Qanday funksiya davriy funksiya deyiladi?
5. Qanday funksiya juft funksiya deyiladi?
6. Qanday funksiya toq funksiya deyiladi?
7. Qanday funksiya monoton funksiya deyiladi?
8. Qanday funksiya murakkab funksiya deyiladi?

Glossariy

Chegaralangan funksiya. Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda chegaralangan deyiladi.

Davriy funksiya. Agar shunday o'zgarmas $T\ (T \neq 0)$ son mavjud bo'lsaki, $\forall x \in X$ uchun

1) $x - T \in X$, $x + T \in X$,

2) $f(x+T) = f(x)$,

bo'lsa, $f(x)$ davriy funksiya deyiladi, T son esa $f(x)$ funksiyaning davri deyiladi.

Dirixle funksiyasi. $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar} \quad x \quad \text{ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar} \quad y \quad \text{irratsional son bo'lsa.} \end{cases}$

Funksiya. Agar X to'plamdagi har bir x songa biror f qoidaga ko'ra Y to'plamdan bitta y son mos qo'yilgan bo'lsa, X to'plamda funksiya berilgan (aniqlangan) deyiladi va

$$f : x \to y \text{ yoki } y = f(x)$$

kabi belgilanadi.

Funksiyaning analitik usulda berilishi. x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish formulalar yordamida ifodalanadi.

Funksiyaning grafik ko'rinishida berilishi. x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish tekislikda biror egri chiziq orqali ifodalanadi.

Funksiyaning jadval ko‘rinishida berilishi. $x \in X$, $y \in Y$ o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish jadval orqali ifodalanadi.

Juft funksiya. Agar $\forall\, x \in X$ uchun $f(-x) = f(x)$ tenglik bajarilsa, $f(x)$ juft funksiya deyiladi.

Kamayuvchi funksiya. Agar $\forall\, x_1, x_2 \in X$ uchun $x_1 < x_2$ bo‘lganda $f(x_1) \geq f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to‘plamda kamayuvchi deyiladi.

Monoton funksiya. O‘suvchi hamda kamayuvchi funksiyalar umumiy nom bilan monoton funksiyalar deyiladi.

Murakkab funksiya. Aytaylik, Y_f to‘plamda $u = F(y)$ funksiya berilgan bo‘lsin. Natijada X to‘plamdan olingan har bir x ga Y_f to‘plamda bitta y:

$$f : x \mapsto y \ \ (y = f(x)),$$

va Y_f to‘plamdagi bunday y songa bitta u:

$$F : y \to u \quad (u = F(y))$$

son mos qo‘yiladi. Demak, X to‘plamdan olingan har bir x songa bitta u son mos qo‘yilib, yangi funksiya hosil bo‘ladi: $u = F(f(x))$. Odatda bunday funksiyalar murakkab funksiya deyiladi.

O‘suvchi funksiya. Agar $\forall\, x_1, x_2 \in X$ uchun $x_1 < x_2$ bo‘lganda $f(x_1) \leq f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to‘plamda o‘suvchi deyiladi.

Qat’iy kamayuvchi funksiya. Agar $\forall\, x_1, x_2 \in X$ uchun $x_1 < x_2$ bo‘lganda $f(x_1) > f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to‘plamda qat’iy kamayuvchi deyiladi.

Qat'iy o'suvchi funksiya. Agar $\forall x_1, x_2 \in X$ uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) < f(x_2)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda qat'iy o'suvchi deyiladi.

Quyidan chegaralangan funksiya. Agar shunday o'zgarmas m soni topilsaki, $\forall x \in X$ uchun $f(x) \geq m$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda quyidan chegaralangan deyiladi.

Teskari funksiya. Faraz qilaylik, biror qoidaga ko'ra Y_f, to'plamdan olingan har bir y ga X to'plamdagi bitta x mos qo'yilgan bo'lsin. Bunday moslik natijasida funksiya hosil bo'ladi. Odatda, bu funksiya $y = f(x)$ ga nisbatan teskari funksiya deyiladi va $x = f^{-1}(y)$ kabi belgilanadi.

Toq funksiya. Agar $\forall x \in X$ uchun $f(-x) = -f(x)$ tenglik bajarilsa, $f(x)$ toq funksiya deyiladi.

Yuqoridan chegaralangan funksiya. Agar shunday o'zgarmas M soni topilsaki, $\forall x \in X$ uchun $f(x) \leq M$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda yuqoridan chegaralangan deyiladi.

Keys banki

10-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: O nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgan $X \subset R$ to'plamda berilgan har qanday $f(x)$ funksiya juft va toq funksiyalar yig'indisi ko'rinishida ifodalanishi isbotlansin.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);

- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

10-amaliy mashg'ulot

Na'muna uchun misollar yechimi

1 – m i s o l . ***Ushbu***

$$y=\sqrt{-x^2+x+2} \qquad (2)$$

funksiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlari to'plami topilsin.

◀(2) munosabat ma'noga ega bo'lishi uchun $-x^2+x+2\geq 0$ bo'lishi lozim. Keyingi tengsizlikni echib topamiz.

$-x^2+x+2\geq 0 \Rightarrow x^2-x-2\leq 0 \Rightarrow (x+1)(x-2)\leq 0 \Rightarrow -1\leq x\leq 2$.

Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $X=[-1,\ 2]$ bo'ladi.

Ravshanki, $y\geq 0$. Ayni paytda

$$y=\sqrt{-x^2+x+2}=\sqrt{-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}}\leq\frac{3}{2}$$

bo'lgani uchun $0\leq y\leq\frac{3}{2}$ bo'ladi. Demak, funksiyaning qiymatlari to'plami

$Y_f=\left[0,\ \frac{3}{2}\right]$ bo'ladi.▶

2 – m i s o l . ***Agar***

$$f(x)=signx=\begin{cases}-1, & агар\ x<0,\\ 0, & агар\ x=0,\\ 1, & агар\ x>0\end{cases} \qquad \textbf{\textit{va}} \qquad g(x)=x\cdot(1-x^2)$$

bo'lsa, $f\left(g(x)\right),\ g\left(f(x)\right)$ ***lar topilsin.***

◀

$$f\left(g(x)\right)=\text{sgn}\left[x\left(1-x^2\right)\right]=\begin{cases}1,\text{agar } x\left(1-x^2\right)>0\\ 0,\text{agar } x\left(1-x^2\right)=0\\ -1,\text{agar } x\left(1-x^2\right)<0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}1,\text{agar } 0<x<1 \ \ ва \ \ x<-1\\ 0,\ \text{agar } x=0 \ \ ва \ \ x=\pm 1\\ -1,\text{agar } x>1 \ \ ва \ \ -1<x<0.\end{cases}$$

$$g\left(f(x)\right) = signx\left(1 - sign^2 x\right) = 0. \blacktriangleright$$

Misollar

Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohalari topilsin.

101. $y = x + \dfrac{1}{x}$

102. $y = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}$

103. $y = \dfrac{2}{\sqrt{25 - x^2}}$

104. $y = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}$

105. $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x| + x}}$

106. $y = \lg\left(1 - x^2\right)$

107. $y = \lg\left(4 - x^2\right)$

108. $y = \log_2 \log_3 \log_4 x$

109. $y = \sqrt{9 - x^2} + \log \dfrac{x+1}{x-2}$

110. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

111. $y = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$

112. $y = \ln \cos x$.

113. $y = \arccos \dfrac{2x}{1 + x^2}$

114. $y = \sqrt{\arcsin\left(\log_2 x\right)}$.

115. $y = \sqrt{\arcsin\left(\lg \dfrac{x}{10}\right)}$

116. $y = \sqrt{\lg \cos x} + 4$.

117. $y = \lg(1 - tgx)$

118. $y = \lg\left[\cos\left(\lg x\right)\right]$.

119. $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

120. $y = \dfrac{x^2 - 5}{2x - 5}$

121. $y = x + signx$

122. $y = x + \dfrac{1}{x} \quad \{x > 0\}$

123. $y = \sqrt{\dfrac{9x^2 + 1}{x}}$

124. $y = \sin x + \cos x$

125. $y=\lg(1-2\cos x)$

126. $y=\left||x|-1\right|-x$

127. $y=\dfrac{x^2+x+2}{x^2-x+2}$

128. $y=x^2-4\cdot|x-1|+1$

129. Agar $f(x)=|x|-x$ bo‘lsa, $f(-1), f(0), f(1), f(-2), f(2)$ lar topilsin.

130. Agar

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{агар} \quad 0\le x\le 1 \\ x\,, & \text{агар} \quad 1<x<2 \end{cases}$$

bo‘lsa, $f(0), f\left(\dfrac{1}{2}\right), f\left(\dfrac{3}{2}\right), f(2)$ lar topilsin.

131. Agar $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ bo‘lsa, $f(0), f(-x), f(x+1), f(x)+1, f\left(\dfrac{1}{x}\right), \dfrac{1}{f(x)}$ lar topilsin.

132. Agar $f(x)=[x]+signx$ bo‘lsa, $f(0), f\left(\dfrac{3}{2}\right), f\left(-\dfrac{5}{2}\right), f\left(\dfrac{1}{10}\right)$ lar topilsin.

133. Agar $f(x)=x^3+3x-1$ bo‘lsa, $f(a)+f(-a)$ topilsin.

134. Agar $f(x)=ax^2+bx+c$ bo‘lsa, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ topilsin.

135. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ bo‘lsin. Agar $f(-1)=0, f(0)=2, f(1)=-3,$ $f(2)=5$ bo‘lsa, $f(x)$ topilsin.

136. Agar $f(x)=3^x(a+bx)$ bo‘lsa,

$$f(x+2)-6f(x+1)+9f(x)=0$$

bo‘lishi isbotlansin.

137. Agar $f(u)$ funksiya (0,1) da aniqlangan bo‘lsa,

$$f(\sin x), f(\ln x), f\left(\frac{[x]}{x}\right)$$

funksiyalarning aniqlanish sohalari topilsin.

138. Agar $\phi(x)=x^2, \psi(x)=\sqrt{x}$ bo‘lsa,

$\phi(\phi(x)), \phi(\psi(x)), \psi(\psi(x)), \psi(\phi(x))$ lar topilsin.

139. Agar $\phi(x)=signx$, $\psi(x)=\dfrac{1}{x}$ bo‘lsa,

$\phi(\phi(x)), \psi(\psi(x)), \phi(\psi(x)), \psi(\phi(x))$ lar topilsin.

140. Agar $\phi(x)=signx, \psi(x)=1+x^2$ bo‘lsa, $\phi(\psi(x)), \psi(\phi(x))$ lar topilsin.

141. Agar $f(x)=\sqrt{1-x^2}, x=1+\sin^2\pi t=\phi(t)$ bo‘lsa, $f(\phi(t))$ funksiyaning aniqlanish sohasi topilsin.

142. Agar $\phi(x)=\ln x^2, \psi(x)=\sin x$ bo‘lsa, $\phi(\psi(x)), \psi(\phi(x))$ funksiyalar va ularning aniqlanish sohalari topilsin.

143. Agar $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^2+1$ bo‘lsa, $f(x)$ topilsin.

144. Agar $f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=x$ bo‘lsa, $f(x)$ topilsin.

145. Agar $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=x^2$ bo‘lsa, $f(x)$ topilsin.

146. Agar $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ bo‘lsa, $f_n(x)=\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{n \text{ та}}$ funksiya topilsin.

147. Agar $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ bo‘lsa, $f(f(f(x)))=x$ tenglik x ning qanday qiymatlarida o‘rinli bo‘ladi?

Test

№	Savol	To‘g‘ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	$y=\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$ funksiyani $x=0$ nuqtadagi qiymatini toping.	1	$\sqrt{2}$	2
2.	$y=\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos x+\sin x+2$ funksiyani $x=\frac{\pi}{2}$ nuqtada funksiyani hisoblang.	3	1	0
3.	$y=x^{\ln x}+e$ funksiyani $x=e$ nuqtadagi qiymatini toping.	$2e$	$3e$	2
4.	$y=x^3-3x^2+3x-1$ Funksiyani $x=\sqrt[3]{4}+1$ nuqtadagi qiymatini toping.	4	$\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{4}+2$
5.	$y=\sin 2x$ funksiyani asosiy davrini toping.	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
6.	$y=\sin 3x+\cos 2x+\operatorname{tg} x$ funksiyani asosiy davrini toping.	2π	π	$\frac{\pi}{2}$
7.	Davriy bo’lmagan funksiyani toping.	$y=\sin\sqrt{x-1}$	$y=\sin x-\cos 3x$	$y=\cos\frac{x}{3}+3$
8.	$y=\sin\frac{x}{2}+x^3+3x$ qanday funksiya.	Toq funksiya	Juft funksiya	Juft ham emas toq ham emas
9.	$y=\frac{x-1}{x+1}+1$ funksiyaga teskari bo’lgan funksiyani toping.	$y=\frac{x}{2-x}$	$y=\frac{x}{x+1}+1$	$y=\frac{x-1}{x}$
10.	$y=\frac{x}{2-x}+2$ funksiyaga teskari bo’lgan funksiyani toping.	$y=\frac{2x-4}{x-1}$	$y=\frac{x+1}{x-1}$	$y=\frac{2x-1}{x-1}$

11-mavzu. Funksiya limiti

11-ma’ruza

Reja

1. To‘plamning limit nuqtasi.
2. Funksiya limiti ta’riflari va ekvivalentligi.
3. Funksiyaning o‘ng va chap limitlari.

1. To‘plamning limit nuqtasi.

Aytaylik, biror $X \subset R$ to‘plam va $x_0 \in R$ nuqta berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. *([1], p. 215, Def. 9.1.18) Agar x_0 nuqtaning ixtiyoriy*

$$U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon),\ (\forall \varepsilon > 0)$$

atrofida X to‘plamning x_0 nuqtadan farqli kamida bitta nuqtasi bo‘lsa, ya’ni

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in X,\ \ x \neq x_0 :\ |x - x_0| < \varepsilon$$

bo‘lsa, x_0 nuqta X to‘plamning ***limit nuqtasi*** *deyiladi.*

Misollar. 1. $X = [0, 1]$ *to‘plamning har bir nuqtasi shu to‘plamning limit nuqtasi bo‘ladi.*

2. $X = (0, 1)$ *to‘plamning har bir nuqtasi va $x = 0$, $x = 1$ nuqtalar shu to‘plamning limit nuqtalari bo‘ladi. ([1], p. 215, Lemma 9.1.21)*

3. $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ to‘plamning limit nuqtasi $x_0 = 0$ bo‘ladi.

4. $X = N = \{1, 2, 3, \dots\}$ to‘plam limit nuqtaga ega emas.

2-ta’rif. *([2], p. 82. Item 3.3.3) Agar x_0 nuqtaning ixtiyoriy*

$$U_\varepsilon^+(x_0) = (x_0,\ x_0 + \varepsilon)\ \ (U_\varepsilon^-(x_0) = (x_0 - \varepsilon,\ x_0))\ \ (\forall \varepsilon > 0)$$

o‘ng atrofida (chap atrofida) X *to‘plamning kamida bitta nuqtasi bo‘lsa,* x_0 *nuqta* X *to‘plamning* ***o‘ng (chap) limit nuqtasi*** *deyiladi.*

3-ta’rif. Agar ixtiyoriy $c \in R$ uchun

$$U_c(+\infty) = \{x \in R \mid x > c\}$$

to‘plamda X to‘plamning kamida bitta nuqtasi bo‘lsa, "$+\infty$" X to‘plamning limit “nuqta”si deyiladi.

Agar ixtiyoriy $c \in R$ uchun

$$U_c(-\infty) = \{x \in R \mid x < c\}$$

to‘plamda X to‘plamning kamida bitta nuqtasi bo‘lsa, "$-\infty$" X to‘plamning limit «nuqta»si deyiladi.

Keltirilgan ta’rif va misollardan ko‘rinadiki, to‘plamning limit nuqtasi shu to‘plamga tegishli bo‘lishi ham, bo‘lmasligi ham mumkin ekan.

1-teorema. Agar $x_0 \in R$ nuqta $X \subset R$ to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsa, u holda x_0 nuqtaning har qanday

$$U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)\ \ (\forall \varepsilon > 0)$$

atrofida X to‘plamning cheksiz ko‘p nuqtalari bo‘ladi.

◀ Aytaylik, x_0 nuqta X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin. Teorema tasdig‘ining teskarisini faraz qilaylik: x_0 nuqtaning biror $U_{\delta_0}(x_0)$ atrofida X to‘plamning chekli sondagi $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ nuqtalarigina bo‘lsin. U holda

$$\min\{|x_0 - x_1|,\ \ |x_0 - x_2|, \ldots, |x_0 - x_n|,\ \ \delta_0\} = \delta$$

deb olinsa, x_0 nuqtaning $U_\delta(x_0)$ atrofida X to‘plamning x_0 dan farqli bitta ham nuqtasi bo‘lmaydi. Bu esa x_0 nuqta X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lishiga ziddir. ▶

2-teorema. *([1], p. 216, Th. 9.1.24) Agar* x_0 *nuqta* $X \subset R$ *to‘plamning limit nuqta-si bo‘lsa, u holda shunday sonlar ketma-ketligi* $\{x_n\}$ *topiladiki,*

1) $\forall n \in N$ *da* $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$;

2) $n \to \infty$ *da* $x_n \to x_0$;

bo'ladi.

◀ *Aytaylik,* $x_0 \in R$ *nuqta* $X \subset R$ *to'plamning limit nuqtasi bo'lsin. Unda 1-ta'rifga binoan*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_n \in X,\ \ x_n \neq x_0 :\ |x_n - x_0| < \varepsilon$$

bo'ladi. Jumladan,

$$\varepsilon = 1 \text{ uchun } \ \exists x_1 \in X,\ \ x_1 \neq x_0 :\ |x_1 - x_0| < 1,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \text{ uchun } \ \exists x_2 \in X,\ \ x_2 \neq x_0 :\ |x_2 - x_0| < \frac{1}{2},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \text{ uchun } \ \exists x_3 \in X,\ \ x_3 \neq x_0 :\ |x_3 - x_0| < \frac{1}{3},$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \text{ uchun } \ \exists x_n \in X,\ \ x_n \neq x_0 :\ |x_n - x_0| < \frac{1}{n},$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

bo'ladi.

Natijada qaralayotgan teoremaning 1) shartini qanoatlantiruvchi $\{x_n\}$ *ketma-ketlik hosil bo'lib, uning uchun* $\forall n \in N$ *da* $|x_n - x_0| < 1/n$ *tengsizlik o'rinli bo'ladi. Keyingi munosabatdan esa* $n \to \infty$ *da* $x_n \to x_0$ *kelib chiqadi.* ▶

Shuni ta'kidlash lozimki, 2-teoremaning shartlarini qanoatlantiruvchi ketma-ketliklar ko'plab topiladi.

2. Funksiya limiti ta'riflari va ekvivalentligi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, x_0 nuqta X to'plam-ning limit nuqtasi bo'lsin. x_0 nuqtaga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n, \ldots\ \ (x_n \in X,\ \ x_n \neq x_0)$$

ketma-ketlikni olib, funksiya qiymatlaridan iborat $\{f(x_n)\}$:

$$f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n),...$$

ketma-ketlikni hosil qilamiz.

3-ta'rif. (Geyne). Agar $n \to \infty$ da $x_n \to x_0$ $(x_n \in X,\ x_n \neq x_0)$ bo'ladigan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $n \to \infty$ da $f(x_n) \to b$ bo'lsa, b ga $f(x)$ **funksiyaning** x_0 **nuqtadagi limiti** deyiladi va $x \to x_0$ da $f(x) \to b$ yoki

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$$

kabi belgilanadi.

Eslatma. Agar $n \to \infty$ da

$$x_n \to x_0\ (x_n \in X,\ x_n \neq x_0) \text{ va } y_n \to x_0\ (y_n \in X,\ y_n \neq x_0)$$

bo'ladigan turli $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ ketma-ketliklar uchun $n \to \infty$ da $f(x_n) \to b_1$, $f(y_n) \to b_2$ bo'lib, $b_1 \neq b_2$ bo'lsa $f(x)$ funksiya $x \to x_0$ da limitga ega emas deyiladi.

1-misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$$

funksiyaning $x_0 = 4$ nuqtadagi limiti topilsin.

◀ Quyidagi $\{x_n\}$:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 4\ (x_n \neq 4,\ \ n = 1, 2, ...)$$

ketma-ketlikni olaylik. Unda

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 16}{x_n^2 - 4x_n} = \frac{x_n + 4}{x_n}$$

bo'lib, $n \to \infty$ da $f(x_n) \to 2$ bo'ladi. Demak,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = 2. \ \blacktriangleright$$

2-misol. Ushbu

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}$$

funksiyaning $x\to 0$ dagi limiti mavjud bo‘lmasligi ko‘rsatilsin.

◀ Ravshanki, $n\to\infty$ da

$$x_n'=\frac{2}{(4n-1)\pi}\to 0,\ \ x_n''=\frac{2}{(4n+1)\pi}\to 0$$

bo‘ladi.

Bu ketma-ketliklar uchun

$$f(x_n')=\frac{4n-1}{2}\pi=-1,\ \ f(x_n'')=\frac{4n+1}{2}\pi=1$$

bo‘lib, $n\to\infty$ da

$$f(x_n')\to -1,\ \ f(x_n'')\to 1$$

bo‘ladi. Demak, berilgan funksiya $x_0=0$ nuqtada limitga ega emas. ▶

4-ta’rif. (Koshi). ([1], p. 221, Def. 9.3.6) Agar $\forall\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ topilsaki, $\forall x\in X\bigcap(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\})$ uchun

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, b soni $f(x)$ **funksiyaning** x_0 **nuqtadagi limiti** deyiladi:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b.$$

Bu ta’rifni qisqacha quyidagicha ham aytish mumkin:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0,\ \forall x\in X\bigcap(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}):\ |f(x)-b|<\varepsilon$$

bo‘lsa, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$.

3-misol. $f(x)=C=\text{const}$ bo‘lsin. Bu funksiya uchun

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=C$$

bo‘ladi.

4-misol. Ushbu $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ funksiyaning $x_0=1$ nuqtadagi limiti 2 ga teng ekani ko‘rsatilsin.

◀ $\forall\varepsilon>0$ soniga ko‘ra $\delta=\varepsilon$ deb olsak, u holda $|x-1|<\delta$ $(x\neq 1)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x da

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|=|x+1-2|=|x-1|<\delta=\varepsilon$$

bo‘ladi. Demak, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$ ▶

5-misol. Faraz qilaylik, $X=R\setminus\{0\}$ da $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ bo‘lsin. Bu funksiya uchun

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

bo‘ladi.

◀Ma’lumki, $x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ uchun

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}tgx$$

bo‘ladi. Bu tengsizliklardan, funksiyalarning juftligini hisobga olib, $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ da

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

bo‘lishini topamiz. Keyingi tengsizliklardan esa

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\cdot\frac{x^2}{4}=\frac{x^2}{2}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Endi $\forall\varepsilon>0$ ni olib, $\delta=\min\{\varepsilon;\,1\}$ deyilsa, unda $\forall x$, $|x|<\delta$, $x\neq 0$ uchun

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<\varepsilon$$

bo‘ladi. Demak,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \blacktriangleright$$

6-misol. Ushbu

$$f(x)=a^x,\ a>0,\ x\in R,\ x_0=0$$

funksiya uchun

$$\lim_{x\to 0} a^x=1$$

bo‘lishi isbotlansin.

◀ $a>1$ bo‘lgan holni qaraylik. Bu holda $f(x)$ funksiya qat’iy o‘suvchi bo‘ladi:

$$\forall x_1,\ x_2\in R,\ \ x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2):\ \ a^{x_1}<a^{x_2}.$$

$\forall\varepsilon>0$ sonni olaylik. Ma’lumki, $n\to\infty$ da

$$a^{\frac{1}{n}}\to 1,\ \ a^{-\frac{1}{n}}\to 1$$

bo‘lib, ketma-ketlik limiti ta’rifiga binoan

$$\exists n_1\in N,\ \ \forall n>n_1:\ \ a^{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon,$$

$$\exists n_2\in N,\ \ \forall n>n_2:\ \ a^{-\frac{1}{n}}>1-\varepsilon$$

bo‘ladi. Endi $n_0=\max\{n_1,\ n_2\}$, $\delta=\dfrac{1}{n_0}$ deyilsa, unda

$$\forall x,\ |x-0|<\delta \ \Leftrightarrow\ -\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n_0}$$

bo‘lganda

$$a^{\frac{1}{n_0}}<a^x<a^{\frac{1}{n}} \ \Rightarrow\ 1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon \ \Leftrightarrow\ |a^x-1|<\varepsilon$$

bo‘ladi. Demak, $\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$.

$0<a<1$ bo‘lganda $\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$ bo‘lishini isbotlash o‘quvchiga havola etiladi. ►

5-ta'rif. *([2], p. 81, Def. 3.21) Agar* $\forall\varepsilon>0$ *son olinganda ham shunday* $\delta>0$ *son topilsaki,* $\forall x\in X\bigcap(U_{\delta}(x_0)\setminus\{x_0\})$ *uchun* $f(x)>\varepsilon$ *tengsizlik bajarilsa,* $f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi limiti* $+\infty$ *deb ataladi va*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$$

kabi belgilanadi.

Masalan,

$$f(x)=\frac{1}{x^2},\ (x\neq 0)$$

funksiya uchun

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

bo‘ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X\subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lib, $x_0=+\infty$ nuqta X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin.

6-ta'rif. *([2], p. 72, Def. 3.11) Agar* $\forall\varepsilon>0$ *son olinganda ham shunday* $\delta>0$ *topilsaki,* $\forall x\in X,\ x>\delta$ *uchun*

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, b *soni* $f(x)$ ***funksiyaning*** $x_0=+\infty$ ***dagi limiti*** *deyiladi va*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$$

kabi belgilanadi.

7-misol. Aytaylik, $X=(0,+\infty)$, $x_0=+\infty$, $f(x)=\frac{1}{x}$ bo‘lsin. U holda

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

bo‘ladi.

◄ Haqiqatan ham, $\forall\varepsilon>0$ sonni olaylik. Ravshanki, $\forall x>0$ uchun

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{x}<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad x>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Demak, $\delta=\frac{1}{\varepsilon}$ deyilsa, unda $\forall x>\delta$ uchun

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{x}<\frac{1}{\delta}=\varepsilon$$

bo‘ladi. ►

8-misol. Faraz qilaylik,

$$f(x)=\frac{x^m}{a^x}, \quad a>1, \quad m\in N, \quad X=R$$

bo‘lsin. Unda

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^m}{a^x}=0$$

bo‘lishini isbotlaymiz.

◄ $\varepsilon>0$ sonni olaylik. Ma’lumki, $n\to\infty$ da

$$\frac{(n+1)^m}{a^n}\to 0$$

bo‘ladi. Unda

$$\forall\varepsilon>0, \ \exists n_0, \quad \forall n>n_0: \ \frac{(n+1)^m}{a^n}<\varepsilon$$

bo‘ladi.

Agar $C=n_0$ deyilsa, unda $\forall x>C$ uchun

$$\left|\frac{x^m}{a^x}-0\right|=\frac{x^m}{a^x}<\frac{([x]+1)^m}{a^{[x]}}<\varepsilon$$

bo‘ladi $([x]\geq n_0=C)$. Demak, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^m}{a^x}=0$. ►

9-misol. Ushbu

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

munosabat isbotlansin.

◀ $\forall\varepsilon>0$ sonni olamiz. Ma’lumki, $n\to\infty$ da

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e,$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}\to e.$$

Limit ta’rifiga binoan,

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in N,\ \ \forall n>n_0:$$

$$e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<e+\varepsilon$$

bo‘ladi.

Endi $C=n_0$ desak, unda $\forall x>C$ uchun

$$e-\varepsilon<\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}<e+\varepsilon$$

bo‘lib,

$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right|<\varepsilon$$

bo‘ladi. Demak,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\,.$$ ▶

3-teorema. *([1], p. 222, Prop. 9.3.9) Funksiya limitining Koshi hamda Geyne ta’riflari ekvivalent ta’riflardir.*

◀ *Koshi ta’rifiga ko‘ra b soni $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti bo‘lsin:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b$$

Unda

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in X,\ |x-x_0|<\delta,\ x\neq x_0$$

Bo'lganda

$$|f(x)-b|<\varepsilon \qquad (1)$$

bo'ladi. x_0 *nuqta* X *to'plamning limit nuqtasi. Unda 2-teoremaga ko'ra* $\{x_n\}$ *ketma-ketlik topiladiki,* $n\to\infty$ *da* $x_n\to x_0$ $(x_n\neq x_0,\ n=1,2,\ldots)$ *bo'ladi. Ketma-ketlik limiti ta'rifiga binoan*

$$\delta>0,\ \exists n_0\in N,\ \forall n>n_0: |x_n-x_0|<\delta, \qquad (2)$$

bo'ladi. (1) va (2) munosabatlardan $\forall n>n_0$ *uchun*

$$|f(x_n)-b|<\varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa b *sonini Geyne ta'rifi bo'yicha* $f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi limiti ekanini bildiradi.*

Endi b *soni Geyne ta'rifi bo'yicha* $f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi limiti bo'lsin.*

Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi limiti Geyne ta'rifi bo'yicha* b *ga teng bo'lsa ham, Koshi ta'rifi bo'yicha limiti bo'lmasin. Unda biror* $\varepsilon_0>0$ *uchun ixtiyoriy* $\delta>0$ *son olinganda ham* $0<|x-x_0|<\delta$ *ni qanoatlantiruvchi biror* x' *da*

$$|f(x')-b|\geq\varepsilon_0$$

bo'ladi.

Nolga intiluvchi musbat sonlar ketma-ketligi $\{\delta_n\}$ *ni olaylik:*

$$n\to\infty \text{ da } \delta_n\to 0\ (\delta_n>0,\ n=1,2,\ldots).$$

U holda

$$0<|x_n-x_0|<\delta_n \ \Rightarrow\ |f(x_n)-b|\geq\varepsilon_0 \qquad (3)$$

bo'ladi. Ammo $\delta_n\to 0$*, da* $x_n\to x_0$*, demak, Geyne ta'rifiga asosan*

$$f(x_n)\to b$$

bo'ladi. Bu (3) ga ziddir. Demak, b soni Koshi ta'rifi bo'yicha ham, $f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi limiti bo'ladi.* ►

3. Funksiyaning o'ng va chap limitlari.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan, x_0 nuqta X ning chap limit nuqtasi bo'lib,

$$(x_0 - \gamma,\ x_0) \subset X \quad (\gamma > 0)$$

bo'lsin.

7-ta'rif. *([2], p. 82, Def. 3.22) Agar*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0):\ |f(x) - b| < \varepsilon$$

bo'lsa, b son $f(x)$ ***funksiyaning*** x_0 ***nuqtadagi chap limiti*** *deyiladi va*

$$b = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$$

kabi belgilanadi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan, x_0 nuqta X ning o'ng limit nuqtasi bo'lib,

$$(x_0, x_0 + \gamma) \subset X \quad (\gamma > 0)$$

bo'lsin.

8-ta'rif. *([2], p. 82, Def. 3.22) Agar*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in (x_0,\ x_0 + \delta):\ |f(x) - b| < \varepsilon$$

bo'lsa, b son $f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi o'ng limiti deyiladi va*

$$b = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

kabi belgilanadi.

Masalan,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar} \quad x > 0 \quad \text{bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar} \quad x = 0 \quad \text{bo'lsa,} \\ -1, & \text{agar} \quad x < 0 \quad \text{bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiyaning 0 nuqtadagi o‘ng limiti 1, chap limiti –1 bo‘ladi.

Mashqlar

1. Ushbu

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

limitlarning ta’riflari keltirilsin.

2. Ushbu $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ funksiya $x_0=0$ nuqtada limitga ega emasligi isbotlansin.

3. Limit ta’rifidan foydalanib, $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}=\infty$ bo‘lishi isbotlansin.

4. $f(x)$ funksiya a nuqtada b limitga ega bo‘lishi uchun uning shu nuqtadagi o‘ng va chap limitlari mavjud bo‘lib,

$$f(a+0)=f(a-0)=b$$

tengliklar o‘rinli bo‘lishi zarur va etarli bo‘lishi isbotlansin.

Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical analysis I.* Springer-Verlag, Italia, 2008.
3. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma’ruzalar, I q.* T. “Voris-nashriyot”, 2010.
4. **Фихтенгольц Г. М.** *Курс дифференциального и интегрального исчисления, 1 т.* М. «ФИЗМАТЛИТ», 2001.

Nazorat savollari

9. To‘plamning limit nuqtasi.
10. Geyne bo‘yicha funksiyaning limiti ta’rifi.
11. Koshi bo‘yicha funksiyaning limiti ta’rifi.
12. Funksiyaning o‘ng va chap limitllari.

Glossariy

Funksiyaning cheksizlikdagi limiti. Agar $\forall\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $\delta>0$ topilsaki, $\forall x\in X$, $x>\delta$ uchun

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, b soni $f(x)$ funksiyaning $x_0=+\infty$ dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$$

kabi belgilanadi.

Funksiyaning limiti cheksizlik bo‘lishi. Agar $\forall\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $\delta>0$ son topilsaki, $\forall x\in X\bigcap(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\})$ uchun $f(x)>\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti $+\infty$ deb ataladi va

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$$

kabi belgilanadi.

Funksiyaning nuqtadagi chap limiti. Agar

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in(x_0-\delta,\ x_0):\ \ |f(x)-b|<\varepsilon$$

bo‘lsa, b son $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi chap limiti deyiladi va

$$b=\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$$

kabi belgilanadi.

Funksiyaning nuqtadagi limiti (Geyne bo‘yicha). Agar $n\to\infty$ da $x_n\to x_0$ $(x_n\in X,\ x_n\neq x_0)$ bo‘ladigan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $n\to\infty$ da $f(x_n)\to b$ bo‘lsa, b ga $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti deyiladi va $x\to x_0$ da $f(x)\to b$ yoki

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b$$

kabi belgilanadi.

Funksiyaning nuqtadagi limiti (Koshi bo‘yicha). Agar $\forall\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ topilsaki, $\forall x\in X\bigcap(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\})$ uchun

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, b soni $f(x)$ **funksiyaning** x_0 **nuqtadagi limiti** deyiladi:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b.$$

Bu ta’rifni qisqacha quyidagicha ham aytish mumkin:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0,\ \forall x\in X\bigcap(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}):|f(x)-b|<\varepsilon$$

bo‘lsa, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$.

Funksiyaning nuqtadagi o‘ng limiti. Agar

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in(x_0,\ x_0+\delta):\ |f(x)-b|<\varepsilon$$

bo‘lsa, b son $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi o‘ng limiti deyiladi va

$$b=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$$

kabi belgilanadi.

Limit nuqta. Agar x_0 nuqtaning ixtiyoriy

$$U_\varepsilon(x_0)=(x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon),\ (\forall\varepsilon>0)$$

atrofida X to‘plamning x_0 nuqtadan farqli kamida bitta nuqtasi bo‘lsa, ya’ni

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists x\in X,\ x\neq x_0:\ |x-x_0|<\varepsilon$$

bo‘lsa, x_0 nuqta X to‘plamning limit nuqtasi deyiladi.

O‘ng (**chap**) **limit nuqtasi.** Agar x_0 nuqtaning ixtiyoriy

$$U_\varepsilon^+(x_0)=(x_0,\ x_0+\varepsilon)\ \ (U_\varepsilon^-(x_0)=(x_0-\varepsilon,\ \ x_0))\ \ (\forall\varepsilon>0)$$

o‘ng atrofida (chap atrofida) X to‘plamning kamida bitta nuqtasi bo‘lsa, x_0 nuqta X to‘plamning o‘ng (chap) limit nuqtasi deyiladi.

Keys banki

11-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: $f(x)$ funksiya a nuqtada b limitga ega bo‘lishi uchun uning shu nuqtadagi o‘ng va chap limitlari mavjud bo‘lib,

$$f(a+0) = f(a-0) = b$$

tengliklar o‘rinli bo‘lishi zarur va etarli bo‘lishi isbotlansin.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

11-amaliy mashg'ulot

Na'muna uchun misollar yechimi

1 – m i s o l . ***Funksiya limiti ta'rifidan foydalanib***

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1.$$

bo'lishi isbotlansin.

◀ $\forall\varepsilon>0$ sonni olib, unga ko'ra δ ni $\delta=\varepsilon$ deylik.

Unda $\left|x-\frac{\pi}{2}\right|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda

$$|\sin x-1|=\left|\sin x-\sin\frac{\pi}{2}\right|=2\left|\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right|\le$$

$$\le 2\left|\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right|\le\left|x-\frac{\pi}{2}\right|<\delta=\varepsilon$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1.\blacktriangleright$$

Misollar

Funksiya limiti ta'rifidan foydalanib quyidagi tengliklar isbotlansin.

569. $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-16}{x-4}=8$

570. $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-16}{x^2-4x}=2$

571. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{2x^2+5x-3}{x+3}=-7$

572. $\lim\limits_{x\to-1/3}\frac{3x^2-2x-1}{x+\frac{1}{3}}=-4$

573. $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^2-5x-2}{x-2}=7$

574. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{7x^2+8x+1}{x+1}=-6$

575. $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$

576. $\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$

577. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x-3}=\infty$

578. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=0$

579. $\lim\limits_{x\to 3}x^4=81$

580. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2}, & агар\ \ x\neq 0\ \ бўлса,\\ 0, & агар\ \ x=0\ \ бўлса.\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$

581. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

582. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{1}{x^2+3x+2}=0$.

Quyidagi funksiyalar a nuqtada limitga ega emasligi isbotlansin.

583. $f(x)=\frac{|x|}{x},\qquad a=0$

584. $f(x)=\cos\frac{1}{x},\qquad a=0$

585. $f(x)=\sin\frac{1}{x},\qquad a=0$

586. $f(x)=\begin{cases}x^3+x^2+x+1, & агар\ \ x\geq 1\ \ бўлса,\\ 0, & агар\ \ x<1\ \ бўлса.\end{cases}\qquad a=1$

587. $f(x)=x-[x],\qquad a=2$

588. $f(x)=\begin{cases}e^x, & агар\ \ x<0\ \ бўлса,\\ 2+x, & агар\ \ x\geq 0\ \ бўлса.\end{cases}\qquad a=0$

589. $D(x)=\begin{cases}1, & агар\ \ x\ \ рационал\ \ сон\ \ бўлса,\\ 0, & агар\ \ x\ \ иррационал\ \ сон\ \ бўлса.\end{cases}$

$a\in R$ - ixtiyoriy nuqta.

590. $f(x)=\begin{cases}x^2, & агар\ \ x\ \ иррационал\ \ сон\ \ бўлса,\\ 1, & агар\ \ x\ \ рационал\ \ сон\ \ бўлса.\end{cases}$ funksiya qanday nuqtalarda limitga ega?

591. $f(x)=[x]\cdot\frac{1}{x}$, funksiyaning $x\to 0$dagi limiti mavjudmi ?

Quyidagi funksiyalarning ko'rsatilgan nuqtadagi o'ng va chap limitlari topilsin.

592. $f(x)=\frac{x-|x|}{2x}$, $\quad a=0$

593. $f(x)=\arccos(x-1)$, $\quad a=0$

594. $f(x)=2^{tgx}$, $\quad a=\frac{\pi}{2}$

595. $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & агар \quad x>0 \quad бўлса, \\ \cos x, & агар \quad x\le 0 \quad бўлса.\end{cases}$ $\quad a=0$

596. $f(x)=\operatorname{sgn} x$, $\quad a=0$

597. $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$, $\quad a=\frac{\pi}{2}$

598. $f(x)=\frac{1}{x+3^{\frac{1}{3-x}}}$, $\quad a=3$

599. $f(x)=\frac{1}{x-[x]}$, $\quad a=-1$

600. $f(x)=x+[x^2]$, $\quad a=10$

601. $f(x)=\frac{\sin x}{|x|}$, $\quad a=0$

602. $f(x)=\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$, $\quad a=0$

603. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$, $\quad a=1$

604. $f\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^n-3}{x^n-1},\qquad a=1$

Test

№	Savol	To'g'ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	δ qanday qiymatlarida $\|x-1\|<\delta$ tengsizligidan $\|\lg x\|<2$ tengsizlik kelib chiqadi?	$\delta \le 0,99$	$\delta > 10$	$\delta > 2$	$\delta \le 5$
2.	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}=?$	$\dfrac{7}{3}$	$\dfrac{3}{7}$	-7	$-\dfrac{7}{3}$
3.	$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}=?$	$-\dfrac{2}{5}$	-1	-2	-3
4.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^7+5x^6+4x^3}{x^7+2x^3}=?$	2	0	-2	1
5.	$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}=?$	$\dfrac{49}{16}$	16	0	∞
6.	$\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+1}-x\right)=?$	3	4	5	6
7.	$\lim\limits_{x\to 1+0}[x]=?$	1	0	-2	1
8.	$\lim\limits_{x\to 1-0}[x]=?$	0	16	0	∞
9.	$\lim\limits_{x\to 3+0}\operatorname{sgn} x=?$	1	4	5	6
10.	$\lim\limits_{x\to 2-0}\{x\}=?$	1	$\dfrac{3}{7}$	-7	$-\dfrac{7}{3}$

12-mavzu. Limitga ega bo‘lgan funksiyalarning xossalari

12-ma’ruza

Reja

1. Limitga ega bo‘lgan funksiyalarning xossalari.
2. Monoton funksiya limiti.
3. Koshi kriteriysi.

1. Limitga ega bo‘lgan funksiyalarning xossalari.

Chekli limitga ega bo‘lgan funksiyalar ham yaqinlashuvchi ketma-ketlik singari qator xossalarga ega.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lib, $x_0 \in R$ nuqta X ning limit nuqtasi bo‘lsin.

1-xossa. *([2], p. 89, Th. 4.1) Agar $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiya limitga ega bo‘lsa, u yagona bo‘ladi.*

◄ *Bu xossaning isboti limit ta’riflarining ekvivalentligi hamda ketma-ketlik limitining yagonaligidan kelib chiqadi.* ►

2-xossa. Agar

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b, \ (b - \text{chekli son})$$

bo‘lsa, u holda x_0 nuqtaning shunday $U_\delta(x_0)$ $(\delta > 0)$ atrofi topiladiki, bu atrofda $f(x)$ funksiya chegaralangan bo‘ladi.

◄Aytaylik,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$$

bo‘lsin. Funksiya limiti ta’rifga binoan

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in X\bigcap(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\})\ \text{da}\ |f(x)-b|<\varepsilon$$

ya'ni $b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$ bo'ladi. Keyingi tengsizliklardan $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtaning $U_\delta(x_0)$ atrofida chegaralanganligi kelib chiqadi. ►

***3-xossa**. ([2], p. 90, Th. 4.2) Agar*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b$$

bo'lib, $b<p$ *bo'lsa, u holda* x_0 *nuqtaning shunday* $U_\delta(x_0)$ *atrofi topiladiki, bu atrofda*

$$f(x)<p$$

bo'ladi.

◄ *Shartga ko'ra*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b.$$

Funksiyaning limiti ta'rifiga ko'ra $\varepsilon=p-b>0$ *uchun shunday* $\delta>0$ *son topiladiki,* $\forall\ x\in X$, $|x-x_0|<\delta$, $x\neq x_0$ *uchun*

$$|f(x)-b|<\varepsilon\Rightarrow f(x)<b+\varepsilon=p$$

bo'ladi. Bu esa $\forall\ x\in U_\delta(x_0)$ *da* $f(x)<p$ *bo'lishini bildiradi.* ►

Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $X\subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $x_0\in R$ nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

***4-xossa**. ([2], p. 92, Corollary 4.4) Agar*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b_1,\ \lim_{x\to x_0} g(x)=b_2$$

bo'lib, $\forall x\in X$ *da* $f(x)\le g(x)$ *tengsizlik bajarilsa, u holda* $b_1\le b_2$, *ya'ni*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x)$$

bo'ladi.

◄ *Aytaylik,*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b_1,\ \lim_{x\to x_0} g(x)=b_2$$

bo'lsin.

Funksiya limitining Geyne ta'rifiga ko'ra x_0 *ga intiluvchi ixtiyoriy*

$$x_n \to x_0 \ \ (x_n \in X, \ \ x_n \neq x_0)$$

ketma-ketlik uchun

$$n \to \infty \ da \ \ f(x_n) \to b_1, \ g(x_n) \to b_2 \qquad (1)$$

bo'ladi.

Ravshanki, $\forall \ n \in N$ *da*

$$f(x_n) \leq g(x_n) \qquad (2)$$

Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning xossalaridan foydalanib, (1) va (2) munosabatlardan $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_n) \ \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x_n)$ *, ya'ni* $b_1 \leq b_2$ *bo'lishini topamiz.* ►

***5-xossa**. ([1], p. 223, Prop. 9.3.14) Faraz qilaylik,*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b_1, \ \lim_{x \to x_0} g(x) = b_2 \ \ (b_1, b_2 \in R)$$

limitlar mavjud bo'lsin. U holda

a) $\forall c \in R$ *da* $\lim\limits_{x \to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

b) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

v) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

g) Agar $b_2 \neq 0$ *bo'lsa,* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$;

bo'ladi.

Bu tasdiqlarning isboti sonlar ketma-ketliklari ustida arifmetik amallar bajarilishi haqidagi ma'lumotlardan kelib chiqadi.

1-misol. Ushbu

$$\lim_{x \to 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n - n}{x - 1}$$

limit hisoblansin.

◀ Bu limitni yuqoridagi xossalardan foydalanib hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3+...+x^n-n}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+(x^3-1)+...+(x^n-1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)[1+(x+1)+(x^2+x+1)+...+(x^{n-1}+x^{n-2}+x+1)]}{x-1}=$$

$$=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}\ . ▶$$

2-misol. Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

limit hisoblansin.

◀ Ma'lumki, $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$. Shuni hisobga olib topamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]=\frac{1}{2}.\ ▶$$

2. Monoton funksiya limiti. ([2], p. 85, Item 3.3.4)

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X\subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $(x_0-\gamma,\ x_0)\subset X$ bo'lsin $(\gamma>0)$. Ravshanki, $x_0\in R$ nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'ladi.

1-teorema. *Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda o'suvchi bo'lib, u yuqoridan chegaralangan bo'lsa, funksiya x_0 nuqtada*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

limitga ega bo'ladi.

◀ $f(x)$ *funksiya qiymatlaridan iborat bo'lgan ushbu*

$$F=\{f(x)|\ x\in X\cap\{x<x_0\}\}$$

to'plamni qaraymiz. Teoremaning shartiga ko'ra bu to'plam yuqoridan chegaralangan bo'ladi. U holda to'plamning aniq chegarasining mavjudligi haqidagi teoremaga ko'ra F tuplam aniq yuqori chegaraga ega. Uni b bilan belgilaymiz:

$$\sup F=b.$$

Endi, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=b$ *bo'lishini isbotlaymiz. Aniq yuqori chegara ta'rifiga ko'ra:*

1) $\forall x\in X\cap\{x<x_0\}$ *uchun* $f(x)\le b;$

2) $\exists\, x^*\in X\cap\{x<x_0\}$, $x^*<x_0:\ \ f(x^*)>b-\varepsilon,\ \ (\forall\,\varepsilon>0)$ *bo'ladi.*

Agar $\delta=x_0-x^*>0$ *deyilsa, unda* $\forall x\in(x_0-\delta,\,x_0)\cap(x_0-\gamma,\,x_0)$ *uchun*

$$b-\varepsilon<f(x^*)\le f(x)\le b<b+\varepsilon$$

bo'lib,

$$|\,f(x)-b\,|<\varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Bu esa

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=b$$

ekanini bildiradi. ▶

Xuddi shunga o'xshash quyida keltiriladigan teorema isbotlanadi.

Aytaylik, $f(x)$ *funksiya* $X\subset R$ *to'plamda berilgan bo'lib,* $(x_0,x_0+\gamma)\subset X$ *bo'lsin* $(\gamma>0)$. *Ravshanki,* $x_0\in R$ *nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'ladi.*

2-teorema. *Agar* $f(x)$ *funksiya X to'plamda kamayuvchi bo'lib, u* *quyidan chegaralangan bo'lsa, funksiya* x_0 *nuqtada*

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

limitga ega bo'ladi.

3. Koshi kriteriysi.

Endi funksiya limitining mavjudligi haqidagi umumiy teoremani keltiramiz.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X\subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $x_0\in R$ nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $\forall\varepsilon>0$ olinganda ham shunday $\delta>0$ son topilsaki,

$$\forall x\in X\cap\left(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}\right),\quad \forall y\in X\cap\left(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}\right)$$

lar uchun

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon \tag{3}$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ uchun x_0 nuqtada **Koshi sharti bajariladi** deyiladi.

3-misol. Ushbu $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ funksiya uchun $x_0=0$ nuqtada Koshi sharti bajariladi.

◀ Haqiqatan ham, $\forall\varepsilon>0$ songa ko'ra $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ deyilsa, u holda

$$\forall x\in X\bigcap(U_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)\setminus\{0\}),\quad \forall y\in X\bigcap(U_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)\setminus\{0\})$$

lar uchun (ya'ni $|x|<\delta,\ |y|<\delta$ uchun)

$$|f(x)-f(y)|=|x\sin\frac{1}{x}-y\sin\frac{1}{y}|\le|x\sin\frac{1}{x}|+|y\sin\frac{1}{y}|\le$$

$$\le|x|+|y|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

bo'ladi.

3-teorema (Koshi)**.** $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli limitga ega bo'lishi uchun bu funksiya x_0 nuqtada Koshi shartining bajarishi zarur va etarli.

◀ **Zarurligi.** $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli limitga ega bo‘lsin:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b.$$

Limit ta’rifiga binoan:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in X\cap\left(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}\right) \text{ uchun}$$

$$|f(x)-b|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (4)$$

bo‘ladi. Shuningdek, $\forall y\in X\cap(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\})$ uchun ham

$$|f(y)-b|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (5)$$

bo‘ladi. (4) va (5) munosabatlardan

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-b|+|b-f(y)|<\varepsilon$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Aytaylik $f(x)$ funksiya uchun (3) shart bajarilsin. x_0 nuqtaga intiluvchi ikkita

$$x_n\to x_0\ \ (x_n\ne x_0,\ n=1,2,\dots),\ x_n\in X,$$
$$y_n\to x_0\ \ (y_n\ne x_0,\ n=1,2,\dots),\ y_n\in X,$$

ketma-ketliklarni olamiz. Bu ketma-ketliklardan foydalanib, ushbu

$$x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ \dots,\ x_n,\ y_n,\ \dots$$

ketma-ketlikni hosil qilamiz. Uni z_n bilan belgilaymiz. Ravshanki, z_n ketma-ketlik uchun

$$z_n\to x_0\ \ (z_n\ne x_0,\ n=1,2,\dots),\ z_n\in X$$

bo‘ladi. Teorema shartiga binoan $\forall\varepsilon>0$ soniga ko‘ra $\delta>0$ sonni olamiz. Modomiki, $n\to\infty$ da $z_n\to x_0$ ekan, unda limit ta’rifiga ko‘ra:

$$\delta>0,\ \exists n_0\in N,\ \forall\, n>n_0: |z_n-x_0|<\varepsilon$$

bo‘ladi. Unda $\forall m>n_0$, $\forall n>n_0$ uchun

$$|f(z_m)-f(z_n)|<\varepsilon$$

tengsizlik bajapiladi. Byndan $f(z_n)$ ketma-ketlikning fyndamental ekanligi kelib chiqadi. Demak $f(z_n)$ ketma-ketlik yaqinlashyvchi:

$$n\to\infty \text{ da } f(z_n)\to b.$$

Unda

$$f(x_n)\to b,\ f(y_n)\to b$$

bo‘lib, fynksiya limitining Geyne ta’pifiga binoan

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b.$$

bo‘ladi. ►

Mashqlar

1. Ushby

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$$

limit bilan aniqlanadigan fynksiya topilsin.

2. Ushby

$$\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$$

limit xisoblansin.

Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical analysis I.* Springer-Verlag, Italia, 2008.
3. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma’ruzalar, I q.* T. “Voris-nashriyot”, 2010.
4. **Фихтенгольц Г. М.** *Курс дифференциального и интегрального исчисления, 1 т.* М. «ФИЗМАТЛИТ», 2001.

Nazorat savollari

13. Limitga ega bo‘lgan funksiyalarning xossalari qanday xossalari bor?
14. Monoton funksiyaning limiti haqida nima deyish mumkin?
15. Funksiya uchun Koshi sharti.
16. Koshi kriteriysi.

Glossariy

Funksiyaning nuqtadagi limiti (Geyne bo‘yicha). Agar $n\to\infty$ da $x_n\to x_0$ $(x_n\in X,\ x_n\neq x_0)$ bo‘ladigan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $n\to\infty$ da $f(x_n)\to b$ bo‘lsa, b ga $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti deyiladi va $x\to x_0$ da $f(x)\to b$ yoki

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b$$

kabi belgilanadi.

Funksiyaning nuqtadagi limiti (Koshi bo‘yicha). Agar $\forall\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ topilsaki, $\forall x\in X\bigcap(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\})$ uchun

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, b soni $f(x)$ **funksiyaning** x_0 **nuqtadagi limiti** deyiladi:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b.$$

Bu ta’rifni qisqacha quyidagicha ham aytish mumkin:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0,\ \forall x\in X\bigcap(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}):|f(x)-b|<\varepsilon$$

bo‘lsa, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$.

Koshi sharti. Agar $\forall\varepsilon>0$ olinganda ham shunday $\delta>0$ son topilsaki,

$$\forall x\in X\cap\left(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}\right),\quad \forall y\in X\cap\left(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}\right)$$

lar uchun

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ uchun x_0 nuqtada Koshi sharti bajariladi deyiladi.

Limitning yagonaligi. Agar $x\to x_0$ da $f(x)$ funksiya limitga ega bo‘lsa, u yagona bo‘ladi.

Keys banki

12-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: Ushbu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$$

limit bilan aniqlanadigan funksiya topilsin.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

12-amaliy mashg'ulot

Na'muna uchun misollar yechimi

1 – m i s o l . ***Ushbu***

$$\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$$

limit hisoblansin.

◀Avvalo $1-x=t$ deb olamiz. Unda $x\to 1$ da $t\to 0$ bo'ladi. SHuni e'tiborga olib topamiz:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}=\lim_{t\to 0}t\cdot tg\frac{\pi}{2}(1-t)=\lim_{t\to 0}t\cdot ctg\frac{\pi t}{2}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos\frac{\pi y}{2}}{\sin\frac{\pi t}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin\frac{\pi t}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

.▶

Misollar

Quyidagi limitlar topilsin.

605. $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

606. $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x^3-8}$

607. $\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x^3}-8}{\sqrt{x}-4}$

608. $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}, \quad (n,\ m\in N)$

609. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} \quad (n,\ m\in N)$

610. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{n}{1-x^n}-\frac{m}{1-x^m}\right), \quad (n,m\in N)$

611. $\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$

612. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{4}{x}}-\sqrt[4]{1+\frac{3}{x}}}{1-\sqrt[5]{1-\frac{5}{x}}}$

613. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[n]{1+ax}\cdot\sqrt[m]{1+bx}-1}$, $\quad (n,m\in N)$

614. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}$, $\quad n\in N$

615. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

616. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1}$, $\quad n\in N$

617. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

618. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$

619. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$

Quyidagi limitlar topilsin.

620. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx^2}{nx^2}$

621. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$

622. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 6x-\sin 7x}$

623. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x^3-1}{sin^6 2x}$

624. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x}$

625. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{sin2x\cdot\sin x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$

626. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}$

627. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos x}}{tgx^2}$

628. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\cos\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{3}{x}\right)$

629. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\pi\sqrt{n^2+n}$

630. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cdot\cos^2 2x\cdot\cos^3 3x}{x^2}$

631. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x^2-a^2}}$

632. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$

633. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tg^2x}$

634. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{shx}{x}$

635. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ch2x-1}{\cos x-1}$

636. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{ch2x}{chx}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

637. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{2x}}$

638. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)$

639. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{2x}}{tgx}$

640. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}$

641. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(4^{\frac{1}{x}}-4^{\frac{1}{x+1}}\right)$

642. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 5x}{\ln\cos 4x}$

643. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,\ b>0)$

644. $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin 4x-\cos 4x}\right)^{\frac{1}{x}}$

645. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{arc\cos(1-x)}{\sqrt{x}}$

646. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

647. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$

Test

№	Savol	To‘g‘ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	$\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}=?$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{7}$
2.	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}=?$	3	5	7	9
3.	$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1})$	0	1	-1	∞
4.	$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^4+13x^2-7}-2x^2)$ $=?$	$\dfrac{13}{4}$	$\dfrac{1}{4}$	0	$-\dfrac{13}{4}$
5.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}4x}{\sin x}=?$	4	3	2	1
6.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 6x-\sin 7x}=?$	-1	0	1	∞
7.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x}=?$	2	0	5	7
8.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}=?$	$\dfrac{1}{e}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{7}$
9.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10^x-1}{2^x-1}=?$	$\dfrac{\ln 10}{\ln 2}$	$\dfrac{1}{e}$	0	-1
10.	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}\right)^{x^2}=?$	e^8	e^2	e^4	e

13-mavzu. Funksiyalarni taqqoslash

13-ma’ruza

Reja

1. Cheksiz katta va cheksiz kichik funksiyalar.
2. “O” va “o” belgilar, ularning xossalari.
3. Funksiyalarning ekvivalentligi.

1. Cheksiz katta va cheksiz kichik funksiyalar.

Aytaylik, $\alpha(x)$ hamda $\beta(x)$ funksiyalar $X \subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lib, $x_0 \in R$ nuqta X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin.

1-ta’rif. *([2], p. 130, Def. 5.8) Agar*

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$$

*bo‘lsa, $\alpha(x)$ funksiya $x \to x_0$ da **cheksiz kichik funksiya** deyiladi.*

Masalan, $x \to 0$ da $\alpha(x) = \sin x$ funksiya cheksiz kichik funksiya bo‘ladi.

2-ta’rif. *([2], p. 130, Def. 5.8) Agar*

$$\lim_{x \to x_0} \beta(x) = \infty$$

*bo‘lsa, $\beta(x)$ funksiya $x \to x_0$ da **cheksiz katta funksiya** deyiladi.*

Masalan, $x \to 0$ da $\beta(x) = \dfrac{1}{x}$ funksiya cheksiz katta funksiya bo‘ladi.

Cheksiz kichik hamda cheksiz katta funksiyalar cheksiz kichik hamda cheksiz katta miqdorlar kabi xossalarga ega bo‘ladi:

1) Chekli sondagi cheksiz kichik funksiyalar yig‘indisi cheksiz kichik funksiya bo‘ladi;

2) Chegaralangan funksiyaning cheksiz kichik funksiya bilan ko‘paytmasi cheksiz kichik funksiya bo‘ladi;

3) Agar $\alpha(x)$ $\left(\alpha(x)\neq 0\right)$ cheksiz kichik funksiya bo‘lsa, $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ cheksiz katta funksiya bo‘ladi.

4) Agar $\beta(x)$ cheksiz katta funksiya bo‘lsa, $\dfrac{1}{\beta(x)}$ cheksiz kichik funksiya bo‘ladi.

2. “O” va “o” belgilar, ularning xossalari.

Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalari $X\subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lib, x_0 nuqta X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin.

3-ta’rif. *([2], p. 123, Def. 5.1) Agar shunday o‘zgarmas $C>0$ soni va shunday $\delta>0$ son topilsaki, $\forall x\in X\bigcap(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\})$ uchun*

$$|f(x)|\leq C|g(x)|$$

tengsizlik bajarilsa, ya’ni

$$\exists C\in R_+,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in X\bigcap(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}):|f(x)|\leq C|g(x)|$$

*bo‘lsa, $x\to x_0$ da $f(x)$ funksiya $g(x)$ funksiyaga nisbatan **chegaralangan** deyiladi va $f(x)=O(g(x))$ kabi belgilanadi.*

Agar

$$\exists C\in R,\ \exists d\in R_+,\ \forall x,\ |x|>d:\ |f(x)|\leq C|g(x)|$$

*bo‘lsa, $x\to x_0=\infty$ da $f(x)$ funksiya $g(x)$ funksiyaga nisbatan **chegaralangan** deyiladi va yuqoridagidek $f(x)=O(g(x))$ kabi belgilanadi.*

Masalan, $x\to 0$ da $x^2=O(x)$ bo‘ladi, chunki $x\in(-1,1)$ da $\left|x^2\right|\leq|x|$. ([2], p. 126, i))

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqta atrofida chegaralangan bo‘lsa, $x\to x_0$ da $f(x)=O(1)$ kabi yoziladi.

“O” ning xossalari ([2], p. 125, Properties):

1) Agar

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=b$$

bo‘lsa, $x\to x_0$ *da* $f(x)=O(g(x))$ *bo‘ladi.*

2) Agar $x\to x_0$ *da* $f(x)=O(g(x))$ *va* $g(x)=O(h(x))$ *bo‘lsa, u holda* $x\to x_0$ *da* $f(x)=O(h(x))$ *bo‘ladi. Demak,* $x\to x_0$ *da* $O(O(h(x)))=O(h(x))$.

3) Agar $x\to x_0$ *da* $f(x)=O(g(x))$ *va* $h(x)=O(g(x))$ *bo‘lsa, u holda* $x\to x_0$ *da* $f(x)+h(x)=O(g(x))$ *bo‘ladi.*

4) Agar $x\to x_0$ *da* $f_1(x)=O(g_1(x))$ *va* $f_2(x)=O(g_2(x))$ *bo‘lsa, u holda* $x\to x_0$ *da* $f_1(x)\cdot f_2(x)=O(g_1(x)\cdot g_2(x))$ *bo‘ladi.*

4-ta’rif. *([2], p. 124, Def. 5.1) Agar har qanday* $\varepsilon>0$ *son olinganda ham shunday* $\delta>0$ *son topilsaki,*

$$\forall x\in X\bigcap(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\})$$

uchun

$$|f(x)|\le\varepsilon|g(x)|$$

tengsizlik bajarilsa, ya’ni

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in X\bigcap(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}):|f(x)|\le\varepsilon|g(x)|$$

bo‘lsa, $x\to x_0$ *da* $f(x)$ *funksiya* $g(x)$ *funksiyaga nisbatan* ***yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya*** *deyiladi va* $f(x)=o(g(x))$ *yoki* $f=o(g)$ *kabi belgilanadi.*

“o” ning xossalari ([2], p. 125, Properties):

Agar $x\to x_0$ *da* $f=o(g)$ *bo‘lsa, u holda* $x\to x_0$ *da* $f=O(g)$ *bo‘ladi.*

1) Agar $x\to x_0$ *da* $f=o(g)$, $g=o(h)$ *bo‘lsa, u holda* $x\to x_0$ *da* $f=o(h)$ *bo‘ladi. Demak,* $o(o(h))=o(h)$.

2) Agar $x\to x_0$ *da* $f_1=o(g)$, $f_2=o(g)$ *bo‘lsa, u holda* $x\to x_0$ *da*

$f_1 + f_2 = o(g)$ *bo'ladi.*

3) Agar $x \to x_0$ *da* $f_1 = o(g_1)$, $f_2 = o(g_2)$ *bo'lsa, u holda* $x \to x_0$ *da* $f_1 \cdot f_2 = o(g_1 \cdot g_2)$ *bo'ladi. Demak,* $o(g_1) \cdot o(g_2) = o(g_1 \cdot g_2)$.

3. Funksiyalarning ekvivalentligi.

Aytaylik, $f(x)$ va g(x) funksiyalari $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, x_0 nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

5-ta'rif. *([2], p. 124, Def. 5.1)* $x \to x_0$ *da* $f(x)$ *va* $g(x)$ *funksiyalar (* $x \neq x_0$ *da* $g(x) \neq 0$ *) uchun*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

bo'lsa, $x \to x_0$ *da* $f(x)$ *va* $g(x)$ ***ekvivalent funksiyalar*** *deyi-ladi va* $f(x) \sim g(x)$ $(x \to x_0)$ *kabi belgilanadi.*

Masalan, $x \to 0$ *da* $f(x) = \sin x$ *va* $g(x) = x$ *funksiyalar ekvivalent funksiyalar bo'ladi:* $\sin x \sim x$ $(x \to 0)$. *([2], p. 124, Example 5.3)*

1-teorema. $x \to x_0$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar ($x \neq x_0$ da $g(x) \neq 0$) ekvivalent bo'lishi uchun

$$g(x) - f(x) = o(g(x))$$

tenglikning o'rinli bo'lishi zarur va etarli.

◀ **Zarurligi.** $x \to x_0$ da $f(x) \sim g(x)$ bo'lsin. Ta'rifga binoan

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

bo'lib, undan

$$\lim_{x \to x_0} \left[1 - \frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - f(x)}{g(x)} = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $g(x) - f(x) = o(g(x))$.

Yetarliligi. $x \to x_0$ da $g(x) - f(x) = o(g(x))$ bo‘lsin. U holda $x \to x_0$ da

$$1 - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) - f(x)}{g(x)} = \frac{o(g(x))}{g(x)}$$

bo‘lib, undan

$$\lim_{x \to x_0}\left[1 - \frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x \to x_0}\frac{g(x) - f(x)}{g(x)} = 0$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Bu esa

$$\lim_{x \to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

ya’ni $f(x) \sim g(x)$ ekanini bildiradi. ►

“~” ning xossalari:

1) $x \to x_0$ da $f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

2) Har qanday funksiya uchun $x \to x_0$ da $f(x) \sim f(x)$ bo‘ladi.

3) Agar $x \to x_0$ da $f(x) \sim g(x)$, $g(x) \sim h(x)$ bo‘lsa, $x \to x_0$ da $f(x) \sim h(x)$ bo‘ladi.

4) Agar $x \to x_0$ da $f_1(x) \sim g_1(x)$, $f_2(x) \sim g_2(x)$ bo‘lsa, $x \to x_0$ da $f_1(x) \cdot f_2(x) \sim g_1(x) \cdot g_2(x)$ bo‘ladi.

Funksiyaning asimptotik yoyilmasi. Aytaylik,

$$\lim_{x \to x_0}\frac{f(x)}{g_1(x)} = c_1 = const \neq 0$$

bo‘lsin. Unda $x \to x_0$ da $f(x) \sim c\,g_1(x)$ bo‘lib,

$$f(x) = c_1 g_1(x) + o(g_1(x))$$

bo‘ladi. Bu holda $c_1 g_1(x)$ funksiya $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning **bosh qismi** deyiladi.

Faraz qilaylik, $x \to x_0$ da $c_2 g_2(x)$ $(c_2 = const \neq 0)$ funksiya $f(x) - c_1 g_1(x)$ ning bosh qismi bo‘lsin. U holda $x \to x_0$ da

$$f(x)-c_1g_1(x)\sim c_2g_2(x)$$

bo‘lib,

$$f(x)=c_1g_1(x)+c_2g_2(x)+o(g_2(x))$$

bo‘ladi.

Bu jarayonni n marta takrorlab, $x\to x_0$ da $f(x)$ funksiyani quyidagicha yozish mumkin:

$$f(x)=c_1g_1(x)+c_2g_2(x)+\cdots+c_ng_n(x)+o(g_n(x)) \qquad (1)$$

bunda $c_i\neq 0$ va

$$g_{i+1}(x)=o(g_i(x)) \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Odatda, (1) formula $x\to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning **asimptotik yoyilmasi** deyiladi.

Endi funksiyalarning ekvivalentligiga asoslangan holda funksiyalarning limitini hisoblashda foydalaniladigan teoremani keltiramiz.

2-teorema. *([2], p. 128, Prop. 5.5) Agar $x\to x_0$ da $f_1(x)\sim f_2(x)$, $g_1(x)\sim g_2(x)$ bo‘lib, ushbu*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

limit mavjud bo‘lsa, u holda

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

limit ham mavjud va

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_2(x)}{g_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

bo‘ladi.

◀ *Aytaylik, $x\to x_0$ da $f_1(x)\sim f_2(x)$, $g_1(x)\sim g_2(x)$ bo‘lsin. Unda ravshanki, $x\to x_0$ da*

$$f_2(x)=f_1(x)+o(f_1(x)),$$

$$g_2(x) = g_1(x) + o(g_1(x))$$

bo'ladi. Bu munosabatlardan foydalanib topamiz:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) + o(f_1(x))}{g_1(x) + o(g_1(x))} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \blacktriangleright$$

Misol. Ushbu

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$$

limit hisoblansin.

◀ Ravshanki,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin\frac{3x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2}}{x^2}$$

Endi $\sin\frac{3x}{2} = \frac{3x}{2} + o(x)$ va $\sin\frac{x}{2} = \frac{x}{2} + o(x)$ bo'lishini e'tiborga olib, topamiz:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\sin\frac{3x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2}}{x^2} = 2\lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{3}{2}x + o(x)\right)\left(\frac{1}{2}x + o(x)\right)}{x^2} = 2\lim_{x \to 0} \frac{\frac{3}{4}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{2}.$$

Demak,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \sin 2x}{x^2} = \frac{3}{2}. \blacktriangleright$$

Mashqlar

1. Aytaylik, $n \in N$: $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ bo'lsin. U holda $x \to +\infty$ da

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots a_{n-1} x + a_n = O(x^n)$$

bo'lishi isbotlansin.

2. Agar $x \to x_0$ da

$$f(x) - g(x) = o(f(x))$$

bo'lsa, $x \to x_0$ da

$$f(x)-g(x)=o(g(x))$$

bo‘lishi isbotlansin.

3. Agar $x \to x_0$ da

$$f_1(x) \sim g_1(x), \ f_2(x) \sim g_2(x)$$

bo‘lsa, $x \to x_0$ da

$$f_1(x)+f_2(x) \sim g_1(x)+g_2(x),$$

$$f_1(x)-f_2(x) \sim g_1(x)-g_2(x),$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladimi?

Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical analysis I.* Springer-Verlag, Italia, 2008.
3. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma’ruzalar*, *I q*. T. “Voris-nashriyot”, 2010.
4. **Фихтенгольц Г. М.** *Курс дифференциального и интегрального исчисления, 1 т.* М. «ФИЗМАТЛИТ», 2001.

Nazorat savollari

17. Cheksiz kichik funksiya.
18. Cheksiz katta funksiya.
19. Nisbatan chegaralangan funksiya.
20. Nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya.
21. Funksiyaning asimptotik yoyilmasi.
22. Funksiyaning bosh qismi deyiladi.

Glossariy

Cheksiz katta funksiya. Agar

$$\lim_{x\to x_0} \beta(x) = \infty$$

bo‘lsa, $\beta(x)$ funksiya $x \to x_0$ da cheksiz katta funksiya deyiladi.

Cheksiz kichik funksiya. Agar

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$$

bo‘lsa, $\alpha(x)$ funksiya $x \to x_0$ da cheksiz kichik funksiya deyiladi.

Cheksizlikda funksiyaga nisbatan chegaralangan (O). Agar

$$\exists C \in R,\ \exists d \in R_+,\ \forall x,\ |x| > d:\ |f(x)| \le C\,|g(x)|$$

bo‘lsa, $x \to x_0 = \infty$ da $f(x)$ funksiya $g(x)$ funksiyaga nisbatan chegaralangan deyiladi va yuqoridagidek $f(x) = O(g(x))$ kabi belgilanadi.

Ekvivalent funksiyalar. $x \to x_0$ da $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar ($x \ne x_0$ da $g(x) \ne 0$) uchun

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

bo‘lsa, $x \to x_0$ da $f(x)$ va $g(x)$ ekvivalent funksiyalar deyi-ladi va $f(x) \sim g(x)$ $(x \to x_0)$ kabi belgilanadi.

Funksiyaga nisbatan chegaralangan (O). Agar shunday o‘zgarmas $C>0$ soni va shunday $\delta>0$ son topilsaki, $\forall x\in X\bigcap(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\})$ uchun

$$|f(x)|\le C|g(x)|$$

tengsizlik bajarilsa, ya’ni

$$\exists C\in R_+,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in X\bigcap(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}):|f(x)|\le C|g(x)|$$

bo‘lsa, $x\to x_0$ da $f(x)$ funksiya $g(x)$ funksiyaga nisbatan chegaralangan deyiladi va $f(x)=O(g(x))$ kabi belgilanadi.

Funksiyaga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya. Agar har qanday $\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $\delta>0$ son topilsaki,

$$\forall x\in X\bigcap(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\})$$

uchun

$$|f(x)|\le\varepsilon|g(x)|$$

tengsizlik bajarilsa, ya’ni

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in X\bigcap(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}):|f(x)|\le\varepsilon|g(x)|$$

bo‘lsa, $x\to x_0$ da $f(x)$ funksiya $g(x)$ funksiyaga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya deyiladi va $f(x)=o(g(x))$ yoki $f=o(g)$ kabi belgilanadi.

Funksiyaning asimptotik yoyilmasi. $x\to x_0$ da $f(x)$ funksiyani quyidagicha yozish mumkin:

$$f(x)=c_1g_1(x)+c_2g_2(x)+\cdots+c_ng_n(x)+o(g_n(x))$$

bunda $c_i\ne0$ va

$$g_{i+1}(x)=o(g_i(x))\quad(i=1,2,\ldots,n).$$

Funksiyaning bosh qismi. Aytaylik,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g_1(x)} = c_1 = const \neq 0$$

bo‘lsin. Unda $x \to x_0$ da $f(x) \sim c\, g_1(x)$ bo‘lib,

$$f(x) = c_1 g_1(x) + o(g_1(x))$$

bo‘ladi. Bu holda $c_1 g_1(x)$ funksiya $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiyaning bosh qismi deyiladi.

Keys banki

13-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: Aytaylik, $n \in N$: $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ bo‘lsin. U holda $x \to +\infty$ da

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots a_{n-1} x + a_n = O\left(x^n\right)$$

bo‘lishi isbotlansin.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

13-amaliy mashg‘ulot

Na’muna uchun misollar yechimi

Misol. Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$$

limit hisoblansin.

◀ Ravshanki,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{3x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{x^2}$$

Endi $\sin\frac{3x}{2}=\frac{3x}{2}+o(x)$ va $\sin\frac{x}{2}=\frac{x}{2}+o(x)$ bo‘lishini e’tiborga olib, topamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{3x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{3}{2}x+o(x)\right)\left(\frac{1}{2}x+o(x)\right)}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{4}x^2+o\left(x^2\right)}{x^2}=\frac{3}{2}.$$

Demak,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sin 2x}{x^2}=\frac{3}{2}. \ ▶$$

Misollar

α va β larning qanday qiymatlarda $f(x)$ funksiya cheksiz kichik bo‘ladi?

665. $f(x)=\dfrac{x^2\cdot(x-1)}{(x+1)^2}-\alpha x-\beta$, $\quad x\to\infty$

666. $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x^3}-\alpha x-\beta$, $\quad x\to+\infty$

667. $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x-1}-\alpha x-\beta$, $\quad x\to+\infty$

668. $f(x)=x^{\alpha}\cdot\sin\dfrac{1}{x^{\beta}}$, $x\to+0$

669. $f(x)=\left(1-x^{\alpha}\right)^{x^{\beta}}$, $x\to+0$

670. $f(x)=\dfrac{\ln\left(1+x^{\alpha}\right)}{x^{\beta}}$, $x\to+0$

671. $f(x)=\sqrt{4x^2+x+1}-\alpha x-\beta$, $x\to+\infty$

α va β larning qanday qiymatlarida $f(x)$ va $g(x)=\alpha x^{\beta}$ funksiyalar ekvivalent bo'ladi?

672. $f(x)=\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ a) $x\to+0$, b) $x\to+\infty$

673. $f(x)=\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$, $x\to0$

674. $f(x)=\sin^2 2x+\arcsin^2 x+2arctgx^2$, $x\to0$

675. $f(x)=1-\cos\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$, $x\to\infty$

$x\to0$ da cheksiz kichik funksiyaning tartibi n aniqlansin.

676. $f(x)=3\sin^2 x^2-5x^2$

677. $f(x)=\sqrt{4-x^4}+x^2-2$

678. $f(x)=1-x^4-\cos x^2$

679. $f(x)=2\sin x-tg2x$

680. $f(x)=\sin\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)$

Cheksiz katta funksiyaning tartibi n aniqlansin.

681. $f(x)=\dfrac{x^5}{2-x+3x^2}$, $x\to\infty$

682. $f(x)=\sqrt{x^4-x+1}$, $x\to\infty$

683. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$, $x\to+\infty$

684. $f(x)=\frac{\ln x}{(x-1)^2}$, $x\to 1$

685. $f(x)=ctg^2x^3$, $x\to 0$

686. $f(x)=\frac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}}{x^5}$, $x\to 0$

Quyidagi munosabatlar isbotlansin.

687. $o(o(f))=o(f)$

688. $O(o(f))=o(f)$

689. $O(O(f))=O(f)$

690. $o(f)+O(f)=O(f)$

691. $o(f)\cdot O(f)=o(f)$

Test

№	Savol	To‘g‘ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$ funksiya $x\to 1$ qanday funksiya bo‘ladi?	Cheksiz kichik	Cheksiz katta	Davriy	Toq
2.	$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ funksiya $x\to+\infty$ qanday funksiya bo‘ladi?	Cheksiz kichik	Cheksiz katta	Davriy	Toq
3.	$f(x)=\frac{1}{x^3-4x^2+4x}-\frac{1}{x^2-3x+2}$ funksiya $x\to 2$ qanday funksiya bo‘ladi?	Cheksiz katta	Cheksiz kichik	Toq	Davriy
4.	$f(x)=\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x$ funksiya $x\to-\infty$ qanday funksiya bo‘ladi?	Cheksiz katta	Cheksiz kichik	Toq	Davriy
5.	α va β qanday qiymatlarida $f(x)=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}-\alpha x-\beta$ funksiya $x\to\infty$ cheksiz kichik funksiya bo‘ladi?	$\alpha=1$, $\beta=-3$	$\alpha=-2$, $\beta=1$	$\alpha=0$, $\beta=-4$	$\alpha=0$, $\beta=0$
6.	α va β qanday qiymatlarida $f(x)=\sqrt{4x^2+x+1}-\alpha x-\beta$ funksiya $x\to+\infty$ cheksiz kichik funksiya bo‘ladi?	$\alpha=2$, $\beta=\frac{1}{4}$	$\alpha=0$, $\beta=1$	$\alpha=0$, $\beta=2$	$\alpha=0$, $\beta=0$
7.	Quyidagi ifodalardan qaysi biri $x\to 0$ to‘g‘ri?	$x^2=o(x)$	$x^2=o(x^2)$	$x^2=o(x^3)$	$x^2=o(x^4)$
8.	Quyidagi ifodalardan qaysi biri $x\to\infty$ to‘g‘ri?	$x=o(x^2)$	$x=o(x)$	$x^2=o(x)$	$x^3=o(x)$
9.	Quyidagi ifodalardan qaysi biri $x\to 0$ to‘g‘ri?	$x^2=O(x^2)$	$x=O(x^2)$	$x=O(x^3)$	$x=O(x^3)$
10.	Quyidagi ifodalardan qaysi biri $x\to\infty$ noto‘g‘ri?	$x^2=o(x)$	$x=o(x^2)$	$x=o(x^3)$	$x=o(x^4)$

14-mavzu. Funksiyaning uzluksizligi

14-ma’ruza

Reja

1. Funksiyaning uzluksizligi ta’riflari.
2. Funksiyaning uzilishi va uzilish turlari.
3. Monoton funksiyaning uzilish nuqtasi.

1. Funksiyaning uzluksizligi ta’riflari.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lib, $x_0 \in X$ nuqta X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin.

1-ta’rif. *([1], p. 227, Def. 9.4.1) Agar*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

bo‘lsa, $f(x)$ ***funksiya*** x_0 ***nuqtada uzluksiz*** *deyiladi.*

Demak, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligi ushbu

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$ ning mavjudligi;

2) $b = f(x_0)$ bo‘lishi;

shartlarining bajarilishi bilan ifodalanadi.

Misollar. 1. *([2], p. 81, Prop. 3.20) Ushbu*

$$f(x) = x^4 + x^2 + 1$$

funksiya $\forall x_0 \in R$ *nuqtada uzluksiz bo‘ladi, chunki*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (x^4 + x^2 + 1) = x_0^4 + x_0^2 + 1 = f(x_0).$$

2. *([1], p. 228, Example 9.4.4) Ushbu*

$$f(x) = (\text{sign}x)^2 = \begin{cases} 1, \text{ агар } x \neq 0 \text{ бўлса}, \\ 0, \text{ агар } x = 0 \text{ бўлса}, \end{cases}$$

funksiyani qaraylik. Ravshanki, $\forall x_0 \in R$ *nuqtada* $\lim_{x \to x_0} f(x) = 1$ *bo'ladi. Demak, qaralayotgan funksiya* $\forall x_0 \in R$, $x_0 \neq 0$ *nuqtada uzluksiz bo'ladi. Ammo* $f(0) = 0$ *bo'lganligi sababli*

$$\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$$

bo'ladi. Demak, $f(x)$ *funksiya* $x_0 = 0$ *nuqtada uzluksiz bo'lmaydi.*

Funksiya limitining Geyne va Koshi ta'riflariga binoan funksiyaning x_0 nuqtadagi uzluksizligini quyidagicha ta'riflash mumkin.

2-ta'rif. Agar

$$n \to \infty \text{ da } x_n \to x_0 \ (x_n \in X, \ n = 1, 2, \ldots)$$

bo'ladigan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun

$$n \to \infty \text{ da } f(x_n) \to f(x_0)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

3-ta'rif. ([2], p. 76, Def. 3.14) *Agar* $\forall \varepsilon > 0$ *son olinganda ham shunday* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *son topilsaki,*

$$\forall x \in X \cap U_\delta(x_0)$$

uchun

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada uzluksiz deyiladi.*

Odatda, $x - x_0$ ayirma **argument orttirmasi**, $f(x) - f(x_0)$ esa **funksiya orttirmasi** deyilib, ular mos ravishda Δx va Δf kabi belgilanadi:

$$\Delta x = x - x_0, \ \Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Unda funksiya uzluksizligining 1-ta'rifidagi (1) munosabat ushbu

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \tag{2}$$

ko‘rinishga keladi.

Demak, (2) munosabatni funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligi ta’rifi sifatida qarash mumkin.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lib, $x_0 \in X$ nuqta X to‘plamning o‘ng (chap) limit nuqtasi bo‘lsin.

4-ta’rif. *([1], p. 231, Def. 9.5.1) Agar*

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0) \ \ (\lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0))$$

bo‘lsa, $f(x)$ ***funksiya*** x_0 ***nuqtada o‘ngdan (chapdan) uzluksiz*** *deyiladi.*

Demak, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o‘ngdan (chapdan) uzluksiz bo‘lganda funksiyaning o‘ng (chap) limiti uning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng bo‘ladi:

$$f(x_0+0) = f(x_0) \ \ (f(x_0-0) = f(x_0)).$$

Keltirilgan ta’riflardan, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ham o‘ngdan, ham chapdan bir vaqtda uzluksiz bo‘lsa, funksiya shu nuqtada uzluksiz bo‘lishini topamiz.

Umuman, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lishi, $\forall \varepsilon > 0$ berilganda ham unga ko‘ra shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ topilib,

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \subset X \quad \Rightarrow \quad f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$$

bo‘lishini bildiradi.

5-ta’rif. *([2], p. 80, Def. 3.19) Agar $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, $f(x)$ funksiya X to‘plamda uzluksiz deyiladi.*

6-ta’rif. $X \subset R$ to‘plamda uzluksiz bo‘lgan funksiyalardan iborat to‘plam uzluksiz funksiyalar to‘plami deyiladi va $C(X)$ kabi belgilanadi.

Masalan, $f(x) \in C[a,\, b]$ bo‘lishi, $f(x)$ funksiyaning $[a,\, b]$ segmentining har bir nuqtasida uzluksiz, ya’ni $f(x)$ funksiya (a,b) intervalning har bir nuqtasida uzluksiz, a nuqtada o‘ngdan, b nuqtada esa chapdan uzluksiz bo‘lishini bildiradi.

3-misol. *([2], p. 81, Prop. 3.20)* $f(x)=\sin x$ *bo'lsin. U holda* $f(x)\in C(R)$ *bo'ladi.*

◀ $x_0 \in R$ *nuqtani olib,* $\forall\varepsilon>0$ *ga ko'ra* $\delta=\varepsilon$ *deymiz.*

Unda $\forall x,\ |x-x_0|<\delta$ *:*

$$|\sin x-\sin x_0|=2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\cdot\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le|x-x_0|<\delta=\varepsilon$$

bo'ladi. ▶

Xuddi shunga o'xshash $f(x)=\cos x$ *funksiya* R *da,* $f(x)=\operatorname{tg}x$ *va* $f(x)=\operatorname{ctg}x$ *funksiyalarning esa o'z aniqlanish to'plamlarida uzluksiz bo'lishi ko'rsatiladi.*

4-misol. *([1], p. 230, Prop. 9.4.10)* $f(x)=a^x,\ a>0$ *bo'lsin. U holda* $f(x)\in C(R)$ *bo'ladi.*

◀ *Ravshanki,*

$$\lim_{x-x_0\to 0}(a^{x-x_0}-1)=0.$$

Unda

$$0=\lim_{x-x_0\to 0}(a^{x-x_0}-1)\ \Leftrightarrow\ \lim_{x-x_0\to 0}a^{x_0}(a^{x-x_0}-a^{x_0})=0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^{x_0}\lim_{x\to x_0}(a^x-a^{x_0})=0\ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$$

bo'ladi. ▶

5-misol. Aytaylik,

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{agar} \quad x<0 \quad \text{bo'lsa,}\\ 0, & \text{agar} \quad x=0 \quad \text{bo'lsa,}\\ 1, & \text{agar} \quad x>0 \quad \text{bo'lsa,}\end{cases}$$

bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$f(+0)=1,\ f(-0)=-1$$

bo'lib, berilgan funksiya $X=R\setminus\{0\}$ to'plamda uzluksiz bo'ladi.

2. Funksiyaning uzilishi. *([1], p. 233-234)*

Aytaylik, $f(x)$ *funksiya* $(a,\ b)$ *da* $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ *berilgan bo'lib,* $x_0 \in (a,\ b)$ *bo'lsin.*

Ma'lumki, $f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi o'ng va chap limitlari*

$$f(x_0+0),\ f(x_0-0) \tag{3}$$

mavjud bo'lib,

$$f(x_0-0) = f(x_0) = f(x_0+0) \tag{4}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada uzluksiz bo'lar edi.*

Agar $f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada uzluksiz bo'lmasa, unda* x_0 *nuqta* $f(x)$ *funksiyaning **uzilish nuqtasi** deyiladi.*

7-ta'rif. *Agar (3) limitlar mavjud va chekli bo'lib, (4) tengliklarning birortasi o'rinli bo'lmasa,* x_0 *nuqta* $f(x)$ *funksiyaning* ***birinchi tur uzilish nuqtasi*** *deyiladi.*

Bunda

$$f(x_0+0) - f(x_0-0)$$

ayirma ***funksiyaning*** x_0 ***nuqtadagi sakrashi*** *deyiladi.*

Masalan, $f(x) = [x]$ funksiya $x = p$ $(p \in Z)$ nuqtada birinchi tur uzilishga ega, chunki

$$f(p+0) = p\,,\ f(p_0-0) = p-1$$

bo'lib,

$$f(p+0) \ne f(p_0-0)$$

bo'ladi.

Agar hech bo'lmaganda (3) limitlarning birortasi mavjud bo'lmasa yoki cheksiz bo'lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning **ikkinchi tur uzilish nuqtasi** deyiladi.

Masalan, ushbu

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, \text{ agar } x\neq 0 \text{ bo'lsa,}\\ 0, \text{ agar } x=0 \text{ bo'lsa,}\end{cases}$$

funksiya $x=0$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega bo‘ladi, chunki bu funksiyaning $x=0$ nuqtadagi o‘ng va chap limitlari mavjud emas.

Murakkab funksiyaning uzluksizligi. Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya $X\subset R$ to‘plamda, $u=F(y)$ funksiya esa Y_f to‘plamda aniqlangan bo‘lib, ular yordamida $u=F(f(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo‘lsin.

1-teorema. *([1], p. 230, Prop. 9.4.13) Agar $y=f(x)$ funksiya $x_0\in X$ nuqtada, $u=F(y)$ funksiya esa $y_0\in Y_f$ nuqtada $(y_0=f(x_0))$ uzluksiz bo‘lsa, $F(f(x))$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.*

◄ *$u=F(y)$ funksiya $y_0\in Y_f$ nuqtada $(y_0=f(x_0))$ uzluksiz bo‘lgani uchun*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\sigma>0,\ \forall y,\ |y-y_0|<\sigma:\ |F(y)-F(y_0)|<\varepsilon \qquad (5)$$

ya’ni, $|F(f(x))-F(f(x_0))|<\varepsilon$ bo‘ladi.

Shartga ko‘ra $y=f(x)$ funksiya $x_0\in X$ nuqtada uzluksiz. U holda yuqoridagi $\sigma>0$ ga ko‘ra

$$\exists\delta>0,\ \forall x,\ |x-x_0|<\delta:\ |f(x)-f(x_0)|<\sigma$$

ya’ni,

$$|y-y_0|<\sigma \qquad (4)$$

bo‘ladi.

(5) va (6) munosabatlardan

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x,\ |x-x_0|<\delta:\ |F(f(x))-F(f(x_0))|<\varepsilon$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, $F(f(x))$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz. ►

3. Monoton funksiya uzilish nuqtasining xarakteri.

2-teorema. $[a,b]\subset R$ da monoton bo‘lgan $f(x)$ funksiya shu $[a,b]$ning istalgan nuqtasida yoki uzluksiz bo‘ladi, yoki birinchi tur uzilishga ega bo‘ladi.

◀ $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da o‘suvchi bo‘lsin. Aytaylik,

$$x_0\in[a,b],\ (x_0-\delta,\ x_0+\delta)\subset[a,b]\quad(\delta>0)$$

bo‘lsin. Monoton funksiyaning limiti hakidagi teoremaga ko‘ra

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)\le f(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)\ge f(x_0)$$

bo‘ladi. Agar

$$f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0)$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz, agar

$$f(x_0-0)<f(x_0+0)$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada birinchi tur uzilishiga ega bo‘ladi. Xuddi shunga o‘xshash $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da kamayuvchi bo‘lganda ham tasdiq isbotlanadi. ▶

Mashqlar

1. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{agar}\quad x-\text{ratsional son bo'lsa,}\\ 0, & \text{agar}\quad x-\text{irratsional son bo'lsa,}\end{cases}$$

funksiyaning $x_k=k\pi\ (k\in Z)$ nuqtalarida uzluksiz bo‘lishi isbotlansin.

2. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{agar}\quad x-\text{ratsional son bo'lsa,}\\ 0, & \text{agar}\quad x-\text{irratsional son bo'lsa,}\end{cases}$$

Dirixle funksiyasi R ning har bir nuqtasida uzilishga ega ekanligi isbotlansin.

3. Ushbu

$$f(x) = [x] \cdot \sin \pi x \quad (x \in R)$$

funksiya uchun $f(x) \in C(R)$ bo‘lishi ko‘rsatilsin.

Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical analysis I.* Springer-Verlag, Italia, 2008.
3. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma’ruzalar, I q.* T. “Voris-nashriyot”, 2010.
4. **Фихтенгольц Г. М.** *Курс дифференциального и интегрального исчисления, 1 т.* М. «ФИЗМАТЛИТ», 2001.

Nazorat savollari

23. Funksiyani nuqtadagi uzluksizligi.

24. Funksiyani to‘plamdagi uzluksizligi.

25. Argument orttirmasi.

26. Funksiyaning orttirmasi.

27. Funksiyaning uzilish nuqtalari.

Glossariy

Argument orttirmasi. $\Delta x = x - x_0$ ayirma argument orttirmasi deyiladi.

Bir tomonlama uzluksizlik. Agar

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0) \ \left(\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)\right)$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o‘ngdan (chapdan) uzluksiz deyiladi.

Birinchi tur uzilish nuqtasi. Agar $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ limitlar mavjud va chekli bo‘lib, $f(x_0-0) = f(x_0) = f(x_0+0)$ tengliklarning birortasi o‘rinli bo‘lmasa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning birinchi tur uzilish nuqtasi deyiladi.

Funksiya orttirmasi. $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ ayirma funksiya orttirmasi deyiladi.

Funksiyaning nuqtadagi sakrashi. $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ ayirma funksiyaning x_0 nuqtadagi sakrashi deyiladi.

Ikkinchi tur uzilish nuqtasi. Agar hech bo‘lmaganda $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ limitlarning birortasi mavjud bo‘lmasa yoki cheksiz bo‘lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tur uzilish nuqtasi deyiladi.

Uzilish nuqtasi. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lmasa, unda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi deyiladi.

Uzluksiz funksiya (nuqtada) (Geyne bo'yicha). Agar

$$n \to \infty \text{ da } x_n \to x_0 \ (x_n \in X, \ n = 1, 2, \ldots)$$

bo'ladigan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun

$$n \to \infty \text{ da } f(x_n) \to f(x_0)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz funksiya (nuqtada) (Koshi bo'yicha). Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topilsaki,

$$\forall x \in X \bigcap U_\delta(x_0)$$

uchun

$$| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz funksiya (nuqtada). Agar

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz funksiya (to'plamda). Agar $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz funksiyalar to'plami. $X \subset R$ to'plamda uzluksiz bo'lgan funksiyalardan iborat to'plam uzluksiz funksiyalar to'plami deyiladi va $C(X)$ kabi belgilanadi.

Keys banki

14-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{agar} \quad x-\text{ratsional son bo'lsa,}\\ 0, & \text{agar} \quad x-\text{irratsional son bo'lsa,}\end{cases}$$

Dirixle funksiyasi R ning har bir nuqtasida uzilishga ega ekanligi isbotlansin.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

14-amaliy mashg'ulot

Na'muna uchun misollar yechimi

1 – m i s o l . ***Ushbu***

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{ agar } x- \text{ ratsional son bo'lsa} \\ -x, \text{agar } x- \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

funksiyaning $x_0=0$ ***nuqtada uzluksiz bo'lishi ko'rsatilsin.***

◀Ravshanki, bu funksiyaning $x_0=0$ nuqtadagi orttirmasi

$$\Delta f(0)=f(0+\Delta x)-f(0)=\begin{cases} \Delta x, \text{ agar } \Delta x- \text{ ratsional son bo'lsa} \\ -\Delta x, \text{agar } \Delta x- \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

bo'ladi. Unda

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0$$

bo'ladi. Demak, berilgan funksiya $x_0=0$ nuqtada uzluksiz.▶

Misollar

Berilgan $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz ekanligi ta'rif yordamida isbotlansin.

705. $f(x)=2x^2-4,$ $\qquad x_0=3$

706. $f(x)=-3x^2+8,$ $\qquad x_0=5$

707. $f(x)=\sqrt{x},$ $\qquad x_0=2$

708. $f(x)=x^4,$ $\qquad x_0=3$

709. $f(x)=\dfrac{1}{x},$ $\qquad x_0=1$

Berilgan funksiyalarning o'zining aniqlanish sohasida uzluksiz bo'lishi ko'rsatilsin.

710. $f(x)=\sin x$ $\qquad$ **711.** $f(x)=|x|$

712. $f(x)=x^3$ $\qquad$ **713.** $f(x)=\sqrt[3]{x}$

714. $f(x)=\frac{1}{x}$

Quyidagi funksiyalar uzluksizlikka tekshirilsin va grafiklari chizilsin.

715. $f(x)=Sgnx$

716. $f(x)=[x]$

717. $f(x)=\frac{|x+2|}{x+2}$

718. $f(x)=\frac{|x-1|}{x^2-x^3}$

719. $f(x)=Sgn\left(e^x-1\right)$

720. $f(x)=Sgn(\sin x)$

721. $f(x)=x-[x]$

722. $f(x)=\frac{1}{x-[x]}$

723. $f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$

724. $f(x)=\frac{x}{\sin x}$

725. $f(x)=\frac{x}{\cos x}$

726. $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$

727. $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & агар \quad x\neq 3 \quad бўлса, \\ A, & агар \quad x=3 \quad бўлса. \end{cases}$

728. $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & агар \quad x\neq 0 \quad бўлса, \\ 0, & агар \quad x=0 \quad бўлса. \end{cases}$

729. Hech bir nuqtada uzluksiz bo‘lmagan funksiyaga misol keltirilsin.

730. Faqat birgina $x_0\in R$ nuqtada uzluksiz, boshqa nuqtalarda uzluksiz bo‘lmagan funksiyaga misol keltirilsin.

731. $f(x)+g(x)$ funksiya biror x_0 nuqtada birinchi tur uzilishiga ega bo‘lsa, u holda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning kamida bittasi x_0 nuqtada birinchi tur uzilishga ega bo‘lishi shartmi?

732. $f(x)\cdot g(x)$ funksiya biror x_0 nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega bo‘lsa, u holda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning hech bo‘lmaganda bittasi x_0 nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega bo‘lishi shartmi?

Quyidagi funksiyalar A ning qanday qiymatlarida uzluksiz bo‘lishi aniqlansin.

733. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}, & агар \quad x\neq 0 \quad бўлса,\\ A, & агар \quad x=0 \quad бўлса.\end{cases}$$

734. $$f(x)=\begin{cases}x\cdot ctgx, & агар \quad x\neq 0,\ |x|<\dfrac{\pi}{2} \quad бўлса,\\ A, & агар \quad x=0 \quad бўлса.\end{cases}$$

735. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a^x-1}{x}, & агар \quad x\neq 0 \quad бўлса,\\ A, & агар \quad x=0 \quad бўлса.\end{cases} \quad (a>0)$$

736. $$f(x)=\begin{cases}(\pi+2x)tgx, & агар \quad -\pi<x<\dfrac{\pi}{2},\ x\neq -\dfrac{\pi}{2} \quad бўлса,\\ A, & агар \quad x=-\dfrac{\pi}{2} \quad бўлса.\end{cases}$$

737. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\ln(1+2x)}, & агар \quad x\neq 0 \quad бўлса,\\ A, & агар \quad x=0 \quad бўлса.\end{cases}$$

738. $$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & агар \quad x\neq 0 \quad бўлса,\\ A, & агар \quad x=0 \quad бўлса.\end{cases}$$

739. $$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & агар \quad x\neq 0 \quad бўлса,\\ A, & агар \quad x=0 \quad бўлса.\end{cases}$$

740. $$f(x)=\begin{cases}e^x, & агар \quad x<0 \quad бўлса,\\ A+x, & агар \quad x\geq 0 \quad бўлса.\end{cases}$$

741. $$f(x)=\begin{cases} x\ln x^2, & \text{агар} \quad x \neq 0 \quad \text{бўлса}, \\ A \quad, & \text{агар} \quad x = 0 \quad \text{бўлса}. \end{cases}$$

Test

№	Savol	To‘g‘ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	Quyidagi funksiyalardan qaysi biri butun sonlar o‘qida uzluksiz?	$f(x)=x^2$	$f(x)=\frac{1}{x}$	$f(x)=\arcsin x$	$f(x)=\ln x$
2.	Quyidagi funksiyalardan qaysi biri butun sonlar o‘qida uzluksiz?	$f(x)=\sin x$	$f(x)=\mathrm{tg}\, x$	$f(x)=\arccos x$	$f(x)=\sqrt{x}$
3.	$f(x)=[x]$ funksiyaning uzilish nuqtalari to‘plamini aniqlang.	**Z**	**N**	**R**	**Q**
4.	$f(x)=\mathrm{sgn}\, x$ funksiyaning uzilish nuqtalari to‘plamini aniqlang.	$\{0\}$	$\{-1;0;1\}$	**N**	**Z**
5.	$f(x)=\frac{x-1}{x^2-5x+6}$ funksiyaning uzilish nuqtalari to‘plamini aniqlang.	$\{2;3\}$	$\{-1;0;1\}$	$\{0;1\}$	$\{1\}$
6.	$f(x)=\frac{\sin x}{x}$ funksiyaning uzilish nuqtalarini toping va ularni turini aniqlang.	$x=0$, bartaraf etiladigan uzilish nuqtasi	$x=1$, I-tur uzilish nuqtasi	$x=-1$, I-tur uzilish nuqtasi	$x=\pi$, II-tur uzilish nuqtasi
7.	$f(x)=\frac{1}{x^2-4}$ funksiyaning uzilish nuqtalarini toping va ularni turini aniqlang.	$x=\pm 2$, II-tur uzilish nuqtasi	$x=\pm 2$, I-tur uzilish nuqtasi	$x=\pm 1$, I-tur uzilish nuqtasi	$x=0$, II-tur uzilish nuqtasi

8.	$f(x)=\{x\}$ funksiyaning uzilish nuqtalarini toping va ularni turini aniqlang.	$x\in\mathbf{Z}$, I-tur uzilish nuqtasi	$x\in\mathbf{N}$, II-tur uzilish nuqtasi	$x=\pm 1$, bartaraf etiladigan uzilish nuqtasi	$x=0$, II-tur uzilish nuqtasi
9.	a qanday qiymatida $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x}{1+x^3}, & x\neq -1\\ a, & x=-1\end{cases}$ funksiya $x_0=-1$ nuqtada uzluksiz bo'ladi?	$a=\frac{1}{3}$	$a=0$	$a=\frac{1}{9}$	$a=-\frac{1}{3}$
10.	a qanday qiymatida $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ funksiya $x_0=0$ nuqtada uzluksiz bo'ladi?	$a=0$	$a=1$	$a=-1$	$a=\pi$

15-mavzu. Uzluksiz funksiyalarning lokal xossalari

15-ma'ruza

Reja

1. Uzluksiz funksiyalarning chegaralanganligi.
2. Ishorani saqlash xossasi.
3. Murakkab funksiya uzluksizligi.
4. Uzluksiz funksiyalar ustida amallar.

1. Uzluksiz funksiyalarning chegaralanganligi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lib, $x_0 \in X$ bo‘lsin.

1. Agar $f(x)$ funksiya $x_0 \in X$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda shunday $\delta > 0$ va $M > 0$ sonlari topiladiki, $\forall x \in X \bigcap U_\delta(x_0)$ da $|f(x)| < M$ bo‘ladi, ya’ni $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning $U_\delta(x_0)$ atrofida chegaralangan bo‘ladi.

2. Ishorani saqlash xossasi.

2. Agar $f(x)$ funksiya $x_0 \in X$ nuqtada uzluksiz bo‘lib, $f(x_0) \neq 0$ bo‘lsa, u holda shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $\forall x \in X \bigcap U_\delta(x_0)$ da $\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(x_0)$ bo‘ladi, ya’ni $f(x)$ funksiyaning $U_\delta(x_0)$ dagi ishorasi $f(x_0)$ ning ishorasi kabi bo‘ladi.

Bu tasdiqlarning isboti limitga ega bo‘lgan funksiyaning xossalaridan kelib chiqadi.

3. Murakkab funksiya uzluksizligi.

3. ([2], p. 103, Corollary 4.17) Aytaylik, $y=f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b \ \ (b\in R) \tag{1}$$

ga ega bo'lib, $g(y)$ *funksiya* Y *to'plamda berilgan* $\{f(x)|x\in X\}\cup\{b\}\subset Y$ *va* $y=b$ *nuqtada uzluksiz bo'lsin. U holda*

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))=g(b),$$

Ya'ni

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))=g(\lim_{x\to x_0} f(x)) \tag{2}$$

bo'ladi.

◀ $n\to\infty$ *da* $x_n\to x_0$ $(x_n\in X,\ x_n\neq x_0,\ n=1,2,\ldots)$ *bo'ladigan ixtiyoriy* $\{x_n\}$ *ketma-ketlikni olaylik. Unda (1) munosabatga ko'ra*

$$n\to\infty \ da\ \ f(x_n)\to b$$

bo'ladi. Shartga ko'ra $g(f(x))$ *funksiya* b *nuqtada uzluksiz. Demak,*

$$n\to\infty \ da\ \ g(f(x_n))\to g(b)$$

bo'ladi. Keyingi munosabatdan (2) tengliknig o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. ▶

1-misol. Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e \ \ (a>0,\ \ a\neq 1) \tag{3}$$

munosabat isbotlansin.

◀ (2) munosabatdan foydalanib topamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\log_a e.$$

Xususan, $a=e$ bo‘lganda $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ bo‘ladi. ►

2-misol. Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \quad (a>0)$$

munosabat isbotlansin.

◄ Keltirilgan tenglikni isbotlash uchun $a^x-1=t$ deb olamiz. Unda $x\to 0$ da $t\to 0$ bo‘ladi. Shuni hamda (3) munosabatni e’tiborga olib topamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a\,. \text{ ►}$$

3-misol. Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha \quad (\alpha\in R)$$

munosabat isbotlansin

◄ Ravshanki,

$$(1+x)^{\alpha}=e^{\alpha\ln(1+x)}$$

va $x\to 0$ da $\ln(1+x)\to 0$ bo‘ladi. Unda

$$\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\frac{(e^{\alpha\ln(1+x)}-1)\cdot\ln(1+x)\cdot\alpha}{\alpha\cdot\ln(1+x)\qquad x}$$

bo‘lib, undan

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\alpha=\alpha$$

bo‘lishi kelib chiqadi. ►

4. Uzluksiz funksiyalar ustida amallar.

Uzluksiz funksiyalarning yig‘indisi, ko‘paytmasi va nisbatining uzluksiz funksiya bo‘lishi haqidagi tasdiqlarini keltiramiz.

1-teorema. ([2], p. 97, Corollary 4.11) *$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalari $X \subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lib, $x_0 \in X$ nuqtada uzluksiz bo‘lsin. U holda*

a) $\forall c \in R$ da $c \cdot f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi;

b) $f(x)+g(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi;

v) $f(x)\cdot g(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi;

g) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

◀ *Teoremaning tasdiqlari uzluksizlik ta’rifi hamda limitga ega bo‘lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar haqidagi teoremadan kelib chiqadi. Masalan, teoremaning v) tasdig‘i quyidagicha isbotlanadi:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=g(x_0) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)\cdot g(x_0). \text{ ▶}$$

4-misol. ([1], p. 227, Example 9.4.2) *$f(x)=c,\ c\in R$ bo‘lsin. Unda $f(x)\in C(R)$ bo‘ladi.*

◀ *Haqiqatan ham, $\forall \varepsilon>0$ ga ko‘ra $\delta=\varepsilon$ deyilsa, u holda*

$$\forall x,\ |x-x_0|<\delta: \quad |f(x)-f(x_0)|=|c-c|=0<\varepsilon$$

bo‘ladi. ▶

5-misol. *([1], p. 230, Prop. 9.4.11) $f(x)=x,\ x\in R$ bo‘lsa, u holda $f(x)\in C(R)$ bo‘ladi.*

◀ *Haqiqatan ham, $\forall \varepsilon>0$ ga ko‘ra $\delta=\varepsilon$ deyilsa, u holda*

$$\forall x,\ |x-x_0|<\delta:\quad |f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\delta=\varepsilon$$

bo'ladi. ►

6-misol. *([2], p. 98, Corollary 4.12)* $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m;\ m\in N,\ a_0,a_1,\ldots,a_m\in R$ *bo'lsin. U holda* $f(x)\in C(R)$ *bo'ladi.*

◄ *Bu tasdiqning isboti 5- va 6-misollar hamda 1-teoremadan kelib chiqadi.* ►

Shunga o'xshash ushbu

$$f(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n}$$

funksiyani, (bunda $m,n\in N;\ a_0,a_1,\ldots,a_m,\ b_0,b_1,\ldots,b_n\in R$*)*

$$\{x\in R\setminus b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n=0\}$$

to'plamda uzluksiz bo'lishi ko'rsatiladi.

Mashqlar

1. Ushbu

$$x\cdot e^x=1$$

tenglama $(0,\,1)$ da hech bo'lmaganda bitta ildizga ega ekanligi isbotlansin.

2. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & \text{agar } -1\le x<0 \text{ bo'lsa},\\ 0, & \text{agar } x=0 \text{ bo'lsa},\\ x^2-1, & \text{agar } 0<x\le 1 \text{ bo'lsa},\end{cases}$$

funksiya $[-1,\,1]$ da eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadimi?

Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical analysis I.* Springer-Verlag, Italia, 2008.
3. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'ruzalar, I q.* T. "Voris-nashriyot", 2010.
4. **Фихтенгольц Г. М.** *Курс дифференциального и интегрального исчисления, 1 т.* М. «ФИЗМАТЛИТ», 2001.

Nazorat savollari

28. Uzluksiz funksiyaning chegaralanganligi.
29. Uzluksiz funksiyaning ishorani saqlash xossasi.
30. Uzluksiz funksiyalar ustida qanday amallar bajarish mimkin?

Glossariy

Funksiya orttirmasi. $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ayirma funksiya orttirmasi deyiladi.

Funksiyaning nuqtadagi sakrashi. $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ ayirma funksiyaning x_0 nuqtadagi sakrashi deyiladi.

Ishorani saqlash xossasi. Agar $f(x)$ funksiya $x_0 \in X$ nuqtada uzluksiz bo‘lib, $f(x_0) \neq 0$ bo‘lsa, u holda shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $\forall x \in X \bigcap U_\delta(x_0)$ da sign $f(x) =$ sign $f(x_0)$ bo‘ladi, ya’ni $f(x)$ funksiyaning $U_\delta(x_0)$ dagi ishorasi $f(x_0)$ ning ishorasi kabi bo‘ladi.

Murakkab funksiya uzluksizligi. Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b \ \ (b \in R)$$

ga ega bo‘lib, $g(y)$ funksiya Y to‘plamda berilgan $\{f(x) | x \in X\} \bigcup \{b\} \subset Y$ va $y = b$ nuqtada uzluksiz bo‘lsin. U holda

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(b),$$

Ya’ni

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x))$$

bo‘ladi.

Uzluksiz funksiya (nuqtada) (Geyne bo‘yicha). Agar

$$n \to \infty \text{ da } x_n \to x_0 \ \ (x_n \in X,\ \ n = 1, 2, \ldots)$$

bo‘ladigan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun

$$n \to \infty \text{ da } f(x_n) \to f(x_0)$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz funksiya (nuqtada) (Koshi bo‘yicha). Agar $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topilsaki,

$$\forall x \in X \bigcap U_\delta(x_0)$$

uchun

$$| f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz funksiya (nuqtada). Agar

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz funksiya (to‘plamda). Agar $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, $f(x)$ funksiya X to‘plamda uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz funksiyalar to‘plami. $X \subset R$ to‘plamda uzluksiz bo‘lgan funksiyalardan iborat to‘plam uzluksiz funksiyalar to‘plami deyiladi va $C(X)$ kabi belgilanadi.

Uzluksiz funksiyalarning chegaralanganligi. Agar $f(x)$ funksiya $x_0 \in X$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda shunday $\delta > 0$ va $M > 0$ sonlari topiladiki, $\forall x \in X \cap U_\delta(x_0)$ da $|f(x)| < M$ bo‘ladi, ya’ni $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning $U_\delta(x_0)$ atrofida chegaralangan bo‘ladi.

Keys banki

15-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & \text{agar} \quad -1\le x<0 \quad \text{bo'lsa,}\\ 0, & \text{agar} \quad x=0 \quad \text{bo'lsa,}\\ x^2-1, & \text{agar} \quad 0<x\le 1 \quad \text{bo'lsa,}\end{cases}$$

funksiya $[-1, 1]$ da eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadimi?

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

15-amaliy mashg‘ulot

Na’muna uchun misollar yechimi

1 – m i s o l. ***Uzluksiz funksiya xossalaridan foydalanib, ushbu***

$$\sin x - \cos x > 0$$

tengsizlik echilsin.

◄ Ravshanki, $f(x) = \sin x - \cos x$ funksiya uzluksiz. Bu funksiyani $[0, 2\pi]$ oraliqda qaraymiz. $f(x)$ funksiya $[0, 2\pi]$ oraliqning $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{5\pi}{4}$ nuqtalarida nolga aylanadi: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 0$. Uzluksiz funksiyaning xossasiga ko‘ra $f(x)$ funksiya

$$\left[0, \frac{\pi}{4}\right), \quad \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right), \quad \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$$

oraliqlarning har birida ishora saqlaydi. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ bo‘lganligi sababli $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ da $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ bo‘ladi. Demak, berilgan tengsizlikning echimi

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

bo‘ladi.►

Misollar

Quyidagi funksiyalar uzluksizlikka tekshirilsin va ularning grafiklari chizilsin.

742. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n} \quad (x \geq 0)$ **743.** $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$

744. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+e^{nx}}{1+xe^{nx}}$

745. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$

746. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$

747. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$

748. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n}x$

749. $f(x)=[x]\cdot\sin\pi x$

750. $f(x)=x\cdot[x]$

751. $f(x)=x^2-[x^2]$

752. $f(x)=\dfrac{1}{\sin(x^2)}$

753. $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$

754. $f(g(x))$ va $g(f(x))$ funsiyalar uzluksizlikka tekshirilsin.

a) $f(x)=\operatorname{sgn}x,\qquad g(x)=1+x^2$

b) $f(x)=\operatorname{sgn}x,\qquad g(x)=x(1-x^2)$

v) $f(x)=\operatorname{sgn}x,\qquad g(x)=1+x-[x].$

755. $f(g(x))$ murakkab funksiya x_0 nuqtada birinchi tur (ikkinchi tur) uzilishga ega bo‘lsa, $g(x)$ ning x_0 nuqtada albatta birinchi tur (ikkinchi tur) uzilishga ega bo‘lishi shartmi?

756. Monoton funksiyaning uzluksizligi va uzilishi haqidagi teoremalar keltirilsin.

757. Monoton, lekin uzluksiz bo‘lmagan funksiyalarga misol keltirilsin.

758. Veyershtrass teoremalarida $[a,b]$ kesma o‘rniga (a,b) yoki $[a,b]\cup[c,d]$ qaralsa tasdiq o‘rinli bo‘ladimi?

759. $[a,b]$ kesmada chegaralangan ixtiyoriy $f(x)$ funksiya uzluksiz bo‘ladimi?

760. Uzluksiz bo‘lmagan funksiyalar uchun Veyershtrass teoremalari o‘rinlimi?

761. Ushbu $xe^x=1$ tenglama $(0,1)$ oraliqda hech bo‘lmaganda bitta ildizga ega ekanligi ko‘rsatilsin.

762. Agar $f(x)$ funksiya A va B to‘plamlarda uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiyaning $A\cup B$ to'plamda uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?

763. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda $p(x)=\max\{f(x),g(x)\}$, $q(x)=\min\{f(x),g(x)\}$, $x\in[a,b]$, funksiyalar ham $[a,b]$ da uzluksiz bo'lishi ko'rsatilsin.

764. $f(x)$ funksiya $[a,c]\cup[c,b]$ kesmalarda uzluksiz bo'lsin. $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lishi uchun etarli shart keltirilsin va isbotlansin.

765. Agar $f(x)$ funksiya $\forall[a,b]\subset X$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda u X to'plamda uzluksiz bo'lishi isbotlansin $(a<b)$.

766. Teskari funksiyaning mavjudligi va uzluksizligi haqida teorema keltirilsin va isbotlansin.

767. $f(x)$ funksiya $[0;1]$ kesmada aniqlangan, monoton bo'lib, $f(0)=0$ va $f(1)=1$ bo'lsin. Agar $\forall x\in[0;1]$ uchun shunday $n\in N$ topilsaki,

$$\underbrace{f(f\ldots f(f(x)))}_{n\ ma}=x$$

munosabat bajarilsa, $[0;1]$ oraliqda $f(x)=x$ ekani isbotlansin

768. $f(x)$ funksiya $\mathbf{R}$ da uzluksiz bo'lib, $\forall \mathbf{x}\in\mathbf{R}$ uchun

$$f(f(x))=x$$

munosabat bajarilsa, u holda shunday c nuqta topilib, $f(c)=0$ bo'lishi isbotlansin.

769. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uzluksiz va bir xil davrli bo'lsin. Agar

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=0$$

bo'lsa,

$$f(x)=g(x)$$

bo'lishi isbotlansin.

770. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x-a}, & \text{агар} \quad x\neq a \quad \text{бўлса},\\ 0, & \text{агар} \quad x=a \quad \text{бўлса}.\end{cases}$$

funksiyaning ixtiyoriy $[a,b]$ kesmadagi qiymatlari $[f(a);\ f(b)]$ kesmani to‘ldirishi, lekin $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lmasligi ko‘rsatilsin.

771. Agar $f(x)$ funksiya $[a;+\infty]$ da uzluksiz bo‘lib, chekli $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ limitga ega bo‘lsa, unda $f(x)$ funksiyaning $[a;+\infty]$ da chegaralangan bo‘lishi isbotlansin.

772. Agar $f(x)$ funksiya

1) $[a,b]$ kesmada aniqlangan va monoton,

2) uning qiymatlari to‘plami $[f(a);\ f(b)]$ kesmani tutash to‘ldirsa,

u holda $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lishi ko‘rsatilsin.

Test

№	Savol	To‘g‘ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	Agar $f(x)=\operatorname{sgn} x$, $g(x)=1+x^2$ bo‘lsa, $f(g(x))$ va $g(f(x))$ funksiyalar uzluksiz bo‘ladimi?	$f(g(x))$ — uzluksiz, $g(f(x))$ — $x=0$ nuqtada uzilishga ega	$f(g(x))$ — uzluksiz, $g(f(x))$ — uzluksiz	$f(g(x))$ — $x=0$ nuqtada uzilishga ega, $g(f(x))$ — uzluksiz	$f(g(x))$ — $x=0$ nuqtada uzilishga ega, $g(f(x))$ — $x=0$ nuqtada uzilishga ega
2.	Agar $f(x)=\operatorname{sgn} x$, $g(x)=x^3-x$ bo‘lsa, $f(g(x))$ va $g(f(x))$ funksiyalar uzluksiz bo‘ladimi?	$f(g(x))$ — $x=0$, $x=\pm1$ nuqtalarda uzilishga ega, $g(f(x))$ — uzluksiz	$f(g(x))$ — uzluksiz, $g(f(x))$ — uzluksiz	$f(g(x))$ — $x=0$ nuqtada uzilishga ega, $g(f(x))$ — uzluksiz	$f(g(x))$ — $x=0$ nuqtada uzilishga ega, $g(f(x))$ — $x=0$ nuqtada uzilishga ega
3.	Agar $f(x)=\operatorname{sgn}(x-1)$, $g(x)=\operatorname{sgn}(x+1)$ bo‘lsa, $f(g(x))$ va $g(f(x))$ funksiyalar uzluksiz bo‘ladimi?	$f(g(x))$ — $x=0$, $x=-1$ nuqtalarda uzilishga ega, $g(f(x))$ — $x=1$ nuqtalarda uzilishga ega	$f(g(x))$ — uzluksiz, $g(f(x))$ — uzluksiz	$f(g(x))$ — $x=0$ nuqtada uzilishga ega, $g(f(x))$ — uzluksiz	$f(g(x))$ — $x=0$ nuqtada uzilishga ega, $g(f(x))$ — $x=0$ nuqtada uzilishga ega

4.	Agar $f(x)=\sin x$, $g(x)=x^2$ bo‘lsa, $f(g(x))$ va $g(f(x))$ funksiyalar uzluksiz bo‘ladimi?	$f(g(x))$ — uzluksiz, $g(f(x))$ — uzluksiz	$f(g(x))$ — $x=0$, $x=-1$ nuqtalarda uzilishga ega, $g(f(x))$ — $x=1$ nuqtalarda uzilishga ega	$f(g(x))$ — $x=0$ nuqtada uzilishga ega, $g(f(x))$ — uzluksiz	$f(g(x))$ — $x=0$ nuqtada uzilishga ega, $g(f(x))$ — $x=0$ nuqtada uzilishga ega
5.	Quidagi xossa qanday nomlanadi: agar $f(x)$ funksiya $x_0 \in X$ nuqtada uzluksiz bo‘lib, $f(x_0)\neq 0$ bo‘lsa, u holda shunday $\delta>0$ son topiladiki, $\forall x\in X\bigcap U_\delta(x_0)$ da sign $f(x)=$ sign $f(x_0)$ bo‘ladi, ya’ni $f(x)$ funksiyaning $U_\delta(x_0)$ dagi ishorasi $f(x_0)$ ning ishorasi kabi bo‘ladi?	Ishorani saqlash xossasi	Uzluksiz funksiyalarning chegaralanganligi	Ishorani o‘zgartirish xossasi	Uzluksiz funksiyalarning chegaralanm a-ganligi
6.	Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa, $g(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzilishga ega bo‘lsa, u holda $f(x)+g(x)$ funksiya haqida nima deyish mumkin?	$f(x)+g(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzilishga ega bo‘ladi	$f(x)+g(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi	$f(x)+g(x)$ funksiya x_0 nuqtada ham uzluksiz, ham uzilishga ega bo‘lishi mumkin	$f(x)+g(x)$ funksiya x_0+1 nuqtada uzilishga ega bo‘ladi

7.	Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda $f(x)+g(x)$ funksiya haqida nima deyish mumkin?	$f(x)+g(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi	$f(x)+g(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzilishga ega bo‘ladi	$f(x)+g(x)$ funksiya x_0 nuqtada ham uzluksiz, ham uzilishga ega bo‘lishi mumkin	$f(x)+g(x)$ funksiya x_0+1 nuqtada uzilishga ega bo‘ladi
8.	Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda $f(x)\cdot g(x)$ funksiya haqida nima deyish mumkin?	$f(x)\cdot g(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi	$f(x)\cdot g(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzilishga ega bo‘ladi	$f(x)\cdot g(x)$ funksiya x_0 nuqtada ham uzluksiz, ham uzilishga ega bo‘lishi mumkin	$f(x)\cdot g(x)$ funksiya $2x_0$ nuqtada uzilishga ega bo‘ladi
9.	Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda $f(x)-g(x)$ funksiya haqida nima deyish mumkin?	$f(x)-g(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi	$f(x)-g(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzilishga ega bo‘ladi	$f(x)-g(x)$ funksiya x_0 nuqtada ham uzluksiz, ham uzilishga ega bo‘lishi mumkin	$f(x)-g(x)$ funksiya x_0-1 nuqtada uzilishga ega bo‘ladi

10.	Agar $f(x)=x^2$, $g(x)=x-1$ bo‘lsa, $f(g(x))$ va $g(f(x))$ funksiyalar uzluksiz bo‘ladimi?	$f(g(x))$ — uzluksiz, $g(f(x))$ — uzluksiz	$f(g(x))$ — $x=0$, $x=2$ nuqtalarda uzilishga ega, $g(f(x))$ — $x=-2$ nuqtalarda uzilishga ega	$f(g(x))$ — $x=-1$ nuqtada uzilishga ega, $g(f(x))$ — uzluksiz	$f(g(x))$ — $x=3$ nuqtada uzilishga ega, $g(f(x))$ — $x=0$ nuqtada uzilishga ega

16-mavzu. Uzluksiz funksiyalarning global xossalari

16-ma’ruza

Reja

1. Veyershtrassning birinchi va ikkinchi teoremalari.
2. Bolsano–Koshining birinchi va ikkinchi teoremalari.

1. Veyershtrassning birinchi va ikkinchi teoremalari.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda berilgan bo‘lsin. Ma’lumki, $f(x)$ funksiya (a, b) da uzluksiz, a nuqtada o‘ngdan, b nuqtada chapdan uzluksiz bo‘lsa, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo‘ladi.

Endi segmentda uzluksiz bo‘lgan funksiyalarning xossalarini keltiramiz. Ular teoremalar orqali ifodalanadi.

1-teorema. *([1], p. 235, Lemma 9.6.3) (Veyershtrassning birinchi teoremasi). Agar* $f(x)$ *funksiya* $[a, b]$ *segmentda uzluksiz, ya’ni* $f(x) \in C[a, b]$ *bo‘lsa, funksiya* $[a, b]$ *da chegaralangan bo‘ladi.*

◄ *Ma’lumki,* $f(x)$ *funksiyaning* $[a, b]$ *da chegaralanganligi quyidagini*

$$\exists M \in (0,+\infty), \quad \forall x \in [a, b]: \ |f(x)| \le M$$

anglatadi.

Teskarisini faraz qilaylik, ya’ni $f(x) \in C[a, b]$ *bo‘lsa ham funksiya* $[a, b]$ *da chegaralanmagan bo‘lsin. U holda*

$$\forall n \in N,\ \exists x_n \in [a,b]:\ |f(x_n)| > n\ \ (n=1,2,\ldots) \qquad (1)$$

bo'ladi. Ayni paytda, hosil bo'ladigan $\{x_n\}$ *ketma-ketlik uchun* $x_n \in [a,b]$ $(n=1,2,\ldots)$ *bo'lganligi sababli u chegaralangan bo'ladi. Unda Bolsano-Veyershtrass teoremasiga ko'ra bu* $\{x_n\}$ *ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismiy* $\{x_{n_k}\}$ *ketma-ketlik ajratish mumkin:*

$$k \to \infty \text{ da } x_{n_k} \to x_0\ \ (x_0 \in [a,b]).$$

Shartga ko'ra $f(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *da uzluksiz. Binobarin,*

$$k \to \infty \text{ da } f(x_{n_k}) \to f(x_0) \qquad (2)$$

bo'ladi. Bu (5) munosabat yuqorida qilingan farazga ziddir (chunki, faraz bo'yicha

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = +\infty$$

bo'lishi lozim edi). Demak, $f(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *da chegaralangan bo'ladi.* ►

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. *([1], p. 236, Def. 9.6.5) Agar* X *to'plamda shunday* $x_0 \in X$ *nuqta topilsaki,* $\forall x \in X$ *uchun*

$$f(x) \le f(x_0)\ \ (f(x) \ge f(x_0))$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ ***funksiya*** x_0 ***nuqtada eng katta (eng kichik) qiymatga erishadi** deyiladi va*

$$f(x_0) = \max_X f(x)\ \ (f(x_0) = \min_X f(x))$$

kabi belgilanadi.

2-teorema. *([1], p. 236, Prop. 9.6.7) (Veyershtrassning ikkinchi teoremasi). Agar* $f(x) \in C[a,b]$ *bo'lsa, bu funksiya* $[a,b]$ *segmentda eng katta hamda eng kichik qiymatlarga erishadi, ya'ni*

$$\exists c_1 \in [a, b], \quad \forall x \in [a, b]: \qquad f(x) \le f(c_1),$$

$$\exists c_2 \in [a, b], \quad \forall x \in [a, b]: \qquad f(x) \ge f(c_2)$$

bo'ladi.

◀ *Aytaylik,* $f(x) \in C[a, b]$ *bo'lsin. Veyershtrassning 1-teoremasiga ko'ra* $f(x)$ *funksiya* $[a, b]$ *segmentda chegaralangan, ya'ni ushbu*

$$\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

to'plam chegaralangan bo'ladi. Unda to'plamning aniq chegarasi haqidagi teoremaga ko'ra

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = M \quad (M \in R)$$

mavjud bo'ladi.

To'plamning aniq yuqori chegarasi ta'rifiga muvofiq:

$$\forall x \in [a, b]: \qquad f(x) \le M,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x(\varepsilon) \in [a, b]: \quad f(x(\varepsilon)) > M - \varepsilon$$

bo'ladi. Keyingi tengsizlikda

$$\varepsilon = 1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \dots, \ \frac{1}{n}, \ \dots$$

deb olinadigan bo'lsa,

$$x_n = x\left(\frac{1}{n}\right) \in [a, b]$$

ketma-ketlik hosil bo'lib, uning uchun

$$f(x_n) > M - \frac{1}{n}$$

tengsizlik bajariladi. Demak, $\forall n \in N$ *da*

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M$$

bo'ladi. Bu munosabatdan

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M \qquad (3)$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Yuqorida hosil qilingan $\{x_n\}$ *ketma-ketlik chegaralangan. Undan yaqinlashuvchi qismiy ketma-ketlikni ajratish mumkin. Uni* $\{x_{n_k}\}$ *deylik:*

$$k \to \infty \text{ da } x_{n_k} \to c_1 \ \ (c_1 \in [a,b]).$$

Berilgan $f(x)$ *funksiyaning uzluksizligidan foydalanib topamiz:*

$$k \to \infty \text{ da } f(x_{n_k}) \to f(c_1).$$

Ravshanki, $\{f(x_{n_k})\}$ *ketma-ketlik* $\{f(x_n)\}$ *ketma-ketlikning qismiy ketma-ketligi.*

Demak (6) munosabatga ko‘ra

$$k \to \infty \text{ da } f(x_{n_k}) \to M$$

bo‘lib, $f(c_1) = M$ *bo‘lishi kelib chiqadi. Xuddi shunga o‘xshash,* $f(x)$ *funksiyaning eng kichik qiymatga erishishi ko‘rsatiladi.* ►

2. Bolsano-Koshining birinchi va ikkinchi teoremalari.

3-teorema. *([2], p. 109, Th. 4.23) (Bolsano-Koshining birinchi teoremasi) Faraz qilaylik,* $f(x)$ *funksiya* $[a,b]$ *segmentda berilgan bo‘lib, quyidagi shartlarni bajarsin:*

1) $f(x) \in C[a,b]$*;*

2) segmentning chetki nuqtalari a *va* b *larda har xil ishorali qiymatlarga ega, ya’ni*

$$f(a) < 0 < f(b) \text{ yoki } f(a) > 0 > f(b)$$

bo‘lsin.

U holda (a,b) *da shunday* x_0 *nuqta* $(a < x_0 < b)$ *topiladiki,*

$f(x_0)=0$ *bo'ladi.*

◀ *Aytaylik,* $f(x)\in C[a,\, b]$ *bo'lib,* $f(a)<0<f(b)$ *bo'lsin.* $[a,\, b]$ *segmentning* $f(x)$ *funksiyaga manfiy qiymatlar beradigan nuqtalaridan iborat to'plamini* E *deylik:*

$$E=\{x\in[a,\, b] \mid f(x)<0\}.$$

Ravshanki, $a\in E$, $E\subset[a,\, b]$. *Demak,* E *to'plam chegaralangan va* $E\neq\varnothing$.

To'plamning aniq yuqori chegarasi haqidagi teoremaga ko'ra

$$\sup E=x_0 \quad (x_0\in(a,\, b))$$

mavjud bo'ladi.

Aniq yuqori chegara ta'rifiga binoan,

$$\forall n\in N,\ \exists x_n\in E:\ x_0-\frac{1}{n}<x_n<x_0$$

bo'ladi. Demak,

$$f(x_n)<0 \quad (n=1,2,3,...).$$

$f(x)$ *funksiyaning* $[a,\, b]$ *da uzluksiz bo'lganligini e'tiborga olib topamiz:*

$$n\to\infty \text{ da } x_n\to x_0 \text{ bo'lib, } f(x_n)\to f(x_0).$$

Bir tomondan

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)\le 0,$$

ikkinchi tomondan

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$$

bo'lishidan

$$f(x_0)\le 0 \qquad (4)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ravshanki, $x>x_0$ *da* $x\notin E$. *Binobarin,* $f(x)\ge 0$. *Shuning uchun*

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)\geq 0$$

bo'lib,

$$f(x_0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)\geq 0 \qquad (5)$$

bo'ladi. (4) va (5) munosabatlardan $f(x_0)=0$ *bo'lishi kelib chiqadi. Xuddi shunga o'xshash,* $f(x)\in C[a,\, b]$ *va* $f(a)>0>f(b)$ *bo'lgan holda teorema isbotlanadi.* ►

4-teorema. *([1], p. 238, Prop. 9.7.1) (Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi) Agar* $f(x)\in C[a,\, b]$ *bo'lsa, u holda chegaralari* $f(a)$ *va* $f(b)$ *bo'lgan segmentga tegishli ixtiyoriy* l *soni olinganda* $[a,\, b]$ *da shunday* x_0 *nuqta topiladiki,* $f(x_0)=l$ *bo'ladi.*

◄ $f(a)<f(b)$ *deb,* $f(a)\leq l\leq f(b)$*ni olaylik. Ravshanki,* $f(a)=l$ *yoki* $f(b)=l$ *bo'lgan holda teorema isbotlangan hisoblanadi.*

Endi $f(a)<l<f(b)$ *bo'lsin. Ushbu*

$$g(x)=f(x)-l \quad (x\in[a,b])$$

funksiyani olaylik. Bu funksiya uchun:

1) $g(x)\in C[a,b]$;

2) $g(a)<0<g(b)$;

bo'ladi. Unda 3-teoremaga ko'ra shunday $x_0\in(a,\, b)$ *topiladiki,*

$$g(x_0)=0,$$

ya'ni,

$$f(x_0)=l$$

bo'ladi. ►

Ushbu ma'ruzaning pirovardida berilgan funksiyaga teskari bo'lgan funksiyaning mavjudligi haqidagi toeremani isbotsiz keltiramiz.

5-teorema. (teskari funksiyaning mavjudligi). Agar $f(x)$ funksiya $X \subset R$ orliqda uzluksiz va qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lsa, u holda $Y_f = \{ f(x) | x \in X \}$ oraliqda teskari $f^{-1}(y)$ funksiya mavjud bo'lib, u uzluksiz qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'ladi.

Mashqlar

1. Ushbu

$$f(x) = x^3 - x \quad (x \in R)$$

funksiya qiymatlari to'plami R bo'lishi isbotlansin.

2. Aytaylik, $f(x)$ funksiya tekislikdagi biror aylanada berilgan va uzluksiz bo'lsin. U holda aylanada diametral qarama-qarshi joylashgan a va b nuqtalar topilib, $f(a) = f(b)$ bo'lishi isbotlansin.

Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical analysis I.* Springer-Verlag, Italia, 2008.
3. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'ruzalar, I q.* T. "Voris-nashriyot", 2010.
4. **Фихтенгольц Г. М.** *Курс дифференциального и интегрального исчисления, 1 т.* М. «ФИЗМАТЛИТ», 2001.

Nazorat savollari

31. Veyershtrassning birinchi teoremasi.

32. Veyershtrassning ikkinchi teoremasi.

33. Bolsano-Koshining birinchi teoremasi.

34. Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi.

Glossariy

Bolsano–Koshining birinchi teoremasi. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda berilgan bo‘lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $f(x) \in C[a, b]$;

2) segmentning chetki nuqtalari a va b larda har xil ishorali qiymatlarga ega, ya’ni

$$f(a) < 0 < f(b) \text{ yoki } f(a) > 0 > f(b)$$

bo‘lsin.

Bolsano–Koshining ikkinchi teoremasi. Agar $f(x) \in C[a, b]$ bo‘lsa, u holda chegaralari $f(a)$ va $f(b)$ bo‘lgan segmentga tegishli ixtiyoriy l soni olinganda $[a, b]$ da shunday x_0 nuqta topiladiki, $f(x_0) = l$ bo‘ladi.

Funksiya nuqtada eng katta (eng kichik) qiymatga erishishi. Agar X to‘plamda shunday $x_0 \in X$ nuqta topilsaki, $\forall x \in X$ uchun

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada eng katta (eng kichik) qiymatga erishadi deyiladi va

$$f(x_0) = \max_X f(x) \quad (f(x_0) = \min_X f(x))$$

kabi belgilanadi.

Funksiya orttirmasi. $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ayirma funksiya orttirmasi deyiladi.

Funksiyaning nuqtadagi sakrashi. $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ ayirma funksiyaning x_0 nuqtadagi sakrashi deyiladi.

Uzluksiz funksiya (nuqtada) (Geyne bo'yicha). Agar

$$n\to\infty \text{ da } x_n\to x_0 \ (x_n\in X,\ n=1,2,...)$$

bo'ladigan ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun

$$n\to\infty \text{ da } f(x_n)\to f(x_0)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz funksiya (nuqtada) (Koshi bo'yicha). Agar $\forall\varepsilon>0$ son olinganda ham shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ son topilsaki,

$$\forall x\in X\bigcap U_\delta(x_0)$$

uchun

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz funksiya (nuqtada). Agar

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz funksiya (to'plamda). Agar $f(x)$ funksiya $X\subset R$ to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz funksiyalar to'plami. $X\subset R$ to'plamda uzluksiz bo'lgan funksiyalardan iborat to'plam uzluksiz funksiyalar to'plami deyiladi va $C(X)$ kabi belgilanadi.

Veyershtrassning birinchi teoremasi. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz, ya’ni $f(x) \in C[a, b]$ bo‘lsa, funksiya $[a, b]$ da chegaralangan bo‘ladi.

Veyershtrassning ikkinchi teoremasi. Agar $f(x) \in C[a, b]$ bo‘lsa, bu funksiya $[a, b]$ segmentda eng katta hamda eng kichik qiymatlarga erishadi, ya’ni

$$\exists c_1 \in [a, b], \quad \forall x \in [a, b]: \qquad f(x) \le f(c_1),$$

$$\exists c_2 \in [a, b], \quad \forall x \in [a, b]: \qquad f(x) \ge f(c_2)$$

bo‘ladi.

Keys banki

16-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: Aytaylik, $f(x)$ funksiya tekislikdagi biror aylanada berilgan va uzluksiz bo‘lsin. U holda aylanada diametral qarama-qarshi joylashgan a va b nuqtalar topilib, $f(a) = f(b)$ bo‘lishi isbotlansin.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

16-amaliy mashg'ulot

Na'muna uchun misollar yechimi

1-misol. Agar $f(x)\in C[a,b]$ bo'lsa, u holda chegaralari $f(a)$ va $f(b)$ bo'lgan segmentga tegishli ixtiyoriy l soni olinganda $[a,b]$ da shunday x_0 nuqta topiladiki, $f(x_0)=l$ bo'ladi.

◄ $f(a)<f(b)$ deb, $f(a)\le l\le f(b)$ni olaylik. Ravshanki, $f(a)=l$ yoki $f(b)=l$ bo'lgan holda teorema isbotlangan hisoblanadi.

Endi $f(a)<l<f(b)$ bo'lsin. Ushbu

$$g(x)=f(x)-l \quad (x\in[a,b])$$

funksiyani olaylik. Bu funksiya uchun:

1) $g(x)\in C[a,b]$;

2) $g(a)<0<g(b)$;

bo'ladi. Unda 3-teoremaga ko'ra shunday $x_0\in(a,b)$ topiladiki,

$$g(x_0)=0,$$

ya'ni,

$$f(x_0)=l$$

bo'ladi. ►

Misollar

756. Monoton funksiyaning uzluksizligi va uzilishi haqidagi teoremalar keltirilsin.

757. Monoton, lekin uzluksiz bo'lmagan funksiyalarga misol keltirilsin.

758. Veyershtrass teoremalarida $[a,b]$ kesma o'rniga (a,b) yoki $[a,b]\cup[c,d]$ qaralsa tasdiq o'rinli bo'ladimi?

759. $[a,b]$ kesmada chegaralangan ixtiyoriy $f(x)$ funksiya uzluksiz bo‘ladimi?

760. Uzluksiz bo‘lmagan funksiyalar uchun Veyershtrass teoremalari o‘rinlimi?

761. Ushbu $xe^x = 1$ tenglama $(0,1)$ oraliqda hech bo‘lmaganda bitta ildizga ega ekanligi ko‘rsatilsin.

762. Agar $f(x)$ funksiya A va B to‘plamlarda uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiyaning $A \cup B$ to‘plamda uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?

763. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda $p(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $q(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, $x \in [a,b]$, funksiyalar ham $[a,b]$ da uzluksiz bo‘lishi ko‘rsatilsin.

764. $f(x)$ funksiya $[a,c] \cup [c,b]$ kesmalarda uzluksiz bo‘lsin. $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lishi uchun etarli shart keltirilsin va isbotlansin.

765. Agar $f(x)$ funksiya $\forall [a,b] \subset X$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda u X to‘plamda uzluksiz bo‘lishi isbotlansin $(a < b)$.

766. Teskari funksiyaning mavjudligi va uzluksizligi haqida teorema keltirilsin va isbotlansin.

767. $f(x)$ funksiya $[0;1]$ kesmada aniqlangan, monoton bo‘lib, $f(0) = 0$ va $f(1) = 1$ bo‘lsin. Agar $\forall x \in [0;1]$ uchun shunday $n \in N$ topilsaki,

$$\underbrace{f(f \ldots f(f(x)))}_{n\ ma} = x$$

munosabat bajarilsa, $[0;1]$ oraliqda $f(x) = x$ ekani isbotlansin

768. $f(x)$ funksiya $\mathbf{R}$ da uzluksiz bo‘lib, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}$ uchun

$$f(f(x)) = x$$

munosabat bajarilsa, u holda shunday c nuqta topilib, $f(c) = 0$ bo‘lishi isbotlansin.

769. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uzluksiz va bir xil davrli bo‘lsin. Agar

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=0$$

bo‘lsa,

$$f(x)=g(x)$$

bo‘lishi isbotlansin.

770. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x-a}, & \textit{агар} \quad x\neq a \quad \textit{бўлса},\\ 0, & \textit{агар} \quad x=a \quad \textit{бўлса}.\end{cases}$$

funksiyaning ixtiyoriy $[a,b]$ kesmadagi qiymatlari $\left[f(a);\ f(b)\right]$ kesmani to‘ldirishi, lekin $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lmasligi ko‘rsatilsin.

771. Agar $f(x)$ funksiya $[a;+\infty]$ da uzluksiz bo‘lib, chekli $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ limitga ega bo‘lsa, unda $f(x)$ funksiyaning $[a;+\infty]$ da chegaralangan bo‘lishi isbotlansin.

772. Agar $f(x)$ funksiya

1) $[a,b]$ kesmada aniqlangan va monoton,

2) uning qiymatlari to‘plami $\left[f(a);\ f(b)\right]$ kesmani tutash to‘ldirsa,

u holda $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lishi ko‘rsatilsin.

Test

№	Savol	To‘g‘ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda quyidagi ifodalarning qaysi biri o‘rinli?	$\inf\limits_{(a;b)} f(x) = \inf\limits_{[a;b]} f(x)$	$\inf\limits_{(a;b)} f(x) < \inf\limits_{[a;b]} f(x)$	$\inf\limits_{(a;b)} f(x) > \inf\limits_{[a;b]} f(x)$
2.	Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda quyidagi ifodalarning qaysi biri o‘rinli?	$\sup\limits_{(a;b)} f(x) = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$	$\sup\limits_{(a;b)} f(x) < \sup\limits_{[a;b]} f(x)$	$\sup\limits_{(a;b)} f(x) > \sup\limits_{[a;b]} f(x)$
3.	Agar $f(x) \in C[a;b]$ bo‘lsa, u holda $m(x) = \min\limits_{[a;x]} f$ funklsiya uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?	$[a;b]$ kesmada uzluksiz	b nuqtada uzilishga ega	a nuqtada uzilishga ega

4.	Agar $f(x)\in C[a;b]$ bo‘lsa, u holda $M(x)=\max\limits_{[a;x]} f$ funklsiya uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?	$[a;b]$ kesmada uzluksiz	b nuqtada uzilishga ega	a nuqtada uzilishga ega
5.	Agar $f(x)\in C[a;b)$ bo‘lsa, u holda $m(x)=\min\limits_{[a;x)} f$ funklsiya uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?	$(a;b)$ kesmada uzluksiz	$[a;b]$ kesmaning barcha nuqtalarda uzlilishga ega	$[a;b]$ kesmaning ratsional nuqtalarda uzlilishga ega
6.	Agar $f(x)\in C[a;b)$ bo‘lsa, u holda $M(x)=\max\limits_{[a;x)} f$ funklsiya uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?	$(a;b)$ kesmada uzluksiz	$[a;b]$ kesmaning barcha nuqtalarda uzlilishga ega	$[a;b]$ kesmaning ratsional nuqtalarda uzlilishga ega
7.	Agar $f,g\in C(X)$ bo‘lsa, u holda $M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ funklsiya uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?	X to‘plamda uzluksiz	X to‘plamning barcha nuqtalarida uzilishga ega	X to‘plamning ratsional nuqtalarida uzilishga ega

8.	Agar $f,g \in C(X)$ bo‘lsa, u holda $M(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ funklsiya uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?	X to‘plamda uzluksiz	X to‘plamning barcha nuqtalarida uzilishga ega	X to‘plamning ratsional nuqtalarida uzilishga ega
9.	Quyidagi funksiyalardan qaysi biri R da uzluksiz?	$y=\sin x$	$y=\operatorname{sgn} x$	$y=\ln x$
10.	Quyidagi funksiyalardan qaysi biri uzilishga ega?	$y=\operatorname{sgn} x$	$y=\sin x$	$y=x$

17-mavzu. Tekis uzluksizlik

17-ma’ruza

Reja

1. Funksiyaning tekis uzluksizligi tushunchasi.
2. Kantor teoremasi.

1. Funksiyaning tekis uzluksizligi tushunchasi.

Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. *([1], p. 244, Def. 9.9.2) Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki,*

$$|x' - x''| < \delta$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x', $x'' \in X$ uchun

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, ya’ni

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x',\ x'' \in X,\ |x' - x''| < \delta :$$

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya X to‘plamda ***tekis uzluksiz*** *deyiladi.*

Keltirilgan ta’rifdan:

1) $\delta > 0$ sonning faqat $\varepsilon > 0$ ga bog‘liqligi,

2) $f(x)$ funksiya X da tekis uzluksiz bo‘lsa, y shu X to‘plamda uzluksiz bo‘lishi kelib chiqadi.

1-misol. $f(x) = x,\ \ x \in R$ bo‘lsin. Bu funksiya R da tekis uzluksiz bo‘ladi.

◄ Agar $\forall \varepsilon > 0$ ga ko‘ra $\delta = \varepsilon$ deb olinsa, unda $\forall x',\ x'' \in X,\ |x' - x''| < \delta$ da

$$|f(x')-f(x'')|=|x'-x''|<\delta=\varepsilon$$

bo‘ladi. ►

2-misol. $f(x)=\sin x,\quad x\in R$ bo‘lsin. Bu funksiya R da tekis uzluksiz bo‘ladi.

◄ Agar $\forall\varepsilon>0$ ga ko‘ra, $\delta=\varepsilon$ deyilsa, unda $\forall x',\ x''\in R,\ |x'-x''|<\delta$ da

$$|\sin x'-\sin x''|=2\left|\cos\frac{x'+x''}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x'-x''}{2}\right|\le|x'-x''|<\delta=\varepsilon$$

bo‘ladi. ►

3-misol. $f(x)=\frac{1}{x},\quad x\in X=(0,1]$ bo‘lsin. Bu funksiya $X=(0,\ 1]$ da tekis uzluksiz bo‘lmaydi.

◄ $\forall\varepsilon>0$ sonni, masalan, $\varepsilon=\frac{1}{2}$ deb olib, x' va x'' nuqtalar sifatida

$$x'=\frac{1}{n},\ x''=\frac{1}{n+1}\quad(n\in N)$$

deb olinsa, u holda $|x'-x''|$ ayirma quyidagicha

$$|x'-x''|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n(n+1)}$$

bo‘ladi. Bundan $(|x'-x''|<\delta)$ δ ni har qancha kichik qilib olish mumkin bo‘lsa ham

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|=|n-(n+1)|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon$$

bo‘ladi. Demak, $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiya $X=(0,\ 1]$ da tekis uzluksiz emas. ►

2. Kantor teoremasi.

1-teorema. *([1], p. 247, Th. 9.9.16) (Kantor teoremasi) Agar*

$f(x)\in C[a,\ b]$ *bo'lsa, u holda* $f(x)$ *funksiya* $[a,\ b]$ *da tekis uzluksiz bo'ladi.*

◀ *Aytaylik,* $f(x)\in C[a,\ b]$ *bo'lsa ham funksiya* $[a,\ b]$ *da tekis uzluksiz bo'lmasin. Unda biror* $\varepsilon>0$ *va ixtiyoriy* $\delta>0$ *uchun* $[a,\ b]$ *da shunday* x' *va* x'' *nuqtalar topiladiki,*

$$|x'-x''|<\delta \quad \Rightarrow \quad |f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon$$

bo'ladi. $n\to+\infty$ *da* $\delta_n\to 0$ $(\delta_n>0, n=1,2,...)$ *bo'ladigan ixtiyoriy* $\{\delta_n\}$ *ketma-ketlikni olamiz. Unda*

$$\left|x_1'-x_1''\right|<\delta_1 \Rightarrow \left|f(x_1')-f(x_1'')\right|\geq\varepsilon,$$

$$\left|x_2'-x_2''\right|<\delta_2 \Rightarrow \left|f(x_2')-f(x_2'')\right|\geq\varepsilon,$$

$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$

$$\left|x_n'-x_n''\right|<\delta_n \Rightarrow \left|f(x_n')-f(x_n'')\right|\geq\varepsilon,$$

$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$

bo'ladi.

Ravshanki, $\{x_n^{'}\}$ *uchun* $x_n^{'}\in[a,\ b]$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ *bo'lib, undan*

$$k\to+\infty \ \ da \ \ x_{n_k}^{'}\to x_0 \ \ (x_0\in[a,b])$$

bo'ladigan qismiy ketma-ketlik ajratish mumkin. Ayni paytda, x_{n_k}'' *uchun ham*

$$k\to+\infty \ \ da \ \ x_{n_k}''\to x_0$$

bo'ladi. $f(x)\in C[a,\ b]$ *bo'lishidan*

$$k\to+\infty \ \ da \ \ f(x_{n_k}')\to f(x_0),\ \ f(x_{n_k}'')\to f(x_0)$$

bo'lib, ulardan $k\to+\infty$ *da* $f(x_{n_k}^{'})-f(x_{n_k}^{''})\to 0$ *bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa* $\forall n\in N$ *uchun*

$$|f(x_n')-f(x_n'')|\geq\varepsilon$$

deb olingan farazga zid. Demak $f(x)$ *funksiya* $[a,\ b]$ *da tekis uzluksiz.* ►

2-ta'rif. Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya $X\subset R$ to'plamda berilgan bo'lsin. Ushbu

$$\sup_{x\in X} f(x) - \inf_{x\in X} f(x)$$

ayirma $f(x)$ **funksiyaning** X **to‘plamdagi tebranishi** deyiladi va u ω opqali belgilanadi:

$$\omega = \omega(f;\ X) = \sup_{x\in X} f(x) - \inf_{x\in X} f(x).$$

$f(x)$ funksiyaning X to‘plamdagi tebpanishi qyyidagicha

$$\omega = \sup_{x',\ x''\in X} \{|f(x') - f(x'')|\}$$

ham ta’riflanishi mumkin.

Natija. Agar $f(x)\in C[a,\ b]$ bo‘lsa, u holda $\forall\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ topiladiki, $[a,\ b]$ segment uzunliklari δ dan kichik bo‘laklarga ajratilganda har bir bo‘lakdagi funksiyaning tebranishi ε dan kichik bo‘ladi.

◀ Shartga ko‘ra $f(x)\in C[a,\ b]$. Demak, Kantor teoremasiga ko‘ra u $[a,\ b]$ da tekis uzluksiz. Unda ta’rifga binoan

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x',\ x''\in[a,\ b],\ \ |x'-x''|<\delta:\ |f(x') - f(x'')|<\varepsilon$$

bo‘ladi.

Endi $[a,\ b]$ segmentni uzunligi δ dan kichik bo‘lgan

$$[x_k,\ x_{k+1}]\ (x_0<x_1<x_2<...<x_n,\ x_0=a,\ x_n=b)$$

bo‘laklarga ajaratamiz. Unda

$$\forall x',\ x''\in[x_k,\ x_{k+1}],\ |x'-x''|<\delta:\ |f(x') - f(x'')|<\varepsilon$$

bo‘ladi. Demak,

$$\omega = \sup_{x',\ x''\in[x_k,\ x_{k+1}]} \{|f(x') - f(x'')|\} \le \varepsilon$$

bo‘ladi. ▶

Funksiyaning uzluksizlik moduli. $f(x)$ funksiya $X\subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lib, u shu to‘plamda uzluksiz bo‘lsin. Endi

$$\forall\delta>0,\ \forall x',\ x''\in X,\ |x'-x''|<\delta$$

uchun

$$| f(x') - f(x'')| \qquad (1)$$

ayirmani qaraymiz.

3-ta'rif. (1) ayirmaning aniq yuqori chegarasi

$$\sup\{| f(x') - f(x'')|\}$$

$f(x)$ **funksiyaning** $X \subset R$ **to'plamdagi uzluksizlik moduli** deyiladi va $\omega(\delta)$ kabi belgilanadi:

$$\omega(\delta) = \sup_{|x'-x''|\le\delta} \{| f(x') - f(x'')|\}.$$

Demak, $f(x)$ funksiyaning X to'plamdagi uzluksizlik moduli δ ning manfiy bo'lmagan funksiyasi bo'ladi.

Endi uzluksizlik modulining ba'zi xossalarini keltiramiz:

1) Funksiyaning uzluksizlik moduli δ ning o'suvchi funksiyasi bo'ladi.

◄ Aytaylik, $\delta_1 > 0,\ \ \delta_2 > 0$ va $\delta_1 > \delta_2$ bo'lsin. U holda

$$\{x',\, x'' \in X : |x' - x''| \le \delta_1\},\ \{x',\ x'' \in X : |x' - x''| \le \delta_2\}$$

to'plamlar uchun

$$\{x',\ x'' \in X :\ |x' - x''| \le \delta_2\} \subset \{x',\ x'' \in X :\ |x' - x''| \le \delta_1\}$$

bo'lib, undan

$$\omega(\delta_2) \le \omega(\delta_1)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $\delta_1 > \delta_2 \ \Rightarrow\ \omega(\delta_1) \ge \omega(\delta_2)$. ►

Uzluksizlik modulining keyingi xossasini isbotsiz keltiramiz.

2) Funksiyaning uzluksizlik moduli uchun ushbu

$$\omega(\lambda\delta) \le (1+\lambda)\cdot\omega(\delta)$$

munosabat o'rinli bo'ladi, bunda $\lambda -$ musbat son.

4-misol. Ushbu $f(x) = ax + b \ \ (a, b \in R)$ funksiyaning $X = [\alpha,\ \beta]$ dagi uzluksizlik moduli topilsin.

◄ Ta'rifga binoan,

$$\omega(\delta) = \sup_{|x'-x''|\le\delta} |(ax'+b) - (ax''+b)| = \sup_{|x'-x''|\le\delta} |a(x'-x'')| = |a|\cdot\delta$$

bo‘ladi. Demak, $\omega(\delta)=|a|\cdot\delta$. ►

2-teorema. $f(x)$ funksiya X to‘plamda tekis uzluksiz bo‘lishi uchun

$$\lim_{\delta\to+0}\omega(\delta)=0$$

tenglikning o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarli.

◄ **Zarurligi.** $f(x)$ funksiya X to‘plamda tekis uzluksiz bo‘lsin:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta_\varepsilon>0,\ \forall x',\, x''\in X,\ |x'-x''|<\delta_\varepsilon:|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

U holda $0<\delta<\delta_\varepsilon$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy δ uchun

$$\sup_{|x'-x''|\le\delta}\left\{\left|f(x')-f(x'')\right|\right\}\le\sup_{|x'-x''|\le\delta_\varepsilon}\left\{\left|f(x')-f(x'')\right|\right\}\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

bo‘lib, unda $\omega(\delta)<\varepsilon$, ya’ni

$$\lim_{\delta\to+0}\omega(\delta)=0$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Ushbu

$$\lim_{\delta\to+0}\omega(\delta)=0$$

munosabat o‘rinli bo‘lsin. Demak, $\delta\to+0$ da

$$\omega(\delta)=\sup_{|x'-x''|\le\delta}\left\{\left|f(x')-f(x'')\right|\right\}\to 0.$$

U holda

$$\forall x',\ x''\in X,\ \ |x'-x''|\le\delta<\delta_\varepsilon:\ \left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$$

bo‘ladi. Demak, $f(x)$ funksiya X to‘plamda tekis uzluksiz bo‘ladi. ►

Funksiyaning uzluksizlik moduli funksiyalarni sinflarga ajratish imkonini beradi. Masalan, uzluksizlik moduli ushbu

$$\omega(\delta)\le M\cdot\delta^{\alpha}$$

(bunda $M=const$, $0<\alpha\le 1$) tengsizlikni qanoatlantiruvchi funksiualar to‘plami α tartibli Lipshits sinfi deyiladi va $Lip_M\alpha$ kabi belgilanadi.

Mashqlar

1. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalapning har biri $[a,\, b]\subset R$ da tekis uzluksiz bo‘lsa, u holda $f(x)\cdot g(x)$ funksiya ham $[a,\, b]\subset R$ da tekis uzluksiz bo‘lishi isbotlansin.

2. $f(x)=x$ funksiyaning $[0,\, +\infty)$ da tekis uzluksiz emasligi ko‘rsatilsin.

3. Ushbu

$$f(x)=x^2+1$$

funksiyaning $X=[0,\, 1]$ segmentdagi uzluksizlik moduli topilsin.

4. Agar $f(x)$ funksiya (0,1) da tekis uzluksiz bo‘lsa, ushbu

$$\lim_{x\to+0} f(x)$$

limit mavjud bo‘ladimi?

Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma’ruzalar, I q.* T. “Voris-nashriyot”, 2010.
3. **Фихтенгольц Г. М.** *Курс дифференциального и интегрального исчисления, 1 т.* М. «ФИЗМАТЛИТ», 2001.

Nazorat savollari

35. Funksiyaning tekis uzluksizligi.

36. Kantor teoremasi.

37. Funksiyaning to‘plamdagi tebranishi nima?

38. Funksiyaning to‘plamdagi uzluksizlik moduli nima?

Glossariy

Funksiyaning to‘plamdagi tebranishi. Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lsin. Ushbu

$$\sup_{x\in X} f(x) - \inf_{x\in X} f(x)$$

ayirma $f(x)$ funksiyaning X to‘plamdagi tebranishi deyiladi va u ω opqali belgilanadi:

$$\omega = \omega(f;\ X) = \sup_{x\in X} f(x) - \inf_{x\in X} f(x).$$

Funksiyaning to‘plamdagi uzluksizlik moduli. $|f(x') - f(x'')|$ ayirmaning aniq yuqori chegarasi

$$\sup\{|f(x') - f(x'')|\}$$

$f(x)$ funksiyaning $X \subset R$ to‘plamdagi uzluksizlik moduli deyiladi va $\omega(\delta)$ kabi belgilanadi:

$$\omega(\delta) = \sup_{|x'-x''|\le\delta} \{|f(x') - f(x'')|\}.$$

Kantor teoremasi. Agar $f(x) \in C[a, b]$ bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da tekis uzluksiz bo‘ladi.

Tekis uzluksizlik. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki,

$$|x'-x''| < \delta$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x', x'' \in X$ uchun

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, ya'ni

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in X, |x'-x''| < \delta :$$

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya X to‘plamda tekis uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz funksiya (nuqtada). Agar

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz funksiya (to‘plamda). Agar $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, $f(x)$ funksiya X to‘plamda uzluksiz deyiladi.

Keys banki

17-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: Agar $f(x)$ funksiya (0,1) da tekis uzluksiz bo‘lsa, ushbu

$$\lim_{x \to +0} f(x)$$

limit mavjud bo‘ladimi?

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

17-amaliy mashg'ulot

Na'muna uchun misollar yechimi

1 – m i s o l . ***Ushbu***

$$f(x)=\sin x$$

funksiyaning $(-\infty;+\infty)$ ***da tekis uzluksiz bo'lishi isbotlansin.***

◀ $\forall\varepsilon>0$ sonni olib, unga ko'ra δ ni $\delta=\varepsilon$ deymiz. Unda $|x_1-x_2|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x_1,x_2\in(-\infty;+\infty)$ uchun

$$|\sin x_1-\sin x_2|=\left|2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\le 2\cdot 1\cdot\left|\frac{x_1-x_2}{2}\right|=|x_1-x_2|<\delta=\varepsilon$$

bo'lishini topamiz. Demak, $f(x)=\sin x$ funksiya $(-\infty;+\infty)$ da tekis uzluksiz.▶

Misollar

$y=f(x)$ funksiyaning X to'plamda tekis uzluksiz ekanligi ta'rif yordamida ko'rsatilsin ($\delta=\delta(\varepsilon)$ topilsin).

773. $f(x)=3x-5,\qquad X=(-\infty;+\infty).$

774. $f(x)=x^2-x+1,\qquad X=(-3;4).$

775. $f(x)=\dfrac{1}{x},\qquad X=[0,2;1].$

776. $f(x)=\sqrt{x},\qquad X=[0;+\infty).$

777. $f(x)=\sqrt[3]{x},\qquad X=[0;2].$

778. $f(x)=x^3-1,\qquad X=[-2;3].$

779. $f(x)=\dfrac{1}{x-2},\qquad X=[3;4].$

780. $f(x)=3\sin x+2\cos x,\qquad X=(-\infty;+\infty).$

$y=f(x)$ **funksiyaning** X **to‘plamda tekis uzluksiz emasligi isbotlansin.**

781. $f(x)=\frac{1}{x}$ $X=(0;1)$.

782. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, $X=(0;1)$.

783. $f(x)=\cos\frac{1}{x}$, $X=(0;1)$.

784. $f(x)=x^2$ $X=(-\infty;+\infty)$.

785. $f(x)=\frac{1}{x-3}$ $X=(3;5)$.

786. $f(x)=\ln x$ $X=(0;1)$.

Quyidagi funksiyalar berilgan oraliqda tekis uzluksizlikka tekshirilsin.

787. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ $(0<x<\pi)$

788. $f(x)=x^2$ $(-10<x<10)$

789. $f(x)=x\sin x$ $(0\le x<\infty)$

790. $f(x)=e^x$ $(-\infty<x<+\infty)$

791. $f(x)=\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{x}$ $(0<x<1)$

792. $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ $(0<x<\pi)$

793. $f(x)=\sin\sqrt{x}$ $(1\le x<+\infty)$

794. $f(x)=e^{-\arcsin x}$ $(-1\le x\le 1)$

795. $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{агар} \quad x\le 0 \quad \text{бўлса,} \\ e^{-x}, & \text{агар} \quad x>0 \quad \text{бўлса} \end{cases}$ $X=(-\infty;+\infty)$

796. $f(x)=x+\sin x,\quad X=(-\infty;+\infty)$

Quyidagi funksiyalarning berilgan oraliqdagi uzluksizlik modullari topilsin.

797. $f(x)=2x-1,\quad X=(-\infty;+\infty)$

798. $f(x)=x^2,\quad X=[-e;e]$

799. $f(x)=\frac{1}{x},\quad X=[a;+\infty),\ \ a>0$

800. $f(x)=\frac{1}{x^2},\quad X=(0;1)$

801. $f(x)=x^3,\quad X=(-\infty;+\infty)$

802. $f(x)=\ln x,\quad X=[1;+\infty)$

803. $f(x)=\cos x,\quad X=(-\infty;+\infty)$

Test

№	Savol	To‘g‘ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	Quyidagi funksiyalardan qaysi biri R da tekis uzluksiz?	$f(x)=\sin x$	$f(x)=\sin x^2$	$f(x)=x^2$	$f(x)=x^4$
2.	Quyidagi funksiyalardan qaysi biri R da tekis uzluksiz?	$f(x)=3x-4$	$f(x)=3x^2-4$	$f(x)=x^2$	$f(x)=5x^4$
3.	Quyidagi funksiyalardan qaysi biri R da tekis uzluksiz bo‘lmaydi?	$f(x)=x^2$	$f(x)=\sin x$	$f(x)=x$	$f(x)=5$
4.	Quyidagi funksiyalardan qaysi biri R da tekis uzluksiz bo‘lmaydi?	$f(x)=\sin x^2$	$f(x)=\cos x$	$f(x)=3x$	$f(x)=x-1$
5.	$f(x)=\ln x$ funksiya qaysi to‘plamda tekis uzluksiz?	$[1;2]$	$(0;1)$	$(0;2)$	$(0;3)$
6.	$f(x)=\frac{1}{x}$ funksiya qaysi to‘plamda tekis uzluksiz bo‘lmaydi?	$(0;1)$	$[1;2]$	$[2;3]$	$[4;5]$

7.	$f(x)=x^2+1$ funksiya qaysi to‘plamda tekis uzluksiz bo‘lmaydi?	$(-\infty;+\infty)$	$[-10;10]$	$[-100;100]$	$[-1000;1000]$
8.	$f(x)=3x^4$ funksiya qaysi to‘plamda tekis uzluksiz?	$[-2;2]$	$(0;+\infty)$	$(-2;+\infty)$	$(-\infty;0)$
9.	$f(x)=2x-1$ funksiyaning $X=R$ to‘plamda uzluksizlik modulini toping.	$\omega(\delta)=2\delta$	$\omega(\delta)=\delta$	$\omega(\delta)=3\delta$	$\omega(\delta)=4\delta$
10.	$f(x)=\|x\|$ funksiyaning $X=R$ to‘plamda uzluksizlik modulini toping.	$\omega(\delta)=\delta$	$\omega(\delta)=2\delta$	$\omega(\delta)=3\delta$	$\omega(\delta)=4\delta$

18-mavzu. Funksiyaning hosilasi

18-ma'ruza

Reja

1. Funksiya hosilasining ta'rifi.
2. Funksiyaning o'ng va chap hosilalari.
3. Hosilaning geometrik va mexanik ma'nolari.

1. Funksiya hosilasining ta'rifi.

Faraz qilaylik, $f(x)$ *funksiya* $(a,b)\subset R$ *da berilgan bo'lib,* $x_0\in(a,b)$ *,* $x_0+\Delta x\in(a,b)$ *bo'lsin.*

Ma'lumki ushbu

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

ayirma $f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi orttirmasi deyiladi. ([2], p. 167, item 6.1)*

1-ta'rif. *([2], p. 168, Def. 6.1) Agar ushbu*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

limit mavjud va chekli bo'lsa, u $f(x)$ ***funksiyaning*** x_0 ***nuqtadagi hosilasi*** *deyiladi va* $\frac{df(x_0)}{dx}$*, yoki* $f'(x_0)$*, yoki* $(f(x))'_{x_0}$ *kabi belgilanadi. Demak,*

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Agar $x_0+\Delta x=x$ *deyilsa, unda* $\Delta x=x-x_0$ *va* $\Delta x\to 0$ *da* $x\to x_0$ *bo'lib, (1) munosabat quyidagi*

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (2)$$

ko'rinishga keladi.

1-misol. *([2], p. 170, i))* $f(x)=x$, $x_0 \in R$ *bo'lsin. Bu funksiya uchun*

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$$

bo'lib,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=1$$

bo'ladi. Demak, $f'(x)=(x)'=1$.

2-misol. *([1], p. 253, Example 10.1.6)* $f(x)=|x|$, $x\in R$ *bo'lsin.*

Agar $x>0$ *bo'lsa, u holda* $f(x)=x$ *bo'lib,* $f'(x)=1$ *bo'ladi.*

Agar $x<0$ *bo'lsa, u holda* $f(x)=-x$ *bo'lib,* $f'(x)=-1$ *bo'ladi.*

Agar $x_0=0$ *bo'lsa, u holda* $\dfrac{f(x)-0}{x-0}=\dfrac{|x|}{x}$ *bo'lib,* $x\to 0$ *da bu nisbatlarning limiti mavjud bo'lmaydi. Demak, berilgan funksiya* $x_0=0$ *nuqtada hosilaga ega bo'lmaydi.*

3-misol. $f(x)=x|x|$, $x\in R$, $x_0\in R$ bo'lsin.

a) $x_0>0$, $x>0$, $x\neq x_0$ uchun

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x|x|-x_0|x_0|}{x-x_0}=\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=x+x_0$$

bo'lib,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=2x_0=2|x_0|$$

bo'ladi.

b) $x_0<0$, $x<0$, $x\neq x_0$ uchun

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{-x^2+x_0^2}{x-x_0}=-x-x_0$$

bo'lib,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-2x_0=2|x_0|$$

bo‘ladi.

v) $x_0=0$, $x\neq x_0$ uchun

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-0}=\frac{x|x|}{x}=|x|$$

bo‘lib,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$$

bo‘ladi. Demak, $\forall x\in R$ da $f'(x)=(x|x|)'=2|x|$.

4-misol. Aytaylik,

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & \text{agar} \quad x\neq 0 \quad \text{bo'lsa,}\\ 0, & \text{agar} \quad x=0 \quad \text{bo'lsa,}\end{cases}$$

bo‘lib, $x_0=0$ bo‘lsin. Unda

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x\cdot\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\sin\frac{1}{x}$$

bo‘lib, uning $x\to 0$ dagi limiti mavjud emas. Demak, berilgan funksiya $x_0=0$ nuqtada hosilaga ega emas.

2. Funksiyaning o‘ng va chap hosilalari.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X\subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lib, $(x_0-\delta,\ x_0)\subset X$ $(\delta>0)$ bo‘lsin.

2-ta’rif. *([2], p. 176, Def. 6.13) Agar ushbu*

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

limit mavjud bo‘lsa, bu limit $f(x)$ ***funksiyaning*** x_0 ***nuqtadagi chap hosilasi*** *deyiladi va* $f'(x_0-0)$ *kabi belgilanadi:*

$$f'(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Aytaylik, $f(x)$ *funksiya* $X\subset R$ *to'plamda berilgan bo'lib,* $(x_0,\ x_0+\delta)\subset X\ (\delta>0)$ *bo'lsin.*

3-ta'rif. *([2], p. 176, Def. 6.13) Agar ushbu*

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ ***funksiyaning*** x_0 ***nuqtadagi o'ng hosilasi*** *deyiladi va* $f'(x_0+0)$ *kabi belgilanadi:*

$$f'(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Masalan, $f(x)=|x|$ funksiyaning $x_0=0$ nuqtadagi o'ng hosilasi $f'(+0)=1$, chap hosilasi $f'(-0)=-1$ bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan ta'riflardan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

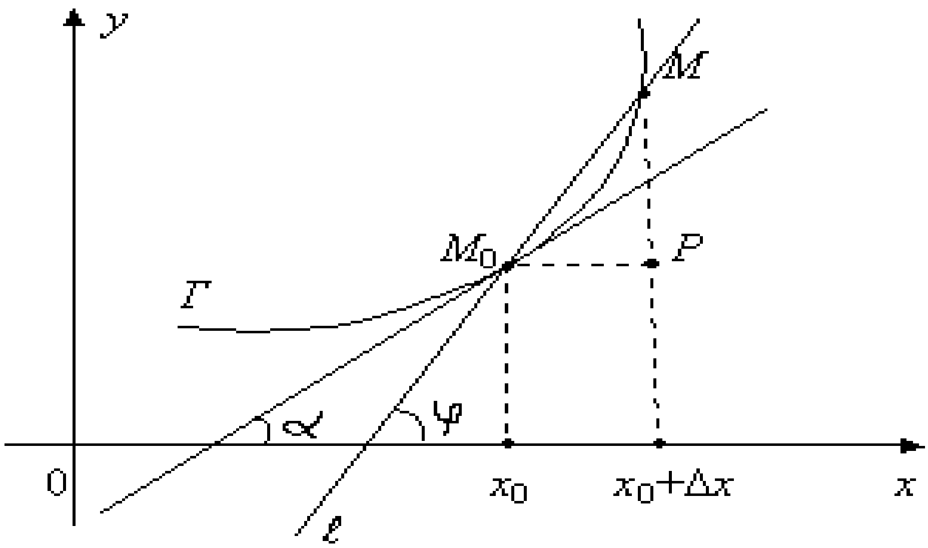
1. ([2], p. 176, Property 6.14) Agar $f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada* $f'(x_0)$ *hosilaga ega bo'lsa, u holda bu funksiya* x_0 *nuqtada o'ng* $f'(x_0+0)$ *hamda chap* $f'(x_0-0)$ *hosilalarga ega va* $f'(x_0-0)=f'(x_0)=f'(x_0+0)$ *tengliklar o'rinli bo'ladi.*

2. ([2], p. 176, Property 6.14) Agar $f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada o'ng* $f'(x_0+0)$ *hamda chap* $f'(x_0-0)$ *hosilalarga ega bo'lib,* $f'(x_0-0)=f'(x_0+0)$ *bo'lsa, u holda* $f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtada* $f'(x_0)$ *hosilaga ega va* $f'(x_0-0)=f'(x_0)=f'(x_0+0)$ *tengliklar o'rinli bo'ladi.*

3. Hosilaning geometrik hamda mexanik ma'nolari.

([2], p. 168, (6.1)) Faraz qilaylik, $f(x)$ *funksiya* (a,b) *da berilgan*

bo'lib, $x_0 \in (a,b)$ *nuqtada* $f'(x_0)$ *hosilaga ega bo'lsin. Bu* $f(x)$ *funksiyaning grafigi 5-chizmada tasvirlangan* Γ *egri chiziqni ifodalasin:*



5-chizma.

Bu Γ *chiziqda* $M_0(x_0, y_0)$, $M(x,y)$ *nuqtalarni olib, ular orqali o'tuvchi* l *kesuvchini qaraymiz.*

$M_0(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$, $M(x, f(x)) \in \Gamma$, $M \to M_0$ *da* l *kesuvchi limit holati* Γ *chiziqqa* M_0 *nuqtada* ***o'tkazilgan urinma*** *deyiladi.*

Ravshanki, φ *burchak* Δx *ga bog'liq:* $\varphi = \varphi(\Delta x)$. $f(x)$ *funksiyaning grafigiga* M_0 *nuqtada o'tkazilgan urinmaning mavjud bo'lishi uchun*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \alpha$$

ning mavjud bo'lishi lozim. Bunda α *–urinmaning* OX *o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchak.*

M_0MP *uchburchakdan:*

$$\operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{MP}{M_0P} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'lib, undan

$$\varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Funksiya uzluksizligidan foydalanib topamiz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{arctg} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \operatorname{arctg}\left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right] = \operatorname{arctg} f'(x_0).$$

Demak, $\Delta x \to 0$ *da* $\varphi(\Delta x)$ *ning limiti mavjud va*

$$\alpha = \operatorname{arctg} f'(x_0).$$

Keyingi tenglikdan

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, funksiyaning x_0 *nuqtadagi* $f'(x_0)$ *hosilasi urinmaning burchak koeffitsentini ifodalaydi. Bunda urinmaning tenglamasi*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Aytaylik, P nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab $s = s(t)$ qonun bilan harakat qilsin, bunda t – vaqt, s – o'tilgan yo'l. Agar vaqtning t_1 va t_2 $(t_1 < t_2)$ qiymatlaridagi o'tilgan yo'l $s(t_1)$, $s(t_2)$ bo'lsa, unda ushbu nisbat

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$[t_1, t_2]$ vaqt oraliђidagi o'rtacha tezlikni ifodalaydi.

Quyidagi

$$\lim_{t_2 \to t_1 + 0} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

limit harakatdagi nuqtaning t_1 vaqtdagi oniy tezligini bildiradi.

Demak, harakatdagi P nuqtaning t vaqtdagi oniy tezligi $v(t)$, o‘tilgan $s(t)$ yo‘lning hosilasidan iborat bo‘ladi:

$$v(t) = s'(t).$$

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $(a,\, b) \subset R$ da berilgan bo‘lsin.

Teorema. *([2], p. 169, Prop. 6.3) Agar $f(x)$ funksiya $x_0 \in (a,\, b)$ nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.*

◀ *Aytaylik, $f(x)$ funksiya $x_0 \in (a,\, b)$ nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo‘lsin. Ta’rifga binoan*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ya’ni

$$\Delta x \to 0 \ da \ \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0)$$

bo‘ladi.

Endi

$$\alpha = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$$

deb belgilaymiz.

Ravshanki,

$$\Delta x \to 0 \ da \ \alpha \to 0.$$

Keyingi tengliklardan topamiz:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \Delta x.$$

Odatda, bu tenglik funksiya orttirmasining formulasi deyiladi. Undan

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Bu $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz ekanini bildiradi. ▶

Eslatma. *([2], p. 170, (6.2)) Funksiyaning biror nuqtada uzluksiz* *bo‘lishidan uning shu nuqtada chekli hosilaga ega bo‘lishi har doim ham kelib chiqavermaydi. Masalan,* $f(x)=|x|$ *funksiya* $x=0$ *nuqtada uzluksiz, ammo u shu nuqtada hosilaga ega emas.*

Mashqlar

1. Funksiya hosilasi ta’rifidan foydalanib, quyidagi

$$f(x)=x\sqrt{x}\,,\ \ f(x)=3^x\sin x$$

funksiyalarning hosilalari topilsin.

2. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{agar} \quad x-\text{ratsional son bo'lsa,} \\ -x^2, & \text{agar} \quad x-\text{irratsional son bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiyaning $x=0$ nuqtada hosilasi mavjud bo‘lishi isbotlansin.

Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical analysis I.* Springer-Verlag, Italia, 2008.
3. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma’ruzalar, I q.* T. “Voris-nashriyot”, 2010.
4. **Фихтенгольц Г. М.** *Курс дифференциального и интегрального исчисления, 1 т.* М. «ФИЗМАТЛИТ», 2001.

Nazorat savollari

39. Funksiyaning nuqtadagi hosilasi.

40. Funksiyaning nuqtadagi chap (o‘ng) hosilasi.

41. Funksiya hosilasining geometrik ma’nosi.

42. Funksiya hosilasining mexanik ma’nosi.

Glossariy

Argument orttirmasi. $\Delta x = x - x_0$ ayirma argument orttirmasi deyiladi.

Funksiya orttirmasi. $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ayirma funksiya orttirmasi deyiladi.

Funksiyaning nuqtadagi chap hosilasi. Agar ushbu

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limit mavjud bo‘lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi chap hosilasi deyiladi va $f'(x_0 - 0)$ kabi belgilanadi:

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Funksiyaning nuqtadagi hosilasi. Agar ushbu

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

limit mavjud va chekli bo‘lsa, u $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va $\frac{df(x_0)}{dx}$, yoki $f'(x_0)$, yoki $(f(x))'_{x_0}$ kabi belgilanadi. Demak,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Funksiyaning nuqtadagi o‘ng hosilasi. Agar ushbu

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

limit mavjud bo‘lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi o‘ng hosilasi deyiladi va $f'(x_0+0)$ kabi belgilanadi:

$$f'(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Hosilaning geometrik ma’nosi. Γ chiziqda $M_0(x_0,y_0)$, $M(x,y)$ nuqtalarni olib, ular orqali o‘tuvchi l kesuvchini qaraymiz.

$M_0(x_0,f(x_0))\in\Gamma$, $M(x,f(x))\in\Gamma$, $M\to M_0$ da l kesuvchi limit holati Γ chiziqqa M_0 nuqtada o‘tkazilgan urinma deyiladi.

Ravshanki, φ burchak Δx ga bog‘liq: $\varphi=\varphi(\Delta x)$. $f(x)$ funksiyaning grafigiga M_0 nuqtada o‘tkazilgan urinmaning mavjud bo‘lishi uchun

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x)=\alpha$$

ning mavjud bo‘lishi lozim. Bunda α–urinmaning OX o‘qining musbat yo‘nalishi bilan tashkil etgan burchak.

Hosilaning mexanik ma'nosi. Aytaylik, P nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab $s = s(t)$ qonun bilan harakat qilsin, bunda $t -$vaqt, $s -$o'tilgan yo'l. Agar vaqtning t_1 va t_2 $(t_1 < t_2)$ qiymatlaridagi o'tilgan yo'l $s(t_1)$, $s(t_2)$ bo'lsa, unda ushbu nisbat

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$[t_1, t_2]$ vaqt oraliђidagi o'rtacha tezlikni ifodalaydi.

Quyidagi

$$\lim_{t_2 \to t_1 + 0} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

limit harakatdagi nuqtaning t_1 vaqtdagi oniy tezligini bildiradi.

Uzluksiz funksiya (nuqtada). Agar

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz funksiya (to'plamda). Agar $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda uzluksiz deyiladi.

Keys banki

18-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{agar} \quad x - \text{ratsional son bo'lsa,} \\ -x^2, & \text{agar} \quad x - \text{irratsional son bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiyaning $x = 0$ nuqtada hosilasi mavjud bo‘lishi isbotlansin.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

18-amaliy mashg‘ulot

Na’muna uchun misollar yechimi

1 – m i s o l. ***Agar*** $f(x)=x\cdot|x|$ ***bo‘lsa,*** $f'(x_0)$ ***topilsin.***

◄Aytaylik, $x_0>0$, $x>0$ va $x\neq x_0$ bo‘lsin. Unda

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x\cdot|x|-x_0\cdot|x_0|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0{}^2}{x-x_0}=2|x_0|$$

bo‘ladi.

Aytaylik, $x_0<0$, $x<0$ va $x\neq x_0$ bo‘lsin. U holda

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{-x^2+x_0{}^2}{x-x_0}=-2x_0=2|x_0|$$

bo‘ladi.

Aytaylik, $x_0=0$, $x\neq x_0$ bo‘lsin. U holda

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0}\frac{x|x|}{x}=0$$

bo‘ladi. Demak, $f'(x_0)=2|x_0|$.►

Misollar

Ta’rif yordamida $f'(x_0)$ topilsin:

823. $f(x)=x^2,\ \ x_0=0{,}1$

824. $f(x)=2\sin 3x,\ \ x_0=\frac{\pi}{6}$

825. $f(x)=1+\ln 2x,\ \ x_0=1$

826. $f(x)=x+ctgx,\ \ x_0=\frac{\pi}{4}$

Ta’rif yordamida $f'(x)$ topilsin:

827. $f(x)=x^3+2x$

828. $f(x)=\frac{1}{x}$

829. $f(x)=\sqrt{x}$

830. $f(x)=x\sqrt[3]{x}$

831. $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

832. $f(x)=2^{x+1}$

833. $f(x)=\ln x$

834. $f(x)=\sin 2x$

835. $f(x)=ctgx+2$

836. $f(x)=\arcsin x$

837. $f(x)=\arccos 3x$

838. $f(x)=7arctg(x+1)$

839. $y=\frac{2x}{1-x^2}$

840. $y=\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

841. $y=\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$

842. $y=\frac{(2-x^2)(2-x^3)}{(1-x)^2}$

843. $y=\frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$

844. $y=\frac{x^p(1-x)^q}{1+x}$

845. $y=x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$

846. $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

847. $y=\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}$

848. $y=x\sqrt{1+x^2}$

849. $y=(1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$

850. $y=\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$

851. $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

852. $y=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$

853. $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$

854. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

855. $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$

856. $y=\cos 2x-2\sin x$

857. $y=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$

858. $y=\sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)$

859. $y=\sin^n x\cos nx$

860. $y=\sin[\sin(\sin x)]$

861. $y=\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$

862. $y=\frac{\cos x}{2\sin^2 x}$

863. $y=\frac{1}{\cos^n x}$

864. $y=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$

865. $y=tg\frac{x}{2}-ctg\frac{x}{2}$

866. $y=tgx-\frac{1}{3}tg^3x+\frac{1}{5}tg^5x$

867. $y=4\sqrt[3]{ctg^2x}+\sqrt[3]{ctg^8x}$

868. $y=\sec^2\frac{x}{a}+\operatorname{cosec}^2\frac{x}{a}$

869. $y=\sin\left[\cos^2\left(tg^3x\right)\right]$

870. $y=\ln x^3-\dfrac{9}{x}-\dfrac{27}{2x^2}$

871. $y=\left(\sqrt{2}\right)^x+\left(\sqrt{5}\right)^{-x}$

872. $y=\left(x^2-7x+8\right)e^x$

873. $y=2^x\ln|x|$

874. $y=e^x\log_2 x$

875. $y=\log_2 x\cdot\ln x\cdot\log_3 x$

876. $y=\log_x 2$

877. $y=\log_x 2^x$

878.
$$y=\left(\frac{1-x^2}{2}\cdot\sin x-\frac{(1-x)^2}{2}\cdot\cos x\right)e^{-x}$$

879. $y=e^x\left(1+ctg\dfrac{x}{2}\right)$

880. $y=\dfrac{\ln 3\cdot\sin x+\cos x}{3^x}$

881. $y=e^{ax}\cdot\dfrac{a\sin bx-b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}}$

882. $y=e^x+e^{e^x}+e^{e^{e^x}}$

883. $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{x}{a}\right)^b \quad (a>0,b>0)$

884. $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x} \quad (a>0)$

885. $y=\lg^3 x^2$

886. $y=\ln(\ln(\ln x))$

887. $y=\ln\left(\ln^2\left(\ln^3 x\right)\right)$

888.
$$y=\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{1}{2(1+x)}$$

889. $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

890. $y=\dfrac{1}{4\left(1+x^4\right)}+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^4}{1+x^4}$

891. $y=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\ln\dfrac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

892. $y=\dfrac{1}{1-k}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{\sqrt{k}}{1-k}\ln\dfrac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}} \quad (0<k<1)$

893. $y=\sqrt{x+1}-\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$

894. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

895. $y=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}$

896. $y=x\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-2\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+2x$

897. $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$

898. $y=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}\quad(a>0,b>0)$

899. $y=\frac{2+3x^2}{x^4}\sqrt{1-x^2}+3\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

900. $y=\ln tg\frac{x}{2}$

Test

№	Savol	To‘g‘ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	$f(x)=x^2$ bo‘lsa, u holda $f'(1)$ ni toping.	2	3	4	5
2.	$f(x)=\sin x$ bo‘lsa, u holda $f'(\pi)$ ni toping.	–1	1	0	$\frac{1}{2}$
3.	$f(x)=x$ bo‘lsa, u holda $f'(1000)$ ni toping.	1	2	3	4
4.	$f(x)=x^3-500$ bo‘lsa, u holda $f'(2)$ ni toping.	12	13	14	15
5.	$f(x)=2$ bo‘lsa, u holda $f'(5000)$ ni toping.	0	1	2	–1
6.	$f(x)=\lvert x\rvert$ funksiyaning $x=0$ nuqtada o‘ng hosilasini toping.	1	–1	2	–2
7.	$f(x)=\lvert x^2-5x+6\rvert$ funksiyaning $x=2$ nuqtada o‘ng hosilasini toping.	1	–10	200	–2
8.	$f(x)=\sqrt{\sin x^2}$ funksiyaning $x=0$ nuqtada chap hosilasini toping.	–1	1	0	$\frac{1}{2}$
9.	$f(x)=\lvert 2^x-2\rvert$ funksiyaning $x=1$ nuqtada chap hosilasini toping.	$-\ln 4$	$\ln 4$	1	–1
10.	$f(x)=\begin{cases} x, & \text{agar} \quad x\le 0 \\ \sqrt[3]{x^4}\ln x, & \text{agar} \quad x>0 \end{cases}$ funksiyaning $x=0$ nuqtada chap hosilasini toping.	1	2	–2	–3

19-mavzu. Hosilani hisoblash qoidalari

19-ma’ruza

Reja

1^0. Ikki funksiya yiђindisi, ayirmasi, ko‘paytmasi va nisbatining hosilasi.
2^0. Murakkab funksiyaning hosilasi.
3^0. Teskari funksiyaning hosilasi.
4^0. Hosilalar jadvali.

1^0. Ikki funksiya yig`indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi va nisbatining hosilasi. ([1], Theorem 10.1.13, 255-bet) Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalari $(a,b)\subset R$ da berilgan bo‘lib, $x_0\in(a,b)$ nuqtada $f'(x_0)$ va $g'(x_0)$ hosilalarga ega bo‘lsin. Hosila ta’rifiga ko‘ra

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0), \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=g'(x_0) \qquad (2)$$

bo‘ladi.

1) $f(x)\pm g(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo‘lib,

$$(f(x)\pm g(x))'_{x_0}=f'(x_0)\pm g'(x_0)$$

bo‘ladi.

◀ $F(x)=f(x)\pm g(x)$ deb topamiz:

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\pm\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Bu tenglikda $x\to x_0$ da limitga o‘tib, yuqoridagi (1) va (2) munosabatlarni e’tiborga olsak, unda

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+f(x_0)}{x-x_0}\pm$$

$$\pm\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\pm g'(x_0)$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Demak,

$$F'(x_0)=(f(x)\pm g(x))'_{x_0}=f'(x_0)\pm g'(x_0).\blacktriangleright$$

2) $f(x)\cdot g(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo‘lib,

$$(f(x)\cdot g(x))'_{x_0} = f'(x_0)\cdot g(x_0)\pm f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

bo‘ladi.

◀ $\Phi(x)=f(x)\cdot g(x)$ deb

$$\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}$$

nisbatni quyidagicha

$$\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x_0)+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\cdot f(x)$$

yozib olamiz. So‘ng $x\to x_0$ da limitga o‘tib topamiz:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}=g(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\cdot f(x)=$$
$$=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0).$$

Demak,

$$\Phi'(x_0)=\left(f(x)\cdot g(x)\right)'_{x_0}=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$$ ▶

3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ funksiya $(g(x_0)\neq 0)$ x_0 nuqtada hosilaga ega bo‘lib,

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x_0}=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

bo‘ladi.

◀ Modomiki, $g(x_0)\neq 0$ ekan, unda x_0 nuqtaning biror atrofidagi x larda $g(x)\neq 0$ bo‘ladi. SHuni e’tiborga olib topamiz:

$$\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0}=\frac{f(x)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(x_0)\cdot(x-x_0)}=$$
$$=\frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right].$$

Bu tenglikda $x\to x_0$ da limitga o‘tib, ushbu

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x_0}=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

tenglikka kelamiz. ▶

1-natija. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo‘lsa, $c\cdot f(x)$ funksiya $(c=const)$ x_0 nuqtada hosilaga ega bo‘lib,

$$(c\cdot f(x))'_{x_0}=c\cdot f'(x_0)$$

bo‘ladi, ya’ni o‘zgarmas sonni hosila ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin.

2-natija. Agar $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada hosilalarga ega bulib, $c_1,\ c_2,\ldots,c_n$ o‘zgarmas sonlar bo‘lsa, u holda

$$\left(c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)+\ldots+c_n f_n(x)\right)'_{x_0}=c_1 f_1'(x_0)+c_2 f_2'(x_0)+\ldots+c_n f_n'(x_0)$$

bo‘ladi.

2^0. Murakkab funksiyaning hosilasi. ([1], Theorem 10.1.15, 256-bet) Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya $X\subset R$ to‘plamda, $g(y)$ funksiya $\{f(x)\,|\,x\in X\}$ to‘plamda berilgan bo‘lib, $x_0\in X$ nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga, $y_0\in\{f(x)\,|\,x\in X\}$ nuqtada $(y_0=f(x_0))$ $g'(y_0)$ hosilaga ega bo‘lsin. U holda $g(f(x))$ murakkab funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo‘lib,

$$\left(g(f(x))\right)'_{x_0}=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

bo‘ladi.

◄ $g(y)$ funksiyaning y_0 nuqtada $g'(y_0)$ hosilaga ega bo‘lganligidan

$$g(y)-g(y_0)=g'(y_0)\cdot(y-y_0)+\alpha\cdot(y-y_0)$$

bo‘lishi kelib chiqadi, bunda

$$y=f(x),\ y_0=f(x_0)\ \text{va}\ y\to y_0\ \text{da}\ \alpha\to 0.$$

Keyingi tenglikning har ikki tomonini $x-x_0$ ga bo‘lib topamiz:

$$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=g'(f(x_0))\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\alpha\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Bundan $x\to x_0$ da limitga o‘tib,

$$\left(g(f(x))\right)'_{x_0}=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

tenglikka kelamiz. ►

3^0. Teskari funksiyaning hosilasi. ([1], Lemma 10.4.1, Theorem 10.4.2, 262-bet) Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan, uzluksiz va qat’iy o‘suvchi (qat’iy kamayuvchi) bo‘lib, $x_0\in(a,b)$ nuqtada $f'(x_0)$ $(f'(x_0)\neq 0)$ hosilaga ega bo‘lsin. U holda $x=f^{-1}(y)$ funksiya y_0 $(y_0=f(x_0))$ nuqtada hosilaga ega va

$$\left[f^{-1}(y)\right]'_{x_0}=\frac{1}{f'(x_0)}$$

bo‘ladi.

◄Ravshanki,

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x-x_0)$$

bo‘lib, $x\to x_0$ da $\alpha\to 0$ bo‘ladi. Bu tenglikdan

$$y-y_0=f'(x_0)\left[f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)\right]-\alpha\left[f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)\right]=$$
$$=\left[f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)\right]\cdot\left[f'(x_0)+\alpha\right]$$

ifodaga kelamiz. Bundan esa

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{1}{f'(x_0)+\alpha}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Keyingi tenglikda $y \to y_0$ da limitga o‘tib topamiz:

$$\left[f^{-1}(y)\right]'_{y_0}=\frac{1}{f'(x_0)}. \ ►$$

4⁰. Misollar. 1-misol. $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$ bo‘ladi, $\alpha \in R,\ x>0$.

◄ Aytaylik, $x>0$ bo‘lsin. Unda $f(x)=x^{\alpha}$ funksiya uchun

$$\frac{(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}}{\Delta x}=x^{\alpha-1}\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}}$$

bo‘lib, $\Delta x \to 0$ da $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$ bo‘ladi. ►

2-misol. $\left(a^{x}\right)'=a^{x}\ln a$ bo‘ladi, $a>0,\ x\in R$.

◄ $f(x)=a^{x}$ funksiya uchun

$$\frac{a^{x+\Delta x}-a^{x}}{\Delta x}=a^{x}\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

bo‘lib, $\Delta x \to 0$ da $\left(a^{x}\right)'=a^{x}\ln a$ bo‘ladi. ►

3-misol. $(\sin x)'=\cos x,\ \ (\cos x)'=-\sin x$ bo‘ladi, $x\in R$.

◄ $f(x)=\sin x$ funksiya uchun

$$\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=2\cdot\frac{1}{\Delta x}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

bo‘lib, $\Delta x \to 0$ da $(\sin x)'=\cos x$ bo‘ladi. Xuddi shunga o‘xshash $(\cos x)'=-\sin x$ bo‘lishi topiladi►

4-misol. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ bo‘ladi, $a>0,\ a\neq 1,\ x>0$.

◄ $f(x)=\log_a x$ funksiya uchun

$$\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a(x)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

bo‘lib, $\Delta x \to 0$ da

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}$$

bo‘ladi. Xususan, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ bo‘ladi. ►

5-misol. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$ bo‘ladi.

◄Teskari funksiya hosilasini hisoblash formulasiga asosan $(y = arctgx,\ \ x = tgy)$

$$y' = (arctgx)' = \frac{1}{(tgy)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

bo‘ladi.

Xuddi shunga o‘xshash,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x \in (-1,\ 1)),$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x \in (-1,\ 1)),$$

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

bo‘ladi.►

6-misol. Faraz qilaylik,

$$y = [u(x)]^{v(x)} \qquad (u(x) > 0)$$

bo‘lib, $u'(x)$ va $v'(x)$ lar mavjud bo‘lsin. U holda

$$\left([u(x)]^{v(x)}\right)' = [u(x)]^{v(x)} \cdot \left[v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)}u'(x)\right]$$

bo‘ladi.

◄ Ushbu $y = [u(x)]^{v(x)}$ ni logarifmlab,

$$\ln y = v(x)\ln u(x),$$

so‘ng murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$\frac{1}{y}y' = v'(x)\cdot\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x),$$

$$y' = y\left[v'(x)\cdot\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{v(x)}{u(x)}\cdot u'(x)\right] =$$

$$= [u(x)]^{v(x)}\cdot\left[v'(x)\ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)}u'(x)\right]. \ ►$$

Bu,

$$\left(u^{v}\right)' = u^{v}\cdot\ln u\cdot v' + v\cdot u^{v-1}\cdot u'. \qquad (3)$$

tenglikdan, $y = u^{v}$ funksiya hosilasini hisoblashning quyidagi qoidasi kelib chiqadi: $y = u^{v}$ funksiyaning hosilasi ikki qo‘shiluvchidan iborat bo‘lib, birinchi qo‘shiluvchi u^{v} ni ko‘rsatkichli funksiya deb olingan hosilasiga (bunda asos $u(x)$ o‘zgarmas deb qaraladi) ikkinchi qo‘shiluvchi esa u^{v} ni darajali funksiya deb olingan hosilasiga (bunda daraja ko‘rsatkich $v(x)$ o‘zgarmas deb qaraladi) teng bo‘ladi.

7-misol. Ushbu

$$f(x) = x^{x}, \quad g(x) = x^{x^{x}}$$

funksiyalarning hosilalari topilsin.

◄ (3) formuladan foydalanib topamiz:

$$f'(x) = \left(x^{x}\right)' = x^{x}\cdot\ln x + x\cdot x^{x-1} = x^{x}(\ln x + 1),$$

$$g'(x) = \left(x^{x^{x}}\right)' = \left(x^{f(x)}\right)' = x^{f(x)}\cdot\ln x\cdot f'(x) + f(x)\cdot x^{f(x)-1} =$$

$$= x^{x^{x}}\cdot\ln x\cdot(x^{x}(\ln x+1)) + x^{x^{x}}\cdot x^{x^{x}-1} =$$

$$= x^{x^{x}+x-1}(x^{x}\ln x(\ln x+1)+1). ►$$

5⁰. Hosilalar jadvali. Quyida sodda funksiyalarning hosilalarini ifodalovchi formulalarni keltiramiz:

1. $(C)' = 0, \quad C = const.$
2. $(x^{\alpha})' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}, \ \ \alpha\in R, \ \ x>0.$

   $(x^{n})' = nx^{n-1}, \ \ n\in N, \ \ x\in R.$
3. $(a^{x})' = a^{x}\ln a, \ a>0, \ a\neq 1, \ x\in R$

   $(e^{x})' = e^{x}, \quad x\in R.$
4. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}, \quad a>0, \ \ a\neq 1, \ \ x>0.$

   $\left(\log_a |x|\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}, \quad a>0, \ \ a\neq 1, \ \ x\neq 0.$

   $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}, \quad x>0.$

   $\left(\ln |x|\right)' = \dfrac{1}{x}, \quad x\neq 0.$
5. $(\sin x)' = \cos x, \quad x\in R.$
6. $(\cos x)' = -\sin x, \quad x\in R.$
7. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x\neq \dfrac{\pi}{2}+n\pi, \quad n\in Z.$

8. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq n\pi, \quad n \in Z.$

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1$

10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1$

11. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in R.$

12. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in R.$

13. $(shx)' = chx, \quad x \in R.$

14. $(chx)' = shx, \quad x \in R.$

15. $(thx)' = \dfrac{1}{ch^2 x}, \quad x \in R.$

16. $(cthx)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}, \quad x \neq 0.$

Mashqlar

1. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(-a, a) \subset R$ da berilgan va $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsin. Agar $f(x)$ juft funksiya bo‘lsa, $f'(x)$ ham juft funksiya bo‘lishi isbotlansin.

2. $f(x)$ funksiya R da berilgan bo‘lib, $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsin. Qanday nuqtalarda $|f(x)|$ funksiya hosilaga ega bo‘ladi?

3. Ushbu

$$\phi(g(f))$$

murakkab funksiya hosilasini hisoblash qoidasi topilsin.

Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma’rizalar, I q.* T. “Voris-nashriyot”, 2010.
3. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.

Glossariy

Murakkab funksiyaning hosilasi. Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda, $g(y)$ funksiya $\{f(x) | x \in X\}$ to‘plamda berilgan bo‘lib, $x_0 \in X$ nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga, $y_0 \in \{f(x) | x \in X\}$ nuqtada $(y_0 = f(x_0))$ $g'(y_0)$ hosilaga ega bo‘lsin. U holda $g(f(x))$ murakkab funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo‘lib,

$$(g(f(x)))'_{x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

bo‘ladi.

Teskari funksiyaning hosilasi. Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan, uzluksiz va qat’iy o‘suvchi (qat’iy kamayuvchi) bo‘lib, $x_0 \in (a,b)$ nuqtada $f'(x_0)$ $(f'(x_0) \neq 0)$ hosilaga ega bo‘lsin. U holda $x = f^{-1}(y)$ funksiya y_0 $(y_0 = f(x_0))$ nuqtada hosilaga ega va

$$\left[f^{-1}(y)\right]'_{x_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

bo‘ladi.

Keys banki

19-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: $f(x)$ funksiya R da berilgan bo‘lib, $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsin. Qanday nuqtalarda $|f(x)|$ funksiya hosilaga ega bo‘ladi?

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

19-amaliy mashg`ulot

1 – m i s o l . ***Ushbu***

$$y = x^2 - 4x$$

parabolaga abssissasi $x = 1$ bo‘lgan nuqtada o‘tkazilgan urinma va normalning tenglamalari topilsin.

◀Abssissasi $x = 1$ paraboladagi nuqtaning ordinatasi $y = -3$ bo‘ladi. Parabolaga $(1, -3)$ nuqtada o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientini topamiz:

$$y' = 2x - 4, \qquad y'(1) = -2$$

Demak, urinmaning tenglamasi

$$y + 3 = -2(x - 1), \text{ ya'ni } 2x + y + 1 = 0,$$

normalning tenglamasi esa

$$y + 3 = \frac{1}{2}(x - 1), \text{ ya'ni } x - 2y - 7 = 0$$

bo‘ladi.▶

2 – m i s o l . ***Ushbu***

$$12y = x^3$$

kubik parabola bo‘yicha xarakat qilayotgan nuqtaning koordinatalaridan qaysi biri tezroq o‘zgaradi?

◀Qaralayotgan x va y larning t vaqtning funksiyasi deb topamiz:

$$12\frac{dy}{dx} = 3x^2\frac{dx}{dt}$$

Bu tenglikdan

$$\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{4}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Ravshanki, bu tenglikning chap tomonidagi nisbat nuqta ordinatasining o‘zgarish tezligining shu nuqta abssissasining o‘zgarish tezligiga nisbatidan iborat bo‘lib, u $|x| < 2$ bo‘lganda birdan kichik, $|x| = 2$ bo‘lganda birga teng, $|x| > 2$ bo‘lganda esa birdan katta bo‘ladi. Demak,

1) $-2 < x < 2$ bo‘lganda nuqtaning ordinatasi uning abssissasiga qaraganda sekinroq o‘zgaradi;

2) $x = \pm 2$ bo‘lganda abssissasi hamda ordinatasining o‘zgarish tezligi bir hil bo‘ladi;

3) $x < -2$ va $x > 2$ bo‘lganda nuqtaning ordinatasi uning abssissasiga qaraganda tezroq o‘zgaradi.▶

Hosilalar jadvalidan foydalanib, quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin.

1. $y = \frac{2x}{1 - x^2}$

2. $y = (1 + x)\sqrt{2 + x^2}\sqrt[3]{3 + x^3}$

3. $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

4. $y = \log_x 2^x$

5. $y = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

6. $y = \frac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$

7. $y = \sqrt[m+n]{(1 - x)^m (1 + x)^n}$

8. $y = \sqrt[3]{\frac{1 + x^3}{1 - x^3}}$

9. $y = \left(\frac{1 - x^2}{2} \cdot \sin x - \frac{(1 - x)^2}{2} \cdot \cos x\right)e^{-x}$

10. $y = \frac{1}{4(1 + x^4)} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{1 + x^4}$

Ko‘rsatilgan nuqtalarda teskari funksiyalarning hosilalari topilsin:

972. $y = x + \frac{1}{5}x^5, \quad y = 0, \quad y = \frac{6}{5}$

973. $y = 2x - \frac{\cos x}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}$

974. $y = 0{,}1x + e^{0{,}1x}, \quad y = 1$

975. $y = 2x^2 - x^4, \quad x > 1, \quad y = 0$

976. $y = 2x^2 - x^4, \quad 0 < x < 1, \quad y = \frac{3}{4}$

Teskari funksiyaning hosilasi topilsin, ularning aniqlanish sohalari ko‘rsatilsin.

977. $y = x + \ln x, \quad x > 0$

978. $y = x + e^x$

979. $y = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad x < 0$

980. $y = \mathrm{ch}x, \quad x > 0$

Parametrik ko‘rinishda berilgan $y = y(x)$ funksiya uchun y'_x topilsin.

981. $x = \sin^2 t, \quad y = \cos^2 t, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$

982. $x = e^{-t}, \quad y = t^3, \quad -\infty < t < +\infty$

983. $x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 < t < \pi$

984. $x = a \ \mathrm{ch}t, \quad y = b \ \mathrm{sh}t, \quad -\infty < t < 0$

985. $x = t^2 + 6t + 5, \quad y = \frac{t^3 - 54}{t}, \quad 0 < t < +\infty$

986. $x = (t-1)^2(t-2), \quad y = (t-1)^2(t-3), \quad \frac{5}{3} < t < +\infty$

987. $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad -\infty < t < +\infty$

988. $x = \ln\sin\frac{t}{2}, \quad y = \ln\sin t, \quad 0 < t < \pi$

Uyga vazifa uchun misollar.

1. $y=\frac{1}{1-k}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{\sqrt{k}}{1-k}\ln\frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}\quad (0<k<1)$

2. $y=\sqrt{x+1}-\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$

3. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

4. $y=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}$

5. $y=x\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-2\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+2x$

6. $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$

7. $y=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}\quad (a>0, b>0)$

8. $y=\frac{2+3x^2}{x^4}\sqrt{1-x^2}+3\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

9. $y=\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

10. $y=\ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

11. $y=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+\ln\sin x$

12. $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

13. $y=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}$

14. $y=\ln\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\cdot\sin x}{a+b\cos x}\quad (0\le |a|<|b|)$

15. $y=\frac{1}{x}\left(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6\right)$

16. $y=\frac{1}{4x^4}\ln\frac{1}{x}-\frac{1}{16x^4}$

17. $y = \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \sqrt[3]{1 + x^2}\right) + 3\ln\left(1 + \sqrt[3]{1 + x^2}\right)$

Test

1) Hosilasi hisoblansin. $\left(x^{2016}+\cos x\right)'=?$

A) $2016x^{2015}-\sin x$

B) $2016x^{2016}-\sin x$

C) $2016x^{2015}+\sin x$

D) $2016x^{2014}-\sin x$

2) Hosilasi hisoblansin. $\left(arctgx+arc\cos x\right)'=?$

A) $\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

B) $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

C) $\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

D) $\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

3) Hosilasi hisoblansin. $\left(e^x+\arcsin x\right)'=?$

A) $e^x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

B) $e^{-x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

C) $e^x+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

D) $-e^x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4) Hosilasi hisoblansin. $\left(tgx+\cos x\right)'=?$

A) $\frac{1}{\cos^2 x}-\sin x$

B) $\frac{1}{\cos^2 x}+\sin x$

C) $\frac{1}{\sin^2 x}+\sin x$

D) $-\frac{1}{\cos^2 x}+\sin x$

5) Hosilasi hisoblansin. $\left(x^{2016}\cdot\cos x\right)'=?$

A) $2016x^{2015}\cdot\cos x - x^{2016}\cdot\sin x$

B) $2016x^{2015}\cdot\cos x + x^{2016}\cdot\sin x$

C) $2016x^{2016}\cdot\cos x - x^{2016}\cdot\sin x$

D) $2016x^{2015}\cdot\cos x - x^{2015}\sin x$

6) Hosilasi hisoblansin. $\left(x^{2016}\cdot\cos 2x\right)' = ?$

A) $2016x^{2015}\cdot\cos 2x - 2x^{2016}\cdot\sin 2x$

B) $2016x^{2015}\cdot\cos 2x + x^{2016}\cdot\sin 2x$

C) $2016x^{2016}\cdot\cos 2x - 2x^{2016}\cdot\sin x$

D) $2016x^{2015}\cdot\cos 2x - 2x^{2015}\sin 2x$

7) Hosilasi hisoblansin. $\left((x+1)^{2016}\cdot\sin 2x\right)' = ?$

A) $2016(x+1)^{2015}\cdot\sin 2x + 2(x+1)^{2016}\cdot\cos 2x$

B) $2016(x+1)^{2015}\cdot\sin 2x - 2(x+1)^{2016}\cdot\cos 2x$

C) $2016(x+2)^{2015}\cdot\sin 2x + 2(x+1)^{2016}\cdot\cos 2x$

D) $2016(x+1)^{2016}\cdot\sin 2x + 2(x+1)^{2016}\cdot\cos 2x$

8) Hosilasi hisoblansin. $\left(tg(3x+1)\right)' = ?$

A) $\dfrac{3}{\cos^2(3x+1)}$

B) $\dfrac{1}{\cos^2(3x+1)}$

C) $\dfrac{3}{\cos^2(x)}$

D) $-\dfrac{3}{\cos^2(3x+1)}$

9) Hosilasi hisoblansin. $\left(\cos(3x+1)\cdot x\right)' = ?$

A) $-3x\cdot\sin(3x+1)+\cos(3x+1)$

B) $3x\cdot\sin(3x+1)+\cos(3x+1)$

C) $-3x\cdot\sin(3x+1)-\cos(3x+1)$

D) $-3x\cdot\sin(3x-1)+\cos(3x-1)$

10) Hosilasi hisoblansin. $(arcctgx)' = ?$

A) $-\frac{1}{1+x^2}$ B) $-\frac{1}{1-x^2}$ C) $\frac{1}{1+x^2}$ D) $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

20-mavzu. Funksiyaning differensiali

20-ma'ruza

Reja

1^0. Funksiya differensiali tushunchasi.
2^0. Funksiya differensialining sodda qoidalari.
3^0. Funksiya differensiali va taqribiy formulalar.

([1], 6.differential calculus, 185-bet) 1^0. Funksiya differensiali tushunchasi. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, $x_0 \in (a,b)$, $x_0 + \Delta x \in (a,b)$ bo'lsin.

Ma'lumki, $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ayirma $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi.

1-ta'rif. Agar $\Delta f(x_0)$ ni ushbu

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha \Delta x$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqta-da differensiallanuvchi deyiladi, bunda $A = const$, $\Delta x \to 0$, da $\alpha \to 0$.

Teorema. $f(x)$ funksiya $x \in (a, b)$ nuqtada differensial-lanuvchi bo'lishi uchun uning shu nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lishi zarur va etarli.

◀ **Zarurligi.** $f(x)$ funksiya $x \in (a, b)$ nuqtada differen-siallanuvchi bo'lsin. Ta'rifga binoan,

$$\Delta f(x) = A \cdot \Delta x + \alpha \Delta x$$

bo'ladi, bunda $A = const$, $\Delta x \to 0$, da $\alpha \to 0$.

Bu tenglikdan foydalanib topamiz:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = A + \alpha,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha) = A.$$

Demak, $f'(x)$ mavjud va $f'(x) = A.$

Etarliligi. $f(x)$ funksiya $x \in (a, b)$ da chekli $f'(x)$ hosila-ga ega bo'lsin. Ta'rifga ko'ra

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

bo‘ladi. Agar

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} - f'(x) = \alpha$$

deyilsa, undan

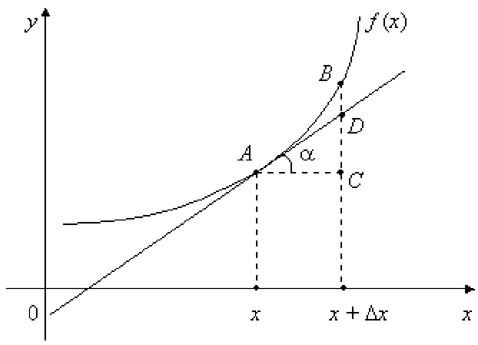
$$\Delta f(x) = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha\Delta x$$

bo‘lishi kelib chiqadi, bunda $\Delta x \to 0$ da $\alpha \to 0$. Demak, $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi.▶

([1], 6.differential calculus, 185-bet) 2-ta’rif. Funksiya orttirmasidagi $f'(x_0)\cdot\Delta x$ ifoda $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi differensiali deyiladi va $df(x_0)$ kabi belgilanadi:

$$df(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x\,.$$

Aytaylik, $x\in(a,\,b)$ nuqtada differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning grafigi 6-chizmada tasvirlangan egri chiziqni ifodalasin:



6-chizma.

Keltirilgan chizmadan ko‘rinadiki,

$$\frac{DC}{AC} = tg\alpha$$

bo‘lib, $DC = tg\alpha\cdot AC = f'(x)\cdot\Delta x$ bo‘ladi.

Demak, $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differensiali funksiya grafigiga $(x,\ f(x))$ nuqtada o‘tkazilgan urinma orttirmasi DC ni ifodalar ekan.

Faraz qilaylik, $f(x)=x,\ \ x\in R$ bo‘lsin. Bu funksiya differensiallanuvchi bo‘lib, $df(x)=(x)'\cdot\Delta x=\Delta x$, ya’ni $dx=\Delta x$ bo‘ladi. Demak, $(a,\,b)$ da differensiallanuvchi $f(x)$ funksiya-ning differensialini

$$df(x) = f'(x)\cdot dx$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin.

([1], 6.differential calculus, 175-bet) Endi sodda funksiyalarning differensiallarini keltiramiz:

1. $d(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}dx, \quad (x>0);$

2. $d(a^x)=a^x\cdot\ln a\cdot dx, \quad (a>0, \quad a\neq 1);$

3. $d(\log_a x)=\frac{1}{x}\log_a e dx, \quad (x>0, \quad a>0, \quad a\neq 1);$

4. $d(\sin x)=\cos x dx;$

5. $d(\cos x)=-\sin x dx;$

6. $d(tgx)=\frac{1}{\cos^2 x}dx, \quad (x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k=0, \pm 1, \ldots);$

7. $d(ctgx)=-\frac{1}{\sin^2 x}dx, \quad (x\neq k\pi, \quad k=0, \pm 1, \ldots);$

8. $d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad (-1<x<1);$

9. $d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad (-1<x<1);$

10. $d(arctgx)=\frac{1}{1+x^2}dx;$

11. $d(arcctgx)=-\frac{1}{1+x^2}dx;$

12. $d(shx)=chxdx;$

13. $d(chx)=shxdx;$

14. $d(thx)=\frac{1}{ch^2 x}dx;$

15. $d(cthx)=-\frac{1}{sh^2 x}dx \quad (x\neq 0)$

2^0. Funksiya differensialining sodda qoidalari. Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalari (a, b) da berilgan bo‘lib, $x\in(a, b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. U holda $x\in(a, b)$ da

1) $d(c\cdot f(x))=cdf(x), \quad c=const;$

2) $d(f(x)+g(x))=df(x)+dg(x);$

3) $d(f(x)g(x))=g(x)df(x)+f(x)dg(x);$

4) $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)df(x)-f(x)dg(x)}{g^2(x)}, \quad (g(x)\neq 0).$

bo‘ladi.

Bu tasdiqlardan birini, masalan 3)-sini isbotlaymiz.

◀Ma’lumki,

$$d(f(x)g(x))=(f(x)g(x))'dx.$$

Agar

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

bo‘lishini e’tiborga olsak, unda quyidagi tenglikka kelamiz:

$$d(f(x)g(x) = (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx =$$
$$= g(x)f'(x)dx + f(x)g'(x)dx = g(x)df(x) + f(x)dg(x). \blacktriangleright$$

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda, $g(y)$ funksiya $Y \supset \{f(x): x \in X\}$ to‘plamda berilgan bo‘lib, $f'(x)$ va $g'(y)$ hosilalarga ega bo‘lsin. U holda

$$d(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot df(x)$$

bo‘ladi.

◀ Murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$d(g(f(x))) = [g(f(x))]' dx = g'(f(x)) \cdot f'(x)dx = g'(f(x)) \cdot df(x). \blacktriangleright$$

1-misol. Ta’rifdan foydalanib, ushbu $f(x) = x - 3x^2$ funksiyaning $x_0 = 2$ nuqtadagi differensiali topilsin.

◀ Bu funksiyaning $x_0 = 2$ nuqtadagi orttirmasini topamiz:

$$\Delta f(2) = f(2 + \Delta x) - f(2) = 2 + \Delta x - 3(2 + \Delta x)^2 - 2 + 12 =$$
$$= -11 \cdot \Delta x - 3\Delta x^2 = -11 \cdot \Delta x + (-3\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Demak, $d\, f(2) = -11 \cdot dx$. ▶

([1], 6.differential calculus, 185-bet) 3^0. Funksiya differensiali va taqribiy formulalar. Funksiya differensiali yordamida taqribiy formulalar yuzaga keladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo‘lib, $x_0 \in (a, b)$ nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga $(f'(x_0) \neq 0)$ ega bo‘lsin. U holda $\Delta x \to 0$ da

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

bo‘ladi.

Ayni paytda, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensial-lanuvchi bo‘lib, uning differensiali

$$d\, f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

bo‘ladi.

Ravshanki,

$$\Delta f(x_0) - df(x_0) = o(\Delta x)$$

bo‘lib, $\Delta x \to 0$ da

$$\frac{\Delta f(x_0) - df(x_0)}{\Delta x} \to 0$$

bo‘ladi. Natijada

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0),$$

ya’ni

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \qquad (1)$$

taqribiy formula hosil bo‘ladi. (1) formula $x_0 \in (a, b)$ nuqta-da differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi $\Delta f(x_0)$ ni uning shu nuqtadagi differensiali $df(x_0)$ bilan almashtirish mumkinligini ko‘rsatadi. Bu almashtirishning mohiyati funksiya orttirmasi argument orttirmasining, umuman aytganda murakkab funksiyasi bo‘lgan holda, funksiya differensiali esa argument orttirmasining chiziqli funksiyasi bo‘lishidadir.

(1) formulada $\Delta x = x - x_0$ deyilsa, unda

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (2)$$

bo‘ladi.

2-misol. Ushbu $\sin 29^0$ miqdor taqribiy hisoblansin.

◄ Agar $f(x) = \sin x$, $x_0 = 30^0$ deyilsa, unda (2) formulaga ko‘ra

$$\sin 29^0 \approx \sin 30^0 + \cos 30^0 \cdot (29^0 - 30^0) \cdot \frac{2\pi}{360^0} = 0{,}5 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\pi}{360^0} \approx 0{,}4848$$

bo‘ladi. ►

Ma’lumki, $x_0 \in (a, b)$ nuqtada differensiallanuvchi $f(x)$ funksiya grafigiga $(x_0, f(x_0))$ nuqtada o‘tkazilgan urinma-ning tenglamasi quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Demak, (2) taqribiy formula geometrik nuqtai nazardan, $f(x)$ funksiya ifodalagan egri chiziqni x_0 nuqtaning etarli kichik atrofida shu funksiya grafigiga $(x_0, f(x_0))$ nuqtada o‘tkazilgan urinma bilan almashtirilishi mumkinligini bildiradi.

(2) formulada $x_0 = 0$ deyilsa, u ushbu

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x \qquad (3)$$

ko‘rinishga keladi.

$f(x)$ funksiya sifatida $(1+x)^\alpha$, $\sqrt{1+x}$, e^x, $\ln(1+x)$, $\sin x$, tgx funksiyalarni olib, ularga (3) formulani qo‘llash natijasida quyidagi taqribiy formulalar hosil bo‘ladi:

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x,$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x,$$

$$e^x \approx 1 + x,$$

$$\ln(1+x) \approx x,$$

$$\sin x \approx x,$$

$$tgx \approx x.$$

Mashqlar

1. Aytaylik, u va $v$lar differensiallanuvchi funksiya-lar bo‘lib, ularning differensiallari du va dv bo‘lsin. Unda ushbu

$$y = \operatorname{arctg}\frac{u}{v} + \ln\sqrt{u^2 + v^2}$$

funksiyaning differensiali topilsin.

2. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса}, \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

funksiya $x_0 = 0$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘ladimi?

3. Ushbu

$$\sqrt{1{,}2}, \quad \sqrt{1{,}02}, \quad \sqrt{1{,}002}$$

miqdorlarning taqribiy qiymati topilsin.

Adabiyotlar

1. **Canuto C., Tabacco A. -** Mathematical Analysis I, **Italy 2008.**
2. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
3. **Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma’rizalar, I q.* T. “Voris-nashriyot”, 2010.
4. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.

Glossariy

Funksiya differensiali tushunchasi. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $(a,\, b)$ da berilgan bo'lib, $x_0 \in (a,b)$, $x_0 + \Delta x \in (a,b)$ bo'lsin.

Ma'lumki, $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ayirma $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi.

1-ta'rif. Agar $\Delta f(x_0)$ ni ushbu

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha \Delta x$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqta-da differensiallanuvchi deyiladi, bunda $A = const$, $\Delta x \to 0$, da $\alpha \to 0$.

2-ta'rif. Funksiya orttirmasidagi $f'(x_0) \cdot \Delta x$ ifoda $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi differensiali deyiladi va $df(x_0)$ kabi belgilanadi:

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x\,.$$

Aytaylik, $x \in (a,\, b)$ nuqtada differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning grafigi 6-chizmada tasvirlangan egri chiziqni ifodalasin:

Keys banki

20-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса}, \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

funksiya $x_0 = 0$ nuqtada differensiallanuvchi bo'ladimi?

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

20-amaliy mashg`ulot

1 – m i s o l . ***Ushbu***

$$f(x) = \cos\frac{x}{3} + \sin\frac{3}{x}$$

funksiyaning differensiali topilsin.

◀Bu funksiyaning differensialini (2) formuladan foydalanib topamiz:

$$df(x) = d\left(\cos\frac{x}{3} + \sin\frac{3}{x}\right) = \left(\cos\frac{x}{3} + \sin\frac{3}{x}\right)' \cdot dx = -\left(\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3} + \frac{3}{x^2}\cos\frac{3}{x}\right)dx . ▶$$

2 – m i s o l . ***Agar*** $u = u(x)$, $v = v(x)$ ***differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsa,***

$$y = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}$$

ning differensiali topilsin.

◀Differensial shaklining invariantligi xossasidan foydalanib topamiz:

$$dy = d\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2} d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}\cdot\frac{vdu - udv}{v^2} = \frac{vdu - udv}{u^2+v^2} ▶$$

3 – m i s o l . ***Ushbu***

$$\alpha = \sqrt[4]{17}$$

miqdorning taqribiy qiymati topisin.

◀(3) formulada

$f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x = 17$, $x_0 = 16$ deyilsa, unda $\Delta x = x - x_0 = 1$ bo'lib,

$$\sqrt[4]{17} \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x = 2 + \frac{1}{32}\cdot 1 = \frac{65}{32} \approx 2{,}031$$

bo'ladi. Demak, $\alpha = 2{,}031$.▶

Funksiya differensiali topilsin:

1060. $y = \frac{1}{x}$

1061. $y = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} \qquad (a \neq 0)$

1062. $y = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$

1063. $y = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|$

1064. $y = \arcsin\frac{x}{a} \qquad (a \neq 0)$

Differensial topilsin:

1065. $d\left(e^{-x}+\ln x\right)$

1066. $d\left(\sqrt{x}+2\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)$

1067. $d\left(2\sqrt{x^3}(3\ln x-2)\right)$

1068. $d\left(\arccos e^{x}\right)$

1069. $d\ln\left(\sqrt{1+2\sin x}+\sqrt{2\sin x-1}\right)$

1070. $d\left(5\operatorname{sh}^7\left(\frac{x}{35}\right)+7\operatorname{sh}^5\left(\frac{x}{35}\right)\right)$

1071. $d\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

1072. $d\left(\ln\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\sin x}\right)$

1073. $d\left(x^{x^2}\right)$

Ko‘rsatilgan nuqtalardagi differensial topilsin:

1074. $d\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{x-1}{x}\right),\quad x=-1$

1075. $d\left(\operatorname{arctg}\frac{\ln x}{x}\right),\quad x_1=\frac{1}{e},\quad x_2=e$

1076. $d\left(\frac{(2x-1)^3\sqrt{2+3x}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}\right),\quad x=0$

1077. $d\left(\frac{x^2 2^x}{x^x}\right),\quad x_1=1,\quad x_2=2$

Agar $u,\ \vartheta,\ \omega$ lar x ning differensiallanuvchi funksiyalari bo‘lsa, $y=y(x)$ funksiyaning differensiali topilsin:

1078. $y=u\vartheta\omega$

1079. $y=\frac{u}{\vartheta^2}$

1080. $y=\frac{1}{\sqrt{u^2+\vartheta^2}}$

1081. $y=\operatorname{arctg}\frac{u}{\vartheta}$

1082. $y=\ln\sqrt{u^2+\vartheta^2}$

Topilsin:

1083. $\frac{d}{d(x^3)}\left(x^3-2x^6-x^9\right)$

1084. $\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

1085. $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$

1086. $\frac{d(\mathrm{tg}x)}{d(\mathrm{ctg}x)}$ 1087. $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$

Quyidagi oshkormas yoki parametrik ko‘rinishda berilgan $y = y(x)$ funksiyaning ko‘rsatilgan nuqtadagi differensiali topilsin:

1088. $y^3 - y = 6x^2, \quad (1;2)$

1089 $x^4 + y^4 - 8x^2 - 10y^2 + 16 = 0, \quad (1;3)$

1090. $y^5 + x^4 = xy^2, \quad (x_0; y_0)$

1091. $x + y\ln y = 0, \quad (x_0; y_0)$

1092. $xy - \sqrt[3]{xy^2 + 6} = 0, \quad (2;1)$

1093. $xe^{\left(\frac{x}{y^2} - 1\right)} - 2y = 0, \quad (4;2)$

1094. $3^{\sin yx^2} - 3x(y - \pi) - 1 = 0, \quad (1;\pi)$

1095. $4xy^3 + \ln\sqrt[3]{\frac{x}{x+y}} = 0, \quad (1;0)$

1096. $x = (t-1)^2(t-2), \quad y = (t-1)^2(t-3), \quad (4;0)$

1097. $x = \frac{e^t}{t}, \quad y = (t-1)^2 \cdot e^t, \quad \left(-\frac{2}{\sqrt{e}}; \frac{9}{4\sqrt{e}}\right)$

Funksiya orttirmasini differensial bilan almashtirib, quyidagi qiymatlar taqribiy hisoblansin:

1098. $\sqrt[3]{1{,}02}$ 1099. $\sin 29^0$ 1100. $\cos 151^0$

1101. $\mathrm{arctg}\,1{,}05$ 1102. $\lg 11$

Test

1)Differensial hisoblansin. $d(x^{2016})=?$

A) $2016x^{2015}dx$

B) $2016x^{2016}dx$

C) $2015x^{2015}dx$

D) $-2016x^{2015}dx$

2)Differensial hisoblansin. $d(\cos x+tgx)=?$

A) $\left(-\sin x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

B) $\left(-\sin x-\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

C) $\left(-\sin x+\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)dx$

D) $\left(-\cos x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)dx(\ \ )$

3)Differensial hisoblansin. $d(\cos 2x+e^{2x})=?$

A) $\left(-\sin x+2e^{2x}\right)dx$

B) $\left(\sin x-2e^{2x}\right)dx$

C) $\left(\sin x+2e^{x}\right)dx$

D) $\left(\sin x+e^{2x}\right)dx$

4)Differensial hisoblansin. $d(\cos 2x\cdot e^{2x})=?$

A) $\left(-2\sin 2x\cdot e^{2x}+2\cos 2x\cdot e^{2x}\right)dx$

B) $\left(-2\sin x\cdot e^{2x}+2\cos 2x\cdot e^{2x}\right)dx$

C) $\left(-2\sin 2x\cdot e^{2x}+\cos x\cdot e^{2x}\right)dx$

D) $\left(-2\sin x\cdot e^{2x}+2\cos x\cdot e^{2x}\right)dx$

5)Differensial hisoblansin. $d(x^{2016}\cdot e^{2x})=?$

A) $x^{2016}\cdot d\left(e^{2x}\right)+e^{2x}\cdot d\left(x^{2016}\right)$

B) $x^{2016}\cdot d\left(e^{2x}\right)+e^{2x}\cdot x^{2016}\cdot d\left(x\right)$

C) $x^{2016}\cdot d\left(e^{2x}\right)+e^{2x}\cdot 2016\cdot x^{2016}\cdot d\left(x\right)$

D) $x^{2016}\cdot e^{2x}\cdot d\left(x\right)+e^{2x}\cdot 2016\cdot x^{2015}\cdot d\left(x\right)$

6)Differensial hisoblansin. $d(x^{2016}\cdot\cos x)=?$

A) $x^{2016}\cdot d\left(\cos x\right)+\cos x\cdot d\left(x^{2016}\right)$

B) $x^{2016}\cdot d\left(\cos x\right)+\cos x\cdot 2016\cdot x^{2016}\cdot d\left(x\right)$

C) $-x^{2016}\cdot\sin x\cdot d\left(x\right)+\cos x\cdot 2016\cdot x^{2016}\cdot d\left(x\right)$

D) $-x^{2016}\cdot\sin x\cdot d\left(x\right)-\cos x\cdot 2016\cdot x^{2015}\cdot d\left(x\right)$

7)Differensial hisoblansin. $d(\cos x)=?$

A) $-\sin x\cdot d(x)$

B) $\sin x\cdot d(x)$

C) $\sin x$

D) $-\sin x$

8)Differensial hisoblansin. $d(\ln\left(2x+1\right))=?$

A) $\dfrac{2}{2x+1}d(x)$

B) $\dfrac{1}{2x+1}d(x)$

C) $-\dfrac{2}{2x+1}d(x)$

D) $\dfrac{2}{2x+1}$

9)Differensial hisoblansin. $d(x+\cos x\cdot ctgx)=?$

A) $\left(1-\sin x\cdot ctgx-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\right)d(x)$

B) $\left(1+\sin x\cdot ctgx-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\right)d(x)$

C) $\left(1-\sin x\cdot ctgx+\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\right)d(x)$

D) $\left(1+\sin x\cdot ctgx+\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\right)d(x)$

10) Taqribiy hisoblang. $\sin 29^\circ=?$

A) $0,4848$

B) $0,4747$

C) $0,4546$

D) $0,4948$

21-mavzu. Funksiyaning yuqori tartibli hosila va differensiallari

21-ma'ruza

Reja

1^0. Funksiyaning yuqori tartibli hosilalari.
2^0. Funksiyaning yuqori tartibli differensiallari.
3^0. Differensial shaklining invariantligi.

([1],6.8 Higher-order derivatives, 187-bet) 1^0. Funksiyaning yuqori tartibli hosilalari. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu $f'(x)$ funksiyani $g(x)$ orqali belgilaymiz:

$$g(x) = f'(x) \qquad (x \in (a, b)).$$

1-ta'rif. Agar $x_0 \in (a, b)$ nuqtada $g(x)$ funksiya $g'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, bu hosila $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi va $f''(x_0)$ yoki $\dfrac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$ kabi belgilanadi.

Xuddi shunga o'xshash, $f(x)$ ning 3-tartibli $f'''(x)$, 4-tartibli $f^{IV}(x)$ va h.k. tartibli hosilalari ta'riflanadi.

Umuman, $f(x)$ funksiyaning $n-$tartibli hosilasi $f^{(n)}(x)$ ning hosilasi $f(x)$ funksiyaning $(n+1)-$tartibli hosilasi deyiladi:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'.$$

Odatda, $f(x)$ funksiyaning $f''(x)$, $f'''(x)$, ... hosilalari uning yuqori tartibli hosilalari deyiladi. SHuni ta'kidlash lozimki, $f(x)$ funksiyaning $x \in (a, b)$ da $n-$tartibli hosilasining mavjudligi bu funksiyaning shu nuqta atrofida 1–, 2–, ..., $(n-1)-$tartibli hosilalari mavjudligini taqoza etadi. Ammo bu hosilalarning mavjudligidan $n-$tartibli hosila mavjudligi, umuman aytganda, kelib chiqavermaydi.

Masalan,

$$f(x) = \frac{x\,|x|}{2}$$

funksiyaning hosilasi $f'(x) = |x|$ bo'lib, bu funksiya $x = 0$ nuqtada hosilaga ega emas, ya'ni berilgan funksiyaning $x=0$ da birinchi tartibli hosilasi mavjud, ikkinchi tartibli hosilasi esa mavjud emas.

1-misol. $f(x)=a^x$ bo'lsin, $a>0$, $x\in R$. Bu funksiya uchun

$$(a^x)'=a^x\ln a,$$

$$(a^x)''=(a^x\ln a)'=a^x(\ln a)^2,$$

umuman

$$(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n \qquad (1)$$

bo'ladi. (1) munosabatning o'rinli bo'lishi matematik induksiya usuli bilan isbotlanadi.

2-misol. $f(x)=\sin x$ bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\sin x)''=(\cos x)'=-\sin x=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right),$$

Umuman,

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

bo'ladi.

SHunga o'xshash,

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

bo'ladi.

3-misol. $f(x)=x^\alpha$ bo'lsin, $x>0$, $\alpha\in R$. Bu funksiya uchun

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1},$$

$$(x^\alpha)''=(\alpha x^{\alpha-1})'=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$

umuman,

$$(x^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

bo'ladi.

Xususan, $f(x)=\frac{1}{x}$, $(x>0)$ funksiya uchun

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

bo'lib, undan

$$(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

bo‘lishini topamiz.

Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) da berilgan bo‘lib, $\forall x\in(a,\,b)$ da $f^{(n)}(x)$ va $g^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo‘lsin. U holda:

1) $(c\cdot f(x))^{(n)}=c\cdot f^{(n)}(x),\quad c=const$;

2) $(f(x)\pm g(x))^{(n)}=f^{(n)}(x)\pm g^{(n)}(x)$;

3) $$(f(x)\cdot g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-k)}(x) \qquad (2)$$

$$\left(C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\right),\qquad f^{(0)}(x)=f(x)$$

bo‘ladi.

◀ Bu tasdiqlardan 3)-sining isbotini keltiramiz. Ravshanki, $n=1$ da (2) munosabat o‘rinli bo‘ladi. Aytaylik, (2) munosabat $n-1$ da o‘rinli bo‘lsin:

$$(f(x)\cdot g(x))^{(n-1)}=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-1-k)}(x).$$

Keyingi tenglikni hamda

$$C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}=C_n^k$$

bo‘lishini e’tiborga olib, topamiz:

$$(f(x)\cdot g(x))^{(n)}=\left((f(x)\cdot g(x))^{(n-1)}\right)'=\left(\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-1-k)}(x)\right)'=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k\left(f^{(k+1)}(x)g^{(n-1-k)}(x)+f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\right)=C_{n-1}^0 f(x)g^{(n)}(x)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}(C_{n-1}^k+C_{n-1}^k)f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)+C_{n-1}^{k-1}f^{(n)}(x)g(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\ ▶$$

Odatda, (2) **Leybnits formulasi** deyiladi.

4-misol. Ushbu

$$y=x^2\cos 2x$$

funksiyaning $n-$tartibli hosilasi topilsin.

◀Leybnits formulasida $f(x)=\cos 2x$, $g(x)=x^2$ deb olamiz. Unda bu formulaga ko‘ra, ayni paytda $g(x)=x^2$ funksiya uchun $k>2$ bo‘lganda

$$g^{(k)}(x)=(x^2)^{(k)}=0,\qquad (k>2)$$

bo‘lishini e’tiborga olib topamiz:

.

Ravshanki,

$$(\cos 2x)^{(n)} = 2^n \cos\left(2x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\cos 2x)^{(n-1)} = 2^{n-1}\cos\left(2x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right) = 2^{n-1}\sin\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\cos 2x)^{(n-2)} = 2^{n-2}\cos\left(2x+(n-2)\frac{\pi}{2}\right) = -2^{n-1}\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Demak,

$$(x^2\cos 2x)^{(n)} = 2^n\left(x^2 - \frac{n(n-1)}{4}\right)\cos\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right) + 2^n nx\sin\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right). \quad ▶$$

([1],6.8 Higher-order derivatives, 187-bet)2^0. Funksiyaning yuqori tartibli differensiallari. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo‘lib, $\forall x\in(a,b)$ nuqtada $f''(x)$ hosilaga ega bo‘lsin. Ravshanki, $f(x)$ funksiyaning differensiali

$$df(x) = f'(x)dx \tag{3}$$

bo‘lib, bunda $dx=\Delta x$ funksiya argumentning ixtiyoriy orttirmasi.

2-ta’rif. $f(x)$ funksiyaning $x\in(a,b)$ nuqtadagi dif-ferensiali $df(x)$ ning differensiali $f(x)$ funksiyaning $x\in(a,b)$ nuqtadagi ikkinchi tartibli differensiali deyi-ladi va $d^2 f(x)$ kabi belgilanadi:

$$d^2 f(x) = d(df(x)).$$

Xuddi shunga o‘xshash, $f(x)$ funksiyaning uchinchi $d^3 f(x)$, to‘rtinchi $d^4 f(x)$ va h.k. tartibdagi differensiallari ta’riflanadi.

Umuman, $f(x)$ funksiyaning $n-$tartibli differensiali $d^n f(x)$ ning differensiali $f(x)$ funksiyaning $(n+1)-$tartibli differensiali deyiladi:

$$d^{n+1} f(x) = d(d^n f(x)).$$

5-misol. Ushbu

$$f(x) = xe^{-x}$$

funksiyaning ikkinchi tartibli differensiali topilsin.

◀ Berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli differen-sialini ta’rifiga ko‘ra topamiz:

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(d(xe^{-x})) = d(xde^{-x} + e^{-x}dx) == d(-xe^{-x}dx + e^{-x}dx) =$$

$$= -d(xe^{-x})dx + (de^{-x})dx = -(xde^{-x} + e^{-x}dx)dx - e^{-x}(dx)^2 = xe^{-x}(dx)^2 -$$

$$= x\cdot e^{-x}(dx)^2 - e^{-x}(dx)^2 - e^{-x}(dx)^2 = (x-2)e^{-x}(dx)^2. \quad ▶$$

Differensiallash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = dx\cdot d(f'(x)) = dx\cdot f''(x)dx = f''(x)(dx)^2, \tag{4}$$

$$d^3 f(x) = d(d^2 f(x)) = f'''(x)(dx)^3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)(dx)^n$$

Masalan, yuqorida keltirilgan misol uchun

$$d^2(xe^{-x}) = (xe^{-x})''(dx)^2 = (e^{-x} - xe^{-x})'(dx)^2 =$$
$$= (e^{-x} - e^{-x} - xe^{-x})(dx)^2 = (x-2)e^{-x}(dx)^2$$

bo‘ladi.

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a, b) da berilgan bo‘lib, $\forall x \in (a, b)$ nuqtada $n-$tartibli differensiallarga ega bo‘lsin. U holda:

1) $d^n(c \cdot f(x)) = c \cdot d^n f(x), \quad c = const;$

2) $d^n(f(x) \pm g(x)) = d^n f(x) \pm d^n g(x);$

3) $d^n(f(x) \cdot g(x)) = d^n f(x) \cdot g(x) + C_n^1 d^{n-1} f(x) \cdot dg(x) +$
$+ \ldots + C_n^k d^{n-k} f(x) \cdot d^k g(x) + \ldots + f(x) \cdot d^n g(x)$

bo‘ladi.

Bu munosabatlarning 1), 2) – larning isboti ravshan. 3) – munosabatni isbotlashda (2) formuladan foydalaniladi.

3^0. Differensial shaklining invariantligi. Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya (a, b) da differensiallanuvchi bo‘lib, x o‘zgaruvchi o‘z navbatida biror t o‘zgaruvchining $[\alpha, \beta]$ da differensiallanuvchi funksiyasi bo‘lsin:

$$x = \varphi(t) \quad (t \in [\alpha, \beta], \; x = \varphi(t) \in [a, b]).$$

Natijada

$$y = f(x) = f(\varphi(t))$$

bo‘ladi. Bu funksiyaning differensiali

$$dy = (f(\varphi(t)))'dt = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = f'(\varphi(t)) \cdot d\varphi(t) = f'(x)dx$$

bo‘lib, u (3) ko‘rinishga ega bo‘ladi. SHunday qilib, $y = f(x)$ funksiyada x o‘zgaruvchi erkli bo‘lgan holda ham, u biror t o‘zgaruvchiga boђliq bo‘lgan holda ham $y = f(x)$ funksiya differensialining ko‘rinishi bir xil bo‘ladi. Odatda bu xususiyat differensial shaklining **invariantligi** deyiladi.

$y = f(\varphi(t))$ funksiyaning ikkinchi tartibli differen-siali quyidagicha bo‘ladi:

$$d^2 y = d(df) = d(f'(x)dx) = df'(x) \cdot dx + f'(x) \cdot d(dx) =$$
$$= f''(x) \cdot (dx)^2 + f'(x)d^2 x.$$

Bu munosabatni (4) munosabat bilan solishtirib ikkin-chi tartibli differensiallarda differensial shaklining invariantligi xossasi o‘rinli emasligini topamiz.

Mashqlar

1. Ushbu

$$f(x) = |x|^3$$

funksiya $x = 0$ nuqtada uchinchi tartibdagi hosilaga ega bo‘ladimi?

2. Ushbu

$$f(x) = (x-1)^2 \sin x \sin(x-1)$$

funksiyaning $n-$tartibli hosilasi topilsin $(n > 2)$.

3. Agar $y = f(x)$ funksiya $n-$tartibli hosilaga ega bo‘lsa,

$$d^n f(ax+b) = a^n f^{(n)}(ax+b) \cdot (dx)^n$$

bo‘lishi isbotlansin.

Adabiyotlar

1. **Canuto C., Tabacco A. -** Mathematical Analysis I, **Italy 2008.**
2. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
3. **Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma’rizalar, I q*. T. “Voris-nashriyot”, 2010.
4. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t*. M. «FIZMATLIT», 2001.

Glossariy

.**Funksiyaning yuqori tartibli hosilalari.** Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo‘lib, $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsin. Bu $f'(x)$ funksiyani $g(x)$ orqali belgilaymiz:

$$g(x) = f'(x) \quad (x \in (a, b)).$$

1-ta’rif. Agar $x_0 \in (a, b)$ nuqtada $g(x)$ funksiya $g'(x_0)$ hosilaga ega bo‘lsa, bu hosila $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi **ikkinchi tartibli hosilasi** deyiladi va $f''(x_0)$ yoki $\dfrac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$ kabi belgilanadi.

Leybnits formulasi

$$(f(x)\cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-k)}(x)$$

$$\left(C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\right), \qquad f^{(0)}(x) = f(x)$$

2-ta’rif. $f(x)$ funksiyaning $x \in (a, b)$ nuqtadagi dif-ferensiali $df(x)$ ning differensiali $f(x)$ funksiyaning $x \in (a, b)$ nuqtadagi **ikkinchi tartibli differensiali** deyi-ladi va $d^2 f(x)$ kabi belgilanadi:

$$d^2 f(x) = d(df(x)).$$

Differensial shaklining invariantligi. Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya (a, b) da differensiallanuvchi bo‘lib, x o‘zgaruvchi o‘z navbatida biror t o‘zgaruvchining $[\alpha, \beta]$ da differensiallanuvchi funksiyasi bo‘lsin:

$$x = \varphi(t) \quad (t \in [\alpha, \beta], \ x = \varphi(t) \in [a, b]).$$

Natijada

$$y = f(x) = f(\varphi(t))$$

bo‘ladi. Bu funksiyaning differensiali

$$dy = (f(\varphi(t)))' dt = f'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = f'(\varphi(t))\cdot d\varphi(t) = f'(x)dx$$

bo‘lib, u (3) ko‘rinishga ega bo‘ladi. SHunday qilib, $y = f(x)$ funksiyada x o‘zgaruvchi erkli bo‘lgan holda ham, u biror t o‘zgaruvchiga boђliq bo‘lgan holda ham $y = f(x)$ funksiya differensialining ko‘rinishi bir xil bo‘ladi. Odatda bu xususiyat differensial shaklining **invariantligi** deyiladi.

Keys banki

21-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: Agar $y = f(x)$ funksiya n-tartibli hosilaga ega bo‘lsa,

$$d^n f(ax+b) = a^n f^{(n)}(ax+b)\cdot(dx)^n$$

bo‘lishi isbotlansin.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

21-amaliy mashg`ulot

1 – m i s o l . ***Ushbu***

$$f(x)=|x|^3$$

funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi topilsin.

◀Aytaylik, $x\neq 0$ bo‘lsin, Unda

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{агар} \quad x>0, \\ -x^3, & \text{агар} \quad x<0 \end{cases}$$

bo‘lib,

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2, & \text{агар} \quad x>0, \\ -3x^2, & \text{агар} \quad x<0 \end{cases}$$

bo‘ladi.

Aytaylik, $x=0$ bo‘lsin. Bu holda ta’rifga binoan

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|^3}{\Delta x}=0$$

bo‘ladi.

Demak, berilgan funksiya x ning barcha qiymatlarida hosilaga ega bo‘lib,

$$f'(x)=3x^2\operatorname{sign}x$$

bo‘ladi.

Xuddi yuqoridagidek, $x\neq 0$ bo‘lganda

$$f''(x)=\begin{cases} 6x, & \text{агар} \quad x>0, \\ -6x, & \text{агар} \quad x<0, \end{cases} \qquad x=0$$

bo‘lgan

$$f''(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(0+\Delta x)-f'(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x^2\operatorname{sign}\Delta x}{\Delta x}=0$$

bo‘lib, barcha x larda

$$f''(x)=6|x|$$

bo‘ladi.▶

2 – m i s o l . ***Ushbu***

$$f(x)=\frac{2x+3}{x^2-5x+6}$$

funksiyaning n***-tartibli hosilasi topilsin.***

◀Ravshanki,

$$\frac{2x+3}{x^2-5x+6}=\frac{9}{x-3}-\frac{7}{x-2}$$

bo‘lib,

$$\left(\frac{2x+3}{x^2-5x+6}\right)^{(n)}=\left(\frac{9}{x-3}\right)^{(n)}-\left(\frac{7}{x-2}\right)^{(n)}=9\cdot\left((x-3)^{-1}\right)^{(n)}-7\cdot\left((x-2)^{-1}\right)^{(n)}$$

bo‘ladi. 3^0 dagi 4)–formuladan foydalanib topamiz:

$$\left((x-3)^{-1}\right)^{(n)}=(-1)^n\cdot n!(x-3)^{-n-1}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-3)^{n+1}},$$

$$\left((x-2)^{-1}\right)^{(n)}=(-1)^n\cdot n!(x-2)^{-n-1}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-2)^{n+1}}.$$

Demak,

$$\left(\frac{2x+3}{x^2-5x+6}\right)^{(n)}=\frac{9(-1)^n\cdot n!}{(x-3)^{n+1}}+\frac{7(-1)^{n+1}\cdot n!}{(x-2)^{n+1}}.\blacktriangleright$$

Faraz qilaylik, x o‘zgaruvchi va uning funksiyasi y lar biror yordamchi t o‘zgaruvchi (parametr) orqali berilgan bo‘lsin:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

y ning x bo‘yicha hosilalari quyidagi formulalar yordamida topiladi:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \qquad (2)$$

$$y'''=\frac{dy''}{dx}=\frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

3 – m i s o l. ***Parametrik ko‘rinishda berilgan ushbu***

$$x=1+e^{at},\quad y=at+e^{-at}$$

funksiyaning uchinchi tartibli hosilasi topilsin.

◀Bu funksiyaning hosilalarini (2) formuladan foydalanib topamiz:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{a-ae^{-at}}{ae^{at}}=e^{-at}-e^{-2at};$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{2ae^{-2at}-ae^{-at}}{ae^{at}}=2e^{-3at}-e^{-2at};$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{2ae^{-2at} - 6ae^{-3at}}{ae^{at}} = 2e^{-3at} - 6e^{-4at}. \blacktriangleright$$

4 – m i s o l . *Agar* u, v, du, dv *hamda* d^2u, d^2v *lar ma'lum bo'lsa,* $d^2\left(\frac{u}{v}\right)$ *topilsin.*

◀Ta'rif hamda sodda qoidalardan foydalanib topamiz:

$$d^2\left(\frac{u}{v}\right) = d\left(d\left(\frac{u}{v}\right)\right) = d\left(\frac{vdu - udv}{v^2}\right) = \frac{v^2 d(vdu - udv) - (vdu - udv)dv^2}{v^4} =$$

$$= \frac{v^2(vd^2u + dvdu - ud^2v - dudv) - 2v(vdu - udv)dv}{v^4} =$$

$$= \frac{1}{v}d^2u - \frac{u}{v^2}d^2v - \frac{2}{v^2}dudv + \frac{2u}{v^3}dv^2. \blacktriangleright$$

Ikkinchi tartibli hosila topilsin:

1103. $y = x^2 + 13x + 11$

1104. $y = 1 + 10x + \dfrac{1}{x^{98}}$

1105. $y = \dfrac{x\left(1 + 3\sqrt{1 - x^2}\right)}{\sqrt{1 - x^2}}$

1106. $y = \cos^2 x$

1107. $y = sh^2x + ch^2x$

1108. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

1109. $y = \mathrm{arctg}\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

1110. $y = \mathrm{arctg}\dfrac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$

1111. $y = \arcsin\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

1112. $y = 2\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt[4]{x^4 + 1}}{x} - \ln\dfrac{\sqrt[4]{1 + x^4} + x}{\sqrt[4]{1 + x^4} - x}$

1113. $y(0)$, $y'(0)$ va $y''(0)$ lar topilsin:

$$y = e^{\sin x} \cdot \cos(\sin x)$$

Funksiyaning ikkinchi differensiali topilsin:

1114. $y = (x^2 + x + 1)e^{-x}$

1115. $y = 2x + \mathrm{ctg}2x$

1116. $y = x(\cos\ln x + \sin\ln x)$

1117. $y = x^x$

Agar $u=u(x)$, $\vartheta=\vartheta(x)$ - ikki marta differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsa, d^2y topilsin.

1118. $y=u\cdot\vartheta$

1119. $y=\dfrac{u}{\vartheta}$

1120. $y=u^m\cdot\vartheta^n$ (m va n-o'zgarmas sonlar)

1121. $y=a^u$

1122. $y=\ln\sqrt{u^2+\vartheta^2}$

1123. $y=\mathrm{arctg}\dfrac{u}{\vartheta}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ **topilsin:**

1124. $x=t^3,\quad y=t^2$

1125. $x=\dfrac{t^2}{1+t^3},\quad y=\dfrac{t^3}{1+t^3}$

1126. $x=\ln\cos t,\quad y=\ln\cos 2t$

1127. $x=a\cos t,\quad y=b\sin t$

1128. $x=(1+\cos^2 t)\sin t,\quad y=\sin^2 t\cos t$

1129. $x=t\,\mathrm{ch}t-\mathrm{sh}t,\quad y=t\,\mathrm{sh}t-\mathrm{ch}t$

1130. $x=\dfrac{e^t}{1+t},\quad y=(t-1)e^t$

1131. $x=\dfrac{1}{\cos t},\quad y=\mathrm{tg}t-t$

1132. $x=\sin\log_2 t,\quad y=\mathrm{tg}\log_2 t$

1133. $x=2^{\cos^2 t},\quad y=2^{\sin^2 t}$

Oshkormas ko'rinishda berilgan $y=y(x)$ funksiya uchun y'' topilsin:

1134. $x^2+y^2=a^2$

1135. $x^2-y^2=a^2$

1136. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

1137. $y^2=2px$

1138. $e^{x-y}=x+y$

1139. $e^{2y}-2\ln x-1=0$

1140. $y-x\,\mathrm{tg}\ln\sqrt{x^2+y^2}=0$

1141. $y^2=e^{x^4-y^2}$

Ko'rsatilgan tartibdagi hosilalar topilsin:

1142. $y = x(2x-1)^2(x+3)^3;\ \ y^{(6)}$ va $y^{(7)}$

1143. $y = \dfrac{a}{x^m};\ \ y'''$

1144. $y = \sqrt{x};\ \ y^{(10)}$

1145. $y = \dfrac{x^2}{1-x};\ \ y^{(8)}$

1146. $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}};\ \ y^{(100)}$

1147. $y = x^2 e^{2x};\ \ y^{(20)}$

1148. $y = \dfrac{e^x}{x};\ \ y^{(10)}$

1149. $y = x\ln x;\ \ y^{(5)}$

1150. $y = \dfrac{\ln x}{x};\ \ y^{(5)}$

1151. $y = x^2 \sin 2x;\ \ y^{(50)}$

1152. $y = \dfrac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}};\ \ y'''$

1153. $y = \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x;\ \ y^{(10)}$

1154. $y = x \cdot \text{sh} x;\ \ y^{(100)}$

1155. $y = e^x \cos x;\ \ y^{iv}$

1156. $y = \sin^2 x \cdot \ln x;\ \ y^{(6)}$

$y = y(x)$ funksiya uchun ko‘rsatilgan tartibdagi differensiallar topilsin:

1157. $y = x^5;\ \ d^5 y$

1158. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}};\ \ d^3 y$

1159. $y = x\cos 2x;\ \ d^{10} y$

1160. $y = e^x \ln x;\ \ d^4 y$

1161. $y = \cos x \cdot \text{ch} x;\ \ d^6 y$

1162. Oshkormas $y = y(x)$ funksiya berilgan tenglamani qanoatlantirishi isbotlansin:

1) $y = A\ln y + x + B,\ \ y \cdot y'' = (y')^2 - (y')^3$

2) $(A+Bx)e^{\frac{y}{x}} = x,\ \ x^3 y'' = (xy' - y)^2$

Quyidagi funksiyalar uchun $y^{(n)}(x)$ topilsin:

1163. $y = x^3 + x + e^{3x}$

1164. $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$

1165. $y = \dfrac{1+x}{1-x}$

1166. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

1167. $y = \ln(ax+b)$

1168. $y = \sin^2 x$

1169. $y = \sin ax \sin bx$

1170. $y = \operatorname{ch} ax \cdot \operatorname{ch} bx$

1171. $y = \sin^2 x \sin 2x$

1172. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

1173. $y = \cos^4 x$

1174. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$

1175. $y = \dfrac{x}{x^2 - 4x - 12}$

1176. $y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

1177. $y = \dfrac{3-2x^2}{2x^2+3x-2}$

$d^n y$ topilsin:

1178. $y = x^n e^x$

1179. $y = \dfrac{\ln x}{x}$

1180.Tenglik isbotlansin:

$$\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

Ko‘rsatma: Matematik induksiya usulini qo‘llang.

Test

1)Funksiyani n-tartibli hosilasi hisoblansin. $y(x)=\sin x$

A) $\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

B) $\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{3}\right)$

C) $\sin\left(x+(n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

D) $\sin\left(x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

2)Funksiyani n-tartibli hosilasi hisoblansin. $y(x)=\cos x$

A) $\sin\left(x+(n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

B) $\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{3}\right)$

C) $\cos\left(x+(n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

D) $\cos\left(x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

3)Funksiyani n-tartibli hosilasi hisoblansin. $y(x)=e^{2x+1}$

A) $2^n\cdot e^{2x+1}$

B) $2^n\cdot e^{x+1}$

C) $2^{n+1}\cdot e^{2x+1}$

D) $2^n\cdot e^x$

4)Funksiyani n-tartibli hosilasi hisoblansin. $y(x)=\cos 2x$

A) $2^n\cdot\cos\left(2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

B) $2^n\cdot\sin\left(2x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

C) $2^n\cdot\sin\left(2x+n\cdot\frac{\pi}{3}\right)$

D) $2^n\cdot\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

5)Funksiyani n-tartibli hosilasi hisoblansin. $y(x)=x^n$

A) $n!$

B) $(n-1)!$

C) 1

D) $n!!$

6)Funksiyani n-tartibli differsiali hisoblansin. $y(x)=x^n$

A) $n!\cdot(dx)^n$

B) $(n-1)!\cdot(dx)^n$

C) $(dx)^n$

D) $n!!(dx)^n$

7)Funksiyani 3-tartibli differsiali hisoblansin. $y(x)=x^3+x^2+8x+9$

A) $6\cdot(dx)^3$ B) $3\cdot(dx)^3$ C) $(dx)^3$ D) $2(dx)^3$

7)Funksiyani 3-tartibli differsiali hisoblansin. $y(x)=x^3+x^2+8x+9$

A) $6\cdot(dx)^3$ B) $3\cdot(dx)^3$ C) $(dx)^3$ D) $2(dx)^3$

8)Funksiyani 2-tartibli differsiali hisoblansin. $y(x)=x^3+x^2+8x+9$

A) $(6x+2)\cdot(dx)^2$

B) $(3x+1)\cdot(dx)^2$

C) $(6x+2)(dx)^3$

D) $(2x+2)(dx)^2$

9)Funksiyani 2-tartibli differsiali hisoblansin. $y(x)=\sin x+\cos x$

A) $(-\sin x-\cos x)(dx)^2$

B) $(-\sin x+\cos x)(dx)^2$

C) $(\sin x-\cos x)(dx)^2$

D) $(\sin x+\cos x)(dx)^2$

10) Funksiyani 2-tartibli differsiali hisoblansin. $y(x)=x^2+\cos x$

A) $(2-\cos x)(dx)^2$

B) $(2+\cos x)(dx)^2$

C) $(2-\cos 2x)(dx)^2$

D) $(2+\cos 2x)(dx)^2$

22-mavzu. Asosiy teoremalar

22-ma’ruza

Reja

1^0. Hosilaga ega bo‘lgan funksiyalar haqidagi teoremalar.
2^0. Funksiya hosilasinig uzilishi haqida.

([1] 6.5 Theorems of Rolle and of the Mean Value 181, [2] 10.2 Local maxima, local minima and derivatives, 295-bet) 1^0. Hosilaga ega bo‘lgan funksiyalar haqidagi teoremalar. Bu teoremlar funksiyalarni tekshirishda muhim rol o‘ynaydi.

1-teorema (Ferma teoremasi). $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan. $x_0 \in X$ nuqtaning atrofi uchun $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \subset X$ $(\delta > 0)$ bo‘lib, quyidagi shartlar bajarilsin:

1) $\forall x \in U_\delta(x_0)$ da $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$,

2) $f'(x_0)$ mavjud va chekli bo‘lsin.

U holda $f'(x_0) = 0$ bo‘ladi.

◄ Aytaylik, $\forall x \in U_\delta(x_0)$ da $f(x) \le f(x_0)$ bo‘lsin. Ravshanki, bu holda

$$f(x) - f(x_0) \le 0$$

bo‘ladi.

SHartga ko‘ra $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega. SHuning uchun

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

bo‘ladi. Ayni paytda, $x > x_0$ bo‘lganda

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \le 0,$$

$x < x_0$ bo‘lganda

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \ge 0$$

bo‘lishidan $f'(x_0) = 0$ ekani kelib chiqadi. ►

2-teorema (Roll teoremasi). Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a,\ b]$ da berilgan bo‘lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $f(x) \in C[a,\ b]$,

2) $\forall x \in (a,\, b)$ da $f'(x)$ mavjud va chekli,

3) $f(a) = f(b)$ bo‘lsin.

U holda shunday $x_0 \in (a,\, b)$ nuqta topiladiki, $f'(x_0) = 0$ bo‘ladi.

◀ SHartga ko‘ra $f(x) \in C[a,\, b]$. Unda Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga ko‘ra $f(x)$ funksiya $[a,\, b]$ da o‘zining eng katta va eng kichik qiymatlarga erishadi, ya’ni shunday $c_1,\ c_2$ nuqtalar $(c_1,\, c_2 \in [a,\, b])$ topiladiki,

$$f(c_1) = \max\{f(x) \mid x \in [a,\, b]\},$$
$$f(c_2) = \min\{f(x) \mid x \in [a,\, b]\}$$

bo‘ladi.

Agar $f(c_1) = f(c_2)$ bo‘lsa, unda $[a,\, b]$ da $f(x) = const$ bo‘lib, $\forall x_0 \in (a,\, b)$ da $f'(x_0) = 0$ bo‘ladi.

Agar $f(c_1) > f(c_2)$ bo‘lsa, unda $f(a) = f(b)$ bo‘lganligi sababli $f(x)$ funksiya $f(c_1)$ hamda $f(c_2)$ qiymatlarning kamida bittasiga $[a,\, b]$ segmentning ichki x_0 $(a < x_0 < b)$ nuqtasida erishadi. Ferma teoremasiga binoan $f'(x_0) = 0$ bo‘ladi. ▶

3-teorema (Lagranj teoremasi). Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a,\, b]$ da berilgan bo‘lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $f(x) \in C[a,\, b]$,

2) $\forall x \in (a,\, b)$ da $f'(x)$ hosila mavjud va chekli bo‘lsin.

U holda shunday $c \in (a,\, b)$ nuqta topiladiki,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

bo‘ladi.

◀ Ushbu

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{1}$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Ayni paytda, uning hosilasi

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

bo‘ladi.

Roll teoremasiga binoan, shunday c $(c \in (a,\, b))$ nuqta topiladiki,

$$F'(c) = 0 \tag{2}$$

bo‘ladi.

(1) va (2) munosabatlardan

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

ya’ni

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

bo‘lishi kelib chiqadi. ►

1-natija. Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lib, $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x) = 0$ bo‘lsin. U holda $\forall x \in (a, b)$ da $f(x) = const$ bo‘ladi.

◄ $x,\ x_0 \in (a, b)$ ni olib, chekkalari x va x_0 bo‘lgan segmentda $f(x)$ funksiyaga Lagranj teoremasini qo‘llab $f(x) = f(x_0) = const$ bo‘lishini topamiz. ►

2-natija. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalari (a, b) da $f'(x)$, $g'(x)$ hosilalarga ega bo‘lib, $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x) = g'(x)$ bo‘lsin. U holda $\forall x \in (a, b)$ da $f(x) = g(x) + const$ bo‘ladi.

◄ Bu natijaning isboti $f(x) - g(x)$ funksiyaga nisbatan 1-natijani qo‘llash bilan kelib chiqadi. ►

4-teorema (Koshi teoremasi). Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar quyidagi shartlarni bajarsin.

1) $f(x) \in C[a, b]$, $g(x) \in C[a, b]$,

2) $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar mavjud va chekli;

3) $\forall x \in (a, b)$ da $g'(x) \neq 0$ bo‘lsin.

U holda shunday $c \in (a, b)$ nuqta topiladiki,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo‘ladi.

◄ Avvalo $g(b) \neq g(a)$ bo‘lishini ta’kidlab o‘tamiz, chunki $g(b) = g(a)$ bo‘ladigan bo‘lsa, unda Roll teoremasiga ko‘ra shunday $c \in (a, b)$ nuqta topilar ediki, $g'(c) = 0$ bo‘lar edi. Bu 3)-shartga zid.

Quyidagi

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)] \quad (x \in [a, b])$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Unda Roll teoremasiga binoan shunday $c \in (a, b)$ nuqta topiladiki,

$$\Phi'(c) = 0 \tag{3}$$

bo‘ladi.

Ravshanki,

$$\Phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x) \tag{4}$$

(3) va (4) munosabatlardan

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0$$

ya’ni

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo‘lishi kelib chiqadi. ►

1-misol. $\forall x',\ x''\in R$ uchun $|\sin x'-\sin x''|\le|x'-x''|$ tengsizlik isbotlansin.

◄ Aytaylik, $x'<x''$ bo‘lsin. $f(x)=\sin x$ ga $[x',\ x'']$ da Lagranj teoremasini qo‘llaymiz. Unda shunday $c\in(x',\ x'')$ nuqta topiladiki,

$$|\sin x'-\sin x''|=|\cos c|\cdot(x''-x')$$

bo‘ladi. Agar $\forall t\in R$ da $|\cos t|\le 1$ ekanini e’tiborga olsak, unda yuqoridagi munosabatdan

$$|\sin x'-\sin x''|\le|x'-x''| \qquad (\forall x',\ x''\in R)$$

bo‘lishi kelib chiqadi. ►

2-misol. Ushbu

$$e^x\ge 1+x$$

tengsizlik isbotlansin.

◄ Aytaylik, $x>0$ bo‘lsin. Unda $f(t)=e^t$ funksiyaga $[0,\ x]$ da Lagranj teoremasini qo‘llab topamiz:

$$e^x-e^0=e^c(x-0). \qquad c\in(0,\ x)$$

Agar $c>0$ da $e^c>1$ bo‘lishini e’tiborga olsak, unda keyingi munosabatdan $e^x\ge 1+x$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Agar $x<0$ bo‘lsa, unda $f(t)=e^t$ funksiyaga $[x,\ 0]$ da Lagranj teoremasini qo‘llab,

$$e^x-e^0=e^c(0-x)$$

ni va $-x>0,\quad e^c<1$ bo‘lishini e’tiborga olib, $e^x\ge 1+x$ ekanligini topamiz.

Ravshanki, $x=0$ da $e^0=1$. Demak, $\forall x\in R$ da $e^x\ge 1+x$. ►

3-misol. Ushbu

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b} \qquad (0<b<a)$$

tengsizlik isbotlansin.

◄ $[b,\ a]$ segmentda $f(x)=\ln(x)$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya shu segmentda uzluksiz va $(b,\ a)$ da $f'(x)=\frac{1}{x}$ hosilaga ega. Unda Lagranj teoremasiga ko‘ra shunday $c\ \ (b<c<a)$ nuqta topiladiki,

$$\frac{\ln a-\ln b}{a-b}=\frac{1}{c} \tag{5}$$

bo‘ladi.

Ravshanki,

$$b < c < a \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} < \frac{1}{c} < \frac{1}{b}. \tag{6}$$

(5) va (6) munosabatlardan

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$$

bo‘lishi kelib chiqadi. ►

Mashqlar

1. Agar $f(x)$ funksiya (a, b) da chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, uning shu (a, b) da tekis uzluksiz bo‘lishi isbotlansin.

2. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x \geq x_0$ da chekli hosilalar: $f'(x),\ g'(x)$ ga ega bo‘lib,

$$f(x_0) = g(x_0), \quad x > x_0 \quad \text{да} \quad f'(x) > g'(x)$$

bo‘lsa, u holda $x > x_0$ da $f(x) > g(x)$ bo‘lishi isbotlansin.

3. $\forall x > -1$ uchun

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

tengsizliklarning o‘rinli bo‘lishi isbotlansin.

Adabiyotlar

1. **Canuto C., Tabacco A. -** Mathematical Analysis I, **Italy 2008.**
2. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
3. **Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma’rizalar, I q.* T. “Voris-nashriyot”, 2010.
4. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.

Glossariy

1-teorema (Ferma teoremasi). $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan. $x_0 \in X$ nuqtaning atrofi uchun $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \subset X$ $(\delta > 0)$ bo‘lib, quyidagi shartlar bajarilsin:

1) $\forall x \in U_\delta(x_0)$ da $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$,
2) $f'(x_0)$ mavjud va chekli bo‘lsin.

U holda $f'(x_0) = 0$ bo‘ladi.

2-teorema (Roll teoremasi). Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da berilgan bo‘lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $f(x) \in C[a, b]$,
2) $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ mavjud va chekli,
3) $f(a) = f(b)$ bo‘lsin.

U holda shunday $x_0 \in (a, b)$ nuqta topiladiki, $f'(x_0) = 0$ bo‘ladi.

3-teorema (Lagranj teoremasi). Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da berilgan bo‘lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

3) $f(x) \in C[a, b]$,
4) $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ hosila mavjud va chekli bo‘lsin.

U holda shunday $c \in (a, b)$ nuqta topiladiki,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

bo‘ladi.

4-teorema (Koshi teoremasi). Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar quyidagi shartlarni bajarsin.

1) $f(x) \in C[a, b]$, $g(x) \in C[a, b]$,
2) $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar mavjud va chekli;
3) $\forall x \in (a, b)$ da $g'(x) \ne 0$ bo‘lsin.

U holda shunday $c \in (a, b)$ nuqta topiladiki,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo‘ladi.

Keys banki

22-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: Agar $f(x)$ funksiya $(a,\, b)$ da chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, uning shu $(a,\, b)$ da tekis uzluksiz bo‘lishi isbotlansin.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

22-amaliy mashg`ulot

1 – m i s o l . ***Ushbu***

$$f(x)=2-\sqrt[3]{x^2}$$

funksiyaga $[-1,1]$ ***oraliqda Roll teoremasini qo'llash mumkinmi?***

◀Ravshanki, berilgan funksiya $(-\infty,+\infty)$ oraliqda, jumladan $[-1,1]$ da uzluksiz. $[-1,1]$ oraliqning chetlarida

$$f(-1)=1-\sqrt[3]{(-1)^2}=1-1=0,$$
$$f(1)=1-\sqrt[3]{1^2}=1-1=0$$

bo'lib, $f(-1)=f(1)$ bo'ladi. $f(x)$ funksiyaning hosilasi $x\neq 0$ bo'lganda

$$f'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

bo'lib, $x=0$ nuqtada mavjud emas. Binobarin, Roll teoremasining $(-1,1)$ da chekli hosila mavjud bo'lishi sharti bajarilmaydi. SHuning uchun berilgan funksiyaga Roll teoremasini qo'llab bo'lmaydi.▶

2 – m i s o l . ***Ushbu***

$$fx=4x^3-5x^2+x-2$$

funksiyaga $[0,2]$ ***oraliqda Lagranj teoremasini tadbiq etib, undagi*** c ***nuqta topilsin.***

◀Berilgan funksiyaning $[0,2]$ oraliqda Lagranj teoremasining shartlarini bajarishi ravshan. Lagranj teoremasiga binoan

$$f(2)-f(0)=f'(c)\cdot(2-0)$$

bo'ladi. Berilgan funksiya uchun

$$f(2)=12,\quad f(0)=-2,\quad f'(x)=12x^2-10x+1,$$
$$f'(c)=12c^2-10c+1$$

bo'lib,

$$12-(-2)=f'(c)\cdot 2$$

bo'ladi. Natijada

$$12c^2-10c-6=0$$

kvadrat tenglamaga kelamiz. Bu kvadrat tenglamaning echimlari

$$c_1=\frac{5+\sqrt{97}}{12},\quad c_2=\frac{5-\sqrt{97}}{12}$$

bo'lib, ulardan c_1 echim $[0,2]$ ga tegishli bo'ladi.▶

1181. $f(x)=x(x^2-1)$ funksiya uchun $[-1,1]$ va $[0,1]$ oraliqlarda Roll teoremasining shartlari tekshirilsin..

1182. $f(x)=(x^2-1)(x-2)$ funksiya uchun $(-1,1)$ va $(1,2)$ intervallarda shunday nuqtalar topilsinki, bu nuqtalarda funksiya grafigiga o‘tkazilgan urinmalar abssissalar o‘qiga parallel bo‘lsin.

1183. Haqiqiy koeffitsentli ko‘phad faqat haqiqiy ildizlarga ega bo‘lsa, uning barcha hosilalari ham faqat haqiqiy ildizlarga ega ekani isbotlansin.

1184. Haqiqiy koeffitsentli ko‘phadning ikkita haqiqiy ildizlari orasida uning hosilasining ildizi ham bor ekani isbotlansin.

1185. Agar f funksiya $[a,b]$ kesmada n marotaba differensiallanuvchi va bu kesmaning $n+1$ ta nuqtasida nolga aylansa, u holda $f^{(n)}(\xi)=0$ bo‘ladigan $\xi\in(a,b)$ nuqtaning mavjudligi isbotlansin.

1186. Ushbu

$$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

ko‘phadning hosilasining ildizlari haqiqiy, tub va $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;3)$, $(3;4)$ intervallarda yotishi isbotlansin.

1187. $y=x^3$ egri chizig‘ida shunday nuqta topilsinki, bu nuqtada unga o‘tkazilgan urinma $A(-1;-1)$ va $B(2;8)$ nuqtalarni tutashtiruvchi vatarga parallel bo‘lsin.

1188. $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiyasi uchun $[a,b]$ kesmada $(a\cdot b<0)$ chekli orttirmalar formulasi (Lagranj formulasi) o‘rinlimi?

1189. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsin. (a,b) da yotuvchi ixtiyoriy ξ nuqta uchun

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)\qquad (a<x_1<\xi<x_2<b)$$

munosabat o‘rinli bo‘ladigan x_1, x_2 nuqtalarini ko‘rsatish (topish) mumkinmi? Ushbu misolni qarang: $f(x)=x^3$ $(-1\le x\le 1)$, $\xi=0$.

1190. Lagranj teoremasidan foydalanib, tengsizliklar isbotlansin:

а) $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$;

б) $py^{p-1}(x-y) \le x^p - y^p \le px^{p-1}(x-y)$, bu erda $0 < y < 1$ va $p > 1$;

в) $|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \le |a - b|$;

г) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad x > 0$;

д) $e^x > 1 + x, \quad x \in R$;

е) $e^x > ex, \quad x > 1$.

Test

1) $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+...+a_n(x-x_0)^n+R_n(x)$ .Funksiyani a_3 ni hisoblang. $f(x)=\cos x$ $x=0$ nuqtada.

A) 0 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{6!}$

2) $f(x)=e^x$ funksiyani $x=0$ nuqtada Teylor (Маклорен) qatoriga yoyilmasini toping.

A) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+..+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),\quad x\to 0$

B) $e^x=1+x+x^2+x^3+..+x^n+o(x^n),\quad x\to 0$

C) $e^x=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+..+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+o(x^n),\quad x\to 0$

D) $e^x=1+x+2!\cdot x^2+3!\cdot x^3+..+n!\cdot x^n+o(x^n),\quad x\to 0$

3) $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+...+a_n(x-x_0)^n+R_n(x)$ .Funksiyani a_5 ni hisoblang. $f(x)=\sin x$ $x=0$ nuqtada.

A) $\frac{1}{5!}$ B) $\frac{1}{3!}$ C) $\frac{1}{6!}$ D) $\frac{1}{24}$

4) $f(x)=\ln(1+x)$ funksiyani $x=0$ nuqtada Teylor (Маклорен) qatoriga yoyilmasi to'g'ri berilgan qatorni toping.

A) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k x^k}{k}+o(x^n)$ B) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}+o(x^n)$ C) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k x^k}{k!}+o(x^n)$ D) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}+o(x^n)$

5) $f(x)=\ln(1-x)$ funksiyani $x=0$ nuqtada Teylor (Маклорен) qatoriga yoyilmasi to'g'ri berilgan qatorni toping.

A) $-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+o(x^n)$ B) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}+o(x^n)$ C) $-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)$ D) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}+o(x^n)$

6) $f(x)=\frac{1}{3x+2}$ funksiyani $x=0$ nuqtada Teylor (Маклорен) qatoriga yoyilmasi to'g'ri berilgan qatorni toping.

A) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{3^k}{2^{k+1}}x^k+o(x^n)$ B) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{3^{k+1}}{2^k}x^k+o(x^n)$

C) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{3^{k+1}}{2^{k+1}}x^k+o(x^n)$ D) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{3^{k+1}}{2^{k+1}}x^k+o(x^n)$

7) Lagranj ko'rinishidagi qoldiq had berilgan qatorni toping.

A) $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ B) $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)^{n+1}$ C) $R_n(x)=\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^{n+1}$

D) $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

8) $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\in R$ funksiyani $x=0$ nuqtada Teylor (Маклорен) qatoriga yoyilmasi to'g'ri berilgan qatorni toping.

A) $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}x^k+o(x^n)$ B) $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k)}{k!}x^k+o(x^n)$

C) $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k)}{(k+1)!}x^k+o(x^n)$ D) $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k-1)}{k!}x^k+o(x^n)$

9) $f(x)=e^{2x}$ funksiyani $x=0$ nuqtada Teylor (Маклорен) qatoriga yoyilmasini toping.

A) $e^{2x}=1+2x+\dfrac{4x^2}{2!}+\dfrac{8x^3}{3!}+..+\dfrac{2^n x^n}{n!}+o(x^n),\quad x\to 0$

B) $e^{2x}=1+2x+4x^2+8x^3+..+2^n x^n+o(x^n),\quad x\to 0$

C) $e^{2x}=1-2x+\dfrac{4x^2}{2!}-\dfrac{8x^3}{3!}+..+(-2)^n\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n),\quad x\to 0$

D) $e^{2x}=1+x+2!\cdot x^2+3!\cdot x^3+..+n!\cdot x^n+o(x^n),\quad x\to 0$

10) Makloren qatori berilgan qatorni toping.

A) $f(x)=f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+...+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n),\quad (x\to 0)$

B) $f(x)=f(1)+\dfrac{f'(1)}{1!}(x-1)+\dfrac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+...+\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n+o(x^n),\quad (x\to 1)$

C) $f(x)=f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}(x-1)+\dfrac{f''(0)}{2!}(x-1)^2+...+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-1)^n+o(x^n),\quad (x\to 1)$

D) $f(x)=f(0)+\dfrac{f'(0)}{2!}x+\dfrac{f''(0)}{3!}x^2+...+\dfrac{f^{(n)}(0)}{(n+1)!}x^n+o(x^n),\quad (x\to 0)$

23-mavzu. Asosiy teoremalar natijalari. Koshi teoremasi

23-ma’ruza

Reja

1^0. Lagranj teoremasi natijalari.
2^0. Koshi teoremasi.

1^0. Lagranj teoremasi natijalari.

([1] 6.5 Theorems of Rolle and of the Mean Value 181, [2] 10.2 Local maxima, local minima and derivatives, 295-bet) Lagranj teoremasi. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da berilgan bo‘lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

5) $f(x) \in C[a, b]$,

6) $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ hosila mavjud va chekli bo‘lsin.

U holda shunday $c \in (a, b)$ nuqta topiladiki,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

bo‘ladi.

◄ Ushbu

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{1}$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Ayni paytda, uning hosilasi

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

bo‘ladi.

Roll teoremasiga binoan, shunday c $(c \in (a, b))$ nuqta topiladiki,

$$F'(c) = 0 \tag{2}$$

bo‘ladi.

(1) va (2) munosabatlardan

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

ya’ni

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

bo‘lishi kelib chiqadi. ►

1-natija. Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lib,

$\forall x \in (a,\ b)$ da $f'(x)=0$ bo‘lsin. U holda $\forall x \in (a,\ b)$ da $f(x)=const$ bo‘ladi.

◀ $x,\ x_0 \in (a,\ b)$ ni olib, chekkalari x va x_0 bo‘lgan segmentda $f(x)$ funksiyaga Lagranj teoremasini qo‘llab $f(x)=f(x_0)=const$ bo‘lishini topamiz. ▶

2-natija. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalari $(a,\ b)$ da $f'(x)$, $g'(x)$ hosilalarga ega bo‘lib, $\forall x \in (a,\ b)$ da $f'(x)=g'(x)$ bo‘lsin. U holda $\forall x \in (a,\ b)$ da $f(x)=g(x)+const$ bo‘ladi.

◀ Bu natijaning isboti $f(x)-g(x)$ funksiyaga nisbatan 1-natijani qo‘llash bilan kelib chiqadi. ▶

2^0. 4-teorema (Koshi teoremasi). Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar quyidagi shartlarni bajarsin.

1) $f(x) \in C[a,\ b]$, $g(x) \in C[a,\ b]$,

2) $\forall x \in (a,\ b)$ da $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar mavjud va chekli;

3) $\forall x \in (a,\ b)$ da $g'(x) \neq 0$ bo‘lsin.

U holda shunday $c \in (a,\ b)$ nuqta topiladiki,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo‘ladi.

◀ Avvalo $g(b) \neq g(a)$ bo‘lishini ta’kidlab o‘tamiz, chunki $g(b)=g(a)$ bo‘ladigan bo‘lsa, unda Roll teoremasiga ko‘ra shunday $c \in (a,\ b)$ nuqta topilar ediki, $g'(c)=0$ bo‘lar edi. Bu 3)-shartga zid.

Quyidagi

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)] \quad (x \in [a,\ b])$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Unda Roll teoremasiga binoan shunday $c \in (a,\ b)$ nuqta topiladiki,

$$\Phi'(c) = 0 \tag{3}$$

bo‘ladi.

Ravshanki,

$$\Phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x) \tag{4}$$

(3) va (4) munosabatlardan

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0$$

ya’ni

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo‘lishi kelib chiqadi. ►

1-misol. $\forall x',\ x''\in R$ uchun $|\sin x'-\sin x''|\leq|x'-x''|$ tengsizlik isbotlansin.

◄ Aytaylik, $x'<x''$ bo‘lsin. $f(x)=\sin x$ ga $[x',\ x'']$ da Lagranj teoremasini qo‘llaymiz. Unda shunday $c\in(x',\ x'')$ nuqta topiladiki,

$$|\sin x'-\sin x''|=|\cos c|\cdot(x''-x')$$

bo‘ladi. Agar $\forall t\in R$ da $|\cos t|\leq 1$ ekanini e’tiborga olsak, unda yuqoridagi munosabatdan

$$|\sin x'-\sin x''|\leq|x'-x''| \qquad (\forall x',\ x''\in R)$$

bo‘lishi kelib chiqadi. ►

2-misol. Ushbu

$$e^x\geq 1+x$$

tengsizlik isbotlansin.

◄ Aytaylik, $x>0$ bo‘lsin. Unda $f(t)=e^t$ funksiyaga $[0,\ x]$ da Lagranj teoremasini qo‘llab topamiz:

$$e^x-e^0=e^c(x-0). \qquad c\in(0,\ x)$$

Agar $c>0$ da $e^c>1$ bo‘lishini e’tiborga olsak, unda keyingi munosabatdan $e^x\geq 1+x$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Agar $x<0$ bo‘lsa, unda $f(t)=e^t$ funksiyaga $[x,\ 0]$ da Lagranj teoremasini qo‘llab,

$$e^x-e^0=e^c(0-x)$$

ni va $-x>0$, $e^c<1$ bo‘lishini e’tiborga olib, $e^x\geq 1+x$ ekanligini topamiz.

Ravshanki, $x=0$ da $e^0=1$. Demak, $\forall x\in R$ da $e^x\geq 1+x$. ►

3-misol. Ushbu

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b} \qquad (0<b<a)$$

tengsizlik isbotlansin.

◄ $[b,\ a]$ segmentda $f(x)=\ln(x)$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya shu segmentda uzluksiz va $(b,\ a)$ da $f'(x)=\frac{1}{x}$ hosilaga ega. Unda Lagranj teoremasiga ko‘ra shunday c $(b<c<a)$ nuqta topiladiki,

$$\frac{\ln a-\ln b}{a-b}=\frac{1}{c} \tag{5}$$

bo‘ladi.

Ravshanki,

$$b<c<a \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a}<\frac{1}{c}<\frac{1}{b}. \tag{6}$$

(5) va (6) munosabatlardan

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$$

bo‘lishi kelib chiqadi. ►

2⁰. Funksiya hosilasinig uzilishi haqida. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $(a,\, b)$ ning x_0 nuqtasidan boshqa barcha nuqtalarida $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lib, funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsin.

Agar $\lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x)=b$ limit mavjud bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chap hosila $f'(x_0-0)$ ga ega bo‘lib, $f'(x_0-0)=b$ bo‘ladi.

Agar $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x)=d$ limit mavjud bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o‘ng hosila $f'(x_0+0)$ ga ega bo‘lib, $f'(x_0+0)=d$ bo‘ladi.

◄ Aytaylik, $\Delta x\neq 0$ va $x_0+\Delta x\in(a,\, b)$ bo‘lsin. Lagranj teoremasidan foydalanib topamiz:

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0+\theta\cdot\Delta x), \quad (0<\theta<1).$$

Endi

$$\lim_{x\to x_0-0} f'(x)=b$$

mavjud bo‘lsin deylik. Unda

$$\lim_{x\to x_0-0} f'(x)=\lim_{x-x_0\to -0} f'(x)=\lim_{\Delta x\to -0} f'(x_0+\Delta x)=b$$

bo‘lib,

$$\Delta x\to -0 \text{ da } \ f'(x_0+\theta\cdot\Delta x)\to b,$$

ya’ni

$$\Delta x\to -0 \text{ da } \quad \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\to b$$

bo‘ladi. Demak, $f'(x_0-0)=b$. SHunga o‘xshash, $f'(x_0+0)=d$ bo‘lishi ko‘rsatiladi. ►

Aytaylik, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo‘lsin. Unda, ravshanki,

$$f'(x_0-0)=f'(x_0+0)=f'(x_0)$$

bo‘ladi. Ayni paytda,

$$\lim_{x\to x_0-0} f'(x), \quad \lim_{x\to x_0+0} f'(x)$$

limitlarnig mavjud va chekli bo‘lishidan

$$\lim_{x\to x_0-0} f'(x)=\lim_{x\to x_0+0} f'(x)=f'(x_0)$$

bo‘lishi kelib chiqadi. ►

Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: agar $f(x)$ funksiya (a, b) da $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, u holda bu $f'(x)$ hosila birinchi tur uzilishga ega bo‘lolmaydi.

Boshqacha aytganda har bir $x_0 \in (a, b)$ nuqtada $f'(x)$ funksiya yoki uzluksiz bo‘ladi, yoki ikkinchi tur uzilishga ega bo‘ladi. ►

4-misol. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса}, \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

funksiyani qaraylik.

◄ $x \neq 0$ bo‘lganda

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

bo‘ladi.

$x = 0$ bo‘lganda, hosila ta’rifiga ko‘ra

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = 0$$

bo‘ladi.

Demak, $f'(x)$ funksiya R da aniqlangan va $x \neq 0$ da uzluksiz bo‘ladi. $f'(x)$ hosila $x = 0$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega bo‘ladi, chunki $x \to 0$ da

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

funksiya limitga ega emas. ►

Mashqlar

1. Agar $f(x)$ funksiya (a, b) da chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, uning shu (a, b) da tekis uzluksiz bo‘lishi isbotlansin.

2. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x \geq x_0$ da chekli hosilalar: $f'(x),\ g'(x)$ ga ega bo‘lib,

$$f(x_0) = g(x_0), \quad x > x_0 \quad \text{да} \quad f'(x) > g'(x)$$

bo‘lsa, u holda $x > x_0$ da $f(x) > g(x)$ bo‘lishi isbotlansin.

4. $\forall x > -1$ uchun

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

tengsizliklarning o‘rinli bo‘lishi isbotlansin.

Adabiyotlar

1. **Canuto C., Tabacco A. -** Mathematical Analysis I, **Italy 2008.**
2. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
3. **Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'rizalar, I q*. T. "Voris-nashriyot", 2010.
4. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.

Glossariy

1-teorema (Ferma teoremasi). $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan. $x_0 \in X$ nuqtaning atrofi uchun $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \subset X$ $(\delta > 0)$ bo‘lib, quyidagi shartlar bajarilsin:

1) $\forall x \in U_\delta(x_0)$ da $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$,
2) $f'(x_0)$ mavjud va chekli bo‘lsin.

U holda $f'(x_0) = 0$ bo‘ladi.

2-teorema (Roll teoremasi). Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da berilgan bo‘lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $f(x) \in C[a, b]$,
2) $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ mavjud va chekli,
3) $f(a) = f(b)$ bo‘lsin.

U holda shunday $x_0 \in (a, b)$ nuqta topiladiki, $f'(x_0) = 0$ bo‘ladi.

3-teorema (Lagranj teoremasi). Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da berilgan bo‘lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

7) $f(x) \in C[a, b]$,
8) $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ hosila mavjud va chekli bo‘lsin.

U holda shunday $c \in (a, b)$ nuqta topiladiki,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

bo‘ladi.

4-teorema (Koshi teoremasi). Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar quyidagi shartlarni bajarsin.

1) $f(x) \in C[a, b]$, $g(x) \in C[a, b]$,
2) $\forall x \in (a, b)$ da $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar mavjud va chekli;
3) $\forall x \in (a, b)$ da $g'(x) \ne 0$ bo‘lsin.

U holda shunday $c \in (a, b)$ nuqta topiladiki,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo‘ladi.

Keys banki

23-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: Quyidagi tasdiq isbotlansin (Koshi teoremasi): Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar quyidagi shartlarni bajarsin.

1) $f(x)\in C[a,\, b]$, $g(x)\in C[a,\, b]$,

2) $\forall x\in(a,\, b)$ da $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar mavjud va chekli;

3) $\forall x\in(a,\, b)$ da $g'(x)\neq 0$ bo‘lsin.

U holda shunday $c\in(a,\, b)$ nuqta topiladiki,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo‘ladi.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

23-amaliy mashg`ulot

1 – m i s o l . ***Ushbu***

$$fx = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$$

funksiyaga $[0,2]$ ***oraliqda Lagranj teoremasini tadbiq etib, undagi*** c ***nuqta topilsin.***

◀Berilgan funksiyaning $[0,2]$ oraliqda Lagranj teoremasining shartlarini bajarishi ravshan. Lagranj teoremasiga binoan

$$f(2) - f(0) = f'(c) \cdot (2 - 0)$$

bo‘ladi. Berilgan funksiya uchun

$$f(2) = 12, \quad f(0) = -2, \quad f'(x) = 12x^2 - 10x + 1,$$

$$f'(c) = 12c^2 - 10c + 1$$

bo‘lib,

$$12 - (-2) = f'(c) \cdot 2$$

bo‘ladi. Natijada

$$12c^2 - 10c - 6 = 0$$

kvadrat tenglamaga kelamiz. Bu kvadrat tenglamaning echimlari

$$c_1 = \frac{5 + \sqrt{97}}{12}, \quad c_2 = \frac{5 - \sqrt{97}}{12}$$

bo‘lib, ulardan c_1 echim $[0,2]$ ga tegishli bo‘ladi.▶

1188. $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiyasi uchun $[a, b]$ kesmada $(a \cdot b < 0)$ chekli orttirmalar formulasi (Lagranj formulasi) o‘rinlimi?

1189. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsin. (a, b) da yotuvchi ixtiyoriy ξ nuqta uchun

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \qquad (a < x_1 < \xi < x_2 < b)$$

munosabat o‘rinli bo‘ladigan x_1, x_2 nuqtalarini ko‘rsatish (topish) mumkinmi? Ushbu misolni qarang: $f(x) = x^3 \;\; (-1 \le x \le 1)$, $\xi = 0$.

1190. Lagranj teoremasidan foydalanib, tengsizliklar isbotlansin:

ж) $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$;

з) $py^{p-1}(x-y) \le x^p - y^p \le px^{p-1}(x-y)$, bu erda $0<y<1$ va $p>1$;

и) $|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \le |a-b|$;

к) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad x>0$;

л) $e^x > 1+x, \quad x \in R$;

м) $e^x > ex, \quad x>1$.

1191. Quyidagi

$$f(x)=x^2 \qquad \text{va} \qquad g(x)=x^3$$

funksiyalar uchun $[-1;1]$ kesmada Koshi formulasi o‘rinli emasligi tushuntirilsin.

1192. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[x_1, x_2]$ $(x_1 \cdot x_2 > 0)$ kesmada differensiallanuvchi bo‘lsin. Quyidagi isbotlansin:

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi), \text{ bu erda } x_1 < \xi < x_2.$$

1193. Agar $f(x)$ funksiya $x>0$ nuqtalarda differensiallanuvchi bo‘lib, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$ bo‘lsa, u holda

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

bo‘lishi isbotlansin.

1194. Agar $f(x)$ funksiya $x>0$ nuqtalarda differensiallanuvchi bo‘lib,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{x\to+\infty} |f'(x)| = 0$ ekani isbotlansin.

1195. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda differensiallanuvchi va chegaralanmagan bo‘lsa, u holda uning hosilasi ham chegaralanmaganligi isbotlansin.

1196. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada differensiallanuvchi bo‘lib, $f(a)=f(b)$

bo‘lsa, u holda $\exists\, \xi \in (a,b)$ mavjud bo‘lib,

$$f(a)-f(\xi)=\frac{1}{2}\xi f'(\xi)$$

munosabat o‘rinliligini isbotlansin.

1197. Isbotlansin:

a) $2\operatorname{arctg}x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn}x,\quad |x|\ge 1$;

б) $3\arccos x-\arccos\left(3x-4x^3\right)=\pi,\quad |x|\le\frac{1}{2}$.

Test

1) Differensial hisoblansin. $d(x^{2016})=?$

A) $2016x^{2015}dx$

B) $2016x^{2016}dx$

C) $2015x^{2015}dx$

D) $-2016x^{2015}dx$

2) Differensial hisoblansin. $d(\cos x+tgx)=?$

A) $\left(-\sin x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

B) $\left(-\sin x-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

C) $\left(-\sin x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$

D) $\left(-\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx(\ )$

3) Differensial hisoblansin. $d(\cos 2x+e^{2x})=?$

A) $\left(-\sin x+2e^{2x}\right)dx$

B) $\left(\sin x-2e^{2x}\right)dx$

C) $\left(\sin x+2e^{x}\right)dx$

D) $\left(\sin x+e^{2x}\right)dx$

4) Differensial hisoblansin. $d(\cos 2x\cdot e^{2x})=?$

A) $\left(-2\sin 2x\cdot e^{2x}+2\cos 2x\cdot e^{2x}\right)dx$

B) $\left(-2\sin x\cdot e^{2x}+2\cos 2x\cdot e^{2x}\right)dx$

C) $\left(-2\sin 2x\cdot e^{2x}+\cos x\cdot e^{2x}\right)dx$

D) $\left(-2\sin x\cdot e^{2x}+2\cos x\cdot e^{2x}\right)dx$

5) Differensial hisoblansin. $d(x^{2016}\cdot e^{2x})=?$

A) $x^{2016}\cdot d\left(e^{2x}\right)+e^{2x}\cdot d\left(x^{2016}\right)$

B) $x^{2016}\cdot d\left(e^{2x}\right)+e^{2x}\cdot x^{2016}\cdot d\left(x\right)$

C) $x^{2016}\cdot d\left(e^{2x}\right)+e^{2x}\cdot 2016\cdot x^{2016}\cdot d\left(x\right)$

D) $x^{2016}\cdot e^{2x}\cdot d\left(x\right)+e^{2x}\cdot 2016\cdot x^{2015}\cdot d\left(x\right)$

6)Differensial hisoblansin. $d(x^{2016}\cdot\cos x)=?$

A) $x^{2016}\cdot d\left(\cos x\right)+\cos x\cdot d\left(x^{2016}\right)$

B) $x^{2016}\cdot d\left(\cos x\right)+\cos x\cdot 2016\cdot x^{2016}\cdot d\left(x\right)$

C) $-x^{2016}\cdot\sin x\cdot d\left(x\right)+\cos x\cdot 2016\cdot x^{2016}\cdot d\left(x\right)$

D) $-x^{2016}\cdot\sin x\cdot d\left(x\right)-\cos x\cdot 2016\cdot x^{2015}\cdot d\left(x\right)$

7)Differensial hisoblansin. $d(\cos x)=?$

A) $-\sin x\cdot d(x)$

B) $\sin x\cdot d(x)$

C) $\sin x$

D) $-\sin x$

8)Differensial hisoblansin. $d(\ln\left(2x+1\right))=?$

A) $\dfrac{2}{2x+1}d(x)$

B) $\dfrac{1}{2x+1}d(x)$

C) $-\dfrac{2}{2x+1}d(x)$

D) $\dfrac{2}{2x+1}$

9)Differensial hisoblansin. $d(x+\cos x\cdot ctgx)=?$

A) $\left(1-\sin x\cdot ctgx-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\right)d(x)$

B) $\left(1+\sin x\cdot ctgx-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\right)d(x)$

C) $\left(1-\sin x\cdot ctgx+\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\right)d(x)$

D) $\left(1+\sin x\cdot ctgx+\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\right)d(x)$

10) Taqribiy hisoblang. $\sin 29^\circ=?$

A) $0,4848$

B) $0,4747$

C) $0,4546$

D) $0,4948$

24-mavzu. Teylor formulasi

24-ma'ruza

Reja

1^0. Ko'phad uchun Teylor formulasi.
2^0. Ixtiyoriy funksiyaning Teylor formulasi va uning qoldiq hadlari.
3^0. Ba'zi funksiyalarning Teylor formulalari.

([1], 7.1 Taylor formulas,223-bet) 1^0. Ko'phad uchun Teylor formulasi. Ushbu

$$P(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \ldots + b_n(x - x_0)^n \qquad (1)$$

funksiyani (n - darajali ko'phadni) qaraylik, bunda $x_0 \in R$ va $b_0, b_1, \ldots, b_n$ - haqiqiy sonlar. Bu $b_0, b_1, \ldots, b_n$ lar quyidagicha ham aniqlanishi mumkin:

(1) tenglikda $x = x_0$ deyilsa,

$$b_0 = P(x_0)$$

bo'ladi;

$P(x)$ funksiyani differensiallab,

$$P'(x) = 1 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 \cdot (x - x_0) + \ldots + n \cdot b_n (x - x_0)^{n-1}$$

va bu tenglikda $x = x_0$ deb

$$b_1 = \frac{P'(x_0)}{1!}$$

bo'lishini topamiz.

$P(x)$ funksiyani ikki marta differensiallab

$$P''(x) = 2 \cdot 1 \cdot b_2 + \ldots + n(n-1) \cdot b_n (x - x_0)^{n-2}$$

va bu tenglikda $x = x_0$ deb topamiz:

$$b_2 = \frac{P''(x_0)}{2!}.$$

Bu jarayonni davom ettira borib, $\forall k \geq 0$ da

$$b_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}$$

bo'lishini topamiz.

Natijada $P(x)$ ko'phad quyidagi ko'rinishga keladi:

$$P(x)=P(x_0)+\frac{P'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (2)$$

Demak, $P(x)$ ko‘phad o‘zining hamda hosilalarining biror nuqtasidagi qiymati bilan to‘liq aniqlanar ekan. (2) formula $P(x)$ ko‘phad uchun Teylor formulasi deyiladi.

2^0. Ixtiyoriy funksiyaning Teylor formulasi va uning qoldiq hadlari. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo‘lib, $x_0 \in (a,b)$ bo‘lsin. Bu funksiya x_0 nuqtaning

$$\cup_\delta (x_0)=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\subset(a,b) \quad \delta>0$$

atrofida $f'(x),\ f''(x),...,f^{(n)}(x),\ f^{(n+1)}(x)$ hosilalarga ega bo‘lsin. Funksiya hosilalaridan foydalanib, ushbu

$$P_n(f;x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

ko‘phadni tuzamiz.

Agar $f(x)$ funksiya $n-$darajali ko‘phad bo‘lsa, ravshanki,

$$f(x)=P_n(f;x)$$

bo‘ladi.

Agar $f(x)$ funksiya ko‘phad bo‘lmasa,

$$f(x)\neq P_n(f;x)$$

bo‘lib, ular orasidagi farq yuzaga keladi. Uni $R_n(x)$ orqali belgilaymiz:

$$R_n(x)=f(x)-P_n(f;x).$$

Natijada ushbu

$$f(x)=P_n(f;x)+R_n(x)$$

ya’ni,

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \qquad (3)$$

formulaga kelamiz. Bu (3) formula $f(x)$ funksiyaning Teylor formulasi deyiladi. (3) formuladagi $R_n(x)$ esa Teylor formulasining qoldiq hadi deyiladi.

Endi qoldiq had $R_n(x)$ ni aniqlaymiz. x_0 nuqtaning $\cup_\delta(x_0)$ atrofidagi x ni tayinlab, ushbu

$$F(t)=f(x)-f(t)-\frac{f'(t)}{1!}(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+...+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

funksiyani $[x_0,x]\subset\cup_\delta(x_0)$ (yoki $[x,x_0]\subset\cup_\delta(x_0)$) da qaraymiz.

Bu funksiya $[x_0,x]$ segmentda uzluksiz bo‘lib, (x_0,x) da hosilaga ega bo‘ladi:

$$F'(t)=-f'(t)-\left[\frac{f'(t)}{1!}(x-t)-f'(t)\right]-\left[\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2-\frac{f'(t)}{1!}(x-t)\right]-\ldots-$$

$$-\left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\right]=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Demak,

$$F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Endi $[x_0,x]$ da uzluksiz, (x_0,x) da chekli (nolga teng bo‘lmagan) hosilaga ega $\phi(x)$ funksiyani olib, $F(x)$ va $\phi(x)$ funksiyalarga $[x_0,x]$ da Koshi teoremasini qo‘llaymiz. Natijada quyidagi

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{\phi(x)-\phi(x_0)}=\frac{F'(c)}{\phi'(c)} \qquad (4)$$

tenglikka kelamiz, bunda $c=x_0+\theta(x-x_0)$ $(0<\theta<1)$.

Ravshanki,

$$F(x)=0,\quad F(x_0)=R_n(x),\quad F'(c)=-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Unda (4) tenglikdan

$$R_n(x)=\frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{\phi'(c)}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \qquad (5)$$

bo‘lishini topamiz.

a) Koshi ko‘rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi.

Aytaylik, $\phi(t)=x-t$ bo‘lsin. Unda

$$\phi(x)=0,\quad \phi(x_0)=x-x_0,\quad \phi'(c)=-1$$

bo‘lib, (5) tenglik quyidagi

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot\frac{-(x-x_0)}{-(n+1)(x-c)^n}(x-c)^n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}[x-x_0-\theta(x-x_0)]^n\cdot(x-x_0)=$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n$$

ko‘rinishga keladi. Bu holda

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n$$

formula hosil bo‘lib, uni funksiyaning Koshi ko‘rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi deyiladi.

([1], 7.1 Taylor formulas,227-bet) **b) Lagranj ko‘rinishidagi qoldiq**

hadli Teylor formulasi.

Aytaylik, $\phi(t)=(x-t)^{n+1}$ bo‘lsin. Unda

$$\phi(x)=0,\quad \phi(x_0)=(x-x_0)^{n+1},$$

$$\phi'(c)=-(n+1)(x-c)^n \qquad (c=x_0+\theta(x-x_0))$$

bo‘lib, (5) tenglik quyidagi

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot\frac{-(x-x_0)^{n+1}}{-(n+1)(x-c)^n}\cdot(x-c)^n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

ko‘rinishga keladi. Bu holda

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)^{n+1},$$
$$(c=x_0+\theta(x-x_0),\quad 0<\theta<1)$$

(6)

formula hosil bo‘lib, uni $f(x)$ funksiyaning Lagranj ko‘rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi deyiladi.

v) Peano ko‘rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi.

YUqoridagi (6) formuladan foydalanib topamiz:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...$$
$$\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}++\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n,$$
$$(c=x_0+\theta(x-x_0),\quad 0<\theta<1).$$

$f^{(n)}(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz. Demak, $x\to x_0$ da $c\to x_0$ bo‘lib,

$$f^{(n)}(c)\to f^{(n)}(x_0).$$

SHuni e’tiborga olib, $x\to x_0$ da

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

bo‘lishini topamiz.

Natijada ushbu

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),\qquad (x\to x_0)$$

formula hosil bo‘ladi. Bu formula $f(x)$ funksiyaning Peano ko‘rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi deyiladi.

([1], 7.1 Expanding the elementary functions, 227-bet) 3^0. Ba’zi

funksiyalarning Teylor formulalari. $f(x)$ funksiyaning Peano ko‘rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasini olamiz:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n), \qquad (x\to x_0)$$

Bu tenglikda $x_0=0$ deb, ushbu

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n), \quad (x\to 0) \tag{7}$$

formulaga kelamiz. (7) formula $f(x)$ funksiyaning Makloren formulasi deyiladi.

1) $f(x)=e^x$ bo‘lsin. Bu funksiya uchun $f(0)=1$, $f^{(n)}(0)=1$ bo‘lib,

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+..+\frac{x^n}{n!}+o(x^n), \quad x\to 0$$

bo‘ladi.

2) $f(x)=(1+x)^\alpha$, $\alpha\in R$ bo‘lsin. Bu funksiya uchun

$$f(0)=1, \quad f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$$

bo‘lib,

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+o(x^n), \quad x\to 0$$

bo‘ladi.

Xususan,

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n), \quad x\to 0$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o(x^n), \quad x\to 0$$

bo‘ladi.

3) $f(x)=\ln(1+x)$ bo‘lsin. Bu funksiya uchun

$$f(0)=0, \quad f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$$

bo‘lib,

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k x^k}{k}+o(x^n), \quad x\to 0$$

bo‘ladi.

SHuningdek,

$$\ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+o(x^n), \quad x\to 0$$

bo‘ladi.

4) $f(x)=\sin x$ bo‘lsin. Bu funksiya uchun $f(0)=0$, $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k$ bo‘lib,

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2}),\quad x\to 0$$

bo‘ladi.

5) $f(x)=\cos x$ bo‘lsin. Bu funksiya uchun $f(0)=1$, $f^{(2k)}(0)=(-1)^k$ bo‘lib,

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1}),\quad x\to 0$$

bo‘ladi.

Misol. Ushbu

$$f(x)=\frac{1}{3x+2}$$

funksiyaning Teylor (Makloren) formulasi yozilsin.

◀ Bu funksiyani quyidagicha

$$f(x)=\frac{1}{3x+2}=\frac{1}{2\left(1+\frac{3}{2}x\right)}$$

yozib, so‘ng

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o(x^n),\quad x\to 0$$

bo‘lishidan foydalanib topamiz:

$$\frac{1}{3x+2}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{3^k}{2^{k+1}}x^k+o(x^n),\quad x\to 0.$$ ▶

Mashqlar

1. Asimptotik formulalardan foydalanib, ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^3\sin x}$$

limit hisoblansin.

2. Ushbu

$$f(x)=e^{x^2}$$

funksiyaning Teylor (Makloren) formulasi yozilsin.

Adabiyotlar

1. **Canuto C., Tabacco A. -** Mathematical Analysis I, **Italy 2008.**
2. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
3. **Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'rizalar, I q.* T. “Voris-nashriyot”, 2010.
4. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.

Glossariy

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

formulaga kelamiz. Bu (3) formula $f(x)$ funksiyaning **Teylor formulasi** deyiladi. (3) formuladagi $R_n(x)$ esa **Teylor formulasining qoldiq hadi** deyiladi.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - x_0)^{n+1}(1-\theta)^n$$

funksiyaning **Koshi ko‘rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi** deyiladi.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - x_0)^{n+1},$$
$$(c = x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 < \theta < 1)$$

(6)

formula hosil bo‘lib, uni $f(x)$ funksiyaning L**agranj ko‘rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi** deyiladi.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \qquad (x \to x_0)$$

Bu formula $f(x)$ funksiyaning **Peano ko‘rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi** deyiladi.

Keys banki

24-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^3\sin x}$$

limit hisoblansin.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

24-amaliy mashg`ulot

1 – m i s o l . ***Ushbu***

$$f(x)=\sin(\sin x)$$

funksiya Makloren formulasi bo'yicha $o(x^3)$ ***hadgacha yozilsin.***

Bu funksiyani Makloren formulasi bo'yicha yozishda 2-formuladan foydalanimiz. Avvalo 2) da x ning o'rniga $\sin x$ ni qo'yib topamiz:

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{6}+o(\sin^4 x)$$

Agar

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4),$$

$$\sin^3 x=\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)^3=x^3+o(x^4),$$

$$\sin^4 x=\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)^4=x^4+o(x^5)$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda

$$\sin(\sin x)=x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)$$

bo'lishini topamiz.►

2 – m i s o l . ***Ushbu***

$$\operatorname{sh}x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

munosabat isbotlansin.

◄Ravshanki,

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

1) -formuladan foydalanib topamiz:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}+o(x^n).$$

Keyingi tengliklardan

$$e^x - e^{-x} = 2x + 2\frac{x^3}{3!} + \ldots + 2\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{n+2}\right)$$

bo‘ladi. Natijada

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

bo‘lishi kelib chiqadi.►

3 – m i s o l . ***Agar*** $x \to 0$ ***da*** $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$ ***bo‘lsa,***

$$\lim_{x\to 0}[f(x)]^{\frac{1}{x}} = \sqrt{e}$$

bo‘lishi isbotlansin.

◄Ravshanki,

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln f(x)}.$$

Agar

$$\ln f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}x + o(x)\right) = \frac{1}{2}x + o(x)$$

bo‘lishini e’tiborga olsak, unda

$$e^{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x + o(x)\right)} = e^{\frac{1}{2} + \frac{o(x)}{x}}$$

bo‘lishini topamiz.

Keyingi tenglikdan

$$\lim_{x\to 0}[f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(e^{\frac{1}{2} + \frac{o(x)}{x}}\right) = \sqrt{e}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.►

4 – m i s o l . ***Ushbu***

$$\alpha = (1{,}2)^{1{,}1}$$

miqdor taqribiy hisoblansin.

◄5-formulaga ko‘ra

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + o\left(x^2\right)$$

bo‘lib, undan quyidagi taqribiy formula hosil bo‘ladi:

$$(1+x)^m \approx 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2.$$

Keyingi munosabatda $x = 0{,}2, \quad m = 1{,}1$ deb topamiz:

$$\alpha=(1{,}2)^{1{,}1}=(1+0{,}2)^{1{,}1}\approx 1+1{,}1\cdot 0{,}2+\frac{1{,}1\cdot 0{,}1}{2}\cdot 0{,}04=1{,}2222.\blacktriangleright$$

Quyidagi funksiyalar Makloren formulasi bo'yicha $o(x^2)$ hadgacha yoyilsin:

1198. $f(x)=e^{tgx}$ **1199.** $f(x)=e^{\sqrt{1+2x}}$ **1200.** $f(x)=\ln\cos x$

Quyidagi funksiyalar Makloren formulasi bo'yicha $o(x^3)$ hadgacha yoyilsin:

1201. $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ **1202.** $f(x)=\sqrt[3]{1+3\sin x}$

1203. $f(x)=\ln(1+\arcsin x)$ **1204.** $f(x)=\operatorname{arctg}(\sin x)$

Quyidagi funksiyalar Makloren formulasi bo'yicha $o(x^n)$ hadgacha yoyilsin:

1205. $f(x)=e^{5x-1}$ **1206.** $f(x)=\sin(2x+3)$

1207. $f(x)=\cos\left(\frac{x}{2}+2\right)$ **1208.** $f(x)=\ln(e^x+2)$

1209. $f(x)=\frac{2}{(1-x)^2}$ **1210.** $f(x)=3^{2-x}$

1211. $f(x)=(x^2-x)e^{-x}$ **1212.** $f(x)=\ln\frac{1+2x}{1-x}$

1213. $f(x)=\ln(2+x-x^2)$ **1214.** $f(x)=\frac{x^2+3e^x}{e^{2x}}$

1215. $f(x)=\frac{x^3}{x-1}$ **1216.** $f(x)=\frac{x^2+1}{2x-3}$

1217. $f(x)=\frac{1-2x^2}{2+x-x^2}$

Quyidagi funksiyalar Teylor formulasi bo'yicha x_0 nuqtaning atrofida $o\left((x-x_0)^2\right)$ hadgacha yoyilsin:

1218. $f(x)=\frac{1}{x},\ x_0=2$

1219. $f(x)=\sin(2x-3),\ x_0=1$

1220. $f(x)=xe^{2x},\ x_0=-1$

1221. $f(x)=x^2e^{-2x},\ x_0=-1$

1222. $f(x)=(x^2-1)e^{2x},\ x_0=-1$

1223. $f(x)=\sin(x+1)\sin(x+2),\ x_0=-1$

1224. $f(x)=\ln(2x+1),\ x_0=\frac{1}{2}$

1225. $f(x)=\ln\sqrt[3]{7x-2},\ x_0=1$

1226. $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}\ln x,\ x_0=1$

1227. $f(x)=\frac{2x}{1-x^2},\ x_0=2$

Quyidagi limitlar hisoblansin:

1228. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

1229. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$

1230. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^4}$

1231. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$

1232. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x-\arcsin x}{x^2}$

1233. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{\sin x-x}$

1234. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

1235. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-1}{x^2}$

1236. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$

1237. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}(\operatorname{tg}x)-x}{x^3}$

1238. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-\sqrt{1+x^2}-x\cos x}{\ln^3(1-x)}$

1239. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x\right)^{\operatorname{tg}x}$

1240. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x^2+\frac{\pi}{2}\right)$

1241. $\lim_{x\to+\infty}\left(\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}+1\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt[4]{x^{12}-x^9+2}\right)$

1242. $\lim_{x\to1}\frac{\sin(\sin\pi x)}{\ln(1+\ln x)}$

1243. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-e^{\pi x-2x^2}}{\cos x}$

1244. $\lim_{x\to\infty}x\left[(2e)^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}-2\right]$

1245. $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\,\mathrm{tg}x}\right)$

1246. $\lim_{x\to\infty}\left(x^2-\frac{x}{2}-(x^3+x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$

Test

1) $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+...+a_n(x-x_0)^n+R_n(x)$ .Funksiyani a_3 ni hisoblang. $f(x)=\cos x$ $x=0$ nuqtada.

A) 0 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{6!}$

2) $f(x)=e^x$ funksiyani $x=0$ nuqtada Teylor (Маклорен) qatoriga yoyilmasini toping.

A) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+..+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),\quad x\to 0$

B) $e^x=1+x+x^2+x^3+..+x^n+o(x^n),\quad x\to 0$

C) $e^x=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+..+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+o(x^n),\quad x\to 0$

D) $e^x=1+x+2!\cdot x^2+3!\cdot x^3+..+n!\cdot x^n+o(x^n),\quad x\to 0$

3) $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+...+a_n(x-x_0)^n+R_n(x)$ .Funksiyani a_5 ni hisoblang. $f(x)=\sin x$ $x=0$ nuqtada.

A) $\frac{1}{5!}$ B) $\frac{1}{3!}$ C) $\frac{1}{6!}$ D) $\frac{1}{24}$

4) $f(x)=\ln(1+x)$ funksiyani $x=0$ nuqtada Teylor (Маклорен) qatoriga yoyilmasi to'g'ri berilgan qatorni toping.

A) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k x^k}{k}+o(x^n)$ B) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}+o(x^n)$ C) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k x^k}{k!}+o(x^n)$ D) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}+o(x^n)$

5) $f(x)=\ln(1-x)$ funksiyani $x=0$ nuqtada Teylor (Маклорен) qatoriga yoyilmasi to'g'ri berilgan qatorni toping.

A) $-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+o(x^n)$ B) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}+o(x^n)$ C) $-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)$ D) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}+o(x^n)$

6) $f(x)=\frac{1}{3x+2}$ funksiyani $x=0$ nuqtada Teylor (Маклорен) qatoriga yoyilmasi to'g'ri berilgan qatorni toping.

A) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{3^k}{2^{k+1}}x^k+o(x^n)$ B) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{3^{k+1}}{2^k}x^k+o(x^n)$

C) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{3^{k+1}}{2^{k+1}}x^k + o(x^n)$ D) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{3^{k+1}}{2^{k+1}}x^k + o(x^n)$

7) Lagranj ko'rinishidagi qoldiq had berilgan qatorni toping.

A) $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ B) $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)^{n+1}$ C) $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^{n+1}$

D) $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

8) $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, $\alpha \in R$ funksiyani $x=0$ nuqtada Teylor (Маклорен) qatoriga yoyilmasi to'g'ri berilgan qatorni toping.

A) $\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n)$ B) $\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k)}{k!}x^k + o(x^n)$

C) $\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k)}{(k+1)!}x^k + o(x^n)$ D) $\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k-1)}{k!}x^k + o(x^n)$

9) $f(x) = e^{2x}$ funksiyani $x=0$ nuqtada Teylor (Маклорен) qatoriga yoyilmasini toping.

A) $e^{2x} = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + .. + \frac{2^n x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0$

B) $e^{2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + .. + 2^n x^n + o(x^n), \quad x \to 0$

C) $e^{2x} = 1 - 2x + \frac{4x^2}{2!} - \frac{8x^3}{3!} + .. + (-2)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0$

D) $e^{2x} = 1 + x + 2! \cdot x^2 + 3! \cdot x^3 + .. + n! \cdot x^n + o(x^n), \quad x \to 0$

10) Makloren qatori berilgan qatorni toping.

A) $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n), \quad (x \to 0)$

B) $f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + o(x^n), \quad (x \to 1)$

C) $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-1) + \frac{f''(0)}{2!}(x-1)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-1)^n + o(x^n), \quad (x \to 1)$

D) $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{2!}x + \frac{f''(0)}{3!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{(n+1)!}x^n + o(x^n), \quad (x \to 0)$

25-mavzu. Funksiyaning monotonligi. Funksiyaning ekstremumlari

25-ma'ruza

Reja

1^0. Funksiyaning monotonligi.

2^0. Funksiyaning ekstremumlari.

([1], 2.4 Monotone functions,41-bet)1^0. Funksiyaning monotonligi. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $(a,\ b)$ da $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ berilgan bo'lsin.

Ma'lumki,

$\forall x_1,\, x_2 \in (a,b)$, uchun $x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \le f(x_2)$ $\ (f(x_1) < f(x_2))$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $(a,\ b)$ da o'suvchi (qat'iy o'suvchi), $\forall x_1,\, x_2 \in (a,b)$ uchun $x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \ge f(x_2)$ $\ (f(x_1) > f(x_2))$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $(a,\ b)$ da kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) deyiladi.

([1], 2.4 Monotone maps,186-bet)1-teorema. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(a,\ b)$ da berilgan bo'lib, $\forall x \in (a,b)$ da $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin.

$f(x)$ funksiyaning $(a,\ b)$ da o'suvchi bo'lishi uchun $\forall x \in (a,b)$ da

$$f'(x) \ge 0$$

bo'lishi zarur va etarli.

◀ **Zarurligi.** $f(x)$ funksiya $(a,\ b)$ da o'suvchi bo'lsin. Unda $\Delta x > 0$ bo'lganda

$$f(x+\Delta x) - f(x) \ge 0$$

bo'ladi. Hosila ta'rifidan foydalnib topamiz:

$$f'(x) = f'(x+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Etarliligi. Aytaylik, $\forall x \in (a,b)$ da $f'(x)$ mavjud bo‘lib, $f'(x) \geq 0$ bo‘lsin. $[x_1, x_2]$ da $(x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2)$ $f(x)$ funksiyaga Lagranj teoremasini qo‘llab topamiz:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) \geq 0.$$

Demak, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, $f(x)$ o‘suvchi. ►

Xuddi shunga o‘xshash, quyidagi teorema isbotlanadi.

([1], 2.4 Monotone maps,186-bet)2-teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo‘lib, $\forall x \in (a,b)$ da $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsin. $f(x)$ funksiya (a, b) da kamayuvchi bo‘lishi uchun $\forall x \in (a,b)$ da

$$f'(x) \leq 0$$

bo‘lishi zarur va etarli.

SHuningdek quyidagi teoremalarni isbotlash qiyin emas.

([1], 2.4 Monotone maps,186-bet)3-teorema. $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo‘lib, $\forall x \in (a,b)$ da $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsin. $f(x)$ funksiyaning (a, b) da qat’iy o‘suvchi bo‘lishi uchun

1) $\forall x \in (a,b)$ da $f'(x) \geq 0$.

2) $\forall x \in (\alpha, \beta)$ da $f'(x) = 0$ tenglik bajariladigan $(\alpha, \beta) \subset (a,b)$ intervalning mavjud bo‘lmaslik shartlarining bajarilishi zarur va etarli.

4-teorema. $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo‘lib, $\forall x \in (a,b)$ da $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsin. $f(x)$ funksiyaning (a, b) da qat’iy kamayuvchi bo‘lishi uchun

1) $\forall x \in (a,b)$ da $f'(x) \leq 0$,

2) $\forall x \in (\alpha, \beta)$ da $f'(x) = 0$

tenglik bajariladigan $(\alpha, \beta) \subset (a,b)$ intervalning mavjud bo‘lmasligi shartlarining bajarilishi zarur va etarli.

Demak, $(a,\ b)$ da

$f'(x)\geq 0 \ \Rightarrow \ f(x)$ o‘suvchi $\Rightarrow \ f'(x)\geq 0,$

$f'(x)\leq 0 \ \Rightarrow f(x)$ kamayuvchi $\Rightarrow \ f'(x)\leq 0,$

$f'(x)>0 \ \Rightarrow f(x)$ qat’iy o‘suvchi $\Rightarrow \ f'(x)\geq 0,$

$f'(x)<0 \ \Rightarrow f(x)$ qat’iy kamayuvchi $\Rightarrow \ f'(x)\leq 0$

bo‘ladi.

1-misol. Ushbu

$$f(x)=\frac{x^2}{2^x}$$

funksiyaning o‘suvchi, kamayuvchi bo‘lish oraliqlari topilsin.

◀Ravshanki,

$$f'(x)=x\cdot 2^{-x}(2-x\ln 2)$$

bo‘ladi.

Ushbu $f'(x)>0$, $x\cdot 2^{-x}(2-x\ln 2)>0$ tengsizlik $x\in\left(0,\ \dfrac{2}{\ln 2}\right)$ da o‘rinli bo‘ladi. Demak, $f(x)$ funksiya $x\in\left(0,\ \dfrac{2}{\ln 2}\right)$ da o‘suvchi, $(-\infty,\ 0)\cup(\dfrac{2}{\ln 2},\ +\infty)$ da kamayuvchi bo‘ladi. ►

2^0. Funksiyaning ekstremumlari. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X\subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lib, $x_0\in X$ bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar shunday $\delta>0$ son topilsaki, $\forall x\in U_\delta(x_0)=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\subset X$ nuqtalarda

$$f(x)\leq f(x_0) \qquad \left(f(x)\geq f(x_0)\right)$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga (minimumga) erishadi deyiladi, x_0 nuqtaga esa $f(x)$ funksiya-ning maksimum (minimum) nuqtasi deyiladi.

2-ta'rif. Agar shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $\forall x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ $(U_\delta(x_0) \subset X)$ nuqtalarda

$$f(x) < f(x_0) \qquad (f(x) > f(x_0))$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada qat'iy maksimumga (qat'iy minimumga) erishadi deyiladi,

Funksiyaning maksimum hamda minimumi umumiy nom bilan uning ekstremumlari, maksimum hamda minimum nuqtalari esa uning ekstremum nuqtalari deyiladi.

5-teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lib, $x_0 \in X$ nuqtada ekstremumga erishsin.

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo‘lsa, u holda

$$f'(x_0) = 0$$

bo‘ladi.

◀Aytaylik, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishib, shu nuqtada hosilaga ega bo‘lsin. U holda

$$\exists \delta > 0: \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \subset X \text{ da } f(x) \leq f(x_0)$$

bo‘ladi.

$(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ intervalda $f(x)$ funksiyaga Ferma teoremasini qo‘llab topamiz:

$$f'(x_0) = 0. \blacktriangleright$$

3-ta'rif. Funksiya hosilasini nolga aylantiradigan nuqta uning stansionar (kritik) nuqtasi deyiladi.

Eslatma. Agar $f(x)$ funksiya biror nuqtada ekstre-mumga erishsa, u shu nuqtada hosilaga ega bo‘lishi shart emas.

Masalan, $f(x) = |x|$ funksiya $x_0 = 0$ nuqtada minimumga erishadi, biroq u shu nuqtada hosilaga ega emas.

Demak, $f(x)$ funksiyaning ekstremum nuqtalari uning statsionar hamda hosilasi mavjud bo‘lmagan nuqtalari bo‘lishi mumkin.

4-ta’rif. Agar shunday $\delta > 0$ son topilsaki,

$$\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0) \ \text{да} \ \ g(x) > 0 \ \ \text{ёки}$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0) \ \text{да} \ \ g(x) < 0$$

bo‘lsa, $g(x)$ funksiya x_0 nuqtaning chap tomonida ishora saqlaydi deyiladi.

Agar shunday $\delta > 0$ son topilsaki,

$$\forall x \in (x_0,\ x_0 + \delta) \ \text{да} \ \ g(x) > 0 \ \ \text{ёки}$$

$$\forall x \in (x_0,\ x_0 + \delta) \ \text{да} \ \ g(x) < 0$$

bo‘lsa, $g(x)$ funksiya x_0 nuqtaning o‘ng tomonida ishora saqlaydi deyiladi.

6-teorema. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $\exists \delta > 0,\ \forall x \in U_\delta(x_0) \subset X$ да $f'(x)$ hosila mavjud;

2) $f'(x_0) = 0$;

3) $f'(x)$ hosila x_0 nuqtaning o‘ng va chap tomonlarida ishora saqlasin.

Agar $f'(x)$ hosila x_0 nuqtani o‘tishda ishorasini o‘zgartirsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishadi.

Agar $f'(x)$ hosila x_0 nuqtani o‘tishda ishorasini o‘zgartirmasa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erish-maydi.

◀ Aytaylik,

$$\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0) \ \text{да} \ \ f'(x) > 0,$$

$$\forall x \in (x_0,\ x_0 + \delta) \ \text{да} \ \ f'(x) < 0$$

bo‘lsin. U holda $\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ o‘suvchi, ya’ni $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in (x_0,\ x_0 + \delta)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ kamayuvchi, ya’ni $f(x) < f(x_0)$ bo‘lib, $\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ да $f(x) < f(x_0)$ bo‘ladi. Demak, bu holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi.

Aytaylik,

$$\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0) \quad \text{да} \quad f'(x) < 0,$$

$$\forall x \in (x_0,\ x_0 + \delta) \quad \text{да} \quad f'(x) > 0$$

bo‘lsin. U holda $\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ kamayuvchi, ya’ni $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in (x_0,\ x_0 + \delta)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ o‘suvchi, ya’ni $f(x) > f(x_0)$ bo‘lib, $\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ da $f(x) > f(x_0)$ bo‘ladi.

Demak, bu holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishadi.

Agar $\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$ да $f'(x) > 0$,

$\forall x \in (x_0,\ x_0+\delta)$ да $f'(x)>0$ yoki $\forall x \in (x_0-\delta,\ x_0)$ da $f'(x)<0$, $\forall x \in (x_0,\ x_0+\delta)$ da $f'(x)<0$ bo'lsa, unda $f(x)$ funksiya $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ da o'suvchi yoki $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ da kamayuvchi bo'lib $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishmaydi. ►

7-teorema. $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $f(x) \in C(X)$;

2) $\exists \delta > 0,\ \forall x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ да $f'(x)$ hosila mavjud va chekli;

3) $f'(x)$ hosila x_0 nuqtaning o'ng va chap tomonlarida ishora saqlansin.

Agar $f'(x)$ hosila x_0 nuqtani o'tishda ishorasini o'zgartirsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishadi.

Agar $f'(x)$ hosila x_0 nuqtani o'tishda ishorasini o'zgar-tirmasa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishmaydi.

Bu teorema yuqoridagi 6-teorema kabi isbotlanadi.

8-teorema. Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan va $m \in N$, $m \geq 2$, $x_0 \in X$ bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $\exists \delta > 0,\ \forall x \in U_\delta(x_0) \subset X$ да $f^{(m-1)}(x)$ hosila mavjud;

2) $f^{(m)}(x_0)$ hosila mavjud;

3) $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(m-1)}(x_0) = 0,\ \ f^{(m)}(x_0) \neq 0.$

U holda $m = 2k,\ k \in N$ bo'lganda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishib, $f^{(m)}(x_0) < 0$ bo'lganda x_0 nuqtada maksimumga, $f^{(m)}(x_0) > 0$ da minimumga erishadi.

Agar $m = 2k+1,\ k \in N$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishmaydi.

◄ $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi Teylor formulasi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\big((x-x_0)^n\big), \quad x \to x_0$$

ni olamiz. Bu formula teoremaning shartida ushbu

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + 0\big((x-x_0)^m\big),\ \ x \to x_0$$

ko'rinishga keladi. Bundan esa $x \neq x_0$ da

$$f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^m \left[\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} + \frac{o\big((x-x_0)^m\big)}{(x-x_0)^m} \right], \quad x \to x_0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

«o» ning ta'rifiga ko'ra $\frac{1}{m!}|\,f^{(m)}(x_0)\,| > 0$ son uchun

$\exists\delta>0,\ \forall x\in U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$ nuqtalarda

$$\left|\frac{o\left((x-x_0)^m\right)}{(x-x_0)^m}\right|<\frac{1}{m!}\left|f^{(m)}(x_0)\right|$$

bo‘ladi. Demak, $x\in U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$ uchun

$$\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}+\frac{o\left((x-x_0)^m\right)}{(x-x_0)^m}\quad \text{ва}\quad \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$$

miqdorlar bir xil ishorali bo‘ladi. Bundan esa $x\in U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$ da

$$\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m$$

ning ishorasi $f(x)-f(x_0)$ ayirmaning ishorasi bilan bir xil bo‘lishi kelib chiqadi.

Agar $m=2k,\ k\in N$ bo‘lib, $f^{(m)}(x_0)>0$ bo‘lsa, unda $f(x)-f(x_0)>0$, ya’ni $f(x)>f(x_0)$ bo‘ladi. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishadi.

Agar $m=2k,\ k\in N$ bo‘lib, $f^{(m)}(x_0)<0$ bo‘lsa, unda $f(x)-f(x_0)<0$, ya’ni $f(x)<f(x_0)$ bo‘ladi. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi.

Agar $m=2k+1,\ k\in N$ bo‘lsa, $f(x)-f(x_0)$ ayirma ishora saqlamaydi. Bu holda funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishmaydi. ►

Xususan, agar x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning statsionar nuqtasi bo‘lib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli $f''(x_0)\neq 0$ hosilaga ega bo‘lsa, shu nuqtada $f(x)$ funksiya $f''(x_0)<0$ bo‘lganda maksimumga, $f''(x_0)>0$ minimumga ega bo‘ladi.

2-misol. Ushbu

$$f(x)=2\sqrt[3]{x^5}-5\sqrt[3]{x^2}+1$$

funksiya ekstremumga tekshirilsin.

◄ Bu funksiya $R=(-\infty;+\infty)$ aniqlangan bo‘lib, u shu to‘plamda uzluksiz. Uning hosilasini topamiz:

$$f'(x)=2\cdot\frac{5}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}}-5\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}\qquad(1)$$

Ravshanki, funksiyaning hosilasi $x_1=1$ nuqtada nolga alanadi: $f'(1)=0$; $x_2=0$ nuqtada esa funksiyaning hosilasi mavjud emas.

Hosila ifodasi (1) dan ko‘rnadiki, $x=1$ nuqtaning chap tomonidagi nuqtalarda $f'(x)<0$ o‘ng tomonidagi nuqtalarda $f'(x)>0$ bo‘ladi. Demak, berilgan funksiya $x=1$ nuqtada minimumga erishadi va $\min f(x)=f(1)=-2$ bo‘ladi.

YAna hosila ifodasi (1) dan ko‘rinadiki, $x=0$ nuqtaning chap tomonidagi nuqtalarda $f'(x)>0$, o‘ng tomonidagi nuqtalarda $f'(x)<0$ bo‘ladi.

Demak, $f(x)$ funksiya $x=0$ nuqtada maksimumga erishadi va $\max f(x) = f(0) = 1$ bo‘ladi. ►

Mashqlar

$f(x)$ funksiyaning hosilasi nolga teng bo‘lgan nuqtada funksiya ekstremumga erishishi shart emasligi isbotlansin.

1. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{агар} \quad x\neq 0 \text{ бўлса} \\ 0, & \text{агар} \quad x=0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

funksiya ekstremumga tekshirilsin.

3. Aytaylik, $f(x)\in C[a,b]$ bo‘lsin. Bu funksiyaning $[a,b]$ dagi eng katta va eng kichik qiymatlari qanday topiladi?

Adabiyotlar

1. **Canuto C., Tabacco A. -** Mathematical Analysis I, **Italy 2008.**
2. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
3. **Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma’rizalar, I q.* T. “Voris-nashriyot”, 2010.
4. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.

Glossariy

Ma'lumki,

$\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, uchun $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) da **o'suvchi (qat'iy o'suvchi),** $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ uchun $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) da **kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi)** deyiladi.

1-ta'rif. Agar shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $\forall x \in U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset X$ nuqtalarda

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \left(f(x) \geq f(x_0)\right)$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada **maksimumga (minimumga)** erishadi deyiladi, x_0 nuqtaga esa $f(x)$ funksiya-ning **maksimum (minimum) nuqtasi** deyiladi.

2-ta'rif. Agar shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $\forall x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ $\left(U_\delta(x_0) \subset X\right)$ nuqtalarda

$$f(x) < f(x_0) \qquad \left(f(x) > f(x_0)\right)$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada **qat'iy maksimumga (qat'iy minimumga)** erishadi deyiladi,

4-ta'rif. Agar shunday $\delta > 0$ son topilsaki,

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ да } g(x) > 0 \text{ ёки}$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ да } g(x) < 0$$

bo'lsa, $g(x)$ funksiya x_0 nuqtaning **chap tomonida ishora saqlaydi** deyiladi.

Agar shunday $\delta > 0$ son topilsaki,

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ да } g(x) > 0 \text{ ёки}$$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ да } g(x) < 0$$

bo'lsa, $g(x)$ funksiya x_0 nuqtaning **o'ng tomonida ishora saqlaydi** deyiladi.

Keys banki

25-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: Funksiyaning hosilasi nolga teng bo‘lgan nuqtada funksiya ekstremumga erishishi shartmi?

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

25-amaliy mashg`ulot

1 – m i s o l . ***Ushbu***

$$f(x)=\cos\frac{\pi}{x}$$

funksiyaning o'suvchi va kamayuvchi bo'ladigan oraliqlari topilsin.

◄Berilgan funksiya juft bo'lganligi uchun uni $(0,+\infty)$da qarash etarli bo'ladi. Ravshanki,

$$f'(x)=\frac{\pi}{x^2}\cdot\sin\frac{\pi}{x}.$$

Endi $f'(x)>0$, ya'ni $\frac{\pi}{x^2}\cdot\sin\frac{\pi}{x}>0$ tengsizlikni echamiz.

$$\sin\frac{\pi}{x}>0 \quad \Rightarrow 0<\frac{\pi}{x}<\pi \qquad \text{va} \qquad 2n\pi<\frac{\pi}{x}<\pi+2n\pi \qquad (n\in N).$$

Keyingi tengsizliklardan

$$x>1 \text{ va } \quad \frac{1}{2n+1}<x<\frac{1}{2n} \qquad (n\in N)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, $(1,+\infty)$ va $\left(\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n}\right)$, $\quad (n\in N)$ intervallarda funksiya qat'iy o'suvchi bo'ladi.

Ravshanki, $f'(x)<0$, ya'ni $\frac{\pi}{x^2}\cdot\sin\frac{\pi}{x}<0$ tengsizlikning echimi

$$\frac{1}{2n}<x<\frac{1}{2n-1} \qquad (n\in N)$$

bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiya

$$\left(\frac{1}{2n},\frac{1}{2n-1}\right) \qquad (n\in N)$$

intervallarda qat'iy kamayuvchi bo'ladi.

$f(x)$ juft funksiya bo'lgani uchun u $(-\infty,0)$ dagi

$$\left(-\frac{1}{2n},-\frac{1}{2n-1}\right) \qquad (n\in N)$$

intervallarda qat'iy o'suvchi,

$$(-\infty,-1) \qquad \text{va} \qquad \left(-\frac{1}{2n+1},-\frac{1}{2n}\right) \qquad (n\in N)$$

Intervallarda esa qat'iy kamayuvchi bo'ladi.►

2 – m i s o l . ***Ushbu***

$$f(x)=\frac{x^2}{10}-\ln x$$

funksiya o'suvchi, kamayuvchilikka tekshirilsin.

◄Bu funksiya $(0,+\infty)$ da aniqlangan bo'lib, uning hosilasi

$$f'(x)=\frac{x}{5}-\frac{1}{x}$$

bo'ladi.

Endi $f'(x)\geq 0$, ya'ni $\frac{x}{5}-\frac{1}{x}\geq 0$

yoki $f'(x)\leq 0$, ya'ni $\frac{x}{5}-\frac{1}{x}\leq 0$

bo'lishga tekshiramiz. Ravshanki,

$$\frac{x}{5}-\frac{1}{x}\geq 0 \iff \frac{x^2-5}{5x}\geq 0 \iff (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})\geq 0$$

Bundan esa, $(\sqrt{5},+\infty)$ da $f'(x)\geq 0$, $(0,\sqrt{5})$ da $f'(x)\leq 0$ bo'lishini topamiz. Demak, berilgan funksiya $(0,\sqrt{5})$ da kamayuvchi, $(\sqrt{5},+\infty)$ da o'suvchi bo'ladi.►

3 – m i s o l . *Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ segmentda:*

1) $f'(x)$, $g'(x)$ hosilalarga ega,

2) $f'(x)\geq g'(x)$ tengsizlik o'rinli, *3)* $f(a)=g(a)$

bo'lsa, $\forall x\in(a,b]$ ***da*** $f(x)>g(x)$ ***bo'lishi isbotlansin.***

◄ $f(x)-g(x)=\varphi(x)$ deylik. Unda $\varphi'(x)=f'(x)-g'(x)\geq 0$ bo'ladi. Demak, $\varphi(x)$ funksiya $[a,b]$ da o'suvchi.

Endi $\varphi(a)=f(a)-g(a)=0$ bo'lishini e'tiborga olib $(a,b]$ da $\varphi(x)>0$ ya'ni $f(x)>g(x)$ bo'lishini topamiz.

Xususan, $f(x)=\ln(1+x)$, $g(x)=x-\dfrac{x^2}{2}$ $(0<x<+\infty)$ deyilsa, ular uchun uchchala shart bajarilib, ushbu

$$\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}\quad(0<x<+\infty)$$

tengsizlik kelib chiqadi.►

Quyidagi funksiyalarning o'suvchi, kamayuvchi bo'ladigan oraliqlari topilsin.

1247. $f(x)=3x-x^3$
1248. $f(x)=8x^3-x^4$
1249. $f(x)=x^3-3x+5$
1250. $f(x)=x(1+2\sqrt{x})$
1251. $f(x)=e^{kx}$
1252. $f(x)=x|x|$
1253. $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$
1254. $f(x)=|x|^3$
1255. $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$
1256. $f(x)=\cos x-x$
1257. $f(x)=x+\sin x$
1258. $f(x)=x^2-10\ln x$
1259. $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$
1260. $f(x)=x^2e^{-x^2}$
1262. $f(x)=x+|\sin 2x|$
1263. $f(x)=x^2\ln x$
1264. $f(x)=\dfrac{x^3}{3-x^2}$
1265. $f(x)=x^2-\ln x^2$
1266. $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{x^2-1}$
1267. $f(x)=x^ne^{-x}\quad(n>0,\ \ x\geq 0)$

1268. $f(x)=\sqrt{8x^2-x^4}$

1269. $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

1270. $f(x)=3^{\frac{1}{x-3}}$

1271. $f(x)=(x+1)\sqrt{x^2-1}$

1272. $f(x)=\operatorname{arctg}x-\ln x$

Quyidagi funksiyalar o'suvchilikka va kamayuvchilikka tekshirilsin:

1273. $f(x)=\ln|x|$

1274. $f(x)=x+\operatorname{arctg}x$

1275. $f(x)=x^3+\arcsin x$

1276. $f(x)=\lg^3 x+x^4$

1277. $f(x)=x^5\lg^7 x \quad (x\geq 1)$

1278. $f(x)=\lg\cos x \quad \left(0\leq x<\frac{\pi}{2}\right)$

1279. $f(x)=\arcsin(3x-1)$

1280. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\operatorname{arctg}x^n$

1281. $f(x)=|\ln x|$

1282. $f(x)=\operatorname{arctg}(x^2-2x+3)$

1283. $f(x)=(x^2+4x+6)\cdot\ln(x^2+4x+6)$

1284. $f(x)=\frac{1}{1+\cos^2 x}$

1285. $f(x)=\frac{x}{x^2-6x-16}$

1286. $f(x)=2\cdot e^{x^2-4x}$

1287. $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-8x+20)$

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $X\subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, bu to'plamda $f(x)$ musbat va kamayuvchi, $g(x)$ esa manfiy va o'suvchi bo'lsa, quyidagi funksiyalarning o'suvchi yoki kamayuvchi bo'lishi aniqlansin:

1289. $y=f(x)\cdot g(x)$

1290. $y=f(x)-4g(x)$

1291. $y=f^2(x)$

1292. $y=g^2(x)$

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $X \subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lib, shu to‘plamda bu funksiyalar manfiy va kamayuvchi bo‘lsa, quyidagi funksiyalarning o‘suvchi yoki kamayuvchi bo‘lishi aniqlansin:

1293. $y = f(x) \cdot g(x)$ **1294.** $y = f^3(x)$

1295. $y = 4f(x) + 8g(x)$ **1296.** $y = g^6(x)$

1297.Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda o‘suvchi bo‘lib, $f'(x)$ mavjud bo‘lsa, $f'(x)$ ning (a,b) da o‘suvchiligi haqida nima deyish mumkin?

1298. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar n marta differensiallanuvchi;

2) $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) \qquad (k = 0,1,2,...,n-1)$,

3) $x > x_0$ да $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$.

U xolda $x > x_0$ да $f(x) > g(x)$ bo‘lishi isbotlansin.

Quyidagi tengsizliklar isbotlansin:

1299. $x + \dfrac{1}{x} \geq 2 \qquad (x > 0)$

1300. $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x} \qquad (x > 1)$

1301. $(1+x)^{\alpha} \geq 1 + \alpha x \qquad (x \geq -1, \ \alpha > 1)$

1302. $e^x \geq 1 + x$

1303. $e^x \geq ex$

1304. $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2} \qquad (x \geq 0)$

1305. $\ln(1+x) \leq x \qquad (x \geq 0)$

1306. $\ln(1+x) > \dfrac{x}{x+1} \qquad (x > 0)$

1307. $e^x > 1 + \ln(1+x)$ $\quad (x > 0)$

1308. $1 - 2\ln x \le \frac{1}{x^2}$ $\quad (x > 0)$

1309. $\sin x \ge \frac{2}{\pi}x$ $\quad \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$

1310. $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ $\quad (x > 0)$

1311. $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ $\quad (x > 0)$

1312. $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ $\quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

1313. $\operatorname{arctg} \le x$ $\quad (x \ge 0)$

1314. $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$ $\quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

1315. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \ge \cos x$ $\quad \left(0 < |x| < \frac{\pi}{2}\right)$

1316. $(a+b)^\alpha \le a^\alpha + b^\alpha$ $\quad (0 \le \alpha \le 1)$

1317. $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y} \le \sqrt[n]{x-y}$ $\quad (x \ge y \ge 0.)$

1318. $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \le \frac{x^n + y^n}{2}$ $\quad (x \ge 0,\ y \ge 0,\ n \in N)$

1319. $\frac{x-y}{x} < \ln\frac{x}{y} < \frac{x-y}{y}$ $\quad (x > y > 0)$

1320. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ $\quad (x > 0)$

1321. $x^\alpha - 1 > \alpha(x-1)$ $\quad (x > 1,\ \alpha \ge 2)$

4 – m i s o l . *Ushbu* $f(x) = 2\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^2} + 1$ *funksiya ekstremumga tekshirilsin.*

◀Berilgan funksiyaning hosilasini topamiz:

$$f'(x)=\frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$$

$f(x)$ funksiyaning hosilasi $x=1$ nuqtada nolga aylanadi $(f'(1)=0)$, $x=0$ nuqtada esa funksiya hosilasi mavjud emas. Demak, $f(x)$ funksiyaning ekstremumga sinaladigan nuqtalari $x=1,\ x=0$ bo‘ladi.

$x=0$ nuqtaning $(-\delta,\delta)$ atrofini $(0<\delta<1)$ olib, $(-\delta,0)$ va $(0,\delta)$ da funksiya hosilasining ishorasini aniqlaymiz:

$$\forall x\in(-\delta,0)\ \text{da}\ f'(x)=\frac{10}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}>0$$

$$\forall x\in(0,\delta)\ \text{da}\ f'(x)=\frac{10}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}<0$$

bo‘lib, berilgan funksiya $x=0$ nuqtada maksimumga erishib, $\max f(x)=f(0)=1$ bo‘ladi.

Endi $x=1$ nuqtaning atrofida funksiya hosilasining ishorasini aniqlaymiz:

$$\forall x\in(1-\delta,0)\ \text{da}\ f'(x)=\frac{10}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}<0$$

$$\forall x\in(0,1+\delta)\ \text{da}\ f'(x)=\frac{10}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}>0$$

bo‘lib, berilgan funksiya $x=1$ nuqtada minimumga erishib, $\min f(x)=f(1)=-2$ bo‘ladi▶

5 – m i s o l . ***Ushbu***

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{агар}\ x\neq 0\ \text{бўлса}\\ 1, & \text{агар}\ x=0\ \text{бўлса}\end{cases}$$

funksiya ekstremumga tekshirilsin.

◀Berilgan funksiyaning hosilasi $f'(x)=2x$ bo‘lib, uning ishorasi $(-\delta,0)$ da manfiy, $(0,\delta)$ da esa musbat bo‘lsada funksiya $x=0$ nuqtada minimumga ega bo‘lmaydi, chunki berilgan funksiya $x=0$ nuqtada uzluksiz emas.▶

6 – m i s o l . ***Ushbu***

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{агар}\ x\neq 0\ \text{бўлса}\\ 0, & \text{агар}\ x=0\ \text{бўлса}\end{cases}$$

funksiya ekstremumga tekshirilsin.

◀ $x\neq 0$ da berilgan funksiyaning hosilasi

$$f'(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x}$$

bo'ladi.

Demak, $x=0$ nuqta funksiyaning ekstremumga erishishiga sinaladigan nuqta bo'ladi.

$$\begin{array}{l}\forall x\in(-\delta,0) \ \text{да} \ \ f'(x)<0 \\ \forall x\in(0,\delta) \ \text{да} \ \ f'(x)>0\end{array} \qquad (\delta>0)$$

bo'lib, $x=0$ nuqtada berilgan funksiya uzluksiz bo'lganligi sababli $f(x)$ funksiya $x=0$ nuqtada minimumga ega bo'ladi.►

7 – m i s o l . ***Ushbu***

$$f(x)=e^{x}+e^{-x}+2\cos x$$

funksiya ekstremumga tekshirilsin.

◄Berilgan funksiya hosilasi

$$f'(x)=e^{x}-e^{-x}-2\sin x$$

bo'lib, u $x=0$ nuqtada nolga aylanadi. Funksiyaning yuqori tartibli hosilalarini topib, ularni $x=0$ nuqtadagi qiymatlari hisoblaymiz:

$$f''(x)=e^{x}+e^{-x}-2\cos x, \qquad f''(0)=0$$

$$f'''(x)=e^{x}-e^{-x}+2\sin x, \qquad f'''(0)=0$$

$$f^{(iv)}(x)=e^{x}+e^{-x}+2\cos x, \qquad f^{(iv)}(0)=4$$

Juft tartibli hosila $x=0$ nuqtada musbat bo'lgani uchun berilgan funksiya $x=0$ nuqtada minimumga ega bo'lib, $\min f(x)=f(0)=4$ bo'ladi.►

Quyidagi funksiyalar ekstremumga tekshirilsin:

1322. $y=x^2-6x+8$

1323. $y=2x^2-x^4$

1324. $y=\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{11}{2}\cdot x^2-6x+3$

1325. $y=(x-1)^3$

1326. $y=x^2\cdot e^{-x}$

1327. $y=e^{x}+e^{-x}$

1328. $y=\frac{1}{x}\cdot \ln^2 x$

1329. $y=x-\operatorname{arctg}x$

1330. $y=x\cdot\sqrt{1-x^2}$

1331. $y=x^3-3x^2+3x$

1332. $y=\sin x-x$

1333. $y=2\sin 2x+\sin 4x$

1334. $y=\frac{x}{\ln x}$

1335. $y=|x^2-5x+6|$

1336. $y=|x^2-1|\cdot e^{|x|}$

1337. $y=x^{\frac{1}{x}}$

1338. $y=|x^3-3x^2|$

1339. $y=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса} \\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса} \end{cases}$

1340. Ushbu $y=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+...+(x-a_n)^2$ funksiya x ning qanday qiymatida minimumga erishadi. $a_1,a_2,...,a_n$ -berilgan sonlar.

Quyidagi funksiyalarning ekstremumlari topilsin:

1341. $y=\sqrt[5]{x^4}$

1342. $y=x^3-6x^2+9x-4$

1343. $y=\frac{4}{\sqrt{x^2+8}}$

1344. $y=\frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$

1345. $y=x+\frac{1}{x}$

1346. $y=x-\ln(1+x)$

1347. $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$

1348. $y=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

1349. $y=\frac{e^x}{x}$

1350. $y=x\cdot\ln^2 x$

1351. $y=\sqrt[3]{2x^3+3x^2-36x}$

1352. $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$

1353. $y=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^4}{n!}\right)\cdot e^{-x}, n\in N$

$f(x)$ *funksiya* $X\subset R$ *to'plamda berilgan bo'lsin. Agar* $\forall x\in X$ *da* $f(x)\le f(x_0)$ $(f(x)\ge f(x_0))$ *bo'lsa,* $f(x_0)$ *miqdor funksiyani* X *dagi* ***e n g k a t t a*** ***(e n g k i ch i k)*** *qiymati deyiladi.*

$[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyaning **eng katta** va **eng kichik** qiymatlari quyidagiga topiladi:

1) $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ dagi ekstremumga sinaladigan nuqtalari topilib, bu nuqtalarda funksiya qiymatlari xisoblanadi.

2) $f(a)$, $f(b)$ lar xisoblanadi.

Topilgan qiymatlar orasidagi **eng kattasi (eng kichigi)** berilgan funksiyaning $[a,b]$ dagi **eng katta (eng kichik)** qiymati bo‘ladi.

Quyidagi funksiyalarning eng katta va eng kichik qiymatlarining mavjudligi aniqlansin va mavjud bo‘lgan holda ular topilsin:

1354. $y = |x|$ $\quad (-1 \le x \le 1)$

1355. $y = x^3 - 6x$ $\quad (-3 \le x \le 4)$

1356. $y = x + 2\sqrt{x}$ $\quad (0 < x \le 4)$

1357. $y = \dfrac{1}{x}$ $\quad (0 < x \le 4)$

1358. $y = \sin 2x - x$ $\quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$

1359. $y = x^x$ $\quad (0{,}1 \le x \le \infty)$

1360. $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$ $\quad (0 \le x \le 3)$

1361. $y = x^2 \cdot \ln x$ $\quad (1 \le x \le e)$

1362. $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$ $\quad (-\infty < x < +\infty)$

1363. $y = 2\sin x + \cos 2x$ $\quad \left(0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$

Quyidagi funksiyalarning eng katta va eng kichik fiymatlari topilsin:

1364. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ $\quad (-4 \le x \le 4)$

1365. $y = e^{-x^2}$ $\quad (0 \le x \le 1)$

1366. $y = x \cdot |x|$ $\quad (-2 \le x \le 2)$

1367. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$ $\quad (0 \le x \le 1)$

1368. $y = x^4 - 2x^2 + 5$ $\quad (-2 \le x \le 2)$

1369. SHunday son topilsinki, unga shu sonning kvadratini qo‘shganda, hosil bo‘ladigan yig‘indi eng katta qiymatga ega bo‘lsin.

1370. Ushbu

$$f(x) = x \cdot \sin\frac{\pi}{x}$$

funksiya (0,1) oraliqda cheksiz ko‘p sondagi ekstremum nuqtalarga ega bo‘lishi isbotlansin.

1371. Ushbu

$$\frac{3}{2} \le \frac{x^2+1}{x^2+x+1} \le 2 \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

tensizlik isbotlansin.

1372. Ushbu $|a \cdot \sin x + b \cdot \cos x| \le \sqrt{a^2+b^2}$ tengsizlik isbotlansin.

Quyidagi ketma-ketlik nechanchi hadida eng katta qiymatiga ega bo‘ladi?

1373. $x_n = 105n + 3n^2 - n^3$

1374. $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1985}$

1375. $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{n+19}$

1376. $x_n = \dfrac{n^2}{n^2+200}$

1377. $x_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$

1378. $x_n = \sqrt[n]{n}$

Quyidagi funksiyalarning aniq yuqori chegarasi (sup), aniq quyi chegarasi (inf) topilsin.

1379. $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ $\quad(0\le x<+\infty)$

1380. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ $\quad(-\infty<x<+\infty)$

1381. $f(x)=tg^2x$ $\quad\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

1382. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ $\quad(-1\le x\le 1)$

1383. $f(x)=\dfrac{1}{x}+x^2$ $\quad(0<x\le 1)$

1384. $f(x)=\ln x-x$ $\quad(0<x<+\infty)$

1385. $f(x)=(x^2+4)\cdot e^{-x}$ $\quad(0\le x<+\infty)$

1386. $f(x)=\dfrac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$ $\quad(0<x<+\infty)$

1387. $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ $\quad(-\infty<x<+\infty)$

1388. $f(x)=(x+1)\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2$ $\quad\left(\dfrac{3}{2}<x<6\right)$

Test

1) Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $(a,\ b)$ da $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ berilgan bo'lsin. $\forall x_1,\, x_2 \in (a,b)$, uchun $x_1 < x_2 \ \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $(a,\ b)$ da ………… deyiladi.

A)o'suvchi B)kamayuvchi C)qat'iy o'suvchi D) qat'iy kamayuvchi

2) Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $(a,\ b)$ da $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ berilgan bo'lsin. $\forall x_1,\, x_2 \in (a,b)$, uchun $x_1 < x_2 \ \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $(a,\ b)$ da ………… deyiladi.

A) qat'iy o'suvchi B)kamayuvchi C) o'suvchi D) qat'iy kamayuvchi

3) Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $(a,\ b)$ da $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ berilgan bo'lsin. $\forall x_1,\, x_2 \in (a,b)$, uchun $x_1 < x_2 \ \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $(a,\ b)$ da ………… deyiladi.

A) kamayuvchi B) qat'iy o'suvchi C) o'suvchi D) qat'iy kamayuvchi

4) Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $(a,\ b)$ da $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ berilgan bo'lsin. $\forall x_1,\, x_2 \in (a,b)$, uchun $x_1 < x_2 \ \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $(a,\ b)$ da ………… deyiladi.

A) qat'iy kamayuvchi B) qat'iy o'suvchi C) o'suvchi D) kamayuvchi

5) Agar shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $\forall x \in U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \subset X$ nuqtalarda

$$f(x) \le f(x_0) \qquad \left(f(x) \ge f(x_0)\right)$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi deyiladi, x_0 nuqtaga esa $f(x)$ funksiyaning ………………. nuqtasi deyiladi.

A) maksimum B) minimum C)qutb D)qo'zg'almas

6) Agar shunday $\delta > 0$ son topilsaki, $\forall x \in U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \subset X$ nuqtalarda

$$f(x) \le f(x_0) \qquad \left(f(x) \ge f(x_0)\right)$$

tengsizlik bajarilsa, $f(x)$funksiya x_0 nuqtada minimumga erishadi deyiladi, x_0 nuqtaga esa $f(x)$ funksiyaning ……………………. nuqtasi deyiladi.

A) minimum B) maksimum C)qutb D)qo'zg'almas

26-mavzu. Funksiyaning qavariqligi, egilish nuqtalari va asimptotalari

26-ma'ruza

Reja

1^0. Funksiyaning qavariqligi va botiqligi.

2^0. Funksiyaning egilish nuqtalari.

3^0. Funksiya grafigining asimptotalari.

([1] 6.9 Convexity and inflection points, 189-bet) 1^0. Funksiyaning qavariqligi va botiqligi. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo‘lib, $x_1, x_2 \in (a, b)$ uchun $x_1 < x_2$ bo‘lsin.

$f(x)$ funksiya grafigining $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ nuqta-laridan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqni $y = l(x)$ desak, u quyidagicha

$$l(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

bo‘ladi.

1-ta'rif. Agar har qanday oraliq $(x_1, x_2) \subset (a, b)$ da joylashgan $\forall x \in (x_1, x_2)$ uchun

$$f(x) \le l(x) \quad (f(x) < l(x))$$

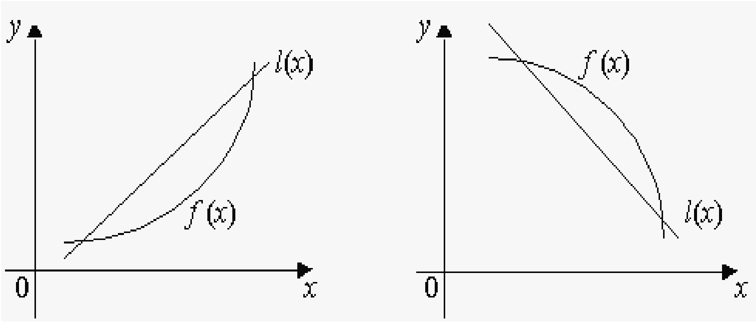
bo‘lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) da botiq (qat'iy botiq) funksiya deyiladi.

2-ta'rif. Agar har qanday oraliq $(x_1, x_2) \subset (a, b)$ da joylashgan $\forall x \in (x_1, x_2)$ uchun

$$f(x) \ge l(x) \qquad \left(f(x) > l(x)\right)$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) da qavariq (qat'iy qavariq) funksiya deyiladi.

Botiq hamda qavariq funksiyalarning grafiklari 7-chizmada tasvirlangan:



7-chizma.

Aytaylik, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_1 = 1$ bo‘lib, $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ bo‘lsin. Funksiyaning botiqligi hamda qavariqligini quyidagicha ta’riflash ham mumkin.

3-ta’rif. Agar

$$f(\alpha_{1.}x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$
$$\left(f(\alpha_{1.}x_1 + \alpha_2 x_2) < \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)\right)$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) da botiq (qat’iy botiq) deyiladi.

4-ta’rif. Agar

$$f(\alpha_{1.}x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$
$$\left(f(\alpha_{1.}x_1 + \alpha_2 x_2) > \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)\right)$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) da qavariq (qat’iy qavariq) deyiladi.

1-misol. Ushbu

$$f(x) = x^2$$

funksiya R da qat’iy botiq funksiya bo‘ladi.

◄ 3-ta’rifdan foydalanib topamiz:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^2 = (\alpha_1 x_1)^2 + 2\alpha_1\alpha_2 x_1 x_2 + (\alpha_2 x_2)^2 <$$
$$< \alpha_1^2 x_1^2 + \alpha_1\alpha_2 (x_1 + x_2)^2 + \alpha_2^2 x_2^2 = \alpha_1 x_1^2(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_2 x_2^2(\alpha_1 + \alpha_2) =$$
$$= \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \ ►$$

1-teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo‘lib, unda $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsin. $f(x)$ funksiyaning (a, b) da botiq (qat’iy botiq) bo‘lishi uchun $f'(x)$ning (a, b) da o‘suvchi (qat’iy o‘suvchi) bo‘lishi zarur va etarli.

◄ **Zarurligi.** $f(x)$funksiya (a, b) da botiq bo‘lsin. U holda $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$, $\forall x \in (x_1, x_2)$ uchun

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

bo‘lib, undan

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

bo‘lishi kelib chiqadi. $\left((x_2-x_1)=(x_2-x)+(x-x_1)\right.$ deyildi). Keyingi tengsizlikda $x \to x_1$ so‘ng $x \to x_2$ da limitga o‘tib,

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

$$f'(x_2) \ge \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

bo‘lishini topamiz. Undan $f'(x_1) \le f'(x_2)$ bo‘lishi kelib chiqadi. Demak, $f'(x)$ funksiya (a,b) da o‘suvchi.

$f(x)$ funksiya (a, b) da qat’iy botiq bo‘lsin. U holda

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

bo‘ladi. Lagranj teoremasiga muvofiq

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1), \quad x_1 < c_1 < x;$$

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(c_2), \quad x < c_2 < x_2$$

bo‘lib, undan $f'(x_1) < f'(x_2)$ bo‘lishi kelib chiqadi.

Etarliligi. $f'(x)$ funksiya (a, b) da o‘suvchi (qat’iy o‘suvchi) bo‘lsin: $\forall x_1, x_2 \in (a, b),\ x_1 < x_2$ da

$$f'(x_1) \le f'(x_2) \quad (f'(x_1) < f'(x_2)).$$

Lagranj teoremasidan foydalanib topamiz:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1), \quad x_1 < c_1 < x;$$

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(c_2), \quad x < c_2 < x_2.$$

Ravshanki, $x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2 \Rightarrow c_1 < c_2$. Demak, $f'(c_1) \le f'(c_2)$ $(f'(c_1) < f'(c_2))$ bo‘lib, yuqoridagi munosabatlardan

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \qquad \left(\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\right)$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning (a, b) da botiq (qat’iy botiq) ekanini bildiradi. ►

Xuddi shunga o‘xshash, quyidagi teorema ham isbotlanadi.

2-teorema. $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo‘lib, unda $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsin.

$f(x)$ funksiyaning (a,b) da qavariq (qat'iy qavariq) bo'lishi uchun $f'(x)$ ning (a,b) da kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lishi zarur va etarli.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lib, u shu intervalda $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bundan tashqari (a,b) intervalning har qanday (α,β) $((\alpha,\beta)\subset(a,b))$ qismida $f''(x)$ aynan nolga teng bo'lmasin.

3-teorema. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda botiq (qavariq) bo'lishi uchun (a,b) da

$$f''(x)\ge 0 \quad (f''(x)\le 0)$$

bo'lishi zarur va etarli.

Bu teoremaning isboti yuqoridagi hamda funksiyaning monotonligi haqidagi teoremalardan kelib chiqadi.

2-misol. Ushbu

$$f(x)=\ln x \quad (x>0)$$

funksiya qavariq bo'ladi.

◀Bu funksiya uchun

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$$

bo'ladi. 2-teoremaga ko'ra berilgan $f(x)=\ln x$ funksiya $(0,+\infty)$ da qat'iy qavariq bo'ladi. ▶

([1] 6.9 Convexity and inflection points, 189-bet)2^0. Funksiyaning egilish nuqtalari. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X\subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $x_0\in X$, $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\subset X$, $\delta>0$ bo'lsin.

5-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $(x_0-\delta,\ x_0)$ da botiq (qavariq), $(x_0,\ x_0+\delta)$ da qavariq (botiq) bo'lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning **egilish nuqtasi** deyiladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ da $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Agar $\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$ da $f''(x)\ge 0$ $(f''(x)\le 0)$,

$\forall x\in(x_0,x_0+\delta,)$ da $f''(x)\le 0$ $(f''(x)\ge 0)$,

bo'lsa, $f'(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishadi va demak, $f''(x_0)=0$ bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiya egilish nuqtasi-da $f''(x)=0$ bo'ladi.

3-misol. Ushbu

$$f(x)=x^3$$

funksiya $x_0=0$ nuqtada egiladi.

◀Bu funksiya uchun

$$f''(x)=6x$$

bo'lib,

$$\forall x\in(-\delta,0) \text{ da } f''(x)<0$$

$$\forall x\in(0,\delta,) \text{ da } f''(x)>0 \qquad (\delta>0)$$

bo‘ladi. ►

([1], 5.3 Asymptotes, 135-bet) 3^0. Funksiya grafigining asimptotalari. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lib, x_0 nuqta X to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin.

6-ta’rif. Agar ushbu

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x), \quad \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

limitlardan biri yoki ikkalasi xam cheksiz bo‘lsa, $x = x_0$ to‘g‘ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining vertikal asimp-totasi deyiladi.

Masalan, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ funksiya grafigi uchun $x = 0$ to‘g‘ri chiziq vertikal asimptota bo‘ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(x_0, +\infty)$ da aniqlangan bo‘lsin.

7-ta’rif. Agar shunday k va b sonlari topilsaki,

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \qquad (x \to +\infty \text{ да } \ \alpha(x) \to 0)$$

bo‘lsa, $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining og‘ma asimptotasi deyiladi.

4-teorema. $f(x)$ funksiya grafigi $y = kx + b$ og‘ma asimptotaga ega bo‘lishi uchun

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b$$

bo‘lishi zarur va etarli.

◄ **Zarurligi.** $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining og‘ma asimptotasi bo‘lsin. Unda

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

bo‘lib, $x \to +\infty$ да $\alpha(x) \to 0$ bo‘ladi. Bu tenglikni e’tiborga olib topamiz:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx + b + \alpha x}{x} = k;$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (b + \alpha(x)) = b.$$

Etarliligi. Ushbu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b$$

munosabatlar o‘rinli bo‘lsin. Bu munosabatlardan

$$(f(x) - kx) - b = \alpha(x) \to 0 \ \Rightarrow \ f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

bo‘lishi kelib chiqadi. ►

4-misol. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ funksiyaning og‘ma asimptotasi topilsin.

◄ Bu funksiya uchun

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2}=1;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2}-x\right)=2$$

bo‘ladi. Demak, $y=x+2$ to‘g‘ri chiziq berilgan funksiya grafigining og‘ma asimptotasi bo‘ladi.►

Mashqlar

1. Ushbu

$$f(x)=\frac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$$

funksiyaning botiq hamda qavariq bo‘ladigan oraliqlari topilsin.

2. Ushbu

$$f(x)=\frac{2x^2+x-2}{x-1}$$

funksiya grafigining og‘ma asimptotasi topilsin.

3. Ushbu

а) $f(x)=x^2\sqrt[x]{e}$,

б) $f(x)=x+2\operatorname{arcctg}x$,

в) $f(x)=\left|e^x-1\right|$ funksiyalarni hosilalar yordamida to‘liq tekshirilsin, grafiklari chizilsin.

Adabiyotlar

1. **Canuto C., Tabacco A. -** Mathematical Analysis I, **Italy 2008.**
2. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
3. **Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma’rizalar, I q.* T. “Voris-nashriyot”, 2010.
4. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.

Glossariy

1-ta'rif. Agar har qanday oraliq $(x_1, x_2) \subset (a, b)$ da joylashgan $\forall x \in (x_1, x_2)$ uchun

$$f(x) \le l(x) \quad (f(x) < l(x))$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) da **botiq (qat'iy botiq) funksiya** deyiladi.

2-ta'rif. Agar har qanday oraliq $(x_1, x_2) \subset (a, b)$ da joylashgan $\forall x \in (x_1, x_2)$ uchun

$$f(x) \ge l(x) \qquad \left(f(x) > l(x)\right)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) da **qavariq (qat'iy qavariq) funksiya** deyiladi.

3-ta'rif. Agar

$$f(\alpha_{1.}x_1 + \alpha_2 x_2) \le \alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$
$$\left(f(\alpha_{1.}x_1 + \alpha_2 x_2) < \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)\right)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) da **botiq (qat'iy botiq)** deyiladi.

4-ta'rif. Agar

$$f(\alpha_{1.}x_1 + \alpha_2 x_2) \ge \alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$
$$\left(f(\alpha_{1.}x_1 + \alpha_2 x_2) > \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)\right)$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) da **qavariq (qat'iy qavariq)** deyiladi.

5-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $(x_0 - \delta, x_0)$ da botiq (qavariq), $(x_0, x_0 + \delta)$ da qavariq (botiq) bo'lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning **egilish nuqtasi** deyiladi.

6-ta'rif. Agar ushbu

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x), \quad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

limitlardan biri yoki ikkalasi xam cheksiz bo'lsa, $x = x_0$ to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining **vertikal asimptotasi** deyiladi.

7-ta'rif. Agar shunday k va b sonlari topilsaki,

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \qquad (x \to +\infty \text{ да } \alpha(x) \to 0)$$

bo'lsa, $y = kx + b$ to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining **og'ma asimptotasi** deyiladi.

Keys banki

26-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: Ushbu

г) $f(x) = x^2\sqrt[x]{e}$,

д) $f(x) = x + 2\operatorname{arcctg} x$,

e) $f(x) = \left|e^x - 1\right|$ funksiyalarni hosilalar yordamida to‘liq tekshirilsin, grafiklari chizilsin.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

26-amaliy mashg`ulot

1 – m i s o l . ***Ushbu***

$$f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 4$$

funksiyaning qavariqligi, botiqligini aniqlab egilish nuqtasi topilsin.

◀Berilgan funksiyaning hosilalarini hisoblaymiz:

$f'(x) = 15x^4 - 20x^3$,

$f''(x) = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x-1)$

Ravshanki, $x_1 = 0$ da $f''(0) = 0$, $x_2 = 1$ da $f''(1) = 0$ bo‘ladi. Bu nuqtalar atrofida $f''(x)$ ning ishorasini aniqlaymiz;

$(-\delta, 0)$ da $f''(x) < 0$, $(0, \delta)$ da $f''(x) < 0$, $(\delta > 0)$

$(1-\delta, 1)$ da $f''(x) < 0$, $(1,\ \ 1+\delta)$ da $f''(x) > 0$.

Demak, $(-\infty, 1)$ da $f''(x) < 0$ bo‘lib, shu oraliqda funksiya qavariq bo‘ladi; $(1, +\infty)$ da $f''(x) > 0$ bo‘lib, shu oraliqda funksiya botiq bo‘ladi. $x = 1$ nuqta egilish nuqtasi bo‘ladi. (6-chizma).▶

9 – m i s o l . ***Ushbu*** $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$ ***funksiya grafigining egilish nuqtasi topilsin.***

◀Bu funksiyaning hosilalarini hisoblaymiz:

$$f'(x) = \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}}, \qquad f''(x) = \frac{10}{9} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

Ravshanki $x = 0$ nuqtada funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi mavjud emas. Bu nuqta atrofida $f''(x)$ ning ishorasini aniqlaymiz:

$x < 0$ bo‘lganda $f''(x) < 0,$ $x > 0$ bo‘lganda $f''(x) > 0$ bo‘lgani sababli berilgan funksiya $(-\infty, 0)$ da qavariq, $(0, +\infty)$ da botiq bo‘lib $x = 0$ egilish nuqtasi bo‘ladi.▶

10 – m i s o l . ***Ushbu***

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$$

funksiya grafigining asmptotalari topilsin.

◀Ravshanki, $x \to 3$ da $f(x) \to \infty$. Demak $x = 3$ to‘g‘ri chiziq funksiya grafigining vertikal asimptotasi bo‘ladi. Endi quyidagi

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx]$$

limitlarni hisoblaymiz.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-6x+3}{x(x-3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-6x+3}{x-3}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-3x}{x-3}=-3$$

Demak, $y=x-3$ to‘g‘ri chiziq berilgan funksiya grafigining og‘ma asimptotasi bo‘ladi. (7-chizma).►

Quyidagi funksiyalarning qavariq va botiq bo‘lish oraliqlari topilsin.

1389. $y=x^3-4x$

1390. $y=\frac{1}{x^2}$

1391. $y=3x^4-8x^3-6x^2+12$

1392. $y=\frac{a^3}{a^2+x^2}\quad (a>0)$

1393. $y=\frac{1}{(x+1)^3}$

1394. $y=x+2-\sqrt[3]{x^5}$

1395. $y=\arcsin\frac{1}{x}$

1396. $y=\frac{\sqrt{x}}{1+x}$

1397. $y=\sqrt{1+x^2}$

1398. $y=e^{-x^2}$

1399. $y=x+\sin x$

1400. $y=\ln(1+x^3)$

1401. $y=\frac{|x-1|}{x\cdot\sqrt{x}}$

1402. $y=4\cdot\sqrt{(x-1)^5}+20\sqrt{(x-1)^3}$

1403. $y=1-|x^2-2|$

1404. $y=(1+x^2)e^x$

1405. Ushbu $y=x^4+ax^3+\frac{3}{2}\cdot x^2+1$ funksiya a ning qanday qiymatida $(-\infty,+\infty)$ da botiq bo‘ladi.

1406. Ushbu $y=x^n$ funksiya $n>1$ bo‘lganda $(0,+\infty)$ oraliqda qavariq, $0<n<1$ bo‘lganda $(0,+\infty)$ da botiq bo‘lishi ko‘rsatilsin.

1407. Agar $[a,b]$ segmentda $f''(x)\geq 0$ bo‘lsa, ixtiyoriy $x_1,x_2\in[a,b]$ lar uchun

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

bo‘lishi isbotlansin.

$f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo‘lib, $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b)$ va $\alpha_1 \ge 0, \alpha_2 \ge 0$, $\alpha_1+\alpha_2=1$ uchun

$$f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)\le \alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2)$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya (a,b) da **botiq,**

$$f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)\ge \alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2)$$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya (a,b) da **qavariq** deyiladi.

1408. Ushbu

$$e^{\frac{x+y}{2}}\le\frac{e^x+e^y}{2} \qquad (x,y\in(-\infty,+\infty))$$

tengsizlik isbotlansin.

Quyidagi funksiya grafigining egilish nuqtalari topilsin.

1409. $y=3x^5-5x^4+4$

1410. $y=\cos x$

1411. $y=1+x^2-\frac{x^4}{2}$

1412. $y=e^{\frac{1}{x}}$

1413. y=1-ln(x2-4)

1414. y=arctg$\frac{1}{x}$

1415. $y=4x^2+\frac{1}{x}$

1416. $y=\frac{|x-1|}{x^2}$

1417. $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

1418. $y=2x^2+\ln x$

1419. $y=\frac{x^4}{(1+x)^3}$

1420. $y=\sqrt{1-x^3}$

Quyidagi funksiyalarni qavariqlikka, botiqlikka tekshirilsin, egilish nuqtalari topilsin.

1421. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$

1422. $y = \frac{1}{x^2 - 4}$

1423. $y = (x+1)^4 + e^x$

1424. $y = \mathrm{arctg}x - x$

1425. $y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$

1426. $y = 2 - |x^5 - 1|$

1427. $y = x + x^{\frac{5}{3}}$

1428. $y = e^{\sin x} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$

Quyidagi funksiyalarning egilish nuqtalari topilsin.

1429. $y = x^5 - 10x^2 + 3$

1430. $y = e^{\mathrm{arctg}x}$

1431. $y = 4x^2 + \frac{1}{x}$

1432. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

1433. a va b qanday qiymatlarida $y = ax^3 + bx^2$ funksiyaning egilish nuqtasi $x = 1$ bo'ladi?

1434. Ushbu $y = x^3 + x^4 \sin\frac{\pi}{x}$ funksiyaning egilish nuqtasi $x = 0$ bo'lishi isbotlansin.

1435. Ushbu $y = x\sin x$ funksiyaning egilish nuqtasi quyidagi

$$y^2(4 + x^2) = 4x^2$$

tenglikni qanoatlantirishi ko'rsatilsin.

1436. h ning qanday qiymatlarida $x = \pm\sigma$ nuqta

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 \cdot x^2} \quad (h > 0)$$

funksiyaning egilish nuqtasi bo'ladi?

Quyidagi funksiyalarning egilish nuqtalari topilsin.

1437. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$

1438. $y=\left|e^x-1\right|$

Quyidagi funksiya grafiklarining asimptotalari topilsin.

1439. $y=\dfrac{2x^2+x-2}{x-1}$

1440. $y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$

1441. $y=\dfrac{x^5}{x^4-1}$

1442. $y=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

1443. $y=2x-\dfrac{\cos x}{x}$

1445. $y=4x+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{4}$

1446. $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$

1447. $y=\dfrac{x^2}{|x|+1}$

1448. $y=x\cdot\operatorname{arctg}x$

1449. $y=\sqrt{x^2-1}-x$

1450. $y=1+x\cdot e^{\frac{x}{2}}$

1451. $y=\left|e^x-1\right|$

1452. $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$

1453. $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

1454. $y=x\sin\dfrac{1}{x}$

1455. $y=x^2\ln x$

1456. $y=\ln\left(1+e^{-x}\right)$

1457. $y=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$

1458. $y=\ln \operatorname{sh} x$

1459. $y=\ln x-\operatorname{arctg}x$

Test

1. Ushbu $f(x)=\sqrt[3]{x^5}$ funksiya grafigining egilish nuqtasi topilsin.
   A) x=0 B) x=2 C) x=1 D) x=3
2. Ushbu $f(x)=\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$ funksiya grafigining asmptotalari topilsin.
   A) $y=x-3$ B) $y=-x+3$ C) $y=x+2$ D) $y=x-2$
3. Ushbu $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ funksiyaning og‘ma asimptotasi topilsin.
   A) $y=x+2$ B) $y=-x-2$ C) $y=x-2$ D) $y=x+1$
4. Ushbu $f(x)=x^3$ funksiya grafigining egilish nuqtasi topilsin.
   A) x=0 B) x=1 C) x=-1 D) x=2
5. Ushbu $f(x)=3x^5-5x^4+4$ funksiya grafigining egilish nuqtasi topilsin.
   A) x=1 B) x=2 C) x=-1 D) x=0
6. Ushbu $f(x)=\dfrac{1}{x}+4x^2$ funksiyaning og‘ma asimptotasi topilsin.
   A) x=0 B) x=2 C) x=1 D) x=3
7. Ushbu $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$ funksiya grafigining egilish nuqtasi topilsin.
   A) x=0 B) x=1 C) x=-1 D) x=2
8. Ushbu $f(x)=\dfrac{1}{x}+4x^2$ funksiya grafigining egilish nuqtasi topilsin.
   A) $\mathbf{x=-\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}}$ B) $x=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$ C) $x=-\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$ D) $x=-\dfrac{\sqrt[3]{2}}{3}$
9. Ushbu $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$ funksiyaning og‘ma asimptotasi topilsin.
   A) Asimptotaga ega emas. B) x=1 C) x=-1 D) x=0
10. Ushbu $f(x)=\ln x \quad (x>0)$ funksiya qavariq yoki botiqmi.
   A) qavariq B) botiq C) qavariq emas D) botiq emas

27-mavzu. Lopital qoidalari

27-ma’ruza

Reja

1^0. $\frac{0}{0}$ ва $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishidagi hollar.

2^0. $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^\infty,\ 0^0$ ko‘rinishidagi hollar.

([1], 6.11 The Theorem of de L’Hopital,197-bet) Ma’lum shartlarda funksiya limitini hisoblash qoidalari o‘rganilgan edi. Ko‘p hollarda bunday shartlar bajarilmaganda, ya’ni

$$x\to x_0 \text{ да } f(x)\to 0,\ g(x)\to 0:\ \frac{f(x)}{g(x)} \text{ нинг лимити } \left(\frac{0}{0}\right),$$

$$x\to x_0 \text{ да } f(x)\to +\infty,\ g(x)\to +\infty:\ \frac{f(x)}{g(x)} \text{ нинг лимити } \left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

$$x\to x_0 \text{ да } f(x)\to +\infty,\ g(x)\to +\infty:\ f(x)-g(x) \text{ нинг лимити } (\infty-\infty),$$

$$x\to x_0 \text{ да } f(x)\to 0,\ g(x)\to 0:\ (f(x))^{g(x)} \text{ нинг лимити } \left(0^0\right),$$

$$x\to x_0 \text{ да } f(x)\to 1,\ g(x)\to +\infty:\ (f(x))^{g(x)} \text{ нинг лимити } \left(1^\infty\right)$$

$x\to x_0$ da $f(x)\to\infty, g(x)\to 0$: $f(x)\,g(x)$ ni limiti ∞^0ni topishda funksiyaning hosilalariga asoslangan qoidaga ko‘ra hisoblash qulay bo‘ladi. Bunday usul bilan funksiya limitini topish **Lopital qoidalari** deyiladi.

1^0. $\frac{0}{0}$ ва $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishidagi hollar.

1-teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a, b) da berilgan bo‘lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to b-0} g(x)=0;$

2) $\forall x\in(a, b)$ да $f'(x)$ ва $g'(x)$ hosilalar mavjud;

3) $\forall x\in(a, b)$ да $g'(x)\neq 0;$

4) Ushbu $\lim\limits_{x\to b-0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell,\ (\ell\in R)$ mavjud. U holda $\lim\limits_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$ bo‘ladi.

◀ $f(b)=0,\ \ g(b)=0$ deb olamiz. Unda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $(b-\delta,\ b]$ да $(\delta>0)$ uzluksiz bo‘lib qoladi. Teoremaning 4-shartiga ko‘ra:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \ \forall x\in(b-\delta,\ b):\ \ \left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-\ell\right|<\varepsilon$$

bo‘ladi.

Endi $(b-\delta,\ b]$ da Koshi teoremasidan foydalanib topamiz:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\ell\right|=\left|\frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)}-\ell\right|=\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}-\ell\right|<\varepsilon$$

$$(c\in(x,b)\subset[b-\delta,\ b]).$$

Demak,

$$\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell\ .$$

SHuni isbotlash talab qilingan edi. ▶

1-misol. Ushbu

$$\lim_{x\to e}\frac{(\ln x)^{\alpha}-\left(\frac{x}{e}\right)^{\beta}}{x-e}=\frac{\alpha-\beta}{e}$$

munosabat isbotlansin.

◀ $f(x)=(\ln x)^{\alpha}-\left(\frac{x}{e}\right)^{\beta}$, $\quad g(x)=x-e$ funksiyalari uchun $(1,\ e)$ da 1-teoremaning barcha shartlari bajariladi:

1) $\lim\limits_{x\to e}f(x)=\lim\limits_{x\to e}\left[\ \left((\ln x)^{\alpha}-\left(\frac{x}{e}\right)^{\beta}\right)\right]=0,$

$\lim\limits_{x\to e}g(x)=\lim\limits_{x\to e}(x-e)=0;$

2) $f'(x)=\alpha(\ln x)^{\alpha-1}\cdot\frac{1}{x}-\frac{\beta}{e}\left(\frac{x}{e}\right)^{\beta-1},\quad g'(x)=1;$

3) $g'(x)=1\neq0;$

4) $\lim\limits_{x\to e}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to e}\frac{\alpha(\ln x)^{\alpha-1}\cdot\frac{1}{x}-\frac{\beta}{e}\cdot\left(\frac{x}{e}\right)^{\beta-1}}{1}=\frac{\alpha-\beta}{e}.$

Demak,

$$\lim_{x\to e}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to e}\frac{(\ln x)^{\alpha}-\left(\frac{x}{e}\right)^{\beta}}{x-e}=\frac{\alpha-\beta}{e}.\ ▶$$

([1], 6.11 The Theorem of de L’Hopital,198-bet) 2-teorema. Aytaylik,

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $(a, +\infty)$ da berilgan bo‘lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0;$

2) $\forall x\in(a, +\infty)$ da $f'(x),\ g'(x)$ hosilalar mavjud;

3) $\forall x\in(a, +\infty)$ da $g'(x)\neq 0;$

4) Ushbu

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$$

mavjud $(\ell\in R)$. U holda

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$$

bo‘ladi.

◀ $a>0$ deb, $t=\frac{1}{x}$ deymiz. Unda $t\in(0, \frac{1}{a})$ bo‘lib, $x\to+\infty$ da $t\to+0$. Endi $F(t)$ va $G(t)$ funksiyalarni quyidagicha

$$F(t)=f(\tfrac{1}{t}), \qquad G(t)=g(\tfrac{1}{t})$$

aniqlaymiz. Unda

$$t\to+0 \text{ da } F(t)\to 0, \quad G(t)\to 0;$$

$$F'(t)=f'(\tfrac{1}{t})\cdot(-\frac{1}{t^2}), \quad G'(t)=g'(\tfrac{1}{t})\cdot(-\frac{1}{t^2});$$

$$\frac{F'(t)}{G'(t)}=\frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})}\to\ell, \quad (t\to+0)$$

bo‘lib, 1-teoremaga ko‘ra, $t\to+0$ da

$$\frac{F(t)}{G(t)}\to\ell$$

bo‘ladi. Keyingi munosabatdan esa

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$$

bo‘lishi kelib chiqadi ▶

2-misol. Ushbu

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\operatorname{arctg}x^2-\pi}$$

limitni hisoblang.

◀Agar $f(x)=e^{\frac{1}{x^2}}-1,\ g(x)=2\operatorname{arctg}x^2-\pi$ deyilsa, ular uchun 2-teoremaning barcha shartlari bajariladi, jumladan

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}, \qquad g'(x) = \frac{4x}{1+x^4}$$

bo‘lib,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{4x}{1+x^4}} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^4}{2x^4} = -\frac{1}{2}$$

bo‘ladi. 2-teoremaga ko‘ra

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2\mathrm{arctg} x^2 - \pi} = -\frac{1}{2}$$

bo‘ladi. ►

Quyidagi teoremalar ham yuqorida keltirilgan teoremalarga o‘xshash isbotlanadi.

([1], 6.11 The Theorem of de L’Hopital,198-bet) 3-teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) da berilgan bo‘lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to b-0} g(x) = \infty;$

2) $\forall x \in (a,b)$ da $f'(x),\ g'(x)$ hosilalar mavjud;

3) $\forall x \in (a,b)$ da $g'(x) \neq 0;$

4) Ushbu $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell, \ (\ell \in R)$ mavjud. U holda

$$\lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

bo‘ladi.

4-teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $(a,+\infty)$ da berilgan bo‘lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \infty;$

2) $\forall x \in (a,+\infty)$ da $f'(x),\ g'(x)$ hosilalar mavjud;

3) $\forall x \in (a,+\infty)$ da $g'(x) \neq 0;$

4) Ushbu $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell, \ (\ell \in R)$ mavjud. U holda $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ bo‘ladi.

([1],6.11.1 Applications of de L'Hopital's theorem, 199-bet) 2^0. $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^\infty,\ 0^0$ **ko‘rinishidagi hollar.** Bu ko‘rinish-dagi aniqmasliklar $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ hollarga keltirilib, so‘ng yuqoridagi teoremalar qo‘llaniladi.

1) $x \to x_0$ da $f(x) \to 0,\ g(x) \to \infty$ bo‘lganda $f(x) \cdot g(x)$ funksiyaning limitini topish uchun uni

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

deb, so‘ng 1- yoki 2-teoremalar qo‘llaniladi.

2) $x \to x_0$ da $f(x) \to +\infty,\ g(x) \to +\infty$ bo‘lganda $f(x) - g(x)$ funksiyaning limitini topish uchun uni

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}}$$

deb, so‘ng 1-teorema qo‘llaniladi.

3) $x \to x_0$ da $f(x) \to 0,\ g(x) \to 0$ hamda $x \to x_0$ da $f(x) \to 1,\ g(x) \to +\infty$ bo‘lganda $\left(f(x)\right)^{g(x)}$ funksiyaning limitini topish uchun avvalo

$$y = (f(x))^{g(x)}$$

funksiya logarifmlanadi, so‘ng yuqoridagi teoremalar qo‘llaniladi.

3-misol. Ushbu

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

limit hisoblansin.

◀Avvalo $y = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ deb olamiz. Ravshanki, $x \to 0$ da

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \to 1, \qquad g(x) = \frac{1}{x^2} \to +\infty.$$

Sodda hisoblashlar yordamida topamiz:

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\ln \frac{\sin x}{x}\right)'}{\left(x^2\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}}{2x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\left(x\cos x - \sin x\right)'}{\left(x^3\right)'} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3x^2} = -\frac{1}{6}.$$

Demak, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$ ▶

Mashqlar

1. Ixtiyoriy $\alpha \in R$ da ushbu

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}x)^{\alpha} - 1}{\ln x} = \frac{2\alpha}{\pi}$$

tenglikning o‘rinli bo‘lishi isbotlansin.

2. Ushbu

$$\lim_{x\to +\infty} x(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}x)$$

limit hisoblansin.

Adabiyotlar

1. **Canuto C., Tabacco A. -** Mathematical Analysis I, **Italy 2008.**
2. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
3. **Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma’rizalar, I q.* T. “Voris-nashriyot”, 2010.
4. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.

Glossariy

$$x\to x_0 \text{ да } f(x)\to 0,\ g(x)\to 0:\ \frac{f(x)}{g(x)} \text{ нинг лимити } \left(\frac{0}{0}\right),$$

$$x\to x_0 \text{ да } f(x)\to +\infty,\ g(x)\to +\infty:\ \frac{f(x)}{g(x)} \text{ нинг лимити } \left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$

$$x\to x_0 \text{ да } f(x)\to +\infty,\ g(x)\to +\infty:\ f(x)-g(x) \text{ нинг лимити } (\infty-\infty),$$

$$x\to x_0 \text{ да } f(x)\to 0,\ g(x)\to 0:\ (f(x))^{g(x)} \text{ нинг лимити } \left(0^0\right),$$

$$x\to x_0 \text{ да } f(x)\to 1,\ g(x)\to +\infty:\ (f(x))^{g(x)} \text{ нинг лимити } \left(1^\infty\right)$$

$x\to x_0$ da $f(x)\to\infty, g(x)\to 0:$ $f(x)\, g(x)$ ni limiti ∞^0ni topishda funksiyaning hosilalariga asoslangan qoidaga ko‘ra hisoblash qulay bo‘ladi. Bunday usul bilan funksiya limitini topish **Lopital qoidalari** deyiladi.

Keys banki

27-keys. Masala o`rtaga tashlanadi: Ixtiyoriy $\alpha\in\mathbb{R}$ da ushbu

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^{\alpha}-1}{\ln x}=\frac{2\alpha}{\pi}$$

tenglikning o‘rinli bo‘lishi isbotlansin.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

27-amaliy mashg`ulot

1 – m i s o l . ***Ushbu***

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$$

limit hisoblansin.

◀Bu xolda $\frac{0}{0}$ ko‘rinishidagi aniqmaslikka ega bo‘lamiz. Lopital qoidalardan foydalanib topamiz.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\operatorname{arctg}x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3(1+x^2)}=\frac{1}{3}.$$ ▶

2 – m i s o l . ***Ushbu***

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}$$

limit hisoblansin.

◀Bu holda $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishidagi aniqmaslikka ega bo‘lgan Lopital qoidasidan foydalanib topamiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg}x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=0.$$ ▶

3 – m i s o l . ***Ushbu***

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$

limit hisoblansin.

◀Bu xolda $\infty-\infty$ ko‘rinishidagi aniqmaslik yuzaga keladi. Agar $\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}=\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\cdot\ln x}$ deyilsa, $\frac{0}{0}$ ko‘rinishidagi aniqmaslik hosil bo‘lib limitni Lopital qoidasiga ko‘ra topamiz:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x\ln x-x+1)'}{((x-1)\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot\frac{1}{x}-\ln x-1}{\ln x+\frac{1}{x}(x-1)}=$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-\ln x}{\ln x - \frac{1}{x} + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(-\ln x)'}{\left(\ln x - \frac{1}{x} + 1\right)'} = \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}. \blacktriangleright$$

4 – m i s o l . ***Ushbu***

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (tgx)^{tg2x}$$

limit hisoblansin.

◀ $x \to \frac{\pi}{4}$ da $(tgx)^{tg2x}$ ifoda 1^∞ ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘ladi. Avvalo

$$y = (tgx)^{tg2x}$$

ni logarifmlab topamiz:

$$\ln y = \ln (tgx)^{tg2x} = \frac{\ln tgx}{(tg2x)^{-1}}.$$

Bu $x \to \frac{\pi}{4}$ da $\frac{0}{0}$ ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘ladi. Unda Lopital qoidasidan foydalanib

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln tgx}{(tg2x)^{-1}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\ln tgx)'}{\left[(tg2x)^{-1}\right]'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{2\cdot(tg2x)^2}{\cos^2 2x}} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \sin 2x = -1$$

bo‘lishini topamiz. Demak, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \ln (tgx)^{tg2x} = -1$ bo‘lib, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (tgx)^{tg2x} = \frac{1}{e}$ bo‘ladi.▶

Quyidagi limitlar hisoblansin:

1500. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^5 - 1}{2x^3 - x - 1}$

1501. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$

1502. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{tgx}$

1503. $\lim\limits_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x - a}$

1504. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

1505. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}$

1506. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}$

1507. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$

1508. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cdot\cos x}{\sin^3 x}$

1509. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}$

1510. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

1511. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{10x}}{x^{100}}$

1512. $\lim\limits_{x\to\infty}x^n\sin\frac{a}{x}\quad (n>0)$

1513. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$

1514. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$

1515. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

1516. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2\ln x}{x}$

1517. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

1518. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{tg^2x}$

1519. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^a-a^x}{x^a-a^a}\quad (a>0)$

1520. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$

1521. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin(\sin x)-\sin^2 x}{x^6}$

1522. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}$

1523. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{tgx}-1}{2\sin^2 x-1}$

1524. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg 2x}{ar\sin 5x}$

1525. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}\quad (a>0)$

1526. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin z}-e^x}{\sin x-x}$

1527. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\sin(2x-1)\cdot tg\pi x$

1528. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$

1529. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$

1530. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\pi x-1}{2x^2}+\frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}\right]$

1531. $\lim\limits_{x\to+0}(x^x-1)\ln x$

1532. $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$

1533. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{tg\frac{\pi x}{2a}}$

1534. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

1535. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-0{,}01x}$

1536. $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$

1537. $\lim\limits_{x\to+0}(\arcsin x)^{tgx}$

1538. $\lim\limits_{x\to+0} x^{\frac{1}{\ln shx}}$

1539. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

1540. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$

1541. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}$

1542. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{tgx}{tga}\right)^{ctg(x-a)}$

1543. $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$

1544. $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x}$

1545. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\cdot\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$

1546. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arcsin x}\right)$

1547. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{7}{3}}-x^{\frac{6}{7}}\cdot\ln^2 x\right)$

1548. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arg\,tg}x\right)$

1549. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}\cdot a^{x}\quad(\alpha>0,\ \ a\neq 1)$

1550. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2+3^x\right)^{\frac{1}{x}}$

1551. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$

1552. Agar $f(x)$ funksiya ikkinchi tartibli $f''(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, u holda ushbu

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)-2f(x)}{h^2}$$

tenglik o‘rinli bo‘lishi isbotlansin.

1553. Ushbu

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-\sin x}$$

limit hisoblashda Lopital qoidasidan foydalanish mumkinmi? Limit hisoblansin.

1554. Ushbu

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}$$

limit hisoblashda Lopital qoidasidan foydalanish mumkinmi? Limit hisoblansin.

Quyidagi limitlar Lopital qoidasi bo‘yicha hisoblanmasligi ko‘rsatilsin. Limitlar topilsin.

1555. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ **1556.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3\cdot\sin\frac{1}{x}}{\sin^2 x}$

1557. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x-\cos x}$ **1558.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$

1559. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\cos x}$ **1560.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-ax}}{e^{-x}(2-\sin x-\cos x)}$ $(a\neq1)$

Test

1.Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x^3}$ limit hisoblansin.

A) $\frac{1}{3}$ B) 2 C) 5 D) 3

2. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx}$ limit hisoblansin.

A) 0 B) 2 C) 3 D) 1

3. Ushbu $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$ limit hisoblansin.

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 24 D)15

4. Ushbu $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$ limit hisoblansin.

A) -1 B) 1 C) 2 D) -2

5. Ushbu $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5-1}{2x^3-x-1}$ limit hisoblansin.

A) 1 B) -1 C) -2 D) 2

6. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ limit hisoblansin.

A) 0 B) 2 C) -1 D) 1

7. Ushbu $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-\sin x}$ limit hisoblansin.

A) 0 B) 1 C) -2 D) 4

8. Ushbu $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}$ limit hisoblansin.

A) -3 B) 3 C) 1 D)-1

9. Ushbu $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$ limit hisoblansin.

A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2

10. Ushbu $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x+2\ln x}{x}$ limit hisoblansin.

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2